HAL
open science

Transport électronique non local dans des structures hybrides supracondctrices

Sylvie Duhot

To cite this version:

Sylvie Duhot. Transport électronique non local dans des structures hybrides supracondctrices. Supraconductivité [cond-mat.supr-con]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT : . tel-00343716

HAL Id: tel-00343716

https://theses.hal.science/tel-00343716v1

Submitted on 2 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

DISCIPLINE : PHYSIQUE

TRANSPORT ÉLECTRONIQUE NON LOCAL DANS DES STRUCTURES HYBRIDES SUPRACONDUCTRICES

présenté par

Sylvie DUHOT

DIRECTEUR DE THÈSE : Régis Mélin
CODIRECTEUR DE THÈSE : Manuel Houzet

COMPOSITION DU JURY :
Hervé Courtois (Président)
Benoît Douçot (Rapporteur)
Alfredo Levy Yeyati (Rapporteur)
Markus Büttiker (Examinateur)
Gilles Montambaux (Examinateur)

2005-2008
Soutenue le 3 octobre 2008

INSTITUT NÉEL, Groupe théorie et nanosciences, CNRS et UJF
INSTITUT NANOSCIENCES ET CRYOGÉNIE, Service de Physique Statistique, Magnétisme et Supraconductivité, CEA
ECOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE

Remerciements

Je remercie tout d'abord sincèrement Alfredo Levy Yeyati et Benoît Douçot d'avoir accepté d'être mes rapporteurs et d'avoir lu attentivement ce manuscrit. Merci aussi à Hervé Courtois d'être président de mon jury et à Gilles Montambaux et Markus Büttiker d'avoir accepté d'être examinateurs.

Je veux remercier tout particulièrement mon directeur de thèse Régis Mélin, pour sa disponibilité quotidienne. Durant mes trois années de thèse, il s'est toujours rendu disponible pour moi et j'ai tout particulièrement apprécié nos nombreuses discussions scientifiques, qui me permettaient de développer mes idées. Ses réponses toujours claires et précises à mes questions de la plus simple à la plus compliquée, m'ont motivé tout au long de mon travail.

Par ailleurs, je remercie également mon co-directeur de thèse Manuel Houzet, avec qui j'ai particulièrement travaillé durant la dernière année de ma thèse. Il m'a toujours poussé à chercher plus loin et à développer mes idées en me posant les bonnes questions.

Finalement, je remercie mes proches, amis et famille pour leur soutien quotidien. J'ai par ailleurs, une pensée toute particulière pour mon père qui malheureusement n'est plus là avec nous, mais je sais qu'il aurait apprécié ce travail.

Table des matières

Introduction **1**

1 Transport non local dans une jonction N-S-N **11**

1.1 Motivations 11

1.2 Méthode de Blonder, Tinkham et Klapwijk (BTK) 12

1.2.1 Réflexion d'Andreev 12

1.2.2 Théorie BTK 12

1.2.2.1 Equations de Bogoliubov - de Gennes 12

1.2.2.2 Jonction N-S avec $V(x) = H\delta(x)$ 14

1.2.2.3 Jonction N-S-N 17

1.2.2.4 Jonction N-N-S-N 20

1.2.2.5 Jonction N-N-S-N-N 24

1.3 Méthode des fonctions de Green 28

1.4 Jonction N-S-N par les fonctions de Green 28

1.4.1 Principe des diagrammes 28

1.4.2 Diagramme de réflexion d'Andreev non locale et de cotunneling élastique . . . 31

1.4.3 Diagrammes d'ordre supérieur : Double réflexion d'Andreev 32

1.5 Comparaison de l'effet tunnel sans réflexion - approche perturbative 35

1.5.1 Modèle de liaisons fortes 35

1.5.2 Amplification due au désordre 36

1.6 Synthèse et comparaison à l'expérience 37

2 SQUID dc à base d'un nanotube de carbone **39**

2.1 Introduction 39

2.2 Modèle à un canal 40

2.2.1 Méthode des fonctions de Green 43

2.2.2 Relations thermodynamiques et états liés 46

2.3 Résultats 50
2.3.1 Réduction du courant critique 50
2.3.2 Fluctuations d'échantillon à échantillon 50
2.4 Synthèse 51

3 Corrélations croisées dues aux réflexions d'Andreev multiples dans des jonctions multi-terminales 53

3.1 Motivations 53
3.2 Jonction Y diffusive connectée à des réservoirs supraconducteurs 55
3.2.1 Fonctions de distribution 55
3.2.1.1 Jonction S-N 57
3.2.1.2 Jonction S-N-S 58
3.2.1.3 Jonction Y diffusive avec réservoirs normaux 60
3.2.1.4 Jonction Y diffusive avec trois réservoirs supraconducteurs 60
3.2.2 Bruit dans une jonction Y diffusive 61
3.2.2.1 Réservoirs en métal normal 63
3.2.2.2 Un réservoir supraconducteur et deux réservoirs en métal normal . . 64
3.2.2.3 Trois réservoirs supraconducteurs 65
3.2.3 Interactions électron électron 69
3.2.4 Synthèse 72
3.3 Point quantique connecté à des réservoirs supraconducteurs 72
3.3.1 Point quantique avec trois réservoirs en métal normal 73
3.3.2 Point quantique avec un réservoir supraconducteur 74
3.3.3 Point quantique avec trois réservoirs supraconducteurs : limite $eV \to 0$ 78
3.3.4 Point quantique avec trois réservoirs supraconducteurs : eV quelconque 83
3.3.5 Interactions électron électron 89
3.4 Synthèse 90

4 Ondes de densité de charge 93

4.1 Motivations 93
4.2 Une onde de densité de charge 94
4.3 Jonction S-ODC et supercourant 96
4.3.1 Argument qualitatif 96
4.3.2 Expérience de Sinchenko et Monceau 97
4.3.3 Résolution par l'approche de Blonder, Tinkham et Klapwijk 97
4.3.4 Absence de supercourant passant dans une onde de densité de charge 99

4.4 Expérience de Latyshev *et al.* 102
4.5 Processus d'interférence quantique à travers une ODC 103
4.5.1 Autocroisement de modes de transmission dans un système à bande interdite . 103
4.5.2 Effet d'interférence quantique dans l'expérience de Latyshev *et al.* 105
4.5.3 Comparaison avec l'expérience de Latyshev *et al.* 108
4.6 Synthèse 108

Conclusion **109**

A Théorie Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS) **113**
A.1 Paire de Cooper 113
A.2 Etat fondamental 114

B Méthode des fonctions de Green **117**
B.1 Modèle de l'Hamiltonien 117
B.2 Représentation spectrale 119
B.3 Fonction de Green dans l'espace réel 120
B.4 Méthode de Keldysh 121
B.5 Courant par effet tunnel (jonction tunnel normale) 123
B.6 Moyenne des différents produits de fonctions de Greeen 124
B.7 Mode de transmission pour un supraconducteur 124

C Jonction multiterminale **127**
C.1 fonction de distribution pour $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$ 127
C.2 Calcul des coefficients B_{pl} 130
C.3 Equation de diffusion avec interactions 132

D Isolant à bande interdite **135**
D.1 Description d'un isolant à bande interdite 135
D.2 Transport dans un anneau isolant 136
D.3 Approche des fonctions d'ondes 138

E Onde de densité de charge **141**
E.1 Evaluation des diagrammes d'échelle pour le coefficient de transmission 141

Introduction

Les structures hybrides supraconductrices multiterminales apportent une physique très riche non présente dans les structures à deux terminaux. Une des motivations pour les étudier est de pouvoir obtenir des paires d'électrons corrélés séparés spatialement entre deux électrodes différentes. Ceci ouvre des perspectives à long terme comme la possibilité de réaliser des circuits électroniques manipulant l'intrication. Par exemple, il serait possible de réaliser une expérience de type Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) [1, 2] avec des électrons [3, 4]. Cette expérience a été réalisée avec des photons par Aspect [5], mais pas avec des particules massives comme des électrons. En effet, en 1935, Einstein, Podolsky et Rosen proposèrent une expérience de pensée, dans le but de mettre à l'épreuve les fondements de la mécanique quantique. Le principe était : "Si sans perturber aucunement un système nous pouvons prédire avec certitude (c'est-à-dire avec une probabilité égale à l'unité) la valeur d'une quantité physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette quantité physique" [1]. Les auteurs en déduirent que la corrélation consiste en une propriété commune portée par chacune des particules. Ce principe démontrait, alors, le caractère incomplet de la mécanique quantique "orthodoxe" ; il devait exister des variables supplémentaires cachées. Ainsi, la théorie serait déterministe. Bell a montré [2], en introduisant les inégalités de Bell, qu'une théorie de variables cachées conduisait à des prédictions contraires à la mécanique quantique et vérifiables expérimentalement. La mécanique quantique prévoit l'existence de situations qui violent les inégalités. Elles sont délicates à produire mais Alain Aspect [6] a réussi à montrer, pour des photons, que dans de tels cas la nature se comporte conformément aux prédictions de la mécanique quantique, violant les inégalités de Bell et invalidant toute théorie à variables cachées dans sa formulation la plus simple.

Trois difficultés apparaissent lorsque nous nous plaçons dans la perspective de réaliser une expérience EPR avec des électrons. La première difficulté est de réaliser et de comprendre le fonctionnement d'une source de paires d'électrons corrélés. La seconde difficulté est de réaliser une expérience EPR avec des électrons, ce qui nécessite des dispositifs qui restent assez complexes à contrôler [3]. La troisième difficulté est de mettre en évidence des corrélations quantiques se propageant plus vite que la vitesse de la lumière. Dans les dispositifs de physique du solide, il est très difficile de manipuler les paires d'électrons corrélés une par une. Notre objectif, ici, est de comprendre la première étape, c'est-à-dire comment fonctionne une source continue de paires d'électrons corrélés basée sur des dispositifs supraconducteurs. Les processus d'Andreev [7] (voir Fig. 1) à une interface métal normal - supraconducteur permettent d'induire des paires d'électrons corrélés (paires d'Andreev) dans l'électrode normale. Par ailleurs, à une interface double métal normal - supraconducteur - métal normal les processus d'Andreev non locaux permettent d'induire des paires séparées spatialement entre les deux électrodes normales.

Plus précisément, dans une réflexion d'Andreev, un électron arrivant à une interface métal normal - supraconducteur ne peut pas passer par effet tunnel dans le supraconducteur si son énergie, ϵ, est

inférieure au gap supraconducteur. Une paire de Cooper est créée et afin d'avoir conservation de la charge et de la quantité de mouvement un trou (de charge et spin opposés à ceux de l'électron) est rétrodiffusé. Il aura une énergie $-\epsilon$ afin d'avoir conservation de l'énergie. Le trou rétrodiffusé suivra la même séquence d'impuretés en sens inverse que l'électron incident[1]. La réflexion d'Andreev peut aussi être vue comme une paire d'électrons passant du métal normal au supraconducteur. C'est cette

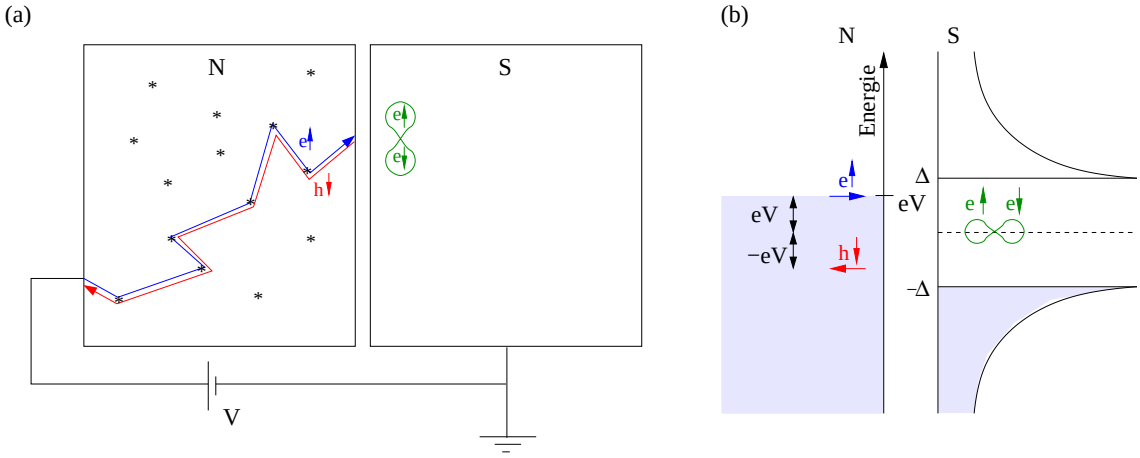

FIG. 1 – Schéma du processus de réflexion d'Andreev à une interface N-S, où un électron est injecté dans une électrode normale. On a création d'une paire de Cooper qui part dans le condensat du supraconducteur et rétrodiffusion d'un trou (charge et spin opposés à ceux de l'électron) dans l'électrode normale (a). Schéma en énergie pour la réflexion d'Andreev (b). e↑ représente un électron de spin up et h↓ un trou dans la bande de spin down.

paire d'électrons dans le métal normal qui est appelée paire d'Andreev [9]. Comme nous allons le voir, d'autres processus apparaissent dans des structures à trois terminaux : les réflexions d'Andreev non locales (voir Fig. 2b) [10, 11] et le cotunneling élastique (voir Fig. 2a) [12].

La réflexion d'Andreev non locale ou réflexion d'Andreev croisée [10, 11] correspond à un électron incident à la première interface et à un trou transmis à la seconde interface. Plus précisément, un électron incident arrive à la première interface N-S, si son énergie est inférieure à celle du gap, il ne peut pénétrer et une paire de Cooper est crée avec création d'un trou de spin opposé qui est transmis à la seconde électrode normale. Le processus de cotunneling élastique consiste en un électron qui traverse par effet tunnel le supraconducteur de la première électrode normale à la seconde. Ces deux processus ne sont possible que si le supraconducteur n'est pas trop épais comparé à la longueur de cohérence ξ : $\xi_{bal} = \hbar v_F/\Delta$ dans la limite balistique avec Δ le gap supraconducteur, v_F la vitesse de Fermi et $\xi_{diff} \propto \sqrt{l_e \xi_{bal}}$ du supraconducteur dans la limite sale ($l_e < \xi_{bal}$ où l_e est le libre parcours moyen de

[1] A tension et température nulle une paire d'Andreev se propage dans le métal normal sur la longueur de cohérence de phase l_ϕ. A température fi nie la propagation se produit sur la plus petite longueur entre l_ϕ et l_T, avec $l_T = \sqrt{\hbar D/k_B T}$ et $\hbar$ la constante de Planck, k_B la constante de Boltzmann, D la constance de diffusion et T la température. La constance de diffusion vaut $D = v_F^2\tau/3 = v_F l_e/3$ à trois dimensions avec $v_F = \hbar k_F/m$ la vitesse de Fermi et $l_e = v_F\tau$ le libre parcours moyen élastique et τ le temps de collision élastique. Finalement, la propagation de la paire d'Andreev se produit sur $\inf(l_\phi, l_T, l_E)$ à température et énergie E fi nie, avec $l_E = \sqrt{\hbar D/E}$. Néanmoins, même à température fi nie, il existe des électrons au niveau de Fermi. Une paire d'Andreev avec des électrons au niveau de Fermi aura une longueur de cohérence très grande, seulement limitée par la longueur de cohérence de phase. C'est ce que l'on appelle la cohérence à longue portée [8].

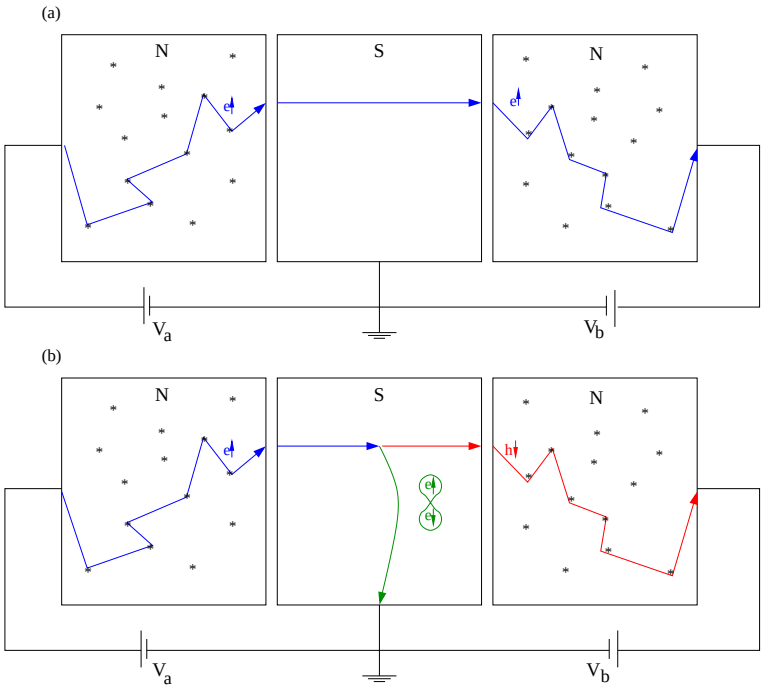

FIG. 2 – Schéma du processus de cotunneling élastique à une jonction N-S-N où un électron est injecté dans la première électrode normale et traverse par effet tunnel jusqu'à la seconde électrode normale (a). Schéma du processus de réflexion d'Andreev non locale à une jonction N-S-N, où un électron est injecté dans la première électrode normale avec création d'une paire de Cooper qui part dans le condensat du supraconducteur et transmission d'un trou de charge et spin opposés dans la seconde électrode normale (b).

l'électron).

De nombreuses expériences sur les structures hybrides multiterminales ont été proposées afin d'essayer d'obtenir des électrons corrélés. Nous décrivons trois de ces propositions dans l'ordre chronologique :

1) Deutscher et Feinberg [11] ont suggéré d'utiliser la polarisation en spin de bras ferromagnétiques pour séparer les paires de Cooper (voir Fig. 3). En prenant deux bras ferromagnétiques de polarisation opposée, les électrons des paires de Cooper étant de spin opposés se répartiront dans les deux bras. L'intérêt de considérer une interface double métal ferromagnétique - supraconduc-

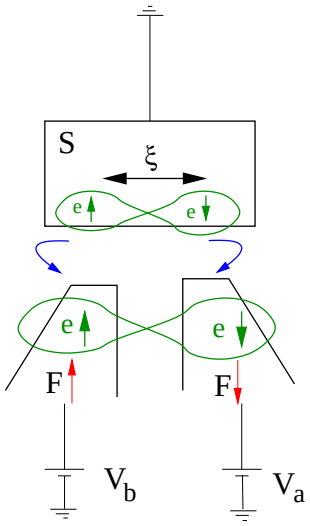

FIG. 3 – Schéma de la proposition d'expérience de Deutscher et Feinberg [11] pour essayer d'observer des électrons enchevêtrés.

teur - métal ferromagnétique (F-S-F) avec des électrodes ferromagnétiques au lieu d'électrodes normales est dû au fait que l'influence sur les propriétés de transport des corrélations non locales par rapport aux corrélations locales augmente avec l'augmentation de la polarisation de spin dans l'alignement anti-parallèle. Par exemple, seuls sont autorisés les processus d'Andreev non locaux dans la limite de métaux ferromagnétiques polarisés à 100% dans l'alignement anti-parallèle.

2) Deux groupes ont proposé des expériences utilisant des points quantiques. Choi *et al.* [13] ont suggéré un double point quantique connecté par des jonctions tunnel à des bras supraconducteurs (voir Fig. 4a). Il n'y a de couplage entre les deux points quantiques que par l'intermédiaire des supraconducteurs. Les auteurs ont également proposé d'insérer un double point quantique à la place de la jonction Josephson dans le bras supérieur d'un SQUID et d'étudier les corrélations des spins dans les points quantiques (voir Fig. 4b).
Recher *et al.* [14] eux ont considéré deux points quantiques connectés à un supraconducteur, chaque point quantique étant connecté à un bras en métal normal (voir Fig. 5). En présence d'une tension et dans le régime de blocage de Coulomb, des électrons venant des réflexions d'Andreev peuvent passer par effet tunnel de manière cohérente dans chacun des bras normaux. Dans le cas des jonctions avec des points quantiques, c'est l'énergie de Coulomb qui empêche les deux électrons de passer dans le même bras. En effet, lorsqu'un électron passe dans un des

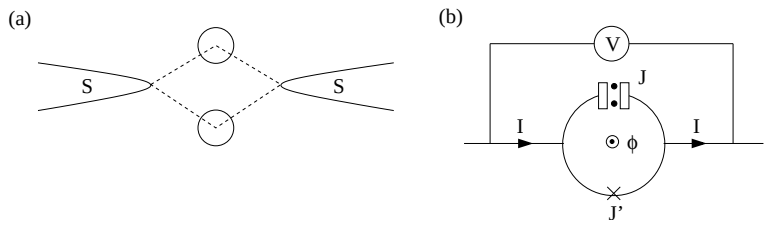

FIG. 4 – Schéma de la proposition d'expérience de Choi *et al.* [13] pour essayer d'observer des électrons enchevêtrés. (a) Deux points quantiques connectés par des jonctions tunnel (en pointillés) à deux bras supraconducteurs. (b) SQUID avec le système (a) à la place de la jonction Josephson dans le bras supérieur.

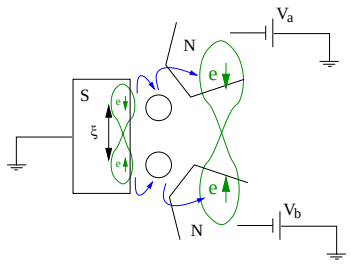

FIG. 5 – Schéma de la proposition d'expérience de Recher *et al.* [14] pour essayer d'observer des électrons enchevêtrés.

points quantiques, l'interaction de Coulomb entre les deux électrons empêche le second électron de la paire de le suivre dans le même point quantique. Ainsi le second électron passera dans le second point quantique.

3) Lesovik *et al.* [3] ont proposé une jonction entre un supraconducteur et un métal normal se séparant en deux bras. Une tension est appliquée de manière à ce que le supraconducteur injecte des paires de quasiparticules dans le guide normal (voir Fig. 6). La séparation des électrons enchevêtrés est effectuée par la forme du guide et des filtres en spin ou en énergie placés sur les bras normaux. En outre, les auteurs ont suggéré de mesurer les corrélations croisées du courant

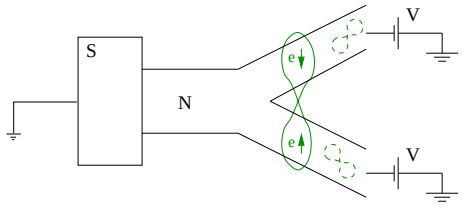

FIG. 6 – Schéma de la proposition d'expérience de Lesovik *et al.* [3] pour essayer d'observer des électrons enchevêtrés.

entre les deux bras normaux. En utilisant des filtres de Fabry-Perot ces auteurs ont également proposé de manipuler l'intrication orbitale au lieu de l'intrication de spin. Par ailleurs, ils ont proposé de tester la violation des inégalités de Bell [2] grâce aux corrélations croisées.

Plusieurs expériences ont également été réalisées :

1) Beckmann *et al.* [15] ont considéré la géométrie de Deutscher et Feinberg [11] en mesurant la résistance non locale (voir Fig. 7). Dans l'état supraconducteur, soit à basse température et

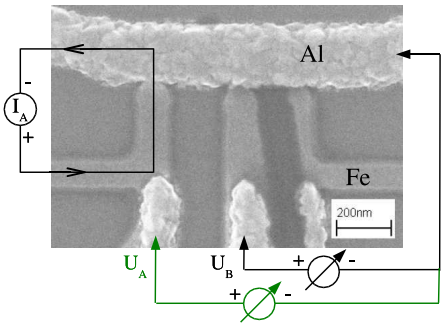

FIG. 7 – Echantillon de l'expérience de Beckmann *et al.* [15]. Image par microscope électronique de l'échantillon $T2$ et schéma expérimental. Trois guides en fer verticaux sont connectés par des points de contacts à une barre d'aluminium horizontale. Un exemple de courant d'injection I_A et de tension de détection locale U_A et non locale U_B pour une paire de contacts est ainsi montrée.

tension bien inférieure au gap, ils observent une résistance non locale dépendante du spin et qui décroît avec la distance entre les bras ferromagnétiques. Le signal étant cohérant avec les prédictions de Falci *et al.* [12] faites pour la réflexion d'Andreev croisée (dépendences en distance et en orientation relative du spin des électrodes ferromagnétiques).

2) Russo *et al.* [16] ont considéré une tricouche métal normal - supraconducteur - métal normal. Dans cette expérience, les auteurs ont étudié une double jonction N-S-N (voir Fig. 8), injectant un courant I_a dans la première électrode normale, ainsi qu'une faible tension oscillante en a afin de pouvoir mesurer la résistance non locale différentielle. Par ailleurs, ils ont mesuré la tension V_b au niveau de la seconde électrode. Le résultat expérimental donne une courbe non nulle chan-

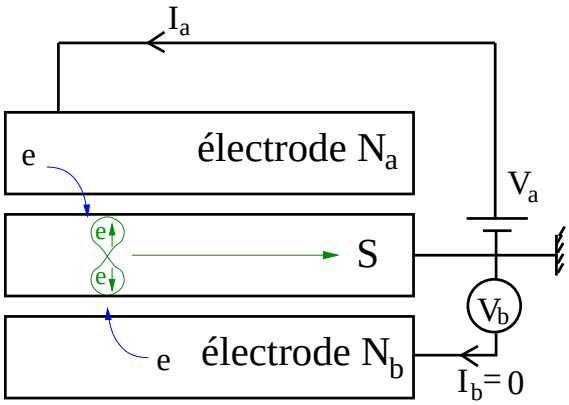

FIG. 8 – Schéma de l'expérience : jonction N-S-N large et fine avec injection d'un courant I_a dans l'électrode normale a et mesure de la tension à l'électrode b.

geant de signe et n'ayant pas d'explication théorique simple (voir Fig. 9), puisque dans la limite tunnel le signal attendu devrait être nul [12]. Nous nous intéressons donc tout particulièrement

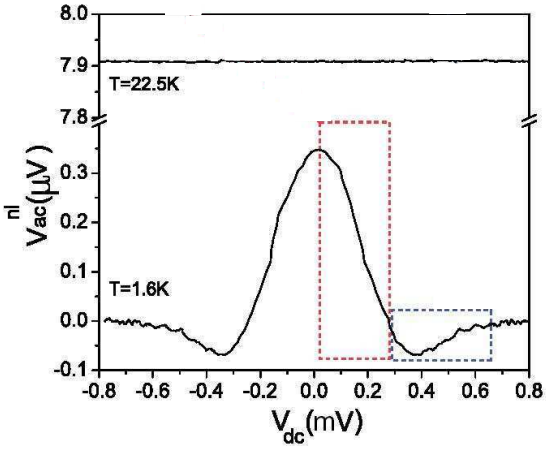

FIG. 9 – Mesure effectuée par Russo *et al* [16]. La tension non locale $V_{ac}^{nl} = V_b$ est mesurée entre l'électrode normale b et le supraconducteur, sur un échantillon où le supraconducteur faisait $d = 15nm$ d'épaisseur en fonction de la tension $V_{dc} = V_a$ appliquée entre l'électrode normale a et le supraconducteur. Soit la résistance non locale différentielle en fonction du courant.

à comprendre le transport non local dans une jonction métal normal - supraconducteur - métal normal (N-S-N) par une approche basée sur des processus tunnel d'ordre supérieur.
Une proposition d'explication à cette expérience a été donnée par Levy Yeyati *et al.* [17]. Les auteurs montrent que des excitations de l'environnement électromagnétique sur le supraconducteur peuvent jouer un rôle important en altérant l'équilibre entre les processus de cotunneling élastique et les processus de réflexions d'Andreev croisées. Les excitations de modes de l'environnement électromagnétique mènent à la dominance d'une contribution (cotunneling élastique ou réflexion d'Andreev croisée) selon les symétries spatiales des modes de l'environnement électromagnétique. Une conductance non locale négative est favorisée soit en augmentant les transparences d'interface [18] soit par des interactions dans un mode symétrique [17].

3) Cadden-Zimansky et Chandrasekhar [19] ont considéré une géométrie avec une électrode supraconductrice verticale (Al) connectée à de nombreuses électrodes normales horizontales (Au) (voir Fig. 10). Cette géométrie est utilisée afin de pouvoir faire varier la distance entre les électrodes normales. Ils trouvent que la contribution à la résistance non locale des processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev croisée, à basse température et avec un courant injecté nul, est positive indiquant que l'amplitude des contributions de cotunneling élastique est plus importante que celle des réflexions d'Andreev croisées [18].

Par ailleurs, les mesures de transport ne sont pas les seules à donner des informations sur les processus non locaux. En effet, les mesures du bruit de grenaille donne des informations sur les porteurs de charges [20]. En outre, les corrélations croisées de courant apportent, elles aussi, des informations supplémentaires. Par exemple, le principe d'exclusion de Pauli impose que les corrélations de courant croisées, dans des structures multiterminales où les électrons n'interagissent pas, soient toujours négatives [21, 22]. Par contre, une source supraconductrice émettant des paires d'Andreev dans des guides

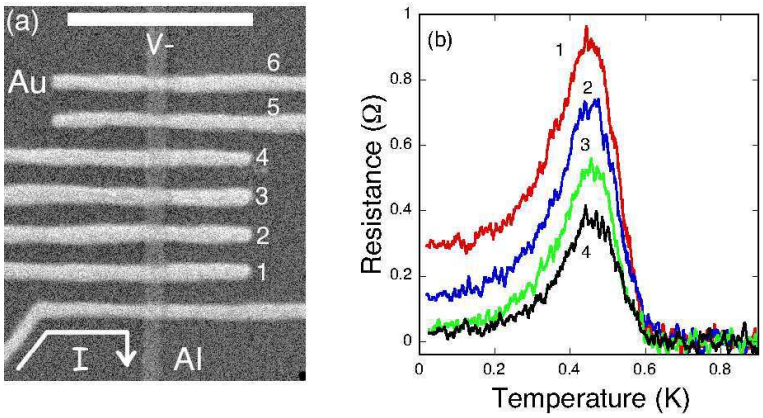

FIG. 10 – (a) Echantillon de l'expérience de Cadden-Zimansky et Chandrasekhar [19]. Image par microscopie électronique d'un échantillon avec six guides en or, chacun séparés de 210nm. Pour les mesures, un courant I est envoyé à travers le guide inférieur dans le supraconducteur et la résistance non locale résultante pour un système à trois terminaux est mesurée entre les guides en Au 1 à 6 et le guide supraconducteur dénoté $V-$. Un petit courant ac est utilisé pour les mesures dépendantes de la température et un courant dc I est injecté en parallèle au courant ac pour les mesures de la résistance différentielle. (b) La dépendance en température de la résistance non locale de l'échantillon est mesurée en utilisant les quatre premiers guides. Les nombres dénotant les courbes correspondent au numéro du guide en (a).

normaux, peut donner des corrélations croisées de courant positives grâce aux paires de Cooper qui ont une statistique bosonique [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29].

Dans cette thèse, nous allons traiter quatre grands sujets, tous relatifs aux structures hybrides contenant un supraconducteur. Tout d'abord, nous nous concentrerons sur le transport non local dans une jonction N-S-N à trois terminaux. Pour cela, nous étudierons la conductance non locale entre les deux électrodes normales à l'aide de deux approches. La première est l'approche de Blonder, Tinkham et Klapwijk (Sec. 1.2). Par cette méthode, nous pourrons mettre en évidence une possibilité d'augmentation importante de l'amplitude de la conductance non locale due à la diffusion sur le désordre dans les électrodes normales (§ 1.2.2.5). Effectivement, les impuretés dans les électrodes normales permettent aux quasiparticules de tenter plusieurs fois de passer la barrière amplifiant de cette manière la conductance non locale.

La seconde approche est la méthode des fonctions de Green (Sec. 1.3). Elle fait apparaître à l'ordre le plus bas de la théorie de perturbations dans l'amplitude tunnel les deux processus bien connus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev non locale (Sec. 1.4.2). Ces deux processus ayant une probabilité identique d'avoir lieu et des contributions opposées dans la conductance non locale, ils s'annulent dans cette dernière [12]. C'est pourquoi, nous considérons les ordres supérieurs dans l'amplitude tunnel. A l'ordre supérieur, la théorie des fonctions de Green fait apparaître un nouveau processus que nous appellerons double réflexion d'Andreev (Sec. 1.4.3) et qui transmet deux électrons de l'électrode a à l'électrode b. En comparant les deux approches, nous pouvons constater que c'est bien le processus de double réflexion d'Andreev qui domine dans la résistance non locale d'une jonction N-S-N en l'absence d'interaction de Coulomb [17].

Une étape supplémentaire dans le transport de paires d'électrons corrélés séparés spatialement, est

d'étudier le SQUID formé d'un nanotube de carbone réalisé par Cleuziou *et al.* [30]. Nous supposons que le SQUID est plus miniaturisé que dans cette expérience de sorte à ce que le supraconducteur central ait une largeur comparable à la longueur de cohérence du supraconducteur. De tels SQUIDs seraient alors sensibles aux processus non locaux, ainsi de nouveaux processus peuvent avoir lieu. Ces processus ayant pour effet principal de diminuer le courant critique circulant dans le SQUID (Sec. 2.3.1) et d'introduire des fluctuations d'échantillon à échantillon du supercourant (Sec. 2.3.2).

Après avoir discuté le transport non local dans différentes structures hybrides supraconductrices, la suite logique est d'étudier le bruit et les corrélations croisées (par exemple comme le proposaient Lesovik *et al.* [3]). Nous allons considérer le bruit et les corrélations croisées de courant dans une structure en forme de Y connectée à trois réservoirs supraconducteurs. Par ailleurs, nous considérons une jonction Y connectée à trois réservoirs supraconducteurs, car nous espérons que le bruit ainsi que les corrélations croisées seront amplifiées par les réflexions d'Andreev multiples comme dans le cas d'une jonction S-N-S. Effectivement, Lefloch *et al.* [31] ont mesuré l'amplification de bruit, dans une jonction S-N-S, prédite par Nagaev [32] et par Bezuglyi *et al.* [33].

Finalement, nous considérons des systèmes contenant des ondes de densité de charge (ODC), qui peuvent être traité par le même formalisme que les structures hybrides contenant un supraconducteur. Effectivement, il y a une analogie formelle entre ses deux études, qui sont basées sur le formalisme Hamiltonien. Pour le cas N-S-N une compensation entre le canal normal $e \to e$ (transmission d'un électron) et le canal anormal $e \to h$ (transmission d'un trou) découle des propriétés de transport dans la limite tunnel. Pour des ondes de densité de charge la compensation entre le canal normal et le canal anormal se traduit par l'impossibilité de faire passer des paires de Cooper sous le gap de l'onde de densité de charge.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à des processus cohérents dans les ondes de densité de charge. Nous considérons des jonctions contenant des ondes de densité de charge telles que les jonctions S-ODC et S-ODC-S. Les ondes de densité de charge ont un paramètre d'ordre fortement différent des supraconducteurs. Effectivement, le condensat des ondes de densité de charge apparie un électron et un trou appartenant à la même bande de spin. Nous constatons que les paires de Cooper ne peuvent pénétrer que sur une longueur d'onde de Fermi dans une onde de densité de charge. Ainsi, les jonctions S-ODC-S ne transportent pas de supercourant (Sec. 4.3.4).

Pour finir, les ondes de densité de charge nous permettent d'étudier un processus de boucle d'interférence quantique dans un système à bandes interdites. Ce processus d'interférence quantique permet d'expliquer les observations de Latyshev *et al.* [34] sur les oscillations de la magnétorésistance dans un film d'ondes de densité de charge percé par des nanotrous (Sec. 4.4 et 4.5).

Chapitre 1

Transport non local dans une jonction N-S-N

1.1 Motivations

Nous nous concentrons tout d'abord sur l'expérience de Russo, Kroug, Klapwijk et Morpurgo [16] sur une tricouche métal normal - supraconducteur - métal normal (N-S-N) (voir Fig. 8). Les auteurs mesurent un signal non nul et changeant de signe pour la résistance non locale en fonction de la tension. Le fait de voir un signal et un changement de signe n'est pas évident à première vue.

Effectivement, à l'ordre le plus bas (ordre T^0 où T est la transparence à chaque interface N-S) les électrodes sont déconnectées. Par conséquent, aucun signal ne peut être mesuré pour le transport non local. A l'ordre T, il n'existe aucun processus, car les électrons ne peuvent pas pénétrer à cet ordre dans le supraconducteur sous le gap. Le processus le plus bas pour une interface N-S est la réflexion d'Andreev d'ordre T^2. A l'ordre T^2, Falci, Feinberg et Hekking ont mis en évidence la compensation de deux processus : le cotunneling élastique (Fig. 2a) [12] qui transmet un électron et la réflexion d'Andreev non locale ou croisée (Fig. 2b) [10] qui transmet un trou à la seconde électrode normale et une paire de Cooper dans le supraconducteur. Ces deux processus ont même amplitude et transportent des charges de signe opposé, ils s'annulent donc dans la conductance non locale. C'est pourquoi, nous voulons déterminer le rôle des processus d'ordre supérieur dans un développement dans l'amplitude tunnel.

Nous considérons deux approches microscopiques nous permettant de traiter la jonction N-S-N. Nous étudions, en premier lieu, l'approche de Blonder, Tinkham et Klapwijk (BTK) (Sec. 1.2) en remplaçant les barrières par un potentiel $H\delta(x)$ (§ 1.2.2.2 et § 1.2.2.3). Cette méthode considère la jonction N-S-N comme unidimensionnelle. Par ailleurs, afin de simuler le désordre dans les électrodes normales, nous ajoutons des jonctions en métal normal en considérant N-N-S-N-N (§ 1.2.2.5). Les jonctions supplémentaires permettant de simuler la diffusion sur des impuretés (l'électron peut tenter plusieurs fois de passer l'interface N-S). Nous en déduisons que la conductance non locale d'une jonction N-S-N peut être fortement amplifiée pour des électrodes désordonnées grâce à la diffusion sur les impuretés, de même que la conductance "locale" à une seule interface N-S.

La deuxième méthode est l'approche des fonctions de Green (Sec. 1.3) à l'aide de la méthode de Keldysh (Appendice B.4). C'est une méthode basée sur la théorie de perturbation. L'approche dia-

grammatique du système N-S-N donne à l'ordre le plus bas les processus de cotunneling élastique et ceux de réflexions d'Andreev croisées qui s'annulent dans la conductance non locale. A l'ordre supérieur un nouveau processus intervient donnant une contribution négative à la conductance non locale : c'est le processus de double réflexion d'Andreev (Sec. 1.4.3) qui transmet deux électrons à la seconde électrode normale.

Les deux approches sont compatibles quant à la nature du processus de double réflexion d'Andreev qui domine dans la conductance non locale dans un développement à l'ordre T^4. Par ailleurs, nous expliquons pourquoi les processus de double réflexion d'Andreev peuvent se coupler à la résistance non locale même si les transparences d'interfaces sont très faibles.

1.2 Méthode de Blonder, Tinkham et Klapwijk (BTK)

1.2.1 Réflexion d'Andreev

Grâce à la théorie de Bardeen, Cooper et Schrieffer (Appendice A), nous pouvons introduire le concept de réflexion d'Andreev. Dans la limite d'une jonction sans barrière (c'est-à-dire pour une transparence parfaite) les électrons du métal normal incidents à énergie $E \gg \Delta$ passent à travers l'interface déposant essentiellement toute leur charge $Q^\star$, comme dans le cas tunnel. Par contre, les électrons incidents du métal normal à énergie $E < \Delta$ ne peuvent pas rentrer comme quasiparticules, mais sont réfléchis dans le métal normal comme des trous, transférant ainsi une charge $2e$ à travers l'interface du supraconducteur. Pour $k_B T$ et $eV \ll \Delta$ tous les électrons incidents sont réfléchis comme des trous par la réflexion d'Andreev pour des interfaces parfaites (voir Fig. 1).

1.2.2 Théorie BTK

Nous commençons par la théorie de Blonder, Tinkham et Klapwijk [35] pour une jonction N-S (§ 1.2.2.2). Ensuite, nous ajoutons progressivement des jonctions supplémentaires : N-S-N (§ 1.2.2.3), N-N-S-N (§ 1.2.2.5) et N-N-S-N-N (§ 1.2.2.5). Pour cela, nous commençons par introduire les équations de Bogoliubov - de Gennes (§ 1.2.2.1).

1.2.2.1 Equations de Bogoliubov - de Gennes

Les équations de Bogoliubov - de Gennes [36] pour un supraconducteur sont données par

$$i\hbar\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \mu(x) + V(x)\right) f(x,t) + \Delta(x) g(x,t) \tag{1.1}$$

$$i\hbar\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = -\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \mu(x) + V(x)\right) g(x,t) + \Delta(x) f(x,t) \tag{1.2}$$

où $\Delta(x)$ est une bande interdite dans l'énergie, c'est-à-dire le gap, $V(x)$ est le potentiel, $\mu(x)$ est le potentiel chimique et m est la masse de la particule. $f(x,t)$ et $g(x,t)$ sont respectivement les composantes des électrons et des trous.

Considérons, tout d'abord, le cas normal avec $\Delta(x) = 0$. Dans ce cas, l'équation (1.1) est alors l'équation de Schrödinger pour les électrons et (1.2) est l'équation à temps renversé pour les électrons. Lorsqu'un électron normal satisfait l'équation à temps renversé, il se comporte comme un trou.

Lorsque $\Delta(x) \neq 0$, les fonctions d'ondes des électrons et des trous sont couplées, faisant apparaître un gap dans la relation de l'énergie E en fonction du vecteur d'onde k pour un cas invariant par translation. Une seconde conséquence est que la vitesse de groupe, $v_g = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\hbar k}$, va à 0 aux bords du gap. Pour voir cela, nous pouvons résoudre les équations (1.1) et (1.2) pour une géométrie spécifique. L'exemple le plus simple est pour $\mu(x)$, $V(x)$ et $\Delta(x)$ constants, alors les solutions sont des ondes planes indépendantes du temps. Nous considérons également pour simplifier que le système est unidimensionnel. Nous pouvons alors faire l'ansatz suivant $f(x,t) = \tilde{u}e^{ikx-iEt/\hbar}$ et $g(x,t) = \tilde{v}e^{ikx-iEt/\hbar}$. Pour $V = 0$, nous trouvons en résolvant le système que

$$E = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2}. \tag{1.3}$$

En fonction de cette énergie, nous pouvons déterminer deux valeurs de l'impulsion,

$$\hbar k^{\pm} = \sqrt{2m\left(\mu \pm \sqrt{E^2 - \Delta^2}\right)}. \tag{1.4}$$

Pour $E < \Delta$, nous obtenons $\hbar k^{\pm} = \pm\left(\hbar k_F \pm \frac{i}{\xi(E)}\right)$ où $\xi(E) = \frac{\hbar v_F}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}$ avec $v_F = \hbar k_F/m$ la vitesse de Fermi et $\xi(E)$ la longueur de cohérence à l'énergie E. Le transport non local à travers un supraconducteur à tension V_b (voir Fig. 8) est atténué exponentiellement sur la longueur de cohérence $\xi(E)$ avec $E = eV_b$, car il s'agit de pénétration d'électrons à travers un supraconducteur (qui ressortent dans l'autre électrode comme des électrons ou des trous) par l'intermédiaire de fonctions d'onde évanescentes.

Nous utilisons la notation $\Psi = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$, ainsi les équations de Bogoliubov - de Gennes prennent la forme :

$$\begin{pmatrix} -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \mu(x) + V(x)\right) & \Delta(x) \\ \Delta(x) & -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \mu(x) + V(x)\right) \end{pmatrix} \Psi(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Nous regardons, maintenant, les lois de conservation pour la probabilité et la charge. Nous définissons $P(x,t)$ la densité de probabilité de trouver soit un électron soit un trou à un temps t et en position x. Pour que ce soit une solution des équations de Bogoliubov - de Gennes (1.5) nous devons avoir $P(x,t) = |f(x,t)|^2 + |g(x,t)|^2$. En outre, nous pouvons voir que

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_P = 0, \tag{1.6}$$

avec $\vec{J}_P(x,t) = \frac{\hbar}{m}\left[\Im\{f(x,t)^\star \nabla f(x,t)\} - \Im\{g(x,t)^\star \nabla g(x,t)\}\right]$. Le courant de trou entre dans (1.6) avec un signe opposé à celui de l'électron, juste comme nous nous y attendons pour une particule à temps renversé. Nous pouvons aussi montrer que $J_P \propto v_g = \frac{\partial E}{\partial \hbar k}$. Ainsi, au bord du gap, J_P est nul.

Nous pouvons également dériver une loi de conservation pour la charge des quasiparticules. Nous assignons une unité de charge $+e$ à l'électron et $-e$ au trou, la densité de charge nette de la quasiparticule dans une des ondes excitées est $Q(x,t) = e\left(|f(x,t)|^2 - |g(x,t)|^2\right)$. Des équations de Bogoliubov - de Gennes (1.5) nous obtenons

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_Q(x,t) = \frac{4e\Delta}{\hbar}\Im\{f(x,t)^\star g(x,t)\}, \tag{1.7}$$

avec $\vec{J}_Q(x,t) = \frac{e\hbar}{m}\left[\Im\{f(x,t)^\star \nabla f(x,t)\} + \Im\{g(x,t)^\star \nabla g(x,t)\}\right]$. Le terme de droite de (1.7) est un terme de source qui connecte les quasiparticules avec le condensat. Dans le courant J_Q les contributions des électrons et des trous au courant des quasiparticules ont le même signe. Effectivement, un électron bouge dans la direction positive et porte un courant positif mais un trou bouge dans la direction négative. Il porte un courant positif à cause du signe de sa charge. Tandis que $J_P \propto v_g = 0$ aux bords du gap, $J_Q = ev_F$. Ainsi nous pouvons voir le courant de charge comme voyageant à la vitesse de Fermi. Pour un métal normal, nous avons simplement $J_Q = eJ_P$.

1.2.2.2 Jonction N-S avec $V(x) = H\delta(x)$

Selon l'idée de Blonder, Tinkham et Klapwijk [35], nous modélisons l'interface par un potentiel $H\delta(x)$. En utilisant les équations de Bogoliubov - de Gennes pour décrire la jonction, nous pouvons traiter tous les cas de l'interface transparente à la jonction tunnel par raccordement des conditions limites. Les conditions limites pour les particules voyageant de N à S sont les suivantes :

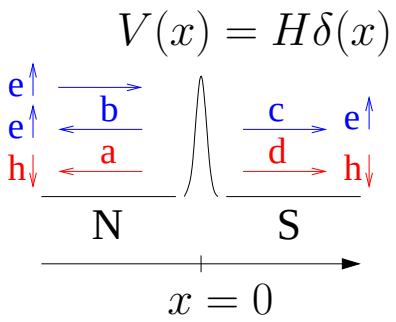

FIG. 1.1 – Schéma de la jonction N-S à une dimension avec l'interface modélisée par un potentiel $H\delta(x)$.

i) Continuité de $\psi(x)$ à $x = 0$,

$$\psi(0) \equiv \psi_N(0) = \psi_S(0)$$

ii) Conditions sur la dérivée avec la fonction $\delta(x)$,

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\psi_S}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_N}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}\right) = H\psi(0)$$

iii) La direction des ondes entrantes, réfléchies et transmises est définie par leur vitesse de groupe. Les électrons entrant produisent seulement des particules sortantes.

Ainsi,

$$\begin{cases} \psi_{inc}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iq^+x} \\ \psi_{refl}(x) = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iq^-x} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iq^+x} \\ \psi_{trans}(x) = c\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik^+x} + d\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik^-x} \end{cases}$$

où $\hbar q^{\pm} = \sqrt{2m}\sqrt{\mu \pm E}$ et $\hbar k^{\pm} = \sqrt{2m}\sqrt{\mu \pm (E^2 - \Delta^2)^{1/2}}$ (voir Eq. (1.4)) les coefficients sont représentés sur la figure 1.1. Le coefficient a (b) est la probabilité de réflexion d'un trou (électron) et c (d) la probabilité de transmission d'un électron (trou). En utilisant les conditions limites, nous obtenons un système à quatre équations.

i)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

ii)

$$\frac{i\hbar}{2m} \left\{ k^+ c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - k^- d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} - q^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - q^- a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q^+ b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = H \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Nous pouvons prendre comme approximation $k^+ = k^- = q^+ = q^- = k_F$, pour des énergies proches de l'énergie de Fermi. Nous posons alors $Z = \frac{H}{\hbar v_F}$ afin d'avoir une barrière sans dimension, sachant que la vitesse de Fermi vaut $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$. D'où le système à quatre équations suivant :

$$\begin{cases} b + 1 = cu_0 + dv_0 \\ a = cv_0 + du_0 \\ cu_0 - dv_0 + b + 1 = -i2Z(1 + b) \\ cv_0 - du_0 - a = -i2Za \end{cases}$$

En le résolvant, nous obtenons :

$$\begin{cases} a = \frac{u_0 v_0}{\gamma} \\ b = -\frac{(u_0^2 - v_0^2)(Z^2 + iZ)}{\gamma} \\ c = \frac{(1 - iZ)u_0}{\gamma} \\ d = \frac{iv_0 Z}{\gamma} \end{cases}$$

avec $\gamma = u_0^2 + (u_0^2 - v_0^2)Z^2$.

Nous considérons la dynamique d'une interface N-S avec tension appliquée (Fig. 1.2). Nous avons alors différentes possibilités de transmission. Vu cinématiquement, dans une approximation semi-classique, les particules approchent de l'interface et sont transmises et réfléchies avec une certaine probabilité.

Soit un électron incident sur l'interface de l'état normal avec énergie $E > \Delta$, (0) : $C(E)$ pour (4) est la probabilité de transmission à travers l'interface avec $q^+ \to k^+$, tandis que $D(E)$ pour (2) est la transmission avec $q^+ \to k^-$, appelée transmission avec croisement de branche. $B(E)$ pour (5) est la probabilité de réflexion normale et $A(E)$ pour (6) est la probabilité de réflexion d'Andreev. Le dernier

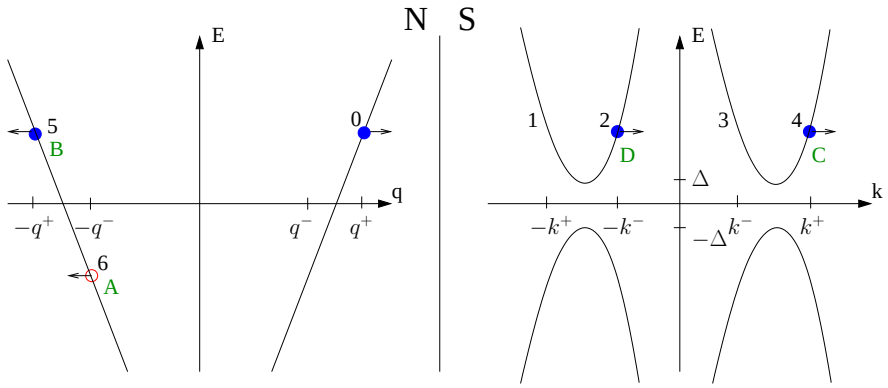

FIG. 1.2 – Diagramme de l'énergie en fonction des vecteurs d'onde pour la jonction N-S.

processus implique le transfert d'une paire portant une charge $2e$ à travers l'interface

$$\begin{cases} A = \left[a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{iq^-x}\right]^\star\left[a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{iq^-x}\right] = \frac{u_0^2v_0^2}{\gamma^2} \\ B = \left[b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-iq^+x}\right]^\star\left[b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-iq^+x}\right] = \frac{(u_0^2-v_0^2)Z^2(1+Z^2)}{\gamma^2} \\ C = \left[c\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}e^{ik^+x}\right]^\star\left[c\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}e^{ik^+x}\right] = \frac{(u_0^2-v_0^2)u_0^2(1+Z^2)}{\gamma^2} \\ D = \left[d\begin{pmatrix}v_0\\u_0\end{pmatrix}e^{-ik^-x}\right]^\star\left[d\begin{pmatrix}v_0\\u_0\end{pmatrix}e^{-ik^-x}\right] = \frac{(u_0^2-v_0^2)v_0^2(1+Z^2)}{\gamma^2}. \end{cases}$$

Nous pouvons voir que $b = d = 0$ pour un système sans barrière ($H = 0$ et $Z = 0$). Physiquement parlant cela signifie que toute réflexion est une réflexion d'Andreev et les transmissions se font sans changement de branche. Dans ce cas, $J_Q = \frac{|u_0|^2+|v_0|^2}{|u_0|^2}ev_Fe^{-2x/\xi(E)}$. Le courant "disparu" réapparaît comme un courant porté par le condensat. Pour $E < \Delta$, k^+ et k^- ont une faible partie imaginaire qui conduit à une décroissance exponentielle sur une longueur $\xi(E)/2$.

Pour trouver le courant dans notre modèle unidimensionnel, nous prenons la différence entre $f_\rightarrow(E)$ et $f_\leftarrow(E)$ les fonctions de distribution aux points (0) et (5) sur la figure 1.2. Nous intégrons alors sur l'énergie.

$$I = \mathcal{A}J = 2N(0)ev_F\mathcal{A}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}E\left[f_\rightarrow(E) - f_\leftarrow(E)\right]$$

où $\mathcal{A}$ est une surface d'intégration effective incluant un facteur numérique pour la moyenne angulaire, qui dépendra de la géométrie dans le cas à trois dimensions. Nous avons $f_\rightarrow(E) = f_0(E - eV)$ et $f_\leftarrow(E) = A(E)\left[1 - f_\rightarrow(-E)\right] + B(E)f_\rightarrow(E) + (C(E) + D(E))f_0(E)$. Le courant I_{NS} est alors donné par

$$I_{NS} = 2N(0)ev_F\mathcal{A}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}E\left[f_0(E - eV) - f_0(E)\right]\left[1 + A(E) - B(E)\right].$$

Nous pouvons voir que la réflexion ordinaire réduit le courant alors que la réflexion d'Andreev l'augmente grâce au passage des paires de Cooper.

1.2.2.3 Jonction N-S-N

Nous regardons le cas d'une jonction N-S-N. Nous supposons que le supercourant disparaît, donc que le supraconducteur est à la masse. Cela nous permet de ne pas tenir compte de l'autocohérence du gap supraconducteur et de supposer qu'il vaut Δ dans le supraconducteur, comme dans l'approche de Falci *et al.* [12]. Nous pouvons effectuer cette hypothèse, car nous n'avons pas de champ magnétique. Effectivement, l'autocohérence du gap est importante sous champ magnétique et pour des effets hors équilibre. Par exemple, lorsque la phase du supraconducteur est dépendante de la tension.

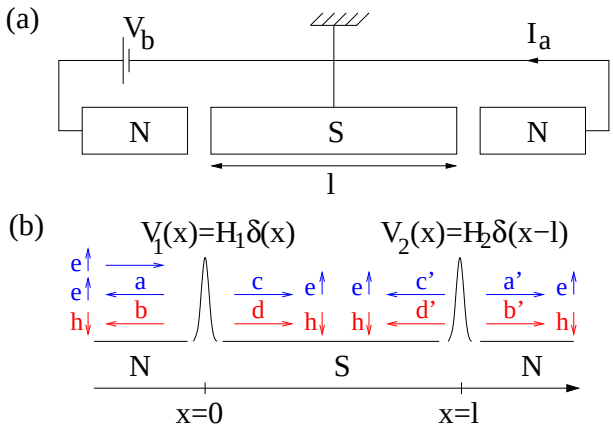

FIG. 1.3 – Circuit électrique de la jonction N-S-N (a). Schéma de la jonction N-S-N à une dimension avec la première interface modélisée par un potentiel répulsif $H_1\delta(x)$ et la seconde par $H_2\delta(x-l)$ (b).

Comme pour le cas d'une jonction N-S, nous considérons que tous les vecteurs d'ondes sont très proches de k_F et les barrières sont données par des potentiels répulsifs $H_1\delta(x)$ et $H_2\delta(x-l)$. Ainsi pour l'électrode normale de gauche (L), nous avons la fonction d'onde

$$\psi_L(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F x} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F x} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x}.$$

Pour la fonction d'onde du supraconducteur, nous avons la partie venant de l'électrode de gauche et la partie venant de celle de droite.

$$\begin{aligned} \psi_S(x) = & \, c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F x} e^{-x/\xi(E)} + d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} e^{-x/\xi(E)} \\ & + c' \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F (l-x)} e^{-(l-x)/\xi(E)} + d' \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F (l-x)} e^{-(l-x)/\xi(E)}. \end{aligned}$$

Pour la seconde électrode normale (R) :

$$\psi_R(x) = a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F (l-x)} + b' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F (l-x)}.$$

Désormais quatre conditions limites (au lieu de deux) définissent le système, deux pour chaque interfaces.

i) Condition de jonction des fonctions d'onde à la première interface :

$$\psi_L(0) = \psi_S(0)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F l} e^{-l/\xi(E)} + d' \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F l} e^{-l/\xi(E)}.$$

ii) Condition de jonction des fonctions d'onde à la seconde interface :

$$\psi_S(l) = \psi_R(l)$$

d'où

$$c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F l} e^{-l/\xi(E)} + d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F l} e^{-l/\xi(E)} + c' \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + d' \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \\ a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

iii) Condition de jonction des dérivées des fonctions d'onde à la première interface :

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\left. \frac{\mathrm{d}\psi_S}{\mathrm{d}x} \right|_{x=0} - \left. \frac{\mathrm{d}\psi_L}{\mathrm{d}x} \right|_{x=0} \right) = H_1 \psi_L(0)$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi_L(x)}{\mathrm{d}x} = ik_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F x} + ik_F a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F x} - ik_F b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x}$$

et

$$\left. \frac{\mathrm{d}\psi_L}{\mathrm{d}x} \right|_0 = ik_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ik_F a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - ik_F b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\psi_S(x)}{\mathrm{d}x} &= ik_F c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F x} e^{-x/\xi(E)} - \frac{1}{\xi(E)} c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F x} e^{-x/\xi(E)} \\ &- ik_F d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} e^{-x/\xi(E)} - \frac{1}{\xi(E)} d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} e^{-x/\xi(E)} \\ &- ik_F c' \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F (l-x)} e^{-(l-x)/\xi(E)} + \frac{1}{\xi(E)} c' \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F (l-x)} e^{-(l-x)/\xi(E)} \\ &+ ik_F d' \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F (l-x)} e^{-(l-x)/\xi(E)} + \frac{1}{\xi(E)} d' \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F (l-x)} e^{-(l-x)/\xi(E)}. \end{aligned}$$

Comme $\xi(E) \gg \lambda_F$, nous pouvons négliger les termes avec un facteur $\frac{1}{\xi(E)}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\psi_S(x)}{\mathrm{d}x} &= ik_F c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F x} e^{-x/\xi(E)} - ik_F d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} e^{-x/\xi(E)} \\ &- ik_F c' \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F (l-x)} e^{-(l-x)/\xi(E)} + ik_F d' \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F (l-x)} e^{-(l-x)/\xi(E)} \end{aligned}$$

et

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_S}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = ik_F c\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - ik_F d\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} - ik_F c'\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F l}e^{-l/\xi(E)}$$
$$+ik_F d'\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F l}e^{-l/\xi(E)}$$

Nous pouvons poser $Z_j = \frac{H_j}{\hbar v_F}$ avec $j = 1, 2$ et ainsi

$$c\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - d\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} - c'\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F l}e^{-l/\xi(E)} + d'\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F l}e^{-l/\xi(E)}$$
$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i2Z_1\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

iv) Condition de jonction des dérivées des fonctions d'onde à la seconde interface :

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\psi_R}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_S}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l}\right) = H_2\psi_R(0)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_S}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} = ik_F c\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F l}e^{-l/\xi(E)} - ik_F d\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F l}e^{-l/\xi(E)}$$
$$-ik_F c'\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + ik_F d'\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi_R}{\mathrm{d}x} = -ik_F a'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F(l-x)} + ik_F b'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F(l-x)}.$$

d'où

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_R}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} = -ik_F a'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + ik_F b'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$c\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F l}e^{-l/\xi(E)} - d\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F l}e^{-l/\xi(E)} - c'\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
$$+d'\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + a'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i2Z_2\left[a'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Nous avons donc un système linéaire de huit équations à résoudre, pour obtenir les coefficients. Ce sont les coefficients a' et b', qui correspondent à la transmission d'un trou et respectivement d'un électron, qui nous intéressent. Nous pouvons considérer deux cas limites avec $Z = Z_1 = Z_2$: $Z = 0$ et $Z \to \infty$:

$Z = 0$: Dans ce cas, il n'y a pas de barrière, l'interface est complètement transparente. Nous trouvons $a' = 0$, ce qui est normal : sans barrière, il n'y a pas de création de trou du fait de la conservation de l'impulsion. Dans BTK, le trou est diffusé avec un vecteur d'onde opposé à celui de l'électron. Par conséquent, nous n'avons pas de conservation de l'impulsion si le trou était diffusé vers l'avant. L'électron passe tout droit sans être réfléchi en trou.

$$b' = \frac{e^{ik_F l}e^{l/\xi(E)}(u_0^2 - v_0^2)}{u_0^2 e^{2l/\xi(E)} - v_0^2}$$

La conductance non locale donnée par $\mathcal{G}_{ab} = \frac{e^2}{h}(A' - B')$ est dans cette limite toujours négative. A' est donné en moyennant sur les oscillations de Friedel par

$$A' = \int_{l_0-\pi/k_F}^{l_0+\pi/k_F} dl \frac{k_F}{2\pi} |a'|^2, \tag{1.8}$$

l'équivalent est obtenu pour B'.

$Z \to \infty$: Dans ce cas, les barrières sont très importantes. Pour obtenir a' et b', il nous faut faire un développement en série du facteur $e^{l/\xi(E)}$ que nous gardons qu'au second ordre. Cela revient à faire l'hypothèse que $l \geq \xi(E)$: la longueur du supraconducteur est supposée un peu plus grande que sa longueur de cohérence. Alors,

$$a' = -\frac{u_0 v_0 (e^{ik_F l} + e^{-ik_F l})}{e^{l/\xi(E)}(u_0^2 - v_0^2) Z^2}$$

et

$$b' = -\frac{u_0^2 e^{ik_F l} + v_0^2 e^{-ik_F l}}{e^{l/\xi(E)}(u_0^2 - v_0^2) Z^2}.$$

Nous sommes intéressés par $|a'|^2$ et $|b'|^2$, nous moyennons sur les oscillations de Friedel à l'aide de (1.8). Nous obtenons

$$A' = B' = \frac{\Delta^4 e^{-2l/\xi(E)}}{8(\Delta^2 - E^2)^2 Z^4}.$$

Par conséquent, la conductance non locale qui est donnée par $\frac{e^2}{h}(A' - B')$ est nulle à l'ordre Z^{-4}.

Dans le cas général, nous obtenons les coefficients A' et B' par un petit programme qui résout le système d'équation, grâce à une inversion de matrice, nous permettant ainsi d'obtenir la conductance non locale.

Nous pouvons voir que la conductance non locale est toujours négative et prend sa valeur minimale lorsqu'il n'y a pas de barrières ($Z = 0$). Elle tend vers 0 dans la limite où les barrières sont importantes ($Z \to \infty$). Elle est monotone entre ces deux limites. Par ailleurs, la valeur absolue de la conductance non locale diminue avec l'augmentation de la longueur du supraconducteur, car le processus de cotunneling élastique s'atténue exponentiellement avec la distance parcourue dans le supraconducteur.

Nous incluons maintenant la diffusion sur les impuretés dans les électrodes normales (§ 1.2.2.4) et (§ 1.2.2.5) par un modèle simplifié d'effet tunnel sans réflexion (en anglais : "reflectionless tunneling").

1.2.2.4 Jonction N-N-S-N

Le désordre dans les électrodes normales permet, grâce aux diffusions sur les impuretés, aux électrons arrivant à l'interface N-S de tenter plusieurs fois de traverser l'interface [37, 38], comme sur la figure 1.5. Par exemple, un électron arrivant à l'interface N-S peut soit subir une réflexion d'Andreev soit être réfléchi. S'il est réfléchi, la diffusion sur les impuretés des électrodes normales lui permet de revenir à l'interface N-S et ceci jusqu'à subir une réflexion d'Andreev. Lorsque l'électron subit une réflexion d'Andreev, un trou est rétrodiffusé, il suivra alors en sens inverse la même séquence d'impuretés que l'électron. C'est le processus d'effet tunnel sans réflexion qui confine les quasiparticules à l'interface N-S (en anglais : "reflectionless tunneling").

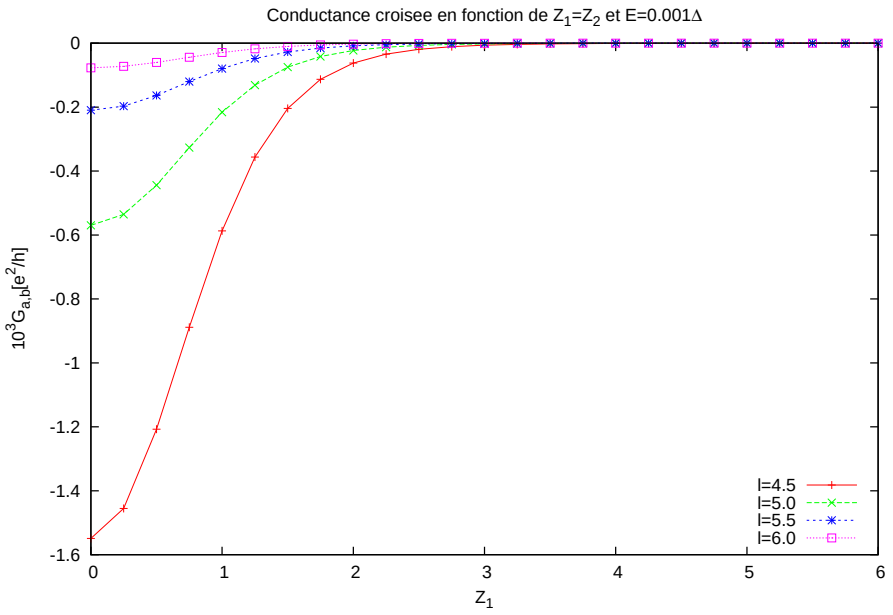

FIG. 1.4 – Conductance non locale, en unité de e^2/h, en fonction de la barrière $Z_1 = Z_2$ dans le cas où l'énergie, $E = 0.001\Delta$, est bien au-dessous du gap, en fonction de différentes longueurs du supraconducteur. La longueur du supraconducteur est en unité de ξ, avec $\epsilon_F/\Delta = 1000$ (où ϵ_F est l'énergie de Fermi).

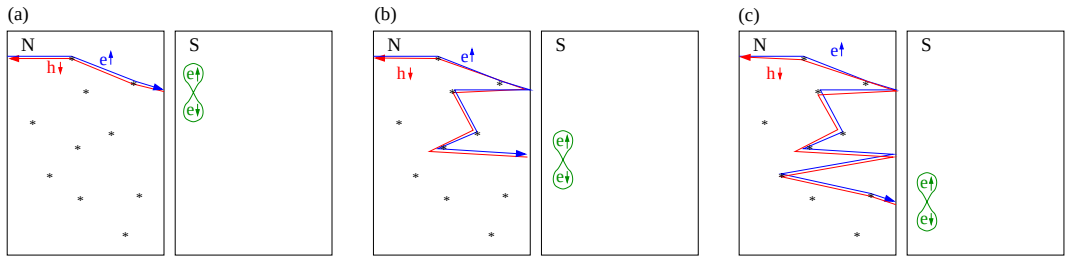

FIG. 1.5 – Schéma de l'interface N-S avec électrode normale désordonnée. (a) L'électron (e) incident subit une réflexion d'Andreev à sa première approche de l'interface. L'électron est alors réfléchi comme un trou dans la bande de spin down (h comme "hole" en anglais). (b) L'électron est réfléchi à sa première approche de l'interface, les impuretés lui permettent de revenir à l'interface où il peut à nouveau tenter le processus d'Andreev. (c) L'électron est réfléchi deux fois puis subit une réflexion d'Andreev.

Pour simuler le désordre dans les électrodes normales ou dans le cas où les électrodes normales sont très fines (diffusions sur le bord), nous généralisons au cas multiterminal l'idée de Melsen et Beenakker [39] consistant à insérer une jonction supplémentaire. L'introduction de cette seconde barrière (structure N-N-S à deux terminaux) introduit un minimum dans la résistance en fonction de la transparence de l'interface N-S. Le minimum pouvant être expliqué par l'apparition de modes de transmission analogues à l'effet tunnel sans réflexion à travers une jonction N-S où l'électrode normale est désordonnée (voir Fig. 1.5).

Nous commençons par considérer N-N-S-N (voir Fig. 1.6).

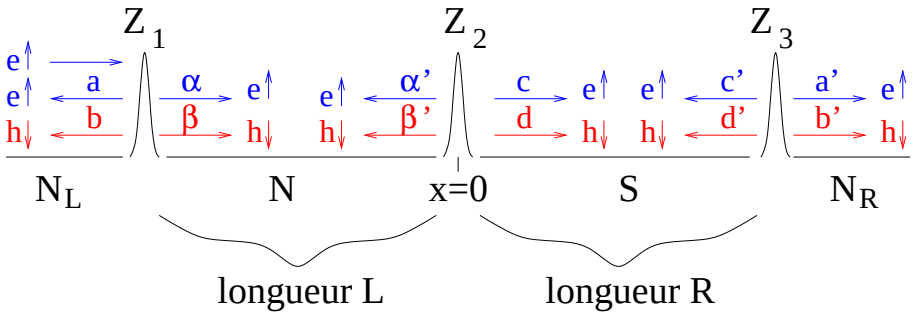

FIG. 1.6 – Schéma de la jonction N-N-S-N à une dimension avec BTK.

Nous procédons comme pour la jonction N-S-N (§ 1.2.2.3). Les fonctions d'ondes dans les différentes parties valent

$$
\begin{aligned}
\psi_L(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x+L)} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F(x+L)} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x+L)} \\
\psi_N(x) &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x+L)} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x+L)} + \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F x} \\
\psi_S(x) &= c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F x} e^{-x/\xi(E)} + d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} e^{-x/\xi(E)} \\
&\quad + c' \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x-R)} e^{(x-R)/\xi(E)} + d' \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x-R)} e^{(x-R)/\xi} \\
\psi_R(x) &= a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x-R)} + b' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x-R)}.
\end{aligned}
$$

avec six conditions limites, deux pour chaque interfaces.

i) Condition de raccordement des fonctions d'onde :

$$
\begin{aligned}
\psi_L(-L) &= \psi_N(-L) \\
\psi_N(0) &= \psi_S(0) \\
\psi_S(R) &= \psi_R(R)
\end{aligned}
$$

i) Condition de raccordement des dérivées des fonctions d'onde :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-L} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_L(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-L} = -2iZ_1\psi_L(-L)$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_S(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -2iZ_2\psi_N(0)$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_R(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=R} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_S(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=R} = -2iZ_3\psi_S(R)$$

En résolvant ce système d'équations, nous trouvons a' et b' et la conductance non locale est égale à $\frac{e^2}{h}(A' - B')$, ou A' et B' sont donnés par (1.8).

La conductance non locale, pour une énergie bien supérieure au gap ($E = 10\Delta$) est donnée seulement par les processus de cotunneling élastique. Les processus de réflexion d'Andreev ne pouvant avoir lieu dans cette gamme d'énergie avec par conséquent une conductance non locale négative. Nous pouvons voir (Fig. 1.7) que la conductance non locale en valeur absolue est maximale pour un système sans barrière à l'interface N-S et diminue avec l'augmentation des barrières. Effectivement, les électrons ont moins de probabilité de passer par effet tunnel si la barrière à l'interface N-S augmente. La conductance non locale est strictement monotone.

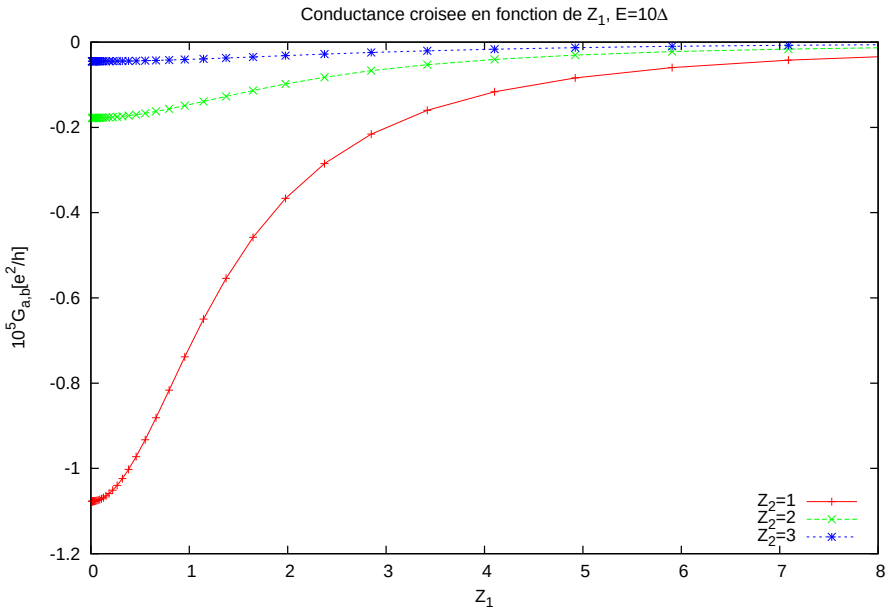

FIG. 1.7 – Conductance non locale en unité de e^2/h en fonction de la barrière Z_1 dans le cas où l'énergie est bien au-dessus du gap ($E = 10\Delta$), avec $R = 5\xi$ et $L = 10\xi$ où $\epsilon_F/\Delta = 1000$ (où ϵ_F est l'énergie de Fermi).

Si nous considérons une énergie inférieure au gap ($E = 0.001\Delta$), il est cette fois-ci possible d'avoir des réflexions d'Andreev. Néanmoins, les contributions des processus transmettant des électrons sont toujours majoritaires, la conductance non locale restant toujours négative. Un minimum dans la conductance non locale apparaît, ceci est dû à la contribution des réflexions d'Andreev qui est positive et qui compense une partie de la contribution des processus de cotunneling élastique. Nous

voyons donc apparaître des effets caractéristiques du confinement des quasiparticules à l'interface N-S, qui se manifeste par un maximum de la valeur absolue de la conductance non locale (voir Fig. 1.8).

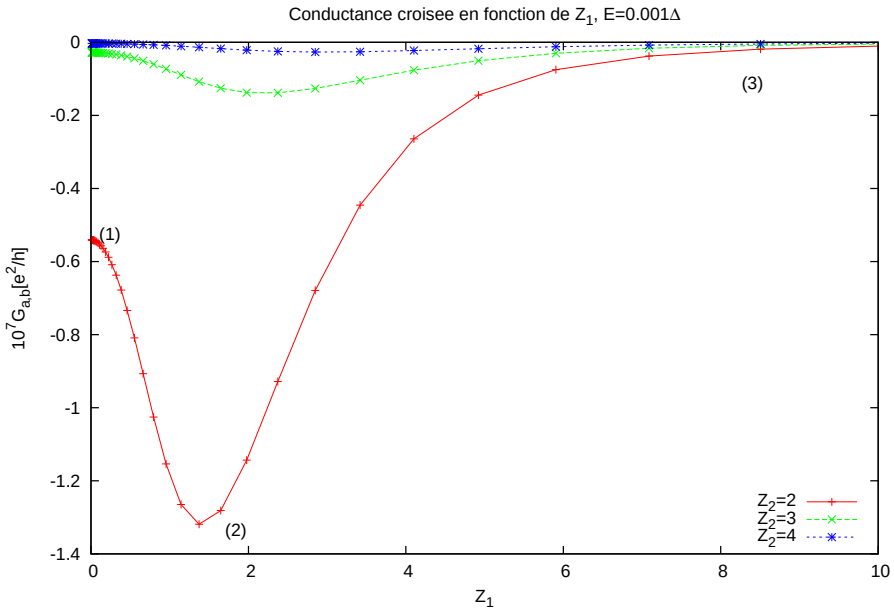

FIG. 1.8 – Conductance non locale, en unité de $\frac{e^2}{h}$, en fonction de la barrière Z_1 dans le cas où l'énergie est bien au dessous du gap ($E = 0.001\Delta$), avec $R = 5\xi$ et $L = 10\xi$ où $\epsilon_F/\Delta = 1000$ (où ϵ_F est l'énergie de Fermi). Les indice (1), (2) et (3) correspondent aux trois différents régimes de la figure 1.9.

Nous avons trois régimes différents (voir Fig. 1.9) : Dans un premier temps Z_1 est tellement petit que les électrons passent jusqu'à l'interface supraconductrice (1) et sont soit réfléchis dans l'électrode normale soit transmis à travers le supraconducteur. En augmentant progressivement Z_1, nous obtenons un régime où les deux barrières sont du même ordre de grandeur, ainsi l'électron rebondit plusieurs fois entre l'interface N-N et l'interface N-S avant de pouvoir traverser dans le supraconducteur c'est le régime où l'électron est confiné près de l'interface N-S (2). Finalement, si nous continuons à augmenter Z_1, nous arrivons à un régime où tous les électrons sont réfléchis à l'interface N-N (3). La conductance non locale en valeur absolue diminue avec l'augmentation de la longueur du supraconducteur (voir Fig. 1.10). Ceci vient du fait que la probabilité d'un électron de passer par effet tunnel s'atténue exponentiellement avec la distance à traverser dans le supraconducteur.

1.2.2.5 Jonction N-N-S-N-N

Pour simuler le désordre dans les deux électrodes normales, nous introduisons maintenant une double jonctions N de chaque côté du supraconducteur, décrites sur la figure (Fig. 1.11).

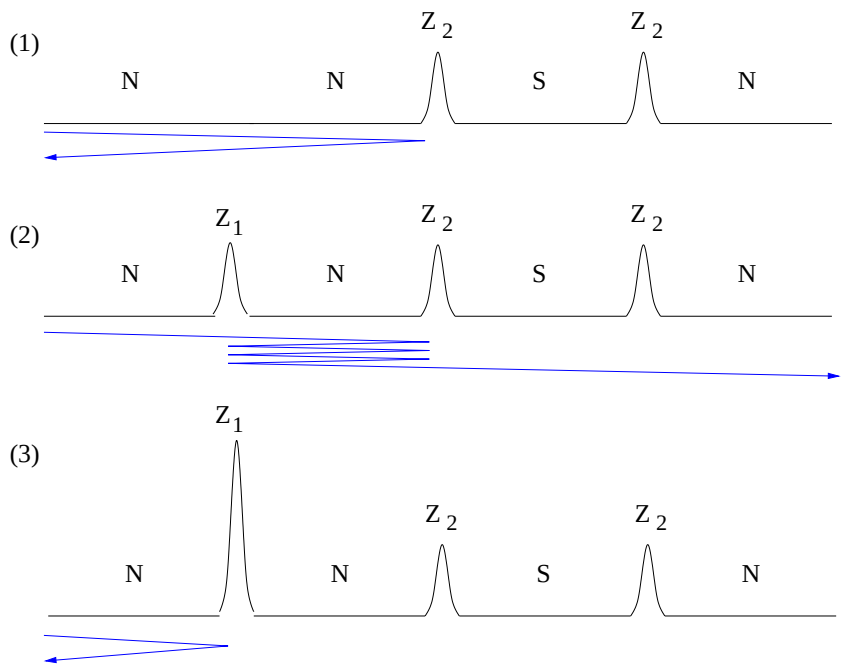

FIG. 1.9 – Trois différents régimes pour le passage des électrons à travers la jonction N-N-S-N. Les trois régimes sont indiqués sur la figure 1.8.

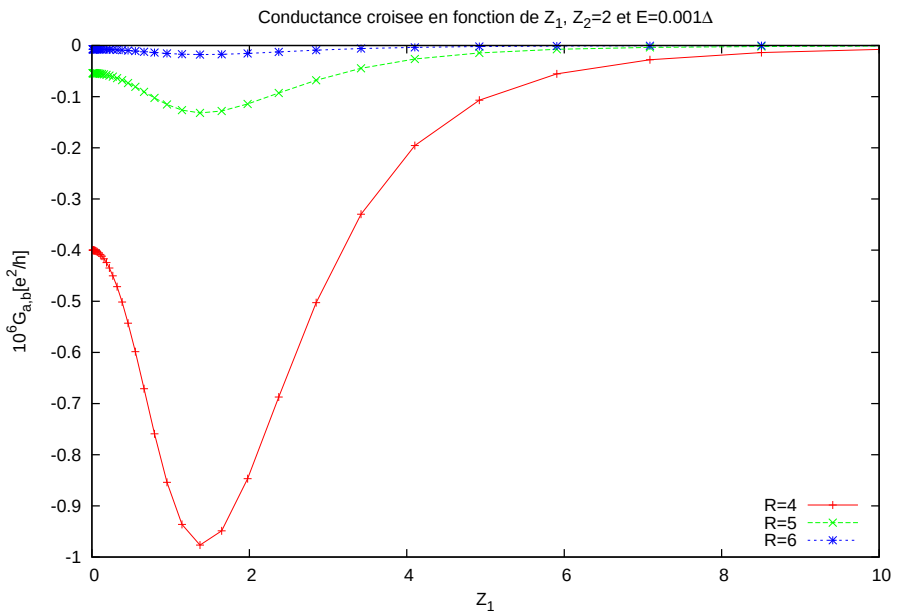

FIG. 1.10 – Conductance non locale en unité de $\frac{e^2}{h}$ en fonction de la barrière Z_1 dans le cas où l'énergie est bien au-dessous du gap ($E = 0.001\Delta$), avec $Z_2 = 2$. La longueur R du supraconducteur est donnée par $R = 4\xi$, $R = 5\xi$ et $R = 6\xi$ et $L = 10\xi$ avec $\epsilon_F/\Delta = 1000$ (où ϵ_F est l'énergie de Fermi).

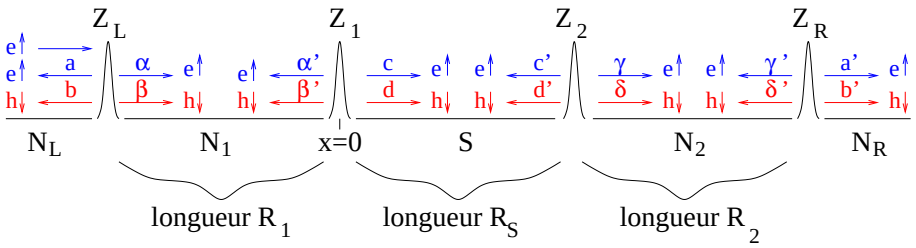

FIG. 1.11 – Schéma de la jonction N-N-S-N-N à une dimension avec BTK.

Les fonctions d'ondes sont données par

$$
\begin{aligned}
\psi_{N_L}(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x+R_1)} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F(x+R_1)} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x+R_1)} \\
\psi_{N_1}(x) &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x+R_1)} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x+R_1)} + \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F x} \\
\psi_S(x) &= c \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_F x} e^{-x/\xi(E)} + d \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} e^{-x/\xi(E)} \\
&\quad + c' \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x-R_S)} e^{(x-R_S)/\xi(E)} + d' \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x-R_S)} e^{(x-R_S)/\xi(E)} \\
\psi_{N_2}(x) &= \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x-R_S)} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x-R_S)} + \gamma' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x-R_S-R_2)} \\
&\quad + \delta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F(x-R_S-R_2)} \\
\psi_{N_R}(x) &= a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_F(x-R_S-R_2)} + b' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F(x-R_S-R_2)}.
\end{aligned}
$$

Nous avons huit conditions limites, deux pour chaque interfaces.

i) Condition de raccordement des fonctions d'onde :

$$
\begin{aligned}
&\psi_{N_L}(-R_1) = \psi_{N_1}(-R_1) \\
&\psi_{N_1}(0) = \psi_S(0) \\
&\psi_S(R_S) = \psi_{N_2}(R_S) \\
&\psi_{N_2}(R_S + R_2) = \psi_{N_R}(R_S + R_2)
\end{aligned}
$$

i) Condition de raccordement des dérivées des fonctions d'onde :

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{N_1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-R_1} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{N_L}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-R_1} = -2iZ_L\psi_{N_L}(-R_1) \\
&\left.\frac{\mathrm{d}\psi_S(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{N_1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -2iZ_1\psi_{N_1}(0) \\
&\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{N_2}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=R_S} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_S(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=R_S} = -2iZ_2\psi_S(R_S) \\
&\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{N_R}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=R_S+R_2} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{N_2}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=R_S+R_2} = -2iZ_R\psi_{N_2}(R_S + R_2)
\end{aligned}
$$

Nous moyennons le coefficient de transmission non local sur les oscillations de phase de Fermi $\varphi_1 = k_F(R_S - R_1)/2$, $\varphi = k_F R_S$ et $\varphi_2 = k_F(R_2 - R_S)/2$. C'est-à-dire, par exemple pour la moyenne sur φ_1 : $\mathcal{G}_{a,b} = \int_{R_1-\pi/k_F}^{R_1+\pi/k_F} \mathrm{d}R_1 \frac{k_F}{2\pi} \mathcal{G}_{a,b}(R_1)$. Nous avons la même chose pour les deux autres intégrales. La conductance non locale à tension nulle et pour $Z_L = Z_R$ et $Z_1 = Z_2 = 10$ en fonction de Z_L est représentée sur la figure 1.12.

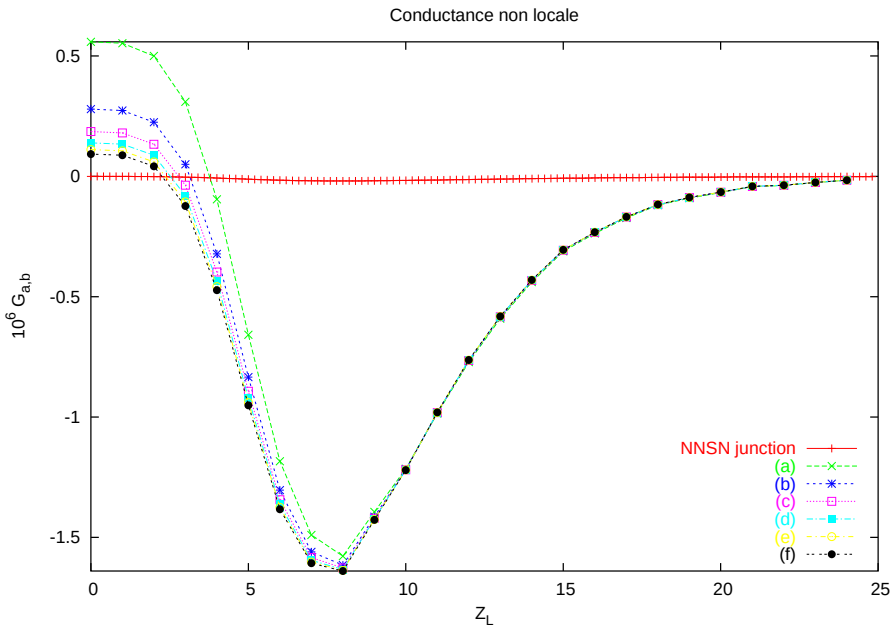

FIG. 1.12 – Conductance non locale en unité de e^2/h en fonction de la barrière $Z_L = Z_R$ avec $Z_1 = Z_2 = 10$ ($E = 0.0001\Delta$). (a) à (f) correspondent à l'augmentation de la précision dans l'évaluation des facteurs de phase de Fermi. La conductance non locale pour la jonction N-N-S-N est d'amplitude bien inférieure au cas N-N-S-N-N ce qui montre l'importance des réflexions multiples.

La conductance non locale est encore dominée par les processus transmettant des électrons, car elle est toujours négative. Pour une précision suffisamment grande dans le calcul de l'intégrale triple la conductance non locale tend vers les valeurs négatives à $Z_L = 0$. La partie positive des courbes pour Z_L petit sur la figure 1.12 n'est dû qu'à un manque de précision numérique. (Voir Fig. 1.23 pour l'approche des fonctions de Green où nous pouvons obtenir une précision élevée du fait de la plus petite taille de la matrice.)

En comparant le cas N-N-S-N-N avec la jonction N-N-S-N, nous pouvons constater que le désordre peut augmenter fortement l'amplitude de la conductance non locale pour la diffusion des électrons sur les impuretés. Effectivement, en diffusant sur les impuretés les électrons peuvent tenter plusieurs fois de passer la barrière à l'interface N-S.

En conclusion, nous avons montré que le confinement des quasiparticules aux interfaces N-S et S-N a pour effet d'augmenter la conductance non locale en valeur absolue et introduit un maximum. Cet effet est le même que pour la conductance d'une jonction N-S [39].

1.3 Méthode des fonctions de Green

La méthode des fonctions de Green est une seconde manière d'aborder le problème de la jonction N-S-N. Nous nous basons sur le modèle de Caroli, Combescot, Nozières et Saint-James [40, 41] qui résolvent le transport dans une jonction tunnel N-I-N.

Nous nous allons partir d'un modèle simple de l'Hamiltonien pour une jonction N-I-N (Appendice B.1), où nous calculerons directement le courant tunnel (Appendice B.5). Cette méthode comporte deux avantages :

1) La décomposition du système en trois parties (électrode gauche, barrière et électrode droite) résulte immédiatement de la théorie des perturbations dans l'espace réel, sans augmenter la difficulté mathématique.
2) Le courant peut être calculé directement, même à tension finie, avec l'aide de la théorie des perturbations dans le système hors équilibre qui généralise la technique des diagrammes.

Nous suivons les notations utilisées habituellement dans la littérature : nous utilisons la notation ω pour l'énergie dans l'approche des fonctions de Green, qui correspond à la même quantité que l'énergie E utilisée précédemment dans l'approche BTK.

1.4 Jonction N-S-N par les fonctions de Green

1.4.1 Principe des diagrammes

Les différents processus de transport peuvent être décrits par des diagrammes. Ainsi, la formule de transport (B.8) obtenue par Caroli, Combescot, Nozières et Saint-James [40, 41] est donnée par $I = (2\pi)^2 t_a^2 t_b^2 \frac{e}{\hbar} \int_\mu^{\mu+eV} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} G^A_{\alpha\beta}(\omega) G^R_{\beta\alpha}(\omega) \rho_{aa}(\omega) \rho_{bb}(\omega)$ où t_a et t_b sont les amplitudes tunnel respectivement à la première et à la seconde interface, μ le potentiel chimique et V la tension à l'électrode b. Cette formule de transport se généralise facilement à une somme sur les différents canaux de conduction pour des interfaces étendues. Nous pouvons représenter le transport non local dans une jonction N-I-N, où I est un isolant à bande interdite, par le diagramme général de la figure 1.13.

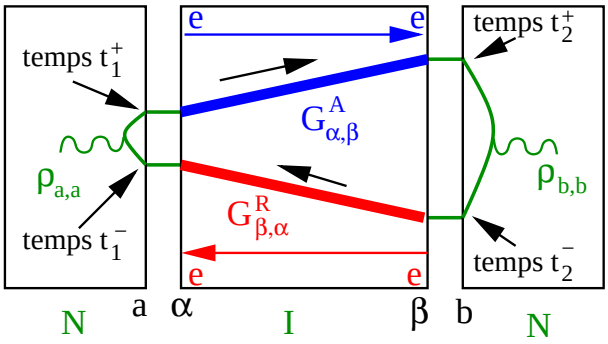

FIG. 1.13 – Diagramme général du transport dans une jonction N-I-N, où $t_2^+ > t_1^+$ sur la branche "+" du contour de Keldysh, et $t_2^- < t_1^-$ sur la branche "-" remontant le temps.

$G^A_{\alpha\beta}$ est la fonction de Green complète avancée. Elle correspond à la destruction, en un temps t_1^+, d'un électron à la première interface N-I et à la création, en un temps t_2^+, d'un électron à la seconde interface (avec $t_2^+ > t_1^+$). Par conséquent, la fonction de Green avancée complète $G^A_{\alpha\beta}$ correspond à la transmission de gauche à droite d'un électron dans le sens du temps. De la même manière, la fonction de Green retardée, $G^R_{\beta\alpha}$, correspond à la destruction, en un temps t_2^-, d'un électron à la seconde interface et à la création, en un temps t_1^-, d'un électron à la première interface. C'est-à-dire, un électron se propage de gauche à droite dans le sens du temps sur la branche "+" et un électron se propage de droite à gauche dans le sens inverse du temps sur la branche "-". Ce dernier est qualitativement équivalent à un trou se propageant de gauche à droite dans le sens du temps.

Sur la figure 1.13 les lignes ondulées correspondent aux densités d'état ρ_{aa} et ρ_{bb} dans les fonctions de Green $g^{+,-}$ et $g^{-,+}$ faisant changer de branche du contour de Keldysh.

Les fonctions de Green complètes peuvent se décomposer comme une somme de trajectoires (voir Fig. 1.14). Nous regardons en particulier la fonction de Green de propagation d'un électron de gauche

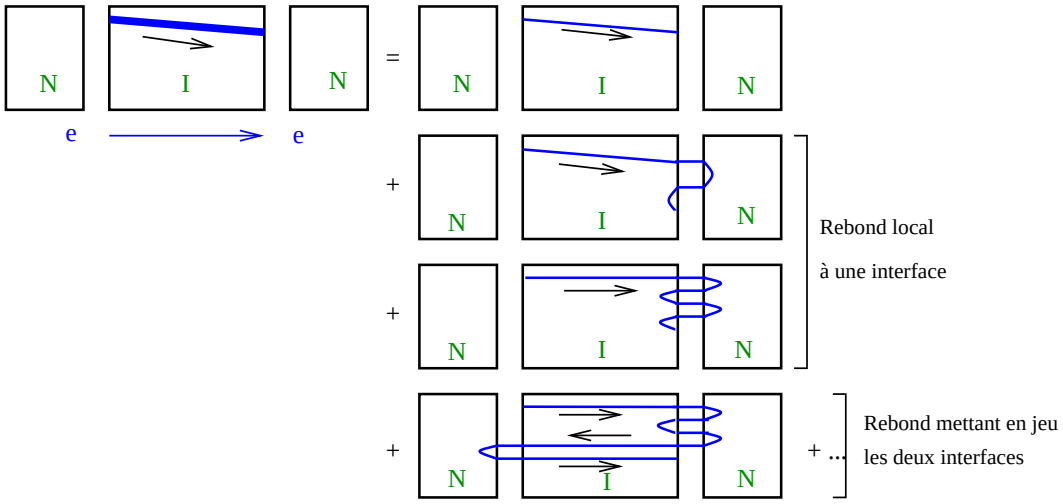

FIG. 1.14 – Quelques processus pour la fonction de Green connectant la première à la seconde électrode normale.

à droite, soit $G^A_{\alpha\beta}$. L'électron peut passer directement de la première électrode normale à la seconde électrode normale, c'est la trajectoire la plus simple. Néanmoins, il peut aussi rebondir sur une des interfaces, une où plusieurs fois, avant de pénétrer dans la seconde électrode normale, c'est ce que l'on appelle des rebonds locaux. Par ailleurs, l'électron peut être réfléchi à la seconde interface et revenir à la première interface avant d'être transmis à la seconde électrode normale, ce sont alors des rebonds non locaux. Le poids des trajectoires d'ordre supérieur diminue du fait des transparences d'interface. D'autre part, la propagation dans l'isolant est très fortement atténuée à cause de la très petite longueur de cohérence. Bien sûr, la fonction de Green pour la propagation en sens inverse du temps, $G^R_{\beta\alpha}$, peut se décomposer exactement de la même manière et le transport est donné par la somme de tous les processus possibles lorsque nous raccordons toutes les trajectoires pour les fonctions de Green avancées et retardées. L'intérêt de la discussion n'est pas tant de décrire les processus multiples dans un isolant que de généraliser plus tard au cas d'une jonction N-S-N et des ondes de densité de charge (Chapitre 4) où la longueur de cohérence est plus élevée.

Nous pouvons considérer deux différents types de processus. En insérant, un trou traversé par un flux magnétique certains processus se couplent avec le champ magnétique et d'autres non. En premier lieu, nous considérons les processus ne se couplant pas au champ magnétique. Le processus à l'ordre le plus bas ne se couplant pas au champ magnétique est la transmission directe, n'ayant aucun rebond. Effectivement, avec un flux magnétique la fonction de Green avancée devient $g^A_{11}(x,y) \rightarrow g^A_{11}(x,y)e^{\frac{ie}{\hbar}\int_x^y \vec{A}\mathrm{d}\vec{r}}$ et la fonction de Green retardée $g^R_{11}(y,x) \rightarrow g^R_{11}(y,x)e^{\frac{ie}{\hbar}\int_y^x \vec{A}\mathrm{d}\vec{r}}$ avec $\vec{A}$ le potentiel vecteur, ainsi les contributions du flux magnétique s'annulent. Les autres processus qui réagissent de la même manière, sont les processus qui n'ont que des rebonds locaux, car alors nous avons également juste le passage d'un électron (voir Fig. 1.15).

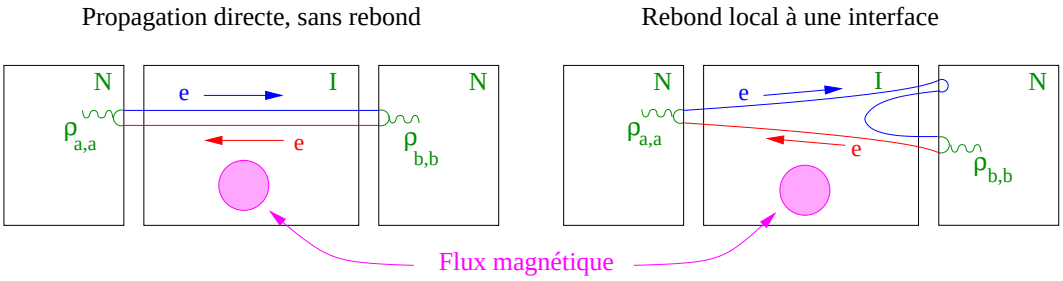

FIG. 1.15 – Processus ne se couplant pas au champ magnétique.

Par contre, les processus ayant des rebonds non locaux peuvent se coupler au champ magnétique. Par exemple, lorsqu'un trou est réfléchi à la seconde interface et revient à la première, nous avons un mode de transmission retardé-retardé (voir Fig. 1.16) et la fonction de Green avancée $g^A_{11}(x_1,y_1)$ et la première fonction de Green retardée $g^R_{11}(y_2,x_2)$ n'agissent plus sur le même site ainsi leurs contributions au champ magnétique ne se compensent plus. Des oscillations de période $h/2e$ apparaissent, alors, dans le transport non local en fonction du champ magnétique. Ce type de processus sera étudié en détail dans la section 4.5.1 pour une onde de densité de charge.

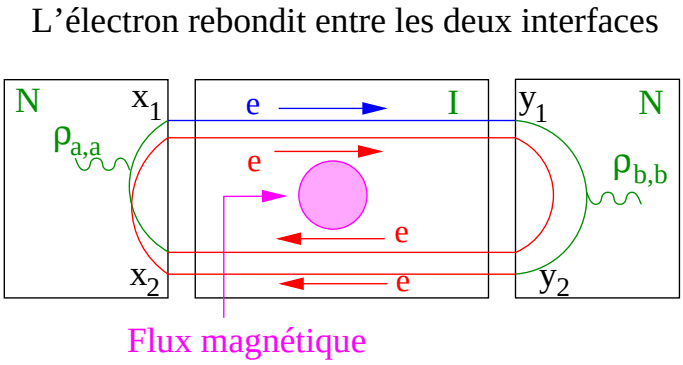

FIG. 1.16 – Premier processus se couplant au champ magnétique, un électron de la fonction de Green retardée rebondit d'une interface à l'autre créant un mode de transmission retardé-retardé. Nous retrouverons ce processus au chapitre 4 sur les oscillations de résistance d'une onde de densité de charge perforée par des nanotrous.

Pour décrire les différents processus, nous avons considéré une jonction N-I-N avec un isolant à bande interdite (voir Appendice D.1). De nouveaux effets interviennent lorsque nous considérons une jonction N-S-N. Effectivement, le supraconducteur, sous l'énergie du gap, couple les canaux de trous et d'électron.

1.4.2 Diagramme de réflexion d'Andreev non locale et de cotunneling élastique

Nous nous intéressons de nouveau à la jonction N-S-N. Les premiers diagrammes apparaissant à l'ordre le plus bas sont ceux de la réflexion d'Andreev, qui ne contribue pas au transport non local, et les processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev non locale.

Nous regardons, en premier lieu, le diagramme de réflexion d'Andreev à une interface N-S (il s'agit d'un processus local) [42, 38]. Nous rappelons que la réflexion d'Andreev consiste en un électron de spin up incident ayant une énergie inférieure à celle du gap qui ne peut pénétrer dans le supraconducteur. Nous avons alors création d'une paire de Cooper et rétrodiffusion d'un trou dans la bande de spin down. Sur le diagramme des fonctions de Green d'une réflexion d'Andreev (Fig. 1.17b), les indices e

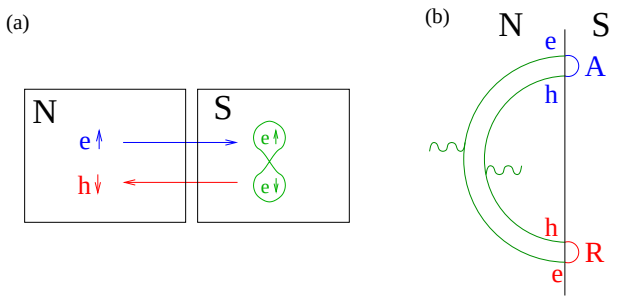

FIG. 1.17 – (a) Processus de réflexion d'Andreev. (b) Diagramme d'une réflexion d'Andreev. La ligne bleue du diagramme correspond à la fonction de Green avancée, la ligne rouge à la fonction de Green retardée et les lignes ondulées vertes aux densités d'état.

et h (électron et trou) correspondent aux indices de Nambu des fonctions de Green.

Maintenant, si nous considérons une jonction N-S-N, les deux processus à l'ordre le plus bas qui interviennent dans le transport non local sont les processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev croisée. Le courant pour le processus de cotunneling élastique est donné par

$$J = -\frac{(2\pi)^2 e t_{a\alpha}^2 t_{\beta b}^2}{\hbar} \int_{\mu}^{\mu+eV} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} g_{\alpha\beta}^{11A}(\omega) g_{\beta\alpha}^{11R}(\omega) \rho_a(\omega) \rho_b(\omega).$$

et le courant pour le processus de réflexion d'Andreev croisé est donné par

$$J = \frac{(2\pi)^2 e t_{a\alpha}^2 t_{\beta b}^2}{\hbar} \int_{\mu}^{\mu+eV} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} g_{\alpha\beta}^{12A}(\omega) g_{\beta\alpha}^{21R}(\omega) \rho_a(\omega) \rho_b(\omega).$$

Or $\overline{g_{\alpha\beta}^{11A}(\omega) g_{\beta\alpha}^{11R}(\omega)} = \overline{g_{\alpha\beta}^{12A}(\omega) g_{\beta\alpha}^{21R}(\omega)}$, avec $\overline{(\dots)}$ la moyenne soit sur le facteur de Fermi soit sur les impuretés[1]. Par conséquent, le courant dû aux processus de cotunneling élastique est compensé

[1] Les moyennes sur le facteur de Fermi et les impuretés des fonctions de Green du supraconducteur sont données respectivement dans l'appendice B.6 et dans l'appendice B.7

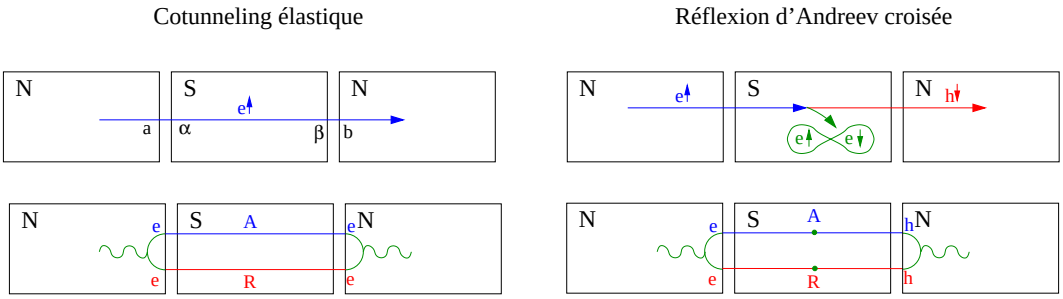

FIG. 1.18 – Processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev croisée, en haut. En bas les diagrammes. Les indices des sites sont sur le premier schéma. Les lignes bleues des diagrammes correspondent aux fonctions de Green avancées, les lignes rouges aux fonctions de Green retardées et les lignes ondulées vertes aux densités d'état.

par celui dû aux processus de réflexion d'Andreev croisée [12]. La moyenne sur les facteurs de Fermi consiste à moyenner sur les canaux de conduction [12].

1.4.3 Diagrammes d'ordre supérieur : Double réflexion d'Andreev

Nous étudions le coefficient de transmission associé à des processus de cotunneling. La conductance différentielle d'une jonction N-I-N est proportionnelle au coefficient de transmission (Caroli *et al.* [40]) et nous faisons la même chose pour un supraconducteur. Nous avons alors en plus un coefficient de transmission dans le canal électron trou (Andreev non local).

Comme les processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev croisée s'annulent mutuellement dans la conductance non locale, il nous faut regarder les processus d'ordre supérieur. La plupart des processus s'annulent également deux à deux. Par exemple, le processus qui transmet un électron par cotunneling élastique avec l'électron qui rebondit une fois sur chaque interface s'annule avec le processus qui transmet un trou et une paire de Cooper attrapée par le condensat du supraconducteur, avec l'électron qui rebondit sur la première interface et le trou qui rebondit sur la seconde interface (voir Fig. 1.19).

Un processus qui a beaucoup d'importance est le processus de double réflexion d'Andreev (voir Fig. 1.20) qui transmet deux électrons. Ce processus consiste en un électron incident avec une énergie inférieure à celle du gap du supraconducteur, ne pouvant passer par effet tunnel dans le supraconducteur, il y a une réflexion d'Andreev et un trou est rétrodiffusé. La paire créée s'étale sur l'ordre de la longueur de cohérence. Ainsi, si la deuxième interface n'est pas trop éloignée, il peut y avoir une seconde réflexion d'Andreev, qui peut être décalée par rapport à la première pour autant que la distance soit inférieure à la longueur de cohérence, et ainsi deux électrons sont transmis.

Ce processus a une probabilité d'arriver qui décroît exponentiellement avec l'épaisseur du supraconducteur. Ceci est compatible avec le fait que Russo *et al.* [16] n'ont pas mesuré de signal pour des épaisseurs du supraconducteur plus grandes que la longueur de cohérence. Par comparaison dans une jonction N-S-N à deux terminaux nous avons des processus d'Andreev "locaux" à chaque interface et propagation à longue distance d'une paire dans le condensat entre les deux interfaces. Un courant serait alors mesuré même pour des épaisseur du supraconducteur bien plus grandes que la longueur de

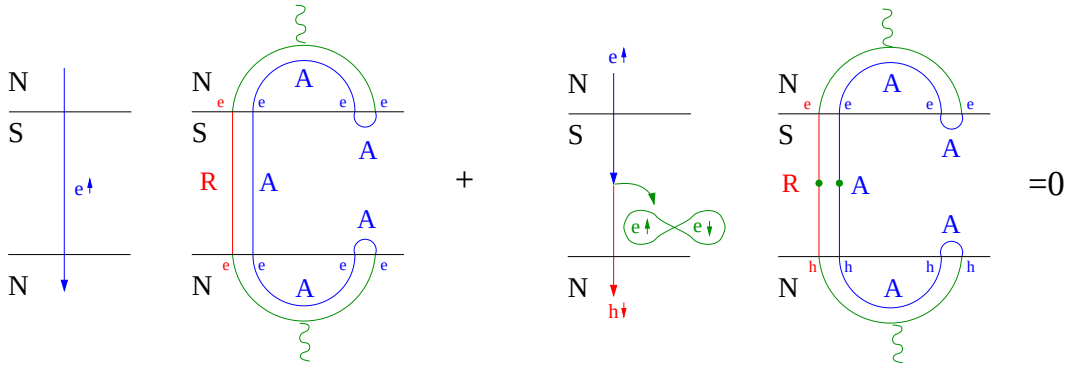

FIG. 1.19 – Deux processus d'ordre T^4 dans la transparence des interfaces et s'annulant mutuellement. En premier, le processus similaire au cotunneling élastique et transmettant un électron, où l'électron rebondit une fois localement sur chaque interface. En second un processus similaire à la réflexion d'Andreev croisée, transmettant un trou. Ici l'électron et le trou rebondissent chacun sur l'interface leur correspondant. Les lignes bleues des diagrammes correspondent aux fonctions de Green avancées, les lignes rouges aux fonctions de Green retardées et les lignes ondulées vertes aux densités d'état.

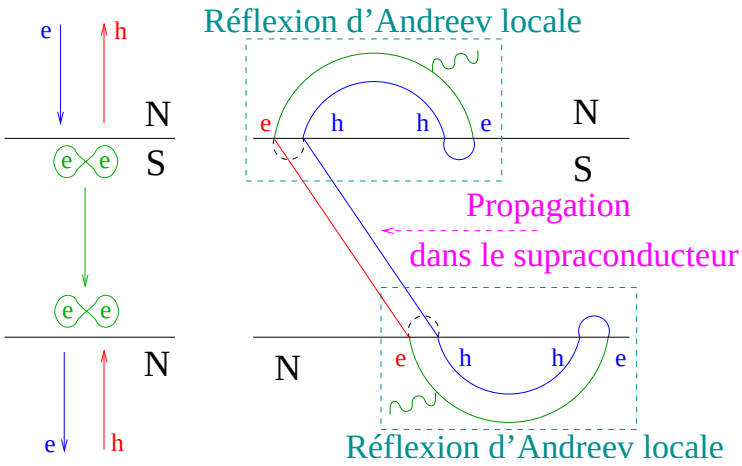

FIG. 1.20 – Processus d'ordre T^4 en transparence contenant deux réflexions d'Andreev locales et transmettant deux électrons. Les lignes bleues du diagramme correspondent aux fonctions de Green avancées, les lignes rouges aux fonctions de Green retardées et les lignes ondulées vertes aux densités d'état.

cohérence [43, 44].

Maintenant, un autre point important est que la transparence d'interface dans l'expérience de Russo *et al.* [16] vaut approximativement $T = 10^{-5}$ qui est extrêmement faible. Il nous faut donc nous poser la question de pourquoi un processus d'ordre T^4 dans la conductance non locale est mesurable. Ceci est une particularité de ce processus, sa résistance non locale, comme nous allons le voir, ne dépend pas de la transparence aux interfaces dans la limite de très faibles transparences. Effectivement, la conductance non locale de ce processus, peut se décomposer comme la conductance d'une réflexion d'Andreev locale fois la conductance de la seconde réflexion d'Andreev et fois le propagateur dans le supraconducteur qui ne dépend pas des interfaces. Le tout doit être divisé par le nombre de canaux du système, car les deux réflexions d'Andreev sont connectées par une propagation limitée par la longueur de cohérence dans le supraconducteur et ne peuvent pas être trop éloignées l'une de l'autre dans la direction parallèle aux interfaces.

$$\mathcal{G}_{ab}(V_b) = \frac{\partial I_a}{\partial V_b}(V_b) = \frac{[G_{loc}^{(R.A)}]^2(V_b)\mathcal{S}(V_b)}{N_{ch}} \tag{1.9}$$

où $G_{loc}^{(R.A)}$ est la conductance de réflexion d'Andreev locale, N_{ch} est le nombre de canaux parallèles à l'interface et $\mathcal{S}(V_b)$ correspond à la propagation dans le supraconducteur. Le facteur $\mathcal{S}(V_b)$ ne dépend pas des transparences d'interfaces.

En effet, chaque réflexion d'Andreev vient avec un facteur N_{ch}, car la conductance d'Andreev est proportionnelle à la surface de la jonction. La conductance non locale est également proportionnelle à la surface de la jonction d'où le facteur $1/N_{ch}$ dans (1.9).

La transmission dans le supraconducteur implique d'évaluer la probabilité de diffusion du site α au site β (voir Appendice B.7) :

$$\int \mathrm{d}^2\beta\mathcal{P}(\alpha \to \beta) = \epsilon_F^2 \int \mathrm{d}^2\beta \overline{g_{\alpha\beta}^{11A} g_{\beta\alpha}^{22R}}$$

Dans un système diffusif nous avons, de même que pour le courant Josephson [45],

$$\int \mathrm{d}^2\beta\mathcal{P}(\alpha \to \beta) = \epsilon_F^2\pi^2\rho_S^2 \frac{2\omega^2 - \Delta^2}{\Delta^2 - \omega^2} \int \frac{2\pi y \mathrm{d}y}{\sqrt{d^2 + y^2}} e^{-2\sqrt{d^2+y^2}/\xi} \propto \frac{2\omega^2 - \Delta^2}{\Delta^2 - \omega^2} \frac{\xi}{l_e} e^{-d/\xi} \tag{1.10}$$

avec $R_{\alpha\beta} = \sqrt{d^2 + y^2}$ où d est l'épaisseur du supraconducteur et y l'éloignement horizontal entre les deux réflexions d'Andreev.

Dans l'expérience de Russo *et al.* [16], c'est la résistance non locale qui est mesurée. Or comme nous avons un système à trois terminaux, la résistance est matricielle et la matrice de résistance est donnée par l'inverse de la matrice de conductance.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}_{aa} & \mathcal{R}_{ab} \\ \mathcal{R}_{ba} & \mathcal{R}_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{aa} & \mathcal{G}_{ab} \\ \mathcal{G}_{ba} & \mathcal{G}_{bb} \end{pmatrix}^{-1}$$

Nous en déduisons que la résistance non locale $\mathcal{R}_{ab}(V_b)$ est donnée par

$$\mathcal{R}_{ab}(V_b) = \frac{-\mathcal{G}_{ab}}{[G_{loc}^{(R.A)}]^2(V_b) - \mathcal{G}_{ab}\mathcal{G}_{ba}}.$$

Comme la conductance non locale est de l'ordre T^4 et la conductance locale est de l'ordre T^2, nous pouvons approximer la résistance non locale

$$\mathcal{R}_{ab}(V_b) = \frac{-\mathcal{G}_{ab}(V_b)}{[G_{loc}^{(R.A)}]^2(V_b)} = -\frac{\mathcal{S}(V_b)}{N_{ch}} \tag{1.11}$$

Nous voyons donc que la résistance non locale du processus de double réflexion d'Andreev n'a pas de dépendance en transparence, puisque le propagateur $\mathcal{S}(V_b)$ dans le supraconducteur n'a lui même aucune dépendance en transparence dans la limite des très faibles dépendances. De plus, la résistance non locale est positive.

Par ailleurs, nous pouvons voir en faisant un développement perturbatif, que les premiers processus à intervenir sont ceux ne dépendant pas de la transparence.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{ab}(V_b) &= A_2T^2 + A_4T^4 + A_6T^6 + \mathcal{O}(T^8) \\
\mathcal{G}_{aa}(V_b) &= C_2T^2 + C_4T^4 + C_6T^6 + \mathcal{O}(T^8) \\
\mathcal{R}_{ab}(V_b) &= B_{-2}T^{-2} + B_0 + B_2T^2 + \mathcal{O}(T^4)
\end{aligned}$$

La raison pour laquelle $\mathcal{G}_{aa}$ est évalué à énergie V_b est que l'énergie est fixée par la tension V_b appliquée à l'électrode b. Nous en déduisons

$$\mathcal{R}_{ab}(V_b) = \frac{-\mathcal{G}_{ab}}{G_{loc}^{(R.A)2}(V_b)} = \frac{A_2T^2 + A_4T^4 + A_6T^6 + \mathcal{O}(T^8)}{(C_2T^2 + C_4T^4 + C_6T^6 + \mathcal{O}(T^8))^2} = \frac{1}{T^2}\frac{A_2 + A_4T^2 + A_6T^4 + \mathcal{O}(T^6)}{C_2^2 + 2C_2C_4T^2 + \mathcal{O}(T^4)}$$

Ainsi, $B_{-2} = \frac{A_2}{C_2^2} = 0$, car nous avons vu que A_2 qui correspond aux processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev non locale est nul. Le coefficient suivant est

$$B_0 = \frac{A_4 - \frac{2A_2C_4}{C_2^2}}{C_2^2} \simeq \frac{A_4}{C_2^2}$$

le coefficient A_4 correspond au processus de double réflexion d'Andreev.

1.5 Comparaison de l'effet tunnel sans réflexion - approche perturbative

1.5.1 Modèle de liaisons fortes

Nous considérons maintenant un modèle de liaisons fortes (voir Fig. 1.21) pour une jonction N-N-S-N-N. Les doubles jonctions normales sont là pour simuler le désordre. Les termes de hopping t et t', sont reliés aux termes Z des barrières dans le modèle de BTK par $Z = (1-(t/\mathcal{T})^2)/(2t/\mathcal{T})$, où $\mathcal{T}$ est l'amplitude de saut en volume. Si nous regardons les variations de la conductance non locale obtenues par le modèle de BTK et à l'aide des fonctions de Green, en identifiant Z avec $t/\mathcal{T}$, nous obtenons des résultats fortement similaires mais pas parfaitement identiques pour la conductance non locale lorsque l'approche des fonctions de Green et celle du modèle BTK sont remis à l'échelle l'un de l'autre. Ceci n'est pas surprenant car la dépendance en énergie de la conductance d'une jonction N-S n'est pas la même pour l'approche BTK et pour les fonctions de Green microscopiques (du fait d'hypothèses

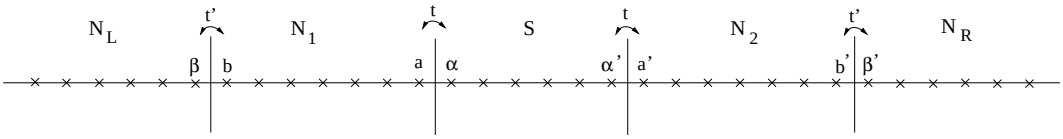

FIG. 1.21 – Jonction N-N-S-N-N avec le modèle de liaisons fortes.

différentes sur la géométrie et sur les barrières). Maintenant, nous allons montrer que la conductance d'effet tunnel sans réflexion suit très bien la forme (1.9) issue de la théorie de perturbation.

La conductance locale $\mathcal{G}_{loc}(V_b = 0, t/\mathcal{T}, t'/\mathcal{T})$ est tracée en fonction de la conductance non locale $\mathcal{G}_{ab}(V_b = 0, t/\mathcal{T}, t'/\mathcal{T})$ sur la figure 1.22. Nous introduisons, par ailleurs, un fit de $\mathcal{G}_{ab}(V_b = 0, t/\mathcal{T}, t'/\mathcal{T}) = \mathcal{S}(V_b = 0)\mathcal{G}^2_{loc}(V_b = 0, t/\mathcal{T}, t'/\mathcal{T})$ correspondant à (1.11) dans le cas où le nombre de canaux est $N_{ch} = 1$, comme dans notre modèle unidimensionnel (voir Fig. 1.22). Le fit de $\mathcal{G}_{ab}(V_b =$

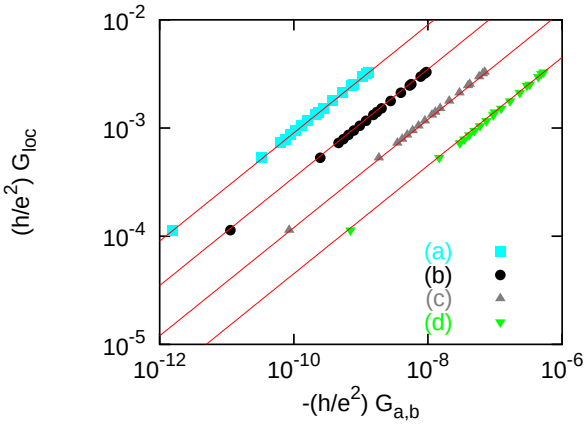

FIG. 1.22 – Corrélations entre la conductance locale (axe y) et la conductance non locale (axe x), pour des pics similaires à ceux de la figure 1.12, comme une fonction d'un balayage de $t'/\mathcal{T}$ pour un $t/\mathcal{T} = 0.05$ fixé. Nous calculons $G_{loc}(t'/\mathcal{T})$ et $\mathcal{G}_{ab}(t'/\mathcal{T})$ que nous traçons l'un en fonction de l'autre dans le cas à un canal : $N_{ch} = 1$. (a) $R/\xi = 5$, (b) $R/\xi = 4$, (c) $R/\xi = 3$ et (d) $R/\xi = 2$. Les lignes rouges correspondent au fit $\mathcal{G}_{ab}(t'/\mathcal{T}) \propto (G_{loc}(t'/\mathcal{T}))^2$.

$0, t/\mathcal{T}, t'/\mathcal{T}) = \mathcal{S}(V_b = 0)\mathcal{G}^2_{loc}(V_b = 0, t/\mathcal{T}, t'/\mathcal{T})$ est vraiment très bien respecté. Ceci démontre la validité de l'équation (1.11) et montre que le processus dominant dans la résistance non locale pour de faibles tensions V_b est le processus de double réflexion d'Andreev, c'est-à-dire la création à une interface d'une paire, sa propagation et sa destruction à la seconde interface.

1.5.2 Amplification due au désordre

Comme pour notre approche de BTK avec des jonctions supplémentaires, nous obtenons pour les fonctions de Green la possibilité d'une forte amplification de la conductance non locale par le désordre. Nous traçons la conductance non locale normalisée par la conductance dans le cas sans impureté en fonction du terme de hopping (Fig. 1.23). Ceci suggère que la conductance non locale est fortement

amplifiée par les impuretés et qu'elle ne change pas de signe du fait de la diffusion sur le désordre. La figure 1.23 pour les fonctions de Green est l'analogue de la figure 1.12 pour la méthode de BTK.

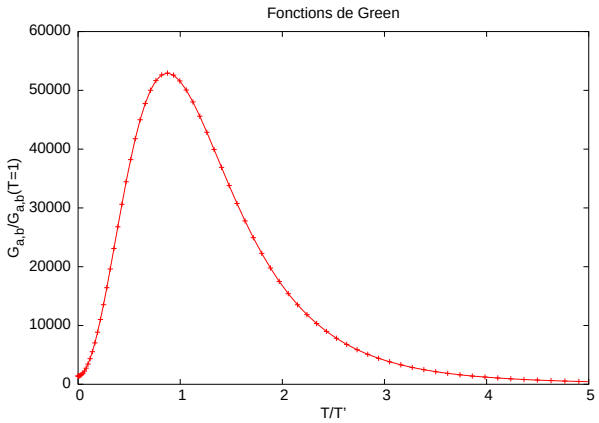

FIG. 1.23 – Conductance non locale normalisée en fonction du terme de hopping pour une jonction N-N-S-N-N par la méthode des fonctions de Green. La normalisation est faite par la conductance non locale du système sans impureté.

1.6 Synthèse et comparaison à l'expérience

Le fait de comparer deux méthodes différentes (BTK et fonctions de Green) et deux régimes différents (régime perturbatif et effet tunnel sans réflexion) nous a permis d'aborder la jonction N-S-N sous des points de vue différents. Nous avons mis en évidence le rôle que peut jouer la diffusion sur le désordre. Effectivement, les doubles jonctions normales (N-N-S-N-N) ont fortement amplifié l'amplitude de la conductance non locale. Par contre, elles ne modifient pas le signe de la conductance non locale qui reste toujours négative, indiquant que ce sont les processus transmettant des électrons qui dominent dans le transport non local de notre modèle.

L'approche des fonctions de Green nous a permis d'établir les différents processus intervenant dans le transport non local jusqu'à l'ordre T^4 où T est la transparence normale. Nous avons vu que les deux processus à l'ordre le plus bas dans l'amplitude tunnel sont les processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev croisée. Néanmoins, ces deux processus s'annulent mutuellement dans la conductance non locale, car ils ont la même probabilité d'avoir lieu mais transportent une charge de signe opposé.

En regardant l'ordre supérieur, nous avons établi qu'un nouveau processus de double réflexion d'Andreev qui transmet deux électrons est primordial. En effet, le processus de double réflexion d'Andreev est d'ordre T^4 dans la conductance non locale, mais il a la particularité (du fait de sa décomposition en deux réflexions d'Andreev locales et un propagateur dans le supraconducteur) d'avoir une résistance non locale indépendante de la transparence des barrières pour une transparence faible.

En traçant la conductance locale en fonction de la conductance non locale, nous obtenons un très bon accord entre les simulations incluant l'effet du confinement das quasiparticules à l'interface N-S dû aux impuretés et les expressions perturbatives. Indiquant par là, que c'est bien le processus de

double réflexion d'Andreev qui domine dans le transport non local.

Nous pouvons comparer nos résultats avec l'expérience de Russo *et al.* [16].

1) Nous trouvons que la conductance non locale est négative, ce qui est en accord avec l'expérience de Russo *et al.* [16] pour les basses tensions.
2) Notre théorie n'introduit pas de changement de signe dans la conductance non locale, ni de disparition du signal non local au-delà d'une tension caractéristique.
3) L'ordre de grandeur de la résistance non locale que nous trouvons est plausible par rapport aux mesures, y compris en l'absence d'effet tunnel sans réflexion.
4) La géométrie de l'expérience de Russo *et al.* [16] n'est pas équivalente à la notre, nous nous trouvons dans deux régimes différents. Effectivement, l'énergie de Thouless à une interface vaut $E_{Th} = D/A$ où A est la surface de l'interface. Dans l'expérience de Russo *et al.* [16] les interfaces sont étendues avec $E_{Th} \ll eV$ alors que dans notre géométrie unidimensionnelle nous sommes toujours à $E_{Th} \gg eV$.

Une question ouverte est de regarder le deuxième type de diagrammes ayant des modes de transmission avancé-avancé ou retardé-retardé et qui se couplent au champ magnétique. Il est effectivement important de comprendre les effets d'interférence quantique pour le transport non local. Afin d'avoir une meilleure idée des effets de ces processus, nous les étudierons pour une structure d'ondes de densité de charge dans le chapitre 4.

Pour le moment, nous allons considérer la géométrie plus complexe d'un SQUID formé par un nanotube de carbone où les processus non locaux vont jouer un rôle important.

Chapitre 2

SQUID dc à base d'un nanotube de carbone

2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, un fort intérêt est apporté aux structures hybrides contenant un supraconducteur, car elles offrent la possibilité d'obtenir des paires d'électrons corrélées. Les jonctions Josephson à travers un point quantique formé par un nanotube de carbone [46] et les SQUIDs (Superconducting QUantum Interference Device) réalisés par Cleuziou *et al.* [30] peuvent être vus comme des avancées dans les techniques de miniaturisation permettant une étape supplémentaire dans le transport de paires d'électrons séparés spatialement. L'idée est de comprendre qualitativement le système lorsque le contact avec le supraconducteur est petit

Les SQUIDs permettent de mesurer très précisément les flux magnétiques [47], le facteur de phase magnétique étant différent pour les paires de Cooper passant à travers l'une ou l'autre des deux jonctions Josephson. Par conséquent, il y a une modulation du supercourant total par le flux magnétique.

En outre, le SQUID formé d'un nanotube de carbone [30] permettra des mesures des moments magnétiques de molécules individuelles. Effectivement, la molécule posée sur le nanotube de carbone aura un flux magnétique pénétrant dans le nanotube de carbone. Ce qui aura pour effet de moduler le supercourant du SQUID.

C'est pourquoi, les SQUIDs formés par un nanotube de carbone sont très prometteurs pour étudier les états de spin d'une molécule magnétique individuelle placée sur le nanotube au niveau d'une jonction Josephson, car le champ magnétique aura une forte pénétration dans la section du nanotube.

Parfois le nanotube de carbone est mal aligné (voir Fig. 2.1b) et le contact du nanotube sur le supraconducteur central est très petit. En outre, la résolution de l'échantillon peut descendre jusqu'à 30nm, ainsi il sera possible de miniaturiser encore plus les SQUIDs formés d'un nanotube de carbone pour que le supraconducteur central ait une dimension comparable à la longueur de cohérence du supraconducteur. De tels échantillons peuvent être sensible à des réflexions d'Andreev non locales dans le supraconducteur, ainsi de nouveaux processus sont autorisés. Ce sont les effets de ces processus "non locaux" dans un SQUID qui nous intéressent. Effectivement, nous cherchons à comprendre qualitativement par un modèle simplifié les effets dus aux processus non locaux.

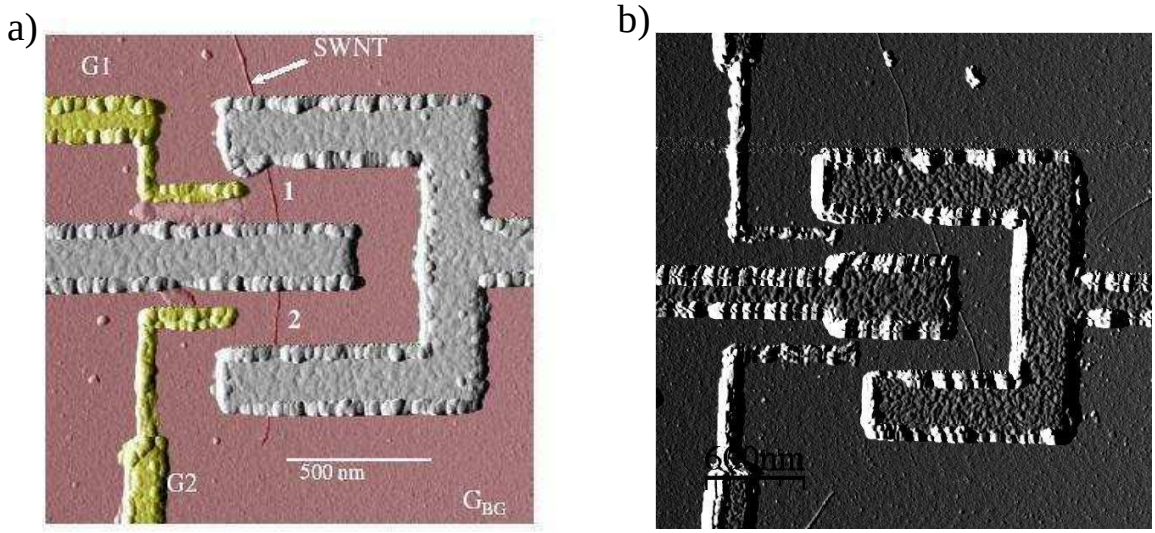

FIG. 2.1 – SQUID formé d'un nanotube de carbone réalisé par Cleuziou *et al.*[30](a). Exemple d'un échantillon ou le nanotube est mal aligné, le contact du nanotube avec le supraconducteur à une très faible surface (b).

2.2 Modèle à un canal

Nous considérons un SQUID formé par deux supraconducteurs reliés par un nanotube. Ce travail est inspiré de l'expérience de Cleuziou *et al.* [30]. Le confinement quantique à chacune des jonctions Josephson induit un point quantique discret, dont les niveaux d'énergie peuvent être contrôlés par deux grilles latérales électrostatiques (V_g^1 et V_g^2). Nous pouvons alors passer d'un état résonant où un niveau de chaque point quantique est aligné au gap du supraconducteur à un état hors résonant où aucun état n'est au niveau du gap (voir Fig. 2.3). Pour être plus précis, ce sont les effets de taille finie et les interactions de Coulomb qui, par confinement, impliquent que les jonctions se comportent comme des points quantiques. Nous négligeons, néanmoins, les interactions coulombiennes dans les points quantiques[1]. Les grilles peuvent également être utilisées pour ajuster directement l'interférence de phase quantique des paires de Cooper circulant dans la boucle. En particulier, les jonctions Josephson, effectuées par le même nanotube de carbone, peuvent être utilisées afin d'obtenir soit une jonction 0 soit une jonction π [30]. Dans une jonction π le courant critique change de signe, il y a un déphasage de π : $I_S = I_c \sin(\phi + \pi)$.

Un champ magnétique est appliqué au centre de la boucle formée par le nanotube. Les parties du nanotube au contact du supraconducteur deviennent elles aussi supraconductrices grâce à l'ouverture d'un minigap Δ_0 induit par l'effet de proximité. Notre modèle s'applique à l'état hors résonant (voir Fig. 2.3) où les points quantiques agissent comme des barrières isolantes et peuvent ainsi être décrites par une amplitude tunnel [49]. Ainsi, nous pouvons assimiler le système à un modèle à un canal en terme de hopping (un nanotube à un feuillet contient deux canaux mais afin de simplifier nous n'en considérons qu'un). Le nanotube est divisé en cinq parties connectées l'une à l'autre. De haut en bas

[1]Les couplages du point quantique au supraconducteur ne doivent pas être extrêmement petit de manière à ce que la capacité du point quantique soit assez large pour que l'on puisse négliger les effets de blocage de Coulomb [48]

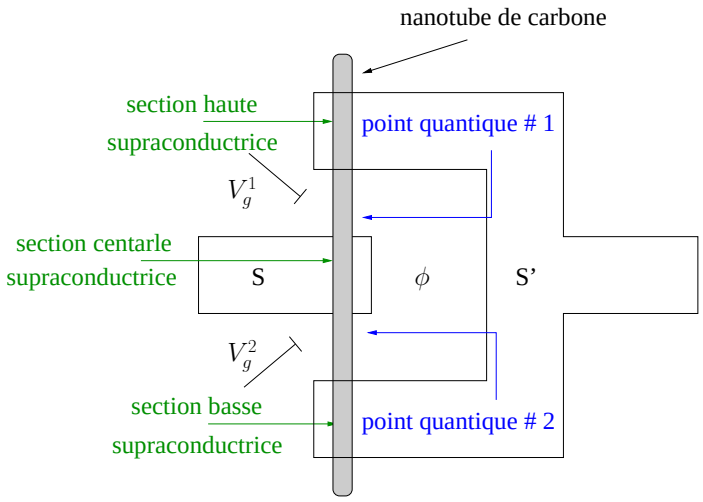

FIG. 2.2 – Schéma d'un SQUID formé par deux supraconducteurs déposés sur un nanotube de carbone.

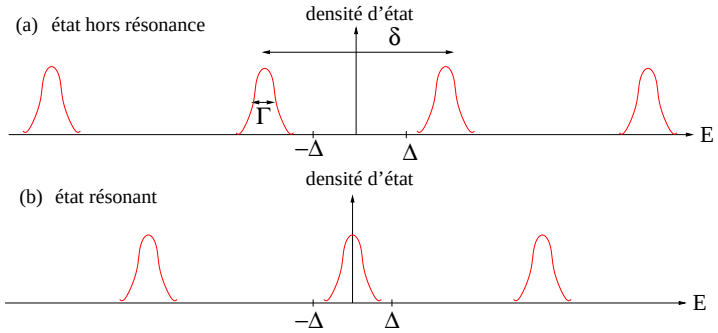

FIG. 2.3 – Mode hors résonant (a) et mode résonant (b) des états d'énergie d'un des points quantiques du SQUID.

nous avons : la partie haute supraconductrice par effet de proximité avec minigap $|\Delta_0|$ en contact avec S', le premier point quantique, la partie centrale avec minigap $|\Delta_0|$ en contact avec S, le second point quantique et la partie basse supraconductrice avec minigap $|\Delta_0|$ en contact avec S'.

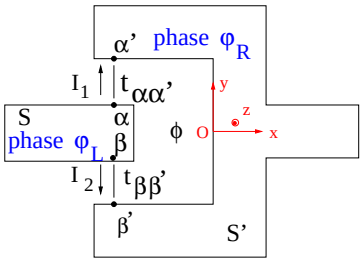

FIG. 2.4 – Géométrie du SQUID nanotube avec les termes de hopping de l'état hors résonant.

En résumé, nous faisons plusieurs hypothèses simplificatrices :

1) L'effet de proximité entre le nanotube et le supraconducteur n'est pas décrit explicitement. Nous traitons la supraconductivité induite dans le nanotube comme une supraconductivité en volume. Nous utilisons, par conséquent, la dénomination gap au lieu de minigap.
2) Nous supposons que la densité d'état dans la fenêtre d'énergie du gap s'annule, c'est-à-dire que nous sommes dans l'état hors résonant. Les points quantiques sont alors équivalents à des barrières isolantes décrites par une amplitude tunnel [49].
3) Nous considérons le nanotube de carbone comme un unique canal de transmission.
4) Les interactions de Coulomb dans les points quantiques ne sont pas prises en compte. Donc, δ sur la figure 2.4 est considéré comme un effet de taille finie qui n'est pas dû aux interactions coulombiennes.
5) Finalement, la distance $R_{\alpha\beta}$ entre les sites α et β est supposée suffisamment petite ($R_{\alpha\beta} \geq \xi$) pour avoir des effets croisés, donc $\hat{g}_{\alpha\beta} \neq 0$. Par contre, la distance $R_{\alpha'\beta'}$ entre les sites α' et β' est supposée trop grande, $R_{\alpha'\beta'} \gg \xi$ et donc nous n'avons pratiquement pas de propagation évanescente entre α' et β' à travers S' : $\hat{g}_{\alpha'\beta'} = 0$.

Comme nous le voyons sur la figure 2.5, le supercourant est donné par la somme des deux courants

$$I_S(\Delta\varphi, \phi) = I_1(\Delta\varphi, \phi) + I_2(\Delta\varphi, \phi) \tag{2.1}$$

où $\Delta\varphi = \varphi_R - \varphi_L$ est la différence de phase supraconductrice entre les deux supraconducteurs (voir Fig 2.4).

Les courants $I_1(\Delta\varphi, \phi)$ et $I_2(\Delta\varphi, \phi)$ peuvent être calculés de deux manières : soit à l'aide des fonctions de Green (Sec. 2.2.1) soit en utilisant les relations thermodynamiques (Sec. 2.2.2)

$$I_S(\Delta\varphi, \phi) = \frac{2e\Delta}{\hbar}\left(\frac{\partial\Omega_1(\Delta\varphi, \phi)}{\partial(\Delta\varphi)} + \frac{\partial\Omega_2(\Delta\varphi, \phi)}{\partial(\Delta\varphi)}\right) \tag{2.2}$$

où $\pm\Omega_{1,2}(\Delta\varphi, \phi)$ sont les états liés des niveaux d'énergie.

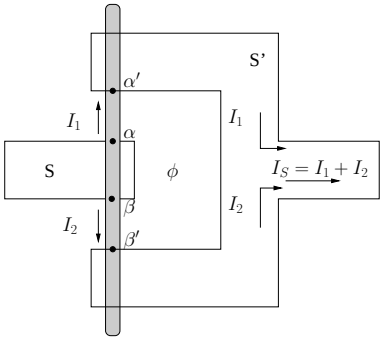

FIG. 2.5 – Représentation du supercourant d'un SQUID formé par deux supraconducteurs qui sont reliés par un nanotube.

2.2.1 Méthode des fonctions de Green

Le courant passant en 1 est donné par

$$I_1 = \frac{e}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\left\{\left(\hat{t}_{\alpha\alpha'}\hat{G}^{+}_{\alpha'\alpha}(\omega) - \hat{t}_{\alpha'\alpha}\hat{G}^{+}_{\alpha\alpha'}(\omega)\right)\hat{\sigma}_z\right\}\mathrm{d}\omega, \tag{2.3}$$

où la trace s'effectue sur les indices de Nambu et $\hat{\sigma}_z$ est une matrice de Pauli. Les self-energies pour le hopping de α à α' et de β à β' sont données par

$$\hat{t}_{\alpha\alpha'} = \begin{pmatrix} t_a\exp(i\phi/2) & 0 \\ 0 & -t_a\exp(-i\phi/2) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\hat{t}_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} t_b\exp(-i\phi/2) & 0 \\ 0 & -t_b\exp(i\phi/2) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

avec $\hat{t}_{\alpha\alpha'} = (\hat{t}_{\alpha'\alpha})^\star$ et $\hat{t}_{\beta\beta'} = (\hat{t}_{\beta'\beta})^\star$. Les paramètres de hopping t_a et t_b sont reliés au coefficient de transmission pour une jonction en métal normal ($T^{a,b}_{NN}$) par

$$T^{a,b}_{NN} = (4t^2/W^2)/(1+t^2/W^2)^2 \tag{2.6}$$

où $W = 1/\pi\rho_N$, avec ρ_N la densité d'état du métal normal.

Le choix de jauge a été fait en considérant que $R_{\alpha\beta} \geq \xi$ et $R_{\alpha\beta} \ll R_{\alpha\alpha'}, R_{\beta\beta'}$. La jauge est $A_x = By/2$, $A_y = Bx/2$ et $A_z = 0$ avec l'origine sur la figure 2.4. B étant le champ magnétique appliqué et $\vec{A}$ le potentiel vecteur. $\int_\alpha^\beta \vec{A}\mathrm{d}\vec{r}$ a alors une valeur finie et $\int_\alpha^{\alpha'} \vec{A}\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\beta^{\beta'} \vec{A}\mathrm{d}\vec{r}$ en supposant que $R_{\alpha\alpha'} = R_{\beta\beta'}$. Nous négligeons la partie $\int_\alpha^\beta \vec{A}\mathrm{d}\vec{r} \simeq 0$ car $R_{\alpha\beta} \ll R_{\alpha\alpha'}, R_{\beta\beta'}$. La propagation d'une particule entre α' et β' a une petite amplitude car $R_{\alpha'\beta'} \gg \xi$. Les processus non locaux entre α' et β' sont donc négligeables, bien que $\int_{\alpha'}^{\beta'} \vec{A}\mathrm{d}\vec{r} \neq 0$. Les équations pour $\hat{t}_{\alpha\alpha'}$ et pour $\hat{t}_{\beta\beta'}$ prennent avec ce choix de jauge la forme (2.4) et (2.5). Notons que nous supposons que le supercourant est suffisamment faible pour ne pas tenir compte du gradient de la phase supraconductrice dans S'.

La fonction de Green de Keldysh [40] $\hat{G}^+(\omega)$ est donnée par l'équation de Dyson-Keldysh

$$\hat{G}^+(\omega) = (\hat{\mathbb{I}} + \hat{G}^R(\omega)\otimes\hat{t})\otimes\hat{g}^+(\omega)\otimes(\hat{\mathbb{I}} + \hat{t}\otimes\hat{G}^A(\omega)) \tag{2.7}$$

où $\otimes$ dénote une somme sur α, α', β et β'. La fonction de Green à l'équilibre $\hat{g}^+(\omega)$ pour chacune des électrodes isolées (i.e. avec $t_a = t_b = 0$ dans Eqs. (2.4) et (2.5)) prend la forme [49] $\hat{g}^+(\omega) = n_F(\omega)(\hat{g}^A(\omega) - \hat{g}^R(\omega))$. Par conséquent,

$$\hat{G}^+(\omega) = n_F(\omega)\left(\hat{G}^A(\omega) - \hat{G}^R(\omega)\right). \tag{2.8}$$

Effectivement nous avons

$$\begin{aligned}
\hat{G}^+(\omega) &= n_F(\omega)\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{G}^R(\omega)\otimes\hat{t}\right)\otimes\left(\hat{g}^A(\omega) - \hat{g}^R(\omega)\right)\otimes\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{t}\otimes\hat{G}^A(\omega)\right)\\
&= n_F(\omega)\left\{\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{G}^R(\omega)\otimes\hat{t}\right)\otimes\hat{g}^A(\omega)\otimes\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{t}\otimes\hat{G}^A(\omega)\right)\right.\\
&\quad\left. - \left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{G}^R(\omega)\otimes\hat{t}\right)\otimes\hat{g}^R(\omega)\otimes\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{t}\otimes G^A(\omega)\right)\right\}\\
&= n_F(\omega)\left\{\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{G}^R(\omega)\otimes\hat{t}\right)\otimes\left(\hat{g}^A(\omega) + \hat{g}^A(\omega)\otimes\hat{t}\otimes\hat{G}^A(\omega)\right)\right.\\
&\quad\left. - \left(\hat{g}^R(\omega) + \hat{G}^R(\omega)\otimes\hat{t}\otimes g^R(\omega)\right)\otimes\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{t}\otimes\hat{G}^A(\omega)\right)\right\}\\
&= n_F(\omega)\left\{\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{G}^R(\omega)\otimes\hat{t}\right)\otimes\hat{G}^A(\omega) - \hat{G}^R(\omega)\otimes\left(\hat{\mathbb{I}} + \hat{t}\otimes\hat{G}^A(\omega)\right)\right\}\\
&= n_F(\omega)\left(\hat{G}^A(\omega) - \hat{G}^R(\omega)\right)
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation (2.3) pour le courant $I_1(\Delta\varphi,\phi)$ comme

$$I_1(\Delta\varphi,\phi) = \frac{e}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} n_F(\omega)\mathrm{Tr}\left\{\left(\hat{t}_{\alpha\alpha'}\left(\hat{G}^A_{\alpha'\alpha}(\omega) - \hat{G}^R_{\alpha'\alpha}(\omega)\right) - \hat{t}_{\alpha'\alpha}\left(\hat{G}^A_{\alpha\alpha'}(\omega) - \hat{G}^R_{\alpha\alpha'}(\omega)\right)\right)\hat{\sigma}_z\right\}\mathrm{d}\omega.$$

Nous avons l'équivalent pour $I_2(\Delta\varphi,\phi)$ en changeant α en β et α' en β',

$$I_2(\Delta\varphi,\phi) = \frac{e}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} n_F(\omega)\mathrm{Tr}\left\{\left(\hat{t}_{\beta\beta'}\left(\hat{G}^A_{\beta'\beta}(\omega) - \hat{G}^R_{\beta'\beta}(\omega)\right) - \hat{t}_{\beta'\beta}\left(\hat{G}^A_{\beta\beta'}(\omega) - \hat{G}^R_{\beta\beta'}(\omega)\right)\right)\sigma_z\right\}\mathrm{d}\omega.$$

Nous pouvons voir que $\hat{G}^{A,\tau_1\tau_2}_{\alpha\alpha'} = (\hat{G}^{R,\tau_2\tau_1}_{\alpha'\alpha})^\star$ de façon générale en l'absence de champ magnétique (τ_1 et τ_2 sont les indices de Nambu). Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous pouvons démontrer cette relation à l'aide des équations de Dyson. En effet, nous avons

$$\hat{G}^A_{\alpha\alpha'} = \underbrace{\hat{g}^A_{\alpha\alpha'}}_{=0} + \hat{g}^A_{\alpha\alpha}\hat{t}_{\alpha\alpha'}\hat{G}^A_{\alpha'\alpha'} + \hat{g}^A_{\alpha\beta}\hat{t}_{\beta\beta'}\underbrace{\hat{G}^A_{\beta'\alpha'}}_{=0} = \hat{g}^A_{\alpha\alpha}\hat{t}_{\alpha\alpha'}\hat{G}^A_{\alpha'\alpha'}$$

$\hat{g}^A_{\alpha\alpha'} = 0$, car à l'ordre le plus bas les deux supraconducteurs sont déconnectés et $\hat{G}^A_{\beta'\alpha'} = 0$, car nous avons supposé que dans le supraconducteur S' la distance $R_{\alpha'\beta'}$ est trop grande pour avoir des effets croisés. De la même manière, $\hat{G}^R_{\alpha'\alpha} = \hat{G}^R_{\alpha'\alpha'}\hat{t}_{\alpha'\alpha}\hat{g}^R_{\alpha\alpha}$ et comme pour un supraconducteur $\hat{g}^A_{\alpha\alpha} = (\hat{g}^R_{\alpha\alpha})^\star$, les fonctions de Green étant réelles à l'ordre le plus bas et que $\hat{t}_{\alpha\alpha'} = (\hat{t}_{\alpha'\alpha})^\star$, nous avons bien $\hat{G}^A_{\alpha\alpha'} = (\hat{G}^R_{\alpha'\alpha})^\star$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
I_1(\Delta\varphi,\phi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} n_F(\omega)\mathrm{Tr}\left\{\left((\hat{t}_{\alpha'\alpha})^\star\left((\hat{G}^A_{\alpha\alpha'}(\omega))^\star - (\hat{G}^R_{\alpha\alpha'}(\omega))^\star\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left. + \hat{t}_{\alpha'\alpha}\left(\hat{G}^A_{\alpha\alpha'}(\omega) - \hat{G}^R_{\alpha\alpha'}(\omega)\right)\right)\hat{\sigma}_z\right\}\mathrm{d}\omega\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} n_F(\omega)\mathrm{Tr}\left\{2\Re\left[\hat{t}_{\alpha'\alpha}\left(\hat{G}^A_{\alpha\alpha'}(\omega) - \hat{G}^R_{\alpha\alpha'}(\omega)\right)\right]\hat{\sigma}_z\right\}\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

En outre, les pôles de $\hat{G}^A$ et de $\hat{G}^R$ sont opposés, mais comme nous devons boucler le chemin d'intégration dans l'autre sens, nous aurons des contributions opposées. D'où,

$$\begin{aligned} I_1(\Delta\varphi,\phi) &= -4\int_{-\infty}^{\infty} n_F(\omega)\mathrm{Tr}\left\{\Re\left[\hat{t}_{\alpha'\alpha}\hat{G}^A_{\alpha\alpha'}(\omega)\right]\hat{\sigma}_z\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= -4\int_{-\infty}^{\infty} n_F(\omega)\Re\left[t^{11}_{\alpha'\alpha}G^{A,11}_{\alpha\alpha'}(\omega) - t^{22}_{\alpha'\alpha}G^{A,22}_{\alpha\alpha'}(\omega)\right]\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

où 1 (2) est l'indice de Nambu pour l'électron (le trou). Maintenant, en supposant que nous sommes à température nulle, $I_1(\Delta\varphi,\phi) = -8i\pi\rho_N\int_{-\infty}^{0}\Re\left[t^{11}_{\alpha'\alpha}G^{A,11}_{\alpha\alpha'}(\omega) - t^{22}_{\alpha'\alpha}G^{A,22}_{\alpha\alpha'}(\omega)\right]\mathrm{d}\omega$

Il nous faut désormais calculer la fonction de Green $\hat{G}^A_{\alpha\alpha'}(\omega)$, pour cela nous utilisons le théorème des résidus. $\hat{G}$ peut grâce à l'équation de Dyson s'écrire sous la forme,

$$\hat{G} = \underbrace{\hat{g} + \hat{g}\otimes\hat{t}\otimes\hat{g}}_{\hat{\mathbb{R}}} + \underbrace{\hat{g}\otimes\hat{t}\otimes\hat{g}\otimes\hat{t}}_{\hat{\mathbb{K}}}\otimes\hat{G}$$

d'où $\hat{G} = \left(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\mathbb{K}}\right)^{-1}\hat{\mathbb{R}}$ et donc $G_{jl} = \sum_k (-1)^{j+k}\frac{M_{kj}R_{kl}}{\det(\hat{\mathbb{I}}-\hat{\mathbb{K}})}$ avec M_{kj} les mineurs de la matrice $(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\mathbb{K}})$, ce qui nous donne

$$G^{11}_{\alpha\alpha'} = \frac{M_{11}R^{11}_{\alpha\alpha'} + M_{21}R^{21}_{\alpha\alpha'} + M_{31}R^{11}_{\beta\alpha'} + M_{21}R^{21}_{\beta\alpha'}}{\det(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\mathbb{K}})},$$

$$G^{22}_{\alpha\alpha'} = \frac{M_{22}R^{22}_{\alpha\alpha'} + M_{12}R^{12}_{\alpha\alpha'} + M_{42}R^{22}_{\beta\alpha'} + M_{32}R^{12}_{\beta\alpha'}}{\det(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\mathbb{K}})}.$$

Pour calculer le résidus, nous faisons un développement en série du déterminant, autour des deux valeurs propres des états liés, c'est-à-dire des deux valeurs propres négatives Ω_1 et Ω_2. En faisant cette approximation nous négligeons les états du continuum (voir Fig. 2.6). Nous avons $\det(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\mathbb{K}}) = A(\omega - \Omega_1) + A_1(\omega - \Omega_1)^2 + \cdots$, donc $A = \left.\frac{\partial\det(\hat{\mathbb{I}}-\hat{\mathbb{K}})}{\partial\omega}\right|_{\Omega_1}$ et de la même manière $\det(\hat{\mathbb{I}} - \hat{\mathbb{K}}) = B(\omega - \Omega_2) + B_1(\omega - \Omega_2)^2 + \cdots$ donc $B = \left.\frac{\partial\det(\hat{\mathbb{I}}-\hat{\mathbb{K}})}{\partial\omega}\right|_{\Omega_2}$. Nous pouvons maintenant, utiliser le théorème des résidus et effectuer l'intégrale

$$\begin{aligned} I_1(\Delta\varphi,\phi) = 16\pi^2\rho_N\Re\Bigg[t_{\alpha'\alpha}\Bigg(&\left.\frac{M_{11}R^{11}_{\alpha\alpha'} + M_{21}R^{21}_{\alpha\alpha'} + M_{31}R^{11}_{\beta\alpha'} + M_{21}R^{21}_{\beta\alpha'}}{A}\right|_{\Omega_1} \\ &+ \left.\frac{M_{11}R^{11}_{\alpha\alpha'} + M_{21}R^{21}_{\alpha\alpha'} + M_{31}R^{11}_{\beta\alpha'} + M_{21}R^{21}_{\beta\alpha'}}{B}\right|_{\Omega_2} \\ &- \left.\frac{M_{22}R^{22}_{\alpha\alpha'} + M_{12}R^{12}_{\alpha\alpha'} + M_{42}R^{22}_{\beta\alpha'} + M_{32}R^{12}_{\beta\alpha'}}{A}\right|_{\Omega_1} \\ &- \left.\frac{M_{22}R^{22}_{\alpha\alpha'} + M_{12}R^{12}_{\alpha\alpha'} + M_{42}R^{22}_{\beta\alpha'} + M_{32}R^{12}_{\beta\alpha'}}{B}\right|_{\Omega_2}\Bigg)\Bigg] \end{aligned}$$

En effectuant le même calcul pour $I_2(\Delta\varphi,\phi)$ nous obtenons le supercourant $I_S(\Delta\varphi,\phi) = I_1(\Delta\varphi,\phi) + I_2(\Delta\varphi,\phi)$.

Pour faire les calculs nous avons utilisé les fonctions de Green d'un supraconducteur :

$$\hat{g}_{\alpha\alpha}(\omega) = \hat{g}_{\beta\beta}(\omega) = \frac{\pi\rho_N}{s}\begin{pmatrix} -\hbar\omega & |\Delta_0|\exp(i\varphi_L) \\ |\Delta_0|\exp(-i\varphi_L) & -\hbar\omega \end{pmatrix},$$

$$\hat{g}_{\alpha'\alpha'}(\omega) = \hat{g}_{\beta'\beta'}(\omega) = \frac{\pi\rho_N}{s}\begin{pmatrix} -\hbar\omega & |\Delta_0|\exp(i\varphi_R) \\ |\Delta_0|\exp(-i\varphi_R) & -\hbar\omega \end{pmatrix},$$

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(\omega) = \hat{g}_{\beta\alpha}(\omega) = \frac{\mathcal{C}(\omega)\pi\rho_N}{s}\begin{pmatrix} -\hbar\omega & |\Delta_0|\exp(i\varphi_L) \\ |\Delta_0|\exp(-i\varphi_L) & -\hbar\omega \end{pmatrix}\cos(k_F R_{\alpha\beta}) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sin(k_F R_{\alpha\beta})$$

et

$$\hat{g}_{\alpha'\beta'}(\omega) = \hat{g}_{\beta'\alpha'}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $s = \sqrt{|\Delta_0|^2 - (\hbar\omega)^2}$, $|\Delta_0|$ le gap supraconducteur, φ_L et $\varphi_R = \varphi_L + \Delta\varphi$ les phases supraconductrices (voir Fig. 2.4) et $\mathcal{C}(\omega) = e^{-2R_{\alpha\beta}/\xi(\omega)}$. Ici, nous considérons les fonctions de Green à une dimension, pour le cas à trois dimensions les $\sin(k_F R_{\alpha\beta})$ et $\cos(k_F R_{\alpha\beta})$ sont échangés et un facteur $1/R_{\alpha,\beta}$ apparaît.

Nous définissons le paramètre qui détermine la force des processus non locaux $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(\omega = 0) = e^{-2R_{\alpha\beta}/\xi_0}$ avec $\xi_0 = \xi(\omega = 0)$. Avec cette définition, nous avons $\mathcal{C}(\omega) = e^{-2R_{\alpha\beta}/\xi(\omega)} = \mathcal{C}_0^{\xi(\omega)/\xi_0}$.

Si $\mathcal{C}_0 = 0$, il n'y a aucun effets croisés, c'est-à-dire $R_{\alpha\beta} \gg \xi$, alors que pour $\mathcal{C}_0 = 1$ les effets croisés sont maximum, c'est-à-dire $R_{\alpha\beta} \ll \xi$. Les valeurs intermédiaires de $\mathcal{C}_0$ sont attendues pour des $R_{\alpha\beta}$ de l'ordre de ξ.

2.2.2 Relations thermodynamiques et états liés

Le SQUID correspond à deux jonctions Josephson, une à chaque interface. Si les jonctions sont éloignées l'une de l'autre d'une distance bien supérieure à la longueur de cohérence, elles sont indépendantes. Pour un système à un canal, une énergie négative et une positive des états liés d'Andreev sont localisées à chaque jonction.

Dans le cas d'une jonction Josephson, nous avons une valeur propre négative Ω et une valeur propre positive Ω' ($\Omega = -\Omega'$), soit un état lié. Dans le cas du SQUID nous avons deux valeurs propres négatives et deux positives. Nous avons alors deux états liés qui correspondent aux quatre pôles de la fonction de Green. Effectivement, lorsque nous n'avons pas de processus non locaux $\mathcal{C}_0 = 0$, nous avons deux systèmes 2×2. Le premier système nous donne une valeur propre négative Ω_1 et une valeur propre positive Ω'_1 avec $\Omega_1 = -\Omega'_1$. De la même manière la seconde jonction amène une valeur propre négative Ω_2 et une valeur propre positive Ω'_2 avec $\Omega_2 = -\Omega'_2$. Par contre, si nous avons des processus non locaux $\mathcal{C}_0 \neq 0$, le problème devient 4×4. Nous avons alors deux états liés. Le supercourant est donné par la relation thermodynamique (2.2).

Le supercourant est effectivement obtenu en dérivant l'énergie libre par rapport à la différence de phase $\Delta\varphi$. Beenakker [50] a montré qu'il y avait trois contributions au supercourant à partir des

travaux de Bardeen *et al.* [51] sur les jonctions Josephson. A température nulle le supercourant est réduit au premier terme donné par la somme sur les états discrets dans le gap :

$$I_S(\Delta\varphi,\phi) = \frac{2e|\Delta_0|}{\hbar}\sum_{n=1}^{N_{ABS}} \frac{\partial\Omega_n(\Delta\varphi,\phi)}{\partial(\Delta\varphi)}\theta\left[-\Omega_n(\Delta\varphi,\phi)\right] \tag{2.9}$$

où ϕ est le flux magnétique emprisonné dans la boucle du SQUID, et où N_{ABS} est le nombre d'états liés d'Andreev. La fonction de Heaviside en énergie $\theta\left[-\Omega_n(\Delta\varphi,\phi)\right]$ sélectionne les états liés d'Andreev sous le niveau de Fermi. Le second terme de [50] contient la contribution du continuum. Elle est négligeable dans la situation considéré, car les termes de hopping ne dépendent pas de l'énergie[2]. Nous montrons sur la figure 2.6 une variation typique du supercourant spectral en fonction de l'énergie.

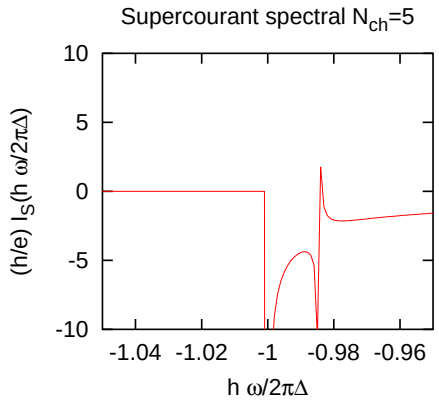

FIG. 2.6 – Variations du supercourant spectral pour une réalisation du facteur de phase de Fermi donné dans le voisinage de $\hbar\omega = h\omega/2\pi \simeq -|\Delta_0|$. Nous utilisons la différence de phase $\Delta\varphi = 2$, mais des variations similaires du courant spectral sont obtenues pour d'autres valeurs de $\Delta\varphi$. Nous avons également choisi $\mathcal{C}_0 = 1$.

Nous ne trouvons aucune contribution du continuum pour des énergies supérieures à $|\Delta_0|$ en valeur absolue comme attendu. Nous en concluons que la contribution du continuum est bien négligeable pour le modèle de hopping du SQUID dans l'état hors résonant lorsque les éléments de hopping sont indépendants de l'énergie.

Le troisième terme de l'expression de Beenakker [50] s'annule lorsque le gap supraconducteur est indépendant de la différence de phase. Ce que nous supposons. Les états liés sont obtenus grâce aux fonctions de Green, à l'aide de l'équation de Dyson.

La dépendance des niveaux d'énergie $(\pm\Omega_1, \pm\Omega_2)$ en champ magnétique est montrée sur la figure 2.8 pour $\mathcal{C}_0 = 0$ (sans effets croisés) et $\mathcal{C}_0 = 1$ (valeur maximale des effets croisés). Des valeurs de $\mathcal{C}_0$ élevées sont attendues pour un conducteur à un ou deux canaux. L'augmentation de $\mathcal{C}_0$ implique une répulsion des niveaux entre états liés à énergie positive et négative, car les processus de réflexion

[2]Une interprétation physique est que les états liés d'Andreev sont localisés dans le supraconducteur dans une région de la taille de la longueur de cohérence. Un unique canal couple par un lien faible les deux supraconducteurs [49, 52] est une perturbation très localisée qui ne se couple pas avec les états plus étendus dans les électrodes supraconductrices au-dessus du gap. Ceci explique pourquoi les états du continuum sont presque insensibles à la différence de phase entre les supraconducteurs dans la géométrie considérée avec des interfaces localisées.

d'Andreev non locales induisent un couplage entre électrons et trous à énergies opposées. Pour un contact symétrique avec $t_a = t_b$, les équations de Dyson peuvent se diviser dans une partie symétrique et une partie antisymétrique et les états liés prennent la forme simple ci-dessous pour un champ magnétique nul ($\phi = 0$) :

$$\Omega_s^{\pm}(\Delta\varphi) = \pm|\Delta_0|\sqrt{A^+(\Delta\varphi)}/\sqrt{B^+(\Delta\varphi)} \tag{2.10}$$

$$\Omega_a^{\pm}(\Delta\varphi) = \pm|\Delta_0|\sqrt{A^-(\Delta\varphi)}/\sqrt{B^-(\Delta\varphi)} \tag{2.11}$$

avec

$$\begin{aligned} A^{\pm}(\Delta\varphi) \,=\, & 2\cos(\Delta\varphi)\tau\left(1 \pm \mathcal{C}_\star \sin(k_F R)\right) + 1 \\ & +\tau^2\left(1 \pm \mathcal{C}_\star \sin(k_F R)\right)^2 + \tau^2\mathcal{C}_\star^2 \cos(k_F R)^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

et

$$B^{\pm}(\Delta\varphi) \,=\, \left[1 + \tau\left(1 \pm \mathcal{C}_\star \sin(k_F R)\right)\right]^2 + \tau^2\mathcal{C}_\star^2 \cos(k_F R)^2 \tag{2.13}$$

avec $\tau = \pi^2\rho_N^2 t^2 = t^2/W^2$ et où $W = 1/\pi\rho_N$ est la largeur de bande. C'est le même paramètre que dans l'équation (2.6) et dans la référence [49]. τ est relié à la transmission normale par l'équation. (2.6). Les niveaux d'énergie sont déterminés de manière autocohérente, avec $\mathcal{C}_\star$ la valeur de $\mathcal{C}(\omega)$ où $\hbar\omega$ est remplacé par l'énergie de l'état lié de manière self-consistente.

En considérant le cas $k_F R_{\alpha\beta} = 2\pi n$ (avec n un entier) les niveaux d'énergie des états liés ce déduisent des équations (2.12) et (2.13) et sont alors dégénérés :

$$\Omega_s^-(\Delta\varphi) = \Omega_a^-(\Delta\varphi) = -|\Delta_0|\sqrt{1 - \alpha\sin(\Delta\varphi/2)^2} \tag{2.14}$$

avec

$$\alpha = \frac{4\tau}{(1+\tau)^2 + \tau^2\mathcal{C}_\star^2} = \frac{4t^2/W^2}{(1+t^2/W^2)^2 + \mathcal{C}_\star^2 t^4/W^4}.$$

Le SQUID se réduit à deux jonctions S-I-S identiques, comme nous pouvons le voir en comparant l'équation (2.14) à la référence [49]. Ceci montre que le canal de cotunneling élastique ne contribue pas au supercourant en accord avec la figure 2.7c.

Pour $k_F R_{\alpha\beta} = \pi/2 + 2\pi n$ (avec n un entier) la dégénérescence est levée seulement si $\mathcal{C}_\star \neq 0$: $\Omega_{s,a}^-(\Delta\varphi) = -|\Delta_0|\sqrt{1 - \alpha^{s,a}\sin(\Delta\varphi/2)^2}$, avec $\alpha^{s,a} = \frac{4\tau(1\pm\mathcal{C}_\star)}{(1+\tau(1\pm\mathcal{C}_\star))^2}$ où le signe $\pm$ correspond à la partie symétrique/antisymétrique (s/a) respectivement.

En présence d'un champ magnétique ($\phi \neq 0$), les états liés des niveaux d'énergie prennent la forme

$$\Omega_{s,a}^-(\Delta\varphi) = -|\tilde{\Delta}_0|\sqrt{1 - \alpha^{s,a}\sin(\Delta\varphi/2)^2 - \beta^{s,a}\sin(\Delta\varphi)}$$

avec

$$\alpha^{s,a} = \frac{4\tau\cos(2\phi)(1 \pm \mathcal{C}_\star)}{(1+\tau(1\pm\mathcal{C}_\star))^2 - 4\tau\sin(\phi)^2(1 \mp \mathcal{C}_\star) \pm 4\tau^2\mathcal{C}_\star\sin(2\phi)^2},$$

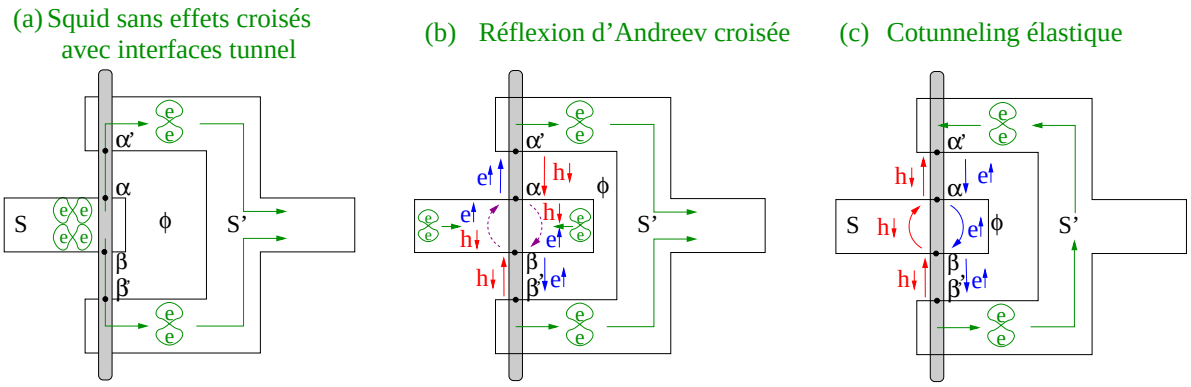

FIG. 2.7 – Interférence de deux paires de Cooper dans un SQUID usuel sans processus non locaux ($\mathcal{C}_0 = 0$) (a). Deux nouveaux processus dans le SQUID avec processus non locaux ($\mathcal{C}_0 \neq 0$) : la réflexion d'Andreev croisée qui contribue au supercourant (b) et le cotunneling élastique ne contribuant pas au supercourant (c).

$$\beta^{s,a} = \frac{2\tau \sin(2\phi)(1 \mp \mathcal{C}_\star)}{(1+\tau(1\pm\mathcal{C}_\star))^2 - 4\tau\sin(\phi)^2(1\mp\mathcal{C}_\star) \pm 4\tau^2\mathcal{C}_\star \sin(2\phi)^2}.$$

et

$$|\tilde{\Delta}_0| = |\Delta_0| - \sqrt{1 - 4\tau \frac{\sin(\phi)^2(1\mp\mathcal{C}_\star) \pm \tau\mathcal{C}_\star \sin(2\phi)^2}{(1+\tau(1\pm\mathcal{C}_\star))^2}}$$

Ou avec la forme (2.10) et (2.11)

$$\begin{aligned} A^{\pm}(\Delta\varphi,\phi) &= (1+\tau(1\pm\mathcal{C}_\star))^2 - 2\tau \mp 2\tau\mathcal{C}_\star \\ &\quad +2\tau\cos(2\phi+\Delta\varphi) \pm 2\mathcal{C}_\star\tau\cos(2\phi-\Delta\varphi) \pm 2\tau^2\mathcal{C}_\star\cos(4\phi) \end{aligned}$$

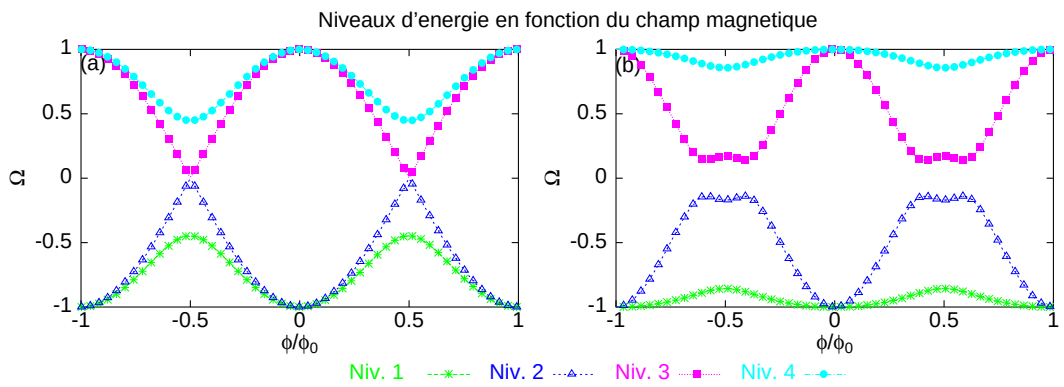

FIG. 2.8 – Variation des niveaux d'énergie en fonction du flux magnétique ϕ sans effet croisées $\mathcal{C}_0 = 0$ (a) et avec des effets croisés maximums. Les courbes sont calculées avec $T_\alpha = 0.8$, $T_\beta = 1$, $\Delta\varphi = 0$, $k_F R_{\alpha\beta} = 1$.

La méthode des fonctions de Green et les relations thermodynamiques donnent bien entendu le même résultat.

2.3 Résultats

2.3.1 Réduction du courant critique

Si nous avons des effets croisés de nouveaux processus interviennent (voir Fig. 2.7). Nous pouvons avoir la transmission d'un électron dans chaque branche à cause de la destruction d'une paire de Cooper (Fig. 2.7(c)), ou encore la transmission d'un électron dans une branche et d'un trou dans l'autre due à une réflexion d'Andreev non locale (Fig. 2.7(b)). Ainsi que bien d'autres processus mélangeant les deux jonctions.

Nous trouvons une réduction du supercourant en augmentant la force des processus non locaux, $\mathcal{C}_0$. La réduction intervient quelque soit la symétrie du SQUID, c'est-à-dire, le SQUID est symétrique si les deux transparences sont égales et non symétrique dans le cas où les transparences sont différentes. Elle est due à la répulsion des niveaux d'énergie vue en section 2.2.2. Sur la figure 2.9 le courant est moyenné sur toutes les réalisations du facteur de phase de Fermi $k_F R_{\alpha\beta}$, correspondant à la moyenne sur plusieurs échantillons avec un facteur de Fermi différent.

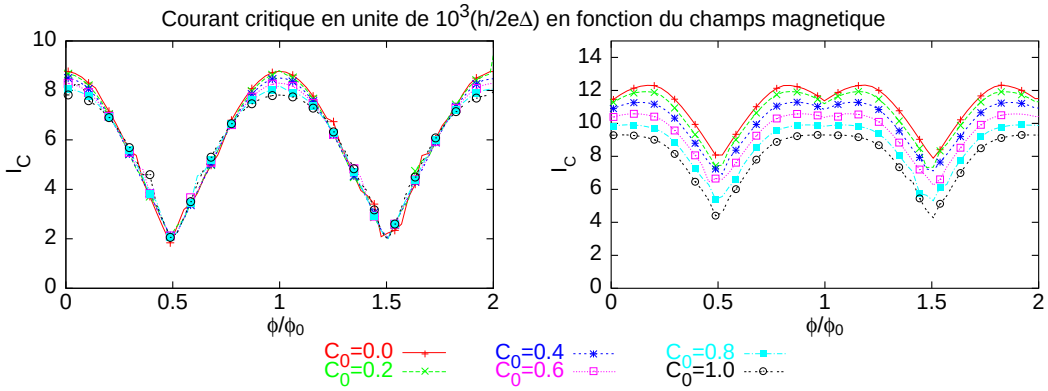

FIG. 2.9 – Graphique du courant critique en fonction du flux magnétique (ϕ) pour des valeurs de (a) $T_\alpha = 0.8$ et $T_\beta = 0.8$ et (b) $T_\alpha = 0.8$ et $T_\beta = 1$. Le courant critique est moyenné sur toutes les valeurs de $k_F R_{\alpha\beta}$.

2.3.2 Fluctuations d'échantillon à échantillon

Nous observons que le supercourant fluctue d'échantillon à échantillon, lorsque nous considérons un seul canal de transmission entre les supraconducteurs S et S'. Lorsqu'il n'y a pas de champ magnétique, les variations ne sont que sur l'amplitude du supercourant. Par contre, lorsque nous introduisons un champ magnétique, des fluctuations d'échantillon à échantillon avec des extrema supplémentaires sont obtenues selon les valeurs du facteur d'oscillations de Fermi $k_F R_{\alpha\beta}$ (voir Fig. 2.10).

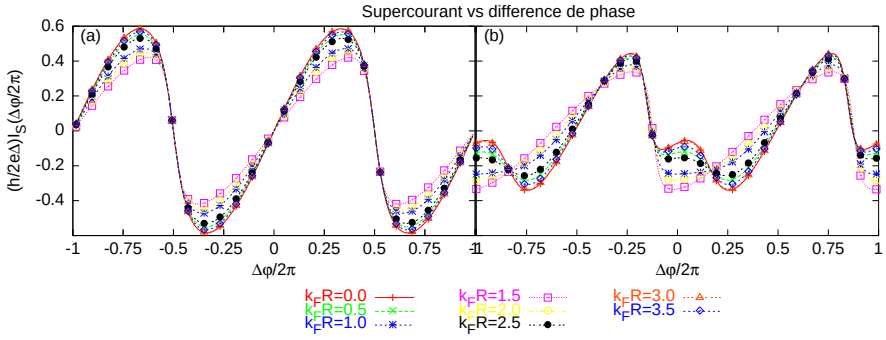

FIG. 2.10 – Supercourant en fonction de la différence de phase $\Delta\varphi$, avec des processus non locaux $\mathcal{C}_0 = 1$, pour différentes valeurs de $k_F R_{\alpha\beta}$, et pour $T_\alpha = T_\beta = 0.8$, (a) sans champ magnétique $\phi = 0$ et (b) avec un flux magnétique $\phi = 2$.

2.4 Synthèse

Nous avons étudié, par un modèle de hopping, un SQUID formé d'un nanotube de carbone avec la même géométrie que dans l'expérience de Cleuziou [30]. Nous avons considéré la possibilité de miniaturiser encore plus le SQUID en prenant le supraconducteur central d'une dimension de l'ordre de la longueur de cohérence. Notre modèle simplifié n'a pas apporté d'effets mesurables dus aux processus croisés. Il semblerait que le SQUID ne soit pas un système adapté pour comprendre les processus non locaux.

L'idée de réduire la taille du contact entre le supraconducteur et le nanotube a fait apparaître de nouveaux processus non locaux jouant un rôle dans le supercourant. Le premier processus étant un processus faisant intervenir le cotunneling élastique (sans conversion électron-trou) ne transporte pas de supercourant. Par contre, le second processus faisant intervenir la réflexion d'Andreev non locale (avec conversion électron-trou) transmet deux paires de Cooper (une dans chaque bras) et participe donc au supercourant. Ces nouveaux processus non locaux ne se couplant que faiblement au continuum, dans le mode hors résonant, nous avons pu établir que le continuum ne participe pour ainsi dire pas au supercourant.

Pour un système idéalisé à un canal, nous trouvons que les processus non locaux induisent des fluctuations d'échantillon à échantillon dans la relation courant-phase. Ces fluctuations sont dues à la dépendance dans le facteur de phase de Fermi des processus non locaux. Par ailleurs, les processus non locaux induisent une réduction du courant critique du SQUID.

D'un point de vue des expériences futures, les nouveaux processus jouent un rôle dans un SQUID connecté à un nanotube de carbone. Il pourrait être intéressant de mesurer la réduction du courant critique en augmentant la force des processus croisés, en faisant des comparaisons avec des échantillons de différentes tailles ou à travers la dépendance en température de la longueur de cohérence. La température influence la longueur de cohérence du supraconducteur. Effectivement, dans le cas balistique $\xi = \hbar v_F/|\Delta|$ et dans la limite diffusive $\xi = \sqrt{\hbar D/|\Delta|}$, ainsi comme le gap du supraconducteur diminue lorsque la température augmente, la longueur de cohérence augmente lorsque la température augmente. Il est attendu que l'amplitude totale du supercourant diminue avec l'augmentation de la

température, mais la contribution relative des processus non locaux augmentera. Une bonne caractérisation des paramètres des échantillons tels que la transparence des interfaces ou le nombre de canaux est requise afin de pouvoir distinguer entre les fluctuations intrinsèques des processus croisés et les variations non désirées des paramètres du SQUID en passant d'un échantillon à l'autre. Nous pouvons donc en déduire qu'il est pratiquement impossible de mesurer cet effet.

Le transport dans plusieurs structures hybrides contenant un supraconducteur, nous a intéressé jusqu'ici. L'intérêt de ces structures étant la possibilité, par exemple, d'émettre des paires d'électrons corrélés dans différentes électrodes à partir des paires de Cooper d'un supraconducteur. Dans cette perspective, il est très important de comprendre au mieux les différents processus jouant un rôle dans le transport pour ces différentes structures. Une étape supplémentaire dans cette compréhension est d'étudier le bruit et les corrélations croisées qui nous donnent des informations complémentaires sur les processus de transport.

Chapitre 3

Corrélations croisées dues aux réflexions d'Andreev multiples dans des jonctions multiterminales

3.1 Motivations

Nous considérons le bruit et les corrélations croisées de courant dans une jonction en forme de Y connectée à trois réservoirs supraconducteurs. Le bruit et les corrélations croisées sont importants, car ils donnent des informations complémentaires sur les processus de transport. Landauer en 1998 disait "Noise is the signal".

Effectivement, le bruit de grenaille [20] étant induit par les fluctuations de courant et de tension donne des informations supplémentaires sur la quantification de la charge et les propriétés de transport. Le bruit de grenaille est une conséquence de la quantification de la charge. Par exemple, dans une jonction métal normal - isolant - métal normal, le bruit (qui dans la limite tunnel vaut $S = 2eI$ avec I le courant moyen) donne un accès direct à la charge e des porteurs de charge responsables du courant [53]. Par ailleurs, dans la jonction supraconducteur - isolant - métal normal, le bruit de grenaille double pour $eV < \Delta$ par rapport au bruit de grenaille dans un contact normal. Cela a été montré théoriquement par Khlus [54] et vu expérimentalement par Lefloch *et al.* [55]. Dans la limite tunnel ($\Gamma \ll 1$) $S = 2e^{\star}I$ avec $e^{\star} = 2$. C'est une conséquence du doublement de la charge. Effectivement, les porteurs de charge sont les paires de Cooper pour un contact S-I-N, car le transport est dû aux réflexions d'Andreev.

En outre, dans une jonction supraconducteur - métal normal - supraconducteur, Lefloch *et al.* [31] mesurent une amplification du bruit due aux réflexions d'Andreev multiples [56] avec un bruit d'excès prédit par Bezuglyi [33] et par Nagaev [32]. Les réflexions d'Andreev multiples incohérentes [57] consistent en un processus de diffusion en énergie. Effectivement, les réflexions d'Andreev [35] permettent de transférer une paire de Cooper dans le guide comme une paire d'électrons avec une énergie sous le gap. A basse tension et à basse température, les électrons sont bloqués entre les supraconducteurs. Ainsi, ils doivent effectuer plusieurs réflexions d'Andreev afin de gagner suffisamment d'énergie pour s'échapper dans un des réservoirs (voir Fig. 3.1).

Une des motivations pour considérer un système à trois réservoirs supraconducteurs est l'amplification du bruit due à ces réflexions d'Andreev multiples incohérentes. La question se pose de savoir

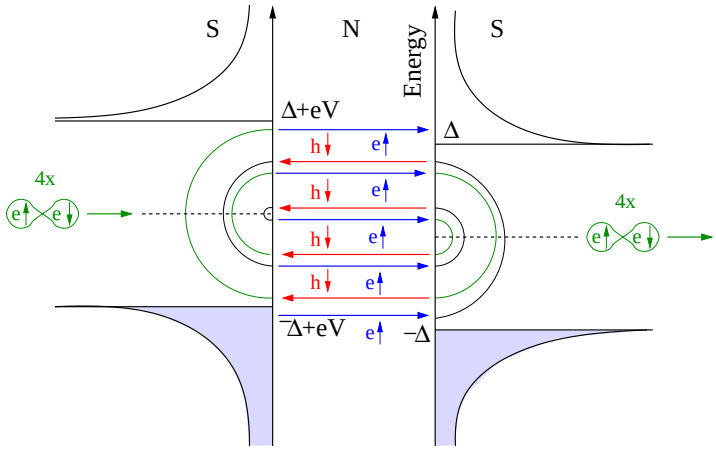

FIG. 3.1 – Réflexion d'Andreev multiples pour une jonction S-N-S. Un électron est injecté du premier supraconducteur à l'aide d'une faible tension V, avec une énergie dans le gap du second supraconducteur. L'électron subit alors une réflexion d'Andreev et un trou est rétrodiffusé. Ce trou subira à son tour une réflexion d'Andreev à la première interface et ainsi de suite jusqu'à ce que l'électron ou le trou puisse s'échapper.

si les corrélations croisées sont elles aussi amplifiées par les réflexions d'Andreev multiples, ce qui amplifierait le signal expérimental.

A un contact métal normal - supraconducteur, les réflexions d'Andreev induisent un effet de proximité dans le métal normal proche de l'interface. A une interface métal normal - supraconducteur sur une très faible distance des paires de Cooper quittent le supraconducteur pour le métal normal. Ces états introduits par Andreev [7] modifient les propriétés électroniques du métal normal au voisinage du niveau de Fermi dans la fenêtre d'énergie du gap (effet de proximité). Il en résulte une réduction de l'amplitude d'appariement en paires de Cooper dans le supraconducteur (effet de proximité inverse). Néanmoins, en présence d'un faible champ magnétique dans le métal normal ou au-dessus de l'énergie de Thouless, nous pouvons négliger l'effet de proximité.

Le bruit n'est pas le seul à transporter de l'information, les corrélations croisées peuvent, elles aussi, donner des informations supplémentaires sur les processus de transport et les quasiparticules. Par exemple, le principe d'exclusion de Pauli impose que les corrélations croisées de courant soient négatives, pour des électrons n'interagissant pas entre eux dans des structures multiterminales [20]. Dans le cas d'une jonction Y avec un réservoir supraconducteur, Martin a obtenu par l'approche des fonctions d'onde des corrélations positives sous certaines conditions [24]. Par ailleurs, les corrélations de courant dans un point quantique multiterminal connecté à un réservoir supraconducteur ont été analysées théoriquement par Samuelsson et Büttiker [28]. Le réservoir supraconducteur introduit sous certaines conditions des corrélations croisées positives entre deux bras normaux, à cause du caractère bosonique des paires de Cooper. Effectivement, un changement de signe dans les corrélations croisées intervient selon les couplages du point quantique aux terminaux normaux. Alors que dans le cas où tous les réservoirs sont en métal normal les corrélations croisées de courant sont toujours négatives s'il n'y a pas d'interaction entre les électrons [58]. Par ailleurs, Lesovik *et al.* [3] ont utilisé les corrélations croisées de courant pour proposer un test de violation des inégalités de Bell dans une structure en Y

avec un réservoir supraconducteur, en étudiant les corrélations entre les deux bras normaux. La violation des inégalités de Bell prouvant que le réservoir supraconducteur est bien une source d'électrons corrélés.

Nous étudions les corrélations croisées de courant pour une jonction multiterminale. Elles sont données par

$$S_{nm} = 2 \int \mathrm{d}t \langle \delta I_n(t) \delta I_m(0) \rangle \tag{3.1}$$

à tension et température arbitraire, avec $\delta I_n(t) = I_n(t) - \overline{I}_n$ les fluctuations de courant dans le guide n et $\overline{I}_n$ la moyenne temporelle du courant.

Il est possible d'obtenir une amplification des corrélations de courant par les réflexions d'Andreev multiples incohérentes [56]. L'introduction de réservoirs supraconducteurs peut, par ailleurs, introduire des changements de signes dans les corrélations croisées. Le signe des corrélations croisées de courant peut donner une indication sur les processus intervenant dans le transport.

Dans ce chapitre, nous utilisons un approche semi classique pour calculer les corrélations croisées de courant dans une jonction triterminale connectée à des réservoirs supraconducteurs pour deux situations différentes : une jonction diffusive triterminale et un point quantique. Nous voulons étudier s'il y a une amplification des corrélations croisées de courant par les réflexions d'Andreev multiples incohérentes, le signe des corrélations croisées et s'il y a un changement de signe.

En premier lieu, nous considérons que les contacts entre la jonction multiterminale et les réservoirs sont idéaux. Il n'y a pas de barrières. Seule la diffusion dans le métal normal intervient. Dans ce cas, il nous faut déterminer les fonctions de distribution (voir Sec. 3.2.1) dans la jonction afin de pouvoir obtenir les corrélations de courant (voir Sec. 3.2.2). La diffusion dans le fil introduit une non linéarité dans les corrélations croisées de courant, mais elles restent cependant toujours négatives.

En deuxième, nous négligeons les contributions de la diffusion dans le fil ($G_W \gg G_\Gamma$ avec G_W la conductance du fil et G_Γ la conductance aux barrières) et considérons qu'il y a des barrières aux contacts (voir Sec. 3.3). Par ailleurs, le transport dans la jonction est supposé incohérent. La jonction en forme de Y peut être assimilée à un point quantique. Dans ce cas, nous considérons le cas où $eV \to 0$ (voir Sec. 3.3.3) et le cas général où eV est quelconque (voir Sec. 3.3.4). Nous observons une amplification des auto-corrélations et des corrélations croisées dues aux réflexions d'Andreev multiples et un changement de signe dans les corrélations croisées de courant.

3.2 Jonction Y diffusive connectée à des réservoirs supraconducteurs

3.2.1 Fonctions de distribution

Nous considérons une jonction diffusive triterminale reliée à trois réservoirs supraconducteurs. Les tensions de biais sont supposées beaucoup plus grandes que l'énergie de Thouless $E_{Th} = \hbar D/L^2$, avec L la taille caractéristique de la jonction. Nous pouvons alors négliger la pénétration du condensat du supraconducteur dans le micropont normal et le considérer comme un métal normal avec une fonction de distribution hors équilibre. C'est-à-dire, nous négligeons l'effet de proximité. Le transport est incohérent. Ainsi, la jonction Y peut être considérée comme un fil diffusif. Dans la section 3.3 nous introduirons des barrières aux contacts.

Nous utilisons l'approche semi classique de Boltzmann-Langevin. Cette approche a été formulée

afin de calculer le bruit en courant dans un fil diffusif en prenant en compte le caractère stochastique des collisions des électrons sur les impuretés. Cette méthode a été à l'origine proposée par Kogan et Shul'man [59]. Ils considèrent que le courant et les fonctions de distribution fluctuent autour de leur valeur moyenne et introduisent des termes de sources de Langevin à l'équation pour les fonctions de distribution afin d'obtenir la densité de bruit spectral hors équilibre. Le calcul a été réalisé à l'origine pour un fil diffusif normal [60], il a ensuite été généralisé au cas multiterminal par Sukhorukov et Loss [58]. Nagaev [61] a rajouté les effets inélastiques. Finalement, Nagaev et Büttiker [62] ont introduit un supraconducteur, pour résoudre le cas d'un contact métal normal - supraconducteur. Un des avantages de cette approche est de pouvoir prendre en compte les interactions inélastiques. Néanmoins, nous considérerons l'intégrale de collision inélastique nulle pour commencer et les rajouterons par la suite (Sec.3.2.3). Nous suivons le même développement que [58].

L'équation de Langevin pour les fluctuations de courant est donnée par

$$\delta\vec{j}(\vec{r}) = -D\nabla\delta\rho(\vec{r}) - \sigma\nabla\delta\phi(\vec{r}) + \delta\vec{j}^{ext}(\vec{r}),$$

où D est le coefficient de diffusion dans le métal normal, σ est la conductivité électrique, $\delta\rho(\vec{r})$ sont les fluctuations de la densité de charge et $\delta\phi(\vec{r})$ sont les fluctuations locales du potentiel électrique. Les corrélateurs des courants externes $\delta\vec{j}^{ext}(\vec{r})$ sont donnés par

$$\langle\delta j_\alpha(\vec{r}_1)\delta j_\beta(\vec{r}_2)\rangle_\omega = 4\sigma\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)T_N(\vec{r}_1),$$

où

$$T_N(\vec{r}) = \int \mathrm{d}\epsilon f(\vec{r},\epsilon)\left[1 - f(\vec{r},\epsilon)\right],$$

avec $f(\vec{r},\epsilon)$ la fonction de distribution moyenne des électrons dans la partie normale de la jonction. La fonction de distribution moyenne est presque isotropique dans l'espace des impulsions à cause des fortes interactions avec les impuretés. Et le bruit est donné par $S = \frac{4}{RL}\int_0^L T_N(x)$, avec R la résistance de la jonction et L sa longueur.

Par conséquent, pour calculer la conductance ou les corrélations de courant de la jonction, il nous faut la fonction de distribution moyenne f qui obéit à l'équation de diffusion standard,

$$D\nabla^2 f = 0. \tag{3.2}$$

Pour des interactions purement élastiques la fonction de distribution peut s'écrire sous la forme

$$f(\vec{r},\epsilon) = \sum_k \phi_k(\vec{r}) f_k(\epsilon) \tag{3.3}$$

où les $\phi_k(\vec{r})$ sont les potentiels caractéristiques qui obéissent à l'équation de Poisson $\nabla^2\phi_k(\vec{r}) = 0$, avec les conditions limites $\phi_k(\vec{r})|_{L_m} = \delta_{km}$ et $\vec{N}\nabla\phi_k(\vec{r})\Big|_\Omega = 0$, où $\vec{N}$ est un vecteur normal à la surface des bras.

Tout ce qui est ci-dessus est identique dans les cas d'un contact N-S et dans le cas d'une jonction S-N-S. Ce sont les conditions aux bords de l'équation de diffusion qui différencient les deux systèmes.

Pour simplifier le problème, nous découpons la jonction Y en trois parties (voir Fig. 3.2). La géométrie de notre jonction triterminale doit être telle que la région de croisement soit petite, ainsi nous pouvons supposer que la résistance de cette région est beaucoup plus petite que la résistance des

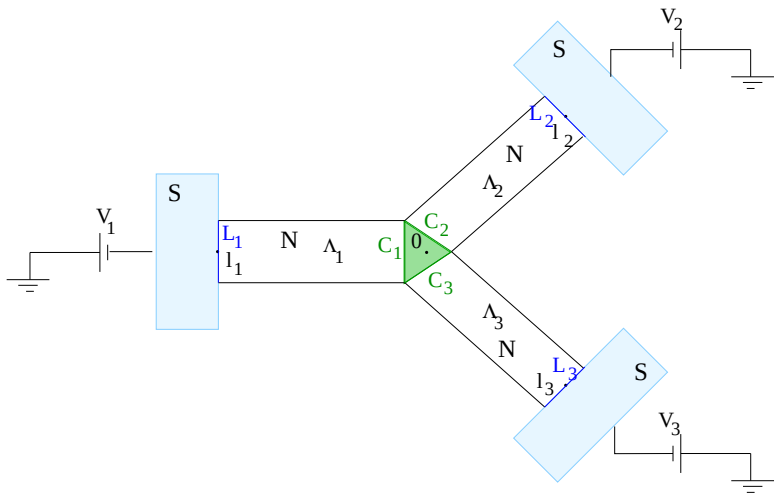

FIG. 3.2 – Jonction Y en métal normal reliée à trois réservoirs supraconducteurs. La jonction est séparée en trois parties (Λ_1, Λ_2 et Λ_3) selon ses bras. La partie centrale (en vert) est supposée avoir une résistance négligeable. La surface de contact entre le bras j et le réservoir j est dénotée par L_j et la surface entre la partie centrale et le bras j est dénotée par C_j.

bras et est donc négligeable. Le conducteur est divisé en trois sections Λ_k, avec $k = 1, 2, 3$, chaque section étant associée à l'un des contacts. Divisée de cette manière, chaque partie de la jonction Y peut être vue comme un conducteur à deux terminaux S-N.

Par la suite, nous calculerons les fonctions de distribution pour différentes structures. En premier lieu, nous étudierons la fonction de distribution dans le cas d'un contact S-N (§ 3.2.1.1). Notre jonction Y pouvant se décomposer en trois contacts S-N. En deuxième, nous calculerons la fonction de distribution d'une jonction S-N-S (§ 3.2.1.2) pour observer les effets des réflexions d'Andreev multiples incohérentes. En troisième point, nous étudierons la jonction en forme de Y avec trois réservoirs en métal normal (§ 3.2.1.3). Afin de pouvoir comparer avec le cas où les trois réservoirs sont supraconducteurs. Finalement, nous nous concentrerons sur notre jonction triterminale avec trois réservoirs supraconducteurs (§ 3.2.1.4).

3.2.1.1 Jonction S-N

Nous regardons donc en détail le cas d'un contact S-N (résolu par Nagaev et Büttiker dans [62]) avec une tension V appliquée au réservoir supraconducteur. Pour des énergies supérieures au gap ($|\epsilon - eV| > \Delta$), c'est comme si nous avions deux métaux normaux, $f_L(\epsilon + eV) = f_0(\epsilon)$ et $f_R(\epsilon) = f_0(\epsilon)$, avec $f_0(\epsilon)$ la fonction de distribution du réservoir normal, $f_L(\epsilon)$ la fonction de distribution au contact gauche (supraconducteur) et $f_R(\epsilon)$ la fonction de distribution au contact droit (métal normal). Par conséquent, $f_R(\epsilon) = f_0(\epsilon)$ quelque soit l'énergie ϵ. Dans le cas où la température est nulle, la fonction de distribution du réservoir correspond à la fonction de Heaviside, $f_0(\epsilon) = \theta(-(\epsilon + \Delta))$.

Dans le cas où l'énergie est inférieure au gap ($|\epsilon - eV| < \Delta$), il y a une réflexion d'Andreev et l'électron est réfléchi comme un trou, avec une énergie opposée (voir Fig. 3.3). Ainsi, $f_L(\epsilon + eV) = \frac{1}{2}\left(1 + f_R(\epsilon + eV) - f_R(-\epsilon + eV)\right)$ qui peut s'écrire comme $f_L(\epsilon) = \frac{1}{2}\left(1 + f_0(\epsilon) - f_0(-\epsilon + 2eV)\right)$.

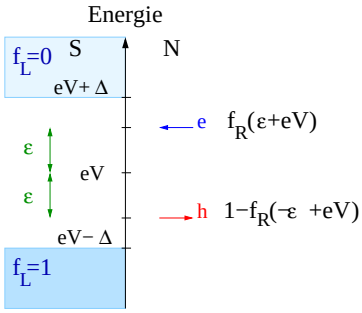

FIG. 3.3 – Réflexion d'Andreev à un contact S-N, où le réservoir S est à une tension V.

Par ailleurs, nous définissons les coefficients de probabilité de transmission $T(\epsilon)$ et de réflexion d'Andreev $A(\epsilon)$ en considérant que les contacts sont idéaux :

$$T(\epsilon) = \begin{cases} 1 \text{ si } |\epsilon| > \Delta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad A(\epsilon) = \begin{cases} 0 \text{ si } |\epsilon| > \Delta \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} . \tag{3.4}$$

Les formules sont exactes, car nous considérons les barrières négligeables (voir [35] et § 1.2.2.2).

Nous avons une équation pour toute énergie ϵ,

$$f_L(\epsilon) = T(\epsilon - eV) f_0(\epsilon - eV) + \frac{1}{2} A(\epsilon - eV) \left(1 + f_0(\epsilon) - f_0(-\epsilon + 2eV)\right). \tag{3.5}$$

3.2.1.2 Jonction S-N-S

Le cas d'un contact S-N-S a été résolu en détail par Nagaev [32]. Nous considérons que $V_1 = 0$ et $V_2 = V$, voir la figure 3.4. Pour des énergies supérieures au gap ($|\epsilon| > \Delta$ et $|\epsilon - eV| > \Delta$

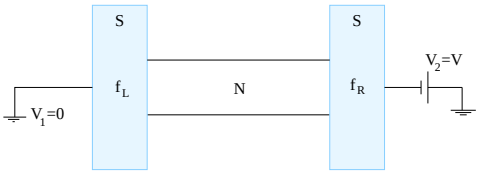

FIG. 3.4 – Jonction S-N-S.

respectivement à gauche et à droite), c'est comme si le système était normal ainsi

$$f_L(\epsilon) = f_0(\epsilon) \text{ si } |\epsilon| > \Delta \tag{3.6}$$

et

$$f_R(\epsilon + eV) = f_0(\epsilon) \text{ si } |\epsilon - eV| > \Delta. \tag{3.7}$$

Par contre, pour des énergies inférieures au gap ($|\epsilon| < \Delta$ et $|\epsilon - eV| < \Delta$ respectivement à gauche et à droite), nous avons deux équations sur les fonctions de distribution pour le raccord au contact, une sur la fonction et une sur sa dérivée,

$$\begin{cases} f_L(\epsilon) = 1 - f_L(-\epsilon) \\ f_L(\epsilon) - f_R(\epsilon) = f_L(-\epsilon) - f_R(-\epsilon) \end{cases} \quad \text{si } |\epsilon| < \Delta \tag{3.8}$$

et

$$\begin{cases} f_R(\epsilon + eV) = 1 - f_R(-\epsilon + eV) \\ f_R(\epsilon + eV) - f_L(\epsilon + eV) = f_R(-\epsilon + eV) - f_L(-\epsilon + eV) \end{cases} \quad \text{si } |\epsilon - eV| < \Delta. \tag{3.9}$$

Chaque ensemble à deux équations ((3.9) et (3.8)) peut se réécrire sans perte d'information en une unique équation. Cette double relation correspond aux réflexions d'Andreev multiples. A l'aide des probabilités de transmission et de réflexion d'Andreev (3.4), nous obtenons une équation valable pour toute énergie ϵ,

$$f_L(\epsilon) = T(\epsilon) f_0(\epsilon) + \frac{1}{2} A(\epsilon) \left(1 + f_R(\epsilon) - f_R(-\epsilon)\right) \tag{3.10}$$

$$f_R(\epsilon) = T(\epsilon - eV) f_0(\epsilon - eV) + \frac{1}{2} A(\epsilon - eV) \left(1 + f_L(\epsilon) - f_L(-\epsilon + 2eV)\right), \tag{3.11}$$

Les fonctions de distribution peuvent être résolues soit numériquement en réécrivant le système sous forme matriciel, soit analytiquement en séparant le système en bandes d'énergie.

1) Analytiquement :
   Le système a été résolu analytiquement par Nagaev [32]. Nous ne donnons pas ici le développement en détail, car nous faisons un développement similaire dans le cas de la jonction Y reliée à trois réservoirs supraconducteurs. Néanmoins, le calcul se base sur une coupure en bandes de l'énergie. Par exemple, en supposant que $\frac{2\Delta}{eV} = N$ avec N un nombre entier, le rang d'énergie pertinent est $-\Delta < \epsilon < \Delta + eV$ et il peut se décomposer en $N + 1$ bandes de largeur eV où les fonctions de distribution $f_L(\epsilon)$ et $f_R(\epsilon)$ sont constantes.
2) Numériquement :
   Nous donnons une idée de la façon numérique qui nous permet de résoudre cet ensemble d'équations. En insérant l'équation (3.11) dans l'équation (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} f_L(\epsilon) = {} & T(\epsilon) f_0(\epsilon) + \frac{1}{2} A(\epsilon) \left(1 + T(\epsilon - eV) f_0(\epsilon - eV)\right. \\ & + \frac{1}{2} A(\epsilon - eV) \left[1 + f_L(\epsilon) - f_L(-\epsilon + 2eV)\right] \\ & \left. - T(-\epsilon - eV) f_0(-\epsilon - eV) - \frac{1}{2} A(-\epsilon - eV) \left[1 + f_L(-\epsilon) - f_L(\epsilon + 2eV)\right]\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

   De cette équation nous voyons que $f_L(\epsilon)$ est seulement reliée à $f_L(\epsilon + 2eV)$, $f_L(-\epsilon)$ et à $f_L(-\epsilon + 2eV)$. Si nous écrivons l'équation (3.12) sous la forme $M\hat{f} = A$, avec M la matrice contenant les coefficients, $\hat{f}$ le vecteur des fonctions de distribution f_L et A le vecteur des termes du réservoir (f_0), très peu d'éléments de la matrice M sont non nuls. Nous prenons en entrée $\epsilon - 2n_{max}eV, \ldots, \epsilon - 2eV, \epsilon, \epsilon + 2eV, \ldots, \epsilon + 2n_{max}eV$ puis $-\epsilon + 2n_{max}eV, \ldots, -\epsilon + 2eV, -\epsilon, -\epsilon - 2eV, \ldots, -\epsilon - 2n_{max}eV$. Ainsi en calculant l'inverse de la matrice M nous trouvons la fonction de distribution f_L pour les énergies $\epsilon + neV$ et $-\epsilon + neV$ avec n un entier

allant entre $-n_{max}$ et n_{max}, pour $\epsilon \in [0, eV[$. Pour un n_{max} suffisamment grand, soit $n_{max} > N$ avec $N < \frac{2\Delta}{eV} < N+1$, les fonctions de distribution $f_L(\epsilon+2n_{max}eV)$ et $f_L(-\epsilon-2n_{max}eV)$ sont connues (elles sont en dehors du gap et sont donc données par la valeur du réservoir dans l'état normal) et par inversion de la matrice nous avons $f_L(\epsilon+2neV)$ et $f_L(-\epsilon+2neV)$ quelque soit n.

3.2.1.3 Jonction Y diffusive avec réservoirs normaux

Dans le cas où les trois réservoirs sont normaux les fonctions de distribution sont simplement données par $f_j(\epsilon) = f_0(\epsilon - eV_j)$, avec $j = 1, 2, 3$, où V_j est la tension appliquée au réservoir j. Par ailleurs, nous avons une fonction de distribution centrale reliée aux fonctions de distribution des réservoirs par la loi des noeuds de Kirchhoff : la somme des courants traversant un noeud est nulle, d'où $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j [f_j(\epsilon) - f_c(\epsilon)] = 0$ et ainsi

$$f_c(\epsilon) = \frac{\alpha_1 f_0(\epsilon - eV_1) + \alpha_2 f_0(\epsilon - eV_2) + \alpha_3 f_0(\epsilon - eV_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \tag{3.13}$$

avec les $\alpha_j = \frac{S_j}{l_j}$, S_j la section du bras j et l_j sa longueur.

3.2.1.4 Jonction Y diffusive avec trois réservoirs supraconducteurs

Pour la jonction Y diffusive avec trois réservoirs supraconducteurs nous avons quatre équations, une pour chaque réservoir, similaire à l'équation d'une jonction S-N (3.5) et une de raccordement au noeud central. Cette dernière équation correspond à la loi des noeuds de Kirchhoff.

$$\begin{cases} f_j(\epsilon + eV_j) = T(\epsilon) f_0(\epsilon) + \frac{1}{2} A(\epsilon) \left[1 + f_c(\epsilon + eV_j) - f_c(-\epsilon + eV_j)\right] \\ \sum_{j=1}^{3} \alpha_j [f_j(\epsilon) - f_c(\epsilon)] = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

$T(\epsilon)$ et $A(\epsilon)$ sont donnés par l'équation (3.4) toujours en supposant qu'il n'y a pas de barrières au contact. Ces équations étant valables à toutes les énergies ϵ, nous pouvons les réécrire en considérant $\epsilon \to \epsilon - eV_j$

$$\begin{cases} f_j(\epsilon) = T(\epsilon - eV_j) f_0(\epsilon - eV_j) + \frac{1}{2} A(\epsilon - eV_j) \left[1 + f_c(\epsilon) - f_c(-\epsilon + 2eV_j)\right] \\ \sum_{j=1}^{3} \alpha_j [f_j(\epsilon) - f_c(\epsilon)] = 0 \end{cases} . \tag{3.15}$$

De cette manière, en remplaçant les $f_j(\epsilon)$ dans la deuxième équation, nous obtenons une formule en fonction de f_c pour différentes valeurs de ϵ.

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \left\{ T(\epsilon - eV_1) f_0(\epsilon - eV_1) + \frac{1}{2} A(\epsilon - eV_1) \left[1 + f_c(\epsilon) - f_c(-\epsilon + 2eV_1)\right] \right\} \\ &+\alpha_2 \left\{ T(\epsilon - eV_2) f_0(\epsilon - eV_2) + \frac{1}{2} A(\epsilon - eV_2) \left[1 + f_c(\epsilon) - f_c(-\epsilon + 2eV_2)\right] \right\} \\ &+\alpha_3 \left\{ T(\epsilon - eV_3) f_0(\epsilon - eV_3) + \frac{1}{2} A(\epsilon - eV_3) \left[1 + f_c(\epsilon) - f_c(-\epsilon + 2eV_3)\right] \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Les cas $V_1 = 0$, $V_2 = pV$ et $V_3 = qV$ avec p et q des entiers peuvent être obtenus numériquement par inversion de matrice.

CAS PARTICULIER $V_1 = 0$ ET $V_2 = V_3 = V$:

Dans le cas particulier où $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$, nous pouvons résoudre analytiquement le système. En coupant le système par bande comme dans le cas d'une jonction S-N-S [32]. L'équation que nous devons résoudre est désormais

$$\begin{aligned} 0 = \alpha_1 &\left\{ T(\epsilon) f_0(\epsilon) + \frac{1}{2} A(\epsilon) \left[1 + f_c(\epsilon) - f_c(-\epsilon) \right] \right\} \\ &+ (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ T(\epsilon - eV) f_0(\epsilon - eV) + \frac{1}{2} A(\epsilon - eV) \left[1 + f_c(\epsilon) - f_c(-\epsilon + 2eV) \right] \right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Nous pouvons voir que $f_c(\epsilon)$ est relié à $f_c(-\epsilon)$ et à $f_c(-\epsilon + 2eV)$. Nous allons couper, le système par bandes d'énergie selon le modèle de Nagaev [32]. Nous considérons N un entier tel que $\frac{2\Delta}{N+1} < eV < \frac{2\Delta}{N}$, alors deux types de bandes alternatives rentrent en jeu respectivement de largeur $\delta_1 = 2\Delta - NeV$ et $\delta_2 = (N+1)eV - 2\Delta$, avec $N+2$ bandes de largeur δ_1 et $N+1$ bandes de largeur δ_2 (voir Fig. C.1 et Fig. C.2). Le calcul des fonctions de distribution est fait en détail dans l'appendice C.1.

Les fonctions de distributions sont des fonctions décroissantes allant de 1 à 0 par paliers. Elles sont données par l'équation (C.1) et valent

$$f_1^{\delta_1;i} = 1 - \tfrac{i}{N+2}; \quad f_1^{\delta_2;i} = 1 - \tfrac{i}{N+1}; \quad f_2^{\delta_1;i} = f_3^{\delta_1;i} = 1 - \tfrac{i-1}{N+2}; \quad f_2^{\delta_2;i} = f_3^{\delta_2;i} = 1 - \tfrac{i-1}{N+1}.$$

Ce résultat, identique au cas S-N-S, peut être justifié par le fait que les relations pour f_1 et $f_2 = f_3$ sont valables pour tous les α_j. Par ailleurs, $f_1 = f_L$ et $f_2 = f_3 = f_R$ où f_L et f_R sont respectivement les fonctions de distribution du réservoir gauche (L) et du réservoir droit (R) d'une jonction S-N-S.

3.2.2 Bruit dans une jonction Y diffusive

Nous regardons désormais le bruit dans une jonction Y diffusive en métal normal reliée à trois réservoirs supraconducteurs. Nous suivons le même développement que dans le cas de réservoirs normaux de Sukhorukov et Loss [58] sur des jonctions multiterminales complètement normales. Nous pouvons pour cela séparer notre jonction Y en trois parties, Λ_1, Λ_2 et Λ_3 (voir Fig. 3.2 et Sec. 3.2.1). Le début du développement s'applique aussi bien au cas où les réservoirs sont en métal normal qu'au cas où les réservoirs sont supraconducteurs. Pour chacune des trois parties nous avons une fonction de distribution,

$$\begin{cases} f^{\Lambda_1}(x,\epsilon) = \frac{x}{l_1} f_1(\epsilon) + \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) f_c(\epsilon) \\ f^{\Lambda_2}(x,\epsilon) = \frac{x}{l_2} f_2(\epsilon) + \left(1 - \frac{x}{l_2}\right) f_c(\epsilon) \\ f^{\Lambda_3}(x,\epsilon) = \frac{x}{l_3} f_3(\epsilon) + \left(1 - \frac{x}{l_3}\right) f_c(\epsilon) \end{cases} .$$

où les l_j représentent la longueur des bras. Nous considérons que chaque contact est unidimensionnel. Les fonctions de distribution ont été obtenues analytiquement dans le cas normal (voir § 3.2.1.3) et calculées numériquement dans le cas supraconducteur ainsi qu'analytiquement dans le cas particulier

$V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$ (voir § 3.2.1.4). Pour chacune des sous sections Λ_j, nous avons un conducteur à deux terminaux auquel correspond les potentiels caractéristiques $\theta_j(\vec{r})$ avec

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{\sigma}(\vec{r})\nabla\theta_k(\vec{r}) = 0 \\ \mathrm{d}\vec{s} \cdot \hat{\sigma}(\vec{r})\nabla\ \theta_k(\vec{r})|_S = \theta_k(\vec{r})|_{L_k} = 0 \\ \theta_k(\vec{r})|_{C_k} = 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

où $\hat{\sigma}(\vec{r}) = e^2 v_F \hat{D}(\vec{r})$ est le tenseur de conductivité et L_k la surface de contact entre le réservoir k et le bras normal correspondant. S est la surface le long des bras (voir Fig. 3.2). Nous supposons ici que la conductivité ne dépend pas de la position : $\hat{D}(\vec{r}) = D$. La deuxième équation vient du fait que nous avons un contact parfait, $\theta_k(\vec{r})$ est donc constant en chaque point du contact. Si nous considérons que les bras sont unidimensionnels les potentiels vecteurs ne dépendent que de la distance dans le bras et $\theta_k(x) = \frac{x}{l_k}$.

Maintenant, pour le système total, nous avons trois nouveaux potentiels caractéristiques tels que (voir Eq. (3.3)) : $f(\vec{r}, \epsilon) = \phi_1(\vec{r})f_1(\epsilon) + \phi_2(\vec{r})f_2(\epsilon) + \phi_3(\vec{r})f_3(\epsilon)$. Ces nouveaux potentiels obéissent à des conditions limites similaires à celles des potentiels θ_k

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{\sigma}(\vec{r})\nabla\phi_n(\vec{r}) = 0 \\ \mathrm{d}\vec{s} \cdot \hat{\sigma}(\vec{r})\nabla\ \phi_n(\vec{r})|_S = 0 \quad . \\ \phi_n(\vec{r})|_{L_m} = \delta_{nm} \end{cases} \tag{3.19}$$

En outre, puisque chaque potentiel $\phi_n(\vec{r})$ est approximativement constant dans la région centrale (de résistance négligeable) du conducteur multiterminal, nous pouvons écrire $\phi_n(\vec{r})|_{C_k} = \tilde{\alpha}_n =$ cste avec C_k la surface entre le bras k et la partie centrale. De plus, nous avons $\sum_n \tilde{\alpha}_n = 1$ qui découle de la règle de somme des $\phi_n(\vec{r})$: $\sum_n \phi_n(\vec{r}) = 1$.

Des conditions aux bords des potentiels caractéristiques (voir (3.18) et (3.19)) il suit que

$$\phi_n(\vec{r})|_{\vec{r}\in\Lambda_k} = \tilde{\alpha}_n\theta_k(\vec{r}) + [1 - \theta_k(\vec{r})]\,\delta_{nk}. \tag{3.20}$$

A partir des potentiels vecteurs, nous pouvons calculer la matrice de conductance $G_{mn} = -\int_{L_m} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \hat{\sigma}\nabla\phi_n(\vec{r})$. En remplaçant $\phi_n(\vec{r})$ par l'équation (3.20), nous obtenons

$$G_{mn} = (\tilde{\alpha}_n - \delta_{nm})G_m, \tag{3.21}$$

où G_m est défini par $G_m \equiv -\int_{L_m} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \hat{\sigma}\nabla\theta_m(\vec{r})$, avec $\tilde{\alpha}_n$ donné par l'équation (3.21). Il nous suffit d'utiliser $\sum_n G_{nm} = 0$ pour chaque m pour obtenir $\tilde{\alpha}_m = \frac{G_m}{G_{tot}}$, où $G_{tot} \equiv \sum_n G_n$. Nous pouvons, par ailleurs, regarder les corrélations de courant

$$S_{nm} = 2\int \mathrm{d}\vec{r}\nabla\phi_n(\vec{r}) \cdot \hat{\sigma}\nabla\phi_m(\vec{r})\Pi(\vec{r}) \tag{3.22}$$

avec

$$\Pi(\vec{r}) = 2\int \mathrm{d}\epsilon f(\vec{r}, \epsilon)\,[1 - f(\vec{r}, \epsilon)] \tag{3.23}$$

et $f(\vec{r}, \epsilon)$ est donné par (3.3). Ce qui en remplaçant $\phi_n(\vec{r})$ par (3.20) nous donne

$$S_{nm} = 2\sum_k (\tilde{\alpha}_n - \delta_{nk})(\tilde{\alpha}_m - \delta_{mk}) \int_{\Lambda_k} \mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r}) \cdot \hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})\Pi(\vec{r}). \tag{3.24}$$

Maintenant, nous allons exprimer $\Pi(\vec{r})$ en fonction des $\phi_n(\vec{r})$. En remplaçant le 1 par la règle de somme $\sum_n \phi_n = 1$ dans l'équation (3.23), nous pouvons réécrire $\Pi(\vec{r})$ sous la forme :

$$\Pi(\vec{r}) = 2\int \mathrm{d}\epsilon \sum_{k,l} \phi_k(\vec{r})\phi_l(\vec{r}) f_k(\epsilon)\left[1 - f_l(\epsilon)\right]. \tag{3.25}$$

C'est ici que la différence se fait entre le cas de réservoirs normaux et de réservoirs supraconducteurs, car les fonctions de distribution qui interviennent dans $\Pi(\vec{r})$ changent selon le cas que nous considérons.

3.2.2.1 Réservoirs en métal normal

Nous commençons par nous intéresser au cas normal, dans ce cas les fonctions de distribution sont simplement donnée par $f_n(\epsilon) = f_T(\epsilon - eV_n)$ avec f_T la fonction de Fermi à température T. Ainsi,

$$\Pi(\vec{r}) = 2\int \mathrm{d}\epsilon \sum_{k,l} \phi_k(\vec{r})\phi_l(\vec{r}) \frac{1}{1+\exp\left(\frac{\epsilon - eV_k}{T}\right)}\left[1 - \frac{1}{1+\exp\left(\frac{\epsilon - eV_l}{T}\right)}\right].$$

Nous pouvons facilement effectuer l'intégrale sur l'énergie et nous obtenons

$$\Pi(\vec{r}) = e\sum_{k,l} \phi_k(\vec{r})\phi_l(\vec{r})\left(V_k - V_l\right)\coth\left(\frac{e(V_k - V_l)}{2T}\right).$$

Si $T \to 0$, nous retrouvons le bruit Johnson-Nyquist à l'équilibre : $\Pi(\vec{r}) = e\sum_{k,l}\phi_k(\vec{r})\phi_l(\vec{r})\left|V_k - V_l\right|$. Afin de simplifier les notations, nous dénotons $Z_{kl} = e\left(V_k - V_l\right)\coth\left(\frac{e(V_k - V_l)}{2T}\right)$. Maintenant, si nous nous limitons au cas où $\vec{r}$ appartient à Λ_k

$$\Pi(\vec{r})|_{\Lambda_k} = \sum_{l,q}\left[\tilde{\alpha}_l\theta_k(\vec{r}) + (1-\theta_k(\vec{r}))\delta_{lk}\right]\left[\tilde{\alpha}_q\theta_k(\vec{r}) + (1-\theta_k(\vec{r}))\delta_{qk}\right] Z_{lq}.$$

Nous pouvons substituer $\Pi(\vec{r})|_{\Lambda_k}$ dans S_{nm} (3.22), nous obtenons alors

$$S_{nm} = 2\sum_k (\tilde{\alpha}_n - \delta_{nk})(\tilde{\alpha}_m - \delta_{mk})\underbrace{\int_{\Lambda_k} \mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})\Pi(\vec{r})|_{\Lambda_k}}_{\mathcal{A}},$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \sum_{l,q} Z_{lq}\Bigg\{&\tilde{\alpha}_l\tilde{\alpha}_q\int_{\Lambda_k}\mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})\theta_k^2(\vec{r})\\ &+(\tilde{\alpha}_l\delta_{qk} + \tilde{\alpha}_q\delta_{lk})\int_{\Lambda_k}\mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})\theta_k(\vec{r})(1-\theta_k(\vec{r}))\\ &+\delta_{lk}\delta_{qk}\int_{\Lambda_k}\mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})(1-\theta_k(\vec{r}))^2\Bigg\}.\end{aligned}$$

Il nous faut effectuer ces trois intégrales. Elles se font en utilisant l'intégration par partie et $\int \mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{A} = \int \mathrm{d}V\nabla\vec{A}$ ainsi que $\theta_k(\vec{r})|_{C_k} = 1$. Nous trouvons que

$$\begin{cases} \int_{\Lambda_k} \mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})\theta_k^2(\vec{r}) = \frac{1}{3}\int_{C_k}\mathrm{d}\vec{s}\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r}) = \frac{1}{3}G_k \\ \int_{\Lambda_k} \mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})\theta_k(\vec{r})(1-\theta_k(\vec{r})) = \frac{1}{6}G_k \\ \int_{\Lambda_k} \mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})(1-\theta_k(\vec{r}))^2 = \frac{1}{3}G_k. \end{cases}$$

Ce qui nous donne en utilisant la symétrie $Z_{ql} = Z_{lq}$:

$$S_{nm} = \frac{2}{3}\sum_{k,l,q}(\tilde{\alpha}_n - \delta_{nk})(\tilde{\alpha}_m - \delta_{mk})Z_{lq}G_k\left\{\tilde{\alpha}_l\tilde{\alpha}_q + \tilde{\alpha}_l\delta_{qk} + \delta_{lk}\delta_{qk}\right\}$$

Par conséquent, à température nulle et avec $\tilde{\alpha}_k = \sigma\alpha_k/G_{tot}$ où $\alpha_k = \frac{S_k}{l_k}$, $G_k = \sigma\alpha_k$ et $G_{tot} = G_1 + G_2 + G_3$

$$\begin{cases} S_{11} = \frac{2}{3}\frac{G_1(G_2+G_3)}{G_{tot}}eV \\ S_{12} = -\frac{2}{3}\frac{G_1G_2}{G_{tot}}eV = S_{21} \\ S_{13} = -\frac{2}{3}\frac{G_1G_3}{G_{tot}}eV = S_{31} \\ S_{22} = \frac{2}{3}\frac{G_1G_2(G_{tot}+2G_3)}{G_{tot}^2}eV \\ S_{23} = -\frac{4}{3}\frac{G_1G_2G_3}{G_{tot}^2}eV = S_{32} \\ S_{33} = \frac{2}{3}\frac{G_1G_3(G_{tot}+2G_2)}{G_{tot}^2}eV \end{cases}$$

Nous pouvons voir que le bruit dans un bras est toujours positif, alors que les corrélations croisées de courant entre deux bras différents sont toujours négatives.

3.2.2.2 Un réservoir supraconducteur et deux réservoirs en métal normal

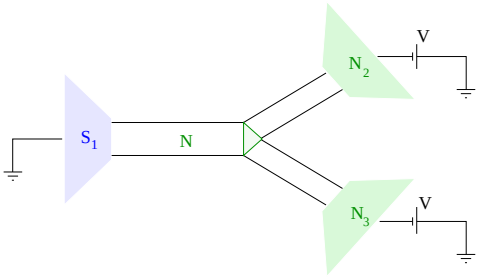

FIG. 3.5 – Jonction en Y diffusive avec un réservoir supraconducteur.

Pour le cas à un seul réservoir supraconducteur (voir Fig. 3.5) les calculs sont similaires au cas à trois réservoirs supraconducteurs (voir § 3.2.2.3). Par conséquent, nous ne donnons que les résultats

sans développement mathématique. Sous le gap nous avons

$$\begin{cases} S_{11}^{eV<\Delta} = \frac{4}{3}\frac{G_1(G_2+G_3)}{G_{tot}}eV \\ S_{12}^{eV<\Delta} = -\frac{4}{3}\frac{G_1G_2}{G_{tot}}eV = S_{21}^{eV<\Delta} \\ S_{13}^{eV<\Delta} = -\frac{4}{3}\frac{G_1G_3}{G_{tot}}eV = S_{31}^{eV<\Delta} \\ S_{22}^{eV<\Delta} = \frac{4}{3}eV\frac{G_1G_2(2G_{tot}+G_3)}{G_{tot}^2}eV \\ S_{23}^{eV<\Delta} = -\frac{2}{3}eV\frac{G_1G_2G_3}{G_{tot}^2}eV = S_{32}^{eV<\Delta} \\ S_{33}^{eV<\Delta} = \frac{2}{3}eV\frac{G_1G_3(2G_{tot}+G_2)}{G_{tot}^2}eV \end{cases}$$

Au-dessus du gap :

$$\begin{cases} S_{11}^{eV>\Delta} = \frac{2}{3}(eV+\Delta)\frac{G_1(G_2+G_3)}{G_{tot}} \\ S_{12}^{eV>\Delta} = -\frac{2}{3}(eV+\Delta)\frac{G_1G_2}{G_{tot}} = S_{21}^{eV>\Delta} \\ S_{13}^{eV>\Delta} = -\frac{2}{3}(eV+\Delta)\frac{G_1G_3}{G_{tot}} = S_{31}^{eV>\Delta} \\ S_{22}^{eV>\Delta} = \frac{2}{3}\frac{G_1G_2}{G_{tot}^2}(eV(G_{tot}+2G_3)+\Delta(G_{tot}-G_3)) \\ S_{23}^{eV>\Delta} = -\frac{2}{3}(2eV-\Delta)\frac{G_1G_2G_3}{G_{tot}^2}eV = S_{32}^{eV>\Delta} \\ S_{33}^{eV>\Delta} = \frac{2}{3}\frac{G_1G_3}{G_{tot}^2}(eV(G_{tot}+2G_2)+\Delta(G_{tot}-G_2)) \end{cases}$$

Comme pour le cas avec trois réservoirs normaux les auto-corrélations de courant dans un bras sont positives et les corrélations croisées de courant entre deux bras distincts sont négatives. Nous pouvons constater un doublement du bruit sous le gap. Ce doublement est dû à la réflexion d'Andreev et il correspond au doublement de bruit qu'on observe pour le bruit d'un contact S-N par rapport au bruit dans un contact N-N.

A haute tension ($eV \gg \Delta$) le bruit et les corrélations croisées de courant pour un Y à trois réservoirs normaux et un Y à un réservoir supraconducteur tendent vers la même valeur avec un bruit en excès pour le cas à un réservoir supraconducteur.

Ce qui est plus surprenant est que les corrélations croisées de courant ne sont pas doublées dans le cas à un réservoir supraconducteur par rapport au Y avec trois réservoirs normaux. Les corrélations croisées de courant entre le bras deux et le bras trois (S_{23}) sont même divisées par deux à basse tension.

3.2.2.3 Trois réservoirs supraconducteurs

Pour calculer le bruit de la jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs, nous devons repartir des équations (3.24) et (3.25), soit

$$S_{nm} = 2\sum_k(\tilde{\alpha}_n - \delta_{nk})(\tilde{\alpha}_m - \delta_{mk})\int_{\Lambda_k} \mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})\Pi(\vec{r})$$

avec

$$\Pi(\vec{r}) = 2\int \mathrm{d}\epsilon \sum_{k,l}\phi_k(\vec{r})\phi_l(\vec{r})f_k(\epsilon)\left[1-f_l(\epsilon)\right].$$

Dans le cas où nous considérons les bras comme unidimensionnel $\theta_k(\vec{r}) \to \theta_k(x) = \frac{x}{l_k}$ et $\nabla\theta_k(\vec{x}) = \frac{1}{l_k}$. Par conséquent,

$$\int_{\Lambda_k} \mathrm{d}\vec{r}\nabla\theta_k(\vec{r})\cdot\hat{\sigma}\nabla\theta_k(\vec{r})\Pi(x) = \sigma\frac{S_k}{l_k^2}\int_0^{l_k}\mathrm{d}x\Pi(x) = \frac{\tilde{\alpha}_k G_{tot}}{l_k}\int_0^{l_k}\mathrm{d}x\Pi(x)$$

où $\tilde{\alpha}_k = \sigma\alpha_k/G_{tot}$ avec $\alpha_k = \frac{S_k}{l_k}$ et $G_{tot} = G_1 + G_2 + G_3$. Or,

$$\int_0^{l_k} \mathrm{d}x\Pi(x) = 2\sum_{p,l} \underbrace{\left(\int_0^{l_k} \mathrm{d}x\phi_p(x)\phi_l(x)\right)}_{A^k_{pl}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon f_p(\epsilon)\left[1 - f_l(\epsilon)\right]\right)}_{B_{pl}}$$

Nous calculons séparément A^k_{pl} et B_{pl}

$$\begin{aligned} A^k_{pl} &= \int_0^{l_k} \mathrm{d}x \left\{\left(\tilde{\alpha}_p\theta_k(x) + \left[1 - \theta_k(x)\right]\delta_{pk}\right)\left(\tilde{\alpha}_l\theta_k(x) + \left[1 - \theta_k(x)\right]\delta_{lk}\right)\right\} \\ &= \frac{l_k}{3}\left[\tilde{\alpha}_p\tilde{\alpha}_l + \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_p\delta_{lk} + \tilde{\alpha}_l\delta_{pk}) + \delta_{pk}\delta_{lk}\right] \end{aligned}$$

Le calcul de B_{pl} est plus long, car il dépend des indices. Nous l'effectuons en détail dans l'Appendice (C.2) dans le cas où $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$. Il nous faut, maintenant, rassembler tout les termes. Nous dénotons $C^k_{pl} = \frac{3}{l_k}A^k_{pl}B_{pl}$ et utilisons le fait que $B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{23} = B_{32}$, $B_{12} = B_{13}$ et $B_{21} = B_{31}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} C^k_{11} & = & \left(\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_1\delta_{1k} + \delta_{1k}\right)B_{11} \\ C^k_{12} & = & \left(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 + \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_1\delta_{2k} + \delta_{1k}\tilde{\alpha}_2)\right)B_{12} \\ C^k_{13} & = & \left(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_3 + \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_1\delta_{3k} + \delta_{1k}\tilde{\alpha}_3)\right)B_{12} \\ C^k_{21} & = & \left(\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_1 + \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_2\delta_{1k} + \delta_{2k}\tilde{\alpha}_1)\right)B_{21} \\ C^k_{22} & = & \left(\tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_2\delta_{2k} + \delta_{2k}\right)B_{11} \\ C^k_{23} & = & \left(\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3 + \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_2\delta_{3k} + \delta_{2k}\tilde{\alpha}_3)\right)B_{11} \\ C^k_{31} & = & \left(\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_1 + \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_3\delta_{1k} + \delta_{3k}\tilde{\alpha}_1)\right)B_{21} \\ C^k_{32} & = & \left(\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_2 + \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_3\delta_{2k} + \delta_{3k}\tilde{\alpha}_2)\right)B_{11} \\ C^k_{33} & = & \left(\tilde{\alpha}_3^2 + \tilde{\alpha}_3\delta_{3k} + \delta_{3k}\right)B_{11} \end{array}\right.$$

Et donc, avec $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3$ et $\delta_{1k} + \delta_{2k} + \delta_{3k} = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{p,l} C^k_{pl} = &\left[\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\beta}^2 + 1 + \tilde{\alpha}_1\delta_1 + \tilde{\beta}(\delta_{2k} + \delta_{3k})\right]B_{11} \\ &+ \left[\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta} + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1(\delta_{2k} + \delta_{3k}) + \frac{1}{2}\tilde{\beta}\delta_1\right](B_{12} + B_{21}). \end{aligned}$$

Par conséquent, $S_{nm} = \frac{2}{3}\sum_k(\tilde{\alpha}_n - \delta_{nk})(\tilde{\alpha}_m - \delta_{mk})\tilde{\alpha}_k G_{tot}\sum_{p,l} C^k_{pl}$

Nous obtenons une formule quelque soit la valeur de eV, quelle soit dans ou hors du gap

$$\left\{\begin{array}{l} S_{11} = 2\frac{2\Delta+eV}{3}\frac{G_1(G_2+G_3)}{G_{tot}} \\ S_{12} = -2\frac{2\Delta+eV}{3}\frac{G_1G_2}{G_{tot}} = S_{21} \\ S_{13} = -2\frac{2\Delta+eV}{3}\frac{G_1G_3}{G_{tot}} = S_{31} \\ S_{22} = 2\frac{\tilde{\alpha}_2G_{tot}}{3}\left\{(2\Delta + eV)(1 - \tilde{\alpha}_2) + \frac{2(\Delta-(n+1)eV)((2\tilde{\alpha}_2-1)\tilde{\alpha}_3+4\tilde{\alpha}_3^2)}{(n+2)(n+1)}\right\} \\ S_{23} = -\frac{2}{3}\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3G_{tot}\frac{2\Delta(3-2\alpha_1+n(n+3))+eV(n+1)(n+4\tilde{\alpha}_1)}{(n+2)(n+1)} = S_{32} \\ S_{33} = 2\frac{\tilde{\alpha}_3G_{tot}}{3}\left\{(2\Delta + eV)(1 - \tilde{\alpha}_3) + \frac{2(\Delta-(n+1)eV)((2\tilde{\alpha}_3-1)\tilde{\alpha}_2+4\tilde{\alpha}_2^2)}{(n+2)(n+1)}\right\} \end{array}\right.$$

avec $n = \left[\frac{2\Delta}{eV}\right]$, les $[\dots]$ représentent la partie entière (rappel $\tilde{\alpha}_k = G_k/G_{tot}$).

Nous pouvons voir que le bruit et les corrélations croisées S_{1k} sont amplifiées par les réflexions d'Andreev multiples incohérentes. Cette amplification est proportionnelle au nombre de réflexions d'Andreev multiples possibles, $N = \frac{2\Delta+1}{eV}$. Et les corrélations croisées de courant contenant le bras 1 sont toujours négatives.

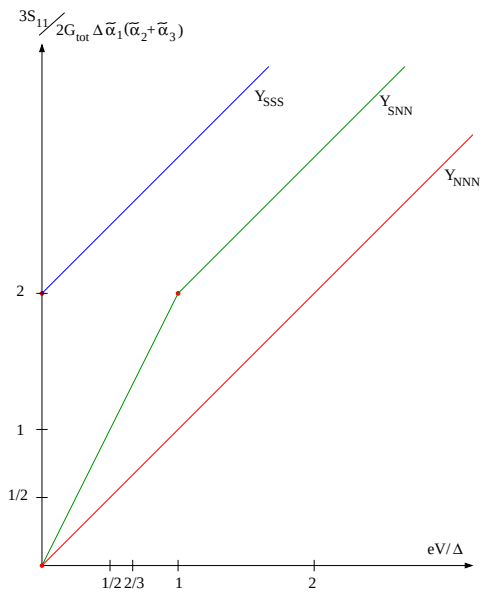

FIG. 3.6 – Schéma de la fonction $\frac{3S_{11}}{2G_{tot}\tilde{\alpha}_1(\tilde{\alpha}_2+\tilde{\alpha}_3)}$ en fonction de eV/Δ.

Par contre, quand le bras à tension nulle n'intervient pas, nous perdons la linéarité du signal et les corrélations de courant sont données par morceaux. Pour plus de visibilité, nous pouvons comparer S_{11} et S_{23} pour les trois jonctions diffusives en forme de Y (voir Fig. 3.6 et Fig. 3.7). Nous voyons donc que les auto-corrélations, comme le bruit dans le bras 1, et les corrélations croisées de courant sont amplifiées par les réflexions d'Andreev multiples incohérentes.

Dans la limite des fortes tensions les corrélations croisées tendent dans les trois cas vers la même limite avec une valeur d'excès pour le Y avec trois réservoirs supraconducteurs et une perte dans les corrélations croisées dans le cas avec un seul réservoir supraconducteur.

Dans le cas où $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.25$, nous avons un système assimilable à une jonction S-N-S, nous avons donc les corrélations croisées et le bruit dans les bras mis à tension eV linéaires. Les corrélations croisées sont négatives et les bruits sont positifs quelque soit la géométrie (c'est-à-dire pour toutes les valeurs des $\tilde{\alpha}_j$).

Nous considérons les courbes numériques obtenues avec $V_1 = 0$, $V_2 = pV$ et $V_3 = qV$ (pour p et q entiers) pour les deux cas particuliers : $p = q = 1$ et $p = -q = 1$. Pour commencer, nous considérons $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$. Nous retrouvons la jonction S-N-S pour les facteurs $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.25$ (voir Fig. 3.8). Les corrélations sont linéaires en fonction de eV. Les auto-corrélations sont positives et les corrélations croisées sont négatives. Par ailleurs, nous avons un bruit d'excès dû aux réflexions d'Andreev multiples incohérentes.

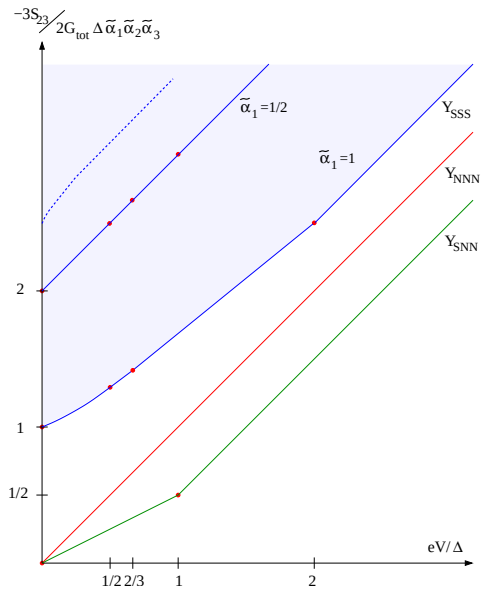

FIG. 3.7 – Schéma de la fonction $\frac{-3S_{23}}{2G_{tot}\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3}$ en fonction de eV/Δ. La surface bleue correspond à la zone possible pour les corrélations croisées de la jonction avec trois réservoirs supraconducteurs pour différentes valeurs de $\tilde{\alpha}_1$.

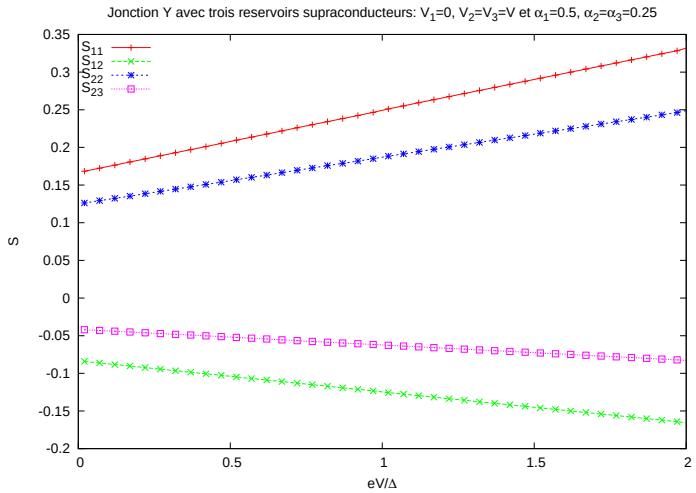

FIG. 3.8 – Bruit et corrélations croisées pour une jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs en fonction de eV/Δ avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.25$, $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$. Le système est assimilable à une jonction S-N-S.

Si nous considérons des facteurs $\tilde{\alpha}_j$ tels que la jonction ne puisse pas être assimilée à une jonction S-N-S, nous voyons une non linéarité apparaître lorsque le bras à tension nulle n'intervient pas (Fig. 3.9). Néanmoins, les corrélations croisées sont toujours négatives et les bruits restent positifs. Nous pouvons par exemple le voir dans le cas avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.02$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.49$ sur la figure 3.9.

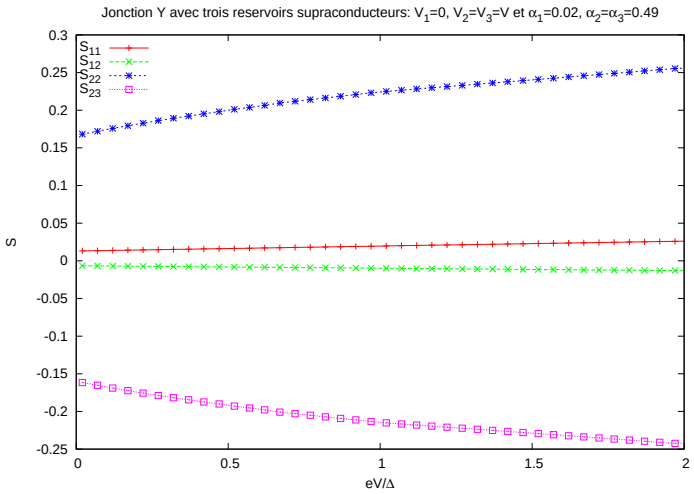

FIG. 3.9 – Bruit et corrélations croisées pour une jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs en fonction de eV/Δ avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.02$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.49$, $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$.

Nous considérons le cas où les tensions dans le bras deux et le bras trois sont opposées, c'est-à-dire $V_1 = 0$ et $V_2 = -V_3 = V$ ($p = 1$ et $q = -1$). Ce cas se comporte de façon similaire au cas avec des tensions identiques. Les corrélations croisées sont toujours négatives et les bruits toujours positifs. Par contre, aucune non linéarité n'apparaît. Effectivement, contrairement au cas à tension identique, le bruit et les corrélations croisées semblent rester linéaires pour toutes les valeurs des facteurs de forme $\tilde{\alpha}_j$ (Fig. 3.11). Les valeurs des corrélations sont du même ordre de grandeur que dans le cas où les tensions sont identiques. Par ailleurs, comme attendu, lorsque tension tend vers 0, les corrélations tendent vers la même valeur que dans le cas à tension identiques. Par contre, pour des tensions plus élevées l'amplitude des corrélations S_{ij}, pour i et j quelconque, est plus importante dans le cas où les tensions sont opposées et cela quelque soit la valeur des facteurs $\tilde{\alpha}_j$.

3.2.3 Interactions électron électron

Jusqu'à maintenant, les interactions inélastiques électron électron ont été négligées. Mais, dans le régime des réflexions d'Andreev multiples incohérentes, les électrons subissent une diffusion en énergie et restent longtemps dans la jonction, leur temps de diffusion est proportionnel à $1/V^2$. Ainsi, à très basse tension le temps de diffusion dû aux réflexions d'Andreev multiples incohérentes excède le temps de collision électron électron, τ_{ee}. Nous ne pouvons donc pas les négliger. Dans l'équation de Boltzmann-Langevin réduite à une équation de diffusion (3.2), nous avons considéré que les interac-

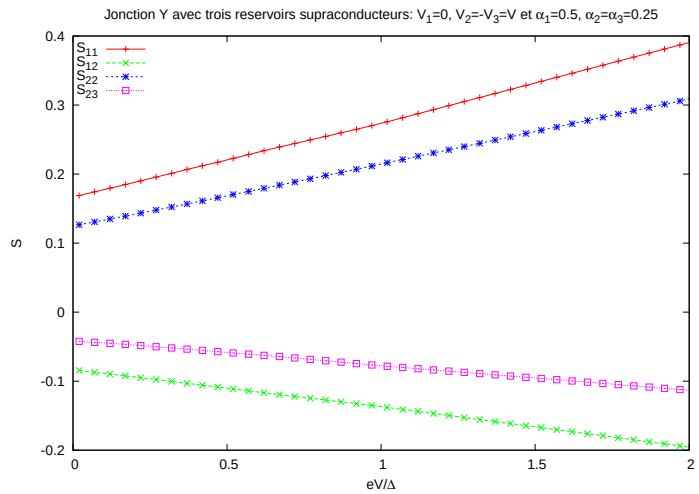

FIG. 3.10 – Bruit et corrélations croisées pour une jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs en fonction de eV/Δ avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.25$, $V_1 = 0$ et $V_2 = -V_3 = V$.

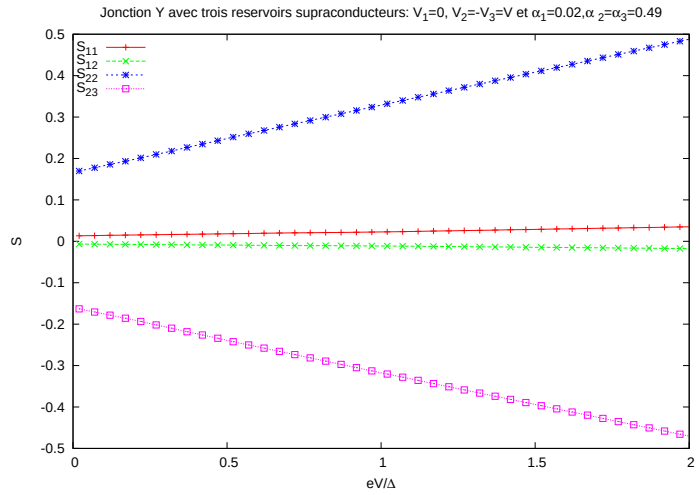

FIG. 3.11 – Bruit et corrélations croisées pour une jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs en fonction de eV/Δ avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.02$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.49$, $V_1 = 0$ et $V_2 = -V_3 = V$.

tions inélastiques étaient nulles. Nous les réintroduisons,

$$I_{in}(\epsilon,x) = I_{ee}[f] = \frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int \mathrm{d}\epsilon_2\mathrm{d}\epsilon_3\mathrm{d}\epsilon_4 \quad \{f(\epsilon_3)f(\epsilon_4)[1-f(\epsilon)][1-f(\epsilon_2)] \\ -f(\epsilon)f(\epsilon_2)[1-f(\epsilon_3)][1-f(\epsilon_4)]\} \\ \times\delta(\epsilon+\epsilon_2-\epsilon_3-\epsilon_4). \tag{3.26}$$

où α_{ee} est le paramètre sans dimension des interactions électron électron et E_F l'énergie de Fermi. Nous devons donc résoudre l'équation de diffusion (3.2) [32, 33]

$$-D\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(\epsilon,x) = I_{ee}[f]. \tag{3.27}$$

Nous commençons par étudier la jonction S-N-S. Dans le cas d'une jonction S-N-S et en faisant l'hypothèse que $I_{ee}[f]$ dépend faiblement de x, soit pour $eV \to 0$ et $k_BT = 0$, nous pouvons intégrer le système deux fois par rapport à x. Le réservoir de gauche est à tension nulle et position $x = 0$ et le réservoir de droite est à tension V et position $x = L$,

$$-D[f(\epsilon,L) - f(\epsilon,0)] = \frac{L^2}{2}I_{ee}(\epsilon).$$

La même équation est valable pour $\epsilon \to -\epsilon$. Nous soustrayons ces deux équations.

$$-D[f(\epsilon,L) - f(\epsilon,0) - f(-\epsilon,L) + f(-\epsilon,0)] = \frac{L^2}{2}[I_{ee}(\epsilon) - I_{ee}(-\epsilon)].$$

Or nous pouvons voir grâce à (3.26) que $I_{ee}(\epsilon) = -I_{ee}(-\epsilon)$ et nous savons que $f_L(\epsilon) = 1 - f_L(-\epsilon)$ (3.8) et que $f_R(\epsilon + eV) = 1 - f_R(-\epsilon + eV)$ (3.9). Par conséquent, $-D[f(\epsilon,L) + f(\epsilon + 2eV,L) - 2f(\epsilon,0)] = L^2 I_{ee}(\epsilon)$. Par ailleurs, $f(\epsilon,0)$ se situe entre $f(\epsilon,L)$ et $f(\epsilon+2eV,L)$ et donc $f(\epsilon,0) \simeq f(\epsilon+eV,L)$. Nous nous retrouvons donc avec

$$L^2 I_{ee}(\epsilon) = -D\left[\frac{\partial}{\partial\epsilon}f(\epsilon+eV,L) - \frac{\partial}{\partial\epsilon}f(\epsilon,L)\right]eV = -D(eV)^2\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}f(\epsilon,L)$$

Finalement, nous obtenons avec $D_E = \frac{D(eV)^2}{L^2}$:

$$-D_E\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}f(\epsilon) = I_{ee}(\epsilon) \tag{3.28}$$

Pour résoudre cette dernière équation, nous supposons qu'avec les collisions inélastiques le système se thermalise à une température T_0 (voir [32]), soit le régime des interactions inélastiques fortes. Il nous faut déterminer T_0, et $f(\epsilon)$ sera presque la fonction de Fermi à température T_0. Nous multiplions l'équation (3.28) par l'énergie ϵ avant d'intégrer sur l'énergie.

$$-D_E\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon\epsilon\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}f(\epsilon) = \int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon\epsilon I_{ee}(\epsilon) \tag{3.29}$$

Cette équation est résolue dans l'appendice C.3.

La valeur de la température T_0 est donnée par $D_E = \Delta^3 T_0 e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}$. En utilisant le fait que $T_0 \leq \Delta$, $D_E \leq \Delta^4 e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}$ et donc $T_0 = \frac{\Delta}{\ln(\lambda)}$ avec $\lambda = \frac{\alpha_{ee}\Delta^4}{(eV)^2 E_F D_E}$.

Maintenant, que nous avons la température thermalisant le système, nous pouvons remplacer la fonction de distribution dans la jonction par une fonction de Fermi à température T_0 dans l'équation pour les corrélations (3.24) avec (3.25). Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} S_{11} &= 4\frac{G_1(G_2+G_3)}{G_{tot}}T_0 = 4G_{eff}T_0 \\ S_{23} &= -4\frac{G_2G_3}{G_{tot}}T_0 \end{aligned}$$

3.2.4 Synthèse

Nous avons étudié par l'approche semiclassique de Boltzman-Langevin, la jonction diffusive en Y avec des réservoirs idéaux (normaux ou supraconducteur). Dans le cas de la jonction avec tous les réservoirs supraconducteurs, les réflexions d'Andreev multiples incohérentes amplifient fortement les auto-corrélations et les corrélations croisées de courant. Les auto-corrélations sont positives comme attendu et les corrélations croisées sont négatives. Effectivement, aucun régime de corrélations croisées positives entre les deux bras à tension V ou entre des bras de tension opposée n'est observé. Par ailleurs, l'introduction de collisions électron électron inélastiques ne suffit pas pour générer des corrélations positives de courant.

3.3 Point quantique connecté à des réservoirs supraconducteurs

Contrairement à ce que nous avons supposé jusqu'à maintenant les barrières sont rarement négligeables, c'est pourquoi nous considérons le cas inverse. Effectivement, par la suite, nous allons négliger les contributions de la diffusion dans la jonction et introduire des barrières ($G_W \gg G_\Gamma$ avec G_W la conductance dans le fil et G_Γ la conductance des barrières). Cette limite revient à considérer que la jonction en Y est assimilable à un point quantique diffusif connecté à trois réservoirs. Comme précédemment le système est incohérent. Nous nous concentrons sur le cas particulier où $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$. Nous étudions dans un premier temps la jonction avec trois réservoirs normaux (Sec. 3.3.1), puis celle avec un réservoir supraconducteur (Sec. 3.3.2). Finalement, nous étudierons la jonction avec trois réservoirs supraconducteurs en commençant par regarder le cas limite où $eV \to 0$ (Sec. 3.3.3) puis le cas général (Sec. 3.3.4).

Désormais, ce n'est plus les variables α_j (S_j et l_j où $j = 1, 2, 3$) qui déterminent la jonction triterminale, mais les barrières de transparence Γ_j avec un nombre de canaux à chaque contact M_j . Nous considérons une barrière symétrique avec $\Gamma_2 = \Gamma_3$ et $M_2 = M_3$. La conductance dans l'état normal à chaque contact, $G_j = \frac{2e^2}{h}N_j\Gamma_j$, est supposée bien plus grande que le quantum de conductance, ainsi nous pouvons négliger le blocage de Coulomb [63, 64] dans le point quantique. Nous supposons, comme précédemment, que l'effet de proximité est négligeable.

Par ailleurs, dans le cas d'une jonction symétrique où le bras deux est identique au bras trois, S_{11} et S_{23} permettent de définir toutes les corrélations. Effectivement, $S_{nm} = S_{mn}$ et $\sum_n S_{nm} = 0$, puisque sans interactions inélastiques $\sum_n \delta i_n(\epsilon) = 0$, impliquent que seuls S_{11} et S_{23} sont indépendants et $S_{12} = S_{13} = -S_{11}/2$, $S_{22} = S_{33} = -S_{23} + S_{11}/2$.

3.3.1 Point quantique avec trois réservoirs en métal normal

Nous utilisons un formalisme similaire à celui de Samuelsson et Büttiker dans [28]. Le système est supposé incohérent et nous pouvons assimiler la jonction Y à un point quantique diffusif (voir Fig. 3.12).

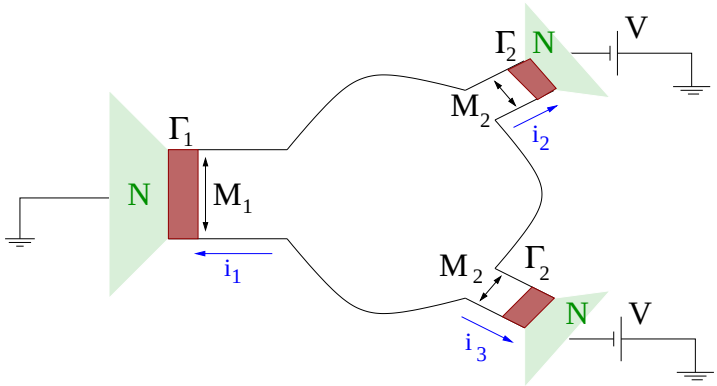

FIG. 3.12 – Schéma de la jonction Y avec trois réservoirs en métal normal pour un système incohérent assimilable à un point quantique diffusif.

Les courants sont donnés par $I_j = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon i_j(\epsilon)$ avec les courants spectraux

$$\begin{cases} i_1(\epsilon) = \frac{G_Q}{e} M_1 T_1(\epsilon)[f(\epsilon) - f_0(\epsilon)] \\ i_2(\epsilon) = \frac{G_Q}{e} M_2 T_2(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - f_0(\epsilon + eV)] \\ i_3(\epsilon) = \frac{G_Q}{e} M_2 T_2(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - f_0(\epsilon + eV)] \end{cases}$$

où $T_j(\epsilon)$ est le probabilité de transmission dans le réservoir j, M_j représente le nombre de canaux dans le bras j et $f_0(\epsilon)$ la fonction de distribution d'un réservoir normal. Par ailleurs, le courant spectral total est conservé, car nous prenons des interactions inélastiques nulles, donc $i_1(\epsilon) + i_2(\epsilon) + i_3(\epsilon) = 0$. Nous pouvons en déduire la fonction de distribution dans le point quantique

$$f(\epsilon) = \frac{\lambda_1 f_0(\epsilon) + \lambda_2 f_0(\epsilon + eV)}{\lambda_\Sigma}$$

avec $\lambda_1 = M_1\Gamma_1$, $\lambda_2 = 2M_2\Gamma_2$ et $\lambda_\Sigma = \lambda_1 + \lambda_2$. Ainsi, le courant dans le bras 1 $I_1 = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_\Sigma} G_Q V = -G_1 V$ avec $G_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_\Sigma} G_Q$ la conductance dans le bras 1 (convention des courants sortant voir Fig. 3.12).

Nous pouvons, maintenant, déterminer les fluctuations de courant

$$\begin{cases} \delta i_1(\epsilon) = \delta i_1^0(\epsilon) + \frac{G_Q}{e} M_1 T_1(\epsilon)\delta f(\epsilon) \\ \delta i_2(\epsilon) = \delta i_2^0(\epsilon) + \frac{G_Q}{e} M_2 T_2(\epsilon + eV)\delta f(\epsilon) \\ \delta i_3(\epsilon) = \delta i_3^0(\epsilon) + \frac{G_Q}{e} M_2 T_2(\epsilon + eV)\delta f(\epsilon) \end{cases}$$

où $\delta i_j^0(\epsilon)$ avec $j = 1, 2, 3$ sont les termes de source de Langevin. Grâce à la conservation des fluctuations de courant totales : $\delta i_1(\epsilon) + \delta i_2(\epsilon) + \delta i_3(\epsilon) = 0$, (car les interactions inélastiques sont supposées

nulles) nous obtenons les fluctuations de la fonction de distribution

$$\delta f(\epsilon) = -\frac{\delta i_1^0(\epsilon) + \delta i_2^0(\epsilon) + \delta i_3^0(\epsilon)}{\lambda_\Sigma}\frac{e}{G_Q}$$

Nous en déduisons que le bruit dans le bras 1 et les corrélations croisées entre les bras à tension V sont donnés par

$$\begin{aligned}
S_{11} &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon'\langle\delta i_1(\epsilon,t)\delta i_1(\epsilon',0)\rangle \\
&= \frac{2}{\lambda_\Sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon'\left[\lambda_2^2\langle\delta i_1^0(\epsilon,t)\delta i_1^0(\epsilon',0)\rangle + 2\lambda_1^2\langle\delta i_2^0(\epsilon,t)\delta i_2^0(\epsilon',0)\rangle\right] \\
S_{23} &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon'\langle\delta i_2(\epsilon,t)\delta i_3(\epsilon',0)\rangle \\
&= \frac{2}{4\lambda_\Sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon'\left[\lambda_2^2\langle\delta i_1^0(\epsilon,t)\delta i_1^0(\epsilon',0)\rangle + 2\lambda_2(2\lambda_1+\lambda_2)\langle\delta i_2^0(\epsilon,t)\delta i_2^0(\epsilon',0)\rangle\right]
\end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer les corrélateurs des contacts N-N de la jonction Y, or le corrélateur d'une jonction N-N à tension V est dérivé microscopiquement dans [65] et est donné dans notre formalisme par

$$\begin{aligned}
\langle\delta i(\epsilon,t)\delta i(\epsilon',0)\rangle &= \delta(t)\delta(\epsilon-\epsilon')M\Gamma \\
&\quad\times\left\{f(\epsilon)[1-f_0(\epsilon+eV)] + f_0(\epsilon+eV)[1-f(\epsilon)] - \Gamma[f(\epsilon)-f_0(\epsilon+eV)]^2\right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
S_{11} &= 2G_QeV\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_\Sigma^4}\left[\lambda_1\lambda_2\lambda_\Sigma + \lambda_2^3(1-\Gamma_1) + \lambda_1^3(1-\Gamma_2)\right] \\
S_{23} &= 2G_QeV\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{4\lambda_\Sigma^4}\left[\lambda_2^2(1-\Gamma_1) - \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_2)(1-\Gamma_2) - \lambda_2\lambda_\Sigma\right]
\end{aligned}$$

Nous constatons que le bruit est toujours positif, et les corrélations croisées sont toujours négatives. Nous considérons $\tilde{S}_{23} = \frac{S_{23}}{G_QeVM_2}$ ainsi $\tilde{S}_{23}$ ne dépend plus de M_1 et M_2 mais de $x = M_1/M_2$.

3.3.2 Point quantique avec un réservoir supraconducteur

Lorsque nous remplaçons le réservoir à tension nulle par un réservoir supraconducteur (voir Fig. 3.14) (étudié par Samuelsson et Büttiker [28]), le système se complique un peu, car nous avons désormais des réflexions d'Andreev qui mélangent les énergies positives avec les énergies négatives.

Les courants sont donnés par $I_j = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon i_j(\epsilon)$ avec les courants spectraux

$$\begin{cases}
i_1(\epsilon) = \frac{G_Q}{e}M_1\left\{R_1^A(\epsilon)[f(\epsilon)-1+f(-\epsilon)] + T_1(\epsilon)[f(\epsilon)-f_0(\epsilon)]\right\} \\
i_2(\epsilon) = \frac{G_Q}{e}M_2T_2(\epsilon+eV)[f(\epsilon)-f_0(\epsilon+eV)] \\
i_3(\epsilon) = \frac{G_Q}{e}M_2T_2(\epsilon+eV)[f(\epsilon)-f_0(\epsilon+eV)]
\end{cases}$$

R_1^A est le facteur de réflexions d'Andreev ([35] avec $\Gamma = 1/(1+Z^2)$, où Z est le facteur sans dimension de la barrière comme au chapitre 1) qui vaut pour $|\epsilon| < \Delta$: $R_1^A(\epsilon) = \frac{\Gamma_1^2\Delta^2}{\Gamma_1^2\epsilon^2+(\Delta^2-\epsilon^2)(2-\Gamma_1)^2}$. Par

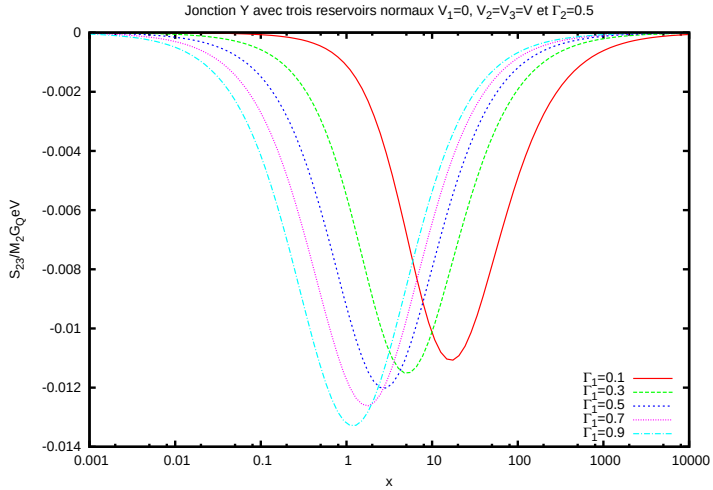

FIG. 3.13 – Corrélations croisées normalisées par $M_2 G_Q eV$ pour un point quantique avec trois réservoirs en métal normal avec $\Gamma_2 = 0.5$ et $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$, $x = M_1/M_2$.

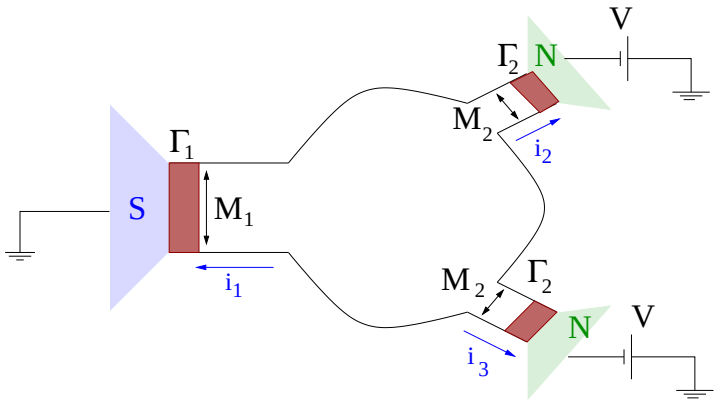

FIG. 3.14 – Schéma de la jonction Y avec un réservoirs supraconducteur pour un système incohérent assimilable à un point quantique.

ailleurs, en dehors du gap (soit pour $|\epsilon| > \Delta$) nous avons $R_j^A(\epsilon) = \frac{\Gamma_1^2\Delta^2}{(\Gamma_1|\epsilon|+\sqrt{\epsilon^2-\Delta^2}(2-\Gamma_1))^2}$. En outre, le coefficient de transmission est nul dans le gap ($|\epsilon| < \Delta$), $T_j(\epsilon) = 0$ et vaut en dehors du gap ($|\epsilon| > \Delta$), $T_j(\epsilon) = \Gamma_j$. En utilisant la conservation du courant spectral total, $i_1(\epsilon) + i_2(\epsilon) + i_3(\epsilon) = 0$, et le fait que $i_1(\epsilon) = i_1(-\epsilon)$, nous obtenons la fonction de distribution lorsque les bras 2 et 3 sont identiques :

$$f(\epsilon) = \begin{cases} f_0(\epsilon - eV) & \text{si } |\epsilon| > \Delta \\ \frac{M_1 R_1^A(\epsilon)[1+f_0(\epsilon-eV)-f_0(\epsilon+eV)]+\lambda_2 f_0(\epsilon-eV)}{M_1 R_1^A(\epsilon)+\lambda_2} & \text{si } |\epsilon| < \Delta \end{cases}$$

où comme dans la section 3.3.1 : $\lambda_2 = 2M_2\Gamma_2$.

Ensuite avec les fluctuations de courant (avec $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2/2$) :

$$\begin{cases} \delta i_1(\epsilon) = \delta i_1^0(\epsilon) + \frac{G_Q}{e} M_1 T_1(\epsilon)[\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon)] \\ \delta i_2(\epsilon) = \delta i_2^0(\epsilon) + \frac{G_Q}{e}\tilde{\lambda}_2 \delta f(\epsilon) \\ \delta i_3(\epsilon) = \delta i_3^0(\epsilon) + \frac{G_Q}{e}\tilde{\lambda}_2 \delta f(\epsilon) \end{cases} \tag{3.30}$$

et la conservation des fluctuations de courant (puisque les collisions inélastiques sont supposées nulles) ainsi que le fait que $\delta i_1(\epsilon) = \delta i_1(-\epsilon)$, nous obtenons les fluctuations de la fonction de distribution centrale (avec $\tilde{\lambda}_\Sigma = M_1 R_1^A(\epsilon) + \tilde{\lambda}_2$)

$$\delta f(\epsilon) = \frac{M_1 R_1^A(\epsilon)[\delta i_2^0(-\epsilon) + \delta i_3^0(-\epsilon) - \delta i_2^0(\epsilon) - \delta i_3^0(\epsilon)] - \lambda_2[\delta i_1^0(\epsilon) + \delta i_2^0(\epsilon) + \delta i_3^0(\epsilon)]}{\lambda_2 \tilde{\lambda}_\Sigma}$$

Le corrélateur d'une jonction S-N à tension V est établi dans [66] et donné ensuite dans [28] pour un formalisme électron trou et vaut dans notre formalisme (ϵ, $-\epsilon$)

$$\begin{aligned} \langle \delta i(\epsilon,t)\delta i(\epsilon',0)\rangle \;=\; & \delta(t)\delta(\epsilon-\epsilon') M R_A(\epsilon+eV) \\ & \times \{ f(\epsilon) f(-\epsilon+2eV) + [1-f(\epsilon)][1-f(-\epsilon-2eV)] \\ & \quad - R_A(\epsilon+eV)[f(\epsilon)+1-f(-\epsilon-2eV)]^2 \} . \end{aligned} \tag{3.31}$$

Après quelques calculs nous trouvons le bruit pour le bras 1 et les corrélations croisées des bras à tension V (avec $\chi_1 = M_1 \frac{\Gamma_1^2}{(2-\Gamma_1)^2}$)

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2G_Q eV \frac{\chi_1 \tilde{\lambda}_2}{2\lambda_\Sigma^4} \left[4\tilde{\lambda}_2^3 (1 - R_1^A) + \chi_1^3 (2 - \Gamma_2) + 4\chi_1^2 \tilde{\lambda}_2 + 4\chi_1 \tilde{\lambda}_2^2 \right] \\ S_{23} &= 2G_Q eV \frac{\chi_1 \tilde{\lambda}_2^2}{2\lambda_\Sigma^4} \left[2\tilde{\lambda}_2^2 (1 - 2R_1^A) - \chi_1 [\tilde{\lambda}_2 (2 - \Gamma_2) + 2\chi_1 (1 - \Gamma_2) \right] \end{aligned}$$

S_{23} avait déjà été donné dans [28]. Nous avons des corrélations croisées positives pour des nombres de canaux du même ordre de grandeur. Ensuite lorsque nous augmentons $x = M_1/M_2$ les corrélations croisées redeviennent négatives et finalement elles tendent vers 0.

Nous observons que les réflexions d'Andreev instaurent un régime de corrélations croisées positives ([28]), excepté lorsque $\Gamma_1 \to 1$. Les corrélations croisées en fonction de $x = M_1/M_2$ sont tout d'abord nulles avant de passer à un régime positif lorsque le nombre de canaux dans les bras sont du même ordre de grandeur. Ensuite, en continuant à augmenter x nous passons dans un régime négatif puis les corrélations croisées tendent vers 0.

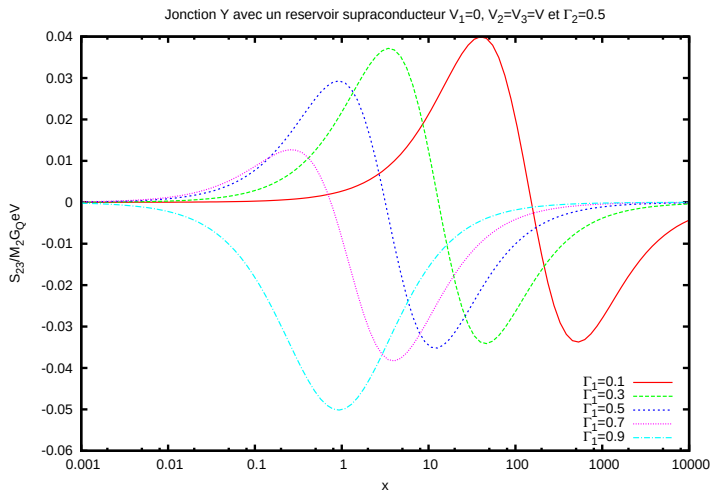

FIG. 3.15 – Corrélations croisées normalisées par $M_2 G_Q eV$ pour un point quantique avec un réservoir supraconducteur avec $\Gamma_2 = 0.5$ et $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$, $x = M_1/M_2$..

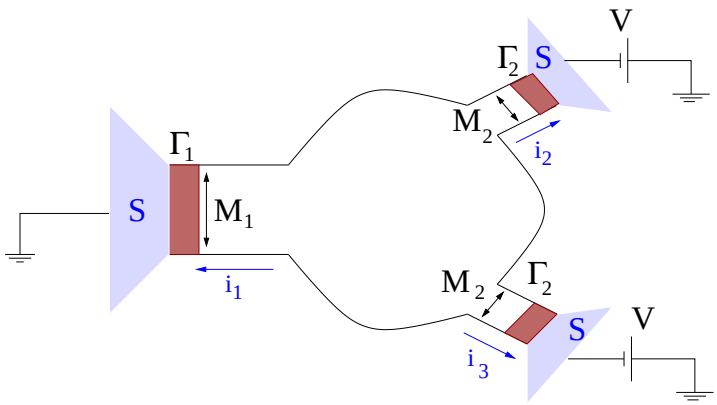

FIG. 3.16 – Schéma de la jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs pour un système incohérent assimilable à un point quantique.

3.3.3 Point quantique avec trois réservoirs supraconducteurs : limite $eV \to 0$

Les courants sont donnés par $I_j = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon i_j(\epsilon)$ avec les courants spectraux

$$\begin{cases} i_1(\epsilon) = M_1 G_Q/e \left\{R_1^A(\epsilon)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon)] + T_1(\epsilon)[f(\epsilon) - f_{S_1}(\epsilon)]\right\} \\ i_2(\epsilon) = M_2 G_Q/e \left\{R_2^A(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)] + T_2(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - f_{S_2}(\epsilon)]\right\} \\ i_3(\epsilon) = M_2 G_Q/e \left\{R_2^A(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)] + T_2(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - f_{S_3}(\epsilon)]\right\} \end{cases} \tag{3.32}$$

En dehors du gap $f_{S_1}(\epsilon) = f_0(\epsilon)$ et $f_{S_{2,3}}(\epsilon) = f_0(\epsilon + eV)$. R_j^A sont les facteurs de réflexions d'Andreev qui valent pour $|\epsilon| < \Delta$: $R_j^A(\epsilon) = \frac{\Gamma_j^2 \Delta^2}{\Gamma_j^2 \epsilon^2 + (\Delta^2 - \epsilon^2)(2 - \Gamma_j)^2}$. Par ailleurs, dans la limite de $eV \to 0$, en dehors du gap (soit pour $|\epsilon| > \Delta$) nous avons $R_j^A(\epsilon) = 0$. En outre, le coefficient de transmission est nul dans le gap ($|\epsilon| < \Delta$), $T_j(\epsilon) = 0$ et vaut en dehors du gap ($|\epsilon| > \Delta$), $T_j(\epsilon) = \Gamma_j$. La limite $eV \to 0$ implique que en dehors du gap $f(\epsilon) \cong f_0(\epsilon)$, par conséquent les termes T_j disparaissent et nous avons pour les courants spectraux :

$$\begin{cases} i_1(\epsilon) = G_Q/e A_1(\epsilon)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon)] \\ i_2(\epsilon) = G_Q/e A_2(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)] \\ i_3(\epsilon) = G_Q/e A_2(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)] \end{cases}$$

avec $A_j(\epsilon) = M_j R_j^A(\epsilon)$.

Comme nous considérons la limite sans interaction inélastique, nous avons la conservation du courant spectral : $i_1(\epsilon) + i_2(\epsilon) + i_3(\epsilon) = 0$. Le point quantique peut être assimilée au système électrique représenté sur la figure 3.17, car $i_1(\epsilon) = -(i_2(\epsilon) + i_3(\epsilon)) = i_1$. En fait, le courant 1 n'a pas de dépendance en énergie. Effectivement, par la définition des courants spectraux et en utilisant la symétrie des coefficients de réflexion d'Andreev, nous trouvons $i_1(\epsilon) = i_1(-\epsilon) = -(i_2(-\epsilon) + i_3(-\epsilon)) = (i_2(\epsilon - 2eV) + i_3(\epsilon - 2eV)) = i_1(\epsilon - 2eV)$. Par conséquent, le courant spectral dans le premier bras ne dépend pas de l'énergie.

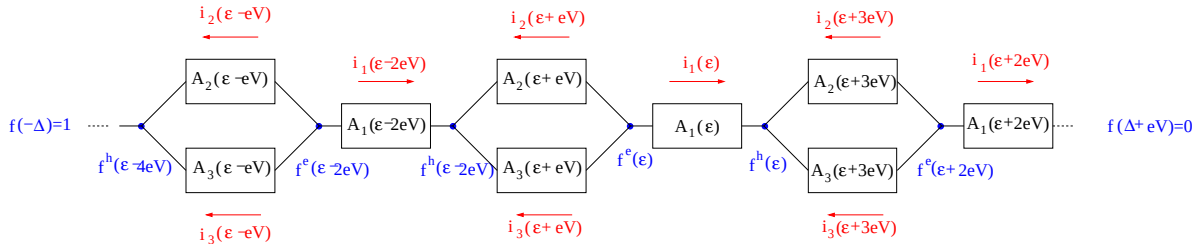

FIG. 3.17 – Réseau électrique équivalent à la jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs. Notations : $f^e(\epsilon) = f(\epsilon)$ et $f^h(\epsilon) = 1 - f(-\epsilon)$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A_1(\epsilon) i_1 \; + \; & (A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV))\, i_1 = \\ & -A_1(\epsilon)\,(A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV))\,[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)] \\ & + (A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV))\, A_1(\epsilon)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon)] \end{aligned}$$

donc

$$(A_1(\epsilon) + A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV))\, i_1 = A_1(\epsilon)\,(A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV))\,[f(-\epsilon) - f(-\epsilon - 2eV)].$$

Par conséquent, en dénotant $A_{eff}(\epsilon) = \frac{A_1(\epsilon)(A_2(\epsilon+eV)+A_3(\epsilon+eV))}{A_1(\epsilon)+A_2(\epsilon+eV)+A_3(\epsilon+eV)}$, nous obtenons $-2eV\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{i_1}{A_{eff}(\epsilon)}$.

Nous avons les conditions aux bords $f(-\Delta) = 1$ et $f(\Delta + eV) = 0$, donc

$$f(\epsilon) = \frac{\int_{\epsilon}^{\Delta+eV} \mathrm{d}\epsilon \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)}}{\int_{-\Delta}^{\Delta+eV} \mathrm{d}\epsilon \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)}} \cong \frac{\int_{\epsilon}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)}}{\int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)}}.$$

Comme $i_1(\epsilon) = i_1$, nous avons comme pour le système S-N-S : $I_1 = 2\Delta i_1$,

$$i_1 = -2eV A_{eff}\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{2eV}{\int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)}}.$$

Par conséquent,

$$I_1 = \frac{4\Delta eV}{\int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)}} = GV \text{ avec } G = 12G_Q\frac{M_1M_2\Gamma_1^2\Gamma_2^2}{\alpha_1 + 2\alpha_2} \tag{3.33}$$

où $\alpha_1 = M_1\Gamma_1^2\left[8(1-\Gamma_2) + 3\Gamma_2^2\right]$ et $\alpha_2 = M_2\Gamma_2^2\left[8(1-\Gamma_1) + 3\Gamma_1^2\right]$, (donnés dans [67]).

Maintenant que nous avons le courant, nous pouvons rechercher les corrélations de courant, pour cela nous regardons les fluctuations de courant.

$$\delta i_1(\epsilon) = \delta i_1^0(\epsilon) + G_Q/eA_1(\epsilon)[\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon)] \tag{3.34}$$
$$\delta i_2(\epsilon) = \delta i_2^0(\epsilon) + G_Q/eA_2(\epsilon + eV)[\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon - 2eV)] \tag{3.35}$$
$$\delta i_3(\epsilon) = \delta i_3^0(\epsilon) + G_Q/eA_3(\epsilon + eV)[\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon - 2eV)] \tag{3.36}$$

Nous avons $\delta i_1(\epsilon) + \delta i_2(\epsilon) + \delta i_3(\epsilon) = 0$, car nous négligeons les interactions inélastiques. Par ailleurs, $\delta i_1(\epsilon) = \delta i_1$ pour une énergie sous le gap. Effectivement, les fluctuations de courants du bras 1 ne dépendent pas de l'énergie pour une énergie sous le gap, car $\delta i_1(\epsilon) = \delta i_1(-\epsilon) = -(\delta i_2(-\epsilon) + \delta i_3(-\epsilon)) = -(\delta i_2(\epsilon - 2eV) + \delta i_3(\epsilon - 2eV)) = \delta i_1(\epsilon - 2eV)$, puisque sous le gap les sources de Langevin suivent les relations suivantes : $\delta i_1^0(\epsilon) = \delta i_1^0(-\epsilon)$ et $\delta i_{2(3)}^0(\epsilon) = \delta i_{2(3)}^0(-\epsilon - 2eV)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} A_1(\epsilon)\delta i_1 \,+\, (A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV))\,\delta i_1 = \\ -A_1(\epsilon)\,(A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV))\,[\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon - 2eV)] \\ +\,(A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV))\,A_1(\epsilon)[\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon)] \end{aligned}$$

Ce qui nous donne après simplification

$$2eV\frac{\partial \delta f(-\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{e}{G_Q}\left\{\frac{\delta i_1}{A_{eff}(\epsilon)} - \frac{\delta i_1^0(\epsilon)}{A_1(\epsilon)} + \frac{\delta i_2^0(\epsilon) + \delta i_3^0(\epsilon)}{A_2(\epsilon + eV) + A_3(\epsilon + eV)}\right\}.$$

Nous avons comme conditions aux bords $\delta f(-\Delta) = 0$ et $\delta f(\Delta + eV) = 0$, donc en intégrant sur ϵ la partie gauche et la partie droite, nous obtenons :

$$\delta i_1 = \frac{\frac{e}{G_Q}\left\{\int_{-\Delta}^{\Delta+eV} \frac{\delta i_1^0(\epsilon)}{A_1(\epsilon)}\mathrm{d}\epsilon - \int_{-\Delta}^{\Delta+eV} \frac{\delta i_2^0(\epsilon)+\delta i_3^0(\epsilon)}{A_2(\epsilon+eV)+A_3(\epsilon+eV)}\mathrm{d}\epsilon\right\}}{\int_{-\Delta}^{\Delta+eV} \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)}\mathrm{d}\epsilon}.$$

En utilisant les équations (3.35) et (3.36) nous avons $\delta i_2(\epsilon) - \delta i_3(\epsilon) = \delta i_2^0(\epsilon) - \delta i_3^0(\epsilon)$. Comme $\delta i_1(\epsilon) + \delta i_2(\epsilon) + \delta i_3(\epsilon) = 0$, nous trouvons que

$$\begin{cases} \delta i_2(\epsilon) = \frac{\delta i_2^0(\epsilon) - \delta i_3^0(\epsilon) - \delta i_1}{2} \\ \delta i_3(\epsilon) = \frac{\delta i_3^0(\epsilon) - \delta i_2^0(\epsilon) - \delta i_1}{2} \end{cases}$$

Nous regardons le bruit dans le bras 1.

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\epsilon \int \mathrm{d}\epsilon' \langle \delta i_1 \delta i_1 \rangle = 8\Delta^2 \int \mathrm{d}t \langle \delta i_1 \delta i_1 \rangle \\ &= \frac{8\Delta^2}{\left[\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)} \mathrm{d}\epsilon\right]^2} \int \mathrm{d}t \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon' \left\{ \frac{\langle \delta i_1^0(\epsilon,t) \delta i_1^0(\epsilon',0)\rangle}{A_1(\epsilon)A_1(\epsilon')} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \delta i_2^0(\epsilon,t) \delta i_2^0(\epsilon',0)\rangle}{4A_2(\epsilon+eV)A_2(\epsilon'+eV)} + \frac{\langle \delta i_3^0(\epsilon,t) \delta i_3^0(\epsilon',0)\rangle}{4A_2(\epsilon+eV)A_2(\epsilon'+eV)} \right\} \end{aligned}$$

Dans le bras 1 nous avons des corrélations pour $\epsilon = \epsilon'$ et grâce aux réflexions d'Andreev des corrélations pour $\epsilon = -\epsilon'$. Toutes les autres corrélations sont nulles. De la même manière, pour les bras 2 et 3, nous avons des corrélations pour $\epsilon = \epsilon'$ et grâce aux réflexions d'Andreev des corrélations pour $\epsilon = -\epsilon' - 2eV$, puisque les bras sont à tension V. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{8\Delta^2}{\left[\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)} \mathrm{d}\epsilon\right]^2} \int \mathrm{d}t \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon' \left\{ \left[\delta(\epsilon-\epsilon') + \delta(\epsilon+\epsilon')\right] \frac{\langle \delta i_1^0(\epsilon,t) \delta i_1^0(\epsilon',0)\rangle}{A_1(\epsilon)A_1(\epsilon')} \right. \\ &\quad \left. + \left[\delta(\epsilon-\epsilon') + \delta(\epsilon+\epsilon'+2eV)\right] \frac{\langle \delta i_2^0(\epsilon,t) \delta i_2^0(\epsilon',0)\rangle}{2A_2(\epsilon+eV)A_2(\epsilon'+eV)} \right\} \\ &= \frac{16\Delta^2}{\left[\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{A_{eff}(\epsilon)} \mathrm{d}\epsilon\right]^2} \int \mathrm{d}t \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \left\{ \underbrace{\frac{\langle \delta i_1^0(\epsilon,t) \delta i_1^0(\epsilon,0)\rangle}{A_1^2(\epsilon)}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\frac{\langle \delta i_2^0(\epsilon,t) \delta i_2^0(\epsilon,0)\rangle}{2A_2^2(\epsilon+eV)}}_{\mathcal{B}} \right\} \end{aligned}$$

Pour un contact S-N à tension V, les corrélateurs sont donnés par (3.31), alors $\mathcal{A} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{2f(\epsilon)f(-\epsilon)}{A_1(\epsilon)} \mathrm{d}\epsilon$ et $\mathcal{B} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{2f(\epsilon)f(-\epsilon)}{A_2(\epsilon)} \mathrm{d}\epsilon$. Par conséquent,

$$S_{11} = 16 G_Q \Delta \frac{M_1 M_2 \Gamma_1^2 \Gamma_2^2}{\alpha_1 + 2\alpha_2} = \frac{4}{3} G\Delta \tag{3.37}$$

avec $\alpha_1 = M_1 \Gamma_1^2 \left[8(1-\Gamma_2) + 3\Gamma_2^2\right]$ et $\alpha_2 = M_2 \Gamma_2^2 \left[8(1-\Gamma_1) + 3\Gamma_1^2\right]$. Le bruit dans le bras 1 est donné par $S_{11} = \frac{4}{3} G\Delta$ comme attendu.

Nous regardons maintenant les corrélations croisées, S_{23}, entre les deux bras à tension V :

$$\begin{aligned} S_{23} &= 2\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\epsilon \int \mathrm{d}\epsilon' \langle \delta i_2(\epsilon,t) \delta i_3(\epsilon',0)\rangle \\ &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\epsilon \int \mathrm{d}\epsilon' \left[\langle \delta i_1 \delta i_1\rangle - \langle \delta i_2^0(\epsilon,t) \delta i_2^0(\epsilon',0)\rangle - \langle \delta i_3^0(\epsilon,t) \delta i_3^0(\epsilon',0)\rangle\right] \\ &= \frac{S_{11}}{4} - 2\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\epsilon \langle \delta i_2^0(\epsilon,t) \delta i_2^0(\epsilon,0)\rangle \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$S_{23} = \frac{S_{11}}{4} - 4G_Q \int_{-\Delta}^{\Delta} A_2(\epsilon) f(\epsilon) f(-\epsilon) \mathrm{d}\epsilon \tag{3.38}$$

Cette formule nous montre que les corrélations croisées sont amplifiées par les réflexions d'Andreev multiples incohérentes. Elles sont du même ordre de grandeur que le bruit S_{11}. En outre, les corrélations croisées peuvent être soit positives soit négatives en fonction du second terme. Nous pouvons

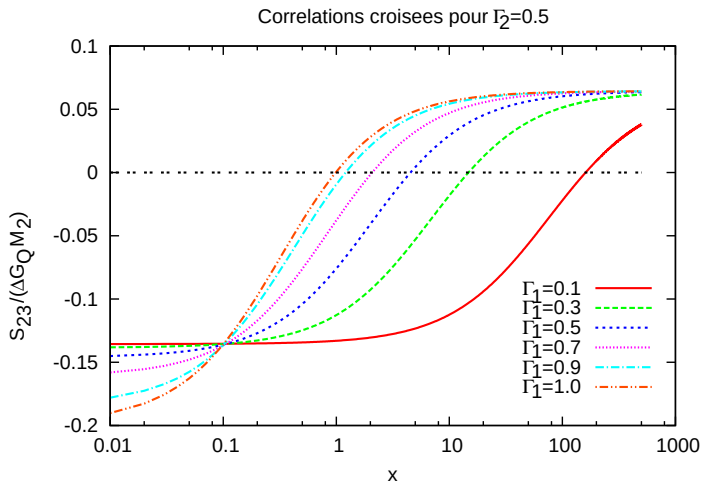

FIG. 3.18 – Corrélations croisées $\tilde{S}_{23}$ renormalisées par $M_2 G_Q \Delta$ en fonction du facteur $x = M_1/M_2$. Attention, ici nous normalisons par Δ au lieu de eV comme dans le cas normal. Les courbes ne se croisent pas toutes au même endroit, cette impression n'est due qu'à l'échelle.

observer sur la figure 3.18 qu'un nombre important de canaux M_1 (en comparaison à M_2) donne des corrélations croisées positives et un petit nombre de canaux M_1 (en comparaison à M_2) donne des corrélations croisées négatives. Pour un rapport de M_1 sur M_2 fixé proche de 1 à 100 les corrélations croisées peuvent changer de signe en fonction des transparences. Si la transparence Γ_1 croît les corrélations croisées passent d'une valeur négative à une valeur positive.

Nous pouvons considérer plusieurs cas particuliers :

<u>Cas 1 :</u> $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$

Dans ce cas, $A_{eff}(\epsilon) = \frac{\Gamma^2\Delta^2}{\Gamma^2\epsilon^2 + (\Delta^2-\epsilon^2)(2-\Gamma)^2} \frac{2M_1M_2}{M_1+2M_2}$ et $G = \frac{12\Gamma^2 G_Q}{8(1-\Gamma)+3\Gamma^2} \frac{M_1M_2}{M_1+2M_2}$. Nous introduisons $x = \frac{M_1}{M_2}$ et $\tilde{S}_{23} = \frac{S_{23}}{G_Q \Delta M_2}$. Nous pouvons alors réécrire $\tilde{S}_{23}$ sous la forme

$$\tilde{S}_{23} = 4\frac{\Gamma^2}{8(1-\Gamma)+3\Gamma^2}\frac{x}{x+2} - 4\alpha(\Gamma)$$

où $\alpha(\Gamma)$ est une fonction dépendant seulement de Γ, qui est positive quelque soit la valeur de Γ.

Si $x \to 0$ alors $\tilde{S}_{23} < 0$ ce qui correspond au cas limite où M_2 est très grand par rapport à M_1. Par contre, si $x \to \infty$ alors $\tilde{S}_{23} > 0$ ce qui correspond au cas limite où M_2 est très petit par rapport à M_1.

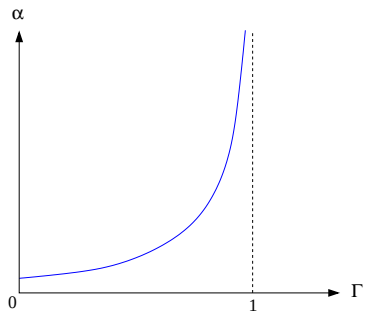

FIG. 3.19 – Schéma de la fonction α en fonction de Γ.

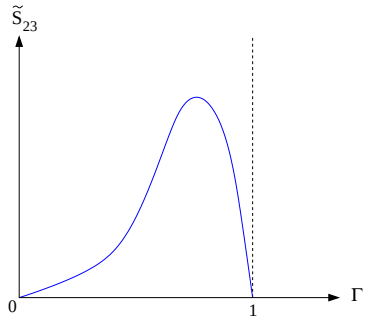

FIG. 3.20 – Schéma de la fonction $\tilde{S}_{23}$ en fonction de Γ dans le cas où $x \to \infty$.

<u>Cas 2a :</u> $\Gamma_1 \to 1$ et $\Gamma_2 \to 1$

Dans ce cas, $\tilde{S}_{11} = \frac{S_{11}}{G_Q \Delta M_2} = \frac{16}{3}\frac{x}{x+2}$ et $\Sigma = M_2\Delta/3$ avec $\Sigma = \int_{-\Delta}^{\Delta} A_2(\epsilon) f(\epsilon) f(-\epsilon)$, donc $S_{23} = \frac{S_{11}}{4} - 4G_Q\Sigma$. Par conséquent,

$$\tilde{S}_{23} = \frac{4}{3}\frac{x}{x+2} - \frac{4}{3} = \frac{-8}{3(x+2)}$$

Dans ce cas, $\tilde{S}_{23} < 0$ est toujours négatif. Lorsque les $\Gamma_j \to 1$, c'est comme s'il n'y avait pas de barrière et nous retrouvons donc le même signe que dans le cas d'un fil diffusif.

Par ailleurs, $\tilde{S}_{23}$ tend vers 0 lorsque $x \to \infty$. C'est aussi vrai dans le "Cas 1", néanmoins il tend vers les 0 positifs, alors qu'ici on tend vers 0 négatif.

<u>Cas 2b :</u> $\Gamma_1 \to 1$ et $\Gamma_2 \ll 1$

Dans ce cas $\tilde{S}_{11} = 2\Gamma_2^2$ et $\Sigma = \frac{19}{240}\Gamma_2^2 M_2 \Delta$ et donc

$$\tilde{S}_{23} = \frac{\Gamma_2^2}{2} - \frac{19}{60}\Gamma_2^2 = \frac{11}{60}\Gamma_2^2$$

Dans ce cas limite, $\tilde{S}_{23} > 0$ est toujours positif et ne dépend pas de x.

<u>Cas 3a :</u> $\Gamma_1 \ll 1$ et $\Gamma_2 \to 1$

Dans ce cas $S_{23} = -\frac{36}{35} G_Q M_2 \Delta$ donc $\tilde{S}_{23} = -\frac{36}{35}$. Pour ce régime nous avons donc toujours des corrélations négatives.

<u>Cas 3b :</u> $\Gamma_1 \ll 1$ et $\Gamma_2 \ll 1$

Nous obtenons ce cas limite en prenant $\Gamma_1 = \beta\Gamma_2$, avec β un facteur de proportionalité. Puis

nous faisons un développement en série autour de $\Gamma_1 = 0$. Nous trouvons alors

$$S_{23} = M_2\Gamma_2^2 G_Q \Delta \frac{11M_1\Gamma_1^2 - 38M_2\Gamma_2^2}{60(M_1\Gamma_1^2 + 2M_2\Gamma_2^2)}$$

Soit

$$\tilde{S}_{23} = \Gamma_2^2 \frac{11x\Gamma_1^2 - 38\Gamma_2^2}{60(x\Gamma_1^2 + 2x\Gamma_2^2)}$$

Nous constatons que dans ce cas limite, il est possible d'avoir un changement de signe des corrélations croisées.

3.3.4 Point quantique avec trois réservoirs supraconducteurs : eV quelconque

Nous résolvons le système numériquement pour le cas général avec eV quelconque dans le cas où les bras deux et trois sont identiques. Pour cela, il nous faut mettre le système sous forme matricielle.

Les courants sont donnés par $I_j = \int_{-\infty}^{\infty} i_j(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon$ avec les courants spectraux (3.32)

$$\begin{cases} i_1(\epsilon) = M_1 G_Q/e \left\{R_1^A(\epsilon)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon)] + T_1(\epsilon)[f(\epsilon) - f_0(\epsilon)]\right\} \\ i_2(\epsilon) = M_2 G_Q/e \left\{R_2^A(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)] + T_2(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - f_0(\epsilon + eV)]\right\} \\ i_3(\epsilon) = M_2 G_Q/e \left\{R_2^A(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)] + T_2(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - f_0(\epsilon + eV)]\right\} \end{cases}$$

Sans interaction inélastique la somme des courants spectraux est nulle $i_1(\epsilon) + i_2(\epsilon) + i_3(\epsilon) = 0$. Nous avons à chaque énergie :

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left\{M_1(R_1^A(\epsilon) + T_1(\epsilon)) + 2M_2(R_2^A(\epsilon + eV) + T_1(\epsilon + eV))\right\}}_{\alpha(\epsilon)} f(\epsilon) \\ &+ \underbrace{M_1 R_1^A(\epsilon)}_{\beta(\epsilon)} f(-\epsilon) + \underbrace{2M_2 R_2^A(\epsilon + eV)}_{\gamma(\epsilon)} f(-\epsilon - 2eV) \\ &= \underbrace{M_1(R_1^A(\epsilon) + T_1(\epsilon) f_0(\epsilon)) + 2M_2(R_2^A(\epsilon + eV) + T_1(\epsilon + eV) f_0(\epsilon + eV))}_{\delta(\epsilon)} \end{aligned}$$

Nous pouvons mettre ce système d'équations sous forme matricielle $M\hat{f} = X$ avec $\hat{f}$ le vecteur des fonctions $f(\epsilon)$ avec comme entrée $\epsilon - 2peV, \ldots, \epsilon - 2eV, \epsilon + 2eV, \ldots, \epsilon + 2peV, -\epsilon + 2peV, \ldots, -\epsilon + 2eV, -\epsilon, -\epsilon - 2eV, \ldots, -\epsilon - 2peV$. Le vecteur X contient les $\delta(\epsilon)$ et la matrice M prend la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha(\epsilon - 2peV) & & & & & \\ & \ldots & & & & \\ & & \alpha(\epsilon - 2eV) & & & \\ & & & \alpha(\epsilon) & & \\ & & & & \ldots & \\ & & & & & \alpha(\epsilon + 2peV) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha(-\epsilon+2peV) & & & & & \\ & \cdots & & & & \\ & & \alpha(-\epsilon+2eV) & & & \\ & & & \alpha(-\epsilon) & & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & & \alpha(-\epsilon-2peV) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta(\epsilon-2peV) & \gamma(\epsilon-2peV) & & & & \\ & \cdots & \cdots & & & \\ & & \beta(\epsilon-2eV) & \gamma(\epsilon-2eV) & & \\ & & & \beta(\epsilon) & \gamma(\epsilon) & \\ & & & & \cdots & \cdots \\ & & & & & \beta(\epsilon+2peV) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \beta(-\epsilon+2peV) & & & & & \\ \cdots & \cdots & & & & \\ & \gamma(-\epsilon+2eV) & \beta(-\epsilon+2eV) & & & \\ & & \gamma(-\epsilon) & \beta(-\epsilon) & & \\ & & & \cdots & \cdots & \\ & & & & \gamma(-\epsilon-2peV) & \beta(-\epsilon-2peV) \end{pmatrix}$$

En calculant l'inverse de la matrice M, nous avons les fonctions de distribution f par $\hat{f} = M^{-1}X$ quelque soit la température et la tension (Fig. 3.21 et Fig. 3.22). Les fonctions de distribution vont de 1 à 0 de manière monotone pour V très petit et de façon plus saccadée (qui rappelle les palliers du cas diffusif) lorsque la tension augmente. A température non nulle, nous voyons apparaître des pics de la fonction de distribution.

Nous pouvons voir qu'en prenant les même paramètres que Samuelsson *et al.* [68] nous retrouvons les courbes du courant (Fig. 3.23) et de la conductance différentielle (Fig. 3.24), dans le cas particulier où $M_1 = 2M_2$. Par ailleurs, nous remarquons en Δ et 2Δ des marches pour les courant se traduisant par des pics dans la conductance différentielle. Les marches sont dues aux réflexions d'Andreev multiples incohérentes. La marche en Δ est plus marquée sur la courbe $M_1 = 10M_2$, $\Gamma_1 = 1$ et $\Gamma_2 = 2$ Ceci vient du fait que nous considérons les bras deux et trois identiques. Par conséquent, si $M_1 = 2M_2$ nous avons un système assimilable à une jonction S-N-S.

Nous regardons maintenant les corrélations, les fluctuations des courants spectraux sont données par

$$\begin{cases} \delta i_1(\epsilon) = \delta i_1^0(\epsilon) + G_Q/eM_1[R_1^A(\epsilon)(\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon)) + T_1(\epsilon)\delta f(\epsilon)] \\ \delta i_2(\epsilon) = \delta i_2^0(\epsilon) + G_Q/eM_2[R_2^A(\epsilon+eV)(\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon-2eV)) + T_2(\epsilon+eV)\delta f(\epsilon)] \\ \delta i_3(\epsilon) = \delta i_3^0(\epsilon) + G_Q/eM_2[R_2^A(\epsilon+eV)(\delta f(\epsilon) + \delta f(-\epsilon-2eV)) + T_2(\epsilon+eV)\delta f(\epsilon)] \end{cases}$$

La somme des fluctuations est nulle puisque les interactions inélastiques sont supposées nulles, c'est-à-dire $\delta i_1(\epsilon) + \delta i_2(\epsilon) + \delta i_3(\epsilon) = 0$. Nous avons donc l'équation suivante

$$\left[M_1R_1^A(\epsilon) + 2M_2R_2^A(\epsilon+eV) + M_1T_1(\epsilon) + 2M_2T_2(\epsilon+eV)\right]\delta f(\epsilon) + M_1R_1^A(\epsilon)\delta f(-\epsilon) \\ +2M_2R_2^A(\epsilon+eV)\delta f(-\epsilon-2eV) = -(\delta i_1^0(\epsilon) + \delta i_2^0(\epsilon) + \delta i_3^0(\epsilon))$$

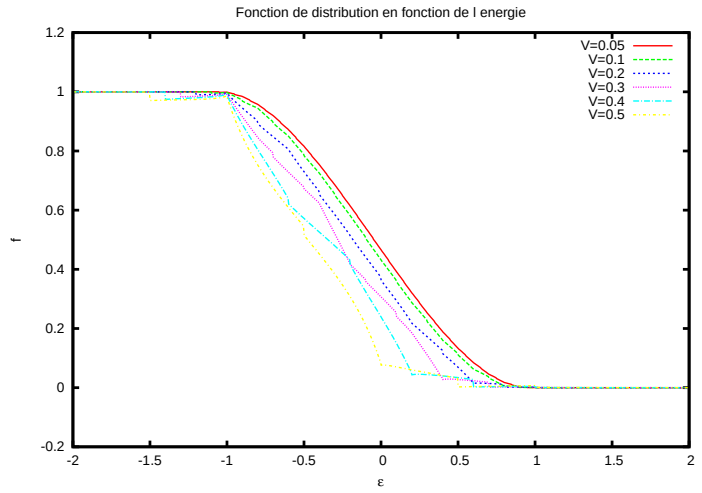

FIG. 3.21 – Fonction de distribution dans le point quantique en fonction de l'énergie ϵ pour différentes valeurs de la tension à température nulle, $M_1 = 2M_2$, $\Gamma_1 = 0.2$ et $\Gamma_2 = 0.3$.

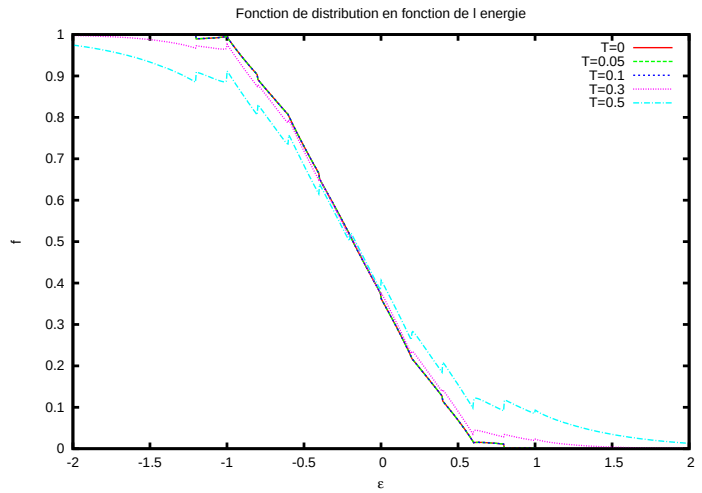

FIG. 3.22 – Fonction de distribution dans le point quantique en fonction de l'énergie ϵ pour différentes valeurs de la température pour une tension $V = 0.2$, $M_1 = 2M_2$, $\Gamma_1 = 0.2$ et $\Gamma_2 = 0.3$.

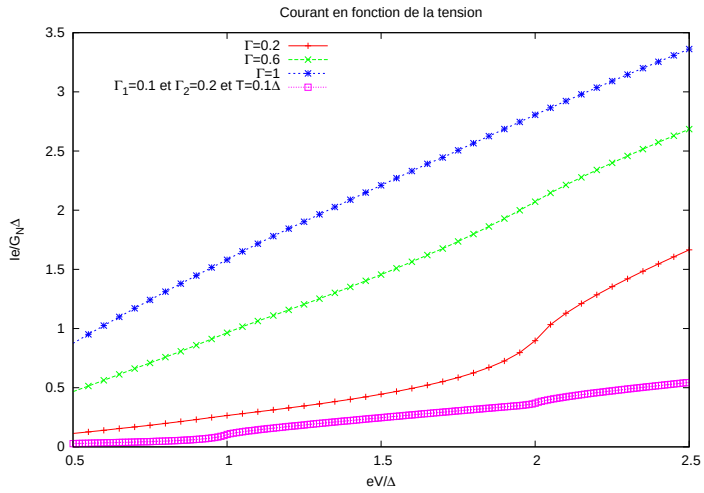

FIG. 3.23 – Courant normalisé par $\frac{G_N\Delta}{e}$ en fonction de $\frac{eV}{\Delta}$ à température nulle pour $M_1 = 2M_2 = 200$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ pour les deux premières courbes et $M_1 = 10M_2 = 100$ pour la troisième courbe.

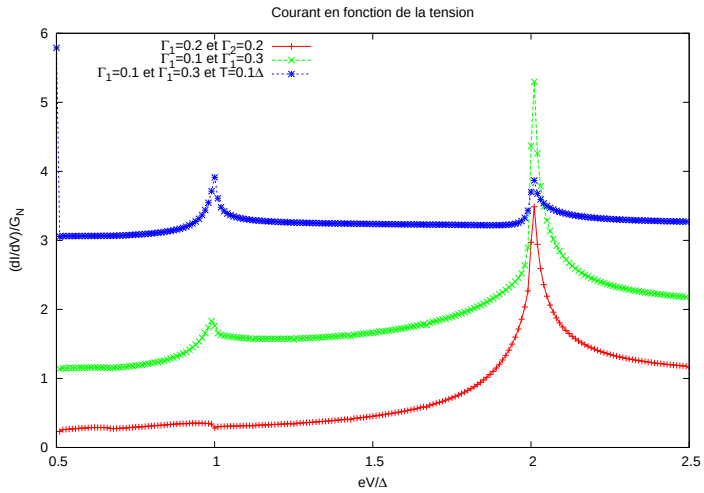

FIG. 3.24 – Conductance différentielle normalisé par G_N en fonction de $\frac{eV}{\Delta}$ à température nulle, avec $M_1 = 2M_2 = 200$ pour les deux premières courbe et $M_1 = 10M_2 = 100$ pour la courbe supérieure. La courbe verte ($\times$) est décalé de +1 et la courbe bleue ($\star$) est décalée de $+3$.

que nous pouvons mettre sous la forme matricielle $M\hat{\delta f} = S$, avec M la même matrice que celle pour les fonctions de distribution et $s(\epsilon) = -(\delta i_1^0(\epsilon) + \delta i_2^0(\epsilon) + \delta i_3^0(\epsilon))$. Par inversion de la matrice, nous avons $\hat{\delta f} = M^{-1}S$. Les fluctuations de courant sont décrites en termes des fluctuations des courant spectraux :

$$\delta I_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon \delta i_\alpha(\epsilon) = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} \int_0^{eV} \mathrm{d}\epsilon \left[\delta i_\alpha(\epsilon + 2neV) + \delta i_\alpha(-\epsilon - 2neV - 2eV_\alpha)\right]$$

Le terme $-2eV_\alpha$ est négligeable pour $n_{max} \to \infty$, $V_\alpha = 0$ si $\alpha = 1$ et $V_\alpha = V$ si $\alpha = 2, 3$. Nous avons inséré le terme $-2eV_\alpha$ pour établir une symétrie entre les deux termes. Maintenant, nous pouvons considérer $\epsilon \in [0, eV]$ et δI_α peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}\delta I_\alpha = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} \int_0^{eV} \mathrm{d}\epsilon \Big\{ & M_\alpha \frac{G_Q}{e}[2R_\alpha^A(\epsilon + 2neV + eV_\alpha) + T_\alpha^A(\epsilon + 2neV + eV_\alpha)] \\ & \times[\delta f(\epsilon + 2neV) + \delta f(-\epsilon - 2neV - 2eV_\alpha)] \\ & +\delta i_\alpha^0(\epsilon + 2neV) + \delta i_\alpha^0(-\epsilon - 2neV - 2eV_\alpha)\Big\}\end{aligned}$$

Nous insérons $\sigma = \pm 1$ et définissons $V_\alpha^\sigma = V_\alpha$ si $\sigma = -1$ et $V_\alpha^\sigma = 0$ sinon. Nous définissons également $\gamma_\alpha^n = M_\alpha \frac{G_Q}{e}[2R_\alpha^A(\epsilon + 2neV + eV_\alpha) + T_\alpha^A(\epsilon + 2neV + eV_\alpha)]$. De cette manière, δI_α se réduit à

$$\delta I_\alpha = \int_0^{eV} \mathrm{d}\epsilon \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} \sum_{\sigma=\pm 1} \gamma_\alpha^n \delta f(\sigma[\epsilon + 2neV + 2eV_\alpha^\sigma]) + \delta i_\alpha^0(\sigma[\epsilon + 2neV + 2eV_\alpha^\sigma]) \quad (3.39)$$

Le corrélateur général pour une jonction S-N, avec le réservoir supraconducteur mis à tension V, peut être déterminé selon la même méthode que dans [66] et vaut dans notre formalisme

$$\begin{aligned}\langle \delta i(\epsilon, t)\delta i(\epsilon', 0)\rangle = G_Q M \delta(t)\{ & \quad (3.40)\\ \delta(\epsilon - \epsilon')\big[T(\epsilon + eV)\big\{ & f(\epsilon)[1 - f_0(\epsilon + eV)] + f_0(\epsilon + eV)[1 - f(\epsilon)] - T(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - f_0(\epsilon + eV)]^2\big\} \\ & +R^A(\epsilon + eV)\{f(\epsilon)f(-\epsilon - 2eV) + [1 - f(\epsilon)][1 - f(-\epsilon - 2eV)] \\ & -R^A(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)]^2\big\} \\ & -2T(\epsilon + eV)R^A(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - f_0(\epsilon + eV)][f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)]\big] \\ \delta(\epsilon + \epsilon' + 2eV_\alpha)\big[R^A(\epsilon + eV)\{ & f(\epsilon)f(-\epsilon - 2eV) + [1 - f(\epsilon)][1 - f(-\epsilon - 2eV)] \\ & -R^A(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)]^2\big\} \\ & -T(\epsilon + eV)R^A(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)]^2 \\ & +4T_A(\epsilon + eV)T_N(\epsilon + eV)\{[f(\epsilon) - f_0(\epsilon + eV)][1 - f_0(\epsilon + eV) - f(-\epsilon - 2eV)]\}]\}\end{aligned}$$

Avec $T = T^A + T^N$, si $|\epsilon| < \Delta$ alors $T^A = T^N = 0$ et $R^A + R^N = 1$. Par contre, si $|\epsilon| > \Delta$ alors $T^A T^N = R^A R^N$ avec $R^N = \frac{4(1-\Gamma)(\epsilon^2-\Delta^2)}{(\Gamma|\epsilon|+\sqrt{\epsilon^2-\Delta^2}(2-\Gamma))^2}$ et $T = \frac{2\Gamma\sqrt{\epsilon^2-\Delta^2}(\Gamma\sqrt{\epsilon^2-\Delta^2}+(2-\Gamma)|\epsilon|)}{(\Gamma|\epsilon|+\sqrt{\epsilon^2-\Delta^2}(2-\Gamma))^2}$. Ce résultat (3.40) permet de reproduire le bruit à un contact S/N [54]. En combinant (3.39) et (3.40), nous pouvons trouver numériquement le bruit et les corrélations croisées pour une tension et une température arbitraire.

Pour le bruit et les corrélations croisées nous voyons clairement une structure non linéaire au gap et à ses facteurs. Lorsque nous sommes dans un régime $k_B T \leq eV \leq \Delta$ les corrélations croisées sont

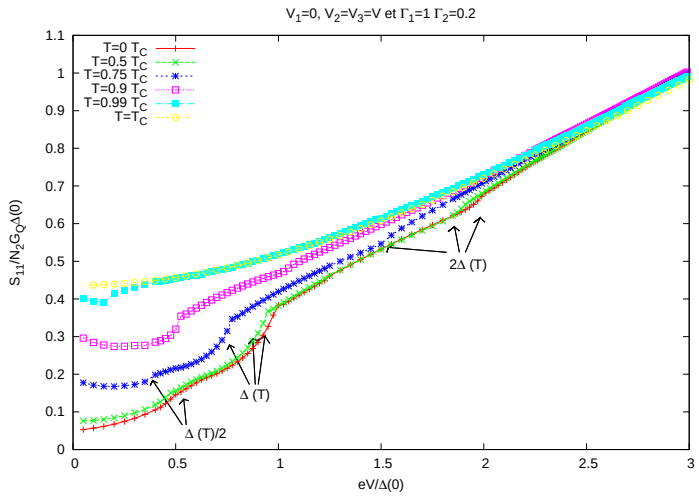

FIG. 3.25 – Bruit normalisé en fonction de la tension, pour le point quantique avec trois réservoirs supraconducteurs. Les courbes correspondent à différentes températures avec $M_1 = 10M_2$, $\Gamma_1 = 1$ et $\Gamma_2 = 0.2$.)

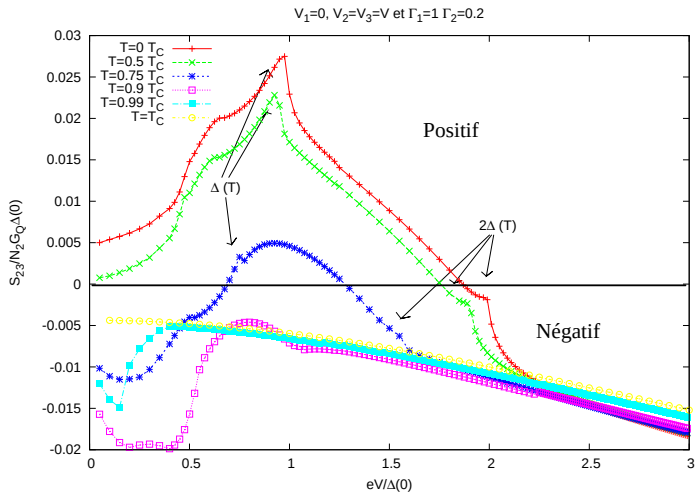

FIG. 3.26 – Corrélations croisées de courant normalisées en fonction de la tension, pour le point quantique avec trois réservoirs supraconducteurs. Les courbes correspondent à différentes températures avec $M_1 = 10M_2$, $\Gamma_1 = 1$ et $\Gamma_2 = 0.2$.

dans un régime positif et $S_{11} = \frac{4}{3}G\Delta$. Pour les valeurs $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 0.2$, $M_1 = 10M_2$ et $T = 0.1\Delta$, le bruit normalisé vaut ~ 0.05, nous avons bien un pallier à cette valeur. Notre modèle ne prend pas en compte le régime $V = 0$ pour lequel la relation de fluctuation dissipation donne $S_{11} = 4G^A k_B T$ et $S_{23} = -2(G^A G_2^A/G_1^A)k_B T$, où $G_j^A = (4e^2/h)M_j \frac{\Gamma_j^2}{(2-\Gamma_j)^2}$ est la conductance d'Andreev à chaque contact pour $eV, k_B T \ll \Delta$ et $G^A = \frac{2G_1^A G_2^A}{G_1^A + 2G_2^A}$. Pour nos valeurs dans ce régime le bruit normalisé devrait valoir ~ 0.02 et les corrélations croisées $\sim -10^{-4}$. Néanmoins, nous n'observons pas la chute du bruit jusqu'à la valeur thermalisée, car le cas $V = 0$ n'est pas contenu dans notre modèle. Nous pouvons voir que nos courbes remontent légèrement pour de faibles tensions, cette divergence peut venir d'un problème de précision pour les points à basse tension. Un régime de corrélations croisées positives est observé pour $T < T_C$ sur la figure 3.26. Nous avons fait l'hypothèse que Δ ne dépendait pas de T, or ceci n'est vrai que pour des températures bien inférieures au gap.

En augmentant la tension au dessus du gap $eV \gg \Delta$, le système redevient normal et les corrélations croisées repassent dans un régime négatif. Par ailleurs, la pente est la même que celle du point quantique connecté à trois réservoirs normaux.

3.3.5 Interactions électron électron

Nous introduisons les interactions électron électron inélastiques pour notre point quantique connecté à des réservoirs supraconducteurs, celles-ci sont importantes à basse tension à cause des réflexions d'Andreev multiples incohérentes. Nous reprenons la même structure que dans la section 3.2.3 en introduisant les barrières. Nous considérons S-I-N-I-S, l'équation (3.27) n'est pas modifiée, par contre, nous n'avons plus la même équation de diffusion sur les énergies (3.28). Pour ce système, nous avons les courants

$$\begin{cases} i_L(\epsilon) = \frac{G_Q}{e} A_L(\epsilon)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon)] \\ i_R(\epsilon) = \frac{G_Q}{e} A_R(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)] \\ i_d(\epsilon) = -\frac{\sigma S}{e} \bigtriangledown f \end{cases}$$

où $i_{L(R)}$ est le courant dans le réservoir gauche (droit) et i_d le courant à travers la jonction, avec $i_L(\epsilon) = i_d(\epsilon)$ et $i_R(\epsilon) = -i_d(\epsilon)$. En partant de (3.27) et en intégrant une fois sur la position, nous obtenons

$$\begin{aligned} LI_{ee}(\epsilon) &= -D\left[\bigtriangledown f(L) - \bigtriangledown f(0)\right] \\ &= D\frac{G_Q}{\sigma S}\left\{A_L(\epsilon)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon)] + A_R(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)]\right\} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} I_{ee}(\epsilon) &= E_{Th}\frac{G_Q}{G_N}\left\{A_L(\epsilon)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon)] + A_R(\epsilon + eV)[f(\epsilon) - 1 + f(-\epsilon - 2eV)]\right\} \quad (3.41) \\ &= E_{Th}\frac{e}{G_N}\left\{i_L(\epsilon) + i_R(\epsilon)\right\} \end{aligned}$$

En combinant $I_{ee}(\epsilon)$, $I_{ee}(-\epsilon) = -I_{ee}(\epsilon)$ et $I_{ee}(-\epsilon - 2eV)$, nous obtenons après un petit développement

$$-\tilde{D}_E \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(A_{eff}(\epsilon)\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right) = I_{ee}(\epsilon) \quad (3.42)$$

avec $\tilde{D}_E = \frac{2}{G_Q} G_N (eV)^2 E_{Th}$.

Comme précédemment, nous multiplions et intégrons par l'énergie.

$$\begin{aligned} -\tilde{D}_E \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(A_{eff}(\epsilon) \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) &= -\tilde{D}_E \left\{ \epsilon A_{eff}(\epsilon) \delta(\epsilon) |_{-\Delta}^{\Delta} - \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon A_{eff}(\epsilon) \delta(\epsilon) \right\} \\ &= -\tilde{D}_E A_{eff}(0) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons $\tilde{D}_E A_{eff}(0) = \Delta^3 T_0 e^{-\Delta/T_0} \frac{\alpha_{ee}}{E_F}$. Nous en déduisons la température T_0 : $T_0 = \frac{\Delta}{\ln(\tilde{\lambda})}$ avec $\tilde{\lambda} = \frac{\Delta^4 \alpha_{ee}}{E_F \tilde{D}_E A_{eff}(0)} = \frac{G_N}{2 G_Q A_{eff}(0)} \lambda$.

Contrairement au cas diffusif, il ne nous suffit pas de réintroduire notre température effective dans notre formule pur les corrélations de courant. Effectivement, nous n'avons plus $\delta i_1(\epsilon) + \delta i_2(\epsilon) + \delta i_3(\epsilon) = 0$, mais $\delta i_1(\epsilon) + \delta i_2(\epsilon) + \delta i_3(\epsilon) = I_{ee}[f + \delta f] - I_{ee}[f] + \delta i_{\text{Langevin}}$. Le terme de source de Boltzmann-Langevin est toujours négligeable, par contre, contrairement au cas du fil diffusif, nous ne pouvons plus considérer que $I_{ee}[f + \delta f] - I_{ee}[f] = 0$. Par conséquent, il nous faudrait considérer les fluctuations de l'intégrale de collision pour pouvoir obtenir les corrélations croisées.

3.4 Synthèse

En conclusion, nous avons étudié deux types de jonctions triterminales : la jonction diffusive sans barrière et le point quantique. En premier lieu, lorsque tous les réservoirs sont supraconducteurs les corrélations sont fortement amplifiées par les réflexions d'Andreev multiples incohérentes et ceci pour nos deux jonctions étudiées.

Dans le cas de la jonction diffusive sans barrière, les auto-corrélations sont toujours positives et les corrélations croisées sont toujours négatives. Effectivement, dans cette situation les réflexions d'Andreev multiples incohérentes n'introduisent pas de régime de corrélations croisées positives, pour les deux situations où les bras 2 et 3 sont à la même tension ou lorsqu'ils ont des tensions opposées. Par ailleurs, si nous considérons le bras 2 et le bras 3 identiques et en posant $M_1 = 2M_2$ nous retrouvons les résultats de Nagaev [32] pour la jonction S-N-S comme attendu. Les corrélations croisées montrent une non linéarité lorsque les deux bras sont mis à une tension identique. En outre, l'introduction des interactions électron électron ne suffit pas pour voir apparaître des corrélations positives.

Dans le cas d'un point quantique, les corrélations croisées montrent un régime de corrélations positives, dû aux réflexions d'Andreev multiples incohérentes. Ce régime n'est pas le même que celui trouver par Samuelsson et Büttiker [28] dans le cas où un seul réservoir est supraconducteur. Les corrélations croisées positives viennent probablement du fait que N paires sont injectées dans le bras 1 avec $N/2$ électrons partant dans le bras 2 et $N/2$ électrons partant dans le bras 3. La contribution négative viendrait des électrons passant du bras 2 au bras 3 et des électrons passant du bras 3 au bras 2.

Les corrélations de courant sont bien adaptées à une méthode de détection du bruit à l'aide de SQUID dans des systèmes à basses impédances. D'ailleurs de telles mesures ont été entreprises dans la thèse d'Olivier Coupiac dirigée par François Lefloch. Pour avoir une impédance encore plus faible et faciliter les mesures, nous pourrions imaginer de généraliser les calculs dans le cas d'un système complètement supraconducteur.

Il reste encore de nombreuses pistes à explorer dont la principale serait d'introduire les effets cohérents. Par exemple d'une façon similaire à celle de Cuevas *et al.* [52].

Chapitre 4

Ondes de densité de charge

4.1 Motivations

De nombreux systèmes possédent une bande d'énergie interdite (ou "gap" en anglais) : supraconducteurs, isolants à bande interdite, ondes de densité de charge (ODC) et ondes de densité de spin (ODS). Les ordres de ces systèmes sont fortement différents, par exemple, les ondes de densité de charge possèdent un condensat tout comme le supraconducteur, mais les paires de Cooper du supraconducteur sont remplacées dans le cas d'une onde de densité de charge par des paires électrons trous dans la même bande de spin. Ainsi, la coexistence entre ces différents ordres est habituellement difficile en volume.

Les progrès de la technologie de nanofabrication permettent des expériences de transport d'électrons dans des structures de taille inférieure au micron contenant plusieurs électrodes avec différents paramètres d'ordre. Il est difficile de trouver des manifestations quantiques du condensat d'une onde de densité de charge. On peut penser à l'impossibilité de réaliser un SQUID avec une onde de densité de charge : en dehors de contraintes géométriques, une paire électron-trou ne se couple pas à un potentiel vecteur. L'objectif de ce chapitre est de chercher des tests de cohérence de phase d'une onde de densité de charge ou de spin. Nous cherchons tout d'abord si des paires d'Andreev venant d'un supraconducteur peuvent circuler à travers une onde de densité de charge ou de spin. Dans un second temps, nous nous intéressons à des phénomènes d'interférence quantique dans une onde de densité de charge.

Nous commençons à étudier des jonctions S-ODC et S-ODC-S (Sec. 4.3). Pour cela, nous utilisons les mêmes approches microscopiques que pour une jonction N-S-N. C'est-à-dire, l'approche de BTK et une approche basée sur des fonctions de Green. Nous pouvons voir qu'une paire de Cooper pénétrant dans une onde de densité de charge sous le gap de Peierls se déphase sur une longueur d'onde de Fermi, alors que les états à une particule sont localisés sur la longueur de cohérence de l'onde de densité de charge. Il est, ainsi, pratiquement impossible d'observer un courant de Josephson à travers une onde de densité de charge tant que le gap de l'onde de densité de charge est plus grand que le gap supraconducteur (Sec. 4.3.4). Par contre, l'effet Josephson à travers une onde de densité de spin est limité par la longueur de cohérence de l'onde de densité de spin et non par la longueur d'onde de Fermi comme pour l'onde de densité de charge. Ainsi, un courant Josephson à travers une jonction S-ODS-S peut être observé dans une structure dont la distance entre les contacts supraconducteurs est de l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence de l'onde de densité de spin.

En outre, nous voulons étudier un effet d'interférence quantique pour des particules passant par effet tunnel avec une énergie inférieure au gap sur une distance comparable à la longueur de cohérence (Sec. 4.5.1). Cette localisation non standard est une conséquence des modes de transmission avancé-avancé et retardé-retardé, déjà discutés par Altland et Zirnbauer [69].

4.2 Une onde de densité de charge

De manière très qualitative, nous pouvons décrire une onde de densité de charge comme la modulation de la densité des électrons. Effectivement, dans un métal, la densité de charge est fortement uniforme si nous supposons que les ions forment un réseau parfait. Par contre, dans un métal quasi unidimensionnel des modulations statiques de la densité de charge sont stables sous certaines conditions lorsque la température décroît sous la température critique de Peierls. Il est possible qu'à température suffisament basse, l'énergie électronique diminue du fait de l'ouverture d'une bande interdite, et que l'énergie de réseau augmente du fait de modulations du réseau. Une onde de densité de charge se forme lorsque l'abaissement d'énergie électronique l'emporte sur l'augmentation d'énergie élastique. La modulation de la densité des électrons est appelée onde de densité de charge (voir Fig. 4.1).

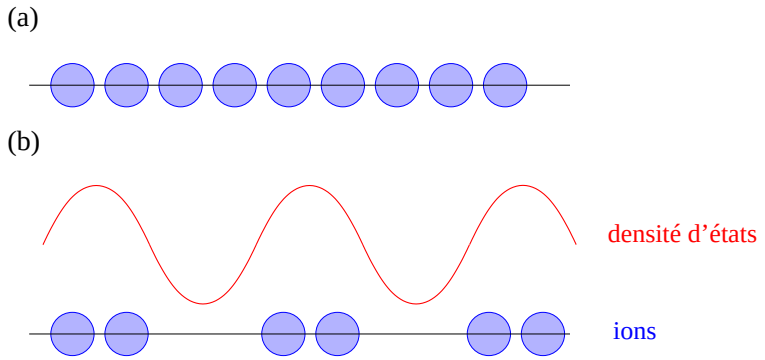

FIG. 4.1 – Schéma d'un réseau de ions pour un métal (a) et pour une onde de densité de charge (b).

Des effets mésoscopiques ont été prédits dans les ondes de densité de charge. L'onde de densité de charge est un système à bande d'énergie interdite avec un condensat qui apparie un électron avec un trou. Par conséquent, si nous considérons une interface N-ODC [70], nous avons une réflexion similaire à une réflexion d'Andreev (voir Fig. 4.2). Lorsqu'un électron arrive à l'interface, si son énergie est inférieure au gap, il ne peut pas passer par effet tunnel. Nous avons donc dans l'onde de densité de charge création d'une paire électron trou avec un électron (de spin identique à l'électron incident) réfléchi de manière à avoir conservation de la charge. Lors de cette réflexion, une impulsion de $2k_F$ est transmise à l'onde de densité de charge. Contrairement au cas de la réflexion d'Andreev où le trou suit la même séquence d'impuretés que l'électron incident. L'électron réfléchi dans le cas d'une onde de densité de charge, n'a pas le même facteur d'onde et ne suivra pas la même séquence d'impureté. La paire électron-électron a donc une propagation incohérente dans la partie normale d'une jonction métal normal - onde de densité de charge. Ce type de réflexion ne transporte pas de courant, par contre, afin d'avoir conservation de l'impulsion, nous avons un transfert d'impulsion dans l'onde de densité de charge.

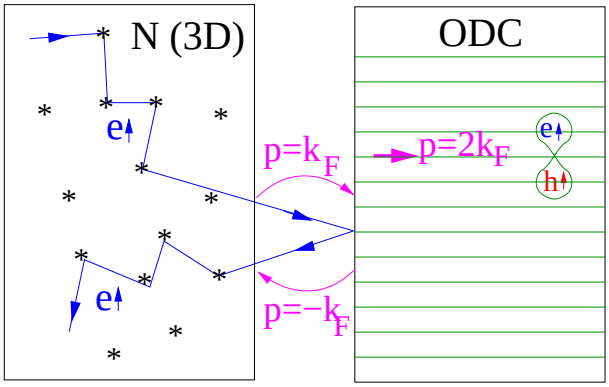

FIG. 4.2 – Réflexion sous le gap à une interface N-ODC. Un électron de spin-up et un trou dans la bande d'énergie de spin-up s'apparient dans le condensat de l'onde de densité de charge.

L'Hamiltonien d'une onde de densité de charge est donné par l'Hamiltonien de Peierls

$$\mathcal{H}_P = -\sum_x \left[T + \delta_0 \cos\left(2k_F x\right)\right] \left[c^+_{x+a_0} c_x + c^+_x c_{x+a_0}\right],$$

où T est l'amplitude moyenne de hopping avec une modulation δ_0 et a_0 le paramètre de réseau. En effectuant un changement de la variable spatiale x le long de la chaîne en la variable du vecteur d'onde k, nous trouvons

$$\mathcal{H} = -\sum_k 2T\cos\left(ka_0\right) c^+_k c_k - \sum_k \Delta c^+_{k-2k_F} c_k - \sum_k \Delta^* c^+_{k+2k_F} c_k,$$

avec $|\Delta| = \delta_0$, le gap de Peierls.

En suivant la même méthode que pour les fonctions de Green d'un supraconducteur (Appendice B.2), nous pouvons déterminer les fonctions de Green d'une onde de densité de charge. Il y a, néanmoins, une différence capitale, ce ne sont plus les canaux électrons trous, mais les canaux de la branche droite et de la branche gauche de la relation de dispersion qui interviennent, comme pour le cas d'un isolant à bande interdite (Appendice D.1). Les fonctions de Green d'une onde de densité de charge pour une propagation balistique sont donc obtenues à partir de la matrice (D.1). Elles prennent la forme[1]

$$\hat{g}^A_{\alpha,\beta}(\omega) = \begin{pmatrix} g_0(\omega)\exp\left(ik_F(x_\alpha - x_\beta)\right) & f_0(\omega)\exp\left(ik_F(x_\alpha + x_\beta)\right) \\ f_0(\omega)\exp\left(-ik_F(x_\alpha + x_\beta)\right) & g_0(\omega)\exp\left(-ik_F(x_\alpha - x_\beta)\right) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

où les points α et β sont aux coordonnées x_α et x_β le long des chaînes et $f_0(\omega) = \frac{1}{4T} e^{-R/\xi(\omega)} \frac{\Delta}{\sqrt{|\Delta|^2 - (\hbar\omega)^2}}$ et $g_0(\omega) = \frac{1}{4T} e^{-R/\xi(\omega)} \left(\frac{-\hbar\omega}{\sqrt{|\Delta|^2 - (\hbar\omega)^2}} + i\right)$ et $2T = \hbar v_F$.

Si $\omega \gg \Delta$, $f_0(\omega) \to 0$ et $g_0(\omega) = \frac{i}{2T} e^{-R/\xi(\omega)}$. La fonction de Green sur la branche droite prend alors la forme attendue $g^R_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2T} e^{ik_F R} e^{i\omega R/\hbar v_F}$.

[1] Lors du calcul, il nous faut utiliser le fait que $\xi^L_{k-2k_F} = \xi^R_k$, où $\xi^{L,(R)}_k$ est l'énergie cinétique.

4.3 Jonction S-ODC et supercourant

Dans un premier temps, nous voulons avoir une représentation physique de la jonction S-ODC. Le potentiel des impuretés est supposé être assez faible pour que la phase de l'onde de densité de charge soit la même que celle en l'absence d'impuretés. La limite balistique est justifiée par la très faible longueur de cohérence de l'onde de densité de charge $\xi_{ODC} = \hbar v_F/\Delta_{ODC} \geq 10$nm . Il est donc légitime de supposer que le libre parcours moyen élastique est plus grand que la longueur de cohérence de l'onde de densité de charge.

Lorsqu'une paire d'Andreev issue d'un supraconducteur pénètre dans une onde de densité de charge, le facteur aléatoire qu'acquiert l'électron de spin-up ne s'annule pas avec le facteur aléatoire de l'électron de spin-down, menant à un déphasage de la paire d'Andreev. Le modèle microscopique discuté ci-dessous dans un système balistique montre que le déphasage intervient sur la longueur de Fermi qui est à peu près égale à la période d'oscillation de la modulation d'une onde de densité de charge. De la même façon qu'au chapitre 1 nous moyennons le supercourant sur les différents canaux de conduction (voir (1.8) au chapitre 1). Cependant, les effets de moyennage sur les canaux de conduction et sur le désordre traité dans l'approximation des échelles sont souvent identiques (voir Appendice B.6 et B.7 pour un supraconducteur). Nous allons maintenant commencer par un argument qualitatif décrivant l'effet d'une impureté sur une paire d'Andreev dans une onde de densité de charge.

4.3.1 Argument qualitatif

Considérons une jonction S-ODC. Nous pouvons supposer à faible tension appliquée que la densité d'électrons hors équilibre injectés du fait d'une tension appliquée est modulée approximativement de la même façon que la densité d'électrons à l'équilibre. En effet, les fonctions d'onde prennent la forme $\varphi(x) = e^{ikx}\chi_R(x) + e^{-ikx}\chi_L(x)$, où $\chi_R(x)$ et $\chi_L(x)$ sont des fonctions variant lentement à l'échelle $2\pi/Q$ avec $Q = 2k_F$ le vecteur de l'onde de densité de charge. La densité est alors proportionelle à $|\varphi(x)|^2 = |\chi_R(x)|^2 + |\chi_L(x)|^2 + e^{2ikx}\chi_R^\dagger(x)\chi_L(x) + e^{-2ikx}\chi_R(x)\chi_L^\dagger(x)$ qui est modulée avec un vecteur $2k$ qui vaut approximativement Q.

Le nombre total d'électrons de spin-up en position x le long de la chaîne, $N_{e,\uparrow}^{(ODC)}(x) = N_0 + N_1 \cos(Qx + \varphi)$, est déphasé de π par rapport au nombre total de trous de spin-down, $N_{h,\downarrow}^{(ODC)}(x) = N_0' + N_1 \cos(Qx + \varphi + \pi) = N_0' - N_1 \cos(Qx + \varphi)$ impliquant le déphasage des paires d'Andreev. En effet, un maximum dans le nombre d'électrons correspond à un minimum dans le nombre de trous. Les quantités N_0, N_0' et N_1 sont respectivement le nombre d'électrons et de trous normaux et l'amplitude de la modulation dans le nombre d'électrons. Le nombre total d'états disponibles est $N_0 + N_0'$.

Maintenant, nous considérons une impureté non magnétique dans une onde de densité de charge. La contribution de l'impureté à l'énergie d'un électron de spin-up

$$\mathcal{H}_{e,\uparrow}^{(imp)} = V(x_i)\left[N_{e,\uparrow}^{(ODC)}(x_i) - N_0\right] = V(x_i)N_1 \cos(Qx_i + \varphi), \tag{4.2}$$

est égale à la même quantité pour un trou de spin-down :

$$\mathcal{H}_{h,\downarrow}^{(imp)} = -V(x_i)\left[N_{h,\downarrow}^{(ODC)}(x_i) - N_0'\right] = V(x_i)N_1 \cos(Qx_i + \varphi), \tag{4.3}$$

où x_i est la position de l'impureté et $V(x_i)$ le potentiel de désordre de l'impureté. Les termes N_0 et N_0' que nous soustrayons dans les équations (4.2) et (4.3) sans désordre, induisent un potentiel total (et

donc un déphasage) exactement opposé pour un électron et un trou suivant la même séquence d'impuretés. Ainsi, ces termes ne déphasent pas la paire d'Andreev. Au contraire, les termes N_1 sont additifs pour les électrons de spin-up et les trous dans la bande de spin-down constituant une paire d'Andreev. Il en résulte un déphasage entre les différents chemins suivant différentes séquences d'impuretés. Les paires d'Andreev déphasent donc sur le libre parcours moyen de l'électron, elles ne peuvent pas pénétrer dans une onde de densité de charge.

Par contre, les paires d'Andreev peuvent pénétrer sur la longueur de cohérence dans une onde de densité de spin (ODS) qui peut être décrite par deux ondes de densité de charge hors phases pour des électrons de spin-up et des électrons de spin-down. Effectivement, le nombre d'électrons de spin-up est $N_{e,\uparrow}^{(ODS)}(x) = N_0 + N_1 \cos(Qx + \varphi)$, et le nombre d'électrons de spin-down est $N_{e,\downarrow}^{(ODS)}(x) = N_0 - N_1 \cos(Qx + \varphi)$. La densité totale n'est donc pas modulée, mais la densité de spin, elle, est modulée. Le nombre de trous de spin-down $N_{h,\downarrow}^{(ODS)}(x) = N_0 + N_1 \cos(Qx + \varphi)$ est égal à $N_{e,\uparrow}^{(ODS)}(x)$ le nombre d'électrons de spin-up. Nous concluons donc grâce à l'argument précédent qu'une impureté non magnétique annule la phase aléatoire des électrons de spin-up et des trous de spin-down dans la phase totale des paires d'Andreev se propageant à travers une onde de densité de spin. Ainsi, un effet Josephson est possible sur une longueur de cohérence dans une onde de densité de spin. Nous pouvons étudier de manière plus générale, la jonction S-ODC à l'aide de la méthode de BTK.

4.3.2 Expérience de Sinchenko et Monceau

Sinchenko et Monceau [71] ont mené des expériences de transport à travers un contact ponctuel supraconducteur Niobium (Nb) - ondes de densité de charge ($NbSe_3$) dont les chaînes étaient perpendiculaires à l'interface, le long de la direction de propagation du courant (voir Fig. 4.3). Ils trouvent un pic de résistance dans le gap supraconducteur même pour des interfaces de transparence élevée, ce qui est l'opposé de l'approche de BTK pour un contact N-S. Nous en concluons que les paires de Cooper du supraconducteur ne pénètre pas dans l'onde de densité de charge.

4.3.3 Résolution par l'approche de Blonder, Tinkham et Klapwijk

Nous évaluons, à l'aide de la méthode Blonder, Tinkham et Klapwijk [35], le transport sous le gap à une interface S-ODC. Une approche de BTK pour une jonction N-ODC est donnée par Visscher et Bauer [72]. Et une approche pour une interface S-ODC avec des supraconducteurs non conventionnels peut être trouvé dans [73]. Pour décrire une onde de densité de charge et les corrélations supraconductrices sur le même pied d'égalité, nous introduisons une fonction d'onde à quatre composantes correspondant aux opérateurs de création et d'annihilation $c^+_{k,\underline{R},\uparrow}$, $c^+_{k,\underline{L},\uparrow}$, $c_{k,\underline{R},\downarrow}$ et $c_{k,\underline{L},\downarrow}$ pour les électrons sur la branche droite (R) et sur la branche gauche (L) de spin-up et de spin-down et de vecteur d'onde k. Nous soulignons $\underline{R}$ et $\underline{L}$ pour éviter une confusion avec "avancé" et "retardé". La fonction

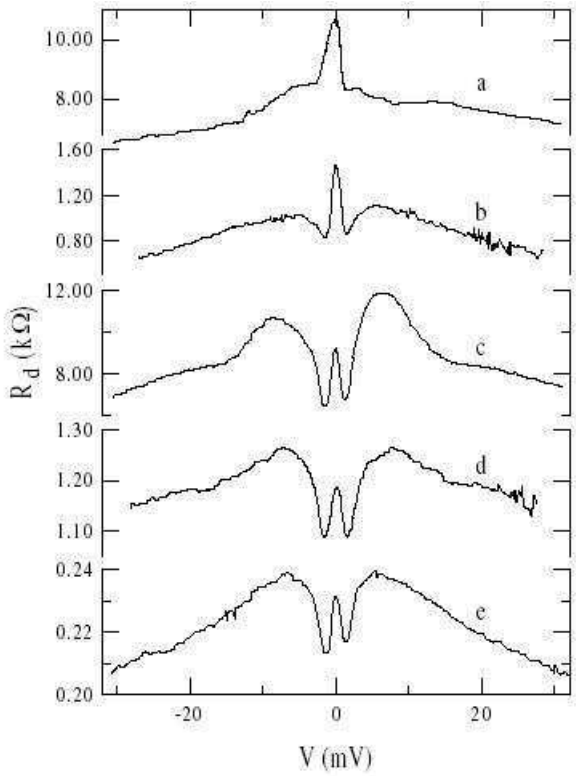

FIG. 4.3 – Résistance différentielle ($R_d(V)$) en fonction de la tension appliquée pour un point de contact supraconducteur (Nb) - ondes de densité de charge ($NbSe_3$) de différentes sortes mesurées à $T = 3.6$K. Les courbes (a) et (b) sont pour des jonctions avec une barrière tunnel isolante à l'interface S-ODC. Les courbes (c)-(e) sont pour des points de contacts avec une conductivité directe (sans barrière isolante) [71].

d'onde dans la partie onde de densité de charge de la jonction est donnée par

$$\psi_C(x<0) = \begin{pmatrix} ue^{i\varphi} \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{(ik_F+\frac{1}{\xi_C})x} + b \begin{pmatrix} ue^{i\varphi} \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-(ik_F-\frac{1}{\xi_C})x} + b' \begin{pmatrix} v^* \\ u^*e^{-i\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{(ik_F+\frac{1}{\xi_C})x}$$
$$+a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ue^{i\varphi} \\ v \end{pmatrix} e^{(ik_F+\frac{1}{\xi_C})x} + a' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^* \\ u^*e^{-i\varphi} \end{pmatrix} e^{(-ik_F+\frac{1}{\xi_C})x},$$

où x est la coordonnée le long de la chaîne, u et v sont les facteurs de cohérence de l'onde de densité de charge, et u^* et v^* sont leurs complexes conjugués et C représente l'onde de densité de charge.

La fonction d'onde dans le supraconducteur prend la forme

$$\psi_S(x>0) = d \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{(ik_F-\frac{1}{\xi_s})x} + d' \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{-(ik_F+\frac{1}{\xi_s})x}$$
$$+c \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ u_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-(ik_F+\frac{1}{\xi_s})x} + c' \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{(ik_F-\frac{1}{\xi_s})x},$$

où u_0 et v_0 sont les facteurs de cohérence BCS. En raccordant les fonctions d'ondes et leurs dérivées pour une interface hautement transparente, nous trouvons que tous les coefficients sont nuls sauf b' et $|b'|^2 = 1$. Aucune charge n'est transportée par la réflexion d'une quasiparticule de la branche droite d'une onde de densité de charge en une quasiparticule de la branche gauche, comme pour le cas d'un contact N-ODC.

4.3.4 Absence de supercourant passant dans une onde de densité de charge

Nous étudions, à l'aide des fonctions de Green, la possibilité de faire passer un supercourant dans une jonction S-ODC-S. Pour cela, nous introduisons les fonctions de Green d'une onde de densité de charge. Ainsi, il nous faut une fonction de Green pour les électrons et les trous de la branche droite et de la branche gauche. Par conséquent, nous introduisons une fonction de Green 4×4 qui considère le caractère électrons trous du supraconducteur et le caractère branche droite et branche gauche de l'onde de densité de charge (avec $e^{\underline{R}}_{\uparrow}$, $e^{\underline{L}}_{\uparrow}$, $h^{\underline{L}}_{\downarrow}$ et $h^{\underline{R}}_{\downarrow}$ comme entrée).

$$\hat{g}^A_{\alpha,\beta}(\omega) = -i\theta(\omega)$$
$$\times \begin{pmatrix} \langle\left\{c^{\underline{R}\dagger}_{\uparrow}(\alpha), c^{\underline{R}}_{\uparrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{R}\dagger}_{\uparrow}(\alpha), c^{\underline{L}}_{\uparrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{R}\dagger}_{\uparrow}(\alpha), c^{\underline{L}\dagger}_{\downarrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{R}\dagger}_{\uparrow}(\alpha), c^{\underline{R}\dagger}_{\downarrow}(\beta)\right\}\rangle \\ \langle\left\{c^{\underline{L}\dagger}_{\uparrow}(\alpha), c^{\underline{R}}_{\uparrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{L}\dagger}_{\uparrow}(\alpha), c^{\underline{L}}_{\uparrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{L}\dagger}_{\uparrow}(\alpha), c^{\underline{L}\dagger}_{\downarrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{L}\dagger}_{\uparrow}(\alpha), c^{\underline{R}\dagger}_{\downarrow}(\beta)\right\}\rangle \\ \langle\left\{c^{\underline{L}}_{\downarrow}(\alpha), c^{\underline{R}}_{\uparrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{L}}_{\downarrow}(\alpha), c^{\underline{L}}_{\uparrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{L}}_{\downarrow}(\alpha), c^{\underline{L}\dagger}_{\downarrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{L}}_{\downarrow}(\alpha), c^{\underline{R}\dagger}_{\downarrow}(\beta)\right\}\rangle \\ \langle\left\{c^{\underline{R}}_{\downarrow}(\alpha), c^{\underline{R}}_{\uparrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{R}}_{\downarrow}(\alpha), c^{\underline{L}}_{\uparrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{R}}_{\downarrow}(\alpha), c^{\underline{L}\dagger}_{\downarrow}(\beta)\right\}\rangle & \langle\left\{c^{\underline{R}}_{\downarrow}(\alpha), c^{\underline{R}\dagger}_{\downarrow}(\beta)\right\}\rangle \end{pmatrix}.$$

Pour une onde de densité de charge (indice C) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
g^{A(C)}_{\alpha,\beta}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta_C|^2-\omega^2}} \\
&\times \begin{pmatrix} -\omega e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} & \Delta_C e^{-ik_F(x_\alpha+x_\beta)} & 0 & 0 \\ \Delta_C^\star e^{ik_F(x_\alpha+x_\beta)} & -\omega e^{ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega e^{ik_F R_{\alpha,\beta}} & -\Delta_C^\star e^{ik_F(x_\alpha+x_\beta)} \\ 0 & 0 & -\Delta_C e^{-ik_F(x_\alpha+x_\beta)} & -\omega e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} \end{pmatrix} \\
&+i \begin{pmatrix} e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

et pour un supraconducteur (indice S)

$$
\begin{aligned}
g^{A(S)}_{\alpha,\beta}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta_S|^2-\omega^2}} \begin{pmatrix} -\omega e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 & \Delta_S & 0 \\ 0 & -\omega e^{ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 & -\Delta_S^\star \\ \Delta_S^\star & 0 & -\omega e^{ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 \\ 0 & -\Delta_S & 0 & -\omega e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} \end{pmatrix} \\
&+i \begin{pmatrix} e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_F R_{\alpha,\beta}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

A l'aide d'une structure de deux pointes supraconductrices en contact avec une onde de densité de charge, comme sur la figure 4.4, nous étudions la possibilité d'avoir un supercourant à travers une jonction S-ODC-S. Le supercourant est proportionnel à $G^{11}_{\alpha\beta}G^{22}_{\beta\alpha}$, où les indices 1, 2 sont les indices

FIG. 4.4 – Structure de deux pointes supraconductrices en contact avec une onde de densité de charge.

de Nambu dans la représentation 4×4. A l'ordre le plus bas $G^{11}_{\alpha\beta} = g^{(C)}_{\alpha\beta e\uparrow} + \ldots$ et $G^{22}_{\beta\alpha} = g^{(C)}_{\beta\alpha h\downarrow} + \ldots$. En outre, $g^{(C)}_{\alpha\beta e\uparrow} = g^{(C)}_{11} + g^{(C)}_{12} + g^{(C)}_{21} + g^{(C)}_{22}$ et $g^{(C)}_{\alpha\beta h\downarrow} = g^{(C)}_{33} + g^{(C)}_{34} + g^{(C)}_{43} + g^{(C)}_{44}$ avec 1, 2, 3 et 4 les indices de la matrice (4.4). Ainsi, avec $\Delta_C = |\Delta_C|e^{i\varphi}$ et $s_C = \sqrt{|\Delta_C|^2-\omega^2}$

$$
\begin{aligned}
g^{(C)}_{\alpha\beta e\uparrow} &= -\frac{2\omega}{s_C}\cos(k_F R_{\alpha\beta}) - 2\sin(k_F R_{\alpha\beta}) + \frac{2|\Delta_C|}{s_C}\cos(k_F(x_\alpha+x_\beta)-\varphi) \\
g^{(C)}_{\alpha\beta h\downarrow} &= -\frac{2\omega}{s_C}\cos(k_F R_{\alpha\beta}) - 2\sin(k_F R_{\alpha\beta}) - \frac{2|\Delta_C|}{s_C}\cos(k_F(x_\alpha+x_\beta)-\varphi)
\end{aligned}
$$

Le terme $G^{11}_{\alpha\beta}G^{22}_{\beta\alpha}$ est donc égal à l'ordre le plus bas à $g^{(C)}_{\alpha\beta e\uparrow}g^{(C)}_{\beta\alpha h\downarrow}$. Il nous faut moyenner sur les différents canaux de conduction, c'est-à-dire que l'on intègre $k_F R_{\alpha,\beta}$ dans une fenêtre de largeur $2\pi/k_F$ (voir (1.8) au chapitre 1). Nous trouvons $\overline{g^{(C)}_{\alpha\beta e\uparrow}g^{(C)}_{\beta\alpha h\downarrow}} = 0$. Par conséquent, aucun supercourant ne traverse l'onde de densité de charge à l'ordre le plus bas.

Le problème pour une onde de densité de charge diffusive nécessite l'utilisation de l'approximation de Born décrite dans le chapitre 7 de [74] et dans [75]. Pour une onde de densité de charge diffusive les fonctions de Green 2×2 pour les composantes droites et gauches d'un électron de spin up sont données par $\hat{G} = \hat{g} + \hat{g}\hat{\Sigma}\hat{G}$, en considérant le système avec des impuretés et avec l'approximation de Born. La self-energie vaut $\hat{\Sigma} = \int (dk/2\pi)\hat{v}\hat{g}(k,\omega)\hat{v}^\dagger$, avec $\hat{g}(k,\omega)$ la matrice des fonctions de Green balistiques et $\hat{v}$ la matrice contenant les amplitudes d'avancée et de retour dues aux diffusions sur les impuretés. En utilisant le même développement que Artemenko et Volkov [75], nous trouvons

$$\hat{\Sigma} = \int \frac{dk}{2\pi}\left[|u|^2 \begin{pmatrix} g_{R,R}(k,\omega) & g_{R,L}(k,\omega) \\ g_{L,R}(k,\omega) & g_{L,L}(k,\omega) \end{pmatrix} + |v|^2 \begin{pmatrix} g_{L,L}(k,\omega) & 0 \\ 0 & g_{R,R}(k,\omega) \end{pmatrix}\right],$$

avec u et v les amplitudes de retour et d'avancée dues aux diffusions sur les impuretés. Nous déduisons des fonctions de Green pour un électron de spin-up que la fonction de Green pour une onde de densité de charge avec impuretés est donnée par

$$G^{A,e,\uparrow}(\xi_k,\omega) = \frac{\overline{\omega} + \overline{\xi}_k\hat{\tau}_3 + \overline{\Delta_C}\hat{\tau}^+ + \overline{\Delta_C}^\star\hat{\tau}^-}{\overline{\omega}^2 - |\overline{\Delta_C}|^2 - (\overline{\xi}_k)^2}, \tag{4.6}$$

avec $\overline{\Delta_C} = \Delta_C\left[1 - \frac{1}{\tau s_C(\omega)}\right]$, $\overline{\omega} = \omega\left[1 + \frac{1}{\tau s_C(\omega)} + \frac{1}{\tau' s_C(\omega)}\right]$ et $\overline{\xi}_k = \xi_k + \alpha$, où $\tau\overline{|u|^2}/\hbar v_F = 1$, $\tau'\overline{|v|^2}/\hbar v_F = 1$, ξ_k l'énergie cinétique par rapport au potentiel chimique, α une translation du potentiel chimique, et $\overline{\Delta_C}^\star$ le complexe conjugué de $\overline{\Delta_C}$.

Les matrices $\hat{\tau}_3$, $\hat{\tau}^+$ et $\hat{\tau}^-$ sont données par

$$\hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\tau}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\tau}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les fonctions de Green d'un trou de spin-down sont obtenues en échangeant Δ_C en $-\Delta_C$ comme dans [72]. Le coefficient de transmission d'un électron et d'un trou est évalué dans [76] pour un supraconducteur.

Le supercourant pour une jonction S-ODC-S est $\propto \int (dk/2\pi)G^{A,e,\uparrow}(k,\omega)G^{A,h,\downarrow}(k,\omega) = 0$, que nous obtenons après évaluation des produits de matrices et intégration sur les vecteurs d'ondes. Cette identité peut être comprise à partir de numérateurs des contributions normales et anormales dans $G^{A,e,\uparrow}(\xi_k,\omega)G^{A,h,\downarrow}(\xi_k,\omega)$, avec la contrainte $\overline{\omega}^2 - |\Delta_C|^2 - (\overline{\xi}_k)^2 = 0$.

Nous en concluons que le propagateur d'Andreev est limité par le libre parcours moyen élastique puisque le coefficient de transmission dans l'approximation d'échelle s'annule après une interaction avec le potentiel électrique d'une impureté couplant les branches des électrons de spin-up avec les trou de spin-down. Par conséquent, il n'est pas possible d'avoir un supercourant dans une onde de densité de charge, la propagation des paires de Cooper étant limitée par le libre parcours moyen élastique de l'électron. D'autre part, dans un système balistique multicanal la propagation d'une paire d'Andreev dans une onde de densité de charge est limitée par la longueur d'onde de Fermi λ_F.

L'onde de densité de charge, tout comme le supraconducteur, est un système gappé, le transport est donc donné par des diagrammes du type de ceux des figures 1.15 et 1.16. Nous nous intéressons

tout particulièrement aux diagrammes se couplant au champ magnétique (Fig. 1.16) qui expliquent les oscillations de la magnétorésistance dans un film d'onde de densité de charge percé par des nanotrous [34].

4.4 Expérience de Latyshev *et al.*

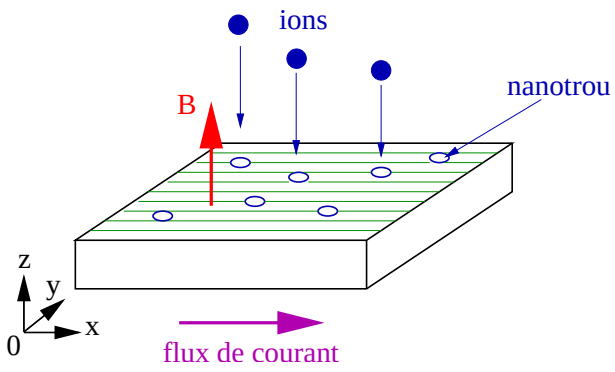

FIG. 4.5 – Schéma de l'expérience de Latyshev *et al.* [34], un film d'onde de densité de charge percé de nanotrous par irradiation de ions.

L'expérience de Latyshev *et al.* [34] consiste en un film d'onde de densité de charge d'un composé de $NbSe_3$ percé par des nanotrous formés par des défauts colonnaires obtenus par irradiations de ions. Le diamètre des nanotrous, $D \simeq 10nm$, est comparable à la longueur de cohérence balistique d'une onde de densité de charge ($\xi_{ODC} = \hbar v_F/\Delta_{ODC}$), avec v_F la longueur d'onde de Fermi et Δ_{ODC} le gap de Peierls d'une onde de densité de charge. Nous cherchons à interpréter les observations expérimentales de Latyshev *et al.* pour des échantillons irradiés contenant des nanotrous et des échantillons non irradié et ne contenant, par conséquent, pas de nanotrous.

Les observations de Latyshev *et al.* [34] sont les suivantes :

1) Absence d'oscillations dans la magnétorésistance pour des échantillons non irradié.
2) Absence d'oscillations dans la magnétorésistance pour des échantillons avec des nanotrous mais sans mouvement de glissement.
3) Oscillations en $h/2e$ dans la résistance comme une fonction du flux magnétique avec des nanotrous et avec un mouvement de glissement.
4) Magnétorésistance positive pour des champs magnétiques faibles avec des nanotrous.
5) Oscillations mesurées par Latyshev *et al.* [34] pour des températures $T \simeq 52$K en présence de nanotrous (ce qui représente une température élevée pour des oscillations cohérentes).

Pour comprendre l'expérience de Latyshev *et al.* [34], il nous faut considérer des processus similaires à des processus de localisation faible (déjà évoqués Sec. 1.4.1). Pour cela, nous commençons par regarder les modes de transmission (Sec. 4.5) ainsi que la boîte de Hikami pour des systèmes gappés.

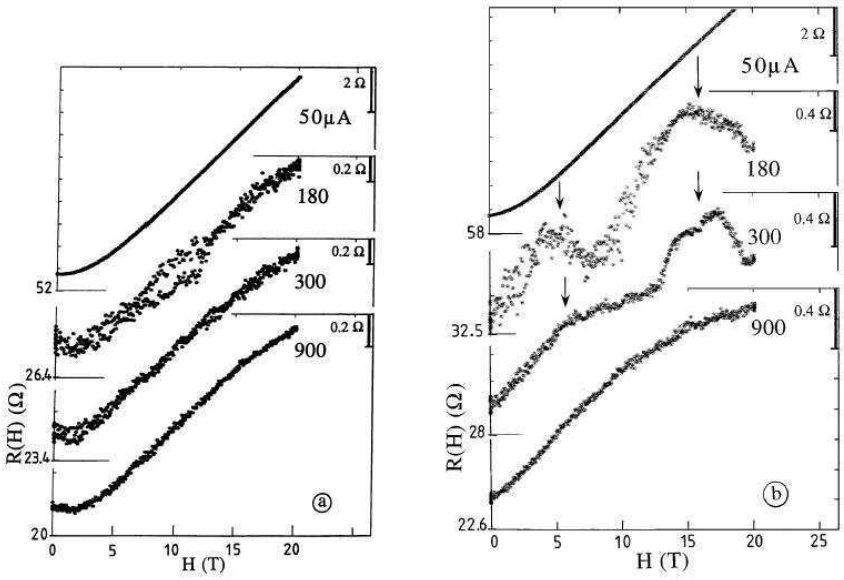

FIG. 2. Variation of the magnetoresistance of $NbSe_3$ at 52 K for different dc currents I applied along the chain axis (a) for the unirradiated part of the sample and (b) for the irradiated part of the sample. The magnetic field is applied along the a^* axis, parallel to the columnar defect axes.

FIG. 4.6 – Mesures [34] de la magnétorésistance à gauche pour un film d'onde de densité de charge sans nanotrous et à droite pour un film percé de nanotrous par irradiation de ions.

4.5 Processus d'interférence quantique à travers une ODC

4.5.1 Autocroisement de modes de transmission dans un système à bande interdite

Nous considérons un système possédant une bande d'énergie interdite tel qu'un supraconducteur ou une onde de densité de charge. La boîte de Hikami, décrite par Akkermans et Montambaux complément C4.2 [77], est modifiée. L'autocroisement de modes de transmissions est décrit par ce que l'on appelle une boîte de Hikami. Nous tenons en compte l'habillage de celle-ci par un mode de transmission avancé-avancé ou retardé-retardé (voir Fig. 4.7). L'autocroisement d'un mode de transmission

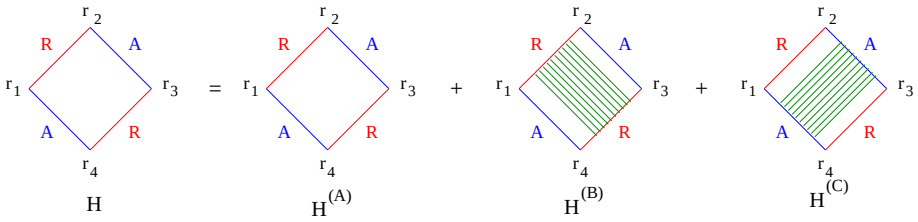

FIG. 4.7 – Boîte de Hikami dans un système possédant une bande d'énergie interdite, décomposée en trois diagrammes, pour une énergie inférieure au gap.

peut alors se diviser en six parties, formées par trois modes de transmission avancé-retardé (I,II,III), un mode de transmission avancé-avancé (ou retardé-retardé) ainsi que les deux moitiés de boîte (V,VI) (voir Fig. 4.8).

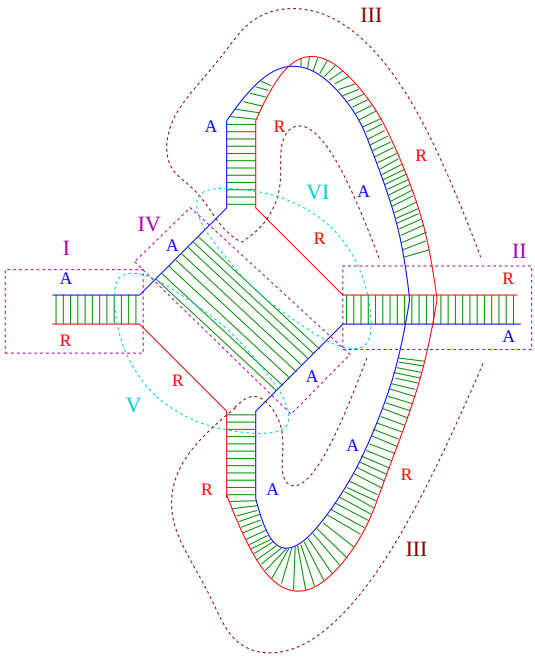

FIG. 4.8 – Croisement d'un mode de transmission découpé en six morceaux, pour un système à bande interdite et une énergie inférieure au gap.

Tout comme pour un supraconducteur (Appendice B.7), il est possible de calculer à l'aide des fonctions de Green d'une onde de densité de charge désordonnée (Sec. 4.3.4) ces modes de transmission (Appendice E.1).

La principale différence, par rapport à un métal normal, est que les modes de transmission avancé-avancé et retardé-retardé se propagent sur la longueur de cohérence. Ainsi, l'autocroisement d'un mode de transmission ne se fait plus à l'échelle du libre parcours moyen de l'électron l_e, comme pour un métal normal, mais sur la longueur de cohérence du système à bande d'énergie interdite tel que l'onde de densité de charge lorsque l'énergie est inférieure au gap, qui est beaucoup plus grande que l_e (voir Fig. 4.9). Cette propriété est capitale dans notre interprétation de l'expérience de

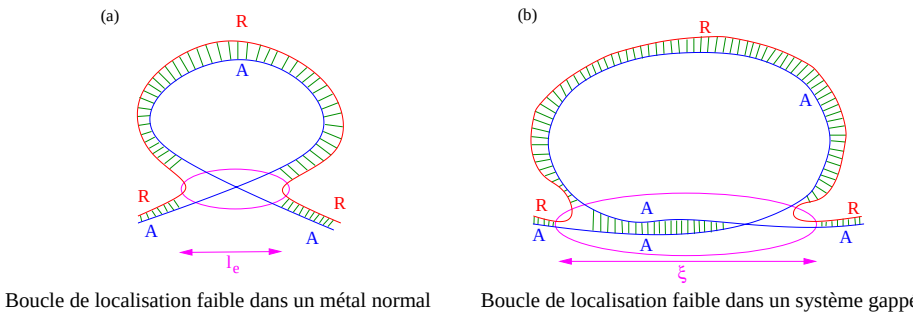

FIG. 4.9 – (a) Croisement d'un diffuson pour un métal normal. (b) Croisement d'un mode de transmission pour un système avec une bande d'énergie interdite, lorsque l'énergie est inférieure au gap.

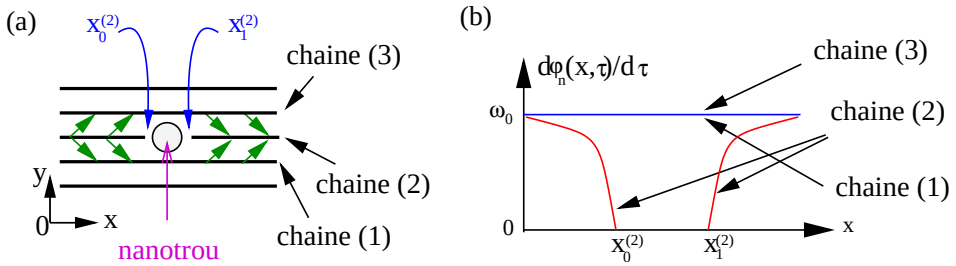

FIG. 4.10 – Schéma des chaînes d'ondes de densité de charge, où une chaîne est interrompue par un nanotrou, les flêches vertes représentent schématiquement l'émission et l'absorption des porteurs normaux dus au freinage et à l'accélération du mouvement de glissement respectivement à gauche et à droite du nanotrou (a). Le profil de $\partial\varphi_n(x,\tau)/\partial\tau$ le long des chaînes $n = 1, 2, 3$ (b).

Latyshev *et al.* [34]. D'autre part, les autocroisements de modes de transmission dans un système à bande interdite correspondent à une transmission dans un volume dont la dimension est fixée par la longueur de cohérence.

4.5.2 Effet d'interférence quantique dans l'expérience de Latyshev *et al.*

Nous considérons la géométrie de l'expérience de Latyshev *et al.* [34]. Des effets caractéritiques de systèmes désordonnés sont obtenus comme l'effet d'un moyennage sur les canaux de conduction (voir appendice B.6 pour un supraconducteur). C'est pourquoi nous avons discuté précédemment l'autocroisement d'un mode de transmission dans le cas d'un système à bande interdite en présence de désordre et maintenant nous appliquons ce modèle balistique à une onde de densité de charge balistique avec moyennage sur différents canaux de conduction.

Nous commençons par considérer le couplage entre le mouvement de glissement et des processus d'interférence quantique. Dans un premier lieu, seul un petit nombre de chaînes d'onde de densité de charge couplées par un terme de hopping transverse ($t_\perp$) est discuté. Le cas plus réaliste d'une île en métal normal autour du nanotrou sera étudié par la suite. Nous notons les chaînes interrompues par les indices $k = 2, ..., N-1$ qui sont connectées par un terme de hopping transverse à deux chaînes ininterrompues ($k = 1$ au dessus du nanotrou et $k = N$ en dessous du nanotrou). (voir Fig. 4.10a pour $N = 3$).

Les chaînes $k = 2, ..., N-1$ sont interrompues aux positions $x_0^{(k)}$ à la gauche du nanotrou et aux positions $x_1^{(k)}$ à la droite du nanotrou (voir $x_0^{(2)}$ et $x_1^{(2)}$ sur la figure 4.10 pour le cas où une seule onde de densité de charge est interrompue).

En supposant, en dehors de tout mouvement de glissement, que la phase $\varphi_k(x,\tau)$ à la position x le long des chaînes $k = 1$ et $k = N$ au temps τ, alors $\partial\varphi_k(x,\tau)/\partial\tau = \omega_0$, avec ω_0 la fréquence de glissement correspondant à la relation $j^{(k)}(x,\tau) = \frac{e}{\pi}\frac{\partial\varphi_k(x,\tau)}{\partial\tau}$ entre le courant dans l'onde de densité de charge et la dérivée temporelle de phase dans la chaîne de l'onde de densité de chaîne k, donnée dans [78].

Les conditions limites au bord du nanotrous mènent à $\partial\varphi_k(x,\tau)/\partial\tau = 0$ en $x = x_i^{(k)}$ ($i = 0, 1$ et $k = 2, ..., N-1$). Effectivement, aucun courant collectif ne glisse entre $x_0^{(k)}$ et $x_1^{(k)}$ dans la

direction parallèle à la chaîne. En outre, $\partial\varphi_k(x,\tau)/\partial\tau = \omega_0$ pour $x \ll x_0^{(k)}$ et $x \gg x_1^{(k)}$, c'est-à-dire le mouvement de glissement loin du nanotrou est retrouvé. Le profil du mouvement de glissement collectif résultant $\partial\varphi_k(x,\tau)/\partial\tau$ (voir Fig. 4.10b pour $N = 3$) correspond à la conversion du courant dans l'onde de densité de charge en un courant normal [79, 80, 81, 82], $\partial\rho_k(x,\tau)/\partial\tau$. Le courant normal émis (en accord avec les flèches sur la figure 4.10a) de la chaîne intermédiaire k est donné par $\frac{\partial\rho_k(x_0^{(k)},\tau)}{\partial\tau} = -\frac{e}{\pi}\frac{\partial^2\varphi_k(x_0^{(k)},\tau)}{\partial x\partial\tau}$. Il est déduit de l'équation de continuité.

Les quasiparticules émises par le freinage de mouvement de glissement à gauche du nanotrou sont réabsorbées à droite où le mouvement de glissement accélère, menant à une accumulation de la charge aux extrémités des chaînes interrompues à gauche et à droite du nanotrou. Cette accumulation est décrite par le potentiel chimique $\delta\mu \geq \Delta$. Le courant $I_k(\Phi)$ émis de la chaîne k est donné par

$$I_k(\Phi) = \frac{e}{h}\sum_m \int_0^{\delta\mu} \mathcal{T}_{k\to m}(\Phi, t_\perp, \hbar\omega)d(\hbar\omega), \tag{4.7}$$

où $\mathcal{T}_{k\to m}(\Phi, t_\perp, \hbar\omega)$ est le coefficient de transmission sans dimension à énergie $\hbar\omega$ transférant des électrons de la chaîne k à gauche du nanotrou à la chaîne m à droite du nanotrou et prend la forme

$$\mathcal{T}\left(\Phi, t_\perp, \hbar\omega\right) = \left(\frac{t_\perp}{T}\right)^8 \mathcal{F}\left(\hbar\omega\right)\Xi(\hbar\omega)\cos\left(\frac{2\Phi}{\phi_0}\right). \tag{4.8}$$

Le facteur $\Xi(\hbar\omega)$ représente l'amortissement de la tranmission sous le gap

$$\Xi(\hbar\omega) = \exp\left(-\frac{y_1^{(2)} - y_0^{(2)}}{\xi(\omega)}\right)\exp\left(-\frac{x_1^{(2)} - x_0^{(2)}}{\xi(\omega)}\right), \tag{4.9}$$

et $\mathcal{F}\left(\hbar\omega\right)$ prend la forme

$$\mathcal{F}\left(\hbar\omega\right) = \Re\left[4\left|g_0(\omega)\right|^4\left\{(g_0(\omega))^2 + (f_0(\omega))^2\right\}\left\{\left|g_0(\omega)\right|^2 + \left|f_0(\omega)\right|^2\right\}\right], \tag{4.10}$$

avec $g_0(\omega)$ et $f_0(\omega)$ des fonctions de Green de l'onde de densité de charge (4.1). Le terme $\left|g_0(\omega)\right|^2 + \left|f_0(\omega)\right|^2$ correspond au mode de transmission de la branche inférieure sur la figure 4.11 et le terme $(g_0(\omega))^2 + (f_0(\omega))^2$ prend en compte le mode de transmission avancé-avancé de la branche supérieure.

Le mouvement de glissement induit un temps de déphasage du processus tunnel similaire à la localisation faible, car la phase de l'onde de densité de charge évolue dans le temps au cours de l'enroulement de la localisation faible. Cependant, de tels effets ne sont pas sondés dans les expériences telles que [34] car le mouvement de glissement est lent comparé à l'échelle de temps $\hbar/\Delta$, avec Δ le gap de Peierls.

Une évaluation balistique du coefficient de transmission dans les ondes de densité de charge est justifiée, car les quasiparticules passent par effet tunnel sur de très petites distances correspondant au diamètre du nanotrou, comparable à la longueur de cohérence de l'onde de densité de charge, $10\,\mathrm{nm}$ dans l'expérience [34]. Le moyennage du processus d'interférence quantique (voir Fig. 4.11) n'est donc pas dû aux impuretés mais s'effectue sur la position de l'amplitude tunnel.

De même pour un isolant à bande interdite (voir Appendice. D.3), le courant tunnel sous le gap pour les processus d'interférence quantique (voir Fig. 4.11) est périodique en $h/2e$ en fonction du flux entouré Φ.

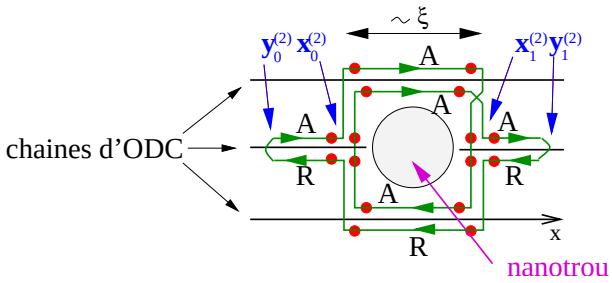

FIG. 4.11 – Processus similaire à la localisation faible autour d'un nanotrou dans des ondes de densité de charge. Le moyennage sur la position des termes de hopping (points rouges) remplace le moyennage sur les impuretés.

Les oscillations apparaissent seulement en présence du mouvement de glissement. Le couplage bien que très faible dans le coefficient de transmission peut être compensé par l'intégrale sur l'énergie dans l'équation (4.7), jusqu'à la valeur élevée du gap de Peierls dans le composé $NbSe_3$ utilisé par Latyshev *et al.* [34].

Cependant, Visscher *et al.* [83] ont déjà noté qu'une région endommagée de l'onde de densité de charge autour du nanotrou devient normale. Le processus tunnel correspondant est montré sur la figure 4.12 à énergie plus petite que l'espacement de niveaux de la région normale δ. La propagation

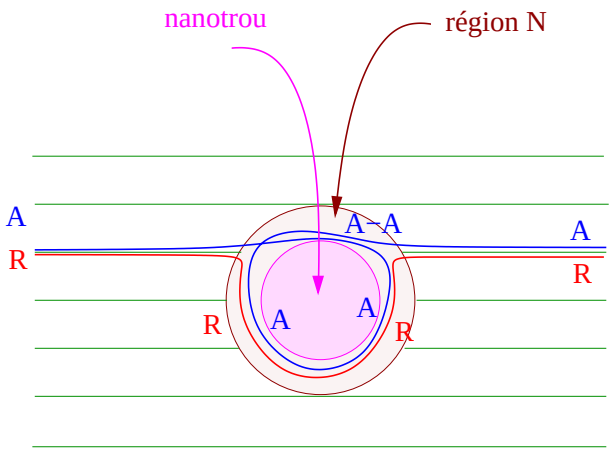

FIG. 4.12 – Processus d'interférence quantique autour d'un nanotrou dans des ondes de densité de charge avec une zone endommagée autour du nanotrou et donc une région normale

à travers la région normale supportée par le mode de transmission avancé-avancé, vient du fait que l'espacement de niveaux δ joue le rôle du gap. La valeur δ est comparable au gap de Peierls, comme nous pouvons le voir de l'estimation de $\hbar v_F/D$, avec D le diamètre du nanotrou, menant à $\delta/k_B \sim 100\,\mathrm{K}$, avec $v_F \simeq 10^5\,\mathrm{ms}^{-1}$ du même ordre de magnitude que celui de la vitesse de Fermi. Comme attendu, l'espacement de niveau d'un objet de taille $D \sim \xi$ est comparable au gap de Peierls Δ.

4.5.3 Comparaison avec l'expérience de Latyshev *et al.*

Les mécanismes tunnel assistés par un effet d'interférence quantique combinés à l'accumulation de charge due à la décélération des ondes de densité de charge à l'approche d'un nanotrou mènent aux mêmes comportements que dans l'expérience de Latyshev *et al.* [34] sur les oscillations en $h/2e$ du courant d'une onde de densité de charge autour d'un nanotrou. Les cinq observations des auteurs sont reproduites qualitativement par le modèle (voir Sec. 4.4) :

1) Les boucles d'interférence quantique sont présentes même sans les nanotrous. Néanmoins, en l'absence de nanotrous, elles n'introduisent pas d'oscillations dans la magnétorésistance, car il n'y a pas d'accumulation de charge, si les chaînes d'ondes de densité de charge ne sont pas interrompues.
2) Lorsqu'il n'y a pas de mouvement de glissement dans les ondes de densité de charge, l'accumulation de charge n'est pas possible. Par conséquent, nous ne pouvons pas avoir d'oscillations dans la magnétorésistance.
3) Les oscillations $h/2e$ périodiques de la résistance comme fonction du flux magnétique sont obtenues pour des films d'ondes de densité de charge et avec mouvement de glissement, car les nanotrous ont un diamètre de l'ordre de la longueur de cohérence. Ainsi, les boucles d'interférence quantique enferment approximativement la même aire que les nanotrous.
4) La magnétorésistance positive à bas champ est déjà obtenue pour des jonctions N-I-N (Appendice D.3).
5) Les seules échelles d'énergie ou de température pour les processus d'interférence quantique sont le gap de Peierls ou l'énergie d'espacement de niveau comparable au gap de Peierls.

4.6 Synthèse

Des effets d'interférence quantique "non standard" expliquent bien les principales caractéristiques de l'expérience de Latyshev *et al.* [34]. Des oscillations cohérentes similaires apparaissent déjà dans un isolant de bande interdite (voir appendice D.1) et ne constituent donc pas une signature du fondamental quantique de l'onde de densité de charge.

D'autre part, nous avons montré qu'un supercourant ne circule pas dans une onde de densité de charge si le gap de l'onde de densité de charge est plus grand que le gap supraconducteur, ce qui est en accord avec les expériences de Sinchenko et Monceau [71].

Nous concluons qu'il n'est pas possible de mettre en évidence des effets de cohérence dans une onde de densité de charge au moyen de la propagation d'un courant Josephson. D'autre part, l'expérience de Latyshev *et al.* [34] semble bien constituer un effet d'interférence quantique dans un système possédant une bande interdite. Une drection d'études expérimentale consiste à faire varier la taille des nanotrous.

Conclusion

En conclusion, nous avons donc considéré sous différents points de vue des dispositifs à l'échelle de la dizaine de nanomètres, permettant en principe de séparer en deux des paires de Cooper d'un supraconducteur. L'approche théorique est basée sur le calcul du coefficient de transmission et s'étend à d'autres systèmes comme des ondes de densité de charge.

Dans un premier temps (Chapitre 1), nous avons étudié le transport non local d'une jonction N-S-N, afin d'essayer de comprendre les mesures de Russo *et al.* [16]. Les auteurs mesurent la résistance non locale pour une tricouche N-S-N en injectant un courant I_a dans la première électrode normale, ainsi qu'une faible tension oscillante. La tricouche N-S-N est très fine avec une épaisseur du supraconducteur de l'ordre de la longueur de cohérence et une grande surface d'interface. Pour notre part, nous avons considéré une géométrie différente où la jonction N-S-N est unidimensionnelle, en utilisant deux approches microscopiques : la méthode de Blonder, Tinkham et Klapwijk ainsi que la méthode des fonctions de Green basée sur une développement perturbatif.

La méthode de BTK met en évidence l'augmentation importante de l'amplitude de la conductance non locale due aux impuretés dans les électrodes normales. Effectivement, le phénomène d'effet tunnel sans réflexion joue un rôle important dans la conductance non locale en permettant le confinement des quasiparticules à l'interface N-S. Les impuretés dans les électrodes normales permettent aux quasiparticules de tenter plusieurs fois de passer la barrière en amplifiant de cette manière la conductance non locale. La conductance non locale reste toujours négative indiquant que ce sont les processus transmettant des électrons qui dominent dans le transport non local.

L'approche des fonctions de Green, qui est une méthode perturbative, nous a permis d'établir les différents processus intervenant dans le transport non local jusqu'à l'ordre T^4 où T est la transparence normale. A l'ordre le plus bas dans l'amplitude tunnel, il n'y a que deux processus : le cotunneling élastique et la réflexion d'Andreev non locale. Néanmoins, ces deux processus s'annulent mutuellement dans le transport non local, car ils ont la même probabilité d'avoir lieu mais transportent une charge de signe opposé [12].

En regardant l'ordre supérieur de la théorie de perturbation dans l'amplitude tunnel, nous avons établi qu'un nouveau processus de double réflexion d'Andreev qui transmet deux électrons est primordial. Du fait de sa décomposition en deux réflexions d'Andreev locales et d'un propagateur dans le supraconducteur, le processus de double réflexion d'Andreev a une résistance ne dépendant pas de la transparence des barrières, lorsque celles-ci sont faibles.

Par ailleurs, en comparant nos résultats avec l'approche des fonctions de Green et la méthode de BTK, c'est-à-dire en traçant la conductance locale en fonction de la conductance non locale, nous obtenons un très bon accord entre les simulations incluant l'effet tunnel sans réflexion et les expressions perturbatives. Ainsi, le processus de double réflexion d'Andreev est bien le processus dominant

dans le transport non local, en l'absence d'autres ingrédients comme par exemple les interactions de Coulomb [17].

Comme le processus dominant est la double réflexion d'Andreev, la conductance non locale d'une jonction N-S-N est négative, ce qui est compatible avec l'expérience de Russo *et al.* [16] pour les basses tensions. Par ailleurs, ce résultat est également compatible avec les mesures effectuées par Cadden-Zimanski et Chandrasekhar [19] pour une barre verticale supraconductrice connectée à deux barres horizontales normales plus ou moins éloignée l'une de l'autre. Par contre, notre théorie n'introduit pas de changement de signe dans le transport non local.

Une autre étape dans l'étude du transport de paires d'électrons corrélés séparés spatialement est l'étude de jonctions Josephson à travers un point quantique formé par un nanotube de carbone (Chapitre 2). Nous considérons le supercourant traversant le SQUID formé d'un nanotube de carbone réalisé par Cleuziou *et al.* [30]. En miniaturisant encore plus le SQUID afin que le supraconducteur central ait une largeur comparable à la longueur de cohérence du supraconducteur, de nouveaux processus non locaux apparaissent. Ils jouent un rôle important dans le transport.

Le premier de ces processus fait intervenir le cotunneling élastique sans conversion électron trou et ne transporte pas de supercourant. Par contre, le second processus fait intervenir la réflexion d'Andreev non locale avec une conversion électron trou. Ce dernier processus transmet une paire de Cooper dans chacun des bras du SQUID participant ainsi au supercourant. Dans le mode hors résonant du SQUID, ces deux nouveaux processus ne se couplent que très faiblement au continuum, ainsi le continuum ne participe pas au supercourant.

En outre, ces processus non locaux induisent, par la répulsion des niveaux d'énergie du SQUID, une réduction du courant critique. Par ailleurs, pour un système idéalisé à un canal, nous trouvons que les processus non locaux induisent des fluctuations d'échantillon à échantillon dans la relation courant phase. Ces fluctuations sont dues à la dépendance dans le facteur de phase de Fermi des processus non locaux.

Dans les deux premiers chapitres, nous avons étudié le transport de plusieurs structures hybrides contenant un supraconducteur. Une étape supplémentaire pour comprendre au mieux les différents processus jouant un rôle dans le transport est d'étudier le bruit et les corrélations croisées qui nous donnent des informations complémentaires sur les processus de transport.

Par conséquent, nous considérons le bruit et les corrélations croisées dans une jonction en forme de Y connectée à trois réservoirs supraconducteurs (Chapitre 3). Le bruit de grenaille induit par les fluctuations de courant et de tension donne des informations sur la quantification de la charge. Nous regardons, en particulier, le cas de plusieurs réservoirs supraconducteurs, car les réflexions d'Andreev multiples induisent dans le cas d'une jonction S-N-S un bruit d'excès.

Nous considérons deux cas limites : la limite des réservoirs idéaux sans barrière et la limite inverse où les barrières sont importantes et les contributions de la diffusion dans la jonction sont négligeables. Dans un premier temps nous supposons que les réservoirs sont idéaux, il n'y a donc pas de barrière. La jonction Y est alors considérée comme un fil diffusif. Nous observons une amplification du bruit et des corrélations croisées due aux réflexions d'Andreev multiples. Une non linéarité apparaît et les corrélations croisées sont toujours négatives.

Le deuxième cas limite correspond au cas où les barrières sont importantes. Cette limite revient à assimiler la jonction Y à un point chaotique connecté à trois réservoirs. Dans ce cas limite, le bruit et les corrélations croisées sont également fortement amplifiés par les réflexions d'Andreev multiples.

Pour une tension faible, nous observons un changement de signe des corrélations croisées S_{23}. Il existe des régimes où les corrélations croisées sont positives. Par exemple, lorsque le nombre de canaux des bras à tension V, M_2, est petit comparé au nombre de canaux du réservoir 1 (M_1). Par ailleurs, pour un nombre de canaux M_1 et M_2 du même ordre de grandeur, nous pouvons passer de corrélations négatives à des corrélations positives en augmentant la barrière du réservoir 1 à tension nulle.

Finalement, dans notre approche pour une jonction N-I-N, nous avions séparé les différents processus en deux catégories : les processus ne se couplant pas au champ magnétique et le processus se couplant au champ magnétique. Le processus de double réflexion d'Andreev dans une jonction N-S-N fait partie du premier type de diagrammes. Dans le chapitre sur les ondes de densité de charge (chapitre 4) nous avons surtout considéré les processus qui se couplent au champ magnétique. Ces processus ont des modes de transport avancé-avancé ou retardé-retardé. Comme ce sont des processus d'interférence quantique, ils peuvent introduire des oscillations en $h/2e$ dans le transport. Nous avons vu que ces oscillations permettent d'expliquer l'expérience de Latyshev *et al.* [34] sur un film d'ondes de densité de charge percé par irradiation de ions.

Dans le chapitre sur les ondes de densité de charge (Chapitre 4), nous avons tout d'abord considéré les jonctions S-ODC et S-ODC-S. Les ondes de densité de charge ayant un paramètre d'ordre fortement différent de celui du supraconducteur, par son condensat qui apparie un électron et un trou appartenant à la même bande de spin, la jonction S-ODC aura un comportement différent que pour une jonction N-S. Effectivement, contrairement au cas d'une jonction N-S, dans une jonction S-ODC les paires de Cooper n'arrivent pas à pénétrer dans l'onde de densité de charge, car celle-ci déphase les paires de Cooper sur une longueur de l'ordre de la longueur d'onde de Fermi. De la même manière, aucun supercourant ne peut traverser une jonction S-ODC-S. Par contre, si nous considérons une onde de densité de spin, décrite par deux ondes de densité de charge hors phase pour des électrons de spin-up et des électrons de spin-down avec une densité totale non modulée et une densité de spin modulée, les paires d'Andreev peuvent pénétrer sur la longueur de cohérence dans l'onde de densité de spin.

Par ailleurs, nous avons étudié le transport dans un film d'ondes de densité de charge. Une localisation non standard est représentée par des effets d'interférence quantique pour des particules passant par effet tunnel avec une énergie inférieure au gap sur une distance comparable à la longueur de cohérence. Ces processus de localisation non standard induisent des oscillations périodiques en $h/2e$ permettant d'expliquer les observations de Latyshev *et al.* [34] sur des oscillations en $h/2e$ de la magnétorésistance pour un film d'ondes de densité de charge percé par des nanotrous suite à l'irradiation du film par des ions. Les boucles d'interférence quantique introduisent des oscillations périodiques en $h/2e$ lorsque nous avons accumulation de la charge aux bords des nanotrous, c'est-à-dire lorsque les ondes de densité de charge subissent un mouvement de glissement. Les boucles d'interférence quantique peuvent donc expliquer l'absence d'oscillation dans la magnétorésistance pour des échantillons non irradiés et des échantillons avec des nanotrous mais sans mouvement de glissement, car dans les deux cas il n'y a pas d'accumulation de la charge. Les oscillations en $h/2e$ pour un film irradié avec mouvement de glissement sont données par les processus d'interférence quantique avec l'accumulation de la charge. Par ailleurs, les oscillations interviennent pour une température $T \simeq 52$K, ce qui est compatible avec l'ordre de grandeur du gap de Peierls et à l'espacement de niveaux d'une zone normale entourant le nanotrou (les ondes de densité de charge étant abîmées sur une petite surface autour des nanotrous lors de l'irradiation).

Parmi les questions ouvertes, nous pouvons citer la discussion d'effets cohérents dans une jonction en Y connectée à trois réservoirs supraconducteurs. Une autre question ouverte importante est de

comprendre de façon analytique les effets d'interférence quantique dans le transport non local à travers un supraconducteur. En effet, nous avons montré que les boîtes de Hikami deviennent "non locales" dans un système à bande interdite et il se pose donc la question de modifier la théorie de localisation dans un supraconducteur pour des échelles d'énergie plus petites que le gap supraconducteur.

Annexe A

Théorie Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS)

La théorie de Bardeen, Cooper, et Schrieffer fut proposée en 1957 (prix Nobel de physique de 1972) [84] afin d'expliquer la supraconductivité. L'explication est basée sur la formation de paires d'électrons, appelées paires de Cooper, sous l'effet d'une interaction attractive entre électrons résultant de l'échange de phonons. L'idée physique est que le premier électron polarise le milieu par la déformation du réseau. Cette déformation attire le second électron, donnant une attraction effective entre les électrons. Si cette attraction est assez forte pour recouvrir l'interaction répulsive de Coulomb, cela donne une interaction attractive nette et la supraconductivité en résulte[1].

A.1 Paire de Cooper

Pour expliquer la formation des paires de Cooper, il nous faut montrer que la mer de Fermi d'électrons est instable à la formation d'au moins une paire liée, quelque soit l'interaction, même si celle-ci est très faible, pour autant que cette interaction soit attractive. Ce résultat n'est pas évident, car il est connu en mécanique quantique qu'à trois dimensions, pour deux particules isolées, une interaction attractive trop faible ne permet pas la formation d'états liés [85]. La présence de la mer de Fermi, qui interdit aux deux particules d'occuper les niveaux d'énergie inférieure à l'énergie de Fermi est l'élément qui permet l'existence de l'état lié pour une attraction faible.

Selon le principe donné par Cooper [86], nous considérons le modèle de deux électrons amenés à la mer de Fermi, à $T = 0°K$. Les électrons interagissent entre eux, mais pas avec ceux de la mer de Fermi excepté à travers le principe d'exclusion de Pauli qui affirme que deux fermions (ici les électrons) indiscernables ne peuvent pas occuper le même état quantique. Par l'argument de Bloch, qui suppose que l'état d'énergie le plus bas à une impulsion totale nulle, les électrons doivent avoir une impulsion égale et opposée.

La fonction d'onde orbitale est la suivante $\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_k g_k e^{i\vec{k}\vec{r}_1} e^{-i\vec{k}\vec{r}_2}$. En considérant l'antisymétrie de la fonction d'onde totale par rapport à l'échange des électrons, la fonction d'onde de deux

[1] Dans cette annexe, nous suivons le même développement que Tinkham [47]

électrons singlets prend la forme :

$$\psi_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left[\sum_{k>k_F} g_{\vec{k}} \cos(\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) \right] (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) \tag{A.1}$$

avec $(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$ la fonction antisymétrique du singulet de spin. En mettant $\psi_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ dans l'équation de Schrödinger, nous avons que le poids $g_{\vec{k}}$ et les valeurs propres d'énergie sont déterminées en résolvant,

$$(E - 2\epsilon_{\vec{k}})g_{\vec{k}} = \sum_{k>k_F} V_{\vec{k}\vec{k}'} g_{\vec{k}'} \tag{A.2}$$

où $\epsilon_{\vec{k}}$ est l'énergie des ondes planes non perturbées et $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ sont les éléments de la matrice d'interaction, $V_{\vec{k}\vec{k}'} = \frac{1}{\Omega}\int V(\vec{r})e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}}d\vec{r}$ avec $\vec{r}$ la distance entre les deux électrons et Ω la normalisation du volume. $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ caractérise la force du potentiel pour disperser une paire d'électrons avec impulsion $(\vec{k}', -\vec{k}')$ à impulsion $(\vec{k}, -\vec{k})$. Si un ensemble de $g_{\vec{k}}$ satisfaisant (A.2) peut être trouvé avec $E < 2E_F$ (E_F l'énergie de la mer de Fermi), alors une paire d'état lié existe.

Pour $V_{\vec{k}\vec{k}'} = -V$, si les états $g_{\vec{k}}$ sont en dessous d'un cutoff à l'énergie $\hbar\omega_c \gg E_F$ et $V_{\vec{k}\vec{k}'} = 0$ au dessus de ce cutoff. Alors (A.2) vaut $g_{\vec{k}} = V\frac{\sum_{k'} g_{\vec{k}'}}{2\epsilon_{\vec{k}} - E}$ et en sommant sur $\vec{k}$, nous avons

$$\frac{1}{V} = \sum_{k>k_F} \frac{1}{2\epsilon_{\vec{k}} - E}. \tag{A.3}$$

En remplaçant la sommation par une intégration, avec $N(0)$ la densité d'état du niveau de Fermi pour les électrons d'une orientation de spin (A.3) devient

$$\frac{1}{V} = \int_{E_F}^{E_F+\hbar\omega_c} \frac{d\epsilon}{2\epsilon - E} = \frac{N(0)}{2} \ln\left(\frac{2E_F - E + 2\hbar\omega_c}{2E_F - E}\right). \tag{A.4}$$

Dans la plupart des supraconducteurs classiques $N(0)V < 0.3$, nous pouvons donc utiliser l'approximation de faible couplage et ainsi (A.4) devient $E \cong 2E_F - 2\hbar\omega_c e^{-2/(N(0)V)}$. Il y a donc un état lié avec énergie négative contenant des électrons ayant $k > k_F$, c'est-à-dire avec énergie cinétique supérieure à l'énergie de la mer de Fermi, E_F.

La taille des états de paire de Cooper est $\xi_0 \cong \frac{a\hbar v_F}{kT_c}$. Elle est beaucoup plus grande que la distance inter particules. Par conséquent, les paires sont fortement chevauchantes, ce calcul n'est donc pas suffisant.

A.2 Etat fondamental

La mer de Fermi étant instable sous la formation d'une paire de Cooper liée avec une interaction nette attractive, nous devons nous attendre à ce que les paires se condensent jusqu'à un point d'équilibre. Cela arrivera quand l'état du système sera fortement différent de la mer de Fermi, à cause du grand nombre de paires, et que l'énergie de liaison pour une paire supplémentaire tendra vers 0. Le calcul ci-dessus ne considère que deux électrons et suppose que les autres électrons qui sont sous la surface de Fermi ne sentent pas l'effet de l'interaction. La théorie BCS lève cette objection en traitant

tous les électrons sur le même pied d'égalité. Le traitement théorique complet utilise l'Hamiltonien de Fröhlich,

$$H_F = \sum_{\vec{k},\sigma} \epsilon(\vec{k}) c^\dagger_{\vec{k},\sigma} c_{\vec{k},\sigma} + \sum_{\vec{q}} \hbar\omega_{\vec{q}} b^\dagger_{\vec{q}} b_{\vec{q}} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sum_{\vec{k},\vec{q},\sigma} g(\vec{k},\vec{q}) \left[c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} b_{\vec{q}} c_{\vec{k},\sigma} + c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} b^\dagger_{-\vec{q}} c_{\vec{k},\sigma} \right] \quad \text{(A.5)}$$

où $c_{k,\sigma}$ ($c^\dagger_{k,\sigma}$) est l'opérateur d'annihilation (de création) pour un électron de spin σ et d'impulsion k, b_q ($b^\dagger_q$) est l'opérateur d'annihilation (de création) d'un phonon d'impulsion q et $g(k,q)$ est l'élément de matrice de couplage électron-phonon. A l'aide d'une transformation canonique, il est possible

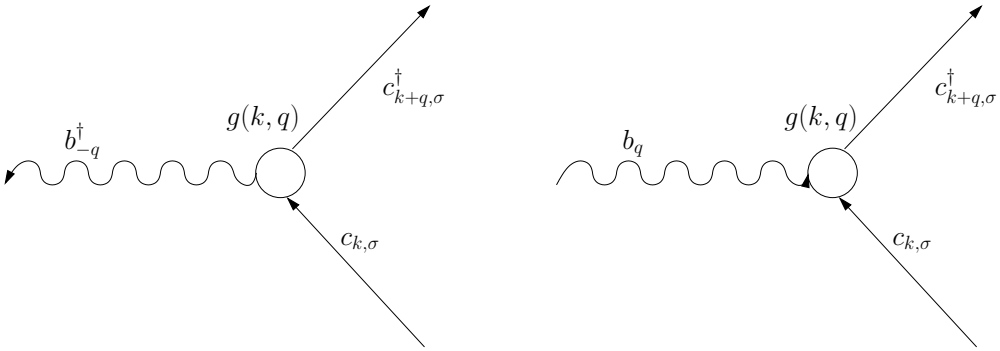

FIG. A.1 – Diagramme d'interaction électron-phonon.

d'éliminer l'interaction électron-phonon de l'Hamiltonien de Fröhlich afin d'obtenir une interaction effective entre les électrons. En considérant tous les électrons de la même manière,

$$H_{BCS} = \sum_{\vec{k},\sigma} \epsilon(\vec{k}) c^\dagger_{\vec{k},\sigma} c_{\vec{k},\sigma} + \frac{g}{\sqrt{\omega}} \sum_{\vec{k},\vec{k}',\vec{q},\sigma,\sigma'} c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} c^\dagger_{\vec{k}-\vec{q},\sigma'} c_{\vec{k},\sigma'} c_{\vec{k},\sigma}. \quad \text{(A.6)}$$

Dans cette notation, l'opérateur d'onde singlet est donné par

$$|\psi_0\rangle = \sum_{k>k_F} g_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k},\uparrow} c^\dagger_{-\vec{k},\downarrow} |F\rangle \quad \text{(A.7)}$$

L'opérateur d'onde singlet (A.7) découle de (A.1) en considérant $g_{\vec{k}} = g_{-\vec{k}}$ et $|F\rangle$ est l'opérateur de la mer de Fermi.

Par ailleurs, les électrons obéissent à la statistique de Fermi,

$$\{c_{\vec{k},\sigma}, c^\dagger_{\vec{k}',\sigma'}\} \equiv c_{\vec{k},\sigma} c^\dagger_{\vec{k}',\sigma'} + c^\dagger_{\vec{k}',\sigma'} c_{\vec{k},\sigma} = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\sigma,\sigma'},$$

$$\{c_{\vec{k},\sigma}, c_{\vec{k}',\sigma'}\} = \{c^\dagger_{\vec{k},\sigma}, c^\dagger_{\vec{k}',\sigma'}\} = 0.$$

Nous pouvons également définir l'opérateur de nombre de particule $n_{\vec{k},\sigma} = c^\dagger_{\vec{k},\sigma} c_{\vec{k},\sigma}$. La fonction d'onde à N électrons la plus générale avec construction des paires de Cooper est

$$|\psi_N\rangle = \sum_{k_i,\cdots,k_f>k_F} g(\vec{k}_i,\cdots,\vec{k}_f) c^\dagger_{\vec{k}_i,\uparrow} c^\dagger_{-\vec{k}_i,\downarrow} \cdots c^\dagger_{\vec{k}_f,\uparrow} c^\dagger_{-\vec{k}_f,\downarrow} |\phi_0\rangle$$

ce qui nous donne la fonction d'onde BCS. $g(\vec{k}_i, \cdots, \vec{k}_f)$ est le poids des $N/2$ paires et $|\phi_0\rangle$ est l'état du vide.

La théorie BCS fait une bonne approximation en utilisant le champ self-consistant d'Hartree ou l'approche de champ moyen, dans laquelle l'occupation de chaque état $\vec{k}$ est seulement dépendante de la moyenne d'occupation sur les autres états. Essentiellement, cela revient à considérer que nous travaillons dans l'ensemble grand canonique. Nous avons alors l'état fondamental de BCS :

$$|\psi_G\rangle = \prod_{\vec{k}=\vec{k}_i,\cdots,\vec{k}_f} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k},\uparrow} c^\dagger_{-\vec{k},\downarrow})|\psi_0\rangle$$

où $|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1$. Cette forme implique que la probabilité que l'état de paire soit occupé (inoccupé) est donnée par $|v_{\vec{k}}|^2$ $\left(|u_{\vec{k}}|^2\right)$.

En faisant la transformation canonique $c_{\vec{k},\uparrow} = u^\dagger_{\vec{k}} \gamma_{\vec{k},0} + v_{\vec{k}} \gamma^\dagger_{\vec{k},1}$ et $c^\dagger_{-\vec{k},\downarrow} = -v^\dagger_{\vec{k}} \gamma_{\vec{k},0} + u_{\vec{k}} \gamma^\dagger_{\vec{k},1}$ de l'Hamiltonien BCS (A.6) nous pouvons le réécrire sous la forme,

$$H_{TC} = \sum_{\vec{k},\sigma} \xi_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k},\sigma} c_{\vec{k},\sigma} - \sum_{\vec{k}} \left(\Delta_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k},\uparrow} c^\dagger_{-\vec{k},\downarrow} + \Delta^\dagger_{\vec{k}} c_{-\vec{k},\downarrow} c_{\vec{k},\uparrow} - \Delta_{\vec{k}} b^\dagger_{\vec{k}} \right)$$

où $b_{\vec{k}} = \langle c_{-\vec{k},\downarrow} c_{\vec{k},\uparrow} \rangle$ et $\Delta_{\vec{k}} \equiv -\sum_{\vec{l}} V_{\vec{k}\vec{l}} b_{\vec{l}} = -\sum_{\vec{l}} V_{\vec{k}\vec{l}} \langle c_{-\vec{l},\downarrow} c_{\vec{l},\uparrow} \rangle$. $\Delta_{\vec{k}}$ est le gap dans le spectre d'énergie du supraconducteur et $\xi_{\vec{k}} = \sqrt{E_k^2 - \Delta^2}$. L'opérateur $\gamma_{\vec{k},0}$ participe à la destruction d'un électron avec $(\vec{k}, \uparrow)$ où à la création d'un électron avec $(-\vec{k}, \downarrow)$, dans les deux cas l'effet net est de réduire l'impulsion du système de $\vec{k}$ et de réduire S_z par $\hbar/2$. L'opérateur $\gamma^\dagger_{\vec{k},1}$ décroît l'impulsion de $-\vec{k}$ et a l'effet net d'augmenter S_z par $\hbar/2$. Lors de cette transformation canonique, si nous choisissons les $u_{\vec{k}}$ et $v_{\vec{k}}$ tels que les coefficients $\gamma_{\vec{k},1}\gamma_{\vec{k},0}$ et $\gamma^\dagger_{\vec{k},0}\gamma^\dagger_{\vec{k},1}$ s'annulent si l'Hamiltonien est diagonalisé et nous trouvons :

$$|u_{\vec{k}}|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_k}\right), \tag{A.8}$$

$$|v_{\vec{k}}|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_k}\right). \tag{A.9}$$

Pour effectuer cette transformation canonique, nous partons de l'observation que les caractéristiques de l'Hamiltonien BCS nous mènent à un état fondamental qui est une superposition de phase cohérente avec les états de paires de Bloch $(\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\downarrow)$ occupés ou non occupés. A cause de la cohérence, les opérateurs tels que $c_{-\vec{k},\downarrow} c_{\vec{k},\uparrow}$ peuvent avoir une moyenne non nulle $b_{\vec{k}}$, alors que la moyenne dans un métal normal, où la phase est aléatoire, est nulle. De plus, les fluctuations autour de cette valeur moyenne sont petites à cause du grand nombre de particules nécessaire. Par conséquent, si nous écrivons un produit d'opérateur comme $c_{-\vec{k},\downarrow} c_{\vec{k},\uparrow} = b_{\vec{k}} + (c_{-\vec{k},\downarrow} c_{\vec{k},\uparrow} - b_{\vec{k}})$ nous pouvons négliger les quantités qui sont bilinéaires dans les fluctuations du terme entre parenthèse qui est supposé petit.

Néanmoins, en gagnant en simplicité par l'élimination des termes quadratiques des opérateurs de création et d'annihilation de l'Hamiltonien BCS, nous avons perdu dans la forme approximée la conservation du nombre de particules. Il y a maintenant des termes qui créent ou détruisent des paires de Cooper.

Annexe B

Méthode des fonctions de Green

Cette annexe rapporte aux techniques des fonctions de Green. Les paragraphes sont relativement indépendants.

B.1 Modèle de l'Hamiltonien

Nous considérons un système unidimensionnel fait de deux électrodes métalliques semi-infinies N et N' et d'une barrière isolante I en nous basant sur l'article de Caroli, Combescot, Nozières et Saint-James [40]. Au temps initial, t_0, nous négligeons toute interaction entre les corps. Nous supposons que la fonction d'onde d'un électron peut être décrite en termes d'une base orthogonale $\varphi_l^{(n)}$ où la fonction $\varphi_l^{(n)}$ est localisée dans les environs du site l et n est un indice de bande. En termes d'opérateurs de création et d'annihilation correspondant $c^\dagger$ et c, l'Hamiltonien prend la forme :

$$H = \sum_{l,l',n,n'} T_{l,l'}^{n,n'} c_l^{(n)\dagger} c_{l'}^{(n')} \tag{B.1}$$

Dans les calculs, nous négligeons tous les processus interbande, ainsi nous retenons dans l'Hamiltonien (B.1) seulement les φ_l construits pour un niveau donné. Ceci correspond pour les métaux N et N' à une approximation à une bande.

Les éléments de matrice de l'Hamiltonien T_{lm} entre deux fonctions de Wannier décroissent rapidement avec $|x_l - x_m|$, ainsi nous pouvons négliger les T_{lm} qui couplent un site de N avec un site de N'. Cette hypothèse prend en compte le fait que la barrière à au moins trois à quatre couches d'atomes. De plus, nous supposons que l'électrode N est couplée à l'isolant par un seul élément de matrice $T \equiv T_{\alpha a}$. De la même manière, l'électrode N' et l'isolant ne sont couplés que par $T' \equiv T_{b\alpha'}$ (indice sur Fig. B.1).

L'Hamiltonien (B.1) peut alors s'écrire sous la forme (indices représentés sur Fig. B.1)

$$H = \underbrace{\sum_{\lambda\mu} T_{\lambda\mu} c^\dagger_\lambda c_\mu}_{\text{Terme cinétique dans } N} + \underbrace{\sum_{\lambda'\mu'} T_{\lambda'\mu'} c^\dagger_{\lambda'} c_{\mu'}}_{\text{Terme cinétique dans } N'} + \underbrace{\sum_{ij} T_{ij} c^\dagger_i c_j}_{\text{Terme cinétique dans } I}$$
$$+ \underbrace{T_{\alpha a} c^\dagger_\alpha c_a + hc.}_{\text{Couplage } N-I} + \underbrace{T_{\alpha' b} c^\dagger_{\alpha'} c_b + hc.}_{\text{Couplage } I-N'}$$

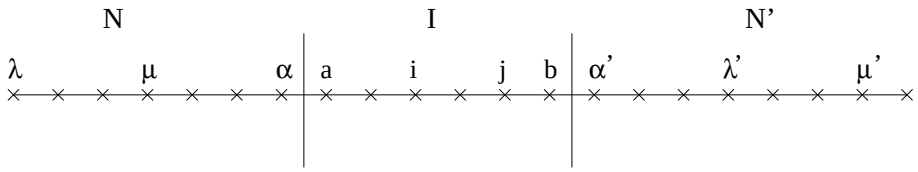

FIG. B.1 – Schéma de la jonction N-I-N' dans le formalisme des fonctions de Green.

La fonction de Green de l'électrode de gauche isolée est $g_{\lambda\mu}(\epsilon)$. Ce propagateur est donné pour tous les diagrammes allant du site λ au site μ sans jamais entrer dans la barrière. De la même façon, nous notons par $g_{\lambda'\mu'}(\epsilon)$ et $g_{ij}(\epsilon)$ les propagateurs pour l'électrode droite et pour la barrière seule. Puisque la barrière est isolante g_{ij} décroît exponentiellement avec $|x_i - x_j|$.

Le propagateur complet $G_{pq}(\epsilon)$ (où p et q sont les sites du système complet) est la solution de $\epsilon G_{pq}(\epsilon) - \sum_l T_{pl} G_{lq}(\epsilon) = \delta_{pq}$. En fait, pour calculer le propagateur complet $G_{\lambda\mu}(\epsilon)$, nous devons prendre en compte l'excursion possible de l'électron à travers l'interface N-I : $G_{\lambda\mu}(\epsilon) = g_{\lambda\mu}(\epsilon) + g_{\lambda\alpha}(\epsilon) T G_{aa}(\epsilon) T g_{\alpha\mu}(\epsilon)$. De la même façon, pour N'-N', $G_{\lambda'\mu'}(\epsilon) = g_{\lambda'\mu'}(\epsilon) + g_{\lambda'\alpha'}(\epsilon) T' G_{bb}(\epsilon) T g_{\alpha'\mu'}(\epsilon)$. Et pour N-N', $G_{\lambda\mu'}(\epsilon) = g_{\lambda\alpha}(\epsilon) T G_{ab}(\epsilon) T' g_{\alpha'\mu'}(\epsilon)$.

Nous devons maintenant calculer le propagateur complet $G_{ij}(\epsilon)$ à l'intérieur de la barrière. Une excursion de l'électron dans N ou N' peut être vue comme un processus de self-énergie correspondant à seulement deux éléments de matrice non nuls : $\Sigma_{aa} = \Sigma = T^2 g_{\alpha\alpha}$ et $\Sigma_{bb} = \Sigma' = T'^2 g_{\alpha'\alpha'}$. L'équation de Dyson pour G_{ij} prend alors la forme :

$$G_{ij}(\epsilon) = g_{ij}(\epsilon) + g_{ia}(\epsilon)\Sigma(\epsilon) G_{aj}(\epsilon) + g_{ib}(\epsilon)\Sigma'(\epsilon) G_{bj}(\epsilon). \tag{B.2}$$

L'équation est vraie pour tous les sites de l'isolant, et donc tout particulièrement pour G_{aa}, G_{ab}, G_{ba} et G_{bb}. Nous pouvons donc résoudre le système contenant ces quatre équations et trouvons :

$$\begin{cases} G_{aa} = \frac{g_{aa}(1 - T'^2 g_{bb} g_{\alpha'\alpha'}) + T'^2 g_{ba} g_{ab} g_{\alpha'\alpha'}}{D} \\ G_{ab} = \frac{g_{ab}}{D} \\ G_{ba} = \frac{g_{ba}}{D} \\ G_{bb} = \frac{g_{bb}(1 - T^2 g_{aa} g_{\alpha\alpha}) + T^2 g_{ba} g_{ab} g_{\alpha\alpha}}{D} \end{cases}$$

avec $D = (1 - T^2 g_{aa} g_{\alpha\alpha})(1 - T'^2 g_{bb} g_{\alpha'\alpha'}) - T^2 T'^2 g_{ab} g_{ba} g_{\alpha\alpha} g_{\alpha'\alpha'}$. La fonction de Green exacte est alors complètement déterminée par $G_{\lambda\lambda'} = \sum_{\mu\mu'} g_{\lambda\mu} \mathcal{T}_{\mu\mu'} g_{\mu'\lambda'}$ avec $\mathcal{T}_{\mu\mu'} = \frac{TT' g_{ab}}{D} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\mu'\alpha'}$.

Avec l'aide de ces fonctions de Green, il est possible de calculer le courant qui traverse la jonction N-I-N' par effet tunnel. Ce calcul est effectué en détail dans l'appendice B.5.

B.2 Représentation spectrale

L'objectif est de déterminer les facteurs a' et b' pour une jonction N-N-S-N-N (voir § 1.2.2.5). Pour cela, il nous faut déterminer les fonctions de Green du supraconducteur $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$, $g_{\beta\alpha}$ et $g_{\beta\beta}$ à partir de la fonction de Green complète et à l'aide de l'équation de Dyson.

Le supraconducteur est décrit par l'Hamiltonien BCS, $H = \sum_\sigma \xi_k c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} + \bar{\Delta}_k c^\dagger_{k\downarrow} c^\dagger_{k\uparrow} + \Delta_k c_{k\uparrow} c_{k\downarrow}$, où $\xi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$ est la relation de dispersion de l'électron libre avec μ le potentiel chimique et Δ est le gap du supraconducteur. Dans la représentation de Nambu, l'indice 1 correspond aux électrons et l'indice 2 aux trous. Ainsi g^{11} donne la propagation d'un électron. La fonction de Green avancée est donnée par

$$g^A_{ij}(t,t') = -i\theta(t-t') \begin{pmatrix} \langle\{c_{i\uparrow}(t), c^\dagger_{j\uparrow}(t')\}\rangle & \langle\{c_{i\uparrow}(t), c_{j\downarrow}(t')\}\rangle \\ \langle\{c^\dagger_{i\downarrow}(t), c^\dagger_{j\uparrow}(t')\}\rangle & \langle\{c^\dagger_{i\downarrow}(t), c_{j\downarrow}(t')\}\rangle \end{pmatrix}$$

avec $c_{i\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikx_i} c_{k\uparrow}$.

Chaque composante peut être calculée séparément, nous regardons en détail la composante 11

$$g^{11A}_{ij}(t,t') = -i\theta(t-t') \langle \underbrace{c_{i\uparrow}(t) c^\dagger_{j\uparrow}(t')}_{\mathcal{A}} + \underbrace{c^\dagger_{j\uparrow}(t') c_{i\uparrow}(t)}_{\mathcal{B}} \rangle$$

Nous calculons séparément $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en remplaçant $c_{i\uparrow}(t) = e^{iHt} c_{i\uparrow}(0) e^{-iHt}$ avec $\tau = t - t'$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \langle 0| e^{iHt} c_{i\uparrow}(0) e^{-iHt} e^{iHt'} c^\dagger_{i\uparrow}(0) e^{-iHt} |0\rangle = \langle 0| e^{iHt} c_{i\uparrow}(0) e^{-iH\tau} c^\dagger_{i\uparrow}(0) e^{-iHt} |0\rangle \\ &= e^{iE^0\tau} \langle 0| c_{i\uparrow}(0) e^{-iH\tau} c^\dagger_{i\uparrow}(0) |0\rangle = e^{iE^0\tau} \sum_{k,l} \frac{1}{N} \langle 0| e^{ikx_i} c_{k\uparrow}(0) e^{-iH\tau} e^{-ilx_j} c^\dagger_{l\uparrow}(0) |0\rangle \end{aligned}$$

Nous regardons un des termes de la somme avec les opérateurs de Bogoliubov de Gennes, qui sont les opérateurs propres du système, $c_{k\uparrow}(0) = \bar{u}_k \gamma_{k\uparrow}(0) + v_k \gamma^\dagger_{-k\downarrow}(0)$.

$$\begin{aligned} \langle 0| c_{k\uparrow}(0) e^{-iH\tau} c^\dagger_{l\uparrow}(0) |0\rangle &= \langle 0| (\bar{u}_k \gamma_{k\uparrow}(0) + v_k \gamma^\dagger_{-k\downarrow}(0)) e^{-iH\tau} (u_l \gamma^\dagger_{l\uparrow}(0) + \bar{v}_l \gamma_{-l\downarrow}(0)) |0\rangle \\ &= \langle 0| \bar{u}_k \gamma_{k\uparrow} e^{-iH\tau} u_l \gamma^\dagger_{l\uparrow} |0\rangle = \delta_{kl} |u_k|^2 e^{-iE_k\tau} e^{-iE^0\tau} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ se réduit à $\mathcal{A} = \frac{1}{N} \sum_k e^{ik(x_i - x_j)} |u_k|^2 e^{-ie_k\tau}$. De la même manière, nous trouvons $\mathcal{B} = \frac{1}{N} \sum_k e^{ik(x_i - x_j)} |v_k|^2 e^{ie_k\tau}$. Par conséquent,

$$g^{11A}_{ij}(t,t') = -i\theta(\tau) \frac{1}{N} \sum_k e^{ik(x_i - x_j)} \left[|u_k|^2 e^{-iE_k\tau} + |v_k|^2 e^{iE_k\tau} \right].$$

Nous prenons la transformée de Fourier pour les fonctions de Green en fréquence. Afin d'éviter la singularité nous considérons une petite déviation η qui tend vers 0

$$g^{11A}_{ij}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_k e^{ik(x_i - x_j)} \left[\frac{|u_k|^2}{\omega - E_k + i\eta} + \frac{|v_k|^2}{\omega + E_k + i\eta} \right].$$

En prenant $\Delta \to 0$, nous retrouvons bien les pôles et les résidus de la fonction de Green d'un métal.

Les autres composantes des fonctions de Green sont trouvées de la même manière et valent

$$\begin{cases} g_{ij}^{22A}(t,t') = -i\theta(\tau)\frac{1}{N}\sum_k e^{-ik(x_i-x_j)}\left[|u_k|^2 e^{iE_k\tau} + |v_k|^2 e^{-iE_k\tau}\right] \\ g_{ij}^{12A}(t,t') = -i\theta(\tau)\frac{1}{N}\sum_k e^{-ik(x_i-x_j)}\bar{u}_k v_{-k}\left[e^{iE_k\tau} - e^{-iE_k\tau}\right] \\ g_{ij}^{21A}(t,t') = -i\theta(\tau)\frac{1}{N}\sum_k e^{-ik(x_i-x_j)}\bar{v}_k u_{-k}\left[e^{iE_k\tau} - e^{-iE_k\tau}\right]. \end{cases}$$

et après transformation de Fourier

$$\begin{cases} g_{ij}^{22A}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_k e^{ik(x_i-x_j)}\left[\frac{|u_k|^2}{\omega+E_k+i\eta} + \frac{|v_k|^2}{\omega-E_k+i\eta}\right] \\ g_{ij}^{12A}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_k e^{ik(x_i-x_j)}\bar{u}_k v_{-k}\left[\frac{1}{\omega+E_k+i\eta} - \frac{1}{\omega-E_k+i\eta}\right] \\ g_{ij}^{21A}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_k e^{-ik(x_i-x_j)}\bar{v}_k u_{-k}\left[\frac{1}{\omega+E_k+i\eta} - \frac{1}{\omega-E_k+i\eta}\right] \end{cases}$$

Les conventions utilisées sont que pour les fonction de Green avancées $\omega \to \omega + i\eta$ et pour les fonctions de Green retardées $\omega \to \omega - i\eta$, avec $\eta \to 0^+$.

B.3 Fonction de Green dans l'espace réel

Nous avons établi dans la section B.2 les fonctions de Green temporelles et en fréquence d'un supraconducteur. Maintenant, nous voulons évaluer les fonctions de Green dans l'espace réel. Pour cela, nous passons à une limite continue, la somme sur k devenant une intégrale. Nous pouvons séparer l'intégrale comme une intégrale sur le rayon $R = x_i - x_j$ et deux intégrales angulaires. Nous avons $g_{ij}^{11A}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_k e^{ik(x_i-x_j)}\left[\frac{|u_k|^2}{\omega-E_k+i\eta} + \frac{|v_k|^2}{\omega+E_k+i\eta}\right] = \frac{1}{N}\sum_k e^{i\vec{k}\vec{R}}F(k)$. Ainsi, les intégrales angulaires ne s'appliquent qu'à $e^{i\vec{k}\vec{R}}$,

$$\frac{1}{N}\sum_k e^{i\vec{k}\vec{R}}F(k) \simeq \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}k k^2 F(k)\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin(\theta) e^{ikR\cos(\theta)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi.$$

Or, $\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin(\theta)e^{ikR\cos(\theta)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 2\pi\frac{e^{ikR}-e^{-ikR}}{ikR}$ et $F(k) = F(-k)$, donc l'intégrale sur les R de 0 à ∞ peut se transformer en une intégrale de $-\infty$ à ∞ et nous trouvons que

$$g_{ij}^{11A}(\omega) = \frac{-i}{(2\pi)^2 R}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k k e^{ikR}\left[\frac{|u_k|^2}{\omega - E_k + i\eta} + \frac{|v_k|^2}{\omega + E_k + i\eta}\right]$$

La fonction à deux pôles un en $\omega = E_k$ et l'autre en $\omega = -E_k$, nous pouvons donc calculer l'intégrale à l'aide du théorème des résidus.

Nous obtenons après intégration

$$g_{ij}^{11A}(\omega) = \frac{2m}{2\pi R\hbar^2}e^{-R/\xi(\omega)}\left[\frac{-\omega}{\sqrt{\Delta^2-\omega^2}}\sin(k_F R) - \cos(k_F R)\right]$$

où $\xi(\omega) = \frac{\hbar v_F}{\sqrt{\Delta^2-\omega^2}}$ est la longueur de cohérence.

De la même manière, nous pouvons trouver les autres fonctions de Green :

$$\begin{cases} g_{ij}^{22A}(\omega) = \frac{2m}{2\pi R\hbar^2}e^{-R/\xi(\omega)}\left[\frac{-\omega}{\sqrt{\Delta^2-\omega^2}}\sin(k_F R) + \cos(k_F R)\right] \\ g_{ij}^{12A}(\omega) = \frac{2m}{2\pi R\hbar^2}\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2-\omega^2}}e^{-R/\xi(\omega)}e^{i\varphi}\sin(k_F R) \\ g_{ij}^{21A}(\omega) = \frac{2m}{2\pi R\hbar^2}\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2-\omega^2}}e^{-R/\xi(\omega)}e^{-i\varphi}\sin(k_F R) \end{cases}$$

Nous pouvons donc réécrire la fonction de Green du supraconducteur comme

$$g_{ij}^{A}(\omega) = \frac{2m}{2\pi R\hbar^2} e^{-R/\xi(\omega)} \times \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - \omega^2}} \begin{pmatrix} -\omega & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & -\omega \end{pmatrix} \sin(k_F R) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(k_F R) \right] \tag{B.3}$$

Cette fonction est valable pour le cas à trois dimensions. Si nous regardons le cas unidimensionnel nous avons simplement une inversion des cosinus et des sinus et le facteur $1/R$ disparaît.

B.4 Méthode de Keldysh

La technique des diagrammes habituelle nécessite le calcul du produit chronologique de la forme, $\langle\phi_0|T\{A(t)B(t')\ldots\}|\phi_0\rangle$ où $A(t)$ et $B(t')$ sont les opérateurs dans la représentation de Heisenberg. Dans la représentation d'interaction, l'expression devient

$$\langle\phi_0|S(-\infty,\infty)T\{\tilde{A}(t)\tilde{B}(t')\ldots S(\infty,-\infty)\}|\phi_0\rangle,$$

où la matrice S est définie par $S(t',t) = T\{e^{-i\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau H_{int}(\tau)}\}$. L'Hamiltonien d'interaction H_{int} est supposé adiabatique démarrant à $t = -\infty$ et s'éteignant à $t = \infty$. En l'absence d'effets irréversibles $S(\infty,-\infty)\phi_0 = e^{i\alpha}\phi_0$, ainsi

$$\langle\phi_0|T\{A(t)B(t')\ldots\}|\phi_0\rangle = \frac{\langle\phi_0|S(-\infty,\infty)T\{\tilde{A}(t)\tilde{B}(t')\ldots S(\infty,-\infty)\}|\phi_0\rangle}{\langle\phi_0|S(\infty,-\infty)|\phi_0\rangle}.$$

Néanmoins, cette affirmation n'est pas vraie si l'évolution du système est irréversible, puisque le système soit absorbe soit émet de l'énergie durant cette évolution. Mais, il est possible de généraliser la technique des diagrammes. En effet,

$$\langle\phi_0|S(-\infty,\infty)T\{\tilde{A}(t)\tilde{B}(t')\ldots S(\infty,-\infty)\}|\phi_0\rangle = \langle\phi_0|T_c\{\tilde{A}(t)\tilde{B}(t')\ldots S_c\}|\phi_0\rangle, \tag{B.4}$$

où T_c est un opérateur ordonnant le temps de droite à gauche, pas comme habituellement de $-\infty$ à ∞, mais le long d'un contour C ayant une branche positive allant de $-\infty$ à ∞ et une branche négative allant de ∞ à $-\infty$ (voir Fig. B.2). Les temps de la branche négative sont considérés comme postérieurs à ceux de la branche positive. Ainsi, $S_c = S(-\infty,\infty)S(\infty,-\infty)$ où les temps de $S(-\infty,\infty)$ sont sur la branche positive et les temps de $S(\infty,-\infty)$ sont sur la branche négative.

Il est maintenant possible de calculer l'expression (B.4) avec la technique habituelle des diagrammes. Mais puisque les temps le long de la branche négative (notée avec $-$) sont postérieurs aux temps le long de la branche positive (notée avec un $+$), nous devons utiliser quatre fonctions de Green.

$$\begin{cases} G_{ij}^{+}(t,t') = -i\langle\phi_0|T_c\{c_i(t_+)c_j^\dagger(t'_-)\}|\phi_0\rangle = i\langle\phi_0|c_j^\dagger(t')c_i(t)|\phi_0\rangle \\ G_{ij}^{-}(t,t') = -i\langle\phi_0|T_c\{c_i(t_-)c_j^\dagger(t'_+)\}|\phi_0\rangle = -i\langle\phi_0|c_i(t)c_j^\dagger(t')|\phi_0\rangle \\ G_{ij}^{c}(t,t') = -i\langle\phi_0|T_c\{c_i(t_+)c_j^\dagger(t'_+)\}|\phi_0\rangle = -i\langle\phi_0|T\{c_i(t)c_j^\dagger(t')\}|\phi_0\rangle \\ \tilde{G}_{ij}^{c}(t,t') = -i\langle\phi_0|T_c\{c_i(t_-)c_j^\dagger(t'_-)\}|\phi_0\rangle = -i\langle\phi_0|\tilde{T}\{c_i(t)c_j^\dagger(t')\}|\phi_0\rangle \end{cases} \tag{B.5}$$

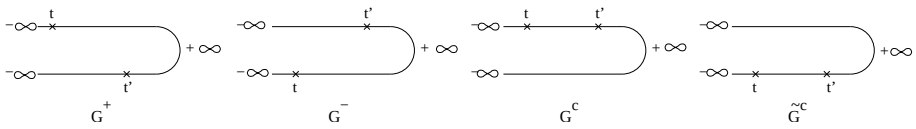

FIG. B.2 – Schéma du contour de Keldysh avec les temps des différentes fonctions de Green.

Les différents temps sont représentés sur la figure B.2, $T\{\ldots\}$ ordonne de $-\infty$ à ∞ et $\tilde{T}\{\ldots\}$ ordonne de ∞ à $-\infty$.

Dans un calcul de diagrammes l'intégration est faite le long du contour C, c'est équivalent à faire l'intégration de $-\infty$ à ∞ et à sommer sur les indices $+$ et $-$. Sommer sur $+$ et $-$ est équivalent à utiliser des matrices 2×2. Par conséquent, la technique habituelle des diagrammes peut être utilisée si nous définissons une matrice des fonctions de Green

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G^c & G^- \\ G^+ & \tilde{G}^c \end{pmatrix}.$$

Avec ces conventions, l'équation de Dyson peut se réécrire sous la forme

$$G_{ij}(t,t') = G^0_{ij}(t,t') + \int \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 G^0_{ik}(t,t_1)\Sigma_{kl}(t_1,t_2)G_{lj}(t_2,t') \tag{B.6}$$

où

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma^c & \Sigma^- \\ \Sigma^+ & \tilde{\Sigma}^c \end{pmatrix}$$

est la matrice de self-énergie et $\mathbf{G}^0$ est la matrice de fonction de Green en l'absence d'interaction. Les fonctions G^+, G^-, G^c et $\tilde{G}^c$ sont connectées par $G^c + \tilde{G}^c = G^+ + G^-$. De la même manière, nous avons $\Sigma^c + \tilde{\Sigma}^c = -(\Sigma^+ + \Sigma^-)$. Ainsi, parmi les quatre équations représentées par (B.6) seules deux sont indépendantes. Ceci devient plus clair si nous prenons la transformation canonique :

$$\mathbf{G} \to \frac{1 - i\sigma_y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G^c & G^- \\ G^+ & \tilde{G}^c \end{pmatrix} \frac{1 + i\sigma_y}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & F \end{pmatrix}$$

où σ_y est la matrice de Pauli,

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de self-énergie devient alors

$$\mathbf{\Sigma} \to \begin{pmatrix} \Omega & \Sigma^A \\ \Sigma^R & 0 \end{pmatrix}.$$

Les nouvelles fonctions sont reliées aux anciennes par

$$\begin{cases} F = G^- + G^+ = G^c + \tilde{G}^c \\ G^A = G^- - \tilde{G}^c = G^c - G^+ \\ G^R = G^+ - \tilde{G}^c = G^c - G^- \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Omega = \Sigma^c + \tilde{\Sigma}^c = -(\Sigma^+ + \Sigma^-) \\ \Sigma^A = \Sigma^c + \Sigma^+ = -(\tilde{\Sigma}^c + \Sigma^-) \\ \Sigma^R = \Sigma^c + \Sigma^- = -(\tilde{\Sigma}^c + \Sigma^+). \end{cases}$$

Nous n'avons plus que trois équations pour (B.6)

$$\begin{pmatrix} 0 & G^A_{ij} \\ G^R_{ij} & F_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G^{0A}_{ij} \\ G^{0R}_{ij} & F^0_{ij} \end{pmatrix} + \int \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \begin{pmatrix} 0 & G^{0A}_{ik}\Sigma^A_{kl}G^A_{lj} \\ G^{0R}_{ik}\Sigma^R_{kl}G^R_{lj} & G^{0R}_{ik}\Omega_{kl}G^A_{lj} + G^{0R}_{ik}\Sigma^R_{kl}F^A_{lj} + F^0_{ik}\Sigma^A_{kl}G^A_{lj} \end{pmatrix}$$

B.5 Courant par effet tunnel (jonction tunnel normale)

Nous déterminons grâce à l'Hamiltonien (B.1) et à l'aide de la méthode de Keldysh (Appendice B.4) le courant d'électrons passant par effet tunnel. Soit P un point entre le site i et le site $i+1$, le courant J au point P est la différence entre le flux d'électrons de gauche à droite et celui de droite à gauche. Nous nous attendons à avoir un opérateur J de la forme

$$J_P = \sum_{l \geq i+1, m \leq i} A_{lm} c^\dagger_l c_m - \sum_{l \leq i, m \geq i+1} A_{lm} c^\dagger_l c_m.$$

Pour trouver les A_{lm}, nous utilisons l'équation de continuité $J_P - J_{P'} + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0$ où P' est un point entre les sites $(i-1)$ et i, tandis que $\rho_i = e c^\dagger_i c_i$ est la charge de l'électron autour du site i. En utilisant l'Hamiltonien (B.1), nous obtenons

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\rho_i, H] = \frac{e}{i\hbar} \sum_m (T_{im} c^\dagger_i c_m - T_{mi} c^\dagger_m c_i)$$

les A_{lm} sont alors donnés par $A_{lm} = \frac{e}{i\hbar} T_{lm}$.

Dans un état stationnaire, le courant peut être calculé à n'importe quel point du système. Puisque dans notre modèle la barrière est couplée à N (N') à travers un seul élément de matrice T (T'), il est particulièrement pratique de calculer le courant entre α et a (entre b et α'). Pour un point P entre α et a,

$$J = \langle J_P \rangle = \frac{eT}{i\hbar} \left(\langle c^\dagger_\alpha c_a \rangle - \langle c^\dagger_a c_\alpha \rangle \right). \tag{B.7}$$

Le calcul du courant J est ainsi réduit à celui de la fonction de Green $G_{\alpha a}$ pour des temps égaux [41]. Si nous nous plaçons dans le cas de figure où $\mu' - \mu = eV$, nous avons

$$J = \frac{(2\pi)^2 e T^2 T'^2}{\hbar} \int_\mu^{\mu+eV} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} G^A_{ba}(\omega) G^R_{ab}(\omega) \rho_\alpha(\omega) \rho_{\alpha'}(\omega). \tag{B.8}$$

La principale différence entre notre résultat et l'expression obtenue par un Hamiltonien à effet tunnel conventionnel vient de la forme du coefficient de transfert, qui dans notre modèle est égal à $|\mathcal{T}|^2 = T^2 T'^2 G^A_{ba}(\omega) G^R_{ab}(\omega)$. Notons que $|\mathcal{T}|^2$ est dépendant de la fréquence. Dans le cas simple que

nous avons considéré, cette dépendance est très faible aussi longtemps que eV reste beaucoup plus petit que l'énergie de la barrière. D'autre part, ce fait devient essentiel si nous incluons les effets de la self-énergie tels que l'interaction électron-phonon. $|\mathcal{T}|^2$ dépend principalement de l'énergie et non pas de l'impulsion. De plus, $|\mathcal{T}|^2$ dépend des propagateurs des électrodes $g_{\alpha\alpha}$ et $g_{\alpha'\alpha'}$ à travers les dénominateurs de renormalisation. C'est une nouvelle caractéristique du calcul qui pourrait affecté profondément la forme de la structure de la self-énergie dans les caractéristiques $I - V$.

B.6 Moyenne des différents produits de fonctions de Greeen

Les fonctions de Green d'un supraconducteur sont donnée dans le cas balistique par (B.3)[1], nous pouvons en déterminer les différentes moyennes sur les facteurs de Fermi aléatoires dans un supraconducteur (données dans [18])

$$\begin{aligned}
\overline{(g^{1,1}_{\alpha,\beta})^2} &= \overline{(g^{2,1}_{\alpha,\beta})^2} = \overline{(g^{1,2}_{\alpha,\beta})^2} = \frac{\pi^2\rho_S^2}{2(k_F R)^2} e^{-2R/\xi(\omega)} \frac{\Delta^2}{\Delta^2 - \omega^2} \\
\overline{g^{1,1}_{\alpha,\beta} g^{2,2}_{\alpha,\beta}} &= \frac{\pi^2\rho_S^2}{2(k_F R)^2} e^{-2R/\xi(\omega)} \frac{2\omega^2 - \Delta^2}{\Delta^2 - \omega^2} \\
\overline{g^{1,1}_{\alpha,\beta} g^{1,2}_{\alpha,\beta}} &= \overline{g^{2,2}_{\alpha,\beta} g^{1,2}_{\alpha,\beta}} = \frac{\pi^2\rho_S^2}{2(k_F R)^2} e^{-2R/\xi(\omega)} \frac{2\omega^2 - \Delta^2}{\Delta^2 - \omega^2}
\end{aligned}$$

B.7 Mode de transmission pour un supraconducteur

Smith et Ambegaokar [76] évaluent le mode de transmission dans un supraconducteur en commençant par une extrémité du diagramme d'échelle et en calculant récursivement les intégrales sur les vecteurs d'ondes (voir Fig. B.3). Les modes de transmission sont calculés avec les différentes matrices 2×2 aux extrémités. Les relations des quatre paramètres de récursions se réduisent à une série géométrique d'une matrice dans le secteur $(\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1)$, et à une autre série géométrique d'une matrice dans le secteur ($\hat{\tau}_2$,$\hat{\tau}_3$), où $\hat{\tau}_n$ sont les matrices de Pauli, avec $\hat{\tau}_0$ la matrice identité.

Plus précisément, nous définissons les quatre matrices

$$\overline{\hat{\mathcal{D}}}_{q,\delta\omega}(\hat{\tau}_n) = v^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \overline{\hat{\tau}_3 \hat{G}(\mathbf{k},\omega)\hat{\tau}_n \hat{G}(\mathbf{k}+\mathbf{q},\omega+\delta\omega)\hat{\tau}_3},$$

où $n = 0, ..., 3$, $q = |\mathbf{q}|$ est le module du vecteur d'onde, et $\delta\omega$ est petit comparé à l'énergie ω. $\overline{(\dots)}$ représente une moyenne sur le désordre.

Le potentiel d'interaction du désordre microscopique est donné par $v^2 = 4\pi\epsilon_F/\tau_e$, avec ϵ_F l'énergie de Fermi et τ_e le temps d'interaction élastique, relié à la longueur d'interaction élastique l_e par la relation $l_e = v_F\tau_e$. Nous trouvons $\overline{\hat{\mathcal{D}}}_{q,\delta\omega}(\hat{\tau}_0) = X\left(\Delta^2\hat{\tau}_0 - \omega\Delta\hat{\tau}_1\right)$ et $\overline{\hat{\mathcal{D}}}_{q,\delta\omega}(\hat{\tau}_1) = X\left(\omega\Delta\hat{\tau}_0 - \omega^2\hat{\tau}_1\right)$,

[1] Le préfacteur peut aussi prendre la forme $\pi\rho_S/(k_F R)$, où ρ_S est la densité d'état du supraconducteur dans son état normal

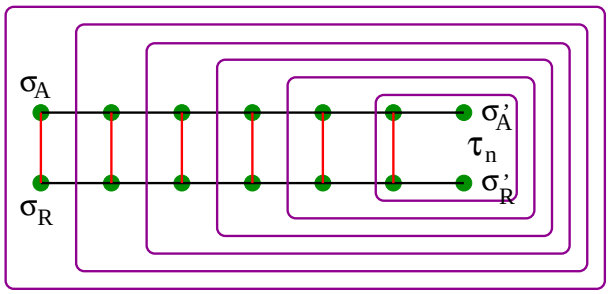

FIG. B.3 – Représentation schématique du calcul récursif des matrices de mode de transmission dans l'approximation d'échelle utilisée par Smith et Ambegaokar [76]. Les intégrales sur les vecteurs d'ondes sont effectuées récursivement en partant de la droite du diagramme. Les deux lignes noires horizontales correspondent aux fonctions de Green avancées et retardées. Les points verts sont les vertex dûs au désordre et les lignes verticales rouges correspondent aux lignes d'impuretés. Nous avons montré les indices de Nambu (σ_A, σ_R) et (σ'_A, σ'_R) aux extrémités du mode de transmission.

dans le secteur$(\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1)$, et

$$\overline{\hat{\mathcal{D}}}_{q,\delta\omega}(-i\hat{\tau}_2) = X\left(-\frac{3\mathcal{D}_0\Delta\delta\omega\sqrt{\Delta^2-\omega^2}}{2v_F^2}\hat{\tau}_3 - i(\Delta^2-\omega^2)\hat{\tau}_2\right) \tag{B.9}$$

$$\overline{\hat{\mathcal{D}}}_{q,\delta\omega}(\hat{\tau}_3) = X\mathcal{D}_0\delta\omega\left(-\frac{\mathcal{D}_0^2\Delta\delta\omega}{4v_F^4}\hat{\tau}_3 - \frac{3i\Delta}{2v_F^2}\sqrt{\Delta^2-\omega^2}\hat{\tau}_2\right), \tag{B.10}$$

dans le secteur $(\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3)$. Nous utilisons la notation

$$\frac{1}{X} = \frac{3\mathcal{D}_0(\Delta^2-\omega^2)}{v_F^2}\left[\sqrt{\Delta^2-\omega^2} + \frac{\mathcal{D}_0 q^2}{4} - \frac{\omega\delta\omega}{2\sqrt{\Delta^2-\omega^2}}\right],$$

où $\mathcal{D}_0 = v_F^2 l_E/2$ est la constante de diffusion.

La relation entre les modes de transmission dans le supraconducteur et le transport non local est donnée par la conductance non locale $\mathcal{G}_{a,b}(V_b) = \partial I_a(V_b)/\partial V_b$ dans la situation $V_a = V_S = 0$ utilisée dans les expériences [15, 16] (voir Fig. 8 pour les notations de I_a et V_b). La conductance non locale $\mathcal{G}_{a,b}(V_b)$ mesure la sensibilité du courant d'une électrode à la tension de l'autre. Ce qui peut s'étendre systématiquement en puissance des amplitudes tunnel. Comme pour la réflexion d'Andreev, la première contribution $\mathcal{G}^{(2)}_{a,b}(\omega)$ apparaît à l'ordre T^2. La conductance non locale est alors donnée par $\mathcal{G}^{(2)}_{a,b}(\omega) = \frac{e^2}{h}\left[T^{(1,1)}_{(1,1)}(\omega) - T^{(2,2)}_{(1,1)}(\omega)\right]$, avec

$$T^{(\sigma'_A,\sigma'_R)}_{(\sigma_A,\sigma_R)}(\omega) = T^2\epsilon_F^2\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{q}.\mathbf{R}}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\overline{\hat{G}^{\sigma_A,\sigma'_A}_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},\omega)\hat{G}^{\sigma'_R,\sigma_R}_{\beta,\alpha}(\mathbf{k}+\mathbf{q},\omega)}.$$

La notation $T^{(\sigma'_A,\sigma'_R)}_{(\sigma_A,\sigma_R)}(\omega)$ correspond au coefficient de transmission relié au mode de transmission avec les indices de Nambu (σ_A, σ_R) pour les propagateurs avancés et retardés à une extrémité, et les indices de Nambu (σ'_A, σ'_R) à l'autre extrémité (voir Fig. B.3). Les coefficients de transmission $\overline{T}^{(1,1)}_{(1,1)}(\omega)$ et

$\overline{T}^{(2,2)}_{(1,1)}(\omega)$ représentent respectivement les processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev non locale.

Nous déduisons de l'équation (B.10) que la moyenne de la conductance croisée s'annule : $\overline{\mathcal{G}}_{a,b}(\omega) = 0$ à l'ordre T^2, en accord avec Falci *et al.* [12] dans le cas balistique, et avec Feinberg [87] pour le cas désordonné.

Nous trouvons

$$T^{1,1}_{1,1}(q,\omega,\delta\omega) = T^{2,2}_{1,1}(q,\omega,\delta\omega) = \frac{v_F^2\Delta^2}{3\mathcal{D}_0(\Delta^2-\omega^2)[\sqrt{\Delta^2-\omega^2}+\mathcal{D}_0 q^2/4-\omega\delta\omega/2\sqrt{\Delta^2-\omega^2}]}$$

Annexe C

Jonction multiterminale

C.1 fonction de distribution pour $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$

Nous étudions en détail le calcul des fonctions de distribution de la jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs pour le cas particulier où $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$, nous résolvons (3.17) en séparant le système en bandes d'énergie selon le modèle de Nagaev [32]. Nous considérons N un entier tel que $\frac{2\Delta}{N+1} < eV < \frac{2\Delta}{N}$, alors deux types de bandes alternatives rentrent en jeu respectivement de largeur $\delta_1 = 2\Delta - NeV$ et $\delta_2 = (N+1)eV - 2\Delta$, avec $N+2$ bandes de largeur δ_1 et $N+1$ bandes de largeur δ_2 (voir Fig. C.1 et Fig. C.2).

N=1 :

Nous commençons par considérer le cas le plus simple avec $N = 1$ représenté sur la figure C.1. Nous

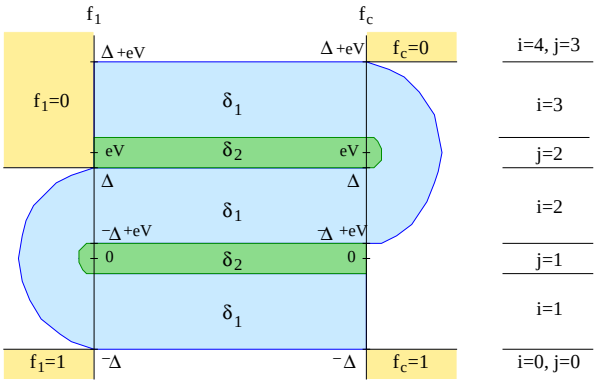

FIG. C.1 – Représentation des bandes d'énergie pour $N = 1$ entre le réservoir 1 et la partie centrale dans le cas d'une jonction Y reliée à trois réservoirs supraconducteurs.

devons résoudre l'équation (3.17). Pour cela nous dénotons $f_c(\epsilon)$ par $f_c^{\delta_n;i}$ lorsque ϵ appartient à la $i^{ème}$ bande δ_n.

Bandes δ_1 :

i=0 : $f_c^{\delta_1;0} = 1$

i=1 : $\alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;1} - f_c^{\delta_1;2}] - f_c^{\delta_1;1} \right\} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ 1 - f_c^{\delta_1;1} \right\} = 0$

<u>i=2 :</u> $\alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;2} - f_c^{\delta_1;1}] - f_c^{\delta_1;2} \right\} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;2} - f_c^{\delta_1;3}] - f_c^{\delta_1;2} \right\} = 0$
<u>i=3 :</u> $-\alpha_1 f_c^{\delta_1;3} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;3} - f_c^{\delta_1;2}] - f_c^{\delta_1;3} \right\} = 0$
<u>i=4 :</u> $f_c^{\delta_1;4} = 0$

En résolvant les équations et en définissant $\beta = \alpha_2 + \alpha_3$, nous obtenons facilement :

$$f_c^{\delta_1;0} = 1; \quad f_c^{\delta_1;1} = \frac{2\alpha_1+3\beta}{3(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_1;2} = \frac{\alpha_1+2\beta}{3(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_1;3} = \frac{\beta}{3(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_1;4} = 0.$$

Nous faisons le même développement pour les bandes δ_2.

Bandes δ_2 :
<u>j=0 :</u> $f_c^{\delta_2;0} = 1$
<u>j=1 :</u> $\alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_2;1} - f_c^{\delta_2;1}] - f_c^{\delta_2;1} \right\} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ 1 - f_c^{\delta_2;1} \right\} = 0$
<u>j=2 :</u> $-\alpha_1 f_c^{\delta_2;2} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_2;2} - f_c^{\delta_2;3}] - f_c^{\delta_2;2} \right\} = 0$
<u>j=3 :</u> $f_c^{\delta_2;3} = 0$

Par conséquent,

$$f_c^{\delta_2;0} = 1; \quad f_c^{\delta_2;1} = \frac{\alpha_1+2\beta}{2(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_2;2} = \frac{\beta}{2(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_2;3} = 0.$$

En utilisant l'équation (3.15), nous pouvons déduire de f_c les fonctions de distribution des réservoirs. La fonction de distribution du réservoir 2 est la même que celle du réservoir 3, car une tension identique leur est appliquée.

$$\begin{cases} f_1^{\delta_1;0} = 1; \quad f_1^{\delta_1;1} = \frac{2}{3}; \quad f_1^{\delta_1;2} = \frac{1}{3}; \quad f_1^{\delta_1;3} = 0. \\ f_2^{\delta_1;0} = 1; \quad f_2^{\delta_1;1} = 1; \quad f_2^{\delta_1;2} = \frac{2}{3}; \quad f_2^{\delta_1;3} = \frac{1}{3}; \quad f_2^{\delta_1;4} = 0. \\ f_1^{\delta_2;0} = 1; \quad f_1^{\delta_2;1} = \frac{1}{2}; \quad f_1^{\delta_2;2} = 0. \\ f_2^{\delta_2;0} = 1; \quad f_2^{\delta_2;1} = 1; \quad f_2^{\delta_2;2} = \frac{1}{2}; \quad f_2^{\delta_2;3} = 0. \end{cases}$$

<u>N=2 :</u>
Nous pouvons maintenant regarder le cas où $N = 2$ représenté sur la Fig. C.2

Bandes δ_1 :
<u>i=0 :</u> $f_c^{\delta_1;0} = 1$
<u>i=1 :</u> $\alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;1} - f_c^{\delta_1;3}] - f_c^{\delta_1;1} \right\} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ 1 - f_c^{\delta_1;1} \right\} = 0$
<u>i=2 :</u> $\alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;2} - f_c^{\delta_1;2}] - f_c^{\delta_1;2} \right\} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;2} - f_c^{\delta_1;4}] - f_c^{\delta_1;2} \right\} = 0$
<u>i=3 :</u> $\alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;3} - f_c^{\delta_1;1}] - f_c^{\delta_1;3} \right\} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;3} - f_c^{\delta_1;3}] - f_c^{\delta_1;3} \right\} = 0$
<u>i=4 :</u> $-\alpha_1 f_c^{\delta_1;4} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_1;4} - f_c^{\delta_1;2}] - f_c^{\delta_1;4} \right\} = 0$
<u>i=5 :</u> $f_c^{\delta_1;5} = 0$

En résolvant les équations nous obtenons :

$$f_c^{\delta_1;0} = 1; \quad f_c^{\delta_1;1} = \frac{3\alpha_1+4\beta}{4(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_1;2} = \frac{2\alpha_1+3\beta}{4(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_1;3} = \frac{\alpha+2\beta}{4(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_1;4} = \frac{\beta}{4(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_1;5} = 0.$$

Bandes δ_2 :

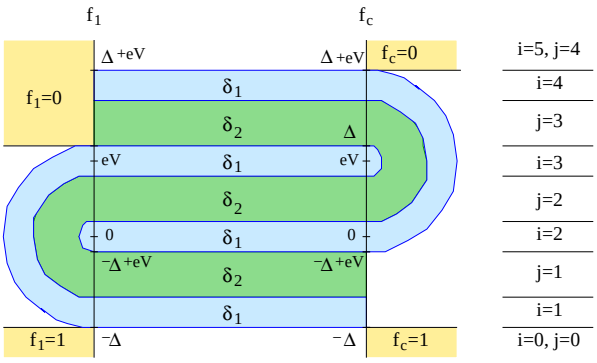

FIG. C.2 – Représentation des bandes d'énergie pour $N = 2$ entre le réservoir 1 et la partie centrale, dans le cas d'une jonction Y reliée par trois réservoirs supraconducteurs.

<u>j=0 :</u> $f_c^{\delta_2;0} = 1$

<u>j=1 :</u> $\alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_2;1} - f_c^{\delta_2;2}] - f_c^{\delta_2;1} \right\} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ 1 - f_c^{\delta_2;1} \right\} = 0$

<u>j=2 :</u> $\alpha_1 \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_2;2} - f_c^{\delta_2;1}] - f_c^{\delta_2;2} \right\} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_2;2} - f_c^{\delta_2;3}] - f_c^{\delta_2;2} \right\} = 0$

<u>j=3 :</u> $-\alpha_1 f_c^{\delta_2;3} + (\alpha_2 + \alpha_3) \left\{ \frac{1}{2}[1 + f_c^{\delta_2;3} - f_c^{\delta_2;2}] - f_c^{\delta_2;3} \right\} = 0$

<u>j=4 :</u> $f_c^{\delta_2;4} = 0$

Par conséquent,

$$f_c^{\delta_2;0} = 1; \quad f_c^{\delta_2;1} = \frac{2\alpha_1+3\beta}{3(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_2;2} = \frac{\alpha_1+2\beta}{3(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_2;3} = \frac{\beta}{3(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_2;4} = 0.$$

En utilisant l'éq. (3.15), nous pouvons déduire de f_c les fonctions de distribution des réservoirs. La fonction de distribution du réservoir 2 est la même que celle du réservoir 3, car une tension identique leur est appliquée.

$$\begin{cases} f_1^{\delta_1;0} = 1; \quad f_1^{\delta_1;1} = \frac{3}{4}; \quad f_1^{\delta_1;2} = \frac{1}{2}; \quad f_1^{\delta_1;3} = \frac{1}{4}; \quad f_1^{\delta_1;4} = 0. \\ f_2^{\delta_1;0} = 1; \quad f_2^{\delta_1;1} = 1; \quad f_2^{\delta_1;2} = \frac{3}{4}; \quad f_2^{\delta_1;3} = \frac{1}{2}; \quad f_2^{\delta_1;4} = \frac{1}{4}; \quad f_2^{\delta_1;5} = 0. \\ f_1^{\delta_2;0} = 1; \quad f_1^{\delta_2;1} = \frac{2}{3}; \quad f_1^{\delta_2;2} = \frac{1}{3}; \quad f_1^{\delta_2;3} = 0. \\ f_2^{\delta_2;0} = 1; \quad f_2^{\delta_2;1} = 1; \quad f_2^{\delta_2;2} = \frac{2}{3}; \quad f_2^{\delta_2;3} = \frac{1}{3}; \quad f_2^{\delta_2;4} = 0. \end{cases}$$

<u>N général :</u>

Nous pouvons déduire de ces deux cas particuliers, la forme générale des fonctions de distribution :

$$f_1^{\delta_1;i} = 1 - \frac{i}{N+2}; \quad f_1^{\delta_2;i} = 1 - \frac{i}{N+1}; \quad f_2^{\delta_1;i} = f_3^{\delta_1;i} = 1 - \frac{i-1}{N+2}; \quad f_2^{\delta_2;i} = f_3^{\delta_2;i} = 1 - \frac{i-1}{N+1}. \tag{C.1}$$

En outre, nous avons également une forme générale pour la fonction de distribution centrale, elle nous est donnée par la loi des noeuds de Kirchoff soit la deuxième équation de (3.15) :

$$f_c^{\delta_1;i} = \frac{(N+2-i)\alpha_1+(N+3-i)\beta}{(N+2)(\alpha_1+\beta)}; \quad f_c^{\delta_2;i} = \frac{(N+1-i)\alpha_1+(N+2-i)\beta}{(N+1)(\alpha_1+\beta)}. \tag{C.2}$$

Ces équations (C.1) sont les mêmes que celles obtenues dans le cas d'une jonction S-N-S par Nagaev [32]. Il est possible de montrer que $f_1 = f_L$ et $f_2 = f_3 = f_R$, où f_L et f_R sont les fonctions

de distribution trouvées par Nagaev [32] pour les réservoirs gauche (L) et droit (R) dans le cas d'une jonction S-N-S. $f_2 = f_3$ car la même tension est appliquée au réservoir 2 et au réservoir 3. Nous avons deux équations pour la jonction S-N-S et trois pour la jonction Y avec réservoirs supraconducteurs.

1) $f_L(\epsilon) = T(\epsilon)f_0(\epsilon) + \frac{1}{2}A(\epsilon)[1 + f_R(\epsilon) - f_R(-\epsilon)]$
2) $f_R(\epsilon) = T(\epsilon - eV)f_0(\epsilon - eV) + \frac{1}{2}A(\epsilon - eV)[1 + f_L(\epsilon) - f_L(-\epsilon + 2eV)]$
3) $f_1(\epsilon) = T(\epsilon)f_0(\epsilon) + \frac{1}{2}A(\epsilon)[1 + f_c(\epsilon) - f_c(-\epsilon)]$
4) $f_2(\epsilon) = T(\epsilon - eV)f_0(\epsilon - eV) + \frac{1}{2}A(\epsilon - eV)[1 + f_c(\epsilon) - f_c(-\epsilon + 2eV)]$
5) $f_c(\epsilon) = \frac{\alpha_1 f_1(\epsilon)+\beta f_2(\epsilon)}{\alpha_1+\beta}$

Nous pouvons éliminer f_c,

3') $f_1(\epsilon) = T(\epsilon)f_0(\epsilon) + \frac{1}{2}A(\epsilon)[1 + \frac{\alpha_1 f_1(\epsilon)+\beta f_2(\epsilon)}{\alpha_1+\beta} - \frac{\alpha_1 f_1(-\epsilon)+\beta f_2(-\epsilon)}{\alpha_1+\beta}]$
4') $f_2(\epsilon) = T(\epsilon - eV)f_0(\epsilon - eV) + \frac{1}{2}A(\epsilon - eV)[1 + \frac{\alpha_1 f_1(\epsilon)+\beta f_2(\epsilon)}{\alpha_1+\beta} - \frac{\alpha_1 f_1(-\epsilon+2eV)+\beta f_2(-\epsilon+2eV)}{\alpha_1+\beta}]$
3") $(\alpha_1+\beta)f_1(\epsilon) = (\alpha_1+\beta)T(\epsilon)f_0(\epsilon)+\frac{1}{2}A(\epsilon)[\alpha_1+\beta+\alpha_1 f_1(\epsilon)+\beta f_2(\epsilon)-\alpha_1 f_1(-\epsilon)-\beta f_2(-\epsilon)]$
4") $(\alpha_1+\beta)f_2(\epsilon) = (\alpha_1+\beta)T(\epsilon - eV)f_0(\epsilon - eV) + \frac{1}{2}A(\epsilon - eV)[\alpha_1+\beta+\alpha_1 f_1(\epsilon)+\beta f_2(\epsilon) - \alpha_1 f_1(-\epsilon + 2eV) - \beta f_2(-\epsilon + 2eV)$

Maintenant, si nous faisons l'hypothèse que $f_1 = f_L$ et $f_2 = f_R$, nous pouvons voir que les égalités $3''$) et $4''$) sont remplies, par conséquent, en admettant que la solution est unique, nous avons bien $f_1 = f_L$ et $f_2 = f_R$.

C.2 Calcul des coefficients B_{pl}

Seul $p = 1, 2$ et $l = 1, 2$ nous intéresse car $f_2 = f_3$.

<u>$p = 1$ et $l = 1$:</u>

$f_1(\epsilon) = 1$ si $\epsilon \in]-\infty; -\Delta]$ et $f_1(\epsilon) = 0$ si $\epsilon \in]\Delta; \infty]$ par conséquent, l'intégrale se réduit à une intégrale de $-\Delta$ à Δ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon f_1(\epsilon)\,(1 - f_1(\epsilon)) \to \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon f_1(\epsilon)\,(1 - f_1(\epsilon))\,.$$

Nous avons $N + 2$ bandes δ_1 et seules les $(N + 1)^{\text{ères}}$ bandes vont intervenir dans B_{11}. Et nous avons $N + 1$ bandes δ_2 et seules les $N^{\text{ères}}$ bandes vont intervenir dans B_{11}. Nous décomposons B_{11} en deux parties la première correspond aux contributions des bandes δ_1 ($B_{11}^{\delta_1}$) et la seconde ($B_{11}^{\delta_2}$) correspond aux contributions des bandes δ_2.

$$\begin{aligned} B_{11}^{\delta_1} &= \sum_{i=1}^{N+1} \delta_1 f_1^{\delta_1;i}(\epsilon)\left(1 - f_1^{\delta_1;i}(\epsilon)\right) = \delta_1 \sum_{i=1}^{N+1}\left(1 - \frac{i}{N+2}\right)\left(\frac{i}{N+2}\right) \\ &= \delta_1\left(\sum_{i=1}^{N+1}\frac{i}{N+2} - \sum_{i=1}^{N+1}\frac{i^2}{(N+2)^2}\right) = \delta_1\frac{(N+1)(N+3)}{6(N+2)} \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons utilisé : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Nous

faisons la même chose pour $B_{11}^{\delta_2}$

$$B_{11}^{\delta_2} = \sum_{i=1}^{N} \delta_2 f_1^{\delta_1;i}(\epsilon)\left(1 - f_1^{\delta_1;i}(\epsilon)\right) = \delta_2 \sum_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{i}{N+1}\right)\left(\frac{i}{N+1}\right)$$
$$= \delta_2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{N+1} - \sum_{i=1}^{N}\frac{i^2}{(N+1)^2}\right) = \delta_2\frac{N(N+2)}{6(N+1)}$$

En utilisant $\delta_1 = 2\Delta - NeV$ et $\delta_2 = (N+1)eV - 2\Delta$, nous obtenons que

$$B_{11} = B_{11}^{\delta_1} + B_{11}^{\delta_2} = \frac{1}{6(N+1)(N+2)}\left(2\Delta[N^2+3N+3] + N(N+1)eV\right) \tag{C.3}$$

<u>$p = 2$ et $l = 2$:</u>

$f_2(\epsilon) = 1$ si $\epsilon \in]-\infty; -\Delta + eV]$ et $f_2(\epsilon) = 0$ si $\epsilon \in]\Delta + eV; \infty]$ par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\epsilon)\left(1 - f_2(\epsilon)\right) \to \int_{-\Delta+eV}^{\Delta+eV} f_2(\epsilon)\left(1 - f_2(\epsilon)\right).$$

Nous avons $N+2$ bandes δ_1 et vont intervenir $i = 2, \ldots, N+2$ dans B_{22}. Et nous avons $N+1$ bandes δ_2 et seules les bandes $i = 2, \ldots, N+1$ vont intervenir dans B_{22}. Nous décomposons B_{22} en deux parties la première correspond aux contributions des bandes δ_1 ($B_{22}^{\delta_1}$) et la seconde ($B_{22}^{\delta_2}$) correspond aux contributions des bandes δ_2.

$$B_{22}^{\delta_1} = \delta_1\frac{(N+1)(N+3)}{6(N+2)}$$

De la même manière nous avons

$$B_{22}^{\delta_2} = \delta_2\frac{N(N+2)}{6(N+1)}$$

En utilisant $\delta_1 = 2\Delta - NeV$ et $\delta_2 = (N+1)eV - 2\Delta$, nous obtenons que

$$B_{22} = B_{22}^{\delta_1} + B_{22}^{\delta_2} = \frac{1}{6(N+1)(N+2)}\left(2\Delta[N^2+3N+3] + N(N+1)eV\right) \tag{C.4}$$

Par conséquent $B_{11} = B_{22}$.

<u>$p = 1$ et $l = 2$:</u>

$$B_{12}^{\delta_1} = \delta_1\frac{N(N+1)}{6(N+2)}$$

Pour cela, nous avons utilisé $\sum_{i=1}^{n}(i+1)i = \frac{(n+2)(n+1)n}{3}$.

$$B_{12}^{\delta_2} = \delta_2\frac{N(N-1)}{6(N+1)}$$

Par conséquent,

$$B_{12} = B_{12}^{\delta_1} + B_{12}^{\delta_2} = \frac{N}{6(N+1)(N+2)}\left(2\Delta(N+3) - 2(N+1)eV\right) \tag{C.5}$$

$\underline{p = 2 \text{ et } l = 1 :}$

$$B_{21}^{\delta_1} = \delta_1 \frac{(N+3)(N+4)}{6(N+2)}$$

Pour cela, nous avons utilisé $\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$.

$$B_{21}^{\delta_2} = \delta_2 \frac{(N+2)(N+3)}{6(N+1)}$$

Par conséquent,

$$B_{21} = B_{21}^{\delta_1} + B_{21}^{\delta_2} = \frac{N+3}{6(N+1)(N+2)} \left(2\Delta N + 4(N+1)eV\right) \tag{C.6}$$

C.3 Equation de diffusion avec interactions

Nous devons résoudre (3.29). La partie de gauche est facile à intégrer. En supposant que T_0 la température qui thermalise le système est inférieure au gap Δ, alors $f(\epsilon) \approx \theta(-\epsilon)$ et sa dérivée $\frac{\partial}{\partial \epsilon} f(\epsilon) \approx -\delta(\epsilon)$. Maintenant, il nous suffit de faire une intégration par partie et nous obtenons que

$$-D_E \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} f(\epsilon) = -D_E \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \epsilon \delta(\epsilon) = -D_E \tag{C.7}$$

Nous considérons la partie de droite

$$\begin{aligned}\int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \epsilon I_{ee}(\epsilon) = \frac{\alpha_{ee}}{E_F} \int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon_3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon_4 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \\ \{\underbrace{\epsilon_1 f(\epsilon_3) f(\epsilon_4)[1 - f(\epsilon_1)][1 - f(\epsilon_2)]}_{A_1} - \underbrace{\epsilon_1 f(\epsilon_2) f(\epsilon_2)[1 - f(\epsilon_3)][1 - f(\epsilon_4)]}_{A_2}\}\end{aligned}$$

Nous avons toujours $|\epsilon_1| < \Delta$. Si $|\epsilon_2|$, $|\epsilon_3|$ et $|\epsilon_4| < \Delta$ alors l'intégrale est nulle. Par contre, si une des énergies est en dehors du gap, les termes contribuent à l'intégrale et si plusieurs énergies sont en dehors du gap les termes sont négligeables par rapport aux termes où seule une énergie est en dehors du gap. Nous listons les différents cas où une des énergies est en dehors du gap.

1) $|\epsilon_2| > \Delta$, $|\epsilon_3| < \Delta$ et $|\epsilon_4| < \Delta$
   $\epsilon_2 > \Delta : A_1 = \epsilon_1 f(\epsilon_3) f(\epsilon_4)[1 - f(\epsilon_1)] = a_1$ et $A_2 = 0$
   $\epsilon_2 < -\Delta : A_1 = 0$ et $A_2 = \epsilon_1 f(\epsilon_1)[1 - f(\epsilon_3)][1 - f(\epsilon_4)] = a_2$
2) $|\epsilon_2| < \Delta$, $|\epsilon_3| > \Delta$ et $|\epsilon_4| < \Delta$
   $\epsilon_3 > \Delta : A_1 = 0$ et $A_2 = \epsilon_1 f(\epsilon_1) f(\epsilon_2)][1 - f(\epsilon_4)] = a_3$
   $\epsilon_3 < -\Delta : A_1 = \epsilon_1 f(\epsilon_4)[1 - f(\epsilon_1)[1 - f(\epsilon_2)] = a_4$ et $A_2 = 0$
3) $|\epsilon_2| < \Delta$, $|\epsilon_3| < \Delta$ et $|\epsilon_4| > \Delta$
   $\epsilon_4 > \Delta : A_1 = 0$ et $A_2 = \epsilon_1 f(\epsilon_1) f(\epsilon_2)][1 - f(\epsilon_3)] = a_5$
   $\epsilon_4 < -\Delta : A_1 = \epsilon_1 f(\epsilon_3)[1 - f(\epsilon_1)[1 - f(\epsilon_2)] = a_6$ et $A_2 = 0$

Nous pouvons voir que ces six termes sont équivalents, en prenant $\epsilon_j \to -\epsilon_j$ pour $j = 1, \ldots, 4$ et en utilisant le fait que $f(\epsilon) = 1 - f(-\epsilon)$, alors $a_1 = -a_2$, $a_3 = -a_4$ et $a_5 = -a_6$. Ensuite, en échangeant $\epsilon_3 \leftrightarrow \epsilon_4$, nous avons $a_3 = a_5$ et finalement avec $\epsilon_3 \leftrightarrow -\epsilon_2$, $a_3 = a_2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon \epsilon I_{ee}(\epsilon) &= -6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_3\int_{\Delta}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon_4\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)[1-f(\epsilon_3)]\delta(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\epsilon_4)\\
&= -6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\int_{\Delta}^{\infty}\mathrm{d}\epsilon_4\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)f(\epsilon_4-\epsilon_1-\epsilon_2)\theta(\Delta-|\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_4|)\\
&= -6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\int_{\Delta}^{\Delta+\epsilon_1+\epsilon_2}\mathrm{d}\epsilon_4\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)f(\epsilon_4-\epsilon_1-\epsilon_2)\\
&= -6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\int_{\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2}^{\Delta}\mathrm{d}\tilde{\epsilon}\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)f(\tilde{\epsilon})
\end{aligned}$$

Nous coupons en deux l'intégrale avec une partie $J_<$ où $\epsilon_1+\epsilon_2 < \Delta$ et une partie $J_>$ où $\epsilon_1+\epsilon_2 > \Delta$. Pour $J_<$, $f(\tilde{\epsilon}) \simeq e^{-\tilde{\epsilon}/T_0}$ car nous nous trouvons à des $\tilde{\epsilon} > 0$.

$$\begin{aligned}
J_< &= -6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\int_{\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2}^{\Delta}\mathrm{d}\tilde{\epsilon}\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)f(\tilde{\epsilon})\theta(\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2)\\
&= 6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)T_0\left[e^{-\Delta/T_0}-e^{(-\Delta+\epsilon_1+\epsilon_2)/T_0}\right]\theta(\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2)\\
&= 6T_0e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\left[\underbrace{1}_{\text{négligeable car }\epsilon_1+\epsilon_2>0}-e^{(\epsilon_1+\epsilon_2)/T_0}\right]\theta(\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2)\\
&= -6T_0e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\epsilon_1\underbrace{f(\epsilon_1)e^{\epsilon_1/T_0}}_{\sim\theta(\epsilon_1)}\underbrace{f(\epsilon_2)e^{\epsilon_1/T_0}}_{\sim\theta(\epsilon_2)}\theta(\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2)\\
&= -6T_0e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{0}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{0}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\epsilon_1\theta(\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2) = -6T_0e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{0}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\epsilon_1(\Delta-\epsilon_1)\\
&= -6T_0e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}(\Delta^3/2-\Delta^3/3) = -\Delta^3T_0e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}
\end{aligned}$$

Maintenant, nous regardons $J_>$ en utilisant $f(\tilde{\epsilon}) \simeq 1$ pour $\tilde{\epsilon} < 0$ et ailleurs $f(\tilde{\epsilon}) \simeq 0$.

$$\begin{aligned}
J_> &= -6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{-\Delta}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\int_{\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2}^{\Delta}\mathrm{d}\tilde{\epsilon}\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)f(\tilde{\epsilon})\theta(\epsilon_1+\epsilon_2-\Delta)\\
&= -6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{0}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{\Delta-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\int_{\Delta-\epsilon_1-\epsilon_2}^{0}\mathrm{d}\tilde{\epsilon}\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)f(\tilde{\epsilon})\\
&= -6\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\int_{0}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_1\int_{\Delta-\epsilon_1}^{\Delta}\mathrm{d}\epsilon_2\epsilon_1 f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\left[\underbrace{\epsilon_1}_{a}+\underbrace{\epsilon_2}_{b}-\underbrace{\Delta}_{c}\right]
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
a &\sim -2\Delta^3 T_0 e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\\
b &= -\Delta^3 T_0 e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}\\
c &= -3\Delta^3 T_0 e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F}
\end{aligned}
$$

Par conséquent $J_> \sim 0$ et donc

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \mathrm{d}\epsilon\epsilon I_{ee}(\epsilon) = -\Delta^3 T_0 e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F} \tag{C.8}$$

La valeur de la température T_0 peut alors être déterminée par l'équation (3.29)

$$D_E = \Delta^3 T_0 e^{-\Delta/T_0}\frac{\alpha_{ee}}{E_F} \tag{C.9}$$

Annexe D

Isolant à bande interdite

D.1 Description d'un isolant à bande interdite

Nous considérons le cas simplifié d'un isolant à bande interdite, qui a pour avantage d'être un système gappé ne possédant pas de condensat. Pour la relation de dispersion d'un isolant à bande interdite, nous prenons la relation de dispersion du modèle BCS.

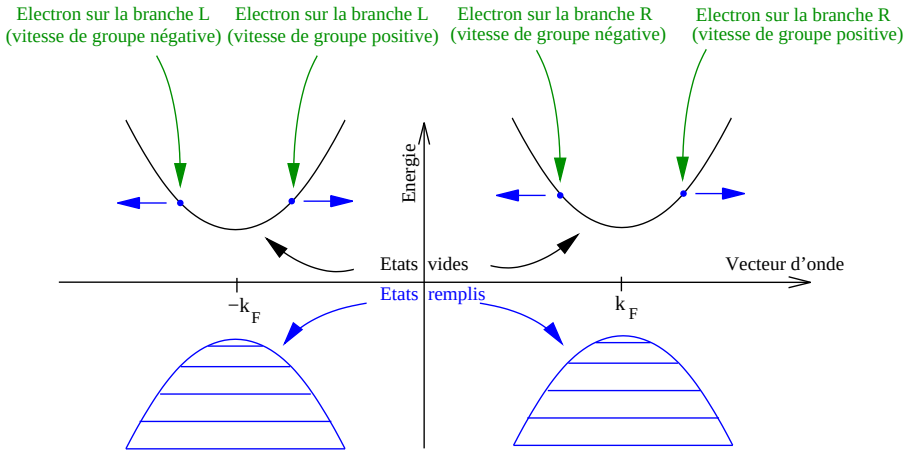

FIG. D.1 – Représentation schématique de la relation de dispersion d'un isolant à gap Δ, similaire à celle de BCS. Les électrons avec des vecteurs d'ondes $+k_F$ appartiennent à la branche R et les électrons avec des vecteurs d'ondes $-k_F$ appartiennent à la branche L. Un électron sur la branche R peut avoir une vitesse de groupe positive ou négative.

Les fonctions de Green avancées connectant les deux sites α et β séparés par une distance $R_{\alpha,\beta}$ sont données par

$$g^A_{\alpha,\beta}(\omega) = \frac{\pi\rho_N}{k_F|R_{\alpha,\beta}|}\sin\left(k_F|R_{\alpha,\beta}|\right)\frac{-\hbar\omega}{\sqrt{|\Delta|^2-(\hbar\omega)^2}}\exp\left(-|R_{\alpha,\beta}|/\xi(\omega)\right),$$

où ρ_N est la densité d'états du métal normal, k_F le vecteur d'onde de Fermi correspondant aux extrema

de la relation de dispersion et $\xi(\omega) = \hbar v_F/\sqrt{|\Delta|^2 - (\hbar\omega)^2}$ est la longueur de cohérence à énergie $\hbar\omega$ avec v_F la vitesse de Fermi.

Nous séparons la branche droite (dénotée $\underline{R}$) de la branche gauche (dénotée $\underline{L}$) ayant un vecteur d'onde $\simeq \pm k_F$. Les indices $\underline{R}$ et $\underline{L}$ sont soulignés pour ne pas mélanger avec les indices des fonctions de Green avancées A et retardées R. Un électron de la branche $\underline{R}$ peut avoir une vitesse de groupe positive ou négative (voir Fig. D.1). Ainsi, la matrice des fonctions de Green 2×2 entre les temps t et t' et entre les positions α et β correspondante est donnée par [75]

$$\hat{g}^A_{\alpha,\beta}(t,t') = -i\theta(t-t') \begin{pmatrix} \langle\left\{c^\dagger_{\alpha,\underline{R}}(t'), c_{\beta,\underline{R}}(t)\right\}\rangle & \langle\left\{c^\dagger_{\alpha,\underline{R}}(t'), c_{\beta,\underline{L}}(t)\right\}\rangle \\ \langle\left\{c^\dagger_{\alpha,\underline{L}}(t'), c_{\beta,\underline{R}}(t)\right\}\rangle & \langle\left\{c^\dagger_{\alpha,\underline{L}}(t'), c_{\beta,\underline{L}}(t)\right\}\rangle \end{pmatrix}. \tag{D.1}$$

Après transformée de Fourier, la matrice des fonctions de Green se réduit à

$$\hat{g}^A_{\alpha,\beta}(\omega) = \pi\rho_N \frac{-\hbar\omega}{\sqrt{|\Delta|^2 - (\hbar\omega)^2}} \exp\left(-|R_{\alpha,\beta}|/\xi\right) \begin{pmatrix} \exp\left(ik_F R_{\alpha,\beta}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-ik_F R_{\alpha,\beta}\right) \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

pour la propagation d'une énergie $\hbar\omega$ entre les deux points séparés par $R_{\alpha,\beta}$ le long d'une chaîne donnée.

Un couplage à un vecteur potentiel dû à un champ magnétique est obtenu en remplaçant $\hat{g}^A_{\alpha,\beta}(\omega)$ par $\hat{g}^A_{\alpha,\beta}(\omega)\exp\left(i\frac{2\pi}{\phi_0}\int_\alpha^\beta \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}\right)$, où $\int_\alpha^\beta \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ est la circulation du vecteur potentiel sur un chemin reliant α à β et $\phi_0 = h/e$ est le quantum de flux.

D.2 Transport dans un anneau isolant

Nous considérons une jonction tunnel, constituée d'un isolant à bande interdite avec une relation de dispersion (Fig. D.1) entre deux électrodes normales.

Nous commençons par considérer l'expression pour la conductance d'une jonction N$_a$-I-N$_b$ de Caroli, Combescot, Nozières et Saint-James [40]

$$\mathcal{G}(\omega) = 4\pi^2 \frac{e^2}{h} \rho_{a,a}(\omega) t_{a,\alpha} G^A_{\alpha,\beta}(\omega) t_{\beta,b} \rho_{b,b}(\omega) t_{b,\beta} G^R_{\beta,\alpha}(\omega) t_{\alpha,a}, \tag{D.3}$$

où $\hbar\omega$ est égal à l'énergie de la tension de biais eV, $\rho_{a,a}(\omega)$ et $\rho_{b,b}(\omega)$ sont les densités d'états dans les électodes N$_a$ et N$_b$ à énergie $\hbar\omega$. Les notations $t_a \equiv t_{a,\alpha} = t_{\alpha,a}$ et $t_b \equiv t_{b,\beta} = t_{\beta,b}$ sont utilisées pour les amplitudes de hopping pour les contacts avec les sites α et β aux extrémités de l'isolant et les sites a et b respectivement en face des sites α et β sur les électrodes normales (voir Fig. D.2). L'équation (D.3) est valide pour tous les ordres des amplitudes tunnel t_a et t_b, d'une jonction tunnel avec des interfaces fortement transparentes. Les fonctions de Green complètes avancées et retardées $G^A_{\alpha,\beta}(\omega)$ et $G^R_{\beta,\alpha}(\omega)$ décrivent la propagation respectivement de α à β et de β à α en incluant toutes les excursions possibles dans les électrodes normales. Tandis que $g^A_{\alpha,\beta}(\omega)$ et $g^R_{\beta,\alpha}(\omega)$ se restreignent à l'isolant avec $t_a = t_b = 0$. Physiquement, la propagation d'un électron à travers l'isolant de l'électrode normale N$_a$ au temps τ_a à l'électrode normale N$_b$ au temps τ_b[1] se produit dans le même processus que

[1] correspondant à la fonction de Green avancée $G^A_{\alpha,\beta}(\omega)$

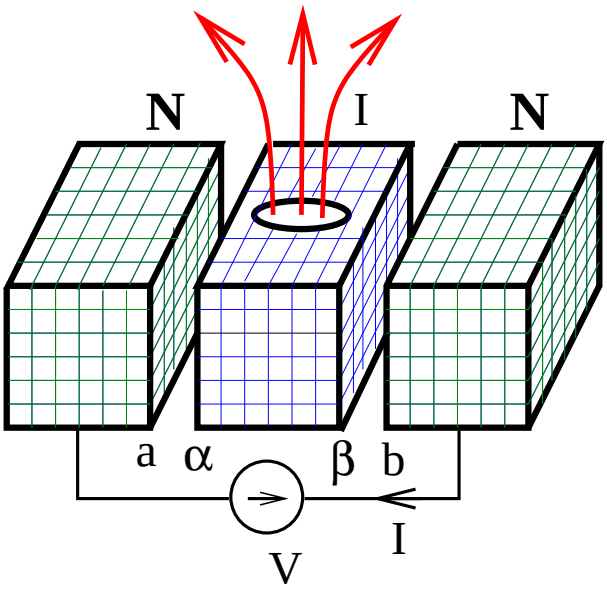

FIG. D.2 – Représentation schématique du modèle de liaison forte pour une jontion N-I-N percée par un trou.

la propagation d'un électron retournant de l'électrode N_b au temps τ_b à l'électrode N_a au temps τ_a[2]. Deux électrons se propageant vers l'avant et vers l'arrière en temps peuvent rebondir indépendamment aux interfaces durant le processus de transmission par effet tunnel (voir Fig. 1.14). Ceci correspond aux contributions à la conductance des ordres supérieurs dans les amplitudes tunnel.

Nous pouvons faire un développement de la formule de transport et étudier les effets d'interférence quantique en considérant une géométrie quasi unidimensionnelle formée d'un anneau isolant à bande interdite, connecté à deux électrodes normales (voir Fig. D.3).

La fonction de Green avancée complète est donnée par $G^A_{\alpha,\beta} = \frac{g^A_{\alpha,\beta}}{d^A_a d^A_b - (d'_a)^A (d'_b)^A}$ (voir Eqs. (8) et (9) dans [40]), avec $d^A_a = 1 - g^A_{\alpha,\alpha} t_{\alpha,a} g^A_{a,a} t_{a,\alpha}$, $d^A_b = 1 - g^A_{\beta,\beta} t_{\beta,b} g^A_{b,b} t_{b,\beta}$, $(d'_a)^A = g^A_{\beta,\alpha} t_{\alpha,a} g^A_{a,a} t_{a,\alpha}$ et $(d'_b)^A = g^A_{\alpha,\beta} t_{\beta,b} g^A_{b,b} t_{b,\beta}$. Après développement

$$G^A_{\alpha,\beta} = \frac{g^A_{\alpha,\beta}}{d^A_a d^A_b} + \frac{(g^A_{\alpha,\beta})^2 g^A_{\beta,\alpha}}{(d^A_a d^A_b)^2} \left(t_{\beta,b} g^A_{b,b} t_{b,\beta}\right) \left(t_{\alpha,a} g^A_{a,a} t_{a,\alpha}\right) + ... \tag{D.4}$$

Le développement dans l'équation (D.4) est justifié par l'amortissement des fonctions d'ondes dans l'isolant [88, 18] : le second terme avec trois passage dans l'isolant est petit en comparaison du premier terme invoquant un seul passage, en supposant que la moitié du périmètre de l'anneau est grande par rapport à la longueur de cohérence. En séparant la propagation de α à β le long de la branche supérieure et le long de la branche inférieure de l'anneau, ainsi qu'en incluant le facteur de phase relié au flux enfermé Φ, la combinaison des équations (D.3), (D.4) et de $\overline{g^A_{\alpha,\beta} g^A_{\alpha,\beta}} = \overline{g^A_{\alpha,\beta} g^R_{\alpha,\beta}}$ mène à des oscillations dominantes en $h/2e$ de la conductance en fonction du flux magnétique Φ. Par ailleurs, nous avons une magnétorésistance positive à bas champ[3].

[2] correspondant à la fonction de Green retardée $G^R_{\beta,\alpha}(\omega)$

[3] Le maximum de la conductance est pour $\Phi = 0$.

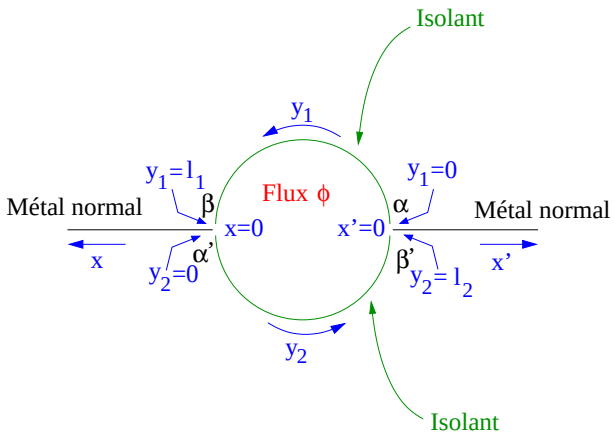

FIG. D.3 – Représentation schématique d'un anneau isolant quasi unidimensionnel à bande interdite, connecté à deux électrodes normales.

Plus précisément, le champ magnétique est introduit en substituant la fonction de Green $\hat{g}^A_{\alpha,\beta}(\omega)$ par $\hat{g}^A_{\alpha,\beta}(\omega)\exp\left(i\frac{2\pi}{\phi_0}\int_\alpha^\beta \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}\right)$, où $\int_\alpha^\beta \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ est la circulation du potentiel vecteur sur un chemin reliant α à β et $\phi_0 = h/e$ est le quantum de flux. Nous gardons les termes oscillants à l'ordre le plus bas dans la combinaison $G^A_{\alpha,\beta}G^R_{\beta,\alpha}(\omega)$ qui entre dans l'expression de la conductance $\mathcal{G}(\omega)$ (D.3). De tels termes contiennent trois fonctions de Green avancée et une retardée, chacune contribuant à un facteur $\exp(i\pi\Phi/2\phi_0)$. Après moyennage sur les facteurs de phase de Fermi[4] la partie oscillante de la conductance à l'ordre le plus bas est proportionnelle à $\cos(4\pi\Phi/\phi_0) = \Re[\exp(4i\pi\Phi/\phi_0)]$, avec des oscillations périodiques de $h/2e$ de la conductance en fonction du flux magnétique Φ, typiques des phénomènes de type localisation faible.

Le signe des oscillations $\cos(4\pi\Phi/\phi_0)$ dans la conductance correspond à une magnétorésistance positive à bas champ. Ceci est l'inverse de la localisation faible pour un métal normal. Des comportements similaires sont obtenus par Latyshev *et al.* [34] dans leurs expériences sur les ondes de densité de charge.

D.3 Approche des fonctions d'ondes

Nous discutons les oscillations du courant par effet tunnel en fonction du champ magnétique à l'aide du raccordement de fonctions d'ondes [89, 90]. Le but est de confirmer qualitativement l'approche des fonctions de Green et de présenter des résultats concrets pour les oscillations magnétiques. Nous considérons la géométrie sur la figure D.3 dans laquelle un anneau isolant est connecté à deux électrodes normales. L'isolant à bande interdite est supposé avoir une relation de dispersion BCS comme décrit dans la section D.1. Les vecteurs d'ondes correspondants $\pm k_F \pm i/\xi$ mènent aux oscillations de la fonction d'onde avec période $\lambda_F = 2\pi/k_F$ et un amortissement dans l'isolant sur la longueur de cohérence ξ. En suivant [89, 90] les fonctions d'ondes $\psi_L(x)$ dans l'électrode normale gauche, $\psi_1(y_1)$ dans la branche supérieure de l'anneau de longueur l_1, $\psi_2(y_2)$ dans la branche

[4] La moyenne doit être effectuée à cause du caractère aléatoire du facteur de phase de Fermi à cause des diffusions sur les impuretés. Nous avons $\overline{g^A_{\alpha,\beta}g^A_{\alpha,\beta}} = \overline{g^A_{\alpha,\beta}g^R_{\alpha,\beta}}$

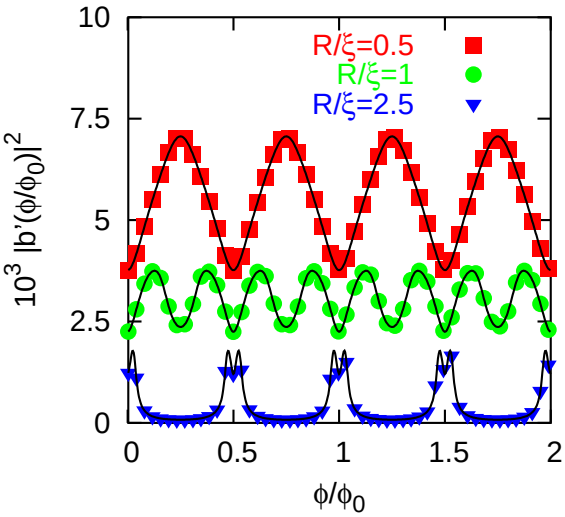

FIG. D.4 – Coefficient de transmission d'un anneau formé d'un isolant à bande interdite avec la relation de dispersion BCS en fonction du flux magnétique Φ enfermé dans la boucle, normalisé par le quantum de flux $\phi_0 = h/e$. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de R/ξ. La valeur de $\lambda_F = 2\pi/k_F$ est petite comparée à ξ.

inférieure de l'anneau de longueur l_2 et $\psi_R(x')$ dans l'électrode normale de droite sont données par

$$\begin{cases} \psi_L(x) = \exp(-ik_F x) + b\exp(ik_F x) \\ \psi_1(y_1) = \frac{\psi_\alpha}{\sin(k_F l_1)} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\phi_0} y_1 A_0\right) \sin\left(k_F(l_1 - y_1)\right) \exp\left(\frac{y_1 - l_1}{\xi}\right) \\ \qquad + \frac{\psi_\beta}{\sin(k_F l_1)} \exp\left(i\frac{2\pi}{\phi_0}(l_1 - y_1) A_0\right) \sin\left(k_F y_1\right) \exp\left(-\frac{y_1}{\xi}\right) \\ \psi_2(y_2) = \frac{\psi_{\alpha'}}{\sin(k_F l_2)} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\phi_0} y_2 A_0\right) \sin\left(k_F(l_2 - y_2)\right) \exp\left(\frac{y_2 - l_2}{\xi}\right) \\ \qquad + \frac{\psi_{\beta'}}{\sin(k_F l_2)} \exp\left(i\frac{2\pi}{\phi_0}(l_2 - y_2) A_0\right) \sin\left(k_F y_2\right) \sin\left(\frac{-y_2}{\xi}\right) \\ \psi_R(x') = b' \exp(ik_F x'), \end{cases}$$

où nous choisissons la jauge radiale avec une composante A_0 du potentiel vecteur et où les coefficients b' et b correspondent aux amplitudes de transmission et de retour. ψ_α, ψ_β, $\psi_{\alpha'}$ et $\psi_{\beta'}$ dénotent les amplitudes des composantes des fonctions d'onde de l'isolant localisées sur les différents noeuds. Le raccord des fonctions d'ondes prend la forme, $\psi_L(0) = \psi_1(l_1) = \psi_2(0)$, $\psi_R(0) = \psi_1(0) = \psi_2(l_2)$, et le raccord des dérivées des fonctions d'onde à gauche et à droite des noeuds est donné par

$$-\frac{\partial \psi_L}{\partial x}(0) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(l_1) - \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}(0) = 0 \tag{D.5}$$

$$-\frac{\partial \psi_R}{\partial x}(0) - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(0) + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}(l_2) = 0. \tag{D.6}$$

Ces équations sont déduites de l'intégration des équations de Schrödinger avec respect des coordonnées sur toute la surface incluant les noeuds. Le coefficient de transmission $\mathcal{T}_0(\Phi) = |b'(\Phi)|^2$ est alors évalué en moyennant sur les facteurs de phase de Fermi $k_F l_1$ et $k_F l_2$.

Le coefficient de transmission est montré sur la figure D.4 pour différentes valeurs de R/ξ. Les équations de raccord sont réduites par rapport à celles du métal normal [89, 90] pour $R/\xi \ll 1$ et une magnétoconductance positive de périodicité $\phi_0/2$ est alors obtenue dans le rang R/ξ (comme pour la localisation faible standard dans un métal normal, où l'augmentation d'un champ magnétique supprime la localisation. Nous obtenons une périodicité de $h/2e$ pour $R/\xi \gg 1$, mais pas exactement de la forme $\cos(4\pi\phi/\phi_0)$ obtenue ci-dessus dans l'appendice D.2 dans les fonctions de Green microscopique. Ceci est dû au fait qu'une magnétoconductance positive subsiste dans une région de faible champ magnétique autour de $\phi = n\phi_0/2$ (avec n un entier). Les harmoniques d'ordre supérieur jouent un rôle également à cause des contacts fortement transparents utilisés pour la géométrie de l'anneau (Fig. D.3 et Eqs. (D.5) et (D.6)).

Annexe E

Onde de densité de charge

E.1 Evaluation des diagrammes d'échelle pour le coefficient de transmission

Pour inclure le désordre [91], nous regardons les modes de transmission, soit le coeffiecient de transmission avec l'approximation d'échelle (voir Fig. B.3) évalué par la méthode de Smith et Ambegaokar [76] par itération de

$$\hat{F}(\hat{\tau}_n) = \int \frac{dk}{2\pi} \overline{\begin{pmatrix} u & w \\ v & u \end{pmatrix}^{\dagger} \hat{G}^A(k,\omega)\hat{\tau}_n \hat{G}^R(k+q,\omega) \begin{pmatrix} u & w \\ v & u \end{pmatrix}},$$

où u, v et w sont des variables aléatoires avec une distribution Gaussienne. Les matrices de Pauli $\hat{\tau}_n$ sont telles que

$$\hat{\tau}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, i\hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\hat{\tau}_0) &= (-A+B)(1-\alpha)\hbar\omega\hat{\tau}_3 - 3A(1+\gamma)\Delta i\hat{\tau}_2 \\
\hat{F}(\hat{\tau}_1) &= (A-B)(1+\gamma)\Delta\hat{\tau}_3 - 3A(1-\alpha)\hbar\omega i\hat{\tau}_2 \\
\hat{F}(i\hat{\tau}_2) &= 3(A+B)(1+\gamma)\Delta\hat{\tau}_0 - 3A(1-\alpha)\hbar\omega\hat{\tau}_1 \\
\hat{F}(\hat{\tau}_3) &= (-A-B)(1-\alpha)\hbar\omega\hat{\tau}_0 - A(1+\gamma)\Delta\hat{\tau}_1,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= \frac{m^2}{4\hbar^4 k_F^5} \frac{(8k_F^2 + 19q^2)\overline{|u|^2}}{\left(\Delta^2(1+\gamma)^2 - \hbar\omega^2(1-\alpha)^2\right)^{1/2}} \\
B &= \frac{m^2}{4\hbar^4 k_F^5} \frac{(8k_F^2 + 19q^2)\overline{|v|^2}}{\left(\Delta^2(1+\gamma)^2 - \hbar\omega^2(1-\alpha)^2\right)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

En agissant deux fois avec $\hat{F}$ en accord avec $\hat{G} = \hat{F}^2$ nous obtenons les équations 2×2

$$\begin{aligned}
\hat{G}\begin{pmatrix} \hat{\tau}_0 \\ \hat{\tau}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\tau}_0 \\ \hat{\tau}_1 \end{pmatrix} \\
\hat{G}\begin{pmatrix} i\hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & d \\ d' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
a &= (A^2 - B^2)(1-\alpha)^2(\hbar\omega)^2 - 9A(A+B)(1+\gamma)^2\Delta^2 \\
b &= A(10A - B)(1-\alpha)(1+\gamma)\hbar\omega\Delta \\
b' &= -(A+B)(10A-B)(1-\alpha)(1+\gamma) \times \hbar\omega\Delta \\
a' &= 9A^2(1-\alpha)^2(\hbar\omega)^2 - A(A-B)(1+\gamma)^2\Delta^2,
\end{aligned}$$

et des équations du même type pour c, d, c' et d' :

$$\begin{aligned}
c &= -3(A-B)(2A+B)(1-\alpha)(1+\gamma)\hbar\omega\Delta \\
d &= -9A\left[(A+B)(1+\gamma)^2\Delta^2 - A(1-\alpha)^2(\hbar\omega)^2\right] \\
c' &= (A-B)\left[(A+B)(1-\alpha)^2(\hbar\omega)^2 - A(1+\gamma)^2\Delta^2\right] \\
d' &= 3A(2A+B)(1-\alpha)(1+\gamma)\hbar\omega\Delta.
\end{aligned}$$

La dernière étape consiste en une décomposition de la condition initiale sur les vecteurs propres de $\hat{G}$ et d'évaluer les coefficients de la série géométrique telle que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{G}^n \begin{pmatrix} \hat{\tau}_0 \\ 0 \end{pmatrix} &= A_1 \begin{pmatrix} \hat{\tau}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\tau}_1 \end{pmatrix} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{G}^n \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\tau}_1 \end{pmatrix} &= A_2 \begin{pmatrix} \hat{\tau}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\tau}_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned}
A_1 &= X\frac{\lambda_+}{1-\lambda_+}\psi_+^{(1)} + Y\frac{\lambda_-}{1-\lambda_-}\psi_-^{(1)} \\
B_1 &= X\frac{\lambda_+}{1-\lambda_+}\psi_+^{(2)} + Y\frac{\lambda_-}{1-\lambda_-}\psi_-^{(2)} \\
A_2 &= -X'\frac{\lambda_+}{1-\lambda_+}\psi_+^{(1)} + X'\frac{\lambda_-}{1-\lambda_-}\psi_-^{(1)} \\
B_2 &= -X'\frac{\lambda_+}{1-\lambda_+}\psi_+^{(2)} + X'\frac{\lambda_-}{1-\lambda_-}\psi_-^{(2)},
\end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b'-a}{(b'-a)^2+4a'b}\right) \\
Y &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b'-a}{(b'-a)^2+4a'b}\right) \\
X' &= \frac{b}{(b'-a)^2+4a'b} \\
\lambda_\pm &= \frac{1}{2}\left(a+b' \pm \sqrt{(a-b')^2+4a'b}\right) \\
\psi_\pm^{(2)} &= \frac{b'-b \pm \sqrt{(a-b')^2+4a'b}}{2b}
\end{aligned}
$$

et $\psi_\pm^{(1)} = 1$. En effectuant le même calcul pour le secteur $(i\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3)$ et en évaluant la série géométrique comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{G}^n \hat{F} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans les deux secteurs nous obtenons une expression de toutes les composantes droite-gauche des coefficients de transmission d'une onde de densité de charge désordonnée. Ce dernier peut être utilisé pour évaluer les diagrammes sous le gap de processus similaires à la localisation faible.

Publications

1) *Thouless energy of a superconductor from non local conductance fluctuations*, S. Duhot et R. Mélin, Eur. Phys. J. B, **53**, 257, (2006)
2) *Nonlocal transport mediated by nonlocal Hikami boxes : Condensation of evanescent quasi-particles injected into the superconducting gap*, S. Duhot et R. Mélin, Phys. Rev. B, **75**, 184531, (2007)
3) *Dephasing of Andreev pairs entering a charge density wave*, S. Duhot et R. Mélin, Eur. Phys. J. B, **55**, 289 (2007)
4) *Subgap tunneling via quantum-interference effect : insulators and charge density waves*, S. Duhot et R. Mélin, Phys. Rev. B **76**, 184503 (2007)
5) *Non local Andreev reflection in a carbon nanotube superconducting quantum interference device*, S. Duhot et R. Mélin, Phys. Rev. B **77**, 014525 (2008)
6) *Cross correlation of incoherent multiple Andreev reflection*, S. Duhot, F. Lefloch et M. Houzet, soumis à Phys. Rev. Lett.

Table des figures

1 Schéma du processus de réflexion d'Andreev à une interface N-S, où un électron est injecté dans une électrode normale. On a création d'une paire de Cooper qui part dans le condensat du supraconducteur et rétrodiffusion d'un trou (charge et spin opposés à ceux de l'électron) dans l'électrode normale (a). Schéma en énergie pour la réflexion d'Andreev (b). e↑ représente un électron de spin up et h↓ un trou dans la bande de spin down. 2

2 Schéma du processus de cotunneling élastique à une jonction N-S-N où un électron est injecté dans la première électrode normale et traverse par effet tunnel jusqu'à la seconde électrode normale (a). Schéma du processus de réflexion d'Andreev non locale à une jonction N-S-N, où un électron est injecté dans la première électrode normale avec création d'une paire de Cooper qui part dans le condensat du supraconducteur et transmission d'un trou de charge et spin opposés dans la seconde électrode normale (b). 3

3 Schéma de la proposition d'expérience de Deutscher et Feinberg [11] pour essayer d'observer des électrons enchevêtrés. 4

4 Schéma de la proposition d'expérience de Choi *et al.* [13] pour essayer d'observer des électrons enchevêtrés. (a) Deux points quantiques connectés par des jonctions tunnel (en pointillés) à deux bras supraconducteurs. (b) SQUID avec le système (a) à la place de la jonction Josephson dans le bras supérieur. 5

5 Schéma de la proposition d'expérience de Recher *et al.* [14] pour essayer d'observer des électrons enchevêtrés. 5

6 Schéma de la proposition d'expérience de Lesovik *et al.* [3] pour essayer d'observer des électrons enchevêtrés. 5

7 Echantillon de l'expérience de Beckmann *et al.* [15]. Image par microscope électronique de l'échantillon $T2$ et schéma expérimental. Trois guides en fer verticaux sont connectés par des points de contacts à une barre d'aluminium horizontale. Un exemple de courant d'injection I_A et de tension de détection locale U_A et non locale U_B pour une paire de contacts est ainsi montrée. 6

8 Schéma de l'expérience : jonction N-S-N large et fine avec injection d'un courant I_a dans l'électrode normale a et mesure de la tension à l'électrode b. 6

9 Mesure effectuée par Russo *et al* [16]. La tension non locale $V_{ac}^{nl} = V_b$ est mesurée entre l'électrode normale b et le supraconducteur, sur un échantillon où le supraconducteur faisait $d = 15nm$ d'épaisseur en fonction de la tension $V_{dc} = V_a$ appliquée entre l'électrode normale a et le supraconducteur. Soit la résistance non locale différentielle en fonction du courant. 7

10 (a) Echantillon de l'expérience de Cadden-Zimansky et Chandrasekhar [19]. Image par microscopie électronique d'un échantillon avec six guides en or, chacun séparés de 210nm. Pour les mesures, un courant I est envoyé à travers le guide inférieur dans le supraconducteur et la résistance non locale résultante pour un système à trois terminaux est mesurée entre les guides en Au 1 à 6 et le guide supraconducteur dénoté $V-$. Un petit courant ac est utilisé pour les mesures dépendantes de la température et un courant dc I est injecté en parallèle au courant ac pour les mesures de la résistance différentielle. (b) La dépendance en température de la résistance non locale de l'échantillon est mesurée en utilisant les quatre premiers guides. Les nombres dénotant les courbes correspondent au numéro du guide en (a). 8

1.1 Schéma de la jonction N-S à une dimension avec l'interface modélisée par un potentiel $H\delta(x)$. 14

1.2 Diagramme de l'énergie en fonction des vecteurs d'onde pour la jonction N-S. 16

1.3 Circuit électrique de la jonction N-S-N (a). Schéma de la jonction N-S-N à une dimension avec la première interface modélisée par un potentiel répulsif $H_1\delta(x)$ et la seconde par $H_2\delta(x-l)$ (b). 17

1.4 Conductance non locale, en unité de e^2/h, en fonction de la barrière $Z_1 = Z_2$ dans le cas où l'énergie, $E = 0.001\Delta$, est bien au-dessous du gap, en fonction de différentes longueurs du supraconducteur. La longueur du supraconducteur est en unité de ξ, avec $\epsilon_F/\Delta = 1000$ (où ϵ_F est l'énergie de Fermi). 21

1.5 Schéma de l'interface N-S avec électrode normale désordonnée. (a) L'électron (e) incident subit une réflexion d'Andreev à sa première approche de l'interface. L'électron est alors réfléchi comme un trou dans la bande de spin down (h comme "hole" en anglais). (b) L'électron est réfléchi à sa première approche de l'interface, les impuretés lui permettent de revenir à l'interface où il peut à nouveau tenter le processus d'Andreev. (c) L'électron est réfléchi deux fois puis subit une réflexion d'Andreev. 21

1.6 Schéma de la jonction N-N-S-N à une dimension avec BTK. 22

1.7 Conductance non locale en unité de e^2/h en fonction de la barrière Z_1 dans le cas où l'énergie est bien au-dessus du gap ($E = 10\Delta$), avec $R = 5\xi$ et $L = 10\xi$ où $\epsilon_F/\Delta = 1000$ (où ϵ_F est l'énergie de Fermi). 23

1.8 Conductance non locale, en unité de $\frac{e^2}{h}$, en fonction de la barrière Z_1 dans le cas où l'énergie est bien au dessous du gap ($E = 0.001\Delta$), avec $R = 5\xi$ et $L = 10\xi$ où $\epsilon_F/\Delta = 1000$ (où ϵ_F est l'énergie de Fermi). Les indice (1), (2) et (3) correspondent aux trois différents régimes de la figure 1.9. 24

1.9 Trois différents régimes pour le passage des électrons à travers la jonction N-N-S-N. Les trois régimes sont indiqués sur la figure 1.8. 25

1.10 Conductance non locale en unité de $\frac{e^2}{h}$ en fonction de la barrière Z_1 dans le cas où l'énergie est bien au-dessous du gap ($E = 0.001\Delta$), avec $Z_2 = 2$. La longueur R du supraconducteur est donnée par $R = 4\xi$, $R = 5\xi$ et $R = 6\xi$ et $L = 10\xi$ avec $\epsilon_F/\Delta = 1000$ (où ϵ_F est l'énergie de Fermi). 25

1.11 Schéma de la jonction N-N-S-N-N à une dimension avec BTK. 26

1.12 Conductance non locale en unité de e^2/h en fonction de la barrière $Z_L = Z_R$ avec $Z_1 = Z_2 = 10$ ($E = 0.0001\Delta$). (a) à (f) correspondent à l'augmentation de la précision dans l'évaluation des facteurs de phase de Fermi. La conductance non locale pour la jonction N-N-S-N est d'amplitude bien inférieure au cas N-N-S-N-N ce qui montre l'importance des réflexions multiples. 27

1.13 Diagramme général du transport dans une jonction N-I-N, où $t_2^+ > t_1^+$ sur la branche "+" du contour de Keldysh, et $t_2^- < t_1^-$ sur la branche "-" remontant le temps. 28

1.14 Quelques processus pour la fonction de Green connectant la première à la seconde électrode normale. 29

1.15 Processus ne se couplant pas au champ magnétique. 30

1.16 Premier processus se couplant au champ magnétique, un électron de la fonction de Green retardée rebondit d'une interface à l'autre créant un mode de transmission retardé-retardé. Nous retrouverons ce processus au chapitre 4 sur les oscillations de résistance d'une onde de densité de charge perforée par des nanotrous. 30

1.17 (a) Processus de réflexion d'Andreev. (b) Diagramme d'une réflexion d'Andreev. La ligne bleue du diagramme correspond à la fonction de Green avancée, la ligne rouge à la fonction de Green retardée et les lignes ondulées vertes aux densités d'état. 31

1.18 Processus de cotunneling élastique et de réflexion d'Andreev croisée, en haut. En bas les diagrammes. Les indices des sites sont sur le premier schéma. Les lignes bleues des diagrammes correspondent aux fonctions de Green avancées, les lignes rouges aux fonctions de Green retardées et les lignes ondulées vertes aux densités d'état. 32

1.19 Deux processus d'ordre T^4 dans la transparence des interfaces et s'annulant mutuellement. En premier, le processus similaire au cotunneling élastique et transmettant un électron, où l'électron rebondit une fois localement sur chaque interface. En second un processus similaire à la réflexion d'Andreev croisée, transmettant un trou. Ici l'électron et le trou rebondissent chacun sur l'interface leur correspondant. Les lignes bleues des diagrammes correspondent aux fonctions de Green avancées, les lignes rouges aux fonctions de Green retardées et les lignes ondulées vertes aux densités d'état. 33

1.20 Processus d'ordre T^4 en transparence contenant deux réflexions d'Andreev locales et transmettant deux électrons. Les lignes bleues du diagramme correspondent aux fonctions de Green avancées, les lignes rouges aux fonctions de Green retardées et les lignes ondulées vertes aux densités d'état. 33

1.21 Jonction N-N-S-N-N avec le modèle de liaisons fortes. 36

1.22 Corrélations entre la conductance locale (axe y) et la conductance non locale (axe x), pour des pics similaires à ceux de la figure 1.12, comme une fonction d'un balayage de $t'/\mathcal{T}$ pour un $t/\mathcal{T} = 0.05$ fixé. Nous calculons $G_{loc}(t'/\mathcal{T})$ et $\mathcal{G}_{ab}(t'/\mathcal{T})$ que nous traçons l'un en fonction de l'autre dans le cas à un canal : $N_{ch} = 1$. (a) $R/\xi = 5$, (b) $R/\xi = 4$, (c) $R/\xi = 3$ et (d) $R/\xi = 2$. Les lignes rouges correspondent au fit $\mathcal{G}_{ab}(t'/\mathcal{T}) \propto (G_{loc}(t'/\mathcal{T}))^2$. 36

1.23 Conductance non locale normalisée en fonction du terme de hopping pour une jonction N-N-S-N-N par la méthode des fonctions de Green. La normalisation est faite par la conductance non locale du système sans impureté. 37

2.1 SQUID formé d'un nanotube de carbone réalisé par Cleuziou *et al.*[30](a). Exemple d'un échantillon ou le nanotube est mal aligné, le contact du nanotube avec le supraconducteur à une très faible surface (b). 40

2.2 Schéma d'un SQUID formé par deux supraconducteurs déposés sur un nanotube de carbone. 41

2.3 Mode hors résonant (a) et mode résonant (b) des états d'énergie d'un des points quantiques du SQUID. 41

2.4 Géométrie du SQUID nanotube avec les termes de hopping de l'état hors résonant. . . 42

2.5 Représentation du supercourant d'un SQUID formé par deux supraconducteurs qui sont reliés par un nanotube. 43

2.6 Variations du supercourant spectral pour une réalisation du facteur de phase de Fermi donné dans le voisinage de $\hbar\omega = h\omega/2\pi \simeq -|\Delta_0|$. Nous utilisons la différence de phase $\Delta\varphi = 2$, mais des variations similaires du courant spectral sont obtenues pour d'autres valeurs de $\Delta\varphi$. Nous avons également choisi $\mathcal{C}_0 = 1$. 47

2.7 Interférence de deux paires de Cooper dans un SQUID usuel sans processus non locaux ($\mathcal{C}_0 = 0$) (a). Deux nouveaux processus dans le SQUID avec processus non locaux ($\mathcal{C}_0 \neq 0$) : la réflexion d'Andreev croisée qui contribue au supercourant (b) et le cotunneling élastique ne contribuant pas au supercourant (c). 49

2.8 Variation des niveaux d'énergie en fonction du flux magnétique ϕ sans effet croisées $\mathcal{C}_0 = 0$ (a) et avec des effets croisés maximums. Les courbes sont calculées avec $T_\alpha = 0.8$, $T_\beta = 1$, $\Delta\varphi = 0$, $k_F R_{\alpha\beta} = 1$. 49

2.9 Graphique du courant critique en fonction du flux magnétique (ϕ) pour des valeurs de (a) $T_\alpha = 0.8$ et $T_\beta = 0.8$ et (b) $T_\alpha = 0.8$ et $T_\beta = 1$. Le courant critique est moyenné sur toutes les valeurs de $k_F R_{\alpha\beta}$. 50

2.10 Supercourant en fonction de la différence de phase $\Delta\varphi$, avec des processus non locaux $\mathcal{C}_0 = 1$, pour différentes valeurs de $k_F R_{\alpha\beta}$, et pour $T_\alpha = T_\beta = 0.8$, (a) sans champ magnétique $\phi = 0$ et (b) avec un flux magnétique $\phi = 2$. 51

3.1 Réflexion d'Andreev multiples pour une jonction S-N-S. Un électron est injecté du premier supraconducteur à l'aide d'une faible tension V, avec une énergie dans le gap du second supraconducteur. L'électron subit alors une réflexion d'Andreev et un trou est rétrodiffusé. Ce trou subira à son tour une réflexion d'Andreev à la première interface et ainsi de suite jusqu'à ce que l'électron ou le trou puisse s'échapper. 54

3.2 Jonction Y en métal normal reliée à trois réservoirs supraconducteurs. La jonction est séparée en trois parties (Λ_1, Λ_2 et Λ_3) selon ses bras. La partie centrale (en vert) est supposée avoir une résistance négligeable. La surface de contact entre le bras j et le réservoir j est dénotée par L_j et la surface entre la partie centrale et le bras j est dénotée par C_j. 57

3.3 Réflexion d'Andreev à un contact S-N, où le réservoir S est à une tension V. 58

3.4 Jonction S-N-S. 58

3.5 Jonction en Y diffusive avec un réservoir supraconducteur. 64

3.6 Schéma de la fonction $\frac{3S_{11}}{2G_{tot}\tilde{\alpha}_1(\tilde{\alpha}_2+\tilde{\alpha}_3)}$ en fonction de eV/Δ. 67

3.7 Schéma de la fonction $\frac{-3S_{23}}{2G_{tot}\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3}$ en fonction de eV/Δ. La surface bleue correspond à la zone possible pour les corrélations croisées de la jonction avec trois réservoirs supraconducteurs pour différentes valeurs de $\tilde{\alpha}_1$. 68

3.8 Bruit et corrélations croisées pour une jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs en fonction de eV/Δ avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.25$, $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$. Le système est assimilable à une jonction S-N-S. 68

3.9 Bruit et corrélations croisées pour une jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs en fonction de eV/Δ avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.02$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.49$, $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$. 69

3.10 Bruit et corrélations croisées pour une jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs en fonction de eV/Δ avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.25$, $V_1 = 0$ et $V_2 = -V_3 = V$. 70

3.11 Bruit et corrélations croisées pour une jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs en fonction de eV/Δ avec $\tilde{\alpha}_1 = 0.02$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0.49$, $V_1 = 0$ et $V_2 = -V_3 = V$. 70

3.12 Schéma de la jonction Y avec trois réservoirs en métal normal pour un système incohérent assimilable à un point quantique diffusif. 73

3.13 Corrélations croisées normalisées par M_2G_QeV pour un point quantique avec trois réservoirs en métal normal avec $\Gamma_2 = 0.5$ et $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$, $x = M_1/M_2$. . . 75

3.14 Schéma de la jonction Y avec un réservoirs supraconducteur pour un système incohérent assimilable à un point quantique. 75

3.15 Corrélations croisées normalisées par M_2G_QeV pour un point quantique avec un réservoir supraconducteur avec $\Gamma_2 = 0.5$ et $V_1 = 0$ et $V_2 = V_3 = V$, $x = M_1/M_2$.. . . . 77

3.16 Schéma de la jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs pour un système incohérent assimilable à un point quantique. 77

3.17 Réseau électrique équivalent à la jonction Y avec trois réservoirs supraconducteurs. Notations : $f^e(\epsilon) = f(\epsilon)$ et $f^h(\epsilon) = 1 - f(-\epsilon)$ 78

3.18 Corrélations croisées $\tilde{S}_{23}$ renormalisées par $M_2G_Q\Delta$ en fonction du facteur $x = M_1/M_2$. Attention, ici nous normalisons par Δ au lieu de eV comme dans le cas normal. Les courbes ne se croisent pas toutes au même endroit, cette impression n'est due qu'à l'échelle. 81

3.19 Schéma de la fonction α en fonction de Γ. 82

3.20 Schéma de la fonction $\tilde{S}_{23}$ en fonction de Γ dans le cas où $x \to \infty$. 82

3.21 Fonction de distribution dans le point quantique en fonction de l'énergie ϵ pour différentes valeurs de la tension à température nulle, $M_1 = 2M_2$, $\Gamma_1 = 0.2$ et $\Gamma_2 = 0.3$. . . 85

3.22 Fonction de distribution dans le point quantique en fonction de l'énergie ϵ pour différentes valeurs de la température pour une tension $V = 0.2$, $M_1 = 2M_2$, $\Gamma_1 = 0.2$ et $\Gamma_2 = 0.3$. 85

3.23 Courant normalisé par $\frac{G_N \Delta}{e}$ en fonction de $\frac{eV}{\Delta}$ à température nulle pour $M_1 = 2M_2 = 200$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ pour les deux premières courbes et $M_1 = 10M_2 = 100$ pour la troisième courbe. 86

3.24 Conductance différentielle normalisé par G_N en fonction de $\frac{eV}{\Delta}$ à température nulle, avec $M_1 = 2M_2 = 200$ pour les deux premières courbe et $M_1 = 10M_2 = 100$ pour la courbe supérieure. La courbe verte ($\times$) est décalé de +1 et la courbe bleue ($\star$) est décalée de $+3$. 86

3.25 Bruit normalisé en fonction de la tension, pour le point quantique avec trois réservoirs supraconducteurs. Les courbes correspondent à différentes températures avec $M_1 = 10M_2$, $\Gamma_1 = 1$ et $\Gamma_2 = 0.2$.) 88

3.26 Corrélations croisées de courant normalisées en fonction de la tension, pour le point quantique avec trois réservoirs supraconducteurs. Les courbes correspondent à différentes températures avec $M_1 = 10M_2$, $\Gamma_1 = 1$ et $\Gamma_2 = 0.2$. 88

4.1 Schéma d'un réseau de ions pour un métal (a) et pour une onde de densité de charge (b). 94

4.2 Réflexion sous le gap à une interface N-ODC. Un électron de spin-up et un trou dans la bande d'énergie de spin-up s'apparient dans le condensat de l'onde de densité de charge. 95

4.3 Résistance différentielle ($R_d(V)$) en fonction de la tension appliquée pour un point de contact supraconducteur (Nb) - ondes de densité de charge ($NbSe_3$) de différentes sortes mesurées à $T = 3.6$K. Les courbes (a) et (b) sont pour des jonctions avec une barrière tunnel isolante à l'interface S-ODC. Les courbes (c)-(e) sont pour des points de contacts avec une conductivité directe (sans barrière isolante) [71]. 98

4.4 Structure de deux pointes supraconductrices en contact avec une onde de densité de charge. 100

4.5 Schéma de l'expérience de Latyshev *et al.* [34], un film d'onde de densité de charge percé de nanotrous par irradiation de ions. 102

4.6 Mesures [34] de la magnétorésistance à gauche pour un film d'onde de densité de charge sans nanotrous et à droite pour un film percé de nanotrous par irradiation de ions. 103

4.7 Boîte de Hikami dans un système possédant une bande d'énergie interdite, décomposée en trois diagrammes, pour une énergie inférieure au gap. 103

4.8 Croisement d'un mode de transmission découpé en six morceaux, pour un système à bande interdite et une énergie inférieure au gap. 104

4.9 (a) Croisement d'un diffuson pour un métal normal. (b) Croisement d'un mode de transmission pour un système avec une bande d'énergie interdite, lorsque l'énergie est inférieure au gap. 104

4.10 Schéma des chaînes d'ondes de densité de charge, où une chaîne est interrompue par un nanotrou, les flêches vertes représentent schématiquement l'émission et l'absorption des porteurs normaux dus au freinage et à l'accélération du mouvement de glissement respectivement à gauche et à droite du nanotrou (a). Le profil de $\partial\varphi_n(x,\tau)/\partial\tau$ le long des chaînes $n = 1, 2, 3$ (b). 105

4.11 Processus similaire à la localisation faible autour d'un nanotrou dans des ondes de densité de charge. Le moyennage sur la position des termes de hopping (points rouges) remplace le moyennage sur les impuretés. 107

4.12 Processus d'interférence quantique autour d'un nanotrou dans des ondes de densité de charge avec une zone endommagée autour du nanotrou et donc une région normale . . 107

A.1 Diagramme d'interaction électron-phonon. 115

B.1 Schéma de la jonction N-I-N' dans le formalisme des fonctions de Green. 118

B.2 Schéma du contour de Keldysh avec les temps des différentes fonctions de Green. . . . 122

B.3 Représentation schématique du calcul récursif des matrices de mode de transmission dans l'approximation d'échelle utilisée par Smith et Ambegaokar [76]. Les intégrales sur les vecteurs d'ondes sont effectuées récursivement en partant de la droite du diagramme. Les deux lignes noires horizontales correspondent aux fonctions de Green avancées et retardées. Les points verts sont les vertex dûs au désordre et les lignes verticales rouges correspondent aux lignes d'impuretés. Nous avons montré les indices de Nambu (σ_A, σ_R) et (σ'_A, σ'_R) aux extrémités du mode de transmission. 125

C.1 Représentation des bandes d'énergie pour $N = 1$ entre le réservoir 1 et la partie centrale dans le cas d'une jonction Y reliée à trois réservoirs supraconducteurs. 127

C.2 Représentation des bandes d'énergie pour $N = 2$ entre le réservoir 1 et la partie centrale, dans le cas d'une jonction Y reliée par trois réservoirs supraconducteurs. 129

D.1 Représentation schématique de la relation de dispersion d'un isolant à gap Δ, similaire à celle de BCS. Les électrons avec des vecteurs d'ondes $+k_F$ appartiennent à la branche Ret les électrons avec des vecteurs d'ondes $-k_F$ appartiennent à la branche L. Un électron sur la branche Rpeut avoir une vitesse de groupe positive ou négative. . 135

D.2 Représentation schématique du modèle de liaison forte pour une jontion N-I-N percée par un trou. 137

D.3 Représentation schématique d'un anneau isolant quasi unidimensionnel à bande interdite, connecté à deux électrodes normales. 138

D.4 Coefficient de transmission d'un anneau formé d'un isolant à bande interdite avec la relation de dispersion BCS en fonction du flux magnétique Φ enfermé dans la boucle, normalisé par le quantum de flux $\phi_0 = h/e$. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de R/ξ. La valeur de $\lambda_F = 2\pi/k_F$ est petite comparée à ξ. 139

Bibliographie

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ? *Phys. Rev.*, 47(10) :777–780, May 1935.

[2] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1(195), 1964.

[3] G.B. Lesovik, T. Martin, and G. Blatter. Electronic entanglement in the vicinity of a superconductor. *Eur. Phys. J. B*, 24(3) :287–290, Dec. 2001.

[4] V. Bouchiat, N. Chtchelkatchev, D. Feinberg, G. B. Lesovik, Th. Martin, and J. Torrès. Single–walled carbon nanotube–superconductor entangler : noise correlations and Einstein – Podolsky – Rosen states. *Nanotechnology*, 14 :77–85, Jan. 2003.

[5] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment : A new violation of Bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49(2) :91–94, Jul 1982.

[6] A. Aspect. Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics. *Phys. Rev. D*, 14(8) :1944–1951, Oct. 1976.

[7] A. F. Andreev. The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors. *Sov. Phys. JETP*, 19 :1228, 1964.

[8] H. Courtois, P. Gandit, D. Mailly, and B. Pannetier. Long-range coherence in a mesoscopic metal near a superconducting interface. *Phys. Rev. Lett.*, 76(130), 1996.

[9] H. Courtois, P. Gandit, B. Pannetier, and D. Mailly. Long-range coherence and mesoscopic transport in n-s metallic structures. *Superlattices and Microstructures*, 20(1) :820–832, 1996.

[10] J. M. Byers and M. E. Flatté. Probing spatial correlations with nanoscale two-contact tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, 74(2) :306–309, Jan 1995.

[11] G. Deutscher and D. Feinberg. Coupling superconducting-ferromagnetic point contacts by Andreev reflections. *Appl. Phys. Lett.*, 76(4) :487, Jan. 2000.

[12] G. Falci, D. Feinberg, and F. W. J. Hekking. Correlated tunneling into a superconductor in a multiprobe hybrid structure. *Europhysics Letters*, 54 :255–261, Apr. 2001.

[13] M. Choi, C. Bruder, and D. Loss. Spin-dependent Josephson current through double quantum dots and measurement of entangled electron states. *Phys. Rev. B*, 62(20) :13569–13572, Nov. 2000.

[14] P. Recher, E. V. Sukhorukov, and D. Loss. Andreev tunneling, Coulomb blockade, and resonant transport of nonlocal spin-entangled electrons. *Phys. Rev. B*, 63(16) :165314, Apr. 2001.

[15] D. Beckmann, H. B. Weber, and H. V. Löhneysen. Evidence for crossed Andreev reflection in superconductor-ferromagnet hybrid structures. *Phys. Rev. Lett.*, 93(19) :197003, Nov. 2004.

[16] S. Russo, M. Kroug, T. M. Klapwijk, and A. F. Morpurgo. Experimental observation of bias-dependent non-local Andreev reflection. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :027002, Jul. 2005.

[17] A. Levy Yeyati, F.S. Bergeret, A. Martin-Rodero, and T.M. Klapwijk. Reversing non-local transport through a superconductor by electromagnetic excitations. *Nature Phys.*, 3(455), 2007.

[18] R. Mélin and D. Feinberg. Sign of the crossed conductances at a ferromagnet/superconductor/ferromagnet double interface. *Phys. Rev. B*, 70(17) :17409, Nov. 2004.

[19] P. Cadden-Zimansky and V. Chandrasekhar. Nonlocal correlations in normal-metal superconducting systems. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :237003, Dec. 2006.

[20] Ya. M. Blanter and M. Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Phys. Rep.*, 336 :1–336, Aug. 2000.

[21] M. Büttiker. Scattering theory of thermal and excess noise in open conductors. *Phys. Rev. Lett.*, 65(23) :2901–2904, Dec. 1990.

[22] M. Büttiker. Scattering theory of current and intensity noise correlations in conductors and wave guides. *Phys. Rev. B*, 46(19) :12485–12507, Nov. 1992.

[23] M. P. Anantram and S. Datta. Current fluctuations in mesoscopic systems with Andreev scattering. *Phys. Rev. B*, 53(24) :16390–16402, Jun. 1996.

[24] Th. Martin. Wave-packet approach to noise in n-s junctions. *Phys. Lett. A*, 220 :137–142, Sep. 1996.

[25] J. Torrès and Th. Martin. Positive and negative hanbury-brown and twiss correlations in normal metal-superconducting devices. *Eur. Phys. J. B*, 12 :319, Dec. 1999.

[26] J. Börlin, W. Belzig, and C. Bruder. Full counting statistics of a superconducting beam splitter. *Phys. Rev. Lett.*, 88(19) :197001, Apr 2002.

[27] P. Samuelsson and M. Büttiker. Chaotic dot-superconductor analog of the hanbury brown–twiss effect. *Phys. Rev. Lett.*, 89(4) :046601, Jul 2002.

[28] P. Samuelsson and M. Büttiker. Semiclassical theory of current correlations in chaotic dot-superconductor systems. *Phys. Rev. B*, 66(20) :R20136, Nov. 2002.

[29] G. Bignon, M. Houzet, F. Pistolesi, and F. W. J. Hekking. Current-current correlations in hybrid superconducting and normal-metal multiterminal structures. *Europhysics Letters*, 67 :110–116, Apr. 2004.

[30] J. P. Cleuziou, W. Wernsdorfer, V. Bouchiat, T. Ondarçuhu, and M. Monthioux. Carbon nanotube superconducting quantum interference device. *Nature Nanotechnology*, 1 :53–59, 10 2006.

[31] C. Hoffmann, F. Lefloch, M. Sanquer, and B. Pannetier. Mesoscopic transition in the shot noise of diffusive superconductor - normal metal - superconductor junctions. *Phys. Rev. B*, 70(4) :R180503, 2004.

[32] K. E. Nagaev. Frequency–dependent shot noise in long disordered superconductor–normal metal–superconductor contacts. *Phys. Rev. Lett.*, 86(14) :3112–3115, Apr. 2001.

[33] E. V. Bezuglyi, E. N. Bratus, V. S. Shumeiko, and G. Wendin. Current noise in long diffusive SNS junctions in the incoherent multiple Andreev reflections regime. *Phys. Rev. B*, 63 :R100501, Feb. 2001.

[34] Yu. I. Latyshev, O. Laborde, P. Monceau, and S. Klaumünzer. Aharonov-Bohm effect on charge density wave (CDW) moving through columnar defects in $NbSe_3$. *Phys. Rev. Lett.*, 78(5) :919–922, Feb. 1997.

[35] G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk. Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions : Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion. *Phys. Rev. B*, 25(7) :4515–4532, Apr. 1982.

[36] P. G. de Gennes. *Superconductivity of metals and alloys*. 1966.

[37] B. J. van Wees, P. de Vries, P. Magnée, and T. M. Klapwijk. Excess conductance of superconductor-semiconductor interfaces due to phase conjugation between electrons and holes. *Phys. Rev. Lett.*, 69(3) :510–513, Jul 1992.

[38] F. W. J. Hekking and Yu. V. Nazarov. Subgap conductivity of a superconductor–normal-metal tunnel interface. *Phys. Rev. B*, 49(10) :6847–6852, Mar 1994.

[39] J. A. Melsen and C. W. J. Beenakker. Reflectionless tunneling through a double-barrier NS junction. *Physica B*, 203.

[40] C. Caroli, R. Combescot, P. Nozières, and Saint-James D. Direct calculation of the tunneling current. *J. Phys. C : Solid St. Phys.*, 4 :916–929, 1971.

[41] C. Caroli, R. Combescot, P. Nozières, and Saint-James D. A direct calculation of tunnelling current : IV. electron-phonon interaction effects. *J. Phys. C : Solid St. Phys.*, 5 :21–42, 1972.

[42] F. W. J. Hekking and Yu. V. Nazarov. Interference of two electrons entering a superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, 71(10) :1625–1628, Sep. 1993.

[43] T. Yamashita, H. Imamura, S. Takahashi, and S. Maekawa. Andreev reflection in ferromagnet/superconductor/ferromagnet double junction systems. *Phys. Rev. B*, 67 :094515, Mar. 2003.

[44] S. Takahashi, H. Imamura, and S. Maekawa. Spin imbalance and magnetoresistance in ferromagnet/superconductor/ferromagnet double tunnel junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 82(19) :3911–3914, May 1999.

[45] R. Mélin. sin(2 phi) current-phase relation in SFS junctions with decoherence in the ferromagnet. *Europhys. Lett.*, 69 :121, 2005.

[46] P. Jarillo-Herrero, J. A. van Dam, and L. P. Kouwenhoven. Quantum supercurrent transistors in carbon nanotubes. *Nature*, 439(10) :953, 2006.

[47] M. Tinkham. *Introduction to superconductivity*. International series in pure applied physics, 1996.

[48] A. Levy Yeyati, J. C. Cuevas, A. López-Dávalos, and A. Martín-Rodero. Resonant tunneling through a small quantum dot coupled to superconducting leads. *Phys. Rev. B*, 55(10) :R6137–R6140, Mar 1997.

[49] J. C. Cuevas, A. Martín-Rodero, and A. Levy Yeyati. Hamiltonian approach to the transport properties of superconducting quantum point contacts. *Phys. Rev. B*, 54(10) :7366–7379, Sep. 1996.

[50] C. W. J. Beenakker. Universal limit of critical-current fluctuations in mesoscopic Josephson junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 67(27) :3836–3839, Dec. 1991.

[51] J. Bardeen, R. Kümmel, A. E. Jacobs, and L. Tewordt. Structure of vortex lines in pure superconductors. *Phys. Rev.*, 187(2) :556–569, Nov. 1969.

[52] J. C. Cuevas, A. Martín-Rodero, and A. Levy Yeyati. Shot noise and coherent multiple charge transfer in superconducting quantum point contacts. *Phys. Rev. Lett.*, 82(20) :4086–4089, May 1999.

[53] W. Schottky. *Ann. Phys.*, 57(541), 1918.

[54] V. A. Khlus. Current voltage fluctuations in microjunctions between normal metals and superconductors. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 93(2179), Dec. 1987.

[55] F. Lefloch, C. Hoffmann, M. Sanquer, and D. Quirion. Doubled full shot noise in quantum coherent superconductor-semiconductor junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 90(6) :067002, Feb 2003.

[56] M. Octavio, M. Tinkham, G. E. Blonder, and T. M. Klapwijk. Subharmonic energy-gap structure in superconducting constrictions. *Phys. Rev. B*, 27(11) :6739–6746, Jun. 1983.

[57] E. V. Bezuglyi, E. N. Bratus', V. S. Shumeiko, G. Wendin, and H. Takayanagi. Circuit theory of multiple andreev reflections in diffusive sns junctions : The incoherent case. *Phys. Rev. B*, 62(21) :14439–14451, Dec 2000.

[58] E. V. Sukhorukov and D. Loss. Noise in multiterminal diffusive conductors : Universality, nonlocality, and exchange effects. *Phys. Rev. B*, 59(20) :13054–13066, May 1999.

[59] Sh. M. Kogan and A. Ya. Shul'man. *Sov. Phys. JETP*, 29 :467, 1969.

[60] K. E. Nagaev. On the shot noise in dirty metal contacts. *Phys. Lett. A*, 169 :103, Jul. 1992.

[61] K. E. Nagaev. Influence of electron-electron scattering on shot noise in diffusive contact. *Phys. Rev. B*, 52(7) :4740–4743, Aug. 1995.

[62] K. E. Nagaev and M. Büttiker. Semiclassical theory of shot noise in disordered superconductor–normal-metal contacts. *Phys. Rev. B*, 63(8) :081301, Feb. 2001.

[63] D. T. McClure, L. DiCarlo, Y. Zhang, H.-A. Engel, C. M. Marcus, M. P. Hanson, and A. C. Gossard. Tunable noise cross correlations in a double quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :056801, Feb. 2007.

[64] Yiming Zhang, L. DiCarlo, D. T. McClure, M. Yamamoto, S. Tarucha, C. M. Marcus, M. P. Hanson, and A. C. Gossard. Noise correlations in a coulomb-blockaded quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :036603, Jul. 2007.

[65] K. E. Nagaev, P. Samuelsson, and S. Pilgram. Cascade approach to current fluctuations in a chaotic cavity. *Phys. Rev. B*, 66(19) :195318, Nov 2002.

[66] B. A. Muzykantskii and D. E. Khmelnitskii. Quantum shot noise in a normal-metal–superconductor point contact. *Phys. Rev. B*, 50(6) :3982–3987, Aug 1994.

[67] S Pilgram and P. Samuelsson. Noise and full counting statistics of incoherent multiple andreev reflection. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :086806, Mar. 2005.

[68] P. Samuelsson, G. Johansson, Å. Ingerman, V. S. Shumeiko, and G. Wendin. Proximity effect and multiple Andreev reflections in chaotic Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 65(18) :180514, May 2002.

[69] A. Altland and A. Kamenev. Wigner-Dyson statistics from the Keldysh σ-model. *Phys. Rev. Lett.*, 85(26) :5615–5618, Dec. 2000.

[70] A. L. Kasatkin and E. A. Pashitskii. Analog of the Andreev reflection of quasiparticles in low-dimensional conductors with a charge-density wave. *Sov. J. Low Temp. Phys.*, 10(11) :640–641, Nov. 1984.

[71] A. A. Sinchenko and P. Monceau. Superconductor (Nb) charge density wave (NbSe3) point contact spectroscopy. *J. Phys. : Condens. Matter*, 15(24) :4153, Jun. 2003.

[72] M. I. Visscher and G. E. W. Bauer. Mesoscopic charge-density-wave junctions. *Phys. Rev. B*, 54(4) :2798–2805, Jul. 1996.

[73] I. V. Bobkova and Yu. S. Barash. Low-energy quasiparticle states at superconductor/charge-density-wave interfaces. *Phys. Rev. B*, 71 :144510, Apr. 2005.

[74] A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, and I. E. Dzyaloshinski. *Methods of quantum field theory in statistical physics*. Dover Publications, 1963.

[75] S. N. Artemenko and A. F. Volkov. *Sov. Phys. JETP*, 53 :1050, 1981.

[76] R. A. Smith and V. Ambegaokar. Weak-localization correction to the number density of superconducting electrons. *Phys. Rev. B*, 45(5) :2463–2473, Feb. 1992.

[77] E. Akkermans and G Monthambaux. *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. EDP SciencesCNRS editions.

[78] S. Brazovskii and T. Nattermann. Pinning and sliding of driven elastic systems : from domain walls to charge density waves. *Advances in Physics*, 53(177) :177–255, 2004.

[79] Yu. I. Latyshev, P. Monceau, S. Brazovskii, A. P. Orlov, and T. Fournier. Subgap collective tunneling and its staircase structure in charge density waves. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :116402, 2006.

[80] N. Kirova and S. Brazovskii. *J. Physique IV*, 12, 2002.

[81] D. Rideau, P. Monceau, R. Currat, H. Requardt, F. Nad, J. E. Lorenzo, S. Brazovskii, C. Detlefs, and G. Grübel. X-ray scattering evidence for macroscopic strong pinning centers in the sliding CDW state of $NbSe_3$. *Europhys. Lett.*, 56 :289, Oct. 2001.

[82] S. Brazovskii, N. Kirova, H. Requardt, F. Ya. Nad, P. Monceau, R. Currat, J. E. Lorenzo, G. Grübel, and Ch. Vettier. Plastic sliding of charge density waves : X-ray space resolved-studies versus theory of current conversion. *Phys. Rev. B*, 61(16) :10640–10650, Apr. 2000.

[83] Mark I. Visscher, B. Rejaei, and Gerrit E. W. Bauer. Strong effects of weak localization in charge-density-wave/normal-metal hybrids. *Phys. Rev. B*, 62(11) :6873–6876, Sep 2000.

[84] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108(5) :1175–1204, Dec. 1957.

[85] L. D. Landau and E. M. Lifshift. *Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory*, volume 3. Course of Theoretical Physics.

[86] L. N. Cooper. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Phys. Rev.*, 104(4) :1189–1190, Nov 1956.

[87] D. Feinberg. Andreev scattering and cotunneling between two superconductor-normal metal interfaces : the dirty limit. *Eur. Phys. J. B*, 36(419), Dec. 2003.

[88] R. Mélin. Contribution of weak localization to nonlocal transport at normal metal/superconductor double interfaces. *Phys. Rev. B*, 73 :174512, May 2006.

[89] B. Douçot and R. Rammal. *J. Physique (Paris)*, 48 :941, 1987.

[90] J. Vidal, G. Montambaux, and B. Douçot. Transmission through quantum networks. *Phys. Rev. B*, 62(24) :R16294–R16297, Dec. 2000.

[91] A. Vanyolos, B. Dora, K. Maki, and A. Virosztek. Impurity scattering in unconventional density waves : non-crossing approximation for arbitrary scattering rate. *New J. Phys.*, 9(216), 2007.