HAL
open science

Contributions à l'étude des arrangements: Equivalences combinatoires et perturbations

Khanh Vo Phi

To cite this version:

Khanh Vo Phi. Contributions à l'étude des arrangements: Equivalences combinatoires et perturbations. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1994. Français. NNT : . tel-00344973

HAL Id: tel-00344973

https://theses.hal.science/tel-00344973v1

Submitted on 8 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TU 20

THESE

présentée par

VO PHI Khanh

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph FOURIER - Grenoble I

(arêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

(Spécialité : Mathématiques Appliquées)

CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DES ARRANGEMENTS : EQUIVALENCES COMBINATOIRES ET PERTURBATIONS

Soutenue le 22 Septembre 1994.

Composition du jury :

Président	:	M. Jean DELLA DORA
Rapporteurs	:	M. Olivier DEVILLERS
		M. Jean-Claude YAKOUBSOHN
Examinateurs	:	M. Bernard LACOLLE
		M. Pierre-Jean LAURENT

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe de Géométrie Algorithmique du Laboratoire de Modélisation et Calcul (LMC-IMAG) à Grenoble sous la direction de Monsieur Bernard Lacolle, professeur à l'U.J.F.

Je tiens à remercier en premier lieu Monsieur Bernard Lacolle de m'avoir guidé et conseillé tout au long de ces années de thèse. Qu'il trouve ici mes sentiments reconnaissants et sincères.

Je voudrais ensuite remercier Messieurs Olivier Devillers et Jean-Claude Yakoubsohn, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques judicieuses m'ont aidé à corriger les premières préversions de la thèse.

Je remercie très vivement Monsieur Jean Della Dora qui me fait l'honneur d'avoir accepté de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur Pierre-Jean Laurent d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je remercie tous les membres de l'équipe de Géométrie Algorithmique pour avoir été toujours prêts à m'apporter leur aide, ainsi que pour leur ambiance sympathique. Merci particulièrement à François-Régis Degott dont la thèse et les programmes m'ont beaucoup aidé dans mon travail, à Bruno Luong pour sa précieuse amitié et avec qui j'ai des discussions utiles pour ma thèse, et à tous les membres du bureau 53 avec qui j'ai travaillé pendant ces trois années.

Je remercie le Gouvernement Français pour m'avoir accordé une bourse pendant mes quatre années d'études en France.

Je suis profondément reconnaissant à mes parents qui ont tout fait pour que je puisse poursuivre mes études et qui n'ont cessé de me consoler et m'encourager durant mon séjour en France.

J'adresse aussi mes pensées amicales à tous(tes) mes amis(ies).

Table des matières

Introduction i

Chapitre 1
Equivalence des Arrangements d'hyperplans dans l'espace $\mathbb{R}^d$ et Perturbation des hyperplans

Introduction et résumé du chapitre 1 1

1.1 Equivalence des arrangements 3
1.1.1 Rappel rapide sur les arrangements 3
1.1.2 Topologie des vecteurs-position des arrangements 4
1.1.3 Equivalence des arrangements 5

1.2 Distance entre deux hyperplans et conservation de la topologie des arrangements 10
1.2.1 Distance entre deux hyperplans 11
1.2.2 Notations et lemmes techniques 12
1.2.3 Perturbation des hyperplans et préservation de l' arrangement 16
1.2.4 Coûts de calcul 17

Annexe du chapitre 1 23

Chapitre 2
Equivalence des configurations de points et Equivalence des diagrammes de Voronoï d'ordre k

Introduction et résumé du chapitre 2 29

Première partie: Configuration de points

2.1 Configuration de points et Arrangement d' hyperplans 31
2.1.1 Une relation duale entre points et hyperplans dans $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$ 31
2.1.2 Configuration de points et Arrangement d' hyperplans 32

2.2 Equivalence des configurations de points 34

2.3 Equivalence des arrangements d'hyperplans et Equivalence des configurations de points 38

2.4 Perturbation des points et préservation des configurations 45

Deuxième partie: Diagrammes de Voronoï d'ordre k

2.5 Rappel rapide du diagramme de Voronoï d'ordre k. Equivalence entre deux diagrammes 50

2.6 Diagrammes de Voronoï d'ordre k et Arrangements d' hyperplans 52

2.7 Perturbation des points et préservation du Diagramme de Voronoï 53

Annexe du chapitre 2 57

Chapitre 3
Arrangements des courbes dans le plan
Equivalence et Algorithme de construction

Introduction et résumé du chapitre 3 59

3.1 Arrangement des courbes dans le plan 61

3.2 Equivalence entre arrangements des courbes dans le plan 63
3.2.1 Arrangements équivalents. Propriétés 64
3.2.2 Existence d'un isomorphisme entre deux arrangements ayants le même ordre des sommets sur les courbes 66

3.3 Un algorithme pour construire la structure de données "Arêtes Ailées" à partir de l'ordre des sommets sur les courbes 77
3.3.1 Objectif et notations 77
3.3.2 Formulation du problème en pseudo-pascal 80

Annexe du chapitre 3 89

Chapitre 4
Equivalence des arrangements des cercles dans le plan
et Perturbation des cercles

Introduction 101

4.1 Equivalence des arrangements de cercles dans le plan 102

4.2 Perturbation des cercles et préservation des arrangements 115

Annexe du chapitre 4 120

Conclusion 125

Références Bibliographiques 127

Introduction

La géométrie algorithmique est une discipline qui a vu d'énormes développements ces dernières années. Des résultats très conséquents en terme de complexité d'algorithmes ont été élaborés. La plupart des objets traités sont des objets géométriques simples (segments, polygones, polyèdres,...) sur lesquels, on ne se pose de manière fondamentale les problèmes de réalisations effectives des primitives géométriques requises : intersections de droites ou des hyperplans, localisations par rapport à une droite ou un hyperplan, comparaisons élémentaires d'angles. Cependant, de manière plus fine, il existe des problèmes pour les réalisations des primitives géométriques les plus simples prenant en compte les précisions des calculs et quelques études ont été menées sur ce thèmes ([Fort91], [Guib89]). Après ces progrès importants, se pose le problème de développer la géométrie algorithmique sur des objets plus complexes : polygones à cotés "courbes" (spline-gones), objets 3D à faces gauches. Evidemment ces objets s'approchent plus de ceux du monde réel et l'intérêt est donc très fort pour les étudier. Certains de ces problèmes (par exemple [Schä87] pour les polygones à cotés courbes) ont reçu des réponses partielles quelquefois assez satisfaisantes. Afin d'apporter une contribution à cette problématique, nous avons choisi pour cette thèse des problèmes d'arrangement qui sont une des structures fondamentales de la géométrie algorithmique.
Il est à noter que des résultats conséquents existent sur les arrangements de courbes dans le plan en particulier, toujours dans l'optique d'évaluation de la complexité.
Cependant ces études ont souvent pour hypothèses l'existence de primitives ou oracles dont on suppose non seulement qu'ils sont réalisables de façon exacte mais qu'ils ont de plus un coût constant. Ces primitives sont en général des opérations géométriques de base : intersections de deux courbes, détermination de points d'inflexion,... dont on sait qu'ils vont donner lieu à des calculs numériques.
Deux problèmes se posent alors : le premier est d'intégrer le coût du calcul numérique au calcul de complexité global. C'est un problème très difficile sur lequel il n'existeque très peu de résultats. Le second problème est en fait suggéré par le premier : de toute façon, le calcul exact des éléments géométriques cherchés ne sera pas accessible exactement et dans le meilleur des cas on saura peut être évaluer et contrôler sa précision. Un problème bien connu en géométrie algorithmique "pratique" est alors que des incohérences "topologiques" ou "combinatoires" peuvent résulter de ces erreurs de calcul. Il vient alors naturellement à l'idée de voir s'il ne faut pas distinguer le calcul de la combinatoire de l'objet géométrique et le calcul numérique.

Cette thèse est une contribution à l'étude de la combinatoire des arrangements. L'idée à terme, est effectivement, le calcul de la combinatoire d'un arrangement de courbes ou surfaces compte tenu du fait que les opérations géométriques ne seront connues qu'à une certaine précision près, que l'on pourra d'ailleurs contrôler. Dans cette démarche, il se pose alors un problème naturel, tout à fait relié à celui ci, qui est de savoir si la combinatoire d'un arrangement est stable lorsque les courbes ou hypersurfaces constitutives sont perturbées. Un

préliminaire indispensable est alors d'établir une définition rigoureuse et adaptée à nos besoins de la combinatoire d'un arrangement.
Le travail présenté ici consiste essentiellement en un développement des notions mathématiques nécessaires pour étudier l'équivalence des combinatoires des arrangements. Au delà des idées qui ont un support intuitif direct, les notions sont assez délicates et sujettes à des confusions. C'est pour cela qu' a été développé un formalisme assez complet et rigoureux à propos de ces notions. Quelques résultats en terme d'analyse de complexité d'algorithmes sont énoncés, mais l'essentiel de la thèse est une contribution au cadre mathématique des combinatoires des arrangements.

Le chapitre 1 est consacré au problème "le plus canonique" celui des arrangements d'hyperplans. Il débute par un exposé sur la définition de la combinatoire d'un arrangement et ses relations avec les valeurs des vecteurs positions des sommets de l' arrangement. De plus, pour parler de perturbation, il faut définir des distances entre les éléments géométriques qui sont ici des hyperplans. On peut alors énoncer des résultats montrant la conservation de la combinatoire de l' arrangement sous certaines perturbations d' hyperplans.(Dans [Edels87], ce problème de perturbation est aussi étudié qualitativement)

Le chapitre 2 est consacré à l'application des propriétés du chapitre 1 aux configurations de points dans l'espace et aux diagrammes de Voronoï lorsque l'on utilise une des transformations usuelles de dualité entre arrangements d'hyperplans et configurations de points ou diagrammes de Voronoï d'ordre quelconque.
Ce chapitre contient des résultats qui se déduisent directement du chapitre 1, car les équivalences de diagrammes de Voronoï et de configurations de points peuvent se déduire immédiatement des notions d'équivalences des arrangements d'hyperplans. Cependant, nous donnons ici quelques indications dans le but de définir directement les notions d'équivalence sans faire référence à des arrangements. Des bornes sont données, mais peu de résultats étant connus, ces bornes pourraient certainement être améliorées dans leurs valeurs numériques aussi bien que dans le coût de leur calcul qui est complètement dégradé par le passage à un arrangement.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à des arrangements de courbes Jordan (bornées ou non) dans le plan. On donne d'abord des définitions précises et des propriétés concernant la combinatoire d'un arrangement de courbes planes. Ce qui est déjà délicat pour des droites devient assez complexe et le formalisme mathématique est plus que jamais nécessaire. Une fois ces notions posées, on peut aborder un problème de calcul de combinatoire direct d'un arrangement de courbes. A partir de la seule information des ordres de points d'intersection sur chaque courbe, on peut calculer l' arrangement en temps optimal. Sur des exemples on montre comment cette phase correspond à une séparation des racines de certaines équations et que ceci est parfaitement adapté aux problématiques du calcul numérique.
On étudie la mise en place d'une définition de l'équivalence combinatoire d'un arrangement de courbes dans le plan. C'est un problème beaucoup plus difficile

que celui des droites qui demande à avoir un contexte mathématique assez important pour donner un support aux notions que l'on attend naturellement de l'équivalence d'un arrangement de courbes.

En particulier, on peut énoncer un théorème prouvant rigoureusement l'idée intuitive que la combinatoire de l' arrangement est complètement déterminé si on connaît pour chacune des courbes l'ordre des points d'intersection avec toutes les autres courbes. Un algorithme est donné montrant comment de façon assez simple on construit alors l'arrangement à partir de ces ordres. Cette propriété est assez intéressante lors des calculs numériques car les calculs de points d'intersections se présentent évidemment souvent comme les solutions d'équations. Or, pour le numéricien, il est plus facile de séparer les racines d'une équation (polynomiale par exemple) que de les calculer exactement. On aura donc, à condition de savoir séparer ces racines, une méthode de calcul de la combinatoire d'un arrangement de courbes, sans pour autant calculer exactement les intersections. Cette approche traitant globalement le problème des intersections, se démarque des méthodes incrémentales de construction d' arrangement de courbes qui font appel à des primitives géométriques réalisées localement comme l'intersection de deux morceaux de courbes par exemple. Ce chapitre se termine par une vérification expérimentale de ce principe, montrant une accélération très nette du calcul en utilisant ce principe.

Enfin, le chapitre 4 est consacré à une étude des arrangements de cercles dans le plan et de leur perturbation. Au delà de l'exemple des cercles, il a été recherché une application des propriétés élaborées au chapitre 3 ainsi que l'ébauche d'un traitement de courbes plus générales. On montre de nouveau les difficultés que pose le problème, les précisions qu'il faut lui apporter et comment interviennent les calculs numériques à proprement parler.
Ce chapitre concerne les arrangements de cercles. Ce choix a été fait pour débroussailler les problèmes qui se poseraient lorsque l'on voudrait étudier par exemple un arrangement de courbes algébriques dans le plan. Nous avons restreint le choix des perturbations en restant dans l'ensemble des cercles. Ce choix est restrictif mais il nous donne encore un cadre riche au point de vue des situations possibles.
On constate tout d'abord, que la notion d'équivalence introduite dans le chapitre précédent, possède encore des lacunes puisque des arrangements mathématiquement équivalents au sens de ce chapitre, n'ont pas forcément la ressemblance géométrique que l'on attend. Un artifice permet de combler cette lacune sur le problème des cercles, mais ne dit rien sur une stratégie plus générale. D'autre part, même si les objets sont simples, les calculs explicites sont longs et difficiles. Un résultat est donné dans un théorème, donnant une borne de perturbation sur un ensemble de cercles, ne modifiant pas la combinatoire. Le coût du calcul de cette borne est prohibitif, mais on s'aperçoit que l'argument valable sur les hyperplans et qui faisait appel au théorème de la zône ne tient plus même pour les objets simples que sont les cercles. Ceci est probablement dû au fait que l'on fait appel à deux notions de proximité différentes : une notion combinatoire pour le théorème de la zône, une notion métrique pour les perturbations des points d'intersection.

Chapitre 1

Equivalence des Arrangements d'hyperplans dans l'espace R^d et Perturbation des hyperplans

Introduction et Résumé du chapitre 1.

Le chapitre 1 consiste en une étude sur l'équivalence des arrangements et une partie quantitative de perturbation des hyperplans.

Dans la littérature on peut trouver les différentes notions d'équivalence entre deux arrangements.
Dans [Edels87], la définition exige une bijection entre les hyperplans et une autre bijection entre les k_faces qui préserve les vecteurs de position des faces. Dans [Orl92] on donne plusieurs sortes d'équivalence dont le plus fort est L_équivalence qui demande une bijection entre les sous espaces affines (intersections non vides des hyperplans) préservant la relation d'inclusion entre ces sous espaces. La définition la plus générale est donnée dans [Grunb72] dont on parlera plus en détail dans le chapitre 3.
On peut aussi constater facilement (par des exemples) que la définition de L_équivalence est beaucoup plus faible que les définitions de [Edels87], [Grunb72]. De plus ces notions d'équivalence n'ont été évoquées que pour un but de classement combinatoire des arrangements. Les auteurs n'en ont pas par conséquent étudié les diverses propriétés ni les critères d'équivalence plus simples et plus accessibles numériquement.

Quant à la perturbation, on peut en trouver dans plusieurs articles qui ont des buts différents.
Dans [Edels87], on perturbe les hyperplans pour se ramener à des arrangements simples.
Dans [Fort89] , [Fort91] et [Guib89], ce sont les opérateurs arithmétiques qui sont supposés perturbés et les auteurs proposent des algorithmes 'robustes' qui donnent des résultats cohérents (par exemple, dans [Fort91], les algorithmes produisent des graphes d'adjacence qui sont réalisés par des 'semi-droites').
Notre travail ici est de perturber les hyperplans et cela dans le but de préserver la topologie combinatoire de l' arrangement.

Nous donnons d'abord une définition de la *topologie combinatoire* d'un arrangement en se basant uniquement sur les valeurs des vecteurs de position des faces (Définition 1.1).

Nous précisons ensuite une notion d'équivalence entre deux arrangements d' hyperplans (Définition 1.2). Cette définition qui est donnée dans [Edels87] exige la préservation des vecteurs de position des faces, de leurs dimensions et de la relation d'adjacence.

Notre premier résultat est que deux arrangements sont équivalents si et seulement si ils ont la même topologie combinatoire (Théorème 1.6), bien qu' a priori les conditions de la définition d'équivalence se montrent beaucoup plus fortes.

De plus, quand les arrangements sont simples, on montrera un autre critère d'équivalence (Théorème 1.10) plus accessible au niveau des calculs numériques, puisqu'il n'est basé que sur les vecteurs de position des sommets qui sont en fait les positions relatives des points par rapport aux hyperplans. Les points seront par la suite les intersections d'hyperplans et par conséquent, obtenus par la résolution de systèmes d'équations (linéaires ici).
Ce type de propriété existe sans doute dans le contexte des *matroïdes* mais à notre connaissance, aucun exposé ne permet de faire un lien clair et direct sans apprendre un minimum de la théorie des matroïdes orientées. Nous avons donc choisi de faire une approche nouvelle et totalement géométrique.

Grâce à ce critère (Théorème 1.10), nous démontrons ensuite la conservation de la topologie de l' arrangement sous certaines perturbations d'hyperplans.

Ici nous ne considérons que des perturbations qui nous laissent dans l'ensemble des hyperplans. Nous proposons une distance (Définition 1.3) qui n'est peut-être pas la meilleure et dont les valeurs dépendent du repère de l'espace.
En fait, il existe aussi des distances intrinsèques (indépendantes du repère). Toutefois, comme ces distances contraignent les hyperplans à devenir parallèles quand ils sont assez proches les uns des autres (Annexe A 1.3), elle ne répondent pas à notre but de perturber légèrement les hyperplans de façon arbitraire.

Un choix de distance étant fait, nous développons, avec un matériel assez classique d'algèbre linéaire, de différents lemmes techniques pour arriver aux résultats quantitatifs (Théorèmes 1.17, 1.19 et 1.21) d'une borne de perturbation d'hyperplans qui assure l'invariance de la topologie combinatoire de l' arrangement.
Les coûts d'évaluation de cette borne sont aussi évalués. Dans le théorème 1.19 on perturbe tous les hyperplans, au nombre de n, le coût du calcul de la borne est en $O(n^d)$ qui est égal à celui de la construction de l' arrangement. Dans le théorème 1.21, on suppose l' arrangement déjà construit et seulement k hyperplans perturbés, le coût est alors en $O(n^{d-1})$ (la constante dépend de k).

Notations. Dans ce chapitre, on se place dans l'espace $\mathbb{R}^d$, où d est un entier supérieur ou égal à 2 et on travaille avec les hyperplans ne passant pas par l'origine O de l'espace $\mathbb{R}^d$.

Soit h un tel hyperplan. On notera

h^+ le demi-espace ouvert délimité par h et ne contenant pas l'origine O;

h^- le demi-espace ouvert délimité par h et contenant l'origine O.

Remarque 1.1 *Soit h un hyperplan ne passant pas par l'origine O de $\mathbb{R}^d$. h étant écrit de façon unique par l'équation suivante, appellée l'équation "normalisée" de h:*

$$h: \quad \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot x_i - c = 0,$$

où $\sum_{i=1}^{d} a_i^2 = 1$ *et* $c > 0$, *on peut déterminer* h^+ *et* h^- *par les inéquations*

$$h^+: \quad \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot x_i - c > 0,$$

$$h^-: \quad \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot x_i - c < 0.$$

1.1 Equivalence des arrangements.

1.1.1 Rappel rapide sur les arrangements.

Soit $\mathcal{H} = (h_i)_{i \in I}$, une famille de n hyperplans ne passant pas par l'origine O, où $I = \{1, ..., n\}$ et $n \geq 1$. Pour tout point $M \in R^d$, on appelle son *vecteur position* le vecteur suivant: $\overrightarrow{V}_{\mathcal{H}}(M) = (V_{h_i}(M))_{i \in I} \in \{+1, 0, -1\}^n$,
où $V_{h_i}(M) = +1$ si $M \in h_i^+$, $V_{h_i}(M) = 0$ si $M \in h_{h_i}$ et $V_{h_i}(M) = -1$ si $M \in h_i^-$, $\forall i \in I$.

L' arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est défini alors comme étant l'ensemble des plus grandes parties connexes non vides de R^d dont les points ont le même vecteur position. Chaque élément de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ sera appelé *une face* de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Pour toute face $f \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, on définit son vecteur position $\overrightarrow{V}_{\mathcal{H}}(f)$ comme étant le vecteur position $\overrightarrow{V}_{\mathcal{H}}(M)$ de n'importe quel point $M \in f$. On peut alors écrire f sous la forme:

$$(1.1) \qquad f = \Big(\bigcap_{V_{h_i}(f)=0} h_i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{V_{h_i}(f)>0} h_i^+\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{V_{h_i}(f)<0} h_i^-\Big)$$

f est dite une *k-face* si l'espace affine $(\bigcap_{V_{h_i}(f)=0} h_i)$ est de dimension k, où $0 \leq k \leq d$.

Une d-face sera appelée *cellule*, une $(d-1)$-face *facette*, une 1-face *arête* et un *sommet* sera une 0-face. Quand $d = 2$, les facettes et les arêtes coincïdent.

Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. On dira que f est une *sous face* de g si $f \subset \overline{g} \setminus g$, où $\overline{g}$ est l'adhérence de g dans R^d. La caractérisation suivante d'une sous face est facile à démontrer:

Observation 1.1. *Soient f, g deux faces de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.*
Alors f est une sous face de g si et seulement si:

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \text{Pour tout } i \in I, \text{ on a } & V_{h_i}(f) = 0 \text{ ou } V_{h_i}(f) = V_{h_i}(g), \\ \text{il existe } i_0 \in I \text{ tel que } & V_{h_{i_0}}(f) = 0 \text{ et } V_{h_{i_0}}(g) \neq 0. \end{cases}$$

Enfin, l' arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est dit *simple* si l'intersection de k hyperplans différents de $\mathcal{H}$ est un espace affine de dimension $d-k$ quand $0 \leq k \leq d$, et est égale à vide quand $k > d$.

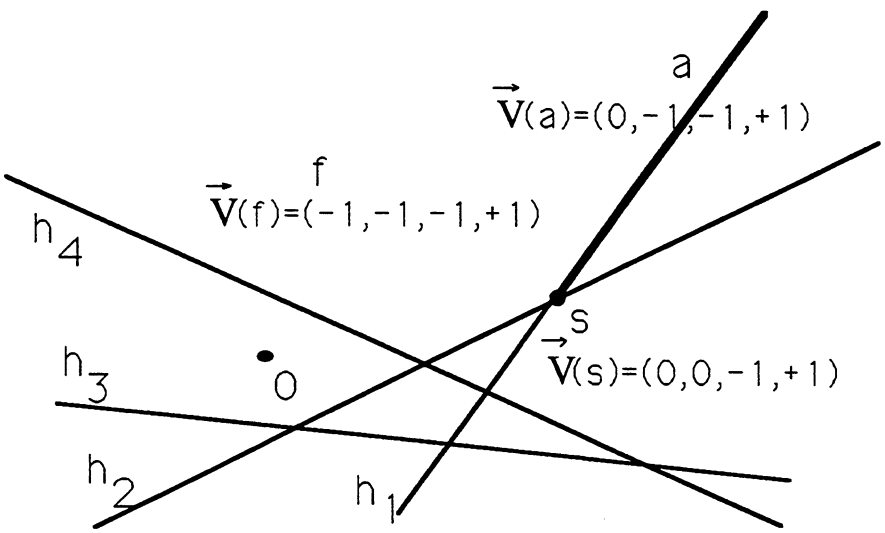


FIGURE 1.1. ARRANGEMENT DE R^2 PAR QUATRE DROITES.– *a et s sont des sous faces de f et s est une sous face de a.*

1.1.2 Topologie de vecteurs-position des arrangements.

Notation. Soit $\mathcal{H} = (h_i)_{i \in I}$ une famille de n hyperplans ne passant pas par l'origine O. Soit $\overrightarrow{V} = (V_i)_{i \in I}$ un vecteur de $\{-1, 0, +1\}^n$. On note:

$$\bigcap_{\overrightarrow{V}} \mathcal{H} = (\bigcap_{V_i=0} h_i) \bigcap (\bigcap_{V_i>0} h_i^+) \bigcap (\bigcap_{V_i<0} h_i^-).$$

D'après (1.1), on voit facilement que si $f \equiv \bigcap_{\overrightarrow{V}} \mathcal{H}$ est non vide, f sera une face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_{\mathcal{H}}(f) \quad (V_i = V_{h_i}(f))$.

Définition 1.1. *Soit $\mathcal{H} = (h_i)_{i\in I}$ une famille de n hyperplans ne passant pas par l'origine O. Soit $0 \leq k \leq d$. On définit:*

$$\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \{\overrightarrow{V} \in \{-1,0,+1\}^n \text{ tel que } \bigcap_{\overrightarrow{V}} \mathcal{H} \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{T}opo_k(\mathcal{H}) = \{\overrightarrow{V} \in \{-1,0,+1\}^n \text{ tel que } \bigcap_{\overrightarrow{V}} \mathcal{H} \text{ soit une } k\text{-face de } \mathcal{A}(\mathcal{H})\}.$$

On voit tout-de-suite que: $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \bigcup_{k=0}^{d} \mathcal{T}opo_k(\mathcal{H})$.

1.1.3 Equivalence des arrangements.

A partir de maintenant, on travaille avec deux familles de n hyperplans ne passant pas par l'origine O: $\mathcal{H} = (h_i)_{i\in I}$ et $\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{h}_i)_{i\in I}$. La définition suivante est donnée dans [Edels87], sauf qu'on suppose ici qu'il n'y a pas de rénumérotation des indices des hyperplans.

Définition 1.2.[Edels87] *$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont dits équivalents s'il existe une bijection $\mathcal{E}qui : \mathcal{A}(\mathcal{H}) \to \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$, l'image de f étant notée par $\tilde{f}$, telle que:*
Quels que soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, quel que soit $1 \leq k \leq d$, on a:

1/. $\overrightarrow{V}_{\mathcal{H}}(f) = \overrightarrow{V}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\tilde{f})$,

2/. f est une k-face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ si et seulement si $\tilde{f}$ est une k-face de $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$,

3/. f est une sous face de g si et seulement si $\tilde{f}$ est une sous face de $\tilde{g}$.

On verra plus tart (Théorème 1.6) que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents si et seulement si $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$. Donc 1/ déduit 2/ et 3/.

Dans la suite, pour simplifier les notations, on écrit $\overrightarrow{V}(f)$, $V_i(f)$ pour $\overrightarrow{V}_{\mathcal{H}}(f)$, $V_{h_i}(f)$ et de même $\overrightarrow{V}(\tilde{f})$, $V_i(\tilde{f})$ pour $\overrightarrow{V}_{\tilde{\mathcal{H}}}(\tilde{f})$, $V_{\tilde{h}_i}(\tilde{f})$.

Lemme 1.2. *Supposons que $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$.*
Posons l'application $\mathcal{E}qui : \mathcal{A}(\mathcal{H}) \to \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}), f \mapsto \tilde{f}$, telle que $\overrightarrow{V}(f) = \overrightarrow{V}(\tilde{f})$.
Alors $\mathcal{E}qui$ est bijective et on a:
Pour tous $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$,
f est une sous face de g si et seulement si $\tilde{f}$ est une sous face de $\tilde{g}$

Preuve. $\mathcal{T}opo(\mathcal{H})$ étant égal à $\mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$, on vérifie facilement que l'application $\mathcal{E}qui$ est bien définie et bijective.

Prenons ensuite deux faces f et g de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Supposons que f est une sous face de g. $\overrightarrow{V}(f)$ et $\overrightarrow{V}(g)$ doivent alors vérifier (1.2) de l'observation 1.1. Or $\overrightarrow{V}(f) = \overrightarrow{V}(\tilde{f})$ et $\overrightarrow{V}(g) = \overrightarrow{V}(\tilde{g})$. Donc $\overrightarrow{V}(\tilde{f})$ et $\overrightarrow{V}(\tilde{g})$ vérifient aussi (1.2). Donc $\tilde{f}$ est une sous face de $\tilde{g}$.
Le sens inverse se déduit par symétrie. ∎

Propriété 1.3. *Supposons que $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$.*
Soit $J \subset I$, $J \neq \emptyset$. Posons $\mathcal{H}_J = (h_i)_{i\in J}$ et $\tilde{\mathcal{H}}_J = (\tilde{h}_i)_{i\in J}$.
On a alors: $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}_J) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}}_J)$.

Preuve. On suppose, sans perdre la généralité, que $J = I \setminus \{i_0\}$, où $i_0 \in I$.
Soit $\overrightarrow{W} = (W_i)_{i\in J} \in \{-1, 0, +1\}^{n-1}$ un élément de $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}_J)$.
C'est-à-dire qu'il existe un point M tel que:

$$M \in \bigcap_{\overrightarrow{W}} \mathcal{H}_J \equiv (\bigcap_{\substack{W_i=0\\ i\in J}} h_i) \bigcap (\bigcap_{\substack{W_i>0\\ i\in J}} h_i^+) \bigcap (\bigcap_{\substack{W_i<0\\ i\in J}} h_i^-).$$

M se trouve alors soit sur h_{i_0}, soit dans $h_{i_0}^+$, soit dans $h_{i_0}^-$.
Supposons, pour fixer les idées, que $M \in h_{i_0}^+$.
Posons: $V_{i_0} = +1$, $V_i = W_i$, $(i \in J)$ et $\overrightarrow{V} = (V_i)_{i\in I}$.
On a:

$$M \in (\bigcap_{\substack{V_i=0\\ i\in I}} h_i) \bigcap (\bigcap_{\substack{V_i>0\\ i\in I}} h_i^+) \bigcap (\bigcap_{\substack{V_i<0\\ i\in I}} h_i^-) \equiv \bigcap_{\overrightarrow{V}} \mathcal{H}.$$

Donc $\bigcap_{\overrightarrow{V}} \mathcal{H} \neq \emptyset$. Autrement dit, $\overrightarrow{V} \in \mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$.
Ce qui entraine qu'il existe un point $\tilde{M}$ tel que:

$$\tilde{M} \in \bigcap_{\overrightarrow{V}} \tilde{\mathcal{H}} \equiv (\bigcap_{\substack{V_i=0\\ i\in I}} \tilde{h}_i) \bigcap (\bigcap_{\substack{V_i>0\\ i\in I}} \tilde{h}_i^+) \bigcap (\bigcap_{\substack{V_i<0\\ i\in I}} \tilde{h}_i^-) \subset$$
$$(\bigcap_{\substack{V_i=0\\ i\in J}} \tilde{h}_i) \bigcap (\bigcap_{\substack{V_i>0\\ i\in J}} \tilde{h}_i^+) \bigcap (\bigcap_{\substack{V_i<0\\ i\in J}} \tilde{h}_i^-) \equiv \bigcap_{\overrightarrow{W}} \tilde{\mathcal{H}}_J.$$

Donc $\bigcap_{\overrightarrow{W}} \tilde{\mathcal{H}}_J \neq \emptyset$. Donc $\overrightarrow{W} \in \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}}_J)$. Donc $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}_J) \subset \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}}_J)$.
L'autre sens se déduit par symétrie. ∎

Propriété 1.4. *Supposons que $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$. On a alors:*

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) \text{ est simple} \iff \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}) \text{ est simple.}$$

Preuve. On sait que, pour n et d fixés, un arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est simple si et seulement si le nombre de ses faces, qui n'est autre que $Card(\mathcal{T}opo(\mathcal{H}))$, atteint le maximum [Edels87]. On en déduit immédiatement ce qu'il faut démontrer. ∎

Lemme 1.5. *Supposons que $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$.*
Soit $\mathcal{E}qui : \mathcal{A}(\mathcal{H}) \to \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}), f \mapsto \tilde{f}$, la bijection définie dans le lemme 1.2.
Alors $\mathcal{E}qui$ transforme une k-face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ en une k-face de $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$, $\forall 0 \leq k \leq d$.

Preuve. Soient f une face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\tilde{f}$ son image par $\mathcal{E}qui$. On a:

$$\vec{V}(f) = \vec{V}(\tilde{f}) \quad \equiv \quad \vec{V} = (V_i)_{i \in I}.$$

Posons:

$$I_0 \equiv \{i \in I \text{ tel que } V_i = 0\},$$

$$F \equiv \bigcap_{i \in I_0} h_i, \quad \tilde{F} \equiv \bigcap_{i \in I_0} \tilde{h}_i, \quad \text{et} \quad k = \dim F, \quad \tilde{k} = \dim \tilde{F}.$$

On doit démontrer que $\quad k = \tilde{k}$.

Si $\quad I_0 = \emptyset$, alors $F = \tilde{F} = R^d$. Donc $k = \tilde{k} = d$.
Supposons donc $I_0 \neq \emptyset$ (c.à.d. que $k, \tilde{k} < d$).
Comme dim $F = k$, on doit avoir: $\quad Card(I_0) \geq d - k$.
Soit $J \subset I_0$ tel que $\bigcap_{i \in J} h_i$ reste encore égal à F et que $Card(J) = d - k$. (1)
Alors $\mathcal{A}(\mathcal{H}_J)$ est simple. En plus $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}_J) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}}_J)$ (Propriété 1.3).

On doit avoir (Propriété 1.4) que $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}_J)$ est simple. Donc:

$$dim \bigcap_{i \in J} \tilde{h}_i \;=\; d - Card(J) = k \text{ (d'après (1)} \tag{2}$$

D'autre part, il est évident (car $J \subset I_0$) que $\bigcap_{i \in J} \tilde{h}_i \supset \bigcap_{i \in I_0} \tilde{h}_i$.
Ce qui entraine que:

$$\dim(\bigcap_{i \in J} \tilde{h}_i) \geq \dim(\bigcap_{i \in I_0} \tilde{h}_i) = \tilde{k}. \tag{3}$$

De (2) et (3) on obtient: $\tilde{k} \leq k$.
Par symétrie, on peut aussi démontrer que $k \leq \tilde{k}$.
On en déduit que: $\quad k = \tilde{k}$. ∎

Des lemmes 1.2, 1.5 , on vient de démontrer le résultat suivant:

Théorème 1.6. *Les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents si et seulement si $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$.*

De la propriétés 1.3 et du lemme 1.5 on a tout de suite la propriété suivante:
Corollaire 1.7. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ soient équivalents.*

On a alors:
$$dim \bigcap_{i\in J} \tilde{h}_i = dim \bigcap_{i\in J} h_i, \quad \forall J \subset I$$

Les lemmes suivants seront utiles pour la suite. On peut en trouver les démonstrations dans l'annexe du chapitre 1.

Lemme 1.8. *Soient F un espace affine et h un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. On a:*
$$(\emptyset \neq F \cap h \neq F) \Longleftrightarrow (F \cap h^+ \neq \emptyset \text{ et } F \cap h^- \neq \emptyset).$$
Et s'il en est ainsi, pour tous points M, N, P tels que $M \in F \cap h$, $N \in F \cap h^+$ et $P \in F \cap h^-$, on a: $[N, M[\subset F \cap h^+$ et $[P, M[\subset F \cap h^-$, où $[N, M[$ désigne le segment joignant N, M (M exclu).

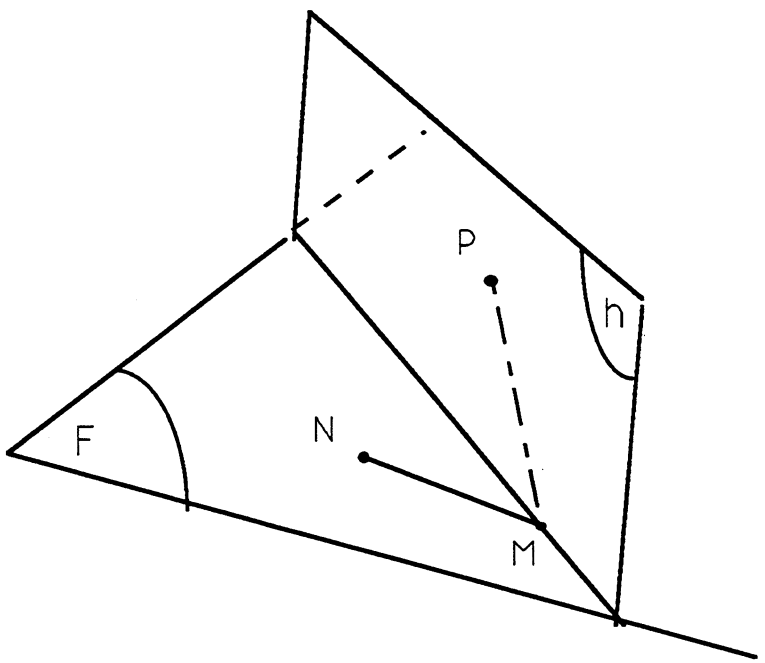


FIGURE 1.2. $\emptyset \neq (F \cap h) \neq F$.—. $[N, M[\subset F \cap h^+$ *et* $[P, M[\subset F \cap h^-$

Lemme 1.9. *Supposons que $\mathcal{T}opo_0(\mathcal{H}) \neq \emptyset$ (c.à.d. que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ ait un sommet). Alors toute k-face de $\mathcal{A}(\mathcal{H}), 1 \leq k \leq d$, admet une sous face de dimension $k-1$.*

En utilisant les deux lemmes précédents, on peut maintenant obtenir un autre critère d'équivalence pour les arrangements simples en reposant uniquement sur les vecteurs position des sommets.

Théorème 1.10. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit simple et que $\mathcal{T}opo_0(\mathcal{H}) \neq \emptyset$. Alors les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents si et seulement si $\mathcal{T}opo_0(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo_0(\tilde{\mathcal{H}})$.*

Preuve. D'abord on voit facilement que $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ est simple. Il y a donc une symétrie entre le rôle de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et celui de $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$.
On va démontrer $\mathcal{T}opo(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$ par récurrence.
On a déjà $\mathcal{T}opo_0(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo_0(\tilde{\mathcal{H}})$.
Supposons que $\mathcal{T}opo_k(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo_k(\tilde{\mathcal{H}})$, avec $0 \leq k < d$.
On doit démontrer que $\mathcal{T}opo_{k+1}(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo_{k+1}(\tilde{\mathcal{H}})$.
Par symétrie on n'a qu'à démontrer que $\mathcal{T}opo_{k+1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{T}opo_{k+1}(\tilde{\mathcal{H}})$.

Soit $\overrightarrow{V} = (V_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}opo_{k+1}(\mathcal{H})$. Posons:

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv \{i \in I \text{ tel que } V_i = 0\}, \\ I^+ &\equiv \{i \in I \text{ tel que } V_i > 0\}, \\ I^- &\equiv \{i \in I \text{ tel que } V_i < 0\}. \end{aligned}$$

Alors

$$f \equiv \bigcap_{\overrightarrow{V}} \mathcal{H} = (\bigcap_{i\in I_0} h_i) \bigcap (\bigcap_{i\in I^+} h_i^+) \bigcap (\bigcap_{i\in I^-} h_i^-)$$

est une $(k+1)$-face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\overrightarrow{V}(f) = \overrightarrow{V}$.

Posons aussi: $\tilde{F} = (\bigcap_{i\in I_0} \tilde{h}_i)$.
Notre but est de démontrer que:

$$\tilde{f} \equiv \bigcap_{\overrightarrow{V}} \tilde{\mathcal{H}} \equiv \tilde{F} \bigcap (\bigcap_{i\in I^+} \tilde{h}_i^+) \bigcap (\bigcap_{i\in I^-} \tilde{h}_i^-) \neq \emptyset. \tag{1}$$

D'après le Lemme 1.9, il existe une sous face g de f telle que $\dim g = k$.
C'est-à-dire que le vecteur position $\overrightarrow{V}(g) \in \mathcal{T}opo_k(\mathcal{H}) = \mathcal{T}opo_k(\tilde{\mathcal{H}})$.
Donc $\tilde{g} \equiv \bigcap_{\overrightarrow{V}(g)} \tilde{\mathcal{H}}$ est une k-face et en particulier $\tilde{g} \neq \emptyset$.
$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ étant simple, $\overrightarrow{V}(g)$ ne diffère de $\overrightarrow{V}(f)$ qu'en une seule composante i_0, où $V_{i_0}(g) = 0 \neq V_{i_0}(f)$. Supposons, pour fixer les idées, que $i_0 \in I^+$. On a alors:

$$\tilde{g} = (\bigcap_{i\in I_0\cup\{i_0\}} \tilde{h}_i) \bigcap (\bigcap_{i\in I^+\setminus\{i_0\}} \tilde{h}_i^+) \bigcap (\bigcap_{i\in I^-} \tilde{h}_i^-) \neq \emptyset \tag{2}$$

On voit que (2) est déjà tout proche de notre but (1). On va chercher à changer la place de i_0 .

Soit un point $M \in \tilde{g}$. D'après (2) on a:

$$\begin{cases} M \in \bigcap_{i \in I_0 \cup \{i_0\}} \tilde{h}_i = \tilde{F} \cap \tilde{h}_{i_0} \\ \text{et} \\ \text{il existe } \epsilon > 0 \text{ tel que} \\ \qquad \text{la boule } B(M,\epsilon) \subset (\bigcap_{i \in I^+ \setminus \{i_0\}} \tilde{h}_i^+) \bigcap (\bigcap_{i \in I^-} \tilde{h}_i^-). \end{cases}$$

On a en plus

$$\dim(\tilde{F} \cap \tilde{h}_{i_0}) = k \qquad (\text{car } \tilde{g} \text{ est une } k\text{-face}),$$

$$\text{et} \qquad \dim \tilde{F} > k \qquad (\text{car } \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}) \text{ est simple}).$$

Donc $\quad \emptyset \neq \tilde{F} \cap \tilde{h}_{i_0} \neq \tilde{F}$.
D'où, d'après le lemme 1.8),

$\tilde{F} \cap \tilde{h}_{i_0}^+ \neq \emptyset$ et M est un point d'adhérence de $\tilde{F} \cap \tilde{h}_{i_0}^+$.

Ce qui entraîne qu'il existe un point N tel que:

$$\begin{aligned} N \in \; & B(M,\epsilon) \bigcap (\tilde{F} \cap \tilde{h}_{i_0}^+) \subset \\ & (\bigcap_{i \in I^+ \setminus \{i_0\}} \tilde{h}_i^+) \bigcap (\bigcap_{i \in I^-} \tilde{h}_i^-) \bigcap (\tilde{F} \cap \tilde{h}_{i_0}^+) = \\ & (\bigcap_{i \in I^+} \tilde{h}_i^+) \bigcap (\bigcap_{i \in I^-} \tilde{h}_i^-) \bigcap \tilde{F} \equiv \bigcap_{\vec{V}} \tilde{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Donc $\bigcap_{\vec{V}} \tilde{\mathcal{H}} \neq \emptyset$. En plus, $\dim \tilde{F} = k+1$.

C.à.d. que $\vec{V} \in \mathcal{T}opo_{k+1}(\tilde{\mathcal{H}})$. Donc $\quad \mathcal{T}opo_{k+1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{T}opo_{k+1}(\tilde{\mathcal{H}})$. ∎

1.2 Distance entre deux hyperplans et conservation de la topologie des Arrangements

Notations et objectif. Dans ce qui suit, on continue à travailler avec $\mathcal{H} = (h_i)_{i \in I}$, $\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{h}_i)_{i \in I}$ deux familles de n hyperplans ne passant pas par l'origine O de l'espace $\mathbb{R}^d$, et $I = \{1, 2, ..., n\}$.
On supposera en plus que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit simple et que $\mathcal{T}opo_0(\mathcal{H}) \neq \emptyset$ (c.à.d. que $n \geq d$). On définit d'abord une distance entre les hyperplans et on verra que si $\tilde{h}_i$ n'est pas trop "loin" de h_i dans le sens de cette distance, $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ reste encore équivalent à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Ecrivons les équations normalisées des hyperplans h_i, $\tilde{h}_i$, h et $\tilde{h}$:

$$h_i \;:\; \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j - c_i = 0, \qquad \tilde{h}_i \;:\; \sum_{j=1}^{d} \tilde{a}_{ij} x_j - \tilde{c}_i = 0,$$

$$h \;:\; \sum_{j=1}^{d} a_j x_j - c = 0, \qquad \tilde{h} \;:\; \sum_{j=1}^{d} \tilde{a}_j x_j - \tilde{c} = 0.$$

1.2.1 Distance entre deux hyperplans

Définition 1.3. *Soient h et $\tilde{h}$ deux hyperplans ne passant pas par l'origine O. On définit la distance $D(h,\tilde{h})$ comme suit:*

$$D(h,\tilde{h}) = Max\,(\mid a_1 - \tilde{a}_1 \mid, \mid a_2 - \tilde{a}_2 \mid, \ldots, \mid a_d - \tilde{a}_d \mid, \quad \mid c - \tilde{c} \mid).$$

On peut vérifier que $D(h,\tilde{h})$ est une métrique. On peut se proposer d'autres distances possibles qui sont toutes équivalentes avec celle-ci, et donc dépendent du repère de l'espace. En fait, toute distance indépendante du repère (distances intrinsèques) contraignent que les hyperplans soient parallèles quand la distance entre eux est suffisamment petite. (Voir l'annexe A 1.3).

Lemme 1.11. *Soient $\delta \geq 0$ et $\epsilon \geq 0$.*
Soient h et $\tilde{h}$ deux hyperplans tels que: $D(h,\tilde{h}) \leq \delta$.
Soient M et $\tilde{M}$ deux points tels que: $\| M - \tilde{M} \| \leq \epsilon$.
On a alors l'inégalité:

$$\mid d(M,h) - d(\tilde{M},\tilde{H}) \mid \leq (\sqrt{d}\,\| M \| + 1)\cdot\delta \quad + \quad \epsilon,$$

où $d(M,h) \equiv \sum_{j=1}^{d} a_j x_j - c$ *est la distance algébrique du point* $M = (x_1, \cdots, x_d)$ *à l'hyperplan h.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mid d(M,h) - d(\tilde{M},\tilde{h}) \mid \leq \mid d(M,h) - d(M,\tilde{h}) \mid + \mid d(M,\tilde{h}) - d(\tilde{M},\tilde{h}) \mid \quad &= \\
\mid \sum_{j=1}^{d}(a_j - \tilde{a}_j)x_j + (\tilde{c} - c) \mid + \mid \sum_{j=1}^{d}(x_j - \tilde{x}_j)\tilde{a}_j \mid \quad &\leq \\
(\sum_{j=1}^{d} \mid a_j - \tilde{a}_j \mid\mid x_j \mid + \mid \tilde{c} - c \mid) + \sum_{j=1}^{d} \mid x_j - \tilde{x}_j \mid\mid \tilde{a}_j \mid \quad &\leq \\
(\sum_{j=1}^{d} \mid x_j \mid + 1)\delta + (\sum_{j=1}^{d} \mid x_j - \tilde{x}_j \mid^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{d} \mid \tilde{a}_j \mid^2)^{\frac{1}{2}} \quad &\leq \\
(\sqrt{d}(\sum_{j=1}^{d} \mid x_j \mid^2)^{\frac{1}{2}} + 1)\delta + \| M - \tilde{M} \| \quad &\leq \\
(\sqrt{d}\,\| M \| + 1)\delta \quad + \quad \epsilon \quad \blacksquare &
\end{aligned}$$

Corollaire 1.12. *Soient $h, h_1, h_2, \ldots, h_m, \ldots$ des hyperplans ne passant pas par l'origine tels que* $\lim_{m\to\infty} D(h_m, h) = 0$.
Soit un point $M \in \mathbb{R}^d$. *On a alors:* $\lim_{m\to\infty} d(M, h_m) = d(M, h)$.
Preuve. Dans le lemme 1.11, prenons $\delta_m = D(h_m, h)$ et $\epsilon = 0$, on a:

$$| d(M,h_m) - d(M,h) | \leq (\sqrt{d} \parallel M \parallel +1)D(h_m,h) \quad \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Le corollaire suivant vient aussi directement du lemme 1.11 et sera utilisé souvent dans la suite:

Corollaire 1.13. *Fixons un hyperplan h et un point $M \notin h$. Prenons $\delta \geq 0$ et $\epsilon \geq 0$ tels que:*

$$(\sqrt{d} \parallel M \parallel +1)\delta + \epsilon \quad < \quad | d(M,h) | .$$

Alors $\forall \tilde{h}, \tilde{M}$, on a:
$D(\tilde{h},h) \leq \delta$ et $\parallel \tilde{M} - M \parallel \leq \epsilon \Longrightarrow d(\tilde{M},\tilde{h})$ a le même signe que $d(M,h)$.

1.2.2 Notations et Lemmes techniques

Lemme 1.14.(Hadamard) *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$.*

Posons les vecteurs colones et les vecteurs lignes suivantes:

$$a_{.i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{di} \end{pmatrix} \quad , \quad a_{i.} = (a_{i1}, ..., a_{id}), \ \forall i = 1, \cdots, d.$$

On a alors:

$$| detA | \ \leq \ \|a_{.1}\| \ \|a_{.2}\| \cdots \|a_{.d}\| \ ;$$
$$et$$
$$| detA | \ \leq \ \|a_{1.}\| \ \|a_{2.}\| \cdots \|a_{d.}\| \ .$$

où $\| \ . \ \|$ désigne la norme euclidienne.

Ce lemme est classique, on en donne une démonstration rapide

Preuve. On peut écrire [Lasc86]

$$A \ = \ Q.R \ , \tag{1}$$

où $Q = (q_{ij})$ est une matrice orthonormale et $R = (r_{ij})$ est triangulaire supérieure.
De (1) on a:

$$| detA | \ = \ | detR | \ = \ \prod_{i=1}^{d} | r_{ii} |.$$

De (1) on a aussi:

$$R \ = \ U.A, \quad \text{où } U \ = (u_{ij}) \ = \ Q^{-1} = \ {}^TQ.$$

Par conséquent,

$$| r_{ii} | \ = \ | \sum_{k=1}^{n} u_{ik}.a_{ki} | \ \leq \ \| u_{i.} \| \ \| a_{.i} \| \ = \ \| a_{.i} \| \ , \ \forall i = 1, ..., d.$$

Donc

$$| detA | \ \leq \ \|a_{.1}\| \ \|a_{.2}\| \cdots \|a_{.d}\| \ . \qquad \blacksquare$$

Notations. Soit maintenant $J \subset I, J = \{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$. Notons (les lignes des

matrices correspondent aux hyperplans $h_{i_1}, \cdots, h_{i_d}$ et $\tilde{h}_{i_1}, \cdots, \tilde{h}_{i_d}$):

$$A_J \equiv \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 d} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_d 1} & a_{i_d 2} & \cdots & a_{i_d d} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_J \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_{i_1 1} & \tilde{a}_{i_1 2} & \cdots & \tilde{a}_{i_1 d} \\ \tilde{a}_{i_2 1} & \tilde{a}_{i_2 2} & \cdots & \tilde{a}_{i_2 d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{i_d 1} & \tilde{a}_{i_d 2} & \cdots & \tilde{a}_{i_d d} \end{pmatrix},$$

et

$$\Delta_J \equiv \det A_J \quad , \quad \tilde{\Delta}_J \equiv \det \tilde{A}_J,$$

$\Delta_J \neq 0$ (resp. $\tilde{\Delta}_J \neq 0$) signifie que les hyperplans $(h_i)_{i \in J}$ (resp. $(\tilde{h}_i)_{i \in J}$) se coupent en un point.
Faisons le lemme suivant qui évalue la perturbation d'un sommet lorsque les d hyperplans qui donnent lieu à ce sommet sont perturbés:

Lemme 1.15. *Soit $J \subset I, Card(J) = d$. Supposons que $(h_i)_{i \in J}$ se coupent en un point M_J, c.à.d. que $\Delta_J \neq 0$.*
Soit $\delta \geq 0$ tel que $\quad \delta < \dfrac{|\Delta_J|}{d\sqrt{d}}$.
Alors si $D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta, \forall i \in J$, les hyperplans $(\tilde{h}_i)_{i \in J}$ se coupent aussi en un point $\tilde{M}_J$ qui vérifie:

$$\| \tilde{M}_J - M_J \| \leq \epsilon_J,$$

où $$\epsilon_J = \frac{d\delta[C_J + \delta]\sqrt{d}^{d+1}}{(|\Delta_J| - d\sqrt{d}\delta)} [1 + \frac{\sqrt{d}}{|\Delta_J|}] \quad et \quad C_J = Max(1, \underset{i \in J}{\mathbf{Max}}\, c_i).$$

Preuve. Supposons, pour simplifier les notations, que $J = \{1, 2, \cdots, d\}$.
Evaluons d'abord $|\tilde{\Delta}_J - \Delta_J|$:
Posons les vecteurs lignes:

$$a_{i.} = (a_{i1}, ..., a_{id}) \quad \text{et} \quad \tilde{a}_{i.} = (\tilde{a}_{i1}, ..., \tilde{a}_{id}) \quad , \forall i = 1, \cdots, d\ .$$

on a :

$$\| a_{i.} \| = 1 \quad \| \tilde{a}_{i.} \| = 1 \quad , \forall i = 1, \cdots, d\ .$$

En particulier, $\quad |a_{ij}| < 1\ \forall\ i,\ j = 1,\ ...,\ d$.
Posons

$$M_0 = \Delta_J \equiv det \begin{pmatrix} a_{1.} \\ \vdots \\ a_{d.} \end{pmatrix} \quad , \quad M_d = \tilde{\Delta}_J \equiv det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1.} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{d.} \end{pmatrix},$$

$$M_i = det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1.} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i.} \\ a_{i+1.} \\ \vdots \\ a_{d.} \end{pmatrix} \quad i = 1, ..., d-1 \quad \text{et} \quad N_i = det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1.} \\ \vdots \\ a_{i.} - \tilde{a}_{i.} \\ \vdots \\ a_{d.} \end{pmatrix} \quad i = 1, ..., d\ .$$

Alors on a :

$$M_{i-1} - M_i = N_i \quad i = 1, ..., d.$$

Donc $$| \Delta_J - \tilde{\Delta}_J | = | \sum_{i=1}^{d}(M_{i-1} - M_i) | = | \sum_{i=1}^{d} N_i | \leq \sum_{i=1}^{d} | N_i |.$$

Utilisons le lemme 1.14 pour les lignes de N_i, on a

$$|N_i| \leq ||\tilde{a}_{1.}||...||a_{i.} - \tilde{a}_{i.}||...||a_{d.}|| = ||a_{i.} - \tilde{a}_{i.}|| \quad (\text{car } ||\tilde{a}_{1.}||, \ ..., ||a_{d.}|| = 1)$$
$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}|^2} \leq \sqrt{d\ \delta^2} = \delta\ \sqrt{d}\ .$$

Donc
$$| \Delta_J - \tilde{\Delta}_J | \leq d\ \sqrt{d}\ \delta\ .$$

Fixons ensuite un j_0, $1 \leq j_0 \leq d$.
Posons: $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{d}$, $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{i,j=1}^{d}$ les matrices obtenues en remplaçant respectivement la $j_0^{\text{ème}}$ colone de A_J et de $\tilde{A}_J$ par $(c_i)_{i=1}^{n}$ et $(\tilde{c}_i)_{i=1}^{n}$. Plus précisement, pour tout $i \in J$,

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \neq j_0, \\ c_i & \text{si } j = j_0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{b}_{ij} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij} & \text{si } j \neq j_0, \\ \tilde{c}_i & \text{si } j = j_0. \end{cases}$$

Posons aussi: $\Delta_J(j_0) = \det B$, $\tilde{\Delta}_J(j_0) = \det \tilde{B}$.

Calculons maintenant $| \Delta_{J(j0)} - \tilde{\Delta}_{J(j0)} |$.
Posons les vecteurs colonnes :

$$b_{.j_0} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} \ ; \ \tilde{b}_{.j_0} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_d \end{pmatrix}$$
$$b_{.j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{dj} \end{pmatrix} \ ; \ \tilde{b}_{.j} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1j} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{dj} \end{pmatrix}, \ (j = 1, ..., d, \ j \neq j_0).$$

Posons
$$M_0 = \Delta_{J(j_0)} \equiv det\ (b_{.1}... \ b_{.d}) \quad , \quad M_d = \tilde{\Delta}_{J(j_0)} \equiv det\ (\tilde{b}_{.1}...\tilde{b}_{.d})\ ,$$

$$M_j = det\ (\tilde{b}_{.1}...\tilde{b}_{.j}\ b_{.j+1}...b_{.d})\ , \ \ j = 1, \ ..., \ d-1$$

et
$$N_j = det\ (\tilde{b}_{.1}...b_{.j} - \tilde{b}_{.j}...b_{.d})\ , \ \ j = 1, \ ..., \ d\ .$$

On a
$$M_{j-1} - M_j = N_j\ , \ \ j = 1, \ ..., \ d\ .$$

Ce qui entraîne $$| \Delta_{J(j0)} - \tilde{\Delta}_{J(j_0)} | \leq \sum_{j=1}^{d} | N_j |\ .$$

Utilisons le lemme 1.14 pour les colonnes de N_j :

$$|N_j| \leq ||\tilde{b}_{.1}||...||b_{.j} - \tilde{b}_{.j}||...||b_{.d}||\ .$$

On voit que:
pour tout j:
$$||b_{.j} - \tilde{b}_{.j}|| \leq \sqrt{d}\,\delta \quad ,$$

pour $j \neq j_0$:
$$||\tilde{b}_{.j}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_{ij}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} 1} = \sqrt{d},$$
$$||b_{.j}|| \leq \sqrt{d},$$

et pour $j = j_0$:
$$||\tilde{b}_{.j_0}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \tilde{c}_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (c_i + \delta)^2} = [C_J + \delta]\sqrt{d}\ ,$$
$$||b_{.j_0}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} c_i^2} \leq [\ \max_{i \in J} c_i\ ]\sqrt{d} \leq [C_J + \delta]\sqrt{d}\ .$$

Ce qui résulte que:
$$|\ N_j\ | \leq \delta\sqrt{d}^d\ [C_J + \delta] \quad \text{si } j \neq j_0\ ,$$
et
$$|\ N_{j0}\ | \leq \delta\sqrt{d}^d \leq \delta\sqrt{d}^d\ [C_J + \delta]\ .$$

Donc
$$|\ \Delta_{J(j0)} - \tilde{\Delta}_{J(j0)}\ | \leq \delta\sqrt{d}^d d\ [C_J + \delta]\ .$$

D'autre part, on a aussi (Lemme 1.14) pour les colonnes de $\Delta_{J(j_0)}$:
$$||\ \Delta_{J(j0)}\ || \leq ||b_{.1}||...||b_{.d}|| \leq \sqrt{d}^d\ [\ \max_{i \in J} c_i\ ] \leq \sqrt{d}^d\ C_J.$$

Soient x_{j_0} et $\tilde{x}_{j_0}$ les $j_0^{\text{ème}}$ composantes de M_J et de $\tilde{M}_J$. On a:
$$x_{j_0} = \frac{\Delta_J(j_0)}{\Delta_J} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_{j_0} = \frac{\tilde{\Delta}_J(j_0)}{\tilde{\Delta}_J}.$$

Donc
$$|\ \tilde{x}_{j_0} - x_{j_0}\ | =$$
$$|\ \frac{\tilde{\Delta}_J(j_0)}{\tilde{\Delta}_J} - \frac{\Delta_J(j_0)}{\Delta_J}\ | \leq |\ \frac{\tilde{\Delta}_J(j_0)}{\tilde{\Delta}_J} - \frac{\Delta_J(j_0)}{\tilde{\Delta}_J}\ | + |\ \frac{\Delta_J(j_0)}{\tilde{\Delta}_J} - \frac{\Delta_J(j_0)}{\Delta_J}\ | =$$
$$= \frac{1}{|\ \tilde{\Delta}_J\ |}\ |\ \tilde{\Delta}_J(j_0) - \Delta_J(j_0)\ | \quad + \quad \frac{|\ \Delta_J(j_0)\ |}{|\ \Delta_J\ ||\ \tilde{\Delta}_J\ |}\ |\ \tilde{\Delta}_J - \Delta_J\ | \quad \leq$$
$$\leq \frac{1}{|\ \tilde{\Delta}_J\ |}\ \delta\sqrt{d}^d d\ [C_J + \delta] + \frac{|\Delta_{J(j0)}|}{|\Delta_J|\ |\tilde{\Delta}_J|}\ d\ \sqrt{d}\ \delta \quad \leq$$
$$\leq \frac{1}{|\ \tilde{\Delta}_J\ |}\ \delta d\ [\sqrt{d}^d\ [C_J + \delta] + \frac{|\Delta_{J(j0)}|}{|\Delta_J|}\ \sqrt{d}\ ] \leq$$
$$\leq \frac{1}{|\ \tilde{\Delta}_J\ |}\ \delta d\ [\sqrt{d}^d\ [C_J + \delta] + \frac{\sqrt{d}^d\ C_J}{|\Delta_J|}\ \sqrt{d}\ ] \quad \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\mid \Delta_J \mid - \delta d\sqrt{d}\ )}\ \delta\sqrt{d}^{d+2}\ [C_J + \delta]\ [1 + \frac{\sqrt{d}}{|\Delta_J|}\ ]\ .$$

Donc

$$||\tilde{M}_J - M_J|| \leq \frac{d\delta[C_J + \delta]\sqrt{d}^{d+1}}{(|\Delta_J| - d\sqrt{d}\delta)}\ [1 + \frac{\sqrt{d}}{|\Delta_J|}] \equiv \epsilon_J \qquad \blacksquare$$

1.2.3 Perturbation des hyperplans et préservation de l' arrangement

Notation. Dans la suite, on supposera que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit simple et que $n \geq d$ (c.à.d. que $\mathcal{T}opo_0(\mathcal{H}) \neq \emptyset$). A chaque sommet M_J de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ on désignera par l_J un nombre positif tel que:

$$l_J < \min_{i \in I \setminus J} \mid d(M_J, h_i) \mid . \tag{1.3}$$

Corollaire 1.16. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit simple et que $n \geq d$.*
Fixons $J \subset I$, $Card(J) = d$.
Soit $\delta \geq 0$ tel que

$$\begin{cases} \delta < \dfrac{|\Delta_J|}{d\sqrt{d}} \quad et \\ \\ (\sqrt{d} \parallel M_J \parallel + 1)\delta \quad + \quad \epsilon_J < l_J, \end{cases} \tag{1.4}$$

où ϵ_J est donné dans le lemme 1.15.

Supposons que $D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta$, $(i \in I)$, alors on a:

1/. les hyperplans $(\tilde{h}_i)_{i \in J}$ se coupent en un point $\tilde{M}_J$ qui vérifie:
$$\parallel \tilde{M}_J - M_J \parallel \leq \epsilon_J$$
2/. $d(\tilde{M}_J, \tilde{h}_l)$ a le même signe que $d(M_J, h_l)$, $(l \in I \setminus J)$.

Preuve. δ étant inférieur à $\dfrac{\mid \Delta_J \mid}{d\sqrt{d}}$, le lemme 1.15 nous donne tout-de-suite 1/. Pour avoir 2/, faisons appel au Corollaire 1.13 en prenant les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} M &= M_J, \\ \epsilon &= \epsilon_J, \\ \text{et} \quad h &= h_l,, (l \in I \setminus J). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 1.17. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit simple et que $n \geq d$.*
Soit $\delta \geq 0$ tel que δ vérifie (1.4) pour tout $J \subset I$, $Card(J) = d$

Supposons que $D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta$, $(i \in I)$, *alors* $\forall J \subset I$, $Card(J) = d$, *on a:*

1/. *les hyperplans* $(\tilde{h}_i)_{i \in J}$ *se coupent en un point* $\tilde{M}_J$ *qui vérifie:*

$$\| \tilde{M}_J - M_J \| \leq \epsilon_J,$$

2/. $d(\tilde{M}_J, \tilde{h}_l)$ *a le même signe que* $d(M_J, h_l)$, $(l \in I \setminus J)$,

3/. $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ *et* $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ *sont équivalents.*

Preuve. Pour chaque sous-ensemble $J \subset I$, $Card(J) = d$, les assertions 1/, 2/ de cette observation sont identiques aux assertions 1/ et 2/ du corollaire 1.16.
De l'assertion 2/, on voit que $\mathcal{T}opo_0(\tilde{\mathcal{H}}) = \mathcal{T}opo_0(\mathcal{H}) \neq \emptyset$.
Donc le théorème 1.10 nous donne l'assertion 3/ . ∎

1.2.4 Coûts de calcul

Coût de calcul pour la perturbation de tous les hyperplans

On peut donc calculer un δ tel que $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ soit équivalent avec $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ quand $D(\tilde{h}_i, h_i) < \delta$. On discute maintenant sur le coût de ce calcul.
Dans (1.4) les quantités $| \Delta_J |$, $\| M_J \|$ et ϵ_J sont calculées au coût constant pour chaque J fixé. Le lemme 1.18 suivant nous dit que l_J aussi (voir (1.3)) sera calculé en coût constant une fois que l' arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est construit. Dans le théorème 1.19 on en déduira le coût total pour calculer δ.

Lemme 1.18. *Supposons que* $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ *soit simple et soit déjà construit. Alors, pour chaque* J *fixé* $(J \subset I, Card(J) = d)$, *on peut calculer en coût constant un* l_J *positif vérifiant (1.3).*

Preuve. Soit $J \subset I, Card(J) = d$. Le sommet $M_J \equiv \bigcap_{j \in J} h_j$ est aussi l'intersection de d droites $(d_i)_{i \in J}$, où:

$$d_i = \bigcap_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} h_j.$$

Sur chaque droite d_i, prenons deux points $P_{o\,i}$ et $P_{e\,i}$ tels que M_J soit compris entre ces deux points et que le segment ouvert $]P_{o\,i}, P_{e\,i}[$ n'ait pas d'autres sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ que M_J (figure 1.3).
$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ étant calculé, on obtient facilement les points $P_{o\,i}$ et $P_{e\,i}$ en coût constant.
On calcule ensuite l'enveloppe convexe $\mathcal{P}_J$ des points $P_{o\,i}$ et $P_{e\,i}$ $(i \in J)$. (Le coût est constant.)
On a alors l'intérieur $\overset{0}{\mathcal{P}}_J \neq \emptyset$ et $M_J \in \overset{0}{\mathcal{P}}_J$ (car les d vecteurs $(\overrightarrow{M_J P_{ei}})_{i \in J}$ sont linéairement indépendants).
Considérons un hyperplan h_l, $l \in I \setminus J$: h_l ne peut couper (car il n'y a pas d'autres sommets que M_J) ni contenir (car $M_J \notin h_l$) les segments demi-ouverts

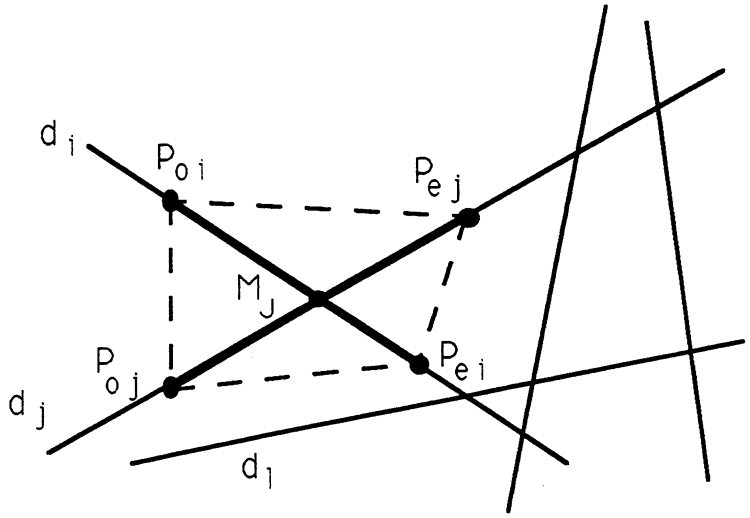


FIGURE 1.3. ARRANGEMENT DANS $\mathbb{R}^2$._ $J = \{i, j\}$

$[M_J, P_{o\,i}[$ et $[M_J, P_{e\,i}[$. On en déduit que h_l ne peut couper $\overset{0}{\mathcal{P}}_J$. Prenons donc (en coût constant):

$$l_J = \min_h \mid d(M_J, h) \mid,$$

où h parcourt tous les hyperplans support des facettes de $\mathcal{P}$, c.à.d. les espaces affines engendrés par les points $P_{t_1\,1}, \ldots, P_{t_d\,d}$, où $t_1, \cdots, t_d \in \{o, e\}$.

Alors la boule ouverte $B(M_J, l_J)$ est contenue dans $\overset{0}{\mathcal{P}}_J$. On a:

$$B(M_J, l_J) \cap h_l = \emptyset \quad (l \in I \setminus J).$$

Donc l_J vérifie (1.3) ∎

Théorème 1.19. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit simple et que $n \geq d$. On peut alors calculer en coût $O(n^d)$ un $\delta > 0$ tel que:*

$$D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta\,, \forall i \in I \Longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}) \text{ est équivalent avec } \mathcal{A}(\mathcal{H}).$$

Preuve.

Etape 1: on construit l' arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Le coût en est $O(n^d)$ **[Edels91]**.

Etape 2: d'après le théorème 1.17, on doit prendre δ vérifiant (1.4) pour tous les sous ensembles J de I, $Card(J) = d$.

Or à chaque sous ensemble J le coût de calcul des valeurs $\mid \Delta_J \mid$, $\parallel M_J \parallel$ et l_J (Lemme 1.18) étant constant, le coût de cette deuxième étape est donc proportionnel au nombre des sous ensembles J, qui est égal à: $\dfrac{n!}{d!(n-d)!} = \dfrac{n \ldots (n-d+1)}{d!} = O(n^d)$.

Le coût total est donc $O(n^d)$. ∎

Coût de calcul pour une perturbation de k hyperplans:

Pour le reste du chapitre, supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit déjà calculé. On s'intéresse uniquement à la deuxième étape du calcul de δ dans la preuve du théorème 1.19. On a vu que le coût de cette étape est $O(n^d)$ si tous les n hyperplans sont susceptibles d'être perturbés.
Si on ne perturbe maintenant que quelques hyperplans $(h_i)_{i\in K}$ où $K \subset I$ (par exemple $Card(K) = 1,\ 2$, ou 3 ...), est-ce qu'on peut calculer δ avec un coût plus faible? Faisons d'abord quelques notations:

Notations. Soient $T \subset I$, $Card(T) = d-1$ et $i \in I \setminus T$. Notons:

$$d_T \equiv \bigcap_{j\in T} h_i \qquad (\ d_T \text{ est une droite});$$

$$M_{(T,i)} \equiv M_J \quad , \quad l_{(T,i)} \equiv l_J,$$

où $J = T \cup \{i\}$ et l_J est donné dans (1.3).
($M_{(T,i)}$ est donc l'intersection de la droite d_T et l'hyperplan h_i).

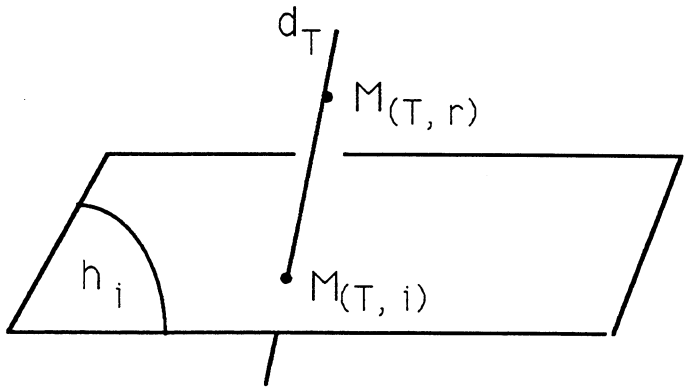


FIGURE 1.4. EXEMPLE: $Card(T) = d-1;\ i, r \notin T$

Observation 1.20. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit simple et que $n \geq d$.*
Soit $K \subset I$, $Card(K) = k$, $1 \leq k \leq n-d$. Soit $\delta \geq 0$ tel que:
a/. δ vérifie (1.4) en tout sommet M_J tel que $J \cap K \neq \emptyset$;
(C'est à dire en tout sommet M_J qui sera perturbé.)
b/. Pour tout hyperplan $h_i, (i \in K)$, pour toute droite $d_T, (T \subset I \setminus K)$, il existe un hyperplan h_r, $r \in I \setminus (T \cup \{i\})$ tel que:

$$(\sqrt{d}\ \|\ M_{(T,r)}\ \| + 1)\delta \quad < \quad |\ d(M_{(T,r)}, h_i)\ |\ .$$

Alors, si $(D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta,\ \forall i \in K\ )$ et $(\ \tilde{h}_i = h_i,\ \forall i \in I \setminus K)$, on a:

Pour tout $J \subset I$, $Card(J) = d$,

1/. *les hyperplans* $(\tilde{h}_i)_{i \in J}$ *se coupent en un point* $\tilde{M}_J$ *qui vérifie:*

$$\| \tilde{M}_J - M_J \| \leq \epsilon_J$$

2/. $d(\tilde{M}_J, \tilde{h}_l)$ *a le même signe que* $d(M_J, h_l)$, $(l \in I \setminus J)$, *et*

3/. $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ *et* $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ *sont équivalents.*

Preuve. On va démontrer seulement les assertions 1/ et 2/ de l'observation 1.20, car l'assertion 3/ se déduit de 2/ grâce au théorème 1.10.
Prenons donc $J \subset I$, $Card(J) = d$ et $i \in I \setminus J$.

Premier cas: $J \cap K \neq \emptyset$.
(1.4) étant vérifié en point M_J, le corollaire 1.16 nous donne 1/ et 2/ de l'observation 1.20.

Deuxième cas: $J \cap K = \emptyset$.
On a d'abord: $\tilde{h}_j = h_j, (j \in J)$. Donc $\tilde{M}_J = M_J$. Donc 1/ est démontré.

Si $i \notin K$, on a: $\tilde{h}_i = h_i$. Donc 2/ est démontré.

Supposons enfin que $i \in K$.
Ecrivons $J = T \cup \{j\}$ (donc $T \cap K = \emptyset$ et $j \notin K$).
Notre but est de démontrer que:

$V_{h_i}(M_{T,j}) = V_{\tilde{h}_i}(M_{T,j})$ (car $\tilde{M}_{T,j} = M_{T,j}$).

Soit $r \in I \setminus (T \cup \{i\})$ tel que (l'hypothèse b/):

$$(\sqrt{d} \| M_{(T,r)} \| + 1)\delta < | d(M_{(T,r)}, h_i) | .$$

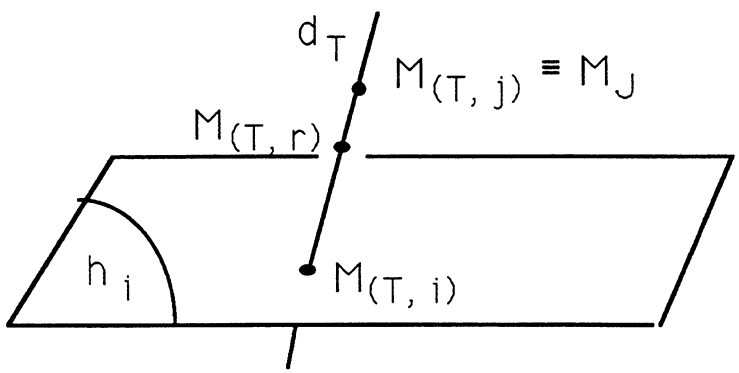


FIGURE 1.5. $M_{(T,r)} \in d_T$

Le corollaire 1.13 (avec $\epsilon = 0$) nous donne: $V_{h_i}(M_{(T,r)}) = V_{\tilde{h}_i}(M_{(T,r)})$. (1)

Donc si $M_{(T,j)} = M_{(T,r)}$, 2/ est démontré.

Supposons donc que $M_{(T,j)} \neq M_{(T,r)}$.

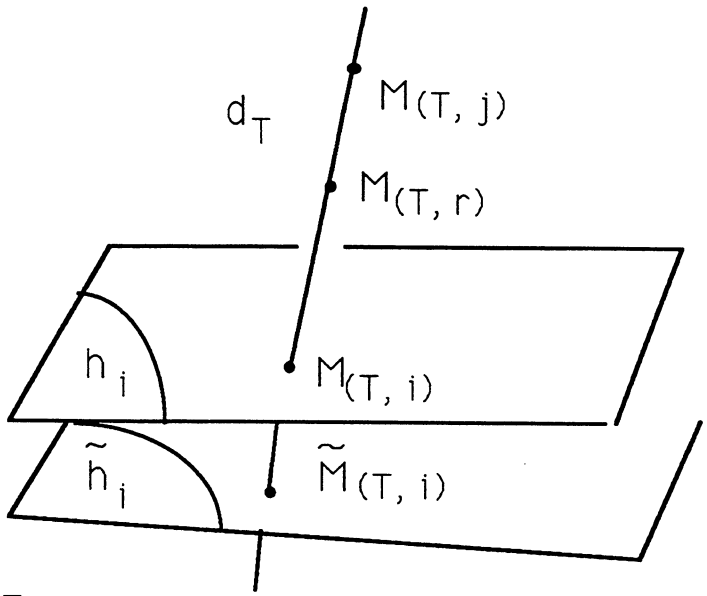


FIGURE 1.6.

L'assertion 1/ de cette observation nous donne: $\| \tilde{M}_{(T,i)} - M_{(T,i)} \| \leq \epsilon_{(T,i)}$.
Or $\epsilon_{(T,i)} < l_{(T,i)}$ (voir (1.4)). Donc $\| \tilde{M}_{(T,i)} - M_{(T,i)} \| < l_{(T,i)}$.

D'autre part, d'après (1.3):
$l_{(T,i)} \leq | d(M_{(T,i)}, h_r) | \leq \| M_{(T,i)} - M_{(T,r)} \|$ et
$l_{(T,i)} \leq | d(M_{(T,i)}, h_j) | \leq \| M_{(T,i)} - M_{(T,j)} \|$.
Donc

$$\| \tilde{M}_{(T,i)} - M_{(T,i)} \| < \| M_{(T,i)} - M_{(T,r)} \| \tag{2}$$

$$\| \tilde{M}_{(T,i)} - M_{(T,i)} \| < \| M_{(T,i)} - M_{(T,j)} \| \tag{3}$$

(2) et (3) nous disent que si l'hyperplan h_i coupe la droite d_T en $M_{(T,i)}$ à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du segment $[M_{(T,r)}, M_{(T,j)}]$, l'hyperplan $\tilde{h}_i$ coupe d_T en $\tilde{M}_{(T,i)}$ à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du segment $[M_{(T,r)}, M_{(T,j)}]$.
Autrement dit, si $M_{(T,r)}$, $M_{(T,j)}$ se trouvent d'un même côté (resp. de deux côtés) de h_i , ils se trouvent d'un même côté (resp. de deux côtés) de $\tilde{h}_i$.
Supposons d'abord que $M_{(T,r)}$, $M_{(T,j)}$ se trouvent d'un même côté de h_i. On a:
$V_{h_i}(M_{T,j}) = V_{h_i}(M_{T,r})$ et
$V_{\tilde{h}_i}(M_{T,j}) = V_{\tilde{h}_i}(M_{T,r})$.

Faisant appel à (1), on atteint notre but: $V_{h_i}(M_{T,r}) = V_{\tilde{h}_i}(M_{T,r})$.

De même quand $M_{(T,r)}$, $M_{(T,j)}$ se trouvent de deux côtés de h_i. ∎

Théorème 1.21. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ soit simple et déjà calculé.*

Soit $K \subset I$, $Card(K) = k$, $1 \leq k \leq n-d$. On peut alors calculer en coût

$$O((n-k)^{d-1} \cdot \sum_{i=1}^{Min(k,\ d)} \frac{k!}{(k-i)!\ i!\ (d-i)!} \cdot)$$

un $\delta > 0$ tel que:

$$\begin{cases} D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta, & \forall i \in K \\ \tilde{h}_i = h_i & \forall i \in I \setminus K \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}) \text{ est équivalent avec } \mathcal{A}(\mathcal{H})$$

Preuve. $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ étant déjà calculé, l_J qui vérifie (1.3) sera calculé en coût constant d'après le lemme 1.18. On obtiendra donc la condition a/ de l'observation 1.20 en temps proportionnel à

$$Card\{M_J \text{ tel que } J \subset I,\ Card(J) = d \text{ et } J \cap K \neq \emptyset\} =$$

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(k,\ d)} \frac{k!}{(k-i)!\ i!} \cdot \frac{(n-k)!}{((n-k)-(d-i))!\ (d-i)!} \cdot$$

Or $i \geq 1$, on a:

$$\frac{(n-k)!}{((n-k)-(d-i))!} \leq \frac{(n-k)!}{((n-k)-(d-1))!} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{((n-k)-d+1)!} = ((n-k)-d+2)\cdots((n-k)-d+d) \leq$$

$$\leq (n-k)^{d-1}.$$

Donc le coût de la condition a/ de l'observation 1.20 est:

$$O((n-k)^{d-1} \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(k,\ d)} \frac{k!}{(k-i)!\ i!\ (d-i)!} \cdot)$$

Quant à la condition b/ de l'observation 1.20, pour toute paire (i, T), $i \in K$ et $T \subset I \setminus K$, $Card(T) = d-1$, prenons un $r \in I \setminus (T \cup \{i\})$ (par exemple on peut prendre $M_{(T,\ r)}$ comme un voisin de $M_{(T,\ i)}$ sur la droite d_T). Le coût pour obtenir b/ est donc proportionnel à

$$Card\{\ (i,T) \text{ tel que } i \in K,\ T \subset I \setminus K,\ Card(T) = d-1\ \} =$$

$$= k \cdot \frac{(n-k)!}{((n-k)-(d-1))!\ (d-1)!} \leq \frac{k}{(d-1)!} \cdot (n-k)^{d-1}.$$

Donc finalement le coût total est:

$$O((n-k)^{d-1} \cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(k,\ d)} \frac{k!}{(k-i)!\ i!\ (d-i)!} \cdot) \quad \blacksquare$$

Annexe du chapitre 1

A 1.1 Preuve du Lemme 1.8.

Supposons d'abord que $\emptyset \neq F \cap h \neq F$.
Il existe alors un point $N \in F \setminus (F \cap h)$. Autrement dit $N \in F \setminus h$.
Supposons, pour fixer les idées, que $N \in F \cap h^+$. Il reste donc à démontrer que $F \cap h^- \neq \emptyset$.
Prenons un point $M \in F \cap h$ et posons $P = \lambda(M - N) + N$, $\lambda > 1$.
Alors N, M, P se trouvent sur une droite qui coupe h en M et N, P sont de deux côtés de M sur cette droite (car $\lambda > 1$).
Donc P est de l'autre côté de h par rapport à N. C.à.d. que $P \in h^-$.
D'autre part, N, M étant dans F, P l'est aussi.
Donc $P \in F \cap h^-$.

Inversement, supposons que $F \cap h^+ \neq \emptyset$ et $F \cap h^- \neq \emptyset$.
Prenons $N \in F \cap h^+$ et $P \in F \cap h^-$. Soit d la droite passant par N, P.
d doit couper h en un point M. En plus, N, P étant dans F, M l'est aussi.
Donc $M \in F \cap h$. C.à.d. que $F \cap h \neq \emptyset$.
Enfin, comme $F \cap h^+ \neq \emptyset$, on doit avoir $F \cap h \neq F$. ∎

Pour pouvoir démontrer le Lemme 1.9, on a besoin de la remarque suivante:

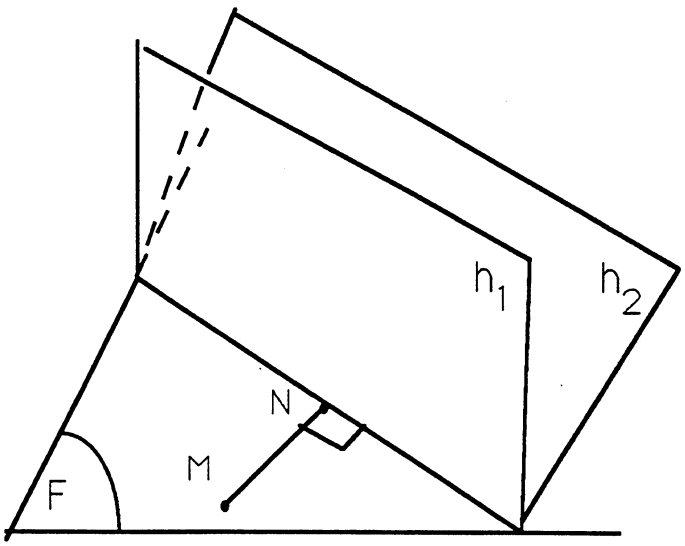


FIGURE 1.7. $\overrightarrow{MN} \perp (h_1 \cap F)$ ET $\overrightarrow{MN} \perp (h_2 \cap F) \Rightarrow (h_1 \cap F) = (h_2 \cap F)$

Remarque 1.2 *Soit F un espace affine de dimension k, $1 \leq k \leq d$.*
Soient $M, N \in F$, $M \neq N$, et h_1, h_2 deux hyperplans passant par N tels que

$$\overrightarrow{MN} \perp (F \cap h_1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MN} \perp (F \cap h_2).$$

On a alors: $F \cap h_1 = F \cap h_2 = F \cap h_1 \cap h_2$. *(Dimension : $k - 1$.)*

Preuve de la Remarque 1.2.

Soit h un hyperplan passant par N et $h \perp \overrightarrow{MN}$.
La propriété suivante de h sera utilisée:

Pour tout espace affine G passant par N, $\quad G \perp \overrightarrow{MN} \Longrightarrow G \subset h$.

De cette propriété, on a: $F \cap h_1 \subset h$. Donc $F \cap h_1 \subset F \cap h$.

Or $\dim(F \cap h_1) = \dim(F \cap h) = k-1$, on doit avoir $\quad F \cap h_1 = F \cap h$.
De même, on a $\quad F \cap h_2 = F \cap h$.
D'où $\quad F \cap h_1 = F \cap h_2 = F \cap h_1 \cap h_2$. ∎

A 1.2 Preuve du Lemme 1.9.
Soit f une k-face, $1 \leq k < d$. (le cas $k = d$ est évident.)
Posons

$$\begin{aligned} I_0(f) &= \{i \in I : \text{ tel que } V_i(f) = 0\}, \\ I^+(f) &= \{i \in I : \text{ tel que } V_i(f) = +1\}, \\ I^-(f) &= \{i \in I : \text{ tel que } V_i(f) = -1\}, \\ \text{et} \qquad F &= \bigcap_{i \in I_0(f)} h_i. \end{aligned}$$

On vérifie d'abord que $\quad f \underset{\neq}{\subset} F$.

On prend un sommet T de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Alors $T = \bigcap_{j \in J} h_j$, $J \subset I$.

On doit avoir un $j_0 \in J$ tel que: $\quad \emptyset \underset{\neq}{\subset} (F \cap h_{j_0}) \underset{\neq}{\subset} F$.

En effet, si par l'absurde $(F \parallel h_j)$ ou $(F \subset h_j)$, $(j \in J)$, alors $\bigcap_{j \in J} h_j$ contiendrait le sous-espace affine F_T translaté de F au point T. Donc $\bigcap_{j \in J} h_j \neq T$.

D'après le Lemme 1.8, on a:

$$(F \cap h_{j_0}^+ \neq \emptyset) \text{ et } (F \cap h_{j_0}^- \neq \emptyset).$$

Or f est inclus soit dans $h_{j_0}^+$ soit dans $h_{j_0}^-$. On doit avoir $\quad f \underset{\neq}{\subset} F$. En particulier, $(I^+(f) \cup I^-(f)) \neq \emptyset$.

Prenons ensuite un point $M \in f$ et posons:

$$r = \underset{i \in I^+(f) \cup I^-(f)}{\mathbf{Min}} \mid d(M, F \cap h_i) \mid .$$

Alors $\qquad r = \| \overrightarrow{MN} \| \quad$ où $N \in F \cap h_{i_0}$ et $i_0 \in (I^+(f) \cup I^-(f))$.

On a alors: $\qquad N \notin f$ et $[M, N[\subset f$. $\quad$ Donc $\qquad N \in \overline{f} \setminus f$.

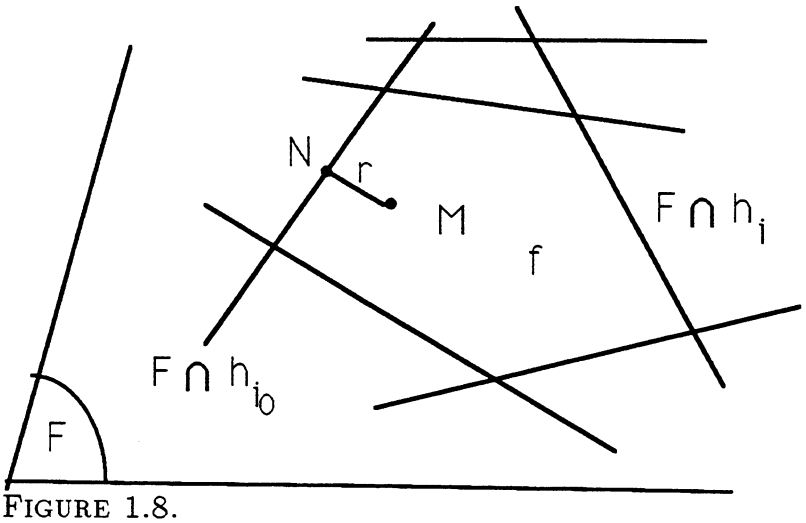


FIGURE 1.8.

Soit g la face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ telle que $\overrightarrow{V}(g) = \overrightarrow{V}(N)$ (c.à.d. que $N \in g$.).
g est alors une sous face de f. On va démontrer que $\dim g = k-1$.
Posons:

$$I_0(g) = \{i \in I : \text{ tel que } V_i(N) = 0\}$$

et $$G = \bigcap_{i \in I_0(g)} h_i.$$

On doit démontrer que $\dim G = k-1$. (G est l'espace affine support de g).
g étant une sous face de f, on a: $I_0(f) \underset{\neq}{\subset} I_0(g)$. Ecrivons donc:

$$I_0(g) = I_0(f) \cup \tilde{I},$$

où $\tilde{I} \neq \emptyset$ ($i_0 \in \tilde{I}$) et $\tilde{I} \cap I_0(f) = \emptyset$.
G s'écrit alors sous forme: $G = F \cap (\bigcap_{i \in \tilde{I}} h_i)$.

Pour tout $i \in \tilde{I}$, N étant dans $h_i \cap F$, on a $\mid d(M, (h_i \cap F)) \mid \leq \| \overrightarrow{MN} \|$.
Or $\| \overrightarrow{MN} \| = r \leq \mid d(M, (h_i \cap F)) \mid$.
Donc $\| \overrightarrow{MN} \| = \mid d(M, (h_i \cap F)) \mid$. Donc

$$\overrightarrow{MN} \perp (h_i \cap F) \qquad \text{(on retient que } N \in h_i \cap F\text{)}.$$

Cela étant juste pour tout $i \in \tilde{I}$, la remarque 1.2 donne:

$$G = F \cap (\bigcap_{i \in \tilde{I}} h_i) = (F \cap h_{i_0}).$$

Donc $\dim G = k-1$. ∎

A 1.3 Existe-il une distance entre droites qui ne dépend pas du repère?

Notons par $\mathcal{D}$ l' ensemble des droites qui ne passent pas par l'origine O dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Soient d, $\tilde{d}$ deux droites sécantes dans $\mathcal{D}$ ($d \neq \tilde{d}$).
Désignons par $\alpha(d,\ \tilde{d})$ l'angle aigu formé par d et $\tilde{d}$: $\alpha(d, \tilde{d}) \in]0, \pi/2]$.

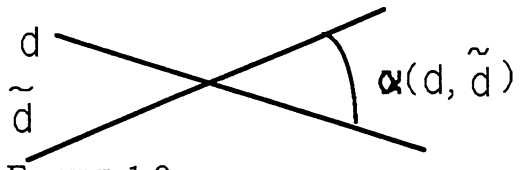


FIGURE 1.9.

Soient d, $\tilde{d}$ deux droites paralèlles dans $\mathcal{D}$ ($d \neq \tilde{d}$).
Désignons par $\lambda(d,\ \tilde{d})$ la distance d'un point M situé sur d à la droite $\tilde{d}$.

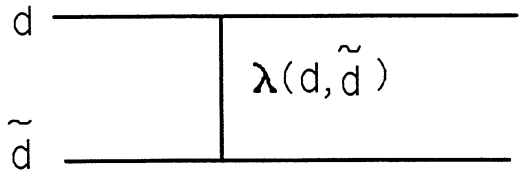


FIGURE 1.10.

Remarque 1.3 *Supposons que D soit une métrique sur $\mathcal{D}$ qui ne dépende pas du repère. Alors:*
Soient d_1, $\tilde{d}_1$ deux droites sécantes; d_2, $\tilde{d}_2$ deux droites sécantes. On a:

$$\alpha(d_1,\ \tilde{d}_1) = \alpha(d_2,\ \tilde{d}_2) \implies D(d_1, \tilde{d}_1) = D(d_1, \tilde{d}_1);$$

Observation 1.22. *Supposons que D soit une métrique sur $\mathcal{D}$ qui ne dépende pas du repère. Alors il existe $\epsilon_D > 0$ tel que:*

$$\forall d, \tilde{d} \in \mathcal{D},\ d \neq \tilde{d},\quad D(d,\ \tilde{d}) < \epsilon_D \implies d \text{ et } \tilde{d} \text{ sont paralèlles.}$$

Preuve. Supposons par l'absurde que: Pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux droites d, $\tilde{d}$ distinctes $\in \mathcal{D}$ telles que:

$$D(d,\ \tilde{d}) < \epsilon \text{ et que } d,\ \tilde{d} \text{ soient sécantes.} \tag{1}$$

Soient d_1, d_2 deux droites paralèlles et distinctes $\in \mathcal{D}$. On va démontrer l'absurdité suivante: $D(d_1,\ d_2) = 0$.
Soit $\epsilon > 0$ arbitarire.
D'après (1), il existe deux droites sécantes d et $\tilde{d}$ telles que $D(d,\ \tilde{d}) < \epsilon$.

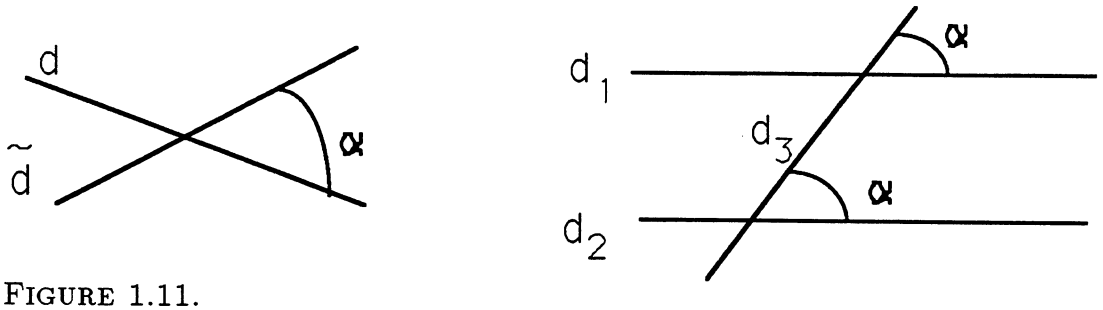


FIGURE 1.11.

Prenons une droite d_3 qui coupe d_1, d_2 de manière que:
$\alpha(d_3,\ d_1) = \alpha(d_3,\ d_2) \ = \ \alpha(d,\ \tilde{d})$.
D'après la remarque 1.3, on a:

$$D(d_3,\ d_1) = D(d_3,\ d_2) \ = \ D(d,\ \tilde{d}) < \epsilon.$$

Alors l'inégalité triangulaire nous donne:
$D(d_1,\ d_2) \leq D(d_1,\ d_3) + D(d_3,\ d_2) < 2\epsilon$.
ϵ étant arbitraire, on en déduit que $D(d_1,\ d_2) = 0$. ∎

Remarque 1.4 *Soit $\epsilon > 0$. Posons:*

$$D(d,\ \tilde{d}) = \begin{cases} \alpha(d,\ \tilde{d}) + \epsilon & \textit{si } d,\ \tilde{d} \textit{ se coupent,} \\ \dfrac{\lambda(d,\ \tilde{d})}{1 + \lambda(d,\ \tilde{d})} \cdot 2\epsilon & \textit{si } d,\ \tilde{d} \textit{ sont paralèlles,} \\ 0 & \textit{si } d = \tilde{d}\ . \end{cases}$$

Alors D est une métrique qui ne dépend pas du repère et ϵ_D (indiqué dans l'observation 1.22) peut-être pris égal à ϵ.

On voit selon la remarque précédente et l'observation 1.22 qu'il existe en fait les distances intrinsèques non triviales (la distance discrète est aussi intrinsèque) et que ces distances contraignent les droites à devenir parallèles quand elles sont assez proches les unes des autres. Ces distances ne répondent donc pas à notre but de perturber légèrement les hyperplans mais de façon arbitraire.

Chapitre 2

Equivalence des Configurations des points
&
Equivalence des Diagrammes de Voronoï d'ordre k

Introduction et Résumé du chapitre 2.

Il existe dans la littérature plusieurs relations duales entre les arrangements des hyperplans et les configurations des points dans l'espace $\mathbb{R}^d$ ([Edels87], [Brown79]). Un problème important concernant un ensemble fini de points dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ est celui de déterminer sa Λ_matrice ("tri en multidimension"). Un premier algorithme de tri multidimensionnel est donné dans [Godm83] dont le coût est $O(n^d logn)$, n étant le nombre de points à "trier". Grâce à des relations duales avec les hyperplans, connaissant les résultats combinatoires pour les arrangements, on a pu améliorer le coût du tri multidimensionnel: $O(n^d)$, $d \geq 2$ ([Edels87], [Godm92]).
Il en vient l'impression que lorsque deux arrangements sont équivalents, deux configurations des points correspondants sont aussi *"équivalentes"*.

Notre but dans ce chapitre est de formaliser cette perception intuitive et d'en tirer une application algorithmique.

Nous nous fixons donc une relation duale entre les points et les hyperplans (Définition 2.1). De cette relation duale, on revoit un certain nombre de propriétés reliant une configuration de points à l' arrangement des hyperplans correspondants (Propriété 2.5, Corollaires 2.6, 2.7) qui vont nous rendre service dans nos travaux ultérieurs.

Nous donnons ensuite une définition directe et géométrique sur l'équivalence de configuration des points (Définition 2.2). Cette définition étant basée sur la séparation des points par des hyperplans qui peuvent contenir un sous ensemble non vide des points considérés, elle correspond aux premiers diagrammes projectifs utilisés pour déterminer topologiquement les zonotopes ([Szafr91]). On va aussi montrer que deux ensembles de points de même configuration possèdent des propriétés algébriques tout à fait analogues (Propriétés 2.8 et 2.9), dont même Λ_matrice.

On arrive en fin de compte au résultat principal du chapitre qui exprime l'équivalence entre l'équivalence de deux arrangements et celle de deux ensembles de points (Théorème 2.13). La démonstration de ce résultat étant longue, on la fait à travers plusieurs lemmes (Lemmes 2.14, 2.15, 2.16).

Comme application quantitative du chapitre 1, le théorème 2.13 nous permet de calculer en temps $O(n^d)$, n étant le nombre des points, une borne de perturbation des points telle que la configuration reste inchangée (Théorème 2.20).

Une autre application sur la stabilité du signe du déterminant d'une matrice inversible est aussi donnée (Proposition 2.22). On peut noter que, pour ce problème de stabilité du signe du déterminant, il existe une autre méthode indépendante de ce contexte, faisant intervenir les normes matricielles ([Lasc86]).

De même nature que la configuration des points, la deuxième partie est une application du chapitre 1 sur l'équivalence entre deux diagrammes de Voronoï. Dans la littérature,on sait que tout diagramme de Voronoï d'ordre k d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points dans $\mathbb{R}^d$ correspond à des k_niveaux faces de l' arrangement des hyperplans dans $\mathbb{R}^{d+1}$, ces hyperplans étant tangents à un paraboloïde en des projections des points de $\mathcal{S}$ sur le paraboloïde ([Edels87], [Edels86], [Brown79], [Devi92],...).

Il vient donc à l'idée que la structure topologique de tous les diagrammes de Voronoï restera inchangée quand les germes de $\mathcal{S}$ sont perturbés de telle manière que la topologie combinatoire de l' arrangement ne change pas.

Un problème important, du point de vue formaliste, est alors de chercher une notion d'équivalence entre deux diagrammes de Voronoï d'ordre k. La définition donnée ici est basée sur l'existence des faces caractérisées par des sous-ensembles quelconques de $\mathcal{S}$ (Définition 2.6). Dans le cas où $k = 1$, l'équivalence de deux diagrammes de Voronoï assure par conséquent la relation "voisinage" des faces de deux diagrammes.

Le reste de la partie n'est qu'une application directe de la relation connue Arrangement-Diagramme.
Enfin une évaluation sur une borne de perturbation de points (Propriété 2.30) est aussi donnée comme un corollaire des résultats quantitatifs du premier chapitre.

Première partie: Configuration des points.

2.1 Configuration des points et Arrangement des hyperplans.

2.1.1 Une relation duale entre points et hyperplans dans $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$.

Définissons la relation duale suivante:
Définition 2.1.[Brown79]
Dual : $\mathbb{R}^d \setminus \{O\} \longrightarrow \{$*hyperplans de* $\mathbb{R}^d$ *ne passant pas par l'origine* $O\}$
$p \longmapsto Dual(p) = \{x \in R^d$ *tel que* $< x, p >= 1\}$,

où $< .,. >$ *désigne le produit scalaire dans* $\mathbb{R}^d$.

Notations. Soient $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{O\}$ et h un hyperplan ne passant pas par O,on note:

$$h_p = Dual(p) \quad \text{et} \quad p_h = Dual^{-1}(h).$$

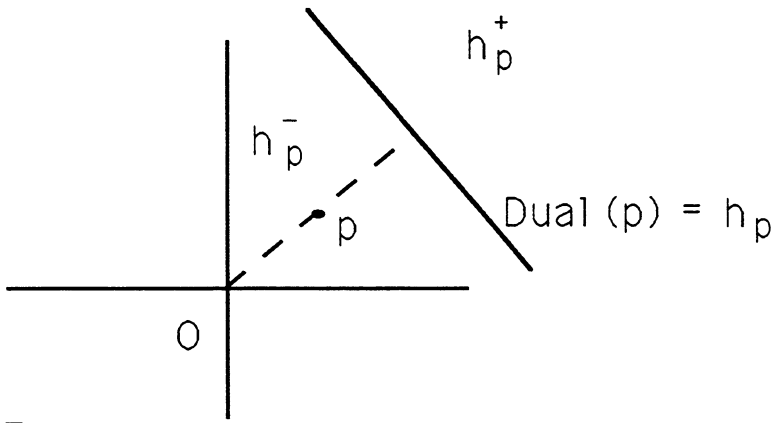


FIGURE 2.1.

Remarque 2.1 *Soient* $p, q \in \mathbb{R}^d$, $p \neq O$, *on a:*

$$q \in h_p \iff < q, p > = 1,$$
$$q \in h_p^+ \iff < q, p > > 1,$$
$$q \in h_p^- \iff < q, p > < 1.$$

De la remarque 2.1 on a tout de suite la propriété suivante de la dualité:

Observation 2.1. *Soient* $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{O\}$ *et* h *un hyperplan ne passant pas par* O, *on a:*

$$q \in h \iff p_h \in h_q,$$
$$q \in h^+ \iff p_h \in h_q^+,$$
$$q \in h^- \iff p_h \in h_q^-.$$

2.1.2 Configuration des points et Arrangement des hyperplans.

Notations. Soit $(p_i)_{i\in J}$ une famille finie des points dans $\mathbb{R}^d$. Notons
1/. $Aff(p_i)_{i\in J}$ l'espace affine engendré par les points $(p_i)_{i\in J}$ $(Aff(p_i)_{i\in J} = \emptyset$ si $J = \emptyset)$,
2/. $Vect(\overrightarrow{Op_i})_{i\in J}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(\overrightarrow{Op_i})_{i\in J}$ $(Vect(\overrightarrow{Op_i})_{i\in J} = \emptyset$ si $J = \emptyset)$.

Commençons par quelques propriétés des espaces vectoriels et affines dont les démonstrations seront données dans l'annexe du chapitre 2.

Lemme 2.2. *Soient T un espace affine dans $\mathbb{R}^d$ et $p \in \mathbb{R}^d$. Alors:*
$$p \notin T \Longleftrightarrow \exists \text{ un hyperplan } h \text{ tel que } T \subset h \text{ et } p \notin h.$$

Lemme 2.3. *Soit $(p_i)_{i\in J}$ une famille non vide des points dans $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$.*
Pour tout $i \in J$, soit h_i un hyperplan dans $\mathbb{R}^d$ tel que: $h_i \perp \overrightarrow{Op_i}$.
Supposons que : $\bigcap_{i\in J} h_i \neq \emptyset$.
Alors on a:
$$dim(\bigcap_{i\in J} h_i) = d - dim\ Vect(\overrightarrow{Op_i})_{i\in J}.$$

Lemme 2.4. *Soit $(p_i)_{i\in J}$ une famille finie non vide de $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$.*
Si $O \in Aff(p_i)_{i\in J}$, alors il existe $J_1 \subset J$ tel que:
$$O \notin Aff(p_i)_{i\in J_1} \text{ et que } dimAff(p_i)_{i\in J_1} = Aff(p_i)_{i\in J} - 1.$$

Dans cette section 2.1.2, soit

$\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$, $I = \{1, \cdots n\}$, une famille de n points distincts dans $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$.

Prenons : $\mathcal{H} = (h_i)_{i\in I}$, où $h_i = h_{p_i}$, $\forall i \in I$.

On voit dans ce qui suit une relation très étroite entre la configuration de $\mathcal{P}$ et l' arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Propriété 2.5. *Soit $J \subset I$ (J peut être $= \emptyset$). On a:*

1/.
$$(\bigcap_{i\in J} h_i) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad O \notin Aff((p_i)_{i\in J}),$$

2/. Si $O \notin Aff((p_i)_{i\in J})$, alors :
$$dim(Aff((p_i)_{i\in J})) \ = \ d - (dim(\bigcap_{i\in I} h_i) + 1).$$

Preuve. Quand $J = \emptyset$ les assertions 1/, 2/ sont évidentes.
(Avec la convention $\bigcap_{i\in\emptyset} h_i = \mathbb{R}^d$ et $dim(\emptyset) = -1$).

Supposons donc $J \neq \emptyset$. Démontrons d'abord 1/.
Supposons d'abord que : $\bigcap_{i\in J} h_i \neq \emptyset$.
Il existe alors un point $p \in \bigcap_{i\in J} h_i$. Donc $p \in h_i, \forall i \in J$.
D'après l'observation 2.1, on a: $p_i \in h_p, \forall i \in J$ (bien sûr que $p \neq O$).
Ce qui entraîne que:

$$Aff(p_i)_{i\in J} \subset h_p \text{ et donc } O \notin Aff(p_i)_{i\in J}.$$

Le sens inverse de 1/ se démontre de façon analogue.

Démontrons maintenant 2/ en posant $k = dim(\bigcap_{i\in J} h_i)$.

D'apès le lemme 2.3 (car $h_i \perp \overrightarrow{Op_i}$), on a:

$$dim\ Vect(\overrightarrow{Op_i})_{i\in J} = d - k.$$

C'est-à-dire que $dimAff(\{O\} \cup (p_i)_{i\in J}) = d - k$.

Or $O \notin Aff(p_i)_{i\in J}$, on en déduit:

$$dimAff(p_i)_{i\in J} = d - k - 1 \qquad \blacksquare$$

Corollaire 2.6. *$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est simple si et seulement si pour tout $J \subset I$ avec $Card(J) \leq d+1$, on a:*
1/ $(p_i)_{i\in J}$ sont affinement indépendants,
2/ $O \notin Aff(p_i)_{i\in J}$ quand $Card(J) \leq d$.

Preuve. La preuve est évidente $\blacksquare$

Corollaire 2.7. *Soit $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{O\}$. Soit $0 \leq k \leq d$. Alors:*

$$p \in \text{une } k\text{-face de } \mathcal{A}(\mathcal{H}) \iff dimAff(\mathcal{P} \cap h_p) = d - (k+1).$$

En particulier,
$p \in$ une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{H}) \iff \mathcal{P} \cap h_p = \emptyset$,
p est un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{H}) \iff Aff(\mathcal{P} \cap h_p) = h_p$.

Preuve. Supposons d'abord que $p \in$ une k-face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Donc

$$p \in (\bigcap_{i\in J} h_i) \cap (\bigcap_{i\in I\setminus J} h_i^{\epsilon_i}),$$

où $J \subset I$, $dim(\bigcap_{i\in J} h_i) = k$ et $\epsilon_i \in \{+,-\}$, $(i \in I \setminus J)$.
D'après la propriété 2.5 on a:

$$dimAff(p_i)_{i\in J} = d - (k+1).$$

D'autre part $\quad p \in h_i \ \ (i \in J)$ et $p \notin h_i \ \ (i \in I \setminus J)$.
C'est-à-dire que (obsevation 2.1):

$$p_i \in h_p \ \ (i \in J) \ \text{ et } \ p_i \notin h_p \ \ (i \in I \setminus J).$$

Donc $\quad h_p \cap \mathcal{P} = (p_i)_{i \in J}$.

Donc $\quad dimAff(\mathcal{P} \cap h_p) = d - (k+1)$.

Le sens inverse se démontre aussi facilement. ∎

2.2 Equivalence des Configurations des points.

Notations.
Par une partition $P = (I_1, I_2, I_3)$ d'un ensemble I on entend que:

$$I_1, I_2, I_3 \subset I, \quad I_1 \cap I_2 = I_2 \cap I_3 = I_3 \cap I_1 = \emptyset \quad \text{et} \quad I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I.$$

Soient $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}^d$, h un hyperplan dans $\mathbb{R}^d$ et $P = (I_1, I_2, I_3)$ une partition de I.
On dit que h divise les points de $\mathcal{P}$ suivant P si h contient les points $(p_i)_{i \in I_1}$ et sépare strictement les points $(p_i)_{i \in I_2}$ des points $(p_i)_{i \in I_3}$.

Définition 2.2 *Soient $\mathcal{P} = (p_i)_I$ et $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_I$ deux familles de n points distincts dans R^d, $Card(I) = n$.*
On dit que $\mathcal{P}$ et $\tilde{\mathcal{P}}$ sont de même configuration si pour toute partition $P = (I_1, I_2, I_3)$ de I, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:
1/. Il existe un hyperplan h de R^d qui divise $\mathcal{P}$ suivant P,
2/. Il existe un hyperplan $\tilde{h}$ de R^d qui divise $\tilde{\mathcal{P}}$ suivant P.

Propriété 2.8 *Soient $\mathcal{P} = (p_i)_I$ et $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_I$ deux familles de n points distincts dans R^d, $Card(I) = n$.*
Supposons que $\mathcal{P}$ et $\tilde{\mathcal{P}}$ sont de même configuration.
Alors pour tout $\emptyset \neq J \subset I$, on a:

$$dim\ Aff(p_i)_{i \in J} \ = \ dim\ Aff(\tilde{p}_i)_{i \in J}. \tag{2.1}$$

Preuve. Démontrons (2.1) par récurrence sur $Card(J)$.
Quand $Card(J) = 1$, (2.1) est vérifié.
Supposons que (2.1) est juste pour tout $J \subset I$, $Card(J) = k$, $1 \leq k < n$.

Prenons maintenant un $J \subset I$, $Card(J) = k+1$ et on va démontrer que (2.1) est juste pour cet ensemble J.
Ecrivons: $\quad J = J_k \cup \{j_{k+1}\} \quad$ où $Card(J_k) = k$.
L'hypothèse de récurrence nous donne:

$$dim\ Aff(p_i)_{i\in J_k} \ = \ dim\ Aff(\tilde{p}_i)_{i\in J_k}.$$

Il ne nous reste qu'à démontrer que:

$$p_{j_{k+1}} \notin Aff(p_i)_{i\in J_k} \Longleftrightarrow \tilde{p}_{j_{k+1}} \notin Aff(\tilde{p}_i)_{i\in J_k}$$

Par symétrie, on va démontrer seulement le sens $\Longrightarrow$.
Supposons donc que $p_{j_{k+1}} \notin Aff(p_i)_{i\in J_k}$. D'après le lemme 2.2, Il existe un hyperplan h passant par $(p_i)_{i\in J_k}$ et $p_{j_{k+1}} \notin h$.
Or $\mathcal{P}$ et $\tilde{\mathcal{P}}$ sont de même configuration, il existe un hyperplan $\tilde{h}$ passant par $(\tilde{p}_i)_{i\in J_k}$ et $\tilde{p}_{j_{k+1}} \notin \tilde{h}$, ce qui signifie (lemme 2.2) que $\tilde{p}_{j_{k+1}} \notin Aff(\tilde{p}_i)_{i\in J_k}$. ∎

Notations. Soient $\mathcal{P} = (p_i)_I$ et $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_I$ deux familles de n points distincts dans R^d, $Card(I) = n$.
Soit $X = (i_1, \cdots, i_{d+1}) \in I^{d+1}$. On note:

$$\mathcal{P}(X) = \begin{pmatrix} p_{i_1 1} & \cdots & p_{i_1 d} & 1 \\ p_{i_2 1} & \cdots & p_{i_2 d} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{i_{d+1} 1} & \cdots & p_{i_{d+1} d} & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{P}}(X) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_{i_1 1} & \cdots & \tilde{p}_{i_1 d} & 1 \\ \tilde{p}_{i_2 1} & \cdots & \tilde{p}_{i_2 d} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{p}_{i_{d+1} 1} & \cdots & \tilde{p}_{i_{d+1} d} & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\underline{X} = \{i_1, \cdots, i_{d+1}\}.$$

Propriété 2.9. *Soient $\mathcal{P} = (p_i)_I$ et $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_I$ deux familles de n points distincts dans R^d, $Card(I) = n$.*
Supposons que $\mathcal{P}$ et $\tilde{\mathcal{P}}$ sont de même configuration.
Alors on a:

$$sign(det\ \mathcal{P}(X)) = \ sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(X)), \quad (X \in I^{d+1})$$

ou

$$sign(det\ \mathcal{P}(X)) = -sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(X)), \quad (X \in I^{d+1}),$$

où $\ sign(x) = +1, 0, -1$ *suivant que* $x > 0, x = 0$ *et* $x < 0$.

Pour démontrer la propriété 2.9, on a besoin des deux lemmes suivants:

Lemme 2.10. *Soit $\mathcal{P} = (p_i)_I$ une famille de n points distincts dans R^d, $Card(I) = n \geq d+1$.*
Soient $J, K \subset I$, $J \neq K$, $Card(J) = Card(K) = d+1$ tels que
$(p_i)_{i\in J}$ et $(p_i)_{i\in K}$ soient affinement indépendants.

Alors pour tout $k \in K \setminus J$, il existe $j \in J \setminus K$ tel que
$(p_i)_{i\in(J\setminus\{j\})\cup\{k\}}$ soient affinement indépendants.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe $k_0 \in K \setminus J$ tel que pour tout $j \in J \setminus K$,

$$(p_i)_{i\in(J\setminus\{j\})\cup\{k_0\}} \text{ soient affinement dépendants.}$$

Alors p_{k_0} se trouve sur les hyperplans:

$$h_j = Aff(p_i)_{i\in J\setminus\{j\}}\ , \quad (j \in\ J\setminus K\ =\ J\setminus(J\cap K)\ ).$$

Donc

$$p_{k_0} \in \bigcap_{j\in J\setminus(J\cap K)} h_j \tag{1}$$

Premier cas: $J \cap K = \emptyset$.
On a:

$$\bigcap_{j\in J\setminus(J\cap K)} h_j\ =\ \bigcap_{j\in J} h_j\ =\ \emptyset$$

(car $Card(J) = k+1$ et $(p_i)_{i\in J}$ sont affinement indépendants).
Donc c'est absurde avec (1).

Deuxième cas: $J \cap K \neq \emptyset$.
On voit d'abord que: $p_i \in h_j, \quad (i \in J \setminus \{j\})$.
Donc $\quad p_i \in h_j, \quad (i \in J \cap K)$ et $(j \in J \setminus (J \cap K)\ )$.
Donc $\quad p_i \in \bigcap_{j\in J\setminus(J\cap K)} h_j, \quad (i \in J \cap K)$.
Donc $\quad Aff(p_i)_{i\in(J\cap K)} \subset \bigcap_{j\in J\setminus(J\cap K)} h_j$.
D'autre part, $(p_i)_{i\in J}$ étant affinement indépendants, on a:

$$\begin{aligned} dim\ Aff(p_i)_{i\in(J\cap K)} &= Card(J\cap K)-1 \qquad \text{et} \\ dim \bigcap_{j\in J\setminus(J\cap K)} h_j &= d - Card(J\setminus(J\cap K)) = \\ &= d-(d+1-Card(J\cap K)) = Card(J\cap K)-1. \end{aligned}$$

Donc $\quad Aff(p_i)_{i\in(J\cap K)} = \bigcap_{j\in J\setminus(J\cap K)} h_j$.

(1) implique alors: $\quad p_{k_0} \in Aff(p_i)_{i\in(J\cap K)}$. $\quad$ (2)

Or $k_0 \notin J \cap K$ (car $k_0 \in K \setminus J$) et $(p_i)_{i\in K}$ sont affinement indépendants, on doit avoir:

$$p_{k_0} \notin Aff(p_i)_{i\in(J\cap K)} \quad \text{ce qui absurde avec (2).} \ \blacksquare$$

Lemme 2.11. *Soient $\mathcal{P} = (p_i)_I$ et $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_I$ deux familles de n points distincts dans R^d, $Card(I) = n$. Supposons que $\mathcal{P}$ et $\tilde{\mathcal{P}}$ soient de même configuration. Soit $Z \in I^{d+1}$ tel que:*

$$sign(det\ \mathcal{P}(Z)) = sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Z)) \neq 0,$$

(ce qui assure que les points $(p_i)_{i\in\underline{Z}}$ et $(\tilde{p}_i)_{i\in\underline{Z}}$ sont affinement indépendents).

Soit $Y \in I^{d+1}$ tel que $\underline{Y} = \underline{Z}$ ou $\underline{Y} = (\underline{Z} \setminus \{a\}) \cup \{b\})$,

où $\qquad a \in \underline{Z}$ et $b \in I \setminus \underline{Z}$.
On a alors:

$$sign(det\ \mathcal{P}(Y)) = \ sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Y)).$$

Preuve.
Si $\underline{Y} = \underline{Z}$, le lemme 2.11 est évident (propriétés du déterminant). (1)
Supposons donc: $\underline{Y} = (\underline{Z} \setminus \{a\}) \cup \{b\})$, où $a \in \underline{Z}$ et $b \in I \setminus \underline{Z}$.
D'après (1), on peut supposer que:

$$Z = (i_1, \cdots, i_d, a) \quad \text{et} \quad Y = (i_1, \cdots, i_d, b).$$

Soit $\quad h = Aff(p_i)_{i \in I_1}$ et $\tilde{h} = Aff(\tilde{p}_i)_{i \in I_1}$, où $I_1 = \{i_1, \cdots, i_d\}$.
h et $\tilde{h}$ sont alors deux uniques hyperplans qui contiennent respectivement $(p_i)_{i \in I_1}$ et $(\tilde{p}_i)_{i \in I_1}$. En plus, $p_a \notin h$ et $\tilde{p}_a \notin \tilde{h}$.

D'où (avec le fait que $\mathcal{P}$ et $\tilde{\mathcal{P}}$ sont de même configuration):

$$p_b \in h \Longleftrightarrow \tilde{p}_b \in \tilde{h},$$
$$p_a,\ p_b \text{ sont d'un même côté de } h \Longleftrightarrow \tilde{p}_a,\ \tilde{p}_b \text{ sont d'un même côté de } \tilde{h},$$
$$p_a,\ p_b \text{ sont de deux côtés de } h \Longleftrightarrow \tilde{p}_a,\ \tilde{p}_b \text{ sont de deux côtés de } \tilde{h}.$$

Le cas où $p_b \in h$ est trivial ($sign(det\ \mathcal{P}(Y)) = \ sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Y) = 0)$.
Examinons le cas où p_a, p_b sont d'un même côté de h et $\tilde{p}_a$, $\tilde{p}_b$ sont d'un même côté de $\tilde{h}$ (le dernier cas se traite de façon analogue).
On a:

$$sign(det\ \mathcal{P}(Y)) = sign(det\ \mathcal{P}(Z)) \quad \text{et} \quad sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Y)) = sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Z)).$$

Donc

$$sign(det\ \mathcal{P}(Y)) = sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Y))\ . \qquad \blacksquare$$

Preuve de la propriété 2.9. Supposons qu'il existe $X \in I^{d+1}$ tel que

$$sign(det\ \mathcal{P}(X)) = sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(X)) \neq 0,$$

(ce qui assure que $Card(\underline{X}) = d+1$ et que les points $(p_i)_{i \in \underline{X}}$, $(\tilde{p}_i)_{i \in \underline{X}}$ sont affinement indépendents).

Nous devons démontrer que: pour tout $Y \in I^{d+1}$,

$$sign(det\ \mathcal{P}(Y)) = sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Y))\ . \tag{1}$$

(1) est évident si $Card(\underline{Y}) < d+1$ ($sign(det\ \mathcal{P}(Y)) = sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Y)) = 0$).

On ne s'intéresse donc qu' aux $Y \in I^{d+1}$ tels que:

$$Card(\underline{Y}) = d+1. \tag{2}$$

Pour tout Y vérifiant (2), posons: $k = Card(\underline{X} \setminus \underline{Y})$ $(0 \leq k \leq d+1)$.
Faisons une démonstration de (1) avec la condition (2) par récurence sur k:

Quand $k = 0$ (ou même 1), le lemme 2.11 nous donne (1) avec la condition (2).
Supposons que (1) avec la condition (2) est vérifié pour un $0 \leq k < d+1$.
Soit maintenant Y vérifiant (2) et $Card(\underline{X} \setminus \underline{Y}) = k+1$.

Si $sign(det\ \mathcal{P}(Y)) = 0$, ce qui veut dire que $dimAff(p_i)_{i\in\underline{Y}} < d$, de la propriété 2.8 on a aussi: $sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Y)) = 0$. Donc (1) est vérifié.

Si $sign(det\ \mathcal{P}(Y)) \neq 0$, ce qui signifie que $(p_i)_{i\in\underline{Y}}$ sont affinement indépendants. Prenons alors un $a \in \underline{X} \setminus \underline{Y}$, le lemme 2.10 donne un $b \in \underline{Y} \setminus \underline{X}$ tel que

$$(p_i)_{i\in(\underline{Y}\setminus\{b\})\cup\{a\}} \text{ soient affinement indépendants.} \tag{3}$$

Soit $Z \in I^{d+1}$ tel que $\underline{Z} = (\underline{Y} \setminus \{b\}) \cup \{a\}$. On a:

$$Card(\underline{Z}) = d+1 \ , \ Card(\underline{X} \setminus \underline{Z}) = k, \tag{4}$$
$$\underline{Y} = (\underline{Z} \setminus \{a\}) \cup \{b\}. \tag{5}$$

De (4), l'hypothèse de récurrence avec (3) donne:

$$sign(det\ \mathcal{P}(Z)) = sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Z)) \neq 0. \tag{6}$$

Enfin, de (5), (6), le lemme 2.11 conclut:

$$sign(det\ \mathcal{P}(Y)) = sign(det\ \tilde{\mathcal{P}}(Y)) \ . \qquad \blacksquare$$

2.3 Equivalence des arrangements d'hyperplans et Equivalence des configurations de points.

Examinons maintenant la relation entre l'équivalence des configurations des points et l'équivalence des arrangements des hyperplans.

Notations. Prenons dans le reste de cette section 2.3, $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$, $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_{i\in I}$ deux familles de n points distincts dans $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$, $I = \{1, \cdots, n\}$.
Posons:

$$\mathcal{H} = (h_i)_{i\in I}, \text{ où } h_i = h_{p_i}, \ (i \in I),$$
$$\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{h}_i)_{i\in I}, \text{ où } \tilde{h}_i = h_{\tilde{p}_i}, \ (i \in I);$$
$$p_{n+1} = \tilde{p}_{n+1} = O \text{ (l'origine de l'espace } \mathbb{R}^{d+1});$$

et enfin toute partition de $I \cup \{n+1\} \equiv \{1, \cdots, n, n+1\}$ sera notée par:

$$(I_1 \cup K_1, I_2 \cup K_2, I_3 \cup K_3),$$

où $P = (I_1, I_2, I_3)$ est une partition de I et $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{n+1\}$, $K_1 \cap K_2 = K_2 \cap K_3 = K_3 \cap K_1 = \emptyset$.

Du théorème 1.6, on va démontrer le lemme suivant:

Lemme 2.12. *$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents si et seulement si*
Pour toute partition $P = (I_1, I_2, I_3)$ de I, pour tous K_2, K_3 tels que $K_2 \cup K_3 = \{n+1\}$, $K_2 \cap K_3 = \emptyset$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

1/. Il existe un hyperplan h qui divise $\mathcal{P} \cup \{0\}$ suivant $(I_1, I_2 \cup K_2, I_3 \cup K_3)$
2/. Il existe un hyperplan $\tilde{h}$ qui divise $\tilde{\mathcal{P}} \cup \{0\}$ suivant $(I_1, I_2 \cup K_2, I_3 \cup K_3)$.

Preuve. Supposons d'abord que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents.
Supposons en plus que $K_2 = \{n+1\}$ et $K_3 = \emptyset$
(si $K_3 = \{n+1\}$ et $K_2 = \emptyset$, on procède de façon analogue).
Soit $P = (I_1, I_2, I_3)$ une partition de I.

Posons $\qquad \overrightarrow{V} = (V_i)_{i \in I},$

où $\qquad V_i = 0$ si $i \in I_1, \quad V_i = -1$ si $i \in I_2 \quad$ et $\quad V_i = 1$ si $i \in I_3$.

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes:

- Il existe un hyperplan h divisant $\mathcal{P} \cup \{0\}$ suivant $(I_1, I_2 \cup K_2, I_3)$,
- h ne passe par O et $(p_i)_{i \in I_1} \subset h$, $(p_i)_{i \in I_2} \subset h^-$ et $(p_i)_{i \in I_3} \subset h^+$,
- $p_h \equiv Dual^{-1}(h) \in (\bigcap_{i \in I_1} h_i) \bigcap (\bigcap_{i \in I_2} h_i^-) \bigcap (\bigcap_{i \in I_3} h_i^+)$ (Observation 2.1),
- $\overrightarrow{V} \in \mathcal{T}opo(\mathcal{H})$,
- $\overrightarrow{V} \in \mathcal{T}opo(\tilde{\mathcal{H}})$ (Théorème 1.6),
- Il existe $\tilde{p} \in (\bigcap_{i \in I_1} \tilde{h}_i) \bigcap (\bigcap_{i \in I_2} \tilde{h}_i^-) \bigcap (\bigcap_{i \in I_3} \tilde{h}_i^+)$ tel que $\tilde{p} \neq 0$,
- Il existe $\tilde{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que:
  $(\tilde{p}_i)_{i \in I_1} \subset h_{\tilde{p}}, \quad (p_i)_{i \in I_2} \subset h_{\tilde{p}}^- \quad$ et $\quad (p_i)_{i \in I_3} \subset h_{\tilde{p}}^+$,
- Il existe un hyperplan $\tilde{h}$ divisant $\tilde{\mathcal{P}} \cup \{0\}$ suivant $(I_1, I_2 \cup K_2, I_3)$.

Le sens inverse peut se démontrer aussi facilement. ∎

Du lemme 2.12, on voit que si $\mathcal{P} \cup \{0\}$ et $\tilde{\mathcal{P}} \cup \{0\}$ sont de même configuration alors $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents. En fait on a aussi le sens inverse qui est beaucoup plus difficile à démontrer:

Théorème 2.13. *$\mathcal{P} \cup \{0\}$ et $\tilde{\mathcal{P}} \cup \{0\}$ sont de même configuration si et seulement si $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents.*

La démonstration du sens inverse du théorème 2.13 aura besoin des lemmes suivants:

Lemme 2.14. *Soit $P = (I_1, I_2, I_3)$ une partition de I telle que*
$$I_2 \cup I_3 \neq \emptyset \quad \text{et que} \quad O \notin Aff(p_i)_{i \in I_1}.$$
Alors on a l'équivalence entre deux propriétés suivantes:
1/. Il existe un hyperplan h passant par O et divisant $\mathcal{P} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup \{n+1\}, I_2, I_3)$
2/. Il existe deux faces $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ telles que

$$\begin{cases} V_i(f) = \ \ 0, & V_i(g) = \ \ 0, \ (i \in I_1), \\ V_i(f) = \ \ 1, & V_i(g) = -1, \ (i \in I_2), \\ V_i(f) = -1, & V_i(g) = \ \ 1, \ (i \in I_3). \end{cases} \tag{2.2}$$

Preuve.
Supposons d'abord qu'il existe un hyperplan h passant par O et divisant $\mathcal{P} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup \{n+1\}, I_2, I_3)$.
Sur h fixons un espace affine T ($T \subset h$) tel que:

$$dim\ T = d-2, \quad Aff(p_i)_{i \in I_1} \subset T \quad \text{et que} \quad O \notin T.$$

(En effet, il existe un tel espace T dans h: O n'étant pas dans $Aff(p_i)_{i \in I_1}$, le lemme 2.2 dit qu'il existe un hyperplan h' qui contienne $Aff(p_i)_{i \in I_1}$ et qui ne passe pas par O. On n'a qu'à prendre $T = h \cap h'$).

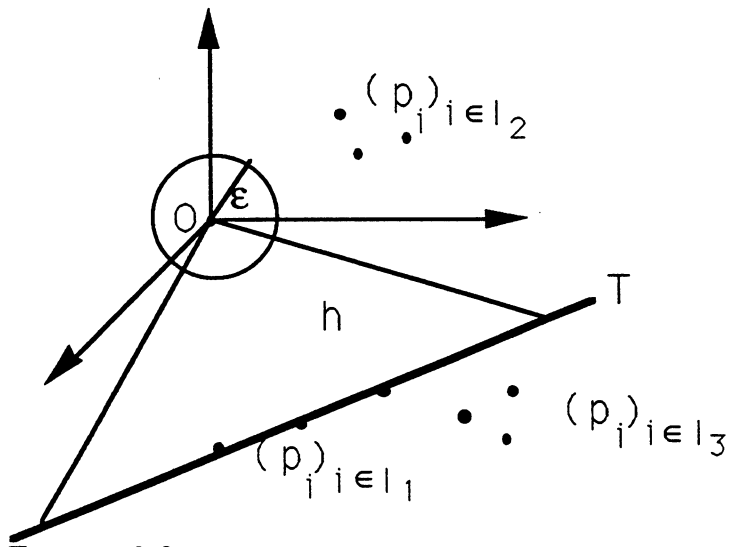


FIGURE 2.2.

T étant fermé dans $\mathbb{R}^d$ et $O \notin T$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(O,\epsilon) \subset \mathbb{R}^d \setminus T$, où $B(O,\epsilon)$ est la boule ouverte de centre O et de rayon ϵ.
(On peut prendre ϵ gale à la distance euclidienne de O à T).
Ceci entraîne que:

$$h(c,T) \equiv Aff(\{c\} \cup T) \text{ est un hyperplan dans } \mathbb{R}^d, \ (c \in B(O,\epsilon)\ ).$$

D'autre part, l'hyperplan $h \equiv h(O,T)$ séparant strictement $(p_i)_{i \in I_2}$ de $(p_i)_{i \in I_3}$, il existe $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ tel que pour tout $c \in B(O,\epsilon_1)$, l'hyperplan $h(c,T)$ sépare aussi strictement $(p_i)_{i \in I_2}$ de $(p_i)_{i \in I_3}$.

Supposons que $I_2 \neq \emptyset$ (si $I_2 = \emptyset$ on procède de façon analogue avec I_3).
Fixons un point p_{i_0}, $i_0 \in I_2$ et prenons $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ tel que:

$$p_{i_0} \notin B(O,\epsilon_2). \tag{1}$$

La droite d passant par O et p_{i_0} coupe la sphère $B(O,\epsilon_2)$ en deux points c_1, c_2 qui ne se trouvent pas dans $h \equiv h(O,T)$ (car $p_{i_0} \notin h$).
Donc $h(c_1,T)$, $h(c_2,T)$ ne passent pas par O (voir figure 2.3).

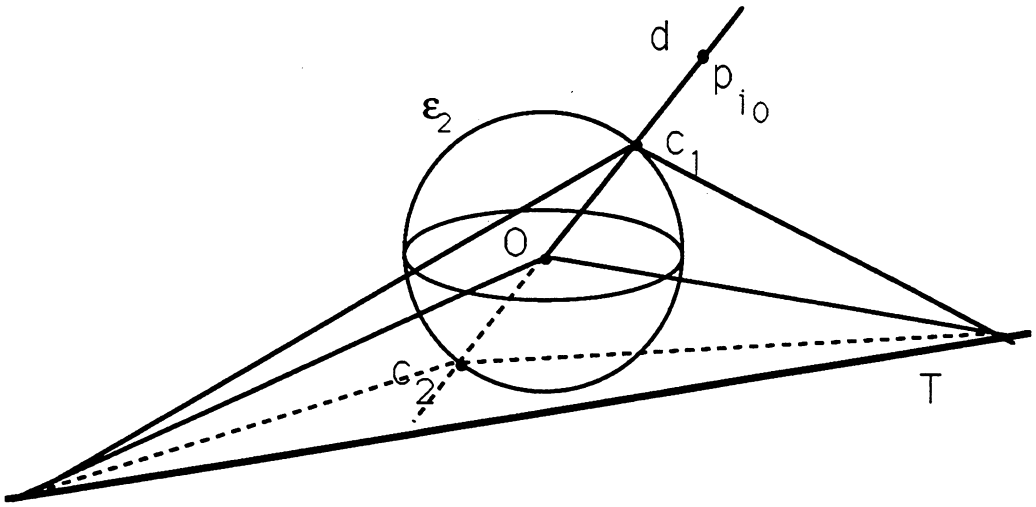


FIGURE 2.3.

Grâce à (1), on peut supposer que, sur la droite d, O et p_{i_0} sont de deux côtés de c_1 et d'un même côté de c_2.
Alors on a:

$$(p_i)_{i\in I_2} \subset h^+(c_1,T) \quad (\text{car } p_{i_0} \in h^+(c_1,T)),$$

$$(p_i)_{i\in I_2} \subset h^-(c_2,T) \quad (\text{car } p_{i_0} \in h^-(c_2,T)).$$

Or $h(c_1,T)$ ainsi que $h(c_2,T)$ séparent strictement $(p_i)_{i\in I_2}$ de $(p_i)_{i\in I_3}$, on a:

$$(p_i)_{i\in I_3} \subset h^-(c_1,T),$$

$$(p_i)_{i\in I_3} \subset h^+(c_2,T).$$

Donc enfin on a:

$$(p_i)_{i\in I_1} \subset h(c_1,T),\ (p_i)_{i\in I_2} \subset h^+(c_1,T) \text{ et } (p_i)_{i\in I_3} \subset h^-(c_1,T),$$

$$(p_i)_{i\in I_1} \subset h(c_2,T),\ (p_i)_{i\in I_2} \subset h^-(c_2,T) \text{ et } (p_i)_{i\in I_3} \subset h^+(c_2,T).$$

Posons $p = Dual^{-1}(h(c_1,T))$, $q = Dual^{-1}(h(c_2,T))$. on a:

$$p \in (\bigcap_{i\in I_1} h_i)\bigcap(\bigcap_{i\in I_2} h_i^+)\bigcap(\bigcap_{i\in I_3} h_i^-),$$

et

$$q \in (\bigcap_{i\in I_1} h_i)\bigcap(\bigcap_{i\in I_2} h_i^-)\bigcap(\bigcap_{i\in I_3} h_i^+).$$

On n'a donc qu'à prendre $f =$ la face contenant p et $g =$ la face contenant q.

Inversement, supposons qu'il existe deux faces $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ vérifiant (2.2).
Prenons $p \in f \setminus \{O\}$ et $q \in g \setminus \{O\}$.
De (2.2) et de l'observation 2.1, on déduit:

$$(p_i)_{i\in I_3} \subset h_p^- \cap h_q^+,$$

$$(p_i)_{i\in I_2} \subset h_p^+ \cap h_q^-,$$

et $$(p_i)_{i\in I_1} \subset h_p \cap h_q \quad \text{(Donc si } I_1 \neq \emptyset,\ h_p \cap h_q \neq \emptyset).$$

D'autre part, $O \in h_p^- \cap h_q^-$, on peut donc prendre l'hyperplan h comme suit:

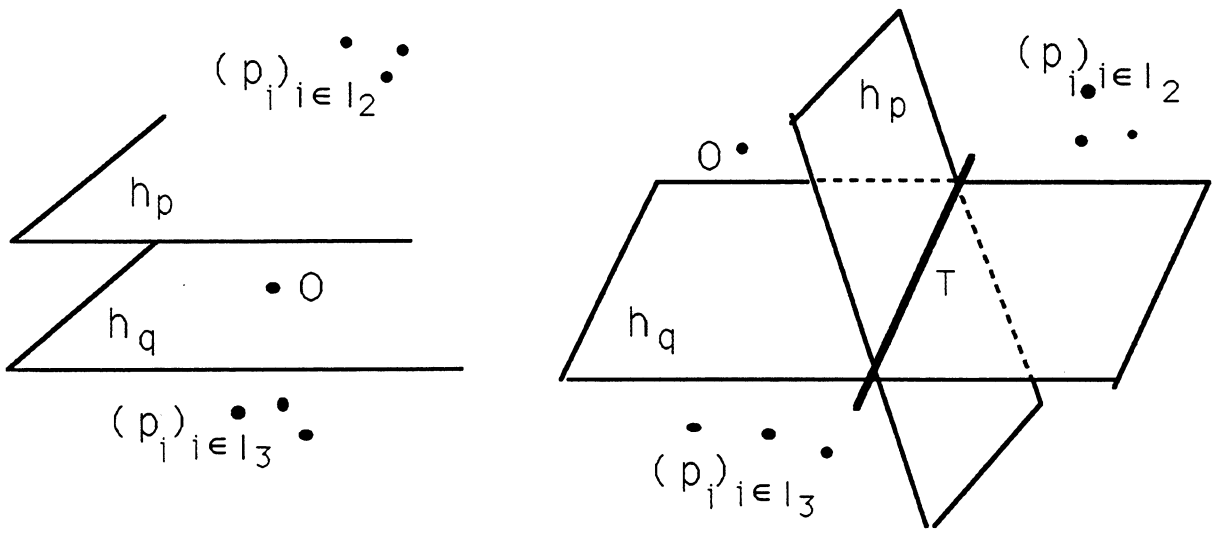


FIGURE 2.4.

Si $h_p \cap h_q = \emptyset$, prenons h l'hyperplan passant par O et parallèle à h_p, h_q.
Si $h_p \cap h_q = T \neq \emptyset$, T est donc de dimension $d-2$ (car $h_p \neq h_q$). Prenons h l'hyperplan passant par O et contenant T ($h = h(O,T)$).

En tous les cas, h divise $\mathcal{P} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup \{n+1\}, I_2, I_3)$. ∎

Lemme 2.15. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ soient équivalents.*
Soit $I_1 \subset I$. On a alors:

1/. $$O \notin Aff(p_i)_{i\in I_1} \iff O \notin Aff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1},$$

2/. $$dimAff(p_i)_{i\in I_1} = dimAff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1}.$$

Preuve. D'abord l'assertion 1/ est évidente grâce au corollaire 1.7 et à la propriété 2.5.
Ensuite, si $O \notin Aff(p_i)_{i\in I_1}$, 2/ est aussi évident grâce au corollaire 1.7 et à la propriété 2.5.
Supposons donc que $O \in Aff(p_i)_{i\in I_1}$ et démontrons 2/.
Par symétrie entre $(p_i)_{i\in I_1}$ et $(\tilde{p}_i)_{i\in I_1}$, on n'a qu'à démontrer que:

$$dimAff(p_i)_{i\in I_1} \leq dimAff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1}.$$

Posons $k = dimAff(p_i)_{i\in I_1}$. D'après le lemme 2.4, il existe $J_1 \subset I_1$ tel que:

$$dimAff(p_i)_{i\in J_1} = k-1 \text{ et que } O \notin Aff(p_i)_{i\in J_1}.$$

Alors on a:

$$O \in Aff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1}, \quad \text{(d'après l'assertion 1/)} \tag{1}$$
$$O \notin Aff(\tilde{p}_i)_{i\in J_1}, \quad \text{(d'après l'assertion 1/)} \tag{2}$$
$$dimAff(\tilde{p}_i)_{i\in J_1} = dimAff(p_i)_{i\in J_1} = k-1. \quad \text{(d'après (2) et l'assertion 2/)} \tag{3}$$

(1) entraîne que $\quad Aff((\tilde{p}_i)_{i\in J_1} \cup \{O\}) \subset Aff((\tilde{p}_i)_{i\in I_1}.$ (4)

(2), (3) entraînent que $\quad dimAff((\tilde{p}_i)_{i\in J_1} \cup \{O\}) = k.$ (5)

Enfin,

(4), (5) nous donnent $\quad dimAff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1} \geq k = dimAff(p_i)_{i\in I_1}.$ ∎

Lemme 2.16. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents.*
Soit (I_1, I_2, I_3) une partition de I. Soit $K_1 = \{n+1\}$.
Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes:
1/. Il existe un hyperplan h qui divise $\mathcal{P} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup K_1, I_2, I_3)$
2/. Il existe un hyperplan $\tilde{h}$ qui divise $\tilde{\mathcal{P}} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup K_1, I_2, I_3)$.

Preuve. Par symétrie, on n'a qu'à démontrer le sens $1/ \Longrightarrow 2/$.
Supposons donc qu'il existe un hyperplan h qui divise $\mathcal{P} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup K_1, I_2, I_3)$.

Premier cas: $I_1 = I$ (c.a.d. que $I_2 = I_3 = \emptyset$)
On voit d'abord (grâce au lemme 2.15:

$$dimAff(\tilde{p}_i)_{i\in I} = dimAff(p_i)_{i\in I} \leq dimh = d-1.$$

Supposons par l'absurde que tout hyperplan contenant $(\tilde{p}_i)_{i\in I}$ ne passe pas par O. On a alors:

$$O \notin Aff(\tilde{p}_i)_{i\in I} \quad \text{et} \quad dimAff(\tilde{p}_i)_{i\in I} = d-1.$$

Le lemme 2.15 donne la même chose pour $\mathcal{P}$, c'est- à -dire que

$$O \notin Aff(p_i)_{i\in I} \quad \text{et} \quad dimAff(p_i)_{i\in I} = d-1.$$

Donc il n'existe pas d'hyperplan passant par O et contenant $(p_i)_{i\in I}$. C'est absurde.

Deuxième cas: $I_2 \cup I_3 \neq \emptyset$ et $O \notin Aff(p_i)_{i\in I_1}$.
D'après le lemme 2.14, il existe $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ qui vérifient (2.2).
$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ étant équivalents, il existe $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ tels que:

$$V_{\tilde{h}_i}(\tilde{f}) = V_{h_i}(f) \text{ et } V_{\tilde{h}_i}(\tilde{g}) = V_{h_i}(g) \quad (i \in I).$$

Donc $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ vérifient aussi (2.2). Le sens inverse du lemme 2.14 dit qu'il existe un hyperplan $\tilde{h}$ divisant $\tilde{P} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup K_1, I_2, I_3)$.

Troisième cas: $I_2 \cup I_3 \neq \emptyset$ et $O \in Aff(p_i)_{i\in I_1}$.
Posons $k = dimAff(p_i)_{i\in I_1}$. D'après le lemme 2.4, il existe $J_1 \subset I_1$ tel que:

$$dimAff(p_i)_{i\in J_1} = k-1 \text{ et que } O \notin Aff(p_i)_{i\in J_1}.$$

Prenons:

$$T = J_1 \cup I_2 \cup I_3,$$
$$\mathcal{H}_T = (h_i)_{i\in T}, \quad \tilde{\mathcal{H}}_T = (\tilde{h}_i)_{i\in T} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_T = (p_i)_{i\in T}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_T = (\tilde{p}_i)_{i\in T}.$$

Alors:
$\mathcal{A}(\mathcal{H}_T)$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}_T)$ sont équivalents,
(J_1, I_2, I_3) est une partition de T, $I_2 \cup I_3 \neq \emptyset$, $O \notin Aff(p_i)_{i\in J_1}$ et l'hyperplan h divise $\mathcal{P}_T \cup \{O\}$ suivant $(J_1 \cup K_1, I_2, I_3)$.

Donc il existe un hyperplan $\tilde{h}$ divisant $\tilde{P}_T \cup \{O\}$ suivant $(J_1 \cup K_1, I_2, I_3)$ (deuxième cas).

Il nous reste à démontrer que $(\tilde{p}_i)_{i\in I_1} \subset \tilde{h}$.
On a d'abord: $O \in Aff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1}$ (lemme 2.15),
Donc

$$Aff((\tilde{p}_i)_{i\in J_1} \cup \{O\}) \subset Aff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1}. \tag{1}$$

D'ailleurs, d'après le lemme 2.15),

$$O \notin Aff(\tilde{p}_i)_{i\in J_1} \quad \text{et} \quad dimAff(\tilde{p}_i)_{i\in J_1} = dimAff(p_i)_{i\in J_1} = k-1.$$

On doit avoir:

$$dimAff((\tilde{p}_i)_{i\in J_1} \cup \{O\}) = dimAff((\tilde{p}_i)_{i\in J_1} + 1 = k. \tag{2}$$

Enfin on a aussi(lemme 2.15):

$$dimAff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1} = dimAff((\tilde{p}_i)_{i\in I_1} = k. \tag{3}$$

(1), (2), (3) entraînent que $Aff((\tilde{p}_i)_{i\in J_1} \cup \{O\}) = Aff(\tilde{p}_i)_{i\in I_1}$.

Donc $(\tilde{p}_i)_{i\in I_1} \subset Aff((\tilde{p}_i)_{i\in J_1} \cup \{O\}) \subset \tilde{h}$. ∎

Preuve du théorème 2.13.
Si $\mathcal{P} \cup \{O\}$, $\tilde{\mathcal{P}} \cup \{O\}$ sont de même configuration, le lemme 2.12 donne comme corollaire que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ sont équivalents.
Inversement, supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ soient équivalents.
Soit $(I_1 \cup K_1, I_2 \cup K_2, I_3 \cup K_3)$ une partition de $\{1, \cdots, n, n+1\}$,
où $P = (I_1, I_2, I_3)$ est une partition de I et $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{n+1\}$, $K_1 \cap K_2 = K_2 \cap K_3 = K_3 \cap K_1 = \emptyset$.

Par symétrie entre $\mathcal{P}$ et $\tilde{\mathcal{P}}$, on n'a qu'à vérifier le sens $1/ \Longrightarrow 2/$ de la définition 2.2.
Supposons donc qu'il existe un hyperplan h qui divise $\mathcal{P} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup K_1, I_2 \cup K_2, I_3 \cup K_3)$.
Si $K_1 = \{n+1\}$ $(K_2 = K_3 = \emptyset)$, on fait appel au lemme 2.16.
Si $K_1 = \emptyset$, on fait appel au lemme 2.12.
On conlut enfin qu'il existe un hyperplan $\tilde{h}$ qui divise $\tilde{\mathcal{P}} \cup \{O\}$ suivant $(I_1 \cup K_1, I_2 \cup K_2, I_3 \cup K_3)$. ∎

Un corollaire immédiat du théorème 2.13 est:

Corollaire 2.17. *Si $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ sont équivalents, alors $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{P}$ sont de même configuration.*

2.4 Perturbation des points et préservation des configurations.

Afin de pouvoir appliquer les résultats quantitatifs du premier chapitre, on va avoir besoin, dans cette section 2.3, de la relation entre les coordonnées d'un point $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{O\}$ et les coefficients de l'hyperplan $h_p \equiv Dual(p)$ et vice-versa. On fait donc l'observation suivante:

Propriété 2.18. *Soit* $p = (x_1(p), \cdots, x_d(p)) \in \mathbb{R}^d \setminus \{O\}$ *et*

$$h: \quad \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot x_i - c = 0, \quad (\sum_{i=1}^{d} a_i^2 = 1 \ \ et \ \ c > 0),$$

un hyperplan ne passant pas par O.

On a alors:

$$Dual(p): \quad \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i(p)}{\|p_i\|} x_i - \frac{1}{\|p_i\|} = 0, \tag{2.3}$$

et

$$Dual^{-1}(h) = (\frac{a_1}{c}, \cdots, \frac{a_d}{c}). \tag{2.4}$$

Preuve. (2.3) est évident à partir de la définition 2.1:

$$Dual(p) = \{x \in \mathbb{R}^d / < p, x > = 1\}.$$

Quant à (2.4), prenons $q = (\frac{a_1}{c}, \cdots, \frac{a_d}{c}) \in \mathbb{R}^d \setminus \{O\}$. On n'a alors qu'à vérifier que $Dual(q) = h$, ce qui est évident grâce à (2.3). ∎

Propriété 2.19. *Soient* k, $K > 0$. *Soient*

$$h: \quad \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot x_i - c = 0, \quad (\sum_{i=1}^{d} a_i^2 = 1 \ et \ c > 0),$$

$$\tilde{h}: \quad \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_i \cdot x_i - \tilde{c} = 0 \quad (\sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_i^2 = 1 \ et \ \tilde{c} > 0)$$

deux hyperplans ne passant pas par O tels que:

$$k \leq c \leq K \quad et \quad k \leq \tilde{c} \leq K.$$

Alors:

$$\frac{min(k,1)}{\sqrt{d+1}K^2} D(\tilde{h}, h) \leq \|p_{\tilde{h}} - p_h\| \leq \frac{\sqrt{d+1}max(K,1)}{k^2} D(\tilde{h}, h). \tag{2.5}$$

où

$$p_{\tilde{h}} = Dual^{-1}(\tilde{h}) \ et \ p_h = Dual^{-1}(h).$$

Preuve. D'après (2.4), on a:

$$\|p_{\tilde{h}} - p_h\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |\frac{\tilde{a}_i}{\tilde{c}} - \frac{a_i}{c}|^2} = \frac{1}{c\tilde{c}}\sqrt{\sum_{i=1}^{d} |\tilde{c}a_i - c\tilde{a}_i|^2} =$$

$$\frac{1}{c\tilde{c}}\sqrt{\sum_{i=1}^{d}(\tilde{c}^2 a_i^2 + c^2\tilde{a}_i^2 - 2c\tilde{c}a_i\tilde{a}_i)} = \frac{1}{c\tilde{c}}\sqrt{\tilde{c}^2 + c^2 - 2c\tilde{c}\sum_{i=1}^{d} a_i\tilde{a}_i} =$$

$$\frac{1}{c\tilde{c}}\sqrt{(\tilde{c}-c)^2 + c\tilde{c}(2 - \sum_{i=1}^{d} 2a_i\tilde{a}_i)} = \frac{1}{c\tilde{c}}\sqrt{(\tilde{c}-c)^2 + c\tilde{c}\sum_{i=1}^{d}(a_i^2 - 2a_i\tilde{a}_i + \tilde{a}_i^2)} =$$

$$\frac{1}{c\tilde{c}}\sqrt{(\tilde{c}-c)^2 + c\tilde{c}\sum_{i=1}^{d}|\tilde{a}_i - a_i|^2}.$$

D'où, avec $k \leq \tilde{c}, c \leq K$, on a:

$$\|p_{\tilde{h}} - p_h\| \leq \frac{max(1,K)}{k^2}\sqrt{(\tilde{c}-c)^2 + \sum_{i=1}^{d}|\tilde{a}_i - a_i|^2}$$

et

$$\|p_{\tilde{h}} - p_h\| \geq \frac{min(1,k)}{K^2}\sqrt{(\tilde{c}-c)^2 + \sum_{i=1}^{d}|\tilde{a}_i - a_i|^2}$$

Or

$$\sqrt{(\tilde{c}-c)^2 + \sum_{i=1}^{d}|\tilde{a}_i - a_i|^2} \leq \sqrt{d+1}Max(|\tilde{a}_1 - a_1|, \cdots, |\tilde{a}_d - a_d|, |\tilde{c} - c|).$$

et

$$\sqrt{(\tilde{c}-c)^2 + \sum_{i=1}^{d}|\tilde{a}_i - a_i|^2} \geq \frac{(|\tilde{c}-c| + \sum_{i=1}^{d}|\tilde{a}_i - a_i|)}{\sqrt{d+1}},$$

on en déduit (2.5) (voir propriété 2.19) ∎

Théorème 2.20. *Soit $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ une famille de n points dans $\mathbb{R}^d$, $n \geq d$ ($I = \{1, \cdots, n\}$).*
Supposons que:
Pour tout $J \subset I$, avec $Card(J) \leq d+1$, $(p_i)_{i\in J}$ soient affinement indépendants.

Alors on peut calculer en temps $O(n^d)$ un $\epsilon > 0$ tel que
pour tout $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^d$,
$$\|\tilde{p}_i - p_i\| \leq \epsilon \Longrightarrow \tilde{\mathcal{P}} \text{ et } \mathcal{P} \text{ sont de même configuration.}$$

Preuve. On prend d'abord un point $p \equiv p_{n+1} \in \mathbb{R}^d$ tel que:

$$p \notin Aff(p_i)_{i\in J}, \quad (J \subset I,\ Card(J) \leq d)$$

Faisant une translation , on peut supposer que: $\quad p_{n+1} \equiv p \ = O.$

Calculons alors les hyperplans $\mathcal{H} = (h_i)_{i\in I},\ h_i = Dual(p_i)$.
Retenons que (voir (2.3)): $\qquad c_i = \dfrac{1}{\|p_i\|} \quad (i \in I).$
D'après le corollaire 2.6 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est simple. On peut alors (Théorème 1.19) calculer en temps $O(n^d)$ un $\delta > 0$ tel que:

Pour toute famille $\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{h}_i)_{i\in I}$ de n hyperplans ne passant pas par O, on ait:
Si $\|\tilde{p}_i - p_i\| \leq \delta,\ (i \in I)$, alors $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ sont équivalents.

Posons maintenant: $\qquad k = \underset{i\in I}{\mathbf{Min}}\, c_i - \Delta \quad$ et $\quad K = \underset{i\in I}{\mathbf{Max}}\, c_i + \Delta,$

où $\Delta > 0$ tel que $\Delta < \underset{i\in I}{\mathbf{Min}}\, c_i$ (de telle manière que $k > 0$).

Prenons $\epsilon > 0$ vérifiant (1), (2), (3) suivants pour tout $i \in I$:

$$\epsilon < \|p_i\|, \tag{1}$$

$$\frac{\epsilon}{\|p_i\|(\|p_i\| - \epsilon)} < \Delta, \tag{2}$$

$$\frac{min(k,1)}{\sqrt{d+1}\ K^2}\ \epsilon < \delta. \tag{3}$$

On va démontrer que cet ϵ vérifie notre but.

Soit $\quad \tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\|\tilde{p}_i - p_i\| \leq \epsilon,\ (i \in I).$ (4)
On déduit tout-de-suite de (4) et (1): $\qquad \tilde{p}_i \neq O,\ (i \in I)$.
Posons alors:
$\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{h}_i)_{i\in I},\ \ \tilde{h}_i = Dual(\tilde{p}_i)$. On a (propriété 2.18): $\quad \tilde{c}_i = \dfrac{1}{\|\tilde{p}_i\|}, (i \in I).$
Donc

$$\|\tilde{c}_i - c_i\| \ = \ \left|\frac{1}{\|\tilde{p}_i\|} - \frac{1}{\|p_i\|}\right| \ \leq$$

$$\leq \ \frac{\|\tilde{p}_i - p_i\|}{\|\tilde{p}_i\|\ \|p_i\|} \underset{\text{d'après (4)}}{\leq} \frac{\epsilon}{\|p_i\|\ (\|p_i\| - \epsilon)} \underset{\text{d'après (2)}}{\leq} \Delta.$$

D'où: $\qquad k \leq c_i - \Delta \ < \tilde{c}_i \ < c_i + \Delta \ \leq K.$
La propriété 2.19 et (3) donnent alors:

$$\frac{min(k,1)}{\sqrt{d+1}\ K^2}\ D(\tilde{h}_i, h_i) \ \leq \ \|\tilde{p}_i - p_i\| \ \leq \ \epsilon \ \leq \ \frac{min(k,1)}{\sqrt{d+1}\ K^2}\ \delta.$$

Donc $D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta, (i \in I)$. On en déduit que $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ sont équivalents. Le théorème 2.13 donne que $\tilde{\mathcal{P}} \cup \{O\}$ et $\mathcal{P} \cup \{O\}$ sont de même configuration. Par conséquent $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{P}$ sont de même configuration. ∎

Le déterminant de la matrice $\tilde{\mathcal{P}}(X)$ étant continu en fonction des coordonnées des points $(\tilde{p}_i)_{i \in \underline{X}}$, du théorème 2.20 on a tout de suite le corollaire suivant:

Corollaire 2.21. *Soit $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$ une famille de n points dans $\mathbb{R}^d$, $n \geq d$ ($I = \{1, \cdots, n\}$).*
Supposons que pour tout $J \subset I$ avec $Card(J) \leq d+1$, $(p_i)_{i \in J}$ soient affinement indépendants.
Alors $\epsilon > 0$ calculé dans le corollaire 2.20vérifie :
Pour tout $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}^d$,
Si $\|\tilde{p}_i - p_i\| \leq \epsilon$, $(i \in I)$, alors $sign(det\tilde{\mathcal{P}}(X)) = sign(det\mathcal{P}(X))$, $(X \in I^{d+1})$.
(voir la notation $\mathcal{P}(X)$ dans la propriété 2.9).

On va terminer cette première partie de configuration des points par une petite application dans la stabilité du déterminant d'une matrice inversible. La démonstration donnée ici vient du lemme 1.15. A noter que on peut obtenir cette proposition d'une autre façon en manipulant les normes de matrices.

Proposition 2.22. Soit $B = (b_{ij})_{i,j \in J}$, $J = \{1, \cdots, d\}$, une matrice réelle et inversible. On peut calculer en coût $O(d^3)$ un $\epsilon > 0$ tel que:
Pour toute matrice $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{i,j \in J}$,

Si $|\tilde{b}_{ij} - b_{ij}| \leq \epsilon$, $(i, j \in J)$, alors $sign(det\ \tilde{B}) = sign(det\ B)$.

Preuve. Notons:
$I = \{1, \cdots, d, d+1\}$, $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$, $p_i = (b_{i1}, \cdots, b_{id})$ $i \in J$ et $p_{d+1} = O$.

Calculons $\|p_i\|$ et $c_i = \dfrac{1}{\|p_i\|}$ $(i \in J)$ (coût $O(d^2)$).

Calculons $a_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{\|p_i\|}$ $(i, j \in J)$ (coût $O(d^2)$).

Calculons $\underset{i \in J}{\mathbf{Min}}\, c_i$, $\underset{i \in J}{\mathbf{Max}}\, c_i$ (coût $O(d)$).

Prenons $0 < \Delta < \underset{i \in J}{\mathbf{Min}}\, c_i$ et posons:
$k = \underset{i \in J}{\mathbf{Min}}\, c_i - \Delta$ et $K = \mathbf{Max}_{i \in J}\, c_i + \Delta$ (coût constant).

Calculons $\Delta_J \equiv det\ (a_{ij})_{i,j \in J}$
(par la triangulation de Gauss par exemple. Le coût est $O(d^3)$ [Lasc86]).
On verra tout-à- l'heure que $\Delta_J \neq 0$. Donc:

Prenons $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \dfrac{|\Delta_J|}{2d\sqrt{d}}$ (coût constant).

Prenons $\epsilon > 0$ vérifiant (1), (2), (3) suivants:

$$\epsilon < \underset{i \in J}{\mathrm{Min}} \|p_i\|, \tag{1}$$

$$\frac{\epsilon}{\|p_i\|(\|p_i\| - \epsilon)} < \Delta, \quad (i \in J), \tag{2}$$

$$\frac{min(k,1)}{\sqrt{d+1}\, K^2}\, \epsilon < \delta. \tag{3}$$

On doit démontrer tout d'abord que $\delta_J \equiv det\ (a_{ij})_{i,j \in J} \neq 0$.

Désignons $X = (1, \cdots, d+1) \in I^{d+1}$. On voit que: $det\ B = -det(\mathcal{P}(X))$ (voir le symbole $\mathcal{P}(X)$ dans la propriété 2.9).
B étant inversible, les points $(p_i)_{i \in I}$ sont affinement indépendants. Le corollaire 2.6 dit que les hyperplans $\mathcal{H} = (h_i)_{i \in J}$, $h_i = Dual(p_i)$, $(i \in J)$, se coupent en un point.
Or $h_i : \sum_{i=1}^{d} a_{ij} x_j - c_i = 0$, $(i \in J)$ (la propriété 2.18),

On doit avoir: $det\ (a_{ij})_{i,j \in J} \neq 0$.

Démontrons maintenant que ϵ ainsi calculé satisfait notre but.
Soit donc $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{i,j \in J}$ tel que $|\tilde{b}_{ij} - b_{ij}| \leq \epsilon$, $(i, j \in J)$.

Posons $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_i)_{i \in}$, $\tilde{p}_i = (\tilde{b}_{i1}, \cdots, \tilde{b}_{id})$ et $\tilde{p}_{d+1} = O$.
D'après (1), $\tilde{p}_i \neq O$, $(i \in J)$.
Posons alors: $\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{h}_i)_{i \in J}$, $\tilde{h}_i = Dual(\tilde{p}_i)$, $(i \in J)$.

Grâce à (2) , (3) et de façon identique à la preuve du corollaire 2.20 , on obtient:
$$D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta \quad (i \in J).$$

Le lemme 1.15 nous assure que les hyperplans $(\tilde{h}_i)_{i \in J}$ se coupent aussi en un seul point.
Alors le sens inverse du corollaire 2.6 dit que les points $(\tilde{p}_i)_{i \in J} \cup \{O\} \equiv (\tilde{p}_i)_{i \in I}$ sont affinement indépendants.

Par conséquent, $det(\tilde{\mathcal{P}}(X)) \neq 0 \quad (X = (1, \cdots, d+1) \in I^{d+1})$.

Donc $det\ \tilde{B} \neq 0 \quad (\text{car } det\ \tilde{B} = -det(\tilde{\mathcal{P}}(X)) \neq 0)$.

On vient donc de démontrer que :
Pour toute matrice $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{i,j \in J}$,
Si $|\tilde{b}_{ij} - b_{ij}| \leq \epsilon$, $(i, j \in J)$, alors det $\tilde{B} \neq 0$.
Par continuité du déterminant en fonction des termes $\tilde{b}_{ij}$, on doit avoir:
$$sign(det\ \tilde{B}) = sign(det\ B). \quad \blacksquare$$

Deuxième partie: Diagrammes de Voronoï d'ordre k.

2.5 Rappel rapide du diagramme de Voronoi d'ordre k. Equivalence entre deux Diagrammes.

Soit $\mathcal{S} = (P_i)_{i\in I}$, $Card(I) = n > 1$, un ensemble de n points distincts dans $\mathbb{R}^d$. Soit k un entier tel que $1 \leq k < n$.

Notations.
1/. Notons $\mathcal{P}_k(I) = \{J \subset I \quad Card(J) = k\}$.

2/. Soit $J \in \mathcal{P}_k(I)$, notons: $\mathcal{S}_J = (P_i)_{i\in J}$.

3/. Soit P un point $\in \mathbb{R}^d$. Soit $J \in \mathcal{P}_k(I)$. On pose:

$$\delta(P, \mathcal{S}_J) = \underset{i\in J}{\mathrm{Max}}\, d(P, P_i),$$

où $d(P, P_i) = \|\overrightarrow{PP_i}\|$ (norme euclidienne).

Définition 2.3.[Edels86], [Edels87] *Soit P un point $\in \mathbb{R}^d$.*
On pose $\mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P)$ le sous ensemble de $\mathcal{P}_k(I)$, qui contienne tous les ensembles J tels que $\delta(P, \mathcal{S}_J)$ soit minimum, c'est-à-dire que:

$$\mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P) = \{\ J \in \mathcal{P}_k(I)\ :\ \delta(P, \mathcal{S}_J) \leq \delta(P, \mathcal{S}_{J'}),\ \ \forall J' \in \mathcal{P}_k(I)\ \}.$$

On pose aussi $I_{k,\mathcal{S}}(P)$ l'union de tous les ensembles J éléments de $\mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P)$:

$$I_{k,\mathcal{S}}(P) = \bigcup_{J\in\mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P)} J.$$

Remarque 2.2 *Soit P un point $\in \mathbb{R}^d$. Alors:*
1/. $\mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P) \neq \emptyset$ et $Card(I_{k,\mathcal{S}}(P)) \geq k$;

2/. Soient J_1, J_2, $J \in \mathcal{P}_k(I)$, J_1, $J_2 \in \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P)$ et $J \notin \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P)$, on a:

$$\delta(P, \mathcal{S}_{J_1}) = \delta(P, \mathcal{S}_{J_2}) < \delta(P, \mathcal{S}_J);$$

3/. Soit $J \in \mathcal{P}_k(I)$. On a les équivalences suivantes:
$J \in \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P) \iff J \subset I_{k,\mathcal{S}}(P) \iff \delta(P, \mathcal{S}_J) < d(P, P_j),\ (j \in I \setminus I_{k,\mathcal{S}}(P)\ ).$

Définition 2.4.[Edels86], [Edels87] *Soit $I' \subset I$, $Card(I') \geq k$. Posons:*

$$\mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I') = \{P \in \mathbb{R}^d :\ I_{k,\mathcal{S}}(P) = I'\}.$$

La propriété suivante illustre la signification de $\mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I')$: tout point P de $\mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I')$ est équidistant à tous les sous ensembles de k éléments dans $(P_i)_{i\in I'}$ et plus près de ces sous ensembles que de tous les autres germes n'appartenant pas à $(P_i)_{i\in I'}$.

Propriété 2.23. *Soit $I' \subset I$, $Card(I') \geq k$. Alors:*

$$\mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I') = \{P \in \mathbb{R}^d : \delta(P, \mathcal{S}_{J_1}) = \delta(P, \mathcal{S}_{J_2}) < d(P, P_j) , \\ \forall J_1, J_2 \subset I', \ J_1, J_2 \in \mathcal{P}_k(I), \ \forall j \in I \setminus I' \}.$$

Preuve. Soit $P \in \mathbb{R}^d$.
Supposons d'abord que $P \in \mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I')$. On a: $I' = I_{k,\mathcal{S}}(P)$.
Soient $J_1, J_2 \in \mathcal{P}_k(I)$, $J_1, J_2 \subset I' = I_{k,\mathcal{S}}(P)$.
Soit $j \in I \setminus I' = I \setminus I_{k,\mathcal{S}}(P)$.
On a, d'après la remarque 2.2 (3/ et 2/):

$$J_1, J_2 \in \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P) \quad \text{et} \\ \delta(P, \mathcal{S}_{J_1}) = \delta(P, \mathcal{S}_{J_2}) < d(P, P_j). \tag{1}$$

Inversement, supposons que P vérifie (1) pour tous $J_1, J_2 \in \mathcal{P}_k(I)$, $J_1, J_2 \subset I'$ et pour tout $j \in I \setminus I'$.
On doit démontrer que $I' = I_{k,\mathcal{S}}(P)$.
Démontrons d'abord que $I' \subset I_{k,\mathcal{S}}(P)$.
Soit $J \in \mathcal{P}_k(I)$, $J \subset I'$. On va démontrer que $J \in \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P)$ (c.à.d. que $J \subset I_{k,\mathcal{S}}(P)$).
Soit $J' \in \mathcal{P}_k(I)$.
Si $J' \subset I'$, alors $\delta(P, \mathcal{S}_J) = \delta(P, \mathcal{S}_{J'})$.
Si $J' \not\subset I'$, alors il existe $j \in J' \setminus I'$. Donc $\delta(P, \mathcal{S}_J) < d(P, P_j) \leq \delta(P, \mathcal{S}_{J'})$.
Dans tous les cas on a: $\delta(P, \mathcal{S}_J) \leq \delta(P, \mathcal{S}_{J'})$. Donc $J \in \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P)$.
Démontrons enfin que $I_{k,\mathcal{S}}(P) \subset I'$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $J \in \mathcal{P}_k(I)$ tel que $J \subset I_{k,\mathcal{S}}(P)$ et $J \not\subset I'$.
Alorsil existe $j \in J \setminus I'$.
Prenons un $J' \in \mathcal{P}_k(I)$ tel que $J' \subset I'$.
D'après (1) on a:

$$\delta(P, \mathcal{S}_{J'}) < d(P, P_j) \leq \delta(P, \mathcal{S}_J),$$

ce qui absurde au fait que $J \in \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P)$. ∎

Définition 2.5.[Edels86], [Edels87] *Le diagramme de Voronoi d'ordre k engendré par $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{V}or_k(\mathcal{S})$, est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de la relation d'équivalence suivante dans $\mathbb{R}^d$:*

$$P \text{ est } (\mathcal{S}, k)\text{-équivalent à } Q \iff I_{k,\mathcal{S}}(P) = I_{k,\mathcal{S}}(Q) \ . \\ (\iff \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(P) = \mathcal{C}_{k,\mathcal{S}}(Q) \ )$$

Chaque élément de $\mathcal{V}or_k(\mathcal{S})$ est appelé une face du diagramme de Voronoi.

Remarque 2.3 *Soit $I' \subset I$, $Card(I') \geq k$. Alors:*

$$\mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I') \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I') \text{ est une face de } \mathcal{V}or_k(\mathcal{S}).$$

La définition d'équivalence entre deux diagrammes de Voronoï n'existe pas dans

la littérature. La définition essayée ci-après est basée sur l'existance des faces de deux diagrammmes.
Quand $k = 1$, on voit facilement que cette définition préserve la relation de voisinage des régions (face ouvertes) de Voronoï, donc la structure de la "triangulation de Delaunay".

Définition 2.6. *Soient $\mathcal{S} = (P_i)_{i\in I}$, $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{P}_i)_{i\in I}$, $Card(I) = n > 1$, deux familles de n points distincts dans $\mathbb{R}^d$. Soit k un entier tel que $1 \leq k < n$.*
Les diagrammes de Voronoï $\mathcal{V}or_k(\mathcal{S})$ et $\mathcal{V}or_k(\tilde{\mathcal{S}})$ sont dits équivalents si:
Pour tout $I' \subset I$, avec $Card(I') \geq k$, on a:

$$\mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I') \neq \emptyset \iff \mathcal{V}_{k,\tilde{\mathcal{S}}}(I') \neq \emptyset.$$

2.6 Diagramme de Voronoi d'ordre k et Arrangement d' hyperplans.

Soit $\mathcal{U}$ le paraboloïde dans $\mathbb{R}^{d+1}$ d'équation: $\mathcal{U} \ : \ x_{d+1} \ = \ -\sum_{j=1}^{d} x_j^2.$

Notations On note pour tout point $P = (p_1, \cdots, p_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{O\}$:

1/. $\mathcal{U}(P)$ la projection verticale du point P sur le paraboloïde $\mathcal{U}$, c.à. d.

$$\mathcal{U}(P) \ = \ (p_1, \cdots, p_d, \ -\sum_{j=1}^{d} p_j^2);$$

2/. h_P l'hyperplan tangent à $\mathcal{U}$ au point $\mathcal{U}(P)$, c.à. d.

$$h_P : \ x_{d+1} \ = \ -2 \sum_{j=1}^{d} p_j x_j \ + \ \|P\|^2.$$

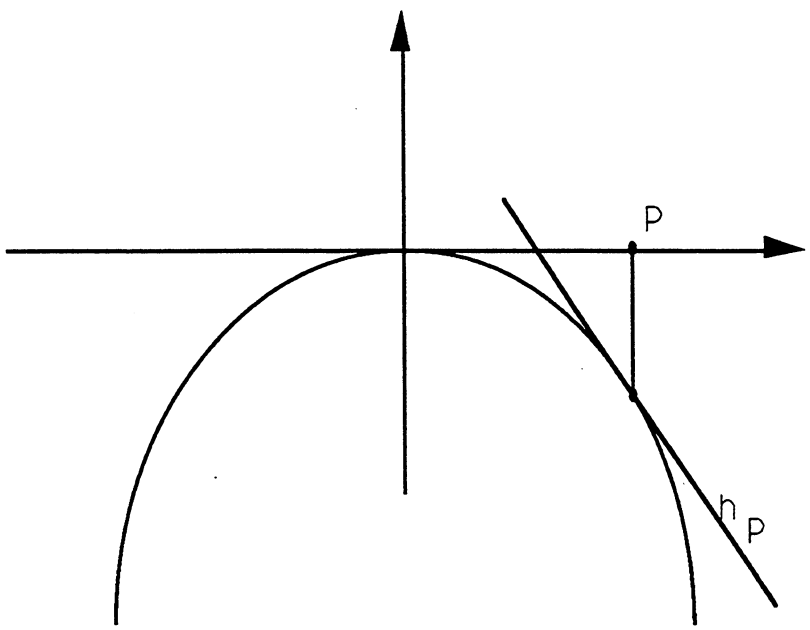


FIGURE 2.5.

Remarque 2.4 *Soit $P = (p_1, \cdots, p_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{O\}$.*
Alors h_P est un hyperplan non vertical, ne passant pas par l'origine O et
1/. h_P^+ (demi espace délimité par h_P et contenant l'origine O) coïncide avec le demi espace situé au dessus de h_P;
2/. h_P^- (demi espace délimité par h_P et ne contenant pas l'origine O) coïncide avec le demi espace situé au dessous de h_P.

Soit $\mathcal{S} = (P_i)_{i \in I}$, $Card(I) = n > 1$, un ensemble de n points distincts dans $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$. Soit k un entier tel que $1 \leq k < n$.

Prenons $\qquad \mathcal{H} = (h_i)_{i \in I} \quad$ où $\quad h_i = h_{P_i}, \ (i \in I)$.

Définition 2.7. *Soit f une face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.*
1/. On note:

$$I^-(f) = \{i \in I \ : \ f \subset h_i^-\} \ ,$$
$$I^0(f) = \{i \in I \ : \ f \subset h_i \ \} \ ,$$
$$I^+(f) = \{i \in I \ : \ f \subset h_i^+\} \ .$$

2/. f est dit k_niveau face de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ si

$$Card(I^0(f) \ \cup \ I^+(f)) \geq k \ \ et \ \ I_0(f) \neq \emptyset.$$

3/. On note:

$$proj(f) \ = \{P \in \mathbb{R}^d \ : \ \exists r \in \mathbb{R}, (P, r) \in f\}$$

On peut trouver la propriété suivante dans Edelsbrunner:

Propriété 2.24. *Soit $I' \subset \mathcal{S}$, $Card(I') \geq k$. Alors:*

$$\mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I') \ = \bigcup_{\substack{f \text{ est } k\text{_niveau face de } \mathcal{A}(\mathcal{H}) \\ I^0(f) \ \cup \ I^+(f) = I'}} proj(f).$$

Corollaire 2.25. *Soit $I' \subset I$, $Card(I') \geq k$. Alors:*

$$\mathcal{V}_{k,\mathcal{S}}(I') \ \neq \ \emptyset \iff \exists f \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) : \ I^0(f) \ \cup \ I^+(f) = I', \ I^0(f) \neq \emptyset$$

Corollaire 2.26. *Soient $\mathcal{S} = (P_i)_{i \in I}$, $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{P}_i)_{i \in I}$, $Card(I) = n > 1$, deux familles de n points distincts dans $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$.*
Prenons:

$$\mathcal{H} = (h_i)_{i \in I} \ , \ \tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{h}_i)_{i \in I} \quad \text{où} \quad h_i = h_{P_i} \ \ et \ \ \tilde{h}_i = h_{\tilde{P}_i} \ \ \forall i \in I.$$

Alors:
$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ équivalents entraîne que $\mathcal{V}or_k(\mathcal{S})$ et $\mathcal{V}or_k(\tilde{\mathcal{S}})$ sont équivalents, $(k = 1, \cdots, n-1)$.

2.7 Perturbation des points et préservation du diagramme de Voronoï.

Soit $\mathcal{S} = (P_i)_{i \in I}$, $Card(I) = n > 1$, un ensemble de n points distincts dans

$\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$.

Prenons $\qquad \mathcal{H} = (h_i)_{i\in I} \quad$ où $\quad h_i = h_{P_i}, \ (i \in I)$.

Propriété 2.27. *$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est simple si et seulement si on a 1/ et 2/ suivants:*

1/. Il n'y a pas $d+2$ points de $\mathcal{S}$ qui se trouvent sur une même sphère dans $\mathbb{R}^d$,

2/. Pour tout $J \subset I$, $Card(J) \leq d+1$, les points $(P_i)_{i\in J}$ sont affinement indépendants.

Preuve. D'abord démontrons que pour tout $J \subset I$, $J \neq \emptyset$,

$$\bigcap_{j\in J} h_j \neq \emptyset \iff \text{les points } (P_j)_{j\in J} \text{ sont sur une même sphère dans } \mathbb{R}^d. \qquad (1)$$

En effet on vérifie facilement que:
s'il existe $M \in \bigcap_{j\in J} h_j$, alors $\|P_i - proj(M)\|^2 = \sum_{j=1}^d m_j^2 \ + \ m_{d+1}, \ (i \in J)$
et que
s'il existe $P \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$ tels que $\|P_i - P\|^2 = R, \ (i \in J)$, alors $(P, R - \|P\|^2) \in \bigcap_{j\in J} h_j$,
où $M = (m_1, \cdots, m_d, m_{d+1})$ et $proj(M) = (m_1, \cdots, m_d)$.
Donc on a (1).
De (1), on a l'équivalence suivante
L'intersection de tous $d+2$ hyperplans de $\mathcal{H}$ est vide si et seulement si il n'existe pas $d+2$ points de $\mathcal{S}$ qui se trouvent sur une même sphère.

D'autre part, pour tout $i \in I$, le vecteur $n_i = (2P_i, 1)$ est perpendiculaire à l'hyperplan h_i (car $h_i : x_{d+1} = -2\Sigma_{j=1}^d p_{ij}x_j \ + \ \|P_i\|^2$).

Donc, pour tout $J \subset I$, $1 \leq Card(J) \leq d+1$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $dim \bigcap_{i\in J} h_i = (d+1) - Card(J)$,
- Les vecteurs $(n_i)_{i\in J}$ sont linéairement indépendants,
- Les points $(P_i)_{i\in J}$ sont affinement indépendants. ∎

Corollaire 2.28. *Supposons que $n \geq d+1$. $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est simple si et seulement si on a 1/ et 2/ suivants:*

1/. Il n'y a pas $d+2$ points de $\mathcal{S}$ qui se trouvent sur une même sphère dans $\mathbb{R}^d$,

2/. Pour tout $J \subset I$, $Card(J) = d+1$, les points $(P_i)_{i\in J}$ sont affinement indépendants.

Corollaire 2.29. *Soit $\epsilon > 0$. Soit $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{P}_i)_{i\in I}$, une famille des points dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\|\tilde{P}_i - P_i\| \leq \epsilon, \ (i \in I)$.*

Posons $\qquad M = \underset{i\in I}{\mathbf{Max}}\, \|P_i\| \;\; et \;\; m = \underset{i\in I}{\mathbf{Min}}\, \|P_i\|.$

On a pour tout $i \in I$:

$$| \frac{1}{\sqrt{1+4\|\tilde{P}_i\|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+4\|P_i\|^2}} | \;\leq\; \frac{4\epsilon(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}\;[\;\sqrt{1+4m^2}+1]}\;;$$

$$| \frac{\|\tilde{P}_i\|^2}{\sqrt{1+4\|\tilde{P}_i\|^2}} - \frac{\|P_i\|^2}{\sqrt{1+4\|P_i\|^2}} | \;\leq\; \frac{\epsilon\;(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}}\;[\frac{4(M+\epsilon)^2}{\sqrt{1+4m^2}+1}+1]\;;$$

$$| \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{1+4\|\tilde{P}_i\|^2}} - \frac{x_{ij}}{\sqrt{1+4\|P_i\|^2}} | \;\leq\; \frac{\epsilon}{\sqrt{1+4m^2}}\;[\;\frac{4(M+\epsilon)\;(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}+1}+1].$$

Preuve.

On voit facilement que

$$|\;\|\tilde{p}_i\|^2 - \|p_i\|^2\;| \;\leq\; \epsilon\;(2M+\epsilon).$$

Donc

$$| \frac{1}{\sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+4\|p_i\|^2}} | \;=\; \frac{|\sqrt{1+4\|p_i\|^2} - \sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}\;|}{\sqrt{1+4\|p_i\|^2}\;\sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}} \;=$$

$$= \frac{|\;(1+4\|p_i\|^2) - (1+4\|\tilde{p}_i\|^2)|}{\sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}\sqrt{1+4\|p_i\|^2}\;[\sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}+\sqrt{1+4\|p_i\|^2}]} \;=$$

$$= \frac{4|\;\|\tilde{p}_i\|^2 - \|p_i\|^2\;|}{\sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}\sqrt{1+4\|p_i\|^2}\;[\sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}+\sqrt{1+4\|p_i\|^2}]} \;\leq$$

$$\leq \frac{4\epsilon(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}\;[\;1+\sqrt{1+4m^2}\;]}\;;$$

et donc

$$| \frac{\|\tilde{P}_i\|^2}{\sqrt{1+4\|\tilde{P}_i\|^2}} - \frac{\|P_i\|^2}{\sqrt{1+4\|P_i\|^2}} | \;\leq$$

$$\leq \|\tilde{p}_i\|^2\;| \frac{1}{\sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+4\;|p_i\|^2}}| \;+\; |\;\|\tilde{p}_i\|^2 - \|p_i\|^2\;| \frac{1}{\sqrt{1+4\|p_i\|^2}} \;\leq$$

$$\leq (M+\epsilon)^2\;\frac{4\epsilon(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}\;[1\;+\;\sqrt{1+4m^2}]} + \frac{\epsilon(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}} \;=$$

$$= \frac{\epsilon(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}}\;[\frac{4(M+\epsilon)^2}{1\;+\;\sqrt{1+4m^2}}+1]\;;$$

et donc enfin

$$| \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{1+4\|\tilde{P}_i\|^2}} - \frac{x_{ij}}{\sqrt{1+4\|P_i\|^2}} | \;\leq$$

$$\leq \ |\tilde{x}_{ij}| \ \left|\frac{1}{\sqrt{1+4\|\tilde{p}_i\|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+4\ |p_i\|^2}}\right| + |\tilde{x}_{ij} - x_{ij}| \ \frac{1}{\sqrt{1+4\|p_i\|^2}} \ \leq$$

$$\leq \ (M+\epsilon)\ \frac{4\epsilon(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}\ [\ \sqrt{1+4m^2}+1]} + \epsilon\ \frac{1}{\sqrt{1+4m^2}} \ =$$

$$= \frac{\epsilon}{\sqrt{1+4m^2}}\ [\ \frac{4(M+\epsilon)\ (2M+\epsilon)}{1+\sqrt{1+4m^2}} + 1]\ . \qquad \blacksquare$$

Propriété 2.30. *Supposons que:*
1/. Il n'y a pas $d+2$ points de $\mathcal{S}$ qui se trouvent sur une même sphère dans $\mathbb{R}^d$,

2/. Pour tout $J \subset I$ avec $Card(J) \leq d+1$, les points $(P_i)_{i\in J}$ sont affinement indépendants.

Alors on peut calculer en temps $O(n^{d+1})$ un $\epsilon > 0$ tel que: $\forall \tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{P}_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^d$, on ait:
$\|\tilde{P}_i - P_i\| \leq \epsilon$, $\forall i \in I \ \Rightarrow \ \mathcal{V}or_k(\tilde{\mathcal{S}})$ et $\mathcal{V}or_k(\mathcal{S})$ sont équivalents, $\forall 1 \leq k < n$.

Preuve. L'équation normalisée de h_i étant :

$$h_i : \sum_{j=1}^{d} \frac{2x_{ij}}{\sqrt{4\|P_i\|^2+1}}\ x_j \ + \ \frac{1}{\sqrt{4\|P_i\|^2+1}}\ x_{d+1} - \frac{\|P_i\|^2}{\sqrt{4\|P_i\|^2+1}} \ = \ 0,$$

calculons, pour tous $i \in I$, pour tous $j = 1, \cdots, d$ les coefficients suivants:
$a_{ij} = \dfrac{2x_{ij}}{\sqrt{4\|P_i\|^2+1}}$, $\quad a_{id+1} = \dfrac{1}{\sqrt{4\|P_i\|^2+1}}$ $\quad$ et $\quad c_i = \dfrac{\|P_i\|}{\sqrt{4\|P_i\|^2+1}}$.

(Le coût est $O(n)$).

L' arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ étant simple (corollaire 2.28), on peut calculer (Théorème 1.19) en temps $O(n^{d+1})$ un $\delta > 0$ tel que:
Pour toute famille $\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{h}_i)_{i\in I}$ des hyperplans dans $\mathbb{R}^{d+1}$ ne passant pas par O,
si $D(\tilde{h}_i, h_i) \leq \delta$, $(i \in I)$, alors $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}})$ est équivalent avec $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Il nous faut donc calculer un $\epsilon > 0$ tel que:
Pour tout ensemble $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{P}_i)_{i\in I}$ des points dans $\mathbb{R}^d$, on ait
$\|\tilde{P}_i - P_i\| \leq \epsilon$, $(i \in I) \implies |\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| \leq \delta$, $|\tilde{c}_i - c_i| \leq \delta$, $(i \in I), (j = 1, \cdots, d+1)$.

D'après le corollaire 2.29, on a qu'à prendre $\epsilon > 0$ vérifiant:

$$\frac{4\epsilon(2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}\ [\ \sqrt{1+4m^2}+1]} \ \leq \ \delta\ ;$$
$$\frac{\epsilon\ (2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}}\ [\frac{4(M+\epsilon)^2}{\sqrt{1+4m^2}+1} + 1] \ \leq \ \delta\ ;$$
$$\frac{\epsilon}{\sqrt{1+4m^2}}\ [\ \frac{4(M+\epsilon)\ (2M+\epsilon)}{\sqrt{1+4m^2}+1} + 1]) \ \leq \ \delta\ . \qquad \blacksquare$$

Annexe du chapitre 2.

A2.1 Preuve du lemme 2.4

Prenons d'abord $I \subset J$ tel que $(p_i)_{i\in I}$ soit affinement indépendents et que $Aff(p_i)_{i\in I} = Aff(p_i)_{i\in J}$. Donc $O \in Aff(p_i)_{i\in I}$.
Fixons un $i_1 \in I$. Alors O s'écrit de façon unique sous forme:

$$O = \sum_{i\in I\setminus\{i_1\}} \lambda_i \overrightarrow{p_{i_1}p_i} + p_{i_1}, \tag{1}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $(i \in I \setminus \{i_1\})$.
p_{i_1} étant différent de O, $\exists j_1 \in I \setminus \{i_1\}$ tel que $\lambda_{j_1} \neq 0$. (2)
Prenons $J_1 = I \setminus \{j_1\}$. On va voir que J_1 vérifie notre but:
D'abord $dimAff(p_i)_{i\in J_1} = dimAff(p_i)_{i\in I} - 1 = dimAff(p_i)_{i\in J} - 1$.
Ensuite si, par l'absurde, $O \in Aff(p_i)_{i\in I\setminus\{j_1\}}$, il s'écrit de façon unique sous forme:

$$O = \sum_{i\in I\setminus\{i_1,j_1\}} \tilde{\lambda}_i \overrightarrow{p_{i_1}p_i} + p_{i_1}. \tag{3}$$

De (1) et (3) on déduit que $\lambda_{j_1} = 0$, ce qui absurde à (2). ∎

A2.2 Preuve du lemme 2.3

Supposons que $J = \{1, \cdots, n\}$. Posons l'application linéaire:

$$\begin{aligned} L \ : \ \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (< p_1, x >, \cdots, < p_n, x >) \ \equiv \ P\,x, \end{aligned}$$

où $\qquad P = (p_{ij})_{i=1,\cdots,n \ ; \ j=1,\cdots,d}.$

On a d'abord:

$$d \ = \ dim\ Ker(L) + dim\ Im(L). \tag{1}$$

Ensuite, $\qquad dim\ Vect(\overrightarrow{Op_i})_{i\in J} = Rang(P) = dim\ Im(L). \qquad (2)$

D'autre part, $\qquad (\bigcap_{i\in J} h_i) = x_0 + Ker(L) \quad$ où $\quad x_0 \in (\bigcap_{i\in J} h_i).$

Donc

$$dim\ (\textstyle\bigcap_{i\in J} h_i) \ = \ dim\ Ker(L). \tag{3}$$

(1), (2) et (3) nous donne ce qu'il faut démontrer. ∎

Chapitre 3

Arrangement de courbes dans le plan & Equivalence et Algorithme de construction

Introduction et Résumé du chapitre 3.

Jusqu'à maintenant, il y a un certain nombre d'articles traitant les arrangements du plan par des courbes au niveau de la combinatoire: Théorème de la zone, les bornes supérieures des arêtes,...(on peut trouver ces résultats dans [Edels88,2],[Edels88,4], [Clar89]). On peut aussi trouver des algorithmes incrémentaux de construction pour des arrangements des courbes dans [Edels88,4] [Dego91],...

En ce qui concerne l'équivalence entre deux arrangements, la définition générale est donnée dans [Grunb72]. Cette définition étant basée uniquement sur un isomorphisme entre les faces qui sont des éléments intrinsèques des arrangements, appliquée au cas des droites, est plus authentique que celle donnée dans[Edels87] qui exige même des conditions conventionnelles (numérotation des droites, vecteurs de positions des faces). Bien sûr que la seconde définition implique la première. On voit aussi dans ce chapitre que, sous certaines hypothèses, on construit un isomorphisme de la première définition préservant aussi les vecteurs de position.

Dans ce chapitre nous reprenons la définition de[Grunb72] et nous en développons les propriétés intéressantes. Nous insistons sur la préservation de l'ordre consécutif des sommets sur les courbes, ce qui est essentiel pour avoir un critère d'équivalence de deux arrangements simples (à remarquer que la définition de l' arrangement simple dans ce chapitre est un peu différent de celle dans le premier chapitre en ce fait qu'il n'exige pas l'intersection non vide de deux courbes).

La première partie du chapitre (section 3.1) est consacrée à formaliser les notions de base d'un arrangement du plan par des courbes simples.

La partie suivante (section 3.2) reprenant la notion d'équivalence de [Grunb72] en se basant strictement sur la relation d'adjacence des faces, développe les propriétés principales de deux arrangements simples équivalents (Théorème 3.4).

On aborde ensuite la partie fondamentale du chapitre qui examine des conditions suffisantes sur l'ordre des sommets sur les courbes pour que deux arrangements simples soient équivalents (les hypothèses (h1), (h2), (h3), (h4), (h5) et le théorème 3.5).
Pour démontrer le théorème 3.5, on développe une série de propriétés concernant des relations entre les directions de parcours sur les arêtes et les vecteurs de

position des arêtes (Lemme 3.6, propriétés 3.8, 3.9, ..., lemme 3.11).
A remarquer que dans notre situation générale, deux courbes peuvent se couper en plusieurs points, si on n'a pas de système pour distinguer les uns des autres (c'est le cas ici) on ne peut pas avoir une condition suffisante d'équivalence basée seulement sur les vecteurs de position. On en trouve un exemple dans l'annexe A 3.3 de ce chapitre.(Alors que pour les droites, ou plus généralement, pour les hyperplans, la préservation des vecteurs de position des sommets suffisent à définir un isomorphisme entre deux arrangements simples: Théorème 1.10).
Par contre, si les conditions sur l'ordre algébrique sont vérifiées, on peut construire un isomorphisme entre deux arrangements à travers lequel les vecteurs de position sont tous "préservés" (ou tous opposés). (Théorème 3.13).
Le théorème 3.14 sert à lier cette partie théorique (section 3.2) à la partie algorithmique (section 3.3).
Enfin, dans la section 3.3, supposant connus les informations sur l'ordre algébrique des sommets sur les courbes ainsi que les "vecteurs de position locaux" des sommets, on détaille un algorithme pour construire la structure arête ailée ([Prepa85], [Edels88,3]) de l' arrangement en temps $O(n^2)$, n étant le nombre de courbes.

Notations.
Soit Γ_0 une collection (infinie) de courbes de Jordan fermées ou non bornées dans le plan $\mathbb{R}^2$ avec la propriété que deux courbes arbitraires et différentes dans Γ_0 se coupent en au plus s points ($s \geq 1$).

Supposons en plus que, par un critère fixé, pour toute courbe $c \in \Gamma_0$, les deux parties connexes ouvertes délimitées par c soient nommées c^+ et c^-.

Soit $c \in \Gamma_0$. Un parcours sur c sera dit *'dans le sens positif pour c'* si c^+ se trouve à gauche du parcours et *'dans le sens négatif pour c'* si c^+ se trouve à droite.

Définition 3.1. *Soient c une courbe dans Γ_0 et $(M_i)_{i\in I}$ m points distincts situés sur c ($Card(I) = m \geq 2$). Soit $i_1, \cdots, i_k$ distincts $\in I$ ($2 \leq k \leq m$).*
On dit que le k-uplet $(M_{i_1}, \cdots, M_{i_k})$ est positivement (resp. négativement) consécutif sur c si de M_{i_1} en parcourant la courbe c dans le sens positif (resp. négatif) pour c, on rencontrera les sommets $M_{i_2}, M_{i_3} \ldots, M_{i_k}$ dans l'ordre.
Le k-uplet $(M_{i_1}, \cdots, M_{i_k})$ est dit consécutif sur c s'il est positivement ou négativement consécutif sur c.

(Quand $k = 2$ et c est fermée, (M_{i_1}, M_{i_2}) est à la fois positivement et négativement consécutif sur c)

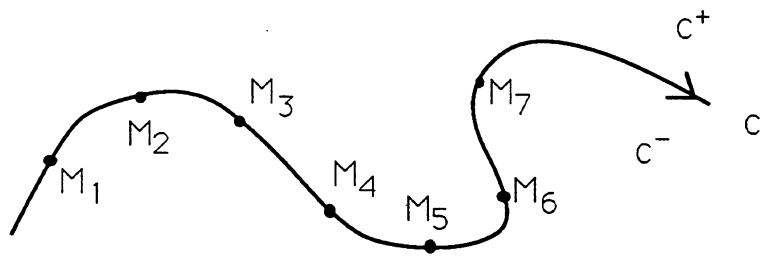


FIGURE 3.1. (M_2, M_4, M_6, M_7) *est positivement consécutif sur c*

3.1 Arrangement des courbes dans le plan.

Soit $\Gamma = (c_i)_{i\in I}$ une famille de n courbes distinctes dans Γ_0, $Card(I) = n$.

Définition 3.2. *Pour tout point $M \in \mathbb{R}^2$, on appelle son vecteur position par rapport à Γ le vecteur suivant:*

$$\overrightarrow{V}_\Gamma(M) = (V_{c_i}(M))_{i\in I} \in \{+1, 0, -1\}^n, \quad \text{où:}$$

$$\begin{array}{lll} V_{c_i}(M) = +1 & si & M \in c_i^+, \\ V_{c_i}(M) = 0 & si & M \in c_i, \\ V_{c_i}(M) = -1 & si & M \in c_i^-. \end{array}$$

L' arrangement $\mathcal{A}(\Gamma)$ est défini alors comme étant l'ensemble des plus grandes parties connexes non vides du plan $\mathbb{R}^2$ dont les points ont le même vecteur position. Chaque élément de $\mathcal{A}(\Gamma)$ sera appelé *une face* de $\mathcal{A}(\Gamma)$.

Pour toute face f de $\mathcal{A}(\Gamma)$, on définit son vecteur position $\overrightarrow{V}_\Gamma(f)$ comme étant le vecteur position $\overrightarrow{V}_\Gamma(M)$ de n'importe quel point $M \in f$.

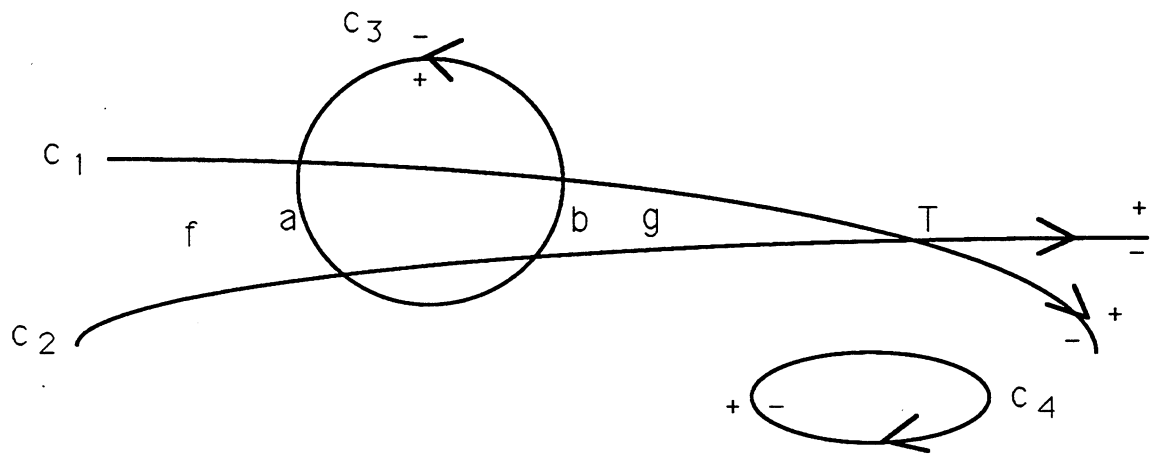


FIGURE 3.2. $\overrightarrow{V}_\Gamma(f) = \overrightarrow{V}_\Gamma(g) = (-,+,-,+)$; $\overrightarrow{V}_\Gamma(a) = \overrightarrow{V}_\Gamma(b) = (-,+,0,+)$ *et* $\overrightarrow{V}_\Gamma(T) = (0,0,-,+)$.

Remarque 3.1 *Soient f, g deux faces de $\mathcal{A}(\Gamma)$ .Alors:*

$$\overrightarrow{V}_\Gamma(f) = \overrightarrow{V}_\Gamma(g) \quad \not\Rightarrow \quad f = g \ ,$$
$$f \cap g \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \quad f = g \ ,$$

f, g ne sont pas forcément convexes .

Notation. *Soit $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$. f sera appelé*
cellule si f ne se trouve sur aucune courbe c_i , c.à.d. que $V_{c_i}(f) \neq 0$, $(i \in I)$,
arête si f se trouve sur une seule courbe c_{i_0} , c.à.d. qu'il existe $i_0 \in I$ tel que
$$V_{c_{i_0}}(f) = 0 \ \text{ et que } \ V_{c_i}(f) \neq 0, \ (i \in I \setminus \{i_0\}) \ ,$$
sommet si f se trouve sur au moins deux courbes c_{i_0} et c_{j_0} , c.à.d. qu'il existe $i_0, j_0 \in I$, $i_0 \neq j_0$ tels que $\quad V_{c_{i_0}}(f) = V_{c_{j_0}}(f) = 0$.

On notera aussi:

$\mathcal{A}_0(\Gamma)$ *l'ensemble des sommets de* $\mathcal{A}(\Gamma)$,
$\mathcal{A}_1(\Gamma)$ *l'ensemble des arêtes de* $\mathcal{A}(\Gamma)$,
$\mathcal{A}_2(\Gamma)$ *l'ensemble des cellules de* $\mathcal{A}(\Gamma)$.

Remarque 3.2 *Soit f une face de $\mathcal{A}(\Gamma)$. On a:*
f est une cellule $\Leftrightarrow$ f est un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$,
f est une arête $\Rightarrow$ il existe $M, N \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overline{f} \subset f \cup \{M, N\}$,
f est un sommet $\Leftrightarrow$ f a un seul élément (et on identifie f avec son élément).

Propriété 3.1. *La relation suivante :*

$$f, g \in \mathcal{A}(\Gamma) : \qquad f \prec g \Leftrightarrow f \subset \overline{g},$$

est une relation d'ordre sur $\mathcal{A}(\Gamma)$ et pour tout $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$, f est une cellule $\Leftrightarrow$ f est maximal.

Preuve. Démontrons que $\prec$ est une relation d'ordre. On voit facilement que pour tous $f, g, h \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $f \prec f$ et ($f \prec g$, $g \prec h$ $\Rightarrow f \prec h$).
Supposons ensuite que $f \prec g$ et $g \prec f$. On doit démontrer que $f = g$.
D'après la remarque 3.1, on n' a qu'à démontrer que $f \cap g \neq \emptyset$.
(*)Si f est une cellule, f est alors un ouvert (Remarque 3.2).
Prenons un disque ouvert $B(x, \epsilon) \subset f$. Or $f \subset \overline{g}$. Donc $x \in \overline{g}$.
Il existe alors $y \in B(x, \epsilon) \cap g \subset f \cap g$.
(**)Si f est une arête, alors il existe $M, N \in Oxy$ tels que $\overline{f} \subset f \cup \{M, N\}$.
Or $g \subset \overline{f}$. Donc $g \subset f \cup \{M, N\}$.
Si par l'absurde $g \cap f = \emptyset$, on a alors: $g \subset \{M, N\}$.
g étant connexe, on doit avoir: $g = \{M\}$ ou $g = \{N\}$.
Par conséquent, $g = \overline{g}$. Or $f \subset \overline{g}$. Donc $f \subset g$.
Ce qui donne: $f \cap g = f \neq \emptyset$. C'est absurde.
(***)Si f est un sommet, alors $\overline{f} = f$. Donc $g \subset f$. Donc $g \cap f \neq \emptyset$.
Donc $\prec$ est une relation d'ordre.
Supposons ensuite que f est une cellule. Soit $g \in \mathcal{A}(\Gamma)$ tel que $f \subset \overline{g}$. On peut raisonner comme dans le cas (*) pour voir que $g \cap f \neq \emptyset$. Donc $f = g$.
Inversement, supposons que f soit un maximum. On voit facilement que f ne peut être ni arête ni sommet. Elle est donc une cellule. ∎

Définition 3.3. *Soient $f, g \in \mathcal{A}(\Gamma)$. On dit que f est sous face de g si:*

$$f \subset \overline{g} \setminus g$$

Corollaire 3.2. *Soient f, $g \in \mathcal{A}(\Gamma)$. Alors*
1/. f est sous face de g $\Longleftrightarrow$ $f \prec g$ et $f \neq g$,
2/. f est sous face de g et g est une cellule $\Rightarrow$ f est une arête ou un sommet,
3/. f est sous face de g et g est une arête $\Rightarrow$ f est un sommet.

Preuve.
Pour 1/, supposons que $f \prec g$ et $f \neq g$. La remarque 3.1 donne: $f \cap g = \emptyset$. Or $f \subset \overline{g}$. Donc $f \subset \overline{g} \setminus g$, c'est-à-dire que f est sous face de g. Le sens inverse est évident.
L'assertion 2/ est évident car f n'étant pas maximal, il ne peut donc pas être une cellule.
Pour 3/, g étant une arête, il existe $M, N \in Oxy$ tels que: $\overline{g} \subset g \cup \{M, N\}$.
Or $f \subset \overline{g} \setminus g$. Donc $f \subset \{M, N\}$. Donc f est un sommet. ∎

Remarque 3.3 *Soient f, $g \in \mathcal{A}(\Gamma)$. Si f est sous face de g on a:*

$$V_{c_i}(f) = V_{c_i}(g) \quad ou \quad V_{c_i}(f) = 0, \quad (i \in I).$$

(En plus, d'après le corollaire 3.2, il existe $i_0 \in I$ tel que $V_{c_{i_0}}(f) = 0 \neq V_{c_{i_0}}(g)$).

Définition 3.4. *$\mathcal{A}(\Gamma)$ est appelé simple si pour tous i, j, k distincts $\in I$, on a:*
1/. $c_i \cap c_j \cap c_k = \emptyset$,
2/. c_i, c_j se coupent transversalement en tout point d'intersection,
3/.il existe un sous ensemble $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset I$, $m \geq 2$ tels que:

$$i = i_1 \ , \ j = i_m \quad et \quad c_{i_k} \cap c_{k+1} \neq \emptyset, \ (k = 1, \ldots, m).$$

Remarque 3.4 *Supposons que $\mathcal{A}(\Gamma)$ soit simple et que $n \geq 2$.*
1/. Soient a, b $\in$ $\mathcal{A}_1(\Gamma)$, $a \subset c_i$, $b \subset c_j$, i, j distincts $\in I$ tels que a, b possèdent en commun un sommet sous face M.
Alors ilexiste une face unique $f_{ab} \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$ telle que a, b soient sous faces de f_{ab}. On dit que f_{ab} est la face déterminée par a, b.
2/. Soit $f \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$. Alors l'ensemble des sous faces de f (qui a au moins un sommet et deux arêtes) forme une courbe simple.

3.2 Equivalence entre Arrangements de courbes dans le plan.

3.2.1 Arrangements équivalents. Propriétés.

Soient $\Gamma = (c_i)_{i \in I}$ et $\tilde{\Gamma} = (\tilde{c}_i)_{i \in I}$ deux familles de n courbes distinctes dans Γ_0, $Card(I) = n$.

Définition 3.5. *Toute application $H : \mathcal{A}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ est dite isomorphisme entre $\mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ si H est bijective et que:*

$$f \text{ est sous face de } g \iff H(f) \text{ est sous face de } H(g), \ \forall f, g \in \mathcal{A}(\Gamma)$$

On dit que $\mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ sont équivalents par H si H est un isomorphisme entre $\mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$.

Observation 3.3. *$\forall f \in \mathcal{A}(\Gamma)$, on a:*

$$\begin{array}{lcl} 1/.f \text{ est une cellule} & \Leftrightarrow & H(f) \text{ est une cellule,} \\ 2/.f \text{ est une arête} & \Leftrightarrow & H(f) \text{ est une arête,} \\ 3/.f \text{ est un sommet} & \Leftrightarrow & H(f) \text{ est un sommet.} \end{array}$$

Preuve. Par symétrie entre $\mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$, on n'a qu'à démontrer un sens dans chacune de ces équivalences.
Pour 1/, supposons que f n'est pas une cellule. La propriété 3.1 donne une face $g \in \mathcal{A}(\Gamma)$ telle que: f soit sous face de g.
Donc $H(f)$ est sous face de $H(g)$. Donc $H(f)$ n'est pas maximal. Il n'est donc pas une cellule (propriété 3.1).
Pour 2/, supposons que f est une arête. Si par l'absurde $H(f)$ n'est pas une arête. $H(f)$ ne pouvant pas être une cellule (sinon, d'après 1/, f serait une cellule), il doit être alors un sommet.

Soit $\tilde{g} \in \mathcal{A}_1(\tilde{\Gamma})$ tel que $H(f)$ soit sous face de $\tilde{g}$. Alors $H(f)$ est sous face de $\tilde{g}$.
Donc $H^{-1}(H(f))$ est sous face de $H^{-1}(\tilde{g})$.
C'est-à-dire que f est sous face de $H^{-1}(\tilde{g})$.
f étant une arête, d'après le corollaire 3.2 , $H^{-1}(\tilde{g})$ serait une cellule.
Par conséquent (grâce à 1/) $\tilde{g}$ est une cellule . C'est absurde car $\tilde{g}$ est une arête.
L'assertion 3/ est un corollaire de 1/ et 2/. ∎

Théorème 3.4. *Supposons que $\mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ soient simples et qu'ils soient équivalents par un isomorphisme H. Alors:*
1/. Il existe une permutation $\sigma : I \longrightarrow I$ telle que pour tout $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$ et pour tout $i \in I$, on ait:

$$f \subset c_i \iff H(f) \subset \tilde{c}_{\sigma(i)} ,$$

2/. $$Card(c_i \cap c_j) = Card(\tilde{c}_{\sigma(i)} \cap \tilde{c}_{\sigma(j)}), \ (i, j \text{ distincts} \in I),$$

3/. $$c_i \text{ est non bornée} \iff \tilde{c}_i \text{ est non bornée}, \ (i \in I),$$

4/. Pour tout $i \in I$, soient $M_1, \ldots, M_k$ tous les sommets situés sur c_i. Supposons que $k \geq 2$, on a: $(M_1, \ldots, M_k)$ est consécutif sur $c_i \Leftrightarrow (H(M_1), \ldots, H(M_k))$ est consécutif sur $\tilde{c}_{\sigma(i)}$.

Preuve. Fixons un $i \in I$. Soient a, b deux arêtes de $\mathcal{A}(\Gamma)$ qui se trouvent sur la courbe c_i. D'après la propriété 3.3, $H(a)$ et $H(b)$ sont des arêtes de $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$. Elles se trouvent alors sur des courbes $\tilde{c}_{j_a}$ et $\tilde{c}_{j_b}$. On va démontrer que $j_a = j_b$.

On peut toujours supposer que a et b sont deux arêtes consécutives sur la courbe c_i. Elles partagent alors un sommet commun M. La propriété 3.3 dit que $H(M)$ est un sommet de $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$. En plus, H étant un isomorphisme, $H(M)$ est un sommet commun de $H(a)$ et $H(b)$.

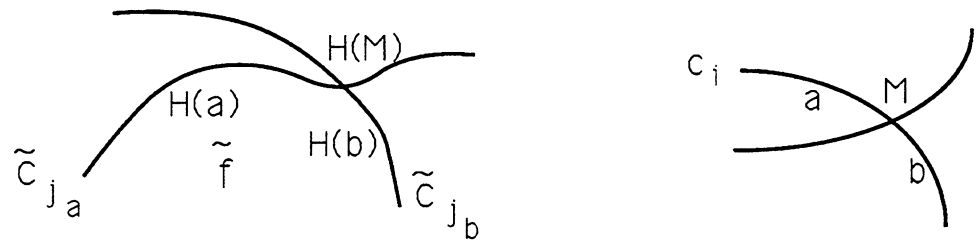


FIGURE 3.3.

Si par l'absurde $H(a)$ et $H(b)$ ne se trouvent pas sur une même courbe, $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ étant simple, elles sont adjacentes à une même cellule $\tilde{f}$ (Remarque 3.4). H étant un isomorphisme, a et b sont alors sous faces de $H^{-1}(\tilde{f})$. Or $\mathcal{A}(\Gamma)$ est simple, les deux arêtes consécutives sur une même courbe ne peuvent être adjacentes à une même cellule, ce qui est absurde. Donc $j_a = j_b$.
Par symétrie, si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont deux arêtes de $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ qui se trouvent sur une même courbe $\tilde{c}_j$, alors $H^{-1}(a)$ et $H^{-1}(b)$ se trouvent aussi sur une même courbe c_i.

D'où l'application σ suivante est bien définie, bijective et vérifie 1/ :

$$\sigma : I \longrightarrow I, \quad i \mapsto \sigma(i) = j_a,$$

où a est une arête quelconque sur la courbe c_i et $H(a) \subset \tilde{c}_{j_a}$.

L'assertion 2/ est un corollaire direct de l'assertion 1/ et de la propriété 3.3.

L'assertion 3/ est aussi un corollaire de 1/ et de la propriété 3.3 avec la remarque suivante: ayant le même nombre de sommets, la courbe non bornée possède une arête de plus que la courbe bornée.

Pour démontrer 4/, soient $M_1, \ldots, M_k$ tous les sommets qui se trouvent sur une courbe c_i. Supposons que $k \geq 3$ et que $(M_1, \ldots, M_k)$ est positivement consécutif (On procède de façon analogue si $(M_1, \ldots, M_k)$ est négativement consécutif).

Alors les arcs suivants sur c_i:

a_1 joignant M_1 à M_2 dans le sens positif pour c_i,
a_2 joignant M_2 à M_3 dans le sens positif pour c_i ,
...
a_{k-1} joignant M_{k-1} à M_k dans le sens positif pour c_i

sont des arêtes de $\mathcal{A}(\Gamma)$ sur c_i.
1/ nous donne que $H(a_1)$ (délimitée par $H(M_1)$, $H(M_2)$), $H(a_2)$ (délimitée par $H(M_2)$, $H(M_3)$), ... , $H(a_{k-1})$ (délimitée par $H(M_{k-1})$, $H(M_k)$) sont des arêtes de sur $\tilde{c}_{\sigma(i)}$. Donc $(H(M_1), \ldots, H(M_k))$ est consécutif sur $\tilde{c}_{\sigma(i)}$. ∎

3.2.2 Existence d'un isomorphisme entre deux arrangements ayant le même ordre des sommets sur les courbes.

Citons les hypothèses suivantes qui seront nécessaires tout au long de cette sous section 3.2.2:
Hypothèses:

(h1) $\mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ soient simples et $Card(I) = n \geq 3$;

(h2) Il existe une bijection $H_0 : \mathcal{A}_0(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\tilde{\Gamma})$ vérifiant (h2.1) et (h2.2):

(h2.1) $M \in c_i \Longleftrightarrow H_0(M) \in \tilde{c}_i, \quad (M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)\ ), \ (i \in I)$;
(on en déduit que $Card(c_i \cap c_j) = Card(\tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j)$, $\forall i, j$ distincts $\in I$)

(h2.2) Pour tout $i \in I$, soient $M_1, \ldots, M_k$ tous les sommets situés sur c_i (par conséquent, $H_0(M_1), \ldots, H_0(M_k)$ sont aussi, d'après (h2.1), tous les sommets de $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ situés sur $\tilde{c}_i$). Si $k \geq 2$, on a:
$(M_1, \ldots, M_k)$ est positivement consécutif sur c_i si et seulement si
$(H_0(M_1), \ldots, H_0(M_k))$ est positivement consécutif sur $\tilde{c}_i$;

(h3) Pour tous $i, j \in I$, si $c_i \cap c_j = \emptyset$, on a:

$$c_i \subset c_j^+ \text{ (resp. } \subset c_j^-) \iff \tilde{c}_i \subset \tilde{c}_j^+ \text{ (resp. } \subset \tilde{c}_j^-).$$

Notation.
Soient $M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$, $a \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$, $f \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$ tels que
M soit sous face de a et a soit sous face de f.
Soit $c_i \in \Gamma$ tel que $a \subset c_i$. Prenons un point $S \in a$. On note:

$Dir_{c_i}a(M \to S) = +1$ si le parcours sur a, de M à S, est positif pour c_i ; et $= -1$ si ce parcours est négatif pour c_i;
$Dir_f a(M \to S) = +1$ si le parcours sur a, de M à S, est positif pour la cellule f (c.à.d. que f se trouve à gauche du parcours); et $= -1$ si ce parcours est négatif pour f.

Soient $c_i, c_j \in \Gamma$ tels que $c_i \cap c_j = \emptyset$. On note:
$Posi(c_i / c_j) = +1$ si $c_i \subset c_j^+$; et $= -1$ si $c_i \subset c_j^-$.

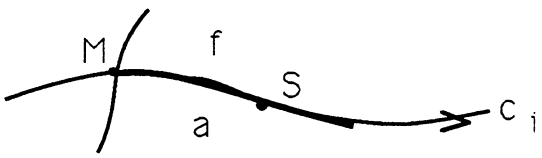


FIGURE 3.4.

Théorème 3.5. *Supposons qu'on a les hypothèses (h1), (h2) et (h3). Alors il existe un unique isomorphisme*

$$H : \mathcal{A}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$$

vérifiant les propriétés suivantes:

1/. $H(M) = H_0(M)$, $(M \in \mathcal{A}_0(\Gamma))$;

2/. Pour tout $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$, pour tout $i \in I$, $f \subset c_i \iff H(f) \subset \tilde{c}_i$;

3/. Soient $a \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$, $M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$ tels que M soit sous face de a.
Soit $c_i \in \Gamma$ tel que $a \subset c_i$. Pour tous points $S \in a$, $\tilde{S} \in H(a)$, on a:
$$Dir_{c_i}a(M \to S) = Dir_{\tilde{c}_i}H(a)(H_0(M) \to \tilde{S});$$

Afin de démontrer le théorème 3.5, on fait des lemmes et des observations suivants (lemmes et observations de 3.6 à 3.11):

Lemme 3.6. *Supposons qu'on a (h1) et (h2). Alors pour tout $i \in I$,*

c_i est non bornée si et seulement si $\tilde{c}_i$ est non bornée.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe $i \in I$ tel que c_i soit bornée et que

$\tilde{c}_i$ soit non bornée.
Soient $M_1, \ldots, M_k$ tous les sommets de $\mathcal{A}(\Gamma)$ situés sur c_i. c_i étant bornée et $\mathcal{A}(\Gamma)$ étant simple, on doit avoir: $k \geq 2$.
Supposons que $(M_1, \ldots, M_k)$ est positivement consécutif sur c_i. L'hypothèse (h2) dit que $(H_0(M_1), \ldots, H_0(M_k))$ est positivement consécutif sur $\tilde{c}_i$.
Puisque c_i est bornée, $(M_k, M_1 \ldots, M_{k-1})$ reste positivement consécutif sur c_i.
Or, $\tilde{c}_i$ étant non bornée, $(H_0(M_k), H_0(M_1) \ldots, H_0(M_{k-1}))$ n'est plus positivement consécutif sur $\tilde{c}_i$, ce qui contredit l'hypothèse (h2). ∎

Notation. *Supposons que $\mathcal{A}(\Gamma)$ soit simple et que $n \geq 2$.*
Soit $c_i \in \Gamma$ tel qu'il existe deux sommets distincts M, $P \in c_i$.
Soit α un arc sur c_i, α délimité par M, P. On note:

$$nbr_inter(c_i, c_j, \alpha)$$

le nombre de points d'intersection de c_i avec c_j qui se trouvent dans l'arc α, $(j \in I \setminus \{i\})$.

Lemme 3.7. *Supposons qu'on a (h1) et (h2). Alors il existe une bijection unique*

$$H_1 : \mathcal{A}_1(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_1(\tilde{\Gamma})$$

vérifiant les propriétés suivantes:

1/. Pour tout $a \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$ et pour tout $i \in I$, $\quad a \subset c_i \Longleftrightarrow H_1(a) \subset \tilde{c}_i$;

2/. Pour tout $a \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$ et pour tout $M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$,
M est sous face de $a \iff H_0(M)$ est sous face de $H_1(a)$;

3/. Soient $a \in \mathcal{A}_1(\Gamma), M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$, $i \in I$ tels que M soit sous face de a et que $a \subset c_i$. Soient S un point $\in a$, $\tilde{S}$ un point $\in H_1(a)$. On a:

$$Dir_{c_i} a(M \to S) \;=\; Dir_{\tilde{c}_i} H_1(a)(H_0(M) \to \tilde{S});$$

4/. Soit $c_i \in \Gamma$ tel qu'il existe deux sommets distincts M, P situés sur c_i. Soit $a \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$, $a \subset c_i$ telle que M soit sous face de a. Alors les deux proriétés suivantes sont équivalente:
- *Il existe un arc α sur c_i, délimité par M, P tel que $a \subset \alpha$*
- *Il existe un arc $\tilde{\alpha}$ sur $\tilde{c}_i$, délimité par $H_0(M), H_0(P)$ tel que $H_1(a) \subset \tilde{\alpha}$.*

Et s'il en est ainsi, $\quad nbr_inter(c_i, c_j, \alpha) = nbr_inter(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j, \tilde{\alpha})$, $\forall j \in I \setminus \{i\}$.

(En fait, de 1/, 2/, 3/ on peut tout-à-fait déduire 4/)

Preuve. Pour tout $i \in I$, soit k_i le nombre de tous les sommets de $\mathcal{A}(\Gamma)$ situés sur c_i ($k_i \geq 1$ si c_i est non bornée et $k_i \geq 2$ si c_i est bornée).

Notons $M_{i,1}, \ldots, M_{i,k_i}$ tous les sommets situés sur c_i tels que:
$(M_{i,1}, \ldots, M_{i,k_i})$ soit positivement consécutif sur c_i si $k_i \geq 2$.
Les hypothèses (h1), (h2) donnent que $H_0(M_{i,1}), \ldots, H_0(M_{i,k_i})$ sont tous les sommets situés sur $\tilde{c}_i$ et que:
$(H_0(M_{i,1}), \ldots, H_0(M_{i,k_i}))$ est positivement consécutif sur $\tilde{c}_i$ si $k_i \geq 2$.

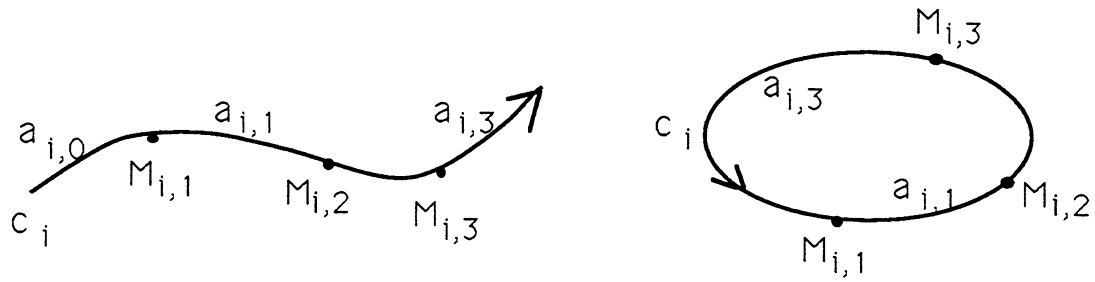


FIGURE 3.5.

Si $k_i \geq 2$, désignons
$a_{i,1}$ l'arc sur c_i, joignant $M_{i,1}$ à $M_{i,2}$ dans le sens positif pour c_i,
$\tilde{a}_{i,1}$ l'arc sur $\tilde{c}_i$, joignant $H_0(M_{i,1})$ à $H_0(M_{i,2})$ dans le sens positif pour $\tilde{c}_i$,
...
...
a_{i,k_i-1} l'arc sur c_i, joignant M_{i,k_i-1} à M_{i,k_i} dans le sens positif pour c_i,
$\tilde{a}_{i,k_i-1}$ l'arc sur $\tilde{c}_i$, joignant $H_0(M_{i,k_i-1})$ à $H_0(M_{i,k_i})$ dans le sens positif pour $\tilde{c}_i$.

Ensuite, si c_i est non bornée, c.à.d que $\tilde{c}_i$ est non bornée (lemme 3.6), désignons
$a_{i,0}$ l'arc sur c_i, joignant $-\infty$ à $M_{i,1}$ dans le sens positif pour c_i,
$\tilde{a}_{i,0}$ l'arc sur $\tilde{c}_i$, joignant $-\infty$ à $H_0(M_{i,1})$ dans le sens positif pour $\tilde{c}_i$,

a_{i,k_i} l'arc sur c_i, joignant M_{i,k_i} à $+\infty$ dans le sens positif pour c_i,
$\tilde{a}_{i,k_i}$ l'arc sur $\tilde{c}_i$, joignant $H_0(M_{i,k_i})$ à $+\infty$ dans le sens positif pour $\tilde{c}_i$.

Enfin, si c_i est bornée, c.à.d que $\tilde{c}_i$ est bornée, désignons
a_{i,k_i} l'arc sur c_i, joignant M_{i,k_i} à $M_{i,1}$ dans le sens positif pour c_i,
$\tilde{a}_{i,k_i}$ l'arc sur $\tilde{c}_i$, joignant $H_0(M_{i,k_i})$ à $H_0(M_{i,1})$ dans le sens positif pour $\tilde{c}_i$.

On a alors:

$$\mathcal{A}_1(\Gamma) = \{a_{i,j},\ i \in I \ \text{ et } \ j \in K_i\},$$
$$\mathcal{A}_1(\tilde{\Gamma}) = \{\tilde{a}_{i,j},\ i \in I \ \text{ et } \ j \in K_i\},$$

où $K_i = \{0, \ldots, k_i\}$ si c_i est non bornée et $K_i = \{1, \ldots, k_i\}$ si c_i est bornée.
En plus, on voit facilement que pour tout $a_{ij} \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$, la seule arête de $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ qui vérifie les conditions 1/, 2/, 3/ est $\tilde{a}_{ij}$.

Posons donc: $\qquad H_1(a_{ij}) = \tilde{a}_{ij},\ (i \in I), (j \in K_i).$
On voit que H_1 est la seule bijection vérifiant les propriétés 1/, 2/, 3/ et 4/.
∎

Remarque 3.5 *Supposons que $\mathcal{A}(\Gamma)$ soit simple et que $n \geq 2$. Soient $M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$, $a \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$, $f \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$ et $c_i \in \Gamma$ tels que*

M soit sous face de a, a soit sous face de f et $a \subset c_i$.

Soit S un point $\in a$. Alors:

1/. Si $f \subset c_i^+$, on a l'équivalence:
Le parcours sur a, de M à S, est positif (resp. négatif) pour c_i si et seulement si ce parcours est positif (resp. négatif) pour f,
c.à.d. que: $Dir_{c_i} a(M \to S) = Dir_f a(M \to S)$,

2/. Si $f \subset c_i^-$, on a l'équivalence:
Le parcours sur a, de M à S, est positif (resp. négatif) pour c_i si et seulement si ce parcours est négatif (resp. positif) pour f,
c.à.d. que: $Dir_{c_i} a(M \to S) = - Dir_f a(M \to S)$.

FIGURE 3.6.

Propriété 3.8. *Supposons que $\mathcal{A}(\Gamma)$ soit simple et que $n \geq 2$.*
Soit b une arête bornée, délimitée par deux sommets M, N et qui se trouve sur une courbe c_j.
Soit a une arête qui se trouve sur une courbe c_i telle que M soit sous face de a et que $i \neq j$.
Soit c une arête qui se trouve sur une courbe c_k telle que N soit sous face de c et que $k \neq j$.
Soit f la cellule déterminée par a, b (c.à.d. que a, b sont sous faces de f)

Prenons deux points $S \in a$, $T \in c$. On a alors:
c est sous face de f si et seulement si

$$Dir_{c_k} c(N \to T) = V_{c_i}(f) \cdot V_{c_k}(f) \cdot Dir_{c_i} a(S \to M) \tag{3.1}$$

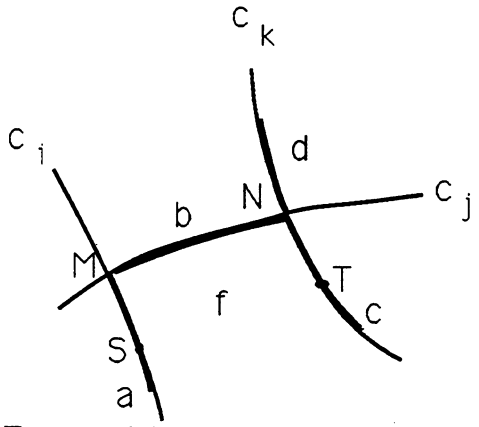


FIGURE 3.7.

Preuve. Supposons d'abord que c est sous face de f. Démontrons (3.1).
a, b, c étant sous faces de f, on a:

$$Dir_f a(S \to M) = Dir_f b(M \to N) = Dir_f c(N \to T) \tag{1}$$

Supposons par exemple que $f \subset c_i^+ \cap c_k^-$. (Les autres cas: $f \subset c_i^+ \cap c_k^+$, $f \subset c_i^- \cap c_k^+$, $f \subset c_i^- \cap c_k^-$ se traitent de la même manière).
D'après la remarque 3.5, on a:

$$Dir_{c_i} a(S \to M) = Dir_f a(S \to M) \quad \text{et}$$
$$Dir_{c_k} c(N \to T) = -Dir_f c(N \to T).$$

Donc, avec (1), on a:

$$Dir_{c_k} c(N \to T) = -Dir_{c_i} a(S \to M).$$

Donc (3.1) est vérifié car $V_{c_i}(f) = 1$ et $V_{c_k}(f) = -1$.

Inversement, supposons que l'arête c vérifie (3.1).
Soit d l'arête sur c_k telle que N soit sous face de d et que $d \neq c$.
Prenons un point $W \in d$. On a:

$$\begin{aligned} Dir_{c_k} d(N \to W) &= -Dir_{c_k} c(N \to T) \neq \\ &\neq V_{c_i}(f) \cdot V_{c_k}(f) \cdot Dir_{c_i} a(S \to M). \end{aligned}$$

Donc, d'après le sens '$\Rightarrow$' qui vient d'être démontré, d ne peut être sous face de f. Par conséquent c doit être sous face de f. ∎

Propriété 3.9. *Supposons que $\mathcal{A}(\Gamma)$ soit simple et que $n \geq 3$.*
Soit b une arête bornée, délimitée par deux sommets M, N et $b \subset c_j$.
Soient $c_i, c_k \subset \Gamma$, $i \neq k$ et $i, k \neq j$ tels que $M \in c_i \cap c_j$ et $N \in c_k \cap c_j$.
Supposons que $c_i \cap c_k \neq \emptyset$ et prenons un point $P \in c_i \cap c_k$.
Soit α un arc sur c_i, α délimité par M, P.
Soit β un arc sur c_k, β délimité par N, P
Soit $e \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$ tel que $e \subset c_i$, M soit sous face de e et que $e \subset \alpha$.
Soit $d \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$ tel que $d \subset c_k$, N soit sous face de d et que $d \subset \beta$.

On a alors:

e et d sont d'un même côté de c_j si et seulement si

(3.2) $nbr_inter(c_i, c_j, \alpha)$ + $nbr_inter(c_k, c_j, \beta)$ *est un nombre pair (0 inclu)*

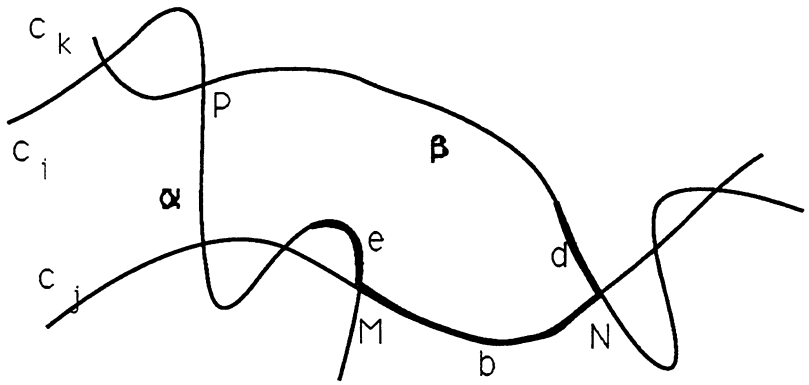


FIGURE 3.8.

Preuve. Evidente avec la remarque suivante:
Le point P et l'arête e sont d'un même côté de c_j $\iff$ $nbr_inter(c_i, c_j, \alpha)$ est pair,
Le point P et l'arête d sont d'un même côté de c_j $\iff$ $nbr_inter(c_k, c_j, \beta)$ est pair. ∎

Lemme 3.10. *Supposons qu'on a les hypothèses (h1), (h2) et (h3).*
Soient a, $b \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$, $a \subset c_i$, $b \subset c_j$, i, j distincts $\in I$ tels que a, b possèdent en commun un sommet sous face M
(c.à.d. que $H_1(a)$ et $H_1(b)$ possèdent en commun le sommet sous face $H_0(M)$)

Soit f la cellule déterminée par a, b (a, b sont sous face de f).
Soit $\tilde{f}$ la cellule déterminée par $H_1(a)$, $H_1(b)$ ($H_1(a)$, $H_1(b)$ sont sous face de $\tilde{f}$).

Soit $c \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$. On a:

$$c \text{ est sous face de } f \iff H_1(c) \text{ est sous face de } \tilde{f}.$$

Preuve. Par symétrie entre $\mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$, on va démontrer seulement le sens '$\Rightarrow$'.
Supposons donc que c soit une sous face de f, $c \neq a$ et $c \neq b$.
Les sous faces de f formant une courbe simple, on peut toujours supposer que a, b et c sont trois arêtes consécutives sur cette courbe.
Supposons plus précisément que a, b et c sont disposés comme dans la propriété 3.8 (voir figure 3.8):
$a \subset c_i$, $b \subset c_j$, $c \subset c_k$; b est délimité par M, N; M est sous face de a et N est sous face de c.
$H_1(a)$, $H_1(b)$ et $H_1(c)$ sont alors disposées comme dans la propriété 3.8:

$H_1(a) \subset \tilde{c}_i$, $H_1(b) \subset \tilde{c}_j$, $H_1(c) \subset \tilde{c}_i$; $H_1(b)$ est délimité par $H_0(M), H_0(N)$; $H_0(M)$ est sous face de $H_1(a)$ et $H_0(N)$ est sous face de $H_1(c)$.

Prenons les points $S \in a$, $T \in c$, $\tilde{S} \in H_1(a)$ et $\tilde{T} \in H_1(c)$.
Le lemme 3.7 donne:

$$\begin{aligned} Dir_{\tilde{c}_k} H_1(c)(H_0(N) \to \tilde{T}) &= Dir_{c_k} c(N \to T), \\ Dir_{\tilde{c}_i} H_1(a)(\tilde{S} \to H_0(M)) &= Dir_{c_i} a(S \to M). \end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part, c étant sous face de f, on a (3.1) pour a, c et f. (2)

Si $k = i$, il est évident de (1), (2) que $H_1(a)$, $H_1(c)$ et $\tilde{f}$ vérifient (3.1). Donc $H_1(c)$ est sous face de $\tilde{f}$.

Si $k \neq i$ et $c_i \cap c_k = \emptyset$, d'après l'hypothèse (h3), on a:

$$\begin{aligned} V_{c_k}(f) &= posi(c_i/c_k) = posi(\tilde{c}_i/\tilde{c}_k) = V_{\tilde{c}_k}(\tilde{f}), \\ V_{c_i}(f) &= posi(c_k/c_i) = posi(\tilde{c}_k/\tilde{c}_i) = V_{\tilde{c}_i}(\tilde{f}). \end{aligned} \tag{3}$$

(1), (2), (3) nous donnent (3.1) pour $H_1(a)$, $H_1(c)$ et $\tilde{f}$. Donc $H_1(c)$ est sous face de $\tilde{f}$.
Enfin, examinons le cas où $c_i \cap c_k \neq \emptyset$.

Prenons un sommet $P \in c_i \cap c_k$.
Soit α un arc sur c_i, α délimité par M, P.
Soit β un arc sur c_k, β délimité par N, P.
Soit $e \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$ tel que $e \subset c_i$, M soit sous face de e et que $e \subset \alpha$.
Soit $d \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$ tel que $e \subset c_k$, N soit sous face de d et que $d \subset \beta$.

D'après 4/ du lemme 3.7,
Il existe un arc $\tilde{\alpha}$ sur $\tilde{c}_i$, $\tilde{\alpha}$ délimité par $H_0(M)$, $H_0(P)$, tel que $H_1(e) \subset \tilde{\alpha}$,
Il existe un arc $\tilde{\beta}$ sur $\tilde{c}_k$, $\tilde{\beta}$ délimité par $H_0(N)$, $H_0(P)$, tel que $H_1(d) \subset \tilde{\beta}$.

Premier cas: $(e \neq a)$ et $(d \neq c)$.
a, c étant d'un même côté de c_k, il en est ainsi pour e et d.
D'où la propriété 3.9 donne:

$$nbr_inter(c_i, c_j, \alpha) \ + \ nbr_inter(c_k, c_j, \beta) \ \text{ est pair.}$$

Donc (d'après 4/ du lemme 3.7)

$$nbr_inter(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j, \tilde{\alpha}) \ + \ nbr_inter(\tilde{c}_k, \tilde{c}_j, \tilde{\beta}) \ \text{ est pair,}$$

ce qui, d'après la propriété 3.9, signifie que $H_1(e)$ et $H_1(d)$ sont d'un même côté de $\tilde{c}_k$. Or

$$(H_1(e) \neq H_1(a)) \text{ et } (H_1(d) \neq H_1(c)),$$

On déduit que $H_1(a)$ et $H_1(c)$ sont d'un même côté de $\tilde{c}_k$. Donc $H_1(c)$ est sous face de $\tilde{f}$.

Deuxième cas: $(e \neq a)$ et $(d = c)$.

a, c étant d'un même côté de c_k, e et d sont de deux côtés de c_k.
Donc $\quad nbr_inter(c_i, c_j, \alpha) \; + \; nbr_inter(c_k, c_j, \beta)$ est impair.
Donc $\quad nbr_inter(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j, \tilde{\alpha}) \; + \; nbr_inter(\tilde{c}_k, \tilde{c}_j, \tilde{\beta})$ est impair.
Donc $H_1(e)$ et $H_1(d)$ sont de deux côtés de $\tilde{c}_k$.
Or $\quad (H_1(e) \neq H_1(a))$ et $(H_1(d) = H_1(c))$,
On déduit que $H_1(a)$ et $H_1(c)$ sont d'un même côté de $\tilde{c}_k$. Donc $H_1(c)$ est sous face de $\tilde{f}$.

Deux autres cas, $(e = a)$ et $(d = c)$, $(e = a)$ et $(d \neq c)$, se traitent de façon analogue. ∎

Lemme 3.11. *Supposons qu'on a (h1), (h2) et (h3). Alors il existe uniquement une bijection*

$$H_2 : \mathcal{A}_2(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_2(\tilde{\Gamma})$$

vérifiant les propriétés suivantes:

1/. Pour tout $f \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$, pour tout $a \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$,
a est sous face de $f \iff H_1(a)$ est sous face de $H_2(f)$,
2/. Pour tout $f \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$, pour tout $M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$,
M est sous face de $f \iff H_0(M)$ est sous face de $H_2(f)$.
(En fait, 1/ implique 2/, $\mathcal{A}(\Gamma)$ étant simple).

Preuve. Soit $f \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$, démontrons qu'il existe une arête unique $\tilde{f} \in \mathcal{A}_2(\tilde{\Gamma})$ telle que $\forall c \in \mathcal{A}_1(\Gamma)$,

$$c \text{ est sous face de } f \iff H_1(c) \text{ est sous face de } H_2(f). \tag{1}$$

Prenons a, b deux arêtes sous faces de f telles que a, b aient en commun un sommet sous face M.
Prenons $\tilde{f}$ la cellule de $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$, déterminée par deux arêtes $H_1(a)$, $H_1(b)$.
D'apès le lemme 3.10, $\tilde{f}$ vérifie (1).
Pour l'unicité de $\tilde{f}$, soit $\tilde{f}_1$ une cellule $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ qui vérifie aussi (1). $H_1(a)$, $H_1(b)$ sont alors des sous faces de $\tilde{f}_1$. Donc $\tilde{f}_1 = \tilde{f}$.
On n'a alors que poser $H_2(f) = \tilde{f}, \quad \forall f \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$. ∎

Preuve du théorème 3.5. On pose $H : \mathcal{A}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{\Gamma})$ comme suit:

$$H(f) = \begin{cases} H_0(f) & \text{si } f \in \mathcal{A}_0(\Gamma), \\ H_1(f) & \text{si } f \in \mathcal{A}_1(\Gamma), \\ H_2(f) & \text{si } f \in \mathcal{A}_2(\Gamma), \end{cases}$$

(voir H_1 dans le lemme 3.7 et H_2 dans le lemme 3.11).
D'après les lemmes 3.7 et 3.11, H est l'unique isomorphisme qui vérifie les conditions 1/, 2/ ,3/ du théorème 3.5. ∎

Enfin, avec l'isomorphisme H dans le theorème 3.5, les vecteurs de position des faces seront soit toutes préservés soit toutes changés de signe. Concrètement on

le voit dans le théorème 3.13. Faisons d'abord l'observation suivante qui sera utile pour le théorème 3.13 ainsi que pour d'autres résultats.

Propriété 3.12. *Soient a, b deux arêtes de $\mathcal{A}(\Gamma)$ qui aient en commun un sommet sous face M et qui se trouvent sur deux courbes différentes c_i, c_j ($a \subset c_i$, $b \subset c_j$). Soient A, B deux points tels que $A \in a$, $B \in b$.*
Alors on a:

$$V_{c_j}(a) \;=\; -Dir_{c_i}a(M \to A) \cdot Dir_{c_j}b(M \to B) \cdot V_{c_i}(b).$$

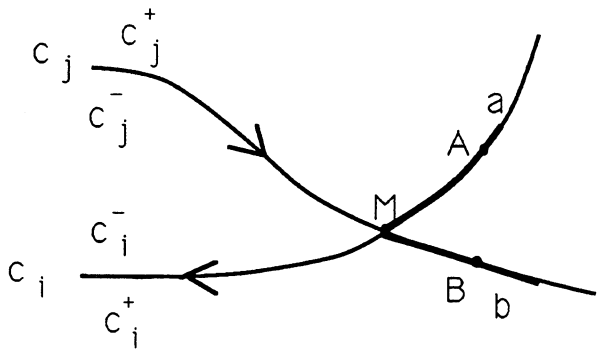


FIGURE 3.9.

Preuve. A remarquer que, au point $M \in c_i \cap c_j$, si c_i passe de c_j^+ à c_j^-, alors c_j passe de c_i^- à c_i^+, et vice versa.
Supposons, pour fixer les idées, que c_i passe de de c_j^+ à c_j^-.
Si $A \in c_j^+$ et $B \in c_i^+$ (les autres cas: $A \in c_j^+$ et $B \in c_i^-$; $A \in c_j^-$ et $B \in c_i^+$; $A \in c_j^-$ et $B \in c_i^-$ se traitent de façon analogue), on a:

$$V_{c_j}(a) = +1 \;\;,\;\; V_{c_i}(b) = +1;$$
$$\text{et}$$
$$Dir_{c_i}a(M \to A) = -1 \;\;,\;\; Dir_{c_j}b(M \to B) = +1.$$

Donc

$$V_{c_j}(a) \;=\; -Dir_{c_i}a(M \to A) \cdot Dir_{c_j}b(M \to B) \cdot V_{c_i}(b). \qquad \blacksquare$$

Théorème 3.13. *Supposons qu'on a les hypothèses (h1), (h2), (h3).*
Supposons en plus l'hypothèse (h4) suivante:

$$(h4) \qquad \begin{array}{c} (\textit{Il existe } c_i, c_j \in \Gamma,\;\; c_i \cap c_j = \emptyset) \\ \textit{ou} \\ (\textit{Il existe } M \in \mathcal{A}_0(\Gamma) \;\; \textit{et } i_0 \in I,\;\; V_{c_{i_0}}(M) = V_{\tilde{c}_{i_0}}(H_0(M)) \neq 0). \end{array}$$

Alors

$$\overrightarrow{V}_\Gamma(f) \;=\; \overrightarrow{V}_{\tilde{\Gamma}}(H(f)), \;\; (f \in \mathcal{A}(\Gamma)\;).$$

La démonstration du théorème 3.13 est longue. On peut la trouver dans l'annexe du chapitre 3.

Dans la section 3.3, on va travailler avec les hypothèses (h1), (h2) et (h5) comme dans l'observation suivante:

Théorème 3.14. *Supposons qu'on a les hypothèses (h1), (h2). Supposons en plus que*
(h5) pour toute arête bornée a délimitée par deux sommets M, N, on ait:

$$V_{c_j}(M) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)),$$

où c_j est la courbe qui passe par N et qui ne contienne pas a.

Alors on a: $$V_{c_j}(M) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)), \quad (M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)\ ),\ (j \in I).$$

Par conséquent, on a (h1), (h2), (h3) et (h4) (voir (h4) dans le théorème 3.13).

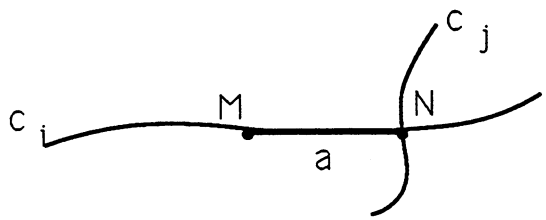


FIGURE 3.10.

Preuve. Faisons la preuve en démontrant trois étapes suivantes:
1/. Soient c_i, c_j distinctes $\in \Gamma$. S'il existe un sommet $M \in c_i$ tel que:

$$V_{c_j}(M) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)) \neq 0,$$

alors on a:

$$V_{c_j}(M') = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M')), \quad (M' \in c_i);$$

2/. Soient c_i, c_j distinctes $\in \Gamma$ telles que $c_i \cap c_j \neq \emptyset$, on a:

$$V_{c_j}(M) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)), \quad \text{pour tout sommet } M \in c_i;$$

3/. Soient c_i, c_j distinctes $\in \Gamma$ telles que $c_i \cap c_j = \emptyset$, on a:

$$V_{c_j}(M) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)), \quad \text{pour tout sommet } M \in c_i\ .$$

Démontrons 1/.
Soient c_i, c_j distinctes $\in \Gamma$. Supposons qu'il existe sommet $M \in c_i$ tel que

$$V_{c_j}(M) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)) \neq 0.$$

Soit M' un sommet sur c_i tel que $V_{c_j}(M') \neq 0$ (sinon c'est trivial).
Soit α un arc sur c_i délimité par M, M'.
D'après le lemme 3.7 (4/), il existe un arc $\tilde{\alpha}$ sur $\tilde{c}_i$ délimité par $H_0(M)$, $H_0(M')$ tel que:

$$nbr_inter(c_i, c_j, \alpha) = nbr_inter(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j, \tilde{\alpha}).$$

Or:

$$V_{c_j}(M') = (-1)^{nbr_inter(c_i, c_j, \alpha)}\ V_{c_j}(M),$$
$$V_{\tilde{c}_j}(H_0(M')) = (-1)^{nbr_inter(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j, \tilde{\alpha})}\ V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)).$$

On en déduit

$$V_{c_j}(M') = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M')).$$

Démontrons 2/.

Soient c_i, c_j distinctes $\in \Gamma$, telles que $c_i \cap c_j \neq \emptyset$. Soit M un sommet sur c_i tel que $V_{c_j}(M) \neq 0$ (sinon c'est trivial).
Prenons $P \in c_i \cap c_j$ tel qu'il existe un arc α sur c_i qui soit délimité par M, P et qui vérifie:

$$nbr_inter(c_i, c_j, \alpha) = 0.$$

Soit a l'arête sur c_i, issue de P telle que $a \subset \alpha$. Soit N le sommet sous face de a tel que $N \neq P$. On a alors:

$$V_{c_j}(M) = V_{c_j}(N) \tag{1}$$

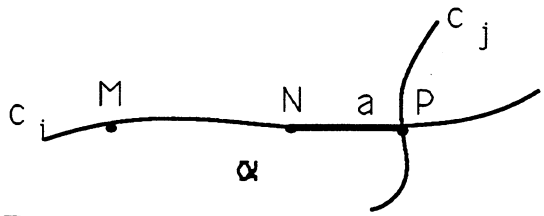


FIGURE 3.11.

Or l'hypothèse (h5) donne:

$$V_{c_j}(N) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(N)). \tag{2}$$

D'autre part, le lemme 3.7 (4/) nous donne à nouveau un arc $\tilde{\alpha}$ sur $\tilde{c}_i$ délimité par $H_0(M)$, $H_0(P)$ tel que $H_1(a) \subset \tilde{\alpha}$ et que $nbr_inter(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j, \tilde{\alpha}) = 0$. Donc, on a aussi

$$V_{\tilde{c}_j}(H_0(N)) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)). \tag{3}$$

(1), (2), (3) nous donnent ce qu'il faut démontrer:

$$V_{c_j}(M) = V_{\tilde{c}_j}(H_0(M)).$$

Démontrons 3/.
Soient c_i, c_j distinctes $\in \Gamma$, telles que $c_i \cap c_j = \emptyset$.
$\mathcal{A}(\Gamma)$ étant simple et $n \geq 3$, il existe $(k+1)$ courbes $c_{i_0}, \cdots, c_{i_k}$ distinctes $\in \Gamma$, $k \geq 2$, telles que:

$$c_i = c_{i_0} \ , \ c_j = c_{i_k} \quad \text{et qu'il existe } M_p \in c_{i_p} \cap c_{i_{p+1}}, \quad (p = 0, ..., k-1).$$

On a alors:

$$V_{c_j}(M_t) \neq 0, \ (t = 0, \ldots, k_2).$$

En utilisant 2/ pour M_{k-2} puis 1/ pour M_p, $p = 0, \ldots k-2$, on a 3/. ∎

3.3 Un algorithme pour construire la structure de donnée 'Arêtes ailées' à partir de l'ordre des sommets sur les courbes.

3.3.1 Objectif et notations.

Notre but dans cette section est de construire la structure d'arête ailée de tous les arrangements simples $\mathcal{A}(\Gamma)$, $n = Card(\Gamma) \geq 3$ (c.à.d. l'hypothèse (h1)) qui ont les mêmes informations sur:
a/. l'ordre consécutif des sommets sur les courbes (c.à.d. l'hypothèse (h2));

b/. les positions relatives des sommets par rapport aux courbes qui passent par leurs voisins (hypothèse (h5)).

Autrement dit, on a les informations (info1), (info2), (info3), (info4) suivantes:

Informations: en tout sommet M on connaît:

(info1) c_{i_M}, c_{j_M} : deux courbes distinctes $\in \Gamma$ telles que $M \in c_{i_M} \cap c_{j_M}$;
(info2) $Suiv(M, c_i)$: le sommet voisin de M sur c_i, dans le sens positif de c_i, où $c_i = c_{i_M}$, c_{j_M};
(info3) $Prec(M, c_i)$: le sommet voisin de M sur c_i, dans le sens négatif de c_i, où $c_i = c_{i_M}$, c_{j_M};
(info4) $V_{c_i}(Suiv(M, c_j))$, $V_{c_i}(Prec(M, c_j))$, où $(c_i, c_j) = (c_{i_M}, c_{j_M})$ et $(c_i, c_j) = (c_{j_M}, c_{i_M})$.

Notations.
Soit M un sommet de $\mathcal{A}(\Gamma)$. Faisons aussi les notations suivantes:
$e(M, c_i, +)$: l'arête sur c_i, issue de M (c.à.d. que M est sous face de cette arête) et qui va dans le sens positif pour c_i, où $c_i = c_{i_M}$, c_{j_M};
$e(M, c_i, -)$: l'arête sur c_i, issue de M et qui va dans le sens négatif pour c_i, où $c_i = c_{i_M}$, c_{j_M}.

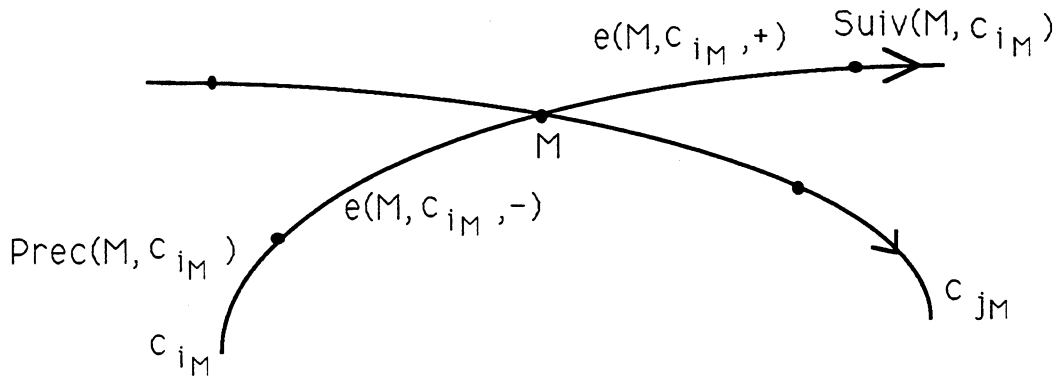


FIGURE 3.12.

Remarque 3.6
a/. Quand M est le premier sommet d'une courbe non bornée c_j, il n'y a pas $Prec(M, c_j)$ et donc il n'y a pas $V_{c_i}(Prec(M, c_j))$;
b/. De même si M est le dernier sommet d'une courbe non bornée c_j, il n'y a pas $Suiv(M, c_j)$ et donc il n'y a pas $V_{c_i}(Suiv(M, c_j))$;
c/. Enfin, si une courbe c_j est fermée et qu'il y a seulement deux sommets M, N de $\mathcal{A}(\Gamma)$ situés sur c_j. Alors $Suiv(M, c_j) = Prec(M, c_j) = N$. Attention: deux arêtes $e(M, c_j, +)$ et $e(M, c_j, -)$ sont quand même distinctes.

Avant de passer à la formulation en langage pseudo Pascal du problème, faisons l'observation suivante:

Propriété 3.15. *Supposons que $\mathcal{A}(\Gamma)$ soit simple et que $n \geq 3$.*

Supposons en plus qu'on ait les informations (info1), (info2), (info3), (info4) en tout sommet M.
Alors à tout sommet M, on peut calculer en temps constant (qui est proportionnel à s mais qui ne dépend pas de n) les positions suivantes:

$$V_{c_i}(e(M, c_j, +)),\ V_{c_i}(e(M, c_j, -)), \quad \text{où } (i,j) = (i_M, j_M),\ (j_M, i_M).$$

Preuve. A partir de M, on parcourt les sommets sur une des deux courbes c_{i_M}, c_{j_M}, (éventuellement toutes les deux), dans un sens positif ou négatif pour la courbe parcourue, (éventuellement tous les deux sens), on arrivera ainsi au premier sommet N qui n'appartienne qu' à une de ces deux courbes (ce fait est assuré par le fait que $\mathcal{A}(\Gamma)$ est simple et que $n \geq 3$). Le coût de cette recherche est proportionnel à s et est donc constant par rapport à n.

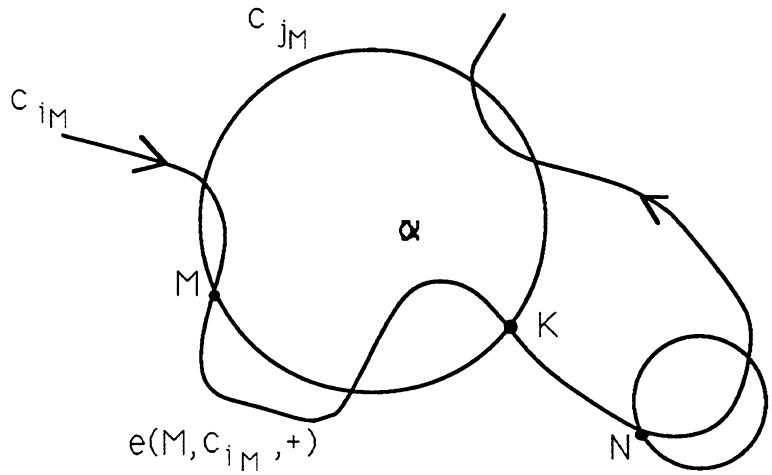


FIGURE 3.13. *α est l'arc délimité par M, N*

Supposons, pour fixer les idées, que sur c_{i_M} et dans le sens positif pour c_{i_M} on arrive à un tel sommet N.
Pendant ce parcours on compte aussi le nombre k des intersections entre c_{i_M} et c_{i_N} (M exclut) avant d'arriver à N (k peut être égal à 0).
Soit $K = Prec(N, c_{i_M})$ (K est donc une intersection de c_{i_M} et c_{j_M}. on peut supposer $i_K = i_M$, $j_K = j_M$.
On va démontrer que

$$V_{c_{j_M}}(e(M, c_{i_M}, +)) = (-1)^k\, V_{c_{j_K}}(Suiv(K, c_{i_K})); \tag{1}$$

$$V_{c_{i_M}}(e(M, c_{j_M}, +)) = V_{c_{j_M}}(e(M, c_{i_M}, +)); \tag{2}$$

$$V_{c_{j_M}}(e(M, c_{i_M}, -)) = -V_{c_{j_M}}(e(M, c_{i_M}, +)); \tag{3}$$

$$V_{c_{i_M}}(e(M, c_{j_M}, -)) = -V_{c_{i_M}}(e(M, c_{j_M}, +)). \tag{4}$$

En fait, (3), (4) sont évidents et (2) est grâce à la propriété 3.12. Il nous reste à

démontrer (1).
Soit α l'arc sur c_{i_M} délimité par M, N tel que le parcours sur α de M à N soit dans le sens positif pour c_{i_M}. Alors on a:

$$e(M, c_{i_M}, +) \subset \alpha \quad \text{et} \quad k = nbr_inter(c_{i_M}, c_{j_M}, \alpha).$$

Donc

$$V_{c_{j_M}}(e(M, c_{i_M}, +)) \;=\; (-1)^k\, V_{c_{j_M}}(N) = (-1)^k\, V_{c_{j_K}}(Suiv(K, c_{i_K})). \qquad \blacksquare$$

3.3.2 Formulation du problème en pseudo-Pascal.

Dans cette sous section, pour distinguer les notations mathématiques précédentes des mots en langage Pascal, ces derniers seront marqués en gras (sauf dans les commentaires).

Les informations (info1), (info2), (info3), (info4) seront stockées en mémoire de machine sous forme d'une liste des sommets **L_S**:
A chaque sommet M dans la liste, on connaît les indices i_M, j_M de deux courbes, les adresses dans la liste **L_S** de ses sommets voisins et les positions relatives de ses sommets voisins par rapport aux courbes c_{i_M} et c_{j_M}.

Notre but est alors d'aller construire une liste des arêtes ailées **L_A** et une liste des cellules **L_F** qui vérifient les conditions suivantes:
a/. A chaque cellule f dans la liste **L_F**, on connaît l'adresse d'une arête adjacente à f dans la liste **L_A**;
b/. A chaque arête a dans la liste **L_A** on connaît:
L'indice i_a de la courbe sur laquelle se trouve a;
Les adresses dans la liste **L_S** de deux sommets sous faces O et E de a tels que sur l'arête a, le parcours de O à E soit dans le sens positif pour la courbe c_{i_a} (éventuellement O ou E n'existe pas si a est une arête non bornée);
Les adresses dans la liste **L_F** de deux cellules f_G, f_D bordées par a et situées à gauche et à droite de a (c.à.d que $f_G \subset c^+_{i_a}$ et $f_D \subset c^-_{i_a}$);
Les adresses dans la liste **L_A** de deux arêtes a_G, a_D telles que O soit sous face de a_G, E soit sous face de a_D et que a_G soit à gauche , a_D soit à droite de a (c.à.d que $a_G \subset c^+_{i_a}$ et $a_D \subset c^-_{i_a}$).

Utilisons les types pointeurs suivants pour décrire les listes **L_S**, **L_A** et **L_F**:

```
Type
ptrsommet = ^sommet_info;
ptrarete = ^areteailee;
ptrface = ^face_arete;
```

où **sommet_info**, **areteailee** et **facearete** sont les types suivants:

```
Type

sommet_info = record                    { qui représente un sommet M }

  ind : array[1..2] of integer;         { ind[1] = i_M, ind[2] = j_M }
```

suiv: array [1..2] of ptrsommet; { adresse de $Suiv(M, c_{ind[i]})$, $i = 1, 2$ }
prec: array [1..2] of ptrsommet; { adresse de $Prec(M, c_{ind[i]})$, $i = 1, 2$ }
v1_prec2, v1_suiv2, v2_prec1, v2_suiv1: boolean;
{ les positions relatives: v1_prec2 = $V_{c_{i_M}}(prec(M, c_{j_M})$, ... }

e_plus: array[1..2] of ptrarete;
{ adresses dans la liste L_A des arêtes: $e(M, c_{i_M}, +), e(M, c_{j_M}, +)$ }
e_moins: array[1..2] of ptrarete;
{ adresses dans la liste L_A des arêtes: $e(M, c_{i_M}, -), e(M, c_{j_M}, -)$ }
enchainement: ptrsommet; { enchaînement de la liste **L_S** }
end;

areteailee = record { qui représente une arête a }
ind : integer; { indice de la courbe de a }
O, E: ptrsommet; { adresses de deux sommets sous faces de a }
f_G, f_D : ptrface; { adresses de deux cellules bordées par a }
a_G, a_D : ptrarete;
enchainement: ptrarete; { enchaînement de la liste **L_A** }
end;

face_arete = record { qui représente une cellule f }
e_adj: ptrarete; { adresse d'une arête sous face de f }
enchainement: ptrfce; { enchaînement de la liste **L_F** }
end;

Les listes **L_S**, **L_A** et **L_F** sont alors les variables suivantes:
Var
L_S : ptrsommet;
L_A : ptrarete;
L_F : ptrface;

On suppose donc que tout sommet M de $\mathcal{A}(\Gamma)$ ait déjà une place dans **L_S** et que tous les champs de M (c.à.d. de cette place), sauf **e_plus[1]**, **e_plus[2]**, **e_moins[1]**, **e_moins[2]**, soient déjà remplis.
En plus, si **ind[1]** est l'indice d'une courbe non bornée et que M est le premier (resp. dernier) sommet sur cette courbe, le champ **suiv[1]** (resp. **prec[1]**) est le pointeur **Nil** et le champ **V2_suiv1** (resp. **V2_prec1**) n'est pas pris en compte. De même quand **ind[2]** est l'indice d'une courbe non bornée et que M est le premier (resp. dernier) sommet sur cette courbe.
Les quatre champs **e_plus[1]**, **e_plus[2]**, **e_moins[1]**, **e_moins[2]**, jusqu' à maintenant, sont tous des pointeurs **Nil**. On les mettra à jours quand on créera des arêtes correspondentes dans la liste **L_A** (voir la procédure **creer_arete**). Leur rôle est de nous aider à vérifier en temps $O(1)$ si une arête est créée ou non et à accéder en temps $O(1)$ à cette arête (si elle est créée) dans la liste **L_A**.

Les listes **L_A** et **L_F** sont au début des pointeurs **Nil**, c.à.d. qu'elles ne contiennent aucun élément. On va les construire suivant l'algorithme dont le

résumé est le suivant:

Résumé de l'algorithme:
Etape 1/.
On parcourt les sommets de $\mathcal{A}(\Gamma)$. A chaque sommet M on examine quatre paires d'arêtes a, b qui sont issues de M et qui déterminent quatre cellules f_{ab} autour de M.
A chaque paire a, b, si la cellule f_{ab} a déjà sa place dans la liste **L_F** on passe à une autre paire. Sinon, si a ou b (ou les deux) n'est pas (ne sont pas) encore créée(s) dans la liste **L_A** on lui (leur) crée une (deux) place(s) dans cette liste; on crée ensuite pour f_{ab} une place dans la liste **L_F**.
à partir de a, b on parcourt successivement toutes les arêtes de f_{ab}: à chaque arête parcourue, on lui crée une place dans la liste **L_A** si elle n'est pas encore créée et on remplit soit le champ **f_G** soit le champ **f_D** de sa place mémoire par l'adresse de f_{ab}.

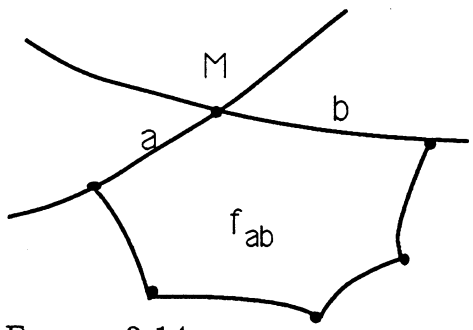


FIGURE 3.14.

Dans l'action 'créer une place' pour une arête a, on met aussi à jour les champ **ind**, **O**, **E** de cette place par l'indice de la courbe contenant a et par les adresses des deux sommets O et E de a (toujours avec la convention que sur a le sens de O à E est positif pour la courbe contenant a).
De même, dans l'action 'créer une place' pour une cellule f_{ab} déterminée par deux arêtes a, b, on met aussi à jour le champ **arete_adj** par l'adresse de a (ou de b).

Donc après cette première étape on obtient la liste **L_F** complète et la liste **L_A** avec seulement deux champs **a_G**, **a_D** ne sont pas encore mis à jour (ces deux champs de toutes les places de la liste **L_A** restent toujours des pointeurs **Nil** après cette première étape).

Etape 2/.
On parcourt la liste **L_A**. A chaque place, qui correspond à une arête a, on cherche les adresses de a_G, a_D et on met à jour les deux champs **a_G**, **a_D** de cette place par les adresses trouvées.

Description des procédures et fonctions utilisées dans l'algorithme:

Les procédures et fonctions citées ci après utiliseront souvent les variables temporaires du type suivant:

Type
arete_tmp = record { qui représente une arête a }
ind : integer; { indice de la courbe de a }
O, E: ptrsommet; { adresses de deux sommets sous faces de a }
end;

Définition 3.6. *Soit a une arête de $\mathcal{A}(\Gamma)$. Soit* **a : arete_tmp**.
On dit que la variable **a** *représente l'arête a si*
a.ind *est l'indice de la courbe de a;*
a.O, **a.E** *sont des adresses dans la liste* **L_S** *de deux sommets O et E sous face de a tels que le parcours sur a de O à E soit dans le sens positif pour la courbe de a (a est non bornée si et seulement si* **a.O** *ou* **a.E** *est le pointeur* **Nil***).*

procedure creer_arete(a: arete_tmp);
où **a** représente une arête a de $\mathcal{A}(\Gamma)$.

Signification:
Créer une place mémoire du type **aretealiee**; l'enchaîner dans la liste **L_A**; mettre à jour les champs **ind**, **O**, **E** de cette place mémoire par **a.ind**, **a.O**, **a.E**; mettre à **Nil** les champs **f_G**, **f_D**, **a_G**, **e_D** de cette place mémoire;
A chaque sommet M de a (dont l'adresse est **M= a.O** puis **M= a.E**) , identifier l'arête a à une des quatre arêtes issues de M et mettre à jour un des quatre champs **M^.eplus[1]**, **M^.emoins[1]**, **M^.eplus[2]**, **M^.emoins[2]** (celui qui corresponde à l'arête a) par l'adresse de la place mémoire de l'arête a.
(Par exemple, a est identifiée à $e(M, c_{i_M}, -)$ si **a.ind=M^.ind[1]** et **M = a.E**. Alors on met à jour le champ **M^.emoins[1]**).
Fonctionnement: voir *Signification*.
Coût: Constant (ne dépend ni de s ni de n).

function adressedansL_A(a: arete_tmp) : ptrarete;
où **a** représente une arête a de $\mathcal{A}(\Gamma)$.

Signification:
Retourner l'adresse dans la liste **L_A** de l'arête a (**adressedansL_A(a) = Nil** signifie que a n'est pas créée).
Fonctionnement:
Prendre un sommet M de a (dont l'adresse est **M= a.O** ou **M= a.E**). Identifier l'arête a à une des quatre arêtes issues de M puis retourner l'adresse indiquée par un des quatre champs **e_plus[1]**, **e_plus[2]**, **e_moins[1]**, **e_moins[2]** (celui qui corresponde à l'arête a).
Coût: Constant (ne dépend ni de s ni de n).

procédure creer_face(a: arete_tmp; var adr_f: ptrface);
où **a** représente une arête a qui soit déjà créée.

Signification:
Créer une place mémoire du type **face_arete** qui représente une cellule f ayant a comme sous face, l'enchaîner dans la liste **L_F**, mettre à jour le champ

arete_adj de cette place mémoire par **adressedansL_A(a)** et mettre à jour **adr_f** par l'adresse de cette place mémoire.
Fonctionnement: Voir *Signification*.
Coût: Constant (ne dépend ni de s ni de n).

procedure
remplirarete_parface(a: arete_tmp; adr_f: ptrface; pos: boolean);

où **a** représente une arête a qui soit déjà créée, **adr_f** est l'adresse d'une cellule f bordée par a et **pos** indique la position relative de f par rapport à a.

Signification:
Aller dans la liste **L_A**, à la place indiquée par **adressedansL_A(a)** , mettre à jour un de deux champs **f_G**, **f_D** (cela dépend de **pos**) par **adr_f**.
Fonctionnement: Voir *Signification*.
Coût: Constant (ne dépend ni de s ni de n).

(Quand on appelle cette procédure, on est sûr théoriquement que le champ à mettre à jour reste encore **Nil** avant la mise à jour. S'il n'en est pas ainsi, il y a une incohérence dans les données de **L_S**.)

function pos_ar_ar (a, b: arete_tmp): boolean;
où **a, b** représentent deux arêtes a, b qui aient en commun un sommet sous face et qui se trouvent sur deux courbes différentes.

Signification:
Retourner la position relative de a par rapport à b (**pos_ar_ar (a, b)=true** si a est à gauche de b et **false** si elle est à droite).
Fonctionnement:
Chercher l'adresse **M** d'un sommet M sous face de a, b (en comparant **a.0**, **a.E** à **b.O**, **b.E**). Aller dans la liste **L_S** à la place indquée par **M**, calculer (comme dans la preuve de la propriété 3.15) les positions relatives $V_{c_{j_M}} e(M, c_{i_M}, +)$, $V_{c_{j_M}} e(M, c_{i_M}, -)$, $V_{c_{i_M}} e(M, c_{j_M}, +)$, $V_{c_{i_M}} e(M, c_{j_M}, -)$. Identifier l'arête a à une des quatre arêtes issues de M et retourner la position relative correspondante qui vient d'être calculée.
Coût: Constant (qui est proportionnel à s mais ne dépend pas de n).

function Estce_facecreee (a,b: arete_tmp): boolean;
où **a, b** représentent deux arêtes a, b qui aient en commun un sommet sous face et qui se trouvent sur deux courbes différentes.

Signification:
Vérifier si la cellule f_{ab} déterminée par a et b est déjà créée dans la liste **L_F**.
Fonctionnement:
Calculer

posa_b:= pos_ar_ar(a,b) , **posb_a:= pos_ar_ar(b,a)** ,
adr_a := adressedansL_A(a) , **adr_b := adressedansL_A(b)**.

Retourner **false** si **adr_a =Nil** ou **adr_b =Nil** (a ou b n'est pas créée). Sinon

aller dans la liste **L_A** aux places indiquées par **adr_a** et **adr_b**, comparer un de deux champs **adr_a^.f_G**, **adr_a^.f_D** (celui qui est indiqué par **posb_a**) à un de deux champs **adr_b^.f_G**, **adr_b^.f_D** (celui qui est indiqué par **posa_b**): s'ils sont égaux et égaux à **Nil**, retourner **false**; s'ils sont égaux et différents de **Nil**, retourner **true**.
Coût: Constant (ne dépend pas de n mais linéairement de s).

(Dans cette fonction, on pourrait aussi contrôler la cohérence des données de la liste **L_S**:
Si les contenus des champs à comparer sont différents, il y a une incohérence;
Si une seule arête a ou b n'est pas créée, supposons par exemple que c'est l'arête a, alors si un de deux champs **adr_b^.f_G**, **adr_b^.f_D** (celui qui est indiqué par **posa_b**) est déjà différent de **Nil**, il y a aussi une incohérence.)

function
chercher_asuiv (a_prec, a_cour: arete_tmp; var a_suiv: arete_tmp): boolean;
où **a_prec, a_cour** représentent deux arêtes a_p, a_c qui aient en commun un sommet sous face M et qui se trouvent sur deux courbes différentes.

Signification:
Retourner **true** s'il y a une arête a_s qui ait en commun avec a_c un sommet sous face $N \neq M$ et qui borde la même cellule que a_p, a_c; retourne **false** sinon. En plus, s'il existe une telle arête a_s, ses informations sont mises dans la variable **a_suiv**.
Fonctionnement:
Retourner **false** si **a_cour.O = Nil** ou **a_cour.E = Nil** (a_c est non bornée).
Sinon retourner **true** puis chercher un sommet sous face N de a_c tel que N ne soit pas sous face de a_p (en comparant chacun de **a_cour.O**, **a_cour.E** à **a_prec.O**, **a_precr.E**). S'il n'y en a pas (a_p, a_c ont en commun deux sommets sousfaces), faisons **a_suiv:= a_prec**. Si on trouve un tel sommet N, prenons deux variables **a1**, **a2** qui représentent $e(N, c_i, +)$ et $e(N, c_i, -)$, où $i \in \{i_N, j_N\}$ tel que $a_c \not\subset c_i$. Comparer la position **posar_ar(a_prec, a_cour)** à **posar_ar(a1, a_cour)**. Si elles sont égales, faisons **a_suiv:= a1**. Sinon faisons **a_suiv:= a2**.
Coût: Constant (ne dépend pas de n mais linéairement de s).

procedure adresse_a_G(adr_a: ptrarete);
où **adr_a** indique l'adresse d'une arête a dans la liste **L_A**.

Signification:
Déterminer l'adresse de l'arête a_G dans la liste **L_A**.
Fonctionnement:
Soit M le sommet dont l'adresse est **M:= adr_a^.O**. Si **M= Nil** alors retourner **Nil**. Sinon
Prenons deux variables **adr_a1**, **adr_a2** du type **ptrarete** et qui contiennent les adresses $e(M, c_i, +)$, $e(M, c_i, -)$, où $i \in \{i_M, j_M\}$ tel que $a \not\subset c_i$ (**adr_a1:= e_plus[1]** ; **adr_a2:= e_moins[1]** si **M^.ind[1]** $\neq$ **adr_a^.ind** et **adr_a1:=**

e_plus[2] ; adr_a2:= e_moins[2] sinon.)
Si un des **adr_a1^.f_G**, **adr_a1^.f_D** est égale à **adr_a^.f_G**, retourner **adr_a1**.
Sinon retourner **adr_a2**.
Coût: Constant (ne dépend ni de s ni de n).

procedure adresse_a_D(adr_a: ptrarete);
où **adr_a** indique l'adresse d'une arête a dans la liste **L_A**.

Signification:
Déterminer l'adresse de l'arête a_D dans la liste **L_A**.
Fonctionnement: Analogue à **adresse_a_G(adr_a: ptrarete)**.
Coût: Constant (ne dépend ni de s ni de n).

L'algorithme de construction de deux liste L_A, L_F:
(Voir le résumé qui se trouve avant la description des procédures et fonctions)

Etape 1/. Construire la liste **L_F** et la liste **L_A** avec les champs **a_G**, **a_D** qui ne sont pas mis à jour (ces deux champs de toutes les places de la liste **L_A** sont des pointeurs **Nil** après cette première étape).

Var
a, b, a_prec, a_cour, a_suiv : arete_tmp;
adr_f : ptrfce;
M : ptrsommet;
pos, existsuiv : boolean;

Parcourir la liste **L_S** au moyen de la variable **M**:
Début
A chaque sommet M on va examiner quatre paires d'arêtes **a**, **b** suivantes:
a représente $e(M, c_{i_M}, +)$, **b** représente $e(M, c_{j_M}, +)$;
a représente $e(M, c_{i_M}, +)$, **b** représente $e(M, c_{j_M}, -)$;
a représente $e(M, c_{i_M}, -)$, **b** représente $e(M, c_{j_M}, +)$;
a représente $e(M, c_{i_M}, -)$, **b** représente $e(M, c_{j_M}, -)$.
(Par exemple, pour avoir la deuxième paire, on fait:
a.ind := M^.ind[1] ; a.O := M ; a.E :=M^.suiv[1];
b.ind := M^.ind[2] ; a.O :=M^.prec[2] ; a.E := M;)
A chaque paire **a**, **b** :
Début
Si **Estce_facecreee(a,b)= true** { la cellule déterminé par **a**, **b** est déjà créée }, on passe à une autre paire **a, b**;
Sinon:
Début
Si **adressedansL_A(a) =Nil** alors **creer_arete(a)**;
{ Si **a** n'est pas créée, on la crée }
Si **adressedansL_A(b) =Nil** alors **creer_arete(b)**;
creer_face(a,adr_f);
{ Si **b** n'est pas créée, on la crée }
{Créer la cellule f déterminée par **a**, **b** et mettre l'adresse de f dans **adr_f**}

```
pos:= pos_ar_ar(b,a);
{ Déterminer la position relative pos de f par rapport à  a }
remplir_arete_parface(a,f,pos);
{ Remplir par adr_f une de deux cellules de a };
pos:= pos_ar_ar(a,b);
{ Déterminer la position relative pos de f par rapport à  b }
remplir_arete_parface(b,f,pos);
{ Remplir par adr_f une de deux cellules de b };
Parcourir les autres arêtes de f :
Début
  Parcours dans le sens b → a → :
  Début
    a_prec:=b; a_cour:= a;
    Répéter
      existsuiv:= chercher_asuiv(a_prec, a_cour,a_suiv);
      { Déterminer s'il y a l'arête suivante a_suiv }
      Si (existsuiv = True)  et  (a_suiv ≠ b) alors
      Début
        Si adressedansL_A(a_suiv) =Nil alors creer_arete(a_suiv);
        { Si a_suiv n'est pas créée, on la crée }
        pos:= pos_ar_ar(a_cour, a_suiv);
        { Déterminer la position relative pos de f par rapport à a_suiv
        }
        remplir_arete_parface(a_suiv,f,pos);
        { Remplir par f une de deux cellules de a_suiv }
        a_prec:= a_cour ;  a_cour:= a_suiv;
      Fin de si existsuiv = True et a_suiv ≠ b;
    Jusqu' à existsuiv= False ou a_suiv= b;
  Fin du Parcours dans le sens b → a →;
  Si existsuiv= False, parcourir dans le sens a → b → ··· et faire pareil
  que dans le premier sens;
Fin de parcourir les autres arêtes de f;
Fin de sinon;
Fin de chaque paire a, b;
Fin de parcourir la liste L_S;
```

Etape 2/. Mettre à jour les champs **a_G**, **a_D** de toutes les arêtes dans la liste **L_A**.

```
Var
adr_a:  ptrarete;
```

Parcourir la liste **L_A** au moyen de la variable **adr_a** (l'adresse d'une arête a):

```
Début
  adr_a^.a_G:= adresse_a_G(adr_a);
  adr_a^.a_D:= adresse_a_D(adr_a);
Fin de parcourir la liste L_A;
```

Coût de l'algorithme.
Toutes les procédures et les fonctions appelées étant du coût constant, le coût de la première étape est proportionnel au nombre de fois où on appelle les arêtes de $\mathcal{A}(\Gamma)$. Or chaque arête a (de sommets O et E) est appelée au maximum six fois:

Quatre fois (éventuellement deux, si O ou E n'existe pas) lors du parcours de la liste **L_S** au moyen de la variable **M**: deux fois quand **M** arrive à O et deux fois quand **M** arrive à E;

Deux fois lors des parcours de deux cellules adjacentes à a, toute cellule étant parcourue exactement une fois aussitôt après sa création dans la liste **L_F**.
Le côut de la première étape est par conséquent $O(n^2)$.
La complexité en temps de la deuxième étape est aussi de l'ordre de $O(n^2)$.
Le coût de tout l'algorithme est donc $O(n^2)$. Donc on a:

Proprosition 3.16. *Supposons qu'on a des informations (info1), (info2), (info3) et (info4) en tout sommet M. On peut alors calculer en temps $O(n^2)$ la structure d'arêtes ailées de l' arrangement.*

Annexe du chapitre 3

La démonstration du théorème 3.13 fera appel au lemme suivant:

A 3.1 Lemme 3.17. *Suppposons qu'on ait les hypothèses (h1), (h2), (h3). Supposons en plus qu'il existe* i_0, $M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$ *tel que*

$$V_{c_{i_0}}(M) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}\ (H_0(M)) \neq 0.$$

Alors :

$$V_{c_{i_0}}(N) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}\ (H(N)),\quad (N \in \mathcal{A}_0(\Gamma)\ )$$

et

$$c_i \cap c_{i_0} \neq \emptyset,\quad (i \in I)\ ,$$

où H *est l'isomorphisme introduit dans le théorème 3.5.*

Preuve.
D'abord soit c_i tel que $M \in c_i$. Soit N un autre sommet $\in c_i$, $N \neq M$ et $N \notin c_{i_0}$.
On va démontrer que $V_{c_{i_0}}(N) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}\ (H(N))$.
Soit α un arc sur c_i, α délimité par N, M.
Soit a une arête sur c_i telle que M soit sous face de a et que $a \subset \alpha$.
Le lemme 3.7 implique qu'il existe $\tilde{\alpha}$ un arc sur $\tilde{c}_i$, α délimité par $H(N)$, $H(M)$ tel que $H(a) \subset \tilde{\alpha}$ et que:

$$nbr_inter(c_i, c_{i_0}, \alpha) = nbr_inter(\tilde{c}_i, \tilde{c}_{i_0}, \alpha).$$

Or :

$$V_{c_{i_0}}(N) = (-1)^{nbr_inter(c_i, c_{i_0}, \alpha)}\ V_{c_{i_0}}(M),$$
$$V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(N)) = (-1)^{nbr_inter(\tilde{c}_i, \tilde{c}_{i_0}, \tilde{\alpha})}\ V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(N)).$$

Donc

$$V_{c_{i_0}}(N) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(N)).$$

Ce qu'on vient de démontrer signifie que:
Pour tout $i \in I \setminus \{i_0\}$, s'il existe un sommet M sur c_i tel que :

$$V_{c_{i_0}}(M) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(M)) \neq 0,$$

alors $\quad V_{c_{i_0}}(N) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(N)),\quad$ pour tout sommet $N \in c_j$. (1)

Soit $I_1 = \{i \in I\ :\ V_{c_{i_0}}(M) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(M)),\ \forall M$ sommet $\in c_i\}$.
On a:
1/. $c_i \cap c_{i_0} \neq \emptyset$, $\forall i \in I_1$.
(Sinon, il existe $i_1 \in I_1$: $c_{i_1} \cap c_{i_0} = \emptyset$.
Prenons alors un sommet M $\in c_{i_1}$, on a :

$$V_{c_{i_0}}(M) = position\ (c_{i_1}\ /\ c_{i_0}),$$
$$V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(M)) = position\ (\tilde{c}_{i_1}\ /\ \tilde{c}_{i_0}).$$

L'hypothèse (h3) donne que $V_{c_{i_0}}(M) = V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(M)) \neq 0$, ce qui est absurde à $i_1 \in I_1$)

2/.Soit $j \in I \setminus \{i_0\}$, s'il existe $i \in I_1 \setminus \{i_0\}$ tel que $c_j \cap c_i \neq \emptyset$, alors $j \in I_1$. (2)

Il nous reste à démontrer que $I = I_1$.
Supposons par l'absurde que $I_2 \equiv I \setminus I_1 \neq \emptyset$.

Il existe alors $k \in I_2$ tel que $c_k \cap c_{i_0} \neq \emptyset$.
(Sinon, de (2) on a: $c_k \cap c_i = \emptyset$, $(k \in I_2)$, $(i \in I_1)$. Ce qui est absurde à l'hypothèse que $\mathcal{A}(\Gamma)$ est simple car $I_2 \cup I_1 = I$, $I_2 \cap I_1 = \emptyset$)

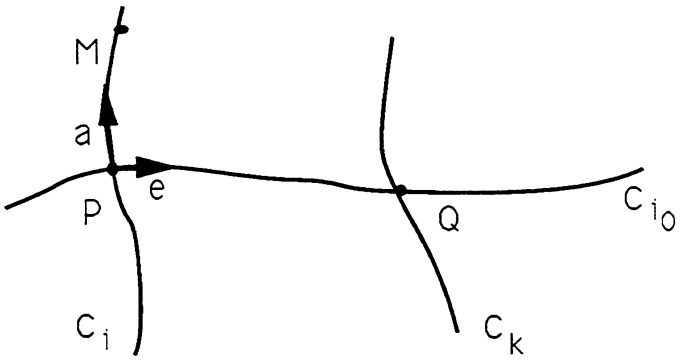


FIGURE 3.15.

Prenons $P \in c_{i_0} \cap c_i$ et $Q \in c_R \cap c_{i_0}$ tels qu'il existe un arc γ sur c_{i_0}, γ délimité par P, Q et que

$$\gamma \cap c_i = \emptyset \quad , \quad \gamma \cap c_k = \emptyset$$

(c-à-d que $nbr_inter(c_i, c_{i_0}, \gamma\ ) = 0$, $nbr_inter\ (c_k, c_{i_0}, \gamma\ ) = 0$) (1)
Prenons e l'arête sur c_{i_0}, telle que P soit sous face de e et que $e \subset \gamma$.

Prenons α un arc sur c_i, délimité par P et M et a l'arête sur c_i, telle que P soit sous face de a et $a \subset \alpha$.
D'après le lemme 3.7,
Il existe $\tilde{\gamma}$ un arc sur $\tilde{c}_{i_0}$, délimité par $H(P)$, $H(Q)$ tel que $H(e) \subset \tilde{\gamma}$ et
Il existe $\tilde{\alpha}$ un arc sur $\tilde{c}_i$, délimité par $H(P)$, $H(M)$ tel que $H(a) \subset \tilde{\alpha}$.

On a :

$$V_{c_{i_0}}\ (M) = (-1)^{nbr_inter\ (c_i, c_{i_0}, \alpha)}\ V_{c_{i_0}}\ (a)\ ,$$
$$V_{\tilde{c}_{i_0}}\ (H(M)) = (-1)^{nbr_inter\ (\tilde{c}_i, \tilde{c}_{i_0}, \tilde{\alpha})}\ V_{\tilde{c}_{i_0}}\ (H(\tilde{a}))\ .$$

Or $\quad nbr_inter\ (c_i, c_{i_0}, \alpha) = nbr_inter\ (\tilde{c}_i, \tilde{c}_{i_0}, \tilde{\alpha})$, (Lemme 3.7)
et $\quad V_{c_{i_0}}\ (M) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}\ (H(M))$.
On déduit

$$V_{c_{i_0}}\ (a) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}\ (H(a)) \neq 0.$$

D'autre part, d'après la propriété 3.12,

$$V_{c_{i_0}}(a) = -Dir_{c_{i_0}}\ e\ (P \to E)\ .\ Dir_{c_i}\ a\ (P \to A)\ V_{c_i}\ (e) \text{ et}$$
$$V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(a)) = -Dir_{\tilde{c}_{i_0}}\ H(e)\ (H(P) \to \tilde{E})\ .\ Dir_{\tilde{c}_i}\ H(a)\ (H(P) \to \tilde{A})\ V_{\tilde{c}_i}\ (H(e)).$$

où $\quad E \in e,\ A \in a,\ \tilde{E} \in H(e),\ \tilde{A} \in H(a)$.
Or (Lemme 3.7) donne:

$$Dir_{c_{i_0}}\ e\ (P \to E) = Dir_{\tilde{c}_{i_0}}\ H(e)\ (H(P) \to \tilde{E})$$
$$Dir_{c_i}\ a\ (P \to A) = Dir_{\tilde{c}_i}\ H(a)\ (H(P) \to \tilde{A}).$$

On déduit que :

$$V_{c_i}\ (e) = -V_{\tilde{c}_i}\ (H(e)) \neq 0 \tag{4}$$

D'autre part,
$V_{\tilde{c}_i}\ (e) = (-1)^{nbr_inter\ (c_i, c_{i_0}, \gamma)}\ V_{c_i}\ (Q)\ =$
$=\ V_{c_i}(Q)\ (nbr_inter\ (c_{i_0}, c_i, \gamma) = 0$, d'après (1))
$= Posi\ (c_k|c_i)$.
De la même façon, on a : $V_{\tilde{c}_i}\ (H(e)) = Posi\ (\tilde{c}_k|\tilde{c}_i)$.

Or d'après (h3), $Posi\ (c_k|c_i) = Posi\ (\tilde{c}_k|\tilde{c}_i)$
Donc $V_{c_i}\ (e) = V_{\tilde{c}_i}\ (H(e))$ ce qui contredit (4). ∎

A 3.2 Preuve du théorème 3.13.
On démontre d'abord que H préserve les vecteurs de position des sommets.
Supposons par l'absurde qu'il existe $M_0 \in \mathcal{A}_0$ et $\exists i_0 \in I$ tels que

$$V_{c_{i_0}}\ (M_0) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}\ (H(M_0)) \neq 0.$$

D'après le lemme 3.17 , on a :

$$V_{c_{i_0}}\ (M) = -V_{c_{i_0}}\ (H(M)),\quad (M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)\ ).$$

Utilisons maintenant l'hypothèse (h4):

Premier cas: Si $c_i \cap c_j\ \neq \emptyset$, pour tous i, j distincts $\in \Gamma$. (1)
(h4) dit qu'il existe $M_1 \in \mathcal{A}_0(\Gamma)$ et $i_1 \in I$ tels que:

$$V_{c_{i_1}}\ (M_1) = V_{\tilde{c}_{i_1}}\ (H(M_1)) \neq 0.$$

Comme un corollaire du lemme 3.17 , on a aussi:

$$V_{c_{i_1}}\ (M) = V_{c_{i_1}}\ (H(M)),\quad (M \in \mathcal{A}_0(\Gamma)\ ).$$

Soit $P \in c_{i_1} \cap c_{i_0}$
Soit N_1 un sommet $\in c_{i_0}$ tel que $N_1 \notin c_{i_1}$.
Soit N_0 un sommet $\in c_{i_1}$ tel que $N_0 \notin c_{i_0}$.
(L'existence de N_1, N_0 est assurée car $Card(I) \geq 3$ et (1)).

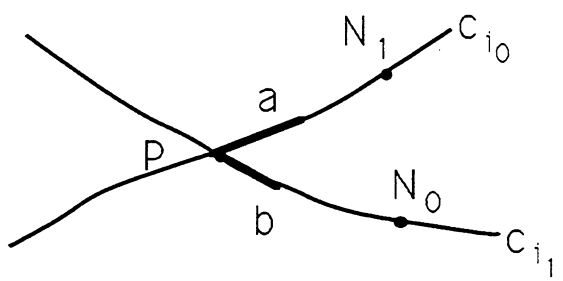


FIGURE 3.16.

Prenons α un arc sur c_{i_0}, α délimité par P, N_1. Prenons l'arête $a \subset \alpha$, P sous face de a.
Prenons β un arc sur c_{i_1}, β délimité par P, N_0. Prenons l'arête $b \subset \beta$, P sous face de b.
Alors:

$$V_{c_{i_1}}(a) = (-1)^{nbr_inter(c_{i_1}, c_{i_0}, \alpha)}.V_{c_{i_1}}(N_1)\ ,$$
$$V_{c_{i_0}}(b) = (-1)^{nbr_inter(c_{i_1}, c_{i_0}, \beta)}.V_{c_{i_0}}(N_0)\ ,$$

Utilisant le lemme 3.7,on a les arcs $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et on a aussi :

$$V_{\tilde{c}_{i_1}}(H(a)) = (-1)^{nbr_inter(\tilde{c}_{i_1},\tilde{c}_{i_0},\tilde{\alpha})}.V_{\tilde{c}_{i_1}}(H(N_1)) \ ,$$
$$V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(b)) = (-1)^{nbr_inter(\tilde{c}_{i_1},\tilde{c}_{i_0},\tilde{\beta})}.V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(N_0)) \ ,$$

Or

$$nbr_inter(c_{i_1}, c_{i_0}, \alpha) = nbr_inter(\tilde{c}_{i_1}, \tilde{c}_{i_0}, \tilde{\alpha}) \ ,$$
$$nbr_inter(c_{i_1}, c_{i_0}, \beta) = nbr_inter(\tilde{c}_{i_1}, \tilde{c}_{i_0}, \tilde{\beta}) \ .$$

Donc

$$V_{c_{i_1}}(a) = V_{\tilde{c}_{i_1}}(H(a)) \neq 0 \ \text{ et } \ V_{c_{i_0}}(b) = V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(b)) \neq 0 \qquad (2)$$

Toutefois, en appelant la propriété 3.12 pour deux paires d'arêtes a, b et $H(a)$, $H(b)$, en tenant compte (lemme 3.7) que $Dir_{c_{i_0}}a(P \to A) = Dir_{\tilde{c}_{i_0}}H(a)(H(P) \to \tilde{A})$, $Dir_{c_{i_1}}b(P \to B) = Dir_{\tilde{c}_{i_1}}H(b)(H(P) \to \tilde{B})$, on a:

$$V_{c_{i_1}}(a) = V_{\tilde{c}_{i_1}}(H(a)) \Longrightarrow V_{c_{i_0}}(b) = V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(b)) \ ,$$

ce qui est absurde avec (2).

Deuxième cas: S'il existe $c_{i_2}, c_{i_3} \in \Gamma$ tels que $c_{i_2} \cap c_{i_3} = \emptyset$.
(Alors, d'après le lemme 3.17, $c_{i_2}, c_{i_3} \neq c_{i_0}$.)
On peut supposer qu'il existe un sommet $R \in c_{i_3}$, $R \notin c_{I_0}$ (sinon, ce qui implique que $c_i \cap c_{i_3} = \emptyset$ où c_i passe par M_0, on prend $c_{i'_2} = c_{i_3}$, $c_{i'_3} = c_i$ et $R' = M_0$.)
Soient $P \in c_{i_0} \cap c_{i_3}$, $Q \in c_{i_0} \cap c_{i_2}$.
(L'existence de P, Q est due au lemme 3.17)

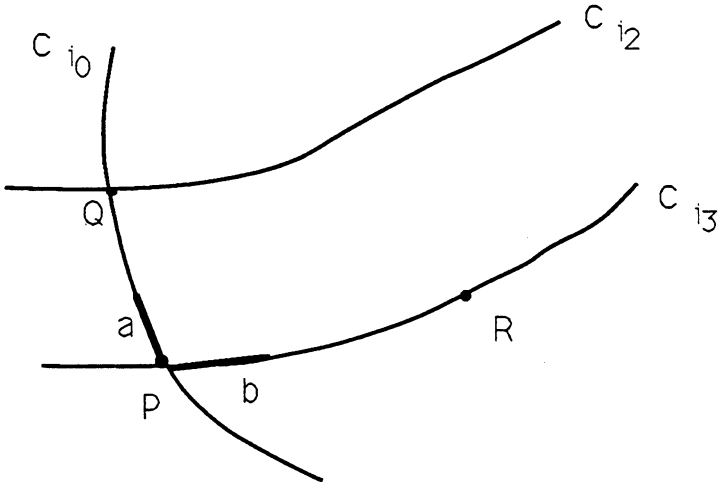


FIGURE 3.17.

On a :

$$V_{c_{i_0}}(R) = V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(R)) \neq 0,$$
$$V_{c_{i_3}}(Q) = Posi\ (c_{i_2}/c_{i_3}) = Posi\ (\tilde{c}_{i_2}/\tilde{c}_{i_3}) = V_{\tilde{c}_{i_3}}(H(Q)).$$

Soit α arc sur c_{i_0} délimité par P, Q , $a \subset \alpha$.
Soit β arc sur c_{i_3} délimité par P, R , $b \subset \beta$.

Par la même technique sur les arcs α, β, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ (Lemme 3.7) et par les faits que:

$$V_{c_{i_3}}(Q) = V_{\tilde{c}_{i_3}}(H(Q)) ,$$
$$V_{c_{i_0}}(R) = -V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(R)) ,$$

on a:

$$V_{\tilde{c}_{i_3}}(H(a)) = V_{c_{i_3}}(a) \neq 0 \text{ et } V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(b)) = -V_{c_{i_0}}(b) \neq 0. \qquad (2')$$

De façon identique à (2), (2') est absurde avec:

$$V_{c_{i_3}}(a) = V_{\tilde{c}_{i_3}}(H(a)) \Longrightarrow V_{c_{i_0}}(b) = V_{\tilde{c}_{i_0}}(H(b)) .$$

Démontrons ensuite que les vecteurs de position des arêtes sont préservé, c'est-à-dire démontrons que:

$$V_{c_i}(a) = V_{\tilde{c}_i}(H(a)), \text{ pour toute arête } a \in \mathcal{A}(\Gamma).$$

Soient donc $a \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$, $i \in I$ tels que $a \not\subset c_i$.
Soit M un sommet sous face de a.
Si $M \notin c_i$ (et donc $H(M) \notin \tilde{c}_i$) on a:

$$V_{c_i}(a) = V_{c_i}(M) = V_{\tilde{c}_i}(H(M)) = V_{\tilde{c}_i}(H(a)).$$

Examinons donc le cas où $M \in c_i$:
Soit $c_k \in \Gamma$ tel que $a \subset c_k$ (donc $c_k \neq c_i$).
Premier cas: S'il existe un sommet $P \in c_k \setminus c_i$.

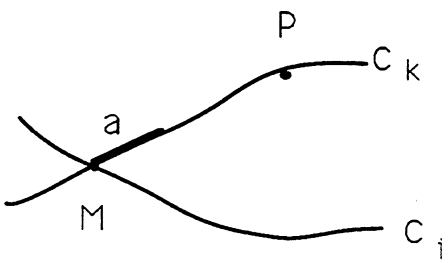


FIGURE 3.18.

On prend un arc α sur c_k, délimité par M, P . Soit e l'arête sur c_k, $e \subset \alpha$ telle que M soit sous face de e.
e peut être égale ou différente de a. En tout cas, pour démontrer $V_{c_i}(a) = V_{\tilde{c}_i}(H(a))$, on n'a qu'à démontrer $V_{c_i}(e) = V_{\tilde{c}_i}(H(e))$.
Or

$$V_{c_i}(e) = (-1)^{nbr_inter\ (c_k, c_i, \alpha)}\ V_{c_i}(P).$$

Puis par la même technique sur les arcs α, $\tilde{a}lpha$ (Lemme 3.7), on a:

$$V_{\tilde{c}_i}(H(e)) = (-1)^{nbr_inter\ (\tilde{c}_k, \tilde{c}_i, \tilde{\alpha})}\ V_{\tilde{c}_i}(H(P)).$$

Or

$$V_{c_i}(P) = V_{\tilde{c}_i}(H(P)),$$
$$nbr_inter\ (c_k, c_i, \alpha) = nbr_inter\ (\tilde{c}_k, \tilde{c}_i, \tilde{\alpha}).$$

On déduit que

$$V_{c_i}(e) = V_{\tilde{c}_i}(H(e)).$$

Donc

$$V_{c_i}(a) = V_{\tilde{c}_i}(H(a)).$$

Deuxième cas: S'il existe $P \in c_i \setminus c_k$.

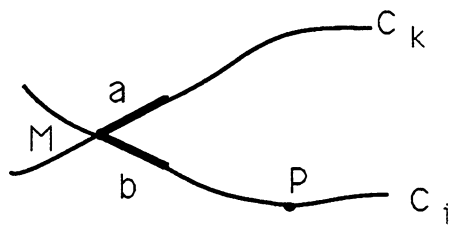


FIGURE 3.19.

Prendre un arc β sur c_i, délimité par M, P . Soit b l'arête sur c_i, $e \subset \beta$ telle que M soit sous face de b.
De façon analogue au premier cas (pour l'arête e), on peut démontrer:

$$V_{c_k}\ (b) = V_{\tilde{c}_k}\ (H(b)).$$

Puis en appliquant la propriété 3.12 aux deux paires d'arêtes a, b et $H(a)$, $H(b)$, en tenant compte (lemme 3.7) que $Dir_{c_k}a(M \to A) = Dir_{\tilde{c}_k}H(a)(H(M) \to \tilde{A})$, $Dir_{c_i}b(M \to B) = Dir_{\tilde{c}_i}H(b)(H(M) \to \tilde{B})$, où $A \in a$, $\tilde{A} \in H(a)$, $B \in b$, $\tilde{B} \in H(b)$, on a ce qu'il faut:

$$V_{c_i}\ (a) = V_{\tilde{c}_i}\ (H(a)).$$

Enfin, pour les vecteurs des position des cellules:
Soit $f \in \mathcal{A}_2(\Gamma)$, soit $i \in I$.
Soit a une arête sous face de f telle que $a \not\subset c_i$.
Donc

$$V_{c_i}\ (f) = V_{c_i}\ (a) = V_{\tilde{c}_i}\ (H(a)) = V_{\tilde{c}_i}\ (H(f)). \qquad \blacksquare$$

A 3.3 Exemple sur Préservation des vecteurs de position des sommets et Isomorphisme

Dans la figure suivante, $H_0 : \mathcal{A}_0(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\tilde{\mathcal{C}})$ donné par:

$$H_0(M) = \tilde{M}, \forall M \in \mathcal{A}_0(\mathcal{C}).$$

(Par exemple $H_0(Q_{12}) = \tilde{Q}_{12}$, $H_0(W_{13}) = \tilde{W}_{13}$,...)
Les courbes c_i, $\tilde{c}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sont des courbes fermées avec c_i^+ , $\tilde{c}_i^+$ sont des parties ouvertes bornées délimitées par c_i.
On voit que H_0 préserve les vecteurs de position des sommets:

$$V_{c_3}(Q_{12}) = V_{\tilde{c}_3}(\tilde{Q}_{12}) = -1 \ , \ V_{c_3}(M_{12}) = V_{\tilde{c}_3}(\tilde{M}_{12}) = +1 \ , \ldots$$

Pourtant Il n'existe aucun isomorphisme entre les deux: Dans le premier arrangement il y a des cellules à deux arêtes sous faces et il n'en n'est pas ainsi dans le deuxième.

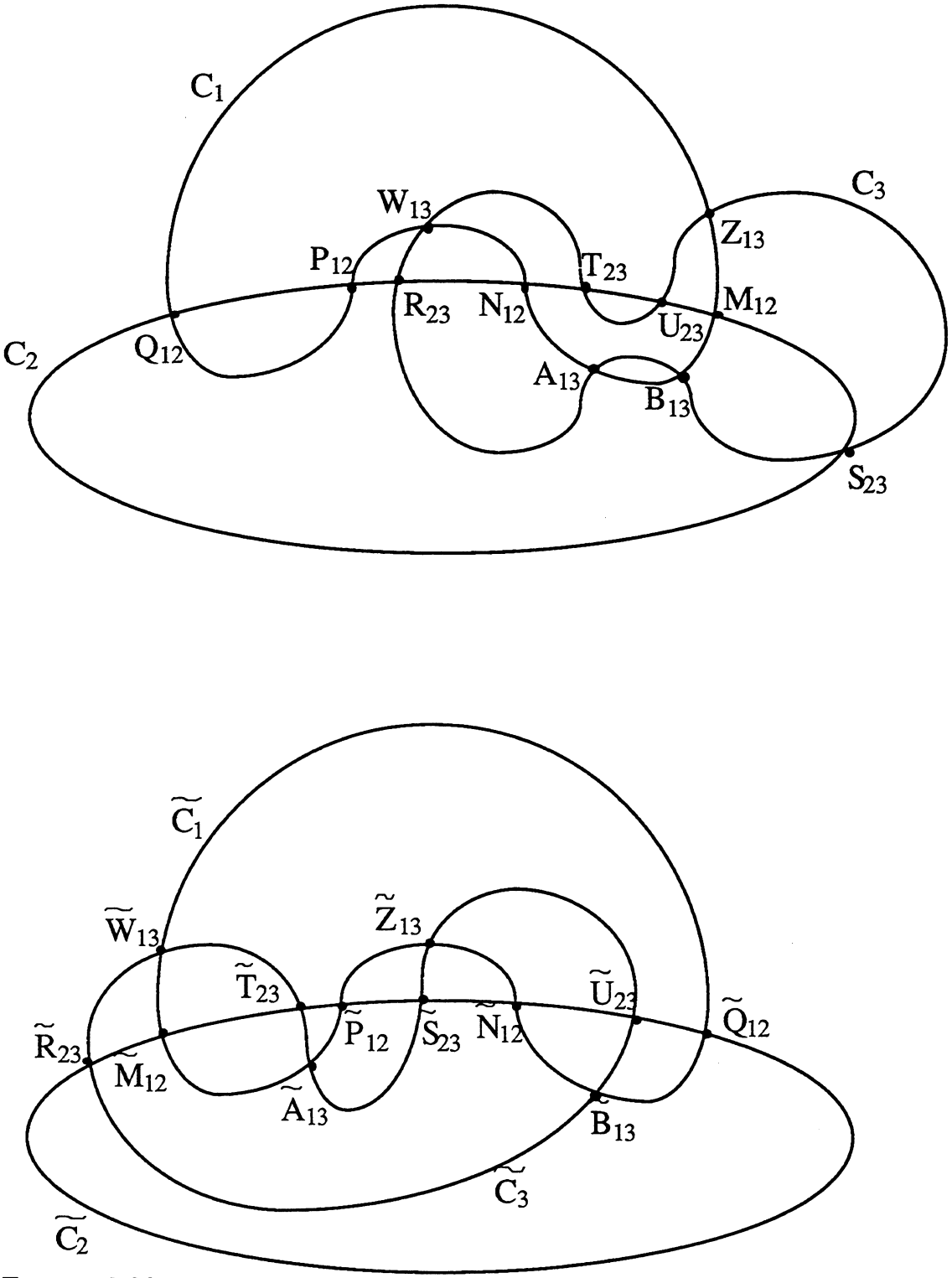

C_1
C_2
C_3
W_{13}
P_{12}
R_{23}
N_{12}
T_{23}
Z_{13}
M_{12}
U_{23}
Q_{12}
A_{13}
B_{13}
S_{23}
$\widetilde{C}_1$
$\widetilde{W}_{13}$
$\widetilde{Z}_{13}$
$\widetilde{T}_{23}$
$\widetilde{U}_{23}$
$\widetilde{Q}_{12}$
$\widetilde{R}_{23}$
$\widetilde{P}_{12}$
$\widetilde{S}_{23}$
$\widetilde{N}_{12}$
$\widetilde{M}_{12}$
$\widetilde{A}_{13}$
$\widetilde{B}_{13}$
$\widetilde{C}_3$
$\widetilde{C}_2$

FIGURE 3.20.

A 3.4 Un exemple du fonctionnement de l'algorithme de construction d'arête ailée

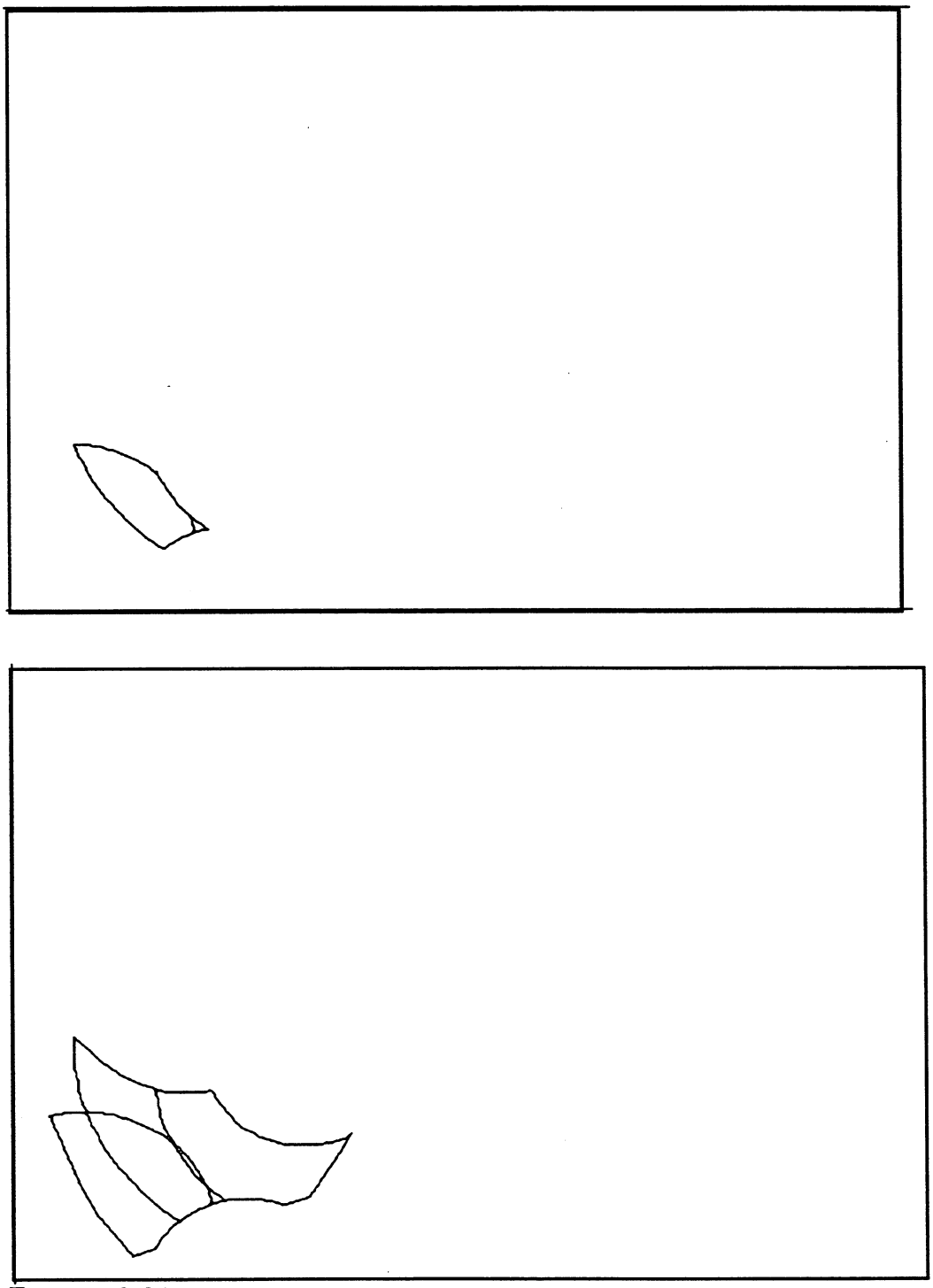


FIGURE 3.21.

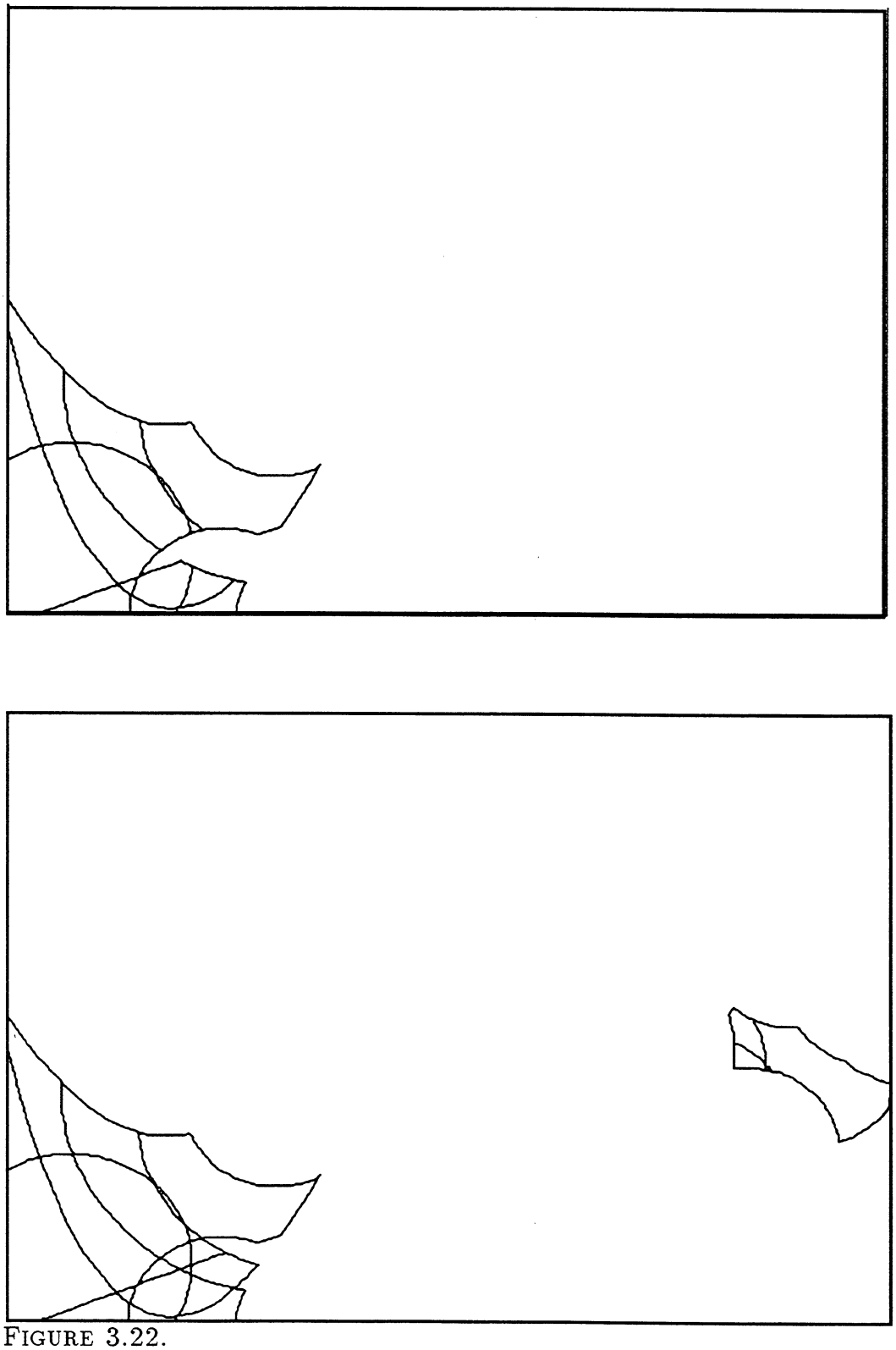


FIGURE 3.22.

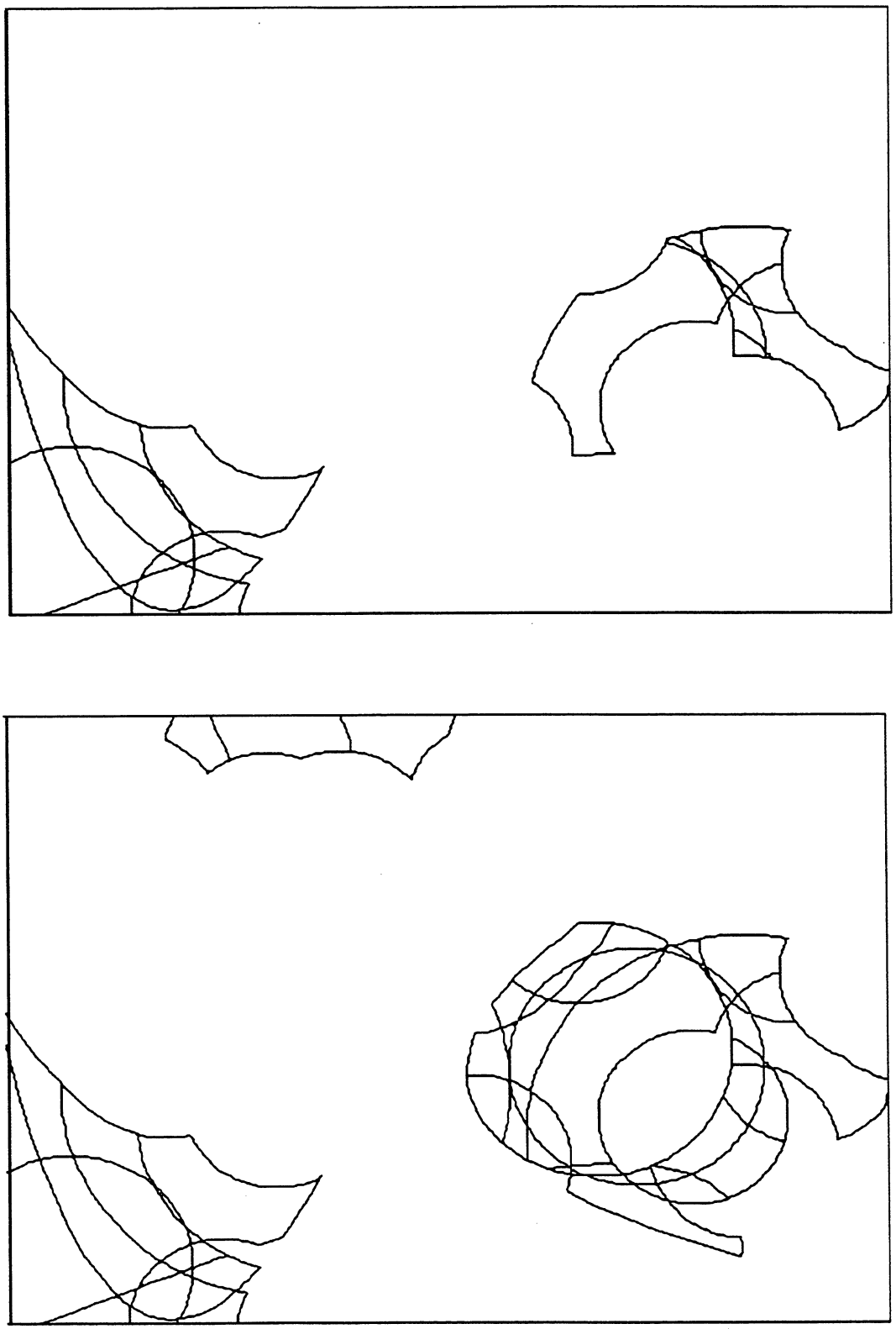


FIGURE 3.23.

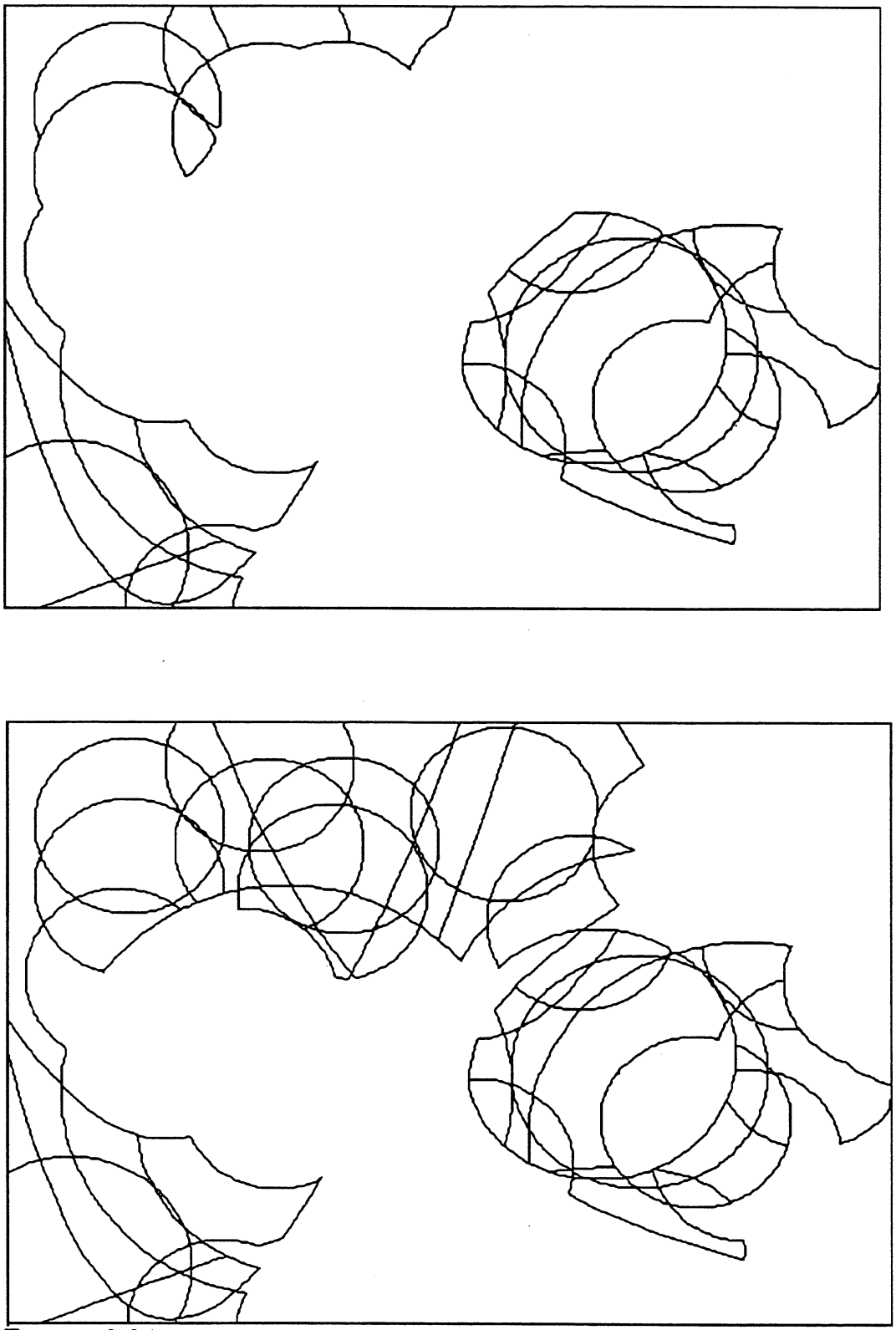


FIGURE 3.24.

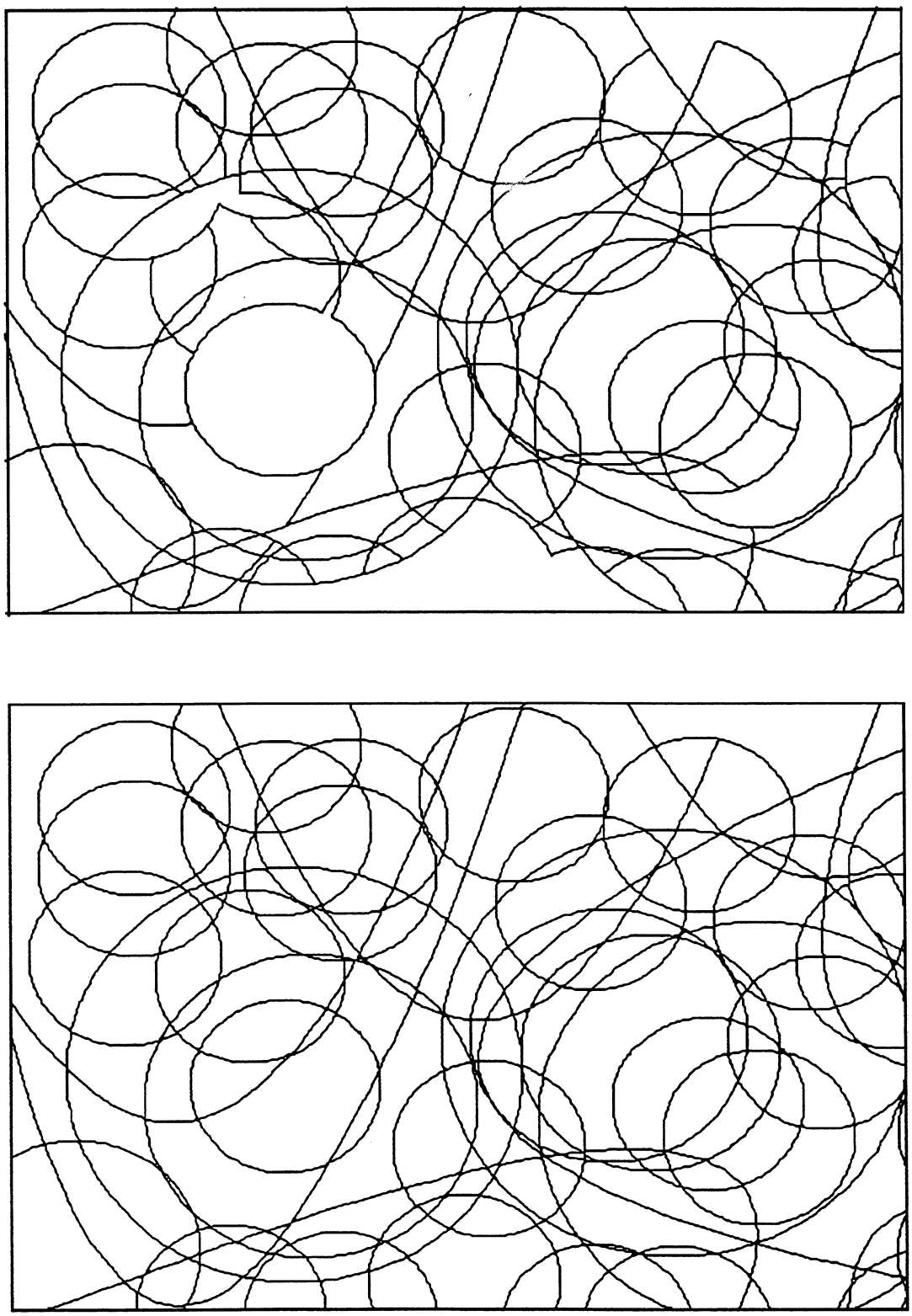


FIGURE 3.25.

Chapitre 4

Equivalence des Arrangements de cercles dans le plan & Perturbation des cercles.

Introduction.

Ce chapitre est en fait une illustration du chapitre 3 avec les cercles.

Dans la première section (section 4.1), on examine de plus près la géométrie de deux arrangements équivalents et on voit qu'il y a des différences géométriques entre les deux (voir les exemples dans la section 4.1).

En distinguant les deux points d'intersection de deux cercles, on obtient l'équivalence entre la préservation de l'ordre algébrique des sommets sur les cercles et celle des vecteurs de position des sommets (Remarque 4.5, Propriété 4.1), ce qui n'était pas vrai dans le contexte général du chapitre 3 et qui nous aide ultérieurement dans la partie de perturbation des cercles.

On cherche ensuite une condition sur la configuration des centres des cercles en vu d'obtenir l'analogie géométrique de deux arrangements équivalents (Définition 4.2, Propriété 4.5).

La première section 4.1 se termine avec le théorème 4.6 qui exprime la ressemblance géométrique désirée.

La section 4.2 est consacrée à la perturbation des cercles. Grâce à la propriété 4.7 (dont la preuve est semblable à celle de la propriété 4.1), on n'a qu' à calculer des bornes de perturbation ϵ, δ (ϵ est pour les centres et δ pour les rayons) tels que les vecteurs de position des sommets soient préservés. On obtient alors, à travers plusieurs calculs, le théorème 4.12 qui donne explicitement ces bornes (le coût de calcul est $O(n^3)$).

On applique maintenant le chapitre 4 à l'ensemble Γ_0 de tous les cercles dans le plan Oxy (le nombre maximum de points d'intersection est donc $s = 2$). Pour chaque cercle $c \in \Gamma_0$, on désigne par c^+ le disque ouvert borné délimité par c et c^- la partie ouverte non bornée délimitée par c de telle manière que le parcours dans le sens trigonométrique sur c est dans le sens positif pour c.

4.1 Equivalence des arrangements de cercles dans le plan.

Dans cette section, soient $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ deux arrangements simples,équivalents par un isomorphisme H. On suppose en plus que $\sigma(i) = i, \forall i \in I$ (voir le théorème 3.4).
(Où $\mathcal{C} = (c_i)_{i\in I}$, $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{c}_i)_{i\in I}$, $Card(I) = n \geq 3$, sont deux familles de n cercles distincts dans le plan.)

Remarque 4.1 *On a (car $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ est simple) :*
$$Card(c_i \cap c_j) \in \{O, 2\}, \text{ pour tous } i, j \text{ distincts} \in I.$$

Remarque 4.2 *Soient $M_1, M_2, \ldots, M_t$, $t \geq 4$, t sommets distincts de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ situés sur un cercle c_i . Soient $3 \leq l < t$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq t$. On a:*

1/. Si $(M_1, M_2, \ldots, M_t)$ est positivement (resp. négativement) consécutif, alors $(M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_l})$ est positivement (resp. négativement) consécutif;
2/. Si $(M_1, M_2, \ldots, M_t)$ est consécutif et $(M_{i_1} M_{i_2} \ldots M_{i_l})$ est positivement (resp. négativement) consécutif, alors $(M_1, M_2, \ldots, M_t)$ est positivement (resp. négativement) consécutif;
3/. Si $(M_1 M_2 \ldots M_l)$ est positivement (resp. négativement) consécutif et que $(M_1 M_l M_{l+1} \ldots M_t)$ est positivement (resp. négativement) consécutif, alors $(M_1 M_2 \ldots M_t)$ est positivement (resp. négativement) consécutif.

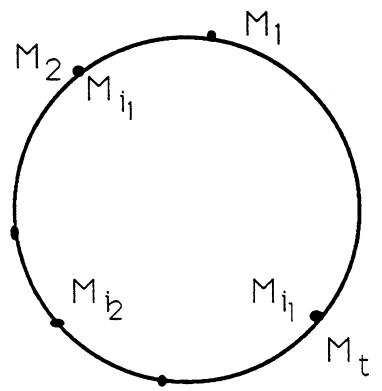


FIGURE 4.1.

Notations. *Soient f une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et C la courbe simple (et fermée) qui délimite f. Soit a une arête de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ qui compose C (c.à.d. que $a \subset C$)*
On dit qu'un parcours sur a est dans le sens positif (resp. négatif) pour C si l'intétieur de C, c.à.d. la partie ouverte bornée du plan délimitée par C, se trouve à gauche (resp. à droite) du parcours.
On rappelle qu'un parcours sur a (ou sur C) est dans le sens positif (resp. négatif) pour f si f se trouve à gauche (resp. à droite) du parcours (voir chapitre 4).

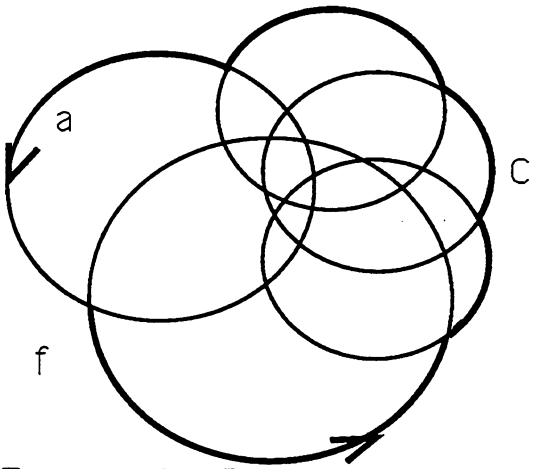


FIGURE 4.2. *Le parcours sur a est dans le sens positif pour C et dans le sens négatif pour la cellule f.*

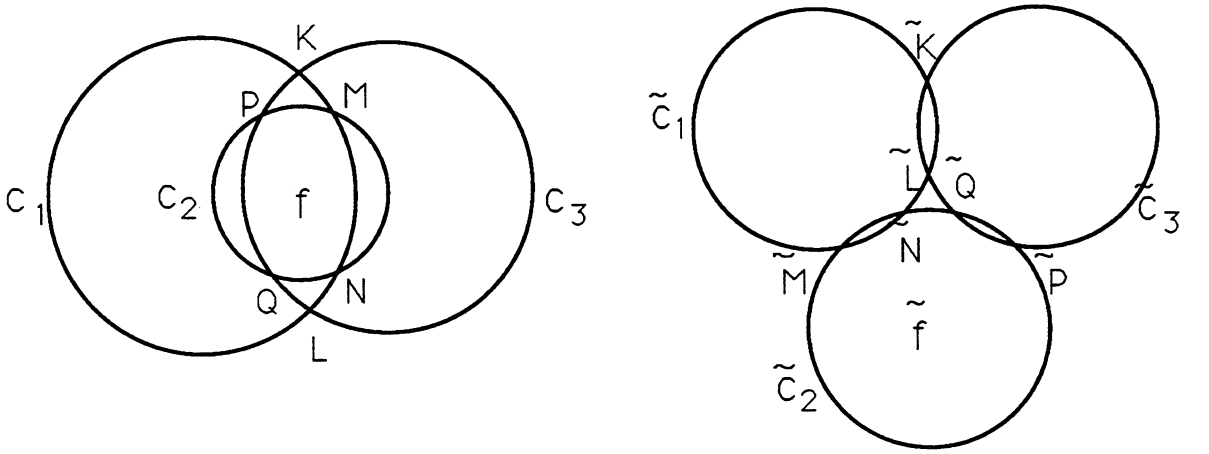
Remarque 4.3 *Soient f une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et C la courbe simple qui délimite f. Soit a une arête qui compose C.*
On a alors (voir figure 4.2):
f est bornée si et seulement si le parcours sur a qui soit dans le sens positif pour C est aussi dans le sens positif pour f.

Définition 4.1.
On dit que l'ordre algébrique des sommets consécutifs sur les cercles est préservé (sous l'isomorphisme H) si pour tout $c_i \in \mathcal{C}$, on a l'équivalence:
$(M_1, \ldots, M_t)$ est positivement consécutif sur c_i si et seulement si
$(H(M_1), \ldots, H(M_t))$ est positivement consécutif sur $\tilde{c}_i$,
où $M_1, \ldots, M_t$ sont tous les sommtes distincts sur c_i;

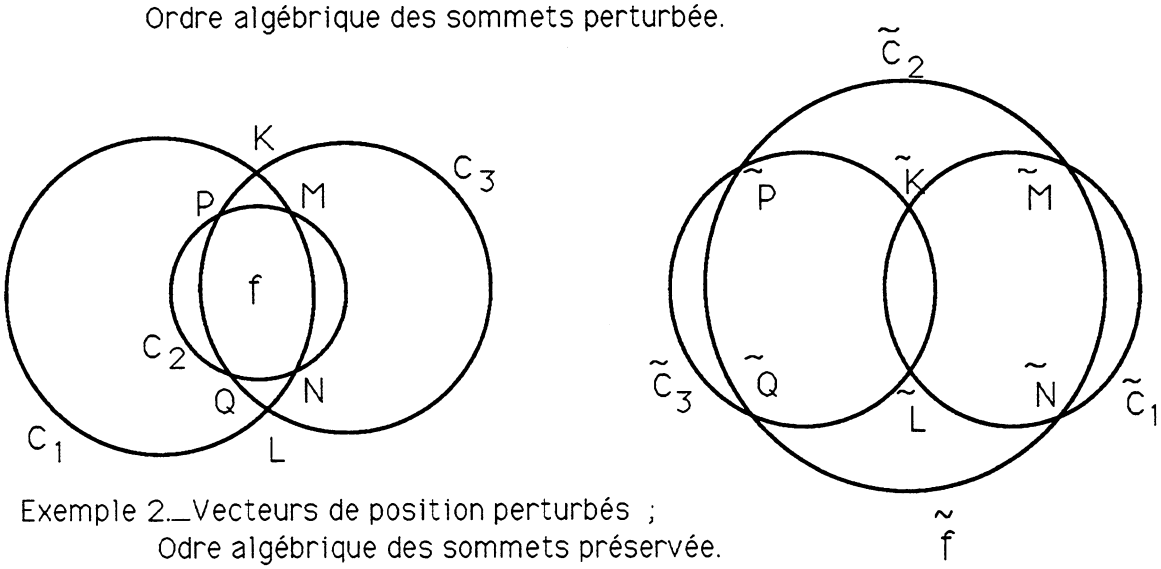
On dit que les vecteurs de position des sommets sont préservés si
$$V_{c_i}(M) = V_{\tilde{c}_i}(H(M)), \ (i \in I), \ (M \text{ sommet de } \mathcal{A}(\mathcal{C})).$$

Remarque 4.4 *L'ordre algébrique des sommets consécutifs sur les cercles est préservé si et seulement si:*
Pour tout $i \in I$ et pour tous M, P, Q trois sommets distincts sur c_i, on a:
(M, P, Q) est positivement consécutif sur c_i si et seulement si
$(H(M), H(P), H(Q))$ est positivement consécutif sur $\tilde{c}_i$.

Quelques exemples d'équivalence entre $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ avec des "géométrie différentes":



Exemple 1._Vecteurs de position perturbés ;
Ordre algébrique des sommets perturbée.



Exemple 2._Vecteurs de position perturbés ;
Odre algébrique des sommets préservée.

FIGURE 4.3.

Dans ces exemples, l'isomorphisme H entre les faces (sommets, arêtes, cellules) est donné par : $H(.) = \tilde{(.)}$. Par exemple, $H(K) = \tilde{K}$, $H(f) = \tilde{f}$ ... Pour les faces qui ne sont pas nommées sur la figure, leurs images à travers H, sont déterminées grâce à leurs sommets sous faces et éventuellement grâce aux cercles qui les portent. Par exemple, l'arête a délimitée par K, L et située sur c_3 a pour image l'arête $\tilde{a}$ située sur $\tilde{c}_3$ et délimitée par $\tilde{K}$, $\tilde{L}$; la cellule g dont les deux sommets sous faces sont K, L a pour image la cellule $\tilde{g}$ qui ait deux sommets sous faces $\tilde{K}$, $\tilde{L}$; ...
On remarque que les géométries de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ sont tout-à-fait différentes. Plus précisément, dans les deux exemples, g (dont les sommets sous faces sont K, L) est une cellule non bornée mais $\tilde{g}$ est bornée; dans l'exemple 2, f est bornée mais

$\tilde{f}$ ne l'est pas.

Pour parer aux inconvénients vus dans les exemples précédents, on va distinguer les deux points d'intersection de deux cercles comme suit:

Notation *Soient c_i, c_j deux cercles qui se coupent en deux points (et il en est ainsi pour $\tilde{c}_i$, $\tilde{c}_j$).*
On note:

$M(c_i, c_j)$ *le point d'intersection situé à gauche du vecteur* $\overrightarrow{O_iO_j}$.

$M(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j)$ *le point d'intersection situé à gauche du vecteur* $\overrightarrow{\tilde{O}_i\tilde{O}_j}$.

Par conséquent, $M(c_j, c_i)$ *se trouve à droite du vecteur* $\overrightarrow{O_jO_i}$ *et* $M(\tilde{c}_j, \tilde{c}_i)$ *se trouve à droite du vecteur* $\overrightarrow{\tilde{O}_j\tilde{O}_i}$.

Remarque 4.5 *Soient c_i, c_j deux cercles qui se coupent en deux points $M_{ij} = M(c_i, c_j)$ et $M_{ji} = M(c_j, c_i)$. Soit M un point situé sur c_i, $M \neq M_{ij}$, $M \neq M_{ji}$. Alors la position relative de M par rapport à c_j détermine l'ordre algébrique de (M_{ij}, M, M_{ji}) sur c_i et vice-versa.*
Concrètement, on a:

$$M \in c_j^+ \iff (M_{ij}, M, M_{ji}) \text{ négativement consćutif sur } c_i \ ;$$

$$M \in c_j^- \iff (M_{ij}, M, M_{ji}) \text{ positivement consćutif sur } c_i \ ;$$

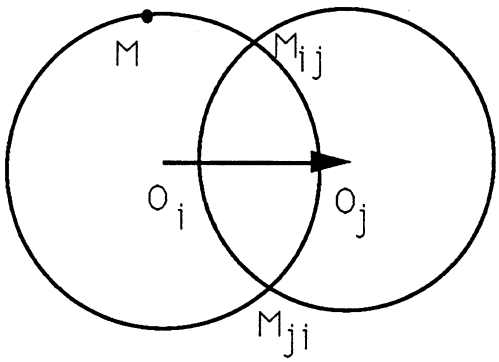


FIGURE 4.4. $M \in c_j^- \iff$
(M_{ij}, M, M_{ji}) *positivement consécutif*

Propriété 4.1. *Supposons que:*

$$H(M_{ij}) = \tilde{M}_{ij}, \quad \forall i, j \in I \text{ tels que } Card(c_i \cap c_j) = 2,$$

où $$M_{ij} = M(c_i, c_j) \text{ et } \tilde{M}_{ij} = M(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j).$$

Alors, l'ordre algébrique des sommets sur les cercles est préservé si et seulement si les vecteurs de position des sommets sont préservés.

Preuve.
Pour ne pas alourdir les notations, dans cette preuve, on notera $V_i(N)$, $V_i(H(N))$

à la place de $V_{c_i}(N)$ $V_{\tilde{c}_i}(H(N))$, $(i \in I)$, (N sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$) et on dira 'positif' (resp. 'négatif') au lieu de 'positivement' (resp. 'négativement') consécutif.
Supposons d'abord que l'ordre algébrique des sommets sur les cercles est préservé.
Soient M un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et $j \in I$. On va démontrer que

$$V_j(M) = V_j(H(M)). \tag{1}$$

Si $M \in c_j$ alors $H(M) \in \tilde{c}_j$. Donc (1) est juste.
Supposons donc que $M \notin c_j$. Soit $i \in I$ tel que $M \in c_i$.

Premier cas: $c_i \cap c_j \neq \emptyset$.
Les ordres de (M_{ij}, M, M_{ji}) et $(\tilde{M}_{ij}, H(M), \tilde{M}_{ji})$ étant pareils, la remarque 4.5 donne que les positions relatives de M par rapport à c_j et de $H(M)$ par rapport à $\tilde{c}_j$ sont pareilles. Donc (1).
Deuxième cas: $c_i \cap c_j = \emptyset$.
$\mathcal{A}(\mathcal{C})$ étant simple, $\exists i_0, \ldots, i_k \in I, k \geq 1$ tels que:
$c_{i_0} = c_i, \quad c_{i_0} \cap c_{i_1} \neq \emptyset, \quad \ldots, \quad c_{i_{k-1}} \cap c_{i_k} \neq \emptyset \quad$ et $\quad c_{i_k} \cap c_j \neq \emptyset$.
On peut toujours supposer que $\quad c_{i_t} \cap c_j = \emptyset$, $(t = 0, \ldots, k-1)$.

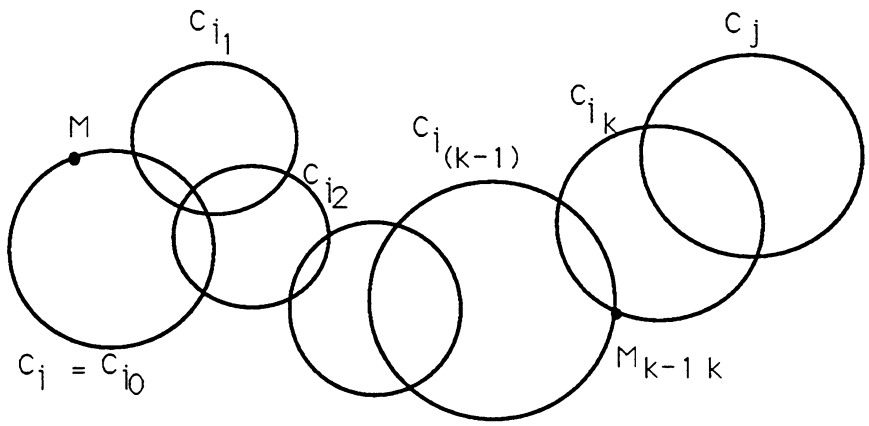


FIGURE 4.5.

Alors c_i et $c_{i_{k-1}}$ (qui peuvent coincider quand $k = 1$) sont tous les deux à l'extérieur ou à l'intérieur de c_j. Donc

$$V_j(M) = V_j(M_{k-1\ k}).$$

D'autre part, $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ étant équivalents, on a aussi (Théorème 3.4):

$$\tilde{c}_{i_0} = \tilde{c}_i, \quad \tilde{c}_{i_0} \cap \tilde{c}_{i_1} \neq \emptyset, \quad \ldots, \quad \tilde{c}_{i_{k-1}} \cap \tilde{c}_{i_k} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{i_k} \cap \tilde{c}_j \neq \emptyset \quad \text{et}$$
$$\tilde{c}_{i_t} \cap \tilde{c}_j = \emptyset \ , \ (t = 0, \ldots, k-1).$$

Donc, de même on a:

$$V_j(H(M)) = V_j(\tilde{M}_{k-1\ k}).$$

Or $M_{k-1\ k} \in c_k$ et $c_k \cap c_j \neq \emptyset$, on doit avoir (premier cas):

$$V_j(M_{k-1\ k}) = V_j(\tilde{M}_{k-1\ k}).$$

D'où $V_j(M) = V_j(H(M))$. Donc (1).

Inversement, supposons que $V_j(M) = V_j(H(M))$, pour tout sommet M de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et pour tout $j \in I$.

D'après la remarque 4.4, on va démontrer que pour tout $i \in I$ et pour tout triplet M, N, P de sommets distincts sur c_i, (M, N, P) a le même ordre algébrique que $(H(M), H(N), H(P))$.
Supposons que (M, N, P) soit positif (si ngatif on échange les noms de N et P).
Soit c_j le cercle coupant c_i en M et soit M' l'autre point d'intersection de c_j et c_i.
Pour fixer les idées, supposons que $M = M_{ij}$ et $M' = M_{ji}$. (Si c'est l'inverse on pourra procéder de façon analogue.)

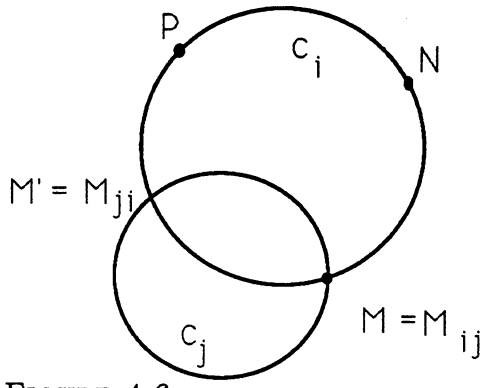


FIGURE 4.6.

(*) Si $P = M_{ji}$ ($\Leftrightarrow H(P) = \tilde{M}_{ji}$) :
On a $(M_{ij}, N, M_{ji}) = (M, N, P)$ positif. Donc N est à l'extérieur du cercle c_j (Remarque 4.5).
Donc $H(N)$ est à l'extérieur du cercle $\tilde{c}_j$ (car $V_j(N) = V_j(H(N))$).
Donc $(\tilde{M}_{ij}, H(N), \tilde{M}_{ji})$ est positif (Remarque 4.5).
C'est-à-dire que $(H(M), H(N), H(P))$ est positif.

(**) De même si $N = M_{ji}$ (équivalent à $H(N) = \tilde{M}_{ji}$).

(***) Supposons donc $M_{ji} \neq P$ et $M_{ji} \neq N$.

Premier cas: N et P se trouvent de deux côtés de c_j:
(M, N, P) étant positif, on doit avoir N à l'extérieur de c_j et P à l'intérieur de c_j.
(En effet, si par l'absurde N est à l'intérieur de c_j, on a (M_{ij}, N, M_{ji}) négatif.
Donc (M_{ij}, M_{ji}, N) positif.
Or (M_{ij}, N, P) est positif, on a (M_{ij}, M_{ji}, N, P) positif (Remarque 4.1). Donc (M_{ij}, M_{ji}, P) positif (Remarque 4.1).
Donc (M_{ij}, P, M_{ji}) négatif. Donc P est à l'intérieur de c_j. C'est absurde.)

Ceci implique que $H(N)$ à l'extérieur de $\tilde{c}_j$ et $H(P)$ à l'intérieur de $\tilde{c}_j$.
Donc $(\tilde{M}_{ij}, H(N), \tilde{M}_{ji})$ positif et $(\tilde{M}_{ij}, H(P), \tilde{M}_{ji})$ négatif.
C'est-à-dire que $(\tilde{M}_{ij}, H(N), \tilde{M}_{ji})$ positif et $(\tilde{M}_{ij}, \tilde{M}_{ji}, H(P))$ positif.
Donc $(\tilde{M}_{ij}, H(N), \tilde{M}_{ji}H(P))$ positif (Remarque 4.1).
Donc $(\tilde{M}_{ij}, H(N), H(P))$ positif (Remarque 4.1).

Deuxième cas: N et P se trouvent d'un même côté de c_j:
Si N et P sont à l'extérieur de c_j:
P étant à l'extérieur de c_j on a (M_{ij}, P, M_{ji}) positif. Or (M_{ij}, N, P) est positif.
Donc (M_{ij}, N, P, M_{ji}) est positif (Remarque 4.1) et donc consécutif.
Ce qui entraîne que $(\tilde{M}_{ij}, H(N), H(P), \tilde{M}_{ji})$ est consécutif (Théorème 3.4).
D'autre part, P étant à l'extérieur de c_j, $H(P)$ est à l'extérieur de $\tilde{c}_j$.
On a donc $(\tilde{M}_{ij}, H(P), \tilde{M}_{ji})$ positif.
On conclut enfin que $(\tilde{M}_{ij}, H(N), H(P), \tilde{M}_{ji})$ est positif
Si N et P sont à l'intérieur de c_j: de façon analogue. ∎

Corollaire 4.2. *Supposons qu'on ait les hypothèses de la propriété 4.1 et que les vecteurs de position des faces soient préservés.*
Soit f une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. Soit a une arête sous face de f, a délimitée par deux sommets P, Q.
Alors on a:
Le parcours sur a dans le sens de P à Q est positif (resp. négatif) pour f si et seulement si le parcours sur $H(a)$ dans le sens $H(P)$ à $H(Q)$ est positif (resp. négatif) pour $H(f)$.

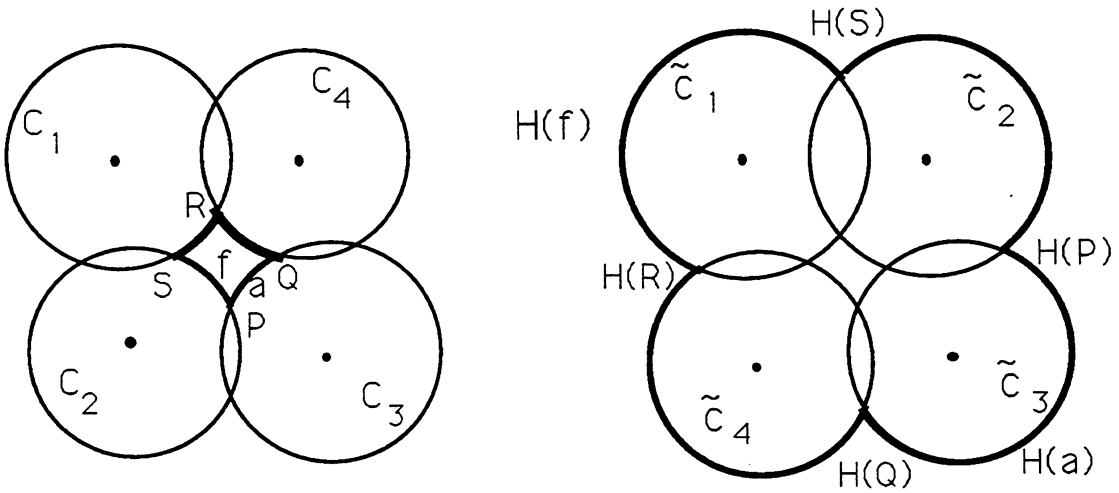


FIGURE 4.7.

Preuve. Soit $c_i \in \mathcal{C}$ tel que $a \subset c_i$. Supposons qu'il y ait sur c_i un troisième sommet M différent de P et de Q (sinon on prend une autre arête a sous face de f).

Alors d'après la propriété 4.1, les ordres algébriques de (P, Q, M) sur c_i et de $(H(P), H(Q), H(M))$ sur $\tilde{c}_i$ sont les mêmes. En particulier, les orientations des arcs a (de P à Q) pour c_i et $H(a)$ (de $H(P)$ à $H(Q)$) pour $\tilde{c}_i$ sont pareilles (voir figure 4.8).

D'autre part, $V_i(f) = V_i(H(f))$, ce qui signifie que la position de f par rapport à c_i est pareille que celle de $H(f)$ par rapport à $\tilde{c}_i$.

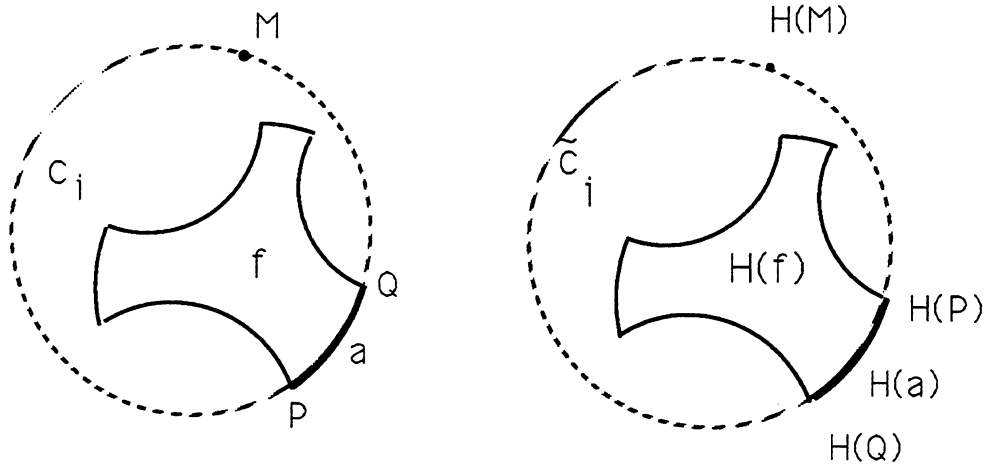


FIGURE 4.8.

(c.à.d. que $f \subset c_i^+$ (resp. c_i^-) $\Leftrightarrow$ $H(f) \subset \tilde{c}_i^+$ (resp. $\tilde{c}_i^-$)).

On en déduit que la position de f par rapport à l'arc orienté a (de P à Q) est pareille que celle de $H(f)$ par rapport à l'arc orienté $H(a)$ (de $H(P)$ à $H(Q)$). ∎

On va chercher maintenant une condition suffisante pour que $H(f)$ soit bornée si et seulement si f est bornée. On commence par deux lemmes suivants, dont on peut trouver la démonstration dans l'annexe du chapitre Chapitre 4 (seulement pour le premier lemme, la preuve de l'autre étant analogue):

Lemme 4.3. *Soit C une courbe simple fermée d'intétieur U (c.à .d. que U est la partie ouverte bornée du plan et délimitée par C). Supposons que C est composée successivement des arêtes et des sommets de $\mathcal{A}(C)$: a_1, M_1, a_2, M_2, ..., a_k, M_k, $k \geq 3$.*
Supposons en plus que
a/. Pour tous i, j distincts, $i, j = 1, \ldots, k$, a_i et a_j ne soient pas sur un même cercle. (Et pour ne pas alourdir les termes, on suppose que c_i est le cercle contenant l'arête a_i, $(i = 1, \ldots k)$),
b/. $U \cap c_i^+ = \emptyset$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Alors on a:
1/. La ligne polygonale $C' = O_1O_2 \ldots O_kO_1$ est une courbe simple et fermée.
2/.
Le parcours sur C : $M_1 \to M_2 \to \ldots \to M_k$ est positif (resp. négatif) pour C
Si et seulement si
le parcours sur C' : $O_1 \to O_2 \to \ldots \to O_k$ est positif (resp. négatif) pour C'.

Remarque 4.6 *"la ligne polygonale $C' = O_1O_2 \ldots O_kO_1$ est une courbe simple et fermée " exige d'abord que $O_i \neq O_j$, $(i \neq j)$.*

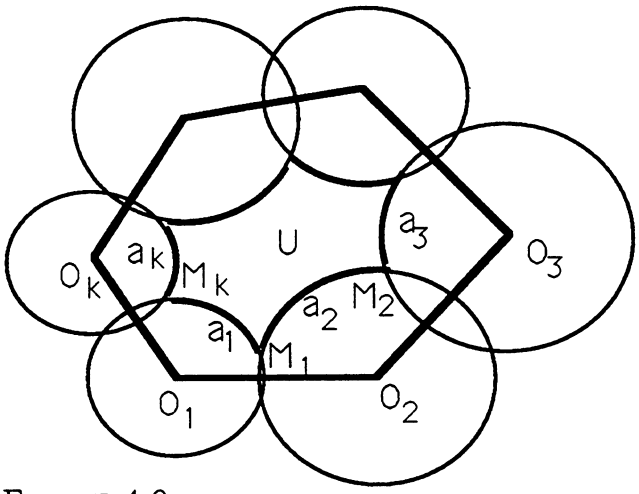


FIGURE 4.9.

Lemme 4.4. *Soit C une courbe simple fermée d'extétieur V (c.à .d. que V est la partie ouverte non bornée du plan et délimitée par C). Supposons que C est composée successivement des arêtes et des sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$: a_1, M_1, a_2, M_2, ..., a_k, M_k, $k \geq 3$. Supposons en plus que*
a/. Pour tous i, j distincts, $i, j = 1, \ldots, k$, a_i et a_j ne sont pas sur un même cercle. (Et pour ne pas alourdir les termes, on suppose que c_i est le cercle contenant l'arête a_i, $(i = 1, \ldots k)$),
b/. $V \cap c_i^+ = \emptyset \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$.
Alors on a:
1/. La ligne polygonale $C' = O_1 O_2 \ldots O_k O_1$ est une courbe simple et fermée.
2/.
Le parcours sur C : $M_1 \to M_2 \to \ldots \to M_k$ est positif (resp. négatif) pour C si et seulement si
le parcours sur C' : $O_1 \to O_2 \to \ldots \to O_k$ est positif (resp. négatif) pour C'.

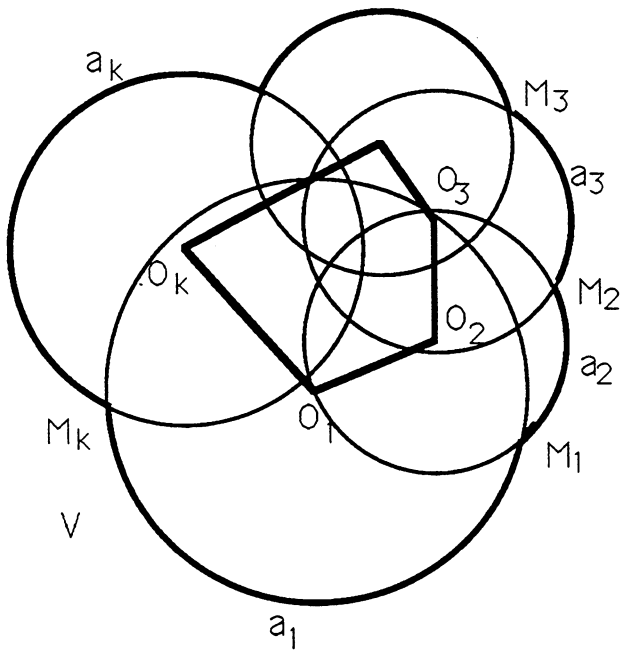


FIGURE 4.10.

Définition 4.2.
On dit que les centres $(O_i)_{i\in I}$ *influent sur les centres* $(\tilde{O}_i)_{i\in I}$ *si:*
Pour tout $i_1, i_2, \cdots, i_k$ *distincts* $\in I$, $k \geq 3$, *on a les propriétés suivantes:*
1/.
Si la ligne polygonale $C' = O_{i_1}O_{i_2}\cdots O_{i_k}O_{i_1}$ *forme une courbe simple et fermée, alors*
la ligne polygonale $\tilde{C}' = \tilde{O}_{i_1}\tilde{O}_{i_2}\cdots\tilde{O}_{i_k}\tilde{O}_{i_1}$ *forme une courbe simple et fermée;*
2/.
Si le parcours sur C' : $O_{i_1} \to O_{i_2} \to \ldots \to O_{i_k}$ *est positif (resp. négatif) pour* C', *alors*
le parcours sur $\tilde{C}'$: $\tilde{O}_{i_1} \to \tilde{O}_{i_2} \to \ldots \to \tilde{O}_{i_k}$ *est positif (resp. négatif) pour* $\tilde{C}'$.

Propriété 4.5. *Supposons que, pour tout* i, j, p *distincts* $\in I$, *on ait:*

$$O_p \text{ est à gauche du vecteur } \overrightarrow{O_iO_j} \Rightarrow \tilde{O}_p \text{ est à gauche du vecteur } \overrightarrow{\tilde{O}_i\tilde{O}_j},$$

$$O_p \text{ est à droite du vecteur } \overrightarrow{O_iO_j} \Rightarrow \tilde{O}_p \text{ est à droite du vecteur } \overrightarrow{\tilde{O}_i\tilde{O}_j} \quad ;$$

Alors les centres $(O_i)_{i\in I}$ *influent sur les centres* $(\tilde{O}_i)_{i\in I}$.
(Un point C *se trouve à gauche (resp. à droite) d'un vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *si* $(y_B - y_A)(x_C - x_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) > 0$ *(resp.* < 0*).*)

Afin de démontrer la propriété 4.5, on fait la remarque suivante:
Remarque 4.7
Soit C *une courbe simple fermée d'intérieur* U. *Soient* M, N *deux points distincts situés sur* C. *Notons* a_1, a_2 *les deux arcs de* C *délimités par* M *et* N.
Soit a *une courbe simple d'extrémités* M, N *telle que* $a \cap C = \{M, N\}$.
Notons $C_1 = a_1 \cup a \cup \{M, N\}$ *et* $C_2 = a_2 \cup a \cup \{M, N\}$.
On a alors:
$a \subset U \iff$ *Le parcours sur* a *de* $M \to N$ *est positif (resp. négatif) pour* C_1 *et négatif (resp. positif) pour* C_2.
En plus, s'il en est ainsi, soit a' *un arc sur* C, a' *délimité par deux points distincts* P, Q *tel que* $a' \subset C_i$ ($i = 1$ *ou* $i = 2$). *On a:*
Le parcours sur a' *de* $P \to Q$ *est positif (resp. négatif) pour* $C_i \iff$ *Ce parcours est positif (resp. négatif) pour* C.

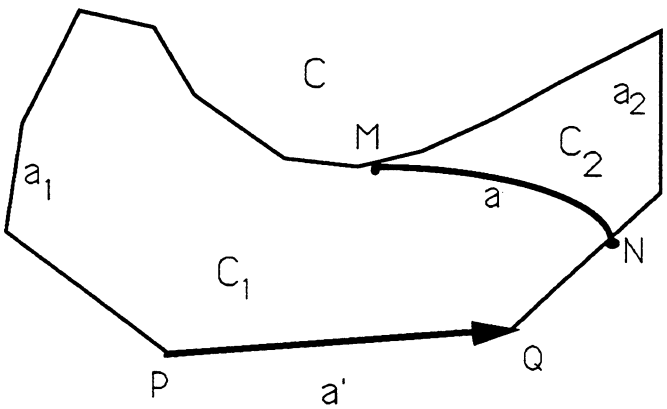


FIGURE 4.11.

Preuve de la propriété 4.5
Supposons donc que $C = O_1O_2 \cdots O_kO_1$ est une courbe simple et fermée ($k \geq 3$). Prenons d'abord deux segments consécutifs $\tilde{O}_i\tilde{O}_j$ et $\tilde{O}_j\tilde{O}_q$ ($i = j-1$ et $q = j+1$). On va démontrer que $]\tilde{O}_i, \tilde{O}_j[\cap]\tilde{O}_j, \tilde{O}_q[= \emptyset$.

Premier cas: Si O_i, O_j, O_q sont alignés.
O_j doit se trouver au milieu. Prenons un point O_l qui n'est pas sur la droite d_{ij} passant par ces trois points.
Joignons O_lO_j. 0_i et O_p sont de deux côtés du vecteur $\overrightarrow{O_lO_j}$. L'hypothèse a donne que $\tilde{O}_i$ et $\tilde{O}_p$ sont de deux côtés du vecteur $\overrightarrow{\tilde{O}_l\tilde{O}_j}$.

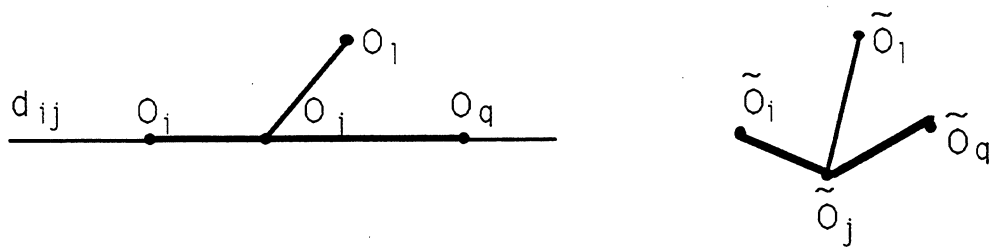


FIGURE 4.12.

Donc $]\tilde{O}_i, \tilde{O}_j[\cap]\tilde{O}_j, \tilde{O}_q[= \emptyset$.

Deuxième cas: Si O_i, O_j, O_q ne sont pas alignés.
$\Rightarrow$ $\tilde{O}_i$, $\tilde{O}_j$, $\tilde{O}_q$ ne sont pas alignés. Donc $]\tilde{O}_i, \tilde{O}_j[\cap]\tilde{O}_j, \tilde{O}_q[= \emptyset$.

Prenons ensuite deux segments non consécutifs $\tilde{O}_i\tilde{O}_j$ et $\tilde{O}_p\tilde{O}_q$, c.à.d. que
$$[O_i, O_j] \cap [O_p, O_q] = \emptyset.$$
On va démontrer que $[\tilde{O}_i, \tilde{O}_j] \cap [\tilde{O}_p, \tilde{O}_q] = \emptyset$.

Premier cas: Si tous les quatres points O_i, O_j,O_p, O_q sont alignés.
Supposons qu'ils sont dans l'ordre: O_i O_j O_p O_q. Prenons un point O_l qui ne soit pas sur la droite d_{ij} passant par ces points.

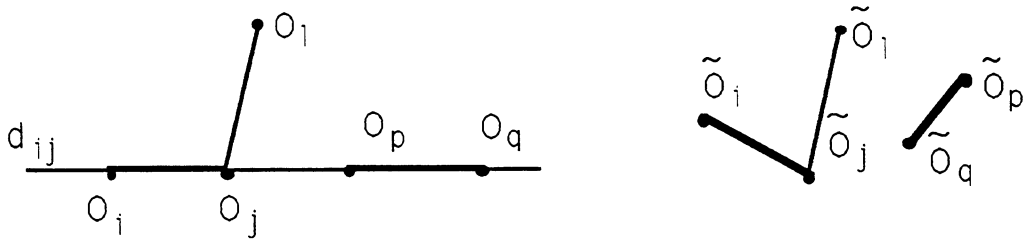


FIGURE 4.13.

Joignons O_l et O_j. O_i se trouve d'un côté du vecteur $\overrightarrow{O_lO_j}$ et O_p, O_q se trouvent de l'autre côté. Donc $\tilde{O}_i$ se trouve d'un côté du vecteur $\overrightarrow{\tilde{O}_l\tilde{O}_j}$ et $\tilde{O}_p$, $\tilde{O}_q$ se trouvent de l'autre côté. Donc $]\tilde{O}_i, \tilde{O}_j[\cap]\tilde{O}_p, \tilde{O}_q[= \emptyset$.

Deuxième cas: Si seulement trois de ces points O_i, O_j,O_p, O_q sont alignés.
On suppose que O_i, O_j,O_q le sont et dans l'ordre O_i, O_j,O_q. Joignons O_p et O_j. O_i et O_q se trouvent de deux côté du vecteur $\overrightarrow{O_pO_j}$. Donc $\tilde{O}_i$ et $\tilde{O}_q$ se trouvent de deux côté du vecteur $\overrightarrow{\tilde{O}_p\tilde{O}_j}$.

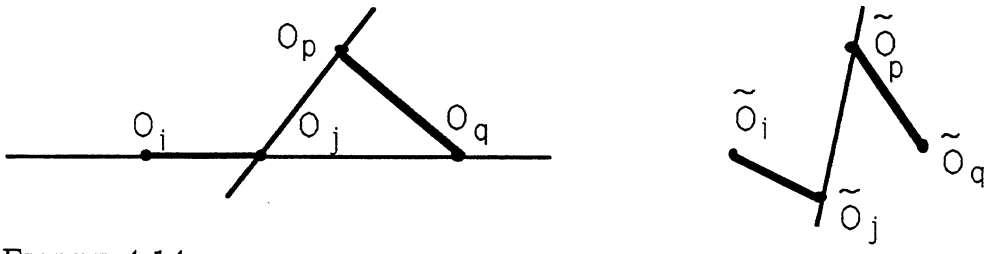


FIGURE 4.14.

Donc $]\tilde{O}_i, \tilde{O}_j[\cap]\tilde{O}_p, \tilde{O}_q[= \emptyset$.

Troisième cas: S'il n'y a pas trois parmi ces quatre points O_i, O_j, O_p, O_q qui sont alignés.
On doit avoir: soit O_i, O_j sont d'un même côté du vecteur $\overrightarrow{O_pO_q}$, soit O_p, O_q sont d'un même côté du vecteur $\overrightarrow{O_iO_j}$ (sinon $]O_i, O_j[\cap]O_p, O_q[\neq \emptyset$).
Supposons donc que O_i, O_j sont d'un même côté du vecteur $\overrightarrow{O_pO_q}$. $\Rightarrow$ $\tilde{O}_i$, $\tilde{O}_j$ sont d'un même côté de $\overrightarrow{\tilde{O}_p\tilde{O}_q}$. Donc $]\tilde{O}_i, \tilde{O}_j[\cap]\tilde{O}_p, \tilde{O}_q[= \emptyset$.
De même si O_p, O_q sont d'un même côté du vecteur $\overrightarrow{O_iO_j}$.
Donc $\tilde{C} = \tilde{O}_1\tilde{O}_2 \cdots \tilde{O}_k\tilde{O}_1$ forme un polygone simple.

Démontrons ensuite par récurrence sur le nombre k que si le parcours sur C : $O_1 \to O_2 \to \cdots \to O_k \to O_1$ est positif pour C, le parcours sur $\tilde{C}$: $\tilde{O}_1 \to \tilde{O}_2 \to \cdots \to \tilde{O}_k \to \tilde{O}_1$ est positif pour $\tilde{C}$.
Pour $k = 3$, c'est évident.
Supposons que cela est vrai pour tout k tel que $3 \leq k \leq K$, où K est un entier ≥ 3. On va le démontrer pour $k = K + 1$.
Pour cela, on n'a qu'à démontrer que si $\overrightarrow{O_1O_2}$ (c.à.d. que le parcours sur le segment $[O_1, O_2]$, de O_1 à O_2) est positif pour C, $\overrightarrow{\tilde{O}_1\tilde{O}_2}$ est positif pour $\tilde{C}$.
Prenons O_p, O_q tels que $]O_p, O_q[$ soit à l'intérieur de la courbe C. C est alors coupée en deux courbes simples et fermées C_1 et C_2. On va démontrer que $]\tilde{O}_p, \tilde{O}_q[$ est à l'intérieur de la courbe $\tilde{C}$.
Supposons que $\overrightarrow{O_pO_q}$ est dans le sens positif de C_1 et donc dans le sens négatif pour C_2 (Remarque 4.7). Alors l'hypothèse de récurrence donne que $\overrightarrow{\tilde{O}_p\tilde{O}_q}$ est positif pour $\tilde{C}_1$ et donc négatif de $\tilde{C}_2$. Donc la remarque 4.7 donne que $]\tilde{O}_p, \tilde{O}_q[$ soit à l'intérieur de la courbe $\tilde{C}$.
Supposons enfin que $\overrightarrow{O_1O_2}$ est positif pour C. On a alors (Remarque 4.7): $\overrightarrow{O_1O_2}$ est positif pour C_i ($i = 1$ si $[O_1, O_2] \subset C_1$, $i = 2$ si $[O_1, O_2] \subset C_2$).

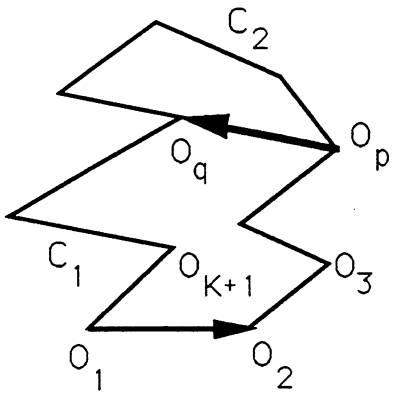


FIGURE 4.15.

L'hypothèse de récurrence nous donne que $\overrightarrow{\tilde{O}_1\tilde{O}_2}$ est positif pour $\tilde{C}_i$. Or $]\tilde{O}_p, \tilde{O}_q[$ est à l'intérieur de la courbe $\tilde{C}$, la remarque 4.7 donne que $\overrightarrow{\tilde{O}_1\tilde{O}_2}$ est positif pour $\tilde{C}$. ∎

Remarque 4.8 *Soit $i_0 \in I$ tel que $\mathcal{A}(\mathcal{C}_{i_0})$ soit simple (et donc $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}}_{i_0})$ est simple), où* $\mathcal{C}_{i_0} = \mathcal{C} \setminus \{c_{i_0}\}$ *et* $\tilde{\mathcal{C}}_{i_0} = \tilde{\mathcal{C}} \setminus \{\tilde{c}_{i_0}\}$.

Alors:

1/. Pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_{i_0})$, il existe $f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$, $k \geq 1$, tels que $f = \bigcup_{i=1}^{k} f_i$,

2/. Pour tout $f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$, $k \geq 1$, on a:

$$\bigcup_{i=1}^{k} f_i \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_{i_0}) \iff \bigcup_{i=1}^{k} H(f_i) \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}}_{i_0}),$$

3/. H_{i_O} donné ci-dessous est bien défini et est un isomorphisme entre $\mathcal{A}(\mathcal{C}_{i_0})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}}_{i_0})$:

$$H_{i_0}(f) = \bigcup_{i=1}^{k} H(f_i), \quad \forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_{i_0}),\ \forall f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C}),\ f = \bigcup_{i=1}^{k} f_i.$$

Théorème 4.6. *Supposons que:*
a/. $H(M_{ij}) = \tilde{M}_{ij}$, *pour tous $i, j \in I$ tels que $Card(c_i \cap c_j) = 2$,*
où $M_{ij} = M(c_i, c_j)$ *et* $\tilde{M}_{ij} = M(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j)$.
b/. Les vecteurs de position des faces soient préservés,
c/. Les centres $\{O_i\}_{i \in I}$ influent les centres $\{\tilde{O}_i\}_{i \in I}$.

Alors,
Soit f une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. On a:

$$f \text{ est bornée} \implies H(f) \text{ est bornée.}$$

Preuve. Soit f une cellule bornée de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. Soit C la courbe simple, fermée qui

délimite f, C est composée successivement, et dans le sens positif pour C, par des arêtes et sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$: a_1, M_1, a_2, M_2, $\cdots$, a_k, M_k.
S'il existe $i \in I$ tel que f est à l'intérieur de c_i, alors $H(f)$ se trouve à l'intérieur de $\tilde{c}_i$ (car $V_i(f) = V_i(H(f))$) . Donc $H(f)$ est bornée.

Supposons donc que f se trouve à l'extérieur de tous les cercles c_i, $i \in I$. f Etant bornée, elle coincide avec l'intérieur U de la courbe C et $k \geq 3$.
Grâce à la remarque 4.8, on peut supposer que a_i, a_j distincts de C ne se trouvent pas sur un même cercle. Pour ne pas alourdir les termes, désignons le cercle contenant a_j par c_j, $(j = 1, \cdots, k)$.
Supposons par l'absurde que $H(f)$ n'est pas bornée, $H(f)$ coincide alors avec l'extérieur $\tilde{V}$ de la courbe fermée $\tilde{C}$ composée successivement, et dans le sens positif pour $H(f)$ (Corollaire 4.2), par $H(a_1)$, $H(M_1)$,..., $H(a_k)$, $H(M_k)$.
C-à-d. que le parcours sur $\tilde{C}$: $H(M_1) \to H(M_2) \to \cdots \to H(M_K)$ est négatif pour $\tilde{C}$ (car $H(f) = \tilde{V}$).

D'après le lemme 4.3, le parcours $O_1 \to O_2 \to \cdots \to O_k$ positif pour la courbe polygonale et fermée $C' = O_1O_2 \cdots O_kO_1$.
Les centres $\{O_i\}$ influant sur $\{\tilde{O}_i\}$ (l'hypothèse c./), le parcours $\tilde{O}_1 \to \tilde{O}_2 \to \cdots \to \tilde{O}_k$ est positif pour la courbe polygonale et fermée $\tilde{C}' = \tilde{O}_1\tilde{O}_2 \cdots \tilde{O}_k\tilde{O}_1$.
Donc, d'après le lemme 4.4:
Le parcours $H(M_1) \to H(M_2) \to \cdots \to H(M_K)$ est positif de $\tilde{C}$. C'est absurde.
∎

4.2 Perturbation des cercles et préservation des Arrangements.

Commençons cette section par la propriété 4.7 et le théorème 4.8 suivants qui nous permettent de travailler seulement avec les vecteurs de position des sommets de l' arrangement dans le but de calculer des bornes de perturbation ϵ (pour les centres) et δ (pour les rayons).

Propriété 4.7. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ soit simple et que $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ vérifie:*
$$Card(\tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j) = Card(c_i \cap c_j), \text{ pour tous } i, j \text{ distincts de } I.$$
(Par conséquent, $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ est simple)
Posons $H_0 : \mathcal{A}_0(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\tilde{\mathcal{C}})$
$$M_{ij} \longmapsto \tilde{M}_{ij}, \ \forall\, i, j \text{ tels que } Card(c_i \cap c_j) = 2,$$

On a alors:
H_0 préserve les vecteurs de position des sommets si et seulement si H_0 préserve l'ordre algébrique des sommets sur les cercles;

Preuve. Identique à la preuve de la propriété 4.1

Théorème 4.8. *Supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ soit simple et que $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ vérifie:*
$$Card(\tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j) = Card(c_i \cap c_j), \ \forall\, i, j \text{ distincts} \in I.$$
Supposons en plus que H_0 préserve les vecteurs se position des sommets.
(Voir la définition de H_0 dans la propriété 4.7)

Alors il existe un unique isomorphisme H unique entre $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ qui vérifie:

$H(M_{ij}) = \tilde{M}_{ij}$, *pour tous* i, j *tels que* $Card(c_i \cap c_j) = 2$;
H *préserve les vecteurs de position des faces*
$(V_{c_i}(f) = V_{\tilde{c}_i}(H(f)),\ (f \in \mathcal{A}(\mathcal{C})),\ (i \in I))$.

Preuve. Corollaire direct des théorèmes 3.5 et 3.13. ∎

Dans cette section 4.2, soit $\mathcal{C} = (c_i)_{i \in I}$, $I = \{1, ..., n\}$, une famille de n cercles distincts dans le plan telle que l' arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ soit simple.

Lemme 4.9. *Prenons* $\epsilon > 0$ *et* $\delta > 0$ *tels que:*
$2(\epsilon + \delta) < Min(|\ (r_i + r_j) - O_iO_j\ |\ ,\ |\ |r_i - r_j| - O_iO_j\ |)$, *pour tous* i, j *distincts* $\in I$.

On a alors: $\forall \tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{c}_i)_{i \in I}$,
$\tilde{O}_iO_i \leq \epsilon$ *et* $|\tilde{r}_i - r_i| \leq \delta$, $\forall\, i \in I \implies Card(\tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j) = Card(c_i \cap c_j)$, $(i, j$ *distincts* $\in I)$.

Preuve.
On vérifie facilement que :

$$O_iO_j - 2\epsilon \leq \tilde{O}_i\tilde{O}_j \leq O_iO_j + 2\epsilon \tag{1}$$
$$|R_i + R_j| + 2\delta \leq |\tilde{R}_i + \tilde{R}_j| \leq |R_i + R_j| + 2\delta \tag{2}$$
$$|R_i - R_j| - 2\delta \leq |\tilde{R}_i - \tilde{R}_j| \leq |R_i - R_j| + 2\delta \tag{3}$$

Si $Card\ (c_i \cap c_j) = 2$, c.à.d. que $|R_i - R_j| < O_iO_j < |R_i + R_j|$:
L'hypothèse sur ϵ et δ donne:

$$2(\epsilon + \delta) < O_iO_j - |R_i - R_j| \quad \text{et} \quad 2(\epsilon + \delta) < (r_i + r_j) - O_iO_j.$$

C.à.d

$$|R_i - R_j| + 2\delta < O_iO_j - 2\epsilon \text{ et } O_iO_j + 2\epsilon < |R_i + R_j| - 2\delta.$$

D'où (1), (2) ,(3) nous donnent :

$$|\tilde{R}_i - \tilde{R}_j| < \tilde{O}_i\tilde{O}_j \text{ et } \tilde{O}_i\tilde{O}_j < |\tilde{R}_i + \tilde{R}_j|\ ,$$

ce qui signifie que: $Card(\tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j) = 2$.

Les raisonnements seront analogues dans les cas où $Card(c_i \cap c_j) = 0$ et l'un est à l'intérieur de l'autre (c.à.d. $O_iO_j < |R_i - R_j|$) ; $Card\ (c_i \cap c_j) = 0$ et l'un est à l'extérieur de l'autre. ∎

Corollaire 4.10. *Soient* c *un cercle de centre* O *et de rayon* $r > 0$ *et* M *un point de* R^2.
Prenons $\epsilon,\ \delta,\ \gamma > 0$ *vérifiant:* $\epsilon + \delta + \gamma < |OM - r|$.
Alors pour tout cercle $\tilde{c}$ *de centre* $\tilde{O}$ *de rayon* $\tilde{r} > 0$ *et* $\forall \tilde{M} \in R^2$,*on peut affirmer que:*
Si $\tilde{O}O \leq \epsilon$, $|\ \tilde{r} - r| \leq \delta$ *et* $\tilde{M}M \leq \gamma$, *alors la position relative de* $\tilde{M}$ *par rapport à* $\tilde{c}$ *est pareille que celle de* M *par rapport à* c.

Preuve. Corollaire du lemme 4.9

Dans la suite, la quantité γ dans le corollaire 4.10 précédent est en fait dépendante de ϵ et δ car elle représente l'ecart de $\tilde{M}_{ij}$ à M_{ij} quand $\tilde{O}_iO_i \leq \epsilon$, $\tilde{O}_jO_j \leq \epsilon$, $|\tilde{r}_i - r_i| \leq \delta$ et $|\tilde{r}_j - r_j| \leq \delta$. Concrètement, on a:

Lemme 4.11. *Soient $i, j \in I$ tels que $Card(c_i \cap c_j) = 2$. Posons: $a_{ij} = O_iO_j$. Soient ϵ et δ positifs tels que $\epsilon < a_{ij}/4$. Posons:*

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(\epsilon,\delta) = \ & \epsilon\,[2 + \frac{4|r_i^2 - r_j^2|}{a_{ij}^2} + \frac{4}{a_{ij}}\sqrt{r_i^2 - \frac{1}{4}(a_{ij} + \frac{r_i^2 - r_j^2}{a_{ij}})^2}\ ] + \frac{2\delta}{a_{ij}}(r_i + rj + \delta) \\ & + \sqrt{\epsilon}\ (1 + 2\frac{|r_i^2 - r_j^2|}{a_{ij}^2})\ \sqrt{(a_{ij} + \epsilon)}\ + \\ & + \sqrt{\delta}\ [1 + \frac{2}{a_{ij}}\sqrt{|r_i^2 - r_j^2| + \delta(r_i + r_j + \delta)}\ ]\ \sqrt{(r_i + r_j + \delta)}.\end{aligned}$$

Supposons en plus que $Card(\tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j) = 2$. On a alors:

$$\tilde{O}_iO_i \leq \epsilon,\ \tilde{O}_jO_j \leq \epsilon,\ |\tilde{r}_i - r_i| \leq \delta,\ |\tilde{r}_i - r_i| \leq \delta \implies \tilde{M}_{ij}M_{ij} \leq \delta_{ij}(\epsilon,\delta)$$

Preuve. Ecrivons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_{ij}} &= \overrightarrow{OO_i} + \frac{1}{2}\,k_{ij}\,\overrightarrow{O_iO_j} + h_{ij}\,\vec{n}_{ij}, \\ \overrightarrow{O\tilde{M}_{ij}} &= \overrightarrow{O\tilde{O}_i} + \frac{1}{2}\,\tilde{k}_{ij}\,\overrightarrow{\tilde{O}_i\tilde{O}_j} + \tilde{h}_{ij}\,\vec{\tilde{n}}_{ij},\end{aligned}$$

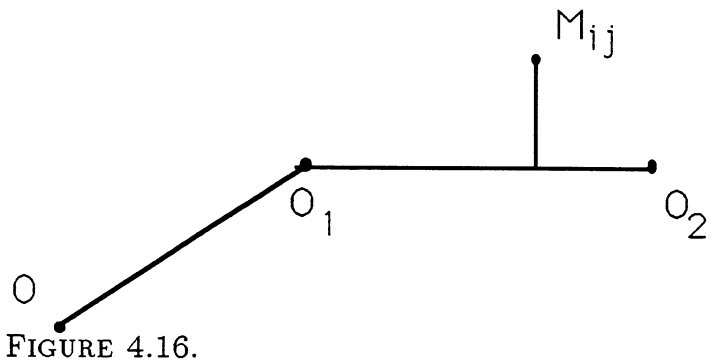


FIGURE 4.16.

où

$$k_{ij} = 1 + \frac{r_i^2 - r_j^2}{a_{ij}^2}\ ,\ \tilde{k}_{ij} = 1 + \frac{\tilde{r}_i^2 - \tilde{r}_j^2}{\tilde{a}_{ij}^2}\ ;$$

$$h_{ij} = \sqrt{\frac{r_i^2 + r_j^2}{2} - \frac{a_{ij}^2}{4} - \frac{(r_i^2 - r_j^2)^2}{4\,a_{ij}^2}}\ ,\ \tilde{h}_{ij} = \sqrt{\frac{\tilde{r}_i^2 + \tilde{r}_j^2}{2} - \frac{\tilde{a}_{ij}}{4} - \frac{(\tilde{r}_i^2 - \tilde{r}_j^2)^2}{4\,\tilde{a}_{ij}^2}};$$

$$\vec{n}_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}\,(y_{O_i} - y_{O_j}, x_{O_j} - x_{O_i})\ ,\ \vec{\tilde{n}}_{ij} = \frac{1}{\tilde{a}_{ij}}\,(y_{\tilde{O}_i} - y_{\tilde{O}_j}, x_{\tilde{O}_j} - x_{\tilde{O}_i});$$

et

$$a_{ij} = \|\overrightarrow{O_iO_j}\|\ ,\ \tilde{a}_{ij} = \|\overrightarrow{\tilde{O}_i\tilde{O}_j}\|.$$

Supposons maintenant que

$$O_i\tilde{O}_i \leq \epsilon \ , \ O_j\tilde{O}_j \leq \epsilon;$$
$$|r_i - \tilde{r}_i| \leq \delta \ , \ |r_j - \tilde{r}_j| \leq \delta.$$

On calcule facilement dans l'ordre cité les majorations suivantes:

1/. $$\|\overrightarrow{O_iO_j} - \overrightarrow{\tilde{O}_i\tilde{O}_j}\| \leq 2\,\epsilon \ , \ |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| \leq 2\epsilon \ ;$$

2/. $$|a_{ij}^2 - \tilde{a}_{ij}^2| \leq 4\epsilon\,(a_{ij} + \epsilon) \ ;$$

3/. $$|(r_i^2 - r_j^2) - (\tilde{r}_i^2 - \tilde{r}_j^2)| \leq 2\,\delta(r_i + r_j + \delta) \ ;$$
$$|(r_i^2 + r_j^2) - (\tilde{r}_i^2 + \tilde{r}_j^2)| \leq 2\,\delta(r_i + r_j + \delta) \ ;$$

4/. $$|(r_i^2 - r_j^2)^2 - (\tilde{r}_i^2 - \tilde{r}_j^2)^2| \leq 4\,\delta(r_i + r_j + \delta)\,(|r_i^2 - r_j^2| + \delta\,(r_i + r_j + \delta)) \ ;$$

5/. $$|k_{ij} - \tilde{k}_{ij}| \leq 2\,\delta\frac{(r_i + r_j + \delta)}{(a_{ij} - 2\,\epsilon)^2} + 4\,\epsilon\,\frac{(a_{ij} + \epsilon)\,|r_i^2 - r_j^2|}{a_{ij}^2\,(a_{ij} - 2\epsilon)^2} \ ;$$
(avec $2\,\epsilon < a_{ij}$);

6/. $$|\frac{(r_i^2 - r_j^2)^2}{a_{ij}^2} - \frac{(\tilde{r}_i^2 - \tilde{r}_j^2)^2}{\tilde{a}_{ij}^2}| \leq 4\,\delta\,\frac{(r_i + r_j + \delta)\,(|r_i^2 - r_j^2| + \delta\,(r_i + r_j + \delta))}{(a_{ij} - 2\,\epsilon)^2}$$
$$+ 4\,\epsilon\,\frac{(a_{ij} + \epsilon)\,|r_i^2 - r_j^2|^2}{a_{ij}^2\,(a_{ij} - 2\epsilon)^2} \quad (\text{avec } 2\,\epsilon < a_{ij});$$

7/. $$|h_{ij} - \tilde{h}_{ij}| \leq \sqrt{\delta}\,[\sqrt{r_i + r_j + \delta} + \frac{\sqrt{r_i + r_j + \delta}\sqrt{|r_i^2 - r_j^2| + \delta\,(r_i + r_j + \delta)}}{(a_{ij} - 2\,\epsilon)}]$$
$$+ \sqrt{\epsilon}\,\sqrt{a_{ij} + \epsilon}\,[1 + \frac{|r_i^2 - r_j^2|}{a_{ij}(a_{ij} - 2\epsilon)}] \quad (\text{avec } 2\,\epsilon < a_{ij}).$$

(Pour avoir 7/, on utilise $|\sqrt{U} - \sqrt{\tilde{U}}| \leq \sqrt{|U - \tilde{U}|}$, avec $U = h_{ij}^2$ et $\tilde{U} = \tilde{h}_{ij}^2$.)

De 1/ jusqu' à 7/, on obtient facilement ce qu'il faut démontrer. ∎

Théorème 4.12. *Prenons ϵ et δ positifs tels que:*
1/ $2(\epsilon + \delta) < Min(|\,(r_i + r_j) - a_{ij}\,|\ ,\ |\,|r_i - r_j| - a_{ij}\,|)$;

2/ $\epsilon < a_{ij}/4$;
3/ $\gamma_{ij}(\epsilon, \delta) + \epsilon + \delta < |O_kM_{ij} - r_k|$;
Pour tous i, j distincts $\in I$ dans 1/ et pour tous $i, j \in I$ tels que $Card(c_i \cap c_j) = 2$ et pour tout $k \in I \setminus \{i, j\}$ dans 2/ et 3/.

Alors, pour toute famille de cercles $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{c}_i)_{i\in I}$,
Si $\tilde{O}_iO_i \leq \epsilon$ et $|\tilde{r}_i - r_i| \leq \delta$, $(i \in I)$, alors $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ sont équivalents par un isomorphisme H qui vérifie:
$H(M_{ij}) = \tilde{M}_{ij}$, $\forall\, i, j$ tels que $Card(c_i \cap c_j) = 2$,
H préserve les vecteurs de position des faces.

Preuve. Corollaire du théorème 4.8, du lemme 4.9, du corollaire 4.10, du théorème 4.12. ∎

Corollaire 4.13. *On peut calculer δ et ϵ au coût $O(n^3)$ tels que*
Pour toute famille de cercles $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{c}_i)_{i\in I}$,

Si $\tilde{O}_i O_i \leq \epsilon$ *et* $|\tilde{r}_i - r_i| \leq \delta$, $(i \in I)$, *alors* $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ *et* $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{C}})$ *sont équivalents par un isomorphisme* H *qui vérifie:*

$H(M_{ij}) = \tilde{M}_{ij}$, $\forall\, i,j$ *tels que* $Card(c_i \cap c_j) = 2$,

H *préserve les vecteurs de position des faces,*

f *est bornée* $\Longrightarrow$ $H(f)$ *est bornée, pour toute cellule* f *de* $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Preuve. On voit tout de suite que, d'après le théorème 4.12, on peut calculer δ et ϵ en un coût de $O(n^3)$. En plus ϵ peut être calculé en coût $O(n^3)$ pour que les centres $(O_i)_{i\in I}$ influe sur $(\tilde{O}_i)_{i\in I}$ (grâce à la propriété 4.5). Donc le coût total est $O(n^3)$. ∎

Remarque 4.9 *Dans le théorème 4.12, c'est la condition 3/ avec la quantité* $|O_k M_{ij} - r_k|$, *qui donne le coût* $O(n^3)$. *On se demande si on peut calculer en un coût plus faible que* $O(n^3)$ *une quantité* λ *strictement positive telle que:*

$$\lambda \leq |O_k M_{ij} - r_k| \ ,$$

pour tous $i,j \in I$ *tels que* $Card(c_i \cap c_j) = 2$ *et pour tout* $k \in I \setminus \{i,j\}$.

On a pensé pour cela au théorème de la zone [Eldels88,4] en espérant que, pour chaque cercle c_r, *les sommets dans la zone de* c_r *sont plus près de cette courbe que les autres sommets (un sommet dans la zone est un sommet sous face d'une arête de la zone) . Pourtant cette idée est tout à fait fausse. On a le contre exemple suivant:*

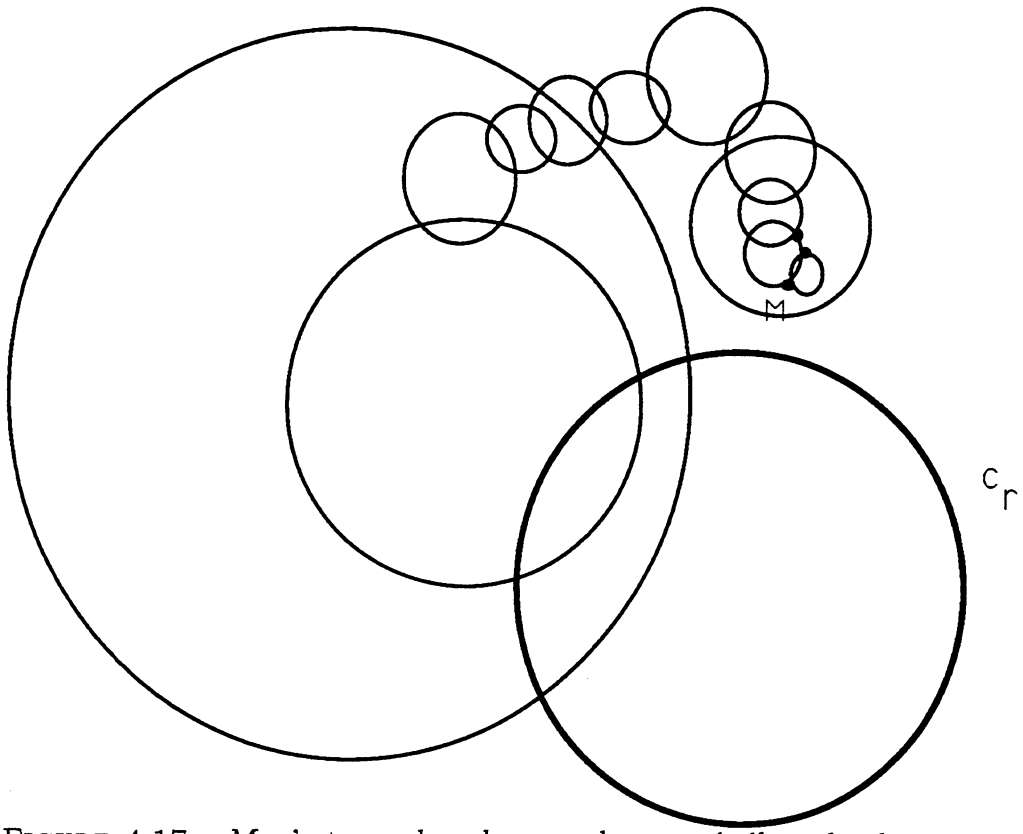


FIGURE 4.17. *M n'est pas dans la zone de* c_r *mais il est le plus près de* c_r *parmi les sommets* M_{ij}, $i,j \neq r$.

Annexe du chapitre 4.

A4.1 Remarque. *Pour démontrer 1/ de la l'observation 4.3, on doit démontrer que:*

$$[O_i, O_{i+1}] \cap [O_j, O_{j+1}] = \emptyset, \quad \text{pour tous } i,\ j = 1, \ldots, k, \quad i \neq j \bmod k\ ,\ i \neq (j+1) \bmod k,\ j \neq (i+1) \bmod k \quad \text{et}$$

$$]O_i, O_{i+1}[\cap]O_{i+1}, O_{i+2}[= \emptyset, \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, k,$$

où $O_{k+1} = O_1$, $O_{k+2} = O_2$, $[A, B]$ *est le segment fermé joignant deux points* A , B *et* $]A, B[= [A, B] \setminus \{A, B\}$.

On démontrera pour autant deux lemmes qui suivent.

A4.2 Lemme 4.1. *Supposons les hypothèses de l'observation 4.3.*
Soient i, j, p, q *distincts* $\in \{1, 2, \ldots, k\}$ *tels que*

$$c_i \cap c_j = \{M_{ij}, M_{ji}\} \quad \text{et} \quad c_p \cap c_q = \{M_{pq}, M_{qp}\}.$$

Alors,

$$[O_i, O_j] \cap [O_p, O_q] \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow$$
$$(M_{ij} \text{ et } M_{ji} \in c_p^+ \cup c_q^+) \quad \text{ou} \quad (M_{pq} \text{ et } M_{qp} \in c_i^+ \cup c_j^+).$$

Preuve du lemme 4.1
Supposons que $M_{ij} \notin c_p^+ \cup c_q^+$. On doit démontrer que M_{pq} et $M_{qp} \in c_i^+ \cup c_j^+$
.
M_{ij} n'étant pas sur les cercles c_p et c_q (L'hypothèse b/ du lemme 4.3), on a:

$$O_k M_{ij} > O_k M_{pq} \quad \text{et} \quad O_l M_{ij} > O_l M_{pq}$$

Donc O_p et O_q se trouvent d'un même côté que M_{pq} par rapport à la médiatrice d du segment $M_{ij} M_{pq}$.

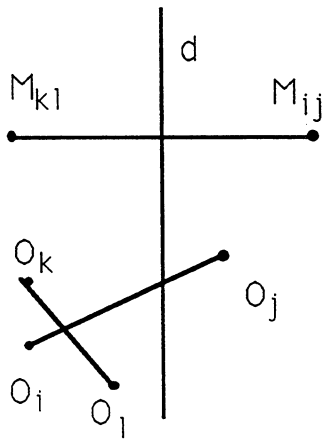


FIGURE 4.18.

Or $[O_i, O_j] \cap [O_p, O_q] \neq \emptyset$, O_i ou O_j (ou tous les deux) doit se trouver du même côté de O_p et O_q, donc du même côté de M_{pq} par rapport à la droite d.

Ce qui veut dire que:

$$O_iM_{ij} > O_iM_{pq} \quad \text{ou} \quad O_jM_{ij} > O_jM_{pq}$$

Donc $M_{pq} \in c_i^+ \cup c_j^+$. De façon identique, on a $M_{qp} \in c_i^+ \cup c_j^+$.
De même si $M_{ji} \notin c_p^+ \cup c_q^+$. ∎

A4.3 Lemme 4.2. *Supposons les hypothèses du lemme 4.3.*
Soient i, j, l *distincts* $\in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tels que*
$c_i \cap c_j = \{M_{ij}, M_{ji}\}$ *et* $c_j \cap c_l = \{M_{jl}, M_{lj}\}$.
On a:
$]O_i, O_j[\cap]O_j, O_l[\neq \emptyset \Rightarrow (M_{ij}$ *et* $M_{ji} \in c_l^+)$ *ou* $(M_{jl}$ *et* $M_{lj} \in c_i^+)$

Preuve du lemme 4.2
De façon analogue à celle du lemme 4.2. ∎

A4.4 Preuve du lemme 4.3
1/. On a $M_i \notin c_j^+$, $(i, j = 1, \ldots, n)$ (car $M_i \in \overline{U}$, $U \cap c_j^+ = \emptyset$, et c_j^+ est un ensemble ouvert).
Par conséquent, les lemmes 4.1 et 4.2 nous donnent:
$[O_i, O_{i+1}] \cap [O_j, O_{j+1}] = \emptyset$, pour tous $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j \bmod k$, $i \neq (j+1) \bmod k$, $j \neq (i+1) \bmod k$ et
$]O_i, O_{i+1}[\cap]O_{i+1}, O_{i+2}[= \emptyset$, pour tout $i = 1, \ldots, k$.
Donc la ligne polygonale $O_1O_2 \ldots O_kO_1$ forme une courbe simple fermée.
2/. Démontrons d'abord que la ligne polygonale $M_1 0_2 M_2 O_3 \ldots M_k O_1 M_1$ est simple.

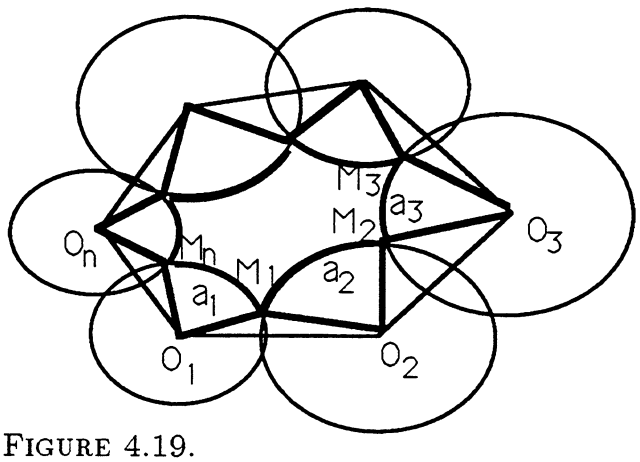


FIGURE 4.19.

On voit facilement que deux segments consécutifs de cette ligne polygonale n'ont q'un seul point en commun, chaque segment étant le rayon d'un cercle. Prenons donc deux segments non consécutifs O_iM_j et O_pM_q et démontrons que $[O_i, M_j] \cap [O_p, M_q] = \emptyset$. O_iM_j , O_pM_q n'étant pas consécutifs, on a:
$i \neq p$ et $j \neq q$ $(O_i \neq O_p$ et $M_j \neq M_q)$.

En plus, O_iM_j et O_pM_q étant les rayons des cercles c_i et c_p, on a:
$M_j \notin [O_p, M_q[$, $M_q \notin [O_i, M_j[$ (car $M_j \notin c_p^+$ et $M_q \notin c_i^+$).
En somme, $O_i \neq O_p$ et $M_j \notin [O_p, M_q]$, $M_q \notin [O_i, M_j]$ (*).

Faisons une petite remarque pour la suite:
Soit d une demi-droite issue d'un point O. Soient M, N deux points tels que $M \in d$, $M \neq O$ et $N \notin d$, $N \neq O$. On a: $OM + MN > ON$ (**).

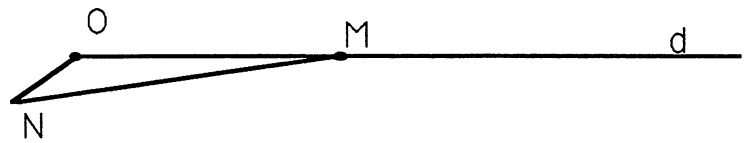


FIGURE 4.20.

Continuons à démontrer que la ligne $M_1O_2M_2 \ldots M_kO_1M_1$ est simple.
Si, par l'absurde, il existe un point $M \in [O_p, M_q] \cap [O_i, M_j]$, on doit avoir:

$$M \neq M_j \ , \ M \neq M_q \ ,$$
$$M = O_i \ \Rightarrow \ M \neq O_p \ ,$$
$$M = O_p \ \Rightarrow \ M \neq O_i \ .$$

Supposons d'abord que $M = O_i$. Donc $M \in]O_p, M_q[$.
Soit d la demi-droite issue de O_p et passant par M_q. On a $M \in d$, $M \neq O_p$.

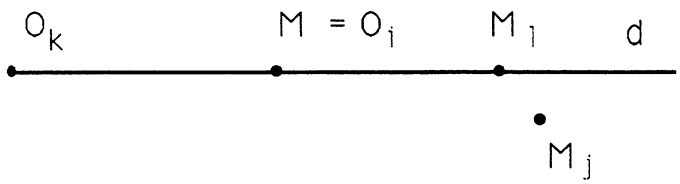


FIGURE 4.21.

En plus, $M_j \notin d$, $M_j \neq O_p$ (sinon $M_j \in [O_p, M_q]$ ou $M_q \in [O_i, M_j]$ ce qui contredit (*)).
D'après (**), on a $O_pO_i + O_iM_j > O_pM_j$.
Si $O_iM_q < O_iM_j$, ce qui signifie $M_q \in c_i^+$. C'est absurde.
Si $O_iM_q \geq O_iM_j$, on a:
$O_pM_q = O_pO_i + O_iM_q \geq O_pO_i + O_iM_j > O_pM_j$. Ce qui signifie $M_j \in c_p^+$. C'est aussi absurde.
Pour $M = O_p$, on procède de façon analogue.
Supposons donc $M \neq O_i$ et $M \neq O_p$.
Par symétrie, on suppose que $MM_q \geq MM_j$ (si $MM_j \geq MM_q$, on fait analoguement). On a:

$$O_pM_q = O_pM + MM_q \geq O_pM + MM_j.$$

Soit toujours d la demi-droite issue de O_p et passant par M_q, on a:

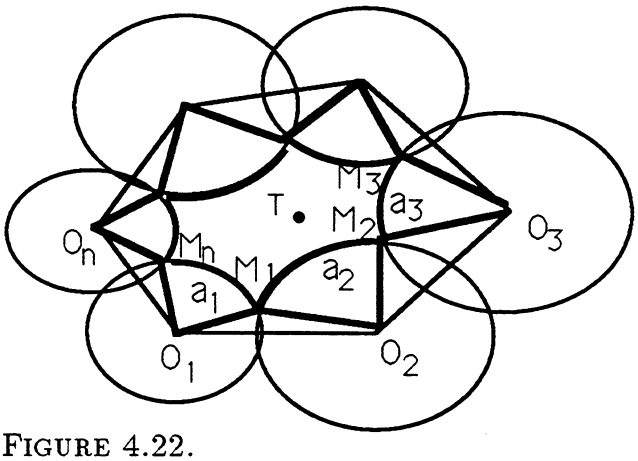


FIGURE 4.22.

$M \in d$, $M \neq O_p$ et $M_j \notin d$, $M_j \neq O_p$.
(**) nous donne: $O_pM + MM_j > O_pM_j$.
Donc $O_pM_q > O_pM_j$, ce qui dit que $M_j \in c_p^+$. C'est absurde.
On vient de démontrer que $[O_i, M_j] \cap [O_p, M_q] = \emptyset$.
Donc la ligne polygonale $C'' = O_1M_1O_2M_2 \ldots O_kM_kO_1$ est une courbe simple et fermée.

Enfin, pour démontrer que C (dans le sens $M_1M_2 \ldots M_k$) et C' (dans le sens $O_1O_2 \ldots O_k$) ont la même orientation, on procède comme suit:
Prenons un point T quelconque dans U. Choisissons une fonction $\overrightarrow{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ de R^2 dans R^2 telle que:

$$\frac{\delta P(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta Q(x,y)}{\delta x}, \quad \forall (x,y) \in R^2 \setminus \{T\} \quad \text{et}$$
$$\int_C \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{ds} \equiv \int_C P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy \neq 0.$$

(Par exemple, $\overrightarrow{f}(x,y) = (-\dfrac{y - y_T}{(x-x_T)^2 + (y-y_T)^2}, \dfrac{x - x_T}{(x-x_T)^2 + (y-y_T)^2})$,
où (x_T, y_T) sont les coordonnées de T. On a: $\int_C \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dx} = 1$ si C est dans le sens positif, $= -1$ si C est dans le sens négatif.)

On va aller démontrer:

$$\int_C \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{C'} \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{ds},$$

ce qui signifie que T se trouve à l'intérieur de C' et que C etC' ont la même orientation.

On a: $$\int_C \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{ds} = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i\ (M_{(i-1)} \to M_i)} \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{ds} \qquad (\text{ où } M_0 = M_k).$$

Or, pour chaque $i = 1, \ldots, k$, le secteur du disque c_i^+ déterminé par le centre O_i et l'arc a_i ne contient pas le point T. Donc $\delta P/\delta y = \delta Q/\delta x$ dans ce secteur. On doit avoir:

$$\int_{a_i\ (M_{(i-1)} \to M_i)} \vec{f} \cdot \vec{ds} \ + \ \int_{M_i O_i} \vec{f} \cdot \vec{ds} \ + \ \int_{O_i M_{(i-1)}} \vec{f} \cdot \vec{ds} \ = 0.$$

Autrement dit

$$\int_{a_i\ (M_{(i-1)} \to M_i)} \vec{f} \cdot \vec{ds} \ = \ \int_{M_{(i-1)} O_i} \vec{f} \cdot \vec{ds} \ + \ \int_{O_i M_i} \vec{f} \cdot \vec{ds}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} \ &= \ \int_{M_0 O_1 M_1 O_2 M_2 \ldots M_{n-1} 0_n M_n} \vec{f} \cdot \vec{ds} \\ &= \ \int_{O_1 M_1 O_2 M_2 \ldots M_{n-1} 0_n M_n O_1} \vec{f} \cdot \vec{ds}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_{O_1 M_1 O_2 M_2 \ldots M_{n-1} 0_n M_n O_1} \vec{f} \cdot \vec{ds} \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{O_i M_i O_{(i+1)}} \vec{f} \cdot \vec{ds} \quad (\text{ où } O_{n+1} = O_1).$$

Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, le triangle $O_i M_i O_{(i+1)}$ étant inclu dans $c_i^+ \cup c_{i+1}^+$, T ne peut appartenir à l'intérieur de ce triangle. On a:

$$\int_{O_i M_i O_{(i+1)}} \vec{f} \cdot \vec{ds} \ = \ \int_{O_i O_{i+1}} \vec{f} \cdot \vec{ds}.$$

Donc enfin on a:

$$\begin{aligned} \int_{O_1 M_1 O_2 M_2 \ldots M_{n-1} 0_n M_n O_1} \vec{f} \cdot \vec{ds} \ &= \ \int_{O_1 O_2 \ldots O_n O_1} \vec{f} \cdot \vec{ds} \\ &= \ \int_{C'} \vec{f} \cdot \vec{ds} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons étudié la conservation de la combinatoire d'un arrangement sous perturbation des éléments constitutifs. Nous avons traité des arrangements de courbes dans le plan ainsi que des arrangements d'hyperplans en dimension quelconque. Ce travail s'inscrit comme une contribution au calcul de la combinatoire des arrangements d'objets complexes. Dans le chapitre I nous avons étudié les arrangements d'hyperplans et leurs perturbations. Nous avons obtenu des bornes effectives sur les perturbations des hyperplans ne modifiant pas la combinatoire de l'arrangement. Pour cela il nous a fallu donner un critère d'équivalence des arrangements simples basé uniquement sur les vecteurs de position des sommets, ce qui nous permet de calculer une borne de perturbation au même coût que celui du calcul de l'arrangement. Dans le chapitre 2, des applications aux configurations de points et aux diagrammes de Voronoï sont données en utilisant des transformations classiques de dualité. Au chapitre 3 nous abordons le cas des courbes dans le plan et nous justifions un critère d'équivalence des arrangements à partir de l'information des ordres de sommets (points d'intersections de deux courbes) sur les courbes, et cela n'est pas restreint à une famille de courbes particulière. Un algorithme est donné montrant comment on peut construire l'arrangement à partir de l'information de ces ordres. Enfin, dans le dernier chapitre le cas des cercles a été examiné de plus près : ceci nous permet d' imaginer les différences géométriques qui existent entre des arrangements équivalents et comment dans ce cas concret des cercles on peut obtenir la "ressemblance" géométrique attendue des arrangements. Les calculs effectifs ont été développés.

A travers notre travail, plusieurs problèmes intéressants ont surgi:

- Le problème de l'origine intervient dans la définition de l'équivalence des arrangements d'hyperplans dès que l'on travaille avec des représentations particulières. La qualité des bornes obtenues en dépend. Dans [Edels87], il y a un problème analogue avec les axes (hyperplans verticaux). En fait ce problème n'intervient que dans les calculs de perturbation des hyperplans, la notion d'équivalence combinatoire pouvant être donnée indépendamment du repère. Il se pose alors naturellement la question d'essayer de faire des calculs de façon indépendante du repère;

- La qualité des bornes de perturbation est également un problème naturel et fondamental pour les applications. Comme il a été noté ci-dessus, une des façons d'améliorer les bornes, dans le cas des arrangements, est de trouver une méthode permettant de bien choisir la position de l'origine de $\mathbb{R}^d$. D' un autre point de vue, il est certainement intéressant de voir si d'autres techniques de calcul matriciel permettraient d'améliorer ces bornes (utilisation des normes matrices subordonnées par exemple). Cependant il faut pas perdre de vue le coût de calcul de ces bornes, et savoir ce qu'on entend par borne meilleure;

- Dans le chapitre 2, qui se voulait une application directe des résulats du chapitre 1, s'est posé le problème des équivalences d'autres structures géométriques couramment utilisées. Peu de travaux ont été consacrés aux définitions directes de l'équivalence des configurations de points et des diagrammes de Voronoï d'ordre k. La notion d'équivalence des diagrammes de Voronoï mérite surtout d'être étudiée de façon plus profonde en ce qui concerne la préservation des régions voisines dans deux diagrammes équivalents;

- Le calcul de la combinatoire d'un arrangement de courbes à partir de l'ordre des points d'intersection sur les courbes ouvre la voie au calcul de la topologie d'un arrangement de courbes par l'utilisation de différents procédés d'approximations qui ont la propriété de localiser la courbe exacte par rapport ses approximations et donc de localiser les intersections de courbes entre elles: approximations de courbes de Bézier ou B_splines par les itérés de leurs polygones de contrôle, recouvrement des courbes par des disques,.... Des résulats devraient pouvoir être rapidement obtenus sur ce problème;

- Un autre problème intéressant, qui serait peut-être susceptible de trouver une réponse partielle avec ces techniques, est l'étude de la conservation de la combinatoire d'un arrangement de courbes algébriques du plan lorsque les coefficients sont perturbés;

- Une généralisation des résultats obtenus chapitre 3 aux surfaces dans $\mathbb{R}^3$ serait du plus grand intérêt. En effet le calul des arrangements de surfaces est un problème assez ouvert surtout du point de vue pratique, mis à part quelques cas partciuliers. La question suggérée par ce travail est la suivante: Sachant l'ordre des points d'intersection de toute courbe intersection de deux surfaces avec les autres surfaces, est-ce qu'on pourrait reconstituer l'arrangement? Ici également, l'utilisation des surfaces de Bézier et leur approximation par des polyèdres de contrôle, le recouvrement de surfaces par des boules seraient alors des voies de constructions potentielles à étudier.

Références Bibliographiques

[Abel93] M.Abellanas, F.Gomez, F.Hurtado & P.Ramos
Structural Tolerance and Delaunay Triangulation
Technical Report MA2-IR-93-11, Décembre 1993

[Agar89] P.K.Agarwal
A deterministic Algorithm for Partitionning Arrangements of Lines and its Applications,
Proc. of the 5th Annual Symposium on Computationnal Geometry, Saarbrüken, West Germany, Juin 1989.

[Agar91] P.K.Agarwal
Intersection and Decomposition Algorithms for planar Arrangements, Cambridge University Press 1991.

[Ber77,1] M.Berger
Actions de Groupes, Espaces Affines et Projectifs
Geométrie - volume 1, Cedic/F.Nathan, 1977.

[Ber77,2] M.Berger
Espaces Euclidiens, Triangles, Cercles et Sphères
Geométrie - volume 2, Cedic/F.Nathan, 1977.

[Ber77,3] M.Berger
Convexes et Polytopes, Polyèdres réguliers, Aires et Volumes
Geométrie - volume 3, Cedic/F.Nathan, 1977.

[Brown79] K.Q.Brown
Geometric Transforms for Fast Geometric Algorithms
Thèse de l'Université Carnegie-Mellon, 1979

[Cha83] B.Chazelle, L.J.Guibas & D.T.Lee
The Power of Geometric Duality
24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science
Tuscon, 1993, p. 217-225.

[Cha86] B.Chazelle & D.T.Lee
On a Cercle placement Problem
Computing 36, p. 1-16, 1986.

[Cha92] B.Chazelle & H.Edelsbrunner
An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the plane
Journal of ACM - volume 39, N. 1, p. 1-54, Janvier 1992.

[**Clar89**] K.L.Clarkson, H.Edelsbrunner, L.J.Guibas, M.Sharir & E.Welzl
Combinatorial Complexity Bounds for Arrangements of
Curves and Surfaces
Report no. UIUCDCS-R-88-1470
Department of Computer Science
University of Illinois at Urbana-Champaign, Novembre 1988

[**Dego91**] F.R.Degott
Partitionnement du plan par des courbes
Thèse de l'Université Joseph Fourier, Laboratoire L.M.C, 1991.

[**Devi92**] O.Devillers, S.Meiser & M. Teillaud
The Space of Spheres, a Geometric Tool to Unify Duality Results
on Voronoi Diagrams
INRIA-Sophia Antipolis. Rapport de Recherche no.1620, Février1992

[**Edels86**] H.Edelsbrunner & R.Seidel
Voronoï Diagrams and Arrangements
Discrete & Computational Geometry - volume 1, N.1, 1986, p. 25-43.

[**Edels87**] H.Edelsbrunner
Algorithms in Combinatorial Geometry
EATCS Monographs on Theorical Computer Science
Springer Verlag, Heidelberg, 1987.

[**Edels88,1**] H.Edelsbrunner, L.J.Guibas,J.Hershberger, R.Seidel,
M.Sharir, J.Snoeyink & E.Welz
Implicitly Representing Arrangements of Lines or Segments
4th Annual Symposium on Computer Graphics,Urbana-Champain,
Illinois, p.56-69, Juin 1988.

[**Edls88,2**] H.Edelsbrunner, L.J.Guibas, J.Hershberger, R.Seidel,
M.Sharir, J.Snoeyink & E.Welz
On Arrangements of Jordan arcs with three Intersections per pair
4th Annual Symposium on Computer Graphics,Urbana-Champain,
Illinois, p.258-265, Juin 1988.

[**Edels88,3**] H.Edelsbrunner
Geometric Structures in Computational Geometry
Proc. 15th International Colloquium on Automata and Programming
Tampere, Finlande, p.201-213, Juillet 1988.

[**Edels88,4**] H.Edelsbrunner, L.J.Guibas, J.Pach, R.Pollack, R.Seidel & M.Sharir
Arrangements of Curves in the Plane - Topology, Combinatorics
and Algorithms
Proc. 15th International Colloquium on Automata and Programming

Tampere, Finlande, p.215-229, Juillet 1988.

[Edels88,5] H.Edelsbrunner, L.Guibas, J.Hershberger, R.Seidel, M.Sharir, J.Snoeyink & E.Welzl
Implicitly Representing Arrangements of Lines or Segments
Journal of ACM, 1988, p.56-69

[Edels91] H.Edelsbrunner, R.Seidel & M.Sharir
On the Zone Theorem for Hyperplane Arrangements
Report No. UIUCDCS-R-91-1655, Department of Computer
University of Illinois at Urbana-Champaign, Janvier 1991

[Fort89] S.Fortune
Stable Maintenance of Points Set Triangulations in Two Dimensions
IEEE, 1989, p.494-499.

[Fort91] S.Fortune & V.Milenkovic
Numerical Stability of Algorithms for Line Arrangements
Journal of ACM, 1991, p.334-340.

[Godm83] J.E.Godman & R.Pollack
Multidimensional Sorting
SIAM J. Comput. - volume 12, No 3, Août 1983, p. 484-502.

[Godm92] J.E.Godman & R.Pollack
Allowable Sequences and Order Types in
Discrete and Computational Geometry
DIMACS TECHNICAL REPORT, Janvier 1992.

[Grunb72] B. Grünbaum
Arrangements and Spreads
Conference Board of the Mathematical Sciences
American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, No10, 1972.

[Guib89] L.Guibas, D.Salesin & J.Stolfi
Epsilon Geometry : Building Robust Algorithms from Imprecise Computations
ACM 1989, p.208-217.

[Lasc86] P.Lascaux & R.Théodor
Analyse Numérique Matricielle Appliquée
à l'Art de l'Ingénieur
Masson, Tome 1, 1986.

[Mil89] V.Milenkovic
Calculating Approximate Curve Arrangements
using Rounded Arithmetic

Journal of ACM,1989, p.197-207.

[Orl92] P.Orlik & H.Terao
Arrangements of Hyperplanes
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[Prepa85] F.P.Preparata & M.I.Shamos
Computational Geometry - An Introduction
Text and Monographs in Computer science, Springer Verlag, 1985.

[Schä87] Alejandro A. Schäffer & Christopher J. Van Wyk
Convex hulls of Piecewise-Smooth Jordan Curves
Journal of Algorithms 8, p. 66-94, 1987.

[Szafr91] N.Szafran
Zonoèdres : de la Géométrie Algorithmique à la
Théorie de la Séparation
Thèse de l'Université Joseph Fourier, Laboratoire LMC, 1991