



**HAL**  
open science

# Algorithmes progressifs stables pour l'approximation de courbes et surfaces

Abdelmalek Nigro

► **To cite this version:**

Abdelmalek Nigro. Algorithmes progressifs stables pour l'approximation de courbes et surfaces. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1995. Français. NNT : . tel-00346056

**HAL Id: tel-00346056**

**<https://theses.hal.science/tel-00346056>**

Submitted on 11 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

présentée par

**Abdelmalek NIGRO**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR  
DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1**

(arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Algorithmes Progressifs Stables  
Pour l'Approximation de  
Courbes & Surfaces**

Date de Soutenance : 25 Octobre 1995

Composition du jury :

Président : M. B. LACOLLE

Rapporteurs : M. A. LE MEHAUTE  
M. P. SABLONNIERE

Examineurs : M. P. J. LAURENT  
Mme. M. L. MAZURE

**Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG**



Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe de modélisation géométrique et approximation du Laboratoire de Modélisation et Calcul (LMC-IMAG), à Grenoble.

## Reconnaissance

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au gouvernement Français et au gouvernement Algérien qui m'ont donné l'occasion de poursuivre mes études en France et de réaliser ce travail.

## Remerciements

Je remercie Monsieur Bernard Lacolle, Professeur à l'U.J.F, de l'honneur qu'il me fait de présider le jury. Je le remercie pour sa sympathie tout au long de mon séjour au sein de l'équipe.

Je remercie Monsieur Alain Le Méhauté, Professeur à l'E.N.S.T de Bretagne, et Monsieur Paul Sablonnière, Professeur à l'I.N.S.A de Rennes, d'avoir accepté d'être mes rapporteurs.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à Pierre-Jean Laurent, Professeur à l'U.J.F et directeur de cette thèse, pour son accueil au sein de l'équipe, ses conseils et ses encouragements dans des moments de relachement. C'est un grand honneur pour moi d'avoir travaillé avec un grand chercheur comme P.J.L et je le remercie beaucoup de m'avoir laissé jouer le rôle principal dans l'une des pièces de théâtre qu'il dirige depuis longtemps.

Je remercie énormément Marie-Laurence Mazure, Maître de conférence à l'U.J.F, pour sa gentillesse, son aide et ses conseils qui ont contribué à améliorer la rédaction de cette thèse.

Je vous remercie tous pour l'honneur que vous me faites par votre présence aujourd'hui.

## Et puis qui ? . . . Les thésards bien sûr

Je remercie tous les membres de l'équipe Géo-Algo et de l'équipe E.d.p pour la bonne ambiance qu'ils ont su créer et surtout maintenir au cours de ces années de thèse. Merci particulièrement à : Géraldine, Hélène, Khanh, Luc, Mireille, Momo, Nicolas, Otman, Pierre-Olivier, Raoul, ..., qui m'ont accueilli très amicalement et surtout qui ont pu me supporter.

Mais comment pourrais-je oublier mes compagnons de montagne : Bruno, Christophe, Emmanuelle, Laurence et Sabine. C'est grâce à eux que j'ai découvert les magnifiques montagnes de Grenoble. Les nombreuses randonnées qu'on a faites ensemble nous ont permis de mieux nous connaître et de créer une bonne et solide amitié.

Mes derniers remerciements s'adresseront à : toute la famille Nigro de Paris, tout particulièrement à mon cousin Kamel (je n'oublierai jamais ce que tu as fait pour moi), et à la famille Bonjour pour sa confiance et sa gentillesse dans des moments difficiles.

## Une grande pensée pour

Ma mère, mon père, mes frères et soeurs qui, certes étaient loin de moi, mais étaient et sont toujours près de moi, dans mes pensées et dans mon coeur.



*“ Au peuple algérien qui résiste et lutte pour une paix  
qui effacera toute cette souffrance. ”*



# TABLE DES MATIERES

<b>Introduction</b> . . . . .	1
<b>Chapitre 1. Rappels généraux</b> . . . . .	5
1. La stabilité d'un schéma récursif . . . . .	6
1.1 <i>Stabilité d'une équation aux différences</i> . . . . .	6
1.2 <i>Stabilité d'une relation matricielle</i> . . . . .	7
1.3 <i>Remarques importantes</i> . . . . .	8
2. Localisation des racines d'un polynôme . . . . .	9
2.1 <i>Matrice d'intérieur positif</i> . . . . .	10
2.2 <i>Critère de Schur-Cohn</i> . . . . .	10
2.3 <i>Exemples</i> . . . . .	11
2.4 <i>Théorème de Marden</i> . . . . .	11
3. Les courbes splines géométriques . . . . .	13
3.1 <i>Introduction</i> . . . . .	13
3.2 <i>Continuité géométrique pour les courbes</i> . . . . .	14
3.3 <i>Continuité géométrique d'ordre 2</i> . . . . .	16
3.4 <i>Les <math>\beta</math>-splines cubiques</i> . . . . .	17
4. Annexe sur les splines géométriques . . . . .	18
4.1 <i>Construction d'une base de <math>\beta</math>-splines</i> . . . . .	18
4.2 <i>Influence des paramètres de formes</i> . . . . .	18
4.3 <i>Autres exemples de splines</i> . . . . .	22
<b>Chapitre 2. Interpolation progressive stable</b> . . . . .	25
1. Introduction . . . . .	26
2. Méthode des A-splines . . . . .	27
3. Interpolation progressive quadratique . . . . .	30
4. Interpolation progressive cubique . . . . .	32
4.1 <i>Définition et notation</i> . . . . .	32
4.2 <i>Algorithme</i> . . . . .	33
4.3 <i>Condition nécessaire et suffisante de stabilité</i> . . . . .	33
4.4 <i>Résultats numériques et interprétation</i> . . . . .	35
4.5 <i>Quelques remarques</i> . . . . .	43
5. Interpolation progressive de degré $n$ . . . . .	44
6. Interpolation progressive rationnelle . . . . .	50
6.1 <i>Introduction</i> . . . . .	50
6.2 <i>Interpolation rationnelle quadratique</i> . . . . .	51
6.3 <i>Interpolation rationnelle cubique</i> . . . . .	52

7. Généralisation de l'interpolation progressive stable . . . . .	55
7.1. <i>Introduction</i> . . . . .	55
7.2. <i>Interpolation progressive par spline <math>C^{n-1}</math> appartenant par           morceau à un sous espace de dimension <math>n + 1</math></i> . . . . .	56
7.3. <i>Exemples d'espace</i> . . . . .	64
7.4. <i>Les <math>Q</math>-splines comme fonctions splines instables</i> . . . . .	71
<b>Chapitre 3. Approximation progressive stable . . . . .</b>	<b>73</b>
1. <i>Introduction</i> . . . . .	74
2. <i>Moindres carrés sur base des splines <math>G^1</math></i> . . . . .	75
2.1 <i>La méthode des moindres carrés discrète</i> . . . . .	75
2.2 <i>La méthode des moindres carrés continue</i> . . . . .	81
3. <i>Lissage progressif avec continuité géométrique <math>G^2</math></i> . . . . .	83
<b>Chapitre 4. Interpolation progressive bicubique . . . . .</b>	<b>91</b>
1. <i>Définition et notation</i> . . . . .	92
2. <i>Construction d'un morceau de surface de la spline paramétrique           bicubique</i> . . . . .	93
3. <i>Calcul des éléments définissant un morceau de la spline</i> . . . . .	95
4. <i>Conditions initiales et résultats numériques</i> . . . . .	99
<b>Chapitre 5. Interpolation progressive triangulaire 103</b>	
1. <i>Problème d'interpolation progressive sur une triangulation de <math>\mathbb{R}^2</math></i> . . . . .	104
2. <i>Première étape de l'algorithme d'interpolation progressive triangu-           laire</i> . . . . .	107
2.1. <i>Calcul progressif des dérivées partielles</i> . . . . .	107
2.2. <i>Stabilité de l'algorithme</i> . . . . .	110
2.3. <i>Remarques et résultats</i> . . . . .	111
2.4. <i>Etude d'un cas particulier</i> . . . . .	115
3. <i>Interpolation des données frontière sur un triangle</i> . . . . .	117
3.1. <i>Eléments finis classiques</i> . . . . .	118
3.2. <i>Interpolants triangulaires transfinis de Nielson</i> . . . . .	130
4. <i>Deuxième étape de l'algorithme d'interpolation progressive triangu-           laire</i> . . . . .	134
4.1. <i>Méthode de remplissage</i> . . . . .	134
4.2. <i>Triangulation et progression</i> . . . . .	136
5. <i>Interpolation progressive triangulaire de classe <math>G^1</math></i> . . . . .	143
5.1. <i>Calcul progressif du plan tangent</i> . . . . .	143
5.2. <i>Stabilité de l'algorithme</i> . . . . .	144
5.3. <i>Interpolant discret de classe <math>G^1</math></i> . . . . .	147

<b>Chapitre 6. Contact géométrique et interpolation</b>	<b>153</b>
1. Fonctions affines et morceaux de Bézier triangulaires . . . . .	154
1.1. <i>Fonctions affines et polynômes</i> . . . . .	154
1.2. <i>Relation entre dérivée et floraison</i> . . . . .	154
1.3. <i>Morceaux de Bézier triangulaires</i> . . . . .	155
2. Raccordement $G^2$ entre deux surfaces . . . . .	156
2.1. <i>Raccordement <math>G^2</math> en un point</i> . . . . .	156
2.2. <i>Raccordement <math>G^2</math> entre deux surfaces triangulaires</i> . . . . .	158
3. Représentation polaire d'un raccordement $G^2$ simplifié . . . . .	161
4. Interpolation progressive stable . . . . .	166
4.1. <i>Numérotation des points définissant la progression</i> . . . . .	166
4.2. <i>Remarques sur la numérotation</i> . . . . .	169
4.3. <i>Le raccordement <math>G^2</math> n'est pas nécessaire</i> . . . . .	173
4.4. <i>Situation nécessitant un traitement particulier</i> . . . . .	176
4.5. <i>Méthode de remplissage <math>G^1</math></i> . . . . .	198
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>209</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>211</b>



# INTRODUCTION

Le problème de l'interpolation de données discrètes dans le plan ou dans l'espace touche un champ d'application très large et très varié (CAD, CAGD, CG&A, ...). Plusieurs approches et méthodes pour résoudre ce problème ont été développées par différents auteurs dans des contextes variés. Il existe dans la littérature, des travaux très performants qui traitent du sujet lorsque l'ensemble des données est connu. Ces travaux ont permis entre autre de faire apparaître l'influence des paramétrisations utilisées sur la qualité de l'approximation.

Dans le travail présenté ici, le problème de l'interpolation se distingue des problèmes classiques par le fait que les points sont obtenus progressivement, c'est à dire à un instant donné, seules sont connues les données jusqu'à cet instant. Nous nous sommes inspirés d'un article de Avraam Seredinski [52], le seul existant dans la littérature à notre connaissance, dans lequel est présenté un algorithme stable permettant de réaliser le calcul progressif des coefficients de la fonction spline cubique interpolant les données discrètes. Ces splines spéciales, qu'il a nommé "A-splines" se distinguent des autres splines par la possibilité de calculer leurs coefficients de manière récurrente. L'auteur dans son article, affirme que les A-splines récurrentes peuvent être utilisées pour le traitement, le transfert et la mémorisation de différents signaux (vidéo, parole, télédétection, etc...). Ainsi il utilise les A-splines pour obtenir une compression importante des signaux de provenance arbitraire.

A partir de ce résultat, nous avons généralisé et développé la méthode des A-splines. Plusieurs algorithmes (que nous avons nommé "algorithmes d'interpolation progressifs") sont alors proposés pour résoudre ce problème qui nous a beaucoup intéressé. Deux notions fondamentales se dégagent de ces algorithmes, la notion de continuité géométrique et la notion de stabilité.

Depuis longtemps, les splines (fonctions polynomiales par morceaux) sont utilisées dans de nombreux problèmes, notamment l'interpolation, l'approximation et le lissage. Une caractéristique importante de ces fonctions est la manière de raccorder les morceaux pour en former une fonction spline ayant un ordre de continuité désiré. La continuité paramétrique d'ordre  $k$  et notée  $C^k$  a été depuis longtemps utilisée et a permis de résoudre certains problèmes qui demandent la continuité des vecteurs dérivés aux points de raccordement (et donc exigent des paramétrisations spéciales). On a vu alors l'apparition de différents type de splines, les splines naturelles, B-splines, splines exponentielles, Q-splines, ...

Cependant, dans la plupart des applications de CAGD, lorsqu'on représente une courbe (ou une surface) en paramétrique, seul le graphe de la fonction est important (et non la façon dont celui-ci est parcouru en fonction du paramètre). On voit ainsi apparaître la possibilité d'introduire une notion de raccordement géométrique notée  $G^k$  à l'ordre  $k$ .

Le lien entre un raccordement paramétrique et un raccordement géométrique est simple:

*Deux morceaux (de courbes ou surfaces)  $P$  et  $Q$  se raccordent  $G^k$  en un point commun s'il existe une reparamétrisation  $\varphi$  régulière  $C^k$  telle que  $Q$  et  $P \circ \varphi$  se raccordent  $C^k$  en ce point.*

Une conséquence immédiate de ce concept est l'apparition de nouveaux coefficients (les dérivées de  $\varphi$  au point de raccordement), appelés paramètres de forme, et qui sont à la disposition de l'utilisateur pour modifier la forme de la fonction spline.

La notion de stabilité est très ancienne et se retrouve dans tout type de calcul itératif où il est nécessaire d'analyser la sensibilité des calculs lorsqu'on perturbe les données.

*Un calcul itératif est stable si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent.*

Puisque les algorithmes proposés dans ce travail sont tous itératifs, il est clair que notre but principal est d'étudier leur stabilité. Nous avons exprimé, dans le cas paramétrique, la stabilité au moyen des paramètres de forme issus du raccordement géométrique. Ce résultat est très important car il nous a permis de donner un nouveau rôle à ces paramètres, celui d'absorber les oscillations engendrées par le calcul progressif. Dans le cas où les données sont représentées par une fonction spline à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , la notion de continuité géométrique n'a plus de sens et pour assurer la stabilité nous avons introduit d'autres coefficients.

Le chapitre 1 est un rappel sur les deux notions fondamentales utilisées dans ce travail, la continuité géométrique et la stabilité. On donne une caractérisation simple de la stabilité d'un schéma récursif (itératif ou progressif) en fonction des racines d'un polynôme caractéristique associé au schéma. Pour cela nous avons donné brièvement quelques résultats essentiels sur la localisation des racines d'un polynôme. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on rappelle les définitions classiques sur les splines géométriques ou plus précisément sur le raccordement géométrique entre deux morceaux d'une spline. A la fin du chapitre, le lecteur trouvera une annexe sur les splines géométriques contenant quelques résultats connus.

Dans le chapitre 2, on commence par décrire intégralement la méthode des  $A$ -splines, puis on donne deux représentations du problème de l'interpolation progressive.

La première représentation est en paramétrique, et les données de  $\mathbb{R}^d$  sont représentées par une courbe spline géométrique de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , polynomiale par morceaux, de degré  $n$ . Nous donnerons des conditions sur les paramètres de forme qui sont nécessaires et suffisantes pour la stabilité dans le cas où  $n = 2, 3, 4$ , les cas les plus courants.

Ensuite, on a présenté un algorithme d'interpolation rationnelle où l'on a utilisé les poids d'une courbe rationnelle pour stabiliser l'algorithme.

La deuxième représentation consiste à représenter les données de  $\mathbb{R}^2$  par une fonction spline de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous commencerons par donner une classe de

fonctions splines polynomiales dépendants d'un certain nombre de coefficients dont les  $A$ -splines sont un cas particulier. Ensuite, une extension de ce résultat à des fonctions non polynomiales est donnée et plusieurs exemples de splines sont présentés.

Les chapitres 3 et 4 sont des conséquences directes des idées développées dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, on a étendu le problème de l'interpolation à un problème d'approximation. On présente alors deux méthodes classiques, la méthode des moindres carrés et le lissage; dans les deux cas, on démontre la stabilité. Dans le chapitre 4, on utilise les splines cubiques d'interpolation pour définir une surface produit tensoriel.

Après avoir examiné le cas des courbes, nous nous intéresserons désormais à celui des surfaces définies sur une triangulation.

Dans le chapitre 5, on reprend la définition du problème et on définit une stratégie simple de progression qui va nous permettre de développer un algorithme d'interpolation de données de  $\mathbb{R}^3$  par une fonction spline  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . L'algorithme est composé de deux étapes : la première étape consiste à calculer progressivement les dérivées partielles de la fonction aux sommets de la triangulation supposée déjà construite. Des conditions de stabilité très intéressantes sont alors établies.

La deuxième étape de l'algorithme est une étape de remplissage : connaissant la valeur de la fonction et de son gradient en chaque sommet d'un triangle, comment définir la fonction sur le triangle tout entier? Pour cela, nous avons utilisé quelques méthodes qui existent déjà, par exemple les interpolants de Nielson et l'élément de Powell-Sabin. Notons que plusieurs méthodes se trouvent dans la littérature, notamment toute la théorie développée par Barnhill, Birkhoff et Gordan. On finit le chapitre par un deuxième algorithme similaire à celui qu'on vient de décrire, sauf que les données sont représentées par une fonction spline paramétrique  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Dans le dernier chapitre, on décrit un nouvel algorithme d'interpolation  $G^1$  de données de  $\mathbb{R}^3$ . Cet algorithme se distingue de celui décrit à la fin du chapitre 5, par le fait qu'on ne dissocie pas le problème de stabilité et le problème de remplissage, c'est à dire qu'on passe d'un triangle à son voisin par un raccordement géométrique le long de l'arête commune. On donnera tout d'abord une formulation d'un raccordement géométrique entre deux morceaux de surfaces triangulaires en termes de dérivées partielles et de foraisons. Ensuite, une description détaillée de l'algorithme est donnée, tout en montrant les difficultés rencontrées concernant à la fois la stabilité et la progression. Par exemple, lors de la progression dans une triangulation, des situations particulières apparaissent et nécessitent donc un traitement différent. Dans ce contexte, nous avons présenté une nouvelle méthode de remplissage basée sur des raccordements géométriques spéciaux.



# Chapitre 1.

## RAPPELS GENERAUX

1. LA STABILITE D'UN SCHEMA RECURSIF
  - 1.1 *Stabilité d'une équation aux différences*
  - 1.2 *Stabilité d'une relation matricielle*
  - 1.3 *Remarques importantes*
2. LOCALISATION DES RACINES D'UN POLYNOME
  - 2.1 *Matrice d'intérieur positif*
  - 2.2 *Critère de Schur-Cohn*
  - 2.3 *Exemples*
  - 2.4 *Théorème de Marden*
3. LES COURBES SPLINES GEOMETRIQUES
  - 3.1 *Introduction*
  - 3.2 *Continuité géométrique pour les courbes*
  - 3.3 *Continuité géométrique d'ordre 2*
  - 3.4 *Les  $\beta$ -splines cubiques*
4. ANNEXE SUR LES SPLINES GEOMETRIQUES
  - 4.1 *Construction d'une base de  $\beta$ -splines*
  - 4.2 *Influence des paramètres de formes*
  - 4.3 *Autres exemples de splines*

## 1. LA STABILITE D'UN SCHEMA RECURSIF

Dans le problème de l'interpolation progressive que nous allons traiter tout au long de ce travail, la solution à trouver est souvent caractérisée par une relation de récurrence. Cette relation est définie à partir de conditions initiales (qu'on précisera par la suite) et peut être représentée sous les deux aspects suivants.

- Soit sous la forme d'une équation aux différences d'ordre  $k$  :

$$\sum_{i=0}^k a_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^k b_i x_{n-i} \quad (a_0 = 1), \quad a_i, x_i, y_i \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

ou plus précisément

$$y_n = - \sum_{i=1}^k a_i y_{n-i} + \sum_{i=0}^k b_i x_{n-i},$$

si  $\{x_i\}$  représente les données et  $\{y_i\}$  la solution. Donc à l'étape  $n$ ,  $y_n$  est déterminé à partir des étapes  $(n-1), \dots, (n-k)$ . Pour que la relation soit bien définie, on a besoin de connaître  $y_0, \dots, y_{k-1}$ .

- Soit par une relation matricielle :

$$Y_n = AY_{n-1} + b, \quad (1.2)$$

où  $Y_n$  représente la solution à l'étape  $n$ ,  $A$  est une matrice carrée et  $b$  un vecteur dépendant des données. Pour que la relation soit bien définie, on a besoin de connaître  $Y_0$ .

Dans les deux cas, il est nécessaire d'analyser la sensibilité de la relation à des perturbations sur les données, d'où la notion de stabilité. La définition la plus ancienne de cette notion qui est purement numérique, est la suivante :

*Un processus de calcul itératif est dit stable si les erreurs d'arrondi ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent.*

Nous trouvons plusieurs formulations mathématiques de cette notion dans la bibliographie, selon les différents aspects des problèmes traités (e.d.p., résolution de systèmes, traitement du signal, ...). On se contente ici de donner une caractérisation simple de la stabilité d'un calcul itératif de la forme (1.1) ou (1.2) qui sera utilisé dans nos algorithmes.

### 1. 1. Stabilité d'une équation aux différences

Les équations aux différences sont obtenues par discrétisation d'équations différentielles; par conséquent les résultats sont analogues à ceux qu'on peut trouver sur les équations différentielles. On résume ceux-ci comme suit :

Nous associons à l'équation (1.1) l'équation aux différences homogène définie par :

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_k y_{n-k} = 0. \quad (1.3)$$

Si on note  $r_1, \dots, r_k$  les racines de l'équation caractéristique définie par :

$$r^k + a_1 r^{k-1} + \dots + a_k = 0, \quad (1.4)$$

alors on caractérise la stabilité de la relation (1.1) de la façon suivante :

*On dira qu'un schéma récursif défini par l'équation aux différences (1.1) est stable si et seulement si les racines (réelles ou complexes) de l'équation caractéristique (1.4) se trouvent dans le cercle unité, i.e.,  $|r_i| < 1$ ,  $i = 1, \dots, k$ .*

## 1. 2. Stabilité d'une relation matricielle

Rappelons quelques définitions très classiques sur les matrices.

**Rappels :** Considérons une matrice carrée  $A$  d'ordre  $k$ .

- Le polynôme caractéristique  $\varphi(\lambda)$  de  $A$  est défini par :

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{j=1}^k (\lambda_j - \lambda).$$

- Les racines de  $\varphi$  sont appelées valeurs propres de  $A$ .
- Le rayon spectral de  $A$  est défini par :

$$\rho(A) = \max_{i=1, \dots, k} |\lambda_i|.$$

- Si  $A$  est une matrice rectangulaire d'ordre  $(k, l)$ , on appelle valeurs singulières de  $A$  les valeurs propres de la matrice carrée symétrique  ${}^t A A$ .

**Définition 1.1** *On dira qu'une matrice carrée est stable si et seulement si toutes ses valeurs propres se trouvent à l'intérieur du cercle unité. Autrement dit, si et seulement si*

$$\rho(A) < 1. \quad \dashv$$

A l'aide de cette définition, on caractérise la stabilité de la relation de récurrence (1.2) de la façon suivante :

*On dira qu'un schéma récursif défini par la relation (1.2) est stable si et seulement si la matrice  $A$  est stable.*

### 1. 3. Remarques importantes

• Une équation aux différences définie par (1.1) est un cas particulier de la relation matricielle (1.2). En effet, posons

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{n-k+1} \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation (1.1) est équivalente à :

$$Y_n = AY_{n-1} + b,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^k b_i x_{n-i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On démontre facilement que le polynôme caractéristique de  $A$  s'écrit :

$$P_k(\lambda) = (-1)^k [a_k + a_{k-1} \lambda + \dots + a_1 \lambda^{k-1} + \lambda^k].$$

Or les racines de  $P_k(\lambda)$  sont exactement les racines de l'équation (1.4); par conséquent la notion de stabilité définie par le schéma (1.2) donne la notion de stabilité définie par (1.1).

• Dans certains cas, nous rencontrerons un calcul itératif défini par :

$$Y_n = A_1 Y_{r_1(n)} + A_2 Y_{r_2(n)} + b, \quad (1.5)$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices carrées et  $r_1(n), r_2(n) < n$  sont des indices tels que  $Y_{r_1(n)}$  et  $Y_{r_2(n)}$  sont déjà connus. Nous définissons la stabilité de ce type de calcul comme suit.

*On dira qu'un schéma récursif défini par la relation (1.5) est stable si et seulement si la matrice  ${}^t A A$  est stable, où  $A$  est la matrice rectangulaire définie par  $A := [A_1 \ A_2]$ .*

Cette définition de stabilité revient tout simplement à dire que dans la relation (1.2), si la matrice  $A$  est rectangulaire, le processus est stable si

$$\|A\|_2 < 1,$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme matricielle associée à la norme euclidienne.

On aurait aimé prendre également cette caractérisation dans le cas où la matrice est carrée (considéré comme cas particulier de matrice rectangulaire), mais c'est une condition trop forte. En effet, considérons l'équation aux différences (1.1) avec  $k = 2$  :

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}. \quad (\star)$$

On sait que l'équation est stable au sens introduit dans le paragraphe (1.1) si et seulement si les racines de

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0,$$

sont de module inférieur à 1; soit (voir dans la section suivante le critère de Schur-Cohn) si et seulement si

$$|a_2| < 1 \quad \text{et} \quad |a_1| < 1 + a_2. \quad (\star\star)$$

D'autre part, on sait que la matrice correspondant à  $(\star)$  est :

$$A := \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on prend comme critère de stabilité  $\rho(A) < 1$ , il est clair qu'on retrouve les conditions  $(\star\star)$ , puisque

$$\det(A - \lambda I) = (-a_1 - \lambda)(-\lambda) + a_2 = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Par contre, si on prend comme critère  $\|A\|_2 < 1$ , on n'a même pas de domaine de stabilité. En effet, les valeurs propres de la matrice  ${}^t A A$  sont alors les solutions de l'équation

$$\lambda^2 - (1 + a_1^2 + a_2^2)\lambda + a_2^2 = 0,$$

qui a toujours une racine extérieure au cercle unité.

## 2. LOCALISATION DES RACINES D'UN POLYNOME

L'étude des racines d'un polynôme intervient dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment dans l'analyse numérique matricielle où les valeurs propres d'une matrice d'ordre  $n$  sont tout simplement les racines d'un polynôme de degré  $n$ . Etant données les définitions introduites au paragraphe précédent et qui sont relatives à la stabilité, il est clair que ce n'est pas le calcul précis des racines qui nous intéresse, mais bien leur localisation dans un cercle donné (sans faire de restriction, on prendra le cercle unité). Plusieurs méthodes et critères, pour déterminer si les racines d'un polynôme se trouvent à l'intérieur du cercle unité, se trouvent dans la littérature [39]. Nous présentons un critère de calcul, appelé critère de Schur-Cohn [35], dans le cas où les coefficients du polynôme sont réels. Ce critère donne une condition nécessaire et suffisante pour que les racines d'un polynôme  $P(\lambda)$  défini par :

$$P(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n = a_n \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \quad (1.6)$$

se trouvent à l'intérieur du cercle unité  $|z| = 1$ . Pour cela nous avons besoin de quelques définitions.

## 2. 1. Matrice d'intérieur positif

Considérons une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$ , à coefficients réels.

**Définition 1.2** On appelle intérieurs de  $A$ , la matrice  $A$  elle-même et toutes les matrices obtenues en enlevant successivement à la fois les première et dernière lignes et les première et dernière colonnes.

**Exemples :**

Pour  $n = 4$ , les intérieurs de  $A$  sont :

$$A_1 = A \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pour  $n = 5$ , les intérieurs de  $A$  sont :

$$A_1 = A \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = (a_{33}).$$

**Définition 1.3** Une matrice est dite d'intérieur positif si les déterminants de tous ses intérieurs sont strictement positifs.

## 2. 2. Critère de Schur-Cohn

La localisation des racines d'un polynôme dans le cercle unité est obtenue grâce aux travaux de M. Marden, Schur-Cohn dont on donne le résultat final [35], [39].

**Proposition 1.4** Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme  $P$  à coefficients réels ait ses racines à l'intérieur du cercle unité est que :

- (i)  $P(1) > 0$  et  $(-1)^n P(-1) > 0$ ,
- (ii) les deux matrices  $A^+$  et  $A^-$  d'ordre  $(n-1)$  définies par :

$$A^\pm = \begin{pmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 0 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

sont d'intérieur positif. Les  $a_i$  sont les coefficients du polynôme  $P$ , i.e.,

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0, \quad (a_n > 0).$$

### 2. 3. Exemples

- Pour  $n = 2$ ,  $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ , on a :

$$P(1) = 1 + a_1 + a_0 \quad , \quad P(-1) = 1 - a_1 + a_0,$$

et

$$A^\pm = 1 \pm a_0.$$

Donc les racines se trouvent à l'intérieur du cercle unité si et seulement si

$$|a_1| < 1 + a_0 \quad \text{et} \quad |a_0| < 1.$$

- Pour  $n = 3$ ,  $P(\lambda) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ . On a :

$$P(1) = 1 + a_2 + a_1 + a_0 \quad , \quad P(-1) = -1 + a_2 - a_1 + a_0,$$

et

$$A^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm a_0 \\ a_2 \pm a_0 & 1 \pm a_1 \end{pmatrix}.$$

Donc les racines sont à l'intérieur du cercle unité si et seulement si

$$|a_0 + a_2| < 1 + a_1 \quad \text{et} \quad |a_1 - a_0 a_2| < 1 - a_0^2.$$

- Pour  $n = 4$ ,  $P(\lambda) = \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ . Les racines sont à l'intérieur du cercle unité si et seulement si

$$|a_0| < 1 \quad , \quad |a_1 + a_3| < 1 + a_0 + a_2,$$

et

$$|a_2(1 - a_0) + a_0(1 - a_0^2) + a_3(a_0 a_3 - a_1)| < a_0 a_2(1 - a_0) + (1 - a_0^2) + a_1(a_0 a_3 - a_1).$$

### 2. 4. Théorème de M. Marden

Nous donnons un autre résultat sur la localisation des racines dû à M. Marden [39]. Ce résultat donne des conditions suffisantes pour que les racines d'un polynôme (à coefficients complexes) soient dans le cercle unité. Ces conditions sont équivalentes au critère de Schur-Cohn [35] dans le cas d'un polynôme à coefficients réels, de degré 2 ou 3 (cas les plus souvent rencontrés).

Considérons la suite suivante :

$$\begin{cases} a_k^{(j+1)} = \bar{a}_0^{(j)} a_k^{(j)} - a_{n-j}^{(j)} \bar{a}_{n-j-k}^{(j)}, & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ a_k^{(0)} = a_k. \end{cases}$$

On note  $\delta_{j+1} := a_0^{(j+1)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . On observe que ces quantités sont réelles puisque, d'après la formule précédente  $\delta_{j+1} = |a_0^{(j)}|^2 - |a_{n-j}^{(j)}|^2$ .

Désignons par  $p$  ( $p \leq n$ ) le nombre de racines qui se trouvent dans le cercle unité. Les deux résultats suivants sont dus à M. Marden [39].

**Lemme 1.5** *La valeur de  $p$  est donnée par :*

$$p = \frac{1}{2} \left[ n - \sum_{k=1}^n \operatorname{sg}(P_k) \right], \quad (1.7)$$

où

$$\operatorname{sg}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et

$$P_k = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.8)$$

Pour interpréter ce lemme, désignons par  $\nu$  le nombre de  $P_k$  qui sont négatifs,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Alors, en supposant qu'aucun des  $P_k$  n'est égal à zéro, il y en aura  $n - \nu$  qui seront positifs et la relation (1.7) devient:

$$p = \frac{1}{2} \left[ n + \nu - (n - \nu) \right] = \nu,$$

d'où le résultat suivant.

**Théorème 1.6** *Si pour un polynôme  $P$  (à coefficients complexes),  $p$  des produits  $P_k$  définis par (1.8) sont négatifs et les  $(n - p)$  autres sont positifs, alors  $P(\lambda)$  a  $p$  zéros à l'intérieur du cercle unité, aucun sur la frontière et  $n - p$  zéros à l'extérieur.*

Par conséquent, si on impose à tous les  $P_k$  d'être négatifs ( $p = n$ ), alors  $P(\lambda)$  a tous ses zéros de module inférieur à 1.

### 3. LES COURBES SPLINES GEOMETRIQUES

#### 3. 1. Introduction

Dans les dernières années, le *CAGD* (*Computer-Aided Geometric Design*) et d'autres domaines (*CG&A* (*Computer Graphics and Applications*), *CAD* (*Computer-Aided Design*), ...) utilisent pour la description mathématique des objets la notion de fonction **spline** paramétrique. On sous-entend par spline toute fonction par morceaux où chaque morceau est une fonction simple (souvent polynomiale). Un aspect important dans l'étude de ces fonctions est la manière de joindre (ou de raccorder) ces morceaux ("segments" dans les cas des courbes, "patches" pour les surfaces) pour former une spline ayant un ordre de continuité voulu. Les points de jonction sont appelés points de raccordement et les conditions correspondantes sont appelées les contraintes de continuité.

En *CAGD*, ces contraintes sont choisies pour obtenir une courbe ou surface visuellement lisse, mais l'ordre de continuité dépend naturellement de l'application. Dans certaines applications, telles que "Architectural drawing", il est suffisant que les courbes soient seulement continues. D'autres, telles que "Design of mechanical parts", demandent un ordre plus élevé de raccordement. Par exemple, si les splines paramétriques sont utilisées pour définir le déplacement d'un objet, l'objet doit se déplacer d'une manière lisse. Ce type de déplacement peut être garanti en demandant la continuité du vecteur position et du vecteur dérivée première (le vecteur vitesse). Si un ordre supérieur est demandé, c'est alors la continuité du vecteur dérivée seconde (vecteur accélération). Cependant, dans plusieurs applications du *CAGD*, seule la trajectoire résultante est importante dans le sens où on autorise des discontinuités dans la vitesse.

La continuité paramétrique a été longtemps utilisée et a permis de résoudre de nombreux problèmes; mais elle reste restreinte pour certains objectifs en *CAGD* puisqu'elle exige la continuité des dérivées. En revanche, les contraintes imposées par la continuité géométrique donnent plus de choix et permettent des différences entre les paramétrisations des segments adjacents. Une conséquence pratique de ce concept est l'apparition de nouveaux coefficients (souvent appelés paramètres de forme) qui sont à la disposition de l'utilisateur pour modifier la forme de la courbe tout en gardant fixes les points de contrôle qui la définissent.

Il existe deux concepts différents de continuité géométrique. Le premier qu'on appellera continuité géométrique  $G^k$  est basé sur l'existence d'une "reparamétrisation" (régulière)  $C^k$  de la courbe et dont la composée avec la courbe donne une continuité paramétrique  $C^k$ . Le deuxième, plus récent, est appelé Frénet-continuité d'ordre  $k$  puisqu'il est basé sur la continuité  $C^0$  du repère de Frénet et des courbures. Dans ce papier, on ne parlera pas de la Frénet-continuité; le lecteur intéressé pourra trouver une étude détaillée dans [40], [41].

La continuité géométrique est utilisée dans ce travail pour assurer la stabilité de schémas récursifs qui sont obtenus dans la résolution du problème de l'interpolation progressive. On donnera alors un nouveau rôle (numérique) aux paramètres de forme. Ce rôle consiste à absorber les oscillations qui peuvent apparaître dans l'interpolation progressive, et donc empêcher la solution de prendre des valeurs de plus en plus grandes.

### 3. 2. Continuité géométrique pour les courbes

Soit  $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une application de l'intervalle réel  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Alors on dit que  $P$  est une représentation paramétrique régulière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , si

$$P \in C^k[a, b] \text{ et } P'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

**Définition 1.7** Etant donnée une application  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ,  $\varphi \in C^k[c, d]$  et  $\varphi'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in [c, d]$ , alors l'application composée  $Q(t) := P(\varphi(t)) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^d$

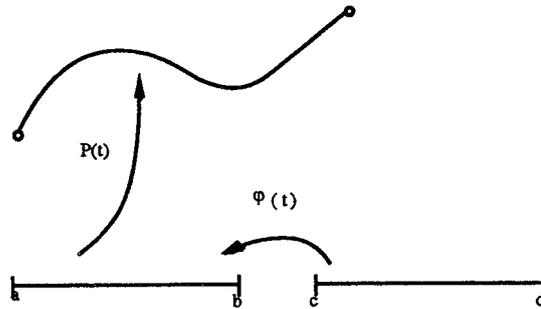


FIGURE.1. Représentation d'une reparamétrisation .

est appelée **reparamétrisation admissible** de la courbe. Dans le cas où  $\varphi'(t) > 0$ , on dit que  $\varphi$  préserve l'orientation.

Exemple : la fonction  $\varphi(t) := \int_{t_0}^t \|P'(u)\| du$  représente la longueur algébrique de l'arc de la courbe à partir du point  $P(t_0)$ , et permet une reparamétrisation admissible qui préserve l'orientation de la courbe.

**Définition 1.8** Soient  $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $Q : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^d$  deux représentations paramétriques régulières de classe  $C^k$  telles que  $P(b) = Q(c)$ . On dit que  $P$  et  $Q$  se raccordent  $G^k$  en  $F = P(b) = Q(c)$  s'il existe une application  $\varphi \in C^k$  dans un voisinage de  $c$ , telle que :

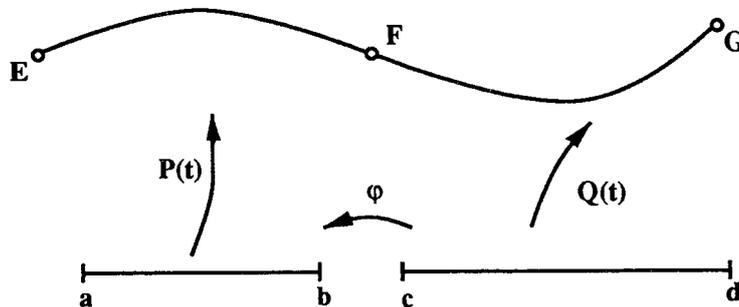


FIGURE.2. Continuité géométrique d'ordre  $k$ .

$$\begin{cases} \varphi(c) = b & \text{et} & \varphi^{(1)}(c) > 0, \\ \frac{d^i}{dt^i} Q(t) \Big|_{t=c} = \frac{d^i}{dt^i} P(\varphi(t)) \Big|_{t=c} & i = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (1.9)$$

Supposons les relations (1.9) satisfaites et notons, pour  $i = 1, \dots, k$ ,  $\beta_i = \varphi^{(i)}(c)$ . En particulier  $\beta_1 > 0$ . En utilisant les règles de dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$Q^{(i)}(c) = \sum_{j=0}^i a_{i,j} P^{(j)}(b) \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.10)$$

où, pour  $1 \leq j \leq i \leq k$ , les éléments  $a_{i,j}$  sont donnés par la formule de Faà di Bruno [50] :

$$a_{i,j} = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_i = j \\ n_1 + 2n_2 + \dots + in_i = i \\ n_1, \dots, n_i \geq 0}} \frac{i!}{n_1! (1!)^{n_1} \dots n_i! (i!)^{n_i}} \beta_1^{n_1} \dots \beta_i^{n_i}. \quad (1.11)$$

On a notamment, pour tout  $i = 1, \dots, k$ ,  $a_{i,1} = \beta_i$ ,  $a_{i,i} = \beta_1^i$ . T.D. De Rose appelle les équations (1.10), les  $\beta$ -contraintes. On donne, par exemple, les quatre premières équations :

$$\begin{cases} Q(c) = P(b), \\ Q'(c) = \beta_1 P'(b), \\ Q''(c) = \beta_2 P'(b) + \beta_1^2 P''(b), \\ Q^{(3)}(c) = \beta_3 P'(b) + 3\beta_1 \beta_2 P''(b) + \beta_1^3 P^{(3)}(b). \end{cases}$$

• Les conditions (1.10) peuvent s'écrire sous la forme matricielle par :

$$\left[ Q(t), Q'(t), \dots, Q^{(k)}(t) \right]^T = A \left[ P(t), P'(t), \dots, P^{(k)}(t) \right]^T, \quad (1.12)$$

où  $A = (a_{i,j})$  est une matrice triangulaire inférieure, appelée **matrice de connexion**, qui est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1 \beta_2 & \beta_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & \vdots \\ 0 & \beta_k & \dots & \dots & \dots & & \beta_1^k \end{pmatrix}.$$

Les paramètres  $\beta_i$  sont appelés paramètres de forme et la matrice  $A$  caractérise le raccordement  $G^k$  de  $P$  et  $Q$  en  $F = P(b) = Q(c)$ .

### 3. 3. Continuité géométrique d'ordre 2

Dans les résultats ci-dessus, si l'on prend  $k = 2$ , on obtient un raccordement géométrique d'ordre 2 entre deux segments de courbes  $P$  et  $Q$ . Ce raccordement exprime la continuité du repère de Frénet et de la courbure au point commun.

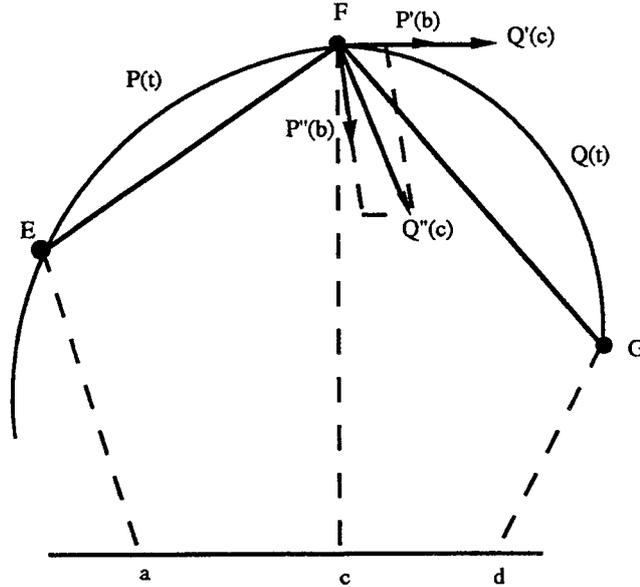


FIGURE.3. Continuité géométrique d'ordre 2.

En effet, soit  $P$  et  $Q$  deux paramétrisations régulières  $C^2$  à valeur dans  $\mathbb{R}^2$  définies respectivement sur  $[a, b]$  et  $[c, d]$ . On suppose que  $P''(b)$  n'est pas colinéaire à  $P'(b)$  et que  $P(b) = Q(c) = F$ ,  $Q'(c) = \beta_1 P'(b)$  ( $\beta_1 > 0$ ). Alors il existe deux réels  $\gamma$  et  $\delta$  tels que (voir figure 3, on suppose  $b = c$ )

$$Q''(c) = \gamma P''(b) + \delta P'(b).$$

Les repères de Frénet en  $F$ , obtenus par orthonormalisation à partir de  $(P'(b), P''(b))$  et  $(Q'(c), Q''(c))$  respectivement, sont identiques si et seulement si  $\gamma > 0$ .

Désignons par  $k_1$  (resp.  $k_2$ ) la courbure de  $P$  (resp.  $Q$ ) en  $F$ , i.e.,

$$k_1 = \frac{\|P'(b) \wedge P''(b)\|}{\|P'(b)\|^3}, \quad k_2 = \frac{\|Q'(c) \wedge Q''(c)\|}{\|Q'(c)\|^3}.$$

On constate alors que :

$$k_2 = \frac{|\gamma|}{\beta_1^2} k_1.$$

Par conséquent, les deux courbes ont même repère de Frénet et même courbure en  $F$  si et seulement si  $\gamma > 0$  et  $|\gamma| = \beta_1^2$ , i.e.,  $\gamma = \beta_1^2$ , ou encore si et seulement si

$$Q''(c) = \delta P'(b) + \beta_1^2 P''(b), \quad (1.13)$$

ce qui caractérise le raccordement  $G^2$  de  $P$  et  $Q$  en  $F$ .

### 3. 4. Les $\beta$ -splines cubiques

Soit  $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  une partition de l'intervalle  $[a, b]$ . Soit  $P(t)$  une fonction polynomiale par morceaux sur  $\Delta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On pose

$$P|_{I_i} \equiv P_i \text{ sur } I_i = [t_i, t_{i+1}]$$

où  $P_i$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

**Définition 1.9**  $P(t)$  est une  $\beta$ -spline si en chaque  $t_i$ , les deux polynômes voisins  $P_{i-1}(t)$  et  $P_i(t)$  se raccordent  $G^2$  en  $t_i$ .

Autrement dit

$P(t)$  est une  $\beta$ -spline si et seulement si pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $\exists \beta_{1,i} > 0$  et  $\beta_{2,i}$  tels que

$$\begin{cases} P_i(t_i) = P_{i-1}(t_i), \\ P_i'(t_i) = \beta_{1,i} P_{i-1}'(t_i), \\ P_i''(t_i) = \beta_{2,i} P_{i-1}'(t_i) + \beta_{1,i}^2 P_{i-1}''(t_i). \end{cases} \quad (1.14)$$

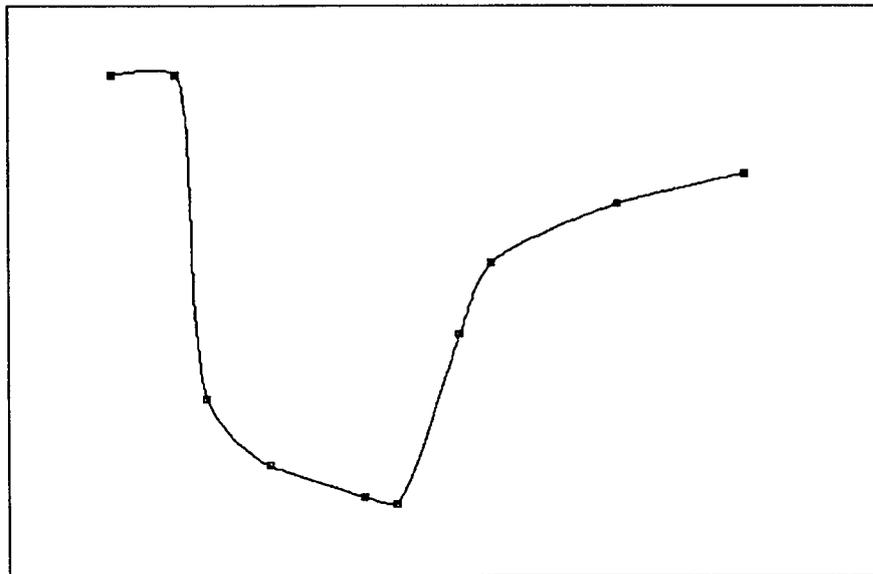


FIGURE.4. Un exemple d'une  $\beta$ -spline cubique d'interpolation sur  $\Delta : t_0 < t_1 < \dots < t_9$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ ,

avec

$\beta_{1,i}$	2.4684	0.5127	1.0120	0.5625	2.5061	0.6557	1.2629	0.9608
$\beta_{2,i}$	39.710	1.2828	5.6709	0.8051	39.126	1.6022	6.6578	3.6956

Un exemple de  $\beta$ -spline cubique est donné dans l'annexe de ce chapitre ainsi qu'une interprétation géométrique des paramètres de forme.

## 4. ANNEXE SUR LES SPLINES GEOMETRIQUES

### 4. 1. Construction d'une base de $\beta$ -splines

Soit  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . Pour  $i = 1, \dots, n-1$ , on fixe des réels  $\beta_{1,i} > 0$ ,  $\beta_{2,i} \geq 0$  et on note  $\mathcal{S}_\beta$  l'espace correspondant des  $\beta$ -splines cubiques définies sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Cet espace est de dimension  $n+3$ .

Etant donné des points supplémentaires

$$t_{-3} < t_{-2} < t_{-1} < t_0 \quad , \quad t_n < t_{n+1} < t_{n+2} < t_{n+3},$$

on peut définir, pour  $i = -3, \dots, n-1$ , une fonction  $G_i$  polynomiale cubique par morceaux sur  $[t_{-3}, t_{n+3}]$ ,  $C^2$  sur  $[t_{-3}, t_1]$  et sur  $[t_{n-1}, t_{n+3}]$ , dont la restriction à  $[a, b]$  appartient à  $\mathcal{S}_\beta$ , et dont le support est  $[t_i, t_{i+4}]$ . La condition supplémentaire

$$\sum_{i=-3}^{n-1} G_i(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in [a, b],$$

détermine entièrement les fonctions  $G_i$  comme pour les  $B$ -splines classiques  $N_i$ , on a

$$G_i(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in ]t_i, t_{i+4}[.$$

Ces fonctions  $G_i$  fournissent une base de l'espace  $\mathcal{S}_\beta$  en sorte que toute  $\beta$ -spline  $P$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  s'écrit sous la forme

$$P(t) = \sum_{i=-3}^{n-1} G_i(t) d_i \quad \text{pour tout } t \in [a, b], \quad (1.15)$$

où les  $d_i$  sont des points de  $\mathbb{R}^d$  et sont appelés points de contrôle. La formule explicite de  $G_i$  est donnée dans [14], [24].

### 4. 2. Influence des paramètres $\{ \beta_{1,i}, \beta_{2,i} \}$

La formulation (1.15) permet, en fixant les points de contrôle, de visualiser l'influence des paramètres  $\{ \beta_{1,i}, \beta_{2,i} \}$  sur la forme de la courbe. Ces paramètres contrôlent globalement (si les paramètres sont constants en chaque raccordement) ou localement (si les paramètres dépendent du point de raccordement) l'effet des points de contrôle sur la courbe.

- $\beta_{1,i_0}$ ,  $i_0$  fixé, est appelé paramètre de tension asymétrique [6], il mesure le rapport entre la vitesse qu'il aura dans le segment suivant le raccordement et la vitesse avec laquelle le point a terminé le parcours du segment qui précède le point de raccordement.

Si  $\beta_{1,i_0} > 1$ , alors le vecteur tangent a une influence plus grande à droite qu'à gauche du point de raccordement, c'est-à-dire la courbe continuera dans la direction de la tangente en demeurant plus proche que celle-ci dans le segment situé à droite (voir figure 6).

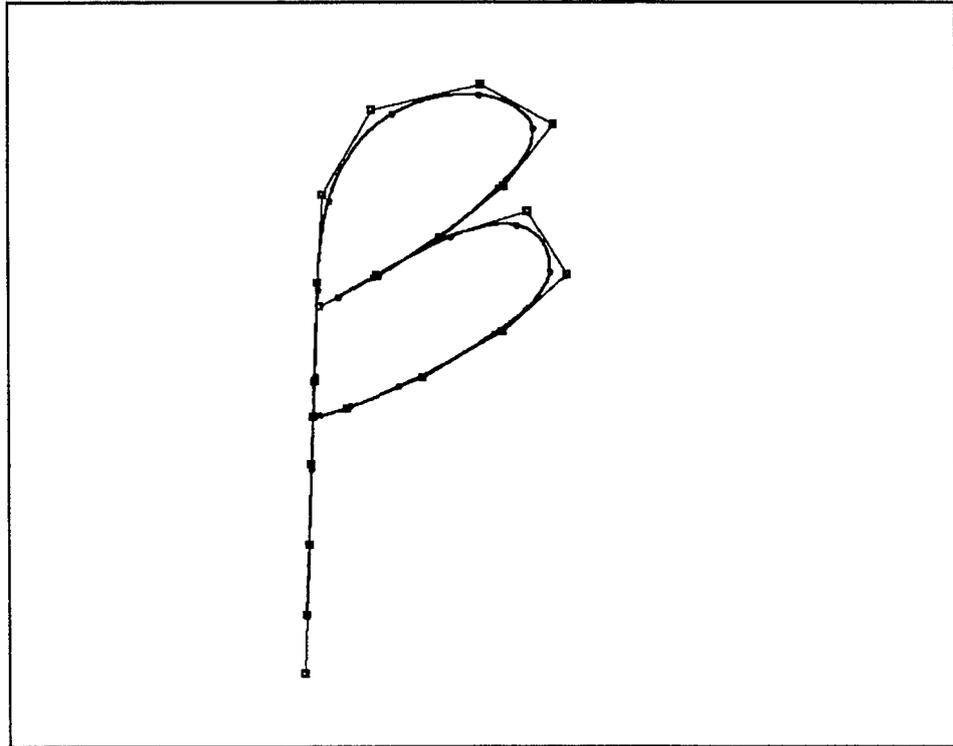


FIGURE.5. *Un exemple de courbe  $\beta$ -spline cubique .  $\square$  sont les points de contrôles.  $\bullet$  sont les points de raccordements.*

Sinon ( $0 < \beta_{1,i_0} < 1$ ), la courbe se rapproche davantage de la tangente dans le segment situé à gauche plutôt que celui de droite (voir figure 7).

•  $\beta_{2,i_0}$  est appelé paramètre de tension [6]. En modifiant la valeur de  $\beta_{2,i_0}$ , on déplace le raccordement entre les segments concernés, c'est-à-dire ce paramètre mesure le rapprochement de la courbe de son polygone de contrôle.

Par exemple, si on fait croître  $\beta_{2,i_0}$ , on déplace chaque point de raccordement vers le point de contrôle correspondant et ceci aplatit la courbe contre le polygone (voir figure 8,9).

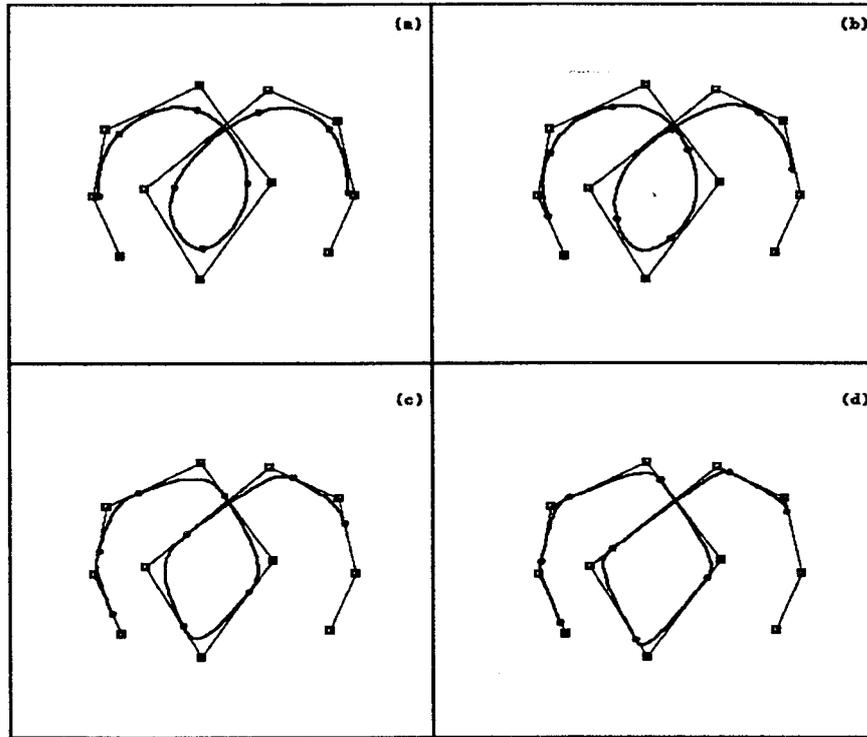


FIGURE.6. L'effet des paramètres de forme avec  $\beta_{2,i} = 0.0$  et  
 a)  $\beta_{1,i} = 1$  b)  $\beta_{1,i} = 2$  c)  $\beta_{1,i} = 5$  d)  $\beta_{1,i} = 10$ .

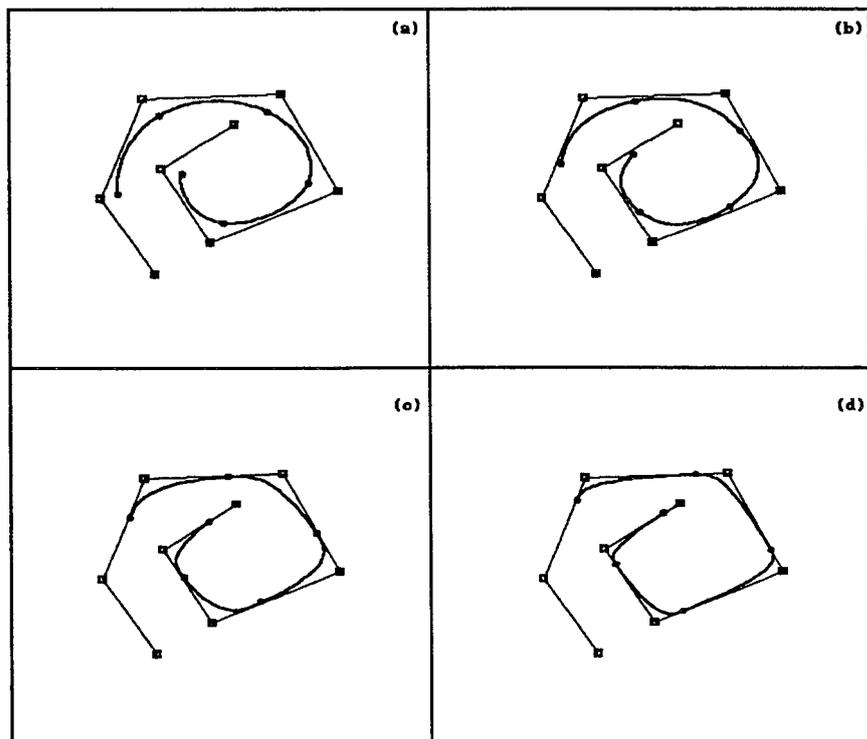


FIGURE.7. L'effet des paramètres de forme avec  $\beta_{2,i} = 0$  et a)  
 $\beta_{1,i} = 1$  b)  $\beta_{1,i} = 0.5$  c)  $\beta_{1,i} = 0.25$  d)  $\beta_{1,i} = 0.125$ .

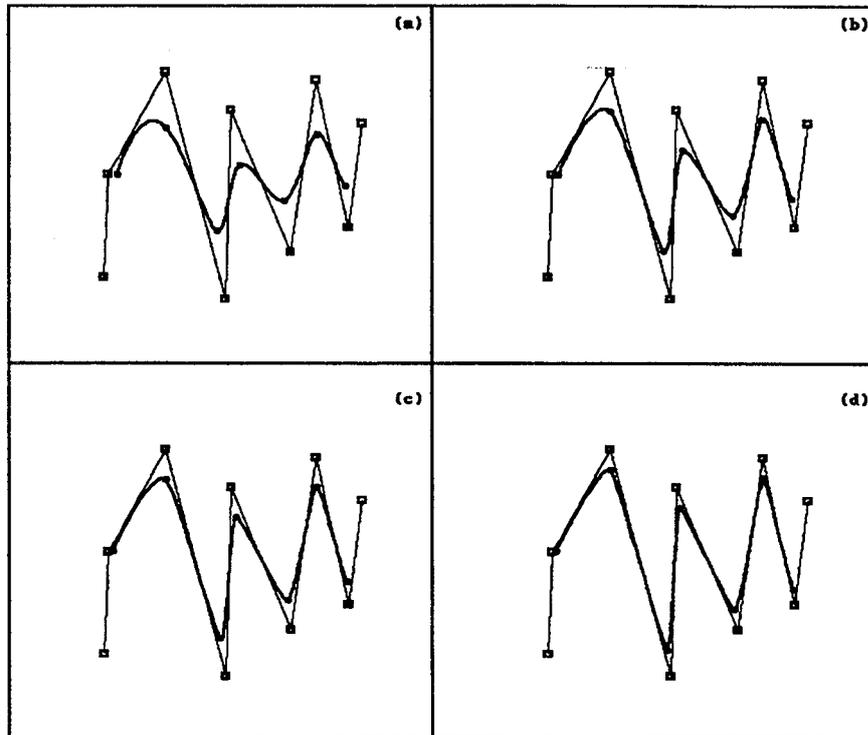


FIGURE.8. L'effet des paramètres de forme avec  $\beta_{1,i} = 1.0$  et  
a)  $\beta_{2,i} = 0$  b)  $\beta_{2,i} = 5$  c)  $\beta_{2,i} = 10$  d)  $\beta_{2,i} = 20$ .

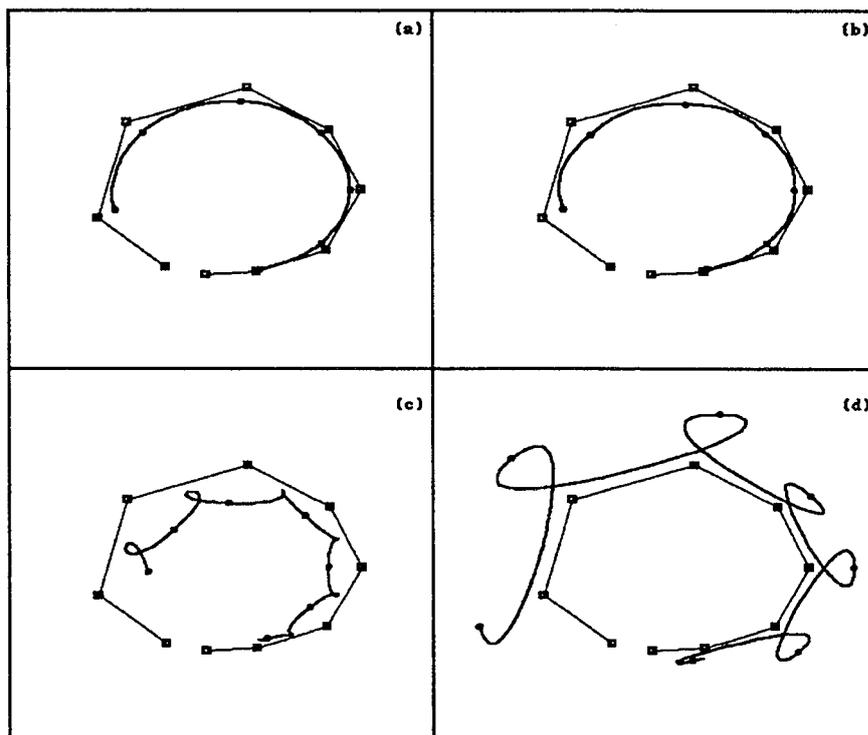


FIGURE.9. L'effet des paramètres de forme avec  $\beta_{1,i} = 1.0$  et a)  
 $\beta_{2,i} = 0$  b)  $\beta_{2,i} = -2$  c)  $\beta_{2,i} = -8$  d)  $\beta_{2,i} = -25$ .

### 4. 3. Autres exemples de splines

#### a - Splines cubiques naturelles d'interpolation

Etant donnés des nombres réels fixés  $y_1, \dots, y_n$  associés à une partition  $\Delta : a < t_1 < \dots < t_n < b$ . La spline cubique naturelle d'interpolation est l'unique fonction de  $H^2[a, b]$  qui minimise

$$\int_a^b [f''(t)]^2 dt, \quad (1.16)$$

sous les contraintes  $f(t_i) = y_i, i = 1, \dots, n$ .

N.B :  $H^2[a, b]$  est l'ensemble des fonctions dont les dérivées premières sont absolument continues et les dérivées secondes sont dans  $L^2[a, b]$ . La solution du problème (1.16) est caractérisée par (cf. [36]) :

- $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 sur chaque intervalle  $I_i, i = 1, \dots, n - 1$ ,
- $P$  est un polynôme de degré 1 sur  $[a, t_1]$  et  $[t_n, b]$ ,
- $P \in C^2([a, b])$ ,
- $P(t_i) = y_i, i = 1, \dots, n$ .

**Remarque :** Dans le cas où les données sont dans  $\mathbb{R}^2$ , le calcul de la courbe spline paramétrique est simplement fait en calculant les deux fonctions splines correspondant aux ensembles  $\{t_i\}$  et  $\{y_i\}$ .

#### b - Les fonctions $Q$ -splines d'interpolation

Les  $Q$ -splines d'interpolation sont introduites par R. Kulkarni et P.J. Laurent comme des fonctions polynomiales par morceaux de degré 4, et solutions d'un problème de minimisation :

$$\int_a^b \frac{[f''(t)]^2}{q(t)} dt, \quad (1.17)$$

sous les contraintes  $f(t_i) = y_i, i = 1, \dots, n$ , où  $q$  est une fonction continue, positive et linéaire par morceaux sur la subdivision  $\Delta$ .

Si on pose  $q_i = q(t_i) > 0, i = 0, \dots, n + 1$  et  $a_i = q'(t_i^+), i = 1, \dots, n - 1$ , une fonction  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est solution de (1.17) si et seulement si (cf. [33])

- $\sigma$  est un polynôme de degré 4 sur chaque intervalle  $I_i, i = 1, \dots, n - 1$ ,
- $\sigma$  est un polynôme de degré 1 sur  $[a, t_1]$  et  $[t_n, b]$ ,
- $\sigma \in C^2([a, b])$ ,
- $q_i^2 \sigma^{(4)}(t_i^+) - 2q_i a_i \sigma^{(3)}(t_i^+) + 2q_i a_i^2 \sigma^{(2)}(t_i) = 0, i = 1, \dots, n - 1$ ,
- $\sigma(t_i) = y_i, i = 1, \dots, n$ .

### c - Splines cubiques sous tension : splines exponentielles

Elles possèdent la propriété d'éliminer les points d'inflexion non souhaités par le raccourcissement de la longueur d'arc de la courbe. Elles sont obtenues en minimisant la fonctionnelle

$$\int_a^b [f''(t)]^2 dt + \alpha^2 \int_a^b [f'(t)]^2 dt, \quad (1.18)$$

avec les mêmes contraintes que précédemment. La solution  $P_\alpha$  est caractérisée par (cf. [28], [46]) :

- $P_\alpha$  est de la forme  $A + Bt + Ce^{\alpha t} + De^{-\alpha t}$  sur  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,
- $P_\alpha$  est un polynôme de degré 1 sur  $[a, t_1]$  et  $[t_n, b]$ ,
- $P_\alpha \in C^2([a, b])$ ,
- $P_\alpha(t_i) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Remarque :** Les splines sous tension ont deux propriétés asymptotiques intéressantes :

- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} P_\alpha = P$  (spline cubique naturelle).
- $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P_\alpha =$  fonction polynomiale de degré 1 par morceaux dont le graphe est le polygone joignant les  $\{(t_i, y_i)\}$ .

### d - Les $\nu$ -splines

Plutôt que de minimiser (1.18), G. Nielson utilise la fonctionnelle

$$\int_a^b [f''(t)]^2 dt + \sum_{i=1}^n \nu_i [f'(t_i)]^2 \quad \nu_i \geq 0, \quad (1.19)$$

sous les mêmes contraintes que précédemment. La  $\nu$ -spline est l'unique solution de (1.19), elle est caractérisée par (cf. [28], [46]) :

- $P_\nu$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 sur chaque intervalle  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,
- $P_\nu$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 sur  $[a, t_1]$  et  $[t_n, b]$ ,
- $P_\nu \in C^1([a, b])$ ,
- $P_\nu''(t_i^+) = P_\nu''(t_i^-) + \nu_i P_\nu'(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,
- $P(t_i) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

On voit bien qu'une  $\nu$ -spline est une  $\beta$ -spline avec  $\{\beta_{1,i}, \beta_{2,i}\} = \{1, \nu_i\}$ .



## Chapitre 2.

# INTERPOLATION PROGRESSIVE STABLE

1. INTRODUCTION
2. METHODE DES A-SPLINES
3. INTERPOLATION PROGRESSIVE QUADRATIQUE
4. INTERPOLATION PROGRESSIVE CUBIQUE
  - 4.1. *Définition et notation*
  - 4.2. *Algorithme*
  - 4.3. *Condition nécessaire et suffisante de stabilité*
  - 4.4. *Résultats numériques et interprétation*
  - 4.5. *Quelques remarques*
5. INTERPOLATION PROGRESSIVE DE DEGRE  $N$
6. INTERPOLATION PROGRESSIVE RATIONNELLE
  - 6.1. *Introduction*
  - 6.2. *Interpolation rationnelle quadratique*
  - 6.3. *Interpolation rationnelle cubique*
7. GENERALISATION DE L'INTERPOLATION PROGRESSIVE STABLE
  - 7.1. *Introduction*
  - 7.2. *Interpolation progressive par spline  $C^{n-1}$  appartenant par morceau à un sous espace de dimension  $n + 1$*
  - 7.3. *Exemples d'espaces*
  - 7.4. *Les Q-splines comme fonctions splines instables*

## 1. INTRODUCTION

Cette partie de notre travail est inspirée d'un article de A. Seredinski [52] basé sur l'interpolation, la compression et le lissage des signaux. En effet, pour de nombreux problèmes de traitement et de transmission de l'information, il arrive qu'il soit nécessaire d'éliminer la redondance statistique (i.e., donner une représentation réduite des signaux) puis de la reconstituer afin de recréer le message initial. Nous exposons ici une des variantes possibles pour résoudre ces problèmes, fondée sur l'exploitation des splines polynomiales. Rappelons que le signal est représenté par une succession de mesures d'un signal analogique à des intervalles de temps fixés. Le problème de l'interpolation progressive d'un signal consiste à représenter ces points par une courbe spline au fur et à mesure que les points sont connus, en partant de conditions initiales.

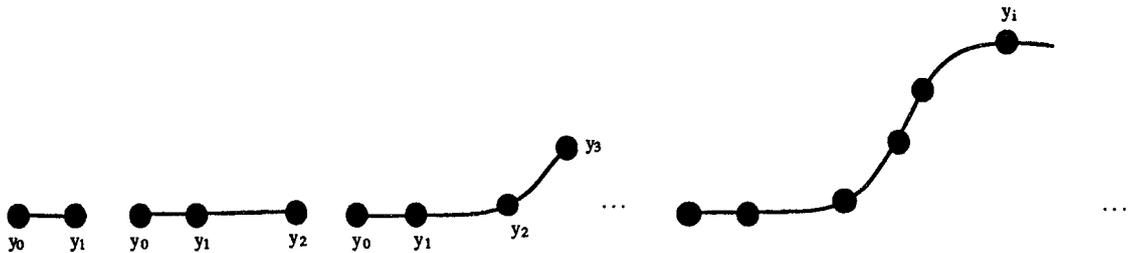


FIGURE.1. *Problème de l'interpolation progressive.*

La figure 1 représente le problème. Supposons que la section de la courbe représentant  $y_0$  et  $y_1$  soit connue, ce qui suppose que des conditions initiales sont imposées. A l'instant suivant, le point  $y_2$  est obtenu, la section entre  $y_1$  et  $y_2$  est donc calculée en fonction de la section précédente, etc ...

Il est connu que les splines cubiques d'interpolation  $C^2$  avec une condition à chaque bout ne peuvent être obtenues que globalement par résolution d'un système linéaire. Il existe des méthodes performantes et stables pour résoudre ce système, mais cela n'est pas adapté à l'interpolation progressive d'un signal (au fur et à mesure qu'il est connu). Si l'on place les deux conditions supplémentaires d'un seul côté, alors il est clair que l'on peut progresser, mais que l'algorithme est **instable** (il y a des solutions fondamentales de la forme  $z^i$ , avec  $|z| > 1$ ).

Nous présenterons plusieurs méthodes pour résoudre ce problème. Elles sont toutes définies soit par une équation aux différences

$$\sum_{k=0}^N a_k m_{i-k} = \sum_{k=0}^N b_k y_{i-k}, \quad (2.1)$$

soit par une relation de récurrence matricielle

$$Y_{i+1} = AY_i + B. \quad (2.2)$$

A chacune des deux relations est associée une équation caractéristique

$$\sum_{k=0}^N d_k \lambda^k = 0, \quad (2.3)$$

qui définira la stabilité de l'algorithme utilisé. L'idée générale est d'introduire des coefficients dans l'équation (2.3) afin de rendre l'algorithme **stable** (i.e., de façon à rendre les racines de l'équation (2.3) inférieures à 1 en module). Ces coefficients proviennent soit du raccordement géométrique effectué entre les morceaux de la spline, soit de la base utilisée pour définir la spline. Ainsi dans le deuxième cas, nous verrons la méthode des A-splines comme un cas particulier et des exemples de splines non polynomiales (contenant des exponentielles, des sinus, des radicaux) seront donnés.

## 2. METHODE DES A-SPLINES (A.Seredinski)

Considérons une suite de réels donnés  $\{y_i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots$  représentant les valeurs d'une fonction  $f$  en des abscisses  $t_i$  équidistantes de pas  $h$  ( $t_{i+1} - t_i = h$ ,  $i = 0, 1, \dots$ ). On se propose de représenter  $f$  par une spline polynomiale  $S$  de degré 3 basée sur ces abscisses. Le calcul de la spline doit se faire de façon progressive au moyen d'un algorithme stable. On note  $P_i$  le polynôme de degré 3 qui correspond à la restriction de  $S$  à l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ .

On suppose que  $P_{i-1}$  est déjà obtenu et on veut passer à  $P_i$ . Si l'on impose un raccordement  $C^2$  en  $t_i$ , il est clair que le polynôme  $P_i$  sera entièrement déterminé par les conditions :

$$\begin{cases} P_i^{(j)}(t_i) = P_{i-1}^{(j)}(t_i), & j = 0, 1, 2, \\ P_i(t_{i+1}) = y_{i+1}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Prenons comme inconnue à déterminer la valeur de la dérivée de  $S$  en  $t_i$  notée par :

$$m_i := S'(t_i).$$

Le polynôme  $P_i$  est parfaitement déterminé par :

$$P_i(t_i) = y_i, \quad P_i(t_{i+1}) = y_{i+1}, \quad P_i'(t_i) = m_i, \quad P_i'(t_{i+1}) = m_{i+1}.$$

Par construction,  $P_{i-1}$  et  $P_i$  se raccordent  $C^1$  en  $t_i$ . En exprimant le raccordement  $C^2$  en  $t_i$  :  $P_{i-1}''(t_i) = P_i''(t_i)$ , on obtient la relation de récurrence :

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h}(y_{i+1} - y_{i-1}). \quad (2.5)$$

Les solutions fondamentales de l'équation de récurrence homogène correspondante sont de la forme  $Z_j^i$ , où  $Z_1, Z_2$  sont les racines de l'équation caractéristique

$$z^2 + 4z + 1 = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire } Z_1 = -2 + \sqrt{3}, \quad Z_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

La racine  $Z_2$  étant de module supérieur à 1, l'algorithme basé sur (2.5) pour progresser de l'intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$  à l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  est donc instable.

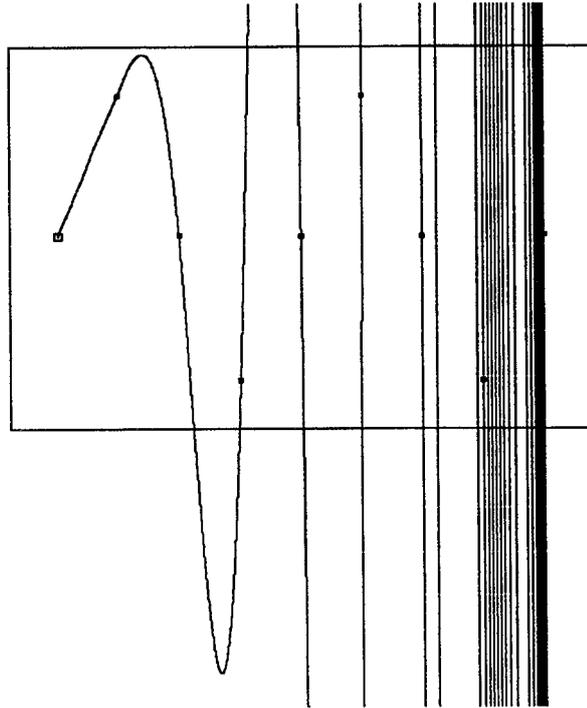


FIGURE.2. Méthode par les splines cubiques  $C^2$ .

Dans [52], A. Seredinski propose de renoncer à la continuité de la dérivée seconde. Le polynôme  $P_{i-1}$  étant connu, il propose par exemple de choisir comme polynôme  $P_i$  le polynôme de degré 3 qui vérifie :

$$P_i(t_i) = y_i \quad , \quad P_i'(t_i) = P_{i-1}'(t_i) \quad , \quad P_i(t_{i+1}) = y_{i+1},$$

et qui minimise l'énergie de flexion sur  $[t_i, t_{i+1}]$  :

$$K_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [P_i''(t)]^2 dt. \quad (2.6)$$

Ecrivons  $P_i$  sous la forme d'Hermite

$$P_i(t) = y_i H_0(t) + m_i H_1(t) + m_{i+1} H_2(t) + y_{i+1} H_3(t),$$

où  $m_i = P_i'(t_i)$ . Les valeurs  $y_i, y_{i+1}$  étant données et  $m_i$  déjà calculé, on vérifie que  $K_i$  est minimum par rapport à  $m_{i+1}$  pour :

$$m_{i+1} = -\frac{1}{2} m_i + \frac{3}{2} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right).$$

Cette relation de récurrence est stable (la racine de l'équation caractéristique est égale à  $\frac{1}{2}$  en module). Seredinski a remarqué que, si on minimise

$$K_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [P_i'(t)]^2 dt,$$

on obtient une relation de récurrence similaire et qui est aussi stable. Pour inclure les deux cas précédents, il considère une relation de la forme suivante :

$$m_{i+1} + (2 - C)m_i = (3 - C) \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right),$$

où  $C$  est un coefficient positif à choisir dans l'intervalle  $]1, 3[$ .

On justifiera ce résultat d'une autre manière et nous montrerons que cette relation peut être considérée comme un cas particulier d'une famille de relations de récurrence dépendant d'un paramètre qui sont obtenues à partir d'un formalisme plus général .

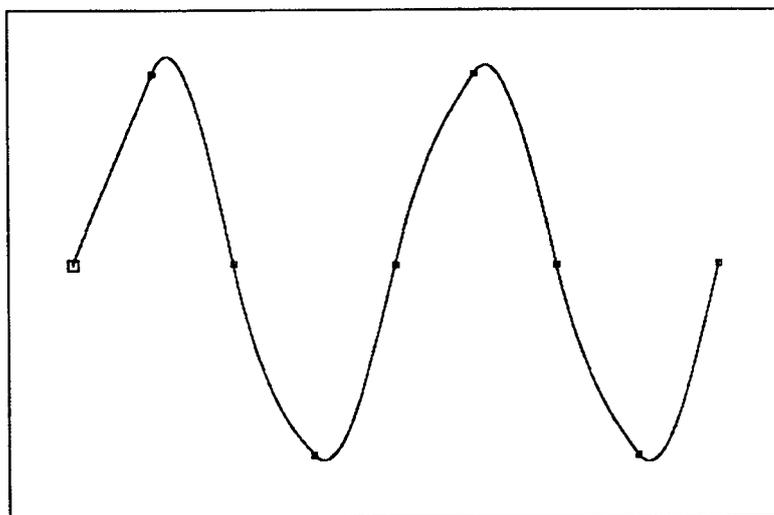


FIGURE.3. Méthode des A-splines cubiques avec  $C = 1.5$ .

Dans les paragraphes suivants, nous présenterons de nouvelles manières de résoudre le problème de l'interpolation progressive. Ces méthodes se distinguent de celle des A-splines, par la façon de raccorder le polynôme courant  $P_i(t)$  avec le polynôme déjà trouvé  $P_{i-1}(t)$ . On ne renoncera pas à la continuité d'ordre 2, mais on imposera plutôt une continuité géométrique d'ordre 2 (d'ordre 1 dans le cas quadratique) entre les polynômes voisins. Les algorithmes que nous présenterons ont les propriétés suivantes :

- le premier polynôme est connu, i.e., on demande deux conditions (une seule dans le cas quadratique) sur le polynôme  $P_0(t)$  de la courbe spline,
- tous les coefficients des polynômes de la spline sont calculés récursivement, i.e., le segment  $P_i(t)$  est exprimé en termes des polynômes précédents,
- la courbe résultante a une continuité  $G^2$  ( $G^1$  dans le cas quadratique),
- l'algorithme est gouverné par une équation aux différences d'ordre 2 (d'ordre 1 dans le cas quadratique),
- l'algorithme est stable, i.e., les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation aux différences sont à l'intérieur du cercle unité.

### 3. INTERPOLATION PROGRESSIVE QUADRATIQUE

Soit  $t_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , des abscisses équidistantes et  $y_i$  des points de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ). On veut interpoler de façon progressive ces données par une fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  polynomiale par morceaux, de degré 2, de continuité  $G^1$  (avec le même paramètre  $\beta_1$  en chaque donnée  $(t_i, y_i)$ ) et telle que  $F(t_i) = y_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . On notera  $P_i$  la fonction polynomiale de degré 2, restriction de  $F$  à  $[t_i, t_{i+1}]$ .

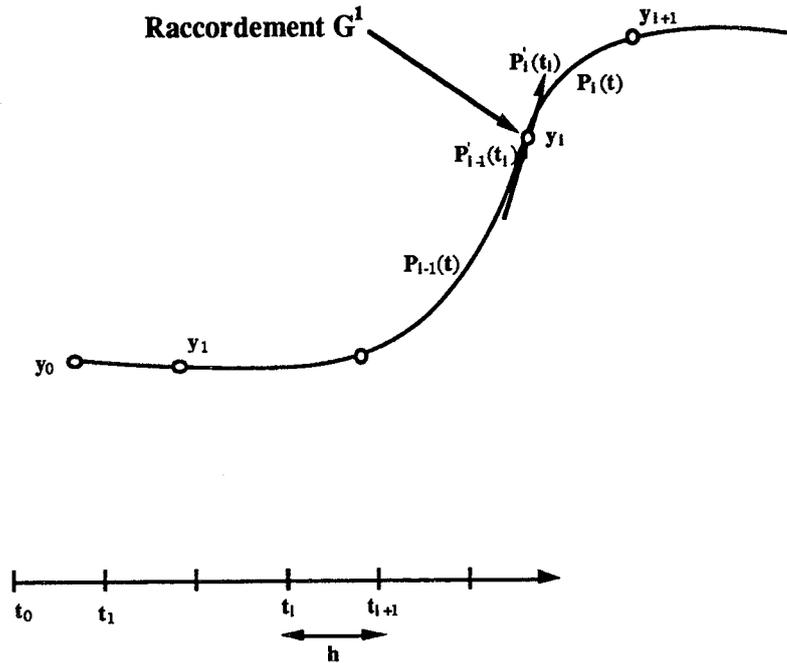


FIGURE.4. Interpolation progressive quadratique .

Supposons que l'on ait déjà déterminé  $P_{i-1}(t)$ . On peut représenter  $P_i$  sous la forme d'Hermite suivante :

$$P_i(t) = H_0(t)y_i + H_1(t)P'_i(t_i) + H_2(t)y_{i+1}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{cases} H_0(t) = \frac{1}{h^2} (t_{i+1} - t)(t_{i+1} - 2t_i + t), \\ H_1(t) = \frac{1}{h} (t - t_i)(t_{i+1} - t), \\ H_2(t) = \frac{1}{h^2} (t - t_i)^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Le passage de  $P_{i-1}(t)$  à  $P_i(t)$  est exprimé par un raccordement  $G^1$  en  $t_i$  :

$$P'_i(t_i) = \beta_1 P'_{i-1}(t_i), \quad \beta_1 > 0. \quad (2.9)$$

Si l'on écrit  $P_{i-1}$  sous la forme (2.7), on a :

$$P'_{i-1}(t_i) = \frac{2}{h} (y_i - y_{i-1}) - P'_{i-1}(t_{i-1}).$$

Ainsi, en posant  $m_i = P'_i(t_i)$ , on obtient

$$m_i + \beta_1 m_{i-1} = \frac{2}{h} \beta_1 (y_i - y_{i-1}). \quad (2.10)$$

L'équation caractéristique correspondante est

$$z + \beta_1 = 0. \quad (2.11)$$

L'algorithme d'interpolation qui en résulte sera appelé "Algorithme progressif d'interpolation quadratique  $G^1$ ".

**Proposition 2.1** *L'algorithme progressif d'interpolation quadratique  $G^1$ , i.e., l'algorithme régi par l'équation (2.10), est stable si et seulement si*

$$\beta_1 < 1. \quad (2.12)$$

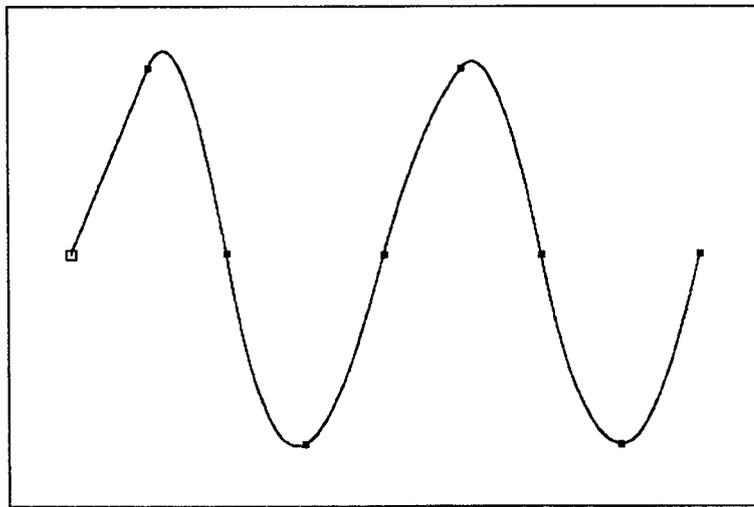


FIGURE.5. *Interpolation progressive quadratique  $G^1$  avec  $\beta_1 = 0.8$ .*

## 4. INTERPOLATION PROGRESSIVE CUBIQUE

## 4. 1. Définition et notation

On veut maintenant interpoler de façon progressive les données  $(t_i, y_i)$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^d$ , par une fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  polynomiale par morceaux, de degré 3, de continuité  $G^2$  (avec les mêmes paramètres  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$  en chaque donnée  $(t_i, y_i)$ ) et telle que  $F(t_i) = y_i$ . On note  $P_i$  la fonction polynomiale de degré 3, restriction de  $F$  à  $[t_i, t_{i+1}]$ . On peut représenter  $P_i$  sous la forme suivante :

$$P_i(t) = H_0(t)y_i + H_1(t)P'_i(t_i) + H_2(t)P'_i(t_{i+1}) + H_3(t)y_{i+1}, \quad (2.13)$$

où

$$\begin{cases} H_0(t) = \frac{1}{h^3} (t_{i+1} - 3t_i + 2t)(t_{i+1} - t)^2, \\ H_1(t) = \frac{1}{h^2} (t - t_i)(t_{i+1} - t)^2, \\ H_2(t) = \frac{1}{h^2} (t - t_{i+1})(t - t_i)^2, \\ H_3(t) = \frac{1}{h^3} (3t_{i+1} - t_i - 2t)(t - t_i)^2, \end{cases} \quad (2.14)$$

avec  $h = t_{i+1} - t_i$ . Le raccordement  $G^2$  entre les polynômes  $P_{i-1}$  et  $P_i$  en  $t_i$  s'écrit :

$$\begin{cases} P'_i(t_i) = \beta_1 P'_{i-1}(t_i), \\ P''_i(t_i) = \beta_2 P'_{i-1}(t_i) + \beta_1^2 P''_{i-1}(t_i). \end{cases} \quad (2.15)$$

En utilisant la forme (2.13) pour  $P_{i-1}$  et  $P_i$ , on obtient l'expression de leur dérivée seconde en  $t_i$  :

$$P''_{i-1}(t_i) = -\frac{2}{h} \left[ \frac{3}{h} (y_i - y_{i-1}) - P'_{i-1}(t_{i-1}) - 2P'_{i-1}(t_i) \right], \quad (2.16)$$

$$P''_i(t_i) = \frac{2}{h} \left[ \frac{3}{h} (y_{i+1} - y_i) - 2P'_i(t_i) - P'_i(t_{i+1}) \right].$$

En substituant (2.16) dans (2.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{2}{h} \beta_1^2 P'_{i-1}(t_{i-1}) + \left( \frac{4}{h} \beta_1 + \frac{4}{h} \beta_1^2 + \beta_2 \right) P'_{i-1}(t_i) \\ + \frac{2}{h} P'_i(t_{i+1}) = \frac{6}{h^2} \left[ y_{i+1} - y_i + \beta_1^2 (y_i - y_{i-1}) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

ou encore, en posant  $m_i = P'_i(t_i)$ , ( $m_i \in \mathbb{R}^d$ ) :

$$\begin{aligned} m_{i+1} + \left( 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{h\beta_2}{2} \right) m_i + \beta_1^3 m_{i-1} \\ = \frac{3\beta_1}{h} \left[ y_{i+1} - y_i + \beta_1^2 (y_i - y_{i-1}) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

#### 4. 2. Algorithme

Avec les notations du paragraphe précédent, l'expression (2.13) s'écrit

$$P_i(t) = H_0(t)y_i + H_1(t)m_i + H_2(t)\frac{m_{i+1}}{\beta_1} + H_3(t)y_{i+1}.$$

Les valeurs  $m_0$  et  $m_1$  étant données, l'algorithme consiste à déterminer les  $m_i$ ,  $i \geq 2$ , au moyen de la relation de récurrence

$$\begin{aligned} m_{i+1} = & -\beta_1^3 m_{i-1} - \left(2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{h\beta_2}{2}\right) m_i \\ & + \frac{3\beta_1}{h} \left[ y_{i+1} - y_i + \beta_1^2 (y_i - y_{i-1}) \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

pour  $i \geq 1$ .

#### 4. 3. Condition nécessaire et suffisante de stabilité

L'équation caractéristique correspondant à (2.18) est

$$z^2 + \left(2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{h\beta_2}{2}\right)z + \beta_1^3 = 0. \quad (2.20)$$

L'algorithme est donc stable si et seulement si les racines de (2.20) se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

Posons

$$b_1 = \left(2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{h\beta_2}{2}\right) \quad \text{et} \quad b_2 = \beta_1^3.$$

Comme  $\beta_1 > 0$  et  $\beta_2 \geq 0$  et en utilisant le critère de Schur-Cohn sur les racines de (2.20), les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité deviennent alors

$$\begin{cases} \beta_1 < 1 \\ \beta_2 < \frac{2}{h} (1 - 2\beta_1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^3) \end{cases}$$

L'hypothèse que  $\beta_2 \geq 0$  entraîne que :

$$\beta_1 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

car

$$1 - 2\beta_1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^3 = (1 + \beta_1)(1 - 3\beta_1 + \beta_1^2)$$

**Proposition 2.2** *L'algorithme progressif d'interpolation cubique  $G^2$  défini par la relation de récurrence (2.19) est stable si et seulement si*

$$\beta_1 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta_2 < \frac{2}{h} (1 + \beta_1^3 - 2\beta_1^2 - 2\beta_1). \quad (2.21)$$

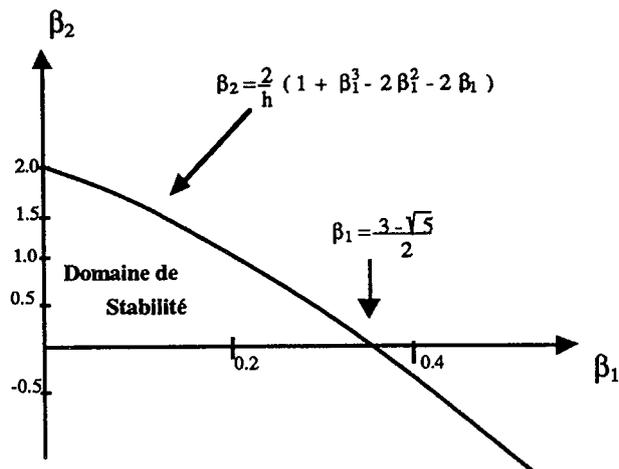


FIGURE.6. *Domaine de stabilité en fonction des paramètres de forme ( $h = 1$ ).*

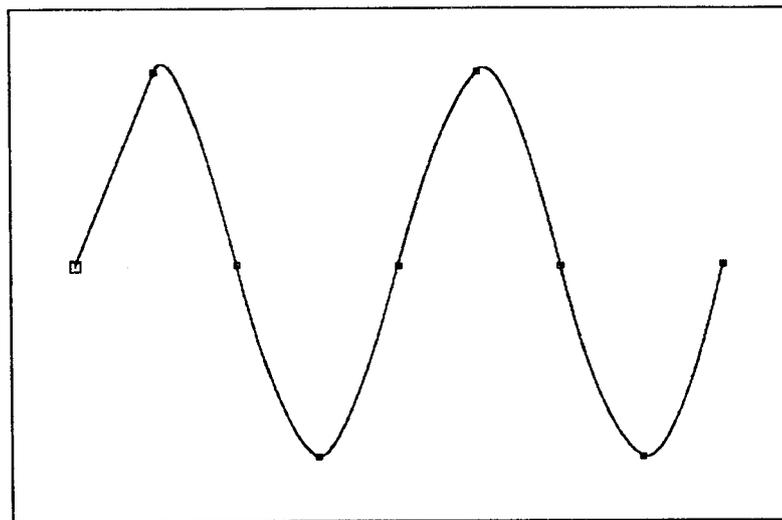


FIGURE.7. *Interpolation progressive quadratique  $G^2$  avec  $\beta_1 = 0.125$ ,  $\beta_2 = 1.0$ .*

#### 4. 4. Résultats numériques et interprétation

- On commence par donner, dans les figures 9, 10, 11, une comparaison “visuelle” entre la méthode des  $A$ -splines et celles utilisant les  $\beta$ -splines progressives quadratique et cubique.

- Dans les figures 12, 13, 14, nous donnons un exemple de  $A$ -splines pour différentes valeurs du coefficients  $C$  introduit par Seredinski. On remarque alors (A. Seredinski l’a dit aussi) que la valeur  $C = 1.5$  offre le “meilleur” résultat.

- Dans les figures 15, 16, 17, on présente le même exemple avec les  $\beta$ -splines cubiques pour des paramètres de forme  $\beta_1$  et  $\beta_2$  se situant dans le domaine de stabilité avec des choix donnés dans la figure 8.

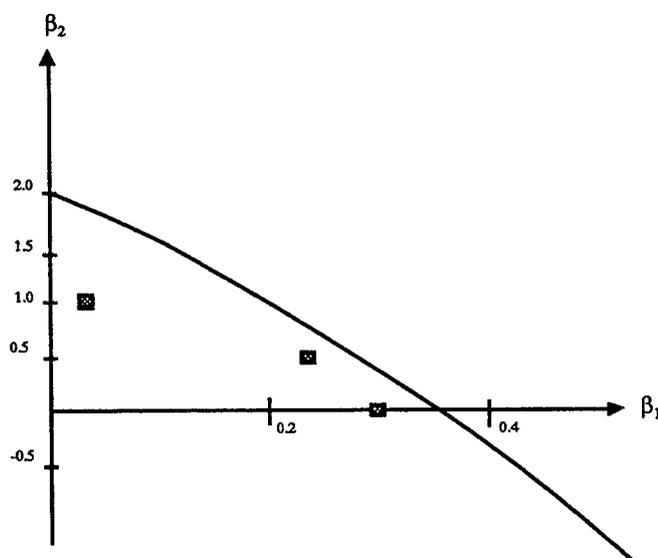
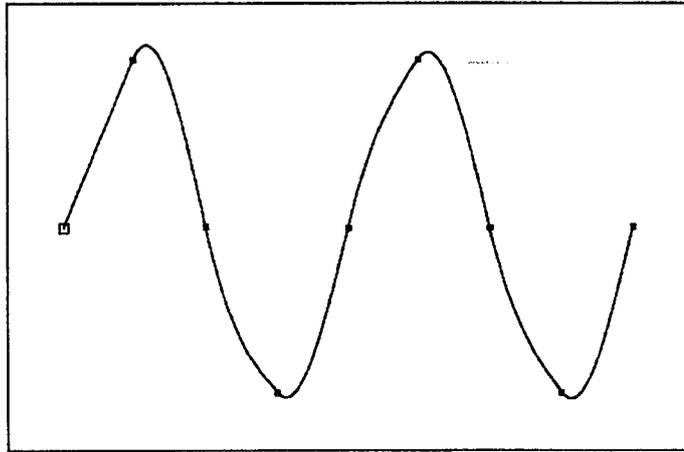
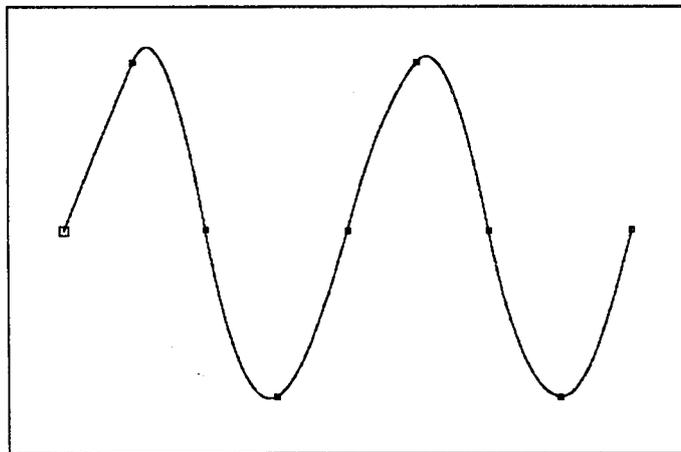
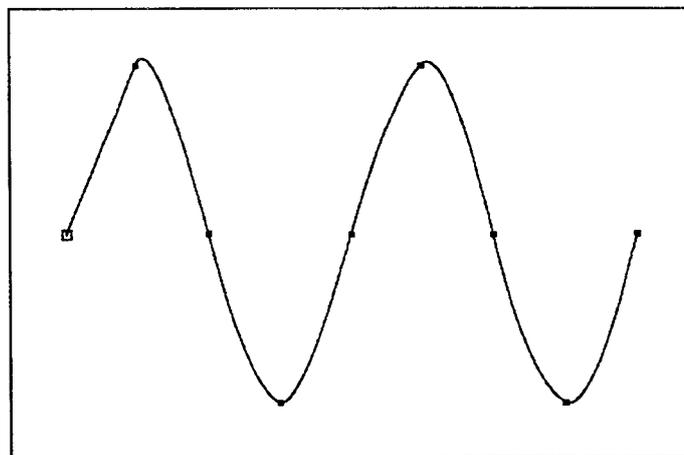


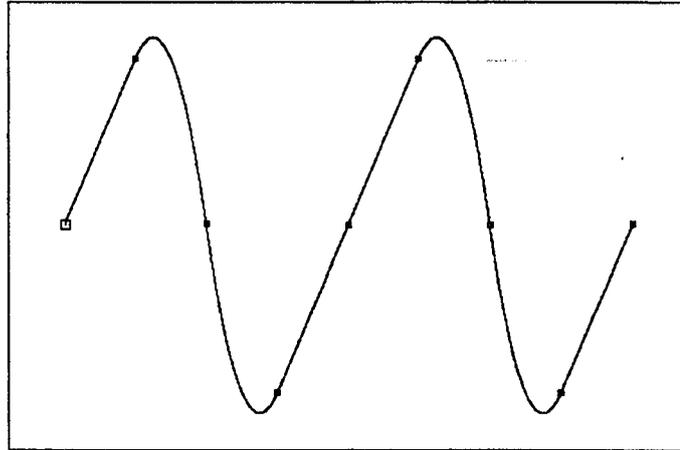
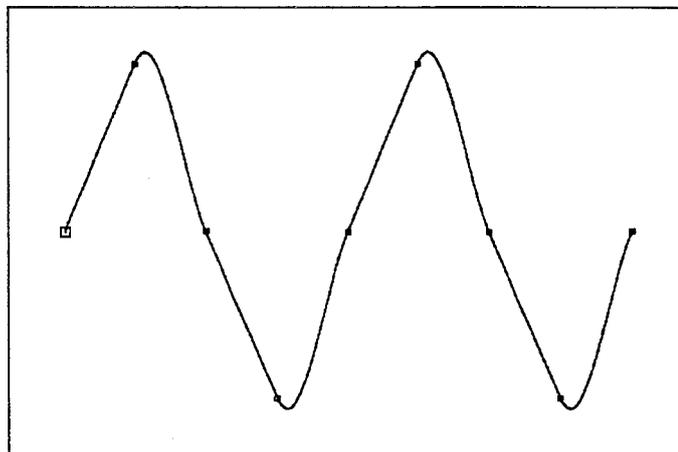
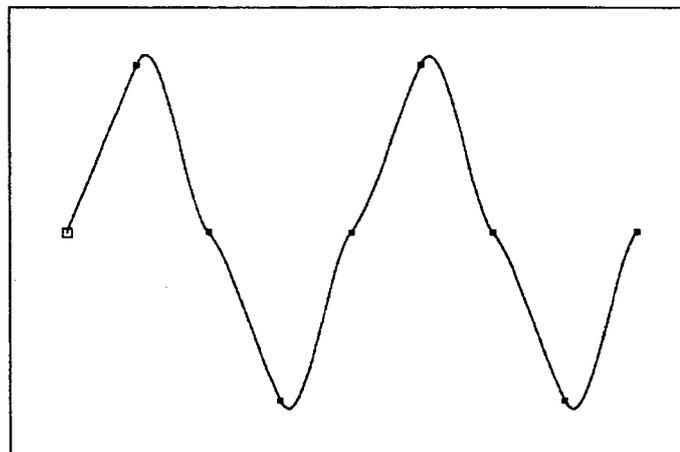
FIGURE.8. Choix des paramètres pour les figures 15,16,17.

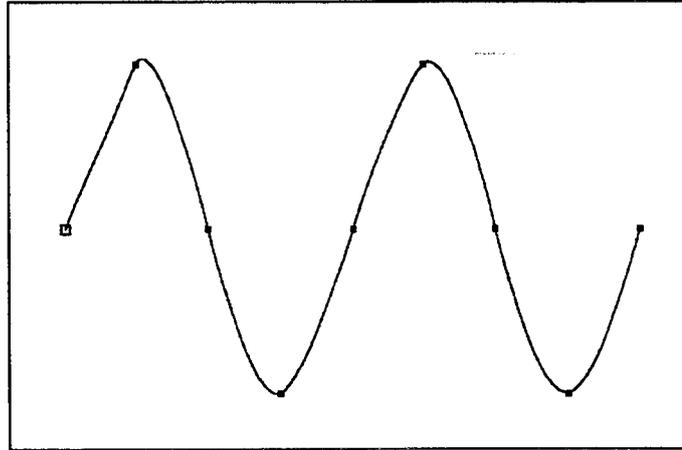
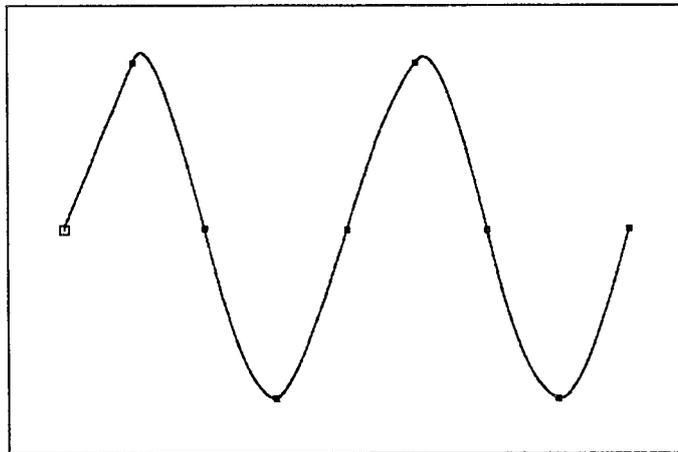
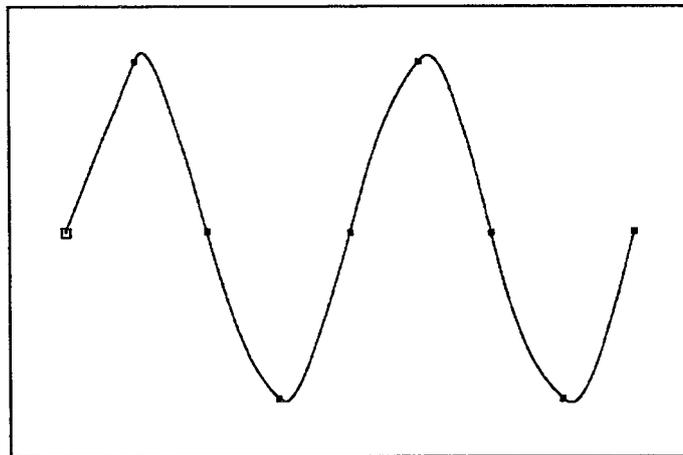
- Sur des exemples particuliers (donnés dans les figures 18, 19), on donne une comparaison entre les  $A$ -splines avec  $C = 1.5$  et les  $\beta$ -splines cubiques avec  $\beta_1 = 0.1$  et  $\beta_2 = 0.0$ .

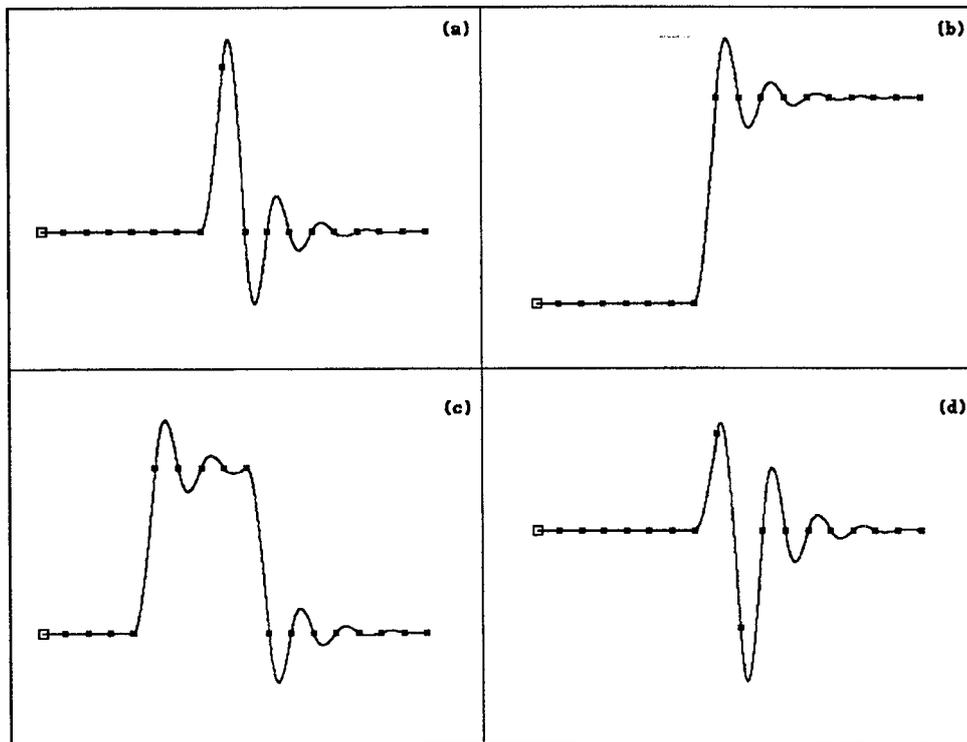
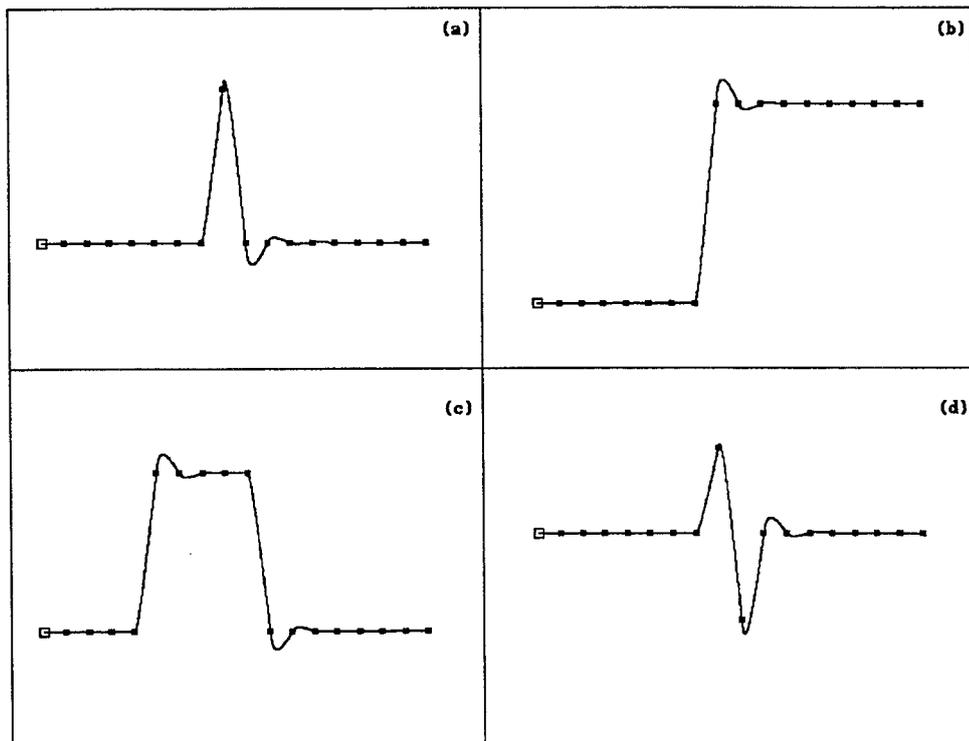
- Enfin, on s’intéressera aux  $\beta$ -splines cubiques et à l’influence des paramètres  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sur la courbe. En plus des propriétés déjà connues et qui sont citées dans le chapitre 1, nous allons donner un nouveau rôle à ces paramètres. Ce rôle consiste à “absorber” rapidement les oscillations engendrées par le calcul progressif que l’on fait et, par conséquent, à empêcher la fonction de prendre des valeurs très grandes.

- Dans tous les exemples numériques qu’on présentera, le point de départ de la progression est représenté par un petit carré.

FIGURE.9. *A-spline avec  $C = 3/2$ .*FIGURE.10. *beta-spline quadratique  $G^1$  avec  $\beta_1 = 0.8$ .*FIGURE.11. *beta-spline cubique  $G^2$  avec  $\beta_1 = 0.125$ ,  $\beta_2 = 1.0$ .*

FIGURE.12. *A-spline avec  $C = 1.0$ .*FIGURE.13. *A-spline avec  $C = 9/4$ .*FIGURE.14. *A-spline avec  $C = 2.0$ .*

FIGURE.15.  $\beta$ -spline avec  $\beta_1 = 0.05$ ,  $\beta_2 = 1.5$ .FIGURE.16.  $\beta$ -spline avec  $\beta_1 = 0.25$ ,  $\beta_2 = 0.5$ .FIGURE.17.  $\beta$ -spline avec  $\beta_1 = 0.3$ ,  $\beta_2 = 0.0$ .

FIGURE.18. Exemples de A-spline avec  $C = 3/2$ .FIGURE.19. Exemples de  $\beta$ -spline avec  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 0.0$ .

• Pour étudier l'influence des paramètres, on fixe l'un des deux. Dans la figure 22 (resp. figure 23), on a fixé  $\beta_2 = 0.1$  (resp.  $\beta_1 = 0.1$ ) puis on fait diminuer la valeur de  $\beta_1$  (resp.  $\beta_2$ ) comme le montre la figure 20.

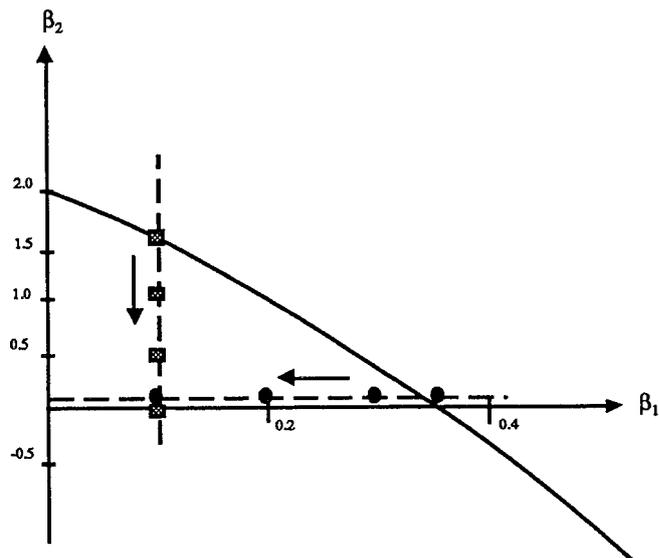


FIGURE.20. *Choix des paramètres pour les figures 22,23.*

• Un deuxième exemple est donné dans les figures 24 et 25, où l'on a fixé  $\beta_2 = 1.0$  puis  $\beta_1 = 0.2$  (voir figure 21).

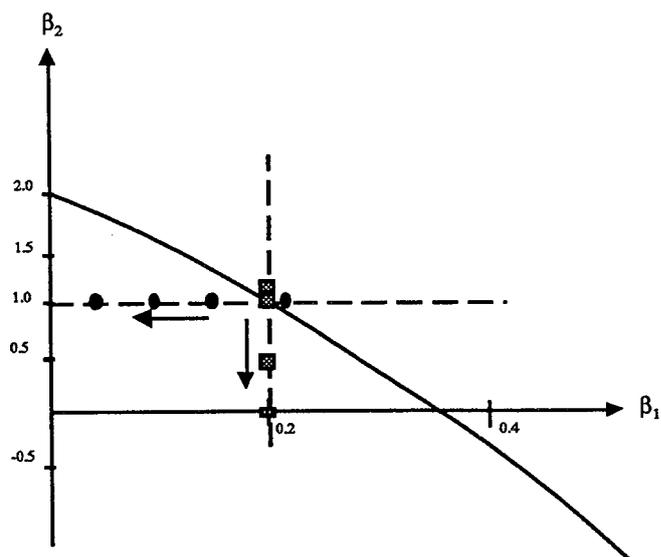


FIGURE.21. *Choix des paramètres pour les figures 24,25.*

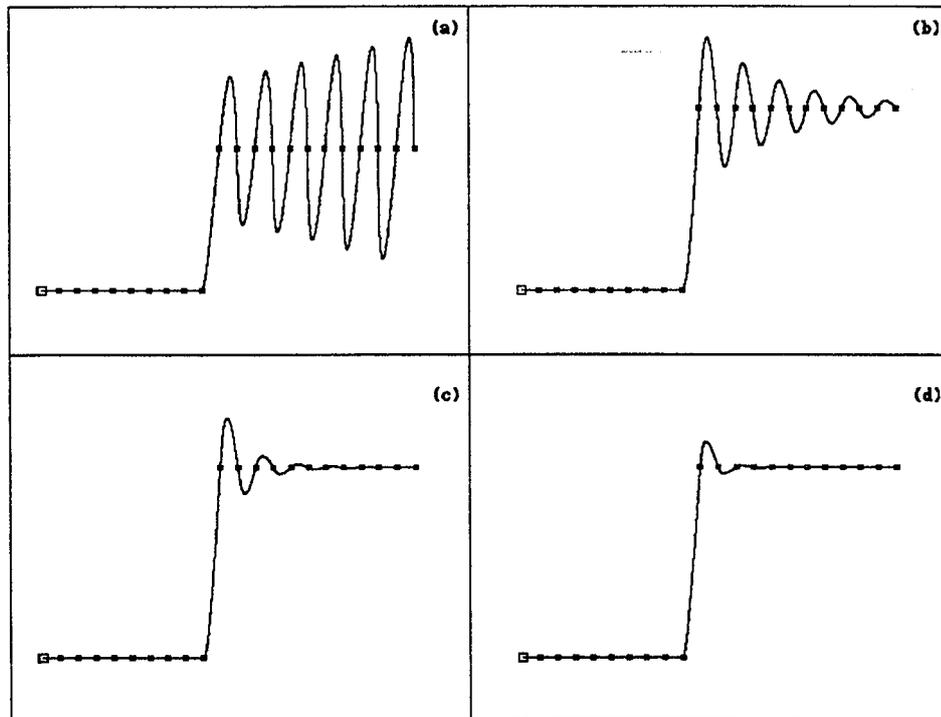


FIGURE.22.  $\beta$ -spline avec  $\beta_2 = 0.1$  et : a)  $\beta_1 = 0.38$  b)  $\beta_1 = 0.3$   
c)  $\beta_1 = 0.2$  d)  $\beta_1 = 0.1$ .

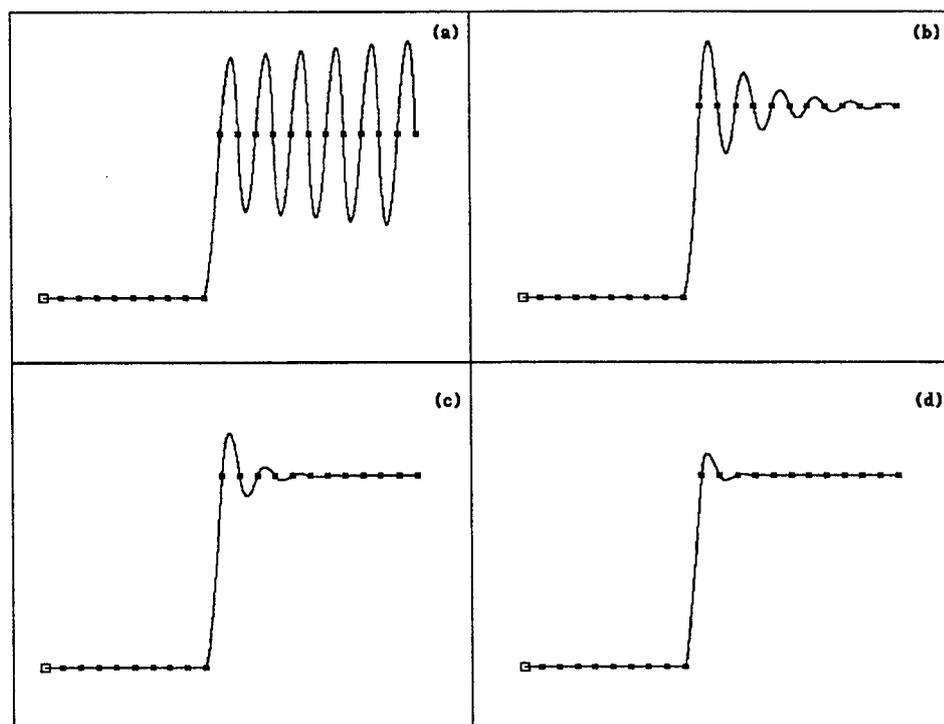


FIGURE.23.  $\beta$ -spline avec  $\beta_1 = 0.1$  et : a)  $\beta_2 = 1.68$  b)  $\beta_2 = 1.0$   
c)  $\beta_2 = 0.5$  d)  $\beta_2 = 0.0$ .

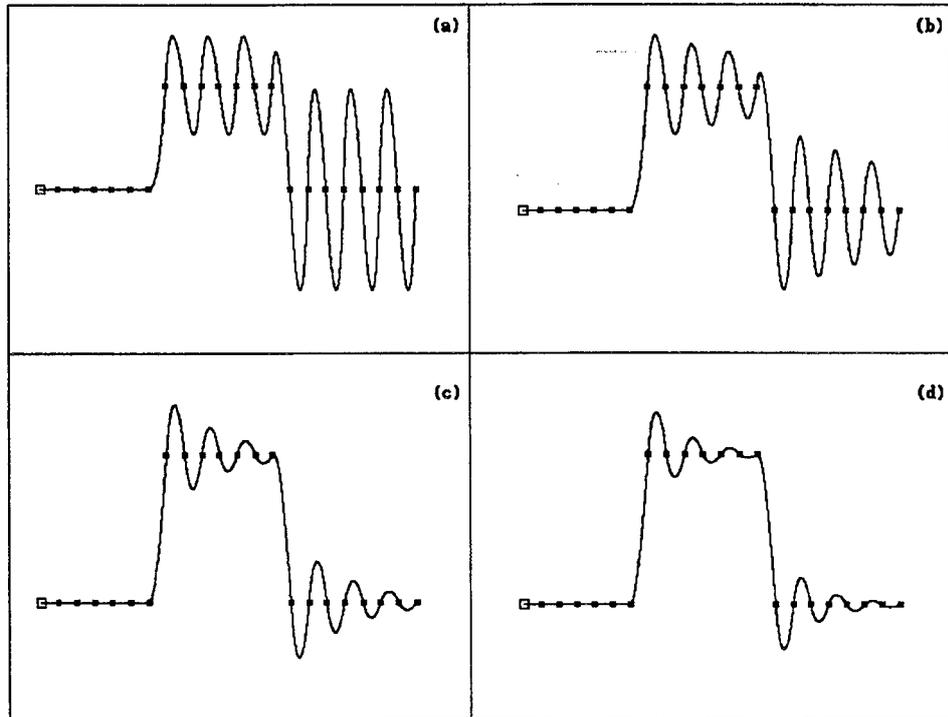


FIGURE.24.  $\beta$ -spline avec  $\beta_2 = 1.0$  et : a)  $\beta_1 = 0.21$  b)  $\beta_1 = 0.175$  c)  $\beta_1 = 0.1$  d)  $\beta_1 = 0.05$ .

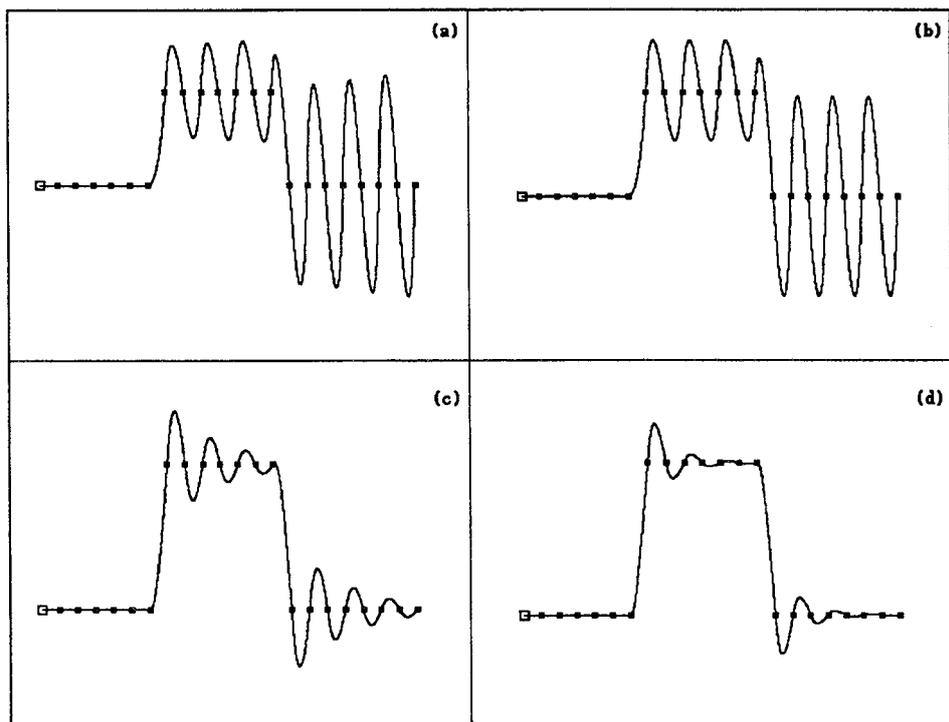


FIGURE.25.  $\beta$ -spline avec  $\beta_1 = 0.2$  et : a)  $\beta_2 = 1.1$  b)  $\beta_2 = 1.056$  c)  $\beta_2 = 0.5$  d)  $\beta_2 = 0.0$ .

#### 4. 5. Quelques remarques

##### 4. 5. 1. Sur le raccordement géométrique

Dans le système (2.15), nous avons choisi un raccordement géométrique  $G^2$ . Plus généralement, on pourrait considérer un raccordement exprimé par une matrice de connexion totalement positive et non singulière :

$$\begin{bmatrix} P'_i(t_i) \\ P''_i(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_{i-1}(t_i) \\ P''_{i-1}(t_i) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Si  $a_{11} = \beta_1$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{21} = \beta_2$  et  $a_{22} = \beta_1^2$ , on retrouve le système (2.15). L'équation caractéristique (2.20) devient

$$\lambda^2 + (2a_{11} + \frac{6}{h}a_{12} + \frac{h}{2}a_{21} + 2a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

et d'après le critère de Schur-Cohn, nous avons la stabilité si et seulement si

$$\begin{cases} -1 < a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 1, \\ a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} - 1 < 2a_{11} + \frac{6}{h}a_{12} + \frac{h}{2}a_{21} + 2a_{22} < a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + 1. \end{cases}$$

##### 4. 5. 2. Sur la relation de récurrence

Une autre manière de retrouver les conditions (2.21) consiste à exprimer le vecteur  $(P'_i(t_i), P''_i(t_i))^T$  des dérivées en  $t_i$  en fonction du vecteur des dérivées correspondant en  $t_{i-1}$ . En effet, en posant  $\delta_i = (y_{i+1} - y_i)$ , de la relation

$$P''_{i-1}(t_{i-1}) = \frac{6}{h^2} \delta_{i-1} - \frac{4}{h} P'_{i-1}(t_{i-1}) - \frac{2}{h} P'_{i-1}(t_i),$$

on tire

$$P'_{i-1}(t_i) = \frac{h}{2} \left[ \frac{6}{h^2} \delta_{i-1} - \frac{4}{h} P'_{i-1}(t_{i-1}) - P''_{i-1}(t_{i-1}) \right],$$

d'où (en remplaçant dans le système (2.15))

$$P'_i(t_i) = -2\beta_1 P'_{i-1}(t_{i-1}) - \frac{h}{2} \beta_1 P''_{i-1}(t_{i-1}) + \frac{3}{h} \beta_1 \delta_{i-1},$$

$$P''_i(t_i) = -(\frac{6}{h}\beta_1^2 + 2\beta_2)P'_{i-1}(t_{i-1}) - (2\beta_1^2 + \frac{h}{2}\beta_2)P''_{i-1}(t_{i-1}) + (\frac{6}{h^2}\beta_1^2 + \frac{3}{h}\beta_2)\delta_{i-1}.$$

Posons

$$Y_i = \begin{bmatrix} P'_i(t_i) \\ P''_i(t_i) \end{bmatrix}.$$

Les deux dernières équations peuvent alors être exprimées sous la forme matricielle suivante

$$Y_i = \begin{bmatrix} -2\beta_1 & -\frac{h}{2}\beta_1 \\ -\frac{6}{h}\beta_1^2 - 2\beta_2 & -2\beta_1^2 - \frac{h}{2}\beta_2 \end{bmatrix} Y_{i-1} + \begin{bmatrix} \frac{3}{h}\beta_1 \\ \frac{6}{h^2}\beta_1^2 + \frac{3}{h}\beta_2 \end{bmatrix} \delta_{i-1}.$$

L'algorithme est alors stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont de module inférieur à 1. Or ces valeurs sont solutions de l'équation

$$\lambda^2 + \left( 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{h\beta_2}{2} \right) \lambda + \beta_1^3 = 0,$$

qui est équivalente à (2.20).

## 5. INTERPOLATION PROGRESSIVE DE DEGRE $n$

Considérons le polynôme  $P_i$  de degré  $n$  correspond à l'intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$ .  $P_i(t)$  peut s'écrire sous la forme de Taylor

$$P_i(t) = \sum_{j=0}^n \frac{(t - t_i)^j}{j!} P_i^{(j)}(t_i). \quad (2.23)$$

Le polynôme  $P_{i-1}$  étant supposé connu, le polynôme  $P_i$  est complètement défini par les deux conditions suivantes :

- $P_i$  et  $P_{i-1}$  ont un contact géométrique  $G^{n-1}$  en  $t_i$  (avec une même matrice de connexion pour tout  $i$ ),
- $P_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$  (condition d'interpolation).

La première condition s'écrit explicitement de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} P_i'(t_i) \\ P_i''(t_i) \\ P_i^{(3)}(t_i) \\ \vdots \\ P_i^{(n-1)}(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_1^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-1}'(t_i) \\ P_{i-1}''(t_i) \\ P_{i-1}^{(3)}(t_i) \\ \vdots \\ P_{i-1}^{(n-1)}(t_i) \end{bmatrix}.$$

On notera  $M$  la matrice de connexion.

La deuxième condition appliquée au polynôme  $P_{i-1}$  donne

$$\begin{aligned} y_i = P_{i-1}(t_i) &= \sum_{j=0}^n \frac{h^j}{j!} P_{i-1}^{(j)}(t_{i-1}) \\ &= y_{i-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h^j}{j!} P_{i-1}^{(j)}(t_{i-1}) + \frac{h^n}{n!} P_{i-1}^{(n)}(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Ceci implique

$$P_{i-1}^{(n)}(t_{i-1}) = \frac{n!}{h^n} (y_i - y_{i-1}) - \frac{n!}{h^n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h^j}{j!} P_{i-1}^{(j)}(t_{i-1}). \quad (2.24)$$

La dérivée  $k^{\text{ième}}$  de l'expression (2.23) est

$$P_i^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^n \frac{(t - t_i)^{j-k}}{(j-k)!} P_i^{(j)}(t_i), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Substituons (2.24) dans l'expression de  $P_{i-1}^{(k)}(t_i)$  :

$$\begin{aligned} P_{i-1}^{(k)}(t_i) &= \sum_{j=k}^{n-1} \frac{h^{j-k}}{(j-k)!} P_{i-1}^{(j)}(t_{i-1}) + \frac{h^{n-k}}{(n-k)!} P_{i-1}^{(n)}(t_{i-1}) \\ &= \sum_{j=k}^{n-1} \frac{h^{j-k}}{(j-k)!} P_{i-1}^{(j)}(t_{i-1}) + \frac{n!}{(n-k)! h^k} \left[ y_i - y_{i-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h^j}{j!} P_{i-1}^{(j)}(t_{i-1}) \right] \\ &= -\frac{n!}{(n-k)! h^k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^j}{j!} P_{i-1}^{(j)}(t_{i-1}) + \frac{n!}{(n-k)! h^k} (y_i - y_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{j=k}^{n-1} \left[ \frac{1}{(j-k)!} - \frac{n!}{(n-k)! j!} \right] h^{j-k} P_{i-1}^{(j)}(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Soit  $T$  la matrice d'ordre  $n-1$  définie par

$$t_{k,j} = \begin{cases} -\frac{n!}{(n-k)! j!} h^{j-k}, & j = 1, \dots, k-1, \\ \left[ \frac{1}{(j-k)!} - \frac{n!}{(n-k)! j!} \right] h^{j-k}, & j = k, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2.25)$$

et soit  $\Delta$  le vecteur défini par

$$\Delta_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{h^k} (y_i - y_{i-1}). \quad (2.26)$$

Les dérivées successives  $P_{i-1}^{(k)}(t_i)$  peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} P'_{i-1}(t_i) \\ P''_{i-1}(t_i) \\ \vdots \\ P_{i-1}^{(n-1)}(t_i) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} P'_{i-1}(t_{i-1}) \\ P''_{i-1}(t_{i-1}) \\ \vdots \\ P_{i-1}^{(n-1)}(t_{i-1}) \end{bmatrix} + \Delta.$$

Notons par

$$Y_i = \begin{bmatrix} P'_i(t_i) \\ P''_i(t_i) \\ \vdots \\ P_i^{(n-1)}(t_i) \end{bmatrix}.$$

On obtient finalement, la relation de progression suivante

$$Y_i = M(TY_{i-1} + \Delta) = MTY_{i-1} + M\Delta. \tag{2.27}$$

Les éléments  $m_{i,j}$  de la matrice de connexion  $M$  sont donnés par la formule de Faà di Bruno [50]

$$m_{i,j} = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_i = j \\ n_1 + 2n_2 + \dots + in_i = i \\ n_1, \dots, n_i \geq 0}} \frac{i!}{n_1! (1!)^{n_1} \dots n_i! (i!)^{n_i}} \beta_1^{n_1} \dots \beta_i^{n_i}, \tag{2.28}$$

pour  $j \leq i$  et  $m_{i,j} = 0$ ,  $j > i$ .

L'algorithme d'interpolation progressive de degré  $n$  décrit par la relation (2.27) est stable si et seulement si les  $(n-1)$  valeurs propres de la matrice  $A$  se trouvent à l'intérieur de cercle unité, autrement dit, si et seulement si les racines du polynôme

$$K(\lambda) = \det(A - \lambda I) := d_0 + d_1 \lambda + \dots + d_{n-1} \lambda^{n-1} \quad (d_{n-1} = 1),$$

sont de module inférieur à 1.

Définissons la suite suivante

$$\begin{cases} d_k^{(j+1)} = d_0^{(j)} d_k^{(j)} - d_{n-1-j}^{(j)} d_{n-1-j-k}^{(j)}, \\ d_i^{(0)} = d_i, \end{cases} \tag{2.29}$$

et soit

$$\xi_{j+1} = d_0^{(j+1)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-2. \tag{2.30}$$

Considérons maintenant les produits

$$p_k = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.31)$$

D'après le résultat de M. Marden [39] rappelé au chapitre 1, les  $(n-1)$  racines de  $K(\lambda)$  sont à l'intérieur du cercle unité  $|Z| = 1$  si tous les  $p_k$  sont négatifs.

**Exemple où  $n = 4$  :**

La matrice  $A$  devient

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \beta_1^2 & 0 \\ \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -h & -\frac{h^2}{6} \\ -\frac{12}{h} & -5 & -h \\ -\frac{24}{h^2} & -\frac{12}{h} & -3 \end{bmatrix}.$$

Les coefficients  $d_i$  qui définissent  $K(\lambda)$  sont donnés par :

$$\begin{cases} d_0 = \beta_1^6, \\ d_1 = 3\beta_1^3 + 5\beta_1^4 + 3\beta_1^5 + 3h\beta_2\beta_1^2 + h\beta_2\beta_1^3 + \frac{h^2}{2}\beta_1\beta_2^2 - \frac{h^2}{6}\beta_3\beta_1^2, \\ d_2 = 3\beta_1 + 5\beta_1^2 + 3\beta_1^3 + h\beta_2 + 3h\beta_2\beta_1 + \frac{h^2}{6}\beta_3, \\ d_3 = 1, \end{cases}$$

et les valeurs de  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sont alors :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= d_0^2 - 1 = \beta_1^{12} - 1, \\ \xi_2 &= \xi_1^2 - (d_0 d_2 - d_1)^2, \\ \xi_3 &= \left[ \xi_1 - (d_0 d_2 - d_1) \right]^2 \left[ (\xi_1 + d_0 d_2 - d_1)^2 - (d_0 d_1 - d_2)^2 \right]. \end{aligned}$$

Pour simplifier les formules, posons

$$\begin{aligned} q_1 &= 6(\beta_1^4 - 1)(1 - 3\beta_1^3 - 4\beta_1^4 - 3\beta_1^5 + \beta_1^8), \\ q_2 &= 6h\beta_1^2(\beta_1 - 1)(3 + 4\beta_1 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1^3 + 3\beta_1^4), \\ q_3 &= 6(\beta_1^4 - 1)(1 + 3\beta_1^3 + 6\beta_1^4 + 3\beta_1^5 + \beta_1^8), \\ r_1 &= 6(1 + \beta_1)^2(1 + \beta_1^2)(1 + \beta_1 + \beta_1^2), \\ r_2 &= 6h(1 + \beta_1)^3, \\ r_3 &= 6(\beta_1^2 - 1)(1 - 3\beta_1 - 4\beta_1^2 - 3\beta_1^3 + \beta_1^4), \\ r_4 &= -6h(\beta_1 - 1)(1 + 4\beta_1 + \beta_1^2). \end{aligned}$$

On a alors

$$\xi_2 = \frac{1}{36} \left[ q_1 - q_2 \beta_2 + 3h^2 \beta_1 \beta_2^2 - h^2 \beta_1^2 (1 + \beta_1^4) \beta_3 \right]$$

$$\left[ q_3 + q_2 \beta_2 - 3h^2 \beta_1 \beta_2^2 + h^2 \beta_1^2 (1 + \beta_1^4) \beta_3 \right],$$

et

$$\xi_3 = \frac{\xi_1}{36} \left[ \xi_1 - d_0 d_2 + d_1 \right]^2 \left[ r_1 + r_2 \beta_2 + 3h^2 \beta_1 \beta_2^2 + h^2 (1 - \beta_1^2) \beta_3 \right]$$

$$\left[ r_3 + r_4 \beta_2 - 3h^2 \beta_1 \beta_2^2 + h^2 (1 + \beta_1^2) \beta_3 \right].$$

Par conséquent, nous pouvons énoncer le résultat suivant. Les quantités  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  vérifient

$$\xi_1 < 0 \text{ et } \xi_2, \xi_3 > 0 \quad (p_k < 0, k = 1, 2, 3),$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} r_4 - \sqrt{r_4^2 + 12h^2 \beta_1 r_3} > 0 \quad (\Leftrightarrow 0 < \beta_1 < \simeq 0.24), \\ \beta_2 < \frac{r_4 - \sqrt{r_4^2 + 12h^2 \beta_1 r_3}}{6h^2 \beta_1}, \quad (*) \\ \frac{-3h^2 \beta_1 \beta_2^2 - r_2 \beta_2 - r_1}{h^2 (1 - \beta_1^2)} < \beta_3 < \frac{3h^2 \beta_1 \beta_2^2 - r_4 \beta_2 - r_3}{h^2 (1 + \beta_1^2)}, \end{array} \right.$$

ce qui entraîne  $p_k < 0, k = 1, 2, 3$ , donc la stabilité.

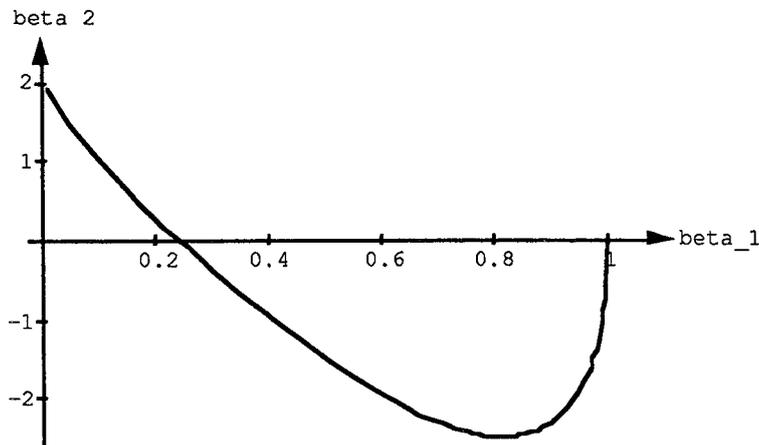


FIGURE.26. Représentation de la relation (\*).

Exemple :

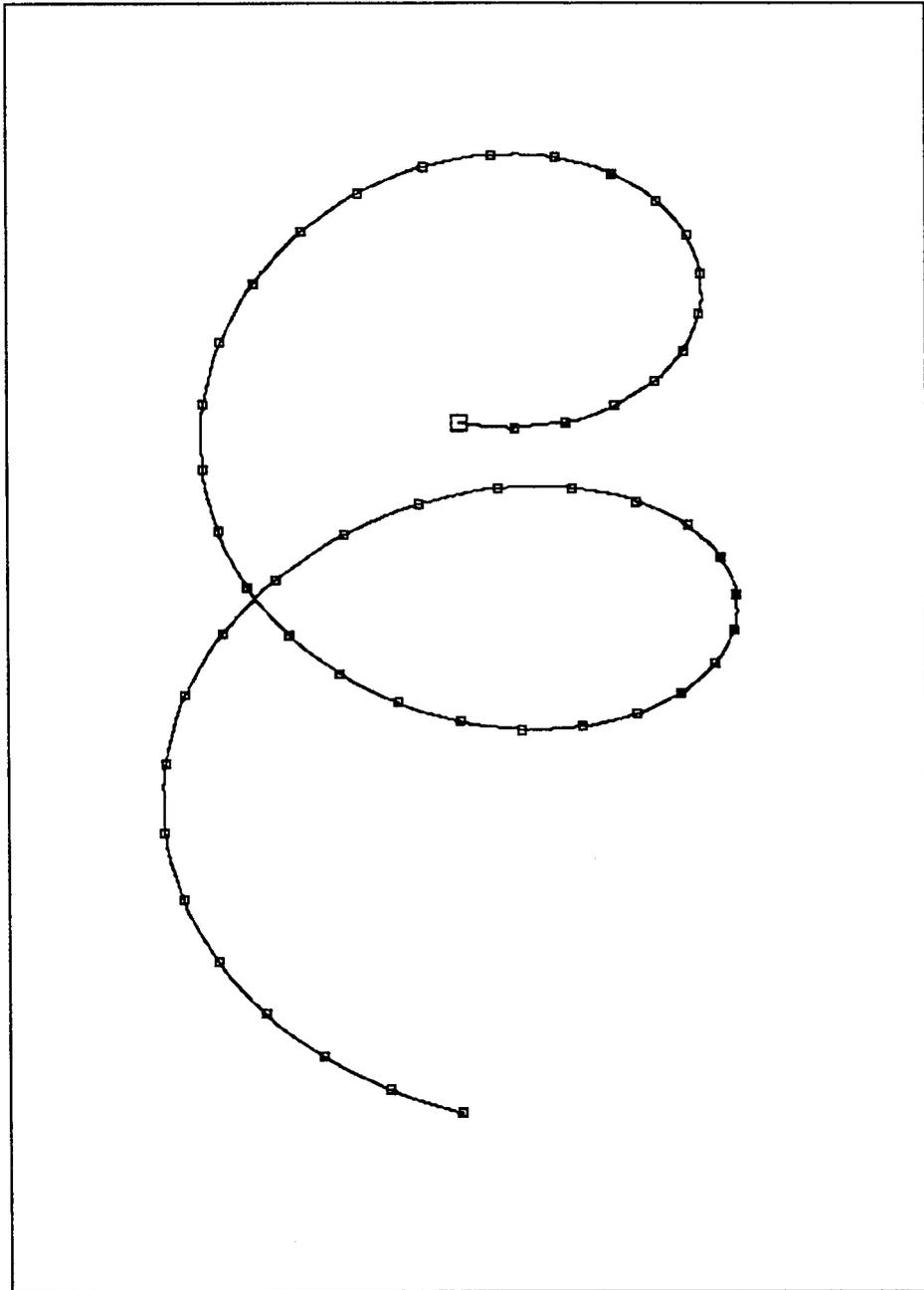


FIGURE.27. Interpolation progressive  $G^3$  dans  $\mathbb{R}^3$   
avec  $\beta_1 = 0.125$  et  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ .

## 6. INTERPOLATION PROGRESSIVE RATIONNELLE

## 6. 1. Introduction

Une courbe rationnelle est définie par une fonction vectorielle  $q : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  dont chaque composante est une fonction rationnelle. On peut toujours représenter une telle fonction  $q$  par la composition d'une fonction polynomiale  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  dont la dernière composante est supposée non nulle sur l'intervalle considéré, avec l'application projection :

$$(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \rightarrow \left( \frac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}} \right).$$

La courbe définie par  $Q$  est appelée la courbe homogène associée à  $q$ . On remarque que la courbe homogène n'est pas unique.

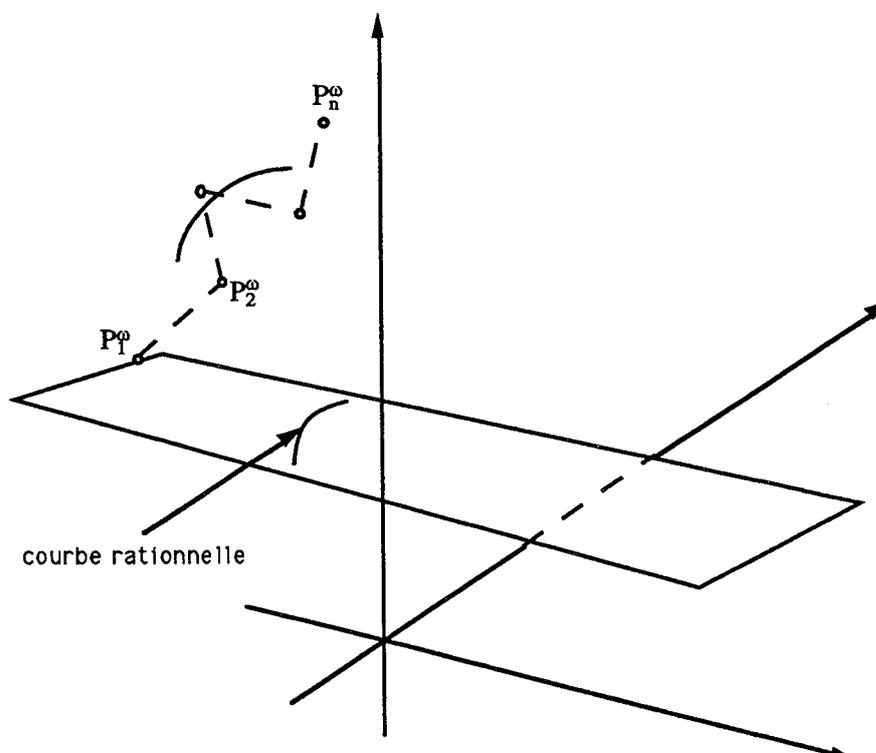


FIGURE.28. Courbe de Bézier rationnelle de degré  $n$ .

En particulier, si la fonction polynomiale est exprimée sous la forme de Bézier :

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) (\omega_i P_i, \omega_i),$$

où  $P_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $\omega_i > 0$  et où les  $B_i^n$ ,  $i = 0, \dots, n$  désignent les polynômes de Bernstein, on obtient :

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_j^n(t)} P_i. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Les coefficients  $\omega_i$  sont appelés "poids" et ils sont affectés aux points de contrôle. Leur rôle est illustré dans la figure suivante :

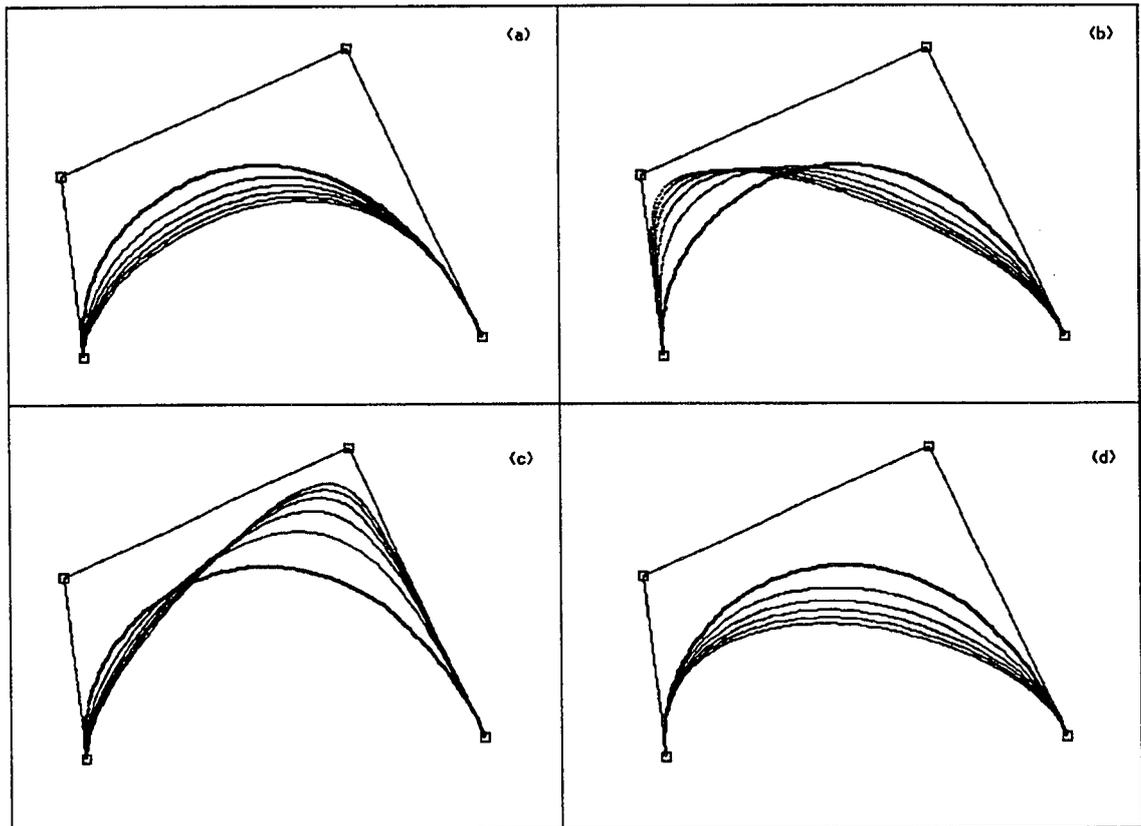


FIGURE.29. Courbe de Bézier rationnelle cubique. a)  $\omega_0 \nearrow$ , b)  $\omega_1 \nearrow$ , c)  $\omega_2 \nearrow$ , d)  $\omega_3 \nearrow$ .

## 6. 2. Interpolation rationnelle quadratique

On prend  $n = 2$ . On exprime sous la forme (2.34) la fonction rationnelle  $P_i$  restriction de la spline à l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  (les  $t_i$  sont supposés équidistants de pas  $h$ ) :

$$P_i(t) = \frac{\sum_{j=0}^2 P_j^i \omega_j B_j^2\left(\frac{t-t_i}{h}\right)}{\sum_{j=0}^2 \omega_j B_j^2\left(\frac{t-t_i}{h}\right)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (2.35)$$

La fonction  $P_0$  étant connue, la progression pourra s'effectuer avec un raccordement paramétrique  $C^1$ , ce que nous ne pouvons pas faire avec les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

- La fonction  $P_i(t)$  passe par les points d'interpolation  $y_i$  et  $y_{i+1}$ , donc

$$P_0^i = y_i \text{ et } P_2^i = y_{i+1} \text{ (propriétés des courbes de Bézier).}$$

- Le raccordement  $C^1$  en  $t_i$  entre  $P_i$  et  $P_{i-1}$  donne :

$$P_1^i = y_i + \frac{\omega_0}{\omega_2} (y_i - P_1^{i-1}),$$

soit

$$P_1^i + \frac{\omega_0}{\omega_2} P_1^{i-1} = \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_2}\right) y_i. \quad (2.36)$$

**Proposition 2.3** *L'algorithme d'interpolation rationnelle quadratique  $C^1$  est stable si et seulement si*

$$\omega_0 < \omega_2.$$

### 6. 3. Interpolation rationnelle cubique

On prend maintenant  $n = 3$ . La  $i$ -ième fonction correspondant à  $[t_i, t_{i+1}]$  est définie par :

$$P_i(t) = \sum_{j=0}^3 P_j^i \omega_j B_j^3\left(\frac{t-t_i}{h}\right) \Big/ \sum_{j=0}^3 \omega_j B_j^3\left(\frac{t-t_i}{h}\right). \quad (2.37)$$

• La fonction  $P_i$  prend les valeurs  $y_i$  et  $y_{i+1}$  en  $t_i$  et  $t_{i+1}$  :

$$P_0^i = y_i \text{ et } P_3^i = y_{i+1}.$$

Exprimons le raccordement  $C^2$  en  $t_i$  entre  $P_{i-1}$  et  $P_i$ .

• Raccordement  $C^1$  en  $t_i$  : posons  $u = \frac{t-t_i}{h}$  et  $r(u) = \sum_{j=0}^3 \omega_j B_j^3(u)$ . On a alors :

$$r(u) P_i(t) = \sum_{j=0}^3 P_j^i \omega_j B_j^3(u),$$

$$\frac{1}{h} r'(u) P_i(t) + r(u) P_i'(t) = \sum_{j=0}^3 P_j^i \omega_j \left( B_j^3(u) \right)'$$

Appliquons cette dernière relation en  $t = t_i$ , à l'étape  $i$  et  $(i-1)$  :

$$\begin{aligned} \frac{3}{h} (\omega_1 - \omega_0) y_i + \omega_0 P_i'(t_i) &= \frac{3}{h} (\omega_1 P_1^i - \omega_0 y_i), \\ \frac{3}{h} (\omega_3 - \omega_2) y_i + \omega_3 P_{i-1}'(t_i) &= \frac{3}{h} (\omega_3 y_i - \omega_2 P_2^{i-1}), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$P_1^i = y_i + \frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1 \omega_3} (y_i - P_2^{i-1}). \quad (2.38)$$

• Raccordement  $C^2$  en  $t_i$  :

$$\frac{1}{h^2} r''(u) P_i(t) + \frac{2}{h} r'(u) P_i'(t) + r(u) P_i''(t) = \sum_{j=0}^3 P_j^i \omega_j \left( B_j^3(u) \right)''.$$

Appliquons cette relation en  $t = t_i$  à l'étape  $i$  et  $(i-1)$  :

$$P_i''(t_i) = \frac{6}{h^2} \left[ \frac{\omega_2}{\omega_0} P_2^i + \underbrace{\frac{\omega_1}{\omega_0} \left(1 - 3 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)}_{A(\omega)} P_1^i + \underbrace{\left(3 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_2}{\omega_0}\right)}_{B(\omega)} y_i \right],$$

$$P_{i-1}''(t_i) = \frac{6}{h^2} \left[ \frac{\omega_1}{\omega_3} P_1^{i-1} - \underbrace{3 \frac{\omega_1}{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_3}\right)}_{C(\omega)} P_1^i - 2 \frac{\omega_2}{\omega_3} P_2^{i-1} + \underbrace{\left(3 \frac{\omega_1}{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_3}\right) + 2 \frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{\omega_1}{\omega_3}\right)}_{D(\omega)} y_i \right].$$

On a donc :

$$P_2^i = \frac{\omega_0}{\omega_2} \left[ \frac{\omega_1}{\omega_3} P_1^{i-1} - (A(\omega) + C(\omega)) P_1^i - 2 \frac{\omega_2}{\omega_3} P_2^{i-1} + (D(\omega) - B(\omega)) y_i \right]. \quad (2.39)$$

Des relations (2.38) et (2.39), on déduit la relation de récurrence suivante :

$$P_1^{i+1} + \frac{\omega_0}{\omega_3} \left(3 \frac{\omega_2}{\omega_3} + 3 \frac{\omega_1}{\omega_0} - 2\right) P_1^i + \left(\frac{\omega_0}{\omega_3}\right)^2 P_1^{i-1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_1 \omega_3} E_i, \quad (2.40)$$

où

$$\begin{cases} E_i = \frac{\omega_2}{\omega_0} \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) y_{i+1} + \left[B(\omega) - D(\omega) + 2 \frac{\omega_2}{\omega_3} \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)\right] y_i, \\ \alpha = \frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1 \omega_3}. \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée à (2.40) sera donc :

$$Z^2 + \frac{\omega_0}{\omega_3} \left(3 \frac{\omega_2}{\omega_3} + 3 \frac{\omega_1}{\omega_0} - 2\right) Z + \left(\frac{\omega_0}{\omega_3}\right)^2 = 0. \quad (2.41)$$

D'après le critère de Schur-Cohn, les racines de cette équation sont à l'intérieur du cercle unité si et seulement si

$$\begin{cases} \omega_0 < \omega_3, \\ \omega_1 \omega_3 + \omega_0 \omega_2 < \frac{1}{3} (\omega_0 + \omega_3)^2. \end{cases} \quad (2.42)$$

### Remarque :

• Là aussi on retrouve une condition sur les poids extrêmes qui est semblable à celle donnée dans la proposition (2.3). Si on ne veut garder que la condition  $\omega_0 < \omega_3$  dans le cas cubique, il suffit de prendre par exemple

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{3} \omega_0.$$

• Pour absorber rapidement les oscillations, on propose un rapport assez grand entre  $\omega_0$  et  $\omega_n$ , si  $n$  est le degré de la fonction rationnelle. Nous proposons dans les exemples numériques suivant le rapport

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = 9.0.$$

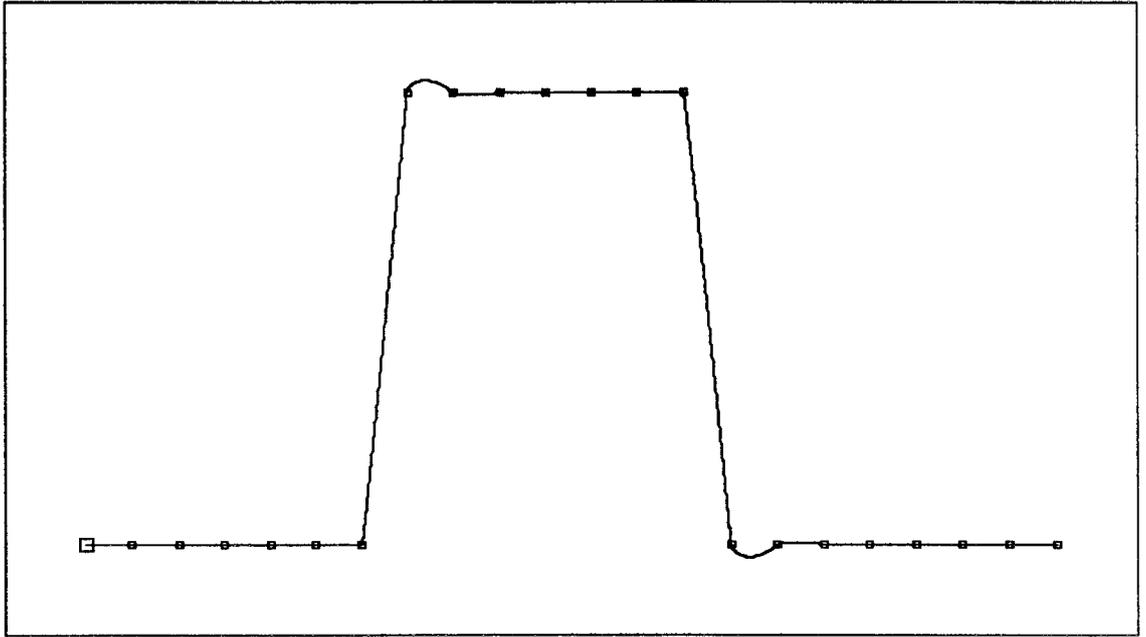


FIGURE.30. *Interpolation rationnelle  $C^1$  ( $\omega_0 = \omega_1 = 1.0$  et  $\omega_2 = 9.0$ ).*

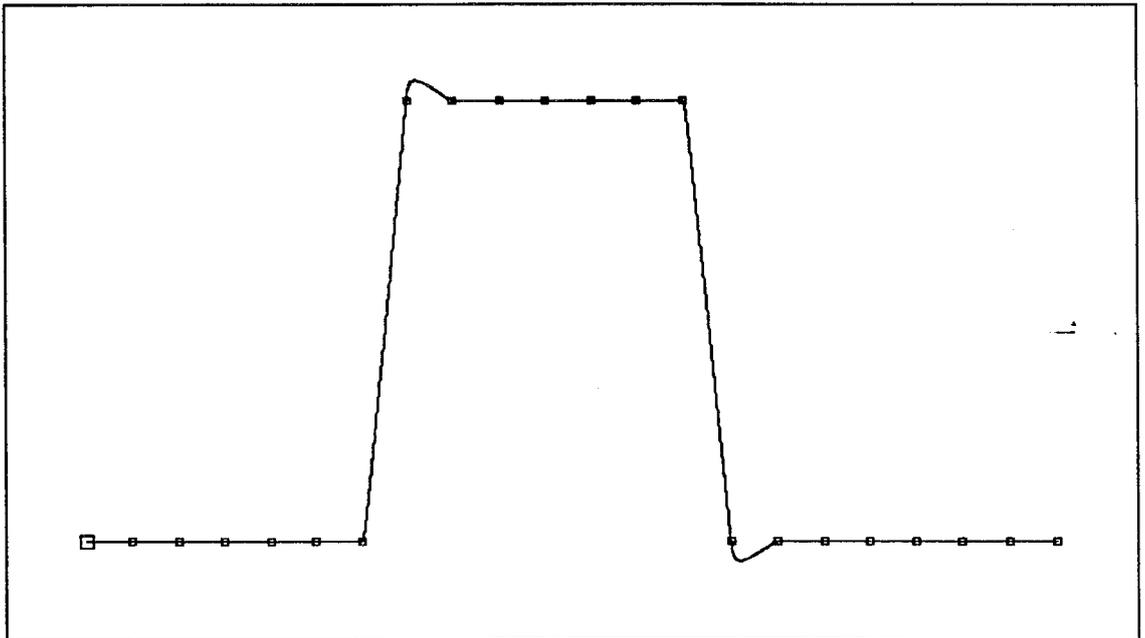


FIGURE.31. *Interpolation rationnelle  $C^2$  ( $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1.0$  et  $\omega_3 = 9.0$ ).*

## 7. GENERALISATION DE L'INTERPOLATION PROGRESSIVE STABLE

### 7. 1. Introduction

Considérons l'exemple simple suivant. Soit  $\{(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots\}$  une suite de données de  $\mathbb{R}^2$ , interpolée de façon stable par une spline quadratique  $S$  supposée  $G^1$  de paramètre  $0 < \beta_1 < 1$ , pour les valeurs  $t_i = i$  de la variable. Supposons la suite des abscisses  $(x_i)$  croissante et régulièrement espacée, par exemple, (pour simplifier) supposons que  $x_i = i$  pour tout  $i \geq 0$ .

Soit  $(X_i, Y_i)$  la fonction polynomiale de degré 2 qui définit la spline sur  $[t_i, t_{i+1}] = [i, i+1]$ . Les hypothèses montrent que :

$$X_i(t) = i + x'_i(t-i) + (1-x'_i)(t-i)^2,$$

$$Y_i(t) = y_i + y'_i(t-i) + (y_{i+1} - y_i - y'_i)(t-i)^2,$$

où  $(x'_i, y'_i) = S'(t_i^+) = S'(i^+)$ . On a de plus l'égalité :

$$(x'_{i+1}, y'_{i+1}) = \beta_1 (X'_i(i+1), Y'_i(i+1)),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x'_{i+1} = \beta_1 (2 - x'_i), \\ y'_{i+1} = \beta_1 (2(y_{i+1} - y_i) - y'_i). \end{cases} \quad (2.43)$$

Par ailleurs, il est clair que la spline  $S$  est parfaitement déterminée par le choix de  $(x'_0, y'_0)$ . Quel que soit ce choix, puisque  $\beta_1 < 1$  et d'après (2.43),  $x'_i$  aura une valeur limite le point fixe de l'itération

$$x'_{i+1} = \beta_1 (2 - x'_i),$$

c'est-à-dire  $\frac{2\beta_1}{1+\beta_1}$ . Fixons désormais  $x'_0 = \frac{2\beta_1}{1+\beta_1}$ , choix qui assure que :

$$\forall i \geq 0, \quad x'_i = \frac{2\beta_1}{1+\beta_1}, \quad (2.44)$$

et implique en particulier que  $1 - x'_i = \frac{1-\beta_1}{1+\beta_1} > 0$ .

Soit maintenant  $x \in [x_i, x_{i+1}] = [i, i+1]$  donné. L'équation  $X_i(t) = x$  admet alors une unique solution dans  $[t_i, t_{i+1}] = [i, i+1]$ , donnée par :

$$t - i = \frac{-x'_i + \sqrt{x'^2_i + 4(x-i)(1-x'_i)}}{2(1-x'_i)},$$

c'est-à-dire  $t-i = \varphi(x-i)$ , où la fonction  $\varphi$  est définie sur  $[0, 1]$  par (en remplaçant  $x'_i$  par sa valeur donnée dans (2.44)) :

$$\varphi(u) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} + \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{1 - \beta_1}\right)^2 + \left(\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1}\right)u}. \quad (2.45)$$

On peut donc exprimer  $Y_i(t)$  en fonction de  $x$  comme suit :

$$Y_i(t) = \tilde{Y}_i(x) = y_i + y'_i \varphi(x-i) + (y_{i+1} - y_i - y'_i) \left[ \varphi(x-i) \right]^2,$$

et la spline  $S$  toute entière s'obtient comme graphe de la fonction  $\tilde{Y}$  dont la restriction à chaque intervalle  $[i, i+1]$  est  $\tilde{Y}_i$ . De plus, puisque  $S$  est  $G^1$  en chaque  $t_i = i$ , il est clair que la fonction  $\tilde{Y}$  est  $C^1$  en chaque point  $x_i = i$ .

Ainsi, chaque section de la fonction  $\tilde{Y}$  est (à un changement de variable près) un élément de l'espace  $V_{\beta_1}$  engendré par les fonctions  $1, \varphi, \varphi^2$  qui sont définies sur  $[0, 1]$ . Cet espace n'est bien sûr plus polynomial. Cet exemple d'interpolation polynomiale  $G^1$  se ramène donc à une interpolation non polynomiale  $C^1$ , le paramètre  $\beta_1$  devant assurer la stabilité étant désormais attaché à l'espace qui sert à définir chaque section de la courbe. Cette idée peut évidemment être généralisée en augmentant la dimension de l'espace pour assurer un raccordement  $C^k$  avec  $k \geq 1$ .

## 7. 2. Interpolation progressive par spline $C^{n-1}$ appartenant par morceau à un sous espace de dimension $n+1$

Donnons nous  $n+1$  fonctions linéairement indépendantes,  $\varphi_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , de classe  $C^{n-1}$ . Soit  $V = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ .

Etant donné un ensemble  $D = \{(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots\}$  de données de  $\mathbb{R}^2$ , dont on suppose les abscisses régulièrement espacées ( $x_{i+1} - x_i = h > 0 \forall i$ ), on cherche à le représenter par une fonction spline  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x_i) = y_i$  pour tout  $i$ , et dont chaque section  $f_i = f|_{[x_i, x_{i+1}]}$  est, à un changement de variable près, un élément de  $V$ . Autrement dit,

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^n A_j^i \varphi_j\left(\frac{x - x_i}{h}\right). \quad (2.46)$$

A noter que rien ne s'oppose à utiliser ce même principe pour interpoler des données  $(x_i, y_i)$  où  $x_i \in \mathbb{R}$  et  $y_i \in \mathbb{R}^d$ , en procédant composante à composante.

L'algorithme d'interpolation qu'on va décrire consiste à calculer  $f_i$  en imposant un raccordement d'ordre  $C^{n-1}$  avec  $f_{i-1}$  en  $x_i$ , plus la condition d'interpolation de  $f_i$  en  $x_{i+1}$ .

La dérivée  $k^{\text{ième}}$  de la relation (2.46) est

$$f_i^{(k)}(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^n A_j^i \varphi_j^{(k)}\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

- La condition d'interpolation en  $x_{i+1}$  donne :

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^n A_j^i \varphi_j(1). \quad (2.47)$$

- Les conditions de raccordement d'ordre  $C^{n-1}$  donnent (pour  $k = 0, \dots, n-1$ ) :

$$f_i^{(k)}(x_i) = f_{i-1}^{(k)}(x_i) \iff \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^n A_j^i \varphi_j^{(k)}(0) = \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^n A_j^{i-1} \varphi_j^{(k)}(1). \quad (2.48)$$

Si on note

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_0(1) & \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_n(1) \\ \varphi_0(0) & \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \cdots & \varphi_n(0) \\ \varphi'_0(0) & \varphi'_1(0) & \varphi'_2(0) & \cdots & \varphi'_n(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0^{(n-1)}(0) & \varphi_1^{(n-1)}(0) & \varphi_2^{(n-1)}(0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi'_0(1) & \varphi'_1(1) & \varphi'_2(1) & \cdots & \varphi'_n(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0^{(n-1)}(1) & \varphi_1^{(n-1)}(1) & \varphi_2^{(n-1)}(1) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(1) \end{pmatrix},$$

alors les relations (2.47) et (2.48) s'écrivent :

$$A \begin{pmatrix} A_0^i \\ A_1^i \\ A_2^i \\ \vdots \\ A_n^i \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} A_0^{i-1} \\ A_1^{i-1} \\ A_2^{i-1} \\ \vdots \\ A_n^{i-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{i+1} \\ y_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Si la matrice  $A$  est inversible, alors la relation (2.49) devient :

$$\begin{pmatrix} A_0^i \\ A_1^i \\ A_2^i \\ \vdots \\ A_n^i \end{pmatrix} = A^{-1} B \begin{pmatrix} A_0^{i-1} \\ A_1^{i-1} \\ A_2^{i-1} \\ \vdots \\ A_n^{i-1} \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} y_{i+1} \\ y_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

**Proposition 2.4** *Supposons la matrice  $A$  inversible. L'algorithme d'interpolation est alors stable si et seulement si  $\rho(A^{-1} B) < 1$ .*

### 7. 2. 1. Remarques

Remarque 1 : La matrice  $A^{-1} B$  admet 0 pour valeur propre au moins double.

Remarque 2 : Soit  $(\tilde{\varphi}_0, \dots, \tilde{\varphi}_n) = (\varphi_0, \dots, \varphi_n) P$  où  $P$  est inversible. Soit

$$\tilde{A} = A P \quad \text{et} \quad \tilde{B} = B P,$$

alors

$$\tilde{A}^{-1} \tilde{B} = P^{-1} A^{-1} B P.$$

Par conséquent,

$$\rho(\tilde{A}^{-1} \tilde{B}) = \rho(A^{-1} B).$$

Donc la condition  $\rho(A^{-1} B) < 1$  est attachée à  $V = \text{span}(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ . On peut alors particulariser la base  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  de  $V$ . Par exemple, si  $\varphi_0$  est telle que  $\varphi_0(0) \neq 0$ , il est possible, quitte à remplacer  $\varphi_i$  par  $\varphi_i + \lambda_i \varphi_0$  pour  $i = 1, \dots, n$ , de supposer que

$$\varphi_i(0) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

Remarque 3 : Toute multiplication (à gauche ou à droite) simultanée sur  $A$  et  $B$  par une matrice inversible ne change pas l'inversibilité de  $A$  ni  $\rho(A^{-1} B)$ .

### 7. 2. 2. Premier choix des fonctions $\varphi_j$

Supposons

$$\begin{cases} \varphi_0 \equiv 1, \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dots = \varphi_n(0) = 0. \end{cases} \quad (H_1)$$

Les matrices  $A$  et  $B$  deviennent :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_n(1) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \cdots & \varphi_n'(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \varphi_1^{(n-1)}(0) & \varphi_2^{(n-1)}(0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_1'(1) & \varphi_2'(1) & \cdots & \varphi_n'(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \varphi_1^{(n-1)}(1) & \varphi_2^{(n-1)}(1) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(1) \end{pmatrix}.$$

Considérons les matrices  $A_1$  et  $B_1$  définies à partir de  $A$  et  $B$  :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_n(1) \\ 0 & \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \cdots & \varphi_n'(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \varphi_1^{(n-1)}(0) & \varphi_2^{(n-1)}(0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}, \quad B_1 = B.$$

Alors

$$\rho(A^{-1}B) = \rho(A_1^{-1}B_1).$$

D'autre part

$A$  est inversible  $\iff A_1$  est inversible

$$\iff V_j := \left( \varphi_j(1), \varphi_j'(0), \dots, \varphi_j^{(n-1)}(0) \right)^T, \quad j = 1, \dots, n,$$

sont linéairement indépendants.

Considérons maintenant la matrice  $\tilde{A}_1$  (resp.  $\tilde{B}_1$ ) d'ordre  $n$  obtenue à partir de  $A_1$  (resp.  $B_1$ ) en enlevant la première ligne et la première colonne, i.e.,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \tilde{A}_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \tilde{B}_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse  $A_1^{-1}$  est donc de la forme :

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \tilde{A}_1^{-1} \end{pmatrix},$$

d'où

$$A_1^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\rho(A^{-1} B) = \rho(A_1^{-1} B_1) = \rho(\tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1).$$

On a alors :

**Corollaire 2.5** *Si les vecteurs  $V_j := (\varphi_j(1), \varphi_j'(0), \dots, \varphi_j^{(n-1)}(0))^T$ ,  $j = 1, \dots, n$  sont linéairement indépendants, alors l'algorithme d'interpolation progressif basé sur la famille  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$  satisfaisant l'hypothèse  $(H_1)$  est stable si et seulement si  $\rho(\tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1) < 1$ .*

**Exemple (n=2) :** Soit  $\varphi_0 \equiv 1$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$ , satisfaisant  $\varphi_1(0) = 0$  et  $\varphi_2(0) = 0$ . Les matrices  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{B}_1$  sont données par :

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_1'(1) & \varphi_2'(1) \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\tilde{A}_1$  est inversible si et seulement si

$$\varphi_1(1)\varphi_2'(0) - \varphi_2(1)\varphi_1'(0) \neq 0,$$

et

$$\tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1 = \frac{1}{\varphi_1(1)\varphi_2'(0) - \varphi_2(1)\varphi_1'(0)} \begin{pmatrix} -\varphi_2(1)\varphi_1'(1) & -\varphi_2(1)\varphi_2'(1) \\ \varphi_1(1)\varphi_1'(1) & \varphi_1(1)\varphi_2'(1) \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\lambda_1 = 0$  est valeur propre de  $\tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1$ , sa deuxième valeur propre  $\lambda_2$  est égale à sa trace :

$$\lambda_2 = \frac{\varphi_1(1)\varphi_2'(1) - \varphi_2(1)\varphi_1'(1)}{\varphi_1(1)\varphi_2'(0) - \varphi_2(1)\varphi_1'(0)}.$$

Par conséquent,  $\rho(\tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1) < 1$  si et seulement si

$$|\varphi_1(1)\varphi_2'(1) - \varphi_2(1)\varphi_1'(1)| < |\varphi_1(1)\varphi_2'(0) - \varphi_2(1)\varphi_1'(0)|. \quad (2.51)$$

Considérons le cas particulier où  $\varphi_2 = \varphi_1^2$ , la condition (2.51) devient tout simplement

$$|\varphi_1'(1)| < |\varphi_1'(0)|. \quad (2.52)$$

Supposons par exemple que  $\varphi_1(x) = -1 + \sqrt{ax+1}$ , avec  $a \neq 0$ . La fonction  $\varphi_1$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$  si et seulement si  $a > -1$ . La condition de stabilité (2.52) se traduit par  $a > 0$ . Cet exemple correspond en fait à l'exemple introductif, la fonction  $\varphi$  définie en (2.45) s'écrivant en effet; lorsque  $\beta_1 \in ]0, 1[$

$$\varphi_1(x) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} (-1 + \sqrt{ax+1}),$$

avec  $a = \frac{1 - \beta_1^2}{\beta_1^2} > 0$ .

### 7. 2. 3. Deuxième choix des fonctions $\varphi_j$

Supposons

$$\begin{cases} \varphi_0 \equiv 1, \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dots = \varphi_n(0) = 0, \\ \varphi_1(1) = \varphi_2(1) = \dots = \varphi_n(1) = 1. \end{cases} \quad (H_2)$$

Les matrices  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{B}_1$  deviennent :

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1'(0) & & \dots & \varphi_n'(0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}, \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_1'(1) & & \dots & \varphi_n'(1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(1) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(1) \end{pmatrix}.$$

Considérons les matrices  $\tilde{A}_2$  et  $\tilde{B}_2$  définies à partir de  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{B}_1$  :

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) - \varphi_1'(0) & \dots & \varphi_n'(0) - \varphi_1'(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(0) & \varphi_2^{(n-1)}(0) - \varphi_1^{(n-1)}(0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(0) - \varphi_1^{(n-1)}(0) \end{pmatrix},$$

et

$$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi'_1(1) & \varphi'_2(1) - \varphi'_1(1) & \cdots & \varphi'_n(1) - \varphi'_1(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(1) & \varphi_2^{(n-1)}(1) - \varphi_1^{(n-1)}(1) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(1) - \varphi_1^{(n-1)}(1) \end{pmatrix}.$$

Alors,  $\tilde{A}_1$  est inversible si et seulement si  $\tilde{A}_2$  l'est et, dans ce cas,

$$\rho(\tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1) = \rho(\tilde{A}_2^{-1} \tilde{B}_2).$$

D'autre part

$A$  est inversible  $\iff \tilde{A}_1$  est inversible

$$\iff \left(1, \varphi'_j(0), \dots, \varphi_j^{(n-1)}(0)\right)^T, \quad j = 1, \dots, n$$

sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^n$

$$\iff W_j := \left(\varphi'_j(0), \varphi_j''(0), \dots, \varphi_j^{(n-1)}(0)\right)^T, \quad j = 1, \dots, n$$

sont affinement indépendants dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Considérons maintenant la matrice  $\tilde{A}_3$  (resp.  $\tilde{B}_3$ ) d'ordre  $n - 1$  obtenue à partir de  $\tilde{A}_2$  (resp.  $\tilde{B}_2$ ) en enlevant la première ligne et la première colonne et il est clair, comme précédemment que, dans ce cas,

$$\rho(\tilde{A}_1^{-1} \tilde{B}_1) = \rho(\tilde{A}_2^{-1} \tilde{B}_2) = \rho(\tilde{A}_3^{-1} \tilde{B}_3).$$

On a alors :

**Corollaire 2.6** *Si les vecteurs  $W_j = \left(\varphi'_j(0), \varphi_j''(0), \dots, \varphi_j^{(n-1)}(0)\right)^T, j = 1, \dots, n$  sont affinement indépendants, alors l'algorithme d'interpolation progressif basé sur la famille  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$  satisfaisant l'hypothèse  $(H_2)$  est stable si et seulement si  $\rho(\tilde{A}_3^{-1} \tilde{B}_3) < 1$ , où  $\tilde{A}_3$  a pour terme général :*

$$\tilde{a}_{i,j} = \varphi_{j+1}^{(i)}(0) - \varphi_1^{(i)}(0), \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

et  $\tilde{B}_3$  a pour terme général :

$$\tilde{b}_{i,j} = \varphi_{j+1}^{(i)}(1) - \varphi_1^{(i)}(1), \quad i, j = 1, \dots, n-1.$$

7. 2. 4. Troisième choix des fonctions  $\varphi_j$ 

Supposons

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 \equiv 1, \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dots = \varphi_n(0) = 0, \\ \varphi_1(1) = \varphi_2(1) = \dots = \varphi_n(1) = 1, \\ \forall i, j = 1, \dots, n-1, \varphi_{j+1}^{(i)}(0) = \begin{cases} \varphi_1^{(i)}(0) & \text{si } j \neq i \\ 1 + \varphi_1^{(i)}(0) & \text{si } j = i. \end{cases} \end{array} \right. \quad (H_3)$$

Alors

$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_3^{-1} = I_{n-1},$$

La condition de stabilité devient

$$\rho(\tilde{B}_3) < 1. \quad (2.53)$$

D'après le résultat de Gerschgorin-Hadamard, les valeurs propres d'une matrice carrée  $C$  d'ordre  $N$  vérifient

$$\lambda_i \in \bigcup_{k=1}^N D_k,$$

où  $D_k$  est appelé le disque de Gerschgorin, défini par

$$|Z - c_{k,k}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |c_{k,j}|. \quad (2.54)$$

Par conséquent, si

$$D_k \subset B(0,1) \quad \forall k, \quad (2.55)$$

alors  $\rho(C) < 1$ . Mais l'inclusion (2.55) est vérifiée si l'on a simplement

$$\sum_{j=1}^N |c_{k,j}| < 1, \quad \forall k. \quad (2.56)$$

Appliquons la relation (2.56) à notre matrice  $\tilde{B}_3$ , on obtient le

**Corollaire 2.7** Si

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\varphi_{j+1}^{(i)}(1) - \varphi_1^{(i)}(1)| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad (2.57)$$

alors l'algorithme d'interpolation progressif basé sur la famille  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$  satisfaisant l'hypothèse  $(H_3)$  est stable.

### 7. 3. Exemples d'espaces

#### 7. 3. 1. Exemples d'espaces de dimension 3 ( $n = 2$ )

Soit  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  vérifiant l'hypothèse  $(H_1)$ . La condition explicite de stabilité est déjà donnée dans (2.51).

• Si  $\varphi_1(x) = \frac{\omega_1 B_1^2(x)}{\sum_{j=0}^2 \omega_j B_j^2(x)}$  et  $\varphi_2(x) = \frac{\omega_2 B_2^2(x)}{\sum_{j=0}^2 \omega_j B_j^2(x)}$ , on retrouve la méthode des splines rationnelles quadratiques.

• **Autres choix des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  :**

$$1^\circ / \varphi_1(x) = x \quad , \quad \varphi_2(x) = x^2(1 + kx).$$

La condition de stabilité (2.51) s'écrit ici  $\left| \frac{1+2k}{1+k} \right| < 1$ , donc est vérifiée si et seulement si

$$k \in ] -\frac{2}{3}, 0[.$$

Si on note  $m_i = f'_i(x_i)$ , on obtient la relation de récurrence suivante

$$m_i + \frac{1+2k}{1+k} m_{i-1} = \frac{2+3k}{1+k} (y_i - y_{i-1}). \quad (2.58)$$

Notons que pour  $k = -\frac{1}{2}$  on a simplement  $m_i = y_i - y_{i-1}$  et pour  $k = -\frac{1}{3}$  nous retrouvons la relation de récurrence des  $A$ -splines quand  $C$  est remplacé par  $\frac{3}{2}$ , ce qui correspond au critère (2.5). Plus généralement, la constante  $C$  est reliée à  $k$  par la relation  $k = \frac{1-C}{C}$ .

$$2^\circ / \varphi_1(x) = x \quad , \quad \varphi_2(x) = x^2 + \lambda \left(x - \frac{1}{2}\right)_+^2, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est fixé.}$$

La condition de stabilité (2.51) s'écrit ici  $\left| \frac{1 + \frac{3}{4}\lambda}{1 + \frac{\lambda}{4}} \right| < 1$ , donc est réalisée si et seulement si

$$\lambda \in ] -2, 0[.$$

Cela revient à choisir un sous espace  $V$  de dimension 3 inclus dans l'espace de dimension 4 des fonctions qui sont formées de deux polynômes quadratiques sur  $[x_i, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}]$  et  $[\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, x_{i+1}]$  respectivement et qui se raccordent  $C^1$  en  $u_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ . Le sous espace  $V$  est défini par le fait que les dérivées secondes dans ces deux intervalles sont dans un rapport fixé :

$$\frac{f''_i(\xi)}{f''_i(\eta)} = \lambda + 1 \quad \text{si } \xi \in ]\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, x_{i+1}[ \text{ et } \eta \in ]x_i, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}[.$$

On obtient

$$m_i + \frac{1 + \frac{3}{4}\lambda}{1 + \frac{\lambda}{4}} m_{i-1} = \frac{2 + \lambda}{1 + \frac{\lambda}{4}} (y_i - y_{i-1}). \quad (2.59)$$

Notons que pour  $\lambda = -\frac{4}{3}$ , on obtient  $m_i = y_i - y_{i-1}$ . De fait, cette méthode et la précédente décrite en 1°/ sont équivalentes du point de vue de la relation de récurrence, mais pas du point de vue du calcul de  $f_i(x)$  pour  $t \in ]x_i, x_{i+1}[$ . En effet, si l'on pose  $\theta = \frac{1+2k}{1+k}$ , la relation (2.58) devient

$$m_i + \theta m_{i-1} = (\theta + 1)(y_i - y_{i-1}). \quad (2.60)$$

De même, si  $\theta = \frac{1 + \frac{3}{4}\lambda}{1 + \frac{\lambda}{4}}$ , la relation (2.59) devient

$$m_i + \theta m_{i-1} = (\theta + 1)(y_i - y_{i-1}).$$

Ainsi, les deux méthodes sont équivalentes à un changement de paramètre près :

$$\lambda = \frac{4k}{k+2}.$$

3°/ Calcul de  $\theta$  par une propriété variationnelle :

Considérons  $f_i$  de la forme

$$f_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + a(x - x_i)^2 + b(x - u_i)_+^2,$$

et minimisons  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f_i''(x)]^2 dx$ , avec la condition  $f_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ . Appelons

$p_i$  le polynôme de degré 2 sur  $[x_i, u_i]$ ,

$q_i$  le polynôme de degré 2 sur  $[u_i, x_{i+1}]$ ,

et  $z_i = f_i(u_i)$  (inconnu).

On a

$$p_i(x) = y_i + (x - x_i)m_i + \alpha(x - x_i)^2.$$

De l'équation  $p_i(u_i) = y_i + \frac{h}{2}m_i + \alpha\frac{h^2}{4} = z_i$ , on tire :

$$\alpha = \frac{4}{h^2}(z_i - y_i - \frac{h}{2}m_i).$$

Par conséquent

$$p_i'(u_i) = -m_i + \frac{4}{h}(z_i - y_i).$$

Ainsi, le polynôme  $q_i(x)$  sera donné par

$$q_i(x) = z_i + \left[ -m_i + \frac{4}{h}(z_i - y_i) \right] (x - u_i) + \beta(x - u_i)^2.$$

De l'équation  $q_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ , on tire :

$$\beta = \frac{4}{h^2} \left[ y_{i+1} - 3z_i + 2y_i + \frac{h}{2} m_i \right].$$

Finalement, il faut minimiser  $\alpha^2 + \beta^2$  par rapport à  $z_i$ , ce qui donne

$$z_i = \frac{h}{5} m_i + \frac{7y_i + 3y_{i+1}}{10}.$$

Comme

$$\begin{aligned} m_i &= p'_i(x_i) = q'_{i-1}(x_i) \\ &= \left[ -m_{i-1} + \frac{4}{h}(z_{i-1} - y_{i-1}) \right] + \frac{4}{h} \left[ y_i - 3z_{i-1} + 2y_{i-1} + \frac{h}{2} m_{i-1} \right] \\ &= -\frac{3}{5} m_{i-1} + \frac{8}{5} (y_i - y_{i-1}), \end{aligned}$$

on obtient la relation de récurrence (2.60) avec  $\theta = \frac{3}{5}$ ,

$$m_i + \frac{3}{5} m_{i-1} = \frac{8}{5} (y_i - y_{i-1}).$$

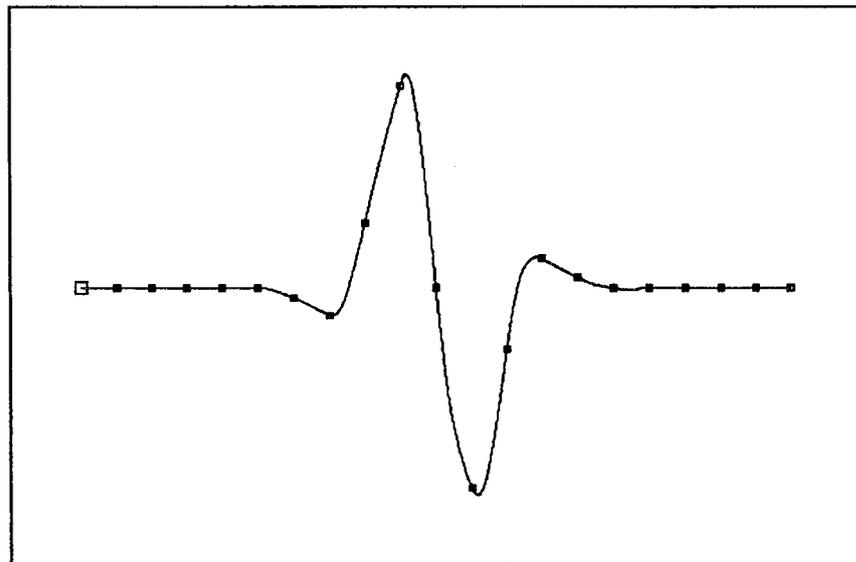


FIGURE.32. Un exemple pour la relation (2.60) avec  $\theta = \frac{3}{5}$ .

### 7. 3. 2. Exemples d'espaces de dimension 4 ( $n = 3$ )

Considérons maintenant quatre fonction  $\varphi_0 \equiv 1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  satisfaisant les hypothèses ( $H_2$ ). Les matrices  $\tilde{A}_3$  et  $\tilde{B}_3$  définissant la matrice d'itération  $\tilde{A}_3^{-1} \tilde{B}_3$  sont données par :

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} \varphi_2'(0) - \varphi_1'(0) & \varphi_3'(0) - \varphi_1'(0) \\ \varphi_2''(0) - \varphi_1''(0) & \varphi_3''(0) - \varphi_1''(0) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_3 = \begin{pmatrix} \varphi_2'(1) - \varphi_1'(1) & \varphi_3'(1) - \varphi_1'(1) \\ \varphi_2''(1) - \varphi_1''(1) & \varphi_3''(1) - \varphi_1''(1) \end{pmatrix}.$$

**Premier exemple :**

$$\varphi_1(x) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} + \sqrt{\left(\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1}\right)x + \left(\frac{\beta_1}{1 - \beta_1}\right)^2},$$

et

$$\varphi_2(x) = \varphi_1^2(x) \quad , \quad \varphi_3(x) = \varphi_1^3(x).$$

La condition du corollaire 2.6 est satisfaite si et seulement si les racines de l'équation suivante

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}(\beta_1^3 + 3\beta_1^2 + 3\beta_1 + 1)\lambda + \beta_1^3 = 0, \quad (2.61)$$

se trouvent à l'intérieur du cercle unité  $|Z| = 1$ . Il suffit alors que  $\beta_1$  vérifie :

$$0 < \beta_1 < 2 - \sqrt{3} \simeq 0.2679.$$

**Deuxième exemple : splines polynomiales  $C^2$  :**

$$\varphi_1(x) = x \quad , \quad \varphi_2(x) = x\tau(x) \quad , \quad \varphi_3(x) = x^2\tau(x).$$

où  $\tau$  est une fonction dérivable sur  $[0, 1]$  telle que  $\tau(0) = 0$  et  $\tau(1) = 1$ .

La matrice  $\tilde{A}_3$  s'écrit :

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2\tau'(0) & 0 \end{pmatrix},$$

donc elle est dérivable si et seulement si  $\tau'(0) \neq 0$ , ce que nous supposons désormais. De plus,

$$\tilde{B}_3 = \begin{pmatrix} \tau'(1) & 1 + \tau'(1) \\ 2\tau'(1) + \tau''(1) & 4\tau'(1) + \tau''(1) + 2 \end{pmatrix}.$$

Considérons la cas où  $\tau$  est polynomiale quadratique (il est clair que la fonction  $\tau$  ne peut être de degré 1), i.e.,

$$\tau(x) = kx + (1 - k)x^2, \quad k > 0. \quad (2.62)$$

La condition du corollaire 2.6 est satisfaite si et seulement si les racines de l'équation suivante :

$$\lambda^2 + \frac{(1+k)(3-k)}{k}\lambda + \frac{k^2 - 3k + 3}{k} = 0, \quad (2.63)$$

sont dans le cercle unité. Par conséquent, si

$$\begin{cases} \frac{(1+k)(3-k)}{k} < 2, & (*) \\ \frac{-k^2 + 2k - 3}{k} < \frac{(1+k)(3-k)}{k} < \frac{k^2 - 2k + 3}{k}, & (**) \end{cases}$$

alors la condition du corollaire 2.6 est satisfaite. Les inégalités (\*) et (\*\*) donnent  $k > 2$ . Or le fait que les racines sont dans le cercle unité entraîne que  $1 < k < 3$ . La condition de stabilité est donc finalement :

$$2 < k < 3.$$

**Troisième exemple : splines trigonométriques :** Considérons la fonction  $\tau$  définie par :

$$\tau(x) = \frac{\sin \omega x}{\sin \omega}, \quad (2.64)$$

qui satisfait les mêmes conditions que l'exemple précédent.

La condition du corollaire 2.6 est satisfaite si et seulement si les racines de l'équation suivante :

$$\lambda^2 + \left(1 + \frac{\sin \omega}{\omega}\right) \left(1 + \frac{\omega \cos \omega}{\sin \omega}\right) \lambda + \frac{\omega(1 + \cos^2 \omega)}{2 \sin \omega} = 0,$$

sont dans le cercle unité. Posons

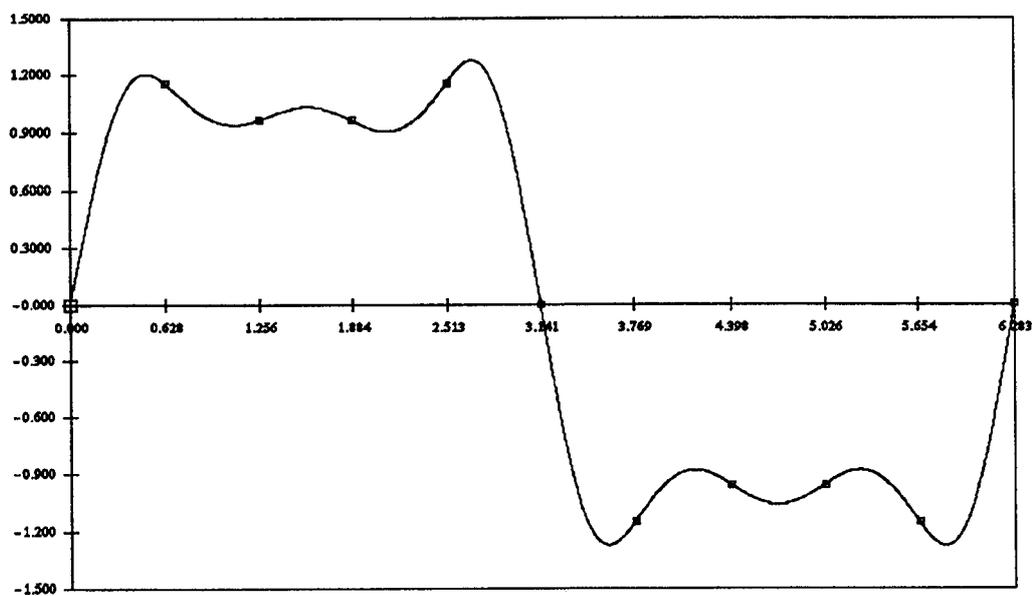
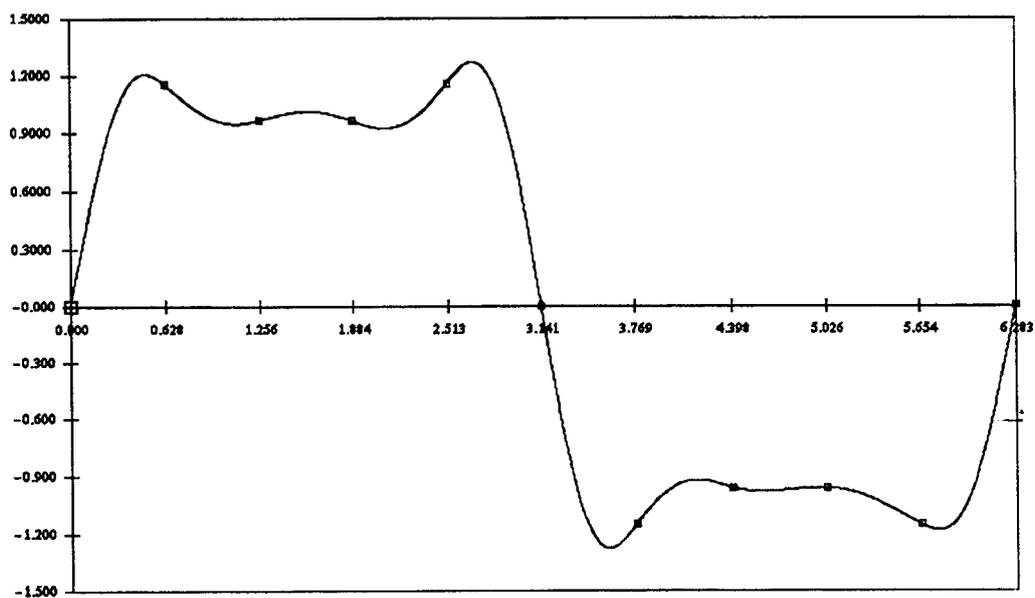
$$g_1(\omega) = \left(1 + \frac{\sin \omega}{\omega}\right) \left(1 + \frac{\omega \cos \omega}{\sin \omega}\right), \quad g_2(\omega) = \frac{\omega(1 + \cos^2 \omega)}{2 \sin \omega}.$$

Les conditions de stabilité relatives à cette équation sont

$$\begin{cases} -1 < g_2(\omega) < 1, \\ -g_2(\omega) - 1 < g_1(\omega) < g_2(\omega) + 1, \end{cases}$$

soit, numériquement

$$|\omega| \in ]1.52, 1.82[.$$

FIGURE.33. *Interpolation polynomiale  $C^2$  ( $k = 2.0$ ).*FIGURE.34. *Interpolation trigonométrique  $C^2$  ( $\omega = 1.54$ ).*

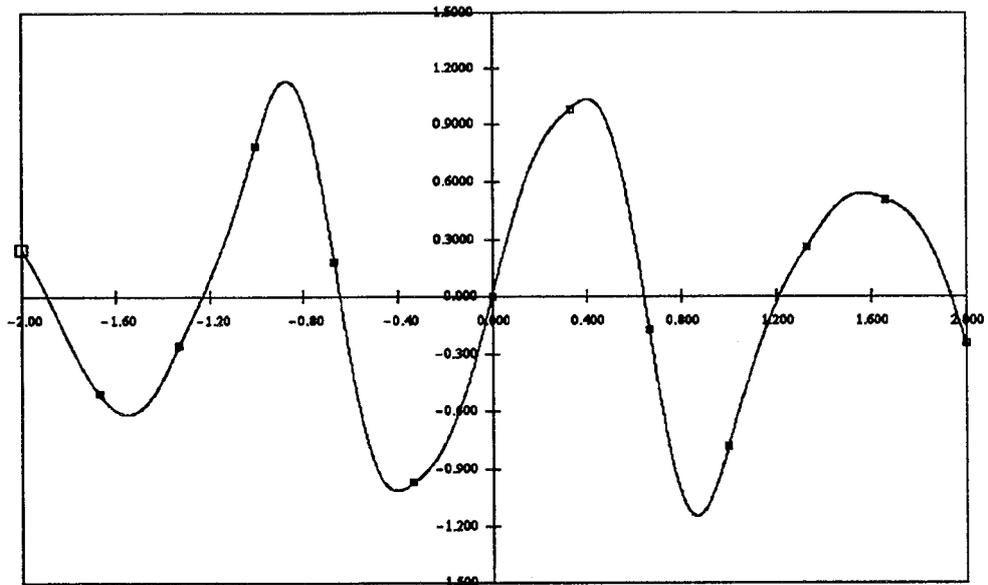


FIGURE.35. *Interpolation polynomiale  $C^2$  ( $k = 2.0$ ).*

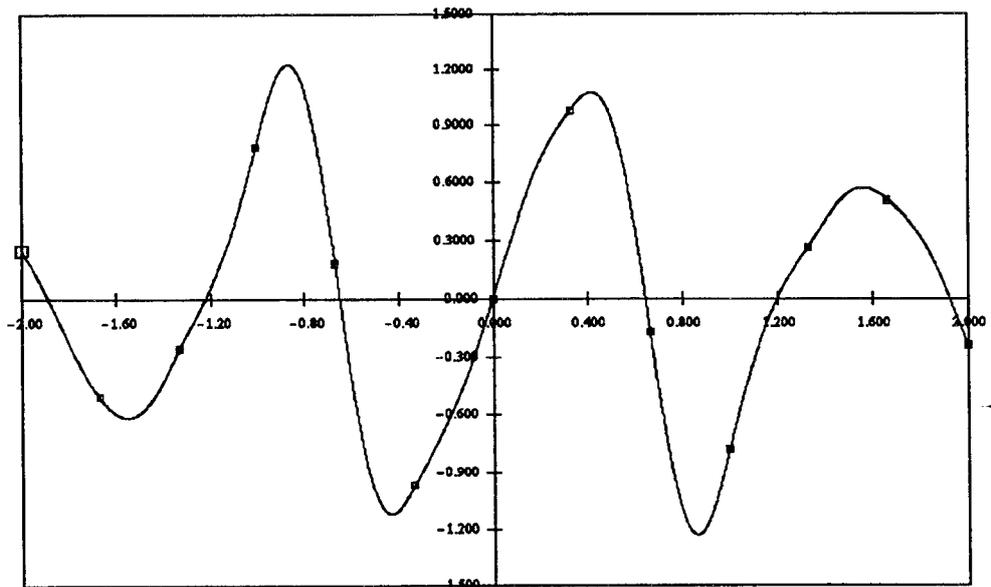


FIGURE.36. *Interpolation trigonométrique  $C^2$  ( $\omega = 1.54$ ).*

#### 7. 4. Les $Q$ -splines comme fonctions splines instables

Avec les mêmes hypothèses et notations que le paragraphe (7.3), considérons le choix des fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  suivant :

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \int_0^x \omega_1(\xi_1) d\xi_1, \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x \omega_1(\xi_1) \int_0^{\xi_1} \omega_2(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \\ \varphi_3(x) &= \int_0^x \omega_1(\xi_1) \int_0^{\xi_1} \omega_2(\xi_2) \int_0^{\xi_2} \omega_3(\xi_3) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1,\end{aligned}$$

où  $\omega_i, i = 1, 2, 3$  sont des fonctions strictement positives sur  $[0, 1]$ . Nous allons nous intéresser au cas particulier des  $Q$ -splines [33] correspondant au choix des  $\omega_i$  suivant :

$$\begin{cases} \omega_1(t) \equiv 1, \\ \omega_2(t) = q(t) := \alpha t + \beta, \\ \omega_3 \equiv 1, \end{cases}$$

où  $q(t)$  est un polynôme de degré 1 strictement positif sur  $[0, 1]$ . Dans ce cas, les fonctions  $\varphi_i$  se calculent par :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x, \\ \varphi_2(x) = \frac{\alpha}{6} x^3 + \frac{\beta}{2} x^2, \\ \varphi_3(x) = \frac{\alpha}{12} x^4 + \frac{\beta}{6} x^3. \end{cases}$$

L'équation caractéristique de stabilité est donnée par :

$$\lambda^2 + \frac{\alpha^2 + 8\alpha\beta + 8\beta^2}{\beta(\alpha + 2\beta)} \lambda + \frac{\alpha + \beta}{\beta} = 0.$$

En posant  $q_0 = \frac{\alpha + \beta}{\beta}$ ,  $q_0 > 0$ , l'équation ci-dessus devient :

$$\lambda^2 + \underbrace{\frac{q_0^2 - 10q_0 + 17}{q_0 + 1}}_{a_1} \lambda + q_0 = 0.$$

Les conditions de stabilité sont :

$$q_0 < 1 \quad \text{et} \quad |a_1| < 1 + q_0.$$

La deuxième condition est vérifiée si et seulement si  $q_0 > \frac{4}{3}$ , ce qui est contradictoire avec la première condition.



## Chapitre 3.

# APPROXIMATION PROGRESSIVE STABLE

1. INTRODUCTION
2. MOINDRES CARRES SUR BASE DES SPLINES  $G^1$ 
  - 2.1 *La méthode des moindres carrés discrète*
  - 2.2 *La méthode des moindres carrés continue*
3. LISSAGE PROGRESSIF  $G^2$

## 1. INTRODUCTION

Le problème d'approximation est défini comme suit :

Soit une fonction  $y(t)$  qui dépend linéairement de  $N + 1$  paramètres  $\alpha_j$ , soit

$$y(t) = \sum_{j=0}^N \alpha_j g_j(t),$$

où les fonctions  $g_j$  sont choisies linéairement indépendantes. On possède des valeurs mesurées  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  ( $n > N$ ) correspondants aux instants  $t_i$ , et on veut déterminer les valeurs  $\alpha_j$ .

En général, il n'existe pas  $N + 1$  valeurs  $\alpha_j$  vérifiant simultanément les  $n + 1$  équations :

$$\sum_{j=0}^N \alpha_j g_j(t_i) = y_i \quad , \quad i = 0, \dots, n,$$

car il y a plus d'équations que d'inconnues.

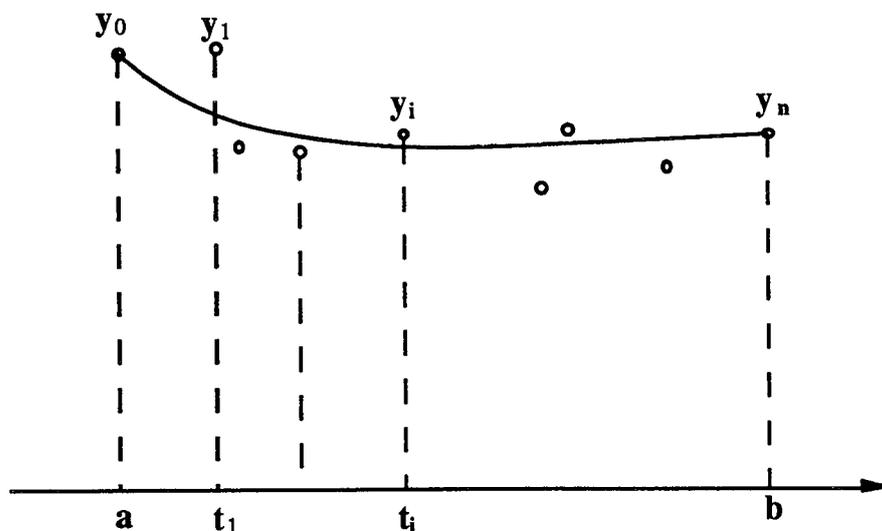


FIGURE.1. Le problème d'approximation discret .

On peut alors définir les  $\alpha_j$  en cherchant à satisfaire "au mieux" les équations. Une façon de procéder est de minimiser, par rapport aux  $\alpha_j$ , la somme des carrés des écarts des équations, c'est-à-dire l'expression

$$E(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{j=0}^N \alpha_j g_j(t_i) - y_i \right]^2. \quad (3.1)$$

On appelle solution au sens des moindres carrés, un vecteur  $\alpha = (\alpha_j)_{j=0}^N$  qui minimise  $E$ . Le problème considéré ici concerne des mesures  $y_i$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$

obtenues progressivement. Ces mesures sont représentées par une fonction spline à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  avec raccordement géométrique. Néanmoins pour la simplicité, l'exposé sera fait dans le cas de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . L'idée est alors d'appliquer une résolution au sens des moindres carrés sur chaque intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$  correspondant à des mesures  $z_k^i$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,  $i \in n_I$  (le nombre d'intervalles). L'approximation progressive est définie par :

- Sur chaque intervalle de temps, on a une suite de mesures  $z_k^i$  aux instants  $x_k^i = t_i + \frac{k}{n}(t_{i+1} - t_i)$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,
- les données  $z_k^i$  seront représentées par un polynôme quadratique ou cubique  $P_i(t)$  sur  $[t_i, t_{i+1}]$ ,
- $P_i(t)$  et  $P_{i-1}(t)$  se raccordent  $G^1$  ( $G^2$  dans le cas cubique),
- $P_i(t)$  réalise le minimum de  $\sum_{i=0}^n (P_i(x_k^i) - z_k^i)^2$ .

## 2. MOINDRES CARRÉS SUR UNE BASE DE SPLINES $G^1$

### 2. 1. La méthode des moindres carrés discrète

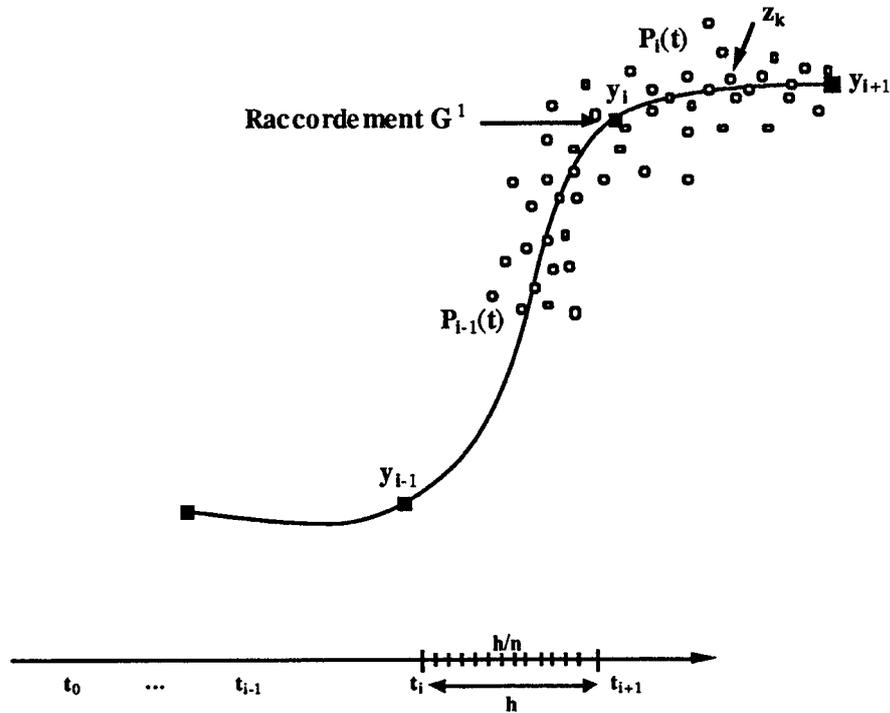


FIGURE.2. Moindres carrés quadratiques .

Le  $i^{\text{ième}}$  segment quadratique défini sur l'intervalle de temps  $I_i = [t_i, t_{i+1}]$  avec ( $h = t_{i+1} - t_i$ ) est donné sous la forme de Taylor en  $t_i$  par :

$$P_i(t) = y_i + m_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \gamma_i(t - t_i)^2, \quad (3.2)$$

$$P_i(t_i) = y_i \quad , \quad P_i'(t_i) = m_i \quad , \quad P_i''(t_i) = \gamma_i.$$

Le problème des moindres carrés discret (progressif) consiste à déterminer les coefficients  $m_i$  et  $\gamma_i$  tels que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- $P_i(t)$  et  $P_{i-1}(t)$  se raccordent  $G^1$  en  $t_i$ ,
- $P_i(t)$  réalise le minimum de  $\sum_{k=0}^n (P_i(x_k) - z_k^i)^2$  avec  $x_k^i = t_i + \frac{k}{n}h$  une partition de l'intervalle  $I_i$ .

La condition du raccordement s'exprime par :

$$\begin{cases} P_i(t_i) = P_{i-1}(t_i), \\ P_i'(t_i) = \beta_1 P_{i-1}'(t_i), \end{cases}$$

et la seconde relation devient :

$$m_i = \beta_1 (m_{i-1} + h \gamma_{i-1}). \quad (3.3)$$

Ainsi, la quantité à minimiser s'exprime comme une fonction convexe de la seule variable  $\gamma_i$  :

$$J(\gamma_i) = \sum_{k=0}^n (y_i + v_k m_i + \frac{1}{2} v_k^2 \gamma_i - z_k^i)^2, \quad (3.4)$$

où  $v_k = x_k^i - t_i = \frac{k}{n}h$ .

Le minimum est atteint si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \gamma_i}(\gamma_i) = 0 &\iff \sum_{k=0}^n v_k^2 (y_i + v_k m_i + \frac{1}{2} v_k^2 \gamma_i - z_k^i) = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^n v_k^2 (y_i + v_k m_i - z_k^i) + \frac{1}{2} \gamma_i \sum_{k=0}^n v_k^4 = 0. \end{aligned}$$

En posant  $\delta = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n v_k^4$ , on obtient

$$\gamma_i = -\frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^n v_k^2 (y_i + v_k m_i - z_k^i). \quad (3.5)$$

La formule peut être simplifiée en faisant un calcul direct des sommes. En effet, si l'on pose  $\alpha_1 = \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^n v_k^2 = 2 \sum_{k=0}^n v_k^2 / \sum_{k=0}^n v_k^4 = 2 \left(\frac{n}{h}\right)^2 \sum_{k=0}^n k^2 / \sum_{k=0}^n k^4$ , ou encore,

$$\alpha_1 = \frac{10n^2}{h^2(3n^2 + 3n - 1)}, \quad (3.6)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^n v_k^3 = 2 \sum_{k=0}^n v_k^3 / \sum_{k=0}^n v_k^4 = 2 \left(\frac{n}{h}\right) \sum_{k=0}^n k^3 / \sum_{k=0}^n k^4, \text{ ou encore}$$

$$\alpha_2 = \frac{15n^2(n+1)}{h(1+2n)(3n^2+3n-1)}, \quad (3.7)$$

et enfin

$$\alpha_3 = 2 \left(\frac{n}{h}\right)^2 \sum_{k=0}^n k^2 z_k^i / \sum_{k=0}^n k^4, \quad (3.8)$$

on obtient :

$$\gamma_i = -\alpha_1 y_i - \alpha_2 m_i + \alpha_3. \quad (3.9)$$

Considérons le vecteur

$$Y_{i+1} = \begin{bmatrix} P_i(t_{i+1}) \\ P'_i(t_{i+1}) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P_i(t_{i+1}) &= y_{i+1} = y_i + h m_i + \frac{h^2}{2} \gamma_i \\ &= y_i + h m_i + \frac{h^2}{2} \left[ -\alpha_1 y_i - \alpha_2 m_i + \alpha_3 \right] \\ &= \left(1 - \frac{h^2}{2} \alpha_1\right) y_i + h \left(1 - \frac{h}{2} \alpha_2\right) m_i + \frac{h^2}{2} \alpha_3 \\ &= \left(1 - \frac{h^2}{2} \alpha_1\right) P_{i-1}(t_i) + h \beta_1 \left(1 - \frac{h}{2} \alpha_2\right) P'_{i-1}(t_i) + \frac{h^2}{2} \alpha_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_i(t_{i+1}) &= m_i + h \gamma_i \\ &= m_i + h \left(-\alpha_1 y_i - \alpha_2 m_i + \alpha_3\right) \\ &= -h \alpha_1 y_i + (1 - h \alpha_2) m_i + h \alpha_3 \\ &= -h \alpha_1 P_{i-1}(t_i) + \beta_1 (1 - h \alpha_2) P'_{i-1}(t_i) + h \alpha_3. \end{aligned}$$

On obtient donc la relation de récurrence

$$Y_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h^2}{2} \alpha_1 & h \beta_1 \left(1 - \frac{h}{2} \alpha_2\right) \\ -h \alpha_1 & \beta_1 (1 - h \alpha_2) \end{bmatrix} Y_i + \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \alpha_3 \\ h \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Posons

$$\begin{cases} A = 1 - \frac{h^2}{2} \alpha_1 & , & B = h \beta_1 \left(1 - \frac{h}{2} \alpha_2\right), \\ C = -h \alpha_1 & , & D = \beta_1 (1 - h \alpha_2). \end{cases} \quad (3.11)$$

L'équation caractéristique correspondant à (3.10) est donnée par

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + (AD - BC) = 0. \quad (3.12)$$

Il est facile de voir que les coefficients de cette équation sont positifs, ainsi que son discriminant  $\Delta$ . En effet

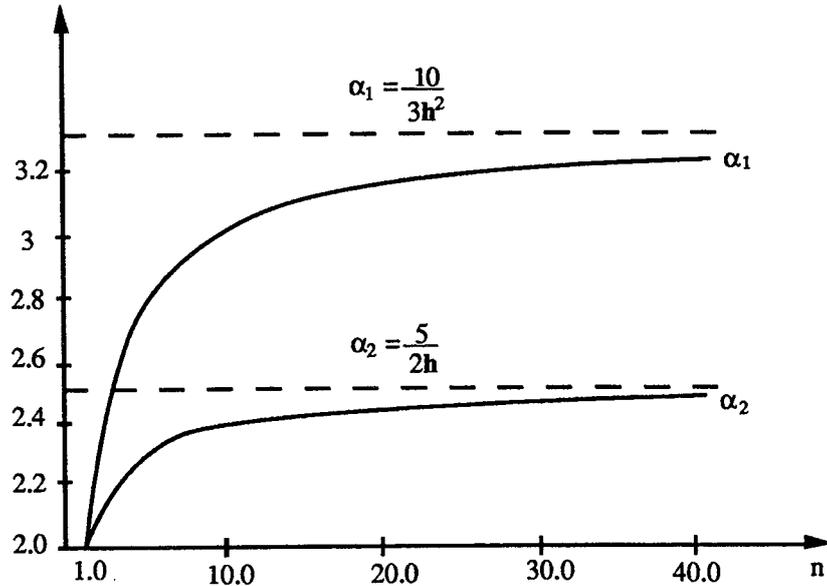


FIGURE.1. Etude de l'équation (3.12) .

$$\frac{2}{h^2} \leq \alpha_1 \leq \frac{10}{3h^2} \quad , \quad \frac{2}{h} \leq \alpha_2 \leq \frac{5}{2h}.$$

Ceci implique les inégalités suivantes

$$\begin{cases} \beta_1 \leq -(A + D) \leq \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\beta_1 \quad , \quad 0 \leq AD - BC \leq \frac{\beta_1}{2}, \\ \Delta = (A + D)^2 - 4(AD - BC) \geq (A + D)^2 - 4AD = (A - D)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Donc les racines de l'équation (3.11) sont réelles et sont de module inférieur à 1 si et seulement si

$$AD - BC < 1 \quad , \quad -(A + D) < 2 \quad \text{et} \quad BC - AD - (A + D) < 1.$$

**Proposition 3.1** *L'algorithme progressif (quadratique) au sens des moindres carrés, défini par la relation (3.10), est stable si et seulement si*

$$\beta_1 < \frac{(1 + 2n)(n^2 + 6n - 2)}{8n^3 + 7n^2 - 2n + 2}. \quad (3.1)$$

La borne de stabilité décroît quand  $n$  augmente, comme le montre le tableau suivant :

$n$	1	2	3	4	5	10	100	500
$\beta_1 <$	1.0	0.777	0.638	0.553	0.499	0.382	0.263	0.252

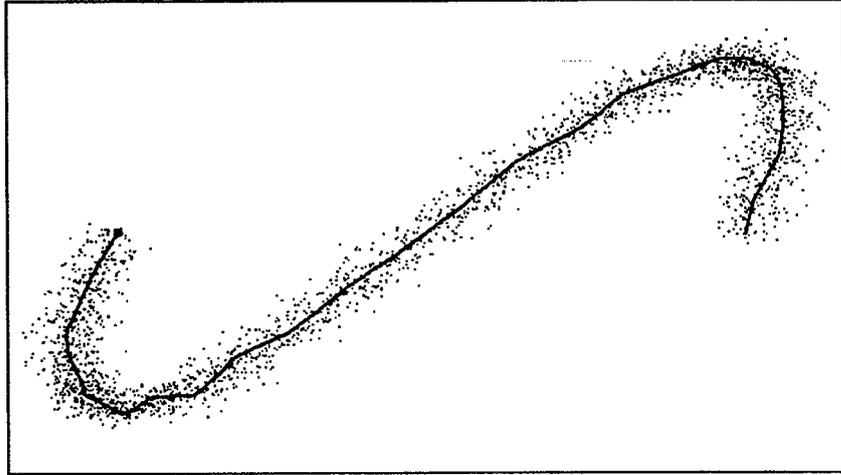


FIGURE.3. *Moindres carrés discrets* avec  $\{n_I, n, \beta_1\} = \{25, 100, 0.1\}$ .

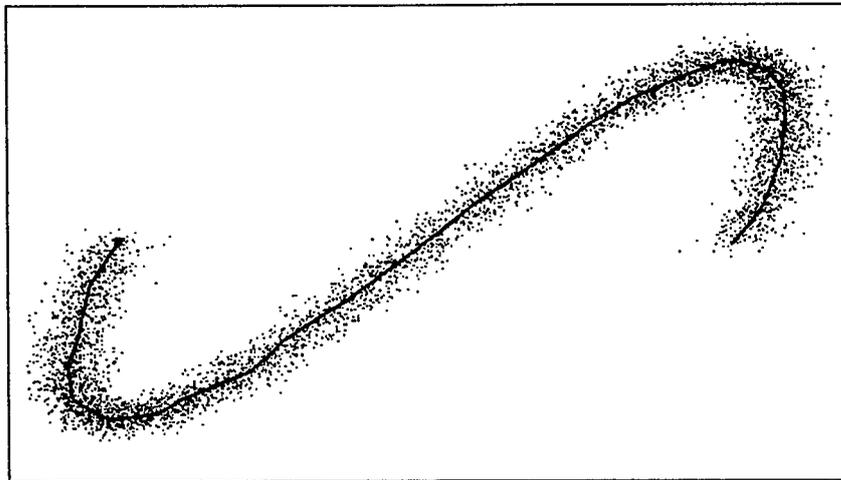


FIGURE.4. *Moindres carrés discrets* avec  $\{n_I, n, \beta_1\} = \{25, 200, 0.1\}$ .

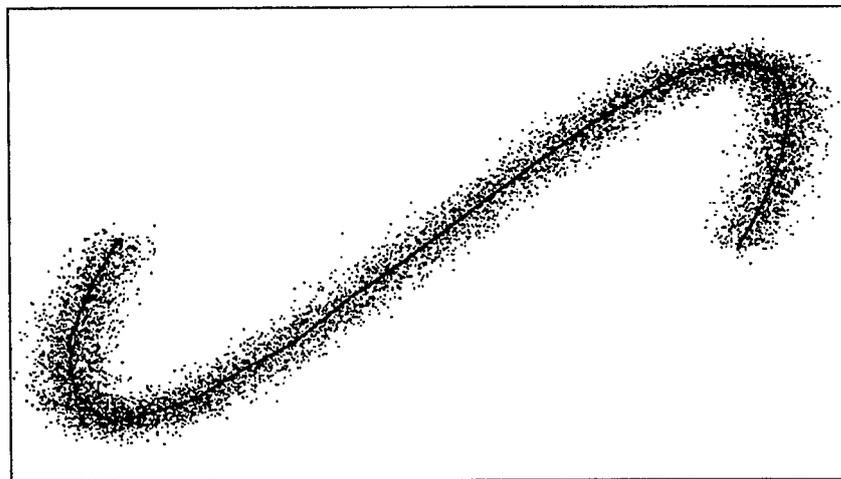


FIGURE.5. *Moindres carrés discrets* avec  $\{n_I, n, \beta_1\} = \{25, 400, 0.1\}$ .

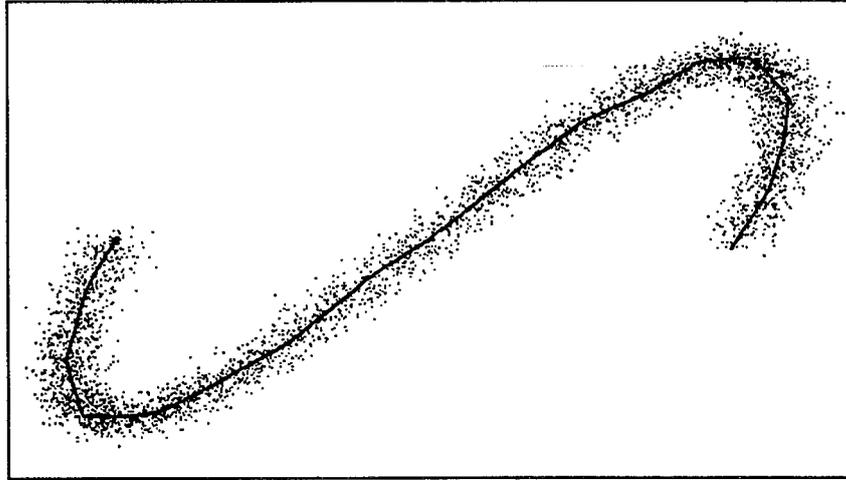


FIGURE.6. Moindres carrés discrets avec  $\{n_I, n, \beta_1\} = \{20, 200, 0.1\}$ .

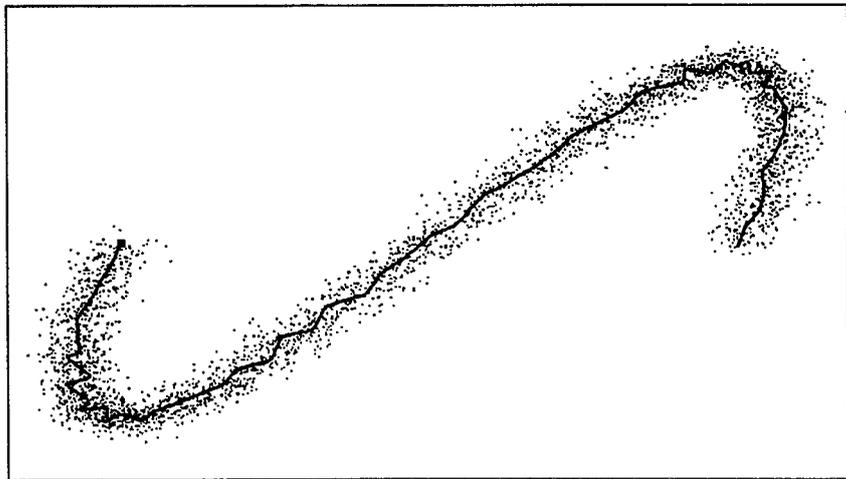


FIGURE.7. Moindres carrés discrets avec  $\{n_I, n, \beta_1\} = \{60, 60, 0.1\}$ .

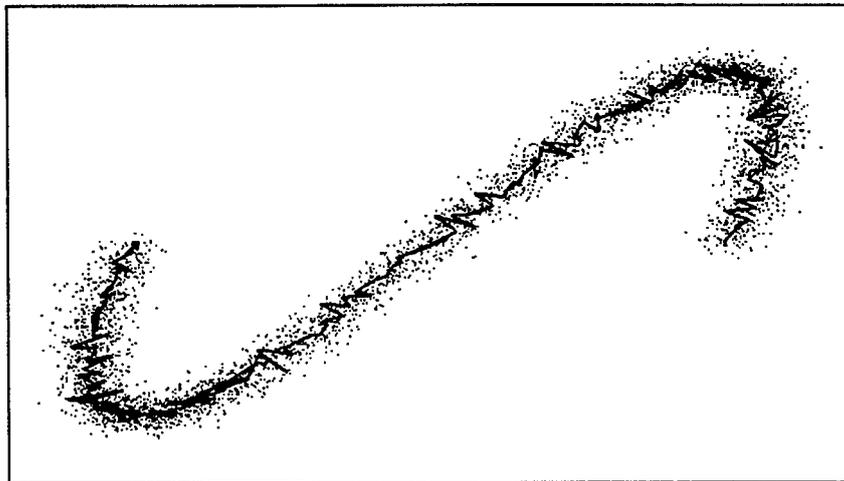


FIGURE.8. Moindres carrés discrets avec  $\{n_I, n, \beta_1\} = \{200, 20, 0.1\}$ .

## 2. 2. La méthode des moindres carrés continue

Le problème continu de l'approximation polynomiale aux moindres carrés, qui généralise le problème discret, s'énonce ainsi

$$P_i(t) \text{ réalise le minimum de } \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t) - P_i(t)]^2 dt, \quad (3.13)$$

où  $f$  est une fonction donnée. La quantité à minimiser est alors définie par

$$J(\gamma_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ y_i + (t - t_i) m_i + \frac{1}{2} (t - t_i)^2 \gamma_i - f(t) \right]^2 dt.$$

Le minimum est atteint si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \gamma_i}(\gamma_i) = 0 &\iff \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i)^2 \left[ y_i + (t - t_i) m_i + \frac{1}{2} (t - t_i)^2 \gamma_i - f(t) \right] dt = 0 \\ &\iff \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i)^2 \left[ y_i + (t - t_i) m_i - f(t) \right] dt + \frac{h^5}{10} \gamma_i = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\gamma_i = -\frac{10}{3h^2} y_i - \frac{5}{2h} m_i + \frac{10}{h^5} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i)^2 f(t) dt. \quad (3.14)$$

La relation de progression est semblable à la relation (3.10) (en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ )

$$Y_{i+1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{h\beta_1}{4} \\ -\frac{10}{3h} & -\frac{3\beta_1}{2} \end{bmatrix} Y_i + \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \alpha_3^\infty \\ h \alpha_3^\infty \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

où

$$\alpha_3^\infty = \frac{10}{h^5} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i)^2 f(t) dt,$$

et l'algorithme est stable si et seulement si

$$\beta_1 < \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2n)(n^2 + 6n - 2)}{8n^3 + 7n^2 - 2n + 2}.$$

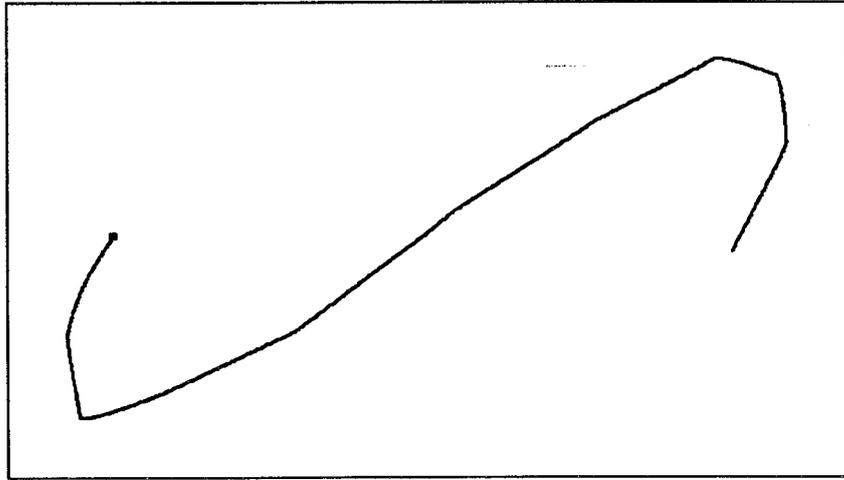


FIGURE.9. *Moindres carrés continus avec  $\{n_I, \beta_1\} = \{10, 0.1\}$ .*

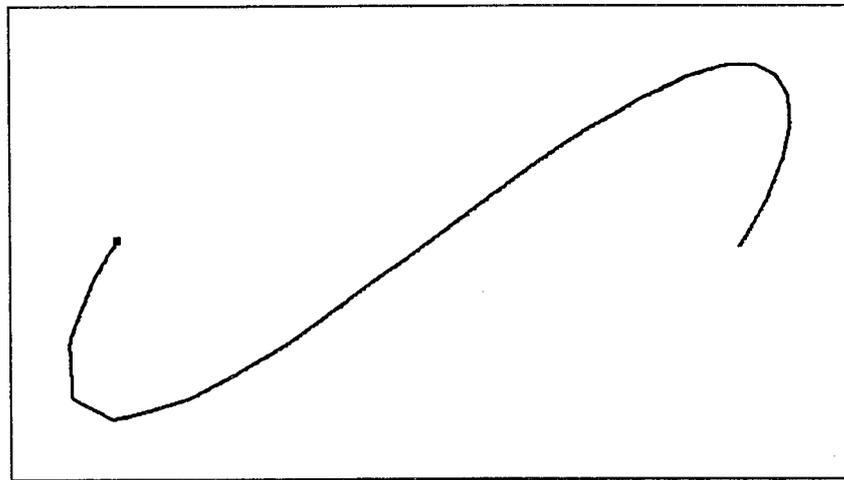


FIGURE.10. *Moindres carrés continus avec  $\{n_I, \beta_1\} = \{25, 0.1\}$ .*

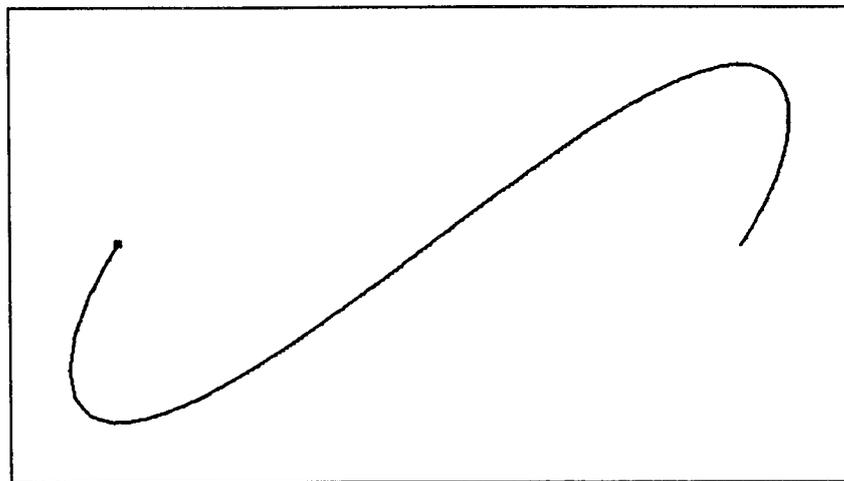


FIGURE.11. *Moindres carrés continus avec  $\{n_I, \beta_1\} = \{50, 0.1\}$ .*

**3. LISSAGE PROGRESSIF AVEC CONTINUITÉ GEOMETRIQUE  $G^2$** 

Dans ce paragraphe, les fonctions splines sont définies localement à partir de deux critères essentiels :

- un critère de lissage : on devra minimiser  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} [P_i''(t)]^2 dt$ ,
- un critère d'approximation : il faut que le polynôme courant approche les valeurs  $z_k^i$  en  $x_k^i$ , pour  $x_k^i \in [t_i, t_{i+1}]$ .

Le polynôme cubique défini sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  est donné sous la forme de Taylor en  $t_i$  par :

$$P_i(t) = y_i + (t - t_i)m_i + \frac{1}{2}\gamma_i(t - t_i)^2 + \frac{1}{6}\delta_i(t - t_i)^3.$$

Les coefficients de  $P_i(t)$  sont calculés à partir des deux conditions suivantes :

- Un raccordement géométrique d'ordre 2 entre les deux polynômes voisins  $P_{i-1}(t)$  et  $P_i(t)$  en  $t_i$  défini par :

$$\begin{cases} P_i(t_i) = P_{i-1}(t_i), \\ P_i'(t_i) = \beta_1 P_{i-1}'(t_i), \\ P_i''(t_i) = \beta_2 P_{i-1}'(t_i) + \beta_1^2 P_{i-1}''(t_i). \end{cases} \quad (3.16)$$

- Le polynôme courant  $P_i(t)$  vérifie localement la propriété :

$$\min \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_i''(t)^2 dt + \rho \sum_{x_k \in [t_i, t_{i+1}]} (P_i(x_k^i) - z_k^i)^2, \quad (3.17)$$

avec  $\rho > 0$ , à choisir.

En tenant compte des conditions de raccordement, la quantité à minimiser devient une fonction convexe de  $\delta_i$  seulement :

$$J(\delta_i) = h\gamma_i^2 + h^2\gamma_i\delta_i + \frac{h^3}{3}\delta_i^2 + \rho \sum_{k=0}^n \left[ y_i + k\frac{h}{n}m_i + \frac{1}{2}\left(k\frac{h}{n}\right)^2\gamma_i + \frac{1}{6}\left(k\frac{h}{n}\right)^3\delta_i - z_k^i \right]^2,$$

où  $h = t_{i+1} - t_i$ ,  $x_k^i = t_i + \frac{k}{n}h$ .

Le minimum, correspond à  $\frac{\partial J}{\partial \delta_i} = 0$ , est obtenue pour :

$$\delta_i = \frac{1}{q_1} (Z^i - q_3 y_i - q_4 m_i - q_2 \gamma_i),$$

avec

$$\begin{cases} q_1 = \frac{2}{3} h^3 + \frac{\rho}{18} \left(\frac{h}{n}\right)^6 \alpha_4, \\ q_2 = h^2 + \frac{\rho}{6} \left(\frac{h}{n}\right)^5 \alpha_3, \\ q_3 = \frac{\rho}{3} \left(\frac{h}{n}\right)^3 \alpha_1, \\ q_4 = \frac{\rho}{3} \left(\frac{h}{n}\right)^4 \alpha_2, \\ Z^i = \frac{\rho}{3} \left(\frac{h}{n}\right)^3 \sum_{k=0}^n k^3 z_k^i, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2, \\ \alpha_2 = \sum_{k=0}^n k^4 = \frac{1}{30} n (n+1) (1+2n) (3n^2 + 3n - 1), \\ \alpha_3 = \sum_{k=0}^n k^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1), \\ \alpha_4 = \sum_{k=0}^n k^6 = \frac{1}{42} n (n+1) (1+2n) (3n^4 + 6n^3 - 3n + 1). \end{cases}$$

La forme du polynôme courant étant connue, on va étudier maintenant les conditions de stabilité de la progression. Celle-ci peut être mise sous la forme :

$$Y_{i+1} = A Y_i + b, \quad (3.18)$$

où

$$Y_i = \begin{bmatrix} P_{i-1}(t_i) \\ P'_{i-1}(t_i) \\ P''_{i-1}(t_i) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{h^3}{6} \frac{Z^i}{q_1} \\ \frac{h^2}{2} \frac{Z^i}{q_1} \\ h \frac{Z^i}{q_1} \end{bmatrix}.$$

La matrice  $A$  est calculée comme suit

$$\begin{aligned} P_i(t_{i+1}) = y_{i+1} &= y_i + h m_i + \frac{h^2}{2} \gamma_i + \frac{h^3}{6q_1} \left[ Z^i - q_3 y_i - q_4 m_i - q_2 \gamma_i \right] \\ &= \left( 1 - \frac{h^3 q_3}{6 q_1} \right) y_i + \left( h - \frac{h^3 q_4}{6 q_1} \right) m_i + \left( \frac{h^2}{2} - \frac{h^3 q_2}{6 q_1} \right) \gamma_i + \frac{h^3}{6q_1} Z^i. \end{aligned}$$

En substituant la relation (3.16) dans cette dernière quantité, nous obtenons

$$P_i(t_{i+1}) = \left(1 - \frac{h^3}{6} \frac{q_3}{q_1}\right) P_{i-1}(t_i) + \left[ h \beta_1 + \frac{h^2}{2} \beta_2 - \frac{h^3}{6} \left( \frac{q_4}{q_1} \beta_1 + \frac{q_2}{q_1} \beta_2 \right) \right] P'_{i-1}(t_i) \\ + \beta_1^2 h^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{h}{6} \frac{q_2}{q_1} \right) P''_{i-1}(t_i) + \frac{h^3}{6} \frac{Z^i}{q_1}.$$

De même, on trouve :

$$P'_i(t_{i+1}) = -\frac{h^2}{2} \frac{q_3}{q_1} P_{i-1}(t_i) + \left[ \beta_1 + h \beta_2 - \frac{h^2}{2} \left( \frac{q_4}{q_1} \beta_1 + \frac{q_2}{q_1} \beta_2 \right) \right] P'_{i-1}(t_i) \\ + h \beta_1^2 \left( 1 - \frac{h}{2} \frac{q_2}{q_1} \right) P''_{i-1}(t_i) + \frac{h^2}{2} \frac{Z^i}{q_1},$$

et

$$P''_i(t_{i+1}) = -h \frac{q_3}{q_1} P_{i-1}(t_i) + \left[ \beta_2 - h \left( \frac{q_4}{q_1} \beta_1 + \frac{q_2}{q_1} \beta_2 \right) \right] P'_{i-1}(t_i) \\ + \beta_1^2 \left( 1 - h \frac{q_2}{q_1} \right) P''_{i-1}(t_i) + h \frac{Z^i}{q_1},$$

soit, la matrice  $A$  est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h^3}{6} \frac{q_3}{q_1} & h \beta_1 + \frac{h^2}{2} \beta_2 - \frac{h^3}{6} \left( \frac{q_4}{q_1} \beta_1 + \frac{q_2}{q_1} \beta_2 \right) & \beta_1^2 h^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{h}{6} \frac{q_2}{q_1} \right) \\ -\frac{h^2}{2} \frac{q_3}{q_1} & \beta_1 + h \beta_2 - \frac{h^2}{2} \left( \frac{q_4}{q_1} \beta_1 + \frac{q_2}{q_1} \beta_2 \right) & h \beta_1^2 \left( 1 - \frac{h}{2} \frac{q_2}{q_1} \right) \\ -h \frac{q_3}{q_1} & \beta_2 - h \left( \frac{q_4}{q_1} \beta_1 + \frac{q_2}{q_1} \beta_2 \right) & \beta_1^2 \left( 1 - h \frac{q_2}{q_1} \right) \end{bmatrix}.$$

Les conditions de stabilité imposent que le rayon spectral de  $A$  soit inférieur à 1, c'est-à-dire que les racines  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de  $\det(A - \lambda I) = 0$  vérifient :

$$\rho(A) := \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) < 1.$$

L'équation  $\det(A - \lambda I) = 0$  s'écrit explicitement :

$$-\lambda^3 + \left[ 1 + \beta_1 + \beta_1^2 + h \beta_2 - \frac{h q_2}{q_1} \beta_1^2 - \frac{h^2 q_2}{2 q_1} \beta_2 - \frac{h^3 q_3}{6 q_1} - \frac{h^2 q_4}{2 q_1} \beta_1 \right] \lambda^2 + \\ + \left[ -\beta_1 - \beta_1^2 - \beta_1^3 - h \beta_2 + \frac{h q_2}{q_1} \beta_1^2 + \frac{h q_2}{q_1} \beta_1^3 + \frac{h^2 q_2}{2 q_1} \beta_2 - \frac{h^3 q_3}{3 q_1} \beta_1 \right. \\ \left. - \frac{h^3 q_3}{3 q_1} \beta_1^2 - \frac{h^4 q_3}{12 q_1} \beta_2 + \frac{h^2 q_4}{2 q_1} \beta_1 - \frac{h^2 q_4}{2 q_1} \beta_1^3 \right] \lambda \\ + \beta_1^3 \left[ 1 - \frac{h q_2}{q_1} + \frac{h^2 q_4}{2 q_1} - \frac{h^3 q_3}{6 q_1} \right] = 0.$$

(3.19)

Posons (pour simplifier l'écriture)

$$x = \frac{q_2}{q_1}, \quad y = \frac{q_3}{q_1}, \quad z = \frac{q_4}{q_1}. \quad (3.20)$$

Pour étudier les racines de cette équation, on introduit

$$\begin{cases} d_0 = \beta_1^3 \left[ h x + \frac{h^3}{6} y - \frac{h^2}{2} z - 1 \right], \\ d_1 = \beta_1 + \beta_1^2 + \beta_1^3 + h \beta_2 - h \beta_1^2 (1 + \beta_1) x - \frac{h^2}{2} \beta_2 x + \frac{h^3}{3} \beta_1 y, \\ \quad \quad \quad + \frac{h^3}{3} \beta_1^2 y + \frac{h^4}{12} \beta_2 y - \frac{h^2}{2} \beta_1 z + \frac{h^2}{2} \beta_1^3 z \\ d_2 = -1 - \beta_1 - \beta_1^2 - h \beta_2 + h \beta_1^2 x + \frac{h^2}{2} \beta_2 x + \frac{h^3}{6} y + \frac{h^2}{2} \beta_1 z. \end{cases} \quad (3.21)$$

L'équation (3.19) devient tout simplement :

$$\lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_1 \lambda + d_0 = 0, \quad (3.22)$$

et les racines sont dans le cercle unité si et seulement si

$$|d_0 + d_2| < 1 + d_1 \quad \text{et} \quad |d_1 - d_0 d_2| < 1 - d_0^2. \quad (3.23)$$

En étudiant le comportement de  $x, y$  et  $z$  en fonction de  $n$  (donné dans la figure 14) et le comportement de  $\beta_1$  en fonction de  $n$  et de  $\rho$  (donné dans la figure 13), on peut vérifier que les racines de (3.22) sont dans le cercle unité si et seulement si  $d_0 + d_2 < 1 + d_1$ . Par conséquent,  $\beta_1, \beta_2$  doivent vérifier :

$$\beta_1 < \frac{3h^2(2z - hy) - \sqrt{9h^4(2z - hy)^2 - 4(12 - h^3y)(12 - 12hx - h^3y + 6h^2z)}}{2(12 - 12hx - h^3y + 6h^2z)},$$

$$\beta_2 < \frac{2(1 + \beta_1) \left[ (12 - h^3y) + 3h^2(hy - 2z)\beta_1 + (12 - 12hx - h^3y + 6h^2z)\beta_1^2 \right]}{h(12hx - h^3y - 24)}.$$

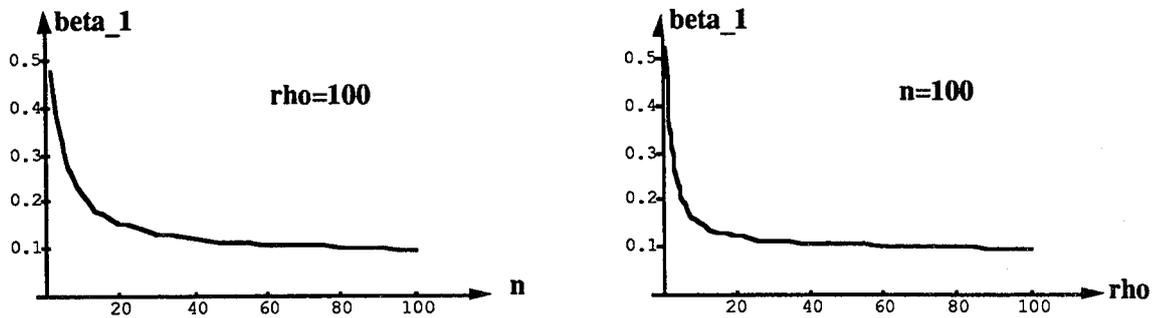


FIGURE.12. Comportement de  $\beta_1$  en fonction de  $n$  et  $\rho$ .

Dans la suite, nous allons nous intéresser au cas limite, c'est-à-dire quand  $n$  est suffisamment grand. Le comportement des rapports  $\frac{q_i}{q_1}$ ,  $i = 1, 2, 3$  est illustré dans la figure 14.

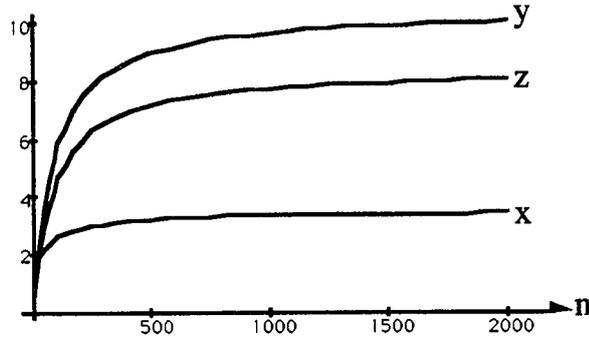


FIGURE.13. Représentation de (3.25).

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3n(6n^5 h^2 + \rho h^5 \alpha_3)}{12h^3 n^6 + \rho h^6 \alpha_4} \rightarrow \frac{7}{2h}, \\ y = \frac{6\rho h^3 n^3 \alpha_1}{12h^3 n^6 + \rho h^6 \alpha_4} \rightarrow \frac{21}{2h^3}, \\ z = \frac{6\rho h^4 n^2 \alpha_2}{12h^3 n^6 + \rho h^6 \alpha_4} \rightarrow \frac{42}{5h^2}. \end{array} \right. \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (3.24)$$

Les valeurs données en (3.21) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0^\infty = \frac{\beta_1^3}{20}, \\ d_1^\infty = \frac{3}{10} \beta_1 + \beta_1^2 + \frac{17}{10} \beta_1^3 + \frac{h}{8} \beta_2, \\ d_2^\infty = \frac{3}{4} + \frac{16}{5} \beta_1 + \frac{5}{2} \beta_1^2 + \frac{3}{4} h \beta_2. \end{array} \right.$$

Nous remarquons que, parmi les conditions (3.23) seule la condition  $d_0^\infty + d_2^\infty < 1 + d_1^\infty$  est active. Ce qui donne :

$$\beta_2 < \frac{2}{25h} (5 - 58\beta_1 - 30\beta_1^2 + 33\beta_1^3). \quad (3.25)$$

Puisque  $\beta_2 \geq 0$ , alors  $\beta_1$  doit vérifier l'inégalité suivante :

$$5 - 58\beta_1 - 30\beta_1^2 + 33\beta_1^3 > 0,$$

soit

$$\beta_1 < \frac{63 - \sqrt{3309}}{66} = 0.08297. \quad (3.26)$$

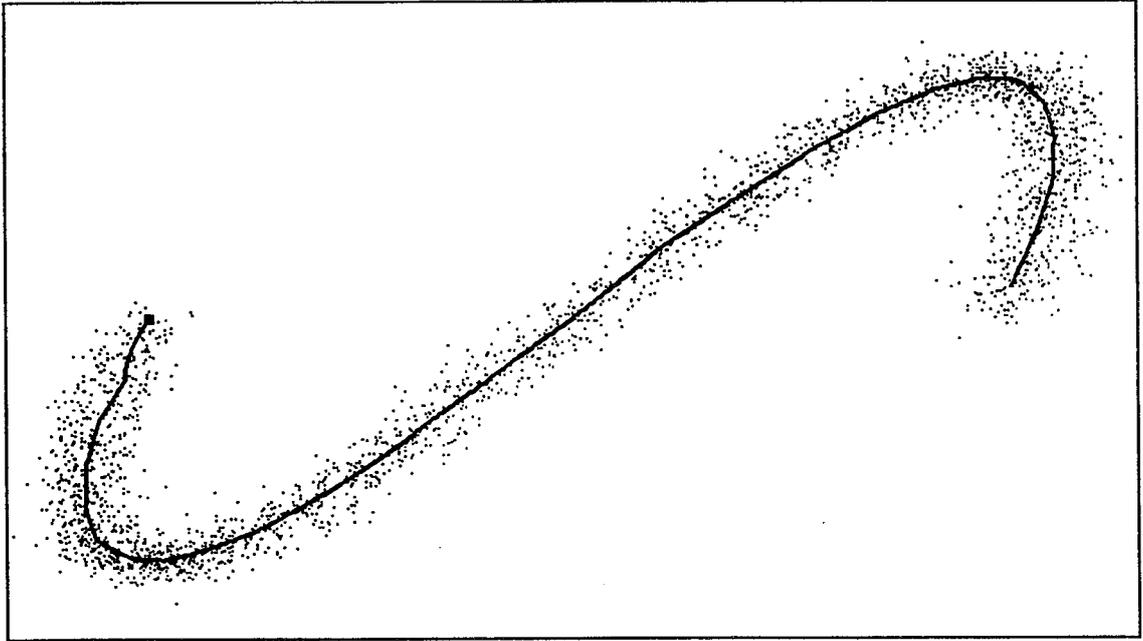


FIGURE.14. *Lissage progressif avec*  $\{n_I, N, \rho, \beta_1, \beta_2\} = \{25, 100, 10^3, 0.05, 0\}$ .

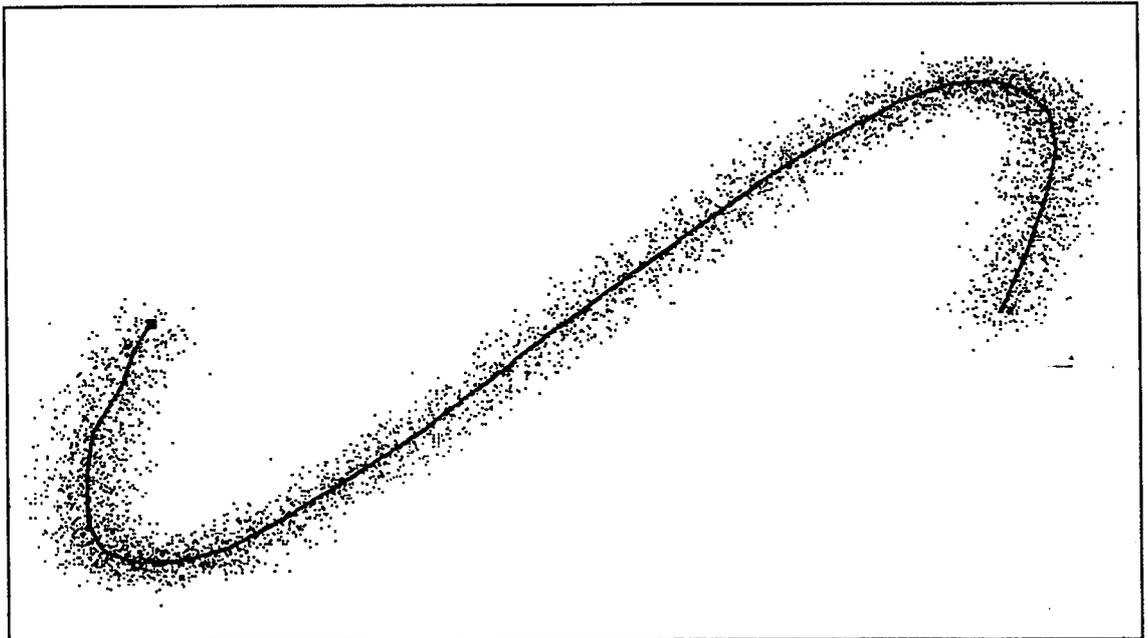


FIGURE.15. *Lissage progressif avec*  $\{n_I, N, \rho, \beta_1, \beta_2\} = \{25, 200, 10^3, 0.05, 0\}$ .

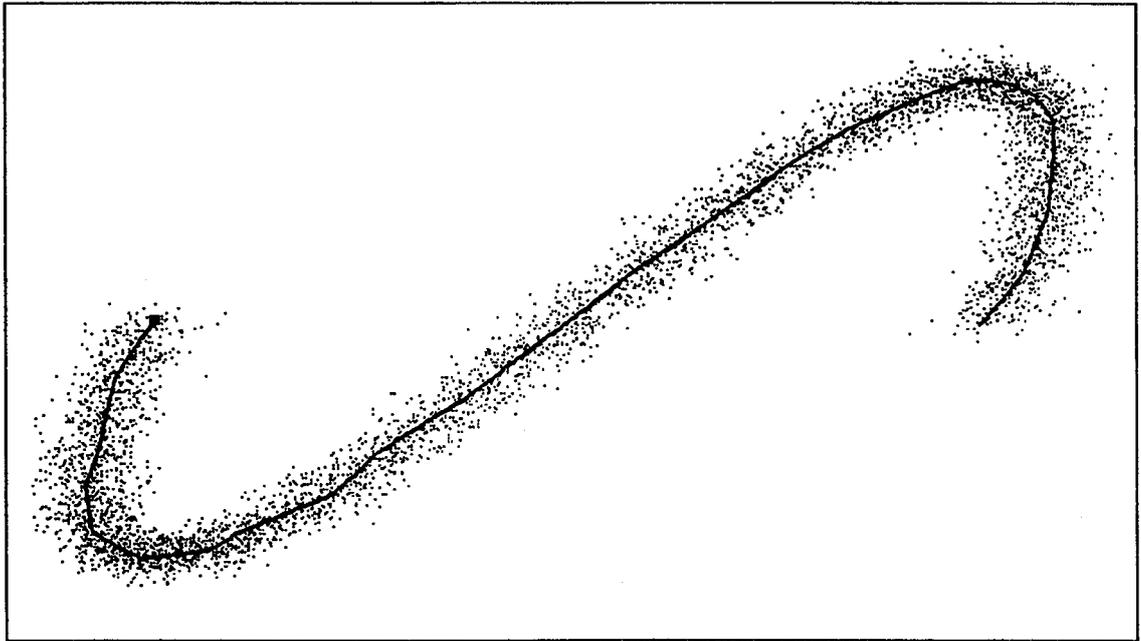


FIGURE.16. *Moindres carrés discrets* avec  $\{n_I, n, \beta_1\} = \{25, 200, 0.1\}$ .

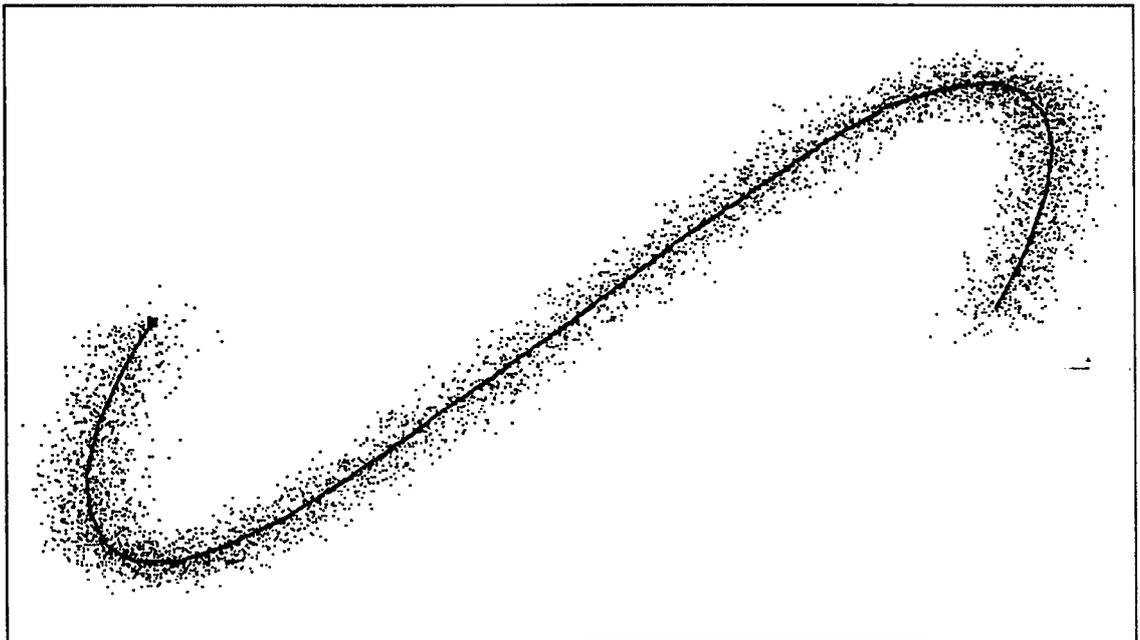


FIGURE.17. *Lissage progressif* avec  $\{n_I, N, \rho, \beta_1, \beta_2\} = \{25, 200, 800, 0.05, 0\}$ .

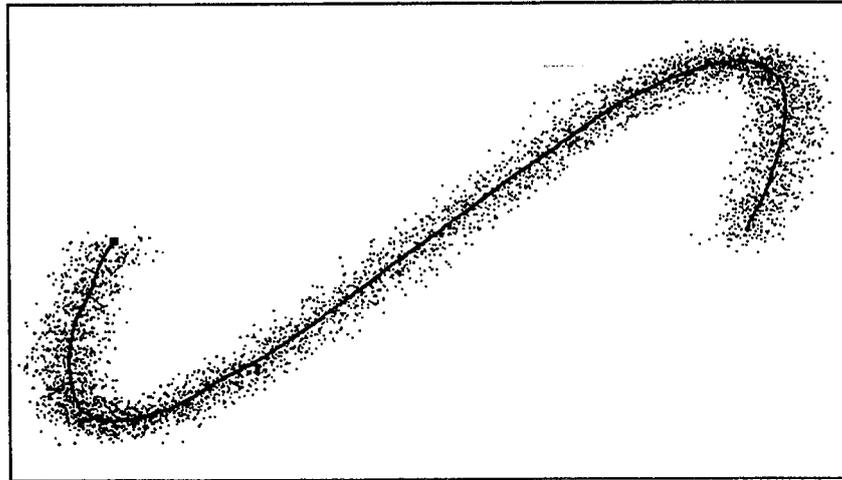


FIGURE.18. *Lissage avec*  $\{n_I, N, \rho, \beta_1, \beta_2\} = \{25, 200, 800, 0.05, 0\}$ .

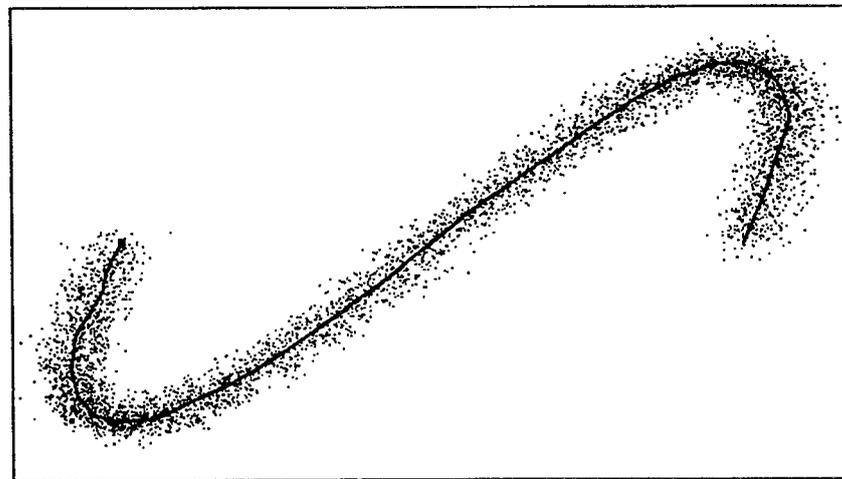


FIGURE.19. *Lissage avec*  $\{n_I, N, \rho, \beta_1, \beta_2\} = \{25, 200, 2000, 0.05, 0\}$ .

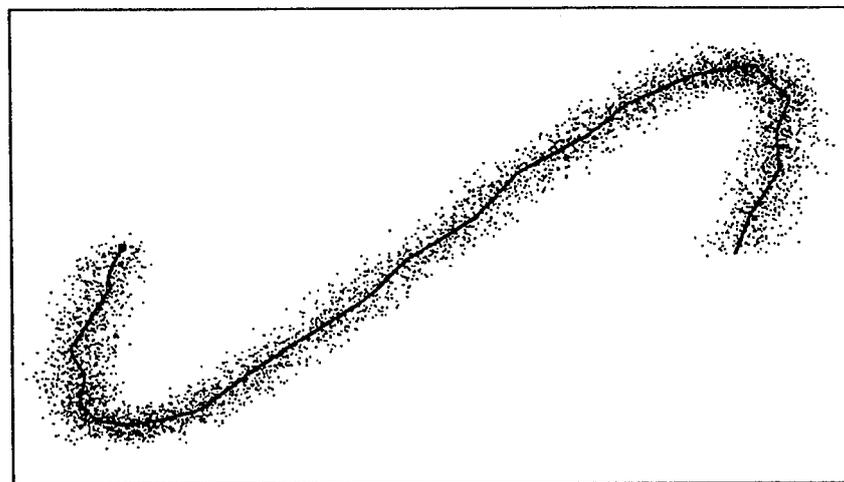


FIGURE.20. *Lissage avec*  $\{n_I, N, \rho, \beta_1, \beta_2\} = \{25, 200, 10000, 0.05, 0\}$ .

## Chapitre 4.

# INTERPOLATION PROGRESSIVE BICUBIQUE

- 1- DEFINITION ET NOTATION
- 2- CONSTRUCTION D'UN MORCEAU DE SURFACE DE LA SPLINE  
PARAMETRIQUE BICUBIQUE
- 3- CALCUL DES ELEMENTS DEFINISSANT UN MORCEAU DE LA  
SPLINE
- 4- CONDITIONS INITIALES ET RESULTATS NUMERIQUES

### 1. DEFINITION ET NOTATION

Une conséquence immédiate de l'algorithme décrit dans la section 4 du chapitre 2 est l'extension au cas bivariable pour l'interpolation progressive des données par une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Considérons une grille rectangulaire dans le plan ( $uOv$ ) formée par deux familles de droites  $u = u_i$  et  $v = v_j$  pour  $i = 0, \dots, n$ ,  $j = 0, \dots, m$ , ( $n, m > 0$ ),  $u_0 < \dots < u_n$ ,  $v_0 < \dots < v_m$ . On suppose que les rectangles  $\Delta_{i,j} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$  ont des côtés de longueur constante :

$$\begin{aligned} h &= u_{i+1} - u_i, & i &= 0, \dots, n-1, \\ g &= v_{j+1} - v_j, & j &= 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{U}_\beta$  (resp.  $\mathcal{V}_\beta$ ) l'espace des splines géométriques d'ordre 2 sur la subdivision  $u_0, u_1, \dots, u_n$  (resp.  $v_0, v_1, \dots, v_m$ ), de paramètres de forme  $\beta_1, \beta_2$  donnés,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$ . On désigne par  $(\mathcal{M}_i)$  la base de  $\beta$ -splines de  $\mathcal{U}_\beta$  et  $(\mathcal{N}_j)$  la base de  $\beta$ -splines de  $\mathcal{V}_\beta$  (voir chapitre 1). On s'intéresse aux splines à deux variables obtenues par produit tensoriel de  $\mathcal{U}_\beta$  et  $\mathcal{V}_\beta$ , c'est-à-dire aux fonctions  $P$  de la forme :

$$P(u, v) = \sum_{i,j} \mathcal{M}_i(u) \mathcal{N}_j(v) a_{i,j} \quad (u, v) \in [u_0, u_n] \times [v_0, v_m].$$

(L'espace correspondant est de dimension  $(n+3)(m+3)$ .) Une telle fonction satisfait :

$$1) \quad \forall u \in [u_0, u_n] \quad P(u, \cdot) \in \mathcal{V}_\beta,$$

$$2) \quad \forall v \in [v_0, v_m] \quad P(\cdot, v) \in \mathcal{U}_\beta.$$

Soit  $P_{i,j}$  la fonction polynomiale qui coïncide avec  $P$  sur  $\Delta_{i,j}$ . Elle peut s'écrire :

$$P_{i,j}(u, v) = (\varphi_0^i(u) \quad \varphi_1^i(u) \quad \varphi_2^i(u) \quad \varphi_3^i(u)) (C_{i,j}) \begin{pmatrix} \psi_0^j(v) \\ \psi_1^j(v) \\ \psi_2^j(v) \\ \psi_3^j(v) \end{pmatrix},$$

où les fonctions  $\varphi_k^i$  (resp.  $\psi_k^j$ ) sont les polynômes d'Hermite relatifs à  $[u_i, u_{i+1}]$  (resp.  $[v_j, v_{j+1}]$ ), i.e.,

$$\begin{cases} \varphi_0^i(u) = \frac{1}{h^3}(u_{i+1} - 3u_i + 2u)(u_{i+1} - u)^2, \\ \varphi_1^i(u) = \frac{1}{h^3}(3u_{i+1} - u_i - 2u)(u - u_i)^2, \\ \varphi_2^i(u) = \frac{1}{h^2}(u - u_i)(u_{i+1} - u)^2, \\ \varphi_3^i(u) = \frac{1}{h^2}(u - u_{i+1})(u - u_i)^2. \end{cases} \quad (4.1)$$

On a les mêmes formules pour  $\psi_k^j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , si on remplace dans (4.1) les valeurs  $(u, u_i, u_{i+1}, h)$  par  $(v, v_j, v_{j+1}, g)$  respectivement.

La signification des coefficients de la matrice  $C_{i,j} := (c_{k,l}^{i,j})_{k,l}$  est alors la suivante :

$$\begin{aligned} c_{0,0}^{i,j} &= P_{i,j}(u_i, v_j) & , c_{0,1}^{i,j} &= P_{i,j}(u_i, v_{j+1}) & , c_{0,2}^{i,j} &= \partial_2 P_{i,j}(u_i, v_j) \\ c_{0,3}^{i,j} &= \partial_2 P_{i,j}(u_i, v_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{1,0}^{i,j} &= P_{i,j}(u_{i+1}, v_j) & , c_{1,1}^{i,j} &= P_{i,j}(u_{i+1}, v_{j+1}) & , c_{1,2}^{i,j} &= \partial_2 P_{i,j}(u_{i+1}, v_j) \\ c_{1,3}^{i,j} &= \partial_2 P_{i,j}(u_{i+1}, v_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{2,0}^{i,j} &= \partial_1 P_{i,j}(u_i, v_j) & , c_{2,1}^{i,j} &= \partial_1 P_{i,j}(u_i, v_{j+1}) & , c_{2,2}^{i,j} &= \partial_{1,2} P_{i,j}(u_i, v_j) \\ c_{2,3}^{i,j} &= \partial_{1,2} P_{i,j}(u_i, v_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{3,0}^{i,j} &= \partial_1 P_{i,j}(u_{i+1}, v_j) & , c_{3,1}^{i,j} &= \partial_1 P_{i,j}(u_{i+1}, v_{j+1}) & , c_{3,2}^{i,j} &= \partial_{1,2} P_{i,j}(u_{i+1}, v_j) \\ c_{3,3}^{i,j} &= \partial_{1,2} P_{i,j}(u_{i+1}, v_{j+1}). \end{aligned}$$

## 2. CONSTRUCTION D'UN MORCEAU DE SURFACE DE LA SPLINE PARAMETRIQUE BICUBIQUE

Les fonctions polynomiales  $P_{i,j}$  doivent vérifier :

- 1)  $\forall i = 0, \dots, n-2$ ,  $\forall j = 0, \dots, m-1$ ,  $\forall v \in [v_j, v_{j+1}]$ ,  $P_{i+1,j}(\cdot, v)$  et  $P_{i,j}(\cdot, v)$  se raccordent  $G^2(\beta_1, \beta_2)$  en  $u_{i+1}$ , i.e.,

$$P_{i+1,j}(u_{i+1}, v) = P_{i,j}(u_{i+1}, v), \quad (1)$$

$$\partial_1 P_{i+1,j}(u_{i+1}, v) = \beta_1 \partial_1 P_{i,j}(u_{i+1}, v), \quad (2)$$

$$\partial_{1,1} P_{i+1,j}(u_{i+1}, v) = \beta_2 \partial_1 P_{i,j}(u_{i+1}, v) + \beta_1^2 \partial_{1,1} P_{i,j}(u_{i+1}, v). \quad (3)$$

- 2)  $\forall j = 0, \dots, m-2$ ,  $\forall i = 0, \dots, n-1$ ,  $\forall u \in [u_i, u_{i+1}]$ ,  $P_{i,j+1}(u, \cdot)$  et  $P_{i,j}(u, \cdot)$  se raccordent  $G^2(\beta_1, \beta_2)$  en  $v_{j+1}$ , i.e.,

$$P_{i,j+1}(u, v_{j+1}) = P_{i,j}(u, v_{j+1}), \quad (4)$$

$$\partial_2 P_{i,j+1}(u, v_{j+1}) = \beta_1 \partial_2 P_{i,j}(u, v_{j+1}), \quad (5)$$

$$\partial_{2,2} P_{i,j+1}(u, v_{j+1}) = \beta_2 \partial_2 P_{i,j}(u, v_{j+1}) + \beta_1^2 \partial_{2,2} P_{i,j}(u, v_{j+1}). \quad (6)$$

- La relation (1) est équivalente à :

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0) (C_{i+1,j}) \begin{pmatrix} \psi_0^j(v) \\ \psi_1^j(v) \\ \psi_2^j(v) \\ \psi_3^j(v) \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 0 \ 0) (C_{i,j}) \begin{pmatrix} \psi_0^j(v) \\ \psi_1^j(v) \\ \psi_2^j(v) \\ \psi_3^j(v) \end{pmatrix}.$$

Elle est donc satisfaite pour tout  $v \in [v_j, v_{j+1}]$  si et seulement si

$$(c_{0,0}^{i+1,j} \quad c_{0,1}^{i+1,j} \quad c_{0,2}^{i+1,j} \quad c_{0,3}^{i+1,j}) = (c_{1,0}^{i,j} \quad c_{1,1}^{i,j} \quad c_{1,2}^{i,j} \quad c_{1,3}^{i,j}). \quad (4.2)$$

• La relation (4) est équivalente à :

$$(\varphi_0^i \quad \varphi_1^i \quad \varphi_2^i \quad \varphi_3^i)(C_{i,j+1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\varphi_0^i \quad \varphi_1^i \quad \varphi_2^i \quad \varphi_3^i)(C_{i,j}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} c_{0,0}^{i,j+1} \\ c_{1,0}^{i,j+1} \\ c_{2,0}^{i,j+1} \\ c_{3,0}^{i,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{0,1}^{i,j} \\ c_{1,1}^{i,j} \\ c_{2,1}^{i,j} \\ c_{3,1}^{i,j} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

• La relation (2) est équivalente à :

$$(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)(C_{i+1,j}) \begin{pmatrix} \psi_0^j(v) \\ \psi_1^j(v) \\ \psi_2^j(v) \\ \psi_3^j(v) \end{pmatrix} = \beta_1 (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)(C_{i,j}) \begin{pmatrix} \psi_0^j(v) \\ \psi_1^j(v) \\ \psi_2^j(v) \\ \psi_3^j(v) \end{pmatrix},$$

d'où

$$(c_{2,0}^{i+1,j} \quad c_{2,1}^{i+1,j} \quad c_{2,2}^{i+1,j} \quad c_{2,3}^{i+1,j}) = \beta_1 (c_{3,0}^{i,j} \quad c_{3,1}^{i,j} \quad c_{3,2}^{i,j} \quad c_{3,3}^{i,j}). \quad (4.4)$$

• La relation (5) est équivalente à :

$$(\varphi_0^i \quad \varphi_1^i \quad \varphi_2^i \quad \varphi_3^i)(C_{i,j+1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_1 (\varphi_0^i \quad \varphi_1^i \quad \varphi_2^i \quad \varphi_3^i)(C_{i,j}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{pmatrix} c_{0,2}^{i,j+1} \\ c_{1,2}^{i,j+1} \\ c_{2,2}^{i,j+1} \\ c_{3,2}^{i,j+1} \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} c_{0,3}^{i,j} \\ c_{1,3}^{i,j} \\ c_{2,3}^{i,j} \\ c_{3,3}^{i,j} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

On constate alors que les relations (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) sont vérifiées si et seulement si chaque matrice  $C_{i,j}$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} c_{0,0}^{i,j} & c_{0,0}^{i,j+1} & c_{0,2}^{i,j} & \frac{1}{\beta_1} c_{0,2}^{i,j+1} \\ c_{0,0}^{i+1,j} & c_{0,0}^{i+1,j+1} & c_{0,2}^{i+1,j} & \frac{1}{\beta_1} c_{0,2}^{i+1,j+1} \\ c_{2,0}^{i,j} & c_{2,0}^{i,j+1} & c_{2,2}^{i,j} & \frac{1}{\beta_1} c_{2,2}^{i,j+1} \\ \frac{1}{\beta_1} c_{2,0}^{i+1,j} & \frac{1}{\beta_1} c_{2,0}^{i+1,j+1} & \frac{1}{\beta_1} c_{2,2}^{i+1,j} & \frac{1}{\beta_1^2} c_{2,2}^{i+1,j+1} \end{pmatrix}.$$

### 3. CALCUL DES ELEMENTS DEFINISSANT UN MORCEAU DE LA SPLINE

Supposons maintenant données les valeurs  $d_{i,j} := f(u_i, v_j)$  d'une fonction  $f$  aux noeuds  $(u_i, v_j)$  de la grille. Définissons :

$$p_{i,j} = \partial_1 P_{i,j}(u_i, v_j), \quad q_{i,j} = \partial_2 P_{i,j}(u_i, v_j), \quad s_{i,j} = \partial_{1,2} P_{i,j}(u_i, v_j).$$

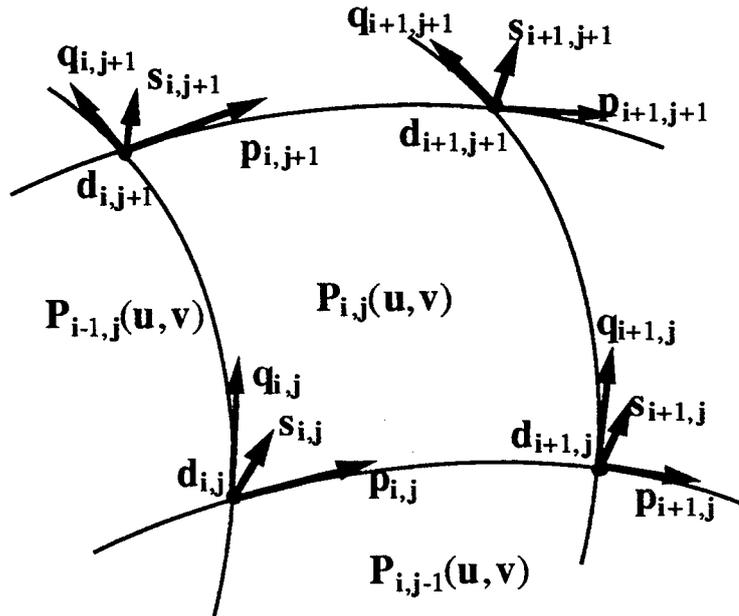


FIGURE.1. Représentation d'un patch  $P_{i,j}(u, v)$ .

La matrice  $C_{i,j}$  s'écrit alors :

$$C_{i,j} := \begin{pmatrix} A_{i,j}^1 & A_{i,j}^2 \\ A_{i,j}^3 & A_{i,j}^4 \end{pmatrix},$$

où

$$A_{i,j}^1 = \begin{pmatrix} d_{i,j} & d_{i,j+1} \\ d_{i+1,j} & d_{i+1,j+1} \end{pmatrix}, \quad A_{i,j}^2 = \begin{pmatrix} q_{i,j} & \frac{1}{\beta_1} q_{i,j+1} \\ q_{i+1,j} & \frac{1}{\beta_1} q_{i+1,j+1} \end{pmatrix},$$

$$A_{i,j}^3 = \begin{pmatrix} p_{i,j} & p_{i,j+1} \\ \frac{1}{\beta_1} p_{i+1,j} & \frac{1}{\beta_1} p_{i+1,j+1} \end{pmatrix}, \quad A_{i,j}^4 = \begin{pmatrix} s_{i,j} & \frac{1}{\beta_1} s_{i,j+1} \\ \frac{1}{\beta_1} s_{i+1,j} & \frac{1}{\beta_1} s_{i+1,j+1} \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer les éléments  $p_{i,j}$ ,  $q_{i,j}$ ,  $s_{i,j}$  de façon à ce que les relations (3) et (6) soient satisfaites. Explicitons par exemple la relation (3).

On a  $\forall i, j, \forall v \in [v_j, v_{j+1}]$  :

$$\begin{aligned} \partial_{1,1} P_{i,j}(u_i, v) &= (\varphi_0^{i''}(u_i), \varphi_1^{i''}(u_i), \varphi_2^{i''}(u_i), \varphi_3^{i''}(u_i)) (C_{i,j}) \begin{pmatrix} \psi_0^j(v) \\ \psi_1^j(v) \\ \psi_2^j(v) \\ \psi_3^j(v) \end{pmatrix} \\ &= (D_0^{i,j}, D_1^{i,j}, D_2^{i,j}, D_3^{i,j}) \begin{pmatrix} \psi_0^j(v) \\ \psi_1^j(v) \\ \psi_2^j(v) \\ \psi_3^j(v) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$(D_0^{i,j}, D_1^{i,j}, D_2^{i,j}, D_3^{i,j}) = \left( -\frac{6}{h^2}, \frac{6}{h^2}, -\frac{4}{h}, -\frac{2}{h} \right) C_{i,j}.$$

De même on a :

$$\partial_{1,1} P_{i,j}(u_{i+1}, v) = (E_0^{i,j}, E_1^{i,j}, E_2^{i,j}, E_3^{i,j}) \begin{pmatrix} \psi_0^j(v) \\ \psi_1^j(v) \\ \psi_2^j(v) \\ \psi_3^j(v) \end{pmatrix},$$

où

$$(E_0^{i,j}, E_1^{i,j}, E_2^{i,j}, E_3^{i,j}) = \left( \frac{6}{h^2}, -\frac{6}{h^2}, \frac{2}{h}, \frac{4}{h} \right) C_{i,j}.$$

La relation (3) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} (D_0^{i+1,j}, D_1^{i+1,j}, D_2^{i+1,j}, D_3^{i+1,j}) &= \frac{\beta_2}{\beta_1} \left( p_{i+1,j}, p_{i+1,j+1}, s_{i+1,j}, \frac{1}{\beta_1} s_{i+1,j+1} \right) \\ &\quad + \beta_1^2 (E_0^{i,j}, E_1^{i,j}, E_2^{i,j}, E_3^{i,j}). \end{aligned}$$

- Considérons par exemple la première l'égalité :

$$D_0^{i+1,j} = \frac{\beta_2}{\beta_1} p_{i+1,j} + \beta_1^2 E_0^{i,j},$$

ou encore

$$\begin{aligned} -\frac{6}{h^2} d_{i+1,j} + \frac{6}{h^2} d_{i+2,j} - \frac{4}{h} p_{i+1,j} - \frac{2}{h\beta_1} p_{i+2,j} &= \frac{\beta_2}{\beta_1} p_{i+1,j} \\ &\quad + \beta_1^2 \left[ \frac{6}{h^2} d_{i,j} - \frac{6}{h^2} d_{i+1,j} + \frac{2}{h} p_{i,j} + \frac{4}{h\beta_1} p_{i+1,j} \right]. \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient la relation de récurrence que vérifient les  $p_{i,j}$  :

$$\begin{aligned} p_{i+2,j} &= -\left( 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{h\beta_2}{2} \right) p_{i+1,j} - \beta_1^3 p_{i,j} \\ &\quad + \frac{3\beta_1}{h} \left[ d_{i+2,j} - d_{i+1,j} + \beta_1^2 (d_{i+1,j} - d_{i,j}) \right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

On retrouve précisément la relation de récurrence en une variable déjà étudiée dans le chapitre 2.

• La deuxième égalité, i.e.,  $D_1^{i+1,j} = \frac{\beta_2}{\beta_1} p_{i+1,j+1} + \beta_1^2 E_1^{i,j}$ , donne une relation semblable à (4.6) en remplaçant  $j$  par  $j+1$ .

En appliquant la récurrence (4.6), on obtient tous les éléments des blocs  $A_{i,j}^3$ , si et seulement si les conditions initiales  $\{p_{0,j}, p_{1,j}\}$  sont définies pour tout  $j$ .

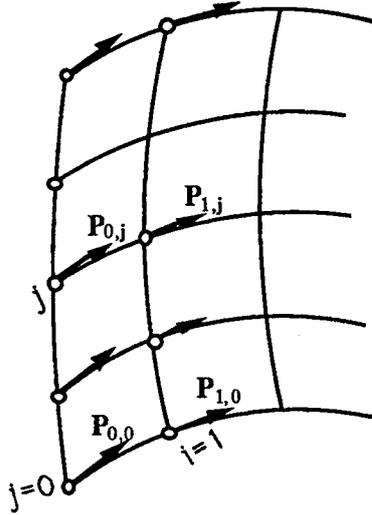


FIGURE.2. Les conditions initiales.

• La troisième égalité, i.e.,  $D_2^{i+1,j} = \frac{\beta_2}{\beta_1} s_{i+1,j} + \beta_1^2 E_2^{i,j}$  donne une relation de récurrence similaire mais permettant de calculer les  $s_{i,j}$  pour  $j$  fixé. Soit

$$s_{i+2,j} = -\left(2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{h\beta_2}{2}\right)s_{i+1,j} - \beta_1^3 s_{i,j} + \frac{3\beta_1}{h} \left[ q_{i+2,j} - q_{i+1,j} + \beta_1^2 (q_{i+1,j} - q_{i,j}) \right]. \quad (4.7)$$

• La dernière égalité, i.e.,  $D_3^{i+1,j} = \frac{\beta_2}{\beta_1^2} s_{i+1,j+1} + \beta_1^2 E_3^{i,j}$ , donne une relation semblable à (4.7) en remplaçant  $j$  par  $j+1$ .

Nous remarquons que dans la relation (4.7), on a besoin de connaître les  $q_{i,j}$ . Ces derniers sont obtenus en explicitant la relation (6). Après un calcul analogue à ci-dessus, on obtient la relation de récurrence suivante pour les  $q_{i,j}$  :

$$q_{i,j+2} = -\left(2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{g\beta_2}{2}\right)q_{i,j+1} - \beta_1^3 q_{i,j} + \frac{3\beta_1}{g} \left[ d_{i,j+2} - d_{i,j+1} + \beta_1^2 (d_{i,j+1} - d_{i,j}) \right]. \quad (4.8)$$

Ainsi, en appliquant la récurrence (4.8), on obtient tous les éléments des blocs  $A_{i,j}^2$  si et seulement si les conditions initiales  $\{q_{i,0}, q_{i,1}\}$  sont définies pour tout  $i$ .

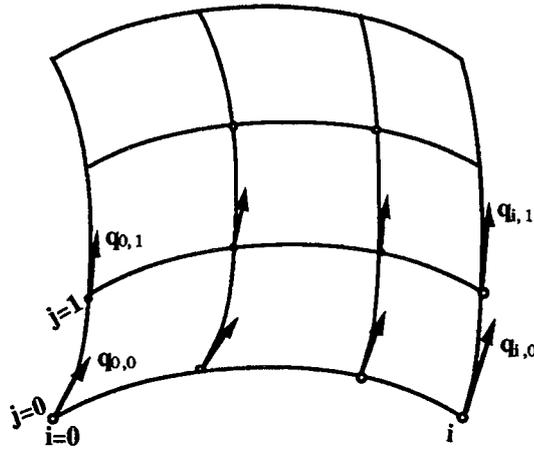


FIGURE.3. Les conditions initiales.

On obtient aussi une deuxième relation pour les  $s_{i,j}$  :

$$s_{i,j+2} = -\left(2\beta_1^2 + 2\beta_1 + \frac{g\beta_2}{2}\right)s_{i,j+1} - \beta_1^3 s_{i,j} + \frac{3\beta_1}{g} \left[ p_{i,j+2} - p_{i,j+1} + \beta_1^2 (p_{i,j+1} - p_{i,j}) \right]. \quad (4.9)$$

Connaissant les  $p_{i,j}$  et  $q_{i,j}$ , les relations (4.7) et (4.9) pour déterminent les blocs  $A_{i,j}^4$  à condition de connaître les quatre conditions initiales suivantes :

$$\{s_{0,0}, s_{0,1}, s_{1,0}, s_{1,1}\}.$$

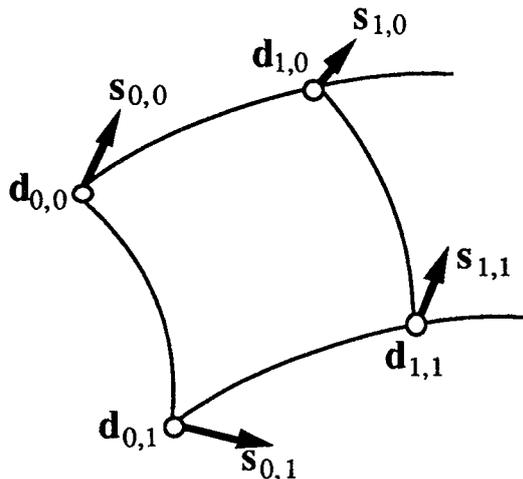


FIGURE.4. Les conditions initiales.

Notons que le nombre total de conditions initiales déterminant la spline  $P$  est de  $nm + 3n + 3m + 9$ , ce qui correspond bien à la dimension du produit tensoriel.

L'utilisation du produit tensoriel décrit ci-dessus nous permet d'appliquer aux sections de la spline les résultats sur les  $\beta$ -splines récurrentes déjà développés dans le chapitre 2, en particulier, la stabilité des relations de récurrence. En effet, il n'y a aucune nécessité de montrer la stabilité parce qu'il est suffisant de choisir les valeurs des paramètres  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans le domaine de stabilité décrit dans la proposition (2.2) du chapitre 2, i.e.,

$$\beta_1 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \beta_2 \leq \frac{2}{\max(h, g)} (1 + \beta_1^3 - 2\beta_1^2 - 2\beta_1). \quad (4.10)$$

Par conséquent, la stabilité des  $\beta$ -splines récurrentes cubiques en chaque coupe avec  $u = cste$  et  $v = cste$  garantit la stabilité de la surface  $\beta$ -spline bicubique.

#### 4. CONDITIONS INITIALES ET RESULTATS NUMERIQUES

Dans les résultats précédents, nous avons supposé la connaissance des valeurs

$$\{q_{i,0}, q_{i,1} \quad i = 0, \dots, n\}, \{p_{0,j}, p_{1,j} \quad j = 0, \dots, n\}, \{s_{i,j} \quad i, j = 0, 1\}.$$

Mais en réalité seules les données d'interpolation  $d_{i,j}$  sont connues; c'est pourquoi on propose ici un moyen simple pour estimer ces valeurs à l'aide d'un procédé d'interpolation quadratique répété.

Pour  $u = u_i$ ,  $i$  fixé, considérons le polynôme  $\sigma_i(v)$  de degré 2 défini par  $(v_0, d_{i,0})$ ,  $(v_1, d_{i,1})$  et  $(v_2, d_{i,2})$ .

$$\begin{aligned} \sigma_i(v) = & \frac{1}{4g^2} (v_2 - v)(v_2 - 2v_0 + v) d_{i,0} + \frac{1}{4g^2} (v - v_0)^2 d_{i,2} \\ & + \frac{1}{g^2} (v - v_0)(v_2 - v) \left( d_{i,1} - \frac{1}{4} d_{i,2} - \frac{3}{4} d_{i,0} \right). \end{aligned}$$

Posons alors

$$\begin{cases} q_{i,0} = \sigma'_i(v_0) = \frac{2}{g} \left( d_{i,1} - \frac{1}{4} d_{i,2} - \frac{3}{4} d_{i,0} \right), \\ q_{i,1} = \sigma'_i(v_1) = \frac{1}{2g} (d_{i,2} - d_{i,0}). \end{cases} \quad (4.11)$$

On fait un calcul semblable pour  $v = v_j$ ,  $j$  fixé. Considérons le polynôme  $\tau_j(u)$  de degré 2 défini par  $(u_0, d_{0,j})$ ,  $(u_1, d_{1,j})$  et  $(u_2, d_{2,j})$ .

$$\begin{aligned} \tau_j(u) = & \frac{1}{4h^2} (u_2 - u)(u_2 - 2u_0 + u) d_{0,j} + \frac{1}{4h^2} (u - u_0)^2 d_{2,j} \\ & + \frac{1}{h^2} (u - u_0)(u_2 - u) \left( d_{1,j} - \frac{1}{4} d_{2,j} - \frac{3}{4} d_{0,j} \right). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} p_{0,j} = \tau_j'(u_0) = \frac{2}{h} (d_{1,j} - \frac{1}{4}d_{2,j} - \frac{3}{4}d_{0,j}), \\ p_{1,j} = \tau_j'(u_1) = \frac{1}{2h} (d_{2,j} - d_{0,j}). \end{cases} \quad (4.12)$$

Finalemment, on déduit les valeurs de  $s_{i,j}$ , pour  $i, j = 0, 1$ , en utilisant les approximations (4.11) et (4.12), i.e., pour  $i, j = 0, 1$ , on a :

$$s_{i,j} = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}(u_i, v_j) \simeq \frac{\frac{\partial P}{\partial v}(u_{i+1}, v_j) - \frac{\partial P}{\partial v}(u_i, v_j)}{h} = \frac{q_{i+1,j} - q_{i,j}}{h} \quad (4.13)$$

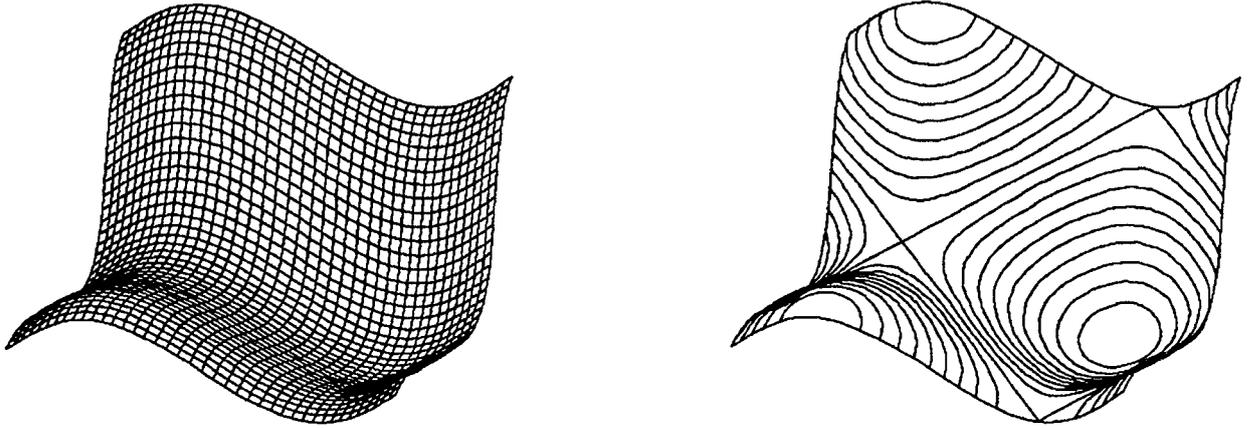


FIGURE.5. A gauche:  $\beta$ -spline bicubique, et à droite les courbes de niveaux correspondantes.

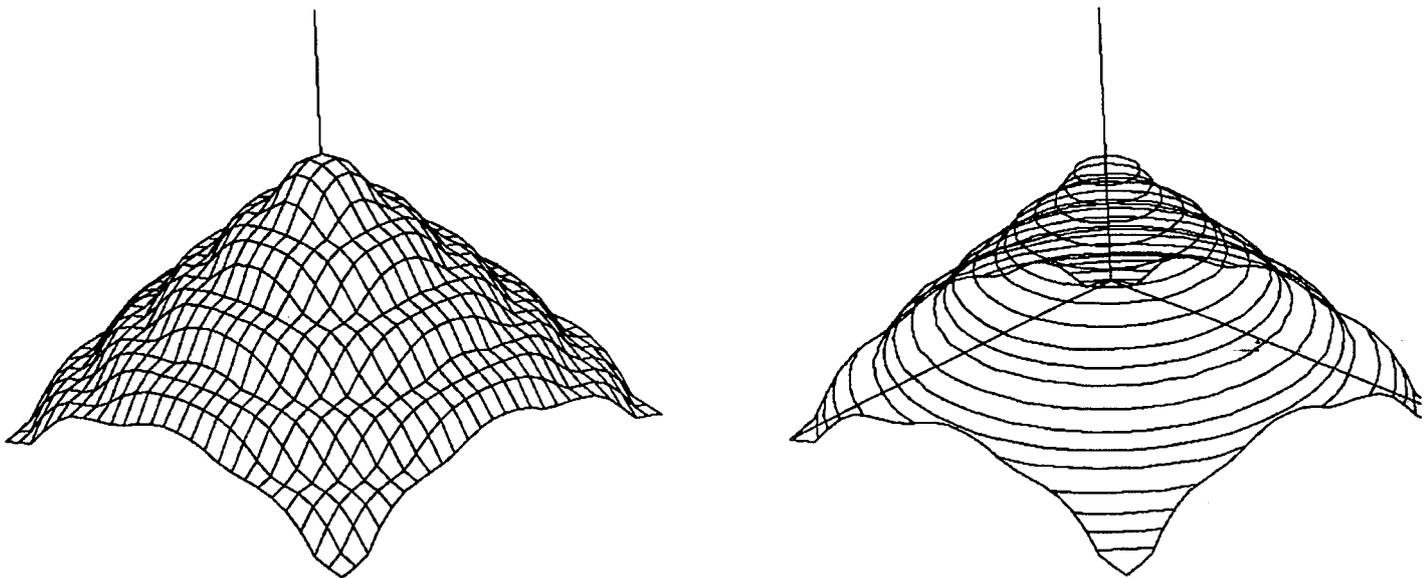


FIGURE.6. A gauche:  $\beta$ -spline bicubique, et à droite les courbes de niveaux correspondantes.

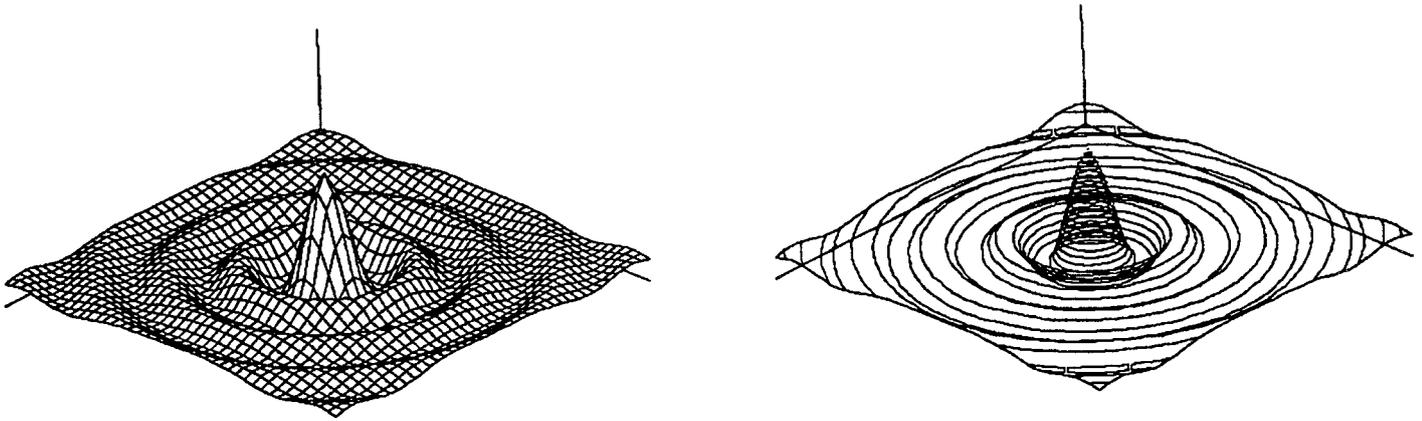


FIGURE.7. A gauche:  $\beta$ -spline bicubique, et à droite les courbes de niveaux correspondantes.

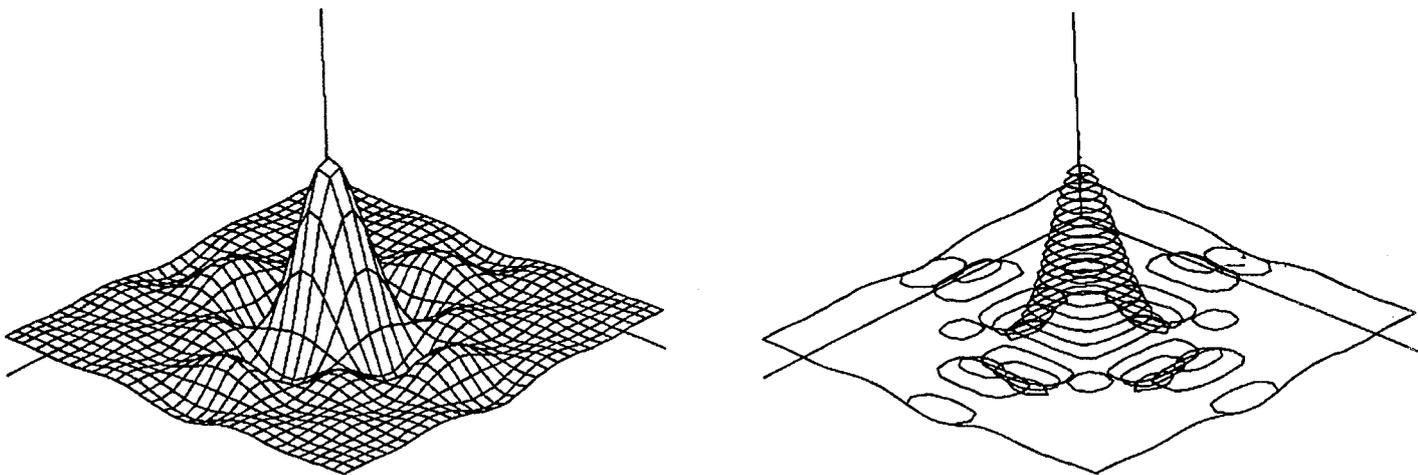


FIGURE.8. A gauche:  $\beta$ -spline bicubique, et à droite les courbes de niveaux correspondantes.

## Chapitre 5.

# INTERPOLATION PROGRESSIVE TRIANGULAIRE

1. PROBLEME D'INTERPOLATION PROGRESSIVE SUR UNE TRIANGULATION DE  $\mathbb{R}^2$
2. PREMIERE ETAPE DE L'ALGORITHME D'INTERPOLATION PROGRESSIVE TRIANGULAIRE
  - 2.1. *Calcul progressif des dérivées partielles*
  - 2.2. *Stabilité de l'algorithme*
  - 2.3. *Remarques et résultats*
  - 2.4. *Etude d'un cas particulier*
3. INTERPOLATION DES DONNEES FRONTIERE SUR UN TRIANGLE
  - 3.1. *Eléments finis classiques*
  - 3.2. *Interpolants triangulaires transfinis de Nielson.*
4. DEUXIEME ETAPE DE L'ALGORITHME D'INTERPOLATION PROGRESSIVE TRIANGULAIRE
  - 4.1. *Méthode de remplissage*
  - 4.2. *Triangulation et progression.*
5. INTERPOLATION PROGRESSIVE TRIANGULAIRE DE CLASSE  $G^{1-}$ 
  - 5.1. *Calcul progressif du plan tangent*
  - 5.2. *Stabilité de l'algorithme*
  - 5.3. *Interpolant discret de classe  $G^1$ .*

## 1. PROBLEME D'INTERPOLATION PROGRESSIVE SUR UNE TRIANGULATION DE $\mathbb{R}^2$

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème d'interpolation progressive dans le cas où les données sont réparties sur un maillage triangulaire quelconque. En effet, considérons une triangulation  $\mathcal{T}$  supposée donnée de  $\mathbb{R}^2$  de sommets  $\{V_i = (x_i, y_i)\}$ . On suppose que des données  $z_i \in \mathbb{R}$  correspondant à  $V_i$  sont acquises "progressivement". On cherche une fonction  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $S(V_i) = z_i$ .

### 1. 1. Difficultés de stratégie pour la progression

Une première stratégie pour définir la progression des points  $V_i$  a été la suivante :

*Supposons qu'à l'étape  $i_0$ , une triangulation  $\mathcal{T}_{i_0}$  soit formée sur les points  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, i_0$  et qu'une fonction réelle  $S$  définie sur l'enveloppe convexe  $\mathcal{C}_{i_0}$  des points  $V_i$  et interpolant les  $z_i$  en  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, i_0$ , ait déjà été définie. A l'étape  $i_0 + 1$ , le point  $V_{i_0+1}$  est obtenu. On cherche l'enveloppe convexe  $\mathcal{C}_{i_0+1}$  des points  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, i_0 + 1$  tout en formant les  $j_{i_0}$  nouveaux triangles. Le gradient au sommet  $V_{i_0+1}$  sera calculé par une relation de récurrence en fonction de "l'un des morceaux qui lui est adjacent". Le morceau de surface correspondant, ainsi que les  $j_{i_0} - 1$  morceaux formés, sont déterminés par des méthodes de remplissage.*

Il y a une ambiguïté dans cette définition : lorsqu'on ajoute un point nouveau  $V_{i_0+1}$ , il arrive souvent que l'on puisse former un triangle de plusieurs façons. Il faut donc choisir lequel servira au calcul. Ensuite, si l'on forme tous les autres triangles pour assurer la convexité, on arrivera souvent à des triangles très plats (voir figure 1).

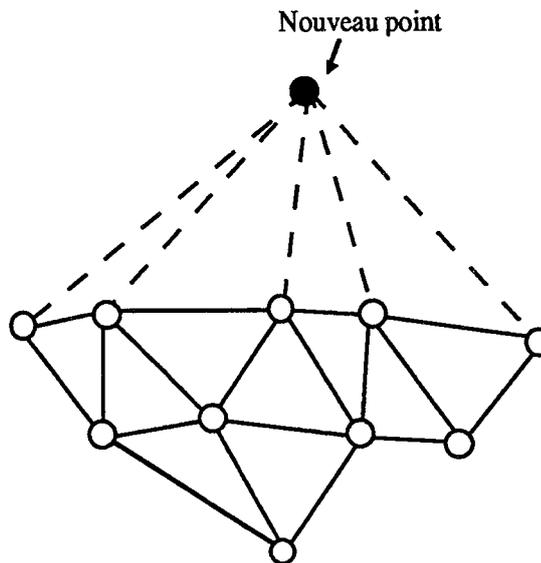


FIGURE.1. Formation de triangles plats.

Il est évident que dans ce cas on n'a pas intérêt à joindre le nouveau point à tous les points déjà obtenus pour assurer la convexité. Il est donc difficile de définir une stratégie (même en abandonnant l'idée de convexité!).

### 1. 2. Pour éviter ces difficultés

Pour éviter les difficultés ci dessus, nous faisons la supposition suivante :

*On suppose que les  $V_i$  sont connus et que la triangulation est fournie dans son ensemble. Seules les valeurs  $z_i$  sont données progressivement.*

La triangulation étant connue, nous procéderons en deux étapes : la première étape consiste à trouver des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité lors du parcours de la triangulation. Pour cela, nous prendrons deux triangles arbitraires appartenant à la triangulation, adjacents par une arête (les gradients aux trois sommets de l'un étant supposés déjà obtenus). Le passage de l'un à l'autre consiste à calculer le gradient au nouveau sommet du deuxième triangle en fonction des gradients aux extrémités de l'arête commune. On caractérise ce procédé par une relation de récurrence et on démontre alors la stabilité.

La deuxième étape de l'algorithme consiste à calculer la valeur de la fonction sur le triangle tout entier (cette étape est dite de remplissage). Connaissant les gradients aux trois sommets du triangle (et donc, par des méthodes d'approximation classiques, on peut déterminer la valeur de la fonction et de ses dérivées premières sur la frontière), on utilise des méthodes de remplissage qui interpolent ces données. Ces méthodes sont décrites indépendamment dans la section 3 de ce chapitre. On remarquera, qu'en aucun cas, cette deuxième étape ne remet en cause la notion de stabilité définie dans la première étape.

Dans le dernier paragraphe, nous présenterons un algorithme progressif  $G^1$  basé sur une idée similaire à celle développée dans la section 1, sauf que le raccordement  $C^1$  aux sommets est remplacé par un raccordement  $G^1$ . Ce contact est défini par une matrice de connexion d'ordre 2. Connaissant les normales (de norme 1) aux sommets de chaque triangle, nous ferons appel à l'interpolant transfini  $G^1$  de Nielson [44].

**1. 3. Quelques notations**

• Si  $T$  est un triangle arbitraire de sommets  $\bar{V}_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , il est commode d'introduire les coordonnées barycentriques  $b_i = b_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$  du point  $(x, y)$  définies par

$$\begin{cases} x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \\ y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3, \\ 1 = b_1 + b_2 + b_3. \end{cases} \quad (5.1)$$

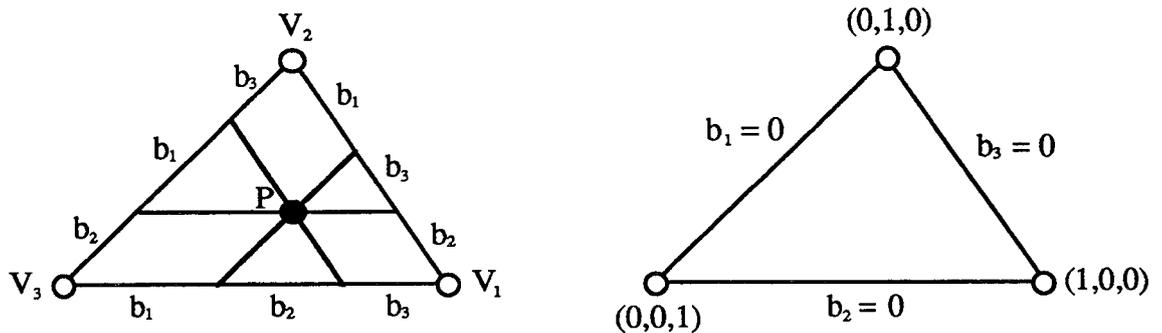


FIGURE.2. Coordonnées barycentriques.

Géométriquement, les valeurs de  $b_1, b_2, b_3$  sont données par :

$$b_1 = \frac{|PV_2V_3|}{|V_1V_2V_3|}, \quad b_2 = \frac{|PV_3V_1|}{|V_1V_2V_3|}, \quad b_3 = \frac{|PV_1V_2|}{|V_1V_2V_3|}, \quad (5.2)$$

où  $|ABC|$  dénote l'aire du triangle  $[A, B, C]$ .

• Notons par  $S'(V; u)$  la dérivée directionnelle d'ordre 1 de  $S$  (supposée continûment dérivable) en  $V$  dans la direction  $u$ .

• Notons par  $S''(V; u, v)$  la dérivée directionnelle d'ordre 2 de  $S$  en  $V$  dans les directions  $u$  et  $v$ .

• Si  $e_x$  et  $e_y$  sont les vecteurs unités dans les directions  $Ox$  et  $Oy$  respectivement, on note  $S'_x(V)$  et  $S'_y(V)$  (ou bien  $\frac{\partial S}{\partial x}(V)$ ,  $\frac{\partial S}{\partial y}(V)$ ) les dérivées partielles de  $S$  en  $V$ , i.e. :

$$\begin{aligned} S'_x(V) &= S'(V; e_x), \\ S'_y(V) &= S'(V; e_y). \end{aligned} \quad (5.3)$$

• Avec ces notations, on rappelle les formules simples suivantes :

$$S'(V; AB) = (x_B - x_A) S'_x(V) + (y_B - y_A) S'_y(V). \quad (5.4)$$

En particulier, si  $n = (y_B - y_A, -(x_B - x_A))$ , la quantité

$$S'(V; n) = (y_B - y_A) S'_x(V) - (x_B - x_A) S'_y(V), \quad (5.5)$$

représente la dérivée dans la direction  $n$  qui est orthogonale à  $AB$ .

## 2. PREMIERE ETAPE DE L'ALGORITHME D'INTERPOLATION PROGRESSIVE TRIANGULAIRE

### 2. 1. Calcul progressif des dérivées partielles

Considérons un triangle non dégénéré de sommets  $V_i = (x_i, y_i)$ ,  $V_j = (x_j, y_j)$  et  $V_l = (x_l, y_l)$  de la triangulation. Les valeurs  $S'_x(V_i)$ ,  $S'_y(V_i)$ ,  $S'_x(V_j)$ ,  $S'_y(V_j)$  étant connues, nous cherchons  $S'_x(V_l)$ ,  $S'_y(V_l)$ .

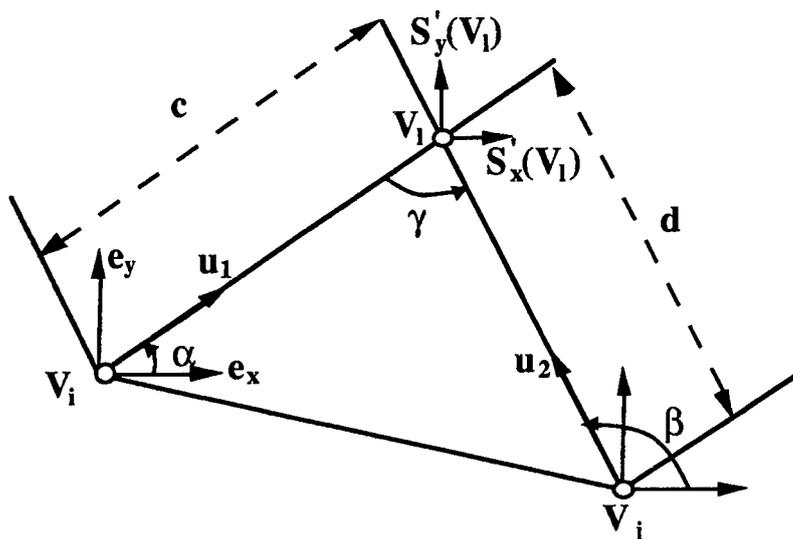


FIGURE.3. Calcul du gradient au sommet  $V_l$  à une étape de la progression.

Soit  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) le vecteur unitaire associé à  $V_iV_l$  (resp.  $V_jV_l$ ), i.e :

$$\begin{aligned} u_1 &= \left( \frac{x_l - x_i}{c}, \frac{y_l - y_i}{c} \right) = (\cos \alpha, \sin \alpha), \\ u_2 &= \left( \frac{x_l - x_j}{d}, \frac{y_l - y_j}{d} \right) = (\cos \beta, \sin \beta), \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $c$  (resp.  $d$ ) est la distance euclidienne de  $V_i$  à  $V_l$  (resp. de  $V_j$  à  $V_l$ ),  $\alpha$  est l'angle  $(Ox, V_iV_l)$  et  $\beta$  l'angle  $(Ox, V_jV_l)$ .

On a

$$\begin{aligned} S'(V_i; u_1) &= \langle S'(V_i), u_1 \rangle = S'_x(V_i) \cos \alpha + S'_y(V_i) \sin \alpha, \\ S'(V_j; u_2) &= \langle S'(V_j), u_2 \rangle = S'_x(V_j) \cos \beta + S'_y(V_j) \sin \beta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Considérons la restriction de la fonction  $S$  à une arête  $V_mV_n$  arbitraire. Cette restriction est définie par la fonction

$$s_{m,n}(t) = S((1-t)V_m + tV_n), \quad t \in [0, 1].$$

En suivant l'idée introduite au chapitre 2, nous prendrons  $s_{m,n}$  de la forme suivante :

$$s_{m,n}(t) = z_m + \left( t - \frac{t^2(1+kt)}{1+k} \right) s'_{m,n}(0) + \frac{t^2(1+kt)}{1+k} (z_n - z_m), \quad (5.8)$$

où  $k$  est un coefficient fixé mais à choisir. Pour plus de renseignements sur le choix de cette fonction, on renvoie le lecteur au Chapitre 2 .

Ainsi, si l'on progresse de  $V_i$  à  $V_l$ , on aura :

$$s'_{i,l}(0) = S'(V_i; V_l - V_i) = S'(V_i; cu_1) = c S'(V_i; u_1),$$

et de même

$$s'_{i,l}(1) = c S'(V_l; u_1).$$

Mais par un calcul simple, on a :

$$s'_{i,l}(1) = (1 - K) s'_{i,l}(0) + K (z_l - z_i),$$

avec

$$K = \frac{2 + 3k}{1 + k}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} S'(V_i; u_1) = (1 - K) S'(V_i; u_1) + \frac{K}{c} (z_l - z_i), \\ S'(V_i; u_2) = (1 - K) S'(V_j; u_2) + \frac{K}{d} (z_l - z_j). \end{cases} \quad (5.9)$$

Enfin, des relations :

$$\begin{cases} S'(V_i; u_1) = S'_x(V_i) \cos \alpha + S'_y(V_i) \sin \alpha, \\ S'(V_i; u_2) = S'_x(V_i) \cos \beta + S'_y(V_i) \sin \beta, \end{cases}$$

on obtient facilement

$$\begin{pmatrix} S'_x(V_l) \\ S'_y(V_l) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'(V_i; u_1) \\ S'(V_i; u_2) \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

En rassemblant tous ces calculs, on trouve la relation de progression suivante

$$\begin{pmatrix} S'_x(V_l) \\ S'_y(V_l) \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} S'_x(V_i) \\ S'_y(V_i) \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} S'_x(V_j) \\ S'_y(V_j) \end{pmatrix} + B, \quad (5.11)$$

où

$$M_1 = \frac{1 - K}{\tan \beta - \tan \alpha} \begin{pmatrix} \tan \beta & \tan \alpha \tan \beta \\ -1 & -\tan \alpha \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \frac{1 - K}{\tan \alpha - \tan \beta} \begin{pmatrix} \tan \alpha & \tan \alpha \tan \beta \\ -1 & -\tan \beta \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{K}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} \frac{z_l - z_i}{c} \sin \beta - \frac{z_l - z_j}{d} \sin \alpha \\ \frac{z_l - z_j}{d} \cos \alpha - \frac{z_l - z_i}{c} \cos \beta \end{pmatrix}.$$

La relation (5.11) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} S'_x(V_i) \\ S'_y(V_i) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} S'_x(V_i) \\ S'_y(V_i) \\ S'_x(V_j) \\ S'_y(V_j) \end{pmatrix} + B,$$

où  $M$  est une matrice  $(2,4)$  définie par :

$$M = [M_1, M_2] = \frac{1-K}{\tan \beta - \tan \alpha} \begin{pmatrix} \tan \beta & \tan \alpha \tan \beta & -\tan \alpha & -\tan \alpha \tan \beta \\ -1 & -\tan \alpha & 1 & \tan \beta \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** Nous pouvons résumer le calcul fait précédemment en terme d'application de la façon suivante : considérons les applications  $f_\theta$  et  $g_k^{i,j}$  définies par :

$$\begin{aligned} f_\theta &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x, y) &\longmapsto x \cos \theta + y \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_k^{i,j} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (1-K)t + \frac{K}{\|V_i V_j\|} (z_j - z_i), \quad K = \frac{2+3k}{1+k}. \end{aligned}$$

Si on note  $\nabla S_i = (S'_x(V_i), S'_y(V_i))$ , alors la relation (5.11) s'écrit :

$$\nabla S_i = \mathcal{F}(\nabla S_i, \nabla S_j) = h^{-1} \circ g_k \circ f(\nabla S_i, \nabla S_j).$$

où  $f, g_k, h, \mathcal{F}$  sont résumées dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow f & & \uparrow h^{-1} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g_k} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

et sont définies par :

$$\begin{cases} f : (X, Y) \longmapsto (f_\alpha(X), f_\beta(Y)), \\ h : X \longmapsto f(X, X), \\ g_k : X \longmapsto (g_k^{i,l}(x), g_k^{j,l}(y)). \end{cases}$$

## 2. 2. Stabilité de l'algorithme

On dira que l'algorithme est stable si la matrice  $M$  vérifie :

$$\rho(M) = \|M\|_2 < 1, \quad (5.12)$$

où  $\|M\|_2$  désigne la norme de l'application linéaire  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lorsque  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}^2$  sont munis de la norme euclidienne. Or  $\|M\|_2$  est égale à la racine carrée du rayon spectral de  ${}^t M M$ , c'est-à-dire à  $\sqrt{|\lambda|}$ , où  $\lambda$  est la valeur propre de  ${}^t M M$  de plus grand module. On a

$${}^t M M = z_0 \begin{pmatrix} 1 + y_0^2 & x_0(1 + y_0^2) & -(1 + x_0 y_0) & -y_0(1 + x_0 y_0) \\ \cdot & x_0^2(1 + y_0^2) & -x_0(1 + x_0 y_0) & -x_0 y_0(1 + x_0 y_0) \\ \cdot & \cdot & (1 + x_0^2) & y_0(1 + x_0^2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & y_0^2(1 + x_0^2) \end{pmatrix}$$

avec

$$x_0 = \tan \alpha, \quad y_0 = \tan \beta, \quad z_0 = \frac{(1 - K)^2}{(\tan \beta - \tan \alpha)^2}. \quad (5.13)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les solutions de l'équation

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2a_1 \lambda + a_2) = 0, \quad (5.14)$$

$$\begin{cases} a_1 = z_0(1 + x_0^2)(1 + y_0^2) = \frac{(1 - K)^2}{\sin^2 \gamma}, \\ a_2 = z_0^2(1 + x_0^2)(1 + y_0^2)(y_0 - x_0)^2 = \frac{(1 - K)^4}{\sin^2 \gamma}, \end{cases} \quad (5.15)$$

où  $\gamma = \beta - \alpha$  (avec  $\sin \gamma \neq 0$ ).

Le discriminant  $a_1^2 - a_2 = \frac{(1 - K)^4(1 - \sin^2 \gamma)}{\sin^4 \gamma}$  étant positif et  $a_1$  étant positif, la plus grande racine en module est :

$$a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2} = \frac{(1 - K)^2}{1 - |\cos \gamma|}.$$

Nous obtenons alors

$$\|M\|_2 = \frac{(1 - K)^2}{1 - |\cos \gamma|}. \quad (5.16)$$

**Théorème 5.1** *L'algorithme d'interpolation progressive décrit par la relation (5.11) est stable (au sens  $\|M\|_2 < 1$ ) si et seulement si*

$$|\cos \gamma| < 1 - \left(\frac{1 + 2k}{1 + k}\right)^2.$$

### 2. 3. Remarques et résultats

**Remarque 1 :** La condition de stabilité implique que  $(1 - K)^2 < 1$ , soit

$$-1 < \frac{1+2k}{1+k} < 1, \text{ i.e., } k \in \left] -\frac{2}{3}, 0 \right[.$$

On retrouve la condition de stabilité dans le cas unidimensionnel. Plus précisément, supposons que  $\gamma$  soit donné. Posons  $r = \sqrt{1 - |\cos \gamma|}$ . Il faut que

$$k \in \left] -\frac{1+r}{2+r}, \frac{r-1}{2-r} \right[.$$

Par exemple, pour  $\gamma = \frac{\pi}{3}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et

$$k \in \left] -\frac{2+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}-2}{4-\sqrt{2}} \right[ \sim \left] -0.630, -0.226 \right[.$$

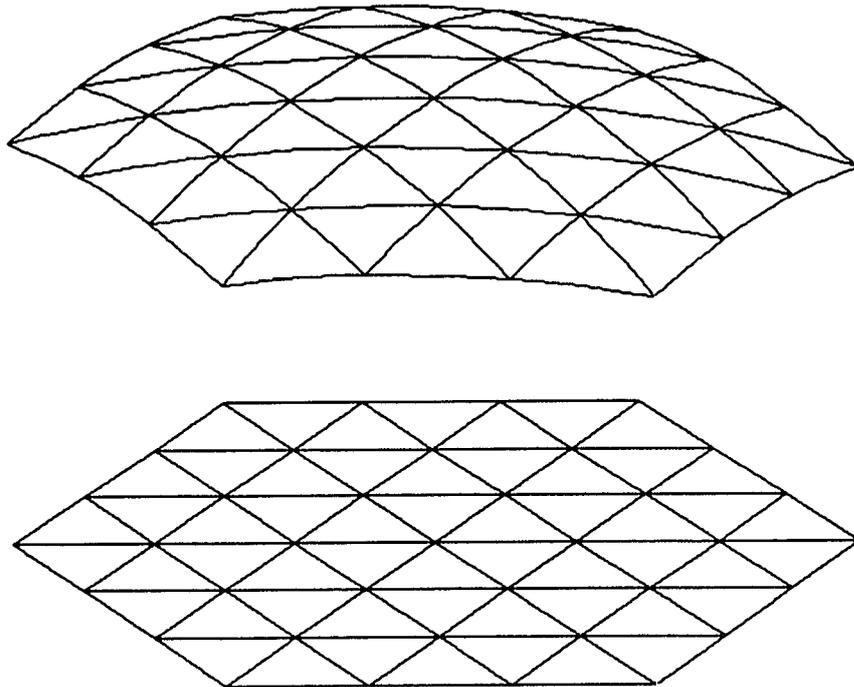


FIGURE.4. Exemple illustrant la remarque 1 avec  $\gamma = \frac{\pi}{3}$ ,  $k = -\frac{1}{3}$ .

Dans la figure 4, on représente une triangulation régulière formée de triangles équilatéraux et les fonctions définies sur les arêtes qu'on a notées  $s_{m,n}(t)$ .

**Remarque 2 :** Si  $k$  est fixé ( $\in ]-\frac{2}{3}, 0[$ ), il faut que

$$|\cos \gamma| < 1 - \left(\frac{1+2k}{1+k}\right)^2.$$

Si  $\gamma_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  tel que  $\cos \gamma_0 = 1 - \left(\frac{1+2k}{1+k}\right)^2$ , alors on doit avoir

$$\gamma \in ]\gamma_0, \pi - \gamma_0[ \quad (\text{modulo } \pi).$$

L'angle  $\gamma = \beta - \alpha$  est égal à l'angle  $(V_i V_i, V_i V_j)$ . Les points  $V_i$  et  $V_j$  étant donnés, le point  $V_i$  doit donc se trouver dans une région délimitée par des arcs de cercle.

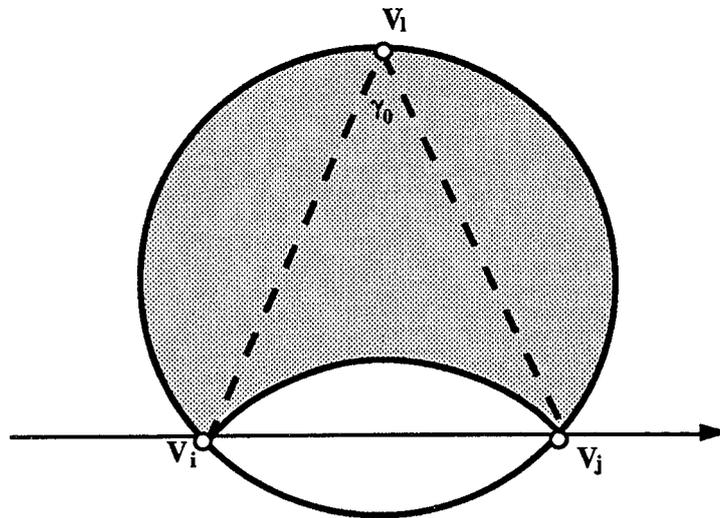


FIGURE.5. *Domaine de stabilité pour  $k$  fixé.  $\gamma \in ]\gamma_0, \pi - \gamma_0[$ .*

Dans les exemples suivants, nous allons fixer  $k = -\frac{1}{3}$ . Le premier exemple (figure 6) correspond à une triangulation formée par des triangles rectangles, donc  $\gamma \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ . Le deuxième exemple (figure 7), nous avons testé l'algorithme sur une triangulation de Delaunay. Dans les deux cas, ainsi que dans l'exemple de la remarque 1, nous n'avons pas précisé la "manière de progresser"; ce point sera développé dans la section 4 de ce chapitre.

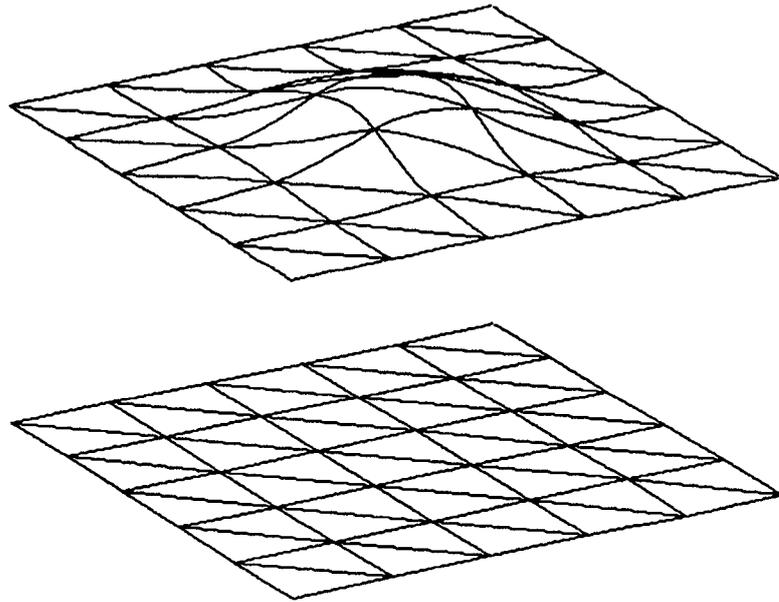


FIGURE.6. *Test sur une triangulation rectangle.*

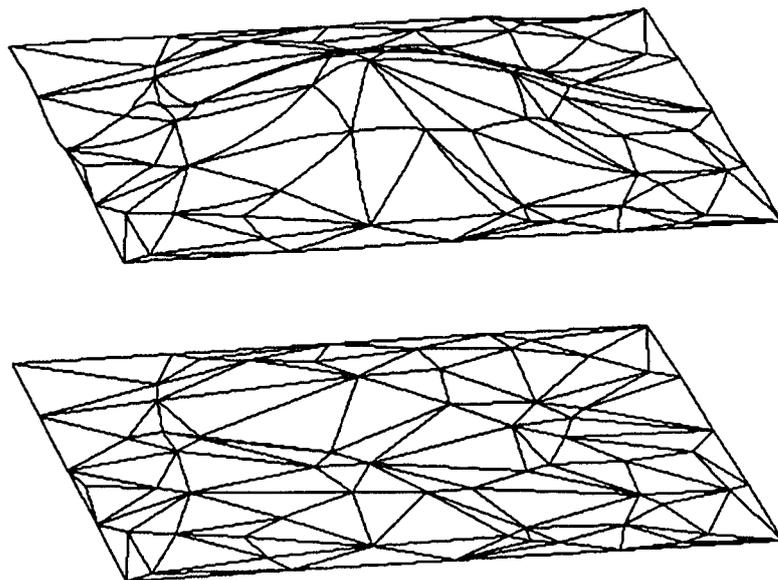


FIGURE.7. *Test sur une triangulation de Delaunay.*

**Remarque 3 :** Dans le paragraphe (2.1), nous avons défini deux fonctions  $s_{i,l}(t)$  et  $s_{j,l}(t)$  sur les arêtes  $V_i V_l$  et  $V_j V_l$  avec le même coefficient  $k$ . Supposons maintenant que ces deux fonctions se distinguent par deux coefficients différents  $k_1, k_2$ , soit

$$\begin{aligned} s_{i,l}(t) &= z_i + \left(t - \frac{t^2(1+k_1t)}{1+k_1}\right) s'_{i,l}(0) + \frac{t^2(1+k_1t)}{1+k_1} (z_l - z_i), \\ s_{j,l}(t) &= z_j + \left(t - \frac{t^2(1+k_2t)}{1+k_2}\right) s'_{j,l}(0) + \frac{t^2(1+k_2t)}{1+k_2} (z_l - z_j). \end{aligned}$$

La relation de progression devient

$$\begin{pmatrix} S'_x(V_l) \\ S'_y(V_l) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} S'_x(V_i) \\ S'_y(V_i) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} S'_x(V_j) \\ S'_y(V_j) \end{pmatrix} + B_1, \quad (5.17)$$

où

$$A_1 = \frac{1 - K_1}{\tan \beta - \tan \alpha} \begin{pmatrix} \tan \beta & \tan \alpha \tan \beta \\ -1 & -\tan \alpha \end{pmatrix}, \quad K_1 = \frac{2 + 3k_1}{1 + k_1},$$

$$A_2 = \frac{1 - K_2}{\tan \alpha - \tan \beta} \begin{pmatrix} \tan \alpha & \tan \alpha \tan \beta \\ -1 & -\tan \beta \end{pmatrix}, \quad K_2 = \frac{2 + 3k_2}{1 + k_2},$$

$$B_1 = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} K_1 \frac{z_l - z_i}{c} \sin \beta - K_2 \frac{z_l - z_j}{d} \sin \alpha \\ K_2 \frac{z_l - z_j}{d} \cos \alpha - K_1 \frac{z_l - z_i}{c} \cos \beta \end{pmatrix},$$

L'équation caractéristique (5.11) devient

$$\lambda^2 (\lambda^2 - f_1 \lambda + f_2) = 0,$$

avec

$$f_1 = \frac{(1 - K_1)^2 + (1 - K_2)^2}{\sin^2 \gamma}, \quad f_2 = \frac{(1 - K_1)^2 (1 - K_2)^2}{\sin^2 \gamma},$$

et la condition du théorème (5.1) s'écrit :

$$|\cos \gamma| < \left[ 1 - \left( \frac{1 + 2k_1}{1 + k_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{1 + 2k_2}{1 + k_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.18)$$

### 2. 4. Etude d'un cas particulier ( $k = -\frac{1}{3}$ )

Reprenons les mêmes notations que dans la section 2.1 (figure 3). On suppose que la restriction de  $S$  à  $V_i V_l$  est un polynôme  $p_i$  de degré 3

$$S(V_i + t u_1) = p_i(t) \quad t \in [0, c] \text{ où } c = \|V_i V_l\|,$$

et de même que la restriction de  $S$  à  $V_j V_l$  est un polynôme  $q_j$  de degré 3

$$S(V_j + t u_2) = q_j(t) \quad t \in [0, d] \text{ où } d = \|V_j V_l\|.$$

On veut minimiser

$$\int_0^c [p_i''(t)]^2 dt + \int_0^d [q_j''(t)]^2 dt, \quad (5.19)$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} p_i(0) = S(V_i) = z_i & , & q_j(0) = S(V_j) = z_j, \\ p_i'(0) = S'(V_i; u_1) & , & q_j'(0) = S'(V_j; u_2), \\ p_i(c) = S(V_l) = z_l & , & q_j(d) = S(V_l) = z_l. \end{cases}$$

Prenons pour  $p_i$  et  $q_j$  la représentation d'Hermite; le problème se ramène à minimiser l'expression (5.19) par rapport à  $p_i'(c)$  et  $q_j'(d)$  qui sont libres.

Puisque

$$\begin{aligned} \int_0^c [p_i''(t)]^2 dt & \text{ ne dépend que de } p_i'(c), \\ \int_0^d [q_j''(t)]^2 dt & \text{ ne dépend que de } q_j'(d), \end{aligned}$$

et que ces deux variables sont indépendantes, on peut décomposer la minimisation, i.e. :

$$\min_{p_i'(c), q_j'(d)} \int_0^c [p_i''(t)]^2 dt + \int_0^d [q_j''(t)]^2 dt \iff \begin{cases} \min_{p_i'(c)} \int_0^c [p_i''(t)]^2 dt, \\ \min_{q_j'(d)} \int_0^d [q_j''(t)]^2 dt. \end{cases}$$

En se référant au résultat à une variable (chapitre 2), on obtient donc :

$$\begin{cases} p_i'(c) = -\frac{1}{2} p_i'(0) + \frac{3}{2} \left( \frac{z_l - z_i}{c} \right), \\ q_j'(d) = -\frac{1}{2} q_j'(0) + \frac{3}{2} \left( \frac{z_l - z_j}{d} \right). \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} S'_x(V_l) \\ S'_y(V_l) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{pmatrix} \left[ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p'_i(0) \\ q'_j(0) \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \frac{z_l - z_i}{c} \\ \frac{z_l - z_j}{d} \end{pmatrix} \right].$$

En remplaçant  $p'_i(0)$  et  $q'_j(0)$  en fonction du gradient, on obtient :

$$\begin{pmatrix} S'_x(V_l) \\ S'_y(V_l) \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} S'_x(V_i) \\ S'_y(V_i) \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} S'_x(V_j) \\ S'_y(V_j) \end{pmatrix} + D_3, \quad (5.20)$$

où

$$D_1 = \frac{-\frac{1}{2}}{\tan \beta - \tan \alpha} \begin{pmatrix} \tan \beta & \tan \alpha \tan \beta \\ -1 & -\tan \alpha \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \frac{-\frac{1}{2}}{\tan \alpha - \tan \beta} \begin{pmatrix} \tan \alpha & \tan \alpha \tan \beta \\ -1 & -\tan \beta \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \frac{\frac{3}{2}}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} \frac{z_l - z_i}{c} \sin \beta - \frac{z_l - z_j}{d} \sin \alpha \\ \frac{z_l - z_j}{d} \cos \alpha - \frac{z_l - z_i}{c} \cos \beta \end{pmatrix}.$$

ce qui correspond à la relation (5.11) avec  $k = -\frac{1}{3}$ .

**Proposition 5.2** *La relation de progression (5.20) obtenue par un critère de minimisation locale est équivalente à la relation (5.11) pour  $k = -\frac{1}{3}$  ( $K = \frac{3}{2}$ ).*

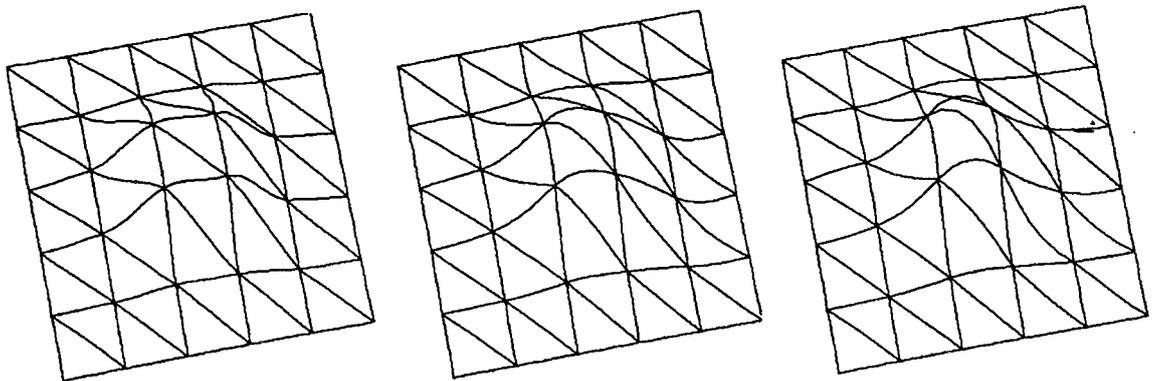


FIGURE.8. De gauche à droite:  $k = -0.6$ ,  $k = -0.33$ ,  $k = -0.1$ .

On a constaté expérimentalement que cette valeur donne le meilleur résultat d'un point de vue numérique.

### 3. Interpolation des données frontière sur un triangle

Dans cette section, on aborde le problème de l'interpolation de données connues sur la frontière d'un triangle. Ce problème est tout à fait indépendant des sections précédentes. Nous informons le lecteur que les méthodes qui seront exposées se trouvent déjà dans la littérature; on se contente seulement de les utiliser dans notre algorithme. Pour nous, les données frontière sur un triangle seront :

- \* **trois fonctions polynomiales cubiques sur les trois arêtes du triangle,**
- \* **dérivées transversales premières le long des trois arêtes et qui sont généralement choisies linéaires d'un sommet à un autre.**

Par conséquent, les données frontière dépendent uniquement de l'estimation du gradient aux sommets (estimation déjà obtenue dans la présente section). Notons que les méthodes de remplissage n'affectent en aucun cas la notion de stabilité définie précédemment.

D'une manière générale, le problème de l'interpolation des données frontières sur un triangle consiste à construire un interpolant s'appuyant sur plusieurs courbes ou patches qui forment un contour. Le patche qui sera construit devra respecter des contraintes de continuité aux bords. Dans ce chapitre, on décrit quelques méthodes dans le cas où les données frontières sont des courbes. De nouvelles méthodes de remplissage seront données dans le chapitre 6 dans le cas où l'interpolant à construire s'appuie sur plusieurs patches.

Dans le premier paragraphe, nous rappelons une classe d'interpolants qui entre dans le cadre des éléments finis. Ces interpolants sont utilisés dans le cas de données discrètes, c'est-à-dire lorsque l'on connaît un nombre fini d'informations sur la frontière du triangle. Deux éléments sont décrits : l'élément de Clough - Tocher [19], [34] qui consiste à diviser le triangle en trois petits triangles, à définir un patche polynomial cubique par morceaux et à prendre les dérivées normales le long des arêtes linéaires. Les données frontières sont la valeur, le gradient en chaque sommet du triangle et la dérivée normale au milieu de chaque arête. L'espace engendré par ces éléments est alors de dimension 12.

Le deuxième interpolant est l'élément de Powell - Sabin [48] qui consiste à diviser le triangle en six (ou douze) petits triangles et à définir un patche polynomial quadratique par morceaux. Les données frontières sont alors la valeur et le gradient en chaque sommet du triangle. L'espace engendré par ces éléments est de dimension 9.

Dans le deuxième paragraphe, une deuxième classe d'interpolants est donnée; ces interpolants sont appelés "interpolants triangulaires transfinis" car ils interpolent les valeurs arbitraires de la fonction et de ses dérivées premières sur la frontière d'un triangle. Plusieurs techniques peuvent être trouvées dans la littérature; parmi elles les interpolants triangulaires BBG présentés par Barnhill, Birkhoff et Gordan [2], [3], qui sont basés sur des opérateurs d'Hermite appliqués le long des lignes parallèles aux arêtes du triangle. Ces interpolants sont développés et généralisés par J.A.Gregory [4]. On trouve aussi les interpolants triangulaires de G.M.Nielson (Méthodes "Side - Vertex" [43], "Minimum Norm Network" [42]) basés sur des opérateurs d'Hermite appliqués aux lignes joignant un sommet à un point de l'arête opposée .... On a choisi parmi toutes

ces méthodes, de présenter les interpolants de Nielson.

Pour leur utilisation dans l'interpolation des données dispersées, ces méthodes sont discrétisées comme suit : les courbes frontières sont polynomiales cubiques et les dérivées transversales frontières sont généralement choisies linéaires d'un sommet à un autre. Les courbes frontières dépendent de l'estimation du gradient aux sommets. Pour cette estimation, nous utiliserons les résultats de la section 2 de ce chapitre.

### 3. 1. Eléments finis classiques

#### 3. 1. 1. L'interpolant cubique de Clough - Tocher

L'élément que l'on va décrire ici a été développé par R.W.Clough et J.L.Tocher (1965) comme outil pour les méthodes d'éléments finis en mécanique. Cependant il a été utilisé aussi dans CAGD par Lawson (1977) dans le problème de l'interpolation de données dispersées, puis modifié par Farin (1985). Cet interpolant produit une surface polynomiale par morceaux de classe  $C^1$ .

##### a - Description de l'interpolant :

Soit  $T = [S_1, S_2, S_3]$  un triangle quelconque d'une triangulation donnée. En joignant le point  $S_4 = (S_1 + S_2 + S_3)/3$  de  $T$  à chaque sommet, on partage  $T$  en trois sous triangles  $T_1, T_2, T_3$ .

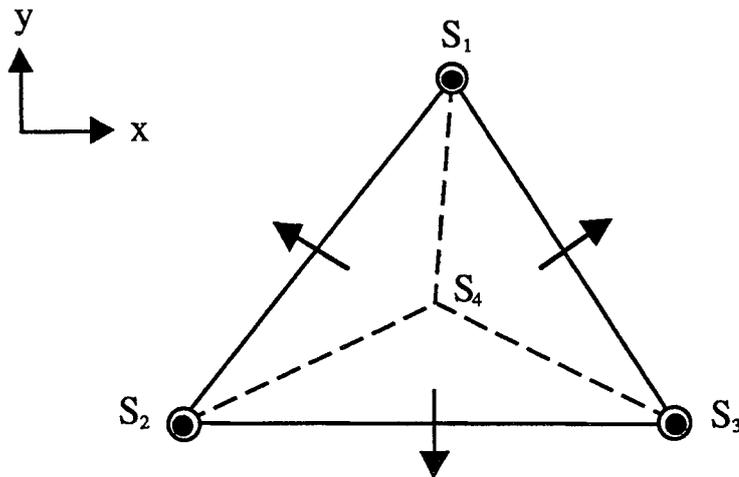


FIGURE.9. Configuration nodale de l'élément C-T.

La fonction (à deux variables) cherchée sur  $T$  est un polynôme cubique sur chaque sous triangle qui est  $C^1$  sur le triangle tout entier. Ces fonctions forment un espace linéaire de dimension 12. On introduit ensuite les 12 noeuds indiqués dans la figure 9 : la valeur et le gradient en chaque sommet du triangle

$$f(S_i) = z_i \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(S_i) = z_i^x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(S_i) = z_i^y \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

et la dérivée au milieu de chaque arête dans la direction de la normale à cette arête (cette dérivée le long de l'arête est linéaire au lieu d'être quadratique, ce

qui garantit un raccordement  $C^1$  avec des triangles adjacents [9], [19])

$$f' \left( \frac{S_i + S_j}{2}; n_{i,j} \right) \quad (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\},$$

où  $n_{i,j}$  désigne un vecteur perpendiculaire à l'arête de sommets  $S_i, S_j$ .

Par conséquent, si l'on suppose données ces 12 valeurs sur un triangle, il existe une unique fonction,  $C^1$  sur tout le triangle, et polynomiale de degré 3 sur chaque sous triangle qui leur correspond. En utilisant l'élément de Clough-Tocher sur une région triangulaire, on produit ainsi une surface  $C^1$  sur l'union des triangles. Pour décrire cette technique, nous allons procéder en deux étapes : transformer le problème d'interpolation sur chaque triangle en un problème d'interpolation sur un triangle standard, puis donner la liste des 12 fonctions cardinales qui constituent la base.

### b - Triangle de référence et formules de transformation :

Soit  $T_0$  le triangle standard équilatéral de sommet  $P_1, P_2$  et  $P_3$  (voir figure 10). La transformation affine qui nous permet de passer du triangle  $T$  défini dans le plan  $(xOy)$  au triangle  $T_0$  défini dans le plan  $(\xi O\eta)$  (les sommets sont transformés comme suit :  $S_i \rightarrow P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) est donnée par :

$$\begin{cases} \xi = a_{11}x + a_{12}y + c_1, \\ \eta = a_{21}x + a_{22}y + c_2, \end{cases} \quad (5.21)$$

où

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{\Delta} (2y_1 - y_2 - y_3) & , & a_{12} = \frac{1}{\Delta} (-2x_1 + x_2 + x_3), \\ c_1 = \frac{1}{\Delta} [x_1(y_2 + y_3) - y_1(x_2 + x_3)], \\ a_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{\Delta} (y_3 - y_2) & , & a_{22} = \frac{\sqrt{3}}{\Delta} (x_3 - x_2), \\ c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3\Delta} [x_1(y_3 - y_2) - y_1(x_3 - x_2) + 2(x_2y_3 - x_3y_2)], \end{cases} \quad (5.22)$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.23)$$

### Remarques :

- Notons qu'une fonction polynomiale par morceaux de classe  $C^1$  définie sur  $T$  correspond, par cette transformation, à une fonction  $C^1$  sur  $T_0$ , elle aussi polynomiale cubique par morceaux.

- L'application inverse, de  $T_0$  à  $T$ , est donnée par :

$$\begin{cases} x = b_{11}(\xi - c_1) + b_{12}(\eta - c_2), \\ y = b_{21}(\xi - c_1) + b_{22}(\eta - c_2), \end{cases} \quad (5.24)$$

où

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{1}{2}(x_3 - x_2) & , & b_{12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-2x_1 + x_2 + x_3), \\ b_{21} = \frac{1}{2}(y_3 - y_2) & , & b_{22} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2y_1 - y_2 - y_3). \end{cases} \quad (5.25)$$

Pour décrire les 12 fonctions cardinales pour l'interpolation sur  $T_0$ , les 12 fonctionnelles (informations) doivent être précisées. Ceci est fait dans la figure 10. Notons que les dérivées premières aux sommets sont spécifiées dans la direction du vecteur joignant le centre au sommet et la direction qui lui est orthogonale (dans le sens des aiguilles d'une montre).

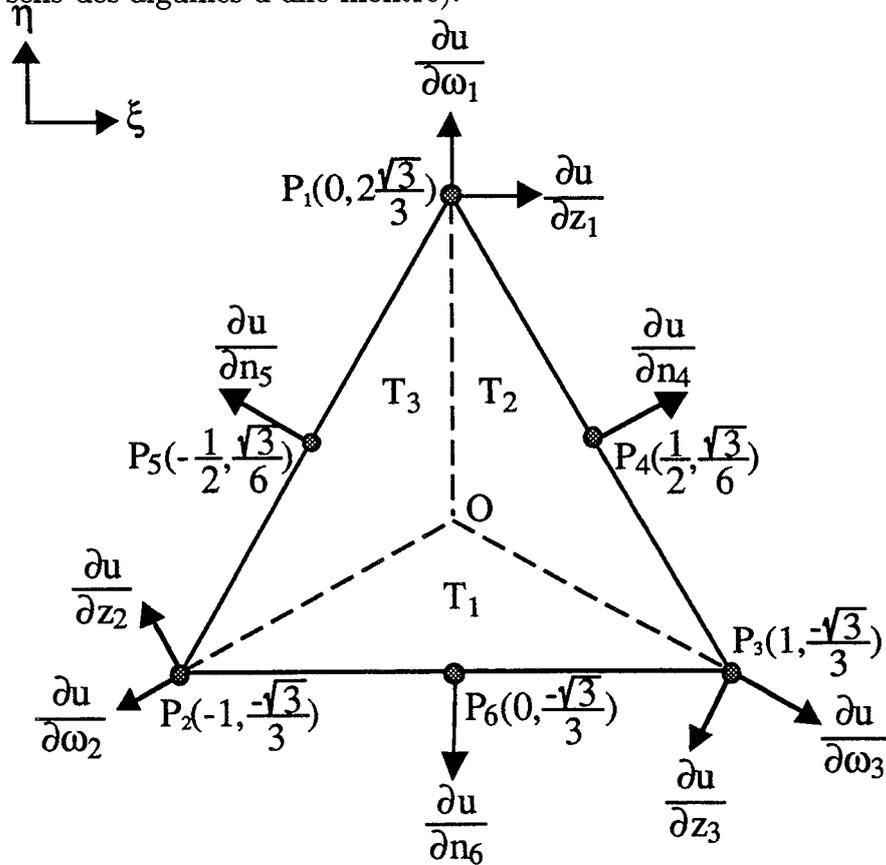


FIGURE.10. L'élément de Clough - Tocher standard.

Supposons que  $f(x, y)$  soit la fonction sur  $T$  que l'on cherche et  $u(\xi, \eta)$  est la fonction correspondante sur  $T_0$ . Donc,  $u$  est déterminée à partir de  $f$  en substituant les expressions (5.24) de  $x$  et  $y$  dans  $f(x, y)$ . En supposant que les valeurs de  $f$  et des dérivées partielles  $f'_x$  et  $f'_y$  soient données en chaque sommet de  $T$  ainsi que  $f'_x$  et  $f'_y$  au milieu des arêtes de  $T$ , les valeurs correspondantes des dérivées aux noeuds sur  $T_0$  (voir figure 10) sont obtenues en deux étapes. D'abord, la règle de la dérivation de fonctions composées implique que, pour tout point de  $T_0$ ,

$$u'_\xi = b_{11} f'_x + b_{21} f'_y \quad , \quad u'_\eta = b_{12} f'_x + b_{22} f'_y, \quad (5.26)$$

où  $b_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2$  sont données dans (5.25). Puis, les informations aux sommets sont déterminées en termes de  $u'_\xi$  et  $u'_\eta$  par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_1}(P_1) &= u'_\xi(P_1), \quad \frac{\partial u}{\partial z_2}(P_2) = -\frac{1}{2}u'_\xi(P_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}u'_\eta(P_2), \\ \frac{\partial u}{\partial z_3}(P_3) &= -\frac{1}{2}u'_\xi(P_3) - \frac{\sqrt{3}}{2}u'_\eta(P_3), \end{aligned} \quad (5.27)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \omega_1}(P_1) &= u'_\eta(P_1), \quad \frac{\partial u}{\partial \omega_2}(P_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}u'_\xi(P_2) - \frac{1}{2}u'_\eta(P_2), \\ \frac{\partial u}{\partial \omega_3}(P_3) &= \frac{\sqrt{3}}{2}u'_\xi(P_3) - \frac{1}{2}u'_\eta(P_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n_4}(P_4) &= \frac{\sqrt{3}}{2}u'_\xi(P_4) + \frac{1}{2}u'_\eta(P_4), \quad \frac{\partial u}{\partial n_5}(P_5) = -\frac{\sqrt{3}}{2}u'_\xi(P_5) + \frac{1}{2}u'_\eta(P_5), \\ \frac{\partial u}{\partial n_6}(P_6) &= -u'_\eta(P_6). \end{aligned}$$

Connaissant maintenant comment transformer les valeurs nodales de  $T$  à  $T_0$ , il nous reste à définir les 12 fonctions cardinales correspondantes sur  $T_0$  (qui forment la base duale des 12 fonctionnelles, notée  $\{B_i(\xi, \eta), i = 1, \dots, 12\}$ ). Ces deux faits vont nous permettre de déterminer complètement  $u(\xi, \eta)$  par :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 u(P_i) B_i(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial z_i}(P_i) B_{i+3}(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \omega_i}(P_i) B_{i+6}(\xi, \eta) \\ &\quad + \sum_{i=4}^6 \frac{\partial u}{\partial n_i}(P_i) B_{i+6}(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (5.28)$$

L'interpolant  $f(x, y)$  sur  $T$  est alors obtenu en substituant les expressions (5.21) de  $\xi$  et  $\eta$  dans  $u$  :

$$f(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y)). \quad (5.29)$$

**c - Base associée :** [34]

$$\begin{aligned} B_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta \\ &+ \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ -\frac{1}{4} \xi^3 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \xi^2 \eta - \frac{\sqrt{3}}{8} \eta^3 & \text{sur } T_2, \quad B_1(P_1) = 1 ; \\ \frac{1}{4} \xi^3 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \xi^2 \eta - \frac{\sqrt{3}}{8} \eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{3} - \frac{3}{4}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \\
&+ \begin{cases} \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ \frac{9}{16}\xi^3 + \frac{9\sqrt{3}}{16}\xi^2\eta + \frac{9}{16}\xi\eta^2 + \frac{\sqrt{3}}{16}\eta^3 & \text{sur } T_2 , B_2(P_2) = 1 ; \\ \frac{5}{16}\xi^3 - \frac{3\sqrt{3}}{16}\xi^2\eta + \frac{9}{16}\xi\eta^2 + \frac{\sqrt{3}}{16}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \\
B_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\xi - \frac{\sqrt{3}}{4}\eta \\
&+ \begin{cases} -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ -\frac{5}{16}\xi^3 - \frac{3\sqrt{3}}{16}\xi^2\eta - \frac{9}{16}\xi\eta^2 + \frac{\sqrt{3}}{16}\eta^3 & \text{sur } T_2 , B_3(P_3) = 1 ; \\ -\frac{9}{16}\xi^3 + \frac{9\sqrt{3}}{16}\xi^2\eta - \frac{9}{16}\xi\eta^2 + \frac{\sqrt{3}}{16}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \\
B_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi + \frac{\sqrt{3}}{4}\xi\eta \\
&+ \begin{cases} \frac{3}{4}\xi\eta^2 & \text{sur } T_1 ; \\ -\frac{5}{16}\xi^2 - \frac{5\sqrt{3}}{8}\xi^2\eta - \frac{3}{16}\xi\eta^2 & \text{sur } T_2 , \frac{\partial B_4}{\partial z_1}(P_1) = 1 ; \\ -\frac{5}{16}\xi^3 + \frac{5\sqrt{3}}{8}\xi^2\eta - \frac{3}{16}\xi\eta^2 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \\
B_5(\xi, \eta) &= -\frac{1}{8}\xi + \frac{\sqrt{3}}{8}\eta + \frac{3}{8}\xi^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\xi\eta - \frac{3}{8}\eta^2 \\
&+ \begin{cases} -\frac{1}{8}\xi^3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\xi^2\eta - \frac{3\sqrt{3}}{8}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ -\frac{9}{32}\xi^3 + \frac{3\sqrt{3}}{32}\xi^2\eta + \frac{15}{32}\xi\eta^2 + \frac{3\sqrt{3}}{32}\eta^3 & \text{sur } T_2 , \frac{\partial B_5}{\partial z_2}(P_2) = 1 ; \\ \frac{11}{32}\xi^3 - \frac{17\sqrt{3}}{32}\xi^2\eta + \frac{15}{32}\xi\eta^2 + \frac{3\sqrt{3}}{32}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \\
B_6(\xi, \eta) &= -\frac{1}{8}\xi - \frac{\sqrt{3}}{8}\eta - \frac{3}{8}\xi^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\xi\eta + \frac{3}{8}\eta^2 \\
&+ \begin{cases} -\frac{1}{8}\xi^3 - \frac{\sqrt{3}}{4}\xi^2\eta + \frac{3\sqrt{3}}{8}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ \frac{11}{32}\xi^3 + \frac{17\sqrt{3}}{32}\xi^2\eta + \frac{15}{32}\xi\eta^2 - \frac{3\sqrt{3}}{32}\eta^3 & \text{sur } T_2 , \frac{\partial B_6}{\partial z_3}(P_3) = 1 ; \\ -\frac{9}{32}\xi^3 - \frac{3\sqrt{3}}{32}\xi^2\eta + \frac{15}{32}\xi\eta^2 - \frac{3\sqrt{3}}{32}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_7(\xi, \eta) &= -\frac{7\sqrt{3}}{81} - \frac{13}{36}\eta + \frac{\sqrt{3}}{18}\eta^2 \\
&+ \begin{cases} \frac{17}{36}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ \frac{1}{8\sqrt{3}}\xi^3 + \frac{3}{16}\xi^2\eta + \frac{41}{144}\eta^3 & \text{sur } T_2 , \frac{\partial B_7}{\partial \omega_1}(P_1) = 1; \\ -\frac{1}{8\sqrt{3}}\xi^3 + \frac{3}{16}\xi^2\eta + \frac{41}{144}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \\
B_8(\xi, \eta) &= -\frac{7\sqrt{3}}{81} + \frac{13\sqrt{3}}{72}\xi + \frac{13}{72}\eta + \frac{\sqrt{3}}{24}\xi^2 + \frac{1}{12}\xi\eta + \frac{\sqrt{3}}{72}\eta^2 \\
&+ \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{8}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{\sqrt{3}}{12}\xi\eta^2 - \frac{11}{72}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ -\frac{17\sqrt{3}}{96}\xi^3 - \frac{17}{32}\xi^2\eta - \frac{17\sqrt{3}}{96}\xi\eta^2 - \frac{17}{288}\eta^3 & \text{sur } T_2 , \frac{\partial B_8}{\partial \omega_2}(P_2) = 1; \\ -\frac{13\sqrt{3}}{96}\xi^3 - \frac{5}{32}\xi^2\eta - \frac{17\sqrt{3}}{96}\xi\eta^2 - \frac{17}{288}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \\
B_9(\xi, \eta) &= -\frac{7\sqrt{3}}{81} - \frac{13\sqrt{3}}{72}\xi + \frac{13}{72}\eta + \frac{\sqrt{3}}{24}\xi^2 - \frac{1}{12}\xi\eta + \frac{\sqrt{3}}{72}\eta^2 \\
&+ \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{24}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{\sqrt{3}}{12}\xi\eta^2 - \frac{11}{72}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ \frac{13\sqrt{3}}{96}\xi^3 - \frac{5}{32}\xi^2\eta + \frac{17\sqrt{3}}{96}\xi\eta^2 - \frac{17}{288}\eta^3 & \text{sur } T_2 , \frac{\partial B_9}{\partial \omega_3}(P_3) = 1; \\ \frac{17\sqrt{3}}{96}\xi^3 - \frac{17}{32}\xi^2\eta + \frac{17\sqrt{3}}{96}\xi\eta^2 - \frac{17}{288}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \\
B_{10}(\xi, \eta) &= -\frac{4\sqrt{3}}{81} - \frac{\sqrt{3}}{9}\xi - \frac{1}{9}\eta - \frac{2}{3}\xi\eta + \frac{2\sqrt{3}}{9}\eta^2 \\
&+ \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}\xi\eta^2 + \frac{5}{9}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ \frac{5\sqrt{3}}{12}\xi^3 + \frac{9}{4}\xi^2\eta + \frac{5\sqrt{3}}{12}\xi\eta^2 - \frac{7}{36}\eta^3 & \text{sur } T_2 , \frac{\partial B_{10}}{\partial n_4}(P_4) = 1; \\ \frac{\sqrt{3}}{12}\xi^3 - \frac{3}{4}\xi^2\eta + \frac{5\sqrt{3}}{12}\xi\eta^2 - \frac{7}{36}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases} \\
B_{11}(\xi, \eta) &= -\frac{4\sqrt{3}}{81} + \frac{\sqrt{3}}{9}\xi - \frac{1}{9}\eta + \frac{2}{3}\xi\eta + \frac{2\sqrt{3}}{9}\eta^2 \\
&+ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}\xi\eta^2 + \frac{5}{9}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ -\frac{\sqrt{3}}{12}\xi^3 - \frac{3}{4}\xi^2\eta - \frac{5\sqrt{3}}{12}\xi\eta^2 - \frac{7}{36}\eta^3 & \text{sur } T_2 , \frac{\partial B_{11}}{\partial n_5}(P_5) = 1; \\ -\frac{5\sqrt{3}}{12}\xi^3 + \frac{9}{4}\xi^2\eta - \frac{5\sqrt{3}}{12}\xi\eta^2 - \frac{7}{36}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{12}(\xi, \eta) &= -\frac{4\sqrt{3}}{81} + \frac{2}{9}\eta + \frac{\sqrt{3}}{3}\xi^2 - \frac{\sqrt{3}}{9}\eta^2 \\
 &+ \begin{cases} \xi^2\eta - \frac{13}{9}\eta^3 & \text{sur } T_1 ; \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{18}\eta^3 & \text{sur } T_2 , \quad \frac{\partial B_{12}}{\partial n_6}(P_6) = 1 ; \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{18}\eta^3 & \text{sur } T_3 . \end{cases}
 \end{aligned}$$

### 3. 1. 2. L'interpolant quadratique de Powell - Sabin

L'interpolant de Clough-Tocher décrit dans le paragraphe précédent résout notre problème mais en ajoutant une condition supplémentaire sur la dérivée transversale le long des arêtes. Pour éliminer cette condition, Powell et Sabin (1977) ont proposé de diviser le triangle en six sous-triangles et de construire un polynôme quadratique  $C^1$  par morceaux. Le nombre d'informations coïncide alors avec la dimension de l'espace de ces fonctions,

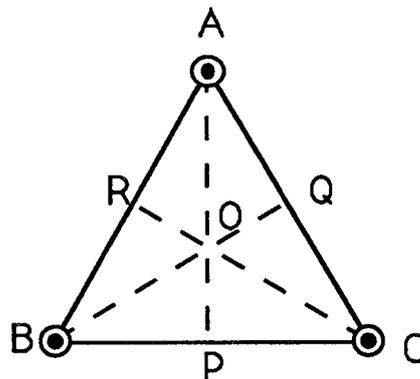


FIGURE.11. Configuration nodale de l'élément P-S.

ce qui correspond à notre problème. Néanmoins, il reste à définir la manière de choisir la subdivision du triangle, i.e., comment choisir la position du point intérieur et des trois points supplémentaires définis sur les arêtes afin d'obtenir une continuité  $C^1$  (on verra que dans certains cas, la dérivée transversale peut être linéaire par morceaux).

Powell et Sabin ont proposé de prendre comme point intérieur le centre du cercle circonscrit au triangle et pour les trois points additionnels  $P, Q, R$ , les milieux des arêtes (voir figure 12). Ceci rend la dérivée transversale le long des arêtes linéaire [13], [48]. En effet, on peut montrer que les valeurs de la fonction et son gradient sur  $BC$  sont définies par les données en  $B$  et  $C$ , la position de  $P$  et la direction de  $PO$ ; par conséquent ils sont indépendants de la position de  $A$  (les preuves se trouvent dans [13], [48]).

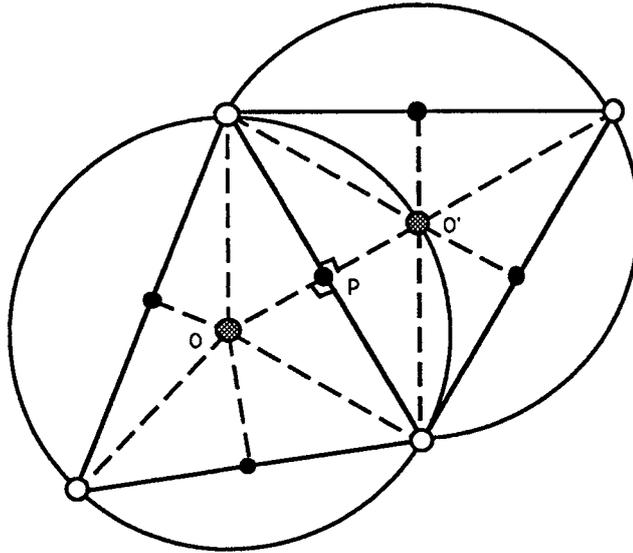


FIGURE.12. Premier choix des points de subdivision.

**Remarque :** Ce résultat n'est vrai que dans le cas d'un triangle acutangle (triangle dont les angles sont inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ ). Cette restriction signifie que des difficultés apparaissent si l'angle est égale à  $\frac{\pi}{2}$  (ou supérieur). Dans le cas limite, où  $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$  et  $P, Q, R, O$  choisi comme précédemment, les points  $O$  et  $P$  vont être confondus.

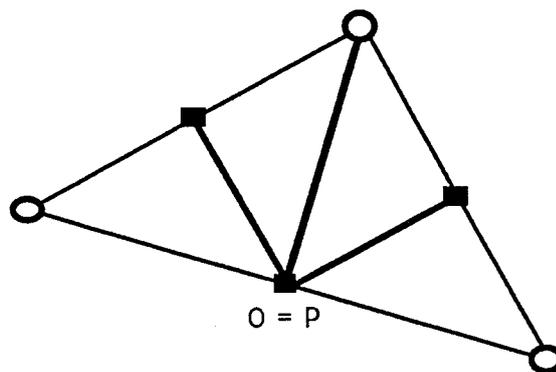


FIGURE.13. Problèmes de subdivision dans certains cas.

La fonction reste continue, mais en général sa dérivée transversale sur  $BC$  est une fonction linéaire par morceaux. Pour remédier à cette restriction sur les triangles, Powell et Sabin proposent la méthode générale suivante :

On choisit pour chaque triangle, le point intérieur  $O$  tel que la ligne  $OO'$  (où  $O'$  est le point intérieur du triangle voisin) coupe l'arête commune en un point situé strictement entre les deux sommets de l'arête. On utilise cette intersection comme point additionnel.

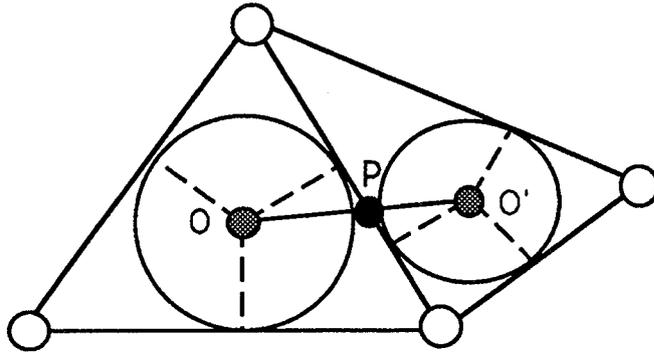


FIGURE.14. *Choix général de subdivision.*

Par exemple, on peut choisir pour  $O$  le centre du cercle inscrit au triangle.

**Résumé :** Soit  $ABC$  un triangle quelconque d'une triangulation et  $O$  un point intérieur. Les points  $P, Q, R$  sont choisis comme les milieux des arêtes si elles appartiennent au périmètre de la triangulation, sinon comme intersection des arêtes avec les droites  $OO'$  (figure 15)

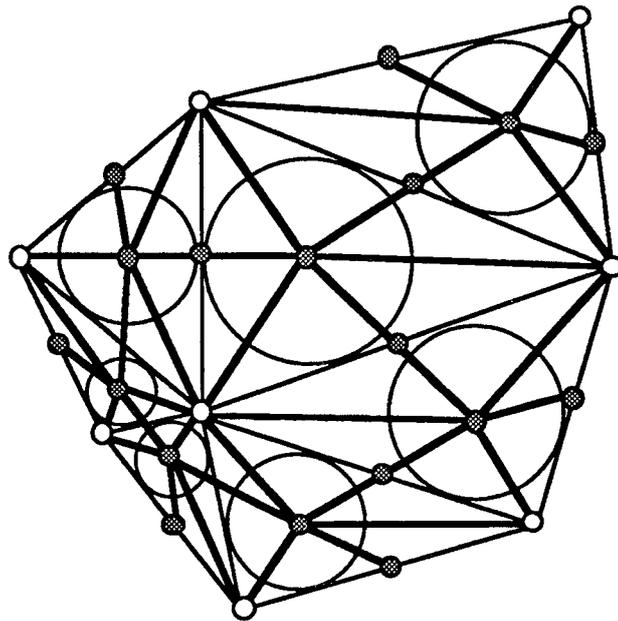


FIGURE.15. *Une région de la triangulation.*

En utilisant les techniques citées ci-dessus, nous pouvons décrire l'élément de Powell -Sabin. Nous utiliserons la représentation par la méthode d'éléments finis

basée sur le triangle standard de la figure 16 (les formules de transformation seront données ultérieurement).

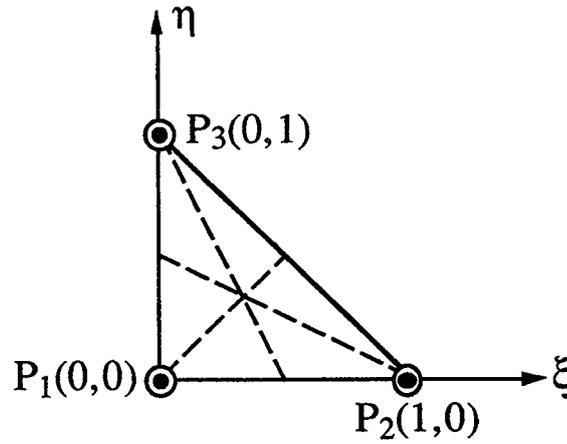


FIGURE.16. Triangle standard  $T_0$ .

Les fonctions cardinales sont données en deux étapes [34]. On définit d'abord les 9 fonctions  $h_1 \cdots h_9$  sur  $T_0$  par

$$\begin{aligned} h_1(\xi, \eta) &= 1, & h_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ h_3(\xi, \eta) &= \eta, & h_4(\xi, \eta) &= (\eta - \xi)_+^2, \\ h_5(\xi, \eta) &= (\xi - \eta)_+^2, & h_6(\xi, \eta) &= (1 - 2\xi - \eta)_+^2, \\ h_7(\xi, \eta) &= (2\xi + \eta - 1)_+^2, & h_8(\xi, \eta) &= (1 - \xi - 2\eta)_+^2, \\ h_9(\xi, \eta) &= (\xi + 2\eta - 1)_+^2. \end{aligned}$$

puis les 9 fonctions cardinales comme suit : (pour chaque fonction, on indique la fonctionnelle qui vaut 1 sur celle-ci, les autres étant égales à zéro)

$$\begin{aligned} B_1(\xi, \eta) &= \frac{5}{3}h_1 - 2h_2 - 2h_3 - \frac{1}{3}h_4 - \frac{1}{3}h_5 - \frac{1}{3}h_6 + \frac{2}{3}h_7 - \frac{1}{3}h_8 + \frac{2}{3}h_9 \\ &\left( B_1(P_1) = 1 \right), \\ B_2(\xi, \eta) &= -\frac{1}{3}h_1 + 2h_2 + \frac{2}{3}h_4 - \frac{1}{3}h_5 + \frac{2}{3}h_6 - \frac{1}{3}h_7 - \frac{1}{3}h_8 - \frac{1}{3}h_9 \\ &\left( B_2(P_2) = 1 \right), \\ B_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{3}h_1 + 2h_3 - \frac{1}{3}h_4 + \frac{2}{3}h_5 - \frac{1}{3}h_6 - \frac{1}{3}h_7 + \frac{2}{3}h_8 - \frac{1}{3}h_9 \\ &\left( B_3(P_3) = 1 \right), \\ B_4(\xi, \eta) &= \frac{5}{18}h_1 - \frac{1}{3}h_2 - \frac{1}{3}h_3 - \frac{1}{18}h_4 - \frac{1}{18}h_5 - \frac{7}{18}h_6 + \frac{1}{9}h_7 + \frac{1}{9}h_8 + \frac{1}{9}h_9 \\ &\left( \frac{\partial B_4}{\partial \xi}(P_1) = 1 \right), \end{aligned}$$

$$B_5(\xi, \eta) = \frac{1}{9}h_1 - \frac{2}{3}h_2 - \frac{2}{9}h_4 + \frac{5}{18}h_5 - \frac{2}{9}h_6 + \frac{5}{18}h_7 + \frac{1}{9}h_8 + \frac{1}{9}h_9$$

$$\left( \frac{\partial B_5}{\partial \xi}(P_2) = 1 \right),$$

$$B_6(\xi, \eta) = -\frac{1}{18}h_1 + \frac{1}{3}h_3 - \frac{7}{18}h_4 + \frac{1}{9}h_5 - \frac{1}{18}h_6 - \frac{1}{18}h_7 + \frac{1}{9}h_8 + \frac{1}{9}h_9$$

$$\left( \frac{\partial B_6}{\partial \xi}(P_3) = 1 \right),$$

$$B_7(\xi, \eta) = \frac{5}{18}h_1 - \frac{1}{3}h_2 - \frac{1}{3}h_3 - \frac{1}{18}h_4 - \frac{1}{18}h_5 + \frac{1}{9}h_6 + \frac{1}{9}h_7 - \frac{7}{18}h_8 + \frac{1}{9}h_9$$

$$\left( \frac{\partial B_7}{\partial \eta}(P_1) = 1 \right),$$

$$B_8(\xi, \eta) = -\frac{1}{18}h_1 + \frac{1}{3}h_2 + \frac{1}{9}h_4 - \frac{7}{18}h_5 + \frac{1}{9}h_6 + \frac{1}{9}h_7 - \frac{1}{18}h_8 - \frac{1}{18}h_9$$

$$\left( \frac{\partial B_8}{\partial \eta}(P_2) = 1 \right),$$

$$B_9(\xi, \eta) = \frac{1}{9}h_1 - \frac{2}{3}h_3 + \frac{5}{18}h_4 - \frac{2}{9}h_5 + \frac{1}{9}h_6 + \frac{1}{9}h_7 - \frac{2}{9}h_8 + \frac{5}{18}h_9$$

$$\left( \frac{\partial B_9}{\partial \eta}(P_3) = 1 \right).$$

où l'on a utilisé la fonction tronquée

$$s_+ = \begin{cases} s & \text{si } s \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On signale aussi que  $\xi_+^2$  veut dire ici  $(\xi_+)^2$ .

L'expression de la fonction sur le triangle est définie par

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 u(P_i) B_i(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi}(P_i) B_{i+3}(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \eta}(P_i) B_{i+6}(\xi, \eta). \quad (5.30)$$

### Formules de transformation :

Considérons un triangle  $(V_i, V_j, V_l)$  quelconque. Pour revenir aux coordonnées  $xOy$  où la triangulation est définie, on utilise les formules de transformation suivantes :

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) = \left[ (y_l - y_i)x + (x_i - x_l)y + y_i x_l - y_l x_i \right] / D, \\ \eta = \eta(x, y) = \left[ (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y + x_i y_j - x_j y_i \right] / D, \\ D = (x_i - x_l)(y_j - y_l) - (x_j - x_l)(y_i - y_l). \end{cases} \quad (5.31)$$

Etant donnée une fonction  $f(x, y)$  définie sur  $(V_i, V_j, V_l)$ , alors

$$f(x, y) = u(\xi, \eta) = u(\xi(x, y), \eta(x, y)).$$

En particulier

$$f(V_i) = u(0,0) \quad , \quad f(V_j) = u(1,0) \quad , \quad f(V_l) = u(0,1).$$

Une simple dérivation donne

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases} \quad (5.32)$$

ce qui permet d'obtenir les valeurs du gradient de  $u$  aux sommets du triangle standard.

### 3. 2. Interpolants triangulaires transfinis de Nielson

#### 3. 2. 1. Méthode “Arête - Sommet”

Considérons un triangle planaire  $[V_1, V_2, V_3]$  et supposons données les valeurs d’une fonction  $F$  et de ses dérivées premières  $F'_x$  et  $F'_y$  sur la frontière du triangle. L’interpolant cubique de Nielson est une combinaison convexe de trois interpolants partiels  $D_1[F], D_2[F], D_3[F]$ , chacun correspondant à une paire de sommet/arête opposée. L’intérieur de chaque interpolant  $D_i[F]$  est défini en construisant des courbes joignant les points le long d’une arête et le sommet  $V_i$  opposé à cette arête, d’où le nom “arête - sommet” [43].

##### a - Description de l’interpolant :

Soit  $M = (x, y) \in [V_1, V_2, V_3]$  et  $(b_1, b_2, b_3)$  ses coordonnées barycentriques. Pour  $(i, j, k) \in I := \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ , on dénote par  $S_i$  le point opposé à  $V_i$ , intersection de l’arête  $[V_j, V_k]$  avec la ligne joignant  $V_i$  et  $M$ .

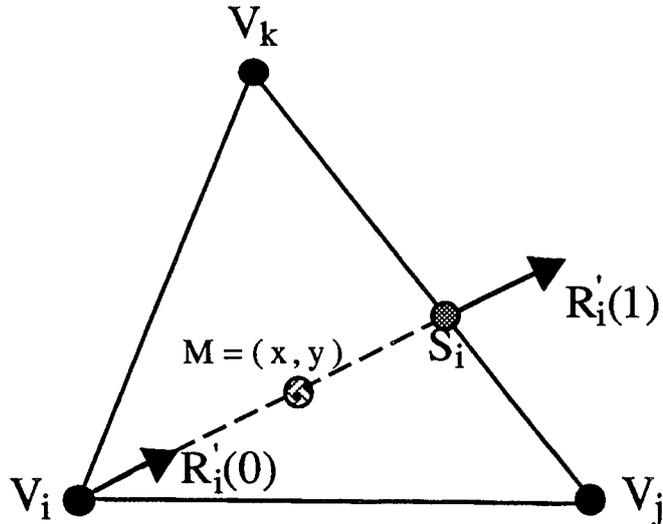


FIGURE.17. Principe de la méthode “ Arête - Sommet ”.

Les coordonnées de  $S_i$  sont données par :

$$S_i = \left( \frac{x - x_i b_i}{1 - b_i}, \frac{y - y_i b_i}{1 - b_i} \right). \tag{5.33}$$

L’opérateur  $D_i[F]$  est défini en un point  $(x, y)$  par :

$$D_i[F](x, y) = F(V_i) H_0(t) + R'_i(0) H_1(t) + R'_i(1) H_2(t) + F(S_i) H_3(t), \tag{5.34}$$

où  $H_i(t)$  sont les polynômes d’Hermite sur  $[0, 1]$ ,  $t = 1 - b_i$  et

$$\begin{cases} R'_i(0) = \frac{(x - x_i) F'_x(V_i) + (y - y_i) F'_y(V_i)}{1 - b_i}, \\ R'_i(1) = \frac{(x - x_i) F'_x(S_i) + (y - y_i) F'_y(S_i)}{1 - b_i}. \end{cases} \tag{5.35}$$

Le long du segment de droite  $[V_i, S_i]$ ,  $D_i[F]$  est un interpolant polynomial cubique défini par la valeur et la dérivée directionnelle de  $F$  aux points  $V_i$  et  $S_i$ . L'interpolant final est défini comme combinaison des interpolants partiels  $D_i[F]$  par :

$$D[F](x, y) = \sum_{i=1}^3 W_i(x, y) D_i[F](x, y), \quad (5.36)$$

où

$$W_i(x, y) = \frac{b_j^2 b_k^2}{b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2} \quad (i, j, k) \in I. \quad (5.37)$$

Si  $F$  est de classe  $C^1$  sur la frontière du triangle et  $C^2$  sur chaque arête, alors  $D[F]$  est une fonction de classe  $C^1$ , qui interpole la valeur et les dérivées premières de  $F$  sur la frontière du triangle.

#### Remarques :

• Si  $F$  est polynomiale de degré 3 sur chaque arête, on peut remplacer dans la relation (5.36), les  $W_i(x, y)$  par des fonctions poids de degré inférieur définies comme suit :

$$W_i(x, y) = \frac{b_j b_k}{b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3} \quad (i, j, k) \in I. \quad (5.38)$$

• D'autres interpolants, eux aussi combinaisons des interpolants  $D_i[F]$ , sont décrits dans [43]. Par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{D}[F](x, y) = \sum_{i=1}^3 \bar{W}_i(x, y) \bar{D}_i[F](x, y), \\ D^*[F](x, y) = \sum_{i=1}^3 b_i (\bar{D}_i \oplus D_i)[F](x, y), \end{array} \right. \quad (5.39)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_i(x, y) = b_i^2 (3 - 2b_i + 6b_j b_k), \\ \bar{D}_k[F] = D_i + D_j - \frac{b_i D_j \circ D_i + b_j D_i \circ D_j}{b_i + b_j}, \\ f \oplus g = f + g - fg. \end{array} \right. \quad (5.40)$$

#### b - Discrétisation de la méthode "arête - sommet" :

Connaissant les gradients aux trois sommets du triangle, on définit sur chaque arête  $[V_j, V_k]$  une fonction polynomiale cubique, notée  $s_{j,k}(u)$ , et donnée dans la base d'Hermite par :

$$s_{j,k}(u) = S(V_j) H_0(u) + S'(V_j; V_j V_k) H_1(u) + S'(V_k; V_j V_k) H_2(u) + S(V_k) H_3(u).$$

La valeur  $F(S_i)$  dans (5.34) peut être calculée par  $s_{j,k} \left( \frac{b_k}{1-b_i} \right)$  car  $S_i$  dans (5.33) peut être aussi écrit sous la forme suivante :

$$S_i = \frac{b_j}{1-b_i} V_j + \frac{b_k}{1-b_i} V_k. \tag{5.41}$$

Pour pouvoir utiliser la méthode “arête - sommet”, et obtenir donc une surface  $C^1$ , nous avons besoin de spécifier la valeur de  $R'_i(1)$ , donc de  $S'_x$  et  $S'_y$  le long des arêtes du triangle. L'approche souvent utilisée est de prendre une dérivée normale (dérivée dans la direction orthogonale) qui varie linéairement le long de l'arête. Si l'on note  $n_{j,k} = (y_k - y_j, x_j - x_k)$  (vecteur normal à  $[V_j V_k]$ ), la dérivée directionnelle  $S'(S_i; n_{j,k})$  sera alors :

$$S'(S_i; n_{j,k}) = \frac{b_j}{1-b_i} S'(V_j; n_{j,k}) + \frac{b_k}{1-b_i} S'(V_k; n_{j,k}). \tag{5.42}$$

Par ailleurs, connaissant la fonction définie sur l'arête  $[V_j, V_k]$ , la dérivée directionnelle  $S'(S_i; V_j V_k)$  au point  $S_i$  est connue, et donnée par :

$$S'(S_i; V_j V_k) = s'_{j,k} \left( \frac{b_k}{1-b_i} \right). \tag{5.43}$$

Par conséquent  $R'_i(1)$  sera complètement déterminé, puisque par la relation (5.35), on a :

$$\begin{cases} R'_i(1) = \frac{\langle p_i, n_{j,k} \rangle}{\|n_{j,k}\|^2} S'(S_i; n_{j,k}) + \frac{\langle p_i, V_j V_k \rangle}{\|V_j V_k\|^2} S'(S_i; V_j V_k), \\ p_i = (x - x_i, y - y_i) / (1 - b_i). \end{cases} \tag{5.44}$$

L'interpolant  $D[F]$  est alors bien défini.

### 3. 2. 2. Méthode de minimisation

Cet interpolant, introduit par Nielson en 1980, est basé sur la même idée développée dans le paragraphe (3.2.1) à l'exception du calcul des interpolants partiels  $D_i[F]$ ; ces derniers sont obtenus en minimisant une pseudo-norme. L'interpolant final obtenu possède la propriété supplémentaire d'invariance affine.

#### a - Description de l'interpolant :

Nous allons donner, comme précédemment, l'existence et la forme de l'interpolant sans aucune démonstration (celle-ci se trouve en détail dans [42]). En gardant les mêmes notations et mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, i.e.  $F \in C^1(T)$  et  $F$  est de classe  $C^2$  sur chaque arête, Nielson a montré que l'interpolant donné par (5.36) et (5.38) est un invariant affine et interpole  $F$  et ses dérivées premières sur la frontière de  $T$ , dans le cas où  $D_i[F]$  est solution du problème de minimisation

$$\iint_T \left[ S''(V; V_i V_k, V_i V_j) \right]^2 dx dy, \tag{5.45}$$

sous la contrainte d'interpolation de  $F$  sur la frontière de  $T$  et de ses dérivées premières sur  $[V_j, V_k]$  (l'arête opposée au sommet  $V_i$ ).

La forme de  $D_i[F]$  est donnée dans [42], sur le triangle standard  $T_s$  de sommets  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$  comme suit :

$$D_i[F](x, y) = G[f_i](b_j, b_k) \quad (i, j, k) \in I,$$

où

$$\begin{aligned} f_i(s, t) &= F(sV_j + tV_k + (1 - s - t)V_i) \quad (s, t) \in T_s, \\ G[f](s, t) &= f(s, 0) + f(0, t) + f(0, 0) + \frac{tg(s)}{2(1 - s)} \\ &\quad + \frac{sg(1 - t)}{2(1 - t)} + \frac{st}{2} \int_s^{1-t} \frac{g(\omega) - \omega(1 - \omega)h(\omega)}{\omega^2(1 - \omega)^2} d\omega, \\ g(\omega) &= f(\omega, 1 - \omega) - f(\omega, 0) - f(0, 1 - \omega) + f(0, 0), \\ h(\omega) &= \frac{\partial f}{\partial s}(\omega, 1 - \omega) + \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, 1 - \omega) - \frac{\partial f}{\partial s}(\omega, 0) - \frac{\partial f}{\partial t}(0, 1 - \omega). \end{aligned}$$

**b - Discrétisation de la méthode :**

L'idée est d'utiliser des polynômes d'Hermite cubiques pour les fonctions frontières et des interpolants linéaires pour les dérivées normales le long de la frontière. On obtient l'élément  $C^1$  dit à 9-paramètres :

$$\begin{aligned} D[S](x, y) &= \sum_{(i,j,k) \in I} \left\{ S(V_i) \left[ b_i^2 (3 - 2b_i) + 6\omega b_i (b_k \alpha_{i,j} + b_j \alpha_{i,k}) \right] \right. \\ &\quad + S'(V_i; V_i V_k) \left[ b_i^2 b_k + \omega b_i (3b_k \alpha_{i,j} + b_j - b_k) \right] \\ &\quad \left. + S'(V_i; V_i V_j) \left[ b_i^2 b_j + \omega b_i (3b_j \alpha_{i,k} + b_k - b_j) \right] \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} \omega = \frac{b_1 b_2 b_3}{b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3}, \\ \alpha_{i,j} = \frac{\|V_j V_k\|^2 + \|V_i V_k\|^2 - \|V_i V_j\|^2}{2 \|V_i V_k\|^2} \quad (i, j, k) \in I. \end{cases} \tag{5.46}$$

#### 4. DEUXIEME ETAPE DE L'ALGORITHME D'INTERPOLATION PROGRESSIVE TRIANGULAIRE

##### 4. 1. Méthode de remplissage

La deuxième étape de l'algorithme consiste à appliquer les méthodes de remplissage décrites dans la section 3 aux résultats obtenus dans la section 1 de ce chapitre. Dans ce paragraphe, nous donnons un exemple de données sur une triangulation régulière (formée de 36 triangles rectangles et où on a supposé un ordre de progression sur les triangles), avec  $k = -\frac{1}{3}$ .

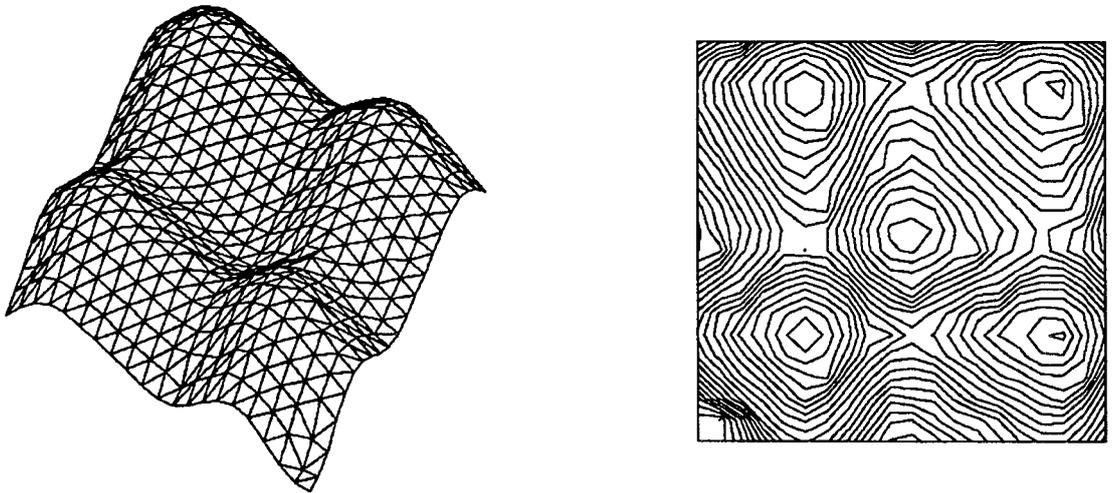


FIGURE.18. Remplissage avec l'élément de Clough et Tocher.

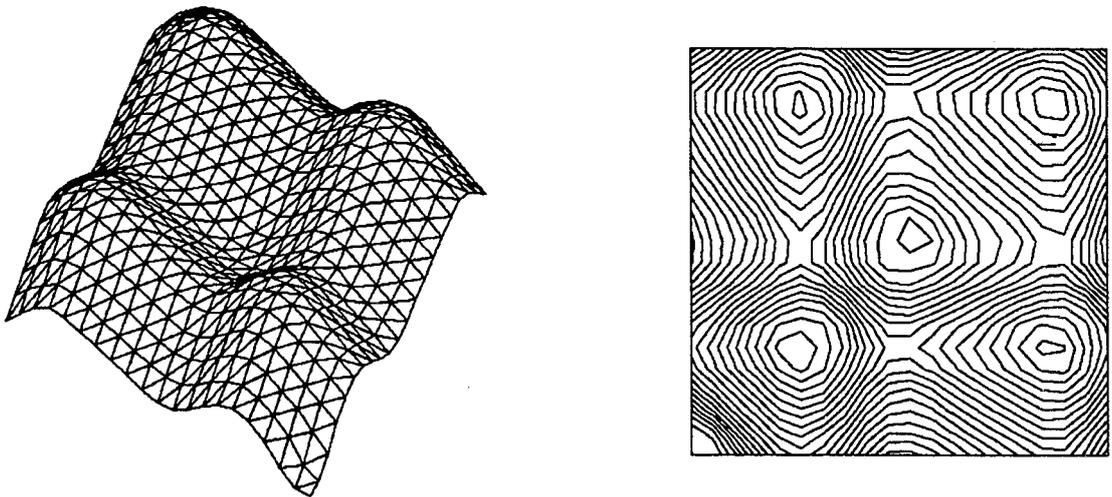


FIGURE.19. Remplissage avec l'élément de Powell et Sabin.

Dans un premier temps, on a calculé les gradients aux sommets de chaque triangle par la relation de récurrence stable (5.11). Ensuite, nous avons représenté successivement les quatre méthodes de remplissage dans les figures (18,...,21).

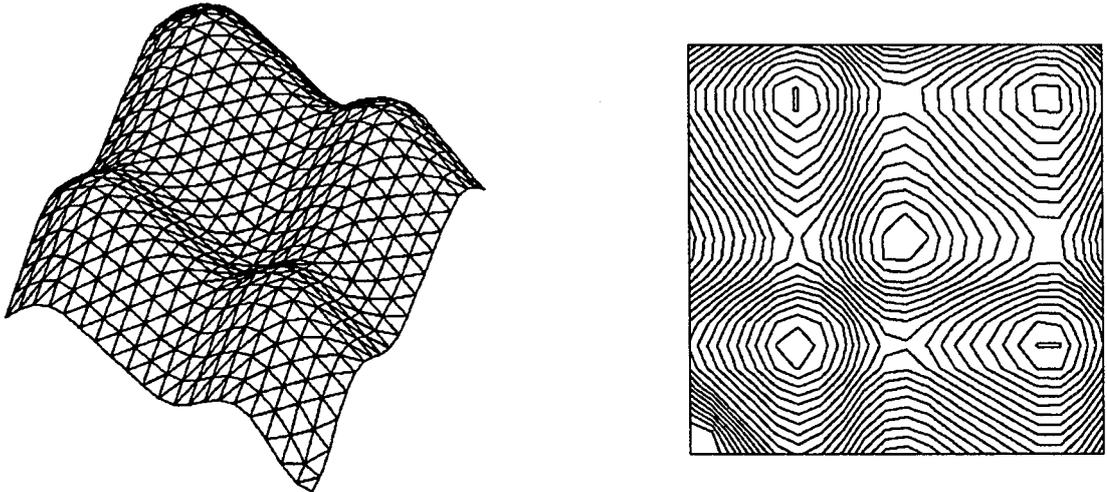


FIGURE.20. Remplissage avec la méthode "Sommet-Arête".

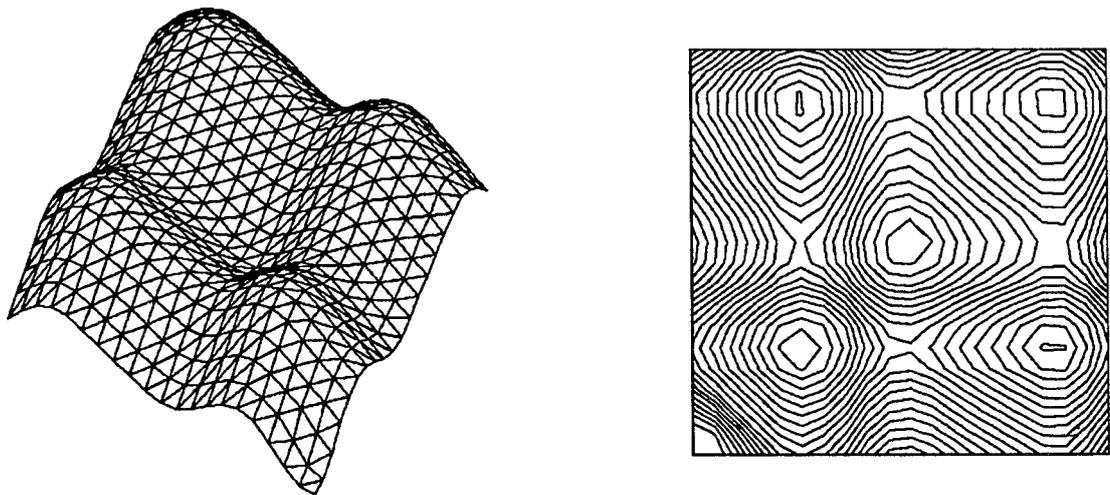


FIGURE.21. Remplissage avec la méthode de minimisation.

On constate alors (visuellement) de très faibles différences entre les méthodes, ce qui donne un choix large dans l'utilisation de ces méthodes. On utilisera dans toute la suite l'élément de Powell-Sabin ou l'interpolant minimisant de Nielson.

#### 4. 2. Triangulation et progression

Pour tester notre algorithme, décrit par les deux étapes dans les sections 2 et 3, nous avons choisi trois types de triangulations très connues :

- triangulation équilatéral, donc formée de triangles équilatéraux et qui est représentée sur un exemple dans la figure 22, en haut, à gauche,

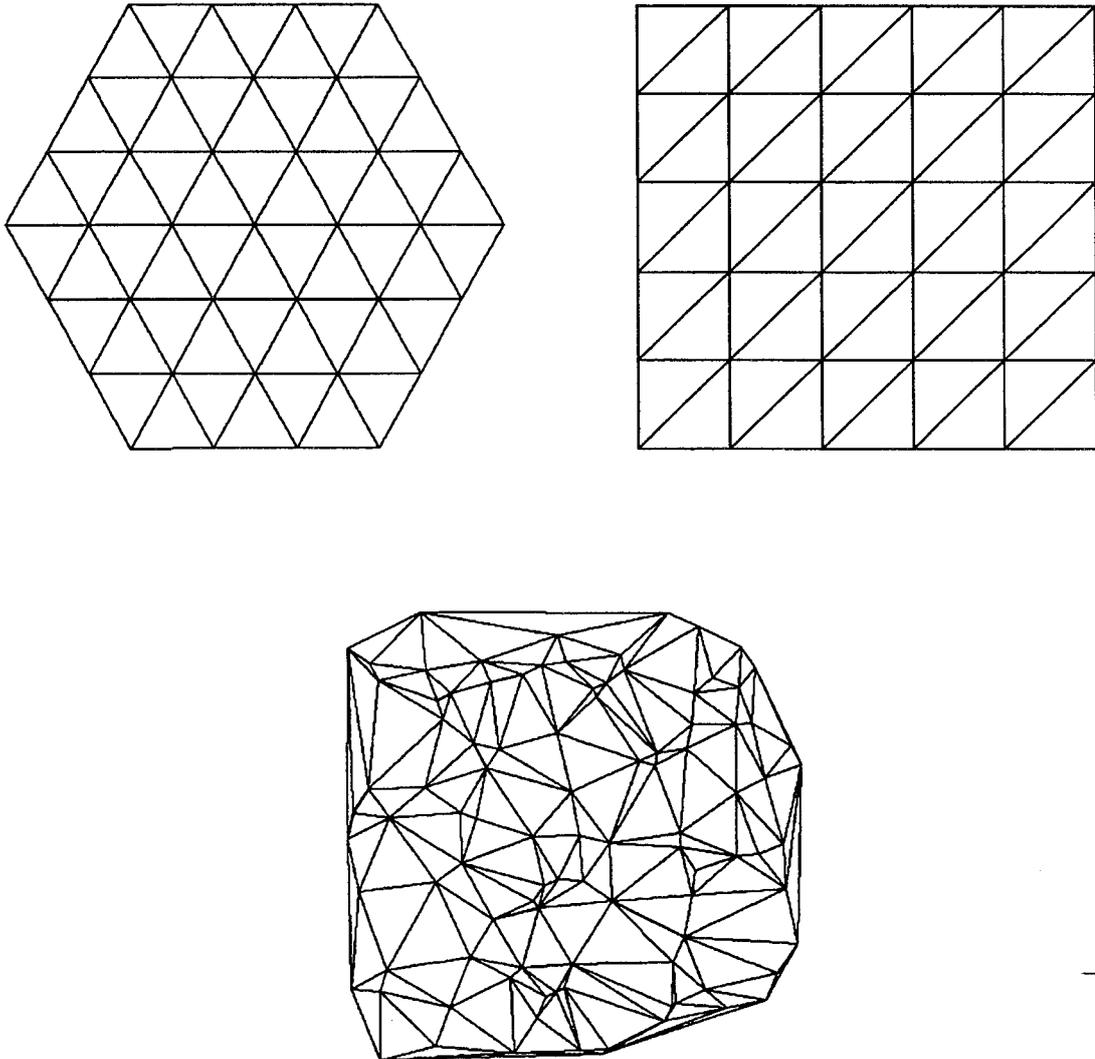


FIGURE.22. *Les trois triangulations tests.*

- triangulation rectangulaire, formée de triangles rectangle-isocèle et qui est représentée sur un exemple dans la figure 22, en haut, à droite,
- enfin, triangulation de Delaunay, représentée dans le figure 22, en bas, au milieu.

Sur chacune des triangulations, on définit un ordre arbitraire pour progresser, et les trois types de progression sont différents. On a fait ce choix seulement pour

fixer les idées et pouvoir faire des tests et donc le problème du parcours dans une triangulation reste ouvert. La figure 23 illustre notre choix de parcours de la triangulation dans le trois cas cités précédemment. Pour montrer la progression, nous avons numéroté les triangles et pour la clarté de l'exposé, nous avons choisi un nombre faible de points.

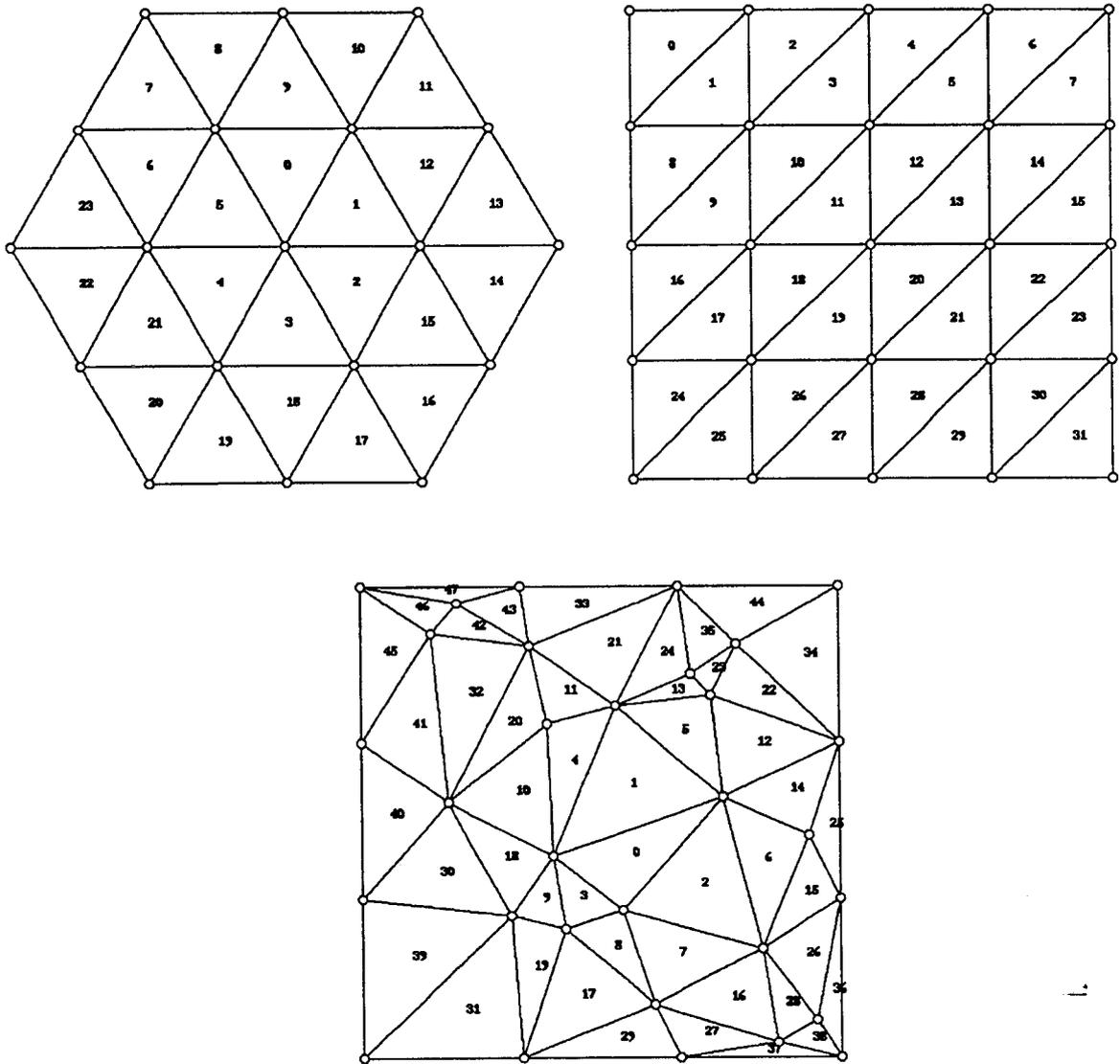


FIGURE.23. *Triangulation et progression.*

#### Appellation :

- Pour la triangulation équilatérale, la progression est dite *en spirale*,
- Pour la triangulation rectangulaire, la progression est dite *par bande horizontale*,
- Pour la triangulation de Delaunay, la progression est dite *en largeur*.

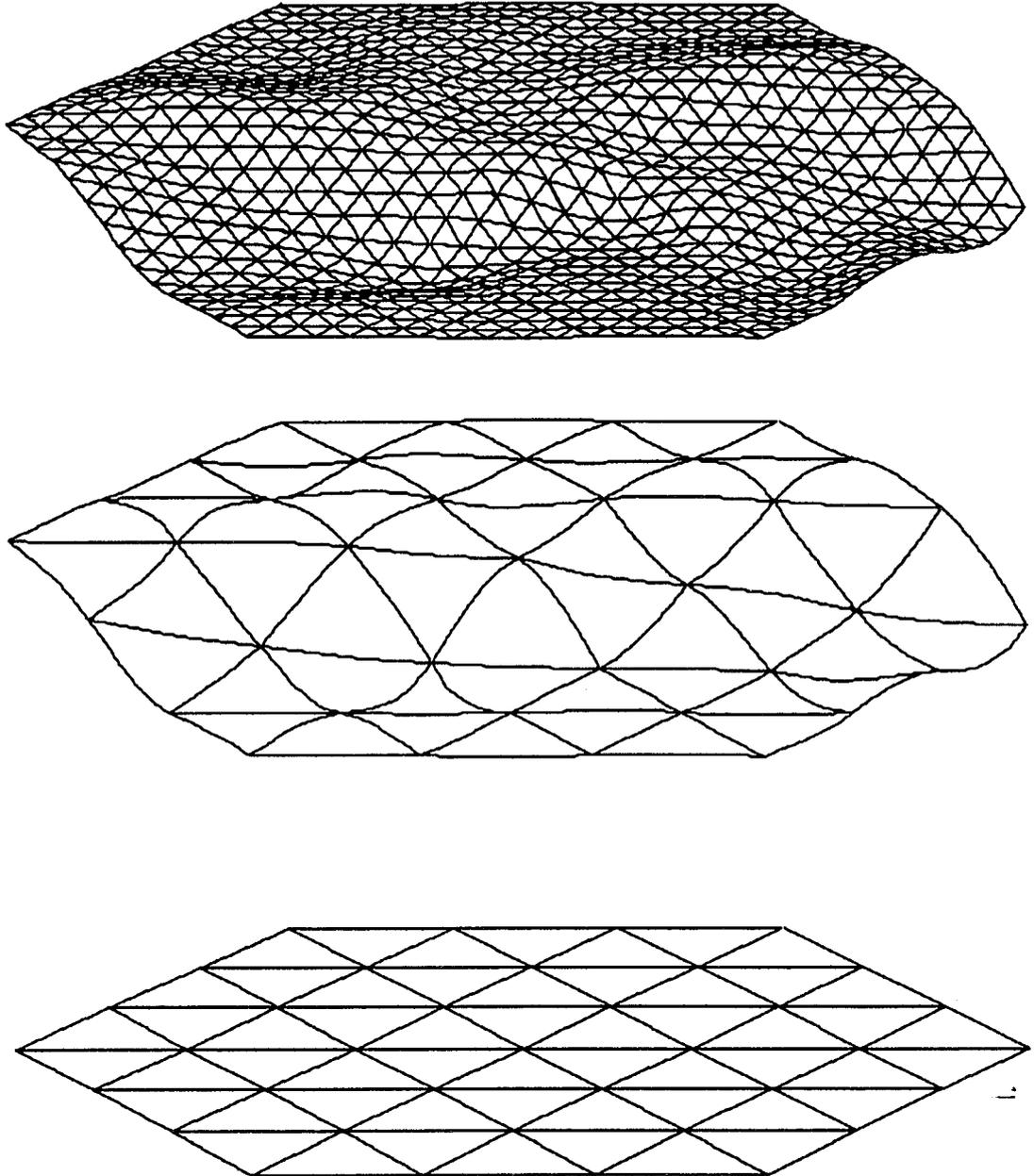


FIGURE.24. Représentation des deux étapes de l'algorithme pour une triangulation équilatéral,  $\{ 54 \text{ points}, k = -\frac{1}{3} \}$ .

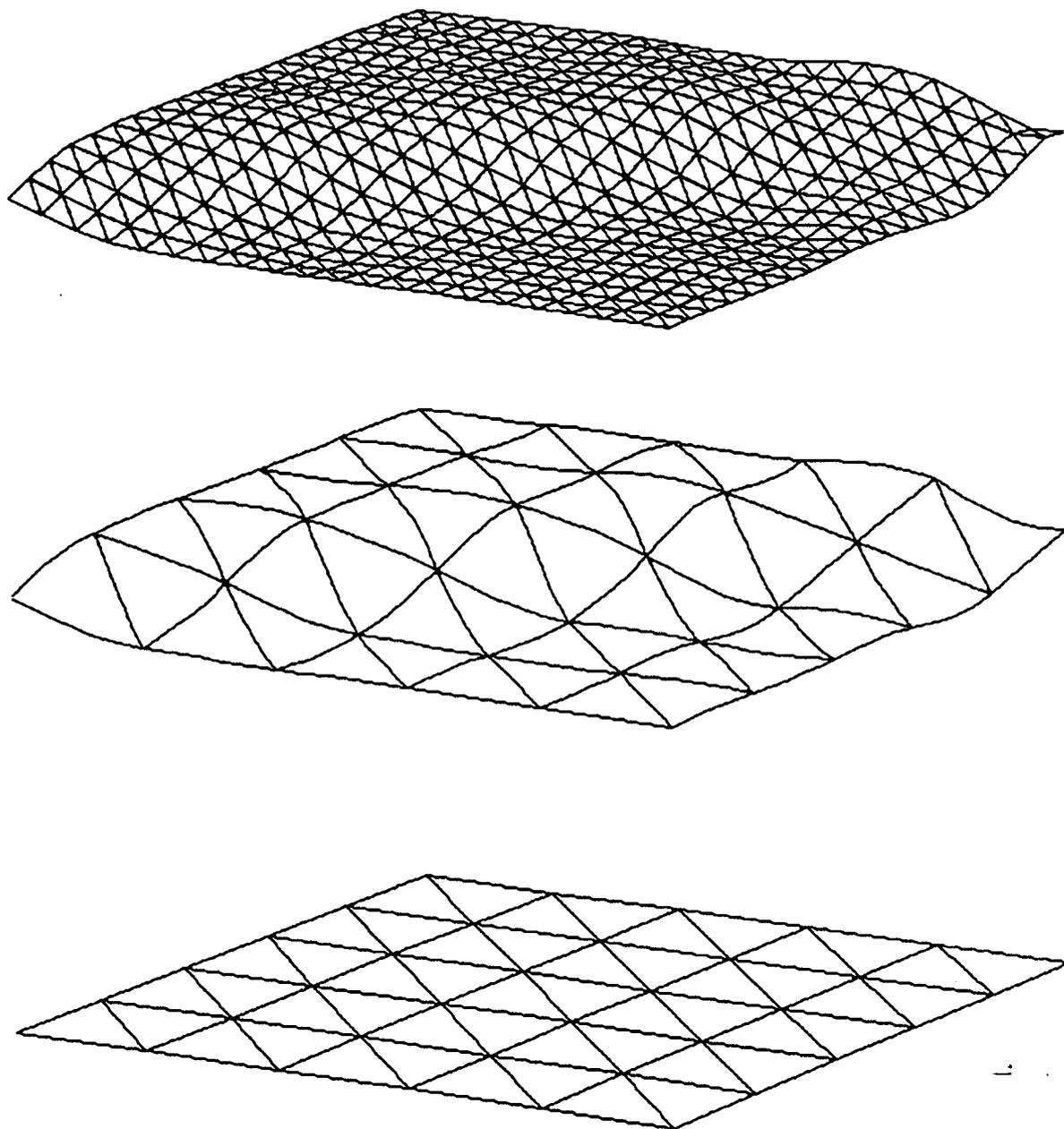


FIGURE.25. Représentation des deux étapes de l'algorithme pour une triangulation rectangulaire, { 36 points,  $k = -\frac{1}{3}$  }.

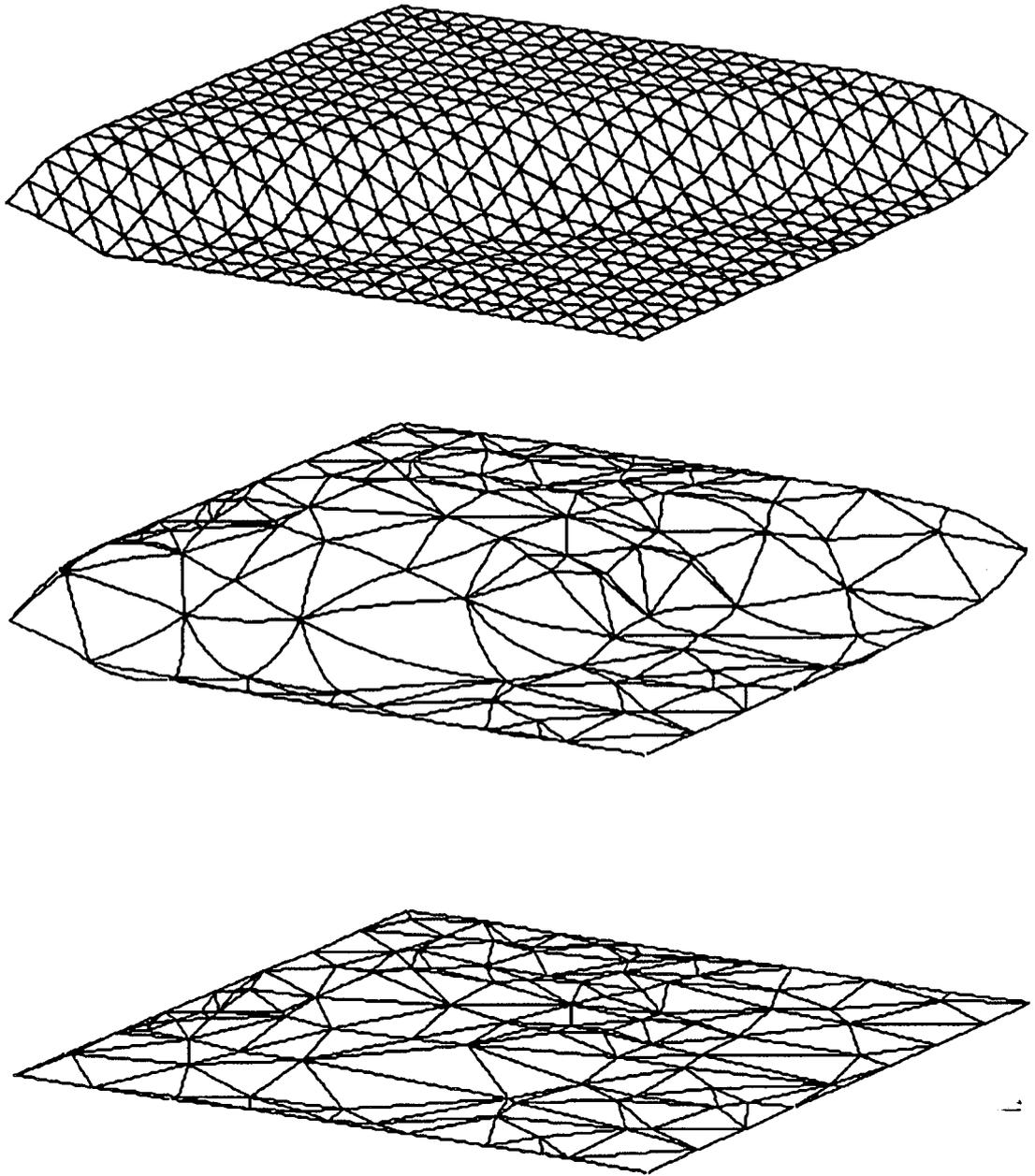


FIGURE.26. Représentation des deux étapes de l'algorithme pour une triangulation de Delaunay, { 123 points,  $k = -\frac{1}{3}$  }.

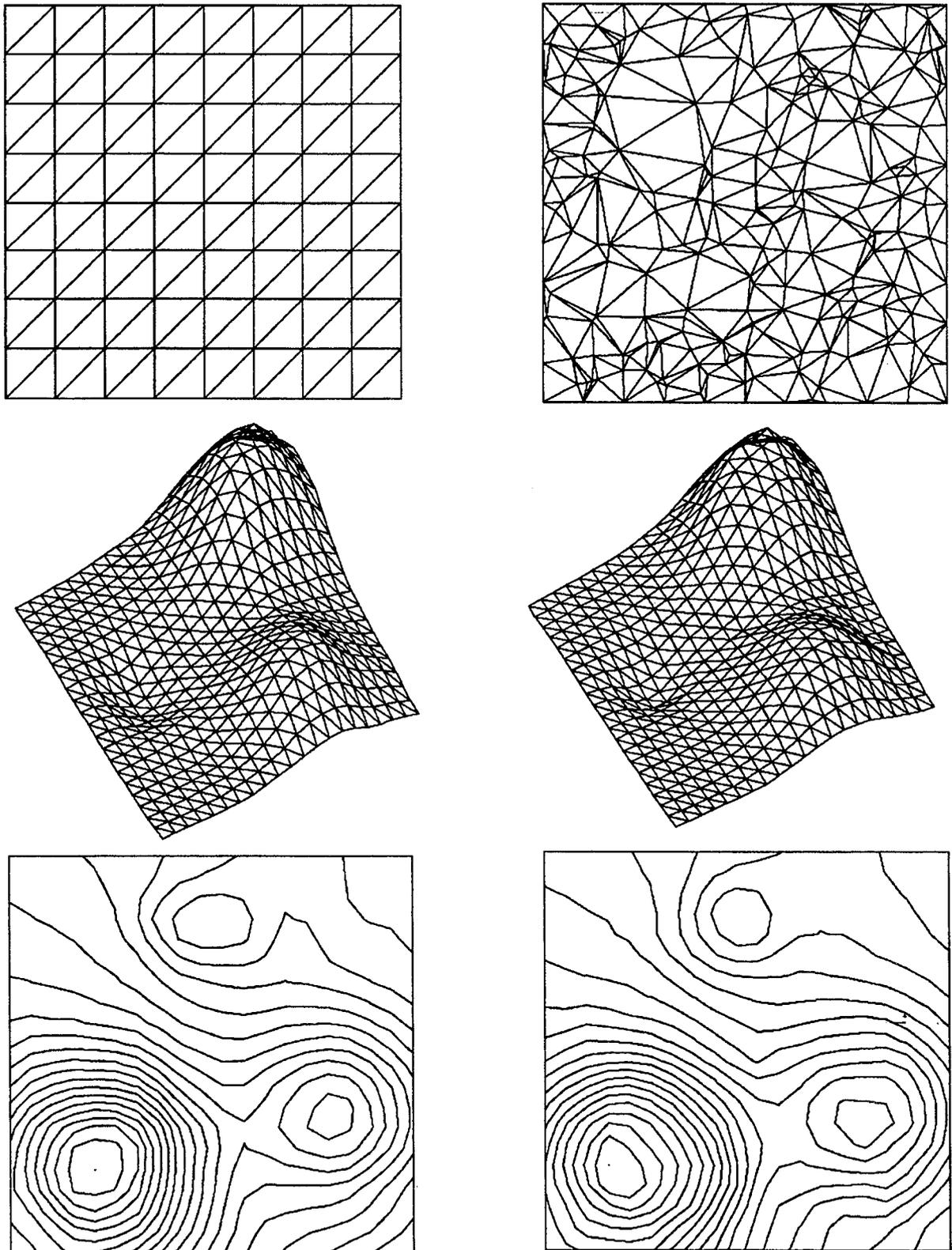


FIGURE.27. Un même exemple avec deux triangulations (et donc deux manières de progression) différentes : à gauche, une triangulation rectangle de 81 points. A droite, une triangulation de Delaunay de 239 points.

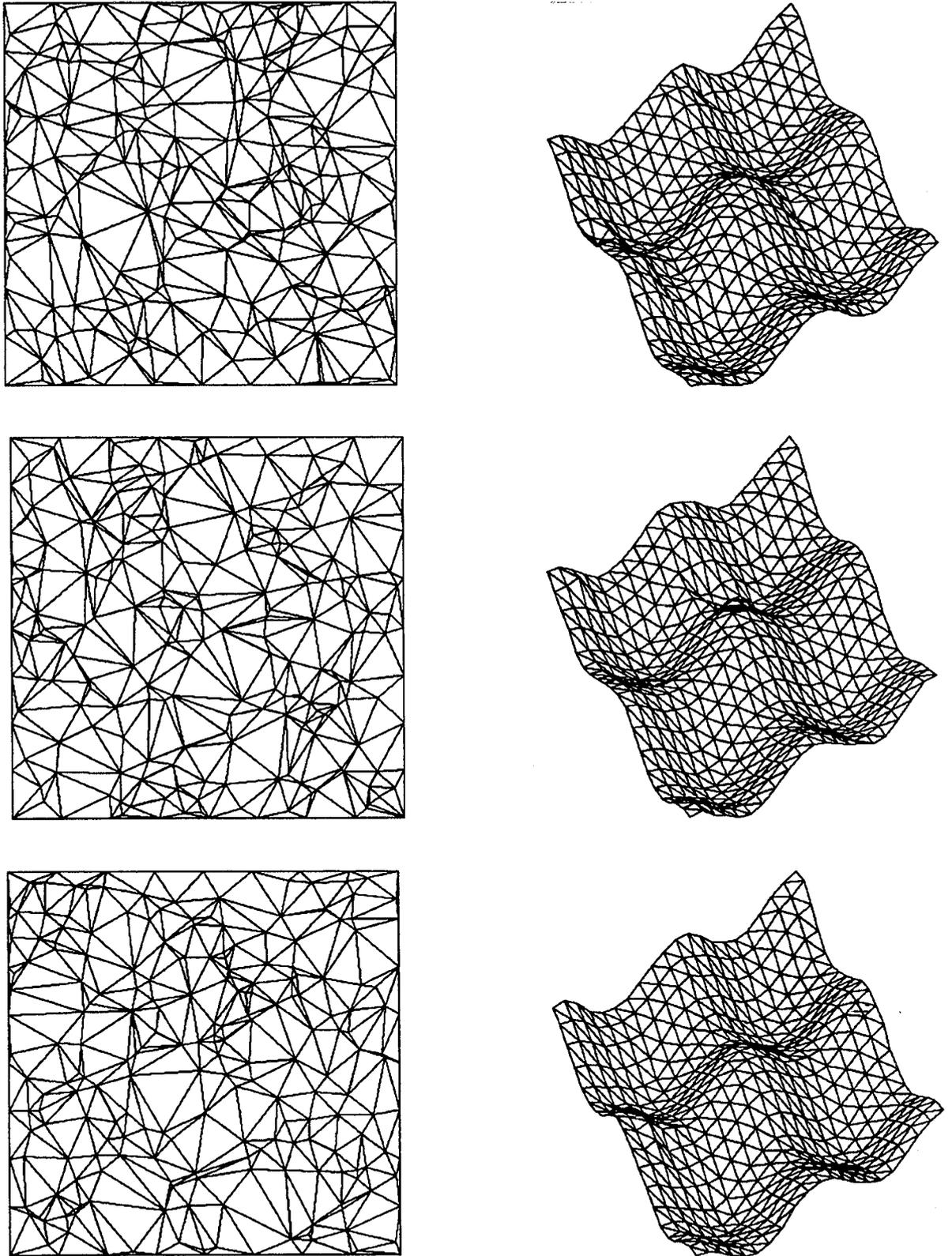


FIGURE.28. Un même exemple sur trois triangulations de Delaunay de 235 points (donc même principe de progression).

## 5. INTERPOLATION PROGRESSIVE TRIANGULAIRE DE CLASSE $G^1$

Dans les sections précédentes, on a décrit un algorithme d'interpolation stable  $C^1$  pour représenter un ensemble de données  $\mathcal{D} = \{Z_i = (x_i, y_i, z_i), i = 0, \dots, n\}$  par le graphe d'une fonction réelle  $S$  de deux variables. Dans cette partie, on va montrer que l'on peut représenter  $\mathcal{D}$  par un schéma paramétrique, différent du précédent, défini par une fonction  $S$  de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T.$$

Les conditions de raccordement  $C^1$  aux sommets des triangles sont remplacées par des conditions  $G^1$  (plan tangent), ce qui fait apparaître des degrés de liberté appelés paramètres de formes. Ces paramètres sont généralement utilisés en CAGD pour modifier la forme des courbes et surfaces obtenues. Dans le problème d'interpolation progressive, on a remarqué que l'on peut se servir de ces paramètres pour assurer la stabilité de ce type d'algorithme.

Nous procéderons en deux étapes :

- Calculer les normales aux sommets par un procédé stable,
- Remplir l'intérieur des triangles au moyen d'interpolants discrets  $G^1$ .

### 5. 1. Calcul progressif du plan tangent

Considérons deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  d'arête commune  $[V_i, V_j]$  dans le plan  $(uOv)$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux patches triangulaires, restrictions de  $S$  sur  $T_1$  et  $T_2$  respectivement. On dénote par  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) le vecteur unité associé à  $V_iV_l$  (resp.  $V_jV_l$ ) et

$$\alpha = (Ou, u_1) \quad , \quad \beta = (Ou, u_2).$$

On suppose que les dérivées partielles premières aux sommets  $V_i$  et  $V_j$  sont connues et on veut déterminer celles au sommet  $V_l$ . La démarche du calcul est la même que celle de la section 2, à l'exception du raccordement utilisé aux extrémités de l'arête commune qui est remplacé par un raccordement  $G^1$ . Nous résumons les différentes étapes du calcul comme suit :

- Raccordement géométrique d'ordre 1 en  $V_i, V_j$  :

$$\begin{cases} Q'_u(V) = aP'_u(V) + bP'_v(V), \\ Q'_v(V) = cP'_u(V) + dP'_v(V), \end{cases} \quad (5.47)$$

où  $V$  prend les valeurs de  $V_i, V_j$  et  $a, b, c, d$  des réels arbitraires.

- Dérivées directionnelles de  $Q$  en  $V_i, V_j$  :

$$\begin{cases} Q'(V_i; u_1) = \cos \alpha Q'_u(V_i) + \sin \alpha Q'_v(V_i), \\ Q'(V_j; u_2) = \cos \beta Q'_u(V_j) + \sin \beta Q'_v(V_j). \end{cases} \quad (5.48)$$

- Choix des courbes paramétriques frontières sur l'arête  $[V_m, V_n]$  :

$$\begin{aligned} q_{m,n}(t) &= Q((1-t)V_m + tV_n) \\ &= (1-t^2)Z_m + t(1-t)Q'(V_m; V_mV_n) + t^2Z_n. \end{aligned} \tag{5.49}$$

- Dérivées directionnelles de  $Q$  en  $V_l$  :

$$\begin{cases} Q'(V_l; u_1) = \frac{q'_{i,l}(1)}{\|V_iV_l\|} = -Q'(V_i; u_1) + \frac{2(Z_l - Z_i)}{\|V_iV_l\|}, \\ Q'(V_l; u_2) = \frac{q'_{j,l}(1)}{\|V_jV_l\|} = -Q'(V_j; u_2) + \frac{2(Z_l - Z_j)}{\|V_jV_l\|}. \end{cases} \tag{5.50}$$

- Dérivées partielles premières de  $Q$  en  $V_l$  :

$$\begin{cases} Q'_u(V_l) = \frac{\sin \beta Q'(V_i; u_1) - \sin \alpha Q'(V_i; u_2)}{\sin(\beta - \alpha)}, \\ Q'_v(V_l) = \frac{-\cos \beta Q'(V_i; u_1) + \cos \alpha Q'(V_i; u_2)}{\sin(\beta - \alpha)}. \end{cases} \tag{5.51}$$

### 5. 2. Stabilité de l'algorithme

On peut représenter, composante par composante, ces derniers résultats sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} Q'_u(V_l) \\ Q'_v(V_l) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} P'_u(V_i) \\ P'_v(V_i) \\ P'_u(V_j) \\ P'_v(V_j) \end{pmatrix} + B, \tag{5.52}$$

où  $M$  est la matrice  $(2, 4)$  définie par :

$$M = (M_1 \quad M_2).$$

$$M_1 = \frac{1}{y_0 - x_0} \begin{pmatrix} -ay_0 - cx_0y_0 & -by_0 - dx_0y_0 \\ a + cx_0 & b + dx_0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \frac{1}{y_0 - x_0} \begin{pmatrix} ax_0 + cx_0y_0 & bx_0 + dx_0y_0 \\ -a - cy_0 & -b - dy_0 \end{pmatrix},$$

$$x_0 = \tan \alpha \quad , \quad y_0 = \tan \beta,$$

$$B = \frac{2}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Z_l - Z_i}{\|V_i V_l\|} \\ \frac{Z_l - Z_j}{\|V_j V_l\|} \end{pmatrix}.$$

L'étude de la stabilité au sens de  $\|M\|_2 < 1$  nous ramène à la résolution d'une équation algébrique d'ordre 4 dont les racines doivent être dans le cercle unité. On montre que cette équation est

$$\lambda^2 (\lambda^2 + A\lambda + B) = 0, \quad (5.53)$$

où

$$A = \frac{-1}{(y_0 - x_0)^2} \left[ 2q + 2s(x_0 + y_0)(1 + x_0y_0) + (q + r)(x_0^2 + y_0^2) + 2rx_0^2y_0^2 \right],$$

$$B = \frac{1}{(y_0 - x_0)^4} \left[ q^2(x_0 - y_0)^2 + r^2x_0^2y_0^2(x_0 - y_0)^2 + 2qs(x_0 + y_0)(y_0 - x_0)^2 \right. \\ \left. + qr(x_0^4 + y_0^4) + 2rsx_0y_0(x_0 - y_0)^2(x_0 + y_0) + 2(t^2 - 3s^2)x_0^2y_0^2 \right. \\ \left. + 2(s^2 - t^2)x_0y_0(x_0^2 + y_0^2) \right],$$

avec

$$q = a^2 + b^2 \quad , \quad r = c^2 + d^2 \quad , \quad s = ac + bd \quad , \quad t = bc - ad. \quad (5.54)$$

Les coefficients de l'équation dépendent de la matrice de connexion et des angles  $\alpha, \beta$  par rapport au système d'axes utilisé. C'est cette dernière dépendance qui nous gêne, et on souhaite remédier à cet inconvénient. L'idée est de choisir des matrices de connexion très spéciales, ce qui nous permettra d'exprimer la stabilité en fonction des éléments de la matrice et de l'angle  $\gamma = \beta - \alpha$  seulement. ( $\gamma$  est l'angle opposé à l'arête commune des deux triangles courants). En effet, il suffit de faire apparaître le terme

$$\frac{(1 + x_0^2)(1 + y_0^2)}{(x_0 - y_0)^2} = \frac{1}{\sin^2 \gamma},$$

dans les formules de  $A$  et  $B$ . Par simple division, on montre que

$$2q + 2s(x_0 + y_0)(1 + x_0y_0) + (q + r)(x_0^2 + y_0^2) + 2rx_0^2y_0^2,$$

est divisible par  $(1 + x_0^2)(1 + y_0^2)$  si et seulement si

$$s = 0 \quad , \quad q = r.$$

L'équation de stabilité devient

$$\lambda^2 \left( \lambda^2 - \frac{2q}{\sin^2 \gamma} \lambda + \frac{q^2}{\sin^2 \gamma} \right) = 0. \tag{5.55}$$

L'algorithme est stable si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{2q}{\sin^2 \gamma} + \sqrt{\Delta} \right) < 1 &\iff \sqrt{\Delta} < 2 - \frac{2q}{\sin^2 \gamma} \\ &\iff \Delta < 4 \left( 1 - \frac{q}{\sin^2 \gamma} \right)^2 \\ &\iff q^2 - 2q + \sin^2 \gamma > 0. \end{aligned}$$

**Théorème 5.3** *L'algorithme d'interpolation progressif  $G^1$  est stable  $\forall \alpha, \beta$  si et seulement si la matrice de connexion  $G^1$  est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \tag{5.56}$$

et

$$0 < q < 1 - |\cos \gamma| \quad \text{avec} \quad q = a^2 + b^2. \tag{5.57}$$

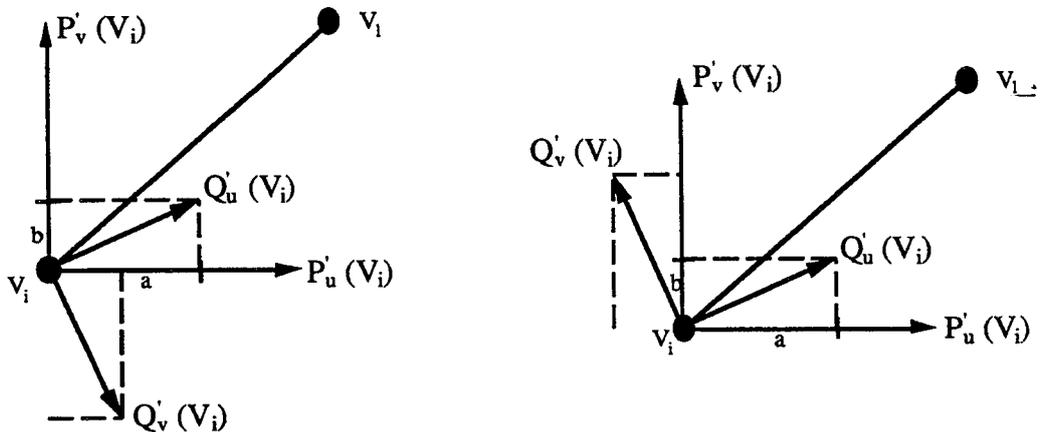


FIGURE.29. Raccordement géométrique au sommet  $V_i$  pour  $a, b > 0$ .

### 5. 3. Interpolant discret de classe $G^1$

Dans cette partie, on décrit un interpolant d'une surface paramétrique  $F$  dont on connaît les valeurs et les normales le long des trois arêtes du triangle.

#### 5. 3. 1. Interpolant triangulaire transfini de classe $G^1$

L'ensemble des interpolants triangulaires  $C^1$  pour les fonctions est constitué par des combinaisons d'opérateurs qui sont essentiellement des opérateurs d'interpolation à une variable. Par exemple, l'interpolant BBG, présenté par Barnhill, Birkhoff et Gordan [2], est basé sur des opérateurs d'Hermite univarié appliqués le long des lignes parallèles aux arêtes du triangle. La méthode arête-sommet donnée par G.M.Nielson [43] est basée sur des projecteurs radiaux qui sont des opérateurs similaires appliqués aux lignes joignant un sommet à un point de son arête opposée. Nous allons utiliser cette dernière méthode pour le développement d'une surface  $G^1$ . Nous donnerons ici que le résultat, les démonstrations se trouvant dans [44].

**Notations :** Considérons un triangle  $T = [V_1, V_2, V_3]$  dans le plan  $(uOv)$ . On dénote par :

- $(b_1, b_2, b_3)$  les coordonnées barycentriques d'un point  $(u, v)$  de  $T$ ,
- $N(V)$  une normale à la surface au point  $V$ ,
- $I = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ .

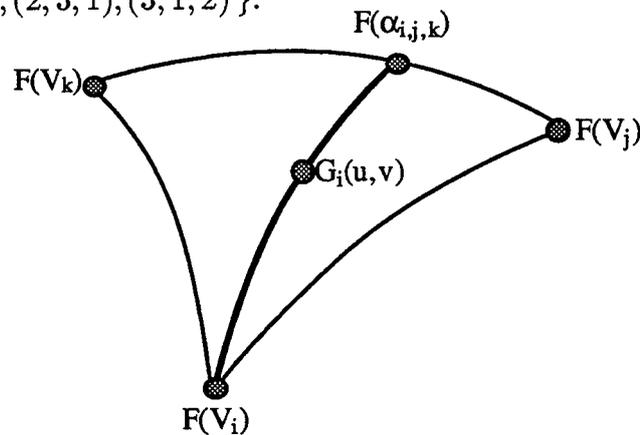


FIGURE.30. Interpolant discret  $G^1$ .

Nielson a montré que l'interpolant  $D[F]$  défini par :

$$D[F](u, v) = \sum_{i=1}^3 W_i(u, v) G_i(u, v), \quad (5.58)$$

avec

$$\begin{cases} W_i(u, v) = \frac{b_j^2 b_k^2}{b_1^2 b_2^2 + b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_3^2}, & (i, j, k) \in I, \\ G_i(u, v) = g[F(V_i), F(\alpha_{i,j,k}), N_i, N(\alpha_{i,j,k})](1 - b_i), \\ \alpha_{i,j,k} = \frac{b_j}{1 - b_i} V_j + \frac{b_k}{1 - b_i} V_k, & (i, j, k) \in I, \end{cases} \quad (5.59)$$

interpole  $F$  et le plan tangent à  $F$  le long de la frontière. Dans le résultat, nous avons introduit l'opérateur  $g$ , qui est défini à l'aide de l'opérateur d'Hermite  $H$  par :

$$g[S_0, S_1, R_0, R_1](t) = H[S_0, S_1, T_0, T_1](t), \quad (5.60)$$

où

$$\begin{cases} T_0 = \varepsilon_1 R_0 \wedge (S_1 - S_0) \wedge R_0, \\ T_1 = \eta_1 R_1 \wedge (S_1 - S_0) \wedge R_1. \end{cases} \quad (5.61)$$

$\varepsilon_1$  et  $\eta_1$  sont considérés comme des paramètres de tension et affectent la forme de la surface. Les relations (5.61) des tangentes signifient qu'on a choisi  $g'(0)$  (resp.  $g'(1)$ ) dans le plan contenant  $R_0$  et  $S_1 - S_0$  (resp.  $R_1$  et  $S_1 - S_0$ ).

### 5. 3. 2. Interpolant $G^1$ à 6 paramètres : discrétisation

Dans cette partie, on décrit un interpolant  $G^1$  qui est obtenu par discrétisation de l'interpolant transfini de la section précédente. Ce type d'interpolant dépend seulement des trois vecteurs position et des trois normales aux sommets du triangle. On note ces 6 valeurs comme suit :

$$\begin{aligned} F_1 &= F(V_1), & N_1 &= N(V_1), \\ F_2 &= F(V_2), & N_2 &= N(V_2), \\ F_3 &= F(V_3), & N_3 &= N(V_3). \end{aligned} \quad (5.62)$$

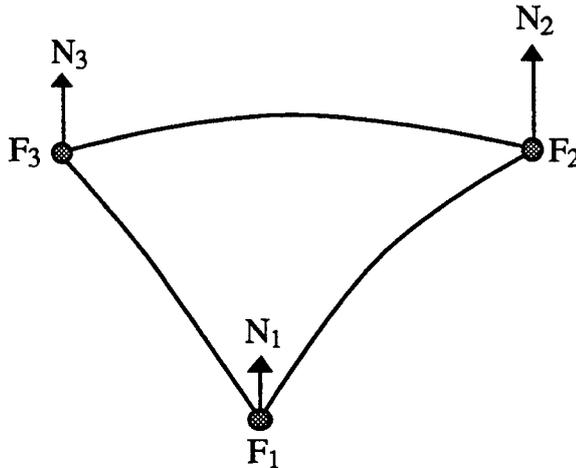


FIGURE.31. Interpolant discret à 6 paramètres.

En utilisant l'opérateur  $g$  donné par (5.60), les trois courbes frontières sont définies comme suit :

$$F(\alpha_{i,j,k}) = g[F_j, F_k, N_j, N_k](1 - b_i) \quad (i, j, k) \in I, \quad (5.63)$$

et comme discrétisation de la normale le long de la frontière, Nielson [44] prend :

$$N_i(\alpha_{i,j,k}) = \frac{F'(\alpha_{i,j,k}; V_j V_k) \wedge \mathcal{N}_{j,k}(\frac{b_k}{1 - b_i})}{\|F'(\alpha_{i,j,k}; V_j V_k) \wedge \mathcal{N}_{j,k}(\frac{b_k}{1 - b_i})\|}, \quad (5.64)$$

où

$$\mathcal{N}_{j,k}(t) = (1-t)N_j \wedge F'(V_j; V_j V_k) + tN_k \wedge F'(V_k; V_j V_k), \quad (5.65)$$

et  $F'(P; D)$  désigne la dérivée directionnelle de  $F$  en un point  $P \in \mathbb{R}^3$ , dans la direction  $D = (D_1, D_2)$ . Si on note  $\partial_1 F^i$  (resp.  $\partial_2 F^i$ ),  $i = 1, 2, 3$ , les composantes de  $\partial_1 F \in \mathbb{R}^3$  (resp.  $\partial_2 F \in \mathbb{R}^3$ ), alors

$$F'(P; D) = (D_1 \partial_1 F^i + D_2 \partial_2 F^i)_{i=1,2,3}.$$

Avec les choix ci-dessus, les trois interpolants partiels sont définis par :

$$G_i(u, v) = g \left[ F_i, g[F_j, F_k, N_j, N_k] \left( \frac{b_k}{1-b_i} \right), N_i, N_i(\alpha_{i,j,k}) \right] (1-b_i). \quad (5.66)$$

On note que  $G_i$  interpole les vecteurs position frontières sur les trois arêtes et les normales à la surface sur l'arête opposée au sommet  $V_i$ . L'interpolant discret final est défini par la relation (5.58) avec

$$W_i(u, v) = \frac{b_j b_k}{b_2 b_3 + b_1 b_3 + b_1 b_2}, \quad (i, j, k) \in I. \quad (5.67)$$

### Résultats numériques :

Les figures (32) à (35) représentent un test du théorème (5.3) avec les 8 cas possibles de matrices de connexion (donc vérifiant l'inégalité (5.57)). Dans les exemples, nous avons pris 9 points définis sur une triangulation rectangulaire et on a fixé  $\varepsilon_1 = \eta_1 = 1.0$ .

La figure (36) donne un exemple où l'on est à la limite du domaine de stabilité. Cet exemple montre que l'étude faite dans les paragraphes (5.1) et (5.2) est obligatoire. En effet, à l'inverse de l'algorithme d'interpolation  $C^1$  où il y a une "cohérence" entre les deux étapes de l'algorithme (calcul progressif stable puis remplissage), nous avons dans l'algorithme d'interpolation  $G^1$  remplacé le calcul du gradient par les normales en chaque sommet. Or ces normales sont de norme 1, et donc on peut croire qu'on perd la notion de stabilité. L'exemple donné dans la figure 36 montre le contraire.

Dans la figure (37), on donne un exemple montrant l'influence des paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\eta_1$  introduit par Nielson [44].

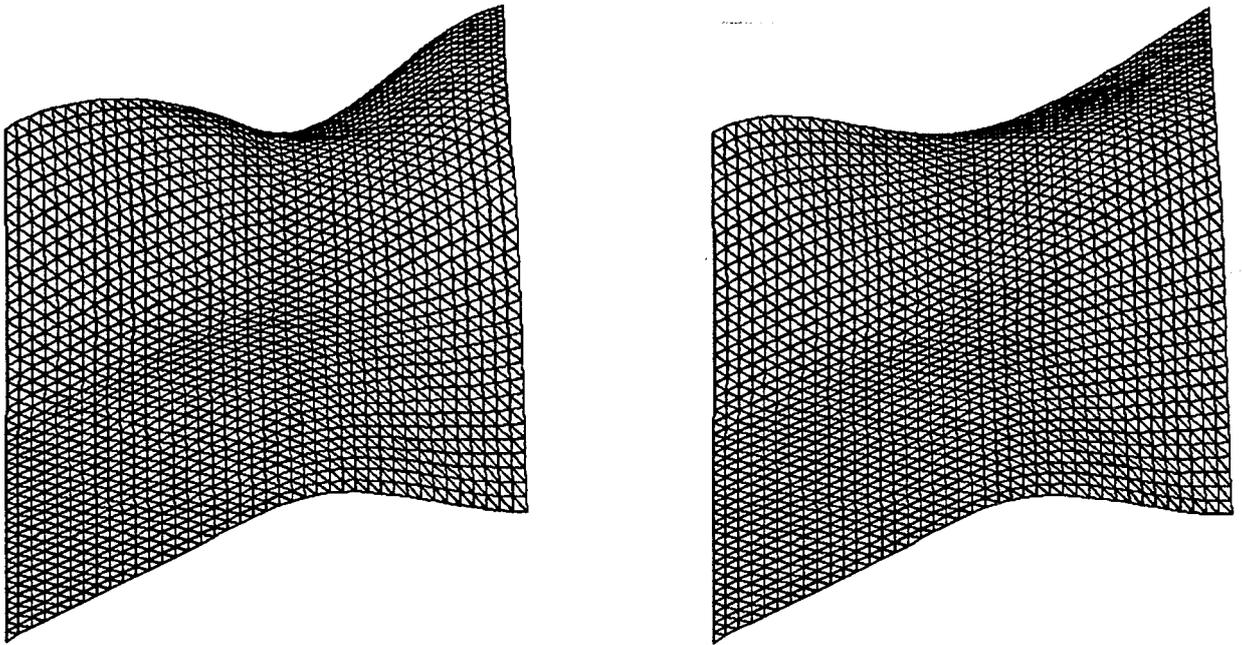


FIGURE.32. A gauche : matrice  $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix}$ . A droite :  $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ -0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$ .

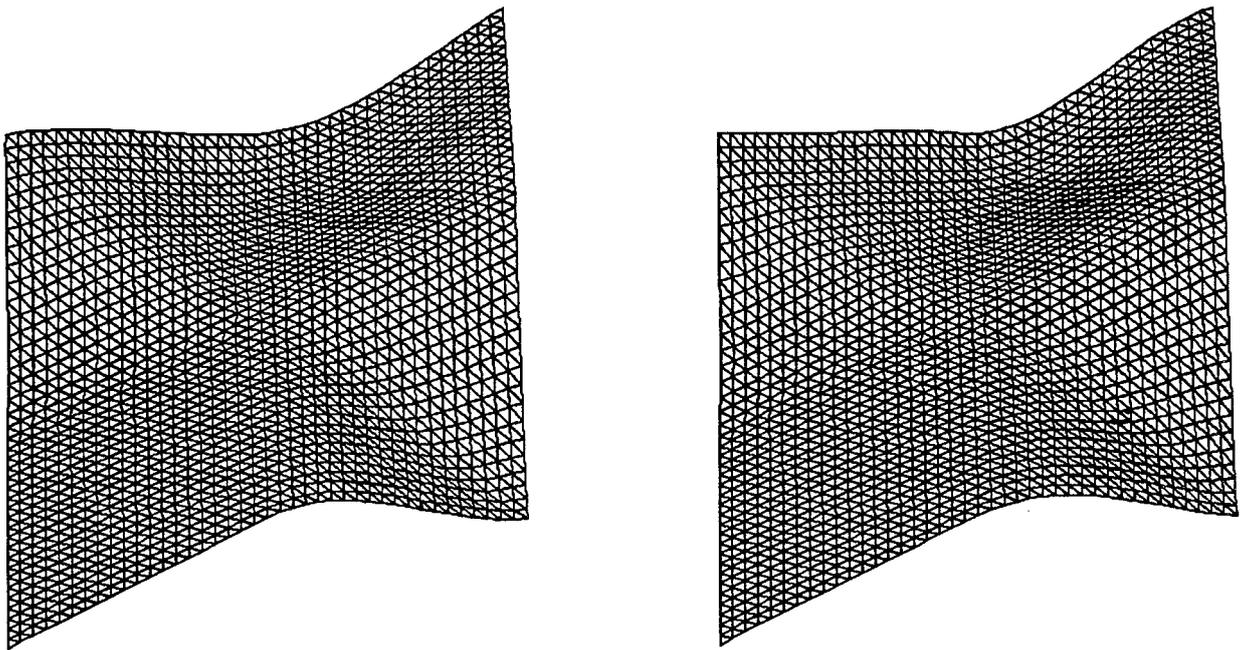


FIGURE.33. A gauche : matrice  $\begin{pmatrix} -0.3 & -0.3 \\ -0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$ . A droite :  $\begin{pmatrix} -0.3 & -0.3 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix}$ .

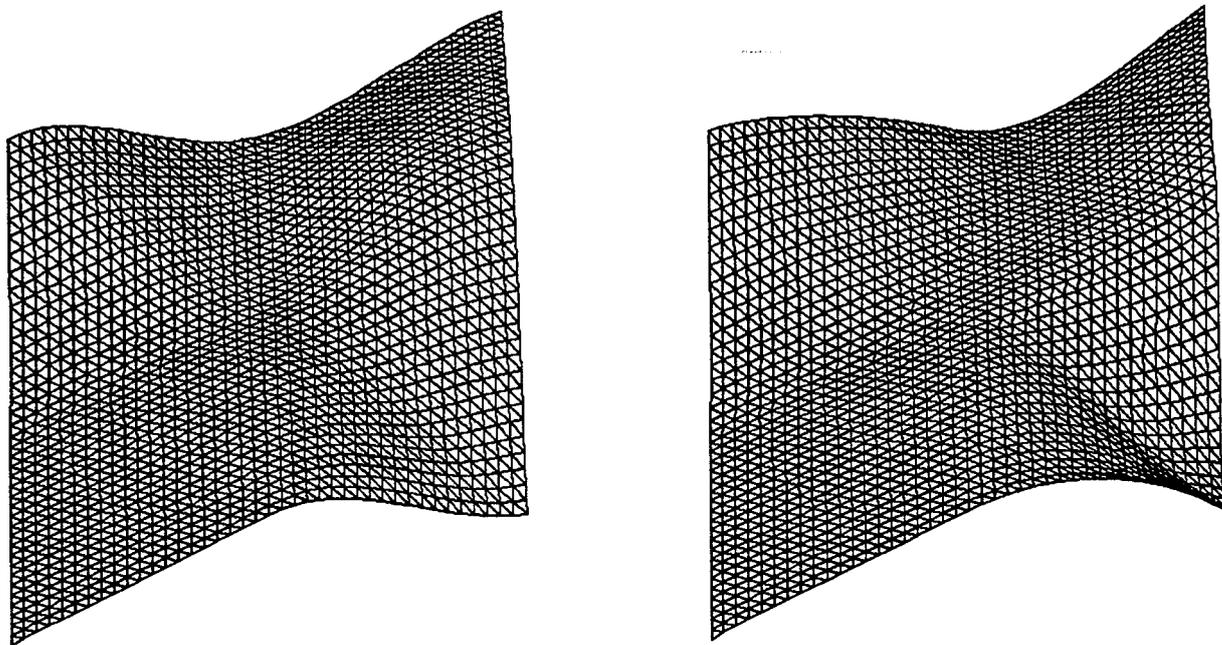


FIGURE.34. A gauche : matrice  $\begin{pmatrix} 0.3 & -0.3 \\ -0.3 & -0.3 \end{pmatrix}$ . A droite :  $\begin{pmatrix} 0.3 & -0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$ .

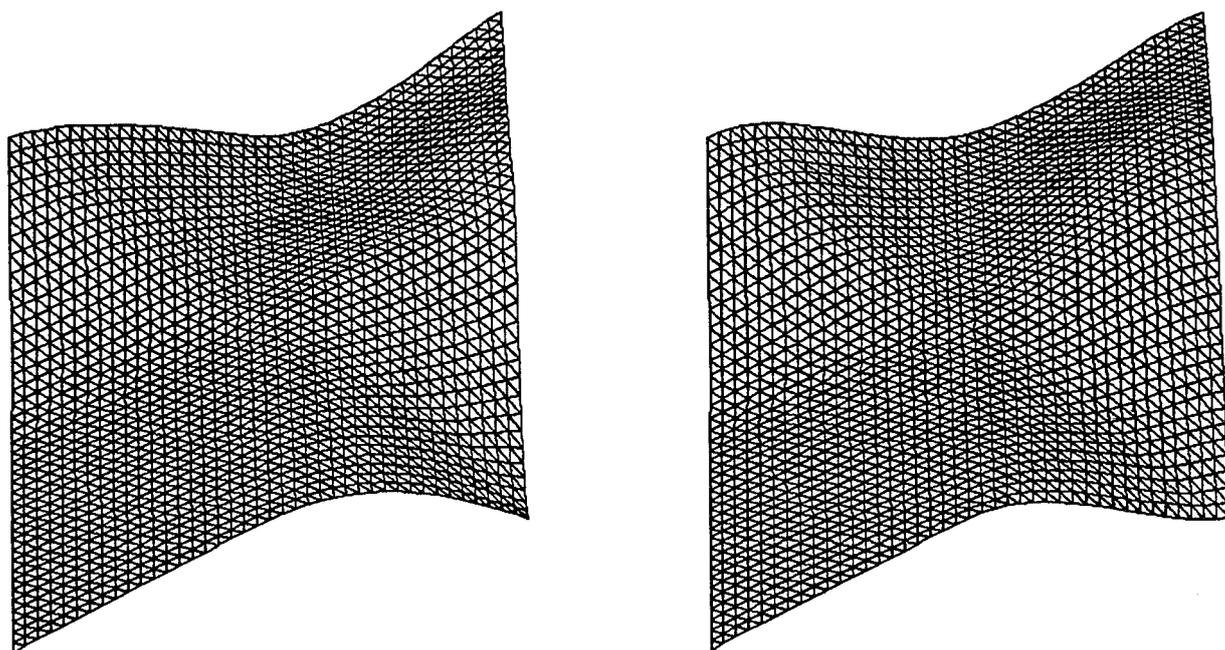


FIGURE.35. A gauche : matrice  $\begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$ . A droite :  $\begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 \\ -0.3 & -0.3 \end{pmatrix}$ .

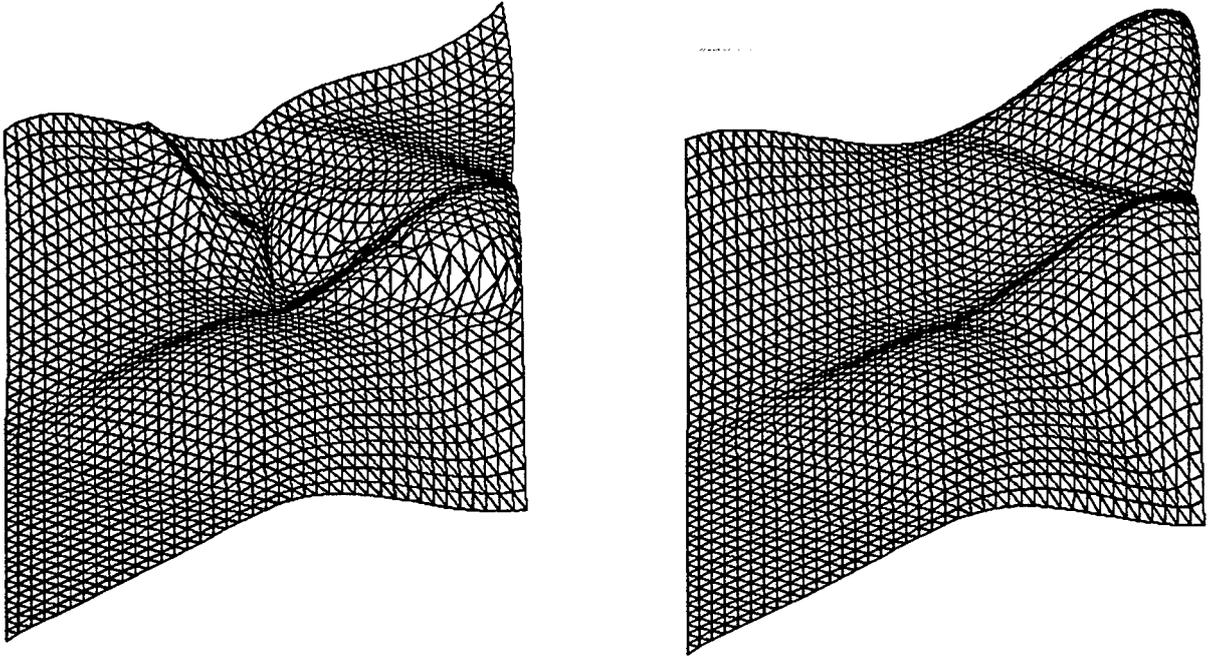


FIGURE.36. A gauche : matrice  $\begin{pmatrix} 0.71 & 0.71 \\ 0.71 & -0.71 \end{pmatrix}$ . A droite :  $\begin{pmatrix} 0.99 & 0.0 \\ 0.0 & -0.99 \end{pmatrix}$ .

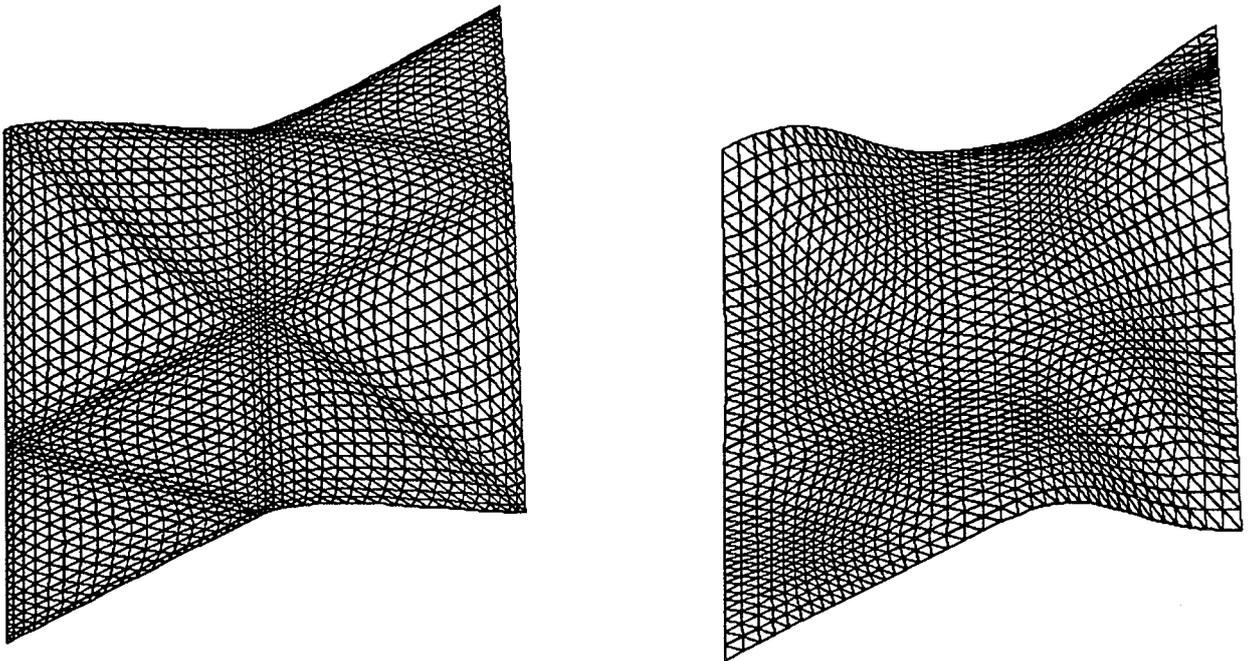


FIGURE.37. Influence de  $\varepsilon_1$  et  $\eta_1$ . A gauche :  $\varepsilon_1 = \eta_1 = 0.5$ .  
A droite :  $\varepsilon_1 = \eta_1 = 1.5$ .

## Chapitre 6.

# CONTACT GEOMETRIQUE ET INTERPOLATION

1. FONCTIONS AFFINES ET MORCEAUX DE BEZIER TRIANGULAIRES
  - 1.1. *Fonctions affines et polynômes*
  - 1.2. *Relation entre dérivée et floraison*
  - 1.3. *Morceaux de Bézier triangulaires.*
2. RACCORDEMENT  $G^2$  ENTRE DEUX SURFACES
  - 2.1. *Raccordement  $G^2$  en un point*
  - 2.2. *Raccordement  $G^2$  entre deux surfaces triangulaires.*
3. REPRESENTATION POLAIRE D'UN RACCORDEMENT  $G^2$  SIMPLIFIE
4. INTERPOLATION PROGRESSIVE STABLE
  - 4.1. *Numérotation et progression*
  - 4.2. *Remarques sur la numérotation*
  - 4.3. *Le raccordement  $G^2$  n'est pas nécessaire*
  - 4.4. *Situation nécessitant un traitement particulier*
  - 4.5. *Méthode de remplissage*

## 1. FONCTIONS AFFINES ET MORCEAUX DE BEZIER

## TRIANGULAIRES

Dans cette partie, on introduit brièvement la notion de floraison associée à un polynôme à deux variables. Cet outil permet une compréhension simple et naturelle des fonctions polynomiales, notamment en ce qui concerne leur représentation [26], [49], [50]. En rappelant la relation entre dérivée et floraison, nous avons surtout voulu exprimer un raccordement géométrique entre deux morceaux de surfaces.

## 1. 1. Fonctions affines et polynômes

• Soient  $E$  et  $Q$  deux espaces affines. Une application  $\varphi$  de  $E$  dans  $Q$  est dite affine si

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi(P_i), \quad \forall P_i \in E, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

- Une fonction  $f : E^k \rightarrow Q$  est dite  $k$ -affine (ou simplement multi-affine) si elle est séparément affine par rapport à chaque argument.
- Une fonction  $f$  est dite symétrique si elle est invariante par rapport aux permutations des arguments.

**Définition 6.1** Soit  $F$  une fonction polynomiale de degré  $k$ . On appelle floraison de  $F$  (ou forme polaire associée à  $F$ ) l'unique fonction  $f$ ,  $k$ -affine et symétrique, qui vérifie :

$$F(X) = f(\underbrace{X^k}_{k \text{ fois}}) \quad \text{où } X^k = (X, \dots, X). \quad (6.1)$$

- Dans toute la suite, on se place dans le cas où :  $E = \mathbb{R}^2$  et  $Q = \mathbb{R}^d$ .

## 1. 2. Relation entre dérivée et floraison

• Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction différentiable et  $\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y) \in \mathbb{R}^2$ . La dérivée directionnelle de  $F$  au point  $X = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans la direction  $\vec{\theta}$  est définie par :

$$F'(X; \vec{\theta}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(X + t\vec{\theta}) - F(X)}{t}.$$

C'est une application linéaire en  $\vec{\theta}$ , donc

$$F'(X; \vec{\theta}) = \theta_x F'(X; e_1) + \theta_y F'(X; e_2),$$

où  $\{e_1, e_2\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , et puisque  $\partial_i F(X) = F'(X; e_i)$   $i = 1, 2$ , on a

$$F'(X; \vec{\theta}) = \theta_x \partial_1 F(X) + \theta_y \partial_2 F(X). \quad (6.2)$$

De même, on rappelle que la dérivée directionnelle seconde en un point  $X$ , est l'application bilinéaire symétrique vérifiant :

$$F''(X; \vec{\theta}, \vec{\xi}) = \theta_x \xi_x \partial_{11} F(X) + (\theta_x \xi_y + \theta_y \xi_x) \partial_{12} F(X) + \theta_y \xi_y \partial_{22} F(X). \quad (6.3)$$

• Considérons  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction polynomiale de degré  $k$ , et  $f$  sa floraison. Nous allons maintenant exprimer les relations (6.2) et (6.3) en termes de floraison. On notera [26]

$$f^{[1]}(X_1, \dots, X_{k-1}; \vec{\theta}) := f(X_1, \dots, X_{k-1}, \mathcal{O} + \vec{\theta}) - f(X_1, \dots, X_{k-1}, \mathcal{O}), \quad \forall \mathcal{O} \in \mathbb{R}^2.$$

Il est facile de voir que l'application  $f^{[1]}$  est  $(k-1)$ -affine et symétrique par rapport aux  $(k-1)$  premiers arguments et linéaire par rapport au dernier argument. On démontre alors que la relation (6.2) est équivalente à :

$$F'(X; \vec{\theta}) = k f^{[1]}(X, \dots, X; \vec{\theta}). \quad (6.4)$$

De la même façon, la relation (6.3) est équivalente à :

$$F''(X; \vec{\theta}, \vec{\xi}) = k(k-1) f^{[2]}(X, \dots, X; \vec{\theta}, \vec{\xi}), \quad (6.5)$$

où  $\forall \mathcal{O}' \in \mathbb{R}^2$  :

$$f^{[2]}(X_1, \dots, X_{k-2}; \vec{\theta}, \vec{\xi}) := f^{[1]}(X_1, \dots, X_{k-2}, \mathcal{O}' + \vec{\theta}; \vec{\xi}) - f^{[1]}(X_1, \dots, X_{k-2}, \mathcal{O}'; \vec{\xi}).$$

La fonction  $f^{[2]}$  est  $(k-2)$ -affine et symétrique par rapport aux  $(k-2)$  arguments et bilinéaire symétrique par rapport aux deux derniers arguments.

### 1. 3. Morceaux de Bézier triangulaires

Soit  $T$  un triangle non dégénéré de  $\mathbb{R}^2$ , de sommets  $A, B, C$ . Tout point  $X = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  peut être représenté d'une manière unique par :

$$(x, y) = uA + vB + wC, \quad u + v + w = 1, \quad (6.6)$$

où  $u, v, w$ , fonctions de  $x$  et  $y$ , sont appelées coordonnées barycentriques de  $X$  par rapport à  $T$ . Le point  $X$  appartient à  $T$  si en plus on a  $u, v, w \geq 0$ .

Soit  $F$  une fonction polynomiale de degré  $n$ , et  $f$  sa floraison. D'après (6.1) et en utilisant la multiaffinité et la symétrie de  $f$ , on a :

$$F(x, y) = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k f(A^i B^j C^k), \quad (6.7)$$

ou encore

$$F(x, y) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}(x, y) P_{i,j,k}. \quad (6.8)$$

Les fonctions  $B_{i,j,k}$  sont définies par :

$$B_{i,j,k}(x, y) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j (1-u-v)^k, \quad i + j + k = n, \quad (6.9)$$

et sont appelées les polynômes de Bernstein à deux variables, par rapport à  $T$  et les points  $P_{i,j,k}$ ,  $k = n - i - j$  de  $\mathbb{R}^d$  sont définis par :

$$P_{i,j,k} = f(A^i B^j C^k), \quad i + j + k = n, \quad (6.10)$$

et sont appelés points de contrôle ou de Bézier (par rapport à  $T$ ) de la surface polynomiale correspondante. La restriction de  $F$  à  $T$  est appelée morceau (ou patche) de Bézier triangulaire.

## 2. RACCORDEMENT $G^2$ ENTRE DEUX SURFACES

### 2. 1. Raccordement $G^2$ en un point

Considérons  $F$  et  $G$  deux paramétrisations  $C^2$  quelconques de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 6.2** On dit que  $F$  et  $G$  ont un raccordement  $G^2$  en  $F(m_0) = G(m_1)$  si et seulement si il existe des matrices  $B_{11}$  inversible et  $B_{21}$  quelconque telles que :

$$\begin{bmatrix} \partial_1 G(m_1) \\ \partial_2 G(m_1) \end{bmatrix} = B_{11} \begin{bmatrix} \partial_1 F(m_0) \\ \partial_2 F(m_0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \partial_{11} G(m_1) \\ \partial_{12} G(m_1) \\ \partial_{22} G(m_1) \end{bmatrix} = B_{21} \begin{bmatrix} \partial_1 F(m_0) \\ \partial_2 F(m_0) \end{bmatrix} + B_{11}^{[2]} \begin{bmatrix} \partial_{11} F(m_0) \\ \partial_{12} F(m_0) \\ \partial_{22} F(m_0) \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

où

$$B_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \\ a_{221} & a_{222} \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

et  $B_{11}^{[2]}$  est une puissance symbolique de  $B_{11}$ , définie par :

$$B_{11}^{[2]} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 2 a_{11} a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11} a_{21} & a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12} & a_{12} a_{22} \\ a_{21}^2 & 2 a_{21} a_{22} & a_{22}^2 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Notons que les matrices  $B_{11}$  et  $B_{21}$  dépendent de  $m_0$  (ou  $m_1$ ).

Nous allons exprimer le système (6.11) en termes de dérivées directionnelles. En effet, soit  $\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$  et  $\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_y)$  deux vecteurs linéairement indépendants de  $\mathbb{R}^2$ . En utilisant les relations (6.2) et (6.3), on a :

$$\begin{bmatrix} F'(m_0; \vec{\theta}) \\ F'(m_0; \vec{\xi}) \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} \partial_1 F(m_0) \\ \partial_2 F(m_0) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F''(m_0; \vec{\theta}, \vec{\theta}) \\ F''(m_0; \vec{\theta}, \vec{\xi}) \\ F''(m_0; \vec{\xi}, \vec{\xi}) \end{bmatrix} = \mathcal{B} \begin{bmatrix} \partial_{11} F(m_0) \\ \partial_{12} F(m_0) \\ \partial_{22} F(m_0) \end{bmatrix},$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des matrices inversibles définies par :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \theta_x & \theta_y \\ \xi_x & \xi_y \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{A}^{[2]}. \quad (6.14)$$

De la même façon, on note  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{B}_1$  les matrices qui donnent les dérivées directionnelles de  $G$  en  $m_1$  (dans des directions  $\vec{\theta}^1$  et  $\vec{\xi}^1$ ) en fonctions des dérivées partielles. Le système (6.11) devient alors :

$$\begin{bmatrix} G'(m_1; \vec{\theta}^1) \\ G'(m_1; \vec{\xi}^1) \end{bmatrix} = \mathcal{A}_1 B_{11} \mathcal{A}^{-1} \begin{bmatrix} F'(m_0; \vec{\theta}) \\ F'(m_0; \vec{\xi}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} G''(m_1; \vec{\theta}^1, \vec{\theta}^1) \\ G''(m_1; \vec{\theta}^1, \vec{\xi}^1) \\ G''(m_1; \vec{\xi}^1, \vec{\xi}^1) \end{bmatrix} = B_1 B_{21} \mathcal{A}^{-1} \begin{bmatrix} F'(m_0; \vec{\theta}) \\ F'(m_0; \vec{\xi}) \end{bmatrix} + B_1 B_{11}^{[2]} B^{-1} \begin{bmatrix} F''(m_0; \vec{\theta}, \vec{\theta}) \\ F''(m_0; \vec{\theta}, \vec{\xi}) \\ F''(m_0; \vec{\xi}, \vec{\xi}) \end{bmatrix}.$$

Posons

$$B_{11}^* = \mathcal{A}_1 B_{11} \mathcal{A}^{-1}, \quad B_{21}^* = B_1 B_{21} \mathcal{A}^{-1}. \quad (6.15)$$

On montre facilement que :

$$B_1 B_{11}^{[2]} B^{-1} = [\mathcal{A}_1 B_{11} \mathcal{A}^{-1}]^{[2]} = B_{11}^{*[2]}. \quad (6.16)$$

Finalement, la définition (6.2) est caractérisée comme suit :

$$\begin{bmatrix} G'(m_1; \vec{\theta}^1) \\ G'(m_1; \vec{\xi}^1) \end{bmatrix} = B_{11}^* \begin{bmatrix} F'(m_0; \vec{\theta}) \\ F'(m_0; \vec{\xi}) \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$\begin{bmatrix} G''(m_1; \vec{\theta}^1, \vec{\theta}^1) \\ G''(m_1; \vec{\theta}^1, \vec{\xi}^1) \\ G''(m_1; \vec{\xi}^1, \vec{\xi}^1) \end{bmatrix} = B_{21}^* \begin{bmatrix} F'(m_0; \vec{\theta}) \\ F'(m_0; \vec{\xi}) \end{bmatrix} + B_{11}^{*[2]} \begin{bmatrix} F''(m_0; \vec{\theta}, \vec{\theta}) \\ F''(m_0; \vec{\theta}, \vec{\xi}) \\ F''(m_0; \vec{\xi}, \vec{\xi}) \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

avec  $B_{11}^*$  inversible et  $B_{21}^*$  quelconque.

**2. 2. Raccordement  $G^2$  entre deux surfaces triangulaires**

Considérons deux morceaux de Bézier triangulaires  $F$  et  $G$ , de degré  $n$ , définis sur les triangles  $T = [A, B, C]$  et  $T_1 = [D, B, C]$  adjacents (d'arête commune  $[BC]$ ).

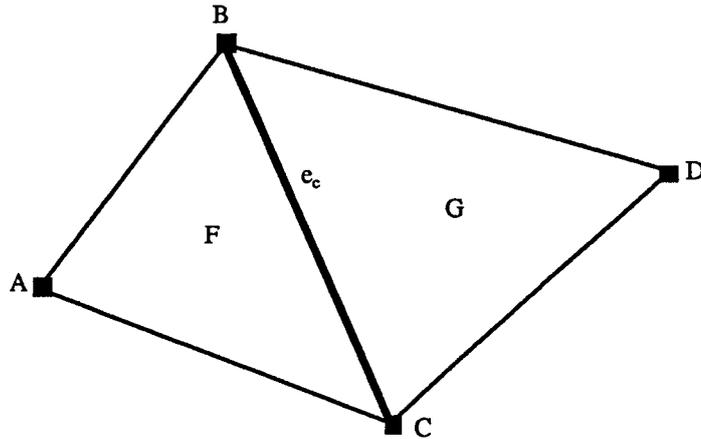


FIGURE.1. Domaine de définition des surfaces  $F$  et  $G$ .

Pour tout point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $F$  et  $G$  sont représentés par :

$$F(x, y) = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k f(A^i B^j C^k),$$

$$G(x, y) = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u_1^i v_1^j w_1^k g(D^i B^j C^k),$$

où  $u, v, w$  (resp.  $u_1, v_1, w_1$ ) sont les coordonnées barycentriques de  $(x, y)$  par rapport au triangle  $[A, B, C]$  (resp.  $[D, B, C]$ ).

**Remarque :** Le point  $(x, y)$  appartient à la droite  $(BC)$  si et seulement si  $u = 0$  (ou  $u_1 = 0$ ), auquel cas  $v_1 = v$ ,  $w_1 = w$  sont les coordonnées barycentriques de  $(x, y)$  par rapport à  $B, C$ .

$$(x, y) \in [BC] \Leftrightarrow u_1 = 0, v_1 = v \geq 0, w_1 = w \geq 0. \quad \dashv$$

**2. 2. 1. Raccordement  $G^0$  entre  $F$  et  $G$  le long de l'arête  $[BC]$**

Supposons que  $(x, y) \in (BC)$ . Alors  $B_{i,j,k}(x, y) = 0$  sauf si  $i = 0$ . Par conséquent

$$B_{0,j,k}(x, y) = \frac{n!}{j!k!} v^j w^k, \quad \forall j + k = n$$

$$= C_n^j t^j (1-t)^{n-j}, \quad \text{avec } t = v \text{ et } j = 0, \dots, n$$

$$= B_j^n(t) \text{ polynôme de Bernstein à une variable.}$$

Donc, pour  $(x, y) \in (BC)$  :

$$F(x, y) = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) f(B^j C^{n-j}) = \tilde{F}(t),$$

$$G(x, y) = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) g(B^j C^{n-j}) = \tilde{G}(t).$$

$\tilde{F}(t)$  et  $\tilde{G}(t)$  sont des fonctions polynomiales de degré  $n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , dont les points de Bézier sont respectivement  $f(B^j C^{n-j})$  et  $g(B^j C^{n-j})$ .

En particulier :

$$F(x, y) = G(x, y), \forall (x, y) \in [BC] \Leftrightarrow \tilde{F}(t) = \tilde{G}(t), \forall t \in [0, 1].$$

Un raccordement  $G^0$  entre  $F$  et  $G$  le long de l'arête  $[BC]$  est donc exprimé par :

$$f(B^j C^{n-j}) = g(B^j C^{n-j}), \forall j = 0, \dots, n. \quad (6.19)$$

### 2. 2. 2. Raccordement $G^1$ entre $F$ et $G$ le long de l'arête $[BC]$

Supposons que  $F(m) = G(m) \forall m = (x, y) \in [BC]$ . On déduit :

$$G'(m; \vec{BC}) = F'(m; \vec{BC}), \quad \forall m \in [BC], \quad (6.20)$$

et

$$G''(m; \vec{BC}, \vec{BC}) = F''(m; \vec{BC}, \vec{BC}), \quad \forall m \in [BC]. \quad (6.21)$$

En appliquant le système (6.17) à  $F$  et  $G$  le long de l'arête  $[BC]$ , avec

$$\vec{\theta} = \vec{BA}, \quad \vec{\xi} = \vec{\xi}^1 = \vec{BC}, \quad \vec{\theta}^1 = \vec{BD},$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} G'(m; \vec{BD}) \\ G'(m; \vec{BC}) \end{bmatrix} = B_{11}^*(m) \begin{bmatrix} F'(m; \vec{BA}) \\ F'(m; \vec{BC}) \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Or d'après la relation (6.20), la matrice  $B_{11}^*(m)$  est nécessairement de la forme :

$$B_{11}^*(m) = \begin{bmatrix} \alpha^*(m) & \beta^*(m) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

où  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  sont des fonctions arbitraires dépendants de  $m$ . D'où

$$B_{11}^{*[2]}(m) = \begin{bmatrix} \alpha^*(m)^2 & 2\alpha^*(m)\beta^*(m) & \beta^*(m)^2 \\ 0 & \alpha^*(m) & \beta^*(m) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

**2. 2. 3. Raccordement  $G^2$  entre  $F$  et  $G$  le long de l'arête  $[BC]$** 

Supposons que  $F$  et  $G$  se raccordent  $G^1$  le long de  $[BC]$ , on a donc :

$$G'(m; \vec{BD}) = \alpha^*(m) F'(m; \vec{BA}) + \beta^*(m) F'(m; \vec{BC}), \quad \forall m \in [BC].$$

En prenant la dérivée directionnelle dans la direction  $\vec{BC}$  des deux membres de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} G''(m; \vec{BD}, \vec{BC}) &= \alpha^{*\prime}(m; \vec{BC}) F'(m; \vec{BA}) + \beta^{*\prime}(m; \vec{BC}) F'(m; \vec{BC}) \\ &\quad + \alpha^*(m) F''(m; \vec{BA}, \vec{BC}) + \beta^*(m) F''(m; \vec{BC}, \vec{BC}). \end{aligned}$$

D'après la relation (6.21), on en déduit que la matrice  $B_{21}^*(m)$  s'écrit :

$$B_{21}^*(m) = \begin{bmatrix} \gamma^*(m) & \delta^*(m) \\ \alpha^{*\prime}(m; \vec{BC}) & \beta^{*\prime}(m; \vec{BC}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

où  $\gamma^*$  et  $\delta^*$  sont des fonctions arbitraires dépendant de  $m$ .

Finalement, nous introduisons la paramétrisation de l'arête  $[BC]$  définie par :

$$m \in [BC] \Leftrightarrow m = m(t) := (1-t)B + tC, \quad \forall t \in [0,1].$$

Posons

$$\alpha(t) := \alpha^*(m), \quad \beta(t) := \beta^*(m), \quad \gamma(t) := \gamma^*(m), \quad \delta(t) := \delta^*(m).$$

**Proposition 6.3**  $F$  et  $G$  se raccordent  $G^2$  le long de l'arête commune  $[BC]$  si et seulement si  $\forall m \in [BC]$  :

$$(1) \quad G(m) = F(m),$$

$$(2) \quad G'(m; \vec{BD}) = \alpha(t) F'(m; \vec{BA}) + \beta(t) F'(m; \vec{BC}),$$

$$\begin{aligned} (3) \quad G''(m; \vec{BD}, \vec{BD}) &= \alpha^2(t) F''(m; \vec{BA}, \vec{BA}) + 2\alpha(t)\beta(t) F''(m; \vec{BA}, \vec{BC}) \\ &\quad + \beta^2(t) F''(m; \vec{BC}, \vec{BC}) + \gamma(t) F'(m; \vec{BA}) \\ &\quad + \delta(t) F'(m; \vec{BC}), \end{aligned}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des fonctions arbitraires.

### 3. REPRESENTATION POLAIRE D'UN RACCORDEMENT

#### $G^2$ SIMPLIFIE

Supposons

$$\begin{array}{l} \text{et} \\ \alpha, \beta \text{ sont des fonctions constantes et } , \gamma = \delta \equiv 0. \end{array} \quad (6.26)$$

- Soient  $f$  et  $g$  les floraisons de  $F$  et  $G$  définies par :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k f(A^i B^j C^k), \\ G(x, y) &= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u_1^i v_1^j w_1^k g(D^i B^j C^k). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Nous allons exprimer la proposition (6.3) en termes de floraison grâce à la relation entre dérivée et floraison rappelée dans la première section.

- L'équation (1) de la proposition (6.3) est équivalente à

$$g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \forall \xi_i \in \{B, C\},$$

soit

$$g(B^j C^k) = f(B^j C^k), \quad \forall j, k : j + k = n. \quad (6.28)$$

- L'équation (2) de la proposition (6.3) est équivalente à

$$g^{[1]}(m, \dots, m, \vec{BD}) = \alpha f^{[1]}(m, \dots, m, \vec{BA}) + \beta f^{[1]}(m, \dots, m, \vec{BC}), \quad \forall m \in [BC].$$

Soit  $\forall \xi_i \in \{B, C\}$  :

$$g^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \vec{BD}) = \alpha f^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \vec{BA}) + \beta f^{[1]}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \vec{BC}),$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, D) - g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, B) = \alpha [f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, A) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, B)]$$

$$+ \beta [f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, C) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, B)], \quad \forall \xi_i \in \{B, C\}.$$

Par conséquent, pour  $j + k = n - 1$  :

$$\begin{aligned} g(DB^j C^k) - g(B^{j+1} C^k) &= \alpha [f(AB^j C^k) - f(B^{j+1} C^k)] \\ &+ \beta [f(B^j C^{k+1}) - f(B^{j+1} C^k)]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

• L'équation (3) de la proposition (6.3) est équivalente à

$$g^{[2]}(m, \dots, m, \vec{B}\vec{D}, \vec{B}\vec{D}) = \alpha^2 f^{[2]}(m, \dots, m, \vec{B}\vec{A}, \vec{B}\vec{A}) + 2\alpha\beta f^{[2]}(m, \dots, m, \vec{B}\vec{A}, \vec{B}\vec{C}) + \beta^2 f^{[2]}(m, \dots, m, \vec{B}\vec{C}, \vec{B}\vec{C}), \quad \forall m \in [BC].$$

Soit  $\forall \xi_i \in \{B, C\}$  :

$$\begin{aligned} g^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \vec{B}\vec{D}, \vec{B}\vec{D}) &= \alpha^2 f^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \vec{B}\vec{A}, \vec{B}\vec{A}) \\ &\quad + 2\alpha\beta f^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \vec{B}\vec{A}, \vec{B}\vec{C}) \\ &\quad + \beta^2 f^{[2]}(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \vec{B}\vec{C}, \vec{B}\vec{C}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, D, D) - 2g(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, D, B) + g(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, B, B) &= \\ = \alpha^2 \left[ f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, A, A) - 2f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, A, B) + f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, B, B) \right] \\ + 2\alpha\beta \left[ f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, A, C) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, A, B) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, B, C) \right. \\ \left. + f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, B, B) \right] + \beta^2 \left[ f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, C, C) - 2f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, B, C) \right. \\ \left. + f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, B, B) \right], \quad \forall \xi_i \in \{B, C\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour  $j + k = n - 2$  :

$$\begin{aligned} g(D^2 B^j C^k) - 2g(D B^{j+1} C^k) + g(B^{j+2} C^k) &= \\ \alpha^2 \left[ f(A^2 B^j C^k) - 2f(A B^{j+1} C^k) + f(B^{j+2} C^k) \right] \\ + 2\alpha\beta \left[ f(A B^j C^{k+1}) - f(A B^{j+1} C^k) - f(B^{j+1} C^{k+1}) + f(B^{j+2} C^k) \right] \\ + \beta^2 \left[ f(B^j C^{k+2}) - 2f(B^{j+1} C^{k+1}) + f(B^{j+2} C^k) \right]. \end{aligned} \tag{6.30}$$

**Exemple où  $n = 3$  :** Les équations (6.28), (6.29) et (6.30) donnent :

$$\begin{aligned} g(B, B, B) &= f(B, B, B), \\ g(B, B, C) &= f(B, B, C), \\ g(B, C, C) &= f(B, C, C), \\ g(C, C, C) &= f(C, C, C), \end{aligned}$$

$$g(D, B, B) - g(B, B, B) = \alpha [f(A, B, B) - f(B, B, B)] + \beta [f(B, B, C) - f(B, B, B)],$$

$$g(D, B, C) - g(B, B, C) = \alpha [f(A, B, C) - f(B, B, C)] + \beta [f(B, C, C) - f(B, B, C)],$$

$$g(D, C, C) - g(B, C, C) = \alpha [f(A, C, C) - f(B, C, C)] + \beta [f(C, C, C) - f(B, C, C)],$$

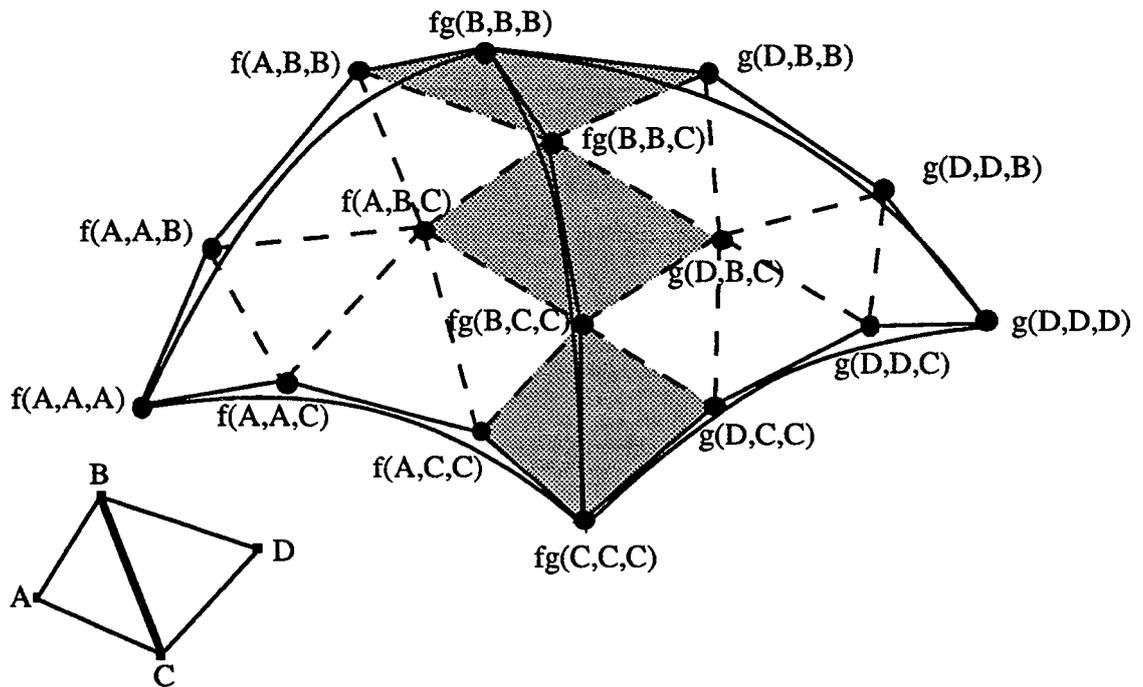


FIGURE.2. Représentation polaire et raccordement  $G^1$  entre F et G.

$$g(D D B) - 2g(D B B) + g(B B B) = \alpha^2 [f(A A B) - 2f(A B B) + f(B B B)]$$

$$+ 2\alpha \beta [f(A B C) - f(A B B) - f(B B C) + f(B B B)]$$

$$+ \beta^2 [f(B C C) - 2f(B B C) + f(B B B)],$$

$$g(D D C) - 2g(D B C) + g(B B C) = \alpha^2 [f(A A C) - 2f(A B C) + f(B B C)]$$

$$+ 2\alpha \beta [f(A C C) - f(A B C) - f(B C C) + f(B B C)]$$

$$+ \beta^2 [f(C C C) - 2f(B C C) + f(B B C)].$$

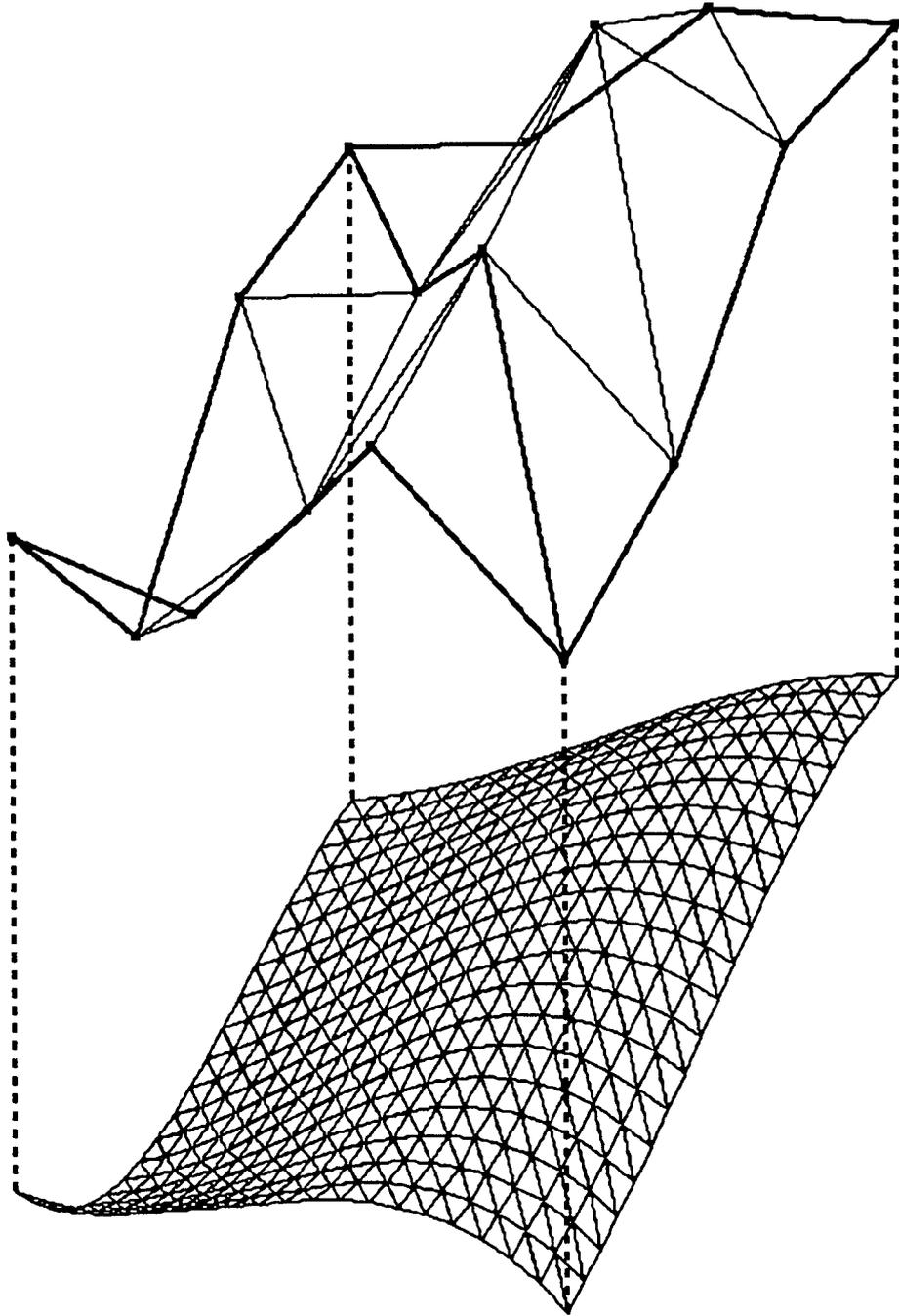


FIGURE.3. Raccordement  $G^2$  entre deux polynômes de degré 3, avec  $\alpha = -1.0$  et  $\beta = 1.0$ .

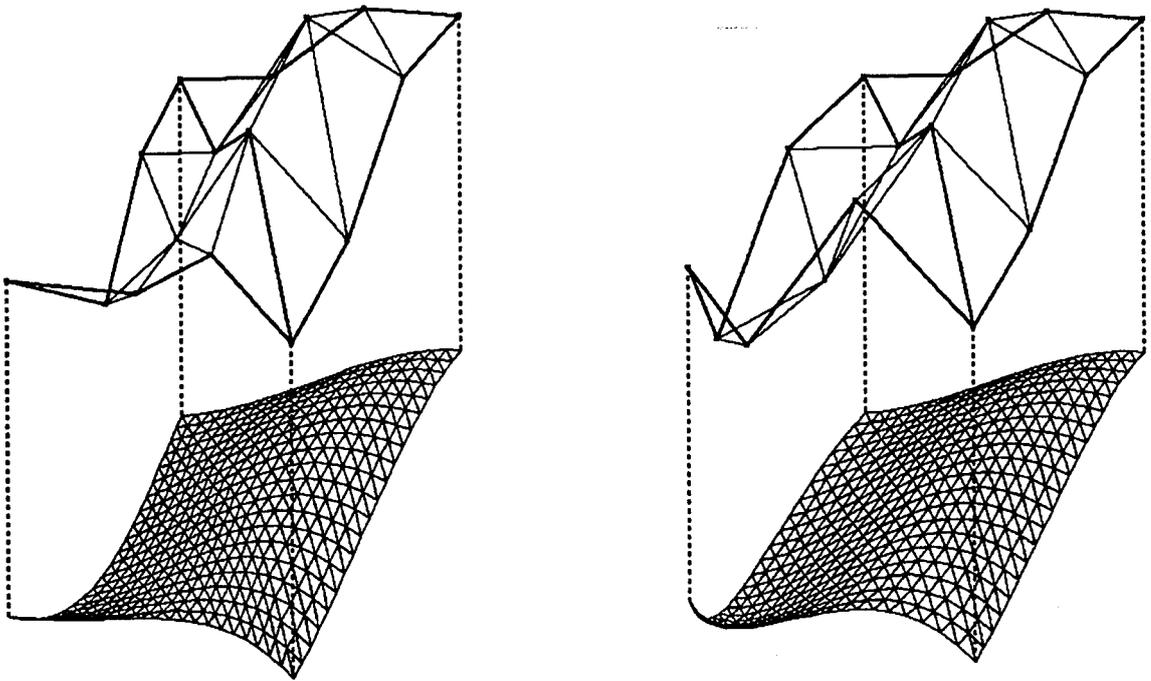


FIGURE.4. A gauche :  $\alpha = -0.8, \beta = 0.8$  .  
A droite :  $\alpha = -1.2, \beta = 1.2$  .

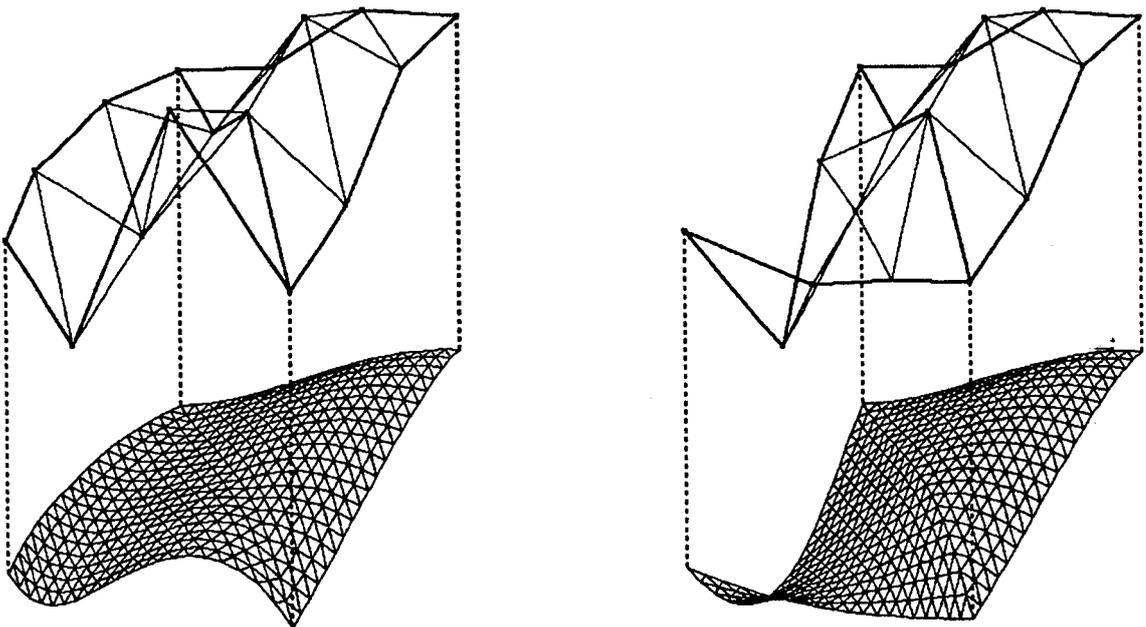


FIGURE.5. A gauche :  $\alpha = -1.0, \beta = 1.5$  .  
A droite :  $\alpha = -1.0, \beta = 0.5$  .

**4. INTERPOLATION PROGRESSIVE CUBIQUE**

• On suppose que  $F(A)$ ,  $F(B)$ ,  $F(C)$  et  $G(D)$  sont des données et que  $F$  a déjà été calculé, c'est à dire que les points  $f(A^i B^j C^k)$  ont été calculés. On veut déterminer  $G$  en assurant d'une part la continuité  $G^2$  le long de l'arête commune, et d'autre part la stabilité. Si  $G$  est obtenue, on passe au triangle suivant, etc, ... On obtient ainsi un schéma progressif stable.

• On prendra des polynômes de degré 3 pour  $F$  et  $G$ ; par conséquent le raccordement  $G^2$  nous permet de déterminer complètement  $G$  en fonction de  $F$ . On obtient alors des relations entre  $g(D^i B^j C^k)$  et  $f(A^i B^j C^k)$ ,  $i + j + k = 3$  que l'on peut mettre sous la forme

$$X_{I+1} = A.X_I + b.$$

• On a besoin alors d'une numérotation sur les points de Bézier  $f(A^i B^j C^k)$  et de montrer que la stabilité ne dépend pas de la numérotation choisie .

**4. 1. Numérotation des points définissant la progression**

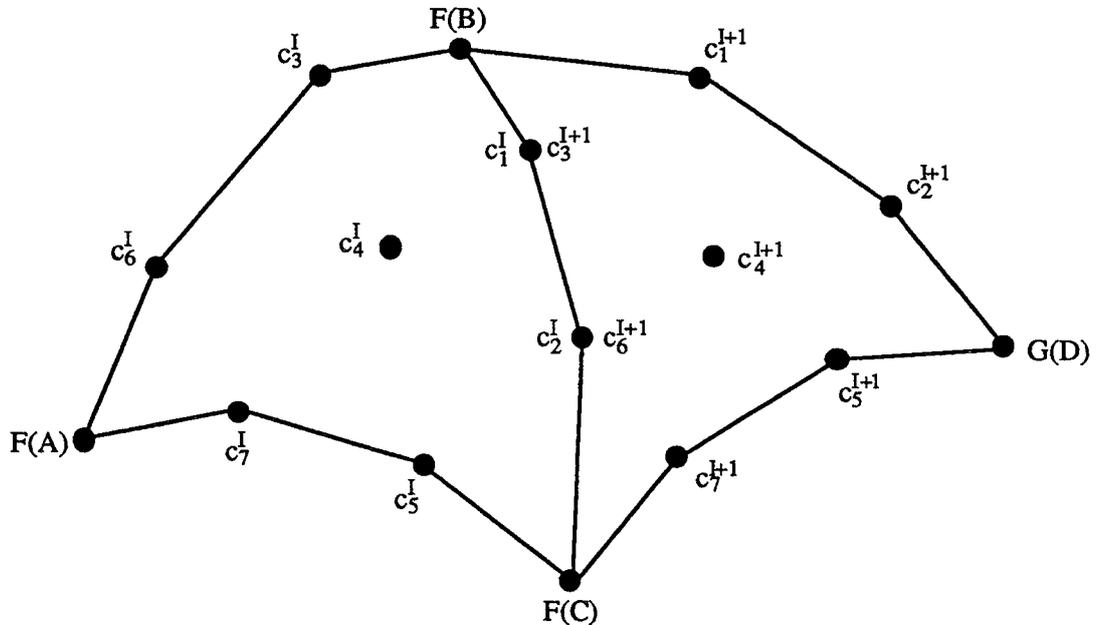


FIGURE.6. Numérotation gauche des points de Bézier .

D'après les relations (6.28),(6.29) et (6.30), le raccordement géométrique  $G^2$  simplifié nous donne :

$$\begin{cases} c_3^{I+1} = c_1^I, \\ c_6^{I+1} = c_2^I, \\ c_1^{I+1} - F(B) = \alpha (c_3^I - F(B)) + \beta (c_1^I - F(B)), \\ c_4^{I+1} - c_3^{I+1} = \alpha (c_4^I - c_1^I) + \beta (c_2^I - c_1^I), \\ c_7^{I+1} - c_6^{I+1} = \alpha (c_5^I - c_2^I) + \beta (F(C) - c_2^I), \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2^{I+1} - 2c_1^{I+1} + F(B) = \alpha^2 [c_6^I - 2c_3^I + F(B)] + \beta^2 [c_2^I - 2c_1^I + F(B)] \\ \quad + 2\alpha\beta [c_4^I - c_3^I - c_1^I + F(B)], \\ c_5^{I+1} - 2c_4^{I+1} + c_3^{I+1} = \alpha^2 [c_7^I - 2c_4^I + c_1^I] + \beta^2 [F(C) - 2c_2^I + c_1^I] \\ \quad + 2\alpha\beta [c_5^I - c_4^I - c_2^I + c_1^I]. \end{array} \right.$$

Si on note

$$X_I = (c_1^I, c_2^I, \dots, c_7^I)^T. \quad (6.31)$$

Le passage de  $F$  à  $G$  est défini par la relation matricielle suivante :

$$X_{I+1} = A \cdot X_I + \Delta, \quad (6.32)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta\gamma & \beta^2 & 2\alpha\gamma & 2\alpha\beta & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^2 & 2\beta\gamma & 0 & 2\alpha\gamma & 2\alpha\beta & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$\Delta = \begin{bmatrix} \gamma F(B) \\ \gamma^2 F(B) \\ 0 \\ 0 \\ \beta^2 F(C) \\ 0 \\ \beta F(C) \end{bmatrix}, \quad \gamma = 1 - \alpha - \beta.$$

Le schéma est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à l'intérieur du cercle unité. Ces valeurs sont racines du polynôme

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + \alpha)(\lambda^2 - \beta\lambda - \alpha)(\lambda^2 - 2\alpha\beta\lambda - \alpha^3)(\lambda^2 - (\beta^2 + 2\alpha)\lambda + \alpha^2).$$

Posons

$$\alpha^* = -\alpha, \quad \alpha^* > 0, \quad \beta \geq 0.$$

Les racines de  $\det(A - \lambda I) = 0$  sont de module inférieur à 1 si et seulement si les racines de chacun des facteurs sont de module inférieur à 1, i.e.,

$$\begin{cases} \lambda + \alpha^* = 0, & (1) \\ \lambda^2 - \beta\lambda + \alpha^* = 0, & (2) \\ \lambda^2 + 2\alpha^*\beta\lambda + \alpha^{*3} = 0, & (3) \\ \lambda^2 - (\beta^2 - 2\alpha^*)\lambda + \alpha^{*2} = 0. & (4) \end{cases}$$

soit

$$(1) \Leftrightarrow |\alpha^*| < 1 \quad \Leftrightarrow 0 < \alpha^* < 1, \quad (1')$$

$$(2) \Leftrightarrow |\beta| < 1 + \alpha^* \quad \Leftrightarrow 0 < \beta < 1 + \alpha^*, \quad (2')$$

$$(3) \Leftrightarrow |2\alpha^*\beta| < 1 + \alpha^{*3} \quad \Leftrightarrow 0 < \beta < \frac{1 + \alpha^{*3}}{2\alpha^*}, \quad (3')$$

$$(4) \Leftrightarrow |\beta^2 - 2\alpha^*| < 1 + \alpha^{*2}.$$

L'inégalité provenant de (4) est automatiquement satisfaite si (1), (2) et (3) sont vérifiées.

**Théorème 6.4** *L'algorithme d'interpolation progressive paramétrique  $G^2$  décrit par la relation (6.32) est stable si et seulement si les paramètres  $\alpha^*$  et  $\beta$  se trouvent dans le domaine hachuré de la figure 7,*

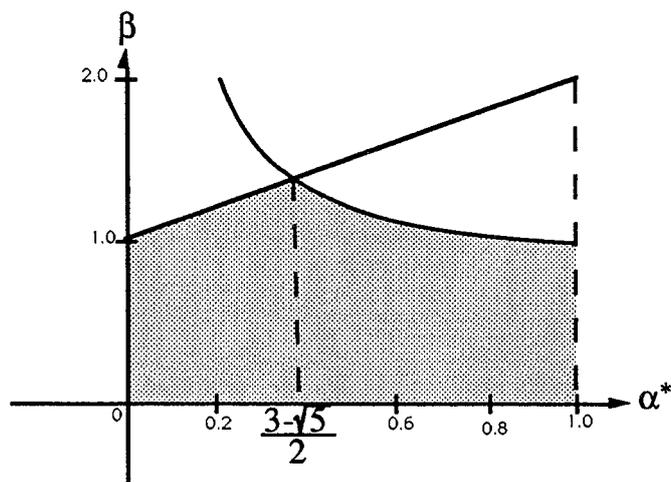


FIGURE.7. *Domaine de stabilité.*

*c'est-à-dire le domaine délimité par (1'), (2') et (3').*

#### 4. 2. Remarques sur la numérotation

• La numérotation  $(N_g)$ , donnée dans la figure 6, suppose que l'on progresse autour du sommet  $B$ , c'est à dire qu'à l'étape  $I$ , l'arête  $[BC]$  nous sert pour passer d'un triangle à un autre (arête de front),

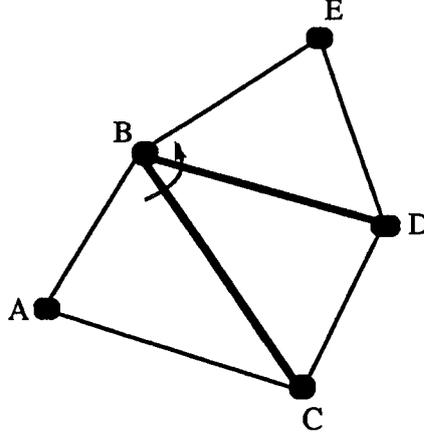


FIGURE.8. Progression à gauche  $(N_g)$ .

et à l'étape  $(I + 1)$ , c'est l'arête  $[BD]$  qui deviendra l'arête de front. On dit alors qu'on a progressé à gauche de  $[BC]$ . Pour cela, on a reporté les mêmes numéros de l'arête  $[BC]$  sur l'arête  $[BD]$  afin que les points jouent le même rôle à chaque itération.

• Il est clair que la numérotation  $(N_g)$  est arbitraire, c'est à dire si on prend n'importe quelle numérotation  $(N_g^*)$ , nous obtenons le même résultat (le schéma restera stable). En effet

Soit  $\mathcal{P}_r$  une permutation sur les vecteurs d'itérations  $X_I$  (i.e., on fait la même permutation sur  $X_I$  et  $X_{I+1}$ ).

$$\mathcal{P}_r(X_I) = X_I^* \quad , \quad \mathcal{P}_r(X_{I+1}) = X_{I+1}^*.$$

Donc, il existe une matrice  $\mathcal{P}$  telle que

$$\mathcal{P} \cdot X_I = X_I^* \quad \text{et} \quad \mathcal{P} \cdot X_{I+1} = X_{I+1}^*.$$

Par conséquent

$$X_{I+1} = A \cdot X_I + \Delta \Leftrightarrow \mathcal{P} \cdot X_{I+1} = \mathcal{P} \cdot A \cdot X_I + \mathcal{P} \Delta$$

$$\Leftrightarrow X_{I+1}^* = \mathcal{P} \cdot A \cdot \mathcal{P}^{-1} \cdot X_I^* + \mathcal{P} \Delta.$$

Les valeurs propres de la nouvelle matrice sont exactement celles de la matrice  $A$ . En effet

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{P} \cdot A \cdot \mathcal{P}^{-1} - \lambda I) &= \det(\mathcal{P} \cdot A \cdot \mathcal{P}^{-1} - \lambda \mathcal{P} \cdot \mathcal{P}^{-1}) \\ &= \det\left[(\mathcal{P} \cdot A - \lambda \mathcal{P}) \cdot \mathcal{P}^{-1}\right] \\ &= \det(\mathcal{P} \cdot A - \lambda \mathcal{P}) \cdot \det(\mathcal{P}^{-1}) \\ &= \det(\mathcal{P}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(\mathcal{P}^{-1}) \\ &= \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

• Mais rien ne nous empêche de progresser à droite de  $[BC]$ . L'arête  $[CD]$  sera l'arête de front et on dit que l'on a progressé à droite de  $[BC]$ .

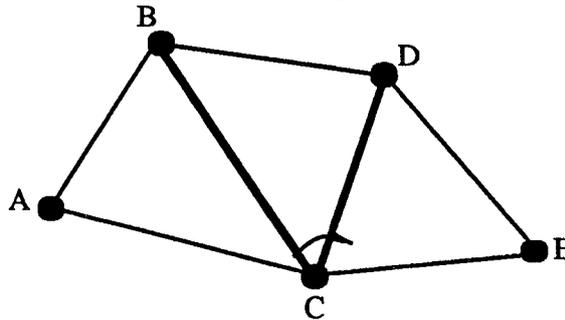


FIGURE.9. Progression à droite ( $N_d$ ).

Il faut donc montrer la stabilité dans cette situation. Cette progression correspond à la numérotation ( $N_d$ ) suivante

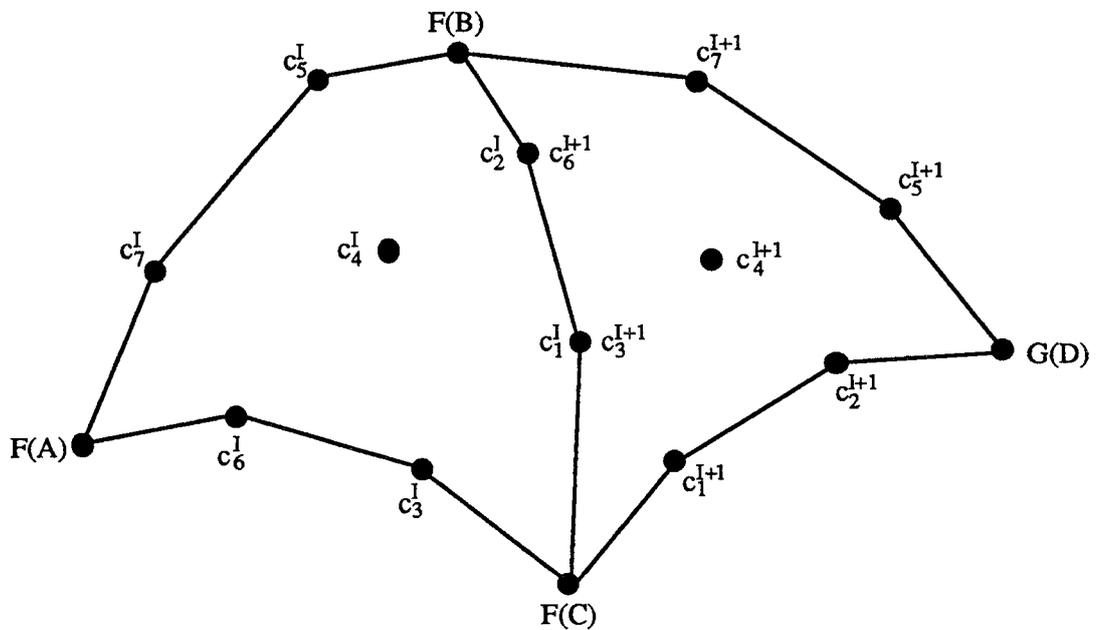


FIGURE.10. Numérotation droite des points de Bézier.

Les conditions  $G^2$  donnent alors

$$\begin{cases} c_6^{I+1} = c_2^I, \\ c_3^{I+1} = c_1^I, \\ c_7^{I+1} - F(B) = \tilde{\alpha} (c_5^I - F(B)) + \tilde{\beta} (c_2^I - F(B)), \\ c_4^{I+1} - c_6^{I+1} = \tilde{\alpha} (c_4^I - c_2^I) + \tilde{\beta} (c_1^I - c_2^I), \\ c_1^{I+1} - c_3^{I+1} = \tilde{\alpha} (c_3^I - c_1^I) + \tilde{\beta} (F(C) - c_1^I), \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_5^{I+1} - 2c_7^{I+1} + F(B) = \tilde{\alpha}^2 [c_7^I - 2c_5^I + F(B)] + \tilde{\beta}^2 [c_1^I - 2c_2^I + F(B)] \\ \quad + 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta} [c_4^I - c_5^I - c_2^I + F(B)], \\ c_2^{I+1} - 2c_4^{I+1} + c_6^{I+1} = \tilde{\alpha}^2 [c_6^I - 2c_4^I + c_2^I] + \tilde{\beta}^2 [F(C) - 2c_1^I + c_2^I] \\ \quad + 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta} [c_3^I - c_4^I - c_1^I + c_2^I]. \end{array} \right.$$

Le passage de  $F$  à  $G$  est défini par la relation matricielle suivante :

$$X_{I+1} = \tilde{A} \cdot X_I + \tilde{\Delta}, \quad (6.33)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma} & 0 & \tilde{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\tilde{\beta}\tilde{\gamma} & \tilde{\gamma}^2 & 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta} & 2\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} & 0 & \tilde{\alpha}^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} & 0 & \tilde{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\beta}^2 & 2\tilde{\beta}\tilde{\gamma} & 0 & 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta} & 2\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} & 0 & \tilde{\alpha}^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\beta} & 0 & 0 & \tilde{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta} F(C) \\ \tilde{\beta}^2 F(C) \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\gamma}^2 F(B) \\ 0 \\ \tilde{\gamma} F(B) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma} = 1 - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}.$$

Si on note

$$A := A(\alpha, \beta), \quad \tilde{A} := \tilde{A}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}),$$

alors

$$\tilde{A}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = A(\tilde{\alpha}, 1 - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}). \quad (6.34)$$

La progression est stable si et seulement si

$$\rho(\tilde{A}) < 1 \Leftrightarrow \rho(A(\tilde{\alpha}, 1 - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta})) < 1. \tag{6.35}$$

La condition (6.35) est équivalente à :

$$0 < \alpha^* < 1, 0 < \beta < 1 + \alpha^*, \beta < \frac{1 + \alpha^{*3}}{2\alpha^*},$$

soit :

$$\frac{2\tilde{\alpha}^*(1 + \tilde{\alpha}^*) - 1 - (\tilde{\alpha}^*)^3}{2\tilde{\alpha}^*} < \tilde{\beta} < 1 + \tilde{\alpha}^*,$$

où  $\tilde{\alpha}^* = -\tilde{\alpha} > 0$ .

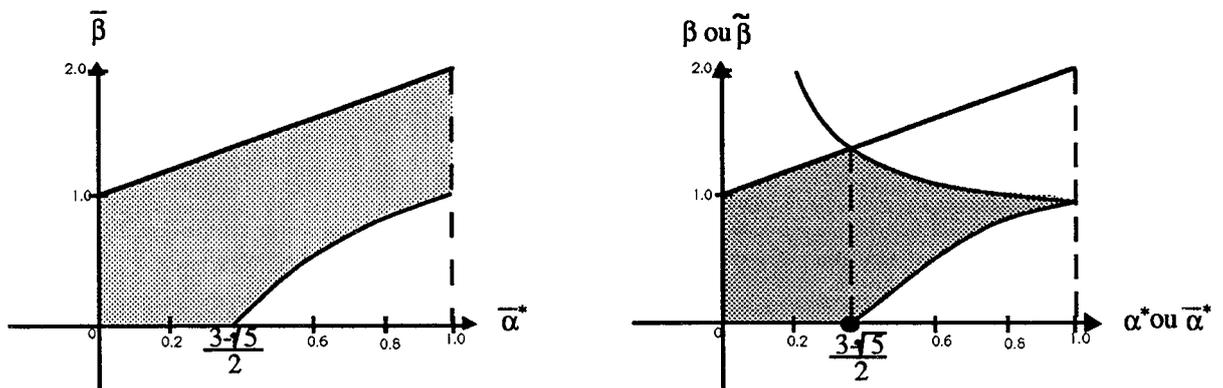


FIGURE.11. A gauche : domaine de stabilité pour  $N_d$ . A droite : domaine de stabilité pour  $N_g$  et  $N_d$  simultanément.

- On peut faire la même remarque sur la numérotation ( $N_d$ ) : elle est arbitraire.

**Deux remarques :**

- Pour que l'algorithme soit indépendant des numérotations, il suffit alors de prendre les paramètres de forme dans le domaine défini par l'intersection des deux domaines obtenus respectivement pour  $N_g$  et  $N_d$  (voir figure 11 à droite).
- On a bien mentionné la valeur  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  sur le domaine de stabilité, car cette valeur a été déjà trouvée dans le cas unidimensionnel. En effet, si  $\beta = 0$ , le raccordement  $G^2$  effectué devient tout simplement :

$$\begin{cases} G(m) = F(m), \\ G'(m; \vec{BD}) = \alpha F'(m; \vec{BA}) = -\alpha F'(m; \vec{AB}), \\ G''(m; \vec{BD}, \vec{BD}) = \alpha^2 F''(m; \vec{BA}, \vec{BA}) = \alpha^2 F''(m; \vec{AB}, \vec{AB}). \end{cases}$$

Soit  $m_0$  fixé appartenant à l'arête  $[BC]$ . Considérons l'arête parallèle à  $\vec{BD}$  issue du point  $m_0$  et soit  $q(t)$  la restriction de  $G$  à cette arête. On a facilement

$$q'(0) = G'(m_0; \vec{BD}).$$

De même considérons l'arête parallèle à  $\vec{AB}$  issue du point  $m_0$  et soit  $p(t)$  la restriction de  $F$  à cette arête. Alors on a :

$$p'(1) = F'(m_0; \vec{AB}).$$

Par conséquent, le raccordement  $G^1$  s'écrit :

$$q'(0) = (-\alpha)p'(1).$$

Par un calcul similaire, on montre que le raccordement  $G^2$  s'écrit :

$$q''(0) = \alpha^2 p''(1).$$

Comme conclusion, dans le cas particulier où  $\beta = 0$ , le raccordement  $G^2$  devient tout simplement un raccordement  $G^2$  unidimensionnel étudié dans le chapitre 2, avec

$$\beta_1 = -\alpha = \alpha^* \quad , \quad \beta_2 = 0,$$

dont on savait que la condition de stabilité était  $0 < \beta_1 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

#### 4. 3. Le raccordement $G^2$ n'est pas nécessaire

Le raccordement  $G^2$  utilisé dans la progression sert à calculer les points de contrôle qu'on ne peut pas atteindre avec un raccordement  $G^1$ , à savoir  $c_2^{I+1}$  et  $c_5^{I+1}$ . On se pose alors la question si on peut calculer ces deux points d'une autre manière tout en respectant la stabilité de l'algorithme. Cette question peut paraître inutile à cette étape de l'algorithme, mais on va donner une réponse parce que, vues les difficultés reliées à la stabilité numérique qu'on rencontrera dans la suite, on aura recours à d'autres techniques. Nous donnons dans cette partie deux nouvelles méthodes pour le calcul de ces points.

##### 4. 3. 1. Par minimisation locale

Le raccordement  $G^2$  effectué donne les valeurs de  $c_2^{I+1}$  et  $c_5^{I+1}$  comme combinaison des autres points déjà calculés grâce au raccordement  $G^1$  et aux conditions d'interpolation. D'autres combinaisons différentes peuvent être trouvées à condition de s'assurer de la stabilité. L'une de ces combinaisons est obtenue avec la condition suivante :

$$\min \int \int_{T_s} \left[ \left( \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \right)^2 \right] du dv, \quad (6.36)$$

où  $T_s$  représente le triangle standard de sommets  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,0)$ . Ceci revient à minimiser l'énergie par rapport à un triangle de référence  $T_s$  et non pas par rapport au triangle d'origine  $[DBC]$ . Après un calcul direct, on trouve :

$$\begin{aligned} c_2^{I+1} &= \frac{5}{7} c_1^{I+1} - \frac{4}{35} c_3^{I+1} + \frac{4}{35} c_4^{I+1} - \frac{2}{35} c_6^{I+1} + \frac{2}{35} c_7^{I+1} - \frac{3}{35} F(C) + \frac{13}{35} G(D), \\ c_5^{I+1} &= \frac{3}{7} c_1^{I+1} - \frac{3}{7} c_3^{I+1} + \frac{10}{7} c_4^{I+1} + \frac{2}{7} c_6^{I+1} - \frac{2}{7} c_7^{I+1} - \frac{4}{7} F(C) + \frac{1}{7} G(D). \end{aligned}$$

La condition de stabilité est alors donnée par les racines du polynôme suivant :

$$\lambda^3(\lambda^2 - \alpha - \lambda\beta)(35\lambda^2 - 23\lambda\alpha - 12\alpha^2 - 2\lambda\beta - 6\alpha\beta) = 0.$$

Le terme  $\lambda^3(\lambda^2 - \alpha - \lambda\beta)$  est relatif au raccordement  $G^1$ , et donne :

$$-1 < \alpha < 0 \quad , \quad 0 < \beta < 1 - \alpha. \quad (6.37)$$

Avec cette condition, le terme  $(35\lambda^2 - 23\lambda\alpha - 12\alpha^2 - 2\lambda\beta - 6\alpha\beta)$  qui est relatif au critère de minimisation a automatiquement ses racines à l'intérieur du cercle unité.

**Remarque :** On a la même remarque sur la numérotation : Remplacer  $\beta$  par  $1 - \alpha - \beta$  si on choisit la numérotation  $N_d$ .

#### 4. 3. 2. En utilisant les splines unidimensionnelles

Une deuxième façon de calculer les points  $c_2^{I+1}$  et  $c_5^{I+1}$  est la suivante : On va imposer que les restrictions de  $G$  aux arêtes  $[BD]$  et  $[CD]$  soient des courbes  $A$ -splines (voir chapitre 2), c'est-à-dire, des polynômes de degré 3 dont les coefficients sont reliés entre eux par une relation simple. Par conséquent, le point  $c_2^{I+1}$  (resp.  $c_5^{I+1}$ ) est obtenu par une combinaison liant les points de contrôle de la courbe définie sur l'arête  $[BD]$  (resp.  $[CD]$ ).

La restriction de  $G$  aux arêtes  $[BD]$  est donnée par :

$$G_{|[BD]}(t) = F(B) + \left(t - \frac{t^2(1+k_1t)}{1+k_1}\right)y + \frac{t^2(1+k_1t)}{1+k_1}(G(D) - F(B)). \quad (6.38)$$

En revenant à la base de Bernstein, on obtient :

$$\begin{cases} y &= 3(c_1^{I+1} - F(B)), \\ c_2^{I+1} &= c_1^{I+1} + \frac{k_1}{k_1+1}(c_1^{I+1} - F(B)) + \frac{1}{3(k_1+1)}(G(D) - F(B)). \end{cases}$$

On fait de même sur l'arête  $[CD]$ ; on aura :

$$c_5^{I+1} = c_7^{I+1} + \frac{k_2}{k_2+1}(c_7^{I+1} - F(C)) + \frac{1}{3(k_2+1)}(G(D) - F(C)),$$

où  $k_1, k_2 \in \left] -\frac{2}{3}, 0 \right[$ .

La condition de stabilité est donnée par les racines de l'équation suivante :

$$\lambda^3(\lambda - \alpha)(\lambda^2 - \alpha - \lambda\beta)(\lambda - \alpha K_2) = 0,$$

où

$$K_2 = \frac{1 + 2k_2}{1 + k_2}.$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < \alpha < 0 \quad , \quad 0 < \beta < 1 - \alpha. \\ \text{Si } -1 < \alpha < -\frac{1}{2} : \quad \frac{1-\alpha}{2\alpha-1} < k_2 < -\frac{1+\alpha}{1+2\alpha}. \\ \text{Si } -\frac{1}{2} < \alpha < 0 : \quad \frac{1-\alpha}{2\alpha-1} < k_2 < 0. \end{array} \right. \quad (6.39)$$

**Remarque :** Si on choisit la numérotation  $N_d$ , il faut remplacer  $\beta$  par  $1 - \alpha - \beta$  et permuter  $k_1$  et  $k_2$ .

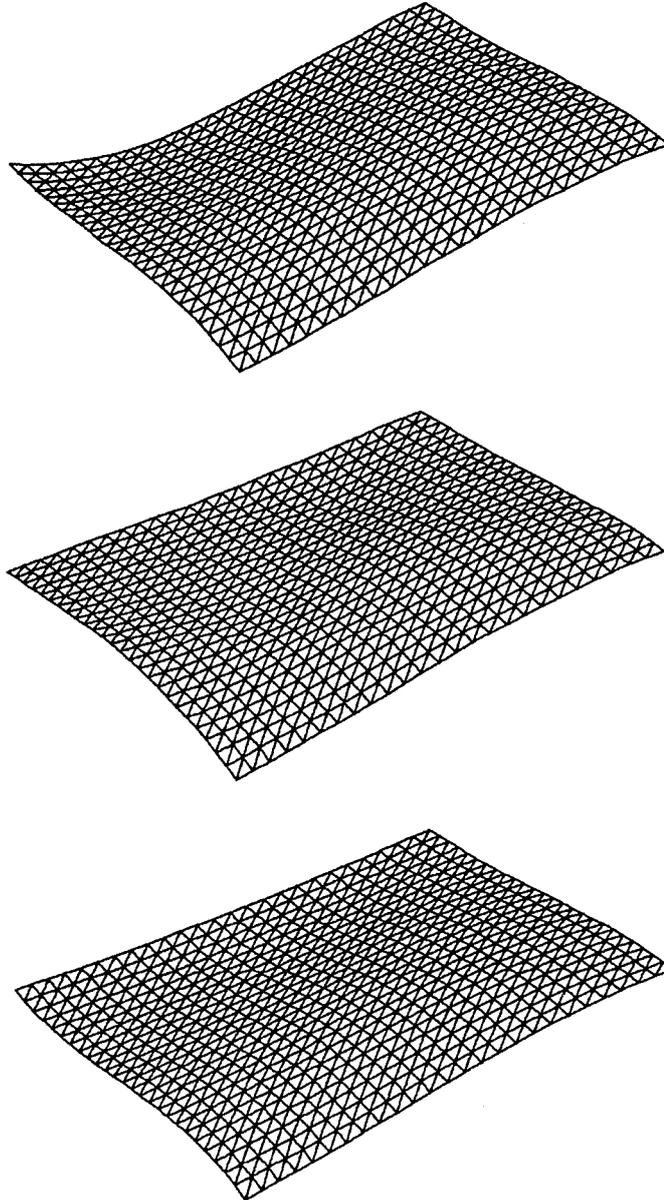


FIGURE.12. Un exemple sur deux triangles, de calcul des points  $c_2^{I+1}$  et  $c_5^{I+1}$  par trois techniques différentes. De haut en bas : par raccordement  $G^2$ , par les splines unidimensionnelles et par minimisation locale.

4. 4. Situation nécessitant un traitement particulier

L'algorithme, présenté ci-dessus, consiste à calculer le polynôme défini sur le triangle  $T_{I+1}$  en fonction du polynôme défini sur  $T_I$  par un raccordement  $G^2$  spécial. En partant du triangle  $T_{I_0}$ , on construit le polynôme sur le triangle  $T_{I_0+1}$ , etc ... Mais on se heurte à la situation particulière suivante

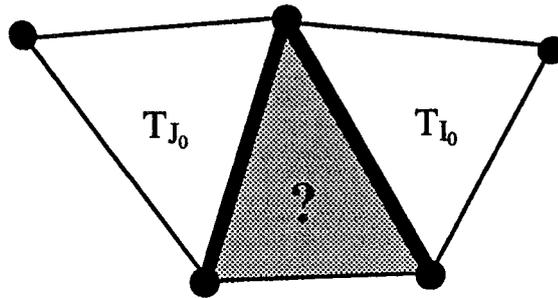


FIGURE.13. Connaissant  $F_{I_0}$  et  $F_{J_0}$ , comment construire le morceau défini sur le triangle hachuré ?

où on ne peut plus calculer le polynôme défini sur le triangle hachuré par ce procédé car on risque de perdre la continuité avec le morceau  $I_0$ . On propose alors de remplir ces régions en utilisant le traitement particulier suivant : On divise le triangle en trois sous-triangles, sur chaque sous triangle, on définit un polynôme de degré 3, et on demandera un raccordement  $G^1$  le long des deux arêtes de front et le long des trois arêtes créées à l'intérieur du triangle.

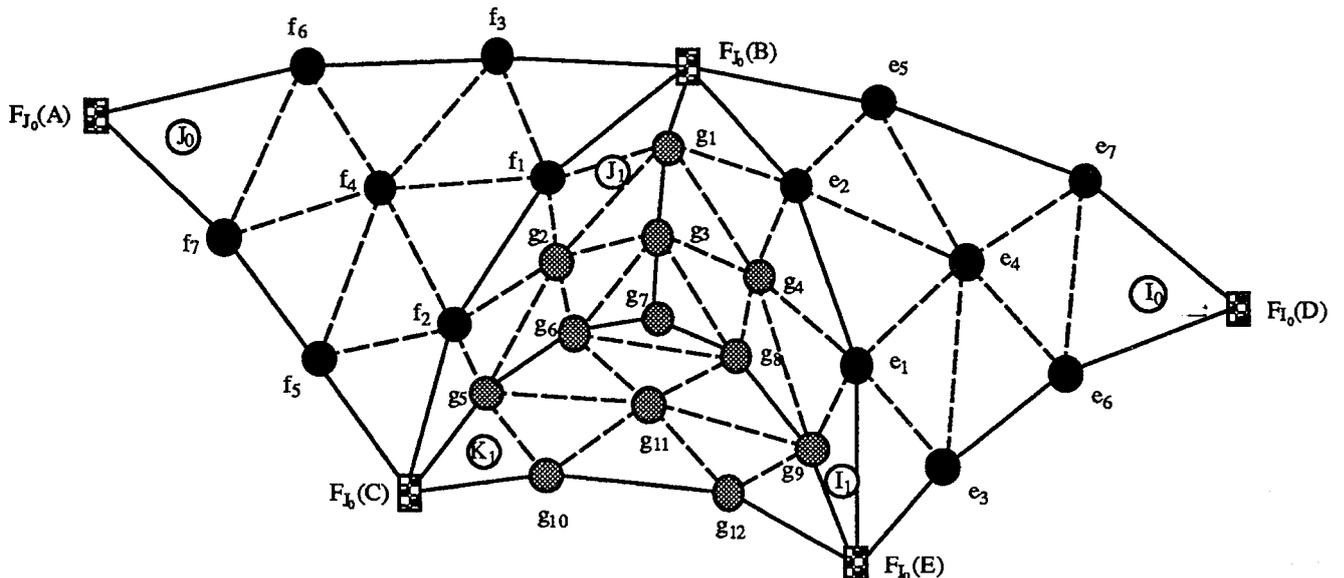


FIGURE.14. Réponse à la situation de la figure 13 .

On suppose que  $F_{I_0}$  et  $F_{J_0}$  sont connus, et on veut déterminer les morceaux  $F_{I_1}$ ,  $F_{J_1}$  et  $F_{K_1}$ .

Pour simplifier les notations, on va poser

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_k := c_k^{I_0}, & k = 1, \dots, 7, \\ f_k := c_k^{J_0}, & k = 1, \dots, 7, \\ g_k := c_k^{I_1, J_1, K_1}, & k = 1, \dots, 12. \end{array} \right. \quad (6.40)$$

• **Raccordement  $G^1$  entre  $F_{J_0}$  et  $F_{J_1}$  autour de  $C$  :**

$$g_1 = \alpha_1 f_3 + \beta_1 f_1 + (1 - \alpha_1 - \beta_1) F_{J_0}(B), \quad (1)$$

$$g_2 = \alpha_1 f_4 + \beta_1 f_2 + (1 - \alpha_1 - \beta_1) f_1, \quad (2)$$

$$g_5 = \alpha_1 f_5 + \beta_1 F_{J_0}(C) + (1 - \alpha_1 - \beta_1) f_2. \quad (3)$$

• **Raccordement  $G^1$  entre  $F_{J_1}$  et  $F_{K_1}$  autour de  $C$  :**

$$g_7 = \alpha_2 g_8 + \beta_2 g_6 + (1 - \alpha_2 - \beta_2) g_3, \quad (4)$$

$$g_6 = \alpha_2 g_{11} + \beta_2 g_5 + (1 - \alpha_2 - \beta_2) g_2, \quad (5)$$

$$g_5 = \alpha_2 g_{10} + \beta_2 F_{J_0}(C) + (1 - \alpha_2 - \beta_2) f_2. \quad (6)$$

• **Raccordement  $G^1$  entre  $F_{I_0}$  et  $F_{I_1}$  autour de  $E$  :**

$$g_9 = \alpha_3 e_3 + \beta_3 e_1 + (1 - \alpha_3 - \beta_3) F_{I_0}(E), \quad (7)$$

$$g_4 = \alpha_3 e_4 + \beta_3 e_2 + (1 - \alpha_3 - \beta_3) e_1, \quad (8)$$

$$g_1 = \alpha_3 e_5 + \beta_3 F_{J_0}(B) + (1 - \alpha_3 - \beta_3) e_2. \quad (9)$$

• **Raccordement  $G^1$  entre  $F_{I_1}$  et  $F_{K_1}$  autour de  $E$  :**

$$g_9 = \alpha_4 F_{I_0}(E) + \beta_4 g_{12} + (1 - \alpha_4 - \beta_4) e_1, \quad (10)$$

$$g_8 = \alpha_4 g_9 + \beta_4 g_{11} + (1 - \alpha_4 - \beta_4) g_4, \quad (11)$$

$$g_7 = \alpha_4 g_8 + \beta_4 g_6 + (1 - \alpha_4 - \beta_4) g_3. \quad (12)$$

• **Raccordement  $G^1$  entre  $F_{J_1}$  et  $F_{I_1}$  autour de  $B$  :**

$$g_1 = \alpha_5 e_2 + \beta_5 f_1 + (1 - \alpha_5 - \beta_5) F_{J_0}(B), \quad (13)$$

$$g_3 = \alpha_5 g_4 + \beta_5 g_2 + (1 - \alpha_5 - \beta_5) g_1, \quad (14)$$

$$g_7 = \alpha_5 g_8 + \beta_5 g_6 + (1 - \alpha_5 - \beta_5) g_3. \quad (15)$$

## 4. 4. 1. Résolution du système et conditions de compatibilité

Des équations (1), (2) et (3), on tire :

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_1 f_3 + \beta_1 f_1 + (1 - \alpha_1 - \beta_1) F_{J_0}(B), \\ g_2 &= \alpha_1 f_4 + \beta_1 f_2 + (1 - \alpha_1 - \beta_1) f_1, \\ g_5 &= \alpha_1 f_5 + \beta_1 F_{J_0}(C) + (1 - \alpha_1 - \beta_1) f_2. \end{aligned}$$

Des équations (6), (7) et (8), on obtient :

$$\begin{aligned} g_{10} &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ g_5 - \beta_2 F_{J_0}(C) - (1 - \alpha_2 - \beta_2) f_2 \right], \\ g_9 &= \alpha_3 e_3 + \beta_3 e_1 + (1 - \alpha_3 - \beta_3) F_{I_0}(E), \\ g_4 &= \alpha_3 e_4 + \beta_3 e_2 + (1 - \alpha_3 - \beta_3) e_1. \end{aligned}$$

Des équations (10) et (14), on déduit :

$$\begin{aligned} g_{12} &= \frac{1}{\beta_4} \left[ g_9 - \alpha_4 F_{I_0}(E) - (1 - \alpha_4 - \beta_4) e_1 \right], \\ g_3 &= \alpha_5 g_4 + \beta_5 g_2 + (1 - \alpha_5 - \beta_5) g_1. \end{aligned}$$

Des équations (9), (13), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{|g_1 - e_2, F_{J_0}(B) - e_2|}{|e_5 - e_2, F_{J_0}(B) - e_2|}, & \beta_3 &= \frac{|e_5 - e_2, g_1 - e_2|}{|e_5 - e_2, F_{J_0}(B) - e_2|}, \\ \alpha_5 &= \frac{|g_1 - F_{J_0}(B), f_1 - F_{J_0}(B)|}{|e_2 - F_{J_0}(B), f_1 - F_{J_0}(B)|}, & \beta_5 &= \frac{|e_2 - F_{J_0}(B), g_1 - F_{J_0}(B)|}{|e_2 - F_{J_0}(B), f_1 - F_{J_0}(B)|}, \end{aligned}$$

ou plus explicitement :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{|e_2 - F_{J_0}(B), f_1 - F_{J_0}(B)|}{|f_3 - F_{J_0}(B), f_1 - F_{J_0}(B)|} \alpha_5, \\ \beta_1 = \beta_5 - \frac{|e_2 - F_{J_0}(B), f_3 - F_{J_0}(B)|}{|f_3 - F_{J_0}(B), f_1 - F_{J_0}(B)|} \alpha_5, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_3 = \frac{|f_3 - F_{J_0}(B), e_2 - F_{J_0}(B)|}{|e_5 - e_2, e_2 - F_{J_0}(B)|} \alpha_1 + \frac{|f_1 - F_{J_0}(B), e_2 - F_{J_0}(B)|}{|e_5 - e_2, e_2 - F_{J_0}(B)|} \beta_1, \\ \beta_3 = 1 - \frac{|e_5 - e_2, f_3 - F_{J_0}(B)|}{|e_5 - e_2, e_2 - F_{J_0}(B)|} \alpha_1 - \frac{|e_5 - e_2, f_1 - F_{J_0}(B)|}{|e_5 - e_2, e_2 - F_{J_0}(B)|} \beta_1. \end{cases}$$

Les relations (4), (12) et (15) sont compatibles si on a

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 \quad , \quad \beta_2 = \beta_4 = \beta_5.$$

Des équations (5), (11) et (15), on tire

$$\begin{aligned} g_6 &= \alpha_2 g_{11} + \beta_2 g_5 + (1 - \alpha_2 - \beta_2) g_2, \\ g_8 &= \alpha_4 g_9 + \beta_4 g_{11} + (1 - \alpha_4 - \beta_4) g_4, \\ g_7 &= \alpha_5 g_8 + \beta_5 g_6 + (1 - \alpha_5 - \beta_5) g_3. \end{aligned}$$

Les points  $g_6$ ,  $g_8$ ,  $g_7$  sont connus si et seulement si la valeur de  $g_{11}$  est déterminée.

#### 4. 4. 2. Première approche pour le calcul de $g_{11}$

Soit  $P(u, v)$  un polynôme de degré 3 défini sur un triangle  $T$ . Si on note

$$D_2^T P = \int \int_T \left[ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right)^2 \right] du dv,$$

alors on peut approximer la valeur de  $g_{11}$  en minimisant la quantité

$$\min \left( D_2^T F_{I_1} + D_2^T F_{J_1} + D_2^T F_{K_1} \right), \quad (6.41)$$

où  $T_s$  est le triangle standard de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$ . Un calcul direct nous donne :

$$g_{11} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad (6.42)$$

où

$$r_1 = 6(12 - 8\alpha_5 + 9\alpha_5^2 + 6\beta_5 - 9\alpha_5\beta_5 - 6\alpha_5^2\beta_5 + 10\beta_5^2 - 12\alpha_5\beta_5^2 + 24\alpha_5^2\beta_5^2),$$

$$r_2 = u_0F_{J_0}(C) + u_1F_{J_0}(B) + u_2F_{I_0}(E) + u_3e_1 + u_4e_2 + u_5f_1 + u_6f_2 + u_7g_1 \\ + u_8g_2 + u_9g_3 + u_{10}g_4 + u_{11}g_5 + u_{12}g_9 + u_{13}g_{10} + u_{14}g_{12},$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = -6 + 6\alpha_5\beta_5, \\ u_1 = 3\alpha_5 + 6\alpha_5\beta_5, \\ u_2 = -12 + 9\alpha_5 - 12\beta_5 + 12\alpha_5\beta_5, \\ u_3 = -3\beta_5 + 6\alpha_5\beta_5, \\ u_4 = 6\beta_5, \\ u_5 = 6\alpha_5 + 18\alpha_5\beta_5, \\ u_6 = 3\alpha_5 + 18\alpha_5\beta_5, \\ u_7 = -3\alpha_5 - 6\beta_5 - 12\alpha_5\beta_5, \\ u_8 = -24 + 60\alpha_5 - 54\alpha_5^2 + 3\beta_5 - 84\alpha_5\beta_5 + 27\alpha_5^2\beta_5 + 3\beta_5^2 + 117\alpha_5\beta_5^2 \\ \quad - 72\alpha_5^2\beta_5^2 + 18\beta_5^3 - 72\alpha_5\beta_5^3, \\ u_9 = -6 - 3\alpha_5 + 9\alpha_5^2 - 27\beta_5 + 81\alpha_5\beta_5 - 72\alpha_5^2\beta_5 + 18\beta_5^2 - 72\alpha_5\beta_5^2, \\ u_{10} = 18 - 39\alpha_5 + 12\alpha_5^2 + 9\alpha_5^3 + 60\beta_5 - 105\alpha_5\beta_5 + 135\alpha_5^2\beta_5 - 72\alpha_5^3\beta_5 \\ \quad - 60\beta_5^2 + 54\alpha_5\beta_5^2 - 72\alpha_5^2\beta_5^2, \\ u_{11} = -24 - 9\alpha_5 - 30\beta_5 + 42\alpha_5\beta_5 - 21\beta_5^2 - 27\alpha_5\beta_5^2 - 18\beta_5^3 + 72\alpha_5\beta_5^3, \\ u_{12} = -18 + 21\alpha_5 - 21\alpha_5^2 - 9\alpha_5^3 - 30\beta_5 + 60\alpha_5\beta_5 - 54\alpha_5^2\beta_5 + 72\alpha_5^3\beta_5, \\ u_{13} = 18 - 6\alpha_5 + 6\beta_5, \\ u_{14} = -18 + 6\alpha_5 - 3\beta_5 + 6\alpha_5\beta_5. \end{array} \right.$$

**Remarque :**

$$-\sum_{i=0}^{14} \frac{u_i}{r_1} = 1.$$

## 4. 4. 3. Stabilité d'un tel traitement

Dans le paragraphe (4.4.1), nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que le passage d'un triangle à son voisin par arête s'effectue d'une manière stable. Malheureusement, ce résultat ne peut pas être appliqué dans la situation actuelle (figure 14) car le passage du triangle  $J_0$  au triangle  $K_1$  (triangle qui va servir pour la prochaine itération) est particulier. Le morceau  $F_{K_1}$  défini sur le triangle  $K_1$ , est exprimé en fonction des morceaux définis sur  $I_0$  et  $J_0$ , i.e.,  $X_{K_1}$  est exprimé en fonction de  $X_{I_0}$  et  $X_{J_0}$  par la relation matricielle suivante :

$$X_{K_1} := \begin{bmatrix} g_{12} \\ g_{10} \\ g_9 \\ g_{11} \\ g_5 \\ g_8 \\ g_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & 0 & 0 \\ 0 & q_8 & 0 & 0 & q_9 & 0 & 0 \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 0 & 0 \\ q_{15} & q_{16} & q_{17} & q_{18} & q_{19} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{J_0}} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 & 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & t_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} & 0 & 0 & 0 \\ t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{I_0}} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}}_{V^1},$$

où

$$q_1 = -(\gamma - \gamma_1)/\alpha_5,$$

$$q_2 = \alpha_1/\alpha_5,$$

$$\begin{aligned} q_3 = & 3(-2\alpha_5 + \alpha_5\beta_1 - 6\alpha_5\beta_5 + 2\beta_1\beta_5 + 4\alpha_5\beta_1\beta_5 + 2\beta_1\gamma + \alpha_5\beta_1\gamma - 3\alpha_5^2\beta_1\gamma \\ & + 9\beta_1\beta_5\gamma - 27\alpha_5\beta_1\beta_5\gamma + 24\alpha_5^2\beta_1\beta_5\gamma - 6\beta_1\beta_5^2\gamma + 24\alpha_5\beta_1\beta_5^2\gamma + 8\gamma_1 - 20\alpha_5\gamma_1 \\ & + 18\alpha_5^2\gamma_1 + \beta_5\gamma_1 + 29\alpha_5\beta_5\gamma_1 - 12\alpha_5^2\beta_5\gamma_1 + 8\beta_5^2\gamma_1 - 66\alpha_5\beta_5^2\gamma_1 + 48\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_1 \\ & - 12\beta_5^3\gamma_1 + 48\alpha_5\beta_5^3\gamma_1)/r_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_4 &= 3(-\alpha_5^2 + 8\alpha_5\beta_1 - 20\alpha_5^2\beta_1 + 18\alpha_5^3\beta_1 - 6\alpha_5^2\beta_5 + \alpha_5\beta_1\beta_5 + 29\alpha_5^2\beta_1\beta_5 \\
&\quad - 12\alpha_5^3\beta_1\beta_5 + 8\alpha_5\beta_1\beta_5^2 - 66\alpha_5^2\beta_1\beta_5^2 + 48\alpha_5^3\beta_1\beta_5^2 - 12\alpha_5\beta_1\beta_5^3 + 48\alpha_5^2\beta_1\beta_5^3 \\
&\quad + 6\gamma - 2\alpha_5\gamma + 2\beta_5\gamma - 6\gamma_1 + 10\alpha_5\gamma_1 + 3\alpha_5^2\gamma_1 - 2\beta_5\gamma_1 + 10\alpha_5\beta_5\gamma_1 - 14\alpha_5^2\beta_5\gamma_1 \\
&\quad + 7\alpha_5\beta_5^2\gamma_1 + 9\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_1 + 6\alpha_5\beta_5^3\gamma_1 - 24\alpha_5^2\beta_5^3\gamma_1)/\alpha_5r_1, \\
q_5 &= 3\alpha_1(\alpha_5 + 2\beta_5 + 4\alpha_5\beta_5 + 2\gamma + \alpha_5\gamma - 3\alpha_5^2\gamma + 9\beta_5\gamma - 27\alpha_5\beta_5\gamma + 24\alpha_5^2\beta_5\gamma \\
&\quad - 6\beta_5^2\gamma + 24\alpha_5\beta_5^2\gamma)/r_1, \\
q_6 &= 3\alpha_1(8 - 20\alpha_5 + 18\alpha_5^2 + \beta_5 + 29\alpha_5\beta_5 - 12\alpha_5^2\beta_5 + 8\beta_5^2 - 66\alpha_5\beta_5^2 + 48\alpha_5^2\beta_5^2 \\
&\quad - 12\beta_5^3 + 48\alpha_5\beta_5^3)/r_1, \\
q_7 &= -3\alpha_1(6 - 10\alpha_5 - 3\alpha_5^2 + 2\beta_5 - 10\alpha_5\beta_5 + 14\alpha_5^2\beta_5 - 7\alpha_5\beta_5^2 - 9\alpha_5^2\beta_5^2 - 6\alpha_5\beta_5^3 \\
&\quad + 24\alpha_5^2\beta_5^3)/\alpha_5r_1, \\
q_8 &= \gamma_1, \\
q_9 &= \alpha_1, \\
q_{10} &= 3\beta_5(-2\alpha_5 + \alpha_5\beta_1 - 6\alpha_5\beta_5 + 2\beta_1\beta_5 + 4\alpha_5\beta_1\beta_5 + 2\beta_1\gamma + \alpha_5\beta_1\gamma - 3\alpha_5^2\beta_1\gamma \\
&\quad + 9\beta_1\beta_5\gamma - 27\alpha_5\beta_1\beta_5\gamma + 24\alpha_5^2\beta_1\beta_5\gamma - 6\beta_1\beta_5^2\gamma + 24\alpha_5\beta_1\beta_5^2\gamma + 8\gamma_1 \\
&\quad - 20\alpha_5\gamma_1 + 18\alpha_5^2\gamma_1 + \beta_5\gamma_1 + 29\alpha_5\beta_5\gamma_1 - 12\alpha_5^2\beta_5\gamma_1 + 8\beta_5^2\gamma_1 - 66\alpha_5\beta_5^2\gamma_1 \\
&\quad + 48\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_1 - 12\beta_5^3\gamma_1 + 48\alpha_5\beta_5^3\gamma_1)/r_1, \\
q_{11} &= 3\beta_5(-\alpha_5^2 + 8\alpha_5\beta_1 - 20\alpha_5^2\beta_1 + 18\alpha_5^3\beta_1 - 6\alpha_5^2\beta_5 + \alpha_5\beta_1\beta_5 + 29\alpha_5^2\beta_1\beta_5 \\
&\quad - 12\alpha_5^3\beta_1\beta_5 + 8\alpha_5\beta_1\beta_5^2 - 66\alpha_5^2\beta_1\beta_5^2 + 48\alpha_5^3\beta_1\beta_5^2 - 12\alpha_5\beta_1\beta_5^3 + 48\alpha_5^2\beta_1\beta_5^3 \\
&\quad + 6\gamma - 2\alpha_5\gamma + 2\beta_5\gamma - 6\gamma_1 + 10\alpha_5\gamma_1 + 3\alpha_5^2\gamma_1 - 2\beta_5\gamma_1 + 10\alpha_5\beta_5\gamma_1 - 14\alpha_5^2\beta_5\gamma_1 \\
&\quad + 7\alpha_5\beta_5^2\gamma_1 + 9\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_1 + 6\alpha_5\beta_5^3\gamma_1 - 24\alpha_5^2\beta_5^3\gamma_1)/\alpha_5r_1, \\
q_{12} &= 3\alpha_1\beta_5(\alpha_5 + 2\beta_5 + 4\alpha_5\beta_5 + 2\gamma + \alpha_5\gamma - 3\alpha_5^2\gamma + 9\beta_5\gamma - 27\alpha_5\beta_5\gamma + 24\alpha_5^2\beta_5\gamma \\
&\quad - 6\beta_5^2\gamma + 24\alpha_5\beta_5^2\gamma)/r_1, \\
q_{13} &= 3\alpha_1\beta_5(8 - 20\alpha_5 + 18\alpha_5^2 + \beta_5 + 29\alpha_5\beta_5 - 12\alpha_5^2\beta_5 + 8\beta_5^2 - 66\alpha_5\beta_5^2 + 48\alpha_5^2\beta_5^2 \\
&\quad - 12\beta_5^3 + 48\alpha_5\beta_5^3)/r_1, \\
q_{14} &= -3\alpha_1\beta_5(6 - 10\alpha_5 - 3\alpha_5^2 + 2\beta_5 - 10\alpha_5\beta_5 + 14\alpha_5^2\beta_5 - 7\alpha_5\beta_5^2 - 9\alpha_5^2\beta_5^2 - 6\alpha_5\beta_5^3 \\
&\quad + 24\alpha_5^2\beta_5^3)/\alpha_5r_1, \\
q_{15} &= 3(-2\alpha_5^2 + \alpha_5^2\beta_1 - 6\alpha_5^2\beta_5 + 2\alpha_5\beta_1\beta_5 + 4\alpha_5^2\beta_1\beta_5 + 2\alpha_5\beta_1\gamma + \alpha_5^2\beta_1\gamma - 3\alpha_5^3\beta_1\gamma \\
&\quad + 9\alpha_5\beta_1\beta_5\gamma - 27\alpha_5^2\beta_1\beta_5\gamma + 24\alpha_5^3\beta_1\beta_5\gamma - 6\alpha_5\beta_1\beta_5^2\gamma + 24\alpha_5^2\beta_1\beta_5^2\gamma + 8\alpha_5\gamma_1 \\
&\quad - 20\alpha_5^2\gamma_1 + 18\alpha_5^3\gamma_1 + \alpha_5\beta_5\gamma_1 + 29\alpha_5^2\beta_5\gamma_1 - 12\alpha_5^3\beta_5\gamma_1 + 8\alpha_5\beta_5^2\gamma_1 - 66\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_1 \\
&\quad + 48\alpha_5^3\beta_5^2\gamma_1 - 12\alpha_5\beta_5^3\gamma_1 + 48\alpha_5^2\beta_5^3\gamma_1 + 24\gamma\gamma_1 - 16\alpha_5\gamma\gamma_1 + 18\alpha_5^2\gamma\gamma_1 + 12\beta_5\gamma\gamma_1 \\
&\quad - 18\alpha_5\beta_5\gamma\gamma_1 - 12\alpha_5^2\beta_5\gamma\gamma_1 + 20\beta_5^2\gamma\gamma_1 - 24\alpha_5\beta_5^2\gamma\gamma_1 + 48\alpha_5^2\beta_5^2\gamma\gamma_1)/r_1, \\
q_{16} &= 3(-\alpha_5^2 + 8\alpha_5\beta_1 - 20\alpha_5^2\beta_1 + 18\alpha_5^3\beta_1 - 6\alpha_5^2\beta_5 + \alpha_5\beta_1\beta_5 + 29\alpha_5^2\beta_1\beta_5 - 12\alpha_5^3\beta_1\beta_5 \\
&\quad + 8\alpha_5\beta_1\beta_5^2 - 66\alpha_5^2\beta_1\beta_5^2 + 48\alpha_5^3\beta_1\beta_5^2 - 12\alpha_5\beta_1\beta_5^3 + 48\alpha_5^2\beta_1\beta_5^3 + 6\gamma - 2\alpha_5\gamma \\
&\quad + 24\beta_1\gamma - 16\alpha_5\beta_1\gamma + 18\alpha_5^2\beta_1\gamma + 2\beta_5\gamma + 12\beta_1\beta_5\gamma - 18\alpha_5\beta_1\beta_5\gamma - 12\alpha_5^2\beta_1\beta_5\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 20\beta_1\beta_5^2\gamma - 24\alpha_5\beta_1\beta_5^2\gamma + 48\alpha_5^2\beta_1\beta_5^2\gamma - 6\gamma_1 + 10\alpha_5\gamma_1 + 3\alpha_5^2\gamma_1 + 22\beta_5\gamma_1 \\
& - 6\alpha_5\beta_5\gamma_1 + 4\alpha_5^2\beta_5\gamma_1 + 12\beta_5^2\gamma_1 - 11\alpha_5\beta_5^2\gamma_1 - 3\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_1 + 20\beta_5^3\gamma_1 - 18\alpha_5\beta_5^3\gamma_1 \\
& + 24\alpha_5^2\beta_5^3\gamma_1)/r_1, \\
q_{17} & = 3\alpha_1\alpha_5(\alpha_5 + 2\beta_5 + 4\alpha_5\beta_5 + 2\gamma + \alpha_5\gamma - 3\alpha_5^2\gamma + 9\beta_5\gamma - 27\alpha_5\beta_5\gamma + 24\alpha_5^2\beta_5\gamma \\
& - 6\beta_5^2\gamma + 24\alpha_5\beta_5^2\gamma)/r_1, \\
q_{18} & = 3\alpha_1(8\alpha_5 - 20\alpha_5^2 + 18\alpha_5^3 + \alpha_5\beta_5 + 29\alpha_5^2\beta_5 - 12\alpha_5^3\beta_5 + 8\alpha_5\beta_5^2 - 66\alpha_5^2\beta_5^2 \\
& + 48\alpha_5^3\beta_5^2 - 12\alpha_5\beta_5^3 + 48\alpha_5^2\beta_5^3 + 24\gamma - 16\alpha_5\gamma + 18\alpha_5^2\gamma + 12\beta_5\gamma - 18\alpha_5\beta_5\gamma \\
& - 12\alpha_5^2\beta_5\gamma + 20\beta_5^2\gamma - 24\alpha_5\beta_5^2\gamma + 48\alpha_5^2\beta_5^2\gamma)/r_1, \\
q_{19} & = 3\alpha_1(-6 + 10\alpha_5 + 3\alpha_5^2 + 22\beta_5 - 6\alpha_5\beta_5 + 4\alpha_5^2\beta_5 + 12\beta_5^2 - 11\alpha_5\beta_5^2 - 3\alpha_5^2\beta_5^2 \\
& + 20\beta_5^3 - 18\alpha_5\beta_5^3 + 24\alpha_5^2\beta_5^3)/r_1, \\
t_1 & = (\beta_3 - \gamma)/\beta_5, \\
t_2 & = \alpha_3/\beta_5, \\
t_3 & = \beta_3, \\
t_4 & = \alpha_3, \\
t_5 & = -3(-6\beta_3 + 2\alpha_5\beta_3 - 7\beta_3\beta_5 + 9\alpha_5\beta_3\beta_5 - 7\alpha_5^2\beta_3\beta_5 - 3\alpha_5^3\beta_3\beta_5 - \beta_5^2 + 2\alpha_5\beta_5^2 \\
& - 10\beta_3\beta_5^2 + 20\alpha_5\beta_3\beta_5^2 - 18\alpha_5^2\beta_3\beta_5^2 + 24\alpha_5^3\beta_3\beta_5^2 + 6\gamma - 2\alpha_5\gamma + \beta_5\gamma - 2\alpha_5\beta_5\gamma \\
& + 6\beta_5\gamma_3 - 15\alpha_5\beta_5\gamma_3 + 3\alpha_5^2\beta_5\gamma_3 + 6\alpha_5^3\beta_5\gamma_3 + 20\beta_5^2\gamma_3 - 44\alpha_5\beta_5^2\gamma_3 + 72\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_3 \\
& - 48\alpha_5^3\beta_5^2\gamma_3 - 20\beta_5^3\gamma_3 + 24\alpha_5\beta_5^3\gamma_3 - 48\alpha_5^2\beta_5^3\gamma_3)/\beta_5r_1, \\
t_6 & = 3(-6\beta_3 + 15\alpha_5\beta_3 - 3\alpha_5^2\beta_3 - 6\alpha_5^3\beta_3 - 2\beta_5 - 20\beta_3\beta_5 + 44\alpha_5\beta_3\beta_5 - 72\alpha_5^2\beta_3\beta_5 \\
& + 48\alpha_5^3\beta_3\beta_5 + 20\beta_3\beta_5^2 - 24\alpha_5\beta_3\beta_5^2 + 48\alpha_5^2\beta_3\beta_5^2)/r_1, \\
t_7 & = -3\alpha_3(-6 + 2\alpha_5 - 7\beta_5 + 9\alpha_5\beta_5 - 7\alpha_5^2\beta_5 - 3\alpha_5^3\beta_5 - 10\beta_5^2 + 20\alpha_5\beta_5^2 - 18\alpha_5^2\beta_5^2 \\
& + 24\alpha_5^3\beta_5^2)/\beta_5r_1, \\
t_8 & = 3\alpha_3(-6 + 15\alpha_5 - 3\alpha_5^2 - 6\alpha_5^3 - 20\beta_5 + 44\alpha_5\beta_5 - 72\alpha_5^2\beta_5 + 48\alpha_5^3\beta_5 + 20\beta_5^2 \\
& - 24\alpha_5\beta_5^2 + 48\alpha_5^2\beta_5^2)/r_1, \\
t_9 & = 3(6\beta_3 + 22\alpha_5\beta_3 - 16\alpha_5^2\beta_3 + 18\alpha_5^3\beta_3 + 7\beta_3\beta_5 + 3\alpha_5\beta_3\beta_5 - 11\alpha_5^2\beta_3\beta_5 - 9\alpha_5^3\beta_3\beta_5 \\
& + \beta_5^2 - 2\alpha_5\beta_5^2 + 10\beta_3\beta_5^2 - 6\alpha_5^2\beta_3\beta_5^2 + 24\alpha_5^3\beta_3\beta_5^2 - 6\gamma + 2\alpha_5\gamma - \beta_5\gamma + 2\alpha_5\beta_5\gamma \\
& - 6\beta_5\gamma_3 + 15\alpha_5\beta_5\gamma_3 - 3\alpha_5^2\beta_5\gamma_3 - 6\alpha_5^3\beta_5\gamma_3 - 20\beta_5^2\gamma_3 + 44\alpha_5\beta_5^2\gamma_3 - 72\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_3 \\
& + 48\alpha_5^3\beta_5^2\gamma_3 + 20\beta_5^3\gamma_3 - 24\alpha_5\beta_5^3\gamma_3 + 48\alpha_5^2\beta_5^3\gamma_3 + 24\gamma\gamma_3 - 16\alpha_5\gamma\gamma_3 + 18\alpha_5^2\gamma\gamma_3 \\
& + 12\beta_5\gamma\gamma_3 - 18\alpha_5\beta_5\gamma\gamma_3 - 12\alpha_5^2\beta_5\gamma\gamma_3 + 20\beta_5^2\gamma\gamma_3 - 24\alpha_5\beta_5^2\gamma\gamma_3 + 48\alpha_5^2\beta_5^2\gamma\gamma_3)/r_1, \\
t_{10} & = 3(-6\beta_3\beta_5 + 15\alpha_5\beta_3\beta_5 - 3\alpha_5^2\beta_3\beta_5 - 6\alpha_5^3\beta_3\beta_5 - 2\beta_5^2 - 20\beta_3\beta_5^2 + 44\alpha_5\beta_3\beta_5^2 \\
& - 72\alpha_5^2\beta_3\beta_5^2 + 48\alpha_5^3\beta_3\beta_5^2 + 20\beta_3\beta_5^3 - 24\alpha_5\beta_3\beta_5^3 + 48\alpha_5^2\beta_3\beta_5^3 + 24\beta_3\gamma \\
& - 16\alpha_5\beta_3\gamma + 18\alpha_5^2\beta_3\gamma + 12\beta_3\beta_5\gamma - 18\alpha_5\beta_3\beta_5\gamma - 12\alpha_5^2\beta_3\beta_5\gamma + 20\beta_3\beta_5^2\gamma \\
& - 24\alpha_5\beta_3\beta_5^2\gamma + 48\alpha_5^2\beta_3\beta_5^2\gamma)/r_1, \\
t_{11} & = 3\alpha_3(6 + 22\alpha_5 - 16\alpha_5^2 + 18\alpha_5^3 + 7\beta_5 + 3\alpha_5\beta_5 - 11\alpha_5^2\beta_5 - 9\alpha_5^3\beta_5 + 10\beta_5^2 \\
& - 6\alpha_5^2\beta_5^2 + 24\alpha_5^3\beta_5^2)/r_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{12} &= 3\alpha_3(-6\beta_5 + 15\alpha_5\beta_5 - 3\alpha_5^2\beta_5 - 6\alpha_5^3\beta_5 - 20\beta_5^2 + 44\alpha_5\beta_5^2 - 72\alpha_5^2\beta_5^2 + 48\alpha_5^3\beta_5^2 \\
&\quad + 20\beta_5^3 - 24\alpha_5\beta_5^3 + 48\alpha_5^2\beta_5^3 + 24\gamma - 16\alpha_5\gamma + 18\alpha_5^2\gamma + 12\beta_5\gamma - 18\alpha_5\beta_5\gamma \\
&\quad - 12\alpha_5^2\beta_5\gamma + 20\beta_5^2\gamma - 24\alpha_5\beta_5^2\gamma + 48\alpha_5^2\beta_5^2\gamma)/r_1, \\
t_{13} &= -3\alpha_5(-6\beta_3 + 2\alpha_5\beta_3 - 7\beta_3\beta_5 + 9\alpha_5\beta_3\beta_5 - 7\alpha_5^2\beta_3\beta_5 - 3\alpha_5^3\beta_3\beta_5 - \beta_5^2 + 2\alpha_5\beta_5^2 \\
&\quad - 10\beta_3\beta_5^2 + 20\alpha_5\beta_3\beta_5^2 - 18\alpha_5^2\beta_3\beta_5^2 + 24\alpha_5^3\beta_3\beta_5^2 + 6\gamma - 2\alpha_5\gamma + \beta_5\gamma - 2\alpha_5\beta_5\gamma \\
&\quad + 6\beta_5\gamma_3 - 15\alpha_5\beta_5\gamma_3 + 3\alpha_5^2\beta_5\gamma_3 + 6\alpha_5^3\beta_5\gamma_3 + 20\beta_5^2\gamma_3 - 44\alpha_5\beta_5^2\gamma_3 + 72\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_3 \\
&\quad - 48\alpha_5^3\beta_5^2\gamma_3 - 20\beta_5^3\gamma_3 + 24\alpha_5\beta_5^3\gamma_3 - 48\alpha_5^2\beta_5^3\gamma_3)/\beta_5r_1, \\
t_{14} &= 3\alpha_5(-6\beta_3 + 15\alpha_5\beta_3 - 3\alpha_5^2\beta_3 - 6\alpha_5^3\beta_3 - 2\beta_5 - 20\beta_3\beta_5 + 44\alpha_5\beta_3\beta_5 - 72\alpha_5^2\beta_3\beta_5 \\
&\quad + 48\alpha_5^3\beta_3\beta_5 + 20\beta_3\beta_5^2 - 24\alpha_5\beta_3\beta_5^2 + 48\alpha_5^2\beta_3\beta_5^2)/r_1, \\
t_{15} &= -3\alpha_3\alpha_5(-6 + 2\alpha_5 - 7\beta_5 + 9\alpha_5\beta_5 - 7\alpha_5^2\beta_5 - 3\alpha_5^3\beta_5 - 10\beta_5^2 + 20\alpha_5\beta_5^2 - 18\alpha_5^2\beta_5^2 \\
&\quad + 24\alpha_5^3\beta_5^2)/\beta_5r_1, \\
t_{16} &= 3\alpha_3\alpha_5(-6 + 15\alpha_5 - 3\alpha_5^2 - 6\alpha_5^3 - 20\beta_5 + 44\alpha_5\beta_5 - 72\alpha_5^2\beta_5 + 48\alpha_5^3\beta_5 + 20\beta_5^2 \\
&\quad - 24\alpha_5\beta_5^2 + 48\alpha_5^2\beta_5^2)/r_1, \\
v_1 &= -F_{I_0}(E)(\alpha_5 - \gamma_3)/\beta_5, \\
v_2 &= F_{J_0}(C)(\beta_1 - \beta_5)/\alpha_5, \\
v_3 &= F_{I_0}(E)\gamma_3, \\
v_4 &= F_{J_0}(B)((3(-\alpha_5 - 2\alpha_5\beta_5 + \alpha_5\gamma_1 + 2\beta_5\gamma_1 + 4\alpha_5\beta_5\gamma_1 + 2\gamma\gamma_1 + \alpha_5\gamma\gamma_1 - 3\alpha_5^2\gamma\gamma_1 \\
&\quad + 9\beta_5\gamma\gamma_1 - 27\alpha_5\beta_5\gamma\gamma_1 + 24\alpha_5^2\beta_5\gamma\gamma_1 - 6\beta_5^2\gamma\gamma_1 + 24\alpha_5\beta_5^2\gamma\gamma_1))/r_1) \\
&\quad + F_{I_0}(E)((-3(6\alpha_5 - 2\alpha_5^2 - 4\beta_5 + 4\alpha_5\beta_5 - 2\alpha_5^2\beta_5 - 4\beta_5^2 + 4\alpha_5\beta_5^2 - 6\gamma_3 + 2\alpha_5\gamma_3 \\
&\quad - 7\beta_5\gamma_3 + 9\alpha_5\beta_5\gamma_3 - 7\alpha_5^2\beta_5\gamma_3 - 3\alpha_5^3\beta_5\gamma_3 - 10\beta_5^2\gamma_3 + 20\alpha_5\beta_5^2\gamma_3 - 18\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_3 \\
&\quad + 24\alpha_5^3\beta_5^2\gamma_3))/(\beta_5r_1)) + F_{J_0}(C)((-3(-2\alpha_5 + 6\beta_1 - 10\alpha_5\beta_1 - 3\alpha_5^2\beta_1 - 6\beta_5 + 2\alpha_5\beta_5 \\
&\quad + 2\alpha_5^2\beta_5 + 2\beta_1\beta_5 - 10\alpha_5\beta_1\beta_5 + 14\alpha_5^2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 7\alpha_5\beta_1\beta_5^2 - 9\alpha_5^2\beta_1\beta_5^2 \\
&\quad - 6\alpha_5\beta_1\beta_5^3 + 24\alpha_5^2\beta_1\beta_5^3))/(\alpha_5r_1)), \\
v_5 &= F_{J_0}(C)\beta_1, \\
v_6 &= F_{J_0}(B)((3\beta_5(-\alpha_5 - 2\alpha_5\beta_5 + \alpha_5\gamma_1 + 2\beta_5\gamma_1 + 4\alpha_5\beta_5\gamma_1 + 2\gamma\gamma_1 + \alpha_5\gamma\gamma_1 - 3\alpha_5^2\gamma\gamma_1 \\
&\quad + 9\beta_5\gamma\gamma_1 - 27\alpha_5\beta_5\gamma\gamma_1 + 24\alpha_5^2\beta_5\gamma\gamma_1 - 6\beta_5^2\gamma\gamma_1 + 24\alpha_5\beta_5^2\gamma\gamma_1))/r_1) \\
&\quad + F_{I_0}(E)((-((18\alpha_5 - 6\alpha_5^2 - 12\beta_5 + 12\alpha_5\beta_5 - 6\alpha_5^2\beta_5 - 12\beta_5^2 + 12\alpha_5\beta_5^2 - 18\gamma_3 \\
&\quad + 6\alpha_5\gamma_3 - 21\beta_5\gamma_3 + 27\alpha_5\beta_5\gamma_3 - 21\alpha_5^2\beta_5\gamma_3 - 9\alpha_5^3\beta_5\gamma_3 - 30\beta_5^2\gamma_3 + 60\alpha_5\beta_5^2\gamma_3 \\
&\quad - 54\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_3 + 72\alpha_5^3\beta_5^2\gamma_3 - \alpha_5\gamma_3r_1))/r_1)) + F_{J_0}(C)((-3\beta_5(-2\alpha_5 + 6\beta_1 - 10\alpha_5\beta_1 \\
&\quad - 3\alpha_5^2\beta_1 - 6\beta_5 + 2\alpha_5\beta_5 + 2\alpha_5^2\beta_5 + 2\beta_1\beta_5 - 10\alpha_5\beta_1\beta_5 + 14\alpha_5^2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 \\
&\quad - 7\alpha_5\beta_1\beta_5^2 - 9\alpha_5^2\beta_1\beta_5^2 - 6\alpha_5\beta_1\beta_5^3 + 24\alpha_5^2\beta_1\beta_5^3))/(\alpha_5r_1)), \\
v_7 &= F_{J_0}(B)((3\alpha_5(-\alpha_5 - 2\alpha_5\beta_5 + \alpha_5\gamma_1 + 2\beta_5\gamma_1 + 4\alpha_5\beta_5\gamma_1 + 2\gamma\gamma_1 + \alpha_5\gamma\gamma_1 - 3\alpha_5^2\gamma\gamma_1 \\
&\quad + 9\beta_5\gamma\gamma_1 - 27\alpha_5\beta_5\gamma\gamma_1 + 24\alpha_5^2\beta_5\gamma\gamma_1 - 6\beta_5^2\gamma\gamma_1 + 24\alpha_5\beta_5^2\gamma\gamma_1))/r_1) \\
&\quad + F_{I_0}(E)((-3\alpha_5(6\alpha_5 - 2\alpha_5^2 - 4\beta_5 + 4\alpha_5\beta_5 - 2\alpha_5^2\beta_5 - 4\beta_5^2 + 4\alpha_5\beta_5^2 - 6\gamma_3 + 2\alpha_5\gamma_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -7\beta_5\gamma_3 + 9\alpha_5\beta_5\gamma_3 - 7\alpha_5^2\beta_5\gamma_3 - 3\alpha_5^3\beta_5\gamma_3 - 10\beta_5^2\gamma_3 + 20\alpha_5\beta_5^2\gamma_3 - 18\alpha_5^2\beta_5^2\gamma_3 \\
 & + 24\alpha_5^3\beta_5^2\gamma_3)/(\beta_5r_1)) + F_{J_0}(C)(-((-6\alpha_5 + 18\beta_1 - 30\alpha_5\beta_1 - 9\alpha_5^2\beta_1 - 18\beta_5 \\
 & + 6\alpha_5\beta_5 + 6\alpha_5^2\beta_5 + 6\beta_1\beta_5 - 30\alpha_5\beta_1\beta_5 + 42\alpha_5^2\beta_1\beta_5 - 6\beta_5^2 - 21\alpha_5\beta_1\beta_5^2 \\
 & - 27\alpha_5^2\beta_1\beta_5^2 - 18\alpha_5\beta_1\beta_5^3 + 72\alpha_5^2\beta_1\beta_5^3 - \beta_1\beta_5r_1)/r_1)),
 \end{aligned}$$

où on a noté

$$\gamma_i = 1 - \alpha_i - \beta_i \quad i = 1, 3 \quad , \quad \gamma = 1 - \alpha_5 - \beta_5.$$

La relation matricielle donnant  $X_{K_0}$  est stable si et seulement si la matrice  $B := [B_{J_0} \quad B_{I_0}]$  d'ordre 14, est stable, i.e.,  $\|B\|_2 < 1$ . Alors, on peut croire que si cette condition est satisfaite, alors l'algorithme est stable car l'itération suivante (voir figure 15) consiste à calculer le vecteur  $X_{K_0}$  en fonction de  $X_{K_1}$  (i.e., passage du triangle  $K_1$  au triangle  $K_0$ ).

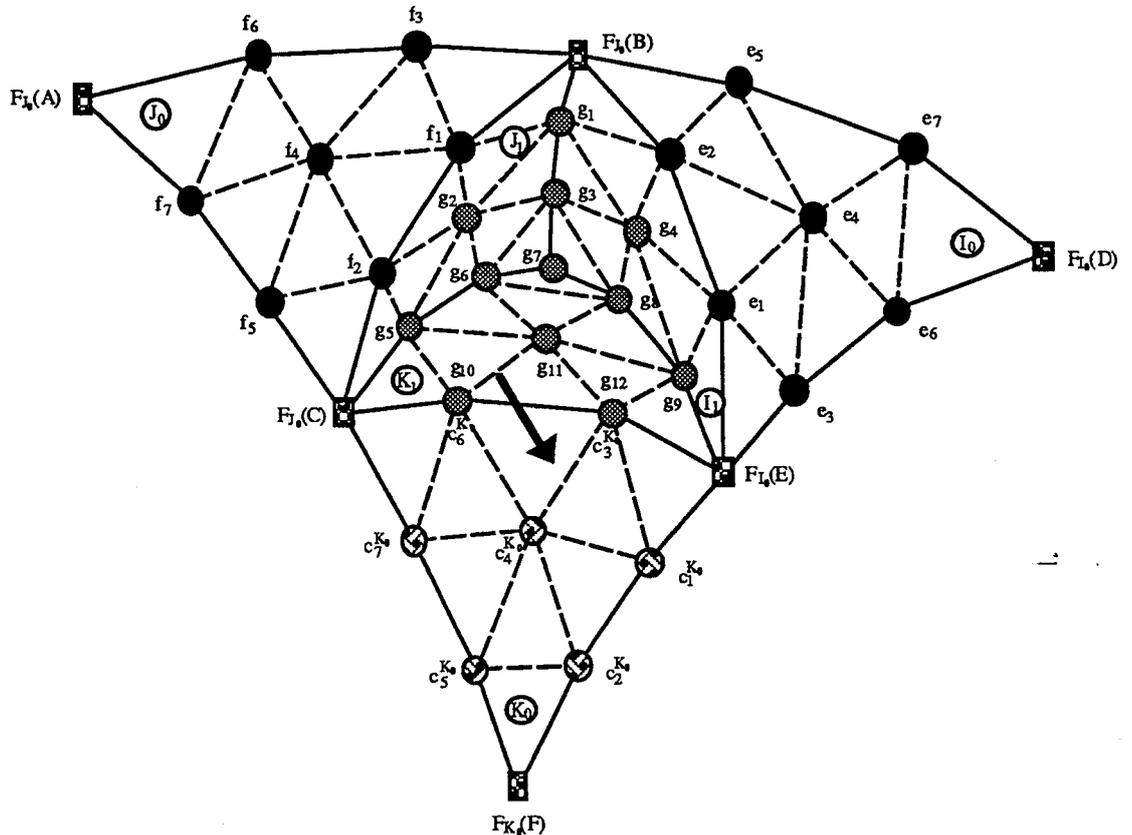


FIGURE.15. Raccordement entre  $F_{K_1}$  et  $F_{K_0}$ .

Ce passage peut alors être effectué avec une matrice  $A$  stable dépendant de

nouveaux paramètres  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  qui vérifient le théorème (6.4). Soit

$$X_{K_0} = A(\alpha_0, \beta_0) \cdot \begin{bmatrix} g_{12} \\ g_{10} \\ g_9 \\ g_{11} \\ g_5 \\ g_8 \\ g_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (1 - \alpha_0 - \beta_0) F_{I_0}(E) \\ (1 - \alpha_0 - \beta_0)^2 F_{I_0}(E) \\ 0 \\ 0 \\ \beta_0^2 F_{J_0}(C) \\ 0 \\ \beta_0 F_{J_0}(C) \end{bmatrix}}_{V^2}. \quad (6.43)$$

Finalement, la relation (6.43) peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$X_{K_0} = A(\alpha_0, \beta_0) \cdot [B_{J_0} \cdot X_{J_0} + B_{I_0} \cdot X_{I_0} + V^1] + V^2. \quad (6.44)$$

Mais on constate numériquement (sur plusieurs exemples) que si les matrices  $A$  et  $B$  sont stables, la relation (6.44) n'est pas forcément stable et des oscillations apparaissent rapidement. Cela est sans doute lié à la progression qu'on a fixée pour parcourir les triangles. En effet, on a choisi le parcours en bande sur une triangulation rectangulaire, représenté par un exemple dans la figure suivante

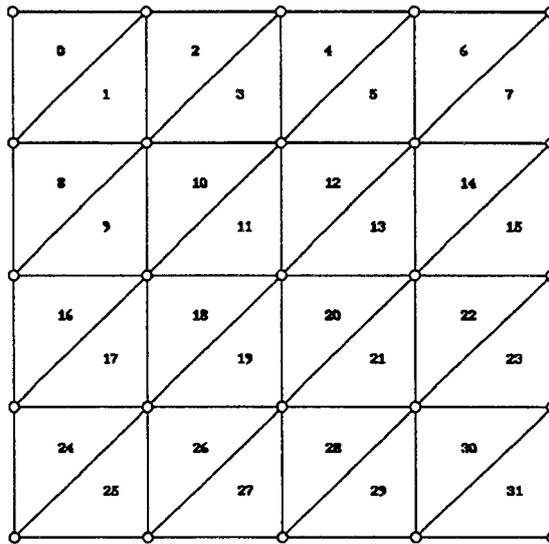


FIGURE.16. *Triangulation rectangulaire et progression.*

**Exemple :** La situation dans la figure 15, correspond par exemple à

$$I_0 = 3 \quad , \quad J_0 = 9 \quad , \quad K_0 = 11.$$

Par conséquent, cette situation se reproduit régulièrement lors du parcours dans la figure 16.

On remarque alors que le vecteur  $X_{I_0}$  peut être considéré comme donné après plusieurs itérations et prendre seulement le dernier vecteur qui a servi dans la progression, en l'occurrence  $X_{J_0}$ . Par conséquent, la relation (6.44) s'écrit :

$$X_{K_0} = A(\alpha_0, \beta_0) \cdot B_{J_0} \cdot X_{J_0} + \underbrace{A(\alpha_0, \beta_0) \cdot B_{I_0} \cdot X_{I_0} + A(\alpha_0, \beta_0) \cdot V^1 + V^2}_{\Gamma}.$$

Soit

$$X_{K_0} = A(\alpha_0, \beta_0) \cdot B_{J_0} \cdot X_{J_0} + \Gamma. \quad (6.45)$$

La relation (6.45) est donc stable si et seulement si

$$\rho(A(\alpha_0, \beta_0) \cdot B_{J_0}) < 1.$$

**Lemme 6.5** *La matrice  $A(\alpha_0, \beta_0) \cdot B_{J_0}$  est stable si et seulement si  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  vérifient le système d'inégalités suivant :*

$$|\xi_0 + \xi_2| < 1 + \xi_1 \quad \text{et} \quad |\xi_1 - \xi_0 \xi_2| < 1 - \xi_0^2, \quad (6.46)$$

où  $\xi_i := \xi_i(\alpha_0, \beta_0)$  sont des fonctions de  $\alpha_0, \beta_0$  données par :

$$\begin{aligned} \xi_2 = & -2\beta_0 q_2 + \beta_0^2(-q_1 + 2q_2) + \alpha_0(-q_6 - 2q_7) + \alpha_0^2(-q_{11} - q_{19} + 2q_7) \\ & + \alpha_0 \beta_0(2q_2 - 2q_4 + 2q_7 - 2q_9), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \alpha_0 \beta_0^2(2q_2 q_4 - q_1 q_6 - 2q_1 q_7) + \alpha_0^4(-(q_{14} q_{16}) + q_{11} q_{19} + 2q_{14} q_4 - 2q_{11} q_7) \\ & + \alpha_0^3(-(q_{13} q_4) - 2q_{14} q_4 + q_{11} q_6 + q_{19} q_6 + 2q_{11} q_7 - q_{18} q_7) \\ & + \alpha_0 \beta_0^3(-2q_2 q_4 + 2q_1 q_7 - 2q_2 q_8 + 2q_1 q_9) \\ & + \alpha_0^3 \beta_0(2q_1 q_{14} - 2q_{11} q_2 + 2q_{14} q_4 + 2q_{19} q_4 - 2q_{11} q_7 - 2q_{16} q_7 - 2q_{14} q_8 + 2q_{11} q_9) \\ & + \alpha_0^2 \beta_0^2(2q_1 q_{14} + q_1 q_{19} - 2q_{11} q_2 - q_{16} q_2 - 2q_2 q_4 + 2q_1 q_7 - 4q_7 q_8 + 4q_4 q_9) \\ & + \alpha_0^2 \beta_0(-(q_1 q_{13}) - 2q_1 q_{14} + 2q_{11} q_2 - q_{18} q_2 + 2q_6 q_9), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_0 = & \alpha_0^5(-(q_{14} q_{18} q_4) + q_{13} q_{19} q_4 + q_{14} q_{16} q_6 - q_{11} q_{19} q_6 - q_{13} q_{16} q_7 + q_{11} q_{18} q_7) \dots \\ & + \alpha_0^3 \beta_0^2(q_{18} q_2 q_4 + q_1 q_{19} q_6 - q_{16} q_2 q_6 - q_{11} q_{18} q_7 - 2q_{13} q_2 q_8 + 2q_1 q_{13} q_9) \\ & + \alpha_0^2 \beta_0^3(-2q_2 q_6 q_8 + 2q_1 q_6 q_9) + \alpha_0^4 \beta_0(-(q_1 q_{14} q_{18}) + q_1 q_{13} q_{19} - q_{13} q_{16} q_2 \\ & + q_{11} q_{18} q_2 + 2q_{14} q_6 q_8 - 2q_{13} q_7 q_8 + 2q_{13} q_4 q_9 - 2q_{11} q_6 q_9). \end{aligned}$$

Il est difficile de trouver un domaine de stabilité simple à partir du lemme (6.5), à cause de la complexité des formules. La possibilité d'un choix fixe des paramètres  $\alpha_0, \beta_0$  ne convient pas, même dans le cas où ils appartiennent au domaine de stabilité décrit dans le théorème (6.4).

La figure 17 donne un exemple d'instabilité numérique, alors qu'on a vérifié que les matrices  $A(\alpha_0, \beta_0)$  et  $B_{J_0}$  sont stables.

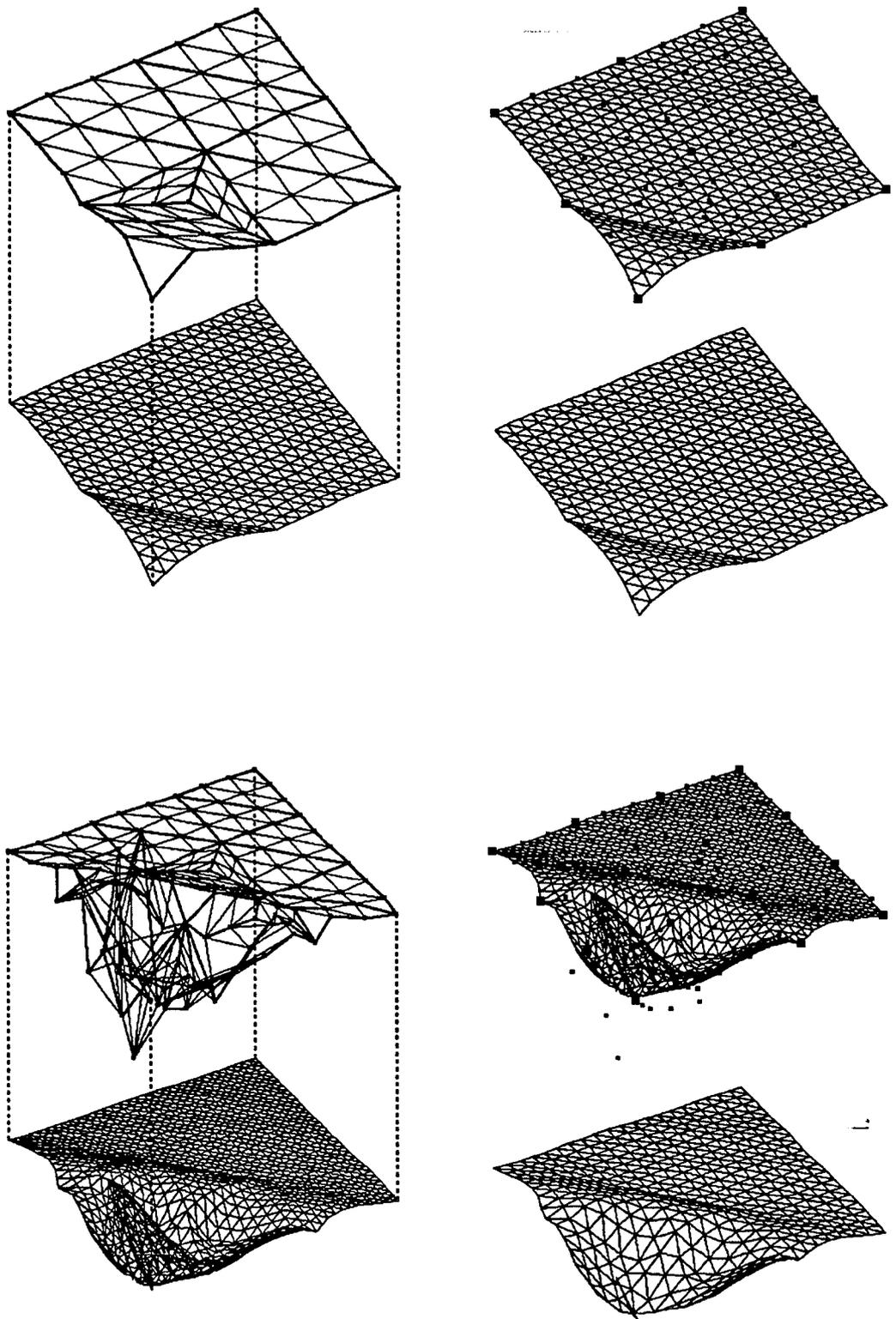


FIGURE.17. *Instabilité avec  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  dans la zone de stabilité du théorème (6.4).*

Notre objectif, désormais, ne sera pas de renoncer aux idées développées dans ce chapitre, mais de simplifier les conditions du lemme (6.5). Pour cela, nous allons nous occuper dans un premier temps de la stabilité en utilisant une technique déjà signalée dans la section (4.3) de ce chapitre. Une fois la stabilité obtenue, nous allons améliorer la qualité de la surface en remettant en cause le calcul du point  $g_{11}$  lors du remplissage des situations particulières.

#### 4. 4. 4. Simplification de la matrice et stabilité

Le raccordement  $G^2$  utilisé pour calculer les points  $c_2^{K_0}$  et  $c_5^{K_0}$  (figure 15) donne des combinaisons entre ces points et le reste des points de contrôle qui définissent le polynôme  $F_{K_0}$ . On est tenté alors de trouver d'autres combinaisons plus simples et donc de calculer  $c_2^{K_0}$  et  $c_5^{K_0}$  par une combinaison qui dépend d'un nombre minimal de points de contrôle.

On pourra, par exemple, demander que le point  $c_2^{K_0}$  (resp.  $c_5^{K_0}$ ) soit seulement combinaison des points  $F_{K_0}(E)$ ,  $c_1^{K_0}$  et  $F_{K_0}(F)$  (resp.  $F_{J_0}(C)$ ,  $c_7^{K_0}$  et  $F_{K_0}(F)$ ). L'idée qui vient à l'esprit est de choisir

$$\begin{cases} c_2^{K_0} = c_1^{K_0} + \frac{k_1}{k_1+1} (c_1^{K_0} - F_{I_0}(E)) + \frac{1}{3(k_1+1)} (F_{K_0}(F) - F_{I_0}(E)), \\ c_5^{K_0} = c_7^{K_0} + \frac{k_2}{k_2+1} (c_7^{K_0} - F_{J_0}(C)) + \frac{1}{3(k_2+1)} (F_{K_0}(F) - F_{J_0}(C)), \end{cases} \quad (6.47)$$

où  $k_1, k_2 \in ]-\frac{2}{3}, 0[$ . Ces formules proviennent tout simplement du paragraphe (4.3.2) de ce chapitre. Si on introduit les relations (6.47) dans la relation (6.45), la matrice  $A(\alpha_0, \beta_0) B_{J_0}$  devient beaucoup plus simple à étudier. En effet, on démontre alors que les valeurs propres de la matrice  $A(\alpha_0, \beta_0) \cdot B_{J_0}$  sont solutions de l'équation suivante :

$$\lambda^5 (\lambda - \alpha_0 q_6) (\lambda - K_2 q_2 + \alpha_0 K_2 q_2 + \beta_0 K_2 q_2 - \alpha_0 K_2 q_9) = 0.$$

Par conséquent, on a stabilité si et seulement si  $\alpha_0, \beta_0$  vérifient :

$$\begin{cases} \alpha_0 > -\frac{1}{|q_6|}, \\ 1 + \alpha_0 \left( \frac{q_9 - q_2}{q_2} \right) + \frac{1}{q_2 |K_2|} < \beta_0 < 1 + \alpha_0 \left( \frac{q_9 - q_2}{q_2} \right) - \frac{1}{q_2 |K_2|}. \end{cases} \quad (6.48)$$

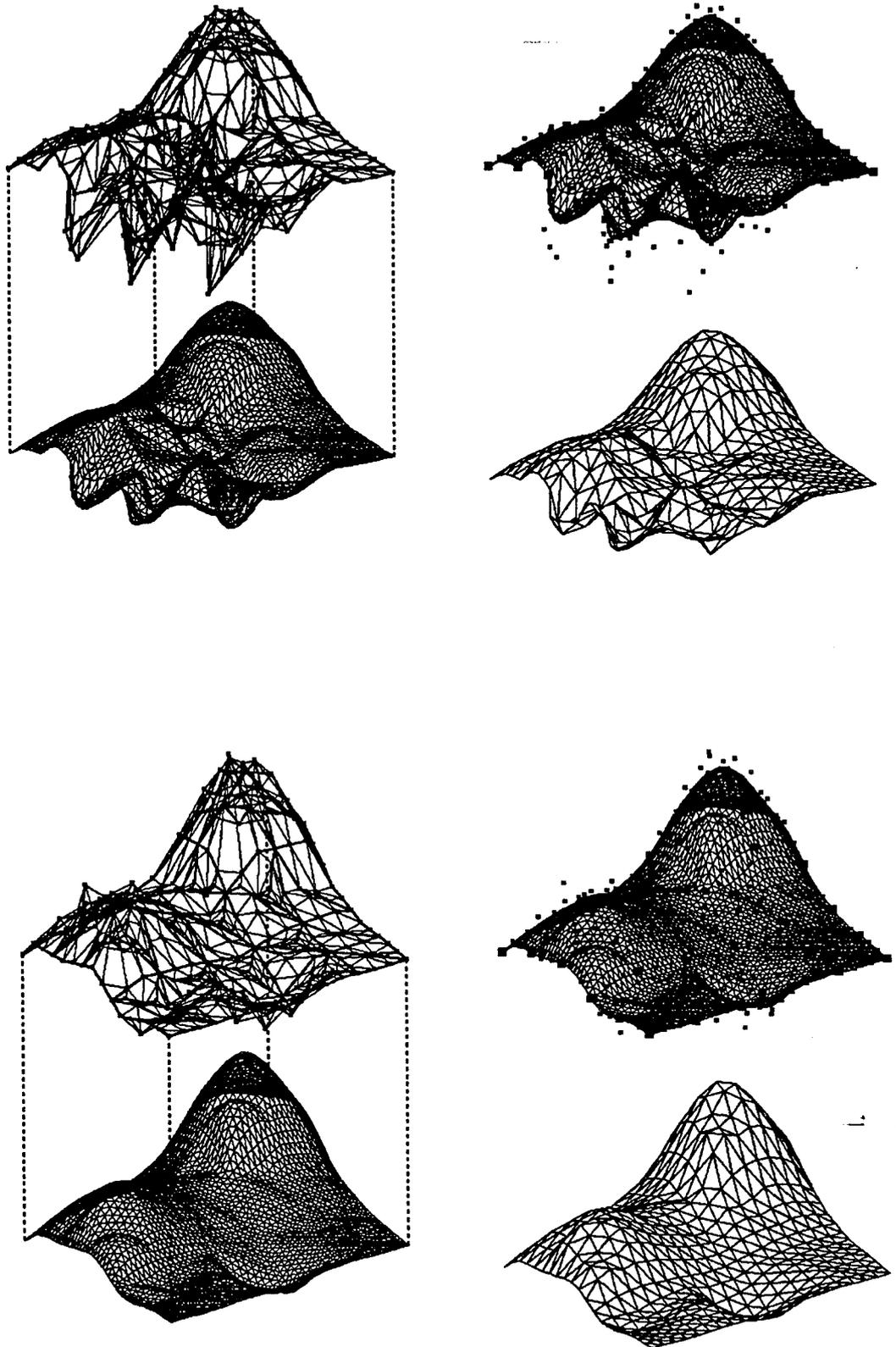


FIGURE.18. *L'algorithme après simplification (en utilisant les relations (6.47)).  
En haut :  $\alpha_0 = -0.9$ ,  $\beta_0 = 0.9$ . En bas :  $\alpha_0 = -2.9$ ,  $\beta_0 = 2.0$ .*

#### 4. 4. 5. Deuxième approche pour le calcul de $g_{11}$

L'utilisation des  $A$ -splines dans l'algorithme est capitale. D'une part les calculs sont simplifiés, d'autre part elle nous offre un résultat simple sur la stabilité. Néanmoins la qualité de la surface n'est pas "bonne" (un exemple est donné dans la figure 18). Pour remédier à cet inconvénient, on présentera dans ce paragraphe, une deuxième approche basée sur un calcul original de  $g_{11}$  (lors du remplissage des situations particulières) et de  $\alpha_0, \beta_0$  (paramètres du raccordement qui suit l'étape de remplissage). L'originalité provient du fait que l'on va créer un polynôme  $P^*$  fictif qui va servir au calcul de  $g_{11}, \alpha_0$  et  $\beta_0$  en faisant un raccordement  $G^1$  entre  $P^*$  et  $F_{K_0}$ . En effet, considérons le polynôme  $P^*$  défini sur le triangle  $[BCE]$  (voir figure 15) et ayant pour points de contrôle :

$$\left\{ F_{J_0}(B), f_1, e_2, f_2, g_7, e_1, F_{J_0}(C), g_{10}, g_{12}, F_{I_0}(E) \right\}. \quad (6.49)$$

**Proposition 6.6** *Un raccordement  $G^1$  entre  $F_{K_0}$  et  $P^*$  avec des paramètres  $\alpha^*, \beta^*$  entraîne un raccordement  $G^1$  entre  $F_{K_0}$  et  $F_{K_1}$  avec des paramètres  $\alpha_0, \beta_0$  si*

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\alpha^*}{\gamma_4}, & \beta_0 = \beta^* - \alpha_0 \beta_4, \\ g_{11} = \frac{1}{1 - \gamma_4(\alpha_5 \beta_4 + \alpha_2 \beta_5)} \left[ \alpha_4 g_{12} + \beta_4 g_{10} + \gamma_4 H_3 \right], \end{cases} \quad (6.50)$$

où

$$\begin{cases} H_1 = \alpha_4 g_9 + \gamma_4 g_4, \\ H_2 = \beta_2 g_5 + \gamma_2 g_2, \\ H_3 = \alpha_5 H_1 + \beta_5 H_2 + \gamma_5 g_3. \end{cases} \quad (6.51)$$

Preuve : Les raccordements signalés dans la proposition (6.6) sont décrits comme suit :

**Le raccordement  $G^1$  entre  $P^*$  et  $F_{K_0}$  autour de  $E$  donne :**

$$c_1^{K_0} = \alpha^* e_1 + \beta^* g_{12} + (1 - \alpha^* - \beta^*) F_{I_0}(E), \quad (1)$$

$$c_4^{K_0} = \alpha^* g_7 + \beta^* g_{10} + (1 - \alpha^* - \beta^*) g_{12}, \quad (2)$$

$$c_7^{K_0} = \alpha^* f_2 + \beta^* F_{J_0}(C) + (1 - \alpha^* - \beta^*) g_{10}. \quad (3)$$

**Le raccordement  $G^1$  entre  $F_{K_1}$  et  $F_{K_0}$  autour de  $E$  donne :**

$$c_1^{K_0} = \alpha_0 g_9 + \beta_0 g_{12} + (1 - \alpha_0 - \beta_0) F_{I_0}(E), \quad (1')$$

$$c_4^{K_0} = \alpha_0 g_{11} + \beta_0 g_{10} + (1 - \alpha_0 - \beta_0) g_{12}, \quad (2')$$

$$c_7^{K_0} = \alpha_0 g_5 + \beta_0 F_{J_0}(C) + (1 - \alpha_0 - \beta_0) g_{10}. \quad (3')$$

Substituons l'équation (10) du système de la section (4.4) dans l'équation (1'); on obtient

$$\begin{aligned} c_1^{K_0} &= \alpha_0 g_9 + \beta_0 g_{12} + (1 - \alpha_0 - \beta_0) F_{I_0}(E) \\ &= \alpha_0 [\alpha_4 F_{I_0}(E) + \beta_4 g_{12} + \gamma_4 e_1] + \beta_0 g_{12} + (1 - \alpha_0 - \beta_0) F_{I_0}(E) \\ &= \alpha_0 \gamma_4 e_1 + (\beta_0 + \alpha_0 \beta_4) g_{12} + (\alpha_0 \alpha_4 + \gamma_0) F_{I_0}(E). \end{aligned}$$

Par conséquent, les équations (1) et (1') sont compatibles si

$$\alpha_0 = \frac{\alpha^*}{\gamma_4}, \quad \beta_0 = \beta^* - \alpha_0 \beta_4.$$

Substituons l'équation (6) du système de la section (4.4) dans l'équation (3'); on obtient

$$\begin{aligned} c_7^{K_0} &= \alpha_0 g_5 + \beta_0 F_{J_0}(C) + (1 - \alpha_0 - \beta_0) g_{10} \\ &= \alpha_0 [\alpha_2 g_{10} + \beta_2 F_{J_0}(C) + \gamma_2 f_2] + \beta_0 F_{J_0}(C) + (1 - \alpha_0 - \beta_0) g_{10} \\ &= \alpha_0 \gamma_2 f_2 + (\beta_0 + \alpha_0 \beta_2) F_{J_0}(C) + (\alpha_0 \alpha_2 + \gamma_0) g_{10}. \end{aligned}$$

Puisque  $\alpha_2 = \alpha_4$  et  $\beta_2 = \beta_4$ , la première condition de la proposition suffit à l'équivalence des relations (3) et (3'). Finalement, les équations (2) et (2') sont compatibles si et seulement si

$$\alpha_0 g_5 + \beta_0 F_{J_0}(C) + (1 - \alpha_0 - \beta_0) g_{10} = \alpha^* f_2 + \beta^* F_{J_0}(C) + (1 - \alpha^* - \beta^*) g_{10}.$$

En remplaçant  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  par leurs valeurs, on obtient

$$g_{11} = \gamma_4 g_7 + \beta_4 g_{10} + \alpha_4 g_{12}.$$

Or la résolution du système dans la section (4.4) donne

$$\begin{aligned} g_7 &= \alpha_5 g_8 + \beta_5 g_6 + \gamma_5 g_3 \\ &= \alpha_5 (\beta_4 g_{11} + H_1) + \beta_5 (\alpha_2 g_{11} + H_2) + \gamma_5 g_3 \\ &= (\alpha_5 \beta_4 + \alpha_2 \beta_5) g_{11} + H_3. \end{aligned}$$

Avec ce dernier résultat, et en faisant la même démarche de calcul que précédemment, on démontre que les valeurs propres de la matrice  $A(\alpha_0, \beta_0) \cdot \bar{B}_{J_0}$  sont solutions de l'équation suivante :

$$\lambda^5 (\lambda (2\alpha_5 \beta_5 \gamma - 1) + 2\alpha_1 \alpha^* \beta_5 \gamma) (\lambda \alpha_5 - K_2 \alpha_1 \gamma^*) = 0.$$

Les racines sont à l'intérieur du cercle unité si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha^* > - \left| \frac{1 - 2\alpha_5 \beta_5 \gamma}{2\alpha_1 \beta_5 \gamma} \right|, \\ - \left| \frac{\alpha_5}{K_2 \alpha_1} \right| - \alpha^* + 1 < \beta^* < 1 - \alpha^* + \left| \frac{\alpha_5}{K_2 \alpha_1} \right|. \end{cases} \quad (6.52)$$

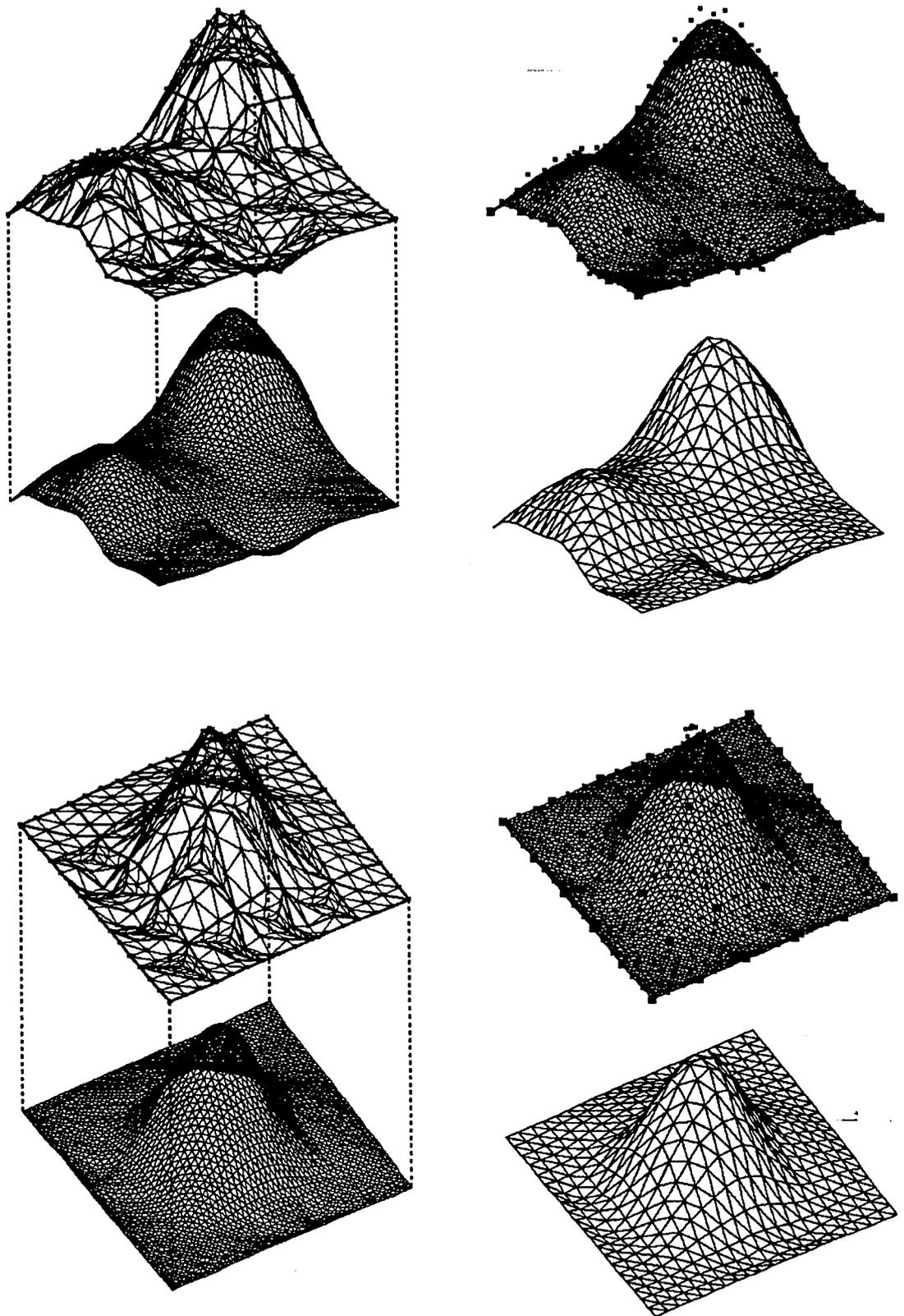


FIGURE.19. Deux exemples illustrant cette dernière méthode. On a choisi  $(\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*) = (-1, 1, -1, 1)$ ;  $k_1 = k_2 = -1/3$ ,  $N = 5$  et  $\alpha_5 = \beta_5 = 1/3$ . Comparons l'exemple en haut avec celui donné dans la figure 21 : ce sont les mêmes données; seul le calcul de  $g_{11}$  qui est différent.

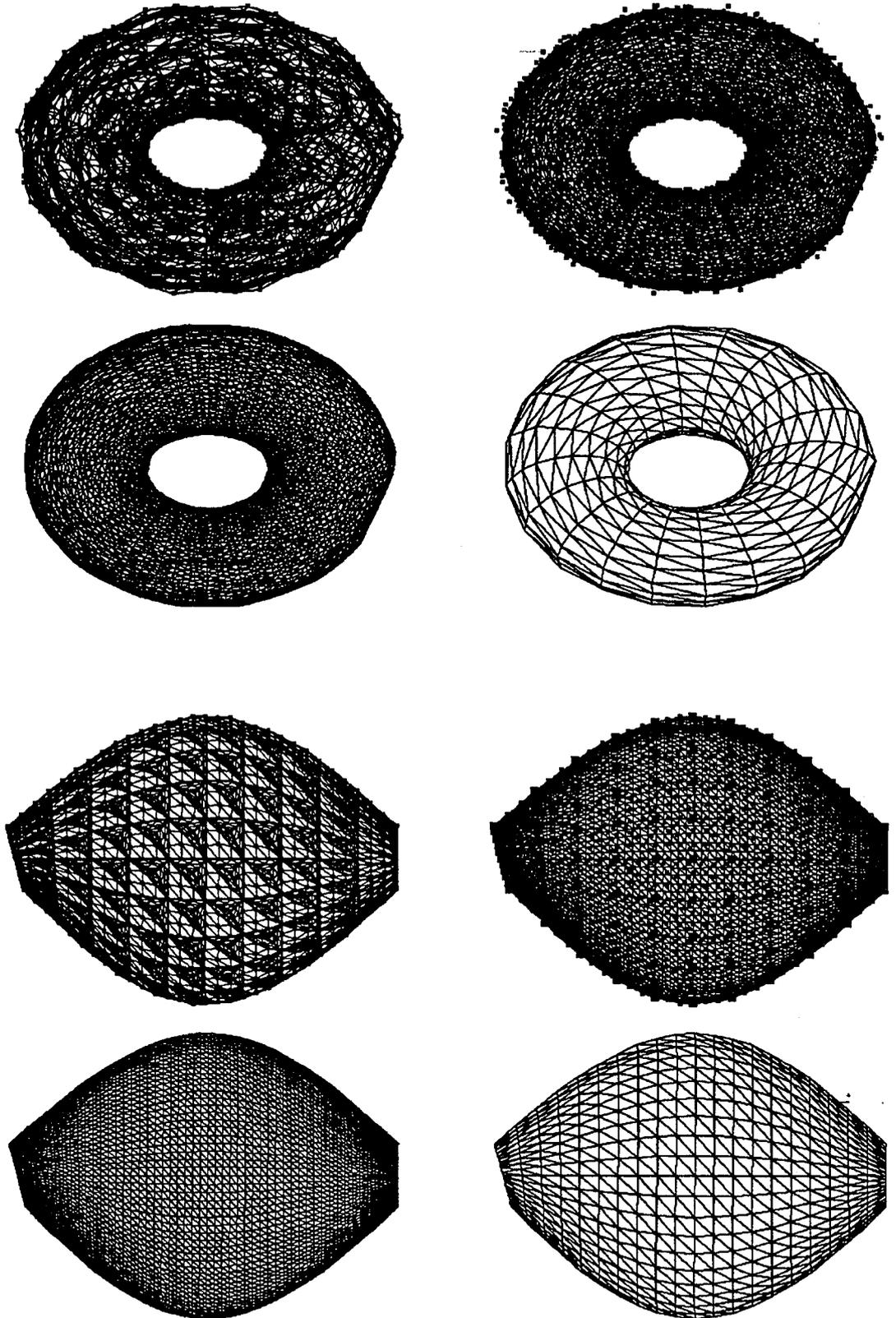


FIGURE.20. Autres exemples avec  $(\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*) = (-0.9, 0.9, -0.9, 0.9)$ ;  
 $k_1 = k_2 = -1/3, N = 5$  et  $\alpha_5 = \beta_5 = 1/3$ .

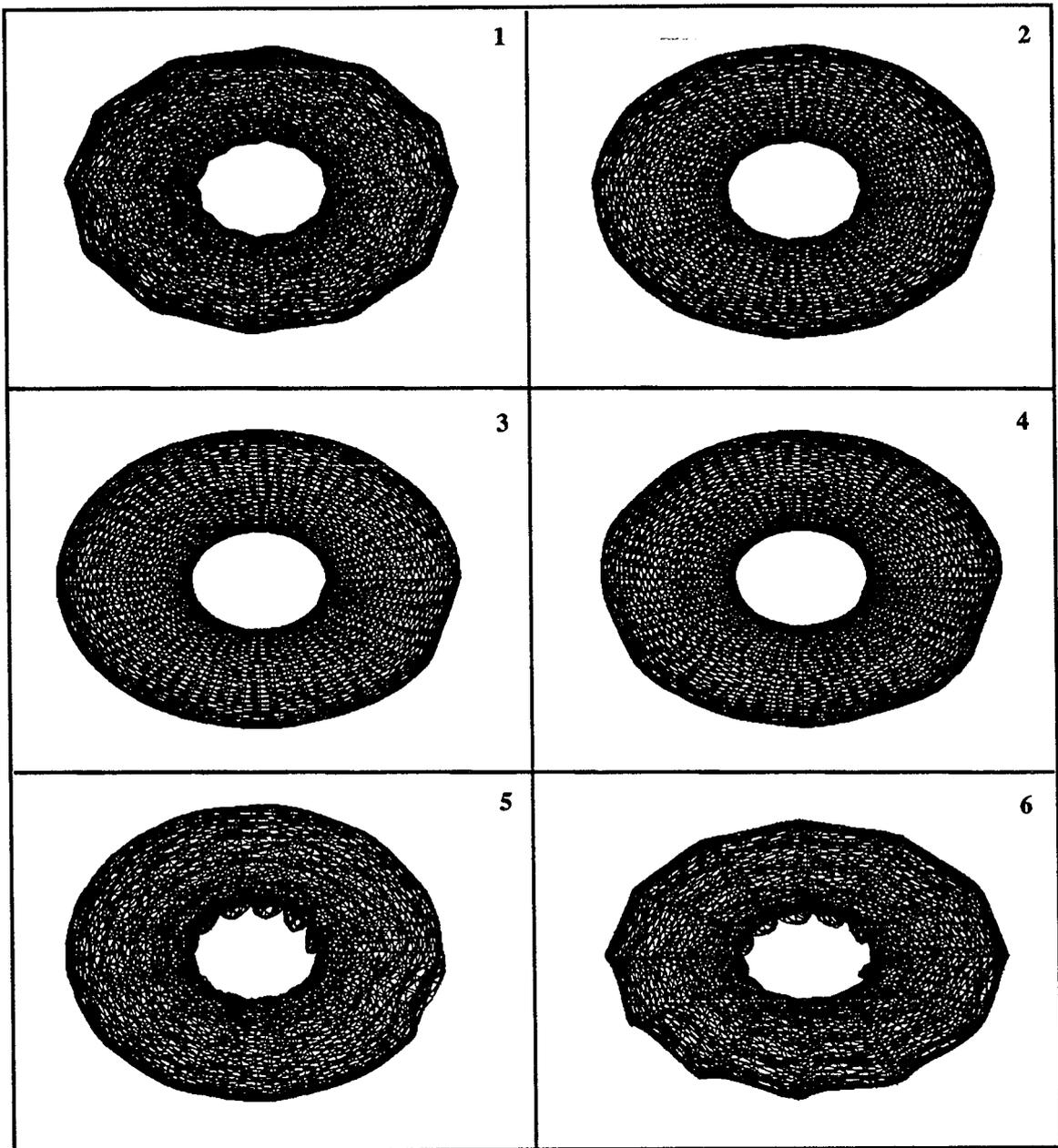


FIGURE.22. Influence des coefficients  $k_1$ ,  $k_2$  sur la surface ( les autres paramètres fixés :  $(\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*) = (-1, 1, -1, 1)$ ;  $N = 8$  et  $\alpha_5 = \beta_5 = 1/\sqrt{3}$  ).  
Les 6 figures représentent les cas suivants :

- |                  |   |               |   |
|------------------|---|---------------|---|
| 1. $k_1 = -0.6$  | ; | $k_2 = -0.6$  | ; |
| 2. $k_1 = -0.5$  | ; | $k_2 = -0.5$  | ; |
| 3. $k_1 = -0.33$ | ; | $k_2 = -0.33$ | ; |
| 4. $k_1 = -0.1$  | ; | $k_2 = -0.1$  | ; |
| 5. $k_1 = -0.33$ | ; | $k_2 = -0.66$ | ; |
| 6. $k_1 = -0.66$ | ; | $k_2 = -0.33$ | ; |

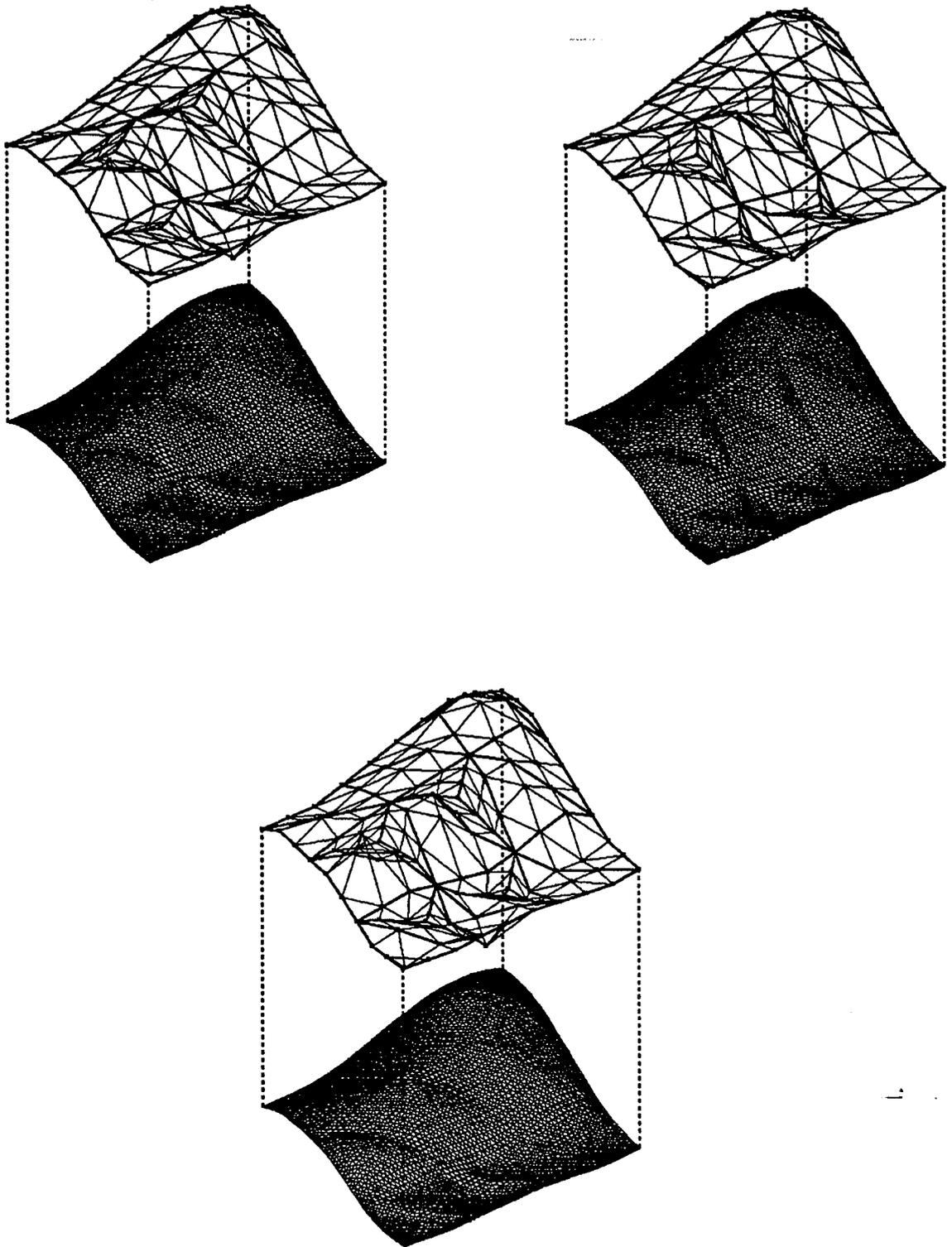


FIGURE.23. Le choix de  $\alpha_5, \beta_5$  est essentiel car il est relatif au positionnement de  $g_7$ . On a fixé  $(\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*) = (-1, 1, -1, 1)$ ;  $k_1 = k_2 = -1/3$ ;  $N = 3$ .

- En haut , à gauche :  $(\alpha_5, \beta_5) = (0.4, 0.2)$  .
- En haut , à droite :  $(\alpha_5, \beta_5) = (0.2, 0.4)$  .
- En bas  $(\alpha_5, \beta_5) = (0.33, 0.33)$  .

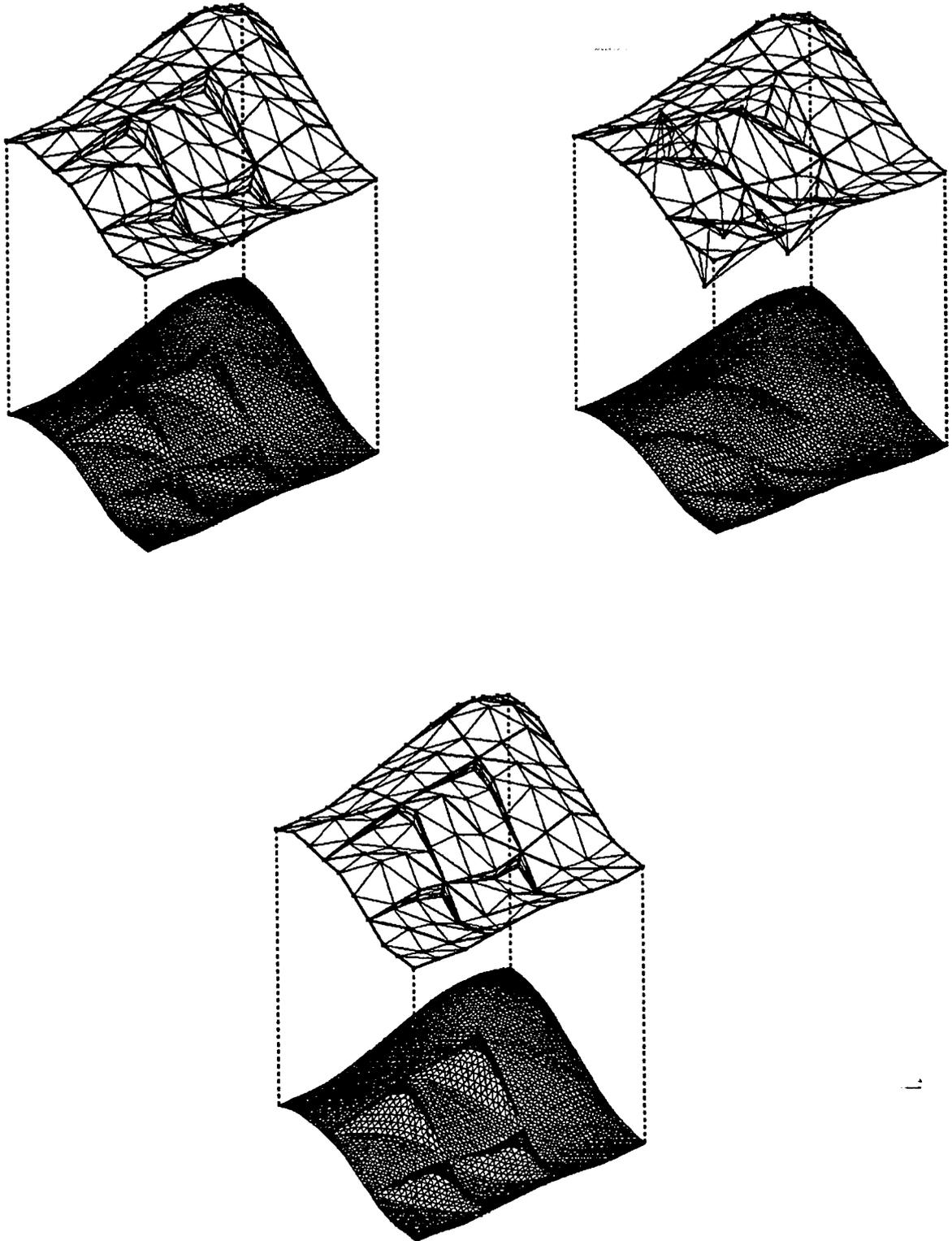


FIGURE.24. Même exemple que la figure 28 et mêmes données, avec :

- En haut , à gauche :  $(\alpha_5, \beta_5) = (0.2, 0.2)$  .
- En haut , à droite :  $(\alpha_5, \beta_5) = (0.4, 0.4)$  .
- En bas  $(\alpha_5, \beta_5) = (0.1, 0.1)$  .

**4. 5. Méthode de remplissage**

Ce paragraphe est destiné à compléter définitivement l'algorithme développé précédemment. Car si on a pris le soin de résoudre les deux situations pouvant se produire durant la progression (situation normale : calcul d'un morceau ayant un seul voisin connu et situation particulière : calcul d'un morceau ayant deux voisins connus), on n'a aucune raison d'exclure la troisième situation qui peut se réaliser dans une triangulation quelconque, i.e., calcul d'un morceau ayant ses trois voisins déjà connus. Nous donnons alors une méthode de remplissage pour résoudre ce cas. Cette méthode est assez générale pour être appliquée dans d'autres problèmes, en particulier le notre.

**4. 5. 1. Définition du remplissage**

Le remplissage consiste à construire un morceau de Bézier s'appuyant sur plusieurs courbes ou morceaux qui forment un contour triangulaire (i.e., contour fermé formé de trois courbes). Soient  $F_{I_0}$ ,  $F_{J_0}$  et  $F_{K_0}$  trois morceaux de surface connus, définis sur  $T_{I_0}$ ,  $T_{J_0}$ ,  $T_{K_0}$  respectivement.

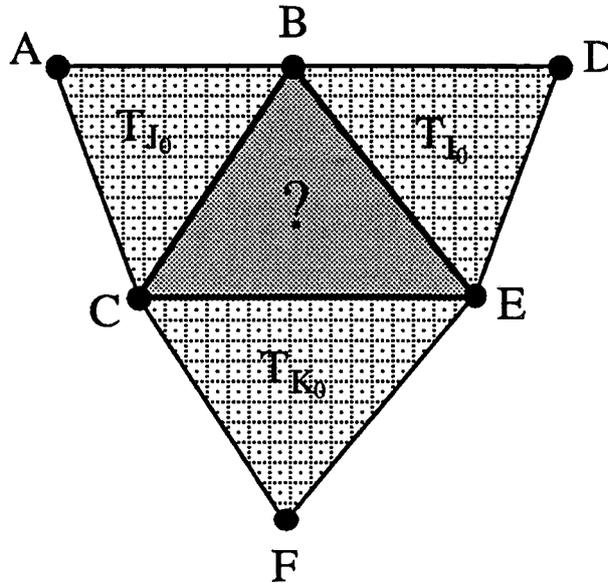


FIGURE.24. *Connaissant  $F_{I_0}$ ,  $F_{J_0}$  et  $F_{K_0}$ , comment construire le morceau défini sur le triangle hachuré  $[B, C, E]$  ?*

La figure (30) illustre bien notre problème : on veut un remplissage s'appuyant sur un contour triangulaire constitué de trois morceaux. Le morceau qui sera construit devra respecter des contraintes de continuité géométrique d'ordre 1 sur ses bords, sa forme centrale n'étant pas fixée a priori.

**4. 5. 2. Méthode de remplissage  $G^1$**

Soit

- $\mathcal{P}_n^1([a, b])$  : l'espace des polynômes de degré  $n$  à une seule variable définis sur  $[a, b]$ ,
- $\mathcal{P}_n^2(T)$  : l'espace des polynômes de degré  $n$  à deux variables définis sur le triangle  $T$  d'arêtes  $e_i$ .

On propose alors de remplir la région en utilisant le procédé suivant : on divise le triangle en trois sous-triangles  $T_{I_1}, T_{J_1}, T_{K_1}$ , sur chaque sous triangle, on définit un polynôme appartenant à  $\mathcal{F}_r$ , où

$$\mathcal{F}_r = \left\{ F \in \mathcal{P}_4^2(T_{I_1} \cup T_{J_1} \cup T_{K_1}) \text{ tel que } F|_{e_i} \in \mathcal{P}_3^1([0, 1]) \right\},$$

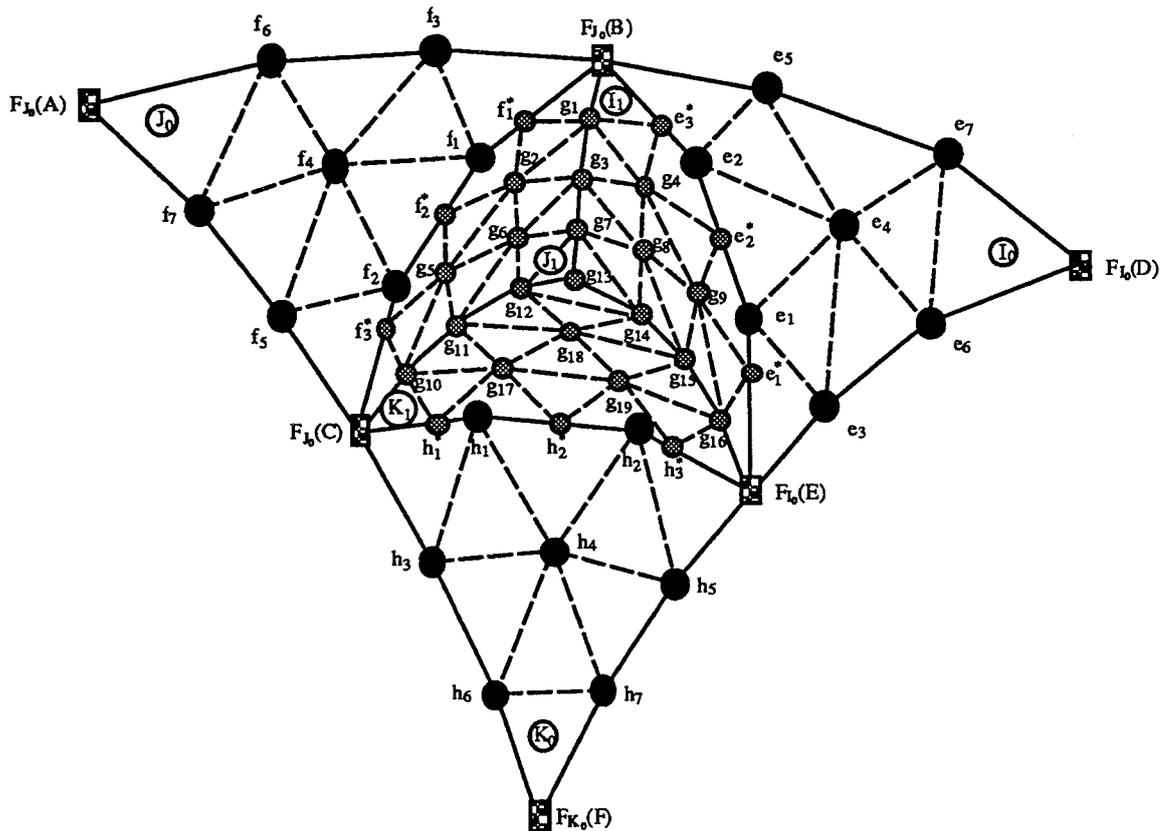


FIGURE.25. Méthode de remplissage : Réponse à la situation de la figure 24.

voir figure (31), et on demandera un raccordement  $G^1$  le long des trois arêtes de front et à l'intérieur du triangle. Pour cela, nous avons besoin de définir un raccordement  $G^1$  entre un polynôme de degré 3 et un polynôme de degré 4 (qu'on notera  $G^1; 3-4$ ). Le raccordement  $G^1; 4-4$  étant déjà explicité dans la section 3 de ce chapitre.

### 4. 5. 3. Raccordement $G^1; 3-4$

Considérons deux polynômes  $F$  et  $G$  de degré 3 et 4 respectivement et  $f, g$  leurs floraisons. Soit  $f^*$  la floraison de  $F$  (si  $F$  est considéré comme un polynôme de degré 4) définie par :

$$f^*(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{4} \left[ f(u_1, u_2, u_3) + f(u_1, u_2, u_4) + f(u_1, u_3, u_4) + f(u_2, u_3, u_4) \right].$$

Le raccordement  $G^1$  qui sera utilisé provient du système de la proposition (6.3) en posant :

$$\alpha(t) = \alpha_1(1-t) + \alpha_2 t \quad , \quad \beta(t) = \beta_1(1-t) + \beta_2 t.$$

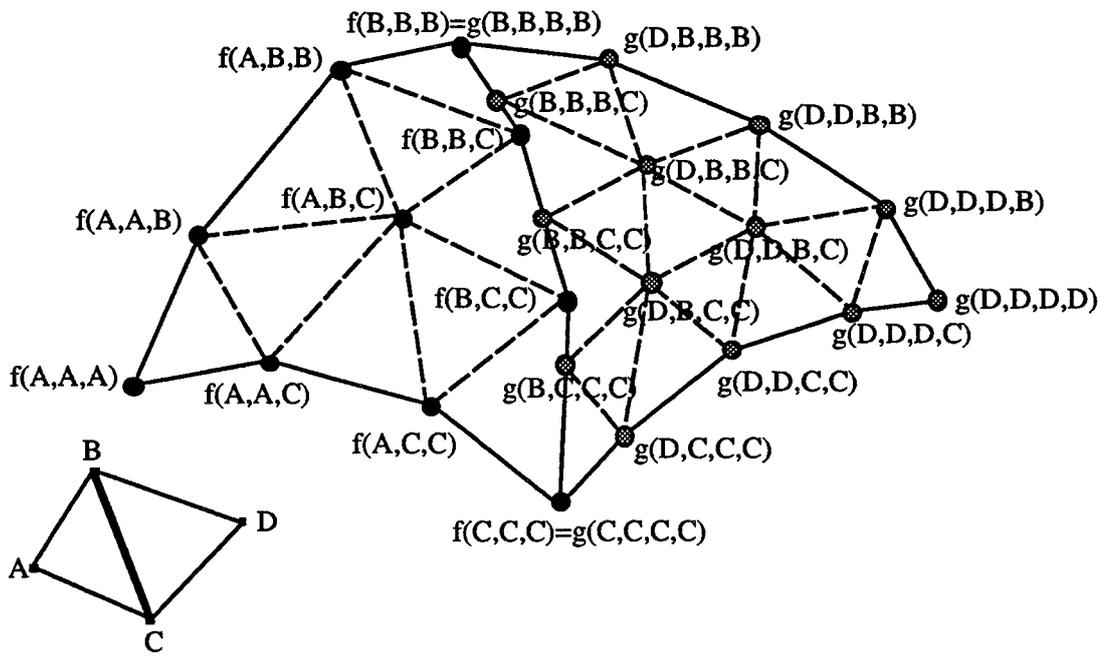


FIGURE.26. Raccordement  $G^1$  ; 3 – 4 entre un polynôme de degré 3 (connu) et un polynôme de degré 4 (à déterminer).

Par conséquent,  $F$  et  $G$  se raccordent  $G^1$  en un point  $m$  de l'arête commune si

- (i)  $G(m) = F(m)$ ,
- (ii)  $G'(m; \vec{CD}) = [\alpha_1(1-t) + \alpha_2 t] F'(m; \vec{CA}) + [\beta_1(1-t) + \beta_2 t] F'(m; \vec{CB})$ .

• La condition (i) est équivalente à :

$$g(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \quad \forall \xi_i \in \{B, C\},$$

$$g(B^j C^k) = f^*(B^j C^k), \quad j + k = 4.$$

Soit

$$\begin{cases} g(B, B, B, B) = f(B, B, B), \\ g(B, B, B, C) = \frac{1}{4} f(B, B, B) + \frac{3}{4} f(B, B, C), \\ g(B, B, C, C) = \frac{1}{2} f(B, B, C) + \frac{1}{2} f(B, C, C), \\ g(B, C, C, C) = \frac{1}{4} f(C, C, C) + \frac{3}{4} f(B, C, C), \\ g(C, C, C, C) = f(C, C, C). \end{cases}$$

• Explicitons la condition (ii) :

Calculons d'abord  $G'(m; \vec{CD})$  :

$$G'(m; \vec{CD}) = g(m, m, m, D) - g(m, m, m, C) =$$

$$= g((1-t)C + tB, \dots, (1-t)C + tB, D) - g((1-t)C + tB, \dots, (1-t)C + tB, C).$$

En utilisant la multiaffinité et la symétrie de  $g$ , on déduit

$$G'(m; \vec{CD}) = 4 \sum_{j=0}^3 \left[ g(DB^j C^{3-j}) - g(B^j C^{4-j}) \right] B_j^3(t).$$

De la même manière, on trouve :

$$F'(m; \vec{CA}) = 3 \sum_{j=0}^2 \left[ f(AB^j C^{2-j}) - f(B^j C^{3-j}) \right] B_j^2(t),$$

$$F'(m; \vec{CB}) = 3 \sum_{j=0}^2 \left[ f(B^{j+1} C^{2-j}) - f(B^j C^{3-j}) \right] B_j^2(t).$$

Calculons maintenant le produit  $[\alpha_1(1-t) + \alpha_2 t] F'(m; \vec{CA})$  :

$$\begin{aligned} [\alpha_1(1-t) + \alpha_2 t] F'(m; \vec{CA}) &= 3\alpha_1 \sum_{j=0}^2 \left[ f(AB^j C^{2-j}) - f(B^j C^{3-j}) \right] B_0^1 B_j^2(t) \\ &\quad + 3\alpha_2 \sum_{j=0}^2 \left[ f(AB^j C^{2-j}) - f(B^j C^{3-j}) \right] B_1^1 B_j^2(t). \end{aligned}$$

Rappelons la formule suivante :

$$B_i^n(t) B_j^m(t) = \frac{C_n^i C_m^j}{C_{n+m}^{i+j}} B_{i+j}^{n+m}(t) \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.$$

Donc

$$\begin{aligned} [\alpha_1(1-t) + \alpha_2 t] F'(m; \vec{CA}) &= \sum_{j=0}^2 (3-j) \alpha_1 \left[ f(AB^j C^{2-j}) - f(B^j C^{3-j}) \right] B_j^3(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 j \alpha_2 \left[ f(AB^{j-1} C^{3-j}) - f(B^{j-1} C^{4-j}) \right] B_j^3(t). \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
 [\beta_1(1-t) + \beta_2 t] F'(m; \vec{CB}) &= \sum_{j=0}^2 (3-j) \beta_1 \left[ f(B^{j+1}C^{2-j}) - f(B^jC^{3-j}) \right] B_j^3(t) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^3 j \beta_2 \left[ f(B^jC^{3-j}) - f(B^{j-1}C^{4-j}) \right] B_j^3(t).
 \end{aligned}$$

La condition (ii) est équivalente à :

$$4 \left[ g(DC^3) - g(C^4) \right] = 3\alpha_1 \left[ f(AC^2) - f(C^3) \right] + 3\beta_1 \left[ f(BC^2) - f(C^3) \right],$$

$$\begin{aligned}
 4 \left[ g(DB^jC^{3-j}) - g(B^jC^{4-j}) \right] &= (3-j) \alpha_1 \left[ f(AB^jC^{2-j}) - f(B^jC^{3-j}) \right], \\
 &\quad + j \alpha_2 \left[ f(AB^{j-1}C^{3-j}) - f(B^{j-1}C^{4-j}) \right] \\
 &\quad + (3-j) \beta_1 \left[ f(B^{j+1}C^{2-j}) - f(B^jC^{3-j}) \right] \\
 &\quad + j \beta_2 \left[ f(B^jC^{3-j}) - f(B^{j-1}C^{4-j}) \right], \quad j = 1, 2,
 \end{aligned}$$

$$4 \left[ g(DB^3) - g(B^3C) \right] = 3\alpha_2 \left[ f(AB^2) - f(B^2C) \right] + 3\beta_2 \left[ f(B^3) - f(B^2C) \right].$$

#### 4. 5. 4. Calcul des polynômes $F_{I_1}$ , $F_{J_1}$ , $F_{K_1}$

En appliquant le résultat du paragraphe (5.3) aux raccordements successifs entre  $\{F_{J_0}, F_{J_1}\}$ ,  $\{F_{K_0}, F_{K_1}\}$  et  $\{F_{I_0}, F_{I_1}\}$ , on obtient :

- Raccordement  $G^1$ ; 3 - 4 entre  $F_{J_0}$  et  $F_{J_1}$  :

$$f_1^* = \frac{1}{4}F_{J_0}(B) + \frac{3}{4}f_1,$$

$$f_2^* = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2,$$

$$f_3^* = \frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{4}F_{J_0}(C),$$

$$g_{10} - F_{J_0}(C) = \frac{3}{4}\alpha_1(f_5 - F_{J_0}(C)) + \frac{3}{4}\beta_1(f_2 - F_{J_0}(C)), \quad (1)$$

$$g_5 - f_3^* = \frac{1}{2}\alpha_1(f_4 - f_2) + \frac{1}{4}\alpha_2(f_5 - F_{J_0}(C)) + \frac{1}{2}\beta_1(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}\beta_2(f_2 - F_{J_0}(C)), \quad (2)$$

$$g_2 - f_2^* = \frac{1}{4}\alpha_1(f_3 - f_1) + \frac{1}{2}\alpha_2(f_4 - f_2) + \frac{1}{4}\beta_1(F_{J_0}(B) - f_1) + \frac{1}{2}\beta_2(f_1 - f_2), \quad (3)$$

$$g_1 - f_1^* = \frac{3}{4}\alpha_2(f_3 - f_1) + \frac{3}{4}\beta_2(F_{J_0}(B) - f_1). \quad (4)$$

• **Raccordement  $G^1$ ; 3 – 4 entre  $F_{K_0}$  et  $F_{K_1}$  :**

$$h_1^* = \frac{1}{4}F_{J_0}(C) + \frac{3}{4}h_1,$$

$$h_2^* = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_2,$$

$$h_3^* = \frac{3}{4}h_2 + \frac{1}{4}F_{I_0}(E),$$

$$g_{16} - F_{I_0}(E) = \frac{3}{4}\alpha_3(h_5 - F_{I_0}(E)) + \frac{3}{4}\beta_3(h_2 - F_{I_0}(E)), \quad (5)$$

$$g_{19} - h_3^* = \frac{1}{2}\alpha_3(h_4 - h_2) + \frac{1}{4}\alpha_4(h_5 - F_{I_0}(E)) + \frac{1}{2}\beta_3(h_1 - h_2) + \frac{1}{4}\beta_4(h_2 - F_{I_0}(E)), \quad (6)$$

$$g_{17} - h_2^* = \frac{1}{4}\alpha_3(h_3 - h_1) + \frac{1}{2}\alpha_4(h_4 - h_2) + \frac{1}{4}\beta_3(F_{J_0}(C) - h_1) + \frac{1}{2}\beta_4(h_1 - h_2), \quad (7)$$

$$g_{10} - h_1^* = \frac{3}{4}\alpha_4(h_3 - h_1) + \frac{3}{4}\beta_4(F_{J_0}(C) - h_1). \quad (8)$$

• **Raccordement  $G^1$ ; 3 – 4 entre  $F_{I_0}$  et  $F_{I_1}$  :**

$$e_1^* = \frac{1}{4}F_{I_0}(E) + \frac{3}{4}e_1,$$

$$e_2^* = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2,$$

$$e_3^* = \frac{3}{4}e_2 + \frac{1}{4}F_{J_0}(B),$$

$$g_1 - F_{J_0}(B) = \frac{3}{4}\alpha_5(e_5 - F_{J_0}(B)) + \frac{3}{4}\beta_5(e_2 - F_{J_0}(B)), \quad (9)$$

$$g_4 - e_3^* = \frac{1}{2}\alpha_5(e_4 - e_2) + \frac{1}{4}\alpha_6(e_5 - F_{J_0}(B)) + \frac{1}{2}\beta_5(e_1 - e_2) + \frac{1}{4}\beta_6(e_2 - F_{J_0}(B)), \quad (10)$$

$$g_9 - e_2^* = \frac{1}{4}\alpha_5(e_3 - e_1) + \frac{1}{2}\alpha_6(e_4 - e_2) + \frac{1}{4}\beta_5(F_{I_0}(E) - e_1) + \frac{1}{2}\beta_6(e_1 - e_2), \quad (11)$$

$$g_{16} - e_1^* = \frac{3}{4}\alpha_6(e_3 - e_1) + \frac{3}{4}\beta_6(F_{I_0}(E) - e_1). \quad (12)$$

• **Raccordement  $G^1$ ; 4 – 4 entre  $F_{J_1}$  et  $F_{I_1}$  :**

$$g_{13} = \alpha_7 g_{14} + \beta_7 g_{12} + (1 - \alpha_7 - \beta_7) g_7, \quad (13)$$

$$g_7 = \alpha_7 g_8 + \beta_7 g_6 + (1 - \alpha_7 - \beta_7) g_3, \quad (14)$$

$$g_3 = \alpha_7 g_4 + \beta_7 g_2 + (1 - \alpha_7 - \beta_7) g_1, \quad (15)$$

$$g_1 = \alpha_7 e_3^* + \beta_7 f_1^* + (1 - \alpha_7 - \beta_7) F_{J_0}(B). \quad (16)$$

• **Raccordement  $G^1$ ; 4 – 4 entre  $F_{J_1}$  et  $F_{K_1}$  :**

$$g_{13} = \alpha_8 g_7 + \beta_8 g_{14} + (1 - \alpha_8 - \beta_8) g_{12}, \quad (17)$$

$$g_{12} = \alpha_8 g_6 + \beta_8 g_{18} + (1 - \alpha_8 - \beta_8) g_{11}, \quad (18)$$

$$g_{11} = \alpha_8 g_5 + \beta_8 g_{17} + (1 - \alpha_8 - \beta_8) g_{10}, \quad (19)$$

$$g_{10} = \alpha_8 f_3^* + \beta_8 h_1^* + (1 - \alpha_8 - \beta_8) F_{J_0}(C), \quad (20)$$

• Raccordement  $G^1$ ; 4 – 4 entre  $F_{K_1}$  et  $F_{I_1}$  :

$$g_{13} = \alpha_9 g_{12} + \beta_9 g_7 + (1 - \alpha_9 - \beta_9) g_{14}, \quad (21)$$

$$g_{14} = \alpha_9 g_{18} + \beta_9 g_8 + (1 - \alpha_9 - \beta_9) g_{15}, \quad (22)$$

$$g_{15} = \alpha_9 g_{19} + \beta_9 g_9 + (1 - \alpha_9 - \beta_9) g_{16}, \quad (23)$$

$$g_{16} = \alpha_9 h_3^* + \beta_9 e_1^* + (1 - \alpha_9 - \beta_9) F_{I_0}(E). \quad (24)$$

#### 4. 5. 5. Résolution du système et conditions de compatibilité

Posons

$$\alpha_7 := \bar{\alpha} \quad , \quad \beta_7 := \bar{\beta},$$

où  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  sont deux paramètres fixés .

Les équations (13), (17) et (21) sont compatibles si :

$$\begin{aligned} \alpha_8 &= 1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta} & , & & \beta_8 &= \bar{\alpha}, \\ \alpha_9 &= \bar{\beta} & , & & \beta_9 &= 1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Des équations (16), (20) et (24) , on tire :

$$\begin{aligned} g_1 &= \bar{\alpha} e_3^* + \bar{\beta} f_1^* + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) F_{J_0}(B), \\ g_{10} &= \bar{\alpha} h_1^* + \bar{\beta} F_{J_0}(C) + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) f_3^*, \\ g_{16} &= \bar{\alpha} F_{I_0}(E) + \bar{\beta} h_3^* + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) e_1^*. \end{aligned}$$

Des équations (1), (4), (5), (8), (9) et (12) , on tire :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{4 |g_{10} - F_{J_0}(C), f_2 - F_{J_0}(C)|}{3 |f_5 - F_{J_0}(C), f_2 - F_{J_0}(C)|} & , & & \beta_1 &= \frac{4 |f_5 - F_{J_0}(C), g_{10} - F_{J_0}(C)|}{3 |f_5 - F_{J_0}(C), f_2 - F_{J_0}(C)|}, \\ \alpha_2 &= \frac{4 |g_1 - f_1^*, F_{J_0}(B) - f_1|}{3 |f_3 - f_1, F_{J_0}(B) - f_1|} & , & & \beta_2 &= \frac{4 |f_3 - f_1, g_1 - f_1^*|}{3 |f_3 - f_1, F_{J_0}(B) - f_1|}, \\ \alpha_3 &= \frac{4 |g_{16} - F_{I_0}(E), h_2 - F_{I_0}(E)|}{3 |h_5 - F_{I_0}(E), h_2 - F_{I_0}(E)|} & , & & \beta_3 &= \frac{4 |h_5 - F_{I_0}(E), g_{16} - F_{I_0}(E)|}{3 |h_5 - F_{I_0}(E), h_2 - F_{I_0}(E)|}. \end{aligned}$$

$$\alpha_4 = \frac{4}{3} \frac{|g_{10} - h_1^*, F_{J_0}(C) - h_1|}{|h_3 - h_1, F_{J_0}(C) - h_1|}, \quad \beta_4 = \frac{4}{3} \frac{|h_3 - h_1, g_{10} - h_1^*|}{|h_3 - h_1, F_{J_0}(C) - h_1|},$$

$$\alpha_5 = \frac{4}{3} \frac{|g_1 - F_{J_0}(B), e_2 - F_{J_0}(B)|}{|e_5 - F_{J_0}(B), e_2 - F_{J_0}(B)|}, \quad \beta_5 = \frac{4}{3} \frac{|e_5 - F_{J_0}(B), g_1 - F_{J_0}(B)|}{|e_5 - F_{J_0}(B), e_2 - F_{J_0}(B)|},$$

$$\alpha_6 = \frac{4}{3} \frac{|g_{16} - e_1^*, F_{I_0}(E) - e_1|}{|e_3 - e_1, F_{I_0}(E) - e_1|}, \quad \beta_6 = \frac{4}{3} \frac{|e_3 - e_1, g_{16} - e_1^*|}{|e_3 - e_1, F_{I_0}(E) - e_1|}.$$

Des équations (2), (3), (6), (7), (10) et (11), on tire :

$$g_5 = f_3^* + \frac{1}{2}\alpha_1(f_4 - f_2) + \frac{1}{4}\alpha_2(f_5 - F_{J_0}(C)) + \frac{1}{2}\beta_1(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}\beta_2(f_2 - F_{J_0}(C)),$$

$$g_2 = f_2^* + \frac{1}{4}\alpha_1(f_3 - f_1) + \frac{1}{2}\alpha_2(f_4 - f_2) + \frac{1}{4}\beta_1(F_{J_0}(B) - f_1) + \frac{1}{2}\beta_2(f_1 - f_2),$$

$$g_{19} = h_3^* + \frac{1}{2}\alpha_3(h_4 - h_2) + \frac{1}{4}\alpha_4(h_5 - F_{I_0}(E)) + \frac{1}{2}\beta_3(h_1 - h_2) + \frac{1}{4}\beta_4(h_2 - F_{I_0}(E)),$$

$$g_{17} = h_2^* + \frac{1}{4}\alpha_3(h_3 - h_1) + \frac{1}{2}\alpha_4(h_4 - h_2) + \frac{1}{4}\beta_3(F_{J_0}(C) - h_1) + \frac{1}{2}\beta_4(h_1 - h_2),$$

$$g_4 = e_3^* + \frac{1}{2}\alpha_5(e_4 - e_2) + \frac{1}{4}\alpha_6(e_5 - F_{J_0}(B)) + \frac{1}{2}\beta_5(e_1 - e_2) + \frac{1}{4}\beta_6(e_2 - F_{J_0}(B)),$$

$$g_9 = e_2^* + \frac{1}{4}\alpha_5(e_3 - e_1) + \frac{1}{2}\alpha_6(e_4 - e_2) + \frac{1}{4}\beta_5(F_{I_0}(E) - e_1) + \frac{1}{2}\beta_6(e_1 - e_2).$$

Des équations (15), (19) et (23), on tire :

$$g_3 = \bar{\alpha} g_4 + \bar{\beta} g_2 + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) g_1,$$

$$g_{11} = \bar{\alpha} g_{17} + \bar{\beta} g_{10} + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) g_5,$$

$$g_{15} = \bar{\alpha} g_{16} + \bar{\beta} g_{19} + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) g_9.$$

Finalement, si les valeurs de  $g_6$ ,  $g_8$  et  $g_{18}$  sont connues, des équations (14), (18), (22) et (13) on obtient :

$$g_7 = \bar{\alpha} g_8 + \bar{\beta} g_6 + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) g_3,$$

$$g_{12} = \bar{\alpha} g_{18} + \bar{\beta} g_{11} + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) g_6,$$

$$g_{14} = \bar{\alpha} g_{15} + \bar{\beta} g_{18} + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) g_8,$$

$$g_{13} = \bar{\alpha} g_{14} + \bar{\beta} g_{12} + (1 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}) g_7.$$

**4. 5. 6. Calcul des points  $g_6$ ,  $g_8$  et  $g_{18}$**

Nous avons donné une méthode de remplissage qui consiste à construire un morceau de Bézier dont les trois morceaux voisins sont connus. Cet élément est polynomial par morceaux de degré 4 et sa restriction aux arêtes est un polynôme de degré 3. Le raccordement  $G^1$  détermine complètement le polynôme à l'exception des trois points  $g_6$ ,  $g_8$  et  $g_{18}$  qui restent libres. On présente alors une méthode classique pour le calcul de ces points.

Soit  $P(u, v)$  un polynôme de degré 4 défini sur un triangle  $T$ . Si on note

$$D_2^T P = \int \int_T \left[ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right)^2 \right] du dv, \tag{6.53}$$

alors les valeurs de  $g_6$ ,  $g_8$  et  $g_{18}$  sont obtenues par le critère de minimisation suivant :

$$\min \left( D_2^{T_s} F_{I_1} + D_2^{T_s} F_{J_1} + D_2^{T_s} F_{K_1} \right), \tag{6.54}$$

où  $T_s$  est le triangle standard de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ . Les figures (27) et (28) donnent un exemple de remplissage basé sur le critère (6.54).

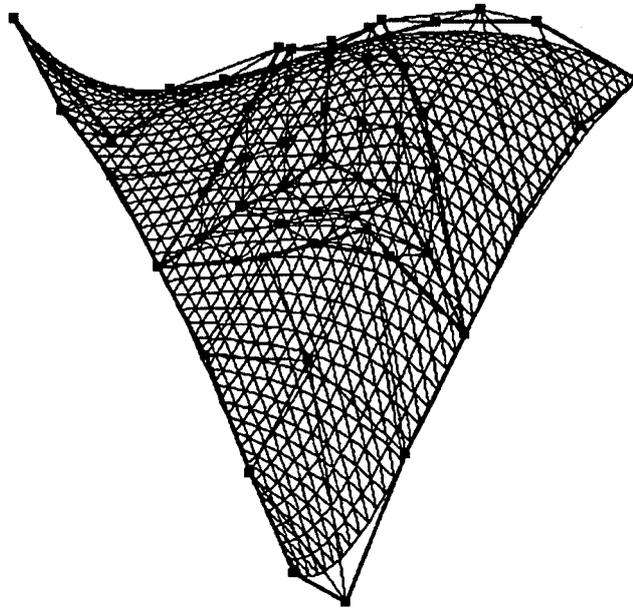


FIGURE.27. Méthode de remplissage : surface et son réseau de contrôle.

Dans la figure (29), on a donné un exemple de remplissage où les points  $g_6$ ,  $g_8$  et  $g_{18}$  sont obtenus en minimisant la quantité

$$\min \left( D_3^{T_s} F_{I_1} + D_3^{T_s} F_{J_1} + D_3^{T_s} F_{K_1} \right), \tag{6.55}$$

où

$$D_3^T P = \int \int_T \left[ \left( \frac{\partial^3 P}{\partial u^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial^3 P}{\partial u^2 \partial v} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial^3 P}{\partial u \partial v^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 P}{\partial v^3} \right)^2 \right] du dv. \tag{6.56}$$

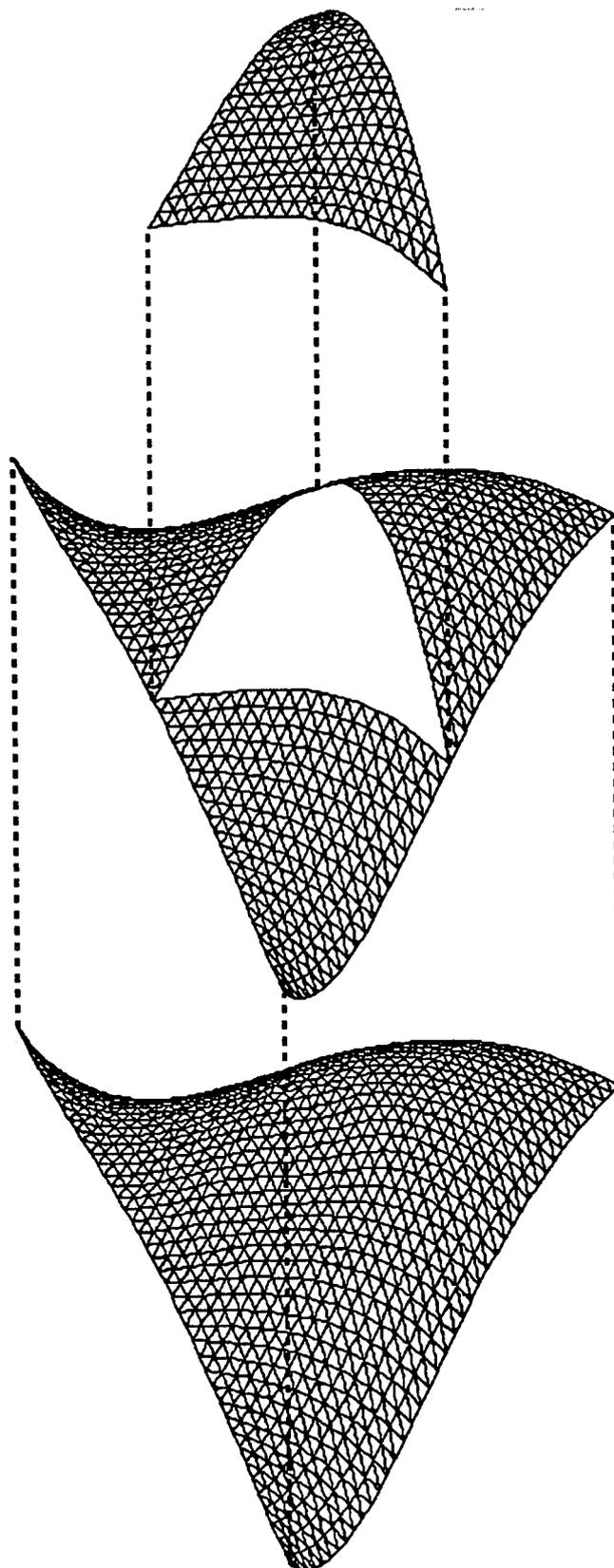


FIGURE.28. Représentation de la méthode de remplissage .

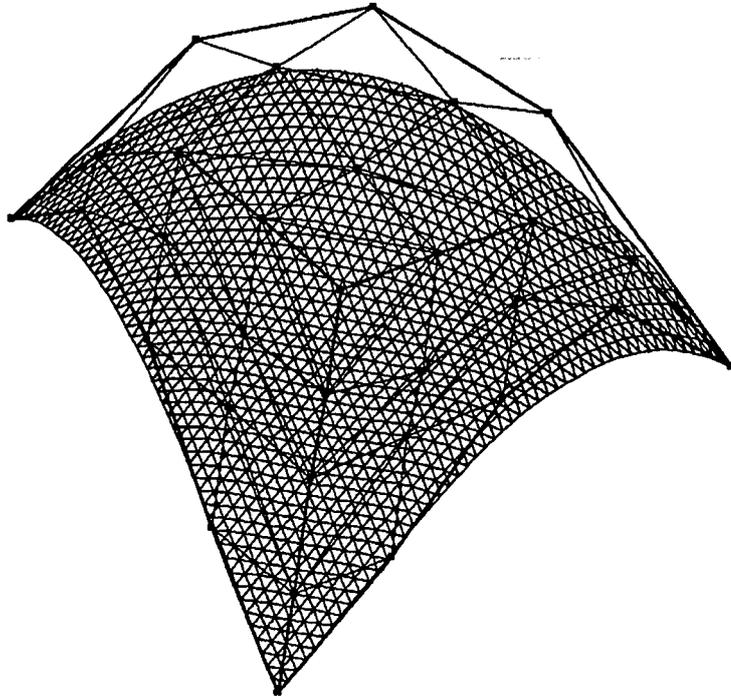


FIGURE.29. Le morceau de surface défini sur  $T_{I_1} \cup T_{J_1} \cup T_{K_1}$ .  
Calcul de  $g_6$ ,  $g_8$  et  $g_{18}$  par (6.53)

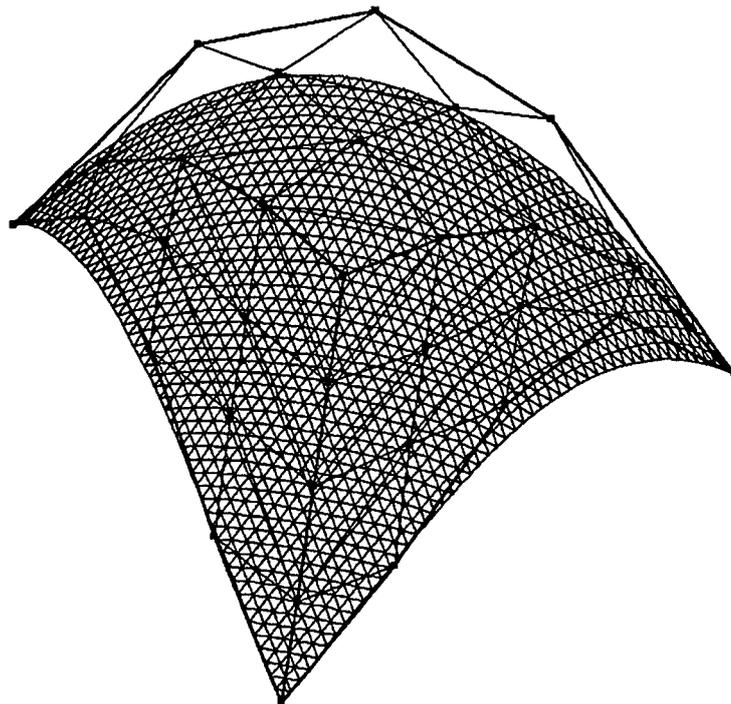


FIGURE.30. Le morceau de surface défini sur  $T_{I_1} \cup T_{J_1} \cup T_{K_1}$ .  
Calcul de  $g_6$ ,  $g_8$  et  $g_{18}$  par (6.55)

## CONCLUSION

Nous avons traité dans cette étude, le problème de l'interpolation progressive stable de données dans le plan ou dans l'espace.

**Dans le cas unidimensionnel**, nous avons étudié le problème au moyen de deux représentations différentes. La première consiste à représenter les données (obtenues progressivement) par une fonction spline de classe  $G^k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). Des paramètres de forme sont ainsi introduits par le raccordement géométrique entre les morceaux de la spline et des conditions sur ceux-ci, nécessaires et suffisantes pour assurer la stabilité, sont données. Nous avons remarqué que le paramètre de forme  $\beta_1$  (en supposant que les autres sont fixés) joue un rôle très important dans la stabilité numérique des calculs. En effet, en diminuant  $\beta_1$ , on arrive à absorber rapidement les oscillations qui peuvent apparaître dans le calcul itératif que l'on fait. Ainsi, une nouvelle application est donnée aux paramètres de forme.

La deuxième manière de traiter le problème, est de représenter les données de  $\mathbb{R}^2$  par une fonction spline de classe  $C^k$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Chaque morceau de la spline appartient à un sous espace de dimension  $k + 2$ , engendré par une famille de fonctions  $\{1, \varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}\}$  ayant certaines propriétés. On démontre que la stabilité est en fait obtenue par le choix même des fonctions de base  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}$ . Comme conséquence, on découvre que les A-splines introduites par A. Seredinski [52] sont un cas particulier de la formulation générale donnée ici. Nous donnons aussi plusieurs exemples pour le choix des fonctions  $\varphi_i$ , pouvant être polynomiales, exponentielles ..., mais toutes dépendantes d'un coefficient que l'on doit choisir convenablement pour assurer la stabilité.

Comme conséquence de ces résultats, on a examiné le problème dans le cas où les données sont entachées d'erreurs. On a proposé alors des méthodes d'approximation classiques, type moindres carrés et lissage.

Le premier pas vers le cas bidimensionnel, consistait à faire un produit tensoriel des splines géométriques unidimensionnelles stables pour former une surface spline  $G^2$  d'interpolation définie sur une grille régulière.

**Dans le cas bidimensionnel**, nous avons suivi la même démarche que précédemment. Deux algorithmes sont alors proposés : le premier représente les données  $(x_i, y_i, z_i)$  de  $\mathbb{R}^3$  par une fonction spline à deux variables de classe  $C^1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Cet algorithme est basé d'abord sur une triangulation des points  $(x_i, y_i)$ , puis par un calcul progressif des gradients aux sommets de la triangulation. Pour cela, on a supposé que la triangulation est donnée et seules les valeurs  $z_i$  sont obtenues progressivement. A l'inverse du cas unidimensionnel, où la progression se faisait d'une manière simple et unique, nous avons rencontré beaucoup de difficultés pour définir le parcours d'une triangulation.

Pour les exemples numériques, nous avons choisi trois types de parcours arbitraires pour trois types particuliers de triangulations. Ce choix a servi seulement pour des tests numériques et ne peut pas être considéré comme une restriction. Nous avons pu trouver des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité, exprimées par une relation simple liant la triangulation et un coefficient  $k$  réel introduit lors du calcul progressif des gradients.

La deuxième représentation est paramétrique, i.e., on représente les données  $(x_i, y_i, z_i)$  de  $\mathbb{R}^3$  par une fonction spline de classe  $G^1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Comme dans l'algorithme précédent, nous avons fixé la triangulation et choisi un parcours dit "en bande". Le passage d'un triangle à un autre est alors exprimé par un raccordement géométrique d'ordre 2 simple le long de l'arête commune, et s'effectuera d'une manière stable en choisissant les paramètres de forme dans un domaine qu'on a défini.

Mais, lors du parcours de la triangulation, il arrive qu'on rencontre des situations particulières où le morceau courant a deux voisins qui sont déjà déterminés au lieu d'un seul. Nous procédons, dans ce cas, par une méthode de remplissage  $G^1$  que nous avons définie nous-même. On a constaté numériquement, que si le remplissage sert pour progresser, il est nécessaire de montrer la stabilité de ce passage.

Enfin, la dernière situation qui peut se produire lors de la progression est que le morceau courant a tous ses voisins déjà connus. A ce propos, on a développé une nouvelle méthode de remplissage basée sur une variation des degrés et un raccordement géométrique  $G^1$ . On signale, que dans cette situation, il est inutile d'étudier la stabilité puisque le remplissage ne sert pas dans la suite.

## REFERENCES

- [1] R.E. Barnhill, Surfaces in CAGD: A survey with new results, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 19, 1985, pp. 1-17.
- [2] R.E. Barnhill, G. Birkhoff, W.J. Gordon, Smooth interpolation in triangles, *Journal of Approximation Theory*, Vol 8, 1973, pp. 114-128.
- [3] R.E. Barnhill, Compatible smooth interpolation in triangles, *Journal of Approximation Theory*, Vol 15, 1975, pp. 214-225.
- [4] R.E. Barnhill, J. Gregory, Polynomial interpolation to boundary data on triangles, *Mathematics of Computation*, Vol 29, No 131, July 1975, pp. 726-735.
- [5] R.E. Barnhill, G. Farin,  $C^1$  quintic interpolation over triangles: Two explicit representations, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol 17, 1981, pp. 1763-1778.
- [6] B. A. Barsky, Computer graphics and geometric modelling using Beta-splines, Springer-Verlag, Heidelberg, W.Germany, 1988.
- [7] B. A. Barsky, T. D. DeRose, Geometric Continuity of Parametric Curves : Three equivalent characterizations, *Computer Graphics and Applications*, Vol 9, No 6, Nov. 1989, pp. 60-68.
- [8] B. A. Barsky, T. D. DeRose, Geometric Continuity of Parametric Curves : Constructions of Geometrically Continuous Splines , *Computer Graphics and Applications*, Vol 10, No 1, Nov. 1990, pp. 60-68.
- [9] W. Boehm, G. Farin, J. Kahman, A survey of curve and surface methods in CAGD, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 1, 1984, pp. 1-60.
- [10] W. Boehm, Visual continuity, *Computer Aided Design*, Vol 20, No 6, 1988, pp. 307-311.
- [11] W. Boehm, On the definition of geometric continuity, *Computer Aided Design*, Vol 20, No 7, september 1988, pp. 370-372.
- [12] W. Boehm, G. Farin, J. Kahmann, A survey of curve and surface methods in CAGD, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 1, 1984, pp. 1-60.
- [13] Z.J. Cendes, S.H. Wong,  $C^1$  quadratic interpolation over arbitrary point sets, *IEEE Computer Graphics and Applications*, November 1987, pp. 8-16.
- [14] P. Dierckx, B. Tytgat, Generating the Bézier points of a  $\beta$ -spline curve, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 6, 1989, pp. 279-291.

- [15] W.H. Du, F.J.M. Schmitt, On the  $G^1$  continuity of piecewise Bézier surfaces: A review with new results, *Computer Aided Design*, Vol 22, No 9, november 1990, pp. 556-573.
- [16] M.P. Epstein, On the influence of parametrization in parametric interpolation, *SIAM Journal Numerical Analysis*, Vol 13, No 2, 1976, pp. 261-268.
- [17] G. Farin, Curves and surfaces for computer aided geometric design, *Academic Press*, New York, 1988.
- [18] G. Farin, Triangular Bernstein-Bézier patches, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 1, 1986, pp. 83-127.
- [19] G. Farin, A modified Clough-Tocher interpolant, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 2, 1985, pp. 19-27.
- [20] T.A. Foley, S. Dayanand, R. Santhanam, Cross boundary derivatives for transfinite triangular patches, *Computing*, Vol 8, 1993, pp. 91-100.
- [21] T.A. Foley, G.M. Nielson, Knot selection for parametric spline interpolation, in: T. Lyche, L.L. Schumaker, eds., *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press. New York, 1989, pp. 261-271.
- [22] T.A. Foley, Interpolation with interval and point tension controls using cubic weighted  $\nu$ -splines, *ACM Transaction On Mathematical Software*, Vol 13, No 1, March 1987, pp 68-96.
- [23] R. Franke, G.M. Nielson, Scattered data interpolation and applications: A tutorial and survey, in: T. Lyche, L.L. Schumaker, eds., *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press. New York, 1989, pp. 131-160.
- [24] T.N.T. Goodman, Properties of  $\beta$ -splines, *Journal of Approximation Theory*, Vol 44, 1985, pp. 132-153.
- [25] T.N.T. Goodman, K. Unsworth, Manipulating shape and producing geometric continuity in Beta-spline curves, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol 6, No 2, 1986, pp. 50-56.
- [26] A.R. Gormaz, Floraisons polynomiales: Applications à l'étude des  $B$ -splines à plusieurs variables, *Thèse de l'Université Joseph Fourier*, 1993.
- [27] J. A. Gregory, Geometric Continuity, in: T. Lyche, L.L. Schumaker, eds., *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press. New York, 1989, 353-371.
- [28] H. Hagen, Geometric spline curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 2, 1985, pp. 223-227.

- [29] H. Hagen, Bézier curves with curvature and torsion continuity, *Rocky Mountain J. Math*, Vol 16, No 3, 1986, pp. 629-638.
- [30] H. Hagen, H. Pottmann, Curvature continuous triangular interpolants, in: T. Lyche, L.L. Schumaker, eds., *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press. New York, 1989, pp. 373-384.
- [31] G. Herron, Techniques for visual continuity, in *Geometric Modelling* G. Farin, ed., *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, 1987, pp. 163-173.
- [32] T. Jensen, Assembling triangular and rectangular patches and multivariate splines, in *Geometric Modelling* G. Farin, ed., *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, 1987, pp. 203-220.
- [33] R. Kulkarni, P.J. Laurent,  $Q$ -splines, *Numerical Algorithms*, Vol 1, (1991), pp. 45-74.
- [34] P. Lancaster, K. Salkauskas, *Curve and surface fitting*, Academic Press, 1986.
- [35] J.P. Lasalle, The stability and control of discrete processes, *Applied Mathematical Sciences*, Vol 62, 1986, pp. 24-29.
- [36] P.J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Herman Paris, 1972.
- [37] D. Liu, J. Hoschek,  $GC^1$  continuity conditions between adjacent rectangular and triangular Bézier surface patches, *CAD*, Vol 21, No 4, May 1989, pp. 194-200.
- [38] S. Mann, C. Loop, M. Lounsbery, D. Meyers, J. Painter, T. DeRose, K. Sloan, A survey of parametric scattered data fitting using triangular interpolants, in *Topics in Surface Modeling*, H. Hagen (ed), pp. 145-172.
- [39] M. Marden, *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable*, *American Mathematical Society*, Vol 3, 1949, pp. 148-161.
- [40] M.L. Mazure, Geometric contact for curves and surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 11, 1994, pp. 177-195.
- [41] M.L. Mazure, Geometric contact for curves and surfaces, *Rapport de recherche LMC*, Université Joseph Fourier, RR 893-M-, 1992.
- [42] G.M. Nielson, Minimum norm interpolation in triangles, *SIAM J.Numer.Anal*, Vol 17, No 1, February 1980, pp. 44-62.
- [43] G.M. Nielson, The side-vertex method for interpolation in triangles, *Journal of Approximation Theory*, Vol 25, 1979, pp. 318-336.

- [44] G.M. Nielson, A transfinite, visually continuous, triangular interpolant, in *Geometric Modelling* G. Farin, ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1987, pp. 235-245.
- [45] G. M. Nielson, A method for interpolating scattered data based upon a minimum norm network, American Mathematical Society, 1983, pp. 253-271.
- [46] G.M. Nielson, Rectangular  $\nu$ -splines, *IEEE Computer Graphics and Applications*, February 1986, pp. 35-40.
- [47] B.R. Piper, Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches, in *Geometric Modelling* G. Farin, ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1987, pp. 221-233.
- [48] M.J.D. Powell, M.A. Sabin, Piecewise quadratic approximations on triangles, *ACM Transactions On Mathematical Software*, Vol 3, No 4, December 1977, pp. 316-325.
- [49] L. Ramshaw, Blossoms are polar forms, *Computer Aided Geometric Design*, Vol 6, 1989, pp. 323-358.
- [50] L. Ramshaw, Blossoming : A connect-the-dots approach to splines, *DEC System Research Center Report 19*, June 1987.
- [51] J.C. Roux, Méthodes d'approximation et de géométrie algorithmique pour la reconstruction de courbes et surfaces, Thèse de l'Université Joseph Fourier, 1994.
- [52] A. Seredinski, Principe de la méthode des A-splines récurrentes pour l'interpolation et la compression des signaux, *Traitement de signal*, Vol 9, No 2, 1992, pp 175-191.
- [53] B.Q. Su, D.Y. Liu, *Computational geometry. Curve and surface modelling*, Academic Press, 1989.
- [54] P. Wassum, Conditions and constructions for  $GC^1$  and  $GC^2$  continuity between adjacent integral Bézier surface patches, in *Topics in Surface Modeling*, H. Hagen (ed), pp. 187-217.