



**HAL**  
open science

# Simulation du comportement des capteurs de pression capacitifs microélectroniques

Nicolas Ratier

► **To cite this version:**

Nicolas Ratier. Simulation du comportement des capteurs de pression capacitifs microélectroniques. Sciences de l'ingénieur [physics]. INSA de Toulouse, 1993. Français. NNT: . tel-00345515

**HAL Id: tel-00345515**

**<https://theses.hal.science/tel-00345515>**

Submitted on 9 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*Présentée au*

**LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE ET D'ANALYSE DES SYSTEMES DU CNRS**

*en vue de l'obtention du grade de*

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES**

Spécialité : Electronique

par

**Pierre-Nicolas RATIER**

Maître ès Sciences

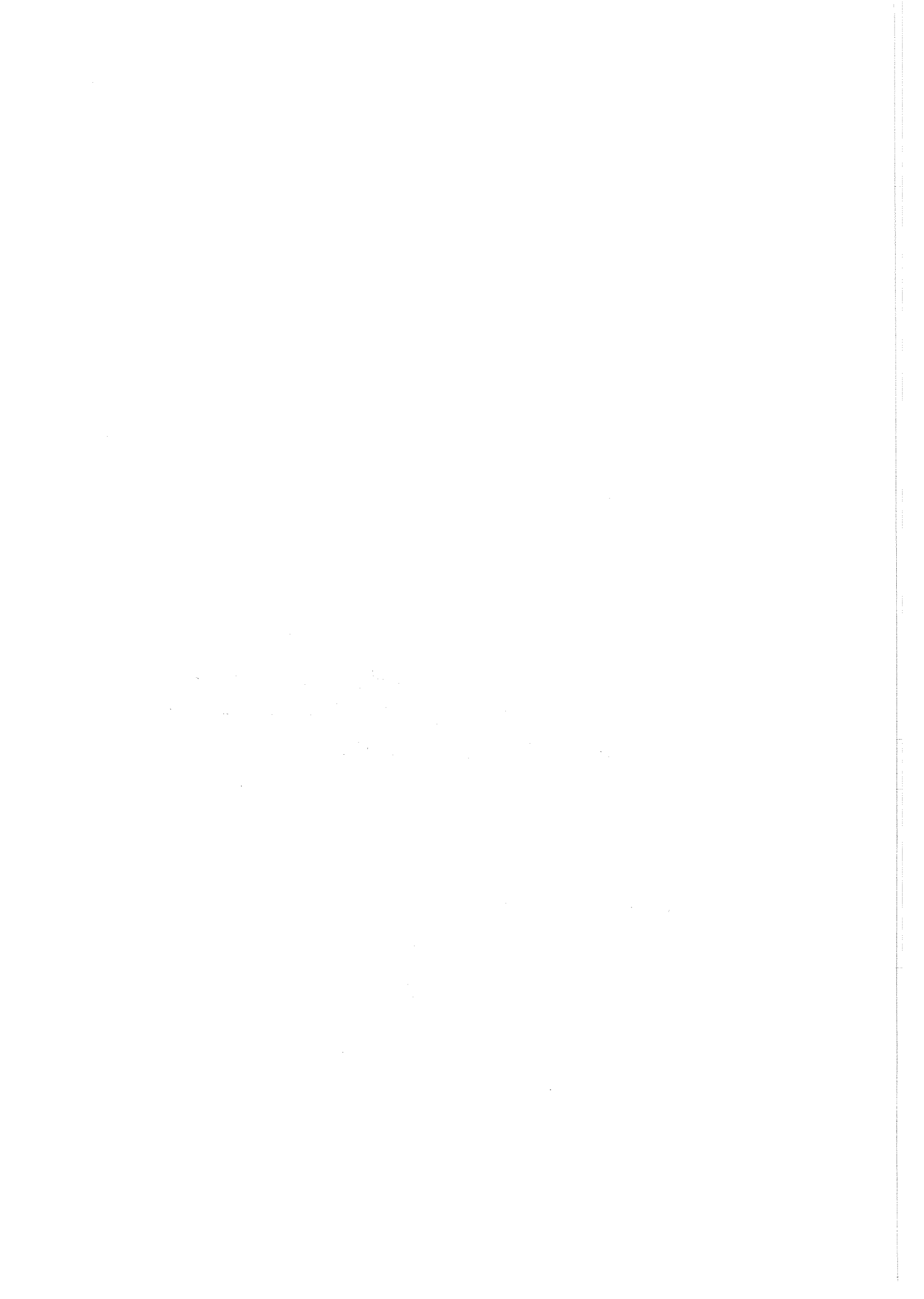
---

## **SIMULATION DU COMPORTEMENT DES CAPTEURS DE PRESSION CAPACITIFS MICROELECTRONIQUES**

---

Soutenue le 7 juin 1993 devant la commission d'examen :

A.	MARTINEZ	<i>Président</i>
J.	BOUCHER	<i>Rapporteur</i>
G.	VASSILIEFF	<i>Rapporteur</i>
J.M.	DORKEL	<i>Examineur</i>
C.	NOUALS	<i>Examineur</i>
G.	BLASQUEZ	<i>Directeur de Thèse</i>



---

---

# *Avant-propos*

---

*Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes (LAAS) du Centre National de la Recherche Scientifique, au sein du groupe Micro-structures et Micro-systèmes Intégrés (M2I).*

*Je tiens à remercier Monsieur A. Costes, Directeur du LAAS, pour m'avoir accueilli dans son établissement, ainsi que Monsieur D. Estève, Directeur Adjoint du LAAS, pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant de rejoindre son groupe de recherche.*

*Je remercie vivement Monsieur A. Martinez, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse.*

*J'exprime ma reconnaissance à Monsieur G. Boucher, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'électrotechnique, d'électronique, d'informatique et d'hydraulique de Toulouse, ainsi qu'à Monsieur G. Vassilieff, Professeur à l'Université Paul Sabatier, de s'être intéressé à mes travaux et d'avoir accepté de les juger.*

*J'adresse mes remerciements à Monsieur J.M. Dorkel, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, et à Monsieur C. Nouals, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques d'avoir accepté de porter attention à mes travaux et de faire partie du jury.*

*Monsieur G. Blasquez, Directeur de Recherche au LAAS, a été le responsable scientifique de mes travaux. Je le remercie de la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce thème de recherche.*

*Mes remerciements vont également à tout le personnel des services informatique et technique, apprécié de façon unanime par l'ensemble des thésards, en particulier à Martine Aguera, Danielle Barthe, Anne Bergez, Marie-Dominique Cabanne, Jean-Louis Carrié, Jean Catala, Daniel Daurat, Jean-Etienne Doucet, Paul Fadel, Guy Lacoste, René Lortal, Christian Marrot, Bernard Meunier, Bernard Rousset, Philippe Spiesser, Roger Zittel.*

*Durant les années passées au laboratoire, j'ai eu un grand plaisir à discuter avec Henri Camon, Irepan Damakoa, Mehdi Djafari-Rouhani, Frédéric Gessinn, les frères Khalil et Kamal Kassmi, Jean-Luc Massol, Malgorzata Napieralska, Laurent Plantié, Manuel Puig-Vidal, Brigitte Radigois, Philippe Requena, Evgueni Stefanov, Patrick Tounsi, Hocine Ziad.*

*Je souhaite assurer de mon amitié tous les membres de l'équipe Micro-structures et Micro-systèmes intégrés qui m'ont témoigné soutien et sympathie, Hafida Idrissi-Saba, Nejma Fazouan, Jean-Paul Beconne et Isabelle, Ali Boukabache, Jean-Luc Filipozzi, Armando Herrera et son épouse Guadalupe, Abdelhamid Laamouri, Mostéfa Laroussi, Achour Mahrane, Dominique Martinez, Zakaria Mektadir, Salah Eddine Naïmi, Christophe Plantier, Patrick Pons, Heriniaina Roger Razafindratsita, Mohamed Sahlaoui.*

*Je remercie vivement Michel Da Silva et Nadia Ouadoudi d'avoir assuré la relecture attentive du manuscrit. Les traductions du résumé de ce mémoire ont été effectuées très sympathiquement par Michel Cukier, Brahim Mbodje, Wolfgang Rehwald, José Rios.*

*Je remercie chaleureusement Amal Akheyar, Sylvie Hloschek, Elie Partouche et Abdellatif Yahia Messaoud qui m'ont toujours manifesté leur amitié et leur confiance. La complicité que nous avons eue a rendu mon séjour à Toulouse très agréable.*

*Enfin, Je tiens à remercier très profondément ma mère, mon frère et l'ensemble de ma famille qui m'ont toujours soutenu durant ces longues années d'étude.*

---

---

# Table des matières

---

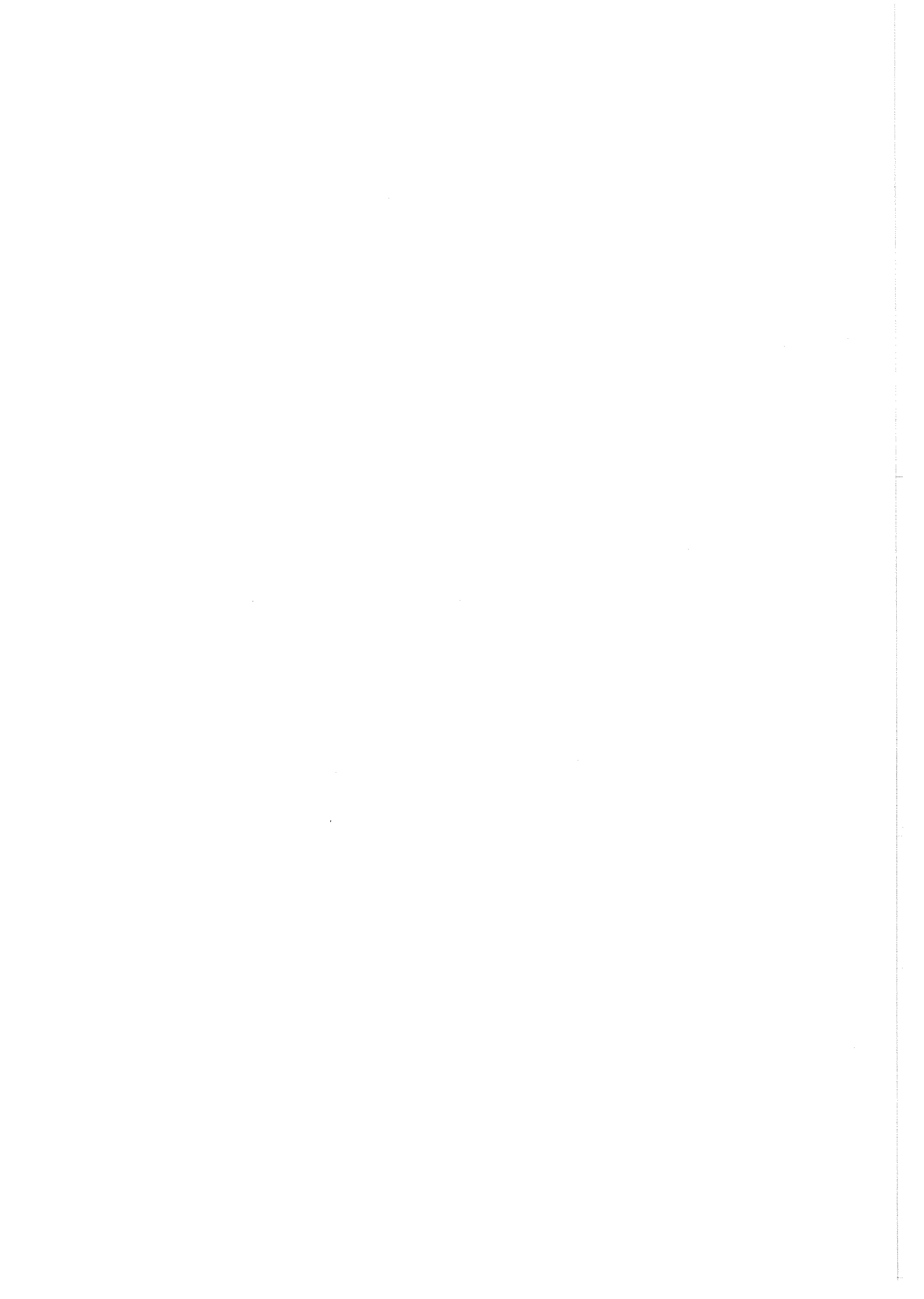
---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 - Capteurs capacitifs classiques</b>	<b>5</b>
1 - Déflexion d'une plaque mince	5
2 - Réduction à un problème sans dimension	7
3 - Pression maximale	7
4 - Résolution numérique du problème	8
5 - Solution numérique du problème	12
6 - Comparaison avec la littérature	13
7 - Pression maximale	14
8 - Capacité entre les deux armatures	17
9 - Comparaison expérimentale	19
10 - Conclusion	19
<b>2 - Influence de la pression électrostatique</b>	<b>21</b>
1 - Description du problème physique	21
2 - Déflexion de la plaque mince	22
3 - Réduction à un problème sans dimension	23
4 - Pression et tension maximale	23
5 - Approximation élémentaire	23
6 - Résolution numérique du problème	25
7 - Solution numérique du problème	28
8 - Validation de la résolution numérique	29
9 - Comparaison avec la littérature	32
10 - Phénomène d'instabilité	33
11 - Pression et tension maximale	34
12 - Réponse du capteur	36
13 - Conclusion	37

<b>3 - Capteurs capacitifs à armature d'épaisseur variable</b>	<b>39</b>
1 - Equation de la déflexion d'une plaque ...	39
2 - Réduction à un problème sans dimension	41
3 - Résolution numérique du problème	41
4 - Validation de la résolution numérique	45
5 - Capacité entre les deux armatures	47
6 - Exploitation du programme	47
7 - Conclusion	53
<b>4 - Capteurs capacitifs à structure polygonale</b>	<b>55</b>
1 - Déflexion d'une plaque polygonale	55
2 - Résolution numérique du problème	57
3 - Validation de la résolution numérique	58
4 - Capteur à large bande de pression	61
5 - Capteur à forte pression maximale	63
6 - Conclusion	66
<b>5 - Capteurs capacitifs en régime de contact</b>	<b>69</b>
1 - Flexion limitée d'une plaque mince	69
2 - Réduction à un problème sans dimension	71
3 - Résolution numérique du problème	72
4 - Solution numérique du problème	73
5 - Capacité entre les deux armatures	74
6 - Conclusion	79
<b>6 - Capteurs capacitifs en flexion forte</b>	<b>81</b>
1 - Flexion forte d'une plaque mince	81
2 - Réduction à un problème sans dimension	84
3 - Première résolution numérique du problème	85
4 - Seconde résolution numérique du problème	91
5 - Comparaison des deux méthodes	93
6 - Solution normalisée du problème	93
7 - Comparaison avec la littérature	95
8 - Pression maximale	95
9 - Réponse du capteur	97
10 - Conclusion	98
<b>Conclusion</b>	<b>101</b>

<b>A1 - Théorie de Kirchhoff</b>	<b>103</b>
<b>A2 - Unicité de la solution</b>	<b>105</b>
<b>A3 - Logiciel de discrétisation</b>	<b>106</b>
1 - Introduction	106
2 - Discrétisation des dérivées	107
3 - Discrétisation de l'équation aux différences	110
4 - Interface graphique	111
<b>A4 - Etude du conditionnement</b>	<b>113</b>
<b>A5 - Déflexion d'une plaque simplement posée</b>	<b>117</b>
1 - Introduction	117
2 - Solution numérique	117
3 - Solution analytique	118
4 - Comparaison des solutions	118
<b>A6 - Différences finies curvilignes</b>	<b>120</b>
1 - Introduction	120
2 - Transformation des dérivées dans un système ...	121
3 - Transformation d'une EDP dans un système ...	123
4 - Calcul des coefficients T	124
5 - Résolution par les différences finies	126
6 - Application de la méthode	127
<b>Notations</b>	<b>132</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>





---

---

# Introduction

---

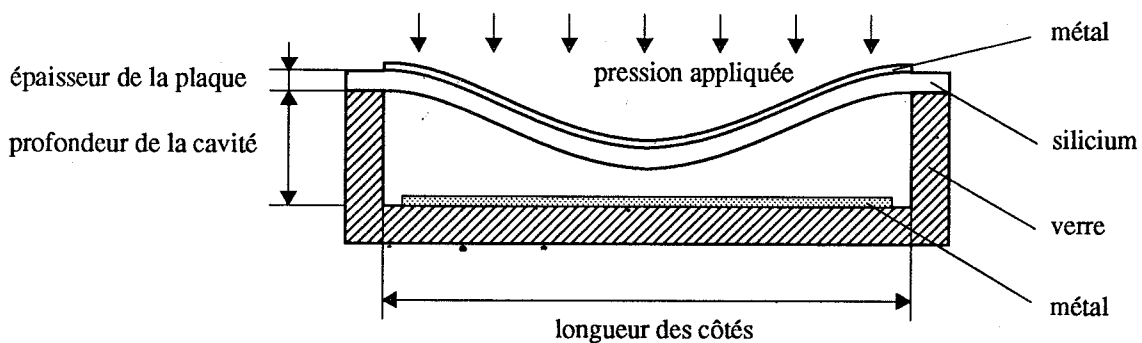
---

Les capteurs de pression interviennent dans de nombreux domaines tels que l'automobile, la météorologie, le génie médical et la domotique. Ces dix dernières années, un effort de recherche considérable a été entrepris pour développer des capteurs dont le corps d'épreuve est en silicium<sup>1</sup>. Ce qui a conduit à l'apparition de capteurs de pression miniaturisés [62][11][27].

L'intérêt du silicium dans le domaine des capteurs de pression est double. Il permet d'une part la fabrication simultanée d'un grand nombre de capteurs à faible coût unitaire et d'autre part, l'intégration sur une même puce de la cellule sensible et des circuits électroniques de conditionnement et de traitement du signal [37][73].

Ce mémoire porte sur l'étude de capteurs de pression "capacitifs" de type plan. Leurs structures se composent de l'assemblage d'une plaque de verre dans laquelle est creusée une cavité et d'une plaquette de silicium soudée hermétiquement au dessus de cette cavité. En outre le fond de la cavité et la surface de la plaque doivent être métallisés.

Le schéma ci-dessous donne une illustration de l'ensemble. Ce schéma de principe est suffisant pour modéliser le comportement du capteur capacitif, mais ne correspond pas forcément aux dispositifs réalisés en pratique. Le détail de la réalisation technologique de ce type de capteur n'est pas abordé dans ce mémoire. On consultera sur ce sujet par exemple [6][59].



---

1. La réalisation de capteurs de pression capacitifs miniaturisés a été rendue possible après une découverte de Wallis et Pomerantz [86][38] sur la possibilité de soudure Verre-Silicium en basse température.

Un capteur de pression capacitif est fondamentalement un condensateur dont l'armature supérieure est déformable. Son principe de fonctionnement est simple : la pression appliquée engendre une déformation de la plaque. On obtient une image globale de cette déformation en mesurant la capacité qui existe entre les deux armatures.

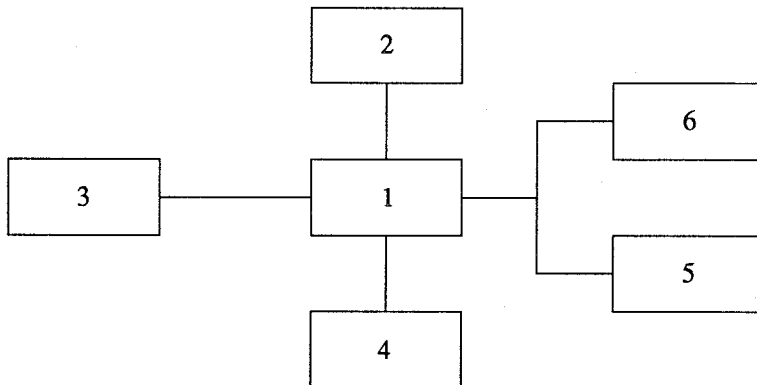
La relation entre la pression appliquée et la capacité qui en résulte n'est pas linéaire [10]. Le problème fondamental concernant ce type de capteur est d'exprimer la relation (univoque) qui existe entre ces deux grandeurs physiques. Nous adoptons dans ce mémoire les hypothèses suivantes :

- D'une part, on considère qu'il existe un "encastrement" parfait de la plaque sur son support. Il est toujours difficile et souvent impossible de connaître les conditions réelles d'encastrement. Le justificatif, couramment évoqué, de ce type d'hypothèse se trouve dans le principe de Saint Venant [76] :

*"Si on se place à une distance suffisamment grande des points sur lesquels sont appliquées les forces de contacts, les forces intérieures ne dépendent que faiblement du mode concret d'application de celle-ci".*

- D'autre part, on suppose que la plaque possède les deux propriétés suivantes : elle est parfaitement élastique (les déformations disparaissent lorsque l'on supprime la force appliquée) et homogène (le plus petit élément détaché de la plaque possède les mêmes propriétés physiques que le corps tout entier).

Ce mémoire est constitué de six chapitres, articulés autour du premier chapitre. L'organigramme suivant indique leur dépendance relative.



Le premier chapitre est une étude du capteur capacitif "classique". Son principal objectif est d'établir les résultats fondamentaux concernant ce type de capteur et d'introduire une partie des méthodes numériques utilisées par la suite.

Le second chapitre étend les résultats obtenus dans le premier chapitre en tenant compte maintenant de la pression électrostatique qui existe entre l'armature fixe et la plaque lorsqu'on leur impose une différence de potentiel.

Les quatre derniers chapitres proposent une étude du comportement de capteurs capacitifs plus sophistiqués. La définition de la structure de ces capteurs est basée sur la remarque suivante: le schéma élémentaire du capteur capacitif montre qu'il est totalement défini par trois paramètres :

- l'épaisseur de la plaque,
- la géométrie de la cavité,
- la profondeur de la cavité.

L'idée directrice est de définir chaque nouvelle structure en faisant varier, d'une façon indépendante, chacun de ces paramètres. Les chapitres 3, 4, 5 et 6 présentent l'étude du capteur capacitif qui en résulte.

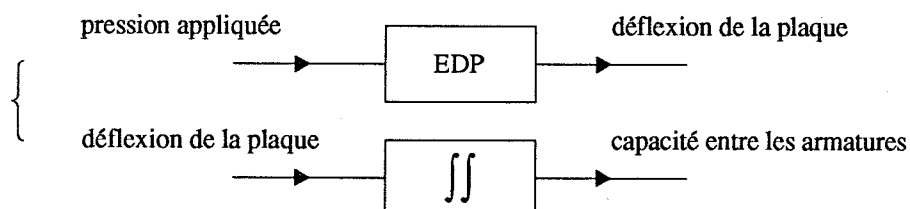
Dans le troisième chapitre, l'étude du comportement des capteurs capacitifs est prolongé aux capteurs dont la plaque déformable peut avoir une épaisseur variable. On suppose cependant que l'épaisseur de la plaque reste faible en comparaison des autres dimensions.

Le quatrième chapitre est consacré aux capteurs qui ont une géométrie de cavité de forme polygonale. Pour des raisons de simplicité de calcul, mais aussi pour tenir compte des limitations dues à la technologie, les formes polygonales que l'on prend en compte sont limitées aux polygones de côtés parallèles aux axes.

Le cinquième chapitre présente une étude de capteurs capacitif en régime de contact. Ce type de fonctionnement est obtenu en réduisant la profondeur de la cavité ou en imposant une pression appliquée supérieure à celle habituelle.

Le sixième chapitre considère les capteurs dont la plaque déformable subit une déformation du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la plaque. Ces capteurs sont obtenus à partir du capteur classique en augmentant la profondeur de la cavité, ou en réalisant des capteurs à plaque déformable très fine.

L'objectif central de chaque chapitre est d'obtenir la courbe de réponse  $C(P)$ , capacité en fonction de la pression, correspondante à la structure étudiée. D'une façon générale, la courbe de réponse d'un capteur capacitif est obtenue en résolvant un système intégral-différentiel découlé de la forme :



La majorité des équations aux dérivées partielles qui apparaissent dans ce mémoire n'ont pas de solution analytique. Nous avons choisi de résoudre numériquement ces équations en utilisant la méthode des différences finies à partir des critères suivants :

- En premier lieu, la géométrie des structures que l'on considère est simple, domaines plans rectangulaires ou polygonaux. La méthode des différences finies est particulièrement appropriée à ce type de domaine.
- Ensuite, la mise en œuvre de cette méthode ne nécessite pas de reformulation des équations, ni de manipulations algébriques aussi importantes que celles, par exemple, demandées par la méthode des éléments finis.
- Enfin, la méthode des différences finies est une méthode très générale de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est, pour cette raison, utilisée dans des domaines aussi divers que l'élasticité, la mécanique des fluides [33], la physique atomique [58], ou les réseaux neuronaux [19].

---

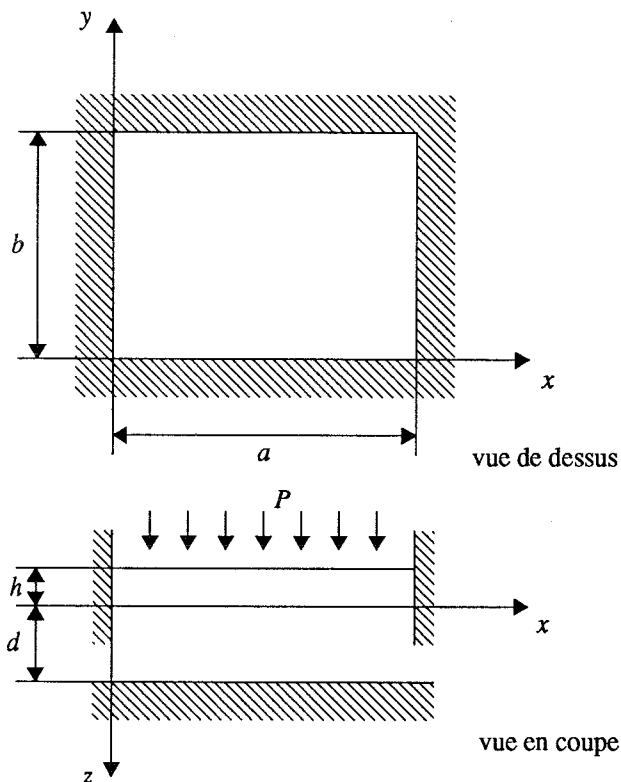
# Capteurs capacitifs classiques

## Chapitre 1

---

### 1 Déflexion d'une plaque mince

Une plaque "mince" est une plaque dont l'épaisseur est faible en comparaison des dimensions dans les deux autres directions. Les déformations elles-mêmes sont supposées petites [47]. La figure (1.1) illustre les paramètres utilisés par la suite.



$a, b$  longueur des côtés  
 $r = b/a$  rapport des longueurs  
 $d$  déflexion maximale  
 $h$  épaisseur de la plaque  
 $P$  pression appliquée

Hypothèses :

$d \ll h$   
 $a, b \gg h$

figure 1.1 Définition des paramètres géométriques

## 1.1 Equation d'équilibre

A partir des équations reliant la pression appliquée, les moments et la déflexion de la plaque, on aboutit à la solution généralisée au cas anisotrope du problème [53][35]. Dans le cas de petites déformations, l'équation d'équilibre d'une plaque déformée sous l'action d'une pression  $P$  est donnée<sup>1</sup> par l'équation (1.1).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (1.1)$$

avec  $w(x, y)$  déflexion au point  $(x, y)$   
 $P$  pression appliquée sur la plaque  
 $D = D_0 h^3$  coefficient de rigidité de la plaque à la flexion

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \alpha = \nu + 2\frac{G}{E}(1-\nu^2) \quad (1.2)$$

où  $h$  épaisseur de la plaque  
 $\nu$  coefficient de Poisson  
 $E$  module de Young  
 $G$  module de Coulomb

Les coefficients  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $E$  et  $G$  dépendent du matériau et de la direction cristallographique dans laquelle est orientée la plaque. Les expressions de ces coefficients et les méthodes de calcul qui s'y rapportent sont détaillées dans [63][12].

## 1.2 Conditions aux limites

Soit  $\Omega$  le domaine d'intégration  $[0, a] \times [0, b]$ ,  $\partial\Omega$  les points frontières du domaine et  $n$  la normale extérieure au domaine. Les conditions aux limites doivent être vérifiées sur les bords de la plaque. Les conditions aux limites les plus générales sont données dans [47][82]. Dans le cas d'une plaque encastree, elles ont la forme simple :

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.3)$$

La première équation exprime le fait que les bords de la plaque ne se déplacent pas verticalement pendant la déformation, la seconde indique que la direction du bord reste toujours horizontale.

1. La formulation correspond à la théorie des plaques de Kirchhoff, les hypothèses physiques sont rappelées dans l'annexe 1.

### 1.3 Problème aux limites

On est finalement conduit à résoudre le problème<sup>2</sup> aux limites suivant : trouver  $w$  défini dans  $[0, a] \times [0, b]$  vérifiant<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{P}{D} & \text{dans } \Omega = (0, a) \times (0, b) \\ w = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.4)$$

Il existe dans la littérature de nombreuses expressions analytiques (exactement “en termes finis”, c’est à dire par une combinaison de “fonctions élémentaires” telles que  $x^n$ ,  $\log x$ ,  $e^x$ , ...) de la solution de ce problème aux limites. Néanmoins, toutes les solutions proposées sont extrêmement lourdes (Cf. Annexe 1), une solution numérique est donnée dans les paragraphes suivants.

## 2 Réduction à un problème sans dimension

D’après le théorème de Vaschy-Buckingham [21], il est toujours possible d’obtenir une expression sans dimension d’une équation dimensionnellement homogène.

Le changement de variable  $\tilde{x} = x/a$  et  $\tilde{y} = y/b$  ramène le domaine d’intégration à  $[0, 1] \times [0, 1]$ , et on pose  $r = b/a$ . On effectue ensuite le changement de fonction  $\tilde{w} = w/d$ . De plus, on pose :

$$\tilde{P} = \frac{P}{P_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{P_0} = \frac{a^2 b^2}{dD} \quad (1.5)$$

Les changements de variable précédents conduisent finalement à l’équation aux dérivées partielles suivante :

$$r^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} = \tilde{P} \quad (1.6)$$

## 3 Pression maximale

La grandeur  $P_{max}$  est, par définition, la pression maximale applicable sur la plaque, c’est à dire la pression qu’il faut imposer pour avoir  $w(a/2, b/2) = d$ . De même  $\tilde{P}_{max}$  est la pression nor-

2. La démonstration classique de l’unicité de ce problème aux limites est donnée dans l’annexe 2.  
3.  $\alpha = 1$  si le matériau est isotrope.



malisée maximale supportée par la plaque, on a alors  $\bar{w}(0.5, 0.5) = 1$  quand  $\bar{P} = \bar{P}_{max}$ .

$$\bar{P}_{max} \triangleq (P/P_0)_{max} \triangleq P_{max}/P_0 \quad (1.7)$$

La valeur numérique de  $\bar{P}_{max}$  ne dépend que de la géométrie de la plaque et des paramètres de l'équation aux dérivées partielles (i.e.  $r$  et  $\alpha$ ). La connaissance de la fonction  $\bar{P}_{max}(r)$  permet de calculer la valeur de la pression maximale effective  $P_{max}$  en fonction de la géométrie d'une plaque rectangulaire.

$$P_{max} = \bar{P}_{max}(r) P_0 = D_0 \frac{\bar{P}_{max}(r) dh^3}{r^2 a^4} \quad (1.8)$$

## 4 Résolution numérique du problème

### 4.1 Maillage [65][18]

Le maillage est défini de la façon suivante : On trace dans le plan un réseau de droites parallèles à l'axe des  $x$ , équidistantes de pas  $h_d$ , ainsi qu'un réseau de droites parallèles à l'axe des  $y$ , équidistantes de pas  $h_d$ . Les intersections des deux réseaux sont des points de coordonnées  $(ih_d, jh_d)$ ,  $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$ . Ces points constituent l'ensemble  $h_d\mathbb{Z} \times h_d\mathbb{Z}$ , appelé un maillage. Nous avons tracé ci-dessous le maillage utilisé pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles (1.6). Pour ne pas avoir une figure trop étendue, nous avons considéré le cas d'un domaine décomposé en 4 intervalles sur ses deux côtés.

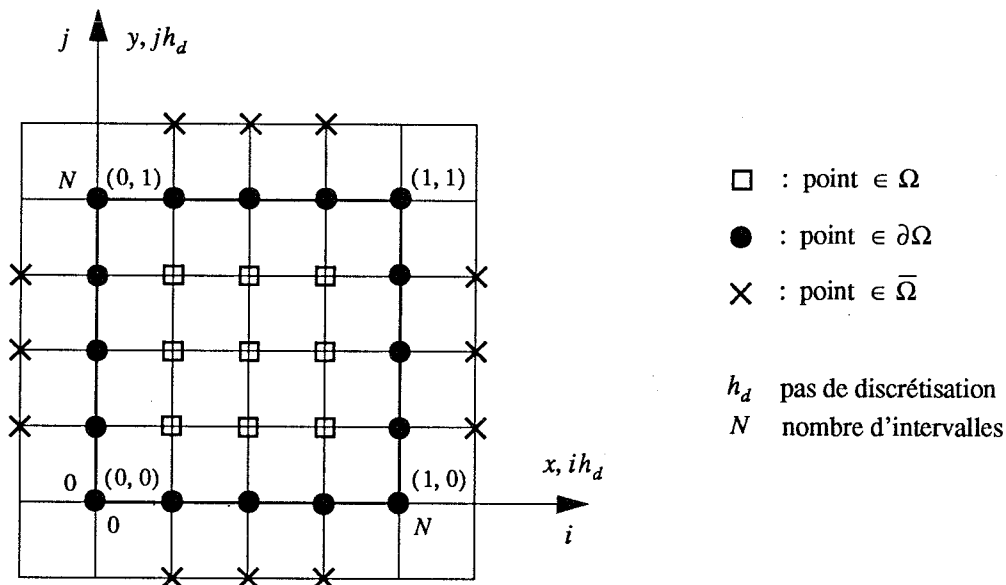


figure 1.2 Maillage du plan avec 4 intervalles

On distingue sur ce maillage 3 zones : la zone intérieure  $(i, j) \in \Omega$  où s'applique l'équation aux dérivées partielles, et les deux autres zones, c'est à dire le contour  $(i, j) \in \partial\Omega$  et la zone extérieure  $(i, j) \in \bar{\Omega}$  où s'appliquent les conditions aux limites. On remarquera que les points extérieurs sur les angles n'interviennent pas dans les calculs.

### 4.2 Discrétisation de l'équation aux dérivées partielles

$$r^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} = \tilde{P} \tag{1.9}$$

Soit  $w$  la fonction qui approxime la solution  $\tilde{w}$  aux points du maillage. Dans le cas d'une résolution numérique idéale,  $w$  est la restriction de la fonction  $\tilde{w}$  sur le maillage, i.e.  $w_{ij} = \tilde{w}(ih_d, jh_d)$ . L'annexe 1 décrit une méthode générale pour discrétiser une équation aux dérivées partielles. L'équation (1.9) a la représentation discrète<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} & A_0 w_{i,j} \\ & + A_1 w_{i+1,j} + A_2 w_{i,j+1} + A_3 w_{i-1,j} + A_4 w_{i,j-1} \\ & + A_5 w_{i+1,j+1} + A_6 w_{i-1,j+1} + A_7 w_{i-1,j-1} + A_8 w_{i+1,j-1} \\ & + A_9 w_{i+2,j} + A_{10} w_{i,j+2} + A_{11} w_{i-2,j} + A_{12} w_{i,j-2} = h_d^4 \tilde{P} \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= 6(r^2 + 1/r^2) + 8\alpha & A_1 &= -4(\alpha + r^2) & A_5 &= 2\alpha & A_9 &= r^2 \\ A_2 &= -4(\alpha + 1/r^2) & A_6 &= 2\alpha & A_{10} &= 1/r^2 \\ A_3 &= -4(\alpha + r^2) & A_7 &= 2\alpha & A_{11} &= r^2 \\ A_4 &= -4(\alpha + 1/r^2) & A_8 &= 2\alpha & A_{12} &= 1/r^2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Cette équation est valable pour tous les points  $(i, j) \in \Omega$ . On décrit symboliquement cette équation par le schéma suivant (appelé selon les auteurs "molécule", ... ) :

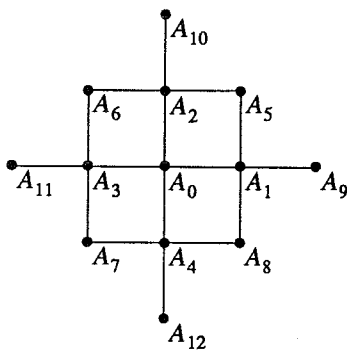


figure 1.3 Schéma aux différences de l'équation aux dérivées partielles (1.9)

4. L'annexe 3 propose une construction algorithmique du schéma aux différences centrées des équations aux dérivées partielles stationnaires.

La forme du schéma explique la nécessité de considérer des points extérieurs. Ces points sont de plus obligatoires pour la prise en compte des conditions aux limites sur  $\partial\omega / \partial n$ .

### 4.3 Discrétisation des conditions aux limites

La première condition aux limites impose  $\tilde{w} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . i.e.

$$W_{i,j} = 0 \quad \forall (i,j) \in \partial\Omega \quad (1.12)$$

La deuxième condition aux limites  $\frac{\partial\tilde{w}}{\partial n}$  s'exprime dans notre cas particulier par :

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} = 0 & \text{sur } \{0,1\} \times [0,1] \\ \frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} = 0 & \text{sur } [0,1] \times \{0,1\} \end{cases} \quad (1.13)$$

Ces deux équations ont comme représentation discrète :

$$\frac{1}{2h_d} (W_{i+1,j} - W_{i-1,j}) = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{2h_d} (W_{i,j+1} - W_{i,j-1}) = 0 \quad (1.15)$$

En explicitant l'équation (1.14) pour  $i = 1$  et  $i = N-1$  et (1.15) pour  $j = 1$  et  $j = N-1$ , on obtient les relations nécessaires au calcul des valeurs aux points extérieurs  $\in \bar{\Omega}$  :

$$\begin{cases} W_{-1,j} = W_{1,j} \\ W_{N+1,j} = W_{N-1,j} \end{cases} \quad \text{pour } j = 1 \dots N-1$$

$$\begin{cases} W_{i,-1} = W_{i,1} \\ W_{i,N+1} = W_{i,N-1} \end{cases} \quad \text{pour } i = 1 \dots N-1 \quad (1.16)$$

### 4.4 Résolution du système

L'équation linéaire (1.10) fournit les  $(N-1)^2$  équations nécessaires pour déterminer les  $(N-1)^2$  valeurs inconnues de la fonction à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Les valeurs sur le contour et aux points extérieurs du domaine sont données respectivement par les équations (1.12) et (1.14) et (1.15). Le conditionnement du système est étudié en annexe 4.

La discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (1.9) conduit donc à la résolution d'un système linéaire dont la matrice a la structure représentée sur la figure (1.4). Nous avons considéré un maillage à 10 intervalles. Chaque point représenté indique l'emplacement d'un élé-

ment non-nul de la matrice.

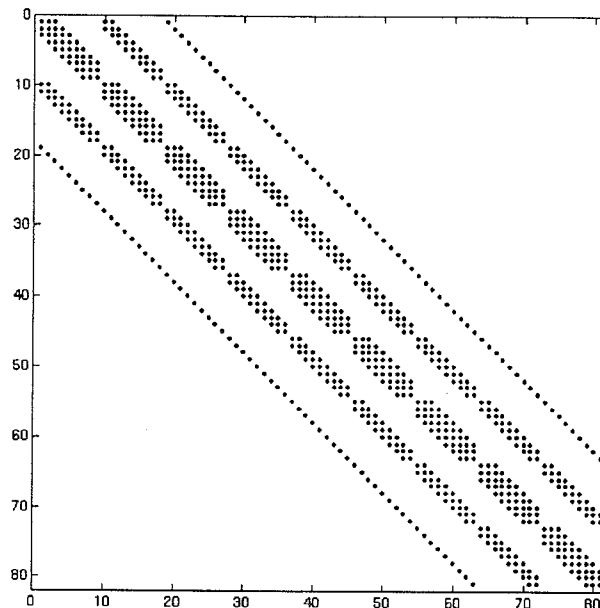


figure 1.4 Emplacement des éléments non-nuls

Un calcul rapide montre que le pourcentage d'élément nuls est de 84% pour un maillage à 10 intervalles, dans le cas de 20 intervalles, il passe à 96%, et enfin pour 30 intervalles, il est de 98%. La matrice du système est creuse et ses coefficients sont répartis d'une façon régulière. Par conséquent, une méthode de résolution de type itérative est particulièrement appropriée. Nous avons choisi d'utiliser la méthode du "gradient conjugué" [77], très efficace et simple à implémenter. Nous donnons ci-dessous l'algorithme de cette méthode :

$$\begin{aligned}
 p^0 &= r^0 = b - Ax^0 && \text{avec } \|x\| & \text{norme de } x \\
 \text{pour } k &= 0 \dots k_{max} \text{ faire} && \langle x, y \rangle & \text{produit scalaire de } x \text{ et de } y \\
 \alpha^k &= \frac{\|r^k\|^2}{\langle p^k, Ap^k \rangle} \\
 x^{k+1} &= x^k + \alpha^k p^k \\
 \text{sortir dès que } &|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon \\
 r^{k+1} &= r^k - \alpha^k Ap^k \\
 \beta^{k+1} &= \frac{\|r^{k+1}\|^2}{\|r^k\|^2} \\
 p^{k+1} &= r^{k+1} + \beta^{k+1} p^k \\
 \text{fin boucle}
 \end{aligned}$$

Algorithme du gradient conjugué. Résolution de  $Ax = b$ . La référence [30] propose un historique très complet de cet algorithme.

## 5 Solution numérique du problème

Les résultats du programme sont donnés sous forme d'une matrice qui contient les valeurs de  $w/d$  aux points du maillage. Pour des raisons évidentes d'impression, seule une partie de la matrice effectivement calculée est affichée (le résultat contient  $31 \times 31$  points et on affiche seulement  $11 \times 11$  points régulièrement espacés). On donne ici un exemple des résultats fournis par le programme.

tableau 1.1 *Déflexion normalisée  $w/d$  pour  $P = P_{max}$*

J = 30 Y = 1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 27 Y = 0.9	0.000000	0.024789	0.070462	0.112541	0.140432	0.150073	0.140432	0.112541	0.070462	0.024789	0.000000	0.000000
J = 24 Y = 0.8	0.000000	0.070462	0.203109	0.328914	0.413972	0.443654	0.413972	0.328914	0.203109	0.070462	0.000000	0.000000
J = 21 Y = 0.7	0.000000	0.112541	0.328914	0.537880	0.680942	0.731175	0.680942	0.537880	0.328914	0.112541	0.000000	0.000000
J = 18 Y = 0.6	0.000000	0.140432	0.413972	0.680942	0.865022	0.929891	0.865022	0.680942	0.413972	0.140432	0.000000	0.000000
J = 15 Y = 0.5	0.000000	0.150073	0.443654	0.731175	0.929891	1.000000	0.929891	0.731175	0.443654	0.150073	0.000000	0.000000
J = 12 Y = 0.4	0.000000	0.140432	0.413972	0.680942	0.865022	0.929891	0.865022	0.680942	0.413972	0.140432	0.000000	0.000000
J = 9 Y = 0.3	0.000000	0.112541	0.328914	0.537880	0.680942	0.731175	0.680942	0.537880	0.328914	0.112541	0.000000	0.000000
J = 6 Y = 0.2	0.000000	0.070462	0.203109	0.328914	0.413972	0.443654	0.413972	0.328914	0.203109	0.070462	0.000000	0.000000
J = 3 Y = 0.1	0.000000	0.024789	0.070462	0.112541	0.140432	0.150073	0.140432	0.112541	0.070462	0.024789	0.000000	0.000000
J = 0 Y = 0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	I = 0	I = 3	I = 6	I = 9	I = 12	I = 15	I = 18	I = 21	I = 24	I = 27	I = 30	
	X = 0.0	X = 0.1	X = 0.2	X = 0.3	X = 0.4	X = 0.5	X = 0.6	X = 0.7	X = 0.8	X = 0.9	X = 1.0	

Les résultats du programme pour différentes valeurs de pression normalisée sont illustrés par la figure (1.5). Les résultats ont été tracés pour  $r = 1$ .

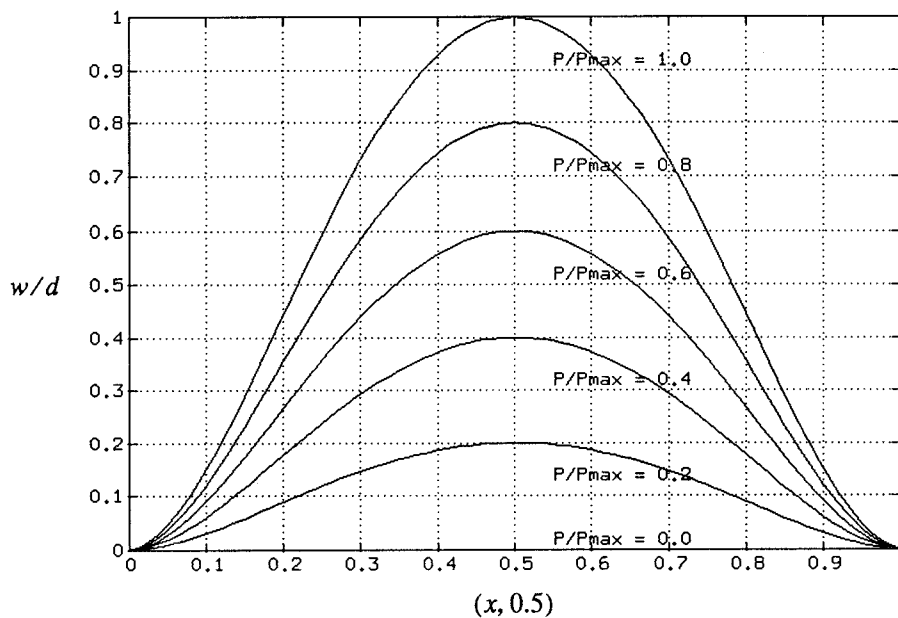


figure 1.5 *Déflexion de la plaque*

La courbe ci-dessous donne l'allure générale de la déflexion de la plaque. Le maillage est composé de  $30 \times 30$  points. La déflexion est représentée selon l'axe des  $z$  dirigé vers le haut et la déflexion maximale est au centre de la plaque. Par ailleurs, les conditions aux limites que l'on a imposée (la plaque est encadrée) apparaissent sur les figures (1.5) et (1.6).

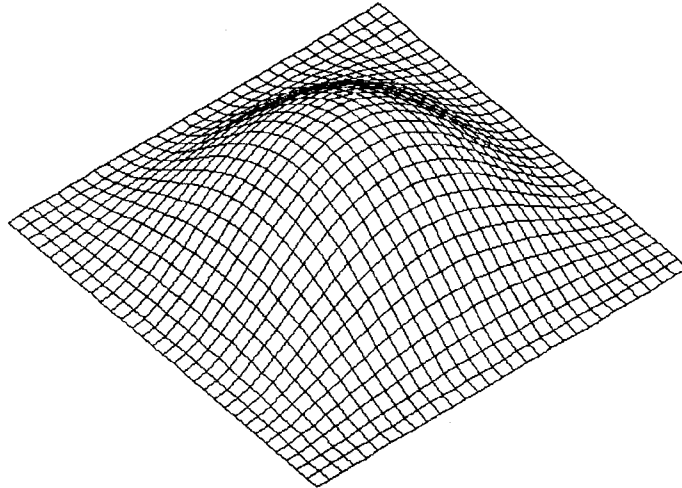


figure 1.6 Allure de la déflexion de la plaque

## 6 Comparaison avec la littérature

Dans le tableau (1.2), nous comparons les valeurs de la fonction  $\tilde{P}_{max}(r)$  dans le cas d'une plaque carrée, calculées avec la méthode utilisée dans ce mémoire et les valeurs décrites dans la littérature. Dans les publications les plus récentes [59][72], l'écart entre les valeurs reste inférieur à 1%.

tableau 1.2 Comparaison des valeurs de  $\tilde{P}_{max}(1)$  avec les valeurs de la littérature

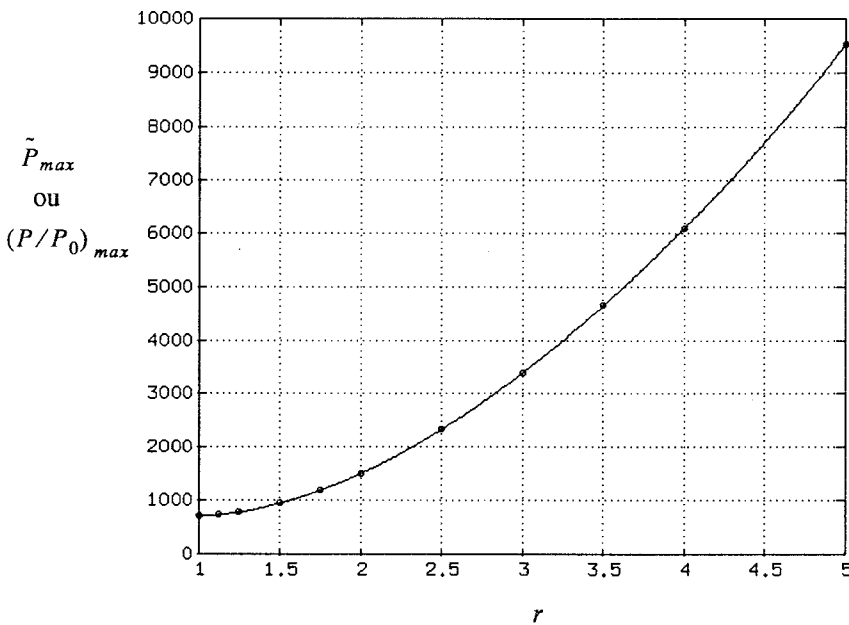
$r = 1.0 \quad \alpha = 0.798$		$r = 1.0 \quad \alpha = 1.0$		
Ce mémoire	[59]	Ce mémoire	[72]	[82 p. 202]
745.808	752.587	782.817	790.904	793.650
—	0.9%	—	1%	1.36%

L'annexe 5 compare la solution analytique et la solution numérique obtenue par la méthode des différences finies dans le cas d'une plaque simplement posée.

## 7 Pression maximale

### 7.1 Pression normalisée maximale

La figure (1.7) illustre la fonction  $\tilde{P}_{max}(r)$  en fonction de  $r$  pour la valeur du paramètre  $\alpha = 0.6621$ .

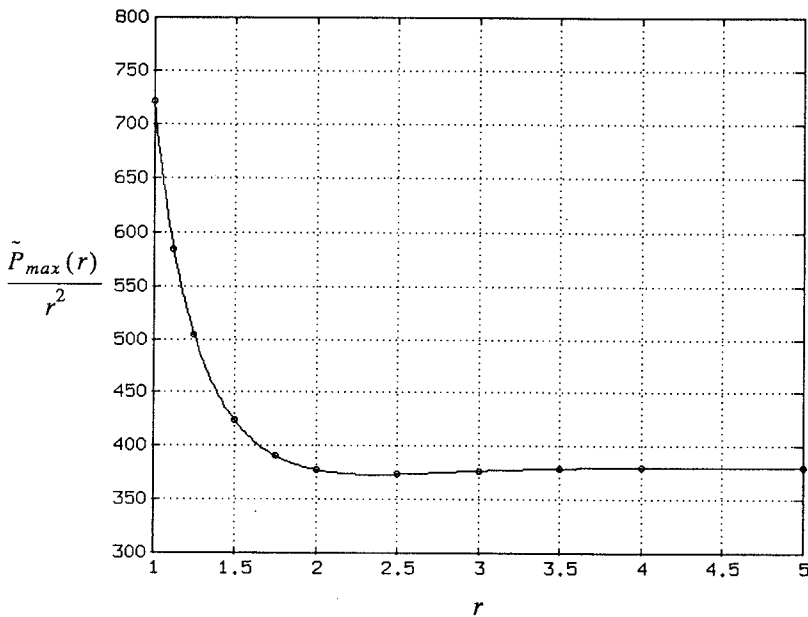


$r$	$\tilde{P}_{max}(r)$
1	720.727
1.125	738.986
1.25	787.421
1.5	953.583
1.75	1197.327
2	1511.696
3	3393.090
4	6086.238
5	9516.559

figure 1.7 Facteur géométrique  $\tilde{P}_{max}$  en fonction de  $r$

### 7.2 Dépendance de $P_{max}$ par rapport à $r$

Le comportement de  $P_{max}$  en fonction du rapport des longueurs  $r$  est donné par l'équation (1.8). L'allure de la fonction  $\tilde{P}_{max}(r)/r^2$  est tracée sur la figure (1.8). La valeur du paramètre  $\alpha$  est toujours de 0.6621. L'équation de la courbe ainsi que ses valeurs numériques, pour les valeurs entières du rapport des longueurs  $r$ , sont indiquées à droite de celle-ci. La figure (1.8) montre qu'il est important de connaître  $r$  avec précision uniquement dans la gamme  $1 \leq r \leq 2$ .



rappel :

$$P_{max} = D_0 \frac{\tilde{P}_{max}(r)}{r^2} \frac{dh^3}{a^4}$$

données :

r	$\tilde{P}_{max}(r)/r^2$
1	720.727
2	377.924
3	377.010
4	380.389
5	380.662
$\infty$	384.000

figure 1.8 Dépendance de  $P_{max}$  par rapport à  $r$

Pour  $r$  variant de 1 à 2, l'influence des deux bords parallèles à l'axe des  $x$  devient de plus en plus faible. Dès que le rapport  $r$  atteint la valeur 2, on peut considérer que l'influence de ces deux bords devient négligeable sur la forme de la déflexion, et la valeur de  $P_{max}$  reste alors constante.

### 7.3 Etude asymptotique de $P_{max}$

Nous allons étudier le comportement de la solution de l'équation aux dérivées partielles (1.1) lorsque l'un des côtés de la plaque devient largement plus grand que l'autre. On considère le cas limite  $b \rightarrow \infty$ .

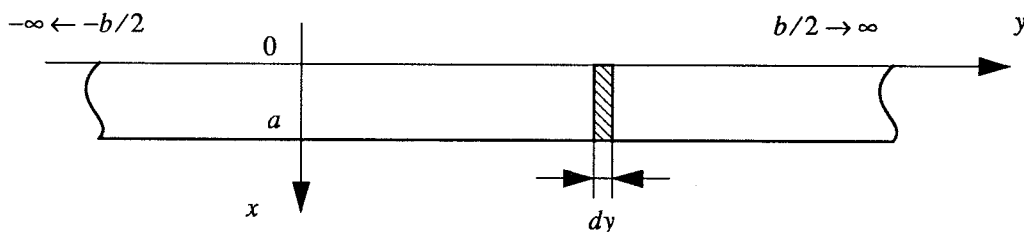


figure 1.9 Plaque infiniment longue dans une direction



Pour  $b \rightarrow \infty$ , l'influence des frontières  $y = -b/2$  et  $y = b/2$  n'a aucune d'influence, la valeur de la déflexion en fonction de  $x$  est identique pour toutes les droites parallèles à l'axe des  $x$ . Dans ce cas limite, la déflexion peut être supposée uniforme selon l'axe des  $x$ . C'est à dire que la déflexion  $w$  est alors considérée comme indépendante de  $y$ . L'équation aux dérivées partielles de cette déflexion :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (1.17)$$

prend alors la forme simple :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{P}{D} \quad (1.18)$$

La résolution du problème aux limites (1.19) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{P}{D} && \text{sur } (0, a) \\ w = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 && \text{pour } \{0, a\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

a la solution suivante :

$$w(x, y) = \frac{P}{24D} x^2 (x-a)^2 \quad (1.20)$$

Pour  $w(a/2, y) = d$ , on obtient la valeur de la pression maximale :

$$P_{max} = 384 \frac{dD}{a^4} = (384) D_0 \frac{dh^3}{a^4} \quad (1.21)$$

Si l'on compare les équations (1.8) et (1.21), l'équation (1.21) apparaît alors comme l'équation de l'asymptote de la courbe quand  $r \rightarrow \infty$ . Comme on peut le voir sur la figure (1.8), quand le rapport  $b/a$  augmente, la déflexion maximale de la plaque approche rapidement la valeur asymptotique calculée dans l'équation (1.21).

#### 7.4 Analogie avec la flexion d'une poutre

Lorsque la déflexion d'une poutre est faible, c'est à dire petite par rapport à sa longueur, son équation d'équilibre est donnée par l'équation (1.22). On remarquera son analogie avec l'é-

quation (1.18).

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = P \tag{1.22}$$

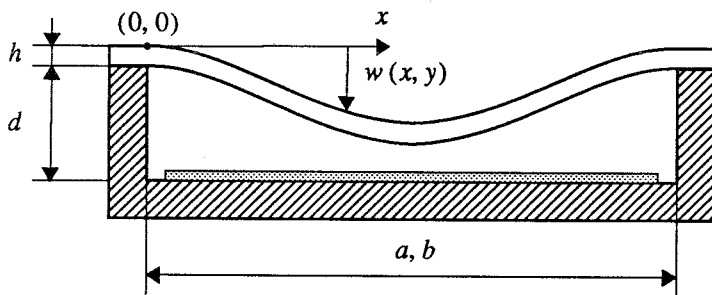
avec  $EI$  rigidité à la flexion  
 $P$  pression linéaire appliquée

Si on choisit de prendre la rigidité à la flexion de la poutre égale à  $Da$ , les résultats précédents montrent que pour  $r \geq 2$ , la plaque se comporte comme une infinité de poutres mises côte à côte. A partir des valeurs numériques du tableau de la figure (1.8), on peut conclure que pour  $b/a \geq 2$  le calcul de la déflexion, et donc de la pression maximum, d'une plaque peut être remplacé par celui d'une barre sans erreur substantielle. Pour un rapport  $b/a$  égal à 2, la différence entre la déflexion de la poutre et celle de la plaque est inférieure à 2.0%. Pour un rapport de 4 cette différence est d'environ 1.0%.

## 8 Capacité entre les deux armatures

### 8.1 Le capteur de pression capacitif

Un capteur capacitif est composé d'une armature déformable et d'une armature fixe dans laquelle est creusée une cavité. L'armature et le fond de la cavité sont recouverts d'une métallisation. La figure (1.10) montre la structure étudiée.



$a, b$  longueur des côtés  
 $r = b/a$  rapport des longueurs  
 $d$  profondeur de la cavité  
 $h$  épaisseur de la plaque  
 $w(x, y)$  déflexion au point  $(x, y)$   
 $P$  pression appliquée

figure 1.10 Schéma du capteur capacitif

Lorsque l'on applique une pression normale  $P$ , la plaque supérieure se déforme. On obtient une représentation de la pression appliquée en mesurant la capacité qui existe entre la plaque fléchie et l'armature inférieure. La capacité effective entre les deux armatures est donnée par l'équation (1.23).

$$\begin{aligned}
 P \neq 0 \quad C &= \iint_S \frac{\epsilon_0}{d - w(x, y)} dx dy \\
 P = 0 \quad C &= C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

où  $S$  surface des métallisations  $\approx [0, a] \times [0, b]$   
 $\epsilon_0$  constante diélectrique dans le milieu inter-armature  
 $C_0$  capacité au repos

### 8.2 Equation sans dimension

On déduit de l'équation précédente une expression sans dimension de la réponse du capteur. En mettant en facteur  $d$  au dénominateur et après avoir effectué le changement de variables  $\bar{x} \leftarrow x/a$  et  $\bar{y} \leftarrow y/b$ , on arrive finalement en réarrangeant les termes et en introduisant l'expression de la capacité au repos  $C_0$  à :

$$\frac{C}{C_0} = \iint_S \frac{1}{1 - \tilde{w}(x, y)} dx dy \quad S = [0, 1] \times [0, 1] \quad (1.24)$$

### 8.3 Courbe de réponse normalisée du capteur

Une fois que la déflexion  $\tilde{w}(x, y)$  connue pour chaque valeur de  $P/P_{max}$ , l'équation (1.24) nous permet de calculer la courbe de réponse du capteur.

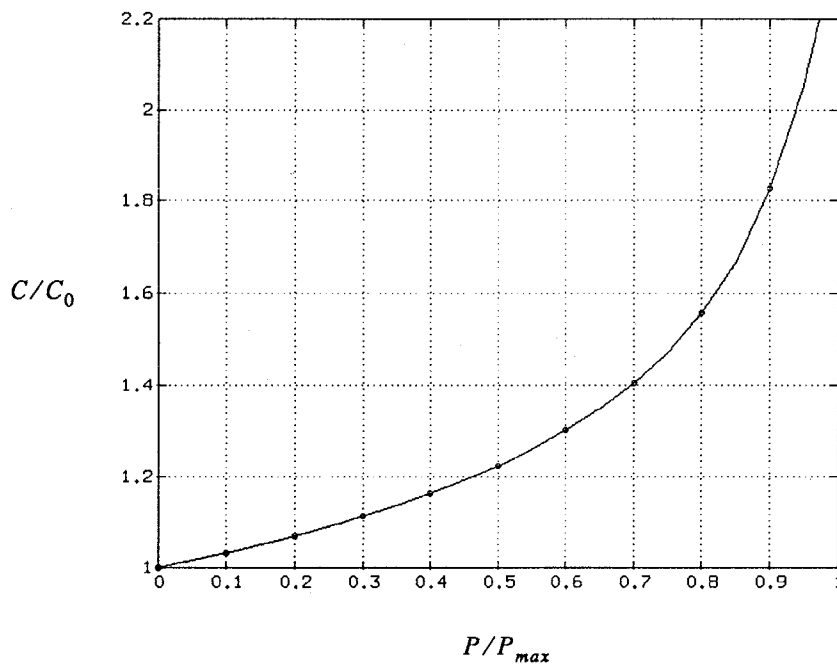


figure 1.11 Courbe de réponse théorique du capteur

## 9 Comparaison expérimentale

Une courbe de réponse expérimentale d'un capteur capacitif est donnée dans [6]. Nous avons repris cette courbe pour établir une comparaison. Le capteur a la géométrie suivante :

$$\alpha = 0.6621 \quad \begin{array}{l} a = 2 \text{ mm} \\ b = 2 \text{ mm} \\ d = 2 \text{ } \mu\text{m} \\ h = 30 \text{ } \mu\text{m} \end{array} \quad (1.25)$$

Les valeurs numériques considérées correspondent aux ordres de grandeur typiques que l'on rencontre dans la littérature. La courbe de réponse effective d'un capteur est calculée par les relations :

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 ab}{d} \quad P_{max} = D_0 \frac{\tilde{P}_{max}(r) dh^3}{r^2 a^4} \quad (1.26)$$

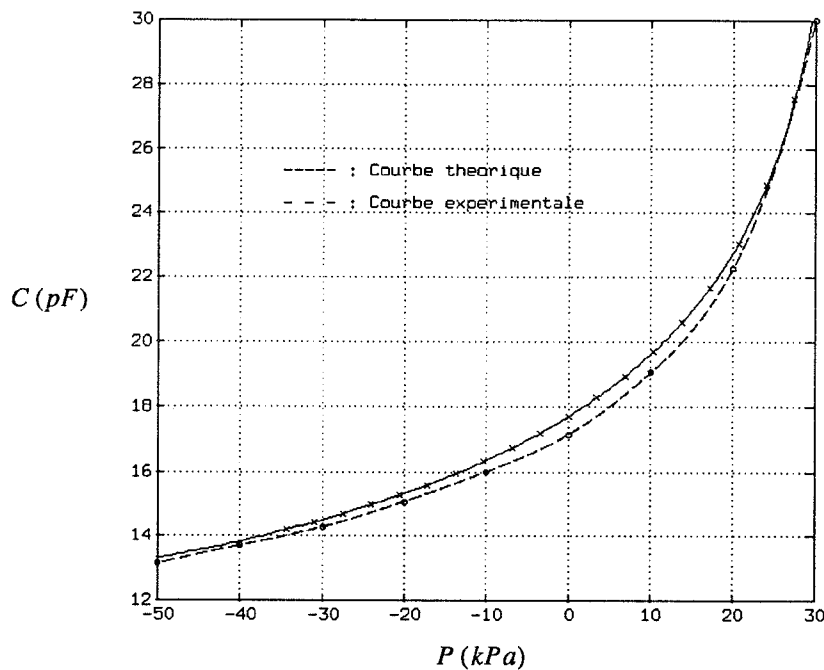


figure 1.12 Courbe de réponse expérimentale du capteur

## 10 Conclusion

Nous avons obtenu dans ce chapitre les valeurs de la déflexion d'une plaque mince encastree. Le couple de méthodes différences finies-gradient conjugué s'est révélé très efficace pour ré-

soudre ce type de problème, aussi bien au niveau de la précision des calculs qu'à celui de sa rapidité. A partir des résultats précédents, nous avons donné la courbe de réponse d'un capteur capacitif. Les solutions obtenues sont exprimées dans une forme normalisée qui permet de déterminer la réponse effective d'un capteur de forme rectangulaire et de dimension quelconque.

En outre, nous avons montré que la pression normalisée maximale reste constante pour des capteurs, de même surface, possédant un rapport des longueurs  $r$  supérieur à 2. La valeur de la déflexion normalisée calculée dans ce cas correspond à celle d'une poutre.

---

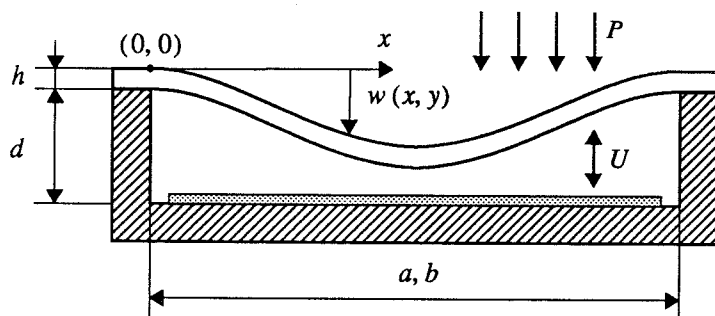
# Influence de la pression électrostatique

## Chapitre 2

---

### 1 Description du problème physique

Ce chapitre étudie le comportement du capteur capacitif lorsque l'on superpose une pression électrostatique à la pression constante  $P$ . L'origine de cette pression électrostatique entre les armatures peut être induite par la mesure de la capacité, ou volontairement appliquée dans le but de modifier les courbes de réponse du capteur.



$a, b$	longueur des côtés
$r = b/a$	rapport des longueurs
$d$	profondeur de la cavité
$h$	épaisseur de la plaque
$w(x, y)$	déflexion au point $(x, y)$
$P$	pression appliquée
$U$	tension appliquée

figure 2.1 Définition des paramètres géométriques

## 2 Déflexion de la plaque mince

### 2.1 Equation d'équilibre

L'équation d'équilibre d'une plaque déformée par une pression constante à laquelle on superpose une pression électrostatique, est donnée ci-dessous. Nous avons considéré que la perméabilité diélectrique relative du milieu inter-armature  $\epsilon_r$  est égale à 1.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} + \frac{\epsilon_0 U^2}{2D [d - w(x, y)]^2} \quad (2.1)$$

avec  $w(x, y)$  déflexion au point  $(x, y)$   
 $P$  pression appliquée sur la plaque  
 $U$  tension appliquée entre les deux armatures  
 $\epsilon_0$  perméabilité diélectrique  
 $D = D_0 h^3$  coefficient de rigidité de la plaque à la flexion

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \alpha = \nu + 2\frac{G}{E}(1-\nu^2) \quad (2.2)$$

où  $h$  épaisseur de la plaque  
 $\nu$  coefficient de Poisson  
 $E$  module de Young  
 $G$  module de Coulomb

Les coefficients  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $E$  et  $G$  dépendent du matériau et de la direction cristallographique dans laquelle est orientée la plaque.

### 2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites doivent être vérifiées sur les bords de la plaque, dans le cas d'une plaque encastree, elles ont la forme simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.3)$$

### 2.3 Problème aux limites

Nous sommes finalement conduits à résoudre le problème aux limites suivant : trouver  $w$  défini dans  $[0, a] \times [0, b]$  vérifiant :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} + \frac{\epsilon_0 U^2}{2D [d - w(x, y)]^2} \quad \text{dans } \Omega = (0, a) \times (0, b) \quad (2.4)$$

$$w = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

### 3 Réduction à un problème sans dimension

Le changement de variable  $\bar{x} = x/a$  et  $\bar{y} = y/b$  ramène le domaine d'intégration à  $[0, 1] \times [0, 1]$ . De plus, on pose  $r = b/a$ . Le changement de fonction  $\bar{w} = w/d - 1$  (i.e.  $\bar{w} = \tilde{w} - 1$ ) introduit une valeur normalisée de la déflexion. Nous normalisons la pression et la tension par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{P}{P_0} & \text{avec} & \quad \frac{1}{P_0} = \frac{a^2 b^2}{dD} \\ \tilde{U} &= \frac{U}{U_0} & \text{avec} & \quad \frac{1}{U_0^2} = \frac{a^2 b^2}{2d^3 D} \epsilon_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les changements de variable précédents conduisent finalement à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\bar{w}^2(x, y) \left( r^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} \right) = \tilde{P} \bar{w}^2(x, y) + \tilde{U}^2 \quad (2.6)$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\bar{w} = -1 \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0 \quad (2.7)$$

### 4 Pression et tension maximale

On introduit les deux grandeurs  $P_{max}$  et  $U_{max}$ . La grandeur  $P_{max}$  (resp.  $U_{max}$ ) est la pression (resp. tension) qu'il faut appliquer pour que la plaque entre en contact avec le fond de la cavité. Ces deux grandeurs dépendent l'une de l'autre. La pression maximale dépend de la tension  $\tilde{U}$  appliquée, et inversement, la tension maximale est fonction de la pression  $\tilde{P}$ .

### 5 Approximation élémentaire

Ce paragraphe propose une description élémentaire du comportement d'une plaque fléchie sous une tension électrostatique. On suppose donc que  $\tilde{P} = 0$ , la discrétisation de l'équation (2.6) conduit à un système d'équations algébriques dont le nombre de solutions distinctes et



le type de solutions (réelles ou complexes) dépendent du paramètre  $\tilde{U}$ . Pour se faire une idée du comportement des solutions de ce système d'équations algébriques quand  $\tilde{U}$  varie, nous allons étudier le comportement des racines en travaillant avec un maillage le plus grossier possible : c'est à dire un maillage à deux intervalles.

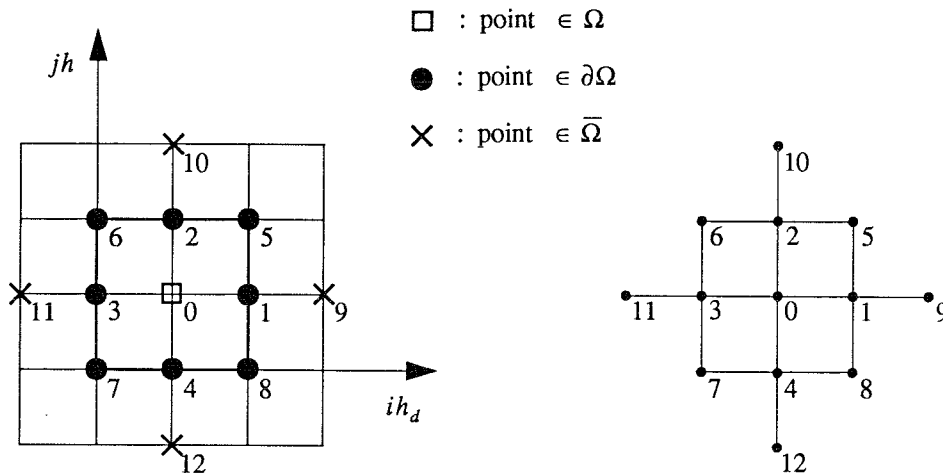


figure 2.2 Maillage du plan

Soit  $\tilde{w}$  (resp.  $\bar{w}$ ) la fonction qui approxime  $w$  (resp.  $\bar{w}$ ) aux points du maillage. L'application du schéma aux différences de l'équation (2.6) dans le domaine conduit à l'équation algébrique (2.8). Cette équation est la représentation discrète la plus élémentaire du problème

$$\begin{aligned} \bar{w}_0^2 (A_0 \bar{w}_0 + A_1 \bar{w}_1 + A_2 \bar{w}_2 + A_3 \bar{w}_3 + A_4 \bar{w}_4 \\ + A_5 \bar{w}_5 + A_6 \bar{w}_6 + A_7 \bar{w}_7 + A_8 \bar{w}_8 \\ + A_9 \bar{w}_9 + A_{10} \bar{w}_{10} + A_{11} \bar{w}_{11} + A_{12} \bar{w}_{12}) = h_d^4 \tilde{U}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

D'après les conditions aux limites, on sait que  $\bar{w}$  est égale à  $-1$  sur le contour et que  $\bar{w}$  est égal à  $w_0$  aux points extérieurs (9, 10, 11, 12). En exploitant ces conditions aux limites, l'équation (2.8) ne contient maintenant qu'une seule inconnue. Pour faciliter l'écriture, nous posons :

$$\begin{aligned} K_1 &= A_0 + A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12} \\ K_2 &= -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8) \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'équation (2.8) se réduit alors à :

$$K_1 \bar{w}_0^3 + K_2 \bar{w}_0^2 - h_d^2 \tilde{U}^2 = 0 \quad (2.10)$$

C'est une équation du 3<sup>ème</sup> degré. Cette équation a donc trois racines (réelles ou complexes)

que nous appelons  ${}_1\bar{w}$ ,  ${}_2\bar{w}$ ,  ${}_3\bar{w}$ . Ces valeurs sont reliées aux valeurs significatives  $\bar{w}$  par  $\bar{w} = \bar{w} - 1$ . Nous avons tracé ci-dessous le comportement des trois solutions  ${}_1\bar{w}$ ,  ${}_2\bar{w}$ ,  ${}_3\bar{w}$  paramétrées en  $\bar{U}$ .

1 :  $\bar{U} = 0.0$     2 :  $\bar{U} = 0.3$     3 :  $\bar{U} = 0.44$     4 :  $\bar{U} = 0.5$     5 :  $\bar{U} = 0.6$

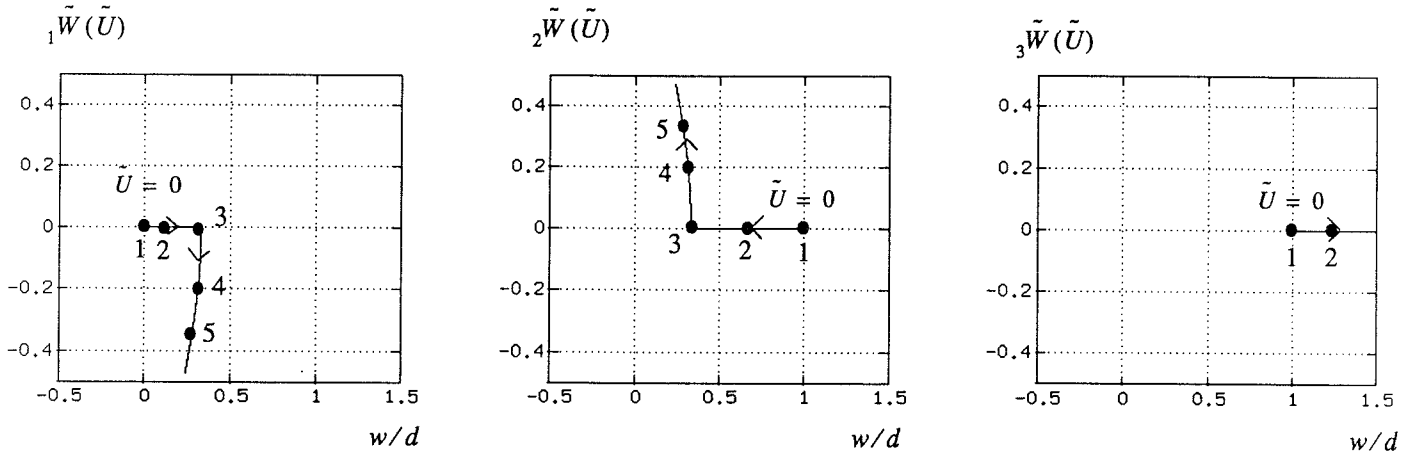


figure 2.3 Racines de l'équation (2.10) paramétrés en  $\bar{U}$

On interprète ces résultats de la façon suivante :

La racine  ${}_3\bar{w}$  est réelle mais toujours supérieure à 1, ce qui lui enlève toute signification physique. On rappelle que  $\bar{w} > 1$  signifie physiquement que la déflexion de la plaque dépasse le fond de la cavité, ce qui est impossible.

Les deux autres racines  ${}_1\bar{w}$  et  ${}_2\bar{w}$  se rapprochent progressivement l'une vers l'autre tout en restant réelle jusqu'à un certain point proche de  $\bar{U} = 0.44$ . Au delà de ce point, elles deviennent confondues puis complexes (ces deux racines deviennent même conjuguées puisque tous les coefficients de l'équation sont réels).

Le point à partir duquel les racines se confondent pour ensuite devenir complexes est interprété comme étant le point d'instabilité du système physique. La valeur de  $\bar{U}$  à ce point est la valeur de la tension normalisée maximale que l'on peut appliquer entre les armatures, au-delà de cette valeur, la plaque se colle immédiatement au fond de la cavité. Dans la suite, on note  $\bar{U}_{max}$  cette valeur maximale de  $\bar{U}$ .

## 6 Résolution numérique du problème

Soit  $N$  le nombre d'intervalles du domaine discrétisé. La discrétisation de l'équation aux dérivées partielles conduit à un système de  $(N - 1)^2$  équations algébriques non linéaires. L'étude

des solutions d'un système d'équations algébriques non linéaires à plusieurs inconnues est un problème très complexe<sup>1</sup>, nous nous limiterons donc à une approche purement numérique.

Les méthodes de calcul des solutions de système d'équations non linéaires sont toutes des méthodes de type itératif. La méthode la plus classique est la méthode de Newton-Raphson. Dans tous les cas, ces méthodes convergent si on connaît une approximation "suffisamment" bonne de la solution.

## 6.1 Discrétisation de l'équation aux dérivées partielles

L'équation aux différences représentative de l'équation aux dérivées partielles :

$$\bar{w}^2(x, y) \left( r^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} \right) = \tilde{P} \bar{w}^2(x, y) + \tilde{U}^2 \quad (2.11)$$

est l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} & \bar{W}_{i,j}^2 (A_0 \bar{W}_{i,j} \\ & + A_1 \bar{W}_{i+1,j} + A_2 \bar{W}_{i,j+1} + A_3 \bar{W}_{i-1,j} + A_4 \bar{W}_{i,j-1} \\ & + A_5 \bar{W}_{i+1,j+1} + A_6 \bar{W}_{i-1,j+1} + A_7 \bar{W}_{i-1,j-1} + A_8 \bar{W}_{i+1,j-1} \\ & + A_9 \bar{W}_{i+2,j} + A_{10} \bar{W}_{i,j+2} + A_{11} \bar{W}_{i-2,j} + A_{12} \bar{W}_{i,j-2}) = h_d^4 \tilde{P} \bar{W}_{i,j}^2 + h_d^4 \tilde{U}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

La méthode de Newton-Raphson nécessite la connaissance des dérivées premières de (2.12). Leurs valeurs sont inscrites ci-dessous.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i,j}} &= 3A_0 \bar{W}_{i,j}^2 + 2W_{i,j} (A_1 \bar{W}_{i+1,j} + A_2 \bar{W}_{i,j+1} + A_3 \bar{W}_{i-1,j} + A_4 \bar{W}_{i,j-1} \\ & \quad + A_5 \bar{W}_{i+1,j+1} + A_6 \bar{W}_{i-1,j+1} + A_7 \bar{W}_{i-1,j-1} + A_8 \bar{W}_{i+1,j-1} \\ & \quad + A_9 \bar{W}_{i+2,j} + A_{10} \bar{W}_{i,j+2} + A_{11} \bar{W}_{i-2,j} + A_{12} \bar{W}_{i,j-2} - h_d^4 \tilde{P}) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i+1,j}} &= A_1 \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i,j+1}} &= A_2 \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i-1,j}} &= A_3 \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i,j-1}} &= A_4 \bar{W}_{i,j}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i+1,j+1}} &= A_5 \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i-1,j+1}} &= A_6 \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i-1,j-1}} &= A_7 \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i+1,j-1}} &= A_8 \bar{W}_{i,j}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i+2,j}} &= A_9 \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i,j+2}} &= A_{10} \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i-2,j}} &= A_{11} \bar{W}_{i,j}^2 & \frac{\partial f}{\partial \bar{W}_{i,j-2}} &= A_{12} \bar{W}_{i,j}^2 \end{aligned}$$

1. Ce problème fait partie d'une branche spéciale des mathématiques : "la géométrie algébrique".

avec

$$\begin{array}{llll}
 A_0 = 6(r^2 + 1/r^2) + 8\alpha & A_1 = -4(\alpha + r^2) & A_5 = 2\alpha & A_9 = r^2 \\
 & A_2 = -4(\alpha + 1/r^2) & A_6 = 2\alpha & A_{10} = 1/r^2 \\
 & A_3 = -4(\alpha + r^2) & A_7 = 2\alpha & A_{11} = r^2 \\
 & A_4 = -4(\alpha + 1/r^2) & A_8 = 2\alpha & A_{12} = 1/r^2
 \end{array}$$

## 6.2 Résolution du système

L'équation (2.12), appliquée sur le maillage, conduit à un système de  $(N-1)^2$  équations algébriques. La discrétisation des conditions aux limites complète le système. Nous résolvons ce système avec la méthode de Newton-Raphson<sup>2</sup>. L'algorithme de cette méthode est rappelé ci-dessous [16 p. 159].

$x^0$ pour $k = 1 \dots k_{max}$ faire calculer $(f')^k$ et $f^k$ résoudre le système linéaire $(f')^k r^k = -f^k$ $x^k = x^{k-1} + r^k$ sortir dès que $\ r^k\  \leq \varepsilon$ fin boucle	soit le Jacobien $f'_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$    Algorithme de Newton-Raphson. Résolution de $f(x) = 0$
---	--

La résolution du système linéaire doit être effectuée par la méthode du gradient conjugué généralisée [49 p. 536] puisque le système linéaire perd ici son caractère défini positif.

$r^0 = b - Ax^0$ $p^0 = A^t r^0$ pour $k = 0 \dots k_{max}$ faire $\alpha^k = \frac{\ A^t r^k\ ^2}{\ Ap^k\ ^2}$ $x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k$ sortir dès que $ x^{k+1} - x^k  \leq \varepsilon$ $r^{k+1} = r^k - \alpha^k Ap^k$ $\beta^{k+1} = \frac{\ A^t r^{k+1}\ ^2}{\ A^t r^k\ ^2}$ $p^{k+1} = A^t r^{k+1} + \beta^{k+1} p^k$ fin boucle	avec $\ x\ $ norme de $x$    Algorithme du gradient conjugué généralisé. Résolution de $Ax = b$
--	---

2. Le mathématicien et physicien Newton (Isaac, 1642-1727) est éminemment célèbre, mais qui était Raphson ? (Joseph, 1648-1715). La réponse à cette question angoissante se trouve dans l'article [7].



## 8 Validation de la résolution numérique

Même dans le cas d'une plaque simplement posée, nous ne connaissons pas de solution analytique du problème aux limites (2.4). Un autre moyen classique pour vérifier une solution numérique est de retrouver les résultats en employant une méthode radicalement différente. Ce paragraphe traite ce problème. Nous cherchons à résoudre le système de  $(N-1)^2$  équations algébriques suivant :

Pour  $i, j = 1 \dots N$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{i,j}^2 (A_0 \bar{W}_{i,j} + A_1 \bar{W}_{i+1,j} + A_2 \bar{W}_{i,j+1} + A_3 \bar{W}_{i-1,j} + A_4 \bar{W}_{i,j-1} \\ + A_5 \bar{W}_{i+1,j+1} + A_6 \bar{W}_{i-1,j+1} + A_7 \bar{W}_{i-1,j-1} + A_8 \bar{W}_{i+1,j-1} \\ + A_9 \bar{W}_{i+2,j} + A_{10} \bar{W}_{i,j+2} + A_{11} \bar{W}_{i-2,j} + A_{12} \bar{W}_{i,j-2}) = h_d^4 \tilde{P} \bar{W}_{i,j}^2 + h_d^4 \tilde{U}^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\begin{aligned} S = A_1 \bar{W}_{i+1,j} + A_2 \bar{W}_{i,j+1} + A_3 \bar{W}_{i-1,j} + A_4 \bar{W}_{i,j-1} \\ + A_5 \bar{W}_{i+1,j+1} + A_6 \bar{W}_{i-1,j+1} + A_7 \bar{W}_{i-1,j-1} + A_8 \bar{W}_{i+1,j-1} \\ + A_9 \bar{W}_{i+2,j} + A_{10} \bar{W}_{i,j+2} + A_{11} \bar{W}_{i-2,j} + A_{12} \bar{W}_{i,j-2} \\ - h_d^4 \tilde{P} \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'équation (5.13) s'écrit alors :

$$A_0 \bar{W}_{i,j}^3 + S \bar{W}_{i,j}^2 - h_d^4 \tilde{U}^2 = 0 \quad (2.15)$$

L'idée de la méthode est la suivante : à chaque itération, nous résolvons de façon algébrique l'équation (2.15). Comme c'est une équation du 3<sup>ième</sup> degré, nous obtenons 3 racines dont il faut choisir celle qui correspond au problème physique. Le système est ensuite résolu de façon itérative par la méthode de relaxation.

### 8.1 Résolution algébrique

La méthode de résolution d'une équation du 3<sup>ième</sup> degré est l'une des deux grandes découvertes des algébristes Italiens du XVI<sup>ième</sup> siècle. Il n'y a pas de difficulté de principe dans cette résolution mais le procédé de calcul est assez lourd. Bien que la méthode soit exposée dans de nombreux livres, nous avons préféré la réécrire brièvement ici pour rendre ce mémoire le plus autonome possible.

On ramène l'équation (2.15) à la forme standard par le changement de variable classique :

$$\hat{W}_{ij} = \bar{W}_{ij} + \frac{S}{3A_0} \quad (2.16)$$

Ce qui conduit à l'équation :

$$\hat{W}_{ij}^3 + 3p\hat{W}_{ij} + 2q = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 2q = \frac{2S^3}{27A_0^3} - \frac{h_d^4 \tilde{U}^2}{A_0} \\ 3p = -\frac{S^2}{3A_0^2} \end{cases} \quad (2.17)$$

Le nombre de racines réelles de l'équation dépend du signe du discriminant :

$$\Delta = p^3 + q^2 = \frac{h_d^4 \tilde{U}^2}{A_0^2} \left( \frac{1}{4} - \frac{S^3 h_d^4 \tilde{U}^2}{27A_0^2} \right) \quad (2.18)$$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
trois racines réelles	trois racines réelles	une racine réelle deux racines complexes
$\hat{W}_{ij}^1 = 2\sqrt{-p} \cos \frac{\varphi}{3}$ $\hat{W}_{ij}^2 = 2\sqrt{-p} \cos \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)$ $\hat{W}_{ij}^3 = 2\sqrt{-p} \cos \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)$	<p>Si <math>p = q = 0</math> <math>W_{ij}^{1,2,3} = 0</math></p> <p>Si <math>p = -q \neq 0</math> <math>W_{ij}^1 = -2\sqrt[3]{q}</math> <math>W_{ij}^{2,3} = \sqrt[3]{q}</math></p>	$\hat{W}_{ij}^1 = u + v$ $\hat{W}_{ij}^2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v$ $\hat{W}_{ij}^3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v$ <p>avec</p> $\begin{cases} \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}} \\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{p^3 + q^2}} \end{cases}$
avec		
$\cos \varphi = \frac{q}{p} \sqrt{\frac{-1}{p}}$		

## 8.2 Résolution numérique

La résolution analytique précédente conduit à un système de la forme :

$$\hat{W}_{ij} = f(\hat{W}_{kl}) \quad \text{avec} \quad (k, l) \neq (i, j) \quad (2.19)$$

L'algorithme de la méthode de relaxation fait intervenir des relations de la forme (2.19). C'est cette méthode que nous avons donc utilisée pour la résolution numérique.

```

x0
pour k = 0...kmax faire
  pour i = 1...n faire
    xik+1/2 = 1/aii [ bi - ∑j=1i-1 aijxjk+1 - ∑j=i+1n aijxjk ]
    xik+1 = ωxik+1/2 + (1-ω)xik
  fin boucle
  sortir dès que ||Axk+1 - b|| ≤ ε
fin boucle
    
```

Algorithme de la méthode de sur-relaxation

Le paramètre  $\omega$  est appelé "paramètre de sur-relaxation". On montre que pour conserver la convergence de la méthode, la valeur de  $\omega$  doit être comprise entre 0 et 2. Le cas particulier  $\omega = 1$  correspond à la méthode classique de Gauss-Seidel. Une valeur de  $\omega$  optimisée permet de réduire considérablement le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du système linéaire.

La valeur optimale de  $\omega$  peut être déterminée d'une façon théorique dans quelque "cas d'école" décrit dans la plupart des ouvrages élémentaires d'analyse numérique. Cependant, dans la majorité des cas concrets, cette valeur est déterminée expérimentalement.

### 8.3 Solution du problème

tableau 2.2 Déflexion normalisée

J = 10	Y = 1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
J = 9	Y = 0.9	0.000000	0.006329	0.016382	0.025473	0.031479	0.033555	0.031479	0.025473	0.016382	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 8	Y = 0.8	0.000000	0.016382	0.043263	0.068293	0.085174	0.091067	0.085174	0.068293	0.043263	0.016382	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 7	Y = 0.7	0.000000	0.025473	0.068293	0.108849	0.136516	0.146231	0.136516	0.108849	0.068293	0.025473	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 6	Y = 0.6	0.000000	0.031479	0.085174	0.136516	0.171764	0.184180	0.171764	0.136516	0.085174	0.031479	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 5	Y = 0.5	0.000000	0.033555	0.091067	0.146231	0.184180	0.197561	0.184180	0.146231	0.091067	0.033555	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 4	Y = 0.4	0.000000	0.031479	0.085174	0.136516	0.171764	0.184180	0.171764	0.136516	0.085174	0.031479	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 3	Y = 0.3	0.000000	0.025473	0.068293	0.108849	0.136516	0.146231	0.136516	0.108849	0.068293	0.025473	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 2	Y = 0.2	0.000000	0.016382	0.043263	0.068293	0.085174	0.091067	0.085174	0.068293	0.043263	0.016382	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 1	Y = 0.1	0.000000	0.006329	0.016382	0.025473	0.031479	0.033555	0.031479	0.025473	0.016382	0.006329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 0	Y = 0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		I = 0	I = 1	I = 2	I = 3	I = 4	I = 5	I = 6	I = 7	I = 8	I = 9	I = 10									
		X = 0.0	X = 0.1	X = 0.2	X = 0.3	X = 0.4	X = 0.5	X = 0.6	X = 0.7	X = 0.8	X = 0.9	X = 1.0									

La résolution du système algébrique (2.13) par cette méthode donne des résultats identiques à ceux donnés par la méthode du paragraphe précédent. La vitesse de calcul obtenue par la méthode introduite dans ce paragraphe est cependant nettement supérieure à celle de la méthode utilisée dans le paragraphe précédent. Le tableau (2.2) indique le résultat obtenu avec les valeurs normalisées  $\bar{P} = 100.0$  et  $\bar{U} = 5.0$ .



## 9 Comparaison avec la littérature

L'article [29] propose une solution analytique approchée dans le cas de la déflexion d'une plaque carrée, isotrope et uniquement soumise à une tension. Les auteurs aboutissent à la solution suivante :

$$\frac{4\pi^5 D d w^2}{\epsilon_0 a^4} - U^2 \left[ \frac{d}{d-w} E\left(\sqrt{\frac{w}{d}}\right) - K\left(\sqrt{\frac{w}{d}}\right) \right] = 0 \quad (2.20)$$

avec  $K(k)$  l'intégrale elliptique complète de première espèce  
 $E(k)$  l'intégrale elliptique complète de seconde espèce

La solution analytique approchée est calculée<sup>3</sup> pour les valeurs numériques suivantes :

$a = 14.8 \text{ mm}$   
 $h = 84 \text{ } \mu\text{m}$   
 $d = 30 \text{ } \mu\text{m}$   
 $E = 1.9 \times 10^{11}$   
 $\nu = 0.2$

Les deux solutions sont comparées dans la courbe ci-dessous

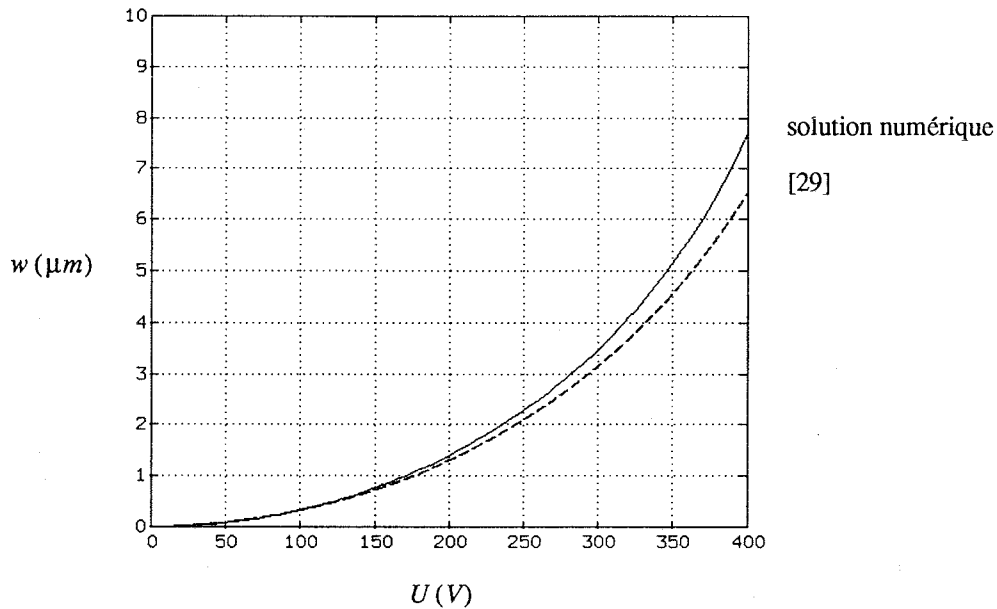


figure 2.5 Comparaison avec la littérature

3. On trouve dans [66][57] les algorithmes de calcul de ces intégrales elliptiques, et dans [31][1] leurs tabulation.

## 10 Phénomène d'instabilité

Le phénomène d'instabilité est illustré par la courbe suivante. La déflexion normalisée  $w/d$  passe des valeurs 0.5 à 0.9 lorsque l'on augmente la tension normalisée  $U/U_0$  de seulement 0.064%.

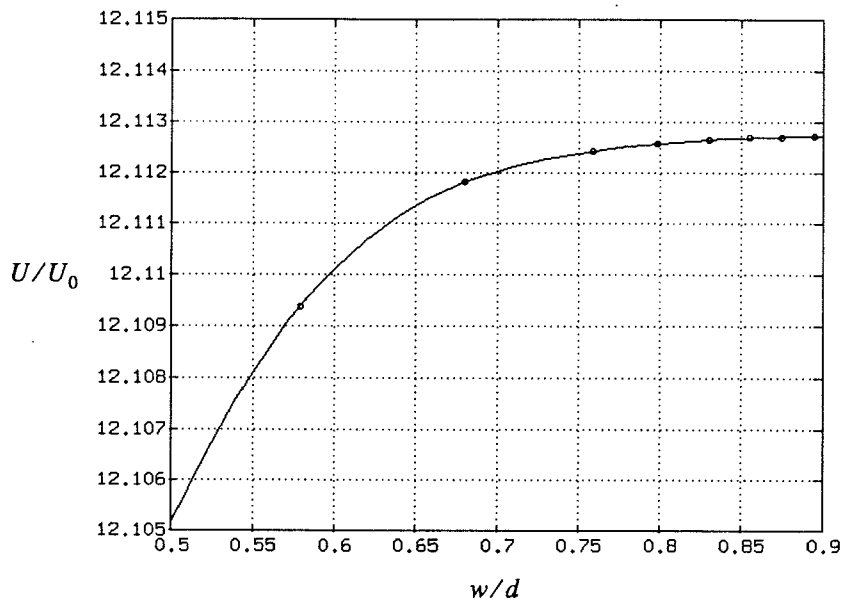
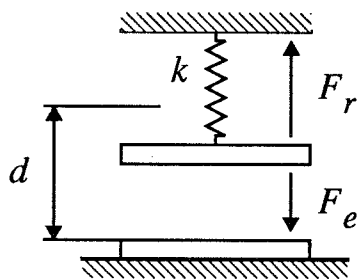


figure 2.6 Phénomène d'instabilité

Le principal enseignement que l'on peut déduire de cette courbe est qu'il n'est pas possible de définir avec précision la valeur de déflexion normalisée  $w/d$  à partir de laquelle l'instabilité apparaît. Lorsque la tension normalisée  $\tilde{U}$  atteint une valeur proche de sa valeur limite, la plaque "s'écrase" au fond de la cavité d'une façon très brutale. Physiquement, cela se traduit par l'impossibilité de contrôler finement la position de la plaque à partir de la valeur de la tension lorsque l'on se trouve autour de la position d'équilibre.

Le phénomène d'instabilité est illustré sur une structure élémentaire représentée ci-dessous.



Le modèle est composé de deux armatures rigides, dont l'une d'entre elle est maintenue par un ressort de raideur  $k$ . Ce modèle revient à considérer un déplacement moyen de la plaque et à assimiler les forces élastiques du matériaux à la force de rappel d'un ressort

Soit  $d$  la distance inter-armature et  $w$  le déplacement de l'armature mobile par rapport à sa position d'équilibre. L'application d'une tension  $U$  entre les deux armatures engendre une force électrostatique  $F_e$  qui entraîne l'armature mobile vers le bas, la force  $F_e$  s'exprime par l'équation (2.21).

$$F_e = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2(d-w)^2} \quad (2.21)$$

La force de rappel du ressort est donnée par l'équation (2.22)

$$F_r = -kw \quad (2.22)$$

Le système est en équilibre si son énergie potentielle  $E$  est un extrémum (i.e.  $\sum F = 0$ ).

$$\frac{\partial E}{\partial w} = F_e + F_r = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2(d-w)^2} - kw = 0 \quad (2.23)$$

Un système est en équilibre stable si il tend à revenir à sa position initiale lorsqu'il est légèrement écarté de sa position d'équilibre. La condition pour qu'un système soit en équilibre stable est que son énergie potentielle soit minimale, i.e.,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial w^2} = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{(d-w)^3} - k > 0 \quad (2.24)$$

les équation (2.23) et (2.24) fournissent un système d'équation entre les inconnues  $w$  et  $U$ . La résolution de ces équations à la limite de l'équilibre donne les solutions (2.25).

$$(w = d/3, U = \sqrt{\frac{8}{27}} \sqrt{\frac{kh^3}{\epsilon_0 S}}) , (w = d/3, U = -\sqrt{\frac{8}{27}} \sqrt{\frac{kh^3}{\epsilon_0 S}}) \quad (2.25)$$

Le déplacement maximal de l'armature supérieure pour lequel il y a stabilité est donc de  $\tilde{w} = 0.33$  pour ce modèle élémentaire. Cette valeur est à comparer avec la valeur  $\tilde{w} = 0.45$  calculé numériquement pour la plaque (voir figure 2.4). En outre, il est intéressant de remarquer que l'expression de  $\tilde{w}$  limite est indépendante de la raideur du ressort  $k$ .

## 11 Pression et tension maximale

Les courbes de pression maximale à  $U/U_0$  donnée sont tracées sur la figure (2.7) en fonction du rapport des longueurs  $r$ . La pression maximale diminue avec la tension  $U/U_0$  appliquée. Cette courbe donne le domaine d'utilisation du capteur à  $U/U_0$  donnée. Pour des raisons de temps de calcul, les points indiqués sur les courbes (2.7) et (2.8) ont été calculés en utilisant un maillage de  $10 \times 10$  intervalles. L'écart entre la courbe tracée à  $\tilde{U} = 0$  sur la figure (2.7) et celle de la figure (1.7) est dû à la différence de la taille du maillage utilisé.

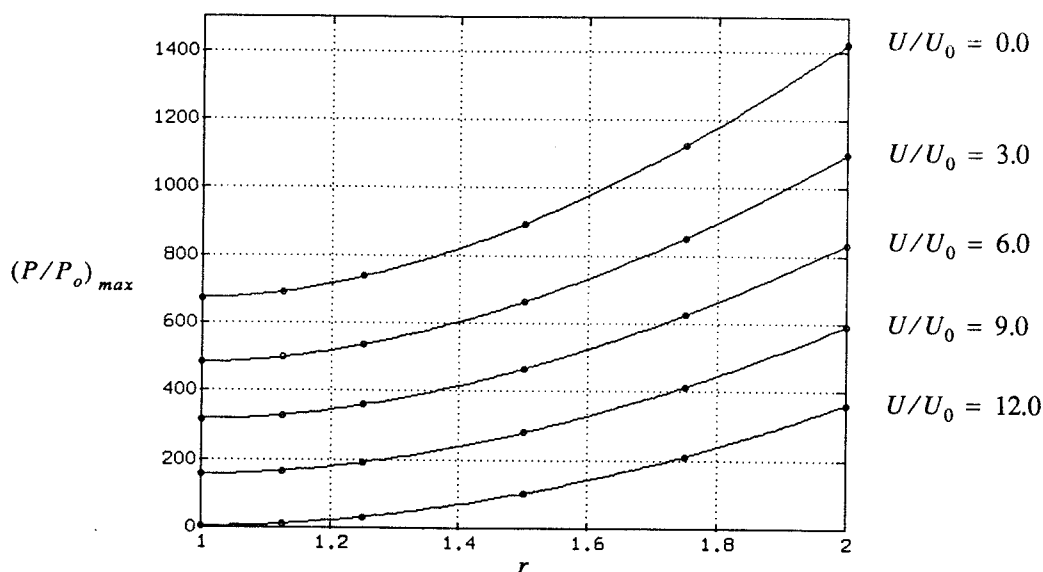


figure 2.7 Pression normalisée maximale en fonction de  $r$

Les courbes ci-dessous donnent la tension maximale à ne pas dépasser pour conserver la stabilité du système pour différentes valeurs de pression normalisée  $P/P_0$  en fonction du rapport des longueurs  $r$ .

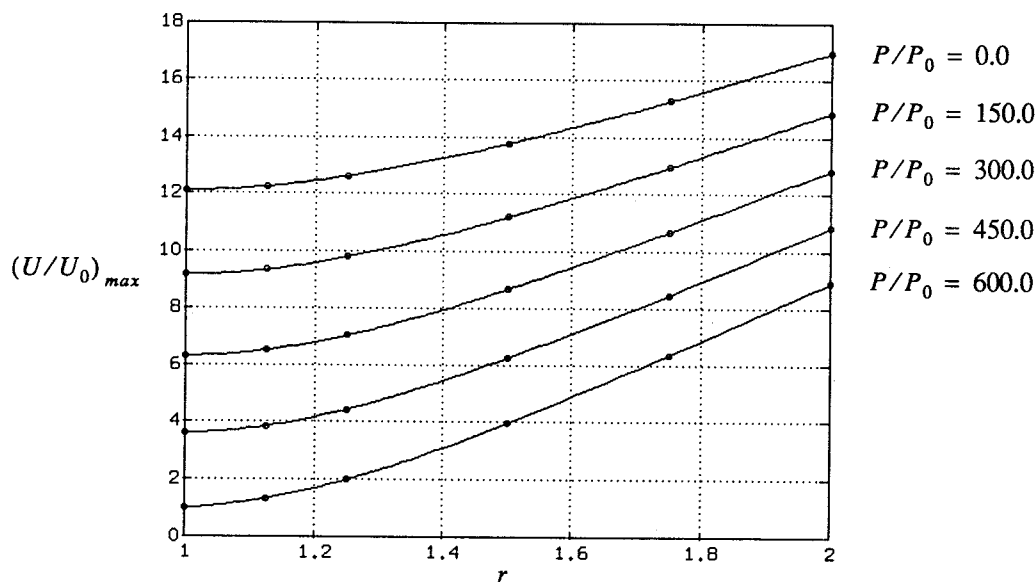


figure 2.8 Tension normalisée maximale en fonction de  $r$

## 12 Réponse du capteur

### 12.1 Equation normalisée

Les équations de ce paragraphe sont identiques à celles du premier chapitre. Nous rappelons simplement ici l'équation normalisée utilisée pour le calcul de la réponse. Soit  $C_0$  la valeur de la capacité au repos, l'équation de la réponse du capteur s'écrit :

$$\frac{C}{C_0} = \iint_S \frac{1}{1 - \tilde{w}_n(x, y)} dx dy \quad (2.26)$$

$$S = [0, a] \times [0, b]$$

### 12.2 Courbe de réponse normalisée du capteur

La courbe de réponse normalisée d'un capteur carré en fonction de  $U/U_0$  est illustrée par la figure (2.9). La pression  $P_{max}$  utilisée comme référence pour tracer les courbes est la pression maximale relative à la tension nulle. La courbe limite représentée marque la zone de stabilité. Le phénomène d'instabilité apparaîtrait lorsque la courbe de réponse coupe la courbe limite.

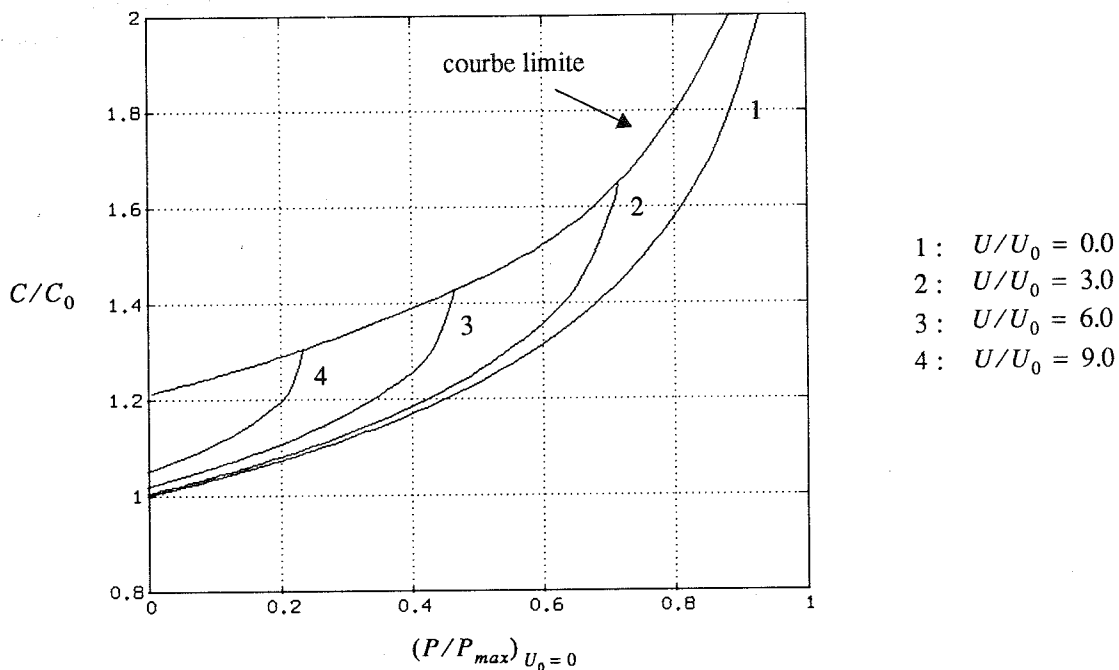


figure 2.9 Courbe de réponse normalisée

La courbe 1 est identique à celle du premier chapitre (voir figure 1.11). Les courbes 2, 3, 4 montrent l'influence de la pression électrostatique. Plus on impose une tension élevée, plus

le domaine d'utilisation du capteur se réduit. En outre, les valeurs de capacité que l'on mesure deviennent aussi plus faibles lorsque l'on augmente la tension  $U/U_0$ . Au-delà de la courbe limite, il n'y a plus aucune mesure possible puisque la plaque "chute" brutalement dans le fond de la cavité et crée un court-circuit entre les deux armatures.

### 12.3 Réponse en fonction de la pression électrostatique

La courbe de réponse du capteur en fonction de la tension normalisée est donnée à titre indicatif sur la figure (2.10). Elle est tracée pour une pression appliquée nulle. On remarque que les valeurs de capacité restent faibles dans la zone de stabilité. Cela s'explique à partir de la courbe (2.4) où l'on observe que la déflexion, dans le domaine de fonctionnement stable, reste toujours inférieure à 45% de la profondeur de la cavité.

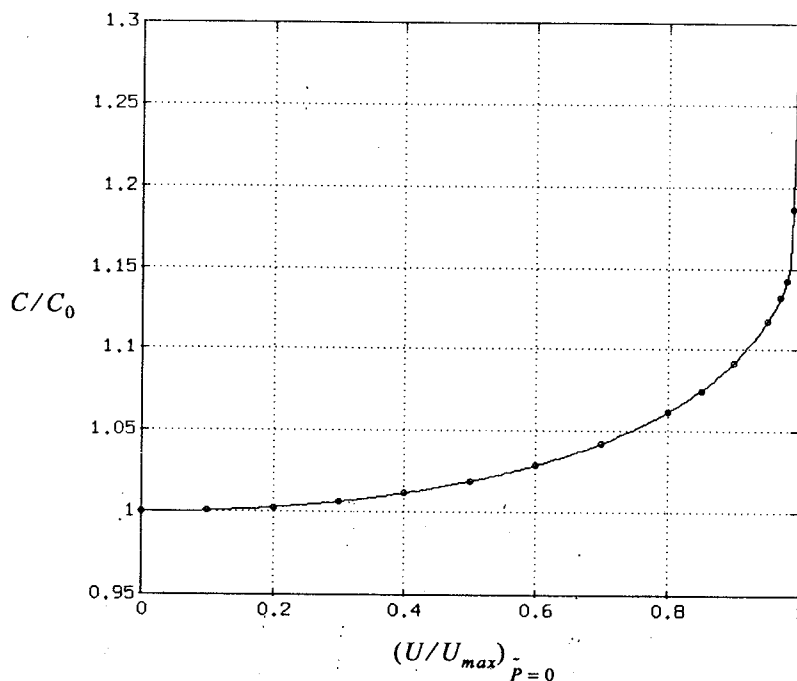


figure 2.10 Réponse en fonction de la pression électrostatique

## 13 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une étude de l'influence de la pression électrostatique sur le comportement du capteur de pression capacitif. L'équation aux dérivées partielles de la déflexion d'une plaque déformée simultanément par une pression constante et une tension électrostatique est non-linéaire. Cette équation a été résolue par deux méthodes numériques qui ont conduit aux mêmes valeurs de déflexion.

Les résultats numériques ont montré qu'il existe une courbe, fonction du couple de valeur  $(\bar{P}, \bar{U})$ , qui délimite une zone de stabilité de la plaque. L'instabilité se traduit par une "chute" brutale de la plaque dans le fond de la cavité. Nous avons tracé un réseau de courbe permettant de déterminer les valeurs limites de pression et de tension normalisées en fonction du rapport des longueurs.

Les courbes de réponse paramétrées en fonction de la tension normalisée ont été représentées et ont mis en évidence que l'application de la tension n'a pas d'influence positive sur la linéarité et la sensibilité du capteur.

Enfin, la solution numérique calculée a été comparée à une solution analytique approchée. Les résultats obtenus sont proches mais le manque de littérature sur le sujet rend difficile une comparaison plus fine.

---

---

# Capteurs capacitifs à armature d'épaisseur variable

## *Chapitre 3*

---

### **1 Equation de la déflexion d'une plaque mince d'épaisseur variable**

Ce chapitre traite le cas des plaques d'épaisseur variable. C'est à dire que l'on considère maintenant que l'épaisseur de la plaque  $h$  est fonction de  $x$  et  $y$ . Toutefois, on suppose comme dans le chapitre précédent, que l'épaisseur de la plaque est faible en comparaison des dimensions dans les deux autres directions. Les déformations elles-mêmes seront, ici encore, supposées petites, c'est à dire que les points de la plaque varient peu à l'égard de l'épaisseur.

#### **1.1 Equation d'équilibre**

L'équation de base est obtenue à partir de la formulation des moments et de l'équation reliant ces moments entre eux. Rappelons la forme de ces équations que l'on peut trouver dans [82] :



$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -P$$

$$M_{xx} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_{yy} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = (\alpha - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$
(3.1)

En éliminant  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  et  $M_{xy}$  dans le système précédent, on obtient la relation recherchée. Dans le cas de petites déformations, l'équation d'équilibre d'une plaque d'épaisseur variable déformée par des forces extérieures est décrite par :

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2(\alpha - \nu) \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = P$$
(3.2)

avec  $w(x, y)$  déflexion au point  $(x, y)$   
 $P$  pression appliquée sur la plaque  
 $D = D_0 h^3$  coefficient de rigidité de la plaque à la flexion

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \alpha = \nu + 2 \frac{G}{E} (1 - \nu^2)$$
(3.3)

où  $h(x, y)$  épaisseur de la plaque  
 $\nu$  coefficient de Poisson  
 $E$  module de Young  
 $G$  module de Coulomb

Les trois coefficients  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $E$  et  $G$  dépendent du matériau et de la direction cristallographique dans laquelle est orientée la plaque.

## 1.2 Conditions aux limites

Soit  $\Omega$  le domaine d'intégration  $[0, a] \times [0, b]$ ,  $\partial\Omega$  les points frontières du domaine et  $n$  la normale extérieure au domaine. Dans le cas d'une plaque encastree, les conditions aux limites ont la forme simple :

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega$$
(3.4)

### 1.3 Problème aux limites

On est finalement conduit à résoudre le problème aux limites suivant : trouver  $w$  défini dans  $[0, a] \times [0, b]$  vérifiant :

dans  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2(\alpha - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = P \quad (3.5)$$

sur  $\partial\Omega$

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

Nous allons rechercher une solution numérique de ce problème aux limites.

## 2 Réduction à un problème sans dimension

Le changement de variable  $\tilde{x} = x/a$  et  $\tilde{y} = y/b$  ramène le domaine d'intégration à  $[0, 1] \times [0, 1]$ . De plus, on pose  $r = b/a$ . On effectue ensuite le changement de fonction  $\tilde{w} = w/d$ . Soit  $\bar{h}$  une valeur donnée de l'épaisseur de la membrane, soit  $h(x, y)$  la valeur de l'épaisseur de la membrane aux points  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ , on pose  $\tilde{h}(x, y) = h(x, y)/\bar{h}$ .

On définit ensuite :

$$\tilde{P} = \frac{P}{P_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{P_0} = \frac{a^2 b^2}{d D_0 \bar{h}^3} \quad (3.6)$$

Les changements de variable précédents conduisent finalement à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^{2-3}}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{h} \left[ r^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right] + 2(\alpha - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \tilde{h}^3 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{h}^3 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} \right] = \tilde{P} \quad (3.7)$$

## 3 Résolution numérique du problème

### 3.1 Maillage

Le maillage du plan utilisé pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles est similai-

re à celui employé dans le chapitre précédent. Ce maillage contient un nombre un peu plus élevé de points (exactement  $4 \times 3 = 12$  points supplémentaires).

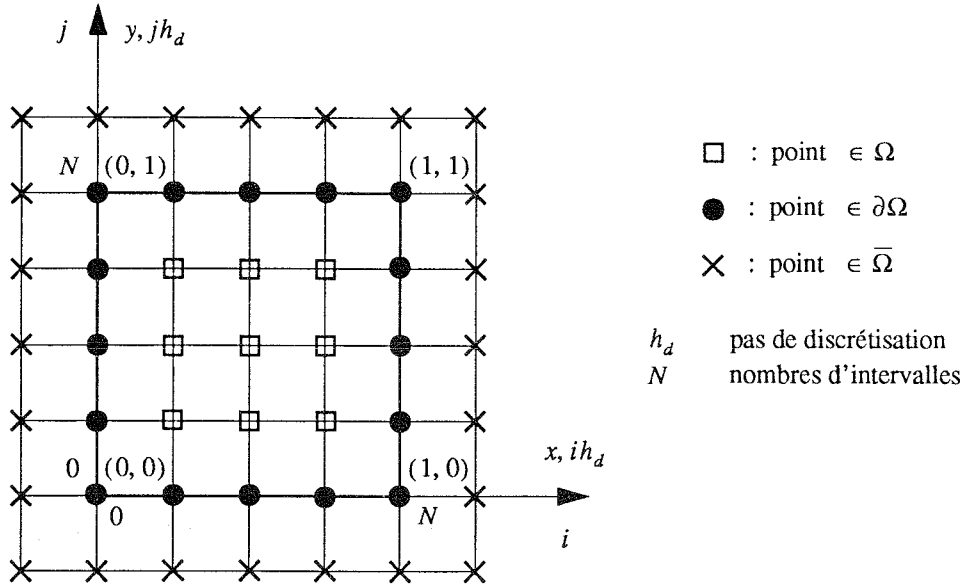


figure 3.1 Maillage du plan avec 4 intervalles

### 3.2 Discrétisation de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2-3}}{\partial \tilde{x}^2} h \left[ r^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + v \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right] + 2(\alpha - v) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \tilde{h}^3 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{h}^3 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + v \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} \right] = \tilde{P} \quad (3.8)$$

Soit  $w$  la fonction qui approxime la solution  $\tilde{w}$  aux points du maillage. L'équation (3.8) se discrétise de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & A_0 W_{i,j} \\ & + A_1 W_{i+1,j} + A_2 W_{i,j+1} + A_3 W_{i-1,j} + A_4 W_{i,j-1} \\ & + A_5 W_{i+1,j+1} + A_6 W_{i-1,j+1} + A_7 W_{i-1,j-1} + A_8 W_{i+1,j-1} \\ & + A_9 W_{i+2,j} + A_{10} W_{i,j+2} + A_{11} W_{i-2,j} + A_{12} W_{i,j-2} \\ & + A_{13} W_{i+2,j+2} + A_{14} W_{i-2,j+2} + A_{15} W_{i-2,j-2} + A_{16} W_{i+2,j-2} = h_d^4 \tilde{P} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Cette équation est valable pour tous les points  $(i, j) \in \Omega$ . Elle est représentée par le schéma suivant :

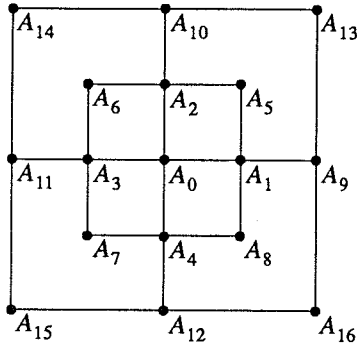


figure 3.2 Schéma aux différences de l'équation aux dérivées partielles (3.8)

Les coefficients de l'équation (3.9) sont donnés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 8D_0(i, j) + 4[D_x(i, j) + D_y(i, j)] \\
 &\quad + D_x(i+1, j) + D_x(i-1, j) + D_y(i, j+1) + D_y(i, j-1) \\
 &\quad + (1/8)[D_{xy}(i-1, j+1) + D_{xy}(i+1, j+1) + D_{xy}(i-1, j-1) + D_{xy}(i+1, j-1)]
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -2[D_0(i, j) + D_0(i+1, j) + D_x(i, j) + D_x(i+1, j)] \\
 A_2 &= -2[D_0(i, j) + D_0(i, j+1) + D_y(i, j) + D_y(i, j+1)] \\
 A_3 &= -2[D_0(i, j) + D_0(i-1, j) + D_x(i, j) + D_x(i-1, j)] \\
 A_4 &= -2[D_0(i, j) + D_0(i, j-1) + D_y(i, j) + D_y(i, j-1)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_5 &= D_0(i, j+1) + D_0(i+1, j) \\
 A_6 &= D_0(i, j+1) + D_0(i-1, j) \\
 A_7 &= D_0(i, j-1) + D_0(i-1, j) \\
 A_8 &= D_0(i, j-1) + D_0(i+1, j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_9 &= D_x(i+1, j) - (1/8)[D_{xy}(i+1, j+1) + D_{xy}(i+1, j-1)] \\
 A_{10} &= D_y(i, j+1) - (1/8)[D_{xy}(i-1, j+1) + D_{xy}(i+1, j+1)] \\
 A_{11} &= D_x(i-1, j) - (1/8)[D_{xy}(i-1, j-1) + D_{xy}(i-1, j+1)] \\
 A_{12} &= D_y(i, j-1) - (1/8)[D_{xy}(i-1, j-1) + D_{xy}(i+1, j-1)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{13} &= (1/8)D_{xy}(i+1, j+1) \\
 A_{14} &= (1/8)D_{xy}(i-1, j+1) \\
 A_{15} &= (1/8)D_{xy}(i-1, j-1) \\
 A_{16} &= (1/8)D_{xy}(i+1, j-1)
 \end{aligned}$$

où l'on pose :

$$\begin{aligned}
 D_0 &= v h^3 \\
 D_x &= r^2 h^3 \\
 D_y &= h^3 / r^2 \\
 D_{xy} &= (\alpha - v) h^3
 \end{aligned}$$

### 3.3 Discrétisation des conditions aux limites

Les conditions aux limites permettent de définir les points sur le contour et à l'extérieur du domaine. On obtient des relations similaires à celles du premier chapitre.

$$W_{i,j} = 0 \quad \forall (i,j) \in \partial\Omega \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} W_{-1,j} = W_{1,j} \\ W_{N+1,j} = W_{N-1,j} \end{cases} \quad \text{pour } j = -1 \dots N+1 \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} W_{i,-1} = W_{i,1} \\ W_{i,N+1} = W_{i,N-1} \end{cases} \quad \text{pour } i = -1 \dots N+1$$

### 3.4 Résolution du système

La discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (3.8) conduit à la résolution d'un système linéaire dont la structure est représentée sur la figure (3.3). Nous avons considéré un maillage à 10 intervalles. Chaque point représenté indique l'emplacement d'un élément non-nul de la matrice. Cette figure doit être comparée avec la figure (1.4.). La forme du système linéaire dépend bien évidemment de la numérotation des inconnues, nous avons considéré la notation usuelle du type  $W_{i,j} = W_{(i-1)(N-1)+j}$ . La résolution de ce système a été effectuée par la méthode du gradient-conjugué.

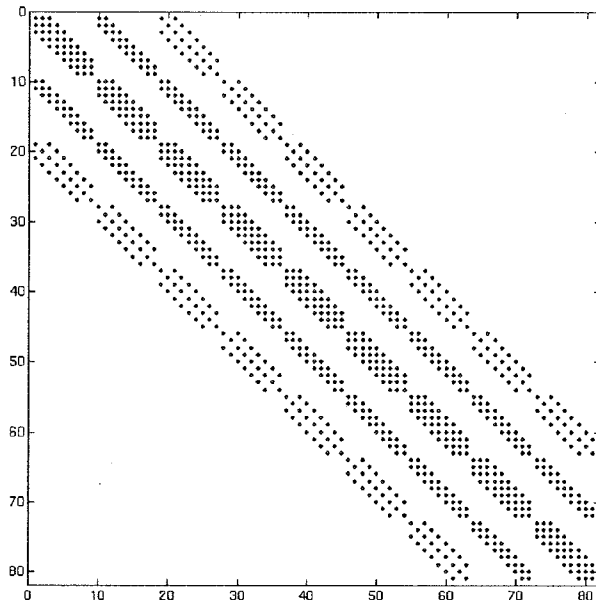


figure 3.3 Emplacement des éléments non-nuls

## 4 Validation de la résolution numérique

L'équation aux dérivées partielles (3.2) est une généralisation de l'équation aux dérivées partielles (1.1) étudiée dans le premier chapitre. Si l'on choisit  $h$  constant, alors  $D = D_0 h^3$  est aussi constant et l'équation (3.2) se réduit à l'équation (1.1). Le cas particulier d'une plaque d'épaisseur constante correspond à  $\bar{h} = 1$ . Dans ce cas là, l'écriture normalisée de l'équation aux dérivées partielles (3.8) se réduit bien entendu à l'équation normalisée (1.6).

$$\frac{\partial^{2-3}}{\partial \bar{x}^2} \left[ r^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right] + 2(\alpha - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right] = \bar{P}$$

$$\bar{h} = 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \nu \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + 2(\alpha - \nu) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} + \nu \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} = \bar{P} \quad (3.13)$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} = \bar{P}$$

Par contre, l'équation aux différences dans le cas des plaques d'épaisseurs variables ne se réduit pas à celle des plaques d'épaisseur constante pour  $\bar{h} = 1$ . Par conséquent, la comparaison de la solution du système linéaire du premier chapitre (1.10) et de la solution donnée par le système linéaire (3.9) dans le cas particulier d'une plaque d'épaisseur constante constitue un bon test pour la validation du programme. Le tableau (3.1) compare les valeurs de la déflexion au centre de la plaque pour  $P/P_0 = 100$  pour différentes tailles de maillage.

tableau 3.1 Convergence du schéma (3.9) vers les résultats du schéma (1.10)

N	10	30	50	70	90
Eq. (1.10)	0.148401	0.138749	0.137950	0.137730	0.137639
Eq. (3.9)	0.152563	0.139213	0.138117	0.137815	0.137690
Ecart	2.73%	0.33%	0.12%	0.06%	0.03%

Plus le nombre d'intervalles augmente et plus les solutions des deux systèmes linéaires, dont les coefficients sont totalement différents, convergent l'une vers l'autre.

Les calculs (3.13) montrent l'indépendance de l'équation (3.8) par rapport au coefficient  $\nu$  lorsque l'épaisseur de la plaque est constante. Néanmoins, l'expression du schéma aux différences (3.10) de la déflexion d'une plaque d'épaisseur variable fait intervenir la valeur numérique du coefficient  $\nu$ . Il est donc important de vérifier l'indépendance de la solution de ce

schéma vis-à-vis de  $\nu$  dans le cas où  $\tilde{h} = 1$ . Nous avons tracé sur la courbe (3.4) la valeur de la déflexion au centre de la plaque en fonction de  $\nu$  pour différentes tailles de maillage. Les calculs ont été effectués avec les valeurs  $\alpha = 1$ ,  $r = 1$  et  $\tilde{P} = 100.0$ .

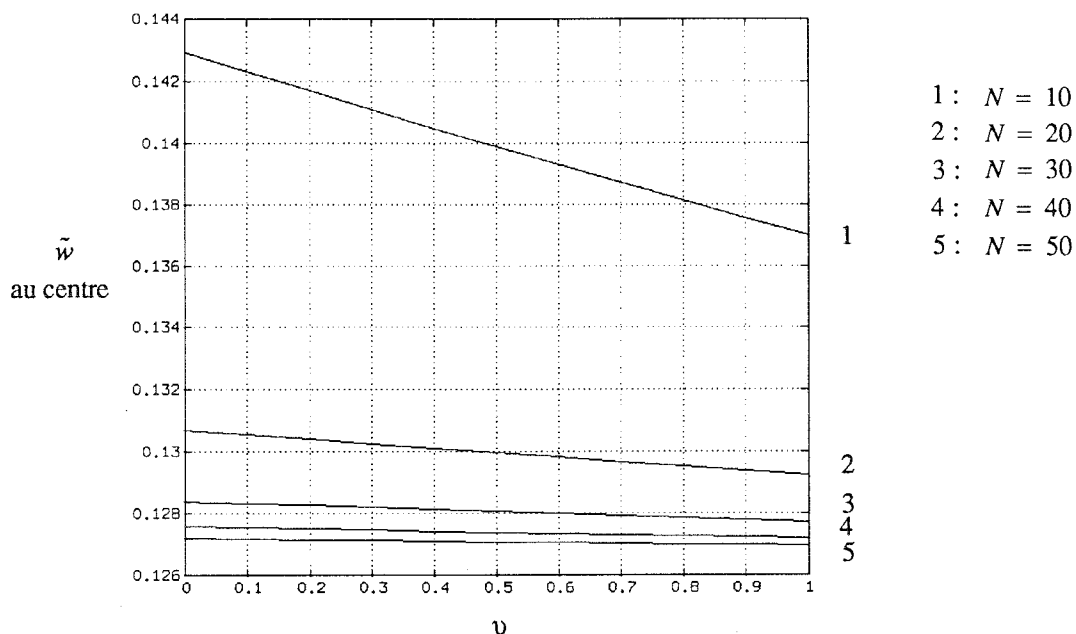


figure 3.4 Influence du coefficient  $\nu$

La pente de la courbe devient de plus en plus faible lorsque l'on augmente le nombre de pas du maillage. Cela signifie que la valeur du paramètre  $\nu$  a de moins en moins d'influence sur le résultat quand on affine le maillage, et donc, que la simplification de l'équation aux dérivées partielles (3.13) est de plus en plus "prise en compte numériquement".

tableau 3.2 Pente des droites de la courbe (3.4)

N	10	20	30	40	50
pente	0.006	0.0015	0.000653	0.000368	0.000235

Le tableau (3.2) donne la valeur absolue de la pente de chaque droite de la figure (3.4). Même dans le cas d'un maillage grossier comprenant 10 intervalles, la valeur de la pente est extrêmement faible, i.e.  $\nu$  n'a donc quasiment aucune influence sur le résultat de la déflexion si on considère une plaque d'épaisseur constante.

## 5 Capacité entre les deux armatures

Les équations de ce paragraphe sont identiques à celles du premier chapitre. Nous rappelons simplement ici l'équation normalisée. Soit  $C_0$  la valeur de la capacité au repos, l'équation (3.14) se réécrit :

$$\frac{C}{C_0} = \iint_S \frac{1}{1 - \tilde{w}_n(x, y)} dx dy \quad (3.14)$$

$$S = [0, a] \times [0, b]$$

## 6 Exploitation du programme

La modification de l'épaisseur de la plaque permet de faire varier les courbes de réponse du capteur. Il existe évidemment une très grande diversité de formes possibles réalisables. Néanmoins, pour préciser l'influence de la forme de l'épaisseur de la plaque (sa géométrie) sur les caractéristiques du capteur, on est contraint de s'imposer des critères arbitraires. La démarche proposée pour cette étude est la suivante : on se donne une géométrie simple :

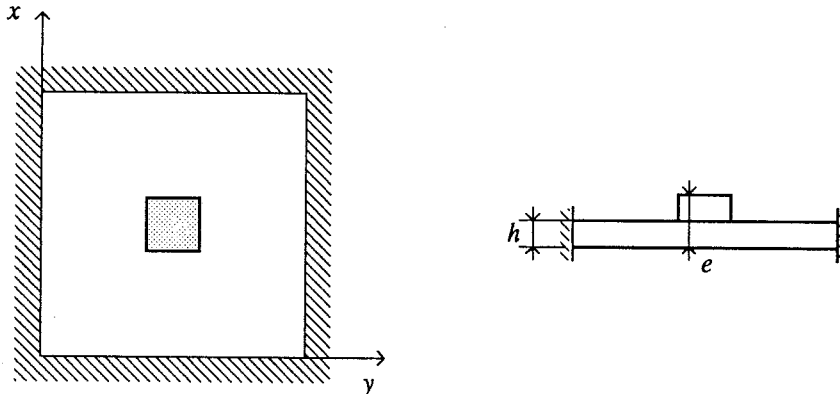


figure 3.5 Géométrie de référence

puis, on regarde comment se comporte la réponse du capteur lorsque l'on modifie la géométrie du mesa indiqué sur la figure. Nous avons choisi de traiter les cas suivants :

- Modification de son épaisseur
- Modification de sa surface
- Modification de son emplacement

Considérons deux plaques d'épaisseur uniforme  $h$  et  $2h$  respectivement. Il est évident que ces deux plaques ont des courbes de réponse différentes, alors qu'elles possèdent une "forme" identique. On s'affranchit de ce problème en imposant un volume égal à toutes les géométries de plaques étudiées.



### 6.1 Comportement en fonction de l'épaisseur du mesa

Ce paragraphe étudie l'influence de la profondeur d'une cavité ou de l'épaisseur d'un mesa sur les caractéristiques du capteur. Les figures ci-dessous représentent la forme des géométries sur lesquelles ont porté les calculs. Le mesa est de forme carrée de côté égal à 0.2.

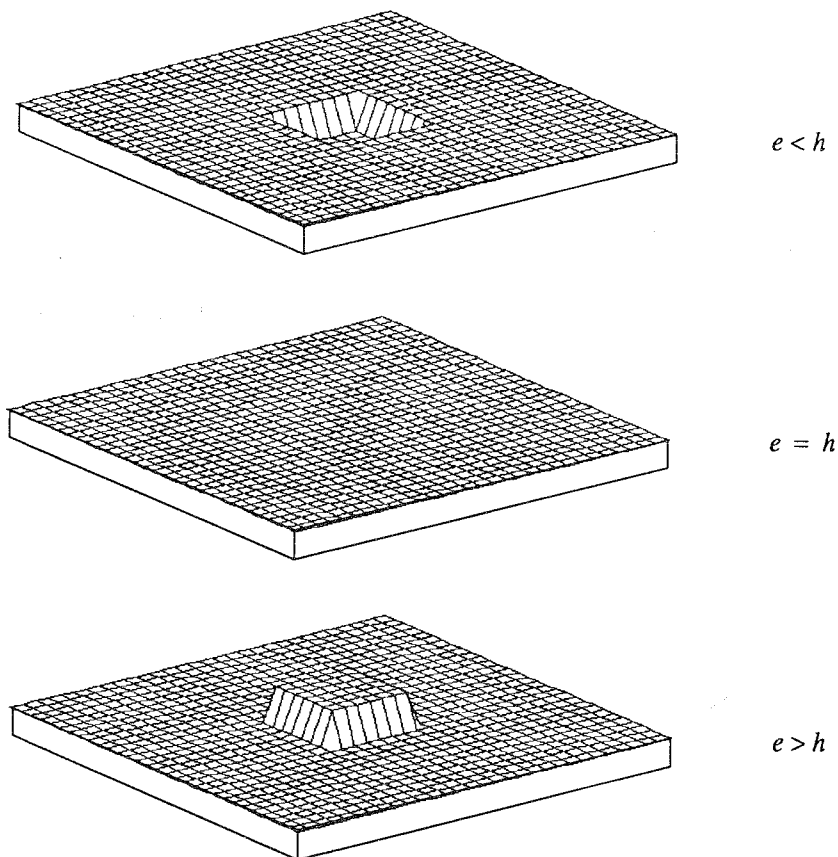


figure 3.6 Géométries étudiées

Les figures (3.7) et (3.8) donnent, respectivement, la valeur de la pression normalisée maximale, et les courbes de réponse du capteur en fonction de l'épaisseur du mesa. Les valeurs de  $e > h$  permettent d'augmenter la linéarité de la réponse. Cette augmentation s'accompagne néanmoins d'une diminution de la sensibilité. En revanche, pour des valeurs de  $e < h$  on obtient le phénomène inverse.

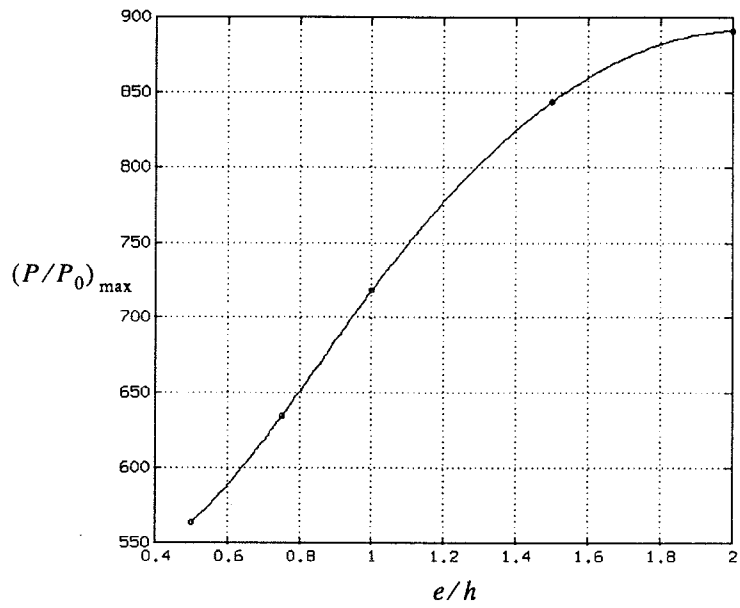


figure 3.7 Pression normalisée maximale

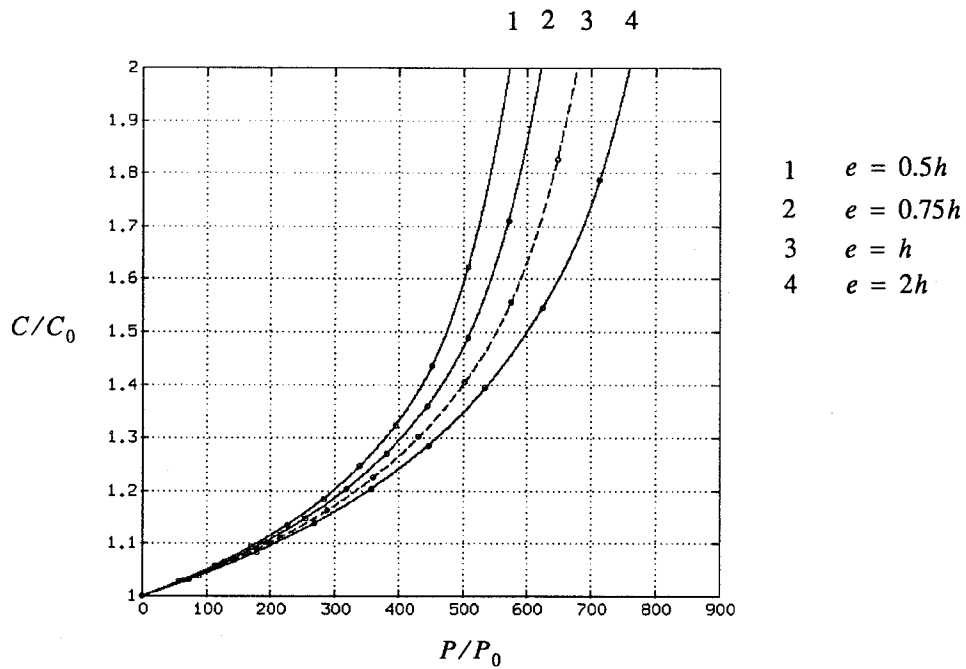


figure 3.8 Courbes de réponse

## 6.2 Comportement en fonction de la surface du mesa

Le comportement du capteur vis-à-vis de la surface du mesa est étudié dans ce paragraphe. L'étude a porté sur les 5 géométries représentées ci-dessous. La 6<sup>ième</sup> géométrie qui en serait la suite logique, est identique à la première présentée, puisque l'on travaille toujours à volume constant. Le mesa est de forme carrée et d'épaisseur  $e = 2h$ .

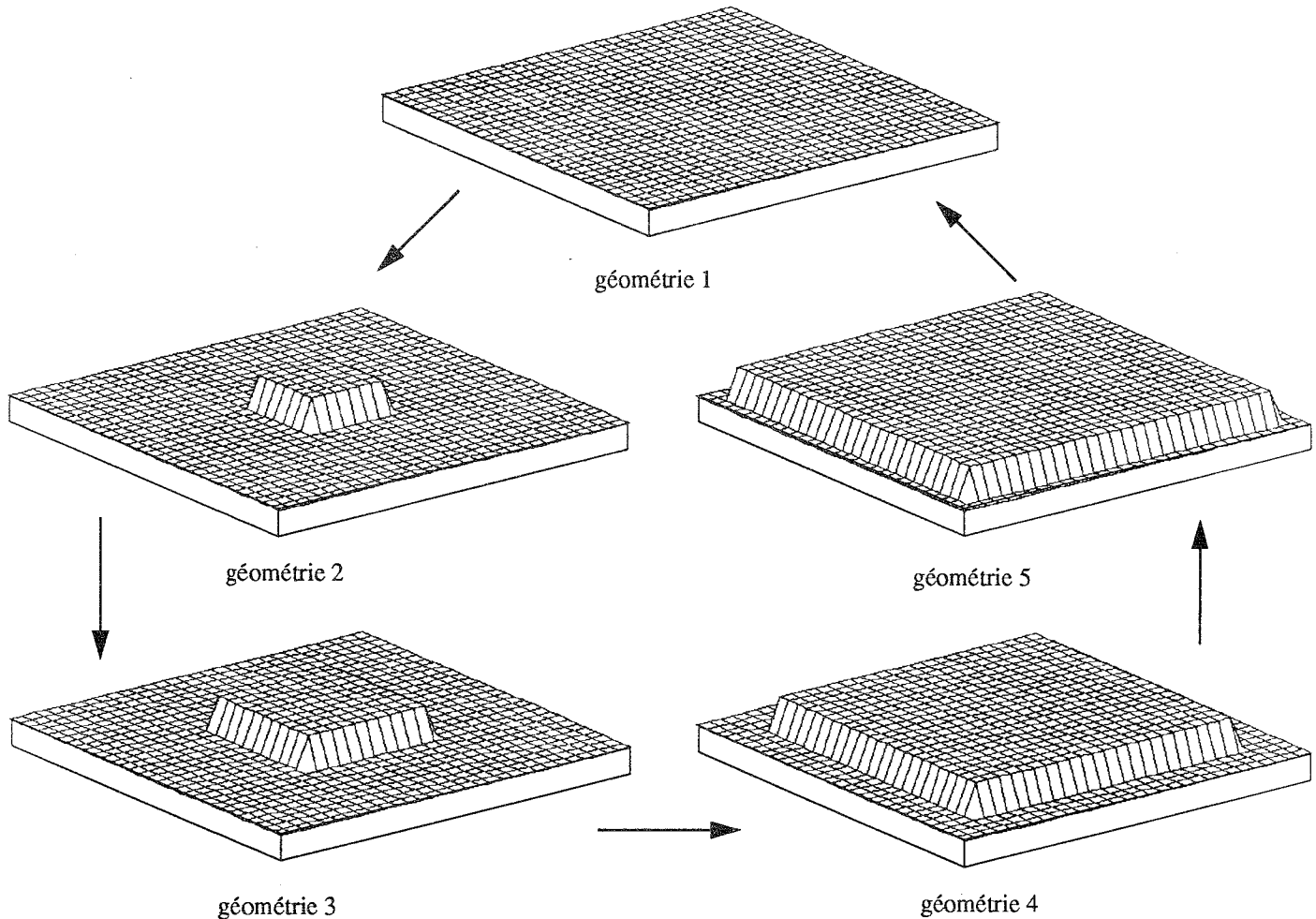


figure 3.9 Géométries étudiées

Les caractéristiques du capteur sont données ci-contre. Comme la surface occupée varie dans des proportions importantes, la normalisation que l'on effectue sur le volume, joue ici un rôle capital. La forme de la courbe de pression normalisée maximale résulte de ce phénomène. On remarque que, lorsque la surface du mesa est approximativement égale à la surface complémentaire, i.e.  $\sqrt{S} = 0.707$ , la pression normalisée maximale est celle d'une plaque d'épaisseur uniforme.

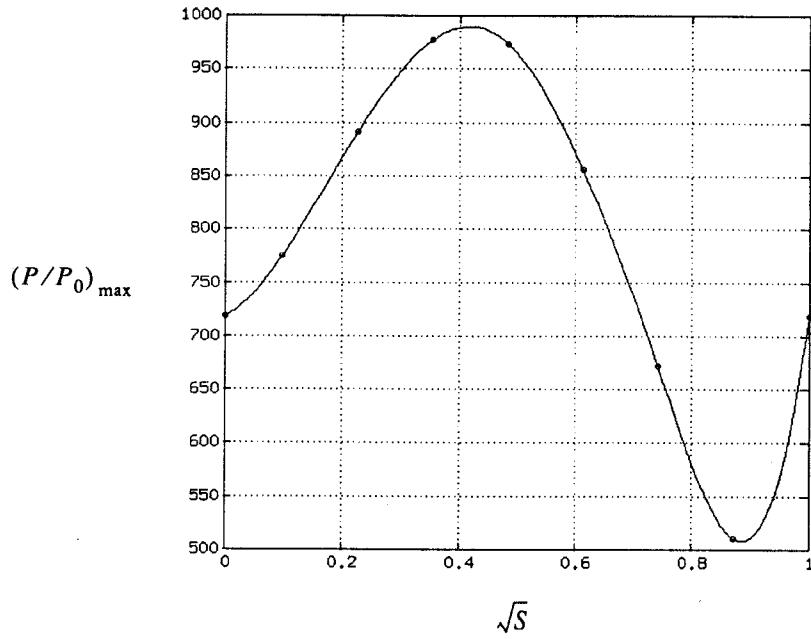


figure 3.10 Pression normalisée maximale

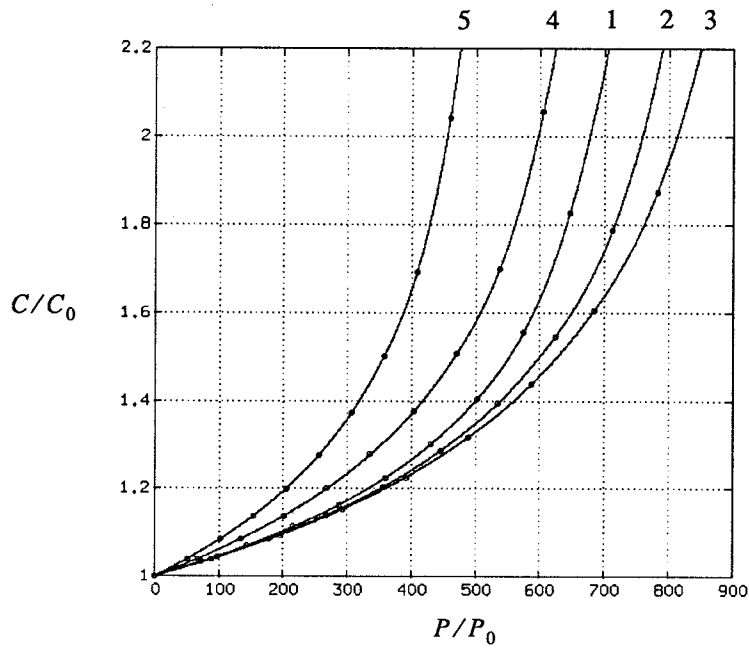


figure 3.11 Courbes de réponse

### 6.3 Comportement en fonction de l'emplacement du mesa

Dans ce paragraphe, on étudie l'influence de l'éloignement du mesa du centre de la plaque. Néanmoins, nous avons respecté la symétrie du problème en intégrant plusieurs mesa. Chaque mesa est de forme carrée, d'épaisseur  $e = 2h$  et de côté égal à  $4/30$ . Les géométries étudiées sont représentées ci-dessous.

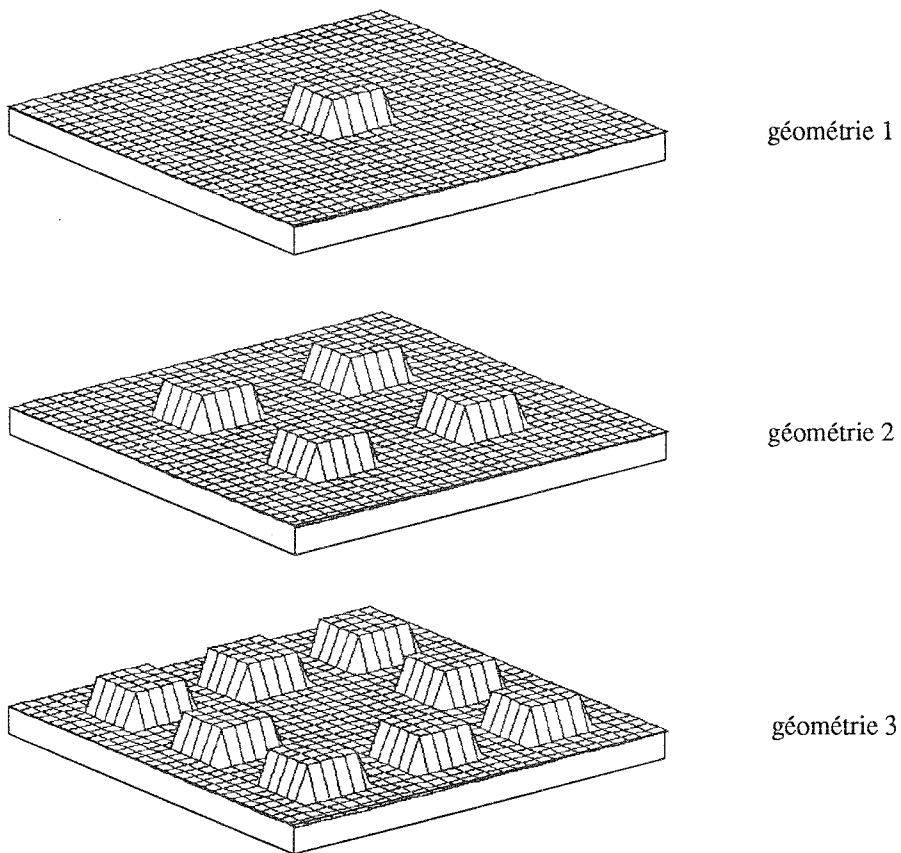


figure 3.12 Géométries étudiées

Les valeurs des pressions normalisées maximales et la courbe de réponse sont données par le tableau (3.3) et la figure (3.13). Les mesa placés dans les zones périphériques de la plaque diminuent fortement la pression maximale admissible par le capteur. La courbe de réponse montre que pour gagner en linéarité, on a tout intérêt à placer le mesa aussi près que possible du centre de la plaque.

tableau 3.3 Pression normalisée maximale

géométrie	1	2	3
$(P/P_0)_{\max}$	832.48	703.71	637.21

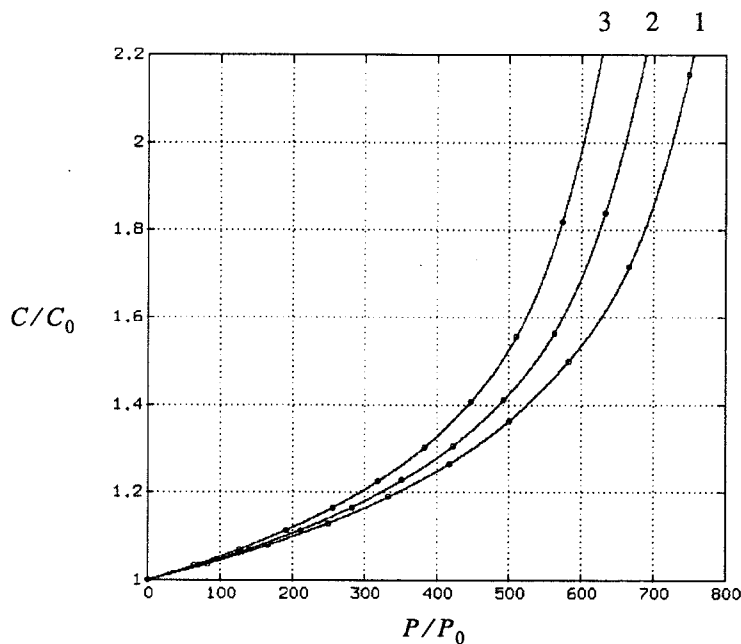


figure 3.13 Courbes de réponse

## 7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le problème de la déflexion d'une plaque mince d'épaisseur variable. La discrétisation par la méthode des différences finies de l'équation aux dérivées partielles relative à ce problème fait intervenir des expressions algébriques beaucoup plus lourdes que celles obtenues dans le cas d'une épaisseur constante.

Nous avons proposé une étude de l'influence de la géométrie de la plaque sur les courbes de réponse du capteur capacitif. La démarche de cette étude a été la suivante : à partir d'une structure de base, un mesa, nous avons cherché le réseau de courbe de réponse que l'on ob-

tient lorsque l'on modifie indépendamment son épaisseur, sa surface et son emplacement.

Il ressort de cette étude les résultats suivants : pour augmenter la linéarité de la réponse du capteur, il faut :

- concevoir un mesa plutôt qu'une cavité,
- que ce mesa occupe environ 20% de la surface de la plaque,
- placer ce mesa au centre de la plaque.

---

# Capteurs capacitifs à structure polygonale

## *Chapitre 4*

---

## 1 Déflexion d'une plaque polygonale

Ce chapitre étudie le comportement de capteurs capacitifs dont la forme de la cavité est polygonale. Cependant, on restreint le problème aux polygones dont les côtés sont parallèles aux axes pour faciliter les calculs<sup>1</sup>. Cette restriction n'est pas pénalisante puisqu'elle correspond aux structures technologiquement réalisable. En outre, la géométrie de la cavité peut être connexe ou multiplement connexe. On considère dans ce chapitre que le corps d'épreuve a une épaisseur constante.

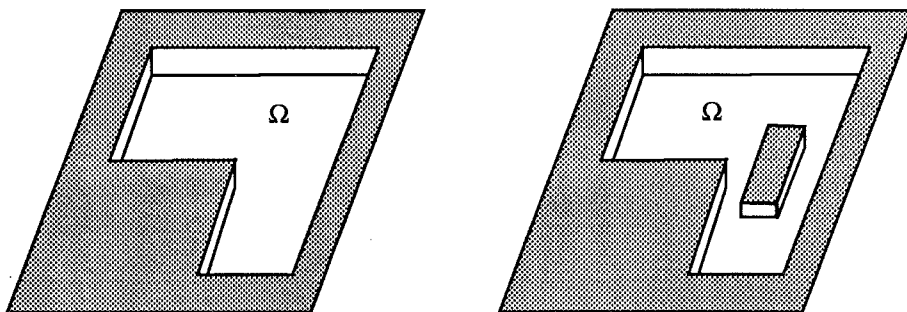
---

1. La méthode des différences finies ne se prête pas, de façon naturelle, à l'intégration dans des domaines non-rectilignes. Néanmoins, il existe une généralisation de cette méthode qui peut être appliquée dans les domaines curvilignes généraux : méthode des "différences finies curvilignes". La mise en œuvre de cette méthode est plus difficile que la méthode des différences finies classiques et elle est beaucoup moins courante. Nous proposons une étude de celle-ci dans l'annexe 6. Précisons toutefois que certains auteurs, par exemple [36], proposent des méthodes plus simple pour tenir compte de frontières courbes.



### 1.1 Domaine d'intégration

Le programme développé dans ce chapitre permet d'effectuer les calculs de la déflexion dans des domaines de forme connexe, ou multiples connexe. Une illustration des géométries calculables est représentée figure (4.1).



domaine connexe

domaine multiplement connexe

figure 4.1 Forme de la cavité

### 1.2 Problème aux limites

On se donne un domaine d'intégration multiplement connexe  $\Omega$ . Il faut trouver  $w$  défini dans  $\Omega \cup \partial\Omega$  vérifiant :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad \text{dans } \Omega \tag{4.1}$$

$$w = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

### 1.3 Problème aux limites sans dimension

On ramène le problème aux limites précédent à un problème sans dimension par les changements de variables  $\tilde{x} = x/a$ ,  $\tilde{y} = y/b$ ,  $\tilde{w} = w/d$  et  $\tilde{P} = P/P_0$ . La constante  $P_0$  est définie par l'équation (1.5) en fonction des paramètres géométriques du capteur  $(a, b, d, h)$ . On pose de plus  $r = b/a$ . L'équation aux dérivées partielles de (4.1) devient alors :

$$r^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} = \tilde{P} \quad (4.2)$$

## 2 Résolution numérique du problème

### 2.1 Discrétisation du domaine

Afin de définir le domaine d'intégration  $\Omega$  d'une façon simple et de permettre l'utilisation des mêmes équations linéaires pour représenter l'équation aux dérivées partielles, on discrétise le domaine d'intégration avec un pas régulièrement espacé. Cette discrétisation revient à imposer au contour de ce domaine de passer par les points du maillage.

En prenant un maillage de  $[0, 1] \times [0, 1]$  aussi fin que l'on veut, on peut donner une approximation aussi proche que l'on veut du domaine continu. Le maillage utilisé par la suite est composé de 30 intervalles, ce qui définit l'ensemble de  $31 \times 31$  points représenté figure (4.2.1), où l'on a indiqué le contour du domaine.

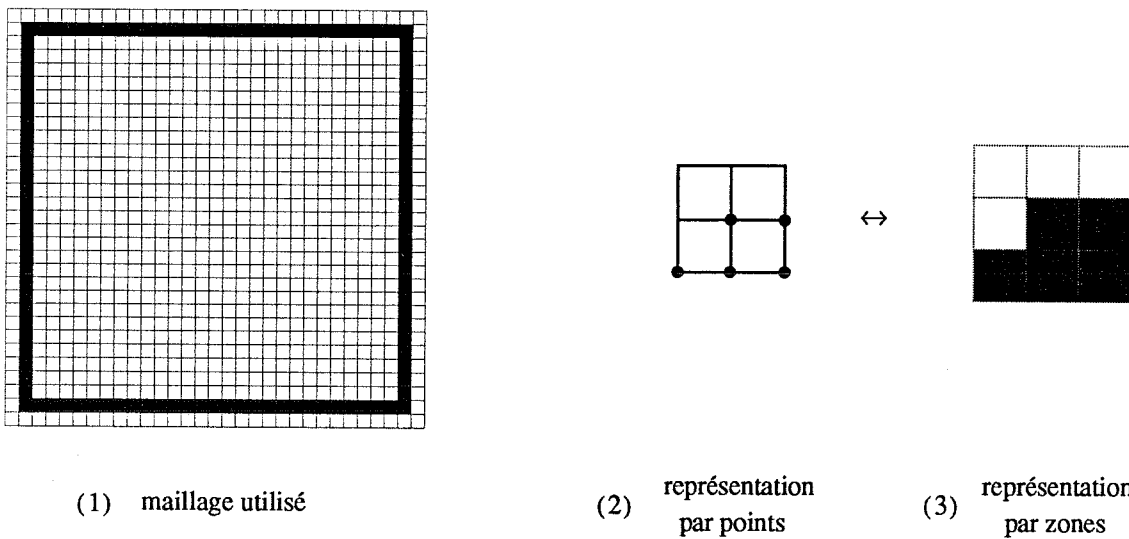


figure 4.2 Définition du maillage

La définition des points du domaine est représentée dans ce chapitre par zones, alors que dans les autres chapitres nous avons préféré donner une représentation par points. Ces deux représentations sont duales (on passe de l'une à l'autre d'une façon univoque). Les figures (4.2.2) et (4.2.3) illustrent la correspondance entre celles-ci.

La définition du domaine d'intégration s'effectue à partir de deux utilitaires de X Windows. L'utilitaire "bitmap" permet de dessiner le domaine de façon conviviale sur l'écran. L'utilitaire

“bmtoa” génère un fichier ASCII qui code la géométrie du domaine à partir des données de “bitmap”.

### 3 Validation de la résolution numérique

Le programme mis au point dans ce chapitre donne des résultats identiques à ceux du premier chapitre lorsque la plaque est de forme carrée. Une comparaison des solutions sur un contour curviligne permet de valider le programme dans le cas d’un contour polygonal mais aussi de chiffrer quantitativement l’erreur de la discrétisation dans le cas d’un contour curviligne.

#### 3.1 Equation aux dérivées partielles

Dans ce paragraphe, on considère l’équation de la déflexion d’une plaque circulaire de rayon  $c$  dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Le centre du repère coïncide naturellement avec le centre de la plaque. L’équation (1.1) s’écrit en coordonnées polaires [82 p 54] :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{P}{D} \quad (4.3)$$

Dans l’hypothèse où la pression appliquée est constante, la déflexion  $w$  n’est fonction que de  $r$ , et l’équation aux dérivées partielles (4.3) se réduit alors à :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{P}{D} \quad (4.4)$$

L’intégration de cette équation aux dérivées partielles se ramène à 4 intégrations successives puisque l’on peut réécrire (4.4) sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\} = \frac{P}{D} \quad (4.5)$$

Dans le cas d’une plaque uniformément chargée, l’intégrale générale de l’équation aux dérivées partielles (4.5) s’écrit :

$$w(r, \theta) = \frac{Pr^4}{64D} + A_1(\theta)r^2 \ln(r) + A_2(\theta) \ln(r) + A_3(\theta)r^2 + A_4(\theta) \quad (4.6)$$

Si les conditions d’appui sur le contour de la plaque ne dépendent pas de  $\theta$ , la fonction  $w$  n’est fonction que de  $r$ . Les 4 constantes  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , indépendante de  $\theta$  dans ce cas particulier, sont déterminées en utilisant 4 conditions aux limites spécifiques aux problèmes.

### 3.2 Conditions aux limites

La valeur de la déflexion  $w$  et de ses dérivées doit rester finie dans tout le domaine.

$$\left\{ \begin{array}{ll} w < \infty & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial r} < \infty & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Dans le cas où le bord  $r = c$  est encasté, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial w}{\partial r} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.8)$$

### 3.3 Equation de la déflexion

Les 4 équations aux limites (4.7) et (4.8) permettent de déterminer les constantes  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  dans l'équation (4.6), on obtient finalement :

$$w(r) = \frac{P}{64D} (c^2 - r^2)^2 \quad (4.9)$$

### 3.4 Equation sans dimension

On pose  $\tilde{r} = r/c, \tilde{w} = w/d$ , l'équation (4.9) devient :

$$\tilde{w} = \frac{Pc^4}{64Dd} (1 - \tilde{r}^2)^2 \quad (4.10)$$

Le rayon de la plaque  $c$  s'exprime par rapport aux variables précédentes par  $c = a/2$ , on pose de plus, comme dans l'ensemble des chapitres précédents, les valeurs :

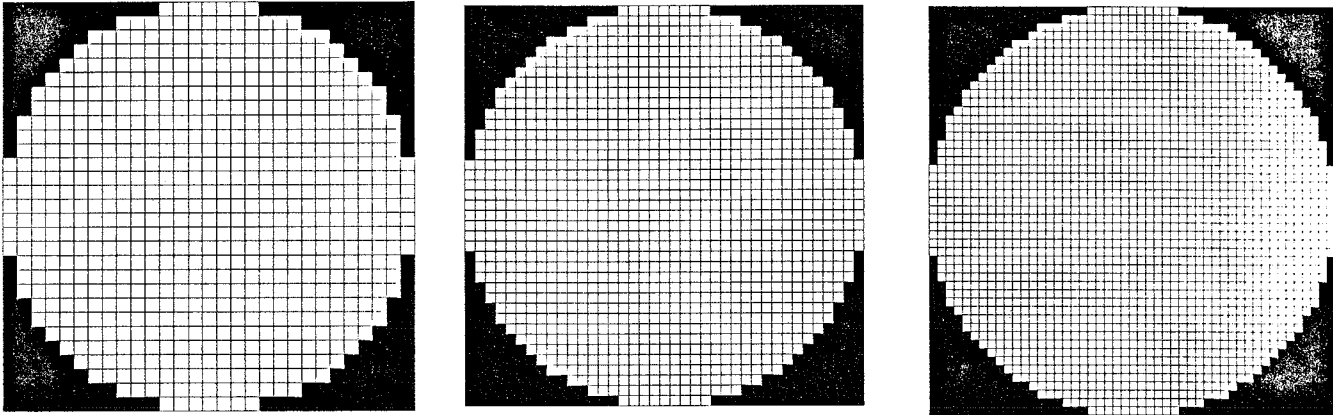
$$\tilde{P} = \frac{P}{P_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{P_0} = \frac{a^4}{dD} \quad (4.11)$$

On obtient alors l'équation sans dimension :

$$\tilde{w} = \frac{1}{1024} \tilde{P} (1 - \tilde{r}^2)^2 \quad (4.12)$$

### 3.5 Comparaison avec la solution numérique

La solution numérique a été calculée avec les trois géométries suivantes :



(1) 30 intervalles  
961 points

(2) 40 intervalles  
1681 points

(3) 50 intervalles  
2601 points

figure 4.3 Définition des géométries utilisées

Le tableau (4.1) montre la convergence de la solution numérique vers la solution analytique lorsque le maillage devient plus fin. Lorsque l'on augmente le nombre de points du maillage, le contour discrétisé se rapproche progressivement du contour curviligne. Plus la taille du maillage est importante, et plus il est possible d'approximer le contour curviligne par un contour discret.

tableau 4.1 Comparaison des solutions

Solution analytique	Solution numérique		
$\tilde{P}_{max}$	N	$\tilde{P}_{max}$	Erreur
1024	30	1026.93	0.285%
	40	1025.80	0.175%
	50	1024.81	0.079%

Malgré la simplicité de l'approximation du domaine curviligne, les résultats obtenus sont proches de la solution analytique à moins de 0.3%. Nous rappelons que ce paragraphe a uniquement pour objectif de vérifier la cohérence des résultats, le programme associé utilisé n'est pas destiné à intégrer des contours curvilignes.

Dans le cas de contours polygonaux parallèles aux axes  $(x, y)$ , le programme donne des résultats aussi précis que dans le cas d'une plaque rectangulaire. Bien entendu, la comparaison doit être faite entre des maillages possédant la même densité de points.

## 4 Capteur à large bande de pression

Ce paragraphe propose une configuration qui permet d'obtenir un capteur fonctionnant dans une large gamme de pression. Ce capteur est composé de deux structures emboîtées occupant une surface utile carrée du même ordre de grandeur que les capteurs étudiés dans le premier chapitre.

### 4.1 Géométrie du capteur

Chaque structure mesure la capacité entre ses deux armatures d'une façon totalement indépendante. La géométrie des structures est choisie de telle sorte que la pression normalisée maximale de l'une d'entre elles soit le double de l'autre. La forme de la cavité du capteur étudié est illustrée figure (4.4).

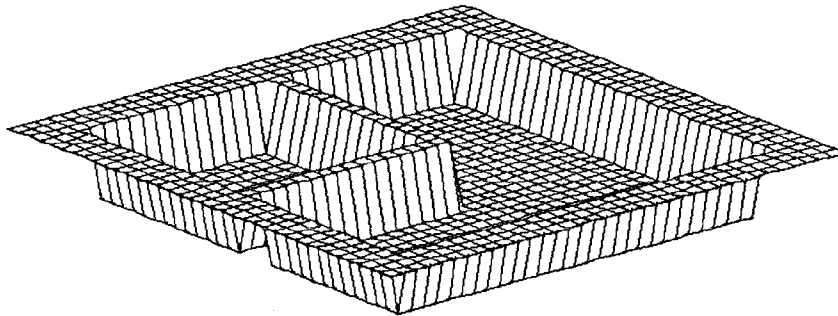


figure 4.4 Géométrie de la cavité

### 4.2 Pression maximale

La pression normalisée maximale de la structure carrée est 11408, celle de la structure en "L" est de 5118. Il y a un rapport de 2.2 entre ces deux valeurs. Nous sommes évidemment limités dans le choix des structures par le pas du maillage utilisé. C'est la raison pour laquelle, il ne nous a pas été possible de fixer le rapport des deux valeurs d'une façon très précise.

L'allure de la déflexion du capteur est illustrée figure (4.5).

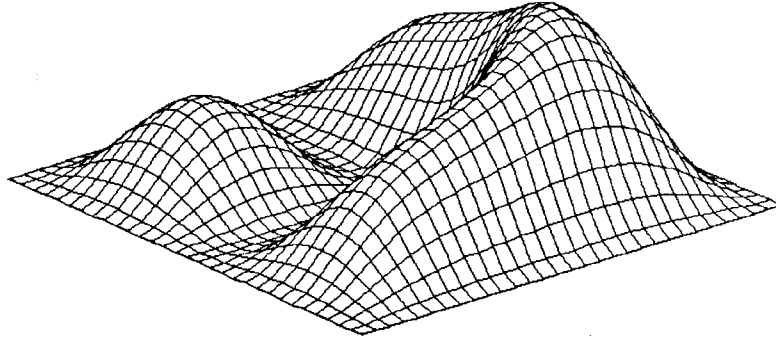


figure 4.5 Allure de la déflexion

### 4.3 Capacité au repos

Soit  $C_{0C}$  et  $C_{0L}$ , les valeurs des capacités au repos de la structure carrée et de la structure en "L" respectivement, on a les relations :

$$\begin{aligned}
 C_{0C} &= \frac{\epsilon_0 S_C}{d_C} & S_C & \text{surface de la cavité carrée} \\
 & & d_C & \text{profondeur de la cavité carrée} \\
 C_{0L} &= \frac{\epsilon_0 S_L}{d_L} & S_L & \text{surface de la cavité en "L"} \\
 & & d_L & \text{profondeur de la cavité en "L"}
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

La valeur  $S_L/S_C$  est déterminée par la forme de la géométrie. Le rapport  $d_L/d_C$  permet de fixer la valeur de  $C_{0L}/C_{0C}$ . On choisit de prendre  $C_{0L} = C_{0C}/1.1$ . La valeur 1.1 permet d'augmenter la valeur de la capacité au repos de la plaque carrée de façon que les courbes se coupent à l'abscisse  $P/P_0 = 2000$ . (Le choix de ces valeurs numériques apparaît plus clairement à travers la courbe de réponse). Ce qui conduit à :

$$\frac{d_L}{(1.1)d_C} = \frac{S_L}{S_C} = 3
 \tag{4.14}$$

Finalement

$$\frac{d_L}{d_C} = 3(1.1) = 3.3
 \tag{4.15}$$

En choisissant la profondeur de la cavité de la structure en "L", 3.3 fois plus grande que celle de la structure carrée, on obtient les courbes de réponse ci-dessous.

#### 4.4 Courbe de réponse

La courbe de réponse de chaque structure est indiquée sur la figure (4.6).

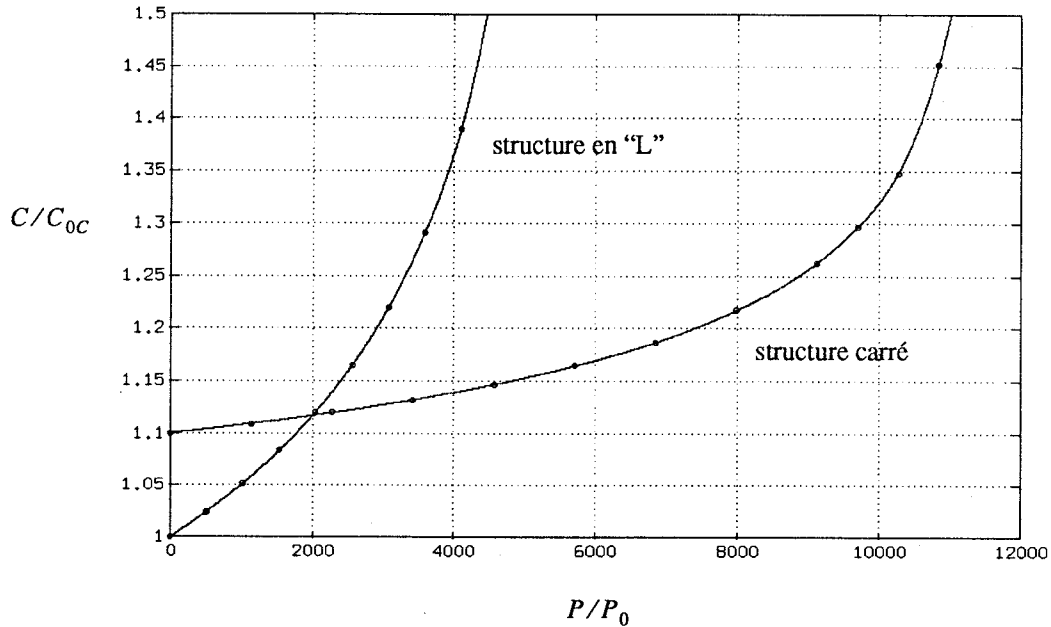


figure 4.6 Courbe réponse

La structure rectangulaire assure les mesures de 0 à 2000  $P/P_0$ , la structure carrée, les mesures de 2000 à 6000  $P/P_0$ . C'est l'électronique associée au capteur qui contrôle la commutation de la mesure lorsque les deux valeurs de capacité sont identiques. En outre, il faut protéger le fond de la cavité de la structure possédant le plus faible  $(P/P_0)_{\max}$  pour éviter un court-circuit.

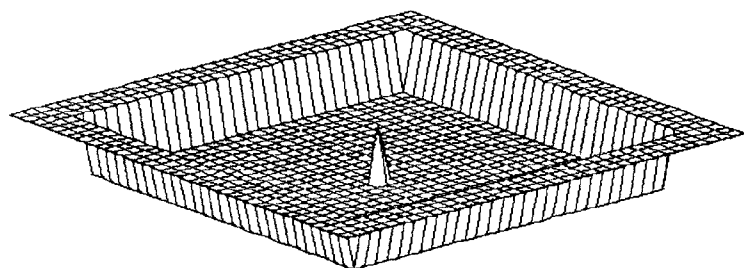
## 5 Capteur à forte pression maximale

L'objectif de ce paragraphe est de définir une géométrie de capteur capacitif pouvant supporter une forte pression maximale. En outre, il est important pour des raisons métrologiques que ces géométries possèdent une valeur de capacité au repos du même ordre de grandeur que celles d'un capteur classique.

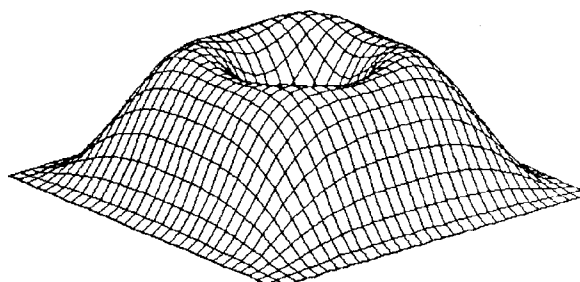
### 5.1 Etude du capteur

Les géométries des cavités étudiées et l'allure de leur déflexion respective sont illustrées figure (4.7). On y a indiqué pour chacune d'elle la valeur correspondante de pression normalisée maximale et le pourcentage de la capacité au repos.

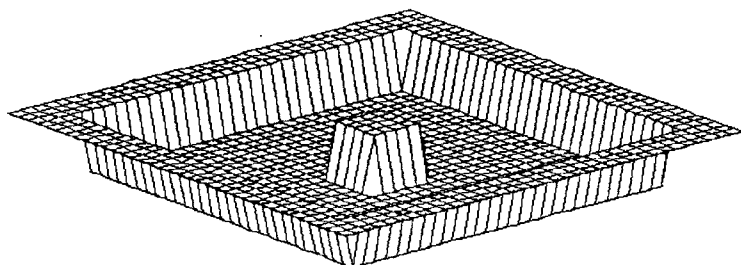




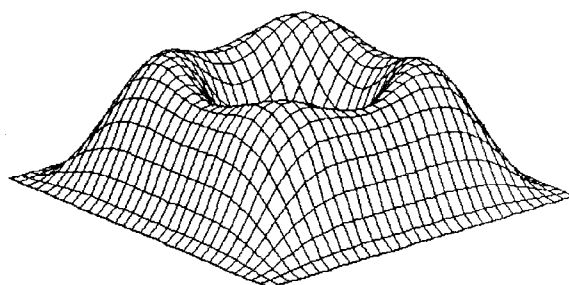
(1)  $C_0 = 99.88\%$



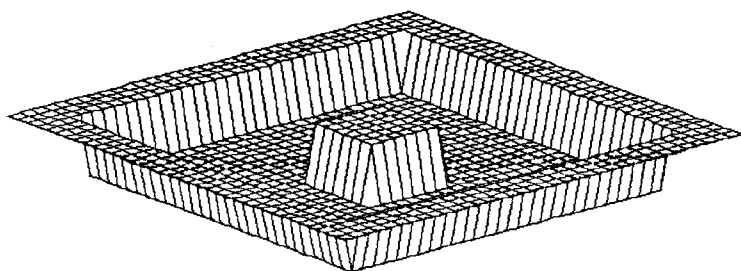
$(P/P_0)_{\max} = 4149.73$



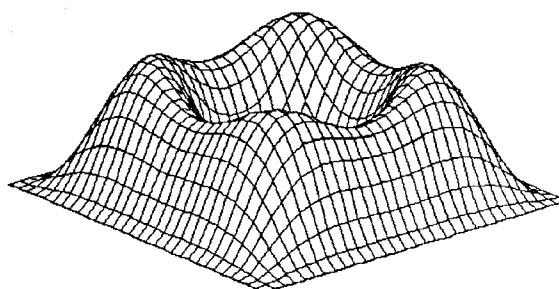
(2)  $C_0 = 97.03\%$



$(P/P_0)_{\max} = 7097.09$



(3)  $C_0 = 94.17\%$



$(P/P_0)_{\max} = 9643.52$

figure 4.7 Définition des géométries et allure de la déflexion correspondante.  
 La déflexion est représentée selon l'axe des z dirigé vers le haut à l'opposé du sens adopté pour les géométries

La valeur de la pression normalisée maximale  $(P/P_0)_{max}$  des structures étudiées est une dizaine de fois plus élevée que celle d'une structure classique. Les paragraphes suivants montrent que les structures classiques carrées ou rectangulaires ne conviennent pas pour ce type d'application.

## 5.2 Comparaison des structures

Considérons le capteur étudié dans le premier chapitre. Si l'on veut obtenir un capteur supportant une pression maximale plus élevée, le moyen le plus efficace est de réduire la surface (la longueur des côtés intervient à la puissance 4 dans l'expression de la pression maximale, cf éq 1.5). En contre-partie, cette diminution de surface implique inévitablement une diminution de la capacité à mesurer.

Une seconde méthode consiste à donner au capteur une forme rectangulaire. La figure (1.7) montre que pour obtenir une valeur de pression maximale 10 fois plus élevée que celle de la plaque carrée (à surface égale), il faut choisir un rapport des longueurs de 5. Cette dernière valeur est déjà très élevée. Nous sommes donc limités dans cette voie. Nous allons comparer les trois géométries<sup>2</sup> suivantes :

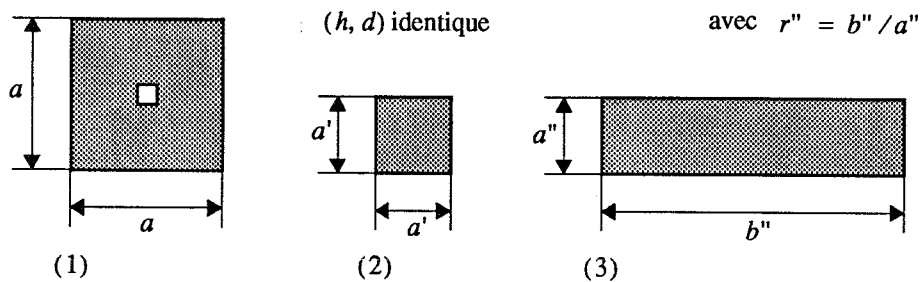


figure 4.8 Structures étudiées

On impose aux structures représentées figure (4.8) à avoir une même valeur de pression maximale. Rappelons les expressions de  $P_{max}$  relatives à ces structures :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad P_{max} &= \tilde{P}_{max} \frac{dD}{a^4} && \text{plaque à pilier central} \\
 (2) \quad P'_{max} &= \tilde{P}_{max} (1) \frac{dD}{a'^4} && \text{plaque carrée} \\
 (3) \quad P''_{max} &= \tilde{P}_{max} (r'') \frac{dD}{a''^2 b''^2} && \text{plaque rectangulaire}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

2. La géométrie de la figure (4.8.1) est définie de façon précise figure (4.7.3).

Les valeurs caractéristiques  $\tilde{P}_{max}$  de ces géométries sont données numériquement ci-dessous :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{max}^c &= 9643.52 \\ \tilde{P}_{max}(1) &= 720.72 \end{aligned} \quad (4.17)$$

La courbe  $\tilde{P}_{max}(r)$  est donnée figure (1.7)

### 5.3 Dimension de la plaque carrée $P_{max}$ -équivalente

L'égalisation des équations (4.16.1) et (4.16.2) permet de déterminer  $a'$  :

$$a' = a \left[ \frac{\tilde{P}_{max}(1)}{\tilde{P}_{max}^c} \right]^{1/4} \quad \text{numériquement} \quad (4.18)$$

$$a' = (0.52) a$$

La valeur de la capacité au repos pour la plaque à pilier central et la plaque carrée est donnée respectivement par  $C_0 = 0.94 \varepsilon_0 a^2 / d$  et  $C'_0 = \varepsilon_0 a'^2 / d$ . D'où la relation :

$$C'_0 = \frac{C_0}{0.94} \sqrt{\frac{\tilde{P}_{max}(1)}{\tilde{P}_{max}^c}} \quad \text{numériquement} \quad (4.19)$$

$$C'_0 = 0.29 C_0$$

Pour des capteurs supportant une même pression maximale, la capacité au repos d'une plaque de forme carrée est 4 fois plus faible que celle de la plaque à pilier central.

### 5.4 Dimension de la plaque rectangulaire $P_{max}$ -équivalente

On impose aux structures (1) et (3) à avoir la même surface, i.e.  $0.94 a^2 = a'' b''$ . L'égalisation des équations (4.16.1) et (4.16.3) permet de déterminer  $r''$  par l'équation implicite :

$$\tilde{P}_{max}(r'') = (0.94)^2 \tilde{P}_{max}^c \quad \text{numériquement, voir figure (1.7)} \quad (4.20)$$

$$r'' = (4.7) r$$

Pour des capteurs supportant une même pression maximale, il faut choisir une structure rectangulaire correspondante à  $r = 5$ . Cette valeur est à peu près la valeur supérieure que l'on peut donner au rapport des longueurs si l'on considère des capteurs de géométrie raisonnable.

## 6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une étude de capteurs capacitifs dont la cavité est de forme "polygonale". Le programme développé pour le calcul de la déflexion de la plaque per-

met de considérer des plaques multiples connexes et de forme polygonale dont chaque côté est parallèle à l'axe des  $x$  ou des  $y$ . La géométrie de la plaque est définie directement à l'écran à l'aide d'une interface graphique.

Même dans le cas fortement défavorable d'une plaque circulaire, la solution numérique reste identique à la solution analytique à moins de 0.3%.

Nous avons ensuite présenté deux applications possibles de ce type de capteur. La première application concerne la fabrication de capteurs à large bande de pression. La configuration du capteur étudié permet d'obtenir une réponse à grande sensibilité pour les faibles pressions, et une réponse quasi-linéaire pour les pressions plus élevées.

La deuxième application est relative à la réalisation de capteurs capacitifs fonctionnant dans le domaine des fortes pressions. Nous avons proposé une structure appropriée et calculé sa pression normalisée maximale. Nous avons ensuite montré qu'il n'est pas possible d'obtenir des valeurs de pression maximale aussi élevées en utilisant des capteurs traditionnels.



---

---

# Capteurs capacitifs en régime de contact

## Chapitre 5

---

### 1 Flexion limitée d'une plaque mince

Les capteurs capacitifs classiques ont une sensibilité relativement faible. On augmente cette sensibilité en réduisant la distance inter-armature. Ce chapitre est consacré au comportement des capteurs capacitifs en régime de contact, c'est à dire lorsque la pression appliquée devient supérieure à la pression maximale  $P_{max}$ .

Pour conserver une notation cohérente entre ce chapitre et le premier chapitre, nous appelons toujours  $P_{max}$  la pression qu'il faut appliquer pour faire toucher la plaque et le fond de la cavité. Nous insistons néanmoins sur l'interprétation donnée à  $P_{max}$  : dans le premier chapitre  $P_{max}$  était la pression limite à ne pas dépasser, tandis que dans ce chapitre  $P_{max}$  sera la pression

à partir de laquelle on effectuera les mesures.

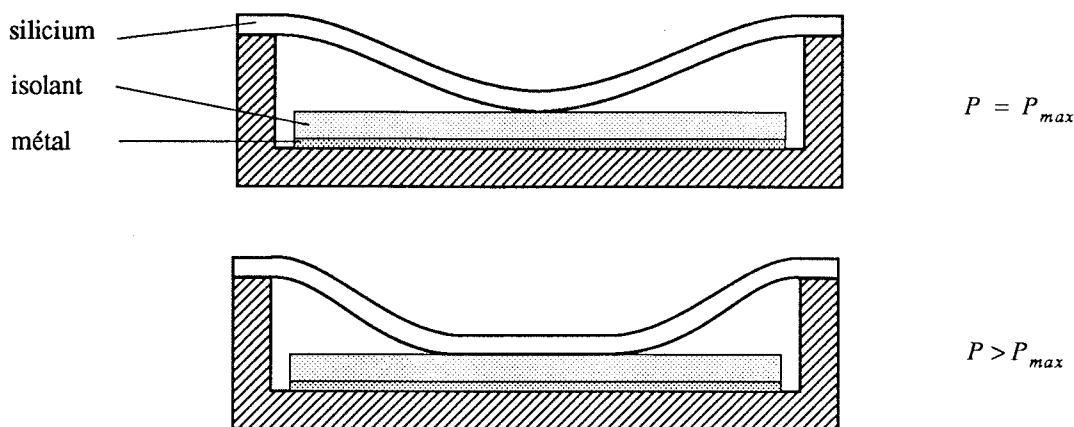


figure 5.1 Allure de la déflexion pour différentes valeurs de pression appliquée

Techniquement, un film mince d'isolant (typiquement du  $S_iO_2$ ) sera déposé au fond de la cavité pour interdire un court-circuit entre la plaque déformable et l'armature fixe.

### 1.1 Equation d'équilibre

L'équation d'équilibre de la plaque est identique à l'équation (1.1) utilisée dans le premier chapitre, nous la rappelons ci-dessous.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (5.1)$$

avec  $w(x, y)$  déflexion au point  $(x, y)$   
 $P$  pression appliquée sur la plaque  
 $D = D_0 h^3$  coefficient de rigidité de la plaque à la flexion

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \alpha = \nu + 2\frac{G}{E}(1-\nu^2) \quad (5.2)$$

où  $h$  épaisseur de la plaque  
 $\nu$  coefficient de Poisson  
 $E$  module de Young  
 $G$  module de Coulomb

Les coefficients  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $E$  et  $G$  dépendent du matériau et de la direction cristallographique dans laquelle est orientée la plaque.

## 1.2 Conditions aux limites

Il faut maintenant imposer deux ensembles de conditions aux limites. Le premier ensemble concerne la prise en compte de l'encastrement de la plaque. La première équation exprime le fait que les bords de la plaque ne se déplacent pas verticalement pendant la déformation, et la seconde, le fait que la direction du bord reste toujours horizontale.

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (5.3)$$

Le deuxième ensemble décrit la spécificité du problème par rapport à celui du premier chapitre. Ce groupe de conditions aux limites n'est donc valable que lorsque la plaque atteint le fond de la cavité. L'écrasement de la plaque au fond de la cavité est modélisé de façon indirecte en réduisant le domaine d'intégration au fur et à mesure que la pression augmente.

$$w(x, y) = d \quad \text{dès que } w(x, y) \text{ dépasse } d \quad (5.4)$$

## 1.3 Problème aux limites

On est finalement conduit à résoudre le problème aux limites suivant : trouver  $w$  défini sur  $[0, a] \times [0, b]$  vérifiant :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad \text{sur } \Omega = (0, a) \times (0, b)$$

$$\begin{aligned} \text{quand } P < P_{max} \quad & w = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \text{quand } P \geq P_{max} \quad & \begin{cases} w = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ w(x, y) = d \quad \text{dès que } w(x, y) \text{ dépasse } d \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Bien entendu, ce problème aux limites n'admet pas de solutions "en termes finis". Les paragraphes suivants proposent une solution numérique.

## 2 Réduction à un problème sans dimension

Le changement de variable  $\tilde{x} = x/a$  et  $\tilde{y} = y/b$  ramène le domaine d'intégration à  $[0, 1] \times [0, 1]$ , on pose de plus  $r = b/a$



On effectue ensuite le changement de fonction  $\tilde{w} = w/d$ , puis on pose :

$$\tilde{P} = \frac{P}{P_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{P_0} = \frac{a^2 b^2}{dD} \quad (5.6)$$

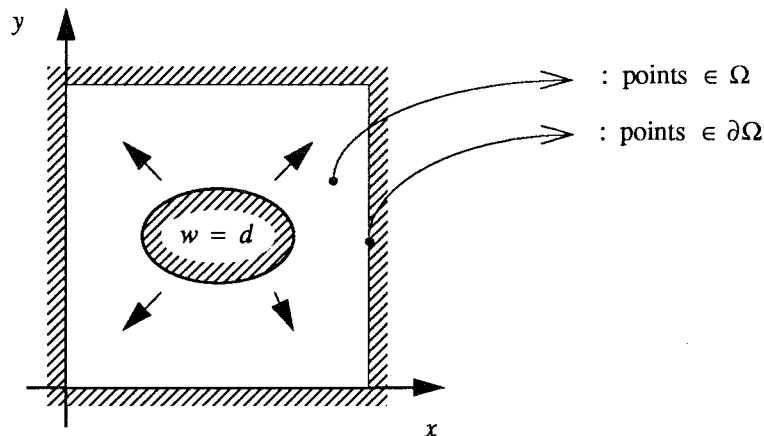
Les changements de variable précédents conduisent finalement à l'équation différentielle suivante :

$$r^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} = \tilde{P} \quad (5.7)$$

### 3 Résolution numérique du problème

#### 3.1 Maillage

Une représentation élémentaire du maillage et de la position des points frontières sur ce maillage demande un nombre beaucoup plus élevé de points que celle décrite dans les chapitres précédents. Pour cette raison, nous avons préféré représenter symboliquement la géométrie des différents domaines d'une façon continue, en se rappelant toutefois que cette géométrie n'est décrite effectivement par le calcul qu'à travers un ensemble discret de points régulièrement espacés.



Intuitivement, la zone en contact a globalement la forme d'une ellipse. Dans le cas particulier où  $r = 1$ , cette ellipse est un disque. Au fur et à mesure que la pression augmente, la surface de l'ellipse s'étend au détriment du domaine d'intégration de l'équation aux dérivées partielles  $\Omega$ .

### 3.2 Discrétisation du problème aux limites

La discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (5.1) et des conditions aux limites (5.3) est identique à celle du premier chapitre. Le résultat est donné respectivement par les équations (1.12) et (1.16). La prise en compte de l'écrasement de la plaque au fond de la cavité est exprimée par la méthode de calcul décrite ci-après.

```

P=0
boucle
  Calculer la déflexion;
  si l'une des valeurs de  $w(x, y)$  dépasse la valeur  $d$  alors
    Réduire le domaine d'intégration en excluant les parties en contact;
    Imposer  $w(x, y) = d$  dans la partie en contact;
    Recalculer la déflexion;
  fin si;
  Sortir dès que  $P$  atteint une valeur prédéfinie;
  Incrémenter  $P$  d'un pas suffisamment faible;
fin boucle;

```

figure 5.2 Algorithme utilisé pour le calcul de la flexion limitée d'une plaque

Le calcul de la déflexion est effectué par la méthode décrite dans le premier chapitre, en tenant compte toutefois du domaine d'intégration variable.

## 4 Solution numérique du problème

### 4.1 Déflexion normalisée

La déflexion normalisée  $w/d$  aux points du maillage est contenue dans une matrice. Cette matrice est imprimée à chaque fois que de nouveaux points de la plaque entrent en contact avec le fond de la cavité. La pression normalisée correspondante est aussi affichée.

On donne ci-dessous une illustration du fonctionnement du programme dans le cas  $r = 1$  et  $N = 10$  (maillage de 121 points). Nous avons choisi de montrer les résultats dans le cas d'un maillage très large pour bien faire apparaître l'extension de la partie en contact avec le fond de la cavité.

C'est bien entendu la partie centrale de la plaque qui entre en contact la première, puis cette zone centrale s'étend progressivement. Les valeurs numériques utilisées par la suite ont été calculées pour  $N = 30$  (maillage de 961 points) pour obtenir des résultats suffisamment précis.

tableau 5.1 Flexion limitée normalisée pour différentes valeurs de  $P/P_{max}$

J = 10	Y = 1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 9	Y = 0.9	0.000000	0.047678	0.116162	0.172848	0.207310	0.218562	0.207310	0.172848	0.116162	0.047678	0.000000
J = 8	Y = 0.8	0.000000	0.116162	0.291762	0.441823	0.534003	0.563770	0.534003	0.441823	0.291762	0.116162	0.000000
J = 7	Y = 0.7	0.000000	0.172848	0.441823	0.673189	0.811833	0.853294	0.811833	0.673189	0.441823	0.172848	0.000000
J = 6	Y = 0.6	0.000000	0.207310	0.534003	0.811833	0.966770	1.000000	0.966770	0.811833	0.534003	0.207310	0.000000
J = 5	Y = 0.5	0.000000	0.218562	0.563770	0.853294	1.000000	1.000000	1.000000	0.853294	0.563770	0.218562	0.000000
J = 4	Y = 0.4	0.000000	0.207310	0.534003	0.811833	0.966770	1.000000	0.966770	0.811833	0.534003	0.207310	0.000000
J = 3	Y = 0.3	0.000000	0.172848	0.441823	0.673189	0.811833	0.853294	0.811833	0.673189	0.441823	0.172848	0.000000
J = 2	Y = 0.2	0.000000	0.116162	0.291762	0.441823	0.534003	0.563770	0.534003	0.441823	0.291762	0.116162	0.000000
J = 1	Y = 0.1	0.000000	0.047678	0.116162	0.172848	0.207310	0.218562	0.207310	0.172848	0.116162	0.047678	0.000000
J = 0	Y = 0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		I = 0	I = 1	I = 2	I = 3	I = 4	I = 5	I = 6	I = 7	I = 8	I = 9	I = 10
		X = 0.0	X = 0.1	X = 0.2	X = 0.3	X = 0.4	X = 0.5	X = 0.6	X = 0.7	X = 0.8	X = 0.9	X = 1.0

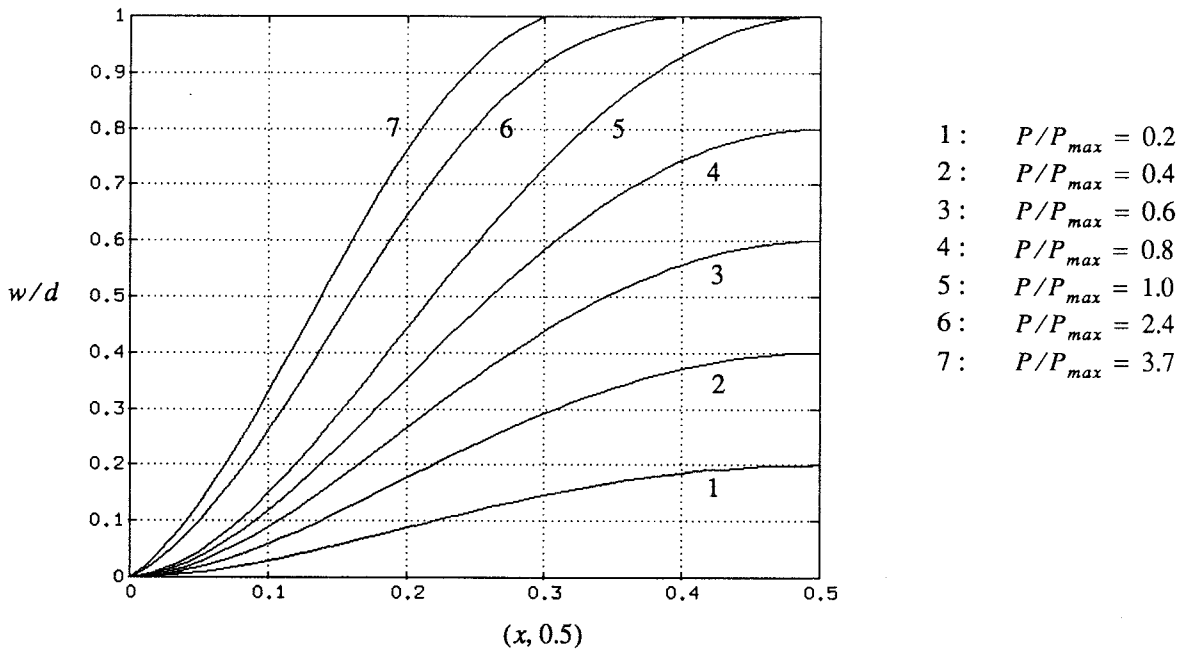


figure 5.3 Déflection selon l'axe des x pour différentes valeurs de  $P/P_{max}$

## 5 Capacité entre les deux armatures

### 5.1 Equation de base

La structure équivalente du capteur est une capacité composée de deux diélectriques et dont l'armature supérieure est déformable. La figure (5.4) donne une vue schématique de l'ensem-

ble et définit les notations utilisées par la suite.

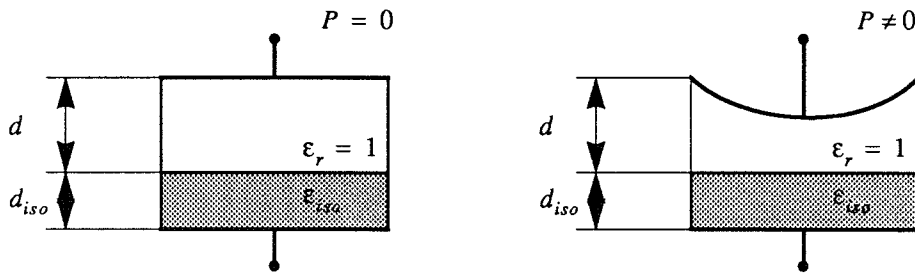


figure 5.4 Schémas équivalents du capteur

La capacité au repos  $C'_0$  entre les deux armatures est donnée par :

$$C'_0 = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d}{\epsilon_r} + \frac{d_{iso}}{\epsilon_{iso}}} \quad (5.8)$$

- où
- $S$  surface des métallisations
  - $\epsilon_0$  constante diélectrique du vide
  - $\epsilon_r$  constante diélectrique relative du milieu inter-armature
  - $\epsilon_{iso}$  constante diélectrique relative de l'isolant

Dans la cas particulier où  $d_{iso} = 0$ , l'équation (5.8) se ramène à l'expression (1.23). La capacité entre les armatures est donnée lors de la déflexion de la plaque par :

dans  $[0, a] \times [0, b]$

$$C = \iint \frac{\epsilon_0}{\frac{[d - w(x, y)]}{\epsilon_r} + \frac{d_{iso}}{\epsilon_{iso}}} dx dy \quad (5.9)$$

Le milieu inter-armature contient de l'air, on choisit  $\epsilon_r = 1$  dans la suite de ce chapitre.

## 5.2 Equation normalisée

A partir de l'équation (5.9), on peut déduire une expression normalisée de la réponse du capteur. Reprenons l'expression (5.9) avec  $\epsilon_r = 1$ , en mettant en facteur  $d$  au dénominateur et après avoir effectué le changement de variables  $\tilde{x} \leftarrow x/a$  et  $\tilde{y} \leftarrow y/b$ , on arrive finalement en posant  $r_d = d/d_{iso}$  et en réarrangeant les termes à

dans  $[0, 1] \times [0, 1]$

$$C = \frac{\epsilon_0 ab}{d} \iint \frac{1}{1 - \tilde{w}(x, y) + \frac{1}{r_d \epsilon_{iso}}} d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (5.10)$$

Le terme en facteur dans le côté droit de l'équation est la valeur de la capacité au repos  $C_0$  quand  $d_{iso} = 0$ . On garde la notation utilisée dans le premier chapitre en appelant cette valeur  $C_0$ . On obtient finalement :

$$\frac{C}{C_0} = \iint_S \frac{1}{1 - \tilde{w}(x, y) + \frac{1}{r_d \epsilon_{iso}}} d\tilde{x}d\tilde{y} \quad \text{dans } [0, 1] \times [0, 1] \quad (5.11)$$

### 5.3 Courbe de réponse normalisée du capteur

La résolution du système différentiel constitué par les équations (5.7) et (5.11) permet de déterminer la courbe de réponse  $C/C_0 = f(P/P_{max})$  du capteur étudié dans ce chapitre. Nous avons considéré dans les calculs que la couche d'isolant a une permittivité relative de 3.8, ce qui correspond à la permittivité du  $S_iO_2$ . La courbe de réponse du capteur, paramétrée en  $r_d = d/d_{iso}$ , est illustrée par la figure (5.5).

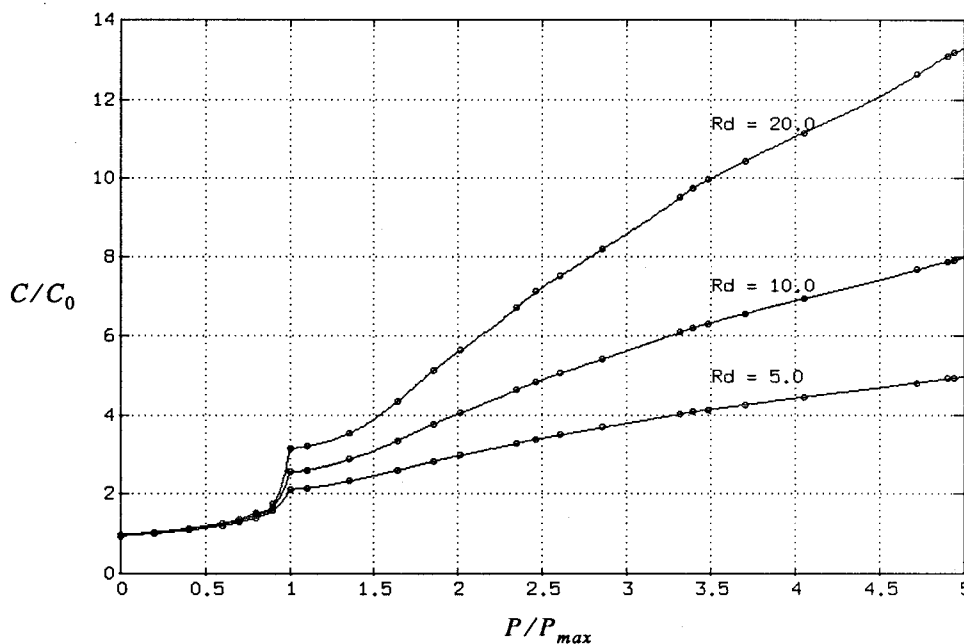


figure 5.5 Courbe de réponse du capteur

Chaque courbe a deux parties. La première partie, de  $0 \leq P/P_{max} \leq 1$  correspond aux pressions pour lesquelles la plaque n'a pas encore atteint le fond de la cavité. C'est le domaine d'utilisation classique des capteurs capacitifs. Dans la seconde partie de la courbe  $1 \leq P/P_{max} \leq 5$ , la plaque déformable est en contact avec le fond de la cavité. Le type de capteur étudié dans ce chapitre est destiné à fonctionner dans cette gamme de pression normalisée.

La figure (5.5) montre que la structure proposée au début de ce chapitre permet d'obtenir des courbes de réponse presque linéaires. Les deux paragraphes suivants analyseront plus en dé-

tail la linéarité et la sensibilité de ces courbes de réponse. Le comportement d'un capteur utilisé dans les conditions étudiées dans ce chapitre est décrit dans [69]. Les auteurs ont traité le cas d'une plaque circulaire. Ils ont obtenu des courbes de réponse tout à fait similaires aux nôtres.

Certains points de la figure (5.5) présentent une légère dispersion, ce phénomène est surtout visible pour les valeurs de  $r_d$  élevées. Cette dispersion est due à la discrétisation régulière du maillage. Un maillage localement plus fin autour de la zone de contact serait nécessaire pour affiner les résultats. Néanmoins, la concavité que l'on observe sur chaque courbe est aussi présente dans les résultats de [69].

### 5.4 Linéarité

Nous considérons que la linéarité  $\bar{L}_{f, x_1, x_2}$  d'une fonction  $f$  sur l'intervalle  $[x_1, x_2]$  est l'écart quadratique moyen<sup>1</sup> entre la fonction  $f$  et la droite  $d_f$  simulant cette fonction au sens des moindres carrés sur  $[x_1, x_2]$ .

$$\bar{L}_{f, x_1, x_2} = \sigma(f - d_f) \tag{5.12}$$

C'est une mesure de la dispersion de la courbe  $f'(x)$  autour de sa valeur moyenne sur un intervalle donné. Si la fonction  $f$  est linéaire, on a  $\bar{L}_{f, x_1, x_2} = 0$ . La linéarité des courbes représentées figure (5.5) est donnée figure (5.6) pour l'intervalle  $P/P_{max} \in [2, 4]$ .

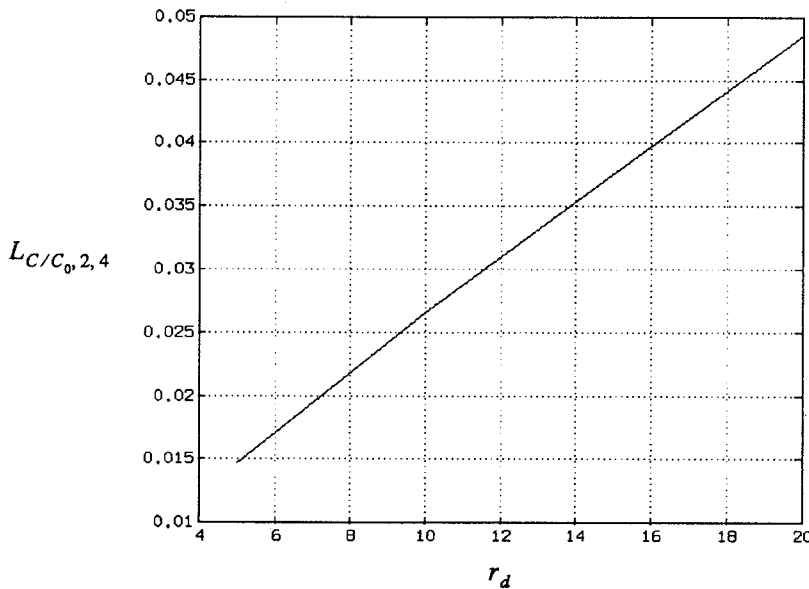


figure 5.6 Courbe de réponse du capteur

1. On rappelle que  $\sigma^2 = \overline{(v - \bar{v})^2} = \overline{v^2} - (\bar{v})^2$ . La deuxième égalité est une identité classique utilisée en statistique [85 p. 13].

Cette courbe montre que pour obtenir la meilleure linéarité, le coefficient  $r_d$  doit être le plus faible possible. Finalement, les exigences sur le choix du paramètre  $r_d$  pour obtenir une bonne sensibilité ou une bonne linéarité sont contradictoires. Pour la sensibilité, il faut choisir  $r_d$  le plus élevé possible, tandis que pour la linéarité, il faut choisir  $r_d$  le plus faible possible.

### 5.5 Sensibilité

Le paragraphe précédent a montré que les courbes de réponse ont une bonne valeur de linéarité, ce qui nous permet de considérer des valeurs moyennes de sensibilité. On définit la sensibilité moyenne  $\bar{S}$  d'un capteur sur l'intervalle  $[x_1, x_2]$  comme la pente de la droite des moindres carrés de la courbe de réponse  $f$  sur cet intervalle.

La courbes de sensibilité dans l'intervalle de pression  $P/P_{max} \in [2, 4]$  est tracée figure (5.7).

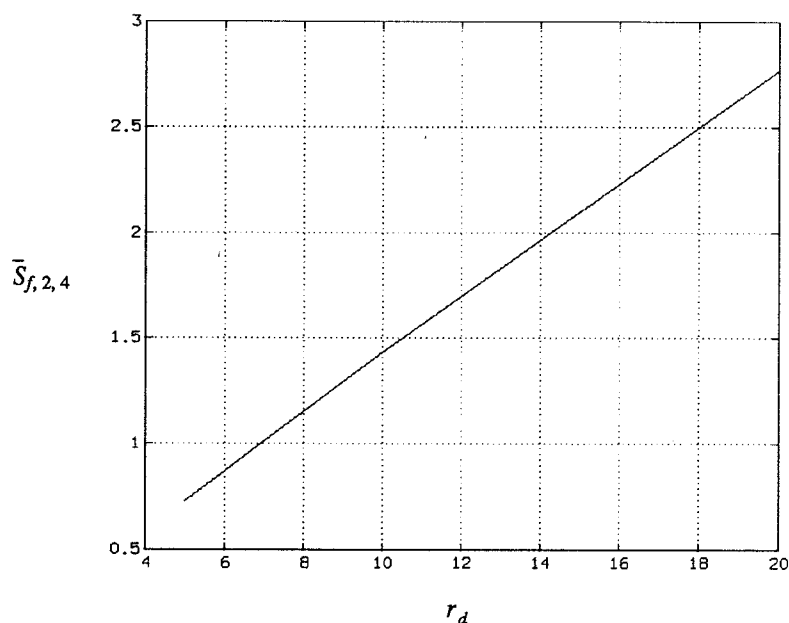


figure 5.7 Courbe de sensibilité du capteur

L'interprétation de la courbe est immédiate : pour obtenir la meilleure sensibilité possible, il faut choisir  $r_d$  le plus élevé possible. C'est à dire une épaisseur de diélectrique la plus faible possible pour une distance inter-armature donnée. Il faut toutefois noter que l'épaisseur de diélectrique doit être suffisamment importante pour ne pas être détruite par un champ électrique élevé (claquage du diélectrique).

## 5.6 Capacité au repos

Pour des raisons métrologiques, on a tout intérêt à obtenir des valeurs de capacité au repos les plus élevées possibles. Cette condition peut intervenir, en plus des études précédentes, dans le choix du paramètre  $r_d$ . Rappelons les équations de  $C_0$  et de  $C'_0$  :

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad C'_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d + \frac{d_{iso}}{\epsilon_{iso}}} \quad (5.13)$$

A partir de ces deux équations, on obtient une relation liant ces deux valeurs :

$$C'_0 = \frac{C_0}{1 + \frac{1}{\epsilon_{iso} r_d}} \quad (5.14)$$

La courbe  $C'_0/C_0$  en fonction de  $r_d$  est donnée figure (5.8). Elle montre que l'influence de la valeur de  $r_d$  sur la capacité au repos est négligeable.

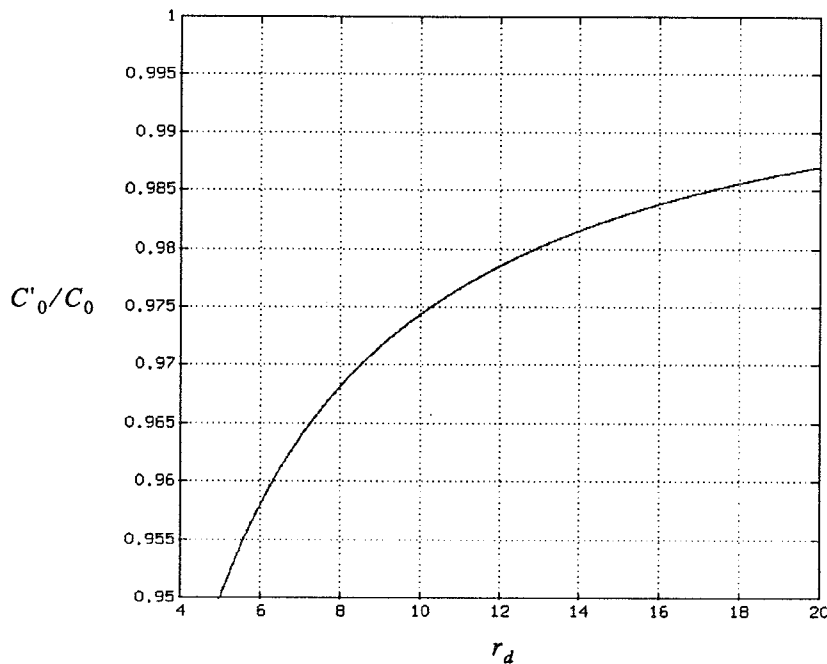


figure 5.8 Influence de  $r_d$  sur la valeur de la capacité au repos

## 6 Conclusion

Ce chapitre a présenté une étude du comportement de capteurs capacitifs en régime de contact. Nous avons proposé un algorithme permettant de résoudre le problème de la flexion li-



mitée d'une plaque mince. Nous avons ensuite introduit le paramètre  $r_d$ , rapport de la profondeur de la cavité sur l'épaisseur de l'isolant qui permet de définir une expression normalisée de la réponse du capteur.

Les courbes de réponse ont montré qu'il est possible d'obtenir, par ce type de fonctionnement, des capteurs capacitifs présentant une grande sensibilité et qui possèdent une réponse quasi-linéaire dans un large domaine de pression.

L'analyse de ces courbes a mis en évidence l'influence du paramètre  $r_d$  sur la linéarité et la sensibilité de la réponse. Pour obtenir une bonne linéarité, il faut choisir  $r_d$  le plus faible possible, alors que pour avoir une valeur élevée de sensibilité, il faut que  $r_d$  soit le plus grand possible.

---

---

# **Capteurs capacitifs en flexion forte**

## *Chapitre 6*

---

### **1 Flexion forte d'une plaque mince**

Depuis quelques années, la technologie permet de fabriquer, de façon précise et reproductible, des capteurs capacitifs qui ont une armature déformable de très faible épaisseur [43][13]. La déflexion au centre est alors comparable, ou même plus élevée, à l'épaisseur de la plaque. Dans ce cas, la théorie des faibles déflexions n'est plus applicable. Il est alors nécessaire d'utiliser la théorie de fortes déflexions.

### 1.1 Equation d'équilibre

Dans le cas des faibles déflexions, on peut considérer que les déplacements dans le plan moyen de la plaque sont négligeables [82 p. 396]. Lorsque la déflexion n'est plus petite en comparaison de l'épaisseur de la plaque, il faut tenir compte de l'allongement du plan moyen. L'état d'équilibre d'une plaque déformée sous l'action d'une pression  $P$  est alors défini par le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires (6.1) [53].

$$\begin{aligned}
 D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) &= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P \\
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\
 N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 N_{xy} &= Gh \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

avec  $w, u, v$  déplacement  
 $N_x, N_y, N_{xy}$  force par unité de longueur  
 $P$  pression appliquée sur la plaque  
 $D = D_0 h^3$  coefficient de rigidité de la plaque à la flexion

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad \alpha = \nu + 2\frac{G}{E}(1-\nu^2) \tag{6.2}$$

où  $h$  épaisseur de la plaque  
 $\nu$  coefficient de Poisson  
 $E$  coefficient d'élasticité longitudinal  
 $G$  coefficient d'élasticité transversal

En éliminant  $N_x, N_y$  et  $N_{xy}$  des équations (6.1), on obtient le système d'équations aux dérivées partielles (6.3).

$$\begin{aligned}
 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha - \nu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\alpha + \nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha - \nu)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\alpha + \nu)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \\
 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\alpha - \nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\alpha + \nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\alpha - \nu)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + \nu)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \\
 D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) &= P + \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 &+ 2Gh\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 &+ \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

En posant,

$$N_x = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad N_y = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad N_{xy} = -h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{6.4}$$

Le système d'équations (6.1) est équivalent au système d'équations<sup>1</sup> de von Kármán (6.5) [39] généralisée au cas anisotrope [53].

$$\begin{aligned}
 D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) &= h\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + P \\
 \frac{1}{E}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - 2\frac{\nu}{E}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

La formulation (6.5) est privilégiée pour les études théoriques du problème [2][74]. Mais en pratique, les formes (6.1) et (6.3) sont toujours utilisées, principalement du fait que la fonction  $F$  n'a pas de signification physique et que ses valeurs aux limites sont totalement inconnues.

## 1.2 Conditions aux limites

Soit  $\Omega$  le domaine d'intégration  $[0, a] \times [0, b]$ ,  $\partial\Omega$  les points frontières du domaine et  $n$  la normale extérieure au domaine. Dans le cas d'une plaque encastree, les conditions aux limites s'expriment par :

$$\begin{cases} w = 0 & u = 0 & v = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{6.6}$$

1. Une démonstration d'existence et une étude de l'unicité des solutions du système d'équations de von Kármán sont données respectivement dans [44] et [45].

Les valeurs de  $\partial_n u$  et  $\partial_n v$  ainsi que celle de  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  aux points frontières dépendent et agissent sur la déflexion de la plaque. Il n'existe pas d'expression de ces conditions aux limites.

## 2 Réduction à un problème sans dimension

Le système d'équations (6.1) peut être réécrit sous une forme non-dimensionnelle en choisissant  $(a, b, d)$  comme longueur représentative avec les changements de variable suivants :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x/a & \bar{w} &= w/d & \bar{N}_x &= N_x b^2/D \\ \bar{y} &= y/b & \bar{u} &= u a/d^2 & \bar{N}_y &= N_y a^2/D \\ & & \bar{v} &= v b/d^2 & \bar{N}_{xy} &= N_{xy} a b/D \end{aligned} \quad (6.7)$$

L'expression sans dimension du système d'équations (6.1) fait apparaître les deux paramètres  $r$  et  $c$ .

$$\begin{aligned} r &= b/a \\ c &= d/h \end{aligned} \quad (6.8)$$

Le paramètre  $r$  a été utilisé tout au long de ce mémoire.  $r = 1$  correspond au cas d'une plaque carrée,  $r \neq 1$  à celui d'une plaque rectangulaire. Une valeur de  $r$  de plus en plus élevée signifie une plaque de plus en plus allongée. Le paramètre  $c$  est spécifique à ce chapitre.  $c = 0$  correspond à la théorie élémentaire des plaques,  $c = 1$  est la valeur classique de la littérature.

On définit une expression sans dimension de la pression appliquée  $P$  donnée par :

$$\bar{P} = \frac{P}{P_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{P_0} = \frac{a^2 b^2}{dD} \quad (6.9)$$

Les changements de variable précédents conduisent au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} &= \bar{N}_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{P} \\ \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial \bar{x}} &= 0 \\ \bar{N}_x &= 12c^2 \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \\ \bar{N}_y &= 12c^2 \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] \\ \bar{N}_{xy} &= 6(\alpha - \nu) c^2 \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

De même, le système d'équations (6.3) prend la forme non-dimensionnelle (6. 11).

$$\begin{aligned}
 2r^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + (\alpha - \nu) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + (\alpha + \nu) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + 2r^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + (\alpha - \nu) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + (\alpha + \nu) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} &= 0 \\
 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + (\alpha - \nu) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + (\alpha + \nu) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + (\alpha - \nu) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + (\alpha + \nu) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} &= 0 \\
 r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{P_0} + 12c^2 \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \quad (6. 11) \\
 + 12(\alpha - \nu) c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \\
 + 12c^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &
 \end{aligned}$$

### 3 Première résolution numérique du problème

#### 3.1 Discrétisation du système d'équations aux dérivées partielles

La discrétisation du système d'équations (6.3) est effectuée en utilisant les équations (1.10) et (1.11) et en remplaçant les dérivées partielles restantes par leurs représentations aux différences associées. L'expression de ces dérivées est rappelée dans le tableau (6.1).

tableau 6.1 Discrétisation des dérivées

Dérivée partielle	Equation aux différences associée
$\frac{\partial X}{\partial x}$	$\frac{1}{2h_d} (X_{i+1,j} - X_{i-1,j})$
$\frac{\partial X}{\partial y}$	$\frac{1}{2h_d} (X_{i,j+1} - X_{i,j-1})$
$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$	$\frac{1}{h_d^2} (X_{i+1,j} - 2X_{i,j} + X_{i-1,j})$
$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}$	$\frac{1}{4h_d^2} (X_{i+1,j+1} - X_{i-1,j+1} + X_{i-1,j-1} - X_{i+1,j-1})$
$\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$	$\frac{1}{h_d^2} (X_{i,j+1} - 2X_{i,j} + X_{i,j-1})$

### 3.2 Algorithme de Newton-Raphson

Lorsque l'on applique les équations discrétisées à chaque point du maillage, on obtient un système de  $3(N-1)^2$  équations non-linéaires permettant de déterminer les  $(N-1)^2$  valeurs des fonctions  $u$ ,  $v$  et  $w$  aux points du maillage. Nous résolvons ce système par l'algorithme de Newton-Raphson.

Soit  $u, v, w$  des vecteurs de dimension  $(N-1)^2$  représentant les valeurs de  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  aux points du maillage.

Soit  $f_1, f_2, f_3$  les fonctions respectivement égales à la première, deuxième et troisième équation du système (6.11) en passant tous les termes à gauche du signe d'égalité.

On pose :

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Algorithme de Newton-Raphson utilisé :

```

 $x^0$ 
pour  $k = 1 \dots k_{max}$  faire
    calculer  $(f)^k$  et  $f^k$ 
    résoudre le système linéaire  $(f')^k d^k = -f^k$ 
     $x^k = x^{k-1} + d^k$ 
    sortir dès que  $\|d^k\| \leq \epsilon$ 
fin boucle
    
```

Le détail de la résolution du système linéaire et les expressions algébriques complètes du Jacobien  $f'$  sont données dans les paragraphes suivants.

### 3.3 Algorithme du gradient conjugué généralisé [49]

La méthode du gradient conjugué généralisé est une extension de la méthode du gradient conjugué aux systèmes linéaires dont la matrice est quelconque.

$$\begin{aligned}
 r^0 &= b - Ax^0 \\
 p^0 &= A^t r^0 \quad \text{avec } \|x\| \text{ norme de } x \\
 \text{pour } k &= 0 \dots k_{max} \text{ faire} \\
 \alpha^k &= \frac{\|A^t r^k\|^2}{\|Ap^k\|^2} \\
 x^{k+1} &= x^k + \alpha^k p^k \\
 \text{sortir dès que } &|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon \\
 r^{k+1} &= r^k - \alpha^k Ap^k \\
 \beta^{k+1} &= \frac{\|A^t r^{k+1}\|^2}{\|A^t r^k\|^2} \\
 p^{k+1} &= A^t r^{k+1} + \beta^{k+1} p^k \\
 \text{fin boucle}
 \end{aligned}$$

Algorithmes du gradient conjugué généralisé  
 Résolution de  $Ax = b$

On remarque que cet algorithme nécessite le calcul de deux produits d'une matrice par un vecteur à chaque itération, à la place d'un seul par l'algorithme du gradient conjugué classique.

### 3.4 Expression<sup>2</sup> du Jacobien

La totalité des expressions algébriques des termes non nuls du Jacobien est donnée page 89 et 90. Etant donné leur volume important, la présentation des résultats est organisée de la façon suivante :

$\frac{\partial f_1}{\partial u}$	$\frac{\partial f_1}{\partial w}$	$\frac{\partial f_2}{\partial u}$	$\frac{\partial f_2}{\partial w}$
$\frac{\partial f_1}{\partial v}$		$\frac{\partial f_2}{\partial v}$	

page 89

$\frac{\partial f_3}{\partial u}$	$\frac{\partial f_3}{\partial w}$
$\frac{\partial f_3}{\partial v}$	

page 90

2. Le calcul formel de toutes les expressions algébriques données dans ce paragraphe a été effectué par le logiciel détaillé en annexe 3 que nous avons développé.



Les inconnues du problème sont exprimées dans un repère local. la correspondance entre le repère global, employé dans les chapitres précédents, et le repère local est défini par la figure (6.1).

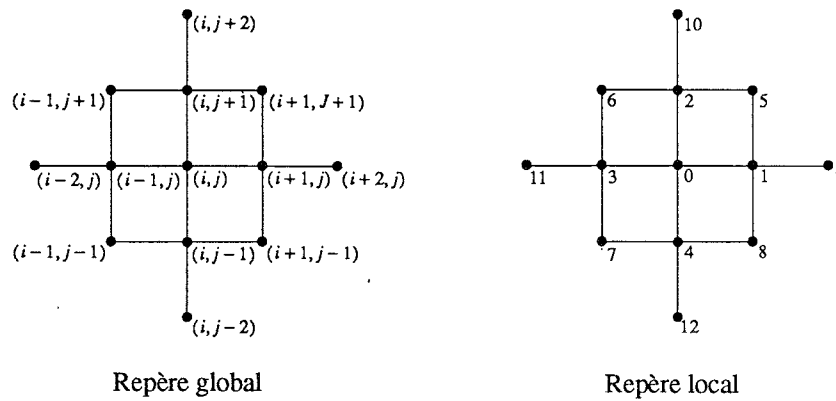


figure 6.1 Correspondance repère global-repère local

On pose de plus les relations similaires :

$$\begin{aligned}
 U_x &= (U_1 - U_3) / 2 \\
 U_y &= (U_2 - U_4) / 2 \\
 U_{xx} &= U_1 - 2U_0 + U_3 \\
 U_{xy} &= (U_5 - U_6 + U_7 - U_8) / 4 \\
 U_{yy} &= U_2 - 2U_0 + U_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_x &= (V_1 - V_3) / 2 \\
 V_y &= (V_2 - V_4) / 2 \\
 V_{xx} &= V_1 - 2V_0 + V_3 \\
 V_{xy} &= (V_5 - V_6 + V_7 - V_8) / 4 \\
 V_{yy} &= V_2 - 2V_0 + V_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_x &= (W_1 - W_3) / 2 \\
 W_y &= (W_2 - W_4) / 2 \\
 W_{xx} &= W_1 - 2W_0 + W_3 \\
 W_{xy} &= (W_5 - W_6 + W_7 - W_8) / 4 \\
 W_{yy} &= W_2 - 2W_0 + W_4
 \end{aligned}$$

$\frac{\partial f_1}{\partial u_0} = -2(2r^2 + \alpha - \nu)$	$\frac{\partial f_1}{\partial w_0} = -2(2r^2 + \alpha - \nu) W_x$	$\frac{\partial f_2}{\partial u_5} = (\alpha + \nu) / 4$	$\frac{\partial f_2}{\partial w_0} = -2\left(\frac{2}{r^2} + \alpha - \nu\right) W_y$
$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = 2r^2$	$\frac{\partial f_1}{\partial w_1} = r^2 W_{xx} + 2r^2 W_x + \frac{1}{2}(\alpha - \nu) W_{yy}$	$\frac{\partial f_2}{\partial u_6} = -(\alpha + \nu) / 4$	$\frac{\partial f_2}{\partial w_1} = (\alpha - \nu) W_y + \frac{1}{2}(\alpha + \nu) W_{xy}$
$\frac{\partial f_1}{\partial u_2} = \alpha - \nu$	$\frac{\partial f_1}{\partial w_2} = (\alpha - \nu) W_x + \frac{1}{2}(\alpha + \nu) W_{xy}$	$\frac{\partial f_2}{\partial u_7} = (\alpha + \nu) / 4$	$\frac{\partial f_2}{\partial w_2} = \frac{W_{yy}}{r^2} + 2\frac{W_y}{r^2} + \frac{1}{2}(\alpha - \nu) W_{xx}$
$\frac{\partial f_1}{\partial u_3} = 2r^2$	$\frac{\partial f_1}{\partial w_3} = -r^2 W_{xx} + 2r^2 W_x - \frac{1}{2}(\alpha - \nu) W_{yy}$	$\frac{\partial f_2}{\partial u_8} = -(\alpha + \nu) / 4$	$\frac{\partial f_2}{\partial w_3} = (\alpha - \nu) W_y - \frac{1}{2}(\alpha + \nu) W_{xy}$
$\frac{\partial f_1}{\partial u_4} = \alpha - \nu$	$\frac{\partial f_1}{\partial w_4} = (\alpha - \nu) W_x - \frac{1}{2}(\alpha + \nu) W_{xy}$		$\frac{\partial f_2}{\partial w_4} = -\frac{W_{yy}}{r^2} + 2\frac{W_y}{r^2} - \frac{1}{2}(\alpha - \nu) W_{xx}$
		$\frac{\partial f_2}{\partial v_0} = -2\left(\frac{2}{r^2} + \alpha - \nu\right)$	$\frac{\partial f_2}{\partial w_5} = (\alpha + \nu) W_x / 4$
		$\frac{\partial f_2}{\partial v_1} = \alpha - \nu$	$\frac{\partial f_2}{\partial w_6} = -(\alpha + \nu) W_x / 4$
		$\frac{\partial f_2}{\partial v_2} = 2/r^2$	$\frac{\partial f_2}{\partial w_7} = (\alpha + \nu) W_x / 4$
		$\frac{\partial f_2}{\partial v_3} = \alpha - \nu$	$\frac{\partial f_2}{\partial w_8} = -(\alpha + \nu) W_x / 4$
		$\frac{\partial f_2}{\partial v_4} = 2/r^2$	

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial u_1} &= -6c^2 (r^2 W_{xx} + v W_{yy}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_2} &= -6c^2 (\alpha - v) W_{xy} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_3} &= 6c^2 (r^2 W_{xx} + v W_{yy}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_4} &= 6c^2 (\alpha - v) W_{xy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial w_0} &= A_0 + 24c^2 \left( r^2 U_x + v V_y + \frac{r^2}{2} W_x^2 + \frac{v}{2} W_y^2 \right) + 24c^2 \left( \frac{V_y}{r^2} + v U_x + \frac{1}{2r^2} W_y^2 + \frac{v}{2} W_x^2 \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_1} &= A_1 - 6c^2 (r^2 W_x W_{xx} + (\alpha - v) W_y W_{yy} + v W_x W_{xy}) - 12c^2 \left( r^2 U_x + v V_y + \frac{r^2}{2} W_x^2 + \frac{v}{2} W_y^2 \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_2} &= A_2 - 6c^2 \left( \frac{1}{r^2} W_y W_{yy} + (\alpha - v) W_x W_{xy} + v W_y W_{xx} \right) - 12c^2 \left( \frac{V_y}{r^2} + v U_x + \frac{1}{2r^2} W_y^2 + \frac{v}{2} W_x^2 \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_3} &= A_3 + 6c^2 (r^2 W_x W_{xx} + (\alpha - v) W_y W_{yy} + v W_x W_{xy}) - 12c^2 \left( r^2 U_x + v V_y + \frac{r^2}{2} W_x^2 + \frac{v}{2} W_y^2 \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_4} &= A_4 + 6c^2 \left( \frac{1}{r^2} W_y W_{yy} + (\alpha - v) W_x W_{xy} + v W_y W_{xx} \right) - 12c^2 \left( \frac{1}{r^2} V_y + v U_x + \frac{1}{2r^2} W_y^2 + \frac{v}{2} W_x^2 \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_5} &= A_5 - 3(\alpha - v) c^2 (U_y + V_x + W_x W_y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_6} &= A_6 + 3(\alpha - v) c^2 (U_y + V_x + W_x W_y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_7} &= A_7 - 3(\alpha - v) c^2 (U_y + V_x + W_x W_y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_8} &= A_8 + 3(\alpha - v) c^2 (U_y + V_x + W_x W_y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_9} &= A_9 \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_{10}} &= A_{10} \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_{11}} &= A_{11} \\ \frac{\partial f_3}{\partial w_{12}} &= A_{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial v_1} &= -6c^2 (\alpha - v) W_{xy} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v_2} &= -6c^2 \left( \frac{W_{yy}}{r^2} + v W_{xx} \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial v_3} &= 6c^2 (\alpha - v) W_{xy} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v_4} &= 6c^2 \left( \frac{W_{yy}}{r^2} + v W_{xx} \right)\end{aligned}$$

## 4 Seconde résolution numérique du problème

### 4.1 Méthode de relaxation dynamique [28][70]

La méthode dite de "relaxation dynamique" consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles indépendant du temps (6.10) en un problème dynamique équivalent qui converge pour  $t \rightarrow \infty$  vers la solution stable que l'on recherche. On introduit en outre un terme d'amortissement pour accélérer la convergence vers la solution stationnaire.

### 4.2 Equation dynamique

La formulation dynamique, intégrant un terme d'amortissement, du système d'équations aux dérivées partielles (6.10) est :

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2} + k_1 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} = -r^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} - 2\alpha \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} + \tilde{N}_x \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + 2\tilde{N}_{xy} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \tilde{N}_y \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{P} \quad (1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} + k_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{N}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{N}_{xy}}{\partial \tilde{y}} \quad (2)$$

$$\rho_3 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{t}^2} + k_3 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{N}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{N}_{xy}}{\partial \tilde{x}} \quad (3)$$

(6.12)

$$\tilde{N}_x = 12c^2 \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \nu \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$\tilde{N}_y = 12c^2 \left[ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \nu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$\tilde{N}_{xy} = 6(\alpha - \nu)c^2 \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right] \quad (6)$$

La variable sans dimension  $\tilde{t}$  représente le temps. Les valeurs de  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  et  $(k_1, k_2, k_3)$  sont des nombres sans dimension qui représentent respectivement des densités de masse et des facteurs d'amortissement. Leurs valeurs numériques sont choisies de façon à obtenir la convergence la plus rapide possible.

### 4.3 Maillage

La discrétisation par les différences finies du système (6.12) nécessite de définir un maillage du domaine dans le temps et dans l'espace. Nous avons choisi un pas de discrétisation  $h_d$  pour les deux axes  $x$  et  $y$ . Pour simplifier la représentation, nous n'avons représenté dans la figure

(6.2) que les points du domaine d'intégration et les points situés aux limites.

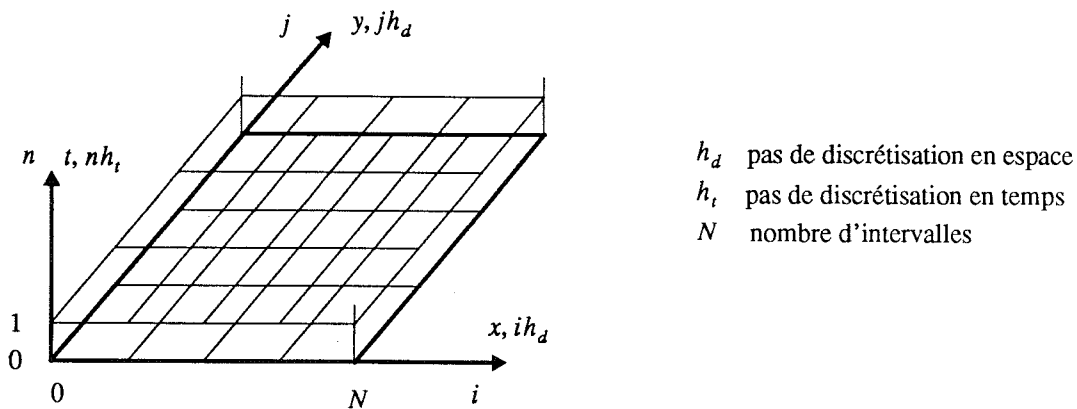


figure 6.2 Maillage du domaine  $[0, 1]^2 \times [0, \infty)$

#### 4.4 Discrétisation du système

La discrétisation en espace du système d'équations (6.12) est détaillée au paragraphe (3.1) de ce chapitre, la discrétisation en temps est donnée ci-dessous.

On introduit les variables  $\dot{w}$ ,  $\dot{u}$  et  $\dot{v}$  qui sont les vitesses correspondant au déplacement  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$ . Nous adoptons la convention suivante : l'indice  $n$  de l'expression  $\tilde{w}_n$  signifie que l'on considère les valeurs de la variable  $\tilde{w}$  au temps  $nh_d$ . La discrétisation en temps de l'équation (6.12) est écrite sous la forme :

$$\rho_1 \frac{\dot{w}_{n+1} - \dot{w}_n}{h_t} + k_1 \frac{\dot{w}_{n+1} + \dot{w}_n}{2} = A \quad (6.13)$$

avec  $A$ , le membre de droite de l'équation correspondante, on réécrit cette expression sous la forme itérative explicite :

$$\dot{w}_{n+1} = \frac{\rho_1 - 0.5k_1 h_d}{\rho_1 + 0.5k_1 h_d} \dot{w}_n + \frac{h_d}{\rho_1 + 0.5k_1 h_d} A \quad (6.14)$$

On obtient des équations similaires pour  $\dot{u}$  et  $\dot{v}$ .

#### 4.5 Algorithme

L'algorithme de la méthode de relaxation dynamique appliquée au système (6.12) est donné

ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dot{w}_0 &= 0 & \dot{u}_0 &= 0 & \dot{v}_0 &= 0 \\ \tilde{w}_{1/2} &= 0 & \tilde{u}_{1/2} &= 0 & \tilde{v}_{1/2} &= 0 \\ \tilde{N}_{x,1/2} &= 0 & \tilde{N}_{y,1/2} &= 0 & \tilde{N}_{xy,1/2} &= 0 \end{aligned}$$

pour  $n = 1$  jusqu'à la convergence

calculer  $(\dot{w}_n, \dot{u}_n, \dot{v}_n)$  par (6.12.1) (6.12.2) (6.12.3)

calculer  $(\tilde{w}_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}, \tilde{v}_{n+1/2})$  par

$$\tilde{w}_{n+1/2} = \tilde{w}_{n-1/2} + h_t \dot{w}_n$$

$$\tilde{u}_{n+1/2} = \tilde{u}_{n-1/2} + h_t \dot{u}_n$$

$$\tilde{v}_{n+1/2} = \tilde{v}_{n-1/2} + h_t \dot{v}_n$$

calculer  $(\tilde{N}_{x,n+1/2}, \tilde{N}_{y,n+1/2}, \tilde{N}_{xy,n+1/2})$  par (6.12.4) (6.12.5) (6.12.6)

fin boucle

## 5 Comparaison des deux méthodes

La valeur de la déflexion au centre de la plaque calculée par chacune des deux méthodes, pour un pression  $P/P_0 = 100$ , sur un maillage de 10 intervalles est donnée dans le tableau (6.2). Il y a un très bon accord entre les deux méthodes, mais la seconde méthode est nettement plus avantageuse au niveau du temps de calcul.

tableau 6.2 Comparaison des deux méthodes

	1 <sup>ère</sup> méthode	2 <sup>ième</sup> méthode
déflexion au centre	0.146881	0.146874
temps de calcul	1'14"	7"

## 6 Solution normalisée du problème

### 6.1 Déflexion normalisée

Un exemple des résultats obtenus est donné dans le tableau (6.3). La déflexion de la plaque a été calculée pour une pression normalisée  $P/P_0 = 1000$ , dans le cas d'une plaque carrée d'é-



## 7 Comparaison avec la littérature

La valeur de la déflexion normalisée  $w/h$  en fonction de  $P/P_0$  est donnée dans [87] dans le cas d'une plaque carrée isotrope avec  $\nu = 0.3$ . Les courbes de [87] sont reportées sur la figure (6.4) pour être comparées avec les résultats obtenus dans ce chapitre. Le graphique montre une bonne concordance des valeurs numériques obtenues.

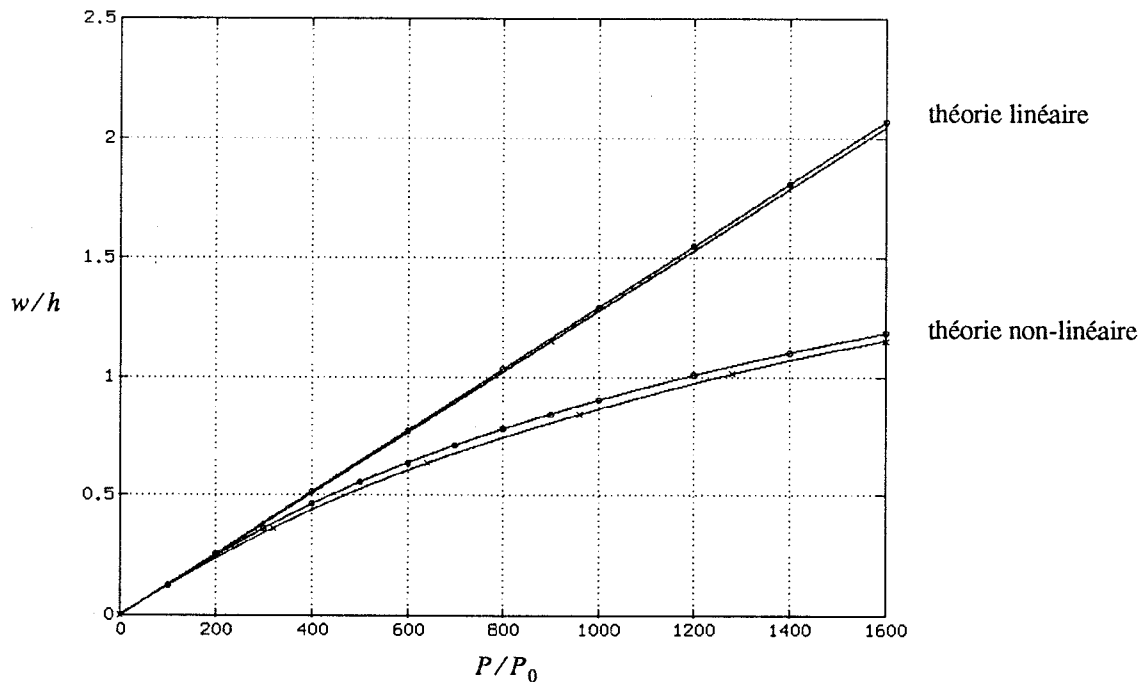


figure 6.4 Déflexion normalisée maximale

## 8 Pression maximale

La valeur de la pression normalisée maximale  $(P/P_0)_{\max}$  en fonction de  $r$  et de  $c$  est donnée dans le tableau (6.4). Les valeurs ont été calculées sur un maillage de 20 intervalles dans une direction, c'est à dire approximativement 400 points. Nous avons vu que la théorie de Kármán est typiquement appliquée pour une valeur du coefficient  $c = 1$ , c'est à dire pour une déflexion maximale égale à l'épaisseur de la plaque. On ne connaît pas à l'heure actuelle la valeur limite de  $c$  pour laquelle la théorie de Kármán modélise correctement le système physique.



tableau 6.4 Pression normalisée maximale

$(d/h)$	$(b/a)$			
	1.0	1.5	2.0	2.5
0.0	720.7	953.5	1511.6	2336.7
0.5	803.3	1074.9	1736.2	2718.1
1.0	1080.9	1485.0	2491.0	3945.0
1.5	1558.2	2203.2	3787.7	5975.6

La dépendance de  $(P/P_0)_{\max}$  en fonction de  $r$  et paramétrée en  $c$  est illustrée figure (6.5).

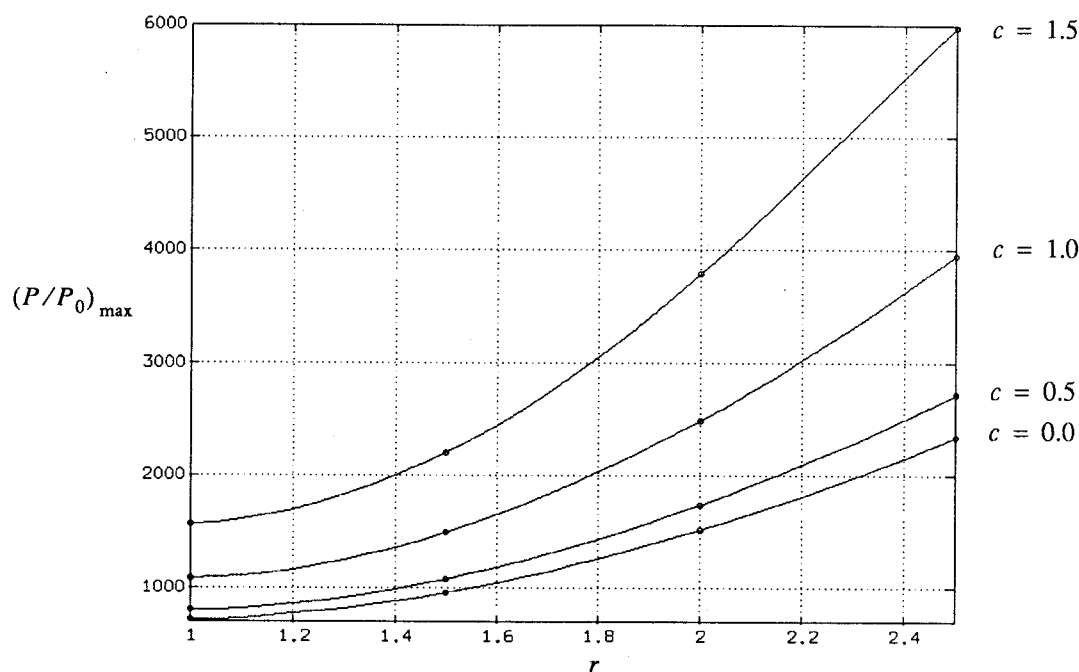


figure 6.5 Pression normalisée maximale en fonction de  $r$

La prise en compte de la théorie de Kármán dans l'étude des capteurs capacitifs a une influence très importante sur la valeur de la pression maximale. Plus la géométrie de la plaque est allongée et plus cette influence devient importante. Pour un rapport des longueurs  $r$  de 2.5 la pression normalisée maximale calculée pour  $h = d$  par Kármán est presque le double de celle calculée en utilisant la théorie de Kirchhoff.

La dépendance de  $(P/P_0)_{\max}$  en fonction de  $c$  et paramétrée en  $r$  est illustrée figure (6.6).

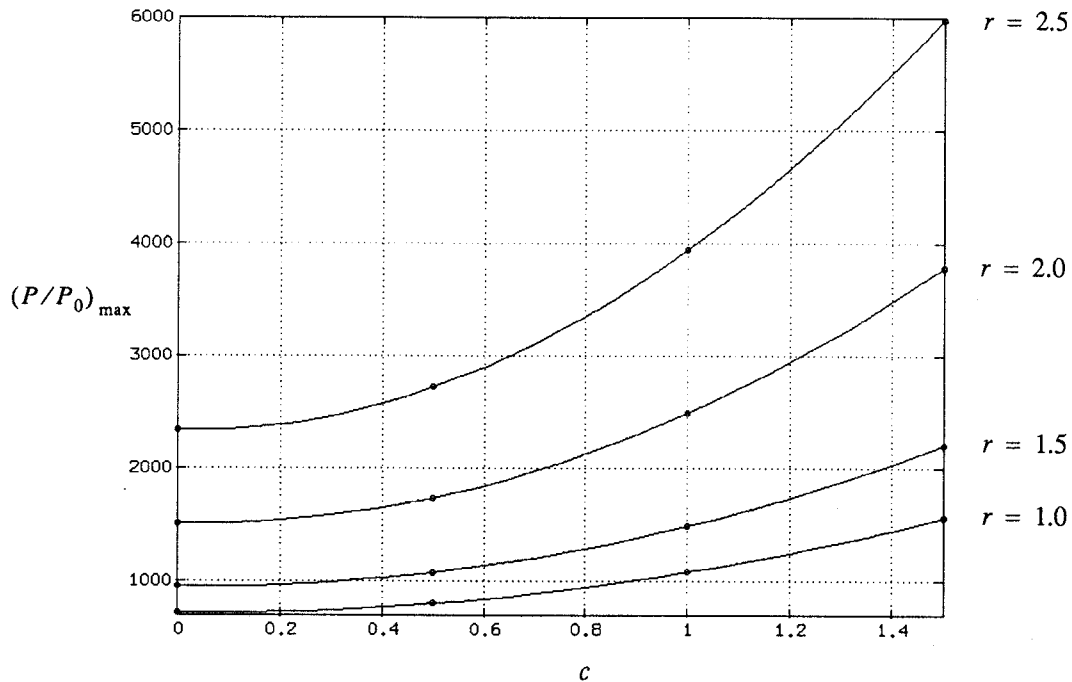


figure 6.6 Pression normalisée maximale en fonction de  $c$

## 9 Réponse du capteur

### 9.1 Equation normalisée

Les équations de ce paragraphe sont identiques à celles du premier chapitre. Nous rappelons simplement ici l'équation normalisée utilisée pour le calcul de la réponse. Soit  $C_0$  la valeur de la capacité au repos, l'équation de la réponse du capteur s'écrit :

$$\frac{C}{C_0} = \iint_S \frac{1}{1 - \tilde{w}_n(x, y)} dx dy \quad (5.15)$$

$$S = [0, a] \times [0, b]$$

### 9.2 Courbe de réponse normalisée du capteur

La courbe de réponse normalisée d'un capteur carré en fonction de la pression normalisée est illustrée par la figure (6.7). La courbe 1 est identique à celle du premier chapitre (voir figure

1.11). La courbe 2 est la réponse du capteur calculée par la théorie des fortes déflexions dans le cas  $d = h$ .

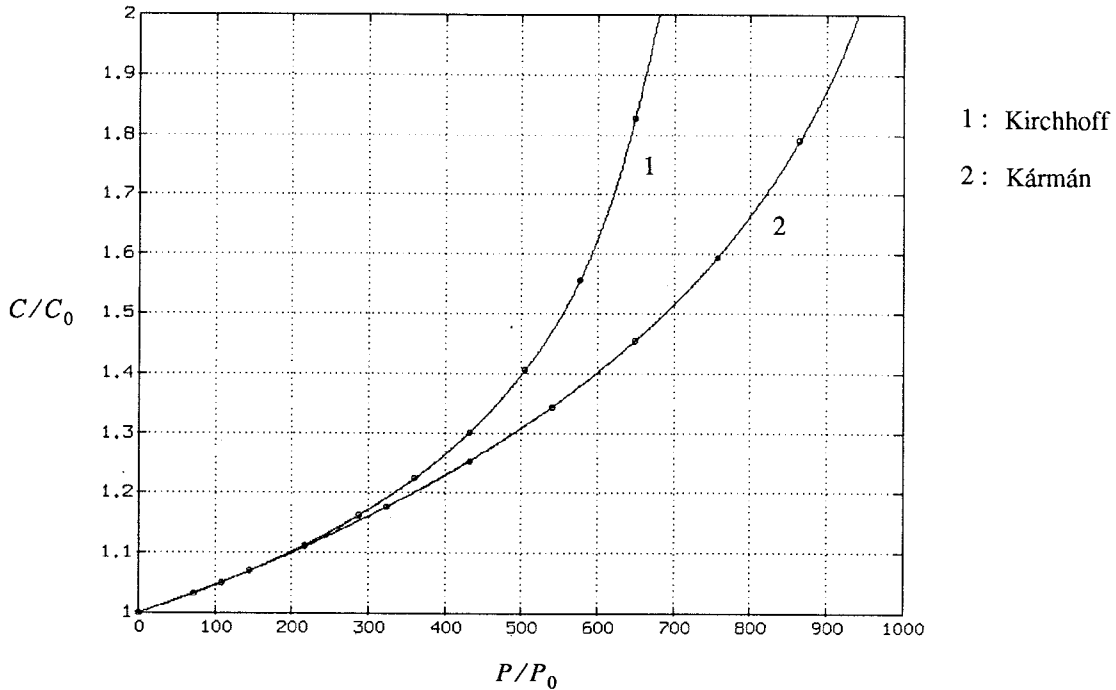


figure 6.7 Courbe de réponse normalisée du capteur

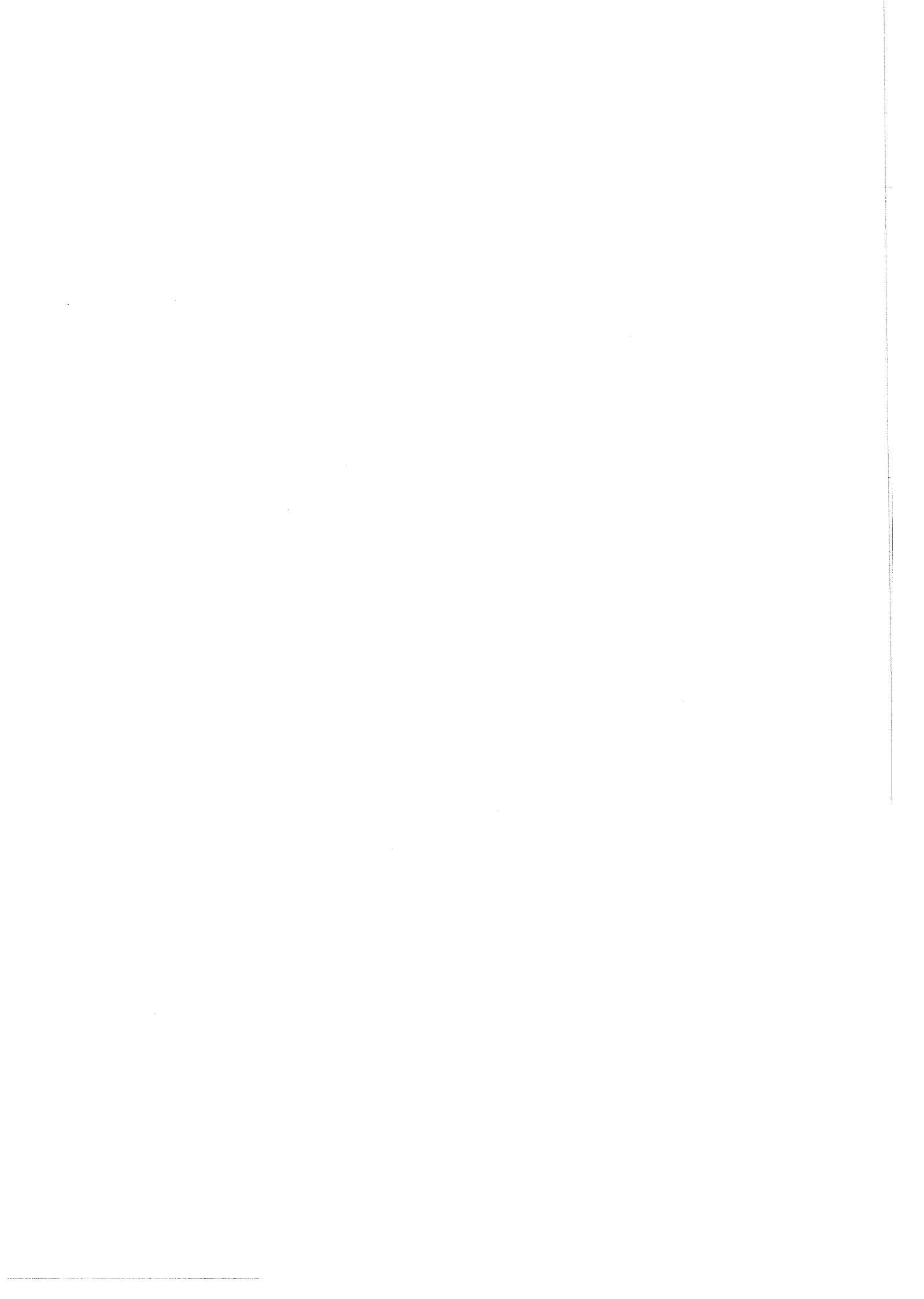
## 10 Conclusion

Ce chapitre a proposé une étude du comportement de capteurs capacitifs dont l'élément sensible est de faible épaisseur. L'étude de ces capteurs passe par la résolution du système d'équations de von Kármán concernant la flexion forte des plaques. Sa résolution a été effectuée par deux méthodes différentes, qui ont conduit au même résultat. Il s'est avéré que la seconde méthode (méthode de relaxation dynamique) est plus efficace au niveau du temps de calcul.

La première méthode est très générale, elle peut s'appliquer en principe à une large classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui possèdent une solution continue et suffisamment régulière. La deuxième méthode, est plus spécifique aux problèmes d'élasticité. La reformulation du système sous une forme dynamique permet de construire un schéma aux différences explicites qui simplifie considérablement la résolution du problème.

La courbe de la déflexion maximale en fonction de la pression appliquée a validé les résultats obtenus par rapport à ceux de la littérature. Nous avons ensuite tracé un réseau de courbes donnant la valeur de la pression maximale en fonction des paramètres  $r$  et  $c$  utilisés dans la normalisation.

Enfin, les réponses du capteur capacitif, calculées en utilisant la théorie de Kirchhoff et celle de von Kármán pour la déflexion de la plaque, ont été représentées sur la même courbe. Il apparaît clairement que, lorsque la profondeur de la cavité est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque, il est indispensable d'appliquer la théorie de von Kármán.



---

---

# Conclusion

---

---

Depuis ces dix dernières années, les capteurs de pression au silicium connaissent un essor considérable. L'utilisation du silicium permet de fabriquer des capteurs de très faible dimension par les procédés de la microélectronique. En outre, l'utilisation de cette technique garantit une grande reproductivité des structures. Pour ces raisons majeures, le capteur en silicium se substitue progressivement aux capteurs traditionnels, élaborés à partir de technologies plus conventionnelles.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons analysé le comportement d'un capteur capacitif classique. Nous avons d'abord obtenu la courbe de réponse du capteur en fonction de la pression appliquée. Le programme développé permet de déterminer cette réponse pour des capteurs rectangulaires de dimension quelconque. Nous avons ensuite proposé une étude de l'influence de la pression électrostatique sur ce comportement. En particulier, nous avons tracé un réseau complet de courbes permettant de déterminer la valeur de la pression constante et de la pression électrostatique limite à ne pas dépasser pour conserver la stabilité du système.

La deuxième partie de ce travail a été consacrée à l'étude de capteurs capacitifs de structures plus complexes. Chacun des dispositifs proposés est susceptible de déboucher sur une réalisation concrète. Nous avons d'abord étudié les structures dont la plaque déformable peut avoir une épaisseur variable et montré l'influence de cette épaisseur sur la réponse du capteur. Nous avons ensuite considéré le capteur de pression de géométrie polygonale et proposé deux applications possibles permettant respectivement l'élargissement de la gamme de pression et la mesure de forte pression. Nous avons poursuivi par une étude du comportement des capteurs en régime de contact et établi que ce principe de fonctionnement permettait d'obtenir des courbes de réponse de grandes sensibilités et quasi-linéaires dans une large gamme de pression. Enfin, nous avons présenté la réponse du capteur capacitif calculé en utilisant la théorie des fortes flexions des plaques, puis montré que la théorie classique n'est plus acceptable dès que les composants ont une armature déformable très fine.

En amont de ce travail, nous avons développé une application qui permet d'établir, sans intervention de l'utilisateur, le schéma aux différences centrées d'une équation ou d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires. L'implémentation actuelle est pour l'instant limitée aux fonctions de deux variables d'espace, mais elle peut être étendue, sans difficulté majeure, à un nombre plus élevé de variables.

L'essentiel des méthodes numériques employées se compose de la méthode des différences finies pour le procédé de résolution des équations aux dérivées partielles, de la méthode du gradient conjugué pour la résolution des systèmes linéaires, et enfin de la méthode de Newton-Raphson pour la résolution des systèmes non-linéaires.

L'algorithme du gradient conjugué et celui de Newton-Raphson sont classiques en analyse numérique. Ils sont reconnus pour leur rapidité et leur robustesse. Dans des programmes optimisés, ces méthodes sont utilisées sous des variantes plus sophistiquées, respectivement, méthode du gradient conjugué préconditionné et méthode de Levenberg-Marquardt.

Au niveau de l'implémentation, nous nous sommes constamment fixés les critères suivants :

Lisibilité : C'est un fait reconnu [5 p. 9] que les programmes sont lus beaucoup plus souvent qu'ils ne sont écrits. Une attention particulière a été portée à la présentation des programmes. Ils sont, en outre, fortement commentés.

Autonomie : pour des raisons de portabilité, aucun programme ne fait appel à des bibliothèques mathématiques préexistantes du type IMSL<sup>1</sup>[34] ou NAG<sup>2</sup>[60].

Généralité : Nous n'avons pas exploité de propriété spécifique au contexte physique traité (par exemple, sa symétrie) pour permettre une ré-utilisation des programmes pour la plus large classe de problème.

Indépendance vis à vis du langage utilisé : dans la mesure du possible, nous avons cherché à donner une implémentation "indépendante" du langage utilisé pour faciliter une traduction des programmes vers d'autres langages.

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur le comportement statique des capteurs capacitifs. Le complément naturel des résultats obtenus se compose de deux axes de recherches: Le premier concerne l'étude du comportement thermique. Les capteurs capacitifs sont, par nature, peu sensible à la température [6], néanmoins, l'amélioration ou l'optimisation des structures exige une modélisation de plus en plus fine. Dans ce cadre, l'étude approfondie des effets thermiques est nécessaire. Le second est relatif au comportement dynamique. La structure étudiée dans ce mémoire peut être utilisée en régime dynamique pour des applications de type microphone miniaturisé. Une première étude dans cette voie [64] a déjà été commencée dans notre équipe de recherche.

---

1. IMSL : International Mathematical Subroutines Library.

2. NAG : Numerical Algorithms Group.

# Théorie de Kirchhoff

## Annexe 1

La déflexion d'une plaque mince est régie par l'équation aux dérivées partielles linéaire du quatrième ordre :  $\Delta\Delta w = P/D$ . Cette équation a été trouvée par Lagrange en 1811 [82]. La démonstration de cette équation et le premier énoncé cohérent des conditions aux limites générales ont été obtenus [54 p. 27] par Kirchhoff [42]. Les hypothèses qu'il a définies lors de sa démonstration sont maintenant classiques dans l'étude des plaques minces en flexion faible :

- Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque.
- Une droite normale au plan moyen reste, après déformation, droite et normale à la surface de la plaque.

$u$  déplacement selon  $x$   
 $w$  déplacement selon  $z$

$$|u| = z \frac{\partial w}{\partial x}$$

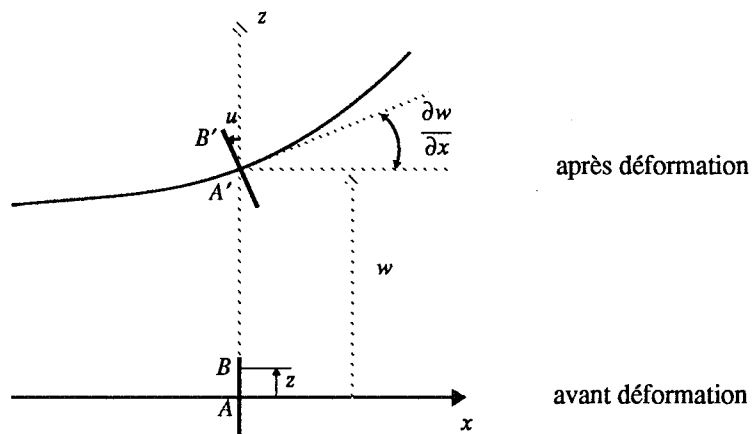


figure 1.1 Illustration des hypothèses de Kirchhoff



Les hypothèses de Kirchhoff sont justifiées si l'épaisseur de la plaque est petite devant ses dimensions transversales et si le déplacement  $w$  est petit devant l'épaisseur  $h$  de la plaque. Ces deux remarques expliquent la terminologie employée "plaque mince en flexion faible".

La première solution exacte du problème de la déflexion d'une plaque mince encadrée a été apportée par Hadamard en 1906 [32], mais sa résolution très abstraite n'a pas trouvé d'application dans la solution pratique du problème.

Au cours des années suivantes, de nombreuses solutions analytiques ont été proposées. On trouve un résumé des principaux résultats concernant le sujet dans [3] (Pour la période 1910-1960). Le développement des capteurs de pression mécatroniques a relancé l'étude de ce problème, et certains auteurs [8][80][52] donnent de nouvelles solutions analytiques.

Cependant, les expressions analytiques proposées sont, dans tous les cas, extrêmement lourdes. A notre avis, leur manque de maniabilité justifie totalement l'emploi de méthodes numériques. Notons pour terminer qu'il existe des approximations simples de la déflexion d'une plaque carrée encadrée [54 p. 494-495]. Les auteurs [46][4] utilisent par exemple l'équation approchée de la déflexion suivante :

$$w(x, y) = \frac{P}{(793.6)D} (a^2 - x^2) (a^2 - y^2)$$

(A1 . 1)

avec  $a$  longueur des côtés  
et en prenant pour origine le centre de la plaque.

---



---

# Unicité de la solution

## Annexe 2

---

### Principe du Minimum-Maximum [23]

Soit  $\Omega$  une région finie de frontière  $S$  et soit  $u$  une fonction harmonique dans  $\Omega \cup \partial\Omega$  et non constante dans  $\Omega$ . Si  $M$  et  $m$  sont, respectivement, les valeurs maximum et minimum de  $u(x)$  pour  $x$  sur  $S$ , alors  $m < u(x) < M$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$ .

### Unicité de la solution [83]

On doit prouver que l'équation  $\Delta\Delta u = f$ , avec les conditions aux limites

$$u|_c = g(s) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_c = h(s) \quad (\text{A2.1})$$

a au plus une solution.

Supposons qu'il existe deux solutions distinctes  $u_1$  et  $u_2$ . On considère la différence  $v = u_1 - u_2$ , qui satisfait de façon évidente l'équation biharmonique  $\Delta\Delta v = 0$ , et les conditions aux limites

$$v|_c = 0 \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_c = 0 \quad (\text{A2.2})$$

En appliquant la formule de Green

$$\int_v (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = \int_c \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (\text{A2.3})$$

aux fonctions  $\varphi = v$  et  $\psi = \Delta v$ , on obtient

$$\int_v (\Delta v)^2 dV = 0 \quad (\text{A2.4})$$

d'où  $\Delta v = 0$ . Cependant,  $v|_c = 0$ . Par conséquent (principe du maximum)

$$v \equiv 0 \quad \text{et} \quad u_1 = u_2 \quad (\text{A2.5})$$

i.e., la solution de l'équation aux dérivées partielles  $\Delta\Delta u = f$  est déterminée de façon unique par les conditions aux limites (A2.1).

---

---

# Logiciel de discrétisation

## *Annexe 3*

---

---

## 1 Introduction

Dans cette annexe, nous présentons un logiciel du type "look and feel" que nous avons mis au point et qui permet de donner le schéma aux différences d'une équation aux dérivées partielles quelconque, de solution suffisamment régulière.

Dans le cas d'une équation aux dérivées partielles linéaires, le logiciel construit le schéma aux différences classiques, dans le cas non-linéaire, le logiciel donne la dérivée formelle de l'équation aux différences par rapport à chacune de ses variables. Ce qui permet dans les deux cas de construire les paramètres nécessaires à la résolution d'une équation aux dérivées partielles par la méthode des différences finies sans aucune intervention de l'utilisateur.

Le logiciel est composé de trois modules,

- le premier module est un programme de calcul numérique qui détermine le schéma aux différences d'une dérivée d'ordre quelconque,
- le second module est un programme de calcul formel qui construit le schéma aux différences de l'équation aux dérivées partielles,
- enfin, le dernier module est un programme qui gère l'ensemble des communications entre les modules et réalise l'interface avec l'utilisateur.

L'ensemble du logiciel a évidemment été conçu pour fonctionner avec l'interface graphique. Néanmoins, il nous a paru important de pouvoir utiliser indépendamment les deux premiers modules. Cette solution permet d'utiliser le logiciel en dehors d'un environnement X, par exemple, à partir d'une console de type VT100, en gardant sa fonctionnalité majeure.

## 2 Discrétisation des dérivées

Dans un premier temps, nous allons établir la méthode générale de discrétisation des dérivées simples, puis nous montrerons que la connaissance de la discrétisation de ces dérivées suffit à calculer la discrétisation des dérivées croisées.

### 2.1 Exposé de la méthode

Le remplacement d'une dérivée par l'une de ses représentations discrètes se construit en utilisant la formule de Taylor. Regardons la méthode sur un exemple concret : on cherche une approximation de  $du/dx$  à l'ordre 2.

En utilisant la formule de Taylor, on peut écrire

$$\begin{cases} u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} + u'''(x)\frac{h^3}{6} + o(h^4) \\ u(x-h) = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} - u'''(x)\frac{h^3}{6} + o(h^4) \end{cases} \quad (\text{A3.1})$$

par soustraction, on arrive à :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + o(h^2) \quad (\text{A3.2})$$

On représente cette approximation par le schéma aux différences :

$$\begin{array}{ccc} x-h & x & x+h \\ \bullet & | & \bullet \\ -1/2 & & 1/2 \end{array}$$

Il faut cependant observer qu'à un ordre d'approximation donné, la représentation discrète d'une dérivée n'est pas unique. En effet, le nombre de points utilisés dans le schéma dépend du degré de l'approximation, mais la répartition ("centrage") du schéma autour du point situé à l'origine est une donnée supplémentaire du problème.

Par exemple, la dérivée  $dy/dx$  à l'ordre 1 peut être représentée indifféremment par

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad \text{ou par} \quad \frac{y(x) - y(x-h)}{h},$$

C'est l'étude du problème à résoudre qui nous fera adopter l'une ou l'autre solution.

La généralisation des méthodes précédentes aux calculs des dérivées d'ordre plus élevé est immédiate. Pourtant, on voit tout de suite sur le premier exemple que cette technique devient rapidement très lourde au niveau algébrique dès que l'on veut calculer des dérivées d'ordre "élevé" (à partir de l'ordre 3). De plus, le contrôle de l'ordre de l'approximation est difficile à obtenir, et celui du "centrage" est encore plus délicat.

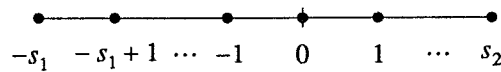
### 2.2 Enoncé du problème

Soit une dérivée  $\frac{d^k u}{dx^k}$ , avec  $k$  quelconque,

On cherche à remplacer cette dérivée par un rapport aux différences tel que l'erreur commise soit d'ordre  $p$  quelconque, donné d'avance. La forme générale de la dérivée s'écrit :

$$\frac{d^k u}{dx^k} = \frac{1}{h^k} \sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s u(x+sh) + o(h^p)$$

Avec  $s = -s_1, -s_1+1, \dots, s_2$  les  $(s_1+s_2+1)$  points du schéma aux différences qui représente la dérivée :



Les nombres  $s_1$  et  $s_2$  définissent le centrage du schéma autour de 0. Le problème est de déterminer les  $a_s$  ( $s = -s_1, \dots, s_2$ ) et la relation liant  $(s_1, s_2, k, p)$  tel que le schéma soit unique.

### 2.3 Solution théorique

La méthode des coefficients indéterminés permet de résoudre le problème. Rappelons la formule de Taylor :

$$u(x+sh) = u(x) + sh \frac{du}{dx} + \frac{(sh)^2}{2!} \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots + \frac{(sh)^k}{k!} \frac{d^k u}{dx^k} + \dots + \frac{(sh)^{k+p-1}}{(k+p-1)!} \frac{d^{k+p-1} u}{dx^{k+p-1}} + o(h^{k+p})$$

En remplaçant cette expression dans la précédente, on arrive à :

$$\begin{aligned} \frac{d^k u}{dx^k} = & \frac{1}{h^k} \left[ u(x) \sum a_s + \frac{du}{dx} \frac{h}{1!} \sum s a_s + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{2!} \sum s^2 a_s + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{d^k u}{dx^k} \frac{h^k}{k!} \sum s^k a_s + \dots + \frac{d^{k+p-1} u}{dx^{k+p-1}} \frac{h^{k+p-1}}{(k+p-1)!} \sum s^{k+p-1} a_s \right] + o(h^{k+p}) \end{aligned}$$

En égalisant les coefficients de même puissance en  $h$ , aux deux membres de cette égalité, nous obtenons le système d'équations en  $a_s$

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_{-s_1} + & a_{-s_1+1} + \dots + a_0 + a_1 + \dots + & a_{s_2} = 0 \\ (-s_1) a_{-s_1} + (-s_1+1) & a_{-s_1+1} + \dots + 0 + a_1 + \dots + s_2 & a_{s_2} = 0 \\ (-s_1)^2 a_{-s_1} + (-s_1+1)^2 & a_{-s_1+1} + \dots + 0 + a_1 + \dots + s_2^2 & a_{s_2} = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-s_1)^k a_{-s_1} + (-s_1+1)^k & a_{-s_1+1} + \dots + 0 + a_1 + \dots + s_2^k & a_{s_2} = k! \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-s_1)^{k+p-1} a_{-s_1} + (-s_1+1)^{k+p-1} a_{-s_1+1} + \dots + 0 + a_1 + \dots + s_2^{k+p-1} a_{s_2} = 0 \end{array} \right. \quad (A3.3)$$

Si on choisit  $(s_1 + s_2 + 1) = (k + p)$ , ces  $(k + p)$  égalités constituent un système linéaire avec autant d'inconnues  $(a_s)$ . Le déterminant de ce système est un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -s_1 & (-s_1 + 1) & \dots & 0 & 1 & \dots & s_2 \\ (-s_1)^2 & (-s_1 + 1)^2 & \dots & 0 & 1 & \dots & s_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-s_1)^{k+p-1} & (-s_1 + 1)^{k+p-1} & \dots & 0 & 1 & \dots & s_2^{k+p-1} \end{vmatrix} \quad (A3.4)$$

Un déterminant de Vandermonde est toujours différent de 0, le système admet donc une solution unique.

### 2.4 Solution explicite

Il existe des méthodes numériques pour calculer efficacement la solution d'un système d'équations de Vandermonde [9][55]. Mais étant donné que les coefficients du système sont entiers, et que l'on aura par conséquent une solution rationnelle, il nous a paru plus approprié d'utiliser sa solution algébrique donnée dans [25 ex. 359]. Nous la donnons ci-dessous.

Le système de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_n^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{k+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ k! \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

a pour solution algébrique

$$x_s = (-)^{n+k+1} k! \frac{\varphi_{k+1,s}}{\gamma_s}$$

avec

$$\varphi_{i,s} = \sum \alpha_{t_1} \alpha_{t_2} \dots \alpha_{t_{n-i}}$$

sur tous les  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-i})$  combinaison de  $\{1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n\}$

$$\gamma_s = \prod (\alpha_s - \alpha_i)$$

sur tous les  $i \in \{1, \dots, n\}$  et différents de  $s$

## 2.5 Solution complète

Supposons que l'on sache déterminer la représentation discrète d'une dérivée quelconque à un ordre d'approximation et à un centrage donnés. Les dérivées croisées s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial}{\partial x_2^{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{k-1}^{k_{k-1}}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n^{k_n}} \right) \quad (\text{A3.5})$$

Cette relation prend la forme discrète :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial}{\partial x_2^{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{k-1}^{k_{k-1}}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n^{k_n}} \right) \quad (\text{A3.6})$$

C'est à dire que pour calculer des dérivées croisées, il suffit d'effectuer un produit tensoriel de  $n$  vecteurs. Bien entendu toutes les dérivées simples doivent être déterminées avec le même degré d'approximation. Le problème du calcul des dérivées croisées est donc ramené à celui de dérivées simples.

## 3 Discrétisation de l'équation aux différences

Soit l'équation aux dérivées partielles la plus générale :

$$F \left( f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x_n^n}, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots \right) = 0 \quad (\text{A3.7})$$

La méthode la plus simple est d'effectuer la discrétisation indépendamment sur chaque dérivée intervenant dans l'équation aux dérivées partielles, puis de remplacer leurs expressions dans l'équation initiale. Cette méthode est évidemment très générale mais elle ne donne pas forcément le meilleur type d'approximation.

Néanmoins, cette méthode donne des schémas éprouvés assez universels qui conviennent parfaitement aux équations "non pathologiques" que nous avons eues à traiter dans ce mémoire (solutions douces, absence de singularité, ...).

Une fois que l'on connaît l'équation aux différences de chaque dérivée, l'équation aux différences de l'équation aux dérivées partielles se réduit à un simple calcul algébrique. Les coefficients du schéma aux différences s'obtiennent en dérivant l'équation algébrique précédente par rapport à chacune des variables. On note que cette méthode permet de traiter le cas linéaire et non linéaire d'une seule et unique façon.

Les calculs algébriques et la dérivation formelle cités ci-dessous sont calculés dans un programme de calcul formel qui est ensuite interprété par le logiciel MAPLE<sup>1</sup> [15].

1. Une introduction au langage de calcul formel MAPLE est donnée dans [14].





La commande **Molécule** permet d'obtenir le schéma aux différences de l'équation aux dérivées partielles (En haut à droite) et la commande **Notation** rappelle l'emplacement des coefficients  $A_i$  sur cette molécule. En outre les deux boutons déroulant **Elémentaire** et **Fondamentale** permettent d'obtenir directement l'expression d'équations considérées comme classiques sans avoir à les écrire. Le catalogue **Elémentaire** contient la liste des dérivées simples et croisées jusqu'à l'ordre 4, i.e.

$$f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial y_2^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4}$$

Le catalogue **Fondamental** contient une liste d'équations aux dérivées partielles classiques, en particulier, l'équation de Laplace, l'équation biharmonique, etc, ...

## 4.2 Possibilités actuelles et perspectives du logiciel

Le logiciel permet d'obtenir la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles à deux variables qui contient des dérivées jusqu'à l'ordre 4 inclus. Les équations peuvent être linéaires ou non-linéaires. En outre le fait que l'on puisse spécifier la fonction qui intervient dans l'équation aux dérivées partielles autorise à traiter des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

La première version décrite ici détermine la discrétisation uniquement sur un maillage régulier. Des généralisations complètes mais beaucoup plus complexes des méthodes utilisées ici se trouvent dans [40][41]. Les versions futures du logiciel intégreront ces résultats.

---



---

# Etude du conditionnement

## Annexe 4

---

### Notion de conditionnement

La représentation des données d'un problème ne peut être effectuée qu'avec un nombre limité de chiffres. En outre, dans un problème expérimental, ces données ne seront connues qu'avec une incertitude. Il est donc important que le problème soit tel qu'une "petite" variation sur les données entraîne une variation "pas trop importante" sur les résultats. La formalisation de cette observation a conduit à la notion de conditionnement d'un problème.

Nous insistons sur le fait que cette propriété est intrinsèque au problème et ne dépend en aucune manière de la façon de le résoudre. Le résultat du problème est supposé calculé exactement, c'est à dire sans erreur d'arrondi, ni de troncature. Lorsqu'un problème est "mal conditionné", la solution du problème n'est pas interprétable. Pour se faire une idée concrète de l'influence du conditionnement d'un système linéaire, on consultera la référence [16 p 27].

### Conditionnement d'un système linéaire

Les démonstrations des théorèmes fondamentaux suivants se trouvent par exemple dans [16][49]. On se donne une norme vectorielle, et la norme matricielle induite, toutes les deux notées  $\|\cdot\|$ , sans aucune confusion possible.

***Théorème 1.** Soit  $A$  une matrice inversible, et soit  $x$  et  $x + \Delta x$  les solutions des systèmes linéaires*

$$\begin{aligned} Ax &= b && (b \neq 0) \\ A(x + \Delta x) &= b + \Delta b \end{aligned}$$

*Alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\|A\| \|A^{-1}\|) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

**Théorème 2.** Soit  $A$  une matrice inversible, et soit  $x$  et  $x + \Delta x$  les solutions des systèmes linéaires

$$\begin{aligned} Ax &= b & (b \neq 0) \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b \end{aligned}$$

Alors l'égalité suivante est satisfaite

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \left( \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \right) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Si  $\|\Delta A\|$  est "suffisamment petit", on a

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\|A\| \|A^{-1}\|) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Les deux théorèmes précédents montrent que l'erreur relative sur le résultat est majorée par l'erreur relative sur les données, multipliée par le nombre  $(\|A\| \|A^{-1}\|)$ . Ces résultats ont conduit à la définition du nombre  $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  qui s'appelle le conditionnement de la matrice  $A$ , relativement à la norme matricielle considérée.

Le nombre  $\text{cond}(A)$  mesure la sensibilité de la solution du système linéaire  $Ax = b$  vis-à-vis des variations sur les données  $A$  et  $b$ . On montre [16] que ce nombre est optimal, les inégalités ci-dessus sont les "meilleures" possibles. On dit qu'un système linéaire est "bien" ou "mal" conditionné selon que le conditionnement de sa matrice est "petit" ou "grand".

**Théorème 3.**

- (1) le conditionnement de la matrice unité est égale à 1,
- (2) pour toute matrice  $A$  inversible et tout scalaire  $\alpha \neq 0$ ,  $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ ,
- (3) pour toute matrice  $A$  inversible,  $1 \leq \text{cond}(A) < \infty$ ,
- (4) pour toute matrice  $A$  singulière,  $\text{cond}(A) = \infty$ .

**Théorème 4.** Si  $A$  est réelle, et en utilisant la norme vectorielle euclidienne et la norme matricielle associée, le calcul du conditionnement se réduit à l'expression :

$$\text{cond}(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|} \quad \lambda_i = \text{valeurs propres de } A$$

## Conditionnement du système d'équations aux différences étudiées

On considère maintenant la solution numérique de l'équation biharmonique

$$r^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \bar{y}^4} = \tilde{P}, \quad 0 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1 \quad (\text{A4.1})$$

En utilisant une approximation aux différences finies sur un maillage uniforme de pas  $h_d$  :

$$\begin{aligned}
 & A_0 W_{i,j} \\
 & + A_1 W_{i+1,j} + A_2 W_{i,j+1} + A_3 W_{i-1,j} + A_4 W_{i,j-1} \\
 & + A_5 W_{i+1,j+1} + A_6 W_{i-1,j+1} + A_7 W_{i-1,j-1} + A_8 W_{i+1,j-1} \\
 & + A_9 W_{i+2,j} + A_{10} W_{i,j+2} + A_{11} W_{i-2,j} + A_{12} W_{i,j-2} = h_d^4 \tilde{P}
 \end{aligned} \tag{A4.2}$$

Les valeurs numériques des coefficients  $A_i$  sont données dans le premier chapitre. Si (A4.2) est complété par des conditions aux limites appropriées et exprimées en chaque point du maillage, on obtient l'équation matricielle  $Ax = b$ .

$$A = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \text{avec}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_7 & A_4 & A_8 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{11} & A_3 & A_0 & A_1 & A_9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_6 & A_2 & A_5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_{10} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

On a tracé ci-dessous le conditionnement de la matrice  $A$  en négligeant l'influence des conditions aux limites. La courbe est donnée en fonction de l'ordre de la matrice.

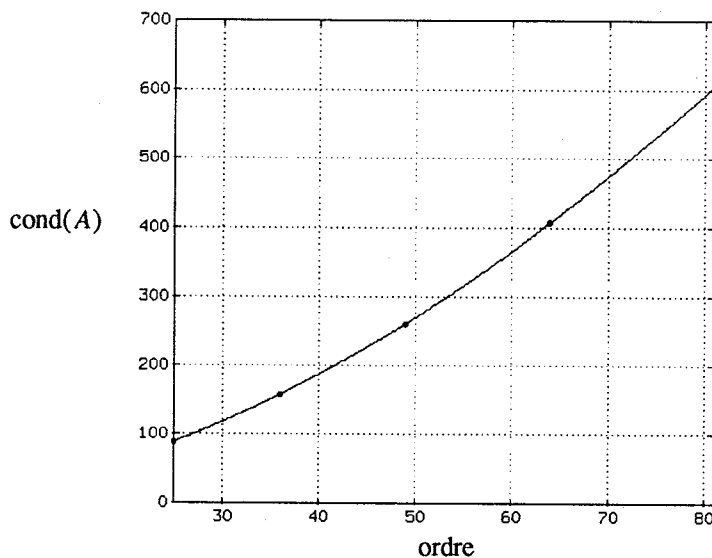


figure A4.1 Conditionnement de la matrice  $A$

## Interprétation des résultats

La matrice de Hilbert  $H$  est un exemple remarquable de matrice très mal conditionnée [26]. Ses éléments sont définis par :

$$H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} \quad (\text{A4.3})$$

On donne ci-dessous le conditionnement de cette matrice jusqu' à l'ordre 6.

tableau A4.1 Conditionnement de la matrice de Hilbert

ordre	1	2	3	4	5	6
cond( $H$ )	1	19.2815	524.0568	$1.5514 \times 10^4$	$4.7661 \times 10^5$	$1.4951 \times 10^7$

Les valeurs numériques de la figure (A4.1) sont à comparer avec celle du tableau (A4.1). Le conditionnement de la matrice  $A$  d'ordre 81 est du même ordre de grandeur que celui de la matrice de Hilbert seulement d'ordre 3. On peut donc considérer que le système linéaire représentant l'équation aux dérivées partielles (A4.1) a un conditionnement "assez bon".

## Préconditionnement d'une matrice

La rapidité de la convergence des méthodes itératives, notamment celle du gradient conjugué, dépend<sup>1</sup> du nombre de conditionnement de la matrice  $A$ . Plus le nombre  $\text{cond}(A)$  est proche de 1, et plus l'algorithme convergera rapidement. Le principe de conditionnement d'une matrice  $A$  consiste à remplacer la résolution de l'équation  $Ax = b$  par celle du système linéaire équivalent  $C^{-1}Ax = C^{-1}b$ , tel que  $\text{cond}(C^{-1}A)$  soit beaucoup plus petit que  $\text{cond}(A)$ .

Il existe de nombreuses méthodes de préconditionnement d'une matrice, le lecteur concerné pourra consulter les références [49 p. 521][84][71]. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la matrice avec laquelle nous travaillons est "assez bien conditionnée". Etant donné les temps de résolution suffisamment faibles que nous avons obtenus, nous n'avons pas été plus loin dans les techniques de préconditionnement.

1. Dans [49], on montre que le nombre d'itérations nécessaires à la résolution d'un système linéaire par la méthode du gradient conjugué est proportionnel à  $\sqrt{\text{cond}(H)}$ .

---

# Déflexion d'une plaque simplement posée

## Annexe 5

---

### 1 Introduction

L'objectif de ce paragraphe est de préciser l'influence de la discrétisation nécessitée par la méthode des différences finies, plus exactement : dans quelle mesure le système d'équations linéaires (1.10) représente l'équation aux dérivées partielles (1.9) ?

Rappelons que la solution numérique calculée n'est pas la solution de l'équation aux dérivées partielles proposée mais la solution du système d'équations linéaires déduit de cette équation aux dérivées partielles. Il n'est pas question ici de valider la résolution de ce système linéaire; les erreurs ne viennent pas de la méthode utilisée pour sa résolution (dont on connaît la solution à 10 chiffres en virgule flottante près) mais de la méthode employée pour résoudre l'équation aux dérivées partielles (i.e. la méthode des différences finies).

### 2 Solution numérique

On connaît une solution analytique du problème aux limites dans le cas particulier d'une plaque rectangulaire, isotrope ( $\alpha = 1$ ), d'épaisseur constante, simplement posée et chargée uniformément. Nous allons donc étudier ce problème modèle.

Les conditions aux limites pour une plaque simplement posée sont données par les relations suivantes [82 p. 83] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} w = 0 & \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sur } \{0, 1\} \times [0, 1] \\ w = 0 & \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur } [0, 1] \times \{0, 1\} \end{array} \right. \quad (\text{A5.1})$$

En explicitant la discrétisation de ces équations sur notre maillage, on aboutit aux équations :

$$\begin{cases} W_{-1,j} = -W_{1,j} \\ W_{N+1,j} = -W_{N-1,j} \end{cases} \quad \text{pour } j = 1 \dots N-1$$

$$\begin{cases} W_{i,-1} = -W_{i,1} \\ W_{i,N+1} = -W_{i,N-1} \end{cases} \quad \text{pour } i = 1 \dots N-1$$
(A5.2)

Les équations ne diffèrent des équations (1.16) que par les quatre signes "moins". La modification à apporter sur l'implémentation pour résoudre le problème de la déflexion dans le cas d'une plaque simplement posée est mineure.

### 3 Solution analytique

La solution analytique dans  $[0, a] \times [0, b]$  est [82 p. 110] :

$$w(x, y) = \frac{16P}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$
(A5.3)

On pose, comme dans le paragraphe précédent :

$$\tilde{P} = \frac{P}{P_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{P_0} = \frac{a^2 b^2}{dD}$$
(A5.4)

En réécrivant la solution dans le domaine  $[0, 1] \times [0, 1]$ , la comparaison avec la solution normalisée est immédiate

$$\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{P} \frac{16}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi\tilde{x}) \sin(n\pi\tilde{y})}{mn(m^2 + n^2)^2}$$
(A5.5)

Cette double série converge (intégrales de Riemann). De plus, il n'est pas difficile de se convaincre qu'elle converge rapidement : les termes du numérateur sont bornés entre  $-1$  et  $1$ , et le dénominateur est en  $1/x^5$ .

### 4 Comparaison des solutions

Nous allons établir cette comparaison pour une valeur de  $\tilde{P}$  égale à 200, ce qui correspond à  $\tilde{w}$  égal à environ 80% de sa valeur maximale. La solution numérique a été calculée pour 3 différentes tailles de maillage : un maillage grossier de  $10 \times 10$  points, un maillage moyen de  $30 \times 30$  points et un maillage fin de  $50 \times 50$  points. C'est au centre que les écarts sont les plus importants. Ces valeurs centrales nous serviront pour la comparaison. Les résultats sont donnés dans le tableau (A5.1).

tableau A5.1 Déflexion au centre

Solution analytique	Solution numérique		
	$w/d$ au centre	Nb de points	Tps de calcul
0.812471	10 × 10	0.811517	0.06s
	30 × 30	0.812368	5s
	50 × 50	0.812434	46s

On gagne une décimale à chaque fois que l'on triple, quintuple, etc ... le nombre de points sur un côté. Ce qui correspond à une augmentation à la puissance deux du nombre de points sur la surface.

Les résultats montrent bien la convergence des résultats numériques vers la solution du problème. Mais il ne faut pas croire que l'on peut augmenter indéfiniment le nombre de points : mis à part le fait que le temps de calcul devient rapidement prohibitif, l'augmentation du nombre de points conduit inévitablement à une augmentation du nombre d'opérations. Si ce nombre est trop important, les erreurs d'arrondis peuvent conduire à une stabilisation de la solution à une certaine valeur, empêchant toute amélioration.

Pour donner une idée claire des résultats calculés, nous les avons reproduits directement dans les tableaux (A5.2) et (A5.3). On rappelle que les résultats sont donnés sous forme d'une matrice qui contient les valeurs de  $w/d$  aux points du maillage.

tableau A5.2 Solution analytique de la déflexion d'une plaque simplement posée

J = 10	Y = 1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 9	Y = 0.9	0.000000	0.086912	0.161323	0.217159	0.251526	0.263108	0.251526	0.217159	0.161323	0.086912	0.000000	0.000000
J = 8	Y = 0.8	0.000000	0.161323	0.300617	0.405741	0.470639	0.492538	0.470639	0.405741	0.300617	0.161323	0.000000	0.000000
J = 7	Y = 0.7	0.000000	0.217159	0.405741	0.548773	0.637342	0.667268	0.637342	0.548773	0.405741	0.217159	0.000000	0.000000
J = 6	Y = 0.6	0.000000	0.251526	0.470639	0.637342	0.740779	0.775763	0.740779	0.637342	0.470639	0.251526	0.000000	0.000000
J = 5	Y = 0.5	0.000000	0.263108	0.492538	0.667268	0.775763	0.812471	0.775763	0.667268	0.492538	0.263108	0.000000	0.000000
J = 4	Y = 0.4	0.000000	0.251526	0.470639	0.637342	0.740779	0.775763	0.740779	0.637342	0.470639	0.251526	0.000000	0.000000
J = 3	Y = 0.3	0.000000	0.217159	0.405741	0.548773	0.637342	0.667268	0.637342	0.548773	0.405741	0.217159	0.000000	0.000000
J = 2	Y = 0.2	0.000000	0.161323	0.300617	0.405741	0.470639	0.492538	0.470639	0.405741	0.300617	0.161323	0.000000	0.000000
J = 1	Y = 0.1	0.000000	0.086912	0.161323	0.217159	0.251526	0.263108	0.251526	0.217159	0.161323	0.086912	0.000000	0.000000
J = 0	Y = 0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		I = 0	I = 1	I = 2	I = 3	I = 4	I = 5	I = 6	I = 7	I = 8	I = 9	I = 10	
		X = 0.0	X = 0.1	X = 0.2	X = 0.3	X = 0.4	X = 0.5	X = 0.6	X = 0.7	X = 0.8	X = 0.9	X = 1.0	

tableau A5.3 Solution numérique de la déflexion d'une plaque simplement posée

J = 30	Y = 1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
J = 27	Y = 0.9	0.000000	0.086962	0.161385	0.217223	0.251588	0.263168	0.251588	0.217223	0.161385	0.086962	0.000000	0.000000	0.000000
J = 24	Y = 0.8	0.000000	0.161385	0.300677	0.405785	0.470670	0.492563	0.470670	0.405785	0.300677	0.161385	0.000000	0.000000	0.000000
J = 21	Y = 0.7	0.000000	0.217223	0.405785	0.548779	0.637317	0.667232	0.637317	0.548779	0.405785	0.217223	0.000000	0.000000	0.000000
J = 18	Y = 0.6	0.000000	0.251588	0.470670	0.637317	0.740710	0.775678	0.740710	0.637317	0.470670	0.251588	0.000000	0.000000	0.000000
J = 15	Y = 0.5	0.000000	0.263168	0.492563	0.667232	0.775678	0.812368	0.775678	0.667232	0.492563	0.263168	0.000000	0.000000	0.000000
J = 12	Y = 0.4	0.000000	0.251588	0.470670	0.637317	0.740710	0.775678	0.740710	0.637317	0.470670	0.251588	0.000000	0.000000	0.000000
J = 9	Y = 0.3	0.000000	0.217223	0.405785	0.548779	0.637317	0.667232	0.637317	0.548779	0.405785	0.217223	0.000000	0.000000	0.000000
J = 6	Y = 0.2	0.000000	0.161385	0.300677	0.405785	0.470670	0.492563	0.470670	0.405785	0.300677	0.161385	0.000000	0.000000	0.000000
J = 3	Y = 0.1	0.000000	0.086962	0.161385	0.217223	0.251588	0.263168	0.251588	0.217223	0.161385	0.086962	0.000000	0.000000	0.000000
J = 0	Y = 0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		I = 0	I = 3	I = 6	I = 9	I = 12	I = 15	I = 18	I = 21	I = 24	I = 27	I = 30		
		X = 0.0	X = 0.1	X = 0.2	X = 0.3	X = 0.4	X = 0.5	X = 0.6	X = 0.7	X = 0.8	X = 0.9	X = 1.0		





On se donne une équation aux dérivées partielles linéaire à deux variables d'espace (A6.1), exprimée dans un système de coordonnées rectangulaires (figure A6.1.a). Les coefficients  $R_i$  peuvent dépendre des coordonnées  $(x, y)$ .

$$R_0 u + R_1 \frac{\partial u}{\partial x} + R_2 \frac{\partial u}{\partial y} + R_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + R_5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + R_6 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + R_7 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + R_8 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + R_9 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + R_{10} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + R_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + R_{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + R_{13} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + R_{14} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y) \quad (\text{A6.1})$$

L'EDP (A6.1) exprimé dans un système de coordonnées curvilignes (figure A6.1.b) s'écrit sous la forme (A6.2). Dans le cas général, les coefficients  $A_i$  dépendent des coordonnées  $(\alpha, \beta)$ .

$$A_0 u + A_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + A_2 \frac{\partial u}{\partial \beta} + A_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + A_4 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + A_5 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + A_6 \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} + A_7 \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + A_8 \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial \beta^2} + A_9 \frac{\partial^3 u}{\partial \beta^3} + A_{10} \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4} + A_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + A_{12} \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + A_{13} \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha \partial \beta^3} + A_{14} \frac{\partial^4 u}{\partial \beta^4} = f(x, y) (\alpha, \beta) \quad (\text{A6.2})$$

Le système de coordonnées curvilignes peut être défini de façon algébrique par rapport au système rectangulaire ou être généré graphiquement comme cela est le cas dans les gros logiciels de calcul par éléments finis. La génération automatique de maillage est un problème très complexe et long à mettre en œuvre [81] (la majeure partie du code développé dans le logiciel de calcul de structure est lié à la définition du maillage). Nous nous limiterons donc à une définition algébrique explicite de celui-ci, étant entendu qu'il est possible d'appliquer la méthode DFC sur un maillage curviligne quelconque.

*Le problème fondamental est d'exprimer numériquement les  $A_i(\alpha, \beta)$  en chaque point du maillage curviligne par rapport aux coefficients  $R_i(x, y)$ . La résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles résultante est alors identique à celle employée par la méthode classique des différences finies.*

## 2 Transformation des dérivées dans un système de coordonnées curvilignes $(\alpha, \beta)$

Les dérivées partielles  $\partial u / \partial x$  et  $\partial u / \partial y$  exprimées dans le système de coordonnées rectangulaires sont liées aux dérivées  $\partial u / \partial \alpha$  et  $\partial u / \partial \beta$  relatives au système de coordonnées curvilignes par les relations (A6.3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (\text{A6.3})$$

On rappelle que la notation des fonctions  $\partial\alpha/\partial x$ ,  $\partial\alpha/\partial y$ ,  $\partial\beta/\partial x$  et  $\partial\beta/\partial y$  dans le système d'équation (A6.3) sous-entend qu'il faut considérer ces fonctions aux points  $x = x(\alpha, \beta)$  et  $y = y(\alpha, \beta)$ . En réitérant la règle de différentiation en chaîne, on obtient de la même façon les expressions des dérivées seconde, troisième, ...

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\partial\alpha}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial\beta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{\partial\alpha}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial\alpha} \\ &+ \left( \frac{\partial\alpha}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial\beta}{\partial x} \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial\beta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \left( \frac{\partial\beta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} \end{aligned} \quad (A6.4)$$

.....

Les règles de différentiation en chaîne sont exprimées de façon beaucoup plus compacte et maniable sous forme tensorielle. L'équation (A6.3) s'écrit ainsi  $U^i = T_i^n U_n$ . Les virgules indiquées en indice symbolisent la dérivation. On adopte par la suite les conventions suivantes : les indices  $(i, j, k, l)$  sont relatifs aux variables  $(x, y)$ . Les indices  $(n, m, p, q)$  sont relatifs aux variables  $(\alpha, \beta)$ .

Les résultats contenus dans le formulaire (A6.1) contiennent les expressions algébriques de  $U_{,i}$ ,  $U_{,ij}$ ,  $U_{,ijk}$  et  $U_{,ijkl}$  calculées formellement. Pour éviter d'introduire des erreurs de frappe dans la réécriture des coefficients, nous avons préféré imprimer le résultat tel qu'il apparaît à l'écran après le résultat du calcul formel. La différence minime de notation avec l'écriture tensorielle écrite plus haut vient du fait que les programmes de calcul formel actuels (en 1993) ne possèdent pas encore d'éditeur suffisamment développé.

formulaire A6.1

---

```

U_i := Tn_i Un
U_ij := Tm_j Tn_im Un + Tm_j Tn_i Unm
U_ijk := Tp_k Tm_jp Tn_im Un + Tp_k Tm_j Tn_imp Un + Tp_k Tm_j Tn_im Unp + Tp_k Tm_jp Tn_i Unm + Tp_k Tm_j Tn_ip Unm + Tp_k Tm_j Tn_i Unmp
U_ijkl := Tq_l Tp_kq Tm_jp Tn_im Un + Tq_l Tp_k Tm_jpq Tn_im Un + Tq_l Tp_k Tm_jp Tn_imq Un + Tq_l Tp_k Tm_jp Tn_im Unq + Tq_l Tp_kq Tm_j Tn_imp Un
+ Tq_l Tp_k Tm_jq Tn_imp Un + Tq_l Tp_k Tm_j Tn_impq Un + Tq_l Tp_k Tm_j Tn_imp Unq + Tq_l Tp_kq Tm_j Tn_im Unp + Tq_l Tp_k Tm_jq Tn_im Unp
+ Tq_l Tp_k Tm_j Tn_imq Unp + Tq_l Tp_k Tm_j Tn_im Unpq + Tq_l Tp_kq Tm_jp Tn_i Unm + Tq_l Tp_k Tm_jpq Tn_i Unm + Tq_l Tp_k Tm_jp Tn_iq Unm
+ Tq_l Tp_k Tm_jp Tn_i Unmq + Tq_l Tp_kq Tm_j Tn_ip Unm + Tq_l Tp_k Tm_jq Tn_ip Unm + Tq_l Tp_k Tm_j Tn_ipq Unm + Tq_l Tp_k Tm_j Tn_ip Unmq
+ Tq_l Tp_kq Tm_j Tn_i Unmp + Tq_l Tp_k Tm_jq Tn_i Unmp + Tq_l Tp_k Tm_j Tn_iq Unmp + Tq_l Tp_k Tm_j Tn_i Unmpq

```

---

Le lecteur vérifiera l'équivalence de  $U_{,11}$  avec l'équation (A6.4). Le calcul explicite des coefficients  $T$  est développé dans le paragraphe 4.

### 3 Transformation d'une EDP dans un système de coordonnées curvilignes $(\alpha, \beta)$

L'écriture tensorielle d'une équation aux dérivées partielles linéaire a la forme (A6.5). Cette écriture est indépendante du nombre de variables. Les coefficients  $C_i$  apparaissant dans l'équation (A6.5) sont reliés aux coefficients  $R_i$  de l'équation (A6.1) par les relations :  $R_0 = C_0$ ,  $R_1 = C_1$ , ...,  $R_{13} = C_{1222} + C_{2122} + C_{2212} + C_{2221}$ , ...,  $R_{14} = C_{2222}$ .

$$CU + C_i U_{,i} + C_{ij} U_{,ij} + C_{ijk} U_{,ijk} + C_{ijkl} U_{,ijkl} = f \quad (\text{A6.5})$$

La substitution des expressions  $U_{,i}$ ,  $U_{,ij}$ ,  $U_{,ijk}$  et  $U_{,ijkl}$  définies dans le formulaire (A6.1) dans l'équation (A6.5) permet de déterminer l'écriture tensorielle de l'équation (A6.5) exprimée dans des coordonnées curvilignes.

$$AU + A_n U_{,n} + A_{nm} U_{,nm} + A_{np} U_{,np} + A_{nq} U_{,nq} + A_{nmp} U_{,nmp} + A_{nmq} U_{,nmq} + A_{npq} U_{,npq} + A_{nmpq} U_{,nmpq} \quad (\text{A6.6})$$

L'expression des coefficients  $A_n$ ,  $A_{nm}$ , ...,  $A_{nmpq}$  est donnée dans le formulaire (A6.2). Les coefficients  $C$ ,  $C_i$ ,  $C_{ij}$ ,  $C_{ijk}$  et  $C_{ijkl}$  sont déterminés par l'équation aux dérivées partielles initiale (A6.1) ou (A6.5). Le calcul effectif des coefficients de l'équation (A6.6) s'effectue en développant le produit tensoriel sur les indices répétés, i.e. dans le cas d'une équation aux dérivées partielles à deux variables, les indices  $(i, j, k, l)$  prennent les valeurs  $\{1, 2\}$ .

formulaire A6.2

---

A	= C
An	= C <sub>i</sub> T <sub>n_i</sub> + C <sub>ij</sub> T <sub>m_j</sub> T <sub>n_im</sub> + C <sub>ijk</sub> T <sub>p_k</sub> (T <sub>n_im</sub> T <sub>m_jp</sub> + T <sub>m_j</sub> T <sub>n_imp</sub> ) + C <sub>ijkl</sub> T <sub>q_l</sub> (T <sub>p_kq</sub> (T <sub>m_jp</sub> T <sub>n_im</sub> + T <sub>m_j</sub> T <sub>n_imp</sub> ) + T <sub>p_k</sub> (T <sub>m_jpq</sub> T <sub>n_im</sub> + T <sub>m_jp</sub> T <sub>n_imq</sub> + T <sub>m_jq</sub> T <sub>n_imp</sub> + T <sub>m_j</sub> T <sub>n_impq</sub> ))
Anm	= C <sub>ij</sub> T <sub>m_j</sub> T <sub>n_i</sub> + C <sub>ijk</sub> T <sub>p_k</sub> (T <sub>m_jp</sub> T <sub>n_i</sub> + T <sub>n_ip</sub> T <sub>m_j</sub> ) + C <sub>ijkl</sub> T <sub>q_l</sub> (T <sub>p_kq</sub> (T <sub>m_jp</sub> T <sub>n_i</sub> + T <sub>m_j</sub> T <sub>n_ip</sub> ) + T <sub>p_k</sub> (T <sub>m_jpq</sub> T <sub>n_i</sub> + T <sub>m_jp</sub> T <sub>n_iq</sub> + T <sub>m_jq</sub> T <sub>n_ip</sub> + T <sub>m_j</sub> T <sub>n_ipq</sub> ))
Anp	= C <sub>ijk</sub> T <sub>p_k</sub> T <sub>m_j</sub> T <sub>n_im</sub> + C <sub>ijkl</sub> T <sub>q_l</sub> (T <sub>p_kq</sub> T <sub>m_j</sub> T <sub>n_im</sub> + T <sub>p_k</sub> (T <sub>m_jq</sub> T <sub>n_im</sub> + T <sub>m_j</sub> T <sub>n_imq</sub> ))
Anq	= C <sub>ijkl</sub> T <sub>q_l</sub> T <sub>p_k</sub> (T <sub>n_im</sub> T <sub>m_jp</sub> + T <sub>m_j</sub> T <sub>n_imp</sub> )
Anmp	= C <sub>ijk</sub> T <sub>p_k</sub> T <sub>m_j</sub> T <sub>n_i</sub> + C <sub>ijkl</sub> T <sub>q_l</sub> (T <sub>p_kq</sub> T <sub>m_j</sub> T <sub>n_i</sub> + T <sub>p_k</sub> (T <sub>m_jq</sub> T <sub>n_i</sub> + T <sub>m_j</sub> T <sub>n_iq</sub> ))
Anmq	= C <sub>ijkl</sub> T <sub>q_l</sub> T <sub>p_k</sub> (T <sub>m_jp</sub> T <sub>n_i</sub> + T <sub>n_ip</sub> T <sub>m_j</sub> )
Anpq	= C <sub>ijkl</sub> T <sub>q_l</sub> T <sub>p_k</sub> T <sub>m_j</sub> T <sub>n_im</sub>
Anmpq	= C <sub>ijkl</sub> T <sub>q_l</sub> T <sub>p_k</sub> T <sub>m_j</sub> T <sub>n_i</sub>

---

Les indices des coefficients  $A_n$ ,  $A_{nm}$ , ...,  $A_{nmpq}$  ont une double signification, ils ont d'une part la signification tensorielle classique (somme sur les indices) et d'autre part un rôle purement nominatif (distinction des coefficients).

L'écriture classique de l'équation aux dérivées partielles s'effectue en explicitant la sommation sur les indices répétés  $(n, m, p, q)$  de l'équation (A6.6). En fixant le nombre de variables égale à deux, on obtient une équation aux dérivées partielles de la forme (A6.7).

$$A_0 U + A_1 U_{,\alpha} + A_2 U_{,\beta} + A_3 U_{,\alpha\alpha} + A_4 U_{,\alpha\beta} + A_5 U_{,\beta\beta} + A_6 U_{,\alpha\alpha\alpha} + A_7 U_{,\beta\beta\beta} + A_8 U_{,\alpha\alpha\beta} + A_9 U_{,\alpha\beta\beta} + A_{10} U_{,\alpha\alpha\beta\beta} + A_{11} U_{,\alpha\alpha\alpha\beta} + A_{12} U_{,\alpha\beta\beta\beta} + A_{13} U_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} + A_{14} U_{,\beta\beta\beta\beta} \quad (\text{A6.7})$$

L'expression des coefficients  $A_1, A_2, \dots, A_{14}$  est donnée dans le formulaire (A6.3). Puisqu'il faut effectuer explicitement le produit tensoriel de tous les  $A_n, A_{nm}, \dots, A_{nmpq}$ , la notation compacte employée précédemment n'est plus valide, on note les termes  $A_{np}$  précédents par  $A_{np}(n, p)$ , les premiers indices sont nominaux, les indices entre parenthèse sont tensoriels.

*formulaire A6.3*

---

A0	:= A
A1	:= An(1)
A2	:= An(2)
A3	:= Anp(1, 1) + Anm(1, 1) + Anq(1, 1)
A4	:= Anp(1, 2) + Anm(1, 2) + Anq(1, 2) + Anp(2, 1) + Anm(2, 1) + Anq(2, 1)
A5	:= Anp(2, 2) + Anm(2, 2) + Anq(2, 2)
A6	:= Anmp(1, 1, 1) + Anpq(1, 1, 1) + Anmq(1, 1, 1)
A7	:= Anmp(2, 2, 2) + Anpq(2, 2, 2) + Anmq(2, 2, 2)
A8	:= Anmp(2, 1, 1) + Anpq(2, 1, 1) + Anmq(2, 1, 1) + Anmp(1, 2, 1) + Anpq(1, 2, 1) + Anmq(1, 2, 1) + Anmp(1, 1, 2) + Anpq(1, 1, 2) + Anmq(1, 1, 2)
A9	:= Anmp(1, 2, 2) + Anpq(1, 2, 2) + Anmq(1, 2, 2) + Anmp(2, 1, 2) + Anpq(2, 1, 2) + Anmq(2, 1, 2) + Anmp(2, 2, 1) + Anpq(2, 2, 1) + Anmq(2, 2, 1)
A10	:= Anmpq(1, 1, 2, 2) + Anmpq(1, 2, 1, 2) + Anmpq(1, 2, 2, 1) + Anmpq(2, 2, 1, 1) + Anmpq(2, 1, 2, 1) + Anmpq(2, 1, 1, 2)
A11	:= Anmpq(2, 1, 1, 1) + Anmpq(1, 2, 1, 1) + Anmpq(1, 1, 2, 1) + Anmpq(1, 1, 1, 2)
A12	:= Anmpq(1, 2, 2, 2) + Anmpq(2, 1, 2, 2) + Anmpq(2, 2, 1, 2) + Anmpq(2, 2, 2, 1)
A13	:= Anmpq(1, 1, 1, 1)
A14	:= Anmpq(2, 2, 2, 2)

---

## 4 Calcul des coefficients T

Comme on l'a déjà mentionné précédemment, le maillage peut être défini de façon algébrique où à l'aide de fonctions splines. Pour simplifier, nous ne considérons que le premier cas. On se donne une transformation algébrique définissant le maillage curviligne.

$$\begin{cases} x = x(\alpha, \beta) \\ y = y(\alpha, \beta) \end{cases} \quad (\text{A6.8})$$

Le calcul des coefficients  $T_i^*$  peut être calculé explicitement

$$\begin{aligned}
T_1^1 &= \left. \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(\alpha, \beta) \\ y=y(\alpha, \beta)}} & T_1^2 &= \left. \frac{\partial \beta}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(\alpha, \beta) \\ y=y(\alpha, \beta)}} \\
T_2^1 &= \left. \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right|_{\substack{x=x(\alpha, \beta) \\ y=y(\alpha, \beta)}} & T_2^2 &= \left. \frac{\partial \beta}{\partial y} \right|_{\substack{x=x(\alpha, \beta) \\ y=y(\alpha, \beta)}}
\end{aligned}
\tag{A6.9}$$

Dans le cas d'une transformation faisant intervenir 2 variables, les tenseurs  $T_{i,m}^n$ ,  $T_{i,mp}^n$  et  $T_{i,mpq}^n$  auront respectivement  $2^3$ ,  $2^4$  et  $2^5$  composantes. Chaque'un de ces 56 composantes est une fonction algébrique de deux variables. Le calcul symbolique de ces 56 fonctions puis leurs codages dans le programme n'est bien entendu pas envisageable pour préserver la généralité et la souplesse d'utilisation de la méthode. En outre, l'expression littérale des dérivées apporterait une grande quantité d'informations superflues puisque l'on a seulement besoin de connaître la valeur numérique des dérivées uniquement aux points du maillage.

*Les composantes des tenseurs de transformation  $T_{i,m}^n$ ,  $T_{i,mp}^n$  et  $T_{i,mpq}^n$  doivent donc impérativement être calculées numériquement. Les calculs peuvent être effectués en chaque point du maillage en utilisant l'une des deux méthodes décrite dans le paragraphe suivant.*

#### 4.1 Approximation aux différences finies

Cette méthode de calcul est la plus directe et la plus simple des méthodes de dérivation numérique mais elle est peu précise. En effet, le calcul de la valeur numérique des dérivées en utilisant l'approximation donnée par la formule des différences finies est un problème mal posé. Si le pas de discrétisation  $h$  est trop grand, alors le quotient aux différences est une mauvaise approximation de la dérivée, si le pas  $h$  est trop faible, un nombre trop important de décimales significatives est perdu au numérateur du quotient.

Une analyse de ces problèmes est proposé dans [20][24]. La référence [20] indique le "meilleur" choix (en un sens qui est défini) sur la valeur du pas  $h$  : si une fonction est connue avec une erreur relative de  $\tau$ , alors  $h = \sqrt{\tau}$  est proche de la valeur optimale du pas de discrétisation. En supposant que la fonction et sa dérivée sont approximativement du même ordre de grandeur, le nombre de chiffres significatifs sur le résultat de la dérivée est à peu près la moitié de celui sur la fonction.

Si l'on effectue l'ensemble des calculs en double précision (14 décimales), les dérivées seront connues avec environ 4 à 6 chiffres significatifs. Cette précision est suffisante si le calcul des dérivées est effectuée une seule fois, de préférence en début de programme, et si l'ensemble des données est connu en double précision.

## 4.2 Différentiation automatique

La différentiation automatique est une méthode numérique (à l'opposé de symbolique) permettant de calculer exactement les valeurs des dérivées de fonction en un point [61][67]. Pour tous les problèmes spécifiques, seule l'expression de la fonction elle-même doit être codée. En outre, les erreurs sur le résultat proviennent uniquement des erreurs de troncature, communes à tout calcul numérique, qui ont pour origine l'arithmétique en précision finie des ordinateurs.

L'algorithme proposé dans la référence la plus récente [61], permet de calculer la valeur exacte d'une dérivée partielle d'ordre quelconque d'une fonction à un nombre quelconque de variable en un point défini.

*La méthode de différentiation automatique apporte une solution efficace et précise au problème du calcul numérique des tenseurs  $T_{i,m}^n$ ,  $T_{i,mp}^n$  et  $T_{i,m pq}^n$ . Le calcul de leurs composantes est alors effectué avec la même précision et la même efficacité que si l'expression des dérivées était codée explicitement*

## 5 Résolution par les différences finies

L'équation aux dérivées partielles (A6.2) est une équation linéaire à coefficients variables. Sa résolution par la méthode des différences finies est effectuée en remplaçant chaque une des dérivées partielles  $U_{,\alpha}$ ,  $U_{,\beta}$ ,  $U_{,\alpha\alpha}$ , ... par son approximation aux différences classiques (Comme cela a été fait dans l'ensemble de ce mémoire, voir l'annexe 3). L'équation linéaire résultante par rapport à la molécule de la figure (A6.2) est l'équation (A6.10).

$$\begin{aligned}
 & B_0 U_0 \\
 & + B_1 U_1 + B_2 U_2 + B_3 U_3 + B_4 U_4 + B_5 U_5 + B_6 U_6 + B_7 U_7 + B_8 U_8 \\
 & + B_9 U_9 + B_{10} U_{10} + B_{11} U_{11} + B_{12} U_{12} \\
 & + B_{17} U_{17} + B_{18} U_{18} + B_{19} U_{19} + B_{20} U_{20} + B_{21} U_{21} + B_{22} U_{22} + B_{23} U_{23} + B_{24} U_{24}
 \end{aligned} \tag{A6.10}$$

La valeur des coefficients est donnée dans le formulaire (A6.4).

## formulaire A6.4

```

B0(Ic,Jc) := A0-2*A3/Hxx-2*A5/Hyy+4*A10/Hxxyy+6*A13/Hxxxx+6*A14/Hyyyy
B1(Ic,Jc) := 1/2*A1/Hx+A3/Hxx-A6/Hxxx-A9/Hxyy-2*A10/Hxxy-4*A13/Hxxxx
B2(Ic,Jc) := 1/2*A2/Hy+A5/Hyy-A7/Hyyy-A8/Hxxy-2*A10/Hxxy-4*A14/Hyyyy
B3(Ic,Jc) := -1/2*A1/Hx+A3/Hxx+A6/Hxxx+A9/Hxyy-2*A10/Hxxy-4*A13/Hxxxx
B4(Ic,Jc) := -1/2*A2/Hy+A5/Hyy+A7/Hyyy+A8/Hxxy-2*A10/Hxxy-4*A14/Hyyyy
B5(Ic,Jc) := 1/4*A4/Hxy+1/2*A8/Hxxy+1/2*A9/Hxyy+A10/Hxxy-1/2*A11/Hxxx-1/2*A12/Hxyy
B6(Ic,Jc) := -1/4*A4/Hxy+1/2*A8/Hxxy-1/2*A9/Hxyy+A10/Hxxy+1/2*A11/Hxxx+1/2*A12/Hxyy
B7(Ic,Jc) := 1/4*A4/Hxy-1/2*A8/Hxxy-1/2*A9/Hxyy+A10/Hxxy-1/2*A11/Hxxx-1/2*A12/Hxyy
B8(Ic,Jc) := -1/4*A4/Hxy-1/2*A8/Hxxy+1/2*A9/Hxyy+A10/Hxxy+1/2*A11/Hxxx+1/2*A12/Hxyy
B9(Ic,Jc) := 1/2*A6/Hxxx+A13/Hxxxx
B10(Ic,Jc) := 1/2*A7/Hyyy+A14/Hyyyy
B11(Ic,Jc) := -1/2*A6/Hxxx+A13/Hxxxx
B12(Ic,Jc) := -1/2*A7/Hyyy+A14/Hyyyy
B13(Ic,Jc) := 0
B14(Ic,Jc) := 0
B15(Ic,Jc) := 0
B16(Ic,Jc) := 0
B17(Ic,Jc) := 1/4*A11/Hxxy
B18(Ic,Jc) := -1/4*A11/Hxxy
B19(Ic,Jc) := 1/4*A11/Hxxy
B20(Ic,Jc) := -1/4*A11/Hxxy
B21(Ic,Jc) := 1/4*A12/Hxyy
B22(Ic,Jc) := -1/4*A12/Hxyy
B23(Ic,Jc) := 1/4*A12/Hxyy
B24(Ic,Jc) := -1/4*A12/Hxyy

```

La molécule de l'équation (A6.10) est donnée dans la figure (A6.2).

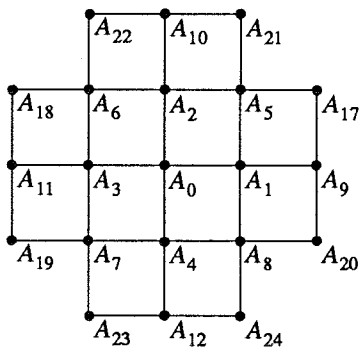


figure A6.2 Molécule de l'équation aux différences (A6.10)

## 6 Application de la méthode

### 6.1 Déflexion d'une plaque annulaire encastree

La méthode des différences finies curvilignes est appliquée dans ce paragraphe à la résolution de l'équation biharmonique avec des conditions aux limites curvilignes. On considère le cas d'une plaque de forme annulaire limitée par deux cercles concentriques de rayons  $r_1$  et  $r_2$  et



encastré sur ses bords. Le schéma de la plaque est indiqué dans la figure (A6.3).

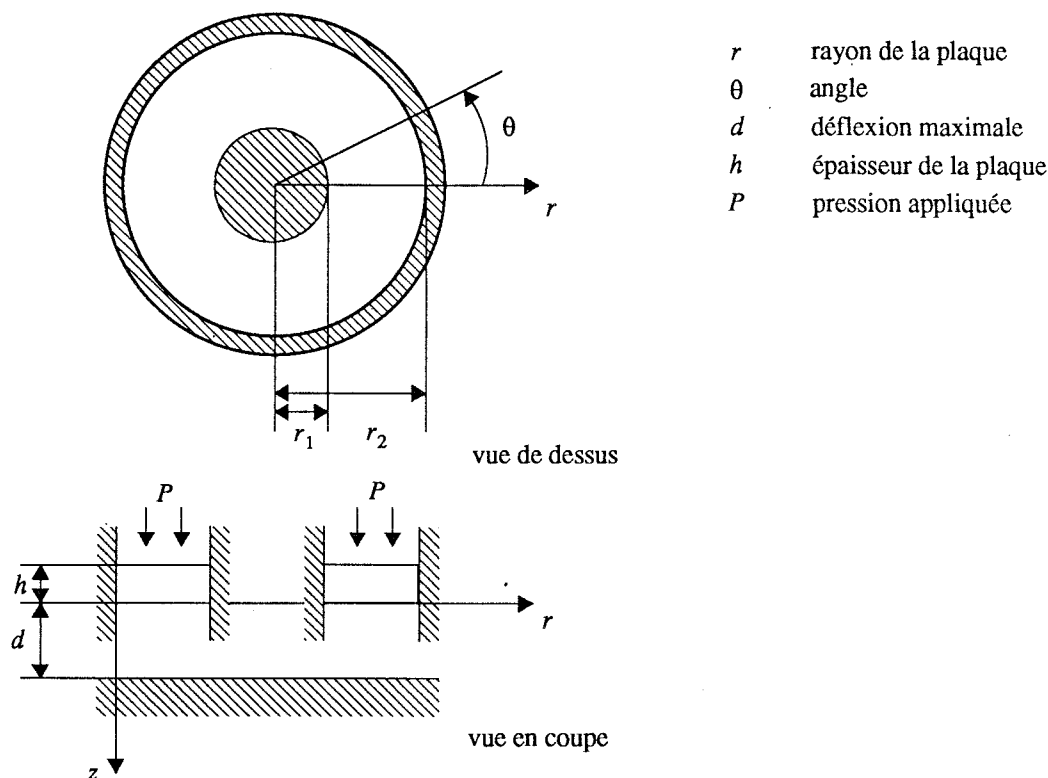


figure A6.3 Forme de la plaque étudiée

Nous avons vu au chapitre 4, équation (4.6), que l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles de la deflexion d'une plaque en coordonnée curviligne a la forme (A6.11).

$$w(r, \theta) = \frac{Pr^4}{64D} + A_1 r^2 \ln(r) + A_2 \ln(r) + A_3 r^2 + A_4 \quad (A6.11)$$

L'équation (A6.11) est ramenée à une forme sans dimension par les changements de variables  $\tilde{w} = w/d$  et  $\tilde{r} = r/r_2$ . De plus, on pose :

$$\tilde{P} = \frac{P}{P_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{P_0} = \frac{r_2^4}{dD} \quad (A6.12)$$

Les changements de variable précédents conduisent finalement à l'équation aux dérivées partielles (A6.13). Les 4 constantes  $\tilde{A}_1$ ,  $\tilde{A}_2$ ,  $\tilde{A}_3$  et  $\tilde{A}_4$  sont déterminées en utilisant 4 conditions aux limites spécifiques aux problèmes.

$$\tilde{w}(\tilde{r}, \theta) = \frac{\tilde{P}\tilde{r}^4}{64} + \tilde{A}_1 \tilde{r}^2 \ln(\tilde{r}) + \tilde{A}_2 \ln(\tilde{r}) + \tilde{A}_3 \tilde{r}^2 + \tilde{A}_4 \quad (A6.13)$$

Les bords  $r = r_1$  et  $r = r_2$  sont encastés, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{w} = 0 & \text{sur } r = r_1 \quad r = r_2 \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} = 0 & \text{sur } r = r_1 \quad r = r_2 \end{cases} \quad (\text{A6.14})$$

## 6.2 Solution analytique

La solution du problème à été calculée avec le logiciel de calcul formel "Maple". Le résultat est une expression algébrique assez monstrueuse qu'il serait inutile de réécrire ici. Nous donnons néanmoins, ci dessous, la solution optimisée que nous avons calculé. (Maple possède des fonctions d'optimisation d'expression algébrique). La variable  $t_{114}$  est la solution de l'EDP, les paramètres  $r_1$  et  $r_2$  sont des valeurs normalisées et on a posé  $C = \bar{P}/64$ .

```
t1 := r*r;
t2 := t1*t1;
t4 := r1*r1;
t5 := r2*r2;
t8 := ln(r1);
t9 := t8*t5;
t10 := t4*t9;
t12 := ln(r2);
t15 := 4.0*t4*t12*t5;
t16 := t4*t4;
t17 := t5*t5;
t18 := -t17;
t20 := t8*t8;
t24 := t12*t9;
t27 := t12*t12;
t28 := t27*t5;
t31 := t4*t5;
t32 := -2.0*t31;
t34 := 1.0/(-4.0*t4*t20*t5+8.0*t4*t24-4.0*t4*t28+t32+t16+t17);
t35 := ln(r);
t42 := t17*t12;
t45 := t16*t12;
t47 := t16*t8;
t48 := t17*t8;
t57 := t4*t8;
t63 := t17*t5;
t76 := t16*t4;
t100 := t12*t8;
t114 := CC*t2-2.0*(t4-t5)*CC*(-4.0*t10+t15+t16+t18)*t34*t1*t35-4.0*t4*CC*t5*(
t42-t16+2.0*t31-t45+t47+t18-t48)*t34*t35+CC*(-8.0*t17*t12*t57+2.0*t5*t45+2.0*t63
*t12+2.0*t17*t57-4.0*t17*t4*t12+t5*t16-t63-8.0*t16*t24+2.0*t76*t8-4.0*t16*t9-
t76+t4*t17+8.0*t16*t28+8.0*t17*t4*t20)*t34*t1+t4*CC*t5*(-2.0*t42+t16+t32-2.0*t45
+4.0*t10+t15-2.0*t47-4.0*t16*t27+t17+4.0*t16*t100-4.0*t17*t20-2.0*t48+4.0*t17*
t100)*t34;
```

## 6.3 Solution numérique

On utilise la transformation algébrique suivante :

$$\begin{cases} x = \alpha \cos(\beta) \\ y = \alpha \sin(\beta) \end{cases}$$

Les coefficients de la transformation sont alors :

$$T_i^\alpha = \begin{bmatrix} T_x^\alpha & T_x^\beta \\ T_y^\alpha & T_y^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\frac{\sin(\beta)}{\alpha} \\ \sin(\beta) & \frac{\cos(\beta)}{\alpha} \end{bmatrix}$$

#### 6.4 Comparaison des solutions analytique et numérique

La comparaison des solutions est effectuée pour les valeurs  $\tilde{r}_1 = 0.5$ ,  $\tilde{r}_2 = 1.0$  et  $\tilde{P} = 1000.0$ . La solution numérique est calculée pour 3 différentes tailles de maillage. Les résultats sont résumés dans le tableau (A6.1) et sont à comparer, au niveau de l'erreur et du temps de calcul, avec les résultats de la déflexion d'une plaque carrée simplement posée (Tableau A5.1).

tableau A6.1 Déflexion à la distance  $\tilde{r} = 0.75$

Solution analytique	Solution numérique		
$w/d$ ( $\tilde{r} = 0.75$ )	Nb de points	$w/d$ ( $\tilde{r} = 0.75$ )	Tps de calcul
0.163350	10 × 10	0.176705	2s
	20 × 20	0.166699	46s
	30 × 30	0.164839	3min45s

L'erreur est inférieure à 1% dans le cas du maillage 30 × 30 mais le temps de calcul est nettement supérieur à celui relevé dans le tableau (A5.1). L'erreur sur le résultat peut être diminué en utilisant une méthode plus efficace dans le calcul des dérivées. Les temps de calcul plus élevés sont expliqués en partie par le calcul de ces dérivées mais peuvent refléter aussi un mauvais conditionnement du système linéaire.

Une partie des résultats calculés sont reproduits dans les tableaux (A6.2) et (A6.3). Les matrices représentées contiennent les valeurs de  $w/d$  aux point du maillage. Les notations "A" et "B" symbolisent les coordonnées curvilignes  $\alpha$  et  $\beta$ , qui ont reçu dans ce paragraphe le nom d'usage  $r$  et  $\theta$ . Leurs valeurs sont arrondies à la première décimale pour des raisons de place, ce qui explique que deux emplacements différents semblent avoir la même valeur numérique. Seule les notations des nœuds "I" et "J" sont significatives.

tableau A6.2 Solution analytique de la déflexion d'une plaque annulaire

J = 27	B = 5.6	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
J = 24	B = 5.0	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
J = 21	B = 4.3	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
J = 18	B = 3.7	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
J = 15	B = 3.0	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
J = 12	B = 2.4	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
J = 9	B = 1.7	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
J = 6	B = 1.1	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
J = 3	B = 0.4	0.000000	0.024029	0.073270	0.122148	0.154801	0.163350	0.146693	0.109630	0.062217	0.019272	0.000000
		I = 0	I = 3	I = 6	I = 9	I = 12	I = 15	I = 18	I = 21	I = 24	I = 27	I = 30
		A = 0.5	A = 0.6	A = 0.6	A = 0.7	A = 0.7	A = 0.8	A = 0.8	A = 0.8	A = 0.9	A = 0.9	A = 1.0

tableau A6.3 Solution numérique de la déflexion d'une plaque annulaire

J = 27	B = 5.6	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
J = 24	B = 5.0	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
J = 21	B = 4.3	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
J = 18	B = 3.7	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
J = 15	B = 3.0	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
J = 12	B = 2.4	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
J = 9	B = 1.7	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
J = 6	B = 1.1	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
J = 3	B = 0.4	0.000000	0.024718	0.074412	0.123553	0.156313	0.164839	0.148049	0.110759	0.063036	0.019712	0.000000
		I = 0	I = 3	I = 6	I = 9	I = 12	I = 15	I = 18	I = 21	I = 24	I = 27	I = 30
		A = 0.5	A = 0.6	A = 0.6	A = 0.7	A = 0.7	A = 0.8	A = 0.8	A = 0.8	A = 0.9	A = 0.9	A = 1.0

La solution (A6.11) est indépendante de l'angle  $\theta$ , on retrouve bien évidemment cette symétrie dans les valeurs analytique et numérique de la déflexion.

---



---

## Notations

---

Les notations, unités et dimensions des grandeurs physiques utilisées dans ce mémoire sont réunies ci-dessous. Les dimensions sont exprimées à partir des dimensions fondamentales : la masse  $M$ , la longueur  $L$ , le temps  $T$  et l'intensité  $I$ .

$x, y, z$	$m$	$L$	coordonnées du système rectangulaire
$u, v, w$	$m$	$L$	déplacement dans les directions $x, y, z$
$N_x, N_y, N_{xy}$	$N/m$	$M T^{-2}$	force par unité de longueur
$a$	$m$	$L$	dimension longitudinale de la plaque
$b$	$m$	$L$	dimension transversale de la plaque
$h$	$m$	$L$	épaisseur de la plaque
$d$	$m$	$L$	profondeur de la cavité
$P$	$N/m^2$	$M L^{-1} T^{-2}$	pression normale appliquée sur la plaque
$U$	$V$	$M L^2 T^{-3} I^{-1}$	tension appliquée entre les deux armatures
$E$	$N/m^2$	$M L^{-1} T^{-2}$	module de Young
$G$	$N/m^2$	$M L^{-1} T^{-2}$	module de Coulomb
$\nu$	-	1	coefficient de Poisson
$D$	$Nm$	$M L^2 T^{-2}$	rigidité à la flexion
$\alpha$	-	1	coefficient d'orthotropie
$C$	$F$	$M^{-1} L^{-2} T^4 I^2$	capacité entre les deux armatures
$\epsilon_0$	$F/m$	$M^{-1} L^{-3} T^4 I^2$	permittivité du vide

Les valeurs des constantes sont résumées ci-dessous. Le calcul de ces grandeurs mécaniques est donné dans [63 p. 151]. Toutes les valeurs numériques sont exprimées dans le système international d'unité : kilogramme, mètre, seconde et ampère.

$$E = 168.95 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$G = 50.85 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu = 0.0625$$

$$D_0 = 14.134 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\alpha = 0.6621$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$D = D_0 h^3$$

$$D_0 = \frac{E}{12(1-\nu^2)}$$

$$\alpha = \nu + 2 \frac{G}{E} (1-\nu^2)$$

---

---

## Bibliographie

---

- [1] M. Abramowitz; I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New-York, 1972.
- [2] K.A. Ames; W.F. Ames, *Analysis of the Von Karman equations by group methods*, Int. j. non-linear mech., (1985), 20, no 4, 201-209.
- [3] M. Banic, *Les réactions au contour pour une plaque encastrée*, Doctorat de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1960.
- [4] M. Bao; Y. Wang, *Analysis and design of a four-terminal silicon pressure sensor at the centre of a diaphragm*, Sensors and Actuators, 12 (1987) 49 - 56.
- [5] J. Barnes, *Programmer en ADA*, InterEditions, Paris, 1988.
- [6] N.E. Ben Moussa; *Conception, modélisation et réalisation d'un capteur de pression capacitif microélectronique*, Doctorat de l'Université Paul Sabatier (Toulouse), Publication LAAS No 85129, juillet 1985.
- [7] N. Bicanic, K.K. Johnson, *Who was 'Raphson'?*, Int. J. Num. Meth. Engng., 14 (1979), pp. 148-152.
- [8] T.Y. Bin; R.S. Huang, *CAPSS: a thin diaphragm capacitive pressure sensor simulator*, Sensors and Actuators, 11 (1987), 1 - 22.
- [9] Å. Björck; V. Pereyra, *Solution of Vandermonde systems of equations*, Math. Comp., v. 24, 1970, pp. 893-904.
- [10] G. Blasquez; Y. Naciri; P. Blondel; N. ben Moussa; P. Pons, *Static response of miniature capacitive pressure sensors with square or rectangular silicon diaphragm*, Revue Phys. Appl. 22 (1987) 505-510.
- [11] J.C. Bord, *Capteurs de pression et accéléromètres deviennent des composants économiques*, Electronique Industrielle No 134/15-11-1987.

- [12] A. Boukabache, *Conception, modélisation et réalisation d'un capteur de pression piézorésistif à faible dérive thermique*, Doctorat de l'Université de Constantine, Algérie, 13 février 1993.
- [13] H.L. Chan; K.D. Wise, *Scaling limits in batch-fabricated silicon pressure sensors*, IEEE Trans. Electron Devices, ED-34 (1987) 850-858.
- [14] B.W. Char; G.J. Fee; K.O. Geddes; G.H. Gonnet; M.B. Monagan, *A tutorial introduction to maple*, Journal of Symbolic Computation, 2(2):197-200, 1986.
- [15] B.W. Char; K.O. Geddes; G. H. Gonnet; B.L. Leong; M.B. Monagan; S.M. Watt, *Maple V Language Reference Manual*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [16] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Quatrième tirage, MASSON (1990).
- [17] S.K. Clark; K.D. Wise, *Pressure Sensitivity in Anisotropically Etched Thin-Diaphragm Pressure Sensors*, IEEE Transactions on Electron Devices, Vol. ED-26, No 12, December 1979, p. 1887-1896.
- [18] J.P. Demailly; *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble 1991.
- [19] L. Deng, *Precessing of Acoustic Signals in a Cochlear Model Incorporating Laterally Coupled Suppressive Elements*, Neural Networks, Vol. 5, pp. 19-34, 1992.
- [20] J.E. Dennis; R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1982.
- [21] *DIMENSIONNELLES (ANALYSE ET SIMILITUDE)*, ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS, Volume 5, treizième publication, juillet 1978.
- [22] Z. Djuric; M. Matic; J. Matovic; R. Petrovic; N. Simicic, *Experimental Determination of Silicon Pressure Sensor Diaphragm Deflection*, Sensors and Actuators A, 24 (1990) 175-179.
- [23] P. Duchateau; D.W. Zachmann, *Partial differential equations*, McGraw-Hill (1986).
- [24] J. Dumontet; J. Vignes, *Détermination du pas optimal dans le calcul des dérivées sur ordinateur*, R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis, Vol. 11, No 1, 1977, 13-25.
- [25] D. Faddéev; I. Sominski, *Recueil d'exercices d'algèbre supérieure*, Editions MIR, Moscou 1977.
- [26] G.E. Forsythe; C.B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall, 1967.

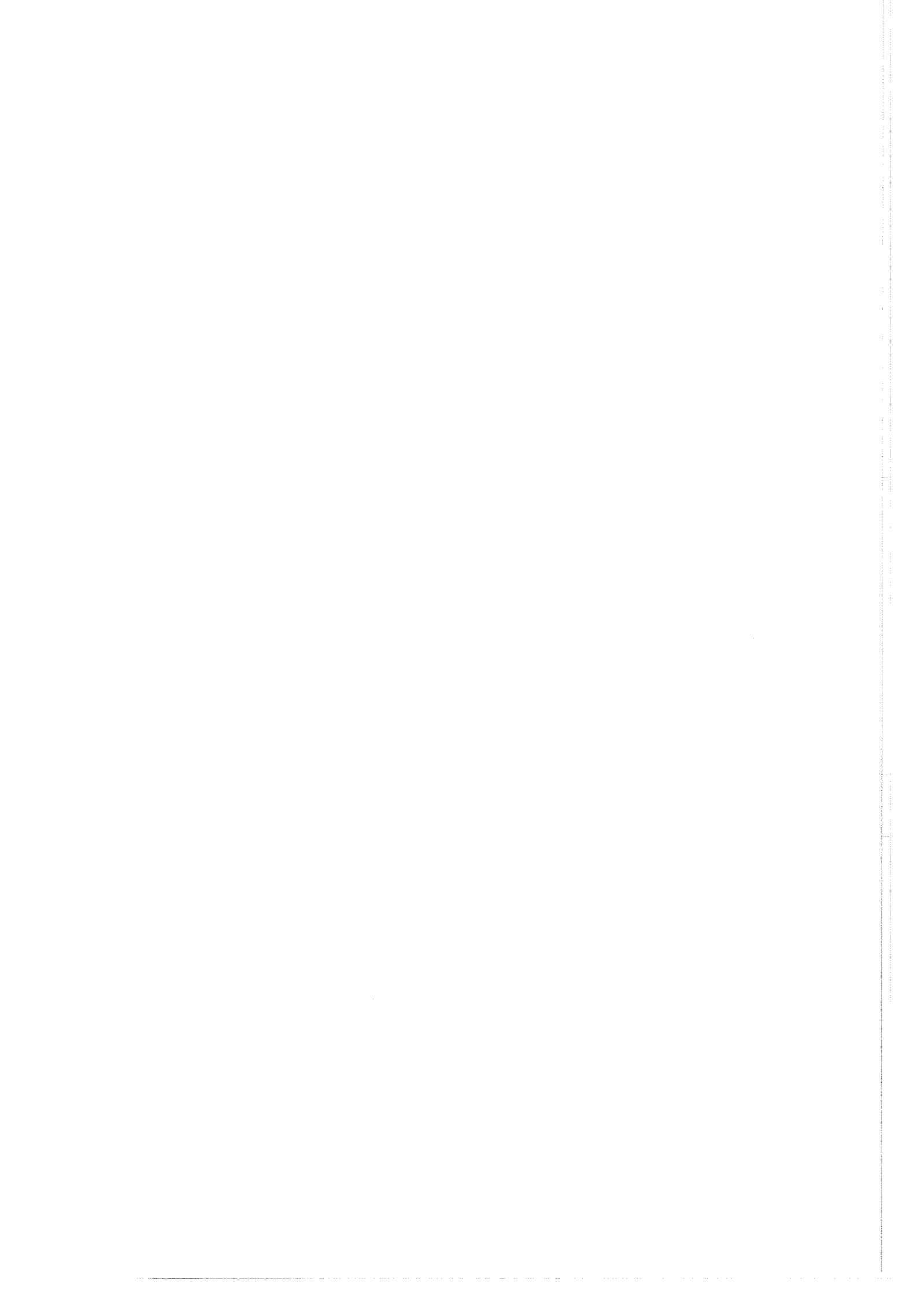
- [27] R.K. Frank, *Pressure sensors merge micromachining and microelectronics*, Sensors and Actuators A, 28 (1991) 93-103.
- [28] P.A. Frieze; R.E. Hobbs; P.J. Dowling, *Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto-plastic analysis of plates*, Computers & Structures, Vol. 8. pp. 301-310, 1978.
- [29] H. Fujita; T. Ikoma, *Numerical Determination of the Electromechanical Field for a Micro Servosystem*, Sensors and Actuators, A21-A23 (1990) 215-218.
- [30] G.H. Golub; D.P. O'Leary, *Some history of the conjugate gradient and Lanczos algorithms: 1948-1976*, SIAM Review, Vol. 31, No. 1, pp. 50-102, March 1989.
- [31] I.S. Gradshteyn; I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic, New-York, 1980.
- [32] J. Hadamard, *Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, Mem. Acad. Sciences, Paris, 1906.
- [33] T.Y. Hou; B.T.R. Wetton, *Convergence of a Finite-Difference Scheme for the Navier-Stokes Equations Using Vorticity Boundary-Conditions*, SIAM journal on numerical analysis, 1992, Vol 29, Iss 3, pp. 615-639.
- [34] *IMSL Library Reference Manual*, 1980, ed. 8 (IMSL Inc., 7500 Bellaire Boulevard, Houston TX 77036, U.S.A.)
- [35] A.F. Johnson; A. Woolf, *Deflection and stress analysis of orthotropic plates in flexure*, Computers & Structures Vol. 18, No. 5, pp. 911-919, 1984.
- [36] D. Johnson, *The bending of curvilinear plates by the finite difference method*, Computers & Structures Vol. 37, No. 5, pp. 837-843, 1990.
- [37] A. Jornod; F. Rudolf, *High-precision capacitive absolute pressure sensor*, Sensors and Actuators, 17 (1989) 415 - 421.
- [38] Y. Kanda; K. Matsuda; C. Murayama; J. Sugaya, *The Mechanism of Field-assisted Silicon-Glass Bonding*, Sensors and Actuators, A21-A23 (1990) 939-943.
- [39] T. von Kármán, *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. IV. 2, II, Leipzig, 1910.
- [40] H.B. Keller; V. Pereyra, *Symbolic Generation of Finite Difference Formulas*, Mathematics of Computation, v. 32, (1978) pp. 955-971.
- [41] H.M. Khalil, *Computer Generation of Difference Approximations*, Mathematics and Computers in Simulation XXI (1979) 102-108.



- [42] G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, J. Reine Angew. Math. (Crelle) Bd. 40, 51 (1850).
- [43] B. Kloeck; S.D. Collins; N.F. de Rooij; R.L. Smith, *Study of Electrochemical Etch-Stop for High-Precision Thickness Control of Silicon Membranes*, IEEE Trans. Electron Devices, Vol. 36, No. 4, April 1989, pp. 663-669.
- [44] G.H. Knightly, *An existence theorem for the von Kármán equations*, Arch. Rational. Mech. Anal. 27, 233-242, (1967).
- [45] G.H. Knightly; D. Sather, *On non-uniqueness of solutions of the von Kármán equations*, Arch. Rational. Mech. Anal. 36, 65-78, (1970).
- [46] W.H. Ko; M-H. Bao; Y-D Hong, *A High-Sensitivity Integrated-Circuit Capacitive Pressure Transducer*, IEEE Transactions on Electron Devices, Vol. ED-29, No. 1, January 1982.
- [47] L. Landau; E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité*, Cours de Physique, Tome 7, éditions MIR 1967.
- [48] P. Lascaux; R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Tome 1, MASSON 1986.
- [49] P. Lascaux; R. Théodor, *Analyse matricielle numérique appliquée à l'art de l'ingénieur*, Tome 2, MASSON 1987.
- [50] P.C.M. Lau, *Curvilinear finite difference method for three-dimensional potential problems*, J. Comp. Phys. 32, 325-344 (1979).
- [51] P.C.M. Lau, *Curvilinear finite difference method for biharmonic equation*, Int. J. Num. Mth. Engng. 14, 791-812 (1979).
- [52] H-C. Lee; R-S. Huang, *A study on field-emission array pressure sensors*, Sensors and Actuators A, 34 (1992) 137-154.
- [53] S.G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
- [54] A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Cambridge at the University press, 1927.
- [55] J.N. Lyness; C.B. Moler, *Vandermonde Systems and Numerical Differentiation*, Numer. Math. 8 (1966) 458-464.
- [56] *Manuel de référence du langage de programmation Ada*, (ISO/8652), United States Department of Defense, Washington D.C., february 1987.

- [57] J. Mathews; R.L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, 2nd ed. Benjamin/Addison-Wesley, 1970.
- [58] R.E. Mickens; I. Ramadhani, *Finite-difference scheme for the numerical solution of the Schrödinger equation*, Phys. Rev. A, 1992, Vol 45, Iss 3, pp 2074-2075.
- [59] Y. Naciri, *Contribution à l'étude de capteurs de pression capacitifs miniaturisés*, Doctorat de l'Université Paul Sabatier (Toulouse), Publication LAAS No 86261, octobre 1986.
- [60] *NAG Fortran Library Manual Mark 8*, 1980 (NAG Central Office, 7 Banbury Road, Oxford OX26NN, U.K.)
- [61] R.D. Neidinger, *An efficient method for the numerical evaluation of partial derivatives of arbitrary order*, ACM Trans. Math. Softw. 18, 2 (June 1992), 159-173.
- [62] K.E. Petersen, *Silicon as a Mechanical Material*, Proceedings of the IEEE, Vol. 70, No. 5, May 1982 pp. 420 - 457.
- [63] C. Plantier, *Etude de faisabilité de capteurs de pression piézorésistifs à jauges en silicium polycristallin*, Doctorat de l'Université Paul Sabatier (Toulouse), Publication LAAS No 92324, octobre 1992.
- [64] P. Pons, *Comportement dynamique des plaques minces de silicium, application aux capteurs de pression*, Doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Publication LAAS No 90144, mai 1990.
- [65] A. Le Pourhiet; *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*, CEPADUES-EDITIONS (1988).
- [66] W.H. Press; B.P. Flannery; S.A. Teukolsky; W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press 1990.
- [67] L.B. Rall, *Differentiation in Pascal-SC: type GRADIENT*, ACM Trans. Math. Softw. 10, 2 (June 1984), 161-184.
- [68] *Reference Manual for the Ada Programming Language*, (ANSI/MIL-STD-1815A) United States Department of Defense, Washington D.C., january 1983.
- [69] L. Rosengren; J. Söderkvist; L. Smith, *Micromachined sensor structures with linear capacitive response*, Sensors and Actuators A, 31 (1992) 200-205.
- [70] K.R. Rushton, *Large deflexion of variable-thickness plates*, Int. J. Mech. Sci., 1968, Vol. 10, pp. 723-735.
- [71] Y. Saad, *Preconditioning techniques for nonsymmetric and indefinite linear systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics 24 (1988) 89-105.

- [72] C.S. Sander; J.W. Knutti; J.D. Meindl, *A Monolithic Capacitive Pressure Sensor with Pulse-Period Output*, IEEE Transactions on Electron Devices, Vol. ED-27, No 5, May 1980, p. 927-930.
- [73] F.V. Schnatz; U. Schöneberg; W. Brockherde; P. Kopystynski; T. Mehlhorn; E. Obermeier; H. Benzel, *Smart CMOS capacitive pressure transducer with on-chip calibration capability*, Sensors and Actuators A, 34 (1992) 77-83.
- [74] F. Schwarz, *Lie symmetries of the von Kármán equations*, Comput. phys. commun., (1984), 31, no 1, 113-114.
- [75] M. Sibony; J.C. Mardon, *Approximations et équations différentielles*, Analyse numérique II, HERMANN 1984.
- [76] P. Stepine, *Résistance des matériaux*, Edition Mir, 1986, Moscou.
- [77] J.C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, WADSWORTH & BROOKS/COLE 1989.
- [78] Sun Microsystems Inc., *OPEN LOOK™ Graphical User Interface Application Style Guide*, Addison-Wesley, 1990, 300 pp.
- [79] Sun Microsystems Inc., *OPEN LOOK™ Graphical User Interface Functional Specification*, Addison-Wesley, 1990, 600 pp.
- [80] S. Terry; J.S. Eckerle; R.D. Kornbluh; T. Low; C.M. Ablow, *Silicon Pressure Transducer Arrays for Blood-pressure Measurement*, Sensors and Actuators, A21-A23 (1990) 1070-1079.
- [81] J.F. Thompson; Z.U.A. Warsi; C.W. Mastin, *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, North-Holland, 1982.
- [82] S.P. Timoshenko; S. Woinowsky-Krieger; *Theory of plates and shells*, Second Edition, McGraw-Hill (1970).
- [83] A.N. Tychonov; A.A. Samarski, *Partial differential equations of mathematical physics*, Volume I, HOLDEN-DAY, INC. (1970).
- [84] H.A. van der Vorst; K. Dekker, *Conjugate gradient type methods and preconditioning*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 24 (1988) 73-87.
- [85] B.L. van der Waerden, *Statistique mathématique*, DUNOD, Paris, 1967.
- [86] G. Wallis; D.I. Pomerantz, *Field assisted glass-metal sealing*, J. Appl. Phys., 40 (1969) 3946-3949.
- [87] T.Q. Ye; Y. Liu, *Finite deflection analysis of elastic plate by the boundary element method*, Appl. Math. Modelling, 1985, Vol. 9, June, pp. 183-188.





---

Simulation des Verhaltens von mikroelektronischen kapazitiven Druckaufnehmern.

**Zusammenfassung:** Das Thema dieser Arbeit ist die Rechner-simulation des Verhaltens von mikroelektronischen kapazitiven Druckaufnehmern. Die Kurven der klassischen kapazitiven Druckaufnehmer sind bereits als Funktion eines konstanten Drucks vorhanden. Der Verfasser untersucht, welche Unterschiede sich bei Überlagerung des konstanten Drucks mit einem elektrostatischen ergeben. Anschließend werden komplexere Strukturen des kapazitiven Druckensors behandelt. Es werden Sensoren mit verschiedenen dicken Platten untersucht. Man sieht hier den Einfluß dieses Parameters auf das Antwortverhalten des Sensors. Der Autor präsentiert anschließend eine Untersuchung über die polygonale Struktur des Druckaufnehmers und schlägt zwei Anwendungen vor, die ein größeres Spektrum von Drücken zulassen. Die Empfindlichkeit des Sensors wird verbessert wenn sich die Platte an den Boden des Druckaufnehmers anlegt. Auf der Grundlage einer Theorie von von Kármán, deren Inhalt die starke Verbiegung von Platten im nichtlinearen Bereich ist, wird ein Modell des kapazitiven Druckaufnehmers entwickelt. Diese Theorie muß immer dann angewendet werden, wenn die Verbiegung in Größenordnung der Plattendicke liegt. Die aufgezeigten Probleme erfordern die Verwendung von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen; es werden zwei Zustandsvariablen verwendet. Die Diskretisierung dieser Differentialgleichungen ergibt sich durch Anwendung der "finite differences" Methode. Die erhaltenen Gleichungen werden mit iterativen Methoden, dem Konjugierter-Gradienten-Verfahren und dem Newton-Raphson-Verfahren aufgelöst. Es wurde eine Software zur Diskretisierung der linearen und nichtlinearen Gleichungen mit partiellen Ableitungen für den Arbeitspunkt entwickelt. Abschließend präsentiert der Autor einer Untersuchung der Methode "curvilinear finite difference" und ihre Anwendung auf den Biegebalken.

**Schlüsselwörter:** kapazitive Druckaufnehmer, Mikroelektronik, Rechner-simulation, Gleichungen mit partiellen Ableitungen, "finite difference", Biegebalken, Verbiegung im nichtlinearen Bereich.

---

Simulación del comportamiento de los captosres de presión capacitivos micro-electrónicos.

**Resumen:** Esta memoria trata sobre la simulación numérica de la respuesta de los captosres de presión capacitivos micro-electrónicos. Las gráficas de respuesta del captor capacitivo clásico, en función de una presión constante, son establecidas. El autor examina luego las modificaciones aportadas a estas graficas cuando una presión electrostática ha sido superpuesta a la presión constante. La otra parte de este trabajo es consagrado al estudio de los captosres capacitivos de estructuras más complejas. Los captosres con armadura deformable y de espesor variable son estudiados. El autor muestra la influencia de la variación del espesor con respecto a la respuesta del captor. Luego, él presenta un estudio de los captosres de geometría poligonal y propone dos aplicaciones que permiten de extender la gama de presiones. Un análisis del comportamiento de los captosres en régimen de contacto es realizado: la sensibilidad de las gráficas de respuesta son considerablemente mejoradas por este modo de funcionamiento. El autor propone finalmente una modelización de los captosres capacitivos, utilizando la teoría no lineal de las fuertes deflexiones de Von Kármán. Es indispensable de tomar en consideración esta teoría, cuando la deflexión de la placa sensible es del mismo orden de magnitud que su espesor. La simulación de los modelos desarrollados en esta memoria hacen intervenir ecuaciones y sistemas de ecuaciones con derivadas parciales, lineales y no lineales, a dos variables de espacio. La discretización de estas ecuaciones es realizada por el método general de las diferencias finitas. La resolución de las ecuaciones resultantes es obtenida por los métodos iterativos del tipo gradiente conjugado y Newton-Raphson. Un programa de fácil utilización para la discretización de las ecuaciones con derivadas parciales estacionarias lineales, ó no lineales fué desarrollado. El autor presenta finalmente un estudio del método de las diferencias finitas curvilineas, y de su aplicación a la deflexión de las placas.

**Palabras claves:** Captor de presión capacitivo, micro-electrónica, simulación numérica, ecuaciones con derivadas parciales, diferencias finitas, deflexión de placa, flexión fuerte.

Simulation du comportement des capteurs de pression capacitifs micro-électroniques.

**Résumé :** Ce mémoire porte sur la simulation numérique de la réponse des capteurs de pression capacitifs micro-électroniques. Les courbes de réponse du capteur capacitif classique, en fonction d'une pression constante, sont établies. L'auteur examine ensuite les modifications apportées à ces courbes lorsqu'une pression électrostatique est superposée à la pression constante. La suite de ce travail est consacrée à l'étude de capteurs capacitifs de structures plus complexes. Les capteurs à armature déformable d'épaisseur variable sont traités. L'auteur montre l'influence de la variation de l'épaisseur sur la réponse du capteur. Il présente ensuite une étude des capteurs de géométrie polygonale et propose deux applications permettant d'élargir la gamme de pressions. Une analyse du comportement des capteurs en régime de contact est effectuée : la sensibilité des courbes de réponse est nettement améliorée par ce mode de fonctionnement. L'auteur propose finalement une modélisation des capteurs capacitifs en utilisant la théorie non linéaire des fortes déflexions de von Kármán. Il est indispensable de tenir compte de cette théorie dès que la déflexion de la plaque sensible est de l'ordre de grandeur de son épaisseur. La simulation des problèmes développés dans ce mémoire fait intervenir des équations et des systèmes d'équations aux dérivées partielles, linéaires et non linéaires, à deux variables d'espace. La discrétisation de ces équations est effectuée par la méthode générale des différences finies. La résolution des équations résultantes est obtenue par les méthodes itératives du type gradient conjugué et Newton-Raphson. Un logiciel convivial de discrétisation des équations aux dérivées partielles stationnaires linéaires ou non linéaires a été développé. L'auteur présente finalement une étude de la méthode des différences finies curvilignes et de son application à la déflexion des plaques.

**Mots clés :** capteur de pression capacitif, micro-électronique, simulation numérique, équation aux dérivées partielles, différences finies, déflexion de plaque, flexion forte.

---

Simulation of the behavior of micro-electronic capacitive pressure sensors.

**Abstract:** This dissertation is concerned with the numerical simulation of the response of micro-electronic capacitive pressure sensors. Response curves for classical capacitive sensors are provided. Next, the author examines the modifications brought about by the superposition of an electrostatic pressure on a constant pressure. The remainder of this work is devoted to analysing sensors of more complex structures. The author treats the case where the sensor deformable armature has non-uniform thickness. The influence of the variation of thickness upon the sensor response is shown. The analysis of polygonal shaped sensors is also presented and followed by two applications aimed at extending the pressure range. This is followed by the study of the behavior of sensors when subjected to contact: here, the resulting curved are obtained with significant improvements. Finally, the author proposes to model capacitive sensors by using the non-linear plate theory of von Kármán. In fact the use of von Kármán theory becomes unavoidable as soon as the plate deflection is of the order of its thickness. Therefore, the models employed in this study involves linear and nonlinear equations and systems of partial differential equations in 2-dimensional spatial domains. The discretization of these equations is carried out by the general method of finite differences. To solve the resulting equations we used iterative methods such as the conjugate gradient algorithm and the Newton-Raphson algorithm. An interactive software for the discretization of stationary linear and non-linear partial differential equations has been developed. The author also provides an outline of a methodology for curvilinear finite difference method and its application to the study of flexed plates.

**Keywords:** capacitive pressure sensor, micro-electronic, numerical simulation, partial differential equation, finite difference, plate deflection, large deflection.