



**HAL**  
open science

## Graphes parfaits et paires d'amis

Claudia Linhares Sales

► **To cite this version:**

Claudia Linhares Sales. Graphes parfaits et paires d'amis. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1996. Français. NNT: . tel-00345386

**HAL Id: tel-00345386**

**<https://theses.hal.science/tel-00345386v1>**

Submitted on 9 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Thèse**

présentée par

**Cláudia LINHARES SALES**

pour obtenir le grade de DOCTEUR  
de l'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1

*(arrêté ministériel du 5 juillet 1984 et  
du 30 Mars 1992)*

Spécialité : Informatique

Formation Doctorale : Recherche Opérationnelle

---

**GRAPHES PARFAITS ET PAIRES D'AMIS**

---

Date de soutenance : 18 janvier 1996

**Composition du jury :**

CLAUDE BENZAKEN (DIRECTEUR DE THÈSE)

MICHEL BURLET (EXAMINATEUR)

GERD FINKE (EXAMINATEUR)

JEAN FONLUPT (RAPPORTEUR)

ALAIN HERTZ (RAPPORTEUR)

FRÉDÉRIC MAFFRAY (CO-DIRECTEUR DE THÈSE)

MYRIAM PREISSMANN (EXAMINATEUR)

Thèse préparée au Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique, IMAG



*A Ricardo et Hugo*



## Remerciements

Les mots ne traduisent pas ma gratitude et admiration envers mes directeurs de thèse Claude Benzaken (le Professeur) et Frédéric Maffray. Ils m'ont fait l'honneur de m'accepter comme leur étudiante et m'ont donné l'opportunité de profiter de leur dédication, expérience, connaissances et compétences. Et comme si ceci n'était pas suffisant, j'ai eu aussi beaucoup d'amitié et appui de leur part. Alors, merci beaucoup à vous deux, sans vous la soutenance de cette thèse n'aurait sans doute pu avoir lieu.

Je tiens à remercier à Gerd Finke, professeur à l'UJF, de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie également à Jean Fonlupt, professeur à Paris VI, et Alain Hertz, professeur à l'EPFL (Lausanne), d'avoir trouvé le temps, dans leurs emploi du temps extrêmement chargés, de rapporter mon travail, en lui donnant ainsi une valorisation indiscutable.

Que Michel Burlet, maître de conférences à l'UJF, soit aussi remercié pour avoir accepté de faire partie de ce jury, ce qui est bien naturel vu l'intérêt qu'il a toujours porté sur ce travail.

Que Myriam Preissmann, chercheur au CNRS, soit aussi remerciée pour m'avoir donné l'honneur de participer de ce jury et, au delà des discussions mathématiques, d'avoir fait preuve d'une très sincère amitié.

Que Bruce Reed, chercheur au CNRS, soit aussi remercié pour m'avoir donné l'opportunité de travailler avec lui et d'apprendre énormément des choses à cette occasion.

Je voudrais aussi remercier tous les chercheurs, le personnel administratif du LSDD et les thésards pour leur accueil chaleureux au sein de ce laboratoire.

Je remercie aussi le Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) et l'Universidade Federal Fluminense d'avoir partiellement financé ce projet et m'avoir ainsi fait confiance.

Je tiens également à remercier Jayme Szwarcfiter et Dina, professeurs à l'Universidade Federal do Rio de Janeiro pour leur appui et encouragement à la réalisation de ce projet.

Je remercie également toute la communauté brésilienne qui séjourne ou qui a séjourné à Grenoble, pour avoir fait diminuer la distance douloureuse qui sépare le Brésil et la

France.

Un remerciement spécial va à Alba, Anamaria, Celso, Gegê, Gilson, Marilena, Marilia, Neia, Pascale, Paula, Paulof, Sylvain e Teresinha pelo carinho, apoio, e presença em todos os momentos souvent pas faciles. Je remercie aussi Cerrlinhos, Philippe, Kita e Luiz de Tolosa pelos “emails” e coup-de-fils encorajadores e divertidos, que marcaram sempre as suas presenças apesar das suas distâncias. Je remercie encore Etienne par son amitié et par nous avoir fait decouvrir la beauté des montagnes de cette région.

Je remercie spécialement Cristina Boeres pela sua amizade dedicada que se traduziu em “emails” diários de incentivo, de trocas e de humor.

Je tiens aussi à remercier Carlos Correa et Angela Cordeiro Corrêa pela boa vontade e apoio dado ao me representar administrativamente no Brasil durante a minha ausência.

Finalement, ce projet n’aurait pas été viable sans l’appui, l’amour et la dédication de nos familles. A mes parents, frère, soeurs et belle-famille, ma reconnaissance et mon amour.

J’ai commencé les remerciements sans trouver les mots et je les finis aussi ainsi. Il n’a pas de mots pour remercier tout l’appui et la dédication de Ricardo, mon mari. Alors, vai um simples obrigada mesmo, mas cheio de gratidão.

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Graphes Parfaits : rappels</b>	<b>15</b>
2.1	Notation et terminologie . . . . .	15
2.2	Graphes parfaits généraux . . . . .	19
2.3	Quelques classes de graphes parfaits . . . . .	23
2.3.1	Line-graphes de graphes bipartis . . . . .	23
2.3.2	Graphes de comparabilité . . . . .	24
2.3.3	Graphes triangulés . . . . .	24
2.4	Paires d'amis et graphes parfaits . . . . .	25
2.5	Graphes planaires et perfection . . . . .	36
2.6	Graphes sans griffe et perfection . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Les Graphes Planaires de Quasi-Parité Stricte</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.2	Graphes planaires et la conjecture de Hougardy . . . . .	42
3.3	Génération des obstructions planaires . . . . .	53
3.3.1	Le concept de candidat . . . . .	53
3.3.2	Comment distinguer les obstructions (planaires) des candidats . . . . .	59
3.3.3	Construction de la classe des candidats planaires . . . . .	61
3.4	Algorithme de reconnaissance des graphes QPS . . . . .	69

<b>4</b>	<b>Graphes Parfaitement Contractibles Planaires</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	77
4.2	Preuve du Théorème 4.1 . . . . .	78
4.3	Algorithme de reconnaissance des graphes PC . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Graphes parfaits sans griffe et paires d'amis</b>	<b>97</b>
5.1	Introduction . . . . .	97
5.1.1	Line-graphe de graphe biparti . . . . .	102
5.1.2	Preuve du Théorème 5.1 . . . . .	106
5.1.3	Reconnaissance des graphes sans griffes parfaitement contractibles .	112
5.2	Graphes sans griffe de quasi-parité stricte . . . . .	114
5.2.1	Preuve du Théorème 5.2 . . . . .	114
5.2.2	Reconnaissance des graphes LGB de quasi-parité stricte . . . . .	117

# Liste des figures

2.1.1 Un diamant et une griffe. . . . .	18
2.4.2 Un graphe amicalement contractible et pas parfaitement contractible. . . . .	30
2.4.3 Un graphe de quasi-parité stricte non parfaitement contractible. . . . .	30
2.4.4 Une contraction de paires d'amis produisant un graphe non parfaitement contractible. . . . .	32
2.4.5 Une séquence de contractions d'un graphe de Meyniel qui produit un graphe quasi-Meyniel. . . . .	32
2.4.6 Des méchants pair et impair. . . . .	34
2.5.7 Les graphes de la classe $\mathcal{S}$ . . . . .	39
3.2.1 Les voisinages corrects pour un sommet $x$ . . . . .	42
3.2.2 Le diamant $\{a, b, c, d\}$ et ses chaînes. . . . .	48
3.2.3 L'articulation $ebcf$ . . . . .	48
3.3.4 Les sommets noirs de $L(K_{3,3} - e)$ forment un danger. . . . .	59
3.3.5 Les deux types de sablier. . . . .	62
3.3.6 Les Opérations Arête-arête. . . . .	63
3.3.7 Les Opérations Arête-sommet. . . . .	64
3.3.8 Les Opérations Sommet-sommet. . . . .	64
3.3.9 Un sablier $\{b, c, d, W\}$ dont la réduction produit un diamant. . . . .	68
3.3.10 Un graphe $G$ dans $\mathcal{F}$ . Les sommets gris forment un danger. . . . .	69

3.4.1 Un arbre de décomposition dont la racine est non-QPS tandis que les feuilles sont QPS. . . . .	70
3.4.1 Un arbre de décomposition dont les feuilles contiennent une obstruction tandis que la racine est QPS. . . . .	72
4.3.1 Les graphes $M_2$ et $M'_2$ de la classe $\mathcal{L}_0$ . . . . .	94

# Chapitre 1

## Introduction

La classe des graphes parfaits a été définie par Claude Berge au début des années 60, comme étant la classe des graphes dont tout sous-graphe induit a un nombre chromatique égal à la taille de sa clique maximum. Berge a conjecturé en même temps que les seuls graphes minimalement imparfaits sont les trous impairs et les antitrous impairs. Cette conjecture qui se veut une caractérisation des graphes parfaits par sous-graphes exclus est toujours d'actualité et est connue sous le nom de Conjecture Forte des Graphes Parfaits. La quantité de recherche qu'a suscitée et suscite encore cette conjecture au sein de la communauté scientifique est extrêmement grande.

La détermination du nombre chromatique d'un graphe est un problème crucial dans les applications concrètes. Cette détermination est en général très dure (problème NP-complet). Cependant nombreuses sont de telles applications où le graphe associé est parfait. Aussi, la question de caractérisation des graphes parfaits a connu un renouveau d'intérêt lorsque M. Grötschel, L. Lovász et A. Schrijver ont démontré que la détermination du nombre chromatique d'un graphe parfait peut être obtenue en temps polynomial. Ce résultat de complexité algorithmique, bien qu'extrêmement intéressant au plan théorique, n'est malheureusement pas satisfaisant au plan pratique car il repose essentiellement sur la méthode ellipsoïde de la programmation linéaire. Aussi de nombreuses recherches d'algorithmes "combinatoires" efficaces de coloration des graphes parfaits ou de sous-classes de tels graphes ont été conduites ainsi que des recherches d'algorithmes de reconnaissance de ces graphes.

Dans ce travail nous nous consacrons à l'étude de deux classes de graphes parfaits : les graphes de quasi-parité stricte (QPS) et les graphes parfaitement contractibles (PC).

Ces deux classes sont définies à partir du concept de *paires d'amis*. Une paire d'amis est une paire de sommets non adjacents dont toutes les chaînes sans cordes les reliant sont de longueur *paire*.

Après avoir démontré qu'un graphe minimalement imparfait (c'est-à-dire, un graphe imparfait dont tous les sous-graphes propres sont parfaits) ne peut contenir de paires d'amis, Henry Meyniel a défini la classe des graphes de quasi-parité stricte, comme étant la classe des graphes dont tout sous-graphe induit soit est complet, soit possède une paire d'amis. Cette classe est évidemment parfaite.

Stefan Hougardy a fait une conjecture sur les graphes qui ne sont pas de quasi-parité stricte et qui sont minimaux par rapport à cette propriété (ces graphes seront appelés ici *obstructions*). Cette conjecture énonce que toute obstruction est soit un trou impair, soit un antitrou, soit le line-graphe d'un graphe biparti. Hougardy a énoncé une deuxième conjecture disant que tout graphe minimalement imparfait est une obstruction. Cette deuxième conjecture est équivalente à la conjecture forte des graphes parfaits.

Jean Fonlupt et Jean-Pierre Uhry ont démontré que la contraction d'une paire d'amis d'un graphe parfait produit un graphe parfait. Par ailleurs, étant connue une coloration optimale du graphe contracté, on peut la remonter sur le graphe du départ en donnant aux deux sommets de la paire d'amis la couleur reçue par le sommet contracté (et en conservant la même couleur pour les autres sommets). On peut donc envisager de faire une suite de contractions de paires d'amis sur un graphe parfait, afin d'obtenir un graphe qu'on sache colorer et, en remontant cette dernière coloration, aboutir à une coloration optimale du graphe original.

C'est dans cet esprit que Marc Bertschi a défini la classe des *graphes parfaitement contractibles* comme étant la classe des graphes dont tout sous-graphe induit admet une séquence de contraction de paire d'amis conduisant à un graphe complet. Cette définition qui suggère un algorithme de coloration optimale a tout naturellement éveillé l'intérêt des chercheurs. Hazel Everett et Bruce Reed ont fait une conjecture sur la caractérisation des graphes parfaitement contractibles par sous-graphes exclus : un graphe est parfaitement contractible si et seulement s'il ne contient ni trou impair, ni antitrou, ni subdivision impaire de l'antitrou à six sommets (c'est-à-dire, une subdivision en chaînes impaires des arêtes de  $\bar{C}_6$  ne se trouvant pas dans des triangles).

Ces deux conjectures, la première par son approche de la conjecture forte des graphes parfaits et la deuxième par les conséquences algorithmiques qu'on peut en déduire, sont

l'objet privilégié de notre travail de recherche. Nous prouvons leur validité pour deux classes spéciales de graphes : les graphes planaires d'une part, les graphes sans griffe d'autre part.

Donnons un aperçu un peu plus détaillé des chapitres de cette thèse.

Dans le chapitre 2, nous commençons par faire les rappels terminologiques sur les graphes en général, ainsi qu'une présentation des graphes parfaits. Quelques classes de graphes parfaits utilisées dans la thèse sont présentées. En particulier, une section est consacrée d'une manière un peu plus détaillée au concept de paires d'amis et ses implications dans la classe des graphes parfaits : les graphes de quasi-parité stricte et les graphes parfaitement contractibles. Les deux conjectures de Hougardy et de Everett et Reed sont introduites. Les deux dernières sections de ce chapitre sont dédiées aux graphes planaires parfaits et aux graphes parfaits sans griffe, en rappelant les résultats déjà acquis par d'autres auteurs et que nous utiliserons abondamment dans cette thèse. En particulier, citons l'algorithme de reconnaissance des graphes planaires parfaits de Wen-Lian Hsu, qui est un algorithme de décomposition par certains ensembles d'articulation du graphe, et le théorème de caractérisation la plus fine des graphes parfaits sans griffe donné par Frédéric Maffray.

Dans le chapitre 3, nous étudions de manière approfondie les obstructions planaires. Par la mise en évidence de la structure générale des voisinages des sommets d'une obstruction planaire, on prouve par là même la conjecture de Hougardy. Une fois cette conjecture démontrée, une question naturelle s'est posée pour caractériser de manière constructive les obstructions planaires LGB (abréviation de line-graphe de biparti).

En retenant les propriétés mises en évidence sur les obstructions LGB et en relaxant les aspects de minimalité, nous avons défini une classe plus vaste de graphes appelés *candidats*. Nous avons démontré que les candidats sont sans paires d'amis et nous avons donné un schéma de construction récursif pour les candidats. La base de ce schéma est réduite à  $\tilde{C}_6$  et la partie récursive est constituée de deux groupes de règles (règles de collage et règles de subdivision). Nous prouvons la consistance et la complétude de ce schéma pour la qualité de candidat.

La question naturelle de tester si un candidat est ou non une obstruction trouve sa réponse par un algorithme polynomial que nous proposons.

Ces résultats nous permettent finalement de caractériser les graphes planaires de quasi-

parité stricte par sous-graphes exclus, en suite de quoi un algorithme polynomial est conçu pour les reconnaître. Il utilise l'algorithme de décomposition de Hsu cité plus haut.

Dans le chapitre 4, nous étudions les graphes planaires parfaitement contractibles. Nous démontrons que la conjecture de Everett et Reed est vraie pour ces graphes. La preuve de ce théorème suggère en même temps la détermination d'un algorithme polynomial pour trouver une séquence de contractions de paires d'amis dans un graphe planaire parfaitement contractible conduisant à un graphe complet. Nous donnons aussi un algorithme polynomial pour reconnaître si un graphe planaire parfait donné est ou non parfaitement contractible. Cet algorithme utilise encore la décomposition de Hsu pour les graphes planaires.

Dans le chapitre 5, nous étudions les graphes parfaits sans griffe ( $K_{1,3}$ ). Nous validons les deux conjectures, celle de Hougardy d'une part et celle de Everett et Reed d'autre part pour les graphes sans griffe. Ces résultats s'appuient en premier sur un théorème de Vásek Chvátal et Najiba Sbihi qui explicite la structure des graphes parfaits sans griffe et en second sur un affinement de cette structure par un théorème de Maffray. En dernier lieu, nous avons pu concevoir des algorithmes polynomiaux pour reconnaître les graphes sans griffes de quasi-parité stricte et ceux qui sont parfaitement contractibles.

La thèse se termine par une bibliographie la plus à jour possible compte tenu du flot continu de résultats produits.

# Chapitre 2

## Graphes Parfaits : rappels

### 2.1 Notation et terminologie

Un *graphe*  $G = (V, E, \phi)$  est défini par un ensemble  $V(G)$  de *sommets*, un ensemble  $E(G)$  d'*arêtes*, disjoint de  $V(G)$  et une fonction  $\phi_G$  qui associe à chaque arête de  $G$  une paire de sommets (non nécessairement distincts) de  $G$ .

Dans ce travail (sauf mention expresse), un graphe  $G$  sera simple (c'est-à-dire,  $\phi_G$  est une fonction injective et associe une paire de sommets distincts à chaque arête de  $G$ ), fini et non orienté (c'est-à-dire,  $\phi_G$  associe une paire non ordonnée de sommets à chaque arête).

Un graphe non simple sera dit un *multigraphe*. Dans un multigraphe, les arêtes multiples ou parallèles (c'est le cas où  $\phi_G$  associe la même paire de sommets à plusieurs arêtes) et les boucles (c'est le cas où  $\phi_G$  associe une paire de sommets non distincts à une arête) sont permises.

Pour une arête  $e$  avec  $\phi(e) = uv$ , on désigne  $e$  tout simplement par  $uv$ , nous permettant ainsi d'omettre  $\phi_G$  dans la définition de  $G$ .

Deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$  sont *adjacents* ou, en langage courant, *se voient* (l'un l'autre), si  $uv$  est une arête. Dans ce cas,  $u$  et  $v$  sont appelés les *extrémités* de  $uv$ . Le *voisinage* d'un sommet  $v$  de  $G$ , noté par  $N_G(v)$  est l'ensemble de tous les sommets vus par  $v$ , c'est-à-dire, les sommets  $u \in V$  tels que  $vu$  est une arête. La cardinalité  $d(v)$  de  $N_G(v)$  est appelée le degré de  $v$ . On peut aussi définir le voisinage  $N_G(K)$  d'un sous-ensemble  $K$  de sommets de  $G$  comme étant les sommets  $u$  de  $V - K$  qui voient au moins un sommet

$v$  de  $K$ , c'est-à-dire, tels que  $vu$  est une arête avec  $v \in K$ . Une arête est *incidente* à un sommet  $v$  si  $v$  est une de ses extrémités. Deux arêtes sont *adjacentes* si elles sont incidentes à un même sommet. Un sommet de  $G$  est dit *isolé* si aucune arête de  $G$  ne lui est incidente. On dit qu'un sommet  $x$  *voit une arête*  $e$  si  $x$  voit les extrémités de  $e$ .

Lorsqu'un seul graphe  $G = (V, E)$  est à l'étude, on notera de manière plus courte son ensemble de sommets par  $V$  et son ensemble d'arêtes par  $E$ . La cardinalité de  $V$  est notée  $n$  et la cardinalité de  $E$  est notée  $m$ .

Un graphe est *trivial* s'il contient un seul sommet. Un graphe  $G$  est *complet* si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $G$ ,  $uv$  est une arête. On retrouve souvent la notation  $K_n$  pour un graphe complet à  $n$  sommets. De façon analogue, un graphe  $G$  est *incomplet* s'il a au moins une paire de sommets non adjacents.

Il est normal de donner une représentation graphique aux graphes, c'est-à-dire, de les dessiner en représentant les sommets par des points et les arêtes par des lignes rejoignant ses sommets. Un graphe est *planaire* s'il admet une représentation dans le plan telle que les arêtes ne se croisent qu'aux sommets et si elles ont une extrémité commune. Un graphe planaire est dit *maximal planaire* si toutes ses faces sont triangulaires, c'est-à-dire, si aucune arête ne peut lui être rajoutée sans perte de planarité.

Un graphe  $G$  est *biparti* si  $V$  peut être partitionné en deux ensembles disjoints  $A$  et  $B$  tels que  $V = A \cup B$  et  $uv$  est une arête de  $G$  seulement si  $u \in A$  et  $v \in B$  ou  $v \in A$  et  $u \in B$ . Normalement un graphe biparti  $G$  est donné par le triplet  $(A, B; E)$ , où  $A$  et  $B$  forment la bipartition des sommets de  $G$ . Un graphe biparti  $G = (A, B; E)$  est complet si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$ , avec  $u \in A$  et  $v \in B$ , on a  $uv \in E$ . On retrouve souvent la notation  $K_{p,q}$  pour désigner les graphes bipartis complets dont la cardinalité de  $A$  est  $p$  et la cardinalité de  $B$  est  $q$ .

Le *complément* d'un graphe  $G = (V, E)$ , noté par  $\bar{G}$ , est un graphe dont l'ensemble de sommets est exactement  $V$  et dont l'ensemble d'arêtes est l'ensemble complémentaire de  $E$ , c'est-à-dire,  $uv \in E(\bar{G})$  si et seulement si  $uv \notin E(G)$ .

Un graphe *co-biparti*  $H = (A, B; F)$  est le complément d'un graphe biparti  $G = (A, B; E)$ .

Etant donnés deux graphes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$ , on définit leur *union* comme le graphe  $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$  et leur *intersection* comme  $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ . Si  $G_1$  et  $G_2$  sont totalement disjoints, on définit enfin le *joint* de  $G_1$

et  $G_2$  comme le graphe dont l'ensemble de sommets est  $V_1 \cup V_2$  et l'ensemble d'arêtes est  $E_1 \cup E_2 \cup \{xy \mid x \in V_1 \text{ et } y \in V_2\}$ .

Le graphe  $H$  est un sous-graphe du graphe  $G$  lorsque  $V(H) \subseteq V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$ . Un sous-graphe  $H$  de  $G$  est dit *induit* si  $E(H)$  contient toutes les arêtes de  $G$  dont les deux extrémités sont dans  $V(H)$ . Pour définir un sous-graphe induit de  $G$  il suffit donc de considérer un sous-ensemble  $K$  de  $V(G)$ . En outre, ce sous-graphe induit sera désigné par  $G[K]$  ou  $G_K$ . On dira aussi que  $K \subseteq V(G)$  engendre ou induit le sous-graphe correspondant. On adoptera la notation  $G - K$  à la place de  $G[V - K]$ . Si  $v \in V - K$ , le graphe  $G[K \cup \{v\}]$  est dénoté par  $K + v$ . Un sous-graphe *partiel*  $H$  de  $G$  est un sous-graphe de  $G$  tel que  $E(H)$  ne contient pas nécessairement toutes les arêtes de  $G$  dont les extrémités sont dans  $V(H)$ . Une *clique* d'un graphe  $G$  est un sous-ensemble de sommets de  $G$  qui engendre un graphe complet. Par exemple,  $A$  et  $B$  sont des cliques du co-biparti  $H = (A, B; F)$ . Une clique de trois sommets est appelée *triangle*. Un *stable* d'un graphe  $G$  est un sous-ensemble de sommets de  $G$  qui engendre un graphe sans arêtes.

On appelle *couplage* d'un graphe un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes.

Une *chaîne*  $P$  de longueur  $k$  de  $G$  est une séquence de sommets  $v_0 v_1 \cdots v_k$  de  $G$  telle que pour  $i = 0, \dots, k-1$ ,  $v_i v_{i+1}$  est une arête de  $G$  et  $v_i \neq v_j$  pour tout  $i \neq j$ . Les sommets  $v_0$  et  $v_k$  sont les *extrémités* de  $P$  (on dit d'ailleurs que  $P$  relie  $v_0$  à  $v_k$ ) et les sommets  $v_1, \dots, v_{k-1}$  sont les sommets *internes* (ou *intérieurs*) de  $P$ . Un *cycle*  $C$  de longueur  $k$  de  $G$  est une séquence de sommets  $v_0 v_1 \cdots v_k$  de  $G$  telle que pour  $i = 0, \dots, k-1$ ,  $v_i v_{i+1}$  est une arête de  $G$  et  $v_i \neq v_j$  pour tout  $i \neq j$ , sauf pour  $i = 0$  et  $j = k$ , c'est-à-dire,  $v_0 = v_k$ . Si  $v_i v_j$  ( $j \neq i+1$ ) est une arête de  $G$ , alors  $v_i v_j$  est une *corde* de  $P$  ( $C$ ). La chaîne  $P$  est dite *induite* ou *sans cordes*, si  $G[v_0, \dots, v_k]$  n'a aucun cycle ou encore si  $P$  n'a aucune corde. Pareillement, un cycle  $C$  est dit induit ou sans cordes si  $C$  n'a aucune corde. Un *segment*  $P[v_i, v_j]$  d'une chaîne  $P$  est la chaîne incluse définie par la sous-séquence dont les extrémités sont  $v_i$  et  $v_j$ . Parfois et par souci de simplification le segment  $P[v_i, v_j]$  est noté  $P[i, j]$ . Une chaîne sans cordes à  $k$  sommets sera fréquemment dénotée par  $P_k$ . Un *trou*  $C_k$  est un cycle sans cordes de  $k$  sommets ( $k \geq 5$ ). Un *trou* est *pair* (*impair*) si  $k$  est pair (impair). Un *antitrou*  $\bar{C}_k$  est le complément d'un trou  $C_k$ .

Un graphe est dit *biparti-cordal* s'il est biparti et tout cycle avec plus de quatre sommets a au moins une corde.

Un graphe est dit *connexe* s'il existe une chaîne reliant chaque paire de sommets distincts de ce graphe. Une *composante* d'un graphe *non connexe* est un sous-graphe maximal

connexe. Sauf mention expresse, les graphes traités dans ce travail seront toujours des graphes connexes.

Une arête d'un graphe  $G$  sera dite *plate* si elle n'appartient à aucun triangle de  $G$ . Un sommet est *simplicial* si son voisinage est une clique. Deux sommets  $\{x, y\}$  de  $G$  sont appelés *jumeaux*, si tout autre sommet de  $G$  ou bien voit  $x$  et  $y$  ou bien ne voit aucun des deux. Si  $xy \in E(G)$ , alors ils sont dits *vrais jumeaux*, sinon ils sont appelés *faux jumeaux*. Un *ensemble homogène*  $H$  d'un graphe  $G$  est un ensemble de sommets de  $G$  possédant au moins deux sommets et tel que tout sommet de  $G - H$  voit soit tous les sommets de  $H$  soit aucun sommet de  $H$ .

Une *articulation*  $C$  d'un graphe  $G$  est un sous-ensemble de sommets de  $G$  tel que  $G - C$  est non connexe. Si  $C$  est une clique, on l'appelle *clique d'articulation*. Si  $C$  engendre un graphe ayant un sommet *universel* (c'est-à-dire, un sommet adjacent à tous les autres sommets de  $C$ ), on l'appelle *articulation étoilée*. En plus, ce sommet universel sera appelé le *centre de l'étoile*  $C$ . Pour un graphe  $H$  bien défini, on va dire que  $G$  possède une  $H$ -articulation si  $G$  possède une articulation engendrant un graphe isomorphe à  $H$ .

Soit  $G$  un graphe et soient  $B_1, \dots, B_k$  les composantes de  $G - C$ , où  $C$  est une articulation de  $G$ . Les *pièces* de  $G$  relatives à  $C$  sont les graphes  $G_i[B_i \cup C]$ , pour  $1 \leq i \leq k$ .

Un *diamant* est un graphe à quatre sommets  $\{a, b, c, d\}$ , et cinq arêtes  $\{ab, ad, bc, dc, bd\}$ , ou encore  $(K_4 - e)$ . Les sommets  $a$  et  $c$  sont les *pointes* du diamant. Une *griffe* est un graphe à quatre sommets  $\{a, b, c, d\}$  d'arêtes  $\{ab, ac, ad\}$ , ou plus simplement  $K_{1,3}$  (voir figure 2.1.1).

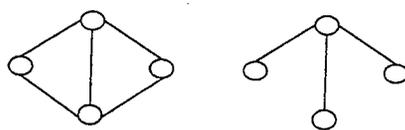


Figure 2.1.1: Un diamant et une griffe.

Le *line-graphe* d'un graphe  $G$  (noté  $L(G)$ ) est le graphe obtenu à partir de  $G$  de la façon suivante : à chaque arête de  $G$ , on fait correspondre un sommet de  $L(G)$  et deux sommets de  $L(G)$  sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes de  $G$  sont incidentes. Dans ce travail, les line-graphes des graphes bipartis (qu'on note par le sigle LGB) joueront un rôle important. On voit également que les ensembles stables d'un line-graphe  $L(G)$  correspondent aux couplages de  $G$  et qu'en général ses cliques maximales

correspondent aux arêtes de  $G$  incidentes à un même sommet (l'exception étant le triangle, car son line-graphe est aussi un triangle).

Le *graphe des cliques* d'un graphe  $G$  ou plus précisément le *graphe d'intersection des cliques maximales* de  $G$  (noté  $K(G)$ ) est le graphe obtenu à partir de  $G$  de la façon suivante : à chaque clique maximale de  $G$ , on fait correspondre un sommet de  $K(G)$  et deux sommets de  $K(G)$  sont adjacents si et seulement si les cliques maximales correspondantes de  $G$  s'intersectent en au moins un sommet.

La *contraction* ou identification d'une paire de sommets non adjacents  $\{x, y\}$  dans un graphe  $G$  produit un nouveau graphe  $G/xy$  qui est essentiellement le graphe  $G$  sans les sommets  $x$  et  $y$  et avec un nouveau sommet  $xy$  adjacent à tous les sommets de  $N(x) \cup N(y)$ . Les arêtes multiples qui peuvent apparaître sont remplacées par une seule.

Pour un graphe orienté  $G$  (le cas où  $\phi_G$  associe une paire *ordonnée* de sommets à chaque arête) les arêtes  $xy$  seront appelées *arcs* et seront écrites  $x\vec{y}$ , indiquant ainsi par  $x$  le sommet *origine* ou *sortant* de l'arc et par  $y$  son *extrémité* ou sommet *rentrant*. Un sommet qui est sortant pour tout arc qui lui est incident est appelé *source* et un sommet qui est rentrant pour tout arc qui lui est incident est appelé *puits*.

## 2.2 Graphes parfaits généraux

Des nombreux paramètres sont définis sur les graphes. Les graphes parfaits mettent en évidence les rapports entre quatre paramètres assez connus que l'on va rappeler maintenant.

Une *coloration* d'un graphe de  $n$  sommets est l'affectation d'une couleur à chaque sommet du graphe de façon que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Une *classe* de couleur est l'ensemble des sommets qui ont reçu la même couleur. Une coloration triviale d'un graphe peut être faite avec  $n$  couleurs. Une *coloration optimale* est une coloration utilisant un nombre minimum de couleurs. Le *nombre chromatique* d'un graphe  $G$ , noté par  $\chi(G)$ , est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer  $G$ .

On va noter par  $\omega(G)$  la cardinalité d'une clique maximum de  $G$ . Puisque les sommets d'une clique maximum doivent avoir des couleurs différentes, il est clair que pour un graphe  $G$ , on a :

$$\chi(G) \geq \omega(G). \tag{2.2.1}$$

Le *nombre de stabilité* d'un graphe  $G$ , dénoté par  $\alpha(G)$ , est la cardinalité d'un ensemble stable maximum de  $G$ . On observe que chaque classe de couleur d'une coloration est un ensemble stable. En plus, trivialement :

$$\alpha(G) = \omega(\bar{G}). \quad (2.2.2)$$

Pour un graphe  $G$ , une *couverture de sommets par des cliques disjointes* est une partition des sommets de  $G$  en cliques disjointes. Le *nombre de couverture* d'un graphe, noté par  $\theta(G)$ , est la cardinalité minimum d'une couverture de sommets par des cliques. Puisque deux sommets d'un ensemble stable d'un graphe  $G$  ne sont jamais dans une même clique, on a :

$$\theta(G) \geq \alpha(G). \quad (2.2.3)$$

D'ailleurs, on observe que les partitions d'une couverture minimum de  $G$  forment des ensembles stables dans  $\bar{G}$  et donc une coloration optimale de  $\bar{G}$ . Donc :

$$\theta(G) = \chi(\bar{G}). \quad (2.2.4)$$

Ces inégalités entre ces quatre paramètres ont amené Claude Berge à définir la classe des *graphes parfaits* [1], à savoir :

**Définition 2.1 (Graphes parfaits)** *Un graphe  $G$  est parfait si pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ , on a  $\chi(H) = \omega(H)$ .*

Il y a des classes évidentes de graphes parfaits. Par exemple, les graphes bipartis constituent une telle classe, car si  $G$  est biparti,  $\chi(G) = 2 = \omega(G)$  (sauf si  $E$  est vide et  $\chi(G) = 1 = \omega(G)$ ) et tout sous-graphe induit de  $G$  est aussi un graphe biparti. On peut aussi observer que les compléments de graphes bipartis (les co-bipartis) sont parfaits, en rappelant un résultat de König (voir Gallai [13], Lovász [31]), qui dit que *dans un graphe biparti  $G$  sans sommets isolés, le nombre minimum d'arêtes pour couvrir par incidence tous ses sommets est égal au nombre de stabilité de ce graphe*. On peut donc construire une partition des sommets de  $\bar{G}$  de sorte que chaque arête de  $G$  dans cette couverture correspond à un stable de taille au maximum deux. Ce faisant, on obtient une coloration de  $\bar{G}$  en  $\omega(\bar{G})$  couleurs. Puisque tout sous-graphe induit de  $G$  est aussi co-biparti, alors  $G$  est parfait.

Dans la prochaine section, on passera en revue d'autres classes de graphes parfaits classiques.

**Définition 2.2 (Graphes minimalement imparfaits)** *Un graphe  $G$  est minimalement imparfait si  $G$  n'est pas parfait mais tous ses sous-graphes induits stricts le sont.*

Il y a des classes évidentes de graphes minimalement imparfaits. Par exemple, les trous impairs  $C_{2k+1}$ , car  $\omega(C_{2k+1}) = 2$  et  $\chi(C_{2k+1}) = 3$ , alors que tout sous-graphe induit strict est biparti. Les antitrous impairs aussi sont minimalement imparfaits, car  $\omega(\bar{C}_{2k+1}) = k$  et  $\chi(\bar{C}_{2k+1}) = k + 1$ , alors que tout sous-graphe induit strict est un co-biparti.

Les relations liant  $\chi(G)$ ,  $\theta(\bar{G})$ , et  $\omega(G)$ ,  $\alpha(\bar{G})$ , ont amené Berge à formuler une première conjecture dénommée conjecture faible des graphes parfaits dont la validité a été démontrée par Lovász [30] et est connue aujourd'hui comme le Théorème des Graphes Parfaits, à savoir :

**Théorème A (Théorème des graphes parfaits)** *Un graphe est parfait si et seulement si son complément est parfait.*

La preuve de Lovász de ce résultat et les efforts faits par Fulkerson pour le démontrer ont été à l'origine, de la part de Lovász d'une théorie des graphes minimalement imparfaits, et de la part de Fulkerson d'une théorie des bloquants et anti-bloquants des polyèdres [11].

Les trous impairs et les antitrous impairs étant minimalement imparfaits, Berge a conjecturé qu'ils étaient les seuls graphes minimalement imparfaits. Cette conjecture encore d'actualité est appelée conjecture forte des graphes parfaits.

**Conjecture 2.1 (Conjecture forte des graphes parfaits)** *Un graphe est parfait si et seulement s'il ne contient ni trou impair ni antitrou impair comme sous-graphe induit.*

Cette conjecture déjà vieille de plus de trente ans a mobilisé et mobilise encore de nombreux chercheurs. Les stratégies choisies pour la démontrer peuvent être classifiées en deux courants majeurs :

- Définition de classes de graphes parfaits vérifiant la conjecture forte. Le nombre de telles classes est déjà important. Dans cette thèse, quelques telles classes sont à l'étude.

- L'étude des graphes minimalement imparfaits. Cette étude a abouti au concept de graphes partitionnables, constituant une classe de graphes imparfaits contenant strictement tous les graphes minimalement imparfaits.

En dehors de l'étude de la conjecture forte, les graphes parfaits ont motivé des recherches en complexité algorithmique concernant la détermination des quatre paramètres qui leurs sont liés. Il se trouve que ces paramètres sont *difficiles* à déterminer pour les graphes en général (problèmes NP-durs ou absence d'algorithmes connus ayant une complexité polynomiale par rapport au nombre de sommets de ces graphes).

En revanche, grâce aux bonnes caractéristiques des polyèdres des ensembles stables des graphes parfaits, Grötschel, Lovász et Schrijver ont pu prouver qu'il est possible de déterminer, en utilisant la méthode ellipsoïde [17], le nombre de stabilité d'un graphe parfait en temps polynomial. Ceci implique qu'on peut, pour un graphe parfait, déterminer les trois autres paramètres en temps polynomial.

Le vaste nombre d'applications se ramenant à la coloration d'un graphe ou à la recherche d'un ensemble stable maximum ont encore motivé les recherches dans ce domaine, avec l'apparition de deux nouveaux axes de recherche : d'une part, la recherche d'algorithmes efficaces (i.e. en temps polynomial) de reconnaissance de classes de graphes parfaits qui peuvent se révéler après une étude théorique ; et d'autre part, la recherche d'algorithmes de coloration plus efficaces et plus pratiques que l'algorithme utilisant la méthode ellipsoïde, et qui utilisent des méthodes combinatoires. Dans ces deux domaines, de nombreux résultats ont été obtenus.

Le travail de cette thèse a un rapport avec tous ces axes de recherches :

- les recherches dans la caractérisation des graphes de quasi-parité stricte sont un moyen de se rapprocher d'une preuve de la conjecture forte ;
- les recherches dans la caractérisation des graphes parfaitement contractibles (définis à partir d'une idée générale d'algorithme combinatoire de coloration) aboutissent à des algorithmes de coloration plus efficaces ;
- parallèlement, des recherches sur des algorithmes de reconnaissance des graphes de ces deux classes précédentes.

Les résultats obtenus sont relatifs à deux classe de graphes : les graphes planaires et les graphes sans griffe.

Dans la Section 2.3, on présente quelques classes usuelles de graphes parfaits.

Dans la Section 2.4, on va présenter le concept de paires d'amis et les classes définies à partir de ce concept, qui sont au centre de ce travail.

Dans les deux dernières sections, on rappelle quelques résultats lorsqu'on superpose la propriété de perfection soit avec la qualité de planarité, soit avec la qualité d'absence de griffe.

## 2.3 Quelques classes de graphes parfaits

Le nombre de classes de graphes parfaits ayant un intérêt soit mathématique soit modélisateur est trop important pour qu'on cite toutes ces classes. Nous rappelons seulement celles que nous utiliserons dans cette thèse.

### 2.3.1 Line-graphes de graphes bipartis

Pour constater que les line-graphes de graphes bipartis sont effectivement parfaits, il suffit pour un line-graphe  $G$  d'un biparti  $H$  de rappeler les faits suivants : 1) une coloration minimale de  $G$  correspond à une partition minimum en couplages du graphe  $H$  ; 2) D'après König ([26] [31]), ce nombre minimum est le degré maximum de  $H$ , c'est-à-dire la taille d'une clique maximum de  $G$  ; 3) tout sous-graphe induit de  $G$  est un line-graphe de biparti.

La caractérisation suivante des line-graphes de bipartis nous sera utile tout au long de ce travail :

**Théorème B ([18])** *Un graphe est le line-graphe d'un graphe biparti simple si et seulement s'il ne contient comme sous-graphe induit ni griffe, ni diamant, ni trou impair.*

□

Étant donné un graphe  $G$  sans griffe, sans diamant et sans trou impair, on peut obtenir à partir de  $G$  le graphe biparti  $B$  tel que  $G = L(B)$  de la manière suivante : pour chaque clique maximale de  $G$ , on fait correspondre un sommet de  $B$ , et on introduit une arête entre deux sommets de  $B$  si les cliques correspondantes de  $G$  s'intersectent (et pour chaque

sommet simplicial  $x$  de  $G$ , on rajoute un sommet de  $B$  adjacent seulement au sommet représentant la clique maximale de  $G$  qui contient  $x$ ).

*Remarque.* Dans un line-graphe d'un graphe biparti simple, le voisinage d'un sommet est soit une clique soit deux cliques sans aucune arête entre elles, car ces graphes ne contiennent ni griffes ni diamants.

### 2.3.2 Graphes de comparabilité

Un graphe est de comparabilité s'il admet une orientation transitive (c'est-à-dire, une orientation telle que si  $\vec{xy}$  et  $\vec{yz}$  sont des arcs, alors  $\vec{xz}$  est aussi un arc). D'une façon équivalente, un graphe est de comparabilité s'il représente la relation (symétrique) de comparabilité pour un ensemble fini  $X$  muni d'un ordre partiel  $P$  (encore appelé poset  $(X, P)$ ).

On peut voir que ces graphes sont parfaits, en observant que si  $k$  est la longueur d'une plus longue suite croissante dans  $P$ , alors le graphe de comparabilité  $G$  construit à partir de  $P$  peut être coloré avec  $k$  couleurs (si on dessine  $G$  en couches avec les plus grands sommets dans la première couche et ainsi de suite, on peut voir que  $k$  est exactement le nombre de couches nécessaires pour représenter  $G$  et les sommets de chaque couche définissent un stable). D'autre part, puisque cette plus longue suite se traduit par une clique dans  $G$ , on obtient  $\omega(G) = k$  et  $G$  possède donc une coloration en  $\omega(G)$  couleurs. Finalement, puisque tout sous-graphe induit de  $G$  est aussi de comparabilité,  $G$  est parfait (une preuve détaillée de ce résultat peut être vue dans Lovász [31] et Golumbic [16]).

Tibor Gallai [14] a donné une caractérisation complète des graphes de comparabilité par une famille de sous-graphes exclus, entraînant une méthode pour les reconnaître (F. Maffray et M. Preissmann ont fait une traduction de cet article de Gallai [35]).

### 2.3.3 Graphes triangulés

Un graphe sans cycle induit de longueur plus grande ou égale à quatre est dit un graphe *triangulé*.

On va rappeler une caractérisation des graphes triangulés donnée par Fulkerson et Gross [12] impliquant facilement la perfection des graphes de cette classe. Auparavant, on appelle *ordre d'élimination simpliciale* d'un graphe  $G$  tout ordre  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  des

$n$  sommets de  $G$  tel que pour tout  $i$ ,  $v_i$  est simplicial pour le sous-graphe engendré par  $\{v_i, \dots, v_n\}$ .

**Théorème C** *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $G$  est un graphe triangulé
- (2) Les sommets de  $G$  admettent un ordre d'élimination simpliciale et celui-ci peut commencer avec n'importe quel sommet simplicial de  $G$
- (3) Toute articulation minimale de  $G$  est une clique ou  $G$  est une clique.

Par ce théorème, si un graphe triangulé  $G$  n'est pas complet,  $G$  contient une clique d'articulation minimale. Chaque pièce  $G_i$  de  $G$  par rapport à cette articulation a son paramètre  $\omega(G_i)$  et il est facile de voir que  $\omega(G) = \max\{\omega(G_i)\}$ . En faisant l'hypothèse de récurrence par rapport au nombre de sommets, chaque  $G_i$  est donc parfait et peut être coloré avec  $\omega(G_i)$  couleurs. On peut prendre des couleurs identiques pour les sommets hors de la clique d'articulation appartenant à des pièces distinctes. Donc,  $G$  peut être coloré avec  $\omega(G)$  couleurs. Enfin, puisque chaque sous-graphe de  $G$  est aussi triangulé,  $G$  est parfait (une preuve détaillée de ce résultat peut être vue dans Golombic [16]).

## 2.4 Paires d'amis et graphes parfaits

Dans toute cette thèse, le concept de paire d'amis développé depuis dix ans environ [10] [37] va jouer un rôle central. Nous l'exposons de manière relativement détaillée.

**Définition 2.3 (Paire d'amis)** *Une paire de sommets non adjacents d'un graphe forment une paire d'amis si toutes les chaînes sans cordes qui les relient sont de longueur paire.*

Par la même occasion, nous définissons le concept de *paire d'ennemis*. Deux sommets non adjacents sont des ennemis si toutes les chaînes sans cordes entre eux sont de longueur impaire.

Il est facile de vérifier que les trous impairs et les antitrous pairs ou impairs n'ont pas de paires d'amis (deux sommets non adjacents d'un antitrou correspondent à deux sommets

adjacents du trou qui se trouvent être au milieu d'un  $P_4$  et donc par complémentation ces deux sommets sont extrémités d'un  $P_4$ ).

En conséquence les seuls graphes minimalement imparfaits connus n'ont pas de paires d'amis. Meyniel a démontré qu'il en est toujours ainsi :

**Théorème D ([37])** *Un graphe minimal imparfait ne contient aucune paire d'amis.*  $\square$

Ce théorème a permis à Meyniel de définir la classe des graphes de quasi-parité stricte :

**Définition 2.4 (Graphes de quasi-parité stricte)** *Un graphe  $G$  est de quasi-parité stricte si tout sous-graphe induit de  $G$  soit est une clique soit contient une paire d'amis.*

Par le Théorème D, cette classe est une classe de graphes parfaits et contient d'autres sous-classes de graphes parfaits, telles que :

- *Les graphes de Meyniel.* Dans [36], Meyniel a défini la classe des graphes dont chaque cycle impair a au moins deux cordes et démontré que ces graphes sont parfaits. Cette classe est connue aujourd'hui sous le nom de graphes de Meyniel. Les graphes de Meyniel généralisent à la fois les résultats de Gallai (graphes dont les cycles impairs ont deux cordes non croisées [13], appelés graphes *i*-triangulés) et de Sachs (graphes dont les cycles impairs ont deux cordes croisées [42], appelés graphes de parité). Un peu plus tard, Meyniel a démontré que ces graphes sont de quasi-parité stricte [37] (preuve par induction sur le nombre de sommets, en observant qu'une paire d'amis dans le graphe induit par le voisinage d'un sommet d'un graphe de Meyniel est une paire d'amis dans le graphe tout entier). Michel Burlet et Jean Fonlupt [4] ont démontré qu'un graphe donné est de Meyniel si et seulement s'il peut être obtenu à partir de certains graphes de Meyniel primitifs en appliquant de manière itérative une opération de composition appelée amalgame. De ce résultat, on obtient un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes de Meyniel.
- *Les graphes faiblement triangulés.* Cette classe a été définie par Hayward [19] de la manière suivante : un graphe est faiblement triangulé si lui et son complément n'ont pas de cycles sans cordes de longueur supérieure ou égale à cinq. Cette classe inclut la classe des graphes triangulés et les compléments des graphes triangulés (graphes co-triangulés). Hoàng et Maffray ont démontré que ces graphes possèdent toujours

une paire d'amis (et sont donc de quasi-parité stricte) et un peu plus tard, avec Hayward [40], que ces graphes possèdent une *paire de complices* (une paire d'amis dont toutes les chaînes sans cordes les reliant sont de longueur deux). Par définition, les graphes faiblement triangulés peuvent être reconnus en temps polynomial (voir Hayward [19] pour les détails de cette méthode). Un algorithme polynomial plus rapide pour reconnaître les graphes faiblement triangulés a été donné par Spinrad et Sritharan [43]. Dans cet algorithme, tant que le graphe est incomplet, on cherche une paire de complices (dont Hayward, Hoàng et Maffray ont garanti l'existence dans un graphe faiblement triangulé incomplet) et on rajoute une arête entre eux. Le graphe du début est faiblement triangulé si et seulement si le graphe obtenu à la fin du processus est complet.

- *Les graphes parfaitement ordonnables.* Cette classe a été définie par Chvátal [5]. Etant donné un graphe, un ordre sur ses sommets et un ensemble de couleurs  $1, 2, \dots$ , ce graphe peut être coloré d'une façon gloutonne, c'est-à-dire, en prenant chaque sommet selon cet ordre et en lui affectant la plus petite couleur disponible compte tenu des voisins déjà colorés. Un ordre des sommets d'un graphe est dit *parfait*, si l'algorithme glouton appliqué selon cet ordre produit une coloration optimale de ce graphe et de tout sous-graphe induit. Un ordre *admissible* sur les sommets d'un graphe est un ordre total  $<$ , tel qu'il n'existe aucune chaîne induite à quatre sommets  $abcd$  avec  $a < b$  et  $d < c$ . Chvátal a démontré que les ordres parfaits et admissibles sont des concepts équivalents, défini la classe des graphes parfaitement ordonnables comme étant la classe des graphes qui admettent un ordre parfait sur ses sommets et prouvé leur perfection [5]. Meyniel a démontré que les graphes parfaitement ordonnables sont de quasi-parité stricte [37].

Citons quelques unes des sous-classes importantes de la classe des graphes parfaitement ordonnables :

- les graphes de comparabilité. En effet, l'ordre transitif sur les sommets d'un graphe de comparabilité empêche l'existence d'un  $P_3$  induit  $xyz$  tel que  $x < y < z$ . Ceci implique que toute extension linéaire de cet ordre est un ordre admissible.
- les graphes triangulés et co-triangulés. L'ordre d'élimination simpliciale pour un graphe triangulé (ou son opposé pour un co-triangulé) empêche l'existence d'un  $P_3$  induit  $xyz$  avec  $y > x$  et  $y > z$  (ou  $y < x$  et  $y < z$  pour le co-triangulé

complément du  $P_3$   $xyz$ ).

La complexité algorithmique de trouver des paires d'amis pour les graphes en général est bien connue. Bienstock [3] a démontré que décider de l'existence d'une chaîne impaire sans cordes reliant une paire de sommets donnée est un problème NP-complet. En conséquence, décider qu'une paire de sommets donnée est une paire d'amis est un problème co-NP-complet. En outre, dans ce même article, Bienstock a prouvé que même si on sait que toutes les paires de sommets d'un graphe, sauf une, sont des paires d'amis, décider si la dernière paire est reliée par une chaîne induite impaire est un problème NP-complet.

En revanche, Reed a conjecturé [41] que pour un graphe parfait 1) décider qu'une paire de sommets donnée forme ou non une paire d'amis est un problème polynomial, 2) il est possible de décider en temps polynomial qu'il contient ou non une paire d'amis et si oui, en trouver une.

Ces conjectures sont toujours ouvertes.

Dans [37], Meyniel a posé le problème de caractériser les graphes qui ne sont pas de quasi-parité stricte mais qui sont minimaux par rapport à cette propriété. Comme on l'a déjà remarqué, les trous impairs et les antitrous n'ont aucune paire d'amis, mais on peut montrer en plus qu'ils sont minimaux par rapport à cette propriété. S. Hougardy a remarqué que les paires d'amis dans les line-graphes de bipartis sont très spéciales [24]. Il a démontré le résultat qu'on peut réécrire de la façon suivante :

**Théorème E ([24])** *Si  $G$  est le line-graphe d'un biparti simple  $H$ , alors une paire d'amis de  $G$  est nécessairement une paire déconnectante d'arêtes de  $H$ .*

Ceci implique, que cette paire d'amis de  $G$  est une articulation à deux sommets de  $G$ . En outre, tout line-graphe de biparti 3-connexe n'a aucune paire d'amis. Hougardy a aussi énoncé une conjecture sur les graphes minimaux sans paires d'amis. Avant de la présenter, on a besoin de la définition suivante :

**Définition 2.5 (Obstruction)** *Une obstruction est un graphe sans paire d'amis et qui est minimal avec cette propriété.*

**Conjecture 2.2 (Conjecture de Hougardy)** *Toute obstruction est :*

- soit un trou impair

- soit un antitrou
- soit le line-graphe d'un graphe biparti.

Selon cette conjecture, les seules obstructions imparfaites sont les trous impairs et les antitrous impairs. Hourgardy a donc formulé une autre conjecture qu'il a prouvé équivalente à la conjecture forte de graphes parfaits, à savoir :

**Conjecture 2.3 ([23])** *Tout graphe minimalement imparfait est une obstruction.*

*Il est important de remarquer qu'en raison de la minimalité une obstruction ne contient pas de cliques d'articulation ni de sommets dont le voisinage est stable (sauf si l'obstruction est un trou impair).*

On observe que pour un graphe sans trous impairs, la contraction de toute paire d'amis préserve l'absence de trous impairs. Le résultat suivant dû à Fonlupt et Uhry garantit que la contraction d'une paire d'amis préserve la perfection.

**Théorème F ([10])** *Soit  $G$  un graphe parfait et  $\{x, y\}$  une paire d'amis de  $G$ , alors  $G/xy$  est parfait, et  $\omega(G/xy) = \omega(G)$ .  $\square$*

Comme conséquence de ce résultat, si on sait colorer de façon optimale  $G/xy$  (donc avec  $\omega(G/xy)$  couleurs), on peut trouver une coloration optimale pour  $G$  (donc avec  $\omega(G)$  couleurs) tout simplement en affectant à  $x$  et  $y$  la couleur donnée au sommet  $xy$  dans la première coloration et en donnant à tous les autres sommets de  $G$  la même couleur que dans la coloration de  $G/xy$ .

Cet argument peut être appliqué récursivement, c'est-à-dire, étant donné un graphe parfait  $G$ , si ce graphe a une séquence de contractions de paires d'amis conduisant à un graphe qu'on sait colorer de façon optimale (par exemple, un graphe complet), alors, on peut remonter cette coloration jusqu'au graphe  $G$  du départ et cette coloration de  $G$  sera aussi optimale.

Un graphe  $G$  est dit *amicalement contractible* s'il existe une séquence  $G = G_0, G_1, \dots, G_k$  où  $G_k$  est complet et  $G_i$  est issu de  $G_{i-1}$  par la contraction d'une paire d'amis de  $G_{i-1}$  (par convention, un graphe complet est considéré comme amicalement contractible). Cette définition a été introduite par Bertschi [2]. Cependant, les graphes amicalement contractibles

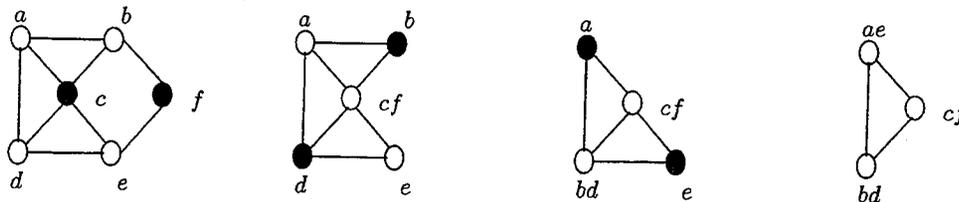


Figure 2.4.2: Un graphe amicalement contractible et pas parfaitement contractible.

ne sont pas nécessairement parfaits : dans la figure 2.4.2 on peut voir un graphe amicalement contractible contenant un trou impair et sa séquence de contractions. Bertschi a donc précisé ce concept en définissant les graphes parfaitement contractibles, à savoir :

**Définition 2.6 (Graphes Parfaitement Contractibles)** *Un graphe  $G$  est parfaitement contractible si tout sous-graphe induit de  $G$  est amicalement contractible.*

Il est clair que les graphes parfaitement contractibles sont des graphes de quasi-parité stricte et on va voir plus tard que les sous-classes de graphes de quasi-parité stricte présentées plus haut sont parfaitement contractibles. Cependant, ces deux classes (la classe des graphes de quasi-parité stricte et la classe des graphes parfaitement contractibles) sont distinctes, comme le montre le graphe de la figure 2.4.3 qui est de quasi-parité stricte mais qui n'est pas parfaitement contractible.

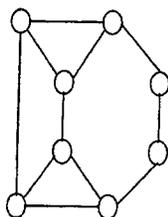


Figure 2.4.3: Un graphe de quasi-parité stricte non parfaitement contractible.

On peut naturellement colorer les graphes parfaitement contractibles avec l'algorithme qui suit.

### Algorithme de Coloration par Contraction de Paires d'Amis

Entrée : Un graphe  $G$  parfaitement contractible ;

Sortie : Une coloration optimale de  $G$  ;

Variables de travail : une liste  $H_i$  de graphes ;

*Partie A* : Contraction

*Etape 1.*  $i := 0$  ;  $H_i := G$  ;

*Etape 2.* Tant que  $H_i$  n'est pas une clique, faire :

*Etape 2.1.* Trouver une paire d'amis  $\{x, y\}$  de  $H_i$  ;

*Etape 2.2.* Contracter  $x$  et  $y$ , afin d'obtenir le graphe  $H_{i+1}$  ;

*Etape 2.3.*  $i := i + 1$  ;

*Partie B* : Coloration

*Etape 1.* Colorer la clique  $H_i$  ;

*Etape 2.* Tant que  $H_i \neq G$ , faire :

*Etape 2.1.* Colorer le graphe  $H_{i-1}$  en donnant à  $x$  et  $y$  la même couleur que le sommet  $xy$  dans  $H_i$ , et à tous les autres sommets la même couleur qui leur a été affectée dans la coloration de  $H_i$ .

*Etape 2.2.*  $i := i - 1$  ;

On peut éviter la Partie B : il n'est pas nécessaire en effet de remonter la coloration de la clique obtenue à la fin de la Partie A, puisque chaque sommet contracté de la clique représente un ensemble stable de sommets. On peut tout simplement affecter la couleur de ce sommet à tous les sommets de cet ensemble sans passer par la remontée.

Il est clair que la complexité de cet algorithme repose sur celle du problème de trouver une paire d'amis dans chaque graphe  $H_i$ . En outre, même si on trouve une paire d'amis, encore faut-il que cette paire soit une "bonne" paire, c'est-à-dire que le graphe issu de sa contraction soit toujours parfaitement contractible avec à nouveau une "bonne" paire d'amis facile à trouver. Le graphe (parfaitement contractible) de la figure 2.4.4 possède par exemple la paire d'amis  $\{a, b\}$  malheureusement mauvaise, car la contraction associée produit un graphe sans aucune paire d'amis.

Hertz [20] a démontré que les graphes de Meyniel sont parfaitement contractibles. De manière plus précise, les graphes de Meyniel ont une paire d'amis facile à trouver (en tant que complexité) et que la contraction de cette paire d'amis produit un graphe parfaitement

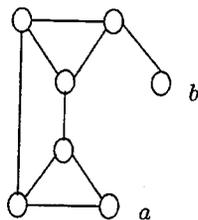


Figure 2.4.4: Une contraction de paires d'amis produisant un graphe non parfaitement contractible.

contractible avec une paire d'amis qui peut être encore trouvée facilement. Sa procédure pour trouver une paire d'amis convenable dans un graphe de Meyniel  $G$  incomplet est la suivante :

1. Choisir un sommet  $x$  quelconque de  $G$  qui n'est pas universel ;
2. Parmi tous les non voisins de  $x$ , choisir le sommet  $y$  qui maximise  $|N(x) \cap N(y)|$  ;

La paire  $\{x, y\}$  est une paire d'amis dont la contraction produit un graphe qui, sans obligatoirement être de Meyniel (le graphe la figure 2.4.5 montré par Hertz souligne bien ce cas), est parfaitement contractible et possède des paires d'amis qui peuvent être trouvées comme plus haut. D'une manière plus précise, après avoir contracté  $\{x, y\}$ , la procédure reconsidère le sommet contracté  $xy$  à la place de  $x$  si  $xy$  n'est pas universel, et dans le cas contraire, recommence avec un autre sommet quelconque qui n'est pas universel.

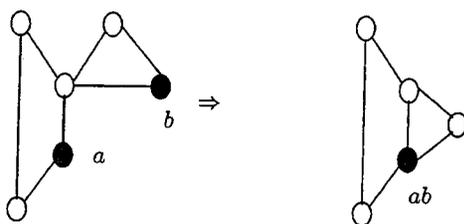


Figure 2.4.5: Une séquence de contractions d'un graphe de Meyniel qui produit un graphe quasi-Meyniel.

Lorsque la procédure précédente fait sortir de la classe Meyniel, on retrouve un graphe dit de *quasi-Meyniel* et dont Hertz trouve la caractérisation suivante : 1) tout cycle impair

de taille au moins cinq a au moins une corde 2) l'ensemble des arêtes qui sont corde unique d'un cycle impair approprié ont toute une extrémité commune.

Clairement la classe des graphes quasi-Meyniel contient celle des graphes de Meyniel et Hertz a démontré qu'elle est contenue dans la classe des graphes parfaitement contractibles.

On observe en outre que l'algorithme de coloration par contraction appliqué aux graphes de quasi-Meyniel est de complexité  $O(n^3)$  (puisque'elle consiste essentiellement à trouver la paire d'amis convenable en utilisant la procédure donnée par Hertz).

Hayward, Hoàng et Maffray [40] ont aussi démontré qu'on peut utiliser l'algorithme de coloration par contraction pour colorer les graphes faiblement triangulés. Non seulement ils montrent que ces graphes, quand ils sont incomplets, possèdent toujours une paire de complices, mais, en plus, la contraction de cette paire produit un graphe lui-même faiblement triangulé. On peut donner une procédure exhaustive pour trouver une paire de complices dans un graphe quelconque :

Pour une paire de sommets non adjacents  $\{x, y\}$ , vérifier si  $G[V - (N(x) \cap N(y))]$  n'est pas connexe. Si c'est le cas,  $\{x, y\}$  forment une paire de complices, sinon, réitérer la procédure avec une autre paire.

En utilisant cette procédure dans l'algorithme de coloration par contraction, on obtient un algorithme de coloration pour les graphes faiblement triangulés de complexité  $O(n^2m)$ .

La classe des graphes parfaitement ordonnables est, comme on l'a vu, contenue dans la classe des graphes de quasi-parité stricte [37]. En effet, Hertz et de Werra ont démontré que ces graphes possèdent une paire d'amis telle que le graphe issu de sa contraction est toujours parfaitement ordonnable [21]. Or, ceci implique que ces graphes sont parfaitement contractibles. Cependant, la paire d'amis présentée par Hertz et de Werra, comme celle présentée par Meyniel, dépend de l'ordre parfait donné. En effet, d'après ces résultats lorsqu'on a un graphe et un ordre parfait sur ses sommets, il est facile de trouver une paire d'amis de ce graphe. En revanche, Middendorf et Pfeiffer [38] ont démontré que trouver un ordre parfait pour un graphe est un problème NP-complet. Par conséquent, on ne connaît rien sur la complexité du problème de trouver une paire d'amis dans un graphe parfaitement ordonnable ce qui empêche d'utiliser efficacement l'algorithme de coloration par contraction pour ces graphes.

La conception algorithmique de la classe des graphes parfaitement contractibles a une contre-partie mathématique qui est celle de sa caractérisation. On connaît certaines classes de graphes parfaitement contractibles, comme déjà vues, et certaines classes de graphes non parfaitement contractibles et minimaux pour cette propriété. Il est clair que la classe des obstructions est contenue dans la classe des graphes non parfaitement contractibles. En outre, aucun graphe parfaitement contractible ne peut contenir une obstruction comme sous-graphe induit. Everett et Reed ont formulé une conjecture sur les graphes minimaux non parfaitement contractibles. Pour la formuler, on aura besoin de la définition suivante :

**Définition 2.7 (Méchant)** *Un méchant est un graphe obtenu à partir de  $\bar{C}_6$  par subdivision (éventuellement neutre) des trois arêtes plates, de telle façon que les trois chaînes subdivisées aient la même parité. Un méchant est dit par conséquent pair ou impair selon la parité de ces chaînes.*

La conjecture de Everett et Reed prend alors la forme suivante :

**Conjecture 2.4 (Conjecture de Everett et Reed)** *Un graphe est parfaitement contractible si et seulement si il ne contient ni trou impair, ni antitrou, ni méchant impair comme sous-graphe induit.*

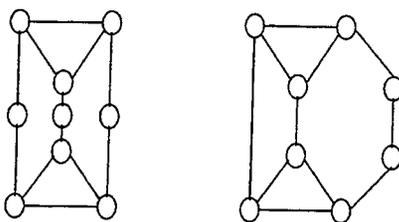


Figure 2.4.6: Des méchants pair et impair.

Dans la figure 2.4.6, on peut voir des exemples de méchants. On observe que le graphe  $\bar{C}_6$  est le plus petit méchant impair et, comme tous les antitrous, ne possède aucune paire d'amis. Il n'est pas difficile de vérifier qu'un méchant impair n'est pas parfaitement contractible et est minimal pour cette propriété. Pour prouver ce fait, la définition suivante, qui est la généralisation du concept de méchant, se fait nécessaire :

**Définition 2.8 (b-méchant)** *Un b-méchant impair est un graphe obtenu de la façon suivante : soit  $B_1, B_2, B_3$  trois graphes bipartis connexes disjoints et considérons la coloration de leurs ensembles de sommets en vert et rose de telle façon que chaque couleur soit un ensemble stable dans chaque  $B_i$ ; soit  $v_i$  et  $r_i$  des sommets quelconques de couleurs respectivement verte et rose appartenant à chaque  $B_i$ ; rajoutons enfin les arêtes  $v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3$  et  $r_1r_2, r_2r_3, r_1r_3$  (les b-méchants pairs peuvent être définis de façon similaire, en reliant des sommets de la même couleur, c'est-à-dire, en rajoutant des arêtes de manière analogue entre sommets soit verts soit roses choisis dans chaque  $B_i$ ).*

Il est clair que tout méchant impair est un b-méchant impair.

**Lemme 2.1** *Soit  $G$  un b-méchant impair. Les assertions suivantes sont valides :*

- (a) *Si  $x, y$  est une paire d'amis de  $G$ , alors ils appartiennent au même  $B_i$  et ont la même couleur*
- (b) *Si  $x, y$  sont deux sommets quelconques de la même couleur et dans le même  $B_i$ , alors ils forment une paire d'amis de  $G$*
- (c) *Si  $x, y$  est une paire d'amis de  $G$ , alors  $G/xy$  est un b-méchant impair*
- (d) *Si  $G$  n'a pas de paires d'amis, alors  $G$  est un  $\bar{C}_6$ .*

*Démonstration.* Observons qu'il existe une chaîne sans corde impaire  $Q_3$  reliant  $v_3$  à  $r_3$  dans  $B_3$ . En plus, chaque  $\{v_i, r_i\}$  est une articulation qui sépare  $B_i - \{v_i, r_i\}$  du reste du graphe.

(a) Supposons que  $x \in B_1$  et  $y \in B_2$  et que, sans perte de généralité,  $x$  est rose. Par suite, il existe dans  $B_1$  une chaîne paire sans corde  $Q_1$  reliant  $x$  à  $r_1$ . Si  $y$  est rose, alors il existe une chaîne paire sans cordes  $Q_2$  reliant  $y$  à  $r_2$  dans  $B_2$ , et  $Q_1 + r_1r_2 + Q_2$  est donc une chaîne impaire sans corde reliant  $x$  à  $y$ . Si  $y$  est vert, alors il existe une chaîne paire sans corde  $Q'_2$  reliant  $y$  à  $v_2$  dans  $B_2$  et  $Q_1 + r_1r_3 + Q_3 + v_3v_2 + Q'_2$  est une chaîne impaire sans corde reliant  $x$  à  $y$ . Maintenant, supposons que  $x, y$  appartiennent au même  $B_i$  et n'ont pas la même couleur ; alors il est clair qu'il existe une chaîne impaire sans corde les reliant dans  $B_i$ . On a ainsi prouvé (a).

(b) Supposons que  $x, y$  sont deux sommets rose dans  $B_1$  et soit  $P$  une chaîne sans corde quelconque entre eux. Si  $P$  appartient à  $B_1$ , alors il est clair que  $P$  est paire. Par

suite, supposons que  $P$  a des sommets dans  $G - B_1$ . Puisque  $\{r_1, v_1\}$  est une articulation et que  $P$  est sans corde, nous pouvons supposer que  $P = P_x + r_1 r_i + Q + v_i v_1 + P_y$  pour un certain  $i \in \{2, 3\}$ , où  $P_x$  (resp.  $P_y$ ) est une chaîne sans corde reliant  $x$  à  $r_1$  (resp.  $y$  à  $v_1$ ) dans  $B_1$ , et  $Q$  est une chaîne sans corde reliant  $r_i$  à  $v_i$  dans  $B_i$ . Puisque  $B_i$  est biparti, alors  $Q$  est impaire ; puisque  $x, y$  sont rose, alors  $P_x$  est paire et  $P_y$  est impaire. Par suite,  $P$  est paire et (b) a été démontré.

(c) Par (a), on peut supposer que les sommets  $x, y$  sont dans  $B_1$  et qu'ils sont rose. Il est clair que  $B_1/xy$  est biparti, connexe et non trivial. Alors  $G/xy$  est un b-méchant impair construit avec les bipartis  $B_1/xy, B_2$  et  $B_3$  de la façon évidente (si un des  $x, y$  est  $r_1$ , alors  $r_1$  est remplacé par le sommet contracté  $xy$ ).

(d) Par (b),  $G$  n'a pas de paires d'amis seulement si chacun des  $B_1, B_2, B_3$  a exactement un sommet de chaque couleur, c'est-à-dire, est réduit à une arête. Donc,  $G$  est un  $\bar{C}_6$ .  $\square$

Une conséquence immédiate de ce lemme est :

**Lemme 2.2** *Toute séquence de contractions de paires d'amis appliquée à un méchant impair conduit au  $\bar{C}_6$ .  $\square$*

Par les deux lemmes précédents, toute séquence possible de contractions conduit un méchant impair à un  $\bar{C}_6$ , alors la condition nécessaire de la conjecture est démontrée.

*Dans notre thèse, nous démontrerons que les graphes planaires et les graphes sans griffe satisfont la Conjecture de Hougardy et la Conjecture de Everett et Reed.*

Auparavant, nous allons examiner l'interférence des propriétés de planarité ou d'être sans griffe avec la propriété de perfection.

## 2.5 Graphes planaires et perfection

La classe des graphes planaires a été une des premières classes dont on a démontré qu'elle satisfaisait la conjecture forte des graphes parfaits. Puisque les antitrous impairs d'au moins sept sommets ne sont pas planaires et que  $\bar{C}_5$  est isomorphe à  $C_5$ , la conjecture s'énonçait dans ce cas : un graphe  $G$  planaire est parfait si et seulement si  $G$  n'a pas de trou impair. C'est A. Tucker qui a prouvé cette conjecture :

**Théorème G ([45])** *Un graphe planaire est parfait si et seulement s'il ne contient pas de trou impair comme sous-graphe induit.*

Le problème de reconnaissance des graphes planaires parfaits se réduit donc à la vérification que le graphe ne contient pas de trou impair. Hsu a présenté un algorithme pour un tel problème [25]. Nous utiliserons cet algorithme pour reconnaître les graphes planaires de quasi-parité stricte et les graphes planaires parfaitement contractibles.

### L'algorithme de décomposition de Hsu

L'algorithme de Hsu que nous allons décrire prend en compte un graphe planaire  $G$  quelconque parfait ou non. Il lui associe un arbre de décomposition dont la racine est  $G$ . Si  $H$  est un sommet de cet arbre possédant une articulation  $Q$  d'un des quatre types définis plus bas,  $H$  admet des fils  $H_i$  construits à partir des composantes de  $H - Q$  comme on le décrira plus bas. Dans le cas contraire,  $H$  est une feuille de cet arbre. Hsu décrit des classes  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$  et montre que  $G$  est parfait si et seulement si toutes les feuilles de son arbre appartiennent à  $\mathcal{S} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ .

Donnons à présent les détails. Soit  $Q$  une articulation de  $H$  et soient  $B_1, \dots, B_k$  les composantes de  $H - Q$  :

- *Type I* :  $Q$  est une clique. Dans ce cas, les fils de  $H$  sont les graphes  $H[B_i \cup Q]$  pour chaque  $i = 1, \dots, k$ .
- *Type II* :  $Q = \{a, b\}$  avec  $a, b$  non adjacents. Dans ce cas, on considère la parité  $p$  d'une chaîne induite entre  $a$  et  $b$  dans  $H$  (en principe, dans l'hypothèse de perfection, toutes ces chaînes doivent avoir la même parité, sinon  $H$  contiendrait un trou impair). Alors, le  $i$ -ème fils est défini à partir de  $H[B_i \cup Q]$  en rajoutant une chaîne induite de longueur deux entre  $a$  et  $b$  si  $p$  est paire et trois si  $p$  est impaire. Cette chaîne a un ou deux sommets qui seront appelés *artificiels*. (En fait, ces fils seront construits seulement si aucun n'est isomorphe à  $H$  lui-même, c'est-à-dire, seulement si soit  $k > 2$ , soit  $k = 2$  et chacun de  $H[B_1 \cup Q]$  et  $H[B_2 \cup Q]$  est différent à la fois d'un  $P_3$  et d'un  $P_4$ .)

- *Type III* :  $Q = \{a, b, c\}$ , où  $ab$  est une arête et  $ac$  n'est pas une arête et en plus, il existe une chaîne induite paire entre  $a$  et  $c$  dans chaque  $H[B_i \cup \{a, c\}]$  et une chaîne induite impaire entre  $b$  et  $c$  dans chaque  $H[B_i \cup \{b, c\}]$ . (En fait, dans l'hypothèse de perfection, toutes les chaînes induites entre  $a$  et  $c$  dans  $H - b$  doivent avoir la même parité. Pour les chaînes induites entre  $b$  et  $c$  dans  $H - a$ , il en est de même.) On doit avoir  $k = 2$  sinon  $H$  contiendrait une subdivision de  $K_{3,3}$ .

Pour une telle articulation, le  $i$ -ème fils est obtenu à partir de  $H[B_i \cup Q]$  en rajoutant un sommet artificiel  $a'$  et des arêtes  $a'a$  et  $a'c$ , et si  $bc$  n'est pas une arête, un deuxième sommet artificiel  $b'$  et des arêtes  $b'b$  et  $a'b'$  (rajoutons que cette décomposition ne sera faite que si aucun des fils obtenus n'est isomorphe à  $H$  lui-même).

- *Type IV* :  $Q = \{a, b, c, d\}$  induit un  $C_4$  dans  $H$  avec les arêtes  $ab, bc, cd$  et  $da$ . En plus, il existe une chaîne induite paire entre  $a$  et  $c$  dans chaque  $H[B_i \cup \{a, c\}]$  et une chaîne induite impaire entre  $b$  et  $d$  dans chaque  $H[B_i \cup \{b, d\}]$ . Dans ce cas, le  $i$ -ème fils est obtenu par  $H[B_i \cup Q]$  avec deux sommets artificiels  $a', b'$  et les arêtes  $a'a, a'b, a'c, a'b', b'a, b'c$  et  $b'd$  (encore une fois cette décomposition ne sera faite que si aucun des fils n'est isomorphe à  $H$  lui-même).

L'ordre donné des types d'articulation joue un rôle essentiel dans ce sens qu'une décomposition d'un certain type ne prend effet que dans la mesure où aucune autre d'un type inférieur ne peut s'effectuer.

Les classes  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$  sont définies comme suit :

- La classe  $\mathcal{C}$  est une sous-classe de la classe des graphes de comparabilité. En fait, cette classe est définie comme étant la classe des graphes  $G$  possédant un ensemble stable  $S$  composé de sommets dont chaque voisinage induit un  $C_4$ , tel que  $G - S$  est un graphe biparti  $G' = (R, L)$ . Une orientation transitive possible consiste à orienter toutes les arêtes de  $R$  vers  $L$ , de  $R$  vers  $S$  et de  $S$  vers  $L$ . En effet, tous les sommets de  $R$  sont des sommets sources et les sommets de  $L$  sont des sommets puits. Puisque le voisinage de chaque sommet de  $S$  est un  $C_4$  et que les ensembles  $S$ ,  $L$  et  $R$  sont des ensembles stables, il est clair que cette orientation est une orientation transitive.
- La classe  $\mathcal{L}$  est composée des line-graphes de graphes bipartis planaires tels que chaque sommet est de degré deux, trois ou quatre. En fait, le voisinage de chaque

sommet doit être soit deux sommets non adjacents, soit trois sommets avec une seule arête entre eux, soit quatre sommets engendrant un couplage.

- La classe  $\mathcal{S}$  est composée des graphes  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  de la figure 2.5.7 et aussi des graphes obtenus à partir de  $S_1$  en remplaçant au moins une des trois arêtes  $e$ ,  $f$ ,  $g$  par une chaîne induite de longueur trois.

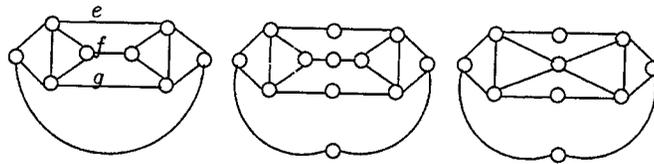


Figure 2.5.7: Les graphes de la classe  $\mathcal{S}$ .

L'arbre de décomposition de Hsu peut être construite en  $O(n^3)$  pour tout graphe planaire avec  $n$  sommets, ainsi que la réponse à la question de sa perfection.

## 2.6 Graphes sans griffe et perfection

La classe des graphes sans griffe (sans  $K_{1,3}$ ) contient la classe des line-graphes, en particulier la classe des line-graphes de graphes bipartis. K.R. Parthasarathy and G. Ravindra ont démontré que ces graphes satisfont la conjecture forte des graphes parfaits [39] :

**Théorème H ([39])** *Un graphe sans griffe est parfait si et seulement s'il ne contient ni trou impair ni antitrou impair comme sous-graphe induit.*

Quelques années plus tard, V. Chvátal and N. Sbihi ont dégagé la structure des graphes parfaits sans griffe [7] avec l'objectif de les reconnaître. Plus récemment, F. Maffray a déterminé encore plus précisément la structure de ces graphes [34]. Pour introduire ces caractérisations, on aura besoin des définitions suivantes.

Soit  $G$  un graphe ayant une clique d'articulation  $C$  et  $B_1, \dots, B_k$  les composantes de  $G - C$ . Notons par  $G_i$  la pièce construite avec  $B_i$ , c'est-à-dire,  $G_i = G[B_i \cup C]$ . Pour chacune de ces pièces admettant une clique d'articulation, nous continuerons à la

décomposer en pièces. Ce processus produit un arbre de décomposition dont les feuilles sont des sous-graphes induits de  $G$  sans clique d'articulation.

On peut utiliser l'algorithme de Whitesides [47] pour trouver une clique d'articulation. La complexité de cet algorithme est  $O(nm)$ , et en l'appliquant itérativement on peut obtenir un algorithme de décomposition par cliques d'articulation de complexité  $O(n^3m)$ , car selon Gavril [15] au pire on aura  $\binom{n}{2} - m$  feuilles. Tarjan [44] propose un algorithme plus performant de décomposition par cliques d'articulation. Cet algorithme est de complexité  $O(nm)$  et utilise la théorie des ordres d'élimination.

Un graphe est *élémentaire* si ses arêtes peuvent être colorées en deux couleurs de façon que toute chaîne à trois sommets sans cordes soit bi-colorée. Un graphe  $G$  est *singulier* s'il peut être construit de la manière suivante : on part d'un graphe complet  $K$  d'au moins six sommets et dont l'ensemble de sommets est partitionné en six ensembles non vides deux à deux disjoints  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  ; pour chaque  $i = 1, 2, 3$ , au moins une arête reliant  $A_i$  à  $B_{i+1}$  est enlevée (les indices sont calculés modulo 3) ; enfin trois nouvelles cliques non vides et disjointes  $K_1, K_2, K_3$  sont rajoutées et pour chaque  $i = 1, 2, 3$ ,  $K_i$  est jointe à  $K - (A_i \cup B_i)$ .

Rappelons le résultat principal suivant :

**Théorème I ([7])** *Un graphe sans griffe n'ayant pas de clique d'articulation est parfait si et seulement s'il est soit élémentaire soit singulier.  $\square$*

Ce théorème nous permet de décomposer les graphes sans griffe et de réduire notre tâche à l'étude des graphes singuliers et des graphes élémentaires. Pour les graphes singuliers les questions qui nous intéressent pourront être résolues grâce à des résultats connus. Pour les graphes élémentaires, nous utiliserons une caractérisation plus fine donnée par F. Maffray qui sera rappelée au chapitre 5 qui traite du sujet.

# Chapitre 3

## Les Graphes Planaires de Quasi-Parité Stricte

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons trois résultats obtenus conjointement (avec F. Maffray et B. Reed [29]) sur les graphes planaires de quasi-parité stricte (QPS). Le premier (section 3.2) est une démonstration de la conjecture suivante de Hougardy [22] dans le cas restreint des graphes planaires :

**Conjecture 3.1** *Toute obstruction est :*

(a) *soit le line-graphe d'un graphe biparti,*

(b) *soit un trou impair,*

(c) *soit le complément d'un trou.*

Le deuxième résultat (section 3.3) fournit une construction récursive d'une classe de graphes planaires non QPS contenant toutes les obstructions planaires parfaites.

Dans la troisième section, on présente et on justifie un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes planaires QPS, s'appuyant sur la décomposition de Hsu.

## 3.2 Graphes planaires et la conjecture de Hougardy

Le principal résultat de cette section est la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 3.1** *Toute obstruction planaire est le line-graphe d'un biparti ou un trou impair.*

Nous remarquons que ce théorème est exactement la conjecture de Hougardy (avec l'hypothèse supplémentaire de planarité), puisqu'un complément de trou qui est planaire ne peut être que  $\bar{C}_5$  (auto-complémentaire) ou  $\bar{C}_6$  (un graphe LGB !), ce qui rend inutile l'alternative (c) de la conjecture générale.

La clé de la preuve de ce théorème réside dans la structure des voisinages des obstructions planaires 3-connexes que nous allons détailler.

Nous dirons qu'un sommet  $x$  a un voisinage *correct* si ce voisinage est l'un de ceux dessinés dans la figure 3.2.1. Nous désirons montrer que, dans une obstruction planaire qui n'est pas un trou impair, tout voisinage est correct (Théorème 3.2).



Figure 3.2.1: Les voisinages corrects pour un sommet  $x$ .

**Lemme 3.1** *Dans une obstruction planaire 3-connexe, le voisinage de chaque sommet engendre un cycle sans cordes ou un ensemble de chaînes sommet-disjointes.*

*Démonstration.* Si  $x$  est un sommet d'un graphe planaire dont le voisinage contient strictement un ensemble  $S$  tel que  $S$  est un cycle, alors  $x + S$  contient un triangle d'articulation. Donc, le voisinage de chaque sommet engendre une forêt ou un cycle sans cordes. Dans le cas où ce voisinage est une forêt, cette forêt ne peut avoir de sommet  $y$  de degré trois ou plus car sinon  $x$  et  $y$  sont dans un triangle d'articulation de ce graphe. Cela prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 3.2** *Dans une obstruction, pour tout sommet  $x$ ,  $x + N(x)$  n'est pas un diamant.*

*Démonstration.* Procédons par l'absurde. Supposons l'existence d'un sommet  $x$  dans une obstruction  $G$  tel que  $x + N(x)$  soit un diamant. Désignons par  $y$  et  $z$  les deux sommets non adjacents de  $N(x)$ . Puisque  $y$  et  $z$  ne forment pas une paire d'amis, il existe une chaîne induite impaire  $P$  qui relie ces deux sommets et  $P + x$  est un trou impair, une contradiction.  $\square$

**Lemme 3.3** *Une obstruction plane 3-connexe n'a pas d'articulation étoilée.*

*Démonstration.* Procédons encore par l'absurde et supposons qu'il existe une obstruction plane  $G$  contenant une articulation étoilée  $C$  dont  $x$  est un centre. D'après les Lemmes 3.1 et 3.2, dans chaque composante  $K$  de  $G - C$ , il existe un sommet non adjacent à  $x$ . Par suite,  $x + N(x)$  est une articulation étoilée contenant  $C$  qu'on pourra identifier à  $C$ . Comme  $G$  est 3-connexe, chaque composante  $K$  de  $G - C$  a au moins trois voisins dans  $C$  nécessairement dans  $N(x)$ . A cause de la planarité, il est clair que pour deux composantes distinctes  $K$  et  $K'$  de  $G - C$ , on a  $|N(K) \cap N(K')| \leq 2$ . En fait, toujours à cause de la planarité, il est facile de voir qu'il existe une composante  $K$  et deux sommets  $y$  et  $z$ ,  $\{y, z\} \in N(K)$ , tels que  $\{x, y, z\}$  est une articulation de  $G$  et la composante de  $G - \{x, y, z\}$  qui contient  $K$  est contenue dans  $N(x) + K$ . Clairement,  $yz \notin G$  puisque  $G$  n'a pas de clique d'articulation. Il est clair aussi que cette articulation  $\{x, y, z\}$  est minimale puisque  $G$  est 3-connexe. Ceci implique que pour chaque composante  $L$  de  $G - \{x, y, z\}$ , il existe une chaîne induite de  $y$  à  $z$  dans  $L + y + z$ . Or, toutes ces chaînes ont la même parité, sinon il existerait des chaînes induites de différentes parités dans différentes composantes et on pourrait trouver alors un trou impair. D'ailleurs, toutes ces chaînes sont impaires, car  $\{y, z\}$  n'est pas une paire d'amis. En fait, puisque  $\{y, z\} \in N(K)$ , il existe dans  $K$  une chaîne induite  $P$  reliant  $y$  à  $z$  et donc  $P$ , par la remarque antérieure, est impaire. Finalement,  $P + x$  est un trou impair : contradiction.  $\square$

Le Lemme 3.3 implique en particulier qu'une obstruction plane 3-connexe n'a pas  $P_3$  comme articulation.

**Lemme 3.4** *Si une obstruction plane 3-connexe  $G$  contient une articulation à trois sommets  $\{x, y, z\}$  engendrant un graphe à une seule arête  $xy$ , alors il existe un sommet  $w$  tel que  $N(w) = \{x, y, z\}$ .*

*Démonstration.* Soit une obstruction plane 3-connexe  $G$  et une articulation  $C = \{x, y, z\}$  de  $G$ , telle que  $xy \in E(G)$  et  $xz, yz \notin E(G)$ . Par la 3-connexité,  $C$  est une articulation

minimale. Chaque composante  $K$  de  $G - C$  vérifie  $N(K) = \{x, y, z\}$ . Par suite, il existe une chaîne induite de  $x$  à  $z$  dans  $K + x + z$ . Ceci implique que toutes les chaînes induites de  $x$  à  $z$  dans  $G - y$  ont la même parité, car sinon on pourrait trouver deux chaînes induites de parités différentes, disons  $P_1$  et  $P_2$ , dans deux composantes de  $G - C$ , mettant en évidence le trou impair  $P_1 + P_2$ . Similairement, toutes les chaînes induites reliant  $y$  à  $z$  dans  $G - x$  ont la même parité. Si toutes les chaînes induites entre  $x$  et  $z$  dans  $G - y$  sont paires et toutes les chaînes induites entre  $y$  et  $z$  dans  $G - x$  sont impaires, alors  $x$  et  $z$  forment une paire d'amis (une contradiction à l'hypothèse d'obstruction). De façon symétrique, toutes les chaînes induites entre  $y$  et  $z$  dans  $G - x$  et toutes les chaînes induites entre  $x$  et  $z$  dans  $G - y$  ont la même parité. Nous savons, par le Lemme 3.3, que  $G$  n'a pas d'articulation étoilée, d'où l'existence d'une chaîne induite  $P_1$  entre  $x$  et  $z$  dans  $G - y - N(y)$ . Cette chaîne est contenue dans  $K_1 + x + z$  où  $K_1$  est une certaine composante de  $G - C$ . Pareillement, il existe une chaîne induite  $P_2$  entre  $y$  et  $z$  dans  $G - x - N(x)$ . Par suite,  $P_2$  est dans  $K_1 + y + z$ , sinon  $P_1 + xy + P_2$  serait un trou impair de  $G$ . Donc,  $P_2 - y - z$  est dans  $K_1$ . Autrement dit, toutes les autres chaînes induites entre  $x$  et  $z$  (resp. entre  $y$  et  $z$ ) qui ne sont pas contenues dans  $K_1$ , contiennent au moins un sommet de  $N(y)$  (resp.  $N(x)$ ). Par conséquent, dans n'importe quelle autre composante  $K$  de  $G - C$ , les voisins communs de  $x$  et  $y$  séparent  $x$  et  $y$  de  $z$  dans  $K + x + y + z$ . Puisque  $G$  est planaire, que  $K_1$  existe et que  $G$  n'a pas de clique d'articulation, il existe au maximum un seul voisin commun à  $x$  et  $y$ , disons  $w$ . Par suite,  $K = w$ , sinon  $\{w, z\}$  serait une articulation contredisant la 3-connexité de  $G$ . Finalement,  $N(w) = C$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

Nous appelons  $F_x$  la face obtenue par l'enlèvement d'un sommet  $x$  d'un graphe planaire.

Comme conséquence directe des Lemmes 3.3 et 3.4, nous prouvons encore les faits suivants.

**Fait 3.1** *Dans une obstruction 3-connexes, chaque sommet  $x$  de degré trois a un voisinage correct.*

*Démonstration.* Soit  $G$  une obstruction 3-connexes et  $x$  un sommet de  $G$  de degré exactement trois. Nous savons que  $x + N(x)$  n'est pas un  $K_4$ , sinon ou bien  $G$  contient un triangle d'articulation ou bien  $G$  est  $K_4$ , et ces deux possibilités sont contradictoires. Par le Lemme 3.2,  $N(x)$  n'induit pas une chaîne de longueur deux; enfin, puisque  $G$  est une obstruction,  $N(x)$  contient au moins une arête, car dans un graphe parfait, si le voisinage

d'un sommet est un stable, alors chaque paire de sommets du voisinage forme une paire d'amis. Cela achève la preuve.  $\square$

**Fait 3.2** *Dans une obstruction planaire, chaque face est un cycle sans cordes.*

*Démonstration.* Une corde dans le cycle associé à une face est une clique d'articulation, contredisant l'hypothèse d'obstruction.  $\square$

**Fait 3.3** *Dans une obstruction planaire 3-connexe, deux faces distinctes non disjointes ne peuvent s'intersecter qu'en un sommet ou une arête.*

*Démonstration.* Il est facile de voir que n'importe quelle autre intersection conduirait à l'existence d'une articulation à deux sommets, violant la 3-connexité.  $\square$

**Fait 3.4** *Soit  $x$  un sommet d'une obstruction planaire 3-connexe et  $yz$  une arête à l'extérieur de  $F_x$  qui relie deux sommets de  $F_x$ . Alors il existe un sommet  $w$  de  $F_x$  tel que  $N(w) = \{x, y, z\}$  et  $N(w)$  n'induit qu'une arête.*

*Démonstration.* En supposant ce lemme faux, il est facile de voir que  $\{x, y, z\}$  est une articulation à trois sommets qui contredit soit l'hypothèse d'obstruction (si c'est une clique), soit le Lemme 3.3 (si elle est étoilée de centre  $y$  ou  $z$ ), soit le Lemme 3.4 (si  $x$  n'est adjacent ni à  $y$  ni à  $z$ , mais alors adjacent à chacun des deux segments de  $F_x$  définis par  $yz$ ).  $\square$

**Lemme 3.5** *Dans une obstruction planaire 3-connexe, pour chaque sommet  $x$  de degré au moins quatre,  $F_x$  est un cycle sans cordes.*

*Démonstration.* Soit un sommet  $x$  de degré au moins quatre appartenant à une obstruction planaire 3-connexe  $G$ . Supposons que  $F_x$  contienne une corde  $yz$ . Par le Fait 3.4, il existe un sommet  $w$  dans  $F_x$ , tel que  $N(w) = \{x, y, z\}$  avec  $yz \in E(G)$  et  $xy, xz \notin E(G)$ , et  $yw, wz \in F_x$ . Soient  $F_1$  et  $F_2$  les deux faces de  $G$  dont l'intersection est  $wx$ . Par le Fait 3.2,  $F_1$  et  $F_2$  engendrent des cycles sans cordes de  $G$ , et puisque l'une contient  $y$  et l'autre  $z$ , aucune n'est un triangle. Ces deux faces sont des trous pairs. Par le Fait 3.3,  $F_1 \cap F_2 = \{x, w\}$ . Par le Fait 3.4 et parce que  $|N(x)| \geq 4$ , il n'existe pas d'arêtes entre  $F_1 - \{w, x\}$  et  $F_2 - \{w, x\}$  sauf bien sûr  $yz$ . En conséquence,  $F_1 + F_2 - w$  est un trou impair de  $G$ , une contradiction.  $\square$

**Lemme 3.6** *Dans une obstruction planeaire 3-connexee, pour chaque sommet  $x$  de degré au moins quatre,  $N(x)$  induit un graphe avec un nombre pair d'arêtes.*

*Démonstration.* D'après le Lemme 3.5,  $F_x$  est un cycle (pair) sans cordes. Il est facile alors de voir que si  $N(x)$  totalise un nombre impair d'arêtes, alors  $x + F_x$  nécessairement contient un trou impair.  $\square$

**Lemme 3.7** *Les obstructions planeaires 3-connexees ne contiennent pas de diamant.*

*Démonstration.* Nous procédons en deux temps. Premièrement, nous établissons le résultat restreint suivant :

Une obstruction planeaire 3-connexee  $G$  ne contient pas de diamant formé par les sommets  $\{a, b, c, d\}$  tel que  $ad \notin E(G)$  et il existe une chaîne entre  $a$  et  $d$  dans  $G - N(b) - N(c)$ . (3.2.1)

La démonstration de (3.2.1) procède par contradiction. Supposons l'existence d'un diamant  $\{a, b, c, d\}$  violant (3.2.1). La paire  $\{a, d\}$  n'étant pas une paire d'amis, il existe une chaîne induite impaire reliant ces deux sommets dans  $G$ . Parmi toutes les chaînes induites impaires entre  $a$  et  $d$ , considérons une chaîne  $P_1$  qui minimise le nombre de sommets de  $P_1 \cap N(b) \cap N(c)$ . Soit  $P_2$  une chaîne induite entre  $a$  et  $d$  contenue dans  $G - N(b) - N(c)$ . Soit  $x \in P_1 - a - d$  tel que  $xb \in E(G)$ . Un tel sommet  $x$  existe, sinon  $P_1 + b$  induirait un trou impair. Désignons par  $P_3$  et  $P_4$  les deux segments issus de  $P_1$  par l'enlèvement de  $x$ , tels que  $a \in P_3$  et  $d \in P_4$ . L'obstruction  $G$  n'ayant pas d'articulation étoilée, il est clair qu'il existe une chaîne induite reliant un sommet de  $P_3$  à un sommet de  $P_4$  dont les sommets intérieurs sont dans  $P_2 - P_1$ . Prenons une telle chaîne  $P_5$  choisie de façon que son extrémité  $f$  dans  $P_3$  soit le plus proche possible de  $a$  et, une fois  $f$  trouvé, que son extrémité  $g$  dans  $P_4$  soit le plus proche possible de  $d$  (voir la figure 3.2.2). Maintenant, considérons la chaîne  $P_6$  obtenue par la concaténation  $P_1[a, f] + P_5 + P_1[g, d]$ . Il est clair que  $P_6$  est une chaîne sans cordes. En plus, puisque  $P_5 - f - g \subset P_2$ , nous avons  $(P_5 - f - g) \cap (N(b) \cup N(c)) = \emptyset$ . Alors, par le principe de minimalité du choix de  $P_1$ ,  $P_6$  est paire. Par conséquent, le segment  $P_1[f, g]$ , que nous dénoterons par  $P_7$ , et  $P_5$  sont de différentes parités. Par ailleurs, par planarité,  $P_7 \cap N(c) = \emptyset$ . Soit  $r$  (resp.  $s$ ) le voisin de  $c$  le plus proche de  $f$  (resp.  $g$ ) sur  $P_3$  (resp.  $P_4$ ). Notons  $P_8$  le segment  $P_1[r, s]$ . Alors, ou bien  $c + P_8$  ou bien  $c + P_8 - P_7 + P_5$  est un trou impair, une contradiction. Ceci achève la preuve de (3.2.1).

Maintenant, en utilisant (3.2.1), nous allons démontrer le cas général. Supposons dans l'obstruction planaire 3-connexe  $G$  l'existence d'un diamant  $\{a, b, c, d\}$  avec  $ad \notin E(G)$ . Nous observons que  $N(a)$  ne peut pas être contenu dans  $N(b) \cup N(c)$ , car sinon  $G$  aurait une clique d'articulation ou bien  $a$  aurait un degré quatre dont le voisinage serait connexe. Par les Lemmes 3.1 et 3.6 et le Fait 3.1, ceci impliquerait que  $N(a)$  est un cycle de longueur quatre. Alors, ou bien les deux paires non adjacentes de  $N(a)$  sont des paires d'amis, ou bien  $G$  contient un trou impair, terminant la preuve de  $N(a) \not\subset N(b) \cup N(c)$ . Soit donc  $y$  un sommet de  $N(a) - (N(b) \cup N(c))$  et  $K$  la composante de  $G - N(b) - N(c)$  contenant  $y$  (voir la figure 3.2.3). Par (3.2.1), aucun sommet de  $K$  n'est adjacent à  $d$ .

Par ailleurs, il existe un sommet  $e$  dans  $N(b) - N(c)$  possédant un voisin dans  $K$  et de même un sommet  $f$  dans  $N(c) - N(b)$  possédant un voisin dans  $K$ , car  $G$  n'a pas d'articulation étoilée. Par planarité,  $e$  et  $f$  peuvent être choisis de manière que  $\{e, b, c, f\}$  soit une articulation de  $G$  séparant  $K$  de  $d$ .

Nous observons qu'en raison de la planarité, du fait que  $K \neq a, d$  et du Lemme 3.4, l'articulation  $\{e, b, c, f\}$  est minimale. Par conséquent, toutes les chaînes induites reliant  $e$  à  $f$  dans  $G - b - c$  ont la même parité. Pareillement, toutes les chaînes induites entre  $c$  et  $e$  dans  $G - b - f$  ont la même parité et de même pour toutes les chaînes induites entre  $b$  et  $f$  dans  $G - c - e$ . Par définition de  $K$ , il existe une chaîne induite  $P_1$  dans  $K + e + f$  reliant  $e$  à  $f$  dans  $G - b - c$ . Par suite,  $P_1$  doit être impaire, sinon  $P_1 + b + c$  serait un trou impair. Donc, toute chaîne induite entre  $e$  et  $f$  dans  $G - b - c$  est impaire. Ceci implique que toutes les chaînes induites entre  $b$  et  $f$  dans  $G - e - c$  sont impaires, sinon  $\{b, f\}$  serait une paire d'amis. De même, toutes les chaînes induites reliant  $e$  à  $c$  dans  $G - b - f$  sont impaires.

Maintenant, nous allons prouver qu'il existe un sommet commun au voisinage de  $e$  et  $f$ . S'il n'en est pas ainsi, puisque  $G$  est 3-connexe, il existe des chaînes reliant  $d$  à  $\{e, f\}$  dans  $G - K - (a, b, c)$ . Parmi toutes ces chaînes, soit  $P_2$  une des plus courtes. Par symétrie, nous pouvons supposer que  $P_2$  relie  $d$  à  $e$ . Comme conséquence de la minimalité de  $P_2$  et du fait que par hypothèse  $e$  et  $f$  n'ont pas de voisin commun dans  $G - K - a$ , il n'existe pas de voisin de  $f$  dans  $P_2 - e$ . Alors,  $P_1 + P_2 + c$  engendre un trou impair (même si  $P_1 = ef$ ), contradiction. Par suite,  $e$  et  $f$  ont un voisin commun dans  $G - K - a$ . Par conséquent,  $ef \in E(G)$  puisque chaque chaîne induite entre  $e$  et  $f$  dans  $G - b - c$  doit être impaire. Soit  $g$  le voisin commun à  $e$  et  $f$ , tel que le cycle  $gebef$  est la frontière d'une zone contenant  $d$  et aucun autre voisin commun à  $e$  et  $f$ .

Finalement, s'il existe une chaîne de  $d$  à  $\{e, f\}$  dans  $G - \{b, c, g\}$ , alors, comme dans le cas où  $e$  et  $f$  n'avaient pas de voisin commun, il est possible d'obtenir une contradiction. Par conséquent,  $\{b, c, g\}$  est une articulation et donc  $N(d) = \{b, c, g\}$ . Ceci montre que  $\{b, c, d, e, f, g\}$  engendrent un  $\tilde{C}_6$ , contredisant la minimalité de l'obstruction. La démonstration du Lemme 3.7 est donc achevée.  $\square$

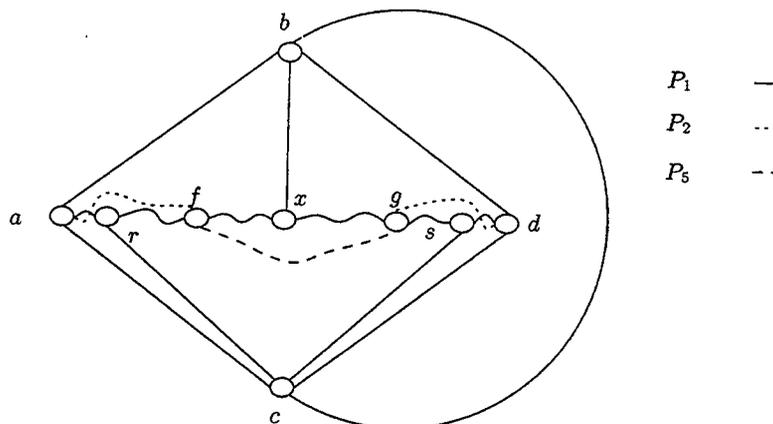


Figure 3.2.2: Le diamant  $\{a, b, c, d\}$  et ses chaînes.

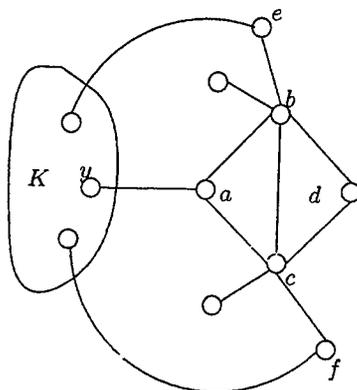


Figure 3.2.3: L'articulation  $ebcf$ .

**Lemme 3.8** *Le degré maximum d'une obstruction plane 3-connexe est au plus quatre.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un sommet  $x$  de degré au moins cinq dans une obstruction plane 3-connexe  $G$ . Nous savons que  $F_x$  est un cycle pair sans cordes et

que  $N(x)$  engendre un sous-graphe avec un nombre pair d'arêtes et quelques sommets isolés (par les Lemmes 3.6 et 3.7). La contradiction s'élabore en quatre étapes.

**Etape 1** Aucun sommet  $a$  de  $G - x - F_x$  n'a deux voisins  $s$  et  $t$  dans  $F_x$  tels que les deux chaînes sur  $F_x$  reliant  $s$  et  $t$  contiennent une arête de  $N(x)$ .

Procédons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel  $\{a, s, t\}$ . S'il en existe plusieurs, on le choisira de manière que la plus courte chaîne qui relie  $s$  à  $t$  soit de longueur minimum. Soient  $P_1$  et  $P_2$  les deux chaînes dans  $F_x$  reliant  $s$  à  $t$  avec  $|P_1| \leq |P_2|$ . Par la minimalité de  $P_1$ ,  $a$  n'a pas de voisin dans  $P_1 - s - t$ . Puisque  $G$  n'a pas de diamant,  $P_1$  n'est pas une arête. Alors  $P_1$  doit être paire sinon  $P_1 + a$  est un trou impair. Par conséquent  $P_2$  est aussi paire. Soit  $v$  (resp.  $w$ ) le voisin de  $x$  le plus proche de  $s$  (resp.  $t$ ) dans  $P_1$ . Soit  $P_3$  (resp.  $P_4$ ) le segment de  $P_1$  qui relie  $s$  à  $v$  (resp.  $t$  à  $w$ ). Finalement, soit  $P_5$  le segment de  $P_1$  entre  $v$  et  $w$ . On observe que  $\{a, s, t, x\}$  est une articulation qui sépare  $P_1$  de  $P_2$ . Nous allons examiner deux cas :

*Cas 1* :  $|N(x) \cap P_1| \geq 3$ .

Dans ce cas,  $P_3 + x + P_4 + a$  engendre un trou et donc  $P_3$  et  $P_4$  ont la même parité. En plus,  $P_2 + x$  contient deux chaînes induites :  $P_7$  reliant  $x$  à  $s$  et  $P_8$  reliant  $x$  à  $t$ . Par suite,  $P_7$  et  $P_8$  ont une parité distincte de celle de  $P_3$ , sinon soit  $P_7 + P_3 + vx$  soit  $P_8 + P_4 + wx$  serait un trou impair. Puisque  $\{s, t\}$  n'est pas une paire d'amis, il existe une chaîne induite impaire  $P$  dans  $G$  les reliant. Il est clair que  $P$  ne contient pas  $a$  et si  $P$  ne contient pas  $x$ , alors  $P - s - t$  est dans une des composantes de  $G - \{a, s, t, x\}$ . Par suite,  $P + P_1$  ou  $P + P_2$  est un trou impair, contradiction. Donc  $P$  contient  $x$  et  $P$  est la concaténation de la chaîne  $P'$  reliant  $s$  à  $x$  dans  $G - a - t$  et de la chaîne  $P''$  reliant  $x$  à  $t$  dans  $G - a - s$ , ces deux chaînes ayant des parités différentes. Finalement, un des  $P' + P_7$ ,  $P' + P_3 + vx$ ,  $P'' + P_8$ ,  $P'' + P_4 + wx$  est un trou impair. Cette contradiction termine la preuve de ce cas.

*Cas 2* :  $|N(x) \cap P_1| = 2$ .

Dans ce cas,  $P_5$  est une arête et donc  $P_3$  et  $P_4$  ont des parités différentes. Si  $a$  a un voisin  $y$  dans  $F_x$  différent de  $s, t$ , alors nécessairement  $y \in N(s) \cap N(t)$ , sinon il existerait une chaîne induite  $P_6$  reliant  $a$  à  $x$  dans  $a + x + (F_x - (N(s) \cup N(t) \cup P_1))$  et par suite, un des  $P_6 + as + vx + P_3$ ,  $P_6 + at + wx + P_4$  serait un trou impair. Par ailleurs, si  $a$  a un voisin commun  $s'$  avec  $s$  dans  $F_x$ , il doit aussi avoir un voisin  $t'$  commun avec  $t$  dans  $F_x$ . Soit  $P'_1 = P_1 + s' + t'$  si  $s', t'$  existent. Puisque  $G$  ne contient pas de diamant et

que  $P_1$  contient une seule arête de  $N(x)$ ,  $P'_1$  aussi contient une seule arête de  $N(x)$ . Soit  $F'_x = F_x + a - P'_1 + s + t$ . Il clair que  $F'_x$  est un trou nécessairement pair. Et pourtant  $x$  a au moins trois voisins dans  $F'_x$  et une arête de moins dans  $F'_x$  par rapport à  $F_x$ . Alors  $F'_x + x$  engendre un trou impair (cela résulte de l'adaptation du raisonnement fait dans le Lemme 3.6 au fait que  $x$  voit un nombre impair d'arêtes sur  $F'_x$ ). Ceci achève la preuve du Cas 2 et termine celle de l'Etape 1.

**Etape 2** Aucun sommet  $a$  de  $G - x - F_x$  ne voit deux sommets non adjacents  $s$  et  $t$  de  $F_x$ .

Supposons qu'il existe un ensemble  $\{a, s, t\}$  violant les hypothèses de l'énoncé. Comme avant, soient  $P_1$  et  $P_2$  les deux chaînes dans  $F_x$  telles que  $|P_1| \leq |P_2|$ . Supposons en outre avoir choisi  $\{a, s, t\}$  de façon que  $P_1$  soit le plus court possible. Par la minimalité de  $P_1$  et par le fait que  $G$  n'a pas de diamant,  $a$  n'a pas de voisins dans  $P_1 - s - t$ . Donc,  $P_1$  est paire. Par suite, il existe un voisin de  $x$  dans  $P_1$  sinon  $\{a, s, t\}$  serait une articulation séparant  $P_1$  de  $P_2$  contredisant le Lemme 3.4. Maintenant, en utilisant des arguments analogues à ceux de l'Etape 1, on conclut que soit  $G$  a un trou impair soit  $\{s, t\}$  est une paire d'amis. Ces contradictions achèvent la preuve de l'Etape 2.

Pour la suite, nous aurons besoin d'autres définitions. Considérons  $N(x)$  et soit  $T$  l'ensemble des arêtes engendrées par  $N(x)$ . Posant  $l = |T|$ , nous pouvons écrire  $T = \{e_1, \dots, e_l\}$  et nommer  $C_0, \dots, C_{l-1}$  les composantes de  $F_x - T$  de façon que, si  $j = i + 1 \pmod{l}$ , alors  $C_i \cup e_i \cup C_j$  est une composante de  $F_x - (T - e_i)$ . D'après l'Etape 2 et par le fait que  $G$  n'a pas de diamant, nous savons que le voisinage  $W$  de  $F_x - x$  peut être partitionné en  $W_0, \dots, W_{l-1}$  de telle manière que  $W_i = \{w \mid w \in W, N(w) \cap F_x \subset C_i\}$ .

Une *chaîne plaisante*  $P$  est une chaîne de  $G - x - F_x$  telle que :

- (i) Pour un certain  $i \neq j$ ,  $P$  a une de ses extrémités  $f$  dans  $W_i$ , l'autre  $g$  dans  $W_j$  et tous les sommets intérieurs dans  $G - x - F_x - W$  ;
- (ii)  $f$  a un voisin  $y$  dans  $F_x$ ,  $g$  a un voisin  $z$  dans  $F_x$  avec  $yz \notin E(G)$  (ou encore on exclut le cas où le seul voisin de  $f$  dans  $F_x$  et le seul voisin de  $g$  dans  $F_x$  sont les extrémités d'une arête de  $T$ ).

Une *chaîne acceptable*  $P$  est un chaîne telle que :

- (i)  $P$  a une de ses extrémités  $f$  dans  $W_i$  et l'autre  $g$  dans  $W_{i+1}$  ;

- (ii) Chaque sommet intérieur de  $P$  est dans  $G - x - F_x - (W - W_{i+1})$  ;
- (iii)  $f$  a un seul voisin  $y$  dans  $F_x$ ,  $g$  a un voisin  $z$  dans  $F_x$  qui n'est pas adjacent à  $y$  ;
- (iv) Il existe une arête  $yw$  dans  $T$  avec  $w \in C_{i+1}$  et pour chaque sommet intérieur  $v$  de  $P$  dans  $W$ ,  $N(v) \cap F_x = \{w\}$ .

**Etape 3** Il existe une chaîne dans  $G$  qui est acceptable ou du moins plaisante reliant  $W_i$  à  $W_{i+1}$ .

Le graphe  $G$  a soit une chaîne acceptable soit une chaîne plaisante sinon  $x + N(x)$  serait une articulation étoilée. Si  $G$  n'a aucune chaîne acceptable, prenons une chaîne plaisante  $P$  (d'extrémités  $f$  et  $g$ ) qui minimise le nombre d'arêtes dans  $T$  dans une certaine chaîne de  $F_x$  reliant un voisin de  $f$  à un voisin de  $g$ . Si ce minimum est égal à 1, la preuve de l'étape est complète. Sinon, en désignant par  $P'$  une telle chaîne de  $F_x$  qui réalise ce minimum, il existe un certain  $C_k$  avec  $e_{k-1} \cup C_k \cup e_k \subset P'$ . Puisque  $x + N(x)$  n'est pas une clique d'articulation et  $G$  n'a pas de chaîne acceptable, il doit exister une chaîne plaisante  $P''$  ayant une de ses extrémités dans  $W_k$ . Alors, à cause de la planarité de  $G$ , soit  $P''$  contredit la minimalité de  $P$  soit  $P''$  intersecte  $P$ . Dans le dernier cas, on peut extraire de  $P \cup P''$  une chaîne plaisante contredisant la minimalité de  $P$ . Ceci termine la preuve de cette étape.

**Etape 4**  $G$  a un trou impair.

Soit  $P$  une chaîne d'un des deux types décrits dans l'Etape 3, dont les extrémités sont  $f$  et  $g$ . Comme conséquence de l'Etape 2 ( $G$  n'ayant pas de diamant), il est possible de trouver deux sommets non adjacents  $z$  et  $y$  dans  $F_x$ , avec  $fz, gy \in E(G)$ , tels que pour une des chaînes de  $F_x$  entre  $z$  et  $y$ , disons  $P_1$ , nous ayons  $|P_1 \cap T| = 1$ , tandis que pour l'autre, disons  $P_2$ ,  $P_2 + P$  engendre un trou  $H$ . Nous avons trois cas à examiner :

Si  $|T| \geq 3$ , alors  $|N(x) \cap H| \geq 4$ . Puisque  $|T|$  est pair,  $|T \cap H| = |T| - 1$  est impair. Par suite,  $x + H$  contient un trou impair.

Si  $|T| = 2$  et  $P$  est une chaîne plaisante, nous pouvons choisir n'importe quelle arête de  $T$  pour être dans  $P_2$ . Donc, par l'Etape 2 et avec un choix approprié de  $P_2$ , nous pourrions satisfaire  $|N(x) \cap H| \geq 3$  ce qui, comme dans le cas précédent, met en évidence un trou impair dans  $x + H$ .

Si  $|T| = 2$  et  $P$  est une chaîne acceptable, sans qu'il n'existe de chaîne plaisante, alors il

existe un seul choix de  $P_2$ , conduisant toujours à  $|P_2 \cap N(x)| \geq 3$  ce qui met encore en évidence un trou impair dans  $x + H$ .

Ceci achève la preuve du Lemme 3.8.  $\square$

**Théorème 3.2** *Dans une obstruction planeaire 3-connecte, chaque sommet a un voisinage correct.*

*Démonstration.* Il est clair que dans une obstruction 3-connecte, le degré minimum est trois et par le Lemme 3.8, le degré maximum d'une obstruction planeaire est quatre. Par suite, par le Fait 3.1, le Lemme 3.6 et le Lemme 3.7, le voisinage de chaque sommet d'une obstruction planeaire 3-connecte est correct.  $\square$

Nous avons besoin d'une dernière observation sur les graphes sans trous impairs, avant d'achever la preuve du Théorème 3.1. Considérons un graphe sans trou impair contenant une articulation minimale à deux sommets  $\{a, b\}$  telle que  $a$  et  $b$  sont non adjacents. Alors, il est clair que la paire  $\{a, b\}$  forme une paire d'amis ou bien une paire d'ennemis, autrement dit, que toutes les chaînes entre ces deux sommets ont la même parité, sinon un trou impair contenant ces deux sommets pourrait être trouvé.

*Nous rappelons que tout graphe sans trou impair où chaque sommet a un voisinage correct est un line-graphe de biparti (par le Théorème B). Ce fait nous permet de démontrer le théorème suivant.*

**Théorème 3.3** *Toute obstruction planeaire est le line-graphe d'un graphe de degré maximum trois.*

*Démonstration.* D'après le Théorème 3.2, les obstructions planeaires 3-connectes sont des line-graphes de biparti de degré maximum trois. S'il existait une obstruction planeaire violant le théorème, on en choisirait une  $G$  ayant un nombre minimum de sommets, évidemment de connectivité deux. Soit  $C = \{a, b\}$  une articulation de  $G$ . Puisque  $C$  n'est pas une clique et  $G$  n'est pas un trou impair (car trivialement un trou impair est isomorphe a son line-graphe), toutes les chaînes induites reliant  $a$  à  $b$  sont impaires. Soit  $G_1$  une composante de  $G - C$  et  $G' = G_1 + C$  avec adjonction de l'arête  $ab$ . Il est facile à voir que  $G'$  est planeaire, de non-quasi-parité stricte et a un nombre de sommets plus petit que  $G$ , ce qui contredit le choix de  $G$  et prouve le théorème.  $\square$

**Preuve de Théorème 3.1.**

En procédant par contradiction, soit  $G$  une obstruction planaire qui viole l'énoncé. Alors,  $G$  n'est pas un trou impair et comme conséquence du Théorème 3.3,  $G$  est un line-graphe d'un graphe  $H$  de degré maximum trois qui n'est pas biparti. Si  $H$  n'est pas 2-connexe alors  $G$  contient une clique d'articulation (absurde). Par suite,  $H$  est 2-connexe. En outre,  $H$  n'a pas de cycle de longueur au moins cinq puisque  $H$  n'est pas un trou impair. Par suite, d'après un théorème de Maffray [33],  $H$  est soit un  $K_4$  soit le joint d'un stable  $S$  et d'une arête  $ef$ . Or, si  $H$  est un  $K_4$  ou si  $|S| \leq 2$ , alors  $G$  est de quasi-parité stricte. Donc,  $|S| \geq 3$  et  $G$  n'est pas minimal (le line-graphe de  $H - ef$  n'est pas de quasi-parité stricte). Ces contradictions achèvent la preuve du théorème principal.  $\square$

### 3.3 Génération des obstructions planaires

Dans cette section, nous étudions une classe de graphes planaires non-QPS généralisant la classe des obstructions parfaites planaires. Cette étude nous permet d'une part de reconnaître les graphes planaires non-QPS (un algorithme sera fourni dans la prochaine section) et d'autre part de générer récursivement toutes les obstructions parfaites planaires. Cette classe est appelée la classe des candidats.

#### 3.3.1 Le concept de candidat

Introduisons la définition suivante.

**Définition 3.1 (Candidat)** *Un graphe  $G$  est un candidat lorsqu'il satisfait les propriétés suivantes établies dans la section précédente pour les obstructions parfaites planaires :*

- (c1)  $G$  est le line-graphe d'un graphe biparti
- (c2) Chaque sommet de  $G$  a un voisinage correct
- (c3)  $G$  est 2-connexe
- (c4) Chaque articulation à deux sommets de  $G$  forme une paire d'ennemis.

Il est facile de décider si un graphe donné  $G$  est un candidat. Une fois (c1), (c2) et (c3) vérifiées, la vérification de (c4) est très simple ; le graphe n'ayant pas de trous impairs,

il suffit pour une articulation à deux sommets  $\{a, b\}$  de vérifier que  $a$  et  $b$  ne sont pas adjacents et de tester l'imparité de n'importe quelle chaîne induite entre  $a$  et  $b$ .

Nous remarquons aussi que si un graphe  $G$  est un candidat ayant une articulation à deux sommets  $\{a, b\}$ , alors  $G - \{a, b\}$  a exactement deux composantes, sinon le voisinage de  $a$  ou  $b$  serait incorrect. Il est clair également que toute obstruction parfaite planaire est un candidat, mais, malheureusement, l'inverse n'est pas toujours vrai (par exemple le line-graphe de  $K_{3,3} - e$ ).

La première partie de cette section sera consacrée à la compréhension de la différence entre candidats et obstructions parfaites planaires. Nous prouverons que tout candidat est non-QPS. En plus, il sera donné des critères qui nous permettront de décider si un candidat donné est une obstruction et, le cas échéant, de trouver une obstruction strictement contenue dans ce candidat. Dans la deuxième partie de cette section, nous donnons un schéma inductif pour construire tous les candidats planaires.

Déterminons d'abord quelques propriétés des candidats et introduisons quelques définitions qui seront utiles par la suite.

**Lemme 3.9** (c5) *Un candidat n'a pas de cliques d'articulation.*

(c6) *Si un candidat est 3-connexe, chaque articulation à trois sommets  $C$  contient au maximum une arête et, dans ce cas, est le voisinage d'un sommet.*

*Démonstration.* Pour prouver (c5), supposons que  $C$  est une clique d'articulation d'un candidat  $G$ . Par (c3) et (c4),  $|C| \geq 3$  et puisque par (c2),  $G$  n'a pas de clique à quatre sommets, nous avons  $|C| = 3$ . Soit  $a$  un sommet de  $C$  et  $B_1$  et  $B_2$  deux composantes de  $G - C$ . Le sommet  $a$  doit avoir un voisin dans  $B_1$  et un autre dans  $B_2$ , sinon  $C - a$  serait une clique d'articulation à deux sommets. Ceci implique que le voisinage de  $a$  est incorrect, contradiction.

Pour prouver (c6), considérons une articulation à trois sommets  $C = \{a, b, c\}$  d'un candidat 3-connexe  $G$ . Soient  $B_1$  et  $B_2$  des composantes de  $G - C$ . Par (c5); deux sommets de  $C$ , disons  $a$  et  $c$ , ne sont pas adjacents. Supposons que  $ab$  est une arête. Le sommet  $a$  doit avoir un voisin  $x$  dans  $B_1$  ainsi qu'un voisin  $y$  dans  $B_2$ , sinon  $\{b, c\}$  serait une articulation à deux sommets de  $G$ . Puisque le voisinage de  $a$  est correct, nous pouvons supposer, par symétrie, que  $b$  voit  $x$ . Comme  $a$ , le sommet  $b$  doit avoir un voisin  $z$  dans  $B_2$ , sinon  $\{a, c\}$  serait une articulation à deux sommets séparant  $B_1 \cup \{b\}$  de  $B_2$ .

Comme conséquence, nous avons  $y \neq z$ , sinon le voisinage de  $b$  serait incorrect. Enfin,  $b$  n'a pas de voisin dans  $B_1 - x$  sinon son voisinage serait encore incorrect. Si  $B_1 - x$  n'est pas vide, alors  $\{c, x\}$  est une articulation à deux sommets. Alors,  $B_1 = x$  et puisque tous les voisinages sont corrects,  $x$  est adjacent à  $c$  et  $c$  n'est pas adjacent à  $b$ . D'où on conclut que l'articulation  $\{a, b, c\}$  est le voisinage de  $x$ , comme le dit le lemme.  $\square$

**Définition 3.2 (Arête Plate)** *Une arête est dite plate si elle n'appartient à aucun triangle.*

On remarque que dans un graphe  $G$  sans trou impair, une arête  $ab$  est plate si et seulement si la paire  $\{a, b\}$  est une paire d'ennemis dans  $G - ab$ .

**Définition 3.3 (Collage)** *Soient  $M_1 = (V_1, E_1), \dots, M_k = (V_k, E_k)$  des graphes où l'on suppose l'existence de deux sommets  $a, b$  tels que  $V_i \cap V_j = \{a, b\}$  pour tout  $i \neq j$  et tels que  $ab$  soit une arête plate dans chaque  $M_i$ . Ces graphes sont dits collables (par l'arête  $ab$ ).*

*Lorsqu'il en est ainsi, nous pouvons construire le graphe ayant comme ensemble de sommets  $V_1 \cup \dots \cup V_k$  et comme ensemble d'arêtes  $E_1 \cup \dots \cup E_k - \{ab\}$ . Ce graphe est appelé le collage des graphes  $M_1, \dots, M_k$  par l'arête  $ab$ .*

**Définition 3.4 (Décollage)** *Soit  $G$  un graphe avec une articulation à deux sommets  $\{a, b\}$  où  $a$  et  $b$  forment une paire d'ennemis de  $G$ , et  $B_1, \dots, B_k$  les composantes de  $G - \{a, b\}$ . Pour chaque  $i$ , nous pouvons construire un graphe ayant comme ensemble de sommets  $B_i \cup \{a, b\}$  et comme ensemble d'arêtes toutes les arêtes de  $G[B_i \cup \{a, b\}]$  plus l'arête  $ab$ . Cette opération sera appelée le décollage du graphe  $G$  par la paire  $\{a, b\}$ .*

Il n'est pas difficile de voir que les opérations de collage et décollage préservent la planarité et l'absence de trous impairs. Par conséquent, elles préservent aussi la perfection dans le cas des graphes planaires (ce fait est aussi vrai dans le cas général des graphes, ceci comme conséquence immédiate d'un lemme de Tucker [46]).

Ces définitions faites, nous pouvons énoncer le lemme suivant, dont la démonstration triviale consiste à vérifier l'ensemble des propriétés (c1)–(c4).

**Lemme 3.10 (Le Lemme de Collage/Décollage pour les Candidats)** *Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux graphes collables par l'arête  $ab$ . Si  $M_1$  et  $M_2$  sont des candidats, alors leur collage par l'arête  $ab$  est aussi un candidat.*

Inversement, soit  $M$  un candidat admettant une articulation à deux sommets et soient  $M_1$  et  $M_2$  les deux graphes issus de son décollage par cette articulation. Alors,  $M_1$  comme  $M_2$  sont des candidats.  $\square$

On prouve maintenant la propriété essentielle des candidats.

**Théorème 3.4** *Tout candidat est non-QPS.*

*Démonstration.* Ce théorème est démontré par récurrence sur le nombre de sommets du candidat. Le plus petit candidat étant le  $\bar{C}_6$ , le théorème est vrai pour le cas de base. Nous allons considérer séparément les candidats 3-connexes et ceux qui ne le sont pas. Pour les candidats 3-connexes, le résultat désiré est une conséquence immédiate du théorème de Hougardy (Théorème E), lequel peut être formulé de la façon suivante :

**Théorème 3.5 ([24])** *Soit  $G$  un line-graphe de biparti 3-connexe. Alors  $G$  n'a aucune paire d'amis.*

Il nous reste à examiner les candidats qui ne sont pas 3-connexes.

**Lemme 3.11** *Soit  $G$  un candidat et  $x, y$  une paire quelconque de sommets non adjacents dans  $G$ . S'il existe deux chaînes induites  $P_1 : x = v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1} = y$  et  $P_2 : x = w_0, w_1, \dots, w_l, w_{l+1} = y$  disjointes en dehors de  $x, y$ , alors il n'existe pas de cordes entre ces deux chaînes sauf peut-être  $v_1 w_1$  ou  $v_k w_l$ .*

*Démonstration.* En prouvant par l'absurde, supposons qu'il existe des sommets  $v_i$  dans  $P_1$  et  $w_j$  dans  $P_2$ , avec  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq l$ , tels que  $v_i w_j$  est une arête. Alors  $N(v_i) \supseteq \{v_{i-1}, v_{i+1}, w_j\}$ . Comme  $G$  est un candidat, il existe exactement une arête dans  $\{v_{i-1}, v_{i+1}, w_j\}$ . Cette arête ne peut pas être  $v_{i-1} v_{i+1}$  puisque  $G$  est une chaîne induite, alors elle doit être soit  $v_{i-1} w_j$  soit  $v_{i+1} w_j$ . Sans perte de généralité, supposons que  $v_{i-1} w_j$  soit une arête (sauf si  $i = 1$ , dans ce cas, c'est l'arête  $v_2$  qui doit exister). Alors  $w_j$  est de degré quatre et donc a deux arêtes dans son voisinage : l'une est  $v_{i-1} v_i$  (ou  $v_1 v_2$  si  $i = 1$ ) et l'autre doit être  $w_{j-1} w_{j+1}$ , ce qui est impossible puisque  $P_2$  est une chaîne induite.  $\square$

**Lemme 3.12** *Tout candidat  $G$  admettant une articulation à deux sommets est non-QPS.*

*Démonstration.* Soit  $\{a, b\}$  une articulation à deux sommets de  $G$ . Nous rappelons que par (c4),  $\{a, b\}$  est une paire d'ennemis. Soient  $B_1, B_2$  les deux composantes de  $G$  –

$\{a, b\}$  et  $G_1, G_2$  les deux graphes issus du décollage de  $G$  par  $\{a, b\}$ . Par le Lemme de Collage/Décollage,  $G_1$  et  $G_2$  sont des candidats et par hypothèse de récurrence,  $G_1$  et  $G_2$  sont non-QPS.

Soit maintenant  $x, y$  n'importe quelle paire de sommets non adjacents de  $G$ . On doit prouver qu'ils ne forment pas une paire d'amis.

Si  $x$  et  $y$  sont tous les deux dans un des  $G_1, G_2$ , disons  $G_1$ , alors, par hypothèse de récurrence, il existe une chaîne induite impaire  $P$  entre  $x$  et  $y$ . Si  $P$  ne contient pas l'arête  $ab$ , alors  $P$  est aussi une chaîne de  $G$ , ce qui prouve le résultat désiré. Si  $P$  contient l'arête  $ab$ , alors nous remplaçons cette arête par une des chaînes induites de  $B_2 \cup \{a, b\}$  reliant  $a$  à  $b$ , obtenant ainsi une chaîne induite de  $G$  reliant  $x$  à  $y$ , de même parité que  $P$  (impair), prouvant encore le résultat désiré.

Supposons maintenant que  $x$  soit dans  $B_1$  et  $y$  dans  $B_2$ . Comme  $G$  est 2-connexe, il existe deux chaînes disjointes (sauf en  $y$ ), reliant  $y$  à  $a$  et  $y$  à  $b$ , désignées respectivement par  $Q_1$  et  $Q_2$ . Il est clair que  $Q_1$  et  $Q_2$  sont entièrement contenues dans  $B_2 \cup \{a, b\}$ . Soient  $y_1$  et  $y_2$  les voisins de  $y$  dans  $Q_1$  et  $Q_2$  respectivement, et  $R$  une chaîne induite quelconque entre  $a$  et  $b$  entièrement incluse dans  $B_1 \cup \{a, b\}$ . Par le Lemme 3.11, il n'existe pas de cordes entre les chaînes induites  $Q_1$  et  $Q_2 + R$  qui relient  $a$  et  $y$ , sauf peut-être  $y_1y_2$ .

Nous pouvons supposer que  $y_1y_2$  n'est pas une arête. Sinon, nous avons que, par (c4), l'ensemble  $\{y_1, y_2\}$  n'est pas une articulation de  $G$ . Par conséquent, il existe des chaînes reliant  $y$  à  $Q_1 \cup Q_2 - \{y, y_1, y_2\}$ . Parmi toutes ces chaînes, désignons par  $Q$  une des plus courtes. Par symétrie, nous pouvons supposer que l'autre extrémité de  $Q$  est dans  $Q_1 - \{y, y_2\}$ . En fait, il existe une chaîne dans  $Q \cup Q_1 - \{y_1\}$  qui relie  $y$  à  $a$  et est disjointe de  $Q_2$ . Ceci implique qu'il existe une chaîne sans cordes  $Q'$  (dans  $Q \cup Q_1$ ) qui relie  $y$  à  $a$  et est disjointe de  $Q_2$ . Le voisin de  $y$  dans  $Q'$  n'est pas adjacent à  $y_2$ , sinon le voisinage de  $y$  serait incorrect. Par conséquent, nous pouvons remplacer la paire de chaînes  $Q_1, Q_2$  par  $Q', Q_2$ .

Finalement  $Q_1 + Q_2 + R$  est un trou. Puisque  $R$  est impaire, nous pouvons supposer par symétrie que  $Q_1$  est impaire et  $Q_2$  est paire.

Dans  $G_1$ , par hypothèse de récurrence, il existe une chaîne induite impaire  $P$  entre  $x$  et  $b$ . Si  $P$  ne contient pas  $a$ , alors  $P + Q_2$  est la chaîne induite impaire désirée. Si  $P$  contient  $a$ , alors  $P - b$  est une chaîne induite paire entre  $x$  et  $a$  et donc  $P - b + Q_1$  est une chaîne induite impaire entre  $x$  et  $y$ . La preuve du lemme est achevée.  $\square$

Ce dernier lemme termine la preuve du Théorème 3.4.  $\square$

**Corollaire 3.1** *Un graphe planaire parfait est de quasi-parité stricte si et seulement s'il ne contient pas de candidat comme sous-graphe induit.*

Ce corollaire sera la base d'un algorithme de reconnaissance des graphes QPS, développé dans la prochaine section. Le Lemme de Collage/Décollage pour les candidats admet une version spécifique pour les obstructions parfaites planaires.

**Lemme 3.13 (Le Lemme de Collage/Décollage pour les Obstructions)** *Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux obstructions parfaites planaires collables par l'arête  $ab$ . Alors, le collage  $M$  de  $M_1$  et  $M_2$  par  $ab$  est une obstruction.*

*Inversement, soit  $M$  une obstruction parfaite planaire admettant une articulation à deux sommets et  $M_1$  et  $M_2$  les graphes issus de son décollage par cette articulation. Alors,  $M_1$  comme  $M_2$  sont des obstructions parfaites planaires.*

*Démonstration.* Pour la première partie de ce lemme, supposons que  $M$  n'est pas une obstruction. Nous savons par le Lemme de Collage/Décollage pour les Candidats que  $M$  est un candidat. Alors,  $M$  contient strictement une obstruction planaire  $M'$ . On observe que  $M'$  ne peut pas être entièrement contenu dans  $M_1 - ab$  ou dans  $M_2 - ab$ , sinon ou bien  $M'$  serait strictement contenu soit dans  $M_1 - \{a, b\}$  soit dans  $M_2 - \{a, b\}$ , contredisant le fait que  $M_1$  et  $M_2$  sont des obstructions, ou bien  $a$  ou  $b$  aurait un voisinage incorrect dans  $M'$ . Par conséquent,  $\{a, b\} \cap M'$  est une articulation de  $M'$  et donc  $\{a, b\} \subset M'$ . Soient  $M'_1$  et  $M'_2$  les graphes issus du décollage de  $M'$  par  $\{a, b\}$ . Nous savons que  $M'_1$  et  $M'_2$  sont des candidats. Par suite, puisque  $M'$  est un sous-graphe strict de  $M$ , nous pouvons supposer par symétrie que  $M'_1$  est un sous-graphe strict de  $M_1$ , ce qui contredit la minimalité de l'obstruction  $M_1$ .

Pour la deuxième partie du lemme, supposons que  $M_1$  ne soit pas une obstruction. Nous savons que  $M_1$  est un candidat et donc contient strictement une obstruction planaire  $M'_1$ . Si  $M'_1$  ne contient pas l'arête  $ab$ , alors  $M'_1$  est un sous-graphe de  $M$ , contredisant le fait que  $M$  est une obstruction. Si  $M'_1$  contient l'arête  $ab$ , alors nous pouvons coller  $M'_1$  et  $M_2$  par  $ab$ . Le collage obtenu est un candidat strictement contenu dans  $M$ , contradiction.  $\square$

### 3.3.2 Comment distinguer les obstructions (planaires) des candidats

Dans cette sous-section, on montre comment trouver un sous-ensemble éventuellement vide de sommets d'un candidat dont l'enlèvement produit une obstruction plane.

**Définition 3.5 (Danger)** *Pour un candidat  $G$ , nous nommons danger tout sous-ensemble strict de sommets  $D$  (s'il en existe) tel que chaque composante de  $G - D$  est un candidat.*

Par exemple, dans le line-graphe de  $K_{3,3} - e$ , deux sommets adjacents de degré trois forment un danger (voir figure 3.3.4).

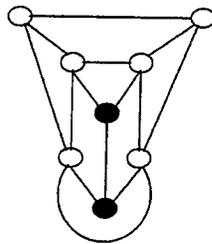


Figure 3.3.4: Les sommets noirs de  $L(K_{3,3} - e)$  forment un danger.

La définition de danger implique le lemme immédiat suivant :

**Lemme 3.14** *Un candidat est une obstruction si et seulement s'il ne contient pas de danger.  $\square$*

La question qui se pose étant de trouver un danger dans un candidat  $G$ , à partir de chaque sommet  $x$ , nous construisons récursivement un sous-ensemble  $D(x)$  de la manière suivante : premièrement, on enlève  $x$  de  $G$  et on définit  $H = G - x$ . On applique ensuite le procédé suivant :

- *Etape 1.* Tant que  $H$  a un sommet  $y$  ayant un voisinage incorrect, alors enlever  $y$  ;
- *Etape 2.* Si une composante de  $H$  a un sommet d'articulation  $y$ , alors enlever  $y$  et reprendre globalement le procédé ;
- *Etape 3.* Si une composante de  $H$  a une articulation à deux sommets  $C$  qui viole (c4), alors enlever  $C$  et reprendre globalement le procédé.

Il est bien clair dans la description qui précède que l'Etape 2 (resp. l'Etape 3) est appliquée lorsqu'il n'existe pas la possibilité d'appliquer l'Etape 1 (resp. l'Etape 2) et seulement dans ce cas.

Ce procédé exploité à son terme conduit à définir  $D(x)$  comme l'ensemble de tous les sommets enlevés. Il est immédiat que si  $D(x)$  ne contient pas tous les sommets de  $G$ , alors  $D(x)$  est un danger. En plus, nous avons :

**Lemme 3.15** *Soit  $G$  un candidat ayant un danger  $D$  et soit  $x$  un sommet quelconque de  $D$ . Alors,  $D(x) \subseteq D$  et  $D(x)$  est un danger.*

*Démonstration.* Nous allons prouver que  $D(x) \subseteq D$ . Ce fait implique que  $D(x)$  ne contient pas tous les sommets de  $G$  et donc est un danger. Soit  $R$  un sous-ensemble quelconque de  $D$ .

Premièrement, on observe que si  $G - R$  a un sommet  $y$  ayant un voisinage incorrect, alors  $y$  appartient à  $D$ . En effet, si cela était faux, alors  $y$  serait un sommet de voisinage incorrect dans  $G - D$ , contredisant le fait que chaque composante de  $G - D$  est un candidat.

Deuxièmement, on observe que si une certaine composante  $H$  de  $G - R$ , dans laquelle chaque sommet a un voisinage correct, possède un sommet d'articulation  $y$ , alors  $y$  doit appartenir à  $D$ . Sinon, soient  $B_1$  et  $B_2$  les composantes de  $H - y$  et  $H'$  la composante de  $G - D$  contenant  $y$ . Il est clair que  $H'$  est un sous-graphe de  $H$ . Puisque le voisinage de  $y$  est correct et par symétrie, nous pouvons supposer que  $y$  a deux voisins dans  $B_1$  et un ou deux dans  $B_2$ . Au moins un sommet de  $N(y) \cap B_1$  et un sommet de  $N(y) \cap B_2$  doivent être dans  $H'$ , sinon  $y$  aurait un voisinage incorrect dans  $H'$ . Par suite,  $y$  est un sommet d'articulation dans  $H'$ , une contradiction.

Troisièmement, on observe que si une composante  $H$  quelconque de  $G - R$ , où chaque sommet a un voisinage correct, a une articulation à deux sommets  $C$  violant (c4) dans  $H$ , alors  $C \subseteq D$ . Sinon, soient  $B_1$  et  $B_2$  les deux composantes de  $H - C$ . Supposons qu'un certain sommet  $y$  de  $C$  appartient à une composante  $H'$  de  $G - D$ . Comme auparavant, au moins un sommet de  $N(y) \cap B_1$  et un sommet de  $N(y) \cap B_2$  sont dans  $H'$ , sinon soit  $y$  aurait un voisinage incorrect dans  $H'$ , soit  $C - \{y\}$  serait un sommet d'articulation dans  $H$ . Par suite,  $C \cap H'$  est ou bien un sommet d'articulation ou bien une articulation à deux sommets violant (c4), une contradiction.

Des ces trois observations, en faisant initialement  $R = \{x\}$ , il est clair que l'application du procédé construisant  $D(x)$  aboutit à  $D(x) \subseteq D$ .  $\square$

**Corollaire 3.2** *Un candidat  $G = (V, E)$  est une obstruction si et seulement si  $D(x) = V$  pour chaque sommet  $x$  de  $G$ .  $\square$*

Par conséquent, nous pouvons décider si un candidat contient un danger, et s'il le contient, en trouver un efficacement. Pour ce faire, nous devons uniquement construire  $D(x)$  pour chaque sommet  $x$  jusqu'à qu'on en trouve un tel que  $D(x)$  ne contient pas tous les sommets du graphe. Nous observons en plus que la construction de  $D(x)$  est polynomiale, puisqu'il ne s'agit que de tester les voisinages des sommets et la connectivité des graphes. Par suite, ce procédé nous permet de trouver une obstruction dans un candidat quelconque  $G$  de la manière suivante : si  $G$  ne contient pas de danger, alors  $G$  est une obstruction ; sinon, trouver un danger de  $G$  et continuer avec  $G - D$ , lequel est un candidat.

### 3.3.3 Construction de la classe des candidats planaires

Nous allons définir par une récurrence à partir de  $\bar{C}_6$  une famille  $\mathcal{F}$  de graphes planaires et prouver que  $\mathcal{F}$  est exactement la classe de tous les candidats planaires.

Soit  $G$  le line-graphe d'un graphe biparti connexe  $H$  dont les sommets sont coloriés bleu ou vert selon la bipartition naturelle. En utilisant la correspondance univoque entre les sommets de  $H$  et les cliques maximales de  $G$ , nous pouvons considérer une coloration des arêtes de  $G$  en bleu ou vert selon les couleurs des cliques auxquelles elles appartiennent.

**Définition 3.6 (Sablier)** *Le sablier-sommet et le sablier-arête sont les deux graphes dessinés dans la figure 3.3.5.*

*Les arêtes  $ab$  et  $cd$  sont les bases du sablier et le(s) sommet(s)  $e$  (et  $f$ ) est (sont) le(s) centre(s) du sablier.*

**Définition 3.7 (Eléments Divisibles)** *Un élément divisible est une arête plate ou un sommet de degré quatre.*

**Définition 3.8 (Division)** *Une opération de division dans un graphe planaire où chaque sommet a un voisinage correct consiste à :*

- (1) Choisir deux éléments divisibles  $e, f$  dans la même face.

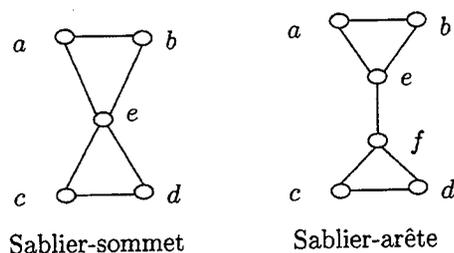


Figure 3.3.5: Les deux types de sablier.

- (2) Si l'un des deux, disons  $f$ , est un sommet de voisins  $x_1, x_2, x_3, x_4$  tels que  $x_1x_2, x_3x_4$  sont des arêtes, alors  $f$  doit être remplacé par une chaîne induite  $f_1f_2f_3$ , où  $f_2$  est de degré deux,  $f_1$  est relié aux sommets  $x_1$  et  $x_2$ , tandis que  $f_3$  est relié aux sommets  $x_3$  et  $x_4$  ( $f_1f_2$  et  $f_2f_3$  sont dites arêtes nouvelles).
- (3) Si l'un des deux, disons  $e$ , est une arête, alors, soit elle est laissée telle quelle (et conventionnellement dite nouvelle), soit elle est divisée en produisant une chaîne de longueur trois et dans ce cas, seule l'arête centrale est dite nouvelle.
- (4) Si les deux éléments divisibles sont des sommets, alors ils ne doivent pas former une articulation.
- (5) Un sablier est introduit dont les bases sont une arête nouvelle dans chacun des éléments divisés. Le type du sablier (sommet ou arête) sera choisi de façon à respecter la bipartition bleu/vert des cliques maximales. En plus, si un élément divisible est un sommet appartenant à une articulation à deux sommets, alors le sablier doit être choisi de manière que chaque articulation à deux sommets dans le graphe obtenu soit une paire d'ennemis. Pour cela, il suffit de vérifier que les sommets de chacune de ces articulations sont de degré quatre.

Les figures 3.3.6–3.3.8 illustrent les opérations de division que nous permettent de créer de nouveaux graphes planaires à partir d'autres.

Dans la figure 3.3.6, on peut voir toutes les opérations possibles lorsque les deux éléments divisibles sont des arêtes. Dans ce cas, ces arêtes peuvent ou pas appartenir à la même bipartition des cliques maximales, et le type du sablier à être introduit dépend si l'on divise zéro, une ou deux de ces arêtes, de façon à respecter la bipartition des cliques maximales.

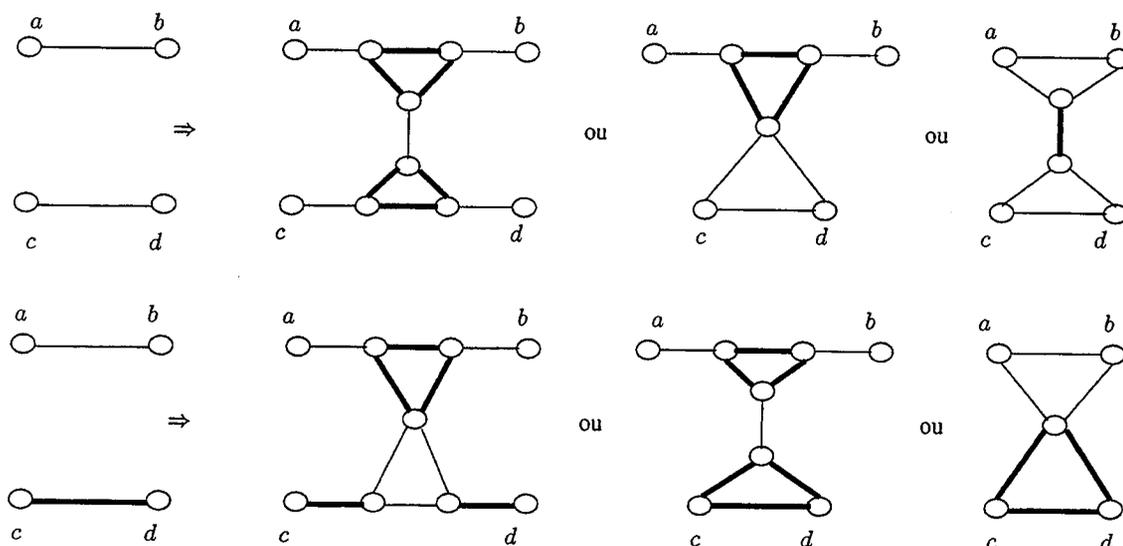


Figure 3.3.6: Les Opérations Arête-arête.

Dans la figure 3.3.7, on peut voir les opérations possibles quand les deux éléments divisibles sont un sommet et une arête. Le sommet doit être éclaté en trois nouveaux sommets qui formeront ainsi une chaîne de longueur deux, tandis que l'arête peut ou pas être divisée. Le sablier doit être introduit de façon à respecter la bipartition des cliques maximales. On signale les sommets qui n'ont pas changé leur voisinage en les coloriant gris.

Dans la figure 3.3.8, on voit toutes les opérations possibles lorsque les deux éléments divisibles sont des sommets. Chaque sommet doit être éclaté en trois nouveaux sommets qui formeront ainsi une chaîne de longueur deux, et puisque ces sommets peuvent se trouver à une distance impaire (premier cas) ou paire (deuxième cas), on aura différentes manières d'introduire le sablier, mais toujours de façon à respecter la bipartition des cliques maximales.

**Définition 3.9 (Classe  $\mathcal{F}$ )** Nous définissons la classe  $\mathcal{F}$  par le schéma récursif suivant :

- $\bar{C}_6 \in \mathcal{F}$ ;
- Si un graphe  $G$  appartient à  $\mathcal{F}$ , alors tout graphe issu de  $G$  par division lui appartient aussi.
- Si deux graphes de  $\mathcal{F}$  sont collables par une arête, alors le graphe issu de leur collage

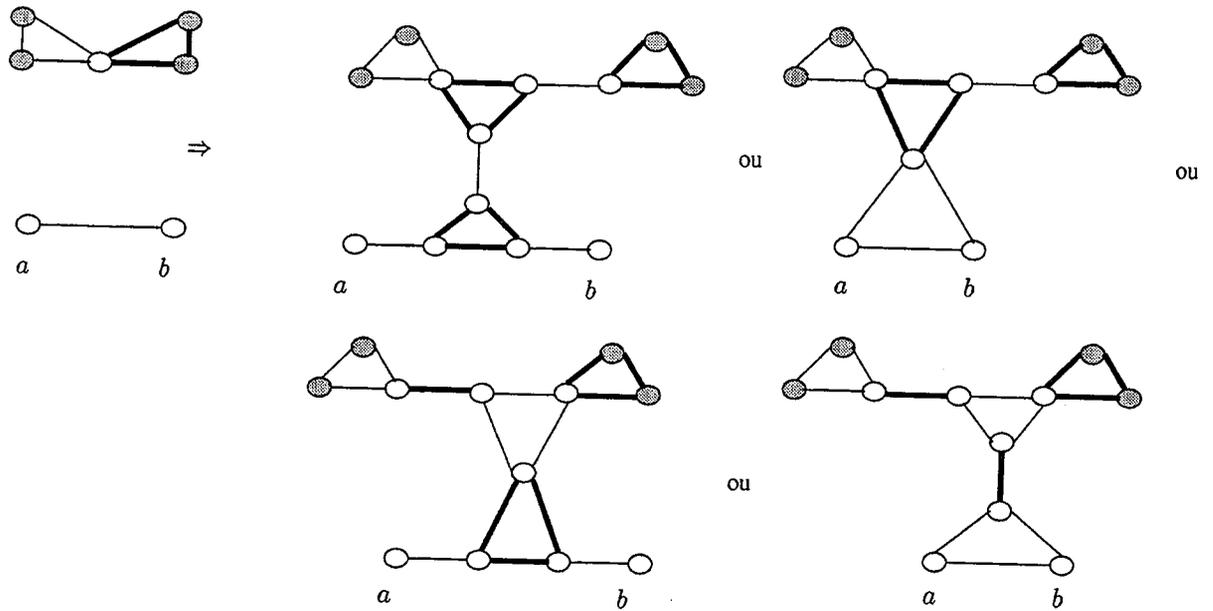


Figure 3.3.7: Les Opérations Arête-sommet.

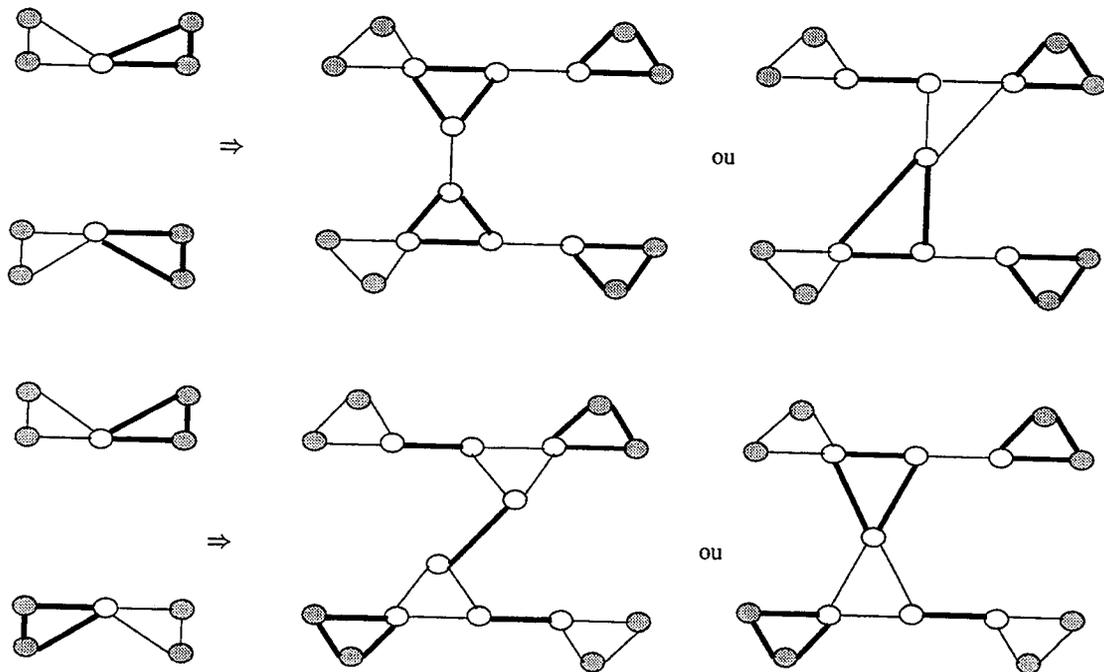


Figure 3.3.8: Les Opérations Sommet-sommet.

par cette arête appartient aussi à  $\mathcal{F}$ .

**Théorème 3.6** *Tous les graphes de  $\mathcal{F}$  sont des candidats.*

*Démonstration.* La preuve est par récurrence sur le nombre de sommets. Ce théorème est vrai pour  $\bar{C}_6$ . Considérons un graphe  $G'$  dans  $\mathcal{F}$  et supposons que le théorème est vrai pour tous les graphes plus petits que  $G'$ . Le graphe  $G'$  a été obtenu soit par division d'un graphe  $G$  de  $\mathcal{F}$  soit par collage de deux graphes  $G_1, G_2$  de  $\mathcal{F}$ . Le cas du collage est immédiat par le Lemme de Collage/Décollage et par hypothèse de récurrence.

Examinons donc le cas où  $G'$  est issu d'une division d'un graphe  $G$  qui, toujours par hypothèse de récurrence, est un candidat. Soit  $H$  le graphe biparti tel que  $G = L(H)$  et considérons la coloration des sommets de  $H$  en bleu et vert selon leur bipartition. Il est facile de voir que  $G'$  est aussi le line-graphe d'un graphe biparti  $H'$ , car la division préserve la bipartition des clique maximales de  $G$ . Il est clair aussi que  $G'$  est 2-connexe et que la division préserve le fait que chaque sommet a un voisinage correct. On observe encore que les opérations de division préservent toutes les parités des chaînes de  $G$  dans  $G'$ , autrement dit, s'il existe une chaîne entre deux sommets  $x$  et  $y$  dans  $G$ , alors  $G'$  contient une chaîne de même parité entre les sommets correspondants à  $x$  et  $y$ . Ceci prouve les propriétés (c1)–(c3) pour  $G'$ .

Il nous reste à prouver le propriété (c4). Supposons que  $G'$  contienne une articulation à deux sommets  $C = \{x, y\}$  violant (c4). Il est clair que le collage ne peut pas produire une mauvaise articulation à deux sommets (c'est-à-dire, une articulation qui n'est pas une paire d'ennemis), d'où on conclut que  $G'$  est issu d'une division. L'ensemble  $C$  ne peut pas contenir un sommet du centre du sablier introduit, parce que ça impliquerait que  $G$  a un sommet d'articulation. Par conséquent, un des sommets de  $C$ , disons  $x$ , appartient à une des bases du sablier introduit ; en effet,  $x$  a dû être obtenu par division d'un sommet  $f$ , puisque la division d'arêtes ne peut pas produire de sommets de degré quatre dans la base du sablier. En plus, par les règles de division, les deux sommets de  $C$  ne peuvent pas appartenir simultanément aux bases du sablier introduit. Alors,  $y$  est un sommet qui existait déjà dans  $G$  et par suite,  $\{f, y\}$  est une articulation de  $G$ . Le sommet  $x$  ne peut pas être le sommet  $f_2$  de degré deux de la chaîne  $f_1 f_2 f_3$  qui remplace  $f$  dans la division, car après l'introduction du sablier ce sommet devient de degré trois. Alors,  $x$  est  $f_1$  ou  $f_3$ . Il est clair que pour chaque chaîne induite  $P$  dans  $G$  reliant  $f$  à un sommet  $z$  quelconque, il existe une chaîne induite  $P'_1$  (resp.  $P'_3$ ) reliant  $f_1$  (resp.  $f_3$ ) à  $z$  dans  $G'$ , telle que  $P'_1$

(resp.  $P'_3$ ) a la même parité que  $P$  ( $P'_i$  est composée des arêtes de  $P$  plus éventuellement la chaîne  $f_1 f_2 f_3$ ). Pour  $z = y$ , ceci implique que  $\{f, y\}$  est une mauvaise articulation de  $G$  (contradiction). En conséquence,  $C$  n'a pas de sommets introduits par la division et est donc une mauvaise articulation de  $G$  (contradiction finale).  $\square$

Il nous reste à démontrer que les opérations de division génèrent tous les candidats planaires, et pour cela, il nous suffit de démontrer que pour chaque candidat planaire, l'application des opérations dans le sens inverse conduit à son terme à des graphes  $C_6$ .

Nous dirons que  $G'$  provient de  $G$  par une *réduction* si  $G$  est issu de  $G'$  par une division.

Nous rappelons que chaque sommet d'un candidat doit avoir un voisinage correct. Ce fait implique que chaque sommet  $x$  de degré quatre et chaque arête plate  $e$  d'un candidat planaire (en tant que centre(s) d'un éventuel sablier introduit) correspond à une possible réduction. Malheureusement, de telles réductions ne produisent pas toutes forcément un candidat, car deux problèmes peuvent naître : la réduction peut ou bien créer un voisinage incorrect pour un sommet, ou bien créer un graphe de connectivité deux ayant une articulation à deux sommets formant une paire d'amis. Nous allons démontrer que ces problèmes peuvent être évités par un choix approprié des éléments de réduction. Autrement dit, nous allons prouver que si  $G$  est un candidat planaire 3-connexe, alors nous pouvons choisir une réduction qui produit un candidat planaire 3-connexe, sauf si  $G = \bar{C}_6$ . Si  $G$  n'est pas 3-connexe, alors  $G$  est décollable en candidats plus petits. Cela nous conduira au résultat désiré : tout candidat planaire appartient à  $\mathcal{F}$ .

Par raison de simplicité, nous appelons *articulation terminale* toute articulation  $C$  telle qu'une composante de  $G - C$  est un sommet ou une arête ou encore un triangle. Soit  $C$  une articulation terminale à trois sommets, alors un sablier quelconque associé à un sommet de  $C$  définit une réduction qui ne change pas la connectivité de  $G$ .

Il doit être observé que seules les opérations inverses sommet-arête et sommet-sommet peuvent produire un voisinage incorrect pour un candidat planaire, par création d'un diamant ; et ceci ne se produit que lorsque les sommets qu'on veut identifier appartiennent à une face de longueur quatre. Cette situation peut être vue dans la figure 3.3.9.

**Observation 3.1** *Soit  $G$  un candidat planaire 3-connexe. Soit  $W$  un sablier dont la réduction crée un diamant. Alors, il existe un autre sablier dont la réduction produit un candidat planaire 3-connexe.*

*Démonstration.* Considérons les désignations de sommets comme dans la figure 3.3.9. Nous devons examiner deux cas. D'abord, supposons que la face contenant  $c$ ,  $d$ ,  $f$  et  $g$  n'est pas de longueur quatre. Puisque l'identification des sommets  $d$  et  $g$  ne peut pas produire un diamant, nous allons examiner le sablier  $W'$  qui a  $e$  comme centre. Nous allons démontrer que la réduction sur  $e$  produit un graphe 3-connexe. On observe que la face non triangulaire contenant  $a$  et  $d$  n'est pas de longueur quatre avec  $a$  ayant le degré trois, sinon  $g$  et un autre voisin  $c$  dans l'autre face non triangulaire formeraient une articulation à deux sommets clairement mauvaise. En plus, si  $e$  est dans une articulation à trois sommets, cette articulation est terminale (par une analyse facile cas par cas). Donc le graphe obtenu après la réduction est toujours 3-connexe, ce qui prouve le résultat désiré. Finalement, si la face contenant  $c$ ,  $d$ ,  $f$  et  $g$  est de longueur quatre, alors  $cg$  doit être une arête qui, en plus, n'est pas plate, sinon  $\{c, a\}$  serait une articulation à deux sommets de  $G$ . Alors, la réduction sur le sablier de centre  $df$  génère un graphe 3-connexe et sans diamant, car clairement toutes les articulations à trois sommets contenant  $f$  sont terminales. Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

**Observation 3.2** *Si un sommet  $x$  d'un candidat planaire 3-connexe  $G$  appartient à une articulation non terminale, alors une des deux faces non triangulaires contenant  $x$  a un sommet  $y$  tel que toute articulation à trois sommets contenant  $y$  est terminale.*

*Démonstration.* Soient  $F_1$  et  $F_2$  les deux faces non triangulaires contenant  $x$  ; désignons par  $y$  et  $z$  les sommets appartenant respectivement à  $F_1$  et  $F_2$ , tels que  $G - \{x, y, z\}$  produit la plus petite composante parmi tous les articulations à trois sommets non terminales contenant  $x$ . Soit  $y'$  un sommet de  $F_1$  dans  $G - \{x, y, z\}$  tel que  $yy'$  est une arête non plate. Le sommet  $y'$  appartient à un sablier  $W$  contenant l'intersection de  $F_1$  avec une autre face non triangulaire  $F_3$ . Nous revendiquons que chaque articulation à trois sommets contenant  $y'$  est terminale. Sinon, il existe une articulation à trois sommets  $\{y', y'', w\}$  avec  $y''$  dans  $F_1$  et  $w$  dans  $F_3$  telle qu'aucune composante de  $G - \{y', y'', w\}$  n'est contenue dans  $W$ . Ceci implique que soit  $y$  n'est pas dans la face infinie, soit  $\{y', y''\}$  ou  $\{w, w'\}$  est une articulation (où  $w'$  est l'autre sommet de  $W$  se trouvant dans la face infinie), les deux cas aboutissant à une contradiction.  $\square$

**Lemme 3.16** *Dans tout candidat planaire 3-connexe différent de  $\bar{C}_6$ , il existe un sablier dont la réduction produit un candidat planaire.*

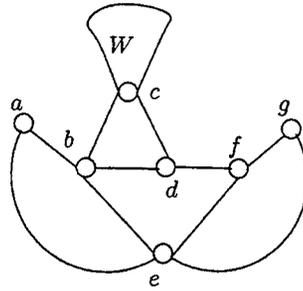


Figure 3.3.9: Un sablier  $\{b, c, d, W\}$  dont la réduction produit un diamant.

*Démonstration.* Soit  $G$  un candidat planaire différent de  $\bar{C}_6$  et  $x$  un sommet quelconque de  $G$ . Si la réduction sur le sablier défini par ce sommet produit un graphe 2-connecte  $G'$ , où chaque sommet a un voisinage correct et toutes les articulations à deux sommets forment des paires d'ennemis, alors clairement  $G'$  est un candidat et le lemme est prouvé. Sinon, par l'Observation 3.2, il existe un sablier dans  $G$  centré dans un sommet  $y$  dont la réduction correspondante produit un graphe 3-connecte. Par l'Observation 3.1, ce sablier peut être remplacé par un autre dont la réduction produit un graphe où tous les sommets ont un voisinage correct. Cette observation garantit aussi que la réduction préserve la 3-connectivité. Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

**Théorème 3.7** *Tous les candidats planaires appartiennent à  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur le nombre de sommets. Le théorème est trivialement vrai pour le plus petit candidat  $\bar{C}_6$ . Supposons qu'il en soit aussi pour les candidats planaires ayant moins de  $n$  sommets et considérons un graphe  $G$  à  $n$  sommets. Si  $G$  a une articulation à deux sommets, soient  $G_1$  et  $G_2$  les graphes issus du décollage par cette articulation. Il est clair que  $G_1$  et  $G_2$  sont des candidats plus petits et appartiennent donc à  $\mathcal{F}$ . Alors,  $G$  appartient également à  $\mathcal{F}$ . Si  $G$  est 3-connecte, alors, par le Lemme 3.16, il existe une réduction qui génère un candidat planaire  $G'$  plus petit que  $G$ . Par hypothèse de récurrence,  $G'$  est dans  $\mathcal{F}$ , et  $G$  issu de  $G'$  par division appartient donc à  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Par suite des deux derniers théorèmes, le sous-ensemble  $\mathcal{F}^*$  des graphes de  $\mathcal{F}$  qui n'ont pas de danger n'est autre que la classe de toutes les obstructions planaires.

Une question intéressante reste posée : une obstruction planaire est-elle décomposable sur  $\bar{C}_6$  de sorte que tous les graphes intermédiaires sont des obstructions ?

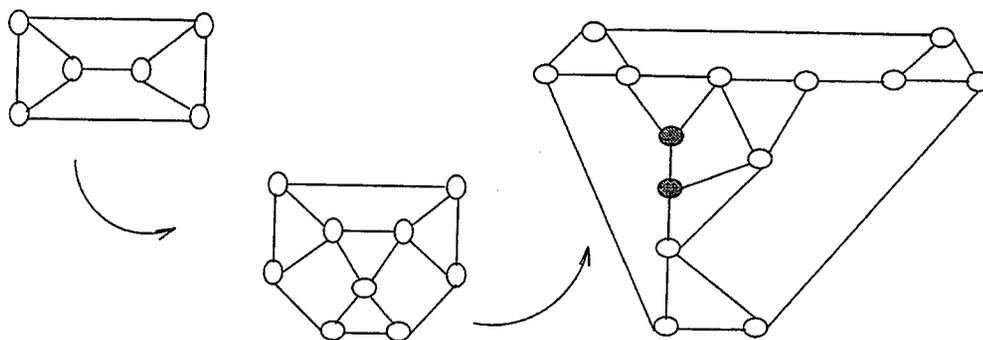


Figure 3.3.10: Un graphe  $G$  dans  $\mathcal{F}$ . Les sommets gris forment un danger.

### 3.4 Algorithme de reconnaissance des graphes QPS

Dans cette section, nous nous intéressons à la reconnaissance des graphes QPS. On va utiliser l'algorithme de décomposition de Hsu pour décider si un graphe parfait planaire donné est un graphe de quasi-parité stricte, en regardant les feuilles de son arbre de décomposition.

Soit  $H$  le graphe associé à un nœud de l'arbre de décomposition de  $G$  et soit  $Q$  l'articulation de  $H$  permettant de construire ses fils. Appelons  $B_1, \dots, B_k$  les composantes de  $H - Q$ .

Le lemme suivant est évident puisqu'une obstruction éventuelle de  $H$  ne peut être séparée par une clique d'articulation.

**Lemme 3.17** *Si  $Q$  est une articulation de Type I, alors  $H$  est QPS si et seulement si ses fils le sont.*

Pour les articulations de type supérieur, il faut faire attention à ne pas séparer une obstruction. La figure 3.4.11 montre qu'un graphe parfait planaire non QPS donne naissance à deux fils QPS par une articulation de Type II.

Une articulation  $Q = \{a, b\}$  de Type II sera appelée *paire* ou *impaire* selon la parité des chaînes induites entre  $a$  et  $b$  dans  $H$ . Puisque les obstructions n'ont pas d'articulation paire de Type II, le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 3.18** *Si  $Q$  est une articulation paire de Type II, alors  $H$  est QPS si et seulement si ses fils le sont.*

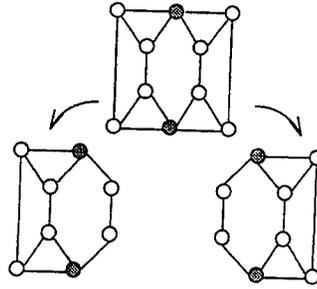


Figure 3.4.11: Un arbre de décomposition dont la racine est non-QPS tandis que les feuilles sont QPS.

**Lemme 3.19** *Si  $Q = \{a, b\}$  est une articulation impaire de Type II, alors  $H$  contient une obstruction si et seulement si soit un fils de  $H$  contient une obstruction, soit au moins deux fils  $H_1, H_2$  sont tels que  $H_1 + ab$  et  $H_2 + ab$  contiennent tous les deux une obstruction.*

*Démonstration.* Ce lemme est une conséquence du Lemme de Collage/Décollage de la section précédente.  $\square$

**Remarque :** Si  $H_i$  contient une obstruction  $M$  ayant au plus un sommet dans  $\{a, b\}$ , alors  $M$  est aussi dans  $H_i + ab$ . D'autre part, si  $M$  contient  $a$  et  $b$ , alors cette paire est une paire d'ennemis et est une articulation de  $M$ . De là on conclut, par le Lemme de Collage/Décollage, que  $M + ab$  contient une obstruction. Donc, dans les deux cas,  $H_i + ab$  contient une obstruction.

Le dernier lemme suggère (dans le cas d'une articulation impaire de Type II) non pas de construire  $H_i + ab$  mais de répertorier la paire  $\{a, b\}$  comme "spéciale" (disons qu'on la colore en jaune) dans les fils  $H_i$  de  $H$ .

Soit maintenant  $Q = \{a, b, c\}$  une articulation de Type III de  $H$ . Soit  $M$  une obstruction éventuelle de  $H$  que  $Q$  séparerait.

Si  $bc$  est une arête, alors  $Q$  est un  $P_3$  donc une articulation étoilée. Dans ce cas,  $M$  ne peut pas être séparée par  $Q$ . Il est aussi clair que  $M$  ne peut pas être séparée par des sommets adjacents de  $Q$ . Enfin,  $M$  ne peut pas être séparée non plus par les sommets  $a$  et  $c$ , puisqu'ils forment une paire d'amis. Donc, dans tous les cas,  $Q$  ne sépare pas  $M$ .

Si  $bc$  n'est pas une arête et  $Q \subset M$ , alors, d'après le Lemme 3.4,  $Q$  est le voisinage d'un sommet  $z$  de  $M$  et ceci est contradictoire avec la spécification du Type III. Donc  $Q \cap M$  est réduit à deux sommets et puisque  $\{a, c\}$  est une paire d'amis, ceci est possible seule-

ment si  $Q \cap M = \{b, c\}$ . Dans ce cas, on trouvera, par le Lemme de Collage/Décollage, une obstruction planaire dans  $H_1 + bc$  et une autre dans  $H_2 + bc$ . Donc, on a le résultat suivant.

**Lemme 3.20** *Si  $Q = \{a, b, c\}$  est une articulation de Type III, alors  $H$  contient une obstruction si et seulement si soit un fils de  $H$  contient une obstruction, soit  $bc$  n'est pas une arête et chacun de  $H_1 + bc$  et  $H_2 + bc$  contient une obstruction contenant l'arête  $bc$ .*

La paire  $\{b, c\}$  sera répertoriée comme jaune dans les deux fils de  $H$  si  $bc$  n'est pas une arête de  $H$ .

Pour une articulation de Type IV, un même argument peut être appliqué de façon à obtenir le résultat suivant.

**Lemme 3.21** *Si  $Q = \{a, b, c, d\}$  est une articulation de Type IV, alors  $H$  contient une obstruction si et seulement si soit un fils de  $H$  contient une obstruction, soit chacun de  $H_1 + bd$  et  $H_2 + bd$  en contient une contenant l'arête  $bd$ .*

Ici, encore, la paire  $\{b, d\}$  sera répertoriée comme jaune dans les fils.

Donc on construit l'arbre de décomposition de  $G$  dans lequel chaque sommet est un graphe muni d'un répertoire de paires jaunes qu'on appellera désormais arêtes jaunes. Nous désignons par  $Y$  l'ensemble de toutes les arêtes jaunes de l'arbre de décomposition de  $G$ . Soit  $H$  une feuille de cet arbre et  $Y_H$  son répertoire d'arêtes jaunes. Les lemmes précédents impliquent que si  $G$  n'est pas QPS alors il contient une obstruction présente dans au moins un des  $H + Y_H$ . Mais, on ne peut rien dire de la présence d'une obstruction dans une des feuilles (comme on peut le voir dans la figure 3.4.12). La définition et les lemmes suivants nous aideront à surmonter ce problème.

**Définition 3.10 (Pseudo-candidat)** *Nous définissons récursivement la classe des pseudo-candidats comme suit :*

- *Tout candidat est un pseudo-candidat ;*
- *Etant donnés  $k$  pseudo-candidats collables par une arête, leur collage par cette arête est un pseudo-candidat.*

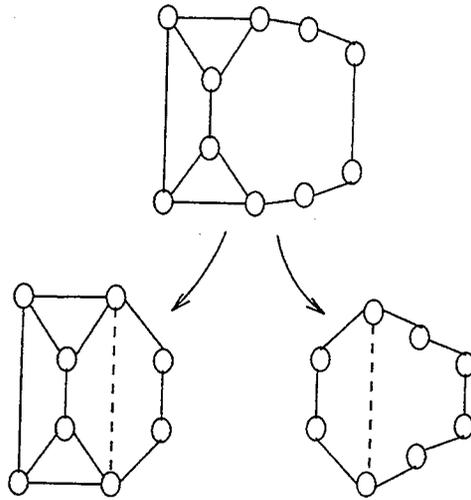


Figure 3.4.12: Un arbre de décomposition dont les feuilles contiennent une obstruction tandis que la racine est QPS.

Par récurrence, on vérifie que chaque articulation à deux sommets d'un pseudo-candidat est une paire d'ennemis. La seule différence entre candidats et pseudo-candidats est que ces derniers admettent des articulations à deux sommets produisant plusieurs composantes tandis que dans les premiers, les articulations à deux sommets produisent exactement deux composantes.

**Lemme 3.22** *Tout pseudo-candidat contient un candidat.*

*Démonstration.* Supposons que  $G$  soit un pseudo-candidat et que ce lemme soit vrai pour tous les pseudo-candidats strictement plus petits que  $G$  en nombre de sommets. Si pour chaque articulation  $Q$  à deux sommets de  $G$ ,  $G - Q$  a exactement deux composantes, alors il est clair que  $G$  est un candidat. Supposons donc que  $G$  possède une articulation à deux sommets  $Q$ , telle que  $G - Q$  contient  $k > 2$  composantes. Soit  $G'$  le graphe obtenu par enlèvement de tous les sommets de  $k - 2$  composantes de  $G - Q$ . Il est facile de voir que  $G'$  est un pseudo-candidat. Par hypothèse de récurrence,  $G'$  contient un candidat et donc  $G$  en contient aussi.  $\square$

Cette preuve a une contrepartie algorithmique intéressante puisqu'à partir d'elle on peut construire un algorithme efficace produisant un candidat induit à partir d'un pseudo-candidat. Comme conséquence de ce lemme et de la section précédente, nous avons :

**Corollaire 3.3** *Tout pseudo-candidat contient une obstruction.  $\square$*

**Corollaire 3.4** *Un graphe parfait planaire est de quasi-parité stricte si et seulement s'il ne contient pas de pseudo-candidats comme sous-graphe induit.  $\square$*

**Lemme 3.23** *Supposons que dans l'examen de l'arbre de décomposition de  $G$  il existe une collection  $L$  de candidats  $M_1, \dots, M_p$  telle que :*

- *Chaque  $M_i$  est un sous-graphe induit de  $H + Y_H$  pour une certaine feuille  $H$ ;*
- *Pour  $i \neq j$ ,  $M_i \cap M_j$  est soit vide, soit une arête jaune;*
- *Chaque arête jaune qui apparaît dans un  $M_i$  apparaît dans au moins deux  $M_i$ .*

*Alors, le graphe  $(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p) - Y$  est un pseudo-candidat induit de  $G$ .*

*Démonstration.* Cette est une conséquence simple de la définition de pseudo-candidats et des Lemmes 3.19–3.22.  $\square$

Ce lemme a pour conséquence que si on trouve une collection de candidats satisfaisant ce lemme, alors  $G$  n'est pas QPS. La réciproque va être vraie comme nous allons le voir.

Le premier problème est, pour une feuille  $H$  de  $G$ , de déterminer si  $H + Y_H$  contient un candidat ou pas. Le cas où  $H$  appartient à  $\mathcal{C}$  peut être éliminé, comme on le démontre dans le prochain lemme. Le cas où  $H$  appartient à  $\mathcal{S}$  est facilement maîtrisé par vérification exhaustive puisque  $\mathcal{S}$  est une classe finie. Le cas où  $H$  appartient à  $\mathcal{L}$  exigera un examen plus détaillé.

**Lemme 3.24** *Si  $H$  appartient à la classe  $\mathcal{C}$ , alors  $H + Y_H$  ne contient pas d'obstructions.*

*Démonstration.* On rappelle que tout graphe  $H$  de la classe  $\mathcal{C}$  contient un ensemble stable  $S$  tel que  $H - S$  est biparti (une partie est appelée droite et l'autre gauche) et que, pour tout sommet  $s$  de  $S$ ,  $N(s)$  est un  $C_4$  de  $H - S$ . En plus, chaque élément de  $\mathcal{C}$  possède, parmi d'autres, une orientation transitive qui est l'extension de l'orientation du biparti  $H - S$  de la partie droite vers la partie gauche ([25]). On affirme que:

$H + Y_H$  possède une orientation transitive.

Pour la preuve, voyons comment l'orientation de  $H$  peut être étendue en une orientation transitive de  $H + Y_H$ . Soit  $\{x, y\}$  une arête jaune de  $H$ . Par définition des articulations allant des Types II à IV, on sait qu'il existe une chaîne induite  $xuvy$  dont les sommets intérieurs sont artificiels.

Pour le Type II ou III, le voisinage de chacun des sommets  $u, v$  est un ensemble stable. Par suite  $x$  et  $y$  sont dans  $H - S$ . Il suffit alors d'orienter l'arête  $xy$  de la partie droite vers la partie gauche pour obtenir l'orientation de  $H + Y_H$  désirée.

Pour le Type IV,  $x, y$  doivent faire partie d'un  $C_4$   $xx'yy'$  tel que  $x'$  et  $y'$  tous les deux sont voisins de  $u$  et  $v$ . Donc  $S$  contient un et un seul sommet dans  $\{u, v\}$ , sinon  $\{u, v, x'\}$  pourrait former un triangle dans  $H - S$ . Alors, en supposant que  $u \in S$ , on conclut que  $\{x, x', v, y'\} \subset H - S$ . En plus,  $y$  doit aussi être dans  $S$ , sinon  $\{y, v, y'\}$  pourrait former un triangle dans  $H - S$ . Supposons que  $x$  soit dans la partie gauche de  $H - S$ . Alors, l'arête  $xy$  sera orientée de  $x$  vers  $y$ . La transitivité est respectée puisque les seules chaînes de longueur deux introduites sont  $xyx'$  et  $xyy'$  et les arêtes  $xx'$  et  $xy'$  sont déjà orientées correctement. En définitive  $H + Y_H$  est de comparabilité, donc QPS (voir [37]).  $\square$

Il reste à analyser les deux classes terminales restantes.

Si  $H$  appartient à  $\mathcal{S}$ , alors trouver une obstruction dans  $H + Y_H$  est un problème mineur. En effet une telle obstruction ne peut exister que si  $H$  est une subdivision de  $S_1$  et dans ce cas, l'obstruction est un  $\bar{C}_6$ .

Si maintenant  $H$  appartient à  $\mathcal{L}$ , alors  $H$  ne contient pas de sommets artificiels introduits par des articulations de Type III ou IV, sinon une des conditions sur les voisinages de la classe  $\mathcal{L}$  serait violée. Donc, les sommets artificiels de  $H$  viennent d'articulations de Type II. Si l'articulation  $\{x, y\}$  de Type II a ajouté deux sommets artificiels  $u, v$  dans une chaîne induite  $xuvy$ , alors la paire artificielle  $\{u, v\}$  sera associée à l'arête jaune  $xy$  de  $H$ . Or, ces sommets  $x$  et  $y$  sont clairement de degré trois dans  $H$ . Donc,  $H + Y_H - A$ , où  $A$  est l'ensemble des sommets artificiels de  $H$ , est aussi un line-graphe d'un graphe biparti. Il est clair que  $H + Y_H$  contient une obstruction si et seulement si  $H + Y_H - A$  en contient une aussi.

Soit  $L$  la liste de tous les graphes de la forme  $H + Y_H - A$  où  $H$  est une feuille de l'arbre appartenant à  $\mathcal{L}$ , à laquelle on ajoute les obstructions issues des feuilles appartenant à  $\mathcal{S}$ .

Soit  $H'$  un élément de  $L$ . Si  $H'$  contient un sommet  $z$  de degré au plus deux, il est clair que  $z$  ne peut pas faire partie d'une obstruction contenue dans  $H'$ . Donc  $H'$  contient une obstruction si et seulement si  $H' - z$  en contient une. Par suite on remplacera  $H'$

par  $H' - z$  dans  $L$  et on recommencera tant qu'il existe des sommets de degré au plus deux. Si  $H'$  est devenu vide, il est éliminé de  $L$ . Ce procédé est appelé la *réduction des sommets de petit degré* de  $L$ .

Tout graphe de  $L$ , si  $L$  n'est pas vide, est un line-graphe d'un graphe biparti et c'est un candidat puisqu'il satisfait toutes les conditions requises.

Si une arête jaune apparaît dans au moins deux graphes de  $L$ , elle sera dite *mariable*, sinon elle sera dite *célibataire*. Dans le cas d'un graphe issu d'une subdivision d'une arête centrale de  $S_1$  dont les extrémités constituent une arête jaune, cette arête jaune bien que n'apparaissant que dans un seul graphe de  $L$ , est exceptionnellement considérée comme mariable, parce que ses sommets peuvent encore être remplacés par deux sommets convenables de cette subdivision.

Si toutes les arêtes sont mariables, le Lemme 3.23 affirme l'existence d'une obstruction dans  $G$ . D'autre part, si  $e$  est une arête célibataire d'un graphe  $H'$  dans  $L$ , alors, par les lemmes précédents, il n'est pas possible de coller  $H'$  en utilisant  $e$  avec un autre graphe pour trouver une obstruction et on pourra remplacer  $H'$  par  $H' - e$  dans  $\mathcal{L}$ . Ce procédé systématiquement appliqué sur tous les graphes de  $L$  est appelé *réduction des arêtes célibataires*.

En appliquant les deux réductions précédentes (sommets et arêtes), tant qu'il en existe, on aboutit à une liste finale  $L$ . Si  $L$  n'est pas vide, alors les hypothèses du Lemme 3.23 sont satisfaites et  $G$  n'est pas QPS. Si  $L$  est vide, alors  $G$  n'a aucune obstruction et donc est QPS.

Les deux types de réduction peuvent être effectués en temps  $O(n)$  avec des structures de données adéquates. Finalement la complexité de cet algorithme est la même que celle de l'algorithme de Hsu, c'est-à-dire,  $O(n^3)$ .

Nous résumons cette section en énonçant le théorème final :

**Théorème 3.8** *Etant donné un graphe parfait planaire de  $n$  sommets, on peut décider si ce graphe est QPS et dans le cas contraire produire une obstruction, en temps  $O(n^3)$ .  $\square$*



# Chapitre 4

## Graphes Parfaitement Contractibles Planaires

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés à la caractérisation des graphes parfaitement contractibles planaires (PPC). Nous rappelons qu'un graphe  $G$  est dit parfaitement contractible s'il satisfait la propriété suivante : pour chaque sous-graphe induit  $H$  de  $G$ , il existe une séquence de graphes  $H_0 = H, H_1, \dots, H_k$  telle que  $H_{i+1}$  est issu de  $H_i$  par une contraction d'une paire d'amis de  $H_i$  et  $H_k$  est un graphe complet.

Everett et Reed [9] ont énoncé une conjecture sous forme d'une caractérisation des graphes parfaitement contractibles au moyen de sous-graphes exclus bien précis.

**Conjecture 4.1 (Conjecture de Everett et Reed)** *Un graphe est parfaitement contractible (PC) si et seulement s'il ne contient comme sous-graphe induit ni de trou impair, ni de complément de trou impair, ni de méchant impair.*

Nous donnons ([28]) la preuve de cette conjecture dans le cas des graphes planaires. Nous rappelons que les graphes planaires n'ont pas de complément de trou de longueur plus grande que six et que  $\bar{C}_6$  est le plus petit méchant impair. La conjecture de Everett et Reed devient maintenant dans le cas planaire le théorème suivant :

**Théorème 4.1** *Un graphe planaire est parfaitement contractible si et seulement s'il ne contient comme sous-graphe induit ni de trou impair ni de méchant impair.*

Sa preuve est l'objet de la première section. Dans la deuxième section nous donnons un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes parfaitement contractibles parmi les graphes planaires.

## 4.2 Preuve du Théorème 4.1

Dans toute la démonstration qui va suivre, on supposera que les graphes planaires sont donnés avec une représentation plane.

La condition nécessaire a été démontrée dans le Lemme 2.1. Nous nous consacrons, à partir d'ici, à la démonstration de la condition suffisante. Nous commencerons par quelques remarques et définitions.

Nous utilisons à plusieurs reprises le fait suivant :

**Remarque 1:** *Soit  $G$  un graphe planaire sans trou impair et  $C$  un cycle quelconque de  $G$  tel que toutes les cordes de  $C$  sont intérieures à  $C$  et ont une extrémité dans  $P_1$  et l'autre dans  $P_2$  où  $P_1$  et  $P_2$  sont deux chemins disjoints de  $C$ . Alors,  $C$  est pair si et seulement si le sous-graphe engendré par les sommets de  $C$  contient un nombre pair de triangles (sinon un trou impair dans  $G$  pourrait être trouvé).*

Un *pseudo-méchant* est un graphe  $M$  obtenu à partir d'un méchant en ajoutant des arêtes joignant des sommets de chaînes subdivisées distinctes et sans créer d'autres triangles que ceux du méchant initial.

Désormais nous décrirons un méchant (ou tout pseudo-méchant qu'il peut générer) par trois chaînes disjointes de même parité  $X = x_1 \cdots x_p$ ,  $Y = y_1 \cdots y_q$  et  $Z = z_1 \cdots z_r$  de façon que  $\{x_1, y_1, z_1\}$  et  $\{x_p, y_q, z_r\}$  soient ses deux seuls triangles. En plus, nous simplifierons la notation des segments de chaînes, en notant par exemple plus simplement  $X[k, l]$  le segment  $X[x_k, x_l]$ .

Les lemmes suivants énonçant des conséquences de l'existence de pseudo-méchants et méchants pairs dans les graphes planaires seront utiles plus tard.

**Lemme 4.1** *Dans un graphe planaire, tout sous-graphe induit pseudo-méchant est un méchant ou alors contient un trou impair.*

*Démonstration.* Soit  $M$  un pseudo-méchant comme décrit en haut. S'il n'a pas d'arêtes partant d'un sommet d'une des chaînes  $X, Y, Z$  vers une autre chaîne sauf les arêtes des

triangles, alors  $M$  est un méchant, comme le dit le lemme. Supposons donc qu'il existe une telle arête et choisissons en une, disons  $x_i y_j$ , qui minimise  $i + j$ . Nous avons  $i > 1$  ou  $j > 1$  et par symétrie nous supposons  $j > 1$ . Si  $X[1, i]$  et  $Y[1, j]$  sont de parités différentes, alors  $X[1, i] + x_i y_j + Y[j, 1] + y_1 x_1$  est un trou impair. Si ces segments ont la même parité, alors  $x_1 z_1 + X[1, i] + x_i y_j$  et  $z_1 y_1 + Y[1, j]$  sont des chaînes induites de parités différentes et par suite le cycle  $C = z_1 x_1 + X[1, i] + x_i y_j + Y[j, p] + y_p z_r + Z$  est un cycle impair. Or,  $C$  ne contient pas de triangle puisque  $y_1$  et  $x_p$  n'appartiennent pas à  $C$ , donc  $C$  contient nécessairement un trou impair, contradiction.  $\square$

**Lemme 4.2** *Si un graphe  $G$  parfait planaire et sans méchant impair contient un méchant pair comme sous-graphe induit dont un des trous est une face  $F$ , alors  $F$  contient une paire d'amis qui est en même temps articulation de  $G$ .*

*Démonstration.* En décrivant  $M$  comme plus haut, nous pouvons supposer que  $F = X + x_1 z_1 + Z + z_r x_p$  et choisir une représentation planaire de  $G$  ayant  $F$  comme face infinie. Nous nous proposons de démontrer que :

$$\{x_1, x_p\} \text{ est une articulation de } G \text{ qui sépare } X - \{x_1, x_p\} \text{ de } Y \cup Z. \quad (4.2.1)$$

En supposant qu'il n'en est pas ainsi, soit  $P$  la plus courte chaîne entre  $X - \{x_1, x_p\}$  et  $Y \cup Z$ . Par planarité,  $P$  relie un sommet de  $X - \{x_1, x_p\}$  à un sommet de  $Y$  et peut être notée  $P = v_1 \cdots v_t$  avec  $v_1 = x_i$  ( $2 \leq i \leq p-1$ ),  $v_t = y_j$  ( $1 \leq j \leq q$ ) et  $t \geq 2$ . Un deuxième critère pour le choix de  $P$  est de rendre  $i$  et  $j$  les plus petits possible. Par conséquent,  $v_{t-1}$  ne voit aucun sommet dans  $Y[1, j-1]$  et  $v_2$  ne voit aucun sommet dans  $X[2, i-1]$ . On observe que :

$$\text{Soit } v_{t-1} \text{ ne voit aucun sommet de } Y[j+2, q] \text{ soit } v_{t-1} \text{ voit un nombre pair d'arêtes de } Y, \quad (4.2.2)$$

sinon, si  $l$  est le plus grand entier tel que  $v_{t-1}$  voit  $y_l$ , un des cycles  $v_{t-1} y_l + Y[l, q] + y_q z_r + Z + z_1 y_1 + Y[1, j] + y_j v_{t-1}$  ou  $v_{t-1} y_j + Y[j, l] + y_l v_{t-1}$  contiendrait un trou impair.

Nous avons deux cas à examiner :

*Cas 1.*  $j \neq 1$ .

Soit  $P_1$  la plus courte chaîne reliant  $z_1$  à  $v_t$  contenue dans  $z_1 x_1 + X[1, i] + P$ , et  $P_2 = z_1 y_1 + Y[1, j]$ . Donc  $P_1 + P_2$  est un cycle contenant exactement un triangle et, par suite, est impair et  $P_1$  et  $P_2$  sont de parités différentes. Par conséquent,  $C' = P_1 + Y[j, q] + y_q z_r + Z$

est un cycle impair. Les seules cordes possibles de  $C'$  relient  $v_{t-1}$  à des sommets de  $Y[j, q]$ . Nous rappelons qu'il doit exister un nombre impair de triangles dans  $C'$ . Par (4.2.2), ceci signifie que  $v_{t-1}$  voit  $y_{j+1}$  et aucun autre sommet de  $Y[j+2, q]$ . Si  $j$  est pair, alors nous avons un méchant impair formé par les triangles  $\{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $\{v_{t-1}, y_j, y_{j+1}\}$  et les chaînes  $P_1[v_1, v_{t-1}]$ ,  $Y[1, j]$ ,  $Z + z_r y_q + Y[q, j+1]$ , une contradiction. Si  $j$  est impair, soit  $P_3$  la plus courte chaîne reliant  $x_p$  à  $v_{t-1}$  contenue dans  $X[p, i] + P$ . Cette chaîne est impaire puisque  $P_3 + v_{t-1} y_{j+1} + Y[j+1, q] + y_q x_p$  est un trou pair. Par suite, nous avons un méchant impair formé par les triangles  $\{v_{t-1}, y_j, y_{j+1}\}$ ,  $\{x_p, z_r, y_q\}$ , et les chaînes  $P_3$ ,  $Y[j, 1] + y_1 z_1 + Z$ ,  $Y[j+1, q]$ , une contradiction.

*Cas 2.*  $j = 1$ .

Soit  $P_4$  la plus courte chaîne reliant  $x_p$  à  $v_t$  contenue dans  $X[p, i] + P$ . Si  $v_{t-1}$  voit un nombre pair d'arêtes sur  $Y$ , alors les sommets de  $Y \cup P_4$  forment un trou pair, et donc  $P_4 + y_1 z_1 + Z + z_r x_p$  est un trou impair, une contradiction. Par conséquent et par (4.2.2),  $v_{t-1}$  voit  $y_2$  et aucun autre sommet de  $Y[3, q]$ . Maintenant, nous avons un méchant impair formé par les triangles  $\{v_{t-1}, y_1, y_2\}$ ,  $\{x_p, z_r, y_q\}$  et les chaînes  $P_4[v_{t-1}, x_p]$ ,  $y_1 z_1 + Z$ ,  $Y[2, q]$ , une contradiction.

Cette dernière contradiction achève la preuve de (4.2.1). Finalement, puisque  $x_1, x_p$  sont reliés par une chaîne de longueur paire ( $X$ ) dans une des composantes, alors ils forment une paire d'amis.  $\square$

Dans ce qui suit,  $G$  désigne un graphe planaire connexe sans trou impair et sans méchant impair. Nous allons démontrer que  $G$  est parfaitement contractible par récurrence sur le nombre de sommets. Les cas de six sommets ou moins est trivial. Examinons quelques types d'articulations de  $G$ .

**Lemme 4.3** *Si  $G$  contient une clique d'articulation  $C$ , alors  $G$  admet une séquence de contractions de paires d'amis qui conduit à une clique et est donc parfaitement contractible.*

*Démonstration.* Soient  $B_1, \dots, B_k$  les composantes connexes de  $G - C$ . Il est clair que chaque pièce  $G_i = G[C \cup B_i]$  ne contient ni trou impair ni méchant impair. Par suite, par hypothèse de récurrence, chaque pièce  $G_i$  admet une séquence de contractions de paires d'amis qui conduisent à une clique  $Q_i$ . En composant toutes ces séquences de contractions ( $i$  variant de 1 à  $k$ ), on obtient un graphe qui a une clique d'articulation dont chaque pièce est une clique. Ce graphe est triangulé et donc parfaitement contractible [2].  $\square$

**Lemme 4.4** *Si  $\{a, b\}$  est une paire d'amis en même temps qu'une articulation de  $G$ , alors  $G$  est parfaitement contractible.*

*Démonstration.* Il est clair que  $G/ab$  est planaire et ne contient pas de trou impair. Il suffit de montrer que la contraction de  $a$  et  $b$  n'introduit pas de méchant impair car par récurrence,  $G/ab$  (plus petit que  $G$ ) est parfaitement contractible ainsi que  $G$ . Appelons  $c$  le sommet contracté dans  $G/ab$ . On observe que  $c$  est un sommet d'articulation de  $G/ab$  et que si  $G/ab$  contient un méchant impair  $M$ , alors  $M$  contient nécessairement  $c$ . Supposons l'existence d'un tel  $M$ . Puisque  $M$  est 2-connexe, il est contenu dans une pièce  $G_1/ab$  de  $G/ab - \{c\}$ . Considérons une autre pièce  $G_2/ab$  ; il doit exister dans  $G_2$  (une pièce de  $G - \{a, b\}$ ) une chaîne induite paire  $P$  entre  $a$  et  $b$ . On observe que dans  $G$  les sommets  $a$  et  $b$  ne voient aucun sommet de  $M - (N_M(c) \cup \{c\})$ , et que aucun sommet intérieur de  $P$  voit un sommet quelconque de  $M - c$ .

Supposons que  $c$  soit un sommet de degré deux dans  $M$ , avec  $N_M(c) = \{x, y\}$ . Si  $a$  ou  $b$  voit les deux sommets  $x, y$ , alors le remplacement de  $c$  dans  $M$  par ce sommet ( $a$  ou  $b$ ) produit un méchant impair comme sous-graphe de  $G$ . Si  $a$  et  $b$  voient exactement un sommet de  $\{x, y\}$ , alors le remplacement dans  $M$  de  $c$  par  $P$  produit un méchant impair dans  $G$ .

Supposons donc que  $c$  soit un sommet de degré trois dans  $M$  avec  $N_M(c) = \{x, y, z\}$  et que  $xy$  soit une arête. Si  $a$  ou  $b$ , disons  $a$ , voit  $x, y$  et  $z$  dans  $G$ , alors le remplacement de  $c$  dans  $M$  par  $a$  produit un méchant impair dans  $G$ . Si  $a$  ou  $b$ , disons  $a$ , voit  $x, y$  et ne voit pas  $z$  (ou voit  $y, z$  et ne voit pas  $x$ ), alors le remplacement dans  $M$  de  $c$  par  $a$  produit un sous-graphe induit de  $G$  isomorphe à  $M - yc$  (ou  $M - xc$ ) lequel, on peut facilement le voir, contient un trou impair. Il nous reste à examiner le cas où un de  $\{a, b\}$  voit  $x, y$  et ne voit pas  $z$  et l'autre voit  $z$  et ne voit pas  $x, y$ . Alors le remplacement dans  $M$  de  $c$  par  $P$  produit un méchant impair dans  $G$ . Dans tous les cas on arrive à une contradiction.  $\square$

**Lemme 4.5** *Si  $G$  possède un  $P_3$  d'articulation dont les extrémités forment une paire d'amis, alors  $G$  est parfaitement contractible.*

*Démonstration.* Soit  $C = abc$  un  $P_3$  d'articulation de  $G$  dont les extrémités forment une paire d'amis. Il est clair que  $G/ac$  est planaire, et si  $G/ac$  ne contient pas de méchant impair comme sous-graphe induit, alors, puisqu'il est plus petit que  $G$ , par l'hypothèse de récurrence, il est parfaitement contractible et  $G$  l'est donc aussi. Supposons que  $G/ac$

contienne un méchant impair  $M$ . On observe que  $G/ac$  possède une clique d'articulation  $Q$  formé par les sommets  $b$  et  $ac$ . Puisqu'une clique d'articulation ne peut pas séparer un méchant,  $M$  doit se trouver dans une des pièces  $G_1/ac$  de  $G/ac - Q$ . Il est clair que  $M$  contient  $ac$ . Soit  $P$  une chaîne induite entre  $a$  et  $c$  dans  $G - b$  contenue dans une pièce  $G_2$  de  $G - C$ , telle que  $G_2/ac \neq G_1/ac$ . En substituant le sommet  $ac$  dans  $M$  par la chaîne  $P$ , on obtient un méchant impair de  $G$ , une contradiction.  $\square$

On remarque que si  $G$  possède un  $P_3 = abc$  d'articulation, alors toutes les chaînes induites entre  $a$  et  $c$  dans  $G - b$  ont la même parité, sinon un trou impair pourrait être trouvé dans  $G$ . Par suite, pour déterminer si  $a$  et  $c$  forment une paire d'amis, il suffit de vérifier la parité d'une seule chaîne induite entre ces deux sommets dans  $G - b$ . Ceci implique le lemme suivant :

**Lemme 4.6** *Si  $abc$  est un  $P_3$  d'articulation de  $G$ , et il existe une chaîne paire sans cordes reliant  $a$  à  $c$  dans  $G - b$ , alors  $\{a, c\}$  est une paire d'amis.  $\square$*

A partir d'ici, on peut donc supposer que :

- (h1)  $G$  n'a pas de clique d'articulation ;
- (h2)  $G$  n'a pas de paire d'amis comme articulation ;
- (h3)  $G$  n'a pas de  $P_3$  d'articulation dont les extrémités forment une paire d'amis.

En particulier,  $G$  est 2-connexe. Toute face quelconque  $F$  de  $G$  est donc un cycle, mais ce cycle est sans corde car une corde  $xy$  serait une articulation de  $G$ . Donc, *chaque face de  $G$  est un trou pair ou un triangle.*

Nous allons appeler *faciale* toute paire de sommets non adjacents de  $G$  qui appartiennent à une même face non triangulaire. Il est clair que la contraction d'une paire faciale conserve la planarité du graphe (on observe que les paires d'amis des Lemmes 4.4 et 4.5 sont des paires faciales). Le lemme suivant démontre que la contraction de certaines paires d'amis faciales produisent un graphe sans méchant impair.

**Lemme 4.7** *La contraction d'une paire d'amis faciale de  $G$  à distance deux dans la face produit un graphe sans trou impair et sans méchant impair.*

*Démonstration.* Supposons que  $a, b$  est une paire d'amis faciale avec un voisin commun  $x$ , telle que  $G/ab$  contient un méchant impair  $M$ , décrit comme plus haut. Nous savons que  $G/ab$  est planaire et ne contient pas de trou impair. Nous pouvons supposer que  $ab = x_k$  et que parmi les sommets de  $G \cap M$  dans  $G$ , le sommet  $a$  voit  $x_{k-1}$  (ou  $y_1$  et  $z_1$  si  $k = 1$ ) et peut aussi voir  $x_{k+1}$ , et  $b$  voit  $x_{k+1}$  (ou  $y_q$  et  $z_r$  si  $k = p$ ) et peut aussi voir  $x_{k-1}$ . Or, si  $a$  voit  $x_{k+1}$  (ou si  $b$  voit  $x_{k-1}$ ), alors le remplacement du sommet  $ab$  par  $a$  (ou  $b$ ) dans  $M$  produit un méchant impair dans  $G$ . Par suite, on peut supposer que  $a$  ne voit pas  $x_{k+1}$  et  $b$  ne voit pas  $x_{k-1}$ .

Puisque  $a$  et  $b$  sont dans la même face, il n'existe pas d'arêtes ou bien de  $x$  vers  $Y$  ou bien de  $x$  vers  $Z$ ; par symétrie nous pouvons supposer qu'il n'existe pas d'arêtes de  $x$  vers  $Z$ . Dans  $G$ , nous avons une chaîne  $x_1 \cdots x_{k-1} a b x_{k+1} \cdots x_p$  et cette chaîne contient une chaîne sans cordes (minimale)  $U$  reliant  $x_1$  à  $x_p$ . La chaîne  $U$  doit contenir  $x$ , puisque il n'y a pas d'arêtes partant de  $x_1 \cdots x_{k-1} a$  vers  $b x_{k+1} \cdots x_p$ . La chaîne  $U$  doit être impaire, sinon  $U + x_1 z_1 + Z + z_r x_p$  serait un trou impair et pas un triangle. Puisque  $U$  est impaire,  $x$  ne peut pas être voisin à la fois de  $x_1$  et  $x_p$ ; par symétrie nous pouvons supposer que  $x$  n'est pas voisin de  $x_1$ .

On observe que  $C = U + x_p y_q + Y + y_1 x_1$  est un cycle pair et les seules cordes possibles de  $C$  sont en partant de  $x$  vers  $Y + x_p$ . Donc,  $x$  voit un nombre pair (peut-être zéro) d'arêtes de  $Y + x_p$  sinon un trou impair pourrait être trouvé. Si  $x$  ne voit aucune arête de  $Y + x_p$ , alors nous avons un pseudo-méchant dans  $G$  formé par les sommets de  $U \cup Y \cup Z$ , ce que implique par le Lemme 4.1 un méchant impair ou un trou impair dans  $G$ , contradiction. Supposons donc que  $x$  voit au moins deux arêtes de  $Y + x_p$ , et par suite, au moins une de  $Y$ . Soit  $l$  le plus petit entier tel que  $y_l x$  soit une arête avec  $1 < l \leq q$ . Le cycle  $Y[l, q] + y_q x_p + U[x_p, x] + x y_l$  est pair car il contient un nombre pair de triangles (à savoir, tous les triangles formés par  $x$  et les arêtes de  $Y + x_p$  vues par  $x$ ). Par conséquent, les chaînes induites  $y_l x + U[x, x_p] + x_p z_r$  et  $Y[l, q] + y_q z_r$  sont de différentes parités. Puisque  $Y + y_q z_r + Z + z_1 y_1$  est un trou pair, alors  $Y[1, l] + y_l x + U[x, x_p] + x_p z_r + Z + z_1 y_1$  est un trou impair, contradiction.  $\square$

Notre objectif maintenant c'est de trouver des paires d'amis faciales satisfaisant les hypothèses du lemme précédent.

**Observation 4.1** *Si le voisinage d'un sommet  $x$  de  $G$  forme un ensemble stable  $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ , numéroté en suivant un sens de rotation du plan, alors toute paire de sommets de son voisinage forme une paire d'amis et toutes les paires  $\{x_i, x_{i+1 \text{ mod } k}\}$  sont faciales.*

*Démonstration.* Il est clair que si  $x$  a deux voisins  $y$  et  $z$  avec une chaîne induite impaire  $P$  entre eux, alors  $x + P$  contient un trou impair, contradiction. La suite de la preuve est évidente par planarité.  $\square$

**Observation 4.2** *Si  $G$  contient un diamant dont les pointes forment une paire faciale, alors elles forment aussi une paire d'amis.*

*Démonstration.* Supposons que le diamant  $\{a, b, c, d\}$  a les pointes  $a$  et  $b$  reliées par une chaîne induite impaire  $P$ . Alors,  $P + c$  et  $P + d$  sont des cycles impairs. La planarité et le fait que  $a$  et  $b$  sont dans une face implique qu'un de ces deux cycles n'a pas de cordes (trou impair), contradiction.  $\square$

**Lemme 4.8** *Si  $G$  contient une des paires d'amis décrites dans les Observations 4.1 et 4.2, alors  $G$  est parfaitement contractible.*

*Démonstration.* Les paires d'amis décrites dans ces observations satisfont évidemment les hypothèses du Lemme 4.7. Par suite, en contractant une paire d'un de ces types, on obtient un graphe plus petit que  $G$ , planaire et sans méchant impair et donc parfaitement contractible. Ceci implique que  $G$  l'est aussi.  $\square$

On peut désormais supposer que les paires décrites dans les observations précédentes n'existent pas.

On rajoute donc les nouvelles hypothèses sur  $G$ :

(h4)  $G$  n'a pas de diamant dont les pointes sont sur une même face ;

(h5)  $G$  n'a pas de sommet dont le voisinage est stable.

L'hypothèse (h2) nous permet de rajouter une hypothèse à  $G$ , qui n'est qu'une conséquence du Lemme 4.2 :

(h6)  $G$  n'a pas de méchants pairs dont un des trous est une face.

Le lemme qui suit nous garantit l'existence d'une paire convenable dans une face non triangulaire, s'il en existe, dans  $G$ .

**Lemme 4.9** *Toute face non triangulaire de  $G$  contient une paire d'amis faciale à distance deux dans la face.*

*Démonstration.* Soit  $F$  une face non triangulaire quelconque de  $G$ . Nous rappelons que  $F$  est un trou pair. Soit  $z$  un sommet quelconque de  $F$  et  $x, y$  les voisins de  $z$  dans  $F$ .

On choisit une représentation planaire de  $G$  dont la face infinie est  $F$ . Pour chaque paire de sommets  $u, v$  de  $F - \{z\}$ ,  $F[u, v]$  dénotera le segment de la chaîne  $F - \{z\}$  entre  $u$  et  $v$ . D'autre part, nous ordonnons les sommets de  $F - \{z\}$  en parcourant  $F$  de manière que le premier sommet soit  $x$  et le dernier  $y$ .

On va démontrer par l'absurde que  $x$  et  $y$  sont une paire d'amis de  $G$ . Supposons qu'il existe une chaîne induite impaire  $Q$  entre  $x$  et  $y$ . Nous choisissons  $Q$  de façon qu'elle ait le plus grand nombre possible de sommets communs avec  $F$ . L'ordre sur les sommets de  $Q$  sera associé à leur distance, sur  $Q$ , par rapport à  $x$ . Soit  $u$  le dernier sommet de  $Q$  tel que  $Q[x, u] = F[x, u]$  et  $v$  le premier sommet de  $Q \cap F$  après  $u$ . Il existe deux chaînes,  $F' = F[u, v] = u_1 \cdots u_p$  et  $Q' = Q[u, v] = w_1 \cdots w_q$ , telles que  $u = u_1 = w_1$ ,  $v = u_p = w_q$ ,  $p, q \geq 2$ , et telles que  $Q'$  et  $F'$  ne s'intersectent que dans les extrémités de  $Q'$ . On observe que si  $z$  voit  $v$ , puisque  $F$  n'a pas de cordes, alors  $v = y$ .

Les chaînes  $Q'$  et  $F'$  sont de parités différentes, sinon en remplaçant  $Q'$  par  $F'$  dans  $Q$ , on obtiendrait une autre chaîne impaire entre  $x$  et  $y$  ayant une plus grande intersection avec  $F$  que  $Q$ . Par le choix de  $Q$ , nous que  $Q = F[x, u] + Q' + F[v, y]$ . Observons que  $C = Q' + F'$  est un cycle impair et pas un triangle (grâce à  $(h_4)$ ) et enfin contient un nombre impair de triangles (Cf. Remarque 1). On remarque que  $Q + yz + zx$  est un cycle impair et pas un triangle, donc  $z$  voit un nombre impair d'arêtes de  $Q$  (encore la Remarque 1) Par conséquent, il est immédiat que :

$$z \text{ voit un nombre impair d'arêtes de } Q'. \quad (4.2.3)$$

En examinant les cordes possibles entre  $Q'$  et  $F'$ , on observe les faits suivants :

$$\begin{aligned} &\text{Chaque } w \in Q' \text{ voit au maximum deux sommets de } F' \text{ et, s'il en voit} \\ &\text{deux, ils doivent être consécutifs.} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Pour prouver ceci, on suppose que  $w$  voit trois sommets  $u_i, u_j, u_k$  de  $F'$ . Deux parmi eux, disons  $i$  et  $j$ , ont la même parité. Alors  $u_i w u_j$  est un  $P_3$  d'articulation et par le Lemme 4.6,  $\{u_i, u_j\}$  est une paire d'amis. Par suite,  $u_i w u_j$  est un  $P_3$  d'articulation comme dans le Lemme 4.5, violant ainsi  $(h_3)$ , une contradiction. Par suite,  $w$  ne voit que deux sommets  $u_i$  et  $u_j$  qui doivent être de différentes parités et donc  $j - i = 1$ , sinon  $\{w\} \cup F'[u_i, u_j]$  serait un trou impair. Ceci prouve (4.2.4).

Chaque  $f \in F'$  voit au maximum deux sommets de  $Q'$ , et s'il en voit deux, ils doivent être consécutifs. (4.2.5)

Nous prouvons ce fait par l'absurde. Supposons que  $f$  voit deux sommets non consécutifs de  $Q'$ . Soit  $i$  ( $j$ ) le plus petit (grand) entier tel que  $fw_i$  ( $fw_j$ ) est une arête. Nous pouvons définir deux cycles  $C_1 = F[u_1, f] + fw_i + Q[w_i, w_1]$  et  $C_2 = F[u_p, f] + fw_j + Q[w_j, w_q]$ . On observe qu'il n'existe pas de sommet  $w$  de  $Q[w_i, w_j]$  qui est voisin à la fois de  $f$  et  $z$ , sinon soit  $zwf$  soit  $zwf'$  (avec  $f'$  voisin de  $f$  dans  $F$ ) serait un  $P_3$  d'articulation contredisant ((h3)). En conséquence, la chaîne  $Q[w_i, w_j]$  peut être partitionnée en  $f$ -segments et  $z$ -segments définis de la façon suivante. En partant de  $w_i$ , dans l'ordre croissant des indices sur  $Q'$ , un  $f$ -segment (resp.  $z$ -segment) commence avec un sommet vu par  $f$  (resp.  $z$ ) et finit avec un sommet qui précède le prochain sommet vu par  $z$  (resp.  $f$ ). Nous avons :

Dans chaque  $f$ -segment,  $f$  voit un nombre pair d'arêtes. (4.2.6)

Supposons que ceci soit faux et soit  $U$  un  $f$ -segment le contredisant. Soit  $k$  (resp.  $l$ ) le plus petit (resp. grand) entier tel que  $w_k$  ( $w_l$ ) appartient à  $U$  et que  $fw_k$  ( $fw_l$ ) est une arête. Soit  $t$  le sommet le plus proche de  $w_k$  dans  $Q[x, w_k]$  qui est vu par  $z$ . Soit  $r$  le plus grand entier tel que  $w_r$  appartient à  $U$  (donc  $z$  voit  $w_{r+1}$ ). Par suite  $C_3 = zt + Q[t, w_{r+1}] + zw_{r+1}$  est un trou pair, puisqu'il n'est pas et ne contient pas un triangle. Si  $l \neq k + 1$ , alors  $Q[w_k, w_l] + fw_k + fw_l$  est un cycle impair et pas un triangle, puisque  $f$  voit un nombre impair d'arêtes de  $Q[w_k, w_l]$ . Par suite,  $(C_3 - Q[w_k, w_l]) + w_kf + fw_l$  est un trou impair, contradiction. Si  $l = k + 1$ , alors  $(C_3 - w_lw_{l+1}) + w_lf + fw_{l+1}$  est un cycle impair avec exactement un triangle passant par  $f$ . Par conséquent, il existe deux chaînes induites entre  $z$  et  $f$  sur ce cycle et une entre elles forme un cycle impair avec  $F[z, w_1] + F[u_1, f]$  et un autre cycle impair avec  $F[z, u_p] + F[u_p, f]$ . Par planarité, seulement un des deux cycles impairs peut avoir des cordes, alors un entre eux est un trou impair, contradiction.

Par suite,  $f$  voit un nombre pair d'arêtes sur  $Q'$  et donc un des  $C_1$  ou  $C_2$  contient un nombre pair de triangles, disons  $C_1$ . En effet, si tous les deux ont un nombre impair de triangles, alors puisque  $f$  voit un nombre pair d'arêtes de  $Q'$ , le cycle impair  $Q' + F'$  aurait un nombre pair de triangles, contradiction. Par conséquent,  $(C_1 - fw_i) + fw_j + Q[w_j, w_i]$  est un cycle pair, puisqu'il contient un nombre pair de triangles. Ceci implique que les chaînes  $P_1 = Q[w_1, w_j]$  et  $P_2 = F[u_1, f] + fw_j$  ont la même parité. En remplaçant donc  $P_1$  par  $P_2$  dans  $Q$ , nous obtenons une autre chaîne induite impaire entre  $x$  et  $y$  avec une intersection plus grande avec  $F$  que  $Q$ , contredisant ainsi le choix optimal de  $Q$ . Cela prouve (4.2.5).

Nous allons examiner maintenant l'existence possible de triangles de  $C$  autres que  $\{v, u_{p-1}, w_{q-1}\}$  et  $\{u, v_2, w_2\}$ . Nous prouverons que :

$C$  contient un seul triangle et il est soit  $\{v, u_{p-1}, w_{q-1}\}$  soit  $\{u, v_2, w_2\}$ . (4.2.7)

Nous démontrons ceci par l'absurde. Supposons qu'un tel triangle  $T$  existe et soit  $w_i$  et  $u_j$  les sommets de  $Q'$  et  $F'$  respectivement, tels que  $w_i u_j$  est une arête de  $T$  (on choisira  $i$  et  $j$  les plus petits possibles). Par planarité,  $i$  et  $j$  sont bien définis et ou bien  $u_j w_{i+1}$  ou bien  $u_{j+1} w_i$  est une arête, c'est-à-dire, soit  $T = \{w_i, w_{i+1}, u_j\}$  soit  $T = \{w_i, u_j, u_{j+1}\}$ .

*Cas 1.*  $T = \{w_i, w_{i+1}, u_j\}$ .

Par hypothèse et par (4.2.5), nous avons  $j \neq p - 1$ . Considérons les deux cycles  $C_1 = Q[w_1, w_i] + w_i u_j + F[u_1, u_j]$  et  $C_2 = Q[w_{i+1}, w_q] + w_{i+1} u_j + F[u_j, u_p]$ . Tous les deux ont la même parité. En plus,  $C_1 + T$  doit être un cycle impair, sinon les chaînes  $P_1 = Q[w_1, w_{i+1}]$  et  $P_2 = F[u_1, u_j] + u_j w_{i+1}$  auraient la même parité et ceci impliquerait l'existence d'une autre chaîne induite impaire, à savoir  $Q - P_1 + P_2$ , reliant  $x$  à  $y$  avec une plus grande intersection avec  $F$  que  $Q$ , contredisant le choix de  $Q$ . Par suite,  $C_2 + T$  est aussi un cycle impair et  $C_1, C_2$  sont des cycles pairs. Puisque, par (4.2.3),  $z$  voit un nombre impair d'arêtes sur  $Q'$ , nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que  $z$  voit un nombre impair d'arêtes sur  $Q[w_1, w_i]$  et un nombre pair sur  $Q[w_{i+1}, w_q]$ . En plus, les chaînes  $P_3 = Q[w_1, w_i] + w_i u_j$  et  $P_4 = F[u_1, u_j]$  ont la même parité, puisque  $C_1 = P_3 + P_4$  est un trou pair. Par suite,  $F - P_4 + P_3$  est aussi un cycle pair et contient un nombre impair de triangles (les arêtes vues par  $z$  sur  $P_3$ ), il contient donc un trou impair, contradiction.

*Cas 2.*  $T = \{w_i, u_j, u_{j+1}\}$ .

Par hypothèse et par (4.2.4), nous avons  $i \neq 2$ . Considérons deux cycles  $C_1 = Q[w_1, w_i] + w_i u_j + F[u_1, u_j]$  et  $C_2 = Q[w_i, w_q] + w_i u_{j+1} + F[u_{j+1}, u_p]$ . Comme auparavant,  $C_1$  et  $C_2$  ont la même parité et doivent être impairs, sinon les chaînes  $P_1 = Q[w_1, w_i]$  et  $P_2 = F[u_1, u_j] + u_j w_i$  auraient la même parité ( $C_1 = P_1 + P_2$ ) et il existerait une autre chaîne induite impaire, à savoir,  $Q - P_1 + P_2$ , reliant  $x$  à  $y$  avec une plus grande intersection avec  $F$  que  $Q$ , contredisant le choix de  $Q$ . Par suite,  $C_1 + T$  et  $C_2 + T$  sont des cycles pairs. Comme avant, puisque  $z$  voit un nombre impair d'arêtes sur  $Q'$  (par (4.2.3)), nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que  $z$  voit un nombre impair d'arêtes sur  $Q[w_1, w_i]$  et un nombre pair sur  $Q[w_i, w_q]$ . On observe que les chaînes  $P_3 = Q[w_1, w_i] + w_i u_{j+1}$  et  $P_4 = F[u_1, u_{j+1}]$  ont la même parité, puisque  $C_1 + T$  est un

cycle pair. Par suite,  $F - P_4 + P_3$  est aussi un cycle pair pourtant contenant un nombre impair de triangles (formés par les arêtes vues par  $z$  sur  $P_3$ ). En conséquence, ce cycle contient un trou impair, contradiction.

Pour finir la preuve de (4.2.7), on observe que  $C$  est un cycle impair satisfaisant les hypothèses de la Remarque 1 et doit donc contenir un nombre impair de triangles. Par conséquent, soit  $\{w_i, w_{i+1}, u_j\}$  soit  $\{w_i, u_j, u_{j+1}\}$  est un triangle et la preuve de (4.2.7) est achevée.

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que le seul triangle de  $C$  est  $\{v, v_{p-1}, w_{q-1}\}$ .

Nous allons prouver (par l'absurde) que :

Les seuls sommets vus par  $z$  sur  $Q'$  sont  $w_1$  et  $w_2$ . (4.2.8)

Si  $z$  voit d'autres sommets que  $w_1$  et  $w_2$ , soit  $j$  le plus grand entier tel que  $zw_j$  est une arête. Par (4.2.3),  $z$  voit un nombre impair d'arêtes sur  $Q[w_1, w_j]$ . Par suite, les chaînes  $P_1 = zw_j + zx + F[x, u]$  et  $P_2 = Q[u, w_j]$  ont des parités différentes, puisque  $P_1 + P_2$  est un cycle avec un nombre impair de triangles. Nous rappelons que  $C_1 = P_2 + Q[w_j, w_{q-1}] + w_{q-1}u_{p-1} + F[u, u_{p-1}]$  est un cycle pair par (4.2.7), ceci impliquant que  $C_1 - P_2 + P_1$  est un trou impair, contradiction.

Par (4.2.7), le seul triangle de  $C$  est  $\{w_{q-1}, u_{p-1}, v\}$  et le seul triangle contenant  $z$  sur  $Q'$  est  $\{z, x = u, w_2\}$ . Ces deux triangles avec les chaînes  $Q[w_2, w_{q-1}]$ ,  $F[u, u_{p-1}]$  et  $F[v, y] + yz$  forment un méchant dont  $F$  est un des trous ; c'est donc un un méchant pair, contredisant l'hypothèse (h6) sur  $G$ . Donc  $x$  et  $y$  forment effectivement une paire d'amis faciale (à distance deux) de  $G$ . Ceci achève la preuve de ce lemme.  $\square$

**Lemme 4.10** *Si  $G$  a une face non triangulaire, alors  $G$  est parfaitement contractible.*

*Démonstration.* Par le Lemme 4.7, nous pouvons contracter les sommets  $x, y$  trouvés dans le Lemme 4.9, ce qui donne ainsi un graphe planaire plus petit que  $G$  sans trou impair et sans méchant impair, et l'hypothèse de récurrence montre alors que  $G$  est parfaitement contractible.  $\square$

Le lemme suivant règle le cas où toutes les faces de  $G$  sont triangulaires.

**Lemme 4.11** *Si  $G$  a toutes ses faces triangulaires, alors  $G$  est un graphe de comparabilité.*

*Démonstration.* Cette démonstration est semblable à celle de [[25], Théorème 6.2] pourtant plus facile parce que les hypothèses ici sont différentes. Supposons que  $G$  n'est pas une clique, ni un octaèdre (c'est-à-dire le complément de  $3K_2$ ), pour lesquels la conclusion désirée est évidente. Puisque toute face est un triangle et qu'il n'existe pas de clique d'articulation, le voisinage de chaque sommet doit être un trou pair. Soit  $D$  l'ensemble de tous les sommets de degré quatre. Nous établissons quelques propriétés de  $D$  qui nous conduirons au résultat désiré.

**Etape 5** *Chaque triangle intersecte  $D$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'un triangle  $\{x, y, z\}$  n'intersecte pas  $D$ , c'est-à-dire,  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont de degré plus grand ou égal à six. Soit  $X = x_1x_2 \cdots x_{2k}$  la chaîne sans corde formée par  $N(x) - \{y, z\}$  telle que  $z$  voit  $x_1$  et  $y$  voit  $x_{2k}$ . Pareillement, soit  $Y = y_1 \cdots y_{2l}$  la chaîne induite formée par  $N(y) - \{x, z\}$  avec  $y_1 = x_{2k}$  et telle que  $z$  voit  $y_{2l}$  et soit  $Z = z_1 \cdots z_{2m}$  la chaîne induite formée par  $N(z) - \{x, y\}$ , avec  $y_{2l} = z_1$  et  $z_{2m} = x_1$ . On observe que  $X$  et  $Z$  n'ont de commun que  $x_1$ , sinon un autre sommet commun avec  $x$  et  $z$  formerait un triangle d'articulation. Par contre,  $X + Y + Z$  est un cycle impair et doit donc contenir un nombre impair de triangles. Comme  $x_1x + xx_{2k} + Y + Z$  est un cycle pair,  $Y + Z$  doit avoir donc un nombre pair de triangles et de même  $X + Z$  et  $X + Y$ . Par suite,  $X + Y + Z$  doit contenir au moins un triangle avec un sommet dans chaque  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Par planarité, il en existe un seul. Soient  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$  les sommets de ce triangle appartenant respectivement à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Puisque  $N(x)$  est un trou pair, les chaînes  $P_1 = zx_1 + X[x_1, x']$  et  $P_2 = X[x', x_{2k}] + x_{2k}y$  sont de parités différentes. Si  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) est une chaîne induite paire, alors  $P_1 + x'y' + y'y + yz$  (resp.  $P_2 + yz + zz' + z'x'$ ) est un trou impair, contradiction.  $\square$

**Etape 6** *Chaque triangle contient au maximum deux sommets de  $D$ .*

*Démonstration.* Supposons en effet qu'il existe un triangle de  $G$  dont les trois sommets sont de degré quatre. Il est facile de vérifier par construction que  $G$  est un octaèdre. Puisque l'octaèdre est un graphe planaire maximal et  $G$  n'a pas de clique d'articulation,  $G$  doit être égal au octaèdre, lequel a été exclu au tout début de la preuve.  $\square$

**Etape 7** *Les composantes de  $G[D]$  sont soit des cycles pairs soit des chaînes de longueur paire.*

*Démonstration.* L'étape 6 implique que  $G[D]$  est un graphe biparti. En plus, puisque chaque sommet de  $G[D]$  a un  $C_4$  comme voisinage dans  $G$ , il n'existe pas de  $K_{1,3}$  induit dans  $G[D]$  et chaque sommet a un degré au plus deux dans  $G[D]$ . Par suite chaque composante de  $G[D]$  est un cycle pair ou une chaîne. Supposons, que  $G[D]$  possède une composante  $P = v_1 \cdots v_{2l}$  qui est une chaîne impaire. Les voisins de  $v_1$  autres que  $v_2$  sont appelés  $x, z$  et  $u$  avec des arêtes  $zx, zu$  et  $uv_2$ . Puisque tous les sommets de  $P$  sont de degré quatre, ils doivent tous être adjacents à  $x$  et  $u$ . Le quatrième voisin de  $v_{2l}$  ne peut pas être  $z$ , sinon  $P + z$  serait un trou impair. Nous appelons  $y$  ce quatrième voisin qui lui aussi est voisin de  $x$  et  $u$ . Soit  $Z = z_1 \cdots z_{2k}$  la chaîne induite formée par  $N(z) - \{x, v_1\}$ , avec  $z_1 = u$ . Pareillement, soit  $X = x_1 \cdots x_{2m}$  la chaîne induite formée par  $N(x) - (P \cup \{z, y\})$  avec  $x_1 = z_{2k}$  et  $Y = y_1 \cdots y_{2q}$  la chaîne induite formée par  $N(y) - \{x, v_{2l}\}$  avec  $y_1 = x_{2m}$  et  $y_{2q} = u$ .

On observe que  $X \cap Z = \{x_1\}$ , sinon il existe un sommet  $t$  dans  $X \cap Z - \{x_1\}$  et alors  $\{t, x, z\}$  serait une clique d'articulation. De façon similaire,  $X \cap Y = \{x_{2m}\}$ . On observe encore que  $Z \cap Y = u$ , sinon s'il existait un sommet  $t \in Z \cap Y - u$ , alors  $P \cup \{t, x, y\}$  ou bien serait un trou impair ou bien contiendrait une clique d'articulation. On a encore que  $z$  n'est pas adjacent à  $y$ , sinon  $P \cup \{z, y\}$  est un cycle pair avec  $x$  et  $u$  adjacents à tous ses sommets. Alors, soit  $z$  et  $y$  sont de degré quatre, soit  $\{z, y, x\}$  ou  $\{z, y, u\}$  est une clique d'articulation. Dans chaque cas, on a une contradiction.

Il en résulte que  $X + Y + Z$  est un cycle impair et doit contenir donc un nombre impair de triangles. On observe que  $X \cup Z \cup \{y\}$  engendre un cycle pair et par suite  $X + Z$  doit contenir un nombre pair de triangles et de même  $X + Y$  et  $Y + Z$ . Par suite, comme dans l'Etape 5, il existe un triangle  $\{x', y', z'\}$  dans  $X + Y + Z$  tel que  $x' \in X, y' \in Y$  et  $z' \in Z$ . Or, puisque  $X$  a nombre impair d'arêtes,  $X[x_1, x']$  et  $X[x', x_{2k}]$  sont de parités différentes. Par conséquent, si  $X[x_1, x']$  ( $X[x', x_{2k}]$ ) est impair, alors  $X[x', x_1] + x_1z + zv_1 + P + v_{2l}y + yy' + y'x'$  ( $X[x', x_{2k}] + x_{2k}y + yv_{2l} + P + v_1z + zz' + z'x'$ ) est un trou impair, contradiction.  $\square$

Soit  $S$  un ensemble stable maximum de  $G[D]$ . D'après l'Etape 7,  $S$  contient la moitié des sommets de chaque cycle de  $G[D]$  et les extrémités de chaînes de  $G[D]$ . On observe que chaque triangle  $T$  de  $G$  contient un sommet dans  $S$ . En effet, si  $T$  contient deux sommets de degré quatre, alors nécessairement un des deux est dans  $S$ . Si  $T$  contient un seul sommet de degré quatre, alors ce sommet est nécessairement l'extrémité d'une des chaînes de  $G[D]$  et donc est dans  $S$ .

Par conséquent,  $G - S$  n'a pas de triangles et est un graphe biparti (puisque tout cycle impair de  $G - S$  pourrait contenir un trou impair de  $G$ ) et chaque arête de  $G$  a au moins une extrémité dans  $G - S$ . Supposons une bipartition de  $G - S$  en partie droite et gauche. On peut orienter chaque arête de  $G$  de façon que les sommets de la partie droite soient toutes les sources et les sommets de la partie gauche tous les puits. Nous observons que chaque arête de  $G$  est orientée, puisqu'elle a au moins une extrémité dans  $G - S$ . Pour vérifier que  $G$  a une orientation transitive, supposons qu'il existe des arcs  $\vec{ab}$  et  $\vec{bc}$ . Alors nécessairement  $b$  appartient à  $S$  et donc  $a, c$  appartiennent à  $G - S$ . En plus,  $a$  et  $b$  sont adjacents (puisque  $N(b)$  est un  $C_4$ ) et  $a$  est une source et  $b$  est un puit. Par suite, l'arc  $\vec{ac}$  appartient à l'orientation et le Lemme 4.11 est donc prouvé.  $\square$

Il est clair que ce lemme implique le Théorème 4.1, puisque tous les graphes de comparabilité sont parfaitement contractibles [2, 21].

La preuve du Théorème 4.1 est achevée. On observe que cette preuve produit un algorithme polynomial qui trouve une séquence de contractions d'un graphe planaire parfaitement contractible qui conduit à une clique.

### 4.3 Algorithme de reconnaissance des graphes PC

Par le théorème qu'on vient de démontrer, un graphe planaire parfait est parfaitement contractible si et seulement s'il n'admet pas un méchant impair comme sous-graphe induit. Reconnaître un tel graphe revient à tester l'existence de méchants impairs. Ce test va pouvoir être conduit en regardant uniquement les feuilles de son arbre de décomposition de Hsu [25].

Dans cette section, nous adopterons la même notation que dans la section précédente pour un graphe méchant, c'est-à-dire,  $\{x_1, y_1, z_1\}$  et  $\{x_p, y_q, z_r\}$  dénoteront les deux triangles de  $M$  et  $X = x_1 \cdots x_p$ ,  $Y = y_1 \cdots y_q$  et  $Z = z_1 \cdots z_r$  dénoteront les trois chaînes les reliant.

Soit un graphe planaire parfait  $G$ , soit  $H$  un graphe de son arbre de décomposition ayant des fils obtenus par une articulation  $Q$  de  $H$  et posons  $B_1, \dots, B_k$  les composantes de  $H - Q$ .

Puisqu'un méchant n'a pas de clique d'articulation, le lemme suivant est évident.

**Lemme 4.12** *Si  $Q$  est du Type I, alors  $H$  est parfaitement contractible si et seulement si chacun des fils de  $H$  l'est aussi.  $\square$*

Soit maintenant  $Q = \{a, b\}$  une articulation de Type II et soit un méchant impair  $M$  de  $H$ , avec des triangles  $\{x_1, y_1, z_1\}$  et  $\{x_p, y_q, z_r\}$  et les chaînes induites  $X, Y, Z$  qui relient les triangles. Il est clair que les deux triangles de  $M$  doivent se trouver dans une seule composante de  $H - Q$ , car séparer trois chaînes induites disjointes par deux sommets  $\{a, b\}$  est impossible. En fait,  $M$  est contenu entièrement dans  $H[B_i \cup Q]$  pour un certain  $i$ , sauf si  $a, b$  sont sur une même chaîne de  $M$ , disons  $X$ . Dans ce cas, un sous-graphe méchant impair peut être trouvé dans  $H_i$  en remplaçant  $X[a, b]$  par les sommets artificiels nouveaux de  $H_i$ .

D'autre part, si un fils  $H_i$  a un sous-graphe méchant impair  $M'$ , alors un sous-graphe méchant impair  $M$  de  $H$  peut être trouvé en remplaçant la chaîne de sommets artificiels (s'il en existe une dans  $M'$ ) par une chaîne induite entre  $a$  et  $b$  d'une des autres composantes déterminant un sous-graphe méchant impair de  $H$ . Donc, on a le lemme suivant.

**Lemme 4.13** *Si  $Q$  est du Type II, alors  $H$  est parfaitement contractible si et seulement si chacun des fils de  $H$  l'est.*

Soit maintenant  $Q = \{a, b, c\}$  une articulation de  $H$  de Type III. Supposons que  $H$  contienne un sous-graphe méchant impair  $M$ . Encore une fois, les triangles de  $M$  doivent se trouver dans une seule composante de  $H - Q$ , sinon  $M$  devrait être séparé (à isomorphisme près) par  $Q = \{y_1, z_1, u\}$ , où  $u$  est un sommet quelconque de  $X - \{x_1\}$ . Dans ce cas, dans la composante de  $H - Q$  qui contient  $x_1$ , il existe deux chaînes induites de même parité, une entre  $y_1$  et  $u$  et une autre entre  $z_1$  et  $u$  ce qui, par définition d'une articulation de Type III, implique l'existence d'un trou impair dans  $H$  (une contradiction). Donc, les deux triangles de  $M$  se trouvent dans un certain sous-graphe  $H[B_i \cup Q]$  de  $H$  et comme avant, le méchant  $M$  peut être séparé par  $Q$  seulement si  $a, c$  se trouvent dans une des chaînes de  $M$ , disons  $X$ . Alors, on peut appliquer le même argument utilisé plus haut en remplaçant la section  $X[a, c]$  de la chaîne  $X$  par la chaîne composée des sommets artificiels. On a donc le lemme suivant :

**Lemme 4.14** *Si  $Q$  est du Type III, alors  $H$  est parfaitement contractible si et seulement si chacun des fils de  $H$  l'est.*

Soit maintenant  $Q = \{a, b, c, d\}$  une articulation de Type IV et soit  $M$  le sous-graphe méchant impair de  $H$ . En utilisant les mêmes arguments que plus haut, on arrive à démontrer que les deux triangles de  $M$  se trouvent dans un sous-graphe  $H[B_i \cup Q]$  de  $H$  pour un certain  $i$  et que  $Q$  sépare  $M$  seulement si une des paires soit  $a, c$  soit  $b, d$  se trouve dans une même chaîne de  $M$ , disons  $X$ . De manière analogue,  $X[a, c]$  (resp.  $X[b, d]$ ) peut être remplacée par la chaîne de sommets artificiels qui relie ces sommets dans un fils  $H_i$  de  $H$  pour, finalement, construire un sous-graphe méchant impair  $M'$  de  $H_i$ .

D'autre part, si un fils de  $H$  a un sous-graphe méchant impair  $M'$ , un méchant impair  $M$  de  $H$  peut être obtenu en remplaçant la chaîne de sommets artificiels (s'il en existe une dans  $M'$ ) par n'importe quelle chaîne entre  $a$  et  $c$  (resp.  $b$  et  $d$ ) d'une autre composante.

De ceci, il en résulte le dernier lemme.

**Lemme 4.15** *Si  $Q$  est du Type IV, alors  $H$  est parfaitement contractible si et seulement si chacun des fils de  $H$  l'est.*

De ces quatre lemmes, il est clair qu'un graphe planaire parfait est parfaitement contractible si et seulement si chacune des feuilles de son arbre de décomposition l'est.

Concernant les classes finales, on rappelle d'abord que chaque élément de  $\mathcal{C}$  est parfaitement contractible [2, 21]. Pour les éléments de  $\mathcal{S}$ , il est clair que  $S_2$  et  $S_3$  sont parfaitement contractibles, tandis qu'aucun des éléments obtenus à partir de  $S_1$  ainsi que  $S_1$  lui-même n'est parfaitement contractible (chacun d'entre eux contient un méchant impair comme sous-graphe induit). Donc, il reste à déterminer quels éléments de  $\mathcal{L}$  sont parfaitement contractibles.

**Lemme 4.16 (Hsu [25])** *Soit  $H$  un élément de  $\mathcal{L}$ . Alors,  $H$  a une paire d'amis  $\{x, y\}$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont les deux voisins d'un sommet de degré deux.*

Soit  $\mathcal{L}_0$  la sous-classe de  $\mathcal{L}$  contenant les graphes  $C_4$ ,  $C_6$  plus deux graphes que nous appellerons  $M_2$  et  $M'_2$  (voir figure 4.3.1). Le graphe  $M_2$  est un méchant pair dont les trois chaînes sont de longueur deux. Le graphe  $M'_2$  est le graphe qui résulte de la contraction d'une paire d'amis de  $M_2$  avec l'enlèvement du sommet pendant. Il est clair que ces quatre graphes sont parfaitement contractibles.

**Lemme 4.17** *Un graphe de  $\mathcal{L}$  est parfaitement contractible si et seulement s'il appartient à  $\mathcal{L}_0$ .*

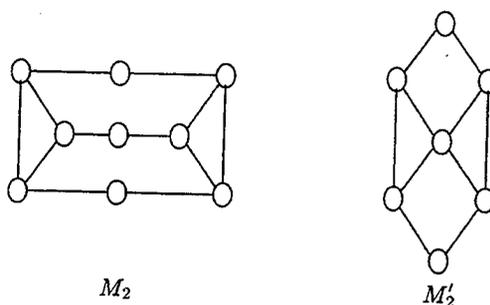


Figure 4.3.1: Les graphes  $M_2$  et  $M'_2$  de la classe  $\mathcal{L}_0$ .

*Démonstration.* Soit  $H$  un élément de  $\mathcal{L}$ . Si  $H$  contient un sommet  $z$  de degré deux, alors le voisinage de ce sommet définit une paire d'amis de  $H$ . Identifions ces deux voisins de  $z$  et enlevons  $z$ . Répétons ce procédé jusqu'à ce que l'on n'ait plus de sommets de degré deux. On aboutit à un graphe unique  $H'$ . Cette unicité peut être vue de la manière alternative suivante :  $H'$  est obtenu à partir de  $H$  en remplaçant les chaînes de sommets intérieurs de degré deux par des chaînes de longueur zéro ou un selon leur parité. (En fait, de telles chaînes de  $H$  ne peuvent pas avoir une longueur plus grande que trois, sinon  $H$  admet une articulation de Type II). Comme conséquence du Lemme 4.16, il est clair que  $H$  est parfaitement contractible si et seulement si  $H'$  l'est.

Si  $H'$  est complet, alors le lemme est démontré. Sinon, on propose de montrer que  $H'$  contient une obstruction et par conséquent, un méchant impair qu'on retrouvera dans  $H$ . Donc, nous affirmons que:

$H'$  est un élément de  $\mathcal{L}$ .

Il est clair que  $H'$  est planaire et n'a pas de trou impair. Si  $H' = H$ , alors la preuve est terminée. Si  $H$  n'est pas un  $C_4$  ou  $C_6$ , soient  $x, y$  les extrémités d'une chaîne quelconque  $P$  dont les sommets intérieurs ont le degré deux et telle que  $x, y$  sont de degré trois. On observe que  $x, y$  sont les seuls sommets qui peuvent avoir un voisinage différent dans  $H$  et  $H'$  et donc les autres sommets ont toujours le degré trois ou quatre et ne sont pas de centres de griffes. Les ensembles  $Q_x = N_H(x) - P$  et  $Q_y = N_H(y) - P$  sont des cliques de taille deux. Si  $P$  est de longueur impaire, elle est remplacée par une arête  $xy$  dans  $H'$  et il est clair que  $x$  et  $y$  ont le degré trois dans  $H'$  et ne sont pas de centres de griffes. Si  $P$  est de longueur paire, alors  $x, y$  sont contractés en un sommet  $xy$  dont le voisinage est  $Q_x \cup Q_y$ , alors  $xy$  n'est pas le centre d'une griffe et a le degré trois (si  $Q_x \cap Q_y \neq \emptyset$ )

ou quatre (si  $Q_x \cap Q_y = \emptyset$ ). Par conséquent, (4.3) ne peut être mis en défaut que si  $H'$  contient un diamant, disons,  $\{t, u, v, w\}$  avec les arêtes  $tu, tv, uv, uw, vw$  dans lequel  $u$  ou  $v$  (disons  $u$ ) est un sommet résultant de l'identification d'une paire d'amis  $\{x, y\}$  de  $H$ , où  $x$  et  $y$  sont les voisins d'un sommet  $z$  de degré deux de  $H$ . Alors,  $\{t, w\}$  est une articulation de taille deux avec une des composantes formée par  $\{x, v, y, z\}$ . Or, puisque  $H$  n'a pas d'articulation de Type II, cette articulation doit produire un fils isomorphe à  $H$ , c'est-à-dire, une des deux composantes, disons  $B_1$ , de  $H - \{t, w\}$  est telle que  $B_1 \cup \{t, w\}$  est un  $P_3$  ou un  $P_4$ . Dans les deux cas, il existerait un sommet de degré deux dans  $H'$  (contradiction). On en conclue que l'affirmation est correcte. Maintenant le Lemme 4.16 implique que  $H'$  est une obstruction.

Pour terminer, on observe que lorsque  $H'$  est une clique de taille deux,  $H$  est un trou pair. En fait, puisqu'un trou pair de grande longueur implique une articulation de Type II,  $H$  est un  $C_4$  ou un  $C_6$ . Si  $H'$  est une clique de taille trois, alors il n'est pas difficile de voir que  $H$  ne peut être que  $M_2$  ou  $M'_2$ .

En conclusion, on a:

**Théorème 4.2** *Un graphe planaire est parfaitement contractible si et seulement si chacune des feuilles de son arbre de décomposition est un élément de  $\mathcal{C} \cup \mathcal{L}_0 \cup \{S_2, S_3\}$ .*

Il est clair que tester si un graphe planaire donné de  $n$  sommets est parfaitement contractible s'effectue en temps  $O(n^3)$ .



# Chapitre 5

## Graphes parfaits sans griffe et paires d'amis

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions et caractérisons les graphes sans griffe qui sont de quasi-parité stricte ainsi que ceux qui sont parfaitement contractibles. Les deux conjectures, celle de Stefan Hougardy d'une part et celle de Hazel Everett et Bruce Reed d'autre part, qui proposent une caractérisation de ces deux classes par configurations interdites, sont validées dans le cas des graphes sans griffe. Ces résultats, ici présentés, ont été obtenus en coopération avec Frédéric Maffray [27].

Nous conserverons le formalisme des précédents chapitres pour décrire un *méchant* par  $\mathcal{S} = (X, Y, Z)$  avec  $X = x_1 \cdots x_r$ ,  $Y = y_1 \cdots y_s$  et  $Z = z_1 \cdots z_t$  définissant des chaînes disjointes sans cordes et sans aucune arête entre elles sauf pour les deux triangles  $\{x_1, y_1, z_1\}$  et  $\{x_s, y_r, z_t\}$ .

Nous commençons par la preuve de la conjecture de Everett et Reed. Auparavant, nous élargissons le concept de méchant pair en admettant le cas dégénéré où une seule des chaînes, disons  $Z$ , est longueur zéro, c'est-à-dire,  $z_1 = z_t$ , les autres ayant une longueur positive.

Cela se traduit par le théorème :

**Théorème 5.1** *Un graphe sans griffe est parfaitement contractible si et seulement s'il ne*

*contient comme sous-graphe induit ni de trou impair, ni d'antitrou, ni de méchant impair.*

Concernant la conjecture de Hougardy, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 5.2** *Toute obstruction sans griffe est soit un trou impair, soit un antitrou, soit le line-graphe d'un graphe biparti.*

Les démonstrations reposent sur la structure de graphes parfaits sans griffe, qui a été entièrement déterminée dans [7] et [34] (le principal résultat de ce dernier étude est présenté plus loin).

Le Théorème I sur la structure des graphes sans griffe parfaits (dû à Chvátal et Sbihi et présenté dans le chapitre 2) ramène la preuve de nos deux théorèmes au cas essentiel des graphes élémentaires (le cas de présence de clique d'articulation ou de graphe singulier trouvant leur preuve dans les lignes qui suivent).

## Graphe avec clique d'articulation

Les deux lemmes qui suivent nous permettent de surmonter ce cas.

**Lemme 5.1** *Un graphe  $G$  ayant une clique d'articulation  $C$  est parfaitement contractible si et seulement si chaque pièce de  $G$  relative à  $C$  est parfaitement contractible.*

*Démonstration.* Soient  $G_1, \dots, G_k$  les pièces de  $G$  relatives à  $C$ . Si  $G$  est parfaitement contractible, alors par définition, chaque sous-graphe induit de  $G$  est parfaitement contractible. Réciproquement, supposons que chaque  $G_i$  soit parfaitement contractible. Alors, chaque  $G_i$  admet une séquence de contraction de paires d'amis conduisant à une clique. On observe que, comme dans le lemme suivant, une paire d'amis de  $G_i$  est aussi une paire d'amis de  $G$ . Par suite, nous pouvons réaliser ces  $k$  séquences de contraction simultanément et obtenir un graphe  $G'$  où chaque pièce de  $G'$  relative à  $C$  est aussi une clique. On peut voir facilement que ce nouveau graphe est parfaitement contractible. Par conséquent, nous avons une séquence de contraction de  $G$  qui conduit à une clique. Le même résultat est valide pour chaque sous-graphe induit de  $G$ , car un tel sous-graphe soit est un sous-graphe d'un des  $G_i$  soit admet une clique d'articulation soit n'est pas connexe.

□

**Lemme 5.2** *Un graphe  $G$  ayant une clique d'articulation  $C$  est de quasi-parité stricte si et seulement si chaque pièce de  $G$  relative à  $C$  est de quasi-parité stricte.*

*Démonstration.* La partie “seulement si” est évidente, puisque les pièces sont des sous-graphes induits de  $G$ . Donc, nous devons seulement prouver la partie “si”. Soient  $G_1, \dots, G_k$  les pièces de  $G$  relatives à  $C$ . Soit  $H$  un sous-graphe connexe quelconque de  $G$ ; nous allons démontrer que soit  $H$  est une clique soit  $H$  contient une paire d'amis. Si  $H$  est un sous-graphe d'un certain  $G_i$ , alors on a le résultat désiré. Dans le cas contraire, on va écrire  $H_i = H \cap G_i$  et nous allons supposer par symétrie que  $H_1, \dots, H_h$  ne sont pas vides pour un certain  $h$  avec  $2 \leq h \leq k$ . Par suite,  $C \cap H$  est une clique d'articulation de  $H$  dont les pièces sont  $H_1, \dots, H_h$ . Si, pour un certain  $i$ ,  $H_i$  n'est pas une clique, alors par l'hypothèse il a une paire d'amis  $x, y$ . On observe qu'aucune chaîne sans cordes entre  $x$  et  $y$  ne peut avoir des sommets d'une autre composante de  $H - C$ , car  $C \cap H$  est une clique. Par suite,  $x, y$  est aussi une paire d'amis de  $H$ . Supposons maintenant que chaque  $H_i$  soit une clique, pour  $i = 1, \dots, h$ . Dans ce cas, il est facile de vérifier que n'importe quel sommet de  $H_1 - C$  et n'importe quel sommet de  $H_2 - C$  forment une paire d'amis de  $H$ .  $\square$

## Grapshe co-biparti ou singulier

Dans ce cas, les résultats sont déjà connus, comme on va voir dans la suite. Un graphe est dit *parfaitement ordonnable* [5] s'il admet un ordre linéaire  $<$  sur ses sommets tel qu'il n'existe pas de chaînes sans cordes à quatre sommets  $abcd$  avec  $a < b$  et  $d < c$  (cet ordre est appelé un *ordre parfait*).

**Théorème J ([21])** *Tout graphe parfaitement ordonnable est parfaitement contractible.*  
 $\square$

En outre, dans la preuve de ce théorème il est possible à partir d'un ordre parfait de déterminer en temps polynomial une séquence de contractions de paires d'amis conduisant à une clique.

**Théorème K ([6])** *Un graphe co-biparti est parfaitement ordonnable si et seulement s'il ne contient pas d'antitrous.*  $\square$

Les graphes bipartis qui ne contiennent pas de trous sont appelés *biparti-cordaux* et on peut, dans [32], trouver les détails de leur structure ainsi qu'un algorithme efficace pour les reconnaître.

**Théorème L ([6])** *Un graphe singulier est parfaitement ordonnable si et seulement s'il ne contient pas d'antitrou.  $\square$*

Pour chacun de ces deux derniers théorèmes, la preuve fait apparaître un algorithme polynomial qui partant d'un graphe co-biparti (resp. singulier) teste l'existence d'un antitrou et en cas d'absence construit un ordre parfait. En observant qu'un graphe de quasi-parité stricte (resp. parfaitement contractible) n'a pas d'antitrou, il en résulte que 'parfaitement ordonnable' peut être remplacé par 'quasi-parité stricte' (resp. 'parfaitement contractible') dans les deux théorèmes précédents. Par suite, ces trois théorèmes impliquent nos deux théorèmes pour les graphes singuliers et co-bipartis.

## Graphes élémentaires

Avant d'introduire la caractérisation de F. Maffray, on va ajuster les notations jusque là utilisées, en considérant qu'un graphe LGB est un line-graphe d'un graphe biparti pas nécessairement simple et en réservant la notation LGBS pour un line-graphe d'un graphe biparti simple.

Les graphes élémentaires ont été entièrement caractérisés par Maffray [34], caractérisation que nous rappelons immédiatement. Soit  $xy$  une arête plate d'un graphe  $G$  et  $(X, Y; F)$  un graphe co-biparti, disjoint de  $G$ , où  $X, Y$  sont deux cliques non vides disjointes avec au moins une arête reliant un sommet de  $X$  à un sommet de  $Y$ . Nous construisons un nouveau graphe à partir de  $G \cup (X, Y; F)$  en enlevant  $x$  et  $y$  et en rajoutant toutes les arêtes entre  $X$  et  $N(x) - y$ , et toutes les arêtes entre  $Y$  et  $N(y) - x$ . Cette opération est appelée *augmentation* de l'arête plate  $xy$  par le graphe co-biparti  $(X, Y; F)$ . D'une façon plus générale, on peut considérer  $h$  arêtes plates de  $G$  formant un couplage, disons  $e_1, \dots, e_h$  ( $e_i = x_i y_i$ ), et  $h$  graphes co-bipartis disjoints de  $G$  et disjoints entre eux, disons  $(X_1, Y_1; E_1), \dots, (X_h, Y_h; E_h)$ , répondant aux mêmes conditions que le graphe  $(X, Y; F)$  plus haut. Nous effectuons les augmentations simultanément des arêtes  $e_i$  par les co-bipartis  $(X_i, Y_i; E_i)$  (dans un ordre arbitraire car à l'évidence cet ordre n'a aucune influence sur le résultat). Cette opération est appelée une *augmentation* de  $G$  par les *augmentants*  $(X_i, Y_i; E_i)$ .

**Théorème M ([34])** *Un graphe  $G$  est élémentaire si et seulement s'il est une augmentation du line-graphe  $H^*$  d'un multigraphe biparti. A partir de  $G$ , il est possible de déterminer en temps polynomial le multigraphe  $H^*$ , ses  $h$  arêtes plates  $e_1, \dots, e_h$  ( $e_i = x_i y_i$ ), et leurs  $h$  co-bipartis  $(X_i, Y_i; E_i)$  associés, tels que  $G$  est issu de  $H^*$  par l'augmentation correspondante. En outre, dans cette détermination, on peut ajouter la contrainte que chaque sommet de  $X_i$  a au moins un voisin dans  $Y_i$  et vice-versa.  $\square$*

Le graphe  $H^*$  de ce théorème est appelé le *squelette* de  $G$ . Nous appelons *atome* d'un graphe  $G$  toute clique formant un ensemble homogène et maximal pour cette propriété. Les atomes forment une partition de l'ensemble des sommets de  $G$  (ils sont les classes de la relation d'équivalence " $x = y$  ou  $x, y$  sont des vrais jumeaux"). On va appeler *squelette réduit* de  $G$  le graphe  $H$  obtenu à partir de  $H^*$  en enlevant tous les sommets sauf un dans chaque atome de  $H^*$ . Clairement  $H = L(B)$ , où  $B$  est biparti simple et  $H$  ne contient pas de diamant. Pour chaque sommet  $x$  de  $H$ , nous notons l'atome qui le contient dans  $H^*$  par  $A(x)$ . A isomorphisme près,  $H^* = L(B^*)$ , où  $B^*$  est la multiplication de  $B$  (chaque arête  $x$  de  $B$  étant multipliée  $|A(x)|$  fois). Si  $x = x_i$  (resp.  $x = y_i$ ) alors  $A(x) = \{x_i\}$  (resp.  $A(x) = \{y_i\}$ ). Lorsque  $x \notin \{x_1, \dots, x_h, y_1, \dots, y_h\}$ , alors l'atome  $A(x)$  de  $H^*$  est dit *banal*. Il n'est pas difficile de prouver que chaque atome banal de  $H^*$  est aussi un atome de  $G$ . Pour chaque sommet  $x$  de  $H$  définissons  $M(x)$  comme  $A(x)$  si  $A(x)$  est banal et comme  $X_i$  (resp.  $Y_i$ ) si  $x = x_i$  (resp.  $x = y_i$ ). Par suite, la collection  $\{M(x)\}_{x \in V(H)}$  est une partition de l'ensemble des sommets de  $G$ . Une clique de  $H$  (resp.  $H^*$ ,  $G$ ) est appelée *normale* si elle ne contient pas à la fois  $x_i, y_i$  pour un  $i$  quelconque (resp. si elle ne rencontre pas à la fois  $X_i, Y_i$  dans  $G$ ), et *spéciale* dans le cas contraire. Une clique spéciale de  $H$  ou  $H^*$  est toujours de la forme  $\{x_i, y_i\}$  pour un  $i \in \{1, \dots, h\}$ . Pour une clique normale  $Q$  de  $H$ , l'ensemble  $A(Q) = \cup\{A(x) \mid x \in Q\}$  est une clique normale de  $H^*$ , et l'ensemble  $M(Q) = \cup\{M(x) \mid x \in Q\}$  est une clique normale de  $G$ . Dans  $G$ , l'ensemble  $N(X_i)$  contient  $Y_i$ , chaque sommet de  $N(X_i) - Y_i$  est adjacent à tous les sommets de  $X_i$ , et la clique  $X_i \cup (N(X_i) - Y_i)$  est normale.

Tous ces résultats et notation seront utilisés dans le reste de ce chapitre.

### section Graphes sans griffe parfaitement contractibles

Dans cette section, nous allons donner la preuve du Théorème 5.1 assortie des algorithmes 1) pour reconnaître les graphes parfaitement contractibles sans griffe et 2) pour trouver une séquence de contractions de paires d'amis terminant à un graphe complet.

Nous commençons par approfondir l'étude des graphes LGB.

### 5.1.1 Line-graphe de graphe biparti

Toute articulation  $C$  d'un graphe quelconque, formée de deux cliques disjointes sans aucune arête entre elles, sera appelée *double-clique d'articulation*. Soit  $B^*$  un multi-graphe biparti et  $H^* = L(B^*)$  son line-graphe. Soit  $B$  le graphe simplifié de  $B^*$  et  $H = L(B)$ . Un atome de  $H^*$  (resp. un sommet de  $H$ ) est appelé *gentil* si son voisinage est exactement deux atomes (resp. sommets) non adjacents. Le lemme suivant est évident, puisque un méchant ne contient pas de jumeaux.

**Lemme 5.3**  *$H^*$  contient un méchant impair si et seulement si  $H$  contient un méchant impair.*  $\square$

**Lemme 5.4** *Si  $H$  a un sommet gentil  $x$ , avec  $N(x) = \{u, v\}$ , alors  $H' = (H/uv) - x$  est un graphe LGB. En outre,  $H$  contient un méchant impair si et seulement si  $H'$  en contient aussi. Par ailleurs,  $H$  a une clique d'articulation si et seulement si  $H'$  en a aussi une.*

*Démonstration.* Dans  $B$ , l'arête  $x$  est incidente seulement avec l'arête  $u$  par une extrémité et avec l'arête  $v$  par l'autre. Soit  $b_u$  le sommet de  $B$  sur l'arête  $u$  et non sur  $x$ , et  $b_v$  le sommet de  $B$  sur  $v$  et non sur  $x$ . Alors,  $b_u$  et  $b_v$  sont à distance impaire dans  $B$ . Soit  $B'$  le graphe biparti obtenu à partir de  $B$  en enlevant les arêtes  $x, u, v$  et en rajoutant une nouvelle arête  $c_{uv}$  entre  $b_u$  et  $b_v$  qui correspond au sommet de  $H'$  obtenu par la contraction de  $u$  et  $v$ . Il est facile de vérifier que  $H' = L(B')$ . On observe que dans  $H$ , tout méchant impair contient soit les trois sommets  $u, x, v$  soit aucun sommet de  $u, x, v$ . Il est clair que  $H - x$  contient un méchant impair si et seulement si  $H' - c_{uv}$  en contient un (d'ailleurs, le même). D'autre part,  $H$  contient un méchant impair contenant  $x$  si et seulement si  $H'$  en contient un contenant  $c_{uv}$ , lequel est obtenu à partir du premier en remplaçant  $u, v, x$  par  $c_{uv}$ . D'une façon analogue, si  $H$  a une clique d'articulation  $C$ , alors soit  $C$  ne contient aucun des sommets  $x, u, v$  et dans ce cas  $C$  est une clique d'articulation de  $H'$ , soit  $C$  contient un sommet de l'ensemble  $\{x, u, v\}$  et alors, dans ce cas, ou bien  $H'$  est une clique ou bien  $C \cup \{c_{uv}\} - \{x, u, v\}$  est une clique d'articulation de  $H'$ . La validité de la situation inverse, quand  $H'$  a une clique d'articulation, est analogue.  $\square$

**Théorème 5.3** *Si un graphe  $H^*$  est LGB, alors il satisfait au moins une des propriétés suivantes :*

- $H^*$  est une clique ;
- $H^*$  a une clique d'articulation ;
- $H^*$  contient un méchant impair ;
- $H^*$  a deux atomes gentils non adjacents.

*Démonstration.* Soit  $H^*$  un graphe LGB qui n'est pas une clique, qui ne contient pas de méchant impair et qui n'a pas de clique d'articulation. Nous allons démontrer que  $H^*$  a deux atomes gentils non adjacents par récurrence sur le nombre de sommets de ce graphe. Ce résultat est trivial lorsque  $H^*$  a au plus quatre sommets. On observe que  $H$  n'a pas de clique d'articulation, puisque pour une clique d'articulation quelconque  $Q$  de  $H$ , si  $Q$  est une clique normale (revoir la notation dans le chapitre 2, section 2.6), alors l'ensemble  $A(Q)$  est une clique d'articulation de  $H^*$ , tandis que si  $Q$  est une clique spéciale  $x_i y_i$ , alors  $X_i$  ou  $Y_i$  est une clique d'articulation de  $H^*$ .

Les trois lemmes qui suivent vont préciser les propriétés de  $H$  qui permettront d'achever la preuve.

**Lemme 5.5** *Ou bien  $H$  est un trou pair, ou bien  $H$  contient un méchant pair.*

*Démonstration.*  $H$  n'ayant pas de clique d'articulation, le graphe biparti  $B$  est 2-connexe. Si  $B$  ne contient pas de cycle de taille au moins six comme sous-graphe partiel, alors  $B$  est une arête ou un  $C_4$ , et en fait un  $C_4$  car  $H$  n'est pas une clique. Dans ce cas,  $H$  est un  $C_4$  et le résultat est trivial. On va donc supposer que  $B$  contient un cycle de taille au moins six. Par conséquent,  $H$  contient un trou pair  $C$  de taille au moins six comme sous-graphe induit. Si  $H = C$  on a résultat désiré. On peut donc supposer que  $H - C$  n'est pas vide et on va ordonner les sommets de  $C$  selon  $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$  dans l'ordre cyclique. On observe que pour chaque sommet  $x$  dans  $N_H(C)$ , l'ensemble  $N(x) \cap C$  est soit  $\{v_i, v_{i+1}\}$  pour un certain  $i$  (et on dira que  $x$  est de Type 2), soit  $\{v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1}\}$  pour  $i, j$  de différentes parités avec  $|i - j| \geq 3$  (et on dira que  $x$  est de Type 4), sinon  $C + x$  contiendrait une griffe ou un diamant ou un trou impair. S'il existe un sommet  $x$  de Type 4, alors  $C + x$  est un méchant pair dégénéré et la preuve est achevée. Par conséquent, on peut supposer que tout sommet de  $N_H(C)$  est de Type 2 et soit  $x$  un tel sommet. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $N(x) \cap C = \{v_1, v_2\}$ . Puisque  $H$  n'a pas de clique d'articulation,  $H - \{v_1, v_2\}$  est connexe et il existe donc une plus courte chaîne  $P$  reliant  $x$  à  $C - \{v_1, v_2\}$ .

Les sommets intérieurs de  $P$  n'ont pas de voisins dans  $C$ , sinon une chaîne plus courte que  $P$  pourrait être trouvée. Par conséquent, il est facile de voir que soit  $C + P$  contient un trou impair, ce qui est interdit, soit  $C + P$  est un méchant et par hypothèse, un méchant pair.  $\square$

Si  $H$  est un trou, le théorème est démontré. Par suite, par le lemme 5.5, nous supposons que  $H$  contient un méchant pair  $\mathcal{S} = (X, Y, Z)$  où  $\{x_1, y_1, z_1\}$  et  $\{x_r, y_s, z_t\}$  sont les triangles, et  $X = x_1x_2 \cdots x_r$ ,  $Y = y_1y_2 \cdots y_s$ ,  $Z = z_1z_2 \cdots z_t$  sont les chaînes paires sans cordes, avec la possibilité d'avoir  $t = 1$ . Soient  $Q$  et  $R$  les cliques maximales de  $H$  contenant respectivement  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_r, y_s, z_t$ .

**Lemme 5.6** *Si  $H$  contient un méchant pair  $\mathcal{S} = (X, Y, Z)$ , alors  $H$  a deux double-cliques d'articulation  $C_X, C_Y$  telles que  $C_X$  (resp.  $C_Y$ ) sépare  $Y \cup Z$  des sommets intérieurs de  $X$  (resp.  $X \cup Z$  des sommets intérieurs de  $Y$ ).*

*Démonstration.* Soit  $Q_X$  (resp.  $R_X$ ) le sous-ensemble de sommets  $u$  de  $Q$  (resp. de  $R$ ) pour lequel il existe une chaîne induite sans cordes reliant  $u$  à  $X - \{x_1, x_r\}$  dont les sommets intérieurs n'appartiennent pas à  $Y \cup Z$ . Nous allons démontrer que  $C_X = Q_X \cup R_X$  est une double-clique d'articulation de  $H$  qui sépare  $X - \{x_1, x_r\}$  de  $Y \cup Z$ . Supposons que ceci ne soit pas vrai. Il existe alors dans  $H - (Q_X \cup R_X)$  une chaîne reliant un sommet intérieur de  $X$  à un sommet quelconque de  $Y \cup Z$ . Parmi toutes ces chaînes, soit  $P = v_1 \cdots v_p$  une plus courte ( $p \geq 3$ ), avec  $v_1 \in X$  et  $v_p \in Y \cup Z$ . Il n'existe pas de corde reliant un sommet de  $P[v_3 \cdots v_{p-2}]$  à un sommet de  $X \cup Y \cup Z - \{x_1, x_r\}$ , sinon  $P$  n'est pas la plus courte. Nous pouvons supposer que  $v_2$  voit  $x_i$  et  $x_{i+1}$  pour un certain  $i$  avec  $1 \leq i \leq r - 1$  et que  $v_2$  ne voit aucun autre sommet de  $X$ , sinon on pourrait trouver un diamant  $v_2, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  ou une griffe centrée en  $v_2$ , ou encore une griffe centrée en  $x_i$ . Si  $Z$  n'est pas vide (c'est-à-dire, si  $z_1 \neq z_t$ ), alors nous pouvons supposer par symétrie que  $v_p \in Y$ . Alors  $P$  n'a pas de cordes et n'intersecte pas  $Z$ . L'absence de griffes et de diamants dans  $H$  implique que soit  $v_{p-1}$  voit  $y_j$  et  $y_{j+1}$  pour un certain  $j$  avec  $1 \leq j \leq s - 1$  et ne voit aucun autre sommet de  $Y$  (première situation), soit  $v_{p-1}$  voit  $x_1, y_1$  et  $z_1$  (ou  $x_r, y_s$  et  $z_t$ ) et aucun autre sommet de  $Y \cup Z$  (deuxième situation). Dans la deuxième situation,  $v_{p-1}$  devrait appartenir à  $Q_X$  ou  $R_X$ , ce qui contredit la définition de  $P$ . Si  $Z$  est vide et  $v_p$  appartient à  $Z$  ( $v_p = z_1 = z_t$ ) alors  $v_{p-1}$  doit voir soit  $x_1, y_1$  soit  $x_r, y_s$ , sinon une griffe pourrait être trouvée (soit  $v_{p-1}, z, x_1, x_r$  soit  $v_{p-1}, z, y_1, y_s$  resp.). Par suite,  $v_p$  devrait appartenir à  $Q_X$  ou  $R_X$ , ce qui est interdit. Par conséquent, nous pouvons supposer que nous sommes dans la première situation quelle

que soit la taille de  $Z$ . Dans ce cas,  $v_{p-1}$  ne voit aucun sommet  $z$  de  $Z$ , sinon soit  $v_{p-1}, z, v_{p-2}, y_j$  soit  $v_{p-1}, z, v_{p-2}, y_{j+1}$  serait une griffe. Puisque  $Y$  est une chaîne paire, un des segments  $Y[y_1 \cdots y_j]$  ou  $Y[y_{j+1} \cdots y_s]$  est une chaîne impaire sans cordes, disons  $Y' = Y[y_1 \cdots y_j]$ . Par suite,  $Z' = Y[y_{j+1} \cdots y_s] + y_s z_t + Z$  est une chaîne impaire sans cordes reliant  $y_{j+1}$  à  $z_1$ . D'autre part, la chaîne  $P[v_{p-1} \cdots v_2] + v_2 x_i + X[x_i \cdots x_1]$  est impaire et contient une chaîne sans cordes  $X'$  reliant  $x_1$  à  $v_{p-1}$ . En effet,  $X'$  est aussi impaire, sinon  $X' + v_{p-1} y_{j+1} + Z' + x_1 z_1$  serait un trou impair. On vient de trouver un méchant impair formé par des triangles  $\{x_1, y_1, z_1\}$  et  $\{v_{p-1}, y_j, y_{j+1}\}$ , avec les chaînes impaires sans cordes  $X', Y', Z'$ , contradiction. Par suite,  $C_X = Q_X + R_X$  est une double-clique d'articulation. La preuve est la même pour  $C_Y$ .  $\square$

Soit  $C_X = Q_X \cup R_X$  la double-clique d'articulation de  $H$  définie comme dans le lemme précédent. Soit  $X'$  une composante connexe de  $H - C_X$  qui contient les sommets intérieurs de  $X$ . Soit  $H_X$  le graphe obtenu à partir de  $H[X' \cup C_X]$  en rajoutant un nouveau sommet  $a_X$  adjacent à tous les sommets de  $C_X$ .

**Lemme 5.7** *Le graphe  $H_X$  précédemment défini est le line-graphe d'un multi-graphe biparti. Par ailleurs,  $H_X$  n'a ni clique d'articulation, ni méchant impair, et n'est pas complet.*

*Démonstration.* Soient  $b_Q$  et  $b_R$  les sommets de  $B$  dont les arêtes incidentes forment respectivement les cliques  $Q$  et  $R$  dans  $H$ . Puisque  $X$  est une chaîne paire reliant un sommet de  $Q$  à un sommet de  $R$  dans  $H$ , dans  $B$  les sommets  $b_Q, b_R$  sont à une distance impaire. Soit  $B_X$  le graphe obtenu à partir de  $B$  en gardant seulement les arêtes associées aux sommets de  $X' \cap C_X$  et en rajoutant une arête  $a_X = b_Q b_R$ . Il est clair que  $B_X$  est un graphe biparti et que  $H_X = L(B_X)$ . Le graphe  $H_X$  est incomplet puisque  $Q_X$  et  $R_X$  ne sont pas adjacents. Si  $H_X$  contenait un méchant impair  $\mathcal{S}$ , alors ce méchant devrait contenir le sommet  $a_X$ , sinon il serait entièrement contenu dans  $H'$ . Mais en remplaçant  $a_X$  par la chaîne  $Y$  dans  $\mathcal{S}$ , on obtiendrait un méchant impair dans  $H$  (absurde). D'autre part, si  $H_X$  contenait une clique d'articulation  $C$ , alors  $C$  devrait contenir  $a_X$ , sinon  $C$  serait une clique d'articulation de  $H$ . Or ceci est impossible, puisque le voisinage de  $a_X$  dans  $H_X$  est  $Q_X \cup R_X$  et  $H_X$  contient la chaîne  $X$  qui relie  $Q_X$  à  $R_X$ .  $\square$

Maintenant, puisque  $H_X$  est plus petit que  $H$ , par l'hypothèse de récurrence il existe deux sommets gentils non adjacents dans  $H_X$ .

Nous allons démontrer que  $H_X$  contient un atome gentil différent de  $Q_X, R_X, \{a_X\}$ . Si ceci est faux, alors les seuls deux atomes gentils non adjacents de  $H_X$  sont  $Q_X$  et  $R_X$ . Dans ce cas,  $N(Q_X) - \{a_X\}$  (resp.  $N(R_X) - \{a_X\}$ ) doit être un seul atome appelé  $U_X$  (resp.  $V_X$ ). Si  $U_X = V_X$  alors  $H_X = Q_X \cup R_X \cup \{a_X\} \cup U_X$ , et du coup  $U_X$  serait un atome gentil de  $H_X$ . Si  $U_X \neq V_X$ , alors  $U_X \cup V_X$  est une double-clique d'articulation de  $H_X$ . Nous allons construire un graphe  $H'_X$  en enlevant de  $H_X$  les atomes  $Q_X, R_X, \{a_X\}$  et en rajoutant un nouveau sommet  $a'_X$  adjacent à tous les sommets de  $U_X \cup V_X$ . Par un argument similaire à celui du lemme précédent, il est facile de vérifier que  $H'_X$  est le line-graphe d'un graphe biparti, que  $H'_X$  n'a pas de clique d'articulation, n'est pas une clique et n'a pas de méchant impair. L'hypothèse de récurrence (puisque  $H'_X$  est plus petit que  $H$ ) assure l'existence dans  $H'_X$  d'un atome gentil différent de  $\{a'_X\}$ . Il est clair que cet atome est un atome gentil de  $H_X$ . Par suite, nous avons démontré que  $X'$  contient un atome gentil de  $H_X$ , lequel est clairement un atome gentil de  $H$ . Nous pouvons appliquer les mêmes arguments à  $Y$  et trouver un atome gentil de  $H$  dans la composante  $H - C_Y$  qui contient  $Y$ . Par conséquent, nous avons trouvé deux atomes gentils de  $H$  non adjacents et la preuve du Théorème 5.3 est achevée.  $\square$

### 5.1.2 Preuve du Théorème 5.1

On commence par observer que, par les Lemmes 2.1 et 2.2, toute séquence de contractions de paires d'amis sur un méchant impair conduit à l'antitrou  $\tilde{C}_6$ , lequel n'a aucune paire d'amis. Par suite, aucun graphe parfaitement contractible ne peut contenir de méchant impair. En outre, un graphe parfaitement contractible ne contient ni trou impair ni antitrou, puisque ces derniers n'ont aucune paire d'amis. Par conséquent, la condition nécessaire étant validée, il reste à prouver la condition suffisante.

Dans ce qui suit,  $G$  est sans trou impair, sans antitrou et sans méchant impair. Si  $G$  a une clique d'articulation  $C$ , il est clair que  $G$  ne contient pas de trou impair, ni d'antitrou, ni de méchant impair dans la mesure où chaque pièce de  $G$  relative à  $C$  n'en contient pas. En conséquence, et par le Lemme 5.1, la preuve du Théorème 5.1 peut supposer que  $G$  est sans clique d'articulation et donc (Théorème I) est soit élémentaire soit singulier. Le cas où  $G$  est singulier a été résolu par les Théorèmes J et L. Ne reste plus que le cas où  $G$  est élémentaire. Le Théorème M va être utilisé ainsi que ses notations (voir chapitre 2). Si  $G$  est co-biparti, le résultat désiré est donné par les Théorèmes J et K. On suppose donc que  $G$  n'est pas co-biparti.

Nous disons qu'une paire  $(X_i, Y_i)$  est *graduée* si, pour chaque paire de sommets  $u, v$  de  $X_i$ , les ensembles  $N(u) \cap Y_i$  et  $N(v) \cap Y_i$  sont comparables par inclusion ; cela équivaut d'ailleurs à la propriété symétrique : pour chaque paire  $u, v$  de  $Y_i$ , les ensembles  $N(u) \cap X_i$  et  $N(v) \cap X_i$  sont comparables par inclusion.

Le théorème qui suit prouve clairement la condition suffisante du Théorème 5.1.

**Théorème 5.4** *Pour un graphe élémentaire  $G$  qui n'est pas co-biparti, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $G$  ne contient ni méchant impair ni antitrou
- (2) Le squelette réduit  $H$  ne contient pas de méchant impair et chaque paire  $(X_i, Y_i)$  est graduée
- (3)  $G$  est parfaitement contractible

*Démonstration.* L'implication (3) $\Rightarrow$ (1) est évidente.

L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est facile, comme on va le voir. Premièrement,  $H$  ne contient pas de méchant impair, puisque il est un sous-graphe induit de  $G$ . Deuxièmement, supposons que pour un certain  $i$  la paire  $(X_i, Y_i)$  ne soit pas graduée. Dans ce cas, il existe deux sommets  $x, x'$  de  $X_i$  et deux sommets  $y, y'$  de  $Y_i$  tels que  $x$  voit  $y$  et ne voit pas  $y'$ , tandis que  $x'$  voit  $y'$  et ne voit pas  $y$ . Puisque  $G$  n'est pas co-biparti,  $G - (X_i \cup Y_i)$  n'est pas vide, et par connectivité, il existe dans  $G - (X_i \cup Y_i)$  un sommet  $u$  adjacent à  $X_i$ . Par définition de l'augmentation,  $u$  voit tous les sommets de  $X_i$ . Puisque  $G$  n'a pas de clique d'articulation,  $G - X_i$  est connexe et par suite il existe une chaîne plus courte  $P$  reliant  $u$  à  $Y_i$  dans  $G - X_i$ . On observe que l'avant-dernier sommet de  $P$  avant  $Y_i$  est dans  $G - Y_i$  et voit tous les sommets de  $Y_i$ . Dans ce cas, les sommets dans  $\{x, x', y, y'\} \cup (P - Y_i)$  engendrent un méchant impair.

Nous allons prouver l'implication (2) $\Rightarrow$ (3) par récurrence sur le nombre de sommets. Donc, nous devons uniquement démontrer que  $G$  est amicalement contractible. Cette preuve est de nature essentiellement algorithmique.

**Fait 5.1**  $H$  n'a pas de clique d'articulation.

*Démonstration.* Supposons que  $Q$  soit une clique d'articulation minimale de  $H$ . Si  $Q$  est normale, alors  $M(Q)$  est une clique d'articulation de  $H$  (contradiction). Si  $Q$  n'est pas

normale, alors  $Q \subseteq \{x_i, y_i\}$  pour un certain  $i$ . Par suite, le fait que  $x_i y_i$  est une arête plate implique que l'un des  $x_i, y_i$  est un sommet d'articulation de  $H$ , et dans ce cas un des ensembles  $X_i, Y_i$  est une clique d'articulation de  $G$  (contradiction).  $\square$

Le graphe  $H^*$  n'est pas une clique, sinon soit  $G = H^*$  soit  $H^*$  serait formé par une unique arête plate et dans ce cas,  $G$  serait un graphe co-biparti. Par suite,  $H$  n'est pas une clique et puisque  $H$  n'a pas de clique d'articulation, le Théorème 5.3 assure l'existence d'un sommet gentil  $x$  dans  $H$ . On va écrire  $N_H(x) = \{u, v\}$ . Maintenant, nous allons prouver que  $M(u) \cup M(v)$  contient beaucoup de paires d'amis qui sont intéressantes à contracter. On observe que  $ux$  et  $vx$  sont des arêtes plates de  $H$  et peuvent donc être spéciales. Il peut arriver aussi que pour un certain sommet  $u'$  de  $N_H(u) - x$ , l'arête  $uu'$  soit une arête spéciale de  $H^*$ , et dans ce cas,  $N_H(u) = \{x, u'\}$ ; d'une façon similaire, il peut arriver que pour un certain sommet  $v'$  dans  $N_H(v) - x$ , l'arête  $vv'$  soit une arête spéciale, et dans ce cas,  $N_H(v) = \{x, v'\}$ . Nous allons réserver les noms  $u'$  et  $v'$  pour ces cas. Nous rappelons que les arêtes spéciales sont deux à deux non incidentes.

On observe que pour chaque  $w$  dans  $H$ , il existe un ordre total  $<_w$  sur les sommets de  $M(w)$  tel que  $a <_w b$  si et seulement si  $N(a) \cup \{a\} \subseteq N(b) \cup \{b\}$ . En effet, si  $M(w)$  est un atome banal, alors n'importe quel ordre est bon. Si  $M(w) = X_i$ , nous prenons l'ordre engendré par le fait que chaque paire  $(X_i, Y_i)$  est graduée, puisque par la définition d'augmentation, chaque sommet de  $X_i$  voit chaque sommet de  $N(X_i) - Y_i$ .

Nous allons considérer maintenant les cliques  $M(u)$  et  $M(v)$  dans  $G$ . On va supposer, sans perte de généralité, que  $|M(u)| \leq |M(v)|$ . Nous allons écrire  $M(u) = \{u_1, \dots, u_p\}$  avec  $p = |M(u)|$ , de manière que  $u_i <_u u_j$  si et seulement si  $1 \leq j < i \leq p$ . Nous écrirons aussi  $M(v) = \{v_1, \dots, v_q\}$ , avec  $q = |M(v)|$ , de manière que  $v_i <_v v_j$  lorsque  $1 \leq j < i \leq q$ . Soit  $G_0 = G$  et, pour  $j \leq p$ , soit  $G_j$  le graphe obtenu à partir de  $G_{j-1}$  en contractant la paire  $\{u_j, v_j\}$  en un nouveau sommet  $c_j$ .

**Fait 5.2**  $M(x)$  contient un sommet  $x_0$  qui voit tous les sommets de  $M(u) \cup M(v)$ .

*Démonstration.* Si les deux arêtes  $xu$  et  $xv$  sont normales dans  $H$ , alors ce fait est trivialement vrai, puisque chaque sommet de  $M(x)$  voit tous les sommets de  $M(u) \cup M(v)$ . Supposons maintenant qu'une des arêtes  $xu, xv$  soit spéciale, disons  $xu$ , c'est-à-dire,  $M(x) = X_k$  et  $M(u) = Y_k$  pour un certain  $k$ . Chaque sommet de  $M(x)$  voit tous les sommets de  $M(v)$ . Puisque  $(X_k, Y_k)$  est graduée et que chaque sommet de  $Y_k$  a un voisin dans  $X_k$  par le Théorème M, le sommet maximal dans  $(X_k, <_x)$  voit tous les sommets de

$Y_k$ . Celui-ci est le sommet désiré.  $\square$

**Fait 5.3** *Pour chaque  $i = 1 \dots, p$ ,  $\{u_i, v_i\}$  est une paire d'amis de  $G_{i-1}$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe une chaîne impaire sans corde  $P$  entre  $u_i$  et  $v_i$  dans  $G_{i-1}$ . On observe que  $P$  ne contient aucun des sommets contractés  $c_1, \dots, c_{i-1}$ , puisque ils sont tous adjacents à  $u_i$  et  $v_i$ . Par suite,  $P$  est une chaîne contenue dans  $G - \{u_1, \dots, u_{i-1}, v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . On observe que  $P$  a au plus deux sommets dans  $M(u)$  et au plus deux sommets dans  $M(v)$ , car  $M(u)$  et  $M(v)$  sont des cliques. Puisque  $M(u) \cup M(v)$  est une double-clique d'articulation de  $G$ ,  $P$  est entièrement contenue dans  $G - M(x)$  ou entièrement contenue dans  $M(u) \cup M(x) \cup M(v)$ . Nous allons supposer premièrement que  $P \cap M(x) = \emptyset$ . Si les sommets intérieurs de  $P$  étaient tous dans  $G - M(u) \cup M(v) \cup M(x)$ , alors  $P + x_0$  serait un trou impair. Par suite,  $P$  doit avoir un autre sommet dans  $M(u)$  ou  $M(v)$ . Si  $P$  a un autre sommet dans  $M(u)$  alors  $P = u_i u_j a \dots v_i$ , où  $a$  n'est pas dans  $M(u)$ . Cependant, l'existence de  $a$  signifie que  $u_i \leq u_j$ , c'est-à-dire,  $j < i$ , et ceci est en contradiction avec le fait que  $P$  ne contient aucun  $u_m$  avec  $m < i$ . On peut appliquer le même raisonnement dans le cas où  $P$  aurait un autre sommet dans  $M(v)$ . Nous pouvons supposer désormais que  $P$  est contenue dans  $M(u) \cap M(x) \cap M(v)$ . Nous rappelons qu'au plus une des arêtes  $xu, xv$  est spéciale et donc tout sommet de  $M(x)$  voit soit tous les sommets de  $M(u)$  soit tous les sommets de  $M(v)$ . Ceci implique que  $P = u_i u_j a v_i$  ou  $P = u_i a v_i v_j$  pour un certain  $a \in M(x)$ . Mais l'existence de  $a$  signifie que  $u_i <_u u_j$  ou  $v_i <_v v_j$ , contradiction analogue à la précédente.  $\square$

Par le lemme précédent, le graphe  $G_p$  est le résultat d'une séquence de contractions de paires d'amis en partant de  $G$ . Par conséquent, il suffit de prouver que  $G_p$  est amicalement contractible. Soit  $C = \{c_1, \dots, c_p\}$  et  $S = \{v_{p+1}, \dots, v_q\}$  si  $q > p$ . On observe que  $C \cup S$  est une clique d'articulation de  $G_p$ , et  $M(x)$  est une composante de  $G_p - (C \cup S)$ . Puisque  $M(x) \cup C \cup S$  est co-biparti, par le Théorème K et le Lemme 5.1, on est amené à prouver que  $G_p - M(x)$  est amicalement contractible (en effet l'ordre  $<_x$  des sommets de  $M(x)$  est un ordre d'élimination simpliciale). On observe aussi que dans  $G_p - M(x)$  le voisinage de  $S$  peut être écrit comme  $C \cup Z$  où  $Z$  est un sous-ensemble de  $N_G(M(v)) - M(x)$ . L'ensemble  $C \cup Z$  est une clique : en effet chaque sommet de  $Z$  a un voisin dans  $S$  et est donc adjacent à tous les sommets de  $C$ , à cause de l'ordre  $<_v$  (cet ordre ordonne  $S$  en une séquence d'élimination simpliciale). Par conséquent, en appliquant le Lemme 5.1 et le Théorème K à  $S \cup C \cup Z$ , nous devons seulement démontrer que le graphe  $G' = G_p - M(x) - S$  est amicalement contractible. Soit  $Q_u$  (resp.  $Q_v$ ) la clique maximale de  $G$  qui contient  $M(u)$

(resp.  $M(v)$ ) et pas  $M(x)$ . On observe que  $N_{G'}(C) = Q_u \cup Q_v$ . Un sommet quelconque de  $C$  peut ne pas voir un sommet de  $Q_u$ , mais ceci arrive seulement si  $uu'$  est une arête spéciale de  $H^*$ ; de manière similaire, un sommet quelconque de  $C$  peut ne pas voir un sommet de  $Q_v$ , et alors  $vv'$  est une arête spéciale de  $H^*$ .

Nous allons distinguer maintenant deux cas.

**Cas 1** *Au moins un de  $Q_u, Q_v$  est une clique normale de  $H$ .* Le fait qui suit et l'hypothèse de récurrence impliquent que  $G'$  est parfaitement contractible.

**Fait 5.4** *Dans le cas 1,  $G'$  est élémentaire, son squelette ne contient pas de méchant impair et ses augmentants sont gradués.*

*Démonstration.* Soit  $H' = (H/uv) - x$  et appelons  $c_{uv}$  le sommet contracté. Par le Lemme 5.4,  $H'$  est un graphe LGB et ne contient pas de méchant impair.

Premièrement, supposons que  $C$  voit tous les sommets de  $Q_u \cup Q_v$ . Soit  $H'^*$  le graphe issu de  $H'$  en remplaçant chaque sommet  $z$  par l'atome  $A'(z)$  défini de la manière suivante. Si  $N_H(u) \cap N_H(v) = \{x\}$ , alors l'ensemble  $A'(c_{uv}) = C$ , et on définit  $A'(z) = A(z)$  pour chaque sommet  $z$  de  $H' - c_{uv}$ . Si  $N_H(u) \cap N_H(v) = \{x, y\}$ , alors  $c_{uv}$  et  $y$  sont des jumeaux dans  $H'$  et nous pouvons enlever  $y$  de  $H'$ ; ensuite, on définit  $A'(c_{uv}) = C \cup A(y)$  et  $A'(z) = A(z)$  pour chaque sommet  $z$  de  $H' - \{c_{uv}, y\}$ . Il est facile de vérifier maintenant que  $G'$  est obtenu à partir de  $H'^*$  en augmentant chaque arête spéciale  $x_i y_i$  de  $H^*$  qui n'est pas incidente à  $x, u, v$  en co-biparti  $(X_i, Y_i; E_i)$ . Ces augmentants sont gradués par hypothèse. Le graphe  $H'^*$  ne contient pas de méchant impair puisque  $H'$  n'en contient pas (on applique le Lemme 5.3).

Supposons maintenant qu'il existe un sommet de  $C$  qui ne voit pas tous les sommets de  $Q_u \cup Q_v$ . Par symétrie et en vertu de l'hypothèse du Cas 1, ceci signifie que  $uu'$  est une arête spéciale de  $H^*$ , pour un certain  $u' \neq x$ , et que  $Q_v$  est une clique normale. On observe que  $vu'$  n'est pas une arête de  $H$ , sinon  $M(v) \cup M(u')$  serait une clique d'articulation de  $G$ . Par suite,  $N_H(u) \cap N_H(v) = \{x\}$ . Soit  $H'^*$  le graphe obtenu à partir de  $H$  en remplaçant chaque sommet  $z$  de  $H$  par l'atome  $A'(z)$  défini de la manière suivante : on prend  $A'(c_{uv}) = \{c_{uv}\}$ ,  $A'(u') = \{u'\}$ , et  $A'(z) = A(z)$  pour chaque sommet  $z$  de  $H - \{c_{uv}, u'\}$ . Il est facile de vérifier que  $G'$  est obtenu à partir de  $H'^*$  en augmentant chaque arête spéciale  $x_i y_i$  de  $H^*$  qui n'est pas incidente à  $x, u, v$  en co-biparti  $(X_i, Y_i; E_i)$ , et en augmentant l'arête spéciale  $c_{uv} u'$  en  $(C, M(u'))$ . Il est facile de vérifier que ces augmentants sont gradués, par hypothèse. En particulier,  $(C, M(u'))$  est gradué car  $(M(u), M(u'))$  est gradué. Par

le Lemme 5.3, le graphe  $H^*$  ne contient pas de méchant impair.  $\square$

**Cas 2**  $Q_u = uu'$  et  $Q_v = vv'$  sont toutes deux des arêtes spéciales de  $H^*$ .

On remarque que, dans ce cas,  $G'$  pourrait contenir une griffe. Par exemple, si  $u_2$  a un non voisin dans  $M(u')$  et  $v_2$  a un non voisin dans  $M(v')$  alors, dans  $G'$ , ces deux non voisins avec  $c_1$  et  $c_2$  forment une griffe. Cette apparition de griffes va rester temporaire car nous allons poursuivre le processus de contraction jusqu'à leur élimination.

Soit  $R_{u'}$  la clique maximale de  $G$  qui contient  $M(u')$  et pas  $M(u)$ , et soit  $R_{v'}$  la clique maximale qui contient  $M(v')$  et pas  $M(v)$ . On observe que  $R_{u'}$  et  $R_{v'}$  sont des cliques normales, car les arêtes spéciales forment un couplage. Nous pouvons supposer que  $|M(u')| \leq |M(v')|$ . On va écrire  $M(u') = \{u'_1, \dots, u'_{p'}\}$  tel que  $u'_i <_{u'} u'_j$  lorsque  $1 \leq j < i \leq p'$ , avec  $p' = |M(u')|$ . Nous allons aussi écrire  $M(v') = \{v'_1, \dots, v'_{q'}\}$  tel que  $v'_i <_{v'} v'_j$  lorsque  $1 \leq j < i \leq q'$ , avec  $q' = |M(v')|$ . Définissons  $G'_0 = G'$ , et soit  $G'_i$  le graphe obtenu à partir de  $G'_{i-1}$  en contractant la paire  $u'_i, v'_i$  (le sommet contracté sera appelé  $c'_i$ ). On observe que  $c_1$  voit tous les sommets de  $M(u') \cup M(v')$  car il est maximal dans les ordres  $<_u$  et  $<_v$ .

**Fait 5.5** Pour  $1 \leq i \leq p'$ ,  $\{u'_i, v'_i\}$  est une paire d'amis de  $G'_{i-1}$ .

La preuve de ce fait est pratiquement identique à celle du Fait 5.3, avec  $c_1$  à la place de  $x_0$ .  $\square$

Ce fait montre que le graphe  $G'_{p'}$  est le résultat d'une séquence de contractions de paires d'amis partant de  $G'$ . Par suite, il suffit de montrer que  $G'_{p'}$  est amicalement contractible. Posons  $C' = \{c'_1, \dots, c'_{p'}\}$ , et  $S' = \{v'_{p'+1}, \dots, v'_{q'}\}$  si  $q' > p'$ . Comme avant,  $C' \cup S'$  est une clique d'articulation de  $G'_{p'}$ , l'ensemble  $C$  est une composante de  $G'_{p'} - C' \cup S'$ , et  $C \cup C' \cup S'$  est co-biparti. Par conséquent, par le Théorème K et le Lemme 5.1, on est amené à démontrer que  $G'_{p'} - C$  est amicalement contractible. Dans ce nouveau graphe, chaque sommet de  $C'$  voit tous les sommets de  $(R_{u'} - M(u')) \cup (R_{v'} - M(v'))$ , parce que  $R_{u'}$  et  $R_{v'}$  sont des cliques normales. On remarque aussi que le voisinage de  $S'$  est la clique  $C' \cup R_{v'} - M(v')$ ; par conséquent, en appliquant le Lemme 5.1 et Théorème K à  $S'$  et à son voisinage, nous devons uniquement démontrer que le graphe  $G'' = G'_{p'} - C - S'$  est amicalement contractible.

**Fait 5.6**  $G''$  est élémentaire, son squelette ne contient pas de méchant impair et ses augmentants sont gradués.

*Démonstration.* Soit  $H'' = (H/u'v') - \{x, u, v\}$ , et  $c_{u'v'}$  le sommet contracté. Puisque  $H''$  peut aussi être défini comme  $((H/uv) - x)/u'v' - c_{uv}$ , on a, par le Lemme 5.4, que  $H''$  est un graphe LGB et ne contient pas de méchant impair. Soit  $H''^*$  le graphe obtenu à partir de  $H''$  en remplaçant chaque sommet  $z$  par l'atome  $A''(z)$  défini de la façon suivante : si  $N_H(u') \cap N_H(v') = \emptyset$  alors on pose  $A''(c_{u'v'}) = C'$ , et  $A''(z) = A(z)$  pour chaque sommet  $z$  de  $H'' - c_{u'v'}$ . Si  $N_H(u') \cap N_H(v') = \{y\}$  alors  $c_{u'v'}$  et  $y$  sont des jumeaux dans  $H''$  et nous pouvons enlever  $y$  de  $H''$ ; ensuite, nous posons  $A''(c_{u'v'}) = C' \cup A(y)$ , et  $A''(z) = A(z)$  pour chaque sommet  $z$  de  $H'' - \{c_{u'v'}, y\}$ . Il est facile de vérifier maintenant que  $G''$  est obtenu à partir de  $H''^*$  en augmentant chaque arête spéciale  $x_i y_i$  de  $H^*$  différente de  $uu'$  et  $vv'$ , en co-biparti  $(X_i, Y_i; E_i)$ . Ces augmentants sont gradués par hypothèse. Par le Lemme 5.3, le graphe  $H''^*$  ne contient pas de méchant impair.  $\square$

Ce fait précédent et l'hypothèse de récurrence impliquent que  $G''$  est parfaitement contractible.  $\square$

On a maintenant la preuve complète du Théorème 5.4, et donc du Théorème 5.1.  $\square$

### 5.1.3 Reconnaissance des graphes sans griffes parfaitement contractibles

Le problème de décider si un graphe sans griffe donné  $G$  est parfaitement contractible ou pas peut être résolu en utilisant les résultats précédents. Premièrement, on peut utiliser l'algorithme de Whitesides [47] pour trouver l'arbre de décomposition de  $G$  par clique d'articulation. Ensuite, on teste si chaque feuille est soit un graphe élémentaire soit un graphe singulier, en utilisant les méthodes données en [7]. Pour un graphe singulier, on peut tester qu'il est parfaitement contractible comme cela a été mentionné à la suite du Théorème L. Pour un graphe élémentaire  $G$ , nous utilisons le Théorème M pour obtenir son squelette et ses augmentants. Si  $G$  est co-biparti, alors encore une fois nous pouvons déterminer si son complément a un trou impair comme on l'a mentionné à la suite du Théorème K. Si  $G$  n'est pas co-biparti, alors on peut utiliser la condition (2) du Théorème 5.4. Finalement, tester si les augmentants sont gradués est facile car il s'agit seulement de comparer des voisinages. Par conséquent, nous devons uniquement tester si un graphe LGB donné est parfaitement contractible.

#### Algorithme LGB-PC

*Entrée* : Un graphe LGB  $H$  ;

*Question* :  $H$  est-il parfaitement contractible?

*Etape 0.*  $H_0 = H$  ;

*Etape 1.* Tant que  $H_0$  a un sommet gentil  $x$ , on fait  $H_0 := H_0/N(x) - x$  et s'il apparaît dans ce graphe transformé un atome non trivial, alors on enlève tous les sommets sauf un de cet atome (ceci est légal par le Lemme 5.3.)

*Etape 2.* Si  $H_0$  est une clique, alors  $H$  est parfaitement contractible ; sinon il ne l'est pas.

Le Lemme 5.4 et le Théorème 5.3 assurent que l'algorithme est correct. Cet algorithme basé uniquement sur la recherche de sommets gentils et sur la contraction de leurs voisins peut être clairement exécuté en temps linéaire.

Dès qu'un graphe élémentaire  $G$  n'est pas parfaitement contractible et ses augmentants ne contiennent pas d'antitrou, on peut se demander comment trouver un méchant impair que  $G$  doit nécessairement contenir. On observe que, s'il existe un augmentant non gradué, alors dans la preuve (1) $\Rightarrow$ (2) du Théorème 5.4 apparaît un algorithme simple exhibant un méchant impair. En revanche, si les augmentants sont gradués, alors le graphe  $H_0$  trouvé dans l'algorithme LGB-PC appliqué au squelette de  $G$  contient un méchant impair, sans peut-être lui être égal. Dans ce cas, en s'appuyant sur la preuve du Théorème 5.3 on peut construire un algorithme pour trouver un méchant impair dans  $H_0$ , comme on va le décrire dans ce qui suit.

Premièrement, on commence par déterminer un trou de  $H_0$ . En posant  $H_0 = L(B_0)$ , cette tâche est équivalente à déterminer un bloc de  $B_0$  qui n'est pas une arête ni un  $C_4$ . Deuxièmement, puisque  $H_0$  lui-même n'est pas un trou, la preuve du Lemme 5.5 fournit un algorithme linéaire pour trouver un méchant  $\mathcal{S} = (X, Y, Z)$  dans  $H_0$ . Si ce méchant est impair, c'est gagné. Troisièmement, si  $\mathcal{S}$  est un méchant pair, la preuve du Lemme 5.6 fournit un algorithme linéaire pour trouver soit un méchant impair de  $H_0$  soit une double-clique d'articulation  $C_X$ . Dans le dernier cas, nous pouvons supposer que la composante de  $H_0 - C_X$  qui ne contient pas  $Y \cup Z$  n'est pas une chaîne, sinon on choisit  $C_Y$  ou  $C_Z$  ; en effet, si les trois composantes étaient des chaînes, ceci signifierait que  $H_0 = \mathcal{S}$ , une contradiction. Appelons  $H'_0$  et  $H''_0$  les deux composantes de  $H_0 - C_X$ . On va considérer le graphe  $H_1$  obtenu à partir de  $H'_0 \cup C_X$  en rajoutant un sommet artificiel

$a_X^1$  adjacent à tous les sommets de  $C_X$ . Soit  $H_2$  le graphe obtenu à partir de  $H_0'' \cup C_X$  de façon similaire. Pour chaque paire de sommets non adjacents  $u, v$  dans  $C_X$ , on prend une chaîne paire quelconque  $P_1(u, v)$  dans  $H_0' \cup C_X$  et une chaîne analogue  $P_2(u, v)$  dans  $H_0'' \cup C_X$ . De telles chaînes existent par définition de  $C_X$ . En utilisant un argument semblable à celui du Lemme 5.7, nous savons qu'au moins un des deux graphes  $H_1, H_2$  contient un méchant impair. Par conséquent, en itérant ce procédé sur ces deux graphes et d'une façon récursive, nous aboutirons à un méchant impair dans, disons,  $H_1$ . Alors, soit c'est un méchant impair de  $H_0$ , soit il contient le sommet artificiel  $a_X^1$  et, dans ce cas, nous pouvons obtenir un méchant impair de  $H_0$  en remplaçant  $a_X^1$  par  $P_2(u, v)$ , où  $\{u, v\} = N_{H_1}(a_X^1)$ . Cet algorithme a une complexité linéaire.

## 5.2 Graphes sans griffe de quasi-parité stricte

### 5.2.1 Preuve du Théorème 5.2

La preuve de ce théorème s'élabore en même temps qu'un algorithme qui, partant d'un graphe sans griffe donné, certifie que ce graphe est de quasi-parité stricte, et sinon construit une obstruction induite (laquelle, dans l'hypothèse de perfection, est soit un antitrou pair soit un graphe LGB).

Comme dans la section précédente, pour un tel graphe  $G$  nous allons premièrement construire son arbre de décomposition par clique d'articulation. Le Lemme 5.2 reporte la qualité de quasi-parité stricte aux feuilles de cet arbre. Quand le graphe associé à une feuille est co-biparti ou singulier, sa qualité d'être de quasi-parité stricte est équivalente à celle d'être parfaitement ordonnable. Cette qualité peut être testée comme indiqué dans l'introduction (dans ce cas, les seules obstructions sont les antitrous pairs).

Nous allons donc supposer que  $G$  est un graphe élémentaire, non co-biparti et sans clique d'articulation. Le Théorème M donne son squelette  $H$ , avec  $h$  arêtes plates spéciales  $x_1y_1, \dots, x_hy_h$  de  $H$ , et les augmentants correspondants  $(X_1, Y_1; E_1), \dots, (X_h, Y_h; E_h)$ .

**Lemme 5.8** *Soit  $M$  une obstruction de  $G$  et  $i$  un entier tel que  $M \cap (X_i \cup Y_i) \neq \emptyset$ . Si  $M \not\subseteq X_i \cup Y_i$ , alors les assertions suivantes sont vraies :*

- *Si  $(M \cap X_i, M \cap Y_i)$  est gradué alors chacun des ensembles  $M \cap X_i$  et  $M \cap Y_i$  est réduit à un sommet et ces deux sommets sont adjacents.*

- Si  $(M \cap X_i, M \cap Y_i)$  n'est pas gradué, alors chacun des ensembles  $M \cap X_i$  et  $M \cap Y_i$  a exactement deux sommets adjacents et ces quatre sommets engendrent un  $C_4$ .

*Démonstration.* Supposons premièrement que  $(M \cap X_i, M \cap Y_i)$  est gradué. Soit  $x_i$  et  $y_i$  des sommets maximaux de  $(M \cap X_i, <)$  et  $(M \cap Y_i, <)$  respectivement, où comme on a convenu le symbole  $<$  représente la relation d'inclusion de voisinage. Par suite,  $x_i$  voit tous les sommets de  $M \cap Y_i$  et  $y_i$  voit tous les sommets  $M \cap X_i$ . Soit  $M' = M - (X_i \cup Y_i - \{x_i, y_i\})$ . Nous allons démontrer que  $M'$  est un sous-graphe de  $G$  sans aucune paire d'amis. Ceci et la qualité d'obstruction de  $M$  impliqueront que  $M = M'$  et par suite, que  $M \cap X_i = \{x_i\}$  et  $M \cap Y_i = \{y_i\}$  comme désiré. Pour le prouver, on va considérer deux sommets non adjacents  $u, v$  de  $M'$  et on va montrer qu'il existe une chaîne impaire sans corde qui les relie dans  $M'$ . Puisque  $M$  est une obstruction, il existe un chaîne impaire sans corde  $P$  reliant  $u$  à  $v$  dans  $M$ . Il est clair que  $P$  contient au plus deux sommets de  $X_i$  et au plus deux sommets de  $Y_i$ . Si  $P$  contient deux sommets  $a, b$  de  $M \cap X_i$ , alors elle ne contient aucun sommet de  $N(X_i) - Y_i$ , sinon elle contiendrait un triangle. Par ailleurs, puisque  $M \cap X_i$  est gradué, nous pouvons supposer que  $a \leq b$ . Par suite  $P = abc \dots v$ , avec  $c \in Y_i$  : il est impossible que  $P = bac \dots v$  car tout voisin de  $a$  dans  $Y_i$  est voisin de  $b$ , et cette même constatation montre que  $a < b$ . On arrive ainsi à la contradiction  $u = a$  puisque  $a \in X_i - \{x_i\}$ . Par conséquent  $P$  contient au plus un sommet de  $X_i$  et de façon analogue, au plus un sommet de  $Y_i$ . On observe que si  $P$  contient un sommet  $x$  de  $X_i$ , alors  $N(x) \cap P$  est formé par au plus un sommet de  $M \cap Y_i$  et au plus par un sommet de  $N(X_i) \cap M - Y_i$ . Maintenant, nous allons modifier  $P$  de la façon suivante : si  $P$  contient un sommet de  $X_i$  (resp. de  $Y_i$ ) alors on remplace ce sommet par  $x_i$  (resp. par  $y_i$ ). On obtient une chaîne sans cordes  $P'$  de  $M'$  qui est manifestement impaire.

Nous allons supposer maintenant que  $(M \cap X_i, M \cap Y_i)$  n'est pas gradué. Donc, il existe deux sommets  $x_i, x'_i$  dans  $M \cap X_i$  et deux sommets  $y_i, y'_i$  dans  $Y_i \cap M$  tels que  $x_i$  voit  $y_i$  et ne voit pas  $y'_i$ , tandis que  $x'_i$  ne voit pas  $y_i$  et voit  $y'_i$ . Soit  $M' = M - (X_i \cup Y_i - \{x_i, x'_i, y_i, y'_i\})$ . Nous allons démontrer que  $M'$  est un sous-graphe de  $G$  sans aucune paire d'amis. Ceci et la qualité d'obstruction de  $M$  impliqueront que  $M = M'$  et, par suite,  $M \cap X_i = \{x_i, x'_i\}$  et  $M \cap Y_i = \{y_i, y'_i\}$  comme désiré. Pour le prouver, nous allons considérer deux sommets non adjacents  $u, v$  de  $M'$ . Puisque  $M$  est une obstruction, il existe une chaîne impaire sans cordes  $P$  dans  $M$  qui relie  $u$  à  $v$ . Si  $P$  contient au plus un sommet de  $X_i$  et au plus un sommet de  $Y_i$ , on peut construire une chaîne impaire sans corde  $P'$  de  $M'$  reliant  $u$  à  $v$  comme on l'a fait dans le cas précédent, en remplaçant, dans  $P$ , un sommet de  $X_i$  par

$x_i$  et un sommet de  $Y_i$  par  $y_i$ . Par suite, supposons que  $P$  contienne deux sommets  $a, b$ , disons appartenant à  $M \cap X_i$ . Comme dans le premier cas,  $P$  ne contient aucun sommet de  $N(X_i) - Y_i$ . Par suite, un des sommets  $a, b$  est l'extrémité de  $P$ , sinon  $P = u \cdots dabc \cdots v$ , avec  $c, d \in Y_i$ , et donc  $cd$  serait une arête, contradiction. Par conséquent,  $P = abc \cdots v$ , avec  $c \in Y_i$ . Etant donné le rôle symétrique de la paire  $x_i, x'_i$ , nous pouvons supposer que  $a = u = x_i$ . Si le quatrième sommet  $w$  de  $P$  n'est pas dans  $Y_i$ , alors  $x_i x'_i y'_i + P[w \cdots v]$  est une chaîne impaire sans cordes dans  $M'$  reliant  $u$  à  $v$  et on a le résultat désiré. Si  $w$  appartient à  $Y_i$ , alors  $c, w \in Y_i$ , et comme avant, ceci implique que  $P$  n'a pas de sommets dans  $N(Y_i) - X_i$ . Par conséquent,  $P = x_i b c w$  et alors  $w = v = y'_i$ . Or, il existe dans  $M'$  une chaîne impaire sans cordes reliant  $x_i$  à  $y'_i$ . En effet, par hypothèse,  $M - (X_i \cup Y_i)$  n'est pas vide et contient donc un sommet  $x$  dans  $N(X_i)$ . Puisque  $M$  n'a pas de clique d'articulation,  $M - X_i$  est connexe et donc il existe une chaîne plus courte  $Q$  reliant  $x$  à  $M \cap Y_i$  dans  $M - X_i$ . L'avant-dernier sommet  $y$  de  $Q$  avant  $M \cap Y_i$  est dans  $N_M(M \cap Y_i) - X_i$  et voit tous les sommets de  $Y_i$ . Alors  $x_i x + Q[x \cdots y] + y y'_i$  est la chaîne désirée (c'est une chaîne impaire car  $x_i x + Q[x \cdots y] + y y_i + y_i x_i$  est un trou).  $\square$

Ce lemme suggère une définition. Le *squelette amélioré* d'un graphe élémentaire  $G$  est le graphe  $H^\#$  obtenu à partir de  $H^*$  de la façon suivante : pour chaque  $i$  tel que l' $i$ -ème augmentant est non gradué, on rajoute deux sommets adjacents  $x'_i, y'_i$  et toutes les arêtes entre  $x'_i$  et  $N_{H^*}(x_i) \cup \{x_i\} - y_i$  ainsi qu'entre  $y'_i$  et  $N_{H^*}(y_i) \cup \{y_i\} - x_i$ . Il est clair que  $H^\#$  est un sous-graphe LGB de  $G$ . En effet, soit  $b_i$  le sommet de  $B^*$  qui représente la clique maximale  $x_i y_i$ . Pour chaque  $i$  tel que l' $i$ -ème augmentant n'est pas gradué, on rajoute un nouveau sommet  $b'_i$  dans  $B^*$  et toutes les arêtes entre ce sommet et les voisins de  $b_i$ . Le graphe biparti qui résulte de ces additions sera appelé  $B^\#$ . Il est facile de vérifier que  $H^\# = L(B^\#)$ .

**Lemme 5.9** *Soit  $G$  un graphe élémentaire qui contient une obstruction  $M$ . Alors soit  $M$  est un antitrou pair soit  $M$  est contenu dans le squelette amélioré de  $G$ .*

*Démonstration.* Si  $G$  est co-biparti, ou si  $G$  n'est pas co-biparti mais  $M$  est entièrement contenu dans le  $i$ -ème augmentant  $X_i \cup Y_i$ , alors le Théorème K implique que  $M$  est un antitrou. Si  $G$  n'est pas co-biparti et que  $M$  n'est pas incluse dans un certain  $X_i \cup Y_i$ , alors le Lemme 5.8 implique que  $M$  est contenu dans le squelette amélioré.  $\square$

Comme conséquence immédiate nous avons :

**Théorème 5.5** *Un graphe élémentaire est de quasi-parité stricte si et seulement si son*

*squelette amélioré est un graphe de quasi-parité stricte et chaque augmentant est le complément d'un graphe biparti-cordal.*  $\square$

L'ensemble des faits qu'on a prouvé dans ce qui précède constitue clairement une preuve du Théorème 5.2.  $\square$

Au passage, le Théorème 5.5 produit un algorithme polynomial pour tester qu'un graphe élémentaire  $G$  est ou non un graphe de quasi-parité stricte. On reporte le test sur le squelette amélioré de  $G$  d'une part et sur le problème de décider si les augmentants sont des compléments de graphes biparti-cordaux d'autre part (ce dernier problème a été signalé comme facile à la suite du rappel du Théorème K).

La sous-section qui suit présente un algorithme pour tester qu'un graphe LGB donné (le squelette amélioré) est de quasi-parité stricte ou non.

### 5.2.2 Reconnaissance des graphes LGB de quasi-parité stricte

Soit  $G$  un graphe LGB connexe, pour lequel on veut savoir s'il est de quasi-parité stricte. Nous pouvons supposer qu'il est le line-graphe d'un graphe biparti simple, puisque des sommets jumeaux ne peuvent pas tous les deux appartenir à une même obstruction. Une paire d'amis qui est en même temps une articulation sera appelée *une articulation paire à deux sommets*. Nous allons utiliser un résultat [24] reformulé de la manière suivante :

**Théorème N ([24])** *Si  $H$  est un graphe LGB de connectivité deux, ses seules paires d'amis sont les articulations paires à deux sommets.*  $\square$

#### Algorithme LGB-QPS

*Entrée :* Un graphe  $G$  qui est LGB ;

*Question :*  $G$  est-il un graphe de quasi-parité stricte ?

*Etape 0.* Installer  $G$  dans une queue ;

*Etape 1.* Si la queue est vide, alors renvoyer la réponse oui ;

*Etape 2.* Sortir  $H$  de la queue ; examiner dans l'ordre les possibilités suivantes :

*Issue 1.*  $H$  a une clique d'articulation  $C$  : rentrer les pièces de  $H$  relatives à  $C$  dans la queue, retour à l'Etape 1 ;

*Issue 2.*  $H$  a une articulation paire à deux sommets  $C$  : rentrer dans la queue chaque composante de  $H - C$ , retour à l'Etape 1 ;

*Issue 3.*  $H$  est une clique : retour à l'Etape 1 ;

*Issue 4.* Aucune des trois précédentes : renvoyer la réponse non ;

Cet algorithme s'arrête parce que les graphes successifs mis dans la queue ont des tailles plus petites que celle du graphe qui est sorti de la queue. Afin de justifier sa validité, supposons premièrement qu'il s'arrête à l'Issue 4 avec le sous-graphe  $H$  de  $G$  qui est sorti de la queue. Clairement,  $H$  est 2-connexé, sans articulation paire à deux sommets et n'a donc pas de paires d'amis par le Théorème N. La réponse de l'algorithme est justifiée.

Pour achever la preuve de l'algorithme, au lieu de justifier le cas de l'arrêt à l'Etape 1, nous démontrerons que si  $G$  contient une obstruction  $M$ , cette obstruction sera toujours présente comme obstruction dans des graphes de la queue.

**Lemme 5.10** *Pendant toute l'exécution de l'algorithme,  $M$  reste une obstruction dans un des graphes de la queue.*

*Démonstration.* Au départ,  $M$  appartient à  $G$ . Supposons qu'à un moment nous sommes à l'Issue 1 ou 2, avec un graphe  $H$  contenant  $M$ . Par le Lemme 5.2,  $M$  n'a pas de clique d'articulation; par suite, si l'Issue 1 est utilisée avec  $H$ , alors  $M$  sera contenu dans une des pièces de  $H$  relatives à cette clique d'articulation. Si l'Issue 2 est utilisée avec  $H$ , soit  $\{x, y\}$  l'articulation à deux sommets de  $H$ . Il est clair que  $x, y$  ne peuvent pas être tous les deux dans  $M$ , puisque  $M$  n'a pas de paires d'amis. Donc, on peut supposer que  $M \subseteq H - y$ . Puisque  $x$  ne peut pas être une articulation de  $M$ , il faut que  $M \subseteq H' \cup \{x\}$  où  $H'$  est une composante de  $H - \{x, y\}$ . On observe que  $N(x) \cap H'$  est une clique car  $\{y\}$  n'est pas un sommet d'articulation de  $H$  et  $H - H'$  doit contenir une autre clique de  $N(x)$ . Par conséquent,  $M$  ne peut pas contenir  $x$ , sinon  $N(x) \cap H'$  serait une clique d'articulation de  $M$ . Par suite,  $M \subseteq H'$ , comme désiré.  $\square$

Ce lemme implique qu'en présence d'une obstruction le seul arrêt possible est l'Issue 4.

La complexité de l'algorithme dépend : 1) de la complexité de trouver une clique d'articulation ; nous savons [47] qu'elle est polynomiale ; 2) de la complexité de trouver une articulation paire à deux sommets. Cela peut être fait en examinant toutes les paires

de sommets. Pour chacune d'elles, il suffit de prendre une chaîne induite qui la relie et de vérifier sa parité.

Lorsque l'algorithme rend la réponse non, il donne un sous-graphe induit  $H$  de  $G$  qui nécessairement n'est pas de quasi-parité stricte, mais qui n'est pas une obstruction. Si on veut exhiber une obstruction de  $G$ , il suffit de reprendre l'algorithme pour chaque sous-graphe  $H - v$ ,  $v \in V(H)$ . Si tous ces sous-graphes sont reconnus de quasi-parité stricte, alors  $H$  est effectivement une obstruction. Sinon, l'algorithme produit un nouveau graphe sans paires d'amis  $H'$  lequel est strictement plus petit que  $H$ . La répétition de ce processus produira une obstruction après au plus  $O(|V(H)|^2)$  appels algorithmiques.



# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié deux conjectures : celle de Hougardy sur les sous-graphes exclus qui caractériseraient la classe des graphes de quasi-parité stricte ; et celle de Everett et Reed sur les sous-graphes exclus pour la classe des graphes parfaitement contractibles. Nous avons démontré que chacune de ces deux conjectures est vraie pour les graphes planaires et pour les graphes sans griffe. Puisque nous ne connaissons pas de résultats négatifs par rapport à ces conjectures, nos résultats nous permettent de soupçonner qu'elles sont toutes les deux vraies dans le cas général, ce qui nous encourage ainsi à poursuivre les recherches dans ce sens.

Dans les classes de graphes parfaitement contractibles connues (graphes triangulés, graphes de comparabilité, graphes de quasi-Meyniel, graphes faiblement triangulés et graphes parfaitement ordonnables, graphes parfaits sans griffe, sans antitrou et sans méchant impair, graphes parfaits planaires et sans méchant impair, graphes parfaits sans "bull" et sans antitrou [8]), nous avons observé que les graphes incomplets appartenant à ces classes possèdent toujours une séquence de contractions utilisant des paires d'amis à distance deux (c'est-à-dire ayant un voisin commun). Nous laissons donc comme question ouverte suggérée d'après cette thèse la question suivante :

**Conjecture 5.1** *Tout graphe parfaitement contractible qui n'est pas une clique possède une paire d'amis à distance deux dont la contraction produit un graphe parfaitement contractible.*

De manière parallèle et en vue de la conjecture de Everett et Reed on peut aussi poser la question suivante :

**Conjecture 5.2** *Tout graphe sans trou impair, sans antitrou, et sans méchant impair, et qui n'est pas une clique, possède une paire d'amis à distance deux dont la contraction produit un graphe sans trou impair, sans antitrou, et sans méchant impair.*

Bien évidemment cette dernière conjecture entraîne la précédente ainsi que la conjecture de Everett et Reed.

# Bibliographie

- [1] Berge (C.). – Les problèmes de coloration en théorie des graphes. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, vol. 9, 1960, pp. 123–160.
- [2] Bertschi (M.). – Perfectly contractile graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 50, 1990, pp. 222–230.
- [3] Bienstock (D.). – On the complexity of testing for even holes and induced odd paths. *Discrete Mathematics*, vol. 90, n° 1, 1991, pp. 85–92. – Corrigendum dans *Discrete Math.* Vol. 102, N. 1, 1992.
- [4] Burlet (M.) et Fonlupt (J.). – Polynomial algorithm to recognize a Meyniel graph. In : *Topics on Perfect Graphs (Ann. Discrete Math. 21)*, éd. par Berge (C.) et Chvátal (V.), pp. 225–252. – Amsterdam, North-Holland, 1984.
- [5] Chvátal (V.). – Perfectly ordered graphs. In : *Topics on Perfect Graphs (Ann. Discrete Math. 21)*, éd. par Berge (C.) et Chvátal (V.), pp. 63–65. – Amsterdam, North-Holland, 1984.
- [6] Chvátal (V.). – Which claw-free graphs are perfectly orderable ? *Discrete Applied Mathematics*, vol. 44, 1993, pp. 39–63.
- [7] Chvátal (V.) et Sbihi (N.). – Recognizing claw-free perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 44, 1988, pp. 154–176.
- [8] de Figueiredo (C.M.H.), Maffray (F.) et Porto (O.). – *On the structure of bull-free graphs.* – Estudos e Comunicações n° 48, Instituto de Matemática, Univ. Federal Rio de Janeiro, 1994. Soumis à *Graphs and Combinatorics*.
- [9] Everett (H.) et Reed (B.A.). – Problem section on path parity. *DIMACS Workshop on Perfect Graphs, Princeton, NJ*, Juin 1993.

- [10] Fonlupt (J.) et Uhry (J.P.). – Transformations which preserve perfectness and  $h$ -perfectness of graphs. In: *Bonn Workshop on Combinatorial Optimization (Bonn 1981)*, pp. 83–95. – Amsterdam, North-Holland, 1982.
- [11] Fulkerson (D.R.). – Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra. *Math. Programming*, vol. 1, 1971, pp. 168–194.
- [12] Fulkerson (D.R.) et Gross (O.A.). – Incidence matrices and interval graphs. *Pacific J. Math.*, vol. 15, 1965, pp. 835–855.
- [13] Gallai (T.). – Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, vol. 7, 1962, pp. 3–36.
- [14] Gallai (T.). – Transitiv orientierbaren Graphen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 8, 1967, pp. 25–66.
- [15] Gavril (S.). – Algorithms on clique separable graphs. *Discrete Mathematics*, vol. 19, 1977, pp. 159–165.
- [16] Golumbic (M.C.). – *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. – Academic Press, Inc., 1980.
- [17] Grötschel (M.), Lovász (L.) et Schrijver (A.). – Polynomial algorithms for perfect graphs. In: *Topics on Perfect Graphs (Ann. Discrete Math. 21)*, éd. par Berge (C.) et Chvátal (V.), pp. 325–356. – Amsterdam, North-Holland, 1984.
- [18] Harary (F.) et Holzmann (C.). – Line graphs of bipartite graphs. *Rev. Soc. Mat. Chile*, vol. 1, 1974, pp. 19–22.
- [19] Hayward (R.B.). – Weakly triangulated graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 39, 1985, pp. 200–209.
- [20] Hertz (A.). – A fast algorithm for coloring Meyniel graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 50, 1990, pp. 231–240.
- [21] Hertz (A.) et de Werra (D.). – Perfectly orderable graphs are quasi-parity graphs: a short proof. *Discrete Mathematics*, vol. 68, 1988, pp. 111–113.
- [22] Hougardy (S.). – *Perfekte graphen*. – Bonn, Allemagne, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, 1991.

- [23] Hougardy (S.). – *Even pairs and the strong perfect graph conjecture.* – Rapport technique n° Report No. 93795, Nassestrasse 2, D-53113 Bonn, Germany, Institut für Ökonometrie und Operations Research – Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, 1993.
- [24] Hougardy (S.). – Even and odd pairs in linegraphs of bipartite graphs. *European Journal of Combinatorics*, vol. 16, 1995, pp. 17–21.
- [25] Hsu (H.-L.). – Recognizing perfect graphs. *Journal of Association for Computer Machinery*, vol. 34, 1987, pp. 255–288.
- [26] König (D.). – Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és halmazok elméletében. *Mat. Természettud. Értesítő*, vol. 34, 1916, pp. 104–119.
- [27] Linhares-Sales (C.) et Maffray (F.). – *Even pairs in claw-free perfect graphs.* – Manuscript, Grenoble, France, IMAG, 1995. Soumis à *Journal of Combinatorial Theory - Series B*.
- [28] Linhares-Sales (C.), Maffray (F.) et Reed (B.A.). – *On planar perfectly contractile graphs.* – Manuscript, Grenoble, France, IMAG; 1994. Soumis à *Graphs and Combinatorics*.
- [29] Linhares-Sales (C.), Maffray (F.) et Reed (B.A.). – *On planar quasi-parity graphs.* – Manuscript, Grenoble, France, IMAG, 1994. Soumis à *SIAM Journal on Disc. Math.*
- [30] Lovász (L.). – Normal hypergraphs and perfect graphs. *Discrete Mathematics*, vol. 2, 1972, pp. 253–267.
- [31] Lovász (L.). – Perfect graphs. In: *Selected Topics in Graph Theory 2*, éd. par Beineke (L.W.) et Wilson (R.J.), pp. 55–87. – London, Academic Press Inc., 1983.
- [32] Lubiw (A.). – Doubly lexical ordering of matrices. *SIAM J. Computing*, vol. 16, 1987, pp. 854–879.
- [33] Maffray (F.). – Kernels in perfect line-graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 55, 1992, pp. 1–8.
- [34] Maffray (F.). – *A description of claw-free perfect graphs.* – Manuscript, Grenoble, France, IMAG, 1995. Soumis à *Journal of Combinatorial Theory - Series B*.

- [35] Maffray (F.) et Preissmann (M.). – *A translation of Tibor Gallai's "Transitiv orientierbare Graphen"*. – Manuscript, Grenoble, France, IMAG, 1995.
- [36] Meyniel (H.). – The graphs whose odd cycles have at least two chords. *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 21, 1984, pp. 115–119.
- [37] Meyniel (H.). – A new property of critical imperfect graphs and some consequences. *European Journal of Combinatorics*, vol. 8, 1987, pp. 313–316.
- [38] Middendorf (M.) et Pfeiffer (F.). – On the complexity of recognizing perfectly orderable graphs. *Discrete Mathematics*, vol. 80, 1990, pp. 327–333.
- [39] Parthasarathy (K.R.) et Ravindra (G.). – The strong perfect graph conjecture is true for  $K_{1,3}$ -free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 21, 1976, pp. 212–223.
- [40] R.B. Hayward (C. Hoàng) et Maffray (F.). – Optimizing weakly triangulated graphs. *Graphs and Combinatorics*, vol. 5, 1989, pp. 339–349.
- [41] Reed (B.). – Perfection, parity, planarity and packing paths. In: *Proceedings Int. Prog. and Comb. Opt. Conference*, éd. par Kannan (R.) et Pulleyblank (W.R.), pp. 407–419. – Waterloo, Univ. of Waterloo Press, 1990.
- [42] Sachs (H.). – On the Berge conjecture concerning perfect graphs. In: *Combinatorial Structures and their Applications*, éd. par et al. (R.K. Guy), pp. 377–384. – New-York, Gordon and Breach, 1970.
- [43] Spinrad (G.) et Sritharan (R.). – Algorithms for weakly triangulated. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 59, 1995, pp. 181–191.
- [44] Tarjan (R.). – Decomposition by clique separations. *Discrete Mathematics*, vol. 55, 1985, pp. 221–232.
- [45] Tucker (A.). – The strong perfect graph conjecture for planar graphs. *Canad. J. Math.*, vol. 25, 1973.
- [46] Tucker (A.). – Coloring perfect  $(k_4 - e)$ -free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 43, 1987, pp. 313–318.

- [47] Whitesides (S.H.). – A method for solving certain graph recognition and optimization problems, with applications to perfect graphs. *In: Topics on Perfect Graphs (Ann. Discrete Math. 21)*, éd. par Berge (C.) et Chvátal (V.), pp. 281–297. – Amsterdam, North-Holland, 1984.



