



HAL
open science

Contribution à l'analyse numérique des méthodes de couplage particules-grille en mécanique des fluides

Jian Xin Kong

► **To cite this version:**

Jian Xin Kong. Contribution à l'analyse numérique des méthodes de couplage particules-grille en mécanique des fluides. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1993. tel-00343556

HAL Id: tel-00343556

<https://theses.hal.science/tel-00343556>

Submitted on 2 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TU 18349

THESE de DOCTORAT

présentée par

Jian Xin KONG

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès Sciences

DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

(arrêté ministériel du 5 juillet 1984 et du 23 novembre 1988)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

**CONTRIBUTION A L'ANALYSE NUMERIQUE DES
METHODES DE COUPLAGE PARTICULES-GRILLE
EN MECANIQUE DES FLUIDES**

soutenue le : jeudi 7 Octobre 1993

devant le jury composé de :	M.	G.H.	COTTET	Président
	Mme	S.	MAS-GALLIC	Rapporteur
	M.	H.N.	NAJM	Rapporteur
	M.	F.X.	LE DIMET	Examineur
	M.	B.	MICHAUX	Examineur
	M.	O.	METAIS	Examineur

Thèse préparée au sein du CMAP-l'X(89/91) et du LMC-IMAG(91/93).

à mes parents et Lan, ...



Remerciements

Au moment où s'achève ce travail, ma reconnaissance va tout d'abord à Monsieur Georges-Henri COTTET. Il m'est bien difficile de résumer en quelques mots tout ce qu'il m'a apporté par ses idées précieuses, ses conseils fructueux et par ses encouragements constants ainsi que pour la sympathie qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.

Je remercie vivement Jean-Claude NEDELEC et Patric WITOMSKI pour m'avoir accueilli, d'abord au Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP) de l'Ecole Polytechnique, puis au Laboratoire de Modélisation et Calcul (LMC) de l'Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG), et m'avoir fait profiter de la qualité de l'environnement scientifique de ces laboratoires.

Ce mémoire doit beaucoup à Sylvie MAS-GALLIC qui a eu une grande influence sur mon travail de recherche, et qui a bien voulu lui montrer de l'intérêt en acceptant d'en être rapporteur.

Je tiens également à remercier mon second rapporteur, Habib N. NAJM, pour les nombreuses remarques constructives qu'il m'a faites.

Que soient aussi remerciés François-Xavier LE DIMET et Olivier METAIS d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Je voudrais remercier spécialement Bertrand MICHAUX qui a toujours réagi avec bonne humeur aux problèmes de matériels et de logiciels et qui a bien voulu être membre du jury.

Je ne saurais oublier Anne BAGNERES-VIALLIX et Laurence CHERFILS pour leur gentillesse et disponibilité et qui ont lu et corrigé une partie du texte de cette thèse, ainsi que tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont encouragé tout le long de mon travail.

Présentation générale

Les travaux que nous présentons dans cette thèse ont été effectués au Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP) de l'École Polytechnique entre 1989 et 1991, et au Laboratoire de Modélisation et Calcul - l'Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble (LMC-IMAG) entre 1991 et 1993.

La plupart des phénomènes de la mécanique des fluides peuvent être modélisés et régis par le système non-linéaire d'équations de Navier-Stokes, qui décrit des écoulements d'un fluide soit parfait, soit visqueux et des écoulements en régime, tant laminaire que turbulent. Au fur et à mesure que l'étude des méthodes numériques au service de la mécanique des fluides se développe très rapidement en s'appuyant sur les progrès considérables de l'informatique scientifique, surtout l'apparition des ordinateurs de plus en plus puissants dans ces dernières décennies, la mécanique des fluides numérique (Computational Fluid Dynamics ou CFD en anglais) est en passe de devenir un outil de mise en point aussi important que les essais expérimentaux qui sont souvent très coûteux et irréalisables. Parmi de nombreuses méthodes numériques, la méthode particulaire (vortex method en anglais) ou cell de couplage particules-grille (vortex in cell ou VIC method) s'avère être particulièrement adaptée à l'approximation des problèmes de la physique mathématique où les effets de convection dominant. En outre, grâce à une interprétation physique naturelle, elle est parfaitement adaptée à la simulation numérique des écoulements d'un fluide incompressible à la fois parfait et visqueux à de très grands nombres de Reynolds.

Cette thèse est consacrée à l'étude mathématique et numérique des méthodes de couplage particules-grille en Mécanique des Fluides incompressibles, et selon la nature d'un fluide parfait ou visqueux, elle se compose de deux grandes parties:

1^{ère} Partie: Méthodes couplées particules-grille pour les équations d'Euler

On considère les *équations d'Euler* qui régissent les écoulements bidimensionnels d'un fluide newtonien parfait incompressible homogène, écrites en *formulation courant-tourbillon*:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\text{curl } \psi \cdot \nabla) \omega = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (1)$$

$$\omega(\cdot, 0) = \omega_0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$-\Delta \psi = \omega, \quad (3)$$

$$|\nabla \psi| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (4)$$

où ω est le tourbillon du fluide et ψ est la fonction de courant.

Le travail de la première partie a pour but d'introduire une *méthode de couplage particules-grille* qui permet de résoudre numériquement le problème (E').

Les premières simulations particulières *en mécanique des fluides* ont débuté en 1931 par **J. Rosenhead**[63]. Néanmoins, les méthodes particulières (ou appelées méthodes de vortex) n'ont été bien développées que récemment (cf., **F. Harlow** (1964) [44], **K.V. Robert & J.P. Christiansen** (1972) [62], **A.J. Chorin** (1973) [19], **A. Leonard** (1980) [47], etc.). Du côté théorique, la convergence de la *méthode de vortex* pour approcher les équations d'*Euler* a d'abord été démontrée par **O. Hald** (1979) [42], puis généralisée par **J.T. Beale & A. Majda** (1982) [2] [3] et **G.H. Cottet** (1982) [21]; **C. Anderson & C. Greengard** (1985) [1] ont ensuite donné une version plus simple de la démonstration de **G.H. Cottet** et **J.T. Beale & A. Majda**.

L'idée principale des *méthodes de vortex usuelle* est grosso modo basée sur

- (i) l'approximation du tourbillon initial par une mesure qui est en fait une combinaison linéaire de *masses de Dirac*;
- (ii) le calcul du champ de vitesse par l'intégrale de *Biot-Savart* avec régularisation du *noyau de Green*;
- (iii) le transport, sans perte d'information sur les particules, du champ tourbillonnaire le long des trajectoires de particules associées au champ de vitesse calculé.

Les *méthodes particulières* offrent un bon nombre d'avantages par rapport aux *méthodes numériques usuelles* (différences finies, éléments finis, méthodes spectrales, etc.) Dans le cas d'écoulements assez réguliers, il est bien connu que la précision de la méthode particulière n'est limitée que par la propriété de régularité et de moments de la *fonction cut-off* utilisée pour calculer la vitesse à partir des particules de fluide. Par conséquent, il est tout à fait naturel de penser, d'une part à chercher des *fonctions cut-off* régulières et de bonnes propriétés de moments, d'autre part à construire des *noyaux explicites de Green* afin d'obtenir un plus haut ordre de la précision (cf. **J.T. Beale & A. Majda** (1985) [4], (1988) [5] et **M. Perlman** (1985) [55], etc.). Néanmoins, il semble non seulement difficile de les construire pour la plupart des conditions aux limites, mais encore elles sont coûteuse à calculer.

Dans notre travail, d'une part, il nous semble plus avantageux d'utiliser pour *fonctions cut-off* des fonctions **B-splines** avec une méthode d'accélération de la convergence pour améliorer la précision de la méthode; d'autre part, au lieu d'utiliser dans l'étape (ii) la méthode intégrale qui est coûteuse ¹, on calcule le champ de vitesse à l'aide d'une *fonction courant* obtenue par une méthode de différences finies sur une grille fixe eulérienne considérée comme un algorithme rapide ², qui s'adapte à presque toutes sortes de conditions aux limites sur un ouvert borné quelconque Ω de \mathbb{R}^2 de frontière Γ assez régulière. En d'autres termes, notre méthode consiste à coupler *l'approximation particulière* (pour résoudre (1)-(2)) et *l'approximation de différences finies* (pour résoudre (3)-(4)). Elle s'apparente aux méthodes **P.I.C** (particle in cell) introduite en physique des plasmas par **Buneman** (1968). En mécanique des fluides incompressibles, on la retrouve sous le nom de méthode **V.I.C** (vortex in cell); on l'appellera ici la méthode de couplage particules-grille.

Le plan de la première partie qui regroupe les Chapitres 1- 6 est le suivant:

On commence par exposer, au Chapitre 1, les diverses formulations équivalentes des équations d'*Euler*, on s'intéresse particulièrement à la formulation en vitesse-tourbillon; on rappelle ensuite des résultats sur le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations d'*Euler*.

Dans le Chapitre 2, on se propose d'introduire une méthode de couplage

¹ $\mathcal{O}(N^2)$ opérations élémentaires, où N est le nombre de particules.

² $\mathcal{O}(M \log M) + \mathcal{O}(N)$ opérations, où M est le nombre de points de grille.

particules-grille afin de simuler numériquement l'écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait incompressible. L'idée principale est de conserver un traitement lagrangien pour le champ de rotationnel, et de résoudre l'équation de Poisson, par une méthode des différences finies pour la fonction de courant sur une grille fixe eulérienne, de façon à déterminer le champ de vitesse. On énonce également le résultat d'existence et d'unicité des solutions d'approximation ainsi que celui de convergence.

L'étude sur la résolution numérique du problème de Neumann pour l'équation de Poisson par les méthodes de différences finies, permettant de calculer la fonction de courant, fait l'objet du Chapitre 3. Il s'agit de la discrétisation du laplacien et de l'opérateur de frontière, et de l'estimation de cette approximation en norme discrète de $W^{1,\infty}$. L'outil essentiel et efficace est d'utiliser la fonction discrète de Green en maillage prédéterminé.

Le Chapitre 4 rappelle d'abord le principe de l'approximation particulière pour le problème modèle et les résultats classiques. On présente ensuite la famille des fonctions **B-splines** qui joueront un rôle double important dans le cadre de méthodes de régularisation et dans le cadre de méthodes d'interpolation. On établit à l'aide des fonctions B-splines le passage inversible entre les particules et le maillage préétabli. On utilise également une technique itérative pour améliorer la précision de la méthode VIC proposée dans le Chapitre 2.

Le Chapitre 5 est consacré à démontrer le théorème de convergence de la méthode de couplage particules-grille pour les équations d'Euler. On essaie d'une part de séparer les diverses sortes d'erreurs dues aux différentes approximations, d'autre part d'établir les lemmes de consistance et de stabilité; grâce à eux, on trouve l'estimation d'erreur globale.

On fait au Chapitre 6 une série de problèmes tests numériques en choisissant les distributions initiales de tourbillon à symétrie radiale. Le but de cette étude numérique est de valider la méthode de vortex que l'on a étudiée dans les Chapitres précédents, par des calculs d'erreurs entre une solution analytique et la solution calculée correspondante, et on montre l'efficacité de ces techniques.

2^{ème} Partie: Méthodes couplées particules-grille pour les équations de Navier-Stokes

Dans la deuxième partie, on se propose d'étudier la résolution numérique des équations de Navier-Stokes à grand nombre de Reynolds par les méthodes particulières (méthode de vortex) ou couplées particules-grille (méthode V.I.C.).

La méthode particulière qui est une méthode lagrangienne, a été d'abord introduite en 1931 par **J. Rosenhead** [63] et largement développée depuis une dizaine d'années; c'est un outil très efficace à la simulation des écoulements de fluide parfait incompressible. L'extension de cette méthode au traitement des écoulements de fluide visqueux régi par les équations de Navier-Stokes est assez récente par deux approches différentes: **A.J. Chorin** (1973) [19] élargit le champ d'applications des méthodes particulières en tenant compte des effets de diffusion visqueuse. Il a proposé la première *méthode de vortex de marche aléatoire* en espace: elle consiste à la superposition d'un mouvement brownien des particules à la convection de fluide. L'effet du terme de diffusion visqueux est donc de changer la position des particules. Malgré la simplicité de la mise en œuvre de cette méthode, sa précision est fortement liée avec le choix de la variable aléatoire et demande un grand nombre de particules. Par contre, **G.H. Cottet & S. Mas-Gallic** (1982) [25] [22] ont introduit une *méthode de vortex déterministe*, basée sur une méthode de décomposition de l'équation de transport-diffusion du tourbillon en une partie de convection pure et une partie de diffusion. L'idée principale est de traiter les termes de convection par une *méthode particulière* et le tourbillon est transporté par le fluide à la vitesse du fluide, tandis que les termes de diffusion sont résolus d'une manière explicite dans laquelle le noyau de l'opérateur de la chaleur se choisit comme une fonction cut-off en jouant un double rôle. La distribution de tourbillon est reconstruite à la fin de l'étape de diffusion et le poids de particules a été modifié sous l'effet de la diffusion visqueux. Parallèlement, un schéma conservatif de cette méthode est revenu de **Choquin et Huberson** (1982) [17]. Il faut signaler que les positions des particules ne sont pas touchées par la diffusion et que la précision attendue n'est limitée que par la précision de la méthode de splitting $\mathcal{O}(\nu\tau)$. Ce sont deux différences principales entre la méthode déterministe et la méthode aléatoire. Ces résultats avec le fait que la méthode produit une petite viscosité numérique, ont été

confirmés par de récents tests faits par **J.P. Choquin & S. Huberson** ainsi que **B. Luquin** et montrent que la méthode déterministe peut donner une simulation précise des fluides très peu visqueux. Suivant les idées développées par **R.A. Ginzburg & J.J. Monaghan** (1983) [39], une généralisation de la méthode déterministe directe (sans décomposition) a été introduite et étudiée par **S. Mas-Gallic & P.A. Raviart** (1987) [53] et **P. Degond & S. Mas-Gallic** (1989) [31]. L'idée clé est, d'une part, d'introduire une équation auxiliaire intéro-différentielle en remplaçant, dans les équations de convection-diffusion, le Laplacien par un opérateur intégral $\Delta^\varepsilon \omega = \varepsilon^{-2}(\xi_\varepsilon * \omega - \omega)$ et d'autre part, de résoudre l'équation auxiliaire par une méthode particulière dont le poids de particules est modifié sous l'effet de la diffusion visqueuse sans changement de leur position. De plus récents travaux sont ceux de **D. Fishelov** (1990) [35], (1991) [36]. Écoulements bidimensionnels ont été calculés avec ce type de méthode par **J.P. Choquin & S. Huberson** [17] et par **B. Lucquin-Desreux**. Ils ont favorablement comparé les résultats de la méthode déterministe avec ceux de la méthode de marche aléatoire. Un inconvénient commun à tous les schémas lagrangiens est que les éléments du calcul souffrent des effets d'extrême distorsion après un certain nombre de pas de temps, comme le fait remarquer par **Van Dommelen & Shen** (1977) [68]. La distorsion empire lorsque le schéma est appliqué au cas tridimensionnel. Afin d'éviter ce genre de distorsion, **H.N. Najm** (1992) [56] a proposé un procédé de redistribution de tourbillon. **Brenier & Cottet** (1992) [14] définissent une technique de même nature mais les points de réinitialisation sont tous distribués de manière aléatoire.

Le plan de la deuxième partie qui regroupe les Chapitres 7- 10 est le suivant:

Le Chapitre 8 est un préambule du Chapitre 9 où on donne les bases de l'analyse mathématique de l'approximation particulière et de sa régularisation. C'est aussi un complément et une extension des résultats classiques que l'on a exposés dans le Chapitre 4 de la première partie. En effet, on généralise ces résultats aux espaces de Sobolev à exposant négatif, surtout à certains de ses sous-espaces.

Nous abordons au Chapitre 9 l'étude de la résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode particulière basée sur une méthode de décomposition: la convection est traitée par la même méthode particulière qu'au cas non visqueux étudié dans la première partie de cette thèse, tandis que la diffusion est résolue

par une technique de régularisation produisant une diffusion numérique qui permet de simuler la vraie diffusion physique, avec une réinitialisation de la distribution de particules à la fin de l'étape de diffusion. Ensuite, on se consacre à l'analyse mathématique de cette méthode grâce à l'étude de l'extension de l'approximation particulière aux sous-espaces spéciaux de Sobolev que l'on a fait dans le Chapitre 8. On analyse d'une part les diverses sortes d'erreurs dues aux différentes approximations, on établit d'autre part les lemmes de consistance et de stabilité. Enfin, on obtiendra le théorème de convergence en ayant recours à une technique de **G.H. Cottet** (1988) [24].

Nous terminons cette partie par l'étude des méthodes de couplage particules-grille pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Bien que les méthodes particulières soient parfaitement adaptées au traitement numérique de la convection, elles sont moins bien adaptées au traitement numérique d'autres termes tels que la diffusion. Par ailleurs, elles deviennent relativement coûteuses lorsque le nombre de particules augmente. Il est alors tentant de coupler une méthode particulière à une méthode traditionnelle du type méthode de différences finies ou méthode d'éléments finis. Cela a été très tôt envisagé par **F. Harlow** (1964) [44]. On introduit une autre grille fixe eulérienne sur laquelle on traite le terme de diffusion par la méthode traditionnelle. La difficulté principale est le problème de passage entre la représentation de type particulière(lagrangien) et la représentation de type eulérien. En fait, cette difficulté n'a été résolue que récemment par **J.U. Brackbill & H.M. Ruppel** (1986) [8] et puis analysée par **P.A. Raviart** [60] pour l'équation de convection-diffusion. Dans le Chapitre 10, on décrit d'abord une méthode couplée particules-grille, c'est un schéma de V.I.C. sans décomposition pour les équations de Navier-Stokes et étudie ses caractéristiques, puis on démontre un résultat de convergence dans le cas linéaire. On l'applique enfin à la simulation numérique directe des écoulements turbulents périodiques gérés par les équations de Navier-Stokes qui a été envisagée par **W.D. Henshaw, H.O. Kreiss** et al (1991) [46] en utilisant une méthode pseudo-spectrale et une méthode de vortex simplement pour les équations d'Euler. On obtient les premiers résultats satisfaisants par la méthode de Vortex In Cell pour ce cas test difficile.

Table des matières

Remerciements	vii
Présentation générale	xi
I Méthodes de Couplage Particules-Grille pour les Equations d'Euler	1
1 Le problème continu	5
1.1 Diverses formulations équivalentes	7
1.2 Théorème d'existence et d'unicité	11
1.3 Propriétés de conservation	12
2 Méthode de couplage particules-grille	13
2.1 Description de la méthode VIC	15
2.1.1 Discrétisation particulaire	15
2.1.2 Discrétisation sur grille	17
2.1.3 Description de la méthode V.I.C.	22
2.1.4 Discrétisation en temps	24
2.1.5 Implémentation	25

2.2	Résultats principaux	26
2.3	Vérification des propriétés de conservation	27
3	Méthodes de différences pour le problème de Neumann	29
3.1	Introduction	31
3.2	Cas d'un ouvert Ω rectangulaire	32
3.2.1	Représentation de la solution	32
3.2.2	Estimation maximale d'erreur	36
3.3	Cas d'un ouvert Ω non rectangulaire	39
3.3.1	Nouveaux opérateurs d'approximation	39
3.3.2	Deuxième schéma discret et son estimation d'erreur	41
3.3.3	Estimations de l'erreur de discrétisation de dérivées	43
4	Approximation particulière et régularisation	47
4.1	Solutions des équations hyperboliques linéaires	49
4.2	Approximation particulière et régularisation	57
4.3	Représentation de fonctions B-splines	61
4.3.1	En dimension $d = 1$	61
4.3.2	En dimension $d > 1$	64
4.4	Passage entre particules et grille	66
4.5	Technique d'amélioration	72
5	Démonstration du théorème de convergence	77
5.1	Introduction	79
5.2	Propriétés de consistance	82

5.3	Propriétés de stabilité	84
5.4	Estimation d'erreur globale	86
6	Simulation numérique des équations d'Euler bidimensionnelles	89
6.1	Introduction	91
6.2	Problèmes traités	93
6.3	Résultats numériques	96
 II Méthodes de Couplage Particules-Grille pour les Equations de Navier-Stokes		107
7	Introduction	111
7.1	Equations de Navier-Stokes	113
7.2	Propriétés des équations de Navier-Stokes	118
8	Approximation particulière et la régularisation(suite)	121
8.1	Notations	123
8.2	Problème linéaire de convection	126
8.3	Régularisation des fonctions	128
8.4	Approximation particulière	135
9	Analyse numérique de la méthode de vortex	141
9.1	Description de la méthode. Résultat principal	143
9.1.1	Notations	143
9.1.2	Description de la méthode de vortex	145
9.1.3	Résultat de convergence	149

9.2	Résultats préliminaires	150
9.2.1	Erreur de régularisation	150
9.2.2	Erreur de splitting	154
9.2.3	Erreur sur la diffusion	157
9.2.4	Résultats préliminaires	159
9.3	Démonstration du théorème de la convergence	160
9.3.1	Introduction	160
9.3.2	Lemme de stabilité	161
9.3.3	Démonstration du théorème	163
10	Méthode couplée particules-grille et ses applications	169
10.1	Méthode V.I.C. pour les équations de Navier-Stokes	171
10.2	Simulation des écoulements turbulents	177
10.2.1	Introduction	177
10.2.2	Décroissance de données initiales aléatoires	179
A	Transformation de Fourier	201
A.1	Transformation de Fourier (continue)	203
A.1.1	Transformation de Fourier des fonctions de S	203
A.1.2	Transformation de Fourier des fonctions de S'	205
A.2	Transformations de Fourier discrètes et rapides	206
A.2.1	En dimension un	206
A.2.2	En dimension deux	208
	Bibliographie	211

Partie I

Méthodes de Couplage Particules-Grille pour les Equations d'Euler

Chapitre 1

Le problème continu

L'objet de ce chapitre est de mettre en évidence les formulations principales des équations d'Euler. On s'intéresse essentiellement à la formulation en vitesse-tourbillon attrayant dans laquelle le terme de gradient de la pression disparaît explicitement et la contrainte de l'incompressibilité est automatiquement satisfaite. D'où beaucoup de méthodes numériques venues introduisent très peu de viscosité numérique. A ce propos, il nous semble convenable de traiter le problème avec le grand nombre de Reynolds au cas visqueux. On établit d'une part l'équivalence entre les diverses formulations, et on donne d'autre part un théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations d'Euler.

Un très grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être modélisés par les équations d'Euler¹ lorsque le fluide newtonien² est parfait: les effets de viscosité sont supposés négligeables.

On se limite d'abord à étude d'un fluide parfait newtonien en écoulement incompressible bidimensionnel.

1.1 Diverses formulations équivalentes

On commence par rappeler succinctement quelques formulations équivalentes des *équations d'Euler* bidimensionnelles fréquemment utilisées. La *formulation en variables primitives vitesse-pression* des *équations d'Euler homogènes* dans le plan avec conditions aux limites de vitesse nulle à l'infini est la suivante:

Pour $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ et $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, trouver un couple (u, p) dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$, solution du système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (5)$$

$$(\mathcal{E}) \quad u(\cdot, 0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (6)$$

$$\text{div } u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (7)$$

$$|u(x, t)| \rightarrow 0, \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty, t > 0 \quad (8)$$

où $u = (u_1, u_2)$ est le *vecteur de vitesse* du fluide dans le repère considéré, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ désigne les *coordonnées spatiales d'Euler* de la particule considérée à l'instant t ; $\rho > 0$ est la *masse volumique* et $p \geq 0$ est la *pression du fluide*.

Remarque 2.1. *Les principales difficultés associées à la résolution des équations d'Euler en variables primitives sont les suivantes:*

- la présence de la contrainte d'incompressibilité $\text{div } u = \nabla \cdot u = 0$ qui doit être satisfaite à n'importe quel moment ne permet pas d'utiliser une méthode explicite aussi simple;

¹Leonhard Euler, né à Basel le 15 avril 1707 et mort à Saint Petersburg le 18 septembre 1783.

²Isaac Newton, né à Woolsthorpe le 25 décembre 1642 et mort à Kensington le 20 mars 1726.

- il manque des conditions aux limites pour la pression.

En prenant le rotationnel de (5), en notant la *vorticité de la vitesse*³

$$\omega = \text{curl } u \equiv \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (9)$$

et tenant compte du fait que

$$\text{curl}(\text{grad } p) = 0,$$

on en tire la *formulation en vitesse-vorticité* qui s'écrit de la manière suivante:

Pour $x \in \mathbb{R}^2, t > 0$ et $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, trouver un couple (ω, u) dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^2_{loc}(\mathbb{R}^2))$, solution du système

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + (u \cdot \nabla) \omega = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (10)$$

$$(E) \quad \omega(x, \cdot) = \omega_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (11)$$

$$\text{rot } u = \omega \quad (12)$$

$$\text{div } u = 0 \quad (13)$$

et vérifiant la *condition à l'infini* suivante:

$$u \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } |x| \longrightarrow \infty \quad (14)$$

où u est le *champ de vitesse* et ω est le *tourbillon*.

On fait remarquer que dans la *formulation en vitesse-tourbillon*, le terme de gradient de la pression disparaît explicitement et la contrainte d'incompressibilité est automatiquement satisfaite.

De manière équivalente, on peut remplacer les équations (12)-(14) par la *loi de Biot-Savart*

$$u = \mathbf{K} * \omega \quad (15)$$

$$\text{où } \mathbf{K}(x) = \frac{1}{2\pi|x|^2} (-x_2, x_1), \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (16)$$

³En effet, $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = (0, 0, \omega)$.

La fonction de courant permet de ramener l'étude du champ vectoriel de vitesse d'un fluide incompressible à un champ scalaire. En effet, puisque $\operatorname{div} u = 0$, il existe une *fonction de courant* ψ^4 telle que

$$u = \operatorname{curl} \psi \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)$$

donc

$$\omega = \operatorname{curl} u = -\Delta \psi$$

$$\text{où } \psi = \mathbf{G} * \omega$$

où $\mathbf{G}(x)$ est la solution élémentaire de l'opérateur de Laplace⁵ ou le laplacien Δ

$$\mathbf{G}(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$$

Il est clair que ψ est déterminé à une constante additive près.

Remarque 2.2. *On peut introduire une fonction de courant pour tous les écoulements incompressibles à deux dimensions, qu'ils soient visqueux ou non; par contre, on ne peut introduire de fonction potentiel de vitesse que pour des fluides parfaits sans viscosité.*

On a finalement les équations d'Euler formulées en terme de *fonction de courant et de vorticité* :

Pour $x \in \mathbb{R}^2, t > 0$ et $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, trouver un couple (ω, ψ) dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H_{loc}^1(\mathbb{R}^2))$, solution du système

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + (\operatorname{curl} \psi \cdot \nabla) \omega = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (17)$$

$$(E') \quad \omega(\cdot, 0) = \omega_0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (18)$$

$$-\Delta \psi = \omega, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (19)$$

$$|\nabla \psi| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (20)$$

où ω est le *tourbillon* du fluide et ψ est la *fonction de courant*.

⁴Plus précisément, il existe un potentiel vecteur de la vitesse $\vec{\psi}$ tel que $\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{\psi}$ qui, pour des écoulements bidimensionnels, se réduit à $\vec{\psi} = (0, 0, \psi)$, où ψ représente la composante du potentiel vecteur suivant la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement.

⁵Pierre-Simon Laplace, né à Beaumont-en-Auge le 28 mars 1749 et mort à Paris le 5 mai 1827.

Remarque 2.3. *En prenant*

$$\mathbf{K}(x) = \text{curl } \mathbf{G}(x) = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2\pi|x|^2} (-x_2, x_1) \quad (21)$$

on retrouve la loi de Biot-Savart;

Remarque 2.4. *Le noyau intégral $\mathbf{K}(x)$ a une seule singularité autour de l'origine $x = 0$.*

G. H. Cottet (1982) [21] établit l'équivalence entre les diverses formulations des *équations d'Euler* (\mathcal{E}) , (\mathbf{E}') et (\mathbf{E}) à partir desquelles il donne, sous certaines conditions initiales, des résultats d'existence et d'unicité des solutions ainsi que ceux de régularité et de décroissance à l'infini.

Remarque 2.5. *Une fois le système (\mathbf{E}) ou (\mathbf{E}') résolu, il convient d'en déduire la pression qui satisfait, comme la fonction de courant, l'équation de Poisson ⁶:*

$$\Delta p = 2\varrho \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \quad (22)$$

Notons cependant que le calcul de cette pression n'est pas nécessaire à la résolution du système (\mathbf{E}') .

⁶ *Siméon-Denis Poisson, né à Pithiviers le 21 juin 1781 et mort à Paris le 25 avril 1840.*

1.2 Théorème d'existence et d'unicité

On rappelle également que lorsque le tourbillon initial ω_0 est suffisamment régulier, le problème (E) possède une unique *solution classique* (voir F.J.Mc Grath (1968) [54], V.I. Youdovitch (1963) [69] ou T. Kato (1972) [45]). J. P. Choquin & G. H. Cottet (1988) [16] se sont intéressés au cas de la *solution faible* .

On les résume ici dans le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1 *Si $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors le problème (E) admet pour tout $t > 0$ une solution faible unique $\omega \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ qui peut s'écrire, le long des courbes caractéristiques $X(s; x, t)$ associées à la vitesse $u(x, t)$,*

$$\omega(x, t) = \omega_0(X(0; x, t)), \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (23)$$

où $X(s; x, t)$ est aussi la solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d}{ds} X(s; x, t) = u(X(s; x, t), s), \quad x \in \mathbb{R}^2, s, t > 0 \quad (24)$$

$$X(t; x, t) = x, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (25)$$

De plus, si ω_0 est suffisamment régulier et intégrable sur \mathbb{R}^2 , alors la solution classique du problème (E) existe et vérifie

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{0,1} + \|\omega(\cdot, t)\|_{0,\infty} = \|\omega_0\|_{0,1} + \|\omega_0\|_{0,\infty}$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{0,\infty} \leq C(\|\omega(\cdot, t)\|_{0,1} + \|\omega(\cdot, t)\|_{0,\infty})$$

$$|u(x, t) - u(y, t)| \leq C(\|\omega_0\|_{0,1} + \|\omega_0\|_{0,\infty}) |x - y| (1 + |\log|x - y||)$$

$$|u(x, t) - u(x, s)| \leq C(\|\omega_0\|_{0,1} + \|\omega_0\|_{0,\infty}) |t - s| (1 + |\log|t - s||)$$

■

1.3 Propriétés de conservation

On peut trouver enfin les *propriétés de conservation* des *équations d'Euler*.

PROPOSITION 1.1 *Pour une raison de simplicité, on suppose que ω_0 (et donc ω) a un support compact. Alors, on a, pour tout $t \in [0, T]$, les invariants intégraux des équations d'Euler suivants:*

(i) *(théorème de Kelvin: conservation de la circulation totale)*

$$I_0(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x, t) dx = I_0(0) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) dx;$$

(ii) *(conservation de l'impulsion linéaire)*

$$I_1(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} x\omega(x, t) dx = I_1(0) = \int_{\mathbb{R}^2} x\omega_0(x) dx;$$

(iii) *(conservation de l'impulsion angulaire)*

$$I_2(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega(x, t) dx = I_2(0) = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega_0(x) dx;$$

(iv) *(conservation de l'énstrophie)*

$$I_3(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} |\omega(x, t)|^2 dx = I_3(0) = \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(x)|^2 dx$$

(v) *(conservation de l'énergie totale)*

$$I_4(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} |u(x, t)|^2 dx = E(t) = I_4(0) = \int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x)|^2 dx,$$

où

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x, t) (\mathbf{G} * \omega)(x) dx.$$

Puisque les *propriétés de conservation* ont des significations physiques tout à fait importantes, il convient qu'elles puissent être exactement satisfaites lorsque l'on utilise une méthode d'approximation numérique du problème.

Chapitre 2

Méthode de couplage particules-grille

Dans ce qui suit, on se propose d'introduire une méthode de couplage particules-grille (méthode V.I.C.) afin de simuler numériquement l'écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait incompressible. L'idée principale est de conserver un traitement lagrangien pour le champ de rotationnel, et de résoudre l'équation de Poisson, par une méthode des différences finies pour la fonction de courant sur une grille fixe eulérienne, de façon à déterminer le champ de vitesse. On énonce enfin le résultat d'existence et d'unicité des solutions d'approximation et celui de convergence.

2.1 Description de la méthode VIC

2.1.1 Discrétisation particulière

Pour simplifier, on suppose que ω_0 est à support compact, de support $\mathbf{B}(\omega_0)$. Soit $h > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0; pour tout entier $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$, on pose

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p &= \{ x \mid x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (p_i - 1/2)h < x_i < (p_i + 1/2)h, i = 1, 2 \} \\ x_p &= ph = (p_1h, p_2h) \end{cases}$$

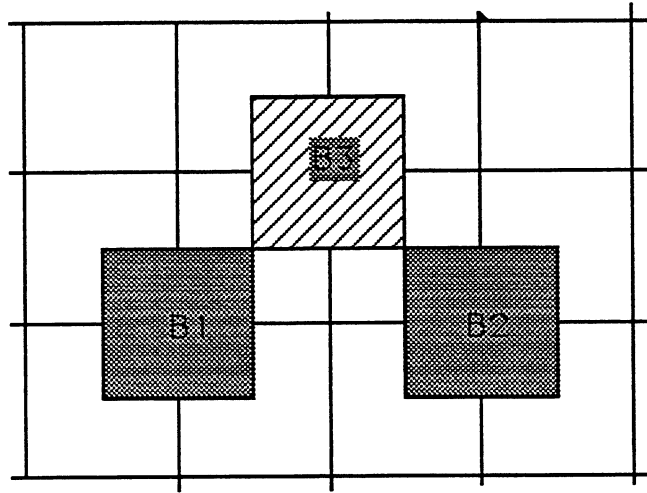


FIGURE 2.1 Cellules des particules

On approche d'abord la *condition initiale* ω_0 par une *combinaison linéaire de masses de Dirac*¹:

$$\omega_0(x) \approx \omega_0^h(x) \equiv \sum_p \alpha_p \delta(x - x_p) \quad (26)$$

où $x \rightarrow \delta(x - x_p)$ désigne la *masse de Dirac* concentrée au point $x_p \in \mathbb{R}^2$, encore appelée *particule* p ; $\alpha_p = h^2 \omega_0(x_p)$ est le *poids de la particule* p ; $h > 0$ désigne la *distance interparticulaire*. On dénote ici et partout dans la suite par \sum_p la somme finie $\sum_{|p| \leq N}$, N est une certaine constante ad hoc.

¹Paul Adrien Maurice Dirac, né à Bristol le 8 août 1902 et mort à Tallahassee 1984.

Si l'on dispose d'une approximation u^h de u , la *méthode particulière* d'approximation du problème (E) consiste alors à résoudre

$$\frac{\partial \omega^h}{\partial t} + (u^h \cdot \nabla) \omega^h = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (27)$$

$$(E^h) \quad \omega^h(\cdot, 0) = \omega_0^h, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (28)$$

dont la *solution mesure* est donnée explicitement par

$$\omega^h(x, t) = \sum_p \alpha_p \delta(x - x_p^h(t)) \quad (29)$$

où $x_p^h(t) \equiv X^h(t; x_p, 0)$ sont les *courbes caractéristiques* au système de coordonnées lagrangienne associées à la vitesse calculée u^h , c'est-à-dire les solutions du système d'équations différentielles ordinaires:

$$\frac{d}{dt} X^h(t; x_p, 0) = u^h(X^h(t; x_p, 0), t), \quad p \in \mathbb{Z}^2, t > 0 \quad (30)$$

$$X^h(0; x_p, 0) = x_p, \quad p \in \mathbb{Z}^2 \quad (31)$$

On aura besoin dans la suite du *tourbillon régularisé* ω_ε^h défini par

$$\omega_\varepsilon^h(x, t) \equiv \omega^h(\cdot, t) * \xi_\varepsilon = \sum_p \alpha_p \xi_\varepsilon(x - x_p^h(t)) \quad (32)$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre de régularisation et

$$\xi_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon^{-2} \xi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (33)$$

où ξ est une fonction de régularisation, appelée encore *fonction "cut-off"*, de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , vérifiant la (propriété de moments à l'ordre r)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \xi(x) dx = 1 \quad (34)$$

$$H_R(r) \quad \int_{\mathbb{R}^2} x^\alpha \xi(x) dx = 0, \quad 1 \leq |\alpha| \leq r-1, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2 \quad (35)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^r |\xi(x)| dx < \infty \quad (36)$$

En pratique, la fonction "cut-off" ξ sera le plus souvent à support compact.

2.1.2 Discrétisation sur grille

Afin de compléter notre approximation du problème (E), il reste à coupler ω^h et u^h en remplaçant (19)-(20) par leur analogue numérique. On prend d'abord une boîte assez grande $\Omega_R = (-R, R)^2 \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$, de frontière Γ_R telle que $\mathbf{B}(\omega_0) \subset \Omega_R$. On considère le problème de *Neumann*² pour l'équation de *Poisson*, défini par $\mathbf{P}_R(\omega)$, où ω est supposé connu,

$$\mathbf{P}_R(\omega) \quad \begin{cases} -\Delta \psi = \omega, & \text{dans } \Omega_R \\ \frac{\partial}{\partial n} \psi = g_R(\omega), & \text{sur } \Gamma_R \end{cases} \quad (37)$$

où $n = (n_1, n_2)$ est le *vecteur unitaire de la normale* à Γ_R dirigée vers l'extérieur du domaine Ω_R ; $g_R(\omega)$ est donné et satisfait à la *condition de consistence* (compatibilité):

$$\int_{\Omega_R} \omega(x) dx = - \int_{\Gamma_R} g_R(\omega) ds \quad (38)$$

pour que le problème $\mathbf{P}_R(\omega)$ soit bien posé et qu'il ait une *solution unique à une constante additive près*. Pour assurer l'*unicité* de la solution, on suppose que par exemple

$$\int_{\Omega_R} \psi(x) dx = 0 \quad (39)$$

On introduit ensuite une *application linéaire* \mathcal{L} de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 telle que si ψ est la solution du problème $\mathbf{P}_R(\omega)$

$$\mathcal{L}(\omega) \equiv \begin{cases} \text{curl } \psi, & \text{dans } \Omega_R \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (40)$$

Il est bien connu que, en dimension $d = 2$, on a dans tout le plan :

$$\psi = \mathbf{G} * \omega \quad (41)$$

$$\mathbf{G}(x) = -\frac{\log|x|}{2\pi}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (42)$$

où \mathbf{G} est la *solution élémentaire de l'opérateur de Laplace* Δ , analytique harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, localement intégrable sur $x \in \mathbb{R}^2$ et la seule solution élémentaire radiale à une constante additive près, etc.

²Karl-Gottfried Neumann, né à Königsberg le 7 mai 1832 et mort à Leipzig le 27 mai 1925.

Grâce au Théorème 1.1, on a immédiatement le

LEMME 2.1 *Si ω est la solution classique du problèmes (E). Alors l'application \mathcal{L} définie par (40) vérifie*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\omega)(x, t) - \mathcal{L}(\omega)(y, t)| &\leq C (\|\omega_0\|_{0,1} + \|\omega_0\|_{0,\infty}) |x - y| (1 + |\log |x - y||) \\ |\mathcal{L}(\omega)(x, t) - \mathcal{L}(\omega)(x, s)| &\leq C (\|\omega_0\|_{0,1} + \|\omega_0\|_{0,\infty}) |t - s| (1 + |\log |t - s||) \\ \|\mathcal{L}(\omega)(\cdot, t)\|_{0,\infty} &\leq C (\|\omega_0\|_{0,1} + \|\omega_0\|_{0,\infty}) \end{aligned}$$

On se propose d'ores et déjà d'étudier la résolution numérique du problème $\mathbf{P}_R(\omega)$. Avant tout, on introduit un *maillage uniforme* de la façon suivant, soit $N = \lceil \frac{2h}{\varepsilon} \rceil$ un entier positif et notant les points de grille par

$$x = x_g = (x_1, x_2) \quad \text{où } x_m = -R + j_m \varepsilon, \quad 0 \leq j_m \leq N, \quad m = 1, 2$$

on définit alors

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_\varepsilon &= \{x \mid x = (x_1, x_2), x_m = -R + j_m \varepsilon, 0 \leq j_m \leq N, m = 1, 2\} \\ \Omega_\varepsilon &= \{x \mid x = (x_1, x_2), x_m = -R + j_m \varepsilon, 1 \leq j_m \leq N - 1, m = 1, 2\} \\ \Gamma_\varepsilon &= \bar{\Omega}_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon \end{aligned}$$

Dans le cas plus général, il convient d'introduire les notations suivantes (voir **Guo Ben-yu** (1988) [41] et **J.H. Bramble & B.E. Hubbard**(1964) [9]).

On désigne par \mathbb{R}_ε^d , l'ensemble des points de grille dans \mathbb{R}^d :

$$\mathbb{R}_\varepsilon^d = \left\{ x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, x_m = j_m \varepsilon, j_m \in \mathbb{Z}, 1 \leq m \leq d \right\}$$

Par conséquent, $e_m = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-m}) \in \mathbb{R}_\varepsilon^d$, $1 \leq m \leq d$. Les deux points $x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon^d$ sont dites "voisins", si

$$\sum_{m=1}^d \frac{|x_m - y_m|}{\varepsilon} = 1.$$

On désigne par $\mathcal{V}(x)$, l'ensemble des points voisins de $x \in \mathbb{R}_\varepsilon^d$.

On note ensuite

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon &= \Omega \cap \mathbb{R}^d_\varepsilon = \{x \mid x \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d_\varepsilon\} \\ \Omega'_\varepsilon &= \{x \mid x \in \Omega_\varepsilon, \mathcal{V}(x) \subset \Omega\} \\ \Omega_\varepsilon^* &= \Omega_\varepsilon \setminus \Omega'_\varepsilon \quad \text{ou} \quad \Omega_\varepsilon = \Omega'_\varepsilon \cup \Omega_\varepsilon^* \\ \Omega_{\varepsilon,m}^{*,\pm} &= \{x \mid x \in \Omega_\varepsilon, x \pm a_m \varepsilon e_m \in \Gamma, 0 < a_m \leq 1\} \\ \Omega_{\varepsilon,m}^* &= \Omega_{\varepsilon,m}^{*,+} \cup \Omega_{\varepsilon,m}^{*,-} \\ \Omega_\varepsilon^* &= \bigcup_{m=1}^d \Omega_{\varepsilon,m}^* \\ \Gamma_{\varepsilon,m}^\pm &= \{x \mid x \in \Gamma, x \mp a_m \varepsilon e_m \in \Omega_{\varepsilon,m}^{*,\mp}, 0 < a_m \leq 1\} \\ \Gamma_{\varepsilon,m} &= \Gamma_{\varepsilon,m}^+ \cup \Gamma_{\varepsilon,m}^- \\ \Gamma_\varepsilon &= \bigcup_{m=1}^d \Gamma_{\varepsilon,m} \\ \bar{\Omega}_\varepsilon &= \Omega_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon \end{aligned}$$

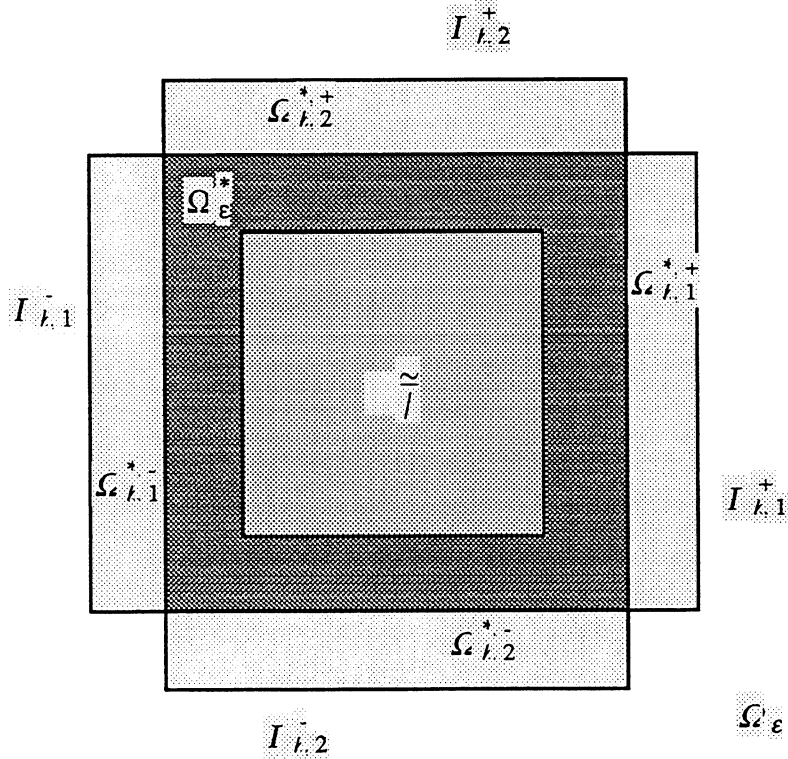


FIGURE 2.2 *Maillage uniforme*

Une fonction u est dite *fonction de grille* si elle est définie sur les points de grille. Pour la dérivation numérique, on définit de plus les quantités suivantes:

$$\begin{aligned}
u_{x_m}(x) &= \frac{1}{\varepsilon} (u(x + \varepsilon e_m) - u(x)) \\
u_{\bar{x}_m}(x) &= \frac{1}{\varepsilon} (u(x) - u(x - \varepsilon e_m)) \\
u_{\bar{x}_m}(x) &= \frac{1}{2} (u_{x_m}(x) + u_{\bar{x}_m}(x)) = \frac{1}{2\varepsilon} (u(x + \varepsilon e_m) - u(x - \varepsilon e_m)) \\
u_n(x) &= \begin{cases} u_{\bar{x}_m}(x) & \text{si } x \in \Gamma_{\varepsilon,m}^+ \\ -u_{x_m}(x) & \text{si } x \in \Gamma_{\varepsilon,m}^- \end{cases} \\
\Delta_{\varepsilon,m} u(x) &= (u_{x_m}(x))_{\bar{x}_m} = (u_{\bar{x}_m}(x))_{x_m} \\
\Delta_\varepsilon u(x) &= \sum_{m=1}^d \Delta_{\varepsilon,m} u(x)
\end{aligned}$$

Enfin, on définit pour *toutes fonctions de grille* $u(x)$, $v(x)$, les quantités:

$$\begin{aligned}
(u, v) &= (u, v)_{\Omega_\varepsilon} = \varepsilon^d \sum_{x \in \Omega_\varepsilon} u(x) v(x) \\
\|u\|^2 &= \|u\|_{0,2,\Omega_\varepsilon}^2 = (u, u) \\
\|u\|_\infty &= \|u\|_{0,\infty,\Omega_\varepsilon} = \max_{x \in \Omega_\varepsilon} |u(x)| \\
|u|_{1,\infty} &= |u|_{1,\infty,\Omega_\varepsilon} = \max_{x \in \Omega_\varepsilon} \max_{1 \leq m \leq d} (|u_{x_m}(x)|, |u_{\bar{x}_m}(x)|) \\
|u|_{\Gamma_\varepsilon}^2 &= |u|_{0,2,\Gamma_\varepsilon}^2 = \varepsilon^{d-1} \sum_{x \in \Gamma_\varepsilon} u^2(x)
\end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de discrétiser le problème $P_R(\omega)$ par la *méthode des différences finies*³.

Pour toutes fonctions données $\omega(x)$ et $g_\omega(x)$, on cherche une fonction de grille $\psi(x)$ vérifiant

$$\mathbf{P}_\varepsilon^I(\omega) \begin{cases} -\Delta_\varepsilon \psi(x) = \omega(x), & x \in \Omega_\varepsilon \\ \psi_n = g_\omega(x), & x \in \Gamma_\varepsilon \\ \varepsilon^2 \sum_{x \in \Omega_\varepsilon} \psi(x) = 0 \end{cases} \quad (43)$$

De toute évidence, cela n'est rien d'autre que le *schéma de discrétisation aux différences finies à cinq points de l'approximation du Laplacien* Δ . Il est bien connu que si

³Dans le Chapitre suivant, on va introduire une autre approximation discrète $P_\varepsilon^{II}(\omega)$.

$\Psi(x) \in C^4(\mathbb{R}^2)$, alors

$$|\Delta \Psi(x) - \Delta_\varepsilon \Psi(x)| \leq C \varepsilon^2$$

Lorsque l'on obtient $\psi(x) = -\Delta_\varepsilon^{-1} \omega(x)$, une approximation de la fonction-courant sur grille réécrite en

$$\Omega_\varepsilon = \{x = x_g | x_g = (-R + i\varepsilon, -R + j\varepsilon), 1 \leq i, j \leq N - 1\}$$

on note

$$\psi(x) = \psi(x_g) = \psi_{i,j}, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon$$

Pour tout point de grille $x_g \in \bar{\Omega}_\varepsilon$, on désigne les *différences divisées d'ordre deux* de ψ par les formules de dérivation usuelles suivantes:

$$\partial_1 \psi(x_g) = (\partial_1 \psi)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) & i = 1, 2, \dots, N - 1 \\ \frac{1}{2\varepsilon}(-3\psi_{0,j} + 4\psi_{1,j} - \psi_{2,j}) & i = 0 \\ \frac{1}{2\varepsilon}(\psi_{N-2,j} - 4\psi_{N-1,j} + 3\psi_{N,j}) & i = N \end{cases} \quad (44)$$

$$\partial_2 \psi(x_g) = (\partial_2 \psi)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) & j = 1, 2, \dots, N - 1 \\ \frac{1}{2\varepsilon}(-3\psi_{i,0} + 4\psi_{i,1} - \psi_{i,2}) & j = 0 \\ \frac{1}{2\varepsilon}(\psi_{i,N-2} - 4\psi_{i,N-1} + 3\psi_{i,N}) & j = N \end{cases} \quad (45)$$

On note alors

$$\mathcal{L}_g(\omega) = \mathcal{L}_\varepsilon(\omega)_{ij} = \text{curl}_\varepsilon = \begin{cases} (\partial_2 \psi(x_g), -\partial_1 \psi(x_g)), & x_g \in \bar{\Omega}_\varepsilon \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (46)$$

d'où l'on peut définir une *application d'approximation* \mathcal{L}^h de \mathcal{L}

$$\mathcal{L}^h(\omega)(x) = I(\mathcal{L}_g(\omega)) \equiv \sum_{x_g \in \mathbb{R}_\varepsilon^2} \mathcal{L}_g(\omega) l_\varepsilon(x - x_g) \quad (47)$$

où $\{l_\varepsilon(x - x_g)\}_{x_g \in \bar{\Omega}_\varepsilon}$ est un ensemble de fonctions de base de l'interpolation de Lagrange⁴ vérifiant: $l_\varepsilon(0) = 1$, $\mathcal{L}_g(\omega) = \mathcal{L}_\varepsilon(\omega)_{ij}$ s'appellent *coefficients de fonction de l'interpolation*. L'ordre de la précision de la fonction d'interpolation sera de préférence supérieur ou égal à celui de la *méthode de différences finies*.

⁴ Joseph-Louis Lagrange, né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813.

2.1.3 Description de la méthode V.I.C.

On est maintenant en mesure de coupler ω^h et u^h . Il est bien naturel de poser:

$$u^h = \mathcal{L}^h(\omega^h)$$

Malheureusement, comme $\omega^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, l'espace des mesures sur \mathbb{R}^2 , l'application $\mathcal{L}^h(\omega^h)$ n'a pas de sens. Par contre, on couple ω^h et u^h de la manière suivante, avec une régularisation de ω^h :

$$u^h \equiv \mathcal{L}^h(\omega_\varepsilon^h) = \mathcal{L}^h(\omega^h * \xi_\varepsilon) \quad (48)$$

En résumé, on introduit en fait une *méthode de couplage particules-grille* de la résolution du problème (E), définie par

$$\omega^h(x, t) = \sum_p \alpha_p \delta(x - x_p^h(t)), \quad \alpha_p = h^2 \omega_0(x_p) \quad (49)$$

$$(\mathbf{E}_\varepsilon^h) \quad u^h(x, t) = \mathcal{L}^h(\omega^h * \xi_\varepsilon)(x, t) \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt} x_p^h(t) = u^h(x_p^h(t), t), \quad x_p^h(0) = x_p, \quad \forall p \in \mathbb{Z}^2 \quad (51)$$

On désigne par $\Phi_p^h(t) : t \rightarrow x_p^h(t)$.

Finalement, la méthode est définie de la manière suivante: étant donné une subdivision $0 < t_1 < \dots < T$ de $[0, T]$ avec $t_n = n\tau$, on cherche à déterminer des valeurs approchées $\omega^{h,n}$ des valeurs $\omega(\cdot, t_n)$ prises par la solution exacte:

- (1) Partant au temps $t_n = n\tau$ d'une *approximation particulière* $\omega^{h,n}$ de $\omega(x, t_n)$ de la forme

$$\omega^{h,n}(x) = \sum_p \alpha_p \delta(x - x_p^n)$$

on projette les valeurs particulières sur la grille fixe eulérienne et on définit pour tout point de grille $x_j \in \Omega_\varepsilon, \forall j \in \mathbb{Z}^2$

$$J_j^n = \sum_p h^2 \varphi_j(x_p^n)$$

$$\omega_j^n = A\omega^{h,n} = \begin{cases} \sum_p \alpha_p \varphi_j(x_p^n) / J_j^n, & \text{si } J_j^n \neq 0 \\ 0, & \text{si } J_j^n = 0 \end{cases} \quad (52)$$

où $\varphi_j(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$ et $\varphi = \chi^{*(\ell+1)}$ avec $\ell \geq 1$.

- (2) on résout le *problème de Neumann* pour l'équation de Poisson $P_R(\omega_j^n)$ sur la grille à l'aide d'une *méthode de différences finies* d'ordre supérieur ou égal à deux; cela nous donne une approximation ψ_j^n de *fonction courant* sur grille, on définit

$$u_j^n = \mathcal{L}_g(I(\omega_j^n)) = \mathcal{L}_g((I \circ A)\omega^{h,n}), \quad j \in \mathbb{Z}^2$$

- (3) Ensuite, on transfère les quantités calculées u_j^n de la grille aux particules. L'idée principale consiste à interpoler u_j^n sur particules à l'aide de la *méthode de l'interpolation de Lagrange*. On pose

$$u^{h,n}(x) = I(u_j^n) \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} u_j^n l_\varepsilon(x - x_j) = \mathcal{L}^h((I \circ A)\omega^{h,n}) = I(\text{curl}_\varepsilon(-\Delta_\varepsilon^{-1}(A\omega^{h,n})))$$

où $l_\varepsilon(x - x_j) = \varphi_j(x) = \varphi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right)$, $\varphi = \mathcal{X} * \mathcal{X}$, est une fonction de base de l'*interpolation bilinéaire par morceaux* sur le maillage uniforme.

- (4) Enfin, on peut résoudre, sur l'intervalle (t_n, t_{n+1}) , le problème suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^h}{\partial t} + \nabla \cdot (u^{h,n} \omega^h) &= 0 \\ \omega^h(\cdot, t_n) &= \omega^{h,n} \end{aligned}$$

en résolvant le *système des équations différentielles ordinaires*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_p^{h,n}(t) &= u^{h,n}(x_p^{h,n}(t), t), \quad t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ x_p^{h,n}(t_n) &= x_p^n \end{aligned}$$

d'où l'on trouve la *solution mesure* exacte du problème précédent:

$$\omega^{h,n+1}(x) = \sum_p \alpha_p \delta(x - x_p^{n+1}), \quad x_p^{n+1} = x_p^{h,n}(t_{n+1})$$

REMARQUE 2.1 On remarque que le schéma (52) est conservatif:

$$\sum_j J_j^n \omega_j^n = \sum_p h^2 \omega_0(x_p)$$

et que le passage de particules en grille est stable dans L^2 (voir Lemme 4.6):

$$\sum_j J_j^n |\omega_j^n|^2 \leq \sum_p h^2 |\omega_0(x_p)|^2$$

Le diagramme de ce schéma est le suivant:

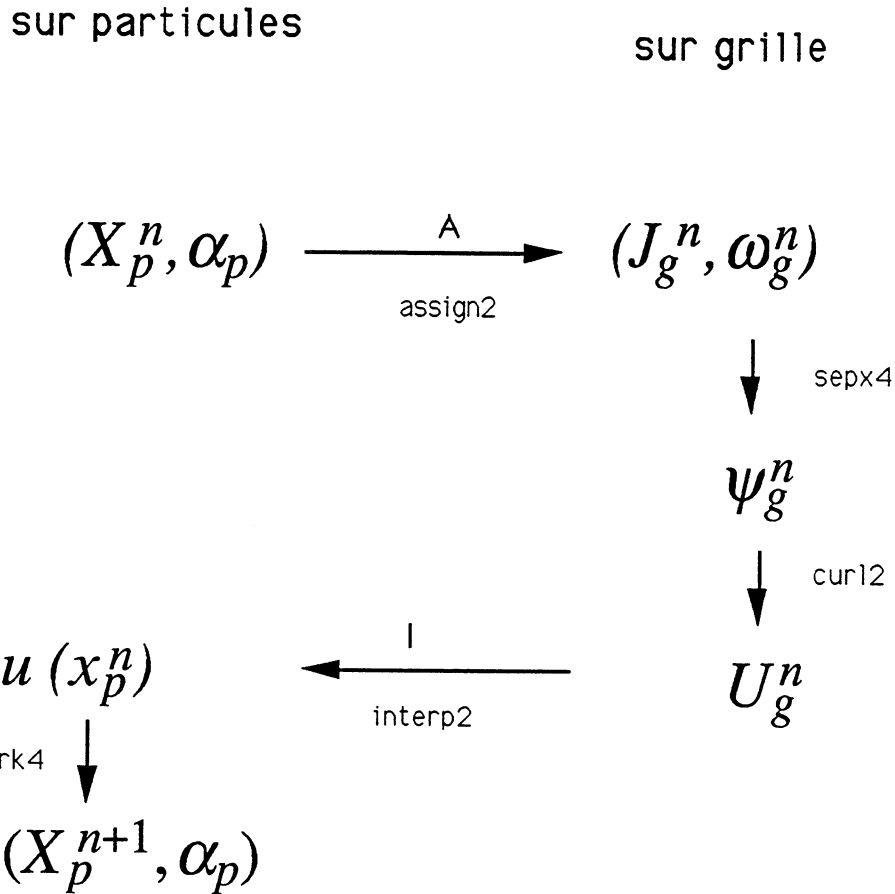


FIGURE 2.3 Diagramme de schéma V.I.C. pour les équations d'Euler

2.1.4 Discrétisation en temps

Maintenant, il ne reste qu'à résoudre le système des équations différentielles ordinaires pour x_p^n . Théoriquement, on peut prendre toutes les sortes de méthodes numériques. Dans la pratique, on préfère la *méthode de Runge-Kutta*^{5 6} d'ordre 4 pour obtenir une approximation x_p^{n+1} de la trajectoire $x_p^{h,n}(t_{n+1})$ associée à la vitesse calculée $u^{h,n}$ au temps $t = t_{n+1}$.

⁵ Carl-David-Tolmé Runge, né à Bremen le 30 août 1856 et mort à Göttingen le 3 janvier 1927.

⁶ W. Kutta, 1867 - 1944.

2.1.5 Implémentation

Nous décrivons ici l'implémentation de la méthode VIC.

Le programme de calcul est programmé en **Fortran** et a fonctionné sur une *station de travail SUN*. Il est divisé en différents sous-programmes et nous en présentons un *organigramme*:

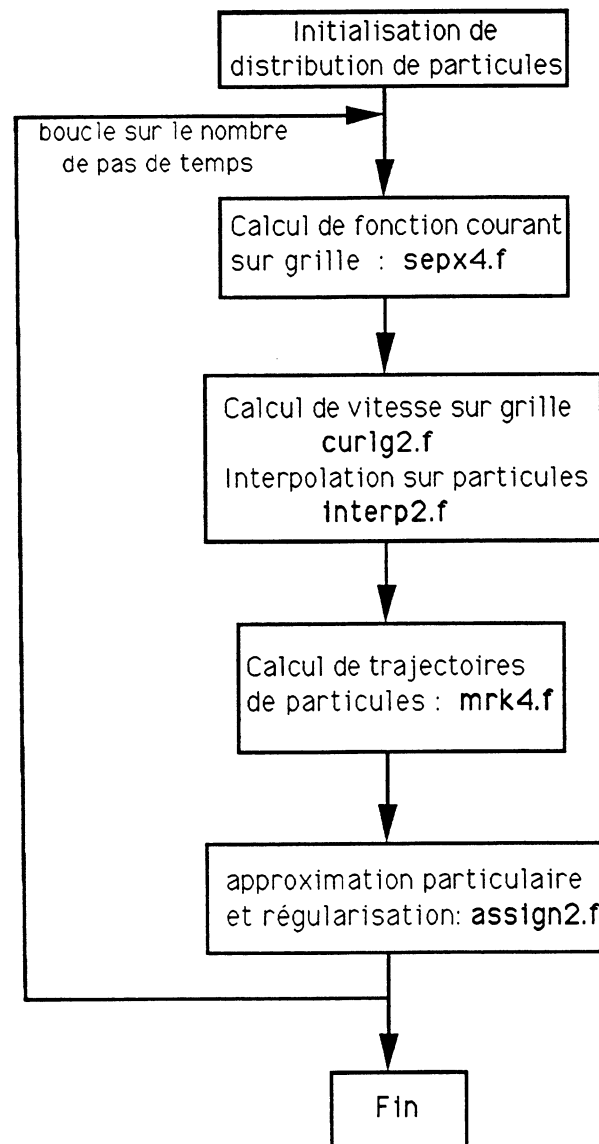


FIGURE 2.4 Organigramme du schéma V.I.C.

2.2 Résultats principaux

On se fixe $m \geq 2$ et suppose que

(H₁) ω_0 est suffisamment régulier;

(H₂) la fonction cut-off ξ est choisie dans la famille des fonctions **B-splines**:

$$\xi = \mathcal{X}^{*(m)};$$

(H₃) $\sum_p |\alpha_p| < +\infty$;

(H₄) il existe des constantes $c > 0$ et $\alpha \geq \beta > 1$ telles que

$$c^{-1}\varepsilon^\alpha \leq h \leq c\varepsilon^\beta.$$

On énonce d'abord le *théorème d'existence et d'unicité des solutions du problème* (\mathbf{E}_ε^h) dont la démonstration peut être réalisée comme d'habitude (voir, par exemple, **P.A. Raviart** [59] (1985)):

THÉORÈME 2.1 *Sous les hypothèses (H₁) – (H₃), alors pour tout $T > 0$, il existe une mesure unique $\omega^h(x, t)$ et une fonction continue unique $u^h(x, t)$, solutions du problème (\mathbf{E}_ε^h).*

Notre principal résultat est le *théorème de convergence* de la méthode VIC pour la résolution des équations d'Euler que l'on énonce de la manière suivante:

THÉORÈME 2.2 *Sous les hypothèses (H₁) – (H₄), alors pour tout $T > 0$, et $s > 0$ arbitrairement petit, il existe deux constantes $\varepsilon_0 > 0$ et $C = C(s) > 0$ indépendantes de ε et h telles que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et tout $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} \max_p |x_p(t) - x_p^h(t)| &\leq \frac{C}{\varepsilon^s} \left\{ \varepsilon^r + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1}} \right\} \\ \|u(\cdot, t) - u^h(\cdot, t)\|_{0, \infty} &\leq \frac{C}{\varepsilon^s} \left\{ \varepsilon^r + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1}} \right\} \end{aligned}$$

■

On va le démontrer dans le Chapitre 5.

2.3 Vérification des propriétés de conservation

Maintenant, on s'intéresse aux invariants de la méthode de couplage particules-grille proposée et on énonce un résultat analogue à celui de la Proposition 1.1

PROPOSITION 2.1 *Sous les hypothèses $(H_1) - (H_3)$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a les invariants suivants pour la méthode particulière proposée:*

(i) (circulation totale)

$$I_0^h(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega^h(x, t) dx = \sum_p \alpha_p = I_0^h(0);$$

(ii) (impulsion linéaire)

$$I_1^h(t) = \int_{\mathbb{R}^2} x \omega^h(x, t) dx = \sum_p \alpha_p x_p^h(t) = I_1^h(0);$$

(iii) (impulsion angulaire)

$$I_2^h(t) = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega^h(x, t) dx = \sum_p \alpha_p |x_p^h(t)|^2 = I_2^h(0);$$

(iv) (énergie totale)

$$I_4^h(t) = \int_{\mathbb{R}^2} |u^h(x, t)|^2 dx = I_4^h(0),$$

Démonstration.(esquisse)

En effet, d'après l'expression explicite de la solution mesure (49), on peut trouver directement

$$\begin{aligned} I_0^h(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_p \alpha_p \delta(x - x_p^h) dx = \sum_p \alpha_p; \\ I_1^h(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_p \alpha_p x \delta(x - x_p^h) dx = \sum_p \alpha_p x_p^h(t), \\ I_2^h(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_p \alpha_p |x|^2 \delta(x - x_p^h) dx = \sum_p \alpha_p |x_p^h(t)|^2 \end{aligned}$$

En dérivant $I_i^h(t)$ par rapport au temps et utilisant (50)-(51), on trouve que

$$\frac{dI_1^h}{dt} = \sum_p \alpha_p u^h(x_p^h(t), t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p,q} \alpha_p \alpha_q \mathcal{L}\{\xi_\varepsilon(x - x_q^h(t))\} (x_p^h(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1(p, q), \\
\frac{dI_2^h}{dt} &= 2 \sum_p \alpha_p x_p^h(t) u^h(x_p^h(t), t) \\
&= \sum_{p,q} \alpha_p \alpha_q (x_p^h(t) + x_q(t)) \mathcal{L}\{\xi_\varepsilon(x - x_q^h(t))\} (x_p^h(t)) \\
&\quad + \sum_{p,q} \alpha_p \alpha_q (x_p^h(t) - x_q(t)) \mathcal{L}\{\xi_\varepsilon(x - x_q^h(t))\} (x_p^h(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_2(p, q)
\end{aligned}$$

Comme la fonction *B-spline* est paire

$$\xi(-x) = \xi(x) \quad \text{et donc} \quad \partial_i \xi(-x) = -\partial_i \xi(x) \quad i = 1, 2$$

on peut vérifier aisément que

$$\begin{aligned}
\sigma_1(p, q) &= \sigma_1(q, p) = -\sigma_1(p, q) \\
\sigma_2(p, q) &= \sum_{p,q} \alpha_p \alpha_q (x_p^h(t) + x_q(t)) \mathcal{L}\{\xi_\varepsilon(x - x_q^h(t))\} (x_p^h(t)) + 0 \\
&= \sigma_2(q, p) = -\sigma_2(p, q)
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\sigma_1(p, q) = \sigma_2(p, q) = 0$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned}
I_1^h(t) &= I_1^h(0) \\
I_2^h(t) &= I_2^h(0)
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Méthodes de différences pour le problème de Neumann

On a pour but d'étudier la résolution numérique du problème de Neumann pour l'équation de Poisson, par la méthode des différences finies en maillage fixe, permettant de calculer la fonction de courant. Il s'agit de la discrétisation du laplacien et de l'opérateur de frontière, et de l'estimation de cette approximation en norme discrète $W^{1,\infty}$. L'outil essentiel et efficace est d'utiliser la fonction discrète de Green en maillage prédéterminé. L'estimation maximale est très technique. Cette étude permet de caractériser le comportement de discrétisation aux différences finies.

3.1 Introduction

On se propose d'abord d'étudier la *stabilité* et la *consistance* du schéma $P_\epsilon(\omega)$ de discrétisation du problème de Neumann, défini dans le chapitre précédent, en ayant recours à une méthode introduite par **R. Courant**¹, **K. Friedrichs & H. Lewy**(1928) [29]. L'idée principale est de chercher d'abord une *fonction de Green*² discrète pour l'opérateur de différence Δ_ϵ (c'est-à-dire celui du schéma à cinq points) vérifiant:

$$\begin{aligned} -\Delta_\epsilon G^\epsilon(x, y) &= \epsilon^{-2} \delta(x, y) & x \in \Omega_\epsilon \\ G_n^\epsilon(x, y) &= 0 & x \in \Gamma_\epsilon \end{aligned}$$

où $\delta(x, y)$ est le *symbole de Kronecker*³:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

Néanmoins la matrice des coefficients du système est singulière avec $\text{rang} = N_I - 1$, où N_I est le nombre de points intérieurs de $\bar{\Omega}_\epsilon$. On cherche à franchir cette difficulté et on définit une *fonction de Green discrète au sens généralisé*, encore notée par $G^\epsilon(x, y)$ vérifiant

$$-\Delta_\epsilon G^\epsilon(x, y) = \epsilon^{-2} \delta(x, y) - N_I^{-1} \epsilon^{-2}, \quad x \in \Omega_\epsilon \quad (53)$$

$$G_n^\epsilon(x, y) = 0 \quad x \in \Gamma_\epsilon \quad (54)$$

Comme

$$\sum_x \epsilon^{-2} (\delta(x, y) - N_I^{-1}) = 0$$

(53)-(54) admet donc *une solution unique à une constante additive près*.

Dans ce qui suit, la *fonction de Green discrète* jouera un rôle tout à fait important et déterministe.

¹Richard Courant, né à Lublinitz le 8 janvier 1888 et mort à New Rochelle 1970.

²George Green, né à Sneinton le 14 juillet 1793 et mort à Sneinton le 31 mars 1841.

³Leopold Kronecker, 1823-1891, né à Leignitz et mort à Berlin.

3.2 Cas d'un ouvert Ω rectangulaire

On considère tout d'abord le cas particulier où Ω est *rectangulaire*.

3.2.1 Représentation de la solution

On donne d'abord le résultat suivant:

LEMME 3.1 *Pour toutes fonctions de grille $u(x)$, $v(x)$, on a*

$$\begin{aligned} (i) \quad & 2(u, \Delta_\varepsilon v) + \sum_{m=1}^d \{ (u_{x_m}, v_{x_m}) + (u_{\bar{x}_m}, v_{\bar{x}_m}) \} = 2B(u, v) \\ (ii) \quad & (u, \Delta_\varepsilon v) - (v, \Delta_\varepsilon u) = B(u, v) - B(v, u) \\ (iii) \quad & \text{Si } v_n(x) = 0, \forall x \in \Gamma_\varepsilon, \text{ alors } B(u, v) = 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \sum_{m=1}^d B_m(u, v) \\ B_m(u, v) &= \frac{\varepsilon^{d-1}}{2} \sum_{x \in \Gamma_{\varepsilon, m}^+} (u(x) + u(x - \varepsilon e_m)) \cdot v_n(x) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^{d-1}}{2} \sum_{x \in \Gamma_{\varepsilon, m}^-} (u(x) + u(x + \varepsilon e_m)) \cdot v_n(x) \end{aligned}$$

Démonstration. La dernière assertion est évidente et on va démontrer les deux premières. Pour des raisons de techniques de simplicité, on suppose

$$\Omega_\varepsilon = \{ x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_d), \varepsilon \leq x_m \leq (J_m - 1)\varepsilon, m = 1, 2, \dots, d \}$$

et on note

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_d) = (\hat{x}_m, x_m), \quad x \in \mathbb{R}_\varepsilon^d, \hat{x}_m \in \mathbb{R}_\varepsilon^{d-1} \\ j &= (j_1, \dots, j_{m-1}, j_m, j_{m+1}, \dots, j_d) = (\hat{j}_m, j_m), \quad j \in \mathbb{Z}^d, \hat{j}_m \in \mathbb{Z}^{d-1} \end{aligned}$$

Alors, on écrit d'après la *transformée d'Abel*⁴, pour tout $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\varepsilon \sum_{j_m=1}^{J_m-1} \left\{ (v_{x_m}(x))_{\bar{x}_m} \cdot u(x) + u_{x_m}(x) \cdot v_{x_m}(x) \right\}$$

⁴Niels Henrik Abel, né à Finnoy le 25 août 1802 et mort à Froland le 6 avril 1829.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_m=1}^{J_m-1} \{ (v_{x_m}(x) - v_{x_m}(x - \varepsilon e_m)) \cdot u(x) + (u(x + \varepsilon e_m) - u(x)) \cdot v_{x_m}(x) \} \\
&= \sum_{j_m=1}^{J_m-1} \{ (v_{x_m}(\hat{x}_m, j_m \varepsilon) - v_{x_m}(\hat{x}_m, (j_m - 1) \varepsilon)) \cdot u(\hat{x}_m, j_m \varepsilon) \\
&\quad + (u(\hat{x}_m, (j_m + 1) \varepsilon) - u(\hat{x}_m, j_m \varepsilon)) \cdot v_{x_m}(\hat{x}_m, j_m \varepsilon) \} \\
&= \sum_{j_m=1}^{J_m-1} u(\hat{x}_m, (j_m + 1) \varepsilon) \cdot v_{x_m}(\hat{x}_m, j_m \varepsilon) - \sum_{j_m=0}^{J_m-2} u(\hat{x}_m, (j_m + 1) \varepsilon) \cdot v_{x_m}(\hat{x}_m, j_m \varepsilon) \\
&= u(\hat{x}_m, J_m \varepsilon) \cdot v_{x_m}(\hat{x}_m, (J_m - 1) \varepsilon) - u(\hat{x}_m, \varepsilon) \cdot v_{x_m}(\hat{x}_m, 0) \\
&= u(\hat{x}_m, J_m \varepsilon) \cdot v_n(\hat{x}_m, J_m \varepsilon) + u(\hat{x}_m, \varepsilon) \cdot v_n(\hat{x}_m, 0), \quad m = 1, 2, \dots, d \quad (55)
\end{aligned}$$

On peut réécrire également

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \sum_{j_m=1}^{J_m-1} \{ (v_{\bar{x}_m}(x))_{x_m} \cdot u(x) + u_{\bar{x}_m}(x) \cdot v_{\bar{x}_m}(x) \} \\
&= u(\hat{x}_m, (J_m - 1) \varepsilon) \cdot v_n(\hat{x}_m, J_m \varepsilon) + u(\hat{x}_m, 0) \cdot v_n(\hat{x}_m, 0) \quad (56)
\end{aligned}$$

On a donc en combinant (55)-(56)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \sum_{j_m=1}^{J_m-1} \{ 2u(x) \Delta_{\varepsilon, m} v(x) + u_{x_m}(x) \cdot v_{x_m}(x) + u_{\bar{x}_m}(x) \cdot v_{\bar{x}_m}(x) \} \\
&= (u(\hat{x}_m, J_m \varepsilon) + u(\hat{x}_m, (J_m - 1) \varepsilon)) \cdot v_n(\hat{x}_m, J_m \varepsilon) \\
&\quad + (u(\hat{x}_m, 0) + u(\hat{x}_m, \varepsilon)) \cdot v_n(\hat{x}_m, 0) \quad (57)
\end{aligned}$$

d'où l'on obtient en multipliant par ε^{d-1}

$$\begin{aligned}
&2(u, \Delta_{\varepsilon, m} v) + (u_{x_m}, v_{x_m}) + (u_{\bar{x}_m}, v_{\bar{x}_m}) \\
&= \varepsilon^d \sum_{x \in \Omega_\varepsilon} (2u(x) \cdot \Delta_{\varepsilon, m} \cdot v(x) + u_{x_m}(x) \cdot v_{x_m}(x) + u_{\bar{x}_m}(x) \cdot v_{\bar{x}_m}(x)) \\
&= \left\{ \varepsilon \sum_{j_1=1}^{J_1-1} \right\} \left\{ \varepsilon \sum_{j_2=1}^{J_2-1} \right\} \cdots \left\{ \varepsilon \sum_{j_m=1}^{J_m-1} (\dots) \right\} \\
&= \varepsilon^{d-1} \sum_{j_m=1}^{J_m-1} \left\{ \varepsilon \sum_{j_m=1}^{J_m-1} (\dots) \right\} = \varepsilon^{d-1} \sum_{j_m} \{ \dots \} \\
&= \varepsilon^{d-1} \sum_{x \in \Gamma_{\varepsilon, m}^+} (u(x) + u(x - \varepsilon e_m)) \cdot v_n(x) \\
&\quad + \varepsilon^{d-1} \sum_{x \in \Gamma_{\varepsilon, m}^-} (u(x) + u(x + \varepsilon e_m)) \cdot v_n(x) \\
&= 2B_m(u, v) \quad (58)
\end{aligned}$$

On a finalement en le sommant pour $m = 1, 2, \dots, d$

$$2(u, \Delta_\varepsilon v) + \sum_{m=1}^d \{(u_{x_m}, v_{x_m}) + (u_{\bar{x}_m}, v_{\bar{x}_m})\} = 2 \sum_{m=1}^d B_m(u, v) = 2B(u, v) \quad (59)$$

De la même façon, on obtient ainsi pour v, u

$$2(v, \Delta_\varepsilon u) + \sum_{m=1}^d \{(v_{x_m}, u_{x_m}) + (v_{\bar{x}_m}, u_{\bar{x}_m})\} = 2B(v, u)$$

On en déduit que

$$(u, \Delta_\varepsilon v) - (v, \Delta_\varepsilon u) = B(u, v) - B(v, u)$$

■

Grâce au Lemme 3.1, on peut avoir une représentation de la solution ψ du problème $P_\varepsilon(\omega)$ à l'aide de la fonction de Green discrète $G^\varepsilon(x, y)$. De manière précise, on a le résultat suivant:

LEMME 3.2 *Soit $G^\varepsilon(x, y)$ la fonction de Green discrète définie par (53)-(54). Alors la solution du problème $P_\varepsilon(\omega)$ est donnée explicitement par*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega_\varepsilon} G^\varepsilon(x, y) \cdot \omega(y) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=1}^2 \sum_{y \in \Gamma_{\varepsilon, m}^+} \{G^\varepsilon(x, y) + G^\varepsilon(x, y - \varepsilon e_m)\} \cdot g_\omega(y) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=1}^2 \sum_{y \in \Gamma_{\varepsilon, m}^-} \{G^\varepsilon(x, y) + G^\varepsilon(x, y + \varepsilon e_m)\} \cdot g_\omega(y) \end{aligned} \quad (60)$$

De plus, on a l'estimation suivante:

$$\|\psi\|_{\infty, \bar{\Omega}_\varepsilon} \leq C \left\{ \|\omega\|_{\infty, \Omega_\varepsilon} + \|g_\omega\|_{\infty, \Gamma_\varepsilon} \right\} \sup_{x, y \in \bar{\Omega}_\varepsilon} |G^\varepsilon(x, y)| \quad (61)$$

Démonstration. Comme

$$\begin{aligned} (\psi, -\Delta_\varepsilon G^\varepsilon(x, \cdot)) &= (\psi, \varepsilon^{-2} \delta(x, \cdot) - N_I^{-1} \varepsilon^{-2}) \\ &= \psi(x) - N_I^{-1} \varepsilon^{-2} \left(\varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega_\varepsilon} \psi(y) \right) = \psi(x) \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.1 (ii)-(iii) et en remarquant que

$$u = \psi, v = G^\varepsilon, v_n = 0 \Rightarrow B(u, v) = 0$$

on a

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -(\psi, \Delta_\varepsilon G^\varepsilon(x, \cdot)) \\ &= B(G^\varepsilon(x, \cdot), \psi) - (G^\varepsilon(x, \cdot), \Delta_\varepsilon \psi) \\ &= B(G^\varepsilon(x, \cdot), g_\omega) + (G^\varepsilon(x, \cdot), \omega) \\ &= \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega_\varepsilon} G^\varepsilon(x, y) \cdot \omega(y) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=1}^2 \sum_{y \in \Gamma_{\varepsilon, m}^+} \{G^\varepsilon(x, y) + G^\varepsilon(x, y - \varepsilon e_m)\} \cdot g_\omega(y) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=1}^2 \sum_{y \in \Gamma_{\varepsilon, m}^-} \{G^\varepsilon(x, y) + G^\varepsilon(x, y + \varepsilon e_m)\} \cdot g_\omega(y) \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau le Lemme 3.1 (i) pour $u = 1$, $v = \psi$, on obtient

$$B(1, \psi) - (1, \Delta_\varepsilon \psi) = 0$$

Par conséquent, on a pour toute constante C

$$\begin{aligned} &B(G^\varepsilon + C, \psi) - (G^\varepsilon(x, \cdot) + C, \Delta_\varepsilon \psi) \\ &= B(G^\varepsilon, \psi) - (G^\varepsilon(x, \cdot), \Delta_\varepsilon \psi) + C \{B(1, \psi) - (1, \Delta_\varepsilon \psi)\} \\ &= B(G^\varepsilon, \psi) - (G^\varepsilon(x, \cdot), \Delta_\varepsilon \psi) = \psi(x) \end{aligned} \tag{62}$$

Cela prouve que $G^\varepsilon(x, y)$ peut être ajouté à une constante quelconque. Grâce à la représentation de la solution ψ , on obtient aisément l'estimation (61) et la démonstration est donc achevée. \blacksquare

3.2.2 Estimation maximale d'erreur

Dans le cas où Ω est rectangulaire, on peut établir un résultat de stabilité qui joue le rôle du *principe du maximum*.

LEMME 3.3 *Soit Ω rectangulaire. Si la fonction de grille ψ est solution du problème $P_\varepsilon(\omega)$, on a alors*

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\infty, \bar{\Omega}_\varepsilon} &\leq c_1 \left(\frac{\pi}{2} |\log \varepsilon| + c_2 \right) \left\{ \|\Delta_\varepsilon \psi\|_{\infty, \Omega_\varepsilon} + \|\psi_n\|_{\infty, \Gamma_\varepsilon} \right\} \\ \|\partial_m \psi\|_{\infty, \bar{\Omega}_\varepsilon} &\leq c_2 \|\Delta_\varepsilon \psi\|_{\infty, \bar{\Omega}_\varepsilon}, \quad \text{si } \psi_n(x) = 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon \end{aligned}$$

où $\partial_m \psi$ ($m = 1, 2$) sont définis par (44)-(45).

Démonstration. Grâce au Lemme 3.2, il ne nous reste qu'à majorer $G^\varepsilon(x, y)$. Dans notre cas où Ω_ε est un rectangle, on peut donc construire une *fonction discrète de Green* sur Ω_ε en ayant recours à la *méthode de Fourier*⁵. Sans perdre de généralité, on suppose que $J\varepsilon = 1$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$ où $x_m = (2j_m + 1)/(2J)$, $m = 1, 2$. Alors, $x \in \Omega_\varepsilon$ si $0 \leq j_m \leq J - 1$ et $x \in \Gamma_\varepsilon$ si $j_m = -1$ ou J . En posant d'abord

$$\varphi_{\ell_1 \ell_2}(x) = \cos \ell_1 \pi x_1 \cos \ell_2 \pi x_2, \quad 0 \leq \ell_m \leq J - 1 \quad (m = 1, 2) \quad (63)$$

tels que

$$-\Delta_\varepsilon \varphi_{\ell_1 \ell_2}(x) = \lambda_{\ell_1 \ell_2} \varphi_{\ell_1 \ell_2}(x) \quad x \in \Omega_\varepsilon \quad (64)$$

$$\varphi_{\ell_1 \ell_2, n}(x) = 0 \quad x \in \Gamma_\varepsilon \quad (65)$$

d'où l'on obtient

$$\lambda_{\ell_1 \ell_2} = 4\varepsilon^{-2} \left(\sin^2 \frac{\ell_1 \pi \varepsilon}{2} + \sin^2 \frac{\ell_2 \pi \varepsilon}{2} \right), \quad 0 \leq \ell_m \leq J - 1 \quad (m = 1, 2) \quad (66)$$

En vertu de l'*orthogonalité des fonctions trigonométriques*, on peut vérifier sans peine que

$$\sum_{x \in \Omega_\varepsilon} \varphi_{\ell_1 \ell_2}(x) \varphi_{\ell'_1 \ell'_2}(x) = \begin{cases} 0, & \ell_1 \neq \ell'_1 \text{ ou } \ell_2 \neq \ell'_2 \\ J^2/2, & \ell_m = \ell'_m (m = 1, 2), \ell_1 \ell_2 = 0 \\ J^2/4, & \ell_m = \ell'_m (m = 1, 2), \ell_1 \ell_2 \neq 0 \end{cases} \quad (67)$$

⁵Jean-Baptiste Joseph Fourier, né à Auxerre le 21 mars 1768 et mort à Paris le 17 mai 1830.

Posant maintenant

$$G^\varepsilon(x, y) = \sum_{\ell_1=0}^{J-1} \sum_{\ell_2=0}^{J-1} a_{\ell_1 \ell_2}(y) \varphi_{\ell_1 \ell_2}(x) \quad (68)$$

et utilisant également les relations (64)-(66), on obtient donc

$$\begin{aligned} -\Delta_\varepsilon G^\varepsilon(x, y) &= \sum_{\ell_1=0}^{J-1} \sum_{\ell_2=0}^{J-1} a_{\ell_1 \ell_2}(y) \lambda_{\ell_1 \ell_2} \varphi_{\ell_1 \ell_2}(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon \\ G_n^\varepsilon(x, y) &= 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \end{aligned}$$

D'autre part, $G^\varepsilon(x, y)$ doit vérifier aussi

$$-\Delta_\varepsilon G^\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-2} \delta(x, y) - N_I \varepsilon^{-2} \quad x \in \Omega_\varepsilon$$

Autrement dit, on cherche $a_{\ell_1 \ell_2}(y)$ tels que

$$\sum_{\ell_1=0}^{J-1} \sum_{\ell_2=0}^{J-1} a_{\ell_1 \ell_2}(y) \lambda_{\ell_1 \ell_2} \varphi_{\ell_1 \ell_2}(x) = \varepsilon^{-2} \delta(x, y) - N_I \varepsilon^{-2} \quad x \in \Omega_\varepsilon \quad (69)$$

En faisant le produit scalaire de (69) avec $\varphi_{\ell_1 \ell_2}(x)$ et utilisant (67), on trouve immédiatement que

$$a_{\ell_1 \ell_2}(y) = \begin{cases} \frac{2 \cos \ell_1 \pi y_1 \cos \ell_2 \pi y_2}{\lambda_{\ell_1} \lambda_{\ell_2}}, & \text{si } \ell_1 \ell_2 = 0, \quad 0 \leq \ell_m \leq J-1 \\ \frac{4 \cos \ell_1 \pi y_1 \cos \ell_2 \pi y_2}{\lambda_{\ell_1} \lambda_{\ell_2}}, & \text{si } \ell_1 \ell_2 \neq 0, \quad 0 \leq \ell_m \leq J-1 \end{cases} \quad (70)$$

Puisque $\lambda_{00} = 0$, $a_{00}(y)$ peut être choisi librement et on prend simplement $a_{00}(y) = 0$. Alors on obtient une *représentation de la fonction de Green discrète sur le rectangle Ω_ε* :

$$\begin{aligned} G^\varepsilon(x, y) &= \varepsilon^2 \sum_{\ell_1=1}^{J-1} \sum_{\ell_2=1}^{J-1} \frac{\cos \ell_1 \pi x_1 \cos \ell_2 \pi x_2 \cos \ell_1 \pi y_1 \cos \ell_2 \pi y_2}{\sin^2 \frac{\ell_1 \pi \varepsilon}{2} + \sin^2 \frac{\ell_2 \pi \varepsilon}{2}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{\ell_1=1}^{J-1} \frac{\cos \ell_1 \pi x_1 \cos \ell_1 \pi y_1}{\sin^2 \frac{\ell_1 \pi \varepsilon}{2}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{\ell_2=1}^{J-1} \frac{\cos \ell_2 \pi x_2 \cos \ell_2 \pi y_2}{\sin^2 \frac{\ell_2 \pi \varepsilon}{2}} \end{aligned} \quad (71)$$

Puisque $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ pour tout $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, on a donc

$$|G^\varepsilon(x, y)| \leq \sum_{\ell_1=1}^{J-1} \sum_{\ell_2=1}^{J-1} \frac{1}{\ell_1^2 + \ell_2^2} + \sum_{\ell_1=1}^{J-1} \frac{1}{\ell_1^2}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{\ell_1=2}^{J-1} \sum_{\ell_2=2}^{J-1} \frac{1}{\ell_1^2 + \ell_2^2} + \sum_{\ell_1=1}^{J-1} \frac{1}{1 + \ell_1^2} + \sum_{\ell_2=2}^{J-1} \frac{1}{1 + \ell_2^2} + \sum_{\ell_1=1}^{J-1} \frac{1}{\ell_1^2} \\
 &\leq \sum_{\ell_1=2}^{J-1} \sum_{\ell_2=2}^{J-1} \frac{1}{\ell_1^2 + \ell_2^2} + 3 \sum_{\ell_1=1}^{J-1} \frac{1}{\ell_1^2} = I_0 + 3I_1
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{\ell_1=1}^{J-1} \frac{1}{\ell_1^2} \leq \sum_{\ell_1=1}^{\infty} \frac{1}{\ell_1^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \left(\frac{1}{|x|} \text{ est une fonction décroissante} \right) \\
 I_0 &= \sum_{\ell_1=2}^{J-1} \sum_{\ell_2=2}^{J-1} \frac{1}{\ell_1^2 + \ell_2^2} \leq \int_1^J \int_1^J \frac{dx_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2} \leq \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^{\sqrt{2}J} \frac{r dr}{r^2} = \frac{\pi}{2} \log \sqrt{2} J
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$|G^\varepsilon(x, y)| \leq \frac{\pi}{2} \log \sqrt{2} J + \frac{\pi^2}{2} \leq \frac{\pi}{2} (|\log \varepsilon| + C) \quad (72)$$

D'autre part, grâce à l'estimation intérieure discrète de Schauder (voir A. Brandt (1966) [13]), si $\psi_n(x) = 0$ sur Γ_ε , on a alors

$$|\psi|_{1, \infty, \Omega_\varepsilon} \leq C \|\Delta_\varepsilon \psi\|_{0, \infty, \Omega_\varepsilon}$$

ceci nous donne l'estimation maximale annoncée. ■

Remarque. Si $\Psi(x) \in C^4$ est solution du problème $P_R(\omega)$ et ψ est solution du problème approché $P_\varepsilon^I(\omega)$, alors $\tilde{\psi} = \Psi - \psi$ vérifie

$$-\Delta_\varepsilon \tilde{\psi}(x) = O(\varepsilon^2), \quad x \in \Omega_\varepsilon \quad (73)$$

$$\tilde{\psi}_n(x) = O(\varepsilon), \quad x \in \Gamma_\varepsilon \quad (74)$$

Selon le Lemme 3.3, on obtient la même estimation que celle de J.H. Giese (1958) [38]:

$$\|\psi - \Psi\|_{\infty, \Omega_\varepsilon} = O(\varepsilon |\log \varepsilon|) \quad (75)$$

3.3 Cas d'un ouvert Ω non rectangulaire

Lorsque l'ouvert Ω n'est plus rectangulaire, il est peu possible d'obtenir une représentation explicite de la fonction discrète de *Green* sur Ω_ε . On montrera comment on peut généraliser la discrétisation et adapter la technique de l'estimation d'erreur, grâce à une étude approfondie des propriétés de la fonction de *Green* discrète.

3.3.1 Nouveaux opérateurs d'approximation

Dans le cas général, on s'intéresse à l'analogue discret du problème de *Neumann* pour le *Laplacien* qui a les propriétés suivantes:

- l'approximation de la frontière comporte trois points intérieurs (et un point au bord);
- la matrice de discrétisation du système est de type positif;
- l'erreur de troncature tend vers zero quadratiquement ($\mathcal{O}(\varepsilon^2)$).

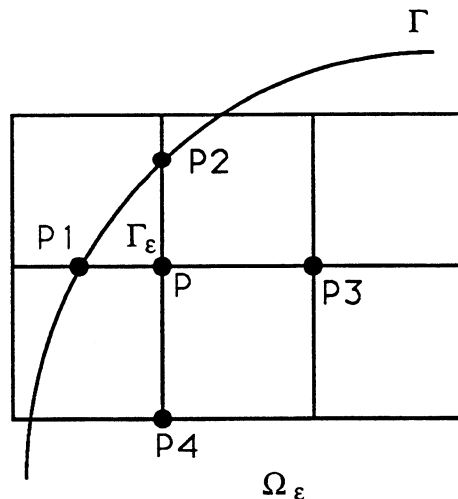


FIGURE 3.1 points au bord

On désigne d'abord par $\bar{\Delta}_\varepsilon$ l'opérateur de Shortley-Weller (voir Shortley & Weller (1938) [65]), l'approximation du Laplacien, sur $\Omega_\varepsilon = \Omega'_\varepsilon \cup \Omega_\varepsilon^*$, définie de la façon suivante: si $x \in \Omega'_\varepsilon$, $\bar{\Delta}_\varepsilon \psi(x) = \Delta_\varepsilon \psi(x)$; si $x \in \Omega_\varepsilon^*$, par exemple, $x - a_m \varepsilon e_m \in \Gamma_\varepsilon$, $x + a_m \varepsilon e_m \in \Omega_\varepsilon$, où $0 < a_m \leq 1$ pour $m = 1, 2$ (voir fig 3.1), on définit alors

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_\varepsilon \psi(x) = & \frac{2}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{1}{a_1(1+a_1)} \psi(x - a_1 \varepsilon e_1) + \frac{1}{1+a_1} \psi(x + \varepsilon e_1) \right. \\ & + \frac{1}{a_2(1+a_2)} \psi(x - a_2 \varepsilon e_2) + \frac{1}{1+a_2} \psi(x + \varepsilon e_2) \\ & \left. - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \psi(x) \right\} \end{aligned} \quad (76)$$

D'après la formule de Taylor, on vérifie aisément que

$$|\bar{\Delta}_\varepsilon \Psi(x) - \Delta \Psi(x)| \leq \begin{cases} c_4 \varepsilon^2 & x \in \Omega'_\varepsilon \quad \Psi \in C^4 \\ c_3 \varepsilon & x \in \Omega_\varepsilon^* \quad \Psi \in C^3 \end{cases} \quad (77)$$

On doit ensuite introduire une approximation, de l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, de la dérivée normale telle que les équations aux différences finies appartenant au problème de Neumann conduisent à une matrice de type positif qui assure le principe du maximum. Pour cela, on construit l'opérateur de frontière de Bramble-Hubbard (1964) [9] au-dessous:

$$\partial_n \psi(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) \left\{ \psi(x) - \psi(x^{(i)}) \right\}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \quad (78)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une fonction de frontière Γ et les trois points intérieurs distincts $x^{(i)} \in \Omega_\varepsilon = \Omega'_\varepsilon \cup \Omega_\varepsilon^*$, $i = 1, 2, 3$ peuvent être choisis tels que pour ε suffisamment petit, $\alpha_i > 0$, $\alpha_i = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, vérifiant de plus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) x_2^{(i)} &= 1, \quad x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in \Omega_\varepsilon \\ \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) x_1^{(i)} (1 + x_2^{(i)} K(x)) &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) (x_1^{(i)2} - x_2^{(i)2}) &= 0 \end{aligned}$$

où $K(x)$ est la courbure de Γ au point $x \in \Gamma$. On peut vérifier aisément que

$$\begin{aligned} & \left| \partial_n \psi(x) - \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \psi(x) + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{x_2^{(i)2} (-\Delta \psi(x))}{2} + x_1^{(i)} x_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial n} \right) \right] \right\} \right| \\ & \leq C \varepsilon^2, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \quad (79)$$

3.3.2 Deuxième schéma discret et son estimation d'erreur

On discrétise maintenant le problème $P_R(\omega)$ d'une autre manière:

pour toutes fonctions données ω , g_ω , on cherche une fonction ψ vérifiant

$$-\bar{\Delta}_\varepsilon \psi(x) = \omega(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus \{x_0\} \quad (80)$$

$$P_\varepsilon^{II}(\omega) \partial_n \psi(x) = g_\omega(x) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) \left\{ \frac{x_2^{(i)^2} \omega(x)}{2} + x_1^{(i)} x_2^{(i)} \frac{\partial g_\omega(x)}{\partial s} \right\}, x \in \Gamma_\varepsilon \quad (81)$$

$$\psi(x_0) = \text{donné}, \quad x_0 \in \Omega'_\varepsilon \quad (82)$$

On peut démontrer que la matrice du système $P_\varepsilon^{II}(\omega)$ est de type positif.

On définit maintenant la fonction discrète de Green, notée par $G_\varepsilon(x, y)$, correspondante à $P_\varepsilon^{II}(\omega)$:

$$-\bar{\Delta}_\varepsilon G_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-2} \delta(x, y), \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus \{x_0\} \quad (83)$$

$$\partial_n G_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-1} \delta(x, y), \quad x \in \Gamma_\varepsilon \quad (84)$$

$$G_\varepsilon(x_0, y) = \delta(x_0, y) > 0 \quad (85)$$

En remarquant que la matrice des coefficients du système $P_\varepsilon^{II}(\omega)$ est positive, et donc inversible ainsi que non-négative: $G_\varepsilon(x, y) \geq 0$. De plus, on a pour toute fonction de grille $\psi(x)$

$$\psi(x) = \varepsilon^{-2} \sum_{y \in \Omega_\varepsilon \setminus \{x_0\}} G_\varepsilon(x, y) (-\Delta_\varepsilon \psi(y)) + \varepsilon \sum_{y \in \Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(x, y) \partial_n \psi(y) + G_\varepsilon(x, x_0) \psi(x_0) \quad (86)$$

En effet, si l'on note

$$\psi_0(x) = \varepsilon^{-2} \sum_{y \in \Omega_\varepsilon \setminus \{x_0\}} G_\varepsilon(x, y) (-\Delta_\varepsilon \psi(y)) + \varepsilon \sum_{y \in \Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(x, y) \partial_n \psi(y) + G_\varepsilon(x, x_0) \psi(x_0)$$

on a ainsi en vertu des relations (80)-(85)

$$-\bar{\Delta}_\varepsilon \psi_0(x) = -\bar{\Delta}_\varepsilon \psi(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus \{x_0\}$$

$$\partial_n \psi_0(x) = \partial_n \psi(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon$$

$$\psi_0(x_0) = \psi(x_0)$$

D'où l'on tire $\psi(x) \equiv \psi_0(x)$. En particulier, si l'on prend $\psi(x) \equiv 1$ dans (86), on a immédiatement

$$G_\varepsilon(x, x_0) = 1, \quad x \in \bar{\Omega}_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$$

Par conséquent, on peut réécrire

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega_\varepsilon \setminus \{x_0\}} G_\varepsilon(x, y) (-\bar{\Delta}_\varepsilon \psi(y)) + \varepsilon \sum_{y \in \Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(x, y) \partial_n \psi(y) \quad (87)$$

Si $\Psi(x)$, $\psi(x)$ sont solutions des problèmes $P_R(\omega)$, $P_\varepsilon^{II}(\omega)$ respectivement, on a alors pour $\tilde{\psi} = \Psi(x) - \psi(x)$

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(x)| \leq & \max_{y \in \Omega_\varepsilon \setminus \{x_0\}} |\Delta_\varepsilon \tilde{\psi}(y)| \left\{ \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega_\varepsilon \setminus \{x_0\}} G_\varepsilon(x, y) \right\} \\ & + \max_{y \in \Omega_\varepsilon^*} |\Delta_\varepsilon \tilde{\psi}(y)| \left\{ \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega_\varepsilon^*} G_\varepsilon(x, y) \right\} \\ & + \max_{y \in \Gamma_\varepsilon} |\partial_n \tilde{\psi}(y)| \left\{ \varepsilon \sum_{y \in \Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(x, y) \right\} \end{aligned} \quad (88)$$

En suivant l'étude des propriétés de $G_\varepsilon(x, y)$ faites par **J.H. Bramble & B.E. Hubbard**(1964) [9] [10] [11], on peut obtenir les estimations suivantes:

$$\varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega'_\varepsilon \setminus \{x_0\}} G_\varepsilon(x, y) \leq c_1 |\log \varepsilon| \quad (89)$$

$$\varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega_\varepsilon^*} G_\varepsilon(x, y) \leq c_2 \varepsilon |\log \varepsilon| \quad (90)$$

$$\varepsilon \sum_{y \in \Gamma'_\varepsilon \setminus \{x_0\}} G_\varepsilon(x, y) \leq c_3 |\log \varepsilon| \quad (91)$$

Alors, on en déduit que

$$\max_{x \in \bar{\Omega}_\varepsilon} |\Psi(x) - \psi(x)| \leq C \varepsilon^2 |\log \varepsilon|, \quad \text{si } \Psi \in C^4 \quad (92)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε .

3.3.3 Estimations de l'erreur de discrétisation de dérivées

Il est important d'avoir l'information concernant le comportement des erreurs de troncature. Dans notre cas, on doit plutôt avoir la connaissance des erreurs des *différences divisées*. Par exemple, si l'erreur d'une telle approximation est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, il est évident que l'erreur de la différence divisée est au moins en $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Il est plus intéressant de demander quand les erreurs des différences divisées sont aussi d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Pour cela, on considère maintenant l'approximation de la solution du problème suivant

$$-\Delta \Psi(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (93)$$

$$\Psi(x) = g(x), \quad x \in \Gamma \quad (94)$$

En utilisant l'opérateur de *Shortley-Weller* $\bar{\Delta}_\varepsilon$ approché du Laplacien Δ , on le résout par le schéma suivant:

$$-\bar{\Delta}_\varepsilon \psi(x) = f(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon = \Omega'_\varepsilon \cup \Omega_\varepsilon^* \quad (95)$$

$$\psi(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon \quad (96)$$

Si l'on suppose de plus que la solution du problème suivant

$$-\Delta \psi_0(x) = -\frac{1}{12} (\Psi_{x_1}^{(4)}(x) + \Psi_{x_2}^{(4)}(x)) \quad x \in \Omega \quad (97)$$

$$\psi_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma \quad (98)$$

existe et a ses *dérivées secondes lipschitziennes continues*⁶, et que l'on remarque que pour tout $\Psi(x) \in C^6(\Omega)$

$$-\Delta_\varepsilon \Psi(x) - \Delta \Psi(x) = -\frac{\varepsilon^2}{12} (\Psi_{x_1}^{(4)}(x) + \Psi_{x_2}^{(4)}(x)) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = -\varepsilon^2 \Delta \psi_0(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

on peut trouver aisément le *développement asymptotique* suivant (*méthode de Richardson*):

LEMME 3.4 Pour tout $x \in \bar{\Omega}_\varepsilon$

$$\Psi(x) - \psi(x) = \psi_0(x) \varepsilon^2 + \psi_1(x, \varepsilon) \varepsilon^3 \quad (99)$$

où $\psi_1(x, \varepsilon)$ est une fonction uniformément bornée par rapport à x et ε .

⁶Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, né à Königsberg le 14 mai 1832 et mort à Bonn le 7 octobre 1903.

D'où l'on peut obtenir l' *estimation uniforme d'erreur* suivante:

LEMME 3.5 Soit $e(x) = \Psi(x) - \psi(x)$. Alors

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Omega'_\varepsilon} |e(x)| &= O(\varepsilon^2) \\ \frac{|e(x) - e(y)|}{|x - y|} &= O(\varepsilon^2), \quad \forall |x - y| = \varepsilon \end{aligned}$$

On cherche ensuite à trouver une *formule discrète de la moyenne*. Pour cela, on introduit la solution élémentaire g_ε de telle sorte que

$$-\Delta_\varepsilon g_\varepsilon(y, x) = \varepsilon^{-2} \delta(y, x), \quad y \in \Omega'_\varepsilon \quad (100)$$

Pour tout $x \in \Omega'_\varepsilon$ fixé, on note $r = r(y) = |y - x|$, $\forall y \in \Omega'_\varepsilon$. On choisit r_1, r_2 avec $r_1 < r_2$, les rayons des cercles concentriques de centre x , noté respectivement par $B(r_i, x)$ ($i = 1, 2$), tels que $B(r, x) \subset \Omega$ lorsque $r \leq r_2 + \varepsilon$. On définit une *fonction indéfiniment différentiable* $\phi(y, x)$ vérifiant

$$\phi(y, x) = \begin{cases} 1, & r < r_1 \\ 0, & r \geq r_2 \end{cases} \quad (101)$$

et posons

$$\bar{g}_\varepsilon(y, x) = \phi(y, x) g_\varepsilon(y, x) \quad (102)$$

Pour toute fonction de grille w , on y applique alors l' *identité de Green*

$$\varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega'_\varepsilon} w(y) \Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x) = \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega'_\varepsilon} \bar{g}_\varepsilon(y, x) \Delta_\varepsilon w(y) \quad (103)$$

En faisant la convolution entre (100) et $w(y)$, on obtient d'après (103) pour tout $x \in \Omega'_\varepsilon$

$$w(x) = \varepsilon^2 \sum_{y \neq x} w(y) \Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x) - \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega'_\varepsilon} \bar{g}_\varepsilon(y, x) \Delta_\varepsilon w(y) \quad (104)$$

Puisque $\Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x) = 0$ si $x \neq y$ et $y \in B(r, x)$ lorsque $r > r_1$, on a donc pour ε beaucoup plus petit que r_1

$$w(x) = \varepsilon^2 \sum_{r \geq r_1 - \varepsilon} w(y) \Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x) - \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega'_\varepsilon} \bar{g}_\varepsilon(y, x) \Delta_\varepsilon w(y) \quad (105)$$

En particulier, si l'on prend par exemple

$$w(x) = \psi_{\bar{x}_m}(x) \quad m = 1, 2$$

où ψ est une fonction de grille quelconque, on trouve

$$\begin{aligned} & \psi_{\bar{x}_m}(x) \\ &= \varepsilon^2 \sum_{r \geq r_1 - \varepsilon} \psi_{\bar{y}_m}(y) \Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x) - \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega'_\varepsilon} \bar{g}_\varepsilon(y, x) \Delta_\varepsilon \psi_{\bar{y}_m}(y) \\ &= \varepsilon^2 \sum_{r \geq r_1 - \varepsilon} \psi(y) (\Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x))_{\bar{y}_m} - \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega'_\varepsilon} \bar{g}_\varepsilon(y, x) (\Delta_\varepsilon \psi(y))_{\bar{y}_m} \end{aligned} \quad (106)$$

D'après l'analyse des propriétés de la fonction de Green faite par Duffin(1956) [32], (1958) [33] et Forsythe & Wasow(1960) [37], il existe une constante $\tilde{c}_1 > 0$ indépendante de ε telle que

$$\left| \varepsilon^2 \sum_{y \in \Omega'_\varepsilon} \bar{g}_\varepsilon(y, x) \right| \leq \tilde{c}_1 \quad (107)$$

$$\left| (\Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x))_{\bar{y}_m} \right| \leq \tilde{c}_1 \quad \text{pour } r \geq r_1 - \varepsilon \quad (108)$$

Alors, on déduit de (106)-(108) que

$$\left| \psi_{\bar{x}_m}(x) \right| \leq c_1 \left\{ \left| \psi \right|_{\infty, \Omega'_\varepsilon} + \max_{r \leq r_2 + \varepsilon} \left| (\Delta_\varepsilon \psi)_{\bar{y}_m}(y) \right| \right\} \quad (109)$$

où $c_1 > 0$ est une constante indépendante de ε . D'ailleurs, comme $\Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x)$ est suffisamment régulier pour $r \geq r_1 - \varepsilon$, alors pour ε suffisamment petit, la différence divisée quelconque d'ordre $n \geq 1$ notée par D_ε^n , de $\Delta_\varepsilon \bar{g}_\varepsilon(y, x)$, est bornée et par conséquent il existe une constante c_n indépendante de ε telle que

$$\left| D_\varepsilon^n \psi(x) \right| \leq c_n \left\{ \left| \psi \right|_{\infty, \Omega'_\varepsilon} + \max_{r \leq r_2 + \varepsilon} \left| D_\varepsilon^n (\Delta_\varepsilon \psi(y)) \right| \right\}, \quad n \geq 1 \quad (110)$$

où ψ est une fonction de grille quelconque. Lorsque l'on prend $\Psi(x)$, $\psi(x)$ solutions des problèmes exacts et approchés, on a pour leur différence

$$\tilde{\psi}(x) = \Psi(x) - \psi(x)$$

$$\left| D_\varepsilon^n \tilde{\psi}(x) \right| \leq c_n \left\{ \left| \tilde{\psi} \right|_{\infty, \Omega'_\varepsilon} + \max_{r \leq r_2 + \varepsilon} \left| D_\varepsilon^n (\Delta_\varepsilon \tilde{\psi}) \right| \right\} \quad (111)$$

Si $\Psi(x)$ est suffisamment régulier dans l'intérieur de Ω , on peut vérifier par le développement de Taylor que

$$\left| D_\varepsilon^n (\Delta_\varepsilon \tilde{\psi}) \right| \leq c_n^* \varepsilon^2 \quad (112)$$

où $c_n^* > 0$ est une constante indépendante de ε , mais dépendante des valeurs des dérivées de certains hauts ordres de Ψ dans des *sous-domaines compacts* $B(r, x)$ pour $r \leq r_2 + \varepsilon$ de Ω . Par conséquent, on a sans égard pour la condition aux limites

$$|D_\varepsilon^n \tilde{\psi}(x)| \leq c_n \left\{ |\tilde{\psi}|_{\infty, \Omega'_\varepsilon} + c_n^* \varepsilon^2 \right\} \quad (113)$$

D'autre part, l'estimation $|\tilde{\psi}|_{\infty, \Omega_\varepsilon}$ dépend bien entendu du problème particulier aux limites et de l'approximation utilisée à la frontière et au bord. Pour le problème de *Neumann* et la discrétisation correspondante, définie par (80)-(82), on obtient selon (92)

$$|\tilde{\psi}|_{\infty, \Omega_\varepsilon} = O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|) \quad (114)$$

on déduit de (111)-(114) que

$$|D_\varepsilon^n(\Psi(x) - \psi(x))| = O(\varepsilon^2 + \varepsilon^2 |\log \varepsilon|) = O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|) \quad (115)$$

Vu que

$$\text{curl } \Psi(x) - \text{curl}^\varepsilon \psi(x) = (\text{curl} - \text{curl}^\varepsilon) \Psi(x) + \text{curl}^\varepsilon (\Psi(x) - \psi(x))$$

il s'ensuit finalement que

$$\max_{x \in \Omega_\varepsilon} |\text{curl } \Psi(x) - \text{curl}^\varepsilon \psi(x)| \leq C(\varepsilon^2 + \varepsilon^2 |\log \varepsilon|) \quad (116)$$

En résumé, on énonce l'estimation des dérivées de l'erreur $\Psi - \psi$:

LEMME 3.6 *Supposons que Ω est un ouvert borné de frontière Γ assez régulière. Si $\Psi(x) \in C^6(\Omega)$, $\psi(x)$ sont respectivement les solutions des problèmes $P_R(\omega)$ et $P_\varepsilon^{II}(\omega)$, on a alors*

$$|\Psi - \psi|_{k, \infty, \Omega_\varepsilon} \leq C \varepsilon^2 |\log \varepsilon|, \quad k = 0, 1 \quad (117)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε .

Chapitre 4

Approximation particulière et régularisation

L'objectif du présent chapitre est de nous amener peu à peu dans le "vif du sujet" de l'Approximation particulière et sa régularisation. Pour commencer, on expose sans démonstration le principe de l'approximation particulière ainsi que les résultats classiques pour le problème modèle de l'équation de convection et l'on précise également les notations qui seront utilisées dans la suite. On présente ensuite la famille des fonctions B-splines qui joueront un double rôle important dans le cadre de méthodes de régularisation et dans le cadre de méthodes d'interpolation. Grâce à eux, on établit le passage inversible entre les particules et le maillage préétabli. Finalement, on évoque la possibilité d'accélération de la convergence à l'aide d'une technique itérative.

4.1 Solutions des équations hyperboliques linéaires

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d de frontière Γ . On désigne par $n = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ le vecteur unitaire de la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω . On considère le *problème de Cauchy mixte*¹ pour l'équation modèle suivante, l'*équation de convection sous forme conservative*:

étant donné une fonction $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ et une fonction $g : \Sigma_T^- \rightarrow \mathbb{R}^1$, on cherche une fonction $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$ telle que

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i u) + a_0 u = f, \quad \text{dans } Q_T \quad (118)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \text{dans } \Omega \quad (119)$$

$$u = g, \quad \text{sur } \Sigma_T^- \quad (120)$$

où

$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$

$$\Sigma_T^- = \{(x, t); x \in \Gamma^-(t), t \in (0, T)\}$$

$$\Gamma^-(t) = \{x \in \Gamma; (a \cdot n)(x, t) < 0\}$$

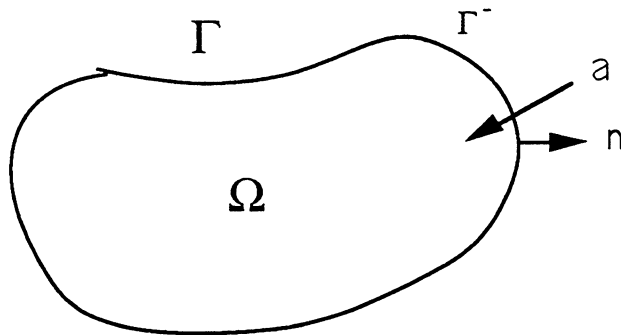


FIGURE 4.1 un ouvert et sa frontière

¹Baron Augustin-Louis Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ est un champ de vecteur défini de $Q_T \rightarrow \mathbb{R}^d$, a_0 et f sont des fonctions scalaires. En pratique, a peut s'interpréter comme un *champ de vitesse*, a_0 comme un *coefficient d'absorption* et f comme un *terme source*.

Il est bien connu que ce genre de problème peut être résolu par la *méthode des caractéristiques*. De manière précise, on désigne par $t \rightarrow x = X(t; \xi, s)$ les *courbes caractéristiques* associées à la vitesses a qui sont les *courbes intégrales* du champ a , c'est-à-dire les solutions de l' *équation différentielle ordinaire* :

$$\frac{dX(t; \xi, s)}{dt} = a(X(t; \xi, s), t), \quad t \in (0, T) \quad (121)$$

$$X(s; \xi, s) = \xi \quad (122)$$

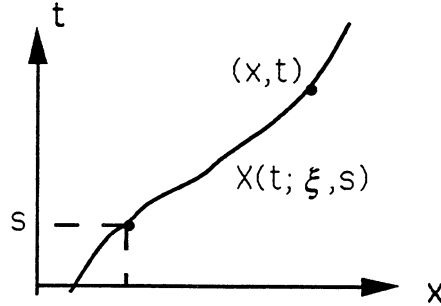


FIGURE 4.2 courbe caractéristique

PROPOSITION 4.1 *Supposons que pour tout entier $m > 1$*

$$a_i \in L^\infty(0, T; W^{m, \infty}(\mathbb{R}^d)), \quad 1 \leq i \leq d.$$

Alors, les courbes des caractéristiques sont définies globalement pour $t \in [0, T]$ et on a pour tout indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $1 \leq |\alpha| \leq m$

$$t \rightarrow \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} X_i(t; \cdot, \cdot) \in C^0(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T))), \quad 1 \leq i \leq d.$$

On peut considérer que (x, t) est un *système de coordonnées eulériennes* tandis que (ξ, t) est un *système de coordonnées lagrangiennes*² associées au champ de vitesse a .

² Joseph-Louis Lagrange, né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813.

On introduit ensuite la *transformation de Jacobi*³ encore appelé le *jacobien* de $\xi \rightarrow x = X(t; \xi, s)$:

$$J(t; \xi, s) = \det \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j(t; \xi, s)} \right) \quad (123)$$

On peut vérifier les résultats classiques suivants:

PROPOSITION 4.2 *Supposons que $a_i \in L^\infty(0, t; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d))$ pour $1 \leq i \leq d$. Alors, $t \rightarrow J(t; \xi, s) \in C^0(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T)))$ et on a*

(i) $J(t; \xi, s) > 0$ et $J(t; x, t) = I$;

(ii) $J^{-1}(t; \xi, s) = J(s; x, t)$;

(iii) $J(\tau; \xi, s)J(s; x, t) = J(\tau; x, t)$;

(iv) $\frac{d}{dt}J(t; \xi, s) = J(t; \xi, s) (\operatorname{div} a)(X(t; \xi, s), t)$;

(v) *il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$e^{-C|t-s|} \leq J(t; \xi, s) \leq e^{C|t-s|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall s, t \in [0, T].$$

REMARQUE 4.1 *Il est souvent agréable mathématiquement d'utiliser la forme non conservative de l'équation (118). On peut récrire*

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i u) = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\operatorname{div} a)u$$

de sorte que l'équation (118) devient

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \tilde{a}_0 u = f, \quad (124)$$

où

$$\tilde{a}_0 = a_0 + \operatorname{div} a \quad (125)$$

DÉFINITION 4.1 *Une fonction $u \in C^1(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ est dite solution classique du problème de Cauchy mixte, si elle vérifie (118) ou (124), (119)-(120).*

³Karl-Gustav-Jacob Jacobi, né à Potsdam le 10 décembre 1804 et mort à Berlin le 18 février 1851.

Sous des hypothèses convenables portant sur des données, on peut donner une expression explicite de la *solution classique* à l'aide de la méthode des caractéristiques et on énonce le *théorème d'existence et d'unicité de la solution classique* :

THÉORÈME 4.1 *On suppose que $\tilde{a}_0 \in C^{1,0}(Q_T)$, $a_i \in C^1(\bar{Q}_T)$, $1 \leq i \leq d$ et $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq d$, restent bornés dans Q_T . Alors, si $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, $f \in C^{1,0}(Q_T)$, le problème (118) ou (124), (119)-(120) admet une solution classique unique u donnée explicitement par*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(X(0; x, t))J(0; x, t) \exp \left\{ - \int_0^t a_0(X(s; x, t), s) ds \right\} + \\ &\quad \int_0^t f(X(s; x, t), s) J(s; x, t) \exp \left\{ - \int_s^t a_0(X(\sigma; x, t), \sigma) d\sigma \right\} ds \\ \text{ou } u(x, t) &= u_0(X(0; x, t)) \exp \left\{ - \int_0^t \tilde{a}_0(X(s; x, t), s) ds \right\} + \\ &\quad \int_0^t f(X(s; x, t), s) \exp \left\{ - \int_s^t \tilde{a}_0(X(\sigma; x, t), \sigma) d\sigma \right\} ds \end{aligned}$$

REMARQUE 4.2 *En particulier, considérons le cas où*

$$\Omega = \mathbb{R}^d, \quad \tilde{a}_0 = 0, \quad f = 0,$$

on déduit bien que

$$u(x, t) = u_0(X(0; x, t))$$

Ce qui exprime que la solution u est constante le long des courbes caractéristiques.

Au cas où

$$\tilde{a}_0 \neq 0 \quad (\text{div} \tilde{a}_0 \neq 0), \quad a_0 = 0, \quad f = 0,$$

on a

$$u(x, t) = u_0(X(0; x, t))J(0; x, t)$$

En fait, les formules précédentes restent valables sous des hypothèses de régularité moins forte portant sur les données. Cela nous conduit à affaiblir la notion de solution et à introduire la notation de *solution faible*. Soit L l'opérateur différentiel linéaire de forme conservative défini par (118) et on désigne par L^* son *adjoint formel* donné par

$$L^*v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \tilde{a}_0 v \quad (126)$$

DÉFINITION 4.2 Une fonction $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times [0, T[)$ est appelée solution faible du problème (118)-(119), si elle vérifie pour tout $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^d \times [0, T[)$ ⁴

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(L^*\varphi) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f\varphi dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(x, 0) dx \quad (127)$$

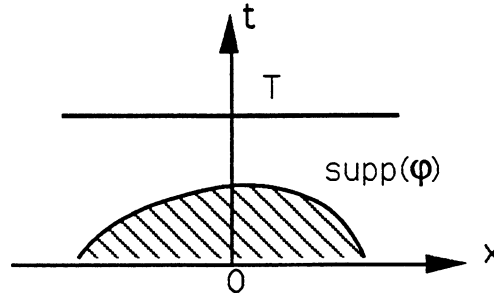


FIGURE 4.3 support de fonction φ

REMARQUE 4.3 Si u est une solution classique du problème, alors elle est aussi la solution faible du problème.

REMARQUE 4.4 Si l'on prend en particulier $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d \times]0, T[)$, on obtient que toute solution faible u vérifie au sens des distributions sur Q_T

$$Lu = f, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times]0, T[)$$

On peut maintenant énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution faible:

THÉORÈME 4.2 On suppose que $a_i \in L^\infty(0, T; Lip(\mathbb{R}^d))$ ⁵, $1 \leq i \leq d$ et que $a_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d \times [0, T[)$. Alors, si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1(0, T; L^1(\mathbb{R}^d))$,

⁴c'est-à-dire que φ est une fonction de classe C^1 à support compact contenu dans $\mathbb{R}^d \times [0, T[$.

⁵Ceci signifie que pour tout $t \in (0, T)$, la fonction $x \rightarrow a_i(x, t)$ est lipschitzienne continue dans \mathbb{R}^d avec

$$|a_i(x, t) - a_i(y, t)| \leq M_i |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

où $M_i > 0$ est une constante indépendante de t .

le problème (118)-(119) admet une solution faible unique u vérifiant pour tout $t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0 \exp \left\{ - \int_0^t a_0(X(s; x, 0), s) ds \right\} dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(x, s) \exp \left\{ - \int_s^t a_0(X(\sigma; x, s), \sigma) d\sigma \right\} dx ds.$$

REMARQUE 4.5 En particulier, lorsque $a_0 = f = 0$, on retrouve la propriété de conservation

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) dx.$$

Soit S une partie de \mathbb{R}^d ; on désigne par $\mathcal{M}(S)$ l'espace des mesures sur S , c'est-à-dire $\mathcal{M}(S) = (C_0^0(S))'$, le dual de l'espace $C_0^0(S)$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $\mathcal{M}(S)$ et $C_0^0(S)$.

DÉFINITION 4.3 Une mesure $u \in \mathcal{M}(\bar{Q}_T)$ est appelée solution mesure du problème (118)-(119) si elle vérifie la relation suivante:

$$\langle u, L^* \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle u_0, \varphi(\cdot, 0) \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^d \times [0, T]) \quad (128)$$

On peut énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution mesure:

THÉORÈME 4.3 On suppose que $a_i \in L^\infty(0, T; Lip(\mathbb{R}^d)) \cap C^0(\bar{Q}_T)$, $1 \leq i \leq d$. Alors, si $u_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{M}(\bar{Q}_T)$, le Problème (118)-(119) admet une solution mesure unique $u \in \mathcal{M}(\bar{Q}_T)$ donnée par

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u_0, x \rightarrow \int_0^T \varphi(X(t; x, 0), t) \exp \left\{ - \int_0^t a_0(X(s; x, 0), s) ds \right\} dt \rangle + \langle f, (x, s) \rightarrow \int_s^T \varphi(X(t; x, s), t) \exp \left\{ - \int_s^t a_0(X(\sigma; x, s), \sigma) d\sigma \right\} dt \rangle$$

pour tout $\varphi \in C_0^0(\bar{Q}_T)$

REMARQUE 4.6 On peut préciser le résultat précédent. On suppose que $a_i \in L^\infty(0, T; Lip(\mathbb{R}^d))$, $1 \leq i \leq d$, et que $a_0 \in L^\infty(0, T; C^0(\mathbb{R}^d))$. Alors, si

$u_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et que $f \in L^1(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$, le Problème (118)-(119) admet une solution mesure unique $u \in C(0, t; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ donnée par

$$\begin{aligned} \langle u(\cdot, t), \varphi \rangle &= \langle u_0, \varphi(X(t; \cdot, 0)) \exp \left\{ - \int_0^t a_0(X(s; \cdot, 0), s) ds \right\} dt \rangle + \\ &\quad \int_0^t \langle f(\cdot, s), \varphi(X(t; \cdot, s)) \exp \left\{ - \int_s^t a_0(X(\sigma; \cdot, s), \sigma) d\sigma \right\} \rangle ds \end{aligned}$$

On donne maintenant les exemples fondamentaux de solutions mesures.

Exemple 1. Considérons le cas où

$$u_0 = \delta(x - \xi_0), \quad \xi_0 \in \mathbb{R}^d, \quad f = 0 \quad (129)$$

D'après le Théorème 4.1, la solution mesure du Problème (118)-(119) associé à (129) est donnée pour toute fonction $\varphi \in C_0^0(\bar{Q}_T)$ par

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= \langle u_0, x \rightarrow \int_0^T \varphi(X(t; x, 0), t) \exp \left\{ - \int_0^t a_0(X(s; x, 0), s) ds \right\} dt \rangle \\ &= \int_0^T \varphi(X(t; \xi_0, 0), t) \exp \left\{ - \int_0^t a_0(X(s; \xi_0, 0), s) ds \right\} dt \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \alpha_0(t) \varphi(X_0(t), t) dt = \langle \alpha_0(t) \delta(x - X_0(t)), \varphi \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$u(x, t) = \alpha_0(t) \delta(x - X_0(t)) \quad (130)$$

$$\text{avec } X_0(t) = X(t; \xi_0, 0) \quad (131)$$

$$\alpha_0(t) = \exp \left\{ - \int_0^t a_0(X_0(s), s) ds \right\} \quad (132)$$

où la trajectoire de la particule $t \rightarrow X_0(t)$ et son poids $t \rightarrow \alpha_0(t)$ sont les solutions respectives des systèmes différentiels:

$$\frac{dX_0}{dt} = a(X_0, t), \quad t \in (0, T], \quad X_0(0) = \xi_0 \quad (133)$$

$$\frac{d\alpha_0}{dt} + a_0(X_0, t) \alpha_0 = 0, \quad t \in (0, T], \quad \alpha_0(0) = 1. \quad (134)$$

Exemple 2. Considérons le cas où la distribution particulière initiale est donnée par

$$u_0 = 0, \quad f = \delta(x - \xi_0) \otimes \delta(t - t_0), \quad \xi_0 \in \mathbb{R}^d, \quad t_0 \in [0, T] \quad (135)$$

En utilisant à nouveau le Théorème 4.3, on obtient que la solution mesure du Problème (118)-(119) associé à (135) s'écrit: $\forall \varphi \in C_0^0(\bar{Q}_T)$

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= \langle f, (x, s) \rightarrow \int_s^T \varphi(X(t; x, s), t) \exp \left\{ - \int_s^t a_0(X(\sigma; x, s), \sigma) d\sigma \right\} dt \rangle \\ &= \int_0^T \varphi(X(t; \xi_0, t_0), t) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t a_0(X(\sigma; \xi_0, t_0), \sigma) d\sigma \right\} dt \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^T \beta_0(t) \varphi(X_0(t), t) dt = \langle \beta_0(t) \delta(x - X_0(t)), \varphi \rangle \end{aligned}$$

de sorte que l'on a la solution mesure

$$u(x, t) = \beta_0(t) \delta(x - X_0(t)) \quad (136)$$

$$\text{avec } X_0(t) = X(t; \xi_0, t_0) \quad (137)$$

$$\beta_0(t) = H(t - t_0) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t a_0(X_0(s), s) ds \right\} \quad (138)$$

où $H(t)$ est la *fonction de Heaviside*⁶ définie par

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

ou bien les fonctions $t \rightarrow X_0(t)$ et $t \rightarrow \beta_0(t)$ sont les solutions respectives des *systèmes des équations différentielles*:

$$\frac{dX_0}{dt} = a(X_0, t), \quad t \in (t_0, T], \quad X_0(t_0) = \xi_0 \quad (139)$$

$$\frac{d\beta_0}{dt} + a_0(X_0, t) \beta_0 = 0, \quad t \in (t_0, T], \quad \beta_0(t_0) = 1. \quad (140)$$

$$\beta_0(t) = 0, \quad t \in [0, t_0) \quad (141)$$

REMARQUE 4.7 On dit que (130)-(132) d'une part, et (136)-(141) d'autre part, sont les *solutions particulières fondamentales associées à l'opérateur différentiel du premier ordre L*.

⁶ Oliver Heaviside, né à Londres le 18 mai 1850 et mort à Torquay le 3 février 1925.

4.2 Approximation particulière et régularisation

Pour fixer les idées et pour simplifier, on se borne à la résolution du problème de convection suivant:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i u) + a_0 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad t \in (0, T)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0$$

Soit $h > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0; $\forall p = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p &= \{x | x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, (p_i - \frac{1}{2})h < x_i < (p_i + \frac{1}{2})h, i = 1, \dots, d\} \\ x_p &= p h = (p_1 h, \dots, p_d h) \end{cases}$$

On appelle B_p cellule p , x_p centre de la cellule p respectivement. La *méthode particulière* d'approximation de ce problème consiste alors à approcher la condition initiale u_0 par une combinaison de *masses de Dirac*⁷

$$u_0(x) \approx u_0^h = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \alpha_p \delta(x - x_p) \quad (142)$$

et à résoudre de manière exacte le problème

$$\frac{\partial u^h}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i u^h) + a_0 u^h = 0, \quad (143)$$

$$u^h(\cdot, 0) = u_0^h \quad (144)$$

Grâce à la *solution particulière fondamentale*, la solution exacte de ce problème est donnée explicitement par

$$u^h(x, t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \alpha_p(t) \delta(x - X_p) \quad (145)$$

où $\alpha_p(t)$, le poids de la particule p et $X_p(t)$ sa trajectoire, sont définis par

$$X_p(t) = X(t; x_p, 0) \quad (146)$$

$$\alpha_p(t) = \exp \left\{ - \int_0^t a_0(X_p(s), s) ds \right\} \quad (147)$$

⁷ Paul Adrien Maurice Dirac, né à Bristol le 8 août 1902 et mort à Tallahassee 1984.

En pratique, on résout numériquement les deux problèmes différentiels suivants:

$$\frac{dX_p}{dt} = a(X_p, t), \quad t \in (0, T], \quad X_p(0) = x_p \quad (148)$$

$$\frac{d\alpha_p}{dt} + a_0(X_p, t)\alpha_p = 0, \quad t \in (0, T], \quad \alpha_p(0) = \alpha_p. \quad (149)$$

On remarque le fait que $\forall \varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$

$$\langle u, \varphi \rangle \approx \langle u^h, \varphi \rangle = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \alpha_p(t) \varphi(X_p(t))$$

En particulier, si $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$, cela revient à approcher

$$\int_{\mathbb{R}^d} u \varphi dx \quad \text{par} \quad \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \alpha_p(t) \varphi(X_p(t))$$

Ceci peut donc s'interpréter comme une formule de quadrature sur \mathbb{R}^d .

On se donne une *formule de quadrature* sur \mathbb{R}^d

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \approx \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} h^d g(x_p), \quad g \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d) \quad (150)$$

On associe ensuite à cette formule une approximation particulière d'une fonction quelconque de manière classique qui soit compatible avec la grille \mathbb{R}^d_ε : on a pour tout $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \omega(x) \varphi(x) dx \approx \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} h^d \omega(x_p) \varphi(x_p) \quad (151)$$

de sorte qu'au sens des mesures

$$\omega(x) \approx \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} h^d \omega(x_p) \delta(x - x_p) \quad (152)$$

où $x \rightarrow \delta(x - x_p)$ désigne la *masse de Dirac* concentrée au point $x_p \in \mathbb{R}^d$, encore appelé *particule p*. On pose

$$\Pi^h \omega(x) \equiv \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} h^d \omega(x_p) \delta(x - x_p) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \alpha_p \delta(x - x_p) \quad (153)$$

où $\alpha_p = h^d \omega(x_p)$ est le *poids de la particule p*.

Il s'agit donc essentiellement d'étudier l'approximation des fonctions par des combinaisons linéaires de *masse de Dirac*, c'est-à-dire d'étudier l'erreur $\Pi^h \omega - \omega$ dans un espace de mesure convenable. P.A. Raviart (1985) [59] présente systématiquement les résultats, on en cite ici quelque-uns que l'on utilisera par la suite.

Posant

$$E(g) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx - \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} h^d g(x_p) \quad (154)$$

on a alors l'estimation d'erreur sur l'intégration numérique associée à la *formule de quadrature* (150):

LEMME 4.1 Soient $m \geq 1$ un entier et $p > d/m$, $q = 1 - 1/p$. Alors, Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que l'on ait $\forall g \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ si $m \leq 2$, ou $\forall g \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \cap W^{m-1,1}(\mathbb{R}^d)$ si $m \geq 3$

$$|E(g)| \leq C h^{m+d/q} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g|_{m,p,B_k}, \quad p \in [1, \infty]$$

En particulier, pour la fonction B-spline $\varphi = \varphi_m = \chi^{*(m+1)}$, $p = \infty$, $m \geq 1$, on a

$$|E(g)| \leq C h^{m+d} |g|_{m,\infty}$$

A partir de la solution mesure, on veut construire la solution régulière qui approche la solution exacte dans un sens classique. Cela se fait naturellement par une méthode de régularisation à l'aide de la fonction cut-off. Ceci nous amène à proposer les deux lemmes suivants:

LEMME 4.2 Pour toute fonction cut-off $\varphi(x)$ ayant les propriétés suivantes, appelées propriétés de moments r :

$$\begin{aligned} & (i) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1 \\ H_R(r) \quad & (ii) \quad \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \varphi(x) dx = 0, \quad 1 \leq |\alpha| \leq r-1, \quad r \geq 2 \\ & (iii) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |x|^r |\varphi(x)| dx < \infty \end{aligned}$$

Alors, on a pour toute fonction $v \in W^{r,p}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|v - v * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} \leq C \varepsilon^r |v|_{r,p}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε et $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \varphi(x/\varepsilon)$

LEMME 4.3 Soit $T \in W^{-m,p}(\mathbb{R}^d)$, $m \geq 0$. Si la fonction cut-off $\varphi(x)$ satisfait de plus à la propriété de régularisation $\varphi \in W^{m,1}(\mathbb{R}^d)$, on a alors

$$\|T * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} \leq C \varepsilon^{-m} \|T\|_{-m,p}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε .

REMARQUE 4.8 On va étendre les deux lemmes ci-dessus au cas plus général dans le chapitre 8.

REMARQUE 4.9 On peut construire toutes sortes de fonctions cut-off satisfaisant aux propriétés de régularité et des moments selon le besoin: à support compact, à symétrie radiale, à fraction rationnelle, etc...

4.3 Représentation de fonctions B-splines

Les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les fonctions polynômiales par morceaux en particulier les B-splines intéressantes par leur faible coût. De plus, elle sont également les fonctions cut-off les moins coûteuses en temps machine. A ce propos, les fonctions B-splines jouent un double rôle important dans le cadre de méthodes de régularisation ainsi que dans le cadre de méthodes d'interpolation.

4.3.1 En dimension $d = 1$

On commence par considérer le cas d'une dimension.

DÉFINITION 4.4 *On définit les fonctions B-splines de degré m de la manière suivante:*

$$\Omega_0(x) = \chi(x) \quad (155)$$

$$\Omega_m(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \Omega_{m-1}(t) dt, \quad m \geq 1 \quad (156)$$

où $\chi(x)$ est une fonction caractéristique de l'intervalle $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\chi(x) = \delta x_+^0 = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \pm \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exemples.

(i) *fonction chapeau :*

$$\Omega_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

(ii)

$$\Omega_2(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{3}{4}, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}|x| + \frac{9}{8}, & \frac{1}{2} < |x| < \frac{3}{2} \\ 0, & |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

(iii)

$$\Omega_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & |x| \leq 1 \\ -\frac{1}{6}|x|^3 + x^2 - 2|x| + \frac{4}{3}, & 1 < |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases}$$

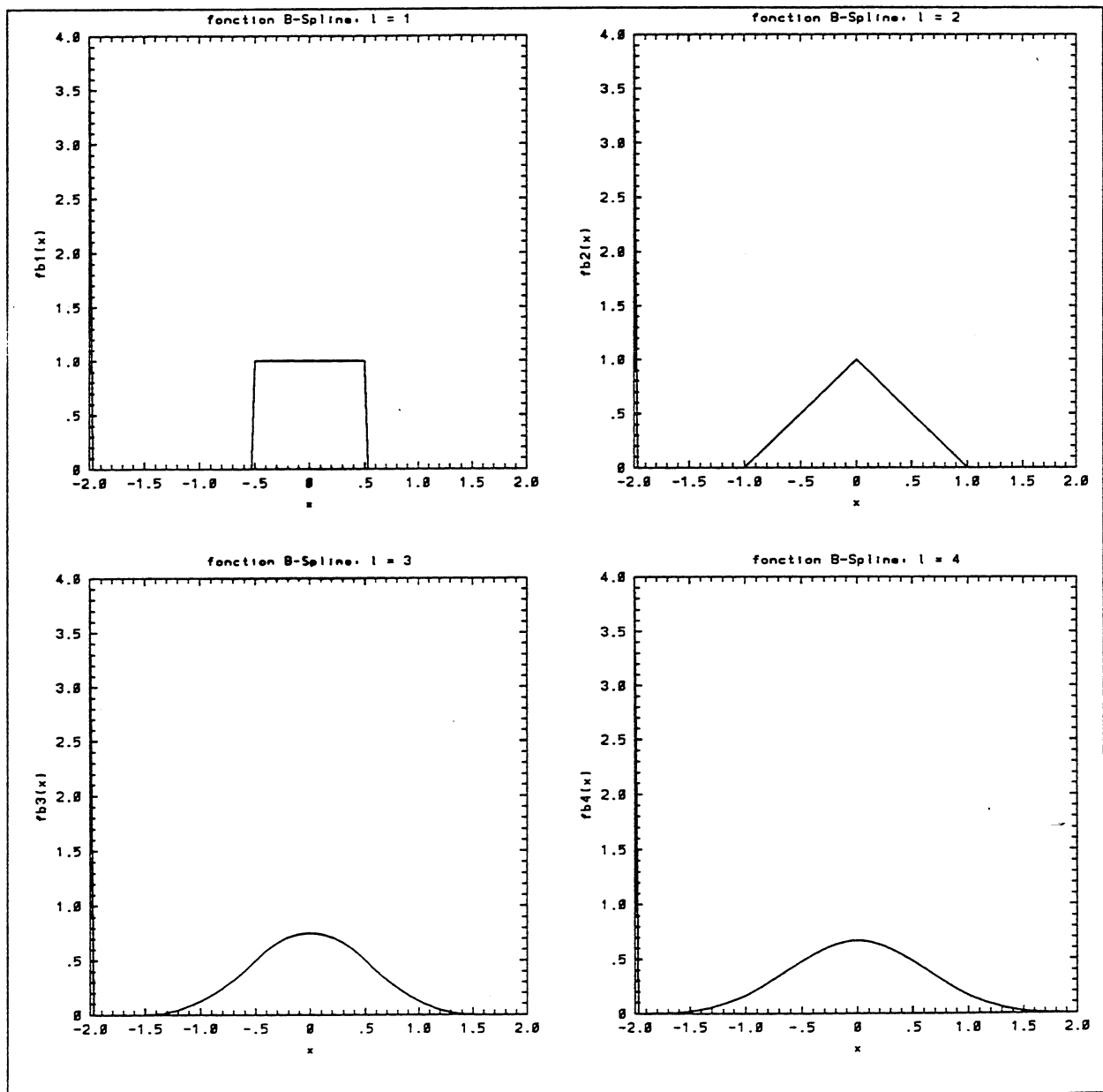


FIGURE 4.4 fonctions B-splines en dimension un

On rassemble quelques propriétés de fonctions B-splines dont la démonstration peut être trouvée dans le livre de **I.J. Schoenberg** (1969) [64].

LEMME 4.4 *Pour toutes les fonctions B-splines définies par (155)-(156), on a*

(i) *(formule de polynôme)*

$$\begin{aligned}\Omega_0(x) &= \delta x_+^0 \\ \Omega_m(x) &= \delta^{m+1} \left\{ \frac{x_+^m}{m!} \right\} = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{m!} C_{m+1}^j \left(x + \frac{m+1}{2} - j \right)_+^m, m \geq 1\end{aligned}$$

Cela veut dire que $\Omega_m(x)$ est un polynôme de degré m par morceaux, avec $m+1$ points de discontinuité de dérivée d'ordre m :

$$x_j = j - \frac{m+1}{2} (j = 0, 1, \dots, m+1);$$

(ii) *(formule récursive)*

$$\begin{aligned}\Omega_0(x) &= \chi \\ \Omega_m(x) &= \Omega_0 * \Omega_{m-1} = \chi^{*(m+1)}, m \geq 0\end{aligned}$$

*où $f * g$ est le produit de convolution;*

(iii) *(propriété de positivité et compacité de support)*

$$\begin{aligned}\Omega_m(-x) &= \Omega_m(x), \Omega_m(x) \geq 0 \\ \text{et } \text{supp}(\Omega_m) &= \left[-\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2} \right]\end{aligned}$$

(iv) *(propriété de régularité)*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_m(x) dx = 1,$$

la fonction Ω_m appartient à $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^1)$ et $D^m \Omega_m$ est une mesure bornée.

4.3.2 En dimension $d > 1$

Définition

Dans le cas d -dimensionnel, on définit les *fonctions B-splines* de degré m de la manière suivante: pour tout $m \geq 0$

$$\varphi(x) = \varphi_m(x) = \prod_{i=1}^d \chi^{*(m+1)}(x_i), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad (157)$$

Propriétés

Grâce au Lemme 4.4, on peut vérifier aisément que ce *produit tensoriel de B-spline* satisfait au

LEMME 4.5 *Pour un entier $m \geq 0$,*

(i) *(propriété de positivité et compacité de support)*

$$\begin{aligned} \varphi_m(-x) &= \varphi_m(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \\ \varphi_m(x) &\geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \\ \text{supp}(\varphi_m) &= \left[-\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2} \right]^d; \end{aligned}$$

(ii) *(propriété de régularité) $\varphi_m \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\begin{aligned} \|\varphi_m\|_{0,\infty} &< \infty \\ \|\partial^\alpha \varphi_m\|_{0,\infty} &< \infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| = m+1 \end{aligned}$$

(iii) *(propriété de moment)*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_m(x) dx &= 1 \\ \int_{\mathbb{R}^d} x^{2n-1} \varphi_m(x) dx &= 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^1 \\ \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \varphi_m(x) dx &< \infty \end{aligned}$$

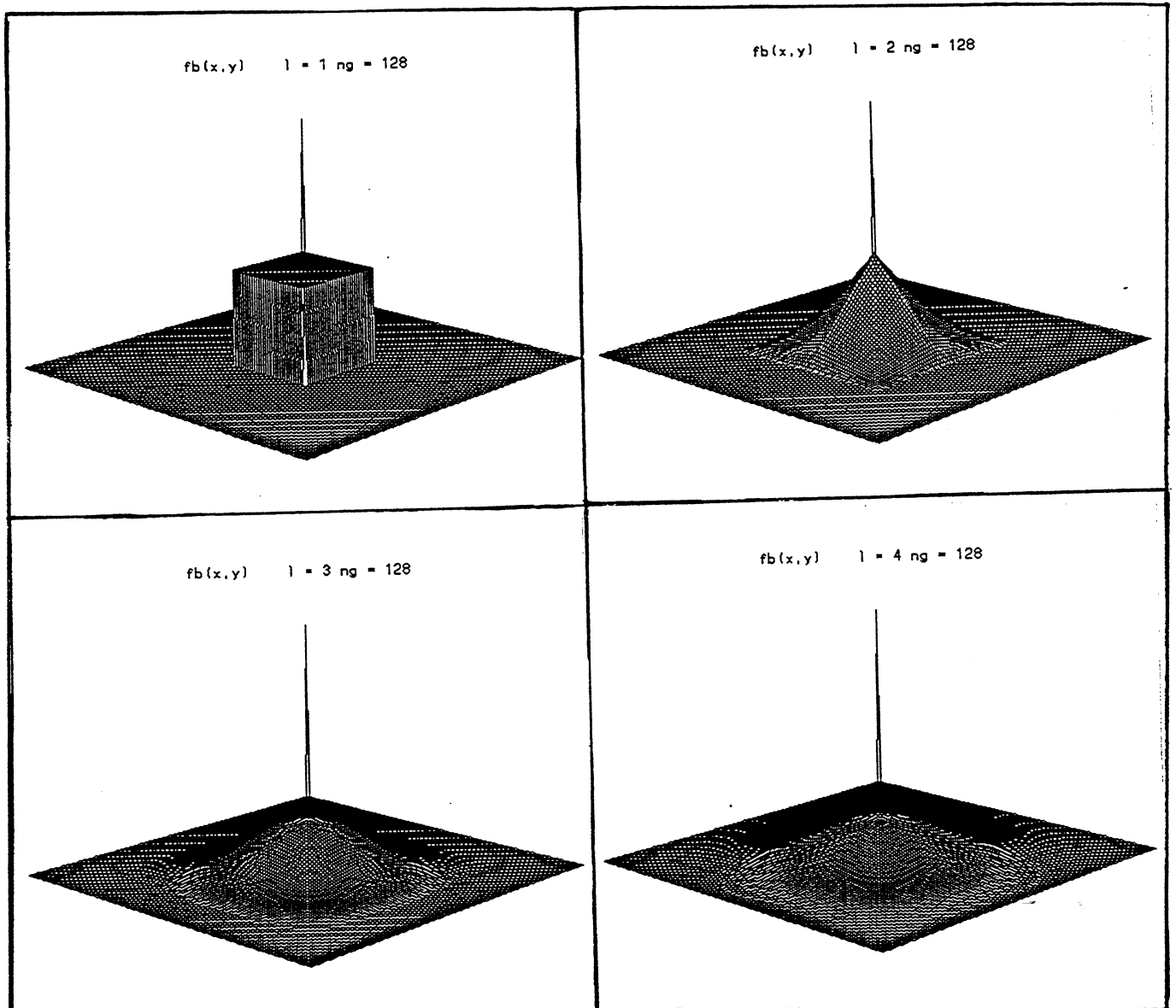


FIGURE 4.5 fonctions B-splines en dimension deux

4.4 Passage entre particules et grille

A partir de l'*approximation particulaire* $\Pi^h \omega$ d'une fonction ω par la formule (153), on définit une approximation ω_j de $\omega(x_j)$ en chaque point de grille $x_j \in \mathbb{R}^d_\varepsilon$ de la manière suivante: on pose

$$J_j \equiv \sum_p h^d \varphi\left(\frac{x_j - x_p}{\varepsilon}\right) = \sum_p v_p \varphi_j(x_p) \quad (158)$$

où $\varphi_j(x) = \varphi\left(\frac{x_j - x}{\varepsilon}\right)$, φ est la *fonction B-spline* de degré m , $v_p = h^d$ est le volume de particule p . Dans la suite, on considère J_j comme étant le volume affecté au noeud x_j et calculé à partir des volumes de particules. On pose ensuite

$$\omega_j \stackrel{A}{\equiv} J_j^{-1} \sum_p h^d \omega(x_p) \varphi\left(\frac{x_j - x_p}{\varepsilon}\right) = \frac{\sum_p \alpha_p \varphi_j(x_p)}{\sum_p v_p \varphi_j(x_p)} \quad (159)$$

Par contre, à partir des valeurs ω_j aux points de grille $x_j \in \mathbb{R}^d_\varepsilon$, on définit également une approximation de l'*interpolation de Lagrange*

$$I(\omega_j)(x) \stackrel{I}{\equiv} \sum_j \omega_j l_j(x) \quad (160)$$

où $\{l_j(x)\}$ est un ensemble de *fonctions de base* de l'interpolation (d-linéaire par morceaux par exemple) tel que

$$\max_{x \in \mathbb{R}^d} |\omega(x) - \sum_j \omega(x_j) l_j(x)| \leq C \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty}, \quad \forall \omega \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d) \quad (161)$$

On note

$$\Pi_\varepsilon \omega(x) \equiv \sum_j \omega(x_j) l_j(x) = I(\omega(x_j))(x) \quad (162)$$

En ce qui concerne la stabilité dans L^2 , on peut aisément vérifier le Lemme ci-dessous:

LEMME 4.6

$$\begin{aligned} (i) \quad & \max_j |\omega_j| \leq \max_p |\omega(x_p)| \\ (ii) \quad & \sum_j J_j \omega_j = \sum_p h^d \omega(x_p) = \sum_p \alpha_p \\ (iii) \quad & \sum_j J_j |\omega_j|^2 \leq \sum_p h^d |\omega(x_p)|^2 \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquant que $\sum_j \varphi_j(x) = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_j J_j |\omega_j|^2 &= \sum_j J_j^{-1} \left| \sum_p v_p \omega_p \varphi_j(x_p) \right|^2 \\
&= \sum_j J_j^{-1} \sum_{p,q} v_p v_q \omega_p \omega_q \varphi_j(x_p) \varphi_j(x_q) \\
&\leq \sum_j J_j^{-1} \sum_{p,q} v_p v_q \varphi_j(x_p) \varphi_j(x_q) \frac{1}{2} (|\omega_p|^2 + |\omega_q|^2) \\
&= \sum_j J_j^{-1} \sum_{p,q} v_p v_q \varphi_j(x_p) \varphi_j(x_q) |\omega_p|^2 \\
&= \sum_p v_p |\omega_p|^2 \sum_j J_j^{-1} \left(\sum_q v_q \varphi_j(x_q) \right) \varphi_j(x_p) \\
&= \sum_p v_p |\omega_p|^2 \sum_j \varphi_j(x_p) = \sum_p v_p |\omega_p|^2
\end{aligned}$$

■

On introduit ensuite un *théorème d'approximation de l'interpolation* (voir aussi P.G.Ciarlet(1978) [20] ou R.Rannacher & R.Scott (1982) [58]) :

LEMME 4.7 Soit (B, P, Σ) un d -paralléloétope de type m . On suppose $d \leq 3$ et $\ell \geq 1$. Alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de $\varepsilon > 0$ telle que pour tout entier k , $0 \leq k \leq \ell + 1$, on ait

$$\|v - \Pi_\varepsilon v\|_{k,q,B} \leq c \varepsilon^{\ell+1-k-d(1/p-1/q)} \|v\|_{\ell+1,p,B}, \quad \forall v \in W^{\ell+1,p}(B)$$

où $1/p + 1/q = 1$. En particulier, pour la fonction B -spline: $l_j(x) = \varphi_2\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)$, $m = 2 = \ell + 1$, $p = \infty$

$$\Pi_\varepsilon v(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} v(x_j) l_j(x) = I(v(x_j))(x)$$

on a pour $k = 0, 1$

$$\|v - \Pi_\varepsilon v\|_{k,\infty,\Omega} \leq C \varepsilon^{2-k} \|v\|_{2,\infty,\Omega}, \quad \forall v \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$$

On établira enfin les *estimations d'erreur* suivantes:

LEMME 4.8 Pour la fonction B -spline de degré $m \geq 1$: $\varphi = \varphi_m = \chi^{*(m+1)}$, $l_j(x) = \varphi_1\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)$, on a pour tout $\omega \in W^{\nu,\infty}(\mathbb{R}^d)$ avec $\nu = \max(r, m)$

$$(i) \quad |\varepsilon^d - J_j| \leq c_q h^d \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^m |\varphi|_{m,\infty}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & |\omega(x_j) - \omega_j| = |\omega(x_j) - A(\omega(x_p))| \\
 & \leq c_A \left\{ \varepsilon^\tau |\omega|_{r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} |\varphi|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} (1+\varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} \right\} \\
 (iii) \quad & \|\omega - I(\omega_j)\|_{0,\infty} = \|\omega - (I \circ A)\omega(x_p)\|_{0,\infty} \\
 & \leq c_I \left\{ \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} + \varepsilon^\tau |\omega|_{r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} |\varphi|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} (1+\varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} \right\} \\
 (iv) \quad & \|\omega - \Pi^h \omega\|_{-m,p} \leq c_p h^m \|\omega\|_{m,p}, \quad \forall p \in [1, \infty] \\
 (v) \quad & \|\omega - \Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} \leq c_0 \left\{ \varepsilon^\tau |\omega|_{r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^m \|\omega\|_{m,p} \right\}, \quad \forall p \in [1, \infty]
 \end{aligned}$$

où c_q, c_A, c_I, c_p, c_0 sont des constantes indépendantes de ε et h .

Démonstration.

(1) Comme

$$J_j = \sum_p h^d \varphi\left(\frac{x_j - x_p}{\varepsilon}\right) \approx \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{x_j - x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon^d$$

on a pour tout $m \geq 1$ d'après le Lemme 4.1

$$\begin{aligned}
 |A_j| & \equiv |\varepsilon^d - J_j| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{x_j - x}{\varepsilon}\right) dx - \sum_p h^d \varphi\left(\frac{x_j - x_p}{\varepsilon}\right) \right| \\
 & = \left| E\left(\varphi\left(\frac{x_j - x}{\varepsilon}\right)\right) \right| \leq C h^{m+d} \varepsilon^{-m} |\varphi|_{m,\infty}
 \end{aligned}$$

(2) En remarquant ensuite que

$$\begin{aligned}
 |\omega_j| & = \left| \frac{\sum_p h^d \omega(x_p) \varphi_j(x_p)}{\sum_p h^d \varphi_j(x_p)} \right| \leq \frac{\sum_p h^d |\omega(x_p)| \varphi_j(x_p)}{\sum_p h^d \varphi_j(x_p)} \leq \max_p |\omega(x_p)| \leq \|\omega\|_{0,\infty} \\
 \omega_j & = J_j^{-1} \sum_p h^d \omega(x_p) \varphi_j(x_p) = \varepsilon^{-d} \sum_p h^d \omega(x_p) \varphi_j(x_p) + \varepsilon^{-d} (\varepsilon^d - J_j) \omega_j \\
 & = (\Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) + \varepsilon^{-d} (\varepsilon^d - J_j) \omega_j
 \end{aligned}$$

on a donc

$$|\omega_j - (\Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j)| = \varepsilon^{-d} |\varepsilon^d - J_j| |\omega_j| \leq \varepsilon^{-d} \|\omega\|_{0,\infty} |A_j|$$

D'ailleurs, puisque

$$\begin{aligned}
 (\Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) & = \varepsilon^{-d} \sum_p h^d \omega(x_p) \varphi\left(\frac{x_j - x_p}{\varepsilon}\right) \\
 & \approx \varepsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \omega(x) \varphi\left(\frac{x_j - x}{\varepsilon}\right) dx = (\omega * \varphi_\varepsilon)(x_j)
 \end{aligned}$$

on a en vertu du Lemme 4.1

$$\begin{aligned}
|B_j| &\equiv \left| (\omega * \varphi_\varepsilon - \Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) \right| \\
&= \varepsilon^{-d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \omega(x) \varphi\left(\frac{x_j - x}{\varepsilon}\right) dx - \sum_p h^d \omega(x_p) \varphi\left(\frac{x_j - x_p}{\varepsilon}\right) \right| \\
&= \varepsilon^{-d} \left| E\left(\omega(x) \varphi\left(\frac{x_j - x}{\varepsilon}\right)\right) \right| \leq C \varepsilon^{-d} h^{m+d} \left| \omega(x) \varphi\left(\frac{x_j - x}{\varepsilon}\right) \right|_{m,\infty} \\
&\leq C \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty}.
\end{aligned}$$

Egalement

$$\begin{aligned}
|C_j| &\equiv |(\omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) - \omega_j| \\
&\leq |B_j| + |\omega_j - (\Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j)| \leq |B_j| + \varepsilon^{-d} \|\omega\|_{0,\infty} |A_j| \\
&\leq C \left\{ \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} \right\}
\end{aligned}$$

Par conséquent, en vertu du Lemme 4.2, on a pour $\omega \in W^{r,\infty}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
|D_j| &\equiv |\omega(x_j) - \omega_j| = |(\omega - \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) + (\omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) - \omega_j| \\
&\leq |(\omega - \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j)| + |C_j| \leq C_r \varepsilon^r |\omega|_{r,\infty} + |C_j| \\
&\leq C \left\{ \varepsilon^r |\omega|_{r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} \right\}
\end{aligned}$$

(3) D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\omega(x) - I(\omega_j)(x) &= (\omega - \Pi_\varepsilon \omega)(x) + (\Pi_\varepsilon \omega - I(\omega_j))(x) \\
&= (\omega - \Pi_\varepsilon \omega)(x) + \sum_j (\omega(x_j) - \omega_j) l_j(x)
\end{aligned}$$

En vertu du Lemme 4.7, on a pour tout $\omega \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$

$$\|\omega - \Pi_\varepsilon \omega\|_{0,\infty} \leq C \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty}$$

On remarque ainsi que

$$l_j(x) \geq 0, \quad \sum_j l_j(x) = 1$$

si bien que

$$\begin{aligned}
 & |(\omega - I(\omega_j))(x)| \\
 & \leq \|\omega - \Pi_\varepsilon \omega\|_{0,\infty} + \max_j |\omega(x_j) - \omega_j| \sum_j l_j(x) \leq c\varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} + \max_j |D_j| \\
 & \leq c \left\{ \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} + \varepsilon^r |\omega|_{r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} |\varphi|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} (1+\varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} \right\}
 \end{aligned}$$

(4) En vue que

$$(\Pi^h \omega, \varphi) = \sum_p h^d \omega(x_p) \varphi(x_p) \approx \int_{\mathbb{R}^d} \omega(x) \varphi(x) dx = (\omega, \varphi)$$

on trouve $\forall \omega \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in W^{m,q}(\mathbb{R}^d)$ avec $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\begin{aligned}
 (\omega - \Pi^h \omega, \psi) &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \omega(x) \psi(x) dx - \sum_p h^d \omega(x_p) \psi(x_p) \right| \\
 &\leq |E(\omega \psi)| \leq c h^m |\omega \psi|_{m,1} \\
 &\leq C h^m \|\omega\|_{m,p} \|\psi\|_{m,q}
 \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\|\omega - \Pi^h \omega\|_{-m,p} \leq C h^m \|\omega\|_{m,p}$$

(5) Enfin, comme

$$\begin{aligned}
 \omega - \Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon &= (\omega - \omega * \varphi_\varepsilon) + (\omega - \Pi^h \omega) * \varphi_\varepsilon \\
 \|\omega - \Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} &\leq \|\omega - \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} + \|(\omega - \Pi^h \omega) * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} \\
 &= I_1 + I_2
 \end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.2

$$I_1 = \|\omega - \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} \leq C \varepsilon^r |\omega|_{r,p}, \quad \forall \omega \in W^{r,p}(\mathbb{R}^d)$$

D'après le Lemme 4.3 et l'assertion (iv)

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \|(\omega - \Pi^h \omega) * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} \\
 &\leq C \varepsilon^{-m} |\omega - \Pi^h \omega|_{-m,p} \leq C \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^m \|\omega\|_{m,p}, \quad \forall \omega \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)
 \end{aligned}$$

D'où l'on tire

$$\|\omega - \Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,p} \leq C_0 \left\{ \varepsilon^r |\omega|_{r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^m \|\omega\|_{m,p} \right\}, \quad \forall p \in [1, \infty]$$

■

Remarque. Il y a donc trois sortes d'erreurs:

(i) l'erreur de discrétisation associée à la formule de quadrature:

$$\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^m \text{ et } \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d};$$

(ii) l'erreur de régularisation (r-moments): ε^r , $r \geq 2$;

(iii) l'erreur d'interpolation: ε^2 peut être améliorée lorsque l'on utilise des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur.

4.5 Technique d'amélioration

Le problème que l'on se pose, est si l'on peut améliorer la précision, en faisant décroître soit l'*erreur de moments* à l'aide d'une *méthode itérative*, soit l'*erreur d'interpolation* en augmentant le degré du polynôme d'*interpolation de Lagrange*.

Selon l'idée de **J.T. Beale**(1987) [5] et en suivant l'analyse faite par **P.A. Raviart**(1987) [60], on peut améliorer la précision en ayant recours à une *méthode itérative* dans le cas d'un écoulement où le tourbillon initial est assez régulier. En effet, on a d'après le Lemme 4.8

$$\begin{aligned}
 \alpha_p &= h^d \omega(x_p) \approx h^d I(\omega_j)(x_p) = h^d \sum_j \omega_j l_j(x_p) \\
 &= h^d \sum_j \left\{ J_j^{-1} \sum_q \alpha_q \varphi_j(x_q) \right\} l_j(x_p) \\
 &= \sum_q \alpha_q \left\{ h^d \sum_j J_j^{-1} \varphi_j(x_q) l_j(x_p) \right\} = \sum_q f_{pq} \alpha_q
 \end{aligned} \tag{163}$$

où

$$f_{pq} = h^d \sum_j J_j^{-1} \varphi_j(x_q) l_j(x_p) \tag{164}$$

soit en notation matricielle

$$F \alpha \approx \alpha$$

où

$$F = (f_{pq})_{N^2 \times N^2}, \alpha = (\alpha_p)_{|p| \leq N^2}$$

On va en fait modifier les poids α_p des particules de manière à définir des poids β_p pour lesquels

$$\sum_q f_{pq} \beta_q = \alpha_p \tag{165}$$

ou $F \beta = \alpha$

Cela revient à résoudre le système précédent. Comme F est "voisin" de l'identité Id :

$$F \approx Id$$

on écrit F sous la forme

$$F = Id + (F - Id)$$

où $F - Id$ est une "petite" perturbation et ceci suggère de résoudre l'équation (165) à l'aide de la *méthode itérative* suivante:

$$\beta^{(n+1)} = \alpha + (Id - F)\beta^{(n)}, \quad n \geq 0 \quad (166)$$

$$\beta^{(0)} = \alpha \quad (167)$$

On peut vérifier que $\beta^{(n)}$ tend effectivement vers α lorsque n tend vers l'infini sous des hypothèses raisonnables. On utilise la *méthode itérative* suivante:

$$\omega_p^{(0)} = \omega(x_p)$$

$$\omega_p^{(n)} = \omega(x_p) + \omega_p^{(n-1)} - (I \circ A)\omega_p^{(n-1)} = \omega(x_p) + \omega_p^{(n-1)} - I(\omega_j^{(n-1)})(x_p)$$

où

$$\omega_j^{(n-1)} = J_j^{-1} \sum_p h^d \omega_p^{(n-1)} \varphi_j(x_p)$$

de sorte que

$$I(\omega_j^{(n)})(x) = \sum_j \omega_j^{(n)} l_j(x)$$

soit une meilleure approximation de $\omega(x)$:

$$\omega^{h,n}(x) = I(\omega_j^{(n)})(x)$$

On énonce le résultat suivant:

LEMME 4.9 *Pour la fonction B-spline de degré $m \geq 1$: $\varphi = \varphi_m$, $l_j(x) = \varphi_1(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$, on a pour tout $\omega \in W^{\nu,\infty}(\mathbb{R}^d)$ avec $\nu = \max((n+1)r, m)$*

$$\begin{aligned} & (i) \quad |\omega(x_j) - \omega_j^{(n)}| \\ & \leq C \left\{ \varepsilon^{(n+1)r} |\omega|_{(n+1)r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} + \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\} \\ & (ii) \quad \|\omega - I(\omega_j^{(n)})\|_{0,\infty} \\ & \leq C \left\{ \varepsilon^{(n+1)r} |\omega|_{(n+1)r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+d} \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} + \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\} \end{aligned}$$

où c_A, c_I sont des constantes indépendantes de ε et h .

Démonstration. On se contentera de vérifier le résultat pour $n = 1$. On remarque que

$$\omega_p^{(1)} = \omega(x_p) + \omega_p^{(0)} - (I \circ A) \omega_p^{(0)} = 2\omega(x_p) - I(\omega_j)(x_p)$$

et pose

$$R(x) = (\omega - \omega * \varphi_\varepsilon)(x)$$

si bien que

$$\begin{aligned} \omega(x_j) - \omega_j^{(1)} &= \omega(x_j) - J_j^{-1} \sum_p h^d \omega_p^{(1)} \varphi_j(x_p) \\ &= \omega(x_j) - 2\omega_j + J_j^{-1} \sum_p h^d I(\omega_j)(x_p) \varphi_j(x_p) = A + B \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= (R - R * \varphi_\varepsilon)(x_j) = \omega(x_j) - 2(\omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) + (\omega * \varphi_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)(x_j) \\ B &= 2\{(\omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) - \omega_j\} + \left\{ J_j^{-1} \sum_p h^d I(\omega_j)(x_p) \varphi_j(x_p) - (\omega * \varphi_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)(x_j) \right\} \\ &= 2\{(\omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) - \omega_j\} + \left\{ J_j^{-1} \sum_p h^d I(\omega_j)(x_p) \varphi_j(x_p) - (I(\omega_j) * \varphi_\varepsilon)(x_j) \right\} \\ &\quad + \{(I(\omega_j) - \omega * \varphi_\varepsilon) * \varphi_\varepsilon\}(x_j) = 2I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 4.2, on trouve pour tout $\omega \in W^{2r, \infty}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} |A| &= |(R - R * \varphi_\varepsilon)(x_j)| \\ &\leq \|R - R * \varphi_\varepsilon\|_{0, \infty} \leq C_r \varepsilon^r |R|_{r, \infty} = C_r \varepsilon^r \|\partial^r(\omega - \omega * \varphi_\varepsilon)\|_{0, \infty} \\ &= C_r \varepsilon^r \|\partial^r \omega - \partial^r \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0, \infty} \leq C_A \varepsilon^{2r} |\omega|_{2r, \infty} \end{aligned}$$

Il reste à estimer $|B|$. On remarque que

$$\begin{aligned} |I_1| &= |(\omega * \varphi_\varepsilon)(x_j) - \omega_j| = |C_j| \\ &\leq |(\omega * \varphi_\varepsilon - \Pi^h \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j)| + \varepsilon^{-d} |\varepsilon^d - J_j| |\omega_j| \\ &\leq C_1 \left\{ \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|\varphi\|_{m, \infty} \|\omega\|_{m, \infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} |\varphi|_{m, \infty} \|\omega\|_{0, \infty} \right\} \\ |I_2| &= \left| (I(\omega_j) * \varphi_\varepsilon)(x_j) - J_j^{-1} \sum_p h^d I(\omega_j)(x_p) \varphi_j(x_p) \right| \\ &= \left| (I(\omega_j) * \varphi_\varepsilon)(x_j) - (I(\omega_j))_j \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| (I(\omega_j) * \varphi_\varepsilon - \Pi^h I(\omega_j) * \varphi_\varepsilon)(x_j) \right| + \varepsilon^{-d} |\varepsilon^d - J_j| \left| (I(\omega_j))_j \right| \\
&\leq C \left\{ \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|I(\omega_j)\|_{m,\infty} \|\varphi\|_{m,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} |\varphi|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} \right\} \\
&\leq C_2 \left\{ \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} |\varphi|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} \right\} \\
|I_3| &= \left| ((I(\omega_j) - \omega * \varphi_\varepsilon) * \varphi_\varepsilon)(x_j) \right| \\
&\leq \|((I(\omega_j) - \omega * \varphi_\varepsilon) * \varphi_\varepsilon)\|_{0,\infty} \leq c \|I(\omega_j) - \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,\infty} \\
&\leq c \left\{ \|I(\omega_j) - I((\omega * \varphi_\varepsilon)(x_j))\|_{0,\infty} + \|\Pi_\varepsilon(\omega * \varphi_\varepsilon) - \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,\infty} \right\} \\
&\leq c \left\{ \left\| \sum_j (\omega_j - \omega * \varphi_\varepsilon(x_j)) l_j(x) \right\|_{0,\infty} + c_1 \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\} \\
&\leq c \left\{ \max_j |\omega_j - \omega * \varphi_\varepsilon| + c_1 \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\} = c \left\{ \max_j |C_j| + c_1 \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\} \\
&\leq C_3 \left\{ \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} |\varphi|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} + \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\}
\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient donc

$$\begin{aligned}
|B| &= 2|I_1| + |I_2| + |I_3| \\
&\leq C \left\{ \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} |\varphi|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} + \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\}
\end{aligned}$$

D'où l'on a la majoration de l'erreur d'approximation

$$\begin{aligned}
|\omega(x_j) - \omega_j^{(1)}| \\
\leq C \left\{ \varepsilon^{2r} |\omega|_{2r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} |\varphi|_{m,\infty} \|\omega\|_{0,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} (1 + \varepsilon)^m \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} + \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\}
\end{aligned}$$

De la même façon, on écrit

$$\omega(x) - I(\omega_j^{(1)})(x) = (\omega - \Pi_\varepsilon \omega)(x) + \sum_j (\omega(x_j) - \omega_j^{(1)}) l_j(x)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\|\omega - I(\omega_j^{(1)})\|_{0,\infty} \\
\leq C \left\{ \varepsilon^{2r} |\omega|_{2r,\infty} + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+d} \|\varphi\|_{m,\infty} \|\omega\|_{m,\infty} + \varepsilon^2 \|\omega\|_{2,\infty} \right\}
\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par récurrence. ■

Remarque. *Il faut souligner que l'erreur due à l'interpolation, ε^2 , peut être améliorée lorsque l'on utilise des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur.*

Chapitre 5

Démonstration du théorème de convergence

Après avoir fait une étude sur l'approximation particulière pour l'équation de convection et une analyse numérique sur la discrétisation aux différences finies pour le problème de Neumann, on se consacre à démontrer le théorème de convergence de la méthode de couplage particules-grille pour les équations d'Euler. On essaie d'une part de séparer les diverses sortes d'erreurs dues aux différentes approximations, d'autre part d'établir les lemmes de consistance et de stabilité; grâce à eux, on trouvera l'estimation d'erreur globale à l'aide de l'inégalité de Gronwall.

Dans ce qui précède, on a établi tous les préliminaires dont on a besoin pour démontrer le *théorème de convergence* de la méthode VIC pour les équations d'Euler.

5.1 Introduction

La preuve du *théorème de convergence* de l'approximation est basée sur l'exploitation du couplage entre la famille $\{x_j(t) - x_j^h(t)\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ et la fonction $u - u^h$. Selon les définitions des caractéristiques, exactes ainsi qu'approchées, on a pour tout $j \in \mathbb{Z}^2$ et tout $t > 0$

$$\frac{d}{dt} (x_j(t) - x_j^h(t)) = u(x_j(t), t) - u^h(x_j^h(t), t) \quad (168)$$

$$(x_j(t) - x_j^h(t))|_{t=0} = 0 \quad (169)$$

On va d'abord évaluer les quantités dans le membre de droite de (168) en fonction des $(x_j(t) - x_j^h(t))$. On pose maintenant

$$e_j(t) = x_j(t) - x_j^h(t)$$

$$e(t) = \{e_j(t)\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$$

$$\|e(t)\|_p = \left\{ h^2 \sum_{j \in J} |e_j(t)|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|e(t)\|_\infty = \max_j |e_j(t)|$$

Comme

$$u(x, t) - u^h(x, t) = \mathcal{L}(\omega)(x, t) - \mathcal{L}^h(I \circ A\omega^h)(x, t) = \sum_{k=1}^4 I_k(x, t) \quad (170)$$

où

$$I_1(x, t) = \mathcal{L}(\omega - \omega * \varphi_\varepsilon)(x, t)$$

$$I_2(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}_\varepsilon(x - y) \omega(y) dy - \sum_{j \in J} \alpha_j \mathbf{K}_\varepsilon(x - x_j(t))$$

$$I_3(x, t) = \sum_{j \in J} \alpha_j \mathbf{K}_\varepsilon(x - x_j(t)) - \sum_{j \in J} \alpha_j \mathbf{K}_\varepsilon(x - x_j^h(t)) \quad (171)$$

$$I_4(x, t) = \{\mathcal{L} - \mathcal{L}^h\}(I \circ A\omega^h)(x, t)$$

en plus, si l'on note

$$I_5(x_j^h(t), t) = \mathbf{K}_\varepsilon * \omega^h(x_j(t), t) - \mathbf{K}_\varepsilon * \omega^h(x_j^h(t), t) \quad (172)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} e_j(t) &= \int_0^t (u(x_j(s), s) - u^h(x_j^h(s), s)) ds \\ &= \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^3 I_k(x_j(s), s) + \sum_{k=4}^5 I_k(x_j^h(s), s) \right\} ds \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} \|e(t)\|_p &\leq \int_0^t \left(h^2 \sum_{j \in J} |u(x_j(s), s) - u^h(x_j^h(s), s)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{k=1}^3 \int_0^t \left(h^2 \sum_{j \in J} |I_k(x_j(s), s)|^p \right)^{1/p} ds + \sum_{k=4}^5 \int_0^t \left(h^2 \sum_{j \in J} |I_k(x_j^h(s), s)|^p \right)^{1/p} ds \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \tilde{I}_k(t) &= (I_k(x_j(t), t))_{j \in J}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \\ \tilde{I}_5(t) &= (I_5(x_j^h(t), t))_{j \in J} \end{aligned} \quad (173)$$

et

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_k(t)\|_p &= \left(h^2 \sum_{j \in J} |I_k(x_j(t), t)|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad k = 1, 2, 3, 4 \\ \|\tilde{I}_5(t)\|_p &= \left(h^2 \sum_{j \in J} |I_5(x_j^h(t), t)|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty, \end{aligned} \quad (174)$$

Il s'ensuit que

$$\|e(t)\|_p \leq \sum_{k=1}^5 \int_0^t \|\tilde{I}_k(s)\|_p ds \quad (175)$$

Plan de la démonstration du théorème:

Pour achever la démonstration du *théorème de convergence*, il s'agit d'estimer soigneusement $\|e(t)\|_p$ ainsi que $\|u(\cdot, t) - u^h(\cdot, t)\|_{0,\infty}$. Afin de tirer l'estimation désirée pour $\|e(t)\|_p$, on aura besoin d'établir des estimations de

- (i) $\|\tilde{I}_k(t)\|_p$, $k = 1, 2, 4$, en fonction de h et ε ;
- (ii) $\|\tilde{I}_k(t)\|_p$, $k = 3, 5$, en fonction de $\|e(t)\|_p$ et ε .

Afin d'obtenir l'estimation finale pour $\|u(\cdot, t) - u^h(\cdot, t)\|_{0,\infty}$, on aura besoin des estimations de

- (iii) $\|I_k(\cdot, t)\|_{0,\infty}$, $k = 1, 2, 4$, en fonction de h et ε ;
- (iv) $\|I_3(\cdot, t)\|_{0,\infty}$, en fonction de $\|e(t)\|_p$ et ε .

On se consacre d'abord à la dérivation des estimations (i) et (iii) qui sont des *propriétés de consistance*, puis on traite les estimations (ii) et (iv) qui peuvent être considérées comme les *propriétés de stabilité*.

5.2 Propriétés de consistance

Puisque le tourbillon initial ω_0 est à support compact, on note qu'il existe une constante $R > 0$ telle que $\text{supp}(\omega(\cdot, t)) \subset \Omega_R = (0, R)^2$, $0 \leq t \leq T$. On commence par étudier les *propriétés de consistance*. D'après le Lemme 2.1, on a

$$\begin{aligned} |I_1(x_j(t), t)| &= |\mathcal{L}(\omega - \omega * \varphi_\varepsilon)(x_j(t), t)| \\ &\leq \|\mathcal{L}(\omega - \omega * \varphi_\varepsilon)\|_{0,\infty} \\ &\leq C \left\{ \|\omega - \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,1} + \|\omega - \omega * \varphi_\varepsilon\|_{0,\infty} \right\} \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 4.2 et de la régularité de $\omega(\cdot, t)$, on obtient

$$\|I_1(\cdot, t)\|_{0,\infty} \leq C\varepsilon^r \left(|\omega(\cdot, t)|_{r,\infty} + |\omega(\cdot, t)|_{r,1} \right) \leq C_1\varepsilon^r \quad (176)$$

D'ailleurs, on récrit

$$\begin{aligned} I_4(x_j(t), t) &= \mathcal{L}(\omega^h * \varphi_\varepsilon) - \mathcal{L}^h((I \circ A)(\omega^h))(x_j(t), t) \\ &= \mathcal{L}(\omega^h * \varphi_\varepsilon - (I \circ A)(\omega^h)) + \mathcal{L}((I \circ A)(\omega^h)) - \mathcal{L}^h((I \circ A)(\omega^h)) \end{aligned}$$

on peut trouver encore en vertu des Lemme 2.1 et Lemme 4.8

$$|I_4(x_j(t), t)| \leq C \left(\varepsilon^2 + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+2} + \left| \mathcal{L}((I \circ A)(\omega^h)) - \mathcal{L}^h((I \circ A)(\omega^h)) \right| \right) \quad (177)$$

si l'on définit

$$\begin{aligned} -\Delta \psi &= f = (I \circ A)(\omega^h), & \text{dans } \Omega_R \\ \frac{\partial}{\partial n} \psi &= g(f), & \text{sur } \Gamma_R \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta_\varepsilon \psi_\varepsilon &= f = (I \circ A)(\omega^h), & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \partial_n \psi_\varepsilon &= g(f), & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \end{aligned}$$

on a immédiatement grâce aux Lemme 3.3 et Lemme 3.6

$$\begin{aligned} &\left| \left\{ \mathcal{L}((I \circ A)(\omega^h)) - \mathcal{L}^h((I \circ A)(\omega^h)) \right\} (x_j(t), t) \right| \\ &\leq \|\mathcal{L}((I \circ A)(\omega^h)) - \mathcal{L}^h((I \circ A)(\omega^h))\|_{0,\infty} \leq c |\psi - \psi_\varepsilon|_{1,\infty} \\ &\leq C\varepsilon^2 |\log \varepsilon| \end{aligned} \quad (178)$$

il s'ensuit donc de (177)-(178)

$$\|I_4(\cdot, t)\|_{0,\infty} \leq C_4 \left(\varepsilon^\tau + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+2} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| \right) \quad (179)$$

D'autre part, on trouve pour tout $p \in [1, +\infty[$

$$\|\tilde{I}_1(t)\|_p \leq (h^2 \text{card } J)^{1/p} \|I_1(\cdot, t)\|_{0,\infty}$$

Comme ω_0 a un support compact, on a

$$h^2 \text{card } J = \text{meas} \left(\bigcup_{j \in J} \mathbf{B}_j \right) \leq c_1 \quad (180)$$

de sorte que

$$\|\tilde{I}_1(t)\|_p \leq c_1^{1/p} \|I_1(\cdot, t)\|_{0,\infty} \leq \tilde{C}_1 \varepsilon^\tau \quad (181)$$

De la même manière, on obtient

$$\|\tilde{I}_4(t)\|_p \leq \tilde{C}_4 \left(\varepsilon^\tau + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+2} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| \right) \quad (182)$$

Enfin, comme $\text{div } u = 0$ et $\omega(x, t) = \omega_0(x(0; x, t))$, on peut récrire

$$I_2(x_j(t), t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}_\varepsilon(x - x(t; y, 0)) \omega_0(y) dy - h^2 \sum_{j \in J} \mathbf{K}_\varepsilon(x - x_j(t)) \omega_0(x_j)$$

D'après le Lemme 4.1 et les propriétés de régularité du noyau régularisé, on peut trouver le résultat suivant (voir **P.A. Raviart** (1985) [59]):

LEMME 5.1 *On suppose que la fonction cut-off $\xi \in W^{m-1,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap W^{m-1,1}(\mathbb{R}^2)$ avec $m > 2$ satisfait*

$$|x|^2 |\xi(x)| \leq C, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Alors, il existe pour tout $s > 0$ une constante $C_s = C_s(T, \omega_0) > 0$ telle que l'on ait

$$\|I_2(\cdot, t)\|_{0,\infty} \leq C_s \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1+s}}, \quad t \in [0, T] \quad (183)$$

$$\|\tilde{I}_2(t)\|_p \leq C_s \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1+s}}, \quad t \in [0, T], \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (184)$$

5.3 Propriétés de stabilité

On va maintenant se pencher sur l'étude du *problème de stabilité*. Puisque

$$\begin{aligned} I_3(x_j, t) &= \sum_{j \in J} \alpha_j \mathbf{K}_\varepsilon(x - x_j(t)) - \sum_{j \in J} \alpha_j \mathbf{K}_\varepsilon(x - x_j^h(t)) \\ I_5(x_j(t), t) &= \mathbf{K}_\varepsilon * \omega^h(x_j(t), t) - \mathbf{K}_\varepsilon * \omega^h(x_j^h(t), t) \end{aligned}$$

il s'agit des propriétés de régularité du *noyau régularisé* \mathbf{K}_ε par fonction cut-off ξ et on rappelle d'abord quelques résultats suivants (voir **P.A. Raviart** (1985) [59]) :

LEMME 5.2 *Soit ℓ un entier non-négatif. Alors les propriétés suivantes sont vraies pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ avec $|\alpha| = \ell$:*

(i) *si $\xi \in W^{\ell-1,p}(\mathbb{R}^2)$ avec $\ell \geq 1$ et $p \in]2, +\infty[$, on a*

$$\|\partial^\alpha \mathbf{K}_\varepsilon\|_{0,p} \leq \frac{C}{\varepsilon^{\ell+1-2/p}};$$

(ii) *si $\xi \in W^{\ell,\infty}(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$|\partial^\alpha \mathbf{K}_\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{\ell+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^2;$$

(iii) *si $\xi \in W^{\ell,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap W^{\ell,1}(\mathbb{R}^2)$ satisfait de plus*

$$|x|^{\ell+2} |\partial^\alpha \xi(x)| \leq C,$$

on obtient

$$|\partial^\alpha \mathbf{K}_\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\ell+1}}, \quad |x| \geq \varepsilon;$$

En se basant sur les *propriétés de régularité* établies dans le Lemme 5.2, on peut montrer

LEMME 5.3 *On suppose que la fonction cut-off $\xi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ et qu'il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $\gamma > 2$ telles que*

$$|\partial^\alpha \xi(x)| \leq c_1(1 + |x|)^{-\gamma}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad |\alpha| = 0, 1; -$$

et qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\frac{h}{\varepsilon} \leq c_2.$$

Alors, on a pour tout $t \in [0, T]$

$$\|I_3(\cdot, t)\|_{0,\infty} \leq C_3 \varepsilon^{-s} (1 + \|e(t)\|_\infty \varepsilon^{-1})^{2/q} \|e(t)\|_p, \quad s \in]0, 1[\text{ et } p > 2/s \quad (185)$$

$$\|\tilde{I}_3(t)\|_p \leq \tilde{C}_3 (1 + \|e(t)\|_\infty \varepsilon^{-1})^{2/q} \|e(t)\|_p, \quad p > 2 \quad (186)$$

où q est l'exposant conjugué de p .

On peut démontrer également le résultat suivant (voir **G.H. Cottet** (1987) [23]) :

LEMME 5.4 Soit $T > 0$. Alors, il existe des constantes C_p , ε_0 et h_0 telles que pour $t \in [0, T]$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, $h < h_0$, $h/\varepsilon \leq C$ et $p \in]2, +\infty[$:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \| \mathbf{K}_\varepsilon * (\omega - \omega^h)(\cdot, t) \|_{0,p} \leq C_p \left\{ \frac{h^2}{\varepsilon} + \frac{h^3}{\varepsilon^2} + \left(1 + \frac{\|e(t)\|_\infty}{\varepsilon} \right) \|e(t)\|_p \right\}; \\ (ii) \quad & | \mathbf{K}_\varepsilon * (\omega - \omega^h)(\cdot, t) |_{1,p} \leq \frac{C_p}{\varepsilon} \left\{ h + \frac{h^2}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{\|e(t)\|_\infty}{\varepsilon} \right) \|e(t)\|_p \right\}; \\ (iii) \quad & \| \mathbf{K}_\varepsilon * (\omega - \omega^h)(\cdot, t) \|_{1,\infty} \leq C_p \left\{ 1 + \frac{\|e(t)\|_\infty}{\varepsilon} \right\}^2. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 5.4 (iii), on a donc

$$\begin{aligned} |I_5(x_j^h(t), t)| &= |(\mathbf{K} * \omega^h * \varphi_\varepsilon)(x_j(t), t) - (\mathbf{K} * \omega^h * \varphi_\varepsilon)(x_j^h(t), t)| \\ &\leq \| \mathbf{K}_\varepsilon * \omega^h(\cdot, t) \|_{1,\infty, \mathbb{R}^2} |x_j(t) - x_j^h(t)| \\ &\leq C_5 \{ 1 + \|e(t)\|_\infty \varepsilon^{-1} \}^2 |x_j(t) - x_j^h(t)| \end{aligned} \quad (187)$$

et en vertu de (180)

$$\|\tilde{I}_5(t)\|_p \leq \tilde{C}_5 \{ 1 + \|e(t)\|_\infty \varepsilon^{-1} \}^2 \|e(t)\|_p \quad (188)$$

5.4 Estimation d'erreur globale

On est maintenant en mesure d'achever notre démonstration. Soit $M > 0$ une constante fixée, on définit

$$T_\varepsilon^* = \sup\{t \in [0, T]; \|e(t)\|_\infty \leq M\varepsilon\}. \quad (189)$$

et on suppose qu'il existe des constantes $c > 0$ et $\alpha \geq \beta > 1$ telles que

$$c^{-1}\varepsilon^\alpha \leq h \leq c\varepsilon^\beta. \quad (190)$$

Grâce aux estimations (181), (182), (184), (186) et (188) on en déduit que $\forall p \in]2, +\infty[$ et $\forall \sigma > 0$

$$\|e(t)\|_p \leq C_1 \left\{ \varepsilon^r + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+2} + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1+\sigma}} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \int_0^t \|e(s)\|_p ds \right\}, \quad t \in [0, T_\varepsilon^*]$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall (voir **J.K. Hale** (1969) [43]), on obtient pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^*]$

$$\|e(t)\|_p \leq C_2 \left\{ \varepsilon^r + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+2} + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1+\sigma}} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| \right\} \quad (191)$$

Puisque

$$\|(u - u^h)(\cdot, t)\|_{0,\infty} \leq \sum_{k=1}^4 \|I_k(\cdot, t)\|_{0,\infty}$$

En vertu de (176), (179), (183) et (185) avec la deuxième inégalité de (190), on peut obtenir pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^*]$ et $\forall \sigma > 0, \forall p > \frac{2}{\sigma}$

$$\|(u(\cdot, t) - u^h(\cdot, t))\|_{0,\infty} \leq C_3 \left\{ \varepsilon^r + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+2} + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1+\sigma}} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \varepsilon^{-\sigma} \|e(t)\|_p \right\}$$

Par conséquent, on déduit de (191) que $\forall s > 0$ suffisamment petit

$$\|u(\cdot, t) - u^h(\cdot, t)\|_{0,\infty} \leq \frac{C_4}{\varepsilon^s} \left\{ \varepsilon^r + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+2} + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1}} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| \right\}, \quad t \in [0, T_\varepsilon^*] \quad (192)$$

Afin d'obtenir l'estimation de $\|e(t)\|_\infty$, on remarque que

$$\|e(t)\|_p = h^{2/p} \left(\sum_{j \in J} |e_j(t)|^p \right)^{1/p} \geq h^{2/p} \|e(t)\|_\infty \quad (193)$$

d'où l'on tire en vertu de la première inégalité de (190)

$$\|e(t)\|_\infty \leq \frac{C_5}{\varepsilon^{2\alpha/p}} \|e(t)\|_p.$$

En utilisant l'estimation (191) et choisissant p suffisamment grand, on obtient $\forall s > 0$

$$\|e(t)\|_\infty \leq \frac{C_6}{\varepsilon^s} \left\{ \varepsilon^r + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+2} + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1}} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| \right\}, \quad t \in [0, T_\varepsilon^*] \quad (194)$$

Il ne reste maintenant qu'à démontrer que $T_\varepsilon^* = T$ pour ε suffisamment petit. En effet, comme pour tout $\rho > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\rho \log \varepsilon = 0$$

on a pour ε suffisamment petit

$$C \varepsilon^{-s} (\varepsilon^r + \varepsilon^2 |\log \varepsilon|) \leq M\varepsilon/4$$

et on peut choisir $\beta > 1$ tel que

$$\begin{aligned} c (\varepsilon^{(\beta-1)m+1} + \varepsilon^{(\beta-1)(m+2)}) &\leq M\varepsilon/4 \\ C \left\{ \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{m+2} + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1}} \right\} &\leq C \varepsilon^\alpha \leq M\varepsilon/4 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour ε suffisamment petit

$$\|e(T_\varepsilon^*)\|_\infty \leq M\varepsilon/2$$

ce qui interdit $T_\varepsilon^* < T$ et achève finalement notre démonstration. ■

Remarque. On peut améliorer au moins le terme d'erreur de régularisation dans l'estimation d'approximation, à l'aide d'une méthode itérative définie dans le Chapitre 6 et on peut démontrer de la même façon en vertu du Lemme 4.9

$$\begin{aligned} \max_j |x_j(t) - x_j^{h,n}(t)| &\leq \frac{C}{\varepsilon^s} \left\{ \varepsilon^{(n+1)r} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1}} \right\}, \quad t \in [0, T] \\ \|u(\cdot, t) - u^{h,n}(\cdot, t)\|_{0,\infty} &\leq \frac{C}{\varepsilon^s} \left\{ \varepsilon^{(n+1)r} + \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \frac{h^m}{\varepsilon^{m-1}} \right\}, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$
■

Chapitre 6

Simulation numérique des équations d'Euler bidimensionnelles

On termine par faire une série de problèmes tests numériques en choisissant des distributions initiales de tourbillon à symétrie radiale. Le but de cette étude numérique est de valider la méthode VIC que l'on a étudiée dans les chapitres précédents, par des calculs d'erreurs entre une solution analytique exacte et la solution calculée correspondante. On montre l'efficacité de ces techniques.

6.1 Introduction

Pour tester la performance de la méthode VIC proposée, on choisit une distribution initiale de tourbillon à symétrie radiale, c'est-à-dire que

$$\omega(x, y) = \omega(r), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (195)$$

$$\text{où} \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (196)$$

En raison de la symétrie, les termes de convection disparaissent réellement (effectivement). La solution correspondante des équations d'*Euler* en bidimension est donc un écoulement stationnaire, rotationnel d'un fluide parfait incompressible avec une expression analytique du champs de vitesse suivante:

$$\vec{u}(x, y) = (u_x, u_y) = (-y, x) \frac{1}{r^2} \int_0^r s \omega(s) ds. \quad (197)$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{r} &= (-y, x) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{r^2} \int_0^r s \omega(s) ds = 0 \\ (\vec{u} \cdot \nabla) \omega &= (u_x, u_y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} = (-y, x) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} = 0 \\ u(r) &= |\vec{u}(x, y)| = \frac{1}{r} \int_0^r s \omega(s) ds \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \omega(x, y, t) &= \omega(x, y, 0) = \omega(r) \\ \vec{u}(x, y, t) &= \vec{u}(x, y, 0) = u(r) \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (198)$$

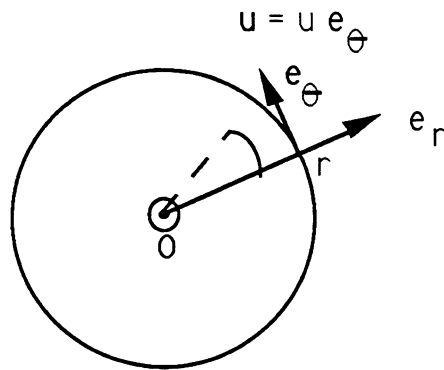


FIGURE 6.1 vortex de cercle

Les vitesses angulaires varient par rapport au rayon et les trajectoires de particules sont des cercles centrés (tournent autour de) à l'origine. La configuration initiale rectangulaire des particules calculées est gravement déformée. C'est la raison pour laquelle on croit que ce genre de problèmes donne un test significatif de la méthode.

6.2 Problèmes traités

On applique notre méthode étudiée au Chapitre 2 au problème d'un tourbillon unique avec un centre de cercle fini, utilisé par **J.T. Beale & A. Majda** (1982) [3]. On considère d'abord le tourbillon initial assez régulier, dans $C^3(\mathbb{R}^2)$ et dans C^∞ pour $r \neq 1$:

$$(EX1) \quad \omega_0(r) = \begin{cases} (1 - r^2)^3, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (199)$$

où $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Alors, on a la fonction de courant

$$\frac{d\psi}{dr} = \begin{cases} -\frac{1}{8r} (1 - (1 - r^2)^4), & r < 1 \\ -\frac{1}{8r}, & r \geq 1 \end{cases} \quad (200)$$

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{64}r^8 - \frac{1}{12}r^6 + \frac{3}{16}r^4 - \frac{1}{4}r^2 + \frac{25}{192}, & r < 1 \\ -\frac{1}{8} \log r, & r \geq 1 \end{cases} \quad (201)$$

et la vitesse

$$u = \begin{cases} \frac{1}{8r^2} (1 - (1 - r^2)^4) (-y, x), & r < 1 \\ \frac{1}{8r^2} (-y, x), & r \geq 1 \end{cases} \quad (202)$$

Les particules de fluide dans les rayons différents bougent aux vitesses (angulaires) différentes. La période de rotation d'une particule située à la distance r de l'origine diminue lorsque r décroît: par exemple, les vitesses angulaires autour de l'origine et sur $r = 1$ sont les suivantes

$$f_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right| = \frac{1}{2}$$

$$f_1 = \lim_{r \rightarrow 1} \left| \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right| = \frac{1}{8}$$

dont les périodes de rotation s'obtiennent respectivement

$$t_0 = \frac{2\pi}{f_0} = 4\pi$$

$$t_1 = \frac{2\pi}{f_1} = 16\pi$$

On peut vérifier aisément les invariants suivants:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{|x| \leq 1} \omega dx = \frac{\pi}{4} \\ I_2 &= \int_{|x| \leq 1} |x|^2 \omega dx = \frac{\pi}{20} \\ A_e &= \frac{I_2}{\Gamma} = \frac{1}{5} \\ E_s &= \int_{|x| \leq 1} |\omega|^2 dx = \frac{\pi}{7} \\ E &= \frac{1}{\pi} \int_{|x| \leq 1} |u|^2 dx = \frac{1217}{53760}\end{aligned}$$

Si l'on prend le tourbillon initial plus régulier ci-après:

$$(EX2) \quad \omega_0(r) = \begin{cases} (1 - r^2)^7, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (203)$$

Alors, on a la fonction de courant correspondante

$$\frac{d\psi}{dr} = \begin{cases} -\frac{1}{16r} (1 - (1 - r^2)^8), & r < 1 \\ -\frac{1}{16r}, & r \geq 1 \end{cases} \quad (204)$$

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{16} \left(\frac{1}{16} r^{14} - \frac{4}{7} r^{12} + \frac{7}{3} r^{10} - \frac{28}{5} r^8 + \frac{35}{4} r^6 - \frac{28}{3} r^4 + 7r^2 - 4 \right), & r < 1 \\ -\frac{1}{16} \log r, & r \geq 1 \end{cases} \quad (205)$$

et la vitesse

$$u = \begin{cases} \frac{1}{16r^2} (1 - (1 - r^2)^8) (-y, x), & r < 1 \\ \frac{1}{16r^2} (-y, x), & r \geq 1 \end{cases} \quad (206)$$

Les particules près de l'origine terminent une rotation en $t = 4\pi$, tandis que les particules sur $r = 1$ finissent un tour en $t = 16\pi$. On a également les invariants suivants:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{|x| \leq 1} \omega dx = \frac{\pi}{8} \\ I_2 &= \int_{|x| \leq 1} |x|^2 \omega dx = \frac{\pi}{72} \\ A_e &= \frac{I_2}{\Gamma} = \frac{1}{9} \\ E_s &= \int_{|x| \leq 1} |\omega|^2 dx = \frac{\pi}{15}\end{aligned}$$

On considère finalement le tourbillon initial non régulier:

$$\text{(EX3)} \quad \omega_0(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (207)$$

Alors, on a la fonction de courant

$$\frac{d\psi}{dr} = \begin{cases} -\frac{r}{2}, & r < 1 \\ -\frac{1}{2r}, & r \geq 1 \end{cases} \quad (208)$$

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - r^2), & r < 1 \\ -\frac{1}{2} \log r, & r \geq 1 \end{cases} \quad (209)$$

et pour la vitesse

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2}(-y, x), & r < 1 \\ \frac{1}{2r^2}(-y, x), & r \geq 1 \end{cases} \quad (210)$$

Cette fois-là, la vitesse angulaire ne varie plus en fonction du rayon et toutes les particules terminent un tour en $t = 4\pi$. On donne aussi les invariants correspondants:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{|x| \leq 1} \omega dx = \pi \\ I_2 &= \int_{|x| \leq 1} |x|^2 \omega dx = \frac{\pi}{2} \\ A_e &= \frac{I_2}{\Gamma} = \frac{1}{2} \\ E_s &= \int_{|x| \leq 1} |\omega|^2 dx = \pi \\ E &= \frac{1}{\pi} \int_{|x| \leq 1} |u|^2 dx = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

6.3 Résultats numériques

Le test numérique considéré est l'erreur relative sur le calcul de la vitesse. Cette erreur, calculée en norme ℓ^2 sur les trajectoires des particules, s'exprime par

$$E_U(t) = \left(\frac{E_n(t)}{E_d(t)} \right)^{1/2} \quad (211)$$

$$\text{avec } E_n(t) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N |U_{ex}(X_p^h(t)) - U_{cal}(X_p^h(t))|^2 \quad (212)$$

$$E_d(t) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N |U_{ex}(X_p^h(t))|^2 \quad (213)$$

où N désigne le nombre total de particules utilisées. Les particules sont initialement placées en des points x_p , centres d'un maillage régulier de taille h qui recouvre le carré unitaire $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Seules les N particules de vorticité non nulle à l'instant initial sont utilisées dans la suite du calcul. Le poids affecté à la particule centrée en x_p est $\alpha_p = h^2 \omega_0(x_p)$ avec $h = 2/n_p$. On prend $n_p = 20, 25, 30, 35, 40$ et le nombre total correspondant de particules utiles à l'intérieur du support est respectivement de $N = n_p t = 316, 489, 716, 973, 1264$. Le paramètre de régularisation $\varepsilon = 0.1$ (ou le nombre de points de grille $m = 2/\varepsilon = 20$).

Selon la méthode proposée dans le Chapitre 2, on est amené à résoudre le système différentiel suivant:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_p^h(t) &= u^h(x_p^h(t), t), \quad x_p^h(0) = x_p, \quad \forall p \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{où } u^h(x, t) &= \mathcal{L}^h(I(\omega_j))(x, t) \\ \omega_j(t) &= \frac{\sum_p \alpha_p \varphi_j(x_p(t))}{\sum_p h^2 \varphi_j(x_p(t))}. \end{aligned}$$

La discrétisation en temps utilise soit un schéma du type Runge-Kutta d'ordre 4, soit un schéma Adams-Bashforth d'ordre 2. Le schéma explicite du premier ordre a été éliminé, en raison de sa mauvaise précision ainsi que le schéma saute-mouton, pour ses importantes oscillations entre les étapes paires et impaires du calcul.

Le pas de temps a été choisi assez grand: $\delta t = 1$. Le temps de calcul est $T = 100$. Lorsque l'on réduit le pas de temps de moitié ($dt = 0.5, 0.25$), on trouve qu'il n'y a pas de changement significatif sur la précision dans l'intervalle $t \in [0, 100]$. Cela indique que les erreurs dominantes sont dues à la discrétisation spatiale.

Sans calcul de volume

On fait d'abord un essai sans calcul de volume affecté au nœud x_j et les résultats sont illustrés dans la Figure 6.2. On peut constater que

- en $t < 25$, la précision est très bonne (de l'ordre ε^2) et la courbe d'erreur est régulière pour des petits temps. En effet, plus on met de particules, meilleure est la précision dans une ou deux périodes de rotations, mais elle est pire pour des grands temps.
- au bout d'un certain temps ($t \geq 25$), l'erreur devient relativement grande à cause de la géométrie déformée de la configuration initiale lagrangienne.
- d'une manière significative, la courbe d'erreur ne empire plus régulièrement, au fur et à mesure que le temps s'écoule.

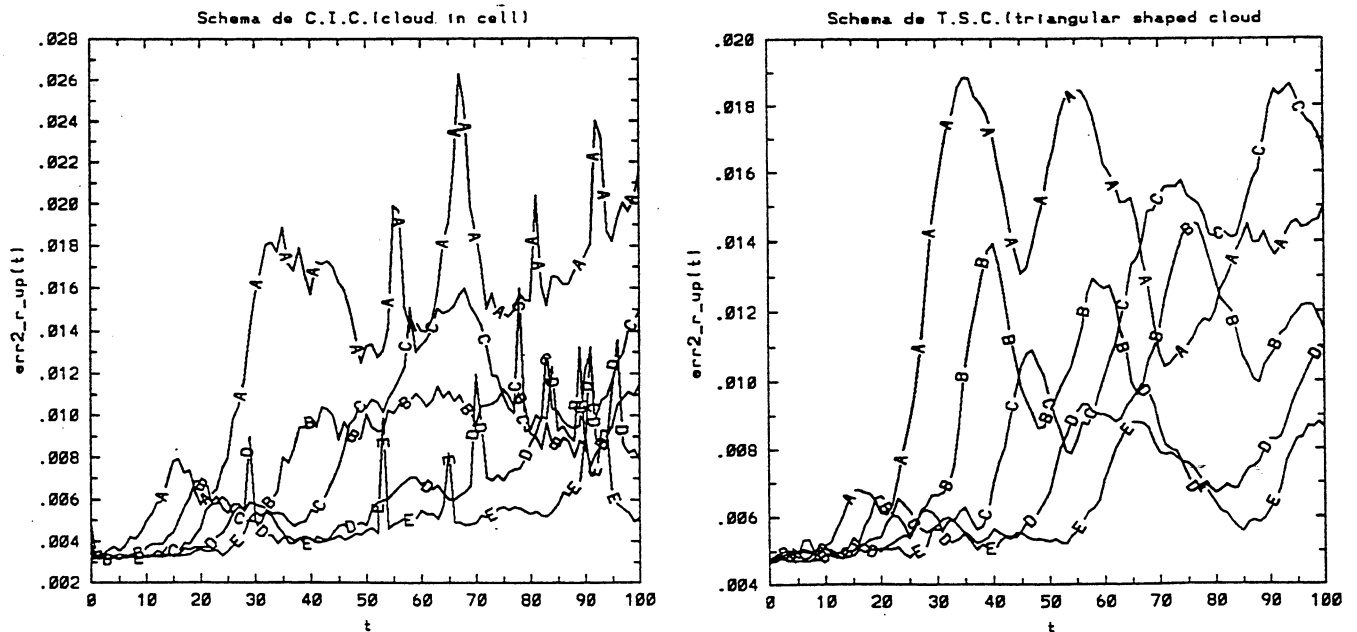


FIGURE 6.2 Erreurs relatives sur la vitesse calculée sans volume
 $npt=316(A), npt=489(B), npt=716(C), npt=973(D), npt=1264(E)$
 schéma de C.I.C. ($l=2$); schéma de T.S.C. ($l=3$)

Avec calcul de volume

On espère obtenir une meilleure précision pour une durée plus longue. On peut réinitialiser la configuration de la distribution de particules couramment utilisée dans la pratique pour les méthodes lagrangiennes. Ici, on ajoute une méthode itérative proposée par **J.T. Beale** (1987) [5] en calculant le volume affecté au nœud x_j . On trouve que

- l'erreur sur la vitesse est bien meilleure, sans itération, que sans calcul de volume (cf. Figure 6.3 et Figure 6.4);
- 1 ou 2 itérations réduisent d'une manière significative l'erreur, mais la réduction est très lente avec plus d'itérations (cf. Figure 6.5 et Figure 6.6);
- si l'on augmente le nombre de particules (correspondant à $n_p = 20, 25, 30, 35, 40$), le paramètre optimal $s = 0.91165$ (i.e. $n_p = 25$) dans la relation $\varepsilon = h^s$ avec $0 < s < 1$. (cf. Figures 6.5 et Figures 6.6). Cela correspond au résultat de **M. Perlman** (1985) [57] ($s = 0.95$).

Enfin, on compare les choix de la fonction cut-off de type B-spline $\chi^{*(l)}$ avec $l = 2, 3, 4$, et les résultats des schémas C.I.C.(cloud in cell) et T.S.C.(triangular shaped cloud) sont meilleurs que ceux donnés par le schéma N.G.P.(nearest grid point), comme le confirme la Figure 6.7.

Toutes ces conclusions ont été confirmées par l'étude de deux autres tourbillons initiaux, de plus en plus singuliers, le deuxième étant la fonction caractéristique du disque unité.

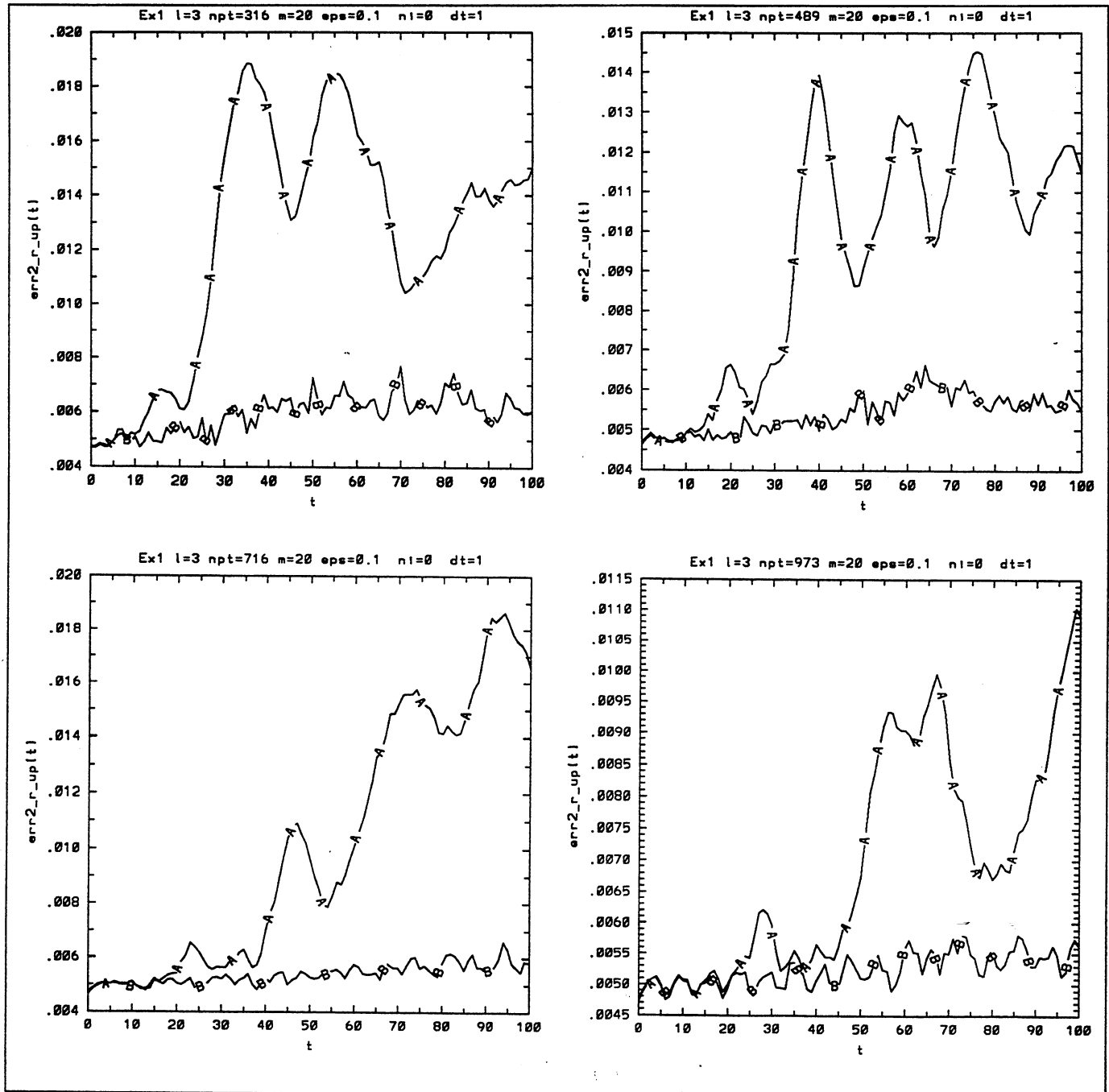


FIGURE 6.3 Erreurs relatives sur la vitesse calculée sans (A) ou avec (B) calcul de volume

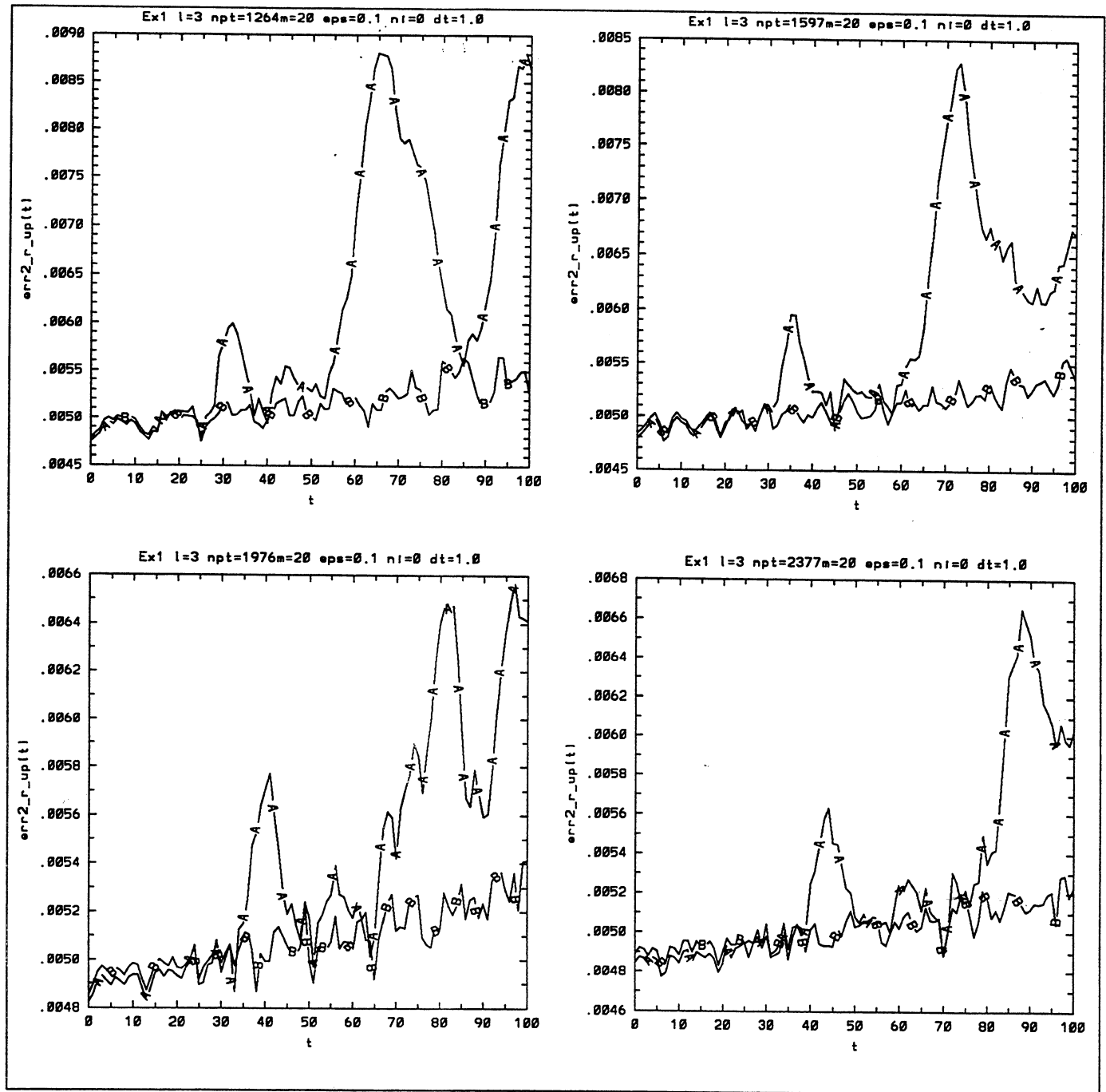


FIGURE 6.4 Erreurs relatives sur la vitesse calculée sans (A) ou avec (B) calcul de volume

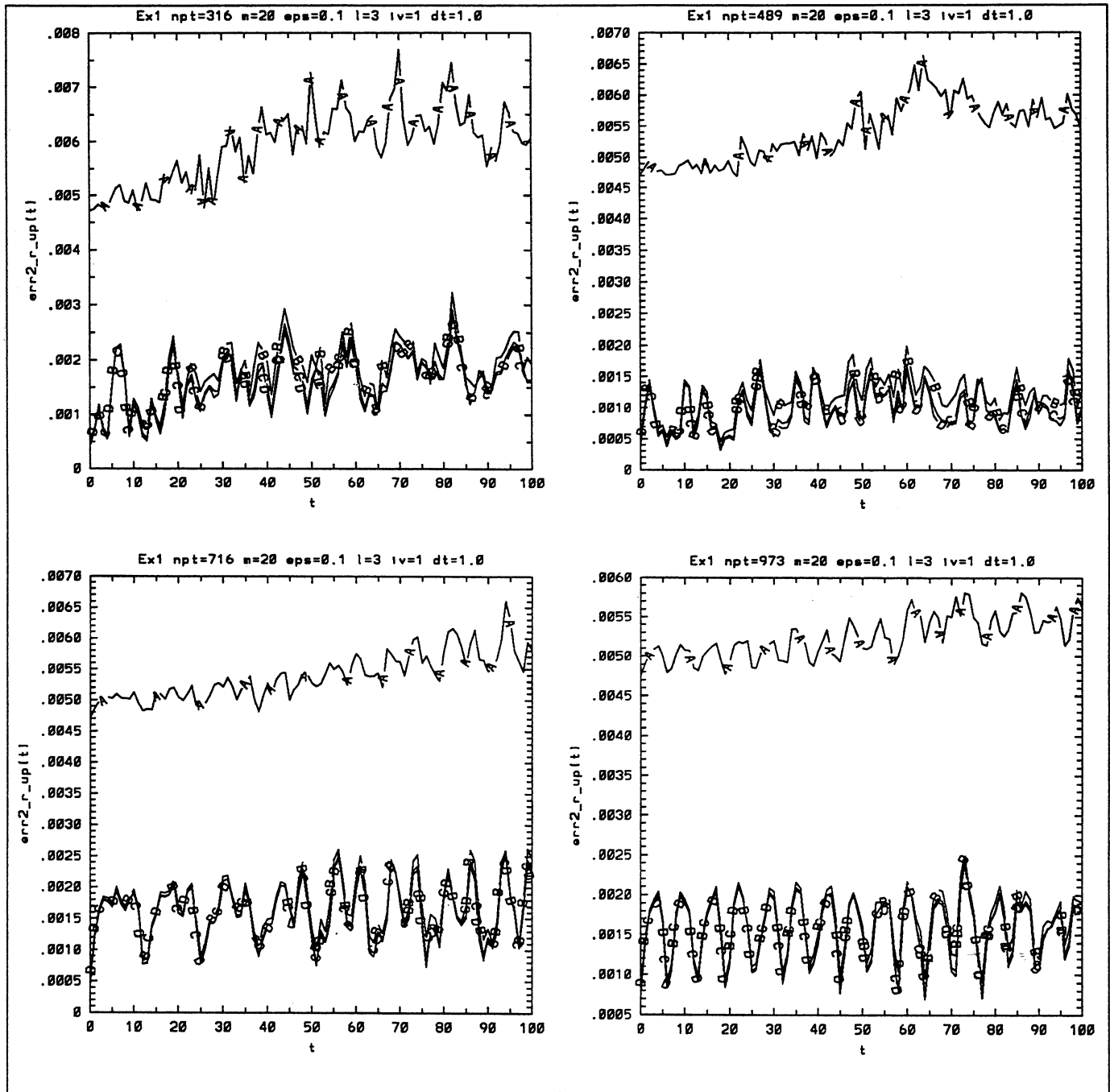


FIGURE 6.5 Erreurs relatives sur la vitesse calculée

$$ni = 0(A), ni = 1(B), ni = 2(C), ni = 3(D)$$

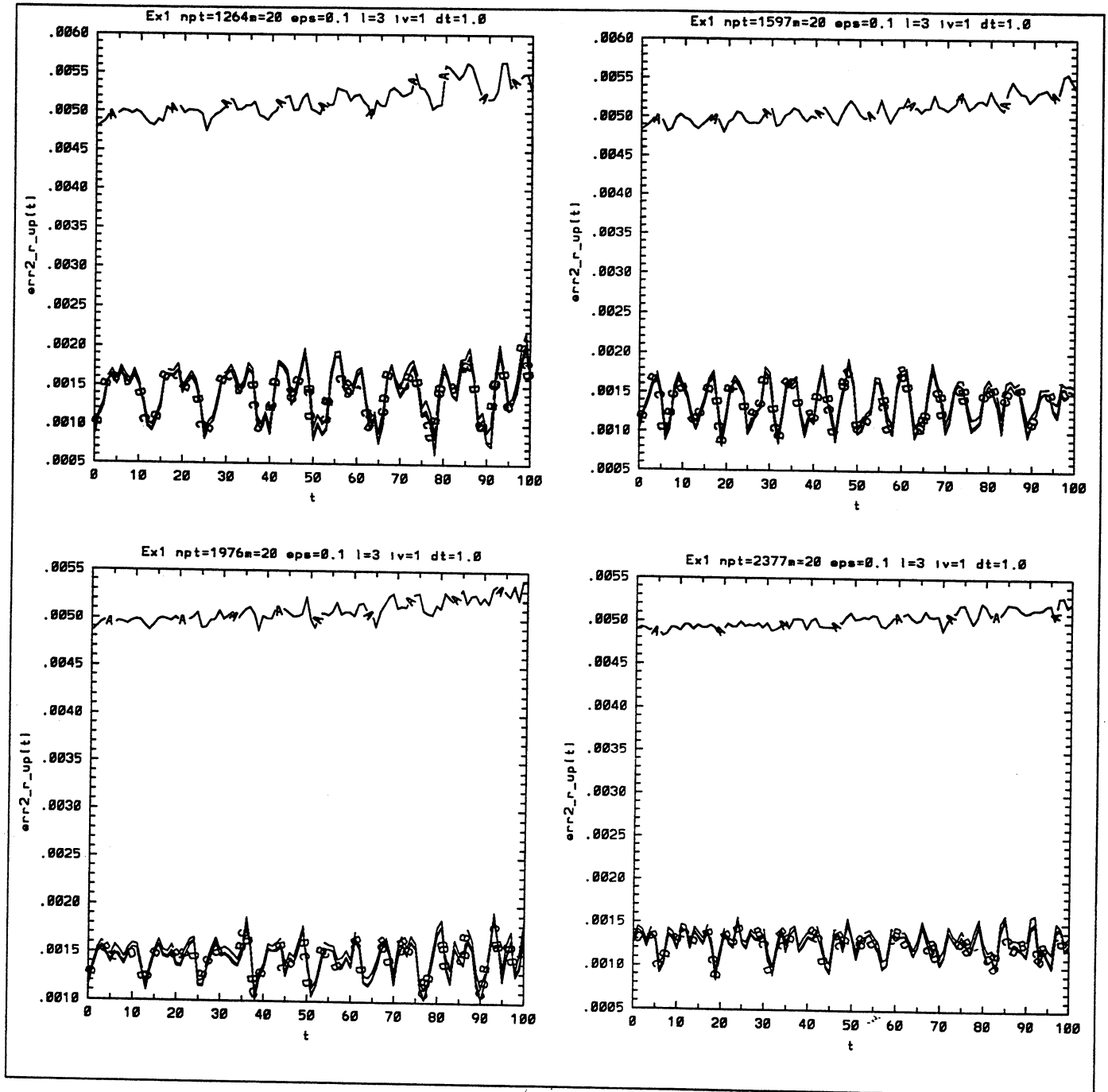


FIGURE 6.6 Erreurs relatives sur la vitesse calculée

$ni = 0(A)$, $ni = 1(B)$, $ni = 2(C)$, $ni = 3(D)$

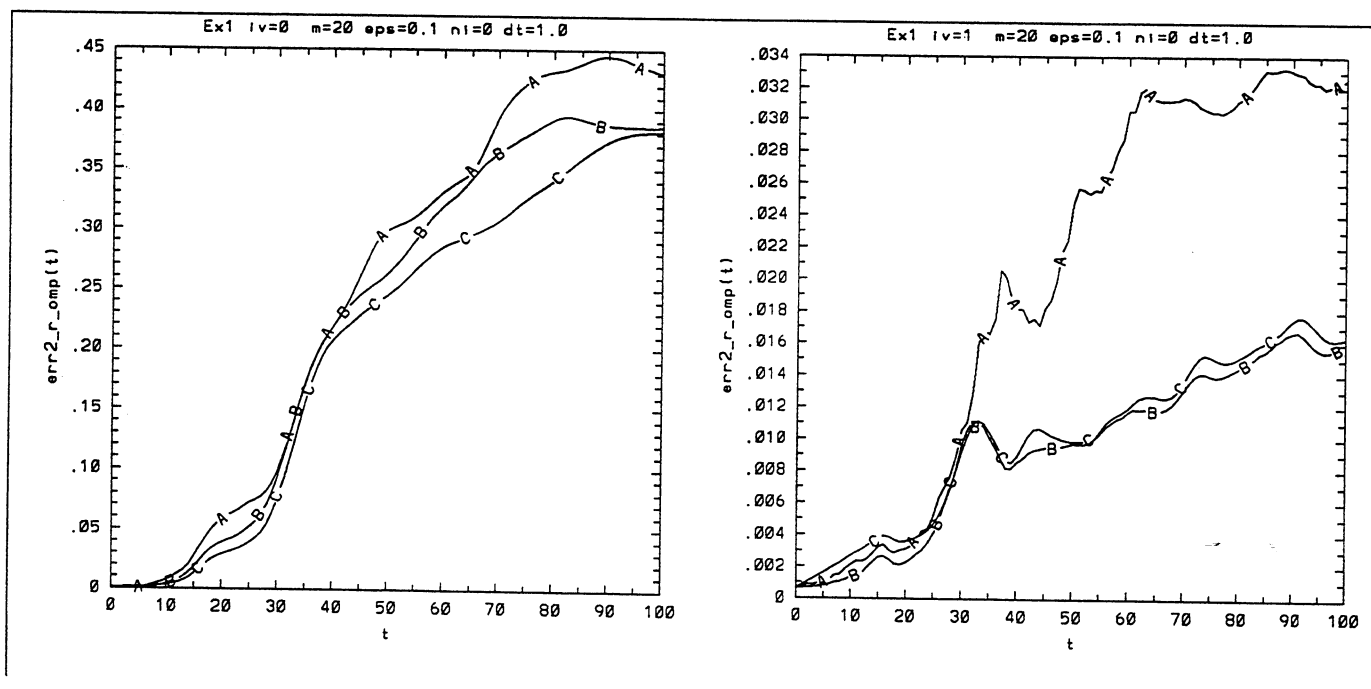


FIGURE 6.7 Erreurs relatives sur le tourbillon calculé

$$l = 2(A), l = 3(B), l = 4(C)$$

sans ($iv=0$) ou avec ($iv=1$) calcul de volume

Partie II

Méthodes de Couplage Particules-Grille pour les Equations de Navier-Stokes

Chapitre 7

Introduction

7.1 Equations de Navier-Stokes

Les équations générales qui gouvernent le mouvement d'un fluide homogène newtonien visqueux en écoulement incompressible sont, dans un domaine volumique Ω de \mathbb{R}^3 occupé par le fluide, bien connues sous le nom de *équations de Navier-Stokes*^{1 2}

$$\rho \frac{du}{dt} + \text{grad } p = \mu \Delta u \quad (214)$$

$$\text{div } u = 0 \quad (215)$$

où $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$ est le vecteur vitesse dans le repère considéré, $x = (x_1, x_2, x_3)$ désigne les coordonnées d'Euler de la particule considérée à l'instant t ; $\rho(x, t) > 0$ est la masse volumique, $p(x, t) \geq 0$ est la pression du fluide et μ est le coefficient de viscosité dynamique; d/dt représente une dérivée particulière:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \text{grad}) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (216)$$

Dans un écoulement quelconque de fluide, la quantité de mouvement d'un fluide peut être transportée à la fois par convection et par diffusion. Les deux mécanismes (convectif et diffusif) de transport de quantité de mouvement sont simultanément actifs mais, suivant la vitesse et la géométrie de l'écoulement, ils n'auront pas le même ordre de grandeur. Si l'on rapporte les longueurs à une *longueur caractéristique* L , les vitesses à une *vitesse caractéristique* V et les masses à ρL^3 , l'équation (214) se met sous une forme analogue, mais avec un nombre sans dimensions

$$\frac{\text{flux convectif de la quantité de mouvement}}{\text{flux diffusif de la quantité de mouvement}} \approx \frac{\rho V^2}{\mu V/L} = \frac{VL}{\nu} = Re, \text{ où } \nu = \mu/\rho \quad (217)$$

dit le *nombre de Reynolds*³ de l'écoulement: il caractérise l'importance relative du transport de quantité de mouvement par convection et par diffusion visqueuse; ν est appelé le *coefficient de viscosité cinématique* du fluide.

La formulation en tourbillon-vitesse des équations de Navier-Stokes est particulièrement intéressante, car les méthodes numériques mises en œuvre à ce propos

¹ Claude-Louis-Marie Navier, né à Dijon le 15 février 1785 et mort à Paris le 21 août 1836.

² George Gabriel Stokes, né à Bornat Skreen le 13 août 1819 et mort à Cambridge le premier février 1903.

³ Osborne Reynolds, né à Belfast le 23 août 1842 et mort à Somerset le 21 février 1912.

ont une très petite viscosité numérique et il nous paraît convenable de traiter des problèmes avec un nombre de Reynolds très élevé; en outre, comme on l'a déjà remarqué, le terme de gradient de la pression disparaît des équations et la contrainte d'incompressibilité est automatiquement satisfaite.

On se limite ici à l'étude d'un écoulement bidimensionnel. Dans ce cas, l'équation (215) de la conservation de la masse implique qu'il existe une fonction $\psi(x, y, t)$, dite fonction de courant et définie (à une fonction additive arbitraire du temps près) par

$$(u, v) = \text{curl } \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (218)$$

où u, v sont les composantes cartésiennes de la vitesse. D'autre part, on appelle le vecteur-tourbillon le vecteur

$$\vec{\Omega} = \text{rot } u = \omega \vec{k} \quad (219)$$

où \vec{k} est le vecteur unitaire directement perpendiculaire au plan et ω est un scalaire défini par

$$\omega = \text{curl } u = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (220)$$

En prenant le rotationnel de (214), on élimine la pression et l'on obtient la formulation en vitesse-tourbillon des équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + (u \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega \quad (221)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (222)$$

Une fois le système résolu, il convient d'en déduire la pression satisfaisant l'équation de Poisson suivante:

$$\Delta p = 2\rho \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \quad (223)$$

Il faut bien marquer que le nombre de Reynolds joue un rôle important.

Dans la première partie, on a considéré la limite $\nu \rightarrow 0$: un fluide parfait, i.e., les effets de viscosité sont supposés négligeables, et les équations (214)-(215) deviennent les équations d'Euler.

La viscosité du fluide exerce une action de freinage sur les particules. Dans la pratique, ν est très petit et Re est très grand: l'équation (214) n'est autre qu'un beau problème de *perturbation singulière* pour le problème de convection pure, dans lequel le terme d'ordre de dérivation le plus élevé (Δu , du second ordre) est en facteur d'un coefficient ν très petit. Ceci se traduit le long des parois, des lignes de jet, des sillages, ou encore dans la structure des chocs, par une zone de variation extrêmement rapide de la vitesse, du type *couche limite*.

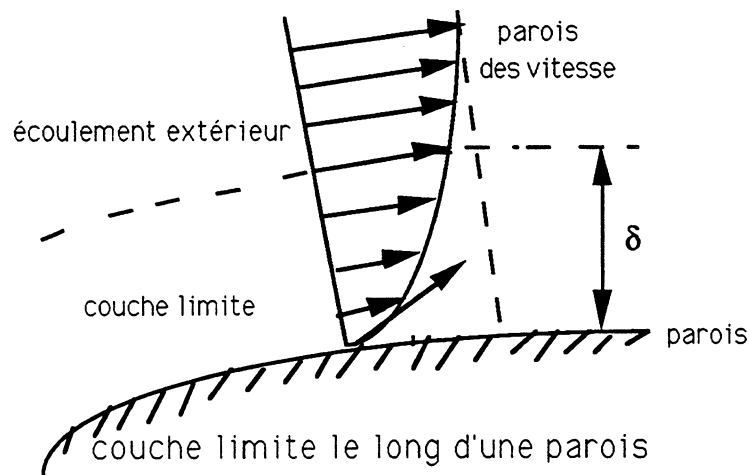


FIGURE 7.1 *couche limite d'épaisseur δ , en $\mathcal{O}(\sqrt{\nu})$*

On pourrait voir que ω_ε (respectivement u_ε) admet le développement asymptotique

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon &= \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n \omega_n \\ u_\varepsilon &= \mathbf{K} * \omega_\nu = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n u_n\end{aligned}$$

où ω_n, u_n sont respectivement les solutions des équations suivantes:

$$\begin{aligned}L_E \omega_0 &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \omega_0 + (u_0 \cdot \nabla) \omega_0 = 0 \\ u_0 &= \mathbf{K} * \omega_0 \\ \omega_0(\cdot, 0) &= \omega_0\end{aligned}$$

et

$$L_R \omega_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t} \omega_1 + (u_0 \cdot \nabla) \omega_1 + (u_1 \cdot \nabla) \omega_0 = \Delta \omega_0$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathbf{K} * \omega_1 \\
\omega_1(\cdot, 0) &= 0 \\
L_R \omega_n &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \omega_n + (u_0 \cdot \nabla) \omega_n + (u_n \cdot \nabla) \omega_0 = \Delta \omega_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} (u_k \cdot \nabla) \omega_{n-k}, \quad n \geq 2 \\
u_n &= \mathbf{K} * \omega_n \\
\omega_n(\cdot, 0) &= 0
\end{aligned}$$

d'où l'on voit que la solution des équations d'Euler n'est qu'une approche du premier ordre de la solution des équations de Navier-Stokes. On espère qu'une méthode de vortex basée sur le développement asymptotique ci-dessus sera mieux que celle basée sur la méthode de splitting classique.

L'étude de l'unicité est fortement liée à celle de la régularité (cf. **J.L. Lions**(1968) [50]) et dans le cas tri-dimensionnel, l'unicité est encore un problème ouvert. Or la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement. En général, lorsque le nombre de Reynolds est petit, les solutions sont très régulières, tandis que les écoulements turbulents complexes sont associés à un grand nombre de Reynolds. **W.D. Henshaw**, **H.O. Kreiss** et al (1991) [46] ont quantifié la relation entre le nombre de Reynolds et la régularité de l'écoulement et montré que la plus petite échelle λ_{min} , caractérisant le plus petit tourbillon, est proportionnelle à la racine carrée de la viscosité divisée par le tourbillon maximal: $(\frac{\nu}{\|\omega\|_\infty})^{1/2}$; par conséquent, le nombre de modes nécessaires pour représenter un écoulement turbulent est proportionnel à λ_{min}^{-d} , où d est la dimension de l'espace.

Toutefois, lorsque le nombre de Reynolds Re dépasse un certain seuil Re^* dit *Reynolds critique*, l'écoulement change radicalement de nature et prend un caractère aléatoire: ce régime est dit *turbulent* et la situation opposée, correspondant à la relation $Re < Re^*$, est dite *laminaire*

Les écoulements turbulents, très répandus dans la mécanique des fluides industrielle, se calculent très difficilement. Et pour deux raisons ci-après [34]:

- Le spectre de l'écoulement est très étalé: une grande variété d'échelles de phénomènes interviennent. En particulier, les phénomènes à petite échelle, par effet cumulatif, finissent par influencer sur les phénomènes à grande échelle. Pour

calculer un tel écoulement, il faudrait un ordinateur beaucoup plus puissant que ce que l'on trouve actuellement de mieux sur le marché (par exemple, pour les prévisions météorologiques);

- Mais il semble qu'il y ait un doute sur la validité des équations de Navier-Stokes elles-mêmes. En particulier, en tridimensionnel, pour Re assez grand, non seulement on n'a pas unicité de la solution, mais on connaît même des contre-exemples.

7.2 Propriétés des équations de Navier-Stokes

Pour les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, on a les invariants et loi de décroissance suivants

PROPOSITION 7.1 1) (*invariant de la circulation totale*)

$$\Gamma_t \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) dx \equiv \Gamma_0(t);$$

2) (*loi de décroissance*)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega(x, t) dx = \frac{4}{Re} \int_{\mathbb{R}^2} \omega dx = 4\nu \Gamma_0;$$

3) (*relation de l'impulsion angulaire*)

$$A_e(t) \equiv \frac{\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega(x, t) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} \omega(x, t) dx} = A_e(0) + 4t\nu.$$

Démonstration. En effet, d'une part,

$$\frac{d}{dt} \int \omega(x, \cdot) dx = \int \frac{\partial \omega}{\partial t} dx = - \int \nabla(u \cdot \omega) + \nu \int \Delta \omega dx$$

On rappelle la formules de Green-Ostrogradski (*théorème de divergence*): soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , de bord $\Gamma = \partial\Omega$ assez régulier. On a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v dx = \int_{\Gamma} v \cdot n d\gamma, \quad \forall v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$$

en particulier, si $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Gamma} \nabla u \cdot n d\gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma$$

et on obtient donc

$$\frac{d}{dt} \int \omega(x, \cdot) dx = 0$$

d'où l'on tire directement l'invariant de la circulation totale.

D'une part, d'après les formules de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \Delta u dx &= \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx &= \int_{\Gamma} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) d\gamma \end{aligned}$$

on a également

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int |x|^2 \omega dx &= \int |x|^2 (-\nabla(u \cdot \omega) + \nu \Delta \omega) dx \\ &= \int \nabla |x|^2 u \omega dx - \nu \int \nabla |x|^2 \nabla \omega dx \\ &= \int \nabla |x|^2 u \omega dx - \nu \int \Delta |x|^2 \omega dx = I_1 + I_2\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}u &= \mathbf{K} * \omega \\ \mathbf{K}(x) &= \frac{1}{2\pi|x|^2}(-x_2, x_1) = -\mathbf{K}(-x) \\ \nabla |x|^2 &= 2x = (x + y) + (x - y) \\ x \cdot \mathbf{K}(x) &= 0\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \int (x + y) \mathbf{K}(x - y) \omega(x) \omega(y) dx dy + \int \int (x - y) \mathbf{K}(x - y) \omega(x) \omega(y) dx dy \\ &= \int \int (x + y) \mathbf{K}(x - y) \omega(x) \omega(y) dx dy\end{aligned}$$

En échangeant les variables x et y et tenu compte de la propriété asymétrique de la fonction à intégrer, on trouve

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \int (x + y) \mathbf{K}(x - y) \omega(x) \omega(y) dx dy \\ &= - \int \int (y + x) \mathbf{K}(y - x) \omega(y) \omega(x) dx dy = 0\end{aligned}$$

D'autre part,

$$I_2 = \nu \int \Delta |x|^2 \omega dx = 4\nu \int \omega dx$$

et on a finalement

$$\frac{d}{dt} \int |x|^2 \omega dx = 4\nu \int \omega dx = 4\nu \Gamma_0$$

d'où on déduit

$$\int |x|^2 \omega(\cdot, t) dx = \int |x|^2 \omega_0 dx + 4\nu t \Gamma_0$$

■

Chapitre 8

Approximation particulière et la régularisation(suite)

Le présent chapitre est un préambule du chapitre suivant où on donne les bases de l'analyse mathématique de l'approximation particulière et de sa régularisation. C'est aussi un complément et une extension des résultats classique que l'on a exposés dans le chapitre 4. En effet, on généralise les résultats aux espaces de Sobolev à exposant négatif. Afin de rendre l'ouvrage aussi "autonome" que possible, tous les résultats pour la suite sont démontrés.

8.1 Notations

On utilise constamment dans ce chapitre et dans les suivants également un outil très important, celui des *espaces de Sobolev*¹ (cf. **S.I. Sobolev** (1950) [66] ou **J.L. Lions & E. Magenes** (1968) [49]). On travaille surtout dans les espaces à exposant négatif. Les fonctions considérées seront à valeurs réelles sauf mention très explicite du contraire. On introduit pour tout entier $m \geq 0$ et tout $p \in [1, +\infty]$, l'*espace de Sobolev*:

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^p(\mathbb{R}^n); \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq m\}$$

où

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

On munit $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ de la *norme usuelle*

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{0,p}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{m,p} = \max_{|\alpha| \leq m} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\partial^\alpha f(x)| \right\}, \quad p = \infty$$

et de la *semi-norme*

$$|f|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha f\|_{0,p}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$|f|_{m,p} = \max_{|\alpha|=m} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\partial^\alpha f(x)| \right\}, \quad p = \infty$$

On désigne alors par $W^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$ l'*espace de Sobolev* à exposant négatif, le *dual topologique* de l'*espace de Sobolev* $W^{m,p^*}(\mathbb{R}^n)$ où $1/p + 1/p^* = 1$, $1 < p < \infty$, il est muni de la norme

$$\|T\|_{-m,p} = \sup_{\varphi \in W^{m,p^*}(\mathbb{R}^n)} \left\{ \frac{|\langle T, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{m,p^*}} \right\}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la *dualité* entre un espace vectoriel et son dual. Rappelons le *théorème de la représentation des distributions* dans $W^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$:

¹Sergeï Lvovitch Sobolev, né à Saint Pétersbourg le 6 octobre 1908.

T est une distribution de $W^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si T peut s'écrire (de manière non unique) sous la forme:

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| \leq m$$

Une norme équivalente peut être donc donnée par

$$\|T\|_{-m,p} = \inf \left\{ \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} ; T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha, f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq m \right\}$$

De plus, on introduit un sous-espace $\mathcal{V}_{m,p}$ de $W^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$ constitué des distributions $T \in W^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de $\varphi \in W^{m,p^*}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{0,p^*}^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

Munissons le de la norme suivante:

$$[T]_{-m,p} = \sup \left\{ |\langle T, \varphi \rangle| / \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{0,p^*}^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} ; \varphi \in W^{m,p^*}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Il est évident que pour tout $T \in \mathcal{V}_{m,p}$

$$[T]_{-m,p} \geq \|T\|_{-m,p}$$

LEMME 8.1 Soient r et m deux entiers positifs avec $r \leq m$. Soit $\{p_k\}$ une famille d'entiers positifs dont $\{p_k^*\}$ est l'exposant conjugué. Supposons que la distribution T vérifie pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty$ (à support compact):

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_{r \leq k \leq m} C_k |\varphi|_{k,p_k^*}, \quad C_k > 0$$

Alors, on peut écrire (la décomposition n'est pas unique):

$$T = \sum_{r \leq |\alpha| \leq m} \partial^\alpha g_\alpha$$

avec

$$\|g_\alpha\|_{0,p_k} \leq C_k, \quad r \leq |\alpha| = k \leq m$$

D'après le Lemme 8.1, toute distribution $T \in \mathcal{V}_{m,p}$ peut également s'écrire sous la forme

$$T = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \partial^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq |\alpha| \leq m$$

La décomposition n'est pas unique. Par conséquent, on peut définir une norme équivalente:

$$[T]_{-m,p} = \inf \left\{ \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|g_\alpha\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, T = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \partial^\alpha g_\alpha, g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq |\alpha| \leq m \right\}$$

On rappellera, au fur et à mesure des besoins, les propriétés principales des *espaces de Sobolev* dans la suite.

8.2 Problème linéaire de convection

Dans le chapitre 4 de la première partie, on a déjà exposé quelques résultats classiques sur ce problème modèle. Les résultats suivants, établis par G.H. Cottet(1988) [24], concernent certaines *propriétés de stabilité* dans $W^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{V}_{m,p}$ des solutions du problème de *Cauchy* pour un système linéaire d'équations de convection sous la forme conservative:

$$L\omega \equiv \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (v\omega) = f \quad (224)$$

$$\omega(\cdot, 0) = \omega_0 \quad (225)$$

avec l'*adjoint formel* de l'opérateur différentiel L

$$L^* \varphi \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \varphi \quad (226)$$

On définit les *courbes caractéristiques*, passant par le point x au temps s , associées au champs de vitesse v comme les solutions du *système d'équations différentielles ordinaires* suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t; x, s) = v(X(t; x, s), t) \quad (227)$$

$$X(s; x, s) = x \quad (228)$$

et on désigne par J le *jacobien de la transformation* $x \rightarrow X(t; x, s)$:

$$J(t; x, s) = \det \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t; x, s) \right) \quad (229)$$

Il est évident que lorsque ω_0 , v et f sont suffisamment réguliers, la *solution classique* du système (224)-(225) est donnée explicitement par

$$\omega(x, t) = J(0; x, t) \omega_0(X(0; x, t)) + \int_0^t J(s; x, t) f(X(s; x, t), s) ds \quad (230)$$

On a immédiatement le résultat classique suivant (voir P.A. Raviart(1987) [60], par exemple):

LEMME 8.2 *Soit $v \in L^\infty(0, \tau; W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$. Alors $X \in L^\infty([0, \tau]^2; W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$. De plus, si l'on suppose que $\omega_0 \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^1(0, \tau; W^{-m,p}(\mathbb{R}^n))$, alors $\omega \in L^\infty(0, \tau; W^{-m,p}(\mathbb{R}^n))$.* ■

Définition. $\omega \in L^\infty(0, \tau; W^{-m,p}(\mathbb{R}^n))$ est appelée solution faible du système (224)-(225) lorsqu'elle vérifie $\forall \varphi \in C^0(0, \tau; W^{m,p^*}(\mathbb{R}^n))$, à support compact contenu dans $[0, \tau] \times \mathbb{R}^n$ et $L^*\varphi \in L^1(0, \tau; W^{m,p^*}(\mathbb{R}^n))$:

$$\int_0^\tau \langle \omega(\cdot, t), L^*\varphi(\cdot, t) \rangle dt = \langle \omega_0, \varphi(\cdot, 0) \rangle + \int_0^\tau \langle f(\cdot, t), \varphi(\cdot, t) \rangle dt. \quad \blacksquare$$

De plus, on rappelle enfin un lemme abstrait de J.P. Choquin & G.H. Cottet (1988) [16]:

LEMME 8.3 Soient $m \geq 1$, $1 < p < \infty$ et $\tau > 0$. Si $v \in L^\infty(0, \tau; W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)^n)$, $\omega_0 \in W^{-m,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(0, \tau; W^{-m,p}(\mathbb{R}^n))$, alors le système (224)-(225) admet une solution unique $\omega \in L^\infty(0, \tau; W^{-m,p}(\mathbb{R}^n))$ et il existe une constante $C > 0$ indépendante de τ et v telle que

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{-m,p} \leq C \left(\|\omega_0\|_{-m,p} + \int_0^t \|f(\cdot, s)\|_{-m,p} ds \right), \quad t \in [0, \tau]$$

De plus, si l'on suppose que v vérifie pour deux constantes $A > 1$ et $M > 0$

$$|v(\cdot, t)|_{1,\infty} + \sum_{k=2}^{m+1} A^{1-k} |v(\cdot, t)|_{k,\infty} \leq M; \quad 0 \leq t \leq \tau$$

Si $\omega_0 \in \mathfrak{V}_{m,p}$ et $f \in L^1(0, \tau; \mathfrak{V}_{m,p})$, alors le système (224)-(225) admet une unique solution faible $\omega \in C(0, \tau; W^{-m,p}(\mathbb{R}^n))$ telle que $\omega = \sum_{k=0}^m \omega^k$, avec $\omega^0 \in L^\infty(0, \tau; L^q(\mathbb{R}^n))$ et $\omega^k \in L^\infty(0, \tau; \mathfrak{V}_{k,p})$, $k \in [1, m]$. De plus, il existe une constante $C = C(M, A) > 0$ indépendante de τ et v telle que pour tout $t \in [0, \tau]$

$$A^{1-m} \|\omega^0\|_{0,q} + \sum_{k=1}^m A^{k-m} [\omega^k(\cdot, t)]_{-k,p} \leq C \left([\omega_0]_{-m,p} + \int_0^t [f(\cdot, s)]_{-m,p} ds \right). \quad \blacksquare$$

8.3 Régularisation des fonctions

On aborde de nouveau le problème de régularisation. Comme il a été mentionné auparavant, on peut étendre les deux lemmes que l'on a exposés dans le Chapitre 4 au cas plus général. On énonce d'abord le lemme suivant:

LEMME 8.4 *On suppose que la fonction cut-off ξ vérifie les propriétés suivantes (propriété de moments r):*

$$(i) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x) dx = 1 \quad (231)$$

$$H_R(r) \quad (ii) \quad \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \xi(x) dx = 0, \quad 1 \leq |\alpha| \leq r-1, r \geq 2 \quad (232)$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |x|^r |\xi(x)| dx < \infty \quad (233)$$

Alors, on a pour tout entier $1 \leq p \leq \infty$

$$\begin{aligned} \|v - v * \xi_\varepsilon\|_{\ell-r,p} &\leq C \varepsilon^r \|v\|_{\ell,p}, & \text{si } \ell \leq r \\ \|v - v * \xi_\varepsilon\|_{k,p} &\leq C \varepsilon^r \|v\|_{r+k,p}, & \text{si } \ell \geq r, \forall 0 \leq k \leq \ell - r \end{aligned}$$

Démonstration.

En effet, pour $\ell = r$, notre assertion est vraie (voir P.A. Raviart(1987) [60]). On voit maintenant le cas général. Pour v assez régulier, on a

$$\begin{aligned} (v - v * \xi_\varepsilon)(x) &= v(x) - \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \xi_\varepsilon(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (v(x) - v(y)) \xi_\varepsilon(x-y) dy \end{aligned}$$

On écrit la *formule de Taylor*² avec reste sous forme intégrale:

$$\begin{aligned} v(y) &= v(x) + \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{s!} D^s v(x) \cdot (y-x)^s \\ &\quad + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} D^r v(x+t(y-x)) \cdot (y-x)^r dt \end{aligned}$$

où $D^s v(x) \cdot y^s = D^s v(x)(y, \dots, y)$ est la valeur de la dérivée totale d'ordre s de v au point x appliquée au s -vecteur $y^s = \underbrace{(y, \dots, y)}_{s \text{ fois}}$, c'est-à-dire:

$$D^s v(x) \cdot y^s = \sum_{|\alpha|=s} \partial^\alpha v(x) \cdot y^\alpha$$

² Brook Taylor, né à Edmonton le 18 août 1685 et mort à Londres le 29 décembre 1731.

de façon que l'on ait en utilisant (i) - (iii)

$$\begin{aligned} & (v - v * \xi_\varepsilon)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (v(x) - v(y)) \xi_\varepsilon(x - y) dy \\ &= \frac{(-1)}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} D^r v(x + t(y-x)) \cdot (y-x)^r \xi_\varepsilon(x-y) dy \right\} dt \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \{ \dots \} &= \int_{\mathbb{R}^n} D^r v(x + t(y-x)) \cdot (y-x)^r \xi_\varepsilon(x-y) dy \\ &\stackrel{z=t(x-y)}{=} t^{-r} \int_{\mathbb{R}^n} D^r v(x-z) \cdot z^r \xi_{\varepsilon t}(z) dz \\ &\stackrel{\exists \lambda_\alpha > 0}{=} t^{-r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha v(x-z) z^\alpha \xi_{\varepsilon t}(z) dz \\ &= t^{-r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha [\partial^\alpha v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t})](x) \end{aligned}$$

(1) Dans le cas où $\ell \geq r$, on obtient $\forall 0 \leq k \leq \ell - r$

$$\begin{aligned} & \partial^k (v - v * \xi_\varepsilon)(x) \\ &= -\frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \left\{ \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha [\partial^{\alpha+k} v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t})](x) \right\} dt \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} & x^\alpha \xi_{\varepsilon t} \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| = r \\ & \|x^\alpha \xi_{\varepsilon t}\|_{0,1} = \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \xi_{\varepsilon t}(x)| dx \leq (\varepsilon t)^r \int_{\mathbb{R}^n} |y|^r |\xi(y)| dy \leq c_1 (\varepsilon t)^r \end{aligned}$$

on a alors selon l'*inégalité de Young*³

$$\begin{aligned} & \partial^\ell v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t}) \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| = r, \quad 0 \leq \ell \leq r \\ & \|\partial^\ell v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t})\|_{0,p} \leq \|\partial^\ell v\|_{0,p} \|x^\alpha \xi_{\varepsilon t}\|_{0,1} \leq c_1 (\varepsilon t)^r \|v\|_{\ell,p} \end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned} & \|\partial^k (v - v * \xi_\varepsilon)\|_{0,p} \\ & \leq \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \|\partial^{\alpha+k} v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t})\|_{0,p} dt \\ & \leq \frac{c_1 \varepsilon^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} dt \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \|v\|_{\alpha+k,p} \\ & \leq \frac{c_2 \varepsilon^r}{r!} \|v\|_{r+k,p} \end{aligned}$$

³ William Henry Young, né à Londres le 20 octobre 1863 et mort à Lausanne le 7 juillet 1942.

(2) Dans le cas où $0 \leq \ell \leq r$ on a aussi $\forall \varphi \in W^{r-\ell, p^*}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \ell \leq r$

$$\begin{aligned} & \langle v - v * \xi_\varepsilon, \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \langle \partial^\alpha v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t}), \varphi \rangle dt \\ &= \frac{(-1)^{r-\ell+1}}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \langle \partial^\ell v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t}), \partial^{\alpha-\ell} \varphi \rangle dt \end{aligned}$$

on obtient ainsi en vertu de l'inégalité de Young pour toute fonction $\varphi \in W^{r-\ell, p^*}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \ell \leq r$, $1/p + 1/p^* = 1$

$$\begin{aligned} & |\langle v - v * \xi_\varepsilon, \varphi \rangle| \\ &\leq \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha |\langle \partial^\ell v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t}), \partial^{\alpha-\ell} \varphi \rangle| dt \\ &\leq \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \|\partial^\ell v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t})\|_{0,p} \|\partial^{\alpha-\ell} \varphi\|_{0,p^*} dt \\ &\leq \frac{c_1 \varepsilon^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} dt \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \|v\|_{\ell,p} \|\varphi\|_{\alpha-\ell, p^*} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout entier $0 \leq \ell \leq r$

$$\|v - v * \xi_\varepsilon\|_{\ell-r, p} \leq \frac{C \varepsilon^r}{r!} \|v\|_{\ell, p}$$

En utilisant la densité de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{\ell, p}(\mathbb{R}^n)$, on a enfin

$$\|v - v * \xi_\varepsilon\|_{\ell-r, p} \leq C \varepsilon^r \|v\|_{\ell, p}, \quad \forall v \in W^{\ell, p}(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \ell \leq r$$

(3) Dans le cas où $\ell < 0$, on a de la même manière qu'avant

$\varphi \in W^{r+|\ell|, p^*}(\mathbb{R}^n)$ et $\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\langle v - v * \xi_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{(-1)^{r+1}}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \langle v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t}), \partial^\alpha \varphi \rangle dt$$

Comme $\forall v \in W^{-|\ell|, p}(\mathbb{R}^n)$, il existe donc des fonctions $g_\beta \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$|\beta| \leq |\ell|$, telle que

$$v = \sum_{|\beta| \leq |\ell|} \partial^\beta g_\beta$$

on a alors

$$\begin{aligned}
& | \langle v - v * \xi_\varepsilon, \varphi \rangle | \\
& \leq \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha | \langle v * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t}), \partial^\alpha \varphi \rangle | dt \\
& \leq \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \left| \langle \sum_{|\beta| \leq |\ell|} \partial^\beta g_\beta * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t}), \partial^\alpha \varphi \rangle \right| dt \\
& \leq \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \sum_{|\beta| \leq |\ell|} | \langle g_\beta * (x^\alpha \xi_{\varepsilon t}), \partial^{\alpha+\beta} \varphi \rangle | dt \\
& \leq \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha \sum_{|\beta| \leq |\ell|} \|g_\beta\|_{0,p} \|x^\alpha \xi_{\varepsilon t}\|_{0,1} \|\partial^{\alpha+\beta} \varphi\|_{0,p^*} dt \\
& \leq \frac{c_1 \varepsilon^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} dt \sum_{|\alpha|=r} \sum_{|\beta| \leq |\ell|} \|g_\beta\|_{0,p} \|\varphi\|_{r-\ell,p^*} \\
& \leq \frac{c_2 \varepsilon^r}{r!} \left(\sum_{|\beta| \leq |\ell|} \|g_\beta\|_{0,p}^p \right)^{1/p} \|\varphi\|_{r-\ell,p^*}
\end{aligned}$$

Cela entraîne $\forall v \in W^{-|\ell|,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $\ell \leq 0$

$$\begin{aligned}
& \|v - v * \xi_\varepsilon\|_{\ell-r,p} \\
& = \|v - v * \xi_\varepsilon\|_{-(r-\ell),p} \\
& \leq \frac{C_2 \varepsilon^r}{r!} \inf \left\{ \left(\sum_{|\beta| \leq |\ell|} \|g_\beta\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} ; v = \sum_{|\beta| \leq |\ell|} \partial^\beta g_\beta, g_\beta \in L^p(\mathbb{R}^n), |\beta| \leq |\ell| \right\} \\
& = \frac{C_2 \varepsilon^r}{r!} \|v\|_{\ell,p}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\|v - v * \xi_\varepsilon\|_{\ell-r,p} \leq C \varepsilon^r \|v\|_{\ell,p}, \forall v \in W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n), \ell \leq 0$$

Remarque. Il est bien connu que

(i) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;

(ii) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ pour $m \geq 0, 1 \leq p \leq \infty$;

(iii) $(W^{-m,p}(\mathbb{R}^n))^* = W^{m,p^*}(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p < \infty, 1/p + 1/p^* = 1, m \geq 0$;

(iv) $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est réflexif pour $1 < p < \infty, m \geq 0$. ■

Maintenant, on démontre le lemme suivant:

LEMME 8.5 Soit $T \in W^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $m \geq 0$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait pour tout entier k

$$\|T * \xi_\varepsilon\|_{-k,p} \leq C \varepsilon^{-\mu} \|T\|_{-m,p}$$

où $\mu = \max(m - k, 0)$ et la fonction cut-off $\xi \in W^{\mu,1}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. Si $T \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $m \geq 0$. Alors,

$$\|T * \xi_\varepsilon\|_{m,p} \leq C \|T\|_{m,p}$$

Démonstration. Puisque $T \in W^{-m,p}(\mathbb{R}^n)$, il peut s'écrire sous la forme

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq m$$

(1) En vertu des propriétés du produit de convolution:

(a) $\partial^\ell(T * S) = \partial^\ell T * S = T * \partial^\ell S, \forall \ell \geq 0$

(b) l'inégalité de Young: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^q(\mathbb{R}^n), 1 \leq p, q \leq \infty$ et $1/p + 1/q \geq 1$, alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, et

$$\|f * g\|_{0,r} \leq \|f\|_{0,p} \|g\|_{0,q}, \text{ où } 1/r = 1/p + 1/q - 1$$

on a ainsi pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq \ell$

$$\partial^\beta(T * \xi_\varepsilon) = T * \partial^\beta \xi_\varepsilon = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha * \partial^\beta \xi_\varepsilon = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha * \partial^{\alpha+\beta} \xi_\varepsilon$$

$$\|\partial^\beta(T * \xi_\varepsilon)\|_{0,p} \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha * \partial^{\alpha+\beta} \xi_\varepsilon\|_{0,p} \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p} \|\partial^{\alpha+\beta} \xi_\varepsilon\|_{0,1}$$

Vu que

$$\partial^\alpha \xi_\varepsilon(x) = \partial^\alpha \left(\varepsilon^{-n} \xi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) = \varepsilon^{-(n+|\alpha|)} \left(\partial^\alpha \xi \right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha \xi_\varepsilon\|_{0,1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \xi_\varepsilon(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-(n+|\alpha|)} \left| (\partial^\alpha \xi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx \\
&\stackrel{y=\frac{x}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-|\alpha|} |(\partial^\alpha \xi)(y)| dy \\
&= \varepsilon^{-|\alpha|} |\xi|_{\alpha,1}
\end{aligned}$$

on en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned}
\|\partial^\beta(T * \xi_\varepsilon)\|_{0,p} &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p} \varepsilon^{-(|\alpha|+|\beta|)} |\xi|_{\alpha+\beta,1} \\
&\leq \varepsilon^{-(m+|\beta|)} \|\xi\|_{m+|\beta|,1} \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p} \\
&\leq \varepsilon^{-(m+|\beta|)} \|\xi\|_{m+|\beta|,1} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} 1^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

En d'autres termes, on a pour tout entier $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leq \ell$

$$\begin{aligned}
&\|\partial^\beta(T * \xi_\varepsilon)\|_{0,p} \\
&\leq C \varepsilon^{-(m+|\beta|)} \|\xi\|_{m+|\beta|,1} \inf \left\{ \left(\sum_{|\alpha|} \|f_\alpha\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha, f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\} \\
&\leq C \varepsilon^{-(m+\ell)} \|\xi\|_{m+\ell,1} \|T\|_{-m,p}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire pour tout $k = -\ell \leq 0$

$$\|T * \xi_\varepsilon\|_{-k,p} \leq \varepsilon^{k-m} \|T\|_{-m,p}$$

(2) Pour tout entier $0 \leq k \leq m$ on a, de manière analogue, pour toute fonction $\varphi \in W^{k,p^*}(\mathbb{R}^n)$ avec $0 \leq k \leq m$, $1/p + 1/p^* = 1$

$$\begin{aligned}
\langle T * \xi_\varepsilon, \varphi \rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f_\alpha * \xi_\varepsilon, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle f_\alpha * \partial^\alpha \xi_\varepsilon, \varphi \rangle \\
&= \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \langle f_\alpha * \xi_\varepsilon, \partial^\alpha \varphi \rangle + \sum_{k < |\alpha| \leq m} (-1)^k \langle f_\alpha * \partial^{\alpha-k} \xi_\varepsilon, \partial^k \varphi \rangle
\end{aligned}$$

En vertu des *inégalités de Hölder*⁴ et de Young,

$$|\langle T * \xi_\varepsilon, \varphi \rangle|$$

⁴Ludwig Otto Hölder, 1859 - 1937.

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} |\langle f_\alpha * \xi_\varepsilon, \partial^\alpha \varphi \rangle| + \sum_{k < |\alpha| \leq m} |\langle f_\alpha * \partial^{\alpha-k} \xi_\varepsilon, \partial^k \varphi \rangle| \\
 &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha * \xi_\varepsilon\|_{0,p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{0,p^*} + \sum_{k < |\alpha| \leq m} \|f_\alpha * \partial^{\alpha-k} \xi_\varepsilon\|_{0,p} \|\partial^k \varphi\|_{0,p^*} \\
 &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{0,p} \|\xi_\varepsilon\|_{0,1} \|\varphi\|_{k,p^*} + \sum_{k < |\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p} \|\partial^{\alpha-k} \xi_\varepsilon\|_{0,1} \|\varphi\|_{k,p^*} \\
 &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p} \varepsilon^{-(|\alpha|-k)} \|\xi_\varepsilon\|_{m-k,1} \|\varphi\|_{k,p^*} \\
 &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p} \varepsilon^{-(m-k)} \|\xi_\varepsilon\|_{m-k,1} \|\varphi\|_{k,p^*} \\
 &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} 1^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \varepsilon^{k-m} \|\xi_\varepsilon\|_{m-k,1} \|\varphi\|_{k,p^*}
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
 &\|T * \xi_\varepsilon\|_{k,p} \\
 &\leq C \varepsilon^{k-m} \|\xi\|_{m-k,1} \inf \left\{ \left(\sum_{|\alpha|} \|f_\alpha\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha, f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\} \\
 &\leq C \varepsilon^{k-m} \|\xi\|_{m-k,1} \|T\|_{-m,p}.
 \end{aligned}$$

■

8.4 Approximation particulière

On va introduire de manière générale une approximation particulière d'une fonction. En utilisant la *formule de quadrature* suivante pour toute fonction $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \omega_k g(\xi_k), \quad \omega_k = h^m, \xi_k = k h \quad (234)$$

on définit l' *approximation particulière* de la fonction $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$:

$$\Pi^h(t)v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} W_k(t) v(X_k(t)) \delta(x - X_k(t)) \quad (235)$$

avec

$$W_k(t) = \omega_k J(t; \xi_k, 0) \quad (236)$$

$$X_k(t) = X(t; \xi_k, 0) \quad (237)$$

où $J_k(t)$ et $X_k(t)$ sont solutions du système suivant

$$\frac{d}{dt} J(t; \xi, 0) = J(t; \xi, 0) (\text{div } a)(X(t; \xi, 0), t), \quad J(0; \xi, 0) = 1 \quad (238)$$

$$\frac{d}{dt} X(t; \xi, 0) = a(X(t; \xi, 0), t), \quad X(0; \xi, 0) = \xi \quad (239)$$

On a alors les deux lemmes suivants:

LEMME 8.6 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que l'on ait pour toute fonction $g \in W^{m,1}(\mathbb{R}^n)$ avec $m > n$*

$$|E(g)| \stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx - h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(\xi_k) \right| \leq C h^m |g|_{m,1}$$

Démonstration. Voir P.A. Raviart (1985) [59]. ■

LEMME 8.7 *On suppose que le champ de vitesse a est assez régulier: il existe un entier $m > n$ pour lequel*

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} &\in L^\infty(0, T; W^{m-1, \infty}(\mathbb{R}^n)), & 1 \leq i, j \leq n \\ \text{div } a &\in L^\infty(0, T; W^{m, \infty}(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

Alors, on a pour toute fonction $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|v - \Pi^h(t)v\|_{-m,p} \leq C h^m \|v\|_{m,p}, \quad 0 \leq t \leq T$$

et pour toute fonction $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|v - \Pi^h(t)v\|_{-m,p} \leq C h^m \|v\|_{0,p}, \quad 0 \leq t \leq T$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de a et T .

Démonstration. (1) Sous les hypothèses de régularité du champ de vecteur a , on peut vérifier aisément que la fonction

$X(\cdot; \cdot, 0) : (\xi, t) \rightarrow X(t; \xi, 0)$ satisfait à

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\cdot; \cdot, 0) \in C^0(0, T; W^{m-1, \infty}(\mathbb{R}^n)), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

tandis que la fonction $J(\cdot; \cdot, 0) \rightarrow J(t; \xi, 0)$ vérifie

$$J(\cdot; \cdot, 0) \in C^0(0, T; W^{m, \infty}(\mathbb{R}^n))$$

(2) Soit maintenant $\varphi \in W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$ avec $1/p + 1/q = 1$, on a

$$\begin{aligned} & \langle v - \Pi^h(t)v, \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (v\varphi)(x) dx - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} W_k(t) (v\varphi)(X_k(t)) \\ & \stackrel{x=X(t;\xi,0)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (v\varphi)(X(t; \xi, 0)) J(t; \xi, 0) d\xi - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \omega_k J(t; \xi_k, 0) (v\varphi)(X(t; \xi_k, 0)) \\ &= E((v\varphi)(X(t; \cdot, 0)) J(t; \cdot, 0)) \end{aligned}$$

D'après le Lemme 8.6, on obtient en utilisant la *formule de Leibniz*⁵ et la régularité des fonctions $X(t; \cdot, 0)$, $J(t; \cdot, 0)$:

$$\begin{aligned} & \left| \langle v - \Pi^h(t)v, \varphi \rangle \right| \\ &= \left| E((v\varphi)(X(t; \cdot, 0)) J(t; \cdot, 0)) \right| \\ &\leq C_1 h^m |(v\varphi)(X(t; \cdot, 0)) J(t; \cdot, 0)|_{m,1} \end{aligned}$$

⁵ Gottfried Wilhelm Leibniz, né à Leipzig le premier juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716.

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 h^m \left| \sum_{0 \leq k \leq m} C_m^k (v \varphi)^{(k)} J^{(m-k)} \right|_{0,1} \\
&\leq C_2 h^m \sum_{k \leq m} C_m^k |(v \varphi)^{(k)}|_{0,1} \\
&\leq C_2 h^m \sum_{\ell \leq k \leq m} C_m^k C_k^\ell |v^{(\ell)} \varphi^{(k-\ell)}|_{0,k}
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{0,1} &\leq \|f\|_{0,p} \|g\|_{0,q}, \quad \text{si } f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n), 1/p + 1/q = 1 \\
\|fg\|_{0,1} &\leq \|f\|_{-\ell,p} \|g\|_{\ell,q}, \quad \text{si } f \in W^{-\ell,p}(\mathbb{R}^n), g \in W^{\ell,q}(\mathbb{R}^n), \ell \geq 0 \\
\|f^{(\ell)}\|_{-\ell-k,p} &\leq \|f\|_{-k,p}, \quad \text{si } f \in W^{-k,p}(\mathbb{R}^n), \ell \geq 0, k \geq 0
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
|\langle v - \Pi^h(t)v, \varphi \rangle| &\leq C_2 h^m \sum_{\ell \leq k \leq m} C_m^k C_k^\ell |v^{(\ell)} \varphi^{(k-\ell)}|_{0,k} \\
&\leq C_2 h^m \sum_{\ell \leq k \leq m} C_m^k C_k^\ell \begin{cases} \|v^{(\ell)}\|_{0,p} \|\varphi^{(k-\ell)}\|_{0,q} \\ \|v^{(\ell)}\|_{-\ell,p} \|\varphi^{(k-\ell)}\|_{\ell,q} \end{cases} \\
&\leq C_2 h^m \sum_{\ell \leq k \leq m} C_m^k C_k^\ell \begin{cases} \|v\|_{\ell,p} \|\varphi\|_{k-\ell,q} \\ \|v\|_{0,p} \|\varphi\|_{k,q} \end{cases} \\
&\leq C \begin{cases} \|v\|_{m,p} \|\varphi\|_{m,q} \\ \|v\|_{0,p} \|\varphi\|_{m,q} \end{cases}
\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$\|v - \Pi^h(t)v\|_{-m,p} \leq \begin{cases} \|v\|_{m,p} \|\varphi\|_{m,q}, & \text{si } v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \\ \|v\|_{0,p} \|\varphi\|_{m,q}, & \text{si } v \in L^p(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

LEMME 8.8 *Sous les hypothèses du Lemme 8.7. On suppose de plus que la fonction cut-off ξ vérifie l'hypothèse $H_R(r)$. Alors, il existe une constante $C = C(a, T, \xi) > 0$ indépendante de h et ε telle que l'on ait, d'une part, pour toute fonction $v \in W^{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in W^{m,1}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \max(m, r)$, $m \geq 0$, $r \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$*

$$\|v - \Pi_\varepsilon^h(t)v\|_{0,p} \leq C \left\{ \varepsilon^r |v|_{r,p} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^m \|v\|_{m,p} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

d'autre part, pour toute fonction $v \in W^{\rho,p}(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in W^{0,1}(\mathbb{R}^n)$, $\rho = \max(\ell, r - \ell)$, $r \geq 2$, $\ell \leq r - n$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|v - \Pi_\varepsilon^h(t)v\|_{\ell-r,p} \leq C \left\{ \varepsilon^r |v|_{\ell,p} + h^{r-\ell} \|v\|_{r-\ell,p} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Démonstration. La première assertion est classique (voir P.A. Raviart(1987) [60]). On démontrera la seconde. On peut écrire

$$v - \Pi_\varepsilon^h(t)v = (v - v * \xi_\varepsilon) + (v - \Pi_\varepsilon^h(t)v) * \xi_\varepsilon$$

D'après le Lemme 8.4, $\forall v \in W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n)$, $\ell \leq r$, $r \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|v - v * \xi_\varepsilon\|_{\ell-r,p} \leq C \varepsilon^r |v|_{\ell,p}$$

D'après les Lemmes 8.5 et Lemme 8.7, $\forall v \in W^{r-\ell,p}(\mathbb{R}^n)$, $r - \ell > n$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\begin{aligned} \|(v - \Pi_\varepsilon^h(t)v) * \xi_\varepsilon\|_{\ell-r,p} &\leq C_1 \|v - \Pi_\varepsilon^h(t)v\|_{\ell-r,p} \\ &\leq C_2 h^{r-\ell} \|v\|_{r-\ell,p} \end{aligned}$$

On en déduit donc le résultat cherché. ■

LEMME 8.9 Si $f \in W^{m,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$, avec $|f|_{k,p} \leq c_k$, $0 \leq k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$ et

$$\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi^h f = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} h^n f(x_q) \delta(x - x_q) \quad (240)$$

Alors, on peut écrire de la manière suivante:

$$f - \tilde{f} = \lambda_0 + \sum_{1 \leq k \leq m} \lambda_k \quad (241)$$

$$\text{où } \lambda_0 \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad \|\lambda_0\|_{0,q} \leq Ch^m c_m, \quad \forall 1 \leq q \leq p \leq \infty$$

$$\lambda_k \in \mathcal{V}_{k,p}, \quad [\lambda_k]_{-k,p} \leq Ch^m c_{m-k}, \quad 1 \leq k \leq m$$

Démonstration. En effet, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a en vertu du Lemme 8.6

$$|\langle f - \tilde{f}, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx - \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} h^n (f \varphi)(x_q) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 h^m |f \varphi|_{m,1} = C_1 h^m \left| \sum_{0 \leq k \leq m} C_m^k \partial^{m-k} f \partial^k \varphi \right|_{0,1} \\
&\leq C_2 h^m \left\{ \|\partial^m f\|_{0,q} \|\varphi\|_{0,q^*} + \sum_{1 \leq k \leq m} |\partial^{m-k} f|_{0,p} |\partial^k \varphi|_{0,p^*} \right\} \\
&\leq C_2 h^m \left\{ |f|_{m,q} |\varphi|_{0,q^*} + \sum_{1 \leq k \leq m} |f|_{m-k,p} |\varphi|_{k,p^*} \right\}
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 8.1, on obtient le résultat cherché. ■

Chapitre 9

Analyse numérique de la méthode de vortex

Nous abordons dans ce chapitre l'étude de la résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode particulière basée sur une méthode de décomposition: la convection est traitée par la même méthode de vortex que dans le cas non visqueux étudié au chapitre 2, tandis que la diffusion est résolue par une technique de régularisation produisant une diffusion numérique qui permet de simuler la vraie diffusion physique, avec une réinitialisation de la distribution de particules. Ensuite, on se consacre à l'analyse mathématique de cette méthode grâce à l'étude de l'extension de l'approximation particulière que l'on a faite au chapitre précédent. On analyse d'une part les diverses sortes d'erreurs dues aux différentes approximations, on établit d'autre part les lemmes de consistance et de stabilité. Enfin, on obtiendra le théorème de convergence ayant recours à une technique due à G.H. Cottet (1988).

Ce chapitre est consacré à l'analyse numérique de la méthode particulière pour simuler les *écoulements d'un fluide incompressible visqueux* à grand nombre de Reynolds

9.1 Description de la méthode. Résultat principal

La méthode que l'on va introduire est basée sur la *méthode de décomposition en temps*.

9.1.1 Notations

On introduit avant tout quelques notations que l'on va utiliser dans la suite. On désigne par $S^\nu(t)\omega_0$, la solution $\omega(\cdot, t)$ des *équations de Navier-Stokes* sous la *formulation en vitesse-tourbillon*:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega - \nu \Delta \omega = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (242)$$

$$(NS) \quad u = \mathbf{K} * \omega, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (243)$$

$$\omega(\cdot, 0) = \omega_0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (244)$$

où ν est la *viscosité cinématique* et \mathbf{K} est le *noyau de Green* en dimension $d = 2$ défini par

$$\mathbf{K} = \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi |x|^2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (245)$$

On note

$$\omega(\cdot, t) = S^\nu(t)\omega_0 \quad (246)$$

$$u(\cdot, t) = \mathbf{K} * S^\nu(t)\omega_0 \quad (247)$$

On désigne ensuite par $E(t)\omega_0$, la solution des *équations d'Euler*, correspondantes au cas où $\nu = 0$ dans (NS):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (248)$$

$$(E) \quad u = \mathbf{K} * \omega, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (249)$$

$$\omega(\cdot, 0) = \omega_0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (250)$$

et on note

$$\omega_E(\cdot, t) = E(t)\omega_0 = \omega_0(X(0; \cdot, t)) \quad (251)$$

$$u_E(\cdot, t) = \mathbf{K} * E(t)\omega_0 = \mathbf{K} * \omega_0(X(0; \cdot, t)) \quad (252)$$

où $t \longrightarrow X(t; \xi, s)$ est la *courbe caractéristique*, passant par ξ au temps s , associée au champ de vitesse $u(x, t)$, c'est-à-dire, la solution du *système d'équations différentielles ordinaires* suivantes:

$$\frac{d}{dt} X(t; \xi, s) = u(X(t; \xi, s), t), \quad t, s > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \quad (253)$$

$$X(s; \xi, s) = \xi, \quad s > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \quad (254)$$

Le *Jacobien de la transformation* $\xi \longrightarrow x = X(t; \xi, s)$ est défini par

$$J(t; \xi, s) = \det \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j}(t; \xi, s) \right) \quad (255)$$

Par ailleurs, on désigne par $H^\nu(t)\omega_0$, la solution de l'*équation de la chaleur* :

$$(\mathbf{H}^\nu) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (256)$$

$$\omega(\cdot, 0) = \omega_0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (257)$$

et on a la représentation intégrale suivante de la solution

$$\omega_H(\cdot, t) = H^\nu(t)\omega_0 = \Gamma(\cdot; \nu t) * \omega_0 \quad (258)$$

où $\Gamma(x; t)$ est la *solution élémentaire* appelée aussi le *noyau de l'opérateur de la chaleur*

$$\Gamma(x; t) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right). \quad (259)$$

9.1.2 Description de la méthode de vortex

Dans ce paragraphe, on présente un algorithme particulière et une technique pour traiter le terme de diffusion visqueuse des équations de Navier-Stokes. Soit $h > 0$, on pose pour tout entier $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p &= \{x \mid x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (p_i - 1/2)h < x_i < (p_i + 1/2)h, i = 1, 2\} \\ x_p &= ph = (p_1h, p_2h) \end{cases}$$

On commence par noter

$$\omega^h(\cdot, 0) = \omega_0^h(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \alpha_p^0 \delta(x - x_p^0) \quad (260)$$

où

$$x_p^0 = x_p \quad (261)$$

$$\alpha_p^0 = h^2 \omega_0(x_p), \quad p \in \mathbb{Z}^2 \quad (262)$$

On se donne $\tau > 0$ et suppose connue

$$\omega^h(\cdot, t_n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \alpha_p^n \delta(x - x_p) \quad (263)$$

approximation particulière de $\omega(\cdot, t_n)$ au temps $t = n\tau$. En supposant de plus que la *fonction cut-off* ξ vérifie les *propriétés* $H_R^*(r)$ pour tout entier $r \geq 2$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \xi(x) dx = 1 \quad (264)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} x^\alpha \xi(x) dx = 0, \quad 1 \leq |\alpha| \leq r-1, \alpha \in \mathbb{N}^2 \quad (265)$$

$$H_R^*(r) \quad \int_{\mathbb{R}^2} |x|^r |\xi(x)| dx < +\infty \quad (266)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} x_i^2 \xi(x) = c_1 \neq 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (267)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^4 |\xi(x)| dx < +\infty$$

avec

$$\xi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2} \xi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (268)$$

où le paramètre de régularisation $\varepsilon > 0$ vérifie

$$\nu \tau = \frac{1}{2} c_1 \varepsilon^2 \quad (269)$$

on en déduit $(\omega^h(\cdot, t_{n+1}), u^h(\cdot, t_{n+1}))$ de la manière suivante:

(i) étape de convection :

Puisque

$$\omega^h(\cdot, t_n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \alpha_p^n \delta(x - x_p)$$

où x_p est la position de la particule $p \in \mathbb{Z}^2$ au temps t_n après une réinitialisation de distribution de particules, et α_p^n est son poids. On résout à partir de cela, comme dans le cas fluide parfait, les équations d'Euler sur l'intervalle $t \in [t_n; t_{n+1}]$ ou bien $s \in (0, \tau)$, $t = t_n + s$ par la méthode de vortex:

$$\begin{aligned} \text{(E}^h\text{)} \quad \frac{\partial \omega_E^h(\cdot, t_n + s)}{\partial s} + (u_E^h \cdot \nabla) \omega_E^h(\cdot, t_n + s) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, s \in (0, \tau) \\ \omega_E^h(\cdot, t_n + 0) &= \omega^h(\cdot, t_n), \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ u_E^h &= \mathbf{K}_\varepsilon * \omega_E^h \end{aligned}$$

Cette solution s'écrit explicitement au temps $t_{n+1} = t_n + \tau$

$$\omega_E^h(\cdot, t_n + \tau) \stackrel{\text{def}}{=} E_h(\tau) \omega^h(\cdot, t_n) \equiv \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \alpha_p^n \delta(x - x_p^{n+1}) \quad (270)$$

où l'on note

$$x_p^{n+1} = x_p^n(\tau) = X^h(t_n + \tau; x_p, t_n) \quad (271)$$

et $s \rightarrow X^{h,n}(s; x_p) \stackrel{\text{def}}{=} X^h(t_n + s; x_p, t_n)$ est la solution du système suivant d'équations différentielles ordinaires sur l'intervalle $s \in (0, \tau)$:

$$\frac{d}{ds} X^{h,n}(s; x_p) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^2} \alpha_q^n \mathbf{K}_\varepsilon (X^{h,n}(s; x_p) - X^{h,n}(s; x_q)) \quad (272)$$

$$X^{h,n}(0; x_p) = x_p \quad (273)$$

En d'autres termes, *on ne bouge dans l'étape de convection que les particules sans changer leur poids au cours du temps.*

(ii) étape de diffusion :

On régularise l'approximation particulière $\bar{\omega}^h(\cdot, t_n) = E_h(\tau) \omega^h(\cdot, t_n)$ avec une fonction cut-off ξ , en posant

$$\omega_\varepsilon^h(\cdot, t_{n+1}) \equiv \xi_\varepsilon * \bar{\omega}^h(\cdot, t_n) \quad (274)$$

Si l'on prend le noyau de l'opérateur de la chaleur avec $\varepsilon = \sqrt{\nu\tau}$ comme une fonction cut-off, (274) est exactement la solution de l'équation de diffusion.

Or on peut choisir ici une telle fonction vérifiant $H_R^*(r)$ comme fonction cut-off et on démontrera plus loin que

$$|\omega * \xi_\varepsilon - H^\nu(\tau)\omega| \leq C |\omega|_{4,\infty} \varepsilon^4$$

Cela veut dire que l'on peut utiliser la *diffusion numérique* produite dans l'étape de *régularisation* pour simuler la vraie diffusion physique avec une précision satisfaisante. Enfin, on obtient les approximations particulières de $(\omega(\cdot, t), u(\cdot, t))$ au temps $t_{n+1} = t_n + \tau$ en réinitialisant une distribution de particules aux points x_p à partir de la fin de ω_ε^h :

$$\omega^h(\cdot, t_{n+1}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \alpha_p^{n+1} \delta(x - x_p) \quad (275)$$

où

$$\alpha_p^{n+1} = h^2 \omega_\varepsilon^h(x_p, t_{n+1}) \quad (276)$$

$$u^h(\cdot, t_{n+1}) = \mathbf{K}_\varepsilon * \omega^h(\cdot, t_{n+1}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \alpha_p^{n+1} \mathbf{K}_\varepsilon(x - x_p) \quad (277)$$

Autrement dit, *on modifie dans l'étape de diffusion les poids des particules avec une réinitialisation de la distribution des particules.*

De façon formelle, notons Π^h , H_ε et \mathcal{H}_h les opérateurs tels que

$$\begin{aligned} \omega^h(\cdot, t_{n+1}) &\stackrel{\text{def}}{=} \Pi^h(\tau) \omega_\varepsilon^h(\cdot, t_{n+1}) = \Pi^h(\tau) (\xi_\varepsilon * E_h(\tau) \omega^h(\cdot, t_{n+1})) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (\Pi^h(\tau) H_\varepsilon(\tau)) E_h(\tau) \omega^h(\cdot, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_h(\tau) E_h(\tau) \omega^h(\cdot, t_n) \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$\mathcal{H}_h(\tau) = \Pi^h(\tau) H_\varepsilon(\tau) \quad (278)$$

Rappelons que **A.J. Chorin**(1973) [19] a proposé une *méthode de marche aléatoire* (le modèle de la marche au hasard) où des particules bougent avec une vitesse différente, $\mathbf{K}_\varepsilon * \omega + \eta$, où η est une variable aléatoire *bruit blanc centrée*, de variance 2ν , introduite pour modéliser le phénomène d'un mouvement Brownien¹. Sa précision est liée au choix de la variable aléatoire η et demande un grand nombre de particules afin d'obtenir une résolution acceptable. **G.H. Cottet & S. Mas-Gallic**(1984) [26] ont introduit une *méthode de vortex déterministe* basée sur la

¹Robert Brown, né à Montrose, Ecosse, le 21 décembre 1773 et mort à Londres le 10 juin 1858.

méthode de splitting. Elle consiste à traiter le terme de convection par une *méthode particulière*, tandis que le terme de diffusion est résolu de manière explicite dans laquelle le noyau de la chaleur se choisit comme une fonction cut-off en jouant un double rôle. Un inconvénient commun des schémas lagrangiens est que les éléments du calcul souffrent des effets d'extrême distorsion après un certain nombre de pas de temps, comme l'a fait remarquer **Van Dommenlem & Shen** (1977) [68]. La distorsion empire lorsque le schéma est appliqué au cas tridimensionnel. Afin d'éviter ce genre de distorsion, on utilise ici une *technique de la réinitialisation* de la distribution de particules qui a été proposée par **H.N. Najm** (1993) [56]. **Brenier & Cottet** (1992) [14] définissent une technique de même nature mais les points de réinitialisation sont tous distribués de manière aléatoire. Ceci leur permet de montrer la convergence dans le cas où ω_0 est seulement à support borné.

En pratique, on utilise une méthode de couplage particules-grille dont le diagramme est le suivant:

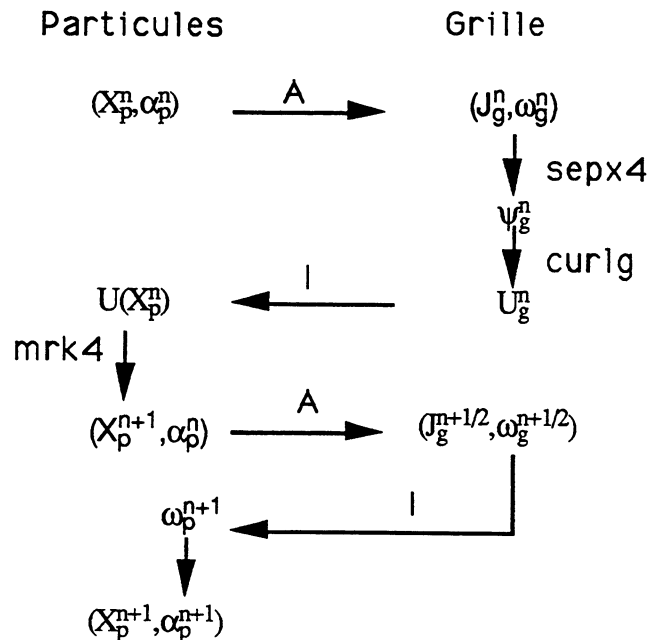


FIGURE 9.1 Schéma VIC avec splitting pour les équations de NS

9.1.3 Résultat de convergence

Enonçons *notre résultat principal*:

THÉORÈME 9.1 *Soit $\omega_0 \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{m,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Supposons de plus qu'il existe des constantes positives c_0 et $s > 0$ telles que les paramètres de discrétisation satisfassent*

$$h \leq c_0 \varepsilon^{1+s}, \quad \nu\tau = \frac{1}{2}c_1\varepsilon^2 \quad (279)$$

où la constante c_1 est définie dans $H_R^*(r)$. Soit $m \geq 4$ tel que

$$h^m \varepsilon^{-m} \leq c\nu\tau$$

et $\xi \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant les conditions $H_R^*(r)$ avec $r = 2$. Alors, il existe une constante $C = C(\omega_0) > 0$ indépendante de ε , h et τ telle que

$$\|(u - u^h)(\cdot, t)\|_{0,p} \leq C (\varepsilon^r + \nu\tau + h^m \varepsilon^{1-m}) \leq c\nu\tau, \quad t \in [0, \tau], \quad p \in [2, \infty]$$

où u , ω sont solutions du problème (NS) et u^h , ω^h sont celles de la méthode de vortex correspondante. ■

REMARQUE 9.1 *On remarque que*

- (i) *L'exposant r du terme ε^r est induit par l'étape de régularisation;*
- (ii) *Le terme $\nu\tau$ vient de la méthode de décomposition en temps;*
- (iii) *Le terme $h^m \varepsilon^{1-m}$ vient de la discrétisation associée à la formule de quadrature.*

REMARQUE 9.2 *Cette estimation d'erreur nous montre comment choisir la distance interparticulaire h en fonction du pas de la grille ε . En effet, pour avoir une estimation d'erreur optimale en $\mathcal{O}(\varepsilon^r)$, il faut choisir: $h = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1+\frac{r-1}{m}}\right)$. ■*

9.2 Résultats préliminaires

Il est commode pour l'analyse numérique de séparer les erreurs provenant d'une part de la régularisation et de la décomposition de l'équation, d'autre part de l'approximation particulière.

9.2.1 Erreur de régularisation

Dans cette section, on étudie l'erreur de régularisation. Comme le noyau \mathbf{K} n'est pas continu et qu'il a une singularité autour du point $x = 0$, il est nécessaire de le régulariser par une fonction cut-off ξ vérifiant les propriétés $H_R(r)$ pour tout entier $r \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x) dx = 1 \\
 H_R(r) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \xi(x) dx = 0, \quad 1 \leq |\alpha| \leq r-1, \alpha \in \mathbb{N}^n \\
 & \int_{\mathbb{R}^n} |x|^r |\xi(x)| dx < +\infty
 \end{aligned}$$

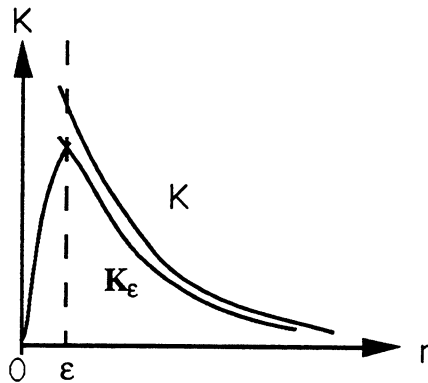


FIGURE 9.2 Noyau régularisé \mathbf{K}_ϵ

$\forall \epsilon > 0$, appelé paramètre de régularisation, on désigne par \mathbf{K}_ϵ le noyau régularisé

$$\mathbf{K}_\epsilon = \mathbf{K} * \xi_\epsilon \quad (280)$$

$$\text{où} \quad \xi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \xi\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \quad (281)$$

On rassemble ici quelques propriétés du noyau \mathbf{K} ainsi que du noyau régularisé \mathbf{K}_ε :

LEMME 9.1 (i) Soit $T \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\|\mathbf{K} * T\|_{0,\infty} \leq C \left(\|T\|_{0,1} + \|T\|_{0,\infty} \right)$$

(ii) (Théorème de Calderon ²): Soit $T \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in]1, \infty[$, alors

$$|\mathbf{K} * T|_{1,p} \leq C \|T\|_{0,p}$$

(iii) (Inégalité de Sobolev): Soit $T \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq q < n$, alors $\mathbf{K} * T \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour p tel que

$$\|\mathbf{K} * T\|_{0,p} \leq C \|T\|_{0,q}, \quad 1/p = 1/q - 1/n$$

(iv) Soient $T \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq q < n$ et $\xi \in W^{k,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ avec $k \geq 0$. Alors $\mathbf{K}_\varepsilon * T \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ pour tout p vérifiant $1/p \leq 1/q - 1/n$ et

$$|\mathbf{K}_\varepsilon * T|_{k,p} \leq C \varepsilon^{-(k+\alpha)} \|T\|_{0,q}, \quad \alpha = n(1/q - 1/p) - 1$$

(v) Soient $T \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in]1, \infty[$ et $\xi \in W^{k-1,1}(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Alors $\mathbf{K}_\varepsilon * T \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$|\mathbf{K}_\varepsilon * T|_{k,p} \leq C \varepsilon^{1-k} \|T\|_{0,p}$$

(vi) Soient $T \in \mathcal{V}_{m,p}$ avec $m \geq 1$, $1 < p < \infty$ et $\xi \in W^{k+m-1,1}(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$. Alors

$$|\mathbf{K}_\varepsilon * T|_{k,p} \leq C \varepsilon^{1-m-k} [T]_{-m,p}$$

(vii) Sous les hypothèses $H_R(r)$ avec $r \geq 2$, on a pour tout $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|(\mathbf{K}_\varepsilon - \mathbf{K}) * T\|_{0,p} \leq C \varepsilon^r \left(\|T\|_{r,1} + \|T\|_{r,\infty} \right), \quad \text{si } T \in W^{r,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

$$\|(\mathbf{K}_\varepsilon - \mathbf{K}) * T\|_{0,p} \leq C \varepsilon^r \|T\|_{r-1,p}, \quad \text{si } T \in W^{r-1,p}(\mathbb{R}^n)$$

² Albert-Pedro Calderón, né en 1920.

Démonstration. La démonstration des assertions (i)-(iii) sont classiques (voir F.J. Mc Grath (1968) [54] et L. Bers, F. John & M. Schechter (1964) [7], par exemple). G.H. Cottet (1987) [22] donne la démonstration des assertions (iv) et (vi) pour $k = 0$, et on peut la généraliser dans le cas général:

Pour $T \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq q < n$, on a pour tout $k \geq 0$ et pour tout p tel que $1/p \leq 1/q - 1/n$

$$\partial^\beta(\mathbf{K}_\varepsilon * T) = \partial^\beta \xi_\varepsilon * (\mathbf{K} * T), \quad \beta \in \mathbb{N}^n, \quad |\beta| = k$$

D'après l'inégalité de Sobolev

$$\|\mathbf{K} * T\|_{0,p'} \leq C \|T\|_{0,q}, \quad 1/p' = 1/q - 1/n, \quad 1 \leq q < n$$

et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} |\partial^\beta(\mathbf{K}_\varepsilon * T)|_{0,p} &= \|\partial^\beta \xi_\varepsilon * (\mathbf{K} * T)\|_{0,p} \\ &\leq \|\partial^\beta \xi_\varepsilon\|_{0,r} \|\mathbf{K} * T\|_{0,p'} \\ &\leq C \|T\|_{0,q} \|\partial^\beta \xi_\varepsilon\|_{0,r} \end{aligned}$$

où $1/r = 1/p - 1/p' + 1 = 1/p - 1/q + 1/n + 1$.

Comme

$$\begin{aligned} \partial^\beta \xi_\varepsilon(x) &= \partial^\beta(\varepsilon^{-n} \xi(\frac{x}{\varepsilon})) = \varepsilon^{-(n+|\beta|)} (\partial^\beta \xi)(\frac{x}{\varepsilon}) \\ \|\partial^\beta \xi_\varepsilon\|_{0,r} &= \varepsilon^{-(|\beta|+n/r^*)} |\xi|_{\beta,r} \end{aligned}$$

En prenant

$$\alpha = n/r^* = n(1 - 1/r) = n(1/q - 1/p) - 1$$

on a immédiatement

$$|\mathbf{K}_\varepsilon * T|_{k,p} \leq C \varepsilon^{-(k+\alpha)} |\xi|_{k,r} \|T\|_{0,q}$$

De la même façon, en vertu de l'inégalité de Young et du théorème de Calderon, on obtient $\forall k \geq 1, \xi \in W^{k-1,1}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}_\varepsilon * T|_{k,p} &= \sum_{|\beta|=k-1} |\partial^\beta \xi_\varepsilon * \partial(\mathbf{K} * T)|_{0,p} \\ &\leq \sum_{|\beta|=k-1} |\partial^\beta \xi_\varepsilon|_{0,1} |\partial(\mathbf{K} * T)|_{0,p} \\ &\leq C \varepsilon^{1-k} \|\xi\|_{k-1,1} \|T\|_{0,p} \end{aligned}$$

Pour $T \in \mathcal{V}_{m,p}$, $m \geq 1$, $1 < p < \infty$, on peut écrire

$$T = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} \partial^\alpha f_\alpha^1 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} \partial^\alpha f_\alpha^2 \right)$$

avec

$$\|f_\alpha^i\|_{0,p} \leq C[T]_{-m,p}, \quad i = 1, 2$$

Par conséquent, on a $\forall k \geq 0$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| = k$

$$\partial^\beta(\mathbf{K}_\varepsilon * T) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} * \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} \partial^{\alpha+\beta} \xi_\varepsilon * f_\alpha^i \right)$$

de sorte que l'on a d'après le *théorème de Calderon*:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}_\varepsilon * T\|_{k,p} &\leq C \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} \|\partial^{\alpha+\beta} \xi_\varepsilon * f_\alpha^i\|_{0,p} \\ &\leq C \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} \|\partial^{\alpha+\beta} \xi_\varepsilon\|_{0,1} \|f_\alpha^i\|_{0,p} \\ &\leq C \varepsilon^{1-m-k} |\xi|_{k+m-1,1} [T]_{-m,p}. \end{aligned}$$

On introduit maintenant le problème auxiliaire suivant:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_\varepsilon + \nabla \cdot (u_\varepsilon \omega_\varepsilon) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (282)$$

$$(\mathbf{E}_\varepsilon) \quad \omega_\varepsilon(\cdot, 0) = \omega_0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (283)$$

$$u_\varepsilon = \mathbf{K}_\varepsilon * \omega_\varepsilon \quad (284)$$

En notant

$$\omega_\varepsilon(\cdot, t) = E_\varepsilon(t)\omega_0 \quad (285)$$

on peut obtenir le résultat suivant pour les équations d'Euler (voir **G.H. Cottet**(1988) [24]):

LEMME 9.2 *Sous les hypothèses $H_R(r)$ avec $r \geq 2$, on suppose de plus que $\omega_0 \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{m,\infty}(\mathbb{R}^2)$ avec $m \geq r$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [0, \tau]$*

$$\begin{aligned} \|\omega_E(\cdot, t)\|_{m,1} + \|\omega_E(\cdot, t)\|_{m,\infty} &\leq C \\ \|\omega_\varepsilon(\cdot, t)\|_{m,1} + \|\omega_\varepsilon(\cdot, t)\|_{m,\infty} &\leq C \\ \|(u_E - u_\varepsilon)(\cdot, t)\|_{0,p} &\leq C \varepsilon^r, \quad 2 \leq p \leq +\infty \\ \|(\omega_E - \omega_\varepsilon)(\cdot, t)\|_{-k,p} &\leq C \varepsilon^r, \quad 1 \leq p \leq +\infty, \quad 0 \leq k \leq m. \end{aligned}$$

9.2.2 Erreur de splitting

Comme notre méthode particulière est basée sur une *méthode de décomposition* en temps (*méthode de splitting*), on rappelle ci-dessous le principe de la *méthode de splitting*.

On considère de façon générale et formelle le système suivant:

$$\frac{du}{dt} + Au + Bu = 0, \quad t \in (0, T) \quad (286)$$

$$u(0) = u_0 \quad (287)$$

où A, B sont deux opérateurs³ linéaires ou non. On a la solution explicite

$$u(t) = u_0 e^{-t(A+B)} \quad (288)$$

Soient $\tau > 0$ le pas de temps et $t_n = n\tau \in (0, T)$. On résout d'abord le système

$$\frac{du_1}{dt} + Au_1 = 0, \quad t \in (0, \tau) \quad (289)$$

$$u_1(0) = u_0 \quad (290)$$

en notant

$$u^{1/2} = u_1(\tau)$$

et puis on résout le système

$$\frac{du_2}{dt} + Bu_2 = 0, \quad t \in (0, \tau) \quad (291)$$

$$u_2(0) = u^{1/2} \quad (292)$$

de sorte que l'on ait

$$u_2(\tau) = u^{1/2} e^{-\tau B} = u_0 e^{-\tau A} e^{-\tau B} \quad (293)$$

D'après la *formule de Taylor*, on peut vérifier aisément que

$$e^{-\tau(A+B)} - e^{-\tau A} e^{-\tau B} = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2!}(AB - BA) + \mathcal{O}(\tau^3) = \mathcal{O}(\tau^2), & \text{si } AB \neq BA \\ 0, & \text{si } AB = BA \end{cases}$$

³La méthode peut s'étendre au cas d'une décomposition finie quelconque. -

Supposons que l'on connaisse u^n , approximation de u à l'instant $t_n = n\tau$, on détermine alors u^{n+1} , approximation de u à l'instant $t_{n+1} = (n+1)\tau \in (0, T)$, en deux étapes: on considère d'abord la première partie de l'équation (286)

$$\frac{du_1}{dt} + Au_1 = 0, \quad t \in (t_n, t_n + \tau) \quad (294)$$

$$u_1(t_n) = u^n \quad (295)$$

en notant

$$u^{n+1/2} = u_1(t_n + \tau)$$

et puis on considère la seconde partie de l'équation

$$\frac{du_2}{dt} + Bu_2 = 0, \quad t \in (t_n, t_n + \tau) \quad (296)$$

$$u_2(t_n) = u^{n+1/2} \quad (297)$$

On prend alors

$$u^{n+1} = u_2(t_n + \tau) = u^{n+1/2} e^{-\tau B} = u^n e^{-\tau A} e^{-\tau B} \quad (298)$$

et finalement, on trouve

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) - u^{n+1} &= u(t_n) e^{-\tau(A+B)} - u^n e^{-\tau A} e^{-\tau B} \\ &= (u(t_n) - u^n) e^{-\tau A} e^{-\tau B} + \\ &\quad u(t_n) (e^{-\tau(A+B)} - e^{-\tau A} e^{-\tau B}) \\ &= (u(0) - u^0) e^{-(n+1)\tau A} e^{-(n+1)\tau B} + \\ &\quad \sum_{k=0}^n u(t_{n-k}) e^{-k\tau A} e^{-k\tau B} (e^{-\tau(A+B)} - e^{-\tau A} e^{-\tau B}) \\ &= \mathcal{O}(\tau), \quad \tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

L'intérêt de la méthode de décomposition en temps que l'on vient d'esquisser est que chacun des systèmes peut être intégré explicitement, il est alors concevable que l'on puisse ainsi obtenir des *estimations a priori* plus fines que celles que l'on pourrait obtenir directement sans décomposition.

On applique maintenant la méthode de décomposition en temps aux *équations de Navier-Stokes* et on a l'estimation *a priori* suivante (voir **J.T. Beale & A. Majda** (1981) [6] ou **G.H. Cottet & S. Mas-Gallic** [25]):

LEMME 9.3 Soient $\omega_0 \in W^{3,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{3,\infty}(\mathbb{R}^2)$ et $T > 0$. Alors, il existe une constante $C = C(T) > 0$, indépendante de ν et t telle que

$$\|(S^\nu(t) - H^\nu(t)E(t))\omega_0\|_{0,p} \leq C\nu t^2 (\|\omega_0\|_{3,1} + \|\omega_0\|_{3,\infty}), \quad t \in [0, T], p \in [1, \infty]$$

■

En remarquant que

$$(S^\nu(t) - H^\nu(t)E_\varepsilon(t))\omega_0 = (S^\nu(t) - H^\nu(t)E(t))\omega_0 + H^\nu(t)(E(t) - E_\varepsilon(t))\omega_0$$

on a alors d'après les Lemme 9.3 et Lemme 9.2

LEMME 9.4 Sous les hypothèses du Lemme 9.2 avec $m \geq \max(r, 3)$, il existe alors une constante $C = C(\omega_0) > 0$ indépendante de ε et h telle que pour tout entier $k \geq 0$

$$\|(S^\nu(t) - H^\nu(t)E_\varepsilon(t))\omega_0\|_{-k,p} \leq C(\nu t^2 + \varepsilon^r), \quad p \in [1, \infty]$$

■

9.2.3 Erreur sur la diffusion

Grâce à la *méthode de splitting*, on peut décomposer les *équations de Navier-Stokes* en d'une part les *équations d'Euler* (comme dans le cas non visqueux déjà étudié dans la première partie) et d'autre part l'*équation de la chaleur*.

Etudions maintenant la *consistance de l'opérateur discret*, $H_\varepsilon(\tau)$, approché de l'*opérateur de la chaleur* $H^\nu(\tau)$. On a le Lemme suivant:

LEMME 9.5 Soit la fonction cut-off $\xi \in W^{4,1}(\mathbb{R}^2)$, paire et vérifiant

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \xi(x) dx &= 1, \\ \int_{\mathbb{R}^2} x_i^2 \xi(x) &= c_1 \neq 0, \quad i = 1, 2 \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \int_{\mathbb{R}^2} |x|^4 \xi(x) dx &\leq +\infty \end{aligned}$$

Supposons que

$$\nu \tau = \frac{1}{2} c_1 \varepsilon^2$$

Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε et de h telle que l'on ait pour toute fonction $\omega \in W^{4,p}(\mathbb{R}^2)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$

$$\| \{ H_\varepsilon(\tau) - H^\nu(\tau) \} \omega \|_{0,p} \leq C (\nu \tau)^2 \| \omega \|_{4,p}$$

Démonstration. En effet, on écrit

$$\{ H_\varepsilon(\tau) - H^\nu(\tau) \} \omega = \omega * \xi_\varepsilon - \omega + \omega - H^\nu(\tau) \omega$$

Pour ω assez régulier, d'une part, on peut vérifier en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral

$$\begin{aligned} (\omega - \omega * \xi_\varepsilon)(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\omega(x) - \omega(y)) \xi_\varepsilon(x-y) dy \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2}(x) \int_{\mathbb{R}^2} (y_i - x_i)^2 \xi_\varepsilon(x-y) dy \\ &\quad - \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \int_{\mathbb{R}^2} D^r \omega(x+t(y-x)) (y-x)^r \xi_\varepsilon(x-y) dy dt \\ &= -\frac{1}{2} c_1 \varepsilon^2 \Delta \omega(x) - \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha [\partial^\alpha \omega * (x^\alpha \xi_{t\varepsilon})](x) \end{aligned}$$

d'où l'on tire pour $r = 4$

$$\begin{aligned} \left\| \omega * \xi_\varepsilon - \left(\omega + \frac{1}{2} c_1 \varepsilon^2 \Delta \omega \right) \right\|_{0,p} &\leq \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{t^r} \sum_{|\alpha|=r} |\lambda_\alpha| \|\partial^\alpha \omega\|_{0,p} \|x^\alpha \xi_{t\varepsilon}\|_{0,1} \\ &\leq c_r \varepsilon^r \|\omega\|_{r,p} \end{aligned}$$

avec

$$c_1 = \int_{\mathbb{R}^2} x_i^2 \xi(x) dx \neq 0, \quad i = 1, 2; \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

D'autre part, comme

$$H^\nu(\tau)\omega = \Gamma(\cdot; \nu\tau) * \omega$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned} \Gamma(x; t) &> 0 \\ \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(\cdot; t) dx &= 1 \\ \int_{\mathbb{R}^2} x_i \Gamma(\cdot; t) &= 0, \quad i = 1, 2 \\ \int_{\mathbb{R}^2} x_i^2 \Gamma(\cdot; t) dx &= 2t \\ \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 \Gamma(\cdot; t) dx &= 0 \end{aligned}$$

on trouve alors

$$\|H^\nu(\tau)\omega - (\omega + \nu\tau \Delta \omega)\|_{0,p} \leq c_3 (\nu\tau)^2 \|\Delta^2 \omega\|_{0,p}$$

Si l'on prend

$$\nu\tau = \frac{1}{2} c_1 \varepsilon^2$$

on a finalement

$$\|\omega * \xi_\varepsilon - H^\nu(\tau)\omega\|_{0,p} \leq C (\nu\tau)^2 \|\omega\|_{4,p}$$

■

9.2.4 Résultats préliminaires

En ce qui concerne les solutions des équations d'*Euler* et de *Navier-Stokes*, on rappelle d'abord certains résultats de stabilité (voir, par exemple, **F.J. McGrath** (1968)[54], **J.T. Beale & A. Majda** (1981)[6]):

LEMME 9.6 Soient $\omega_0 \in W^{k,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{k,\infty}(\mathbb{R}^2)$ avec $k \geq 0$ et $T > 0$. Alors, il existe une constante $C = C(T) > 0$ telle que l'on ait pour tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|E(t)\omega_0\|_{k,1} + \|E(t)\omega_0\|_{k,\infty} &\leq C \left(\|\omega_0\|_{k,1} + \|\omega_0\|_{k,\infty} \right) \\ \|S^\nu(t)\omega_0\|_{k,1} + \|S^\nu(t)\omega_0\|_{k,\infty} &\leq C \left(\|\omega_0\|_{k,1} + \|\omega_0\|_{k,\infty} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMME 9.7 Soient $\omega_0 \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ et $T > 0$. Alors, il existe une constante $C = C(T) > 0$ indépendante de ν et de $t \in [0, T]$ telle que

$$\|(S^\nu(t) - E(t))\omega_0\|_{0,p} \leq C \nu t \left(\|\omega_0\|_{2,1} + \|\omega_0\|_{2,\infty} \right), \quad \forall p \in [1, \infty] \quad \blacksquare$$

En notant

$$\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t) = H_\varepsilon(t)E_\varepsilon(t)\omega_0 = H_\varepsilon(\tau)E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t - \tau) \quad (299)$$

$$\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) = \mathbf{K}_\varepsilon * \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t) \quad (300)$$

et en remarquant

$$(\omega - \tilde{\omega}_\varepsilon)(\cdot, t) = (S^\nu(t) - H^\nu(t)E_\varepsilon(t))\omega_0 + (H^\nu(t) - H_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(\cdot, t) \quad (301)$$

$$(u - \tilde{u}_\varepsilon)(\cdot, t) = \mathbf{K} * (\omega - \tilde{\omega}_\varepsilon)(\cdot, t) + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_\varepsilon) * \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t) \quad (302)$$

on a finalement d'après les Lemme 9.4, Lemme 9.5 et Lemme 9.1, Lemme 9.2

THÉORÈME 9.2 Soient la fonction cut-off $\xi \in W^{4,1}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant les propriétés $H_R^*(r)$ avec $r = 2$, $\omega_0 \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{m,\infty}(\mathbb{R}^2)$ avec $m \geq 4$. Supposons de plus

$$\nu \tau = \frac{1}{2} c_1 \varepsilon^2$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que l'on ait

$$\|(u - \tilde{u}_\varepsilon)(\cdot, t)\|_{0,p} \leq C \nu \tau, \quad t \in [0, \tau], p \in [2, \infty]$$

$$\|(\omega - \tilde{\omega}_\varepsilon)(\cdot, t)\|_{-m,p} \leq C \nu \tau, \quad t \in [0, \tau], p \in [1, \infty]$$

$$\|\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t)\|_{m,1} + \|\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t)\|_{m,\infty} \leq C.$$

où u, ω sont solutions du problème (E) et $\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon$ sont définis dans (299)(300). \blacksquare

9.3 Démonstration du théorème de la convergence

9.3.1 Introduction

En utilisant les notations que l'on a introduites dans les paragraphes précédents, on peut diviser l'erreur de la méthode sur tourbillon en deux parties:

$$(\omega - \omega^h)(\cdot, t_{n+1}) = (\omega - \tilde{\omega}_\varepsilon)(\cdot, t_{n+1}) + (\tilde{\omega}_\varepsilon - \omega^h)(\cdot, t_{n+1}) \quad (303)$$

où

$$(\omega - \tilde{\omega}_\varepsilon)(\cdot, t_{n+1}) = S^\nu(\tau)\omega(\cdot, t_n) - H_\varepsilon(\tau)E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) \quad (304)$$

$$(\tilde{\omega}_\varepsilon - \omega^h)(\cdot, t_{n+1}) = H_\varepsilon(\tau)E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - \Pi^h(\tau)H_\varepsilon(\tau)E_h(\tau)\omega^h(\cdot, t_n) \quad (305)$$

Tout d'abord, on a d'après le Théorème 9.2

$$\|(\omega - \tilde{\omega}_\varepsilon)(\cdot, t_{n+1})\|_{0,p} \leq C\nu\tau, \quad t \in [0, \tau], \quad p \in [1, \infty] \quad (306)$$

il ne nous reste qu'à étudier l'erreur $(\tilde{\omega}_\varepsilon - \omega^h)(\cdot, t_{n+1})$. On récrit ici

$$\begin{aligned} (\tilde{\omega}_\varepsilon - \omega^h)(\cdot, t_{n+1}) &= H_\varepsilon(\tau)E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - \Pi^h(\tau)H_\varepsilon(\tau)E_h(\tau)\omega^h(\cdot, t_n) \\ &= (H_\varepsilon(\tau) - \Pi^h(\tau)H_\varepsilon(\tau))E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) + \\ &\quad \Pi^h(\tau)H_\varepsilon(\tau)(E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - E_h(\tau)\omega^h(\cdot, t_n)) \end{aligned} \quad (307)$$

On va utiliser dans notre cas une technique de G.H. Cottet (1988) [24] afin d'achever la démonstration du résultat de convergence.

9.3.2 Lemme de stabilité

On s'intéresse d'abord à la *stabilité de l'opérateur discret*

$$\mathcal{H}_h(\tau) = \Pi^h(\tau)H_\varepsilon(\tau)$$

et on énonce le Lemme suivant:

LEMME 9.8 *Sous les hypothèses du Théorème 9.1, on peut écrire pour toute distribution $\omega \in \mathcal{D}_{k,p}$ avec $k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$*

$$\mathcal{H}_h(\tau)\omega = \lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (308)$$

où

$$\begin{aligned} \|\lambda_0\|_{0,q} &\leq c\tau\varepsilon^{-k}[\omega]_{-k,p}, & \lambda_0 &\in L^q(\mathbb{R}^2), \quad \forall 1 \leq q \leq p \leq \infty \\ [\lambda_i]_{-i,p} &\leq \begin{cases} (1+c\tau\varepsilon^{i-k})[\omega]_{-k,p}, & \lambda_i \in \mathcal{D}_{i,p}, & 1 \leq i \leq k \\ c\tau\varepsilon^{i-k}[\omega]_{-k,p}, & \lambda_i \in \mathcal{D}_{i,p}, & k+1 \leq i \leq m \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. En effet, $\forall \varphi \in W^{k,p^*}(\mathbb{R}^2)$ avec $k \leq m$ et $1/p + 1/p^* = 1$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_h(\tau)(\omega), \varphi \rangle &= \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} h^2(\omega * \xi_\varepsilon \cdot \varphi)(x_p) \\ &= \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^2} h^2(\omega * \xi_\varepsilon \cdot \varphi)(x_p) - \int_{\mathbb{R}^2} (\omega * \xi_\varepsilon)(x)\varphi(x)dx \right) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} (\omega * \xi_\varepsilon)(x)\varphi(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_0 \quad (309) \end{aligned}$$

D'une part, comme $\omega = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \partial^\alpha g_\alpha$, $g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $1 \leq k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1/p + 1/p^* = 1$

$$\begin{aligned} |I_0| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\omega * \xi_\varepsilon)(x)\varphi(x)dx \right| = | \langle \omega * \xi_\varepsilon, \varphi \rangle | = | \langle \omega, \varphi * \xi_\varepsilon \rangle | \\ &= \left| \langle \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \partial^\alpha g_\alpha, \varphi * \xi_\varepsilon \rangle \right| \leq \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} | \langle g_\alpha, \partial^\alpha \varphi * \xi_\varepsilon \rangle | \\ &\leq \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \|g_\alpha\|_{0,p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{0,p^*} \|\xi_\varepsilon\|_{0,1} = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{|\alpha|=i} \|g_\alpha\|_{0,p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{0,p^*} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left(\sum_{|\alpha|=i} \|g_\alpha\|_{0,p}^p \right)^{1/p} \left(\sum_{|\alpha|=i} \|\partial^\alpha \varphi\|_{0,p^*}^{p^*} \right)^{1/p^*} \end{aligned}$$

et donc

$$|I_0| \leq \sum_{i=1}^k [\omega]_{-i,p} |\varphi|_{i,p^*} \quad (310)$$

D'autre part, on a pour $m \geq 2$, $k \leq m$ et $1 \leq q \leq p \leq \infty$ en vertu des Lemme 8.6 et Lemme 8.5

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} h^2 (\omega * \xi_\varepsilon \cdot \varphi)(x_p) - \int_{\mathbb{R}^2} (\omega * \xi_\varepsilon)(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq C h^m |\omega * \xi_\varepsilon \cdot \varphi|_{m,1} \leq C h^m \sum_{i=0}^m C_m^i |\partial^{m-i}(\omega * \xi_\varepsilon) \partial^i \varphi|_{0,1} \\ &\leq C h^m \left(|\omega * \xi_\varepsilon|_{m,q} |\varphi|_{0,q^*} + \sum_{i=1}^m C_m^i |\omega * \xi_\varepsilon|_{m-i,p} |\varphi|_{i,p^*} \right) \\ &\leq C \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^m \left(\varepsilon^{-k} [\omega]_{-k,p} |\varphi|_{0,q^*} + \sum_{i=1}^m C_m^i \varepsilon^{i-k} [\omega]_{-k,p} |\varphi|_{i,p^*} \right) \\ &\leq C \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^m [\omega]_{-k,p} \left(\varepsilon^{-k} |\varphi|_{0,q^*} + \sum_{i=1}^m C_m^i \varepsilon^{i-k} |\varphi|_{i,p^*} \right) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit en remarquant que $h^m \varepsilon^{-m} < c\tau$ lorsque $m \geq 2$

$$\begin{aligned} &| \langle \mathcal{H}_h(\tau)(\omega), \varphi \rangle | \\ &\leq \left\{ c\tau \varepsilon^{-k} |\varphi|_{0,q^*} + (1 + c\tau \varepsilon^{i-k}) \sum_{i=1}^k |\varphi|_{i,p^*} + c\tau \varepsilon^{i-k} \sum_{i=k+1}^m |\varphi|_{i,p^*} \right\} [\omega]_{-k,p} \quad (311) \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient grâce au Lemme 8.9

$$\mathcal{H}_h(\tau)\omega = \lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

avec

$$\begin{aligned} \|\lambda_0\|_{0,q} &\leq c\tau \varepsilon^{-k} [\omega]_{-k,p}, & \lambda_0 &\in L^q(\mathbb{R}^2), \forall 1 \leq q \leq p \leq \infty \\ [\lambda_i]_{-i,p} &\leq \begin{cases} (1 + c\tau \varepsilon^{i-k}) [\omega]_{-k,p}, & \lambda_i \in \mathcal{V}_{i,p}, & 1 \leq i \leq k \\ c\tau \varepsilon^{i-k} [\omega]_{-k,p}, & \lambda_i \in \mathcal{V}_{i,p}, & k+1 \leq i \leq m \end{cases} \end{aligned}$$

REMARQUE 9.3 Pour toute fonction $\omega \in L^p(\mathbb{R}^2)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on a également

$$\mathcal{H}_h(\tau)\omega = \lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

avec

$$\begin{aligned} \|\lambda_0\|_{0,q} &\leq (1 + c\tau) \|\omega\|_{0,p}, & \lambda_0 &\in L^q(\mathbb{R}^2), \forall 1 \leq q \leq p \leq \infty \\ [\lambda_i]_{-i,p} &\leq c\tau \varepsilon^i \|\omega\|_{0,p}, & \lambda_i &\in \mathcal{V}_{i,p}, & 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

9.3.3 Démonstration du théorème

On pose maintenant

$$T_M^h = \sup \left\{ t \in [0, T], |u^h(\cdot, t)|_{1, \infty} + \sum_{k=2}^{m+1} \varepsilon^{k-1} |u^h(\cdot, t)|_{k, \infty} \leq M \right\} \quad (312)$$

$$e_n = (\tilde{\omega}_\varepsilon - \omega^h)(\cdot, t_n) \quad (313)$$

et on démontre le résultat de stabilité suivant

LEMME 9.9 *Sous les hypothèses du Théorème 9.1. $\forall n$ tel que $t_n \leq T_M^h$, on peut écrire*

$$e_n = \lambda_0^{h,n} + \sum_{k=1}^m \lambda_k^{h,n}$$

où $\lambda_0^{h,n} \in L^q(\mathbb{R}^2)$ et $\lambda_k \in \mathcal{V}_{k,p}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$ et tel que si l'on note

$$y_n = \|\lambda_0^{h,n}\|_{0,q} \varepsilon^{m-1} + \sum_{k=1}^m [\lambda_k^{h,n}]_{-k,p} \varepsilon^{m-k}$$

alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de T_M^h , h et ε telle que l'on ait

$$y_n \leq Ch^m$$

par conséquent,

$$\|(\tilde{u}_\varepsilon - u^h)(\cdot, t_{n+1})\|_{0,p} \leq C_1 h^m \varepsilon^{1-m}$$

Démonstration. On va montrer ce résultat *par récurrence* en estimant e_{n+1} en fonction de e_n .

(1). Comme $f = H_\varepsilon(\tau)E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon \in W^{m,p}(\mathbb{R}^2)$ et $|f|_{i,p} \leq c_i$, on peut écrire en vertu du Lemme 8.9

$$(H_\varepsilon(\tau) - \Pi^h(\tau)H_\varepsilon(\tau))E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) = \sum_{i=0}^m \rho_i^{h,n+1} \quad (314)$$

avec

$$\begin{aligned} \|\rho_0^{h,n+1}\|_{0,q} &\leq Ch^m c_m, & \rho_0^{h,n+1} &\in L^q(\mathbb{R}^2) \\ [\rho_i^{h,n+1}]_{-i,p} &\leq Ch^m c_{m-i}, & \rho_i^{h,n+1} &\in \mathcal{V}_{i,p}, \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (315)$$

(2). Puisque l'erreur produite dans l'étape d'*Euler*

$$g_\omega(\cdot, t_n + s) \equiv E_\varepsilon(s)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - E^h(s)\omega^h(\cdot, t_n)$$

satisfait le système suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g_\omega + (u^h \cdot \nabla) g_\omega &= ((u^h - \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla) \tilde{\omega}_\varepsilon \\ g_\omega(\cdot, t_n) &= \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - \omega^h(\cdot, t_n) \\ \tilde{u}_\varepsilon - u^h &= \mathbf{K}_\varepsilon * g_\omega \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence, on suppose l'erreur de discretisation au temps $t_n = n\tau$

$$e_n = \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - \omega^h(\cdot, t_n) = \sum_{k=0}^m \lambda_k^{h,n} \quad (316)$$

avec $\lambda_0^{h,n} \in L^q(\mathbb{R}^2)$ et $\lambda_k^{h,n} \in \mathcal{V}_{k,p}$ pour $1 \leq k \leq m$, on peut alors écrire pour tout $s \in [0, \tau]$

$$E_\varepsilon(s)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - E^h(s)\omega^h(\cdot, t_n) = \sum_{k=0}^m \alpha_k^{h,n}(\cdot, s) + \beta^{h,n}(\cdot, s) \quad (317)$$

où $\alpha_k^{h,n}(\cdot, s)$ et $\beta^{h,n}(\cdot, s)$ sont respectivement solutions des problèmes:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \alpha_k^{h,n} + (u^h \cdot \nabla) \alpha_k^{h,n} = 0, & s \in (0, \tau) \\ \alpha_k^{h,n}(\cdot, 0) = \lambda_k^{h,n} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \beta^{h,n} + (u^h \cdot \nabla) \beta^{h,n} = ((u^h - \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla) \tilde{\omega}_\varepsilon, & s \in (0, \tau) \\ \beta^{h,n}(\cdot, 0) = 0 \end{cases}$$

On est alors dans la situation du lemme 8.3 et on peut écrire pour chaque $0 \leq k \leq m$

$$\alpha_k^{h,n}(\cdot, s) = \sum_{0 \leq \ell \leq k} \alpha_{k,\ell}^{h,n}(\cdot, s), \quad s \in [0, \tau] \quad (318)$$

où $\alpha_{k,0}^{h,n}(s) \in L^q(\mathbb{R}^2)$, $k \geq 0$ et $\alpha_{k,\ell}^{h,n}(\cdot, s) \in \mathcal{V}_{\ell,p}$, $1 \leq \ell \leq k \leq m$ avec

$$\begin{aligned} \|\alpha_{0,0}^{h,n}(\cdot, s)\|_{0,q} &\leq (1 + c\tau) \|\lambda_0^{h,n}\|_{0,q} \\ \varepsilon^{k-1} \|\alpha_{k,0}^{h,n}(\cdot, s)\|_{0,q} + \sum_{\ell=1}^k \varepsilon^{k-\ell} [\alpha_{k,\ell}^{h,n}(\cdot, s)]_{-\ell,p} &\leq (1 + c\tau) [\lambda_k^{h,n}]_{-k,p}, \quad 1 \leq k \leq m \end{aligned} \quad (319)$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{m-1} \|\alpha_{0,0}^{h,n}\|_{0,q} &\leq (1+c\tau)\varepsilon^{m-1} \|\lambda_0^{h,n}\|_{0,q} \\
\varepsilon^{m-1} \|\alpha_{1,0}^{h,n}\|_{0,q} + \varepsilon^{m-1} [\alpha_{1,1}^{h,n}]_{-1,p} &\leq (1+c\tau)\varepsilon^{m-1} [\lambda_1^{h,n}]_{-1,p} \\
\varepsilon^{m-1} \|\alpha_{k,0}^{h,n}\|_{0,q} + \varepsilon^{m-1} [\alpha_{k,1}^{h,n}]_{-1,p} + \dots + \varepsilon^{m-k} [\alpha_{k,k}^{h,n}]_{-k,p} &\leq (1+c\tau)\varepsilon^{m-k} [\lambda_k^{h,n}]_{-k,p}, \\
&2 \leq k \leq m \quad (320)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|(u^h - \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n + s)(\cdot, t_n + s)\|_{-1,p} &= \|\nabla((u^h - \tilde{u}_\varepsilon)\tilde{\omega}_\varepsilon)(\cdot, t_n + s)\|_{-1,p} \\
&\leq C\|u^h - \tilde{u}_\varepsilon\|_{0,p}
\end{aligned}$$

et donc $\beta^{h,n}(\cdot, s) \in \mathcal{V}_{1,p}$ avec

$$[\beta^{h,n}(s)]_{-1,p} \leq C \int_0^s \|(\tilde{u}_\varepsilon - u^h)(\cdot, t_n + \rho)\|_{0,p} d\rho \quad (321)$$

Comme

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}_\varepsilon - u^h)(\cdot, t_n + s) &= \mathbf{K}_\varepsilon * (E_\varepsilon(s)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - E_h(s)\omega^h(\cdot, t_n)) \\
&= \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^k \mathbf{K}_\varepsilon * \alpha_{k,\ell}^{h,n}(s) + \mathbf{K}_\varepsilon * \beta^{h,n}(s)
\end{aligned}$$

on a d'après lemme 9.1

$$\begin{aligned}
\|(u^h - \tilde{u}_\varepsilon)(\cdot, t_n + s)\|_{0,p} &\leq \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^k \|\mathbf{K}_\varepsilon * \alpha_{k,\ell}^{h,n}(s)\|_{0,p} + \|\mathbf{K}_\varepsilon * \beta^{h,n}(s)\|_{0,p} \quad (322) \\
&\leq c_0 \sum_{k=0}^m \|\alpha_{k,0}^{h,n}(s)\|_{0,q} + \sum_{\ell=1}^m c_\ell \varepsilon^{1-\ell} \sum_{k=\ell}^m [\alpha_{k,\ell}^{h,n}(s)]_{-\ell,p} + c_{\ell+1} [\beta^{h,n}(s)]_{-1,p}
\end{aligned}$$

Si l'on note

$$y_E^n(s) = \varepsilon^{m-1} \sum_{k=0}^m \|\alpha_{k,0}^{h,n}(s)\|_{0,q} + \sum_{\ell=1}^m \varepsilon^{m-\ell} \sum_{k=\ell}^m [\alpha_{k,\ell}^{h,n}(s)]_{-\ell,p} + \varepsilon^{m-1} [\beta^{h,n}(s)]_{-1,p} \quad (323)$$

on obtient alors en vertu de (320)-(322)

$$\begin{aligned}
y_E^n(s) &\leq (1+c\tau)y_n + C \int_0^\tau y_E^n(\rho) d\rho \quad s \in (0, \tau) \quad (324) \\
y_E^n(0) &= y_n
\end{aligned}$$

d'où l'on tire selon l'inégalité de Gronwall

$$y_E^n(s) \leq (1+c^*\tau)y_n, \quad \forall s \in [0, \tau] \quad (325)$$

(3). Rappelons que

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= (H_\varepsilon(\tau) - \Pi^h(\tau)H_\varepsilon(\tau))E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) \\
 &\quad + \mathcal{H}_h(\tau) \left(E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - E_h(\tau)\omega^h(\cdot, t_n) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^m \rho_i^{h,n+1} + \mathcal{H}_h(\tau) \left(E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - E_h(\tau)\omega^h(\cdot, t_n) \right)
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_h(\tau) \left(E_\varepsilon(\tau)\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_n) - E_h(\tau)\omega^h(\cdot, t_n) \right) &= \mathcal{H}_h(\tau) \left(\sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^k \alpha_{k,\ell}^{h,n}(\tau) + \beta^{h,n}(\tau) \right) \\
 &= \mathcal{H}_h(\tau)\beta^{h,n} + \sum_{k=0}^m \mathcal{H}_h(\tau)\alpha_{k,0}^{h,n} + \mathcal{H}_h(\tau) \sum_{k=1}^m \alpha_{k,1}^{h,n} + \sum_{k=2}^m \sum_{\ell=2}^k \mathcal{H}_h(\tau)\alpha_{k,\ell}^{h,n} \quad (326)
 \end{aligned}$$

on peut écrire d'après le Lemme 9.8

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_h(\tau)\beta^{h,n} &= \sum_{i=0}^m \lambda_{0,i}, \quad \lambda_{0,0} \in L^q(\mathbb{R}^2), \quad \lambda_{0,i} \in \vartheta_{i,p}, \quad 1 \leq i \leq m \\
 \mathcal{H}_h(\tau)\alpha_{k,0}^{h,n} &= \sum_{i=0}^m \lambda_{k,0,i}, \quad \lambda_{k,0,0} \in L^q(\mathbb{R}^2), \quad \lambda_{k,0,i} \in \vartheta_{i,p}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq k \leq m \quad (327) \\
 \mathcal{H}_h(\tau)\alpha_{k,1}^{h,n} &= \sum_{i=0}^m \lambda_{k,1,i}, \quad \lambda_{k,1,0} \in L^q(\mathbb{R}^2), \quad \lambda_{k,1,i} \in \vartheta_{i,p}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq m \\
 \mathcal{H}_h(\tau)\alpha_{k,\ell}^{h,n} &= \sum_{i=0}^m \lambda_{k,\ell,i}, \quad \lambda_{k,\ell,0} \in L^q(\mathbb{R}^2), \quad \lambda_{k,\ell,i} \in \vartheta_{i,p}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \ell \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{0,0}\|_{0,q} &\leq c\tau\varepsilon^{-1} [\beta^{h,n}]_{-1,p} \\
 [\lambda_{0,1}]_{-1,p} &\leq (1+c\tau) [\beta^{h,n}]_{-1,p} \\
 [\lambda_{0,i}]_{-i,p} &\leq c\tau\varepsilon^{i-1} [\beta^{h,n}]_{-1,p}, \quad 2 \leq i \leq m \\
 \|\lambda_{k,0,0}\|_{0,q} &\leq (1+c\tau) \|\alpha_{k,0}^{h,n}\|_{0,q}, \quad 0 \leq k \leq m \\
 [\lambda_{k,0,i}]_{-1,p} &\leq c\tau\varepsilon^i \|\alpha_{k,0}^{h,n}\|_{0,q}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq k \leq m \\
 \|\lambda_{k,1,0}\|_{0,q} &\leq c\tau\varepsilon^{-1} [\alpha_{k,1}^{h,n}]_{-1,p}, \quad 1 \leq k \leq m \\
 [\lambda_{k,1,1}]_{-1,p} &\leq (1+c\tau) [\alpha_{k,1}^{h,n}]_{-1,p}, \quad 1 \leq k \leq m \\
 [\lambda_{k,1,i}]_{-1,p} &\leq c\tau\varepsilon^{i-1} [\alpha_{k,1}^{h,n}]_{-1,p}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq m \\
 \|\lambda_{k,\ell,0}\|_{0,q} &\leq c\tau\varepsilon^{-\ell} [\alpha_{k,\ell}^{h,n}]_{-\ell,p}, \quad 2 \leq \ell \leq k \leq m \\
 [\lambda_{k,\ell,i}]_{-i,p} &\leq (1+c\tau\varepsilon^{i-\ell}) [\alpha_{k,\ell}^{h,n}]_{-\ell,p}, \quad 1 \leq i \leq \ell, \quad 2 \leq \ell \leq k \leq m \\
 [\lambda_{k,\ell,i}]_{-i,p} &\leq c\tau\varepsilon^{i-\ell} [\alpha_{k,\ell}^{h,n}]_{-\ell,p}, \quad \ell+1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \ell \leq k \leq m
 \end{aligned} \quad (328)$$

En notant

$$e_{n+1} = \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot, t_{n+1}) - \omega^h(\cdot, t_{n+1}) = \sum_{k=0}^m \lambda_k^{h,n+1} \quad (329)$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_0^{h,n+1} &= \rho_0^{h,n+1} + \lambda_{0,0} + \sum_{k=0}^m \lambda_{k,0,0} + \sum_{k=1}^m \lambda_{k,1,0} + \sum_{k=2}^m \sum_{\ell=2}^k \lambda_{k,\ell,0} \\ \lambda_1^{h,n+1} &= \rho_1^{h,n+1} + \lambda_{0,1} + \sum_{k=0}^m \lambda_{k,0,1} + \sum_{k=1}^m \lambda_{k,1,1} + \sum_{k=2}^m \sum_{\ell=2}^k \lambda_{k,\ell,1} \\ \lambda_i^{h,n+1} &= \rho_i^{h,n+1} + \lambda_{0,i} + \sum_{k=0}^m \lambda_{k,0,i} + \sum_{k=1}^m \lambda_{k,1,i} + \sum_{k=2}^m \sum_{\ell=2}^k \lambda_{k,\ell,i}, \quad 2 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (330)$$

on trouve en vertu de (330) et (328)

$$\begin{aligned} \varepsilon^{m-1} \|\lambda_0^{h,n+1}\|_{0,q} &\leq ch^m \varepsilon^{m-1} \|\rho_0^{h,n+1}\|_{0,q} + (1+c\tau) \varepsilon^{m-1} \sum_{k=0}^m \|\alpha_{k,0}^{h,n}\|_{0,q} \\ &\quad + c\tau \varepsilon^{m-2} \left\{ [\beta^{h,n}]_{-1,p} + \sum_{k=1}^m [\alpha_{k,1}^{h,n}]_{-1,p} \right\} + c\tau \sum_{k=2}^m \sum_{\ell=2}^k \varepsilon^{m-\ell} [\alpha_{k,\ell}^{h,n}]_{-\ell,p} \\ \varepsilon^{m-1} [\lambda_1^{h,n+1}]_{-1,p} &\leq ch^m \varepsilon^{m-1} [\rho_1^{h,n+1}]_{-1,p} + (1+c\tau) \varepsilon^{m-1} \left\{ [\beta^{h,n}]_{-1,p} + \varepsilon \sum_{k=1}^m \|\alpha_{k,0}^{h,n}\|_{0,q} \right\} \\ &\quad + (1+c\tau) \varepsilon^{m-1} \sum_{k=1}^m [\alpha_{k,1}^{h,n}]_{-1,p} + (1+c\tau) \sum_{k=2}^m \sum_{\ell=2}^k \varepsilon^{m-\ell} [\alpha_{k,\ell}^{h,n}]_{-\ell,p} \quad (331) \\ \varepsilon^{m-i} [\lambda_i^{h,n+1}]_{-i,p} &\leq ch^m \varepsilon^{m-i} [\rho_i^{h,n+1}]_{-i,p} + c\tau \varepsilon^{m-1} [\beta^{h,n}]_{-1,p} + c\tau \varepsilon^m \sum_{k=0}^m \|\alpha_{k,0}^{h,n}\|_{0,q} \\ &\quad + c\tau \varepsilon^{m-1} \sum_{k=1}^m [\alpha_{k,1}^{h,n}]_{-1,p} + c\tau \sum_{k=2}^m \sum_{\ell=2}^k \varepsilon^{m-\ell} [\alpha_{k,\ell}^{h,n}]_{-\ell,p}, \quad 2 \leq i \leq m \end{aligned}$$

et on a finalement en utilisant (315), (331) et (326)

$$y_{n+1} \leq Ch^m + (1+c\tau)y_E^n(s) \leq Ch^m + (1+c^*\tau)y_n \quad (332)$$

d'où l'on tire pour tout $n\tau \leq T_M^h \leq T$

$$y_{n+1} \leq (1+c^*\tau)^{n+1} y_0 h^m \leq C_1 e^{cT} h^m$$

(4). D'ailleurs

$$\tilde{u}_\varepsilon - u^h = \mathbf{K}_\varepsilon * (\tilde{\omega}_\varepsilon - \omega^h) = \sum_{k=0}^m \mathbf{K}_\varepsilon * \lambda_k^{h,n+1}$$

en utilisant le résultat de stabilité suivant $\lambda_0^{h,n+1} \in L^q(\mathbb{R}^2)$ et $\lambda_k^{h,n+1} \in \vartheta_{k,p}$, $1 \leq k \leq m$ avec

$$\begin{aligned} \|\lambda_0^{h,n+1}\|_{0,q} &\leq C\varepsilon^{1-m}h^m \\ [\lambda_k^{h,n+1}]_{-k,p} &\leq C\varepsilon^{k-m}h^m, \quad 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

on obtient en vertu du Lemme 9.1

$$\begin{aligned} \|(\tilde{u}_\varepsilon - u^h)(\cdot, t_{n+1})\|_{0,p} &\leq \|\mathbf{K}_\varepsilon * \lambda_0^{h,n+1}\|_{0,p} + \sum_{k=1}^m \|\mathbf{K}_\varepsilon * \lambda_k^{h,n+1}\|_{0,p} \\ &\leq c_1 \|\lambda_0^{h,n+1}\|_{0,q} + \sum_{k=1}^m c_k \varepsilon^{1-k} [\lambda_k^{h,n+1}]_{-k,p} \\ &\leq C \left(\varepsilon^{1-m} h^m + \sum_{k=1}^m \varepsilon^{1-k} \varepsilon^{k-m} h^m \right) \\ &\leq C_1 h^m \varepsilon^{1-m} \end{aligned} \tag{333}$$

On peut montrer comme d'habitude que pour un choix approprié de la constante M , on a $T_M^h = T$. ■

Pour terminer la démonstration du résultat de convergence, il suffit de regrouper les résultats du Théorème 9.2 et du Lemme 9.9 en remarquant que

$$(u - u^h)(\cdot, t_{n+1}) = (u - \tilde{u}_\varepsilon)(\cdot, t_{n+1}) + (\tilde{u}_\varepsilon - u^h)(\cdot, t_{n+1})$$

on obtient finalement

$$\|(u - u^h)\|_{0,p} \leq C(\varepsilon^r + \nu\tau + h^m \varepsilon^{1-m}) \leq C\nu\tau.$$

et la démonstration est achevée. ■

Chapitre 10

Méthode couplée particules-grille et ses applications

Nous terminons cette partie par l'étude des méthodes de couplage particules-grille pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. On décrit d'abord une méthode VIC sans décomposition basée sur les techniques de la première partie; on étudie ses caractéristiques, puis on démontre un résultat de convergence dans le cas linéaire. On l'applique enfin à la simulation numérique directe des écoulements turbulents périodiques gérés par les équations de Navier-Stokes qui a été envisagée par W.D. Henshaw, H.O. Kreiss et al (1991) en utilisant une méthode pseudo-spectrale et une méthode de vortex simplement pour les équations d'Euler. On obtient des premiers résultats satisfaisants par la méthode de "vortex-in-cell" pour ce cas test difficile.

10.1 Méthode V.I.C. pour les équations de Navier-Stokes

Dans le chapitre précédent, on a proposé une méthode de vortex pour les équations de Navier-Stokes à grand nombre de Reynolds (à faible viscosité):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\omega + (u \cdot \nabla)\omega - \nu\Delta\omega &= 0 \\ u &= \mathbf{K} * \omega \\ \omega(\cdot, 0) &= \omega_0\end{aligned}\quad (334)$$

On introduit maintenant une méthode de "vortex in cell", basée sur les techniques de la première partie et adaptée au cas visqueux: la méthode de couplage particules-grille sans splitting d'opérateur consiste à chercher ω^h de la forme

$$\omega^h(x, t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} v_p \omega_p^h(t) \delta(x - x_p^h(t)), \quad \text{avec } v_p = h^2 \quad (335)$$

solution de

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\omega^h + (u^h \cdot \nabla)\omega^h - \nu\Delta_\varepsilon^J \omega^h &= 0 \\ u^h &= \mathcal{L}^h(\omega^h) \\ \omega^h(\cdot, 0) &= \omega_0^h = \sum_p v_p \omega_0(x_p) \delta(x - x_p)\end{aligned}\quad (336)$$

ou de manière équivalente, elle consiste à chercher des fonctions

$t \rightarrow \{x_p^h(t), \omega_p^h(t)\}$ dans $[0, T]$ vérifiant le système différentiel suivant:

$$\frac{d}{dt}x_p^h(t) = \mathcal{L}^h(\omega_p^h(t), x_p^h(t)) = I(\text{curl}_\varepsilon(-\Delta_\varepsilon^{-1}(A\omega_p^h(t))))(x_p^h), \quad x_p^h(0) = x_p \quad (337)$$

$$\frac{d}{dt}\omega_p^h(t) = \nu \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \Delta_\varepsilon^J(A\omega_p^h(t))\varphi_j(x_p^h(t)), \quad \omega_p^h(0) = \omega_0(x_p) \quad (338)$$

avec

$$J_j(t) = \sum_p v_p \omega_p^h(t) \varphi_j(x_p^h(t)) \quad (339)$$

$$\omega_j(t) = A\omega_p^h(t) = \frac{1}{J_j(t)} \sum_p v_p \omega_p^h(t) \varphi_j(x_p^h(t)) \quad (340)$$

$$\Delta_\varepsilon^J f_j = \frac{\varepsilon^2}{J_j(t)} \Delta_\varepsilon f_j = \frac{1}{J_j(t)} \delta^2 f_j \quad (341)$$

où on remarque que le traitement de la vitesse reste le même que dans le cas non visqueux: la vitesse est calculée par l'intermédiaire de la résolution du problème de Neumann pour l'équation de Poisson pour la fonction de courant sur la grille. L'idée clé de cette méthode est la suivante:

- la connaissance du tourbillon sur la grille va être utilisée pour calculer le terme de diffusion;
- l'effet de diffusion ne modifie que le poids de particules sans agir sur leur position; tandis que l'on néglige les effets de viscosité ($\nu = 0$), cette méthode V.I.C. est exactement celle décrite au chapitre 2 pour la résolution numérique des équations d'Euler.

Par rapport au schéma VIC avec splitting illustré dans le chapitre 9, le diagramme de la méthode VIC sans splitting est le suivant:

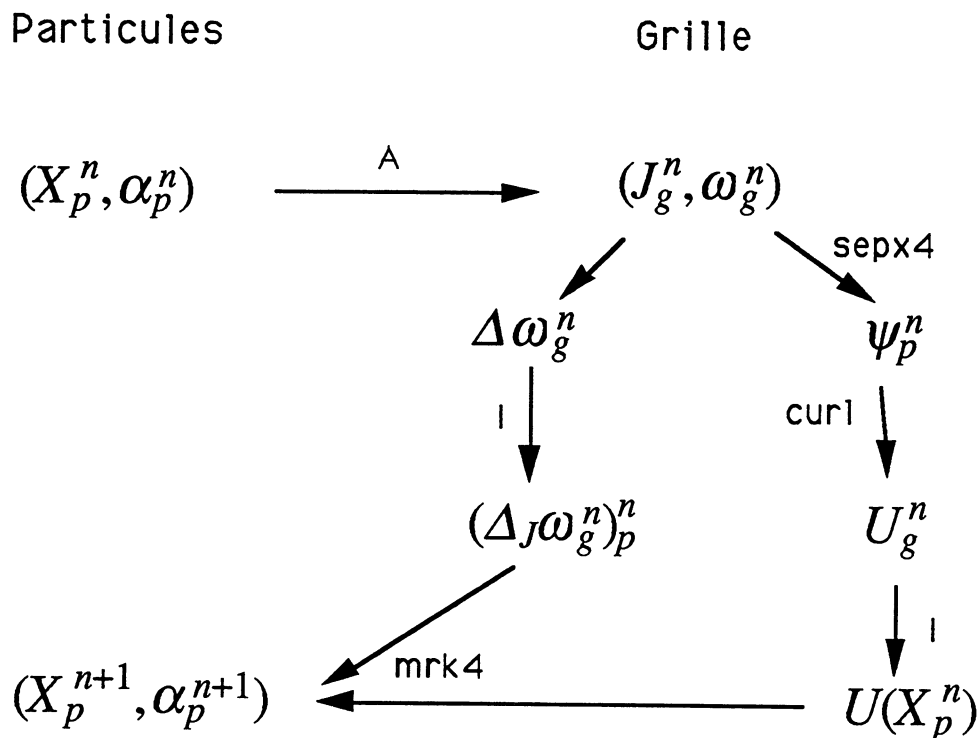


FIGURE 10.1 Schéma VIC sans splitting pour les équations de NS

Pour l'analyse numérique de cette méthode, on considère d'abord le cas linéaire: l'équation modèle de "convection-diffusion" suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega + (a \cdot \nabla) \omega - \nu \Delta \omega &= 0 \\ \nabla \cdot a &= 0 \\ \omega(\cdot, 0) &= \omega_0 \end{aligned} \quad (342)$$

et l'approximation correspondante est donc la suivante:

$$\frac{d}{dt} x_p(t) = a(x_p(t), t), \quad x_p(0) = x_p \quad (343)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_p^h(t) = \nu \sum_j \Delta_\varepsilon^J \omega_j(t) \varphi_j(x_p(t)), \quad \omega_p^h(0) = \omega_0(x_p) \quad (344)$$

On commence par vérifier le Lemme suivant:

LEMME 10.1 *La méthode de couplage particules-grille a les propriétés suivantes:*

(i) *(propriété de conservation entre passage particules-grille)*

$$\sum_j J_j(t) \omega_j(t) = \sum_p v_p \omega_p^h(t)$$

(ii) *(propriété de conservation)*

$$\sum_p v_p \omega_p^h(t) = \sum_p v_p \omega_p^h(0)$$

(iii) *(propriété de stabilité)*

$$\sum_p v_p |\omega_p^h(t)|^2 \leq \sum_p v_p |\omega_p^h(0)|^2$$

Démonstration. En effet, la première assertion est évidente selon la définition (340). En faisant la somme de (344), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_p v_p \omega_p^h(t) &= \nu \sum_j \left(\sum_p v_p \varphi_j(x_p(t)) \right) \Delta_\varepsilon^J \omega_j(t) \\ &= \nu \sum_j J_j(t) \frac{\varepsilon^2}{J_j(t)} \Delta_\varepsilon \omega_j(t) = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on fait à nouveau la somme de (344) en multipliant $2\nu\omega_p^h(t)$ et on trouve finalement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_p v_p |\omega_p^h(t)|^2 &= 2\nu \sum_j \left(\sum_p v_p \omega_p^h \varphi_j(x_p(t)) \right) \Delta_\varepsilon^J \omega_j(t) \\ &= 2\nu \sum_j \omega_j(t) \delta^2 \omega_j(t) = -2\nu \sum_j (\delta \omega_j)^2 \leq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Passons à l'étude de la convergence de cette méthode. En posant

$$\begin{aligned} e_p^h(t) &= \omega(x_p(t), t) - \omega_p^h(t), \quad e_p^h(0) = 0 \\ \bar{e}(t) &= (e_p^h(t))_{p \in P} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_p^h(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \omega(x_p(t), t) + (a \cdot \nabla) \omega(x_p(t), t) - \frac{d}{dt} \omega_p^h(t) \\ &= \nu \left\{ \Delta \omega(x_p(t), t) - \sum_j \Delta_\varepsilon^J \omega_j(t) \varphi_j(x_p(t)) \right\} \equiv \nu \psi_p^h(x_p(t), t) \quad (345) \end{aligned}$$

On peut diviser l'erreur de consistance de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \psi_p^h(x_p(t), t) &= \Delta \omega(x_p(t), t) - \sum_j (\Delta \omega)(x_j) \varphi_j(x_p(t)) \\ &\quad + \sum_j ((\Delta \omega)(x_j) - \Delta_\varepsilon \omega(x_j)) \varphi_j(x_p(t)) \\ &\quad + \sum_j J_j^{-1}(t) (J_j(t) - \varepsilon^2) \Delta_\varepsilon \omega(x_j) \varphi_j(x_p(t)) \\ &\quad + \sum_j J_j^{-1}(t) \delta^2 (\omega(x_j, t) - \omega_j(t)) \varphi_j(x_p(t)) \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 4.8, on a directement

$$\begin{aligned} \left| \Delta \omega(x_p(t), t) - \sum_j (\Delta \omega)(x_j) \varphi_j(x_p(t)) \right| &\leq \|\Delta \omega - \Pi_\varepsilon \Delta \omega\|_{0,\infty} \leq c_I \varepsilon^2 \\ \left| \sum_j ((\Delta \omega)(x_j) - \Delta_\varepsilon \omega(x_j)) \varphi_j(x_p(t)) \right| &\leq \sum_j |(\Delta - \Delta_\varepsilon) \omega(x_j)| \varphi_j(x_p(t)) \\ &\leq c_D \varepsilon^2 \sum_j \varphi_j(x_p(t)) = c_D \varepsilon^2 \\ \left| \sum_j J_j^{-1}(t) (J_j(t) - \varepsilon^2) \Delta_\varepsilon \omega(x_j) \varphi_j(x_p(t)) \right| &\leq \max_j J_j^{-1}(t) \|\omega\|_{2,\infty} \max_{j_-} |J_j(t) - \varepsilon^2| \sum_j \varphi_j(x_p(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq c_J \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+2} \\
 \left| \sum_j J_j^{-1}(t) \delta^2(\omega(x_j, t) - \omega_j(t)) \varphi_j(x_p(t)) \right| & \leq 5 \max_j J_j^{-1}(t) \max_j |\omega(x_j, t) - \omega_j(t)| \sum_j \varphi_j(x_p(t)) \\
 & \leq C_A \varepsilon^{-2} \left(\varepsilon^r + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^{m+2} \right)
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$\nu \max_t \|\bar{\psi}(t)\|_\infty \leq C(T) \left\{ \nu \varepsilon^2 + \frac{\nu}{\varepsilon^2} (\varepsilon^r + (h/\varepsilon)^{m+2}) \right\} \quad (346)$$

En intégrant (345) de 0 à t , on obtient donc

$$\begin{aligned}
 \|\bar{e}(t)\|_\infty & \leq \|\bar{e}(0)\|_\infty + \nu \int_0^t \|\bar{\psi}(\tau)\|_\infty d\tau \\
 & \leq b(T) \left\{ \nu \varepsilon^2 + \frac{\nu}{\varepsilon^2} (\varepsilon^r + (h/\varepsilon)^{m+2}) \right\}
 \end{aligned}$$

On peut écrire comme d'habitude

$$\omega(\cdot, t) - \Pi_\varepsilon^h \omega(\cdot, t) = \omega(\cdot, t) - \Pi^h \omega(\cdot, t) + \Pi^h \omega(\cdot, t) - \Pi_\varepsilon^h \omega(\cdot, t) \quad (347)$$

de sorte qu'il s'agit essentiellement d'estimer

$$\Pi^h \omega(\cdot, t) - \Pi_\varepsilon^h \omega(\cdot, t) = \sum_p v_p e_p^h(t) \varphi_\varepsilon(x - x_p(t)) \quad (348)$$

On a besoin du Lemme démontré par **S. Mas-Gallic & P.A. Raviart** (1987) [52]

LEMME 10.2 *On suppose que la fonction cut-off φ est à support compact et satisfait $\int \varphi(x) dx = 1$ et que*

$$P = \mathbb{Z}^d, \quad v_p = h^d, \quad x_p = ph$$

Alors, l'application linéaire

$$\bar{f} = (f_p)_{p \in P} \longrightarrow f_\varepsilon^h(x, t) = \sum_{p \in P} v_p f_p(t) \varphi_\varepsilon(x - x_p(t)) \quad (349)$$

est continue de $\ell^\infty(P)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C(T) > 0$ telle que l'on ait pour toute suite $\bar{f} = (f_p)_{p \in P}$ bornée

$$\|f_\varepsilon^h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(T) \|\bar{f}\|_\infty.$$

D'après le Lemme ci-dessus, on trouve

$$\left| \sum_p v_p e_p^h(t) \varphi_\varepsilon(x - x_p(t)) \right|_{0,\infty} \leq C(T) \|\bar{e}(t)\|_\infty \quad (350)$$

$$\leq C^*(T) \left\{ \nu \varepsilon^2 + \frac{\nu}{\varepsilon^2} (\varepsilon^r + (h/\varepsilon)^{m+2}) \right\} \quad (351)$$

Il est maintenant possible d'énoncer un théorème de convergence

THÉORÈME 10.1 *Sous les hypothèses du Lemme 4.8 et Lemme 10.2, si l'on suppose*

$$\nu = c_0 \varepsilon^2$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$\|\omega(\cdot, t) - \omega_\varepsilon^h\|_{0,\infty} \leq C \left\{ \nu \varepsilon^2 + \varepsilon^r + (h/\varepsilon)^{m+2} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

■

10.2 Simulation des écoulements turbulents

Maintenant, on applique la méthode de couplage particules-grille à la simulation numérique directe des écoulements turbulents bidimensionnels périodiques pour étudier l'évolution des structures cohérentes.

10.2.1 Introduction

Les équations de *Navier-Stokes*, écrites la première fois il y a presque cent ans, gouvernent les écoulements incompressibles newtoniens. Ces équations sont particulièrement difficiles à intégrer pour les nombres de *Reynolds* des applications pratiques (supérieurs à 10^5) à cause du phénomène de couche limite et de turbulence.

Le mot *turbulence* indique généralement le comportement chaotique d'un fluide. Loin d'être un phénomène exceptionnel, les écoulements turbulents gouvernent le comportement de fluides se produits dans la nature. Il peut être aisément observé que les fluides tendent fréquemment vers un comportement chaotique plutôt qu'un comportement régulier.

Lorsque le champ de vitesse n'est plus régulier, le fluide peut s'écouler de manière très compliquée et souvent imprédictible, dépendant du temps et de la largeur de l'échelle. L'hypothèse essentielle de la théorie de *Kolmogorov* est que dans un écoulement turbulent il y a un équilibre d'approximation de l'énergie transférée des grandes échelles vers les petites échelles.

H.O. Kreiss, W.D. Henshaw & L.G. Reyna(1991) [46] discutent des résultats analytiques et numériques ayant rapport à la plus petite échelle des équations incompressibles de *Navier-Stokes*. La plus petite échelle, λ_{min} , caractérise le plus petit tourbillon. Ils ont préalablement montré que la plus petite échelle est proportionnelle à la racine carrée de la viscosité divisée par le tourbillon maximale: $\left(\frac{\nu}{\|\omega\|_{\infty}}\right)^{1/2}$ et cherché à comprendre comment le résultat de la plus petite échelle se rapporte (lie) au comportement de la loi de puissance du spectre d'énergie. Ils ont fait des calculs numériques par une méthode pseudo-spectrale, puis ont essayé sans succès de reproduire des résultats analogues par les méthodes de vortex(par marche

aléatoire, puis par une méthode de vortex pour les équations d'Euler, en supposant que la diffusion numérique produite par la régularisation puisse simuler la diffusion physique).

On considère la solution des équations de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnelles sous la formulation de fonction de *courant-tourbillon*:

$$\xi_t + (u\xi)_x + (v\xi)_y = \nu\Delta\xi + f \quad (352)$$

$$\Delta\psi = -\xi \quad (353)$$

$$(u, v) = (\psi_y, -\psi_x) \quad (354)$$

dans un domaine carré, de période 2π , avec certaines conditions initiales à $t = 0$. La méthode pseudo-spectrale principalement utilisée pour des problèmes munis de conditions aux limites périodiques (voir **D. Gottlieb & S.A. Orszag** (1977) [40]) consiste à approcher en espace une solution $\xi(x, y, t)$ par un polynôme de Fourier de la forme:

$$\omega(x, y, t) = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2-1} \sum_{k_2=-N_2/2}^{N_2/2-1} \hat{\omega}(k_1, k_2, t) e^{i(k_1 x + k_2 y)}, \quad k = (k_1, k_2) \quad (355)$$

dont le coefficient de Fourier $\hat{\omega}(k_1, k_2, t)$ est solution du système d'équations différentielles ordinaires suivant:

$$\hat{\omega}_t + ik_1(u\hat{\omega}) + ik_2(v\hat{\omega}) = -\nu(k_1^2 + k_2^2)\hat{\omega} \quad (356)$$

$$(k_1^2 + k_2^2)\hat{\psi} = \hat{\omega} \quad (357)$$

Le système précédent peut être résolu en temps à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Le taux de décroissance des coefficients de Fourier $\hat{\omega}(k, t)$ en fonction de $k = |k|$ est directement lié à la régularité de la solution. On définit la plus petite échelle comme l'échelle de longueur λ_{min} telle que le spectre $|\hat{\omega}(k)|$ est exponentiellement petit pour tous les nombres d'ondes avec $k = |k| > 1/\lambda_{min}$.

On applique ici la méthode couplée particules-grille sans splitting, décrite dans le paragraphe précédent, à la simulation numérique directe des phénomènes de turbulence.

10.2.2 Décroissance de données initiales aléatoires

On considère l'évolution en temps des équations de Navier-Stokes pour des données initiales aléatoires. Les conditions initiales pour le tourbillon sont choisies telles que

$$|\hat{\omega}(k_1, k_2)| = \frac{C}{k + (\sqrt{\nu}k)^5}, \quad k = |(k_1, k_2)|, \quad (358)$$

avec une phase aléatoire dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. (Actuellement le spectre initial est mis à zéro pour tous les nombres d'ondes supérieurs à une certaine valeur de k). La constante C est déterminée en normalisant la valeur maximale du tourbillon à 1 au temps $t = 0$: $|\omega(\cdot, 0)|_\infty = 1$. On utilise ici la transformée de Fourier discrète et rapide en bidimension (voir l'**Appendice A**). La valeur de la viscosité est $\nu = 10^{-5}$ et le nombre de mode de Fourier est $N = N_1 = N_2 = 128$. Le nombre de points de grille est $m^2 = N^2$ et le nombre de particules mis est $N_{part} = n_p^2$, où $n_p = 128, 150$ et 180 . En général, on s'intéresse à la solution pour de grands temps et l'intervalle en temps étudié est $t \in [0, T]$, où $T = 100$, et le pas de temps de calcul est $dt = 0.1$. On présente finalement

- 1) graphiques de circulation, impulsion totale, l'énergie totale et l'enstrophie, comme fonction du temps dans la Figure 10.2, on trace:

$$\text{circulation totale} \quad \Gamma(t) = \int \omega dx \quad (359)$$

$$\text{impulsion totale} \quad A_e(t) = \frac{\int |x|^2 \omega dx}{\int \omega dx} \quad (360)$$

$$\text{énergie totale} \quad E(t) = \left\{ 1/2 (\|u\|^2 + \|v\|^2) \right\}^{1/2} \quad (361)$$

$$\text{enstrophie totale} \quad \|\omega(\cdot, t)\| = \left(\int |\omega(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \quad (362)$$

On constate en particulier que la courbe d'enstrophie décroît exponentiellement. En effet, la pente donnant le taux de dissipation est importante au début, puis devient plus faible au fur à mesure que les petites structures disparaissent.

- 2) graphique de la décroissance spectrale du tourbillon en fonction de k . Dans la Figure 10.3-a, on représente la courbe logarithmique de $\hat{\omega}(k)$ par rapport à k . La quantité $\hat{\omega}(k)$ ($k = 1, 2, \dots$) est définie comme la valeur moyenne de

$|\hat{\omega}(l_1, l_2)|$ sur tous les vecteurs d'onde (l_1, l_2) pour lesquels k est l'entier le plus proche de $l = |(l_1, l_2)|$ (la portée inertielle):

$$\hat{\omega}(k) = \left(\sum_{|l-k| < 1/2} |\hat{\omega}(l_1, l_2)| \right) / \left(\sum_{|l-k| < 1/2} 1 \right) \quad (363)$$

On trace $\log_{10}(\hat{\omega}(k)) - \log_{10}(k)$ pour des temps différents (tous les 10). On remarque que si $\hat{\omega}(k) \approx k^{-\alpha}$, alors $E(k) \approx k^{-2\alpha-1}$, où $\alpha = 1$ dans notre cas.

- 3) graphiques des lignes d'iso-tourbillon (Figures 10.3-10.5). Les lignes pointillées indiquent les valeurs négatives d'iso-tourbillons. On constate que les structures turbulentes sont au début de tailles très variables et constamment évolutives. Les écoulements turbulents peuvent souvent être considérés comme la superposition d'une translation moyenne et de mouvements de rotation locale d'échelles de tailles très variables. L'écoulement développe vite des couches de cisaillement fort qui s'enroulent en produisant un grand nombre de petites vorticités. Les petites vorticités se heurtent les unes contre les autres en produisant des tourbillons de plus en plus grands. L'écoulement change rapidement ses structures jusqu'à deux gros tourbillons (deux zones forte tourbillonnelles) à direction opposée. Ce scénario est bien de la turbulence bidimensionnelle évoluant librement dans un domaine périodique.
- 4) graphiques de la surface spectrale de $\hat{\omega}(k_1, k_2)$ sous la représentation cosinus-sinus. Les modes des plus basses fréquences sont situés en haut du graphique de la surface (voir les Figures 10.6-10.8). Seuls les 64 premiers modes sont montrés dans le graphique de la surface. On constate qu'elle se dégrade très vite et puis ne semble quasiment plus changer au bout d'un certain temps.

Lorsque l'on poursuit l'augmentation du nombre de particules: $N_{part} = n_p^2$, où $n_p = 128, 150, 180$ et 256 , on observe qu'il n'y a pas de changement visible chez les iso-tourbillons; par contre, la courbe de circulation présente moins d'oscillations (voir la Figure 10.9). Cela montre que la méthode VIC converge de façon satisfaisante pour ce cas test difficile.

Lorsque l'on fait la même simulation en ajoutant la technique itérative de calcul de volume affecté au point de grille, la seule différence perceptible par rapport aux

résultats sans itération est dans le graphique de la circulation (voir la Figure 10.10). Il ne semble pas que les itérations modifient les lignes d'iso-tourbillons ni la courbe d'ensrophie.

Enfin, on doit signaler que la simulation numérique sans calcul de volume donne des images des lignes d'iso-tourbillons de plus en plus floues lorsque le temps s'écoule (voir les Figures 10.11-10.12), ce qui montre l'instabilité numérique. Si l'on regarde où la valeur de J_j diffère de ϵ^2 , on trouve des zones limitées à des bandes qui correspondent aux zones de fort gradient de tourbillon. En effet, comme

$$\frac{d}{dt} \int |\omega|^2 dx = -2 \int |\nabla\omega|^2 dx$$

on peut observer que dans la région à fort gradient du tourbillon, la dissipation est importante (voir les Figures 10.13-10.14) et donc il faut bien résoudre la diffusion dans cette région, sans introduire d'instabilité numérique.

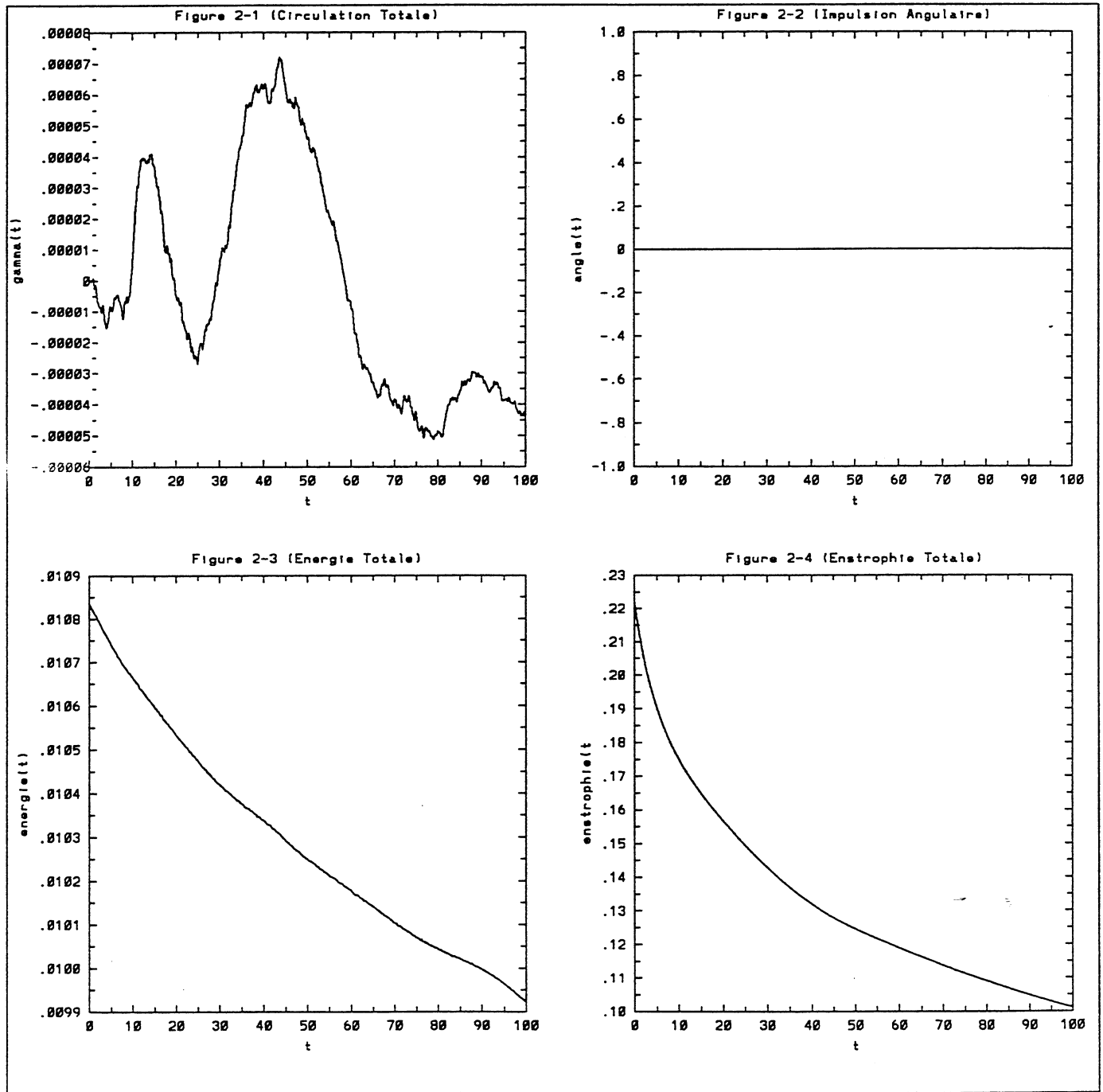


FIGURE 10.2 Résultats pour $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$

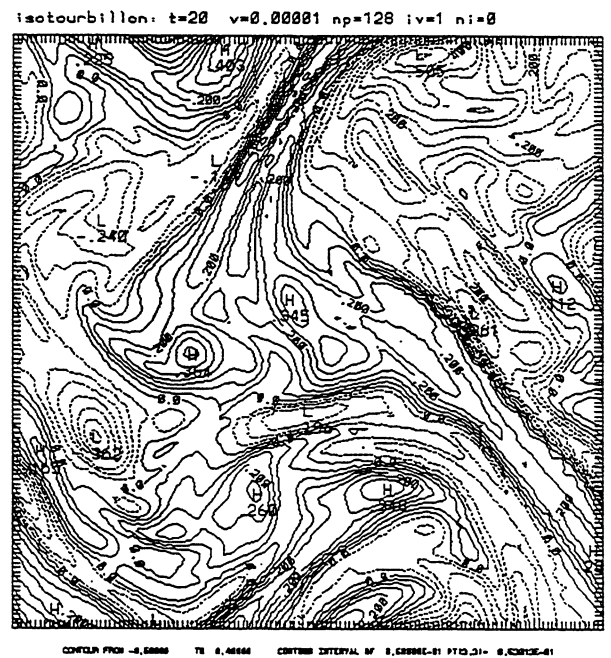
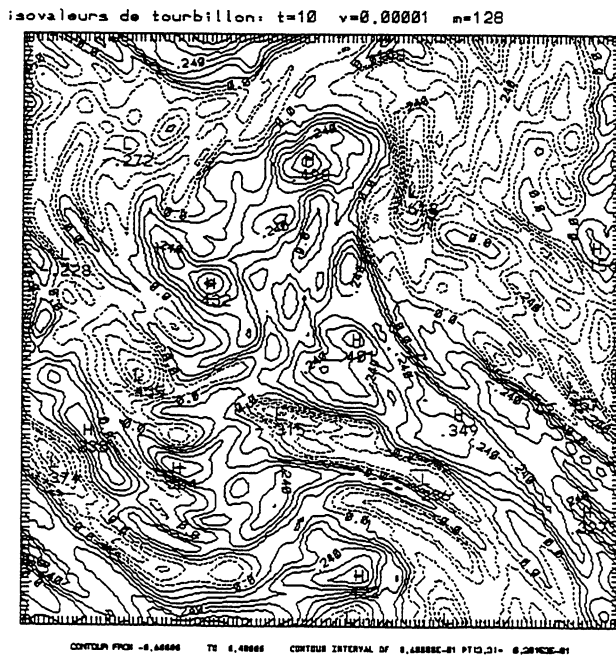
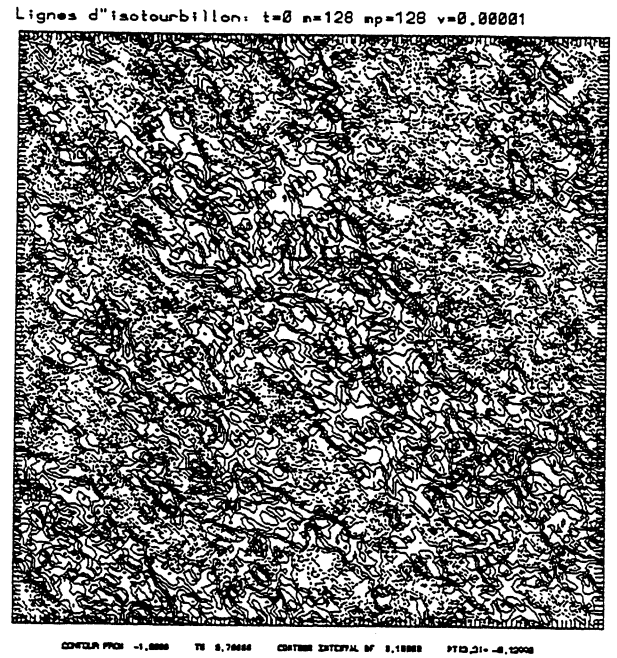
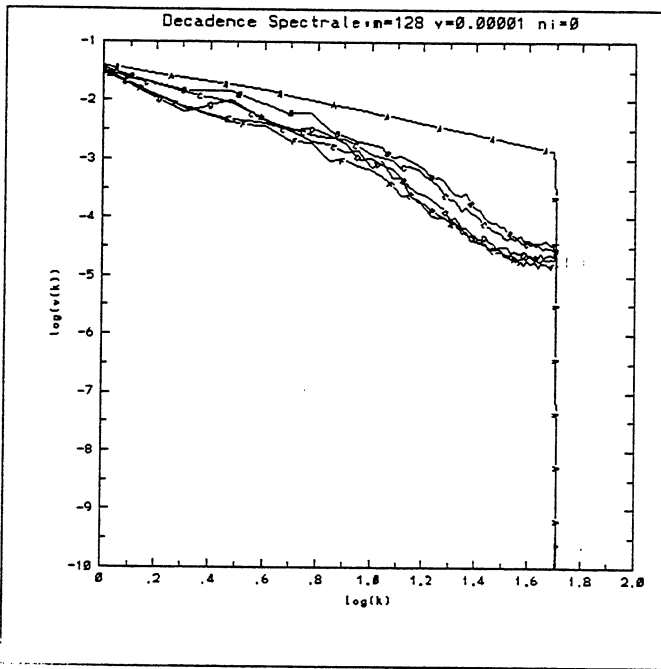
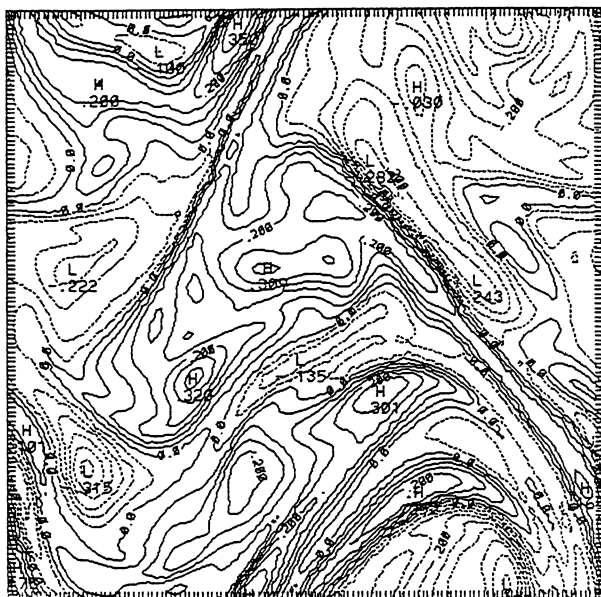


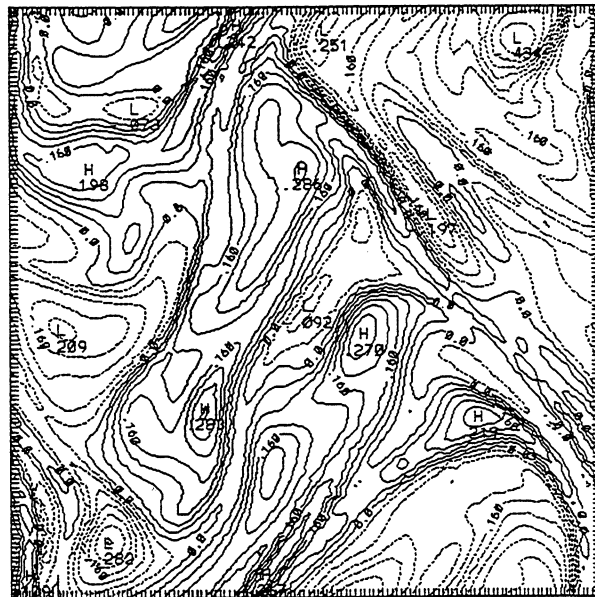
FIGURE 10.3 Lignes d'isotourbillon: $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$

isovaleurs de tourbillon: t=30 v=0.00001 n=128



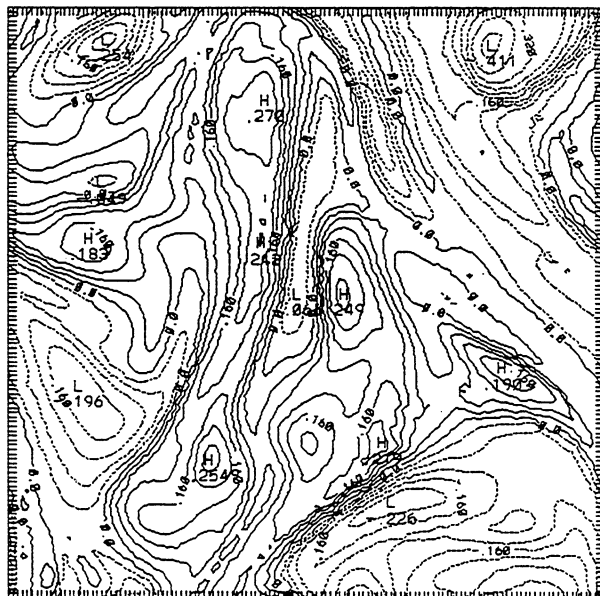
CONTOUR FROM -0.46866 TO 0.36866 CONTOUR INTERVAL OF 0.00866E-01 P110.31- 0.70310

isotourbillon: t=40 v=0.00001 np=128 iv=1 ni=0



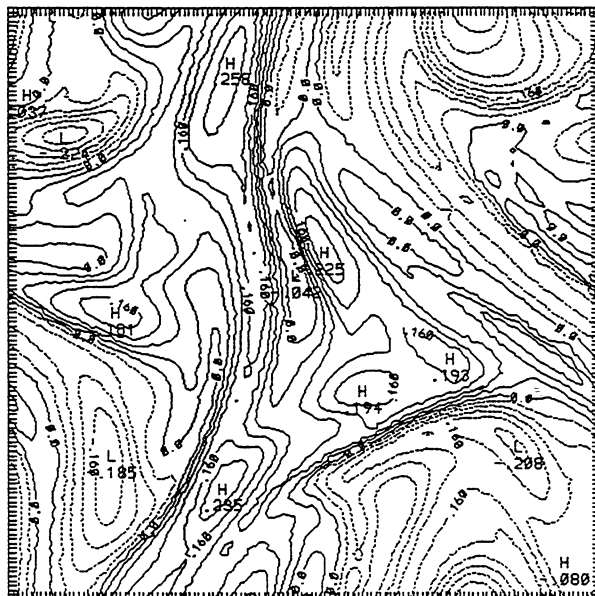
CONTOUR FROM -0.46866 TO 0.26866 CONTOUR INTERVAL OF 0.00866E-01 P110.31- 0.64466E-01

isovaleurs de tourbillon: t=50 v=0.00001 n=128



CONTOUR FROM -0.46866 TO 0.24866 CONTOUR INTERVAL OF 0.00866E-01 P110.31- -0.11446E-01

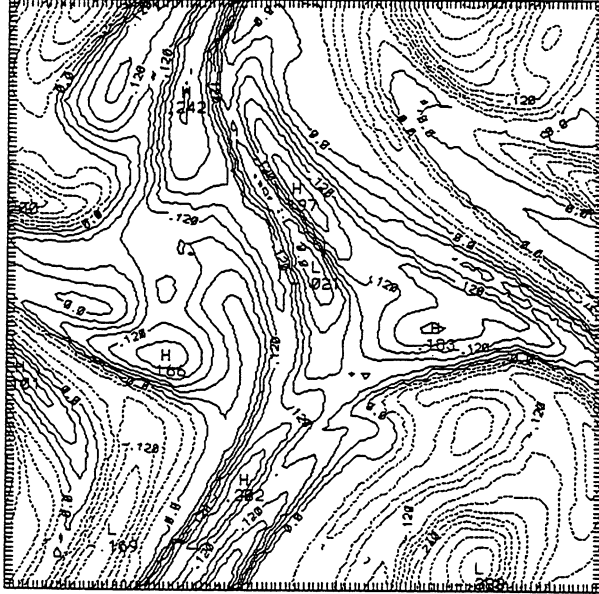
isotourbillon: t=60 v=0.00001 np=128 iv=1 ni=0



CONTOUR FROM -0.34866 TO 0.34866 CONTOUR INTERVAL OF 0.00866E-01 P110.31- -0.84466E-01

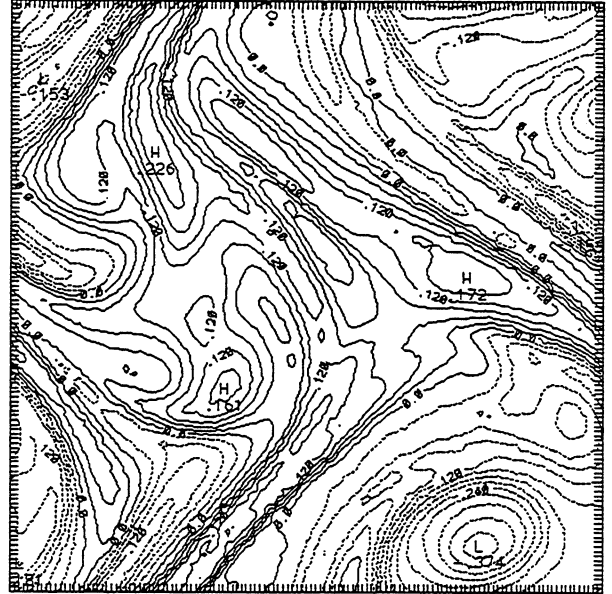
FIGURE 10.4 Lignes d'isotourbillon: $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$

isovaleurs de tourbillon: t=70 v=0.00001 n=128



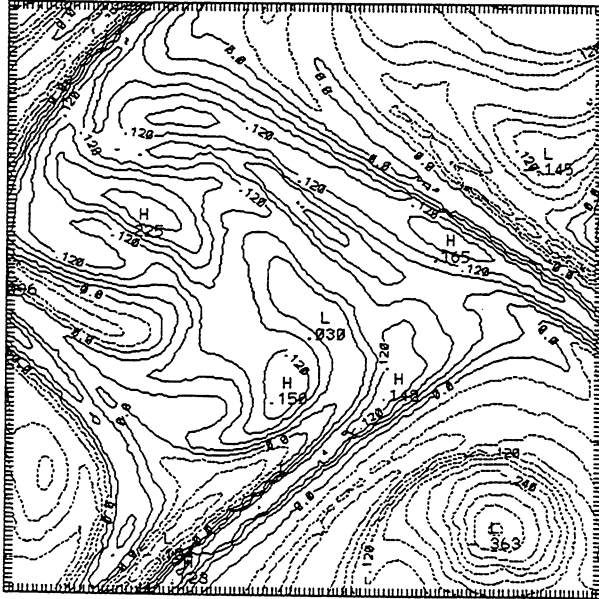
CONTOUR FROM -0.34688 TO 0.24688 CONTOUR INTERVAL OF 0.30000E-01 PTD,01-0.1400E-01

isotourbillon: t=80 v=0.00001 np=128 iv=1 ni=0



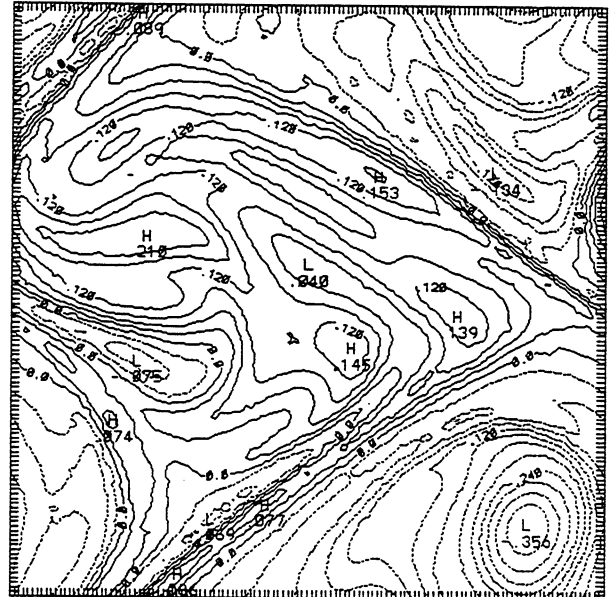
CONTOUR FROM -0.34688 TO 0.21868 CONTOUR INTERVAL OF 0.30000E-01 PTD,01-0.1400E-01

isovaleurs de tourbillon: t=90 v=0.00001 n=128



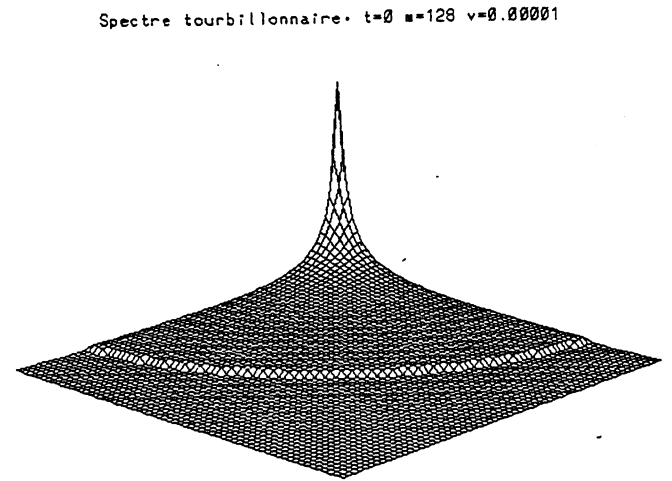
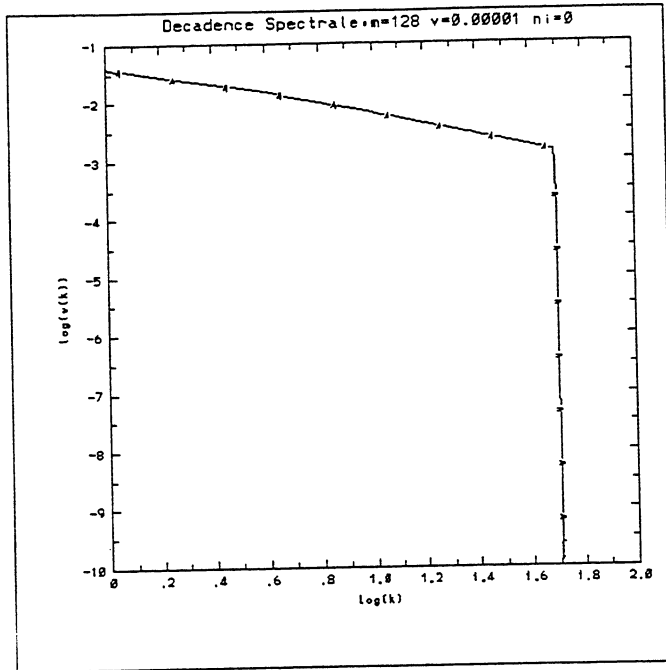
CONTOUR FROM -0.34688 TO 0.21868 CONTOUR INTERVAL OF 0.30000E-01 PTD,01-0.1400E-01

isotourbillon: t=100 v=0.00001 np=128 iv=1 ni=0

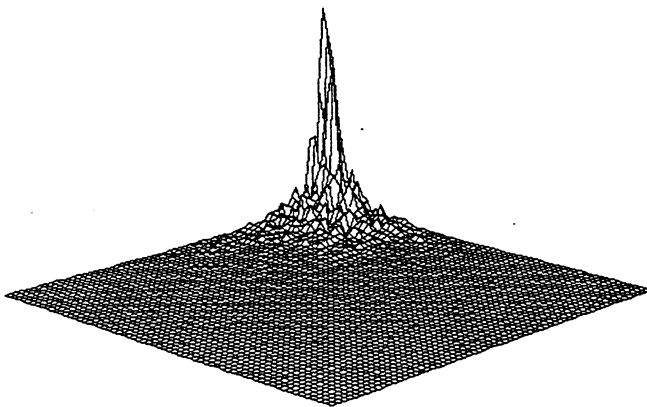


CONTOUR FROM -0.35888 TO 0.18868 CONTOUR INTERVAL OF 0.30000E-01 PTD,01-0.1400E-01

FIGURE 10.5 Lignes d'isotourbillon: $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$



Surface_Tourbillon_Spectral. t=0 v=0.00001 n=128



Spectre tourbillonnaire. t=20 v=0.00001 n=128

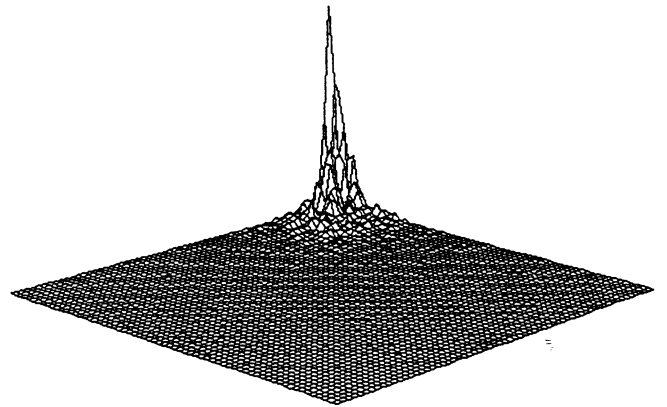


FIGURE 10.6 Surface du spectre tourbillonnelle: $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$

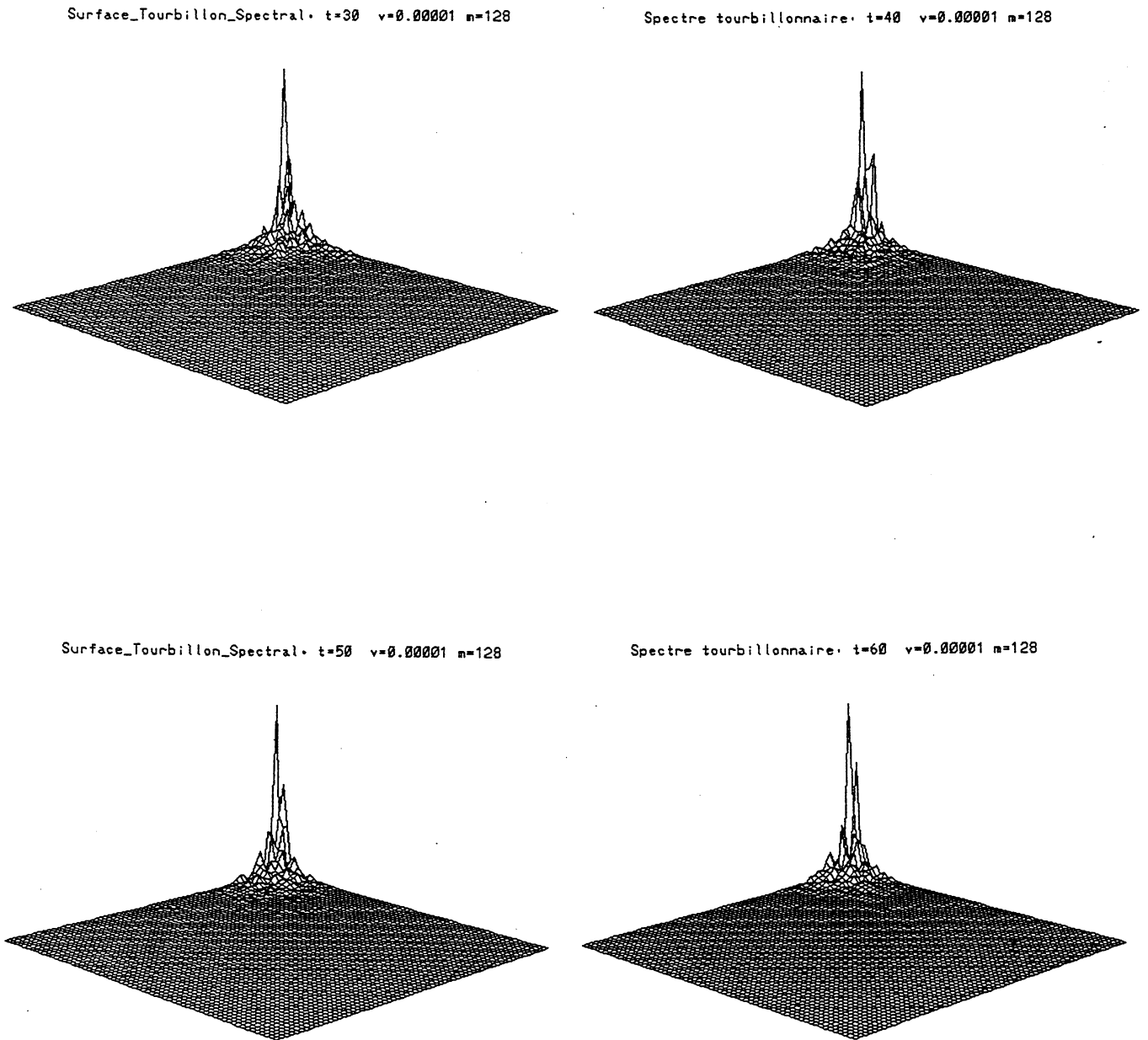
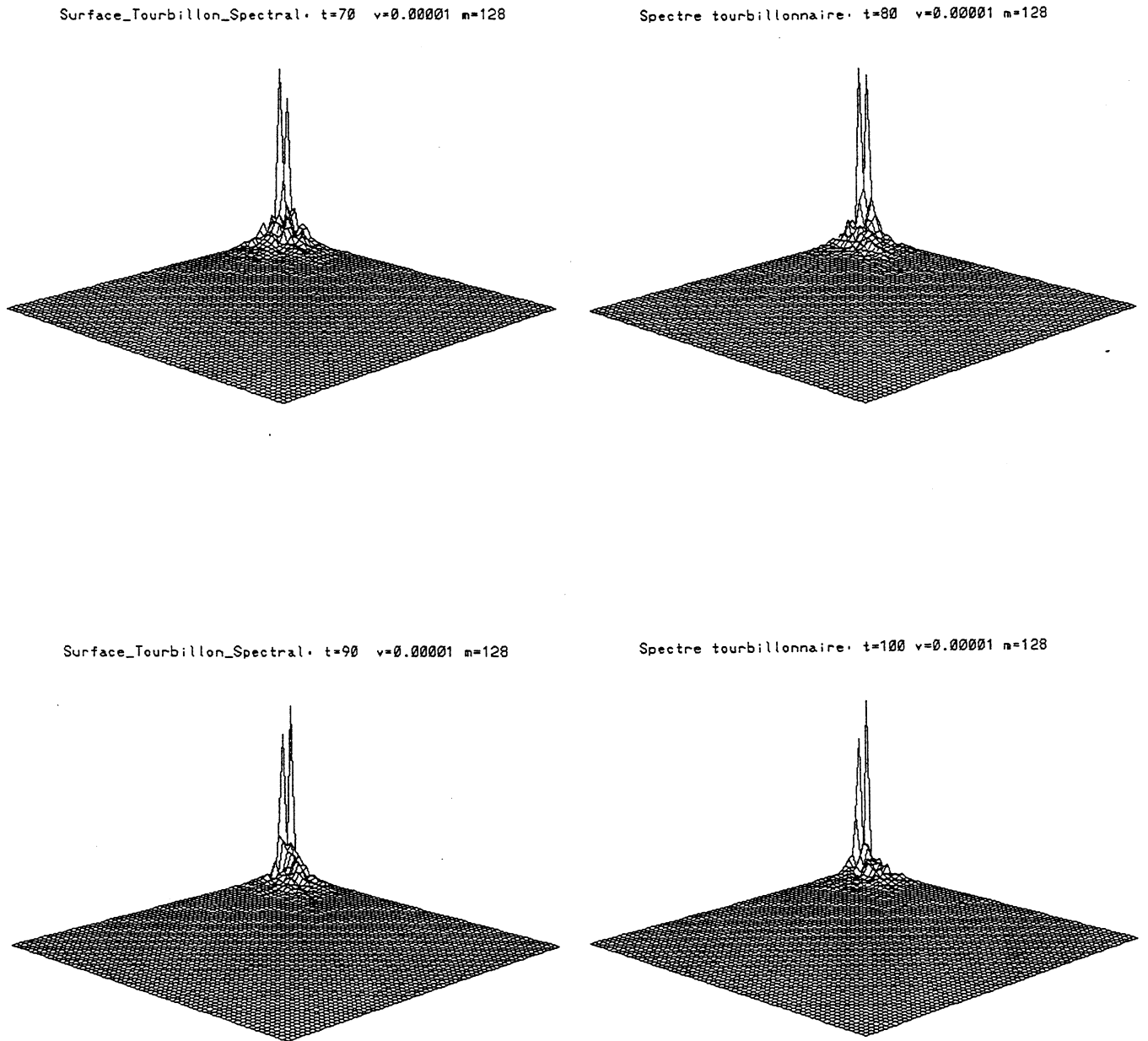


FIGURE 10.7 Surface du spectre tourbillonnelle: $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$

FIGURE 10.8 Surface du spectre tourbillonnel: $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$

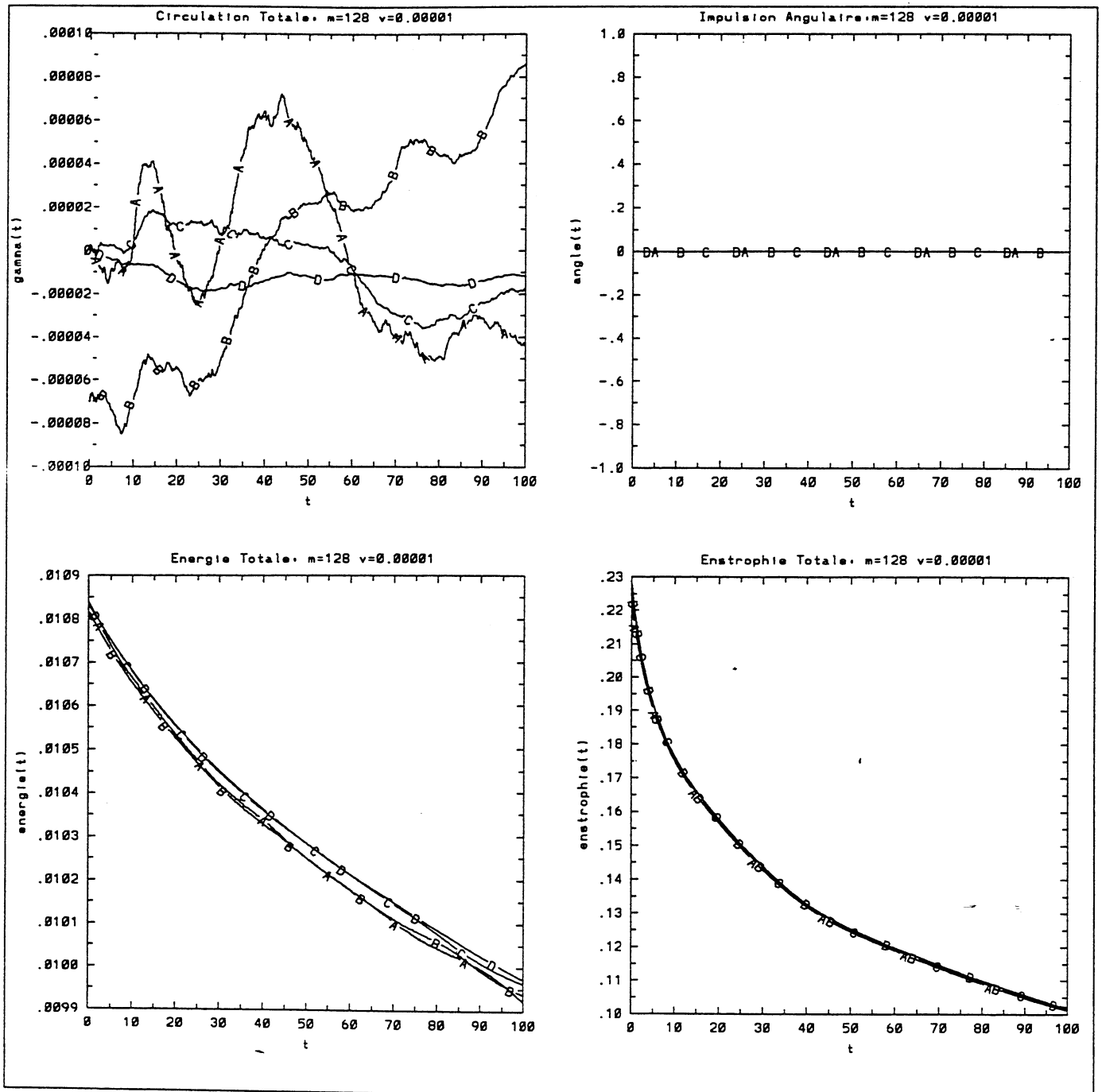


FIGURE 10.9 $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$, $n_i = 0$, $i_v = 1$
 $n_p = 128$ (A), $n_p = 150$ (B), $n_p = 180$ (C), $n_p = 256$ (D)

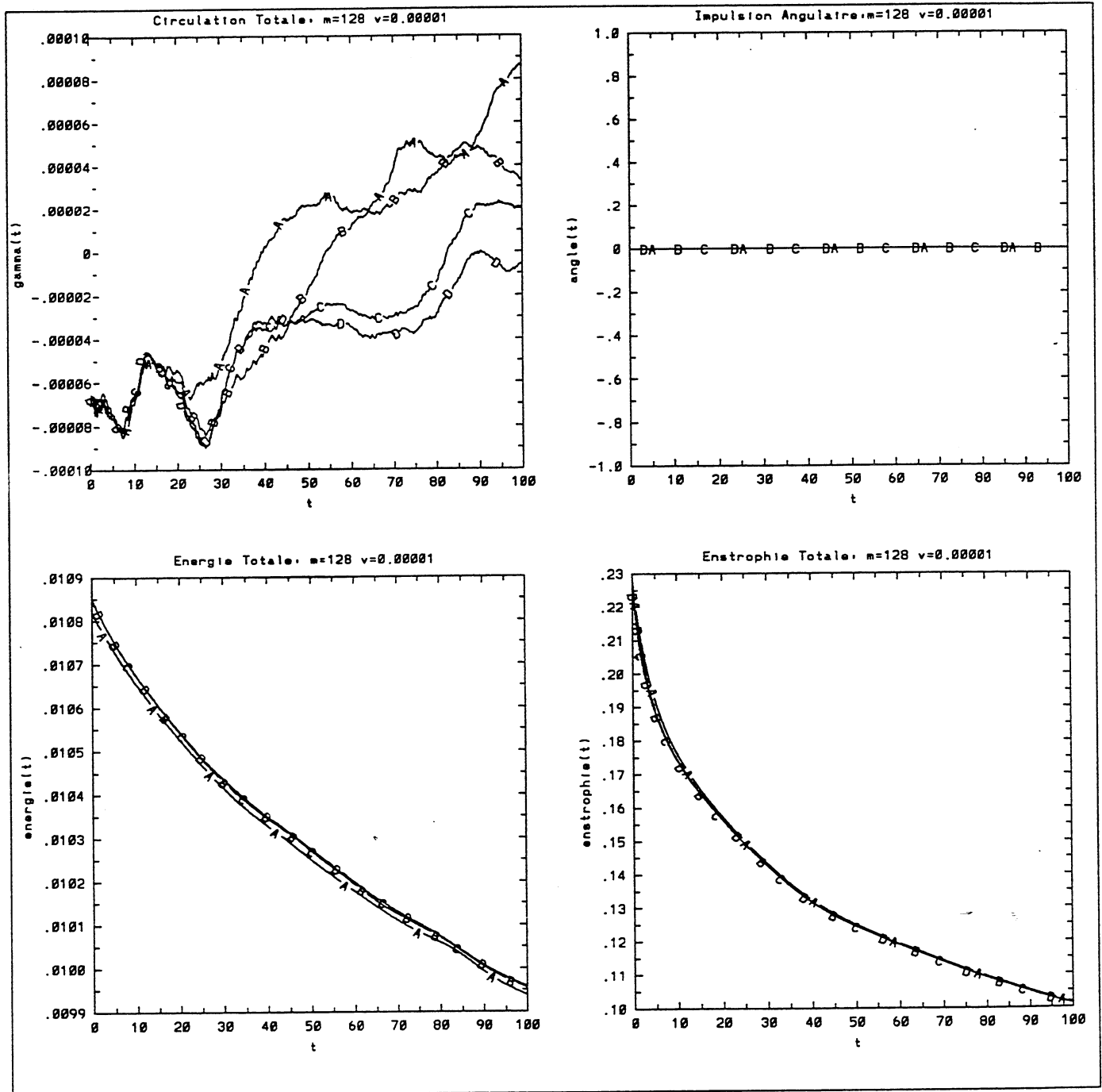


FIGURE 10.10 $\nu = 10^{-5}$. $N = 128$, $n_p = 150$, $iv = 1$
 $ni = 0(A)$, $ni = 1(B)$, $n = 2(C)$, $ni = 3(D)$

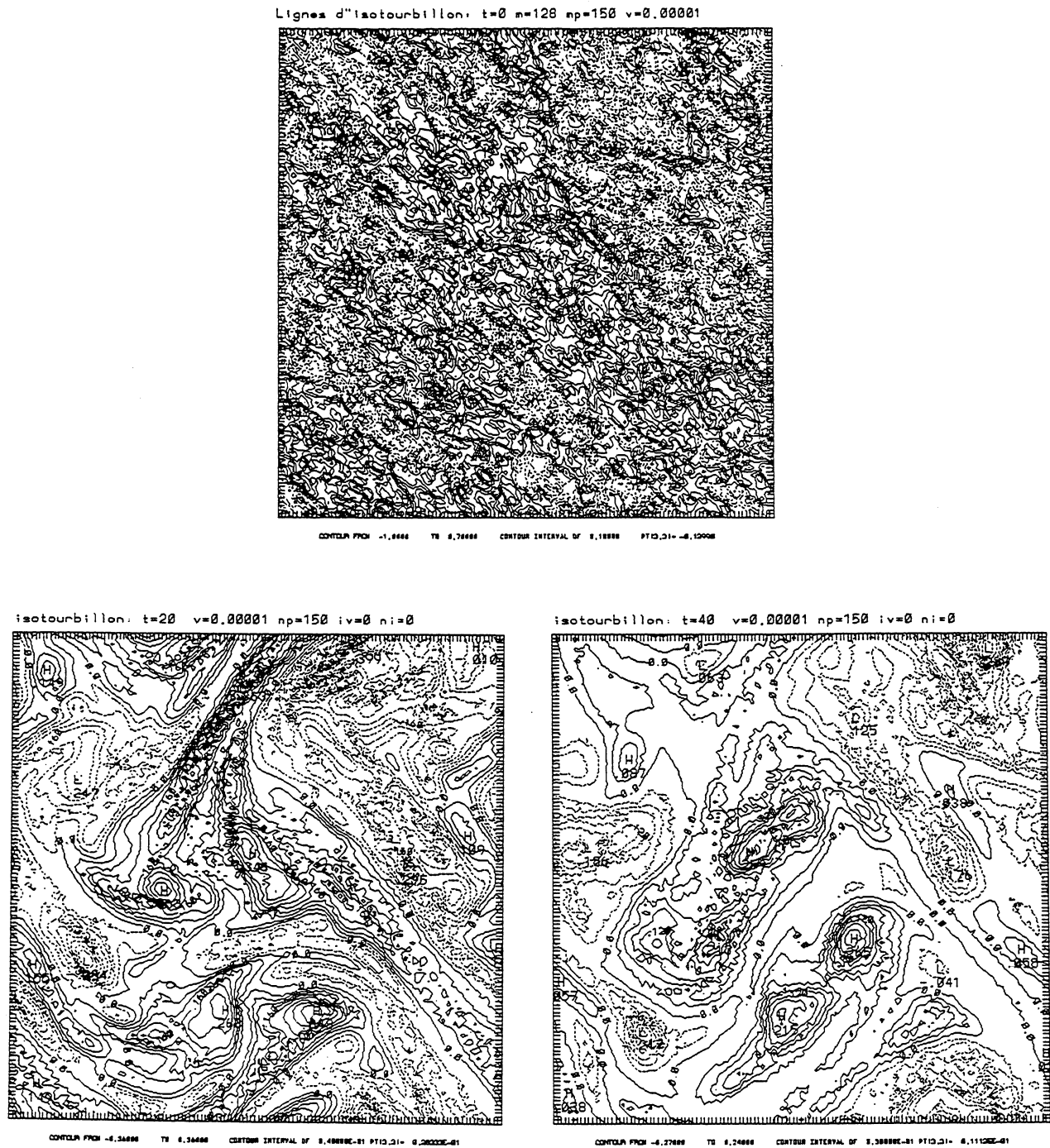


FIGURE 10.11 Lignes d'isotourbillon sans calcul de volume:
 $\nu = 10^{-5}$, $N = 128$, $n_p = 150$

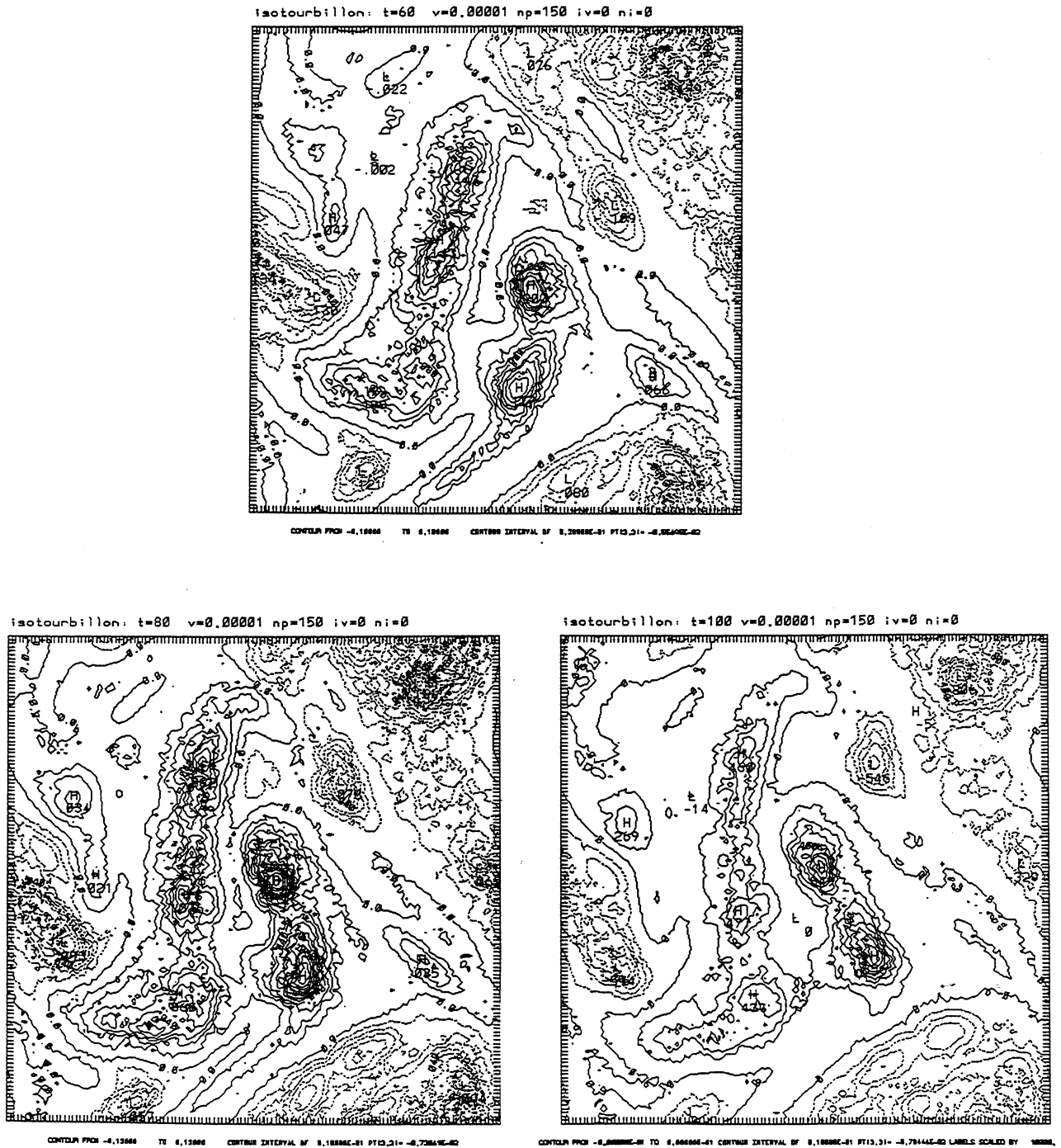


FIGURE 10.12 Lignes d'isotourbillon sans calcul de volume:

$$\nu = 10^{-5}, N = 128, n_p = 180$$

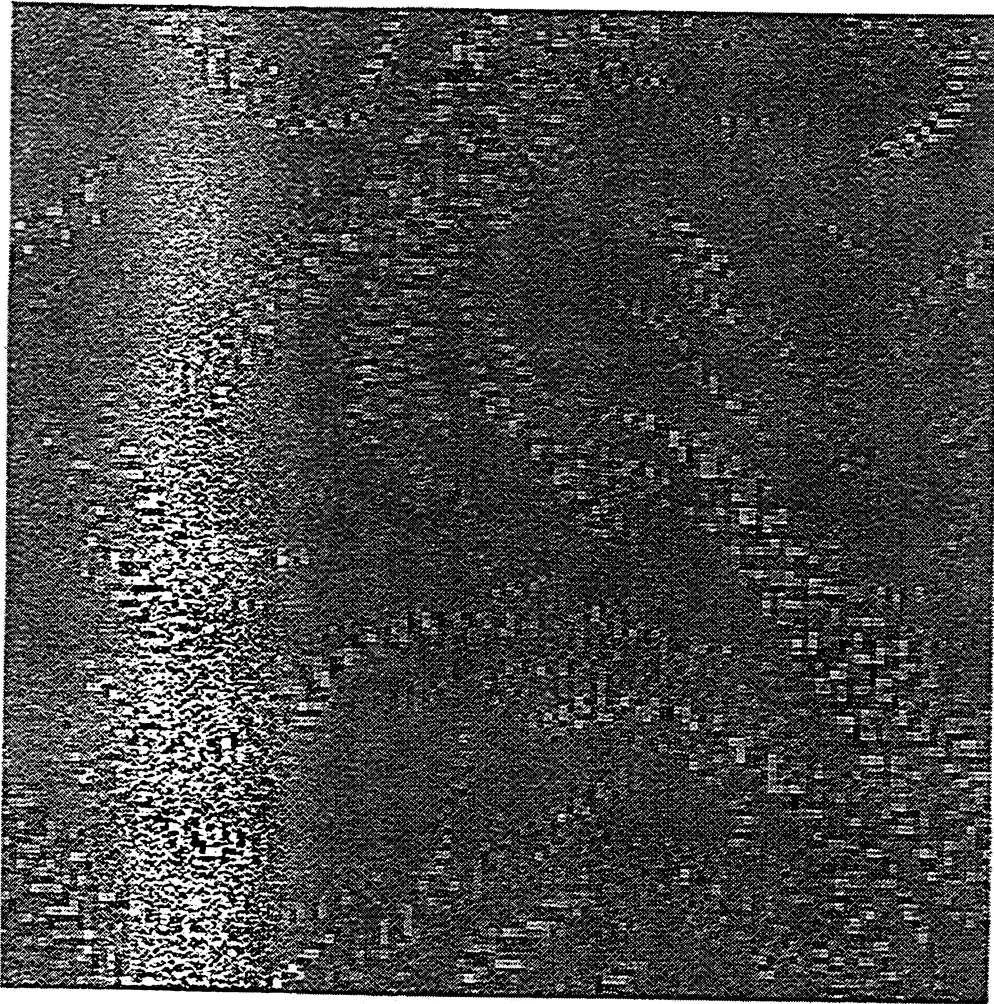


FIGURE 10.13 le volume représenté en niveaux de gris:

$$\nu = 10^{-5}, t = 20, N = 128, n_p = 150$$

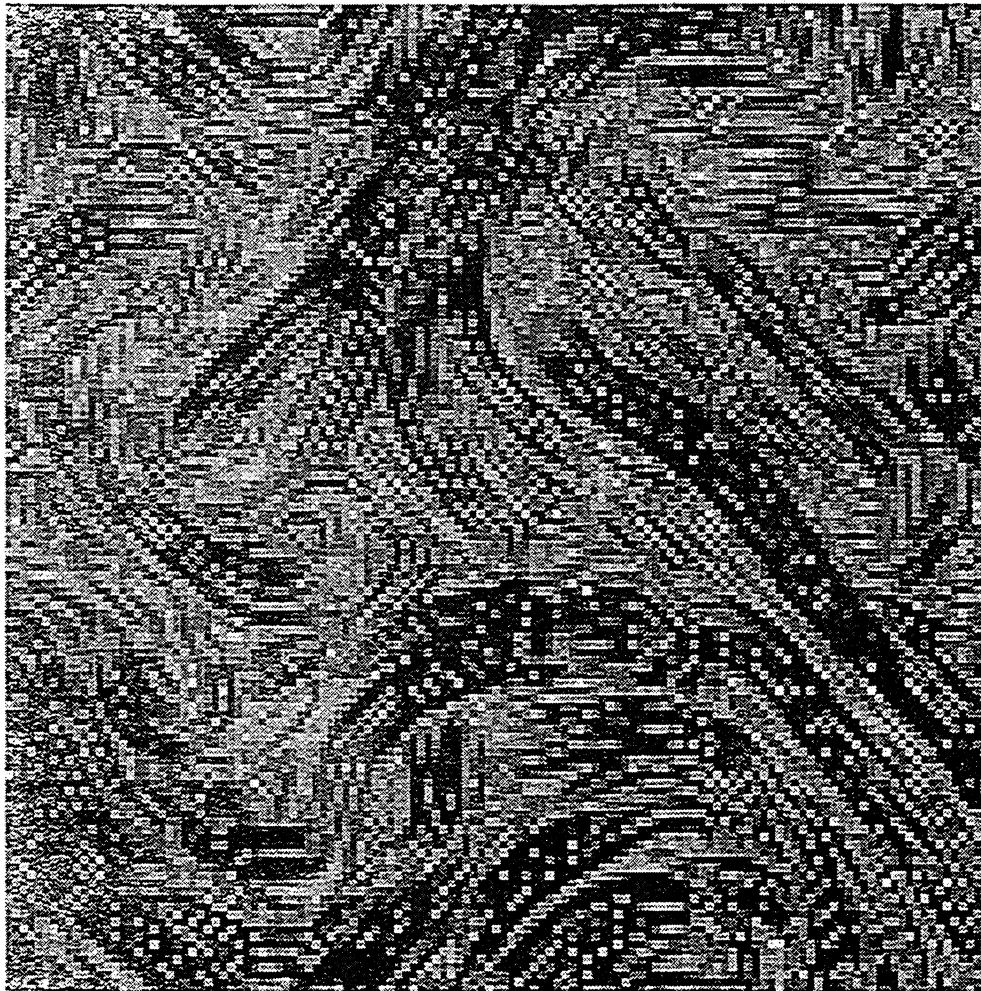
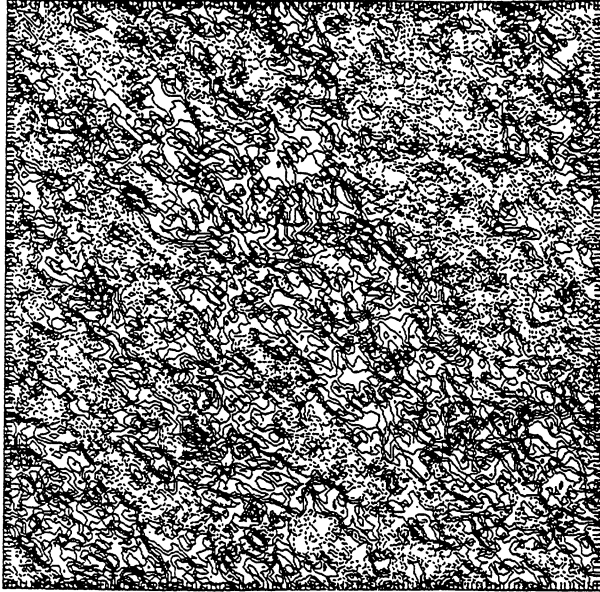
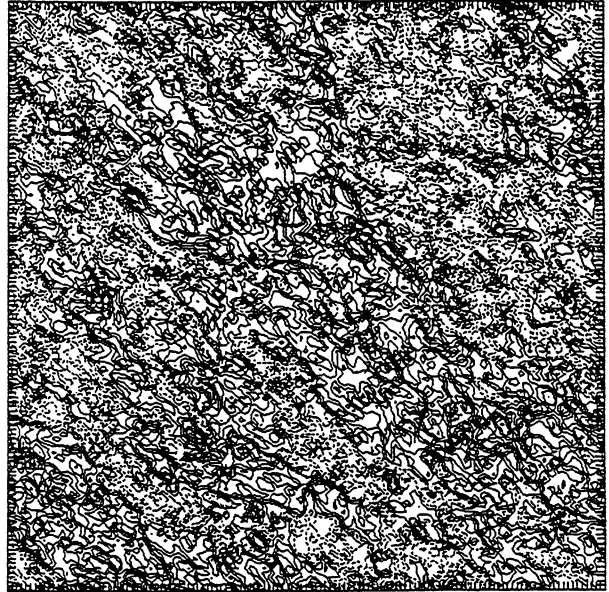


FIGURE 10.14 le gradient du tourbillon représenté en niveaux de gris:
 $\nu = 10^{-5}$, $t = 20$, $N = 128$, $n_p = 150$

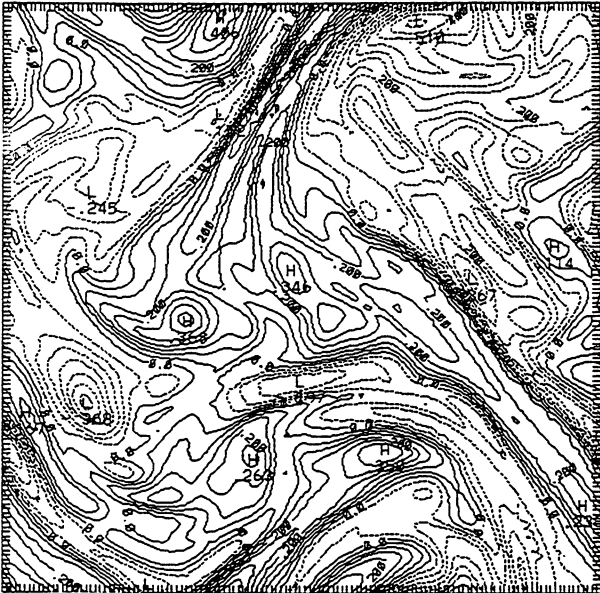
Lignes d'isotourbillon: $t=0$ $n=128$ $np=150$ $v=0.00001$



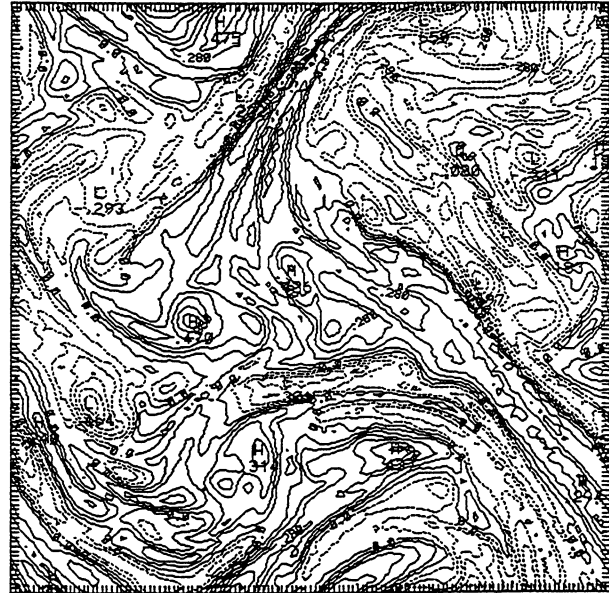
Lignes d'isotourbillon: $t=0$ $n=256$ $np=300$ $v=0.00001$



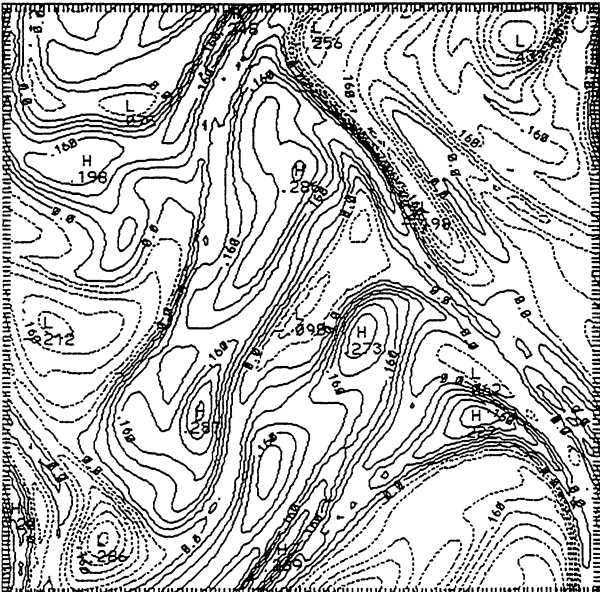
isotourbillon: $t=20$ $v=0.00001$ $np=150$ $iv=1$ $ni=0$



isotourbillon: $t=20$ $v=0.00001$ $np=300$ $iv=1$ $ni=0$



isotourbillon: $t=40$ $v=0.00001$ $np=150$ $iv=1$ $ni=0$



isotourbillon: $t=40$ $v=0.00001$ $np=300$ $iv=1$ $ni=0$



FIGURE 10.15 comparaison de lignes d'iso-tourbillons pour $N = 128$ et $N = 256$

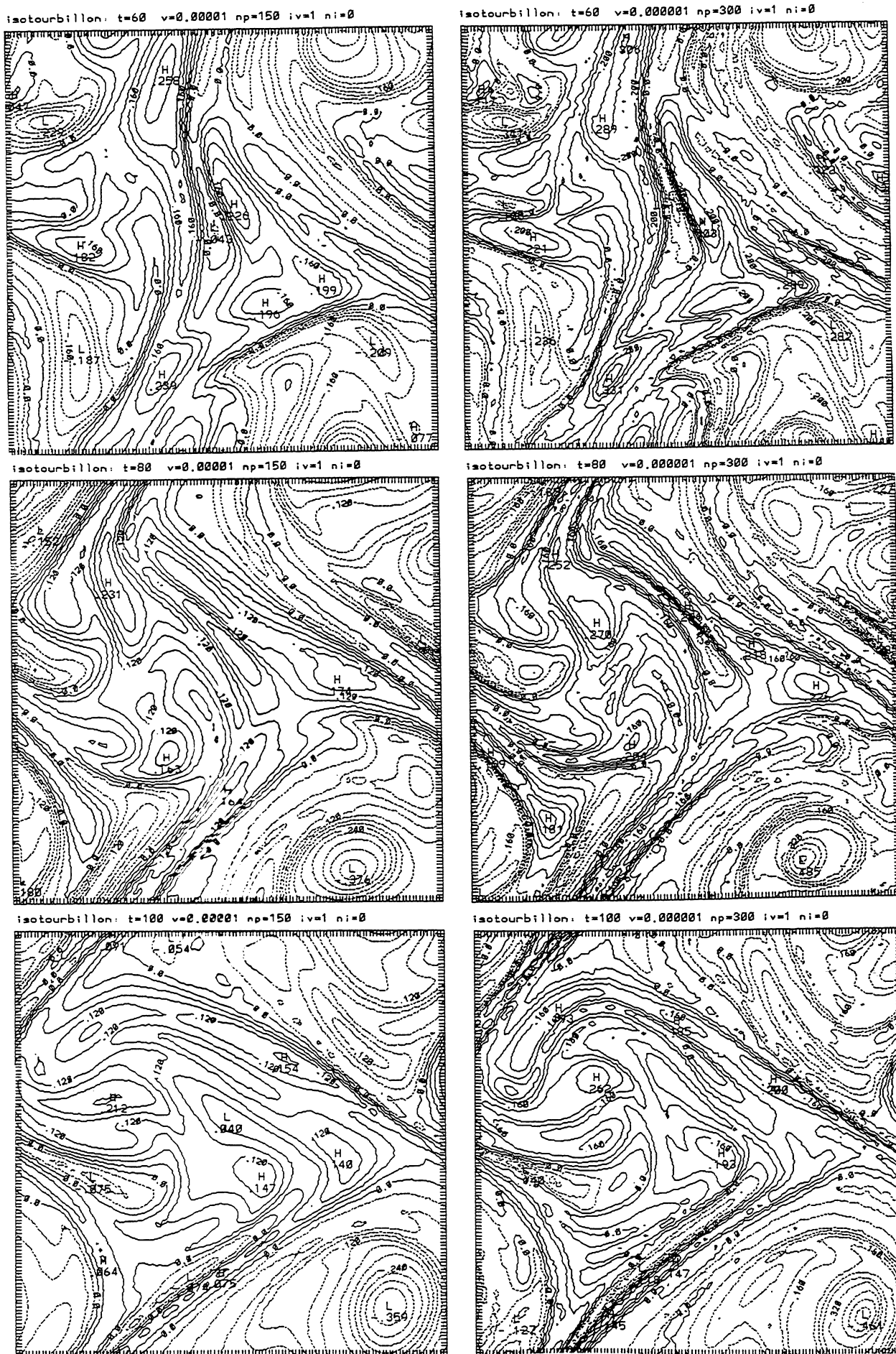
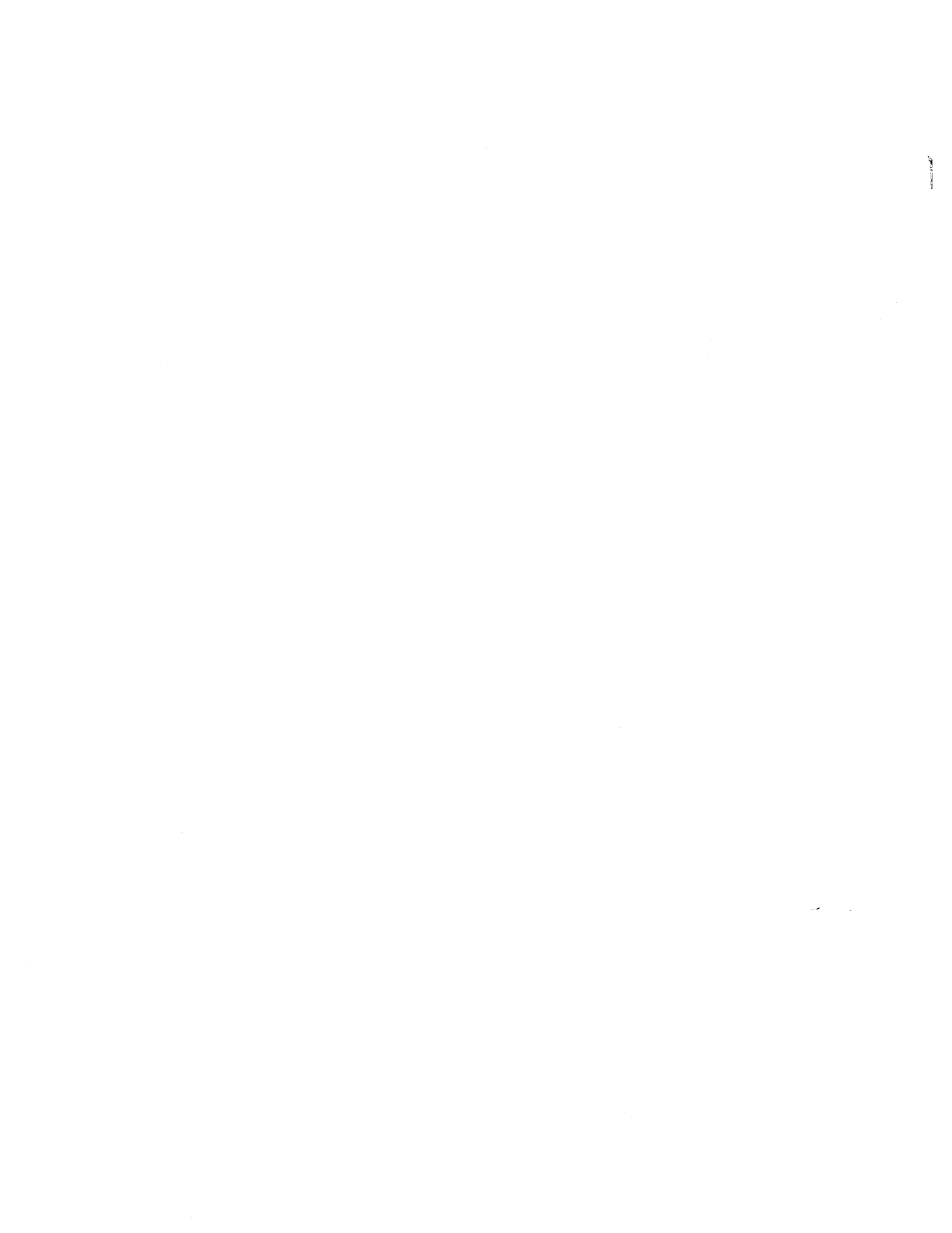


FIGURE 10.16 comparaison de lignes d'iso-tourbillons pour $N = 128$ et $N = 256$



Appendix A

Transformation de Fourier

*J'ajouterai que le livre^a de
Fouriera une importance capitale
dans l'histoire des mathématiques.*

Henri Poincaré^b, 1893.

^aFourier, Théorie analytique de la chaleur, 1822.

^bHenri Poincaré, 1854-1912, né à Nancy et mort à Paris

A.1 Transformation de Fourier (continue)

Il est nécessaire dans les problèmes faisant intervenir des opérateurs différentiels d'utiliser la théorie des distributions et la *transformation de Fourier qui réhabilite la dérivation comme un opérateur simple de l'analyse*¹

A.1.1 Transformation de Fourier des fonctions de \mathcal{S}

On pose

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S} = \left\{ u \in C^\infty; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, x^\alpha D^\beta u \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty \right\};$$

\mathcal{S} est l'espace des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide à l'infini, qui n'est pas un espace normé, mais dont la topologie peut être définie par la suite (dénombrable) de semi-normes:

$$u \rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)|$$

qui en fait un espace métrisable complet.

Pour tout $u \in \mathcal{S}$, on peut définir sa *transformée de Fourier* par la formule:

$$\mathcal{F}[u](y) \equiv \hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot y} dx; \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (364)$$

et son inverse par la formule de réciprocity:

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y) e^{ix \cdot y} dy; \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (365)$$

On peut aussi considérer $\bar{\mathcal{F}}$ défini par:

$$\bar{\mathcal{F}}[u](y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{ix \cdot y} dx; \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (366)$$

que l'on nomme parfois *co-transformation de Fourier*. On peut résumer les propriétés principales de la transformation de Fourier dans la

PROPOSITION A.1 (i) *La transformation de Fourier \mathcal{F} définie par (364) et $\bar{\mathcal{F}}$ définie par (366) sont deux isomorphismes de \mathcal{S} sur lui-même, d'inverse donné par (365);*

¹L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966

(ii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a alors pour $u \in \mathcal{S}$

$$D^\alpha \mathcal{F}[u] = (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F}[x^\alpha u]$$

(iii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a alors pour $u \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{F}[D^\beta u] = i^{|\alpha|} y^\beta \mathcal{F}[u]$$

(iv) Pour tous $u, v \in \mathcal{S}$, on a la formule de Parseval:

$$(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\hat{u}, \hat{v})$$

(v) Pour tout $u \in \mathcal{S}$, on a la formule de Plancherel:

$$\|u\| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\hat{u}\|$$

REMARQUE A.1 Il est quelquefois plus commode pour des raisons de symétrie de définir la transformation de Fourier par la formule:

$$\mathcal{F}[u](y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot y} dx; \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (367)$$

ou encore par

$$\mathcal{F}[u](y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x \cdot y} dx; \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (368)$$

alors on a $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$. Avec l'une ou l'autre de ces dernières définitions, \mathcal{F} conserve exactement le produit scalaire et la norme L^2 des éléments de \mathcal{S} .

Notre choix de la définition de \mathcal{F} par (364) est motivé par le fait que c'est cette définition qui est le plus généralement adoptée par les utilisateurs des équations aux dérivées partielles. Nous énoncerons donc le

THÉORÈME A.1 La transformation \mathcal{F} (resp. $\bar{\mathcal{F}}$) est (à un facteur constant près) une isométrie de \mathcal{S} sur lui-même lorsque l'on munit cet espace de la topologie induite par celle de L^2 .

A.1.2 Transformation de Fourier des fonctions de \mathcal{S}'

Pour étendre aux distributions la transformation de Fourier, compte tenu du fait que \mathcal{D} n'est pas stable par cette transformation, on est conduit à introduire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur \mathcal{S} que l'on désigne par \mathcal{S}' (ou plus précisément, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). \mathcal{S}' est l'espace des distributions tempérées ou à croissance lente.

Pour toute $T \in \mathcal{S}'$, la transformée de Fourier de T notée $\mathcal{F}[T]$ ou \hat{T} sera la distribution tempérée définie par:

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{S} \quad (369)$$

On peut énoncer la

PROPOSITION A.2 (i) *La transformation de Fourier \mathcal{F} définie par (369) et $\bar{\mathcal{F}}$ (définie de manière analogue), sont deux isomorphismes de \mathcal{S}' sur \mathcal{S}' ;*

(ii) *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a pour tout $T \in \mathcal{S}'$*

$$D^\alpha \mathcal{F}[T] = (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F}[x^\alpha T]$$

(iii) *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a pour tout $T \in \mathcal{S}'$*

$$\mathcal{F}[D^\beta T] = i^{|\alpha|} y^\beta \mathcal{F}[T]$$

A.2 Transformations de Fourier discrètes et rapides

A.2.1 En dimension un

Soit f une fonction 2π -périodique à valeurs complexes. Son développement en série de *Fourier* est donné par

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ijx} \quad (370)$$

De l'orthonormalité des fonctions e^{ijx} pour le produit scalaire

$$(h, g) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \bar{g}(x) dx$$

résulte l'expression

$$c_j = (f, e^{ijx}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx \quad (371)$$

pour les coefficients c_j .

Soit S_n l'espace de dimension finie engendré par les $(2n + 1)$ fonctions de base

$$(e^{ijx})_{-n \leq j \leq n}.$$

La fonction $f_n \in S_n$, obtenue en tronquant le développement (371) à l'ordre n , est donc la meilleure approximation de f dans S_n (au sens de la norme L^2). Elle est difficile à calculer, car il faut évaluer des intégrales pour calculer les coefficients c_j .

En revanche la fonction g_n de S_n de la forme

$$g_n(x) = \sum_{-n}^{+n} a_j e^{ijx}$$

qui coïncide avec f aux $N \equiv (2n + 1)$ points

$$x_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

est telle que les a_j vérifient les relations:

$$g_n(x_k) = \sum_{-n}^{+n} a_j e^{ijx_k} = f(x_k) \quad (372)$$

(la fonction g_n est en fait l'interpolée de f dans S_n); relations que l'on peut réécrire sous la forme

$$\sum_{l=0}^{N-1} a_l e^{2\pi i \frac{kl}{N}} = z_k$$

en posant $z_k \stackrel{\text{def}}{=} f(x_k)$ et $a_l \stackrel{\text{def}}{=} a_j$ pour $l \equiv j \pmod{N}$.

En utilisant la relation

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{(l-j)k}{N}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = l, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (373)$$

on en conclut que

$$a_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{-2\pi i \frac{jk}{N}}, \quad 0 \leq j \leq N-1. \quad (374)$$

Nous faisons dès à présent un certain nombre de remarques qui n'auront pas leur place par la suite.

REMARQUE A.2 Ici, on a $N = 2n + 1$. Les cas N pair correspondent au choix de S_n comme l'espace engendré par

$$(e^{ijx})_{-n+1 \leq j \leq n}$$

qui est de dimension $2n$.

DÉFINITION A.1 On appelle transformation de Fourier discrète l'application de $C^N \rightarrow C^N$ qui associe les $(a_j)_{j=0, \dots, N-1}$ suivant la formule (374).

La transformation inverse a une expression analogue et même plus simple, puisque:

$$z_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j w^{jk}, \quad (375)$$

où $w = e^{\frac{2\pi}{N}}$ est la racine principale d'ordre N de l'unité.

On voit que le calcul des z_k à partir des a_j , et réciproquement, implique *a priori* $O(N^2)$ opérations (i.e. multiplications et additions complexes) puisque'il s'agit d'effectuer le produit d'une matrice $N \times N$ par un vecteur. -

En fait, on va voir deux moyens différents qui permettent de ramener ce nombre à $\mathcal{O}(N \log_2 N)$, d'où une économie considérable de temps de machine à calculer pour des grandes valeurs de N . C'est ce qu'on appelle la **transformation de Fourier rapide**.

La première est celle de *Cooley et Tukey* et s'applique dans le cas où $N = 2^m$ (ou 3^m).

La deuxième est celle de *Good-Winograd* et concerne le cas où N est un produit de facteurs premiers entre eux. Toutes les deux reposent sur le principe de l'accélération du produit d'une matrice par un vecteur, lorsque la matrice satisfait à certaines propriétés de décomposition.

A.2.2 En dimension deux

On désigne par Ω le carré de côté 2π :

$$\Omega =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$$

et f une fonction définie sur Ω et 2π -périodique en chacun de ses arguments. Son développement en série de *Fourier* est donné par

$$f(x, y) = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} c_{jk} e^{i(jx + ky)}.$$

On appelle encore S_n l'espace de dimension fini engendré par les fonctions

$$e^{i(jx + ky)}, \quad -n \leq j, k \leq n$$

qui est maintenant de dimension $(2n + 1)^2$.

Soient $N \equiv 2n + 1$, et

$$\xi_l \equiv \frac{2l\pi}{N}, \quad 0 \leq l \leq 2n;$$

on cherche $g_n \in S_n$ **interpolant** f aux points $\{\xi_l, \xi_m\}$ c'est-à-dire telle que

$$g_n(\xi_l, \xi_m) = f(\xi_l, \xi_m), \quad 0 \leq l, m \leq 2n.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} z_{lm} &\equiv f(\xi_l, \xi_m) \\ g_n(\xi_l, \xi_m) &\equiv \sum_{-n \leq j, k \leq n} a_{jk} e^{i(jx+ky)}, \end{aligned}$$

on voit que les $(2n + 1)^2$ quantités a_{jk} vérifient

$$\sum_{j,k} a_{jk} e^{\frac{2\pi i}{N}(jl+km)} = z_{lm},$$

Finalement, le problème de la transformation de Fourier discrète à deux dimensions conduit à évaluer

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \frac{1}{N^2} \sum_{l,m} z_{lm} w^{-(jl+km)} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_l \left(\sum_m z_{lm} \omega^{-km} \right) \omega^{-jl}, \quad -n \leq j, k \leq n \end{aligned} \quad (376)$$

où $w \equiv e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

On voit que ce problème revient à effectuer $2N$ transformations de Fourier discrètes à une dimension puisque l'on peut écrire

$$a_{jk} = \frac{1}{N^2} \sum_l w^{-jl} b_{lk} \quad (377)$$

où l'on a posé

$$b_{lk} = \sum_m \omega^{-km} z_{lm}. \quad (378)$$

En effet pour k fixé, (377) est une transformation de Fourier discrète à une dimension (et N points). Il en est de même pour (378) à l fixé. On obtient donc un algorithme impliquant $\mathcal{O}(N^2 \log_2 N)$ opérations.

Bibliographie

- [1] C. Anderson & C. Greengard, *On vortex methods*, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.22, No.3, 1985, 413-440.
- [2] J. T. Beale & A. Majda, *Vortex methods I : Convergence in three dimensions*, *Math. Comp.*, vol.39, 1-28 (1982).
- [3] J. T. Beale & A. Majda, *Vortex methods II : Higher order accuracy in two and three dimensions*, *Math. Comp.*, vol.39, 29-52 (1982).
- [4] J. T. Beale & A. Majda, *High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels*, *J. Comp. Phys.*, **58**,188-208 (1985).
- [5] J. T. Beale, *On the accuracy of vortex methods at large times*, *Computational Fluid Dynamics and Reacting Gas Flows* (ed. by B. Engquist, M. Luskin & A. Majda), vol.12, pp.19-32, Institute for Mathematics and its Applications (IMA), Springer-Verlag, New York, 1988.
- [6] J. T. Beal & A. Majda, *Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations*, *Math. Comp.*, vol.31, 243-259 (1981).
- [7] L. Bers, F. John & M. Schechter, *Partial differential equations*, *American Mathematical Society*, Providence (1964)
- [8] J.U. Brackbill & H.M. Ruppel, *Flip: A Method for Adaptively Zoned, Particle-in-Cell Calculations of Fluid Flows in Two Dimensions*, *J. Comp. Phys.*, 65, 314-343(1986).

- [9] **J. H. Bramble & B. E. Hubbard**, *A finite difference analog of the Neumann problem for Poisson's equation*, *SIAM J. Numer. Anal.*, Ser.B, vol.2, N1,1-14 (1964).
- [10] **J. H. Bramble & B. E. Hubbard**, *Approximation of derivatives by finite difference method in elliptic boundary value problems*, *Contributions to Differential Equations III* (A serial issued under the auspices of Rias and the University of Maryland, ed. by J. P. Lasalle & J. B. Diaz), John Wiley & Sons, 399-410 (1964).
- [11] **J. H. Bramble & B. E. Hubbard**, *On a finite difference analog of an elliptic boundary problem approximation of solutions of mixed boundary values problems for Poisson's equation by finite differences*, *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol.12, N1, 114-123 (1965).
- [12] **J.H. Bramble, A.H. Schatz, V. Thomée & L.B. Wahlbin**, *Some Convergence Estimates for Semidiscrete Galerkin Type Approximations for Parabolic Equations*, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.4, 218-241 (1977).
- [13] **A. Brandt**, *Estimates for difference quotients of solutions of Poisson type difference equations*, *Math. Comp.*, vol.20, No.96, 473-499 (1966).
- [14] **Y. Brenier & G.H. Cottet**, *Convergence of Particule Methods with Random Rezoning for the 2-D Euler and Navier-Stokes Equations*, , 1992.
- [15] **Robert Brown**, *Phil. Mag.*, 4, p161, 1828. *Ann. d. Phys. u. chem.*, 14,294,1828.
- [16] **J.P. Choquin & G. H. Cottet**, *Sur l'analyse d'une classe de méthodes de vortex tridimensionnelles*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 306, Série 1, 1988, p.739-742.
- [17] **J.P. Choquin & S. Huberson**, *Particle simulations of viscous flows for Navier-Stokes equations*, *Computers and Fluids*,
- [18] **A. J. Chorin**, *Numerical study of slightly viscous flow*, *J. Fluid Mech.*, vol.57, 1973, pp.785-796.

- [19] **A. J. Chorin**, *Numerical study of slightly viscous flow*, *J. Fluid Mech.*, vol.57, 1973, pp.785-796.
- [20] **P. G. Ciarlet**, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [21] **G. H. Cottet**, *Méthodes Particulières pour l'Equations d'Euler dans le Plan*, Thèse du 3^{ème} cycle de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1982.
- [22] **G. H. Cottet**, *Analyse Numérique des Méthodes Particulières pour Certains Problèmes Non Linéaires*, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris, 1987.
- [23] **G. H. Cottet**, *Convergence of a vortex in cell method for the two-dimensional Euler equations*, *Math. Comp.*, vol.49, No.180, 1987, pp.407-425.
- [24] **G. H. Cottet**, *A new approach for the analysis of vortex method*, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 5, 1988, pp.227-285.
- [25] **G. H. Cottet & S. Mas-Gallic**, *Une méthode de décomposition pour une équation de type convection-diffusion combinant résolution explicite et méthode particulaire*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, tone 297, 1983, Série I, pp. 133-136.
- [26] **G. H. Cottet & S. Mas-Gallic**, *A particle method to solve transport-diffusion equations II: the Navier-Stokes equations*, *Num. Math.*, 1984.
- [27] **G. H. Cottet & P.A. Raviart**, *Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations*, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 21, 1984, pp. 57-76.
- [28] **G. H. Cottet, S. Mas-Gallic & P. A. Raviart**, *Vortex methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations*, *Computational Fluid Dynamics and Reacting Gas Flows* (ed. by B. Engquist, M. Luskin & A. Majda), vol.12, pp.47-68, Institute for Mathematics and its Applications (IMA), Springer-Verlag, New York, 1988.
- [29] **R. Courant, K. Friedrichs & H. Lewy**, *Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik*, *Math. Ann.*, vol.100, 1928, pp.32-74.
- [30] **R. Courant & D. Hilbert**, *Methods of Mathematical Physics*, Vol.I, Interscience, New York, 1960.

- [31] **P. Degond & S. Mas-Gallic**, *The weighted particle method for convection-diffusion equations, Part I: the cas of an isotropic viscosity; part II: the anisotropic case.*, *Math. Comput.*, vol. 53, 1989, pp.485-526.
- [32] **R.J. Duffin**, *Basic properties of discrete analytic functions*, *Duke Math.* vol. 23, 1956, pp.335-363.
- [33] **R.J. Duffin & E.P. Shelly**, *Difference Equations of Polyharmonic Type*, *Duke Math.* vol. 25, 19568, pp.209-238.
- [34] **Daniel Euvrard**, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*, MASSON,1990.
- [35] **D. Fishelov**, *A New Vortex Scheme for Viscous Flows*, *J. Comput. Phys.*, 86(1990), 211-224.
- [36] **D. Fishelov**, *Vortex Schemes for Viscous Flows, Lectures in Applied Mathematics: "Vortex Dynamics and Vortex Methods"*, vol.28, 1991.
- [37] **G. E. Forsythe & W.R. Wasow**, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, Applied Mathematics Series, John Wiley, New York, 1960.
- [38] **J. H. Giese**, *On the truncation error in a numerical solution of the Neumann problem for a rectangle*, *J. Math. Phys.*, **37**, pp.169-177 (1958).
- [39] **R.A. Gingold & J.J. Monaghan**, *Shock simulation by the particle method S.P.H.*, *J. Comp. Phys.*, **52**, pp.374-389 (1983).
- [40] **D. Gottlieb & S.A. Orszag**, *Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications*, SIAM Publications, Philadelphia (1977).
- [41] **B. Y. Guo**, *Méthodes des Différences Finies pour Equations aux Dérivées Partielles Non Linéaires*, Beijing, 1988.
- [42] **O. Hald**, *The convergence of a vortex method II*, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.16, 1979, pp.726-755.

- [43] **J. K. Hale**, *Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience, New York, 1969.
- [44] **F. Harlow**, *The particle-in-cell method for fluid dynamics*, *Methods in Computation Physics* (ed. by B. Alder, S. Fernbach & M. Rotenberg), vol.3, Academic Press, New York, 1964.
- [45] **T. Kato**, *Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in \mathbf{R}* , *J. Funct. Anal.*, vol.9, 1972, pp.296-305.
- [46] **Heinz-Otta Kreiss, Milliam D. Henshaw & Luis G. Reyna**, *On smallest scale estimates and a comparison of the vortex methode to the pseudo-spectral methode*, *Lectures in Applied Mathematics: Vortex Dynamics and Vortex Methods*, vol.28, 1991.
- [47] **A. Leonard**, *Vortex methods for flow simulation*, *J. Comp. Phys.*, **37**, pp.289-335 (1980).
- [48] **J.L. Lions**, *Problème aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Paris, 1950.
- [49] **J.L. Lions & E. Magenes**, *Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1 et 2*, Paris, Dunod, 1968.
- [50] **J.L. Lions**, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux limites Non-linéaires*, Paris, Dunod, 1968.
- [51] **S. Mas-Gallic**, *Contribution à l'Analyse Numérique des Méthodes Particulières*, *Thèse de Doctorat d'Etat*, Paris, 1987.
- [52] **S. Mas-Gallic & P.A. Raviart**, *A Particle Method for First-order Symmetric Systems*, *Numer. Math.*, 51, 323-352(1987)
- [53] **S. Mas-Gallic & P.A. Raviart**, *Particle approximation of convection-diffusion problems*, *Publication du laboratoire d'analyse numérique*, Paris VI.
- [54] **F. J. Mc Grath**, *Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol.27, 1968, pp.328-348.

- [55] **Mirta Perlman**, *On the Accuracy of Vortex Methods*, *J. Comp. Phys.*, **59**, 200-223(1985).
- [56] **H.N. Najm**, *A hybrid vortex method with deterministic diffusion*, *Vortex Flows and Related Numerical Methods*, ed. by **J.T. Beale**, **G.H. Cottet** & **S. Huberson** (1993).
- [57] **M. Perlman**, *On the accuracy of vortex methods*, *J. Comp. Phys.*, vol.59, 1985, pp.200-223.
- [58] **R. Rannacher & R. Scott**, *Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations*, *Math. Comp.*, vol.38, No.158, 1982, pp.437-445.
- [59] **P.A. Raviart**, *An analysis of particle methods*, *Numerical Methods in Fluid Dynamics* (F. Brezzi ed.), **Lecture Notes in Mathematics**, vol.1127, Springer Verlag, Berlin (1985).
- [60] **P.A. Raviart**, *Méthodes Particulières & Approximations Particulières*, *Cours d'Ecole d'Eté d'Analyse Numérique*, 1987.
- [61] **P.A. Raviart & J.M. Thomas**, *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*, MASSON, Paris, 1983.
- [62] **K.V. Robert & J. P. Christiansen**, , *Comp. Phys. Commun.*, vol.3, 1972, pp.14-32.
- [63] **J. Rosenhead**, *The formation of vortices from a surface of discontinuity*, *Proc. Roy. Soc. London A* 134, 1931, pp.170-192.
- [64] **I.J. Schoenberg**, *On cardinal spline interpolation and a summability method for the cardinal series*, *Lecture Notes in Mathematics*, Symposium on Approximation, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio, 1969.
- [65] **G. Shortley & R. Weller**, *The numerical solution of Laplace's equation*, *Appl. Phys.*, vol.9, 1938, pp.334-348.
- [66] **S.I. Sobolev**, *Applications de l'analyse fonctionnelle aux équations de la physique mathématique*, Leningrad, 1950.

- [67] **V. Thomée**, *Negative Norme Estimates and Superconvergence in Galerkin Methods for Parabolic Equations*, *Math. Comput*, vol.34, 1980, pp.93-113.
- [68] **L.L. Van Dommelen & S.F. Shen**, in *Proceedings, Thirteenth Biennial Fluid Mechanics Symposium*, Olsztyn-Kortowo, Poland,1977.
- [69] **V.I. Youdovitch**, *Nonstation flow of an ideal incompressible liquid*, *Zh. Vych. Mat.*, vol.3, 1963, pp.1032-1066

Résumé :

Ce travail concerne l'étude numérique des méthodes de couplage particules-grille (ou appelée méthode de vortex in cell) en écoulements bidimensionnels de fluides incompressibles, tant parfait(1^{ère} partie) que peu visqueux (2^{ème} partie).

Dans la 1^{ère} partie de ce travail on s'intéresse à la résolution des équations d'Euler incompressible par une méthode de vortex in cell (VIC). On propose une technique itérative pour améliorer la précision du passage particules-grille. On montre à la fois un théorème de convergence de la méthode de vortex-in-cell et l'efficacité de ces techniques sur des cas tests.

Dans la 2^{ème} partie, d'une part, on montre la convergence pour les équations de Navier-Stokes d'une méthode de vortex utilisant la diffusion numérique produite par la réinitialisation des particules pour simuler la diffusion physique. D'autre part, on définit un schéma VIC basé sur les techniques de la 1^{ère} partie et on l'utilise pour la simulation de turbulence 2D périodique. On obtient les premiers résultats satisfaisants par la méthode de vortex in cell pour ce cas test difficile.

Mots clés :

Equations d'Euler et équations de Navier-Stokes; méthode particulière, méthode de vortex in cell; fluides parfaits et visqueux, tourbillons, turbulence.