



HAL
open science

Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule

Juliette Venel

► **To cite this version:**

Juliette Venel. Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. Français. NNT: . tel-00346035

HAL Id: tel-00346035

<https://theses.hal.science/tel-00346035v1>

Submitted on 10 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 9245

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Juliette VENEL

Sujet :

**MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE
MOUVEMENTS DE FOULE.**

Soutenue le 27 Novembre 2008 devant la Commission d'examen :

Mme.	CÉCILE APPERT-ROLLAND	(Examineur)
M.	YANN BRENIER	(Rapporteur)
M.	JEAN-FRANÇOIS COULOMBEL	(Examineur)
M.	PATRICK GÉRARD	(Président du jury)
M.	BERTRAND MAURY	(Directeur de thèse)
M.	LIONEL THIBAUT	(Rapporteur)

Remerciements

J'aimerais tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à Bertrand Maury, mon directeur de thèse. Je le remercie de m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant. Son enthousiasme, ses questions pertinentes ont été pour une grande part, à l'origine de ma motivation. Toujours disponible dans les moments de doute, ses nombreux conseils et sa bonne humeur ont très largement contribué au bon déroulement de cette thèse. Je le remercie surtout de m'avoir communiqué sa passion pour la recherche au cours de multiples discussions mathématiques enrichissantes.

Je voudrais ensuite adresser mes remerciements à Yann Brenier et à Lionel Thibault pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en acceptant de rapporter sur cette thèse, ainsi qu'aux autres membres du jury, Cécile Appert-Rolland, Jean-François Coulombel et Patrick Gérard pour leur présence à la soutenance. J'aimerais plus particulièrement remercier Patrick Gérard, qui depuis mon arrivée à Orsay (et cela commence à dater) a suivi avec beaucoup d'attention mon parcours.

Cela m'amène tout naturellement à évoquer l'équipe Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles. Quelle chance de faire partie de cette équipe composée de personnes accessibles et sympathiques, avec lesquelles il est toujours agréable de discuter ! Un grand merci à François Alouges dont la curiosité l'a amené à m'interroger sur les petits ronds que je dessinais au tableau. Les nombreuses discussions que nous avons eues, notamment sur la Fast Marching m'ont été fort utiles. Je voudrais aussi remercier Sylvain Faure pour ses suggestions et ses innombrables sauvetages informatiques, toujours prêt à nous faire partager ses connaissances et son expérience. Je tiens aussi à remercier Catherine Poupon et Valérie Lavigne respectivement secrétaire de l'équipe ANEDP et secrétaire de l'école doctorale pour leur efficacité et leur sympathie.

Bien évidemment, cette thèse n'aurait pu voir le jour sans l'enseignement mathématique de qualité dont j'ai bénéficié tout au long de mes études. J'en profite pour remercier tous les professeurs qui y ont contribué et plus particulièrement pour exprimer toute ma gratitude à Jean Voedts qui m'a donné le goût et l'envie de faire des mathématiques.

Un grand merci à la fine équipe de doctorants avec qui j'ai traversé ces trois années et plus spécialement aux thésards (anciens et nouveaux) du bureau 256, pour la très bonne ambiance qui y règne. Merci à Adeline qui me proposait un chocolat à chacun de mes soupirs ; heureusement que je ne les ai pas tous acceptés ! Merci à Christine pour son écoute et sa sympathie. Ancienne représentante de l'ordre dans le bureau, ses "chuts" me manquent déjà. J'aimerais aussi plus spécialement remercier Aline et Fred, pour m'avoir épaulée tout au long de cette thèse et surtout au cours de ces derniers mois. Votre lecture minutieuse du manuscrit, vos nombreuses suggestions le concernant, m'ont été très précieuses. Je vous remercie aussi pour toutes nos discussions mathématiques et conversations en tous genres. Merci à Aline pour son aide lors des préparations d'exposé et pour la patience dont elle a fait preuve en m'initiant au C++. Merci à Fred pour sa curiosité, sa gentillesse et son dévouement.

J'en profite pour remercier Anne-Laure pour sa présence malgré la distance. Merci pour toutes ces années d'amitié! Je tiens également à souligner le rôle essentiel de ma famille tout au long de mes études. Merci à mes proches qui ont fait le déplacement, mes pensées accompagnent aussi ceux qui ne pouvaient venir. Je tiens à remercier sincèrement mes parents pour leur confiance et leurs encouragements. Ainsi, j'ai pu suivre leur exemple en devenant docteur "à ma façon". Merci à mes frère et soeur, Yann et Véronique pour les bons week-ends ch'tis, tourangeaux et angevins.

Enfin, il me reste à remercier Maxime mon matheux préféré qui a eu le courage de me supporter toutes ces années. C'est dans son soutien, son écoute et sa tendresse que je trouve mon équilibre. Sans lui, rien de tout cela n'aurait été possible.

Résumé

Nous nous intéressons à la modélisation des mouvements de foule causés par des situations d'évacuation d'urgence. L'objectif de cette thèse est de proposer un modèle mathématique et une méthode numérique de gestion des contacts, afin de traiter les interactions locales entre les personnes pour finalement mieux rendre compte de la dynamique globale du trafic piétonnier. Nous proposons un modèle microscopique de mouvements de foule reposant sur deux principes. D'une part, chaque personne a une vitesse souhaitée, celle qu'elle aurait en l'absence des autres. D'autre part, la vitesse réelle des individus prend en compte une certaine contrainte d'encombrement maximal. En précisant le lien entre ces deux vitesses, le problème d'évolution prend la forme d'une inclusion différentielle du premier ordre. Son caractère bien posé est démontré en utilisant des résultats sur les processus de rafle par des ensembles uniformément prox-réguliers. Ensuite, nous présentons un schéma numérique et démontrons sa convergence. Pour calculer une vitesse souhaitée particulière (celle dirigée par le plus court chemin évitant les obstacles), nous présentons une programmation orientée objet ayant pour but de simuler l'évacuation d'une structure de plusieurs étages présentant une géométrie quelconque. Nous finissons avec d'autres choix de vitesse souhaitée (par exemple, en ajoutant des stratégies individuelles) et présentons les résultats numériques associés. Ces simulations numériques permettent de retrouver certains phénomènes observés lors de déplacements piétonniers.

Abstract

We are looking for modelling crowd motion in emergency evacuation. The aim of this thesis is to propose a mathematical model and a numerical method to handle contacts, in order to deal with local interactions between people and to describe the whole dynamics of the pedestrian traffic. We propose a microscopic model for crowd motion which rests on two principles. On the one hand, each individual has a spontaneous velocity that he would like to have in the absence of other people. On the other hand, the actual velocity must take into account congestion. By specifying the link between these two velocities, the evolution problem takes the form of a first order differential inclusion. Its well-posedness is proved with the help of results concerning sweeping processes by uniformly prox-regular sets. Then we present a numerical scheme and prove its convergence. In order to compute a specific spontaneous velocity (the one directed by the shortest path avoiding the obstacles), we present an object oriented programming to simulate the evacuation of any building consisting of several floors. To conclude, we describe other choices of spontaneous velocity (for example, by adding individual strategies) and we present associated numerical results. These numerical simulations allow us to recover some characteristics of pedestrian traffic.

Table des matières

Introduction	1
---------------------	----------

Chapitre 1

Différents modèles pour représenter la foule

1.1	Etat de l'art	6
1.1.1	Données empiriques qualitatives et quantitatives	6
1.1.2	Modèles utilisés pour la simulation des mouvements de foule	8
1.1.3	Phénomènes observés dans le trafic piétonnier, effets d'auto-organisation	11
1.1.4	Simulations d'évacuation d'urgence	14
1.2	Description d'un nouveau modèle	18

Partie I

Aspects théoriques	21
---------------------------	-----------

Chapitre 2

Cadre mathématique et résultats
--

2.1	Reformulation	24
2.2	Cas particulier : déplacement dans un couloir	28
2.3	Problèmes rencontrés lors de la généralisation	31

2.4	Cadre mathématique	33
2.4.1	Notion de prox-régularité	33
2.4.2	Processus de raffle	37

<p>Chapitre 3 Prox-régularité de l'ensemble des configurations admissibles Q_0</p>
--

3.1	Etude de l'ensemble Q_{12}	42
3.1.1	Cône proximal normal	42
3.1.2	Prox-régularité	45
3.2	Généralisation à Q_0	47
3.2.1	Cône proximal normal	47
3.2.2	Prox-régularité	50
3.3	Majoration de la constante η	55
3.3.1	Etude du boulier	55
3.3.2	Démonstration des lemmes	61

Partie II

Discrétisation et étude numérique 65

<p>Chapitre 4 Présentation et étude d'un schéma numérique</p>
--

4.1	Présentation du schéma numérique	68
4.1.1	En termes de vitesse	68
4.1.2	En termes de position	69
4.2	Convergence du schéma numérique	72
4.2.1	Extraction et propriétés de la fonction limite	72
4.2.2	Démonstration de la proposition 4.10 : étude des multiplicateurs de Lagrange	77
4.2.3	Lemmes techniques	90

Chapitre 5

Méthodes numériques utilisées et programmation effective

5.1	Calcul de la vitesse réelle avec l'algorithme d'Uzawa	100
5.1.1	Présentation de la méthode	100
5.1.2	Programmation	104
5.1.3	Logiciel SCoPI	106
5.2	Calcul de la vitesse souhaitée en utilisant une méthode de type Fast Marching	106
5.2.1	Présentation de la méthode	107
5.2.2	Programmation Orientée Objet	109

Chapitre 6

Résultats numériques

6.1	Résultats recouvrant les phénomènes d'auto-organisation	121
6.1.1	Accès à un escalator	121
6.1.2	Evacuation à deux vitesses	122
6.1.3	Formation de files à contre-courant (« Fingering patterns ») . .	124
6.1.4	Formation d'arches	125
6.2	Vitesse souhaitée dirigée par le plus court chemin	127
6.3	Vitesse souhaitée en tant que solution d'une e.d.p.	130
6.4	Ajout de stratégies individuelles	133
6.4.1	Modélisation	133
6.4.2	Résultats numériques associés	134

Annexe A
Quelques résultats d'analyse convexe

Annexe B
Lemme de Farkas

Annexe C
Cône polaire

Annexe D
Opérateurs maximaux monotones

Annexe E
Étude du gradient de la fonction D_{12}

Annexe F
Autre preuve de la prox-régularité de Q_{12}

Annexe G
Autre démonstration de l'inégalité triangulaire inverse

Annexe H
Formulation point-selle

Annexe I
Algorithme d'Uzawa

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation de mouvements de foule causés par des situations d'évacuation d'urgence. De telles situations sont caractérisées par des configurations très denses en individus et présentent de nombreux contacts. L'objectif de cette thèse est de proposer un modèle mathématique et une méthode numérique de gestion des contacts, afin de traiter les interactions locales entre les personnes pour finalement mieux rendre compte de la dynamique globale du trafic piétonnier.

Contexte et objectifs

Depuis plusieurs décennies, de nombreuses études portant sur le comportement des piétons ont été menées. Dans un premier temps, des travaux d'observation ([Fru71, NW69, Wei93]) ont été effectués dans le but de réunir des données qualitatives (préférences, tendances des marcheurs) mais aussi quantitatives comme pour préciser par exemple, la vitesse des individus en fonction de la densité de la foule (cf. sous-section 1.1.1). Ensuite, grâce aux résultats précédents, de nombreux modèles de mouvements de foule ont été proposés. Ces derniers affichent un but commun, prédire les chemins les plus empruntés mais diffèrent sur plusieurs points : leur mode de représentation de la foule (microscopique en se plaçant à l'échelle de l'individu ou macroscopique en décrivant la foule par sa densité), leur façon d'appréhender les zones de déplacement (discrétisation spatiale ou non) et leur caractère déterministe ou stochastique. Ces modèles peuvent être classés en quatre catégories (cf. sous-section 1.1.2) : les modèles basés sur des automates cellulaires [BA01, BKSZ01, Nag98, Sch01], les modèles utilisant des graphes orientés [BT86a, BT86b, Løv94, YS89], le modèle de forces sociales [HM95, HFV00b] et les modèles macroscopiques [Hel92b, Hen71, HB00, HB04a, HB04b]. Beaucoup de ces modèles ont abouti à la création de logiciels de simulation du trafic piétonnier, comme par exemple PedGo [HMK03], SimPed [Daa04], Legion [Sti93] ou encore Mipsim [HB00].

Déterminer les trajectoires des piétons permet de proposer des directives aux constructeurs afin d'améliorer leur confort. En effet, ces informations peuvent être d'une grande utilité pour évaluer la largeur satisfaisante des couloirs, des portes, Prévoir les déplacements des personnes peut aussi aider à placer les panneaux d'information importants ou même positionner stratégiquement les panneaux publicitaires.

Par ailleurs, il existe un tout autre enjeu à la modélisation des mouvements de foule. Depuis plusieurs années, la demande de simulations d'évacuation en cas d'urgence n'a cessé d'augmenter. L'objectif est d'estimer la durée de l'évacuation (à comparer par exemple au temps de propagation d'un feu) mais aussi de prédire les zones où les individus seront

fortement concentrés. Les résultats permettraient d'éviter dans la mesure du possible, les situations dites d'écrasement, responsables de nombreux accidents pouvant s'avérer mortels. Selon [HFV00b], de telles situations sortent véritablement du cadre classique des déplacements piétonniers. Lorsque les gens se promènent sans précipitation, ils ont tendance à garder leurs distances avec les autres individus et les obstacles (murs, tables, ...). Dans le cas d'une situation d'urgence, les personnes pressées voire même en proie à la panique, n'hésitent pas à pousser les autres et de fortes pressions s'exercent alors entre les individus. Les piétons peuvent aussi être entraînés vers des obstacles qu'ils souhaitaient pourtant contourner, ce qui parfois, à cause de la trop forte pression exercée, provoque l'effondrement dramatique de ces derniers. De telles situations sont donc caractérisées par une densité élevée et de nombreux contacts.

Pour simuler des évacuations d'urgence, les modèles généralement utilisés sont ceux qui reposent sur une discrétisation spatiale, représentant le sol par un damier ou par un graphe. Ils sont en effet peu coûteux en temps de calcul puisque les contacts y sont gérés intrinsèquement : chaque case ou noeud est soit vide, soit occupé par une seule personne et le déplacement des individus s'effectue toujours suivant cette règle. Dans [HFV00b], un autre modèle propose de gérer ces contacts avec des forces de répulsion entre les piétons. Cependant, ces méthodes (principe d'exclusion ou force de répulsion) ne prennent pas en compte le conflit direct entre les individus, et ne peuvent donc pas fournir d'informations sur les interactions locales entre les piétons.

Notre objectif est de proposer un modèle de mouvements de foule traitant directement les contacts entre les individus et pouvant déterminer les zones susceptibles d'afficher de fortes pressions. Notre modèle de gestion des contacts doit aussi faire preuve de souplesse et être capable d'inclure les modèles déjà existants qui déterminent les chemins les plus empruntés.

Le modèle

Nous proposons un modèle microscopique de mouvements de foule qui repose sur deux principes. D'une part, chaque personne a une vitesse souhaitée, celle qu'elle aurait en l'absence des autres. D'autre part, la vitesse réelle des individus prend en compte une certaine contrainte d'encombrement maximal. Plus précisément, dans ce modèle, la vitesse réelle est la projection de la vitesse souhaitée sur un ensemble dit de vitesses admissibles (qui respectent une contrainte de non-chevauchement des disques représentant les individus). Dans le premier point du modèle réside sa souplesse. En effet, tout modèle de prédiction des mouvements piétonniers peut être ici intégré. Dans le second point du modèle, s'opère la gestion directe des contacts.

En précisant le lien entre les deux vitesses souhaitée et réelle, nous obtenons un problème d'évolution qui prend la forme d'une inclusion différentielle du premier ordre vérifiée par le vecteur position des personnes. Formulations naturelles des problèmes avec contrainte unilatérale, les inclusions différentielles ont fait l'objet de nombreux travaux. Les premiers problèmes d'inclusion différentielle ont été étudiés au début des années 70 par H. Brezis grâce à la théorie des opérateurs maximaux monotones (cf [Bre73]). Plus tard dans [Mor77], J.J. Moreau considère un problème mettant en jeu un opérateur multivalué dépendant du temps. Il s'agit du premier problème de processus de rafle (*sweeping*

process) par des ensembles convexes. Ne pouvant appliquer la théorie précédente, l'auteur utilise un algorithme dit de rattrapage (*catching-up algorithm*) pour construire des solutions du problème et démontrer sous certaines hypothèses, son caractère bien posé. Depuis, ces processus de rafle ont fait et font encore l'objet de nombreuses études. Des généralisations significatives ont été apportées (cf. sous-section 2.4.2), notamment en atténuant l'hypothèse de convexité des ensembles considérés, faisant apparaître la notion de prox-régularité (cf. sous-section 2.4.1). Cette nouvelle notion s'avère pour nous essentielle, puisque c'est le caractère uniformément prox-régulier de l'ensemble des configurations admissibles (au sens où les disques ne se chevauchent pas) qui permet d'établir, à l'aide de résultats récents [ET05], que le problème d'évolution associé au modèle est bien posé.

Le modèle de mouvements de foule proposé, bien qu'idéalisé par la représentation somme toute simpliste des individus, offre la possibilité de retrouver certains phénomènes observés lors de déplacements piétonniers et jugés importants par les modélisateurs (cf. section 6.1). De plus, les études théorique et numérique de ce modèle ont permis d'établir des liens entre des notions mathématiques abstraites et des comportements numériques observés dans les milieux granulaires. En effet, le concept théorique de prox-régularité (propriété de l'ensemble des configurations admissibles) est relié, dans le présent travail, aux caractéristiques géométriques réelles de la structure formée par les amas de disques (pouvant représenter des grains ou des individus). Or la géométrie de ce réseau a un rapport direct avec la non-unicité des pressions subies par les disques. D'un point de vue mathématique, ces pressions sont formellement des multiplicateurs de Lagrange, qui apparaissent naturellement dans le modèle. Leur non-unicité explique les instabilités numériques des pressions calculées, instabilités qui sont observées dans la réalité, que ce soit dans le milieu granulaire ou piétonnier.

Présentation des travaux effectués

Dans le premier chapitre, nous dressons un bilan des observations des déplacements piétonniers et présentons différentes modélisations existantes de ces derniers. Ensuite, nous décrivons le modèle microscopique de mouvements de foule qui constitue l'objet de cette thèse. Nous proposons d'étudier ce dernier en trois parties.

La première partie constituée des chapitres 2 et 3 est consacrée à l'étude théorique de ce modèle. Dans le chapitre 2, nous obtenons une écriture de ce dernier sous la forme d'un problème d'inclusion différentielle. Ensuite, nous démontrons grâce à la théorie des opérateurs maximaux monotones son caractère bien posé, dans le cas particulier où les individus se déplacent dans un couloir. Puis, nous verrons que cette théorie ne s'applique plus dans le cas d'un déplacement bidimensionnel. Dans le chapitre 3, nous démontrons que notre problème s'inscrit en toute généralité, dans le cadre des processus de rafle par un ensemble uniformément prox-régulier, ce qui grâce aux résultats de J.F. Edmond et L. Thibault ([ET05]), nous permet d'obtenir son caractère bien posé.

La seconde partie est dédiée à la résolution numérique du problème précédent. Dans le chapitre 4, nous proposons un schéma numérique en se basant sur le second principe du modèle, à savoir en calculant une vitesse réelle discrète qui soit la projection de la vitesse souhaitée sur un ensemble de vitesses admissibles « au premier ordre ». Ce choix soulève quelques difficultés puisque le schéma proposé diffère de l'algorithme de rattrapage et sort

du cadre des processus de rafle présenté au chapitre 2. En reformulant cette projection sous la forme d'un problème point-selle, nous démontrons la convergence du schéma par une méthode de compacité, en prouvant le caractère uniformément borné des multiplicateurs de Lagrange.

La troisième partie constituée des chapitres 5 et 6, est consacrée à la programmation et à la présentation des résultats numériques. Dans le chapitre 5, pour programmer le second point du modèle, nous proposons d'utiliser l'algorithme d'Uzawa afin de calculer la vitesse réelle discrète comme projection de la vitesse souhaitée. Nous présentons ce dernier ainsi que des résultats de convergence. Ensuite, nous nous intéressons au premier point du modèle en choisissant une vitesse souhaitée particulière (celle dirigée par le plus court chemin évitant les obstacles). Nous présentons la méthode de type Fast Marching utilisée lors de son calcul. Enfin, nous proposons une programmation orientée objet incluant cette méthode et ayant pour but de simuler l'évacuation d'une structure de plusieurs étages présentant une géométrie quelconque. Dans le chapitre 6, nous proposons différents choix de vitesse souhaitée et présentons les résultats numériques associés. Dans un premier temps, nous verrons que certains choix permettent de retrouver les phénomènes observés lors de déplacements piétonniers décrits dans la sous-section 1.1.3. Ensuite, nous présentons des simulations numériques associées au choix de la vitesse souhaitée dirigée par le plus court chemin. Ces résultats sont issus de la programmation C++ précédemment évoquée. Puis nous présentons un autre choix de vitesse souhaitée prenant également en compte les obstacles. Nous proposons de prendre pour celle-ci la solution d'une équation aux dérivées partielles avec des conditions aux bords sur les obstacles. Ce choix, bien que donnant des résultats raisonnables, ne sera pas utilisé de façon systématique comme le choix du flot géodésique, plus justifié en termes de modélisation. Enfin, nous différencions le comportement des personnes en ajoutant des stratégies individuelles (ralentissement ou contournement lors d'un embouteillage).

La présentation du modèle, son cadre mathématique ainsi que sa discrétisation numérique ont fait l'objet d'un proceeding [MV07]. Le travail de modélisation réalisé pour l'ajout de stratégies individuelles a été présenté dans un autre proceeding [Ven09]. Leur contenu ayant été intégralement repris, développé et réorganisé, ces articles ne sont pas joints au présent document.

Chapitre 1

Différents modèles pour représenter la foule

Sommaire

1.1	Etat de l'art	6
1.1.1	Données empiriques qualitatives et quantitatives	6
1.1.2	Modèles utilisés pour la simulation des mouvements de foule	8
1.1.3	Phénomènes observés dans le trafic piétonnier, effets d'auto-organisation	11
1.1.4	Simulations d'évacuation d'urgence	14
1.2	Description d'un nouveau modèle	18

1.1 Etat de l'art

Dans cette section, après une présentation de quelques données empiriques concernant le flux piétonnier, nous décrivons les modèles de mouvements de foule existants. Puis nous présentons les phénomènes importants observés lors des déplacements de piétons que certains modèles permettent de retrouver. Enfin, nous nous concentrons sur les modèles traitant des situations d'évacuation.

1.1.1 Données empiriques qualitatives et quantitatives

Préférences des marcheurs

Dans [BS90, HM97], sont récapitulées les caractéristiques importantes d'un chemin qui peuvent inciter un piéton à l'emprunter :

- sa longueur (les individus ont tendance à choisir le plus court chemin) ;
- son côté rectiligne (les individus préfèrent suivre une route droite le plus longtemps possible) ;
- le nombre d'attractions qu'il comporte ;
- son confort (protection contre les intempéries, présence d'escalators au lieu d'escaliers, qualité du sol, ...).

Diagramme fondamental

On se place ici dans le cadre d'un flux unidirectionnel non contraint (tous les individus suivent la même direction dans un lieu sans obstacle). La description macroscopique de la foule repose sur trois variables : la densité ρ , la vitesse v et le flux Q vérifiant la relation fondamentale $Q = \rho v$. Comme pour étudier le trafic routier, il est intéressant de tracer le diagramme fondamental, c'est-à-dire de représenter le flux Q du trafic piétonnier en fonction de la densité ρ , afin d'analyser la transition entre régime libre et régime encombré. On dit qu'on se trouve en régime libre (resp. encombré) lorsque la densité est inférieure (resp. supérieure) à ρ_{crit} : densité critique lorsque le flux Q est maximal ($Q = Q_{max}$). On définit alors $u_{crit} = Q_{max}/\rho_{crit}$ et on note par ailleurs ρ_{jam} la densité au dessus de laquelle le flux Q est nul (embouteillage). Dans [Wei93], on trouve les valeurs suivantes pour ces paramètres : $\rho_{crit} = 1.75$ piétons par m^2 , $u_{crit} = 0.7$ $m.s^{-1}$, et $\rho_{jam} = 5.4$ piétons par m^2 .

Vitesse moyenne et densité

D'après [Hen71], dans le cadre d'un flux unidirectionnel, la vitesse moyenne des individus en régime libre suit une loi gaussienne de moyenne 1.34 $m.s^{-1}$ et de d'écart-type 0.26 $m.s^{-1}$. Dans [Daa04], ces paramètres sont recalculés en faisant la moyenne entre toutes les vitesses de marche observées dans un couloir non encombré, ces données provenant de différents pays. La conclusion est que la vitesse en régime libre suit une loi gaussienne de moyenne 1.34 $m.s^{-1}$ et de d'écart-type 0.37 $m.s^{-1}$.

D'après [Wei93], d'autres paramètres influencent cette vitesse moyenne. En effet, cette vitesse dépend :

- de l'âge et du sexe de l'individu concerné (la vitesse moyenne de déplacement des hommes est plus élevée que celle des femmes : 1.41 $m.s^{-1}$ contre 1.27 $m.s^{-1}$) ;
- de la température extérieure (à 25° C, la vitesse moyenne diminue de 8%) ;

- du lieu considéré (par exemple, dans un escalier, la vitesse moyenne en montée est estimée à 0.9 m.s^{-1} alors qu'en descente elle est de 0.7 m.s^{-1}).

D'après [Wei93], la surface occupée par une personne est d'environ 0.15 m^2 . Lorsque les piétons sont dans une phase d'attente, la densité varie entre 2 et 3 individus par m^2 .

De plus, des études ont été menées dans le but de mieux appréhender la relation entre vitesse moyenne et densité. Beaucoup de travaux (par exemple [Fru71, NW69]) ont conclu à une relation linéaire entre vitesse et densité,

$$u = u^0 - \alpha\rho, \quad \alpha > 0.$$

Dans [Wei93], un autre type de relation est toutefois considéré,

$$u = \beta \left[1 - \exp \left(-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{jam}} \right) \right) \right] \text{ avec } \beta, \gamma > 0.$$

La relation entre vitesse et densité a aussi été étudiée dans d'autres situations que celle traitant d'un flux unidirectionnel. Dans [AMH01], se trouvent des informations supplémentaires pour des flux bi-directionnels et multi-directionnels. Par ailleurs, d'autres études [DH03, HD05] ont été menées pour déterminer la conséquence d'un rétrécissement de voies sur la densité et la vitesse des piétons. Dans [DH03, HD05], une telle situation est créée, obligeant des personnes à passer dans un couloir de 5 mètres de long et d'une largeur d'1 mètre, de sorte que deux personnes ne peuvent pas rentrer dans le couloir simultanément (un individu occupe une largeur de 50 centimètres). Les auteurs remarquent que lors des expériences, les gens marchent dans le couloir de manière à réduire l'espace vide comme illustré par la figure 1.1, la densité atteignant alors la valeur de 2.5 piétons par m^2 . D'autre part, la vitesse moyenne à cause du rétrécissement décroît à environ 1 m.s^{-1} . Les auteurs en considérant les trajectoires que suivent les piétons pour rentrer dans un passage étroit (cf. fig 1.2) parlent de *zipper effect*.



FIG. 1.1 – Expérience réalisée dans [DH03, HD05].

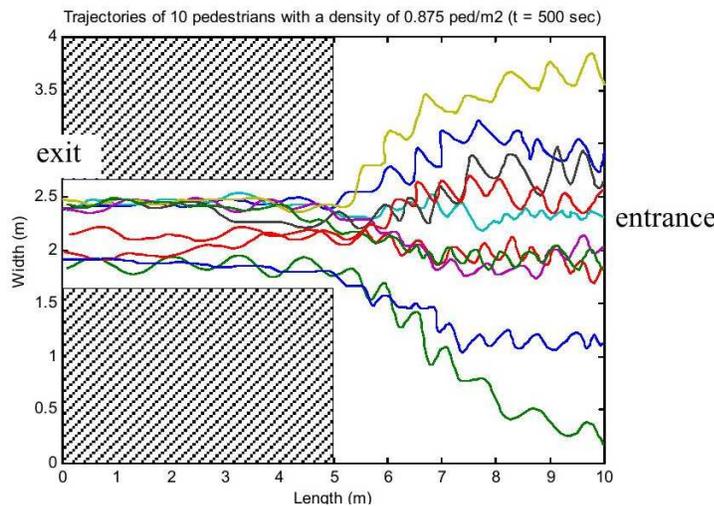


FIG. 1.2 – Trajectoires des individus observées ([DH03]).

1.1.2 Modèles utilisés pour la simulation des mouvements de foule

Modèles utilisant des automates cellulaires

Le premier modèle a été présenté dans [Nag98] et a ensuite été développé lors de nombreux travaux ([BA01, BKSZ01, Sch01, TN01]). Ces modèles sont basés sur une discrétisation spatiale. Plus précisément le sol sur lequel se déplacent les individus, est découpé en carrés. Par exemple, dans [KKWS01, KMKWS00], le côté du carré est fixé à 40 cm. Cette discrétisation spatiale permet de prendre facilement en compte les obstacles avec des cases inaccessibles. En ce qui concerne les autres cases, elles sont soit vides, soit occupées par une seule personne. Bien évidemment, le mouvement des individus s'effectue en respectant cette règle.

Il y a deux manières de déplacer les individus en un pas de temps. La première met les positions des personnes à jour, individu après individu, l'ordre des individus étant aléatoire (*Random Sequential Update*). Ceci facilite la gestion des contacts entre individus puisqu'il s'agit juste de déplacer la personne courante sur une case encore inoccupée (en respectant au mieux son souhait). Cette méthode est par exemple employée dans [KKWS01, KMKWS00] afin de prendre en compte une certaine volonté individuelle de s'affirmer. La deuxième méthode est la mise à jour globale des positions (*Parallel Update*). Si plusieurs personnes veulent arriver à la même case, on tire au hasard un gagnant qui ira sur cette nouvelle case, les autres restant à leurs anciennes positions (cf. [KKN⁺03, KNS03, KS02, SKN03]).

Tout en appliquant ces méthodes (RSU ou PU) de mise à jour des positions, chaque automate cellulaire est caractérisé par les directives de déplacement données à chaque individu. Dans [KKWS01], trois directions possibles (en avant, à gauche et à droite) sont fixées, auxquelles sont associées des probabilités (la probabilité d'aller vers l'avant est choisie plus grande). Autre exemple dans [KMKWS00], les personnes disposent d'une vitesse maximale quantifiée en nombre de cases par pas de temps et dépendant des conditions extérieures (diminution en cas de mauvaise visibilité). À chaque pas de temps, quand c'est leur tour de bouger, elles choisissent une direction optimale, au sens où celle-ci leur per-

met de parcourir le plus de cases possibles vers la sortie. Si aucun mouvement vers l'avant n'est possible, les personnes s'arrêtent et peuvent choisir de contourner après un certain temps. Il est aussi possible que les gens changent soudainement de direction ou s'arrêtent indécis suivant certaines probabilités. Dans [Sti93], des automates cellulaires sont aussi utilisés mais chaque piéton occupe plusieurs cases. Le chemin de toute personne doit satisfaire plusieurs contraintes, par exemple celle de non-collision avec les autres individus ou celle de passer par certaines régions de l'espace et dans un ordre imposé. Ensuite, l'auteur définit le coût d'un chemin pouvant prendre en compte différents paramètres comme sa longueur, l'effort à fournir pour l'emprunter ou son temps de parcours. Finalement, le mouvement des piétons est traité globalement, en minimisant le coût total, somme des coûts des chemins individuels, et cela tout en respectant les contraintes imposées aux chemins. Ce modèle est à la base du logiciel Legion décrit dans le chapitre 5 de la thèse [Sti00].

Modèle de forces sociales

Dans [HM95], un modèle dit de forces sociales (*social force model*) est introduit. Il est à noter qu'un modèle précurseur de ce dernier se trouve dans [GM85]. Le modèle de forces sociales se place au niveau microscopique et propose de décrire les mouvements de foule par un système d'équations différentielles. Plus précisément, le déplacement de l'individu i est régi par une équation du type,

$$\frac{d\mathbf{w}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i(t),$$

où \mathbf{w}_i est la vitesse dite préférée de la personne i et $\mathbf{F}_i(t)$ est la somme des forces s'exerçant sur l'individu i au temps t . Les forces mises en jeu sont des accélérations et des décélérations dues aux diverses réactions des individus quand ils perçoivent leur environnement (autres individus et obstacles). Plus précisément, quatre forces différentes composent le second membre $\mathbf{F}_i(t)$: deux forces de répulsion avec les autres individus et les obstacles, une force d'attraction (vers un endroit stratégique ou une personne intéressante) et un terme d'accélération du type

$$\frac{v_i^0 \mathbf{e}_i(t) - \mathbf{w}_i(t)}{\tau_i},$$

où $\mathbf{e}_i(t)$ est la direction souhaitée (vers la destination), v_i^0 l'allure souhaitée et τ_i un certain temps de relaxation. Ensuite, les auteurs tronquent la vitesse précédente pour obtenir la vitesse souhaitée de la personne i : $\mathbf{v}_i(t)$ est définie par

$$\mathbf{v}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{w}_i(t) & \text{si } |\mathbf{w}_i(t)| \leq v_i^{max} \\ v_i^{max} \frac{\mathbf{w}_i(t)}{|\mathbf{w}_i(t)|} & \text{sinon} \end{cases}$$

où v_i^{max} est la norme maximale de la vitesse de la personne i .

Modèles utilisant des graphes

Ces modèles représentent le sol avec des graphes. Plus précisément, les individus peuvent se déplacer sur des noeuds qui sont reliés par des arêtes orientées. Cette discrétisation

gère intrinsèquement la présence d'obstacles. Ensuite, il reste à déterminer les chemins que vont prendre les piétons, on parle alors de *Route choice model*. De nombreuses possibilités existent. Dans [BT86a, BT86b, BS90] par exemple, les chemins possibles considérés sont les plus courts chemins entre les noeuds de départ et d'arrivée. Dans [Gip86], les chemins potentiels ne sont pas déterminés dans leur intégralité mais des destinations intermédiaires sont d'abord générées en fonction de l'origine et de la destination finale du trajet puis des sous-chemins possibles entre ces étapes intermédiaires sont déterminés. Beaucoup d'algorithmes existent pour calculer ces plus courts chemins (pour plus de détails voir [Daa04]). Dans [GGLF01], l'encombrement et les conditions extérieures (présence de fumée) sont prises en compte en pondérant les arêtes. Cette méthode est à la base du logiciel buildingEXODUS et de ses dérivés maritimeEXODUS et airEXODUS. D'autres modèles utilisant des files d'attente [Løv94, YS89] (*Queuing models*) sont également basés sur des graphes. Dans ces modèles, une loi de probabilité est définie pour gérer l'arrivée des individus (par exemple une loi de Poisson). Ensuite, pour prendre en compte les files d'attente grandissantes lorsque la demande du trafic piétonnier est plus grande que la capacité de la porte, des temps d'attente aléatoires pondèrent les arêtes du réseau représentant les portes.

Modèles macroscopiques

Dans [Hen74], pour la première fois la dynamique du trafic piétonnier est comparée à celle d'un fluide. Ensuite, de nombreux modèles assimilant la foule à un fluide ont été proposés. Certains de ces modèles [Hel92a, Hel92b, Hen71, Hen74, HB00] se basent sur la théorie cinétique des gaz, pour dans un premier temps, décrire la dynamique de la fonction distribution des vitesses. Dans [Hen71], le modèle de type fluide est obtenu en partant des équations de type Maxwell-Boltzmann et en supposant la conservation du moment et de l'énergie alors que dans [Hel92b], ces hypothèses de conservation ne sont plus faites. D'autres modèles macroscopiques (qui ne se basent pas sur la théorie cinétique des gaz) sont proposés. Dans [Hug00, Hug02], plusieurs types d'individus sont considérés et leur dynamique est décrite par un ensemble d'équations aux dérivées partielles couplées, qui traduisent la « conservation des piétons ». La vitesse d'un individu est définie comme une fonction de sa position et elle est déterminée de sorte que son temps de trajet soit minimal. Les régimes libre et encombré peuvent être observés dans des zones différentes, la transition pouvant causer une onde de choc. Dans [HB04b], cette idée est reprise pour définir la vitesse des individus et d'autres facteurs à minimiser sont ajoutés. Une fonctionnelle de coût contenant plusieurs termes mettant en jeu le temps de trajet mais aussi la distance aux obstacles (pour pénaliser la proximité avec ceux-ci), l'énergie cinétique (pour établir un compromis entre le temps restant et les efforts à fournir) est définie. Un terme dépendant de la densité des individus (pour éviter les engorgements) et un autre pour traduire les effets stimulants de l'environnement (présence de magasins, ...) sont aussi ajoutés. Dans [HB04a], un modèle macroscopique stochastique est proposé. Les individus sont distingués selon leur zone de destination. Une fonctionnelle à minimiser est encore définie mais la présence d'obstacles est gérée autrement. Un ensemble de vitesses admissibles est introduit afin de prendre les obstacles en compte (en un point de l'obstacle, les directions des vitesses qui rentrent dans l'obstacle sont interdites) et les normes

des vitesses admissibles sont choisies dépendant linéairement de la densité. La vitesse des individus est la vitesse admissible qui réalise le minimum de cette fonctionnelle.

Remarque 1.1 *Nous attirons ici l'attention sur le fait que ces modèles ne traitent pas globalement la foule mais distinguent les individus selon leurs vitesses ou leurs destinations. Dans les modèles type Route choice models, quels que soient les critères choisis pour déterminer les chemins potentiels, seul un nombre fini de possibilités existe. Dans les modèles [HB04a, HB04b, Hug00, Hug02], l'absence de discrétisation permet de dépasser ces limitations.*

1.1.3 Phénomènes observés dans le trafic piétonnier, effets d'auto-organisation

De nombreux travaux [Bat97, Hel04, HM97, HMFB01, HV99] récapitulent les phénomènes observés dans le trafic piétonnier et que retrouvent certains modèles.

Formation de files lorsque deux groupes d'individus marchent en sens opposé

Quand deux groupes d'individus, marchant en sens opposé, se croisent, le flux piétonnier s'organise pour minimiser les interactions entre les individus qui n'ont pas la même destination. Pour cela, il se divise en plusieurs voies constituées de personnes allant dans le même sens. La figure 1.3 illustre bien cet enchevêtrement de voies au sens de parcours différent (*fingering pattern*) de sorte que les personnes ayant la même direction se suivent à la file. Dans [HM95], des résultats numériques associés au modèle de forces so-



FIG. 1.3 – Observation de files à contre-courant.

ciales retrouvent ce phénomène de séparation de flux. Dans une allée large de 10 m se forment 4 ou 5 files pour une densité de personnes de 0.3 piétons par m^2 (cf. fig. 1.4), et ce nombre de voies semble croître linéairement en fonction de la largeur du chemin. Dans [HV99], cet état optimal associé à ces interactions minimales trouve une justification grâce à l'introduction d'une fonction de type entropie dans un cadre macroscopique. On retrouve aussi ce phénomène avec des modèles basés sur des automates cellulaires [BA01, BKSZ01, KKWS01, KS02, SKN03] (cf. fig. 1.5). Dans [HFV00a], le modèle

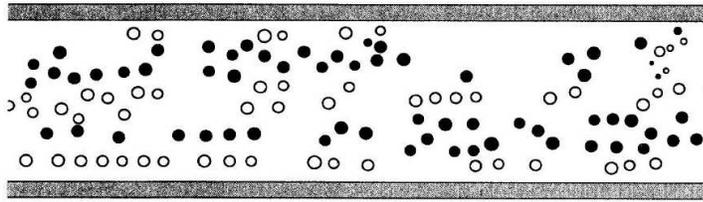


FIG. 1.4 – Résultats numériques issus de [HM95].

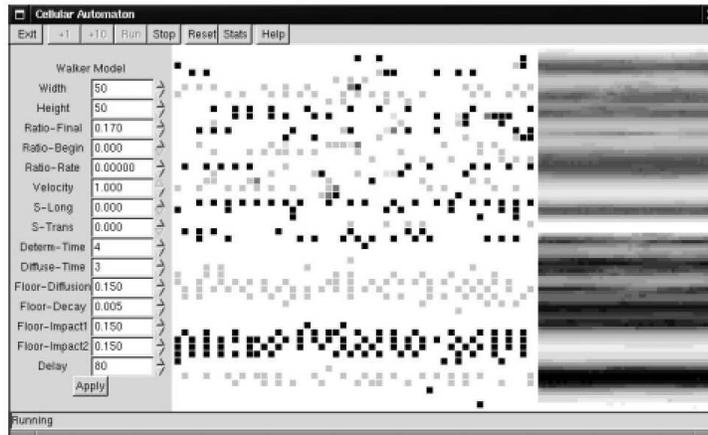


FIG. 1.5 – Résultats numériques issus de [SKN03].

de forces sociales est réutilisé pour simuler à nouveau la rencontre de deux groupes de piétons se déplaçant en sens opposé. Mais aux différentes forces d'attraction et de répulsion déjà détaillées dans la sous-section 1.1.2, ils ajoutent un terme stochastique pour créer des fluctuations au niveau des vitesses des individus. Les auteurs remarquent que si ce terme devient trop important, la formation de files n'a plus lieu et les individus se bloquent indéfiniment en formant un réseau cristallin. Cette transition est connue sous le nom de *freezing by heating*.

Formes possibles du regroupement piétonnier en amont d'un passage étroit

De nombreuses études ont été menées pour mieux appréhender le comportement des piétons lors d'un rétrécissement de voie (passage d'une porte par exemple). La forme de regroupement des individus en amont du passage étroit est tout à fait différente suivant la situation considérée, normale ou d'évacuation d'urgence. Dans [HD05], des expériences ont été menées pour observer l'espace occupé en amont d'un rétrécissement de voie par des piétons évoluant dans un trafic normal. Les détails et résultats de ces expériences ont été précisés à la sous-section 1.1.1 (cf figs 1.1 et 1.2). Cette région prend, d'après ces travaux, la forme d'une moitié d'ellipse (dont le grand-axe est parallèle au couloir). D'après [Bol98], la forme optimale d'un rétrécissement de voie est convexe (cf. figure 1.6). La situation semble tout autre lors d'une évacuation d'urgence. Dans ce cas, d'après [HFV00b], une zone d'engorgement se crée en amont de la sortie, zone dans laquelle les gens se regroupent en formant un demi-disque (centré en la sortie). Nous verrons

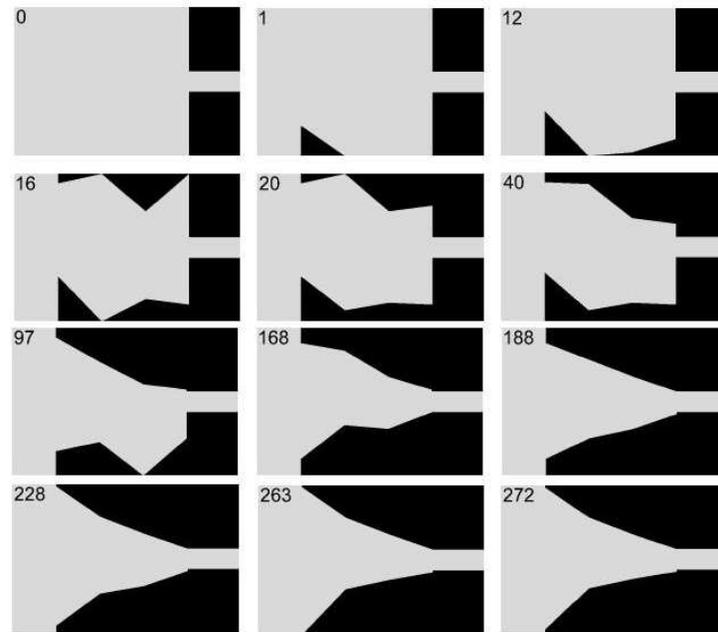


FIG. 1.6 – Différentes phases d'une optimisation d'un rétrécissement de voie.

dans la sous-section 1.1.4 que le modèle de forces sociales adapté [HFV00b] et les modèles utilisant des automates cellulaires [KS02, SKN03] permettent de retrouver ces arches (cf. figs 1.9 et 1.10). D'après [HFV00b], il est très important d'identifier les zones où ces arcs se dessinent, puisqu'elles sont caractéristiques des lieux d'engorgement où apparaissent de fortes pressions.

Formation de réseaux piétonniers dans les espaces verts

Lorsque les individus laissent des empreintes sur le sol, des chemins se forment et seules quelques zones sont finalement utilisées. Ces chemins évoluent au cours du temps puisque les piétons peuvent délaisser une route toute tracée s'ils estiment que celle-ci fait de trop grands détours. Ils prennent alors leur propre chemin si la qualité du sol est acceptable. Sur la figure 1.7 issue de [HKM97], deux formes de réseaux composés de trois chemins sont observables. Le premier réseau comporte trois routes assez larges qui se rejoignent en formant un chemin « triangulaire » alors que dans le second réseau, l'intersection des trois voies est quasi-ponctuelle. Dans [HKM97, HSKM97], un modèle (inspiré du modèle de forces sociales) est proposé dans le but de retrouver l'évolution du système de chemins empruntés par les hommes. Pour cela, ils définissent un potentiel afin de traduire l'attractivité des chemins. Plus un chemin est emprunté, plus il devient confortable (disparition de la végétation). Ensuite, la direction d'un piéton est choisie dépendante de la destination et des chemins existants. Pour faire un compromis entre le plus court chemin et le confort des routes déjà tracées, ils calculent la moyenne entre direction souhaitée et le gradient du potentiel précédemment défini. Suivant les valeurs prises par les paramètres du potentiel, les auteurs retrouvent numériquement les deux types de jonctions observés précédemment (cf. figure 1.8).



FIG. 1.7 – Réseau piétonnier observé dans le campus de Stuttgart-Vaihingen ([HSKM97]).

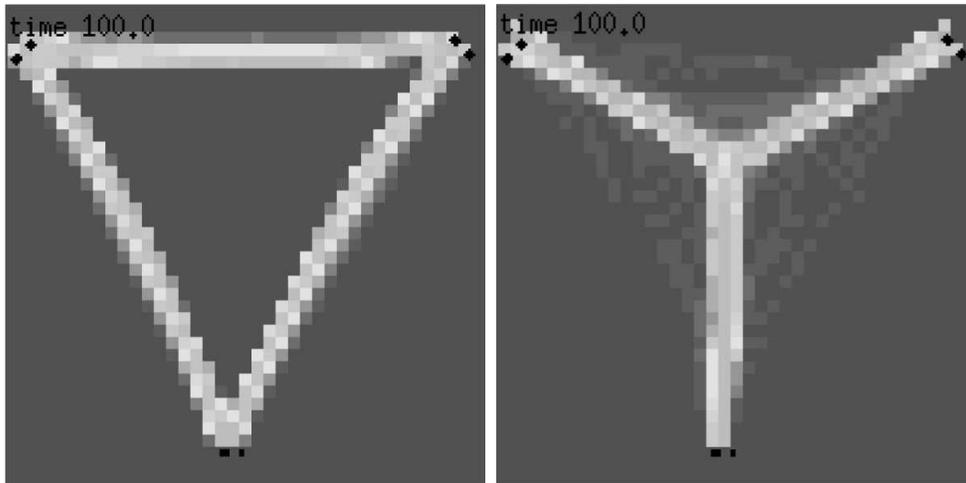


FIG. 1.8 – Résultats numériques issus de [HSKM97].

1.1.4 Simulations d'évacuation d'urgence

Beaucoup de modèles ont été proposés pour traiter de telles situations d'évacuation. Commençons par détailler celui qui ne repose sur aucune discrétisation spatiale : le modèle de forces sociales adapté présenté dans [HFV00b]. Comme dans [HM95], le déplacement des personnes est régi par un système d'équations différentielles mettant en jeu des forces d'interactions avec les autres individus et avec les obstacles, auxquelles ils ajoutent une force de friction tangentielle entre les personnes. De plus, les auteurs souhaitent aussi modéliser la perte de patience des individus causés par de longs temps d'attente. Pour cela, ils introduisent un paramètre $\eta_i(t)$, représentant le taux d'impatience à l'instant t , défini par

$$\eta_i(t) = 1 - \frac{\overline{v}_i(t)}{v_i^0},$$

où $\bar{v}_i(t)$ est la vitesse réelle moyenne dans la direction souhaitée de la personne i et v_i^0 est la vitesse souhaitée initialement dans cette même direction. Le terme vitesse signifie l'allure, la norme du vecteur vitesse. Ce taux modifie la vitesse souhaitée à l'instant t , selon

$$v_i^0(t) = [1 - \eta_i(t)]v_i^0 + \eta_i(t)v_i^{max}.$$

Un cas numérique traite de l'évacuation de 200 personnes d'une pièce sans obstacle avec une unique porte de sortie (d'une largeur d'un mètre). Les rayons ont été pris distincts pour ne pas faire apparaître de configurations cristallines. Lors des simulations, les auteurs remarquent qu'au début, plus la vitesse souhaitée v_i^0 augmente, meilleur est le temps de sortie T des 200 personnes. Mais, dès que v_i^0 dépasse une certaine valeur (1.5 m.s^{-1}), des blocages au niveau de la porte apparaissent : pendant quelques secondes, aucune personne ne sort (cf. fig 1.9). Et finalement le temps T augmente. Les auteurs parlent de *faster-*

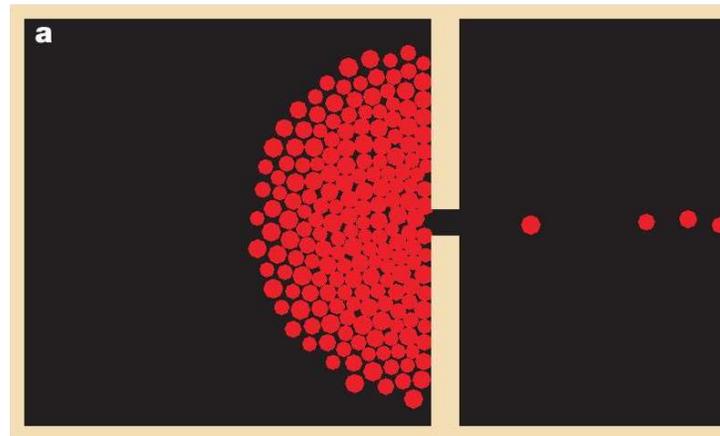


FIG. 1.9 – Résultats numériques issus de [HFV00b].

is-slower effect : quand les personnes perdent patience, leur vitesse souhaitée augmente, ce qui accroît les forces de friction. Enfin, si v_i^0 dépasse 5 m.s^{-1} , des personnes sont blessées et deviennent des obstacles passifs pour les autres. Les auteurs considèrent que des individus se retrouvent ainsi immobilisés si la somme des amplitudes des forces radiales divisée par leur circonférence dépasse une pression de 1600 N.m^{-1} . En dernier lieu, les auteurs veulent modéliser le comportement de masse, qui crée une fâcheuse tendance à ne pas utiliser toutes les sorties disponibles, en faisant dépendre la direction souhaitée de la personne i de la direction moyenne de ses voisins se trouvant à une certaine distance. Si cette dépendance est faible, des comportements individualistes en résultent, sinon c'est un comportement moutonnier qui apparaît. Les auteurs ont appliqué ceci au cas de 90 personnes présentes dans une salle enfumée (sans obstacle) qui dispose de deux sorties. Le meilleur temps d'évacuation est obtenu quand on combine les deux comportements : quelques personnes repèrent les sorties et les autres les suivent. Dans le cas d'un individualisme pur, les personnes partent dans des directions opposées et se gênent mutuellement, alors qu'un comportement de masse conduit à l'utilisation d'une unique sortie. Nous passons maintenant aux modèles utilisant une discrétisation spatiale en débutant par les modèles basés sur des automates cellulaires. Avec le modèle présenté dans [KMKWS00]

et détaillé dans la sous-section 1.1.2, plusieurs simulations d'évacuations d'urgence ont été effectuées dans différents lieux : dans une école primaire [KMKS01], dans un navire [KMKWS00, MKKKS01]. Les auteurs comparent leurs résultats numériques avec leurs données expérimentales. Dans [KMKS01], le temps d'évacuation numérique est inférieur à celui observé lors des expériences. Les auteurs expliquent cela par le fait que les élèves connaissent bien les lieux et obéissent à leur maîtresse, ce qui a tendance à optimiser le temps d'évacuation. De plus, les meubles dans les salles de cours ne sont pas pris en compte alors que leur présence a pour effet d'améliorer la fluidité des groupes. Dans [HINT03], les tables dans les salles de classe n'étant pas négligées, les résultats obtenus par simulation coïncident mieux avec les résultats expérimentaux.

Dans [KMKWS00] qui traite de l'évacuation d'un navire, le temps de sortie de la première personne est bien approché mais celui de la dernière (et donc le temps d'évacuation) est assez éloigné des résultats expérimentaux. Ces résultats sont améliorés dans [MKKKS01] grâce à quelques modifications. D'une part, le mouvement du bateau est pris en compte en utilisant un facteur de réduction de vitesse des individus (dépendant de l'accélération du navire). D'autre part, les déplacements des gens sont mieux appréhendés et sont rendus dépendant des conditions extérieures. Par exemple, lorsque les conditions de visibilité sont bonnes, les personnes traversant un corridor ne rasant pas les murs dans le modèle, quand elles savent qu'elles tournent au bout du couloir. En revanche, en cas de mauvaise visibilité, les personnes auront tendance à longer ces derniers.

Un autre modèle d'automates cellulaires est utilisé pour simuler l'évacuation d'une salle [KS02] ou d'un avion [KKN⁺03]. Dans ce modèle, les piétons peuvent se déplacer sur 4 cases (en haut, en bas, à gauche, à droite) suivant des probabilités de transition qui dépendent de deux champs, statique noté S et dynamique noté D . Le premier indépendant du temps caractérise l'attractivité d'une zone. Dans le cadre d'une évacuation, chaque case a une valeur de S qui dépend de sa distance à la sortie. Plus celle-ci est petite, plus la valeur est grande. Le second champ D varie en fonction du temps et représente en quelque sorte une trace virtuelle laissée par les piétons. Cette méthode s'inspire des automates cellulaires modélisant les déplacements de fourmis. Ces dernières déposent des phéromones pour que leurs congénères puissent les suivre (pour plus de détails voir [SKN03]). À l'instant initial, le champ D est nul sur toutes les cases et dès qu'un piéton arrive sur une case, il augmente la valeur de D de 1 pour celle-ci. D'autre part, le champ D diffuse selon la probabilité α et se détériore selon la probabilité δ . Finalement, la probabilité de transition pour aller sur la case (i, j) est calculée comme suit,

$$p_{ij} = N \exp(k_D D_{ij}) \exp(k_S S_{ij}) \xi_{ij},$$

avec $k_D, k_S > 0$ et où ξ_{ij} vaut 0 si la case est occupée (par une autre personne ou un obstacle) et 1 sinon. Le réel N est un facteur de renormalisation. Le paramètre k_S mesure en quelque sorte la connaissance de la localisation de la sortie par les individus, alors que le paramètre k_D évalue la tendance des personnes à suivre les autres. En faisant varier ces deux éléments, les auteurs s'aperçoivent que le temps d'évacuation est minimal lorsque ces derniers sont du même ordre de grandeur, ce qui coïncide avec les résultats présentés dans [HFV00b] (même type d'expériences dans une pièce présentant deux sorties). De plus, les auteurs de [KS02, SKN03] retrouvent aussi le phénomène de formation d'arches (cf. fig 1.10). Dans [KNS03], les auteurs utilisent le modèle décrit précédemment avec

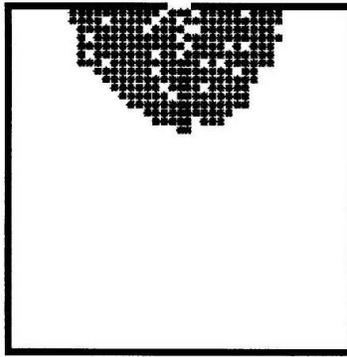


FIG. 1.10 – Résultats numériques issus de [SKN03].

une méthode de mise à jour parallèle des positions. Pour insister sur la compétition entre individus, ils introduisent, lorsque les personnes essaient d'atteindre la même case, un paramètre de friction qui est la probabilité que tout le monde reste à sa place. D'autres modèles utilisant des graphes orientés [BT86a, BT86b, Løv94, YS89] et déjà détaillés dans la sous-section 1.1.2 sont aussi employés pour simuler des situations d'évacuation. Toutefois, d'après [HMFB01], ces modèles ne permettent pas de retrouver les phénomènes de formations d'arches précédemment évoqués.

Remarque 1.2 *Dans le cas d'une évacuation d'urgence, il est beaucoup plus difficile de comparer les résultats numériques à des données réelles quasiment inexistantes. De plus, recréer la panique lors d'une expérience avec des personnes volontaires n'est pas non plus chose aisée puisque bien évidemment il n'est pas question que des gens se blessent lors de ces tests. Dans [MBM96], deux expériences d'évacuation d'un avion ont été menées avec 60 personnes environ. Dans la première expérience, on demandait aux gens de sortir rapidement, dans la seconde, on donnait de l'argent aux 30 premiers sortis. La largeur de la porte de sortie était inférieure à 70 cm. Le temps d'évacuation dans le premier cas s'est avéré bien inférieur à celui mesuré dans le second : la surmotivation de tous les individus est donc contre-productive. On s'attend à retrouver ce problème lors de situations d'évacuation d'urgence.*

Ceci termine la présentation des modèles employés pour simuler des situations d'évacuation d'urgence. Ces derniers utilisent donc différentes méthodes de gestion des contacts. Dans le modèle de forces sociales, les contacts entre les individus sont gérés à l'aide de forces de répulsion, choisies très singulières, ce qui impose de fortes contraintes sur le pas de temps utilisé lors de la résolution des équations différentielles. Les modèles les plus souvent utilisés (car moins coûteux en temps de calcul) sont les modèles basés sur une discrétisation spatiale (automates cellulaires ou graphes orientés). Toutefois, ces derniers qui ne gèrent pas directement les contacts entre les individus ne rendent pas véritablement compte des fortes interactions locales qui peuvent apparaître entre les piétons. Nous décrivons maintenant le modèle qui fait l'objet du présent travail.

1.2 Description d'un nouveau modèle

Nous proposons un modèle microscopique de mouvements de foule ayant pour principal objectif de simuler des situations de configurations denses typiques des cas d'urgence. Ce modèle repose sur deux principes :

1. chaque personne a une vitesse souhaitée, celle qu'elle aurait en l'absence des autres ;
2. la vitesse réelle des individus doit prendre en compte une certaine contrainte d'encombrement maximal. Plus précisément, les personnes identifiées à des disques rigides, doivent respecter une contrainte de non-chevauchement.

Dans notre modèle, la vitesse réelle est la projection de la vitesse souhaitée sur un ensemble de vitesses admissibles (respectant la contrainte de non-chevauchement). Ce dernier point permet de traiter directement les contacts entre les individus.

Pour préciser ces deux principes, nous introduisons quelques notations. Nous considérons N personnes assimilées à des disques rigides et évoluant dans un espace bidimensionnel pouvant contenir des obstacles. La personne i est représentée par le disque de centre $\mathbf{q}_i = (q_i^x, q_i^y) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r_i . Quant aux obstacles présents (murs, tables, ...), ils sont modélisés par un ensemble de segments. Ainsi, cette représentation fournit en quelque sorte une vue de dessus de la pièce (cf. fig. 1.11).

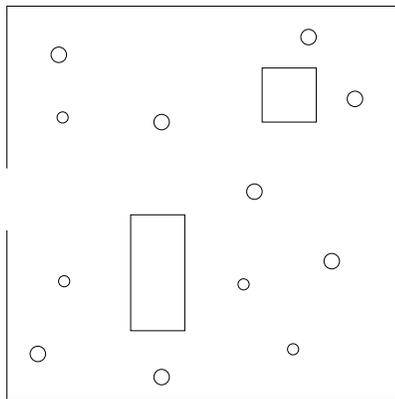


FIG. 1.11 – Représentation de la situation.

La configuration des N piétons est donnée par le vecteur position $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ (espace muni de la norme euclidienne). On note D_{ij} la distance relative entre les personnes i et j (cf fig.1.12).

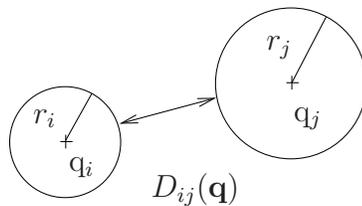


FIG. 1.12 – Notations.

Vitesse souhaitée

Le premier point du modèle consiste à choisir une vitesse souhaitée pour les individus. Ce choix est très important puisque cette vitesse contient toutes les informations sur le comportement des piétons. Elle doit traduire dans quelle mesure la géométrie des lieux et la présence d'autres personnes influencent les déplacements d'un individu. D'une part, la vitesse souhaitée d'un piéton dépend du lieu où ce dernier évolue. Il est par exemple essentiel de prendre en compte les obstacles présents dans une pièce et de préciser comment les piétons vont vouloir les contourner. La vitesse souhaitée d'un individu est ainsi dépendante de sa propre position dans la pièce. Pour décrire ce fait, il existe de nombreuses possibilités. Cette vitesse souhaitée peut par exemple être construite à la main, et pour traduire la présence d'un panneau de sortie, on peut donner des directions privilégiées à celle-ci. On peut aussi chercher à définir cette dernière de manière systématique dès que la géométrie est donnée. Nous avons par exemple choisi (cf. section 5.2) de prendre comme vitesse souhaitée pour toutes les personnes la vitesse dirigée par le plus court chemin vers une sortie, qui évite bien entendu les obstacles (la norme de la vitesse étant fixée).

D'autre part, la vitesse souhaitée d'un individu peut aussi dépendre de la présence des autres piétons. Lorsque plusieurs chemins sont possibles, les personnes pressées ont souvent tendance à emprunter le chemin le moins embouteillé. Il est tout à fait envisageable de distinguer les piétons en les munissant de différentes stratégies en cas de situation engorgée (cf. section 6.4). Toutefois, on prendra garde au fait que lors d'une évacuation d'urgence, les personnes en proie à la panique ne développent pas en général de stratégies individuelles. Nous proposons d'autres choix dans le chapitre 6, mais toute alternative est possible, par exemple en s'inspirant des résultats obtenus lors d'études menées sur le comportement piétonnier.

Supposons que la vitesse souhaitée des individus est choisie. On définit $U_i(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2$, la vitesse souhaitée de la personne i , dépendant potentiellement de la configuration globale \mathbf{q} . Le vecteur vitesse des N personnes est noté

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}) = (U_1(\mathbf{q}), \dots, U_N(\mathbf{q})).$$

Vitesse réelle

Il reste à préciser le second point du modèle qui permet de gérer les contacts entre les piétons. Dans une situation d'évacuation, mettant en jeu un grand nombre d'individus, les personnes finissent par se gêner mutuellement et ne peuvent avancer avec leur vitesse souhaitée. Dès qu'il y a contact entre les personnes i et j , la vitesse effective ne peut qu'augmenter (au sens large) la distance entre elles. C'est pourquoi, on introduit un ensemble de vitesses dites admissibles, défini comme suit,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \nabla D_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \}.$$

Dans le modèle, la vitesse réelle \mathbf{u} est la projection euclidienne de la vitesse souhaitée \mathbf{U} sur l'ensemble des vitesses admissibles $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ (convexe fermé). Le modèle s'écrit donc finalement :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = P_{\mathcal{C}_{\mathbf{q}}} \mathbf{U}.$$

Ce modèle permet aussi d'empêcher les personnes poussées vers les obstacles de les traverser. En effet, les contacts entre les individus et les obstacles sont gérés numériquement

de la même manière que les contacts entre piétons.

Malgré la simplicité apparente de ce modèle, nous n'avons pas trouvé dans la littérature de cadre théorique qui permette d'en attester immédiatement le caractère bien posé. Sur le plan numérique également, aucun schéma standard ne s'impose. Ces considérations théoriques et numériques font l'objet des parties I et II. Nous reverrons dans la partie III, des considérations plus proches de la modélisation et des aspects de programmation effective.

Première partie

Aspects théoriques

Chapitre 2

Cadre mathématique et résultats

Sommaire

2.1	Reformulation	24
2.2	Cas particulier : déplacement dans un couloir	28
2.3	Problèmes rencontrés lors de la généralisation	31
2.4	Cadre mathématique	33
2.4.1	Notion de prox-régularité	33
2.4.2	Processus de rafle	37

Dans ce chapitre, nous commençons l'étude mathématique du modèle présenté à la section 1.2. Après reformulation, nous verrons que le problème prend la forme d'une inclusion différentielle. Dans un premier temps, nous prouvons le caractère bien posé de ce problème dans un cas particulier où les N individus sont contraints à se déplacer dans un couloir. Ensuite, nous expliquons les difficultés soulevées par la généralisation au déplacement bidimensionnel. Enfin, nous précisons le cadre mathématique général dans lequel le problème d'inclusion différentielle se situe, avant d'appliquer les résultats théoriques associés.

2.1 Reformulation

Nous rappelons brièvement les notations introduites à la section 1.2 et nous en introduisons de nouvelles. La configuration des N personnes assimilées à des disques rigides est donnée par le vecteur position $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N}$. L'espace \mathbb{R}^{2N} est muni de sa norme euclidienne,

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |q_i|^2}, \text{ où } |q_i|^2 = (q_i^x)^2 + (q_i^y)^2.$$

Le produit scalaire associé de 2 vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} de \mathbb{R}^{2N} est noté $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. On définit pour $i < j$ sur \mathbb{R}^{2N} , la fonction D_{ij} , distance relative entre les personnes i et j , de la manière suivante,

$$D_{ij}(\mathbf{q}) = |q_i - q_j| - (r_i + r_j).$$

La nullité de cette fonction caractérise donc le contact entre ces deux personnes. Une configuration est dite admissible si les distances relatives entre toute paire d'individus sont positives. L'ensemble de ces configurations s'écrit donc de la manière suivante,

Définition 2.1 (Ensemble de configurations admissibles)

$$Q_0 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) \geq 0\}.$$

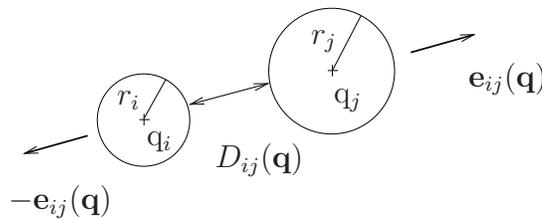


FIG. 2.1 – Notations.

De plus, pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$, on définit (cf. fig. 2.1) le vecteur unitaire $\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q})$ se dirigeant de la personne i vers la personne j , comme suit,

$$\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{q_j - q_i}{|q_j - q_i|}.$$

Ceci nous permet de préciser l'expression du vecteur $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$, gradient de la fonction D_{ij} au point \mathbf{q} :

$$\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \nabla D_{ij}(\mathbf{q}) = (0, \dots, 0, \underset{i}{-e_{ij}(\mathbf{q})}, 0, \dots, 0, \underset{j}{e_{ij}(\mathbf{q})}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Le vecteur vitesse souhaitée des N personnes est noté $\mathbf{U}(\mathbf{q}) = (U_1(\mathbf{q}), \dots, U_N(\mathbf{q}))$. Pour définir la vitesse réelle, on introduit un ensemble de vitesses dites admissibles.

Définition 2.2 (Ensemble de vitesses admissibles)

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \}.$$

Propriété 2.3 $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ est un cône convexe fermé non vide de sommet 0.

Dans le modèle, la vitesse réelle \mathbf{u} des N individus est la projection euclidienne de la vitesse souhaitée \mathbf{U} sur l'ensemble des vitesses admissibles $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. Le modèle s'écrit donc finalement :

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \int \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} = P_{\mathcal{C}_{\mathbf{q}}} \mathbf{U}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Remarque 2.4 Cette écriture assez simple sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre masque certaines difficultés. L'ensemble $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ ne dépend pas continûment de \mathbf{q} . En effet, lorsque la configuration \mathbf{q} ne présente aucun contact, l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ est l'espace \mathbb{R}^{2N} (il n'y a aucune contrainte sur la vitesse). Mais dès qu'apparaît un contact, cet ensemble se transforme en un demi-espace.

Pour préciser le cadre mathématique dans lequel ce problème se situe, une reformulation de (2.1) est nécessaire. On introduit pour $\mathbf{q} \in Q_0$, le cône $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$, cône polaire de $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ qu'on appelle cône normal sortant au point \mathbf{q} . On expliquera cette dénomination lors de la remarque 2.7.

Définition 2.5 (Cône normal sortant)

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \leq 0 \}.$$

Grâce au lemme de Farkas (lemme B.1 p. 146), l'expression du cône $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ peut être précisée.

Proposition 2.6

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \left\{ - \sum_{i < j} \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \mu_{ij} \geq 0, \mu_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \right\}.$$

Démonstration :

Ce résultat est effectivement une conséquence directe du lemme de Farkas. Toutefois, on présente ici une autre preuve qui s'appuie sur la notion de cône polaire (cf. Annexe C p. 149). On définit $I_{\text{contact}} = \{(i, j), i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) = 0\}$. Le fait qu'un vecteur \mathbf{v} appartienne à $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ est équivalent à la propriété suivante,

$$\forall (i, j) \in I_{\text{contact}}, \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0.$$

Ceci équivaut aussi à

$$\forall \mu_{ij} \geq 0, \sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0.$$

Si on définit

$$F_{\mathbf{q}} = \left\{ - \sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \mu_{ij} \geq 0 \right\},$$

on vient de montrer que $\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = F_{\mathbf{q}}^{\circ}$. Comme $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ est un cône convexe fermé de sommet 0, on sait d'après la proposition C.4 p. 151 que $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}^{\circ\circ} = \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. Par conséquent,

$$F_{\mathbf{q}}^{\circ} = \mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \mathcal{C}_{\mathbf{q}}^{\circ\circ} = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{\circ}.$$

Ainsi, $F_{\mathbf{q}}^{\circ\circ} = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{\circ\circ}$. Toujours grâce à la proposition C.4, on obtient que $F_{\mathbf{q}} = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}$. \square

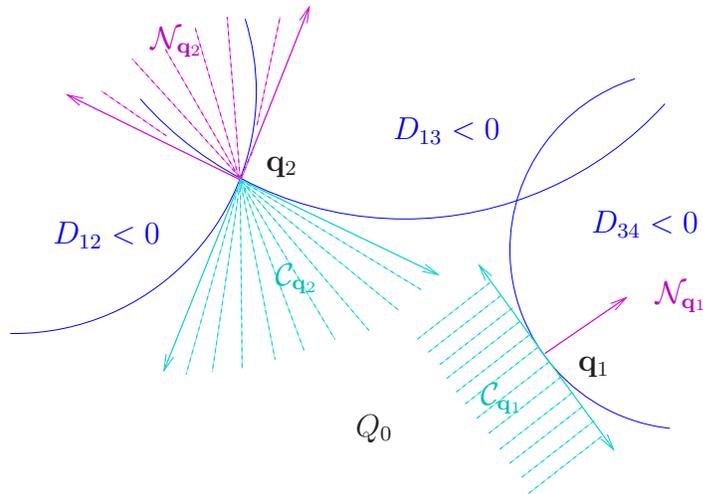


FIG. 2.2 – Cônes $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ et $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$.

Remarque 2.7 (Appellation cône normal sortant)

Sur la figure 2.2, on a schématisé l'ensemble $Q_0 \subset \mathbb{R}^{2N}$ qui par définition (définition 2.1 p. 24) est une intersection de complémentaires de convexes. Sur cette figure, sont représentées deux configurations admissibles \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 de Q_0 , affichant respectivement un et

deux contacts. On remarque que dans le cas d'un unique contact, le cône $\mathcal{N}_{\mathbf{q}_1}$ est engendré par la normale sortante au domaine d'équation $D_{34} \geq 0$, qui est le vecteur $-\mathbf{G}_{34}(\mathbf{q}_1)$ renormalisé. Dans le cas de deux contacts (ou plus), la configuration \mathbf{q}_2 est un point où la surface est non lisse et le cône $\mathcal{N}_{\mathbf{q}_2}$ (engendré par $-\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}_2)$ et $-\mathbf{G}_{13}(\mathbf{q}_2)$) étend en quelque sorte la notion de direction normale sortante.

Réécrivons maintenant le système (2.1). Grâce à la proposition C.3 p. 150, on peut exprimer la projection sur $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ en fonction de la projection sur $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$. On obtient ainsi que

$$\mathbf{u} = P_{\mathcal{C}_{\mathbf{q}}}\mathbf{U} = \mathbf{U} - P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}\mathbf{U}.$$

Par conséquent, le système (2.1) devient

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}\mathbf{U}(\mathbf{q}) = \mathbf{U}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases} \quad (\text{E}_1)$$

En écrivant que $P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}\mathbf{U} \in \mathcal{N}_{\mathbf{q}}$, on obtient la relation suivante entre vitesse réelle et vitesse souhaitée :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases} \quad (\text{E}_2)$$

On aboutit donc à une inclusion différentielle du premier ordre faisant intervenir l'opérateur multivalué (ou multivoque) \mathcal{N} , qui à un point $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}$ associe le cône $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} \subset \mathbb{R}^{2N}$ (en posant pour tout point $\mathbf{q} \notin Q_0$, $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \emptyset$).

Remarque 2.8 (Interprétation de l'inclusion différentielle)

Si une configuration \mathbf{q} ne présente aucun contact, alors l'ensemble des vitesses admissibles $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ est l'espace \mathbb{R}^{2N} , et par conséquent le cône normal sortant $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est égal à $\{0\}$. Dans ce cas, la première relation de (E₂) affirme juste

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

Quand il n'y a pas de contact, il n'existe pas de contraintes et la vitesse réelle est égale à la vitesse souhaitée. Lorsque des contacts existent, l'inclusion différentielle traduit juste le fait suivant : la configuration \mathbf{q} qui est soumise au champ $\mathbf{U}(\mathbf{q})$, doit évoluer tout en restant dans Q_0 .

Remarque 2.9 L'écriture de notre problème sous la forme d'une inclusion différentielle (E₂) implique une perte d'information par rapport au problème de départ (E₁). Cependant on verra que dans le cas particulier de la section 2.2 (cas où les personnes se déplacent dans un couloir) ces deux écritures sont en fait équivalentes. La solution régulière du problème d'inclusion différentielle vérifie bien l'équation différentielle initiale.

2.2 Cas particulier : déplacement dans un couloir

Dans cette section, on considère un cas particulier où des personnes évoluent dans un couloir si étroit qu'elles ne peuvent se dépasser (cf. fig. 2.3). Les centres des disques sont alors repérés par une seule coordonnée : on travaille maintenant dans l'espace \mathbb{R}^N . Il est alors naturel de restreindre Q_0 à l'une de ses composantes connexes.



FIG. 2.3 – Cas du couloir.

Ainsi, Q_0 s'écrit de la façon suivante

$$Q_0 = \{\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^N, q_{i+1} - q_i \geq r_i + r_{i+1}\}. \quad (2.2)$$

Autrement dit, on a imposé un ordre sur la position des particules, ordre qui sera toujours respecté, grâce à la contrainte de non-chevauchement. On observe facilement la propriété suivante.

Propriété 2.10 Q_0 est un convexe fermé de \mathbb{R}^N .

Dans ce cas particulier, $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ s'écrit aussi plus simplement,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, \forall i \quad q_{i+1} - q_i = r_{i+1} + r_i \Rightarrow v_{i+1} - v_i \geq 0\}. \quad (2.3)$$

L'interprétation est simple : si les personnes i et $i + 1$ sont en contact, la personne $i + 1$ qui se trouve à l'avant doit avancer plus vite que la personne i située à l'arrière. De plus, on rappelle que le cône normal sortant $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est le cône polaire de $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \geq 0\}. \quad (2.4)$$

On cherche maintenant à écrire autrement $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ pour déterminer les propriétés de l'opérateur \mathcal{N} . Pour cela, nous allons d'abord exprimer l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ en fonction de Q_0 .

Proposition 2.11 On a pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$, l'égalité suivante,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(Q_0 - \mathbf{q}).$$

Démonstration :

On commence par montrer une première inclusion : $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(Q_0 - \mathbf{q}) \subset \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$.

Soit $w \in \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(Q_0 - \mathbf{q})$, comme

$$Q_0 - \mathbf{q} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N, \forall i \quad p_{i+1} - p_i \geq r_{i+1} + r_i - (q_{i+1} - q_i)\},$$

le vecteur w vérifie la propriété suivante,

$$\exists \lambda > 0, \forall i, w_{i+1} - w_i \geq \lambda(r_{i+1} + r_i - (q_{i+1} - q_i)).$$

En particulier, si $q_{i+1} - q_i = r_{i+1} + r_i$ alors on a nécessairement $w_{i+1} - w_i \geq 0$. En conséquence, on en déduit que $w \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$.

Il reste maintenant à prouver l'autre inclusion : $\mathcal{C}_{\mathbf{q}} \subset \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(Q_0 - \mathbf{q})$.

Soit $w \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$, on définit l'ensemble $J = \{j, q_{j+1} - q_j > r_{j+1} + r_j \text{ et } w_{j+1} - w_j < 0\}$. Si $J \neq \emptyset$, on pose

$$\lambda_w = \max_{j \in J} \left\{ \frac{w_{j+1} - w_j}{r_{j+1} + r_j - (q_{j+1} - q_j)} \right\} > 0.$$

Sinon, on pose $\lambda_w = 1$. Montrons qu'alors

$$\forall i, w_{i+1} - w_i \geq \lambda_w (r_{i+1} + r_i - (q_{i+1} - q_i)).$$

Si $i \in J$, le résultat est vrai par définition de λ_w . Si $i \notin J$, deux cas sont possibles. Soit $q_{i+1} - q_i = r_{i+1} + r_i$, et comme on a $w \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$, nécessairement $w_{i+1} - w_i \geq 0$. Soit $q_{i+1} - q_i > r_{i+1} + r_i$ et $w_{i+1} - w_i \geq 0$, on a alors $w_{i+1} - w_i \geq 0 > \lambda_w (r_{i+1} + r_i - (q_{i+1} - q_i))$. Dans les deux cas, l'inégalité est vérifiée, ce qui prouve que

$$w \in \lambda_w(Q_0 - \mathbf{q}).$$

La deuxième inclusion est ainsi démontrée. \square

Nous allons maintenant préciser la bonne propriété vérifiée par l'opérateur \mathcal{N} . Pour cela, on introduit I_{Q_0} l'indicatrice de Q_0 et $\partial I_{Q_0}(\mathbf{q})$ le sous-différentiel de cette fonction au point $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ (cf. définitions A.2 et A.3 p. 142).

Proposition 2.12 *L'opérateur \mathcal{N} est maximal monotone.*

Démonstration :

Il suffit de vérifier que $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est le sous-différentiel de l'indicatrice de Q_0 au point \mathbf{q} . En effet, d'après la proposition 2.11, on a

$$\forall \mathbf{q} \in Q_0, \mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(Q_0 - \mathbf{q}).$$

En prenant le cône polaire de ces deux ensembles, on obtient grâce à la proposition A.4 p. 143, l'égalité suivante pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \mathcal{C}_{\mathbf{q}}^\circ = \left(\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(Q_0 - \mathbf{q}) \right)^\circ = \partial I_{Q_0}(\mathbf{q}). \quad (2.5)$$

Par ailleurs, pour tout $\mathbf{q} \notin Q_0$, on a $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \emptyset = \partial I_{Q_0}(\mathbf{q})$. Ainsi, $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \partial I_{Q_0}(\mathbf{q})$ pour tout $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}$. On conclut alors grâce à la proposition A.7 p. 143 que l'opérateur $\mathcal{N} = \partial I_{Q_0}$ est maximal monotone. \square

Dès lors, on peut appliquer les résultats de la théorie des opérateurs maximaux monotones pour en déduire que le problème (E₂) est bien posé.

Théorème 2.13 (Existence et unicité d'une solution à l'inclusion différentielle)
 Soit Q_0 défini par (2.2) p. 28 et soit \mathbf{U} lipschitz, alors pour tout $T > 0$, pour tout $\mathbf{q}_0 \in Q_0$, il existe une unique fonction $\mathbf{q} \in W^{1,1}([0, T], \mathbb{R}^N)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} - \mathbf{U}(\mathbf{q}) \ni 0, \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \end{cases} \quad (\text{E}_2)$$

où $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est le cône normal sortant au point \mathbf{q} , défini par (2.4) p. 28.

Démonstration :

Ce résultat découle immédiatement du théorème D.4 p. 154. Vérifions qu'on se trouve bien dans le cadre de ce dernier. On travaille dans l'espace de Hilbert $H = \mathbb{R}^N$ muni de la norme euclidienne canonique. L'opérateur \mathcal{N} est maximal monotone et son domaine $D(\mathcal{N})$ est égal à Q_0 , d'intérieur non vide. Enfin le caractère lipschitzien de \mathbf{U} permet de vérifier les dernières hypothèses du théorème D.4. \square

On peut maintenant vérifier ce qui était annoncé dans la remarque 2.9 p. 27, à savoir que la solution précédente au problème d'inclusion différentielle (E₂) est en fait solution de l'équation différentielle (E₁).

Théorème 2.14 (Existence et unicité d'une solution à l'équation différentielle)
 Soit Q_0 défini par (2.2) p. 28 et soit \mathbf{U} lipschitz, alors pour tout $T > 0$, pour tout $\mathbf{q}_0 \in Q_0$, il existe une unique fonction $\mathbf{q} \in W^{1,1}([0, T], \mathbb{R}^N)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(\mathbf{U}(\mathbf{q})) = \mathbf{U}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \end{cases} \quad (\text{E}_1)$$

où $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est le cône normal sortant au point \mathbf{q} , défini par (2.4) p. 28.

Démonstration :

On considère la fonction \mathbf{q} solution du problème (E₂) résolu au théorème 2.13 avec pour donnée initiale \mathbf{q}_0 . On définit alors la fonction $f : t \mapsto f(t) = \mathbf{U}(\mathbf{q}(t))$. Comme \mathbf{U} est lipschitz et \mathbf{q} continue, la fonction f est dans $C^0([0, T], H)$. Considérons maintenant le problème suivant : trouver une fonction \mathbf{p} solution de

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{p}} \ni f, \\ \mathbf{p}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases}$$

D'après le théorème D.5 p. 154, il existe une unique solution $\mathbf{p} \in W^{1,\infty}([0, T], H)$ à ce problème d'inclusion différentielle. De plus, cette fonction \mathbf{p} possède une dérivée à droite en tout point $t \in]0, T[$ vérifiant

$$\frac{d^+\mathbf{p}}{dt}(t) = f(t) - P_{\mathcal{N}_{\mathbf{p}(t)}}(f(t)).$$

Comme $\mathbf{p} \in W^{1,\infty}([0, T], H)$, la fonction \mathbf{p} est lipschitzienne et elle est donc dérivable presque partout, d'après le théorème de Rademacher. Ainsi, on obtient

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = f(t) - P_{\mathcal{N}_{\mathbf{p}(t)}}(f(t)) \text{ p.p.}$$

Par unicité de la solution au problème d'inclusion différentielle (E_2) et sachant que $W^{1,\infty}([0, T], H) \subset W^{1,1}([0, T], H)$ car $T < \infty$, on conclut que $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. Par conséquent, on obtient

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{q}(t)) - P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}(t)}}(\mathbf{U}(\mathbf{q}(t))) \text{ p.p.}$$

□

2.3 Problèmes rencontrés lors de la généralisation

La simple généralisation des précédents résultats est impossible quand on permet aux N personnes de se déplacer dans le plan. L'ensemble des configurations admissibles dont on rappelle l'expression :

$$Q_0 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) \geq 0\},$$

n'est pas un ensemble convexe. En effet sur la figure 2.4, sont représentées trois configurations, \mathbf{q} et $\tilde{\mathbf{q}}$ ainsi que leur moyenne $\bar{\mathbf{q}}$. On voit facilement que \mathbf{q} et $\tilde{\mathbf{q}}$ appartiennent

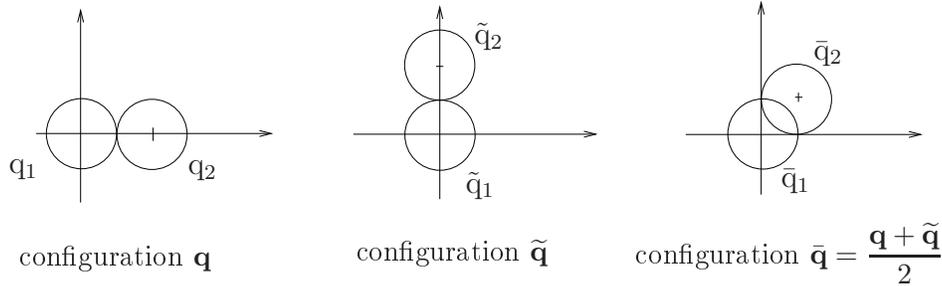


FIG. 2.4 – Défaut de convexité.

à Q_0 , mais pas $\bar{\mathbf{q}}$. En conséquence, l'argument (cf. propriété 2.10) faisant le lien entre l'opérateur \mathcal{N} et Q_0 ne peut être réutilisé.

Montrons pour finir cette section que l'opérateur \mathcal{N} n'a plus de propriété de monotonie (cf. définition D.2 p. 154).

Dans le cas de $N = 2$ personnes, on peut montrer que l'opérateur $-\mathcal{N}$ est maximal monotone. En effet, quand on considère uniquement 2 individus,

$$Q_0 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4, D_{12}(\mathbf{q}) \geq 0\}$$

est alors le complémentaire d'un convexe, puisque D_{12} est une fonction convexe. Si on définit $C = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4, D_{12}(\mathbf{q}) \leq 0\}$, alors on a $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = -\partial I_C(\mathbf{q})$. Par conséquent, $-\mathcal{N}$ est

un opérateur maximal monotone (cf. théorème A.7 p. 143).

Lorsque $N \geq 3$, on peut montrer que ni l'opérateur \mathcal{N} , ni l'opérateur $-\mathcal{N}$ ne sont maximaux monotones. Pour simplifier les notations, on se place ici dans \mathbb{R}^6 en ne considérant que 3 individus, mais la preuve est facilement généralisable à \mathbb{R}^{2N} pour $N > 3$. On pose $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ (là encore sans perte de généralité) et on se donne donc $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ et $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$, deux configurations admissibles (cf. fig. 2.5).

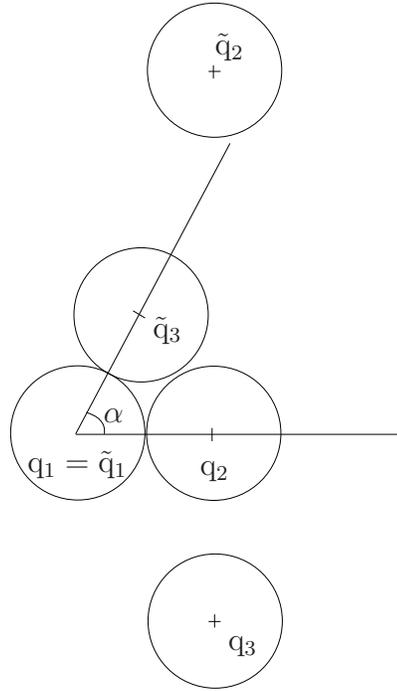


FIG. 2.5 – Défaut de monotonie.

Plus précisément, on choisit,

$$\mathbf{q} = (-1, 0, 1, 0, 1, b) \text{ et } \tilde{\mathbf{q}} = (-1, 0, 1, 5, 2 \cos \alpha - 1, 2 \sin \alpha),$$

où $b \in \mathbb{R}$ avec $|b| > 2$, ce qui implique,

$$\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q} = (0, 0, 0, 5, 2 \cos \alpha - 2, 2 \sin \alpha - b).$$

Comme $D_{12}(\mathbf{q}) = 0 = D_{13}(\tilde{\mathbf{q}})$, on sait d'après la proposition 2.6 p. 25, que

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = -\mathbb{R}^+ \mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}) \text{ et } \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}} = -\mathbb{R}^+ \mathbf{G}_{13}(\tilde{\mathbf{q}}).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \mathbb{R}^+ (1, 0, -1, 0, 0, 0) \text{ et } \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbb{R}^+ (\cos \alpha, \sin \alpha, 0, 0, -\cos \alpha, -\sin \alpha).$$

D'où, en posant $\mathbf{n} = (1, 0, -1, 0, 0, 0) \in \mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ et $\tilde{\mathbf{n}} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0, 0, -\cos \alpha, -\sin \alpha) \in \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{q}}}$, on obtient

$$\tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{n} = (\cos \alpha - 1, \sin \alpha, 1, 0, -\cos \alpha, -\sin \alpha).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) &= -\cos \alpha (2 \cos \alpha - 2) - \sin \alpha (2 \sin \alpha - b) \\
&= -2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \\
&= 2 \cos \alpha - 2 + b \sin \alpha \\
&= 2(\cos \alpha - 1) + b \sin \alpha.
\end{aligned}$$

On remarque que, si α est positif, proche de 0, cette quantité a le même signe que b . En conclusion, ni \mathcal{N} , ni $-\mathcal{N}$ n'est un opérateur monotone.

2.4 Cadre mathématique

2.4.1 Notion de prox-régularité

Dans la section 2.3, on a évoqué le défaut de convexité de Q_0 , ensemble des configurations admissibles. La bonne propriété d'un convexe fermé C inclus dans un espace de Hilbert est que la projection sur C de tout point de l'espace est bien définie, autrement dit, il existe un unique point de C qui réalise le minimum de la distance à C . L'ensemble Q_0 présente une propriété plus faible : la projection sur Q_0 est bien définie pour tous les points situés à une distance suffisamment petite de Q_0 . L'ensemble Q_0 est dit uniformément prox-régulier.

Le concept de prox-régularité uniforme a été introduit par H. Federer dans [Fed59] en dimension finie sous le nom d'ensembles "positively reached". Puis les ensembles prox-réguliers dans un espace de Hilbert ont été considérés par A. Canino dans [Can88] sous le nom d'ensembles "p-convexes", et aussi par F.H. Clarke, R.J. Stern et P.R. Wolenski dans [CSW95] en tant qu'ensembles "proximally smooth". La notion de prox-régularité locale ainsi que la dénomination de prox-régularité pour les ensembles dans un espace de Hilbert ont été introduites par R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar et L. Thibault dans [PRL00].

Précisons maintenant cette notion. On considère H un espace de Hilbert, muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $|\cdot|$ sa norme associée. Pour $x \in H$ et $r > 0$, on désigne par $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r . Soit S un sous-ensemble fermé non vide de H , on note $d_S(y)$ la distance du point y à l'ensemble S , définie par

$$d_S(y) = \inf_{x \in S} \{|y - x|\}.$$

De plus, pour $y \in H$ on définit l'ensemble des points de S , les plus proches de y par,

$$P_S(y) = \left\{ x \in S, d_S(y) = |y - x| \right\}.$$

Si $P_S(y)$ est réduit au singleton x , on notera plus simplement $x = P_S(y)$.

Définition 2.15 Soit $x \in S$, on appelle vecteur proximal normal à S en x tout vecteur s'écrivant $\alpha(y - x)$, où $\alpha > 0$ et $y \in H$ vérifie $x \in P_S(y)$.

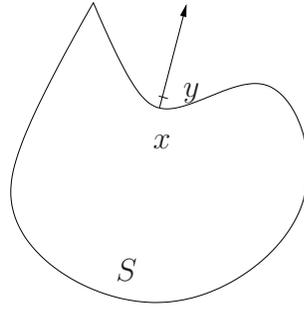


FIG. 2.6 – Vecteur proximal normal.

Définition 2.16 On appelle cône proximal normal à S en x l'ensemble des vecteurs proximal normal à S en x noté

$$N^P(S, x) = \left\{ v \in H, \exists \alpha > 0, x \in P_S(x + \alpha v) \right\}.$$

Définition 2.17 On appelle cône normal limitant à S en x l'ensemble

$$N^L(S, x) = \left\{ v \in H, \exists (x_n) \in S^{\mathbb{N}}, \exists (v_n) \in (N^P(S, x_n))^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x, v_n \rightarrow v \right\}.$$

Si $x \in \overset{\circ}{S}$, alors $N^P(S, x) = N^L(S, x) = \{0\}$. On cherchera donc à déterminer $N^P(S, x)$ et $N^L(S, x)$ pour $x \in \partial S = \bar{S} \setminus \overset{\circ}{S}$.

Remarque 2.18 On a clairement

$$N^P(S, x) \subset N^L(S, x).$$

Mais il n'y a pas en général égalité de ces ensembles. En effet, la figure 2.7 illustre un contre-exemple dans lequel $N^L(S, x)$ est composé de demi-droites (tracées en pointillés). L'une provient de la limite de v_n^1 quand x_n^1 tend vers x , l'autre provient de la limite de v_n^2 quand x_n^2 tend vers x . Et pourtant, on peut facilement se convaincre que $N^P(S, x) = \{0\}$.

Propriété 2.19 S'il existe $\alpha > 0$, tel que $x \in P_S(x + \alpha v)$ alors

$$\forall \beta \geq 0, \beta \leq \alpha, x \in P_S(x + \beta v).$$

Démonstration :

En effet, en supposant qu'il existe $\beta_0 < \alpha$, tel que $x \notin P_S(x + \beta_0 v)$, on peut trouver \bar{x} un élément de S vérifiant

$$|\bar{x} - (x + \beta_0 v)| < \beta_0 |v|.$$

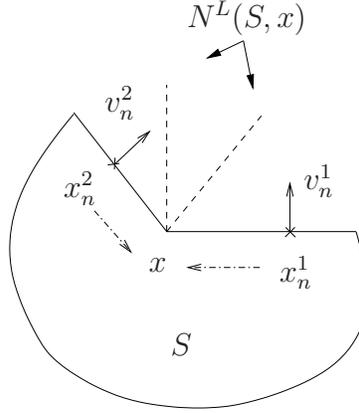


FIG. 2.7 – Différence entre cône limitant et cône proximal normal.

Ceci implique que

$$|\bar{x} - (x + \alpha v)| \leq |\bar{x} - (x + \beta_0 v)| + |(\beta_0 - \alpha)v| < \beta_0 |v| + (\alpha - \beta_0)|v| = \alpha |v|,$$

ce qui entraîne une contradiction. \square

Les définitions précédentes des différents cônes et la définition qui suit, se trouvent dans [CSW95, CLSW98].

Définition 2.20 On appelle sous-différentiel proximal de la fonction d_S au point x l'ensemble

$$\partial^P d_S(x) = \left\{ v \in H, \exists M, \alpha > 0, d_S(y) - d_S(x) + M|y - x|^2 \geq \langle v, y - x \rangle, \forall y \in B(x, \alpha) \right\}.$$

Précisons la relation utile par la suite entre le sous-différentiel proximal normal et le cône du même nom, qui est démontrée dans [BT02, CLSW98].

Propriété 2.21 On a l'égalité suivante

$$\partial^P d_S(x) = N^P(S, x) \cap \overline{B(0, 1)}.$$

Définition 2.22 (Ensemble uniformément prox-régulier)

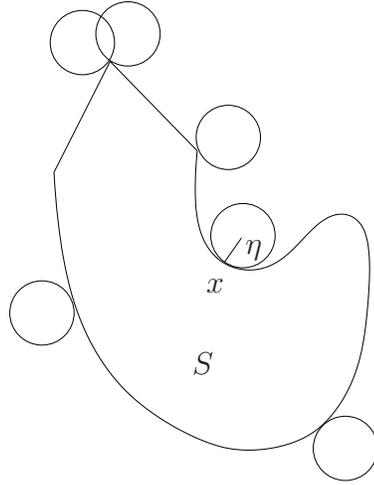
Soit $\eta > 0$, S est dit η -prox-régulier ou uniformément prox-régulier de constante η si, pour tout $x \in S$ et $v \in N^L(S, x)$, tel que $|v| < 1$, on ait $x = P_S(x + \eta v)$.

Quand S est η -prox-régulier, on a l'égalité des cônes introduits précédemment (cf. [CLSW98]) :

$$N^L(S, x) = N^P(S, x).$$

Dans la suite, nous n'utiliserons que la notion de cône proximal normal, c'est pourquoi le cône $N^P(S, x)$ sera juste noté $N(S, x)$.

On trouvera la démonstration de la proposition suivante dans [PRL00, CSW95].


 FIG. 2.8 – Ensemble η -prox-régulier.

Proposition 2.23 Soit $\eta > 0$, S est η -prox-régulier si et seulement si, pour tout $x \in S$ et tout $v \in N(S, x) \setminus \{0\}$,

$$B\left(x + \eta \frac{v}{|v|}, \eta\right) \cap S = \emptyset,$$

autrement dit, si et seulement si, pour tout $x \in S$ et tout $v \in N(S, x)$,

$$\langle v, y - x \rangle \leq \frac{|v|}{2\eta} |y - x|^2, \quad \forall y \in S.$$

De la proposition 2.23 illustrée par la figure 2.8, découle la propriété vérifiée par un ensemble uniformément prox-régulier et qui était annoncée au début de la section : la projection sur un ensemble S uniformément prox-régulier est bien définie pour les points se situant à une distance de S , plus petite que la constante de prox-régularité.

Propriété 2.24 Si S est η -prox-régulier, alors pour tout $y \in H$, tel que $d_S(y) < \eta$, la projection de y sur S est bien définie, au sens où l'ensemble $P_S(y)$ est un singleton.

Remarque 2.25 La projection sur un ensemble S η -prox-régulier avec $\eta < +\infty$ n'est que localement lipschitzienne sur son ensemble de définition. En effet, on peut montrer grâce à la proposition 2.23 que pour tous $y, \tilde{y} \in H$, tels que $d_S(y) < \eta$ et $d_S(\tilde{y}) < \eta$, on a

$$|P_S(y) - P_S(\tilde{y})| \leq \left(\frac{2\eta}{2\eta - d_S(y) - d_S(\tilde{y})} \right) |y - \tilde{y}|.$$

La constante de Lipschitz explose lorsque l'on s'approche de la zone $\{y, d_S(y) = \eta\}$.

Remarque 2.26 *Un ensemble $C \subset H$ est convexe si et seulement si C est ∞ -prox-régulier. De plus, d'après la proposition A.8 p. 144, pour tout $x \in C$, il y a égalité entre le sous-différentiel de l'indicatrice de C et le cône proximal normal à C , au point x :*

$$N(C, x) = \partial I_C(x).$$

2.4.2 Processus de raffle

Comme on l'a vu dans la remarque 2.8 p. 27, le problème,

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \end{cases} \quad (\text{E}_2)$$

s'interprète de la manière suivante : la configuration globale \mathbf{q} , soumise au champ de vitesse souhaitée $\mathbf{U}(\mathbf{q})$ doit évoluer tout en restant dans l'ensemble des configurations admissibles Q_0 . En ce sens, notre problème s'inscrit dans le cadre des processus de raffle. On propose ici de préciser cette notion, tout d'abord en détaillant le premier processus de raffle considéré dans les années 70, et ensuite en évoquant des résultats plus récents sur des problèmes de processus de raffle plus généraux.

Le début

Les processus de raffle ont été introduits par J.J. Moreau dans [Mor77]. Il considérait le problème suivant : un point se trouve à l'intérieur d'un convexe fermé C mobile inclus dans un espace de Hilbert. Quand il est attrapé par le bord de C qui se déplace, il part dans la direction normale à celui-ci, comme s'il était poussé par le bord, afin de rester dans C . Le mouvement de ce point est alors régi par l'équation suivante :

$$-\dot{\mathbf{q}} \in \partial I_{C(t)}(\mathbf{q}). \quad (2.6)$$

Celle-ci fait intervenir un opérateur maximal monotone qui dépend du temps. Pour résoudre ce problème, J.J. Moreau construit une suite de solutions discrètes selon un principe dit de rattrapage (*catching-up*). Sous certaines hypothèses de régularité de la fonction multivaluée $t \mapsto C(t)$, l'intervalle de temps est divisé en sous-intervalles J_k où $C(\cdot)$ varie peu. La trajectoire d'ensembles $t \mapsto C(t)$ est approchée par une multifonction constante par morceaux, valant C_k sur J_k , ce qui permet de construire une fonction $\tilde{\mathbf{q}}$ constante par morceaux, égale à $\tilde{\mathbf{q}}_k$ sur J_k et telle que $\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} = P_{C_{k+1}}(\tilde{\mathbf{q}}_k)$. Il démontre alors la convergence de cette suite de fonctions lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, obtenant à la limite une solution de (2.6). La solution a au moins la même régularité que celle de la multifonction $C(\cdot)$. D'après la remarque 2.26 p. 37, l'équation (2.6) s'écrit aussi

$$-\dot{\mathbf{q}} \in N(C(t), \mathbf{q}). \quad (2.7)$$

Cependant, notre problème (E₂) ne rentre pas dans ce cadre, d'une part, à cause du défaut de convexité de Q_0 , et d'autre part, à cause de la présence du second membre $\mathbf{U}(\mathbf{q})$.

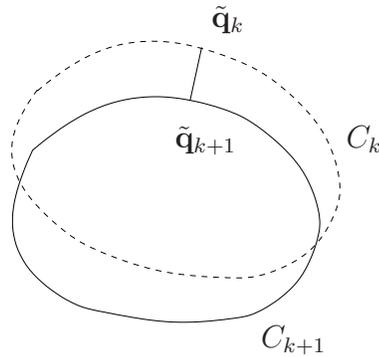


FIG. 2.9 – Algorithme de rattrapage.

Le problème général

Introduisons plus généralement un processus de rafle dit perturbé, mettant en jeu des ensembles $C(t)$ non vides η -prox-réguliers, inclus dans un espace de Hilbert réel H . On pose le problème de l'existence et de l'unicité d'une fonction x définie sur $I = [T_0, T]$ et vérifiant,

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N(C(t), x(t)) + F(t, x(t)) \text{ p.p.t. } t \in I \\ x(T_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

La perturbation $F : [T_0, T] \times H \rightrightarrows H$ est une application multivaluée à valeurs dans les ensembles convexes compacts non vides de H . L'ensemble $N(C(t), x(t))$ est le cône proximal normal de $C(t)$ au point $x(t)$ (cf. définition 2.16 p. 34).

Dans [CM95], les auteurs étudient ce problème perturbé en dimension finie dans le cas où les ensembles $C(t)$ sont convexes. Ils montrent que le problème admet des solutions sous certaines hypothèses concernant la perturbation F et l'application multivaluée C . D'une part, la perturbation F est supposée semi-continue supérieurement par rapport à la seconde variable et doit satisfaire une condition de croissance linéaire compacte, à savoir :

$$F(t, x) \subset \beta(t)(1 + |x|)\overline{B(0, 1)}, \quad \forall (t, x) \in [T_0, T] \times H. \quad (2.9)$$

D'autre part, l'application multivaluée C est supposée continue pour la distance de Hausdorff et doit satisfaire une condition de boule intérieure, du type suivant :

$$\exists r > 0, \quad B(0, r) \subset C(t), \quad \forall t \in [T_0, T]. \quad (2.10)$$

Ensuite, les processus de rafle par des ensembles $C(t)$ η -prox-réguliers ont fait l'objet de nombreux travaux. Le cas sans perturbation ($F = 0$) est traité dans [CM03, Thi03, CG99]. Dans [CM03], le problème considéré est,

$$\begin{cases} -dx \in N(C(t), x(t)) \\ x(T_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

où dx est la mesure différentielle de la fonction x . L'existence et l'unicité d'une fonction à variation bornée solution de (2.11) est prouvée, en supposant que $C(\cdot)$ est Hausdorff-continue, avec une condition de boule intérieure (semblable à (2.10)) et une condition de

compatibilité de nature géométrique.

Le cas avec perturbation est étudié en dimension finie dans [Ben00, CG99] où $C(\cdot)$ est supposée lipschitzienne et dans [Thi03] où l'application $C(\cdot)$ varie de manière absolument continue (cf. hypothèse (H_2) du théorème suivant). En dimension infinie, le cas perturbé est traité dans [BT01, ET05, ET06]. Dans [ET05], se trouve le théorème suivant qui nous permettra de justifier par la suite que notre problème (E_2) est bien posé. La perturbation est supposée ici monovaluée (ce qui est le cas du problème (E_2)) et elle est notée f .

Théorème 2.27 *Soit H un espace de Hilbert. On considère l'application multivaluée $C(\cdot)$ de $I = [T_0, T]$ dans H vérifiant les hypothèses suivantes*

(H_1) *Il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in I$, $C(t)$ soit un sous-ensemble fermé non vide de H , η -prox-régulier;*

(H_2) *$C(t)$ varie d'une façon absolument continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $v : I \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $y \in H$ et pour tous $s, t \in I$, on ait*

$$|d_{C(t)}(y) - d_{C(s)}(y)| \leq |v(t) - v(s)|.$$

Soit une fonction $f : I \times H \rightarrow H$ telle que $\forall x \in H$, $f(\cdot, x)$ soit mesurable sur I et vérifiant,

(i) Pour tout $\alpha > 0$, il existe une fonction positive $k_\alpha \in L^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ et $(x, y) \in B(0, \alpha) \times B(0, \alpha)$,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k_\alpha(t)|x - y|;$$

(ii) Il existe une fonction positive $\beta \in L^1(I, \mathbb{R})$, telle que pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in \cup_{s \in I} C(s)$, $|f(t, x)| \leq \beta(t)(1 + |x|)$.

Alors, pour tout $x_0 \in C(T_0)$, le processus de rafle suivant

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N(C(t), x(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p.t. } t \in I \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$$

a une unique solution absolument continue.

Dans (ii), on retrouve l'hypothèse (2.9) de croissance linéaire de la perturbation. L'hypothèse (i) assure l'unicité de la solution. Quant à l'hypothèse (H_2) faite sur l'application multivaluée C , elle entraîne la régularité de la solution. Enfin, on peut remarquer que l'hypothèse (H_1) permet d'utiliser l'algorithme de rattrapage introduit par Moreau, puisqu'à distance inférieure à η , la projection sur $C(t)$ est bien définie (cf. proposition 2.24 p. 36).

Remarque 2.28 *L'hypothèse (H_2) n'est pas nécessaire pour assurer l'existence de solutions. Par exemple, dans [ET06], le problème considéré est le suivant,*

$$\begin{cases} -dx \in N(C(t), x(t)) + F(t, x(t))d\lambda \\ x(T_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Les auteurs montrent l'existence de solutions à (2.12) en supposant que l'application multivaluée C est à variation bornée sur I et que sa fonction variation est continue à droite sur I , ce qui revient à supposer qu'il existe une mesure de Radon μ positive telle que pour tout $y \in H$, on ait

$$|d_{C(t)}(y) - d_{C(s)}(y)| \leq \mu(]s, t]), \quad \forall s, t \in I, \quad s \leq t \quad (2.13)$$

et telle que

$$\sup_{s \in]T_0, T]} \mu(\{s\}) < \frac{\eta}{2}. \quad (2.14)$$

La démonstration utilise l'algorithme de rattrapage introduit par J.J. Moreau. Le point fondamental est de diviser l'intervalle de temps I en sous-intervalles $I_k =]t^k, t^{k+1}]$ où $C(\cdot)$ varie peu. Ceci est effectivement nécessaire pour passer à la limite mais aussi pour effectuer à chaque instant les projections (qui ne sont possibles qu'à distance strictement inférieure à η). Si l'hypothèse (2.13) permet le découpage de I en sous-intervalles ouverts où $C(\cdot)$ varie peu, l'obtention d'intervalles semi-ouverts se fait grâce à l'hypothèse (2.14).

Remarque 2.29 L'équation (2.13) est équivalente à

$$H(C(t), C(s)) \leq \mu(]s, t]), \quad \forall s, t \in I, \quad s \leq t,$$

où H est la distance de Hausdorff.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème essentiel qui assure le caractère bien posé du modèle introduit au début de ce chapitre.

Théorème 2.30 (Existence et unicité d'une solution de l'inclusion différentielle)

Soit Q_0 l'ensemble des configurations admissibles (cf. définition 2.1 p. 24) et soit \mathbf{U} lipschitzienne et bornée, alors pour tout $T > 0$, pour tout $\mathbf{q}_0 \in Q_0$, il existe une unique fonction \mathbf{q} absolument continue sur $[0, T]$, solution de

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \end{cases} \quad (\text{E}_2)$$

où $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est le cône normal sortant au point \mathbf{q} (cf. définition 2.5 p. 25).

Démonstration :

Ce résultat découle du théorème 2.27 p. 39. Les hypothèses (i) et (ii) de ce dernier viennent du caractère lipschitzien et bornée de \mathbf{U} . L'hypothèse (H_2) est trivialement vérifiée dans notre cas. Il reste donc à vérifier l'hypothèse (H_1) (uniforme prox-régularité de Q_0) et l'égalité entre le cône normal sortant $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ et le cône proximal normal $N(Q_0, \mathbf{q})$. Ces résultats dont la démonstration est assez technique, font l'objet du chapitre suivant (proposition 3.12 p. 51 et proposition 3.9 p. 48 respectivement). \square

Chapitre 3

Prox-régularité de l'ensemble des configurations admissibles Q_0

Sommaire

3.1	Etude de l'ensemble Q_{12}	42
3.1.1	Cône proximal normal	42
3.1.2	Prox-régularité	45
3.2	Généralisation à Q_0	47
3.2.1	Cône proximal normal	47
3.2.2	Prox-régularité	50
3.3	Majoration de la constante η	55
3.3.1	Etude du boulier	55
3.3.2	Démonstration des lemmes	61

Dans ce chapitre, nous proposons de justifier que l'ensemble des configurations admissibles Q_0 est uniformément prox-régulier et de déterminer son cône proximal normal (cf. définition 2.16 p. 34) afin de terminer la preuve du théorème 2.30 p. 40. Pour cela, on définit pour $i < j$,

$$Q_{ij} = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}) = |q_j - q_i| - (r_i + r_j) \geq 0\}.$$

Ainsi,

$$Q_0 = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}) \geq 0, \forall (i, j), i < j\} = \bigcap_{i < j} Q_{ij}.$$

Dans un premier temps, nous étudions l'ensemble Q_{12} , qui ne présente qu'une seule contrainte. Nous donnons l'expression de son cône proximal normal et montrons que cet ensemble est uniformément prox-régulier en calculant précisément sa constante de prox-régularité. Nous en déduisons dans un second temps, l'expression du cône proximal normal de Q_0 et prouvons le caractère uniformément prox-régulier de Q_0 en donnant une minoration η de sa constante de prox-régularité. Enfin, nous proposons de fournir une majoration de cette constante η . Celle-ci n'est pas à proprement parler la constante optimale de prox-régularité de Q_0 , mais sa majoration permet de suggérer une dépendance de la constante optimale par rapport aux données du problème (à savoir le nombre de personnes N et les rayons r_i des disques les représentant).

3.1 Etude de l'ensemble Q_{12}

3.1.1 Cône proximal normal

On considère l'ensemble $Q_{12} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{12}(\mathbf{q}) = |q_2 - q_1| - (r_1 + r_2) \geq 0\}$. Cet ensemble est particulier puisque sa frontière

$$\partial Q_{12} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{12}(\mathbf{q}) = 0\}$$

vérifie la propriété suivante.

Proposition 3.1

$$\partial Q_{12} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{12}(\mathbf{q}) = 0\}$$

est une hypersurface de classe C^2 orientable de \mathbb{R}^{2N} .

Démonstration :

On définit pour $\varepsilon < r_1 + r_2$, l'ouvert

$$U_\varepsilon = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{12}(\mathbf{q}) > -\varepsilon\}.$$

La fonction D_{12} est de classe C^2 (même C^∞) sur U_ε et en tout point $\mathbf{q} \in U_\varepsilon$, le gradient de D_{12} ne s'annule pas, car il vaut $\nabla D_{12}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}) \neq 0$. Par conséquent, ∂Q_{12} est une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^{2N} , de classe C^2 et de dimension $2N - 1$, autrement

dit c'est une hypersurface de classe C^2 de \mathbb{R}^{2N} . De plus, comme en tout point $\mathbf{q} \in U_\varepsilon$, la différentielle de D_{12} ne s'annule pas, on peut définir une normale à ∂Q_{12} par

$$\nu(\mathbf{q}) = \frac{-\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q})}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, ∂Q_{12} est orientable. Le signe a été choisi de telle sorte que ce vecteur soit une normale extérieure à Q_{12} . \square

Cette propriété, vérifiée par l'ensemble Q_{12} , va nous permettre d'exprimer son cône proximal normal en utilisant le résultat de la proposition suivante.

Proposition 3.2 *On considère S un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n , telle que ∂S soit une hypersurface de classe C^2 orientable. On note pour tout $\mathbf{x} \in \partial S$, $\nu(\mathbf{x})$ la normale à la surface ∂S qui soit extérieure à S . Alors, pour tout $\mathbf{x} \in \partial S$, le cône proximal normal de S en \mathbf{x} est engendré par le vecteur $\nu(\mathbf{x})$, autrement dit,*

$$N(S, \mathbf{x}) = \mathbb{R}^+ \nu(\mathbf{x}).$$

Démonstration :

Soit $\mathbf{x} \in \partial S$, comme ∂S est une hypersurface de classe C^2 , il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant \mathbf{x} et une fonction $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ tels que

$$S \cap U = \{\mathbf{y} \in U, f(\mathbf{y}) \geq 0\}, \quad \partial S \cap U = \{\mathbf{y} \in U, f(\mathbf{y}) = 0\} \text{ et } \nabla f(\mathbf{x}) \neq 0.$$

On va d'abord montrer que

$$\mathbb{R}^+ \nu(\mathbf{x}) \subset N(S, \mathbf{x}).$$

On veut donc prouver l'assertion suivante

$$\exists \alpha > 0, \forall \beta \leq \alpha, \mathbf{x} \in P_S(\mathbf{x} + \beta \nu(\mathbf{x})),$$

ce qui est équivalent à

$$\exists \alpha > 0, \forall \beta \leq \alpha, d_S(\mathbf{x} + \beta \nu(\mathbf{x})) = \beta.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite (β_k) tendant vers zéro telle que

$$d_S(\mathbf{x} + \beta_k \nu(\mathbf{x})) < \beta_k.$$

Par conséquent, pour tout k , il existe $\mathbf{r}_k \in \partial S$, vérifiant

$$|\mathbf{x} + \beta_k \nu(\mathbf{x}) - \mathbf{r}_k| < \beta_k. \quad (3.1)$$

Ainsi, il existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K_0$, $\mathbf{r}_k \in U$. On remarque facilement que la suite \mathbf{r}_k tend vers \mathbf{x} . De plus, en prenant le carré de l'inégalité (3.1), on obtient

$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}_k|^2 + 2\beta_k \nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}_k) < 0. \quad (3.2)$$

Par ailleurs, comme f est C^2 , on a pour tout $k \geq K_0$,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{r}_k) + (\mathbf{x} - \mathbf{r}_k) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_k|^2).$$

Comme \mathbf{x} et \mathbf{r}_k appartiennent à ∂S , on obtient

$$(\mathbf{x} - \mathbf{r}_k) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_k|^2),$$

et ainsi

$$(\mathbf{x} - \mathbf{r}_k) \cdot \nu(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_k|^2).$$

Autrement dit, il existe $K_1 \geq K_0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $k \geq K_1$, on ait

$$(\mathbf{x} - \mathbf{r}_k) \cdot \nu(\mathbf{x}) > -\lambda|\mathbf{x} - \mathbf{r}_k|^2.$$

D'après (3.2), on obtient pour tout $k \geq K_1$,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}_k|^2 - 2\beta_k\lambda|\mathbf{x} - \mathbf{r}_k|^2 < 0.$$

Comme la suite (β_k) tend vers zéro, on sait qu'il existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K_2$, on ait

$$\beta_k < \frac{1}{2\lambda}.$$

Ainsi, pour tout $k \geq \max(K_1, K_2)$, on a $|\mathbf{x} - \mathbf{r}_k|^2 < 0$, ce qui est absurde.

Il reste à montrer l'autre inclusion à savoir que

$$N(S, \mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^+ \nu(\mathbf{x}).$$

Soit $\mathbf{v} \in N(S, \mathbf{x})$ de norme 1, on raisonne par l'absurde en supposant que $\mathbf{v} \neq \nu(\mathbf{x})$. Tout d'abord, on peut justifier que

$$\mathbf{v} \neq -\nu(\mathbf{x}).$$

En effet, pour $\alpha > 0$ proche de 0, on a

$$f(\mathbf{x} - \alpha\nu(\mathbf{x})) = -\alpha\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nu(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\alpha^2).$$

En conséquence, pour $\alpha > 0$ proche de 0, $f(\mathbf{x} - \alpha\nu(\mathbf{x})) > 0$ et $\mathbf{x} \notin P_S(\mathbf{x} - \alpha\nu(\mathbf{x}))$, d'où

$$-\nu(\mathbf{x}) \notin N(S, \mathbf{x}).$$

On considère maintenant l'hyperplan $H_{\mathbf{v}}$ de vecteur normal \mathbf{v} passant par \mathbf{x} . D'après ce qui précède, cet hyperplan est différent du plan tangent $T_{\mathbf{x}}(\partial S)$ à ∂S au point \mathbf{x} . Ainsi, on peut trouver un chemin de classe C^2 , $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ tel que $\gamma(0) = \mathbf{x}$ et $\gamma'(0) \notin H_{\mathbf{v}}$. Par conséquent, $\gamma'(0) \cdot \mathbf{v} \neq 0$. On peut même supposer que $\gamma'(0) \cdot \mathbf{v} = c > 0$. Comme γ est de classe C^2 , on a pour $\delta > 0$ proche de zéro,

$$\gamma(\delta) = \mathbf{x} + \delta\gamma'(0) + \mathcal{O}(\delta^2).$$

Calculons pour $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \beta\mathbf{v} - \boldsymbol{\gamma}(\delta)|^2 &= |\beta\mathbf{v} - \delta\boldsymbol{\gamma}'(0) + \mathcal{O}(\delta^2)|^2 \\ &= \beta^2 - 2\beta\delta\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}'(0) + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= \beta^2 - 2\beta\delta c + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned}$$

On s'aperçoit donc que pour tout $\beta > 0$, pour $\delta > 0$ assez petit, le point $\boldsymbol{\gamma}(\delta)$ de S est à distance strictement inférieure à β du point $\mathbf{x} + \beta\mathbf{v}$. Par conséquent, pour tout $\beta > 0$, $\mathbf{x} \notin P_S(\mathbf{x} + \beta\mathbf{v})$ et $\mathbf{v} \notin N(S, \mathbf{x})$, d'où la contradiction. \square

Grâce aux propositions 3.1 et 3.2, on obtient l'expression du cône proximal normal de Q_{12} en tout point de sa frontière.

Proposition 3.3 Soit $\mathbf{q} \in \partial Q_{12}$, on a $N(Q_{12}, \mathbf{q}) = -\mathbb{R}^+ \mathbf{G}_{12}(\mathbf{q})$.

Remarque 3.4 Il est à noter que le résultat précédent a été obtenu sans utiliser la convexité de la fonction D_{12} .

3.1.2 Prox-régularité

D'après la proposition 2.23 p. 36, la prox-régularité se caractérise par une condition de boule extérieure, la constante de prox-régularité étant égale au rayon maximal de cette boule. Comme Q_{12} est le complémentaire d'un convexe lisse, on peut calculer ce rayon en utilisant des outils de géométrie différentielle. Plus précisément, celui-ci s'exprime en fonction des courbures principales de S qui sont, par définition, les valeurs propres de l'opérateur de Weingarten. Pour montrer que Q_{12} est uniformément prox-régulier, on va utiliser le théorème suivant, dont la démonstration peut être trouvée dans [Del79].

Théorème 3.5 Soit C un sous-ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^n telle que ∂C soit une hypersurface de \mathbb{R}^n , de classe C^2 et orientable. On note $\nu_C(\mathbf{x})$ la normale extérieure à C en \mathbf{x} et $\mu_1(\mathbf{x}), \dots, \mu_{n-1}(\mathbf{x}) \geq 0$ les courbures principales de C en \mathbf{x} . On suppose que

$$\mu = \sup_{\mathbf{x} \in \partial C} \sup_{1 \leq i \leq n-1} \mu_i(\mathbf{x}) < \infty.$$

Alors $S = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{C}$ est un ensemble η -prox-régulier avec $\eta = \frac{1}{\mu}$.

Proposition 3.6 L'ensemble Q_{12} est η -prox-régulier avec $\eta = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{2}}$.

Démonstration :

D'après la proposition 3.1, ∂Q_{12} est une hypersurface de classe C^2 orientable et l'ensemble $C = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{12}(\mathbf{q}) \leq 0\}$ est un sous-ensemble fermé convexe de \mathbb{R}^{2N} , par convexité de la fonction D_{12} . On cherche à déterminer la constante de prox-régularité de

$$Q_{12} = \mathbb{R}^{2N} \setminus \overset{\circ}{C}.$$

Dans toute la suite, on considère $\mathbf{q} \in \partial Q_{12}$. On a défini précédemment la normale à ∂Q_{12} en ce point de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \nu : \quad \partial Q_{12} &\rightarrow \mathbb{S}^{2N-1} \\ \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) &\mapsto -\frac{\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q})}{\sqrt{2}} = \frac{(\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q}), -\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q}), 0, \dots, 0)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dans la suite, le vecteur $\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q})$ sera noté \mathbf{e}_{12} . La normale extérieure à C en \mathbf{q} est donc égale à $-\nu(\mathbf{q})$. Déterminons les valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten $\mathbf{W}_{\mathbf{q}} : \mathbf{h} \in T_{\mathbf{q}}(\partial Q_{12}) \mapsto -D\nu(\mathbf{q})[\mathbf{h}]$. D'après la proposition E.1 p. 156, on a pour tout $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{q}}(\partial Q_{12})$

$$-D\nu(\mathbf{q})[\mathbf{h}] = \frac{1}{\sqrt{2}|q_2 - q_1|} \left(-P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}(h_2 - h_1), P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}(h_2 - h_1), 0, \dots, 0 \right),$$

où $P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}$ est la projection sur \mathbf{e}_{12}^\perp , vecteur unitaire de \mathbb{R}^2 (directement) orthogonal à \mathbf{e}_{12} . Autrement dit,

$$P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}(h_2 - h_1) = (h_2 - h_1) - [(h_2 - h_1) \cdot \mathbf{e}_{12}]\mathbf{e}_{12} = (\mathbf{e}_{12}^{\perp t} \mathbf{e}_{12}^\perp)(h_2 - h_1).$$

Ainsi, la matrice $W_{\mathbf{q}}$ de l'endomorphisme de Weingarten s'écrit

$$W_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} A_{\mathbf{q}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$A_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}|q_2 - q_1|} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{12}^{\perp t} \mathbf{e}_{12}^\perp & -\mathbf{e}_{12}^{\perp t} \mathbf{e}_{12}^\perp \\ -\mathbf{e}_{12}^{\perp t} \mathbf{e}_{12}^\perp & \mathbf{e}_{12}^{\perp t} \mathbf{e}_{12}^\perp \end{pmatrix}.$$

La trace de $W_{\mathbf{q}}$, notée $\text{Tr}(W_{\mathbf{q}})$ vaut

$$\frac{2}{\sqrt{2}|q_2 - q_1|} \text{Tr}(\mathbf{e}_{12}^{\perp t} \mathbf{e}_{12}^\perp).$$

Comme le vecteur \mathbf{e}_{12}^\perp est unitaire, on a

$$\text{Tr}(\mathbf{e}_{12}^{\perp t} \mathbf{e}_{12}^\perp) = 1,$$

et par conséquent

$$\text{Tr}(W_{\mathbf{q}}) = \frac{\sqrt{2}}{|q_2 - q_1|}.$$

De plus, la matrice $W_{\mathbf{q}}$ est de même rang que la matrice $A_{\mathbf{q}}$ qui est de rang 1. On peut même préciser que l'image de $W_{\mathbf{q}}$ est engendrée par le vecteur $\tau(\mathbf{q}) = (\mathbf{e}_{12}^\perp, -\mathbf{e}_{12}^\perp, 0, \dots, 0)$. $W_{\mathbf{q}}$ a donc 2 valeurs propres 0 et a , avec

$$a = \frac{\sqrt{2}}{|q_2 - q_1|},$$

ce qui équivaut à un rayon de courbure r_c égal à

$$r_c = \frac{|q_2 - q_1|}{\sqrt{2}}.$$

Comme $\mathbf{q} \in \partial Q_{12}$, on en déduit que

$$r_c = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{2}}.$$

Grâce au théorème 3.5, on conclut que l'ensemble Q_{12} est η -prox-régulier avec

$$\eta = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{2}}.$$

□

On a bien sûr les mêmes résultats concernant l'expression du cône proximal normal et le caractère uniformément prox-régulier des autres ensembles Q_{ij} ($i < j$) dont on rappelle la définition,

$$Q_{ij} = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}) = |q_j - q_i| - (r_i + r_j) \geq 0\}. \quad (3.3)$$

Proposition 3.7 *L'ensemble Q_{ij} est η_{ij} -prox-régulier avec*

$$\eta_{ij} = \frac{r_i + r_j}{\sqrt{2}}.$$

Soit $\mathbf{q} \in \partial Q_{ij}$, on a

$$N(Q_{ij}, \mathbf{q}) = -\mathbb{R}^+ \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}).$$

Remarque 3.8 *On peut démontrer les propositions 3.3 et 3.6 sans utiliser des notions de géométrie différentielle (voir annexe F).*

3.2 Généralisation à Q_0

On rappelle que l'ensemble des configurations admissibles Q_0 est l'intersection des ensembles Q_{ij} définis par (3.3).

3.2.1 Cône proximal normal

On propose maintenant de justifier que l'ensemble

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \left\{ - \sum \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \quad \mu_{ij} \geq 0, \quad \mu_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \right\},$$

qui apparaît dans le problème (E₂) est bien le cône proximal normal de Q_0 au point \mathbf{q} .

Proposition 3.9 Soit $\mathbf{q} \in Q_0$, on a $N(Q_0, \mathbf{q}) = \sum N(Q_{ij}, \mathbf{q}) = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}$.

Démonstration :

La deuxième égalité découle de la proposition 3.7. Prouvons la première. Si $\mathbf{q} \in \overset{\circ}{Q}_0$, alors $\mathbf{q} \in \overset{\circ}{Q}_{ij}$, pour tout couple (i, j) . D'où,

$$N(Q_0, \mathbf{q}) = \{0\} = \sum N(Q_{ij}, \mathbf{q}).$$

On considère maintenant $\mathbf{q} \in \partial Q_0$. On note (sans préciser la dépendance par rapport à \mathbf{q})

$$I_{\text{contact}} = \{(i, j), i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) = 0\} = \{(i, j), i < j, \mathbf{q} \in \partial Q_{ij}\}. \quad (3.4)$$

Etape 1 : On cherche d'abord à montrer que

$$N(Q_{ij}, \mathbf{q}) \subset N(Q_0, \mathbf{q}).$$

Pour tout couple (i, j) vérifiant $\mathbf{q} \in \overset{\circ}{Q}_{ij}$, on a $N(Q_{ij}, \mathbf{q}) = \{0\}$. On ne s'intéressera donc qu'aux couples $(i, j) \in I_{\text{contact}}$. Soit (i, j) un tel couple et soit $\mathbf{w} \in N(Q_{ij}, \mathbf{q}) \setminus \{0\}$, on pose $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$. D'après la propriété 2.21 p. 35, $\mathbf{v} \in \partial^P d_{Q_{ij}}(\mathbf{q})$ et

$$\exists M, \alpha > 0, d_{Q_{ij}}(\tilde{\mathbf{q}}) - d_{Q_{ij}}(\mathbf{q}) + M|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2 \geq \mathbf{v} \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}), \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \alpha).$$

Comme $d_{Q_{ij}}(\mathbf{q}) = 0 = d_{Q_0}(\mathbf{q})$ et $d_{Q_{ij}}(\tilde{\mathbf{q}}) \leq d_{Q_0}(\tilde{\mathbf{q}})$, on a

$$\exists M, \alpha > 0, d_{Q_0}(\tilde{\mathbf{q}}) - d_{Q_0}(\mathbf{q}) + M|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2 \geq \mathbf{v} \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}), \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \alpha).$$

Ainsi, $\mathbf{v} \in \partial^P d_{Q_0}(\mathbf{q})$ et $\mathbf{w} \in N(Q_0, \mathbf{q})$. Par conséquent, pour tout couple $(i, j) \in I_{\text{contact}}$, on a

$$N(Q_{ij}, \mathbf{q}) \subset N(Q_0, \mathbf{q}).$$

Etape 2 : On cherche maintenant à montrer que

$$\sum N(Q_{ij}, \mathbf{q}) \subset N(Q_0, \mathbf{q}).$$

Il suffit de prouver que

$$\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in N(Q_0, \mathbf{q}) \setminus \{0\}, \mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in N(Q_0, \mathbf{q}).$$

Soient \mathbf{w}_1 et $\mathbf{w}_2 \in N(Q_0, \mathbf{q}) \setminus \{0\}$, on pose $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Là encore, on peut utiliser la propriété 2.21 p. 35. On définit $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|}$ et $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}$. Alors il existe $M_1, M_2 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que,

$$d_{Q_0}(\tilde{\mathbf{q}}) - d_{Q_0}(\mathbf{q}) + M_1|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2 \geq \mathbf{v}_1 \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}), \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \alpha_1),$$

$$d_{Q_0}(\tilde{\mathbf{q}}) - d_{Q_0}(\mathbf{q}) + M_2|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2 \geq \mathbf{v}_2 \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}), \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \alpha_2).$$

On a $\mathbf{w} = |\mathbf{w}_1|\mathbf{v}_1 + |\mathbf{w}_2|\mathbf{v}_2$ et on pose

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|},$$

qui est de norme inférieure à 1. En fait, $\mathbf{v} = t\mathbf{v}_1 + (1-t)\mathbf{v}_2$, où

$$t = \frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|}.$$

On pose $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ et $M = tM_1 + (1-t)M_2$, on a donc

$$d_{Q_0}(\tilde{\mathbf{q}}) - d_{Q_0}(\mathbf{q}) + M|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2 \geq \mathbf{v} \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}), \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \alpha).$$

Autrement dit, $\mathbf{v} \in \partial^P d_{Q_0}(\mathbf{q})$ et $\mathbf{w} \in N(Q_0, \mathbf{q})$. On a donc démontré l'inclusion suivante,

$$N(Q_0, \mathbf{q}) \supset \sum N(Q_{ij}, \mathbf{q}).$$

Etape 3 : Il reste à montrer l'autre inclusion. Pour cela, on utilisera les propriétés de deux cônes mutuellement polaires (cf. annexe C). En effet, $\sum N(Q_{ij}, \mathbf{q}) = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ et par définition, $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est le cône polaire de $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. Soit $\mathbf{w} \in N(Q_0, \mathbf{q})$, il s'écrit $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{z}$, où \mathbf{v} et \mathbf{z} sont les projections de \mathbf{w} , respectivement sur $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. On rappelle que ces projections vérifient

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = 0. \quad (3.5)$$

Supposons que $\mathbf{z} \neq 0$. Comme $\mathbf{w} \in N(Q_0, \mathbf{q})$ par hypothèse, il existe $t > 0$, tel que $\mathbf{q} \in P_{Q_0}(\mathbf{q} + t\mathbf{w})$. On pose

$$s = \min(t, \epsilon) \text{ où } \epsilon = \min_{(i,j) \notin I_{\text{contact}}} \frac{D_{ij}(\mathbf{q})}{\sqrt{2}|\mathbf{z}|}.$$

D'après la proposition 2.19 p. 34, comme $s \leq t$, $\mathbf{q} \in P_{Q_0}(\mathbf{q} + s\mathbf{w})$. On note

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + s\mathbf{w} - s\mathbf{v} = \mathbf{q} + s\mathbf{z}.$$

Montrons que $\tilde{\mathbf{q}} \in Q_0$. Par convexité de D_{ij} , on a

$$D_{ij}(\tilde{\mathbf{q}}) \geq D_{ij}(\mathbf{q}) + s \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z}, \quad \forall (i, j).$$

De plus, si $(i, j) \in I_{\text{contact}}$, $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z} \geq 0$, car $\mathbf{z} \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. Par conséquent,

$$\forall (i, j) \in I_{\text{contact}}, \quad D_{ij}(\tilde{\mathbf{q}}) \geq D_{ij}(\mathbf{q}) + s \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z} = s \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z} \geq 0.$$

D'autre part, si $(i, j) \notin I_{\text{contact}}$, alors $s \leq \frac{D_{ij}(\mathbf{q})}{\sqrt{2}|\mathbf{z}|}$. D'où,

$$D_{ij}(\tilde{\mathbf{q}}) \geq D_{ij}(\mathbf{q}) + s \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z} \geq D_{ij}(\mathbf{q}) - s\sqrt{2}|\mathbf{z}| \geq 0.$$

Donc $\tilde{\mathbf{q}} \in Q_0$. Ainsi, $d_{Q_0}(\mathbf{q} + s\mathbf{w}) \leq |\mathbf{q} + s\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{q}}| = s|\mathbf{v}|$. Or $|\mathbf{q} + s\mathbf{w} - \mathbf{q}| = s|\mathbf{w}| > s|\mathbf{v}|$ car $|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{z}|^2$ d'après (3.5). Par conséquent, $\mathbf{q} \notin P_{Q_0}(\mathbf{q} + s\mathbf{w})$, ce qui est absurde. Finalement, $\mathbf{z} = 0$ et $\mathbf{w} = \mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{q}}$. Ceci prouve la deuxième inclusion. \square

Remarque 3.10 *Les arguments-clé de cette démonstration sont la convexité des fonctions D_{ij} , le caractère borné des \mathbf{G}_{ij} et le fait que $d_{Q_0}(\mathbf{q}) \geq d_{Q_{ij}}(\mathbf{q})$, $\forall \mathbf{q}$, $\forall (i, j)$.*

Remarque 3.11 *On retrouve le résultat déjà évoqué dans le cas particulier du couloir (cas où Q_0 est convexe). En effet, on avait montré que pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$, $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \partial I_{Q_0}(\mathbf{q})$ (cf. (2.5) p. 29). Et d'après la proposition A.8 p. 144, on a l'égalité $\partial I_{Q_0}(\mathbf{q}) = N(Q_0, \mathbf{q})$.*

3.2.2 Prox-régularité

On souhaite ici démontrer le caractère uniformément prox-régulier de Q_0 . On a vu (cf. théorème 3.5 p. 45) que les complémentaires de convexes lisses sont uniformément prox-réguliers. On peut se demander si l'intersection de tels ensembles (cas de Q_0) n'est pas uniformément prox-régulière avec une constante de prox-régularité qui dépendrait des constantes de prox-régularité de ces ensembles. En général, ceci est faux comme l'illustre la figure 3.1. Sur celle-ci, on a tracé en trait plein les frontières d'un ensemble S qui est l'intersection des complémentaires de deux disques de même rayon. Cet ensemble est uniformément prox-régulier mais sa constante de prox-régularité (rayon du disque en pointillé) tend vers zéro quand les centres des disques s'éloignent. Cette dégénérescence est due au fait que le produit scalaire des vecteurs normaux aux disques \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 en leurs points d'intersection (cf. fig 3.2) tend vers -1. Ainsi la constante de prox-régularité de S dépend aussi de l'angle formé par les vecteurs normaux \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 .

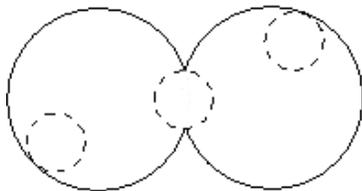


FIG. 3.1 – Dégénérescence de la constante de prox-régularité.

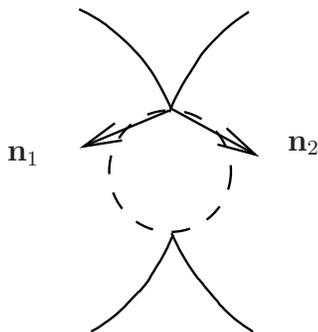


FIG. 3.2 – Évolution de l'angle entre les vecteurs normaux \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 .

La démonstration du caractère uniformément prox-régulier de Q_0 repose sur l'établissement d'une inégalité triangulaire inverse vérifiée par les vecteurs $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$. Nous proposons deux preuves de cette inégalité. La première détaillée dans l'annexe G met bien en évidence l'importance d'estimer les angles entre les vecteurs $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$. Nous préférons ici présenter une autre preuve donnant une meilleure constante de prox-régularité en utilisant un résultat important qui sera démontré au chapitre suivant.

Proposition 3.12 *L'ensemble Q_0 est η -prox-régulier avec*

$$\eta = \frac{1}{Nn_v} \left(\frac{\min \left(\sin \left(\frac{\pi}{n_v + 1} \right), \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right)}{2\sqrt{n_v}} \right)^N \min_{(i,j)} (r_i + r_j),$$

où n_v est le nombre maximal de voisins que peut avoir une personne.
En notant $r_{\min} = \min r_i$ et $r_{\max} = \max r_i$, cette constante vérifie

$$n_v \leq \frac{\pi}{\arcsin \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \right)},$$

ce qui fait l'objet du lemme 3.16 démontré à la fin de cette section p. 53.

Remarque 3.13 *En supposant que les rayons des disques sont bornés, cette constante η se comporte, lorsque le nombre d'individus N tend vers l'infini comme*

$$\eta \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} cste \left(\frac{\pi}{\sqrt{n_v}} \right)^N \frac{1}{N^{N+1}}.$$

Démonstration :

D'après la proposition 2.23, on doit montrer que pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$ et tout $\mathbf{v} \in N(Q_0, \mathbf{q})$,

$$\mathbf{v} \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \leq \frac{|\mathbf{v}|}{2\eta} |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in Q_0. \quad (3.6)$$

On sait, d'après la proposition 3.7, que pour tout $\mathbf{q} \in Q_{ij}$ et tout $\mathbf{w} \in N(Q_{ij}, \mathbf{q})$,

$$\mathbf{w} \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \leq \frac{|\mathbf{w}|}{2\eta_{ij}} |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in Q_{ij}. \quad (3.7)$$

L'inégalité (3.6) est triviale lorsque \mathbf{v} est le vecteur nul. Or si $\mathbf{q} \in \overset{\circ}{Q}_0$, $N(Q_0, \mathbf{q}) = \{0\}$, on considère donc $\mathbf{q} \in \partial Q_0$ et $\mathbf{v} \in N(Q_0, \mathbf{q}) \setminus \{0\}$. D'après la proposition 3.9,

$$\mathbf{v} = - \sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \quad \alpha_{ij} \geq 0.$$

D'après les inégalités (3.7), et comme $Q_0 \subset Q_{ij}$, on a

$$\left(- \sum \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right) \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \leq \sum \frac{\alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})|}{2\eta_{ij}} |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in Q_0.$$

La somme porte toujours sur les couples (i, j) appartenant à l'ensemble I_{contact} , mais par souci de lisibilité, cela ne sera plus précisé dans la suite. Comme $|\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| = \sqrt{2}$, on obtient,

$$\mathbf{v} \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \leq \sum \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{2}\eta_{ij}} |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in Q_0.$$

En posant, $\eta_{min} = \min_{(i,j), i < j} \eta_{ij}$, on a,

$$\mathbf{v} \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}\eta_{min}} \left(\sum \alpha_{ij} \right) |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}|^2, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in Q_0.$$

Pour obtenir l'inégalité (3.6), il suffit de trouver une constante $\eta > 0$, indépendante des α_{ij} et de \mathbf{q} , telle que

$$\left(\sum \alpha_{ij} \right) \frac{1}{\sqrt{2}\eta_{min}} \leq \frac{1}{2\eta} \left| \sum \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|,$$

autrement dit telle que,

$$\left| \sum \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right| \geq \sqrt{2} \frac{\eta}{\eta_{min}} \left(\sum \alpha_{ij} \right).$$

Finalement, on cherche $\gamma > 0$ tel que,

$$\left| \sum \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \left(\sum \alpha_{ij} \right),$$

et Q_0 sera alors η -prox-régulier avec

$$\eta = \frac{\eta_{min}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \min_{(i,j)} \frac{r_i + r_j}{\sqrt{2}}.$$

Il s'agit donc de prouver une inégalité triangulaire inverse,

$$\sum \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| = \sqrt{2} \sum \alpha_{ij} \leq \gamma \left| \sum \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|.$$

La démonstration de la prox-régularité de Q_0 se conclut à l'aide de la proposition fondamentale énoncée ci-après. \square

Proposition 3.14 (Inégalité triangulaire inverse)

Il existe $\gamma > 1$ tel que pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$,

$$\sum_{(i,j) \in I_{contact}} \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \gamma \left| \sum_{(i,j) \in I_{contact}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|,$$

où

$I_{contact} = \{(i, j), i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) = 0\}$ et les α_{ij} sont des réels positifs quelconques.

La constante γ peut être prise égale à

$$\gamma = \frac{N n_v}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{n_v}}{\min \left(\sin \left(\frac{\pi}{n_v + 1} \right), \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right)} \right)^N.$$

Remarque 3.15 *Noter l'importance du signe des coefficients α_{ij} . Cette inégalité est fautive en toute généralité pour des coefficients réels quelconques, puisque pour N grand le cardinal de l'ensemble I_{contact} peut être strictement supérieur à $2N$, ce qui impose une relation de liaison entre les vecteurs $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$.*

Établir une inégalité inverse pour un grand nombre de vecteurs semble difficile. La méthode proposée fournit des constantes γ et η probablement non optimales. Afin de montrer la complexité de ce problème, on propose à la section 3.3 une minoration de γ et donc une majoration de η .

Démonstration de l'inégalité triangulaire inverse (proposition 3.14) :

D'après la proposition 4.21 p. 86, on a pour tout $(k, l) \in I_{\text{contact}}$,

$$\alpha_{kl} \leq b^N \left| \sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|,$$

avec

$$b = \frac{2\sqrt{n_v}}{\min \left(\sin \left(\frac{\pi}{n_v + 1} \right), \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right)}.$$

En sommant sur les couples $(k, l) \in I_{\text{contact}}$, on obtient

$$\sum_{(k,l) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{kl} |\mathbf{G}_{kl}(\mathbf{q})| \leq \sqrt{2} \text{card}(I_{\text{contact}}) b^N \left| \sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|.$$

Ainsi,

$$\sum_{(k,l) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{kl} |\mathbf{G}_{kl}(\mathbf{q})| \leq \frac{N n_v}{\sqrt{2}} b^N \left| \sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|.$$

□

Il reste à justifier la majoration du nombre maximal de voisins que peut avoir une personne (majoration donnée à la proposition 3.12 p. 51).

Lemme 3.16 *En notant $r_{\min} = \min r_i$ et $r_{\max} = \max r_i$, le nombre maximal de voisins n_v que peut avoir une personne vérifie*

$$n_v \leq \frac{\pi}{\arcsin \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \right)}.$$

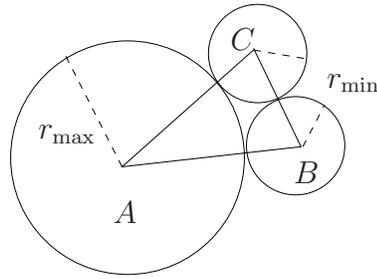


FIG. 3.3 – Situation où le nombre de voisins est maximal.

Démonstration :

On considère une personne représentée par un disque de rayon r_{\max} et on cherche à calculer le nombre maximal de voisins représentés par des disques de rayon r_{\min} , qu'elle peut avoir (cf. fig. 3.3).

On a

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ (2r_{\min})^2 &= (r_{\min} + r_{\max})^2 + (r_{\min} + r_{\max})^2 - 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta \\ 4r_{\min}^2 &= 2(r_{\min} + r_{\max})^2(1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

D'où,

$$1 - \cos\theta = \frac{2r_{\min}^2}{(r_{\min} + r_{\max})^2}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r_{\min}^2}{(r_{\min} + r_{\max})^2}.$$

Par conséquent,

$$\theta = 2 \arcsin\left(\frac{r_{\min}}{r_{\min} + r_{\max}}\right)$$

Comme $n_v \leq \frac{2\pi}{\theta}$, on obtient

$$n_v \leq \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}\right)}.$$

□

Remarque 3.17 Dans le cas monodisperse ($r_{\min} = r_{\max} = r$), on retrouve bien $n_v \leq 6$.

3.3 Majoration de la constante η

Dans cette section, nous proposons d'établir une majoration de la constante η pour mieux saisir la dépendance de celle-ci par rapport aux données du problème (le nombre N de personnes et les rayons r_i des disques qui les représentent). C'est dans ce but que nous allons considérer une configuration particulière d'individus, celle où les personnes forment une file ou un boulier (configuration pour laquelle des calculs exacts sont possibles). Comme nous l'avons déjà signalé, nous ne majorons pas à proprement parler la constante optimale de prox-régularité de Q_0 , mais la majoration de η suggère le comportement de cette dernière par rapport aux données du problème. L'objet de cette section est de démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.18 *La constante η vérifie*

$$\eta \leq \min \left(\frac{r_i + r_j}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{6}{N(N-1)(N+1)}}.$$

3.3.1 Etude du boulier

Pour cela, nous allons prouver que la constante γ définie à la proposition 3.14 p. 52 vérifie

$$\gamma \geq \sqrt{\frac{N(N-1)(N+1)}{6}}.$$

Etudions le cas particulier d'un boulier (fig. 3.4), en considérant N personnes alignées sur un axe (par exemple celui des abscisses).

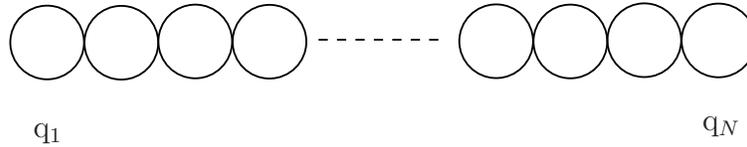


FIG. 3.4 – Configuration \mathbf{q}_0 .

Autrement dit, considérons la configuration \mathbf{q}_0 qui s'écrit,

$$\mathbf{q}_0 = (0, r_1 + r_2, r_1 + 2r_2 + r_3, \dots, r_1 + 2 \sum_{i=2}^{N-1} r_i + r_N).$$

On a alors d'après la proposition 3.9 p. 48,

$$N(Q_0, \mathbf{q}_0) = \left\{ - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{i,i+1} \mathbf{G}_{i,i+1}(\mathbf{q}_0), \alpha_{i,i+1} \geq 0 \right\},$$

avec $\mathbf{G}_{i,i+1}(\mathbf{q}_0) = (0, \dots, -1, 1, 0, \dots, 0)$, (le 1 étant à la $i^{\text{ème}}$ place). On définit

$$C = \left\{ \boldsymbol{\alpha}, \alpha_{i,i+1} \geq 0, \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{i,i+1} = 1 \right\}.$$

On cherche à trouver la plus petite constante γ qui vérifie,

$$\begin{aligned} & |\alpha_{12}\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}_0)| + |\alpha_{23}\mathbf{G}_{23}(\mathbf{q}_0)| + \dots + |\alpha_{N-1N}\mathbf{G}_{N-1N}(\mathbf{q}_0)| \\ & \leq \gamma |\alpha_{12}\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}_0) + \alpha_{23}\mathbf{G}_{23}(\mathbf{q}_0) + \dots + \alpha_{N-1N}\mathbf{G}_{N-1N}(\mathbf{q}_0)|, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{R}^+)^{N-1}. \end{aligned}$$

Comme $|\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_0)| = \sqrt{2}$, ceci est équivalent à

$$\sqrt{2} \leq \gamma |\alpha_{12}\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}_0) + \alpha_{23}\mathbf{G}_{23}(\mathbf{q}_0) + \dots + \alpha_{N-1N}\mathbf{G}_{N-1N}(\mathbf{q}_0)|, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in C. \quad (3.8)$$

Calculons maintenant

$$\begin{aligned} & \alpha_{12}\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}_0) + \alpha_{23}\mathbf{G}_{23}(\mathbf{q}_0) + \dots + \alpha_{N-1N}\mathbf{G}_{N-1N}(\mathbf{q}_0) \\ & = (-\alpha_{12}, \alpha_{12} - \alpha_{23}, \dots, \alpha_{N-2,N-1} - \alpha_{N-1N}, \alpha_{N-1N}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & |\alpha_{12}\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}_0) + \alpha_{23}\mathbf{G}_{23}(\mathbf{q}_0) + \dots + \alpha_{N-1N}\mathbf{G}_{N-1N}(\mathbf{q}_0)|^2 \\ & = \alpha_{12}^2 + \sum_{i=2}^{N-1} (\alpha_{i-1,i} - \alpha_{i,i+1})^2 + \alpha_{N-1N}^2. \end{aligned}$$

On cherche donc une condition sur γ pour que l'inégalité (3.8) soit vérifiée, c'est-à-dire pour que,

$$\min_{\boldsymbol{\alpha} \in C} \left[\gamma^2 \left(\alpha_{12}^2 + \sum_{i=2}^{N-1} (\alpha_{i-1,i} - \alpha_{i,i+1})^2 + \alpha_{N-1N}^2 \right) \right] \geq 2. \quad (3.9)$$

On note la fonction

$$\begin{aligned} H_\gamma : \mathbb{R}^{N-1} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha_{i,i+1}) & \mapsto \gamma^2 \left(\alpha_{12}^2 + \sum_{i=2}^{N-1} (\alpha_{i-1,i} - \alpha_{i,i+1})^2 + \alpha_{N-1N}^2 \right). \end{aligned}$$

et la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{N-1} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha_{i,i+1}) & \mapsto \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{i,i+1}. \end{aligned}$$

De plus, on définit l'ensemble

$$S = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N-1}, \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{i,i+1} = 1 \right\} = \{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N-1}, F(\boldsymbol{\alpha}) = 1 \}.$$

Pour obtenir l'inégalité (3.9), on utilise la proposition suivante qui sera démontrée plus loin.

Proposition 3.19 *Il existe un unique $\tilde{\alpha} \in C$ tel que*

$$H_\gamma(\tilde{\alpha}) = \min_C H_\gamma = \frac{12\gamma^2}{N(N-1)(N+1)}.$$

Ainsi, l'inégalité (3.9) est vérifiée si et seulement si

$$\frac{12\gamma^2}{N(N-1)(N+1)} \geq 2.$$

Ceci est équivalent à,

$$\gamma^2 \geq \frac{N(N-1)(N+1)}{6},$$

ce qui donne la minoration annoncée

$$\gamma \geq \sqrt{\frac{N(N-1)(N+1)}{6}}.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.18, sous réserve de prouver la proposition 3.19. \square

Remarque 3.20 *On peut obtenir plus facilement un autre minorant de γ (inférieur à celui que l'on vient d'énoncer), à savoir*

$$\gamma \geq N - 1.$$

En effet, en considérant le cas particulier où les coefficients $\alpha_{i,i+1}$ sont égaux et valent $\frac{1}{N-1}$, l'inégalité (3.8) est équivalente à,

$$\sqrt{2} \leq \gamma \frac{1}{N-1} |\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}_0) + \mathbf{G}_{23}(\mathbf{q}_0) + \dots + \mathbf{G}_{N-1N}(\mathbf{q}_0)| = \gamma \frac{1}{N-1} |(-1, 0, \dots, 0, 1)|.$$

Ceci implique que

$$\sqrt{2}(N-1) \leq \gamma\sqrt{2},$$

d'où le résultat.

Démonstration de la proposition 3.19 :

Pour plus de clarté, les lemmes utilisés dans la suite seront prouvés dans la section 3.3.2.

Etape 1 :

Utilisons le lemme suivant.

Lemme 3.21 *La fonction H_γ est strictement convexe et coercive.*

Plus précisément, suivant la parité de N , \mathbf{s}_N s'écrit :

$$\mathbf{s}_N = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \text{N impair} \\ N \\ 2N - 2 \\ 3N - 6 \\ \vdots \\ kN - k(k - 1) \\ \vdots \\ \left(\frac{N + 1}{2}\right)^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 3N - 6 \\ 2N - 2 \\ N \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_N = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \text{N pair} \\ N \\ 2N - 2 \\ 3N - 6 \\ \vdots \\ kN - k(k - 1) \\ \vdots \\ \frac{N(N + 2)}{4} \\ \frac{N(N + 2)}{4} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 3N - 6 \\ 2N - 2 \\ N \end{pmatrix}$$

On précise la valeur de $F(\mathbf{s}_N)$, ainsi que de $H_\gamma(\mathbf{s}_N)$ avec les lemmes 3.22 et 3.23.

Lemme 3.22

$$F(\mathbf{s}_N) = \frac{1}{24}N(N + 1)(N + 2).$$

Lemme 3.23

$$H_\gamma(\mathbf{s}_N) = \frac{\gamma^2}{48}N(N + 1)(N + 2).$$

De plus, $\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\lambda}{\gamma^2}\mathbf{s}_{N-1}$. Comme $F(\boldsymbol{\alpha}_0) = 1$ (car $\boldsymbol{\alpha}_0 \in S$), on a

$$\lambda = \gamma^2 \frac{F(\boldsymbol{\alpha}_0)}{F(\mathbf{s}_{N-1})} = \gamma^2 \frac{1}{F(\mathbf{s}_{N-1})} = \frac{24\gamma^2}{N(N - 1)(N + 1)}.$$

On peut alors déterminer $H_\gamma(\alpha_0)$:

$$\begin{aligned}
 H_\gamma(\alpha_0) &= H_\gamma\left(\frac{\lambda}{\gamma^2}\mathbf{s}_{N-1}\right) \\
 &= \left(\frac{\lambda}{\gamma^2}\right)^2 H_\gamma(\mathbf{s}_{N-1}) \\
 &= \left(\frac{\lambda^2}{\gamma^4}\right) \frac{\gamma^2}{48} N(N-1)(N+1) \\
 &= \lambda^2 \frac{N(N-1)(N+1)}{48\gamma^2} \\
 &= \frac{24^2\gamma^4}{(N(N-1)(N+1))^2} \frac{N(N-1)(N+1)}{48\gamma^2} \\
 &= \frac{12\gamma^2}{N(N-1)(N+1)}.
 \end{aligned}$$

α_0 est un extremum de H_γ sur S . Comme H_γ n'est pas majorée sur S ($\sup_S H_\gamma = +\infty$), α_0 est donc le minimum de H_γ sur S .

Etape 3 :

Comme le vecteur \mathbf{s}_{N-1} a toutes ses composantes positives et que le réel λ est positif, on a nécessairement $\alpha_0 \in C$. Par unicité du minimiseur de H_γ sur C , on a $\tilde{\alpha} = \alpha_0$. Ceci termine la démonstration de la proposition 3.19. \square

Remarque 3.24 (Configurations obtenues lors des deux minoration de γ)

Pour obtenir la minoration de γ à la remarque 3.20 p. 57, on considèrerait en fait la configuration non admissible

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{G}_{i,i+1}(\mathbf{q}_0)$$

représentée sur la figure 3.5. À partir de la configuration \mathbf{q}_0 (cf. fig 3.4), on a choisi de

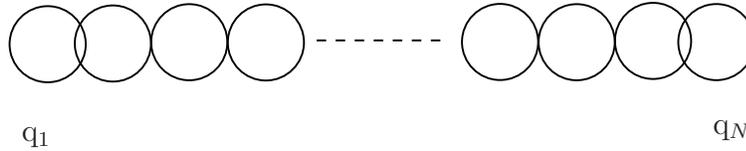


FIG. 3.5 – Configuration \mathbf{q} .

prendre une certaine direction du cône proximal normal $N(Q_0, \mathbf{q}_0)$ à savoir

$$\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{G}_{i,i+1}(\mathbf{q}_0)$$

et avec cette direction, la configuration \mathbf{q} ne présente que 2 chevauchements.

Par ailleurs, on a montré à la proposition 3.19 quelle direction du cône proximal normal il faut prendre pour obtenir la meilleure minoration de γ . La direction trouvée est donc celle du vecteur

$$\sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\alpha}_{i,i+1} \mathbf{G}_{i,i+1}(\mathbf{q}_0).$$

Sur la figure 3.6, on a représenté $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 - 0.01 \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\alpha}_{i,i+1} \mathbf{G}_{i,i+1}(\mathbf{q}_0)$. Cette configuration non admissible présente des chevauchements de même longueur entre toutes les particules voisines.

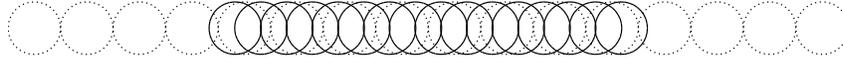


FIG. 3.6 – Configurations \mathbf{q}_0 (en trait pointillé) et \mathbf{q} (en trait plein).

Remarque 3.25 La matrice $-\frac{1}{2}A_N$ (équation 3.10 p. 58) est la matrice du laplacien discrétisé, ce qu'on retrouve en traçant la solution $\mathbf{s}_N = A_N^{-1} \mathbf{e}$ sur la figure 3.7.

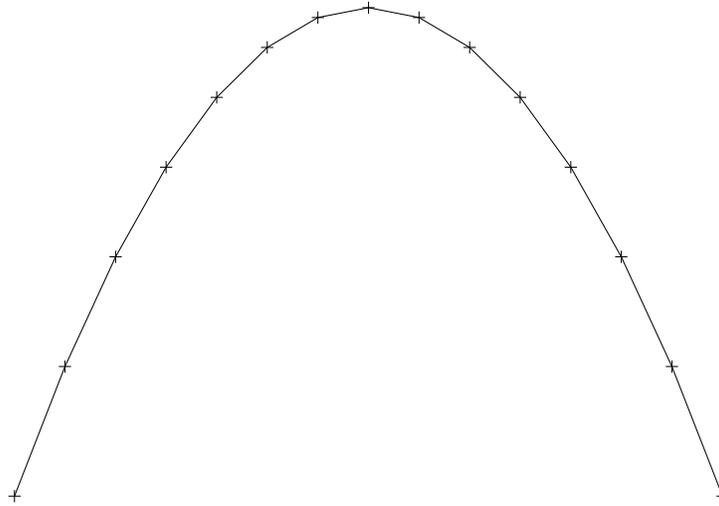


FIG. 3.7 – Représentation du vecteur \mathbf{s}_{15} .

3.3.2 Démonstration des lemmes

Enoncé et preuve du lemme 3.21

La fonction H_γ est strictement convexe et coercive.

Démonstration :

Stricte convexité

La hessienne de H_γ , en tout point, est la matrice A_{N-1} (cf. équation 3.10 p. 58), qui n'est autre que l'opposé de la matrice du laplacien discrétisé. Rappelons comment on peut montrer qu'elle est symétrique définie positive. Pour cela, il suffit de vérifier que ses mineurs principaux (déterminants des matrices A_p pour $1 \leq p \leq N-1$) sont tous strictement positifs. On peut montrer que $\det(A_p) = (p+1)2^p > 0$. En effet, $\det(A_p) = 2^p \det(B_p)$ où

$$B_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on s'aperçoit que

$$\det(B_p) = 2\det(B_{p-1}) - \det(B_{p-2}).$$

Par récurrence, on obtient que $\det(B_p) = p+1$. Ainsi, la hessienne de H_γ est définie positive et par conséquent, la fonction H_γ est strictement convexe.

Coercivité

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite (α^n) , vérifiant

$$|\alpha^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ et } H_\gamma(\alpha^n) \leq K, \forall n \text{ avec } K > 0.$$

En regardant le premier terme de la somme $H_\gamma(\alpha^n)$, on obtient que nécessairement, la suite α_{12}^n est bornée par \sqrt{K} . Le deuxième terme de la somme indique alors que la suite α_{23}^n est aussi bornée. En itérant, on aboutit à la conclusion que $\alpha_{i,i+1}^n$ est bornée pour tout i , ce qui amène à une contradiction. \square

Enoncé et preuve du lemme 3.22

$$F(\mathbf{s}_N) = \frac{1}{24}N(N+1)(N+2).$$

Démonstration :

Calculons la valeur de $F(\mathbf{s}_N)$:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}_N) &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^N kN - k(k-1) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^N (N+1)k - k^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((N+1) \sum_{k=1}^N k - \sum_{k=1}^N k^2 \right). \end{aligned}$$

En rappelant que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6},$$

on obtient,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}_N) &= \frac{1}{4} \left((N+1) \frac{N(N+1)}{2} - \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{24} N(N+1)(N+2). \end{aligned}$$

□

Enoncé et preuve du lemme 3.23

$$H_\gamma(\mathbf{s}_N) = \frac{\gamma^2}{48} N(N+1)(N+2).$$

Démonstration :

Calculons $H_\gamma(\mathbf{s}_N)$:

$$\begin{aligned} H_\gamma(\mathbf{s}_N) &= \gamma^2 \left[s_{N,1}^2 + \sum_{k=2}^N (s_{N,k-1} - s_{N,k})^2 + s_{N,N}^2 \right] \\ &= \gamma^2 \left[\left(\frac{N}{4} \right)^2 + \sum_{k=2}^N \frac{(-N+2(k-1))^2}{16} + \dots + \left(\frac{N}{4} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\gamma^2}{16} \left[N^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (N-2k)^2 + N^2 \right] \\ &= \frac{\gamma^2}{16} \sum_{k=0}^N (N-2k)^2 \\ &= \frac{\gamma^2}{16} \left[(N+1)N^2 - 4N \sum_{k=0}^N k + 4 \sum_{k=0}^N k^2 \right] \\ &= \frac{\gamma^2}{16} \left[N+1)N^2 - 4N \frac{N(N+1)}{2} + 4 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right] \\ &= \frac{\gamma^2}{16} N(N+1) \left[N - 2N + \frac{2}{3}(2N+1) \right] \\ &= \frac{\gamma^2}{48} N(N+1)(N+2). \end{aligned}$$

□

Deuxième partie

Discrétisation et étude numérique

Chapitre 4

Présentation et étude d'un schéma numérique

Sommaire

4.1	Présentation du schéma numérique	68
4.1.1	En termes de vitesse	68
4.1.2	En termes de position	69
4.2	Convergence du schéma numérique	72
4.2.1	Extraction et propriétés de la fonction limite	72
4.2.2	Démonstration de la proposition 4.10 : étude des multiplicateurs de Lagrange	77
4.2.3	Lemmes techniques	90

Dans ce chapitre, nous proposons un schéma numérique pour calculer la solution du problème (E₂) défini p. 27. Comme dans le problème continu, celui-ci est basé sur le calcul de la vitesse réelle comme projection de la vitesse souhaitée sur un ensemble de vitesses admissibles « au premier ordre ». En termes de position, ceci revient à projeter non pas sur l'ensemble de configurations admissibles Q_0 mais sur un sous-ensemble convexe $K(\mathbf{q})$. Ce remplacement réalisable d'un point de vue numérique pose toutefois quelques problèmes lors de l'étude du schéma. Cependant, en prouvant que $K(\mathbf{q})$ est une bonne approximation locale de Q_0 , nous parvenons à démontrer la convergence du schéma proposé.

4.1 Présentation du schéma numérique

4.1.1 En termes de vitesse

Dans toute la suite, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}$ représente le vecteur position des N personnes. La configuration initiale $\mathbf{q}_0 \in Q_0$ (définition 2.1 p. 24) est donnée. Pour $\mathbf{q} \in Q_0$, le vecteur des vitesses souhaitées des N individus est noté $\mathbf{U}(\mathbf{q})$ (différents choix seront proposés dans le chapitre 6). On considère une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, T]$ de pas h , $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$, et on note :

- \mathbf{q}_k^n la valeur approchée de la configuration $\mathbf{q}(t_k^n)$,
- \mathbf{u}_k^n la valeur approchée de la vitesse réelle $\mathbf{u}(t_k^n)$.

Connaissant \mathbf{q}_k^n , on obtient la configuration au temps suivant, en utilisant un schéma d'Euler explicite. Reste à déterminer la vitesse réelle \mathbf{u}_k^n à partir de la vitesse souhaitée $\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)$. Comme dans le problème continu (2.1) défini page 25, la première s'exprime comme la projection de la seconde sur un ensemble de vitesses admissibles « au premier ordre ».

$$\begin{aligned}
 \text{Initialisation :} \quad & \mathbf{q}_0^n = \mathbf{q}_0 \\
 \text{Boucle en temps :} \quad & \mathbf{q}_k^n \text{ connu} \\
 & \mathbf{u}_k^n = P_{C_h(\mathbf{q}_k^n)}(\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)) \\
 & \text{où } C_h(\mathbf{q}_k^n) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}_k^n) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_k^n) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad \forall i < j \} \\
 & \mathbf{q}_{k+1}^n = \mathbf{q}_k^n + h \mathbf{u}_k^n
 \end{aligned}$$

Cet algorithme s'inspire d'un schéma initialement développé pour les écoulements granulaires [Mau06]. La proposition suivante montre que ce schéma ne fournit que des configurations admissibles.

Proposition 4.1 *Pour tout k compris entre 0 et n , tous $i \neq j$, on a $D_{ij}(\mathbf{q}_k^n) \geq 0$.*

Démonstration :

C'est une conséquence directe de la convexité de la fonction $\mathbf{q} \mapsto D_{ij}(\mathbf{q})$. En effet, pour tout $k < n$,

$$\begin{aligned}
 D_{ij}(\mathbf{q}_{k+1}^n) &= D_{ij}(\mathbf{q}_k^n + h \mathbf{u}_k^n) \\
 &\geq D_{ij}(\mathbf{q}_k^n) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_k^n) \cdot \mathbf{u}_k^n \quad (\text{convexité de } D_{ij}) \\
 &\geq 0 \quad (\text{car } \mathbf{u}_k^n \in C_h(\mathbf{q}_k^n)). \quad \square
 \end{aligned}$$

4.1.2 En termes de position

Pour interpréter notre algorithme en termes de position, on définit l'ensemble convexe fermé suivant,

$$K(\mathbf{q}) = \{\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \geq 0 \quad \forall i < j\}. \quad (4.1)$$

On peut réécrire notre algorithme de la manière suivante,

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{q}_{k+1}^n &= P_{K(\mathbf{q}_k^n)}(\mathbf{q}_k^n + h\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)) \\ \text{où } K(\mathbf{q}_k^n) &= \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}_k^n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_k^n) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_k^n) \geq 0 \quad \forall i < j\}. \end{aligned}} \quad (4.2)$$

On projette sur $K(\mathbf{q}_k^n) \subset Q_0$ que l'on peut qualifier d'approximation convexe intérieure de Q_0 (voir fig. 4.1). À chaque pas de temps, on résout ainsi un problème sur un espace admissible strictement plus petit. Sur la figure 4.1, les frontières de $K(\mathbf{q}_k^n)$ sont en pointillés. Les points \mathbf{q}_{k+1}^n et $\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^n$ sont obtenus respectivement après projection sur $K(\mathbf{q}_k^n)$ et sur Q_0 de $\mathbf{q}_k^n + h\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)$ (pour les deux exemples de $\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)$ donnés). On rappelle en effet que pour h suffisamment petit, la projection de $\mathbf{q}_k^n + h\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)$ sur Q_0 est bien définie puisque Q_0 est uniformément prox-régulier (cf. propriété 2.24 p. 36).

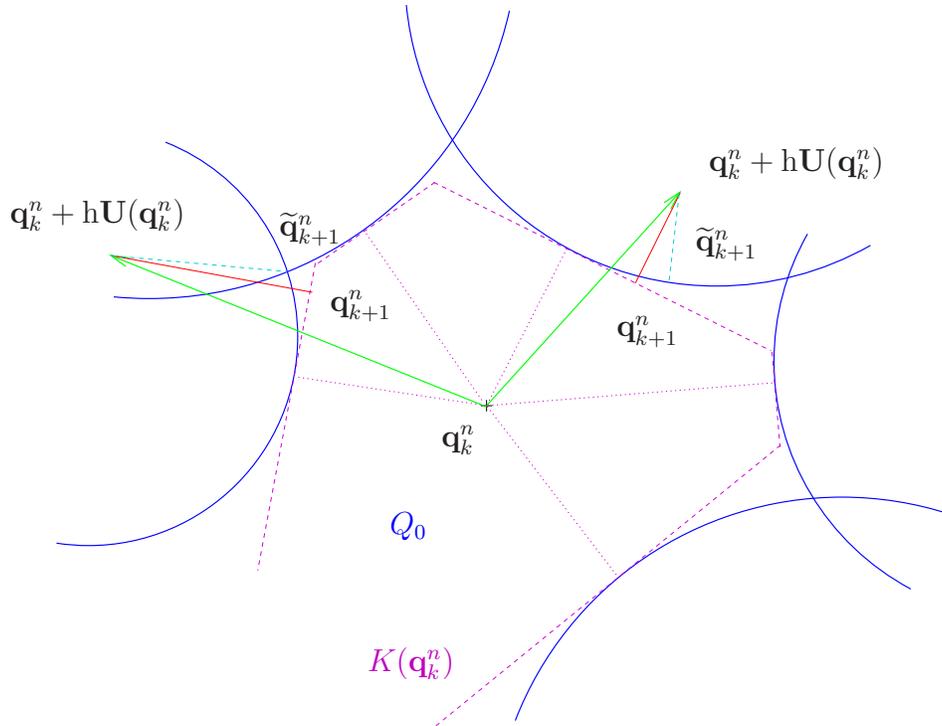


FIG. 4.1 – Projections théorique et numérique.

D'un point de vue numérique, remplacer Q_0 par $K(\mathbf{q}_k^n)$ permet d'utiliser des méthodes déjà existantes permettant de calculer la projection sur un ensemble convexe. Toutefois, cette

approximation entraîne quelques difficultés théoriques. Une première chose importante à justifier est qu'on ne perd pas d'information sur le cône proximal normal en remplaçant Q_0 par $K(\mathbf{q}_k^n)$. Ce résultat est l'objet du lemme suivant :

Lemme 4.2 *Soit $\mathbf{q} \in Q_0$, on a l'égalité des deux cônes :*

$$N(Q_0, \mathbf{q}) = N(K(\mathbf{q}), \mathbf{q}).$$

Démonstration :

La preuve utilise des lemmes qui seront démontrés ultérieurement dans la sous-section 4.2.3 p. 90. D'après la proposition 3.9 p. 48, on sait que

$$N(Q_0, \mathbf{q}) = \left\{ - \sum \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \quad \mu_{ij} \geq 0, \quad \mu_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \right\}.$$

Commençons par prouver l'inclusion $N(Q_0, \mathbf{q}) \subset N(K(\mathbf{q}), \mathbf{q})$.

Soit $\mathbf{w} \in N(Q_0, \mathbf{q})$, ce vecteur s'écrit donc $\mathbf{w} = - \sum \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$ où les μ_{ij} sont des réels positifs et nécessairement nuls si $D_{ij}(\mathbf{q}) > 0$. Soit $\mathbf{p} \in K(\mathbf{q})$,

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = - \sum \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

Comme \mathbf{p} appartient à $K(\mathbf{q})$, on a $D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \geq 0, \forall i < j$. De plus, si $\mu_{ij} > 0$ alors $D_{ij}(\mathbf{q}) = 0$ et par conséquent $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \geq 0$. Donc $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \leq 0, \forall \mathbf{p} \in K(\mathbf{q})$. D'après le lemme 4.24 (b) p. 90, ceci est équivalent au fait que $\mathbf{w} \in N(K(\mathbf{q}), \mathbf{q})$.

Prouvons maintenant l'autre inclusion, $N(K(\mathbf{q}), \mathbf{q}) \subset N(Q_0, \mathbf{q})$.

Soit $\mathbf{w} \in N(K(\mathbf{q}), \mathbf{q})$, d'après le lemme 4.24 (a) p. 90, ceci est équivalent au fait que $\mathbf{q} = P_{K(\mathbf{q})}(\mathbf{q} + \mathbf{w})$. De plus, d'après le lemme 4.25 p. 91,

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q} + \mathbf{w}) + \sum \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \text{ où } (\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) \text{ est solution de } (P_{q, q+w}).$$

Par conséquent, $\mathbf{w} = - \sum \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$, où les μ_{ij} sont des réels positifs. Reste à vérifier que $\mu_{ij} = 0$ si $D_{ij}(\mathbf{q}) > 0$. Or, la relation de complémentarité dans $(P_{q, q+w})$ donne $\sum \mu_{ij} D_{ij}(\mathbf{q}) = 0$, d'où le résultat. \square

Remarque 4.3 *Par ailleurs, une autre difficulté viendra du fait que l'on projette sur un ensemble $K(\mathbf{q}_k^n)$ dépendant de la position \mathbf{q}_k^n , ce qui sort du cadre strict des processus de rafle décrit dans la section 2.4.2. En effet, dans ce dernier, sont considérés des ensembles $C(t)$ où l'application multivaluée C est supposée à variation bornée avec une fonction de variation continue à droite (cf. équation (2.13) p. 40). Cependant, nous démontrerons à la proposition 4.9 p. 76 la propriété de continuité locale suivante : la fonction*

$$\begin{aligned} Q_0 \times \mathbb{R}^{2N} &\longmapsto \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) &\longrightarrow d_{K(\mathbf{q})}(\tilde{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

est continue sur un voisinage de la diagonale. En fait, nous prouverons que l'application

$$\begin{aligned} Q_0 \times \mathbb{R}^{2N} &\longmapsto \mathbb{R}^{2N} \\ (\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) &\longrightarrow P_{K(\mathbf{q})}(\tilde{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

est continue sur ce même voisinage. (Le point projeté $\tilde{\mathbf{q}}$ est supposé proche du point \mathbf{q} associé à l'ensemble $K(\mathbf{q})$ sur lequel on projette.)

On définit les fonctions associées à ce schéma, à savoir les fonctions \mathbf{u}^n , \mathbf{U}^n constantes par morceaux par,

$$\mathbf{u}^n(t) = \mathbf{u}_k^n \text{ et } \mathbf{U}^n(t) = \mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n) \text{ si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[, \quad k < n,$$

et \mathbf{q}^n affine par morceaux telle que

$$\mathbf{q}^n(t_k^n) = \mathbf{q}_k^n \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}. \quad (4.3)$$

De plus, on pose $\mathbf{u}^n(T) = \mathbf{u}_{n-1}^n$ et $\mathbf{U}^n(T) = \mathbf{U}(\mathbf{q}_{n-1}^n)$. Si on définit les fonctions ρ et θ par

$$\rho^n(t) = t_k^n \text{ et } \theta^n(t) = t_{k+1}^n \text{ si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[, \quad \rho^n(T) = T \text{ et } \theta^n(T) = T,$$

la proposition suivante permet de mieux voir le lien entre le problème continu (E_2) défini page 27,

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}(t) - \mathbf{U}(\mathbf{q}(t)) \in -N(Q_0, \mathbf{q}(t)), \quad \text{p.p.t. } t \in [0, T]$$

et le problème discrétisé.

Proposition 4.4 *Les fonctions \mathbf{q}^n et \mathbf{U}^n vérifient*

$$\frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) - \mathbf{U}^n(t) \in -N(K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t))), \mathbf{q}^n(\theta^n(t))), \quad \text{p.p.t. } t \in [0, T].$$

Démonstration :

Par définition,

$$\mathbf{q}_{k+1}^n = P_{K(\mathbf{q}_k^n)}(\mathbf{q}_k^n + h\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)),$$

ce qui implique d'après la proposition A.4 (c) p. 143,

$$\mathbf{q}_k^n + h\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n) - \mathbf{q}_{k+1}^n \in \partial I_{K(\mathbf{q}_k^n)}(\mathbf{q}_{k+1}^n).$$

En divisant par h , on obtient

$$-\mathbf{u}_k^n + \mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n) \in \partial I_{K(\mathbf{q}_k^n)}(\mathbf{q}_{k+1}^n),$$

d'où

$$\mathbf{u}_k^n - \mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n) \in -\partial I_{K(\mathbf{q}_k^n)}(\mathbf{q}_{k+1}^n).$$

Par conséquent d'après la proposition A.8 p. 144,

$$\mathbf{u}_k^n - \mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n) \in -N(K(\mathbf{q}_k^n), \mathbf{q}_{k+1}^n).$$

De plus,

$$\forall t \notin \{t_k^n, k \in \{0..n\}\}, \quad \frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) = \mathbf{u}^n(t),$$

d'où le résultat. □

4.2 Convergence du schéma numérique

Énonçons maintenant le théorème fondamental de ce chapitre, dont la démonstration fait l'objet de cette section.

Théorème 4.5 (Convergence du schéma)

Sous les hypothèses du théorème 2.30 p. 40, la suite de fonctions \mathbf{q}^n définie par (4.2) et (4.3) converge uniformément sur $[0, T]$ vers l'unique fonction $\mathbf{q} \in W^{1,1}([0, T], Q_0)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{q}) \in -N(Q_0, \mathbf{q}) \text{ p.p.}, \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \in Q_0. \end{cases}$$

Comme cela a été souligné dans la remarque 4.3, le remplacement de Q_0 par des ensembles $K(\mathbf{q})$ soulève une nouvelle difficulté (par rapport aux travaux de J.F. Edmond et L. Thibault [ET06]) puisqu'une hypothèse de régularité de ces ensembles nous fait défaut.

4.2.1 Extraction et propriétés de la fonction limite

Extraction

On rappelle que $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}$, $|\mathbf{U}(\mathbf{q})| \leq C_U$. Par construction, $\mathbf{u}_k^n = P_{C_h(\mathbf{q}_k^n)}(\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n))$. Puisque $C_h(\mathbf{q}_k^n)$ est un convexe fermé contenant 0 et que la projection sur ce dernier est 1-lipschitz, on a

$$|P_{C_h(\mathbf{q}_k^n)}(\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)) - P_{C_h(\mathbf{q}_k^n)}(0)| \leq |\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n) - 0|.$$

D'où,

$$|\mathbf{u}_k^n| \leq |\mathbf{U}(\mathbf{q}_k^n)| \leq C_U. \quad (4.4)$$

Par conséquent,

$$\|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty([0, T], \mathbb{R}^{2N})} \leq C_U.$$

Comme pour tout t dans $[0, T]$, $\mathbf{q}^n(t) = \mathbf{q}_0 + \int_0^t \mathbf{u}^n(s) ds$, on a

$$\|\mathbf{q}^n\|_{L^\infty([0, T], \mathbb{R}^{2N})} \leq |\mathbf{q}_0| + T C_U.$$

D'après le théorème d'Ascoli, il existe donc une suite extraite, toujours notée \mathbf{q}^n , qui converge uniformément sur $[0, T]$ vers une fonction $\mathbf{q} \in C^0([0, T], \mathbb{R}^{2N})$.

$$\mathbf{q}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cvu}} \mathbf{q} \text{ sur } [0, T] \quad (4.5)$$

On peut montrer en fait que la fonction limite est plus régulière.

Proposition 4.6 *La fonction \mathbf{q} est dans $W^{1,\infty}([0, T], \mathbb{R}^{2N})$.*

Démonstration :

La suite des dérivées, toujours notée \mathbf{u}^n , est bornée dans $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^{2N})$. Il existe donc une suite extraite (toujours notée) \mathbf{u}^n qui converge dans $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^{2N})$ faible \star . Appelons \mathbf{u} sa limite, on a alors

$$\mathbf{u}^n \xrightarrow{\star} \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty([0, T], \mathbb{R}^{2N}). \quad (4.6)$$

L'égalité

$$\mathbf{q}^n(t) = \mathbf{q}_0 + \int_0^t \mathbf{u}^n(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

donne à la limite

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \int_0^t \mathbf{u}(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

On en déduit que la fonction \mathbf{q} est dans $W^{1,\infty}([0, T], \mathbb{R}^{2N})$ et que $\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{u}$ p.p. \square

Proposition 4.7 *La fonction \mathbf{q} vérifie $\mathbf{q}(t) \in Q_0$, pour tout t dans $[0, T]$.*

Démonstration :

Par construction et par convexité de $K(\mathbf{q}_k^n)$, $\mathbf{q}^n(t) \in K(\mathbf{q}_k^n) \subset Q_0$ si $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$. A fortiori, $\mathbf{q}^n(t) \in Q_0$, pour tout t dans $[0, T]$. Comme Q_0 est fermé, on obtient bien à la limite le résultat annoncé. \square

Finalement, la fonction \mathbf{q} est dans $W^{1,\infty}([0, T], Q_0) \subset W^{1,1}([0, T], Q_0)$. Si on montre que cette fonction vérifie l'inclusion différentielle précédente, le théorème 2.30 p. 40 affirmera son unicité. Ainsi, par compacité et par unicité de la valeur d'adhérence, on en déduira que la suite \mathbf{q}^n converge vers la fonction \mathbf{q} , unique solution du problème.

Inclusion différentielle

On veut montrer que la fonction limite \mathbf{q} vérifie l'inclusion différentielle du théorème 4.5. Le début de la preuve qu'on propose ici s'inspire d'une démonstration présente dans [ET06]. Afin de faciliter la lecture de la preuve, les lemmes énoncés seront démontrés ultérieurement dans la sous-section 4.2.3 p. 90. On veut montrer que

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{q}) \in -N(Q_0, \mathbf{q}) \text{ p.p.}$$

D'après le lemme 4.2 p. 70, il suffit de montrer que

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{q}) \in -N(K(\mathbf{q}), \mathbf{q}) \text{ p.p.}$$

On sait, d'après les résultats (4.5) et (4.6), qu'il existe des suites \mathbf{q}^n et $\mathbf{u}^n = \frac{d\mathbf{q}^n}{dt}$ telles que

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}^n}{dt} \xrightarrow{\star} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \text{ dans } L^\infty([0, T], \mathbb{R}^{2N}) \\ \mathbf{q}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cvu}} \mathbf{q} \text{ sur } [0, T]. \end{cases}$$

Comme on travaille sur l'intervalle $[0, T]$ borné, cela implique en particulier,

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}^n}{dt} \rightharpoonup \frac{d\mathbf{q}}{dt} \text{ dans } L^1([0, T], \mathbb{R}^{2N}) \\ \mathbf{q}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cvu}} \mathbf{q} \text{ sur } [0, T]. \end{cases}$$

Comme \mathbf{U} est lipschitzienne, on a $\mathbf{U}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cvu}} \mathbf{U}(\mathbf{q})$ et finalement,

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}^n}{dt} - \mathbf{U}^n \rightharpoonup \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{q}) \text{ dans } L^1([0, T], \mathbb{R}^{2N}) \\ \mathbf{q}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cvu}} \mathbf{q} \text{ sur } [0, T]. \end{cases}$$

Ceci associé au lemme de Mazur assure l'existence d'une suite de fonctions $\mathbf{z}^n \in L^1([0, T], \mathbb{R}^{2N})$ telle que,

$$\mathbf{z}^n \in \text{Conv} \left(\frac{d\mathbf{q}^k}{dt} - \mathbf{U}^k, k \geq n \right) \text{ et } \mathbf{z}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{q}) \text{ dans } L^1([0, T], \mathbb{R}^{2N}).$$

Quitte à extraire, on peut supposer que

$$\mathbf{z}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{z} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{q}) \text{ p.p.}$$

Or d'après la proposition 4.4, on sait que

$$\frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) - \mathbf{U}^n(t) \in -N(K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t))), \mathbf{q}^n(\theta^n(t))), \text{ p.p.t. } t \in [0, T]. \quad (4.7)$$

On fixe t dans $[0, T]$ tel qu'on ait la convergence de $\mathbf{z}_n(t)$ vers $\mathbf{z}(t) = \frac{d\mathbf{q}}{dt}(t) - \mathbf{U}(\mathbf{q}(t))$ et que l'inclusion ci-dessus soit vérifiée au point t (i.e. pour $t \notin \{t_k^n\}$). On veut montrer que $\mathbf{z}(t) \in -N(K(\mathbf{q}(t)), \mathbf{q}(t))$. Comme $\mathbf{z}^n(t) \in \text{Conv} \left(\frac{d\mathbf{q}^k}{dt}(t) - \mathbf{U}^k(t), k \geq n \right)$, on a

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}, \langle \mathbf{z}^n(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \sup_{k \geq n} \left\langle \frac{d\mathbf{q}^k}{dt}(t) - \mathbf{U}^k(t), \boldsymbol{\xi} \right\rangle.$$

A la limite, on obtient

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}, \langle \mathbf{z}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \limsup_n \left\langle \frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) - \mathbf{U}^n(t), \boldsymbol{\xi} \right\rangle. \quad (4.8)$$

On souhaite maintenant majorer cette limite supérieure. Pour cela, on utilise l'équation (4.7) et le résultat suivant (cf. lemme 4.24 (d) p. 90) à savoir que

$$\frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) - \mathbf{U}^n(t) \in -N(K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t))), \mathbf{q}^n(\theta^n(t)))$$

est équivalent à

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}, \left\langle -\frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) + \mathbf{U}^n(t), \boldsymbol{\xi} \right\rangle \leq \left| \frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) - \mathbf{U}^n(t) \right| d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{q}^n(\theta^n(t))).$$

On a donc

$$\forall n, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}, \left\langle \frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) - \mathbf{U}^n(t), \boldsymbol{\xi} \right\rangle \leq \left| \frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) - \mathbf{U}^n(t) \right| d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}^n(\theta^n(t)) - \boldsymbol{\xi})$$

D'après (4.4), on obtient

$$\forall n, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}, \left\langle \frac{d\mathbf{q}^n}{dt}(t) - \mathbf{U}^n(t), \boldsymbol{\xi} \right\rangle \leq 2C_U d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}^n(\theta^n(t)) - \boldsymbol{\xi}). \quad (4.9)$$

De plus, on a $\forall n, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}$

$$\begin{aligned} & \left| d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}^n(\theta^n(t)) - \boldsymbol{\xi}) - d_{K(\mathbf{q}(t))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}) \right| \\ & \leq \left| d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}^n(\theta^n(t)) - \boldsymbol{\xi}) - d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}) \right| \\ & \quad + \left| d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}) - d_{K(\mathbf{q}(t))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}) \right| \\ & \leq |\mathbf{q}^n(\theta^n(t)) - \mathbf{q}(t)| + \left| d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}) - d_{K(\mathbf{q}(t))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}) \right|. \end{aligned}$$

On utilise la proposition suivante qui sera démontrée dans la suite.

Proposition 4.8 *Il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}$, $|\boldsymbol{\xi}| < \nu$,*

$$\left| d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}) - d_{K(\mathbf{q}(t))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.10)$$

On obtient donc $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}$, $|\boldsymbol{\xi}| < \nu$,

$$d_{K(\mathbf{q}^n(\rho^n(t)))}(\mathbf{q}^n(\theta^n(t)) - \boldsymbol{\xi}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_{K(\mathbf{q}(t))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}).$$

Finalement, en passant à la limite dans (4.9), on obtient

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}, |\boldsymbol{\xi}| < \nu, \langle \mathbf{z}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \leq 2C_U d_{K(\mathbf{q}(t))}(\mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\xi}).$$

Ceci est équivalent d'après le lemme 4.24 (f) p. 90 à

$$\mathbf{z}(t) \in -N(K(\mathbf{q}(t)), \mathbf{q}(t)). \quad (4.11)$$

□

Ainsi, s'achève la démonstration du théorème 4.5 dans ses grandes lignes. Reste maintenant à justifier les lemmes utilisés (cf. section 4.2.3) et surtout la proposition 4.8 qui est fondamentale. On a choisi de donner une preuve différente de celle écrite dans [ET06] pour majorer la limite supérieure de l'équation (4.8), toutefois l'argument-clé est le même. En effet, les auteurs ont par hypothèse (cf. équation (2.13) p. 40),

$$d_{C(t^n)}(y) \rightarrow d_{C(t)}(y), \forall y, \text{ lorsque } t^n \rightarrow t$$

analogue à (4.10). Ceci leur permet de démontrer la proposition 2.1 de [ET06], qui à partir de l'équation (4.8) donne le résultat (4.11).

Démonstration de la proposition 4.8

La proposition 4.8 se déduit de la proposition suivante en l'appliquant aux points $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ et $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}^n(\rho^n(t))$.

Proposition 4.9 Soient $\mathbf{q} \in Q_0$, $(\mathbf{q}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (Q_0)^\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{q}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{q}$, on définit $K = K(\mathbf{q})$ et $K_n = K(\mathbf{q}_n)$. Pour tout $\tilde{\mathbf{q}}$ dans \mathbb{R}^{2N} , on pose $\tilde{\mathbf{p}} = P_K(\tilde{\mathbf{q}})$ et $\tilde{\mathbf{p}}_n = P_{K_n}(\tilde{\mathbf{q}})$. Alors, il existe $\nu > 0$ (dépendant de \mathbf{q}) tel que pour tout $\tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \nu)$, $\tilde{\mathbf{p}}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{\mathbf{p}}$. En particulier, $d_{K_n}(\tilde{\mathbf{q}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} d_K(\tilde{\mathbf{q}})$.

Démonstration :

On sait d'après le lemme 4.25 p. 91, que les vecteurs $\tilde{\mathbf{p}}_n$ sont solutions d'un système de type suivant :

$$(P_{q_n, \tilde{q}}) \begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}_n = \tilde{\mathbf{q}} + \sum_{i < j} \lambda_{ij}^n \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_n) \\ \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}_n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_n) \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_n - \mathbf{q}_n) \geq 0 \\ \sum_{i < j} \lambda_{ij}^n (D_{ij}(\mathbf{q}_n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_n) \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_n - \mathbf{q}_n)) = 0, \end{cases}$$

où les λ_{ij}^n sont des réels positifs. De même, le vecteur $\tilde{\mathbf{p}}$ est solution d'un système analogue :

$$(P_{q, \tilde{q}}) \begin{cases} \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{q}} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \\ \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q}) \geq 0 \\ \sum_{i < j} \lambda_{ij} (D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q})) = 0, \end{cases}$$

où les λ_{ij} sont des réels positifs. Les réels λ_{ij}^n et λ_{ij} sont des multiplicateurs de Lagrange et la dernière ligne des deux systèmes contient une relation appelée relation de complémentarité. La proposition suivante (dont la démonstration fait l'objet de la section 4.2.2) affirme que la suite $\boldsymbol{\lambda}^n = (\lambda_{ij}^n)$ est bornée.

Proposition 4.10 Pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$, il existe $\nu > 0$ et M dans \mathbb{N} tels que pour tout $n \geq M$, tout $\tilde{\mathbf{q}}$ dans $B(\mathbf{q}, \nu)$ et tout $\boldsymbol{\lambda}^n$ solution de $(P_{q_n, \tilde{q}})$, on ait

$$\forall i < j, \lambda_{ij}^n \leq 2\nu b^N \text{ où } b = \frac{2\sqrt{n_v}}{\min\left(\sin\left(\frac{\pi}{2(n_v+1)}\right), \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)},$$

avec n_v défini au lemme 3.16 p. 53.

Quitte à extraire, on peut donc supposer que

$$\forall i < j, \lambda_{ij}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda_{ij}^\infty \geq 0.$$

En passant à la limite dans le premier système, on obtient que la suite $\widetilde{\mathbf{p}}_n$ converge vers un élément $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{p}} = \widetilde{\mathbf{q}} + \sum_{i < j} \lambda_{ij}^\infty \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \\ \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\widetilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q}) \geq 0 \\ \sum_{i < j} \lambda_{ij}^\infty (D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\widetilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q})) = 0. \end{cases}$$

On en déduit donc que $\widetilde{\mathbf{p}} = \widetilde{\mathbf{p}}$. La suite $\widetilde{\mathbf{p}}_n$ n'a par conséquent qu'une seule valeur d'adhérence $\widetilde{\mathbf{p}}$, d'où sa convergence vers $\widetilde{\mathbf{p}}$. \square

Remarque 4.11 *Le résultat de la proposition 4.9 n'est pas vrai en toute généralité lorsque $K(\mathbf{q}) = \bigcap_{i < j} K_{ij}(\mathbf{q})$ est une intersection quelconque de demi-espaces. Sur la figure 4.2, on a tracé les frontières des demi-espaces $K_{12}^n = K_{12}(\mathbf{q}_n)$ et $K_{13}^n = K_{13}(\mathbf{q}_n)$. Ces frontières se rejoignent lorsque n tend vers l'infini. On remarque donc que la suite $\widetilde{\mathbf{p}}_n$, qui est stationnaire, ne tend pas vers $\widetilde{\mathbf{p}}$.*

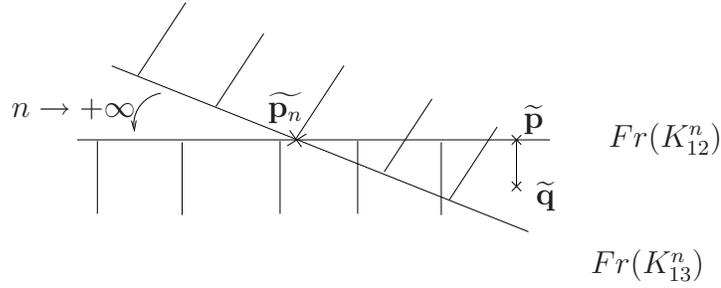


FIG. 4.2 – Contre-exemple.

L'argument-clé de la démonstration de la proposition 4.9 est le caractère uniformément borné des multiplicateurs de Lagrange. On le démontre dans la section suivante.

4.2.2 Démonstration de la proposition 4.10 : étude des multiplicateurs de Lagrange

Dans toute cette section, on reprend les notations de la proposition 4.9. On se donne \mathbf{q} dans Q_0 et une suite (\mathbf{q}_n) d'éléments de Q_0 , qui converge vers \mathbf{q} . Les projections d'un élément $\widetilde{\mathbf{q}}$ sur $K(\mathbf{q})$ et sur $K(\mathbf{q}_n)$ sont notées respectivement $\widetilde{\mathbf{p}}$ et $\widetilde{\mathbf{p}}_n$. On cherche à borner tous les $\boldsymbol{\lambda}$ tels que $(\widetilde{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\lambda})$ soit solution de $(P_{\mathbf{q}, \widetilde{\mathbf{q}}})$ et tous les $\boldsymbol{\lambda}^n$ tels que $(\widetilde{\mathbf{p}}_n, \boldsymbol{\lambda}^n)$ soit solution de $(P_{\mathbf{q}_n, \widetilde{\mathbf{q}}})$. Pour simplifier, on écrira juste $\boldsymbol{\lambda}$ solution de $(P_{\mathbf{q}, \widetilde{\mathbf{q}}})$ et $\boldsymbol{\lambda}^n$ solution de $(P_{\mathbf{q}_n, \widetilde{\mathbf{q}}})$, dans la suite. Une première chose à noter est que les multiplicateurs de Lagrange sont

nuls quand il n'y a pas contact. Définissons donc l'ensemble des couples de personnes qui sont éloignées l'une de l'autre (i.e. à distance strictement positive) :

$$I_{far}(\mathbf{q}) = \{(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) > 0\},$$

et précisons la valeur des multiplicateurs de Lagrange associés à ces couples.

Lemme 4.12 *Il existe $\nu > 0$ et M_0 dans \mathbb{N} tels que pour tout $n \geq M_0$ et tout $\tilde{\mathbf{q}}$ dans $B(\mathbf{q}, \nu)$, on ait :*

$$\lambda_{ij}^n = \lambda_{ij} = 0, \text{ pour tout couple } (i, j) \text{ de l'ensemble } I_{far}(\mathbf{q}),$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\lambda}^n$ sont respectivement solutions de $(P_{q, \tilde{q}})$ et $(P_{q_n, \tilde{q}})$.

Démonstration :

Ceci vient de la relation de complémentarité (dernière équation des problèmes $(P_{q, \tilde{q}})$ et $(P_{q_n, \tilde{q}})$). En effet, par définition de $I_{far}(\mathbf{q})$,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall (i, j) \in I_{far}(\mathbf{q}), \quad D_{ij}(\mathbf{q}) > 2\varepsilon.$$

Alors, comme $\mathbf{q}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{q}$,

$$\exists M_0 > 0, \forall n \geq M_0, \quad D_{ij}(\mathbf{q}_n) \geq \varepsilon, \quad \forall (i, j) \in I_{far}(\mathbf{q}) \text{ et } |\mathbf{q}_n - \mathbf{q}| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Posons $\nu = \frac{\varepsilon}{8}$ et choisissons $\tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \nu)$, on a alors $|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}| < \frac{\varepsilon}{8}$.

Comme $\tilde{\mathbf{p}} = P_K(\tilde{\mathbf{q}})$ et $\mathbf{q} \in K$, on a

$$|\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{q}}| \leq |\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}|. \quad (4.12)$$

Par conséquent,

$$|\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q}| \leq |\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{q}}| + |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}| \leq 2|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

De manière analogue, comme $\tilde{\mathbf{p}}_n = P_{K_n}(\tilde{\mathbf{q}})$ et $\mathbf{q}_n \in K_n$, on a

$$|\tilde{\mathbf{p}}_n - \tilde{\mathbf{q}}| \leq |\mathbf{q}_n - \tilde{\mathbf{q}}| \leq |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}| + |\mathbf{q} - \mathbf{q}_n| \leq 2\nu. \quad (4.13)$$

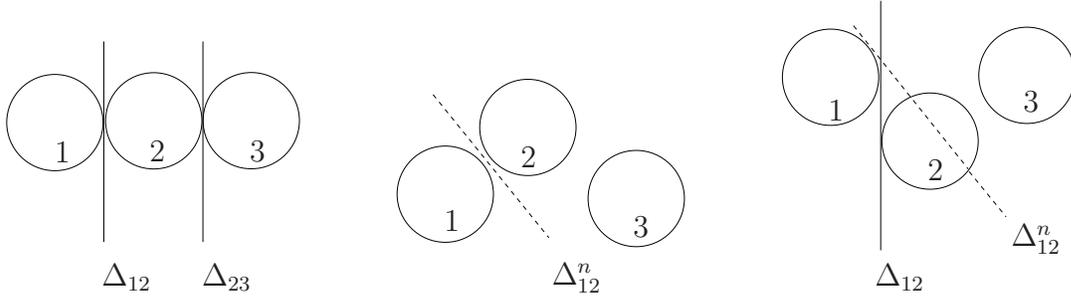
D'où,

$$|\tilde{\mathbf{p}}_n - \mathbf{q}_n| \leq |\tilde{\mathbf{p}}_n - \tilde{\mathbf{q}}| + |\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_n| \leq 2|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_n| \leq 4\nu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q}) \geq 2\varepsilon - \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{4} > 0 \text{ et } D_{ij}(\mathbf{q}_n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_n) \cdot (\tilde{\mathbf{p}}_n - \mathbf{q}_n) \geq \varepsilon - \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

La relation de complémentarité et la positivité des multiplicateurs de Lagrange permettent alors de conclure. \square


 FIG. 4.3 – Configurations \mathbf{q} , \mathbf{q}_n et $\tilde{\mathbf{q}}$.

Remarque 4.13 Lorsque $D_{ij}(\mathbf{q}) > 0$, on peut donc affirmer que les multiplicateurs de Lagrange λ_{ij} et λ_{ij}^n sont nuls pour n assez grand. Lorsque $D_{ij}(\mathbf{q}) = 0$, λ_{ij} peut être nul sans que λ_{ij}^n le soit pour n assez grand (même si $D_{ij}(\mathbf{q}_n) > 0$). Dans la figure 4.3, sont dessinées les configurations \mathbf{q} , \mathbf{q}_n et $\tilde{\mathbf{q}}$ de 3 particules. Décrivons-les. Partant de la configuration \mathbf{q} , le centre de la particule 2 a subi une homothétie et une rotation de centre \mathbf{q}_1 , pour obtenir la suite des configurations \mathbf{q}_n tendant vers \mathbf{q} . La particule 2 a juste été translaturée pour obtenir la configuration $\tilde{\mathbf{q}}$ (toujours à partir de la configuration \mathbf{q}). Sur les configurations \mathbf{q} et \mathbf{q}_n , on a tracé respectivement la droite Δ_{12} de vecteur normal $\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q})$ et la droite Δ_{12}^n de vecteur normal $\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q}_n)$. Ces deux droites ont été représentées sur la configuration $\tilde{\mathbf{q}}$. Ainsi, on observe que $\tilde{\mathbf{q}}$ appartient à $K(\mathbf{q})$ puisque les particules 1 et 2 se trouvent bien de part et d'autre de la droite Δ_{12} . Par conséquent, $\lambda_{12} = 0$. Cependant, $\tilde{\mathbf{q}}$ n'appartient pas à $K(\mathbf{q}_n)$ et $\lambda_{12}^n > 0$ pour tout n .

On cherche à borner les λ^n solutions de $(P_{q_n, \tilde{q}})$ qui apparaissent dans l'écriture :

$$\sum_{i < j} \lambda_{ij}^n \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_n) = \tilde{\mathbf{p}}_n - \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{F}^n.$$

Mais, d'après le lemme 4.12 p. 78, les seuls multiplicateurs de Lagrange à considérer sont ceux qui sont associés aux contacts présents dans la configuration finale \mathbf{q} . Ainsi, on commence d'abord par étudier les multiplicateurs intervenant dans l'écriture suivante :

$$\sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{F}.$$

Par souci de clarté, on considère dans la suite le cas monodisperse (tous les disques ont le même rayon noté r). Les modifications à apporter dans le cas polydisperse seront précisées dans la démonstration de la proposition 4.21 p. 86.

Cas monodisperse

Proposition 4.14 Dans le cas monodisperse, pour tout \mathbf{q} dans Q_0 , pour tout \mathbf{F} dans \mathbb{R}^{2N} , on définit l'ensemble

$$\Lambda_{q, \mathbf{F}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}, \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}, \lambda_{ij} \geq 0, \lambda_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \right\}.$$

Cet ensemble, s'il est non vide, est borné uniformément en \mathbf{q} . Plus précisément, on a

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{q,F}, \forall i < j, \lambda_{ij} \leq |\mathbf{F}| a^N \text{ où } a = \frac{3}{\sin(\frac{2\pi}{N})}.$$

Démonstration :

On considère le cas où $\Lambda_{q,F}$ est non vide. On cherche à estimer les solutions $\boldsymbol{\lambda}$ du système suivant (à $2N$ équations) : $\sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}$. Comme $\lambda_{ij} = 0$ si $D_{ij}(\mathbf{q}) > 0$, beaucoup de multiplicateurs de Lagrange sont nuls. On cherche en fait à résoudre

$$\sum_{\substack{i < j \\ D_{ij}(\mathbf{q}) = 0}} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}, \lambda_{ij} \geq 0 \quad (P).$$

En précisant l'écriture des vecteurs $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$, on peut expliciter les 2 lignes du système qui concernent la personne i_0 ,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0 \\ j \text{ voisin de } i_0}}^n \widetilde{\lambda}_{ji_0} e_{ji_0} = F_{i_0} \quad (P_{i_0})$$

où

$$\widetilde{\lambda}_{ji_0} = \begin{cases} \lambda_{ji_0} & \text{si } j < i_0 \\ \lambda_{i_0j} & \text{si } j > i_0 \end{cases} \text{ et } e_{ji_0} = \mathbf{e}_{ji_0}(\mathbf{q}).$$

Comme on s'est placé dans le cadre monodisperse, il y a au maximum 6 termes dans la somme puisque la personne i_0 a au plus 6 voisins. Bien entendu, il est plus facile de résoudre (P_{i_0}) quand le membre de gauche contient peu de termes. L'idée de la démonstration est la suivante. Quand il n'y a qu'un seul terme (i_0 a un unique voisin j), la résolution est triviale (cf. Etape 1 ci-après). Lorsqu'il y a deux termes (i_0 a deux voisins j_1 et j_2), le système est inversible si $e_{i_0j_1}$ et $e_{i_0j_2}$ sont indépendants. Le cas qui pose problème est celui où les 3 personnes sont alignées, i_0 se trouvant entre j_1 et j_2 . En résumé, si l'angle entre les vecteurs $e_{i_0j_1}$ et $e_{i_0j_2}$ est strictement inférieur à π , le système est inversible, la borne de l'inverse dépend de cet angle et diverge quand ce dernier se rapproche de π . Comme on veut majorer les multiplicateurs de Lagrange, on veillera donc à contrôler cet angle (cf. Etape 2 ci-après). Pour résoudre le problème global, il suffit de résoudre ces sous-problèmes (P_i) dans un ordre bien choisi : on résout les plus simples d'abord.

Principe général :

On considère une configuration admissible $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) \in Q_0$ formant un amas, dans le sens où l'ensemble $\bigcup_{i=1}^N B(q_i, r)$ est connexe par arcs. (Pour les autres configurations, il suffit de traiter les amas présents un par un, puisque les problèmes associés sont indépendants). On note $A = \{q_1, \dots, q_N\}$ l'ensemble des positions des N personnes. (Dans la suite, on identifiera parfois abusivement la personne i et sa position q_i). On va considérer les personnes de cet ensemble une à une et résoudre les sous-problèmes définis ci-dessus.

L'idée est la suivante : à chaque résolution d'un problème (P_{i_0}) , on enlève l'élément q_{i_0} de A , on supprime le sous-problème (P_{i_0}) du système global (P) , et on prendra en compte les valeurs trouvées des $\widetilde{\lambda}_{ji}$, pour les personnes j voisines de i_0 , en modifiant les seconds membres respectifs F_j . On va progressivement réduire A , jusqu'à obtenir un singleton. Précisons maintenant dans quel ordre nous allons traiter les sous-problèmes, c'est-à-dire dans quel ordre nous allons considérer les personnes. On suppose que A est non réduit à un singleton.

Etape 1 : élimination des contacts simples

On suppose qu'il existe q_i dans A tel que q_i ait un unique voisin q_j . Le problème (P_i) s'écrit donc

$$\widetilde{\lambda}_{ji}e_{ji} = F_i.$$

Par conséquent, $\widetilde{\lambda}_{ji} = |F_i|$. On retire alors l'élément q_i de A et on modifie le second membre F_j comme suit

$$F_j = F_j - \widetilde{\lambda}_{ji}e_{ij}.$$

Ceci nous amène à remplacer la borne du second membre F_j par $|F_j| + |F_i|$. On élimine ainsi tous les contacts simples de A , ce qui permet par exemple, de traiter entièrement le cas de la figure 4.4.

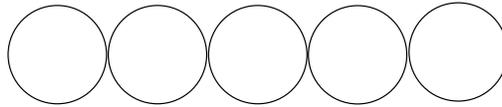


FIG. 4.4 – Cas d'une chaîne.

Si A n'est pas réduit à un singleton après cette étape, on passe à la suivante.

Etape 2 : il n'y a plus de contacts simples

On définit C l'enveloppe convexe des q_j (restants) dans A . On note E l'ensemble des points extrémaux de C et p son cardinal. On note P la frontière de C qui est donc un polygone convexe dont les sommets sont les points de E . Ce polygone a au moins $p \geq 3$ sommets. En effet, le cas de 2 sommets est celui d'une chaîne, déjà traité dans l'étape précédente. La somme des angles de P vaut $\pi(\text{card}(E) - 2) = \pi(p - 2)$. Par conséquent, il existe un angle de P qui soit inférieur ou égal à $\pi(1 - \frac{2}{p}) < \pi$. On considère alors le sommet associé à un de ces angles. On le note q_i . Il y a alors 2 cas possibles : soit q_i est en contact avec 2 personnes exactement, soit q_i a exactement trois voisins. En effet, comme il n'y a plus de contacts simples, tous les éléments de A ont au moins deux voisins. De plus, la condition d'angle précédente permet d'affirmer que les voisins de q_i se trouvent tous dans un cône d'angle au sommet strictement inférieur à π . Or si q_j et q_k sont au contact de q_i , l'angle entre les vecteurs e_{ij} et e_{ik} est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{3}$. Aussi, si q_i a au moins 4 voisins, l'angle entre les 2 voisins les plus éloignés est supérieur à $3\frac{\pi}{3} = \pi$. On obtient alors une contradiction avec la condition d'angle.

Cas 1 : q_i a 2 voisins

Quitte à faire une rotation de centre q_i , on peut supposer qu'on se trouve dans la configuration de la figure 4.5. D'après le choix de q_i , $\gamma \geq \frac{2\pi}{p} \geq \frac{2\pi}{N}$ et $\gamma \leq \frac{2\pi}{3}$ car les particules j et k ne se chevauchent pas. Noter que nécessairement, $N \geq p \geq 3$.

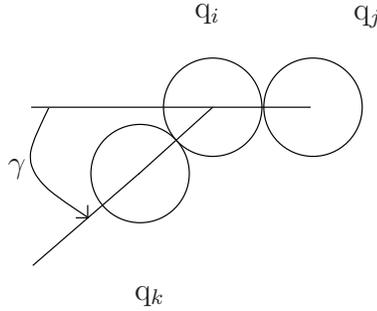


FIG. 4.5 – Cas 1.

Plus précisément, $e_{ji} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_{ki} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}$. Le problème

$$\widetilde{\lambda}_{ji}e_{ji} + \widetilde{\lambda}_{ki}e_{ki} = F_i \quad (P_i)$$

se réécrit donc

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_{ji} \\ \widetilde{\lambda}_{ki} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \gamma} \begin{pmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i^x \\ F_i^y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$\widetilde{\lambda}_{ji} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin \gamma} |F_i| \quad \text{et} \quad \widetilde{\lambda}_{ki} \leq \frac{1}{\sin \gamma} |F_i|.$$

On enlève q_i de l'ensemble A . On modifie les bornes du second membre, plus précisément, on remplace $|F_j|$ par $|F_j| + \frac{\sqrt{2}}{\sin(\frac{2\pi}{N})} |F_i|$ et $|F_k|$ par $|F_k| + \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{N})} |F_i|$ car $\sin \gamma \geq \sin(\frac{2\pi}{N})$. On supprime alors le sous-problème (P_i) .

Cas 2 : q_i a 3 voisins

Quitte à faire une rotation de centre q_i , on peut supposer qu'on se trouve dans la configuration de la figure 4.6. On a d'une part $\gamma \geq \frac{2\pi}{p} \geq \frac{2\pi}{N}$. D'autre part, $\gamma \leq \frac{\pi}{3}$ puisque les particules j et k ainsi que k et l ne se chevauchent pas. On obtient donc l'encadrement de γ suivant,

$$\frac{2\pi}{N} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{3}. \quad (4.14)$$

Par ailleurs, on a $\beta \leq -\frac{\pi}{3}$ car les particules j et k ne se chevauchent pas. De plus, comme $\beta \geq -\pi + \gamma + \frac{\pi}{3}$, on a d'après (4.14), $\beta \geq \frac{2\pi}{N} - \frac{2\pi}{3}$. On obtient donc l'encadrement de β suivant,

$$\frac{2\pi}{N} - \frac{2\pi}{3} \leq \beta \leq -\frac{\pi}{3}. \quad (4.15)$$

Noter que nécessairement, $N \geq p \geq 6$ pour que l'encadrement (4.14) ait un sens. En effet, il est facile de voir que pour $N < 7$ personnes, on réduit l'amas A jusqu'à un singleton grâce à l'étape 1.

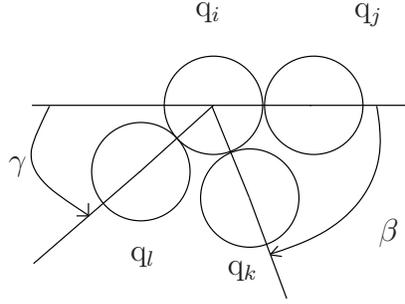


FIG. 4.6 – Cas 2.

Plus précisément, $e_{ji} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_{ki} = \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}$ et $e_{li} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}$. Le problème (P_i) s'écrit

$$\widetilde{\lambda}_{ji} e_{ji} + \widetilde{\lambda}_{ki} e_{ki} + \widetilde{\lambda}_{li} e_{li} = F_i.$$

Bien sûr, on voit apparaître dans cette situation la non-unicité des multiplicateurs de Lagrange (2 équations, 3 inconnues). Elle est due au fait que le vecteur e_{ik} peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs e_{ij} et e_{il} . On définit une solution particulière de ce problème $(\widetilde{\lambda}_{ji}^0, 0, \widetilde{\lambda}_{li}^0)$ où les composantes vérifient,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_{ji}^0 \\ \widetilde{\lambda}_{li}^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \gamma} \begin{pmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i^x \\ F_i^y \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Il reste alors à décrire le noyau de la matrice du système (P_i) pour obtenir toutes les solutions. On utilise donc le lemme suivant démontré p. 93.

Lemme 4.15 *Le noyau de la matrice du système (P_i) est engendré par le vecteur :*

$$k_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \sin(\beta - \gamma) \\ \sin \gamma \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

De plus, on connaît les signes de ses composantes,

$$\sin(\beta - \gamma) \leq -\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) < 0, \quad \sin \gamma \geq \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) > 0 \quad \text{et} \quad \sin \beta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Toutes les solutions de (P_i) s'écrivent donc,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_{ji} \\ \widetilde{\lambda}_{ki} \\ \widetilde{\lambda}_{li} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_{ji}^0 \\ 0 \\ \widetilde{\lambda}_{li}^0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin(\beta - \gamma) \\ \sin \gamma \\ \sin \beta \end{pmatrix} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Or nous cherchons toutes les solutions positives. La positivité de $\sin \gamma$ implique que t doit être positif. De plus, les signes négatifs de $\sin(\beta - \gamma)$ et de $\sin \beta$ impliquent que $t \leq t_{\max}$ où

$$t_{\max} = \min \left(\frac{\widetilde{\lambda}_{ji}^0}{-\sin(\beta - \gamma)}, \frac{\widetilde{\lambda}_{li}^0}{-\sin \beta} \right). \quad (4.17)$$

Comme $t \sin(\beta - \gamma) < 0$ et $t \sin \beta < 0$, on a

$$\widetilde{\lambda}_{ji} \leq \widetilde{\lambda}_{ji}^0 \text{ et } \widetilde{\lambda}_{li} \leq \widetilde{\lambda}_{li}^0.$$

Or on a déjà vu (cf. cas 1) que

$$\widetilde{\lambda}_{ji}^0 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin \gamma} |F_i| \text{ et } \widetilde{\lambda}_{li}^0 \leq \frac{1}{\sin \gamma} |F_i|.$$

D'où

$$\widetilde{\lambda}_{ji} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin \gamma} |F_i| \text{ et } \widetilde{\lambda}_{li} \leq \frac{1}{\sin \gamma} |F_i|.$$

Comme $t \sin \gamma > 0$, on a

$$\widetilde{\lambda}_{ki} \leq t_{\max} \sin \gamma.$$

Le lemme suivant (démontré p. 94) permet d'obtenir la majoration finale de $\widetilde{\lambda}_{ki}$.

Lemme 4.16 *On a la majoration suivante : $t_{\max} \sin \gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}} |F_i|$.*

Ainsi

$$\widetilde{\lambda}_{ki} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} |F_i|.$$

On enlève q_i de l'ensemble A . On modifie les bornes du second membre, plus précisément, on remplace $|F_j|$ par $|F_j| + \frac{\sqrt{2}}{\sin(\frac{2\pi}{N})} |F_i|$, $|F_k|$ par $|F_k| + \frac{2}{\sqrt{3}} |F_i|$ et $|F_l|$ par $|F_l| + \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{N})} |F_i|$. On supprime alors le sous-problème (P_i) .

A la fin de l'étape 2, nous avons donc retiré une personne de l'ensemble A . Si cet ensemble n'est pas réduit à un singleton, on retourne à l'étape 1.

Bilan

En itérant ce procédé, c'est-à-dire en éliminant tous les contacts simples puis en choisissant une particule extrême vérifiant la condition d'angle précédente et ainsi de suite, on résout le problème global (P) en $(N - 1)$ étapes. On remarque qu'à chaque résolution de sous-problèmes, on arrive à borner les multiplicateurs de Lagrange par le second membre à une constante près. Il suffit donc de savoir comment évolue la borne du second membre pour estimer les λ_{ij} . Le lemme suivant (démontré p. 94) permet de conclure.

Lemme 4.17 *A chaque réduction de l'ensemble A , la norme $|\mathbf{F}|$ est remplacée au pire des cas par $\frac{3}{\sin(\frac{2\pi}{N})}|\mathbf{F}|$.*

Ainsi s'achève la démonstration de la proposition 4.14. \square

On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.18 *Dans le cas monodisperse, pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$, il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $\tilde{\mathbf{q}}$ dans $B(\mathbf{q}, \nu)$ et tout $\boldsymbol{\lambda}$ solution de $(P_{\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}})$, on ait*

$$\forall i < j, \lambda_{ij} \leq \nu a^N \text{ où } a = \frac{3}{\sin(\frac{2\pi}{N})}.$$

Démonstration :

Le lemme 4.12 donne l'existence de $\nu > 0$ tel que pour $\tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \nu)$, $(\tilde{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\lambda})$ solution de $(P_{\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}})$ implique que $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{q}, \mathbf{F}}$ avec $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{q}}$. De plus, lors de la démonstration de ce lemme (p. 78), on montre que $|\mathbf{F}| \leq \nu$ (cf. équation (4.12)). La proposition 4.14 permet alors de conclure. \square

Remarque 4.19 *Dans [Mau06], B. Maury avait déjà montré le caractère borné des multiplicateurs de Lagrange, sans expliciter de borne, en utilisant la notion de cône asymptote (voir [Mau06]). L'idée de considérer les particules extrémales y était déjà présente. Cependant, pour montrer le caractère uniformément borné des multiplicateurs de Lagrange, il est essentiel de comprendre la dépendance de cette borne par rapport à la configuration \mathbf{q} considérée. Celle-ci dépend très fortement de la géométrie de la configuration et plus précisément de la présence de gros amas.*

Nous avons donc démontré que les multiplicateurs de Lagrange intervenant dans la projection de $\tilde{\mathbf{q}}$ sur $K(\mathbf{q})$ sont bornés. Reste à étudier ceux qui interviennent dans la projection de $\tilde{\mathbf{q}}$ sur $K(\mathbf{q}_n)$.

Proposition 4.20 *Dans le cas monodisperse, pour tous \mathbf{q}, \mathbf{q}_n dans Q_0 , pour tout \mathbf{F} dans \mathbb{R}^{2N} , on définit l'ensemble*

$$\Lambda_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_n, \mathbf{F}} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}, \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_n) = \mathbf{F}, \lambda_{ij} \geq 0, \lambda_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \right\}.$$

Alors, il existe M_1 dans \mathbb{N} tel que pour tout $n \geq M_1$, l'ensemble $\Lambda_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_n, \mathbf{F}}$, s'il est non vide, est uniformément borné. Plus précisément, on a

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_n, \mathbf{F}}, \forall i < j, \lambda_{ij} \leq |\mathbf{F}| a^N \text{ où } a = \frac{3}{\sin(\frac{\pi}{N})}.$$

Démonstration :

Comme la suite (\mathbf{q}_n) tend vers \mathbf{q} , il existe M_1 dans \mathbb{N} tel que pour tout $n \geq M_1$, pour tous couples (i, j) , $i < j$, (k, l) , $k < l$, l'angle orienté entre les vecteurs $\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q}_n)$ et $\mathbf{e}_{kl}(\mathbf{q}_n)$ soit proche de l'angle entre les vecteurs $\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q})$ et $\mathbf{e}_{kl}(\mathbf{q})$:

$$\exists M_1, \forall n \geq M_1, \forall (i, j), i < j, \forall (k, l), k < l, |(\widehat{\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q}_n)}, \widehat{\mathbf{e}_{kl}(\mathbf{q}_n)}) - (\widehat{\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q})}, \widehat{\mathbf{e}_{kl}(\mathbf{q})})| < \alpha < \frac{\pi}{N}.$$

Soit $n \geq M_1$, on suit maintenant la même démarche que celle de la démonstration de la proposition 4.14. On définit les sous-problèmes (P_i^n) comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \widetilde{\lambda}_{ji} e_{ji}^n &= F_i & (P_i^n) \\ D_{ij}(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{\lambda}_{ji} = \begin{cases} \lambda_{ji} & \text{si } j < i \\ \lambda_{ij} & \text{si } j > i \end{cases} \quad \text{et } e_{ji}^n = \mathbf{e}_{ji}(\mathbf{q}_n).$$

On remarque que la somme du membre de gauche porte sur les j voisins de i dans la configuration finale \mathbf{q} . Considérer les voisins dans la configuration \mathbf{q}_n serait une erreur car λ_{ij} peut être strictement positif alors que la distance $D_{ij}(\mathbf{q}_n)$ est strictement positive (cf remarque 4.13). On résout les sous-problèmes (P_i^n) exactement dans le même ordre que les sous-problèmes (P_i) . Les résolutions effectuées lors de l'étape 2 ne poseront pas de problème puisque les angles entre les vecteurs $\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q}_n)$ sont contrôlés. L'angle γ_n (avec des notations évidentes) est maintenant supérieur à $\frac{2\pi}{N} - \alpha \geq \frac{\pi}{N}$. \square

Généralisation au cas polydisperse

Le caractère uniformément borné des multiplicateurs de Lagrange se généralise au cas polydisperse. La proposition suivante est analogue à la proposition 4.14.

Proposition 4.21 *Pour tout \mathbf{q} dans Q_0 , pour tout \mathbf{F} dans \mathbb{R}^{2N} , on définit l'ensemble*

$$\Lambda_{q,F} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}, \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}, \lambda_{ij} \geq 0, \lambda_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \right\}.$$

Cet ensemble, s'il est non vide, est uniformément borné en \mathbf{q} . Plus précisément, on a

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{q,F}, \forall i < j, \lambda_{ij} \leq |\mathbf{F}| b^N \quad \text{où } b = \frac{2\sqrt{n_v}}{\min \left(\sin \left(\frac{\pi}{n_v + 1} \right), \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right)},$$

où n_v est le nombre maximal de voisins que peut avoir une personne (cf lemme 3.16 p. 53).

Démonstration :

Comme il suffit de reprendre le cheminement suivi pour prouver la proposition 4.14, seules

les grandes lignes de la démonstration seront présentées ici. L'étape 1 est identique au cas monodisperse, la différence vient du fait que l'étape 2 comporte beaucoup plus de cas. En effet, dans une situation polydisperse illustrée par la figure 4.7, la personne extrême i peut avoir $n_v^i > 3$ voisins où

$$n_v^i \leq n_v \leq \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}\right)}.$$

(La majoration de n_v est le résultat du lemme 3.16 p. 53).

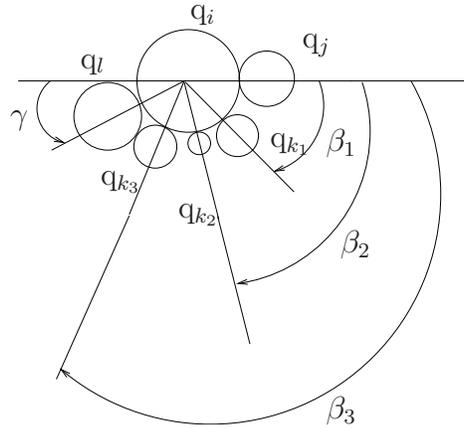


FIG. 4.7 – Cas polydisperse.

De la même manière que dans le cas monodisperse, on peut montrer que le noyau de la matrice associée au système (P_i) à résoudre a pour dimension $n_v^i - 2$. On détermine facilement une base de ce noyau (voir les notations sur la figure 4.7), formée des vecteurs $k_{\beta_p \gamma}$, $1 \leq p \leq n_v^i$ qui n'auront que 3 composantes non nulles : $\sin(\beta_p - \gamma) < 0$, $\sin \beta_p < 0$ et $\sin \gamma > 0$. Plus précisément,

$$k_{\beta_p \gamma} = \begin{pmatrix} \sin(\beta_p - \gamma) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin \gamma \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin \beta_p \end{pmatrix},$$

$\sin \gamma$ se trouvant à la $(p + 1)^{\text{ème}}$ coordonnée. Les solutions du problème (P_i) s'écrivent donc comme somme de la solution particulière (analogue à celle de l'équation (4.16)

p. 83) et de $\sum t_p k_{\beta_p \gamma}$, où $t_p \in \mathbb{R}$. De la même manière que dans le cas monodisperse, on vérifie facilement que les coefficients t_p sont positifs. Ensuite, on essaie d'estimer les majorants $t_{p,\max}$ définis comme dans (4.17) p. 84. Pour cela, on majore les quantités suivantes $\sin(\beta_p - \gamma)$ et $\sin \beta_p$. Grâce à la démonstration du lemme 3.16 p. 53, on peut affirmer que

$$\beta_p \leq -\theta = -2 \arcsin \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \right).$$

De même, on montre que $\beta_p - \gamma \leq -\theta$. Ainsi, $\sin(\beta_p - \gamma) \leq -\sin \theta$ et $\sin \beta_p \leq -\sin \theta$. Ce qui nous permet d'obtenir finalement

$$t_{p,\max} \sin \gamma \leq \frac{1}{\sin \theta} |F_i|.$$

Enfin, en faisant un nouveau bilan, on montre (même preuve que le lemme 4.17 p. 85) que dans le pire des cas la norme de $|\mathbf{F}|$ est remplacée par

$$\frac{2\sqrt{n_v}}{\min(\sin \theta, \sin(\frac{2\pi}{N}))} |\mathbf{F}|.$$

On conclut grâce à la minoration $\theta \geq \frac{\pi}{n_v + 1}$. □

Nous obtenons maintenant une proposition analogue à la proposition 4.20 en reprenant la même démonstration.

Proposition 4.22 *Pour tous \mathbf{q}, \mathbf{q}_n dans Q_0 , pour tout \mathbf{F} dans \mathbb{R}^{2N} , on définit l'ensemble*

$$\Lambda_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_n, \mathbf{F}} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}, \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}_n) = \mathbf{F}, \lambda_{ij} \geq 0, \lambda_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \right\}.$$

Alors, il existe M_1 dans \mathbb{N} tel que pour tout $n \geq M_1$, l'ensemble $\Lambda_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_n, \mathbf{F}}$, s'il est non vide, est uniformément borné. Plus précisément, on a

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_n, \mathbf{F}}, \forall i < j, \lambda_{ij} \leq |\mathbf{F}| b^N \text{ où } b = \frac{2\sqrt{n_v}}{\min\left(\sin\left(\frac{\pi}{n_v + 1}\right), \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)},$$

où n_v est le nombre maximal de voisins que peut avoir une personne (cf. lemme 3.16 p. 53).

Nous arrivons au but de cette section. On peut maintenant démontrer la proposition 4.10 qui affirme le caractère uniformément borné des multiplicateurs de Lagrange dans le cas général polydisperse.

Démonstration de la proposition 4.10 :

Rappelons son énoncé :

Pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$, il existe $\nu > 0$ et M dans \mathbb{N} tels que pour tout $n \geq M$, tout $\tilde{\mathbf{q}}$ dans $B(\mathbf{q}, \nu)$ et tout $\boldsymbol{\lambda}^n$ solution de $(P_{q_n, \tilde{q}})$, on ait

$$\forall i < j, \lambda_{ij}^n \leq 2\nu b^N \text{ où } b = \frac{2\sqrt{n_v}}{\min\left(\sin\left(\frac{\pi}{2(n_v+1)}\right), \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)}.$$

Le lemme 4.12 donne l'existence de $\nu > 0$ et de $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $\tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \nu)$, $(\tilde{\mathbf{p}}_n, \boldsymbol{\lambda}^n)$ solution de $(P_{q_n, \tilde{q}})$ implique que $\boldsymbol{\lambda}^n \in \Lambda_{q, q_n, F^n}$ si $n \geq M_0$ avec $\mathbf{F}^n = \tilde{\mathbf{p}}_n - \tilde{\mathbf{q}}$. De plus, lors de la démonstration de ce lemme (p. 78), on montre que $|\mathbf{F}^n| \leq 2\nu$ (cf. équation (4.13)). En posant $M = \max(M_0, M_1)$ où M_1 est l'entier défini dans la proposition 4.22, on obtient le résultat annoncé.

Remarque 4.23 *Il est à noter que le caractère borné des multiplicateurs de Lagrange démontré à la proposition 4.21, est équivalent à l'existence de l'inégalité triangulaire inverse de la proposition 3.14 p. 52. Et de cette inégalité découle le caractère uniformément prox-régulier de Q_0 . Cette démonstration ne se généralise pas à un ensemble de configurations admissibles qui prendrait en compte les obstacles, en imposant une distance positive entre eux et les personnes.*

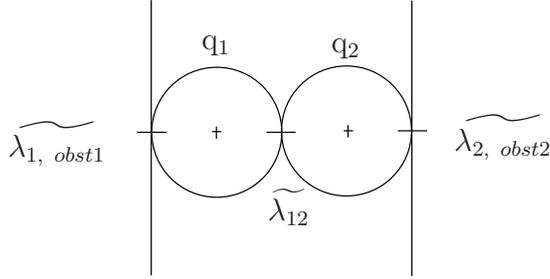


FIG. 4.8 – Situation où les multiplicateurs de Lagrange sont non bornés.

En effet, dans l'exemple présenté sur la figure 4.8, les multiplicateurs doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} -\tilde{\lambda}_{12} + \tilde{\lambda}_{1, \text{obst1}} = F_1^x \\ \tilde{\lambda}_{12} - \tilde{\lambda}_{2, \text{obst2}} = F_2^x. \end{cases}$$

Les solutions à coordonnées positives de ce système s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{1, \text{obst1}} \\ \tilde{\lambda}_{12} \\ \tilde{\lambda}_{2, \text{obst2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^x \\ 0 \\ -F_2^x \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } t \text{ assez grand.}$$

Les solutions ne sont donc pas bornées.

4.2.3 Lemmes techniques

Enoncé et démonstration du lemme 4.24 :

Lemme 4.24 *Soit S un convexe fermé inclus dans un espace de Hilbert H , soient $x \in S$ et $w \in H$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$w \in N(S, x) \stackrel{\text{d'éf}}{\Leftrightarrow} x = P_S(x + w) \quad (a)$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in S, \langle w, y - x \rangle \leq 0 \quad (b)$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in H, \langle w, y - x \rangle \leq |w| d_S(y) \quad (c)$$

$$\Leftrightarrow \forall \xi \in H, \langle w, \xi \rangle \leq |w| d_S(\xi + x) \quad (d)$$

$$\Leftrightarrow \exists \eta > 0, \forall v \in H, |v| < \eta, \langle w, v \rangle \leq |w| d_S(v + x) \quad (e)$$

$$\Leftrightarrow \exists k > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in H, |v| < \eta, \langle w, v \rangle \leq k d_S(v + x) \quad (f)$$

Démonstration :

Démontrons l'équivalence des propriétés :

(a) \Leftrightarrow (b) : caractérisation du projeté orthogonal sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert.

(c) \Leftrightarrow (d) : clair en posant $\xi = y - x$.

(d) \Rightarrow (e) : clair.

(e) \Rightarrow (f) : clair.

Justifions maintenant :

(b) \Rightarrow (c) : on considère $y \in H$ et $w \in N(S, x)$. Si $y \in S$, $d_S(y) = 0$ et l'inégalité (c) est vérifiée. Sinon, on définit $z = P_S(y)$ alors

$$\begin{aligned} \langle w, y - x \rangle &= \langle w, z + (y - z) - x \rangle \\ &= \langle w, z - x \rangle + \langle w, y - z \rangle \\ &\leq \langle w, y - z \rangle \text{ car } z \in S, \\ &\leq |w| |y - z| \\ &\leq |w| d_S(y). \end{aligned}$$

(e) \Rightarrow (d) : on considère $\xi \in H$ et $w \in N(S, x)$. Si $|\xi| \leq \eta$, l'inégalité (d) est vérifiée. Sinon, on pose $\xi = \alpha v$ où $v \in H$, $|v| \leq \eta$ et $\alpha > 1$. Alors,

$$\langle w, \xi \rangle = \alpha \langle w, v \rangle \leq \alpha |w| d_S(v + x).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\alpha d_S(v + x) \leq d_S(\alpha v + x).$$

Soit $p = P_S(\alpha v + x)$, alors $|p - \alpha v - x| = d_S(\alpha v + x)$. On définit $\zeta = \frac{p}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}x$. Comme S est convexe, $\zeta \in S$ et ainsi

$$\begin{aligned} d_S(v + x) &\leq |\zeta - v - x| \\ &\leq \left| \frac{p}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)x - v - x \right| \\ &\leq \left| \frac{p}{\alpha} - \frac{x}{\alpha} - v \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} |p - x - \alpha v| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} d_S(\alpha v + x). \end{aligned}$$

D'où,

$$\alpha d_S(v + x) \leq d_S(\alpha v + x).$$

Finalement,

$$\langle w, \xi \rangle \leq |w| d_S(\xi + x).$$

(f) \Rightarrow (b) : Soit $y \in S$, on pose $\xi = y - x$.

Si $|\xi| < \eta$, alors (f) implique $\langle w, y - x \rangle \leq kd_S(y) = 0$.

Sinon, comme précédemment, on pose $\xi = y - x = \alpha v$ avec $|v| \leq \eta$ et $\alpha > 1$. Alors

$$v + x = \frac{y - x}{\alpha} + x = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)x + \frac{1}{\alpha}y \in S, \text{ car } S \text{ est convexe.}$$

Et par conséquent,

$$\langle w, y - x \rangle = \alpha \langle w, v \rangle \leq \alpha kd_S(v + x) = 0.$$

□

Enoncé et démonstration du lemme 4.25 :

Lemme 4.25 Soient \mathbf{q} dans Q_0 et $\tilde{\mathbf{q}}$ dans \mathbb{R}^{2N} , on note $\tilde{\mathbf{p}} = P_{K(\mathbf{q})}(\tilde{\mathbf{q}})$. Alors $\exists \boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ tel que le couple $(\tilde{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\lambda})$ soit solution du problème suivant :

$$(P_{\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}}) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{q}} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \\ \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q}) \geq 0 \\ \sum_{i < j} \lambda_{ij} (D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q})) = 0. \end{array} \right.$$

Démonstration :

La configuration $\tilde{\mathbf{p}}$ est solution du problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{p} \in K(\mathbf{q})} \frac{1}{2} |\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{q}}|^2.$$

Le lagrangien du problème point-selle associé est,

$$L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} |\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{q}}|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij} (D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})).$$

On définit les applications linéaires :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{2N} &\rightarrow \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}} \\ \mathbf{p} &\mapsto -(\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{p})_{i < j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi^* : \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}} &\rightarrow \mathbb{R}^{2N} \\ \boldsymbol{\mu} &\mapsto -\sum_{i < j} \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

On peut alors réécrire l'ensemble $K(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}) &= \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall \boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}}, -\sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij} (D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})) \leq 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall \boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}}, \langle \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{D}(\mathbf{q}) - \Phi(\mathbf{q}) + \Phi(\mathbf{p}) \rangle \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

L'existence d'un point-selle $(\tilde{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\lambda})$ pour L est classique (cf. [Cia90]), car $\Phi^* \left((\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}} \right)$ est un fermé. Cette dernière propriété est démontrée au sous-lemme B.2 p. 146. Ce couple $(\tilde{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\lambda})$ vérifie alors le système,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}} + \Phi^*(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \in K(\mathbf{q}) \\ \langle \boldsymbol{\lambda}, -\mathbf{D}(\mathbf{q}) - \Phi(\mathbf{q}) + \Phi(\tilde{\mathbf{p}}) \rangle = 0, \end{cases}$$

qui se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{q}} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \\ \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q}) \geq 0 \\ \sum_{i < j} \lambda_{ij} (D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{q})) = 0. \quad \square \end{cases}$$

Remarque 4.26 Comme l'application Φ n'est pas surjective en général, on ne peut pas conclure à l'unicité des multiplicateurs de Lagrange. On montre même que ce résultat est faux lors de la démonstration de la proposition 4.14 p. 80 (Étape 2, Cas 2).

Démonstration du lemme 4.15 p. 83 :

Lemme 4.15 *Le noyau de la matrice du système (P_i) est engendré par le vecteur :*

$$k_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \sin(\beta - \gamma) \\ \sin \gamma \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

De plus, on connaît les signes de ses composantes,

$$\sin(\beta - \gamma) \leq -\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) < 0, \quad \sin \gamma \geq \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) > 0 \quad \text{et} \quad \sin \beta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Démonstration :

On cherche à résoudre

$$\widetilde{\lambda}_{ji}e_{ji} + \widetilde{\lambda}_{ki}e_{ki} + \widetilde{\lambda}_{li}e_{li} = 0.$$

En remplaçant les vecteurs par leurs expressions, on obtient

$$\widetilde{\lambda}_{ji} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{\lambda}_{ki} \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} + \widetilde{\lambda}_{li} \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} = 0.$$

Le système à résoudre est

$$\begin{cases} -\widetilde{\lambda}_{ji} - \widetilde{\lambda}_{ki} \cos \beta + \widetilde{\lambda}_{li} \cos \gamma = 0 \\ -\widetilde{\lambda}_{ki} \sin \beta + \widetilde{\lambda}_{li} \sin \gamma = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \widetilde{\lambda}_{ji} = -\widetilde{\lambda}_{ki} \cos \beta + \widetilde{\lambda}_{li} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cos \gamma \\ \widetilde{\lambda}_{li} = \widetilde{\lambda}_{ki} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}. \end{cases}$$

Par conséquent, on peut prendre comme vecteur du noyau,

$$\begin{pmatrix} -\cos \beta + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cos \gamma \\ 1 \\ \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \end{pmatrix}$$

ou en le multipliant par $\sin \gamma$,

$$\begin{pmatrix} -\cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\beta - \gamma) \\ \sin \gamma \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Reste à vérifier les majorations. Comme $\frac{2\pi}{N} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{3}$ (cf. encadrement (4.14) p. 82), on a bien

$$\sin \gamma \geq \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) > 0.$$

De plus, $\frac{2\pi}{N} - \frac{2\pi}{3} \leq \beta \leq -\frac{\pi}{3}$ (cf. encadrement (4.15) p. 83) donc

$$\sin \beta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Enfin, des deux encadrements précédents, on en déduit que $\frac{2\pi}{N} - \pi \leq \beta - \gamma \leq -\frac{2\pi}{N} - \frac{\pi}{3}$.
On obtient alors que

$$\sin(\beta - \gamma) \leq \sin\left(\frac{2\pi}{N} - \pi\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) < 0.$$

□

Démonstration du lemme 4.16 p. 84 :

Lemme 4.16 *On a la majoration suivante : $t_{\max} \sin \gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|F_i|$.*

Démonstration :

Prouvons cette majoration :

On a (cf équation (4.17) p.84)

$$t_{\max} \leq \min \left(\frac{\sqrt{2}}{\sin \gamma (-\sin(\beta - \gamma))} |F_i|, \frac{1}{\sin \gamma (-\sin \beta)} |F_i| \right).$$

Par conséquent,

$$t_{\max} \sin \gamma \leq \min \left(\frac{\sqrt{2}}{(-\sin(\beta - \gamma))} |F_i|, \frac{1}{(-\sin \beta)} |F_i| \right).$$

D'après les encadrements du lemme 4.15 , on a

$$t_{\max} \sin \gamma \leq \min \left(\frac{\sqrt{2}}{\sin(\frac{2\pi}{N})} |F_i|, \frac{2}{\sqrt{3}} |F_i| \right) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} |F_i|.$$

□

Démonstration du lemme 4.17 p 85 :

Lemme 4.17 *A chaque réduction de l'ensemble A , la norme $|\mathbf{F}|$ est remplacée par $\frac{3}{\sin(\frac{2\pi}{N})} |\mathbf{F}|$ au pire des cas.*

Démonstration :

En effet, lors de l'étape 1, la norme de \mathbf{F} est remplacée par $\sqrt{2}|\mathbf{F}|$ car

$$(|F_j| + |F_i|)^2 \leq 2(|F_j|^2 + |F_i|^2).$$

Lors de l'étape 2, dans le cas 1, elle est remplacée par $\frac{\sqrt{6}}{\sin(\frac{2\pi}{N})}|\mathbf{F}|$ car

$$\begin{aligned} & \left(|F_j| + \frac{\sqrt{2}}{\sin(\frac{2\pi}{N})}|F_i| \right)^2 + \left(|F_k| + \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{N})}|F_i| \right)^2 \\ & \leq 2 \left(|F_j|^2 + \frac{2}{\sin^2(\frac{2\pi}{N})}|F_i|^2 \right) + 2 \left(|F_k|^2 + \frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{N})}|F_i|^2 \right) \\ & \leq \frac{6}{\sin^2(\frac{2\pi}{N})} (|F_i|^2 + |F_j|^2 + |F_k|^2). \end{aligned}$$

Enfin, lors de l'étape 2, dans le cas 2, elle est remplacée par $\frac{3}{\sin(\frac{2\pi}{N})}|\mathbf{F}|$ car

$$\begin{aligned} & \left(|F_j| + \frac{\sqrt{2}}{\sin(\frac{2\pi}{N})}|F_i| \right)^2 + \left(|F_k| + \frac{2}{\sqrt{3}}|F_i| \right)^2 \left(|F_l| + \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{N})}|F_i| \right)^2 \\ & \leq 2 \left(|F_j|^2 + \frac{2}{\sin^2(\frac{2\pi}{N})}|F_i|^2 \right) + 2 \left(|F_k|^2 + \frac{4}{3}|F_i|^2 \right) + 2 \left(|F_l|^2 + \frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{N})}|F_i|^2 \right) \\ & \leq \frac{9}{\sin^2(\frac{2\pi}{N})} (|F_i|^2 + |F_j|^2 + |F_k|^2 + |F_l|^2). \end{aligned}$$

□

Troisième partie

Programmation et résultats numériques

Chapitre 5

Méthodes numériques utilisées et programmation effective

Sommaire

5.1	Calcul de la vitesse réelle avec l'algorithme d'Uzawa . . .	100
5.1.1	Présentation de la méthode	100
5.1.2	Programmation	104
5.1.3	Logiciel SCoPI	106
5.2	Calcul de la vitesse souhaitée en utilisant une méthode de type Fast Marching	106
5.2.1	Présentation de la méthode	107
5.2.2	Programmation Orientée Objet	109

Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes numériques utilisées lors de la programmation effective du modèle. Dans la section 5.1, nous proposons d'utiliser l'algorithme d'Uzawa pour réaliser le second point du modèle à savoir calculer la vitesse réelle en tant que projection de la vitesse souhaitée. Nous détaillons cet algorithme, présentons les résultats de convergence associés et terminons par sa programmation en Matlab. Ensuite, nous nous intéressons au premier point modèle en programmant une vitesse souhaitée particulière, dirigée par le plus court chemin. Autrement dit, toutes les personnes tentent de parcourir la plus petite distance pour atteindre la sortie. Afin de calculer cette vitesse souhaitée, nous présentons une méthode de type Fast Marching et détaillons sa programmation en C++.

5.1 Calcul de la vitesse réelle avec l'algorithme d'Uzawa

5.1.1 Présentation de la méthode

Nous allons préciser la méthode numérique adoptée pour calculer la vitesse réelle discrétisée \mathbf{u}_k^n (cf. début de la section 4.1). Pour alléger les notations, nous supprimons ici toute référence au pas de temps courant ainsi qu'au nombre de pas de temps (l'indice k et l'exposant n sont omis). La vitesse réelle \mathbf{u} est solution du problème de minimisation sous contrainte suivant,

$$\mathbf{u} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v} \in C_h(\mathbf{q})} |\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{q})|^2,$$

où h désigne le pas de temps et où $C_h(\mathbf{q})$ est l'ensemble des vitesses admissibles au premier ordre,

$$C_h(\mathbf{q}) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \}.$$

Le Lagrangien du problème point-selle associé est

$$L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{q})|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda_{ij} (D_{ij}(\mathbf{q}) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}).$$

On définit les applications linéaires,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{2N} &\rightarrow \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}} \\ \mathbf{v} &\mapsto -h (\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v})_{i < j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi^* : \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}} &\rightarrow \mathbb{R}^{2N} \\ \boldsymbol{\lambda} &\mapsto -h \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

On peut alors réécrire l'ensemble des contraintes $C_h(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} C_h(\mathbf{q}) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}}, - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda_{ij} (D_{ij}(\mathbf{q}) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}) \leq 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}}, \langle \boldsymbol{\lambda}, \Phi(\mathbf{v}) - \mathbf{D}(\mathbf{q}) \rangle \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

L'existence d'un point-selle $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ pour L est immédiate (proposition H.11 p. 185). On a alors la relation,

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{q}) - \Phi^*(\boldsymbol{\lambda}),$$

autrement dit

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{q}) + \mathbf{h} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}).$$

Ces notations étant fixées, précisons l'algorithme d'Uzawa qui permet de déterminer \mathbf{u} . On construit deux suites $(\mathbf{v}^k)_k \in (\mathbb{R}^{2N})^{\mathbb{N}}$ et $(\boldsymbol{\mu}^k)_k \in \left((\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}} \right)^{\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^0 &= 0 \\ \mathbf{v}^{k+1} &= \mathbf{U}(\mathbf{q}) - \Phi^*(\boldsymbol{\mu}^k) \\ \boldsymbol{\mu}^{k+1} &= \Pi_+(\boldsymbol{\mu}^k + \rho [\Phi(\mathbf{v}^{k+1}) - \mathbf{D}(\mathbf{q})]), \end{aligned}$$

où ρ est une constante strictement positive et Π_+ est le projecteur orthogonal sur $(\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}}$:

$$\boldsymbol{\mu} \longmapsto \Pi_+(\boldsymbol{\mu}) = (\max(0, \mu_{ij}))_{i < j}.$$

On remarque ici l'intérêt d'un tel algorithme puisqu'on a substitué la projection sur un convexe par une projection sur \mathbb{R}^+ (simple troncature). D'après la proposition I.4 p. 191, la suite \mathbf{v}^k converge vers \mathbf{u} solution du problème de minimisation lorsque

$$0 < \rho < \rho_{max} = \frac{2}{\|\Phi\|^2}.$$

On peut même montrer que la suite des multiplicateurs de Lagrange converge aussi, d'après la proposition I.5 p. 192. Plus précisément, la suite $\boldsymbol{\mu}^k$ converge vers $\boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ tel que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ soit un point-selle pour L .

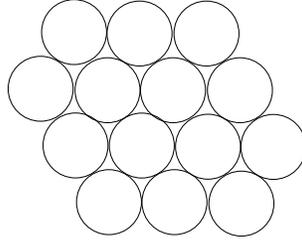


FIG. 5.1 – Cas évident de non-unicité du multiplicateur $\boldsymbol{\lambda}$.

Remarque 5.1 *S'il y a toujours existence du multiplicateur de Lagrange pour ce problème de dimension finie, son unicité n'est pas assurée en général, comme on l'a vu lors de la sous-section 4.2.2. Sans le moindre calcul, il est facile de voir qu'on n'a pas unicité lorsque la disposition des personnes forme un amas cristallin assez grand. Considérons par exemple la configuration de $N = 14$ personnes représentée sur la figure 5.1, on peut dénombrer 29 contacts actifs. Autrement dit, la dimension de l'espace où vit $\boldsymbol{\lambda}$ est 29,*

alors que l'espace des configurations a pour dimension : $2 \times 14 = 28$. L'application Φ^* n'est donc pas injective. Par conséquent, pour $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2N}$, l'ensemble

$$\Lambda_{\mathbf{w}} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{R}^+)^{\frac{N(N-1)}{2}}, \mathbf{w} = \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right\}$$

n'est pas réduit en général à un singleton. En revanche, on a montré que cet ensemble, quel que soit le nombre de personnes et de contacts, est borné (théorème 4.10 p. 76).

Remarque 5.2 Pour les physiciens considérant des écoulements granulaires, cette non-unicité est bien connue et typique de la structure strictement monodisperse. Lorsque les disques sont de tailles différentes, l'unicité semble être générique (cf *Isocounting conjecture* dans [DCST07]). Dans le cadre des disques représentant des personnes, cette non-unicité du modèle idéalisé se traduira par une forte instabilité des pressions subies par les individus.

Remarque 5.3 (Lien entre prox-régularité locale et rapidité de convergence de l'algorithme)

On note $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ la matrice remplie colonne par colonne par les vecteurs $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$, où les couples (i, j) sont tels que $D_{ij}(\mathbf{q}) = 0$ (autrement dit, les couples (i, j) appartiennent à l'ensemble I_{contact} défini par (3.4) p. 48). On définit aussi la matrice $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ de la manière suivante,

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = {}^t\mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}). \quad (5.1)$$

C'est une matrice carrée de taille n_{contact} égal au nombre de contacts que présente la configuration \mathbf{q} (cardinal de I_{contact}). L'inégalité triangulaire inverse énoncée à la proposition 3.14 p. 52 affirme qu'il existe une constante γ telle que pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$, pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{R}^+)^{n_{\text{contact}}}$ vérifiant $|\boldsymbol{\lambda}|_1 = 1$, on ait

$$\left| \sum \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|^2 = {}^t\boldsymbol{\lambda} \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = {}^t\boldsymbol{\lambda} \mathbf{C}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \geq \frac{2}{\gamma^2}.$$

(Dans la suite, pour préciser que l'on considère $\boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{R}^+)^{n_{\text{contact}}}$, on écrira juste $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$). On définit pour $\mathbf{q} \in Q_0$, le paramètre local $\gamma_{\mathbf{q}}$ vérifiant

$$\min_{\substack{|\boldsymbol{\lambda}|_1=1 \\ \boldsymbol{\lambda} \geq 0}} {}^t\boldsymbol{\lambda} \mathbf{C}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = \frac{2}{\gamma_{\mathbf{q}}^2},$$

et un autre paramètre local $\eta_{\mathbf{q}}$ en posant

$$\eta_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\gamma_{\mathbf{q}}} \frac{\min(r_i + r_j)}{\sqrt{2}}.$$

On peut montrer qu'il existe un lien entre le paramètre $\eta_{\mathbf{q}}$ (minorant la valeur de la prox-régularité locale de Q_0 au point \mathbf{q}) et le conditionnement de la matrice $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ dans le cas où $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ est inversible. Si on note η_{\min} la plus petite valeur propre de $\mathbf{C}(\mathbf{q})$, on sait que

$$\eta_{\min} = \min_{|\boldsymbol{\lambda}|_2=1} {}^t\boldsymbol{\lambda} \mathbf{C}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = \min_{|\boldsymbol{\lambda}|_2 \geq 1} {}^t\boldsymbol{\lambda} \mathbf{C}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}.$$

Or

$$\min_{|\lambda|_2 \geq 1} {}^t \lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}) \lambda \leq \min_{\substack{|\lambda|_2 \geq 1 \\ \lambda \geq 0}} {}^t \lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}) \lambda.$$

Comme pour tout λ , $|\lambda|_1 \leq \sqrt{n_{\text{contact}}} |\lambda|_2$, on a

$$\min_{\substack{|\lambda|_2 \geq 1 \\ \lambda \geq 0}} {}^t \lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}) \lambda \leq \min_{\substack{|\lambda|_1 \geq \sqrt{n_{\text{contact}}} \\ \lambda \geq 0}} {}^t \lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}) \lambda = n_{\text{contact}} \min_{\substack{|\lambda|_1 \geq 1 \\ \lambda \geq 0}} {}^t \lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}) \lambda.$$

Finalement,

$$\eta_{\min} \leq n_{\text{contact}} \min_{\substack{|\lambda|_1 \geq 1 \\ \lambda \geq 0}} {}^t \lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}) \lambda = n_{\text{contact}} \min_{\substack{|\lambda|_1 = 1 \\ \lambda \geq 0}} {}^t \lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}) \lambda = \frac{2n_{\text{contact}}}{\gamma_{\mathbf{q}}^2}.$$

Ainsi

$$\eta_{\min} \leq \frac{n_v N}{\gamma_{\mathbf{q}}^2},$$

où n_v est le nombre maximal de voisins que peut avoir une personne (cf lemme 3.16 p. 53). D'autre part, le conditionnement de la matrice $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ vaut

$$\text{cond}_2(\mathbf{C}(\mathbf{q})) = \|\mathbf{C}(\mathbf{q})\|_2 \|\mathbf{C}(\mathbf{q})^{-1}\|_2 = \frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}}.$$

Comme $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \sqrt{2}$, on obtient que

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q})\|_2 = \eta_{\max} \geq 2.$$

Ainsi,

$$\text{cond}_2(\mathbf{C}(\mathbf{q})) \geq \frac{2}{\eta_{\min}} \geq \frac{2\gamma_{\mathbf{q}}^2}{n_v N}.$$

Par définition de $\eta_{\mathbf{q}}$, on obtient

$$\sqrt{\text{cond}_2(\mathbf{C}(\mathbf{q}))} \geq \frac{1}{\eta_{\mathbf{q}} \sqrt{n_v N}} \min_{(i,j)} (r_i + r_j).$$

Plus le facteur $\eta_{\mathbf{q}}$ est proche de 0, pire sera le conditionnement de la matrice $\mathbf{C}(\mathbf{q})$. Or la matrice intervenant dans l'algorithme d'Uzawa est la matrice correspondant à l'application $\Phi\Phi^*$, de la forme $\mathbf{C}(\mathbf{q}) = {}^t \mathbf{G}(\mathbf{q}) \mathbf{G}(\mathbf{q})$. On s'attend alors à ce que l'algorithme d'Uzawa converge moins rapidement pour des configurations associées à de faibles prox-régularités locales (impliquant de faibles valeurs du paramètre $\eta_{\mathbf{q}}$). Pratiquement, on s'aperçoit que la résolution du problème point-selle lors d'un important « bouchon » se révèle la plus coûteuse, un grand nombre d'itérations de l'algorithme d'Uzawa est nécessaire pour atteindre le seuil de précision prescrit par l'utilisateur alors que les calculs, lors de pas de temps sans engorgement, sont quasi immédiats.

5.1.2 Programmation

Prise en compte des obstacles

On interdit aux disques de traverser les obstacles présents, autrement dit on impose une distance positive entre ces derniers. Si les obstacles sont au nombre de n_{obst} , on introduit alors pour $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq l \leq n_{obst}$ vecteurs $\mathbf{G}_{il}^{obst}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2N}$, gradient de la distance entre la personne i et l'obstacle l :

$$\mathbf{G}_{il}^{obst}(\mathbf{q}) = (0, \dots, 0, \underset{i}{-\mathbf{n}_{il}(\mathbf{q})}, 0, \dots, 0),$$

où $\mathbf{n}_{il}(\mathbf{q})$ est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^2 qui dépend de la position \mathbf{q}_i par rapport à l'obstacle l (cf. figure 5.2).

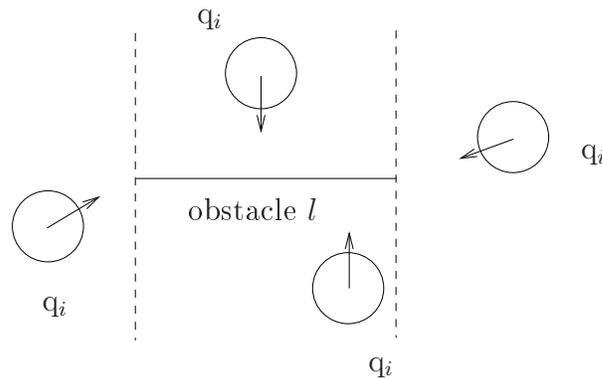


FIG. 5.2 – Représentation du vecteur $\mathbf{n}_{il}(\mathbf{q})$ en fonction de \mathbf{q}_i .

Ces Nn_{obst} nouvelles contraintes sont gérées numériquement de la même manière que les contraintes de non-chevauchement entre les disques. On calcule de la même façon les multiplicateurs de Lagrange associés. Le nombre de contacts susceptibles d'être activés est nettement inférieur à

$$\frac{N(N-1)}{2} + Nn_{obst}.$$

Dans le cas où tous les rayons sont égaux à r par exemple, chaque disque est en contact avec au plus 6 autres. Le nombre de contacts est alors inférieur à $(3 + n_{obst})N$. Lors de l'implantation, seules les contraintes correspondant à deux personnes proches ou à une personne près d'un obstacle, sont activées. Il est aussi hors de question de stocker la matrice contenant tous les vecteurs $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$ et $\mathbf{G}_{il}^{obst}(\mathbf{q})$. On ne garde en mémoire que les vecteurs $\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q})$ et les vecteurs $\mathbf{n}_{il}(\mathbf{q})$.

Voici le noyau du programme codé en Matlab. L'algorithme d'Uzawa s'arrête dès que le chevauchement relatif entre les personnes ou entre les individus et les obstacles, se situe en dessous d'un certain seuil (fixé ici à 10% du rayon minimal).

```
% D matrice tq pour i<j D(i,j)=distance entre qi et qj - (ri + rj)
%
% D(i,l)=distance entre qi et obstacle l - ri
% E matrice contenant les vect eij et les vect nil entre part et obst
% mu multiplicateur de Lagrange
```

```

% h pas de temps
% contact tableau de contacts possibles

% donnees pour l'algorithme d'Uzawa
epsilon = 0.1*min(R); % chevauchement autorise
nbitermax=5000;      % nb max d'iterations
rho=50;              % parametre de l'algorithme

% on effectue les calculs pour nt pas de temps

for instant = 1 : nt

    % calcul de la vitesse souhaitee prenant en compte les obstacles
    U=vitesse_globale(Q,R,Table_1,Norm1,But1,Table_2,Norm2,But2,epsi,v,d,n);

    % construction des matrices D et E, du tableau de contact
    [D,E,comp,contact]= gest_cont(Q,R,Obs,Normobs,h,d,n,n_obs);

    % algorithme d'Uzawa pour determiner la vitesse reelle
    % la condition d'arret est que la dist min Dmin
    % entre toutes les part et entre part/obstacles
    % soit superieure a -epsilon

    k=0; % k = numero de l'iteration d'Uzawa

    mu=0; % si aucun contact possible, mu ne sera pas utilise
    if comp>1
        mu=zeros(comp,1);
    end

    Dmin=-2*epsilon; % on rentre necessairement dans la boucle suivante

    while ((k < nbitermax) & (Dmin < -epsilon))
        % vitesse adaptee uk=U-phi*(muk)
        v=U-phi_star(mu,E,contact,comp,d,n,n_obs,h);

        % multi de lagrange mu(k+1)
        mu=phi(mu,v,E,D,contact,comp,rho,n,h);

        % nouvelle configuration potentielle
        Qposs=Q+h*v;

        Dmin=dist(Qposs,R,Obs,Normobs,d,n_obs,contact,comp);
        k=k+1;
    end
end

```

Dans le code précédent, la mise à jour des contacts potentiels à chaque instant est effectuée de façon naïve (boucle en $\mathcal{O}(N^2)$ pour calculer les distances, gestion non dynamique de la mémoire). Afin de diminuer le temps de calcul lors de simulations d'un grand nombre de personnes, nous avons choisi d'utiliser le logiciel SCoPI (Simulation de Collections de Particules en Interaction), codé en C++. Ce dernier gère efficacement les contacts et il est facile d'y intégrer notre modèle. Nous précisons les caractéristiques de SCoPI dans la sous-section suivante.

5.1.3 Logiciel SCoPI

Le logiciel SCoPI (Simulation de Collections de Particules en Interaction) programmé en C++, a été créé par A. Lefebvre au cours de sa thèse intitulée *Modélisation numérique d'écoulements fluide/particules* (cf. [Lef07, Lef08]). Le coeur de ce logiciel est un algorithme de projection permettant d'imposer une contrainte sur les vitesses des particules afin que celles-ci ne se chevauchent pas ou restent collées, au choix. Son originalité vient du fait qu'il laisse la possibilité à l'utilisateur de programmer les modèles de milieu extérieur (gravité, fluide ...) d'interaction interparticulaire (force de cohésion...) et de contact (inélastique, visqueux, agrégation...) qu'il souhaite. Le logiciel permet également la prise en compte de différents types d'obstacles (segments, disques en 2D, sphères, plans en 3D), mobiles ou non. Cette modularité été obtenue par une programmation orientée objet et par la construction d'un diagramme de classes adapté.

Afin d'effectuer des simulations avec un grand nombre de disques, ce logiciel gère de manière efficace la mémoire ainsi que le temps de calcul. À chaque instant, ne sont considérés que les contacts potentiels à l'instant suivant (ceux concernant des disques suffisamment proches). Afin de déterminer ceux-ci, un algorithme de recherche des voisins de type « bucket sorting » est utilisé. Son principe consiste à découper le domaine d'étude en boîtes carrées et à ne calculer les distances qu'entre des particules se trouvant dans des boîtes voisines (aucune boucle en N^2 n'est effectuée).

Il reste à préciser que la méthode de projection programmée dans ce logiciel est l'algorithme d'Uzawa, mais une autre méthode serait facilement implantable. Grâce à la modularité de SCoPI, il est facile pour l'utilisateur d'intégrer dans le programme une vitesse des disques a priori, de son choix (vitesse avant projection). Dans notre cas, il s'agit de la vitesse souhaitée par les personnes, ce qui nous amène à la section suivante.

5.2 Calcul de la vitesse souhaitée en utilisant une méthode de type Fast Marching

Dans cette section, nous nous intéressons au premier point du modèle, à savoir le choix de la vitesse souhaitée et à sa programmation. Ici, nous faisons en quelque sorte le choix le plus simple pour la vitesse souhaitée. Tous les individus sont supposés avoir le même comportement : ils veulent atteindre la sortie en parcourant le plus court chemin. On définit pour cela $\mathcal{D}(\mathbf{x})$ la distance géodésique entre la position \mathbf{x} et la sortie la plus

proche. Cette fonction \mathcal{D} vérifie l'équation suivante

$$|\nabla\mathcal{D}(\mathbf{x})| = 1.$$

L'expression de la vitesse souhaitée peut maintenant être précisée,

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}) = (\mathbf{U}_0(q_1), \dots, \mathbf{U}_0(q_N)) \text{ avec } \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) = -s \nabla\mathcal{D}(\mathbf{x}),$$

où le réel positif s représente la norme du vecteur $\mathbf{U}_0(\mathbf{x})$, i.e. l'allure souhaitée.

5.2.1 Présentation de la méthode

Pour calculer \mathcal{D} , on utilise une méthode de type Fast Marching introduite par R. Kimmel and J. Sethian dans [KS96]. Dans cette méthode, la valeur de \mathcal{D} est calculée en chaque point d'une grille recouvrant le domaine. Le principe de la méthode de Fast Marching est de découper la grille en 3 zones :

- la zone dite éclairée, constituée des noeuds où la valeur de \mathcal{D} est déterminée ;
- la zone de pénombre constituée des noeuds où une valeur de \mathcal{D} a été calculée mais pas encore fixée ;
- la zone d'ombre constituée des noeuds très éloignés où la valeur de \mathcal{D} n'a pas encore été calculée.

Pour initialiser cette méthode, on définit la zone éclairée initialement, c'est-à-dire formée des points où la valeur de \mathcal{D} est connue. Il y en a dans notre cas deux types, ceux qui se trouvent à une sortie où la valeur de \mathcal{D} est fixée à 0 et ceux qui se situent à l'intérieur des obstacles auxquels on associe une très grande valeur de \mathcal{D} . Ceci permet de prendre en compte la géométrie des lieux en empêchant le plus court chemin de traverser les obstacles présents, comme l'illustre la figure 5.3. Sur celle-ci, on a tracé les lignes de niveau de \mathcal{D} , calculée par la méthode de Fast Marching, pour une pièce contenant 5 obstacles et dont la sortie se trouve à gauche.

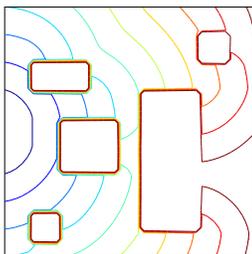


FIG. 5.3 – Lignes de niveau de la distance géodésique \mathcal{D} .

Après l'initialisation des noeuds éclairés, on définit la zone de pénombre initiale. Elle est constituée par les points qui n'appartiennent pas à la zone éclairée et voisins des points éclairés. Pour chacun de ces points, la valeur de \mathcal{D} est calculée de sorte qu'une version discrète de l'équation $|\nabla\mathcal{D}| = 1$ soit satisfaite. Précisons celle-ci. On note h_{FMM} le pas de

la grille et $\mathcal{D}_{i,j}$ la valeur de \mathcal{D} au noeud (i, j) . On définit les dérivées partielles approchées par rapport à x à gauche et à droite comme suit :

$$\Delta_{ij}^{-x} = \frac{\mathcal{D}_{i,j} - \mathcal{D}_{i-1,j}}{h_{FMM}} \quad \text{et} \quad \Delta_{ij}^{+x} = \frac{\mathcal{D}_{i+1,j} - \mathcal{D}_{i,j}}{h_{FMM}}.$$

On définit de manière analogue les dérivées partielles approchées par rapport à y à gauche et à droite. L'équation discrétisée à vérifier est la suivante :

$$\max(\Delta_{ij}^{-x}, -\Delta_{ij}^{+x}, 0)^2 + \max(\Delta_{ij}^{-y}, -\Delta_{ij}^{+y}, 0)^2 = 1. \quad (5.2)$$

La valeur de \mathcal{D} pour les points restants constituant la zone d'ombre est initialisée à $+\infty$. Il reste à expliquer comment on calcule de manière efficace $\mathcal{D}_{i,j}$ de telle sorte que l'égalité (5.2) soit satisfaite.

Calcul de $\mathcal{D}_{i,j}$:

On calcule $a = \min(\mathcal{D}_{i-1,j}, \mathcal{D}_{i+1,j})$ et $b = \min(\mathcal{D}_{i,j-1}, \mathcal{D}_{i,j+1})$.

Si $|a - b| < h_{FMM}$ alors on pose

$$\mathcal{D}_{i,j} = \frac{a + b + \sqrt{2h_{FMM}^2 - (a - b)^2}}{2},$$

sinon on pose

$$\mathcal{D}_{i,j} = h_{FMM} + \min(a, b).$$

Remarque 5.4 *On peut vérifier qu'avec cette valeur de $\mathcal{D}_{i,j}$, l'équation (5.2) est satisfaite.*

Maintenant que les trois zones initiales ont été définies, expliquons comment se déroule une étape de la Fast Marching. On considère le noeud (i_{\min}, j_{\min}) de la zone de pénombre ayant la plus petite valeur de \mathcal{D} . On ajoute ce point (i_{\min}, j_{\min}) à la zone éclairée et on l'enlève de la zone de pénombre. Ses voisins (i, j) qui se trouvent dans la zone d'ombre passent alors dans la zone de pénombre et la valeur $\mathcal{D}_{i,j}$ est calculée comme expliqué ci-dessus. Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les points de la grille soient éclairés. La figure 5.4 illustre le déroulement de la Fast Marching. Sur celle-ci, les points de la grille présentant une très grande valeur de \mathcal{D} (points intérieurs aux obstacles ou dans la zone d'ombre) ne sont pas coloriés. Les deux images représentant l'instant initial et un instant ultérieur de la Fast Marching montrent la propagation des zones éclairée et de pénombre.

Remarque 5.5 *Si on imagine qu'aux noeuds présents à la sortie se trouvent des émetteurs de lumière, les autres noeuds seront déterminés dans l'ordre où ils sont atteints par la lumière.*

Le seul coût que présente cette méthode est la recherche du noeud (i_{\min}, j_{\min}) . Une structure de tas (*heap*) est donc utilisée pour stocker la liste des points constituant la zone de pénombre. Si n_p est le nombre de points de la grille, la complexité de la Fast Marching Method est en $\mathcal{O}(n_p \log n_p)$.



FIG. 5.4 – Illustration du déroulement de la Fast Marching.

5.2.2 Programmation Orientée Objet

Nous avons choisi de programmer cette méthode de Fast Marching en C++. Ceci nous permet d'intégrer facilement ce choix de vitesse souhaitée au logiciel SCoPI présenté dans la sous-section 5.1.3 et d'utiliser la librairie standard STL (Standard Template Library) où par exemple les structures de tas (*map*, *multimap*) existent déjà. Notre objectif est de pouvoir simuler l'évacuation de milliers de personnes hors de salles ou de bâtiments de géométrie quelconque. Nous avons dû pour cela ajouter au code SCoPI de nouvelles classes renfermant les données géométriques. Il a également fallu ajouter d'autres classes afin que la vitesse des disques avant projection soit la vitesse souhaitée dirigée par le plus court chemin.

On rappelle qu'une classe est une description d'objet. Elle possède des attributs c'est-à-dire des données et des méthodes ou plus simplement des fonctions. Pour représenter une classe, on trace son diagramme dont un exemple est donné sur la figure 5.5.

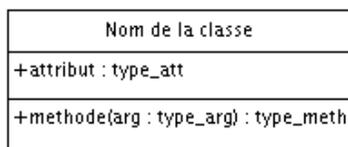


FIG. 5.5 – Représentation d'une classe.

Nouvelles classes liées à la géométrie

Dans le logiciel SCoPI, la classe `Obstacle` regroupe différents types d'obstacles. Un `Obstacle` peut être un segment ou un disque en 2D, ou un plan ou bien une sphère en 3D. Toutefois, nous avons besoin pour programmer la vitesse souhaitée de données géométriques plus précises. En effet, pour utiliser la méthode Fast Marching, nous avons besoin de connaître la position des murs de la pièce ou des obstacles présents dans la salle. Nous allons donc considérer des ensembles d'`Obstacle` et créer pour cela une classe `Macro_Obs`. Cette classe a plusieurs classes filles : la classe `Macro_Room`, la classe `Macro_Table` (obstacle dans la pièce), la classe `Macro_Door` (sortie), et pour traiter des bâtiments à plusieurs étages les classes `Macro_Stair` et `Macro_Stairwell`. Une classe

Ens_Macros_Obs_h permet quant à elle de créer des ensembles de Macro_Obs. Détaillons les classes Ens_Macros_Obs_h et Macro_Obs. Sur la figure 5.6, le diagramme de ces classes a été tracé avec le logiciel ArgoUML.

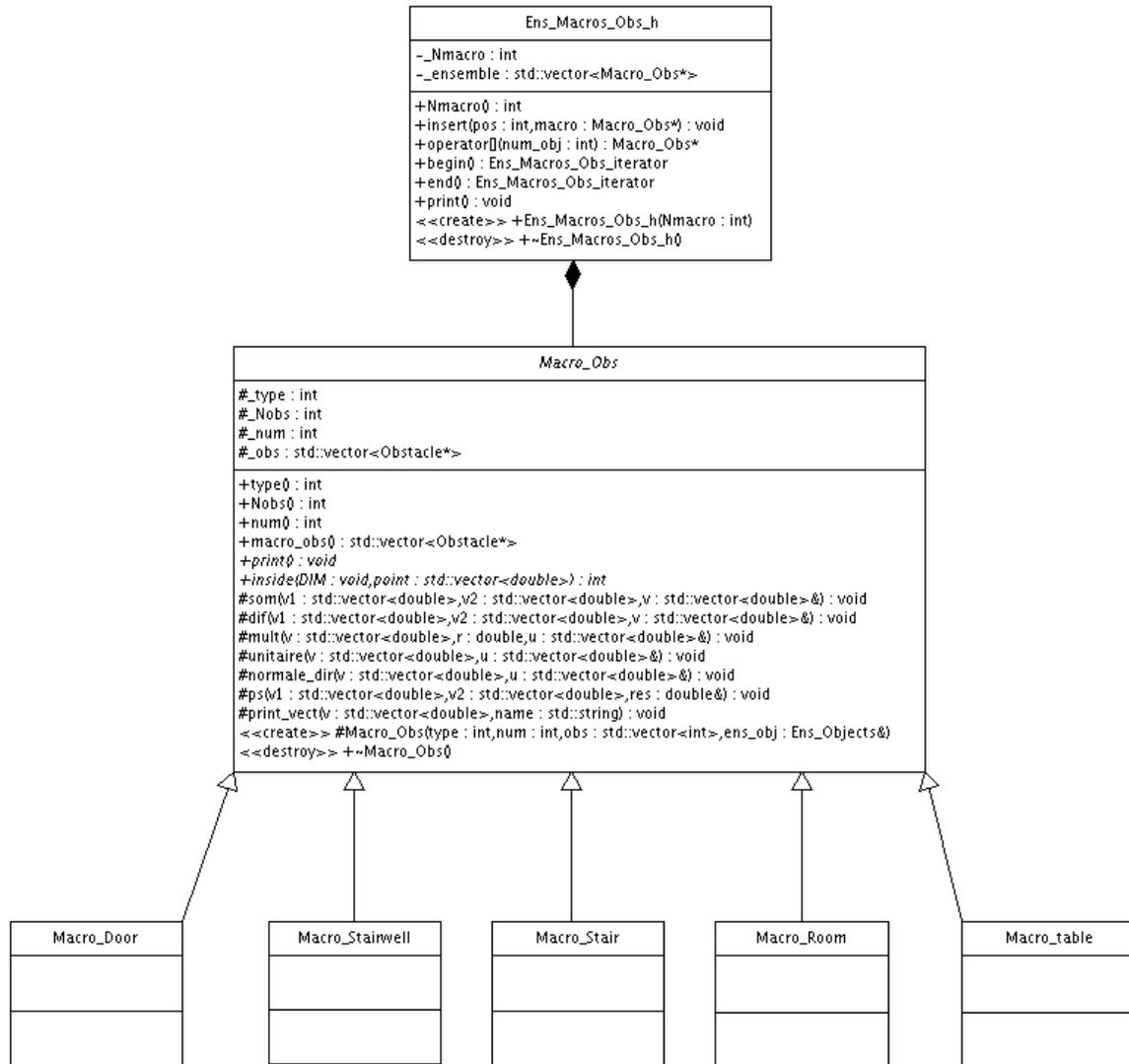


FIG. 5.6 – Classe Ens_Macros_Obs_h.

Classe Ens_Macros_Obs_h

Ses attributs sont :

- Nombre de Macro_Obs
- Ensemble de Macro_Obs. Ce nombre étant constant, nous avons choisi d'utiliser la classe `vector` de la STL.

Ses principales méthodes sont :

- Méthode renvoyant le nombre de Macro_Obs
- Méthode permettant d'insérer un objet Macro_Obs à une certaine position
- Méthode renvoyant l'objet Macro_Obs se trouvant à une certaine position

Classe Macro_Obs

Ses attributs sont :

- Type
- Nombre d'obstacles
- Numéro dans l'ensemble `Ens_Macros_Obs_h`
- Ensemble d'objets `Obstacle`

Ses principales méthodes sont :

- Méthodes renvoyant les différents attributs
- Méthodes permettant de faire du calcul vectoriel
- Méthode prenant en argument les coordonnées d'un point et renvoyant 0 ou 1 suivant sa présence ou non à l'intérieur de l'ensemble d'obstacles considéré (codé dans la classe fille)

Le type de la classe `Macro_Obs` est un entier qui est égal à 0 quand il s'agit d'une classe `Macro_Room`, 1 pour une classe `Macro_Table`, 2 pour une classe `Macro_Stairwell`, 3 pour une classe `Macro_Stair` et enfin 5 pour une classe `Macro_Door`. Toutes ces classes filles héritent des attributs et des méthodes décrits pour la classe `Macro_Obs`.

La méthode essentielle de cette classe (appelée *inside*) est la dernière évoquée puisque c'est elle que nous allons utiliser lors de l'initialisation de la méthode Fast Marching. Son action est la même pour tous les `Macro_Obs` mais sa programmation est différente suivant le type de `Macro_Obs`. Elle sera donc codée au niveau des classes filles en utilisant les méthodes et attributs particuliers de ces dernières. Les diagrammes des classes filles se trouvent à la fin de cette section.

Nouvelles classes liées à la vitesse souhaitée

Dans le logiciel SCoPI, se trouve une classe `Vitesse_a_priori_h`. Le rôle de cette classe est, étant donnés les positions des particules et le milieu extérieur à un instant donné, de calculer la vitesse des particules a priori, i.e. avant la projection. Le calcul demandé (effectué dans la méthode *run*) dépend du problème considéré et est donc programmé dans les classes filles. Il nous faut donc créer une classe fille de `Vitesse_a_priori_h` afin d'y intégrer notre choix de vitesse souhaitée. Nous l'appelons `Vap_Souh_Geo_h`.

On souhaite considérer des bâtiments à plusieurs niveaux. La vitesse souhaitée des personnes dépend alors du niveau où elles se trouvent (les escaliers étant considérés comme des niveaux intermédiaires). Nous avons donc créé une classe `VSG_Level_h` donc le rôle est de calculer la vitesse souhaitée du niveau correspondant, connaissant sa géométrie et la position de la personne. La classe `Vap_Souh_Geo_h` a accès à ces méthodes à travers une liste de `VSG_Level_h`. La programmation de ce calcul étant différent dans le cas d'un étage (vitesse dirigée par le plus court chemin prenant en compte les obstacles) ou d'un escalier (descente simple de ce dernier), nous avons codé deux classes filles à `VSG_Level_h` : `VSG_Room_h` et `VSG_Stair_h`, correspondant respectivement à un étage et aux escaliers situés entre deux étages successifs.

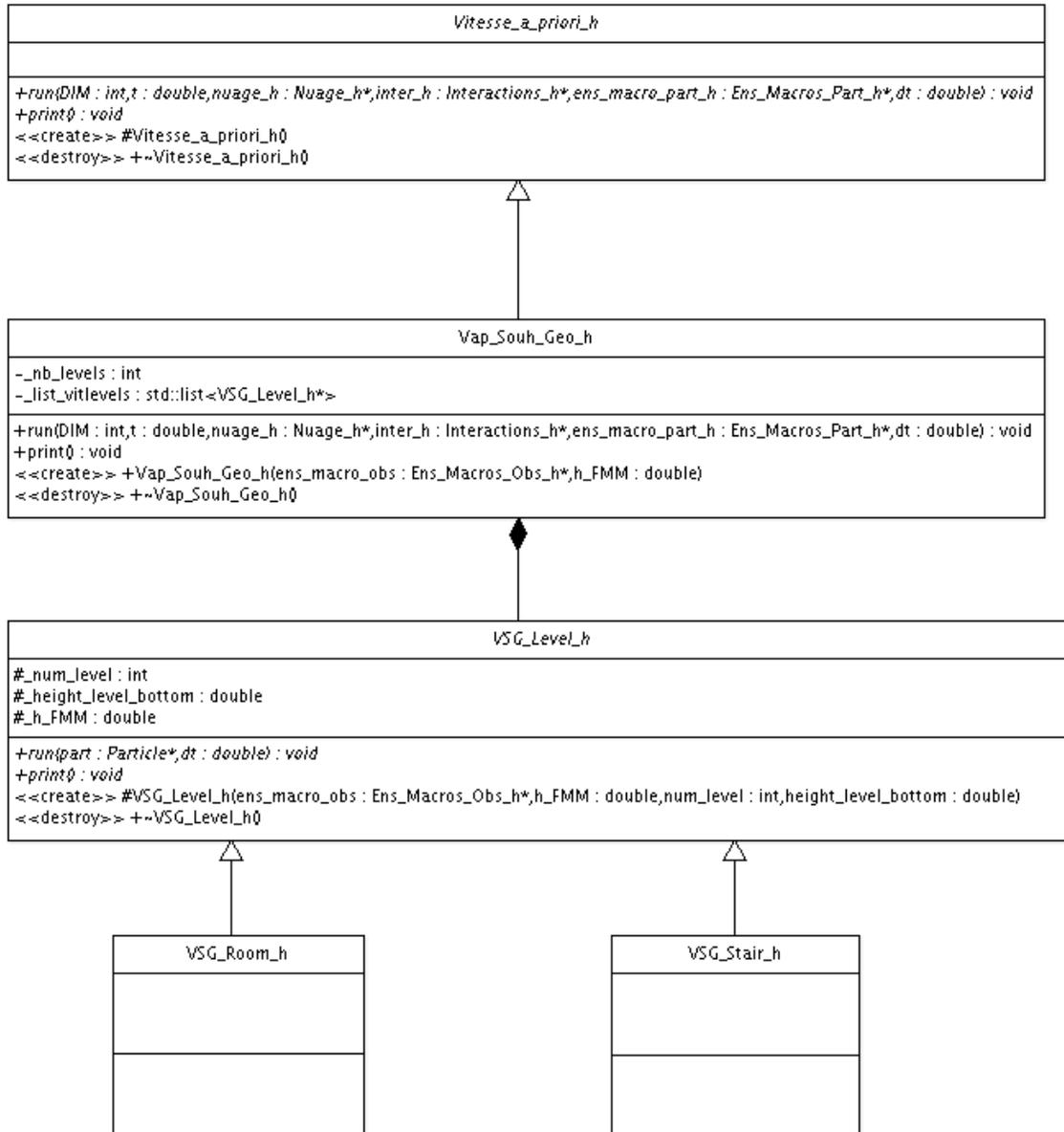


FIG. 5.7 – Classe Vitesse_a_priori_h.

Classe Vap_Souh_Geo_h, classe fille de `Vitesse_a_priori_h`

Ses attributs sont :

- Nombre de niveaux
- Ensemble d'objets `VSG_Level_h`

Sa principale méthode est la méthode *run* évoquée précédemment.

Classe VSG_Level_h

Ses principaux attributs sont :

- Numéro dans l'ensemble `Vap_Souh_Geo_h`
- Pas de la grille pour la méthode de *Fast Marching*

Sa principale méthode toujours appelée *run* prend en argument la classe `Particle` et renvoie la vitesse souhaitée de celle-ci. Elle est codée dans les classes filles.

Classe VSG_Stair_h (cf figure 5.9), classe fille de `VSG_Level_h`

Ses attributs sont :

- Nombre d'escaliers
- Ensemble d'objets `Macro_Stair`

Sa principale méthode est la méthode *run*.

Classe VSG_Room_h (cf figure 5.8), classe fille de `VSG_Level_h`

Ses principaux attributs sont :

- Nombre de portes, de cages d'escaliers et de tables
- Ensembles d'objets `Macro_Door`, d'objets `Macro_Stairwell` et d'objets `Macro_Table`
- Objet `Macro_Room`
- Tableaux `GradX` et `GradY` contenant les valeurs de $\nabla\mathcal{D}$ dans les cases de la grille
- Tableau `Dist` contenant les valeurs de \mathcal{D} aux noeuds de la grille
- Tableaux `Present` et `In_Obs` utilisés lors de la méthode de *Fast Marching*

Ses principales méthodes sont :

- Méthode *run*
- Méthodes *init*, *ajout_voisins*, *calcul_dij*, *calcul_dist* utilisées lors de la méthode de *Fast Marching*
- Méthode *calcul_grad* qui remplit les tableaux `GradX`, `GradY` en prenant en argument le tableau `Dist` (cf. détails ci-après)
- Méthode *grad* qui prend en argument une classe `Particle` et renvoie un vecteur contenant la valeur de $\nabla\mathcal{D}$ de la case où se trouve la particule

Pour calculer la valeur de la première composante de $\nabla\mathcal{D}$ dans une case, on utilise les valeurs de \mathcal{D} aux 4 coins de celle-ci en faisant la moyenne des deux taux d'accroissements licites. On procède de manière analogue pour la deuxième composante de $\nabla\mathcal{D}$. Les tableaux `GradX` et `GradY` sont ainsi calculés une seule fois lors de la création de l'objet `VSG_Room_h` à l'instant initial.

VSG_Room_h
<pre> -_nb_doors : int -_nb_stairwells : int -_nb_tables : int -_room : Macro_Room* -_absmin : double -_absmax : double -_ordmin : double -_ordmax : double -_vect_doors : std::vector<Macro_Door*> -_vect_tables : std::vector<Macro_Table*> -_vect_stairwells : std::vector<Macro_Stairwell*> -_GradX : Tab* -_GradY : Tab* -_Dist : Tab* -_Present : Tab* -_In_Obs : Node_Vect </pre>
<pre> +run(part : Particle*,dt : double) : void +print() : void -grad(part : Particle*) : std::vector<double> -calcul_grad() : void -calcul_dist() : void -init(macro : Macro_Obs*,Vois : Node_Value&,Vois_tri : Value_Node&,nb_noeuds_inc : int&,num : int) : void -ajout_voisins(i : int,j : int,Vois : Node_Value&,Vois_tri : Value_Node&) : void -calcul_dij(i : int,j : int,Vois : Node_Value,dij : double&) : void <<create>> +VSG_Room_h(ens_macro_obs : Ens_Macros_Obs_h*,h_FMM : double,num_level : int,num_room : int,nb_tables : int, num_tables : std::list<int>,nb_doors : int,num_doors : std::list<int>,nb_stairwells : int, num_stairwells : std::list<int>,height_level_bottom : double) <<destroy>> +~VSG_Room_h() </pre>

FIG. 5.8 – Classe VSG_Room_h.

VSG_Stair_h
<pre> -_nb_stairs : int -_vect_stairs : std::vector<Macro_Stair*> </pre>
<pre> +run(part : Particle*,dt : double) : void +print() : void <<create>> +VSG_Stairs_h(ens_macro_obs : Ens_Macros_Obs_h*,h_FMM : double,num_level : int,nb_stairs : int,num_stairs : std::list<int>,height_level_bottom : double) <<destroy>> +~VSG_Stairs_h() </pre>

FIG. 5.9 – Classe VSG_Stair_h.

Dernières classes non détaillées

Macro_Room
<pre> -_height : double -_absmin : double -_absmax : double -_ordmin : double -_ordmax : double -_list_points : std::vector<std::vector<double> > </pre>
<pre> +print() : void +inside(DIM : int,point : std::vector<double>) : int +absmin() : double +absmax() : double +ordmin() : double +ordmax() : double +height() : double +simple() : int <<create>> +Macro_Room(type : int,num : int,obs : std::vector<int>,ens_obj : Ens_Objects&) <<destroy>> +-Macro_Room() </pre>

FIG. 5.10 – Classe Macro_Room.

Macro_Table
<pre> -_width : double -_height : double -_absmin : double -_absmax : double -_ordmin : double -_ordmax : double -_list_points : std::vector<std::vector<double> > -_list_points_rel : std::vector<std::vector<double> > -_list_norms : std::vector<std::vector<double> > </pre>
<pre> +print() : void +inside(DIM : int,point : std::vector<double>) : int +absmin() : double +absmax() : double +ordmin() : double +ordmax() : double +width() : double +simple() : int +inside_rel(DIM : int,point : std::vector<double>) : int <<create>> +Macro_Table(type : int,num : int,obs : std::vector<int>,ens_obj : Ens_Objects&,rmax : double) <<destroy>> +-Macro_Table() </pre>

FIG. 5.11 – Classe Macro_Table.

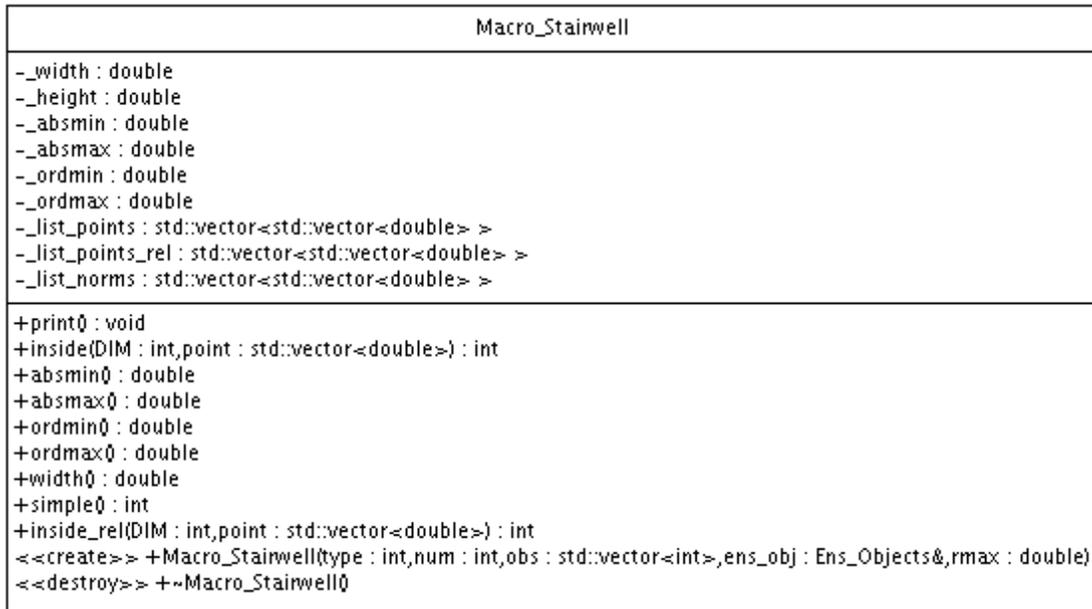


FIG. 5.12 – Classe Macro_Stairwell.

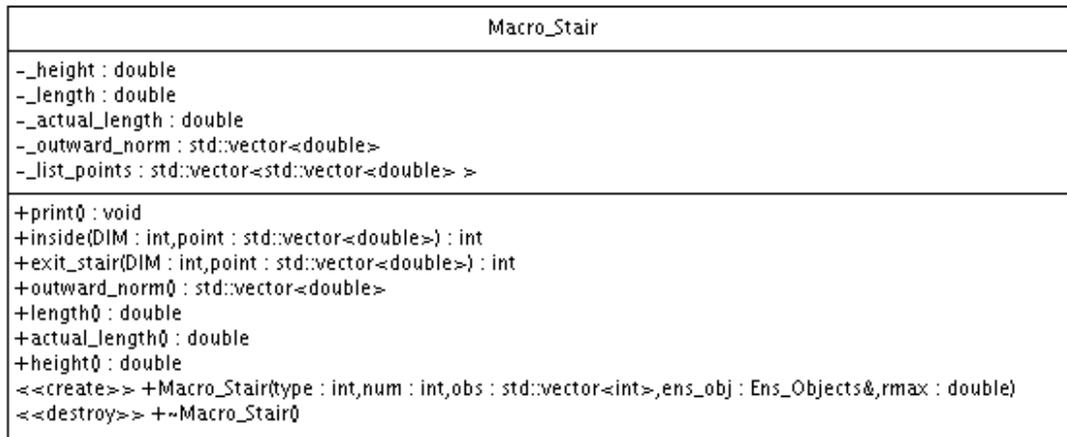


FIG. 5.13 – Classe Macro_Stair.

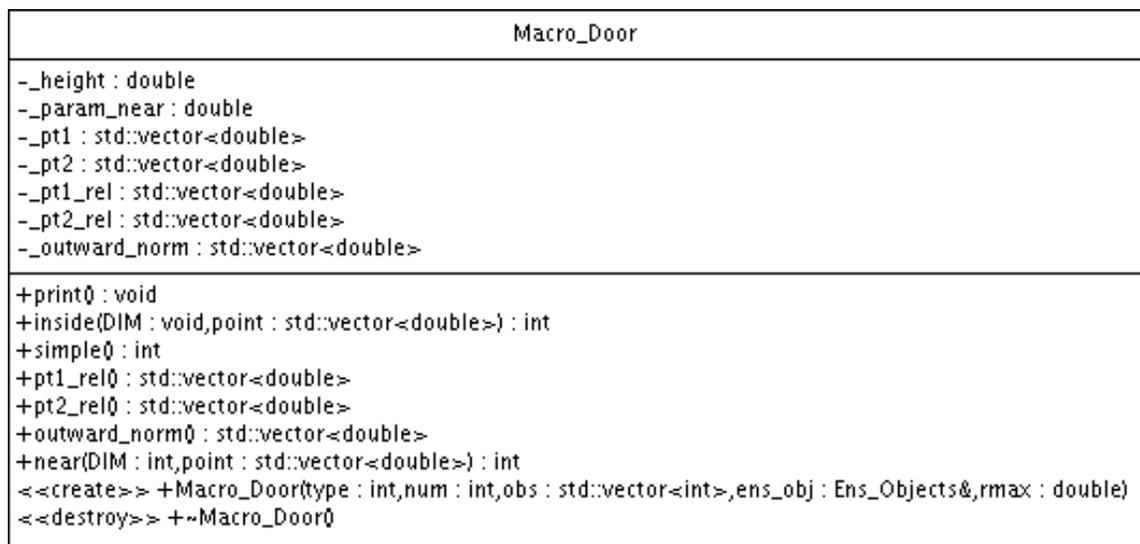


FIG. 5.14 – Classe Macro_Door.

Chapitre 6

Résultats numériques

Sommaire

6.1	Résultats recouvrant les phénomènes d'auto-organisation	121
6.1.1	Accès à un escalator	121
6.1.2	Evacuation à deux vitesses	122
6.1.3	Formation de files à contre-courant (« Fingering patterns »)	124
6.1.4	Formation d'arches	125
6.2	Vitesse souhaitée dirigée par le plus court chemin	127
6.3	Vitesse souhaitée en tant que solution d'une e.d.p.	130
6.4	Ajout de stratégies individuelles	133
6.4.1	Modélisation	133
6.4.2	Résultats numériques associés	134

Dans ce chapitre, nous précisons le premier point du modèle, à savoir le choix de la vitesse souhaitée, en proposant plusieurs exemples. Nous présentons pour chaque option les résultats numériques associés, obtenus en intégrant la vitesse souhaitée choisie dans l'algorithme numérique détaillé dans la section 5.1. Dans la section 6.1, nous retrouvons certains phénomènes d'auto-organisation (décrits dans la section 1.1) à l'aide de vitesses souhaitées simples « construites à la main ». Dans la section 6.2, la vitesse souhaitée choisie pour tous les individus est celle dirigée par le plus court chemin. Les résultats numériques présentés sont issus de la programmation en C++ (implantation d'une méthode de type Fast Marching) détaillée dans la section 5.2. Dans la section 6.3, nous proposons de prendre comme vitesse souhaitée la solution d'une équation aux dérivées partielles en prenant en compte les obstacles à l'aide de conditions aux bords sur ces derniers. Enfin, dans la section 6.4, nous différencions le comportement des personnes en ajoutant des stratégies individuelles : ralentissement ou contournement lors d'un embouteillage.

6.1 Résultats recouvrant les phénomènes d'auto-organisation

Les trois premières séries de calculs présentées ci-dessous ont été effectuées sous Matlab. Le but ici est de vérifier le programme sur quelques cas simples et de retrouver certains phénomènes observés et décrits dans la section 1.1.

6.1.1 Accès à un escalator

Ce premier exemple traite de 300 personnes qui sortent d'un train et se dirigent vers un escalator. Elles se déplacent toutes à la même allure. Le paramètre h est fixé de telle sorte qu'une personne libre de ses mouvements parcourt en un pas de temps, une distance égale à sa propre taille. Sur la figure 6.1, on retrouve la tendance des individus à se placer autour de la sortie en formant des cercles.

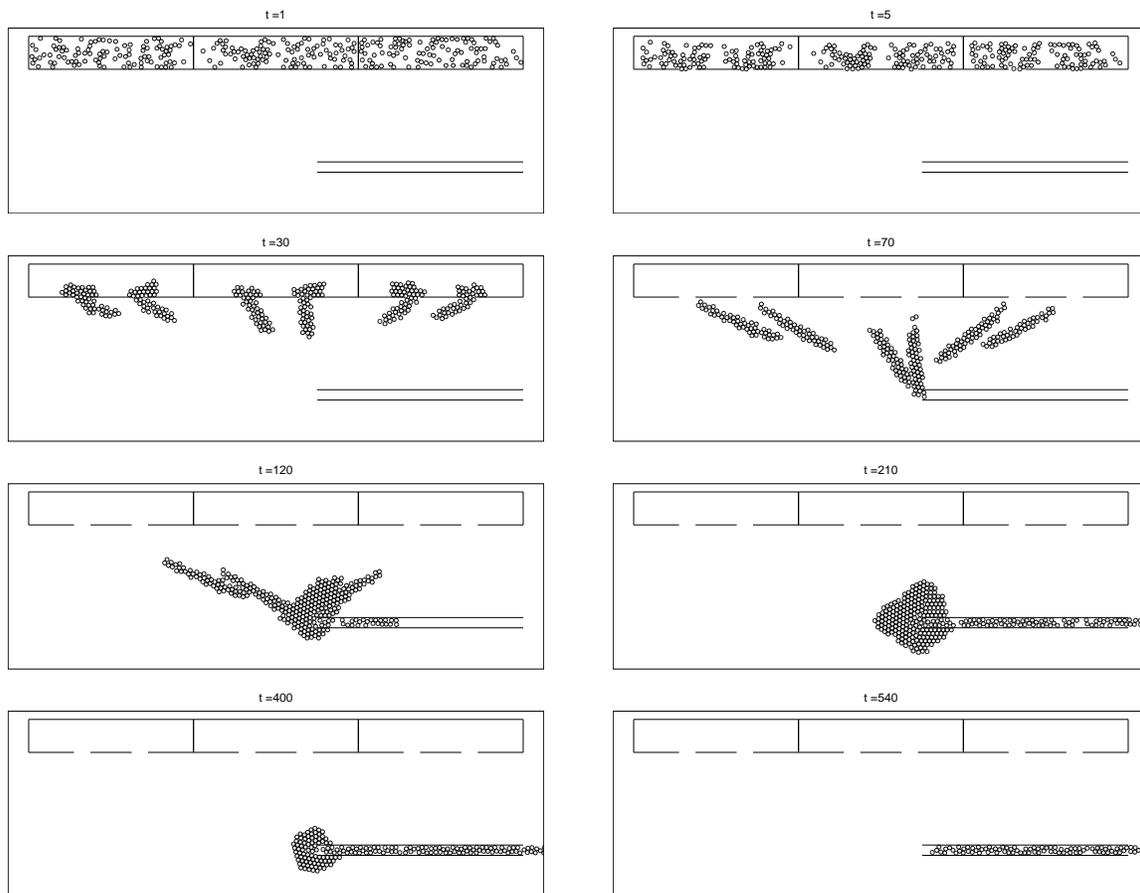


FIG. 6.1 – Sortie de métro.

6.1.2 Evacuation à deux vitesses

Ici, il s'agit de l'évacuation d'environ 1000 personnes d'un lieu composé de deux salles reliées par un couloir. Le flot du champ de leurs vitesses souhaitées que l'on a imposé, a été tracé sur la figure 6.2.

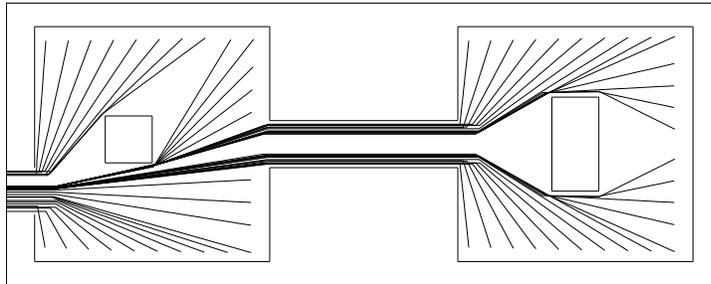


FIG. 6.2 – Flot du champ de vitesse souhaitée

Nous avons considéré une population non homogène de petits disques et de gros disques (diamètre triple de celui des petits), en supposant que les petits avancent trois fois plus vite que les autres, ou plus précisément que leur vitesse souhaitée a un module trois fois supérieur (cf. fig. 6.3). Le pas de temps h est pris de telle manière qu'un petit disque libre parcourt en un pas de temps, une distance égale à son propre diamètre. On remarque ici l'importance de gérer les contraintes de non-chevauchement entre les disques et les obstacles. En effet, même si les personnes veulent éviter l'obstacle près de la sortie, elles sont poussées vers celui-ci par les individus situés derrière elles.

Par ailleurs, lors de ces simulations, on observe qu'aucun principe du maximum n'est vérifié : le module de la vitesse d'un individu peut notamment être supérieur au module de la vitesse souhaitée. Ici, l'allure des gros disques (poussés par les petits) peut être plus de 2 fois supérieure au module de leur vitesse souhaitée.

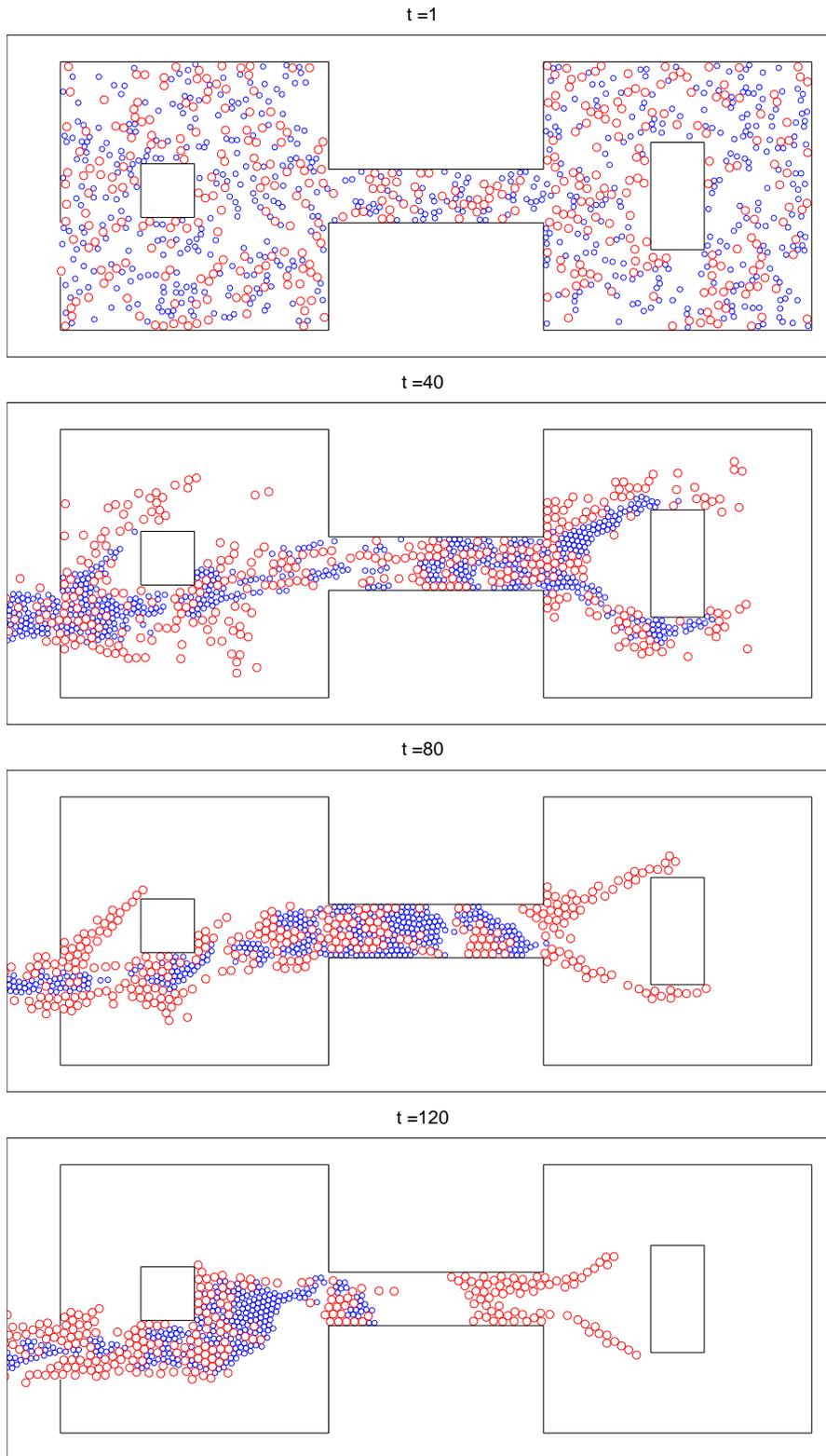


FIG. 6.3 – Évacuation à deux vitesses.

6.1.3 Formation de files à contre-courant (« Fingering patterns »)

Dans ce test, on considère deux populations de 750 individus dans un domaine périodique bidimensionnel. Les individus représentés par des disques noirs souhaitent aller à droite tandis que les personnes représentées par des disques blancs veulent se diriger dans la direction opposée (avec la même allure, i.e. norme de la vitesse souhaitée). Le modèle que nous avons proposé de gestion des contacts permet de retrouver le phénomène de formation de files à contre-courant évoqué dans [HM95, HV99] (cf. fig 1.3 p. 11). Sur la figure 6.4, sont représentées les deux populations à l'instant initial (distribution aléatoire) et aux instants 25 s, 75 s et 100 s. On remarque sur la deuxième image (pendant la période de transition) l'apparition de groupes « blancs » et « noirs », qui est due à l'absence de stratégie d'évitement.

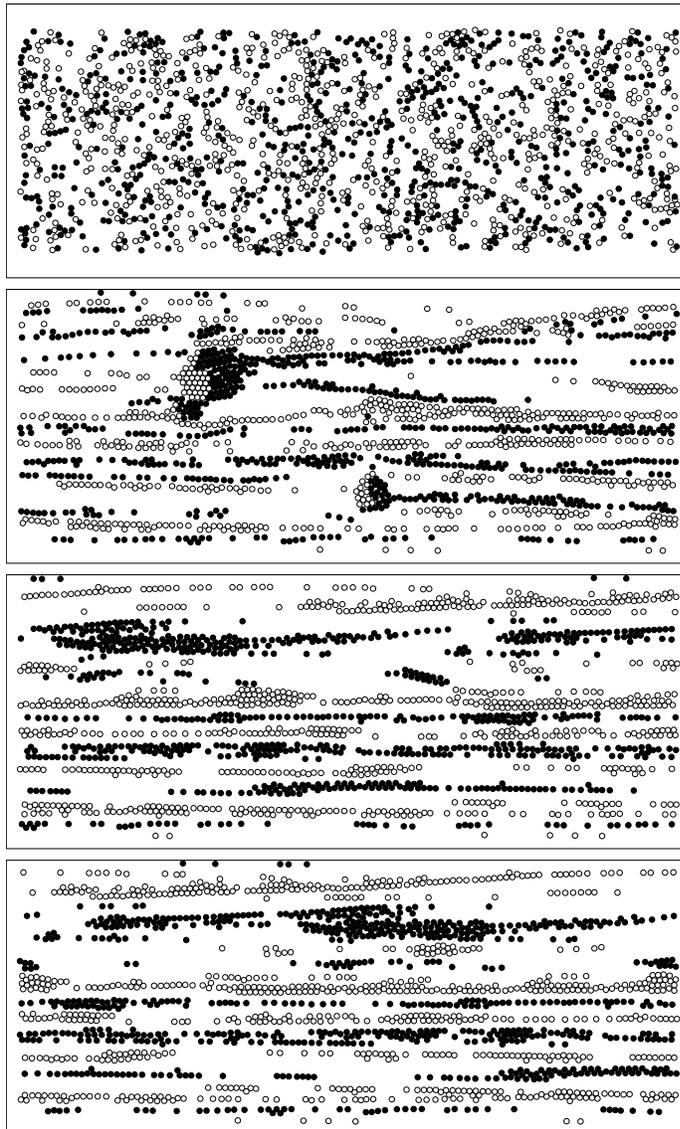


FIG. 6.4 – Files à contre-courant.

6.1.4 Formation d'arches

Ici, on a considéré 1000 personnes réparties aléatoirement à l'instant initial. Le champ de vitesse souhaitée est de norme égale à 1 et il est dirigé suivant les géodésiques à un point situé très loin à l'extérieur de la pièce. Sur la figure 6.5, à gauche ont été représentées les configurations calculées aux instants 3s, 7s, 65s et 110s. À droite, on a tracé le réseau d'interactions correspondant. Plus précisément, pour tout couple (i, j) de disques en contact, on a colorié le segment entre les centres, en fonction du multiplicateur de Lagrange λ_{ij} associé (du blanc au noir selon sa valeur). Ces multiplicateurs λ_{ij} apparaissent comme des moyens numériques pour gérer les contraintes de non-chevauchement. En ce sens, ils peuvent être interprétés en termes de pression subie par les individus. Les grandes valeurs des multiplicateurs correspondent à des zones de forte concentration de personnes.

D'une part, on retrouve sur les images de gauche, le phénomène de formation d'arches (dynamiques ici), tendance déjà évoquée dans [HFV00b, HV99]. D'autre part, on met en évidence d'autres arches qu'on pourrait qualifier d'arches de pression. En effet, sur la troisième image située à droite ($t = 65s$), on remarque juste avant la sortie, la présence d'une zone où les multiplicateurs de Lagrange sont peu actifs. En amont de cette région, les multiplicateurs sont beaucoup plus importants. Tout se passe comme si au moment où on quittait la pièce, on n'était plus soumis à de fortes pressions, comme « protégé » par les personnes situées à l'arrière (formant des arches en amont de la sortie).

Ces calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel SCoPI (Simulation de Collections de Particules en Interaction) présenté à la sous-section 5.1.3.

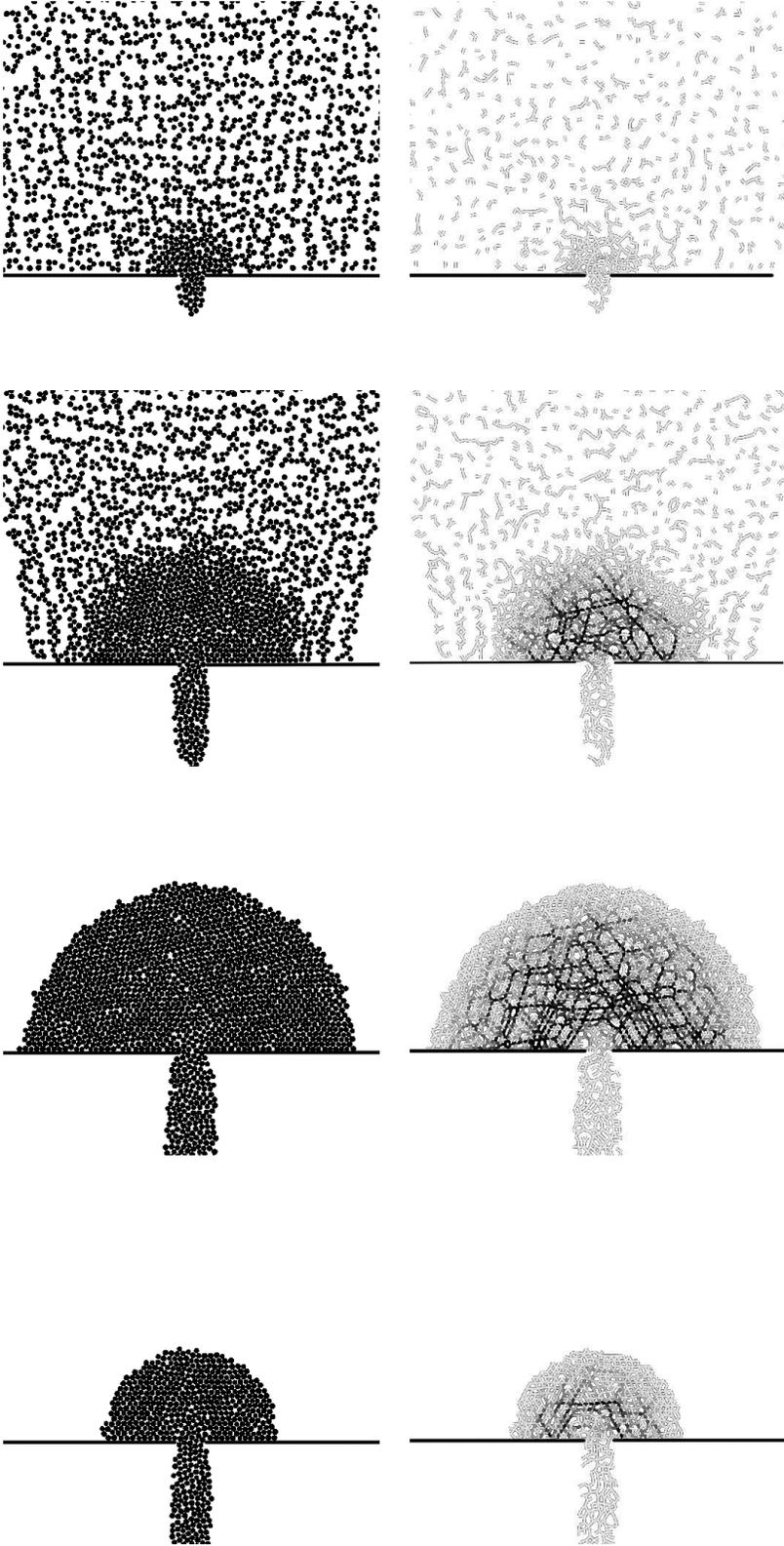


FIG. 6.5 – Arches.

6.2 Vitesse souhaitée dirigée par le plus court chemin

Nous présentons ici des résultats numériques issus de la programmation C++ détaillée dans la section 5.2. Nous rappelons que nous considérons des personnes qui pour évacuer, tentent de parcourir le plus court chemin vers la sortie, en contournant les obstacles. Pour montrer que le programme gère des salles de géométrie complexe, nous proposons sur la figure 6.6, l'évacuation de 500 personnes hors d'une salle contenant 5 obstacles. (Nous avons tracé les lignes de niveau de la distance géodésique pour cet exemple sur la figure 5.3 p. 107.)

Enfin, nous illustrons le fait que l'objectif final de cette programmation est de simuler l'évacuation d'une structure de plusieurs étages. (À chaque étage, le déplacement souhaité correspond au plus court chemin.) Sur la figure 6.7, nous représentons les configurations obtenues à différents pas de temps lors de l'évacuation de 600 personnes présentes dans un bâtiment. À l'instant initial, elles se trouvent toutes au premier étage et se dirigent vers la cage d'escalier. La sortie se trouve au rez-de-chaussée. Le pas de temps a été choisi de telle sorte qu'entre deux instants de calcul, les sphères représentant les individus essaient de parcourir moins de la moitié de leur rayon.

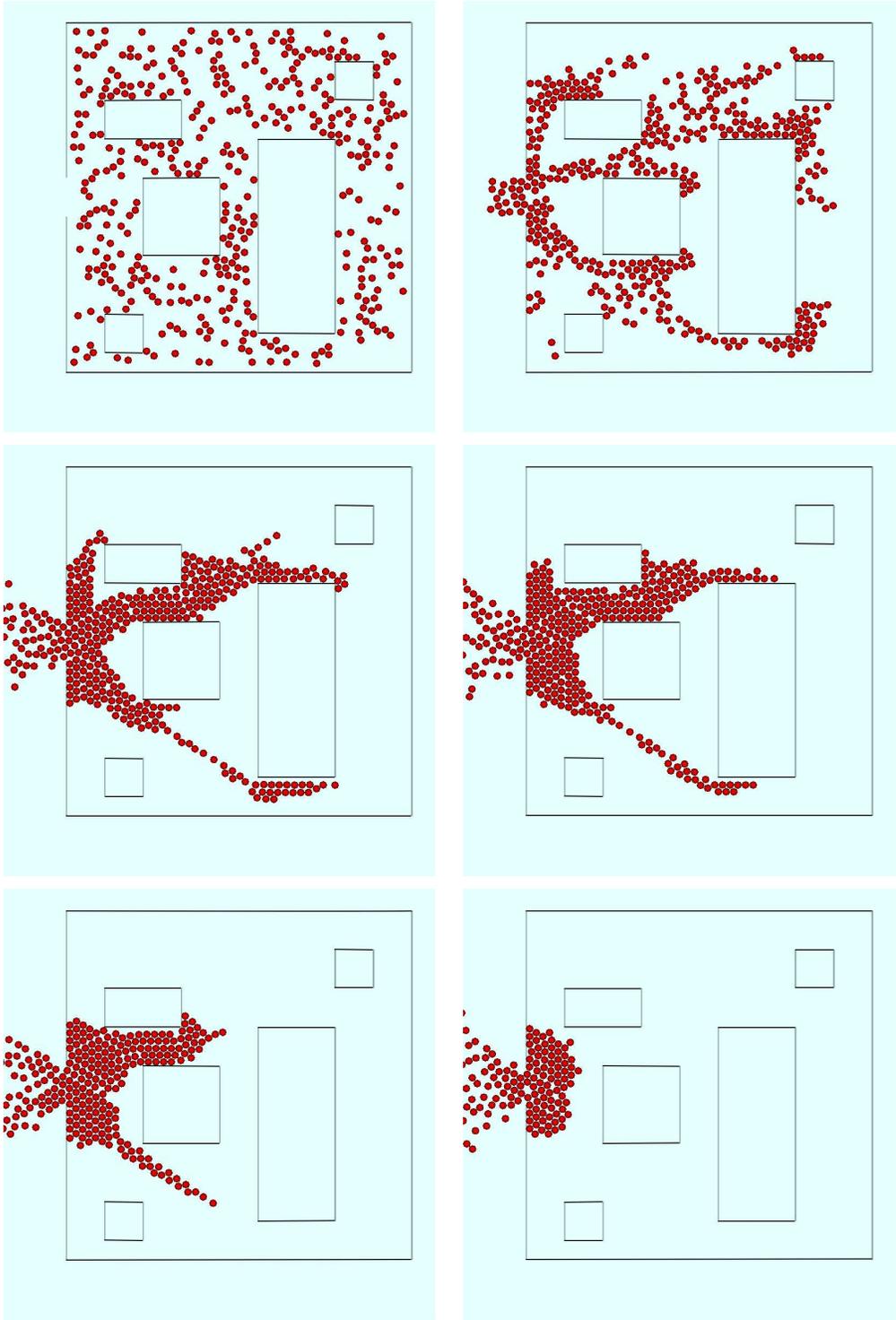


FIG. 6.6 – Évacuation de 500 personnes.

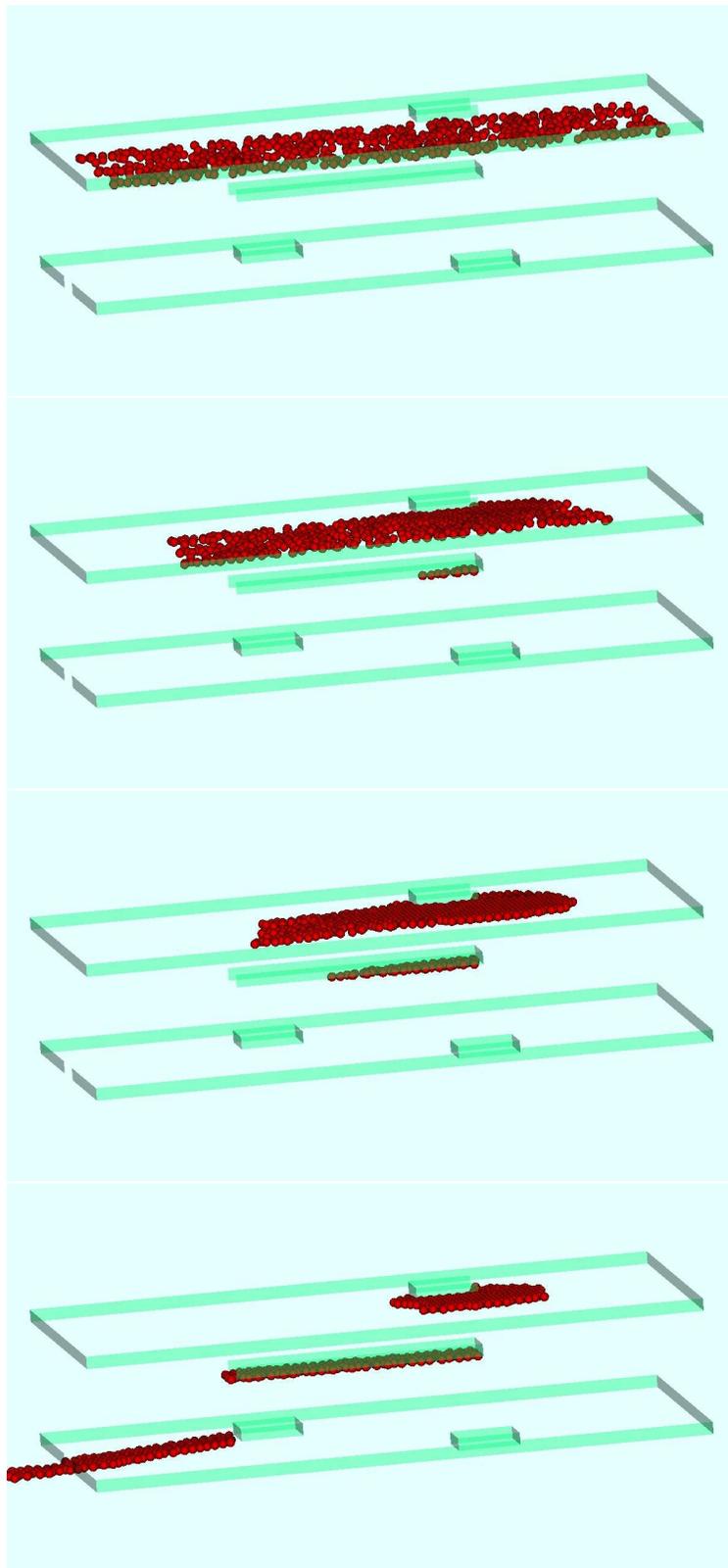


FIG. 6.7 – Évacuation de 600 personnes hors d'un bâtiment.

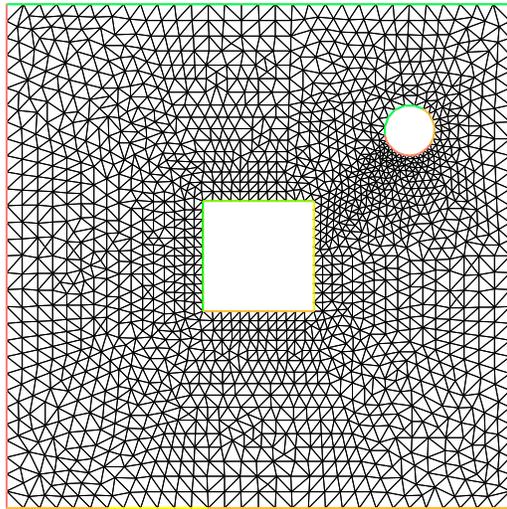
6.3 Vitesse souhaitée en tant que solution d'une e.d.p.

Nous présentons ici une autre idée pour définir un champ de vitesse souhaitée prenant en compte les obstacles. Ce choix a été testé avant celui de la section précédente et bien qu'il donne des résultats raisonnables, il reste moins justifié en termes de modélisation que le flot géodésique et n'a pas été plus développé. Nous l'illustrons simplement par l'évacuation d'une salle contenant deux obstacles rond et carré.

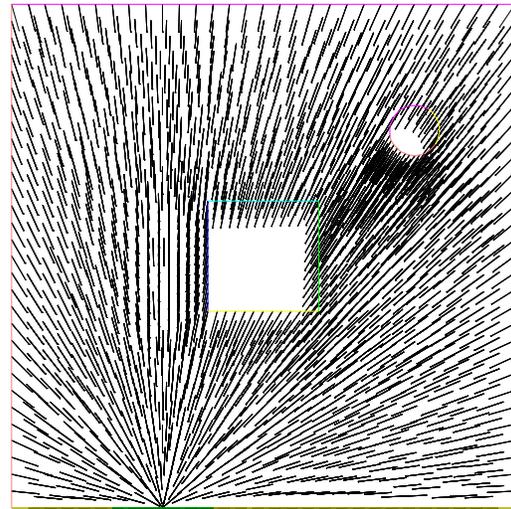
Nous avons d'abord considéré le champ de vitesse F de norme 1 visant la sortie et soumis à aucune contrainte (cf. fig 6.8(b)). Ensuite, à l'aide de FreeFem++, nous avons calculé le champ F^{obs} comme projection de F sur un espace contraint prenant en compte les obstacles. Plus précisément, F^{obs} vérifie

$$F^{obs} - F = \alpha \Delta(F^{obs} - F), \quad \alpha > 0,$$

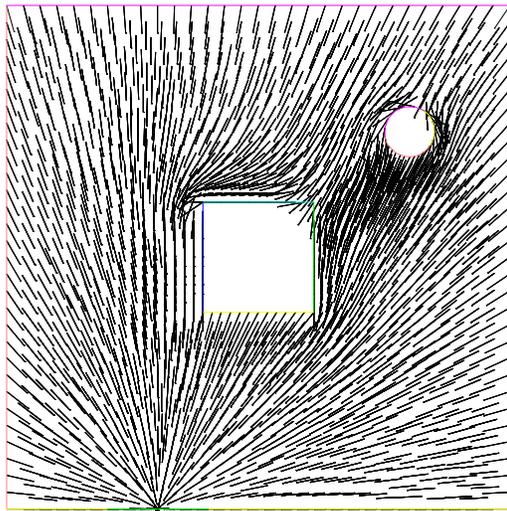
avec des conditions de Dirichlet aux bords des obstacles. Après renormalisation, nous obtenons le champ W représenté sur la figure 6.8(c), interpolé par le champ V sur un maillage cartésien (cf. fig 6.8(d)). Ensuite, nous récupérons les données du maillage cartésien et le champ V pour intégrer ce choix de vitesse dans le logiciel SCoPI (de la même manière que pour le choix de la section 6.2). À chaque instant, la vitesse souhaitée de toute personne est calculée en fonction de sa position comme une interpolation du champ V . Sur la figure 6.9, nous avons représenté les configurations obtenues à différents instants lors de l'évacuation de 700 personnes.



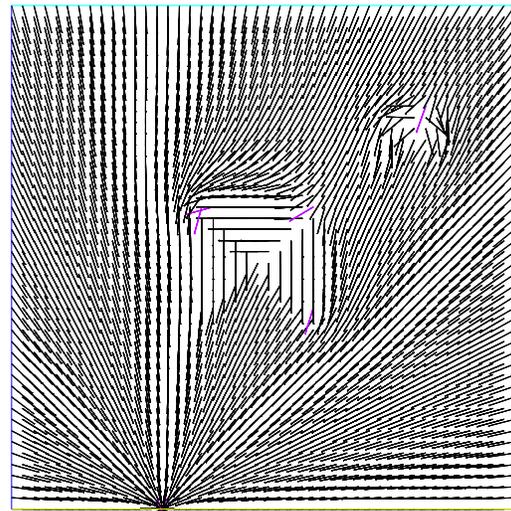
(a) Maillage.



(b) Représentation du champ F.



(c) Représentation du champ W.



(d) Représentation du champ V.

FIG. 6.8 – Étapes de calcul de la vitesse souhaitée à l'aide de FreeFem++.

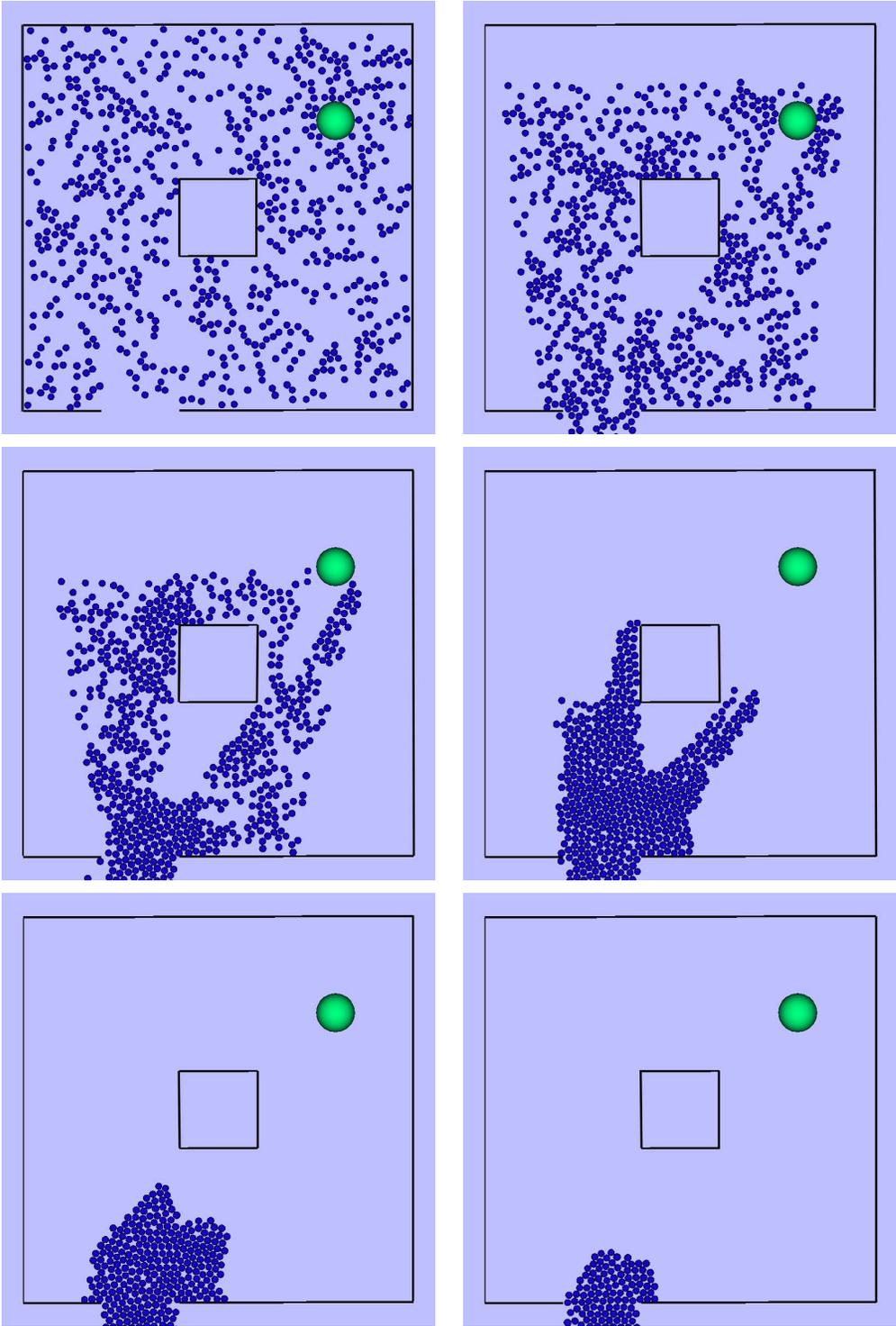


FIG. 6.9 – Évacuation de 700 personnes.

6.4 Ajout de stratégies individuelles

6.4.1 Modélisation

Nous supposons maintenant que les personnes peuvent élaborer des stratégies complexes dans des zones fortement encombrées. Nous avons choisi de modéliser deux cas de figures lorsqu'un individu se retrouve face à un embouteillage : soit il décélère pour ne pas aggraver la situation, soit il développe une stratégie d'évitement pour traverser ou contourner la foule. La vitesse de cet individu dépend alors de la position des personnes qu'il voit devant lui. Plus précisément, nous définissons l'ensemble N_i (cf. fig. 6.10) contenant les personnes proches de l'individu i et se trouvant dans son champ de vision :

$$N_i = \{ j, |q_i - q_j| < r_i + r_j + \ell_{prox}, d_i \cdot e_{ij} \geq \cos \alpha \}.$$

Nous rappelons que le vecteur $e_{ij} = e_{ij}(\mathbf{q})$ est le vecteur unitaire qui relie q_i à q_j . L'angle α est le demi-angle de visibilité (estimé à 60°) et ℓ_{prox} est la distance en deçà de laquelle les personnes sont considérées à proximité de l'individu i . Enfin, d_i est la direction souhaitée par l'individu i , par exemple d_i peut être pris égal à $U_0(q_i)$ renormalisé où U_0 est la vitesse souhaitée dirigée par le plus court chemin (cf. définition dans la section 5.2). On peut aussi prendre un champ de vitesse souhaitée « construit à la main », ce qui a été appliqué dans les exemples de la sous-section 6.4.2. Détaillons maintenant les deux possibilités laissées

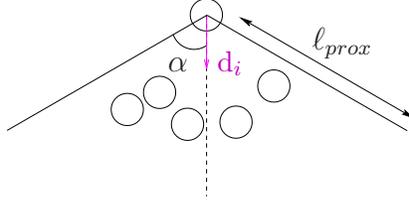


FIG. 6.10 – Illustration de l'ensemble N_i .

à l'individu i lorsque ses voisins (appartenant à N_i) se déplacent plus lentement que lui.

1. Il peut décélérer au lieu de traverser la foule (même s'il dispose de suffisamment de place). Dans ce cas, il ne modifie pas sa direction souhaitée d_i mais uniquement son allure (i.e. la norme de son vecteur vitesse). Son allure s_i^n à l'instant t^n dépend du comportement de ses voisins à l'instant t^{n-1} . Plus précisément, cette dernière est calculée comme un barycentre des vitesses de ces voisins, pondérées par leurs positions relatives :

$$s_i^n = \frac{\sum_{j \in N_i} w_j s_j^{n-1}}{\sum_{j \in N_i} w_j}$$

avec $w_j = w_j^\theta w_j^d$, $w_j^\theta = \frac{d_i \cdot e_{ij} - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ et $w_j^d = \frac{\ell_{prox} - |q_j - q_i|}{\ell_{prox} - r_i - r_j}$.

Le poids w_j^θ est fonction de l'angle orienté $(\widehat{d_i, e_{ij}})$ et est maximal quand celui-ci est petit. Quant au poids w_j^d , il permet de prendre en compte la distance entre les individus i et j .

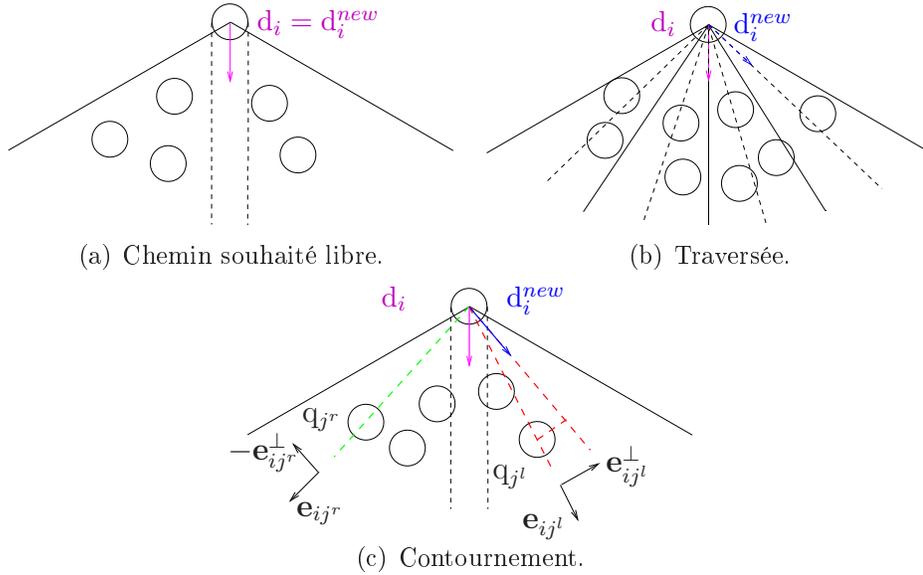


FIG. 6.11 – Possibilités pour un individu pressé.

2. Il peut aussi être pressé et décider de ne pas ralentir. Dans ce cas, il conserve son allure souhaitée et modifie sa direction (si besoin est) afin d'emprunter un chemin peu encombré. Précisons ce point. Si le chemin dans la direction de d_i est libre, l'individu i l'emprunte (cf. fig. 6.11(a)). Sinon, le champ de vision de l'individu est découpé en secteurs angulaires et le secteur le plus proche de la direction souhaitée d_i initiale et contenant le moins de voisins est déterminé. Si ce secteur contient au plus 3 personnes, l'individu i part dans la direction d_i^{new} donnée par la bissectrice du secteur angulaire choisi (cf. fig. 6.11(b)). Sinon, il choisit de contourner le groupe N_i . Là encore, il prend la direction possible d_i^{new} la plus proche de sa direction d_i voulue au départ :

$$d_i^{new} = \frac{(|q_{j_0} - q_i| + r_i + r_j)\mathbf{e}_{ij_0} \pm (r_i + r_j)\mathbf{e}_{ij_0}^\perp}{|(|q_{j_0} - q_i| + r_i + r_j)\mathbf{e}_{ij_0} \pm (r_i + r_j)\mathbf{e}_{ij_0}^\perp|} \quad \text{avec} \quad j_0 = \operatorname{argmax}(d_i \cdot \mathbf{e}_{ij^l}, d_i \cdot \mathbf{e}_{ij^r}),$$

où j^r (j^l) est le voisin le plus à droite (à gauche) de l'individu i (cf. fig. 6.11(c)).

6.4.2 Résultats numériques associés

Dans cette section, nous proposons d'illustrer les différents choix présentés précédemment pour la vitesse souhaitée. Pour rendre compte de la stratégie d'évitement (cf. section 6.4 cas 2), nous avons réalisé un test avec une personne qui souhaite quitter une pièce où 1000 individus sont immobiles. Sur la figure 6.12, nous avons tracé ses trajectoires dans deux cas (avec et sans stratégie). Nous observons qu'avec stratégie, l'individu sort plus rapidement même s'il a emprunté un chemin plus long. En effet, dans le cas contraire, l'individu doit pousser les personnes qui le gênent, ce qui le ralentit fortement.

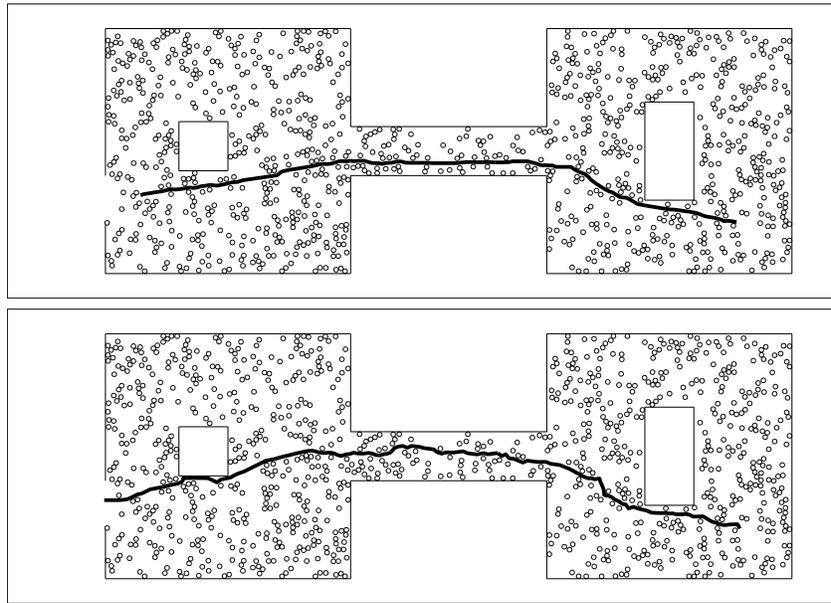


FIG. 6.12 – Comparaison des trajectoires sans (haut) ou avec (bas) la stratégie d'évitement.

Nous souhaitons maintenant illustrer la tendance à décélérer (cf. section 6.4 cas 1). Pour ce faire, nous considérons 100 personnes initialement bloquées qui veulent aller à gauche à l'instant $t = 0$. Sur la figure 6.13, nous traçons la configuration à différents instants et observons une onde de détente : les individus commencent à se déplacer l'un après l'autre.

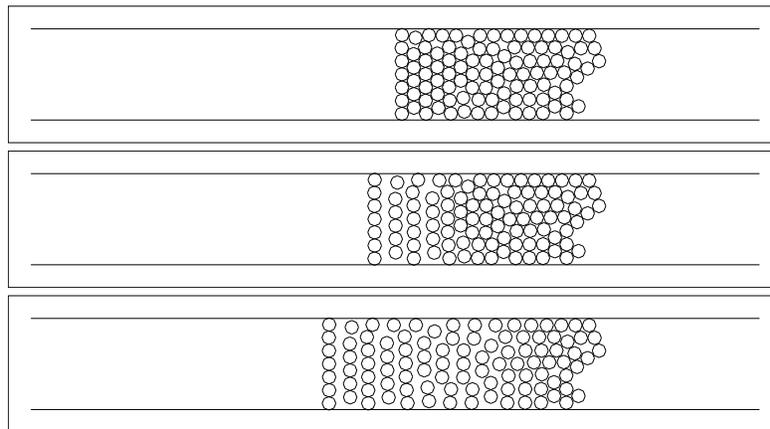


FIG. 6.13 – Onde de détente.

Nous avons également considéré l'évacuation de trois populations distinctes par leur comportement et représenté sur la figure 6.14 la configuration à différents instants. Les disques bleus représentent une centaine de personnes développant une stratégie d'évitement, les disques magentas concernent environ 200 personnes préférant décélérer, quant aux 300 disques rouges, ils traitent des individus n'ayant aucune stratégie. Ils ont tous la même direction souhaitée (cf. fig. 6.2 p. 122), mais les deux premières catégories d'individus veulent aller 3 fois plus vite que la dernière. Le paramètre ℓ_{prox} a été fixé à 5 diamètres. On peut remarquer la nette tendance des bleus (causée par leur stratégie), à se déplacer aux bords du flux piétonnier. Par ailleurs, en examinant les configurations aux instants $t = 55$ et $t = 110$, on observe que cette stratégie permet à la plupart des bleus de s'échapper du couloir plus rapidement que les magentas.

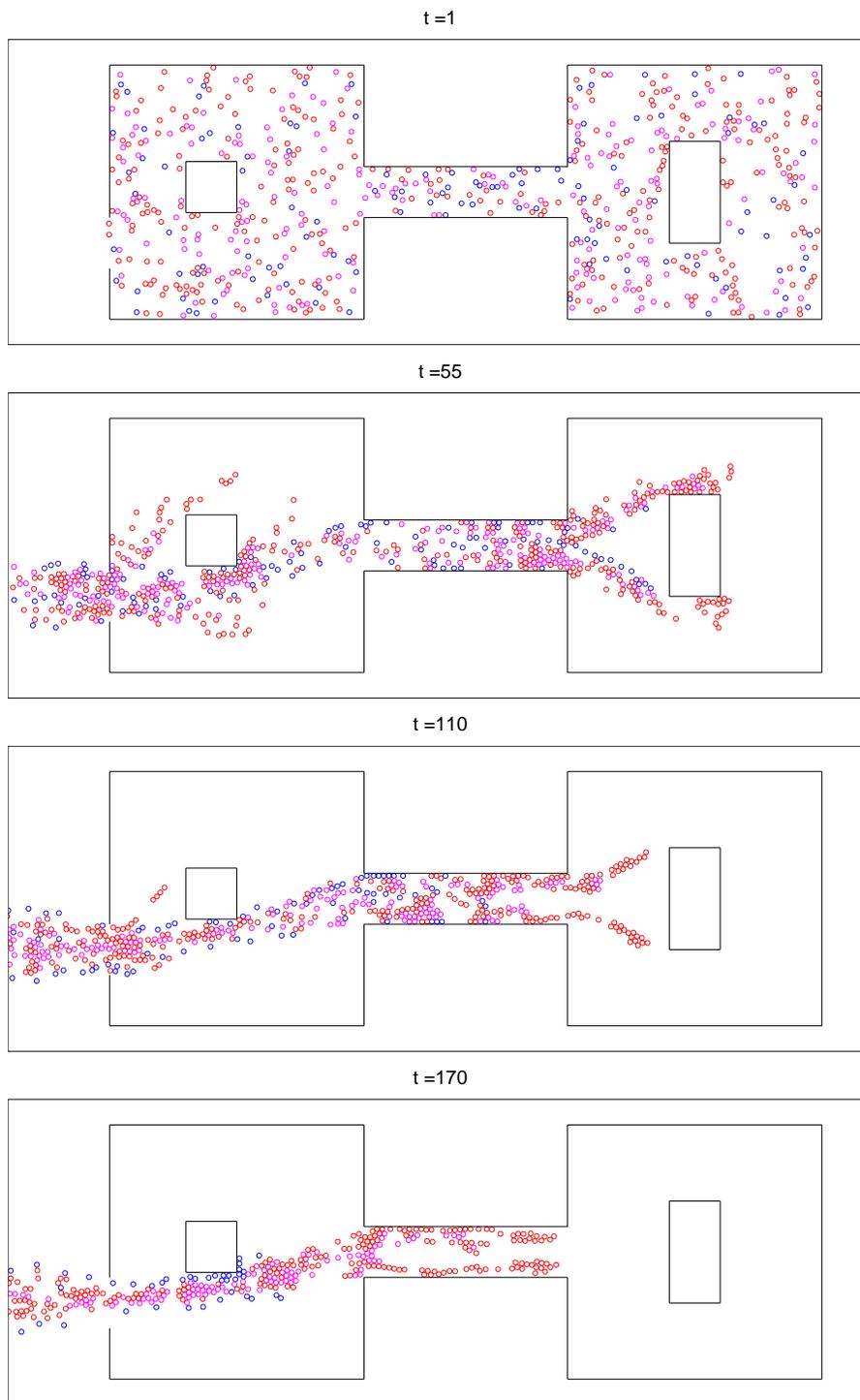


FIG. 6.14 – Évacuation avec différentes stratégies.

Annexes

Annexe A

Quelques résultats d'analyse convexe

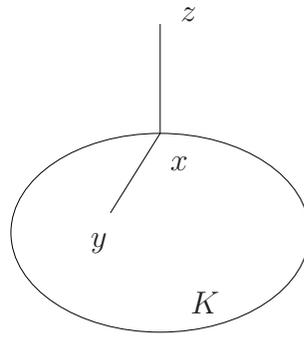


FIG. A.1 – Projection sur un convexe fermé.

Soit H un espace de Hilbert. Le produit scalaire entre les vecteurs x et y de H est noté (x, y) et la norme du vecteur x est notée $|x|$. On considère dans la suite K un ensemble convexe fermé non vide de H .

Théorème A.1 (Projection sur un convexe fermé) *Pour tout $z \in H$, il existe un unique $x \in K$ tel que*

$$|z - x| = \min_{y \in K} |z - y| = d_K(z).$$

Le vecteur x est appelé projeté de z sur K et sera noté $P_K(z)$. De plus, le projeté x est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} x \in K, \\ (z - x, y - x) \leq 0 \quad \forall y \in K. \end{cases}$$

Définition A.2 *On appelle indicatrice de K la fonction définie par*

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K, \\ +\infty & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

Propriété A.1 *La fonction I_K est convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Définition A.3 *Soit $x \in H$, on appelle sous-différentiel de la fonction I_K au point x l'ensemble*

$$\partial I_K(x) = \{v \in H, I_K(x) + (v, h) \leq I_K(x + h), \forall h \in H\}.$$

La proposition suivante donne les différentes écritures du sous-différentiel de l'indicatrice de K en des points appartenant à la frontière de K .

Proposition A.4 *Pour $x \in \partial K$, on a les égalités suivantes*

$$\partial I_K(x) = (K - x)^\circ \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in H, \forall y \in K, (v, y - x) \leq 0\} \quad (a)$$

$$= \left(\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(K - x) \right)^\circ \quad (b)$$

$$= \{v \in H, x = P_K(x + v)\}. \quad (c)$$

Démonstration :

Comme $x \in \partial K \subset K$, on a par définition,

$$\partial I_K(x) = \{v \in H, (v, h) \leq I_K(x + h), \forall h \in H\}.$$

Si $x + h \notin K$, alors $I_K(x + h) = +\infty$ et l'inégalité précédente est satisfaite pour tout v dans H . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \partial I_K(x) &= \{v \in H, (v, h) \leq I_K(x + h), \forall h \in K - x\} \\ &= \{v \in H, (v, h) \leq 0, \forall h \in K - x\} \\ &= \{v \in H, (v, y - x) \leq 0, \forall y \in K\}. \end{aligned}$$

On a donc prouvé l'égalité (a) (cf. définition du cône polaire C.1 p. 150). On en déduit aisément l'égalité (b). L'égalité (c) provient de la caractérisation de la projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert (cf. théorème A.1). \square

Remarque A.5 *D'après la proposition précédente, l'ensemble $\partial I_K(x)$, pour $x \in \partial K$, est un cône convexe fermé de H .*

La proposition suivante précise le sous-différentiel de l'indicatrice de K en des points quelconques de H .

Proposition A.6 *On a pour $x \in H$*

$$\partial I_K(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin K \\ \{0\} & \text{si } x \in \overset{\circ}{K} \\ (K - x)^\circ & \text{si } x \in \partial K \end{cases}$$

Proposition A.7 *L'opérateur multivalué ∂I_K est maximal monotone.*

Pour ce résultat, on renvoie le lecteur vers [Bre73]. Précisons maintenant le lien entre le sous-différentiel de l'indicatrice de K et le cône proximal normal à K (cf. définition 2.16 p. 34).

Proposition A.8 Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide de H , l'égalité suivante est vraie,

$$\forall x \in K, \partial I_K(x) = N(K, x).$$

Démonstration :

On commence par montrer l'inclusion : $\partial I_K(x) \subset N(K, x)$.

Soit $v \in \partial I_K(x), v \neq 0$. Comme $x \in K$, on a par définition du sous-différentiel,

$$\forall h \in H, (v, h) \leq I_K(x + h). \quad (\text{A.1})$$

On veut montrer que

$$\exists \alpha > 0, x = P_K(x + \alpha v).$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\forall \alpha > 0, x \neq P_K(x + \alpha v).$$

Ceci implique

$$\forall \alpha > 0, d_K(x + \alpha v) < \alpha |v|.$$

Notons $k_\alpha = P_K(x + \alpha v)$, $k_\alpha \neq x$. On a alors $d_K(x + \alpha v) = |x + \alpha v - k_\alpha|$. Par conséquent,

$$|x + \alpha v - k_\alpha|^2 < \alpha^2 |v|^2,$$

ce qui équivalent à

$$|x - k_\alpha|^2 + 2\alpha(x - k_\alpha, v) + \alpha^2 |v|^2 < \alpha^2 |v|^2.$$

On en déduit donc que

$$|x - k_\alpha|^2 + 2\alpha(x - k_\alpha, v) < 0. \quad (\text{A.2})$$

Or d'après (A.1),

$$(v, k_\alpha - x) \leq I_K(x + k_\alpha - x) \leq I_K(k_\alpha) = 0.$$

Ceci ajouté à (A.2) donne l'inégalité suivante, $|x - k_\alpha|^2 < 0$, ce qui est absurde. Ainsi, on a montré le résultat suivant

$$\exists \alpha > 0, x \in P_K(x + \alpha v).$$

On en conclut que $v \in N(K, x)$.

Il reste à montrer l'autre inclusion : $N(K, x) \subset \partial I_K(x)$.

Soit $v \in N(K, x)$, $v \neq 0$, on a par définition,

$$\exists \alpha > 0, x \in P_K(x + \alpha v). \quad (\text{A.3})$$

D'après le théorème A.1, on sait que

$$\forall k \in K, (k - x, x + \alpha v - x) \leq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall k \in K, \alpha(k - x, v) \leq 0,$$

et implique

$$\forall k \in K, (k - x, v) \leq 0.$$

On en déduit d'après la proposition A.4 (a), que $v \in \partial I_K(x)$. □

Annexe B

Lemme de Farkas

Le lemme de Farkas est utilisé lors de la preuve de la proposition 2.6 p. 25. On rappelle sa démonstration issue de [All05] car le sous-lemme B.2 qu'elle utilise, est nécessaire pour prouver la proposition H.11 p. 185.

Dans la suite, on considère V un espace de Hilbert muni de son produit scalaire noté (\cdot, \cdot) .

Lemme B.1 (Lemme de Farkas) *Soient $a_1, a_2, \dots, a_M \in V$, on note les ensembles*

$$E = \{v \in V, \forall i \in \{1, \dots, M\}, (a_i, v) \leq 0\} \text{ et } \hat{E} = \left\{ v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_M \geq 0, v = - \sum_{i=1}^M \lambda_i a_i \right\}.$$

Alors pour tout $p \in V$, on a l'équivalence suivante

$$p \in \hat{E} \iff \forall w \in E, (p, w) \geq 0.$$

Démonstration :

L'implication directe est évidente. Prouvons l'implication réciproque. On va pour cela démontrer la contraposée :

$$p \notin \hat{E} \Rightarrow \exists w \in E, (p, w) < 0.$$

L'ensemble \hat{E} est clairement convexe et il vérifie aussi la propriété suivante.

Sous-lemme B.2 *L'ensemble \hat{E} est fermé.*

Comme \hat{E} est un convexe fermé non vide, on peut utiliser le théorème de Hahn-Banach géométrique (cf. [Bre99] par exemple), qui permet de séparer strictement un point $p \notin \hat{E}$ et \hat{E} . Ainsi, il existe $w \in V$, $w \neq 0$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall v \in \hat{E}, (p, w) < \alpha < (w, v).$$

Comme $0 \in \hat{E}$, on a nécessairement $\alpha < 0$. Par ailleurs,

$$\forall i \in \{1, \dots, M\}, \forall \lambda \geq 0, v = -\lambda a_i \in \hat{E},$$

d'où

$$\forall i \in \{1, \dots, M\}, \forall \lambda \geq 0, \alpha < -\lambda(w, a_i).$$

En faisant tendre λ vers $+\infty$, on observe que $(w, a_i) \leq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$. En conclusion, $w \in E$ et $(p, w) < 0$, ce qui prouve le résultat annoncé. \square

Il reste à démontrer le sous-lemme B.2.

Démonstration :

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence sur M . Pour $M = 1$, la propriété est évidente. On suppose qu'elle est vraie lorsque le nombre de vecteurs a_i est strictement inférieur à M .

cas 1 : les vecteurs $(a_i)_{i \in \{1..M\}}$ sont indépendants.

Soit $(v^n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(- \sum_{i=1}^M \lambda_i^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \hat{E} qui converge vers $v \in V$. Cette convergence implique la convergence "coordonnée par coordonnée" dans la base de l'espace engendré par les vecteurs $(a_i)_{i \in \{1,..,M\}}$. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_i.$$

Comme pour tout n et pour tout $i \in \{1..M\}$, $\lambda_i^n \geq 0$, on a bien à la limite $\lambda_i \geq 0$, pour tout i et $v = - \sum_{i=1}^M \lambda_i a_i \in \hat{E}$. On en conclut que \hat{E} est fermé.

cas 2 : les vecteurs $(a_i)_{i \in \{1..M\}}$ sont linéairement dépendants.

Il existe $(\mu_i)_{i \in \{1..M\}}$ tels que $\sum_{i=1}^M \mu_i a_i = 0$. On peut même supposer que l'un au moins des coefficients μ_i est strictement positif. Soit $v = - \sum_{i=1}^M \lambda_i a_i \in \hat{E}$, on peut aussi écrire $v = - \sum_{i=1}^M (\lambda_i + t \mu_i) a_i$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On définit maintenant $J = \{i, \mu_i > 0\}$ et $i_0 \in J$ par,

$$\frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} = \min_{i \in J} \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Alors en posant $t = - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} < 0$, on obtient

$$\forall i \in \{1, \dots, M\}, \lambda_i + t \mu_i \geq 0 \text{ et } \lambda_{i_0} + t \mu_{i_0} = 0.$$

Ainsi,

$$\hat{E} = \bigcup_{i_0=1}^M \left\{ v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_M \geq 0, v = - \sum_{i \neq i_0}^M \lambda_i a_i \right\}.$$

Par hypothèse de récurrence, chaque ensemble apparaissant dans le membre de droite est fermé. Par conséquent, \hat{E} est fermé, en tant qu'union finie d'ensembles fermés. \square

Annexe C

Cône polaire

Dans cette annexe, on rappelle quelques résultats classiques concernant les cônes polaires qu'on trouve dans [Mau04]. Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) , on considère dans toute la suite $C \subset H$ un cône convexe fermé non vide de sommet 0. On note P_C la projection sur C . On définit C° le cône polaire de C de la façon suivante,

Définition C.1 (*Cône Polaire*) $C^\circ = \{v \in H, \forall u \in C, (u, v) \leq 0\}$.

Proposition C.2 C° est un cône convexe fermé non vide de sommet 0 vérifiant

$$C \cap C^\circ = \{0\}.$$

La proposition suivante démontrée dans [Mor62] est fondamentale, elle est, par exemple, utilisée lors de la preuve de la proposition 3.9 p. 48.

Proposition C.3 Soit $C \subset H$ un cône convexe fermé non vide de sommet 0, alors $P_C + P_{C^\circ} = I$. De plus, si $f = u + \tilde{u}$ où $u = P_C(f)$ et $\tilde{u} = P_{C^\circ}(f)$ alors $(u, \tilde{u}) = 0$.

Démonstration :

Soit $f \in H$, on note $u = P_C f$, le projeté de f sur C qui est caractérisé par,

$$\begin{cases} u \in C, \\ \forall v \in C, (f - u, v - u) \leq 0. \end{cases}$$

étape 1 : $f - u \in C^\circ$

Soit $w \in C$, on pose $v = \frac{1}{2}(2w + 2u) = w + u \in C$ car C est un cône convexe. On a donc

$$(f - u, w) = (f - u, v - u) \leq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $w \in C$, on a bien que $f - u \in C^\circ$.

étape 2 : $(u, f - u) = 0$

Comme $u \in C$ et $f - u \in C^\circ$, on a $(u, f - u) \leq 0$. Par ailleurs,

$$\forall v \in C, (f - u, v - u) \leq 0.$$

En particulier pour $v = \frac{1}{2}u$, on obtient que $-\frac{1}{2}(u, f - u) \leq 0$. Finalement, $(u, f - u) = 0$.

étape 3 : $f - u = P_{C^\circ} f$

On veut montrer que

$$\forall w \in C^\circ, (f - (f - u), w - (f - u)) \leq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall w \in C^\circ, (u, w) - (u, f - u) \leq 0,$$

et donc à

$$\forall w \in C^\circ, (u, w) \leq 0.$$

Ceci est vrai par définition de C° . □

Grâce à la proposition suivante, on peut démontrer la proposition 2.6 p. 25.

Proposition C.4 Soit $C \subset H$ un cône convexe fermé non vide de sommet 0 et soit C° le cône polaire de C° , alors $C^{\circ\circ} = C$.

Démonstration :

$C^{\circ\circ} = \{v \in H, \forall u \in C^\circ, (u, v) \leq 0\}$, d'où $C^{\circ\circ} \supset C$. L'autre inclusion s'appuie sur le lemme suivant où I_C est l'indicatrice de C (cf. définition A.2 p. 142) et I_C^* la fonction conjuguée de I_C définie par,

$$I_C^*(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{y \in H} [(x, y) - I_C(y)] = \sup_{y \in C} (x, y).$$

Lemme C.5 Soit $C \subset H$ un cône convexe fermé non vide de sommet 0, alors $I_C^* = I_{C^\circ}$.

D'après la proposition C.2, on peut appliquer ce lemme à C° et obtenir que

$$I_{C^{\circ\circ}}(x) = I_{C^\circ}^*(x) = \sup_{y \in C^\circ} (x, y).$$

Si $x \in C$ alors $I_{C^{\circ\circ}}(x) = 0$ car $\forall y \in C^\circ$, on a $(x, y) \leq 0$.

Si $x \notin C$ alors d'après la proposition C.3, on peut écrire x sous la forme,

$$x = x_C + z \text{ où } x_C \in C \text{ et } z \in C^\circ, z \neq 0.$$

De plus, toujours d'après la proposition C.3, $(x, z) = (x_C, z) + (z, z) = |z|^2$. Or,

$$\forall \lambda > 0, \lambda z \in C^\circ \quad (x, \lambda z) = \lambda |z|^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} +\infty,$$

donc $I_{C^{\circ\circ}}(x) = +\infty$.

Ainsi on a montré que $\forall x \in H, I_{C^{\circ\circ}}(x) = I_C(x)$, d'où $C^{\circ\circ} = C$. □

Il reste à démontrer le lemme C.5.

Démonstration :

$$I_C^*(x) = \sup_{y \in H} [(y, x) - I_C(y)] = \sup_{y \in C} (x, y).$$

Si $x \in C^\circ$, alors pour tout $y \in C$, $(x, y) \leq 0$. Par conséquent, $I_C^*(x) = 0$.

Si $x \notin C^\circ$, alors il existe $y_0 \in C$ vérifiant $(x, y_0) > 0$. Ainsi, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda y_0 \in C$ et

$$(x, \lambda y_0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par conséquent, $I_C^*(x) = +\infty$.

En conclusion, $\forall x \in H, I_C^*(x) = I_{C^\circ}(x)$. □

Annexe D

Opérateurs maximaux monotones

Dans cette annexe, on présente deux résultats sur les opérateurs maximaux monotones issus de [Bre73] qui permettent de justifier les conclusions de la section 2.2. Dans la suite, on se place dans un espace de Hilbert H muni d'un produit scalaire noté (\cdot, \cdot) . On note I l'identité sur H et on considère A un opérateur multivalué de H .

Définition D.1 (Domaine d'un opérateur) On appelle domaine de l'opérateur A l'ensemble

$$D(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{x} \in H, A\mathbf{x} \neq \emptyset\}.$$

Définition D.2 (Opérateur monotone) L'opérateur A est monotone si

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D(A), \forall \mathbf{y}_1 \in A\mathbf{x}_1, \forall \mathbf{y}_2 \in A\mathbf{x}_2, (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \geq 0.$$

Proposition D.3 (Opérateur maximal monotone) L'opérateur A est maximal monotone si et seulement si A est monotone et $\text{Im}(I + A) = H$.

Théorème D.4 Soit A un opérateur maximal monotone dont le domaine $D(A)$ est d'intérieur non vide, on considère une application $B : [0, T] \times \overline{D(A)} \longrightarrow H$ vérifiant

- 1) $\exists k \geq 0, \forall t \in [0, T], \forall x_1, x_2 \in \overline{D(A)}, |B(t, x_1) - B(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|,$
- 2) $\forall x \in \overline{D(A)},$ l'application $t \longmapsto B(t, x) \in L^\infty([0, T], H).$

Alors, pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une unique fonction $u \in W^{1,1}([0, T], H)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) + B(t, u(t)) \ni 0 \text{ p.p.} \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Pour la démonstration du théorème précédent, on renvoie le lecteur à la preuve de la proposition 3.13 p.107 de [Bre73]. Le théorème suivant ne figure pas en ces termes dans [Bre73], mais il est une conséquence directe de la proposition 3.4 et de la remarque 3.7 p.69 ainsi que du théorème 3.5 (iii) p.66.

Théorème D.5 Soit K un convexe fermé non vide de H , on considère l'opérateur maximal monotone $A = \partial I_K$. Pour toute fonction $f \in C^0([0, T], H)$ et pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une unique fonction $u \in W^{1,\infty}([0, T], H)$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) \text{ p.p.} \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus, u est dérivable à droite en tout point t de $]0, T[$ et cette dérivée vaut

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = f(t) - P_{Au(t)}(f(t)).$$

Annexe E

Étude du gradient de la fonction D_{12}

On reprend les notations de la section 3.1.1,

$$Q_{12} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{12}(\mathbf{q}) = |q_2 - q_1| - (r_1 + r_2) \geq 0\}.$$

On note $\tilde{\mathbf{G}}_{12}$ le gradient normalisé de D_{12} :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_{12} : Q_{12} &\rightarrow \mathbb{S}^{2N-1} \\ \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) &\mapsto \tilde{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{G}_{12}}{\sqrt{2}} = \frac{(-\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q}), \mathbf{e}_{12}(\mathbf{q}), 0, \dots, 0)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q}) = \frac{q_2 - q_1}{|q_2 - q_1|} \in \mathbb{R}^2$. Dans la suite, on notera juste \mathbf{e}_{12} sans préciser la dépendance en \mathbf{q} .

Propriété E.1 *L'application $\tilde{\mathbf{G}}_{12}$ est différentiable en tout point de Q_{12} et sa différentielle au point \mathbf{q} vérifie*

$$D\tilde{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{q}) : \mathbf{h} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}|q_2 - q_1|} (-P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1), P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1), 0, \dots, 0),$$

où $P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}$ est la projection sur \mathbf{e}_{12}^\perp , vecteur unitaire de \mathbb{R}^2 , orthogonal (direct) à \mathbf{e}_{12} . Autrement dit,

$$P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}(v) = v - (v \cdot \mathbf{e}_{12})\mathbf{e}_{12}.$$

Démonstration :

On définit la fonction f comme suit : $f(\mathbf{q}) = |q_2 - q_1|$. On a,

$$Df(\mathbf{q})[\mathbf{h}] = \mathbf{G}_{12}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}(\mathbf{q}).$$

On définit la fonction g comme suit : $g(\mathbf{q}) = q_2 - q_1$. Comme $\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q}) = \frac{g(\mathbf{q})}{f(\mathbf{q})}$, on obtient,

$$\begin{aligned} D\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q})[\mathbf{h}] &= \frac{-Df(\mathbf{q})[\mathbf{h}] g(\mathbf{q}) + f(\mathbf{q}) Dg(\mathbf{q})[\mathbf{h}]}{f(\mathbf{q})^2} \\ &= \frac{-[(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}]\mathbf{e}_{12} + \mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1}{|q_2 - q_1|}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} D\tilde{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{q})[\mathbf{h}] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{[(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}]\mathbf{e}_{12} - (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1)}{|q_2 - q_1|}, \frac{-[(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}]\mathbf{e}_{12} + (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1)}{|q_2 - q_1|}, 0, \dots, 0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}|q_2 - q_1|} (-P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1), P_{\mathbf{e}_{12}^\perp}(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1), 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

□

On peut alors retrouver la constante de prox-régularité de Q_{12} (proposition 3.6 p. 45) en calculant la constante de Lipschitz de $\tilde{\mathbf{G}}_{12}$.

Propriété E.2 *L'application $\tilde{\mathbf{G}}_{12}$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz,*

$$C_{\tilde{\mathbf{G}}_{12}} \leq \frac{\sqrt{2}}{r_1 + r_2}.$$

Démonstration :

D'après la proposition E.1, on a,

$$|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{q})[\mathbf{h}]|^2 \leq \frac{1}{2|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|^2} 2|\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1|^2,$$

et en conséquence,

$$|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{q})[\mathbf{h}]| \leq \frac{|\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1|}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|}.$$

Or, on a $|\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1|^2 = (h_2^x - h_1^x)^2 + (h_2^y - h_1^y)^2 \leq 2((h_2^x)^2 + (h_2^y)^2 + (h_1^x)^2 + (h_1^y)^2) = 2|\mathbf{h}|^2$.
D'où,

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}\tilde{\mathbf{G}}_{12}(\mathbf{q})[\mathbf{h}]| &\leq \sqrt{2} \frac{|\mathbf{h}|}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{r_1 + r_2} |\mathbf{h}|. \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat annoncé. □

Remarque E.1 *On peut aussi calculer*

$$\mathbf{D}^2 f(\mathbf{q})[\mathbf{h}, \mathbf{k}] = \frac{1}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|} [(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) - [(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}][(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}]].$$

la fonction D_{12} est convexe et on retrouve bien le fait que la hessienne

$$\mathbf{D}^2 D_{12}(\mathbf{q})[\cdot, \cdot] = \mathbf{D}^2 f(\mathbf{q})[\cdot, \cdot]$$

est positive (mais pas définie).

Annexe F

Autre preuve de la prox-régularité de Q_{12}

Voici une autre façon de démontrer les propositions 3.3 et 3.6 p. 45, sans utiliser des notions de géométrie différentielle. On rappelle la définition de Q_{12} et l'énoncé de la première proposition.

$$Q_{12} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{12}(\mathbf{q}) = |q_2 - q_1| - (r_1 + r_2) \geq 0\}.$$

Proposition 3.3 Soit $\mathbf{q} \in \partial Q_{12}$, on a $N(Q_{12}, \mathbf{q}) = -\mathbb{R}^+ \mathbf{G}_{12}(\mathbf{q})$.

Démonstration :

$\mathbf{q} \in \partial Q_{12}$ si et seulement si les disques de centres q_1 et q_2 se rencontrent en un point. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que $q_1 = (0, 0)$. De plus, quitte à effectuer une rotation de centre q_1 , on peut considérer que $\mathbf{q} = (0, 0, r_1 + r_2, 0, q_3, \dots, q_{2N})$. (La fonction D_{12} est évidemment invariante par ces transformations). On définit les vecteurs suivants, $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0, 0, \dots, 0)$ et $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, -1, 0, \dots, 0)$ et $\mathbf{w}_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, pour $j \in \{5, \dots, 2N\}$, (le 1 se trouvant à la $j^{\text{ième}}$ position). Tout vecteur de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$ s'écrit

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=5}^{2N} \beta_j \mathbf{w}_j,$$

où les coefficients α_i et β_j sont des réels. En effet, on retrouve les 4 premiers vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^{2N} avec les vecteurs \mathbf{v}_i ,

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) \\ (0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) \\ (0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) \\ (0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4). \end{aligned}$$

Etape 1 : On va d'abord montrer que

$$N(Q_{12}, \mathbf{q}) \subset \mathbb{R}^+ \mathbf{v}_3.$$

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$ de norme 1, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_5, \dots, \beta_{2N}) \in \mathbb{R}^{2N}$, vérifiant

$$2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) + \beta_5^2 + \dots + \beta_{2N}^2 = 1, \quad (\text{F.1})$$

et tels que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 + \sum_{j=5}^{2N} \beta_j \mathbf{w}_j.$$

On cherche à savoir, sous quelles conditions, le vecteur $\mathbf{v} \in N(Q_{12}, \mathbf{q})$, plus précisément, sous quelles conditions, il existe $t > 0$ tel que $\mathbf{q} \in P_{Q_{12}}(\mathbf{q} + t\mathbf{v})$.

On considère $t > 0$, alors

$$\mathbf{q} + t\mathbf{v} = (t\alpha_1 + t\alpha_3, t\alpha_2 + t\alpha_4, r_1 + r_2 + t\alpha_1 - t\alpha_3, t\alpha_2 - t\alpha_4, q_3^x + t\beta_5, q_3^y + t\beta_6, \dots, q_{2N}^y + t\beta_{2N}).$$

Soit maintenant,

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + t\mathbf{v} - t\alpha_3\mathbf{v}_3 = (t\alpha_1, t\alpha_2 + t\alpha_4, r_1 + r_2 + t\alpha_1, t\alpha_2 - t\alpha_4, q_3^x + t\beta_5, q_3^y + t\beta_6, \dots, q_{2N}^y + t\beta_{2N}),$$

calculons :

$$\begin{aligned} D_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) &= |(r_1 + r_2 + t\alpha_1, t\alpha_2 - t\alpha_4) - (t\alpha_1, t\alpha_2 + t\alpha_4)| - (r_1 + r_2) \\ &= |(r_1 + r_2, -2t\alpha_4)| - (r_1 + r_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\tilde{\mathbf{q}} \in Q_{12}$ et

$$d_{Q_{12}}(\mathbf{q} + t\mathbf{v}) \leq |\mathbf{q} + t\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{q}}| \leq |t\alpha_3\mathbf{v}_3| = t\sqrt{2}|\alpha_3|.$$

Comme $|\mathbf{q} + t\mathbf{v} - \mathbf{q}| = |t\mathbf{v}| = t$, on en déduit que $\mathbf{q} \notin P_{Q_{12}}(\mathbf{q} + t\mathbf{v})$ si $\sqrt{2}|\alpha_3| < 1$, c'est-à-dire, d'après (F.1), s'il existe α_i , $i \in \{1, 2, 4\}$ ou β_j , $j \in \{5, \dots, 2N\}$ non nul. Finalement, une condition nécessaire pour que $\mathbf{q} \in P_{Q_{12}}(\mathbf{q} + t\mathbf{v})$ est que \mathbf{v} s'écrive

$$\mathbf{v} = \alpha_3\mathbf{v}_3.$$

Soit maintenant $\mathbf{v} = \alpha_3\mathbf{v}_3$ avec $\alpha_3 = \pm 1$ (désormais $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$), on a $\mathbf{q} + t\mathbf{v} = (t\alpha_3, 0, r_1 + r_2 - t\alpha_3, 0)$ et

$$D_{12}(\mathbf{q} + t\mathbf{v}) = |r_1 + r_2 - 2t\alpha_3| - (r_1 + r_2).$$

Ainsi, $D_{12}(\mathbf{q} + t\mathbf{v}) > 0$ si $\alpha_3 < 0$. En conséquence, $\mathbf{q} + t\mathbf{v} \in Q_{12}$ (d'où $\mathbf{q} \notin P_{Q_{12}}(\mathbf{q} + t\mathbf{v})$) si $\alpha_3 = -1$. On ajuste donc l'écriture de \mathbf{v} ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_3.$$

Etape 2 : Prouvons maintenant que

$$\mathbb{R}^+\mathbf{v}_3 \subset N(Q_{12}, \mathbf{q}).$$

Soit $t \leq \frac{r_1 + r_2}{2}$, montrons que $d_{Q_{12}}(\mathbf{q} + t\mathbf{v}_3) = t\sqrt{2}$, c'est-à-dire que

$$B(\mathbf{q} + t\mathbf{v}_3, t\sqrt{2}) \cap Q_{12} = \emptyset.$$

Soit $\tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q} + t\mathbf{v}_3, t\sqrt{2})$, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_5, \dots, \beta_{2N}) \in \mathbb{R}^{2N}$, vérifiant

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \frac{1}{2}(\beta_5^2 + \dots + \beta_{2N}^2) < 1$$

et tels que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} + t\mathbf{v}_3 + t\alpha_1\mathbf{v}_1 + t\alpha_2\mathbf{v}_2 + t\alpha_3\mathbf{v}_3 + t\alpha_4\mathbf{v}_4 + t\beta_5\mathbf{w}_5 + \dots + \beta_{2N}\mathbf{w}_{2N} \\ &= (t\alpha_1 + t\alpha_3 + t, t\alpha_2 + t\alpha_4, r_1 + r_2 + t\alpha_1 - t\alpha_3 - t, t\alpha_2 - t\alpha_4, q_3^x + t\beta_5, \dots, q_{2N}^y + t\beta_{2N}). \end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned} D_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) &= |(r_1 + r_2 + t\alpha_1 - t\alpha_3 - t, t\alpha_2 - t\alpha_4) - (t\alpha_1 + t\alpha_3 + t, t\alpha_2 + t\alpha_4)| - (r_1 + r_2) \\ &= |(r_1 + r_2 - 2t\alpha_3 - 2t, -2t\alpha_4)| - (r_1 + r_2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} D_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) < 0 &\Leftrightarrow |(r_1 + r_2 - 2t\alpha_3 - 2t, -2t\alpha_4)|^2 < (r_1 + r_2)^2 \\ &\Leftrightarrow (2t(\alpha_3 + 1))^2 - 4t(\alpha_3 + 1)(r_1 + r_2) + (2t\alpha_4)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (t(\alpha_3 + 1))^2 - t(\alpha_3 + 1)(r_1 + r_2) + (t\alpha_4)^2 < 0. \end{aligned}$$

On étudie donc le trinôme du second degré

$$P(X) = X^2 - (r_1 + r_2)X + (t\alpha_4)^2.$$

Son discriminant $\Delta = 4\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - 4(t\alpha_4)^2 > 0$ car $(t\alpha_4)^2 < t^2 \leq \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2$.

Il y a donc 2 racines réelles positives,

$$s_+ = \frac{r_1 + r_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - (t\alpha_4)^2} \quad \text{et} \quad s_- = \frac{r_1 + r_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - (t\alpha_4)^2}.$$

$P(X) < 0 \Leftrightarrow X \in]s_-, s_+[$. Il reste par conséquent à vérifier que $t(\alpha_3 + 1) \in]s_-, s_+[$. On a $\alpha_3^2 + \alpha_4^2 < 1$ donc,

$$-\sqrt{1 - \alpha_4^2} < \alpha_3 < \sqrt{1 - \alpha_4^2}.$$

D'où,

$$t - t\sqrt{1 - \alpha_4^2} < t(\alpha_3 + 1) < t + t\sqrt{1 - \alpha_4^2}.$$

Montrons d'abord que $t(\alpha_3 + 1) < s_+$:

Comme $t \leq \frac{r_1 + r_2}{2}$, alors $\left(\frac{r_1 + r_2}{2t}\right) \geq 1$ et $\left(\frac{r_1 + r_2}{2t}\right)^2 \geq 1$. D'où,

$$\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2t}\right)^2 - \alpha_4^2} \geq \sqrt{1 - \alpha_4^2}.$$

On en déduit que,

$$t + t\sqrt{1 - \alpha_4^2} \leq t + \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - (t\alpha_4)^2} \leq \frac{r_1 + r_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - (t\alpha_4)^2}.$$

Ainsi, $t(\alpha_3 + 1) < s_+$.

Il reste à montrer que $t(\alpha_3 + 1) > s_-$:

Pour cela, il suffit de remarquer que la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{x^2 - (t\alpha_4)^2}$ est décroissante sur $\{x > t|\alpha_4|\}$. Comme $t \leq \frac{r_1 + r_2}{2}$, on a $f\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \leq f(t)$. En conséquence,

$t(\alpha_3 + 1) > f(t) \geq s_-$.

En conclusion, $D_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) < 0$. On a démontré que pour tout $t \leq \frac{r_1 + r_2}{2}$,

$$B(\mathbf{q} + t\mathbf{v}_3, t\sqrt{2}) \cap Q_{12} = \emptyset, \quad (\text{F.2})$$

ce qui implique que $d_{Q_{12}}(\mathbf{q} + t\mathbf{v}_3) = t\sqrt{2}$ et $\mathbf{q} \in P_{Q_{12}}(\mathbf{q} + t\mathbf{v}_3)$. Or, comme

$$\mathbf{q} = (0, 0, r_1 + r_2, 0, q_3, \dots, q_{2N}),$$

le vecteur $\mathbf{e}_{12}(\mathbf{q})$ est égal à $(1, 0)$ et le vecteur \mathbf{v}_3 n'est autre que le vecteur $-\mathbf{G}_{12}(\mathbf{q})$, d'où le résultat. \square

Remarque F.1 Cette valeur limite de $t = \frac{r_1 + r_2}{2}$ est associée à la configuration limite où les 2 centres des particules sont confondus $q_1 = q_2$.

Dans la preuve précédente et grâce à la caractérisation des ensembles prox-réguliers (cf proposition 2.23 p. 36), on a aussi montré la proposition 3.6 p. 45 :

Proposition 3.6 L'ensemble Q_{12} est η -prox-régulier avec $\eta = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{2}}$.

Démonstration :

On a montré (voir (F.2)) que $B(\mathbf{q} + t\mathbf{v}_3, t\sqrt{2}) \cap Q_{12} = \emptyset$ dès que $t \leq \frac{r_1 + r_2}{2}$. Avec les notations de la proposition 2.23 p. 36, $\eta = t\sqrt{2} = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{2}}$. \square

Annexe G

Autre démonstration de l'inégalité triangulaire inverse

Dans cette annexe, se trouve une démonstration de l'existence d'une inégalité triangulaire inverse vérifiée par les vecteurs $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$, aboutissant à une autre constante que celle obtenue à la proposition 3.14 p. 52.

Proposition G.1 (Inégalité triangulaire inverse)

Il existe $\gamma > 1$ tel que pour tout $\mathbf{q} \in Q_0$,

$$\sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \gamma \left| \sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|,$$

où

$I_{\text{contact}} = \{(i, j), i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) = 0\}$ et les α_{ij} sont des réels positifs quelconques.

La constante γ peut être prise égale à

$$\gamma = \left(\frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2n_v}\right)^{2N}}}} \right)^{\frac{Nn_v}{4}}.$$

Justifions tout de suite qu'une inégalité inverse pour deux vecteurs peut être obtenue en minorant leur produit scalaire.

Lemme G.2 Soient u_1 et u_2 deux vecteurs de \mathbb{R}^{2N} vérifiant

$$u_1 \cdot u_2 = \cos \theta |u_1| |u_2|,$$

où $\cos \theta > -1$ alors l'inégalité suivante

$$|u_1| + |u_2| \leq \nu |u_1 + u_2|,$$

est vérifiée dès que

$$\nu \geq \nu_\theta = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \theta}}.$$

Démonstration :

Si $\cos \theta = 1$, $\nu_\theta = 1$ et $|u_1| + |u_2| = |u_1 + u_2|$. Le résultat est alors vrai. Si $\cos \theta < 1$, $\nu_\theta > 1$

et on considère $\nu \geq \nu_\theta$. On a

$$\begin{aligned}
& (|u_1| + |u_2|)^2 \leq \nu^2 |u_1 + u_2|^2 \\
\Leftrightarrow & |u_1|^2 + |u_2|^2 + 2|u_1||u_2| \leq \nu^2(|u_1|^2 + |u_2|^2 + 2u_1 \cdot u_2) \\
\Leftrightarrow & -2(\nu^2(u_1 \cdot u_2) - |u_1||u_2|) \leq (\nu^2 - 1)(|u_1|^2 + |u_2|^2) \\
\Leftrightarrow & -2|u_1||u_2|(\nu^2 \cos \theta - 1) \leq (\nu^2 - 1)(|u_1|^2 + |u_2|^2) \\
\Leftrightarrow & 2 \left(\frac{1 - \nu^2 \cos \theta}{\nu^2 - 1} \right) |u_1||u_2| \leq |u_1|^2 + |u_2|^2 \quad (\nu \geq \nu_\theta > 1).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\nu \geq \nu_\theta & \Leftrightarrow \nu^2 \geq \frac{2}{1 + \cos \theta} \quad (\nu \geq 0) \\
& \Leftrightarrow \nu^2(1 + \cos \theta) \geq 1 + 1 \\
& \Leftrightarrow \nu^2 - 1 \geq 1 - \nu^2 \cos \theta \\
& \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1 - \nu^2 \cos \theta}{\nu^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|u_1|^2 + |u_2|^2 \geq 2|u_1||u_2| \geq 2 \left(\frac{1 - \nu^2 \cos \theta}{\nu^2 - 1} \right) |u_1||u_2|.$$

□

Pour établir l'inégalité triangulaire inverse (avec un nombre quelconque de vecteurs), on propose une méthode basée sur une estimation des angles entre les vecteurs $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$ comme on l'avait déjà pressenti au début de la sous-section 3.2.2. La preuve sera faite par récurrence sur le nombre de vecteurs intervenant dans la somme. On veut montrer qu'il existe $\delta > 1$ (qui sera défini plus loin), tel que pour tout I sous-ensemble de $I_{contact}$ et pour tout $\alpha_{ij} > 0$,

$$\sum_{(i,j) \in I \subset I_{contact}} \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \delta^{\text{card}(I)} \left| \sum_{(i,j) \in I \subset I_{contact}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|.$$

Initialisation de la récurrence : On suppose que le cardinal de I vaut 1, autrement dit, $I = \{(i, j)\}$, alors on a bien pour tout $\alpha_{ij} > 0$ et tout $\delta > 1$,

$$\alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| = |\alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \delta |\alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})|.$$

Hypothèse de récurrence :

Si le cardinal de $I \subset I_{contact}$ est égal à p , alors on a

$$\sum_{(i,j) \in I \subset I_{contact}} \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \delta^p \left| \sum_{(i,j) \in I \subset I_{contact}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right| \quad (\text{H}_p)$$

pour tout $\alpha_{ij} > 0$.

On suppose maintenant que le cardinal de $I \subset I_{\text{contact}}$ est égal à $p + 1$. On considère

$$\mathbf{w} = \sum \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}),$$

où les α_{ij} sont des réels strictement positifs. Soit $(k, l) \in I$, on définit $J = I \setminus \{(k, l)\}$ ainsi que

$$\mathbf{w}_1 = \sum_{(i,j) \in J} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})$$

et

$$\mathbf{w}_2 = \alpha_{kl} \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{q}),$$

de telle sorte qu'on ait

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

On utilise alors le lemme suivant démontré plus loin.

Lemme G.3 *On a l'inégalité suivante,*

$$|\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| \leq \sqrt{\frac{2}{1 - \kappa}} |\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2|,$$

avec

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2n_v}\right)^{2N}}}.$$

Par conséquent, en posant

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{1 - \kappa}}$$

on obtient,

$$|\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| \leq \delta |\mathbf{w}|. \tag{G.1}$$

Or, comme $\delta > 1$, on peut initialiser la récurrence avec ce coefficient δ et par hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{(i,j) \in J} \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \delta^p |\mathbf{w}_1|.$$

Par conséquent,

$$\alpha_{kl} |\mathbf{G}_{kl}(\mathbf{q})| + \sum_{(i,j) \in J} \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \alpha_{kl} |\mathbf{G}_{kl}(\mathbf{q})| + \delta^p |\mathbf{w}_1| = \delta^p \left(\frac{1}{\delta^p} |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_1| \right).$$

Comme $\delta > 1$ et d'après (G.1), on a

$$\sum_{(i,j) \in I_{\text{contact}}} \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \delta^p (|\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_1|) \leq \delta^{p+1} |\mathbf{w}|.$$

La propriété (H_{p+1}) est donc vraie, ce qui prouve l'hérédité de cette propriété. Par conséquent, il existe $\delta > 1$, tel que

$$\sum_{(i,j) \in I_{contact}} \alpha_{ij} |\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q})| \leq \delta^{\text{card}(I_{contact})} \left| \sum_{(i,j) \in I_{contact}} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \right|,$$

pour tout $\alpha_{ij} \geq 0$. Comme le cardinal de $I_{contact}$ est inférieur à $\frac{Nn_v}{2}$ (on rappelle que n_v est le nombre maximal de voisins que peut avoir une personne), la proposition 3.14 est vérifiée en prenant

$$\boxed{\gamma = \delta^{\frac{Nn_v}{2}}}$$

constante qui est bien indépendante de \mathbf{q} . Ceci achève la démonstration de la proposition 3.14, sous réserve de prouver le lemme G.3. \square

Démonstration du lemme G.3 :

On cherche à prouver que

$$|\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| \leq \sqrt{\frac{2}{1-\kappa}} |\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2|, \text{ avec } \kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2n_v}\right)^{2N}}}.$$

Ce résultat repose sur le lemme G.2 qui établit une inégalité triangulaire inverse entre deux vecteurs, sous réserve d'une minoration de leur produit scalaire, qui est établie par le lemme suivant.

Lemme G.4 *L'inégalité suivante est vérifiée*

$$\frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_1| |\mathbf{w}_2|} \geq -\kappa, \text{ avec } \kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2n_v}\right)^{2N}}}.$$

Par conséquent, en utilisant les notations du lemme G.2, on a d'après le lemme G.4,

$$\frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_1| |\mathbf{w}_2|} = \cos \theta \geq -\kappa.$$

Aussi,

$$1 + \cos \theta \geq 1 - \kappa,$$

ce qui implique

$$\sqrt{\frac{2}{1-\kappa}} \geq \sqrt{\frac{2}{1+\cos \theta}}.$$

Le lemme G.3 est donc une conséquence immédiate du lemme G.2. \square

Il reste à prouver le lemme utilisé précédemment.

Démonstration du lemme G.4 :

On rappelle que

$$\mathbf{w}_1 = \sum_{(i,j) \in J} \alpha_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \text{ et } \mathbf{w}_2 = \alpha_{kl} \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{q}),$$

où les coefficients intervenant dans ces deux écritures sont strictement positifs. Cependant, il suffit de prouver cette inégalité pour

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{q}).$$

On pose

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{si } i < j \\ \alpha_{ji} & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a alors

$$\mathbf{w}_1 = (F_1, F_2, \dots, F_N) \text{ où } F_p = \sum \beta_{ip} \mathbf{e}_{ip}.$$

Ainsi, F_k est un vecteur de \mathbb{R}^2 qui peut être interprété comme la force exercée sur la $k^{\text{ième}}$ personne par ses voisins (autres que le $l^{\text{ième}}$ individu). De même, $-F_k$ peut être interprété comme la force de réaction de la $k^{\text{ième}}$ personne résistant à la pression de ses voisins (autres que le $l^{\text{ième}}$). De plus, on a

$$\frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_1| |\mathbf{w}_2|} = \frac{-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} - F_l \cdot \mathbf{e}_{lk}}{\sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=1}^N |F_i|^2}} = \Delta_{kl}.$$

Cas 1 : $-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} \geq 0$ ou $-F_l \cdot \mathbf{e}_{lk} \geq 0$

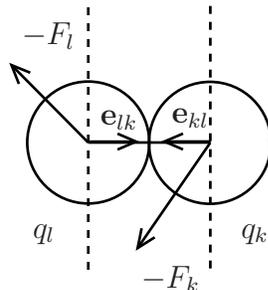


FIG. G.1 – Cas 1

Supposons, par exemple (cf figure G.1), que $-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} \geq 0$, on a alors

$$-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} - F_l \cdot \mathbf{e}_{lk} \geq -F_l \cdot \mathbf{e}_{lk}.$$

Comme $|F_l \cdot \mathbf{e}_{lk}| \leq |F_l|$, on obtient

$$\frac{|F_l \cdot \mathbf{e}_{lk}|}{\sqrt{\sum |F_i|^2}} \leq 1.$$

Finalement, on en déduit que

$$\Delta_{kl} \geq \frac{-F_l \cdot \mathbf{e}_{lk}}{\sqrt{2} \sqrt{\sum |F_i|^2}} \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Dans ce cas, on peut prendre

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cas 2 : $-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} < 0$ et $-F_l \cdot \mathbf{e}_{lk} < 0$ (cf figure G.2)

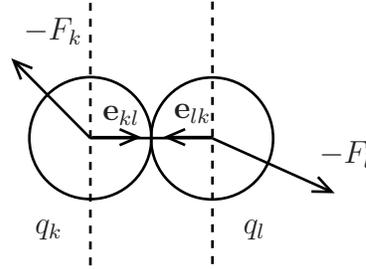


FIG. G.2 – Cas 2

Cas 2a : $-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} \geq -\frac{1}{4}|F_k|$ ou $-F_l \cdot \mathbf{e}_{lk} \geq -\frac{1}{4}|F_l|$

Supposons, par exemple (cf figure G.3), que $-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} \geq -\frac{1}{4}|F_k|$. On a

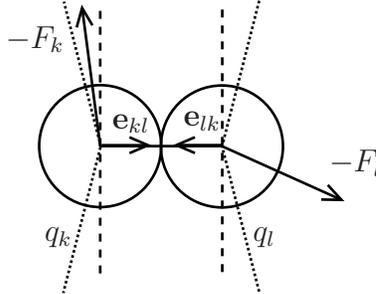


FIG. G.3 – Cas 2a

$$|F_k| \leq \sqrt{\sum |F_i|^2},$$

ce qui implique comme $-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} < 0$,

$$\frac{-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl}}{|F_k|} \leq \frac{-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl}}{\sqrt{\sum |F_i|^2}}.$$

Par conséquent,

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl}}{\sqrt{\sum |F_i|^2}}$$

et comme

$$\frac{-F_l \cdot \mathbf{e}_{lk}}{\sqrt{\sum |F_i|^2}} \geq -1,$$

$$\Delta_{kl} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{5}{4\sqrt{2}} > -1.$$

Dans ce cas, on peut prendre

$$\kappa = \frac{5}{4\sqrt{2}}.$$

Cas 2b : $-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} < -\frac{1}{4}|F_k|$ et $-F_l \cdot \mathbf{e}_{lk} < -\frac{1}{4}|F_l|$ (cf figure G.4)

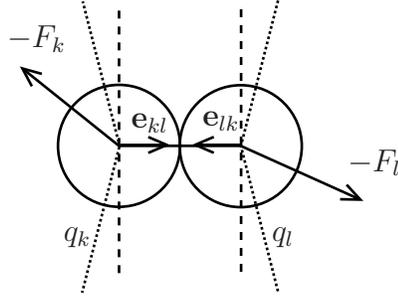


FIG. G.4 – Cas 2b

On utilise le lemme suivant démontré ultérieurement :

Sous-lemme G.5 Dans le cas 2b, il existe \tilde{k} et \tilde{l} distincts de k et de l vérifiant $\tilde{k} \neq \tilde{l}$ et tels que

$$\begin{aligned} |F_{\tilde{k}}| &\geq \epsilon |F_k|, \\ |F_{\tilde{l}}| &\geq \epsilon |F_l|, \end{aligned}$$

où

$$\epsilon = \left(\frac{1}{2n_v} \right)^{2N}.$$

(Le réel ϵ est bien indépendant de \mathbf{q}).

On en déduit que

$$\sum |F_i|^2 \geq |F_k|^2 + |F_l|^2 + |F_{\tilde{k}}|^2 + |F_{\tilde{l}}|^2 \geq (1 + \epsilon^2) [|F_k|^2 + |F_l|^2].$$

Aussi,

$$\frac{1}{\sqrt{\sum |F_i|^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \frac{1}{\sqrt{|F_k|^2 + |F_l|^2}}$$

et

$$|\Delta_{kl}| \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \left(\frac{|F_k| + |F_l|}{\sqrt{2} \sqrt{|F_k|^2 + |F_l|^2}} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}.$$

Finalement, on conclut que

$$\Delta_{kl} \geq -\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} > -1.$$

Dans ce cas, on peut donc prendre

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}}.$$

et le lemme G.4 est donc vérifié pour

$$\kappa = \max \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}},$$

à condition de prouver le sous-lemme G.5. □

Remarque G.6 *On peut tout de suite constater que, pour une configuration \mathbf{q} fixée et des coefficients α_{ij} fixés, l'existence d'un réel ϵ , vérifiant ces deux inégalités est triviale. En effet, par l'absurde, on obtient que sinon*

$$\forall j \in \{1 \dots N\} \setminus \{k, l\}, F_j = 0,$$

ce qui est impossible.

Il reste à démontrer le sous-lemme utilisé précédemment.

Démonstration du sous-lemme G.5 :

On rappelle que n_v est le nombre maximal de voisins que peut avoir une personne. On considère d'abord F_k , on sait que

$$-F_k = \sum_{i=1}^{V_k} \beta_{kj_0, i} \mathbf{e}_{kj_0, i},$$

où V_k est le nombre de voisins de la personne k à l'exception de la personne l ($V_k \leq n_v - 1$). Par conséquent,

$$-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} = \sum_{i=1}^{V_k} \beta_{kj_0, i} \mathbf{e}_{kj_0, i} \cdot \mathbf{e}_{kl}.$$

Il existe $k_1 \in \{j_{0,1}, j_{0,2}, \dots, j_{0,V_k}\}$ ($k_1 \neq k, l$) tel que

$$\beta_{kk_1} \mathbf{e}_{kk_1} \cdot \mathbf{e}_{kl} \leq \beta_{kj_{0,i}} \mathbf{e}_{kj_{0,i}} \cdot \mathbf{e}_{kl}, \quad \forall i.$$

Un rapide raisonnement par l'absurde montre que nécessairement,

$$\beta_{kk_1} \mathbf{e}_{kk_1} \cdot \mathbf{e}_{kl} < -\frac{1}{n_v} F_k \cdot \mathbf{e}_{kl},$$

et comme $-F_k \cdot \mathbf{e}_{kl} < -\frac{1}{4}|F_k|$, on obtient

$$\beta_{kk_1} \mathbf{e}_{kk_1} \cdot \mathbf{e}_{kl} < -\frac{1}{4n_v} |F_k|.$$

En interprétant, l'individu k_1 est la personne qui exerce la plus forte pression sur k et la personne k se trouve entre les individus l et k_1 car $\mathbf{e}_{kk_1} \cdot \mathbf{e}_{kl} < 0$ (la personne k_1 se trouve à gauche de k sur la figure G.5).

Si $|F_{k_1}| \geq \frac{1}{8n_v} |F_k|$, alors on pose

$$\tilde{k} = k_1.$$

Sinon $|F_{k_1}| < \frac{1}{8n_v} |F_k|$, et on procède de manière analogue avec F_{k_1} . On sait que

$$-F_{k_1} = \beta_{k_1k} \mathbf{e}_{k_1k} + \sum_{i=1}^{V_{k_1}} \beta_{k_1j_{1,i}} \mathbf{e}_{k_1j_{1,i}},$$

où $V_{k_1} \leq n_v - 1$ est le nombre de voisins de k_1 . Ainsi ,

$$-F_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{kl} = \beta_{k_1k} \mathbf{e}_{k_1k} \cdot \mathbf{e}_{kl} + \sum_{i=1}^{V_{k_1}} \beta_{k_1j_{1,i}} \mathbf{e}_{k_1j_{1,i}} \cdot \mathbf{e}_{kl}.$$

Comme $-\beta_{k_1k} \mathbf{e}_{k_1k} \cdot \mathbf{e}_{kl} < -\frac{1}{4n_v} |F_k|$ et $-F_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{kl} \leq |F_{k_1}| < \frac{1}{8n_v} |F_k|$, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{V_{k_1}} \beta_{k_1j_{1,i}} \mathbf{e}_{k_1j_{1,i}} \cdot \mathbf{e}_{kl} = -F_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{kl} - \beta_{k_1k} \mathbf{e}_{k_1k} \cdot \mathbf{e}_{kl} < -\frac{1}{8n_v} |F_k|.$$

Comme précédemment, il existe $k_2 \in \{j_{1,1}, j_{1,2}, \dots, j_{1,V_{k_1}}\}$ ($k_2 \notin \{k, k_1\}$), tel que

$$\beta_{k_1k_2} \mathbf{e}_{k_1k_2} \cdot \mathbf{e}_{kl} < -\frac{1}{8n_v^2} |F_k|$$

(Là encore sur la figure G.5, la personne k_2 se trouve à gauche de l'individu k_1).

Si $|F_{k_2}| \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_v} \right)^2 |F_k|$, alors on pose

$$\tilde{k} = k_2.$$

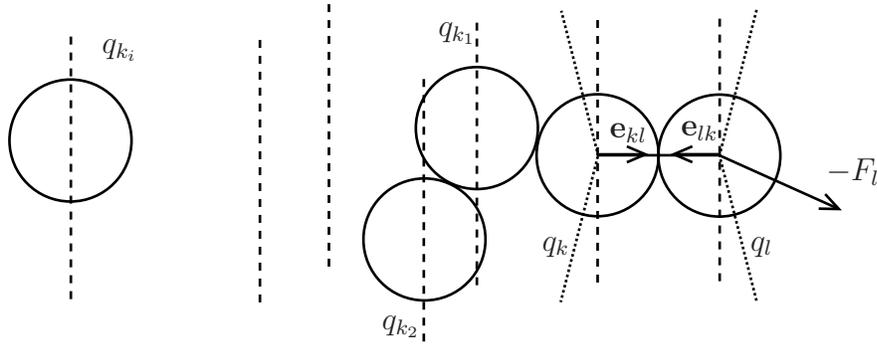


FIG. G.5 – Construction de la suite k_i

Sinon, on continue. On construit alors une suite k_i (cf figure G.5) telle que

$$\begin{cases} k_0 = k \\ |F_{k_{i+1}}| < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_v} \right)^{i+1} |F_k| \\ \beta_{k_i k_{i+1}} \mathbf{e}_{k_i k_{i+1}} \cdot \mathbf{e}_{kl} < -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_v} \right)^i \frac{1}{n_v} |F_k|. \end{cases}$$

On a alors

$$k_{i+1} \notin \{k_0, k_1, \dots, k_i\}.$$

En effet, comme on a par construction (point 3 du système) :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{k_0 k_1} \cdot \mathbf{e}_{kl} < 0 \\ \mathbf{e}_{k_1 k_2} \cdot \mathbf{e}_{kl} < 0 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{k_i k_{i+1}} \cdot \mathbf{e}_{kl} < 0 \end{cases}$$

il suffit de montrer que

$$\forall j \in \llbracket 0, i \rrbracket, \mathbf{e}_{k_{i+1} k_j} \cdot \mathbf{e}_{kl} > 0.$$

On a pour $j \in \llbracket 0, i \rrbracket$,

$$\mathbf{e}_{k_{i+1} k_j} \cdot \mathbf{e}_{kl} = \frac{1}{|q_{k_{i+1}} - q_{k_j}|} (|q_{k_{i+1}} - q_{k_i}| \mathbf{e}_{k_{i+1} k_i} + |q_{k_i} - q_{k_{i-1}}| \mathbf{e}_{k_i k_{i-1}} + \dots + |q_{k_{j+1}} - q_{k_j}| \mathbf{e}_{k_{j+1} k_j}) \cdot \mathbf{e}_{kl}.$$

Donc

$$\mathbf{e}_{k_{i+1} k_j} \cdot \mathbf{e}_{kl} = \frac{1}{|q_{k_{i+1}} - q_{k_j}|} (|q_{k_{i+1}} - q_{k_i}| \mathbf{e}_{k_{i+1} k_i} \cdot \mathbf{e}_{kl} + \dots + |q_{k_{j+1}} - q_{k_j}| \mathbf{e}_{k_{j+1} k_j} \cdot \mathbf{e}_{kl}) > 0.$$

On conclut alors que

$$k_{i+1} \notin \{k_0, k_1, \dots, k_{i-1}\},$$

et par construction $k_{i+1} \neq k_i$, donc

$$k_{i+1} \notin \{k_0, k_1, \dots, k_i\}.$$

Comme il y a un nombre fini de personnes, à savoir N , cette construction s'arrête :

$$\exists m < N - 1 \text{ tel que } |F_{k_m}| \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_v} \right)^m |F_k|.$$

Au final, on pose

$$\tilde{k} = k_m.$$

On procède de manière analogue avec F_l , en construisant une suite l_i vérifiant le même genre de propriétés (les personnes l_i se trouveront à droite de l'individu l toujours dans le cadre de la figure G.5). Il reste à montrer que $\tilde{k} \neq \tilde{l}$. Pour cela, on a juste besoin de vérifier que ces deux suites sont disjointes, c'est-à-dire que,

$$\{k_0, k_1, \dots, k_m\} \cap \{l_0, l_1, \dots, l_p\} = \emptyset.$$

On a par construction

$$\mathbf{e}_{k_i k_{i+1}} \cdot \mathbf{e}_{kl} < 0, \tag{G.2}$$

$$\mathbf{e}_{l_j l_{j+1}} \cdot \mathbf{e}_{kl} > 0. \tag{G.3}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\forall i \in \{0..m\}, \forall j \in \{0..p\}, \mathbf{e}_{k_i l_j} \cdot \mathbf{e}_{kl} > 0.$$

On va d'abord prouver que

$$\forall i \in \{0..m\}, \mathbf{e}_{k_i l} \cdot \mathbf{e}_{kl} > 0.$$

Comme précédemment, le vecteur $\mathbf{e}_{k_i l}$ pour $i \in \{0..m\}$, s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs $\mathbf{e}_{k_i k_{i-1}}, \dots, \mathbf{e}_{k_1 k_0}$ et $\mathbf{e}_{k_0 l}$. Grâce à (G.2) et comme $\mathbf{e}_{k_0 l} \cdot \mathbf{e}_{kl} = |\mathbf{e}_{kl}|^2 = 1 > 0$, on conclut alors que

$$\forall i \in \{0..m\}, \mathbf{e}_{k_i l} \cdot \mathbf{e}_{kl} > 0. \tag{G.4}$$

Ensuite, le vecteur $\mathbf{e}_{k_i l_j}$ pour $i \in \{0..m\}$ et $j \in \{0..p\}$, s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs $\mathbf{e}_{k_i l_0}, \mathbf{e}_{l_0 l_1}, \dots$, et $\mathbf{e}_{l_{j-1} l_j}$. Grâce à (G.3) et (G.4), on obtient

$$\forall i \in \{0..m\}, \forall j \in \{0..p\}, \mathbf{e}_{k_i l_j} \cdot \mathbf{e}_{kl} > 0. \tag{G.5}$$

Par conséquent, d'après (G.5), on en déduit que

$$\{k_0, k_1, \dots, k_m\} \cap \{l_0, l_1, \dots, l_p\} = \emptyset$$

et nécessairement $\tilde{k} \neq \tilde{l}$. Ensuite, comme $n_v \geq 2$, alors

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_v} \right)^{N-1} \geq \left(\frac{1}{2n_v} \right)^N.$$

Le sous-lemme G.5 est vérifié pour

$$\epsilon = \left(\frac{1}{2n_v} \right)^N$$

ce qui achève la démonstration. □

Ainsi s'achève la démonstration de la proposition G.1. De ce résultat découle l'uniforme prox-régularité de Q_0 (cf. preuve de la proposition 3.12 p. 51).

Proposition G.7 *L'ensemble Q_0 est η -prox-régulier avec*

$$\eta = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2n_v} \right)^{2N}}} \right) \right]^{\frac{Nn_v}{4}} \min_{(i,j)} \frac{r_i + r_j}{\sqrt{2}},$$

où n_v est le nombre maximal de voisins que peut avoir une personne.
En notant $r_{\min} = \min r_i$ et $r_{\max} = \max r_i$, cette constante vérifie

$$n_v \leq \frac{\pi}{\arcsin \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \right)}.$$

Remarque G.8 *Pour se fixer les idées, on peut calculer un équivalent de η quand N tend vers l'infini (n_v constant). On obtient*

$$\eta \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \min_{(i,j)} \frac{r_i + r_j}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{Nn_v}{4}} \left(\frac{1}{2n_v} \right)^{\frac{N^2n_v}{2}}.$$

Cette constante de prox-régularité est inférieure à celle annoncée par la proposition 3.12 p. 51.

Annexe H

Formulation point-selle

Cette annexe a pour objectif de rappeler les résultats classiques qu'on peut retrouver dans [Mau04], jusqu'à la proposition H.9. Pour la proposition H.11, on renvoie le lecteur vers [All05] ou [Cia90]. On considère V un espace de Hilbert muni de son produit scalaire (\cdot, \cdot) et de sa norme $|\cdot|$, M un espace de Banach, $B \in \mathcal{L}(V, M)$ et $z \in M$. On note le crochet de dualité entre M et M' par $\langle \phi, m \rangle$ avec $\phi \in M'$ et $m \in M$ et on note $\|\cdot\|$ la norme naturelle sur M' . On définit ensuite l'ensemble des contraintes qui sera l'ensemble convexe fermé suivant,

$$K = \{u \in V, \langle \mu, Bu - z \rangle \leq 0, \quad \forall \mu \in C\},$$

où $C \subset M'$ est un cône convexe fermé non vide de sommet 0. Soit $f \in V$, on considère la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}|v|^2 - (f, v)$$

ainsi que le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$(Q) \begin{cases} u \in K, \\ J(u) = \inf_{v \in K} J(v). \end{cases}$$

Le Lagrangien associé à ce problème est

$$\begin{aligned} L : V \times C &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, \mu) &\mapsto L(v, \mu) = J(v) + \langle \mu, Bv - z \rangle. \end{aligned}$$

La formulation point-selle de ce problème s'écrit donc sous la forme,

$$(Q') \begin{cases} (u, \lambda) \in V \times C, \\ \forall (v, \mu) \in V \times C, L(u, \mu) \leq L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda). \end{cases}$$

Remarque H.1 λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Proposition H.2 Le problème (Q) possède une unique solution que l'on notera u .

Démonstration :

Il suffit de remarquer que la fonctionnelle J est strictement convexe et coercive, puis que K est un ensemble convexe fermé de V . □

Remarque H.3 Une autre façon de prouver la proposition précédente est de remarquer que le problème (Q) revient à minimiser la fonctionnelle $[v \mapsto \frac{1}{2}|v - f|^2]$ sur K . Il existe une unique solution à ce problème qui est le projeté de f sur K ($u = P_K f$), bien défini car K est un convexe fermé.

Remarque H.4 Par définition du cône polaire (définition C.1 p. 150), on sait que $u \in K$ si et seulement si $Bu - z \in C^\circ$.

Proposition H.5 Si $(u, \lambda) \in V \times C$ est solution du problème de point-selle (Q') , alors u est solution du problème de minimisation (Q) .

Démonstration :

On raisonne par l'absurde en supposant que $u \notin K$, c'est-à-dire en supposant qu'il existe $\mu_0 \in C$, tel que $\langle \mu_0, Bu - z \rangle > 0$. Alors

$$\forall \alpha > 0, \alpha \mu_0 \in C \text{ et } \langle \alpha \mu_0, Bu - z \rangle \rightarrow +\infty \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty.$$

On obtient donc une contradiction avec le fait que $L(u, \mu)$ soit majoré. Par conséquent,

$$\forall \mu \in C, \langle \mu, Bu - z \rangle \leq 0.$$

Autrement dit, $u \in K$. Ensuite, on sait que pour tout $\mu \in C$, $\langle \mu, Bu - z \rangle \leq \langle \lambda, Bu - z \rangle \leq 0$. En prenant $\mu = 0$, on voit que nécessairement

$$\langle \lambda, Bu - z \rangle = 0.$$

En conséquence,

$$\forall v \in V, J(u) \leq J(v) + \langle \lambda, Bv - z \rangle.$$

Comme pour tout $v \in K$, $\langle \lambda, Bv - z \rangle \leq 0$, on obtient,

$$\forall v \in K, J(u) \leq J(v).$$

Autrement dit,

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

En conclusion, u est solution de (Q) . □

On considère désormais un autre problème, dont on montrera l'équivalence avec le problème (Q') :

$$(Q'') \left\{ \begin{array}{l} (u, \lambda) \in V \times C, \\ u + B^* \lambda = f, \\ Bu - z \in C^\circ, \\ \langle \lambda, Bu - z \rangle = 0. \end{array} \right.$$

Remarque H.6 La dernière équation est appelée relation de complémentarité. Le multiplicateur de Lagrange n'agit que si la contrainte est saturée (lorsque $Bu - z = 0$).

Proposition H.7 (u, λ) est solution du problème de point-selle (Q') si et seulement si (u, λ) est solution de (Q'') .

Démonstration :

Si (u, λ) est solution de (Q') , alors on sait déjà que $Bu - z \in C^\circ$ car $u \in K$ ainsi que

$\langle \lambda, Bu - z \rangle = 0$ d'après la démonstration précédente. De plus, pour tout $v \in V$, $L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda)$. Aussi, u minimise $\tilde{J}(v) = \frac{1}{2}|v|^2 - (f, v) + \langle \lambda, Bv - z \rangle$ sur V . Par conséquent,

$$\forall v \in V, (u, v) - (f, v) + \langle \lambda, Bv \rangle = 0,$$

ce qui implique

$$\forall v \in V, (u, v) - (f, v) + (B^*\lambda, v) = 0.$$

D'où,

$$u + B^*\lambda = f.$$

Ainsi, (u, λ) est solution de (Q'') .

Réciproquement, si (u, λ) est solution de (Q'') , alors $Bu - z \in C^\circ$ ce qui revient à dire que $u \in K$. Aussi, comme $\langle \lambda, Bu - z \rangle = 0$, on a

$$\forall \mu \in C, \langle \mu, Bu - z \rangle \leq \langle \lambda, Bu - z \rangle.$$

Par conséquent,

$$\forall \mu \in C, L(u, \mu) \leq L(u, \lambda).$$

Ensuite, l'équation $u + B^*\lambda = f$ implique, d'après le théorème de Lax-Milgram, que u minimise $\bar{J}(v) = \frac{1}{2}|v|^2 - (f, v) + \langle \lambda, Bv \rangle$ sur V donc

$$\forall v \in V, \bar{J}(u) \leq \bar{J}(v).$$

D'où en soustrayant $\langle \lambda, z \rangle$ de part et d'autre de l'inégalité, on a

$$\forall v \in V, L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda).$$

On en conclut donc que (u, λ) est solution de (Q') . □

Proposition H.8 *Si u est solution du problème de minimisation (Q) , alors*

$$f - u \in \overline{B^*(C)}.$$

Démonstration :

Soit u la solution de (Q) , montrons dans un premier temps que

$$\forall v \in \left(\overline{B^*(C)}\right)^\circ, \forall t \geq 0, u + tv \in K.$$

Soit $v \in \left(\overline{B^*(C)}\right)^\circ$, on a par définition du cône polaire (définition C.1 p. 149),

$$\forall \mu \in C, (B^*\mu, v) \leq 0,$$

ce qui équivaut à

$$\forall \mu \in C, \langle \mu, Bv \rangle \leq 0.$$

Ainsi,

$$\langle \mu, B(u + tv) - z \rangle = \langle \mu, Bu - z \rangle + t\langle \mu, Bv \rangle \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Donc pour tout $t \geq 0$, $u + tv \in K$. Dans un second temps, montrons que

$$f - u \in \left(\overline{B^*(C)} \right)^{\circ\circ}.$$

Soient $v \in \left(\overline{B^*(C)} \right)^{\circ}$ et $t \geq 0$, comme u est solution de (Q) et $u + tv \in K$ d'après ce qui précède, on a

$$J(u) \leq J(u + tv).$$

Par définition de J , on a donc

$$\frac{1}{2}t^2|v|^2 + t(u, v) - t(f, v) \geq 0,$$

ce qui implique

$$t \left[\frac{1}{2}t|v|^2 - (f - u, v) \right] \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}t|v|^2 - (f - u, v) \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $t \geq 0$, on en déduit que

$$(f - u, v) \leq 0.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $v \in \left(\overline{B^*(C)} \right)^{\circ}$, on a démontré que

$$f - u \in \left(\overline{B^*(C)} \right)^{\circ\circ}.$$

Comme $\overline{B^*(C)}$ est un cône convexe fermé non vide de sommet 0, on a d'après la proposition C.4 p. 151,

$$\left(\overline{B^*(C)} \right)^{\circ\circ} = \overline{B^*(C)}.$$

Ainsi, $f - u \in \overline{B^*(C)}$. □

Proposition H.9 *Soit u la solution du problème de minimisation (Q) , si B est surjectif de V dans M , alors il existe un unique $\lambda \in C$ tel que (u, λ) soit solution du problème de point-selle (Q') .*

Démonstration :

Montrons que $B^*(C)$ est un fermé. Comme B est surjectif de V dans M , on sait (cf. théorème II.19 p.29 dans [Bre73]) que

$$\exists \alpha > 0, \forall \mu \in M', \|\mu\| \leq \alpha |B^*\mu|.$$

Considérons une suite de $B^*(C)$ qui converge dans V ,

$$B^*\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v,$$

où $\mu_n \in C$. L'inégalité précédente implique que la suite (μ_n) est de Cauchy dans M' . Ainsi, il existe $\lambda \in M'$ tel que

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda.$$

Or C est un fermé de M' donc $\lambda \in C$. Par continuité de B^* , on a $v = B^*\lambda \in B^*(C)$. En conclusion, $B^*(C)$ est un fermé.

Soit u la solution du problème (Q) , d'après ce qui précède et la proposition H.8, on a $f - u \in B^*(C)$. Par conséquent, il existe $\lambda \in C$ tel que $f - u = B^*\lambda$. Comme B est surjectif, B^* est injectif et on conclut alors que

$$\exists ! \lambda \in C, u + B^*\lambda = f.$$

Par ailleurs, comme u est solution du problème (Q) , on a $u \in K$, d'où $Bu - z \in C^\circ$. Comme B est surjectif, il existe $a \in V$ tel que $z = Ba$. De plus, d'après la remarque H.3, on sait que u est la projection de f sur K : $u = P_K f$. Par conséquent,

$$u - a = P_{K-a}(f - a)$$

(ceci est évident lorsqu'on pense à la caractérisation de la projection sur un convexe fermé cf. théorème A.1 p. 142). Enfin, comme $K - a \subset V$ est un cône convexe fermé non vide de sommet 0, on a donc d'après la proposition C.3 p. 150,

$$(u - a, f - u) = 0.$$

Ceci implique

$$(u - a, B^*\lambda) = 0$$

et par conséquent

$$\langle \lambda, B(u - a) \rangle = \langle \lambda, Bu - z \rangle = 0.$$

Ainsi, il existe un unique $\lambda \in C$ tel que (u, λ) soit solution du problème (Q'') , ce qui implique d'après la proposition H.7 qu'il existe un unique $\lambda \in C$ tel que (u, λ) soit solution du problème (Q') . \square

En reprenant la démonstration, on remarque que les hypothèses $B^*(C)$ fermé et $z \in ImB$ suffisent à assurer l'existence d'un multiplicateur de Lagrange.

Proposition H.10 *Si $B^*(C)$ est fermé dans M et si $z \in ImB$, alors il existe un $\lambda \in C$ tel que (u, λ) soit solution de (Q') .*

Dans le cas où $z \notin ImB$, la démonstration de la proposition H.9 ne s'applique pas. En effet, on ne peut plus obtenir la relation de complémentarité en utilisant la notion de cône polaire puisque K n'est pas un cône. Cependant, dans le cas d'un nombre fini de contraintes, c'est-à-dire quand le cône C est finiment généré, l'hypothèse sur z n'est pas nécessaire, (l'hypothèse sur $B^*(C)$ est automatiquement vérifiée) et on obtient la proposition suivante.

Proposition H.11 (Cas d'un nombre fini de contraintes)

On suppose que C est finiment généré, autrement dit,

$$C = \sum_{i=1}^p \mathbb{R}^+ \mu_i, \text{ avec } \mu_i \in M'.$$

Si on note u la solution du problème de minimisation (Q) défini p. 179, alors il existe $\lambda \in C$ tel que (u, λ) soit solution du problème de point-selle (Q') défini p. 179.

Démonstration :

Soit u la solution de (Q) , on définit l'ensemble, que l'on suppose dans un premier temps non vide,

$$I_u = \{i \in \{1, \dots, p\}, \langle \mu_i, Bu - z \rangle = 0\},$$

et le cône convexe fermé inclus dans M' ,

$$C_u = \{\mu \in C, \langle \mu, Bu - z \rangle = 0\} = \sum_{i \in I_u} \mathbb{R}^+ \mu_i.$$

Par conséquent,

$$B^*(C_u) = \sum_{i \in I_u} \mathbb{R}^+ B^*(\mu_i).$$

On utilise une proposition analogue à la proposition H.8, qui sera démontrée ultérieurement, à savoir :

Proposition H.12 *Si u est solution de (Q) , alors $f - u \in \overline{B^*(C_u)}$.*

De plus, d'après le sous-lemme B.2 p. 146, le cône convexe $B^*(C_u)$ non vide de sommet 0 est fermé. Par conséquent, $f - u \in B^*(C_u)$. Ainsi, il existe $\lambda = \sum_{i \in I_u} \lambda_i \mu_i$ où $\lambda_i \geq 0$, tel que

$$f - u = B^*(\lambda) = \sum_{i \in I_u} \lambda_i B^*(\mu_i).$$

Par conséquent, par définition de I_u ,

$$\langle \lambda, Bu - z \rangle = \sum_{i \in I_u} \lambda_i \langle \mu_i, Bu - z \rangle = 0.$$

Si $I_u = \emptyset$, alors $C_u = \{0\}$ et donc $\lambda = 0$, ce qui nous amène à la même conclusion. La relation de complémentarité est bien vérifiée. Ainsi, le couple (u, λ) est solution du problème (Q'') , qui est équivalent d'après la proposition H.7 au problème (Q') . \square

Démonstration de la proposition H.12 :

Soit u la solution de (Q) , montrons dans un premier temps que

$$\forall v \in \left(\overline{B^*(C_u)}\right)^\circ, \exists t_v > 0, \forall t \in [0, t_v[, u + tv \in K.$$

Soit $v \in \left(\overline{B^*(C_u)}\right)^\circ$, on a

$$\forall \mu \in C_u, (B^*\mu, v) \leq 0,$$

ce qui équivaut à

$$\forall \mu \in C_u, \langle \mu, Bv \rangle \leq 0.$$

En conséquence, si $\mu \in C_u$, on a

$$\langle \mu, B(u+tv) - z \rangle = \langle \mu, Bu - z \rangle + t\langle \mu, Bv \rangle = t\langle \mu, Bv \rangle \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\mu \in C \setminus C_u$, alors $\mu = \sum_{i \in I_u} \rho_i \mu_i + \sum_{j \notin I_u} \rho_j \mu_j$, avec $\rho_i, \rho_j \geq 0$ (la deuxième somme porte sur un ensemble nécessairement non vide). On définit alors

$$t_v = \min_{j \notin I(u)} \frac{-\langle \mu_j, Bu - z \rangle}{|\langle \mu_j, Bv \rangle|} > 0.$$

Aussi pour $t \in [0, t_v[$,

$$\langle \mu, B(u+tv) - z \rangle \leq \sum_{i \in I(u)} \rho_i (\langle \mu_i, Bu - z \rangle + t\langle \mu_i, Bv \rangle) + \sum_{j \notin I(u)} \rho_j (\langle \mu_j, Bu - z \rangle + t\langle \mu_j, Bv \rangle).$$

D'après ce qui précède, la première somme est négative et par définition de t_v , la deuxième aussi. Par conséquent, on en déduit que

$$\forall t \in [0, t_v[, \forall \mu \in C, \langle \mu, B(u+tv) - z \rangle \leq 0.$$

Donc pour tout $t \in [0, t_v[, u+tv \in K$.

Dans un second temps, montrons que

$$f - u \in \left(\overline{B^*(C_u)}\right)^\circ.$$

Soient $v \in \left(\overline{B^*(C_u)}\right)^\circ$ et $t \in [0, t_v[$, comme u est solution de (Q), on a

$$J(u) \leq J(u+tv).$$

Par définition de J , on a donc

$$\frac{1}{2}t^2|v|^2 + t(u, v) - t(f, v) \geq 0,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2}t|v|^2 - (f - u, v) \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [0, t_v[$, on en déduit que

$$(f - u, v) \leq 0,$$

autrement dit que

$$f - u \in \left(\overline{B^*(C_u)} \right)^{\circ\circ}.$$

Comme $\overline{B^*(C_u)}$ est un cône convexe fermé non vide de sommet 0, on a d'après la proposition C.4 p. 151,

$$\left(\overline{B^*(C_u)} \right)^{\circ\circ} = \overline{B^*(C_u)}.$$

Ainsi, $f - u \in \overline{B^*(C_u)}$.

□

Annexe I

Algorithme d'Uzawa

On reprend les notations de l'annexe H mais on suppose désormais que M est un espace de Hilbert, que l'on identifie à son dual, de telle sorte que C est considéré comme un cône de M . Dans cette annexe, on rappelle comment calculer les multiplicateurs de Lagrange solutions d'un problème point-selle (Q') (défini page 180), grâce à l'algorithme d'Uzawa. Les résultats suivants jusqu'à la proposition I.4, sont issus de [Mau04].

On se donne $\rho > 0$, $\lambda^0 \in C$ et on considère une suite d'éléments de M définis par

$$\forall k \geq 0, \lambda^{k+1} = P_C (\lambda^k + \rho (B (f - B^* \lambda^k) - z)). \quad (\text{I.1})$$

La proposition suivante montre que si la suite définie par (I.1) converge alors il y a existence d'un point-selle qui peut être exprimé en fonction de la limite de la suite.

Proposition I.1 *On suppose que $z = Ba$. Si la suite (λ^k) définie par (I.1) converge vers $\lambda \in M$, alors $(f - B^* \lambda, \lambda)$ est solution du problème de point-selle (Q') défini p. 179.*

Démonstration :

Comme P_C est une application continue (1-lipschitz), on a à la limite l'équation,

$$\lambda = P_C (\lambda + \rho B (f - B^* \lambda - a)) \text{ car } z = Ba.$$

On a donc pour tout $\mu \in C$ (cf. théorème A.1 p. 142),

$$\langle \mu - \lambda, \rho B (f - B^* \lambda - a) \rangle \leq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\langle \mu - \lambda, B (f - B^* \lambda - a) \rangle \leq 0.$$

Ceci équivaut aussi à

$$(B^* (\mu - \lambda), f - B^* \lambda - a) \leq 0, \forall \mu \in C,$$

et par conséquent

$$B^* \lambda = P_{\overline{B^*(C)}} (f - a).$$

Comme $\overline{B^*(C)}$ est un cône convexe fermé non vide de sommet 0, d'après la proposition C.3 p. 150, on a

$$f - a - B^* \lambda = P_{\overline{B^*(C)}} \circ (f - a).$$

On utilise maintenant le lemme suivant, qui sera démontré ultérieurement.

Lemme I.2 *On suppose que $z = Ba$, alors*

$$K - a = \overline{B^*(C)}^\circ.$$

On en déduit que

$$f - a - B^*\lambda = P_{K-a}(f - a),$$

ce qui équivaut à

$$f - B^*\lambda = P_K f.$$

(Ceci est évident lorsqu'on pense à la caractérisation de la projection sur un convexe fermé cf. théorème A.1 p. 142). On pose maintenant $u = f - B^*\lambda$, u est bien un élément de K . Il reste à vérifier la relation de complémentarité $\langle \lambda, Bu - z \rangle = 0$ pour montrer que (u, λ) est solution du problème (Q'') défini dans l'annexe H page 181. Comme $u - a$ est la projection de $f - a$ sur $K - a$ et d'après la proposition C.3 p. 150, on a $(u - a, f - u) = 0$. D'où,

$$(u - a, B^*\lambda) = 0 = \langle \lambda, Bu - z \rangle.$$

Ainsi, (u, λ) est solution du problème (Q'') et donc (cf. proposition H.7 p. 181) du problème (Q') . \square

Remarque I.3 *L'hypothèse importante est que $z \in \text{Im}B$, il n'est pas nécessaire de supposer que $B^*(C)$ est fermé comme dans la proposition H.10 p. 184.*

Il reste à démontrer le lemme utilisé dans la preuve précédente.

Démonstration du lemme I.2 :

On rappelle la définition de K ,

$$K = \{v \in V, \langle \mu, Bv - z \rangle \leq 0, \forall \mu \in C\}.$$

En écrivant que $z = Ba$, on obtient que

$$K = \{v \in V, \langle \mu, Bv - Ba \rangle \leq 0, \forall \mu \in C\},$$

ce qui s'écrit encore

$$K = \{v \in V, (B^*\mu, v - a) \leq 0, \forall \mu \in C\}.$$

Par conséquent,

$$K - a = \{w \in V, (B^*\mu, w) \leq 0, \forall \mu \in C\}.$$

Autrement dit,

$$K - a = B^*(C)^\circ = \overline{B^*(C)}^\circ.$$

\square

Proposition I.4 *Si (u, λ) est solution du problème de point-selle (Q') (défini p. 179), alors la suite $(f - B^*\lambda^k)$ converge vers u , solution du problème de minimisation (Q) (défini p. 179), dès que*

$$0 < \rho < \frac{2}{\|B\|^2},$$

où $\|B\| = \sup_{|x| \leq 1} |Bx|$.

Démonstration :

Si (u, λ) est solution de (Q') alors (u, λ) est aussi solution de (Q'') , d'après la proposition H.7 p. 181. Par conséquent, $\langle \lambda, Bu - z \rangle = 0$. Montrons que l'élément λ vérifie

$$\lambda = P_C (\lambda + \rho (Bu - z)). \quad (\text{I.2})$$

Il suffit de montrer pour tout $\mu \in C$, $\langle \mu - \lambda, \rho (Bu - z) \rangle \leq 0$. Ceci est équivalent à

$$\langle \mu - \lambda, Bu - z \rangle \leq 0, \quad \forall \mu \in C.$$

Ceci est vrai puisque $u \in K$ et $\langle \lambda, Bu - z \rangle = 0$.

De plus, si on note $u^k = f - B^* \lambda^k$, l'équation (I.1) vérifiée par λ^{k+1} devient

$$\lambda^{k+1} = P_C (\lambda^k + \rho (Bu^k - z)). \quad (\text{I.3})$$

Grâce à (I.2) et (I.3) et au fait que P_C soit 1-lipschitz, on obtient,

$$|\lambda^{k+1} - \lambda|^2 = |P_C (\lambda^k + \rho (Bu^k - z)) - P_C (\lambda + \rho (Bu - z))|^2 \quad (\text{I.4})$$

$$\begin{aligned} &\leq |\lambda^k - \lambda + \rho B (u^k - u)|^2 \\ &\leq |\lambda^k - \lambda|^2 + 2\rho (B^* (\lambda^k - \lambda), u^k - u) + \rho^2 |B (u^k - u)|^2 \\ &\leq |\lambda^k - \lambda|^2 - 2\rho |u^k - u|^2 + \rho^2 |B (u^k - u)|^2 \\ &\leq |\lambda^k - \lambda|^2 - 2\rho |u^k - u|^2 + \rho^2 \|B\|^2 |u^k - u|^2 \\ &\leq |\lambda^k - \lambda|^2 - \rho (2 - \rho \|B\|^2) |u^k - u|^2. \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Si on suppose $\rho \in \left] 0, \frac{2}{\|B\|^2} \right[$, on a donc

$$|\lambda^{k+1} - \lambda| \leq |\lambda^k - \lambda|.$$

La suite $|\lambda^k - \lambda|$ est alors décroissante, positive. Elle converge donc vers un réel positif, et on a d'après (I.5),

$$|u^k - u|^2 \leq \frac{|\lambda^k - \lambda|^2 - |\lambda^{k+1} - \lambda|^2}{\rho (2 - \rho \|B\|^2)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

En conclusion, pour tout $\rho \in \left] 0, \frac{2}{\|B\|^2} \right[$, la suite $u^k = f - B^* \lambda^k$ converge vers u , solution de (Q) . □

Dans le cas qui nous intéresse (nombre fini de contraintes), on peut même montrer que la suite des multiplicateurs de Lagrange construite par l'algorithme d'Uzawa converge.

Proposition I.5 (Cas d'un nombre fini de contraintes)

On suppose que C est finiment généré. Si $\rho \in \left] 0, \frac{2}{\|B\|^2} \right[$, alors la suite (λ^k) définie par (I.1) converge vers un $\lambda \in C$ tel que (u, λ) soit solution du problème (Q') (défini p. 179).

Démonstration :

La preuve repose essentiellement sur le lemme d'Opial qui sera démontré plus loin.

Lemme I.6 (Lemme d'Opial) *Soit Λ un espace de Hilbert, $\tilde{\Lambda}$ un sous-ensemble non vide de Λ , et (λ^k) une suite d'éléments de Λ telle que*

(i) pour tout $\mu \in \tilde{\Lambda}$, la suite $|\lambda^k - \mu|$ converge,

(ii) si une sous-suite (λ^{k_p}) converge faiblement vers un élément μ de Λ , alors $\mu \in \tilde{\Lambda}$.

Alors la suite (λ^k) converge faiblement vers un élément de $\tilde{\Lambda}$.

On note $\tilde{\Lambda} \subset M$, l'ensemble des λ tels que (u, λ) soit solution de (Q') . On cherche à démontrer que la suite (λ^k) vérifie les hypothèses du lemme d'Opial. On a vu lors de la démonstration de la proposition I.4 que l'hypothèse (i) du lemme d'Opial était vérifiée. Il reste à vérifier l'hypothèse (ii). On considère donc une sous-suite toujours notée (λ^k) qui converge faiblement vers $\mu \in M$. Comme C est un convexe fermé de M , il est fermé pour la topologie faible donc $\mu \in C$. Ensuite, on a pour tout k , $u^k = f - B^* \lambda^k$. Or $B^* \lambda^k$ converge faiblement vers $B^* \mu$ et d'après la proposition I.4, u^k converge vers u . On a donc par passage à la limite faible,

$$u = f - B^* \mu.$$

Pour montrer que (u, μ) est une solution de (Q') , il suffit de prouver la relation de complémentarité,

$$\langle \mu, Bu - z \rangle = 0.$$

Par définition de λ^{k+1} , on a pour tout $\tilde{\mu} \in C$,

$$\langle \tilde{\mu} - \lambda^{k+1}, \lambda^k + \rho(Bu - z) - \lambda^{k+1} \rangle \leq 0.$$

Comme C est finiment généré, il est inclus dans un espace hilbertien de dimension finie. Par conséquent, la suite des (λ^k) converge fortement et on peut passer à la limite dans l'équation précédente. En prenant enfin $\tilde{\mu} = 0$, on obtient

$$\langle \mu, Bu - z \rangle \geq 0.$$

Or $u \in K$ et $\mu \in C$ impliquent que $\langle \mu, Bu - z \rangle \leq 0$. Finalement la relation de complémentarité est vérifiée et $\mu \in \tilde{\Lambda}$. Ainsi, la suite (λ^k) vérifie les hypothèses du lemme d'Opial. On en déduit qu'elle converge faiblement et donc fortement (dimension finie) vers un élément de $\tilde{\Lambda}$. \square

Il reste à démontrer le lemme d'Opial (cf. par exemple [Har81]).

Démonstration du lemme I.6 :

D'après (i), la suite (λ^k) est bornée. Il suffit donc de vérifier que deux sous-suites qui convergent faiblement ont la même limite. On considère donc deux sous-suites (λ^{m_k}) et (λ^{n_k}) qui convergent faiblement vers λ_1 et λ_2 , respectivement. D'après (ii), λ_1 et λ_2 appartiennent à $\tilde{\Lambda}$. On introduit les limites (qui existent d'après (i))

$$\ell_1 = \lim |\lambda^k - \lambda_1|, \quad \ell_2 = \lim |\lambda^k - \lambda_2|.$$

On écrit alors

$$|\lambda^k - \lambda_1|^2 - |\lambda^k - \lambda_2|^2 = \langle \lambda_2 - \lambda_1, 2\lambda^k - \lambda_1 - \lambda_2 \rangle.$$

On passe à la limite dans l'identité précédente pour la sous-suite (λ^{m_k}) puis pour (λ^{n_k}) .
Il vient

$$|\ell_1|^2 - |\ell_2|^2 = -|\lambda_2 - \lambda_1|^2 \text{ et } |\ell_1|^2 - |\ell_2|^2 = |\lambda_2 - \lambda_1|^2.$$

On a donc nécessairement $|\lambda_2 - \lambda_1| = 0$, d'où le résultat. □

Bibliographie

- [All05] G. Allaire. Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Les Editions de l'Ecole polytechnique, 2005.
- [AMH01] S.A.H. AlGadhi, H.S. Mahmassani, and R Herman. A speed-concentration relation for bi-directional crowd movements. In M. Schreckenberg and S. D. Sharma, editors, *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, pages 3–20. Springer Berlin, 2001.
- [BA01] V. Blue and J.L. Adler. Cellular automata microsimulation for modeling bi-directional pedestrian walkways. *Transportation Research B*, 35 :293–312, 2001.
- [Bat97] M. Batty. Predicting where we walk. *Nature*, 388 :19–20, 1997.
- [Ben00] H. Benabdellah. Existence of solutions to the nonconvex sweeping process. *J. Differential Equations*, 164 :286–295, 2000.
- [BKSZ01] C. Burstedde, K. Klauck, A. Schadschneider, and J. Zittartz. Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton. *Physica A*, 295 :507–525, 2001.
- [Bol98] K. Bolay. Nichtlineare phänomene in einem fluid-dynamischen verkehrsmode. Master's thesis, Department of theoretical Physics II, University of Stuttgart, 1998.
- [Bre73] H. Brezis. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. AM, North Holland, 1973.
- [Bre99] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [BS90] P.H.L. Bovy and E. Stern. *Route choice wayfinding in transport networks*. Kluwer academic publishers, Dordrecht, 1990.
- [BT86a] A. Borgers and H. Timmermans. City centre entry points, store location patterns and pedestrian route choice behaviour : A microlevel simulation model. *Socio-Economic Planning Sciences*, 20 :25–31, 1986.
- [BT86b] A. Borgers and H. Timmermans. A model of pedestrian route choice and demand for retail facilities within inner-cityshopping areas. *Geographical Analysis*, 18 :115–128, 1986.
- [BT01] M. Bounkhel and L. Thibault. Nonconvex sweeping process and prox-regularity in *Hilbert* space. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 6 :359–374, 2001.

- [BT02] M. Bounkhel and L. Thibault. On various notions of regularity of sets in nonsmooth analysis. *Nonlinear Convex Anal.*, 48 :223–246, 2002.
- [Can88] A. Canino. On p-convex sets and geodesics. *J. Differential Equations*, 75 :118–157, 1988.
- [CG99] G. Colombo and V.V. Goncharov. The sweeping processes without convexity. *Set-Valued Anal.*, 7 :357–374, 1999.
- [Cia90] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, Paris, 1990.
- [CLSW98] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern, and P.R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1998.
- [CM95] C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques. BVperiodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets. *Set-Valued Anal.*, 3(4) :381–399, 1995.
- [CM03] G. Colombo and M.D.P. Monteiro Marques. Sweeping by a continuous prox-regular set. *J. Differential Equations*, 187(1) :46–62, 2003.
- [CSW95] F.H. Clarke, R.J. Stern, and P.R. Wolenski. Proximal smoothness and the lower- c^2 property. *J. Convex Anal.*, 2 :117–144, 1995.
- [Daa04] W. Daamen. *Modelling passenger flows in public transport facilities*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2004.
- [DCST07] A. Donev, R. Connelly, F.H. Stillinger, and S. Torquato. Hypoconstrained jammed packings of nonspherical hard particles : ellipses and ellipsoids. *Phys. Rev. E*, 75 :051304, 2007.
- [Del79] J.A. Delgado. Blaschke's theorem for convex hypersurfaces. *J. Differential Geometry*, 14 :489–496, 1979.
- [DH03] W. Daamen and S.P. Hoogendoorn. Experimental research of pedestrian walking behavior. *Transportation Research Record*, 1828 :20–30, 2003.
- [ET05] J.F. Edmond and L. Thibault. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. *Math. Program, Ser. B*, 104(2-3) :347–373, 2005.
- [ET06] J.F. Edmond and L. Thibault. BVsolutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation. *J. Differential Equations*, 226(1) :135–179, 2006.
- [Fed59] H. Federer. Curvature measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93 :418–491, 1959.
- [Fru71] J.J. Fruin. Design for pedestrians : A level-of-service concept. *Highway Research Record*, 355 :1–15, 1971.
- [GGLF01] S. Gwynne, E.R. Galea, P.J. Lawrence, and L. Filippidis. Modelling occupant interaction with fire conditions using the buildingexodus evacuation model. *Fire safety journal*, 36(4) :327–357, 2001.
- [Gip86] P.G. Gipps. Simulation of pedestrian traffic in buildings. Technical report, Institut für Verkehrswesen, Universität Karlsruhe, 1986.

-
- [GM85] P.G. Gipps and B. Marksjo. A micro-simulation model for pedestrian flows. *Mathematics and Computers in Simulation*, 27 :95–105, 1985.
- [Har81] A. Haraux. *Nonlinear evolution equations - global behaviour of solutions*. Springer Verlag, 1981.
- [HB00] S.P. Hoogendoorn and P.H.L. Bovy. Gas-kinetic modeling and simulation of pedestrian flows. *Transportation Research Record*, 1710 :28–36, 2000.
- [HB04a] S.P. Hoogendoorn and P.H.L. Bovy. Dynamic user-optimal assignment in continuous time and space. *Transportation Research B*, 38 :571–592, 2004.
- [HB04b] S.P. Hoogendoorn and P.H.L. Bovy. Pedestrian route-choice and activity scheduling theory and models. *Transportation Research B*, 38 :169–190, 2004.
- [HD05] S.P. Hoogendoorn and W. Daamen. Pedestrian behavior at bottlenecks. *Transportation Science*, 39 :147–159, 2005.
- [Hel92a] D. Helbing. Boltzmann-like and boltzmann-fokker-planck equations as a foundation of behavioural models. *Physica A*, 196 :546–573, 1992.
- [Hel92b] D. Helbing. A fluid-dynamic model for the movement of pedestrians. *Complex Systems*, 6 :391–415, 1992.
- [Hel04] D. Helbing. Collective phenomena and states in traffic and self-driven many-particles systems. *Computational Materials Science*, 30 :180–187, 2004.
- [Hen71] L.F. Henderson. The stastitics of crowd fluids. *Nature*, 229 :381–383, 1971.
- [Hen74] L.F. Henderson. On the fluid mechanics of human crowd motion. *Transportation Research*, 8 :509–515, 1974.
- [HFV00a] D. Helbing, I.J. Farkas, and T. Vicsek. Freezing by heating in a driven mesoscopic system. *Physical Review Letters*, 84 :1240–1243, 2000.
- [HFV00b] D. Helbing, I.J. Farkas, and T. Vicsek. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407 :487, 2000.
- [HINT03] D. Helbing, M. Isobe, T. Nagatani, and K. Takimoto. Lattice gas simulation of experimentally studied evacuation dynamics. *Physical Review E*, 67 :067101, 2003.
- [HKM97] D. Helbing, J. Keltsch, and P. Molnár. Modelling the evolution of human trail systems. *Nature*, 388 :47–49, 1997.
- [HM95] D. Helbing and P. Molnár. Social force model for pedestrians dynamics. *Physical Review E*, 51 :4282–4286, 1995.
- [HM97] D. Helbing and P. Molnár. Self-organisation phenomena in pedestrian crowds. In F. Schweitzer, editor, *Self-organisation of complex structure : from individual to collective dynamics*. Gordon and Breach Science Publisher, Amsterdam, 1997.
- [HMF01] D. Helbing, P. Molnár, I.J. Farkas, and K. Bolay. Self-organizing pedestrian movement. *Environment and Planning B : Planning and Design*, 28 :361–383, 2001.

- [HMK03] H. Klüpfel and T. Meyer-König. Characteristics of the pedgo software for crowd movement and egress simulation. In E. Galea, editor, *Pedestrian and Evacuation Dynamics 2003*, pages 331–340, University of Greenwich, 2003. CMS Press, London.
- [HSKM97] D. Helbing, F. Schweitzer, J. Keltsch, and P. Molnár. Active walker model for the formation of human and animal trail systems. *Physical Review E*, 56 :2527–2539, 1997.
- [Hug00] R. Hughes. The flow of large crowds of pedestrians. *Mathematics and Computers in Simulation*, 53 :367–370, 2000.
- [Hug02] R. Hughes. A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transportation Research B*, 36(6) :507–535, 2002.
- [HV99] D. Helbing and T. Vicsek. Optimal self-organisation. *New Journal of physics*, 1 :13.1–13.17, 1999.
- [KKN⁺03] A. Kirchner, H. Klüpfel, K. Nishinari, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. Simulation of competitive egress behavior : comparison with aircraft evacuation data. *Physica A*, 324 :689–697, 2003.
- [KKWS01] A. Keßel, H. Klüpfel, J. Wahle, and M. Schreckenberg. Microscopic simulation of pedestrian crowd motion. In M. Schreckenberg and S. D. Sharma, editors, *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, pages 193–202. Springer Berlin, 2001.
- [KMKS01] H. Klüpfel, T. Meyer-König, and M. Schreckenberg. Microscopic modeling of pedestrian motion-comparison of simulation results to an evacuation exercise in a primary school. In *Traffic and Granular Flow*, 2001.
- [KMKWS00] H. Klüpfel, T. Meyer-König, J. Wahle, and M. Schreckenberg. Microscopic simulation of evacuation processes on passenger ships. In *Proceedings of the 4th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, pages 63–71. Springer London, 2000.
- [KNS03] A. Kirchner, K. Nishinari, and A. Schadschneider. Friction effects and clogging in a cellular automaton model for pedestrian dynamics. *Physical Review E*, 67 :056122, 2003.
- [KS96] R. Kimmel and J. Sethian. Fast marching methods for computing distance maps and shortest paths. Technical Report 669, CPAM, Univ. of California, Berkeley, 1996.
- [KS02] A. Kirchner and A. Schadschneider. Simulation of evacuation processes using a bionics-inspired cellular automaton model for pedestrians dynamics. *Physica A*, 312 :260–276, 2002.
- [Lef07] A. Lefebvre. *Modélisation numérique d’écoulements fluide/particules, Prise en compte des forces de lubrification*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, Faculté des sciences d’Orsay, 2007.
- [Lef08] A. Lefebvre. Numerical simulations of gluey particles. To appear in M2AN, 2008.

-
- [Løv94] G.G. Løvås. Modelling and simulation of pedestrian traffic flow. *Transportation Research B*, 28 :429–443, 1994.
- [Mau04] B. Maury. *Analyse Fonctionnelle, exercices et problèmes corrigés*. Ellipses, 2004.
- [Mau06] B. Maury. A time-stepping scheme for inelastic collisions. *Numerische Mathematik*, 102(4) :649–679, 2006.
- [MBM96] H.C. Muir, D.M. Bottomley, and C. Marrison. Effects of motivation and cabin configuration on emergency aircraft evacuation behavior and rates of egress. *International Journal of Aviation Psychology*, 1996.
- [MKKKS01] T. Meyer-König, H. Klüpfel, A. Keßel, and M. Schreckenberg. Simulating mustering and evacuation processes onboard passenger vessels : Model and applications. In *International Symposium on Human Factors On Board*, 2001.
- [Mor62] J.J. Moreau. Décomposition orthogonale d’un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires. *C. R. Acad. Sci, Ser. I*, 255 :238–240, 1962.
- [Mor77] J.J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *J. Differential Equations*, 26(3) :347–374, 1977.
- [MV07] B. Maury and J. Venel. Un modèle de mouvements de foule. In *ESAIM : Proc.*, volume 18, pages 143–152, 2007.
- [Nag98] K. Nagel. From particle hopping models to traffic flow theory. *Transportation Research Record*, 1644 :1–9, 1998.
- [NW69] P.D. Navin and R.J. Wheeler. Pedestrian flow characteristics. *Traffic Engineering*, 39 :31–36, 1969.
- [PRL00] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar, and L. Thibault. Local differentiability of distance functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352 :5231–5249, 2000.
- [Sch01] A. Schadschneider. Cellular automaton approach to pedestrian dynamics-theory. In M. Schreckenberg and S. D. Sharma, editors, *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, pages 75–85. Springer Berlin, 2001.
- [SKN03] A. Schadschneider, A. Kirchner, and K. Nishinari. From ant trails to pedestrian dynamics. *Applied Bionics and Biomechanics*, 1 :11–19, 2003.
- [Sti93] G.K. Still. New computer system can predict human behavior response to building fires. *Fire*, 84 :40–41, 1993.
- [Sti00] G.K. Still. *Crowd Dynamics*. PhD thesis, University of Warwick, <http://www.crowddynamics.com/Thesis/Contents.htm>, 2000.
- [Thi03] L. Thibault. Sweeping process with regular and nonregular sets. *J. Differential Equations*, 193(1) :1–26, 2003.
- [TN01] Y. Tajima and T. Nagatani. Scaling behavior of crowd flow outside a hall. *Physica A*, 292 :545–554, 2001.
- [Ven09] J. Venel. Integrating strategies in numerical modelling of crowd motion. In *Pedestrian and Evacuation Dynamics '08*. Springer, 2009. To appear.

- [Wei93] U. Weidmann. Transporttechnik der fussgaenger. Technical Report 90, Schriftenreihe des Instituts für Verkehrsplanung, Transporttechnik, Strassen-und Eisenbahnbau, ETH Zürich, Switzerland, 1993.
- [YS89] S.J. Yuhaski and J.M. Macgregor Smith. Modelling circulation systems in buildings using state dependent queueing models. *Queueing Systems*, 4 :319–338, 1989.

N° d'impression 2870
4ème trimestre 2008

Résumé

Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule

Nous nous intéressons à la modélisation des mouvements de foule causés par des situations d'évacuation d'urgence. L'objectif de cette thèse est de proposer un modèle mathématique et une méthode numérique de gestion des contacts, afin de traiter les interactions locales entre les personnes pour finalement mieux rendre compte de la dynamique globale du trafic piétonnier.

Nous proposons un modèle microscopique de mouvements de foule qui repose sur deux principes. D'une part, chaque personne a une vitesse souhaitée, celle qu'elle aurait en l'absence des autres. D'autre part, la vitesse réelle des individus prend en compte une certaine contrainte d'encombrement maximal. Plus précisément, la vitesse réelle est la projection de la vitesse souhaitée sur un ensemble dit de vitesses admissibles (qui respectent une contrainte de non-chevauchement des disques représentant les individus). Nous proposons d'étudier ce modèle en trois parties.

La première partie est consacrée à son étude théorique. Après reformulation, le problème prend la forme d'une inclusion différentielle du premier ordre. Nous démontrons alors son caractère bien posé : tout d'abord dans un cas particulier (où les individus se déplacent dans un couloir) grâce à la théorie des opérateurs maximaux monotones, puis en toute généralité, en utilisant des résultats sur les processus de rafle par un ensemble uniformément prox-régulier.

La seconde partie est dédiée à la résolution numérique du problème précédent. Nous proposons un schéma numérique en se basant sur le second principe du modèle, à savoir en calculant une vitesse réelle discrète qui soit la projection de la vitesse souhaitée sur un ensemble de vitesses admissibles "au premier ordre". En reformulant cette projection sous la forme d'un problème point-selle, nous démontrons sa convergence par une méthode de compacité, en prouvant le caractère uniformément borné des multiplicateurs de Lagrange.

La troisième partie est consacrée à la programmation et à la présentation des résultats numériques. Nous proposons d'utiliser l'algorithme d'Uzawa afin de calculer la vitesse réelle discrète comme projection de la vitesse souhaitée. Ensuite, nous nous intéressons au premier point du modèle en choisissant une vitesse souhaitée particulière (celle dirigée par le plus court chemin évitant les obstacles). Pour cela, nous présentons une programmation orientée objet incluant une méthode de type Fast Marching et ayant pour but de simuler l'évacuation d'une structure de plusieurs étages présentant une géométrie quelconque. Nous finissons avec d'autres choix de vitesse souhaitée (par exemple, en ajoutant des stratégies individuelles) et présentons les résultats numériques associés. Ces simulations numériques permettent de retrouver les phénomènes observés lors de déplacements piétonniers mais aussi de préciser le rôle des multiplicateurs de Lagrange. Apparaissant comme un moyen de quantifier le non-respect des contraintes par la vitesse souhaitée, ces derniers peuvent être interprétés comme des termes de pression subie par les individus.

Mots clés : mouvements de foule, contacts, analyse convexe, inclusion différentielle, processus de rafle, ensemble prox-régulier, minimisation sous contrainte, algorithme de rattrapage, programmation orientée objet.

Codes AMS (MSC 2000) : 34A60, 47H04, 65L20, 70F35, 90C46.