



HAL
open science

Méthodes rapides d'estimation en trajectographie par mesures d'azimuts

Christian Musso

► **To cite this version:**

Christian Musso. Méthodes rapides d'estimation en trajectographie par mesures d'azimuts. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1993. Français. NNT: . tel-00343877

HAL Id: tel-00343877

<https://theses.hal.science/tel-00343877>

Submitted on 3 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée par

Christian MUSSO

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

de

L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1

(Arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**METHODES RAPIDES D'ESTIMATION
EN TRAJECTOGRAPHIE
PAR MESURES D'AZIMUTS**

Date de soutenance : 28 Octobre 1993

JURY :

Président :	Monsieur	A. LE BRETON
Examineurs :	Monsieur	S. DEGERINE
	Monsieur	C. JAUFFRET
	Monsieur	J.L. LACOUME
	Monsieur	D.T. PHAM
	Monsieur	B. VAN CUTSEM

Thèse préparée au sein de l'Université Joseph Fourier

REMERCIEMENTS

En 1987, je rentrai dans le Groupe d'Etudes et de Recherches en Détection Sous-Marine, l'actuel CERDSM. J'étais chargé d'un projet passionnant sur les manoeuvres optimales en trajectographie passive par mesures d'azimuts. Au sein de l'équipe de Monsieur Roger Philippart (puis au sein de celle de Monsieur Michel Bouvet) et aux côtés de Monsieur Claude Jauffret, j'ai eu toute la liberté de choisir la direction de mes recherches. Je tiens à les en remercier sincèrement. Grâce à une collaboration avec Monsieur Le Professeur Pham Dinh Tuan, directeur de la thèse, j'ai eu l'opportunité de développer des estimateurs nouveaux. Je veux dire toute mon admiration pour l'imagination scientifique de Monsieur Pham Dinh Tuan qui a établi les fondements de cette thèse.

Toute ma gratitude à Monsieur Claude Jauffret ingénieur de recherche au CERDSM et au Professeur Serge Degerine de l'Université Joseph Fourier - tous deux rapporteurs de cette thèse - qui ont enrichi ce mémoire par leurs commentaires fructueux.

Je remercie vivement Monsieur Le Professeur Alain Le Breton de l'Université Joseph Fourier d'avoir bien voulu présider le jury. Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean-Louis Lacoume pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur Bernard Van Cutsem de l'Université Joseph Fourier qui a eu la gentillesse de se pencher sur ce mémoire en tant que membre du jury.

Toute ma reconnaissance aux responsables appartenant au GERDSM et à l'ONERA (Office National des Etudes et des Recherches Aérospatiales) qui m'ont autorisé à inclure certains résultats dans ma thèse.

Un grand merci à mes collègues actuels et passés avec qui travail rime avec plaisir.

Je dis mon affection à tous mes proches qui, avec une infinie patience, m'ont soutenu tout au long de mon travail.

RESUME

L'objet de la trajectographie par mesures d'azimuts (TPA) est d'estimer les paramètres cinématiques d'une source suivant un modèle de trajectoire. Les méthodes classiques de TPA se divisent en deux classes. Les méthodes globales, basées sur l'estimateur du maximum de vraisemblance, traitent les mesures par bloc. Elles sont performantes mais lourdes en temps de calcul. Les méthodes récursives employant un filtre de Kalman étendu sont rapides mais souffrent dans ce contexte de problèmes de divergence. Nous proposons des estimateurs globaux et rapides qui sont une combinaison linéaire des mesures. Un choix original du vecteur d'état permet de les mettre en oeuvre. En faisant l'hypothèse d'une faible variation du signal mesuré, on montre, grâce à la quadrature de Gauss, que ces estimateurs sont quasi-efficaces et non biaisés. D'une manière générale, ces estimateurs sont quasi-exhaustifs et permettent dans certains problèmes d'estimation non-linéaire de réduire le nombre de mesures sans perte significative d'information. Nous présentons aussi des algorithmes rapides d'optimisation de trajectoires d'un observateur en trajectographie passive. Deux types de manoeuvres sont envisagés, avec et sans changement de cap. Elles apportent une amélioration des estimées après la TPA.

ABSTRACT

The aim of the bearings only Target Motion Analysis (TMA) is to estimate the kinematic parameters of a target according to a trajectory. Classical methods of TMA are divided in two groups. The batch methods based on the maximum likelihood estimator are efficient. But they are computing time costly. The recursive methods like the extended Kalman filter are fast methods but can diverge in this context. We propose some fast and batch estimators which are linear combinations of the measures. They are based on an appropriate choice of the state vector. Assuming that the signal varies slowly with the time, we prove, thanks to the Gauss quadrature, that these estimators are nearly efficient and nearly unbiased. More generally, they are nearly exhaustive statistics and can be used in some non-linear estimation problems in order to reduce the sample of the measures. The information is already preserved. We present also some fast algorithms of optimization of ownship maneuvers. Two kinds of maneuvers (change of course and change of speed) improve the accuracy of the estimation of the state vector after the TMA.

INTRODUCTION GENERALE.....	5
TRAJECTOGRAPHIE PARTIELLE PAR MESURES D'AZIMUTS.....	11
1.INTRODUCTION.....	12
2.NOTATIONS ET FORMULATION DU PROBLEME.....	13
3.UNE AUTRE PARAMETRISATION DE LA TRAJECTOIRE.....	16
4.MATRICE D'INFORMATION.....	18
5.LA QUADRATURE DE GAUSS	21
5-1.Identité fondamentale.....	21
5-2.Propriétés.....	26
5-3.Calcul des racines.....	26
6.ESTIMATION DU VECTEUR D'ETAT.....	27
6-1.L'estimateur linéaire.....	28
6-2.Propriétés statistiques.....	29
6-3.Variance des estimées du modèle polaire modifié.....	30
6-4.Correcteur de biais.....	31
7.SIMULATIONS	33
8.CONCLUSION.....	39
TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES D'AZIMUTS.....	41
1.INTRODUCTION.....	42
2.L'ESTIMATEUR LINEAIRE.....	43
2-1.Formulation du problème.....	43
2-2.Choix du modèle.....	43
2-3.Equation du maximum de vraisemblance	44
2-4.Propriétés.....	45
3.CALCUL DES RACINES.....	46
4.APPLICATION A LA TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES D'AZIMUTS	48
4-1.L'estimateur classique	48
4-2.L'estimateur linéaire.....	51
4-3.Simulations.....	52
5.CONCLUSION.....	56

TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES DE DEUX AZIMUTS	57
1.INTRODUCTION	58
2.NOTATIONS ET FORMULATION DU PROBLEME	59
3.METHODE D'ESTIMATION	69
4.AMELIORATION DE LA METHODE	64
4-1.Utilisation de formules trigonométriques	64
4-2.Amélioration de l'estimation des rapports des distances	65
5.SIMULATIONS	67
6.CONCLUSION	76
 TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES DE PLUSIEURS AZIMUTS.....	77
1.INTRODUCTION	78
2.POSITION DU PROBLEME	79
3.PRINCIPE DE LA FUSION	79
4.METHODE D'ESTIMATION	81
5.CHOIX DU VECTEUR D'ETAT ET ESTIMATION DES RETARDS	83
6.ALGORITHME FINAL	85
7.SIMULATIONS	87
8.CONCLUSION	94
 MANOEUVRE OPTIMALE EN TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE PAR MESURES D'AZIMUTS.....	95
1.INTRODUCTION	96
2.FORMULATION GENERALE DU PROBLEME	97
2-1.Critère d'Aidala	97
2-2.Principe de l'optimisation.....	98
2-3.Choix du critère.....	99
3.MANOEUVRE AVEC CHANGEMENT DE CAP.....	101
3-1.Modélisation de la trajectoire	101
3-2.Stratégies	104
3-3.Le premier cap	108
4.APPROXIMATION DE LA MATRICE DE FISHER	110
4-1.Accélération de l'algorithme.....	110
4-2.Optimisation de la durée	112
5.MANOEUVRE SANS CHANGEMENT DE CAP.....	115
6.CONCLUSION	120

UNE AUTRE APPLICATION : L'ACCELEROMETRIE	121
1.INTRODUCTION.....	122
2.DYNAMIQUE	123
3.OBSERVABILITE	128
4.BORNE DE CRAMER-RAO.....	129
5.METHODE D'ESTIMATION.....	131
6.SIMULATIONS	134
7.CONCLUSION.....	135
CONCLUSION GENERALE	137
ANNEXES.....	141
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	155

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

Le terme "trajectographie" est utilisé à l'origine dans le domaine astronautique (1963). Actuellement, il recouvre un ensemble de techniques mathématiques visant à estimer la trajectoire d'un mobile à partir de mesures. Ces mesures, entachées de bruits, sont exploitées pour estimer les paramètres cinématiques (en nombre fini) décrivant la trajectoire du mobile. Dès lors, la trajectographie est le domaine par excellence où cohabitent intimement la théorie de la dynamique des corps et la statistique mathématique.

Carl Friedrich Gauss, astronome, mathématicien et physicien allemand (1777-1855) travaille au carrefour de ces deux disciplines.

Un astre fut observé par Riuzzi à Palerme en 1801¹. Par la suite, il disparut du champ d'observation des astronomes. Sa redécouverte exigeait la détermination de l'orbite à l'aide d'un nombre limité de mesures. Gauss était en possession d'une méthode mathématique, la méthode des "moindres carrés" qu'il élaborait en 1795. La petite planète Cérès ne tarda pas alors à se manifester grâce aux instruments de mesures.

Gauss ignorait l'essor qu'allait prendre sa méthode. Elle eût sa consécration théorique bien après sa mort lorsque la théorie des probabilités démontra son optimalité (au sens de l'information de Fisher) sous l'hypothèse de bruits gaussiens. Le mathématicien français Adrien Marie Legendre (1752-1833) exposa la méthode des moindres carrés en 1806 sans connaître les travaux de Gauss. Il introduisit les polynômes orthogonaux du même nom en 1782 dans le mémoire sur la figure des planètes. Ces polynômes sont abondamment utilisés dans ce mémoire qui fait une part belle à la *quadrature de Gauss*. En général, on l'emploie pour approcher les intégrales. Nous l'appliquons ici pour des sommes discrètes sur les instants de mesures.

¹ Le petit ROBERT Dictionnaire de culture générale

Quittons le domaine astronomique pour se plonger dans celui de l'acoustique sous-marine. En effet, ce mémoire est consacré essentiellement à la trajectographie par mesures d'azimuts dans le milieu sous-marin. Cette trajectographie exploite des relevés angulaires par écoute passive. L'antenne du porteur "écoute" les bruits rayonnés par des navires afin d'estimer l'azimut à tout instant. L'azimut est le fruit d'un traitement de l'information qui comporte plusieurs étapes que nous passons sous silence (transformée de Fourier, formation de voies, ...). En imposant un modèle de trajectoire du bruiteur, pris souvent rectiligne uniforme, la trajectographie tente d'estimer cette trajectoire. L'écoute passive s'est développée de façon importante ces dernières années. L'écoute active, elle, accède directement à la distance porteur-bruiteur. Le sonar émet une onde acoustique qui se réfléchit sur la source et on mesure le temps du trajet aller-retour. Mais le défaut évident de cette méthode de localisation est son manque de discrétion. Toutefois, on note actuellement un regain d'intérêt pour cette méthode, les bâtiments étant de plus en plus silencieux.

Les premiers articles traitant de trajectographie sous-marine datent du début des années 70 [1]. Les méthodes mathématiques classiques de trajectographie par mesures d'azimuts se divisent en deux classes. Les méthodes globales, basées sur l'estimateur du maximum de vraisemblance, traitent les mesures par bloc ([2], [3], [4]). Elles sont performantes mais lourdes en temps de calcul. Les méthodes récursives, employant un filtre de Kalman étendu, ([5], [6]) sont rapides mais souffrent de problèmes de divergence. Les algorithmes d'estimation proposés dans la thèse tentent de concilier les avantages de ces deux approches à savoir rapidité et performance. Malgré le caractère non-linéaire du problème (déterminer une distance à partir de mesures angulaires), on construit des estimateurs linéaires globaux. Leurs performances sont étroitement liées au contexte sous-marin où la vitesse des bâtiments est faible et la distance observateur-source grande. Le signal mesuré varie peu avec le temps.

Le choix des modèles d'état proposés dans ce mémoire revêt une importance particulière. Ces modèles se rapprochent des mesures dans le sens où ils comprennent un échantillon des azimuts pris en des temps particuliers. Cette approche originale permet d'approcher finement la matrice d'information par la quadrature de Gauss. On construit alors des estimateurs globaux et linéaires jouissant, sous certaines hypothèses, des propriétés statistiques optimales (biais, efficacité).

Le chapitre II a pour objet la trajectographie partielle par mesures d'azimuts (TPPA). En TPPA, le capteur mesurant des azimuts et le bruiteur suivent un mouvement rectiligne uniforme. Cette trajectographie est appelée partielle car la trajectoire du bruiteur n'est pas observable. En particulier, la distance ne peut pas être déterminée à partir des azimuts. Cependant, on peut estimer une famille de trajectoires compatibles avec ces mesures. Cette famille est caractérisée par un paramètre vectoriel de dimension trois qui est classiquement composé de l'azimut, de la vitesse angulaire et de la vitesse radiale relative. On propose un nouveau modèle constitué de trois azimuts pris en des temps racines du polynôme de Legendre de degré trois. On exhibe alors un estimateur linéaire quasi-efficace et non-biaisé sous l'hypothèse que la distance bruiteur-capteur varie peu au cours du temps.

Le chapitre III se propose de généraliser cette approche avec un signal quelconque F_t . On suppose que F_t varie lentement avec le temps. De plus, il faut que F_t puisse être caractérisé par un vecteur d'état composé par ce signal pris en des temps particuliers. Cette dernière hypothèse est vérifiée dans bien des domaines comme la trajectographie passive ou active ou bien encore comme l'accélérométrie. Un estimateur linéaire simple à mettre en œuvre est proposé. Il est solution approchée de l'équation du maximum de vraisemblance. On montre qu'il est quasi-efficace et non-biaisé.

Le chapitre IV est consacré à l'étude d'un estimateur rapide de trajectographie par mesures de deux azimuts (TP2A). Cette fois l'observateur dispose de deux capteurs solidaires se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme. Il mesure à chaque instant deux azimuts. Dans ce contexte, contrairement à la TPPA, on peut estimer complètement le vecteur d'état de la source. On utilise les résultats de la TPPA pour estimer la trajectoire du bruiteur que l'on caractérise par trois azimuts et par l'inverse de la distance. Le principe de ce nouvel estimateur rapide repose sur une fusion des deux séries d'azimuts au centre de l'antenne assimilé à un capteur fictif. En supposant que le déplacement total relatif de la cible est faible par rapport à la distance bruiteur-capteurs, l'estimateur proposé atteint la borne de Cramer-Rao.

Le chapitre V traite d'une situation plus générale (TPNA) où l'on dispose d'un nombre quelconque de capteurs solidaires. On reporte les séries d'azimuts mesurés sur un capteur de référence. On utilise le fait qu'un capteur peut mesurer avec un certain retard l'azimut mesuré par les autres capteurs. On développe alors une méthode d'estimation rapide d'un vecteur d'état composé d'un paramètre homogène à l'inverse d'un temps et de trois azimuts. Si le cap du bruiteur n'est pas confondu avec la ligne de visée, cet estimateur présente des performances statistiques optimales.

Le chapitre VI a pour objet l'optimisation de la manoeuvre de l'observateur. Pour reconstituer la trajectoire du bruiteur en trajectographie avec un capteur, il faut que l'observateur fasse une manoeuvre, sa trajectoire doit comporter une accélération (problème d'observabilité [7], [8], [9]). La trajectographie vient après cette manoeuvre. La précision de l'estimation des paramètres cinématiques du bruiteur dépend fortement du choix de la trajectoire parcourue par le porteur. On prend comme critère de qualité de l'estimation le volume global de l'information contenue dans les mesures. Ce critère est lié au déterminant de la matrice d'information (FIM). Le mouvement du porteur est simplifié. Il est modélisé par des trajectoires en "ligne brisée" composées de segments parcourus à vitesse constante. On optimise alors le

critère par rapport aux caps successifs. D'autres trajectoires sans changement de caps sont optimisées. Conformément à la trame de ce mémoire, nous développons des algorithmes d'optimisation rapides basés sur l'approximation de la FIM par la quadrature de Gauss. Ils offrent à l'observateur des trajectoires appropriées à la trajectographie.

Le chapitre VII fait une intrusion dans le domaine aérospatial. Un véhicule hypersonique en phase de rentrée dans l'atmosphère mesure son accélération. La cinématique comporte une phase de décélération forte due à la traînée. On montre que la trajectoire du véhicule est observable à partir des mesures d'accélération longitudinale. On met à profit la propriété d'exhaustivité des estimateurs linéaires pour réduire d'une façon importante le nombre des mesures accélérométriques sans perte significative d'information. Une version rapide de l'estimateur classique du maximum de vraisemblance est développée.

Dans ce mémoire nous évoquons, sans les détailler, les méthodes existantes en trajectographie par mesures d'azimuts. On peut consulter un état des lieux complet en ce domaine dans [9].

CHAPITRE II

**TRAJECTOGRAPHIE PARTIELLE
PAR MESURES D'AZIMUTS**

1 INTRODUCTION

La trajectographie partielle par mesures d'azimuts (TPPA) a pour objet l'estimation d'une partie des paramètres cinématiques du mouvement rectiligne uniforme d'un bruiteur. L'observateur qui mesure les azimuts suit lui-même un mouvement rectiligne uniforme. Les deux mobiles évoluent dans le même plan. La trajectographie est appelée "partielle" car seuls 3 paramètres (au plus), sur les 4 qui définissent entièrement la cinématique du bruiteur, sont observables. Mais si, par exemple, la distance observateur-bruiteur est fixée arbitrairement ou connue approximativement par des moyens extérieurs, la trajectoire du bruiteur est totalement déterminée et l'on peut alors estimer, en particulier, le cap du bruiteur. On sait que l'estimation de la distance exige une manoeuvre de l'observateur [7]. La TPPA a donc pour objet de caractériser la famille de trajectoires du bruiteur engendrant un même défilement azimutal. Les méthodes construites à cet effet sont de type récursif [10] - Filtre de Kalman Etendu (EKF) - ou globales - Estimateur pseudo-linéaire (PLE) [2], Méthode de la Variable Instrumentale (MIV) [2] et Maximum de Vraisemblance (MLE). L'estimateur le plus rapide en temps de calcul (PLE) est malheureusement fortement biaisé.

Le vecteur d'état de dimension 3 caractérisant la trajectoire du bruiteur peut donner lieu à de multiples choix [11]. Celui le plus communément utilisé est le vecteur d'état polaire modifié constitué par l'azimut, la vitesse angulaire et la vitesse radiale relative pris à un temps de référence [12].

Nous proposons dans ce chapitre un estimateur linéaire quasi non-biaisé et efficace. Celui-ci est formé par une combinaison linéaire des azimuts mesurés. Il est basé sur un vecteur d'état constitué de 3 azimuts pris à des temps particuliers qui sont les racines du polynôme de Legendre de degré 3. Etant donnée la faible variation de l'azimut en fonction du temps, et grâce au choix original du vecteur d'état nous appliquons la quadrature de Gauss (QG) pour démontrer rigoureusement les propriétés statistiques optimales de ce nouvel estimateur.

C'est à partir des idées contenues dans ce chapitre qu'ont été construits les divers estimateurs rapides présentés dans ce mémoire. Cette TPPA linéaire a donné lieu à deux publications ([13], [14])

2 NOTATIONS ET FORMULATION DU PROBLEME

Un observateur (O), appelé aussi porteur, se déplace en route rectiligne uniforme et mesure des azimuts bruités $\{z_t\}$ (β_t est l'azimut exact) durant l'intervalle temporel $[t_1, t_n]$. Ces azimuts sont issus d'un bruiteur animé d'un même mouvement que l'on veut estimer partiellement c'est à dire à une homothétie près :

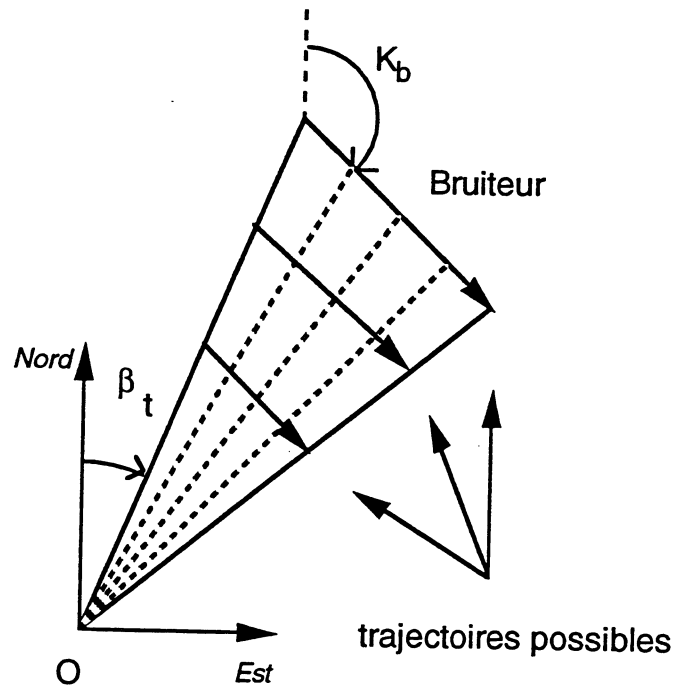


Figure (2-1) : exemple de géométrie

Voici un exemple de défilement azimutal avec la géométrie suivante :

- le porteur est immobile et se trouve à l'origine (O)
- position initiale du bruiteur : $(x_0, y_0) = (-2000\text{m}, 6000\text{m})$
- cap du bruiteur : $K = 45^\circ$; vitesse du bruiteur : $v = 10\text{m/s}$

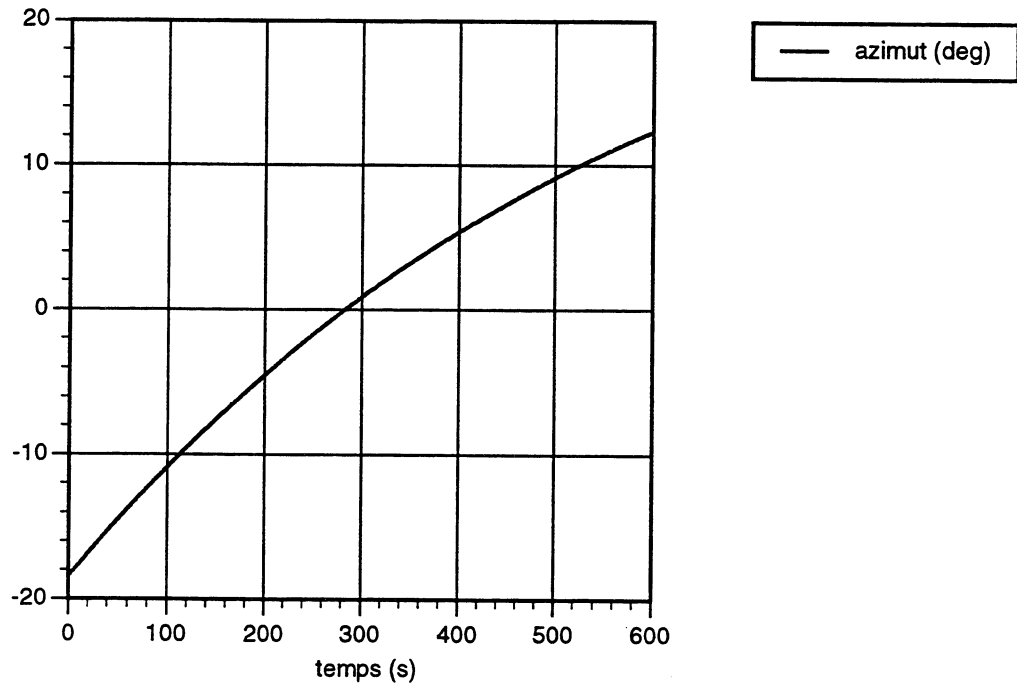


Figure (2-2) : exemple de défilement azimuthal

Par commodité de calcul nous utilisons des notations complexes. On note r_t la position du bruiteur à l'instant t relativement à l'observateur qui s'écrit simplement comme suit :

$$r_t = r_0 + t v$$

Introduisons les paramètres suivants :

- vitesse relative : $v = \frac{r_t - r_{t'}}{t - t'}$

- azimuth : $\beta_t = \pi/2 - \arg(r_t) = \pi/2 - \text{Im}(\log r_t)$

- vecteur unitaire sur l'axe de visée : $u_t = (\sin\beta_t, \cos\beta_t)$

- vecteur unitaire orthogonal à l'axe de visée : $u_t^\perp = (\cos\beta_t, -\sin\beta_t)$

- vitesse angulaire : $v_\beta = \dot{\beta}_t = \frac{\langle v, u_t^\perp \rangle}{|r_t|} = -\text{Im}\left(\frac{v}{r_t}\right)$

- vitesse radiale relative : $v_r = \frac{\langle v, u_t \rangle}{|r_t|} = \text{Re}\left(\frac{v}{r_t}\right)$

Nous représentons ci-dessous les vitesses angulaire et radiale relative :

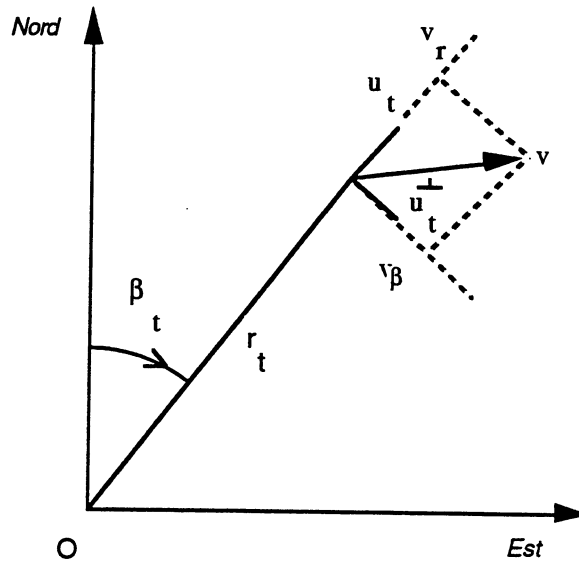


Figure (2-3) : vitesses angulaire et radiale relative

On suppose que l'azimut mesuré (z_t) par l'observateur obéit à l'équation de mesures suivante :

$$z_t = \beta_t + \varepsilon_t \quad t \in [t_1, t_n] \quad (2-1)$$

où ε_t sont des variables gaussiennes indépendantes de variance σ^2 .

On peut paramétrer l'azimut β_t par le vecteur d'état de dimension 3 (Θ_{PM}) suivant :

$$\Theta_{PM} = \left(\beta_{T_0}, \dot{\beta}_{T_0}, \frac{-\ddot{\beta}_{T_0}}{2 \dot{\beta}_{T_0}} \right) \quad (2-2)$$

où T_0 est un temps de référence.

On peut noter que le terme $-\ddot{\beta}_{T_0} / (2 \dot{\beta}_{T_0})$ est égal à la vitesse radiale relative, en effet :

$$\ddot{\beta}_{T_0} = \text{Im} \left(\frac{\dot{v}^2}{r_{T_0}^2} \right) = -2 \text{Im} \left(\frac{\dot{v}}{r_{T_0}} \right) \text{Re} \left(\frac{\dot{v}}{r_{T_0}} \right) = -2 \dot{\beta}_{T_0} v_r \quad (2-3)$$

Ce vecteur d'état n'est clairement pas toujours observable. En particulier, la vitesse radiale relative v_r peut être déduite des azimuts β_t à condition que la vitesse angulaire v_β soit non nulle.

Ce vecteur caractérise la famille des trajectoires possibles du bruiteur ([1] - figure (2-1)) :

$$\beta_t = \beta_t(\Theta_{PM}) = \beta_{T_0} + \arctg[(t-T_0)v_\beta / (1+(t-T_0)v_r)] \quad (2-4)$$

L'azimut s'exprime donc de façon fortement non-linéaire en fonction de (Θ_{PM}) . Ce paramètre s'estime alors classiquement par la résolution de l'équation du maximum de vraisemblance basée sur (2-1) qui s'écrit comme le "moindres carrés" suivant :

$$\min_{\Theta} \sum_{t=t_1}^{t_n} (z_t - \beta_t(\Theta))^2 \quad (2-5)$$

Cette minimisation se fait par un algorithme de type gradient-conjugué (Gauss-Newton, Newton-Raphson [15], [16]) et, par conséquent, exige un temps de calcul important. (Θ_{PM}) peut aussi s'estimer par un filtre de Kalman étendu, mais dans ce cas on est confronté à des problèmes de divergences.

3. UNE AUTRE PARAMETRISATION DE LA TRAJECTOIRE

Le modèle polaire modifié présenté ci-dessus prend comme base l'azimut β , ses dérivées première et seconde, pour évaluer les vitesses angulaire (v_β) et radiale relative (v_r). Les dérivées d'ordre supérieur s'expriment en fonction de (β, v_β, v_r) . Une autre possibilité consiste à paramétrer la trajectoire à l'aide de 3 azimuts $(\beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2})$ pris en 3 temps distincts qui ne sont pas forcément des temps de mesures. On appelle ce nouveau modèle le *modèle des trois mesures* :

$$\theta = (\beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2}) \quad (3-1)$$

Ce vecteur est bien sûr toujours observable. Le mouvement rectiligne uniforme r_t s'exprime de la manière suivante :

$$r_t = \frac{|r_{Td}|}{\sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \left[\frac{t - T_2}{T_0 - T_2} \sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_0}) i e^{-i\beta_{T_1}} + \frac{t - T_1}{T_0 - T_1} \sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_1}) i e^{-i\beta_{T_2}} \right] \quad (3-2)$$

L'azimut à l'instant t vaut simplement :

$$\beta_t(\theta) = \arctg(\operatorname{Re} r_t / \operatorname{Im} r_t) = (\pi/2) - \operatorname{Im}(\log r_t)$$

Cette fonction reste bien sûr une fonction non-linéaire de θ . Mais nous verrons par la suite que ce nouveau modèle induit une non-linéarité "nettement moins forte" que le modèle précédent.

Pour démontrer (3-2), nous utilisons l'identité suivante valable pour 3 nombres complexes z_1, z_2, z_3 quelconques :

$$\text{Im}(z_1 \bar{z}_2) z_3 + \text{Im}(z_2 \bar{z}_3) z_1 + \text{Im}(z_3 \bar{z}_1) z_2 = 0 \quad (3-3)$$

Posons :

$$u_j = \frac{r_{T_j}}{|r_{T_j}|} = i \exp(-i \beta_{T_j}) \quad j = 0, 1, 2$$

Le mouvement relatif du bruiteur étant uniforme on a :

$$r_t = \frac{t - T_2}{T_1 - T_2} |r_{T_1}| u_1 + \frac{t - T_1}{T_2 - T_1} |r_{T_2}| u_2 \quad (3-4)$$

Si les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, cette décomposition est unique, aussi d'après (3-3) en prenant $z_1 = u_1$, $z_2 = u_2$, $z_3 = r_{T_0}$, on a par identification :

$$\frac{T_0 - T_2}{T_1 - T_2} |r_{T_1}| = \frac{\text{Im}(r_{T_0} \bar{u}_2)}{\text{Im}(u_1 \bar{u}_2)}$$

$$\frac{T_0 - T_1}{T_2 - T_1} |r_{T_2}| = \frac{\text{Im}(u_1 \bar{r}_{T_0})}{\text{Im}(u_1 \bar{u}_2)}$$

et, en reportant ces expressions dans (3-4), on obtient le résultat désiré.

La vitesse relative $v = (r_{T_2} - r_{T_1}) / (T_2 - T_1)$ se calcule grâce à (3-4) :

$$v = \frac{|r_{T_0}|}{\sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \left[\frac{\sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_1}) i \exp(-i\beta_{T_2})}{(T_0 - T_1)} - \frac{\sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_2}) i \exp(-i\beta_{T_1})}{(T_0 - T_2)} \right] \quad (3-5)$$

Il est aussi intéressant d'exprimer les paramètres PM * $v_\beta = -\text{Im}(v/r_{T_0})$ $v_r = \text{Re}(v/r_{T_0})$ * en fonction du nouveau :

$$v_\beta = - \frac{T_2 - T_1}{(T_0 - T_2)(T_0 - T_1)} \frac{\sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_1}) \sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_2})}{\sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \quad (3-6)$$

$$v_r = \frac{\sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_1}) \cos(\beta_{T_0} - \beta_{T_2})}{\sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})(T_0 - T_1)} - \frac{\sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_2}) \cos(\beta_{T_0} - \beta_{T_1})}{\sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})(T_0 - T_2)}$$

que l'on peut reformuler grâce à l'identité $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ * comme suit :

$$v_r = \frac{T_2 - T_1}{2(T_0 - T_1)(T_0 - T_2)} \frac{\sin(\beta_{T_2} + \beta_{T_1} - 2\beta_{T_0})}{\sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} - \frac{T_2 + T_1 - 2T_0}{2(T_0 - T_1)(T_0 - T_2)} \quad (3-7)$$

Dans le cas particulier où les instants T_1, T_2 sont choisis symétriques autour de T_0 , on a :

$$T_1 = T_0 - \tau \quad T_2 = T_0 + \tau$$

$$v_\beta = -2 \frac{\sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_1}) \sin(\beta_{T_0} - \beta_{T_2})}{\tau \sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \quad v_r = - \frac{\sin(\beta_{T_2} + \beta_{T_1} - 2\beta_{T_0})}{\tau \sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \quad (3-8)$$

et ceci pour tous τ . Ces expressions étant valables pour tout τ on retrouve :

$$v_r = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\beta}_{T_0}}{\dot{\beta}_{T_0}} \quad v_\beta = \dot{\beta}_{T_0}$$

En effet, au voisinage de 0, on a :

$$\beta_{T_1} \approx \beta_{T_0} + \tau \dot{\beta}_{T_0} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\beta}_{T_0} \quad \beta_{T_2} \approx \beta_{T_0} - \tau \dot{\beta}_{T_0} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\beta}_{T_0}$$

et il suffit d'approcher $\sin u$ par u dans (3-8) pour obtenir le résultat.

4 MATRICE D'INFORMATION

Nous calculons à présent la matrice d'information ou matrice de Fisher (FIM) (espérance de la matrice des dérivées secondes du négatif du logarithme de la vraisemblance [17]) associée au modèle $\theta = (\beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2})$. Tout estimateur non biaisé a une matrice de covariance supérieure ou égale à la borne de Cramer-Rao (CRLB), valant l'inverse de la FIM, borne atteinte asymptotiquement par l'estimateur du maximum de vraisemblance (2-5). Sous l'hypothèse gaussienne des bruits (2-1) le logarithme de la densité f des mesures z_t vaut :

$$\log f(z_{t_1}, \dots, z_{t_n}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} [z_t - \beta_t(\theta)]^2$$

En rappelant que :

$$\text{FIM} = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f \right)^T \right] \quad (4-1)$$

on obtient facilement:

$$\text{FIM} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=t_1}^{t_0} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \beta_t \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \beta_t \right)^T \quad (4-2)$$

Les termes $(\partial/\partial\theta)\beta_t$ sont calculables directement à partir de (3-2). Cependant une manière plus élégante et rapide consiste à suivre la démarche suivante :

$$\beta_t = f(t, \beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2}) \quad \text{en particulier} \quad \beta_{T_i} = f(T_i, \beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2}) \quad \text{pour } i=0,1,2$$

Or :

$$\left(\frac{\partial f(t, \beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2})}{\partial \beta_{T_i}} \right)_{t=T_i} = \frac{\partial f(T_j, \beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2})}{\partial \beta_{T_i}},$$

on obtient :

$$\left(\frac{\partial \beta_t}{\partial \beta_{T_i}} \right)_{t=T_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4-3)$$

Remarque :

Les identités ci-dessus utilisent une inversion cachée de limites. Pour être rigoureux il faut montrer la convergence uniforme par rapport à ε de la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow T_i} \frac{\beta_t(\beta_{T_i} + \varepsilon) - \beta_t(\beta_{T_i})}{\varepsilon} = 1$$

La convergence simple est immédiate. Si l'on prend ε dans un compact et en notant que β_t et sa dérivée par rapport au temps sont bornés et continus, on peut montrer la convergence uniforme. De toute manière (4-3) peut s'obtenir par un calcul direct (mais lourd) en utilisant (3-2).

Revenons à l'expression générale de $(\partial/\partial\theta)\beta_t$. Puisque :

$\beta_t(\theta) = (\pi/2) - \text{Im}(\log r_t)$, on a :

$$\frac{\partial\beta_t}{\partial\beta_{T_i}} = - \text{Im} \left(\frac{1}{r_t} \frac{\partial r_t}{\partial\beta_{T_i}} \right) = - \frac{1}{|r_t|^2} \text{Im} \left(\bar{r}_t \frac{\partial r_t}{\partial\beta_{T_i}} \right) \quad (4-4)$$

Le mouvement relatif du bruiteur étant uniforme, r_t est une fonction linéaire de t . Il en est de même pour $(\partial r_t/\partial\theta)$. La partie imaginaire de (4-4) est donc un trinôme du second degré en t qui est entièrement défini par les 3 temps T_0, T_1, T_2 . En s'appuyant sur (4-3), il est naturel d'introduire les *polynômes d'interpolation de Lagrange* ϕ_i de degré 2 basés sur T_0, T_1, T_2 :

$$\phi_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - T_j)}{\prod_{j \neq i} (T_i - T_j)} \quad (4-5)$$

Autrement dit, ces polynômes vérifient (à rapprocher avec (4-3)) :

$$\phi_i(T_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Finalement on obtient :

$$\frac{\partial\beta_t}{\partial\beta_{T_i}} = \frac{|r_{T_i}^2|}{|r_t^2|} \phi_i(t), \quad i = 0, 1, 2 \quad (4-6)$$

Nous avons suggéré ci-dessus que la non-linéarité de β_t en fonction du modèle n'est pas forte. On l'observe sur (4-6) car, dans le contexte de la TPPA ou plus généralement dans celui de la trajectographie par mesures d'azimuts on a :

- la distance bruiteur-observateur est grande (elle peut être de l'ordre de quelques dizaines de km)
- la durée d'acquisition de mesures n'excède pas en général 30 mn
- les vitesses des bâtiments sont faibles (typiquement de l'ordre de 15 m/s), ce qui implique que la vitesse radiale est faible

Aussi, les rapports des distances figurant dans (4-6) varient peu au cours du temps (autour de 1). L'équation (4-6) nous amène à penser que $(\partial\beta_i/\partial\theta)$ dépend peu du modèle θ .

On peut maintenant calculer la matrice de Fisher (FIM) définie en (4-2) relative au modèle θ . Conformément à (4-2) et (4-6) le terme générique FIM(i,j) de cette matrice vaut :

$$\text{FIM}(i,j) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{|r_{T_i}|^2 |r_{T_j}|^2}{|r_t|^4} \phi_i(t) \phi_j(t) \quad (4-7)$$

La matrice de Fisher relative au nouveau modèle dépend peu du paramètre θ . L'estimateur classique du maximum de vraisemblance (MLE) a donc une matrice de covariance asymptotique peu dépendante de θ (CRLB=FIM⁻¹). Nous pouvons alors chercher un *estimateur linéaire* dont les performances seront proches de celles du MLE. Les temps (T₀, T₁, T₂) seront choisis optimaux de manière à appliquer la *quadrature de Gauss* à la FIM.

5 LA QUADRATURE DE GAUSS

La quadrature de Gauss (QG) est une technique d'approximation fine que l'on applique dans la littérature au calcul approché des intégrales ([15], [16]) En fait, on peut aisément la généraliser à tout produit scalaire sur un ensemble de fonctions régulières (dérivables jusqu'à un certain ordre). On peut par conséquent l'utiliser pour la somme (4-7). Nous présentons en détail la (QG) car elle est à la base de nombreux algorithmes d'estimation présentés dans la thèse.

5-1. Identité fondamentale

Plaçons-nous tout d'abord dans l'ensemble (P_{2m-1}) des polynômes de degré inférieur ou égal à (2m-1). Soit μ une mesure sur l'intervalle [a,b], définissant le produit scalaire sur (P_{2m-1}) suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) d\mu(t) \quad f, g \in P_{2m-1}$$

Considérons (Ψ_m) le polynôme de Legendre normalisé de degré (m) orthogonal (pour le produit scalaire défini précédemment) à l'espace engendré par [1, t, ..., t^{m-1}].
Nommons par (T₀, T₁, ..., T_{m-1}) les racines de (Ψ_m) et par **1** la fonction valant 1 sur [a,b].

Alors, pour tout $f \in P_{2m-1}$ on a l'identité suivante :

$$\langle 1, f \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} \langle 1, \phi_i \rangle f(T_i) \quad (5-1-1)$$

où $\{\phi_i\}$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré $(m-1)$ définis en (4-5) basés sur les racines $\{T_i\}$.

En effet, si l'on effectue la division euclidienne de f de degré $(2m-1)$, noté (f_{2m-1}) par (Ψ_m) ,

$f_{2m-1} = \eta_{m-1} \Psi_m + R_{m-1}$, où R_{m-1} et η_{m-1} sont des polynômes de degré $(m-1)$. Dès lors :

$$\langle 1, f_{2m-1} \rangle = \langle 1, \eta_{m-1} \Psi_m \rangle + \langle 1, R_{m-1} \rangle$$

Or $\langle 1, \eta_{m-1} \Psi_m \rangle = \langle \Psi_m, \eta_{m-1} \rangle = 0$ car η_{m-1} est de degré $(m-1)$

De plus,

$$R_{m-1}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_i(t) R_{m-1}(T_i) \quad \text{d'où}$$

$$\langle 1, f_{2m-1} \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} \langle 1, \phi_i \rangle R_{m-1}(T_i) = \sum_{i=0}^{m-1} \langle 1, \phi_i \rangle f(T_i)$$

puisque Ψ_m s'annule en T_i pour tout i .

Lorsque le produit scalaire est une intégrale avec la mesure de Lebesgue sur $[-1,1]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt ,$$

Les polynômes de Legendre Ψ_m valent alors [15] :

$$\Psi_m(t) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dt^m} [(t^2-1)^m] \quad m=0,1,2,\dots$$

que l'on représente ci-après jusqu'à l'ordre 4.

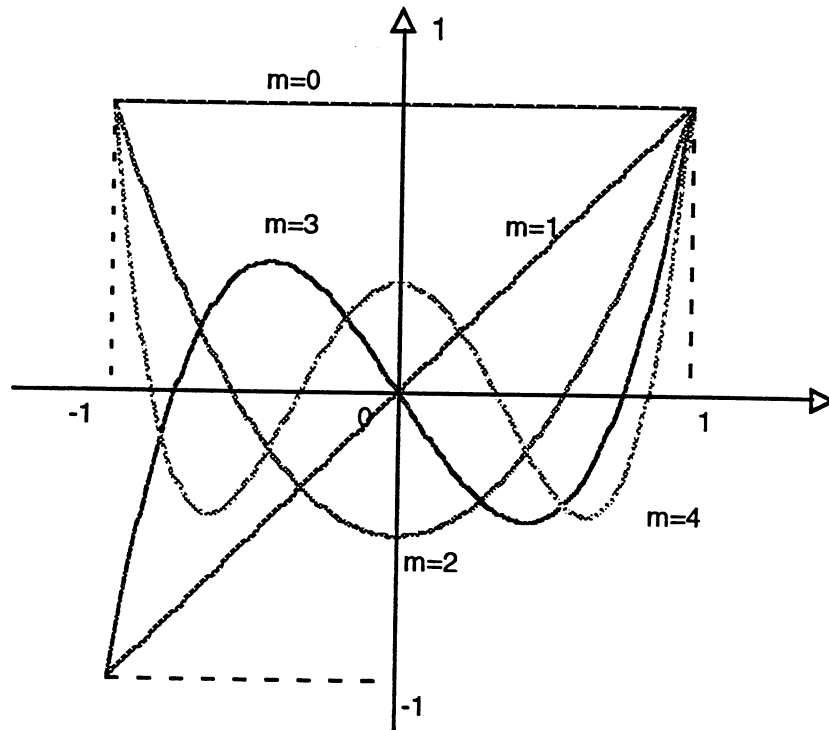


Figure (5-1-1) : les polynômes de Legendre ($m \leq 4$)

La quadrature de Gauss donne pour tout polynôme f de degré $(2m-1)$:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=0}^{m-1} \|\phi_i\|^2 f(T_i) \quad \text{où} \quad \|\phi_i\|^2 = \int_{-1}^1 \phi_i^2(t) dt$$

Avec jusqu'à $m=8$:

Paramètres régissant la quadrature de Gauss dans le cas d'une intégrale ($m \leq 8$)

m	$\ \phi_i\ ^2$	T_i
1	2	0
2	1	$\pm 0,57735027$
3	0,55555556 0,88888889	$\pm 0,77459667$ 0
4	0,34785484 0,65214516	$\pm 0,86113631$ $\pm 0,33998104$
5	0,23692688 0,47862868 0,56888889	$\pm 0,90617985$ $\pm 0,53846931$ 0
6	0,17132450 0,36076158 0,46791394	$\pm 0,93246951$ $\pm 0,66120939$ $\pm 0,46791394$
7	0,12948496 0,27970540 0,38183006 0,41795918	$\pm 0,94910791$ $\pm 0,74153119$ $\pm 0,40584515$ 0
8	0,10122854 0,22238104 0,31370664 0,36268378	$\pm 0,96028986$ $\pm 0,79666648$ $\pm 0,52553242$ $\pm 0,18343464$

On note qu'il est remarquable et pratique que les coefficients $\|\phi_i\|^2$ et $\{T_i\}$ sont *indépendants de f* et se calculent une fois pour toutes.

Pour $m=3$ on a la célèbre formule :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{9} [5 f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8 f(0) + 5 f(\sqrt{\frac{3}{5}})]$$

qui est valable pour tout polynôme f de degré inférieur ou égal à 5. On observe que la quadrature ne se porte pas sur des points équidistants.

Revenons au cas particulier qui nous intéresse à savoir le produit scalaire induit par la somme discrète (μ mesure discrète) sur l'intervalle $[t_1, t_n]$:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_n} f(t) g(t) \quad (5-1-2)$$

et plaçons-nous dans l'espace plus large des fonctions $f \in C^\infty$ (infiniment dérivables). Effectuons un développement de Taylor de f à l'ordre $(2m-1)$. En s'appuyant sur (5-1-1) on aboutit à :

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} f(t) \approx \sum_{i=0}^{m-1} \|\phi_i\|^2 f(T_i) \quad (5-1-3)$$

L'erreur d'approximation vaut $\|\Psi_m\|^2 f^{(2m)}(x)/(2m)!$ où $x \in [t_1, t_n]$. La formulation $\langle 1, \phi_i \rangle = \|\phi_i\|^2$ figurant dans (5-1-1) se justifie de la manière suivante :

$$\langle 1, \phi_i \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i^2(t) = \|\phi_i\|^2,$$

cette identité est démontrée dans l'Annexe (II-5-2).

L'approximation de la somme (5-1-3) est donc très fine, elle est même la plus fine possible. En effet, soit à trouver des points $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ et des coefficients A_0, A_2, \dots, A_{m-1} pour que la quadrature

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i f(\tau_i) \quad (5-1-4)$$

soit exacte pour tout polynôme f de degré N le plus grand possible. Puisque nous avons $2m$ constantes τ_i et A_i , le polynôme f doit avoir au plus $2m$ coefficients c'est à dire que le degré de celui-ci ne peut excéder $N=2m-1$. En prenant $f=1, t, t^2, \dots, t^{2m-1}$ dans (5-1-4), les coefficients sont solutions d'un système de $(2m-1)$ équations à $(2m-1)$ inconnues [18]. On obtient alors $A_i = \|\phi_i\|^2$ et $\tau_i = T_i$. Notons que si l'on impose dans (5-1-4) que les coefficients A_i soient égaux, on établit la quadrature de Tchebychev valable pour tout polynôme f de degré m [18] qui donne pour $m=3$ et pour le produit scalaire L^2 :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{3} \left[5 f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) + 5 f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]$$

5-2. Propriétés

On démontre en Annexe (II-5-2) les propriétés des polynômes ϕ_i d'interpolation de Lagrange et du polynôme de Legendre Ψ_m . que l'on résume dans le théorème ci-après. On se place dans l'intervalle temporel $[t_1, t_n]$ et le produit scalaire est celui de (5-1-2). Rappelons que Ψ_m vérifie :

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} t^j \Psi_m(t) = 0 \quad \text{pour } j=0,1,\dots,m-1 \quad (5-2-1)$$

THEOREME :

Les racines T_i sont réelles et simples.

Elles appartiennent à l'intervalle $[t_1, t_n]$.

Dans le cas où les points t_1, t_2, \dots, t_n sont équirépartis, les racines sont symétriques autour de $(t_1+t_n)/2$.

Les polynômes d'interpolation de Lagrange $\{\phi_i\}$ sont orthogonaux.

5-3 Calcul des racines

Nous calculons les racines de Ψ_m pour $m=3$ et pour le produit scalaire "somme discrète" (5-1-2), cas qui nous intéresse dans ce chapitre. Pour simplifier les formules présentées dans ce paragraphe, on suppose les points ou instants de mesures t_1, t_2, \dots, t_n équirépartis espacés de Δt appelée période de mesures, on prend précisément $t_n = n \Delta t$. Nous verrons au chapitre III que l'on peut s'affranchir de cette restriction.

Les 3 racines de Ψ_3 sont symétriques par rapport à $(t_1+t_n)/2$, racines que l'on écrit $T_0=(t_1+t_n)/2$ $T_1=T_0-\tau$ $T_2=T_0+\tau$; Ψ_3 se factorise comme suit :

$$\Psi_3(t) = (t-T_0) [(t-T_0)^2 - \tau^2]$$

Aussi, d'après (5-2-1), τ est solution de :

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} (t-T_0)^2 [(t-T_0)^2 - \tau^2] = 0$$

et en posant $c_j = \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(t - \frac{t_1+t_n}{2}\right)^j$, on obtient :

$$\tau^2 = \frac{c_4}{c_2} \quad (5-3-1)$$

où (Annexe (II-5-3-1)) :

$$c_0 = n ; c_2 = \frac{n(n^2-1)}{12} \Delta T^2 ; c_4 = \frac{n(n^2-1)(3n^2-7)}{240} \Delta T^4$$

Finalement,

$$\tau = \sqrt{\frac{3n^2-7}{20}} \Delta T \quad (5-3-2)$$

Les polynômes d'interpolation $\{\phi_i\}$ valent :

$$\phi_0(t) = 1 - \frac{(t-T_0)^2}{\tau^2} ; \phi_1(t) = \frac{t-T_0}{2\tau} \left(1 + \frac{t-T_0}{\tau}\right) ; \phi_2(t) = \frac{t-T_0}{2\tau} \left(-1 + \frac{t-T_0}{\tau}\right) \quad (5-3-3)$$

et $\|\phi_i\|^2 = \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t)$ entraîne $\|\phi_0\|^2 = c_0 - \frac{c_2^2}{c_4}$; $\|\phi_1\|^2 = \|\phi_2\|^2 = \frac{c_2^2}{2c_4}$; on trouve :

$$\|\phi_0\|^2 = \frac{4n(n^2-4)}{3(3n^2-7)} ; \|\phi_2\|^2 = \|\phi_1\|^2 = \frac{5n(n^2-1)}{6(3n^2-7)} \quad (5-3-4)$$

6 ESTIMATION DU VECTEUR D'ETAT (θ)

Nous pouvons à présent approcher la matrice d'information de Fisher (FIM) définie en (4-7) à l'aide de la quadrature de Gauss. Dans (4-7), les points d'interpolation $\{T_i\}$ des polynômes de Lagrange $\{\phi_i\}$ sont pris maintenant racines de Ψ_m . On obtient simplement :

$$\text{FIM} \approx \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} (\|\phi_i\|^2) \quad (6-1)$$

l'erreur d'approximation étant de l'ordre de : $\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{r_t^4}\right)$

Le choix du vecteur d'état θ (3-1) a conduit à une FIM *diagonale et quasi-indépendante* de θ alors que l'équation de mesures (2-1) est non-linéaire.

Cela implique qu'un estimateur asymptotiquement efficace de $(\beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2})$ vérifie (CRLB=FIM⁻¹) :

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{T_i}, \hat{\beta}_{T_j}) \approx 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{et} \quad \text{var}(\hat{\beta}_{T_i}) \approx \frac{\sigma^2}{\|\phi_i\|^2} \quad (6-2)$$

On peut dès lors chercher un estimateur linéaire de θ .

6-1 L'estimateur linéaire

(6-2) nous permet d'établir un estimateur de $\theta = (\beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2})$ combinaison linéaire des mesures $\{z_t\}$:

$$\hat{\beta}_{T_i} = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) z_t \quad (6-1-2)$$

Il s'agit d'une moyenne pondérée des mesures puisque :

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i^2(t) = \|\phi_i\|^2$$

On peut aussi analyser cet estimateur de la manière suivante. Le choix des instants $\{T_i\}$ implique que les polynômes $\{\phi_i\}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire (5-1-2). Aussi, $\{\phi_i / \|\phi_i\|\}$ forme une base orthonormée sur l'espace de polynômes de degré 2. Considérons (Pr) l'opérateur de projection sur cette base. Appliquons (Pr) à l'azimut mesuré z_t :

$$\text{Pr}(z)_t = \sum_{i=0}^2 \phi_i(t) \text{Pr}(z)_{T_i} ,$$

$\|\phi_i\| \text{Pr}(z)_{T_i}$ est la composante de $\text{Pr}(z)$ sur $\frac{\phi_i}{\|\phi_i\|}$, aussi,

$$\text{Pr}(z)_{T_i} = \frac{1}{\|\phi_i\|} \langle \text{Pr}(z), \frac{\phi_i}{\|\phi_i\|} \rangle = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_1} \phi_i(t) \text{Pr}(z)_t$$

On voit donc que l'estimateur (6-1-2) est basé sur le fait que l'azimut se comporte comme un polynôme de degré 2 en fonction du temps. Il s'agit maintenant de vérifier l'optimalité des propriétés statistiques de ce nouvel estimateur.

6-2 Propriétés statistiques

Notons d'ores et déjà que la loi de l'estimateur (6-1-2) est exactement connue. Elle est gaussienne puisque les mesures sont supposées gaussiennes indépendantes. Ce n'est pas le cas de l'estimateur classique du maximum de vraisemblance dont la loi n'est qu'asymptotiquement gaussienne de matrice de covariance la CRLB.

BIAIS

(6-1-2) donne directement :

$$E(\hat{\beta}_{T_i}) = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) E(z_t) = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \beta_t \stackrel{(QG)}{\approx} \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{j=0}^2 \|\phi_j\|^2 \phi_i(T_j) \beta_{T_j} = \beta_{T_i}$$

Le biais de l'estimateur est de l'ordre de $\beta^{(4)}(t)$. On voit de nouveau que, si l'azimut se comporte comme un polynôme de degré 2, le biais est négligeable.

EFFICACITE

Calculons la matrice de covariance de l'estimateur en rappelant que $\text{cov}(z_t, z_{t'})=0$ si $t \neq t'$ et $\text{var}(z_t)=\sigma^2$,

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{T_i}, \hat{\beta}_{T_j}) = \frac{1}{\|\phi_i\|^2 \|\phi_j\|^2} \sum_{t, t'=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \phi_j(t') \text{cov}(z_t, z_{t'}) = \frac{\sigma^2}{\|\phi_i\|^2 \|\phi_j\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \phi_j(t)$$

et, en vertu de l'orthogonalité des $\{\phi_i\}$, la matrice de covariance Ω de l'estimateur s'écrit :

$$\Omega = \text{diag} \left(\frac{\sigma^2}{\|\phi_i\|^2} \right) \quad (6-2-1)$$

Précisément on a, suivant (5-3-4), pour n grand :

$$\text{var}(\hat{\beta}_{T_0}) = \sigma^2 \frac{3(3n^2-7)}{4n(n^2-4)} \approx \frac{9}{4} \frac{\sigma^2}{n} ; \text{var}(\hat{\beta}_{T_2}) = \text{var}(\hat{\beta}_{T_1}) = \sigma^2 \frac{6(3n^2-7)}{5n(n^2-1)} \approx \frac{18}{5} \frac{\sigma^2}{n}$$

En rapprochant (6-2-1) de (6-1) on conclut que Ω est proche de la CRLB c'est à dire que l'estimateur linéaire (6-1-2) est quasi-efficace.

La matrice de covariance Ω ayant une expression simple il devient intéressant de revenir au modèle polaire modifié (2-2) afin d'évaluer les variances des estimations efficaces de la vitesse angulaire (v_β) et de la vitesse radiale relative (v_r) à l'instant T_0 .

6-3 Variance des estimées du modèle polaire modifié

A l'aide de (3-8) nous estimons la vitesse angulaire (v_β) et la vitesse radiale (v_r) relative à l'instant T_0 , avec $\tau = T_0 - T_1 = T_2 - T_0$, comme suit :

$$v_\beta = -2 \frac{\sin(\hat{\beta}_{T_0} - \hat{\beta}_{T_1}) \sin(\hat{\beta}_{T_0} - \hat{\beta}_{T_2})}{\tau \sin(\hat{\beta}_{T_2} - \hat{\beta}_{T_1})} \quad v_r = - \frac{\sin(\hat{\beta}_{T_2} + \hat{\beta}_{T_1} - 2\hat{\beta}_{T_0})}{\tau \sin(\hat{\beta}_{T_2} - \hat{\beta}_{T_1})} \quad (6-3-1)$$

Effectuons un développement de Taylor de v_r (idem pour v_β) au 1^{er} ordre autour de θ :

$$dv_r \approx \frac{\partial v_r}{\partial \beta_{T_1}} d\beta_{T_1} + \frac{\partial v_r}{\partial \beta_{T_0}} d\beta_{T_0} + \frac{\partial v_r}{\partial \beta_{T_2}} d\beta_{T_2} \quad \text{où} \quad d\beta_{T_i} = \hat{\beta}_{T_i} - \beta_{T_i} ; \quad dv_r = \hat{v}_r - v_r$$

On obtient après quelques calculs (Annexe (II-6-3-1)) :

$$\text{var}(\hat{v}_r) \approx \frac{12\sigma^2}{n\Delta T^2} \left[\frac{5\cos^2(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0})}{(n^2 - 4)\sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} + \frac{2\sin^4(2(\beta_{T_2} - \beta_{T_0})) + 2\sin^4(2(\beta_{T_1} - \beta_{T_0}))}{(n^2 - 1)\sin^4(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \right] \quad (6-3-2)$$

$$\text{var}(\hat{v}_\beta) \approx \frac{12\sigma^2}{n\Delta T^2} \left[\frac{5\sin^2(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0})}{(n^2 - 4)\sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} + \frac{8\sin^4(\beta_{T_2} - \beta_{T_0}) + 8\sin^4(\beta_{T_1} - \beta_{T_0})}{(n^2 - 1)\sin^4(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \right] \quad (6-3-3)$$

Le calcul se mène assez facilement étant donnée l'indépendance des estimées de β_{T_i} .

Ces formules se simplifient notablement lorsque $tlv/|r|$ est petit (déplacement relatif faible par rapport à la distance) car alors τv_r et τv_β sont petits et on peut faire les approximations suivantes dans (6-3-2) et (6-3-3) :

$$\cos^2(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0}) \approx 1 ; \quad \sin^2(\beta_{T_i} - \beta_{T_j}) \approx (T_i - T_j)^2 v_\beta^2$$

pour obtenir :

$$\text{var}(\hat{v}_r) \approx \frac{180 \sigma^2}{n(n^2-4)(n^2-1)v_\beta^2 \Delta T^4} \quad (6-3-4)$$

$$\text{var}(\hat{v}_\beta) \approx \frac{12 \sigma^2}{n(n^2-1) \Delta T^2} \quad (6-3-5)$$

On observe sur (6-3-4) que la variance de la vitesse radiale relative est inversement proportionnelle au carré de v_β , on retrouve le fait que v_r n'est pas observable lorsque l'azimut reste constant au cours du temps. Notons que l'estimation de la vitesse angulaire (6-3-5) a une variance indépendante du vecteur d'état.

6-4 Correcteur de biais

Nous avons établi les performances de l'estimateur linéaire sous l'hypothèse, en pratique réalisée, d'une faible variation de la distance durant l'intervalle d'observation à savoir que :

- $|r_t|/|r_{T_0}|$ est proche de 1 ou
- $|r_t|^{-2}$ est approché par un polynôme de degré 2

Si tel n'est plus le cas, le biais de l'estimateur $\hat{\theta}$

$$b_i(\hat{\beta}_{T_i}) = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_2} \phi_i(t) \beta_t(\beta_{T_1}, \beta_{T_0}, \beta_{T_2}) - \beta_{T_i} \quad (6-4-1)$$

peut se dégrader ($\|b\|$ n'est plus négligeable). Dans cette situation on est amené à utiliser un estimateur amélioré, un correcteur de biais $\hat{\theta}^{(cor)}$ solution de l'équation suivante :

$$X = \hat{\theta} - b(X) \quad (6-4-2)$$

où b est défini en (6-4-1). L'existence et l'unicité d'une telle solution sont garanties par le théorème du point fixe ($\|\partial b / \partial \theta\| < 1$). En effet, en dérivant (6-4-1) on a :

$$\partial b / \partial \theta = K^{-1}H - I$$

où : $K = \text{diag}(\|\phi_i\|^2)$ et H défini par : $H_{ij} = \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \phi_j(t) \frac{|r_{T_j}|^2}{|r_t|^2}$; $i, j=0,1,2$

En appliquant la (QG) à H_{ij} on trouve que $H \approx K$

En pratique (6-4-2) se résout de manière itérative par la formule suivante :

$$\hat{\beta}_{T_i}^{(\text{cor})}(k+1) = \hat{\beta}_{T_i} - \hat{b}(\hat{\beta}_{T_i}^{(\text{cor})}(k)) \quad i=0, 1, 2 \quad (6-4-3)$$

avec :

$$\hat{\beta}_{T_i}^{(\text{cor})}(0) = \hat{\beta}_{T_i}$$

l'estimateur linéaire initial. La convergence de ce processus est très rapide car $\|\partial b / \partial \theta\|$ est faible. Les simulations montrent qu'une itération suffit (rarement plus), on obtient alors l'estimateur suivant :

$$\hat{\beta}_{T_i}^{(\text{cor})}(1) = \frac{2}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) z_t - \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \beta_t(\hat{\beta}_{T_1}, \hat{\beta}_{T_0}, \hat{\beta}_{T_2}) \quad (6-4-4)$$

où $\beta_t(\hat{\beta}_{T_i})$ est calculé à partir de (3-2).

Remarque :

l'estimateur amélioré reste efficace. En effet, en utilisant un développement de Taylor de b autour de θ ,

$$b(\hat{\theta}^{(\text{cor})}) \approx b(\theta) + (\hat{\theta}^{(\text{cor})} - \theta) \frac{\partial b}{\partial \theta},$$

on obtient :

$$\left[I + \frac{\partial b}{\partial \theta} \right] (\hat{\theta}^{(\text{cor})} - \theta) \approx \hat{\theta} - \theta - b(\theta)$$

d'où sa matrice de covariance vaut :

$$\hat{\Omega}_\theta^{(cor)} \approx \left[I + \frac{\partial b}{\partial \theta} \right] \hat{\Omega}_\theta \left[I + \frac{\partial b}{\partial \theta} \right]^T$$

qui reste pratiquement inchangée ($\|\partial b / \partial \theta\|$ petit).

7 SIMULATIONS

Un grand nombre de simulations ont été effectuées en faisant varier les paramètres géométriques pertinents. Les scénarios présentés sont basés sur la géométrie initiale, suivante :

- la position à l'instant initial du porteur est à l'origine ($x_p(t_1)=y_p(t_1)=0$)
- la durée de l'intervalle d'observation est fixée à 1000s
- la vitesse du porteur est figée à 10m/s
- le cap du porteur est fixé à 90°
- la période de mesures Δt vaut 4s
- l'écart-type du bruit de mesures σ est fixé à $0,1^\circ$
- la distance bruiteur-porteur à l'instant médian est de 10 km

et les différents scénarios sont définis à partir des 2 paramètres suivants :

- $\alpha_1 = |r_{t_0} - r_{t_1}| / r_{T_0}$
- $\alpha_2 = \arg[(r_{t_0} - r_{t_1}) / r_{T_0}]$

où α_1 varie dans $[0.2, 0.6]$ et α_2 dans $[0, 90^\circ]$.

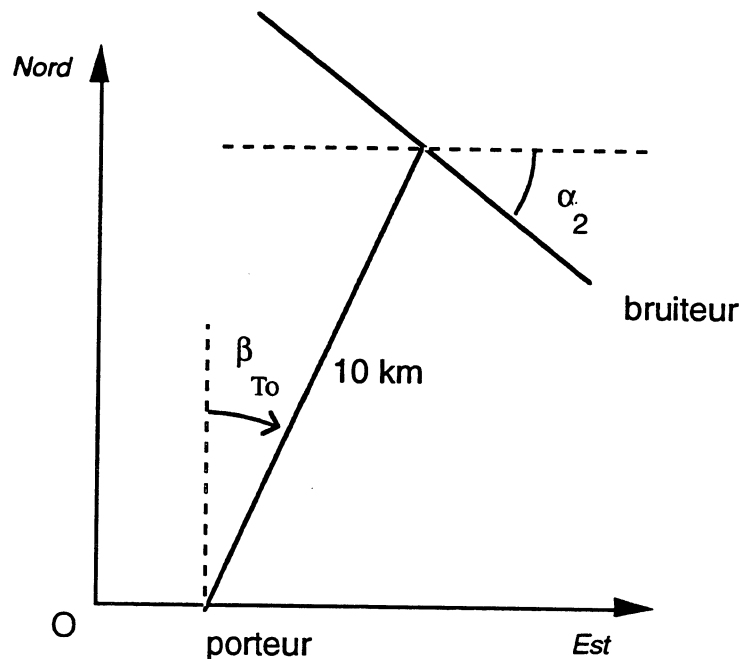


Figure (7-1) : géométrie à la base des simulations

Pour chaque géométrie nous avons effectué 120 tirages Monte-Carlo.

Les tableaux (1 à 3) ci-après présentent les résultats statistiques des estimations du modèle polaire modifié ($\beta_{T_0}, v\beta, v_T$) et du modèle des 3 mesures ($\beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2}$) à savoir :

- le biais exprimé en radians
- l'efficacité (rapport de l'écart-type théorique de la CRLB par l'écart-type empirique)
- la covariance $\text{cov}(\hat{\beta}_{T_1}, \hat{\beta}_{T_2})$ théorique (CRLB) et empirique

A titre indicatif ($n=250, \sigma=0.1^\circ$) nous donnons les écarts-type des estimées :

$$\sigma(\hat{\beta}_{T_0}) \approx 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ deg} \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ rd} ; \sigma(\hat{\beta}_{T_1}) = \sigma(\hat{\beta}_{T_2}) \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ deg} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ rd}$$

Tableau 1 biais et efficacité des estimations suivantes en fonction de α_1 et α_2 :
 1ère ligne : β_{T_0} (rd) ; 2ème ligne : v_β (rd/s) ; 3ème ligne : v_r (1/s) 4ème ligne : β_{T_1} (rd) ;
 5ème ligne : β_{T_2} (rd) ; 6ème ligne : $\text{cov}(\hat{\beta}_{T_1}, \hat{\beta}_{T_2})$ issue de la CRLB et cov empirique

α_2	$\alpha_1 = 0,2$		$\alpha_1 = 0,4$		$\alpha_1 = 0,6$	
15°	-533E-4	.926E+0	-826E-4	.945E+0	-216E-3	.976E+0
	+471E-6	.993E+0	+253E-6	.958E+0	+436E-6	.955E+0
	+129E-4	.956E+0	+946E-5	.946E+0	+157E-4	.944E+0
	+956E-4	.922E+0	+123E-3	.929E+0	+260E-3	.940E+0
	-465E-5	.956E+0	+158E-4	.964E+0	+103E-3	.977E+0
	-232E-7	-150E-6	-927E-7	+126E-7	-207E-6	-152E-6
30°	-533E-4	.925E+0	-815E-4	.939E+0	-203E-3	.961E+0
	+194E-6	.958E+0	+111E-6	.939E+0	+314E-6	.946E+0
	+651E-5	.947E+0	+477E-5	.943E+0	+773E-5	.942E+0
	+955E-4	.921E+0	+119E-3	.926E+0	+226E-3	.933E+0
	-462E-5	.956E+0	+163E-4	.962E+0	+103E-3	.972E+0
	-175E-7	-126E-7	-692E-7	+728E-7	-151E-6	-460E-7
45°	-514E-4	.923E+0	-503E-4	.930E+0	-396E-4	.942E+0
	+102E-6	.951E+0	+294E-7	.943E+0	+463E-7	.941E+0
	+442E-5	.945E+0	+210E-5	.943E+0	.103E-5	.942E+0
	.939E-4	.921E+0	+901E-4	.923E+0	+590E-4	.925E+0
	-601E-5	.955E+0	-478E-5	.959E+0	-891E-7	.966E+0
	-997E-8	+11E-6	-383E-7	-100E-6	-803E-7	+154E-6
60°	-495E-4	.921E+0	-212E-4	.923E+0	+100E-3	.925E+0
	+561E-7	.948E+0	-244E-7	.942E+0	-131E-6	.939E+0
	+349E-5	.944E+0	+747E-6	.942E+0	-236E-5	.942E+0
	+924E-4	.920E+0	+670E-4	.920E+0	-474E-4	.918E+0
	-749E-5	.954E+0	-273E-4	.955E+0	-106E-3	.959E+0
	-242E-8	-175E-6	-848E-8	+196E-6	-148E-7	-269E-6
75°	-495E-4	.919E+0	-222E-4	.917E+0	+900E-4	.913E+0
	+297E-7	.946E+0	-502E-7	.942E+0	-153E-6	.940E+0
	+315E-5	.944E+0	+732E-6	.942E+0	-188E-5	.942E+0
	+925E-4	.919E+0	+720E-4	.918E+0	-712E-5	.915E+0
	-759E-5	.953E+0	-299E-4	-173E-7	-122E-3	.953E+0
	+305E-8	+237E-6	+126E-7	-425E-8	+297E-7	-331E-8
90°	-514E-4	.919E+0	-514E-4	.915E+0	-514E-4	.909E+0
	+149E-7	.946E+0	-678E-7	.942E+0	-151E-6	.941E+0
	+318E-5	.944E+0	+162E-5	.942E+0	+11E-5	.942E+0
	.941E-4	.919E+0	+973E-4	.918E+0	.177E-3	.916E+0
	-618E-5	.953E+0	-937E-5	.951E+0	-297E-4	.949E+0
	+505E-8	-188E-7	+202E-7	-115E-7	+455E-7	-4549E-7

Tableau 2 biais et efficacité des estimations suivantes en fonction de α_1 et α_2 :

1ère ligne : β_{T_0} (rd) ; 2ème ligne : v_β (rd/s) ; 3ème ligne : v_r (1/s) 4ème ligne : β_{T_1} (rd) ;
5ème ligne : β_{T_2} (rd) ; 6ème ligne : $\text{cov}(\hat{\beta}_{T_1}, \hat{\beta}_{T_2})$ issue de la CRLB et cov empirique

α_2	$\alpha_1 = 0,8$		$\alpha_1 = 1$		$\alpha_1 = 1,2$				
15°	-	.607E-3	.980E+0	-	.152E-2	.931E+0	-	.344E-2	.881E+0
		+.140E-5	.962E+0		+.440E-5	.977E+0		+.121E-4	.998E+0
		+.317E-4	.942E+0		+.603E-4	.941E+0		+.105E-3	.938E+0
		+.704E-3	.952E+0		+.186E-2	.960E+0		+.456E-2	.956E+0
		+.342E-3	.996E+0		+.872E-3	.979E+0		+.192E-2	.948E+0
		-.366E-6	-.868E-7		-.561E-6	-.345E-7		-.781E-6	+.141E-6
30°	-	.526E-3	.991E+0	-	.118E-2	.973E+0	-	.228E-2	.939E+0
		+.113E-5	.949E+0		+.333E-5	.954E+0		+.795E-5	.961E+0
		+.145E-4	.942E+0		+.251E-4	.941E+0		+.383E-4	.941E+0
		+.509E-3	.939E+0		+.105E-2	.942E+0		+.180E-2	.939E+0
		+.327E-3	.987E+0		+.771E-3	.993E+0		+.151E-2	.971E+0
		-.257E-6	+.470E-7		-.378E-6	+.208E-6		-.497E-6	-.596E-7
45°	-	.142E-4	.957E+0	-	.194E-3	.974E+0	-	.658E-3	.989E+0
		+.109E-6	.939E+0		+.126E-6	.937E+0		-.238E-6	.933E+0
		-.483E-6	.942E+0		-.367E-5	.942E+0		-.100E-4	.943E+0
		-.776E-4	.925E+0		-.496E-3	.923E+0		-.150E-2	.916E+0
		+.481E-5	.975E+0		-.114E-4	.988E+0		-.101E-3	.996E+0
		-.128E-6	-.284E-6		-.173E-6	-.720E-7		-.205E-6	+.367E-6
60°	-	.425E-3	.927E+0	-	.109E-2	.929E+0	-	.226E-2	.929E+0
		-.483E-6	.936E+0		-.142E-5	.932E+0		-.346E-5	.926E+0
		-.757E-5	.942E+0		-.158E-4	.942E+0		-.278E-4	.943E+0
		-.360E-3	.915E+0		-.100E-2	.910E+0		-.210E-2	.903E+0
		-.305E-3	.964E+0		-.692E-3	.970E+0		-.133E-2	.978E+0
		-.168E-7	-.843E-7		-.956E-8	+.628E-8		+.110E-7	+.247E-7
75°	-	.370E-3	.907E+0	-	.908E-3	.900E+0	-	.177E-2	.892E+0
		-.457E-6	.938E+0		-.120E-5	.936E+0		-.272E-5	.933E+0
		-.601E-5	.942E+0		-.121E-4	.942E+0		-.204E-4	.942E+0
		-.187E-3	.911E+0		-.489E-3	.907E+0		-.896E-3	.902E+0
		-.352E-3	.954E+0		-.792E-3	-.955E-7		-.150E-2	.958E+0
		+.557E-7	-.250E-7		+.912E-7	+.239E-6		+.136E-6	+.712E-8
90°	-	.514E-4	.900E+0	-	.514E-4	.890E+0	-	.514E-4	.879E+0
		-.364E-6	.940E+0		-.875E-6	.940E+0		-.191E-5	.940E+0
		.868E-6	.942E+0		+.728E-6	.941E+0		+.642E-6	.941E+0
		.186E-3	.913E+0		+.348E-3	.911E+0		+.660E-3	.910E+0
		-.980E-4	.947E+0		-.260E-3	.945E+0		-.572E-3	.943E+0
		+.806E-7	+.910E-7		+.124E-6	-.251E-6		+.177E-6	-.514E-7

Tableau 3 biais et efficacité des estimations suivantes en fonction de α_1 et α_2 :
 1ère ligne : β_{T_0} (rd) ; 2ème ligne : v_β (rd/s) ; 3ème ligne : v_r (1/s) 4ème ligne : β_{T_1} (rd) ;
 5ème ligne : β_{T_2} (rd) ; 6ème ligne : $\text{cov}(\hat{\beta}_{T_1}, \hat{\beta}_{T_2})$ issue de la CRLB et cov empirique

α_2	$\alpha_1 = 1,4$		$\alpha_1 = 1,6$		
15°	-	-.716E-2	.839E+0	-.138E-1	.811E+0
	-	+.301E-4	.969E+0	+.684E-4	.938E+0
	-	+.169E-3	.933E+0	+.249E-3	.919E+0
	-	+.103E-1	.931E+0	+.213E-1	.881E+0
	-	+.386E-2	.912E+0	+.726E-2	.871E+0
	-	-.100E-5	+.661E-7	-.118E-5	+.126E-7
30°	-	-.382E-2	.909E+0	-.552E-2	.888E+0
	-	+.160E-4	.966E+0	+.276E-4	.967E+0
	-	+.509E-4	.940E+0	+.579E-4	.940E+0
	-	+.231E-2	.926E+0	+.139E-2	.905E+0
	-	+.256E-2	.946E+0	+.385E-2	.920E+0
	-	-.598E-6	-.533E-8	-.659E-6	-.661E-7
45°	-	+.164E-2	.997E+0	+.345E-2	.989E+0
	-	-.174E-5	.928E+0	-.568E-5	.920E+0
	-	-.211E-4	.945E+0	-.385E-4	.949E+0
	-	-.350E-2	.906E+0	-.687E-2	.892E+0
	-	-.354E-3	.980E+0	-.88E-3	.964E+0
	-	-.213E-6	+.122E-6	-.192E-6	-.700E-8
60°	-	+.408E-2	.927E+0	+.666E-2	.923E+0
	-	-.730E-5	.919E+0	-.137E-4	.911E+0
	-	-.439E-4	.945E+0	-.643E-4	.947E+0
	-	-.369E-2	.895E+0	-.574E-2	.887E+0
	-	-.230E-2	.988E+0	-.364E-2	.998E+0
	-	+.472E-7	-.511E-7	+.991E-7	+.100E-6
75°	-	+.303E-2	.882E+0	+.470E-2	.871E+0
	-	-.541E-5	.931E+0	-.971E-5	.928E+0
	-	-.309E-4	.942E+0	-.436E-4	.942E+0
	-	-.134E-2	.898E+0	-.176E-2	.894E+0
	-	-.252E-2	.962E+0	-.388E-2	.967E+0
	-	+.252E-6	-.221E-7	+.252E-6	-.173E-7
90°	-	-.514E-4	.867E+0	-.5151E-4	.854E+0
	-	-.376E-5	.941E+0	-.675E-5	.942E+0
	-	.585E-6	.941E+0	+.549E-6	.940E+0
	-	+.117E-2	.910E+0	+.193E-2	.910E+0
	-	-.108E-2	.943E+0	-.184E-2	.944E+0
	-	+.235E-6	-.119E-6	+.299E-6	+.711E-7

On constate bien que si l'hypothèse sur la variation de la distance ($\alpha_1 < 0.8$) est vérifiée l'estimateur est non biaisé et efficace. Au fur et à mesure que α_1 croît, le biais se dégrade ainsi que (moins nettement) l'efficacité. En outre, on observe sur la ligne des covariances que les estimateurs des 3 azimuts sont quasi-indépendants.

Pour mettre en évidence l'intérêt du correcteur de biais (6-4-3) nous avons traité le scénario ($\alpha_1=1, \alpha_2=15^\circ$), le nombre d'itérations variant de 0 (estimateur initial) à 3. Nous résumons les résultats dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4 biais et efficacité de l'estimateur "correcteur de biais"

nb ité	$\hat{\beta}_{T_1}$		$\hat{\beta}_{T_0}$		$\hat{\beta}_{T_2}$	
	biais	efficacité	biais	efficacité	biais	efficacité
0	.165 10 ⁻²	.939	-.147 10 ⁻²	.930	.998 10 ⁻³	.941
1	-.660 10 ⁻³	.942	.368 10 ⁻³	.997	-.771 10 ⁻⁴	.951
2	-.229 10 ⁻⁴	.938	-.686 10 ⁻⁴	.957	.157 10 ⁻³	.934
3	-.164 10 ⁻³	.940	.307 10 ⁻⁴	.971	.103 10 ⁻³	.940

On remarque que le biais diminue quand le nombre d'itérations augmente ceci sans dégrader l'efficacité. Il est inutile de dépasser 2 itérations.

8 CONCLUSION

Nous avons mis en évidence l'intérêt d'un nouveau type d'estimateur pour la trajectographie partielle par mesures d'azimuts présentant d'aussi bonnes propriétés statistiques que les méthodes globales d'estimation tout en ne nécessitant qu'un très faible coût de calcul.

L'estimateur du maximum de vraisemblance jusqu'alors utilisé possède la propriété d'être asymptotiquement non biaisé et efficace. Cependant sa mise en oeuvre nécessite un coût de calcul assez élevé et de plus il peut, dans certains cas, rencontrer des problèmes de convergence.

La particularité de la nouvelle méthode proposée réside dans le modèle de représentation utilisé pour la caractérisation de la famille des trajectoires possibles du bruiteur. Ce modèle se résume à trois azimuts correspondant à trois instant bien précis de l'intervalle d'observation. La vitesse angulaire et la vitesse radiale relative sont alors simplement déterminées à partir de ce modèle. Le modèle d'estimation proposé, qui est une combinaison linéaire des azimuts mesurés sur l'intervalle d'observation, est très simple à mettre en oeuvre.

Les trois instants caractéristiques de l'intervalle d'observation sont déterminés de manière à ce que, sous l'hypothèse en pratique peu restrictive sur la variation de la distance relative au cours du scénario, l'estimateur soit non biaisé et sa matrice de covariance atteigne la borne de Cramer-Rao. Dans le cas où cette hypothèse n'est plus vérifiée, une version avec correction de biais de cet estimateur présentant les mêmes propriétés statistiques a été étudiée. Le volume de calcul supplémentaire nécessaire à son implémentation est pratiquement négligeable. Bien sûr, on peut exhiber des scénarios, où par exemple la distance observateur-bruiteur est faible, qui peuvent dégrader les performances de l'estimateur linéaire.

En outre, l'un des intérêts de ce nouvel estimateur est de connaître de manière précise et explicite sa matrice de covariance, et ce sans même connaître la loi des bruits de mesures, ce qui n'est pas le cas pour l'estimateur du maximum de vraisemblance.

CHAPITRE III

**TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES
D'AZIMUTS**

1.INTRODUCTION

Nous venons d'étudier une méthode de trajectographie dite partielle (TPPA) car elle n'estime qu'une partie des paramètres cinématiques de la cible. Nous abordons dans ce chapitre le domaine de la trajectographie par mesures d'azimuts (TPA) où le but, cette fois, est d'estimer complètement le vecteur d'état de la cible. Il est bien connu [7] que cette estimation n'est possible que si le porteur effectue une manoeuvre, la cible est toujours supposée être animée d'un mouvement rectiligne uniforme (MRU). Cette manoeuvre (ou accélération) peut être obtenue par une variation du module de la vitesse mais, le plus souvent, le porteur est à vitesse constante et change de cap.

A partir des années 80, le développement de l'informatique a permis un effort particulier dans ce domaine [2]. Au début, les méthodes d'estimations sont basées sur le Filtre de Kalman (étendu : EKF) mais sont abandonnées au profit des méthodes "globales", méthodes qui traitent les mesures en bloc. Ainsi, on s'affranchit des problèmes fréquents de convergence rencontrés avec l'EKF. Ces problèmes sont dus à la phase inobservable, phase où les deux mobiles sont en MRU. Différentes versions de l'EKF sont alors proposées en choisissant des vecteurs d'état plus adaptés [1]. L'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE : Maximum Likelihood Estimator) reste lourd en temps de calcul. D'autres méthodes globales, relevant du critère du maximum de vraisemblance, sont développées ([2], [19]). Les plus rapides d'entre elles sont la PLE [2] (Pseudo-Linéaire Estimator) et la MIV [2] (Modified Instrumental Variable). La PLE, méthode très rapide et non itérative, est malheureusement fortement biaisée alors que la MIV, méthode itérative corrigeant ce biais, est difficile à maîtriser (critère d'arrêt de convergence de l'algorithme). De plus, la MIV n'a pas de bases théoriques rigoureuses, elle reste une méthode heuristique. Notons qu'il existe une autre classe d'estimateurs qui gèrent les fausses mesures ou fausses alarmes. Elle comprend des méthodes récursives comme le Probabilistic Data Association Filter (PDAF) [20] et des méthodes globales ([21], [22])

Nous proposons une méthode approchée de résolution d'une classe d'estimateurs du maximum de vraisemblance dans un cadre non-linéaire. Elle s'applique lorsque le paramètre vectoriel à estimer peut se caractériser par un "échantillon" issu du signal F_t émis. On suppose de plus que F_t varie peu avec le temps t . Cette méthode donne lieu à un estimateur linéaire très rapide quasi non-biaisé et efficace qui généralise directement celui de la TPPA (quadrature de Gauss). Nous l'appliquons au domaine de la TPA en choisissant comme vecteur d'état 4 azimuts pris en des temps particuliers. Ce vecteur est estimé par moyenne pondérée des azimuts mesurés. Les performances statistiques de cet estimateur sont correctes lorsque le porteur effectue au plus 2 changements des caps. Ce chapitre a donné lieu à une publication [23].

2.L'ESTIMATEUR LINEAIRE

Nous rappelons brièvement l'équation du maximum de vraisemblance lorsque le signal temporel mesuré est gaussien. Nous exhibons un estimateur linéaire qui, sous certaines hypothèses, possède les propriétés statistiques de l'estimateur classique du maximum de vraisemblance.

2-1. Formulation du problème

Soit F_t un signal temporel corrompu par un bruit blanc gaussien additif. On suppose que ce signal dépend de façon non-linéaire d'un vecteur d'état Y de dimension m , $Y=(Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1})$. On dispose de n mesures vérifiant :

$$f_t = F_t(Y) + \varepsilon_t \quad ; \quad t=t_1, t_2, \dots, t_n \quad (2-1-1)$$

où ε_t est une variable aléatoire gaussienne d'espérance nulle et telle que $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'})=0$ si $t \neq t'$; $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$. σ est supposé connu.

L'estimateur du maximum de vraisemblance est alors solution de la minimisation suivante :

$$\min_Y \sum_{t=t_1}^{t_n} (f_t - F_t(Y))^2 \quad (2-1-2)$$

Cette minimisation se traite classiquement par une méthode de type gradient conjugué (Gauss-Newton ou Fletcher-Powell [15], [16]). Il est clair que pour $m > 2$ (2-1-2) se résout par un prix élevé en temps de calcul.

2-2. Choix du modèle

Nous faisons l'hypothèse que le signal F_t peut être paramétré par un vecteur X composé par m valeurs de F_t pris en des temps notés $(T_0, T_1, \dots, T_{m-1})$:

$$F_t = F_t(X) \quad \forall t \quad \text{où} \quad X = (F_{T_0}, F_{T_1}, \dots, F_{T_{m-1}}) \quad (2-2-1)$$

Il existe donc une relation biunivoque qui transforme Y en X . Les temps $\{T_i\}$ sont choisis, comme au chapitre précédent (5-2-1), racines du polynôme de Legendre Ψ_m de degré m orthogonal à $[1, t, t^2, \dots, t^{m-1}]$ pour le produit scalaire "somme discrète" :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_n} f(t) g(t) \quad (2-2-2)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} t^j \Psi_m(t) = 0 \quad \text{pour } j=0,1,\dots,m-1 \quad (2-2-3)$$

2-3. Equation du maximum de vraisemblance

Soit Q le critère quadratique que l'on veut minimiser par rapport à X :

$$Q(X) = \sum_{t=t_1}^{t_n} (f_t - F_t(X))^2 \quad (2-3-1)$$

Nous supposons que le signal F_t a une *variation lente avec le temps*, c'est à dire que F_t peut s'approcher par un polynôme de bas degré (de l'ordre de m). Dès lors interpolons ce signal à l'aide des polynômes de Lagrange $\{\phi_i ; i=0, 1, \dots, m-1\}$, définis en (4-5), basés sur les racines $\{T_i\}$:

$$F_t(X) \approx \sum_{i=0}^{m-1} \phi_i(t) F_{T_i} \quad (2-3-2)$$

Le gradient approché du critère (2-3-1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial X_j} \approx 2 \sum_{t=t_1}^{t_n} [f_t - F_t(X)] \frac{\partial F_t(X)}{\partial X_j} = 2 \sum_{t=t_1}^{t_n} \left[f_t - \sum_{i=0}^{m-1} \phi_i(t) F_{T_i} \right] \phi_j(t)$$

Annulons ce gradient :

$$\frac{\partial Q}{\partial X_j} = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_j(t) f_t = \sum_{i=0}^{m-1} \left[F_{T_i} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \phi_j(t) \right]$$

Or la famille $\{\phi_i\}$ est orthogonale (5-2), ce qui donne le minimum :

$$\hat{X}_j = \hat{F}_{T_j} = \frac{1}{\|\phi_j\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_j(t) f_t \quad (2-3-3)$$

L'estimateur solution approchée du maximum de vraisemblance est donc une moyenne pondérée des mesures. On retrouve l'estimateur proposé pour la TPPA au chapitre précédent.

Remarque : (2-3-2) n'est pas optimal pour la norme uniforme puisque l'erreur d'interpolation minimale s'obtient [18] lorsque les points d'interpolation sont les racines ξ_i du polynôme de Tchebychev (et non les racines du polynôme de Legendre) :

$$\xi_i = -\cos\left(\frac{2i+1}{2n+1}\pi\right) \quad ; \quad i=0, 1, 2, \dots, m-1 \quad ; \quad \text{sur l'intervalle } [-1,1]$$

Le choix des points T_i a pour but de rendre la famille $\{\phi_i\}$ orthogonale ou si l'on préfère de préserver le maximum d'information (au sens de Fisher) dans les estimées linéaires des $\{F_{T_i}\}$, fait que l'on démontre grâce à la quadrature de Gauss.

2-4. Propriétés

L'estimateur est gaussien, quasi-non biaisé et efficace. La démonstration se déroule de la même manière qu'au chapitre II.

BIAIS

$$E[\hat{F}_T] = \frac{1}{\|\phi_j\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_j(t) F_t \stackrel{(QG)}{\approx} \frac{1}{\|\phi_j\|^2} \sum_{i=0}^{m-1} \|\phi_i\|^2 \phi_j(T_i) F_{T_i} = F_{T_j}$$

On voit par la quadrature de Gauss que le biais est faible, il est proportionnel à $\frac{\partial^{(m+1)} F_t}{\partial t^{m+1}}$

EFFICACITE

La matrice de covariance Ω de l'estimateur (2-3-3) a pour élément général :

$$\Omega_{i,j} = \frac{1}{\|\phi_j\|^2 \|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \sum_{t'=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \phi_j(t') \text{cov}[f_t, f_{t'}] =$$

$$\frac{\sigma^2}{\|\phi_i\|^2 \|\phi_j\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \phi_j(t) = \begin{pmatrix} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{\sigma^2}{\|\phi_i\|^2} & \text{si } i=j \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, la matrice de covariance est diagonale, les estimateurs (2-3-4) sont donc indépendants. On note bien sûr que cette matrice ne dépend pas de X . Evaluons à présent la matrice de Fisher (FIM) à partir de (2-2-1). Son terme général vaut :

$$FIM_{i,j} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\frac{\partial F_t(X)}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial F_t(X)}{\partial X_j} \right) \stackrel{(QG)}{\approx} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{p=0}^{m-1} \|\phi_p\|^2 \left(\frac{\partial F_t(X)}{\partial X_i} \right)_{t=T_p} \left(\frac{\partial F_t(X)}{\partial X_j} \right)_{t=T_p},$$

or,

$$\frac{\partial F_t(X)}{\partial X_i} = \frac{\partial F_{T_i}(X)}{\partial F_{T_i}} = \begin{cases} 1 & \text{si } t=T_i \\ 0 & \text{si } t=T_j \quad j \neq i \end{cases}$$

Finalement :

$$FIM \approx \text{diag} (\|\phi_i\|^2) / \sigma^2 \quad (2-4-1)$$

L'erreur introduite par la quadrature de Gauss est majorée par un terme proportionnel à :

$$\frac{\partial^{(m)} F_t}{\partial t^m}$$

On conclut que l'estimateur est quasi-efficace si F_t varie lentement avec le temps, par exemple comme un polynôme de degré $(m-1)$. Notons que la trace de la FIM vaut n/σ^2 .

3. CALCUL DES RACINES

Nous avons donné au chapitre précédent (II-5-3) l'expression des racines T_i de Ψ_m dans le cas où $m \leq 3$ et où les mesures f_t ($t=t_1, t_2, \dots, t_n$) sont espacées régulièrement. Or, dans les domaines d'application (TPPA, TPA, ...) de l'estimateur linéaire (2-3-3), il peut se produire des "trous de mesures", c'est à dire des zones temporelles aveugles. En fait, quand les mesures sont espacées de manière quelconque, une méthode rapide permet de calculer explicitement les racines si ($m \leq 4$) et de manière itérative pour m quelconque.

Il suffit, en effet, d'appliquer une procédure d'orthogonalisation (Gramm-Schmidt [15]) de la base $[1, t, t^2, \dots, t^{m+1}]$ des polynômes de degré $(m+1)$. On obtient alors la formule de récurrence à 3 termes suivante :

$$\Psi_{m+1}(t) = (t - \beta_m) \Psi_m(t) - \gamma_m \Psi_{m-1}(t) \quad (3-1)$$

avec (le produit scalaire est défini en (2-2-2)):

$$\beta_m = \frac{\langle t\Psi_m, \Psi_m \rangle}{\|\Psi_m\|^2}, \quad \gamma_m = \frac{\|\Psi_m\|^2}{\|\Psi_{m-1}\|^2}$$

et :

$$\Psi_1(t) = t - \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} t \right) / n; \quad \Psi_0(t) = 1 \quad \forall t$$

Rappelons que toutes les racines de Ψ_m sont toutes réelles et simples. La méthode la plus rapide pour calculer ces racines est l'algorithme de Laguerre [15] :

$$t_{k+1} = t_k - \frac{m\Psi_m(t_k)}{\Psi'_m(t_k) \pm \sqrt{H_m(t_k)}} \quad (3-2)$$

où :

$$H_m(t) = (m-1) \left[(m-1) \Psi'_m{}^2(t) - m\Psi_m(t) \Psi''_m(t) \right]$$

Le signe devant le radical est choisi de telle manière que $|t_{k+1}-t_k|$ soit le plus petit. Ψ' et Ψ'' sont calculés à l'aide de (3-1) :

$$\Psi'_{m+1}(t) = \Psi_{m+1}(t) + (t-\beta_n)\Psi'_m(t) - \gamma_n\Psi'_{m-1}(t)$$

$$\Psi''_{m+1}(t) = 2\Psi'_m(t) + (t-\beta_n)\Psi''_m(t) - \gamma_n\Psi''_{m-1}(t)$$

L'algorithme de Laguerre possède les propriétés suivantes :

- convergence globale (pour toute initialisation t_k converge vers une racine)
- la convergence est cubique
- $H > 0$ si les racines sont réelles

Après le calcul d'une racine T_i on recommence avec $\Psi_m(t)/(t-T_i)$. Pour des raisons numériques, il convient de contracter l'intervalle de mesures $[t_1, t_n]$ dans $[0,1]$ par la transformation $t \rightarrow (t-t_1)/(t_n-t_1)$, on cherche les racines $T_i[0,1]$ dans $[0,1]$ puis on se ramène dans l'intervalle initial, $T_i[t_1, t_n] = (t_n-t_1)T_i[0,1] + t_1$.

On présente ci-dessous un tableau comparatif (tableau 1). On se place dans l'intervalle [1,100] avec 1 comme période de mesures et $m=5$. Les racines sont obtenues avec 2 itérations et comparées aux valeurs exactes. On constate la grande précision atteinte.

Tableau 1 racines approchées par l'algorithme de Laguerre

racines exactes	racines approchées
50.500000	50.500000
23.588741	23.588942
77.411258	77.411051
5.205215	5.205097
95.794784	95.794908

4.APPLICATION A LA TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES D'AZIMUTS

La trajectographie par mesures d'azimuts (TPA) a pour objet l'estimation des paramètres cinématiques d'une cible. Un porteur mesure des azimuts z_t issus d'un bruiteur en mouvement rectiligne uniforme (MRU). Les deux mobiles sont dans un même plan horizontal. Le vecteur d'état à estimer (Y) est de dimension 4. Il est bien connu que Y est observable ou identifiable si le porteur effectue une manoeuvre [7], c'est à dire si le mouvement de celui-ci comporte une accélération non nulle. Notons que cette condition n'est pas toujours suffisante [8]. Nous considérons dans ce chapitre des trajectoires de "type ligne brisée" composée de segments où le porteur se déplace à vitesse constante (cette restriction n'est pas nécessaire).

4-1.L'estimateur classique

Les n azimuts mesurés sont bruités conformément à l'équation de mesures suivante :

$$z_t = \beta_t(Y_s) + \varepsilon_t \quad ; \quad t=t_1, t_2, \dots, t_n \quad (4-1-1)$$

où ε_t est un bruit blanc gaussien de variance connue σ^2 et $Y_s = (x_s, y_s, \dot{x}_s, \dot{y}_s)$ le vecteur d'état du bruiteur à instant de référence t_s . En notant $r_t=(r_x(t), r_y(t))'$ la position relative du bruiteur par rapport à l'antenne à l'instant t et $(x_a(t), y_a(t))$ la position (connue) de l'antenne. On a :

$$\beta_t(Y_s) = \pi/2 - \arg(r_t) = \arctg\left(\frac{x_s+(t-t_s)\dot{x}_s - x_a(t)}{y_s+(t-t_s)\dot{y}_s - y_a(t)}\right) \quad (4-1-2)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance conduit à minimiser le critère suivant (2-1-2) :

$$\min_{Y_s} \sum_{t=t_1}^{t_n} (z_t - \beta_t(Y_s))^2 \quad (4-1-3)$$

Cette minimisation portant sur 4 variables est coûteuse en temps de calcul.

Il est de coutume de représenter sur un graphe l'estimation de la position $Y_p=(x_s, y_s)$ à l'instant final ($t_s = t_n$) accompagnée d'une ellipse d'incertitude (domaine de confiance de niveau $1-\alpha$) centrée sur l'estimée. Celle ci est définie par l'ensemble des $Y \in R^2$ tels que :

$$(Y - \hat{Y}_p)^T \text{CRLB}_p^{-1} (Y - \hat{Y}_p) \leq \chi_{\alpha}^2 \quad (4-1-4)$$

où CRLB_p est la borne de Cramer-Rao correspondante à la position, extraite de la CRLB globale, évaluée avec l'estimation de Y_p . On montre [2] que la matrice de Fisher (FIM) vaut :

$$\text{FIM} = \text{CRLB}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=t_1}^{t_n} \frac{1}{|r_i|^2} \begin{bmatrix} A_t & (t-t_s)A_t \\ (t-t_s)A_t & (t-t_s)^2 A_t \end{bmatrix} \quad (4-1-5)$$

$$\text{où } A_t = \begin{pmatrix} \cos^2(\beta_t) & -\frac{1}{2} \sin(2\beta_t) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\beta_t) & \sin^2(\beta_t) \end{pmatrix}$$

On représente ci-dessous un exemple de trajectoire du porteur composée de deux segments parcourus à vitesse constante et le défilement azimutal correspondant. Les données géométriques sont les suivantes :

- caps du porteur = $K_A = (90^\circ, 0^\circ)$
- vitesse du porteur = $V_A = 4 \text{ m/s}$
- cap du bruiteur = $K_B = 120^\circ$
- vitesse du bruiteur = $V_B = 8 \text{ m/s}$
- position initiale du porteur = $(x_A, y_A) = (0, 0)$, du bruiteur = $(x_B, y_B) = (20\text{km}, 20\text{km})$
- durée des segments = $D = (600\text{s}, 600\text{s})$
- période d'acquisition = $\Delta T = 4\text{s}$
- écart-type des bruits de mesures = $\sigma = 1^\circ$

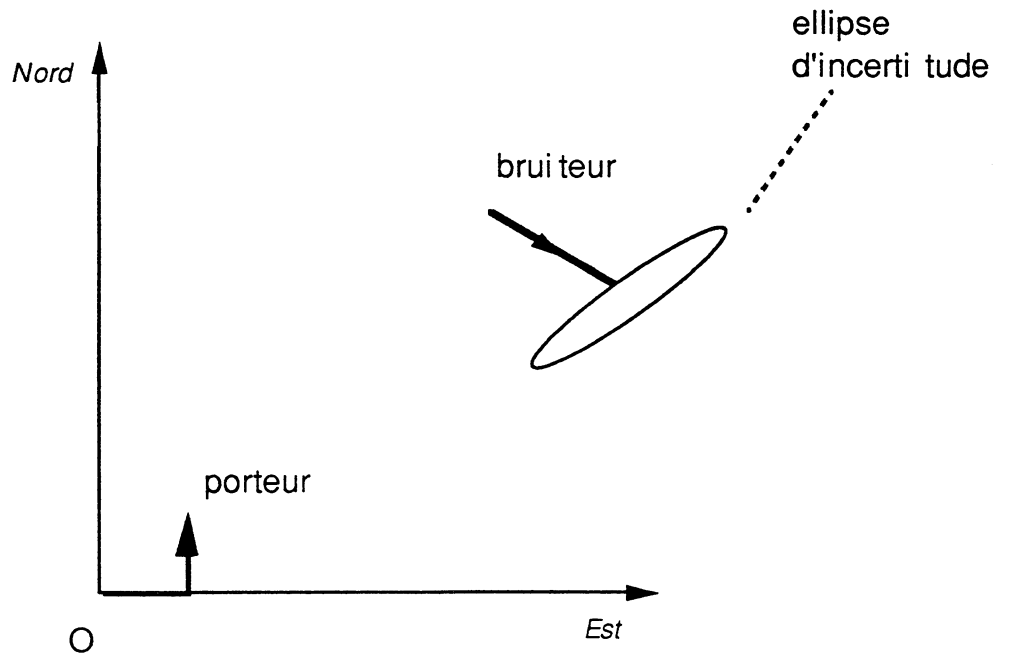


Figure (4-1-1) : exemple de TPA

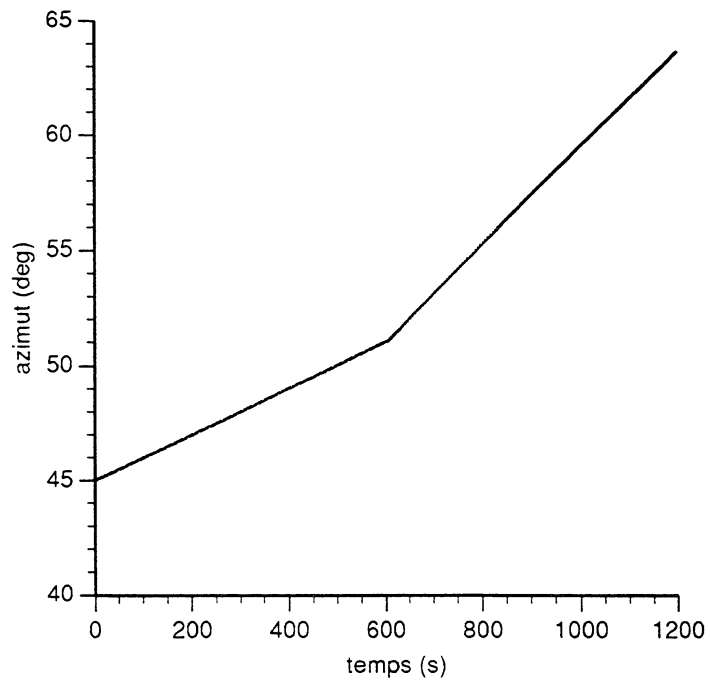


Figure (4-1-2) : l'azimut en fonction du temps

4-2.L'estimateur linéaire

A la place du modèle cartésien, nous choisissons le modèle suivant comme nous le suggère (2-2-1) :

$$X = (\beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2}, \beta_{T_3}) \quad (4-2-1)$$

où $\{T_i\}$ sont les racines du polynôme de Legendre Ψ_4 de degré 4 (2-2-3).

Ce modèle, *toujours observable*, détermine en général la trajectoire du bruiteur lorsque le mouvement du porteur comporte une accélération. Précisément, il ne faut pas que ce mouvement engendre un défilement azimutal qui pourrait être obtenu par un mouvement rectiligne uniforme. C'est d'ailleurs la condition nécessaire et suffisante d'observabilité en TPA [24].

En effet, supposons que la transformation $X=f(Y_s)$ (4-1-2) ne soit pas inversible. Cela signifie que le système linéaire suivant, obtenu à partir de (4-1-2), n'est pas inversible :

$$x_s - \tan(\beta_{T_i}) y_s + (T_i - t_s) \dot{x}_s - (T_i - t_s) \tan(\beta_{T_i}) \dot{y}_s = x_a(T_i) - y_a(T_i) \tan(\beta_{T_i}) \quad (4-2-2)$$

pour $i=0,1,2,3$. En d'autres termes, le jacobien de la transformation f est singulier. Il existe alors $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ non nul vérifiant :

$$\mu_1 \frac{\partial \beta_t}{\partial x_s} + \mu_2 \frac{\partial \beta_t}{\partial y_s} + \mu_3 \frac{\partial \beta_t}{\partial \dot{x}} + \mu_4 \frac{\partial \beta_t}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (\forall t=T_0, T_1, T_2, T_3) \Leftrightarrow$$

$$\mu_1 \frac{r_y(t)}{|r_t|^2} - \mu_2 \frac{r_x(t)}{|r_t|^2} + \mu_3 \frac{(t-t_s) r_y(t)}{|r_t|^2} - \mu_4 \frac{(t-t_s) r_x(t)}{|r_t|^2} = 0 \quad (\forall t=T_0, T_1, T_2, T_3) \Leftrightarrow$$

$$\frac{r_x(t)}{r_y(t)} = \frac{\mu_1 + (t-t_s) \mu_3}{\mu_2 + (t-t_s) \mu_4} \Leftrightarrow \beta_{T_i} = \arctg \left(\frac{\mu_1 + (t-t_s) \mu_3}{\mu_2 + (t-t_s) \mu_4} \right) \quad (\forall t=T_0, T_1, T_2, T_3)$$

Il s'agit bien d'un mouvement rectiligne uniforme qui engendre les mêmes azimuts $\{\beta_{T_i}\}$. Par conséquent, le signal β_t peut être caractérisé par X et on entre dans le cadre de (2-2-1).

Conformément à (2-3-3) on estime X par

$$\hat{\beta}_{T_i} = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_i}^{t_n} \phi_i(t) z_t \quad ; \quad i=0,1,2,3 \quad (4-2-3)$$

et on reconstitue le vecteur d'état cartésien (Y_s), en particulier la distance, à l'aide de (4-2-2). Nous pouvons aussi utiliser le correcteur de biais défini en (6-4-3) et (6-4-4). Les racines $\{T_i\}$ de Ψ_4 se calculent à l'aide de (3-1) et (3-2).

Remarques :

- Lorsque Y_s n'est pas observable, la transformation $X=f(Y_s)$ n'est pas inversible. Cela entraîne que l'une des composantes de X est fonction des autres (situation de la TPPA)
- On observe à l'aide de (4-2-2) qu'il suffit d'estimer $\tan(\beta_{T_i})$ pour évaluer Y_s . Puisque $\text{var}(\tan(\hat{\beta}_{T_i})) \approx \text{var}(\hat{\beta}_{T_i})/\cos^4(\beta_{T_i})$, on a intérêt à effectuer une rotation des azimuts mesurés de manière à ce que la moyenne des azimuts soit proche de 0. Cette procédure n'a pas été testée.

4-3.Simulations

Nous présentons quelques simulations dans le cas où le porteur suit une trajectoire composée de 2 segments à vitesse constante. Nous prenons les mesures espacées régulièrement. Les 4 racines sont alors symétriques par rapport à $(t_1+t_n)/2$. En utilisant le fait que Ψ_4 est orthogonal à 1 et à $(t-(n+1)/2)$ on trouve (Annexe (II-5-3-1)) :

$$T_0 = (n+1)/2 - \tau_1 ; T_1 = (n+1)/2 + \tau_1 ; T_2 = (n+1)/2 - \tau_2 ; T_3 = (n+1)/2 + \tau_2 , \text{ où}$$

$$\tau_1 , \tau_2 = \left([3n^2-13 \pm 2(1.2n^4-9n^2+32.8)^{1/2}]/28 \right)^{1/2}$$

Voici un exemple de la position des 4 racines pour $n=100$ (durée d'observation de 100s) :

$$T_0=33.50s ; T_1=67.49s ; T_2=7.45s ; T_3=93.54s$$

D'une manière générale, la dispersion des racines entraîne que le porteur se trouve sur le 1er segment au temps T_3 et sur le 2ème au temps T_2 (donc après accélération du porteur). Sauf exception, l'observabilité de Y_s (4-2-2) est garantie.

Nous présentons ci-après quelques résultats de simulations Monte-Carlo (100 tirages). On prend comme critères de performance de l'estimateur (4-2-3) le biais et l'écart-type de la distance estimée à l'instant final. L'efficacité des estimées des 4 azimuts n'est pas mentionnée, elle est en général très proche de 1.

SIMULATION 1 :Géométrie

BRUITEUR

 $(x_B, y_B) = (30\text{km}, 10\text{km})$ $K_B = -40^\circ$ $V_B = 6\text{m/s}$ AUTRES PARAMETRES : $\sigma = 1^\circ$; $D = (600\text{s}, 600\text{s})$; $\Delta T = 4\text{s}$

PORTEUR

 $(x_A, y_A) = (0\text{km}, 0\text{km})$ $K_A = (90^\circ, -20^\circ)$ $V_A = 6\text{m/s}$ Résultats

biais sur la distance = 500m

écart-type empirique = 2156m

écart-type théorique (CRLB) = 2456m

Les performances sont correctes. Le biais est compensé par une efficacité égale à 1.14.

SIMULATION 2 :

On prend cette fois 2 segments de longueurs inégales.

Géométrie

BRUITEUR

 $(x_B, y_B) = (10\text{km}, 20\text{km})$ $K_B = -120^\circ$ $V_B = 4\text{m/s}$ AUTRES PARAMETRES : $\sigma = 1^\circ$; $D = (400\text{s}, 800\text{s})$; $\Delta T = 4\text{s}$

PORTEUR

 $(x_A, y_A) = (0\text{km}, 0\text{km})$ $K_A = (90^\circ, -120^\circ)$ $V_A = 4\text{m/s}$ Résultats

biais sur la distance = 54m

écart-type empirique = 2842m

écart-type théorique (CRLB) = 3317m

L'efficacité (1.17) est supérieure à 1, mais l'estimateur est légèrement biaisé.

SIMULATION 3 :Géométrie

BRUITEUR

 $(x_B, y_B) = (10\text{km}, 10\text{km})$ $K_B = 120^\circ$ $V_B = 4\text{m/s}$

PORTEUR

 $(x_A, y_A) = (0\text{km}, 0\text{km})$ $K_A = (66^\circ, -66^\circ)$ $V_A = 8\text{m/s}$ AUTRES PARAMETRES : $\sigma = 1^\circ$; $D = (400\text{s}, 400\text{s})$; $\Delta T = 4\text{s}$ Résultats

biais sur la distance = 1300m

écart-type empirique = 950m

écart-type théorique (CRLB) = 796m

Le biais est important. Il est dû au biais de l'estimation des 4 azimuts ($0.48^\circ, 0.37^\circ, 0.20^\circ, 0.20^\circ$). On rencontre assez fréquemment ce problème. On démontre l'égalité suivante (Annexe III-4-3) donnant le biais (b) de la distance ($d=f(X)$; (4-2-1)) en fonction du biais des 4 azimuts :

$$b(f(\hat{X})) \approx b^T(\hat{X}) \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\sigma^2}{2n} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \alpha_i \text{Id} \right] + \frac{1}{2} b^T(\hat{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b(\hat{X}) \quad (4-3-1)$$

où α_i ($i=0,1,2,3$) sont des constantes et Id la matrice identité. On constate que le biais peut provenir de $b(\hat{X})$ ou des termes $(\partial f/\partial x)$ et $(\partial^2 f/\partial x^2)$ qui ne dépendent que de la géométrie.

Dés lors, à σ^2/n constant, on ne peut intervenir que sur le biais de \hat{X} pour diminuer le biais de l'estimateur de la distance ($d=f(X)$) Le correcteur de biais donne avec une itération (6-4-3) :

biais sur les 4 azimuts : ($0.04^\circ, 0.06^\circ, 0.05^\circ, 0.02^\circ$)

écart-type empirique = 1071m

biais sur la distance = 517m

écart-type théorique (CRLB) = 796m

Le biais a diminué au prix d'une dégradation de l'efficacité (0.74).

SIMULATION 4 :Géométrie

BRUITEUR

 $(x_B, y_B) = (10\text{km}, 20\text{km})$ $K_B = -120^\circ$ $V_B = 4\text{m/s}$

PORTEUR

 $(x_A, y_A) = (0\text{km}, 0\text{km})$ $K_A = (90^\circ, -70^\circ)$ $V_A = 4\text{m/s}$ AUTRES PARAMETRES : $\sigma = 1^\circ$; $D = (400\text{s}, 800\text{s})$; $\Delta T = 4\text{s}$ Résultats (sans correction de biais)

biais sur la distance = 11500m

écart-type empirique = 2227m

écart-type théorique (CRLB) = 3196m

Résultats (avec correction de biais, 2 itérations)

biais sur la distance = 166m

écart-type empirique = 3416m

écart-type théorique (CRLB) = 3196m

Sans correcteur de biais, le biais sur la distance est très grand (11500m). Il en est de même pour celui des 4 azimuts (de l'ordre de 0.5°). L'utilisation du correcteur (2 itérations) ramène le biais sur les 4 azimuts à 0.01° et celui sur la distance à 166m. Il demeure donc un biais résiduel sur la distance qui est dû à la relation (4-3-1)

Contrairement à la TPPA, il est souhaitable d'utiliser systématiquement le correcteur de biais avec 2 itérations. Cela s'explique par le fait qu'en TPA une légère variation des estimées des 4 azimuts peut entraîner une grande déviation de la distance estimée.

Remarque :

Les manoeuvres du porteur présentées dans les simulations sont brutales (changement de cap instantané). Avec des manoeuvres plus douces et réalistes, le signal F_t varie plus lentement et on peut espérer que le biais introduit par la (QG) soit plus faible.

5. CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode rapide et générale de résolution approchée de l'équation du maximum de vraisemblance dans un cadre gaussien. Elle s'applique lorsque le signal émis F_t varie peu avec le temps t . Il faut de plus que le paramètre vectoriel à estimer puisse se caractériser par un "échantillon" issu du signal F_t . En dehors de la trajectographie passive, cette dernière hypothèse est souvent vérifiée dans des domaines comme la trajectographie active où l'on mesure directement la distance ou encore comme celui de l'accélérométrie (chapitre VI).

L'estimateur linéaire est appliqué à la TPA. Des simulations ont été effectuées lorsque le porteur effectue une trajectoire composée de deux segments parcourus à vitesse constante. Elles montrent qu'il est nécessaire d'utiliser le correcteur de biais avec deux itérations. Cela entraîne une légère augmentation de la charge de calcul. L'estimateur linéaire corrigé donne pour ce type de trajectoires des performances statistiques satisfaisantes.

CHAPITRE IV

**TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES
DE DEUX AZIMUTS**

1.INTRODUCTION

Nous proposons une méthode globale d'estimation pour la trajectographie par mesures de deux azimuts (TP2A). On mesure deux séries d'azimuts provenant de deux capteurs solidaires. Ceux-ci et le bruiteur sont animés d'un mouvement rectiligne uniforme. Contrairement à la TPPA, le vecteur d'état complet définissant la cinématique du bruiteur est observable (sauf exception) et on accède par conséquent à la distance bruiteur-porteur. Les méthodes classiques présentent les inconvénients décrits dans l'introduction du chapitre II (MLE : lourd en temps de calcul ; EKF : divergences fréquentes) Nous développons un estimateur rapide en temps de calcul. Il est non-biaisé et efficace lorsque les mesures sont gaussiennes. La seule condition requise est que la distance inter-capteurs ainsi que le déplacement total relatif de la cible pendant toute la durée de l'observation soient faibles par rapport à la distance bruiteur-capteur. La méthode utilise les trajectographies partielles linéaires exposées au chapitre II. Elle est basée sur une fusion des deux séries d'azimuts au centre de l'antenne que l'on assimile à un capteur fictif. En analysant le critère du maximum de vraisemblance, on construit un vecteur d'état composé de 3 azimuts et de l'inverse de la distance antenne-bruiteur pour lequel le critère est quasi-linéaire. Ce chapitre a donné lieu à deux publications ([25], [26]).

2. NOTATIONS ET FORMULATION DU PROBLEME

On dispose de deux capteurs solidaires se déplaçant de façon rectiligne uniforme, qui mesurent les azimuts issus d'un bruiteur, lui même ayant un mouvement rectiligne uniforme. Sans perte de généralité, on suppose que les azimuts sont synchrones. On note respectivement par C' , C'' , B les positions des capteurs et du bruiteur (figure (2-1)) et r' , r'' , les positions relatives du bruiteur par rapport aux capteurs. Par commodité, ces vecteurs (dans le plan) sont représentés par des nombres complexes.

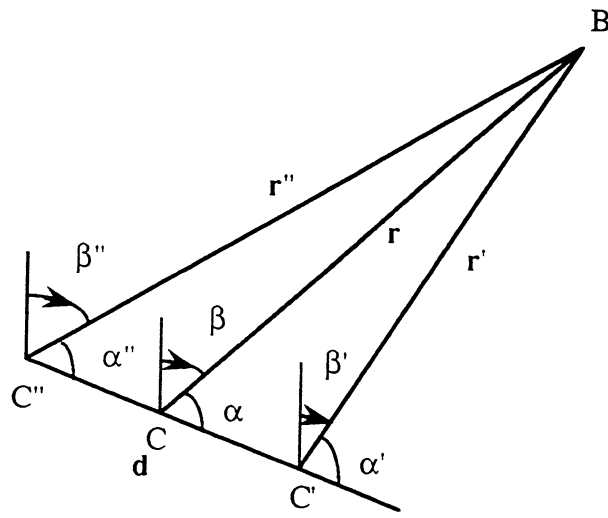


Figure (2-1): Disposition géométrique des capteurs et du bruiteur

Les azimuts mesurés (z_t' , z_t'') par chaque capteur dans l'intervalle $[t_1, t_n]$ (n mesures) suivent les équations de mesures :

$$\begin{aligned} z_t' &= \beta_t' + \varepsilon_t' & \beta_t' &= \pi/2 - \arg(r_t') \\ z_t'' &= \beta_t'' + \varepsilon_t'' & \beta_t'' &= \pi/2 - \arg(r_t'') \end{aligned} \quad (2-1)$$

où ε_t' et ε_t'' sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée de variance σ'^2 et σ''^2 respectivement. Le problème est évidemment d'estimer la trajectoire du bruiteur à partir des azimuts.

3.METHODE D'ESTIMATION

Pour simplifier, on suppose dans un premier temps que $\sigma' = \sigma'' = \sigma$. On note C le point au milieu du segment joignant C' et C'', et r_t la position du bruiteur relative à C. Donc,

$$r_t' = r_t - d/2, r_t'' = r_t + d/2$$

où d désigne le nombre complexe représentant le vecteur d'origine C'' et d'extrémité C'.

On s'intéresse à la situation où $|d/r_t|$ est petit devant 1. On peut alors effectuer un développement limité de $\beta_t' = \pi/2 - \text{Im}(\ln r_t')$ et $\beta_t'' = \pi/2 - \text{Im}(\ln r_t'')$ autour du point r_t ("Im" désigne la partie imaginaire). On a:

$$\begin{aligned} \beta_t' &= \pi/2 - \text{Im}(\ln r_t - (d/r_t)) - \frac{1}{2} (d/r_t)^2 + O(|d/r_t|^3) \\ \beta_t'' &= \pi/2 - \text{Im}(\ln r_t + (d/r_t)) - \frac{1}{2} (d/r_t)^2 + O(|d/r_t|^3) \end{aligned} \quad (3-1)$$

où $O(|d/r_t|^k)$ désigne un terme tel que $O(|d/r_t|^k)/|d/r_t|^k$ reste borné quand $|d/r_t|$ tend vers 0. Par suite :

$$\begin{aligned} (\beta_t' + \beta_t'')/2 &= \beta_t + O(|d/r_t|^2) \\ \beta_t' - \beta_t'' &= \text{Im}(d/r_t) + O(|d/r_t|^3) = |d/r_t| \sin \alpha_t + O(|d/r_t|^3) \end{aligned} \quad (3-2)$$

où $\alpha_t = \arg(d/r_t)$, de sorte que $\alpha_t - \beta_t$ est *une constante* (c'est l'angle du vecteur d avec le nord).

Avec les approximations (3-2), le modèle (2-1) devient

$$\begin{aligned} (z_t' + z_t'')/2 &= \beta_t + \eta_t' \\ z_t' - z_t'' &= |d/r_t| \sin \alpha_t + \eta_t'' \end{aligned} \quad (3-3)$$

où η_t' et η_t'' sont encore des variables aléatoires normales *indépendantes* centrées de variance $\sigma^2/2$ et $2\sigma^2$ respectivement. L'information sur la distance est donc contenue dans $(z_t' - z_t'')$ et celle sur l'azimut central dans $(z_t' + z_t'')$. Au vu de (3-3) on peut paramétrer la trajectoire r_t par :

$$\theta = (\beta_{t_0}, \beta_{t_1}, \beta_{t_2})' \quad \text{et} \quad u = |d/r_{t_0}|$$

t_0, t_1, t_2 étant trois instants distincts. Il est clair que β_t ne dépend que de θ (II-3-2) ainsi que $w_t = |r_{t_0}/r_t| \sin \alpha_t$. Pour indiquer cette dépendance, on écrira $\beta_t(\theta)$ et $w_t(\theta)$. La méthode de maximum de vraisemblance conduit à minimiser le critère suivant :

$$2 \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\frac{1}{2}(z'_t + z''_t) - \beta_t(\theta) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \left((z'_t - z''_t) - w_t(\theta) u \right)^2$$

où $[t_1, t_n]$ est l'intervalle d'observation. Pour θ fixé, la minimisation du critère précédent a pour solution en u :

$$\hat{u}(\theta) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \left((z'_t - z''_t) w_t(\theta) \right) / \sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2(\theta) \quad (3-4)$$

et on doit alors minimiser l'expression suivante par rapport à θ :

$$2 \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\frac{1}{2}(z'_t + z''_t) - \beta_t(\theta) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \left((z'_t - z''_t) - w_t(\theta) \hat{u}(\theta) \right)^2$$

La dernière somme est une fonction complexe de θ , mais comme $\hat{u}(\theta)$ est petit devant 1, ainsi que $(z'_t - z''_t)$ (car ce terme a pour moyenne $w_t u$), on va l'ignorer en minimisant seulement la première somme. Cela revient à faire une trajectographie partielle à l'aide des $(z'_t + z''_t)/2$. On estime alors u en remplaçant θ dans (3-4) par son estimateur obtenu par la TPPA.

On choisit maintenant les trois points t_0, t_1, t_2 racines figurant dans la quadrature de Gauss (II-5-1-1 avec $m=3$) (T_0, T_1, T_2), ce qui nous permet d'utiliser la TPPA linéaire. On remplace alors w_t par son interpolation de Lagrange, (w_t varie peu avec le temps) soit :

$$w_t = \phi_0(t)w_{T_0} + \phi_1(t)w_{T_1} + \phi_2(t)w_{T_2}$$

La formule (3-4) devient :

$$\hat{u}(\theta) = \sum_{i=0}^2 \left((\hat{\beta}'_{T_i} - \hat{\beta}''_{T_i}) w_{T_i}(\theta) \|\phi_i\|^2 \right) / \sum_{i=0}^2 w_{T_i}^2(\theta) \|\phi_i\|^2, \quad (3-5)$$

avec,

$$\hat{\beta}'_{T_i} = \|\phi_i\|^{-2} \sum_{t=t_1}^{t_n} z'_t \phi_i(t) \quad \hat{\beta}''_{T_i} = \|\phi_i\|^{-2} \sum_{t=t_1}^{t_n} z''_t \phi_i(t) \quad (3-6)$$

Remarque :

On peut justifier l'estimateur (3-5) a posteriori comme suit. En adoptant le modèle approché (3-3), la variable définie par le second membre de (3-4) a pour moyenne u et pour variance $2 \sigma^2 / \sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2$. Or, si on ignore le biais de $\hat{\beta}_{T_1}$ et $\hat{\beta}_{T_1}^*$, la variable définie par le second membre de (3-5) a pour moyenne u et pour variance $2 \sigma^2 / \sum_{i=0}^2 w_{T_1}^2 \|\phi_i\|^2$.

Mais, l'expression $\sum_{i=0}^2 w_{T_1}^2 \|\phi_i\|^2$ n'est autre que la quadrature de Gauss appliquée à la somme $\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2$. Par suite, ces deux variables ont approximativement même moyenne et variance.

Le calcul précédent de la moyenne et de la variance de l'estimateur (3-4) et (3-5) suppose que θ est connu. En pratique, il doit être remplacé par son estimateur. Mais cela ne modifie pas beaucoup le comportement des estimateurs. En effet, en notant $\hat{w}_t = w_t(\hat{\theta})$, l'estimateur (3-4) s'écrit :

$$\left[\left(\sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{w}_t w_t \right) / \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{w}_t^2 \right) \right] u + \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{w}_t \eta_t \right) / \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{w}_t^2 \right) \quad (3-7)$$

Le dernier terme de l'expression précédente diffère de $\left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t \eta_t \right) / \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2 \right)$ par un terme approximativement égal à $\left(\sum_{t=t_1}^{t_n} \eta_t \delta_t \right) (\hat{\theta} - \theta)$ où $\delta_t = \partial \left[\hat{w}_t^2 / \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{w}_t^2 \right) \right] / \partial \theta$. La variable aléatoire $\sum_{t=t_1}^{t_n} \eta_t \delta_t$ a une variance de même ordre de grandeur que celle de $\left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t \eta_t \right) / \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2 \right)$ mais comme elle est multipliée par $(\hat{\theta} - \theta)$ qui est petit, le dernier terme de (3-7) peut être négligé. Le premier terme de (3-7) peut s'écrire $u - \left\{ \left[\sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{w}_t (\hat{w}_t - w_t) \right] / \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2 \right) \right\} u$, mais comme le dernier terme de cette expression contient le facteur u , qui est petit devant 1, il peut être encore négligé devant la variable $\left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t \eta_t \right) / \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2 \right)$. Donc finalement (3-7) se comporte

comme $u + \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t \eta_t \right) / \left(\sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2 \right)$, qui est une variable aléatoire de moyenne u et de variance $2 \sigma^2 / \sum_{t=t_1}^{t_n} w_t^2$. Le même argument s'applique à l'estimateur (3-5).

Naturellement, on estime β_{T_i} par $\hat{\beta}_{T_i} = (\hat{\beta}_{T_i}' + \hat{\beta}_{T_i}'') / 2$. Ces estimateurs et celui de u sont indépendants de variances respectives $\sigma^2 / [2 \|\phi_0\|^2]$, $\sigma^2 / [2 \|\phi_1\|^2]$, $\sigma^2 / [2 \|\phi_2\|^2]$, $2 \sigma^2 / \sum_{i=0}^2 w_{T_i}^2 \|\phi_i\|^2$

Celles-ci seront appelées *variances des estimateurs linéaires* et seront utilisées comme base de comparaison par la suite (les trois premières variances sont exactes tandis que la dernière est seulement approchée mais, comme on pourra le constater dans les simulations, l'approximation est assez précise).

Remarques :

- (3-5) peut être obtenu directement avec les $\hat{\beta}_{T_i}'$ et $\hat{\beta}_{T_i}''$ en les considérant comme des azimuts observés centrés de variance $2 \sigma^2 / \|\phi_i\|^2$.
- Etant donné que \hat{u} a pour variance $2 \sigma^2 / \sum_{i=0}^2 w_{T_i}^2 \|\phi_i\|^2$, on peut calculer la variance approximative de la distance : $\text{var}(|\hat{r}_{T_0}|) \approx 2 \sigma^2 |r_{T_0}|^4 / \left(d^2 \sum_{i=0}^2 w_{T_i}^2 \|\phi_i\|^2 \right)$ et en supposant que w_t varie peu avec le temps ($w_{T_i} \approx w_{T_0}$) et en rappelant que $\sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 = n$, on obtient $\text{var}(|\hat{r}_{T_0}|) \approx 2 \sigma^2 |r_{T_0}|^4 / (n d^2 \sin^2 \alpha_{T_0})$. On retrouve que la distance n'est pas observable quand la trajectoire du bruiteur est alignée avec l'antenne ($\alpha_t = 0$ pour tout t).

Cas où les bruits sur les capteurs n'ont pas la même variance :

Dans ce cas les variables $(z_t' + z_t'') / 2$ et $(z_t' - z_t'')$ ne sont plus indépendantes. Il convient donc de travailler avec le couple $(\sigma'^2 z_t'' + \sigma''^2 z_t') / (\sigma'^2 + \sigma''^2)$ et $(z_t' - z_t'')$. On définit maintenant C comme le point divisant le segment joignant C'' et C' en deux segments, de longueurs proportionnelles à σ'^2 (celui joignant C') et σ''^2 (celui joignant C''). Précisément, en notant encore r_t la position du bruiteur relative au point C , on a :

$$r_t' = r_t - d', \quad r_t'' = r_t - d'' \quad \text{avec } d' - d'' = d \text{ et } \sigma'^2 d'' + \sigma''^2 d' = 0$$

Comme dans (3-1) on obtient :

$$\beta_t' = \pi/2 - \text{Im}[\ln r_t - (d'/r_t) - \frac{1}{2}(d'/r_t)^2 + O(|d'/r_t|^3)]$$

$$\beta_t'' = \pi/2 - \text{Im}[\ln r_t + (d''/r_t) - \frac{1}{2}(d''/r_t)^2 + O(|d''/r_t|^3)]$$

Par suite,

$$(\sigma'^2 \beta_t'' + \sigma''^2 \beta_t') / (\sigma'^2 + \sigma''^2) = \beta_t + O(|d/r_t|^2)$$

$$\beta_t' - \beta_t'' = \text{Im}(d/r_t) + O(|d/r_t|^2) = |d/r_t| \sin \alpha_t + O(|d/r_t|^2)$$

Notons que l'erreur dans la dernière approximation est de l'ordre $|d/r_t|^2$ et non $|d/r_t|^3$ comme dans le cas où les bruits ont la même variance (3-2). A part cette différence, on peut suivre la même démarche en effectuant une TPPA à partir de $(\sigma'^2 z_t'' + \sigma''^2 z_t') / (\sigma'^2 + \sigma''^2)$, puis estimer $u = |d/r_t|$ par la formule (3-4) ou (3-5) avec θ remplacé par son estimateur obtenu par la TPPA.

4. AMELIORATION DE LA METHODE

4-1. Utilisation de formules trigonométriques

Nous avons établi des relations approchées (3-2) pour β_t et $|d/r_t|$ en fonction de β_t' et β_t'' . On va établir des relations exactes reliant β_t et $|d/r_t|$ à (β_t', β_t'') pour les utiliser à la place de (3-2). Pour simplifier, on supprime l'indice t , on se place dans le cas où les bruits ont la même variance et on travaille avec les angles α' , α'' et α à la place de β' , β'' et β . (rappelons que $\alpha' - \beta' = \alpha'' - \beta'' = \alpha - \beta =$ angle formé par le vecteur joignant C'' , C' et le nord). On prendra les angles α , α' , α'' dans $[-\pi, \pi]$ qui sont alors tous de même signe ainsi que $\alpha' - \alpha''$. On montre en Annexe (IV-4-1) les relations suivantes :

$$\sin \alpha = (\sin^2 \bar{\alpha} - \sin^2 \delta) / A, \quad \cos \alpha = (\cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha}) / A \quad (4-1-1-a)$$

$$2 \text{tg} \delta \approx |d/r_t| \sin \bar{\alpha} \quad (4-1-1-b)$$

où $\bar{\alpha} = (\alpha' + \alpha'') / 2$, $\delta = (\alpha' - \alpha'') / 2$ et $A = (\sin \bar{\alpha}) \sqrt{\cos^4 \delta + \sin^4 \delta \cotg^2 \bar{\alpha}}$

On montre que l'approximation (4-1-1-b) est précise. On évalue donc maintenant β_t en fonction de β_t' et β_t'' par (4-1-1). On calcule de la même façon les estimateurs $\hat{\beta}_{T_i}$ à partir des estimateurs linéaires $\hat{\beta}_{T_i}'$ et $\hat{\beta}_{T_i}''$ ($i = 0, 1, 2$). De même, on estime u grâce à la relation :

$2 \operatorname{tg} \delta \approx |d/r| \sin \bar{\alpha}$. En posant $\hat{\delta}_{T_i} = (\hat{\beta}'_{T_i} - \hat{\beta}''_{T_i})/2$ et en développant $\hat{\delta}_{T_i}$ autour de δ_{T_i} on a :

$$2 \operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_i} \approx w_{T_i} u + 2(\hat{\delta}_{T_i} - \delta_{T_i})/\cos^2 \delta_{T_i} \quad (4-1-2)$$

où $w_{T_i} = |r_{T_0}/r_{T_i}| \sin \bar{\alpha}_{T_i}$ (la définition de w_t a été légèrement changée du fait que l'on a utilisé $\bar{\alpha}$ à la place de α). La régression linéaire (4-1-2) donne l'estimation de u suivante :

$$\hat{u} = 2 \left[\sum_{i=0}^2 \hat{w}_{T_i} \|\phi_i\|^2 \cos^4 \hat{\delta}_{T_i} \operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_i} \right] / \left[\sum_{i=0}^2 \hat{w}_{T_i}^2 \|\phi_i\|^2 \cos^4 \hat{\delta}_{T_i} \operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_i} \right] \quad (4-1-3)$$

où \hat{w}_{T_i} est obtenu à l'aide des estimations $\hat{\beta}'_{T_i}$, $\hat{\beta}''_{T_i}$

Remarques :

- Bien que les angles théoriques α'_{T_i} et α''_{T_i} doivent être choisis dans $[-\pi, \pi]$, l'application de cette règle à leurs estimateurs peut conduire à des erreurs. En effet, il est possible que α'_{T_i} soit proche de $-\pi$ mais que $\hat{\alpha}'_{T_i}$, quand on le force dans $[-\pi, \pi]$, soit proche de π . La règle correcte est de choisir $\hat{\alpha}'_{T_i}$ et $\hat{\alpha}''_{T_i}$ de sorte que $|\hat{\alpha}'_{T_i} - \hat{\alpha}''_{T_i}| \leq \pi$ et $\hat{\alpha}_{T_i} = (\hat{\alpha}'_{T_i} + \hat{\alpha}''_{T_i})/2$ soit dans $[-\pi, \pi]$.

- Théoriquement les angles α'_{T_i} et α''_{T_i} doivent être de même signe (si on les choisit dans $[-\pi, \pi]$) et les formules (4-1-1) permettent de calculer α_{T_i} , qui a alors le même signe. Toutefois, à cause des erreurs d'estimation, il est possible, surtout quand α'_{T_i} et α''_{T_i} sont proches de 0 ou de $\pm\pi$, que les estimations $\hat{\alpha}'_{T_i}$ et $\hat{\alpha}''_{T_i}$ n'aient pas le même signe et alors les formules (4-1-1) ne sont plus valables. Par suite, nous adoptons la formule suivante pour $\hat{\alpha}_{T_i}$, quand $\hat{\alpha}'_{T_i}$ et $\hat{\alpha}''_{T_i}$ n'ont pas le même signe :

$$\hat{\alpha}_{T_i} = \pi \text{ si } \hat{\alpha}'_{T_i} > \pi/2, = -\pi \text{ si } \hat{\alpha}''_{T_i} < -\pi/2, = 0 \text{ sinon}$$

Comme $\hat{\alpha}'_{T_i}$ et $\hat{\alpha}''_{T_i}$ n'ont pas le même signe si et seulement si $\sin^2 \hat{\delta}_{T_i} > \sin^2 \hat{\alpha}_{T_i}$, la formule précédente prolonge (4-1-1).

4-2. Amélioration de l'estimation des rapports des distances

Les rapports $|r_{T_0}/r_{T_i}|$ sont mal estimés quand $\beta_{T_2} \approx \beta_{T_1}$, ce qui affecte la qualité de l'estimation de u (4-1-3). Dans le cas extrême où $\beta_{T_2} = \beta_{T_1}$ il est même impossible d'estimer

ces rapports à partir des seules estimations des azimuts β_i , mais il est toujours possible de les estimer à partir de $2 \operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_i}$, $i = 0, 1, 2$. En effet, $|r_{T_1}/r_{T_i}| = u_i$ est approximativement égal à $u(1+v)$ si $i = 1$ et $u(1-v)$ si $i = 2$ où $2v$ représente le déplacement radial relatif du bruiteur entre T_1 et T_2 . La moyenne de $2 \operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_i}$ varie donc approximativement linéairement avec v et on peut donc estimer v , pour u et $\bar{\alpha}_{T_i}$ connus, par une régression linéaire. En pratique, u et $\bar{\alpha}_{T_i}$ sont inconnus, on doit les remplacer par les estimateurs \hat{u} et $(\hat{\alpha}_{T_i} = \hat{\alpha}'_{T_i} + \hat{\alpha}''_{T_i})/2$ (pour \hat{u} , on peut prendre un des estimateurs préliminaires décrits plus loin). On est donc conduit à l'estimation suivante de v :

$$\hat{v} = [\hat{c}_1 (\operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_1} - \frac{1}{2} \hat{u} \sin \hat{\alpha}_{T_1}) \sin \hat{\alpha}_{T_1} - \hat{c}_2 (\operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_2} - \frac{1}{2} \hat{u} \sin \hat{\alpha}_{T_2}) \sin \hat{\alpha}_{T_2}] / [\frac{1}{2} \hat{u} (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2)] \quad (4-2-1)$$

où $\hat{c}_i = \cos^4 \hat{\delta}_{T_i}$ et $\hat{\omega}_i = \hat{c}_i \sin^2 \hat{\alpha}_{T_i}$. On peut alors déduire l'estimation des u_i . D'autre part, sauf quand $\beta_{T_2} = \beta_{T_1}$, on peut estimer v à partir des $\hat{\beta}_{T_i}$ par $-\hat{\beta}/\hat{\beta}$ où $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_{T_2} - \hat{\beta}_{T_1})/2$ et $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_{T_2} + \hat{\beta}_{T_1})/2 - \hat{\beta}_{T_0}$. La façon optimale de combiner les deux estimateurs précédents de v est de prendre leur moyenne pondérée par l'inverse de leur variance. Comme ces variances sont approximativement $2\sigma^2 / [\|\phi_1\|^2 (\omega_1 + \omega_2) u^2]$ et $\sigma^2 n / [4 \|\phi_0\|^2 \|\phi_1\|^2 \hat{\beta}^2]$, respectivement, on est conduit à l'estimateur suivant de v :

$$\hat{v} = \frac{(\hat{u}/2)N - (2 \|\phi_0\|^2/n) \hat{\beta} \hat{\beta}}{(\hat{u}^2/4) (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2) + (2 \|\phi_0\|^2/n) \hat{\beta}^2}$$

où N est le numérateur de (4-2-1).

On note que les statistiques $\hat{\beta}, \hat{\beta}$ peuvent être complétées par $\hat{\beta} = (\sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \hat{\beta}_{T_i})/n$ de façon à former trois statistiques non corrélées (car $\operatorname{cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta}_{T_i}) = \sigma^2/(2n)$) en correspondance biunivoque avec $\hat{\beta}_{T_i}$, $i = 0, 1, 2$. Le fait d'avoir une nouvelle estimation de v permet de ré-estimer $\hat{\beta}$ par $-\hat{\beta} \hat{v}$. On ne change pas $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}$ car ceux-ci sont non corrélés avec $\hat{\beta}$. On peut ensuite obtenir une estimation améliorée de u selon (4-1-3).

Comme estimateur préliminaire de u , on peut se servir du fait que la moyenne de $2 \operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_i}$ est linéaire en u et v . La méthode de régression linéaire donne l'estimation suivante de u :

$$\hat{u} = 2 \frac{\|\phi_0\|^2 \hat{c}_0 \sin \hat{\alpha}_{T_0} \operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_0} + \|\phi_1\|^2 \sum_{i=1}^2 \frac{2\hat{\omega}_{3-i}}{\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2} \hat{c}_i \sin \hat{\alpha}_{T_i} \operatorname{tg} \hat{\delta}_{T_i}}{\|\phi_0\|^2 \hat{\omega}_0 + \|\phi_1\|^2 [\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 - (\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)^2 / (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2)]} \quad (4-2-2)$$

Une autre façon de procéder est de faire comme si $v = 0$, ce qui conduit à l'estimateur suivant de u

$$\hat{u} = 2 \left(\sum_{i=0}^2 \hat{c}_i \sin \hat{\alpha}_{T_i} \text{tg} \hat{\delta}_{T_i} \right) / \left(\sum_{i=0}^2 \hat{\omega}_i \right)$$

qui est biaisé de

$$\frac{(u_1 - u) \omega_1 + (u_2 - u) \omega_2}{\sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \hat{\omega}_i} \approx \frac{u v (\omega_1 - \omega_2)}{\sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \hat{\omega}_i}$$

5.SIMULATIONS

Dans ce paragraphe on remplace la notation " t_1 " par "1" et " t_n " par "n"

Plusieurs simulations ont été effectuées pour évaluer la performance de cette méthode. Chaque simulation comporte 900 répétitions Monte-Carlo. L'écart-type σ du bruit est de 1° et le nombre n de mesures de 300 (en fait le comportement des estimateurs ne dépend pratiquement que du rapport σ/\sqrt{n} qui est ici égale à 0.001 radian). Sans perte de généralité, on a supposé que l'azimut β_{T_0} en $T_0 = (n + 1)/2$ est nul et que les capteurs sont fixes. Les autres paramètres à prendre en compte sont : le déplacement total relatif du bruiteur $|r_n - r_1|/|r_{(n+1)/2}|$, u , le cap du bruiteur, noté $CapB$ et l'orientation des capteurs $\pi/2 - \text{Im}(\ln d)$, notée $CapA$. Notons que par symétrie (on suppose que les bruits sur les capteurs ont la même loi), il est inutile de considérer tous les couples $(CapA, CapB)$. En effet, ajouter $\pm 180^\circ$ à $CapA$ ne fait qu'invertir les capteurs et ne change donc pas la loi des estimateurs \hat{u} , $\hat{\beta}_{T_0}$, $\hat{\beta}_{T_1}$, $\hat{\beta}_{T_2}$. De même, ajouter $\pm 180^\circ$ à $CapB$ ne fait qu'inter-changer $\hat{\beta}_t$ avec $\hat{\beta}_{n+1-t}$ et $\hat{\beta}_t''$ avec $\hat{\beta}_{n+1-t}''$. Enfin, comme $\beta_{T_0} = 0$, changer les signes de $CapA$ et $CapB$ ne fait que changer les signes de $\hat{\beta}_t$ et $\hat{\beta}_t''$ donc, en supposant que la loi des bruits est symétrique, laisse inchangée la loi de \hat{u} et modifie celles de $\hat{\beta}_{T_0}$, $\hat{\beta}_{T_1}$, $\hat{\beta}_{T_2}$ en leur opposée. Par conséquent, on peut se restreindre aux valeurs de $CapA$ dans $[0, 90^\circ]$ et de $CapB$ dans $[0, 180^\circ]$

On a vu que les estimateurs décrits en (3), appelés linéaires, de u , β_{T_i} , $i = 0, 1, 2$, sont indépendants et de variances $2\sigma^2 / \left(\sum_{i=0}^2 w_{T_i}^2 \|\phi_i\|^2 \right)$, $\sigma^2 / (2\|\phi_i\|^2)$ (la première variance est seulement approchée). Les estimateurs considérés ici ont été améliorés comme décrits en (4) (avec (4-2-2) comme estimateur préliminaire de u). Ils ont donc une matrice de covariance différente de celle des estimateurs linéaires. Toutefois, on peut s'attendre à ce que l'écart soit

faible et il est alors intéressant de normaliser cette matrice de covariance par division à gauche et à droite par la matrice diagonale dont les termes sont les écarts-type des estimateurs linéaires (de cette façon, on obtient une matrice proche de la matrice identité). Pour évaluer la performance des estimateurs proposés, on évalue aussi la borne de Cramer-Rao correspondante, normalisée de la même façon. Les résultats des simulations, pour différents choix de $|r_n - r_1|/|r_{(n+1)/2}|$, u , CapA, CapB, sont présentés dans les tableaux 1 à 4. Ces tableaux donnent aussi les écarts-type des estimateurs linéaires, ce qui permet de retrouver les matrices originelles avant normalisation. Pour faciliter la lecture, l'écart-type de l'estimateur linéaire de u est donné en relatif, c'est-à-dire divisé par u , et ceux de β_{T_0} , β_{T_1} , β_{T_2} sont exprimés en degrés. L'abréviation "inobs" signifie "inobservable".

Tableau 1: Ecart-type des estimateurs linéaires (ligne du milieu), CRLB (en haut) et matrice de covariance normalisée (en bas) pour $u = .025$, $|r_n - r_1|/r_{(n+1)/2} = .15$

CapB	CapA = 0°				CapA = 45°				CapA = 90°			
0°					1.02				1.02			
	inobs				.02	.45			.00	.45		
					.01	.33	.80		.00	.33	.80	
					.01	.37	-.22	.75	.00	.37	-.22	.75
0°	infini	.061	.077	.077	.080	.061	.077	.077	.057	.061	.077	.077
					1.10				1.08			
	inobs				.00	.48			-.02	.48		
					-.01	.34	.85		-.02	.35	.85	
					.01	.40	-.23	.81	-.01	.41	-.23	.81
45°	1.00				1.00				1.00			
	-.00	1.00			-.02	.94			-.03	.90		
	.03	.00	1.00		.03	.04	.97		.01	.06	.96	
	-.02	.00	-.00	1.00	.04	.03	-.02	.98	.02	.06	-.04	.96
45°	1.849	.061	.077	.077	.080	.061	.077	.077	.057	.061	.077	.077
					1.05				1.05			
	inobs				.00	.95			-.01	.90		
					-.01	.10	.97		-.03	.12	.96	
					.06	.03	1.00		-.03	.12	.96	
					-.03	.02	-.02	1.11	-.01	.08	-.06	1.05
90°	1.00				1.00				1.00			
	-.00	1.00			.00	.97			-.00	.95		
	.03	-.00	1.00		.02	.02	.99		-.00	.03	.98	
	-.03	-.00	-.00	1.00	.02	.01	-.01	.99	.00	.03	-.02	.98
90°	1.321	.061	.077	.077	.081	.061	.077	.077	.057	.061	.077	.077
					1.05				1.0			
	inobs				.02	.97			.02	.95		
					-.03	.09	.98		-.05	.10	.97	
					.06	.03	1.00		-.05	.10	.97	
					-.03	.02	-.02	1.10	-.03	.05	-.04	1.08
135°	1.00				1.00				1.00			
	.00	1.00			.02	.95			.03	.90		
	.02	.00	1.00		.01	.04	.97		-.02	.06	.96	
	-.03	.00	-.00	1.00	.01	.03	-.02	.99	-.01	.06	-.04	.96
135°	1.849	.061	.077	.077	.081	.061	.077	.077	.057	.061	.077	.077
					1.05				1.06			
	inobs				.04	.95			.04	.91		
					-.04	.10	.97		-.06	.13	.96	
					.05	.03	1.00		-.06	.13	.96	
					-.04	.02	-.02	1.11	-.05	.08	-.05	1.06

Tableau 2: Ecart-type des estimateurs linéaires (ligne du milieu), CRLB (en haut) et matrice de covariance normalisée (en bas) pour $u = .025$, $|\tau_n - \tau_1|/|\tau_{(n+1)/2}| = .6$

CapB	CapA = 0°				CapA = 45°				CapA = 90°			
0°					1.27				1.27			
	inobs				.02 .46				.00 .46			
0°					.01 .26 .87				.00 .26 .87			
					.02 .42 -.20 .67				.00 .42 -.20 .67			
0°	infini	.061	.077	.077	.077	.061	.077	.077	.054	.061	.077	.077
					1.50				1.46			
0°	inobs				.00 .50				-.02 .50			
					-.02 .27 .94				-.03 .27 .94			
0°					.02 .46 -.23 .73				-.00 .46 -.23 .73			
					1.00				1.00			
45°					-.02 .95				-.03 .95			
					.03 .03 .99				.01 .03 .99			
45°					.04 .04 -.02 .98				.02 .04 -.02 .97			
	.423	.061	.077	.077	.076	.061	.077	.077	.057	.061	.077	.077
45°					1.04				1.04			
					-.00 .99				-.01 .99			
45°					-.01 .07 .99				-.04 .07 .99			
					.00 .02 -.02 1.10				-.01 .02 -.02 1.09			
90°					1.00				1.00			
					.00 1.02				.00 1.02			
90°					.02 -.01 1.01				-.01 -.01 1.01			
					.02 -.01 .01 1.01				.01 -.01 .01 1.01			
90°	.347	.061	.077	.077	.082	.061	.077	.077	.059	.061	.077	.077
					1.04				1.05			
90°					.02 1.00				.02 .99			
					-.03 .07 .99				-.06 .07 1.00			
90°					-.02 .02 -.02 1.10				-.03 .02 -.02 1.10			
					1.00				1.00			
135°					.02 .95				.03 .95			
					.01 .04 .97				-.02 .04 .97			
135°					.02 .02 -.02 .99				-.01 .03 -.02 .99			
	.423	.061	.077	.077	.083	.061	.077	.077	.057	.061	.077	.077
135°					1.05				1.06			
					.05 1.00				.05 .99			
135°					-.04 .07 .99				-.08 .07 .9			
					-.02 .02 -.02 1.10				-.05 .02 -.02 1.10			

Tableau 3: Ecart-types des estimateurs linéaires (ligne du milieu), CRLB (en haut) et matrice de covariance (en bas) normalisé pour $u = .1$, $|r_n - r_1|/|r_{(n+1)/2}| = .15$

CapB	CapA = 0°				CapA = 45°				CapA = 90°			
0°					1.02				1.02			
	inobs				.07	.45			.00	.45		
					.05	.33	.81		.00	.33	.81	
				.06	.37	-.22	.76		.00	.37	-.22	.76
0°	infini	.061	.077	.077	.020	.061	.077	.077	.014	.061	.077	.077
45°					1.07				1.07			
	inobs				.05	.48			-.02	.48		
					.03	.35	.85		-.02	.35	.85	
				.05	.41	-.24	.82		-.01	.41	-.23	.82
45°	1.00				1.02				1.01			
	-.01	.99			.02	.65			-.03	.57		
	.13	.01	1.00		.09	.24	.85		.01	.26	.85	
	-.09	.01	-.02	.99	.10	.21	-.14	.89	.02	.28	-.17	.82
45°	.462	.061	.077	.077	.020	.061	.077	.077	.014	.061	.077	.077
45°					1.06				1.06			
	inobs				.01	.67			-.04	.60		
					.05	.28	.86		-.02	.29	.87	
	-.10	.03	-.03	1.11	.08	.23	-.16	.98	.01	.31	-.18	.90
90°	1.00				1.00				1.01			
	.00	.99			.04	.75			-.00	.66		
	.11	.01	1.00		.07	.19	.87		-.01	.22	.87	
	-.11	.01	-.02	1.00	.08	.13	-.10	.94	.01	.22	-.14	.87
90°	.330	.061	.077	.077	.020	.061	.077	.077	.014	.061	.077	.077
90°					1.05				1.06			
	inobs				.04	.76			-.01	.67		
					.04	.24	.88		-.04	.26	.88	
	-.12	.03	-.03	1.11	.06	.15	-.12	1.03	-.01	.24	-.15	.95
135°	1.00				1.00				1.01			
	.01	.99			.08	.66			.03	.57		
	.09	.01	.99		.04	.26	.82		-.02	.28	.82	
	-.13	.01	-.02	1.00	.05	.18	-.13	.91	-.01	.26	-.17	.85
135°	.462	.061	.077	.077	.020	.061	.077	.077	.014	.061	.077	.077
135°					1.05				1.0			
	inobs				.08	.68			.02	.60		
					.02	.30	.84		-.05	.32	.84	
	-.13	.03	-.03	1.11	.04	.20	-.15	1.00	-.03	.28	-.18	.93

Tableau 4: Ecart-type des estimateurs linéaires (ligne du milieu), CRLB (en haut) et matrice de covariance (en bas) normalisée pour $u = .1$, $|r_n - r_1|/|r_{(n+1)/2}| = .6$

CapB	CapA = 0°				CapA = 45°				CapA = 90°			
0°					1.27				1.28			
	inobs				.08 .46				.00 .46			
					.04 .27 .88				.00 .27 .88			
					.07 .43 -.21 .67				.00 .42 -.21 .67			
0°	infini	.061	.077	.077	.019	.061	.077	.077	.014	.061	.077	.077
					1.42				1.43			
	inobs				.06 .50				-.02 .50			
					.01 .27 .95				-.03 .27 .94			
					.07 .47 -.23 .74				-.01 .47 -.23 .74			
45°	1.00				1.03				1.03			
	-.04 .94				-.05 .90				-.09 .88			
	.17 .03 1.00				.13 .07 .97				.03 .06 .98			
	-.03 .04 -.03 .96				.13 .06 -.04 .97				.08 .09 -.04 .94			
45°	.106	.061	.077	.077	.019	.061	.077	.077	.014	.061	.077	.077
	.99				1.06				1.06			
	-.03 .55				-.05 .95				-.08 .91			
	.20 .03 1.02				.09 .11 .97				-.02 .11 .98			
	-.04 .03 -.03 1.10				.12 .04 -.04 1.10				.06 .09 -.05 1.05			
90°	1.00				1.01				1.0			
	.00 1.02				.02 1.00				-.00 .98			
	.10 -.01 1.00				.08 .01 .99				-.02 .01 1.00			
	-.10 -.01 -.01 1.00				.09 -.01 .01 1.01				.02 .01 -.00 1.00			
90°	.087	.061	.077	.077	.020	.061	.077	.077	.015	.061	.077	.077
	.98				1.04				1.05			
	-.01 .55				.04 .97				.02 .95			
	.13 .03 1.01				.03 .09 .98				-.07 .09 .98			
	-.11 .03 -.03 1.10				.06 .02 -.03 1.12				-.01 .05 -.03 1.09			
135°	1.00				1.00				1.03			
	.04 .94				.09 .92				.09 .88			
	.03 .04 .96				.02 .08 .94				-.08 .09 .94			
	-.17 .03 -.03 1.00				.07 .03 -.02 1.00				-.03 .06 -.04 .98			
135°	.106	.061	.077	.077	.021	.061	.077	.077	.014	.061	.077	.077
	1.01				1.05				1.09			
	.01 .55				.11 .96				.11 .91			
	.06 .04 1.00				-.02 .11 .96				-.13 .13 .96			
	-.18 .02 -.03 1.11				.03 .02 -.04 1.12				-.07 .06 -.05 1.09			

Tableau 5: Biais (1ère colonne) et efficacité (2ème colonne) des estimateurs

Cap	$ r_n - r_1 / r_{(n+1)/2} = .15$						$ r_n - r_1 / r_{(n+1)/2} = .6$							
	B	CapA			CapA			CapA			CapA			
		0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°	
0°	in- obser-	-0.009	.93	-0.005	.94	in- obser	-0.013	.85	-0.008	.87				
		-0.001	.92	-0.001	.93		-0.001	.92	-0.001	.92				
		-0.001	.95	-0.001	.95		-0.001	.93	-0.002	.93				
		.000	.92	-0.000	.92		-0.000	.91	-0.000	0.91				
45°		-0.032	1.02	-0.003	.96	-0.002	.95		-0.007	1.01	-0.002	.96	-0.002	.96
		.000	1.81	-0.000	1.00	-0.001	1.00		.000	1.73	-0.001	.96	-0.001	.96
		.001	1.00	-0.002	1.01	-0.002	1.00		.001	.99	.001	.99	.000	.99
		-0.003	.90	-0.000	.91	-0.000	.91		-0.001	.89	-0.001	.89	-0.000	.89
.025	90°	-0.023	1.02	-0.003	.96	-0.002	.95		-0.006	1.01	-0.003	.96	-0.002	.95
		.001	1.82	-0.000	1.00	-0.000	1.00		.001	1.87	-0.000	1.03	-0.000	1.03
		-0.000	1.00	-0.002	1.01	-0.002	1.01		-0.003	1.01	-0.003	1.01	-0.003	1.01
		-0.002	.91	-0.000	.91	-0.000	.91		.000	.92	.001	.92	.001	.92
135°		-0.033	1.02	-0.003	.95	-0.002	.95		-0.008	1.00	-0.002	.95	-0.001	.95
		.001	1.81	-0.000	1.00	-0.001	1.00		.001	1.74	-0.001	.96	.000	.96
		.001	1.00	-0.002	1.00	-0.002	1.00		-0.001	.98	-0.002	.98	-0.002	.98
		-0.003	.90	-0.000	.91	-0.000	.91		-0.003	.90	-0.002	.90	-0.002	.90
0°	in- obser-	-0.001	.95	-0.001	.95	in- obser	-0.003	.89	-0.003	.89				
		-0.001	.93	-0.001	.93		-0.001	.93	-0.001	.92				
		-0.002	.95	-0.002	.95		-0.002	.93	-0.002	.93				
		.000	.92	-0.000	.92		.000	.91	.000	.91				
45°		-0.011	1.02	-0.001	.96	-0.001	.96		-0.002	1.01	-0.001	.97	-0.000	.97
		-0.000	1.79	-0.001	.97	-0.001	.96		-0.000	1.71	-0.001	.95	-0.002	.96
		.001	.99	-0.001	.98	-0.001	.97		.001	.98	-0.001	1.00	.001	1.00
		-0.003	.89	.000	.91	.000	.91		-0.001	.88	-0.001	.88	-0.000	.89
.01	90°	-0.007	1.02	-0.001	.96	-0.001	.95		-0.001	1.01	-0.001	.96	-0.000	.95
		.001	1.80	-0.001	.98	-0.001	.97		.001	1.85	-0.002	1.02	-0.000	1.03
		-0.000	.99	-0.001	.99	-0.001	.98		-0.003	1.00	-0.002	1.00	-0.003	1.01
		-0.002	.90	.000	.91	.000	.91		.000	.91	.003	.91	.001	.92
135°		-0.011	1.02	-0.001	.95	-0.001	.95		-0.002	1.00	-0.001	.95	-0.000	.94
		.001	1.79	-0.001	.97	-0.001	.96		.001	1.71	.001	.96	.001	.96
		.000	.98	-0.001	.98	-0.001	.97		-0.001	.96	-0.002	.98	-0.002	.98
		-0.003	.90	.000	.91	.000	.91		-0.003	.90	-0.003	.89	-0.003	.90

On peut voir dans les tableaux 1 à 4 que la matrice de covariance normalisée et la CRLB correspondante, sont assez proches de la matrice identité. Cela montre que les estimateurs linéaires sont déjà performants et ne sont pas très différents des estimateurs améliorés. Il y a cependant une exception : quand $\text{CapB} = 0$ (ou petit), les estimateurs linéaires de β_{T_0} et, dans une moindre mesure, de β_{T_1} , β_{T_2} sont beaucoup moins précis que les estimateurs améliorés. La variance de l'estimateur linéaire de u apparaît plus faible que celle de l'estimateur amélioré, mais la formule pour la première est approximative, s'appuyant sur l'hypothèse que les rapports $|r_{T_0}/r_{T_i}|$ peuvent être bien estimés à partir des estimateurs linéaires de β_{T_i} , ce qui n'est pas le cas ici. Notons que la matrice de covariance de l'estimateur amélioré reste toujours proche de la CRLB mais dans le cas où $\text{CapB} = 0$, ces matrices sont loin d'être diagonales. La diminution de la variance de l'estimateur de β_{T_0} , par rapport à celle de l'estimateur linéaire, s'accompagne d'une corrélation entre les estimateurs des β_{T_i} .

Pour expliciter les performances des estimateurs considérés, on montre dans le tableau 5 leur efficacité, définie comme le rapport de la variance minimale (CRLB) sur la variance empirique (de l'estimateur). On voit, que ces efficacités sont très proches de 1, dans toutes les situations, dépassant souvent 90%. L'efficacité de l'estimateur de β_{T_0} , dans le cas où $\text{CapA} = 0$, peut atteindre 185% ! Cette performance surprenante s'explique par la façon dont on calcule l'estimateur $\hat{\alpha}_{T_i}$, décrit dans la deuxième remarque de (4-1), qui fait intervenir une information a priori non contenue dans le modèle, à savoir " α'_{T_i} et α''_{T_i} sont de même signe". Or, quand $\text{CapA} = 0$, $\alpha'_{T_0} = \alpha''_{T_0} = \alpha_{T_0} = 0$, par suite, l'estimateur linéaire $\hat{\alpha}_{T_0} = (\alpha'_{T_0} + \alpha''_{T_0})/2$ est dans $[-\pi/2, \pi/2]$ avec une probabilité pratiquement égale à 1, mais alors le calcul de $\hat{\alpha}_{T_0}$ donne 0 si $\hat{\alpha}'_{T_0}$ et $\hat{\alpha}''_{T_0}$ sont de signe contraire (un événement de probabilité 1/2) et une valeur plus petite que $\hat{\alpha}_{T_0}$ en valeur absolue sinon. Par conséquent, l'estimateur amélioré est nettement plus efficace que l'estimateur linéaire, dont la variance reste assez proche de la CRLB (tableaux 1 à 4).

Le tableau 5 fournit les biais des estimateurs. Le biais de l'estimateur de u est exprimé en relatif, c'est-à-dire divisé par u , ceux de β_{T_i} en degrés. On observe que ces biais sont très faibles par rapport aux écarts-type.

Remarque :

On a considéré l'estimateur de u et non celui de la distance qui est $|dl|$ fois son inverse. Théoriquement, l'écart-type de ce dernier peut se déduire de celui du premier : si \hat{u} désigne l'estimateur de u , en écrivant $|dl| \hat{u}^{-1}$ comme $|dl| u^{-1} - |dl| \hat{u}^{-1} u^{-1} (\hat{u} - u)$, on voit que $|dl| \hat{u}^{-1} - |dl| u^{-1}$ a la même loi asymptotique que $-|dl| u^{-2} (\hat{u} - u)$ et a donc un écart-type asymptotique égal à $|dl| u^{-2}$ fois celui de \hat{u} . Toutefois, l'égalité n'est atteinte qu'à la limite et dans la pratique elle n'est qu'approchée dans la mesure où l'écart-type de \hat{u} est beaucoup plus petit que u , ce qui permet de confondre la loi de $\hat{u}^{-1} u^{-1} (\hat{u} - u)$ avec celle de $u^{-2} (\hat{u} - u)$. Or, quand $\text{CapA} = 0$ (ou petit), l'écart-type de \hat{u} peut être important (voir les tableaux 1 à 4) et l'approximation précédente n'est plus

valide. En fait, dans nos simulations (non rapportées ici) on peut constater que l'écart-type de $|\hat{u}|^{-1}$ est beaucoup plus grand que $|\hat{u}|^{-2}$ fois celui de \hat{u} , à cause de quelques valeurs de \hat{u} voisines de 0. Comme l'écart-type de la distance issu de la CRLB est aussi $|\hat{u}|^{-2}$ fois celui de u , l'écart-type de $|\hat{u}|^{-1}$ dépasse largement la borne. C'est donc seulement l'estimateur de u , et non celui de la distance, qui a un écart-type approchant la CRLB.

6.CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode très rapide de trajectographie par mesures de deux azimuts. L'estimation du vecteur d'état du bruiteur est explicite. La construction de cette méthode est basée sur une fusion au centre de l'antenne des deux trajectographies partielles sur chaque capteur. Un choix adéquat du vecteur d'état, composé de trois azimuts et de l'inverse de la distance, permet d'estimer la distance par une régression linéaire alors que le problème initial est fortement non-linéaire.

L'estimateur est efficace (son efficacité est toujours supérieure à 0.9) et non-biaisé lorsque la distance inter-capteurs ainsi que le déplacement total relatif du bruiteur pendant toute la durée de l'observation sont faibles par rapport à la distance bruiteur-capteur. Cette hypothèse est en pratique réalisée.

CHAPITRE V**TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES
DE PLUSIEURS AZIMUTS**

1.INTRODUCTION

Nous avons présenté au chapitre précédent une méthode rapide et efficace de trajectographie par mesures de 2 azimuts. On effectue 2 trajectographies partielles sur chaque capteur et on fusionne les 2 séries d'azimuts sur un capteur fictif de référence. Elle ne nécessite aucun calcul itératif. On se place toujours dans le même cadre - capteurs et source en mouvement rectiligne uniforme - mais le nombre de capteurs est ici quelconque. Bien sûr, la précision des estimateurs augmente avec le nombre de capteurs. Une généralisation de l'approche précédente à un nombre quelconque de capteurs se révèle difficile. La méthode proposée ici repose, elle aussi, sur une fusion des azimuts issus des différents capteurs sur un capteur de référence mais nécessite un calcul itératif en l'occurrence une minimisation d'une fonction à une variable. Le temps de calcul est donc considérablement réduit par rapport à un estimateur de maximum de vraisemblance classique qui exige une minimisation d'une fonction à 4 variables.

L'algorithme se base sur la remarque suivante : si le capteur (C_n) mesure un azimut à l'instant t ($\beta^n(t)$), il existe un temps $\tau^{n1}(t)$ tel que cet azimut soit vu par le capteur (C_1) : $\beta^n(t) = \beta^1(t - \tau^{n1}(t))$. Dès lors, on peut reporter les séries d'azimuts sur le capteur de référence (C_1) en effectuant cette fois non plus une interpolation de Lagrange mais une extrapolation.

Les résultats de cet algorithme s'avèrent performants. Il y a cependant un cas que la méthode ne peut pas traiter, c'est la situation où le cap du bruiteur est proche de la ligne de visée. Compte tenu de cette restriction, les hypothèses de base sont les mêmes que pour la TP2A, c'est à dire que les distances inter-capteurs sont faibles par rapport à la distance observateur-bruiteur. Ce chapitre a donné lieu à une publication [27].

2.POSITION DU PROBLEME

On dispose de N capteurs solidaires (C_1, C_2, \dots, C_N) qui mesurent simultanément des azimuts ($z^n(t)$ $n=1, \dots, N$) à l'instant t :

$$z^n(t) = \beta^n(t) + \varepsilon^n(t) \quad (t=t_1, \dots, t_n) \quad (2-1)$$

où $\varepsilon^n(t)$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes d'écart type σ_n et où $\beta^n(t) = \pi/2 - \arg(r^n(t))$. Les capteurs peuvent être disposés d'une manière quelconque à condition que la distance inter-capteur soit faible par rapport à la distance "source-barycentre des capteurs". Voici un exemple avec 3 capteurs où B représente le bruiteur :

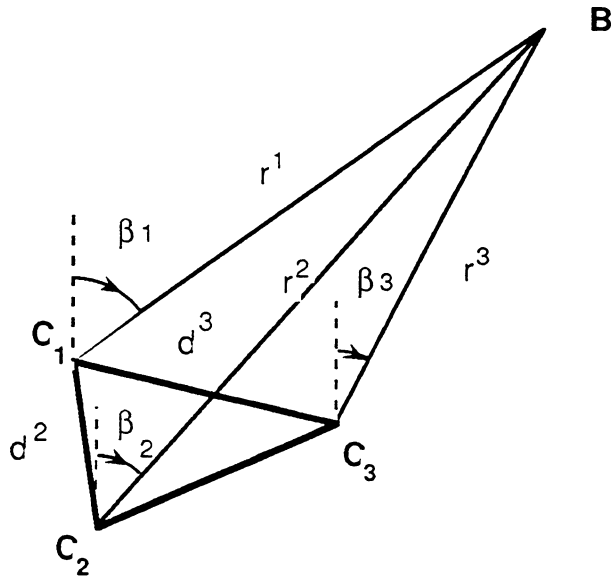


Figure (2-1) : exemple de disposition géométrique de 3 capteurs

3.PRINCIPE DE LA FUSION

Nous montrons que par une translation temporelle nous pouvons reporter les azimuts mesurés sur chaque capteur sur un capteur de référence C_1 . L'observateur et le bruiteur étant en route rectiligne uniforme, il existe un temps $\tau^{n1}(t)$, appelé retard, tel que le capteur C_1 mesure au temps $(t-\tau^{n1}(t))$ l'azimut issu du capteur C_n à l'instant t :

$$\beta^n(t) = \beta^1(t-\tau^{n1}(t))$$

Nous remarquons cette propriété à l'aide de la figure suivante où $B(t)$ est la position du bruiteur à l'instant t :

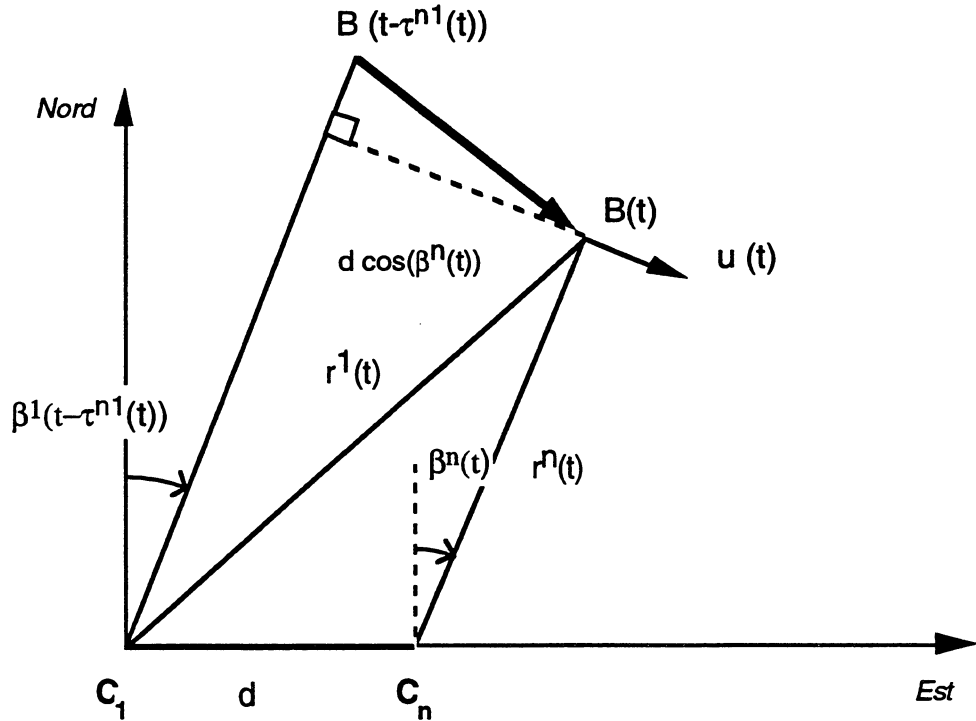


Figure (4-2-3-1) : calcul du temps $\tau^{n1}(t)$

On observe sur la figure où les capteurs sont sur l'axe des X que :

$$\tau^{n1}(t) = \frac{d \cos(\beta^n(t))}{\langle \dot{r}^n(t), u(t) \rangle} \quad (3-1)$$

où $u(t) = (\cos(\beta^n(t)), -\sin(\beta^n(t)))'$

Calculons rigoureusement ce retard dans le cas général :

$$\beta^n(t) = \beta^1(t - \tau^{n1}(t)) \Leftrightarrow \frac{r_x^n(t)}{r_y^n(t)} = \frac{r_x^1(t - \tau^{n1}(t))}{r_y^1(t - \tau^{n1}(t))} = \frac{d_x^n + r_x^n(t - \tau^{n1}(t))}{d_y^n + r_y^n(t - \tau^{n1}(t))} = \frac{d_x^n + r_x^n(t) - \tau^{n1}(t) \dot{r}_x^n}{d_y^n + r_y^n(t) - \tau^{n1}(t) \dot{r}_y^n} \Leftrightarrow$$

$$\tau^{n1}(t) = \frac{d_x^n \dot{r}_y^n(t) - d_y^n \dot{r}_x^n(t)}{\dot{r}_x^n \dot{r}_y^n(t) - \dot{r}_y^n \dot{r}_x^n(t)} = \frac{\langle d^n, u(t) \rangle}{\langle \dot{r}^n, u(t) \rangle} \quad (3-2)$$

où d^n est le vecteur qui joint le point C_1 au point C_n . On peut aussi exprimer $\tau^{n1}(t)$ en fonction de la vitesse angulaire par rapport au capteur C_n , (3-2) nous donne :

$$\tau^{n1}(t) = \frac{d_x^n \cos \beta^n(t) - d_y^n \sin \beta^n(t)}{\dot{r}_x^n \cos \beta^n(t) - \dot{r}_y^n \sin \beta^n(t)} = \frac{d_x^n \cos \beta^n(t) - d_y^n \sin \beta^n(t)}{|r^n(t)| \dot{\beta}^n(t)} \quad (3-3)$$

Le mouvement relatif étant uniforme ($\dot{r}_x r_y(t) - \dot{r}_y r_x(t)$ est indépendant de t) on a :

$$|r^n(t)|^2 \dot{\beta}^n(t) = |r^n(t_0)|^2 \dot{\beta}^n(t_0)$$

finalement (3-3) donne :

$$\tau^{n1}(t) = \frac{(d_x^n \cos \beta^n(t) - d_y^n \sin \beta^n(t)) |r^n(t)|}{|r^n(t_0)| \dot{\beta}^n(t_0)} \quad (3-4)$$

où t_0 est un temps quelconque. Sous cette forme on voit que si la distance $|r^n(t_0)|$ est connue, $\tau^{n1}(t)$ est entièrement déterminé par les azimuts provenant du capteur C_n .

Nous observons que $\tau^{n1}(t)$ est infini si le cap du bruiteur est dans la ligne de visée où plus précisément si la vitesse angulaire est nulle par rapport au capteur C_n .

Il est utile pour la suite d'établir des formules équivalentes pour la réciproque, c'est à dire de chercher le temps $\tau^{1n}(t)$ tel que : $\beta^1(t) = \beta^n(t - \tau^{1n}(t))$. On obtient :

$$\tau^{1n}(t) = \frac{-d_x^n \cos \beta^1(t) + d_y^n \sin \beta^1(t)}{\dot{r}_x^1 \cos \beta^1(t) - \dot{r}_y^1 \sin \beta^1(t)} = \frac{-d_x^n \cos \beta^1(t) + d_y^n \sin \beta^1(t)}{|r^1(t)| \dot{\beta}^1(t)} \quad (3-5)$$

On en déduit une relation simple entre $\tau^{n1}(t)$ et $\tau^{1n}(t)$:

$$\tau^{n1}(t) = -\tau^{1n}(t - \tau^{n1}(t)) \quad (3-6)$$

4.METHODE D'ESTIMATION

Nous écrivons l'équation du maximum de vraisemblance conformément à (2-1). Soit X_s le vecteur d'état à estimer, par exemple le vecteur d'état cartésien :

$X_s = (x_s, y_s, \dot{x}_s, \dot{y}_s)'$. On doit résoudre :

$$\min_{X_s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} (z^n(t) - \beta^n(t, X_s))^2 \quad (4-1)$$

où $\beta^n(t, X_s) = \pi/2 - \arg(r^n(t))$

Nous procédons tout d'abord à une réduction de données sur chaque capteur en effectuant une trajectographie partielle (TPPA):

$$\hat{\beta}_i^n = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) z^n(t) \quad i=0,1,2 \quad n=1,2,\dots,N \quad (4-2)$$

Considérons maintenant ces estimées comme mesures :

$$\hat{\beta}_i^n = \beta_i^n + \frac{\eta^n(T_i)}{\|\phi_i\|} \quad (4-3)$$

où $\eta^n(t)$ sont des bruits blancs gaussiens indépendants d'écart type σ_n . L'indice "i" correspond à l'instant racine T_i du polynôme de Legendre de degré 3. Réécrivons le critère Q (4-1) à l'aide de l'équation de mesures (4-3) :

$$Q \approx \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 (\hat{\beta}_i^n - \beta_i^n)^2 \quad (4-4)$$

Remplaçons β_i^n par $\beta^1(T_i - \tau_i^{n1})$ que l'on note $\beta^1(T_i - \tau_i^{n1})$ et effectuons une interpolation de Lagrange (en fait une extrapolation) qui est justifiée par la faible variation de l'azimut en fonction du temps :

$$\beta_i^n = \beta^1(T_i - \tau_i^{n1}) \approx \sum_{k=0}^2 \phi_k(T_i - \tau_i^{n1}) \beta_k^1$$

On introduit alors cette expression dans (4-4) pour obtenir le critère suivant ($\tau^{11}=0$):

$$Q = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \left[\hat{\beta}_i^n - \sum_{k=0}^2 \phi_k(T_i - \tau_i^{n1}) \beta_k^1 \right]^2 \quad (4-5)$$

En notant $\theta = (\beta_0^1, \beta_1^1, \beta_2^1)'$ on remarque, pour les τ_i^{n1} connus, que le gradient du critère est

linéaire par rapport à θ . Calculons celui-ci :

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_m^1} = -2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \left[\hat{\beta}_i^n - \sum_{k=0}^2 \phi_k(T_i - \tau_i^{n1}) \beta_k^1 \right] \phi_m(T_i - \tau_i^{n1})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_m^1} = -2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \phi_m(T_i - \tau_i^{n1}) \hat{\beta}_i^n$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \left[\sum_{k=0}^2 \phi_k(T_i - \tau_i^{n1}) \beta_k^1 \right] \phi_m(T_i - \tau_i^{n1})$$

En notant :

$$\alpha(k, m) = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \phi_k(T_i - \tau_i^{n1}) \phi_m(T_i - \tau_i^{n1})$$

$$\gamma(m) = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \phi_m(T_i - \tau_i^{n1}) \hat{\beta}_i^n$$

on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_m^1} = \sum_{k=0}^2 \alpha(k, m) \beta_k^1 - \gamma(m) \quad (4-6)$$

La minimisation se fait donc par une régression linéaire par rapport à θ . Il reste à choisir un vecteur d'état complet et à estimer les retards τ^{n1} .

5. CHOIX DU VECTEUR D'ETAT ET ESTIMATION DES RETARDS

On pourrait envisager d'évaluer τ^{n1} (3-4) en utilisant les résultats de la trajectographie partielle sur C_n pour estimer les azimuts, les rapports des distances et la vitesse angulaire, ceci en complétant le vecteur d'état θ avec $|r^n(T_0)|$. *Ce procédé n'est pas valable* pour deux raisons:

- l'estimation des $\cos(\beta^n(t))$ et des $\sin(\beta^n(t))$ est bonne par une TPPA sur C_n car leur variance est strictement inférieure à la variance de $\beta^n(t)$, mais l'estimation de l'inverse de la vitesse angulaire est très mauvaise puisque :

$$\text{var}(1/\beta_{T_0}^n) \approx (1/(\beta_{T_0}^n)^4) \text{var}(\hat{\beta}_{T_0}^n)$$

la vitesse angulaire étant en général faible.

- $|r^n(T_0)|$ dépend du capteur C_n , on ne peut pas donc l'injecter dans le vecteur d'état final.

Par contre, nous pouvons estimer $\tau^{1n}(t)$ en posant μ_0 , le 4ème paramètre du vecteur d'état homogène à l'inverse d'une vitesse, et $\gamma^n(t)$ comme suit :

$$\mu_0 = \frac{1}{|r_0^1| \beta_0} \quad \gamma^n(t) = - \langle d^n, u(t) \rangle \frac{|r_t^1|}{|r_0^1|}$$

où $r_0^1 = r^1(T_0)$. Ainsi, μ_0 contient le paramètre difficile à estimer. $\tau^{1n}(t)$ s'écrit :

$$\tau^{1n}(t) = \mu_0 \gamma^n(t) \quad (5-1)$$

On pose donc comme vecteur d'état :

$$X = (\mu_0, \beta_0^1, \beta_1^1, \beta_2^1) = (\mu_0, \theta)$$

Pour l'évaluation de $\gamma^n(t)$, on estime $\cos(\beta^1(t))$ et $\sin(\beta^1(t))$ par la TPPA, quant à l'estimation du rapport $|r_t^1| / |r_0^1|$, qui est la plus délicate quand la vitesse angulaire est très faible, nous l'effectuons en moyennant sur les N capteurs comme suit :

$$\widehat{\left(\frac{|r_t^1|}{|r_0^1|} \right)} = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \widehat{\left(\frac{|r_t^n|}{|r_0^n|} \right)}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}} \quad (5-2)$$

le rapport relatif à C_n est estimé par la TPPA faite sur le capteur C_n grâce à la formule (II-3-2).

On justifie ce moyennage en développant autour de $1/|r_0^1|$ comme suit :

$$\frac{r_t^n}{r_0^n} = \frac{d^n - r_t^1}{d^n - r_0^1} = \frac{r_t^1}{r_0^1} \left(\frac{1 - d^n / r_t^1}{1 - d^n / r_0^1} \right) = \frac{r_t^1}{r_0^1} \left(1 + \frac{d^n}{|r_0^1|^2} + O\left(\frac{1}{|r_0^1|^3} \right) \right)$$

L'erreur d'approximation ainsi faite est petite par rapport aux écarts type des rapports des distances. On pourrait utiliser les résultats de la TP2A présentée au chapitre précédent pour estimer ces rapports (4-2). De même, on pourrait évaluer ceux-ci en faisant une triangulation à partir des TPPA de chaque capteur. Cependant, les simulations montrent que la méthode

proposée (5-2) donne des résultats satisfaisants. Finalement, connaissant $\tau^{1n}(t)$ pour tout t , nous pouvons évaluer $\tau^{n1}(T_i)$ grâce à (3-6) puisque $\tau^{n1}(t)$ est solution de :

$$x = -\tau^{1n}(t-x)$$

qui se résout simplement par l'algorithme du point fixe :

$$x_{n+1} = -\tau^{1n}(t-x_n) \quad (5-3)$$

où x_0 est obtenu à l'aide des TPPA.

Cet algorithme est très rapide car, pour μ_0 fixé, $\tau^{1n}(t)$ varie comme le rapport des distances, c'est à dire lentement. En général, les simulations (non rapportées) montrent qu'il suffit de 2 itérations (3 au maximum) pour atteindre une précision satisfaisante.

6. ALGORITHME FINAL

Nous résumons la procédure d'estimation.

1- on effectue une TPPA sur chaque capteur pour obtenir $\hat{\beta}_i^n$ par (4-2)

2- pour μ_0 fixé on estime $\tau^{1n}(t)$ par (5-1) puis $\tau^{n1}(t)$ par (5-3)

3- on minimise le critère suivant :

$$Q(\mu_0, \theta) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \left[\hat{\beta}_i^n - \sum_{k=0}^2 \phi_k (T_i - \hat{\tau}_i^{n1}(\mu_0)) \hat{\beta}_k^1 \right]^2 \quad (6-1)$$

Pour μ_0 fixé la minimisation de Q par rapport à θ se fait par une régression linéaire en posant le gradient (4-6) égal à 0. Donc la minimisation non linéaire du critère se fait par rapport à une variable (μ_0) :

$$\tilde{Q}(\mu_0) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \left[\hat{\beta}_i^n - \sum_{k=0}^2 \phi_k (T_i - \hat{\tau}_i^{n1}(\mu_0)) \hat{\beta}_k^1(\mu_0) \right]^2 \quad (6-2)$$

où $\hat{\beta}_k^1(\mu_0)$ est solution de $\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$ donné en (4-6)

4- on reconstitue le vecteur d'état cartésien : $X_S = (x_S, y_S, \dot{x}_S, \dot{y}_S)'$ pris en un temps de référence t_s , en résolvant le système linéaire :

$$r_x(t_s) - \text{tg}(\beta_i^1) r_y(t_s) + (T_i - t_s) \dot{r}_x - \text{tg}(\beta_i^1) (T_i - t_s) \dot{r}_y = 0 \quad (i=0,1,2)$$

$$\dot{r}_x - \cos(\beta_0^1) - \dot{r}_y \sin(\beta_0^1) = 1/\mu_0$$

Typiquement le critère à minimiser par rapport à μ_0 a cette allure :

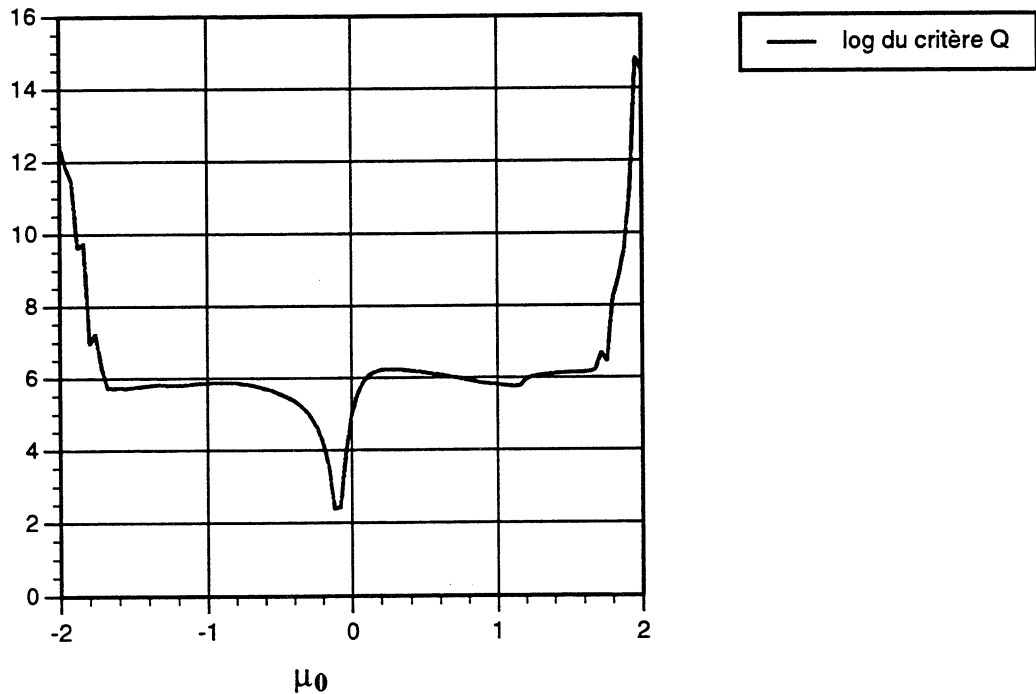


Figure (6-1) : le critère Q en fonction de μ_0

La minimisation est faite par la méthode de la sécante. La valeur exacte de μ_0 est : $\mu_0 = -0.10006$ s/m. La courbe (figure (6-1)) a été obtenue par la géométrie suivante :

3 capteurs fixes de coordonnées (km) [(-0.3,0) ; (0,0) ; (0.3,0)]
 coordonnées initiales du bruiteur (km) = (10,10) ; cap du bruiteur = 135° ;
 vitesse du bruiteur = 10m/s.

Remarques

- Une fois résolue la minimisation (6-2) on peut réestimer les retards $\tau^{n1}(T_i)$ à l'aide de (3-3) et recommencer, avec un faible coût de calcul supplémentaire, la minimisation (6-2). Les simulations (tableaux 2 et 4) montrent que pour certaines géométries l'amélioration n'est pas négligeable.

- Il n'est pas nécessaire de calculer les trois retards $\tau^{n1}(T_i)$ car ces temps ont la même propriété de symétrie que les T_i à savoir : $\tau^{n1}(T_0) - \tau^{n1}(T_1) = \tau^{n1}(T_2) - \tau^{n1}(T_0)$.

7.SIMULATIONS

Nous présentons les résultats de l'estimateur pour la géométrie suivante:

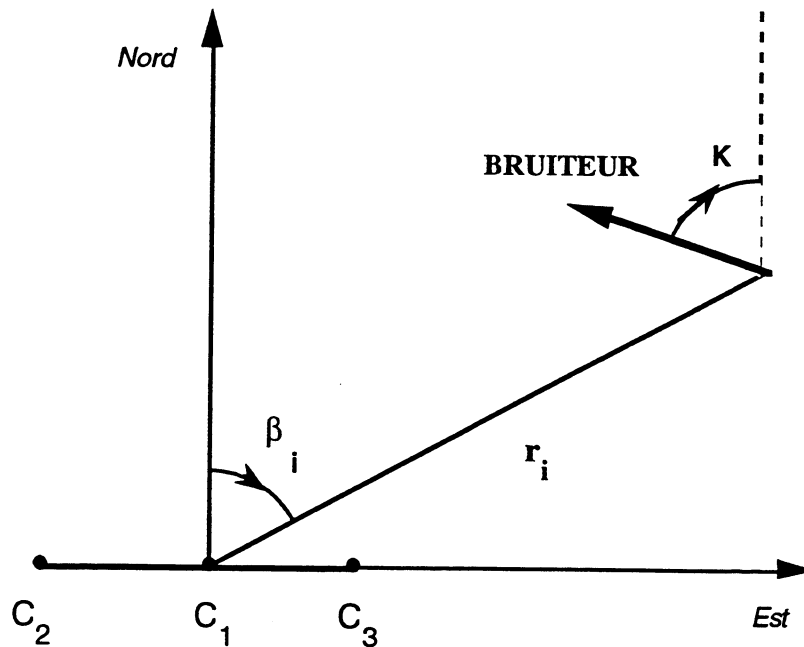


Figure (7-1) : géométrie pour les simulations

On dispose de 3 capteurs fixes alignés et espacés régulièrement, le capteur de référence C_1 étant à l'origine. La distance inter-capteurs est de 300m.

On fait varier l'azimut initial β_i (l'indice supérieur "1" est omis) , le cap du bruiteur K , et la distance initiale $|r_i|$ comme suit :

$$\beta_i = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ ; K = 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, -135^\circ, -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ ; |r_i| = 10\text{km}, 30\text{km}$$

L'écart type des bruits de mesures (σ_n) est fixé pour les 3 capteurs à 1° , la période de mesure à 1s , la vitesse du bruiteur à 10m/s et le nombre de mesures à 100 pour chaque capteur. On obtient ainsi 48 géométries représentatives dont 4 sont inobservables. Pour chacune d'entre elles nous effectuons un tirage de 100 répétitions "Monte-Carlo". L'écart type empirique de l'estimateur est comparé à la borne de Cramer-Rao. Ces écarts-type, le biais et l'efficacité (pris relatifs pour μ_0) figurent dans les tableaux (1 à 4) présentés ci-après. Nous avons aussi testé l'estimateur amélioré (tableaux 2 et 4) décrit à la 1ère remarque du paragraphe (6)

Tableau 1 ($|r_i| = 10\text{km}$): écarts-type des estimateurs non-améliorés, CRLB, biais et efficacité.
 1ère ligne : μ_0 2ème ligne : β_{T0} 3ème ligne : β_{T1} 4ème ligne : β_{T2}

K	$\beta_i = 0^\circ$	$\beta_i = 45^\circ$	$\beta_i = 90^\circ$
0°	$\mu_0 = \infty$.080 .078 .007 .97	.667 .723 .010 1.08
		.074 .073 .010 .98	.090 .086 .024 .96
		.128 .104 .003 .82	.124 .109 .001 .88
		.092 .101 .007 1.10	.096 .109 .014 1.14
45°		.065 .068 .006 1.05	1.04 1.13 .017 1.08
	$\mu_0 = \infty$.079 .069 .009 .87	.090 .086 .015 .95
		.136 .101 .017 .74	.123 .109 .004 .89
		.105 .100 .020 .95	.096 .109 .015 1.14
90°		.053 .054 .002 1.02	.079 .082 .001 1.03
		.080 .007 .001 .92	.080 .074 .013 .92
		.123 .103 .001 .84	.125 .103 .004 .82
		.095 .103 .010 1.08	.093 .104 .020 1.11
135°		.058 .060 .004 1.04	.068 .070 .001 1.02
		.078 .069 .013 .89	.084 .079 .011 .93
		.122 .101 .012 .83	.121 .105 .002 .86
		.111 .102 .021 .92	.090 .106 .018 1.17
180°	$\mu_0 = \infty$.072 .074 .001 1.02	.072 .074 .001 1.02
		.080 .075 .013 .93	.080 .075 .013 .93
		.119 .102 .003 .86	.119 .102 .003 .86
		.096 .105 .015 1.09	.096 .105 .015 1.09
225°	identique à (K, β_i) = (135°, 0°)	$\mu_0 = \infty$	identique à (K, β_i) = (-45°, 90°)
270°		.072 .071 .006 .98	.072 .071 .006 .98
	identique à (K β_i) = (90°, 0°)	.075 .074 .015 .98	.075 .074 .015 .98
		.121 .104 .005 .85	.121 .104 .005 .85
		.096 .103 .008 1.06	.096 .103 .008 1.06
315°		.066 .065 .005 .99	.851 .912 .015 1.07
	identique à (K β_i) = (45°, 0°)	.078 .078 .015 .99	.090 .086 .015 .96
		.120 .106 .001 .88	.123 .109 .001 .88
		.095 .104 .013 1.09	.096 .109 .015 1.14

Tableau 2 ($|r_i| = 10\text{km}$): écarts-type des estimateurs améliorés, CRLB, biais et efficacité.
 1ère ligne : μ_0 2ème ligne : β_{T0} 3ème ligne : β_{T1} 4ème ligne : β_{T2}

K	$\beta_i = 0^\circ$	$\beta_i = 45^\circ$	$\beta_i = 90^\circ$
0°	$\mu_0 = \infty$.081 .078 .008 .97	.610 .723 .015 1.18
		.074 .073 .018 .99	.090 .086 .024 .96
		.117 .104 .005 .89	.124 .109 .003 .88
		.095 .102 .008 1.07	.096 .109 .014 1.14
45°		$\mu_0 = \infty$.099 1.13 .027 1.14
			.090 .086 .025 .96
			.123 .109 .004 .88
			.096 .109 .015 1.14
90°			inobservable
135°			identique à
			$(K, \beta_i) = (45^\circ, 90^\circ)$
180°			identique à
			$(K, \beta_i) = (0^\circ, 90^\circ)$
225°		$\mu_0 = \infty$	identique à
			$(K, \beta_i) = (-45^\circ, 90^\circ)$
270°			inobservable
315°			

Tableau 3 ($|r_i| = 30\text{km}$): écarts-type des estimateurs non-améliorés, CRLB, biais et efficacité.
 1ère ligne : μ_0 2ème ligne : β_{T0} 3ème ligne : β_{T1} 4ème ligne : β_{T2}

K	$\beta_i = 0^\circ$	$\beta_i = 45^\circ$	$\beta_i = 90^\circ$
0°	$\mu_0 = \infty$.232 .231 .021 .99	6.40 6.46 .135 1.01
		.074 .074 .011 1.00	.091 .086 .021 .95
		.128 .104 .003 .81	.117 .109 .003 .93
		.102 .103 .011 1.00	.101 .109 .010 1.08
45°			9.48 9.46 .082 1.00
	$\mu_0 = \infty$.091 .086 .010 .95
			.118 .109 .002 .93
			.101 .109 .008 1.08
90°		.151 .161 .001 1.07	.213 .234 .007 1.09
		.079 .074 .009 .93	.081 .074 .010 .91
		.115 .103 .005 .90	.122 .103 .002 .85
		.101 .103 .015 1.02	.105 .103 .014 .99
135°		.157 .189 .020 1.20	.197 .206 .010 1.04
		.082 .069 .010 .84	.082 .079 .011 .95
		.129 .101 .003 .79	.113 .105 .001 .93
		.121 .101 .011 .83	.095 .106 .018 1.11
180°	$\mu_0 = \infty$.207 .226 .005 1.09	
		.080 .075 .013 .93	identique à
		.119 .103 .001 .87	$(K, \beta_i) = (0^\circ, 90^\circ)$
		.105 .104 .013 .99	
225°	identique à $(K, \beta_i) = (135^\circ, 0^\circ)$	$\mu_0 = \infty$	identique à $(K, \beta_i) = (-45^\circ, 90^\circ)$
270°		.229 .223 .020 .98	
	identique à $(K, \beta_i) = (90^\circ, 0^\circ)$.075 .074 .015 .99	inobservable
		.128 .104 .005 .81	
		.103 .103 .008 1.00	
315°		.202 .201 .020 .99	8.73 8.82 .023 1.01
	identique à $(K, \beta_i) = (45^\circ, 0^\circ)$.078 .078 .016 1.02	.091 .086 .018 .94
		.116 .106 .005 .90	.118 .109 .002 .93
		.098 .105 .004 1.06	.101 .109 .008 1.08

Tableau 4 ($|r_i| = 30\text{km}$): écarts-type des estimateurs améliorés, CRLB, biais et efficacité.
 1ère ligne : μ_0 2ème ligne : β_{T0} 3ème ligne : β_{T1} 4ème ligne : β_{T2}

K	$\beta_i = 0^\circ$	$\beta_i = 45^\circ$	$\beta_i = 90^\circ$
0°	$\mu_0 = \infty$.249 .231 .041 .93	6.27 6.46 .088 1.03
		.077 .074 .021 .96	.093 .086 .028 .93
		.104 .104 .010 1.00	.122 .109 .003 .90
		.092 .103 .011 1.11	.092 .109 .016 1.19
45°			9.37 9.46 .188 1.00
	$\mu_0 = \infty$.094 .086 .025 .92
			.122 .109 .002 .89
			.092 .109 .015 1.18
90°		.231 .234 .013 1.01	inobservable
		.081 .074 .009 .92	
		.117 .103 .004 .88	
		.084 .103 .020 1.22	
135°		.204 .206 .017 1.00	identique à (K, β_i) = (45°, 90°)
		.076 .069 .015 .91	
		.116 .101 .007 .87	
		.086 .101 .028 1.17	
180°	$\mu_0 = \infty$.221 .226 .016 1.02	identique à (K, β_i) = (0°, 90°)
		.081 .074 .017 .92	
		.116 .103 .005 .89	
		.850 .104 .030 1.22	
225°	identique à (K, β_i) = (135°, 0°)	$\mu_0 = \infty$	identique à (K, β_i) = (-45°, 90°)
270°	identique à (K, β_i) = (90°, 0°)	.229 .223 .032 .98	inobservable
		.075 .074 .015 .96	
		.106 .103 .010 .98	
		.950 .103 .014 1.08	
315°	identique à (K, β_i) = (45°, 0°)	.205 .201 .030 .98	8.04 8.82 .083 1.02
		.081 .078 .018 .96	.094 .086 .020 .92
		.109 .106 .005 .96	.122 .109 .002 .89
		.096 .105 .014 1.10	.091 .109 .012 1.20

Nous observons sur ces tableaux la bonne performance des estimateurs. En règle générale, les biais sont faibles par rapport aux écarts-type et l'efficacité est rarement inférieure à 90%. L'estimateur amélioré (tableaux 2 et 4) ne change pas sensiblement les résultats. Toutefois, on note une amélioration lorsque l'azimut initial vaut 0° et le cap du bruiteur 45° ou 135° . On note une fois de plus que l'écart type de l'estimateur de β_{Ti} ne dépend pas de la géométrie.

8.CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode générale de trajectographie à l'aide de plusieurs capteurs solidaires. L'estimateur classique du maximum de vraisemblance exige un temps de calcul assez lourd. Il est en effet basé sur une minimisation non-linéaire à quatre variables. La méthode proposée réduit d'une façon importante ce temps de calcul en ramenant la minimisation non-linéaire à une variable. Le temps de calcul est de l'ordre de 3s sur un micro-ordinateur muni d'un processeur 68020. Ainsi, malgré le calcul itératif qu'exige la méthode, ce temps reste très faible.

Le principe de la fusion des capteurs (on fusionne les séries d'azimuts sur un capteur de référence à l'aide d'un retard) diffère de celui de la TP2A linéaire. Mais comme en TP2A linéaire, ce sont le choix adéquat du vecteur d'état du bruiteur et la quadrature de Gauss qui permettent de développer cette méthode.

L'estimateur proposé est en général efficace et non-biaisé. Le seul cas où l'estimateur est inopérant, est la situation où le cap du bruiteur est proche de la ligne de visée. Compte tenu de cette restriction, les hypothèses (réalistes) de base sont les mêmes que pour la TP2A linéaire : la distance inter-capteurs ainsi que le déplacement total relatif du bruiteur pendant toute la durée de l'observation sont faibles par rapport à la distance "bruiteur-barycentre des capteurs".

CHAPITRE VI

**MANOEUVRE OPTIMALE EN
TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE PAR
MESURES D'AZIMUTS**

1.INTRODUCTION

Nous avons étudié au chapitre III une méthode rapide de trajectographie par mesures d'azimuts (TPA). On suppose le bruiteur en route rectiligne uniforme. Un porteur mesure des azimuts afin d'estimer le vecteur d'état X du bruiteur. Cette estimation n'est possible que si le mouvement du porteur effectue une manoeuvre.

Si la manoeuvre du porteur induit une accélération franche, X est en général observable. Mais, parmi les trajectoires du porteur assurant l'observabilité, il est clair que certaines donneront après TPA une meilleure estimation de X (suivant un certain critère) que d'autres. Ainsi, si la trajectoire du porteur est proche d'une trajectoire rectiligne uniforme l'estimation de X sera mauvaise (en particulier l'estimation de la distance). En pratique, l'on sait depuis longtemps que la qualité des estimées dépend fortement de la manoeuvre de l'observateur. On trouve dans la littérature des manoeuvres optimisées lorsque le porteur procède à un changement de cap et lorsque la distance bruiteur-porteur est grande [28].

L'optimisation de trajectoires peut se traiter en toute généralité par des techniques de programmation dynamique [29] ou par des techniques de commande optimale [30] qui sont toutes deux lourdes en temps de calcul. Ce problème est mal posé si l'on ne tient pas compte des contraintes sur la vitesse des bâtiments ou sur leur manoeuvrabilité, car il suffirait de prendre une vitesse du porteur infinie en se rapprochant du bruiteur. C'est pourquoi, dans un premier temps, on se propose d'optimiser, par rapport aux caps successifs, la trajectoire du porteur dans l'ensemble des trajectoires en "ligne brisée". C'est à dire des trajectoires composées de segments parcourus à vitesse constante. Puis on s'intéresse à d'autres types de trajectoires comme des trajectoires composées de segments de longueur inégale (optimisation de la durée). On développe aussi une méthode rapide d'optimisation de la vitesse absolue sans changement de caps (optimisation de l'accélération).

Le critère utilisé est le volume global de l'information relative à X contenue dans les mesures (déterminant de la matrice de Fisher). Ce critère jouit de propriétés remarquables et autorise un traitement numérique simple.

Nous présentons des algorithmes très rapides basés sur l'approximation de la matrice de Fisher (FIM) par la quadrature de Gauss (QG). On applique des algorithmes numériques classiques de minimisation (gradient conjugué). Différentes stratégies d'optimisation sont envisagées (à horizon court ou long) qui donnent des trajectoires plus ou moins "chahutées". Ce chapitre a donné lieu à une publication [19].

2.FORMULATION GENERALE DU PROBLEME

Nous avons déjà précisé qu'une manoeuvre du porteur (chapitre III) est nécessaire pour assurer l'observabilité du vecteur d'état du bruiteur. Le terme "observable" signifie qu'il existe une unique trajectoire du bruiteur à l'origine de la série d'azimuts non-discrète (β_t pour tout $t \in [t_1, t_n]$). Ajoutons que cette définition est déterministe dans le sens où les azimuts sont pris non bruités.

2-1.Critère d'Aidala

Le critère d'Aidala [7] caractérise l'inobservabilité du système par l'équation différentielle suivante :

$$f(t) = 2 \ddot{\beta}_t \dot{\beta}_t + 4 \dot{\beta}_t^3 - 3 \ddot{\beta}_t^2 = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_n] \quad (2-1-1)$$

Le système est inobservable si et seulement si l'azimut (β_t) vérifie cette équation. C'est le cas en particulier pour la TPPA (chapitre II). De nombreuses trajectoires ambiguës du porteur qui ne sont pas rectilignes uniformes donnent lieu à un système non-observable [9]. A notre connaissance il n'existe pas de tels critères (2-1-1) qui caractérisent une évolution azimutale bruitée (observabilité stochastique). Comment choisir une trajectoire du porteur qui rend le système "le plus observable possible" ou "le moins ambigu possible" ? Faut-il choisir une trajectoire telle que la fonction $f(t)$ induite (2-1-1) s'éloigne le plus de 0 ? En fait, ce critère est purement théorique et ne nous permet pas d'aborder la recherche de trajectoires optimales. En pratique, l'immense majorité des trajectoires rendent le système observable, spécialement lorsqu'elles sont de type "ligne brisée".

Pour une trajectoire du bruiteur donnée il faut déterminer les trajectoires du porteur qui permettent une précision de l'estimation du vecteur d'état la plus précise (dans un certain sens) après la trajectographie par mesures d'azimuts (TPA). On peut remarquer qu'il faut les choisir parmi celles rendant le système observable. Car sinon la matrice d'information de Fisher (FIM) est singulière et son inverse la borne de Cramer-Rao (CRLB) n'existe pas.

2-2.Principe de l'optimisation

Supposons que le porteur a déjà effectué une trajectoire "observable" (ξ_0). De cette façon, on dispose à l'instant t_1 d'une estimation sommaire du vecteur d'état X_s du bruitier. Le porteur choisit en t_1 une trajectoire ξ . Il prévoit alors l'évolution azimutale qu'il va mesurer sur ξ et évalue a priori la FIM(ξ_0, ξ). Il peut donc préjuger approximativement de la précision de la TPA (globale tenant compte de ξ_0 et ξ) effectuée à l'instant t_n .

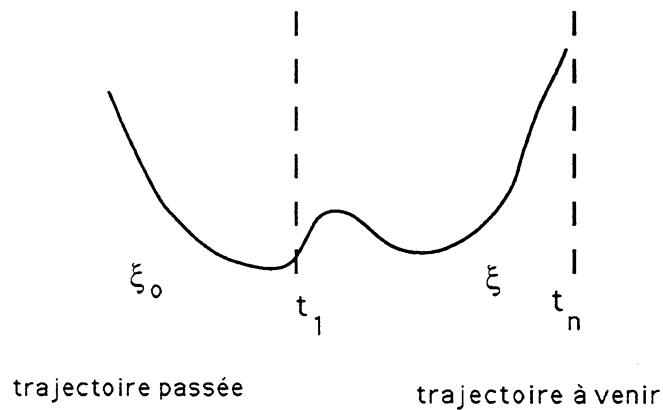


Figure (1-2-1) : choix de la trajectoire future

Prenons comme critère de bonne estimation une fonction de la FIM : C [FIM]. Ce critère peut être par exemple le terme correspondant à l'écart-type sur la distance estimée à l'instant final t_n . Il s'agit de trouver une trajectoire optimale $\hat{\xi} \hat{K}_n$ parmi l'ensemble (\mathbf{T}) des trajectoires ξ de durée $(t_n - t_1)$ telle que $C[\text{FIM}(\xi_0, \xi)]$ soit maximal. (\mathbf{T}) peut être un ensemble de trajectoires régulières par exemple C^1 par morceau. Bien sûr l'optimisation doit tenir compte de contraintes portant par exemple sur le module de la vitesse du porteur ou sur sa manoeuvrabilité (accélération et taux de giration limités)

$$\hat{\xi} = \arg \max_{\xi \in \mathbf{T}} C [\text{FIM}(\xi_0, \xi)] \quad (2-2-1)$$

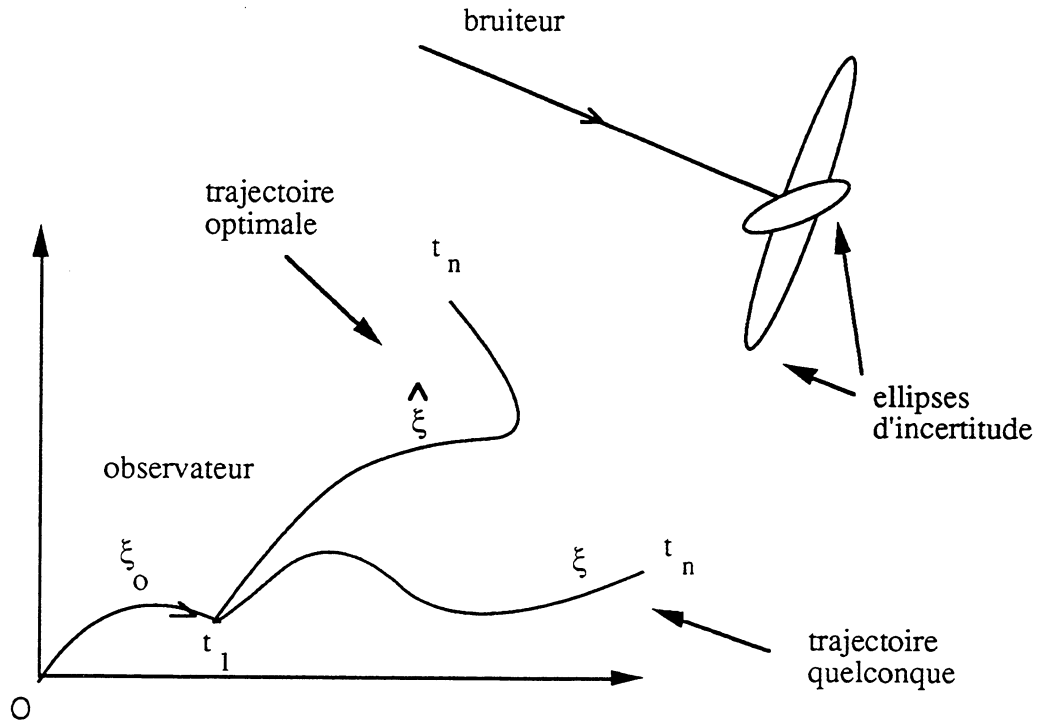


Figure (2-2-1) : principe de l'optimisation

Ce type de problème (2-2-1) se traite classiquement par des techniques de contrôle optimal. En paramétrant la trajectoire du porteur par la commande $(v(t), K(t))$ où $v(t)$ est la vitesse et $K(t)$ le cap, on exhibe une suite de fonctions $(v^{(n)}, K^{(n)})$ convergeant vers la trajectoire vérifiant la condition nécessaire du théorème d'Euler-Lagrange [30]. On peut aussi envisager des méthodes de type "programmation dynamique" [29]. Mais tous ces algorithmes sont coûteux en temps de calcul.

2-3.Choix du critère

La FIM sera notre outil principal car son inverse la CRLB est la matrice de covariance asymptotique de tout estimateur efficace. Le but de la manoeuvre est de "minimiser" la CRLB. Nous nous plaçons toujours dans le cadre d'une équation de mesures additive avec des bruits gaussiens indépendants d'écart-type σ connu (4-1-1). La matrice d'information relative à la trajectoire ξ par rapport au vecteur d'état X_s du bruiteur pris au temps de référence t_s vaut (III-4-1-5)

$$\text{FIM}(\xi) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right) \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)^T = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{1}{|r_t|^2} \begin{bmatrix} A_t & (t-t_s)A_t \\ (t-t_s)A_t & (t-t_s)^2 A_t \end{bmatrix} \quad (2-3-1)$$

$$\text{où } X_s = (x_s, y_s, \dot{x}, \dot{y}) \quad ; \quad A_t = \begin{pmatrix} \cos^2(\beta_t) & -\frac{1}{2} \sin(2\beta_t) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\beta_t) & \sin^2(\beta_t) \end{pmatrix}$$

$\beta_t = \pi/2 - \arg(r(t)) = \arctg(r_x(t)/r_y(t))$; $(r_x(t), r_y(t))$ étant les coordonnées cartésiennes du bruiteur relativement au porteur.

Rappelons quelques propriétés immédiates de la FIM. Il résulte de (II-4-1) :

(P1) La matrice FIM (4,4) est positive.

(P2) La FIM correspondante à une trajectoire composée de ξ_1 et ξ_2 - $\xi = (\xi_1 U \xi_2)$ - est la somme des FIM correspondantes (prises au même temps de référence) aux sous-trajectoire ξ_1 et ξ_2 :

$$\text{FIM}(\xi) = \text{FIM}(\xi_1) + \text{FIM}(\xi_2)$$

(P3) Si l'on prend un autre temps de référence t_u , la FIM relative à X_u vaut :

$$\text{FIM}_u(\xi) = (A')^{s-u} \text{FIM}_s(\xi) A^{s-u}$$

$$\text{où } A^{s-u} = \begin{pmatrix} \text{Id} & (t_s - t_u) \text{Id} \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{Id est la matrice identité (2,2)}$$

(P4) Si l'on prend un autre système de coordonnées Y en correspondance biunivoque avec X_s . La FIM relative à Y vaut :

$$\text{FIM}_Y(\xi) = \left(\frac{\partial X_s}{\partial Y} \right)^T \text{FIM}_{X_s}(\xi) \left(\frac{\partial X_s}{\partial Y} \right)$$

Un grand nombre de critères d'appréciation de la qualité de l'estimation de X_s à l'aide de la FIM sont envisageables. Parmi eux citons :

- (1) La plus petite valeur propre de la FIM en t_s que l'on maximise par rapport à ξ . Cela revient à maximiser l'information dans la direction la moins observable.
- (2) L'écart-type en t_s d'une fonction d'un des paramètres de X_s comme la distance. Critère que l'on minimise
- (3) La trace de la FIM que l'on maximise ($\text{Tr}(\text{FIM})$).
- (4) Le déterminant de la sous-matrice (2,2) de la CRLB correspondant à la position du bruiteur en t_s . La racine de ce déterminant est proportionnelle au volume de l'ellipse de confiance de la position du bruiteur en t_s (4-1-4)

- (4) Le déterminant global de la FIM que l'on maximise ($\det(\text{FIM})$). $\det^{-1/4}(\text{FIM})$ est proportionnel au volume de l'ellipsoïde de confiance.

La maximisation des critères (1), (2), (3), (4) dépend du temps de référence (P3). Ce choix est arbitraire et il peut donner une trajectoire optimale variant avec la valeur de t_s . De même, la trajectoire optimale ne doit pas dépendre du choix du système de coordonnées (Cartésien, polaire, ...). Si l'on prend les critères (1) et (3) ce n'est pas le cas (P4). Notons que le critère (3) n'est pas adapté au problème car, la trace étant additive, la maximisation ne tient pas compte de la trajectoire passée ($\text{Max Tr}(\text{FIM}(\xi_0, \xi)) \Leftrightarrow \text{Max Tr}(\text{FIM}(\xi))$ (P2)). Rappelons, en effet, que la TPA s'effectuera à la fin de $\hat{\xi}$ en tenant compte des azimuts récoltés sur ξ_0 . Notons que le critère (1) est assez coûteux, en outre, la FIM n'est pas toujours bien conditionnée. Seul le critère (4) est exempt de ces inconvénients. En effet,

- * $\det(\text{FIM})$ est indépendant de t_s car $\det(A)=1$ (P3)
- * la maximisation de $\det(\text{FIM})$ est indépendante du choix de coordonnées (P4)
- * le calcul de $\det(\text{FIM})$ est explicite (matrice (4-4) positive)

La maximisation du $\det(\text{FIM})$ ne privilégie pas un paramètre spécifique. Elle équivaut à la maximisation de *l'information globale* contenue dans les mesures.

Ce critère possède une propriété très intéressante,

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \det [\text{FIM}(x)] = \text{Tr} \left(\text{FIM}^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x} \text{FIM}(x) \right) , \quad (2-3-2)$$

qui sera utile pour les algorithmes de minimisation présentés dans la suite.

3.MANOEVRE AVEC CHANGEMENT DE CAP

Nous simplifions le problème d'optimisation général présenté en (2-2). Notre souci est de trouver des trajectoires réalistes à l'aide d'algorithmes rapides. Nous nous plaçons, dans ce paragraphe, dans l'ensemble (T) des trajectoires en "ligne brisée".

3-1.Modélisation de la trajectoire

Toute trajectoire suffisamment régulière peut être approchée par une trajectoire dite en ligne brisée c'est à dire composée de segments. On fixe N le nombre de caps à effectuer et la

durée totale (T) d'acquisition de mesures à venir. N est appelé *horizon de la trajectoire*. De plus, nous supposons que les segments sont de longueurs données de durée ($T=T_1+T_2+\dots+T_N$) parcourus par le porteur à vitesse fixe constante. Cette modélisation est raisonnable. Il est en effet peu réaliste qu'un porteur change de caps ou accélère de manière intempestive. Comme nous le verrons par la suite, le fait que la vitesse soit fixe n'est pas une restriction car on a toujours intérêt à la prendre maximale.

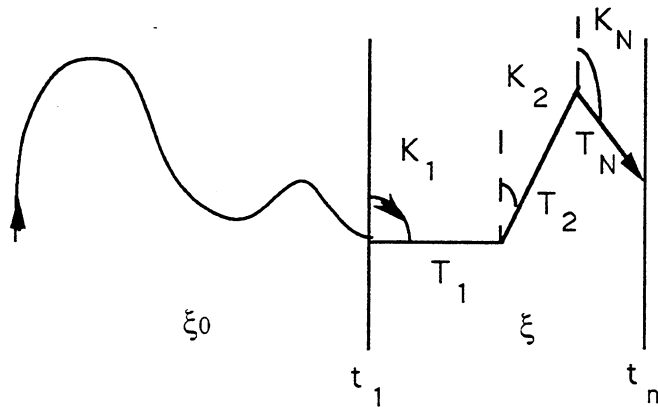


Figure (3-1-1) : trajectoire en ligne brisée

Le porteur a déjà parcouru une trajectoire ξ_0 . Il a mis en œuvre une TPA sur ξ_0 . On dispose donc d'une estimation préalable \hat{X} du vecteur d'état du bruiteur. La $FIM(\xi_0 \cup \xi)$ est évaluée à l'aide de \hat{X} . Elle se décompose en une somme des 2 FIM associées aux 2 trajectoires prises au même temps de référence (P2). Les variables de commande sont les caps $K=(K_1, K_2, \dots, K_N)$. L'optimisation se réduit à la maximisation du critère $Q(K)$:

$$\text{Max}_{\xi} \log \det [FIM(\xi_0) + FIM(\xi)] = \text{Max}_K \log \det [FIM(\xi_0) + FIM(K)] \quad (3-1-1)$$

En notant t_i les instants de manoeuvre ($t_{i+1}-t_i=T_i$) au début du i ème segment, décomposons $FIM(K)$ sur chaque segment. D'après (III-2-3-1) et (P3), $FIM(K)$ peut s'écrire :

$$FIM(K) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{|r_t|^4} (F^{t-s})^T \begin{bmatrix} B_t(K) & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{bmatrix} F^{t-s} \quad (3-1-2)$$

où O_2 est la matrice (2,2) nulle et $B_t(K) = \begin{bmatrix} r_y^2(t) & -r_x(t) r_y(t) \\ -r_x(t) r_y(t) & r_x^2(t) \end{bmatrix}$

$(r_x(t), r_y(t)) = (x_b(t) - x_a(t), y_b(t) - y_a(t))$ désignant les coordonnées cartésiennes du bruiteur à l'instant t relativement à l'antenne. Sur le i ème segment ($t \in [t_i, t_{i+1}]$) on a (v_a est la vitesse de l'antenne) :

$$r_x(t) = x_b(t) - x_a(t_1) - \left[\sum_{p=1}^{i-1} T_p \sin(K_p) \right] v_a - \left[t - \sum_{p=1}^{i-1} T_p \right] \sin(K_i) v_a \quad (3-1-3-a)$$

$$r_y(t) = y_b(t) - y_a(t_1) - \left[\sum_{p=1}^{i-1} T_p \cos(K_p) \right] v_a - \left[t - \sum_{p=1}^{i-1} T_p \right] \cos(K_i) v_a \quad (3-1-3-b)$$

L'optimisation (3-1-1) se résout par un algorithme classique de type "gradient conjugué". Le gradient du critère se calcule grâce à (2-3-2) :

$$\frac{\partial}{\partial K} Q(K) = \text{Tr} \left[\left(\text{FIM}(\xi_0) + \text{FIM}(K) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial K} \text{FIM}(K) \right] \quad (3-1-4)$$

Nous détaillerons ce calcul dans le paragraphe (4). La minimisation sous la forme (3-1-1) est assez coûteuse. Notons cependant que le nombre de minimums locaux est assez faible (de l'ordre de 3 pour $N=5$).

On présente ci-après un exemple de trajectoire optimale d'horizon 4 avec des segments de longueurs égales. A l'instant t_1 , le porteur est à l'origine et on suppose $\text{FIM}(K)$ connue à cet instant. On compare les ellipses d'incertitude (à 95 %) de la position du bruiteur à l'instant final t_n obtenues par la trajectoire optimale et par une trajectoire quelconque. Le critère d'optimisation est $\det(\text{FIM})$, mais l'écart-type sur la distance (σ_d) ou le volume de l'ellipse sont étroitement liés au déterminant global. En général, la minimisation du volume de l'ellipsoïde d'incertitude entraîne la réduction du volume de l'ellipse liée à la position. On constate le gain important sur la précision de l'estimation sur distance (rapport des $\sigma_d \approx 2.5$) apporté par la trajectoire optimale.

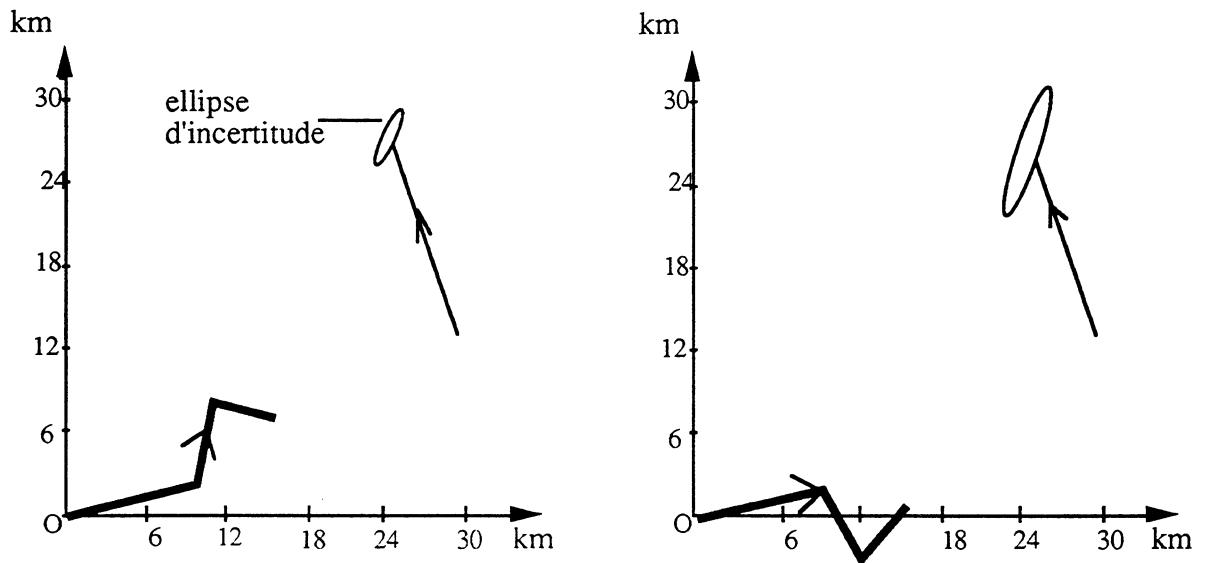
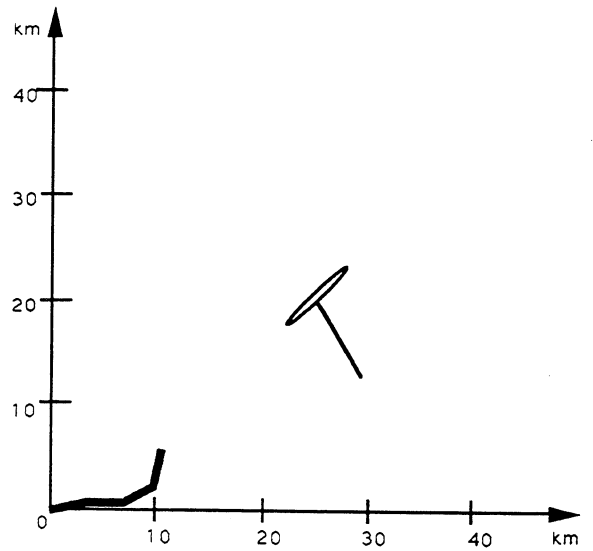
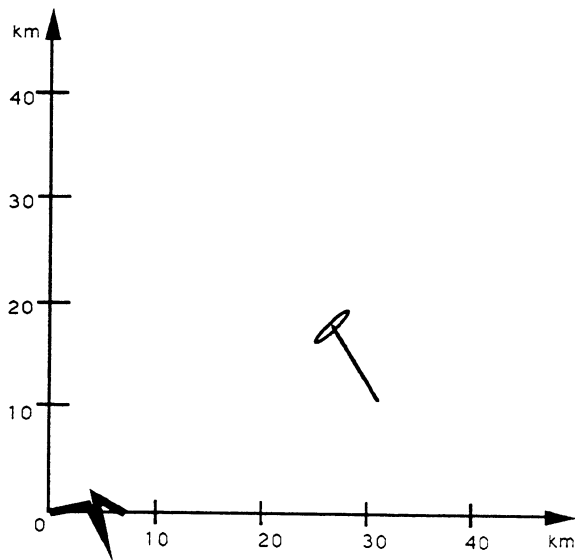
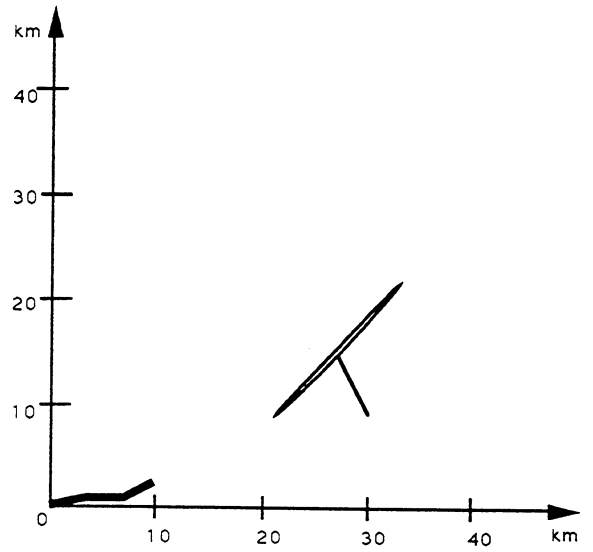
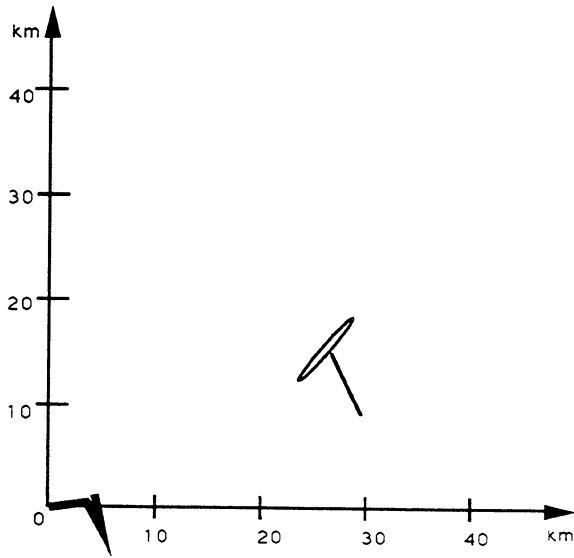
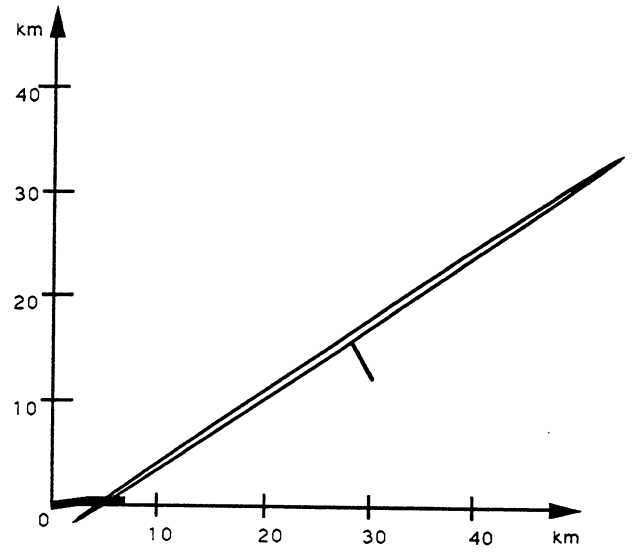
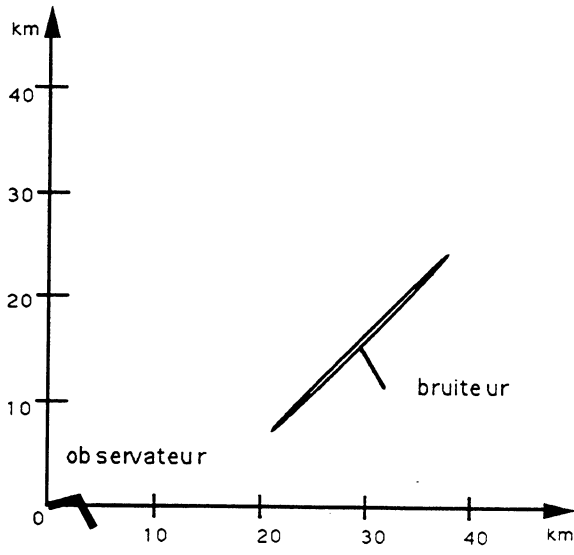


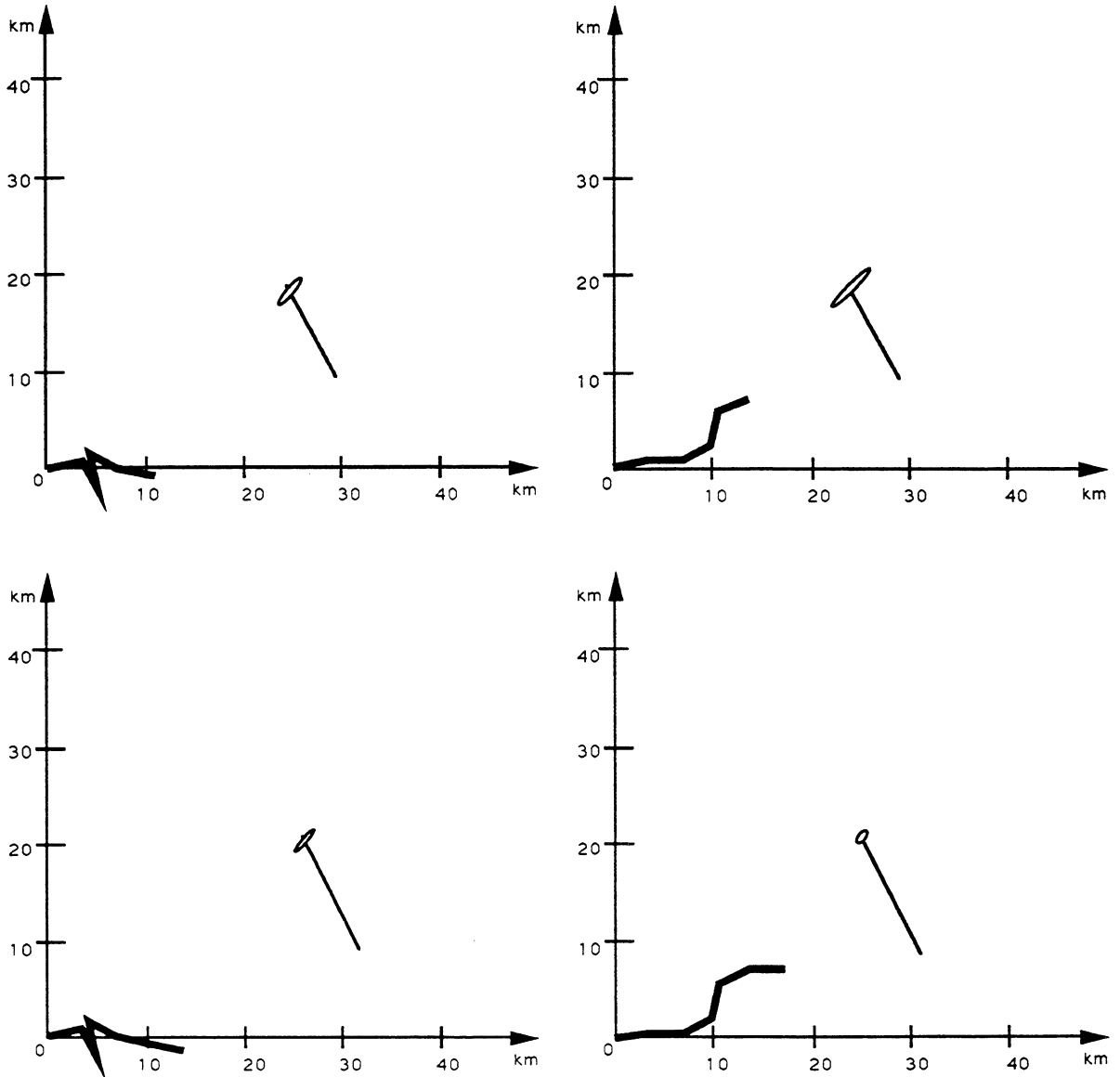
Figure (3-1-1) : performance d'une trajectoire optimale (horizon=4)

3-2.Stratégies

Le programme (3-1-1) suppose l'horizon (N) fixé à l'avance. On fixe la durée totale T mais comment choisir N ? Si la $FIM(K)$ est parfaitement connue, alors on gagnera toujours à prendre un horizon long : prenons une trajectoire composée de N_1 segments, (3-1-1) donne la trajectoire optimale $\hat{\xi}_1$. Il suffit alors de découper chacun des N_1 segments en 2 et de lancer (3-1-1) avec $N=2N_1$. On obtient alors une autre trajectoire optimale $\hat{\xi}_2$ qui donne un critère supérieur. Mais, $FIM(K)$ est évaluée avec \hat{X} disponible en t_1 . On voit dès lors qu'il est risqué de vouloir suivre un horizon long si X est mal estimé. Rien n'empêche, par exemple, que les premiers segments de la trajectoire optimale soient alignés. Il peut aussi se produire une manoeuvre du bruiteur qui remet en cause la validité de la trajectoire optimale. On le voit, il convient de choisir des horizons courts ($N \leq 5$).

Nous présentons ci-après deux stratégies d'optimisation pour une même géométrie. Les deux trajectoires du porteur ont en commun le premier segment L_0 qui joue le rôle de ξ_0 . Elles sont composées de 6 segments de même longueur parcourus à vitesse constante. Pour illustrer simplement les 2 stratégies, on se place dans le cadre théorique où $FIM(K)$ est connue à tout instant. Les courbes à gauche montrent une stratégie d'horizon 1 : au bout de L_0 , le porteur cherche le prochain cap optimal \hat{K}_1 , arrivé au bout de L_1 il recommence pour obtenir \hat{K}_2 , et ainsi de suite jusqu'à L_5 . Les courbes à droite montrent une stratégie d'horizon 5 : au bout de L_0 , le porteur cherche d'emblée les 5 prochains caps optimaux $[(\hat{K}_i, i=1, \dots, 5)]$.





Figures (3-2-1) : comparaison de 2 stratégies d'horizon 1 et 4

Les deux stratégies offrent deux trajectoires radicalement différentes. La trajectoire "pas à pas" est, comme on pouvait s'y attendre, chahutée alors que la trajectoire "globale" est plus régulière. Notons qu'il faut attendre le dernier segment pour que la stratégie globale affirme sa supériorité : l'ellipse d'incertitude liée à cette dernière est plus petite.

Cet exemple illustre quelques principes parfois contradictoires de bonnes manoeuvres. La trajectoire pas à pas se développe en prenant les segments orthogonaux à la ligne de visée de manière à maximiser la vitesse angulaire. La trajectoire d'horizon 4, "raisonnant à long terme", concilie une bonne variation azimutale et une diminution de la distance antenne-bruiteur. Cette diminution est souhaitable : la FIM (2-3-1) est "inversement proportionnelle" à $|r_t|^2$.

Les caps optimaux (3-1-1) sont calculés par une méthode de quasi-Newton (version BFGS [15]) où le Hessien est approché par le gradient calculé à l'aide de (3-1-4). Dans le cas "pas à pas", la minimisation numérique a été obtenue avec 5 itérations pour chaque étape. En règle générale, avec un horizon 1 on ne rencontre pas de maximums locaux (sauf pour des géométries symétriques). Dans ce cas, la fonction à maximiser est une fonction de K en forme de cloche périodique de (2π) . Pour la trajectoire d'horizon 4, il s'est présenté 2 minimums locaux. Plusieurs initialisations ont été nécessaires pour obtenir l'optimum global. L'algorithme a convergé au bout de 13 itérations.

Les trajectoires optimales présentées sont théoriques. En pratique, il faut envisager une *stratégie adaptative*. A l'instant t_1 , on dispose d'une première estimation \hat{X}_0 , on évalue $FIM_0(K)$ et on calcule $\hat{\xi}_0$ composée des caps $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \dots, \hat{K}_N)$. Le porteur arrive au bout du 1er segment. A l'aide d'une TPA, on procède à une nouvelle estimation de X soit (\hat{X}_1) et de $FIM(K)$ ($FIM_1(K)$). On calcule alors une trajectoire optimale d'horizon $(N-1)$: $\hat{\xi}_1$ composée des caps $(\hat{K}'_2, \hat{K}'_3, \dots, \hat{K}'_N)$. On continue ainsi de suite jusqu'au dernier segment. Notons que \hat{K}'_i ($i \geq 2$) peut être assez différent de \hat{K}_i ($i \geq 2$). La trajectoire optimale est donc "affinée" à chaque nouvelle estimation \hat{X} .

Remarque :

La manoeuvrabilité des bâtiments est limitée. C'est pourquoi, en pratique, il faut tenir compte d'une contrainte sur le taux de giration (vitesse angulaire dK/dt). Il faut adjoindre à (3-1-1) les contraintes suivantes sur les caps :

$$|K_i - K_{i-1}| \leq \dot{K} \tau = a \quad , \text{ où } \dot{K} \text{ est le taux de giration et } \tau \text{ la durée consacrée à la giration}$$

Sans surcharger le coût de la minimisation, on peut transformer simplement ce programme avec contraintes en un programme sans contraintes grâce au changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} K'_1 &= a \sin K_1 + K_0 & K'_2 &= a \sin K_1 + a \sin K_2 + K_0 \\ K'_N &= a \sin K_1 + a \sin K_2 + \dots + a \sin K_N + K_0 \end{aligned}$$

que l'on note $K' = f(K)$. K_0 est le dernier cap de ξ_0 avant la manoeuvre. Il suffit alors de résoudre, par rapport aux variables non contraintes (K), la maximisation suivante (3-1-1)

$$\text{Max}_K Q' [K] = \text{Max}_K Q [f(K)] = \text{Max}_K \log \det [FIM(\xi_0) + FIM(f(K))]$$

donnant \hat{K} . Finalement le maximum cherché vérifiant les contraintes vaut :

$$\begin{aligned} \hat{K}'_1 &= a \sin \hat{K}_1 + K_0 & \hat{K}'_2 &= a \sin \hat{K}_1 + a \sin \hat{K}_2 + K_0 \\ \hat{K}'_N &= a \sin \hat{K}_1 + a \sin \hat{K}_2 + \dots + a \sin \hat{K}_N + K_0 \end{aligned}$$

Le gradient (3-1-4) est modifié comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial K} [Qof] (K) = \text{Jac}[f] (K) \frac{\partial}{\partial K} [Q] (f(K)) \quad \text{où } \text{Jac}[f] (i,j) = 0 \text{ si } i > j, \cos K_i \text{ sinon}$$

L'algorithme de minimisation avec contraintes reste rapide malgré le risque d'introduction de minimums locaux dû à la transformation.

3-3. Le premier cap

Au paragraphe précédent, l'observateur disposait d'une estimation \hat{K} du vecteur d'état du bruiteur au moment de calculer la trajectoire optimale. On supposait qu'il avait déjà emprunté une trajectoire ξ_0 rendant le système observable. On traite à présent le problème du premier cap. Il faut appliquer une autre méthode car, si le porteur n'a parcouru qu'un segment à vitesse constante, on ne peut pas évaluer la FIM, le système étant inobservable.

On suppose donc que le porteur a parcouru à vitesse constante un segment fixé. Il est montré dans [28] que, lorsque la distance (d) antenne-bruiteur est grande, le porteur doit prendre *la direction orthogonale à la ligne de visée* induisant le plus grand changement de cap. Ce faisant on minimise l'écart-type de l'estimation sur la distance à l'instant initial (d_0). Précisément, en notant a_b la projection de l'accélération du porteur sur l'orthogonale à la ligne de visée :

$$\begin{aligned} a_b &= \langle \vec{v}_2 - \vec{v}_1, u_0^\perp \rangle \quad \text{où } \vec{v}_1 \text{ est le vecteur vitesse du porteur sur le } i\text{ème segment et} \\ u_0^\perp &= (\cos \beta_0, -\sin \beta_0)' \end{aligned}$$

Une approximation de la CRLB pour d grand donne une expression approchée de l'écart-type relatif de la distance (σ_d/d) :

$$\frac{\sigma_{d_0}}{d_0} \approx \text{cte} \frac{d_0 \sqrt{\Delta T}}{T^{3/2} |a_b|} \quad (3-3-1)$$

où Δt est la période de mesures et T la durée totale d'observation. On voit alors que pour minimiser σ_d , il faut maximiser $|\langle \vec{v}_2, u_0^\perp \rangle|$. On ne peut pas influencer sur la distance, celle-ci étant par hypothèse grande. Il faut donc prendre la direction orthogonale à la ligne de visée du côté où le changement de cap est le plus grand. Cela revient à maximiser la vitesse angulaire. Notons que (3-3-1) nous indique que l'on a toujours intérêt à choisir le module de la vitesse ($|v|$) du porteur maximal car $|a_b|$ est proportionnel à $(|v|)$.

Une approche plus générale consiste à utiliser la trajectographie partielle par mesures d'azimuts (TPPA) présenté au chapitre II. Au bout du premier segment on effectue une TPPA linéaire qui donne une estimation de Θ_{PM} (II-2-2) :

$$\hat{\Theta}_{PM} = (\hat{\beta}(t_0), \hat{v}_\beta(t_0), \hat{v}_r(t_0)) \quad (3-3-2)$$

où t_0 est un temps quelconque, v_β est la vitesse angulaire et v_r la vitesse radiale relative. Il suffit alors de fixer a priori une valeur raisonnable de la distance observateur-bruiteur (d) ou bien d'imposer une vitesse maximale du bruiteur ce qui donne avec la TPPA un encadrement de la distance. On peut plus généralement fixer une distribution a priori sur la distance. En fait toute *connaissance a priori* (même pauvre) sur l'état du bruiteur X permet de compléter (3-3-2) pour obtenir une estimation du vecteur d'état X . Ainsi, $FIM(K)$ se calcule et on peut chercher une trajectoire optimale (3-1-1). Il faut prendre un horizon court car X est mal évalué. Les simulations confirment le principe dégagé en (3-3-1) : dans le cas de l'horizon 1, lorsque d est supposée grande, le cap optimal calculé par (3-3-1) est proche de $(\beta_0 \pm \pi/2)$. Mais, dans le cas de distances plus courtes, le cap optimal peut s'éloigner de cette valeur. Voici un exemple où l'on complète la TPPA par une distance fixée a priori à 20 km au moment de la manoeuvre :

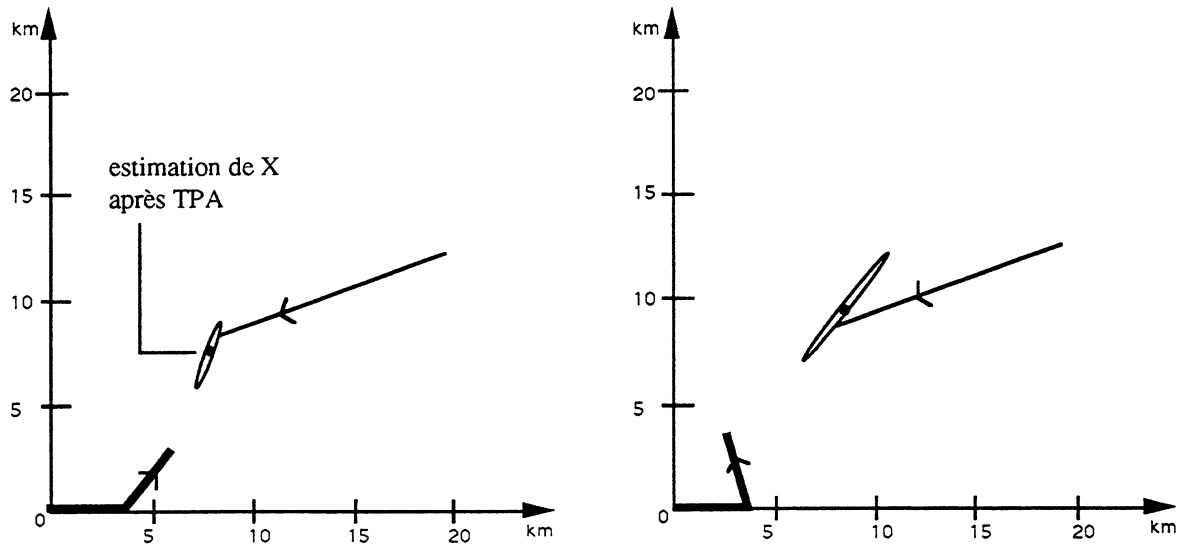


Figure (3-3-1) : cap optimal après TPPA sur le 1er segment

Le cap optimal après TPPA donne de meilleurs résultats (rapport des $\sigma_d \approx 2$) que la trajectoire qui prend l'orthogonale à la ligne de visée.

4. APPROXIMATION DE LA MATRICE DE FISHER

L'optimisation (3-1-1) est assez coûteuse en temps de calcul pour des horizons longs ($N \geq 4$). Nous allons réduire de façon importante ce temps en approchant la matrice de Fisher (FIM) (3-1-2) par la quadrature de Gauss (QG). A l'aide de cette approximation nous construisons une méthode simple d'optimisation de la durée des segments pour un horizon 2.

4-1. Accélération de l'algorithme

Nous approchons la FIM(K) (3-1-2) par la quadrature de Gauss (II-5-1-3). Les instants t_i sont les instants de manoeuvre. L'approximation se fait sur chaque segment (le segment "i" a une durée $T_i = t_{i+1} - t_i$) avec 5 racines. $r_j^i \in [t_i, t_{i+1}]$ désigne la jème racine ($j=0,1,2,3,4$) du polynôme de Legendre Ψ_5^i de degré 5 sur le ième segment :

$$\sum_{t=t_i}^{t_{i+1}} t^k \Psi_5^i(t) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 4 ; i=1,2,\dots, N-1$$

En ignorant σ^2 , La FIM approchée s'écrit (2-3-1):

$$FIM(K) \approx FIM_1(K) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^4 \|\phi_j^i\|^2 \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i} \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i}^T \quad (4-1-1)$$

L'erreur est de l'ordre de $(d^5(\beta_t)/dt^5)$. L'approximation est très précise car, sur chaque segment, le porteur est en route rectiligne uniforme. Les N segments ont une durée fixée a priori (T_i). Il suffit de calculer les racines r_j^i et les normes une fois pour toutes sur l'intervalle $[0,1]$ (explicitement ou par l'algorithme de Laguerre (III-3-1)) puis de les dilater sur la durée T_i . On voit alors que le nouveau critère

$$Q_1(K) = \log \det \left[\text{FIM}(\xi_0) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^4 \|\phi_j^i\|^2 \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i} \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i}^T \right] \quad (4-1-2)$$

se calcule très rapidement. Le programme d'optimisation reste identique à (3-1-1) avec un gradient modifié. En notant $F(K) = \text{FIM}(\xi_0) + \text{FIM}_1(K)$, $K=(K_1, K_2, \dots, K_N)$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K} Q_1(K) &= \text{Tr} \left[F^{-1}(K) \frac{\partial}{\partial K} \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^4 \|\phi_j^i\|^2 \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i} \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i}^T \right] = \\ \frac{\partial}{\partial K} Q_1(K) &= 2 \text{Tr} \left[F^{-1}(K) \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^4 \|\phi_j^i\|^2 \left[\frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i} \right] \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i}^T \right] = \\ \frac{\partial}{\partial K} Q_1(K) &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^4 \|\phi_j^i\|^2 \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i}^T F^{-1}(K) \left[\frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)_{t=r_j^i} \right] \end{aligned} \quad (4-1-3)$$

où $X_s = (x_s, y_s, \dot{x}, \dot{y})'$ sont les coordonnées cartésiennes du bruitier et

$$\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} = \frac{1}{|r(t)|^2} [r_y(t), -r_x(t), (t-t_s) r_y(t), - (t-t_s) r_x(t)]'$$

Les coordonnées du bruitier ($r=(r_x, r_y)^T$) relativement au porteur s'écrivent aux temps r_j^i :

$$r_x(r_j^i) = x_b(r_j^i) - x_a(r_j^i) = x_b(r_j^i) - x_a(t_1) - \left[\sum_{m=1}^{i-1} T_m \sin(K_m) \right] v_a - \left[r_j^i - \sum_{m=1}^{i-1} T_m \right] \sin(K_i) v_a$$

$$r_y(r_j^i) = y_b(r_j^i) - y_a(r_j^i) = y_b(r_j^i) - y_a(t_1) - \left[\sum_{m=1}^{i-1} T_m \cos(K_m) \right] v_a - \left[r_j^i - \sum_{m=1}^{i-1} T_m \right] \cos(K_i) v_a$$

Finalement, le gradient suivant complète le calcul de (4-1-3),

$$\frac{\partial}{\partial K_p} r(r_j^i) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq i+1 \\ (r_j^i - \sum_{m=1}^{p-1} T_m) v_a [-\cos(K_p), \sin(K_p)]^T & \text{si } p=i \\ T_p v_a [-\cos(K_p), \sin(K_p)]^T & \text{si } p \leq i-1 \end{cases}$$

Idem pour $(\partial/\partial K_p) x_a(r_j^i)$.

La minimisation de Q_1 s'effectue par la même méthode de quasi-Newton. Cette minimisation est très rapide, le critère et son gradient nécessitant peu de calculs. Les simulations montrent que l'algorithme accéléré donne des caps optimaux très proches (erreur $\approx 0.1^\circ$) des caps obtenus avec l'optimisation exacte (3-1-1).

4-2. Optimisation de la durée

Dans le paragraphe précédent, les instants de manoeuvre sont fixés a priori. En général on prend les segments de durée égale. On peut facilement optimiser la longueur des segments dans le cas de l'horizon 2 ($N=2$). Il suffit de remarquer dans (4-1-2) que les racines r_j^i et les normes des polynômes de Lagrange $\|\Psi_j^i\|$ ne dépendent que de la durée du i ème segment T_i . Aussi, on maximise Q_1 par rapport à T_i via r_j^i et $\|\Psi_j^i\|$.

L'expression de ces racines en fonction de T_i étant lourde, nous calculons tout d'abord une approximation de celles-ci lorsque le nombre d'azimuts n_a est grand. Dans l'intervalle temporel $[1, \dots, n_a]$, les 5 racines du polynôme de Legendre valent (III-3-1) : $(n_a+1)/2$; $(n_a+1)/2 \pm \tau_1$; $(n_a+1)/2 \pm \tau_2$ où :

$$\tau_1 = \frac{5(n_a^2 - 7) - 2 \left[\frac{10n_a^4 - 95n_a^2 + 1228}{7} \right]^{1/2}}{36} \quad \tau_2 = \frac{5(n_a^2 - 7) + 2 \left[\frac{10n_a^4 - 95n_a^2 + 1228}{7} \right]^{1/2}}{36}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{6} \left(5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}} \right)^{1/2} n_a + o\left(\frac{1}{n_a}\right) \quad \tau_2 = \frac{1}{6} \left(5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}} \right)^{1/2} n_a + o\left(\frac{1}{n_a}\right)$$

On se place dans le cadre où les mesures sont espacées régulièrement avec ΔT comme période de mesures. En notant

$$a_0 = \frac{64}{225 \Delta T} ; a_1 = a_2 = \frac{7(46+13\sqrt{10/7})}{1800 \Delta T} ; a_3 = a_4 = \frac{7(46-13\sqrt{10/7})}{1800 \Delta T}$$

$$b_0 = 0 ; b_1 = \frac{1}{6} \left(5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}} \right)^{1/2} ; b_2 = \frac{1}{6} \left(5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}} \right)^{1/2} ,$$

on obtient pour n_a grand:

$$\tau_i = b_i n_a + o(1/n_a) \quad \text{pour } i=1,2$$

Dès lors, les 5 racines r_j^i ($j=0,1,2,3,4$) et les 5 normes sur le i ème segment ont pour valeurs approchées:

$$r_j^i \approx \sum_{p=1}^{i-1} T_p + \frac{\Delta T}{2} + d_j T_i ; \quad \|\phi_j^i\|^2 \approx a_j T_i \quad (4-2-1)$$

avec $d_0=1/2$; $d_1=(1-2b_1)/2$; $d_2=(1+2b_1)/2$; $d_3=(1-2b_2)/2$; $d_4=(1+2b_2)/2$.

On calcule le nouveau critère (4-1-2). En notant $f(t) = \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right) \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)^T$, $Q_1(K) \approx Q_2(K)$

(l'erreur est faible) où:

$$Q_2(K, T_1, T_2, \dots, T_{N-1}) = \log \det \left[\text{FIM}(\xi_0) + \sum_{i=1}^N T_i \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^i(T_1, \dots, T_i)) \right] \quad (4-2-2)$$

On maximise Q_2 par rapport aux caps et aux durées T_i ($i \leq N-1$) sous les contraintes linéaires suivantes :

$$\left(\begin{array}{c} 0 \leq T_i \leq T \quad i=1, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^{N-1} T_i \leq T \end{array} \right) \quad (4-2-3)$$

T_N n'est pas une variable car la durée totale ($T=T_1+\dots T_n$) est fixée.

Nous calculons la variation du critère Q_2 en fonction de la variation de la durée d'un segment.

Variation des racines r_j^i

Faisons une petite variation de la durée du k ème segment ($k < n$) : $T_k \rightarrow T_k + dT_k$

* cas $i \leq N-1$.

$$\begin{aligned} \text{si } k \geq i+1 & \quad r_j^i \text{ ne bouge pas} \\ \text{si } k=i & \quad r_j^i \rightarrow r_j^i + d_j dT_k \text{ (la proportion est gardée)} \\ \text{si } k \leq i-1 & \quad r_j^i \rightarrow r_j^i + dT_k \text{ (la durée est translatée)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_j^i}{\partial T_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq i+1 \\ d_j & \text{si } k=i \\ 1 & \text{si } k \leq i-1 \end{cases}$$

* cas $i=N$.

$$r_j^i \rightarrow r_j^i - d_j dT_k \text{ (la durée totale est fixée)}$$

$$\frac{\partial r_j^i}{\partial T_k} = 1 - d_j$$

Variation de la matrice de Fisher

Posons $FIM = \sum_{i=1}^N T_i \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^i(T_1, \dots, T_i))$ que nous décomposons :

$$FIM = \sum_{i=1}^{k-1} T_i \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^i) + T_k \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^k) + \sum_{i=k+1}^{N-1} T_i \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^i) + \left(T - \sum_{m=1}^{N-1} T_m \right) \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^N)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial FIM}{\partial T_k} &= \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^k) + T_k \sum_{j=0}^4 a_j \frac{\partial}{\partial T_k} [f(r_j^k)] + \sum_{i=k+1}^{N-1} T_i \sum_{j=0}^4 a_j \frac{\partial}{\partial T_k} [f(r_j^i)] \\ &\quad - \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^N) + T_N \sum_{j=0}^4 a_j \frac{\partial}{\partial T_k} [f(r_j^N)] \end{aligned} \quad (4-2-4)$$

$\partial[f(r_j^i)]/\partial T_k$ s'obtient à partir de :

$$\frac{\partial}{\partial T_k} r(r_j^i) = \begin{cases} d_j \dot{r}(k) & \text{si } i = k \\ \dot{r}(k) & \text{si } k+1 \leq i \leq N-1 \\ \dot{r}(k) - d_j \dot{r}(N) & \text{si } i = N \end{cases}$$

où $\dot{r}(k)$ est la vitesse relative sur le segment k . Le gradient par rapport à K se calcule comme au paragraphe (4-1)

Il est inutile d'optimiser simultanément les caps et les durées pour $N \geq 3$. En effet, les simulations montrent que l'optimisation simultanée des caps et des durées aboutit à une trajectoire que l'on obtiendrait par l'algorithme à durée fixe en choisissant un nombre de segments plus élevé. On se limite donc à $N=2$, les variables sont les caps K_1, K_2 et la durée du premier segment T_1 . Dans ce cas, on s'affranchit des contraintes (4-2-3) grâce à la transformation $g(T_1) = T \sin^2(T_1)$. On maximise le critère suivant :

$$Q_2(K, T_1) = Q_2(K, g(T_1)) = \log \det [\text{FIM}(\xi_0) + \sum_{i=1}^N T_i \sum_{j=0}^4 a_j f(r_j^i(g(T_1)))] \quad (4-2-5)$$

Le gradient (4-2-4) est modifié comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial T_1} Q_2(K, T_1) = T \sin(2T_1) \frac{\partial}{\partial T_1} [Q_2(g(T_1))]$$

L'algorithme de minimisation avec durée optimale entraîne une surcharge du coût de calcul (multiplié par 5) par rapport à l'optimisation avec durée fixe ($N=2$). Ce coût reste toutefois faible. Les simulations (non rapportées) montrent que l'amélioration apportée par l'optimisation de la durée n'est pas très forte. On observe une diminution de l'ordre de 15% des écarts-type des paramètres qui composent X_s . En général, la durée optimale du premier segment est voisine de $T/3$ ou de $2T/3$. L'une de ces durées correspond au maximum global et l'autre à un maximum local. Dans les 2 cas, les 2 caps optimaux sont différents mais les critères sont très proches. L'un des deux maxima privilégie l'écart-type sur la distance et l'autre privilégie l'écart-type sur le cap.

5. MANOEUVRE SANS CHANGEMENT DE CAP

Nous traitons dans ce paragraphe le cas où le porteur garde un cap constant. Pour effectuer une TPA, il faut qu'il accélère ou décélère. Intuitivement, les paramètres cinématiques du bruiteur seront bien estimés si l'accélération est prise la plus grande possible. C'est à dire si

le porteur navigue tantôt à vitesse maximale, tantôt à vitesse minimale. Cette intuition est confirmée d'une part par (3-3-1) pour de grandes distances et d'autre part par les simulations. C'est pourquoi, nous modélisons la vitesse absolue en une phase ascendante (accélération positive prise maximale) et en une phase descendante (accélération négative prise maximale en valeur absolue). Pour éviter des trajectoires chahutées, nous nous limitons à ces deux phases. Finalement, on aboutit à un algorithme simple et rapide optimisant la durée de ces phases.

Considérons un modèle linéaire de la vitesse du porteur à deux phases tenant compte des contraintes sur l'accélération et sur la décélération. On montre le cas où la première phase est ascendante :

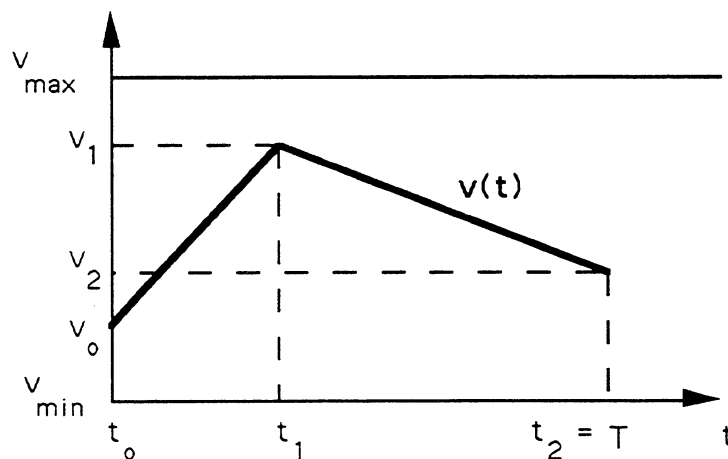


Figure (5-1) : modélisation de la vitesse

où v_0 est la vitesse initiale, v_{\min} et v_{\max} les vitesses minimales et maximales. t_1 est l'instant de la manoeuvre et T la durée (fixée) totale d'observation. En posant $t_2 = T - t_1$, la trajectoire du porteur est entièrement déterminée par les variables (v_1, v_2, t_1) avec les contraintes suivantes :

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} v_{\min} \leq v_i \leq v_{\max} \\ |v_i - v_{i-1}| \leq \begin{cases} A_m (t_i - t_{i-1}) & \text{si } v_i \geq v_{i-1} \\ D_m (t_i - t_{i-1}) & \text{si } v_i \leq v_{i-1} \end{cases} \\ 0 \leq t_1 \leq T \end{array} \right.$$

où A_m et D_m sont respectivement l'accélération et la décélération maximales en valeurs absolues du porteur.

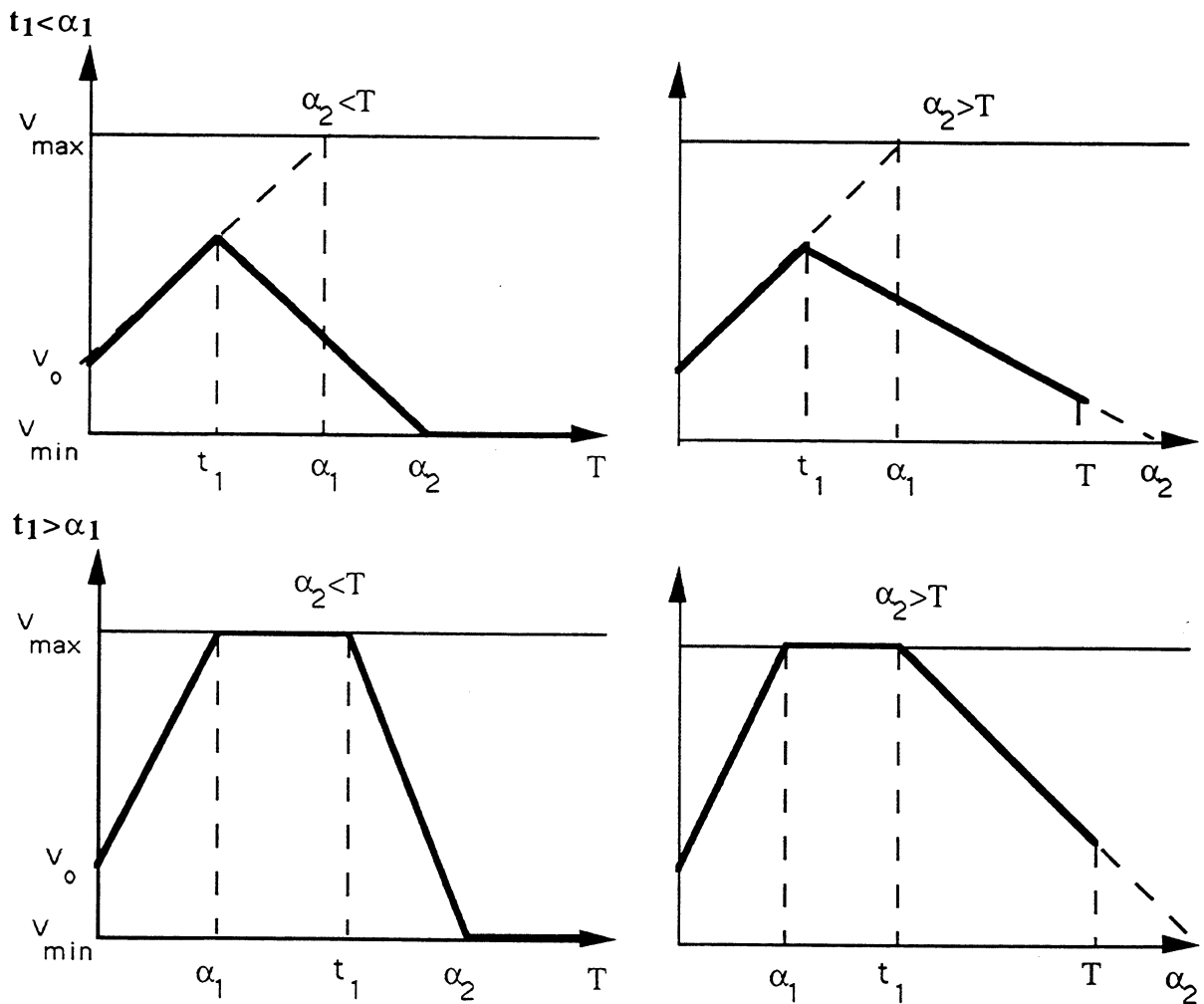
Comme nous l'avons souligné, on a toujours intérêt à prendre l'accélération la plus grande possible. Il s'ensuit que les contraintes d'inégalités (C) donnent:

$$\begin{cases} v_i = \inf(v_{\max}, v_{i-1} + A_m (t_i - t_{i-1})) & \text{si } v_i \geq v_{i-1} \\ v_i = \sup(v_{\min}, v_{i-1} - D_m (t_i - t_{i-1})) & \text{si } v_i \leq v_{i-1} \end{cases}$$

Par conséquent, le programme d'optimisation se réduit à :

$$\text{Max}_{t_1} Q(t_1) = \text{Max}_{t_1} \log \det [\text{FIM}(\xi_0) + \text{FIM}(t_1)] \quad (5-1)$$

On optimise t_1 pour les deux types de trajectoires : première phase ascendante (1er type) et première phase descendante (2ème type). Nous représentons ci-dessous les 4 configurations possibles de la vitesse pour le 1er type.



où $\alpha_1 = (v_{\max} - v_0) / A_m$; $\alpha_2 = t_1 + (v_{t_1} - v_{\min}) / A_m$

Une manière efficace et rapide de résoudre (5-1) est de nouveau d'employer la Quadrature de Gauss. Soit r_j^i ($j=0,1,2,3,4$) les 5 racines asymptotiques sur la phase i ($i=1,2$). En vertu de (4-2-1), on a :

$$\begin{aligned} r_j^1 &\approx d_j t_1 \quad ; \quad \|\phi_j^1\|^2 \approx a_j t_1 \\ r_j^2 &\approx d_j (T-t_1) \quad ; \quad \|\phi_j^2\|^2 \approx a_j (T-t_1) \end{aligned} \quad (5-2)$$

En notant $f(t) = \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right) \left(\frac{\partial \beta_t}{\partial X_s} \right)^T$, (5-1) se maximise avec la valeur approchée de FIM(t_1) suivante :

$$FIM(t_1) \approx t_1 \sum_{j=0}^4 a_j f[d_j t_1] + (T-t_1) \sum_{j=0}^4 a_j f[d_j (T-t_1)]$$

Le gradient du critère approché est présenté en Annexe (V-5-1). L'optimisation se fait avec la méthode habituelle du gradient. On s'affranchit de la contrainte ($0 \leq t_1 \leq T$) par la transformation: $g(t_1) = T \sin^2(t_1)$. Notons qu'il y a un petit problème théorique de dérivabilité du critère en des points isolés. Analysons en effet la fonction : $t_1 \rightarrow x(r_j^1(t_1))$ où x est l'abscisse du porteur.

$$\forall t_1 \quad r_j^1(t_1) < t_1$$

$$1/ r_j^1 < \alpha_1 \Leftrightarrow t_1 \leq \frac{\alpha_1}{d_j}, \quad x(r_j^1) = x_0 + (r_j^1 - t_0) v_0 + \frac{(r_j^1 - t_0)^2}{2} A_m$$

$$2/ r_j^1 \geq \alpha_1 \Leftrightarrow t_1 \geq \frac{\alpha_1}{d_j}, \quad x(r_j^1) = x_{\alpha_1} + (r_j^1 - \alpha_1) v_{\max}$$

On voit que pour $t \leq \alpha_1$ $x(r_j^1(t_1))$ est dérivable en t_1 , et si $t_1 \geq \alpha_1$ $x(r_j^1(t_1))$ n'est pas dérivable en (α_1/d_j) . Cependant, en pratique, nous n'avons jamais rencontré de problèmes de divergence.

Nous présentons ci-après une simulation basée sur la géométrie :

Coordonnées initiales du bruiteur (km) : (20,30) ; du porteur : (0,0)

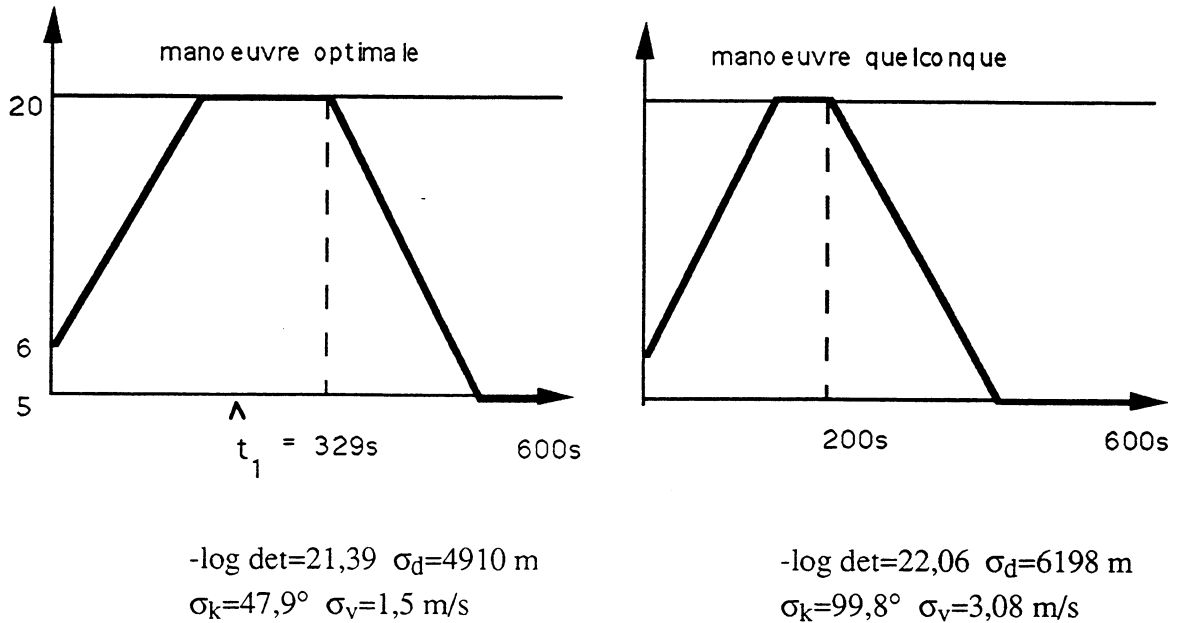
Cap du bruiteur (deg) : 90° ; du porteur : 90°

Vitesse du bruiteur (m/s) : 6 ; du porteur : $v_{\min}=5$ $v_{\max}=20$

Ecart-type des bruits de mesures (deg) : 0.5 ; $A_m=0.1$ m/s² $D_m=0.05$ m/s²

Durée de l'observation (s) : 600 ; période de mesures (s) : 4

On suppose $FIM(t_1)$ parfaitement connue en t_0 . Les résultats de l'optimisation (σ_d , σ_k , σ_v écarts-type de la distance, du cap, de la vitesse) sont comparés aux résultats obtenus par une manoeuvre quelconque :



L'optimum a été obtenu au bout de 4 itérations. On constate le gain important apporté par la manoeuvre optimale.

Remarque :

La meilleure manoeuvre consiste à changer de cap. En effet, l'accélération induite par un changement de cap est plus forte, ce qui accroît le terme a_b figurant dans (3-3-1).

6.CONCLUSION

En trajectographie par mesures d'azimuts, une manoeuvre appropriée du porteur améliore fortement la précision des estimées. Sous sa forme générale, le problème de l'optimisation de la manoeuvre est complexe et se traite par des méthodes coûteuses en temps de calcul.

Dans le cas de manoeuvres avec changement de cap, ce problème se simplifie en modélisant les trajectoires en "ligne brisée". Cette restriction ne pénalise pas les performances. On maximise le déterminant de la matrice de Fisher. C'est un critère adapté aussi bien pour l'aspect "estimation statistique" que pour l'aspect numérique des algorithmes. Les variables de commande sont les caps successifs et la durée des segments. Deux stratégies sont proposées. L'une à "horizon court" maximise pas à pas l'information et offre des trajectoires chahutées, l'autre à "horizon long", plus risquée mais plus performante, maximise à long terme l'information et offre des trajectoires régulières. L'algorithme d'optimisation est accéléré en réduisant sensiblement le coût du critère : la matrice de Fisher est finement approchée par la quadrature de Gauss.

Des manoeuvres optimales sans changement de cap sont proposées. La vitesse absolue du porteur est optimisée dans le cadre d'une trajectoire composée d'une phase d'accélération et d'une phase de décélération. L'optimisation porte sur la variable "durée de la phase" en tenant compte de la contrainte sur l'accélération maximale. De nouveau, en appliquant la quadrature de Gauss, ce problème se résout simplement et le coût de la maximisation devient négligeable.

CHAPITRE VII

**UNE AUTRE APPLICATION :
L'ACCELEROMETRIE**

1.INTRODUCTION

Nous présentons une application des estimateurs rapides dans le domaine de l'accélérométrie (mesures d'accélération d'un mobile). Ce domaine est radicalement différent de la trajectographie par mesures d'azimuts. En effet, d'une part la cinématique considérée ici comporte une phase d'accélération et une phase de *décélération forte* et, d'autre part, l'équation de mesures est modélisée par une erreur *relative* additionnelle. Malgré cela, nous montrons qu'il est possible d'utiliser la propriété de *quasi-exhaustivité* des estimateurs linéaires proposés dans cette thèse pour réduire sensiblement le nombre des mesures. Cela nous conduit à un estimateur rapide approché du maximum de vraisemblance.

Nous développons une méthode d'estimation de la trajectoire d'un véhicule balistique hypersonique (vitesse initiale de l'ordre de 6000 m/s) en phase de rentrée dans l'atmosphère. Cette estimation se base sur des mesures d'accélération longitudinale. Hagen [31] a proposé une méthode d'estimation de l'altitude en supposant la pente de l'engin connue et constante. Cette dernière hypothèse est valable lorsque le coefficient balistique (c_b) est faible ou lorsque la vitesse initiale est grande ou encore lorsque la pente est forte [32]. L'altitude est alors estimée en détectant l'instant où la décélération est maximale. L'inconvénient de cette méthode est que cet instant peut se produire à une altitude basse (< 10 km).

La méthode proposée ici ne suppose pas la pente connue et permet de connaître par exemple l'altitude à tout instant. On suppose le coefficient balistique connu ainsi que la relation liant la masse volumique de l'air à l'altitude (modèle atmosphérique exponentiel). La trajectoire de l'engin est composée de 2 phases. La 1ère est à accélération quasi-constante et la 2ème à forte décélération. Nous montrons que, durant la 2ème phase, l'information accélérométrique est riche et permet à tout instant d'estimer précisément les 3 paramètres (pente, altitude et vitesse initiales) qui décrivent la trajectoire de l'engin.

Un algorithme d'estimation du maximum de vraisemblance est proposé. Le coût de celui-ci est rendu faible, dans certaines circonstances, grâce à une réduction optimale de mesures. Ses performances sont évaluées en les comparant à la borne de Cramer-Rao. Les simulations montrent le bon comportement de cet estimateur en ce qui concerne son biais et son efficacité. Ce chapitre a donné lieu à un article soumis à la Revue "La Recherche Aérospatiale".

2.DYNAMIQUE

Nous nous intéressons à la phase d'entrée dans l'atmosphère de l'engin qui débute à 120 km d'altitude. L'altitude initiale étant assez basse, nous travaillons en terre plate immobile et supposons que l'accélération de la pesanteur (g) est indépendante de l'altitude. Les forces intervenant sont le poids ($W=Mg$) et les forces aérodynamiques dont seule la composante tangentielle (la traînée D) est prise en compte. La trajectoire de l'engin est donc comprise dans un plan vertical (h,X).

Nous utilisons dans la suite les notations et certains résultats établis par A.Miele [32]:

- γ est la pente de l'engin (prise négative) par rapport à l'horizontale
- V est le module de la vitesse
- \dot{V} (ou A) est l'accélération longitudinale

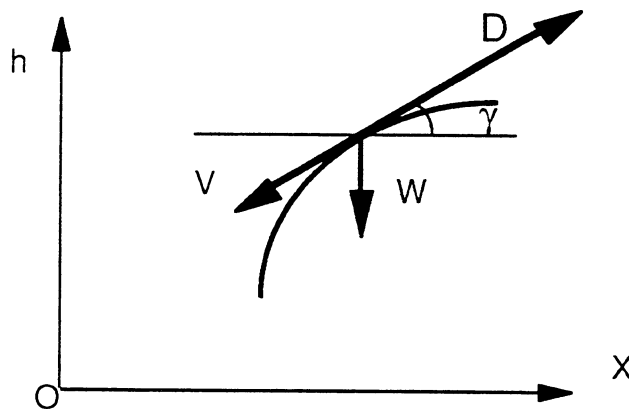


Figure (2-1) : Bilan des forces

Le système d'équations différentielles s'écrit par rapport au temps et à l'altitude [32] :

$$\begin{aligned}
 \dot{X} - V \cos \gamma &= 0 & \dot{h} &= V \sin \gamma \\
 \dot{h} - V \sin \gamma &= 0 & \frac{dX}{dh} &= \cot \gamma \\
 D + W \left(\sin \gamma + \frac{\dot{V}}{g} \right) &= 0 & \frac{dV}{dh} &= -\frac{g}{V} \left(\frac{D}{W \sin \gamma} + 1 \right) \\
 \dot{\gamma} V + g \cos \gamma &= 0 & \frac{d\gamma}{dh} &= -\frac{g}{V^2} \cot \gamma
 \end{aligned} \tag{1-1}$$

La traînée est essentiellement fonction de h et de V , $D = D(h,V) = q S c_d$, où $q = 1/2 \rho V^2$ est la pression dynamique, ρ la masse volumique de l'air, S la plus grande section du fuselage et c_d le coefficient de traînée. L'engin étant en régime hypersonique, c_d est approximativement constant.

Le système (2-1) se résout explicitement par rapport à la variable h en adoptant le modèle atmosphérique exponentiel $\rho = \rho_0 \exp(-h/\lambda)$ où ρ_0 est la masse volumique de l'air au niveau de la mer et λ une constante (ρ_0 et λ sont supposés connus). Pour résoudre (2-1) nous supposons dans un premier temps la pente constante, ce qui est raisonnable puisque dy est proportionnel à dh/V^2 .

Introduisons les notations suivantes :

coefficient balistique : $c_b = S c_d/M$, *facteur balistique* : $K_b = -\lambda \rho_0 c_b / (2 \sin \gamma_i)$
énergie cinétique : $\varepsilon = u^2 / 2$, *vitesse initiale* : V_i
pente initiale : γ_i , *altitude initiale* : h_i

où $u = V / (\lambda g)^{1/2}$, $\Pi = 2 K_b \exp(-h/\lambda)$ et M la masse du véhicule. La traînée par unité de masse s'écrit : $D/W = -\sin \gamma_i K_b u^2 \exp(-h/\lambda)$

L'indexation par "i" signifie que l'on prend le paramètre à l'altitude initiale ou au temps initial suivant que l'on adopte l'altitude ou le temps comme variable d'intégration (pour E_i cet indice ne signifie rien)

On montre [32] que l'énergie cinétique vérifie (avec la pente constante): $d\varepsilon/d\Pi + \varepsilon - 1/\Pi = 0$
 de solution générale :

$$\varepsilon = [c_i + E_i(\Pi)] \exp(-\Pi) \quad (2-2)$$

$$\text{où } c_i = \exp(\Pi_i) \frac{u_i^2}{2} - E_i(\Pi_i) \text{ et } E_i(\Pi) = \int_{-\infty}^{\Pi} \frac{\exp(x)}{x} dx = \gamma_E + \log \Pi + \sum_{n>0} \frac{\Pi^n}{n! n}$$

et $\gamma_E \approx 0.5772$ la constante d'Euler.

On déduit de (1-1) les variations de la vitesse, de la pente (rendue maintenant variable) et de l'accélération longitudinale en fonction de l'altitude :

$$\text{vitesse} \quad V = [2 \lambda g (c_i + E_i(\Pi)) \exp(-\Pi)]^{1/2} \quad (2-3)$$

$$\text{pente} \quad \gamma = (\cot \gamma_i)/2 \log [(c_i + E_i(\Pi))/c_i + E_i(\Pi_i)] + \gamma_i \quad (2-4)$$

$$\text{accélération longitudinale:} \quad A = g \sin(\gamma_i) [(c_i + E_i(\Pi)) \Pi \exp(-\Pi) - 1] \quad (2-5)$$

Le calcul de l'altitude en fonction du temps est plus lourd. Il nécessite un algorithme itératif. comme $\dot{h}(t) \equiv V \sin(\gamma_i)$ on a :

$$t = - \frac{1}{(2 \lambda g)^{1/2} \sin \gamma_i} \int_{\Pi_i}^{\Pi_h} \frac{\exp(y/2)}{y (c_i + E_i(y))^{1/2}} dy \quad (2-6)$$

On peut exprimer $h=h(t)$ en posant $\Psi(x) = \int_{\Pi_i}^x \frac{\exp(y/2)}{y (c_i + E_i(y))^{1/2}} dy$ et $\Pi^{-1}(x) = -\lambda \log\left(\frac{x}{2 K_b}\right)$

$$\text{hauteur : } h = \Pi^{-1} \circ \Psi^{-1} \left[- \left(\frac{2 g}{\lambda} \right)^{1/2} \sin(\gamma_i) t \right] \quad (2-7)$$

on résout l'inversion de Ψ ($\Phi(x) = \Psi(x) - y = 0$) comme suit :

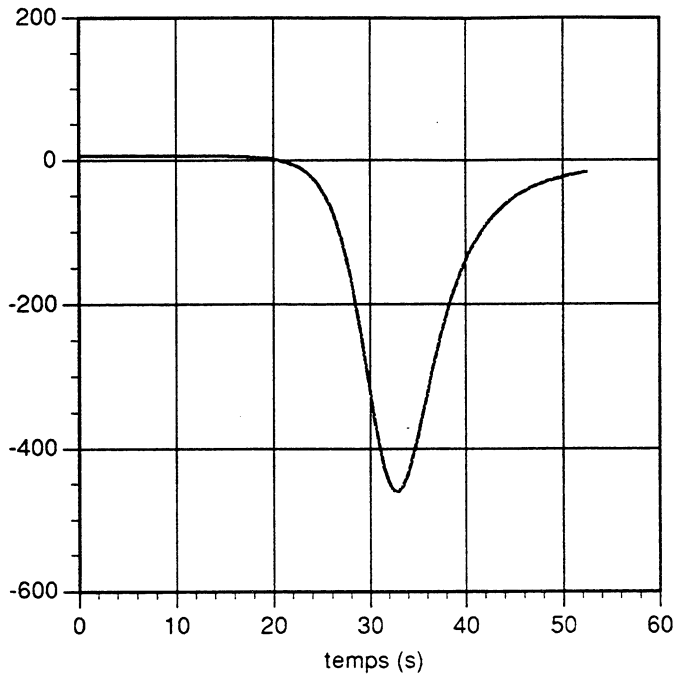
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Phi(x_n)}{\Phi'(x_n)} \quad \text{avec} \quad \Phi' = \frac{\exp(x/2)}{x (c_i + E_i(x))^{1/2}} \quad \text{et} \quad x_0 = \Pi_i$$

La convergence de cet algorithme de Newton est rapide (quadratique) et fonctionne bien avec cette initialisation.

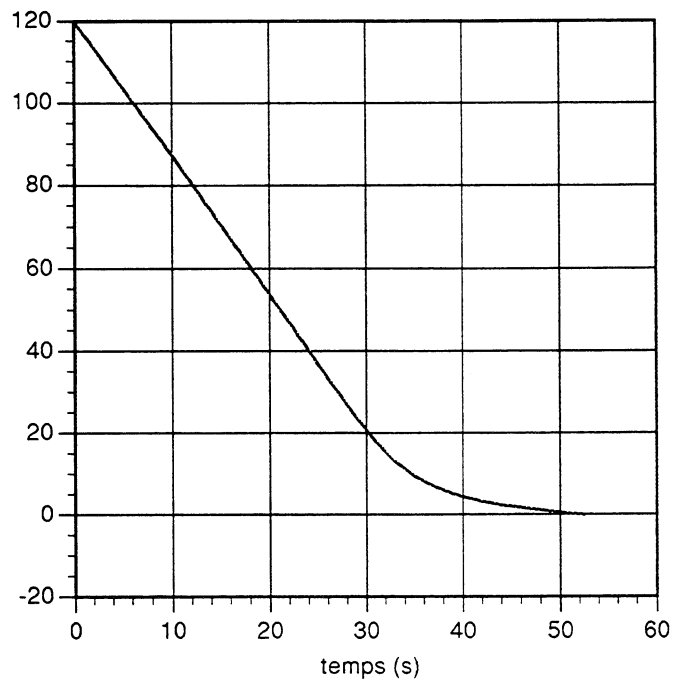
Tant que le poids de l'engin est prépondérant devant la traînée, la vitesse croît, atteint un maximum quand la traînée est égale à la composante axiale du poids puis décroît. Durant la dernière phase la décélération est très forte pour atteindre un maximum à l'altitude : $\lambda \log(2 K_b)$ et le poids devient négligeable devant la traînée. La pente décroît quand h diminue car $E_i(\Pi)$ est une fonction décroissante de h .

Nous donnons dans les deux pages suivantes les graphes de l'accélération, de l'altitude, de la pente et de la vitesse pour les paramètres suivants :

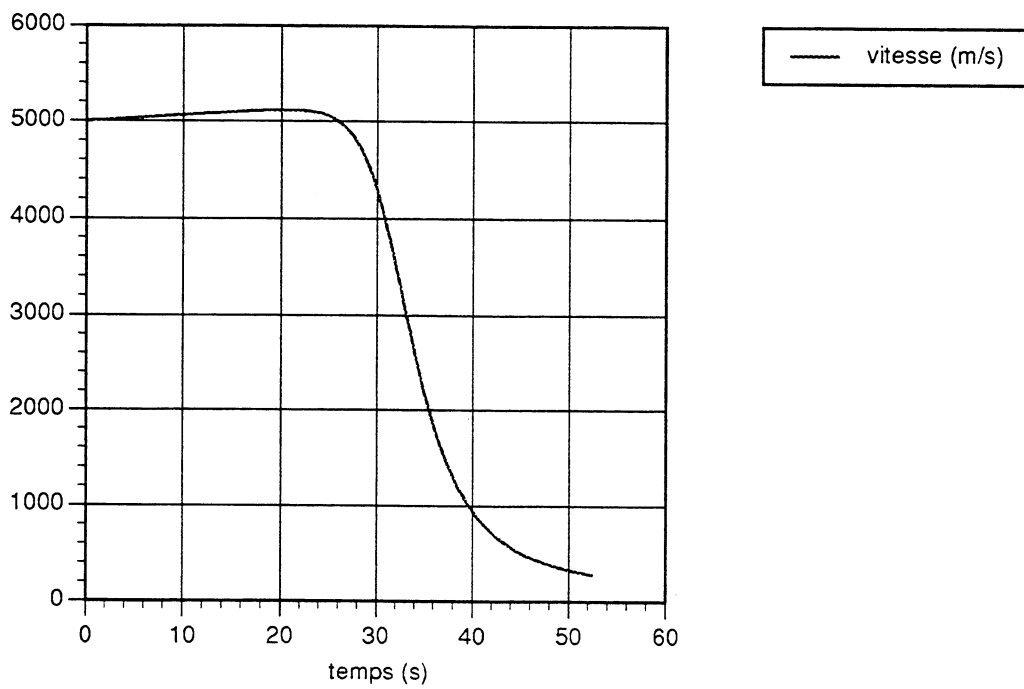
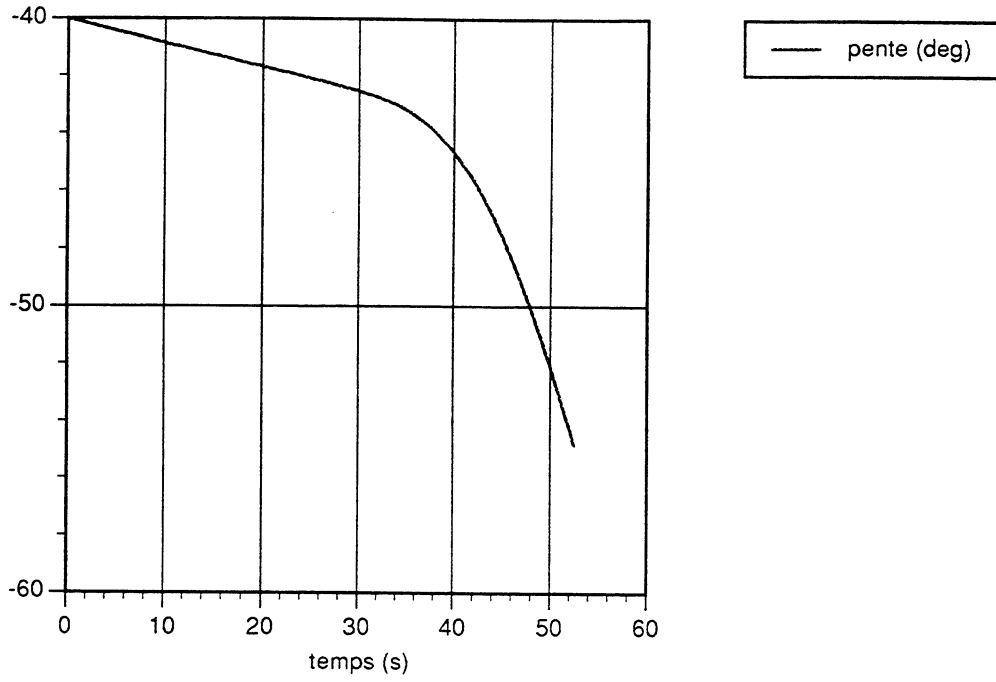
$$\gamma_i = -40 \text{ deg} \quad V_i = 5000 \text{ m/s} \quad h_i = 120 \text{ km} \quad c_b = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{kg}$$



— accélération longitudinale (m/s²)



— altitude (km)



Figures (2-2) : cinématique du corps

3.OBSERVABILITE

Nous montrons que la connaissance de l'accélération longitudinale (non bruitée) durant la phase décélérante permet de déterminer les conditions initiales - $Y = (\gamma_i, V_i, h_i)$ - et donc de déterminer entièrement la trajectoire du véhicule et ceci sans aucune information a priori.

Durant la phase où l'accélération varie très peu, l'altitude n'est pas observable à l'aide de l'accélérométrie. Nous déterminons l'observabilité pour la 2ème phase ($h_i \approx 50$ km) durant laquelle pour une grande vitesse initiale ($V_i > 6000$ m/s à 120 km d'altitude), la composante axiale du poids est négligeable devant la traînée. Avec cette hypothèse les équations (2-3) à (2-6) se simplifient en faisant tendre c_i vers l'infini.

La vitesse, l'accélération et le temps s'expriment comme suit : (2-1) et (2-2)

$$\text{vitesse : } V_t = V_i \exp(-\Pi_t / 2) \quad \text{pente : } \gamma_t = \frac{\cot \gamma_i}{2} \left(\frac{E_i(\Pi_t) - E_i(\Pi_i)}{c_i} \right) + \gamma_i \quad (3-1)$$

$$\text{accélération : } A_t = \frac{\sin(\gamma_i)}{2\lambda} \Pi_t V_i^2 \quad \text{temps : } t = -\frac{\lambda}{V_i \sin \gamma_i} \left[E_i\left(\frac{\Pi_h}{2}\right) - E_i\left(\frac{\Pi_i}{2}\right) \right] \quad (3-2)$$

Connaissant \dot{V}_t pour tous t , le nouveau vecteur d'état $\tilde{Y} = (\dot{V}_i, \ddot{V}_i, \dddot{V}_i)$ est observable.

En dérivant l'accélération par rapport au temps, on obtient le système suivant : (3-3)

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \frac{\sin \gamma_i}{2\lambda} \Pi_i V_i^2 & \dot{V}_i &= \frac{\sin \gamma_i}{2\lambda} \Pi_i V_i^2 \\ \ddot{V}_i &= \frac{(\sin \gamma_i)^2}{2\lambda^2} \Pi_i (\Pi_i - 1) V_i^3 & \Leftrightarrow & \frac{\ddot{V}_i}{\dot{V}_i} = \frac{\sin \gamma_i}{\lambda} (\Pi_i - 1) V_i \\ \ddot{V}_i &= \frac{3(\sin \gamma_i)^3}{4\lambda^3} \Pi_i (\Pi_i - 2) \left(\Pi_i - \frac{1}{3} \right) V_i^4 & \frac{\ddot{V}_i}{\dot{V}_i} &= \frac{3 \sin \gamma_i}{2\lambda} \frac{(\Pi_i - 2) \left(\Pi_i - \frac{1}{3} \right)}{(\Pi_i - 1)} V_i \end{aligned}$$

Ce qui entraîne :

$$\frac{\ddot{V}_i \dot{V}_i}{\dot{V}_i^2} = \frac{3}{2} \frac{(\Pi_i - 2) \left(\Pi_i - \frac{1}{3} \right)}{(\Pi_i - 1)^2} = \frac{3}{2} f(\Pi_i)$$

Or f est inversible sur $[0,1]$, on peut donc exprimer Π_i (proche de 0) en fonction de \tilde{Y} et, par cascade, on obtient :

$$\Pi_i = \Pi_i \left(\frac{\ddot{V}_i \dot{V}_i}{\dot{V}_i^2} \right) \text{ d'où } V_i = V_i(\tilde{Y}) ; \gamma_i = \gamma_i(\tilde{Y}) \text{ et } h_i = h_i(\tilde{Y}) \text{ où } \tilde{Y} \text{ est observable}$$

$Y = (\gamma_i, V_i, h_i)$ est donc observable. Notons que ce calcul n'est possible que durant la 2ème phase car durant la 1ère les dérivées de l'accélération sont nulles.

4. BORNE DE CRAMER-RAO (CRLB)

Nous calculons dans ce paragraphe la Borne de Cramer-Rao relative à Y . Les accéléromètres classiques délivrent des mesures que l'on peut modéliser avec un facteur d'échelle ε_t et un biais (en prenant toujours comme vecteur d'état $Y = (\gamma_i, V_i, h_i)$) de la manière suivante:

$$\tilde{A}_t = (1 + \varepsilon_t) A_t(Y) + \text{biais}$$

Cependant, par la suite, nous négligerons ce biais car celui-ci est petit par rapport à l'erreur due au facteur d'échelle, l'accélération prenant de grandes valeurs en valeurs absolues. Finalement nous modélisons l'équation de mesures comme suit :

$$\tilde{A}_t = (1 + \varepsilon_t) A_t(Y) \quad (4-1)$$

où ε_t est un bruit blanc gaussien d'écart-type σ petit devant 1. Les accélérations indépendantes sont mesurées aux instants (t_1, t_2, \dots, t_n) . Elles ont un grand écart-type puisque l'accélération prend de grandes valeurs. La vraisemblance p de l'échantillon vaut:

$$p = \tilde{f}_{(\tilde{A}_{t_1}, \dots, \tilde{A}_{t_n})}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = \prod_{i=1}^n \tilde{f}_{\tilde{A}_{t_i}}(x_{t_i}) \quad \text{où } \tilde{A}_t \text{ suit une loi normale de densité :}$$

$$\tilde{f}_{\tilde{A}_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_t(Y)} \exp\left[-\frac{1}{\sigma_t^2(Y)} (x - m_t(Y))^2\right]$$

en notant la moyenne et l'écart-type : $m_t(Y) = A_t(Y)$ et $\sigma_t(Y) = |A_t(Y)| \sigma$

Par définition : $\text{CRLB}^{-1} = \text{FIM} = \text{E} \left[\left(\frac{\partial \log p}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial \log p}{\partial Y} \right)^T \right]$ où

$$\log p = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \sum_t \log \sigma_t(Y) - \frac{1}{2} \sum_t \frac{(x_t - m_t(Y))^2}{\sigma_t^2(Y)} \quad (4-2)$$

Ainsi:

$$\frac{\partial \log p}{\partial Y} = - \sum_{t=1}^{t_n} \frac{1}{A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y} + \sum_{t=1}^{t_n} \frac{(x_t - m_t)}{\sigma_t^2} \frac{\partial m_t}{\partial Y} + \sum_{t=1}^{t_n} \frac{(x_t - m_t)^2}{\sigma_t^2 A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y}$$

Après quelques calculs (Annexe VI-6-4), on obtient le résultat suivant :

$$\text{FIM} = \left(\frac{1 + 2\sigma^2}{\sigma^2} \right) \sum_{t=1}^{t_n} \frac{1}{A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T \quad (4-3)$$

On peut noter que la quantité d'information est indépendante de σ quand σ est grand, mais que celle-ci augmente fortement quand σ décroît vers 0. Le calcul des dérivées partielles figurant dans (4-3) est présenté ci-dessous.

Evaluation des dérivées partielles : $(\partial A_t / \partial Y)$

Le calcul des $(\partial A_t / \partial Y)$ est nécessaire aussi bien pour l'évaluation de (4-3) que pour les algorithmes d'estimation présentés plus loin. Pour éviter des calculs lourds informatiquement, l'altitude n'étant pas explicitée en fonction du temps, nous écrivons l'accélération sous la forme

$$A_t = g \sin(\gamma_i) [(c_i + E_i(\Pi)) \Pi \exp(-\Pi) - 1] = A_t(Y, h(Y))$$

il s'ensuit que:

$$\frac{\partial A_t}{\partial Y} = \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)_{h \text{ const}} + \left(\frac{\partial A_t}{\partial h} \right)_{Y \text{ const}} \left(\frac{\partial h}{\partial Y} \right)$$

Comme (2-6) $t = f(h, Y)$, le théorème des fonctions implicites (en différenciant $g = t - f(h, Y) \equiv 0$ par rapport à h et Y) donne :

$$\frac{\partial h}{\partial Y} = - \left(\frac{dt}{dh} \right)^{-1} \left(\frac{\partial t}{\partial Y} \right)_{h \text{ const}}$$

Finalement on obtient :

$$\frac{\partial A_t}{\partial Y} = \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)_{h \text{ const}} - \left(\frac{dh}{dt} \right) \left(\frac{dA_t}{dh} \right)_{Y \text{ const}} \left(\frac{\partial t}{\partial Y} \right)_{h \text{ const}} \quad (4-4)$$

où $\left(\frac{dh}{dt} \right)$ est calculé à partir de (2-1), $\left(\frac{\partial t}{\partial Y} \right)_{h \text{ const}}$ à partir de (2-6) et $\left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)_{h \text{ const}}$ $\left(\frac{\partial A_t}{\partial h} \right)_{Y \text{ const}}$ à partir de (2-5)

On voit que, sous cette forme, le calcul du gradient est informatiquement aussi rapide que celui de l'accélération.

5.METHODE D'ESTIMATION

Nous développons, grâce à une réduction de données, une version accélérée de l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque l'écart-type du bruit du facteur d'échelle (σ) est petit devant 1 (hypothèse vérifiée en pratique). Les algorithmes présentés sont basés sur les équations générales [(2-3),(2-4),(2-5)] incluant les 2 phases de la trajectoire de l'engin.

Disposant des mesures ($\tilde{A}_{t_1}, \tilde{A}_{t_2}, \dots, \tilde{A}_{t_n}$) et connaissant σ , le maximum de vraisemblance (4-2) conduit à minimiser $Q(Y)$:

$$\min_Y Q(Y) = \min_Y \sum_{t=t_1}^{t_n} \log |A_t(Y)| + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\frac{\tilde{A}_t - A_t(Y)}{A_t(Y)} \right)^2 \quad (5-1)$$

Cette minimisation est effectuée, pour les simulations, à l'aide d'un algorithme de type gradient conjugué. Le gradient de $Q(Y)$ est calculé grâce à (4-4). Le coût de calcul de celui-ci est équivalent au coût du critère.

L'optimisation (5-1) qui porte sur 3 variables est assez lourde en temps de calcul. En effet :

- le calcul de l'accélération reconstituée $A_t(Y)$ exige l'inversion (2-7) pour les n mesures
- le critère (5-1) n'est pas un "moindre carrés" standard.

A l'aide d'une réduction importante du nombre des mesures, nous pouvons sensiblement diminuer ce temps de calcul lorsque σ est petit devant 1 en réécrivant ce critère.

La matrice de covariance de l'estimateur du maximum de vraisemblance (solution de (5-1)) est l'inverse de la FIM (4-3). Celle-ci peut s'écrire comme suit quand σ est petit devant 1:

$$\text{FIM} \approx \left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\frac{\partial \log |A_t|}{\partial Y}\right) \left(\frac{\partial \log |A_t|}{\partial Y}\right)^T \quad (5-2)$$

qui n'est autre que la matrice d'information de l'équation de mesures :

$$\log |\tilde{A}_t| = \log |A_t| + \varepsilon_t \quad (5-3)$$

On reconnaît l'équation approchée de (4-1) quand σ est petit devant 1:

$$\log |\tilde{A}_t| = \log |A_t| + \log (1 + \varepsilon_t) \approx \log |A_t| + \varepsilon_t$$

Prenons les nouvelles mesures : $\tilde{\eta}_t = \log (|\tilde{A}_t|) + \frac{\sigma^2}{2}$ (car $E(\log |\tilde{A}_t|) \approx \log |A_t| - \frac{\sigma^2}{2}$)

Il apparaît que la solution de (5-1) est solution approchée de la minimisation simplifiée suivante:

$$\min_Y Q(Y) = \min_Y \sum_{t=t_1}^{t_n} (\tilde{\eta}_t - \log |A_t(Y)|)^2 \quad (5-4)$$

On aboutit à un "moindres carrés" standard, de plus, le nouveau signal - $\log |A_t(Y)|$ - a une plus faible variation en fonction du temps que le signal original - $A_t(Y)$ -, et se prêtera bien à la quadrature de Gauss (QG).

On remplace les mesures ($\tilde{\eta}_{t_1}, \tilde{\eta}_{t_2}, \dots, \tilde{\eta}_{t_n}$) par les nouvelles "mesures" (qui sont en fait des estimées intermédiaires utilisant toutes les mesures initiales) ($\tilde{\eta}_{T_0}, \tilde{\eta}_{T_1}, \dots, \tilde{\eta}_{T_{k-1}}$) où k est petit devant n :

$$\tilde{\eta}_{T_i} = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \tilde{\eta}_t \quad \text{d'écart-type réduit } \sigma_{\tilde{\eta}_{T_i}} = \sigma / \|\phi_i\|$$

où $\{T_i\}$ sont les racines du polynôme de Legendre de degré k et $\{\phi_i\}$ les polynômes d'interpolation de Lagrange. Ces mesures, on le sait, sont décorréliées et quasi non-biaisés. Avec ces statistiques, on aboutit à la minimisation suivante :

$$\min_Y \tilde{Q}(Y) = \min_Y \sum_{i=0}^{k-1} \|\phi_i\|^2 (\tilde{\eta}_{T_i} - \log |A_{T_i}(Y)|)^2 \quad (5-5)$$

Ce critère, qui peut être directement obtenu en appliquant la QG au critère (5-4), correspond à l'équation de mesures suivante [EM]:

$$\tilde{\eta}_{T_i} = \eta_{T_i}(Y) + \frac{\varepsilon}{\|\phi_i\|} \quad \text{où} \quad \eta_{T_i} = \log(|A_{T_i}|) \quad k-1 \geq i \geq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon \text{ défini en (4-1)}$$

Appliquons la QG à la matrice d'information associée à cette équation :

$$FIM_{[EM]} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{k-1} \|\phi_i\|^2 \left(\frac{\partial \eta_{T_i}}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial \eta_{T_i}}{\partial Y} \right)^T \approx \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\frac{\partial \eta_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial \eta_t}{\partial Y} \right)^T$$

On reconnaît la matrice d'information (5-2) de l'équation (5-3). Autrement dit, les mesures réduites sont quasi-exhaustives c'est à dire qu'elles contiennent presque toute l'information contenue dans les mesures initiales. Cette approximation est valable si η_t n'a pas de grandes variations en fonction du temps, c'est bien le cas ici. La minimisation (5-5) associée à [EM] est donc équivalente à (5-1) pour k assez grand et σ assez petit. (avec $k=n$ on retrouve le critère initial (5-4)). Les simulations montrent que, pour $k=5$ et $\sigma < 0.05$, l'estimation accélérée est performante. Par conséquent, le coût de la minimisation (5-5) est faible par rapport à la minimisation directe (5-1). Pour donner un ordre d'idée, il est environ 4 fois plus grand que le coût d'un filtre de Kalman étendu. La minimisation (5-5) se fait toujours avec un algorithme de type gradient conjugué. L'initialisation s'effectue par un tirage uniforme, respectivement pour γ_i , V_i , h_i , dans : $[-80 \text{ deg}, -10 \text{ deg}] \times [3000 \text{ m/s}, 10000 \text{ m/s}] \times [10 \text{ km}, 60 \text{ km}]$. Le nombre d'itérations est en moyenne de 4. On a observé très peu de divergences.

Remarques :

- l'équation de mesures (5-3) est tout à fait adaptée à un filtre de Kalman standard. Ce filtre, que nous ne présentons pas ici, a été testé et donne de bons résultats vis-à-vis du biais et de l'efficacité. Toutefois, il nécessite pour converger une information a priori sur Y assez précise étant donnée la forte non-linéarité des équations de mesures et d'état.

- si l'on réduit le nombre des mesures initiales à 3 ($k=3$, ce qui est insuffisant), la minimisation (5-5) revient à inverser (cette minimisation est d'ailleurs une technique d'inversion pour trouver Y), le système suivant :

$$\tilde{\eta}_{T_i} = \log(|A_{T_i}(Y)|) \quad (i=0,1,2)$$

Cela montre que les estimateurs linéaires présentés jusqu'à présent ne sont qu'un cas particulier de l'aspect "réduction de données" développée dans ce chapitre.

6.SIMULATIONS

Nous présentons les résultats (biais, écart-type) des estimateurs exact et approché :

* Estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) exact, solution de (5-1)

* (MLE) accéléré solution de (5-5) avec 5 racines

Nous testons la validité de la minimisation (5-5) en faisant varier l'écart-type du facteur d'échelle avec les données arbitraires suivantes:

Géométrie : $\gamma_i = -35$ deg $V_i = 6000$ m/s $h_i = 40$ km
 $\Delta t = 0,3$ s $c_b = 5 \cdot 10^{-4}$ m²/kg $h_T = 10$ km

Autres paramètres : Nombre de simulations Monte-Carlo = 50 Nombre de mesures = 39
 Réduction de données à 5 mesures (k=5)

Efficacité de l'estimateur exact et accéléré

σ	PENTE (deg)			VITESSE (m/s)			ALTITUDE (m)		
	CRLB exact	accéléré		CRLB exact	accéléré		CRLB exact	accéléré	
0,001	0,054	0,054	0,034	4,98	5,13	3,59	12	12	10
0,01	0,54	0,53	0,53	49,8	51,5	51,9	122	121	123
0,05	2,64	2,53	2,70	243	249	275	594	578	653
0,1	4,91	4,70	7,36	452	463	675	1108	1062	1672

Biais de l'estimateur exact et accéléré

σ	PENTE (deg)		VITESSE (m/s)		ALTITUDE (m)	
	exact	accéléré	exact	accéléré	exact	accéléré
0,001	-0,0057	0,016	-0,25	1,89	1,21	3,76
0,01	-0,047	-0,08	-1,75	-5,26	10	3,7
0,05	0,048	-0,31	6,99	-35,76	61	14
0,1	0,65	0,16	43,01	-66,35	132	55

L'estimateur du maximum de vraisemblance exact est quasiment non-biaisé et efficace. Il en est de même pour le MLE accéléré si $\sigma \leq 5 \cdot 10^{-2}$. Dans ce cas, on note que l'on a réduit les 39 mesures initiales à 5 mesures sans perte d'information.

7.CONCLUSION

Jusqu'à présent nous traitons du problème de la trajectographie par mesures d'azimuts. Nous nous plaçons dans un contexte radicalement différent, l'accélérométrie. Nous montrons que les accélérations mesurées permettent à elles seules de déterminer entièrement la cinématique du corps balistique. Malgré la dynamique, qui comprend de fortes accélérations et l'équation de mesures non-additive, les estimateurs linéaires s'appliquent.

On se ramène à une équation de mesures additive en exploitant le fait que le facteur d'échelle est petit devant 1. Ainsi, on procède à une réduction optimale de mesures (5 mesures) qui préserve pratiquement l'information globale contenue dans les accélérations mesurées. Cette réduction dans ce contexte est particulièrement intéressante car le critère quadratique à minimiser est coûteux en temps de calcul. Ce chapitre met en évidence la propriété de quasi-exhaustivité des estimateurs linéaires.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons présenté un nouveau type d'estimateurs qui traitent les mesures en bloc. Bien que le contexte de la trajectographie par mesures d'azimuts (TPA) soit intrinsèquement non-linéaire on les a utilisés avec succès pour effectuer différentes trajectographies par mesures d'azimuts. Ils sont plus rapides que les méthodes récursives de type filtre de Kalman étendu (EKF). Ils sont à plus forte raison plus rapides que les méthodes du maximum de vraisemblance qui exigent dans le cas gaussien une minimisation non-linéaire de plusieurs variables de type "moindres carrés". De plus, les estimateurs proposés dans ce mémoire ne nécessitent aucune initialisation et, bien sûr, ne rencontrent pas de problèmes de divergence. Leur mise en œuvre est aisée car ils sont combinaisons linéaires des mesures. Ces combinaisons linéaires s'obtiennent par projection des azimuts sur la base des polynômes de Lagrange dont les points d'interpolation sont les racines du polynôme de Legendre. C'est grâce à la faible variation du signal en fonction du temps que l'on montre, par la quadrature de Gauss (QG), que ces estimateurs sont quasi non-biaisés et quasi-efficaces. Cette hypothèse est essentielle, car, si le signal présente de fortes variations (analogue à un polynôme de degré élevé en t), comme c'est le cas en TPA avec un nombre de manoeuvres important, les performances statistiques et en particulier le biais se dégradent fortement.

Le souci du choix du vecteur d'état à estimer (cartésien, polaire, polaire modifié,...) s'est déjà manifesté pour éviter les problèmes de divergence des EKF. Ces problèmes sont particulièrement sensibles en trajectographie par mesures d'azimuts où l'observabilité n'est assurée qu'après une manoeuvre appropriée de l'observateur. Le vecteur d'état - polaire modifié - où figurent les dérivées de l'azimut se rapproche des mesures. C'est dans cette lignée que s'inscrit ce mémoire. Le vecteur d'état que nous proposons est en effet composé d'un "échantillon" du signal mesuré. Ce vecteur a permis de rendre l'équation de mesures "moins non-linéaire". Les temps de cet échantillon sont alors choisis de manière à préserver le maximum d'informations contenues dans les mesures initiales. Ils sont pris racines du

polynôme de Legendre, ce qui permet d'approcher finement la matrice d'information par la quadrature de Gauss. Cette technique d'approximation, conçue initialement pour le calcul numérique des intégrales, est utilisée dans ce mémoire pour les sommes discrètes portant sur les instants de mesures.

L'optimisation de la manoeuvre du porteur en vue d'estimer précisément la cinématique de la source est traitée. Le critère utilisé est le déterminant de la matrice d'information. Ce critère est lié au volume global de l'information contenue dans les mesures. Naturellement, on aborde ce problème par des techniques de commande optimale. Cependant, celles-ci sont lourdes en temps de calcul. C'est pourquoi, nous avons modélisé la trajectoire du porteur de manière simple et réaliste. Dans le cas de trajectoires en "ligne brisée", le porteur parcourt à vitesse constante un nombre N de segments de droites. Le programme se réduit à chercher une série de caps optimaux qui maximisent le critère. On résout alors la maximisation par des méthodes classiques de gradient conjugué. Nous proposons, dans ce contexte, des stratégies à long terme ($N \geq 4$) qui offrent au porteur des trajectoires régulières et lui assure théoriquement une bonne trajectographie en fin de parcours. Néanmoins, cette option peut s'avérer risquée car, d'une part le critère est évalué à partir d'une estimation préalable du vecteur d'état et d'autre part la source peut manoeuvrer. Les stratégies à court terme sont plus sûres mais aboutissent à des trajectoires chahutées. Une autre modélisation, à cap constant est présentée. Elle optimise l'accélération en deux phases par rapport à une variable temporelle. Nous avons appliqué de nouveau la QG à la matrice d'information. Le coût de calcul du critère est alors considérablement réduit et l'optimisation de la manoeuvre est très rapide.

De manière générale, les estimateurs proposés peuvent s'appliquer lorsque le bruit additif dans l'équation de mesures est gaussien. On peut en effet les utiliser en tant que mesures. La taille de ce nouvel échantillon (nombre de racines du polynôme de Legendre) se détermine suivant l'exigence de rapidité des algorithmes ou suivant

la capacité de la mémoire dont on dispose. En particulier, si le signal varie lentement avec le temps, il est possible de réduire de façon importante le nombre de mesures sans perte significative d'information. Les estimateurs sont vus alors comme des statistiques quasi-exhaustives. Dans le contexte de l'accélérométrie, nous avons réduit le nombre des mesures initiales (39) à cinq et construit un estimateur approché du maximum de vraisemblance quasi-efficace et non-biaisé.

La première perspective de ces estimateurs réside dans leur application dans des domaines variés. On peut penser par exemple qu'ils pourraient s'utiliser en trajectographie active où la distance est directement mesurée. Sous l'aspect "réduction de données", on pourrait les appliquer dans le domaine de la poursuite en radar. Il est aussi envisageable de généraliser cette approche de manière à traiter les fausses alarmes. En effet, les estimateurs ont été appliqués avec des mesures "propres" provenant toutes de la source. Or, comme ils sont une solution approchée d'un critère quadratique, ils sont peu robustes. Ils ne tolèrent vraisemblablement pas de contaminations de la loi théorique des bruits. Il serait intéressant de tenter d'exploiter des critères plus robustes ([33], [34]).

Si je devais conclure par une phrase je risquerais une analogie musicale en résumant ce mémoire à une "variation sur le thème de la quadrature de Gauss".

ANNEXES

ANNEXE (II-5-2)

Les racines T_i sont réelles

Si Ψ_m admet des racines complexes conjuguées, Ψ_m peut se décomposer de la manière suivante en rassemblant les racines réelles et imaginaires:

$$\Psi_m(t) = \eta_i(t) \eta_r(t)$$

où η_i a exclusivement des racines imaginaires ($\deg(\eta_i) > 1$ par hypothèse) et η_r des racines réelles. Du fait de l'orthogonalité de Ψ_m on a :

$$0 = \sum_{t=t_1}^{t_n} \eta_r(t) \Psi_m(t) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \eta_r^2(t) \eta_i(t)$$

ce qui est clairement impossible car η_i est de signe constant sur $[t_1, t_n]$;

Les racines T_i sont simples

Si Ψ_m admet une racine multiple T_0 ,

$$\Psi_m(t) = (t-T_0)^2 \prod_{i=2}^{m-1} (t-T_i)$$

et par l'argument d'orthogonalité :

$$0 = \sum_{t=t_1}^{t_n} \prod_{i=2}^{m-1} (t-T_i) \Psi_m(t) = \sum_{t=t_1}^{t_n} (t-T_0)^2 \prod_{i=2}^{m-1} (t-T_i)^2$$

on obtient une contradiction ;

Les racines appartiennent à l'intervalle $[t_1, t_n]$

Supposons que T_0 soit hors de $[t_1, t_n]$. On a :

$$0 = \sum_{t=t_1}^{t_n} \prod_{i=1}^{m-1} (t-T_i) \Psi_m(t) = \sum_{t=t_1}^{t_n} (t-T_0) \prod_{i=1}^{m-1} (t-T_i)^2$$

Mais comme $(t-T_0)$ a un signe constant sur $[t_1, t_n]$ on a de nouveau une contradiction ;

Les racines sont symétriques autour de $(t_1+t_n)/2$ si les points t_1, t_2, \dots, t_n équirépartis.

Par raison de symétrie, cette propriété semble évidente, cependant, entrons dans le détail. En utilisant le changement de variable $y = t - (t_1+t_n)/2$, l'expression (II-5-2-1) devient :

$$\sum_{y=(t_1-t_n)/2}^{(t_n-t_1)/2} \left(y + \frac{t_1+t_n}{2}\right)^j \Psi_m \left(y + \frac{t_1+t_n}{2}\right) = 0 \quad \text{pour } j=0,1,\dots,m-1 \quad (\text{A1})$$

en posant :

$$\tilde{\Psi}_m(y) = \Psi_m \left(y + \frac{t_1+t_n}{2}\right) ,$$

il est clair que :

$$\sum_{y=(t_1-t_n)/2}^{(t_n-t_1)/2} y^j \tilde{\Psi}_m(y) = 0 \quad \text{pour } j=0,1,\dots,m-1 \quad (\text{A2})$$

ce polynôme est orthogonal à $(1, y, \dots, y^{m-1})$ sur l'intervalle symétrique $[(t_1-t_n)/2 ; (t_n-t_1)/2]$. (A2) entraîne :

$$\sum_{y=(t_n-t_1)/2}^{(t_1-t_n)/2} y^j \tilde{\Psi}_m(-y) = 0 \quad \text{pour } j=0,1,\dots,m-1$$

d'où $\tilde{\Psi}_m(-y) = \pm \tilde{\Psi}_m(y)$ et $\tilde{\Psi}_m$ a ses racines symétriques par rapport à l'origine, on obtient le résultat désiré ;

Les polynômes d'interpolation $\{\phi_i\}$ sont orthogonaux

Cette propriété est immédiate en se rappelant que l'interpolation porte sur les racines $\{T_i\}$:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) \phi_j(t) = \sum_{t=t_1}^{t_n} P_{m-2}(t) \Psi_m(t) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

où P_{m-2} est de degré $(m-2)$. Cela entraîne en particulier :

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i(t) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \phi_j(t) \right) \phi_i(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_j(t) \phi_i(t) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \phi_i^2(t) = \|\phi_i\|^2$$

En effet,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \phi_j(t) = 1$$

le terme de gauche étant un polynôme de degré $(m-1)$ qui vaut 1 aux m points $(T_0, T_1, \dots, T_{m-1})$.

ANNEXE (II-5-3-1)*Calcul des coefficients c_j*

Les coefficient c_j sont définis par :

$$c_j = \sum_{i=1}^n [i-(n+1)/2]^j$$

Ils se calculent par récurrence de la manière suivante :

$$\sum_{i=1}^n [i-(n+1)/2]^{j+1} - \sum_{i=1}^n [i-(n+1)/2+1]^{j+1} = [1+(n+1)/2]^{j+1} - (n+1-(n+1)/2)^{j+1} =$$

$$\sum_{i=1}^n [i-(n+1)/2]^{j+1} - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{j+1} C_{j+1}^k [i-(n+1)/2]^k$$

on obtient :

$$\sum_{k=1}^j C_{j+1}^k c_k = (n+1-(n+1)/2)^{j+1} - (1-(n+1)/2)^{j+1} \Leftrightarrow$$

$$c_j = \frac{1}{(j+1)} \left[((n+1)/2)^{j+1} - ((1-n)/2)^{j+1} - n - \sum_{k=1}^{j-1} C_{j+1}^k c_k \right]$$

On démontre par récurrence que c_j est un polynôme de degré $(j+1)$ en n pour j pair (sinon $c_j=0$) et que c_j est divisible par $n(n^2-1)$ si $j>1$. On donne les valeurs de c_j pour $j \leq 8$

$$c_0 = n$$

$$c_2 = \frac{n(n^2-1)}{12}$$

$$c_4 = \frac{n(n^2-1)(3n^2-7)}{240}$$

$$c_6 = \frac{n(n^2-1)(3n^4-18n^2+31)}{1344}$$

$$c_8 = \frac{n(n^2-1)(n^6-11n^4-47.8n^2+76.2)}{576}$$

ANNEXE (II-6-3-1)

Calcul des variances des estimées des vitesses angulaire (v_β) et radiale relative (v_r)

Variance de l'estimateur \hat{v}_β

D'après (3-8) :

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial \beta_{T_0}} = \frac{2 \sin(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0})}{\sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} ; \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta_{T_1}} = \frac{-2 \sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_0})}{\sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} ; \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta_{T_2}} = \frac{2 \sin^2(\beta_{T_0} - \beta_{T_1})}{\sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})}$$

En utilisant (5-3-2) et du fait que :

$$dv_\beta \approx \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta_{T_1}} d\beta_{T_1} + \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta_{T_0}} d\beta_{T_0} + \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta_{T_2}} d\beta_{T_2} ,$$

on obtient :

$$\text{var}(\hat{v}_\beta) \approx \frac{12\sigma^2}{n \Delta t^2} \left[\frac{5 \sin^2(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0})}{(n^2 - 4) \sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} + \frac{8 \sin^4(2\beta_{T_2} - 2\beta_{T_0}) + 8 \sin^4(\beta_{T_0} - \beta_{T_1})}{(n^2 - 1) \sin^4(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \right]$$

Variance de l'estimateur \hat{v}_r

D'après (3-8) :

$$\tau dv_r \approx \frac{\cos(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0})}{\sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} (2d\beta_{T_0} - d\beta_{T_1} - d\beta_{T_2}) + \frac{\sin(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0}) \cos(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})}{\sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} (d\beta_{T_2} - d\beta_{T_1})$$

$$\tau dv_r \approx \frac{\cos(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0}) \sin(\beta_{T_2} - \beta_{T_1}) d\beta_{T_0} - \sin(2\beta_{T_2} - 2\beta_{T_1}) d\beta_{T_1} + \sin(2\beta_{T_1} - 2\beta_{T_0}) d\beta_{T_2}}{\sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})}$$

en vertu de (5-3-2) on obtient :

$$\text{var}(\hat{v}_r) \approx \frac{12\sigma^2}{n \Delta t^2} \left[\frac{5 \cos^2(\beta_{T_1} + \beta_{T_2} - 2\beta_{T_0})}{(n^2 - 4) \sin^2(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} + \frac{2 \sin^2(2\beta_{T_2} - 2\beta_{T_0}) + 2 \sin^2(2\beta_{T_1} - 2\beta_{T_0})}{(n^2 - 1) \sin^4(\beta_{T_2} - \beta_{T_1})} \right]$$

ANNEXE (III-4-3)*Calcul du biais de l'estimateur de la distance*

Soit $X = (\beta_{T_0}, \beta_{T_1}, \beta_{T_2}, \beta_{T_3})$. On calcule le biais de la distance $\hat{d} = f(\hat{X})$.

On a :

$$f(\hat{X}) - f(X) \approx (\hat{X} - X)^T \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2} (\hat{X} - X)^T \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (\hat{X} - X)$$

Le biais sur la distance s'écrit donc :

$$b(\hat{d}) \approx b^T(\hat{X}) \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2} E \left[(\hat{X} - X)^T \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (\hat{X} - X) \right]. \text{ Or,}$$

$$E \left[(\hat{X} - X)^T \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (\hat{X} - X) \right] = E \left[(\hat{X} - E(\hat{X}))^T \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (\hat{X} - E(\hat{X})) + b^T(\hat{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b(\hat{X}) \right] =$$

$$E \left\{ \text{tr} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (\hat{X} - E(\hat{X})) (\hat{X} - E(\hat{X}))^T \right] \right\} + b^T(\hat{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b(\hat{X}) =$$

$$\text{tr} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \Omega_{\hat{X}} \right] + b^T(\hat{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b(\hat{X})$$

où $\Omega_{\hat{X}}$ est la matrice de covariance de \hat{X} : $\Omega_{\hat{X}} = \text{diag} \left(\frac{\sigma^2}{\|\phi_i\|^2} \right)$. On montre facilement que les

normes $\|\phi_i\|^2$ sont équivalentes à (α_i/n) pour n grand. D'où :

$$b(\hat{d}) \approx b^T(\hat{X}) \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \Omega_{\hat{X}} \right] + \frac{1}{2} b^T(\hat{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b(\hat{X}) \Leftrightarrow$$

$$b(\hat{d}) \approx b^T(\hat{X}) \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\sigma^2}{2n} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \alpha_i \text{Id} \right] + \frac{1}{2} b^T(\hat{X}) \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b(\hat{X})$$

ANNEXE (IV-4-1)*Formules exactes pour la TP2A linéaire*

En traçant la droite partant de B et perpendiculaire à la droite joignant C'', C' (figure 2-1), on obtient :

$$\cotg \alpha' = \frac{1}{2} (\cotg \alpha' + \cotg \alpha'') = \frac{1}{2} \sin(\alpha' + \alpha'') / (\sin \alpha' \sin \alpha'') \quad (A1)$$

Par suite :

$$\sin \alpha = (\sin \alpha' \sin \alpha'') / A = X \quad \cos \alpha = [\sin(\alpha' + \alpha'') / 2] / A = Y \quad (A2)$$

où A est tel que $X^2 + Y^2 = 1$:

$$A = \text{signe}(\alpha) \sqrt{[\sin^2(\alpha' + \alpha'') / 4 + \sin^2 \alpha' \sin^2 \alpha'']} \quad (A3)$$

On peut exprimer les relations précédentes à l'aide de $\bar{\alpha} = (\alpha' + \alpha'') / 2$ et $\delta = (\alpha' - \alpha'') / 2$. En se servant de $\sin \alpha' \sin \alpha'' = \sin^2 \bar{\alpha} - \sin^2 \delta$, on obtient $A^2 = \sin^2 \bar{\alpha} - 2 \sin^2 \bar{\alpha} \sin^2 \delta + \sin^4 \delta = \sin^2 \bar{\alpha} (\cos^4 \delta + \sin^4 \delta) + \sin^4 \delta$. Finalement :

$$\sin \alpha = (\sin^2 \bar{\alpha} - \sin^2 \delta) / A \quad \cos \alpha = \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha} / A \quad (A4)$$

$$A = (\sin \bar{\alpha}) \sqrt{\cos^4 \delta + \sin^4 \delta \cotg^2 \bar{\alpha}} \quad (A5)$$

D'autre part,

$$\frac{\sin(\alpha' - \alpha'')}{|d|} = \frac{\sin \alpha''}{|r|} = \frac{\sin \alpha'' \sin \alpha}{\sin \alpha |r|} = \frac{\sin \alpha'' \sin \alpha'}{|r| \sin \alpha} \quad (A6)$$

En utilisant (A2) (A5) on obtient :

$$|d/r| = \sin(\alpha' - \alpha'') / A = (2 \text{tg} \delta / \sin \bar{\alpha}) / \sqrt{1 + \text{tg}^4 \delta \cotg^2 \bar{\alpha}}$$

Quand $|d/r|$ est petit, $\text{tg} \delta$ doit être petit et vaut approximativement $(|d/r| \sin \bar{\alpha}) / 2$.

Par conséquent, en développant la racine carrée du second membre précédent, on obtient

$$|d/r| \approx (2 \text{tg} \delta / \sin \bar{\alpha}) (1 - |d/r|^4 \sin^2 \bar{\alpha} \cos^2 \bar{\alpha} / 32)$$

Donc $2 \operatorname{tg} \delta / \sin \bar{\alpha}$ est une approximation très précise de ld/r .

On peut aussi exprimer α' , α'' en fonction de α et ld/r . En effet, (A6) nous donne : $\cotg \alpha'' - \cotg \alpha' = ld/r / \sin \alpha$. Ce qui donne, grâce à (A1), $\cotg \alpha' = \cotg \alpha - \frac{1}{2} ld/r / \sin \alpha$ et $\cotg \alpha'' = \cotg \alpha + \frac{1}{2} ld/r / \sin \alpha$. Donc :

$$\sin \alpha' = \sin \alpha / A', \quad \cos \alpha' = (\cos \alpha - ld/r/2) / A',$$

$$\sin \alpha'' = \sin \alpha / A'', \quad \cos \alpha'' = (\cos \alpha + ld/r/2) / A'',$$

où :

$$A' = \sqrt{1 - ld/r \cos \alpha + ld/r^2/4} \quad A'' = \sqrt{1 + ld/r \cos \alpha + ld/r^2/4}$$

Les formules précédentes permettent de vérifier si les approximations $\alpha \approx \bar{\alpha}$, $2\delta \approx ld/r \sin \bar{\alpha}$ et $2 \operatorname{tg} \delta \approx ld/r \sin \bar{\alpha}$ sont adéquates. Le tableau 6 est construit à cet effet. On y voit que l'approximation $2 \operatorname{tg} \delta \approx ld/r \sin \bar{\alpha}$ est excellente avec une erreur relative de 0.0080 dans le pire des cas ($ld/r = 1$ et $\alpha = 50^\circ$). Par contre, l'approximation $2\delta \approx ld/r \sin \bar{\alpha}$ peut atteindre une erreur relative de 0.0727 quand $ld/r = 1$ et $\alpha = 90^\circ$. Pour voir si cette erreur est acceptable, on la

compare avec l'erreur relative de l'estimateur de $u = |d/r_T|$, c'est-à-dire l'écart type de \hat{u}/u . En prenant approximativement $w_{T_0} = w_{T_1} = w_{T_2} = 1$ (car $\alpha = 90^\circ$), les calculs du §3 montrent que l'écart-type de \hat{u}/u vaut approximativement $\sigma \sqrt{2/n}/u$. Pour $u = 1$, $\sigma = 1^\circ$ (0.01745 radian) et $n = 300$, par exemple, cela donne 0.0014 qui est beaucoup plus petit que 0.0727. L'approximation $2\delta \approx ld/r \sin \bar{\alpha}$ est donc inacceptable dans ce cas. Toutefois, pour $u = 0.2$, dans les mêmes conditions, l'écart-type de \hat{u}/u vaut à peu près 0.0071, tandis que l'erreur relative de l'approximation est de 0.0033. Donc, cette approximation est acceptable jusqu'à $ld/r = 0.2$. En ce qui concerne l'approximation $\alpha \approx \bar{\alpha}$, il convient de comparer son erreur avec les écart-types de $\hat{\beta}_{T_i}$, soient $\sigma/(\sqrt{2} \|\phi_i\|)$, $i = 0, 1, 2$. Pour $\sigma = 1^\circ$ et $n = 300$ par exemple, l'écart-type de $\hat{\beta}_{T_0}$, qui est le plus faible, vaut 0.061° . On voit donc que cette approximation n'est pas adéquate sauf pour ld/r plus petit que 0.05, auquel cas l'erreur ne dépasse pas 0.018° . On note que les approximations $2 \operatorname{tg} \delta \approx ld/r \sin \bar{\alpha}$ et $\alpha \approx \bar{\alpha}$ sont exactes pour $\alpha = 0^\circ$ ou 90° et se dégradent quand α s'éloigne de ces bornes. Quant à l'approximation $2\delta \approx ld/r \sin \bar{\alpha}$, elle se dégrade si α croît de 0° à 90° .

Tableau 6: valeurs de $\bar{\alpha}$ (en degrés, première ligne), $2\delta / (ld/rl \sin \bar{\alpha})$ (deuxième ligne) et $2 \operatorname{tg} \delta / (ld/rl \sin \bar{\alpha})$ (troisième ligne) correspondant aux différents α (en degrés) et ld/rl .

α	ld/rl										
	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	10.006	10.025	10.099	10.225	10.407	10.650	10.963	11.355	11.843	12.444	13.18
	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9983	0.9978	0.997
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0001	1.0003	1.0005	1.0009	1.001
20	20.012	20.046	20.186	20.422	20.760	21.208	21.778	22.483	23.343	24.379	25.62
	1.0000	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9950	0.9934	0.9916	0.989
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0002	1.0005	1.0009	1.0017	1.0029	1.004
30	30.016	30.062	30.249	30.564	31.012	31.599	32.333	33.224	34.283	35.521	36.94
	0.9999	0.9998	0.9992	0.9981	0.9966	0.9947	0.9924	0.9895	0.9862	0.9825	0.978
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0002	1.0004	1.0008	1.0016	1.0028	1.0047	1.007
40	40.018	40.071	40.283	40.637	41.136	41.780	42.573	43.513	44.603	45.839	47.21
	0.9999	0.9997	0.9986	0.9969	0.9945	0.9914	0.9876	0.9831	0.9779	0.9720	0.965
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0002	1.0005	1.0010	1.0019	1.0032	1.0052	1.008
50	50.018	50.071	50.282	50.632	51.120	51.742	52.494	53.368	54.358	55.452	56.63
	0.9999	0.9995	0.9980	0.9956	0.9922	0.9879	0.9826	0.9765	0.9695	0.9616	0.953
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0002	1.0005	1.0009	1.0017	1.0029	1.0045	1.006
60	60.016	60.062	60.247	60.552	60.973	61.502	62.133	62.854	63.656	64.524	65.44
	0.9998	0.9994	0.9975	0.9944	0.9901	0.9847	0.9781	0.9706	0.9620	0.9525	0.942
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0003	1.0007	1.0012	1.0020	1.0031	1.004
70	70.012	70.046	70.183	70.407	70.715	71.098	71.549	72.059	72.617	73.215	73.84
	0.9998	0.9993	0.9971	0.9934	0.9884	0.9821	0.9746	0.9659	0.9562	0.9455	0.934
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0002	1.0004	1.0006	1.0010	1.0016	1.002
80	80.006	80.024	80.097	80.216	80.378	80.578	80.813	81.076	81.362	81.665	81.98
	0.9998	0.9992	0.9968	0.9928	0.9874	0.9805	0.9723	0.9629	0.9525	0.9412	0.929
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0001	1.0002	1.0003	1.0004	1.000
90	90.000	90.000	90.000	90.000	90.000	90.000	90.000	90.000	90.000	90.000	90.00
	0.9998	0.9992	0.9967	0.9926	0.9870	0.9799	0.9715	0.9619	0.9513	0.9397	0.927
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000

ANNEXE (V-5-1)*Calcul du gradient de FIM(t₁)*

Le calcul se déroule comme en (V-4-2-4). Il reste à calculer $(d/dt) x(r_j^1(t_1))$:

$$r_j^1(t_1) = a_j t_1 \quad r_j^2(t_1) = t_1 + a_j(T - t_1) \quad \alpha_1 = (v_{\max} - v_0) / A_m$$

$$\underline{t_1 \leq \alpha_1}$$

1^{ère} phase (ascendante)

$$x(r_j^1) = x_0 + r_j^1 v_0 + \frac{(r_j^1)^2}{2} A_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^1) = a_j v_0 + a_j r_j^1 A_m$$

2^{ième} phase (descendante)

$$\alpha_2 = t_1 + (v_{t_1} - v_{\min}) / D_m \quad v_{t_1} = v_0 + t_1 A_m$$

$$x_{t_1} = x_0 + t_1 v_0 + \frac{t_1^2}{2} A_m$$

$$- \alpha_2 \leq T$$

$$x(\alpha_2) = x(t_1) + (\alpha_2 - t_1) v_{t_1} - \frac{(\alpha_2 - t_1)^2}{2} D_m$$

$$* r_j^2 \leq \alpha_2$$

$$x(r_j^2) = x_{t_1} + (r_j^2 - t_1) v_{t_1} - \frac{(r_j^2 - t_1)^2}{2} D_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^2) = v_0 - a_j v_{t_1} + r_j^2 A_m + a_j (r_j^2 - t_1) D_m$$

$$* r_j^2 \geq \alpha_2$$

$$x(r_j^2) = x(\alpha_2) + (r_j^2 - \alpha_2) v_{\min}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^2) = v_0 + t_1 A_m + \frac{A_m}{D_m} [v_{t_1} - v_{\min}] - a_j v_{\min}$$

$$- \alpha_2 \geq T$$

$$x(r_j^2) = x_{t_1} + (r_j^2 - t_1) v_{t_1} - \frac{(r_j^2 - t_1)^2}{2} D_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^2) = v_0 - a_j v_{t_1} + (r_j^2 - t_1) D_m a_j + r_j^2 A_m$$

$$\underline{t_1 \geq \alpha_1}$$

$$x(\alpha_1) = x_0 + \alpha_1 v_0 + \frac{\alpha_1^2}{2} A_m$$

1^{ière} phase

$$-r_j^1 \leq a_1$$

$$x(r_j^1) = x_0 + r_j^1 v_0 + \frac{(r_j^1)^2}{2} A_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^1) = a_j v_0 + r_j^1 A_m a_j$$

$$-r_j^1 \geq \alpha_1$$

$$x(r_j^1) = x(\alpha_1) + (r_j^1 - \alpha_1) v_{\max}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^1) = a_j v_{\max}$$

2^{ième} phase

$$v_{t_1} = v_{\max} \quad x(t_1) = x(\alpha_1) + (t_1 - \alpha_1) v_{\max}$$

$$\alpha_2 = t_1 + (v_{\max} - v_{\min}) / D_m$$

$$- \alpha_2 \leq T$$

$$x(\alpha_2) = x(t_1) + (\alpha_2 - t_1) v_{t_1} - \frac{(\alpha_2 - t_1)^2}{2} D_m$$

$$* r_j^2 \leq \alpha_2$$

$$x(r_j^2) = x(t_1) + (r_j^2 - t_1) v_{t_1} - \frac{(r_j^2 - t_1)^2}{2} D_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^2) = v_{\max} - a_j v_{t_1} + (r_j^2 - t_1) D_m a_j$$

$$* r_j^2 \geq \alpha_2$$

$$x(r_j^2) = x(\alpha_2) + (r_j^2 - \alpha_2) v_{\min}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^2) = v_{\max} - a_j v_{\min}$$

$$- \alpha_2 \geq T$$

$$x(r_j^2) = x(t_1) + (r_j^2 - t_1) v_{t_1} - \frac{(r_j^2 - t_1)^2}{2} D_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} x(r_j^2) = v_{\max} - a_j v_{t_1} + (r_j^2 - t_1) D_m a_j$$

ANNEXE (VI-6-4)

Calcul de la matrice d'information relative à l'accélérométrie

$$\frac{\partial \log p}{\partial Y} = - \sum_t \frac{\frac{\partial \sigma_t}{\partial Y}}{\sigma_t} + \sum_t \frac{(x_t - m_t) \frac{\partial m_t}{\partial Y} \sigma_t^2 + (x_t - m_t)^2 \sigma_t \frac{\partial \sigma_t}{\partial Y}}{\sigma_t^4}$$

or $\frac{\partial \sigma_t}{\partial Y} = \frac{|A_t|}{A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y} \sigma$ d'où :

$$\frac{\partial \log p}{\partial Y} = - \sum_{t=1}^{l_n} \frac{1}{A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y} + \sum_{t=1}^{l_n} \frac{(x_t - m_t)}{\sigma_t^2} \frac{\partial m_t}{\partial Y} + \sum_{t=1}^{l_n} \frac{(x_t - m_t)^2}{\sigma_t^2 A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y}$$

$$\text{FIM} = E \left[\left(\frac{\partial \log p}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial \log p}{\partial Y} \right)^T \right] = \left(\sum_t \frac{1}{A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\sum_t \frac{1}{A_t} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T \right)$$

$$- \left(\sum_t \frac{1}{A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \sum_t \frac{E[(x_t - m_t(Y))^2]}{\sigma_t^2(Y) A_t} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T + \sum_{t \neq t'} \frac{E[(x_t - m_t)^2 (x_{t'} - m_{t'})^2]}{\sigma_t^2 A_t \sigma_{t'}^2 A_{t'}} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_{t'}}{\partial Y} \right)^T$$

$$+ \sum_t \frac{1}{\sigma_t^2(Y)} \left(\frac{\partial m_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial m_t}{\partial Y} \right)^T - \left(\sum_t \frac{1}{A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\sum_t \frac{1}{A_t} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T \right) + \sum_t \frac{E[(x_t - m_t)^4]}{\sigma_t^4 A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T$$

$$E \left[\left(\frac{\partial \log p}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial \log p}{\partial Y} \right)^T \right] = \sum_t \frac{1}{\sigma_t^2(Y)} \left(\frac{\partial m_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial m_t}{\partial Y} \right)^T - \left(\sum_t \frac{1}{A_t} \frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\sum_t \frac{1}{A_t} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T \right)$$

$$+ \sum_{t \neq t'} \frac{1}{A_t A_{t'}} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_{t'}}{\partial Y} \right)^T + 3 \sum_t \frac{1}{A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T \quad (\text{car } E[(x_t - m_t)^4] = 3\sigma_t^4)$$

$$E \left[\left(\frac{\partial \log p}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial \log p}{\partial Y} \right)^T \right] = \sum_t \frac{1}{\sigma_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T - \sum_t \frac{1}{A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T + \sum_t \frac{3}{A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T$$

$$= \left(\frac{1 + 2\sigma^2}{\sigma^2} \right) \sum_{t=1}^{l_n} \frac{1}{A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial A_t}{\partial Y} \right)^T$$

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] Aidala, V.J. et Hammel S.E.
Utilization of modified polar coordinates for bearing - only tracking.
IEEE. Trans. on A.C. Vol 28, pp283-294, Mars 1983.
- [2] Nardone, S.C., Lindgren, A.G. et Gong, K.F.
Fundamental properties and performance of conventionnal bearing - only target analysis.
IEEE. Trans. Automat, Vol A.C. 29, N°29, pp775-787.
- [3] Passerieux J.M., Pillon, D., Blanc - Benon, P. et Jauffret, C.
Target Motion Analysis with bearing and Frequency Measurements.
IEEE. Conference Asilomar, Pacific Grove (USA), Nov 1988.
- [4] Passerieux J.M., Pillon, D., Blanc - Benon, P. et Jauffret, C.
Target Motion Analysis Bearing and Frequency Measurements via Instrumental Variable Estimator.
Conference ICASSP, Glasgow (Scotland), Mai 1989.
- [5] Sorenson, H.W.
Kalman filtering : theory and application.
IEEE. Press. (1985)
- [6] Chang, C.B. et Tabaczynski, J.A.
Application to state estimation to target tracking.
IEEE. Trans. on A.C. Vol 29, pp98-109, Février 1984.
- [7] Nardone, S.C. et Aidala, V.J.
Observability criteria for bearing - only target motion analysis.
IEEE. Trans. Aerosp. Electron. Syst., Vol. AES. 17, N°2, pp162-166
Mars 1981.
- [8] Fogel, E. et Gavish, M.
Nth - order dynamics target observability from angle measurements.
IEEE. Trans. Aerops. Electron. Syst., Vol. AES. 24, N°3, pp305-308
Mai 1988.

- [9] Jauffret, C.
Thèse de 3ème cycle : "Trajectographie passive, observabilité et prise en compte des fausses alarmes".
Université de Toulon et du Var, Février 1993.
- [10] Aidala, V.J.
Kalman Filter behaviour in bearing - only tracking applications.
IEEE. TRANS. AES - 15, pp29-39.
- [11] Chou, S.I.
Anti - Submarine Warface (ASW) passive target tracking.
NOSC, rapport U 100, 1980.
- [12] Hoelzer, H.D., Johnson, G.W. et Cohen, A.O.
Modified polar coordinates. The key to well behaved bearings - only ranging.
IBM Shipboard and Defense Systems. Manassas, VA IBM rep 78 - M19
0001A, Août 1978.
- [13] Pham, D.T.
Some quick and efficient methods for bearing - only target motion analysis.
Rapport de recherche IMAG, Janvier 1989.
- [14] Pham, D.T.
Some Simple and Efficient Methods for bearing - only Target Estimation.
Eusipco 1990, Barcelone (Espagne).
- [15] Dahlquist, G. et Bjork, A.
Numericals methods
Englewood Cliffs, NJ : Prentice - Hall, 1974.
- [16] Numerical recipes
The art of scientific Computing
William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Tenkolsky, William T.
Vetterling.
- [17] Borovkov, A.
Statistique Mathématique.
MIR, Moscou.

- [18] Demidovitch, B. et Maron, I.
Eléments de calcul numérique.
MIR, Moscou.
- [19] Jauffret, C et Musso, C.
New results in target Motion Analysis.
Conférence UDT, Paris La Défense (France), Mai 1991.
- [20] Bar - Shalom, Y. et Fortmann, T.E.
Tracking and Data Association.
Academic Press (1988).
- [21] Jauffret, C. et Bar - shalom, Y.
Track Formation with Bearing and Frequency Measurements in Clutter.
IEEE. Conference CDC, Hawaii (USA), Décembre 1990.
- [22] Jauffret, C. et Bar - shalom, Y.
Target Motion Analysis in the Presence of False Alarm.
IEEE. Conference ACC, Chicago (USA), Juin 1992.
- [23] Musso, C; et Jauffret, C.
Linear Maximum Likelihood Estimator.
Conférence ICASSP, Toronto (Canada), Mai 1991.
- [24] Jauffret, C. et Pillon, D.
New observability Criterion in Target Motion Analysis.
Conférence OTAN, Kingston (Canada), Juillet 1988.
(Underwater Acoustic Data Processing, Kluwer Academic Publishers 1989)
- [25] Pham, D.T. et Musso, C.
Une méthode rapide et efficace pour la trajectographie passive par mesures de deux azimuts.
Rapport technique LMC - IMAG.
- [26] Pham, D.T. et Musso, C.
Une méthode rapide et efficace pour la trajectographie passive par mesures de deux azimuts.

- Colloque GRETSI 1991.
- [27] Musso, C. et Dubois, D.
Une méthode rapide et efficace pour la trajectographie passive par mesures de plusieurs azimuts.
Colloque GRETSI 1993.
- [28] Fawcett, J.A.
Effect of course Maneuvers on Bearings - only Range Estimation.
IEEE. Transactions acoustics, speech, and signal Processing, Vol 36, N°8,
Août 1988.
- [29] Minoux, M.
Programmation mathématique
Théorie et algorithmes.
Tome 2, Dunod, 1983.
- [30] Alexéev, V., Galéev, E. et Tikhomirov, V.
Recueil de problèmes d'optimisation.
MIR, Moscou.
- [31] Hagen
Applied physics Laboratory.
Silver Spring Maryland.
- [32] Miele, A.
Flights Mechanics.
Vol 1, Pergamon Press.
- [33] Hubert, J.P.
Robust Statistics.
John Wiley.
- [34] Lehman E.L.
Theory of estimation point.
John Wiley & Sons.

