



**HAL**  
open science

## Modélisation de la dynamique du carpe

Alain François Perez

► **To cite this version:**

Alain François Perez. Modélisation de la dynamique du carpe. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1994. Français. NNT: . tel-00344523

**HAL Id: tel-00344523**

**<https://theses.hal.science/tel-00344523>**

Submitted on 5 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présenté par

**Alain François PEREZ**

*Ingénieur*

*de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieur Electricien de Grenoble (ENSIEG).*

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

**de L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE TECHNOLOGIQUE ET  
MEDICALE DE GRENOBLE.**

*(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 23 novembre 1988).*

**Spécialité: Génie Biologique et Médical.**

**"MODELISATION DE LA DYNAMIQUE DU CARPE."**

Thèse soutenue le 21 février 1994.

**Président:**

**M. Demongeot**

**Rapporteurs:**

**M. Coatrieux, M. Boissonnat.**

**M. Cinquin, M. Puech,**

**M. Moutet, M. Jay**

Laboratoire TIMC-IMAG URA CNRS D1618  
Techniques de l'Imagerie de la Modélisation et de la Cognition.



**0. Sommaire.**

<b>0. Sommaire.</b>	<b>1</b>
<b>1. Résumé</b>	<b>1</b>
<b>2. Introduction</b>	<b>3</b>
<b>3. Physiologie du carpe.</b>	<b>7</b>
3.1. Description anatomique du carpe.	7
3.1.1. <i>Le système osseux.</i>	8
3.1.2. <i>Les ligaments carpiens.</i>	9
3.2. Physiologie du carpe.	11
3.3. Les douleurs et les traumatismes du carpe.	13
3.3.1. <i>Pathologies des os.</i>	13
3.3.2. <i>Pathologies des ligaments et des tendons.</i>	14
3.4. Conclusion.	15
<b>4. Acquisition de données. Segmentation.</b>	<b>17</b>
4.1. Introduction.	17
4.2. Exploration du carpe par Imagerie Médicale. Acquisition de données numériques.	18
4.2.1. <i>Tomodensitométrie par rayons X.</i>	18
4.2.2. <i>Imagerie par Résonance Magnétique.</i>	19
4.2.3. <i>Comparaison entre ces deux techniques.</i>	20
4.2.4. <i>La difficulté d'analyse des données.</i>	21
4.2.5. <i>Conclusion.</i>	21

4.3.	Segmentation.	21
4.3.1.	<i>Rappel du principe et bibliographie.</i>	22
4.3.2.	<i>Segmentation des images tomodensitométriques du carpe.</i>	25
4.3.2.1.	<i>Extractions de contours.</i>	25
4.3.2.2.	<i>Identification des os à partir de leurs contours.</i>	27
4.4.	Conclusion	27
5.	<b>Modélisation 3D et détection de contact.</b>	<b>29</b>
5.1.	Introduction.	29
5.2.	Modèles surfaciques et détection de contact.	31
5.2.1.	<i>Modélisation surfacique par facettes triangulaires.</i>	32
5.2.2.	<i>Modélisation surfacique continue.</i>	33
5.2.3.	<i>Détection de contact entre modèles surfaciques.</i>	34
5.2.3.1.	<i>Détection entre surfaces discrètes.</i>	34
5.2.3.2.	<i>Détection de contact entre approximations polynomiales.</i>	35
5.2.4.	<i>Conclusion.</i>	36
5.3.	Modélisation volumique et calcul d'intersection.	36
5.3.1.	<i>Modélisation volumique continue.</i>	36
5.3.2.	<i>Modélisation par échantillonnage du volume.</i>	37
5.4.	Calcul d'une carte de distance 2D.	39
5.4.1.	<i>Définition d'une carte de distance. Problématique de son calcul.</i>	39
5.4.2.	<i>Distance discrète 2D. Algorithme de la transformée de distance.</i>	41
5.4.3.	<i>Conclusion.</i>	45
5.5.	Carte de distance 3D. Axe Médian.	46
5.5.1.	<i>Transformation de distance 3D.</i>	46
5.5.2.	<i>Interprétation de la carte de distance 3D.</i>	48
5.5.3.	<i>L'axe médian.</i>	48
5.5.4.	<i>Extraction de l'axe médian de la carte des distances.</i>	50

5.6.	Détection de contact entre solides modélisés par leur axe médian.	52
5.6.1.	<i>Algorithme général.</i>	52
5.6.2.	<i>Algorithme de détection rapide.</i>	56
5.7.	Conclusion. Modèle 3D des os du carpe.	59
<b>6.</b>	<b>La Dynamique.</b>	<b>61</b>
6.1.	Introduction	61
6.2.	Rappels: équations fondamentales de la Dynamique, orientation du solide dans l'espace.	62
6.3.	Modélisation de la Dynamique par minimisation de contraintes.	66
6.3.1.	<i>Définition d'un critère de contrainte.</i>	67
6.3.1.1.	<i>Critère de contact</i>	67
6.3.1.2.	<i>Critère des liaisons.</i>	67
6.3.2.	<i>Comparaison de principe entre les équations de Lagrange et un modèle fondé sur la minimisation des contraintes.</i>	68
6.4.	Modélisation physique des contacts.	69
6.4.1.	<i>Chocs et percussions entre solides.</i>	69
6.4.2.	<i>Modélisation des contacts et des tensions des ligaments.</i>	70
6.4.3.	<i>Conclusion.</i>	72
<b>7.</b>	<b>Intégration des équations de la Dynamique.</b>	<b>73</b>
7.1.	Introduction.	73
7.2.	Intégration générale. Problème inverse d'Euler.	74
7.3.	Développement limité des coordonnées d'un point du solide.	77
7.4.	Intégration du système Dynamique par un algorithme de Runge-Kunta à pas adaptatif.	78
7.4.1.	<i>Intégration par une méthode de Runge-Kunta d'ordre 5 à pas adaptatif.</i>	80
7.4.2.	<i>Intégration au voisinage des singularités du système.</i>	82

7.5. Modèle de la Dynamique du carpe.	82
7.5.1. Procédure d'évaluation de la dérivée du vecteur des paramètres.	83
7.5.2. Procédure d'actualisation des coordonnées des centres des boules des os.	86
7.6. Conclusion.	87
<b>8. Premiers résultats.</b>	<b>89</b>
8.1. Introduction	89
8.2. Simulation de mouvements.	90
8.2.1. Adduction.	90
8.2.2. Extension.	95
8.3. Conclusion.	98
<b>9. Conclusion.</b>	<b>99</b>
<b>10. Annexe.</b>	<b>101</b>
10.1. Modélisation 3D continue: fonctions splines.	101
10.2. Rappels de Mécanique.	103
10.2.1. Cinématique du solide.	103
10.2.2. Rappel de Mécanique Analytique.	104
10.2.2.1. Principe des travaux virtuels. Principe de d'Alembert.	105
10.2.2.2. Équations de Lagrange.	107
10.2.2.3. Le théorème d'Euler-Lagrange.	107
10.3. Optimisation d'un critère Mécanique.	108
10.3.1. Courbes de potentiels de contact et de liaisons ligamentaires.	108
10.3.2. Algorithmes de minimisation numérique.	110
10.4. Lois du frottement sec.	111
10.4.1. Les frottements secs entre solides en contact.	111
10.4.2. Frottement de glissement pendant le mouvement.	113
10.4.3. Frottement de roulement et de pivotement.	114
10.5. Intégration fondée sur les secondes équations d'Euler.	114

10.6. Intégration d'un système différentiel $\frac{d\vec{q}}{dt} = f\left(t, \vec{q}\right)$ par un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4.	116
10.7. Visualisation graphique.	117
<b>11. Bibliographie.</b>	<b>121</b>



## 1. Résumé

Le carpe représente l'articulation particulièrement originale et complexe de huit os comprise entre la main et l'avant-bras. La modélisation de la Dynamique du carpe constitue l'étape consécutive logique des travaux d'imagerie médicale sur la modélisation informatique 3D statique. Elle procède en trois étapes. A partir d'une modélisation 3D des os, et des phénomènes de contact pendant leur mouvement, elle simule les trajectoires des os du carpe par l'intégration numérique des équations de la Dynamique.

Le choix d'une modélisation physique conduit à étudier de façon très attentive, les différents types possibles de modélisation 3D afin d'aboutir à un choix de modèle suffisamment précis et concis. La modélisation de l'axe médian, en modélisant les volumes des os par leur recouvrement minimal par des boules, constitue ainsi un modèle inédit et efficace. Cette modélisation permet en effet d'optimiser le coût calculatoire de la détection de contact lors du mouvement des os, pour une précision maximale de détection et de localisation des points de contact. Il offre également la possibilité d'estimer géométriquement une force de répulsion à ces contacts, ainsi que les différentes composantes des forces de frottement.

La Dynamique du système des os du carpe se résume alors en une simple minimisation de la profondeur des contacts entre les os, par l'intégration des équations fondamentales de la Dynamique. L'intégration numérique a été développée à partir d'un intégrateur différentiel robuste à pas adaptatif. Le caractère discret des contacts et des forces appliquées rend délicate toutefois, l'intégration du système différentiel selon le choix des paramètres de force de répulsion et d'inertie du système.

Les qualités d'autonomie et de paramétrisation du modèle physique ainsi développé, en font cependant un premier pas inédit et efficace de la modélisation de la Dynamique du carpe.

Mots clés:

Carpe, Modèle Physique, Imagerie Médicale, Modélisation 3D, Distance Discrète, Carte de distances, Axe Médian, Détection de Contact, Intégration différentielle, Dynamique, Animation virtuelle.

## 2. Introduction

Le mouvement des os du carpe garde encore des aspects bien mystérieux aux yeux du spécialiste. La particularité de sa structure osseuse et ligamentaire en fait une des articulations les plus complexes du corps humain. Elle joue pourtant un rôle fondamental dans le mouvement de la main, puisqu'elle assure son articulation autour du bras, ainsi que sa force de préhension.

La chirurgie du carpe reste par conséquent, une technique particulièrement difficile car toute modification de la structure de cette articulation entraîne de nombreuses conséquences sur la mobilité de la main et sur le confort de son mouvement.

Le but d'une recherche sur la modélisation du carpe consiste donc à concevoir un modèle autonome capable de calculer les trajectoires des os et des ligaments pour anticiper les conséquences de toute modification chirurgicale. Ce modèle s'appuie principalement sur des données numériques acquises par des techniques d'imagerie médicale, et sur un ordinateur informatique qui permet non seulement de mener les calculs complexes de la Dynamique (près de 80 équations à résoudre simultanément), mais également de visualiser les résultats par des animations d'images virtuelles.

Comme nous allons le montrer dans le chapitre consacré à la physiologie et à la description anatomique, les os du carpe sont animés de mouvement dans un espace clos déformable. Ils sont ainsi guidés par le frottement de leurs surfaces lors des contacts entre os. Les ligaments agissent plutôt comme des contraintes de tension de rappel entre les os. Un modèle physique du carpe doit donc représenter tous ces types de mouvement à partir de la détection des contacts entre les os, puis par l'application des forces résultantes, et ce tout au long du mouvement de la main.

Un premier modèle physique du carpe considère ainsi ce système comme un système mécanique déformable, constitué de solides indéformables et reliés entre eux par des ligaments assimilés à des fils. Le mouvement de la main soumet ces solides à des contacts qui se répercutent au sein du système et le forcent à se déformer.

La modélisation consiste dans un premier temps à modéliser informatiquement les os dans l'espace  $R^3$  (on parlera de modélisation 3D). C'est une étape non seulement nécessaire pour visualiser leurs trajectoires, mais aussi fondamentale pour détecter les contacts pendant les mouvements et pour estimer en conséquence, les forces de réaction qui agissent sur les os tout au long de l'animation.

Dans un second temps, un modèle des forces du système est défini. Les forces de contact entre les os sont choisies comme des fonctions linéaires de la profondeur du contact, les forces de tension des ligaments sont modélisées par une force nulle quand le ligament n'est pas tendu, ou de type élastique lorsque la longueur du ligament approche sa longueur maximale.

Dans un troisième temps il s'agit de calculer les trajectoires des os. La modélisation qui a été développée ici, s'appuie sur l'intégration des lois fondamentales de la Dynamique. Une autre modélisation aurait pu être développée à partir de la minimisation d'un pseudo-potentiel ou par l'intégration des équations de Lagrange (sur un espace  $R^n$ ,  $n \geq 3$ ).

D'autres difficultés particulières se cachent derrière chacune de ces étapes. Il faut en effet analyser les images pour y distinguer les données numériques caractéristiques des os et des ligaments, avant de les modéliser dans l'espace  $R^3$ . La précision de la détection de contact dépend fondamentalement du modèle 3D, selon qu'il est possible de localiser les contacts et de détecter les chevauchements des volumes pendant leurs mouvements.

Les différents chapitres qui suivent présentent donc pas à pas ces étapes et ces difficultés. Le chapitre 3 décrit l'anatomie, la physiologie du carpe et les principaux traumatismes auxquels il est sensible. Ce chapitre introduit les conditions physiques qui serviront à établir le modèle Dynamique, ainsi que quelques uns des intérêts thérapeutiques de ce travail.

Le chapitre 4 décrit les différentes techniques d'imagerie médicale et présente la nécessité d'analyser ces images par des techniques de segmentation pour modéliser les os.

Le chapitre 5 décrit les principaux modèles adaptés au calcul d'une représentation informatique 3D à partir des contours des os. On y montre la difficulté d'adaptation de ces modèles informatiques au problème de la détection de contacts entre des solides en mouvement. Ce chapitre met ainsi en relief l'intérêt d'un modèle volumique pour des applications Dynamiques, et en particulier, la modélisation 3D par recouvrement par des boules. Des algorithmes de détection de contact de grande précision sont alors proposés.

Le chapitre 6 présente un rappel de la Dynamique d'un solide et de la paramétrisation de son mouvement par les angles d'Euler. Il explique pourquoi l'intégration de la Dynamique n'a pas été poursuivie par la minimisation d'un critère de contrainte, ni par la théorie des percussions. Dans l'optique d'une intégration par les équations fondamentales de la Dynamique, une modélisation des forces de contact est proposée.

Le chapitre 7 présente alors des algorithmes de recherche de solution analytique aux équations du mouvement, pour s'intéresser plus particulièrement à leur résolution numérique par un algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif.

Le chapitre 8 présente enfin quelques résultats de simulation.

Après la conclusion au chapitre 9, le chapitre 10 regroupe les paragraphes annexes de cet exposé, auxquels le lecteur est invité à se rapporter aux chapitres concernés, ainsi qu'une algorithmique de visualisation rapide d'un recouvrement d'un volume par des boules.

Une bibliographie est proposée à la fin de cet ouvrage au chapitre 11.



### 3. Physiologie du carpe.

#### 3.1. Description anatomique du carpe.

On appelle poignet (*du latin pugnus le poing*) la zone anatomique comprise entre la partie supérieure de la main et de l'avant-bras. Il représente l'ensemble du système osseux et ligamentaire compris entre la paume de la main, et l'extrémité de l'avant-bras. Son rôle est fondamental pour le bon fonctionnement de la main puisqu'il est non seulement le lieu de passage de ses tendons et de ses vaisseaux sanguins, mais il lui assure aussi deux degrés de liberté autour de l'avant-bras. Le troisième degré de liberté apparent (mouvement de pronation-supination: rotation externe du bord radial de la main) n'est pas exercé par le carpe, mais par la torsion de l'avant bras autour de ses deux os: le radius et le cubitus.

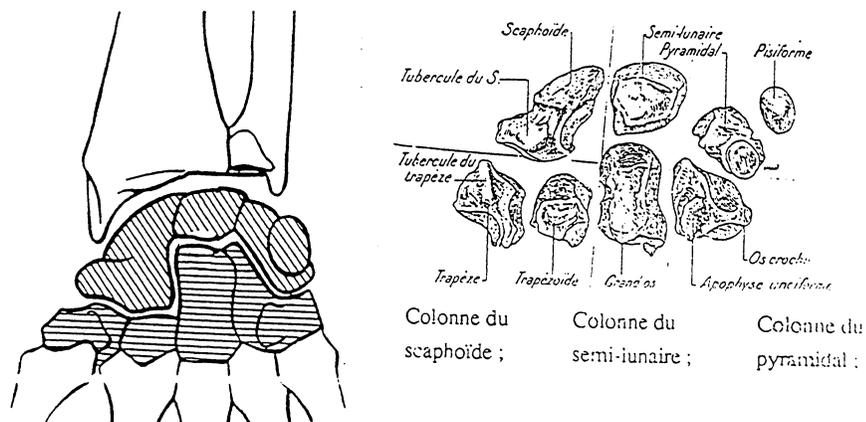


Fig. 1: Planche représentative du poignet et du carpe.

Le carpe (du grec *karpos*: la jointure) représente le squelette des huit petits os du poignet situés entre les os de l'avant-bras et du métacarpe de la main. Il délimite à la fois un canal conduisant des tendons, des vaisseaux et les nerfs du bras vers l'extrémité de la main, mais aussi comme une articulation très mobile et adaptative qui permet des mouvements de flexion, d'extension et de rotation des os sans obstruction du canal.

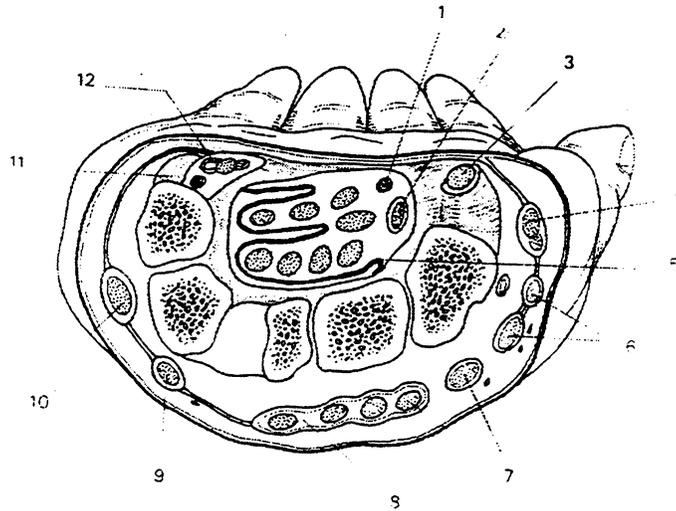


Fig. 2: Coupe transversale du poignet droit .

1: nerf médian, 2:tendon fléchisseur propre du pouce, 3:tendon du grand palmaire, 4: tendon accolé du long abducteur et court extenseur du pouce, 5: gaine digito-carpienne, 6: tendons des radiaux, 7: tendon du long extenseur du pouce, 8: tendons des extenseurs, 9: tendon de l'extenseur du 5<sup>ème</sup> doigt, 10: cubital postérieur, 11: insertion du cubital antérieur sur le pisiforme, 12: canal de Guyon.

### 3.1.1. Le système osseux.

Le carpe est constitué de huit petits os alignés en deux rangées et trois colonnes. La rangée supérieure, placée contre la concavité formée par les deux os de l'avant-bras, se compose du scaphoïde, du semi-lunaire et du pyramidal, sur lequel s'articule également le pisiforme.

Le pisiforme a un comportement sésamoïde (*il est inclus dans un tendon*). Ce tendon se poursuit après le pisiforme par un ligament qui s'insère sur le crochet de l'os crochu.

La rangée inférieure comporte le trapèze, le trapézoïde, le grand os et l'os crochu. Elle se situe contre la rangée formée par les cinq métacarpiens de la main. Le tubercule du trapèze en dehors et le crochet de l'os crochu participent à l'excavation du canal carpien (*forme en gouttière des rangées osseuses du carpe sur une coupe transversale*).

Il semble que la complexité des mouvements des os du carpe serve aussi à conserver des constantes géométriques telles que l'excavation du canal ou les dimensions extérieures de l'articulation.

Aucun muscle actif ne s'insère sur les os de la rangée supérieure, de sorte que son mouvement est principalement guidé par la forme de ses os et des ligaments qui les unissent. Toute altération pathologique ou chirurgicale de l'intégrité de ces éléments s'accompagne de modifications souvent douloureuses de la mobilité du carpe.

### **3.1.2. Les ligaments carpiens.**

On distingue les ligaments intérieurs au volume formé par les os du carpe (*ligaments intrinsèques*) et ceux situés à sa périphérie (*dits extrinsèques*). Les ligaments extrinsèques recouvrent les huit petits os du carpe et renforcent la géométrie de l'articulation. Les ligaments intrinsèques maintiennent les rapports de distance respectifs des différents éléments osseux à l'intérieur de l'articulation.

Le carpe présente l'aspect d'une gouttière, fermée en avant par le ligament annulaire antérieur. Ce ligament, tel un bracelet de montre, canalise les tendons et les vaisseaux de l'avant-bras vers la main. Par ce canal transitent notamment les tendons fléchisseurs des doigts.

La contrainte physique exercée par les ligaments sur les os, ressemble à celle d'un fil qui se tend au voisinage de sa longueur maximale. A cette longueur il présente un léger pouvoir élastique. En dehors des forces de tension des ligaments, des forces de contact agissent également sur les os.

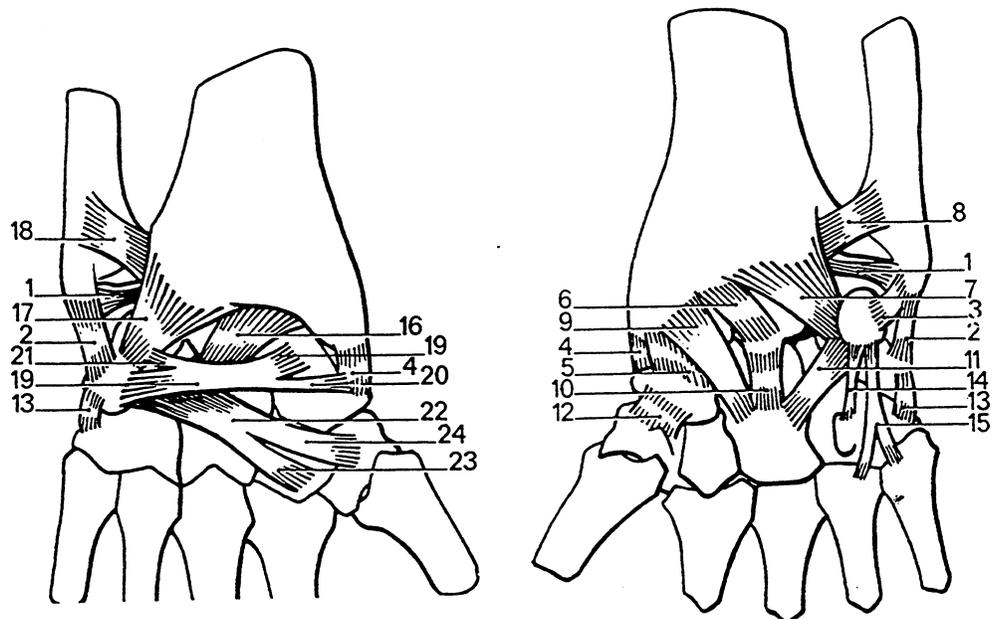


Fig. 3: Vue postérieure et antérieure des ligaments du carpe.

Ligament latéral interne 1: ligament triangulaire, 2: faisceau postérieur stylo-pyramidal, 3: faisceau antérieur stylo-pisiformien.  
 Ligament latéral externe 4: faisceau postérieur, 5: faisceau antérieur.  
 Ligament antérieur de la radio-carpienne 6: faisceau radio-lunarien antérieur, 7: radio-pyramidal antérieur, 8: ligament antérieur.  
 Ligament de la médio-carpienne, 9: ligament radio-capital, 10: ligament lunaro-capital, 11: ligament triqueto-capital, 12: ligament scapho-trapézien, 13: triqueto crochu, 14: pisi-unciformien, 15: pisi-métacarpien.  
 Ligament postérieur de la radio-carpienne, 16: radio-lunarien postérieur, 17: radio-pyramidal-postérieur, 18: radio-cubital inférieur.  
 Sangles transversales postérieures, 19, 20, 21: bandelette de la première rangée, 22, 23, 24: bandelette de la deuxième rangée.

### 3.2. Physiologie du carpe.

De part et d'autre du carpe se regroupent des faisceaux de tendons reliés aux muscles de l'avant-bras et de la main, qui tirent celle-ci vers le bras pour lui assurer une force de prise optimale. Ce mouvement de traction comprime alors les os du carpe entre les deux mâchoires formées d'une part par la rangée des métacarpiens (paroi métacarpienne), et d'autre part par la concavité radiocubitale des deux os de l'avant-bras.

La contraction et le relâchement de certains tendons, permettent ainsi à la main d'effectuer des mouvements de rotation autour de l'avant-bras. Ces mouvements rapprochent ou éloignent les mâchoires osseuses autour du carpe sous des angles qui lui offrent alors soit la possibilité d'une détente par un espace de mobilité localement plus grand, soit la possibilité d'une compression. Ses os entrent ainsi en mouvement pour adapter leurs positions à ces deux possibilités.

Le contrôle des constantes géométriques du poignet s'effectue pendant ces mouvements, grâce au réseau ligamentaire et grâce à l'adaptation morphologique des os par des mouvements de roulement, de glissement et de pivotement les uns contre les autres. On peut donc comparer l'articulation du carpe à un roulement à billes qui seraient contenues entre les parois radiocubitales et métacarpiennes, et par le filet souple enveloppant des ligaments extrinsèques. Ce dispositif n'autorise au total que deux degrés de liberté :

-un mouvement d'adduction et d'abduction: glissement de la main dans le plan frontal de la main (O, X, Y), de droite à gauche autour de l'axe (O, Z) et réciproquement.

-un mouvement de flexion et d'extension: inclination de la main par rapport au plan sagittal (O,Y,Z) vers l'intérieur ou l'extérieur de la paume de la main.

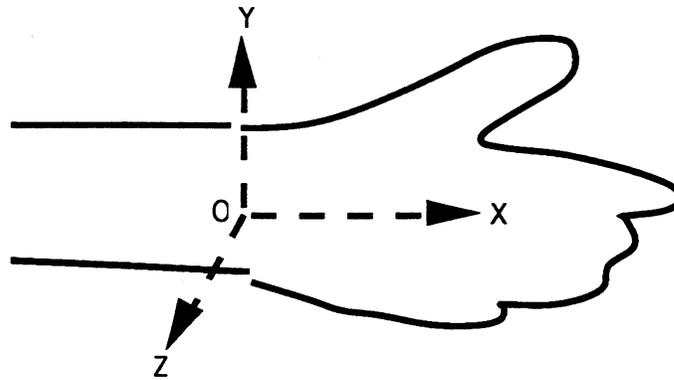


Fig. 4: Repère des axes de rotation de la main.

Cette description sommaire évoque assez clairement les différents types de contraintes physiques des mouvements qui sont en jeu dans la Dynamique du carpe:

- mouvements dans un espace clos déformable entre les rangées osseuses des métacarpiens et du bras,
- mouvements guidés par le frottement des surfaces des os s'articulant entre elles,
- contraintes de rappel exercées par les ligaments.

Les vaisseaux et les tendons du canal carpien n'agissent pas directement sur le mouvement du carpe puisqu'ils en sont justement protégés. Les os sont composés d'une matière dure et sont entourés d'une fine gaine de tissus mous. On les considérera pratiquement indéformables. Les ligaments seront eux assimilés à des fils attachés entre ces os tant qu'ils n'atteignent pas leur longueur maximale. Au voisinage de leur longueur maximale d'extension, ils exerceront une forte action élastique.

### **3.3. Les douleurs et les traumatismes du carpe.**

Les douleurs du carpe sont fréquentes et d'origines diverses. Leur fréquence s'explique par la sollicitation permanente de cette articulation aux mouvements de la main. La pratique intense de certains sports (golf, tennis...) accroît particulièrement cette sollicitation.

L'équilibre du système biomécanique du carpe reste en effet très fragile. Le canal carpien forme une zone étroite de passage des vaisseaux, des nerfs et des tendons de la main. La pathologie du carpe et l'obstruction de ce canal sont donc d'un grand retentissement sur le fonctionnement de la main.

L'exploration de la stabilité carpienne bénéficie toutefois des techniques de pointe de l'imagerie médicale, qui permet de visualiser l'intérieur d'un corps sans chirurgie (cf. §4.2).

#### **3.3.1. Pathologies des os.**

La fracture du scaphoïde représente 75% des cas de fracture. Cette fracture s'explique souvent par la chute du patient, le poignet tendu en hyperextension. Le scaphoïde se brise alors contre le radius par l'effet des forces de cisaillement entre ces os. La douleur d'une telle fracture s'amende souvent après quelques jours. Un retard de consultation après cet événement, ou un mauvais diagnostic conduisent souvent vers une pseudo-arthrose de l'os.

La fracture du trapèze représente la seconde fracture la plus fréquente car elle est souvent créée par une chute sur le pouce. Contrairement au scaphoïde, la vascularisation du trapèze permet une bonne consolidation de cet os. Ainsi beaucoup de ces fractures passent inaperçues.

Certaines fractures sont plus fréquentes chez des sujets de certaines classes sociales. Ainsi la fracture de l'apophyse de l'os crochu succède à l'impact brutal sur le poignet du manche cylindrique d'outils, de raquettes, de clubs de golf...

Le poignet peut également être atteint de polyarthrite rhumatoïde, dont l'évolution peut conduire à l'impotence fonctionnelle de cette articulation. La chirurgie du poignet représente alors souvent un dernier recours.

### 3.3.2. Pathologies des ligaments et des tendons.

La fréquence des tendinites du poignet s'explique par une utilisation trop intense de la main dans des activités de la vie quotidienne et sportive. Les tendons sont d'autant plus sensibles qu'ils parcourent un long trajet dans le poignet et qu'ils ont un rôle dans la mobilisation et la stabilisation du poignet. Leur traitement repose le plus souvent sur l'infiltration d'une médication et plus rarement par une chirurgie.

Les ligaments assurent la stabilité de l'articulation. La rupture de ceux-ci conduit rapidement à des instabilités qui désorganisent l'anatomie du carpe, et donc sa physiologie. Les instabilités sont définies par comparaison avec les quelques règles connues de la Dynamique du carpe:

- les axes longitudinaux du radius, du semi-lunaire et du grand os sont approximativement alignés. On définit ainsi l'instabilité du semi-lunaire selon son mouvement de bascule autour de cet axe,

- lors des mouvements en inclinaison radiale ou cubitale, les rangées évoluent sensiblement dans le même sens de façon cohérente. Seules les amplitudes varient d'un poignet à l'autre,

- lors des mouvements frontaux en inclinaison radiale ou cubitale, le scaphoïde entraîne le semi-lunaire dans son mouvement vertical par le biais des ligaments scapho-lunaires.

On classe ainsi les instabilités dissociatives, qui atteignent les os de la première rangée (la plus fréquente survient entre le scaphoïde et le semi-lunaire, ou entre le pyramidal et le semi-lunaire), et associatives, qui respectent la première rangée, mais qui atteignent l'articulation médiocarpienne entre le pyramidal et l'os crochu, ou entre le grand os et le semi-lunaire.

### **3.4. Conclusion.**

Un premier modèle de la Dynamique du carpe consiste donc à considérer ce système comme un système mécanique déformable formé de solides indéformables, reliés entre eux par des fils. Le mouvement de la rangée des métacarpiens de la main soumet ces solides à des contacts qui se répercutent au sein du système et le forcent alors à entrer en mouvement vers une nouvelle position d'équilibre global. Le réseau des ligaments agit comme des fils qui limitent les dimensions de l'espace de déplacement des os du carpe.



## **4. Acquisition de données.**

### **Segmentation.**

#### **4.1. Introduction.**

L'imagerie médicale tomodensitométrique (scanner) ou par résonance magnétique (IRM) permet non seulement d'explorer l'intérieur d'un corps par des images de coupes, mais aussi d'en fournir des données numériques permettant une reconstruction 3D numérique de certains objets d'intérêt. Une difficulté consiste alors à analyser ces données numériques brutes pour identifier ces objets (os et ligaments du carpe).

Le paragraphe §4.2 présente ainsi les principales techniques d'exploration en Imagerie Médicale: le scanner et l'IRM. Devant la difficulté d'identifier les ligaments, on choisira les images scanner pour leur meilleure définition des os. Le paragraphe §4.3 introduira la difficulté d'analyse des données numériques du carpe, en s'intéressant plus particulièrement à la segmentation de ses images tomodensitométriques.

## 4.2. Exploration du carpe par Imagerie Médicale. Acquisition de données numériques.

La radiologie par rayon X représente la plus ancienne technique d'exploration en imagerie médicale. Elle produit une image sur un support de film d'argent qui visualise l'absorption du rayonnement X à travers le corps exploré. La radiologie osseuse s'avère particulièrement efficace, car plus le corps est composé d'éléments de masse atomique élevée tel que le calcium, plus son absorption du rayonnement X est élevée. L'image radiologique représente ainsi une image de contraste par projection plane des différents constituants intérieurs du corps.

Plus récemment, une nouvelle technique s'est particulièrement développée, également à partir du rayonnement X. L'invention du scanner permet en effet d'obtenir une première ébauche de visualisation tridimensionnelle du corps par la superposition d'images de coupes transversales.

### 4.2.1. Tomodensitométrie par rayons X.

Grâce à un dispositif circulaire de capteurs et d'une source mobile sur un arc de cercle, le scanner reconstitue l'image de la coupe transversale du corps. Un algorithme de reconstruction, associé en effet à chaque point élémentaire (*pixel*) de la coupe, sa mesure de l'absorption du rayonnement X.

Le déplacement longitudinal de l'ensemble du dispositif après chaque calcul de coupe, permet d'acquérir alors une série de coupes transversales. Cette technique tomodensitométrie (*du grec tomos: la coupe*) fournit par l'empilement des coupes transversales, une première ébauche de reconstruction tridimensionnelle.

Les images tomodensitométriques nécessitent encore un effort d'analyse pour reconnaître les formes des objets qu'elles représentent. Leur qualité dépend en effet de multiples problèmes de bruitage du signal reconstruit (artefacts dus aux perturbations de l'absorption du rayonnement X, effets de volume partiel pour des points d'un objet situés entre deux coupes...).

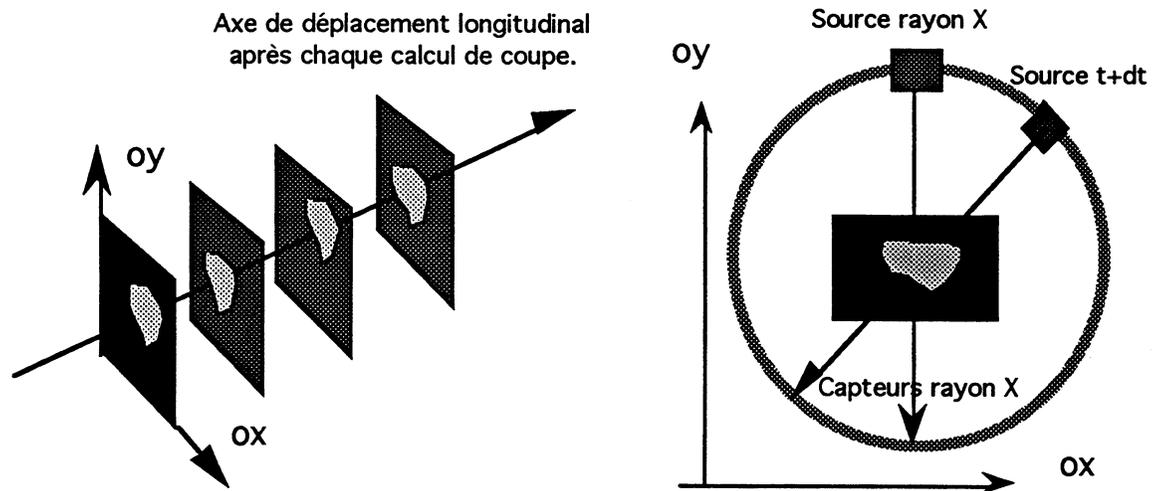


Fig. 1: Schéma des plans de coupes scanner.

Le rayonnement X présente aussi un certain danger, car c'est un rayonnement à forte énergie ionisante. Un grand nombre de coupes tomographiques correspond donc à une irradiation non négligeable du corps et d'autres techniques moins dangereuses, fondée notamment sur la résonance magnétique, ont été développées depuis.

#### 4.2.2. Imagerie par Résonance Magnétique.

L'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) s'appuie sur les propriétés magnétiques de la matière. Les atomes d'hydrogène peuvent être comparés à de petits aimants, naturellement désorientés à l'état d'équilibre, mais qui s'orientent parallèlement, sous l'action d'un intense champ magnétique extérieur. L'extinction du champ extérieur libère de nouveau leurs moments magnétiques : ils ne retrouvent complètement leur équilibre qu'après un certain temps appelé temps de relaxation.

L'I.R.M. mesure deux temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$  pour deux directions du champ de perturbation. Chaque pixel de l'image mesure localement dans l'espace, le temps de relaxation des moments magnétiques présents dans l'unité de volume étudié. On obtient alors une image liée à la densité d'hydrogène de la matière en ce point. Cette technique permet donc de former des images, soit sous la forme de coupes transversales d'épaisseur constante, soit plus simplement sous la forme d'un volume numérique.

#### 4.2.3. Comparaison entre ces deux techniques.

L'IRM s'avère particulièrement efficace pour tous les corps riches en hydrogène, et donc en eau: tissus mous, cartilages, ligaments et tendons. Si la morphologie de l'os peut être également étudiée à partir de l'image des tissus mous qui l'entourent, la tomodynamométrie par rayon X procure encore aujourd'hui des images de meilleure qualité pour l'étude des os.

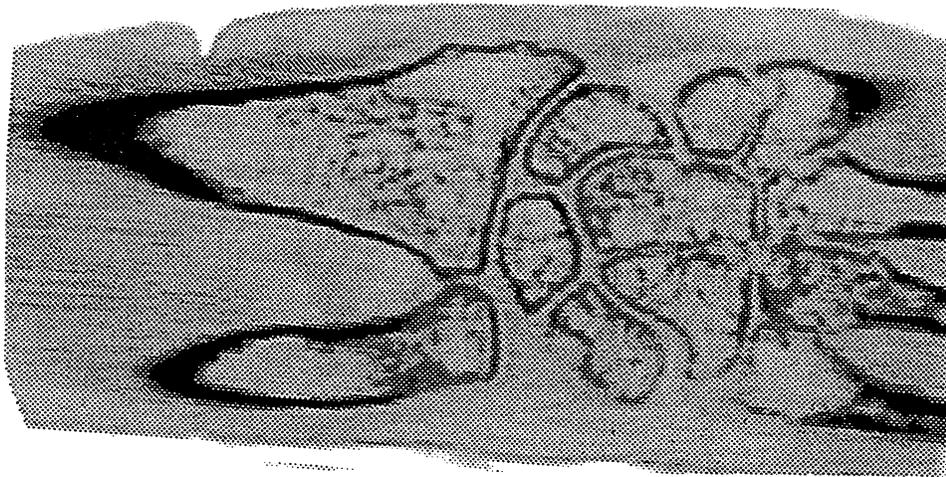


Fig. 2: Coupe TDM du carpe.



Fig. 3: Coupes IRM T1 et T2..

Les essais ont été effectués avec ces deux techniques d'imagerie, sans produits de contraste alors que ceux-ci peuvent encore faciliter l'analyse des images. Comme la sensibilité de l'antenne conditionne fortement la définition des images IRM, nous avons ainsi utilisé l'antenne disponible la plus sensible: l'antenne du rachis.

#### **4.2.4. La difficulté d'analyse des données.**

Il est impossible de distinguer sur les images scanner, une trace suffisante des ligaments pour pouvoir les modéliser conjointement avec les os. Leur trace s'avère encore très faible sur les images IRM et les ligaments intrinsèques du carpe sont trop petits pour être visibles. Leur détection informatique s'avère donc très problématique.

L'emboîtement des os du carpe les uns contre les autres, avec de faibles distances interosseuses, constitue la difficulté majeure de l'analyse automatique des formes du carpe sur des images numériques. Le seuillage de l'intensité des pixels de l'image, produit en effet des traces des os plus ou moins distinctes, avec un nombre de régions sur l'image différent de celui du nombre d'os.

#### **4.2.5. Conclusion.**

Tous les ligaments ne peuvent être reconnus automatiquement sur des images IRM ou scanner. C'est pourquoi on a réduit le problème à la seule modélisation 3D des os.

Cette réduction du problème n'est pas fondamentalement pénalisante pour la théorie de la modélisation de la Dynamique du carpe car le problème essentiel consiste à modéliser les déplacements des os; les ligaments peuvent toujours être modélisés par leurs forces de tension. Ces tensions dépendant de l'écartement des points d'attache des ligaments préalablement repérés par défaut sur les os (par la connaissance anatomique), les ligaments pourront donc toujours être associés au modèle Dynamique.

### **4.3. Segmentation.**

Si l'on peut détecter à l'oeil nu sur des images tomодensitométriques, les contours des différents os, leur traitement automatique s'avère beaucoup plus complexe. Le scanner code en effet chaque pixel en 4096 niveaux d'intensité (appelé

aussi niveaux de gris car il s'agit d'image numérique noir et blanc), quand l'oeil humain n'en perçoit bien que 64 .

La lecture à l'oeil nu d'une coupe scanner effectue donc déjà un travail de sélection des données de l'image entre les pixels clairs de l'os, et ceux perçus plus foncés du fond de l'image.

La connaissance a priori de formes géométriques simples ou des formes des objets eux-mêmes (diagnostic médical), permet d'interpréter ces images: une succession de points alignés non connexes mais suffisamment proches sera directement interprétée par l'oeil comme une droite ou une courbe.

Des volumes de données médicales toujours plus importants ont conduit à automatiser le traitement d'images (40 coupes tomодensitométriques millimétriques de 512x512 pixels définissent le carpe). Si de nombreux travaux ont été entrepris dans ce domaine, ils s'adaptent plus ou moins bien aux images du carpe.

L'objet n'est pas ici de présenter de façon exhaustive toutes les méthodes de segmentation d'images médicales, ce travail a en effet déjà été réalisé en partie [MIGUET, 88]. Je ne présenterai donc qu'un rapide rappel des principes de la segmentation médicale, pour me consacrer ensuite plus précisément aux techniques de segmentation de contours, mieux adaptées aux images tomодensitométriques.

#### **4.3.1. Rappel du principe et bibliographie.**

Parmi toutes les techniques de reconnaissance de formes, on distingue les techniques 2D appliquées aux images, et 3D appliquées aux volumes de données. Ces dernières sont souvent, les généralisations du cas 2D. Il existe des méthodes dites 2,5D qui traitent des données non isotropes dans l'espace, issues par exemple de la superposition d'images tomодensitométriques. Comme nous avons choisi de telles données, nous évoquerons essentiellement dans la suite de ce paragraphe, des techniques 2D et 2,5D.

Une image numérique telle qu'une coupe tomодensitométrique, se représente généralement par une matrice carrée de pixels qui décrit un certain nombre d'objets.

La reconnaissance automatique des formes de cette image consiste à détecter les attributs de chacun des objets, pour les distinguer du fond de l'image et pour les séparer des autres objets. Ce travail s'effectue en général soit par la détection numérique des contours de pixels de chacun des objets (que "la segmentation" modélise par des courbes ou des segments de droite), soit par une méthode duale à la détection de contour, la détection de régions.

La plupart des logiciels de reconnaissance de formes combinent souvent ces types d'analyse. En routine clinique, ceux-ci sont principalement fondés sur des techniques de seuillage de l'intensité des pixels pour détecter les régions de pixels de chaque objet [UDUPA, 86]. Elles s'avèrent cependant souvent insuffisantes pour le carpe, car les contacts naturels des os entre eux rendent difficile la séparation des régions et des contours [MIGUET, 88].

La détection de contours recherche les discontinuités locales de l'intensité des pixels, elles sont en effet généralement représentatives du voisinage spatial des pixels du contour d'un objet. Ces discontinuités se repèrent par le filtrage de l'image par des opérateurs différentiels [HARALICK, 84], [CANNY, 87], [DERICHE, 87].

Cette étape de filtrage numérique doit être en général complétée par une étape de reconnexion des éléments de contours en des courbes continues. La segmentation de contours les modélise alors par des segments de droite ou par des courbes polynomiales par morceaux. Ce travail complémentaire se réalise alors soit en 2D, la segmentation par des courbes peut s'appuyer alors sur des contours actifs [TERZOPOULOS, 88], soit en 2,5D par des surfaces "élastiques" qui se collent sur les éléments de contours de toutes les coupes [LEITNER, 93].

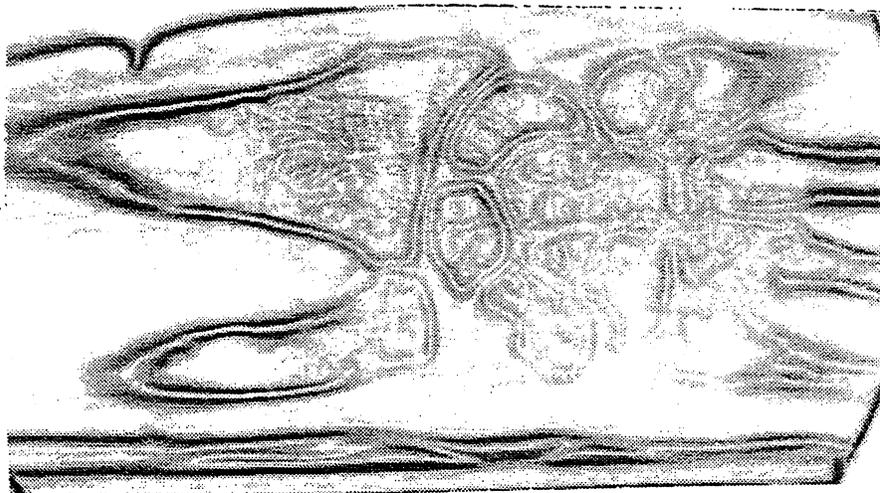


Fig. 4: Coupe TDM filtrée par un opérateur différentiel 2D [DERICHE, 87].

### 4.3.2. Segmentation des images tomodensitométriques du carpe.

Les images tomodensitométriques du carpe sont en général trop complexes pour être segmentées par des méthodes complètement automatiques. Une alternative consiste à extraire les contours des os des coupes TDM semi-interactivement.

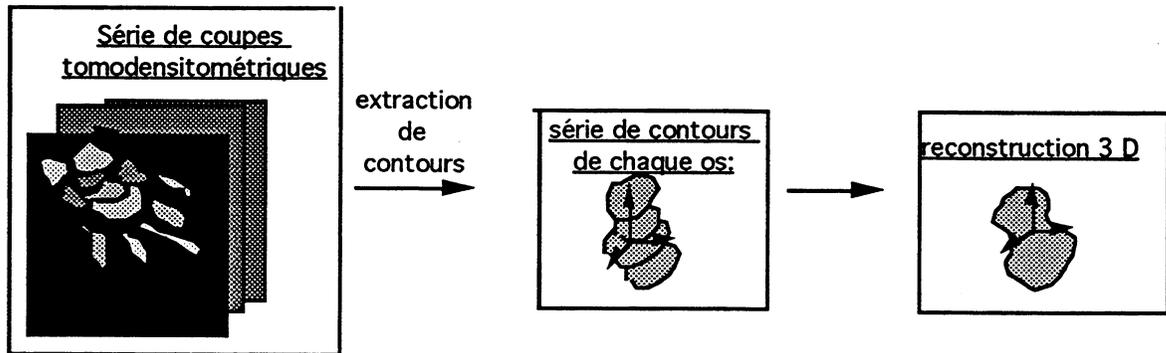


Fig. 5: Schéma de modélisation 3D.

#### 4.3.2.1. Extractions de contours.

Pour atteindre une précision maximale de modélisation, il est préférable de choisir des coupes tomodensitométriques minces et peu espacées. En choisissant des coupes millimétriques, il faut environ 40 coupes scanner de  $512^2$  pixels pour décrire un carpe dans son plan frontal. Comme le carpe comporte déjà 15 os, un peu moins de 600 contours doivent donc être extraits de cette série. L'importance de ces données souligne l'intérêt de méthodes automatiques.

Une première technique consiste à combiner deux types de seuillage haut et bas, puis à développer des accroissements des régions obtenus au seuillage haut vers celles obtenues au seuillage bas. Les contours des os sont alors donnés par la frontière de chacune des régions connexes restantes [BRUNIE, 91]. Cette technique reste malheureusement très sensible au bruit des images, et le résultat conduit souvent à des indéterminations d'interprétation dues à la présence de contours en surnombre par rapport au nombre d'os.

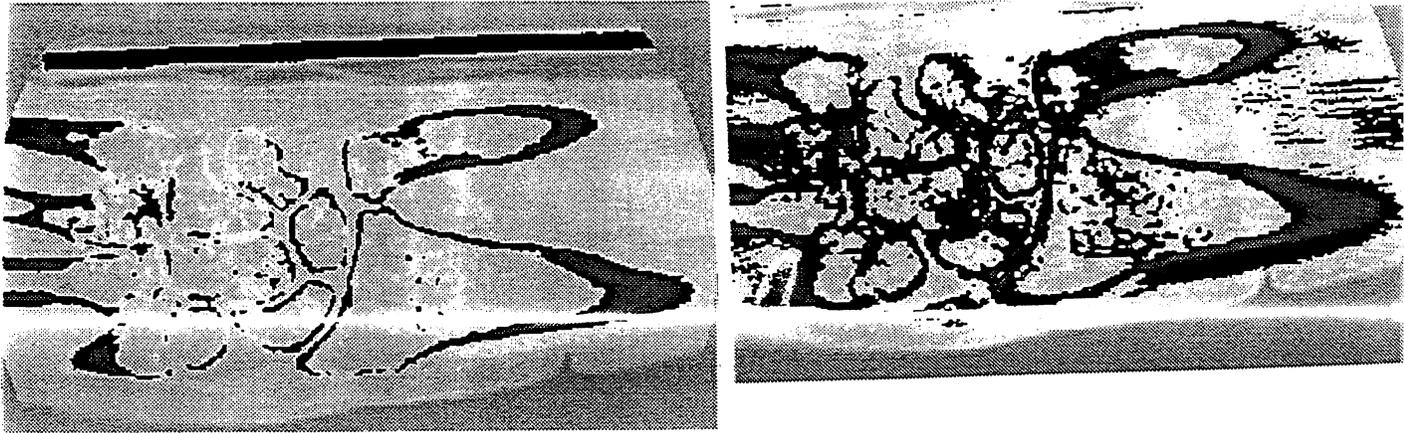


Fig. 6: Seuil haut et bas d'une coupe TDM.

Plusieurs techniques semi-interactives fondées sur l'alliance du pouvoir de contraste de l'oeil et de l'automatisation de certaines étapes fastidieuses, permettent d'obtenir cependant de très bons résultats.

La plus élémentaire consiste à calculer la courbe des contours 2D par lissage de points sélectionnés à l'écran. Une autre solution 3D modélise la surface des os par la déformation élastique d'une surface polynomiale par morceau vers les éléments de contours détectés par un pré-filtrage des coupes. L'opérateur guide la déformation de la surface en guidant les points de contrôle de la surface jusqu'à obtenir l'interpolation du contour désiré.

#### 4.3.2.2. Identification des os à partir de leurs contours.

La segmentation automatique définit en général un ensemble de contours qu'il faut identifier aux os. Cette opération nécessite alors de définir un critère d'adjacence des contours d'un même os sur des coupes consécutives. Un critère fondé sur la projection de l'ellipse de meilleure approximation d'un contour sur sa coupe consécutive, peut malheureusement conduire à une indétermination lorsque deux contours sont trop rapprochés ou lorsque les coupes sont trop espacées [MIGUET,88].

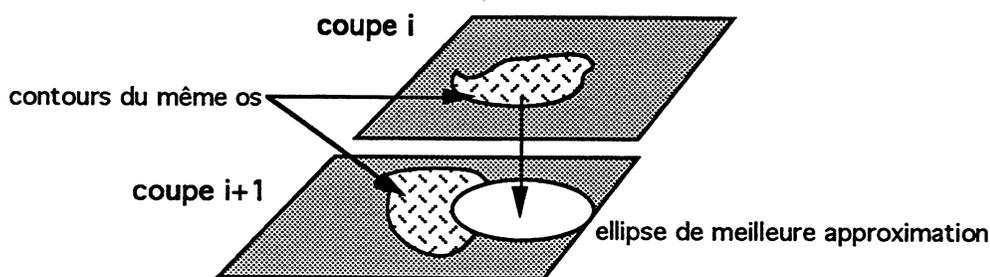


Fig. 7: Indétermination du critère d'adjacence par projection de l'ellipse de meilleure approximation.

Les surfaces élastiques gèrent cette étape par un contrôle interactif de la construction de la surface.

#### 4.4. Conclusion

Le problème de la segmentation reste encore non résolu de manière générale. Un grand nombre de techniques existent pour l'analyse des formes et des contours et c'est leur combinaison qui permet de surmonter les difficultés spécifiques de l'Imagerie du carpe.



## **5. Modélisation 3D et détection de contact.**

### **5.1. Introduction.**

Une fois les données numériques analysées et les contours séparés, plusieurs techniques de modélisation 3D sont possibles. La Conception Assistée par Ordinateur (CAO) s'est particulièrement développée autour de logiciels généraux tels qu'EUCLID de MATRA-DATAVISION ou CATIA de DASSAULT. Ces logiciels se destinent tout particulièrement à la conception de plans et à la représentation 3D de solides.

Ils intègrent ainsi pour la plupart, des modules de modélisation surfacique par interpolation ou lissage de points. On rencontre également des modules de conception volumique qui s'appuient sur des éléments de volumes simples (cylindres, cônes, parallélépipèdes...) [SEQUEIRA, 90], moins bien applicables aux objets convexes du carpe. Ces modules sont développés pour que ce soit l'opérateur qui construit le modèle, et ils sont malheureusement inadaptés à une reconstruction 3D sur la base de données d'imagerie médicale.

Certains modèles 3D surfaciques et volumiques s'adaptent cependant aux données TDM. Une surface 3D correspond numériquement à un tableau de voxels, peu adapté à une simulation cinématique (§5.2). A partir des contours d'un os sur des images TDM, on peut toutefois modéliser sa surface par son recouvrement par des facettes triangulaires jointives (§5.2.1), ou modéliser son équation par une fonction polynomiale par morceaux (§5.2.2).

La simulation du glissement et du roulement des os pendant leur mouvement nécessite cependant un contrôle précis des contacts et des chevauchements. Il est en effet difficile de modéliser numériquement un contact physique entre deux solides par des surfaces parfaitement tangentes. Un chevauchement assez faible peut-être admis, alors qu'un chevauchement trop important conduit à des animations irréalistes.

Le contrôle du pas d'intégration des équations de la Dynamique d'une part, mais surtout un critère efficace de détection de contact d'autre part, permettent d'atteindre des simulations virtuelles admissibles des mouvements des os.

La détection de contact entre des modèles surfaciques s'avère généralement peu précise (§5.2.3). La détection des chevauchements paraît plus aisée dans le cadre d'une modélisation volumique (§5.3). Si un modèle compact du volume peut être atteint par son graphe octree (§5.3.2), son recouvrement par des boules présente l'avantage d'être à la fois d'une grande concision, d'une précision maximale, et d'une plus grande adaptation à une modélisation Dynamique (§5.6).

L'axe médian modélise en effet de façon compacte une carte des distances d'un volume. Le calcul de cette dernière est rappelé, en 2D puis en 3D, aux paragraphes §5.4 et §5.5. On montre ainsi que la modélisation d'un volume par son axe médian, permet d'obtenir un recouvrement volumique dans  $R^3$  par des boules (§5.5.4). Ce type de modélisation inédit, a été préféré à tout autre modèle 3D, à la fois pour la grande facilité de sa détection de contact (§5.6), et pour la facilité de modélisation des forces de contact (§6.4).

## 5.2. Modèles surfaciques et détection de contact.

A partir des contours d'un objet sur une série de coupes, les modèles surfaciques classiques modélisent la surface de l'objet par une approximation de son équation par des fonctions polynomiales par morceaux [BARSKY, 84], [BOHM, 84], ou avec un moindre degré de continuité, par un recouvrement de sa surface par un ensemble de primitives géométriques simples.

Une surface numérique se représente en effet par un nuage de voxels adjacents (*éléments de volumes*). Le voxel peut ne pas être isotrope dans l'espace puisque c'est une boîte de côtés unité, dont les coordonnées entières coïncident avec l'échantillonnage des trois axes de l'espace. La rotation et la translation d'un objet transforme donc les coordonnées entières des voxels en des coordonnées réelles dans  $\mathbb{R}^3$ . La projection des nouvelles coordonnées des voxels de la surface sur l'ensemble des échantillons de l'espace, introduit alors une déformation de la surface par leur approximation entière.

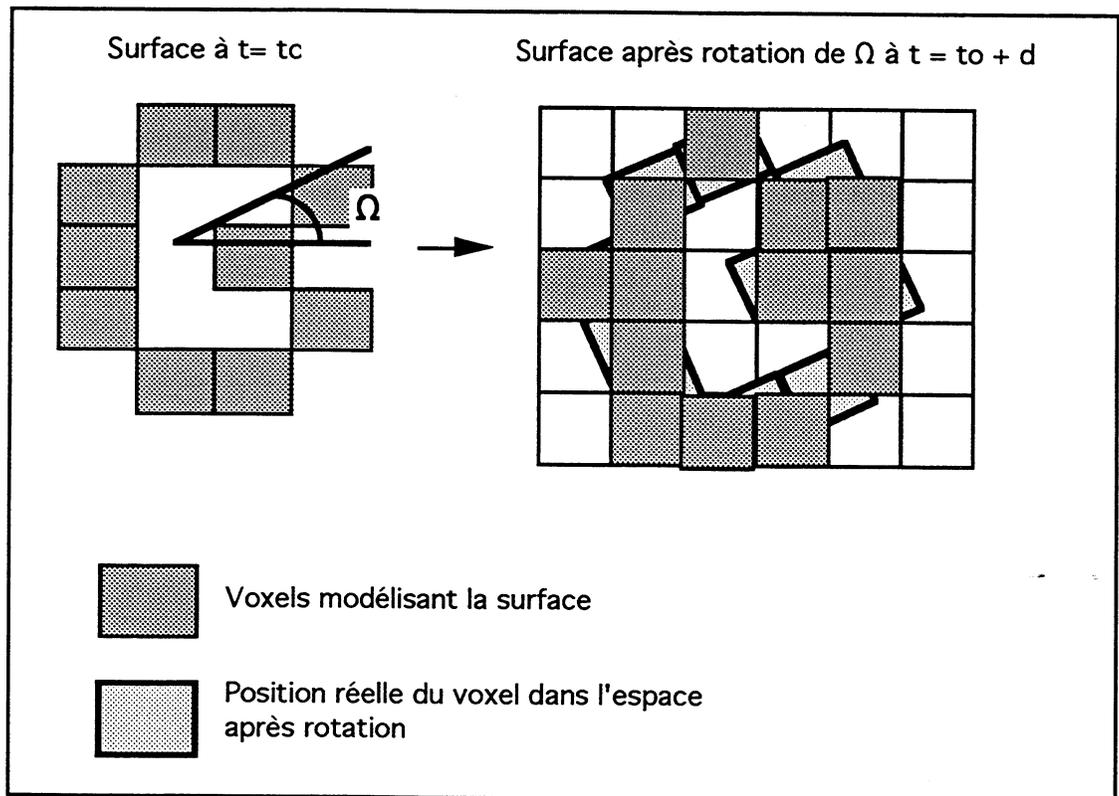


Fig. 1: Déformation d'une surface de voxels par rotation.

Un bon modèle 3D de surface ou de volume, destiné à des simulations cinétiques, doit donc être choisi invariant par rotation ou translation.

### 5.2.1. Modélisation surfacique par facettes triangulaires.

La modélisation par facettes interpole directement la série des contours d'un os en reliant deux contours consécutifs par des facettes triangulaires jointives. Leurs sommets s'appuient sur un échantillonnage des contours (cf. Fig. 2). La modélisation d'une surface par des facettes ne dépend plus de l'échantillonnage de l'espace puisque les positions des sommets peuvent être calculées en coordonnées réelles sur  $\mathbb{R}^3$ .

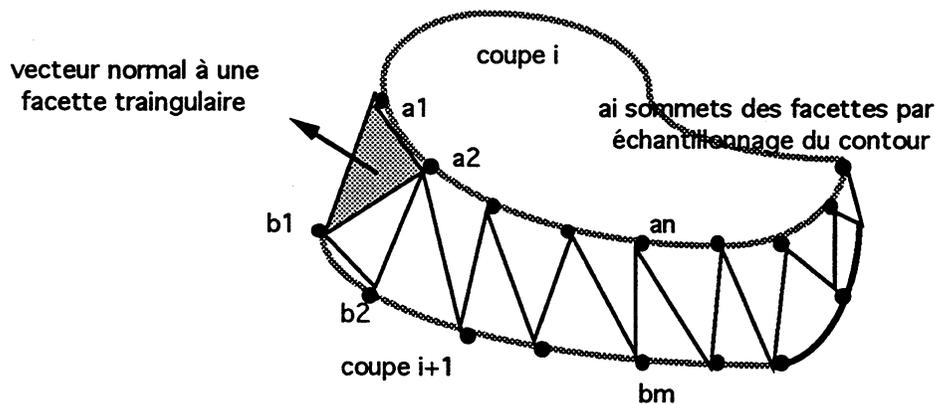


Fig. 2: Facettes triangulaires entre deux contours consécutifs.

Le simple échantillonnage de deux contours consécutifs en deux suites de points  $(a_i)_i$  et  $(b_j)_j$ , forme déjà un ensemble possible de sommets de facettes à relier. La correspondance des échantillonnages des contours consécutifs constitue la principale difficulté de cette modélisation. Afin de ne rien perdre des caractéristiques géométriques des contours (points de rebroussement, cavités ...) l'échantillonnage des contours doit être bien adapté.

Plusieurs algorithmes ont été ainsi mis au point pour calculer le recouvrement optimal par des facettes jointives. Ils calculent soit un volume maximal du polyèdre composé par tous les triangles dans le cas d'un objet concave [KEPPEL,75], ou bien ils minimisent la surface du polyèdre dans le cas d'un objet convexe [FUCHS, 88].

Un graphe des sommets possibles des facettes, permet de proposer une triangulation optimale selon les précédents critères. Des améliorations ont été apportées pour traiter le cas des embranchements [BOISSONNAT, 88]. Des algorithmes spécifiques de visualisation 3D permettent enfin d'obtenir des images lissées des objets ainsi modélisés.

La représentation concise et facilement manipulable des surfaces de facettes jointives représente le principal intérêt de cette modélisation. L'approximation polygonale des objets peut supprimer toutefois des irrégularités et des détails qui peuvent se révéler très importants pour la détection de contact.

Les modèles surfaciques par facettes triangulaires sont très efficaces pour calculer des images avec un très bon effet 3D. On les rencontre ainsi dans la plupart des logiciels de visualisation. Dans le cas d'un modèle d'os de grande précision, il devient nécessaire d'effectuer le calcul de coupes inférées entre deux coupes tomodensitométriques consécutives [ROLLAND, 91]. Cette précision se paye alors par un modèle finalement moins concis (du même ordre qu'une surface de voxels pour une précision globale d'un voxel) et donc plus lourd à manipuler.

### 5.2.2. Modélisation surfacique continue.

Cette technique s'est particulièrement développée à la suite de recherches menées en CAO par les français Bézier et Casteljau, ainsi que par l'américain De Boor [DE BOOR, 62]. Il existe ainsi plusieurs modélisations de l'équation d'une surface par des fonctions polynomiales.

L'équation de la surface sur l'espace  $R^3$  se définit ainsi par un biparamétrage  $(u, v)$  de  $R^2$ , tel que les coordonnées  $(x, y, z)$  de tout point  $M$  de la surface sont des combinaisons linéaires des produits des fonctions B-Splines  $B_i(u)$  et  $B_j(v)$  (cf. annexe § 10.1), et de points  $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$  de  $R^3$ .

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i,j \in I \times J} P_{i,j} \begin{bmatrix} x_{i,j} \\ y_{i,j} \\ z_{i,j} \end{bmatrix} \cdot B_i(u) \cdot B_j(v) \quad E_1$$

Les coefficients  $P_{ij}$  (appelés aussi points de contrôle de la surface) forment alors un modèle 3D qui suffit à définir la surface en tout autre point. Une simple interpolation des données ne suffit pas en général à retrouver les points de contrôle.

Une solution consiste à déformer un modèle de surface donné par un nuage de points de contrôle jusqu'à ce qu'il adopte l'épure des données (d'où le terme de surface élastique). Les déformations sont contrôlées par des critères énergétiques qui corrigent par exemple la courbure de la surface tout en l'attirant vers les données [TERZOPOULOS, 88].

### 5.2.3. Détection de contact entre modèles surfaciques.

#### 5.2.3.1. Détection entre surfaces discrètes.

Dans le cas d'une modélisation statique par facettes triangulaires, le problème consiste à détecter l'intersection de triangles dans l'espace. Le simple examen des facettes deux à deux se calcule en  $N \times M$  tests si les deux objets en contact comportent respectivement  $N$  et  $M$  facettes. On aboutit ainsi pour des modèles formés de plusieurs milliers de facettes, à plusieurs millions de calculs d'intersection entre deux triangles.

Plusieurs heuristiques permettent de réduire la complexité du problème: test de voisinage entre sommets de facettes, test entre les boîtes englobantes des facettes... La complexité de la détection de contact peut être encore réduite par un test préalable des volumes englobants de chaque objet, et par des heuristiques propres au système étudié [GEIGER, 93].

Il faut de plus estimer la profondeur  $h$  du contact entre les deux surfaces. La mesure du chevauchement entre deux objets modélisés par leur surface plutôt que par leur volume représente en effet la difficulté majeure de la détection de contact avec ce type de modélisation : une même section  $AB$  peut représenter plusieurs types de contact.

Des algorithmes de reconstruction 3D de modèles surfaciques par des facettes triangulaires s'appuient cependant sur la construction d'un diagramme de Voronoï 3D de l'ensemble des sommets des facettes [BOISSONNAT, 88]. Comme le diagramme de Voronoï trouve de façon optimale dans  $R^3$  les voisins de tout point dans l'espace, il est ainsi plus aisé d'en déduire les sommets de facettes voisines à une facette donnée, et de mesurer la profondeur des contacts.

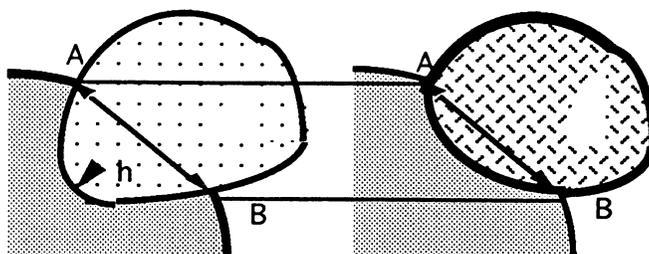


Fig. 3: Problème de la mesure de la profondeur de l'intersection de deux surfaces.

Ce diagramme doit être toutefois recalculé à chaque déplacement d'un des objets. Son coût de calcul relativement élevé (voisin d'un  $O(N^2)$  pour un système de  $N$  facettes [GEIGER, 93]) ainsi que la nécessité de définir un recouvrement des plus précis (cf. §5.2.1), peuvent alors pénaliser une simulation précise de la Dynamique du carpe.

#### 5.2.3.2. Détection de contact entre approximations polynomiales.

L'intersection de deux surfaces modélisées par leur approximation polynomiale  $M_1(x_1, y_1, z_1) = \sigma_1(u, v)$  et  $M_2(x_2, y_2, z_2) = \sigma_2(p, q)$ , revient à résoudre un système d'équations polynomiales dont il n'existe pas encore de solution analytique générale (c'est l'un des treize problèmes d'Hilbert).

Des algorithmes numériques permettent cependant d'approcher des solutions [PHILIPS, 84], [MARQUE, 91], [GARCIA, 78]. La convergence de ces algorithmes dépend malheureusement d'un point initial choisi sur la surface à proximité de l'intersection, et l'on ne peut ainsi garantir la détection de toutes les intersections dans le cas de contacts multiples.

Le maillage des points de contrôle peut être utilisé par des méthodes de triangulation, pour détecter l'existence de contacts entre des surfaces [AZIŽ, 90], [HARALICK, 90]. La localisation précise des points de contact nécessite toutefois un sur-échantillonnage du maillage conduit alors à un principe de détection de contact entre deux surfaces échantillonnées. L'échantillonnage des surfaces par des primitives géométriques simples peut en effet simplifier la détection de contacts, si l'intersection entre les primitives se calcule aisément.

La détermination d'un critère simple et uniforme pour évaluer la profondeur de contact constitue cependant le problème majeur de ces méthodes.

#### 5.2.4. Conclusion.

Les surfaces modélisées par des facettes triangulaires comme par des fonctions polynomiales par morceaux, donnent des représentations visuelles remarquablement réalistes et restent donc très prisées en imagerie comme en CAO. La difficulté d'utilisation des modèles surfaciques continus, et la difficulté de calculer l'intersection entre deux surfaces pénalise une application de ces modèles pour une modélisation orientée vers la Dynamique.

#### 5.3. Modélisation volumique et calcul d'intersection.

Si les modèles surfaciques sont bien adaptés à la visualisation d'objets dans l'espace, les modèles volumiques apparaissent mieux adaptés en général au problème de la détection de chevauchement entre les objets. Comme pour le cas surfacique, on regroupe également ces modèles par leur degré de continuité.

##### 5.3.1. Modélisation volumique continue.

L'interpolation et le lissage volumique d'images de coupe scanner ou de données IRM permettent de définir analytiquement la fonction densité en tout point d'un volume de données [CINQUIN, 87]. On peut donc non seulement visualiser l'intérieur d'un objet mais aussi simuler des coupes transversales dans un plan quelconque.

En appliquant ce principe à la série des contours pleins d'un os, on définit alors analytiquement l'intensité  $F(x,y,z)$  en tout point du volume d'un objet.

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^4 \alpha_{E(\mathbf{x})+i, E(\mathbf{x})+j, E(\mathbf{x})+k} \cdot B_i(\mathbf{x}) \cdot B_j(\mathbf{y}) \cdot B_k(\mathbf{z}) \quad E_2$$

Comme pour la modélisation surfacique, le développement numérique de cette interpolation s'appuie sur la base des fonctions polynomiales B-Splines de degré 3. L'algorithme interpole les données selon un axe défini par les coupes adjacentes (axe oz) et lisse les données des images (plan oxy).

La fonction indicatrice du volume d'un os (définie par une valeur nulle à l'extérieur du volume, mais unitaire à l'intérieur), s'obtient alors par seuillage de l'intensité en tout point de l'espace.

Le coût informatique de ce modèle volumique reste malheureusement très important en place mémoire puisqu'il faut stocker pratiquement autant de coefficients que de données numériques ( $256^2 \times N$  coefficients réels pour  $N$  coupes de taille  $512^2$  et pour un facteur de lissage d'un point sur deux). Cette modélisation s'avère également très coûteuse en temps de calcul puisque l'évaluation de la fonction en un point nécessite 64 produits des fonctions B-Spline et des coefficients.

Ce modèle offre cependant l'intérêt de corriger aisément, grâce à son expression analytique, la différence d'échelle entre le plan de coupe tomodensitométrique Oxy (un pixel représente environ  $1/4$  de millimètre) et l'axe Oz des coupes (espacées d'un millimètre environ). On peut en effet inférer avec une très bonne précision, autant de coupes intermédiaires que l'on souhaite (il suffit de trois nouvelles coupes entre deux coupes scanner consécutives pour corriger la différence d'échelle).

Comme pour la modélisation surfacique, le calcul de l'intersection entre deux fonctions indicatrices volumiques modélisées par des fonctions polynomiales par morceaux, conduit à une détection des contacts peu précise. Le problème est en effet identique au cas de modèles de surfaces, ce sont donc les mêmes algorithmes qui approchent des solutions au système d'équations, sans garantir ici aussi, l'exhaustivité de la détection des intersections. Le recouvrement d'un objet par une primitive volumique simple, a l'avantage de permettre une localisation plus immédiate et plus efficace des contacts, ainsi qu'une mesure des chevauchements.

### **5.3.2. Modélisation par échantillonnage du volume.**

Un volume numérique peut facilement se modéliser par un recouvrement concis de primitives volumiques simples. Si le cube de taille élémentaire, le voxel, représente un pas d'échantillonnage constant, un échantillonnage à pas variable réduit significativement la taille du modèle volumique. C'est ainsi que les modèles volumiques, sont issus pour la plupart d'entre eux des techniques de compactage d'images numériques.

L'application tridimensionnelle des techniques de modélisation d'images par un maillage récursif, donne le modèle octree d'un volume. Le quadtree représente en

effet le graphe de la décomposition récursive d'une image numérique en quatre carrés. Dans l'espace des échantillons  $Z^3$ , la décomposition récursive du volume numérique en huit cubes, permet d'obtenir un maillage volumique par des cubes de taille variable. L'octree représente alors le graphe de cette décomposition.

A partir d'un modèle du volume basé sur la décomposition récursive en cubes de taille variable, les mouvements de rotation possibles des os conduiraient à un problème de détection d'intersection entre des cubes de côtés non parallèles dans l'espace  $R^3$ . Il est difficile de définir dans ce cas, un critère de contact simple. On peut toutefois ramener ce problème, à une détection de contact entre boules, en considérant les sphères circonscrites aux cubes.

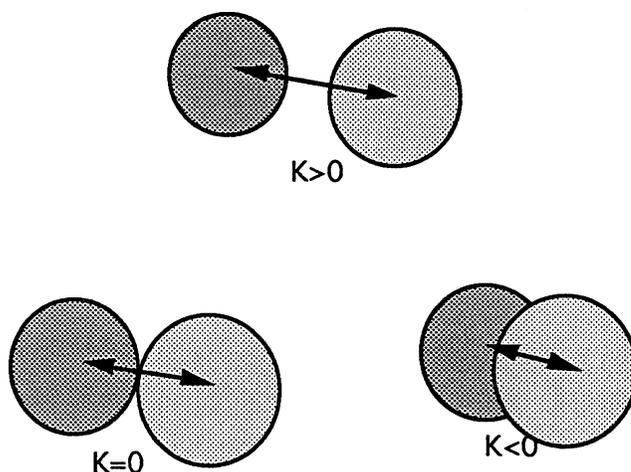


Fig. 4: Critère d'intersection de deux boules.

Soient deux boules en contact de centres  $C_i, C_j$  et de rayons  $r_i$  et  $r_j$ . La détection de contact entre deux sphères s'appuie sur un critère simple  $K$ , fondé sur la comparaison de la distance entre les sphères et de la somme des rayons.

$$K = \left\| \overrightarrow{C_i C_j} \right\| - r_i - r_j \quad E_3$$

La forme principalement convexe des os du carpe, l'invariance de la sphère par rotation, la facilité de la détection de contact et de la mesure du chevauchement entre deux sphères militent pour une modélisation 3D, par un recouvrement par des boules. Si le modèle octree constitue déjà une ébauche de ce recouvrement, le calcul de la carte de distance constitue une autre technique de modélisation grâce à l'extraction de son axe médian.

#### 5.4. Calcul d'une carte de distance 2D.

On trouve dans [ROURKE, 79] et [MOHR, 83] les prémices d'une modélisation 3D par le calcul du recouvrement volumique d'un objet par des sphères disjointes. La notion d'axe médian désigne en géométrie discrète, une technique de compactage réversible de données numériques [CHASSERY, 91] qu'on peut assimiler à un recouvrement volumique concis par des boules distinctes et tangentes à la surface.

On rappelle ainsi dans les paragraphes suivants §5.4.1 et §5.4.2 les notions 2D de carte de distance et la problématique de son calcul. Grâce aux techniques du type de la transformée de distance discrète, on définit aisément la carte de distances d'un objet. Son axe médian permet alors d'atteindre la modélisation 3D recherchée. Les notions de carte de distance et de distance discrète 2D, se généralisent en effet aisément en 3D. On présentera ainsi brièvement la distance discrète du chanfrein qui permet de calculer numériquement les distances avec une précision voisine de la distance Euclidienne (§5.5.1).

##### 5.4.1. Définition d'une carte de distance. Problématique de son calcul.

Soit une image numérique  $I$  segmentée, dont on suppose avoir extrait un contour d'objet. On définira la même intensité non nulle pour tous les pixels du contour, tandis que l'intensité des pixels en dehors du contour sera nulle. On appellera ainsi *pixel fond*, un pixel de l'image en dehors du contour tandis que les pixels du contour seront appelées *pixels objet*.

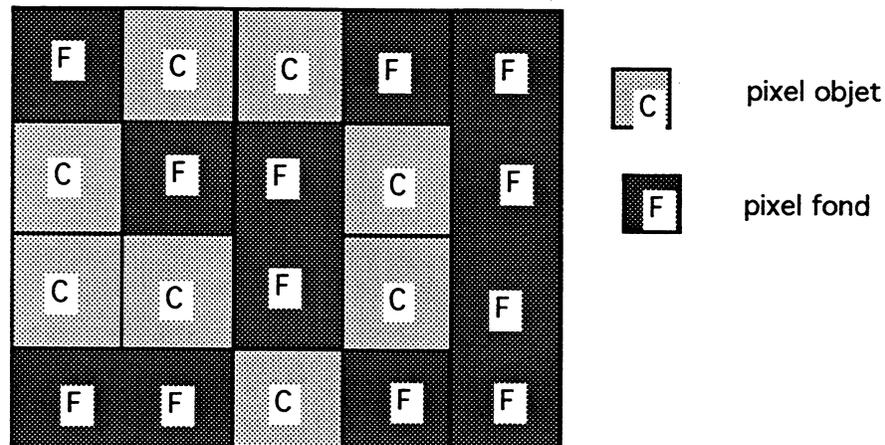


Fig. 5: Fond et contour d'une image numérique.

On définit la *carte des distances à un contour de l'image I*, comme le résultat de la transformation des intensités des pixels de l'image, en leur plus petite distance au contour.

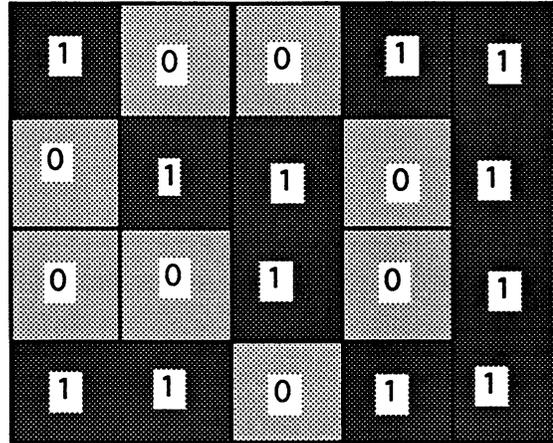


Fig. 6: Carte de distance au contour de l'image numérique de la fig.9.

Lorsque l'intérieur du contour est rempli, on définit également la *carte des distances au fond de l'image*, comme le résultat de la transformation des intensités des pixels objet en leur plus petite distance au fond de l'image.

On sait classiquement que la distance Euclidienne  $d_E$  définie par l'égalité  $E_4$ , entre deux pixels M et N de coordonnées respectives (i, j) et (u, v), forme une métrique de  $Z^2$ .

$$d_E(M, N) = \sqrt{(i - u)^2 + (j - v)^2} \quad E_4$$

On définit ainsi la distance euclidienne  $d_E$  d'un pixel M(i, j) à un contour C par l'équation  $E_5$ :

$$d_E(M(i, j), C) = \min_{P(u, v) \in C} \sqrt{(i - u)^2 + (j - v)^2} \quad E_5$$

Un calcul simple de la carte de distance parcourrait exhaustivement le contour pour chaque pixel de l'image. On assure certes ainsi, un risque minimal d'erreur de calcul mais cette méthode conduit à un coût informatique prohibitif dans la plupart des cas.

L'évaluation de la carte de distance d'une image scanner de  $512^2$  pixels décrivant un contour de  $10^4$  pixels, reviendrait à plus de  $2 \cdot 10^9$  calculs de distance!

Si l'on étend les notions précédentes à l'espace tridimensionnel  $Z^3$ , la distance  $d_E(v, S)$  d'un voxel  $v$  de coordonnées  $(i, j, k)$  à une surface  $S$ , se définit comme la distance minimale entre le voxel  $v$  et tous les voxels situés sur la surface  $S$ . Le calcul de la carte de distance de tous les points d'un cube de taille  $512^3$  contenant une surface définie par  $10^5$  points, coûterait alors  $1,3 \cdot 10^{13}$  calculs de distance!

Il existe heureusement des alternatives particulièrement efficaces à l'approche exhaustive [ROSENFELD, 66]. Elles sont fondées sur des algorithmes de transformation de l'image par des filtres numériques définissant une distance discrète. Parmi ces distances discrètes, les distances du chanfrein approchent la distance Euclidienne avec une très faible erreur relative [BORGEFORS, 86]. Il existe d'autres transformations s'appuyant sur un calcul de distance réelle mais d'algorithmique voisine [DANIELSON, 80]. Des algorithmes aussi rapides que la transformée de distance du chanfrein, à valeurs réelles ont été ainsi développés depuis [LEYMARIE, 91].

#### 5.4.2. Distance discrète 2D. Algorithme de la transformée de distance.

On définit un *chemin* d'un pixel  $M$ , au contour  $C$  d'un objet sur une image numérique, comme toute suite de pixels adjacents d'origine  $M$  et d'extrémité un point du contour  $C$ ; la longueur d'un chemin représente alors la somme des coûts de déplacement notés  $D(Q_i, Q_{i+1})$ , entre les pixels adjacents  $(Q_i)_{i=1..n}$  du chemin; notons  $l(Q_i)$  la longueur totale de ce chemin.

$$l(Q_i) = \left| \sum_{j=i}^{n-1} D(Q_j, Q_{j+1}) \right| \quad E_6$$

Soit un pixel  $M$  choisi de l'image numérique; on définit une distance discrète  $D$  par un masque  $M_D$  centré en  $M$ , de poids notés  $D(M, P)$ , et modélisant les coûts des déplacements entre le pixel  $M$  considéré et ses voisins  $P$  repérés par le masque  $M_D$  [ROSENFELD, 66]. Le masque définit une distance quand ses poids sont choisis positifs, symétriques autour de  $M$ , et vérifient l'inégalité triangulaire.

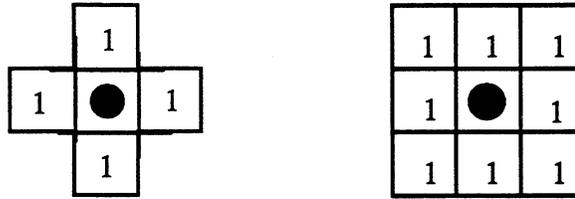


Fig. 7: Exemples de masques 3x3 pour des distances 2D notées  $D_4$  (distance de Manhattan) et  $D_8$  (distance de l'Echiquier).

La distance discrète d'un pixel  $M$  au contour  $C$  se définit alors par la longueur minimale des chemins du pixel  $M$  à tout pixel du contour  $C$ . On notera  $D(M, C)$  cette longueur. La *transformée de distance*, représente la transformation de l'image de pixels  $I$  en une image  $J$  des longueurs des chemins des pixels  $M$  au contour  $C$ .

$$J = \{m_{i,j} \mid M(i, j) \in I, m_{i,j} = D(M, C)\} \quad E_7$$

Soit  $V(M)$  l'ensemble des "voisins" repérés sur le masque  $M_D$ . Soit  $PASSE(M)$  (respectivement  $FUTUR(M)$ ) l'ensemble des pixels situés "avant" (respectivement "après")  $M$  dans un parcours de haut en bas et de gauche à droite de l'image numérique:

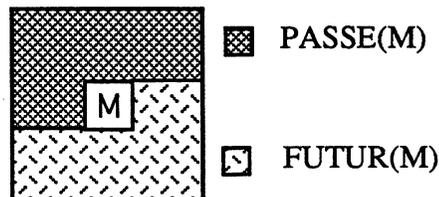


Fig. 8: Ensembles des voisins passés et futurs d'un pixel  $M$  sur l'image numérique  $I$ .

- soit enfin  $VPASSE$  et  $VFUTUR$  les restrictions de ces ensembles au voisinage défini par le masque  $M_D$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} VPASSE(M) = V(M) \cap PASSE(M) \\ VFUTUR(M) = V(M) \cap FUTUR(M) \end{array} \right\} \quad E_8$$

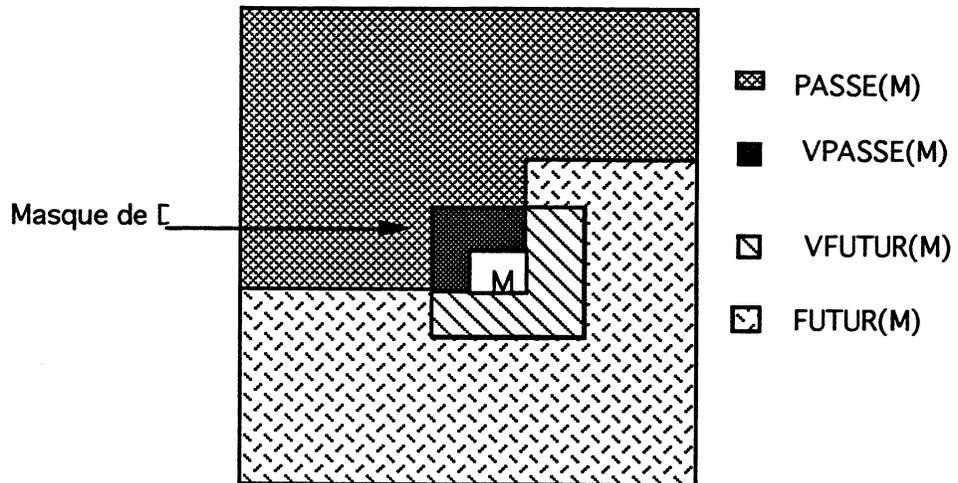


Fig. 9: Voisins adjacents passés et futurs d'un pixel M sur l'image numérique totale I.

L'algorithme de la transformée de distance comprend trois étapes :

- 1/ initialisation de la carte de distance J:  $m_{i,j} = 0$  si  $M \in C$ ,  $+\infty$  sinon
- 2/ balayage de l'image I de haut en bas et de gauche à droite :

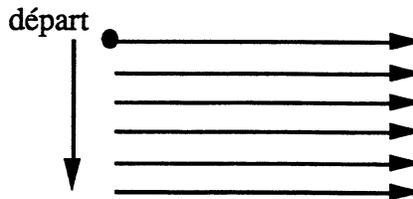


Fig. 10: Premier balayage avant de l'image.

suit d'une mise à jour de la distance aux pixels  $M(i, j)$  balayés:

$$\text{MIN}_{I,J} = \text{MIN}_{I,J} \left[ m_{i,j}, \left[ \text{MIN}_{N(u,v) \in \text{VPASSE}[M]} \left[ m_{u,v} + D(M, N) \right] \right] \right] \quad \text{E}_9$$

- 3/ balayage de l'image de bas en haut et de droite à gauche :

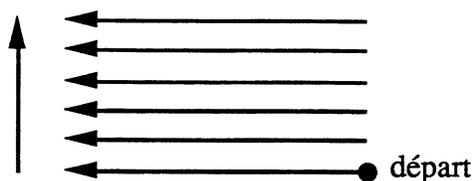


Fig. 11: Dernier balayage arrière de l'image.

suiwi également d'une mise à jour des distances :

$$\text{MIN}_{I,J} = \text{MIN}_{I,J} \left[ m_{i,j}, \left[ \text{MIN}_{N(u,v) \in \text{VFUTUR}[M]} \left[ m_{u,v} + D(M,N) \right] \right] \right] \quad E_{10}$$

Les distances discrètes sont donc définies par leur masque et leur calcul s'effectue par le balayage aller et retour de l'image numérique par des filtres (appelés avant et arrière) issues de la restriction du masque aux voisins "avants" et "arrières" du pixel central.

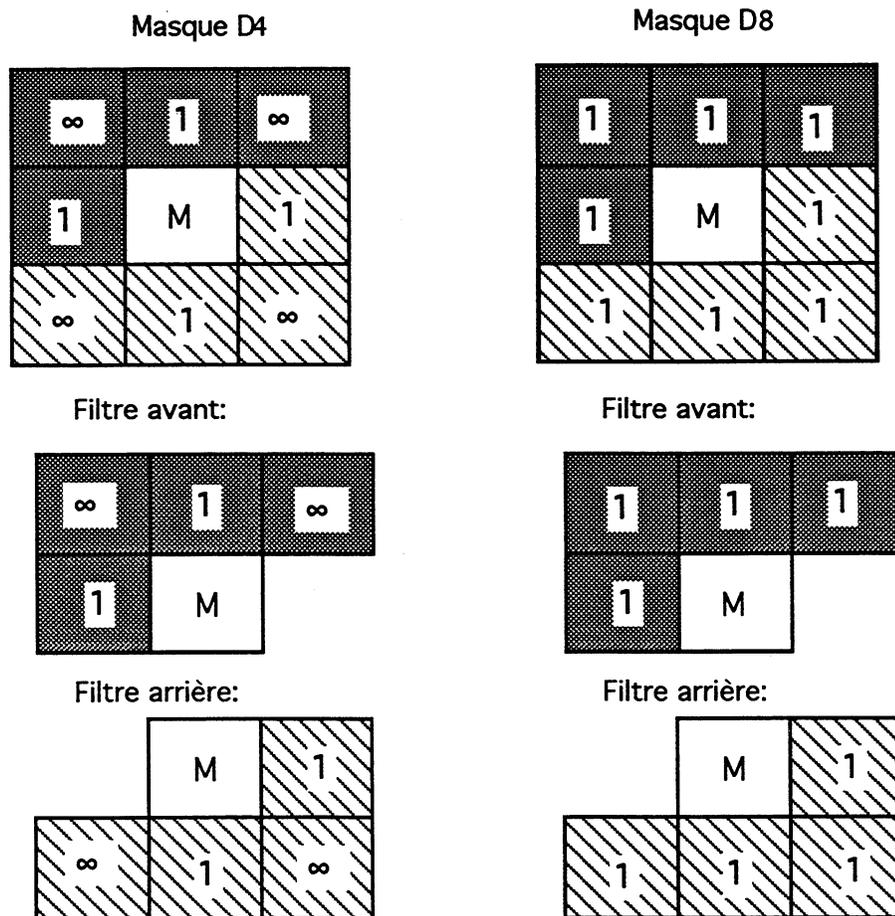


Fig. 12: Filtres futur et passé associés aux distances D4 et D8.

Les poids de certaines distances, comme la distance du chanfrein 3-4 en 2D, approchent avec précision la distance Euclidienne. A partir d'un calcul entier, les poids de la distance du chanfrein estiment la distance diagonale  $\sqrt{2}$  par le rapport  $\frac{4}{3}$ , et la distance latérale d'un pixel par l'unité.

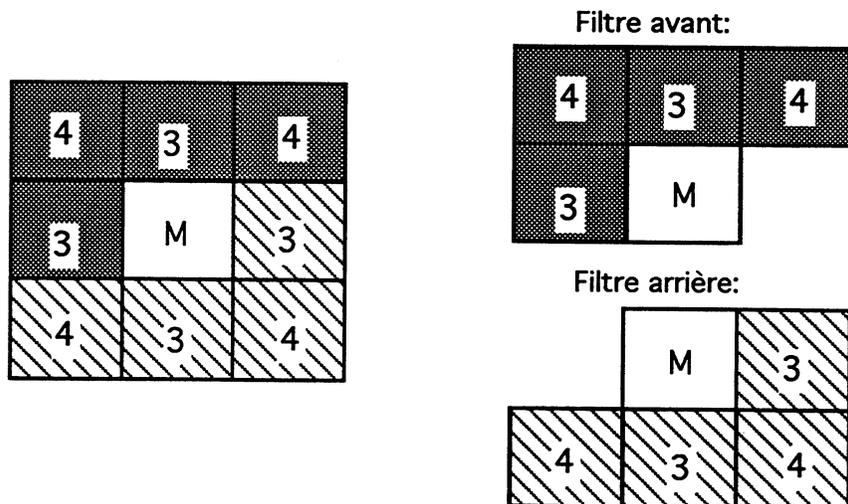


Fig. 13: Masque 3x3 et filtres de la distance 2D du chanfrein 3-4.

Comme le déplacement latéral n'est pas de poids unitaire (3 pour le chanfrein 3-4), les distances  $m_{i,j}$  de la carte doivent être normalisées par son rapport. D'autres distances du chanfrein s'appuient sur des masques plus larges: 5x5, 7x7 .... Les distances du chanfrein constituent alors avec de tels masques, des approximations de la distance Euclidienne presque parfaites [THIEL, 92].

#### 5.4.3. Conclusion.

La transformée de distance ramène le calcul de la carte de distance à deux simples balayages de l'image par des filtres numériques. Le calcul sur des valeurs entières simplifie et accélère l'exécution de la transformée de distance avec seulement 2% d'erreur relative entre les résultats de la distance du chanfrein 3-4 et de la distance Euclidienne.

## 5.5. Carte de distance 3D. Axe Médian.

Par analogie au cas 2D, les distances discrètes sur  $Z^3$  se définissent par des masques 3D centrés autour d'un voxel courant M.

### 5.5.1. Transformation de distance 3D.

Les poids de ces masques s'interprètent également comme les coûts d'un déplacement entre un voxel M et ses voisins  $Q(x_q, y_q, z_q)$  repérés sur le masque de la distance.

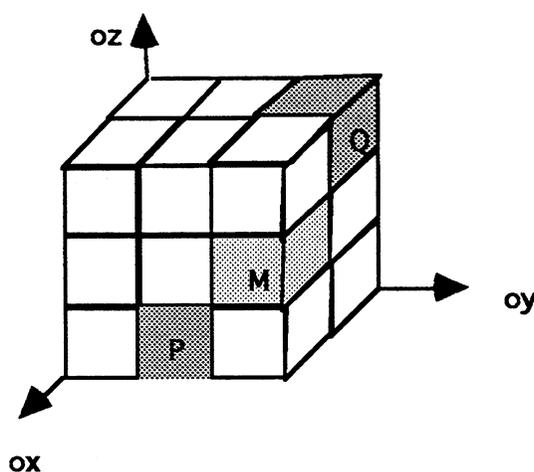


Fig. 14: Deux types de voisinage diagonal au voxel M en 3D.

A condition de pouvoir expliciter le chemin minimal entre deux voxels, les poids du masque d'une distance discrète pourraient être calculés afin de minimiser l'erreur relative entre la distance discrète et la distance Euclidienne [BORGEFORS,84], [THIEL, 92]. On préfère définir plus simplement ces poids comme des approximations entières (à un rapport près) des distances Euclidiennes: le chanfrein de coefficients 3-4-5 approche ainsi les distances diagonales  $\sqrt{2}$  par un poids 4 (soit une distance  $MP = \frac{4}{3}$ ) et  $\sqrt{3}$  par un poids 5 (distance  $MQ = \frac{5}{3}$ ). La distance latérale est modélisée par un poids 3.

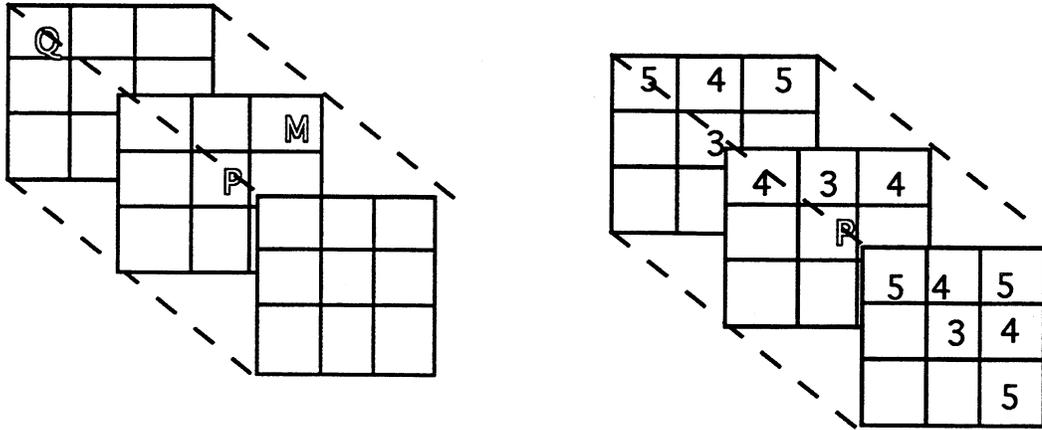


Fig. 15: Masque 3x3x3 et filtres associés de la distance 3D du chanfrein 3-4-5 dans l'espace 3D.

Soit un cube de données numériques dont on a extrait une surface de voxels adjacents, convenablement initialisés (§5.3.1.). Le calcul 3D des distances s'effectue comme en 2D, par le balayage aller et retour du volume, avec une adaptation des définitions de PASSE(M) et FUTUR(M)

- parcours de haut en bas, d'arrière en avant et de gauche à droite de l'image:

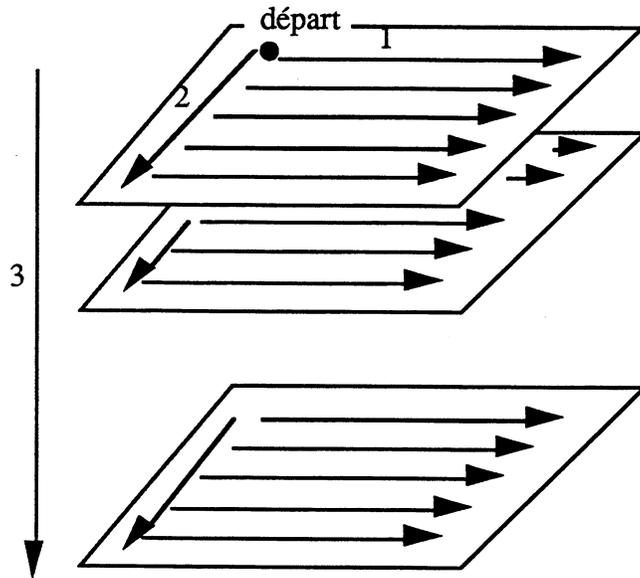


Fig. 16: Premier balayage avant du volume numérique.

- de bas en haut, d'avant en arrière et de droite à gauche:

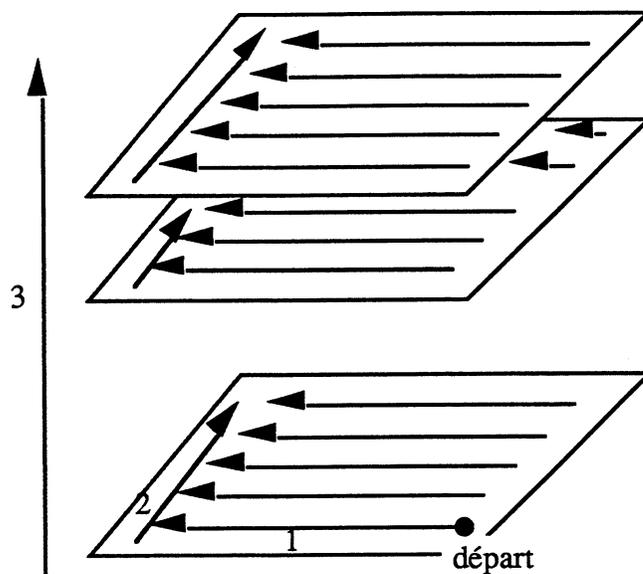


Fig. 17: Dernier balayage.

Chaque élément du cube de données se voit ainsi affecté une valeur approchant sa distance minimale à la surface.

### 5.5.2. Interprétation de la carte de distance 3D.

Si le calcul de la carte de distance s'appuie sur la surface frontière des voxels du fond du volume, alors chaque voxel de la carte de distance représente le centre d'une boule incluse à l'intérieur du volume d'un objet, tangente à sa surface, et dont le rayon est donné par la transformée de distance.

La transformée de distance 3D calcule donc un recouvrement du volume numérique par des boules de centres distincts; ce recouvrement n'est pas minimal, car certaines boules peuvent encore être incluses dans un sous-ensemble de boules voisines. Une sélection des boules permet de calculer un modèle 3D concis.

### 5.5.3. L'axe médian.

Soit  $V$  un volume numérique comprenant un ensemble  $O$  de voxels d'un même objet. Tous les voxels objet peuvent être étiquetés par la transformée de distance, de leur distance au fond  $F$  du volume ( $F$  n'est autre que le complémentaire de  $O$ ). L'objet formé par  $O$  peut alors se définir comme l'ensemble des boules discrètes  $B(P, r)$  de centres les voxels  $P$  de  $O$  et de rayon  $r$ ,  $r$  représentant la distance qui leur est associée par la carte de distance:

$$O = \bigcup_{P(i,j,k) \in O} B(P,r) \quad E_{11}$$

L'axe médian d'un objet  $O$ , dénoté  $AM(O)$ , forme l'ensemble des centres  $P$  tels que pour tout autre centre  $Q$  de  $O$ , la boule associée à  $P$  n'est pas incluse dans celle de  $Q$  [PFALTZ, 67], [ROSENFELD, 82]. L'union des boules de l'axe médian  $AM(O)$  représente alors une modélisation 3D possible de l'objet  $O$ .

$$AM(O) = \{P \in O, \forall Q \in O, Q \neq P, B(P, r_P) \not\subset B(Q, r_Q)\} \quad E_{12}$$

$$O = \bigcup_{P \in AM(O)} B(P, r_P) \quad E_{13}$$

Les centres de l'axe médian  $AM(O)$  représentent ainsi les points  $M$  de la carte de distance qui ne sont présents sur aucun autre chemin minimal de tout autre point  $P$  de la carte de l'objet vers sa frontière.

L'axe médian est en général déconnecté mais c'est un modèle réversible du volume car il le définit complètement [CHASSERY, 91].

Le choix d'une primitive de recouvrement invariante par rotation, revient à choisir une distance discrète aussi proche que possible de la distance Euclidienne. Le maillage volumique formé par l'axe médian devient alors un modèle 3D invariant par rotation, directement utilisable pour des simulations cinématiques. Parmi les distances discrètes, seules celles du chanfrein permettent d'obtenir de bons modèles 3D.

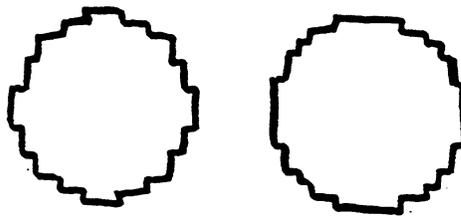


Fig. 18: Comparaison des boules entre la distance Euclidienne et du chanfrein.

#### 5.5.4. Extraction de l'axe médian de la carte des distances.

L'axe médian s'extrait de la carte des distances en ne sélectionnant que les points du volume dont les distances à la surface sont localement maximales [ROSENFELD, 82]. Différentes heuristiques associées au choix de la distance, permettent un examen rapide des distances et une extraction rapide de l'axe médian [ROLLAND, 91].

On montre ainsi que la définition  $E_{12}$  peut être réduite à la seule comparaison des boules voisines, repérées sur le masque des voisins adjacents de la distance discrète [PFALTZ, 67].

Soit  $M$  un point de la carte de distance de valeur  $D(M)$ . Soit  $P$  un point voisin, de distance  $D(P)$ .  $M$  appartient à l'axe médian de la carte si et seulement si pour tout  $P$  appartenant au masque des voisins de  $M$ ,  $D(P) - D(M) < D(M, P)$  où  $D(M, P)$  est le poids associé à  $P$  sur le masque.

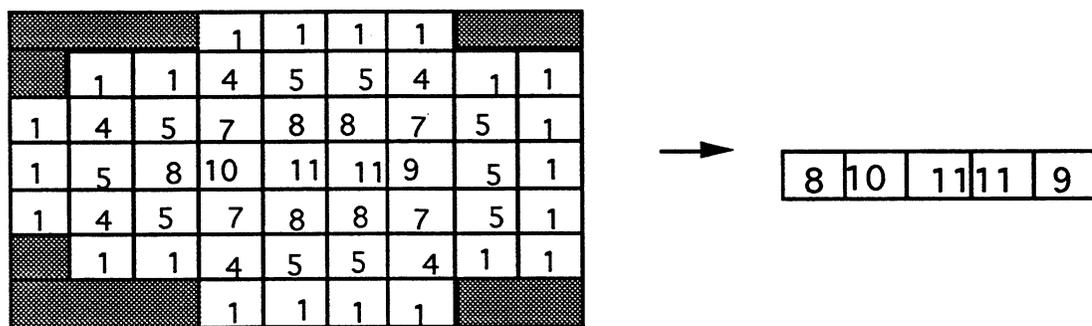


Fig. 19: Carte de distance (chanfrein 3-4) et axe médian 2D associé.

Les centres des boules de l'axe médian, ne forment pas le recouvrement minimal d'un volume par des boules. Une boule dont le centre appartient à l'axe médian, est certes localement maximale mais elle peut être encore incluse dans le volume formé par un sous ensemble de boules dont les centres appartiennent aussi à l'axe médian.

Le calcul du recouvrement minimal, comme l'extraction de l'axe médian pour des distances du chanfrein de masque plus grand que  $3 \times 3 \times 3$ , reste encore du domaine de recherche. Pour des techniques de calcul de la carte de distance à valeur réelle, la méthodologie de l'extraction de l'axe médian reste voisine mais la comparaison s'effectue sur des distances réelles.

512x512x512	Volume	Surface	AM	C(S,V)	c(AM,V)	c(S,AM)
Scaphoïde	78	47	30	39%	62%	37%
Semi-lunaire	58	47	30	18%	48%	37%
Pyramidal	51	29	21	42%	59%	29%
Pisciforme	16	10	7	35%	56%	32%
Os-crochu	82	45	34	44%	58%	25%
Grand-os	110	55	42	49%	62%	25%
Trapézoïdal	41	26	16	34%	60%	39%
Trapèze	57	33	23	41%	60%	32%

Fig. 20: Tableau des compressions de données des axes médians AM par rapport au volume V et à la surface S (exprimée en milliers de voxels) des os du carpe modélisés dans un cube  $512^3$ .

256x256x256	Volume	Surface	AM	C(S,V)	c(AM,V)	c(S,AM)
Scaphoïde	5	4	4	15%	44%	18%
Semi-lunaire	4	3	3	28%	50%	7%
Pyramidal	4	3	2	22%	54%	17%
Pisciforme	1	1	0.8	15%	63%	27%
Os-crochu	6	5	5	15%	33%	12%
Grand-os	9	6	5	33%	82%	18%
Trapézoïdal	4	3	3	29%	50%	5%
Trapèze	3	2	2	17%	50%	20%

Fig. 21: Tableau des compressions de données des axes médians AM par rapport au volume V et à la surface S (exprimée en milliers de voxels) des os du carpe modélisés dans un cube de taille  $256^3$ .

L'utilisation d'une distance discrète permet d'effectuer une modélisation 3D approchée, avec une précision équivalente à la précision de la distance discrète choisie: soit de l'ordre du voxel (0,25 mm pour une modélisation dans un cube de taille  $512^3$ ). Cette précision de la modélisation 3D reste tout à fait comparable avec celles des précédentes étapes de segmentation et de calcul de volume.

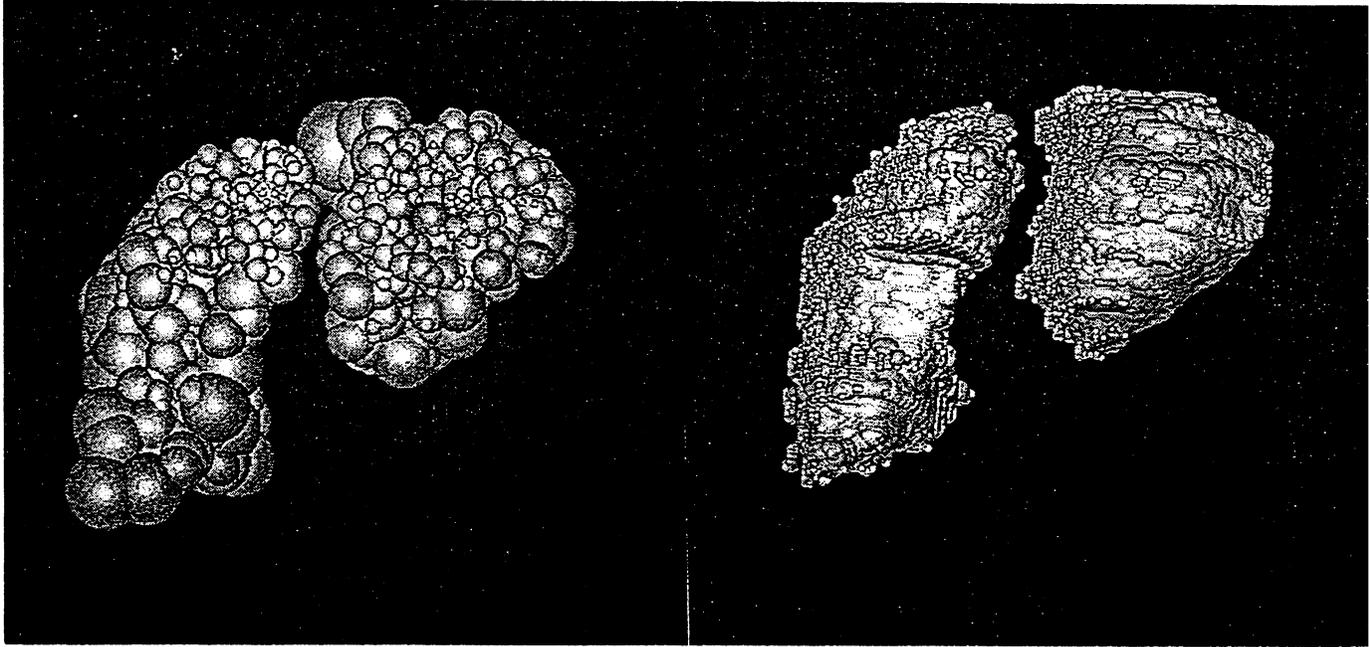


Fig. 22: Images du scaphoïde et du semi-lunaire sous AVS (cf. §7.2).

A: représentation de 70% des centres,

B: 100%.

## 5.6. Détection de contact entre solides modélisés par leur axe médian.

La détection de contact, entre des solides modélisés par leur axe médian et la mesure de leur chevauchement, se résume à une unique comparaison des distances des centres des boules avec la somme de leurs rayons (§5.3).

### 5.6.1. Algorithme général.

Soit  $os_j$  l'indice d'un os, soit NOS leur nombre total. Les os du carpe sont repérés par l'inégalité  $0 \leq os_j < N_{META1}$ , les métacarpiens par  $N_{META1} \leq os_j < N_{RADIUS}$  et ceux de l'avant-bras par  $N_{RADIUS} \leq os_j < NOS$ .

L'algorithme général de détection de contact parcourt dans une première boucle les seuls os du carpe. Pour chacun d'eux, d'indice " $os_i$ ", seuls les os du poignet d'indice " $os_j$ " compris entre  $os_i-1$  et NOS, seront parcourus. Ce procédé permet en effet de réduire le nombre de tests entre os puisque la détection de contact ne sera jamais effectuée deux fois entre les mêmes os.

Une fois les os potentiellement en contact triés, la détection s'effectue en trois étapes:

- la première effectue une partition de l'axe médian de l'os d'indice  $os_i$  en testant les boules des axes médians avec le volume englobant  $V_j$  de l'os d'indice  $os_j$ . Soit  $B_i$  cette partition et  $n_i$  son cardinal.

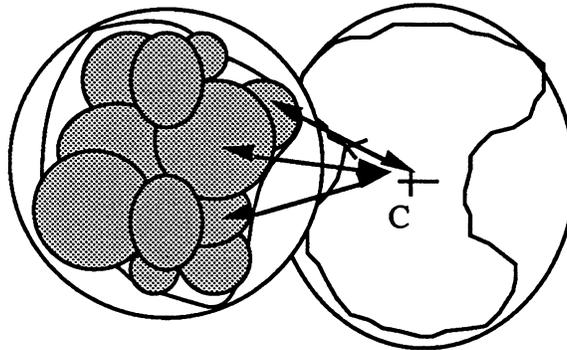


Fig. 23: Sélection des boules par détection avec le volume englobant du voisin.

- la seconde effectue la même partition mais avec les boules de l'os  $os_j$  et vis à vis de la boule englobante  $V_i$  de l'os  $os_i$ . Soit  $B_j$  cette partition et  $n_j$  son cardinal.

- la dernière étape effectue le test de contact entre les deux partitions de  $n_i$  et  $n_j$  boules.

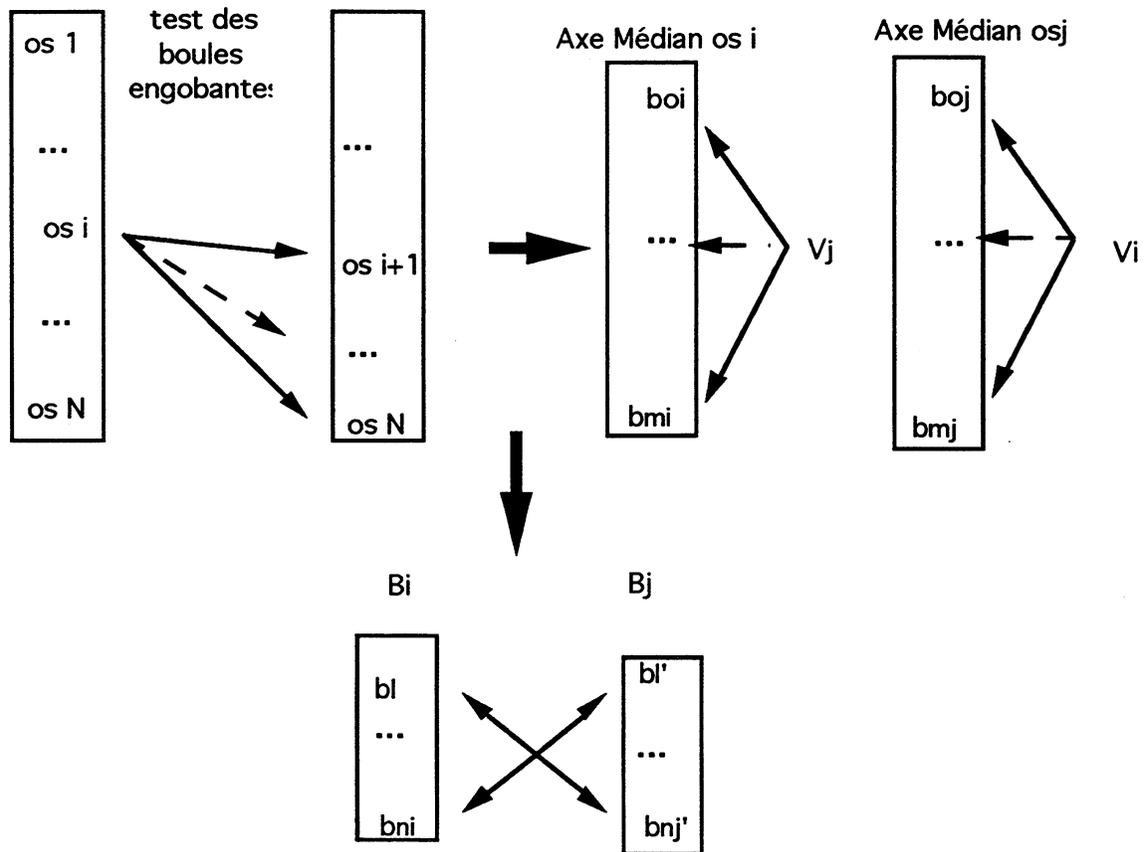


Fig. 24: Algorithme de détection de contact avec filtrage par les volumes englobants.

La dernière étape effectue un test de contact entre les boules prises deux à deux. Sa complexité reste encore élevée, en  $O(n_i \times m_j)$  pour  $n_i$  et  $m_j$  les nombres de boules sélectionnées entre les deux os.

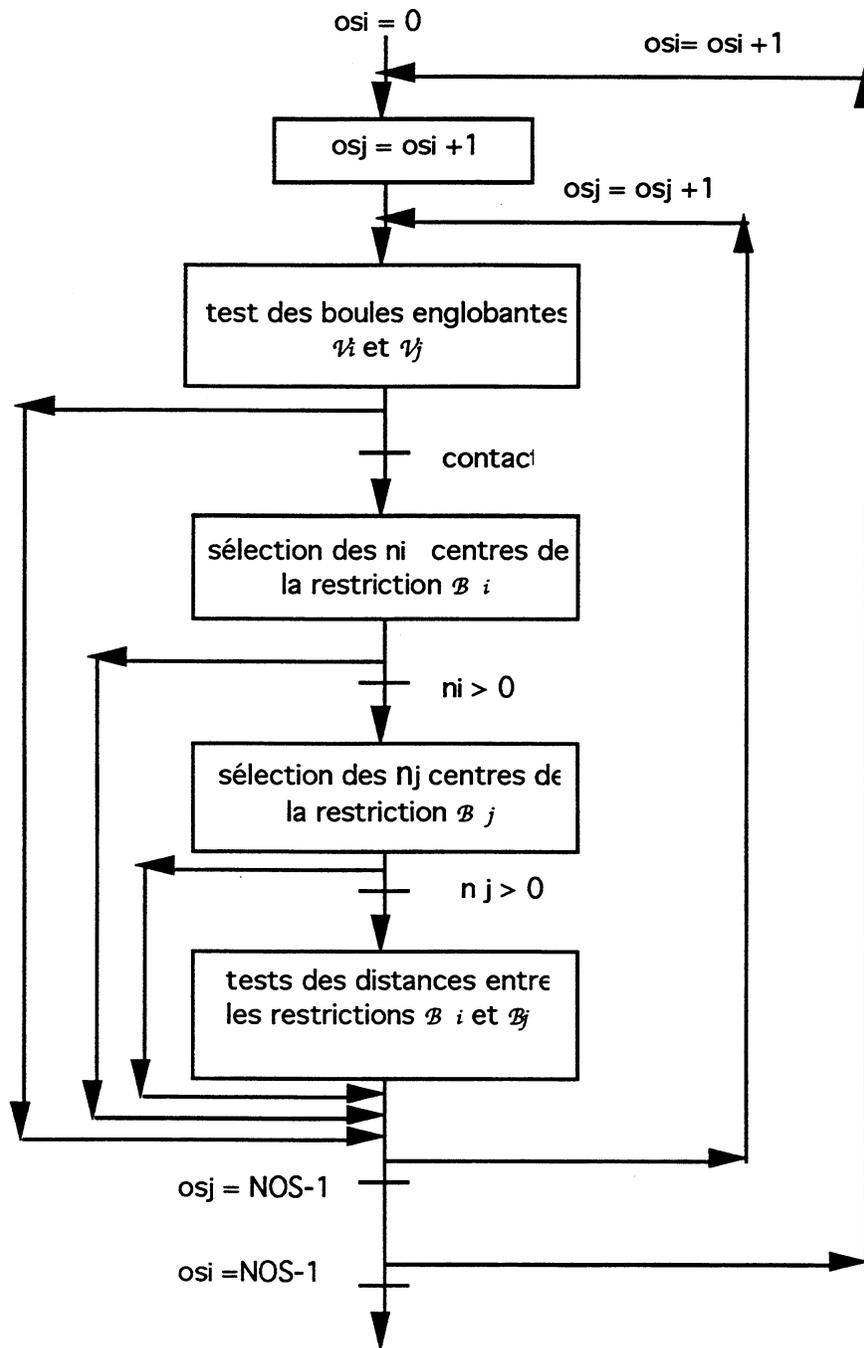


Fig. 25: Algorithme général de détection de contact entre axes médians.

Le coût calculatoire de cet algorithme peut encore être réduit en s'aidant des propriétés anatomiques du carpe. La disposition des os exclue en effet certains contacts: le semi-lunaire est trop loin des métacarpiens pour entrer en contact lors de petits mouvements, le trapèze avec l'avant-bras...

Cet algorithme conduit néanmoins à un coût en temps de calcul encore très important pour des modèles de plusieurs dizaines de milliers de boules: plus d'une heure trente de temps de calcul sur machine à processeur ALPHA pour des modèles définis sur un cube de données de côté 512 (cf. Tableaux §5.5), contre seulement quatre minutes pour des modèles définis sur un cube de données de côté 256. Comme cette étape précède chaque évaluation des forces, elle pénalise pour l'essentiel le temps d'exécution du modèle Dynamique général.

### 5.6.2. Algorithme de détection rapide.

Il est possible de réduire la complexité de la détection de contact en calculant l'intersection des cubes circonscrits à chaque boule. Ces cubes peuvent être en effet modélisés avec des côtés parallèles aux axes du repère. Leur projection sur ces trois axes s'effectue alors aisément (cette simplification n'est pas possible avec un modèle 3D composé de cubes dont les positions sont quelconques dans l'espace après rotation).

Deux cubes de côtés parallèles sont en effet en contact, si les intersections de leurs projections sur les trois axes sont non nulles.

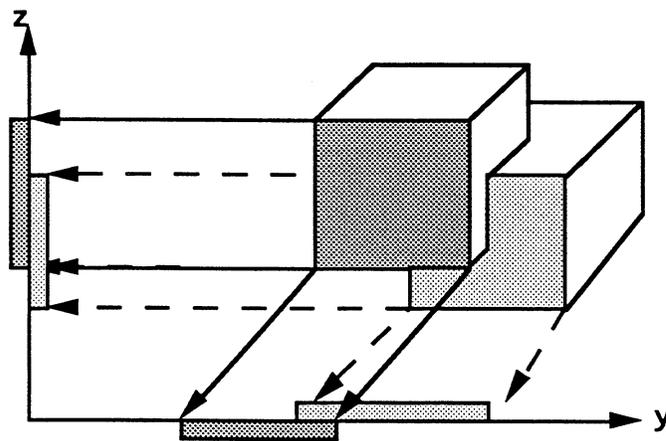


Fig. 28: Détection de contact sur les côtés projetés.

La projection d'une sphère de rayon  $r$  sur les trois axes, nécessite  $6 \cdot r$  opérations. Si  $r_m$  est le rayon moyen des  $(N+M)$  sphères, leur projection s'effectue donc en  $6 \cdot r_m \cdot (N+M)$  opérations environ, a priori moins coûteuses que les  $N \times M$  calculs de distance entre sphères prises deux à deux.

L'algorithme général de détection de contact peut donc s'accélérer par la projection successive des boules de chacun des os, et en effectuant à chaque projection le test d'occupation des intervalles. Cette opération s'appuie sur l'allocation d'un champ de bits en chaque point des axes; chaque bit identifiant le rang absolu de la boule projetée parmi celles de tous les modèles.

- pour chaque os parcouru depuis  $os_i = NOS-1$  vers  $os_i = 0$
- pour chacune de ces boules  $b_i$  de rang général  $i$  parmi les  $M$  boules totales des  $NOS$  os du système, soit  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  son centre et  $r_i$  son rayon.
- pour chaque  $x, y, z$  issus de la projection de  $b_i$  et vérifiant l'inégalité  $E_{14}$

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \leq r_i^2 \quad E_{14}$$

- on additionne par un "ou" logique un bit à 1 au rang  $i$  des champs de bits présents en  $x, y$  et  $z$ .

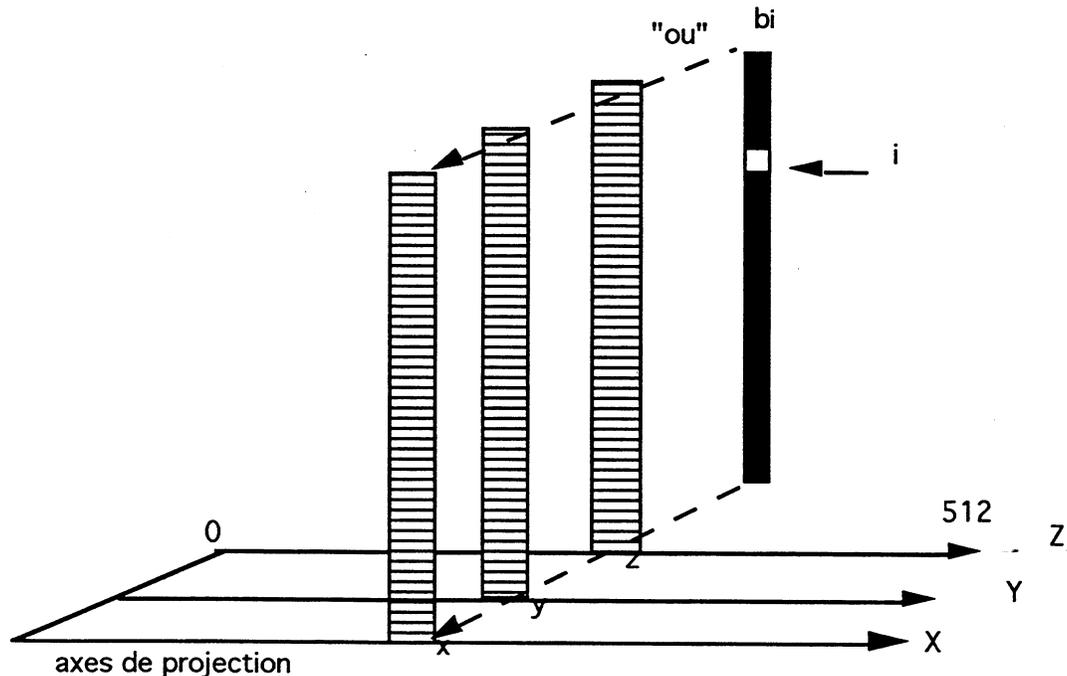
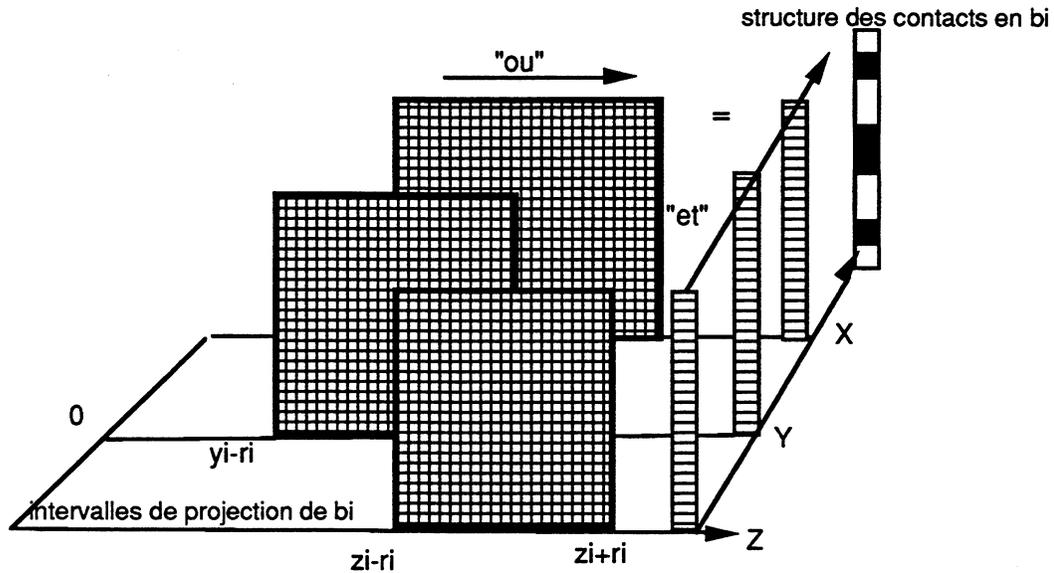


Fig. 28: Projection de la boule  $b_i$ .

La détection de contact ne s'effectue que pour les os d'indice  $os_i$  appartenant au carpe:  $os_i \in [0, NMETA1[$ .

- pour cette même boule  $b_i$ , sous réserve de la condition  $E_{16}$ , une fois les intervalles de projection remplis, on effectue un "ou" logique entre ces champs de bits sur les axes  $ox$ ,  $oy$  et  $oz$ . Des trois champs résultats, on effectue un "et" logique qui distingue les boules voisines dont les cubes circonscrits se chevauchent avec celui de la boule  $b_i$ . Chaque bit représentant le rang (supérieur à celui de  $b_i$ ) de la boule voisine dont on vérifie le contact par un calcul de distance entre les centres.



F

ig. 28: Projection et calcul des contacts par opérations logiques.

Cette technique s'applique à l'ensemble des boules des os, en les parcourant une seule fois (le principe d'égalité de l'action et de la réaction des forces de contact, permet en effet de ne déterminer les contacts de chaque os que pour des os voisins d'indices plus grands). La performance de cet algorithme est hélas contrebalancée par l'impossibilité d'effectuer les opérations logiques sur toute la longueur des champs de bits. Il est ainsi nécessaire d'opérer sur des mots machines (64 bits pour un processeur ALPHA de DEC).

Pour chaque point et pour un total  $M$  de boules de l'ordre de 200 000, 3 125 opérations logiques sont donc nécessaires pour tester deux champs de bits sur une machine à processeur 64 bits ( $n_{proc} = 64$ ). Si  $M_i$  représente le cardinal des axes médians de chaque os,  $M = \sum_{i=1}^{NOS} M_i$ , le test deux à deux des sphères associées aux axes

médians s'effectue au plus en  $P$  calculs de distance, avec  $P = \sum_{i=0}^{NMETA-1} M_i \left( \sum_{j=i+1}^{NOS-1} M_j \right)$  (sans tenir compte de la réduction apportée par le test des boules englobantes). Comme les nombres  $M_i$  s'expriment en terme de plusieurs dizaines de milliers de boules en dimension  $512^3$ , la technique de projection devient très avantageuse.

Son coût  $C_m$  en place mémoire pour simuler un cube de côtés 512 reste en revanche très élevé:  $C_m = \frac{3 \times 512 \times M}{8}$ , soit environ 38 Mo allouée en mémoire. Ce coût peut être bien entendu réduit en ne tenant compte que du volume d'occupation réel des huit os du carpe (soit 15 Mo pour un cube de côté 200 et non 512). Le test de détection de contact ne s'effectue alors que pour des champs de bits présents dans ce volume d'occupation. Le gain réel en temps de calcul approche un facteur trois par rapport à l'algorithme simple (§5.6.1): on passe ainsi d'une heure trente à seulement trente minutes de calcul pour un cube de données de côté 512.

	256	512
<b>Algo. simple</b>	4 mn	90 mn
<b>Algo. rapide</b>		30 mn

Fig. 29: Tableau des temps de calcul des différents algorithmes de détection de contact.

### 5.7. Conclusion. Modèle 3D des os du carpe.

La modélisation 3D adoptée s'appuie d'abord sur la représentation volumique de chaque os dans un cube de voxels. Ce cube se calcule à partir d'une représentation surfacique continue, puis par remplissage de sa partie intérieure, ou par un modèle de la fonction indicatrice de l'os. Celle-ci s'obtient dans le modèle proposé, par l'interpolation 3D de la série des contours pleins (cf. §5.4.1). La fonction indicatrice s'exprimant ainsi sous une forme analytique, le volume peut être modélisé avec la même précision sur les trois axes dans un cube de données de taille  $512^3$  ou  $256^3$ .

Dans un second temps, à partir de la carte de distance de l'intérieur du volume par la transformée de distance du chanfrein (de masque  $3 \times 3 \times 3$  : 3-4-5 ou 5-7-11), l'extraction de l'axe médian fournit une compression de données numériques très intéressante par rapport au volume de voxels (plus de 60% de données compactées sur un cube de côté 512) ou par rapport à la surface (au moins 30% selon les objets sur un cube de côté 512).

Les taux de compression de données peuvent être encore améliorés par l'extraction des centres de boules incluses dans des sous ensembles de leur voisines. Cette nouvelle extraction peut s'appuyer sur la détection de contact entre deux mêmes axes médians. On détecte ainsi pour chaque centre P de l'axe médian l'ensemble des autres centres voisins susceptibles de le recouvrir.

L'axe médian présente finalement l'avantage de produire un modèle volumique alliant, pour un coût de stockage raisonnable, une précision maximale (équivalente à quelques voxels) et une grande facilité d'emploi pour des animations cinématiques. Chaque boule de l'axe médian étant en effet tangente à la surface de l'objet, l'étape de détection de contact et la mesure des chevauchements s'avèrent ainsi plus précises que pour des modèles surfaciques. L'extraction de l'axe médian d'une carte de distance forme cependant encore une technique expérimentale pour des chanfreins de masque plus grands.

## 6. La Dynamique.

### 6.1. Introduction

La Dynamique modélise les lois des corps en mouvement et les forces qui les animent. La cinématique ne s'intéresse qu'aux lois du mouvement des corps. La Dynamique modélise ainsi non seulement les équations de la trajectoire du solide dans l'espace, mais aussi les collisions et les frottements secs entre des solides en contact.

La modélisation de la Dynamique du carpe consiste donc à modéliser les forces lors des contacts entre les os (les ligaments n'étant considérés que par leur force de rappel), puis à intégrer les équations du mouvement des os à chaque instant.

Ce chapitre rappelle brièvement dans son deuxième paragraphe les notions de cinématique du solide. Comme il est difficile, sauf cas particulier, d'intégrer directement les équations de la Dynamique, on s'intéressera à une première modélisation des contraintes Dynamiques par une méthode de minimisation de potentiel (§6.3). On présentera ensuite une modélisation des forces de contact (§6.4) pour intégrer le système Dynamique sous sa forme vectorielle fondamentale.

**6.2. Rappels: équations fondamentales de la Dynamique, orientation du solide dans l'espace.**

Soit  $\left( O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \right)$  un repère cartésien supposé Galiléen, fixe dans l'espace, et d'axes  $(O, x_1, y_1, z_1)$ . Soit  $G$  le centre d'inertie d'un solide de masse  $m$  dans ce repère fixe. Soit  $\left( G, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \right)$  le repère d'axes  $(G, x_1, y_1, z_1)$  pris parallèles aux axes fixes. Le solide  $S$  n'a ainsi qu'un mouvement de rotation autour de son point  $G$  fixe dans le repère lié au solide.

Le mouvement d'un solide dans l'espace peut donc se décomposer en un mouvement de translation du point  $G$  lié au solide (par rapport au repère fixe), et en un mouvement de rotation autour de ce point (cf. annexe §10.2).

Les équations fondamentales de la Mécanique décrivent ce mouvement dans l'espace par deux équations vectorielles. La première lie la résultante des forces  $\sum \vec{F}$  appliquées au solide à l'accélération du mouvement de translation, la seconde la résultante  $\sum \vec{M}_G$  des moments des forces par rapport au centre de gravité  $G$ , au moment cinétique  $\vec{\sigma}_G$  du solide dans son mouvement de rotation.

Les équations fondamentales de la Dynamique sont alors équivalentes au système différentiel:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} = \sum_{\text{forces appliquées}} \vec{F} \\ \frac{d \vec{\sigma}_G}{dt} = \sum_{\text{moments appliqués}} \vec{M}_G \end{array} \right. \quad E_1$$

Si le système d'axes  $(G, x, y, z)$  est choisi confondu avec les axes d'inertie (cf.annexe §10.2), on définit un repère mobile lié au solide qui simplifie les équations cinétiques du mouvement. Soit  $(A, B, C)$  les seuls coefficients non nuls de la matrice d'inertie, le moment cinétique s'écrit alors:

$$\vec{\sigma}_G = \begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega} \quad E_2$$

La seconde équation aux moments cinétiques du système  $E_1$ , exprimée dans le repère mobile, se simplifie alors en un système  $E_3$  où  $(p, q, r)$  sont les composantes de la vitesse instantanée de rotation dans le repère mobile, et  $(L, M, N)$  les projections des moments des forces appliquées au système sur les trois axes  $(G, x)$ ,  $(G, y)$ ,  $(G, z)$ .

$$\left( \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_G = \sum_{\text{forces appliquées}} \vec{M}_G \right) \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot \frac{dp}{dt} + (C - B) \cdot q \cdot r = L \\ B \cdot \frac{dq}{dt} + (A - C) \cdot r \cdot p = M \\ C \cdot \frac{dr}{dt} + (B - A) \cdot p \cdot q = N \end{cases} \quad E_3$$

Un repère mobile  $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d'axes  $(G, x, y, z)$  invariablement liés au solide comme le repère d'inertie, se définit ordinairement en géométrie analytique, par les neuf cosinus des angles que font les axes  $(G, x, y, z)$  avec les axes fixes  $(G, x_1, y_1, z_1)$ ; les définitions des neuf cosinus sont récapitulés dans le tableau suivant:

cos	x	y	z
$x_1$	a	b	c
$y_1$	a'	b'	c'
$z_1$	a''	b''	c''

Fig.1: Tableau des cosinus directeurs.

Euler montra que l'orientation d'un solide se détermine par seulement trois angles  $(\theta, \varphi, \psi)$ :

- soit GN l'axe défini par l'intersection des plans  $(G, x, y)$  et  $(G, x_1, y_1)$ . GN est appelé l'axe des noeuds;  $\psi$  est l'angle formé par les axes  $(G, x_1)$  et GN, l'angle est

compté positivement dans le sens des rotations de  $(G, x_1)$  vers  $GN$  autour de l'axe  $(G, z_1)$ .

- La droite  $GN$  étant perpendiculaire au plan  $(z, G, z_1)$ , soit  $\theta$  l'angle entre  $(G, z)$  et  $(G, z_1)$  compté dans le sens des rotations positives autour de  $GN$ .

- l'axe  $(G, z)$  étant perpendiculaire au plan  $(GN, Gx)$ , soit  $\varphi$  l'angle entre  $(G, x)$  et  $GN$ .

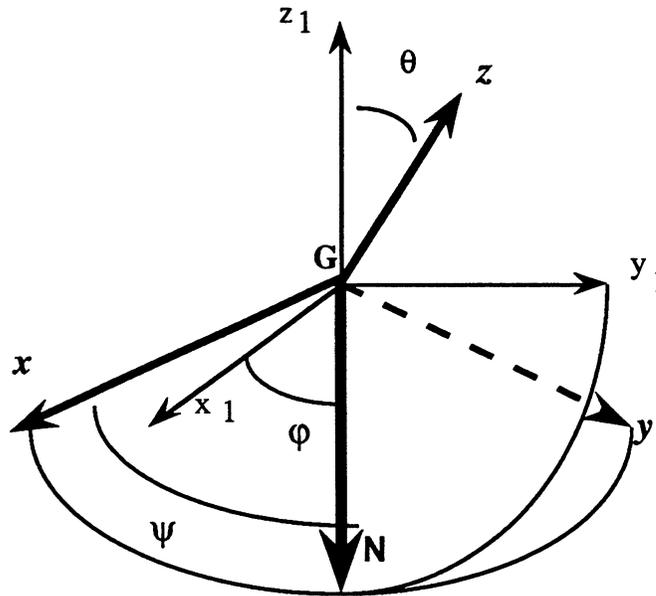


Fig.2: Définition des angles d'Euler.

Par analogie avec la terminologie employée en astronomie,  $\psi$  est appelé l'angle de précession,  $\theta$  l'angle de nutation et  $\varphi$  l'angle de rotation propre.

Soit  $\tau$  la transformation linéaire reliant les coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point  $M$  du solide, exprimées dans le repère mobile, à ses coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  dans le repère fixe.  $\tau$  est la composition d'une matrice  $R$  de rotation (appelée aussi matrice de passage) et d'une translation dont les composantes du vecteur sont les coordonnées du centre  $G$  dans le repère fixe. La matrice  $R$  est elle-même le produit des trois rotations qui forment le repère d'Euler: l'une autour de l'axe  $(G, z_1)$  d'angle  $\psi$ , la seconde autour de l'axe  $GN$  d'angle  $\theta$ , la dernière autour de l'axe  $(G, z)$  et d'angle  $\varphi$ .

$R$  s'exprime grâce aux cosinus directeurs du repère mobile par rapport au repère fixe:

$$R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad E_4$$

L'expression de la transformation  $\tau$  se déduit alors:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \cos \theta & \cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \varphi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \theta \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} E$$

5

Si  $\vec{GN}$  est un vecteur unitaire de l'axe des noeuds, la vitesse instantanée de rotation  $\vec{\omega}$  se définit en absolu par l'équation E6

$$\vec{\omega} = \frac{d\psi}{dt} \cdot \vec{k}_1 + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{k} + \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{GN} \quad E_6$$

Les équations d'Euler des composantes (p, q, r) dans le repère mobile de la vitesse de rotation instantanée  $\vec{\omega}$ , se déduisent par projection de  $\vec{\omega}$  dans le repère mobile, ce qui donne:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p = \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi - \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos \varphi \\ q = \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin \varphi \\ r = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \theta \end{pmatrix} \quad E_7$$

La modélisation de la Dynamique du carpe, consiste donc à calculer, en fonction des forces appliquées, les trajectoires des six paramètres ( $x_G, y_G, z_G, \theta, \varphi, \psi$ ) de chaque os, pendant le mouvement de la main.

Plusieurs approches pouvaient être envisagées. La première consiste à intégrer les équations vectorielles fondamentales de la Dynamique pour chaque solide dans un repère fixe ou lié à l'os. Ces équations forment un système différentiel autonome du second ordre, de 9N équations couplées entre elles à 6N inconnues: 3N équations pour le mouvement de translation, 3N équations du premier ordre en  $(p, q, r)$ , et 3N du premier ordre d'inconnues  $(\theta, \varphi, \psi)$ .

Une autre approche équivalente, s'appuie sur le formalisme des équations de Lagrange. Elle aboutit directement à la formation d'un système différentiel à 6N équations correspondant donc exactement aux 6N degrés de liberté du système.

Une dernière approche cherche à s'affranchir de la modélisation de la Dynamique pour définir une fonction caractéristique de la géométrie du système, avant de l'optimiser en fonction de ses 6N degrés de liberté. Cette fonction pourrait être comparée à un "potentiel de contrainte" qui dépendrait des contacts entre les solides et des tensions des ligaments.

### **6.3. Modélisation de la Dynamique par minimisation de contraintes.**

L'intégration des équations de la Dynamique forme un des problèmes majeurs de la modélisation de la Dynamique du carpe. Par imitation des techniques de minimisation de fonctionnelles, une alternative envisageable consiste à calculer des trajectoires réalistes des os par la minimisation d'un potentiel regroupant les contraintes du système, voir par le suivi d'une équipotentielle de ce critère à partir d'une position d'équilibre.

A chaque perturbation du système, supposée adiabatique, provoquée par le déplacement de la main, une nouvelle configuration géométrique du carpe serait alors obtenue de façon à minimiser les contacts et les tensions des ligaments. La position finale du carpe serait alors obtenue par une succession d'états "adiabatiques" définis comme des minima locaux d'un critère de contrainte dépendant des paramètres de position et d'orientation des os.

On examinera ainsi dans le paragraphe suivant, la modélisation d'un critère de contrainte pour un tel système. Le paragraphe §6.3.2 comparera le principe de cette modélisation avec celle des équations de la Dynamique.

### 6.3.1. Définition d'un critère de contrainte.

Soit  $V$  le critère total à minimiser. Comme des contacts interosseux peuvent apparaître pendant le mouvement des os sans que les ligaments soient eux-mêmes sollicités (ceux-ci n'interviennent qu'au voisinage de leur longueur d'extension maximale), on peut séparer le critère total en une partie  $V_C$  décrivant les contraintes de contact et une partie  $V_l$  décrivant les tensions des ligaments:  $V = V_C + V_l$ .

#### 6.3.1.1. Critère de contact

Les frottements solides se modélisent difficilement sous la forme d'un critère énergétique (cf. § 6.4). Un critère de contact  $V_C$  s'opposera au chevauchement des os lors de leurs contacts., comme une fonction de la distance entre les os. Puisque ces contacts peuvent être multiples pendant le mouvement,  $V_C$  est une fonction des distances entre les boules des axe médians (cf. annexe §10.3).

$V_C$  dépend donc du temps  $t$  et des paramètres de position et d'orientation de chaque os (regroupé dans le vecteur  $\vec{q} = ((q_i)_{1 \leq i \leq 6N})$ ). Soit  $b_i$  une boule du modèle d'un os d'indice  $os_i$ , de centre  $B_i$  et de rayon  $r_i$ , soit  $v_c$  la contribution du critère entre deux boules en contact ( $b_i, b_j$ ); on définit donc le critère de contact du système par:

$$V_c \left( t, \vec{q} \right) = \sum_{os_i=1}^N \sum_{b_i=1, os_j)os_i}^{r_i} \sum_{os_j=1}^N \sum_{b_j=1}^{r_j} v_c (b_i, b_j) \quad E_8$$

#### 6.3.1.2. Critère des liaisons.

Soit  $v_l(r)$  la contribution qui traduit l'action d'un ligament. Elle dépend de sa longueur entre ses points d'attache  $A_{i1}$  et  $A_{i2}$ , d'un seuil  $s_l$  en dessous duquel le ligament n'a aucune action, (cas du simple fil détendu), ainsi que de son élongation maximale  $l_{max}$  qu'il ne peut dépasser (cf. annexe §10.3):

Le critère  $V_l$  dépend alors lui aussi des paramètres de position et d'orientation des os.

### 6.3.2. Comparaison de principe entre les équations de Lagrange et un modèle fondé sur la minimisation des contraintes.

La minimisation d'un critère revient à suivre la courbe de son gradient, c'est à dire à modéliser la Dynamique du système par une équation du premier ordre  $\frac{d\vec{M}}{dt} = -\nabla V(\vec{M})$  (si  $M$  est le vecteur des paramètres du système), au lieu d'une équation du deuxième ordre comme en Dynamique.

Si on assimile d'autre part le critère de contrainte à un potentiel physique des forces de contact et de tension, la minimisation de ce critère conduit donc le système à chaque instant  $t$ , vers un équilibre statique des forces sans tenir compte des forces d'inertie. Ces états d'équilibre sont donc obtenus sans la contrainte cinématique du système contrairement à la réalité du phénomène!

La minimisation de l'action de Jacobi (cf. annexe §10.2.2) conduit pourtant directement aux trajectoires réelles du système. L'action de Jacobi tient compte en effet de toutes les forces exercées sur le système, forces d'inertie comprises; sa minimisation conduit directement à définir les équations de Lagrange qui représentent dans l'espace des paramètres  $R^{6N}$ , l'équation de la plus grande pente pour minimiser le "potentiel Dynamique" du système.

Les équations vectorielles de la Dynamique expriment cette même condition plus simplement dans l'espace réel  $R^3$ . Un critère de contrainte ne permet donc pas d'atteindre les trajectoires réelles du système; étant donné les faibles amplitudes de mouvement des os et de leur cinétique, l'approximation qu'il constitue pourrait être admise. Cette démarche ne conduit pas à coup sûr à une résolution numérique plus rapide de la Dynamique. L'interprétation des minima locaux du critère doit être de plus envisagée, car ce sont les premiers minima atteints par une minimisation numérique.

La résolution de la Dynamique par ses équations fondamentales (vectorielles ou de Lagrange), implique certes une approximation nécessaire, car on ne connaît pas de modèle général de l'intensité des forces de contact, mais il paraît beaucoup plus judicieux de réduire l'approximation à ce seul modèle.

Les derniers problèmes soulevés par la modélisation de la Dynamique du carpe sont donc d'une part, la modélisation des forces de contact, et d'autre part, la résolution des équations différentielles de la Dynamique.

#### 6.4. Modélisation physique des contacts.

Les seules lois générales qui modélisent physiquement les phénomènes de contact entre solides, sont les lois des frottements et la théorie des percussions. L'analyse des phénomènes de choc précise qu'il se produit des déformations de compression et de détente sur des solides en contact pendant des temps infiniment courts.

Ces déformations se traduisent par des forces infiniment grandes, mais dont l'intégrale sur le temps de choc conduit à définir une nouvelle grandeur finie, la percussion. Les lois sur les percussions sont comparables à celles de la Dynamique. Connaissant l'état des vitesses immédiatement avant le choc, ces lois calculent l'état des vitesses immédiatement après.

En dehors du cadre des conditions de la théorie des chocs, les lois du frottement sec entre solides permettent de définir les moments des forces et les rapports des composantes tangentielle et normale. L'intensité de la force de contact reste cependant une indéterminée qu'il faut lever pour intégrer la Dynamique.

##### 6.4.1. Chocs et percussions entre solides.

La force instantanée  $\vec{F}$  de contact subit de grandes variations lors du choc, telles que seule son intégrale sur l'intervalle de temps de la durée du choc  $[t_1, t_2]$ , supposé infiniment petit, garde une valeur finie. On définit alors le vecteur percussion  $\vec{P}$  de la force  $\vec{F}$  par sa mesure finie  $\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt.$

Le vecteur de percussion de toute force non instantanée, comme les forces d'inertie, s'annule car son intégrale devient négligeable sur un temps de choc très court. Sur l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ , les lois de la théorie des chocs fournissent des équations comparables aux équations de la Dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{m} \cdot \Delta \cdot \vec{v}_G = \sum_{\text{contacts}} \vec{P}_i \\ \Delta \cdot \vec{\sigma}_G = \sum_{\text{contacts } C_i} GC_i \wedge \vec{P}_i \end{array} \right. \quad E_9$$

Les composantes de la résultante des percussions forment cependant trois inconnues supplémentaires. L'indéterminée peut être levée par l'introduction d'une condition supplémentaire de fin de choc caractérisée par un coefficient de restitution "e" compris entre 0 et 1.

Soit  $V$  la vitesse relative d'un solide  $S_1$  par rapport à un autre solide  $S_2$  en contact. Soit  $V_n^0$  sa composante normale au début du choc,  $V_n^1$  à la fin. Dans un choc sans frottement on vérifie la condition suivante:

$$v_n^1 = e \cdot v_n^0 \quad E_{10}$$

Cette condition supplémentaire n'est satisfaisante que dans le cas de chocs entre solides sans frottement. Dans le cas contraire, il faut envisager une méthode géométrique complexe, développée par G. Darboux [DARBOUX, 1880].

On rencontre couramment dans la littérature propre à la conception d'animations informatiques [BARAFF, 91], la modélisation de la Dynamique de solides dans l'espace par la théorie des chocs. Les systèmes traités reproduisent effectivement des simulations de collisions (objet tombant sur le sol, jeu de quilles...) telles que la théorie des chocs les modélisent. Tel n'est pas notre cas.

Il est difficile en effet de modéliser le mouvement des os du carpe par des percussions. Les vitesses des os sont en effet très faibles et l'on ne peut guère parler de choc. Ils subissent certes des forces de pression sur les petites surfaces de contacts, mais non des efforts de compression puis de détente violents et courts tels qu'ils sont modélisés par les chocs.

#### 6.4.2. Modélisation des contacts et des tensions des ligaments.

Le module de la force normale de contact (comme celui de la percussion) forme dans le cas général, une indéterminée. La littérature propre à l'animation informatique fournit alors une palette de modèles de forces (cf. système ANIMA [LUCIANI, 91]). Ces modèles permettent non seulement de lever l'indéterminée, mais aussi de modéliser simplement les frottements pour obtenir des animations d'une grande facilité de calcul et d'un grand réalisme.

En dehors de ces quelques heuristiques, il n'y a pas de loi physique pour lever l'indéterminée. En supposant les contacts entre les os glissants, roulants et pivotants,

les lois du frottement entre solides (cf. annexe §10.4.) montrent qu'il existe une composante tangentielle au contact, indépendante des vitesses des points de contact, mais proportionnelle à la composante normale de la force de contact. Il suffit donc d'approcher cette composante normale pour lever l'indétermination.

Les contacts entre les modèles 3D lors d'une animation numérique ne sauraient être parfaitement tangents aux surfaces des objets. Ils se matérialisent en général par des contacts rentrants entre les modèles qu'il faut minimiser pour atteindre des simulations réalistes.

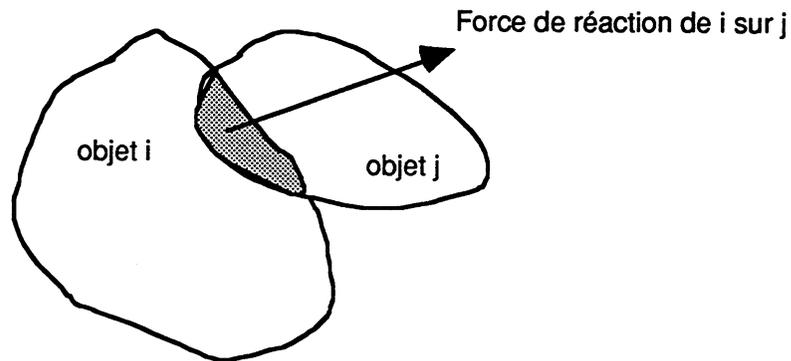


Fig. 3: Contact entre objets animés numériquement.

L'intensité de la force normale de contact est ici modélisée pour minimiser les chevauchements. La normale au contact est donnée aisément par l'axe des centres ( $C_i, C_m$ ) des boules en contact.

Une mesure du chevauchement relatif entre deux boules en contact, de centres  $C_i$  et  $C_m$ , de rayons  $r_i$  et  $r_m$ , peut être effectuée sur l'axe par le coefficient

$$c_i^m = \frac{\| \vec{C_i C_m} \|}{r_i + r_m}.$$

Quel que soit le chevauchement entre deux objets, la réaction doit être identiquement proportionnée, or selon la différence de taille entre les boules en contact, un même coefficient  $c_i^m$  peut correspondre différentes amplitudes de chevauchement. Une mesure absolue du chevauchement consiste donc simplement à

$$\text{calculer la différence } d_i^m = \| \vec{C_i C_m} \| - (r_i + r_m).$$

Une force de contact minimisant la profondeur de contact peut être alors déduite comme la fonction linéaire de la distance  $d_1^m$ . Le modèle de force de contact normale choisi revient à exercer une contrainte élastique sur la boule de centre  $C_1$  par la boule de centre  $C_m$ :

$$\vec{F}_{1,m} = K \cdot \left( \left\| \vec{C}_1 \vec{C}_m \right\| - (r_1 + r_m) \right) \cdot \frac{\vec{C}_m \vec{C}_1}{\left\| \vec{C}_1 \vec{C}_m \right\|} \quad E_{11}$$

A partir de ce modèle et des lois de frottements secs, une description complète des forces de contact normales et tangentielles peut être aisément déduite. Le facteur  $K$  est estimé par comparaison des trajectoires lors de simulations du mouvement.

Pour chaque os de rang  $os_j$ , il suffit alors de parcourir les os en contact de rang  $os_j$  supérieur, et d'effectuer le calcul des forces en fonction des contacts entre les os. On ne parcourt ainsi les contacts qu'une fois pour chaque os, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction permet d'incrémenter pour chaque os voisin parcouru, l'inverse des forces calculées en  $os_j$ .

### 6.4.3. Conclusion.

La résolution de la Dynamique par des méthodes de minimisation de contrainte n'offre pas d'alternative fondamentalement plus efficace qu'une modélisation Dynamique physique.

Grâce à une modélisation 3D fondée sur le recouvrement des os par des boules tangentes à la surface de l'objet, il est au contraire possible d'approcher physiquement un modèle de force de contact, permettant une minimisation naturelle des chevauchements aux contacts.

Comme les temps de contact entre les os du carpe ne sont pas supposés infiniment courts, le modèle de force adopté ne tient pas compte du temps et l'intégration de la Dynamique s'effectue sous sa forme fondamentale. Dans un cas aussi général que la modélisation du carpe, les équations fondamentales de la Dynamique forment en effet un système différentiel d'écriture moins complexe que les équations de Lagrange. Le dernier problème de la modélisation Dynamique consiste donc maintenant à résoudre ce problème différentiel.

## 7. Intégration des équations de la Dynamique.

### 7.1. Introduction.

Jusqu'au début du XX<sup>ème</sup> siècle, les mathématiciens se sont efforcés de trouver des solutions analytiques aux équations de la Dynamique, par manque de moyens de calcul. Le mouvement dans l'espace d'un solide soumis à des forces, peut se simplifier en un mouvement de translation spatiale et de rotation sur lui même. L'intégration des équations de rotation du solide représente la difficulté essentielle.

On présentera ainsi dans le paragraphe suivant, une première ébauche de solution générale au système des équations du mouvement de rotation. On peut en effet réduire ce système à une équation différentielle complexe de Riccati, qu'on ne peut résoudre sans connaître au moins une solution particulière. Un théorème d'analyse numérique pallie à cette difficulté dans le cas particulier de fonctions développées en fractions rationnelles; cette résolution introduit la nécessité d'un développement limité pour simplifier le problème (§7.3), et d'un algorithme d'intégration numérique contrôlant l'erreur de développement (§7.4)

## 7.2. Intégration générale. Problème inverse d'Euler.

Si  $(L, M, N)$  sont les projections sur les trois axes d'inertie  $(G, x), (G, y), (G, z)$ , des moments des forces appliquées de composantes  $(F_x, F_y, F_z)$  le système des équations de la Dynamique s'écrit dans ce repère:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} & 0 \\ \frac{\sin\varphi \cdot \cos\theta}{\sin\theta} & \frac{\cos\varphi \cdot \cos\theta}{\sin\theta} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{L - (C - B) \cdot q \cdot r}{A} \\ \frac{M - (A - C) \cdot r \cdot p}{B} \\ \frac{N - (B - A) \cdot p \cdot q}{C} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} E_1$$

Le problème inverse d'Euler consiste à calculer les trajectoires des angles  $(\theta, \varphi, \psi)$  en supposant connues celles de  $(p, q, r)$ , grâce aux équations aux moments.

On réduit toutefois le système différentiel aux angles d'Euler, en une équation complexe du type de Riccati [DARBOUX, 1887]. Soit en effet un point lié au solide, situé sur l'axe d'inertie  $(G, x)$  à une distance unité et donc de coordonnées  $(a, b, c)$  les cosinus directeurs du repère mobile. En exprimant que sa vitesse relative par rapport au solide est nulle, on obtient un système différentiel à trois équations en  $(a, b, c)$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad E_2$$

auquel il faut joindre six autres semblables dépendant des autres cosinus directeurs (a', b', c', a'', b'', c''). Ces équations regroupées par trois en (a', b', c') et (a'', b'', c''), forment un même système différentiel du type. Comme il est linéaire, ce système admet une solution unique pour des conditions initiales données. Il admet également l'intégrale quadratique où K est une constante:

$$a^2 + b^2 + c^2 = K \quad E_3$$

Pour  $K > 0$ , on peut choisir K unitaire après division par son même facteur. On montre que la condition  $K=0$  conduit aux mêmes résultats. Pour  $K>0$ , l'équation  $E_3$  représente alors l'équation d'une sphère de rayon unitaire. En considérant cette sphère comme une surface réglée admettant un double système de génératrices imaginaires, on peut effectuer un changement de paramètre simplificateur des variables (a, b, c) par seulement deux variables (x, y) constantes sur les génératrices de chaque système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a + i.b}{1 - c} = \frac{1 + c}{a - i.b} = x \\ \frac{a - i.b}{1 - c} = \frac{1 + c}{a + i.b} = y \end{array} \right\} \quad E_5$$

Si (a, b, c) sont réels, alors x et y sont complexes. La substitution des nouvelles expressions des paramètres (a, b, c) dans les équations différentielles  $E_3$  conduit à un nouveau système différentiel mais de deux équations du même type:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{q - i.p}{2} - i.r.x + \frac{q + i.p}{2} . x^2 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{q - i.p}{2} - i.r.y + \frac{q + i.p}{2} . y^2 \end{array} \right\} \quad E_6$$

x et y s'y déterminent séparément car ils sont les inconnues de la même équation de Riccati,

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{q - i.p}{2} - i.r.\sigma + \frac{q + i.p}{2} . \sigma^2 \quad E_7$$

La solution générale s'exprime facilement, dès qu'une solution particulière est connue, ce qui n'est pas le cas. Si l'on suppose  $(p, q, r)$  constants sur un intervalle de temps, on peut cependant réduire l'équation différentielle à une équation du premier ordre par des techniques de changement de variables qui négligent les termes aux puissances de  $\sigma$ .

Une autre solution consiste à transformer l'équation de Riccati en une équation linéaire du second degré par le changement de variable  $\sigma = \frac{\mu}{v}$ .

L'équation de Riccati s'écrit alors:

$$v \cdot \frac{d\mu}{dt} - \mu \cdot \frac{dv}{dt} = a \cdot v^2 + 2 \cdot b \cdot \mu \cdot v - c \cdot v^2 \quad E_8$$

Ses solutions sont aussi des solutions du système  $E_9$ , où  $h$  désigne une fonction arbitraire de  $t$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mu}{dt} = a \cdot v + (b + h) \cdot \mu \\ \frac{dv}{dt} = -c \cdot \mu - (b - h) \cdot v \end{array} \right. \quad E_9$$

Si l'on choisit  $h = b$ , le système se sépare alors en une équation différentielle du premier ordre et une équation linéaire du second ordre homogène en  $v$ , à coefficients variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = -\frac{1}{c} \cdot \frac{dv}{dt} \\ \frac{d^2v}{dt^2} - \left( 2 \cdot b + \frac{1}{c} \cdot \frac{dc}{dt} \right) \cdot \frac{dv}{dt} + a \cdot c \cdot v = 0 \end{array} \right. \quad E_{10}$$

Cette dernière n'est pas plus intégrable dans le cas général, sauf si ces coefficients peuvent s'exprimer sous la forme d'une fonction rationnelle dans le corps des complexes. Dans ce cas, son intégration s'appuie sur l'algorithme de Kovacic [KOVACIC, 86] :

*Il existe un algorithme qui, étant donné une équation différentielle linéaire d'ordre deux dont les coefficients sont des fonctions rationnelles, ou bien trouve deux solutions Liouvilliennes telles que toute solution est une combinaison linéaire à coefficients constants de ces solutions, ou bien démontre qu'il n'y en a pas sauf zéro.*

En simplifiant alors les coefficients complexes de l'équation par leur développement limité grâce aux développements des fonctions  $(p(t), q(t), r(t))$  supposées connues sur un intervalle  $[t, t+dt]$ , il devient donc possible d'atteindre une solution analytique générale au système des équations du mouvement de rotation  $E_1$ .

La question en suspens suppose que les trajectoires  $(p(t), q(t), r(t))$  soient connues. Or le deuxième membre du système différentiel aux moments, dépend des forces de contact, elles-mêmes dépendantes des angles d'Euler et de la vitesse instantanée de rotation. Aucun des trois systèmes d'équations différentielles de la Dynamique, n'est autonome et ils doivent donc être intégrés en commun.

Vu la complexité d'une solution générale, une simplification doit être envisagée plus en amont par un développement limité des trajectoires sur un échantillonnage du temps.

### **7.3. Développement limité des coordonnées d'un point du solide.**

L'une des rares simplifications possibles (cf. annexe §10.5) profite de la décomposition du modèle 3D statique solide en éléments simples, pour effectuer un développement limité des positions de chacun de ses éléments. Ceci devient en effet possible car on peut exprimer les accélérations linéaires et angulaires  $\frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2}$  et  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  de chaque élément, en fonction des forces et de leurs moments.

La précision de ce calcul dépend du choix d'un pas d'intégration  $dt$  suffisamment petit pour que la déformation du modèle soit négligeable. Dans le cas de contacts multiples, un pas d'intégration petit permet effectivement de mieux aborder les frottements des os les uns contre les autres, il conduit malheureusement à démultiplier le temps de calcul.

Bien que ce développement conduise à une modélisation de la Dynamique très simple, l'incertitude sur la précision réelle d'intégration conduit à lui préférer des méthodes d'intégration capables d'évaluer cette précision, et par conséquent d'adapter automatiquement le pas d'intégration.

#### 7.4. Intégration du système Dynamique par un algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif.

L'algorithme de base (cf. Fig. 1) retrace les étapes principales de la modélisation d'un mouvement du carpe: de petits déplacements de la main sur des intervalles de temps de longueur  $h$  à des instants compris entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ , conduisent à des contacts entre les os qui génèrent des forces. Ces dernières guident les os vers de nouvelles positions lors de l'intégration de la Dynamique.

Un algorithme aussi général ne prend pas encore en compte l'adaptation du pas d'intégration  $h$ , selon que les os sont ou non en contact. S'ils le sont, la simulation du glissement et du roulement nécessite un pas d'intégration assez faible pour détecter les contacts suffisamment tôt, afin d'empêcher de trop grands chevauchements des modèles. Si les os sont éloignés, un pas trop petit ralentit au contraire inutilement le modèle.

Soit  $\vec{q}$  le vecteur des paramètres de position et d'orientation des os dans l'espace. Soit  $\frac{d\vec{q}}{dt} = f(t, \vec{q})$  la forme générale des équations différentielles de la Dynamique.

La solution approchée d'Euler  $\vec{q}(t+dt) = \vec{q}(t) + f(t, \vec{q}) \cdot dt$  nécessite pour être précise, un pas de calcul  $dt$  infiniment court et par conséquent, un temps de calcul infiniment long. Les algorithmes numériques perfectionnent le développement d'Euler pour minimiser l'erreur  $\Delta(t) = \left\| \vec{q} - \hat{\vec{q}} \right\|$  entre l'estimation de la solution  $\vec{q}$  et la solution réelle inconnue  $\hat{\vec{q}}$ .

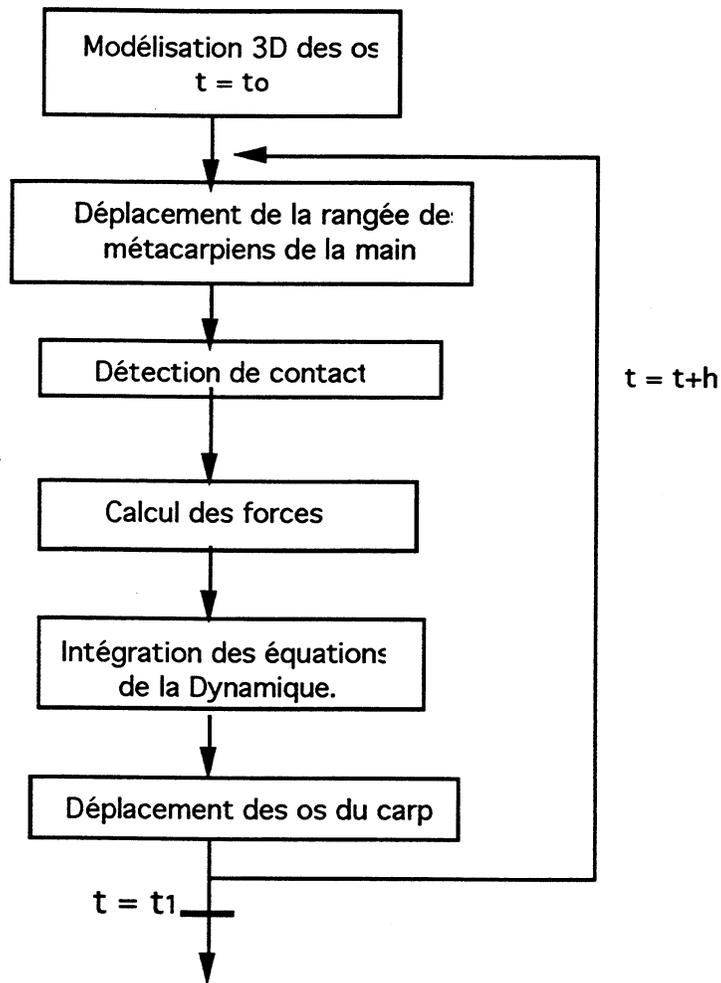


Fig. 1: Algorithme simple d'intégration de la Dynamique.

Contrairement à d'autres algorithmes numériques plus rapides (méthodes avec prédicteur, algorithme de Burlsch-Stoer basé sur l'extrapolation de Richardson [BULIRSCH, 80]), l'algorithme de Runge-Kunnta (cf. annexe §10.6) a été choisi pour sa grande robustesse et pour sa grande fiabilité au voisinage des singularités d'un système différentiel.

### 7.4.1. Intégration par une méthode de Runge-Kunta d'ordre 5 à pas adaptatif.

Le principe des algorithmes d'intégration à pas adaptatif consiste à contrôler le pas d'intégration à partir de l'évaluation de l'erreur maximale de  $\Delta(t)$ . La différence d'intégration obtenue par un seul pas de calcul égal à deux pas  $dt$ , et celle obtenue par deux évaluations avec un seul pas  $dt$ , fournit déjà un critère d'évaluation de l'erreur  $\Delta(t)$ . La minimisation de cette évaluation permet alors d'adapter le pas de calcul.

Une technique plus récente s'appuie sur deux développements de Runge-Kunta d'ordre cinq et quatre, à partir de six évaluations de la fonction différentielle [PRESS, 92]. La différence entre ces deux développements permet ainsi d'obtenir une évaluation de l'erreur d'intégration.

Si  $q_i$  représente l'évaluation du vecteur des paramètres  $\vec{q}$  à l'instant  $t_i$ , l'expression générale de la formule de Runge-Kunta d'ordre cinq s'écrit alors selon l'équation E11; l'estimation  $q_{n+1}^4$  d'ordre quatre selon l'équation E12 (les paramètres  $a_i, b_{ij}, c_i, c_i^4$  sont optimisés par Cash et Karp (cf. annexe §10.6).

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, q_n) \cdot dt \\ k_2 = f(t_n + a_2 \cdot dt, q_n + b_{21} \cdot k_1) \cdot dt \\ \dots \\ k_6 = f(t_n + a_6 \cdot dt, q_n + b_{61} \cdot k_1 + \dots + b_{65} \cdot k_5) \cdot dt \end{array} \right\} \text{ ainsi } q_{n+1} = q_n + \sum_{i=1}^6 c_i \cdot k_i + O(dt^6) \quad E11$$

$$q_{n+1}^4 = q_n + \sum_{i=1}^6 c_i^4 \cdot k_i + O(dt^5) \quad E12$$

L'erreur d'intégration  $\Delta$  entre ces deux développements s'écrit alors :

$$\Delta = q_{n+1} - q_{n+1}^4 = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^4) \cdot k_i \quad E13$$

Soit  $dt_1$ , respectivement  $dt_2$ , deux pas de d'intégration; à chaque pas est associée une erreur d'estimation  $\Delta_1$  (respectivement  $\Delta_2$ ) de l'intégrale:

$$dt_1 = dt_2 \cdot \left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right|^{0.2} \quad E_{14}$$

Si l'on choisit  $\Delta_1$  comme la précision d'intégration désirée, la précision obtenue à un pas d'intégration  $dt_2$  pourra être comparée à la précision tolérée  $\Delta_1$ . Si l'erreur  $\Delta_2$  devient trop grande, l'équation  $E_{14}$  permet de régler le nouveau pas  $dt_2$  en fonction de la précision désirée et de recommencer si nécessaire l'intégration avec ce pas.

Il est préférable que  $\Delta_1$  représente un vecteur des précisions désirées pour chaque paramètre. Chacune des composantes du vecteur  $\vec{q}$  peut en effet évoluer avec des amplitudes différentes; on compense alors l'effet des amplitudes en choisissant le vecteur  $\Delta_1$  proportionnel à un vecteur d'échelle noté  $\vec{q}_{scal}$ . Si  $\epsilon$  représente la précision absolue désirée, chaque composante  $\Delta_1 [i]$  du vecteur  $\Delta_1$  s'écrit alors:

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \Delta_1 [i] = \epsilon \cdot \vec{q}_{scal} [i] \quad E_{15}$$

Si l'on veut une précision absolue constante tout au long de l'intégration, il suffit alors de choisir les coordonnées du vecteur  $\vec{q}_{scal}$  égales à l'unité. On choisit en général un vecteur d'échelle approché localement par l'expression  $E_{16}$ .

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \vec{q}_{scal} [i] = \left| \vec{q} [i] + \frac{d\vec{q} [i]}{dt} \cdot dt \right| \quad E_{16}$$

### 7.4.2. Intégration au voisinage des singularités du système.

Pour des angles d'Euler ( $\theta_i, \varphi_i, \psi_i$ ) des os tels que  $\sin \theta_i = 0$ , on ne peut écrire le système différentiel aux angles d'Euler. Ce point singulier correspond à une indétermination de la définition du repère d'inertie de l'os, puisque les deux axes ( $G, z$ ) et ( $G, z_1$ ) se confondent.

Du point de vue numérique, le voisinage d'un tel point singulier, se détecte à l'intégration par une erreur  $\Delta(t)$  croissante malgré le choix d'un pas d'intégration  $dt$  plus petit. Comme les singularités des équations d'Euler ne correspondent pas à des singularités physiques, l'indétermination peut se lever en prolongeant le vecteur des paramètres sur son vecteur tangent (cf. Fig. 2).

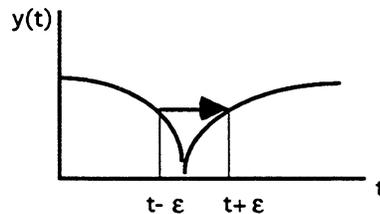


Fig. 2: Dépassement d'une singularité.

Des algorithmes de Runge-Kutta sont spécialement adaptés [GEAR, 71], pour résoudre numériquement les singularités de tels systèmes différentiels. Dans la pratique, les mouvements des os du carpe sont suffisamment de faibles amplitudes pour ne pas rencontrer ces difficultés.

### 7.5. Modèle de la Dynamique du carpe.

L'algorithme général tient compte de la modélisation du mouvement des métacarpiens selon un mouvement de rotation autour de l'extrémité du radius. Cet algorithme se complique par l'évaluation du pas d'intégration  $dt_j$  (cf. Fig. 3). La modélisation de la Dynamique recherche le vecteur  $\vec{q}$  des paramètres de position et d'orientation des os, à tout instant  $t$  compris dans un intervalle de temps  $I$  donné,  $I=[t_0, t_1]$ .

Le développement numérique de l'intégration conduit à explorer les paramètres  $\vec{q}$  à certains instants  $t_i$ , pour lesquels l'estimation de l'erreur d'intégration est suffisamment faible par rapport à l'erreur absolue tolérée EPS (EPS est une constante donnée au début de la simulation du mouvement).

### 7.5.1. Procédure d'évaluation de la dérivée du vecteur des paramètres.

L'algorithme simple (cf. Fig. 1) représente la base de la procédure deriv. Cette procédure définit la dérivée notée  $dq$ , du vecteur  $q$  des paramètres de position et d'orientation des os.

Par commodité, pour chaque os d'indice  $i$ , ce vecteur des paramètres regroupe au rang  $n$  ( $n=12*i$ ), douze paramètres dont les trois coordonnées du centre d'inertie des os ( $x_G, y_G, z_G$ ), les trois composantes de sa vitesse  $\left(\frac{dx_G}{dt}, \frac{dy_G}{dt}, \frac{dz_G}{dt}\right)$ , les trois composantes ( $p, q, r$ ) de la vitesse instantanée de rotation des os sur eux-mêmes, puis les trois angles d'Euler ( $\theta, \phi, \psi$ ) qui définissent l'orientation du repère d'inertie des os par rapport à un repère fixe du carpe.

$$q \begin{pmatrix} \vdots \\ n = 12 * i \\ \vdots \\ n + 11 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \\ \frac{dx_G}{dt} \\ \frac{dy_G}{dt} \\ \frac{dz_G}{dt} \\ p \\ q \\ r \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} \quad E_{17}$$

Le système différentiel des équations de la Dynamique s'écrit alors sous sa forme intégrable  $dq = F(q, t, h)$  en quatre étapes successives.

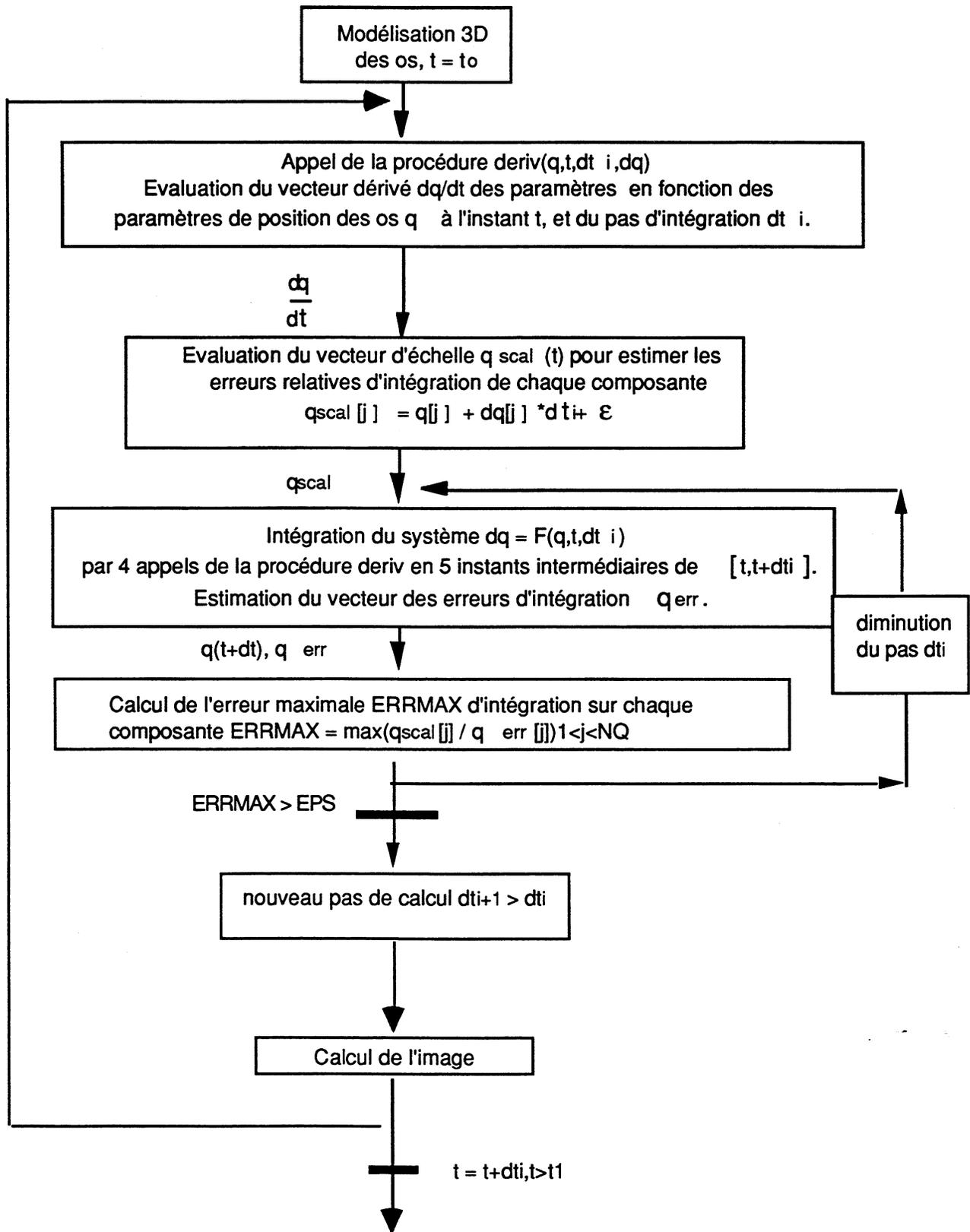


Fig. 3: Modèle de la Dynamique du carpe.

La première étape calcule la position réelle du carpe, ainsi que celles des métacarpiens, en leur imposant une rotation d'un angle  $\Theta = \Omega \cdot (t+dt)$ , où  $\Omega$  représente la vitesse de rotation de la main autour de l'avant bras. Les étapes suivantes déduisent des contacts détectés entre os, la résultante des forces  $R=(R_x,R_y,R_z)$  et des moments  $M = (M_x, M_y, M_z)$ .

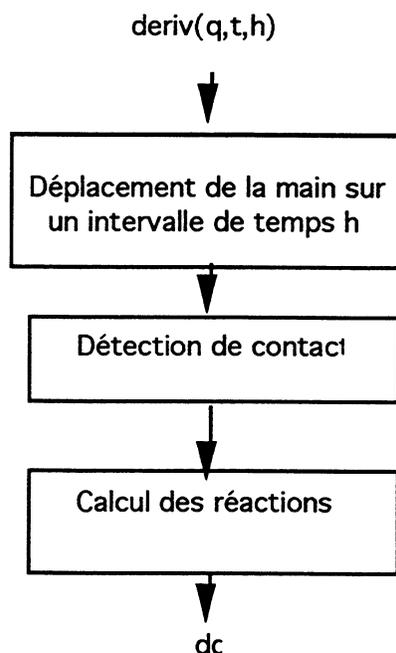


Fig. 4: Fonction d'évaluation des équations de la Dynamique.

Pour chaque os de masse  $m_{OS}$ , les trois premières composantes se déduisent des quatrième, cinquième et sixième du vecteur  $\vec{q}$  (cf. E17). Les neuf autres composantes du vecteur  $dq$  sont définies grâce aux neuf équations de la Dynamique, avec  $(A_{OS}, B_{OS}, C_{OS})$  les trois moments d'inertie de chaque os (cf. E2).

Le calcul des contacts s'effectue à partir des coordonnées des boules des os exprimées dans un repère fixe commun. Si pour chaque os, les équations de la Dynamique sont simplifiées lorsqu'elles sont écrites dans le repère mobile (cf. E18), le module de calcul des forces doit alors calculer les moments et les forces en les exprimant dans les repères liés à chacun des os.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \frac{d^2 x_G}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_G}{dt^2} \\ \frac{d^2 z_G}{dt^2} \end{array} \right] = \frac{1}{m_{os}} \cdot \left[ \begin{array}{c} R_x \\ R_y \\ R_z \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dq}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \frac{M_x - (C_{os} - B_{os}) \cdot q \cdot r}{A_{os}} \\ \frac{M_y - (A_{os} - C_{os}) \cdot r \cdot p}{A_{os}} \\ \frac{M_z - (B_{os} - A_{os}) \cdot p \cdot q}{C_{os}} \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc} -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta & \sin \theta & 0 \\ \frac{\sin \varphi \cdot \cos \theta}{\sin \theta} & \frac{\cos \varphi \cdot \cos \theta}{\sin \theta} & 1 \end{array} \right) \cdot \left[ \begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array} \right] \end{array} \right. \quad E_{18}$$

### 7.5.2. Procédure d'actualisation des coordonnées des centres des boules des os.

La matrice de passage  $P_t$  d'un os définit la transformation entre les coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point  $M$  de l'os, exprimées dans un repère d'axes mobiles liés au mouvement du solide, et celles exprimées dans le repère d'axes fixes  $(x_1, y_1, z_1)$ . Cette matrice se définit à tout instant  $t$  par la connaissance des trois angles d'Euler  $(\theta, \varphi, \psi)$  qui repèrent l'orientation de l'os par rapport au repère fixe du carpe (cf. E<sub>5</sub> §7.2).

Cette matrice est elle-même la composition de trois rotations, son inverse se calcule donc aisément par simple transposition; sa matrice inverse définit alors la matrice de passage des coordonnées fixes vers les coordonnées dans le repère mobile.

A l'instant initial, le repère d'inertie de chaque os se définit également par ses trois angles d'Euler  $(\theta_0, \varphi_0, \psi_0)$ . Ces trois angles définissent donc une matrice de passage initiale  $P_0$  entre le repère d'inertie et le repère fixe.

Les coordonnées d'un point  $M(t_0)$  du solide, exprimées dans le repère fixe à l'instant initial  $t_0$ , se déduisent donc à un instant  $t$  quelconque par une première transformation  $P_0$  en des coordonnées qui le situent dans le repère d'inertie à  $t_0$ , puis par la seconde transformation  $P_t$  en ses coordonnées  $M(t)$  dans le repère fixe à l'instant  $t$  du mouvement de l'os.

Le calcul des déplacements et des nouvelles positions de la main s'effectuera toujours à partir de la position des os à l'instant initial. Cette méthodologie est imposée par l'intégration non linéaire dans le temps de la Dynamique en six développements limités à des instants différents. La détection de contact se simplifie quand toutes les boules composant les os sont détectées dans le même repère.

L'algorithme de mise à jour des positions des os dépend donc non seulement des matrices de passage  $P_0$  initiales, mais aussi des angles d'Euler des os à l'instant  $t$  considéré (cf. Fig. 4), et de l'angle  $\Theta$  et de la vitesse de rotation  $\Omega$  des métacarpiens.

## 7.6. Conclusion.

L'intégration des équations de la Dynamique, par un Algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif, permet d'adapter le modèle Dynamique aux contacts entre les os, et d'approcher ainsi avec une grande fiabilité les paramètres de position et d'orientation des os pendant leur mouvement. La précision de cette intégration se paie cependant par un surcoût de calcul important, puisque six évaluations des forces sont nécessaires pour une intégration à un pas donné (soit un minimum de 25 minutes de temps de calcul minimum par image, sur une machine à processeur ALPHA, pour des modèles simulés dans un volume de données de taille  $256^3$  (cf.§5.5).



## 8. Premiers résultats.

### 8.1. Introduction

Faute de pouvoir extraire des images numériques les caractéristiques du réseau ligamentaire, les premières simulations ont été réalisées sans tenir compte de leur action. Le déplacement des métacarpiens de la main, dans leur mouvement de rotation autour de l'avant-bras, dirige le mouvement du carpe: chaque déplacement de la main génère des contacts, et donc des forces qui se répercutent d'os en os sur le reste du système. Le déplacement de la main est contrôlé par une minimisation d'un critère aujourd'hui dépendant de l'estimation de l'erreur d'intégration, mais que l'on pourra corriger par d'autres considérations (nombre et profondeur de contacts...).

Pour diminuer le temps de calcul des animations, celles-ci sont simulées sur des modèles d'os développés dans un cube de  $256^3$  voxels. Le nombre de boules par modèle est ainsi considérablement réduit, et le temps de calcul de la détection de contact se réduit alors à quelques minutes.

Deux types d'animation ont été réalisées, l'une avec un mouvement de rotation cubitale des métacarpiens, l'autre selon un mouvement d'extension. Le carpe réagit effectivement en simulation, à la pression de la rangée métacarpienne par un mouvement de déformation de sa structure géométrique. Les simulations sont néanmoins très instables d'un point de vue numérique, car d'une part, la fonction différentielle du système n'est pas continue (les contacts et les forces sont estimés de façon discrète), et d'autre part, nombre de paramètres restent inconnus (inerties, coefficient de répulsion).

Selon le choix des paramètres du système, l'intégration numérique conduit à des résultats plus ou moins physiquement admissibles (éclatement brutal de la structure osseuse, glissement des os les uns contre les autres...).

En règle général, la minimisation de la profondeur des contacts tend à faire chuter brutalement le pas d'intégration. Ce phénomène s'accentuerait probablement en contraignant les os par des liaisons du type ligamentaires car les os seraient contraints à des contacts rapprochés.

Le temps de calcul de l'intégration des équations de la Dynamique ne permet pas encore une visualisation des résultats en temps réel. On ne peut donc guère prévoir une utilisation interactive du modèle Dynamique. Les visualisations sont ici obtenues grâce à des modèles par facettes des os représentés sous AVS, dont on calcule les images d'animation par transformation affine des facettes selon les paramètres de position et d'orientation calculés par le modèle Dynamique.

Les simulations présentées sont calculées grâce à un choix approché des différents paramètres du système, et en considérant un coefficient de frottement fluide relativement important (soit 5%). Grâce à l'introduction d'une composante de frottement fluide, l'intensité des accélérations restent en effet bornées, et les trajectoires sont ainsi acceptables: moins de 5% du nombre de boules de chaque os sont en contact avec de faibles chevauchements.

## **8.2. Simulation de mouvements.**

### **8.2.1. Adduction.**

Les images suivantes présentent un mouvement d'adduction dont la visualisation s'appuie sur des modèles par facettes (Fig. 1).

Pour un léger mouvement des métacarpes de la main vers la droite, après contact avec le cinquième métacarpe, l'os crochu se déplace au contact du grand os (Fig.2). Grand os et os crochu restent en contact tandis que la colonne du trapèze se disloque dans le sens inverse du mouvement des métacarpes (Fig. 3 à 6).

On ne retrouve pas le balancement vers le radius du semi-lunaire sur la tête du grand os. Le scaphoïde adopte ici un mouvement de redressement excessif qui le projette hors du système, ainsi que le trapèze et le trapèzoïde.

Fig. 1:



Fig. 2:

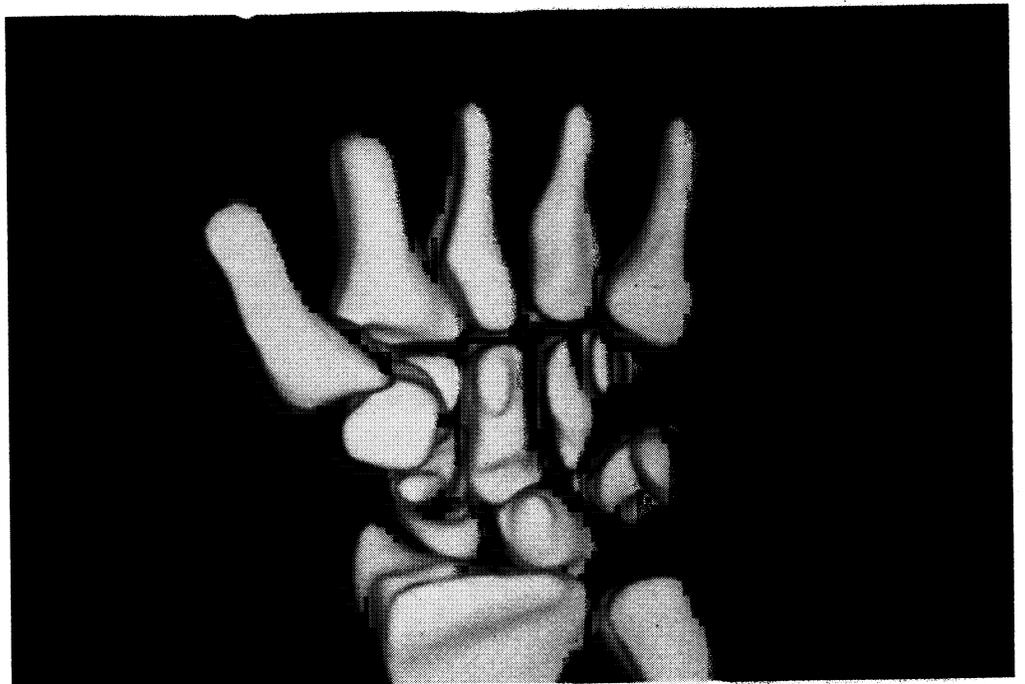


Fig. 3:

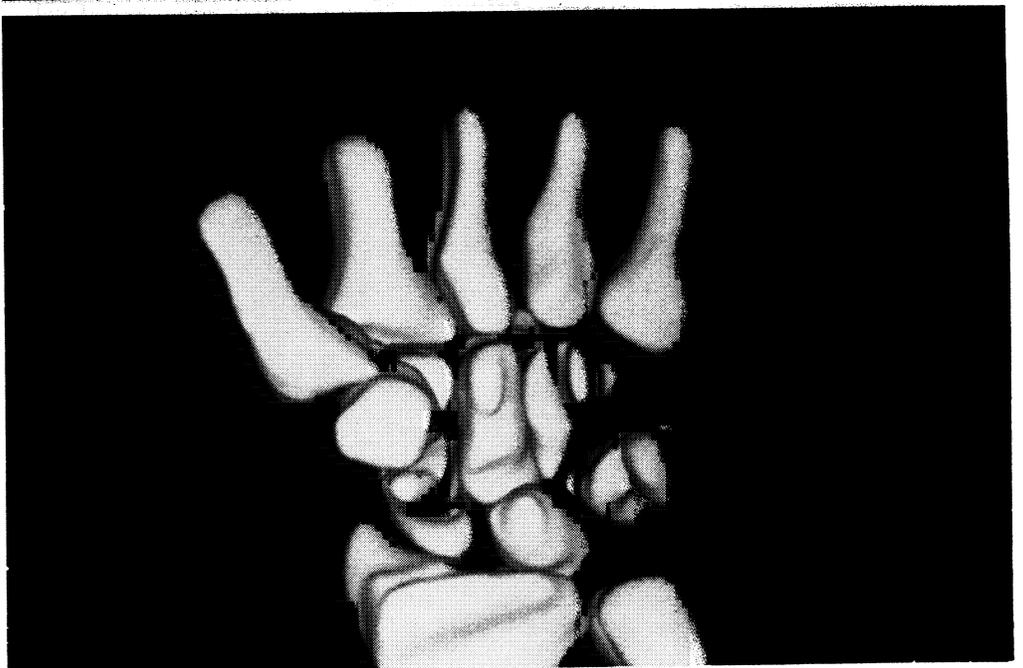




Fig. 4:

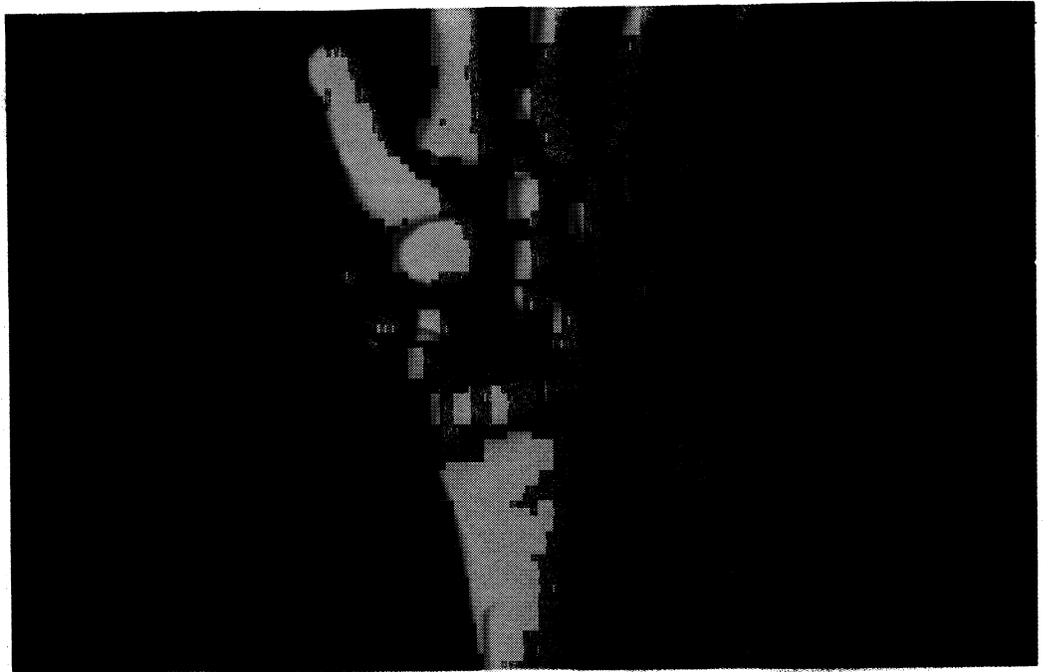
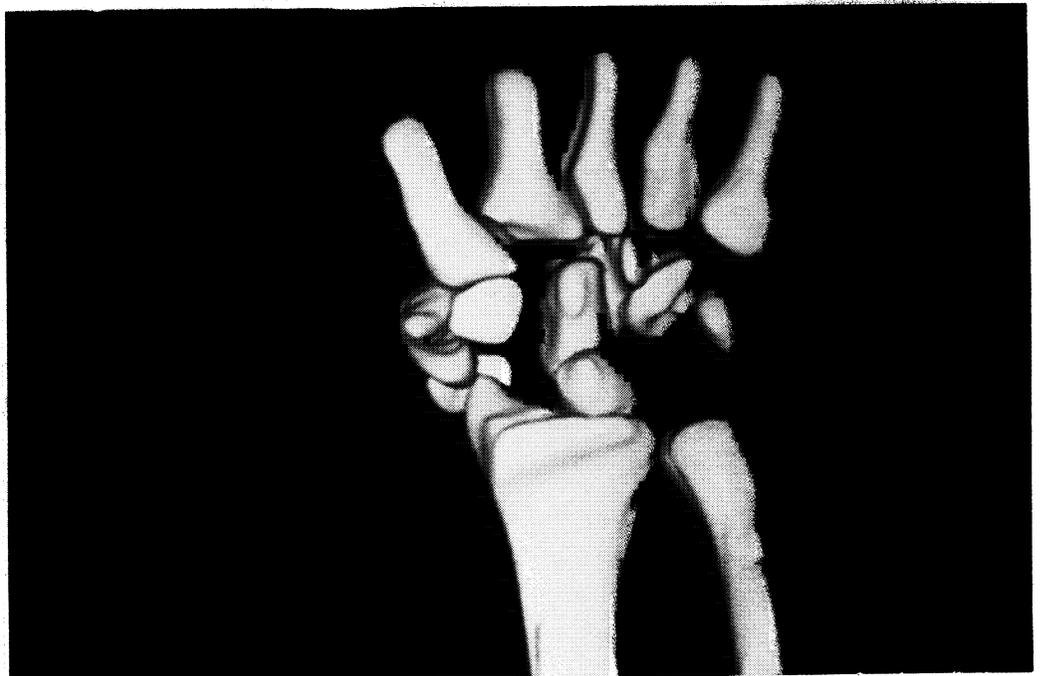


Fig. 5:



Fig. 6:





### 8.2.2. Extension.

De front, l'os crochu adopte ici aussi un mouvement qui le met au contact avec le grand os mais dans un mouvement d'ensemble de la rangée supérieure en sens opposé aux métacarpes.

Le mouvement simulé est légèrement plus réaliste puisque l'on retrouve un mouvement d'ensemble par basculement des rangées osseuses du carpe l'une sur l'autre. De profile, on note le détachement progressif du pisiforme et du pyramidal.

Le rôle des ligaments est ici aussi fondamental pour conserver la cohérence de l'ensemble du système.

Il manque en effet à ces simulations, les contraintes stabilisatrices des ligaments qui jouent à la fois un rôle d'obstacle aux courses de certains os, mais aussi de forces de rappel lorsque les écarts inter-osseux sont trop élevés.

Les images de la figure 7 et 8 visualisent de dos la dislocation du carpe.

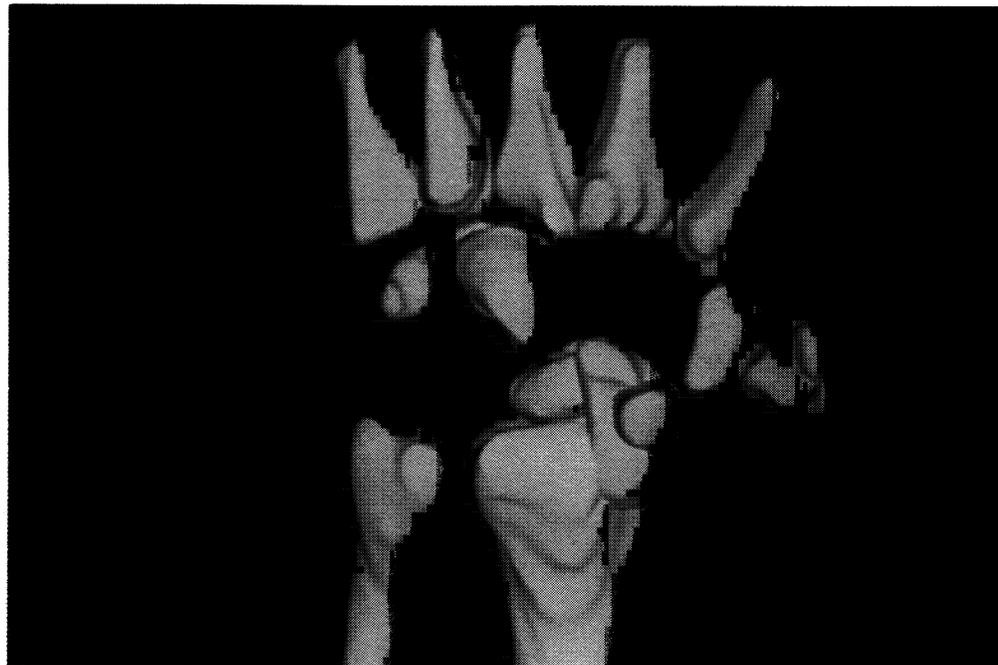
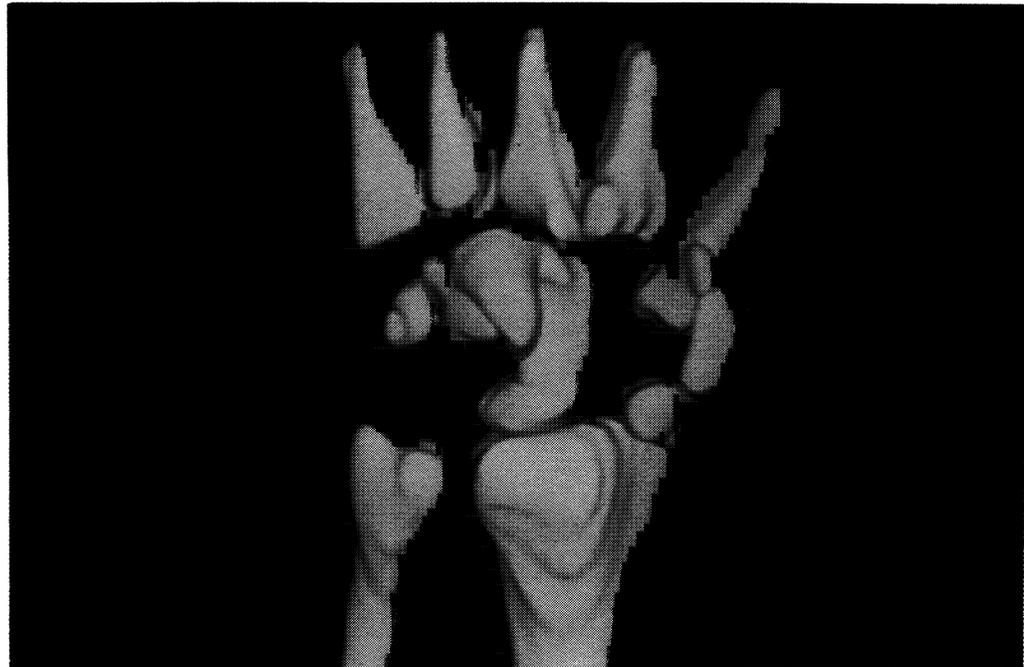


Fig. 9:

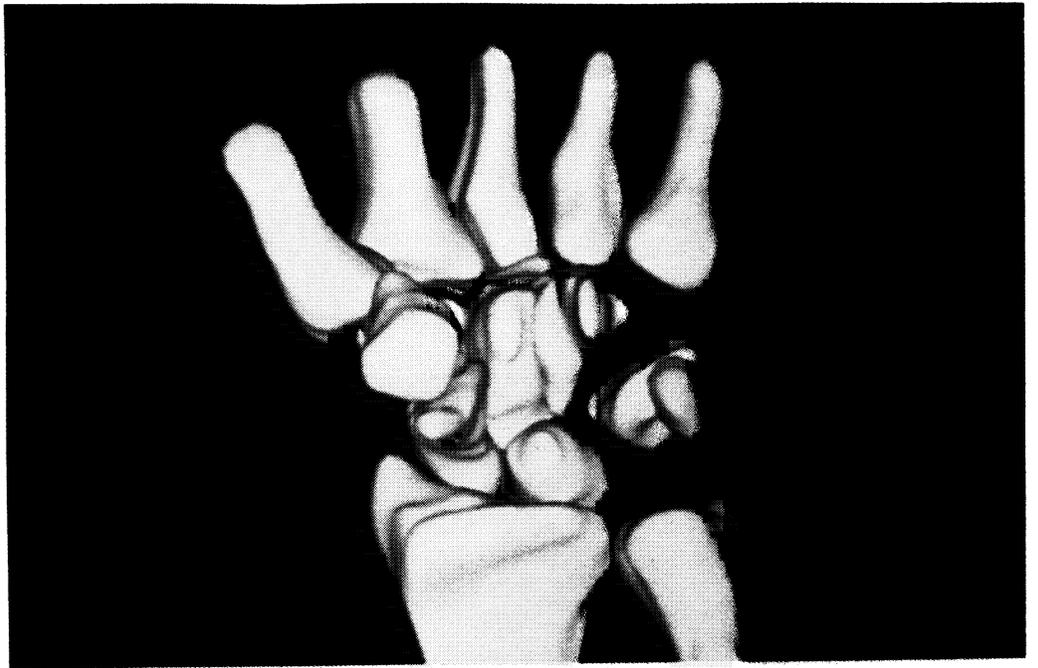


Fig. 10:

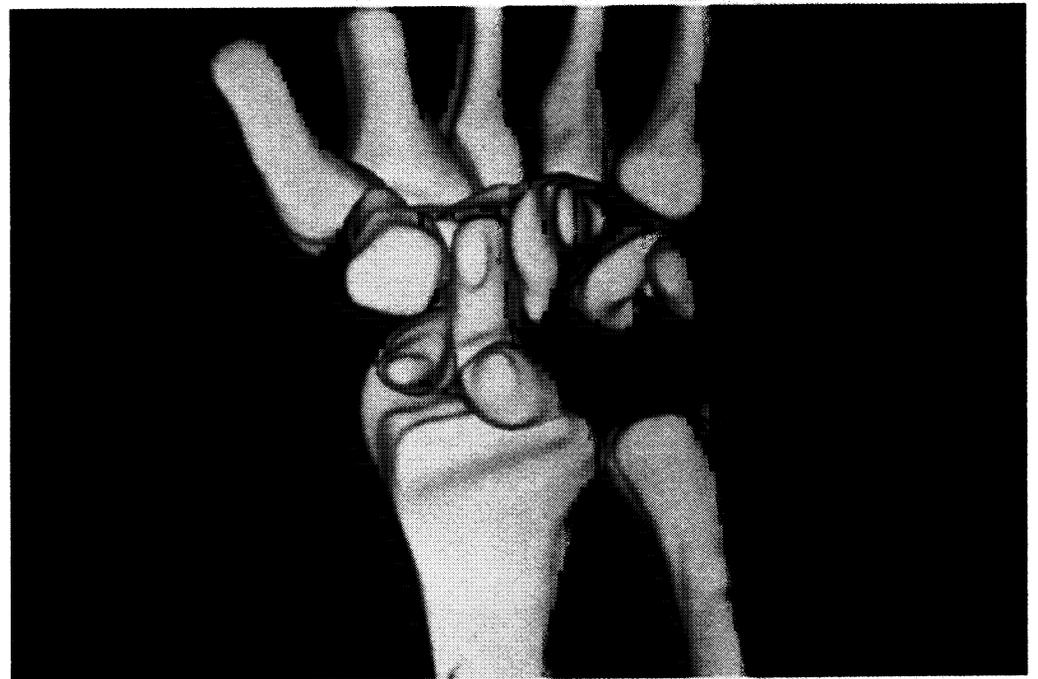
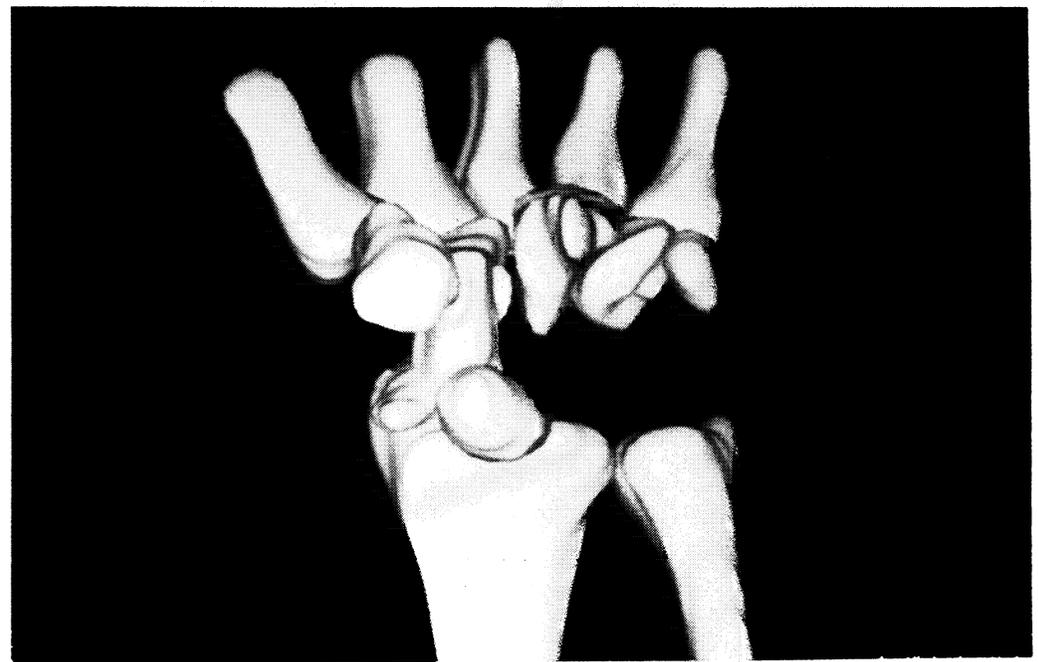
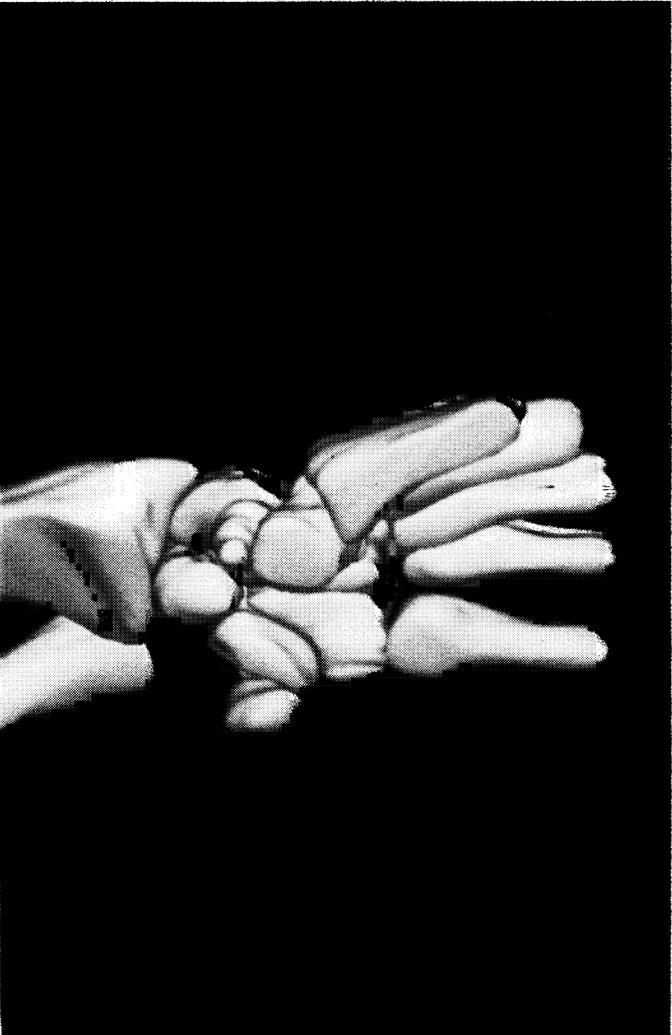
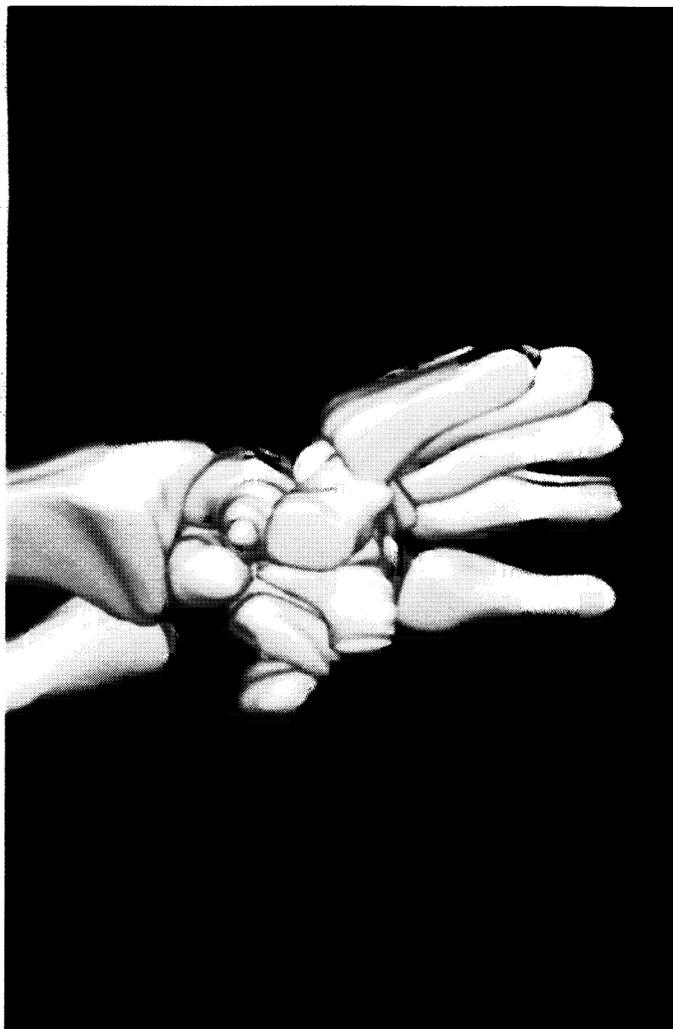


Fig. 11:









### 8.3. Conclusion.

Le contrôle du pas d'intégration par un algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif, s'avère suffisant puisque moins de 2% des contacts détectés pendant la simulation présentent un chevauchement important (rapport de la distance entre sphères et de la somme des rayons inférieur à 2/3).

Bien que les animations soient loins de retranscrire la réalité du phénomène (faute d'une stabilisation du système par les ligaments), le modèle proposé présente l'avantage d'être un modèle de la Dynamique des os du carpe, global et autonome. Son autonomie permettra d'intégrer de nouvelles contraintes équivalentes aux ligaments.

Ce modèle constitue ainsi le premier modèle physique approché à ce jour, d'une des articulations les plus complexes du corps humain.



## 9. Conclusion.

Ce travail répond à la question de la modélisation de la Dynamique d'un système d'os du carpe supposés indéformables, aux mouvements proches et aux contacts multiples. Le modèle développé, présente l'avantage d'être un modèle physique, dont les seuls paramètres inconnus sont les constantes biomécaniques des ligaments et les coefficients de frottement entre les os. Ces paramètres pourront être déterminés grâce à important travail d'acquisition de données, tel qu'il s'effectue déjà dans certains laboratoires tels que la Mayo Clinic aux USA [GARCIA-ELIAS, 89].

Contrairement à d'autres types de modélisation de la Dynamique, une modélisation physique permet de s'affranchir du mode d'intégration des trajectoires des os. La validation du modèle, se heurte toutefois au temps de calcul important des images. Les perspectives de ce travail consistent donc à affiner le modèle 3D statique, par un meilleur lissage des coupes et une amélioration de la compression de données de l'axe médian, mais aussi à paralléliser les étapes de détection de contact et d'intégration des équations de la Dynamique. Le développement d'images plus rapide permettra alors de faciliter le travail de modélisation du système, et de validation des résultats.

La segmentation des images du carpe représente la première étape majeure de la modélisation de la Dynamique. Si le rôle des ligaments peut être pris en compte théoriquement, la difficulté de les détecter automatiquement sur des images IRM ou scanner, représente en soit une direction de recherche supplémentaire. Un placement interactif des points d'attache des ligaments, grâce à une connaissance anatomique, permet de résoudre momentanément une partie du problème, mais les propriétés mécaniques des ligaments restent encore à déterminer (raideur, longueurs maximales...).

D'une recherche informatique, mécanique et mathématique, on pourra alors envisager non seulement une exploitation médicale de ce modèle, mais aussi le développement de nouveaux concepts d'articulations à deux ou trois degrés de liberté en robotique.

## 10. Annexe.

### 10.1. Modélisation 3D continue: fonctions splines.

En dimension 1, soit un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , et la suite des paramètres  $t_j$ :  $((t_j)_{1 \leq i \leq n})$  telle que  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ , auxquels correspondent les points de valeur  $((t_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}, z_i = f(t_i))$ . Soit  $\rho$  un paramètre d'ajustement. Soit l'ensemble  $H^2[a, b]$  des fonctions 2 fois dérivables, de dérivées continues, dont on peut définir l'intégrale du carré de la fonction sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On montre [Laurent, 72] qu'il existe une unique fonction de  $H^2[a, b]$  polynomiale par morceau qui interpole la suite de points  $((t_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}, z_i = f(t_i))$  en respectant l'équation E1:

$$\int_a^b \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \cdot dt = \min_{\substack{x \in H^2[a, b], \\ x(t_i) = z_i, 1 \leq i \leq n}} \left( \int_a^b \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot dt \right) \quad E_1$$

On montre également qu'il existe une unique fonction  $\sigma$  du même type, qui lisse les points  $((t_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}, z_i = f(t_i))$  telle que :

$$\int_a^b \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \cdot dt + \rho \cdot \sum_{i=1}^n (\sigma(t_i) - z_i)^2 = \min_{\substack{x \in H^2[a, b], \\ x(t_i) = z_i, 1 \leq i \leq n}} \left( \int_a^b \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot dt + \rho \cdot \sum_{i=1}^n (x(t_i) - z_i)^2 \right) \quad E_2$$

Ces fonctions définissent la classe des fonctions B-Splines. De Boor montre très semblablement sur  $\mathbb{R}^2$  et avec un maillage régulier de données  $\left( (t_i, z_j)_{(i,j) \in I \times J} \right)$  du pavé  $[a,b] \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2$ , qu'il existe une unique fonction biparamétrée  $\sigma$  polynomiale par morceaux qui minimise parmi toutes les fonctions de  $H^2[a,b] \times H^2[c,d]$ , la fonctionnelle  $E_3$ .

$$\int_a^b \int_c^d \frac{d^4 \sigma}{d^2 x \cdot d^2 y} \cdot dx \cdot dy + \rho \cdot \sum_{(i,j) \in I \times J} \left( \sigma(x_i, y_j) - z_{i,j} \right)^2 \quad E_3$$

La fonction B-Spline  $B_i(t)$  est définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ , partout nulle ailleurs:

$$t \in ]-\infty, 0] \cup [1, \infty[ \quad B_i(t) = 0$$

$$t \in [0, 0.25[ \quad B_i(t) = t^3$$

$$t \in [0.25, 0.5[ \quad B_i(t) = t^3 - 4x(t-0.25)^3$$

$$t \in [0.5, 0.75[ \quad B_i(t) = t^3 - 4x(t-0.25)^3 + 6x(t-0.5)^3$$

$$t \in [0.75, 1[ \quad B_i(t) = t^3 - 4x(t-0.25)^3 + 6x(t-0.5)^3 - 4x(t-0.75)^3$$

## 10.2. Rappels de Mécanique.

### 10.2.1. Cinématique du solide.

La rotation d'un solide se caractérise par un vecteur de rotation instantanée  $\vec{\omega}$ . La vitesse de tout point M du solide se décompose alors aussi, en une vitesse de translation  $\vec{V}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt}$  et une vitesse de rotation  $\vec{V}_r$  donnée par la formule fondamentale de la dérivation égale au produit vectoriel de la vitesse instantanée de rotation du repère  $\vec{\omega}$  (qui est la même que celle du solide puisqu'ils sont liés) et du vecteur  $\vec{GM}$ :  $\vec{V}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{GM}$ . La vitesse absolue d'un point M du solide  $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ , calculée dans le repère Galiléen  $\left(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\right)$ , s'écrit ainsi:

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{V}_G + \vec{V}_r = \frac{d\vec{OG}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{GM} \quad E_4$$

Le moment cinétique du solide  $\vec{\sigma}_G$  représente la somme des moments des quantités de mouvement de rotation de tout point M du solide par rapport à G.

$$\vec{\sigma}_G = \int_M \vec{GM} \wedge \vec{V}_r \cdot dm \quad E_5$$

Ce calcul peut se réduire au produit matriciel de la matrice d'inertie  $\tilde{I}$  du solide (matrice symétrique à coefficients notés (A, B, C, D, E, F) définis dans le repère du solide) et du vecteur de rotation instantanée  $\vec{\omega}$ .

$$\vec{\sigma}_G = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \vec{\omega} \quad E_6$$

Les axes principaux d'inertie d'un solide forment un repère orthogonal des trois axes de meilleure répartition de la masse du solide. La matrice d'inertie est toujours diagonalisable car symétrique à coefficients réels. Ses valeurs propres sont les moments d'inertie, les vecteurs propres dirigent ses axes principaux. Dans le cas particulier où les trois moments sont égaux, le solide est dit de symétrie sphérique et tout repère cartésien est un repère d'inertie. La matrice d'inertie peut alors être prise scalaire de valeur la valeur propre commune. Si seulement deux valeurs propres sont confondues, tout plan orthogonal  $(G, x, y)$  au vecteur propre, supposé diriger l'axe  $(G, z)$ , forme un repère d'inertie. Le solide est de symétrie de révolution.

Dans un repère mobile d'inertie, la vitesse de rotation instantanée du repère mobile est identique à celle du solide (ils sont liés), la dérivation absolue du moment cinétique du solide exprimée dans le repère mobile se décompose alors en deux termes, l'un de mouvement relatif  $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ , l'autre de rotation  $\vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}$ .

### 10.2.2. Rappel de Mécanique Analytique.

Toute cette partie de la Mécanique a été développée avec pour base le principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert. Le principe des travaux virtuels a été employé pour la première fois par Galilée, mais c'est Jean Bernouilli qui en a signalé, dans une lettre à Varignon daté de 1717, la généralité et son utilité pour des problèmes de Statique. D'Alembert a montré en 1743 que la mise en équation d'un problème de Dynamique peut être ramené à celle d'un problème de statique. Enfin Lagrange en a constitué définitivement la doctrine en 1788 dans son ouvrage intitulé Mécanique Analytique.

Grâce au principe des travaux virtuels, le développement de la Mécanique Analytique s'est appuyé sur des considérations énergétiques et son formalisme sur du calcul différentiel. Elle aboutit aux équations de Lagrange. La théorie des fonctionnelles montre que sous certaines conditions, ces équations sont également une condition d'optimisation.

### 10.2.2.1. Principe des travaux virtuels. Principe de d'Alembert.

Soit  $M$  un point matériel auquel est appliquée une force  $\vec{F}$ . Soit un déplacement infiniment petit arbitraire  $\vec{MM'}$  : on l'appelle *déplacement virtuel* pour le distinguer du déplacement réel que prend ce point sous l'action des forces qui agissent sur lui. Un déplacement virtuel est un déplacement susceptible de se produire. Parmi l'ensemble des déplacements virtuels, un seul sera éventuellement réellement parcouru par le système.

Le travail virtuel de la force  $\vec{F}$  le long du déplacement  $\vec{MM'}$  est égal au produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{MM'}$ .

On définit des liaisons sans frottement si pour tout déplacement virtuel compatible avec elles, la somme des travaux virtuels des forces de liaison est nulle. Soit un système mécanique assujéti à des liaisons sans frottement. On considère la division des forces appliquées à ce système en des forces de liaison et des forces dites directement appliquées.

*Le principe des travaux virtuels énonce la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un système. Pour tout déplacement virtuel du système, compatible avec les liaisons, la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées est nulle.*

Pour tout système soumis à des liaisons données, le principe de d'Alembert s'énonce alors:

*Les équations du mouvement d'un système matériel s'obtiennent en écrivant qu'il y a équilibre, à chaque instant, entre les forces directement appliquées, les forces de liaison, et les forces d'inertie.*

Gauss résume l'intérêt de ces deux principes pour l'analyse des problèmes de dynamique.

*"Le principe des travaux virtuels transforme tout problème statique en une question de mathématiques pures et par le principe de d'Alembert, la Dynamique est à son tour, ramenée à la Statique. Il résulte de là qu'aucun principe fondamental de l'équilibre et du mouvement ne peut être essentiellement distinct de ceux que nous venons de citer et que l'on pourra toujours, quel qu'il soit, le regarder comme leur conséquence plus ou moins immédiate.*

*On ne doit en conclure que tout théorème nouveau soit, pour cela sans mérite. Il sera au contraire, toujours intéressant et instructif d'étudier les lois de la nature sous un nouveau point de vue, soit que l'on parvienne ainsi à traiter plus simplement telle ou telle question particulière, ou que l'on obtienne seulement une plus grande précision dans les énoncés.*

*Le grand géomètre (Lagrange), qui a si brillamment fait reposer la science du mouvement sur le principe des travaux virtuels, n'a pas dédaigné de perfectionner et de généraliser le principe de Maupertuis, relatif à la moindre action, et l'on sait que ce principe est employé souvent par des géomètres d'une manière très avantageuse."*

Gauss, tome IV du Journal de Crelle.

Pour un système à liaisons sans frottement, soit  $(\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v)$  les trois composantes d'un déplacement virtuel d'un point M du système compatible avec les liaisons qui ont lieu à l'instant t. Soit  $(F_x, F_y, F_z)$  les composantes de la résultante des forces directement appliquées à M. Les projections de la force d'inertie en M se définissent par le triplet  $\left(-m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, -m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, -m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right)$ .

Du principe de d'Alembert, il résulte qu'il y a équilibre à chaque instant entre toutes les forces au cours du mouvement. Pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, la somme des travaux virtuels est donc nulle.

On en déduit donc l'équation générale de la dynamique à tout instant:

$$\sum_v \left( F_x - m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \right) \cdot \delta x_v + \left( F_y - m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \right) \cdot \delta y_v + \left( F_z - m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \right) \cdot \delta z_v \quad E7$$

### 10.2.2.2. Équations de Lagrange.

Dans le cas d'un système holonome à  $k$  degrés de liberté, tout point  $M$  du système peut s'écrire en fonction de  $k$  paramètres  $q_1, q_2, \dots, q_k$ . Tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons s'écrit donc dans la base des déplacements virtuels  $(\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k)$  de l'espace des paramètres.

En appliquant alors le principe de d'Alembert et en développant le travail virtuel des accélérations de l'équation générale de la dynamique, on obtient l'équation :

$$\sum_{i=1}^k \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i \quad E_8$$

Comme cette équation est vérifiée quels que soient les déplacements  $\delta q_i$ , chaque terme en facteur avec  $\delta q_i$  doit donc être nul. L'équation générale devient dans ce cas équivalente au système des équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - F_i = 0 \text{ avec } F_i = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \quad E_9$$

### 10.2.2.3. Le théorème d'Euler-Lagrange.

Soit  $I$  une fonctionnelle, dans laquelle  $H$  est une fonction de la variable  $t$ , et des fonctions  $u(t)$  et de sa dérivée  $\frac{du}{dt}$ :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} H \left( t, u, \frac{du}{dt} \right) \cdot dt \quad E_{10}$$

Après évaluation de l'intégrale,  $I$  ne dépend que de la trajectoire  $u(t)$  entre les points  $u(t_1)$  et  $u(t_2)$ . Si  $\hat{u}(t)$  est une trajectoire rendant extrémale l'intégrale  $I$ ,  $\hat{u}(t)$  doit donc satisfaire à la condition  $\frac{dI}{du} = 0$ , qui est équivalente à la condition  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial H}{\partial u} = 0$ . C'est le théorème d'Euler-Lagrange.

Dans le cas d'un système conservatif, l'énergie totale est invariante quelle que soit la trajectoire (virtuelle ou réelle). Il est délicat dans ce cas d'optimiser l'énergie mécanique totale puisqu'elle est constante. On définit l'action de Jacobi comme la fonctionnelle  $J = \int_{t_1}^{t_2} L \left( t, \vec{q}, \frac{d\vec{q}}{dt} \right)$  où  $L$  est la fonction de Lagrange définie comme la différence de l'énergie cinétique totale et du potentiel des forces appliquées au système,  $L = T - W$ . L'application du théorème d'Euler-Lagrange conduit au théorème de Lagrange-Hamilton:

$$J \text{ est extrémale} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad E_{11}$$

Les équations de Lagrange qui définissent, on le sait déjà, les équations du mouvement réel, sont donc aussi un modèle Dynamique optimisant dans l'espace des paramètres, une fonction énergétique caractéristique du système.

### 10.3. Optimisation d'un critère Mécanique.

#### 10.3.1. Courbes de potentiels de contact et de liaisons ligamentaires.

Soit une fonction différentiable  $v_c(d)$  d'une variable de distance  $d$ , vérifiant les conditions suivantes:

- peu d'influence à distance :  $\lim_{d \rightarrow \infty} v_c(d) \cong 0$
- dynamique de réaction très rapide au voisinage d'un seuil  $a$ ,  $a \geq 0$ .
- potentiel maximal en  $a$ .

Soit un contact entre deux boules de deux os distincts. Soit  $r = r_1 + r_2$  la somme des rayons des deux sphères en contact, et  $d$  la distance entre leurs centres.

Puisqu'il y a contact,  $d$  et  $r$  vérifient l'inégalité  $0 \leq d \leq r$ .

Selon le choix du seuil  $a$ , le potentiel de contact réagit plus ou moins fort au chevauchement: si le seuil  $a$  est choisi trop proche de 0, la minimisation de  $V$  doit alors empêcher tout chevauchement.

Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ , et  $v_c(x) = \frac{K}{x}$ , pour  $x \geq a$ , et  $v_c(x) = \frac{K}{a}$  sinon:

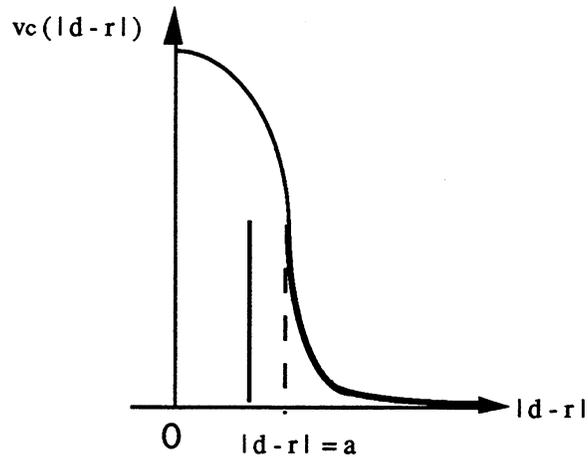


Fig. 1: Critère de contact en fonction de la distance  $d$  entre deux boules en contact de rayons  $r_i$  et  $r_j$ .

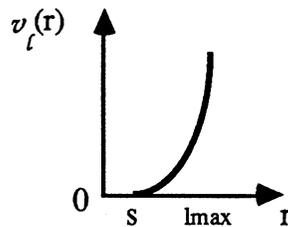


Fig. 2: Critère de tension d'un ligament en fonction de son élongation  $r$ , et de son élongation maximale  $h_{max}$ .

### 10.3.2. Algorithmes de minimisation numérique.

Le principe de ces méthodes, consiste à minimiser une fonction  $f$  en cheminant dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  le long de la plus grande pente de  $f$  jusqu'à tomber dans un creux de potentiel. Cette pente s'évalue de façon différente s'il est ou non possible de calculer le gradient de  $f$ .

Un minimum rencontré est local ou global. Les algorithmes de minimisation ne peuvent effectuer cette distinction et une heuristique consiste à relancer l'algorithme après évaluation d'un minimum, avec de nouvelles conditions initiales les plus éloignées possibles du minimum déjà trouvé, pour converger éventuellement vers un nouveau. Comme un minimum local de potentiel se traduit par une position d'équilibre physique, on ne cherchera pas la distinction.

Si le randonneur en montagne qui descend dans la vallée connaît la carte du relief de la région, il lui est aisé de prévoir son chemin pour descendre dans la vallée la plus proche. Une telle carte consiste à évaluer le potentiel pour tout point  $M$  de  $\mathbb{R}^n$ , ce qui est bien évidemment trop coûteux. Notre randonneur doit donc progresser pas à pas en cherchant la pente descendante de  $f$ .

Parmi toutes les méthodes numériques de minimisation d'une fonction  $f\left(\vec{q}\right)$ , certaines ne nécessitent que l'évaluation de la fonction (algorithme de NELDER-MEAD utilisant la notion de simplex dans  $\mathbb{R}^n$  pour envelopper le minimum à chaque pas). Ces méthodes sont robustes mais elles sont très coûteuses en évaluation de  $f$ .

D'autres algorithmes sont souvent plus rapides quand ils tiennent compte du gradient qui est une information privilégiée pour parcourir la fonction (notre randonneur connaît avant de progresser, la pente là où il se trouve; tel une goutte d'eau, il lui suffit alors de se laisser glisser sur la pente).

A partir d'un vecteur initial de paramètres  $M_0$ , un nouveau point  $M_{i+1}$  se calcule en minimisant  $f\left(\vec{q}\right)$  le long de la droite des paramètres d'origine  $M_i$  et de direction le gradient  $\vec{\nabla}f(M_i)$  de  $f$  au point  $M_i$ . La pente est ici calculée localement en  $M_i$ , elle expose donc notre marcheur à zigzaguer sur son chemin au gré de ses valeurs.

Les algorithmes utilisant le gradient sont au contraire bâtis de façon à tenir compte du chemin déjà parcouru : le marcheur adopte depuis le point  $M_i$  une direction qui tient compte de celles déjà adoptées aux points  $M_j$ , où  $j < i$  ainsi que de la valeur du gradient en  $i$ . Ces méthodes sont regroupées sous le nom d'algorithmes de minimisation du gradient conjugué: algorithme de FLETCHER-REEVES, de POLAK-RIBIERE, de FLETCHER-POWELL [POLAK, 71], [JACOBS, 77], [STOER, 80].

#### 10.4. Lois du frottement sec.

Les premières expériences sur l'étude des frottements de glissement ont été réalisées par le français Coulomb en 1781. Considérant l'application qui nous concerne je traiterai plus particulièrement des frottements pendant le mouvement.

##### 10.4.1. Les frottements secs entre solides en contact.

L'ensemble des actions exercées sur un corps par un autre peut être réduit à une force appliquée en un point de contact et à un couple. La modélisation 3D des os par des boules facilite la détermination du point de contact puisqu'il est nécessairement situé sur l'axe des centres des boules en contact. Le vecteur normal est de même immédiatement donné par le vecteur directeur de cet axe.

Soit deux corps solides de surfaces  $S$  et  $S'$  assujettis à rester en contact. A chaque instant  $t$  un point matériel  $A$  de la surface mobile  $S$  se trouve en contact avec un point  $A'$  de la surface  $S'$ . Les actions de  $S'$  sur  $S$  sont ainsi:

- une force  $N$  appliquée à  $S$  en  $A$  et dirigée normalement aux surfaces en contact: cette force est la réaction normale s'opposant à la pénétration de  $S'$  dans  $S$ .

- une force  $F$  appliquée au même point  $A$ , située dans le plan tangent aux surfaces en contact: cette force est le frottement de glissement s'opposant au glissement.

- un couple  $G$  dont l'axe est normal aux surfaces en contact: c'est le couple de frottement de pivotement s'opposant au pivotement.

- un couple  $H$  dont l'axe est situé dans le plan tangent commun aux surfaces en contact: c'est le couple de roulement s'opposant au roulement.

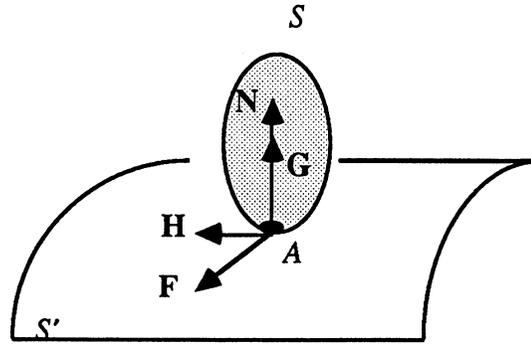


Fig. 3: Forces et couples de frottement sec entre solides.

Les actions de S sur S' en A sont respectivement des forces et des couples opposés aux précédents. En général G et H sont très petits devant N et F.

Soit  $\vec{V}_r$  la vitesse relative de A de S par rapport à S',  $\vec{V}_r = \vec{V}_A^S - \vec{V}_A^{S'}$ . Si elle n'est pas nulle, elle se situe dans le plan tangent commun aux deux surfaces au point de contact. Dans ces conditions, les vitesses relatives des points du corps S par rapport à S' (S' regardé comme immobile) sont les mêmes que si le corps S était animé d'une vitesse de translation identique à la vitesse relative  $\vec{V}_r$  du point A, d'une rotation  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_S - \vec{\omega}_{S'}$  autour d'un axe passant par A et se décomposant en une composante  $\omega_t$  dans le plan tangent en A aux deux surfaces, appelée rotation de roulement, et d'une composante normale à ce plan  $\omega_n$ , appelée rotation de pivotement.

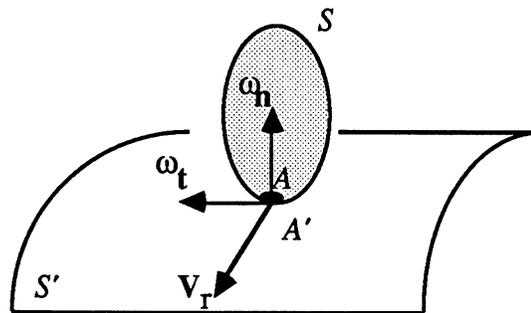


Fig. 4: Vitesses de glissement et de rotations instantanées.

Quand la rotation instantanée  $\omega$  s'annule, on dit que le mouvement relatif de S par rapport à S' est un glissement. Quand la vitesse  $V_r$  s'annule, il n'y a pas glissement, mais roulement et pivotement. En général il y a glissement, roulement et pivotement.

#### 10.4.2. Frottement de glissement pendant le mouvement.

Dans le cas du glissement, la réaction de frottement se décompose en deux forces, l'une normale N et l'autre tangentielle F assujetties aux trois lois suivantes:

- la force de frottement est dirigée en sens contraire de la vitesse relative du point matériel situé en A par rapport à S'.
- elle est indépendante de la grandeur de cette vitesse
- elle est proportionnelle à la réaction normale  $F = f.N$

Le coefficient f représente le coefficient de frottement de S sur S'. Les lois sont applicables tant que la vitesse relative du point matériel A par rapport à S' n'est pas nulle. Si cette vitesse s'annule:

- soit S reste immobile par rapport à S' et la réaction de S' sur S suit les lois du frottement de glissement au repos
- soit le mouvement relatif de S par rapport à S' est un mouvement de roulement et de pivotement; c'est le cas général. Dans ce cas il n'y a plus glissement, et les lois du frottement de glissement ne s'appliquent plus. On admet cependant qu'on peut appliquer les lois du frottement de glissement à l'état de repos, c'est à dire regarder la réaction de S' sur S comme formée d'une composante normale N et d'une composante tangentielle F tel que  $F < f.N$  et de direction inconnue.

Soit  $V_r$  la vitesse relative par rapport à S' du point A de S. Tant que  $V_r$  n'est pas nulle, il y a glissement. Si à l'instant  $t_0$  elle s'annule il faut tester si les solides vont rouler et pivoter à  $t > t_0$ .

On supposera que tel est le cas, et on calculera N et F. Si on vérifie effectivement  $F < f.N$  alors les deux corps roulent et pivotent jusqu'à ce que l'inégalité s'inverse. Si au contraire  $F \geq f.N$ , alors il y a amorce de mouvement de glissement et il faut dans ce cas écrire les équations pour ce type de frottement.

### 10.4.3. Frottement de roulement et de pivotement.

Si  $\omega_n = 0$  à l'instant  $t$  et aux instants immédiatement suivant alors on a l'inégalité  $G \leq f_p \cdot N$ . Sinon,  $G$  et  $\omega_n$  sont de sens opposés et on a l'égalité  $G = f_p \cdot N$  où  $f_p$  est le coefficient de pivotement.

De même si  $\omega_t = 0$  à l'instant  $t$  et aux instants immédiatement suivant on a l'inégalité  $H \leq f_r \cdot N$ . Sinon on a l'égalité  $H = f_r \cdot N$ .

S'il y a roulement sans glissement on a  $F \leq f \cdot N$  et  $H = f_r \cdot N$ . S'il y a glissement sans roulement,  $F = f \cdot N$  et on peut ordinairement négliger  $H$ .

Le roulement d'un solide de surface  $S$  sur un solide de surface  $S'$  en contact aux points  $(A, A')$ ,  $\vec{V}_A^S = \vec{V}_{A'}^{S'}$ , conduit à écrire 3 conditions sur les 6 paramètres de position et d'orientation et leurs dérivées de chaque solide .

### 10.5. Intégration fondée sur les secondes équations d'Euler.

Soit  $R$  une rotation d'angle  $\Theta$  fini, d'axe une droite passant par le centre d'inertie  $G$  du solide, qui fait correspondre les axes mobiles du repère d'inertie aux axes fixes. La trace de la rotation  $R$  est invariante par tout changement de repère. En exprimant l'égalité des traces entre sa représentation par les angles d'Euler ou par un changement de repère tel que l'axe  $(G, z)$  coïncide avec l'axe de rotation, son angle  $\Theta$  s'identifie par l'équation:

$$\cos \Theta = \cos\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad E_{12}$$

Soient  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les angles de l'axe de rotation avec les axes du repère fixe. Ces angles s'identifient également à l'instant initial grâce à la matrice de passage entre les coordonnées dans le repère fixe et celles dans le repère mobile. Soient  $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$  les 4 paramètres réels quaternioniens du mouvement :

$$\begin{cases} \lambda = \cos \alpha \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ \mu = \cos \beta \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ \nu = \cos \gamma \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ \rho = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \quad \text{E13}$$

avec

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1 \quad \text{E14}$$

A l'instant initial avant tout mouvement, tous ces paramètres sont parfaitement identifiés. Les formules de transfert d'un repère à l'autre s'écrivent alors linéairement en fonction des nouveaux paramètres  $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ . Les secondes formules d'Euler s'écrivent alors:

$$\begin{cases} \frac{p}{2} = \nu \cdot \frac{d\mu}{dt} - \mu \cdot \frac{d\nu}{dt} + \lambda \cdot \frac{d\rho}{dt} - \rho \cdot \frac{d\lambda}{dt} \\ \frac{q}{2} = -\rho \cdot \frac{d\mu}{dt} + \lambda \cdot \frac{d\nu}{dt} + \mu \cdot \frac{d\rho}{dt} - \nu \cdot \frac{d\lambda}{dt} \\ \frac{r}{2} = -\lambda \cdot \frac{d\mu}{dt} - \rho \cdot \frac{d\nu}{dt} + \nu \cdot \frac{d\rho}{dt} + \mu \cdot \frac{d\lambda}{dt} \end{cases} \quad \text{E15}$$

Le système des équations de la dynamique sur un os, comporte donc les mêmes équations sur les forces et les moments, le système différentiel des équations sur les angles d'Euler étant transformées en un système linéaire en  $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q & -p \\ -r & 0 & p & -q \\ q & -p & 0 & -r \\ p & q & r & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \rho \end{bmatrix} \quad \text{E16}$$

Sous réserve de la condition:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1 \quad \text{E17}$$

Le développement des équations de la Dynamique en  $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$  simplifie grandement les systèmes différentiels; la condition  $E_{17}$  réduit malheureusement l'espace des solutions sur une hypersurface inconnue. A cause de cette condition, ce développement n'a pas été poursuivi..

**10.6. Intégration d'un système différentiel  $\frac{d\vec{q}}{dt} = f\left(t, \vec{q}\right)$  par un algorithme de Runge-Kunta d'ordre 4.**

L'algorithme de Runge-Kunta d'ordre quatre [GEAR, 71], représente sans doute la méthode la plus connue mais aussi la plus fiable pour ce type de système différentiel comportant des singularités. Sa robustesse se paye toutefois par un surcoût de calcul.

Sur un intervalle de temps  $I_n = [t_n, t_n+h]$ , l'algorithme de Runge-Kunta encadre la solution  $q(t)$  par quatre calculs de  $f$  à des valeurs intermédiaires de  $t$  sur l'intervalle  $I_n$ . Il affine ainsi le développement d'Euler par quatre paramètres supplémentaires  $k_1, k_2, k_3, k_4$  de façon à atteindre une précision de développement d'un ordre de  $dt^5$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, q_n) \cdot dt \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{dt}{2}, q_n + \frac{k_1}{2}\right) \cdot dt \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{dt}{2}, q_n + \frac{k_2}{2}\right) \cdot dt \\ k_4 = f(t_n + dt, q_n + k_3) \cdot dt \end{array} \right\} \text{ ainsi } q_{n+1} = q_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(dt^5) \quad E_{18}$$

i	a <sub>i</sub>	b <sub>ij</sub>					c <sub>i</sub>	c <sub>i</sub> <sup>4</sup>
1						<u>37</u>	<u>2825</u>	
						378	27648	
2	<u>1</u>	<u>1</u>				0	0	
	5	5						
3	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>9</u>			<u>250</u>	<u>18575</u>	
	10	40	40			621	48384	
4	<u>3</u>	<u>3</u>	-0,9	<u>6</u>		<u>125</u>	<u>13525</u>	
	5	10		5		594	55296	
5	1	<u>-11</u>	<u>5</u>	<u>-70</u>	<u>35</u>	0	<u>277</u>	
		54	2	27	27		14336	
6	<u>7</u>	<u>1631</u>	<u>175</u>	<u>575</u>	<u>44275</u>	<u>253</u>	<u>512</u>	
	8	55296	512	13824	110592	4096	1771	
j	1	2	3	4	5		0,25	

Fig. 5: Tableau des coefficients optimisés par Cash et Karp [CASH, 90].

### 10.7. Visualisation graphique.

Le calcul des images est effectué soit à partir d'un logiciel de visualisation tel qu'AVS (à partir d'une autre modélisation 3D que l'axe médian), soit par le calcul d'un lancer de rayon. L'algorithmique du lancer de rayon sur des modèles conçus à partir d'un recouvrement de boules doit être de même soigneusement étudiée pour ne pas aboutir à des calculs excessivement coûteux. Ce lancer de rayon n'est pas implanté sur AVS ce qui pénalise lourdement le calcul d'image (près de 10 minutes de temps de calcul pour des modèles d'os simulés dans un cube de données de taille 512<sup>3</sup>, contre 3 minutes avec le lancer de rayon présenté ci-dessous).

La visualisation par lancer de rayon consiste en effet à calculer l'intensité d'un pixel  $P(i,j)$  de l'image, en calculant l'intersection d'un rayon dirigé par un vecteur  $\vec{n}$  donné, d'axe la droite  $(P, \vec{n})$ , avec le premier objet rencontré sur son chemin. Dans notre cas, soit le rayon ne rencontre aucun obstacle (la couleur du pixel représente alors le fond de l'image), soit il intersecte une première boule de centre  $C$  et de rayon  $r$  en un point  $M$ . Le point  $M(x,y)$  sur la droite  $(P, \vec{n})$  se définit alors comme l'intersection d'une droite et d'une sphère : il existe donc un réel  $\lambda$  vérifiant les équations  $E_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \vec{CM} \right\| = r \\ \lambda \in \mathbb{R}, M = P + \lambda \cdot \vec{n} \end{array} \right\} \quad E_{19}$$

Cette intersection n'est possible que si l'équation  $\left\| \vec{CM} \right\| = r$ , développée en  $\lambda$ , admet au moins une solution  $E_2$ .

$$(C_x - P_x - \lambda \cdot n_x)^2 + (C_y - P_y - \lambda \cdot n_y)^2 + (C_z - P_z - \lambda \cdot n_z)^2 = r^2 \quad E_{20}$$

Dans l'affirmative, l'intensité  $I(P)$  du pixel  $P$  peut se calculer en première approximation, à l'aide d'un coefficient de réverbération  $\alpha_r$  et de rayonnement  $\beta$  tels que:

$$I(P) = \alpha_r + \beta \cdot \left( \vec{n} \cdot \vec{CM} \right) \quad E_{21}$$

Si le lancer de rayon était directement appliqué au modèle, il conduirait à des calculs prohibitifs. Il faudrait lancer un rayon depuis chaque pixel de l'image, puis examiner toutes les boules de tous les os pour déterminer quelle sera la première boule rencontrée sur son chemin (soit  $4 \cdot 10^9$  résolutions de l'équation  $E_1$  pour définir une image de taille  $512^2$  pour les quinze os du carpe définis par seulement mille boules !)

Un algorithme de pré-projection des os sur le plan de l'image, permet de simplifier la détection des parties cachées de la scène:

- les coordonnées de chaque os sont transposées dans le nouveau repère défini par le plan de l'image et le nouvel axe  $(O, z')$  dirigé par le rayon de l'observateur  $\vec{n}$ .

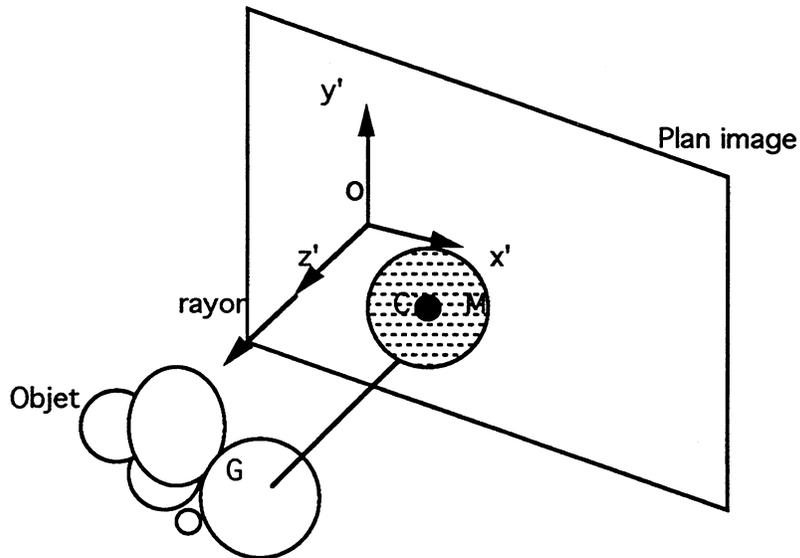


Fig. 6: Plan du lancer de rayon.

- chaque boule de chaque os est alors projetée sur le plan de l'image (coût en  $O(M)$ ) pour un système de  $M$  boules. En effet, à partir de la projection sur le plan en un point  $C$  du centre  $G$  d'une boule, on effectue un lancer de rayon depuis chaque point  $M(i,j)$  du plan compris dans le disque équivalent à la boule projetée ( $d(C, M) < r$ ). En chacun de ces points on définit ainsi l'altitude  $\lambda$  qui est alors stockée dans un tableau intermédiaire. Il suffit alors de ne retenir que la plus grande altitude  $\lambda$  pour toutes les boules projetées de tous les os, ainsi que l'identité de la boule et de l'os à cette altitude.

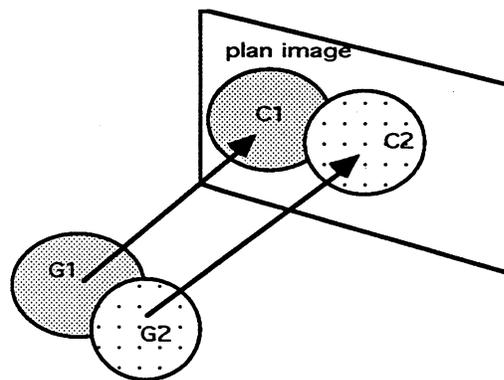


Fig. 7: Pré-projection des boules sur le plan image.

La pré-projection des boules et la détermination de la plus grande altitude définissent donc  $O(M)$  intégrations de l'équation  $E_1$ . On a donc évité de résoudre cette équation pour tous les pixels du fond de l'image.

- de chaque pixel comportant alors au moins une boule traversée, il suffit de calculer l'intensité en fonction du  $\lambda$  correspondant.

**11. Bibliographie.**

- [APPELL, 28] P. Appell, S. Dautheville, Précis de Mécanique Rationnelle, Introduction à l'étude de la physique et de la mécanique appliquée, Gauthier Villars 1928.
- [APPELL, 11] P. Appell, Traité de Mécanique Rationnelle, Tome 2, Dynamique des systèmes, Mécanique Analytique, Gauthier Villars 1911.
- [ARMSTRONG, 85] W.W. Armstrong, M.W. Green, The dynamics of Articulated Rigid Bodies for Purpose of Animation, The Visual Computer ,PP. 231-240, Springer-Verlag 1985.
- [AZIZ, 90] N.M. Aziz, R. Bata, "Bezier surface/surface intersection", Computer Graphics, pp 50-58, janvier 1990.
- [BARR, 88] J.C. Platt, A.H. Barr, Constraint Methods for Flexible Models, Computer Graphics, Vol. 22, Number 4, pp. 279-288, August 1988.
- [BARAFF, 89] D. Baraff, Analytical Methods for Dynamic Simulation of Non-penetrating Rigid Bodies, Computer Graphics, Vol. 23, pp.223-232, July 1989.
- [BARAFF, 91] D. Baraff, Coping with Friction for Non penetrating Rigid Body Simulation, Computer Graphics, Vol.25, Number 4, pp. 31-40, July 1991.

- [BARSKY, 84] B.A. Barsky, "A description and evaluation of various 3D models", IEEE CG&A, pp 38-52, janvier 1984.
- [BERGER, 91] M.O. Berger, "Les contours actifs : modélisation, comportement et convergence", thèse de l'Institut Polytechnique de Lorraine, février 1991.
- [BOHM, 84] W. Böhm, G. Farin, J. Kahmann, "A survey of curve and surface methods in CAGD", CAGD 1, pp 1-60, 1984.
- [BOISSONNAT, 88] J.D. Boissonat, "Shape reconstruction from planar cross-sections", CGVIP 44, no 1, octobre 1988.
- [BOOR, 78] C. de Boor, "A practical guide to splines", Springer Verlag, Berlin, 1978.
- [BORGEFORS, 86] G. Borgefors, Distance Transformations in Digital Images, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, N° 34, pp. 344-371, 1986.
- [BRUNIE, 91] L. Brunie, P. Cinquin, S. Miguet, Modelisation of the 3D visualisation of the carpus from CT slices, IEEE Computer and Communication, PP. 71-74, Tencon August 1991.
- [CANNY, 86] J. Canny, "A computational approach to edge detection", IEEE PAMI, vol 8, pp 679-698, novembre 1986.
- [CAPPELLETTI, 89] J.P. Cappelletti, A. Rosenfeld, "Three-dimensional boundary following", CGVIP 48, pp 80-92, 1989.
- [CASH, 90] J.R. Cash and A.H. Karp, 1990, ACM transactions on Mathematical Software, Vol. 16, pp. 201-222.
- [CHARLIER] A. Charlier, A. Bérard, M.F. Charlier, Mécanique Analytique, du cours aux TD, Ellipses.
- [CHASSERY, 90] J.M. Chassery, A. Montanvert, Géométrie Discrète en Analyse d'Images, Coll. Traité des Nouvelles Technologies, Hermès, 1990.

- [CINQUIN, 87] P. Cinquin, "Application des fonctions spline au traitement d'images numériques", Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier de Grenoble, 1987.
- [CLARK, 89] J.J. Clark, Authenticating Edges Produced by Zero Crossing Algorithms, IEEE PAMI Vol. 11,n°1, pp.42-57,Jan 1989.
- [DARBOUX] G. Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Tome 1, Chelsea Publishing Company, Bronx, New-York.
- [DARBOUX, 1880] Bulletin des Sciences Mathématiques, Tome 1, 1880.
- [DAVENPORT, 87] J. Davenport, Y. Siret, E. Tournier, Calcul Formel, Systèmes et algorithmes de manipulations algébriques, Coll. Etudes et Recherches Informatiques, éd. Masson 1987.
- [DERICHE, 87] Separable recursive filtering for efficient multi-scale edge detection, Proceedings International Workshop on Machine Vision and Machine Intelligence, Tockyo, December 1987.
- [DERICHE, 87] Using Canny Criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector, International Journal of Computer Vision 1: 167-187,1987.
- [DUMONT, 91] G. Dumont, M.P. Gascuel, A. Verroust, Animation contrôlée par la dynamique, état de l'art. Rapport de recherche INRIA n°1405, avril 1991.
- [FUCHS, 88] H. Fuchs et al, "Interactive, richly cued shaded display of multiple 3D objects in medical images", proc of SPIE, vol 914, Medical Imaging II, pp 842-849, 1988.
- [GARCIA, 78] C.B. Garcia, W.I. Zangwill, Finding all solutions to polynomial systems and other systems of equations, Mathematical Programming 16, pp.159-176, 1979.
- [GARCIA-ELIAS,89] Marc Garcia-Elias,Kai-Nan An,Peter C. Amadio, William P.Cooney, Reliability of carpal angle determinations, The journal of Surgery, Vol. 14A, N°6, pp. 1017-1021.

- [GEAR, 71] C.W. Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, (Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall), Chapter 2.
- [GEIGER, 93] Construction et Utilisation des modèles d'organes en vue de l'assistance au diagnostic et aux interventions chirurgicales, Thèse d'Informatique de l'Ecole des Mines de Paris, Paris 1993
- [HAHN, 88] J.Hahn, Realistic Animation of Rigid Bodies, Computer Graphics, Vol. 22, pp.299-308, August 1988.
- [HARALICK, 84] R.M.Haralick, Digital Steps Edges from zero crossings of second directionnal derivatives, IEEE PAMI 6, pp.58-68, 1984.
- [HARALICK, 85] R.M. Haralick, S.G. Shapiro, "Survey : image segmentation techniques", Computer Vision and Image Processing, vol 29, pp 100-132, 1985.
- [HARALICK, 87] R.M. Haralick, S.R. Sternberg, X. Zhuang, Image Analysis Using Mathematical Morphology, IEEE PAMI vol.9, n°4, pp. 532-550, July 1987.
- [KASS, 87] M. Kass, A. Witkin, D. Terzopoulos, "Snakes: active contour models", Proc. of Int. Conf. on Computer Vision, pp 259-268, Londres, 1987.
- [KAPANDJI, 87] I. A. KAPANDJI, Physiologie Articulaire, Tome 1, Maloine S. A. Editeur, 1987.
- [KEPPEL, 75] E. Keppel, "Approximating complex surface by triangulation of contour lines", IBM Journal Res. Develop., no 19, pp 2-11, janvier 1975.
- [KOVACIC, 77] Kovacic, JJ., An Algorithm for solving Second Order Linear Homogenous Differential Equations. Preprint, Brooklyn College, City University of New-York.
- [KOVACIC, 86] Kovacic, JJ., An Algorithm for solving Second Order Linear Homogenous Differential Equations. J. Symbolic Comp. 2, pp. 3-43, 1986.

- [SHUMAKER, 81] L.L. Shumaker, "Spline functions : basic theory", John Wiley & sons, New York, 1981.
- [SEQUEIRA, 90] J. Sequeira, F. Pinson, Matching Free-Form Primitives with 3D Medical Data to Represent Organs and Anatomical Structures, NATO ASI series, 3D Imaging in Medicine, Ed. K.H. Höhnes, Springer-Verlag, pp. 159-171, June 25-29, 1990
- [TERZOPOULOS, 88] D. Terzopoulos, K. Fleischer, Modeling Inelastic Deformation: Viscoelasticity, Plasticity, Fracture, Computer Graphics, Vol. 22, Number 4, pp. 269-278, August 1988.
- [UCHIKI, 83] T. Uchiki, T. Ohashi, M. Tokoro, Collision Detection in Motion Simulation, Computer Graphics, Vol. 7, N° 3-4, pp. 285-293, August 1983.
- [UDUPA, 82] J.K. UDUPA, S.Srihari, G. T. Herman, Boundary Detection in Multidimensions, IEEE PAMI 4, n°1, pp41-50, Janv. 1982.
- [WILHEMS, 85] Jane P. Wilhems, B. A. Barsky, Using Dynamics Analysis to Animate Articulated Bodies such as Humans and Robots, Proc. Graphics Interface 1985, Montreal, PP.97-104.
- [ZUCKER, 81] S.W. Zucker, R.M. Hummel, "A three dimensional edge operator", IEEE PAMI, vol 3, pp 324-331, mai 1981.



- [LAURENT, 72] P.J. Laurent, "Approximation et optimisation", Hermann, Paris, 1972.
- [LEITNER, 90] F. Leitner, I. Marque, P. Cinquin, "Dynamic segmentation : finding the edge with snake-splines", Curves and Surfaces, Academic Press, pp 279-284, 1990.
- [LEYMARIE, 92] F. Leymarie, M.D. Levire, Fast Raster Scan Distance Propagation on the Discrete Rectangular Lattice, CVGIP, Image Understanding, Vol. 55, N° 1, pp. 81-84, Janvier 1992.
- [LIU, 77] H.K. Liu, "Two and three dimensional boundary detection", Computer Graphics and Image Processing, vol 6, pp 123-134, 1977.
- [LUCIANI, 85] Un outil Informatique de Création d'Images Animées: Modèles d'objets, Langage, Contrôle Gestuel en temps réel. Le système ANIMA, Thèse de Docteur Ingénieur de l'INPG, Grenoble 1985.
- [MARQUE, 89] I. Marque, P. Cinquin, "Boundary detection for 3D images by construction of a differential system", 7th congress AFCET-INRIA, pp 907-922, Paris, 1989.
- [MARR, 80] D. Marr, E. Hildreth, "Theory of edge detection", Proc R. Soc. London, B 207, pp 187-217, 1980.
- [MARUYAMA, 72] K. Maruyama, A Procedure to Determine Intersections Between Polyhedral Objects, International Journal of Computer and Information Sciences, Vol. 1, N° 3, pp.255-266, 1972.
- [MEHAUTE, 87] A. Le Mehaute, P. Sablonniere, "Courbes et surfaces Bézier / Bsplines", A.T.P. du C.N.R.S., Rennes, mai 1987.
- [MIGUET, 88] S. Miguet, Chirurgie du poignet assistée par ordinateur: analyse d'images scanner, DEA d'informatique INPG 88.
- [MOHR, 83] R. Mohr, R. Bajcsy, Packing Volumes by Spheres, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-5, N°1, January 1983.

- [MOORE, 88] M. Moore, J. Wilhems, Collision Dtection and Response for Computer Animation, Computer Graphics, Vol. 22, pp. 289-298, August 1988.
- [PAVLIDIS, 88] T. Pavlidis, Comments on "Low Level Segmentation: an expert system", IEEE PAMI, n°5, 675-676, Sept. 1986.
- [PLATT, 88] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, K. Fleischer, Elasticity Deformable Models, Computer Graphics, Vol. 21, Number 4, pp. 205-214, July 1988.
- [PERES, 24] Nouvelles Annales des Mathématiques, Tome 2, 1924.
- [PERES] Mécanique Générale, Masson & Cie.
- [PRESS, 93] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical Recipies in C, Cambridge University Press.
- [PEREZ, 93] A. PEREZ, Human articulation simulation, Applications of Digital Image Processing, Andrew Tescher Editor, pp. 162-170, 1993.
- [PEREZ, 93] A. PEREZ, A wrist Dynamics Model Based on the Median Axis Model of the volume, Mathematics Applied to Biology and Medicine, Lyon December 1993.
- [PEREZ, 94] A. PEREZ, A wrist Dynamics model, Image Processing, First IEEE Internationnal Conference on Image Processing, November 1994.
- [RHODES, 87] M. Rhodes, Y. Kuo, S. Rothman, C.Woznick, An application of computer graphics and Networks to anatomic Model and Prothesis Manufacturing, IEEE CG&A, pp12-25, Feb87.
- [ROLLAND, 91] F. Rolland, Représentation et reconstruction 3D à partir de coupes 2D, Thèse de Doctorat de l'Université de Grenoble 1, spécialité informatique, septembre 1991.
- [ROURKE, 79] J. O'Rourke, N. Badler, Decomposition of 3D Objects into spheres, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-1, N°3, July 1979.



## Résumé

Le carpe représente l'articulation particulièrement originale et complexe de huit os comprise entre la main et l'avant-bras. La modélisation de la Dynamique du carpe constitue l'étape consécutive logique des travaux d'imagerie médicale sur la modélisation informatique 3D statique. Elle procède en trois étapes. A partir d'une modélisation 3D des os, et des phénomènes de contact pendant leur mouvement, elle simule les trajectoires des os du carpe par l'intégration numérique des équations de la Dynamique.

Le choix d'une modélisation physique conduit à étudier de façon très attentive, les différents types possibles de modélisation 3D afin d'aboutir à un choix de modèle suffisamment précis et concis. La modélisation de l'axe médian, en modélisant les volumes des os par leur recouvrement minimal par des boules, constitue ainsi un modèle inédit et efficace. Cette modélisation permet en effet d'optimiser le coût calculatoire de la détection de contact lors du mouvement des os, pour une précision maximale de détection et de localisation des points de contact. Il offre également la possibilité d'estimer géométriquement une force de répulsion à ces contacts, ainsi que les différentes composantes des forces de frottement.

La Dynamique du système des os du carpe se résume alors en une simple minimisation de la profondeur des contacts entre les os, par l'intégration des équations fondamentales de la Dynamique. L'intégration numérique a été développée à partir d'un intégrateur différentiel robuste à pas adaptatif. Le caractère discret des contacts et des forces appliquées rend délicate toutefois, l'intégration du système différentiel selon le choix des paramètres de force de répulsion et d'inertie du système.

Les qualités d'autonomie et de paramétrisation du modèle physique ainsi développé, en font cependant un premier pas inédit et efficace de la modélisation de la Dynamique du carpe.

### Mots clés:

Carpe, Modèle Physique, Imagerie Médicale, Modélisation 3D, Distance Discrète, Carte de distances, Axe Médian, Détection de Contact, Intégration différentielle, Dynamique, Animation virtuelle.