

Fluides autour d'obstacles minces

Christophe Lacave

Université Claude Bernard Lyon I

Soutenance de thèse, Lyon, 8 décembre 2008

Plan de l'exposé

- 1 Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 Euler en dimension deux**
- 4 Navier-Stokes en dimension deux**
- 5 Navier-Stokes en dimension trois**
- 6 Unicité pour le système mixte Euler point vortex**

Outline

- 1 Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 Euler en dimension deux**
- 4 Navier-Stokes en dimension deux**
- 5 Navier-Stokes en dimension trois**
- 6 Unicité pour le système mixte Euler point vortex**

Equations de Navier-Stokes

Considérons un fluide occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse du fluide et p la pression. Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p (+g) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equations de Navier-Stokes

Considérons un fluide occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse du fluide et p la pression. Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p(+g) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equations de Navier-Stokes

Considérons un fluide occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse du fluide et p la pression. Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p (+g) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equations de Navier-Stokes

Considérons un fluide occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse du fluide et p la pression. Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p (+g) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equations de Navier-Stokes

Considérons un fluide occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse du fluide et p la pression. Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p(+g) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equations de Navier-Stokes

Considérons un fluide occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse du fluide et p la pression. Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p(+g) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equations d'Euler

Le mouvement d'un fluide idéal incompressible est régi par l'équation d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - u \cdot \nabla u = -\nabla p & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u \cdot n = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equations d'Euler

Le mouvement d'un fluide idéal incompressible est régi par l'équation d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - u \cdot \nabla u = -\nabla p & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u \cdot n = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equations d'Euler

Le mouvement d'un fluide idéal incompressible est régi par l'équation d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - u \cdot \nabla u = -\nabla p & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ u \cdot n = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

- Etude en dimension trois
- Etude en dimension deux : une solution $u = (u_1, u_2)$ de ces équations en dimension deux nous donne une solution en dimension trois de la forme

$$u = u(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0).$$

Définition

Nous désignons par ω le tourbillon qui est le rotationnel du champ de vitesse défini de la manière suivante :

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

si la dimension d'espace vaut 2 et

$$\omega = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

si la dimension d'espace vaut 3.

- Etude en dimension trois
- Etude en dimension deux : une solution $u = (u_1, u_2)$ de ces équations en dimension deux nous donne une solution en dimension trois de la forme

$$u = u(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0).$$

Définition

Nous désignons par ω le tourbillon qui est le rotationnel du champ de vitesse défini de la manière suivante :

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

si la dimension d'espace vaut 2 et

$$\omega = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

si la dimension d'espace vaut 3.

- Etude en dimension trois
- Etude en dimension deux : une solution $u = (u_1, u_2)$ de ces équations en dimension deux nous donne une solution en dimension trois de la forme

$$u = u(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0).$$

Définition

Nous désignons par ω le tourbillon qui est le rotationnel du champ de vitesse défini de la manière suivante :

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

si la dimension d'espace vaut 2 et

$$\omega = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

si la dimension d'espace vaut 3.

- Etude en dimension trois
- Etude en dimension deux : une solution $u = (u_1, u_2)$ de ces équations en dimension deux nous donne une solution en dimension trois de la forme

$$u = u(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0).$$

Définition

Nous désignons par ω le tourbillon qui est le rotationnel du champ de vitesse défini de la manière suivante :

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

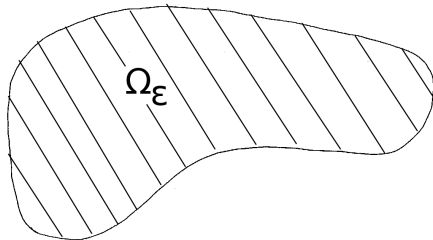
si la dimension d'espace vaut 2 et

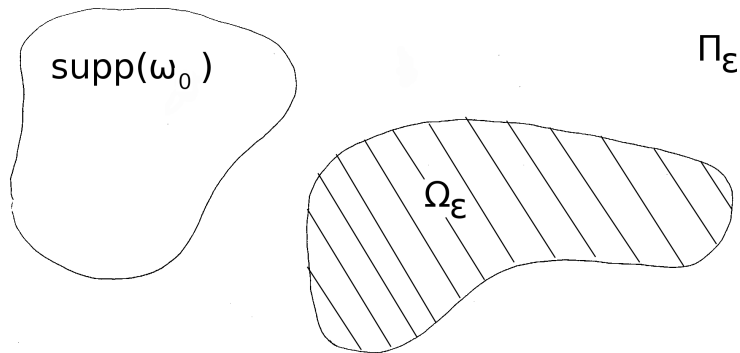
$$\omega = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

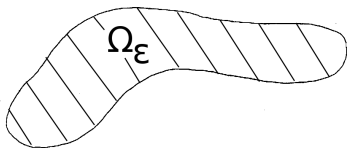
si la dimension d'espace vaut 3.

Outline

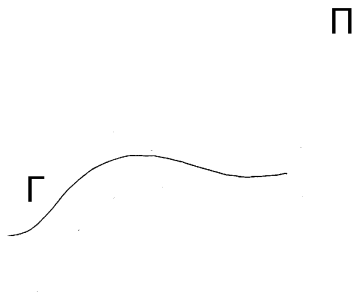
- 1 Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 Euler en dimension deux**
- 4 Navier-Stokes en dimension deux**
- 5 Navier-Stokes en dimension trois**
- 6 Unicité pour le système mixte Euler point vortex**

$(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ Π_ε 



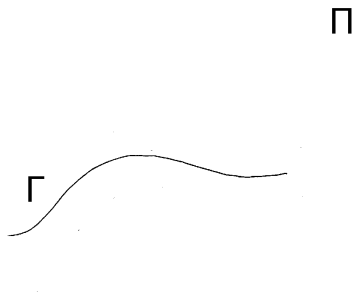
$(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ Π_ε 

Problème 1



Question : quelle est la limite de $(u^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (cad quand $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Gamma$) ???

Problème 1



Question : quelle est la limite de $(u^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (cad quand $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Gamma$) ???

Autres travaux

- Cas d'un fluide **idéal** en dimension **deux** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2003).
- Cas d'un fluide **visqueux** en dimension **deux** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2006).
- Cas d'un fluide **visqueux** en dimension **trois** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie et Kelliher en 2008).

Autres travaux

- Cas d'un fluide **idéal** en dimension **deux** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2003).
- Cas d'un fluide **visqueux** en dimension **deux** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2006).
- Cas d'un fluide **visqueux** en dimension **trois** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie et Kelliher en 2008).

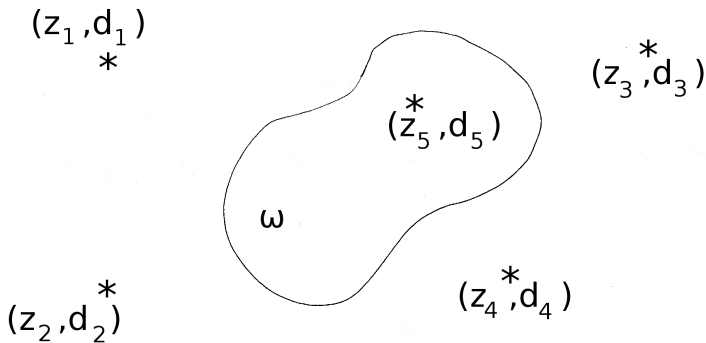
Autres travaux

- Cas d'un fluide **idéal** en dimension **deux** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2003).
- Cas d'un fluide **visqueux** en dimension **deux** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2006).
- Cas d'un fluide **visqueux** en dimension **trois** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie et Kelliher en 2008).

Autres travaux

- Cas d'un fluide **idéal** en dimension **deux** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2003).
- Cas d'un fluide **visqueux** en dimension **deux** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2006).
- Cas d'un fluide **visqueux** en dimension **trois** quand Ω_ε se contracte vers un **point** (Iftimie et Kelliher en 2008).

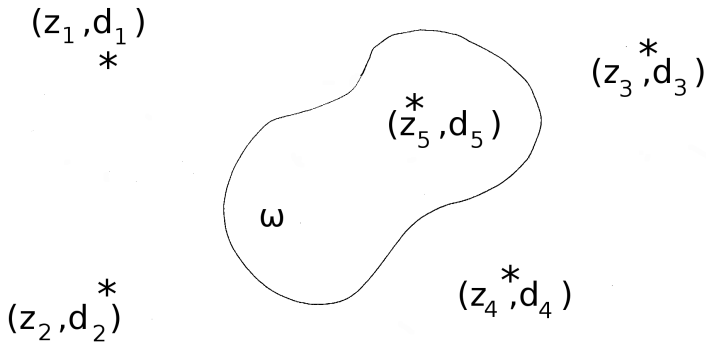
Problème 2



Existence : Marchioro et Pulvirenti en 1991-1993.

Question : unicité ???

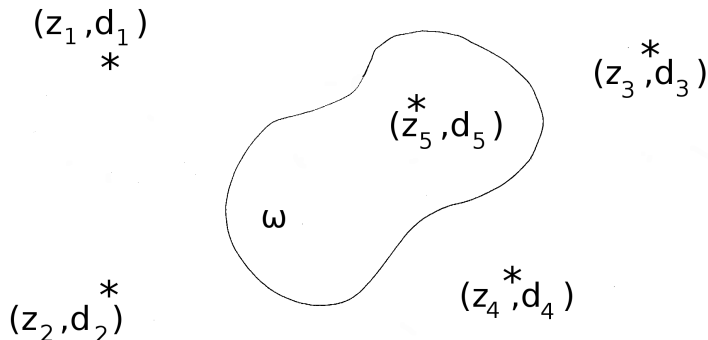
Problème 2



Existence : Marchioro et Pulvirenti en 1991-1993.

Question : unicité ???

Problème 2



Existence : Marchioro et Pulvirenti en 1991-1993.

Question : unicité ???

Plan de l'exposé

- 1 **Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 **Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 **Euler en dimension deux**
- 4 **Navier-Stokes en dimension deux**
- 5 **Navier-Stokes en dimension trois**
- 6 **Unicité pour le système mixte Euler point vortex**

Outline

- 1 **Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 **Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 Euler en dimension deux
- 4 Navier-Stokes en dimension deux
- 5 Navier-Stokes en dimension trois
- 6 Unicité pour le système mixte Euler point vortex

Sur \mathbb{R}^2

La loi de Biot-Savart dans le plan entier correspond à

$$u = K * \omega,$$

avec

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

Sur Π_ε

La loi de Biot-Savart sur le domaine extérieur correspond à

$$u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t) = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)](x) + \alpha H^\varepsilon(x),$$

Sur Π_ε

La loi de Biot-Savart sur le domaine extérieur correspond à

$$u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t) = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)](x) + \alpha H^\varepsilon(x),$$

où l'opérateur intégral est :

$$K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)] = \int_{\Pi_\varepsilon} K^\varepsilon(x, y) \omega^\varepsilon(y, t) dy,$$

avec

$$K^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left(\frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right).$$

Sur Π_ε

La loi de Biot-Savart sur le domaine extérieur correspond à

$$u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t) = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)](x) + \alpha H^\varepsilon(x),$$

où l'opérateur intégral est :

$$K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)] = \int_{\Pi_\varepsilon} K^\varepsilon(x, y) \omega^\varepsilon(y, t) dy,$$

avec

$$K^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left(\frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right).$$

On note le champ harmonique

$$H^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \log |T_\varepsilon(x)| = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left(\frac{(T_\varepsilon(x))^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} \right)$$

Sur Π_ε

La loi de Biot-Savart sur le domaine extérieur correspond à

$$u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t) = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)](x) + \alpha H^\varepsilon(x),$$

où l'opérateur intégral est :

$$K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)] = \int_{\Pi_\varepsilon} K^\varepsilon(x, y) \omega^\varepsilon(y, t) dy,$$

avec

$$K^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left(\frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right).$$

On note le champ harmonique

$$H^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \log |T_\varepsilon(x)| = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left(\frac{(T_\varepsilon(x))^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} \right)$$

et $\alpha(t) = \gamma + \int_{\Pi_\varepsilon} \omega^\varepsilon(x, t) dx$

Sur Π_ε

La loi de Biot-Savart sur le domaine extérieur correspond à

$$u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t) = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)](x) + \alpha H^\varepsilon(x),$$

où l'opérateur intégral est :

$$K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t)] = \int_{\Pi_\varepsilon} K^\varepsilon(x, y) \omega^\varepsilon(y, t) dy,$$

avec

$$K^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left(\frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right).$$

On note le champ harmonique

$$H^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \log |T_\varepsilon(x)| = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left(\frac{(T_\varepsilon(x))^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} \right)$$

et $\alpha(t) = \gamma + \int_{\Pi_\varepsilon} \omega^\varepsilon(x, t) dx$

⇒ la circulation γ est une donnée initiale.

Application conforme

Proposition

Si Γ est un arc de Jordan C^2 , tel que l'intersection avec le segment $[-1, 1]$ est un nombre fini de segments et de points, alors il existe un biholomorphisme $T : \Pi \rightarrow \text{int } D^c$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- T^{-1} et DT^{-1} sont continus jusqu'au bord, et T^{-1} envoie S sur Γ ,*
- DT^{-1} est borné,*
- T et DT sont continus jusqu'à Γ , avec des différentes valeurs de chaque côté de Γ , excepté aux extrémités de la courbe où T se comporte comme la racine carrée de la distance et DT se comporte comme l'inverse de la racine carrée de la distance,*
- DT est borné à l'extérieur du disque $B(0, R)$, avec R tel que $\Gamma \subset B(0, R)$,*
- DT est borné dans $L^p(\Pi \cap B(0, R))$ pour tout $p < 4$ et $R > 0$.*

Application conforme

Proposition

Si Γ est un arc de Jordan C^2 , tel que l'intersection avec le segment $[-1, 1]$ est un nombre fini de segments et de points, alors il existe un biholomorphisme $T : \Pi \rightarrow \text{int } D^c$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- *T^{-1} et DT^{-1} sont continus jusqu'au bord, et T^{-1} envoie S sur Γ ,*
- *DT^{-1} est borné,*
- *T et DT sont continus jusqu'à Γ , avec des différentes valeurs de chaque côté de Γ , excepté aux extrémités de la courbe où T se comporte comme la racine carrée de la distance et DT se comporte comme l'inverse de la racine carrée de la distance,*
- *DT est borné à l'extérieur du disque $B(0, R)$, avec R tel que $\Gamma \subset B(0, R)$,*
- *DT est borné dans $L^p(\Pi \cap B(0, R))$ pour tout $p < 4$ et $R > 0$.*

Application conforme

Proposition

Si Γ est un arc de Jordan C^2 , tel que l'intersection avec le segment $[-1, 1]$ est un nombre fini de segments et de points, alors il existe un biholomorphisme $T : \Pi \rightarrow \text{int } D^c$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- *T^{-1} et DT^{-1} sont continus jusqu'au bord, et T^{-1} envoie S sur Γ ,*
- *DT^{-1} est borné,*
- *T et DT sont continus jusqu'à Γ , avec des différentes valeurs de chaque côté de Γ , excepté aux extrémités de la courbe où T se comporte comme la racine carrée de la distance et DT se comporte comme l'inverse de la racine carrée de la distance,*
- *DT est borné à l'extérieur du disque $B(0, R)$, avec R tel que $\Gamma \subset B(0, R)$,*
- *DT est borné dans $L^p(\Pi \cap B(0, R))$ pour tout $p < 4$ et $R > 0$.*

Application conforme

Proposition

Si Γ est un arc de Jordan C^2 , tel que l'intersection avec le segment $[-1, 1]$ est un nombre fini de segments et de points, alors il existe un biholomorphisme $T : \Pi \rightarrow \text{int } D^c$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- *T^{-1} et DT^{-1} sont continus jusqu'au bord, et T^{-1} envoie S sur Γ ,*
- *DT^{-1} est borné,*
- *T et DT sont continus jusqu'à Γ , avec des différentes valeurs de chaque côté de Γ , excepté aux extrémités de la courbe où T se comporte comme la racine carrée de la distance et DT se comporte comme l'inverse de la racine carrée de la distance,*
- *DT est borné à l'extérieur du disque $B(0, R)$, avec R tel que $\Gamma \subset B(0, R)$,*
- *DT est borné dans $L^p(\Pi \cap B(0, R))$ pour tout $p < 4$ et $R > 0$.*

Application conforme

Proposition

Si Γ est un arc de Jordan C^2 , tel que l'intersection avec le segment $[-1, 1]$ est un nombre fini de segments et de points, alors il existe un biholomorphisme $T : \Pi \rightarrow \text{int } D^c$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- *T^{-1} et DT^{-1} sont continus jusqu'au bord, et T^{-1} envoie S sur Γ ,*
- *DT^{-1} est borné,*
- *T et DT sont continus jusqu'à Γ , avec des différentes valeurs de chaque côté de Γ , excepté aux extrémités de la courbe où T se comporte comme la racine carrée de la distance et DT se comporte comme l'inverse de la racine carrée de la distance,*
- *DT est borné à l'extérieur du disque $B(0, R)$, avec R tel que $\Gamma \subset B(0, R)$,*
- *DT est borné dans $L^p(\Pi \cap B(0, R))$ pour tout $p < 4$ et $R > 0$.*

Application conforme

Proposition

Si Γ est un arc de Jordan C^2 , tel que l'intersection avec le segment $[-1, 1]$ est un nombre fini de segments et de points, alors il existe un biholomorphisme $T : \Pi \rightarrow \text{int } D^c$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- *T^{-1} et DT^{-1} sont continus jusqu'au bord, et T^{-1} envoie S sur Γ ,*
- *DT^{-1} est borné,*
- *T et DT sont continus jusqu'à Γ , avec des différentes valeurs de chaque côté de Γ , excepté aux extrémités de la courbe où T se comporte comme la racine carrée de la distance et DT se comporte comme l'inverse de la racine carrée de la distance,*
- *DT est borné à l'extérieur du disque $B(0, R)$, avec R tel que $\Gamma \subset B(0, R)$,*
- *DT est borné dans $L^p(\Pi \cap B(0, R))$ pour tout $p < 4$ et $R > 0$.*

L'aplatissement de l'obstacle

Nous considérons une famille d'obstacles Ω_ε disjoints du support de ω_0 . Si nous notons T_ε le biholomorphisme entre $\Pi_\varepsilon \equiv \Omega_\varepsilon^c$ et D^c , nous supposons que les propriétés suivantes sont vérifiées :

Hypothèse

La famille de biholomorphismes $\{T_\varepsilon\}$ vérifie

- (i) $\|(T_\varepsilon - T)/|T|\|_{L^\infty(\Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,
- (ii) $\det(DT_\varepsilon^{-1})$ est bornée sur Π_ε indépendamment de ε ,
- (iii) pour tout $R > 0$, $\|DT_\varepsilon - DT\|_{L^3(B(0,R) \cap \Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,
- (iv) pour $R > 0$ assez grand, il existe $C_R > 0$ tel que $|DT_\varepsilon(x)| \leq C_R$ sur $B(0, R)^c$.
- (v) pour $R > 0$ assez grand, il existe $C_R > 0$ tel que $|D^2T_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_R}{|x|}$ sur $B(0, R)^c$.

L'aplatissement de l'obstacle

Nous considérons une famille d'obstacles Ω_ε disjoints du support de ω_0 . Si nous notons T_ε le biholomorphisme entre $\Pi_\varepsilon \equiv \Omega_\varepsilon^c$ et D^c , nous supposons que les propriétés suivantes sont vérifiées :

Hypothèse

La famille de biholomorphismes $\{T_\varepsilon\}$ vérifie

- (i) $\|(T_\varepsilon - T)/T\|_{L^\infty(\Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,
- (ii) $\det(DT_\varepsilon^{-1})$ est bornée sur Π_ε indépendamment de ε ,
- (iii) pour tout $R > 0$, $\|DT_\varepsilon - DT\|_{L^3(B(0,R) \cap \Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,
- (iv) pour $R > 0$ assez grand, il existe $C_R > 0$ tel que $|DT_\varepsilon(x)| \leq C_R$ sur $B(0, R)^c$.
- (v) pour $R > 0$ assez grand, il existe $C_R > 0$ tel que $|D^2T_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_R}{|x|}$ sur $B(0, R)^c$.

Outline

- 1 **Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 **Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 Euler en dimension deux
- 4 Navier-Stokes en dimension deux
- 5 Navier-Stokes en dimension trois
- 6 Unicité pour le système mixte Euler point vortex

La loi de Biot-Savart dans l'espace entier correspond à

$$u_0(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{4\pi|x - y|^3} \times \omega_0(y) dy.$$

Comme Π_ε est simplement connexe, nous savons qu'il existe un unique champ u_0^ε de carré intégrable, à divergence nulle et tangent au bord tel que $\text{rot } u_0^\varepsilon = \omega_0|_{\Pi_\varepsilon}$.

La loi de Biot-Savart dans l'espace entier correspond à

$$u_0(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{4\pi|x - y|^3} \times \omega_0(y) dy.$$

Comme Π_ε est simplement connexe, nous savons qu'il existe un unique champ u_0^ε de carré intégrable, à divergence nulle et tangent au bord tel que $\text{rot } u_0^\varepsilon = \omega_0|_{\Pi_\varepsilon}$.

Plan de l'exposé

- 1 **Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 **Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 **Euler en dimension deux**
- 4 **Navier-Stokes en dimension deux**
- 5 **Navier-Stokes en dimension trois**
- 6 **Unicité pour le système mixte Euler point vortex**

Equation du tourbillon

La formulation avec le tourbillon est équivalente à la précédente :

$$\begin{cases} \partial_t \omega^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \omega^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \mathbf{u}^\varepsilon = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon] + \alpha H^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \omega^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{cases}$$

avec K^ε et H^ε définis précédemment. D'après les travaux de Kikuchi, pour tout $\varepsilon > 0$, le système admet une unique solution globale $(\mathbf{u}^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$.

Equation du tourbillon

La formulation avec le tourbillon est équivalente à la précédente :

$$\begin{cases} \partial_t \omega^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \omega^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \mathbf{u}^\varepsilon = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon] + \alpha H^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \omega^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{cases}$$

avec K^ε et H^ε définis précédemment. D'après les travaux de Kikuchi, pour tout $\varepsilon > 0$, le système admet une unique solution globale $(\mathbf{u}^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$.

Limite vers un point

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

- (a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;
- (b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;
- (c) le couple limite (u, ω) vérifie au sens faible l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{rot} u = \omega + \gamma \delta_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec δ_0 la fonction Dirac en 0.

Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2003.

Limite vers un point

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

- (a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;
- (b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;
- (c) le couple limite (u, ω) vérifie au sens faible l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{rot} u = \omega + \gamma \delta_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec δ_0 la fonction Dirac en 0.

Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2003.

Limite vers un point

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

(a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;

(b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;

(c) le couple limite (u, ω) vérifie au sens faible l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{rot} u = \omega + \gamma \delta_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec δ_0 la fonction Dirac en 0.

Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2003.

Limite vers un point

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

- (a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;
- (b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;
- (c) le couple limite (u, ω) vérifie au sens faible l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{rot} u = \omega + \gamma \delta_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec δ_0 la fonction Dirac en 0.

Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2003.

Limite vers une courbe

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

- (a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;*
- (b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;*
- (c) u s'exprime explicitement en fonction de ω (voir loi de Biot-Savart) ;*
- (d) u et ω sont des solutions faibles de $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.*

Limite vers une courbe

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

- (a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ *fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;*
- (b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ *faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;*
- (c) *u s'exprime explicitement en fonction de ω (voir loi de Biot-Savart) ;*
- (d) *u et ω sont des solutions faibles de $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.*

Limite vers une courbe

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

- (a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;*
- (b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;*
- (c) u s'exprime explicitement en fonction de ω (voir loi de Biot-Savart) ;*
- (d) u et ω sont des solutions faibles de $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.*

Limite vers une courbe

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

- (a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;*
- (b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;*
- (c) u s'exprime explicitement en fonction de ω (voir loi de Biot-Savart) ;*
- (d) u et ω sont des solutions faibles de $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.*

Limite vers une courbe

Théorème

Il existe une sous-suite $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ telle que

- (a) $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$ *fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$;*
- (b) $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ *faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$;*
- (c) *u s'exprime explicitement en fonction de ω (voir loi de Biot-Savart) ;*
- (d) *u et ω sont des solutions faibles de $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.*

Propriété du champ limite

Proposition

Pour t fixé, le champ de vitesse u

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$.
- iv) est tangent à la courbe.
- v) est à divergence nulle.

Il existe une fonction g_ω qui dépend de Γ , γ et ω telle que

$$\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma.$$

De plus $g_\omega = (u_{\text{down}} - u_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$.

Propriété du champ limite

Proposition

Pour t fixé, le champ de vitesse u

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$.
- iv) est tangent à la courbe.
- v) est à divergence nulle.

Il existe une fonction g_ω qui dépend de Γ , γ et ω telle que

$$\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma.$$

De plus $g_\omega = (u_{\text{down}} - u_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$.

Propriété du champ limite

Proposition

Pour t fixé, le champ de vitesse u

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$.
- iv) est tangent à la courbe.
- v) est à divergence nulle.

Il existe une fonction g_ω qui dépend de Γ , γ et ω telle que

$$\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma.$$

De plus $g_\omega = (u_{\text{down}} - u_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$.

Propriété du champ limite

Proposition

Pour t fixé, le champ de vitesse u

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$.
- iv) est tangent à la courbe.
- v) est à divergence nulle.

Il existe une fonction g_ω qui dépend de Γ , γ et ω telle que

$$\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma.$$

De plus $g_\omega = (u_{\text{down}} - u_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$.

Propriété du champ limite

Proposition

Pour t fixé, le champ de vitesse u

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$.
- iv) est tangent à la courbe.
- v) est à divergence nulle.

Il existe une fonction g_ω qui dépend de Γ , γ et ω telle que

$$\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma.$$

De plus $g_\omega = (u_{\text{down}} - u_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$.

Propriété du champ limite

Proposition

Pour t fixé, le champ de vitesse u

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$.
- iv) est tangent à la courbe.
- v) est à divergence nulle.

Il existe une fonction g_ω qui dépend de Γ , γ et ω telle que

$$\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma.$$

De plus $g_\omega = (u_{\text{down}} - u_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$.

Propriété du champ limite

Proposition

Pour t fixé, le champ de vitesse u

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$.
- iv) est tangent à la courbe.
- v) est à divergence nulle.

Il existe une fonction g_ω qui dépend de Γ , γ et ω telle que

$$\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma.$$

De plus $g_\omega = (u_{\text{down}} - u_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$.

Equation à l'extérieur de la courbe

Nous avons u qui vérifie au sens des distributions l'équation d'Euler à l'extérieur de la courbe Γ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + u \cdot \nabla u = -\nabla p, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \times [0, \infty) \\ u \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, \infty) \\ |u| \rightarrow 0, & \text{quand } |x| \rightarrow \infty \\ u(x, 0) = F(\omega_0, \gamma) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \end{array} \right.$$

où F est la loi de Biot-Savart donnant explicitement la vitesse en fonction du tourbillon et de la circulation.

Plan de l'exposé

- 1 **Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 **Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 **Euler en dimension deux**
- 4 **Navier-Stokes en dimension deux**
- 5 **Navier-Stokes en dimension trois**
- 6 **Unicité pour le système mixte Euler point vortex**

Convergence de la donnée initiale

Lemme

Nous avons que $Eu_0^\varepsilon \rightarrow K[\omega_0] + \alpha H =: u_0$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition

Le champ de vitesse u_0

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$, ce qui appartient à L^p_{loc} pour $p < 4$.
- iv) est tangent à la courbe et de limite nulle à l'infini.
- v) est à divergence nulle et $\text{rot } u_0 = \omega_0 + g\delta_\Gamma$.

Convergence de la donnée initiale

Lemme

Nous avons que $Eu_0^\varepsilon \rightarrow K[\omega_0] + \alpha H =: u_0$ fortement dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition

Le champ de vitesse u_0

- i) est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.
- ii) est continu jusqu'au bord $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$, avec des valeurs différentes de chaque côté de Γ .
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$, ce qui appartient à L_{loc}^p pour $p < 4$.
- iv) est tangent à la courbe et de limite nulle à l'infini.
- v) est à divergence nulle et $\text{rot } u_0 = \omega_0 + g\delta_\Gamma$.

Estimations *a priori*

Nous utilisons le champ $W^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, x) - v^\varepsilon(x)$ qui est initialement L^2 , alors

$$\|W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \nu e^{2C_1 t} \int_0^t e^{-2C_1 s} \|\nabla W^\varepsilon(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \leq e^{2C_1 t} \left(\frac{C_2}{C_1} + \|W^\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 \right).$$

Nous en déduisons alors le principal résultat de cette partie.

Théorème

Soit u^ε la solution de l'équation de Navier-Stokes sur Π_ε , nous avons alors que

- la famille $\{Eu^\varepsilon - v^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^2))$.*
- la famille $\{\nabla Eu^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2))$.*
- la famille $\{Eu^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^4([0, \infty); L^4(\mathbb{R}^2))$.*

Estimations *a priori*

Nous utilisons le champ $W^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, x) - v^\varepsilon(x)$ qui est initialement L^2 , alors

$$\|W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \nu e^{2C_1 t} \int_0^t e^{-2C_1 s} \|\nabla W^\varepsilon(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \leq e^{2C_1 t} \left(\frac{C_2}{C_1} + \|W^\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 \right).$$

Nous en déduisons alors le principal résultat de cette partie.

Théorème

Soit u^ε la solution de l'équation de Navier-Stokes sur Π_ε , nous avons alors que

- la famille $\{Eu^\varepsilon - v^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^2))$.*
- la famille $\{\nabla Eu^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2))$.*
- la famille $\{Eu^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^4([0, \infty); L^4(\mathbb{R}^2))$.*

Estimations *a priori*

Nous utilisons le champ $W^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, x) - v^\varepsilon(x)$ qui est initialement L^2 , alors

$$\|W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \nu e^{2C_1 t} \int_0^t e^{-2C_1 s} \|\nabla W^\varepsilon(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \leq e^{2C_1 t} \left(\frac{C_2}{C_1} + \|W^\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 \right).$$

Nous en déduisons alors le principal résultat de cette partie.

Théorème

Soit u^ε la solution de l'équation de Navier-Stokes sur Π_ε , nous avons alors que

- la famille $\{Eu^\varepsilon - v^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^2))$.*
- la famille $\{\nabla Eu^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2))$.*
- la famille $\{Eu^\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^4([0, \infty); L^4(\mathbb{R}^2))$.*

Passage à la limite

Proposition

Soient $T > 0$ et O un ouvert régulier, relativement compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Alors, la suite $\{Eu^\varepsilon\}$ est précompact dans $L^\infty([0, T]; H^{-3}(O))$.

Lemme

Il existe une sous-suite telle que $\{Eu^\varepsilon\}$ converge fortement dans $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$.

Lemme

Si nous notons $v \equiv \alpha H\Phi^{0,\lambda}$, alors $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Passage à la limite

Proposition

Soient $T > 0$ et O un ouvert régulier, relativement compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Alors, la suite $\{Eu^\varepsilon\}$ est précompact dans $L^\infty([0, T]; H^{-3}(O))$.

Lemme

Il existe une sous-suite telle que $\{Eu^\varepsilon\}$ converge fortement dans $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$.

Lemme

Si nous notons $v \equiv \alpha H\Phi^{0,\lambda}$, alors $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Passage à la limite

Proposition

Soient $T > 0$ et O un ouvert régulier, relativement compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Alors, la suite $\{Eu^\varepsilon\}$ est précompact dans $L^\infty([0, T]; H^{-3}(O))$.

Lemme

Il existe une sous-suite telle que $\{Eu^\varepsilon\}$ converge fortement dans $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$.

Lemme

Si nous notons $v \equiv \alpha H\Phi^{0,\lambda}$, alors $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Théorème principal

Théorème

Il existe une limite forte u de $\{Eu^\varepsilon\}$ dans $L_{loc}^2([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ qui est une solution faible des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, au sens donné par la définition précédente, avec une vitesse initiale $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$.

Proposition

Il existe au plus une solution globale des équations de Navier-Stokes sur l'extérieur d'une courbe, au sens donné par la définition précédente, ayant pour vitesse initiale $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$.

Théorème principal

Théorème

Il existe une limite forte u de $\{Eu^\varepsilon\}$ dans $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ qui est une solution faible des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, au sens donné par la définition précédente, avec une vitesse initiale $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$.

Proposition

Il existe au plus une solution globale des équations de Navier-Stokes sur l'extérieur d'une courbe, au sens donné par la définition précédente, ayant pour vitesse initiale $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$.

Théorème principal

Théorème

Il existe une limite forte u de $\{Eu^\varepsilon\}$ dans $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ qui est une solution faible des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, au sens donné par la définition précédente, avec une vitesse initiale $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$.

Proposition

Il existe au plus une solution globale des équations de Navier-Stokes sur l'extérieur d'une courbe, au sens donné par la définition précédente, ayant pour vitesse initiale $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$.

Cas de la limite vers un point

A la limite, la vitesse vérifie l'équation de Navier-Stokes dans tout le plan, où la masse de Dirac apparaît uniquement dans la donnée initiale.

Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes en 2006.

Plan de l'exposé

- 1 **Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 **Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 **Euler en dimension deux**
- 4 **Navier-Stokes en dimension deux**
- 5 **Navier-Stokes en dimension trois**
- 6 **Unicité pour le système mixte Euler point vortex**

Convergence vers une surface

Proposition

Il existe un champ à divergence nulle $v_0 \in \mathcal{H}_S$ tel que $Eu_0^\varepsilon \rightarrow v_0$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ et que $\text{rot } v_0 = \omega_0$ (dans $\mathbb{R}^3 \setminus S$). De plus, $v_0 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}^3 \setminus S}(u_0)$, avec u_0 défini sans obstacle et $\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3 \setminus S}$ le projecteur de Leray dans $\mathbb{R}^3 \setminus S$.

Théorème

Soit u^ε une solution de Leray de l'équation de Navier-Stokes sur Π_ε telle que $\text{rot } u_0^\varepsilon = \omega_0$, alors il existe une sous-suite et un champ vectoriel u tels que $u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \Pi)$ et tel que u soit une solution de Leray de l'équation de Navier-Stokes à l'extérieur de la surface S vérifiant $u(0, \cdot) = v_0$ (v_0 donné dans la proposition précédente).

Convergence vers une surface

Proposition

Il existe un champ à divergence nulle $v_0 \in \mathcal{H}_S$ tel que $Eu_0^\varepsilon \rightarrow v_0$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ et que $\text{rot } v_0 = \omega_0$ (dans $\mathbb{R}^3 \setminus S$). De plus, $v_0 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}^3 \setminus S}(u_0)$, avec u_0 défini sans obstacle et $\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3 \setminus S}$ le projecteur de Leray dans $\mathbb{R}^3 \setminus S$.

Théorème

Soit u^ε une solution de Leray de l'équation de Navier-Stokes sur Π_ε telle que $\text{rot } u_0^\varepsilon = \omega_0$, alors il existe une sous-suite et un champ vectoriel u tels que $u^\varepsilon \rightarrow u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \Pi)$ et tel que u soit une solution de Leray de l'équation de Navier-Stokes à l'extérieur de la surface S vérifiant $u(0, \cdot) = v_0$ (v_0 donné dans la proposition précédente).

Convergence vers une courbe

Proposition

Nous avons $Eu_0^\varepsilon \rightarrow u_0$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, où u_0 correspond au champ de vitesse sans obstacle.

Convergence vers un point

Nous retrouvons à la limite une vitesse satisfaisant l'équation de Navier-Stokes dans tout l'espace. La limite de la vitesse initiale est alors

$$u_0 = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{4\pi|x - y|^3} \times \omega_0(y) dy.$$

Iftimie et Kelliher en 2008.

Plan de l'exposé

- 1 **Introduction**
 - Equations des fluides
 - Problèmes considérés
- 2 **Loi de Biot-Savart**
 - Dimension deux
 - Dimension trois
- 3 **Euler en dimension deux**
- 4 **Navier-Stokes en dimension deux**
- 5 **Navier-Stokes en dimension trois**
- 6 **Unicité pour le système mixte Euler point vortex**

Formulation trajectoire

La loi de Biot-Savart dans le plan entier s'écrit $v = K * \omega$ avec $K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$.

Equation d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0, \\ \omega = \text{rot } v, \text{ div } v = 0. \end{cases}$$

Quand v est régulière, nous pouvons définir des trajectoires définies par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t(x) = v(t, \phi_t(x)) \\ \phi_0(x) = x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Nous avons alors que $\frac{d}{dt} \omega(t, \phi_t(x)) \equiv 0$.

Formulation trajectoire

La loi de Biot-Savart dans le plan entier s'écrit $v = K * \omega$ avec $K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$.

Equation d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0, \\ \omega = \text{rot } v, \text{ div } v = 0. \end{cases}$$

Quand v est régulière, nous pouvons définir des trajectoires définies par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t(x) = v(t, \phi_t(x)) \\ \phi_0(x) = x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Nous avons alors que $\frac{d}{dt} \omega(t, \phi_t(x)) \equiv 0$.

Formulation trajectoire

La loi de Biot-Savart dans le plan entier s'écrit $v = K * \omega$ avec $K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$.

Equation d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0, \\ \omega = \text{rot } v, \text{ div } v = 0. \end{cases}$$

Quand v est régulière, nous pouvons définir des trajectoires définies par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t(x) = v(t, \phi_t(x)) \\ \phi_0(x) = x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Nous avons alors que $\frac{d}{dt} \omega(t, \phi_t(x)) \equiv 0$.

Systeme mixte Euler point vortex

Solutions lagrangiennes

Le triplet (ω, z, ϕ) est une solution lagrangienne globale du systeme mixte Euler point vortex ssi

$$\begin{cases} v(\cdot, t) = (K * \omega)(\cdot, t), \\ \dot{z}(t) = v(t, z(t)), \quad z(0) = z_0, \\ \dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)) + K(\phi_t(x) - z(t)), \\ \phi_0(x) = x \text{ si } x \neq z_0, \quad \omega(\phi_t(x), t) = \omega_0(x). \end{cases}$$

Existence établie par Marchioro et Pulvirenti en 1991-1993.

Unicité ??

Systeme mixte Euler point vortex

Solutions lagrangiennes

Le triplet (ω, z, ϕ) est une solution lagrangienne globale du systeme mixte Euler point vortex ssi

$$\begin{cases} v(\cdot, t) = (K * \omega)(\cdot, t), \\ \dot{z}(t) = v(t, z(t)), \quad z(0) = z_0, \\ \dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)) + K(\phi_t(x) - z(t)), \\ \phi_0(x) = x \text{ si } x \neq z_0, \quad \omega(\phi_t(x), t) = \omega_0(x). \end{cases}$$

Existence établie par Marchioro et Pulvirenti en 1991-1993.

Unicité ??

Résultats

Théorème

Soient $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe $R_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\omega_0 \equiv \alpha \text{ sur } B(z_0, R_0).$$

Supposons de plus que ω_0 est à support compact. Il existe alors une unique solution du système mixte Euler point vortex vérifiant cette donnée initiale.

La bêtise consiste à vouloir conclure.

Flaubert (1850)