



Squelettes et graphes de Voronoï 2D et 3D

Dominique Attali

► To cite this version:

Dominique Attali. Squelettes et graphes de Voronoï 2D et 3D. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1995. Français. NNT : . tel-00346066

HAL Id: tel-00346066

<https://theses.hal.science/tel-00346066>

Submitted on 11 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Dominique Attali

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

(Arrêtés ministériels du 5.7.1984 et du 30.3.1992)

Spécialité : Informatique

SQUELETTES ET GRAPHS DE VORONOI 2D ET 3D

Date de soutenance : 13 Octobre 1995

Composition du Jury :

Claude Puech	PRESIDENT
Didier Arquès	RAPPORTEUR
Jean-Daniel Boissonnat	RAPPORTEUR
Olaf Kübler	RAPPORTEUR
Jean-Marc Chassery	EXAMINATEUR
Annick Montanvert	EXAMINATEUR

Thèse préparée au sein du Laboratoire **TIMC - Institut IMAG**

à ma famille

à Eric

Remerciements

Ce mémoire de thèse est le résultat de trois ans de travail réalisés dans l'équipe INFODIS du laboratoire TIMC-IMAG. Il n'aurait pas vu le jour sans l'aide et le soutien que j'ai reçus de toutes parts.

Mes premiers remerciements vont à M. CLAUDE PUECH, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

J'adresse également mes plus vifs remerciements à MM. DIDIER ARQUÈS et OLAF KÜBLER pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse.

Je tiens tout particulièrement à remercier M. JEAN-DANIEL BOISSONNAT pour l'attention avec laquelle il a relu ce mémoire. Ses remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer la qualité du présent document.

Je remercie M. JEAN-MARC CHASSERY pour avoir bien voulu participer à mon jury et pour sa gentillesse.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Mme ANNICK MONTANVERT qui a bien voulu diriger mes recherches. Elle a su à plusieurs reprises me remonter le moral grâce à son optimisme et son énergie. Je la remercie pour la confiance et les encouragements qu'elle m'a prodigués.

Je voudrais également remercier ETIENNE pour m'avoir initié aux graphes de Voronoï, pour son enthousiasme et ses discussions passionnantes.

Je remercie enfin tous les membres de l'équipe et des équipes voisines pour la bonne ambiance qui règne dans le laboratoire.

Mais, je n'oublie pas mes anciens professeurs de Mathématiques, M. GOURION, M. BARANI et Mlle CHAMPELLE. Ils m'ont montré la beauté de leur discipline et m'ont appris la rigueur d'un raisonnement. Après toutes ces années, je pense encore à eux.

Enfin, je remercie mes parents et ma sœur CAROLE pour avoir eu foi en moi et j'espère ne pas les avoir déçus. Je remercie également la famille d'ERIC pour sa

gentillesse et son soutien.

Ma pensée va enfin vers ERIC qui m'a encouragé et aidé durant ces trois longues années.

Résumé

Notre travail concerne l'étude, le calcul et la simplification des squelettes d'objets $2D$ et $3D$. Le squelette d'un objet est une figure mince, centrée dans la forme et qui en résume l'aspect. Il est utile en analyse d'images pour la description et la reconnaissance de formes, la quantification, la mise en correspondance, etc.

La très grande majorité des méthodes de squelettisation travaille sur des images binaires avec des outils de la géométrie discrète. Or, dernièrement, une nouvelle famille de méthodes, appelées *méthodes continues*, a vu le jour. Le squelette est approché à l'aide du graphe de Voronoï d'un échantillonnage de la frontière, et se calcule par des moyens propres à la géométrie algorithmique. Notre intérêt s'est porté sur cette nouvelle classe de méthodes et les problèmes qui s'y rattachent.

Dans un premier temps, nous montrons que le squelette d'une union de sphères se contruit de façon exacte à l'aide d'éléments très simples comme des segments de droite en $2D$ et des polygones en $3D$. Nous utilisons alors ce résultat pour reformuler de façon originale les méthodes continues.

La construction du squelette nécessite de pouvoir interpoler par des facettes triangulaires un ensemble de points localisés sur la frontière d'un objet. Nous proposons une méthode, fondée sur le calcul du graphe de Delaunay et dont nous montrons la convergence en $2D$.

Enfin, des méthodes de simplification du squelette sont présentées. Elles permettent de sélectionner les branches correspondant à des renflements significatifs de la forme et conduisent en $3D$ soit à des squelettes surfaciques, soit à des squelettes filiformes selon les besoins de l'utilisateur.

Pour finir, nous décrivons une application qui valide notre approche, et l'illustre sur des données biologiques.

MOTS CLÉS : squelette, graphe de Voronoï, triangulation de Delaunay, polyboule, représentation sphérique, interpolation, description de formes.

Abstract

Our work is concerned with the study, the computation and the simplification of the skeletons of $2D$ and $3D$ objects. The skeleton of an object is a thin figure, centered in the shape and which summarizes its general form. It is useful for shape description and recognition, quantification, matching, and so on.

To begin with, we describe the different ways to compute the skeleton. Most of the skeletonization methods works on binary images and uses tools of the discrete geometry.

Recently, it has been proposed to use the Voronoï graph of a set of points located on the boundary of the shape in order to approach the skeleton. Our interest focused on this new family of methods, called continuous methods and that use tools of the computational geometry.

A formulation of continuous methods using the skeleton of a set of spheres is first proposed. Indeed, we demonstrate that the skeleton of a set of spheres is made up of very simple components such as straight line segments in $2D$ and polygons in $3D$.

The construction of the skeleton requires the interpolation of a set of points by triangular facets. We propose a method that is based on the computation of the Delaunay graph and for which we establish the convergence in $2D$.

Methods to simplify the skeleton are also presented. The goal is to select branches associated with significant protrusions of the shape. In the $3D$ case, small modifications of our process provide either surfacic or wireframe skeletons.

Finally, we describe an application of $2D$ skeletons for pathologists which validates our approach.

KEY WORDS : skeleton, Voronoi graph, Delaunay triangulation, polyball, spherical representation, interpolation, shape description.

Glossaire

R^N	Espace euclidien de dimension N
X	Objet
∂X	Frontière
X^c	Complémentaire
$Sk(X)$	Squelette exact
$Skiz(\cup X_i)$	Squelette par zones d'influence des objets X_i
d	Distance euclidienne
d_4, d_8	Distances discrètes classiques
E	Ensemble fini de points
$Vor(E)$	Graphe de Voronoï de l'ensemble E
$Del(E)$	Graphe de Delaunay de l'ensemble E
$GG(E)$	Graphe de Gabriel de l'ensemble E
w	Densité d'échantillonnage
E_w	Echantillon
X_w, P	Approximation polygonale
n	Nombre de points dans l'échantillon
ρ	Fonction d'étanchéité
α	Angle bissecteur
ω, Ω	Angles solides

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Représentation des formes	2
1.2	Outils mathématiques	3
1.2.1	Géométrie discrète	3
1.2.2	Géométrie algorithmique	3
1.3	Plan	5
2	Généralités sur le squelette	9
2.1	Définitions et propriétés	10
2.2	Méthodes discrètes	13
2.2.1	Amincissement homotopique	15
2.2.2	Extraction à partir de cartes de distances	15
2.2.3	Simulation de la propagation d'une onde	16
2.2.4	Méthodes pour images en niveaux de gris	17
2.3	Autres méthodes	17
2.3.1	Méthodes exactes et graphe de Voronoï généralisé	17
2.3.2	Méthodes continues et graphe de Voronoï ponctuel	18
2.4	Calcul de paramètres à l'aide du squelette	19
2.4.1	Paramètres	19
2.4.2	Mise en correspondance du contour et du squelette	20
2.4.3	Classification des points du squelette	22
2.4.4	Intégration	24
2.5	Conclusion	26
3	Squelette et graphe de Voronoï	29
3.1	Introduction	30

3.2	Rappels sur les graphes	31
3.2.1	Graphe de Voronoï	31
3.2.2	Graphe de Delaunay	32
3.2.3	Graphe de Gabriel	34
3.3	Représentation des objets	35
3.3.1	Echantillons	36
3.3.2	Approximation polygonale	38
3.3.3	Formes r -régulières	41
3.4	Description des méthodes existantes	43
3.4.1	Squelette = sommets de Voronoï intérieurs	45
3.4.2	Squelette = éléments de Voronoï intérieurs	46
3.4.3	Squelette = points de Voronoï intérieurs	47
3.4.4	Squelette = dual de l'objet	47
3.5	Analyse des méthodes existantes	48
3.5.1	Quelques cas pathologiques	49
3.5.2	Condition d'équivalence	49
3.5.3	Complexité	54
3.5.4	Discussion	56
3.6	Conclusion	58
4	Squelette exact des polyboules	59
4.1	Introduction	60
4.2	Généralités sur les représentations sphériques	61
4.3	Squelette des polyboules	62
4.3.1	Structure des polyboules	63
4.3.2	Boules génératrices et points singuliers	65
4.3.3	Squelette	67
4.3.4	Exosquelette	71
4.4	Construction	72
4.4.1	Algorithme	72
4.4.2	Cas général	74
4.4.3	Cas particulier	75
4.5	Conclusion	78

5	Interpolation d'un ensemble de points	79
5.1	Introduction	80
5.2	Etat de l'art	81
5.2.1	Hypothèses simplificatrices	81
5.2.2	Graphes de voisinage	84
5.3	Méthode proposée	91
5.3.1	Cadre de travail	91
5.3.2	Détection grossière des surfaces	92
5.3.3	Recherche de surfaces fermées	102
5.3.4	Produits dérivés	105
5.4	Extensions et perspectives	107
5.5	Conclusion	108
6	Simplification du squelette	109
6.1	Introduction	110
6.2	Etat de l'art	110
6.2.1	Méthodes limitant la perte d'information	111
6.2.2	Méthodes gardant les branches significatives	113
6.3	Schéma général pour les squelettes continus	114
6.3.1	Principe	115
6.3.2	Conservation de l'homotopie	115
6.3.3	Stratégies de simplification	117
6.4	Critère local	119
6.4.1	Objectifs	119
6.4.2	Cas $2D$	120
6.4.3	Cas $3D$	128
6.5	Critère global	132
6.5.1	Cas $2D$	132
6.5.2	Cas $3D$	135
6.6	Conclusion	138
7	Applications	141
7.1	Introduction	142
7.2	Contexte	142
7.2.1	Histopathologie	142

7.2.2	Microscope informatisé AxioHOME	144
7.2.3	Logiciel	145
7.3	Squelette par zones d'influence	145
7.3.1	Définitions - généralités	145
7.3.2	Calcul	146
7.4	Conclusion	147
8	Conclusion	149
8.1	Bilan	150
8.2	Perspectives	151
A	Homotopie	153
A.1	Généralités - Définitions	154
A.2	Type d'homotopie du squelette	156
A.3	Type d'homotopie du graphe dual	157
	Bibliographie	160
	Index	172

Table des figures

1	Ailes d'insecte	4
2	Organisation du document	7
3	Squelette et boules maximales	11
4	Codage et homotopie	12
5	Axe médian	14
6	Squelette d'un polygone	17
7	Correspondance entre contours et squelettes	21
8	Première caractérisation des points du squelette	23
9	Deuxième caractérisation des points du squelette	23
10	Notations	24
11	Région de Voronoï	31
12	Graphe de Voronoï et graphe de Delaunay	33
13	Boule de Delaunay et simplexe associé	33
14	Dualité entre éléments de Voronoï et éléments de Delaunay	34
15	Graphe de Gabriel	35
16	Echantillon	37
17	Définition des approximations polygonales	39
18	Approximations polygonales	40
19	Forme r -régulière	42
20	Propriétés des formes r -régulières	42
21	Méthodes continues de squelettisation	45
22	Cas pathologiques	49
23	Comportement des deux principales méthodes de squelettisation	50
24	Construction d'un chemin	51
25	Démonstration de la proposition 3.6	52

26	Squelettes $2D$	53
27	Méthodes $3D$ non équivalentes	54
28	Squelettes $3D$ par la méthode 4	57
29	Forme des objets et type des tétraèdres	58
30	Portion d'ADN	61
31	Amas de bulles	63
32	Écriture minimale	64
33	Face d'une polyboule	65
34	Vocabulaire	67
35	Structure du squelette $2D$	68
36	Polyboules et squelettes $3D$	69
37	Diagramme à poids additifs	71
38	Ajout de points sur la frontière	73
39	Polyboules approchant une forme	77
40	Film de savon	85
41	Polyèdre de surface minimale	86
42	Comparaison des graphes de voisinage	87
43	Sculpture de l'enveloppe convexe	87
44	Triangulation de Delaunay sans cycle hamiltonien	88
45	Boules généralisées	90
46	Disques de Delaunay	93
47	Cercles formant un angle variable	93
48	Cercles orthogonaux	94
49	Démonstration de la proposition 5.1	95
50	Démonstration de la proposition 5.2	96
51	Sélection des arêtes frontières en $2D$	98
52	Sphère de Delaunay intersectant la frontière	99
53	Premier exemple de sélection des faces frontières en $3D$	100
54	Deuxième exemple de sélection des faces frontières en $3D$	101
55	Influence de la répartition des points	102
56	Processus d'agrégation des triangles	103
57	Fusion	104
58	Résultats de l'agrégation des triangles	105

59	Résultats de l'agrégation des tétraèdres	106
60	Sensibilité du squelette au bruit	110
61	Distance entre forme reconstruite et forme initiale	112
62	Classification des simplexes	116
63	Suppression d'un simplexe	118
64	Angle bissecteur et fonction d'étanchéité	120
65	Calcul de l'angle bissecteur	121
66	Illustration du critère local	122
67	Graphe des paramètres pour des formes non bruitées	123
68	Graphe des paramètres pour des formes bruitées	124
69	Résultats 2D en appliquant un critère local	125
70	Modélisation du bruit	127
71	Généralisation de l'angle bissecteur	129
72	Graphes des paramètres dans le cas 3D	130
73	Résultats 3D en appliquant un critère local	131
74	Approximation de l'angle bissecteur	132
75	Modèle pour les objets	133
76	Résultats 2D en appliquant un critère global	134
77	Graphe de Voronoï orienté	136
78	Antécédents et angle solide approché	137
79	Résultats 3D en appliquant un critère global	139
80	Exemple d'éléments présents sur une lame	142
81	Différentes organisations de cellules dans un tissu prostatique	143
82	Interface utilisateur superposée à l'image optique d'une lame	144
83	Squelette par zones d'influence calculé sous HOME	146
84	Squelette par zones d'influence d'un ensemble de glandes	146
85	Deux objets topologiquement équivalents	154
86	Le ruban de Möbius	155
87	Illustration de la proposition A.3	157
88	Les graphes G et G^*	158
89	Application σ	159

Chapitre 1

Introduction

*La nature est un temple où de vivants piliers
Laissent parfois sortir de confuses paroles.
L'homme y passe à travers des forêts de symboles
Qui l'observent avec des regards familiers.*

CHARLES BAUDELAIRE

1.1 Représentation des formes

L'être humain reçoit en permanence des informations très diverses par l'intermédiaire de ces cinq sens. Malgré l'abondance de ces informations, il est capable de construire une représentation cohérente du monde qui l'entoure. Son cerveau réussit à chaque instant à organiser et hiérarchiser les données éparses qu'il reçoit et restitue chaque objet observé comme un "tout".

L'analyse d'images cherche à reproduire de façon automatique ce même processus. Elle a pour but la description du contenu d'une image, en vue de son interprétation et d'une prise de décision. Les champs d'application de cette discipline touchent des domaines aussi variés que l'imagerie satellite, médicale ou biologique, la robotique, la géologie...

En analyse d'images, les données à traiter proviennent de l'échantillonnage d'une région de l'espace par un système d'acquisition (caméra, microscope confocal, rayons X, ...). Ces données se présentent traditionnellement sous la forme d'images bidimensionnelles et sont le résultat d'une série de mesures effectuées à intervalles réguliers dans un plan. Mais, il peut également s'agir de blocs de données tridimensionnels résultant d'un empilement de coupes planes. Des systèmes plus perfectionnés comme le système à balayage laser permettent quant à eux d'obtenir un nuage de points 3D mesurés directement sur la surface d'un objet. Deux constatations s'imposent. D'une part, avec l'amélioration constante des systèmes d'acquisition, les mesures sont de plus en plus précises et les données à traiter de plus en plus volumineuses. D'autre part, ces données ne sont pas structurées.

L'analyse d'images a pour but de décrire de façon quantitative ou qualitative les objets présents dans les données. Elle transforme pour cela l'information de bas niveau issue de la phase d'acquisition en une information de haut niveau où les formes et les structures sont décrites de façon synthétique. Les grandes étapes de ce processus sont le prétraitement, la segmentation, la description et l'interprétation.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de la représentation des objets en vue de leur description. Trois types de représentations seront discutés :

- la représentation par squelettes,
- le partitionnement par tétraèdres,
- le recouvrement par boules.

Le squelette d'un objet est une figure mince, centrée dans la forme et qui en résume l'aspect. Nous allons voir que la représentation par squelette est intimement liée aux deux autres modes de représentation. Son étude constitue le fil directeur de ce document.

1.2 Outils mathématiques

Notre travail s'appuie sur les résultats de deux disciplines : la *géométrie discrète* d'une part et la *géométrie algorithmique* d'autre part. Les prochaines sections sont l'occasion de rappeler brièvement leurs fondements.

1.2.1 Géométrie discrète

La *géométrie discrète* est une branche des mathématiques qui étudie les propriétés de la géométrie dans le plan discret $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Elle est née de la nécessité de formaliser les opérations effectuées sur les images discrètes. En géométrie discrète, une image I est souvent interprétée comme une fonction de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans V :

$$I : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \rightarrow V \\ (x, y) & \mapsto I(x, y) \end{cases}$$

Lorsque $V = \{0, 1\}$, l'image est dite *binaire*. Usuellement, $V = \{0, 1, \dots, 255\}$ ou $V = \{0, 1, \dots, 4095\}$ et on parle alors d'images en niveaux de gris. Dans une image binaire, les points ayant pour valeur 1 constituent les objets et les autres le fond de l'image. La distance euclidienne est généralement délaissée au profit des distances de chanfrein. Les notions usuelles de voisinage, frontière, chemin, connexité sont également redéfinies. Les résultats habituels du plan euclidien ne s'étendent pas forcément au plan discret. Par exemple, deux droites discrètes "non parallèles" ne s'intersectent pas forcément. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [Cha91].

1.2.2 Géométrie algorithmique

La *géométrie algorithmique* étudie des algorithmes efficaces pour résoudre des problèmes géométriques. L'un des résultats majeurs de cette discipline est l'importance d'un petit nombre de structures géométriques dans la résolution d'un grand

nombre de problèmes extrêmement divers. Ces structures sont les polytopes, les triangulations, les arrangements et les diagrammes de Voronoï décrites en détail dans [Boi95].

Un des problèmes les plus célèbres de la géométrie algorithmique est sans aucun doute le calcul du graphe de Voronoï. Le graphe de Voronoï d'un ensemble de points, appelés germes, est une partition de l'espace en régions contenant chacune un germe : chaque région est formée des points du plan plus proches de son germe que de tout autre germe. L'intérêt pour le graphe de Voronoï s'explique par les propriétés remarquables qu'il possède :

- il permet de représenter des phénomènes de croissance et se retrouve par conséquent dans la nature (voir figure 1) ;
- il permet de résoudre en temps optimal d'autres problèmes de géométrie algorithmique comme le calcul de la paire de points la plus proche, de l'arbre de recouvrement minimal, du graphe de Gabriel ;
- son dual, – la triangulation de Delaunay – est optimale selon les critères de granularité et de finesse définis dans [Boi95].

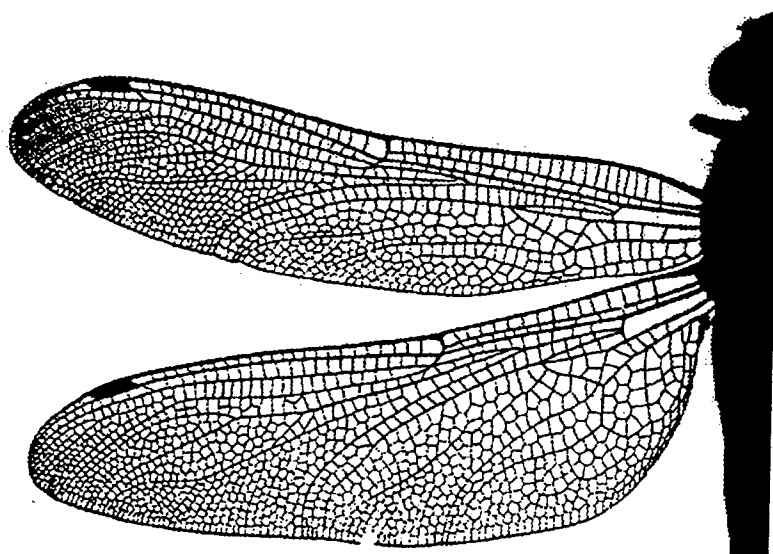


FIG. 1 - Ailes d'insecte présentant le même aspect que les graphes de Voronoï (extrait de [Hil91]).

1.3 Plan

Ce mémoire de thèse s'intéresse aux méthodes d'extraction du squelette $2D$ et $3D$, et aux problèmes soulevés par leur utilisation. Il est organisé de la façon suivante (voir figure 2).

Les chapitres 2, 3 et 4 sont l'occasion d'étudier en détail la squelettisation. Le chapitre 5 aborde le problème de l'interpolation d'un ensemble de points. Le chapitre 6 présente différentes façons de simplifier la structure d'un squelette. Enfin, le chapitre 7 décrit une application mettant en jeu des données biologiques.

Tandis que les trois premiers chapitres (2,3,4) présentent des résultats théoriques, les trois derniers chapitres (5,6,7) apportent des solutions pratiques à des problèmes concrets. Les chapitres sont à peu près indépendants les uns des autres car ils abordent chacun un problème différent. En plus de la représentation par squelette, deux autres types de représentations sont étudiés : tout d'abord, la représentation à l'aide de boules dans le chapitre 4 puis la représentation par simplexes dans le chapitre 5. Le contenu de chaque chapitre est à présent décrit de façon plus explicite.

Dans le chapitre 2, nous introduisons la notion de squelette et nous rappelons les propriétés qui ont fait son succès en analyse d'images. Un état de l'art des méthodes de squelettisation est également effectué. Jusqu'à présent, la plupart des méthodes travaillaient directement dans les images discrètes en manipulant uniquement des entiers. Or, dernièrement, une nouvelle famille de méthodes a vu le jour, que nous désignons sous le terme de *méthodes continues*. Ces méthodes sont fondées sur le calcul du graphe de Voronoï par des techniques propres à la géométrie algorithmique et permettent de s'abstraire de la grille discrète. Le squelette calculé possède une structure de graphe et converge vers le squelette exact.

Le chapitre 3 revient plus en détail sur les méthodes continues. Dans un premier temps, les notions d'*échantillons*, d'*approximations polygonales* et de *formes r -régulières* sont introduites. Notre but est de pouvoir désigner et décrire aisément les objets manipulés par les méthodes continues. Puis, les différentes façons d'utiliser le graphe de Voronoï pour approcher le squelette sont recensées et comparées. Il ressort de cette étude que dans l'espace $2D$, certaines méthodes ont un comportement équivalent.

Dans le chapitre 4, nous montrons que le squelette d'une union de sphères est formé d'éléments très simples comme des segments de droite et des polygones. Sa

construction passe par le calcul du graphe de Voronoï d'un ensemble fini de points sur la frontière. Ce résultat possède deux implications. D'une part, il fournit un nouvel argument justifiant l'utilisation d'unions de sphères pour représenter les objets. D'autre part, il conduit à une nouvelle méthode continue d'extraction du squelette.

Dans le chapitre 5, le problème soulevé est celui de la triangulation d'une surface connue par un ensemble de points suffisamment dense. Le but est de relier les points entre eux de façon naturelle afin de reconstruire une approximation de la surface. La solution présentée utilise le calcul du graphe de Voronoï et converge en dimension 2.

A l'issue du chapitre 5, nous disposons de tous les outils nécessaires pour construire le squelette à partir d'un échantillonnage de la frontière. Malheureusement, le résultat obtenu peut rarement être exploité tel quel et nécessite une étape de simplification. Cette étape a pour but de sélectionner dans le squelette les branches les plus significatives. Nous proposons 2 solutions. La première simplifie le squelette sur la base d'informations purement locales. La deuxième prend en compte des informations plus globales et permet, en 3D d'obtenir des squelettes filiformes particulièrement pertinents.

Le chapitre 7 présente une application effectuée dans le cadre d'un projet européen dans le domaine de la biologie et de la médecine. Notre contribution a consisté à inclure dans l'environnement du microscope informatisé Zeiss AxioHOME, un outil efficace permettant d'extraire des zones d'influence sur des structures de tissus humains.

Nous terminons par une conclusion générale dans le chapitre 9.

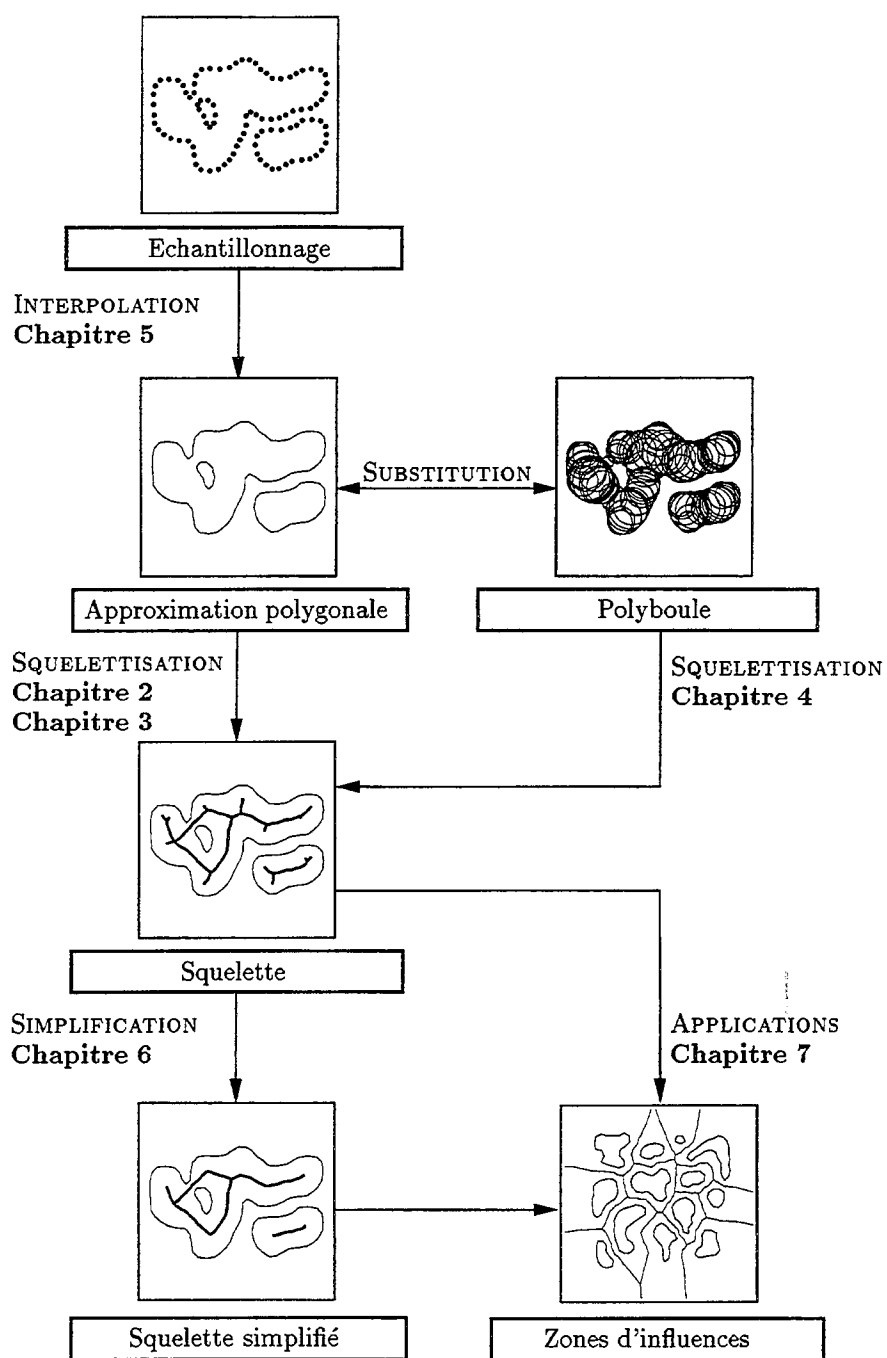


FIG. 2 - Organisation du document.

Chapitre 2

Généralités sur le squelette

*Qui ne sait pas tirer les leçons de 3000 ans
vit seulement au jour le jour.*

GOETHE

2.1 Définitions et propriétés

Un des aspects fondamentaux de l'analyse d'images est le passage à une description synthétique des objets. Pour y parvenir, on peut associer à chaque objet son squelette. Ce faisant, on représente les objets par leurs axes de symétrie principaux. Dans le plan, le squelette d'un objet est un ensemble de lignes passant "en son milieu". Dans l'espace, le squelette est un ensemble de surfaces centrées dans la forme. Ainsi, le squelette résume l'aspect général de l'objet, sans tenir compte de son épaisseur.

Ce concept a été introduit pour la première fois par Blum dans l'espace continu [Blu67]. Sa motivation était de trouver un "bon" descripteur de formes. En particulier, il souhaitait pouvoir décrire de façon pertinente les objets étudiés en biologie et biomédecine (chromosomes, os, ...). Dès 1978, Blum et Nagel [Blu78] proposent d'utiliser le squelette afin de décomposer les formes, de les classer et d'en mesurer des paramètres. L'engouement pour cette transformation ne s'est pas démenti par la suite. De nombreux travaux ont été et continuent d'être publiés tant sur les propriétés que sur les méthodes de calcul ou les applications du squelette.

Il existe plusieurs définitions équivalentes du squelette dans l'espace continu. Par exemple, le squelette peut être vu comme le lieu des points où deux fronts d'ondes en provenance des contours se rencontrent. Nous utilisons par la suite une définition fondée sur la notion de boules maximales (voir figure 3) :

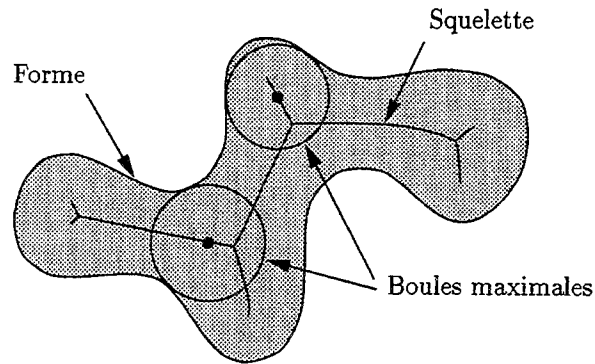
Définition 2.1 (Boule maximale) *Une boule B incluse dans un objet X est dite maximale s'il n'existe pas d'autres boules B' incluses dans l'objet et la contenant strictement :*

$$B \subset B' \subset X \Rightarrow B = B'$$

Définition 2.2 (Squelette) *Le squelette d'un objet X est l'ensemble des centres de ses boules maximales. Il sera noté par la suite $\text{Sk}(X)$.*

Définition 2.3 (Squelettisation) *La squelettisation est la transformation qui, à un objet X , associe son squelette $\text{Sk}(X)$.*

Le squelette se définit ainsi dans un espace de dimension quelconque. Néanmoins, le plus souvent, il a été étudié et calculé dans le plan.

FIG. 3 - *Squelette et boules maximales.*

Les premières études sur les propriétés du squelette, et en particulier sur sa topologie, datent de 1964 et ont été menées par Riley et Calabi dans l'espace continu [Ril64]. Leurs travaux ont été poursuivis plus récemment dans [Mat88, Mat93, Sch93]. Il apparaît que la squelettisation est une transformation complexe. Pour établir des résultats, il est souvent nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices. Nous énumérons ici les propriétés les plus connues du squelette.

Invariance par translation et rotation

Le squelette est invariant par translation et rotation. Étant donné une translation ou une rotation g et un objet X , on a $\text{Sk}(g(X)) = g(\text{Sk}(X))$

Réversibilité

À partir des points du squelette et des rayons des boules maximales, il est possible de reconstruire la forme. Ainsi, la squelettisation est réversible à condition d'avoir mémorisé en chaque point p du squelette le rayon $\rho(p)$ de la boule maximale centrée en p . La fonction ρ est parfois appelée *fonction d'étanchéité*.

Codage

La propriété de recouvrement de la forme par les boules maximales est à la base d'algorithmes de codage de formes binaires. Néanmoins, ce codage n'est pas optimal en nombre de boules extraites. En effet, certaines boules ne sont pas indispensables à la reconstruction car elles peuvent être recouvertes par deux ou plusieurs autres boules (voir figure 4a).

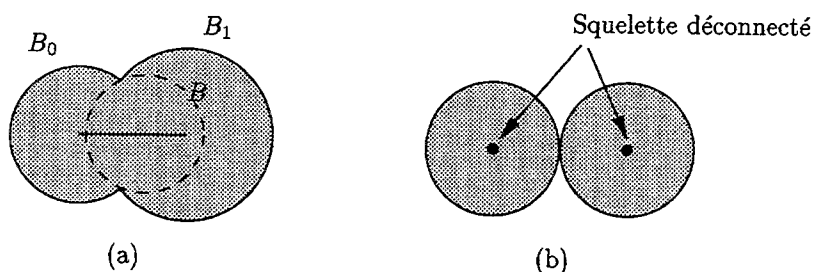


FIG. 4 - Remarques sur le squelette (a) Le squelette ne fournit pas un codage optimal en nombre de boules extraites, puisque B est recouverte par $B_0 \cup B_1$. (b) Exemple de squelette non homotope à la forme.

Epaisseur

Il est généralement admis que le squelette est mince. Dans [Mat88], Matheron s'interroge sur la signification mathématique du mot "mince". Il montre en particulier que l'intérieur du squelette est vide mais que l'on peut trouver des exemples de squelettes ayant une adhérence de mesure non nulle. Démontrer des résultats généraux sur l'épaisseur du squelette s'avère délicat.

Structure de graphe

Sous certaines hypothèses de régularité rappelées dans [Sch93], il est possible de montrer que le squelette a une structure de graphe [Ril64]. Ainsi, les techniques issues de la théorie des graphes peuvent être appliquées directement aux objets, par exemple pour des problèmes de mise en correspondance.

Homotopie

Dans le cas le plus général, un objet connexe n'a pas forcément un squelette connexe [Sch93] (voir figure 4b). Cependant, nous allons supposer par la suite que les objets continus que nous étudions ont même type d'homotopie que leur squelette. La définition du type d'homotopie et les hypothèses permettant de démontrer ce résultat sont rappelées dans l'annexe A. Dans le plan, deux objets homotopes ont même nombre de composantes connexes et pour chaque composante connexe, même nombre de trous. Cette propriété est fondamentale car elle garantit que l'objet et son squelette ont même aspect et justifie l'utilisation du squelette comme descripteur de formes.

Semi-continuité

Il est bien connu que la squelettisation n'est pas une transformation continue. Ceci est son principal point faible et a pour conséquence de rendre le squelette extrêmement sensible aux petites perturbations de l'objet. Néanmoins, si les objets X que l'on étudie sont des ouverts, il est possible de montrer que l'application $X \rightarrow \overline{\text{Sk}(X)}$ est semi-continue inférieurement [Sch93].

Construction

Calculer le squelette dans le plan ou l'espace ne va pas sans difficulté. De nombreuses méthodes ont été proposées dont la majorité travaille dans le plan. Elles peuvent être classées en trois catégories :

- *les méthodes discrètes.* L'objet est mémorisé dans une image binaire. Le squelette est redéfini dans un espace discret. Son calcul utilise des techniques propres à la géométrie discrète.
- *les méthodes continues.* L'objet est représenté par un ensemble de points échantillonnant sa frontière, ou par une approximation polygonale. Des travaux récents ont montré la possibilité d'approcher le squelette à l'aide du graphe de Voronoï ponctuel ou généralisé. Ces méthodes font appel aux outils de la géométrie algorithmique [Cha91].
- *les méthodes exactes.* L'objet est connu sous forme implicite, explicite ou paramétrique. On désire trouver son squelette exact (sous forme implicite, explicite ou paramétrique). Il existe peu d'objets pour lesquels ce problème a été résolu.

Les prochaines sections passent en revue ces différentes méthodes. Tandis que les méthodes discrètes sont décrites dans la section 2.2, les méthodes continues et exactes sont discutées section 2.3. Nous présenterons systématiquement les algorithmes dans l'espace $2D$ avant de donner les extensions $3D$ existantes.

2.2 Méthodes discrètes

Les méthodes discrètes travaillent sur des images binaires, c'est-à-dire sur des maillages rectangulaires ou hexagonaux du plan ou de l'espace. Chaque point du

maillage peut valoir 1 ou 0 selon qu'il appartienne aux objets présents dans l'image ou non.

Pour définir le squelette dans les images binaires, une première idée consiste à transposer telles quelles les définitions 2.1 et 2.2 dans le monde discret, ce qui conduit à introduire la notion d'*axe médian*.

On appelle *axe médian* la version discrétisée du squelette continu. C'est l'ensemble des points du maillage discret qui sont centres d'une boule maximale discrète. La forme de ces boules (et par conséquent la forme de l'axe médian) dépend de la distance utilisée. Pour des images binaires, la distance euclidienne est généralement délaissée au profit des distances de chanfrein qui permettent de manipuler uniquement des entiers naturels, sont simples et rapides à calculer.

Cependant, l'axe médian n'a pas les mêmes propriétés que le squelette continu. Du fait de la discrétisation, il n'est pas connexe. De plus, il peut localement ne pas être mince ou posséder des trous parasites (voir figure 5). Ces différents défauts et imperfections font que l'axe médian ne peut pas être utilisé tel quel en description de formes.

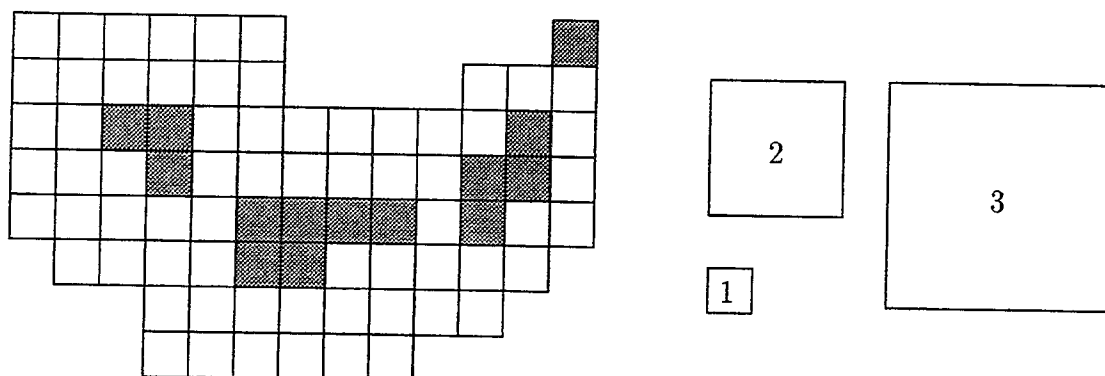


FIG. 5 - *Axe médian calculé avec la distance d_8 et disques de rayon 1, 2 et 3 permettant de recouvrir l'objet (extrait de [Thi94]).*

Pour trouver un "bon" équivalent du squelette continu dans le monde discret, une autre philosophie consiste à le définir à partir des propriétés que l'on veut lui faire posséder. On appelle *squelette discret* tout ensemble de points de la grille discrète qui est mince, centré dans la forme, homotope et réversible. Cette définition n'est pas entièrement satisfaisante, car il est parfois impossible d'avoir simultanément un squelette mince et réversible.

Pour calculer le squelette discret, trois techniques différentes ont été proposées

dans la littérature :

1. l'amincissement homotopique,
2. l'extraction à partir de cartes de distances,
3. la simulation de la propagation d'une onde.

2.2.1 Amincissement homotopique

L'amincissement homotopique consiste à éroder peu à peu le contour des objets jusqu'à obtenir une figure mince et centrée. A un instant donné, un point du contour est supprimé s'il vérifie les deux conditions suivantes : d'une part, sa suppression ne modifie pas l'homotopie (il ne doit pas apparaître de trous dans l'objet, et l'objet ne peut pas être coupé). D'autre part, ce point n'est pas une extrémité de l'ensemble courant (il faut préserver les branches qui apparaissent). Finalement, les points que l'on peut supprimer sont appelés des *points simples non terminaux*.

Les méthodes d'amincissement homotopique effectuent plusieurs passages sur l'image. Durant un passage, tous les points de l'image sont examinés séquentiellement ou parallèlement. Les points simples non terminaux sont alors supprimés. Pour déterminer si un point peut être supprimé ou non, il suffit d'examiner son voisinage immédiat. C'est un traitement purement local.

Il existe plus de 300 références sur le sujet qu'il est impossible de récapituler ici. Dans [Lam92], plus d'une centaine de références sont passées en revue.

Ces méthodes s'étendent facilement à l'espace 3D [Lob80, Tsa81, Haf84, Gon90, Rol92]. Le principe reste le même. Il s'agit de détecter les points simples et de les supprimer. Ce faisant, il faut veiller à préserver le nombre de composantes connexes, de cavités et de trous. Différentes façons de caractériser les points simples peuvent être trouvées dans [Mal92, Lee94]. Les squelettes obtenus sont complexes et difficiles à parcourir.

2.2.2 Extraction à partir de cartes de distances

Les méthodes présentées dans cette section calculent le squelette à partir de l'axe médian après une phase de reconnexion et d'amincissement. Elles sont fondées sur le calcul de cartes de distances. Construire la carte de distance d'une image binaire

revient à étiqueter chaque point par sa distance au fond. Cette étape, qui permet d'accéder à une information globale sur l'image, s'effectue uniquement par une série de mises à jour locales. Pour y parvenir, différentes distances ont été introduites et comparées [Bor86, Dan80].

Les points de l'axe médian sont les maximaux locaux de la carte de distances. Cette caractérisation a été proposée dans [Ros66] pour les distances d_4 et d_8 . Elle fut généralisée par la suite à d'autres distances [Bor93, Thi94].

Le squelette s'obtient après une phase de reconnexion de l'axe médian, en propageant des chemins le long des lignes de crêtes de la carte de distances [Dor86, Mon87, Nib92, Thi94]. Le résultat est un *squelette pondéré*, où chaque point est étiqueté par sa plus proche distance au bord.

Ces méthodes sont difficiles à étendre à l'espace $3D$, en raison de la phase de reconnexion. Le calcul de cartes de distances $3D$ et d'axes médians $3D$ a davantage été abordé jusqu'à présent [Rol91].

2.2.3 Simulation de la propagation d'une onde

Les méthodes présentées dans cette partie s'inspirent directement d'une propriété des squelettes continus. Cette propriété est que le squelette peut s'interpréter comme le lieu d'extinction d'un front d'onde parti du contour et se propageant dans la forme à vitesse constante et de façon isotrope. A l'endroit où plusieurs fronts d'onde se rencontrent, leurs propagations s'arrêtent et donnent la position du squelette.

Pour calculer le squelette dans une image binaire, il suffit donc de simuler la propagation d'une onde. Généralement, l'onde est modélisée par un contour discret qui se déplace selon des techniques de suivi de contour ou de lacets [Pav80, Arc81]. Dans [Xia89], la propagation utilise le principe de Huygens. A chaque étape, un nouveau front d'onde est généré à partir du front d'onde courant.

Leymarie propose une méthode originale [Ley92]. Le squelette est le résultat de la stabilisation d'un contour actif (et non plus discret) dans une fonction potentielle. Cette fonction potentielle est l'inverse de la carte de distance.

Le fait de simuler un contour discret rend très difficile toute extension $3D$. Un algorithme de squelettisation par suivi de surfaces a été proposé dernièrement par Marion-Poty et Mignet [Mig94].

Pour conclure sur les méthodes discrètes en général, nous pouvons dire que la

frontière entre ces trois grandes classes de méthodes n'est pas toujours très nette. Certains algorithmes utilisent des techniques mixtes. Par exemple, un calcul de carte de distances peut guider un suivi de contour [Arc89].

2.2.4 Méthodes pour images en niveaux de gris

Remarquons avant de poursuivre que certains auteurs proposent actuellement de travailler directement à partir d'images en niveaux de gris et non plus à partir d'images binaires. L'étape de segmentation est ainsi supprimée. Mais, un important travail de redéfinition du squelette est alors nécessaire [Dye79, Fri94, Whi94]. Un inconvénient de ces méthodes est la difficulté d'interprétation des résultats.

2.3 Autres méthodes

2.3.1 Méthodes exactes et graphe de Voronoï généralisé

Les polygones font partie des rares objets pour lesquels on sache calculer de façon exacte le squelette. Ce dernier est formé de segments de droites et d'arcs de paraboles. Il est contenu dans le graphe de Voronoï généralisé des éléments frontières (voir figure 6).

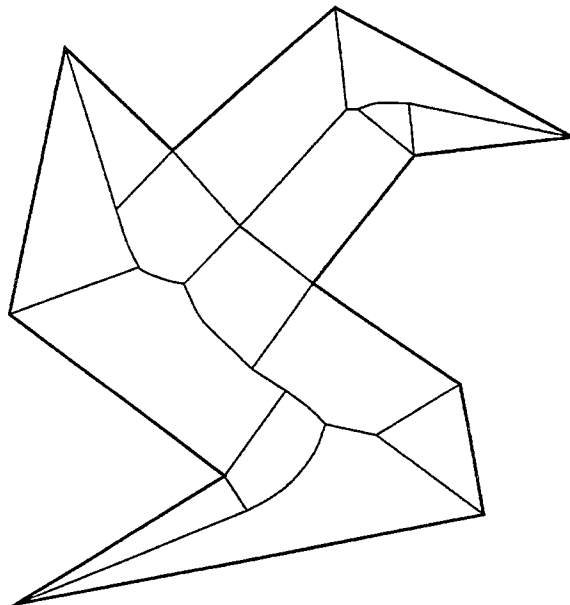


FIG. 6 - Squelette d'un polygone (extrait de [Hu91]).

L'un des tout premier algorithme pour calculer le squelette d'un polygone a été proposé par Montanari [Mon69]. Il consiste à propager un front d'onde formé d'arcs de cercles et de segments de droites à l'intérieur de l'objet. Par la suite, de nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème [Boo79, Mar87, Hu91, May95]. Dans [Kir79], Kirkpatrick propose un algorithme optimal en $O(n \log n)$ pour un ensemble de polygones simples. Un algorithme plus facile à implémenter mais pour un unique polygone se trouve dans [Lee82]. Dernièrement, une amélioration de la complexité en moyenne, fondée sur une analyse randomisée, a été proposée dans [Dev92a]. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces méthodes exactes dans le chapitre 4.

Le squelette d'un polygone est parfois utilisé pour approcher le squelette d'un objet quelconque [Mon69, Hu91, May95]. Le résultat n'est pas entièrement satisfaisant car la méthode retient autant de branches que de sommets concaves dans le polygone. Ainsi, la qualité du squelette se dégrade lorsque le nombre de sommets du polygone augmente. Il n'y a pas convergence!

2.3.2 Méthodes continues et graphe de Voronoï ponctuel

De nouvelles méthodes d'extraction du squelette reposant sur le calcul du graphe de Voronoï des points frontières sont apparues dernièrement [Sch89, Ogn92b, Bra92, Boi92b, Att93a]. Ces méthodes, appelées par la suite *méthodes continues*, sont étudiées en détail dans le chapitre suivant. Les données qu'elles utilisent sont un ensemble de points, aux coordonnées réelles, échantillonnant la frontière de l'objet à squelettiser. Le calcul du squelette passe alors par le calcul du graphe de Voronoï de ces points.

Dans les premiers articles sur les squelettes, il était déjà fait mention d'une relation entre squelettes et graphes de Voronoï. Certains auteurs avaient souligné en particulier que la carte de distance est un équivalent discret appauvri du graphe de Voronoï. L'émergence des méthodes continues a été rendue possible pour deux raisons : d'une part grâce aux efforts menés en géométrie algorithmique pour améliorer le calcul du graphe de Voronoï, d'autre part grâce à la constante amélioration de la puissance des ordinateurs.

Les méthodes continues possèdent de nombreux avantages :

- Le squelette a une structure de graphe qu'il est facile de parcourir.

- Contrairement aux méthodes discrètes, les points du squelette connaissent les points du bord de l'objet qui leur sont les plus proches.
- Les méthodes continues sont plus faciles à mettre en œuvre que les méthodes calculant le squelette exact d'un polygone.
- Il existe des théorèmes de convergence [Sch89, Bra94].
- Comme nous allons le voir tout au long du document, les méthodes continues s'étendent très facilement à l'espace $3D$, ce qui n'est pas le cas des autres approches.

Pour toutes ces raisons, nous avons choisi de nous intéresser exclusivement aux méthodes continues, qui promettent de passionnants développements et de très beaux résultats. Avant de passer à une description plus complète de ces méthodes (chapitre 3), nous concluons le présent chapitre par un petit problème théorique sur le calcul de paramètres à partir du squelette.

2.4 Calcul de paramètres à l'aide du squelette

Dans cette partie, notre motivation est de calculer divers paramètres tels que l'aire, le barycentre et les directions principales de l'objet directement à partir de son squelette. Plus généralement, nous posons la question de savoir comment ramener le calcul d'une intégrale double sur l'objet à celui d'une intégrale simple sur le squelette. Notre étude se place dans l'espace euclidien de dimension 2.

Cette question sera l'occasion de rappeler brièvement quelques résultats sur la structure du squelette et de donner des définitions supplémentaires.

Dans cette partie, nous nous sommes largement inspirés des travaux de Mattioli [Mat93] exposés brièvement dans les sections 2.4.2 et 2.4.3. Cette dernière propose des formules pour calculer l'aire et le périmètre d'un objet. Nous reprenons son étude en généralisant le calcul de l'intégrale, d'une façon originale dans la section 2.4.4.

2.4.1 Paramètres

Soit X une région du plan et m un point de coordonnées (x, y) . Nous cherchons à calculer les paramètres suivants de X :

- l'aire: $S = \int_X dx dy$

- le barycentre: $g = \frac{1}{S} \int_X m \cdot dxdy$
- la variance en x : $var_x = \int_X (x - \bar{x})^2 \cdot dxdy$
- la variance en y : $var_y = \int_X (y - \bar{y})^2 \cdot dxdy$
- la covariance: $cov_{x,y} = \int_X (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \cdot dxdy$

Variance et covariance sont intéressantes à calculer car elles permettent de trouver les directions principales des objets. En effet, ces dernières sont données par les vecteurs propres de la matrice d'inertie:

$$M = \begin{pmatrix} var_x & cov_{x,y} \\ cov_{x,y} & var_y \end{pmatrix}$$

Les paramètres S , g , var_x , var_y et $cov_{x,y}$ ont ceci de commun qu'ils s'expriment tous sous la forme d'une intégrale du type:

$$I_f(X) = \int_X f(x, y) \cdot dxdy$$

Par la suite, nous allons ramener le calcul de cette intégrale double à celui d'une intégrale simple évaluée le long du squelette.

2.4.2 Mise en correspondance du contour et du squelette

Dans un premier temps, nous cherchons à mettre "proprement" en correspondance un point p du contour avec un point q du squelette. Intuitivement, lorsque le point p parcourt le contour et que son correspondant q parcourt le squelette, le segment $[pq]$ engendre la forme X . C'est cette remarque que nous allons mettre à profit pour réécrire les intégrales du type $I_f(X)$ par la suite.

Notons σ l'application qui à tout point p de ∂X associe $\sigma(p)$, le centre du cercle maximal de X passant par p . Dans le cas le plus général, σ ne possède pas de bonnes propriétés. D'une part, un point p du contour peut avoir par σ une infinité d'images (figure 7a). D'autre part, un point q du squelette peut avoir une infinité d'antécédants (figure 7b). Il est donc nécessaire de faire des hypothèses sur X afin de déduire des résultats sur σ .

Hypothèse 2.1 *X est un compact du plan simplement connexe dont la frontière ∂X est une courbe simple fermée C^3 par morceaux. L'ensemble des points où la*

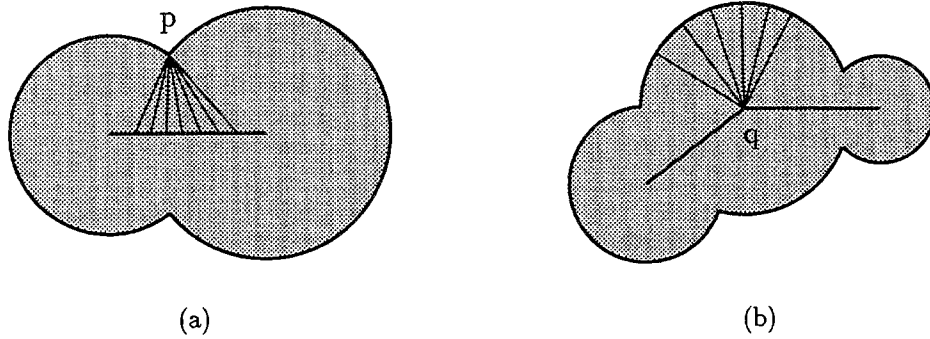


FIG. 7 - Non bijection entre contour et squelette dans le cas général.

dérivée de la courbure est nulle admet un nombre fini de composantes connexes. (Cette dernière condition signifie que la frontière de X possède un nombre fini d'arcs de cercle.)

Hypothèse 2.2 X est un compact du plan simplement connexe dont la frontière ∂X est une courbe simple fermée C^3 par morceaux sans point critique. (Cette dernière condition signifie que la frontière de X ne possède pas d'arcs de cercle orientés positivement.)

La différence entre les deux hypothèses porte uniquement sur le nombre d'arcs de cercle que possède la frontière de X . Intuitivement, le long d'un arc de cercle, σ est constante et par conséquent, il ne peut pas exister de bijection entre le contour et le squelette. Sous l'hypothèse 2.1, Mattioli montre les points suivants [Mat93] :

- le squelette est un graphe de type fini constitué d'une union finie d'arcs.
- σ est une application continue.
- le squelette est paramétrable.

Notons (I, λ) une paramétrisation du contour de la forme X . Alors, $(I, \sigma \circ \lambda)$ est une paramétrisation du squelette. Autrement dit, si $P(K)$ désigne le périmètre de l'ensemble K , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_I \|\lambda'(u)\| \cdot du &= P(X) \\ \int_I \|(\sigma \circ \lambda)'(u)\| \cdot du &= P(\text{Sk}(X)) \end{aligned}$$

Notons u l'abscisse du contour ∂X . Lorsque u parcourt l'intervalle I , $\lambda(u)$ parcourt le contour et $\sigma \circ \lambda(u)$ le squelette. Notons s l'abscisse curviligne sur le squelette

déduite de l'application $\sigma \circ \lambda$. Supposons que l'hypothèse 2.2 soit vérifiée. Il existe alors un difféomorphisme entre s et u . Par la suite, $q(s)$ désigne le point du squelette d'abscisse curviligne s et $p(s)$ son unique correspondant sur le contour. On a $q(s) = \sigma \circ \lambda(u)$ et $p(s) = \lambda(u)$.

Comme par hypothèse, le contour de la forme X est une courbe simple, ses points sont atteints une seule fois, pour une unique valeur de u . Ce n'est pas le cas des points du squelette qui peuvent être atteints plusieurs fois pour différentes valeurs de u . Le squelette paramétré à l'aide de l'application $\sigma \circ \lambda$ n'est donc pas une courbe simple.

2.4.3 Classification des points du squelette

Il est possible de distinguer trois types de points sur le squelette : les *points simples*, les *points multiples* et les *points terminaux*. La définition de ces points fait uniquement appel à la notion de connexité. Par la suite, K désigne un ensemble connexe.

Définition 2.4 (point de coupure) *Un point de coupure p de K est un point tel que l'ensemble $K \setminus \{p\}$ ne soit plus connexe. Le nombre de composantes connexes de $K \setminus \{p\}$ est alors appelé l'ordre de p .*

Définition 2.5 (point terminal) *Un point terminal de K est un point qui n'est pas un point de coupure.*

Définition 2.6 (point simple) *Un point simple de K est un point de coupure dont l'ordre vaut 2.*

Définition 2.7 (point multiple) *Un point multiple de K est un point de coupure dont l'ordre est strictement supérieur à 2.*

Revenons maintenant au cas particulier où l'ensemble connexe étudié est le squelette $\text{Sk}(X)$. Si l'on suppose que X vérifie l'hypothèse 2.1, alors les points terminaux, multiples et simples du squelette ont les propriétés suivantes :

- Un point terminal est le centre d'une boule maximale osculatrice.
- Un point simple est le centre d'une boule maximale dont le nombre de composantes connexes des points de contact avec la frontière est 2 (voir figure 8).

- Un point multiple est le centre d'une boule maximale dont le nombre de composantes connexes des points de contact avec la frontière est supérieur strictement à 2 (voir figure 8).

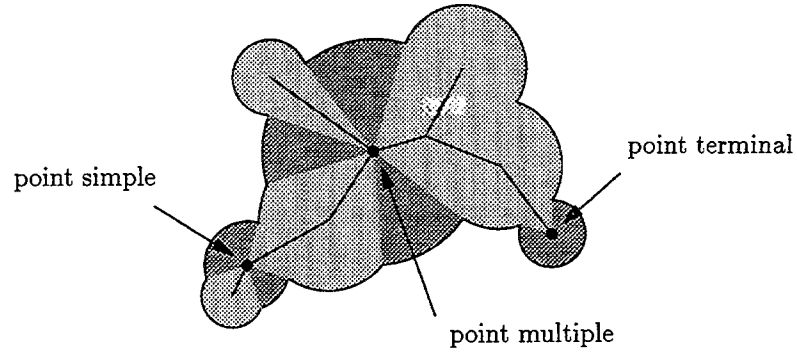


FIG. 8 - Type de points sur un squelette sous les hypothèses 2.1.

L'hypothèse 2.2 permet de réduire le nombre de points de contact des boules maximales avec la frontière. Sous l'hypothèse 2.2, les points terminaux sont atteints pour exactement une valeur de l'abscisse s , les points simples sont atteints pour exactement 2 valeurs de s , et les points multiples d'ordre k pour exactement k valeurs de s (voir figure 9). De plus, comme par hypothèse, l'ensemble des points où la dérivée de la courbure est nulle admet un nombre fini de composantes connexes, le nombre de points terminaux et de points multiples est fini, donc de mesure nulle. Ainsi, les points du squelette sont presque partout atteints deux fois, et par conséquent, le périmètre $P(\text{Sk}(X))$ vaut deux fois la longueur effective du squelette.

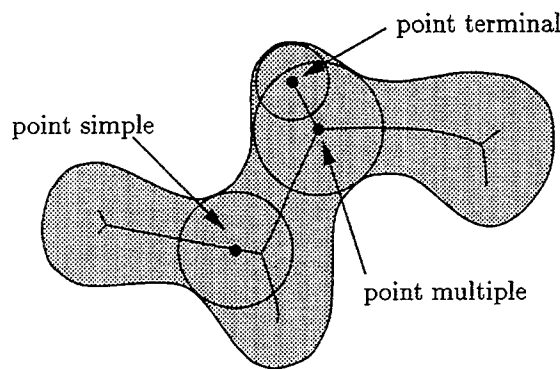


FIG. 9 - Type de points sur un squelette sous les hypothèses 2.2.

Les résultats présentés dans cette partie ainsi que dans la précédente ont été établis par Mattioli. Le détail des démonstrations se trouve dans [Mat93].

2.4.4 Intégration

Dans cette partie, nous présentons notre contribution personnelle. Il s'agit de transformer l'intégrale double $I_f(X)$ en une intégrale simple évaluée le long du squelette de X . Pour cela, nous allons supposer que X vérifie les hypothèses 2.2 et utiliser la paramétrisation du squelette $\sigma \circ \lambda$. Rappelons que s désigne l'abscisse curviligne sur le squelette, $q(s)$ désigne un point du squelette et $p(s)$ son correspondant sur le contour.

A tout point m de X , nous associons le point $p(s)$ du contour réalisant la distance minimale au bord. Si m n'est pas un point du squelette, alors $p(s)$ est unique. Le point m appartient au segment $[p(s)q(s)[$. Ainsi, pour tout point m de X de coordonnées (x, y) , il existe une valeur du paramètre s et une variable t , $0 \leq t \leq 1$ telles que m s'écrive sous la forme (voir figure 10a):

$$m = (x, y) = t \cdot p(s) + (1 - t) \cdot q(s)$$

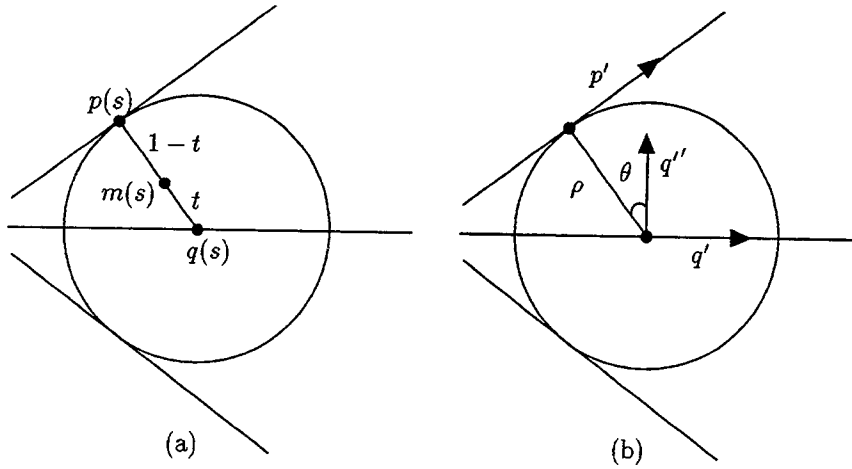


FIG. 10 - Notations.

Nous allons effectuer le changement de variables Φ qui, au couple de variables (s, t) représentant le point m , associe ses coordonnées cartésiennes (x, y) .

$$\Phi : \begin{cases} [0, P(\text{Sk}(X))] \times [0, 1] \rightarrow X \\ (s, t) \mapsto (x, y) \end{cases} \quad \text{avec } \Phi(s, t) = t \cdot p(s) + (1 - t) \cdot q(s)$$

Après avoir effectué le changement de variable Φ , l'intégrale $I_f(X)$ devient :

$$I_f(X) = \int_X f(x, y) \cdot dx dy = \int_{\text{Sk}(X)} \int_0^1 f \circ \Phi(s, t) \cdot |\det J_\Phi| \cdot ds dt$$

J_Φ désigne le jacobien de Φ . Par définition :

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Les dérivées partielles de Φ valent :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = t \cdot p'(s) + (1-t) \cdot q'(s)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = p(s) - q(s) = qp(s)$$

Finalement,

$$I_f(X) = \int_{\text{Sk}(X)} \int_0^1 f \circ \Phi(s, t) \cdot |t \det(p'(s), qp(s)) + (1-t) \det(q'(s), qp(s))| \cdot ds dt$$

Nous pouvons encore améliorer la formule précédente en exprimant $I_f(X)$ uniquement à l'aide de la fonction d'étanchéité dont la définition est rappelée ci-dessous.

Définition 2.8 (Fonction d'étanchéité) *La fonction d'étanchéité $\rho(\cdot)$ est la fonction qui à chaque point q du squelette associe le rayon de la boule maximale centrée en q .*

Pour cela, nous allons exprimer $\|p'\|$ en fonction de ρ , ρ' et ρ'' (voir figure 10b). Par définition, nous avons :

$$\|qp\|^2 = \rho^2$$

En dérivant cette formule une première fois par rapport à l'abscisse curviligne s , et en tenant compte du fait que $qp \perp p'$, nous obtenons :

$$-qp \cdot q' = \rho \rho' \tag{1}$$

En dérivant encore une fois par rapport à s , on trouve :

$$-p' \cdot q' + \|q'\|^2 - qp \cdot q'' = \rho'^2 + \rho \rho'' \tag{2}$$

Or, nous avons supposé que s était l'abscisse curviligne du squelette. Ainsi, $\|q'\| = 1$, $q' \perp q''$ et $\|q''\| = \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ désigne la courbure du squelette. De plus, si l'on note θ l'angle entre la normale au squelette et le vecteur qp , l'équation 2 se simplifie de la façon suivante :

$$\|p'\| \cos \theta = 1 - \mathcal{C} \rho \cos \theta - \rho'^2 - \rho \rho''$$

L'équation 1 nous permet d'exprimer $\cos \theta$ à l'aide de la fonction d'étanchéité :

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \rho'^2} \quad (3)$$

De plus :

$$\det(p'(s), qp(s)) = \rho \|p'\| \quad \text{et} \quad \det(q'(s), qp(s)) = \rho \cos \theta$$

Il s'en suit directement la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soit X un objet vérifiant les hypothèses 2.2, s l'abscisse curviligne sur le squelette, ρ la fonction d'étanchéité. Alors, l'intégrale $I_f(X) = \int_X f(x, y) \cdot dx dy$ s'écrit sous la forme :*

$$I_f(X) = \int_{\text{Sk}(X)} \int_0^1 f \circ \Phi(s, t) \cdot \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho'^2}} \cdot (1 - \rho'^2 - tC\rho\sqrt{1 - \rho'^2} - t\rho\rho'') \cdot ds dt \quad (4)$$

L'équation 4 permet de calculer n'importe quel paramètre qui se présente sous la forme d'une intégrale double sur l'objet. Elle généralise la formule établie par Mattioli à l'aide d'arguments géométriques pour calculer l'aire d'un objet.

Dans le cas le plus général, nous remarquons que le barycentre et les directions principales de l'objet ne sont pas les mêmes que le barycentre et les directions principales de son squelette. Une telle constatation est logique et montre qu'au moment où l'on intègre le long du squelette, il faut tenir compte de l'épaisseur de l'objet.

L'équation 4 est également intéressante car elle nous renseigne de façon précise sur l'information utile à mémoriser en chaque point du squelette. Pour évaluer $I_f(X)$, il est nécessaire de connaître la courbure C , la fonction d'étanchéité ρ ainsi que ses dérivées ρ' et ρ'' . Par contre, la fonction θ (qui indique la direction des points de contact des boules maximales avec le contour) se retrouve facilement à partir de ρ' à l'aide de l'équation 3. Cette équation montre que θ et ρ sont liés par la relation $\sin \theta = -\rho'$. Ceci implique que la fonction d'étanchéité a des variations comprises entre -1 et $+1$. L' "épaisseur" de l'objet ne peut donc pas varier trop brusquement.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la notion de squelette autour de laquelle s'organise le présent mémoire. Nous avons montré son intérêt en analyse d'images

et énuméré ses propriétés les plus connues. Le squelette défini dans le plan continu est mince, centré dans la forme, homotope et réversible.

Nous avons alors présenté les différentes techniques d'extraction du squelette, parmi lesquelles nous avons distingué les méthodes discrètes, exactes et continues. Les méthodes continues fondées sur le calcul du graphe de Voronoï s'avèrent particulièrement prometteuses. Le squelette ainsi calculé possède une structure de graphe qu'il est facile de parcourir. Il existe des théorèmes de convergence et contrairement aux autres méthodes, les méthodes continues s'étendent très facilement à l'espace $3D$.

Enfin, nous avons conclu ce chapitre en montrant comment transformer le calcul d'une intégrale double sur l'objet en celui d'une intégrale simple le long de son squelette. La connaissance de la fonction d'étanchéité, de ses dérivés premières et secondes ainsi que de la courbure en chaque point du squelette rend possible cette transformation et permet le calcul de paramètres comme l'aire, le barycentre et les directions principales directement à partir du squelette de l'objet.

Après avoir présenté quelques résultats généraux dans ce premier chapitre, le prochain chapitre va nous permettre de revenir plus en détail sur les méthodes continues d'extraction du squelette.

Chapitre 3

Squelette et graphe de Voronoï

3.1 Introduction

Ce chapitre réalise une synthèse des méthodes continues de squelettisation.

Récemment, différents auteurs ont proposé d'approcher le squelette d'une forme continue à l'aide du graphe de Voronoï de points échantillonnant sa frontière [Sch89, Ogn92b, Bra92, Boi92b, Att94a]. Ces méthodes reposent toutes sur le même schéma. Dans un premier temps, le graphe de Voronoï d'un nombre fini de points de la frontière de l'objet est calculé selon des techniques de géométrie algorithmique. Puis, un sous-graphe du graphe de Voronoï est extrait afin d'approcher le squelette. Les méthodes diffèrent uniquement dans le choix de ce sous-graphe. Différentes stratégies ont été proposées, chacune possédant ses avantages et ses inconvénients.

Le but de ce chapitre est de comparer les méthodes existantes. Comme le nombre de façons viables de définir le squelette à partir du graphe de Voronoï est limité, seulement quatre méthodes différentes peuvent être recensées, que nous étudions par la suite.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la section 3.2, la définition et les propriétés du graphe de Voronoï, de Delaunay et de Gabriel sont rappelées. La section 3.3 définit une représentation des formes continues à l'aide d'approximations polygonales. Dans la section 3.4, nous décrivons quatre méthodes différentes d'extraction du squelette, qui sont analysées en détail dans la section 3.5.

Notre contribution personnelle porte sur les points suivants :

- Définition “soignée” des approximations polygonales (définition 3.7).
- Extension systématique des méthodes existantes à l'espace $3D$ (parties 3.4.2 et 3.4.4).
- Théorème d'équivalence entre les deux principales méthodes en $2D$ (proposition 3.6).
- Calculs de complexité sur la représentation du squelette (proposition 3.7).

Par la suite, $\mathbb{R}^N$ désigne l'espace euclidien de dimension N et d la distance euclidienne.

3.2 Rappels sur les graphes

Dans cette section, nous rappelons les définitions et propriétés élémentaires des graphes de Voronoï, de Delaunay et de Gabriel. Parallèlement, nous introduisons les notions d'*éléments de Voronoï* et d'*éléments de Delaunay*, qui constituent les briques de base à partir desquelles sont construites les différentes approximations du squelette.

Pour plus de détails, on peut consulter [Kle89, Aur91, Boi95]. Dans la pratique, nous avons utilisé l'algorithme de Bertin pour calculer le graphe de Voronoï [Ber92].

3.2.1 Graphe de Voronoï

Le graphe de Voronoï d'un ensemble de points se définit dans un espace de dimension quelconque à l'aide de la notion de région de Voronoï (voir figure 11).

Définition 3.1 (Région de Voronoï) Soit E un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^N$ et p un point de E . La région de Voronoï de p , $V(p, E)$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^N$ plus proche de p que de tout autre point de E :

$$V(p, E) = \{m \in \mathbb{R}^N, \forall q \in E - \{p\}, d(m, p) < d(m, q)\}$$

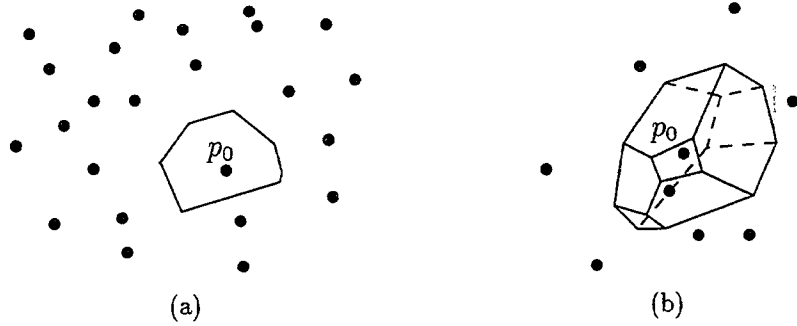


FIG. 11 - Région de Voronoï associée au point p_0 . (a) Cas 2D. (b) Cas 3D.

Définition 3.2 (Graphe de Voronoï) Le graphe de Voronoï $\text{Vor}(E)$ d'un ensemble fini de points E est formé de la frontière des régions de Voronoï de E :

$$\text{Vor}(E) = \bigcup_{p \in E} \partial V(p, E)$$

En $2D$, la région de Voronoï d'un point est un polygone convexe contenant ce point. Le graphe de Voronoï est formé de deux types d'éléments :

- les sommets, sur la frontière d'au moins trois régions de Voronoï,
- les arêtes, sur la frontière d'exactly deux régions de Voronoï.

En $3D$, la région de Voronoï d'un point est un polyèdre convexe. Le graphe de Voronoï est alors formé de trois types d'éléments :

- les sommets, sur la frontière d'au moins quatre régions de Voronoï,
- les arêtes, sur la frontière d'exactly trois régions de Voronoï,
- les polygones, sur la frontière d'exactly deux régions de Voronoï.

Plus généralement, nous emploierons le terme d'*élément de Voronoï* pour désigner indifféremment soit une région de Voronoï, soit un élément du graphe (sommets, arête ou polygone en $3D$). A l'exception des sommets, les éléments de Voronoï sont des ensembles ouverts. Pour cette raison, un élément prenant appui sur les k sommets $s_1, s_2, \dots, s_k$ sera noté par la suite $]s_1 s_2 \dots s_k[$. L'ensemble des éléments de Voronoï forment une partition de l'espace appelé *diagramme de Voronoï*. La liste des éléments de Voronoï est récapitulée dans les tableaux de la figure 14.

Le graphe de Voronoï dans un espace de dimension N comporte $\theta(n^{\lceil N/2 \rceil})$ éléments et se calcule en temps $O(n \log n + n^{\lceil N/2 \rceil})$, ce qui est optimal dans le pire cas.

3.2.2 Graphe de Delaunay

Le dual du graphe de Voronoï est le graphe de Delaunay. Ce dernier contient les relations d'adjacence entre régions de Voronoï (voir figure 12).

Définition 3.3 (Graphe de Delaunay) Soit E un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^N$. Le graphe de Delaunay $\text{Del}(E)$ a pour sommets les points de E et pour arêtes les segments joignant les points p et q de E tels que $\partial V(p, E) \cap \partial V(q, E) \neq \emptyset$.

Nous faisons par la suite l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1 Soit E un ensemble fini de points de l'espace $\mathbb{R}^N$. Il n'existe pas $N + 2$ points de E cosphériques.

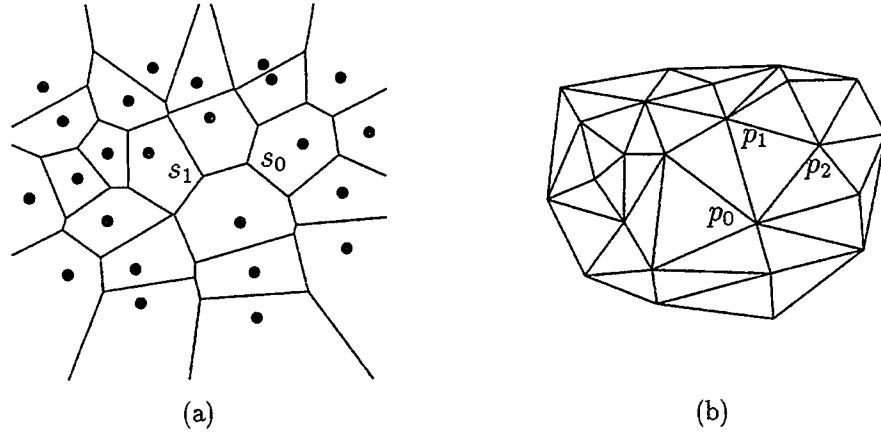


FIG. 12 - Dualité entre graphes. (a) Graphe de Voronoï. (b) Graphe de Delaunay.

Cette hypothèse est classique en géométrie algorithmique. D'une part, avec cette hypothèse, les sommets du graphe de Voronoï ont exactement $N + 1$ voisins. D'autre part, elle permet d'associer au graphe de Delaunay, une triangulation de l'enveloppe convexe de E , appelée *triangulation de Delaunay*. Cette triangulation est formée de simplexes définis de la façon suivante (voir figure 13):

Définition 3.4 (Simplexes et boules de Delaunay) Soit E un ensemble fini de points de l'espace $\mathbb{R}^N$. On appelle *simplexe de Delaunay*, tout simplexe dont la boule circonscrite B a un intérieur vide de points de E . B est appelée *boule de Delaunay*.

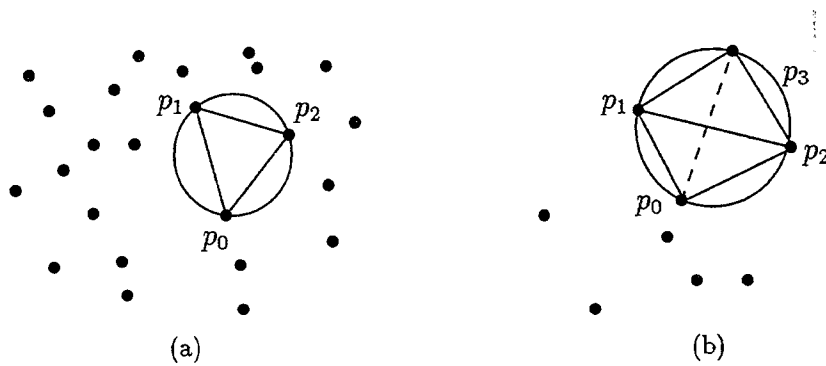


FIG. 13 - Boule de Delaunay et simplexe associé. (a) Cas 2D. (b) Cas 3D.

Par la suite, le terme *élément de Delaunay* désignera

- soit un simplexe de Delaunay ouvert, noté $]p_0 \dots p_N[$,

- soit une de ses k -faces ouvertes, pour $1 \leq k < N$, notée $]p_0 \dots p_k[$,
- soit un point de E (0-face d'un simplexe), noté p_0 .

A tout élément de Voronoï, il est possible de faire correspondre par dualité un élément de Delaunay. Par exemple, un sommet de Voronoï est associé à un simplexe de Delaunay (c'est-à-dire, un triangle en $2D$ ou un tétraèdre en $3D$). La liste des éléments de Delaunay ainsi que les relations de dualité avec les éléments de Voronoï sont données dans les tableaux 14a et 14b. Par la suite, on notera $\text{Dual}(e)$, le dual de l'élément e . Remarquons que $\text{Dual}(\text{Dual}(e)) = e$.

Le graphe de Delaunay possède la même complexité en temps de calcul que le graphe de Voronoï, à savoir $O(n \log n + n^{\lceil N/2 \rceil})$.

Relations de dualité en $2D$	
Eléments de Delaunay	Eléments de Voronoï
point de E : p_0	région de Voronoï : $V(p_0, E)$
arête de Delaunay : $]p_0 p_1[$	arête de Voronoï : $]s_0 s_1[$
triangle de Delaunay : $]p_0 p_1 p_2[$	sommet de Voronoï : s_0

} $\text{Vor}(E)$

Relations de dualité en $3D$	
Eléments de Delaunay	Eléments de Voronoï
point de E : p_0	région de Voronoï : $V(p_0, E)$
arête de Delaunay : $]p_0 p_1[$	polygone de Voronoï : $]s_0 s_1 \dots s_k[$
triangle de Delaunay : $]p_0 p_1 p_2[$	arête de Voronoï : $]s_0 s_1[$
tétraèdre de Delaunay : $]p_0 p_1 p_2 p_3[$	sommet de Voronoï : s_0

} $\text{Vor}(E)$

FIG. 14 - Relations de dualité entre éléments de Voronoï et éléments de Delaunay. Deux éléments duaux se trouvent sur la même ligne du tableau.

3.2.3 Graphe de Gabriel

Le graphe de Gabriel est un autre graphe célèbre en géométrie algorithmique. Il est intimement lié aux graphes de Delaunay et de Voronoï et intervient dans l'énoncé de certains résultats de ce chapitre. Le graphe de Gabriel, du nom de son créateur, fut introduit en 1969 [Gab69] dans l'espace $2D$ mais peut se définir dans un espace de dimension quelconque de la façon suivante :

Définition 3.5 (Graphe de Gabriel) Soit E un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^N$. Les N points $p_1, p_2, \dots, p_N$ de E sont voisins dans le graphe de Gabriel $GG(E)$ si et seulement l'intérieur du plus petit disque passant par les points $p_1, p_2, \dots, p_N$ est vide de points de E . La relation de voisinage entre les N points $p_1, p_2, \dots, p_N$ se traduit par l'existence du simplexe $[p_1 \dots p_N]$ dans le graphe de Gabriel (voir figure 15).

Le graphe de Gabriel possède la propriété d'être inclus dans la triangulation de Delaunay. Il se construit en supprimant de cette dernière les N -faces (arêtes en 2D et triangles en 3D) n'intersectant pas leur arête de Voronoï duale. Son temps de calcul est donc en $O(n \log n + n^{\lceil N/2 \rceil})$ dans un espace de dimension N .

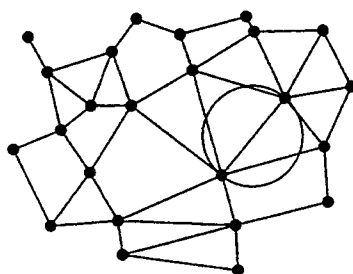


FIG. 15 - Graphe de gabriel.

3.3 Représentation des objets

Dans cette section, nous décrivons d'un point de vue mathématique les différentes représentations et modèles que nous serons amenés à utiliser tout au long de ce document.

- *Echantillons.* Par la suite, le terme *échantillon* désigne un ensemble de points sur la frontière d'un objet continu. Dans la pratique, les échantillons peuvent provenir de l'acquisition de surfaces par balayage laser, ou de l'extraction de contours discrets dans des images 3D. Néanmoins, la connaissance de points sur la frontière de l'objet constitue une information assez pauvre : même s'il est possible de localiser précisément où passe la frontière, on ne sait pas dire immédiatement où se trouve l'intérieur et l'extérieur de l'objet.

- *Approximations polygonales.* Les approximations polygonales (ou polyédriques en 3D) se construisent à partir de points échantillonnant la frontière et définissent des régions de l'espace qui représentent l'intérieur de l'objet. La représentation d'objets à partir d'approximations polygonales est une hypothèse réaliste. Par exemple, les modèles déformables de contours actifs fournissent de telles approximations. Des techniques permettant de trouver des approximations polygonales à partir d'échantillons sont discutées longuement dans le chapitre 5. Dans ce chapitre, les approximations polygonales sont utilisées pour approcher aussi finement que voulu les formes continues.
- *Formes r -régulières.* Les formes r -régulières sont un modèle mathématique pour les objets continus. Les approximations polygonales de formes r -régulières possèdent des propriétés intéressantes.

Par la suite, $X \subset \mathbb{R}^N$ désigne l'objet à squelettiser et que l'on cherche à représenter. Nous supposons d'une part que X est bornée et d'autre part que l'intérieur de X est non vide.

3.3.1 Echantillons

Un *échantillon* désigne un ensemble de points répartis sur la frontière d'un objet et issu d'un *échantillonnage de la frontière*. La notion d'échantillon est importante car elle intervient, par la suite, dans la définition d'une approximation polygonale. Nous nous contentons ici de donner une définition et de faire quelques remarques élémentaires.

Un échantillon est caractérisé par sa densité d'échantillonnage qui se définit comme suit (voir figure 16) [Sch89] :

Définition 3.6 (Densité d'échantillonnage) *On dit que E échantillonne X avec la densité w si $E \subset \partial X$ et $\forall x \in \partial X$, $\exists e \in E$, $d(x, e) < w^{-1}$. Autrement dit, tout point de ∂X est à une distance inférieure à $\frac{1}{w}$ d'un des points de E .*

Lorsque la densité d'échantillonnage est connue, il est possible de localiser précisément où passe la frontière de l'objet, ce que traduit la proposition suivante (voir figure 16c) :

Proposition 3.1 *Soit $X \subset \mathbb{R}^N$ et E_w un ensemble qui échantillonne X avec la*

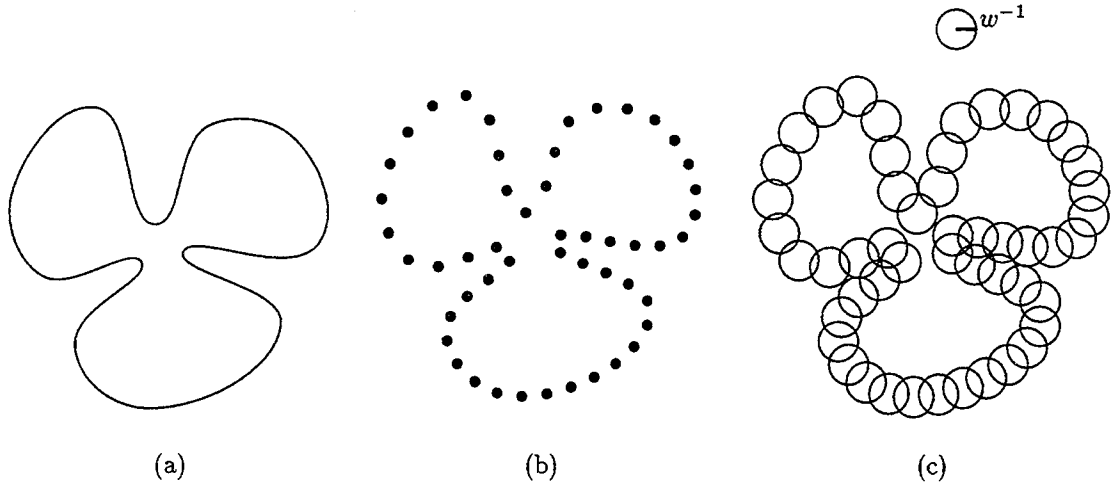


FIG. 16 - (a) *Forme continue.* (b) *Echantillon.* (c) *Zone contenant la frontière.*

densité w . Alors :

$$\partial X \subset \bigcup_{m \in E_w} B(m, w^{-1})$$

Démonstration. Ce résultat se déduit immédiatement de la définition de la densité d'échantillonnage. Soit $x \in \partial X$, alors il existe $m \in E_w$ tel que $d(m, x) < w^{-1}$. Donc $x \in B(m, w^{-1})$. ■

Plus la densité augmente, meilleure est la répartition des points sur la frontière. A la limite, quand $w \rightarrow \infty$, l'échantillon tend vers la frontière de l'objet.

Proposition 3.2 Soit $X \subset \mathbb{R}^N$ et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'ensembles telle que E_n échantillonne la frontière de X avec la densité n . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \partial X$$

Démonstration. La démonstration s'effectue en deux temps¹.

1. Nous rappelons le résultat suivant. Une suite d'ensembles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'ensemble X si et seulement si :

- Pour tout point $x \in X$, il existe une suite de points $x_n \in X_n$ telle que $x_n \rightarrow x$
- Pour toute sous-suite convergente de points $x_{n_k} \in X_{n_k}$ telle que $x_{n_k} \rightarrow x$, la limite x appartient à X .

Remarquons qu'avoir $d(X_n, X) \rightarrow 0$, où d représente la distance de Hausdorff, ne suffit pas pour établir la convergence, si X_n et X ne sont pas des compacts. Voici un contre-exemple : $X = \{x, d(0, x) < 1\}$ et $X_n = \{x, d(0, x) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$. On a bien $d(X_n, X) < \frac{1}{n}$ mais $X_n \not\rightarrow X$.

Soit $x \in \partial X$. Montrons que x est la limite d'une suite de points $x_n \in E_n$. D'après hypothèse, quel que soit n , il existe $x_n \in E_n$ tel que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Donc $\partial X \subset \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$.

Réciproquement, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de points tels que $\forall n, x_n \in E_n$. Comme $E_n \subset \partial X$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également une suite convergente de points de ∂X . Or, la frontière d'un ensemble est par définition un fermé. Par conséquent, la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans ∂X , ce qui assure $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \subset \partial X$. ■

3.3.2 Approximation polygonale

Nous abordons maintenant le cœur de cette section avec la définition d'une *approximation polygonale*. Pour nous, une approximation polygonale X_w de densité w d'un objet X doit permettre de représenter X avec une précision en $\frac{1}{w}$. A la limite, lorsque $w \rightarrow \infty$, on souhaite que $X_w \rightarrow X$. La définition que nous proposons va permettre d'établir cette convergence.

Définition 3.7 (Approximation polygonale) X_w est une approximation polygonale de $X \subset \mathbb{R}^N$ de densité w si les quatre conditions suivantes sont remplies :

1. La frontière de X_w est :
 - en $2D$, un ensemble de polygones simples disjoints deux à deux,
 - en $3D$, un ensemble de polyèdres simples disjoints deux à deux à facettes triangulaires.
2. Les sommets de X_w échantillonnent ∂X avec la densité w .
3. Les sommets de X_w échantillonnent ∂X_w avec la densité w .
4. Si $d(x, \partial X) > w^{-1}$, alors $x \in \overset{\circ}{X} \iff x \in \overset{\circ}{X}_w$

Cette définition appelle un certain nombre de remarques. Tout d'abord, d'après le point 1, une approximation polygonale peut être formée de plusieurs composantes connexes ou posséder des cavités. Ainsi, les approximations polygonales autorisent la représentation d'une classe importante d'objets.

Les points 2 et 3 fixent des conditions sur la frontière des approximations polygonales. D'après le point 2, les sommets des approximations polygonales échantillonnent la frontière des objets. Le point 3 interdit aux faces frontières de traverser de part en part les objets et de joindre des sommets trop éloignés (voir figure 17).

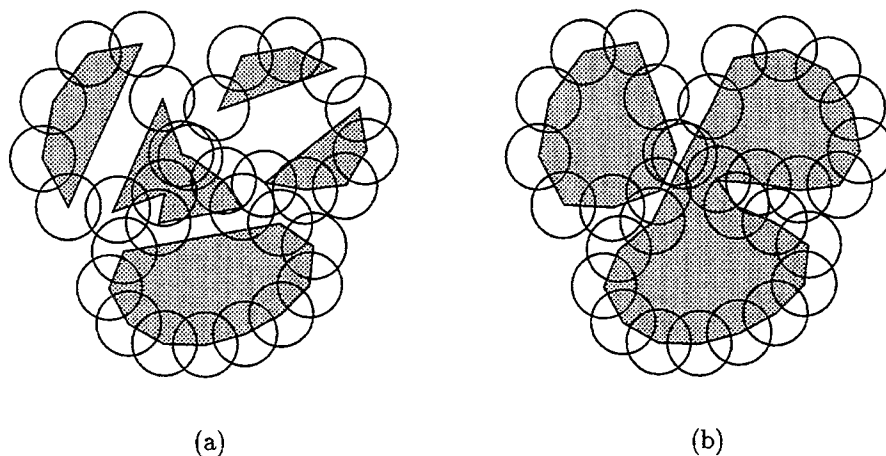


FIG. 17 - Importance du point 3 dans la définition des approximations polygonales. (a) Sans le point 3, les arêtes frontières peuvent traverser l'union des cercles. (b) Avec le point 3, les arêtes frontières restent dans l'union des cercles.

Finalement, le point 4 permet de déterminer, sans ambiguïté, où se trouvent l'intérieur et l'extérieur d'une approximation polygonale.

Lorsque la densité d'échantillonnage tend vers l'infini, les propositions 3.3 et 3.4 montrent que l'approximation polygonale tend vers l'objet qu'elle représente (voir figure 18). Pour établir ces résultats, remarquons que les trois derniers points de la définition 3.7 sont nécessaires. Par conséquent, aucun point de la définition n'est superflu.

Proposition 3.3 Soit $X \in \mathbb{R}^N$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'approximations polygonales de X de densité n . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial X_n = \partial X$$

Démonstration. Notons E_n , l'ensemble des sommets de X_n .

Soit $x \in \partial X$. Pour tout n , il existe $y_n \in E_n \subset X_n$ tel que $d(y_n, x) < \frac{1}{n}$, d'après le point 2 de la définition. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Donc $\partial X \subset \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$.

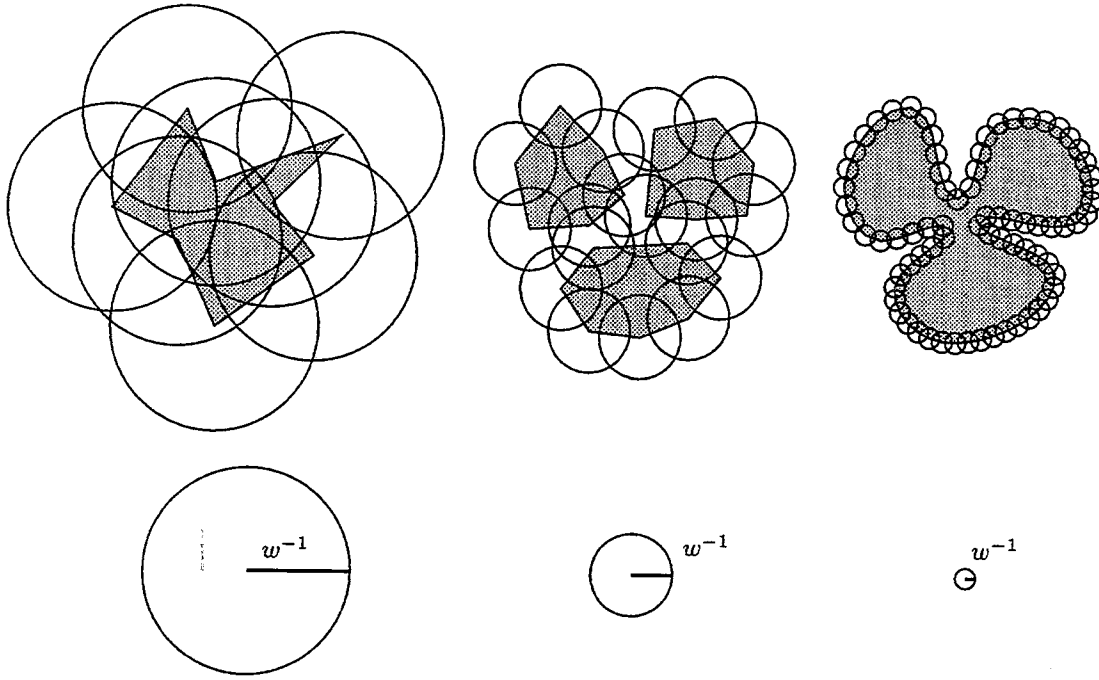


FIG. 18 - Approximations polygonales de densités d'échantillonnage variables.

Réciproquement, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite convergente de points tels que $\forall n, x_n \in X_n$. Pour tout n , il existe $y_n \in E_n$ tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, d'après le point 3 de la définition. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de points de ∂X . Or, la frontière d'un ensemble est par définition un fermé. Par conséquent, la limite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans ∂X . L'égalité des limites des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \subset \partial X$. ■

Proposition 3.4 Soit $X \in \mathbb{R}^N$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'approximations polygonales de X de densité n . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\circ}{X}_n = \overset{\circ}{X}$$

Démonstration. Soit $x \in \overset{\circ}{X}$. Il existe ϵ tel que $B(x, \epsilon) \subset \overset{\circ}{X}$. Donc, pour tout $n > \frac{1}{\epsilon}$, $x \in \overset{\circ}{X}_n$, en utilisant le dernier point de la définition d'une approximation polygonale. Construisons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de telle sorte que pour $n \leq \frac{1}{\epsilon}$, x_n est un point quelconque de $\overset{\circ}{X}$ et pour $n > \frac{1}{\epsilon}$, $x_n = x$. Cette suite a bien pour limite x . Nous venons donc de montrer que $\overset{\circ}{X} \subset \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\circ}{X}_n$.

Ce premier résultat combiné avec le fait que $\partial X \subset \lim_{n \rightarrow \infty} \partial X_n$ assure que $\overline{X} \subset \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X_n}$. Remarquons que si X_w est une approximation polygonale de X , alors $E - X_w$ est une approximation polygonale de $E - X$. D'où, l'inclusion : $\overline{E - X} \subset \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{E - X_n}$. En utilisant le fait que $\overline{E - Y} = E - \overset{\circ}{Y}$, on trouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\circ}{X_n} \subset \overset{\circ}{X}$. ■

3.3.3 Formes r -régulières

Dans cette section, nous allons supposer les objets r -réguliers et déduire des résultats sur leurs approximations polygonales. Le point important à retenir est le suivant. Dès que l'on connaît un échantillon de la frontière de densité supérieure à $1/2r$, il est possible de construire une approximation polygonale (dite *normalisée*) prenant appui sur l'échantillon et ayant des propriétés très intéressantes.

Les formes r -régulières se définissent en utilisant des notions propres à la morphologie mathématique²:

Définition 3.8 (Forme r -régulière) Soit B_0 , la boule unité. Une forme X est dite r -régulière si :

$$X = (X \ominus rB_0) \oplus rB_0 = (X \oplus rB_0) \ominus rB_0$$

Intuitivement, la définition précédente signifie qu'il est possible de faire rouler sur la frontière d'une forme r -régulière, une boule de rayon r , à l'intérieur comme à l'extérieur en maintenant un contact continu (voir figure 19).

Les formes r -régulières ont été étudiées dans [Ser82, Bra92]. Elles constituent un modèle pertinent pour représenter les objets discrets en analyse d'images. D'après Brandt [Bra92], l'hypothèse de r -régularité n'est pas très restrictive, puisque r peut être choisi aussi petit que voulu.

2. La morphologie mathématique est une technique d'analyse d'images qui a vu le jour au centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris vers 1967 [Ser82]. Elle permet d'étudier les formes et les structures en utilisant essentiellement deux opérations élémentaires :

- la *dilatation*: $X \oplus B = \{x, X \cap B_x \neq \emptyset\}$
- l'*érosion*: $X \ominus B = \{x, B_x \subset X\}$

Dans les formules précédentes, B_x représente le translaté : $B_x = \{b + x, b \in B\}$. Les opérateurs $\oplus$ et $\ominus$ sont respectivement appelés somme et différence de Minkowski.

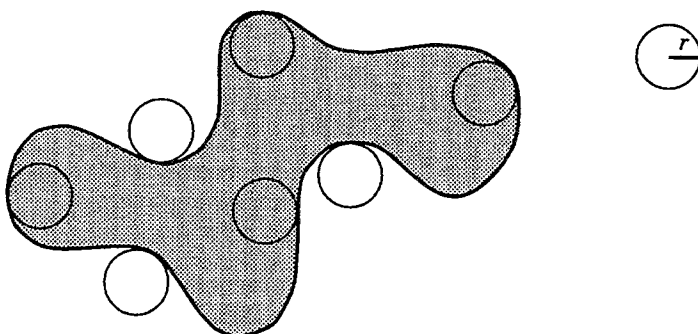


FIG. 19 - *Forme r -régulière. Tout point à l'intérieur ou à l'extérieur d'une forme r -régulière peut être recouvert par un disque de rayon r n'intersectant pas la frontière.*

Nous allons maintenant énumérer quelques propriétés essentielles des formes r -régulières. Les démonstrations ne sont pas données. Pour plus de détails, on peut consulter [Ser82, Bra92].

Propriété 3.1 *En tout point d'une forme r -régulière, la normale existe et le rayon de courbure est supérieur à r .*

Propriété 3.2 *Soit X , une forme r -régulière et $p \in X$. La frontière de X partage la boule centrée en p et de rayon $2r$ en exactement deux composantes connexes (voir figure 20a).*

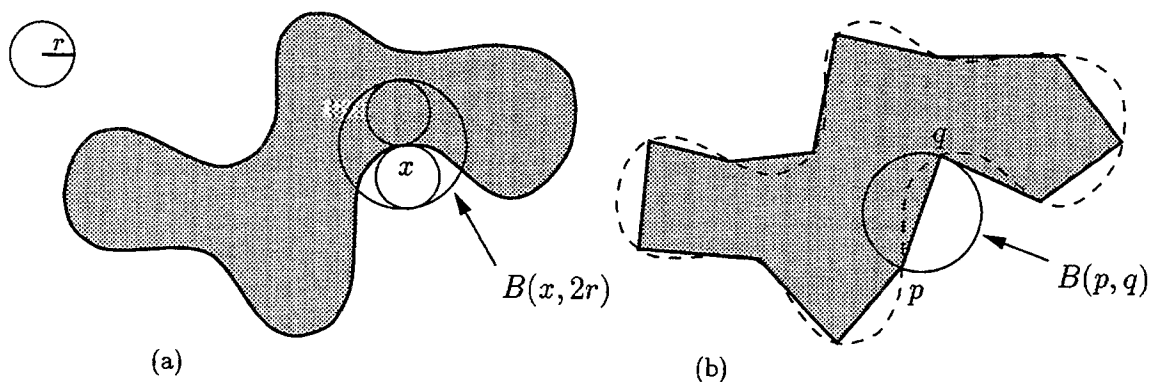


FIG. 20 - *Propriétés des formes r -régulières. (a) Disques remarquables associés au point x . La frontière d'une forme r -régulière partage le disque $B(x, 2r)$ en exactement deux composantes connexes. (b) Approximation polygonale normalisée. L'intérieur du disque $B(p, q)$ associé à l'arête frontière $[pq]$ ne contient pas de sommets de l'approximation polygonale.*

Propriété 3.3 *En 2D, tout cercle intersectant en trois points distincts deux à deux la frontière d'une forme r -régulière a un rayon supérieur ou égal à r .*

Définition 3.9 (Approximation polygonale normalisée) Soit X une forme r -régulière et E_w un échantillon de sa frontière de densité $w > \frac{1}{2r}$. On appelle approximation polygonale normalisée, l'unique approximation polygonale X_w construite à partir de E_w de la façon suivante (voir figure 20b) :

- X_w a pour sommets les points de E_w
- En 2D, le segment $[pq]$ joignant deux points p et q de E_w est une arête frontière de X_w si et seulement si il existe un point $x \in \partial X$ tel que $d(x, p) = d(x, q) = d(x, E_w)$.
- En 3D, le triangle (pqr) joignant trois points p, q et r de E_w forme une face frontière de X_w si et seulement si il existe un point $x \in \partial X$ tel que $d(x, p) = d(x, q) = d(x, r) = d(x, E_w)$.
- Si $d(x, \partial X) > w^{-1}$, alors $x \in \overset{\circ}{X} \iff x \in \overset{\circ}{X}_w$

Propriété 3.4 Soit X une forme r -régulière et E_w un échantillon de sa frontière de densité $w > \frac{1}{2r}$. L'approximation polygonale normalisée X_w associée à E_w possède les propriétés suivantes :

- X_w est inclus dans le graphe de Gabriel des points E_w (voir figure 20b).
- En 2D, toute arête frontière $[pq]$ a une longueur inférieure à $2w^{-1} < 4r$.
- En 3D, tout triangle frontière (pqr) a le rayon de son cercle circonscrit inférieur à $w^{-1} < 2r$.

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour décrire et analyser les méthodes continues de squelettisation.

3.4 Description des méthodes existantes

Le squelette et le graphe de Voronoï sont deux notions étroitement liées. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que le graphe de Voronoï d'un ensemble fini de points E peut être interprété comme le squelette du complémentaire de E . Ainsi :

$$\text{Sk}(\mathbb{R}^N - E) = \text{Vor}(E)$$

En faisant tendre E vers la frontière d'un objet X dans la formule précédente, il est possible d'établir l'inclusion suivante :

$$\text{Sk}(\mathbb{R}^N - \partial X) \subset \lim_{E \rightarrow \partial X} \text{Vor}(E)$$

Cette formule suggère une stratégie simple pour approcher le squelette d'une forme : il suffit de choisir un sous-graphe du graphe de Voronoï de points échantillonnant sa frontière.

Le problème majeur auquel on est ramené est le choix du sous-graphe susceptible d'approcher "au mieux" le squelette. Il a été proposé d'approcher le squelette par (voir figure 21) :

- les sommets de Voronoï inclus dans la forme [Sch89],
- les éléments de Voronoï inclus dans la forme [Bra94],
- les points de Voronoï inclus dans la forme [Ogn92b],
- le dual de la forme [Boi92b],
- le squelette d'une polyboule approchant la forme [Att94a]

Nous nous proposons de décrire puis de comparer ces différentes approches, à l'exception de la dernière qui sera détaillée dans le chapitre 4. En effet, elle constitue une contribution personnelle et nécessite une étude préliminaire des polyboules.

Avant de commencer notre comparaison, il est essentiel de se demander quelles propriétés doit avoir un "bon" squelette approché. Nous énumérons trois propriétés souhaitées du résultat :

1. *Convergence.* Le squelette approché doit tendre vers le squelette exact lorsque les points échantillonnent de plus en plus finement la frontière.
2. *Conservation du type d'homotopie.* Le squelette approché doit avoir le même type d'homotopie que la forme continue. En $2D$, il doit avoir le même nombre de composantes connexes et pour chaque composante connexe, le même nombre de trous.
3. *Réversibilité.* Il doit être possible de retrouver la forme continue à partir du squelette.

Par la suite, X désigne une forme continue. X_w est une approximation polygonale de X de densité w et E_w désigne les sommets des polygones ou polyèdres frontières de X_w .

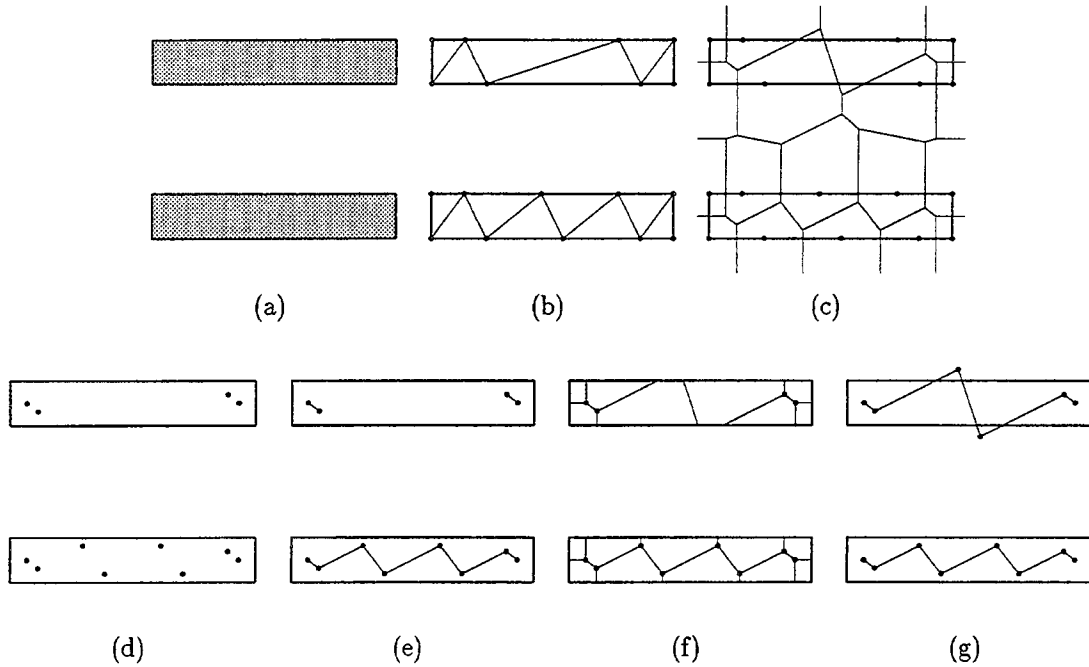


FIG. 21 - Différentes façons d'approcher le squelette en 2D. (a) Forme continue. (b) Approximation polygonale partitionnée à l'aide de triangles de Delaunay. (c) Graphe de Voronoï des points échantillonnant la frontière. Le squelette peut être obtenu comme : (d) les sommets de Voronoï intérieurs (méthode 1) ; (e) les éléments de Voronoï intérieurs (méthode 2) ; (f) l'intersection du graphe de Voronoï avec la forme (méthode 3) ; (g) le dual des triangles intérieurs (méthode 4).

3.4.1 Squelette = sommets de Voronoï intérieurs

Dans [Sch89], Schmitt définit une topologie en tout ou rien. Dans ce cadre mathématique, il prouve que si ∂X est une surface topologique de classe C^3 au moins, alors les sommets du graphe $\text{Vor}(E_w)$ tendent vers le squelette de X ou de X^c quelque soit la dimension de l'espace considéré. Une façon naïve d'approcher le squelette consiste à sélectionner les sommets de Voronoï inclus dans la forme (voir figure 21d) :

$$\text{Sk}_1(X_w) = \bigcup_{s \in X, s \text{ sommet de } \text{Vor}(E_w)} \{s\}$$

De façon immédiate :

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \text{Sk}_1(X_w) = \text{Sk}(X)$$

Comme Sk_1 est formé d'un ensemble de points isolés, il ne possède pas le même type d'homotopie que l'objet et par conséquent, il n'est d'aucune aide pour en décrire la géométrie. La méthode présentée dans la section suivante évite ce problème en connectant les points du squelette par des segments de droite.

Remarque

En toute rigueur, il aurait fallu écrire $\text{Sk}_1(X, X_w)$ au lieu de $\text{Sk}_1(X_w)$. En effet, pour calculer le squelette approché, on a besoin de connaître X_w , mais également X afin de déterminer si un sommet s doit être gardé ou non. Cependant, dans le cas particulier de formes r -régulières $2D$ échantillonnées avec une densité supérieure à $\frac{1}{r}$, établir que $s \in X$ est exactement équivalent à établir que $s \in X_w$. En effet, comme la boule de Delaunay centrée en s intersecte en trois points la frontière de X , d'après la propriété 3.3, elle a un rayon $\rho \geq r > w^{-1}$. Par conséquent, $d(s, \partial X) > w^{-1}$ et le point 4 de la définition 3.7 permet de conclure. Ainsi, dans ce cas-là, le calcul du squelette dépend bien uniquement de X_w . Dans la pratique, le squelette sera calculé en remplaçant dans la formule X par X_w s'il est plus facile de déterminer ($x \in X_w$) que ($x \in X$). Cette remarque vaut également pour les deux méthodes suivantes.

3.4.2 Squelette = éléments de Voronoï intérieurs

Dans [Bra92], Brandt et Algazi définissent le squelette d'objets $2D$ comme l'ensemble des éléments de Voronoï complètement inclus dans la forme (voir figure 21e) :

$$\text{Sk}_2(X_w) = \bigcup_{F \subset X, F \text{ élément de } \text{Vor}(E_w)} F$$

Brandt établit également, en $2D$, un théorème de convergence pour les formes r -régulières possédant un nombre fini de points d'inflexion [Bra94]. Il prouve que :

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \text{Sk}_2(X_w) = \text{Sk}(X)$$

La formule définissant Sk_2 reste valable dans un espace de dimension quelconque. Ainsi, l'extension à l'espace $3D$ est immédiate. En $2D$, le squelette calculé par cette méthode est formé de segments. En $3D$, il est formé de polygones qui s'emboîtent les uns dans les autres pour former des surfaces.

3.4.3 Squelette = points de Voronoï intérieurs

Ogniewicz [Ogn92b] définit le squelette comme l'intersection du graphe de Voronoï avec la forme (voir figure 21f).

$$\text{Sk}_3(X_w) = X \cap \text{Vor}(E_w)$$

Le squelette ainsi défini est un sur-ensemble du squelette précédent ($\text{Sk}_2 \subset \text{Sk}_3$). La seule différence porte sur des branches périphériques, ajoutées de façon artificielle, sans réelle signification. Dans la pratique, ces branches sont les premières à disparaître dans les processus de simplification et ne sont pas gênantes outre mesure. Le seul problème est que le squelette Sk_3 ne peut pas être utilisé tel quel mais, doit toujours être simplifié au préalable.

3.4.4 Squelette = dual de l'objet

La méthode proposée maintenant est à nos yeux la plus élégante. Elle est fondée sur l'existence d'un partitionnement de la forme à l'aide des simplexes de Delaunay (voir figure 21g).

En 2D, Boissonnat et Geiger ont remarqué que si la condition suivante était vérifiée [Boi92b] :

$$\partial X_w \subset \text{Del}(E_w)$$

alors, il existait deux types de triangles de Delaunay, les triangles inclus dans X_w et les triangles inclus dans son complémentaire X_w^c . Une extension 3D de cette remarque est immédiate. En 3D, si $\partial X_w \subset \text{Del}(E_w)$, alors il existe encore deux types de tétraèdres de Delaunay, les tétraèdres inclus dans X_w et les tétraèdres inclus dans son complémentaire X_w^c . En d'autres termes, un élément de Delaunay (arête, triangle ou tétraèdre) ne peut pas intersecter la frontière. Par la suite, les éléments inclus strictement dans la forme seront dits intérieurs, les éléments inclus strictement dans le complémentaire X_w^c seront dits extérieurs, et les autres seront dits frontières. Les éléments intérieurs forment une partition de l'objet. On a :

$$X_w = \bigcup_{T \subset X, T \text{ élément de } \text{Del}(E_w)} T$$

Ainsi, il existe une décomposition exacte et non redondante de la forme en triangles

en $2D$ et en tétraèdres en $3D$. Une façon d'approcher le squelette consiste à considérer :

$$\text{Sk}_4(X_w) = \text{Dual}(X_w^\circ)$$

Avantages de la dualité

Le principal avantage de cette méthode est que, par définition, la forme et le squelette sont le dual l'un de l'autre. Cette dualité est extrêmement intéressante car toute opération sur la forme a une interprétation sur le squelette et *vice versa*. Grâce à cette dualité, le squelette et la forme ont même type d'homotopie. De plus, la transformation est réversible si les simplexes associés aux sommets du squelette sont mémorisés. Pour reconstruire la forme, il suffit alors de prendre la réunion des simplexes intérieurs.

Problème de l'existence

Un inconvénient de cette méthode est que le squelette n'est pas toujours défini. Il faut pour cela que $\partial X_w \subset \text{Del}(E_w)$. Boissonnat et Geiger appellent cette condition, la *condition d'inclusion du contour* [Boi92b]. Nous allons voir dans la section suivante, comment garantir cette condition.

3.5 Analyse des méthodes existantes

Jusqu'à présent, nous avons vu quatre méthodes, parmi lesquelles deux sont particulièrement pertinentes. En effet, la méthode 2 a été construite pour converger et la méthode 4 pour conserver le type d'homotopie. Remarquons d'autre part que les méthodes 1, 2 et 3 sont liées par les inclusions suivantes :

$$\text{Sk}_1(X_w) \subset \text{Sk}_2(X_w) \subset \text{Sk}_3(X_w)$$

Pour toutes ses raisons, nous allons uniquement comparer les méthodes 2 et 4. De plus, pour simplifier la comparaison, nous supposons que :

$$\text{Sk}_2(X_w) = \bigcup_{F \subset X_w, F \text{ élément de Vor}(E_w)} F$$

Nous considérons donc les éléments inclus dans X_w et non dans X . Dans le cas de formes $2D$ r -régulières, considérer l'un ou l'autre est équivalent (voir la remarque de la section 3.4.1).

3.5.1 Quelques cas pathologiques

Lorsque la densité d'échantillonnage est insuffisante, certains phénomènes peuvent se produire, qui vont rendre l'utilisation des squelettes impropres à la description de formes (voir figure 22).

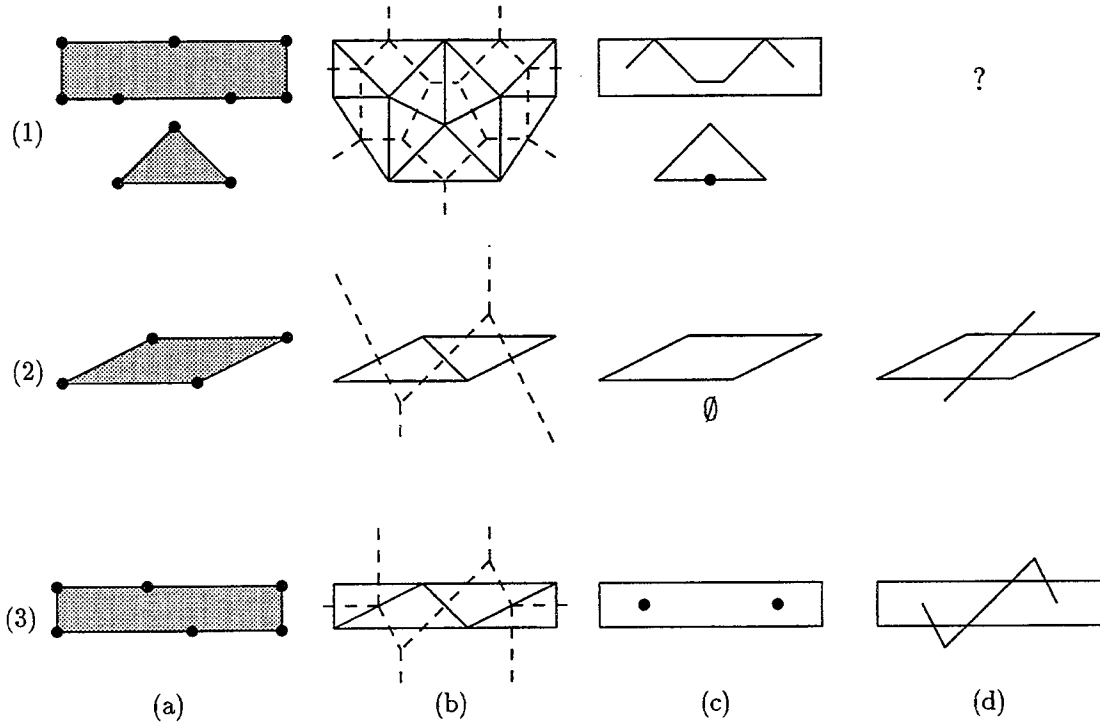


FIG. 22 - Cas pathologiques. (a) Approximation polygonale. (b) Graphe de Voronoï et triangulation de Delaunay. (c) $Sk_2(X_w)$. (d) $Sk_4(X_w)$.

Le principal défaut du squelette Sk_4 est qu'il n'est pas toujours défini (figure 22d1), contrairement au squelette Sk_2 . Un autre ennui vient du fait qu'il est susceptible de sortir de la forme (figure 22d3). Par construction, le squelette Sk_2 est, quant à lui, forcé de rester inclus dans l'objet. Mais, d'un autre côté, il n'a pas forcément le même type d'homotopie que la forme (figure 22c3). Pire, il peut arriver qu'il soit vide alors que la forme ne l'est pas (figure 22c2). Les différences de comportements entre les squelettes Sk_2 et Sk_4 sont résumées dans le tableau 23.

3.5.2 Condition d'équivalence

Si les méthodes 2 et 4 étaient équivalentes, il serait possible de cumuler leurs avantages respectifs. Nous aurions simultanément convergence, conservation du type

	$Sk_2(X_w)$	$Sk_4(X_w)$
Existence	toujours défini	défini si $\partial X_w \subset Del(E_w)$
Contenu	peut être vide	jamais vide
Localisation	toujours inclus dans la forme	peut sortir de la forme
Homotopie	variable	même type d'homotopie que X_w

FIG. 23 - Comportement des deux principales méthodes de squelettisation.

d'homotopie et réversibilité.

Malheureusement, les quelques cas pathologiques examinés dans le paragraphe précédent montrent que les deux squelettes $Sk_2(X_w)$ et $Sk_4(X_w)$ ne sont pas toujours égaux. La raison essentielle de cette différence vient du fait qu'un sommet de Voronoï intérieur peut être associé à un triangle extérieur et réciproquement, un sommet de Voronoï extérieur peut être associé à un triangle intérieur.

Il est logique de se demander sous quelles conditions les méthodes 2 et 4 fournissent le même résultat. Pour répondre à cette question, nous allons nous ramener à un problème équivalent.

Proposition 3.5 *Supposons que X_w vérifie la propriété d'insertion du contour. Alors :*

$$\begin{cases} Sk_4(X_w) = Sk_2(X_w) \\ Sk_4(X_w^c) = Sk_2(X_w^c) \end{cases} \iff \begin{cases} Sk_4(X_w) \subset X_w \\ Sk_4(X_w^c) \subset X_w^c \end{cases}$$

Finalement, tout revient à se demander quand est-ce que le squelette Sk_4 reste inclus dans la forme. La proposition qui suit apporte une réponse, indépendamment de la densité d'échantillonnage.

Proposition 3.6 *Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ une approximation polygonale et E l'ensemble de ses sommets. Si P est inclus dans le graphe de Gabriel de E , alors :*

$$\begin{cases} \partial P \subset Del(P) \\ Sk_4(P) \subset P \\ Sk_4(P^c) \subset P^c \end{cases}$$

Démonstration. Pour montrer que $\partial P \subset Del(P)$, il suffit de remarquer que le graphe de Gabriel est inclus dans le graphe de Delaunay.

Pour établir le reste de la proposition, nous allons montrer dans un premier temps qu'un triangle de Delaunay intérieur est toujours associé à un sommet de Voronoï

intérieur et que, réciproquement, un triangle de Delaunay extérieur est associé à un sommet de Voronoï extérieur.

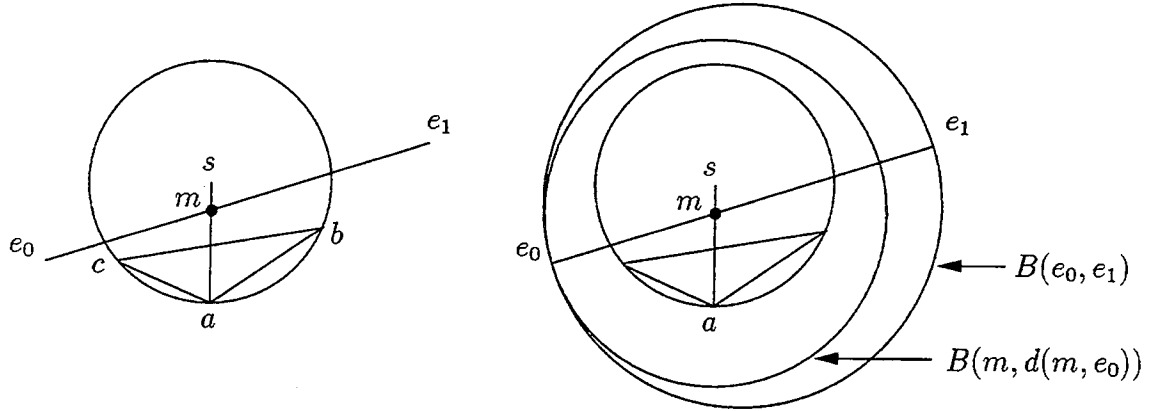


FIG. 24 - Construction d'un chemin joignant un triangle de Delaunay (abc) à son sommet de Voronoï s .

Soit (abc) un triangle de Delaunay et s son sommet de Voronoï associé (voir figure 24). Supposons que $s \notin (abc)$. Dans le cas contraire, le résultat serait immédiat. Supposons que s et a se trouvent de part et d'autre de la droite (bc) . Soit m un point quelconque du segment $[sa[$ et $[e_0e_1]$ une arête passant par le point m . Puisque (abc) est un triangle de Delaunay, le disque $B(a, b, c)$ passant par les points a, b et c est vide de points de E et par conséquent $\forall i \in \{0, 1\}, e_i \notin \overset{\circ}{B}(a, b, c)$. De plus, le graphe de Delaunay étant planaire, $e_i \neq a$. Supposons que e_0 soit plus proche du point m que e_1 . On a $d(m, a) < d(m, e_0)$. Donc $a \in \overset{\circ}{B}(m, d(m, e_0))$. On en déduit alors que $a \in \overset{\circ}{B}(e_0, e_1)$, où $B(e_0, e_1)$ représente le plus petit disque passant par les points e_0 et e_1 . Donc, e_0 et e_1 ne sont pas voisins dans le graphe de Gabriel et par conséquent, $[e_0e_1]$ n'est pas une arête frontière. Nous avons donc trouvé un chemin allant du sommet s au triangle (abc) tel que pour tout point m de ce chemin, m n'est pas un point frontière. Donc, le sommet s et le triangle (abc) sont simultanément, soit tous les deux intérieurs, soit tous les deux extérieurs.

Pour conclure la démonstration, il nous reste à prouver qu'une arête de Voronoï $[ss']$ joignant deux sommets intérieurs s et s' est forcément intérieure à la forme. Le cas des arêtes joignant deux sommets extérieurs se démontre exactement de la même façon et ne sera pas étudié. Notons $[ab]$, l'arête de Delaunay duale de l'arête de Voronoï $[ss']$. Nous savons d'après ce qui précède que les segments $[sa[$, $[sb[$, $[s'a[$ et $[s'b[$ n'intersectent pas la frontière et sont donc tous les quatre strictement inclus dans la forme. Pour prouver que le segment $[ss']$ est intérieur à la forme, nous allons

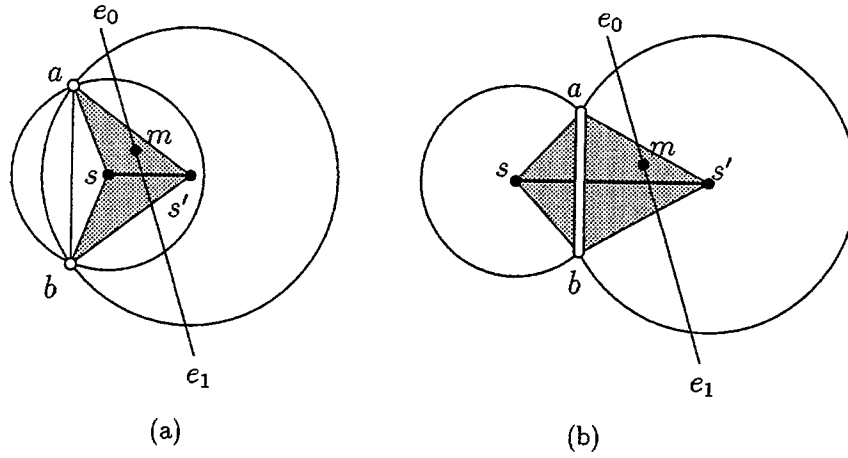


FIG. 25 - Illustration de la démonstration de la proposition 3.6. Les points grisés sont intérieurs à la forme.

montrer que le quadrilatère $]asbs'[,$ dans lequel il est inclus l'est également. Deux cas sont à considérer :

- Si $[ab] \cap [ss'] = \emptyset$, alors aucun des points m du quadrilatère $]asbs'[,$ n'est un point frontière (voir figure 25a). En effet, dans le cas contraire, l'arête frontière passant par le point m intersecterait l'un des quatre segments $[sa[, [sb[, [s'a[$ et $[s'b[$ ce qui est impossible. Finalement, l'ensemble $]asbs'[,$ et par voie de conséquence, le segment $]ss'[,$ sont strictement inclus dans la forme.
- Si $[ab] \cap [ss'] \neq \emptyset$, alors aucun des points de l'ensemble $]asbs'[,$ n'est un point frontière (voir figure 25b). En effet, dans le cas contraire, l'arête frontière passant par le point m intersecterait l'un des quatre segments $[sa[, [sb[, [s'a[$ et $[s'b[$ ce qui est impossible. L'ensemble $]asbs'[,$ est donc strictement inclus dans la forme et entoure complètement l'arête de Delaunay $]ab[.$ Cette dernière ne peut donc pas se trouver sur la frontière de l'objet. Par conséquent, le quadrilatère $]asbs'[,$ est entièrement inclus dans la forme, et il en va de même pour le segment $]ss'[,$

■

Nous n'avons pas pu étendre ce résultat à l'espace $3D.$ Néanmoins, dans le plan, il est possible d'en déduire des propriétés sur les formes r -régulières :

Corollaire 3.1 Soit $X \subset \mathbb{R}^2,$ un objet r -régulier et E_w un ensemble de points

échantillonnant sa frontière avec une densité $w > \frac{1}{2r}$. Soit X_w , l'approximation polygonale normalisée, associée à l'échantillon E_w . Alors :

- X_w vérifie la propriété d'insertion du contour.
- Le squelette $Sk_4(X_w)$ est inclus dans la forme.
- Les méthodes 2 et 4 de squelettisation donnent le même résultat.

Démonstration. Il suffit de constater que X_w vérifie les hypothèses de la proposition 3.6. ■

Pour résumer la situation en $2D$, si la forme étudiée est suffisamment régulière, et que son contour est échantillonné avec une densité suffisamment forte, le calcul de son squelette approché, par l'une quelconque des méthodes 2 ou 4 ne va poser aucun problème. Nous aurons toutes les propriétés voulues (voir figure 26).

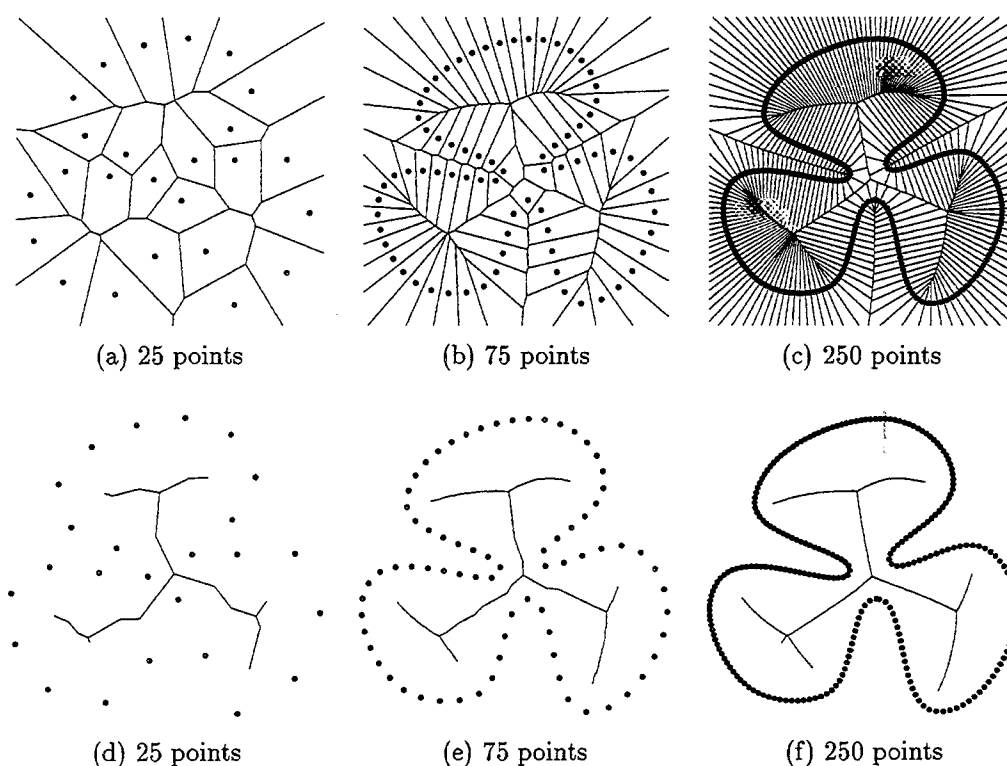


FIG. 26 - Graphe de Voronoï et squelettes 2D. Les méthodes 2 et 4 donnent le même résultat.

Par contre, en $3D$, nous avons constaté que même pour une forte densité d'échantillonnage, le squelette $Sk_4(X_w)$ peut sortir de la forme. Ainsi, les méthodes 2 et 4

ne sont pas équivalentes (voir figure 27). Reste alors le problème de choisir l'une ou l'autre des deux méthodes pour squelettiser la forme.

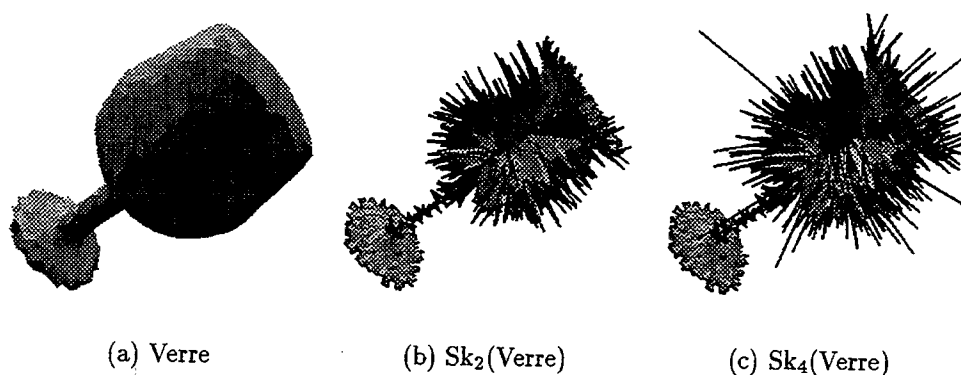


FIG. 27 - Méthodes 3D non équivalentes.

3.5.3 Complexité

Nous allons nous contenter d'étudier la complexité de la méthode 4. Par la suite, n désigne le nombre de points échantillonnant la frontière de l'objet.

La complexité du calcul du squelette dépend de celle du graphe de Voronoï. Par conséquent, elle est dans le pire cas en $O(n \log n)$ en 2D et en $O(n^2)$ en 3D.

Le nombre de sommets de Voronoï échantillonnant le squelette donne la complexité de la représentation. En 2D, ce nombre peut être calculé de façon exacte. Il vaut $n - 2C$, où C représente la constante d'Euler de l'objet dont la définition est rappelée ci-dessous. Par exemple, pour un patatoïde, $C = 1$ et le nombre de sommets sur le squelette vaut $n - 2$.

Définition 3.10 (Constante d'Euler) Soit $\mathcal{P}$ un pavage d'une surface constante, admettant $F(\mathcal{P})$ faces, $A(\mathcal{P})$ arrêtes et $S(\mathcal{P})$ sommets. La quantité $F(\mathcal{P}) - A(\mathcal{P}) + S(\mathcal{P})$ ne dépend pas de $\mathcal{P}$ mais uniquement de la surface. Cette quantité est appelée la constante d'Euler de la surface et est notée C .

La complexité de la représentation se calcule en utilisant la dualité entre sommets de Voronoï et triangles de Delaunay. En effet, compter le nombre de sommets sur le squelette revient à compter le nombre de triangles intérieurs. Or, de façon très générale, nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.7 *Soit $P \subset \mathbb{R}^2$, une approximation polygonale ayant n sommets sur sa frontière. Toute triangulation de P prenant appui sur les sommets de P possède exactement $n - 2C$ triangles, où C est la constante d'Euler de P .*

Démonstration. Soit t , le nombre de triangles nécessaires pour former une partition de P et a , le nombre d'arêtes. La formule d'Euler permet d'écrire :

$$C = t - a + n \quad (5)$$

Notons a_i , le nombre d'arêtes strictement incluses dans P et a_f , le nombre d'arêtes frontières. Notons enfin t_k , le nombre de triangles ayant exactement k arêtes intérieures. On a :

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 \quad (6)$$

$$a = a_f + a_i \quad (7)$$

On peut remarquer qu'en chaque sommet, arrivent exactement deux arêtes frontières (Eq. 8). De même, il est possible de compter le nombre d'arêtes frontières (Eq. 9) et d'arêtes intérieures (Eq. 10) bordant les triangles de P . Ces relations d'adjacence permettent d'écrire :

$$a_f = n \quad (8)$$

$$a_f = t_2 + 2t_1 + 3t_0 \quad (9)$$

$$2a_i = 3t_3 + 2t_2 + t_1 \quad (10)$$

Il est alors possible d'exprimer t en fonction de n à l'aide des équations 5, 6, 7, 8, 9 et 10 ce qui donne $t = n - 2C$ ■

En 3D, tout nous porte à croire que le nombre de sommets sur le squelette est également linéaire. Malheureusement, nous n'avons pas pu le montrer. Un certain nombre de remarques peuvent néanmoins être faites :

- dans le pire cas, le nombre de sommets de Voronoï est en $O(n^2)$.
- cependant, dans le cas d'une distribution uniforme de points dans la boule unité, le nombre moyen de sommets de Voronoï vaut $\approx 6,77n$ [Dwy88].
- lorsque les points sont répartis sur la surface des objets, nous avons constaté de façon expérimentale que le nombre de sommets de Voronoï ne dépasse pas $8n$.

- si t_i désigne le nombre de tétraèdres possédant i faces intérieures, il est possible de montrer (par un raisonnement analogue à celui ayant permis d'établir la proposition 3.7) que $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$, t_k est en $O(n)$.

Toute la difficulté réside dans le calcul de t_4 , c'est-à-dire du nombre de tétraèdres sans face frontière.

3.5.4 Discussion

Avant de conclure, voici une liste des phénomènes les plus intéressants ou les plus curieux que nous avons constatés au cours de notre étude.

Influence de la forme sur le type des tétraèdres

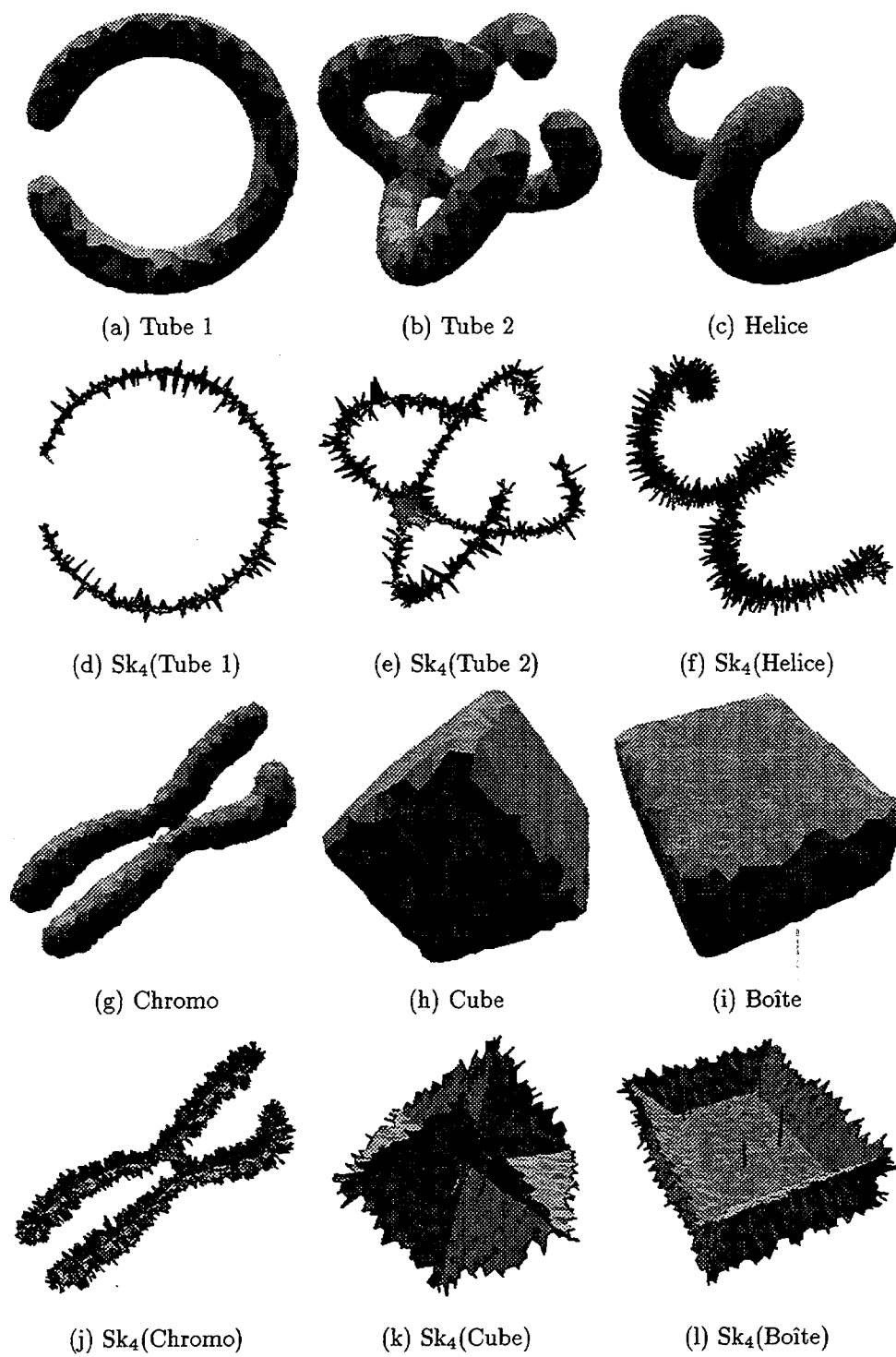
De façon expérimentale, nous avons remarqué que le rapport t_4/t_3 est un bon indicateur de la forme des objets. Lorsque la forme est très cylindrique (hélice, tore), le rapport est proche de 4. Lorsque la forme est très aplatie (boîte), le rapport est inférieur à 1. La valeur 1 sépare en quelque sorte les formes ayant un squelette "plutôt filiforme" des formes ayant un squelette "plutôt surfacique" (voir figures 29 et 28).

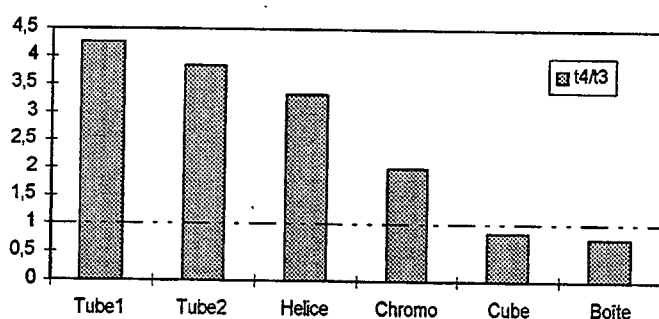
Localisation du centre des cercles circonscrits

En $2D$, si un triangle est obtus en un de ses sommets a , alors le centre du cercle circonscrit se trouve à l'extérieur du triangle et appartient au demi-plan ne contenant pas a . En $3D$, si l'angle entre deux faces d'un tétraèdre est obtus, il est impossible de localiser pour autant la position du centre de la sphère circonscrite. Ce phénomène explique pourquoi en $3D$, le squelette Sk_4 a tendance à sortir de la forme.

Coupure d'une boule

En $2D$, un triangle partitionne son disque circonscrit en 4 composantes connexes. En $3D$, un tétraèdre partitionne sa boule circonscrite en uniquement 2 composantes connexes. Ce phénomène nous a empêchés d'étendre la proposition 3.6 à l'espace $3D$.

FIG. 28 - *Squelettes 3D par la méthode 4.*

FIG. 29 - Forme des objets et rapport t_4/t_3

Coupure d'une forme

En $2D$, un segment suffit pour couper un objet simplement connexe en deux. En $3D$, un triangle ne suffit pas. Ainsi, la représentation d'un objet par un ensemble de tétraèdres ne va pas permettre de le décomposer simplement en sous-parties.

3.6 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'approfondir les méthodes continues de squelettisation tout en introduisant des notions indispensables pour notre propos. En particulier, nous avons rappelé la définition des graphes de Voronoï, de Delaunay et de Gabriel. Nous avons également défini les notions d'échantillon, d'approximation polygonale et de forme r -régulière.

Quatre techniques de squelettisation ont été recensées et comparées. Leur principe général consiste à utiliser le graphe de Voronoï d'un échantillon de l'objet pour approcher le squelette. Dans l'espace $2D$, nous avons trouvé une condition sous laquelle les deux principales méthodes deviennent équivalentes. Cette condition s'exprime très simplement en fonction du graphe de Gabriel des points frontières et ne dépend pas de la densité d'échantillonnage des objets. Dans l'espace $3D$, nous n'avons pas pu trouver de résultat équivalent et d'ailleurs, les méthodes continues ne donnent généralement pas le même résultat. Une analyse de la complexité et quelques remarques concluent notre étude.

Dans ce chapitre, nous avons privilégié une approche par simplexes de Delaunay. Le chapitre suivant va prendre le contre-pied de celui-ci en centrant le discours autour des disques et sphères de Delaunay.

Chapitre 4

Squelette exact des polyboules

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des unions finies de sphères, que nous appelons pour simplifier des *polyboules*. Le résultat clé est que le squelette d'une union de sphères a une structure extrêmement simple, formée d'un nombre fini de polygones, segments et points. Nous montrons également que cette structure est intimement liée au graphe de Voronoï de points localisés sur les sphères. Ainsi, une fois de plus, le calcul du graphe de Voronoï s'avère une étape nécessaire au calcul du squelette.

Plus généralement, nous pouvons nous demander pour quels objets il est possible de calculer de façon exacte le squelette. Si l'objet a une forme géométrique simple, présentant des axes de symétrie évidents (rectangles, ellipses, paraboles, cylindres, ...), son squelette se calcule aisément. Mais, pour des objets plus complexes, il existe peu de résultats généraux.

Jusqu'à présent, les efforts se sont essentiellement portés sur le calcul exact du squelette de polygones et de polyèdres. En $2D$, le squelette d'un polygone est formé de portions de droites et de paraboles. Des constructions en $O(n \log n)$ ont été proposées dans le cas d'un polygone ayant n sommets [Lee82], mais également dans le cas d'un ensemble de polygones ayant n arêtes au total [Kir79, Hu91]. Elles sont fondées sur le calcul préalable du graphe de Voronoï généralisé des éléments frontières [Yap87, For87, Dev92a].

Des auteurs ont cherché à généraliser ces résultats à l'espace $3D$. Il a été montré que le squelette d'un polyèdre est formé de morceaux de quadriques [Lav92, Ber94b]. En théorie, il est donc possible de prévoir la forme du squelette. En pratique, sa construction s'avère un problème délicat qui n'a pas encore été résolu.

Dans ce chapitre, nous étudions le squelette d'une union finie de sphères. Notre propos est double. D'une part, nous résolvons le problème du calcul exact du squelette pour une nouvelle classe d'objets, les *polyboules*. D'autre part, nous tirons parti de ce résultat pour approcher le squelette d'un objet quelconque.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la section 4.2, nous justifions par quelques exemples l'utilisation de représentations sphériques. Puis, des résultats très généraux sur les polyboules sont donnés dans la section 4.3. Le cœur du chapitre est la partie 4.3.3, où la structure des squelettes est décrite à travers deux propositions, l'une en $2D$, l'autre en $3D$. Finalement, dans la section 4.4, un algorithme de calcul du squelette est proposé. Le chapitre se termine par la présentation d'une nouvelle

méthode continue de squelettisation utilisant les polyboules.

4.2 Généralités sur les représentations sphériques

Les représentations sphériques sont utilisées dans de nombreux domaines. A titre d'exemples, nous pouvons citer (la liste n'est pas exhaustive) :

- la chimie et la biologie structurale,
- la robotique,
- la synthèse d'images.

En chimie et biologie, une molécule est fréquemment décrite par une union de sphères [San92, Hal94]. Dans ce modèle, chaque atome est représenté par une boule dont la taille est déterminée par son rayon de van der Waals (voir figure 30). Lorsque deux boules s'intersectent, les atomes correspondants forment une liaison covalente. Malgré sa grande simplicité, une telle représentation volumique permet de comprendre et de prévoir la fonction d'une molécule à partir de sa structure. Il est alors crucial d'avoir des algorithmes efficaces pour manipuler les unions de sphères (affichage [Hal94], calcul de surfaces moléculaires [San92], volume [Ede93], intersections, ...).

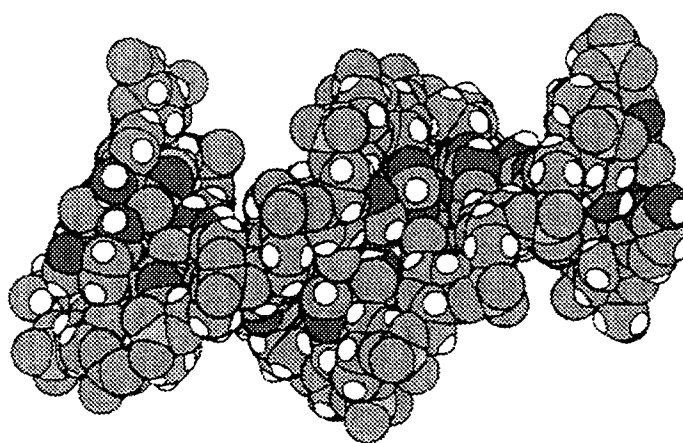


FIG. 30 - *Portion d'ADN comportant 757 atomes (extrait de [Hal94]).*

En robotique, un moyen pour accélérer la planification de trajectoire consiste à inclure chaque objet dans une forme géométrique simple. Dans [Hop83], les auteurs

utilisent des sphères pour représenter grossièrement les différentes parties mobiles d'un robot et les obstacles qui l'entourent. Dans ce modèle, la recherche de collisions éventuelles entre objets revient à détecter l'existence d'intersections entre sphères. Or, ce problème peut être résolu efficacement en $O(n \log^2 n)$ en 3D, avec une complexité identique à celle obtenue pour détecter des intersections entre boîtes englobantes [Hop83].

En synthèse d'images par lancer de rayons, les sphères ont été parmi les premiers objets étudiés car leurs intersections avec un rayon se calculent très simplement [Gla91]. Dernièrement, Gascuel a proposé d'utiliser une collection de sphères pour définir implicitement la surface d'objets déformables [Gas93]. Une fonction potentiel est calculée en chaque point de l'espace et résulte de la somme des potentiels attachés à chaque sphère. La frontière se définit alors comme l'isopotentielle de valeur 1. Cette technique offre un moyen simple d'améliorer l'aspect visuel d'une union de sphères, la frontière obtenue étant une surface lisse. Elle permet également de fournir aux graphistes un outil pratique pour concevoir des objets.

Ces quelques exemples, provenant de domaines très divers, montrent l'intérêt des représentations sphériques. Un certain nombre de problèmes, relatifs à la géométrie algorithmique, se posent alors : calcul du volume d'une union de sphères [Avi88, Ede93], construction explicite de la frontière [Aur88], étude de structures duales [Dev92b, Ede93], détection d'intersections [Hop83, Aur88], calcul de l'enveloppe convexe [Boi92a], etc.

Dans ce chapitre, nous donnons une raison supplémentaire de privilégier les représentations sphériques : le squelette d'une union de boules est parfaitement déterminé.

4.3 Squelette des polyboules

Notre but dans cette section est de décrire, d'un point de vue purement théorique, le squelette d'une union de sphères. Les aspects pratiques seront discutés dans la section suivante. La description du squelette passe par l'utilisation d'un vocabulaire spécifique et nécessite d'introduire quatre notions qui sont :

- les *boules génératrices*,
- les *boules génératrices déconnectées*,
- les *boules génératrices quasi-déconnectées*,

- les *points singuliers*.

La section commence par une description succincte des unions de sphères et débouche sur la notion d'*écriture minimale*.

4.3.1 Structure des polyboules

Par la suite, une *polyboule* désigne n'importe quelle union finie de boules et se définit dans un espace de dimension quelconque.

Définition 4.1 (Polyboule) Une *polyboule* de $\mathbb{R}^N$ est une union finie de boules fermées de $\mathbb{R}^N$.

Remarquons qu'une polyboule peut avoir une forme très générale. Elle peut être formée de plusieurs composantes connexes, avoir des trous et des cavités (voir figure 31).

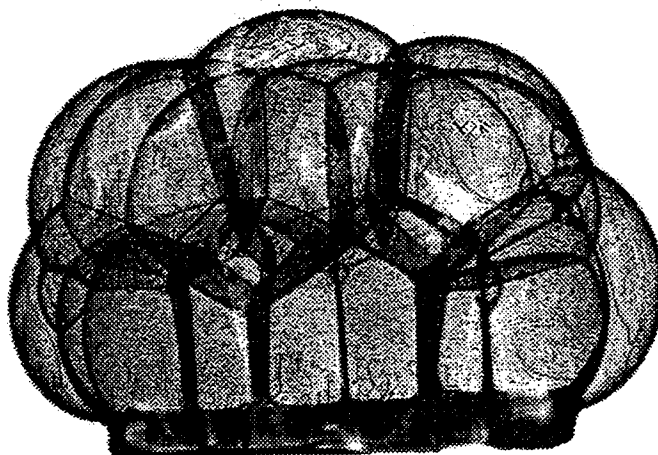


FIG. 31 - Les amas de bulles sont des exemples de polyboules naturelles (extrait de [Hil91]).

La notion de polyboule est introduite par souci de concision. Le terme *polyboule* a été inspiré d'une analogie avec les *polytopes* [Ber78]. En effet, un polytope est une intersection finie de demi-espaces fermés d'intérieur non vide. Ainsi, tout polytope P s'écrit sous la forme :

$$P = \bigcap_{i=1}^k H_i, \quad \text{où } H_i \text{ désigne un demi-espace fermé.}$$

De façon très semblable, une polyboule Y s'écrit :

$$Y = \bigcup_{i=1}^k B_i, \quad \text{où } B_i \text{ désigne une boule fermée.}$$

L'analogie avec les polytopes ne s'arrête pas là. En effet, un polytope a une structure bien particulière. Sa frontière se décompose en faces, arêtes et sommets [Ber78]. Nous allons établir un résultat analogue pour les polyboules.

Dans un premier temps, il est important de réaliser que l'écriture d'une polyboule n'est pas forcément minimale. Ainsi, si une polyboule s'écrit $Y = \bigcup_{i=1}^k B_i$, certaines boules peuvent être superfétatoires (voir figure 32).

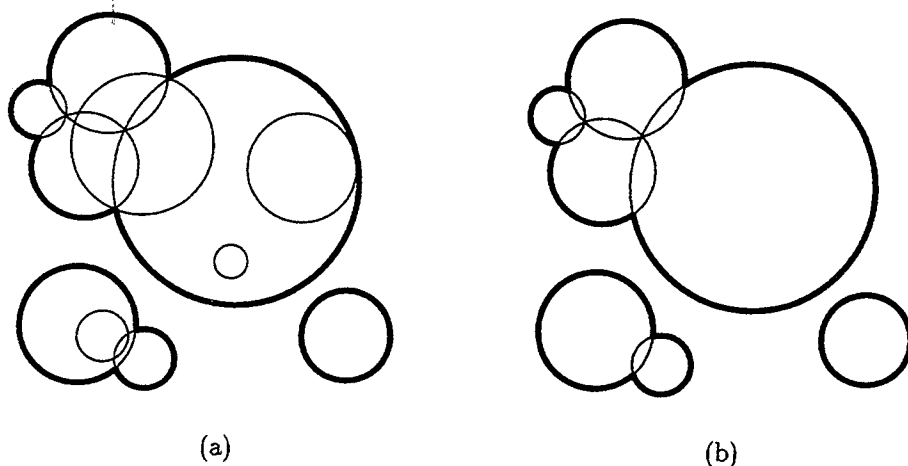


FIG. 32 - (a) *Ecriture non minimale.* (b) *Ecriture minimale.*

Définition 4.2 (Ecriture minimale) Soit Y une polyboule. On dit que $Y = \bigcup_{i=1}^k B_i$ est une écriture minimale si Y ne peut pas s'écrire avec un nombre strictement inférieur à k de boules.

Proposition 4.1 (Faces des polyboules) Soit Y une polyboule et supposons que $Y = \bigcup_{i=1}^k B_i$ soit une écriture minimale. Alors :

1. à l'ordre près, les B_i sont bien déterminés ;
2. si F_i désigne $\partial Y \cap \partial B_i$, F_i est non vide et est appelée face de Y (ou arête en 2D) ;
3. $\partial Y = \bigcup_{i=1}^k F_i$

Démonstration. Nous allons commencer par établir le point 2 de la proposition. Soit i fixé et $Y_i = \cup_{j \neq i} B_j$. Comme l'écriture est minimale, il existe $x \in \partial B_i$ tel que $x \notin Y_i$. Donc $x \in F_i \neq \emptyset$.

Le point 3 s'obtient immédiatement par un jeu de réécriture: $\partial Y = \cup_{i=1}^k (\partial Y \cap \partial B_i)$

Pour établir le point 1, on commence par remarquer que si B_i est une boule de rayon nul, alors F_i est un point isolé de Y . Sinon, F_i est un morceau de sphère d'intérieur non vide (éventuellement formé de plusieurs composantes connexes). Finalement, comme les B_i sont distinctes, on en déduit que les F_i sont également distinctes. Le point 3 montre alors que les F_i (et par conséquent les B_i) sont bien déterminés par Y à partir de sa frontière. Plus précisément, un arc de cercle frontière induit l'existence d'une boule dans l'écriture minimale. De même, un point frontière isolé induit l'existence d'une boule de rayon nul dans l'écriture minimale. ■

La proposition 4.1 montre comment la frontière d'une polyboule se décompose en faces. Néanmoins, contrairement aux faces d'un polytope qui sont toujours des polygones convexes en $3D$ et des segments en $2D$, les faces d'une polyboule peuvent prendre des formes très diverses. Par exemple, en $2D$, elles peuvent avoir un nombre quelconque d'extrémités : 0, 1, 2 ou plus. Elles peuvent également être déconnectées (voir figure 33).

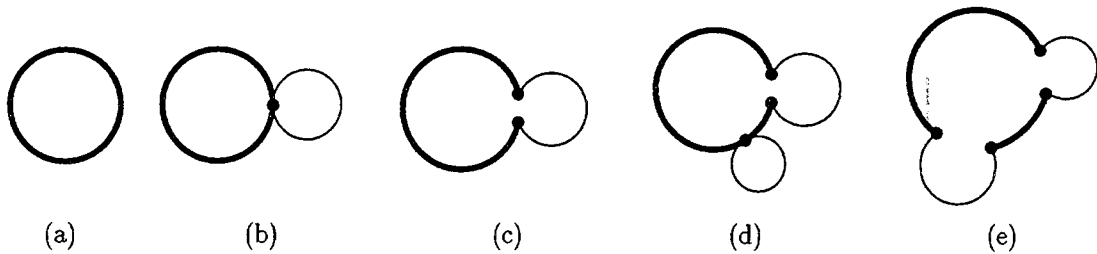


FIG. 33 - Face d'une polyboule. (a) 0 sommet. (b) 1 sommet. (c) 2 sommets. (d) 3 sommets. (e) 4 sommets.

4.3.2 Boules génératrices et points singuliers

Dans une écriture minimale, les boules participant à l'union sont parfaitement déterminées. Par la suite, ces boules sont appelées *boules génératrices*.

Définition 4.3 (Boules génératrices) *B est une boule génératrice d'une polyboule Y si et seulement si B fait partie de l'écriture minimale de Y .*

Avant de poursuivre, une remarque préliminaire sur les boules génératrices s'impose :

Proposition 4.2 *Soit Y une polyboule. Toute boule génératrice de Y est une boule maximale.*

Démonstration. Soit B_i , une boule génératrice quelconque de Y et B , une boule telle que $B_i \subset B \subset Y$. Montrons qu'alors $B_i = B$. Comme B_i fait partie de l'écriture minimale, il existe $x \in \partial B_i$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$ tels que $Y \cap B(x, \epsilon) = B_i \cap B(x, \epsilon)$. Autrement dit, dans un voisinage autour de x , Y est égal à B_i . Comme, d'après hypothèse, $B \subset Y$, on en déduit immédiatement que $B \subset B_i$. Or, nous avons également $B_i \subset B$, ce qui permet de conclure la démonstration. ■

Une conséquence immédiate de la proposition 4.2 est que le squelette cherché passe forcément par le centre des boules génératrices.

Pour parvenir à une description plus fine du squelette, nous distinguons deux types de boules génératrices (voir figures 34 et 36).

Définition 4.4 (Boule génératrice déconnectée) *Une boule génératrice B_i est dite déconnectée si elle n'intersecte aucune autre boule génératrice :*

$$\forall j \neq i, B_i \cap B_j = \emptyset$$

Définition 4.5 (Boules génératrices quasi-déconnectées) *Les boules génératrices B_i et B_j sont dites quasi-déconnectées si leur intersection est non vide et n'intersecte aucune autre boule génératrice :*

$$B_i \cap B_j \neq \emptyset \text{ et } \forall k \neq i \text{ et } k \neq j, B_i \cap B_j \cap B_k = \emptyset$$

Les sommets des faces des polyboules sont appelés, par la suite, des points singuliers. Cette terminologie permet d'éviter la confusion avec les sommets de Voronoï d'une part et les sommets des approximations polygonales d'autre part. En $2D$, les points singuliers sont des points de la frontière à l'intersection d'au moins deux disques générateurs (voir figure 34). En $3D$, ce sont des points de la frontière se

trouvant sur au moins trois sphères génératrices (voir figure 36). Ces points sont caractérisés comme suit :

Définition 4.6 (Points singuliers) Soit $Y \subset \mathbb{R}^N$, une polyboule. Le point p est un point singulier de Y si et seulement si il existe N boules génératrices $B_{i_1}, \dots, B_{i_N}$ telles que $p \in \partial Y \cap B_{i_1} \dots \cap B_{i_N}$.

Le nombre de points singuliers, ainsi que le nombre de faces, sont en $O(k)$ en 2D et en $O(k^2)$ en 3D [Aur88]. Dans [Ked86], les auteurs soulignent que ces bornes sont atteintes, même dans le cas particulier où toutes les boules ont même rayon.

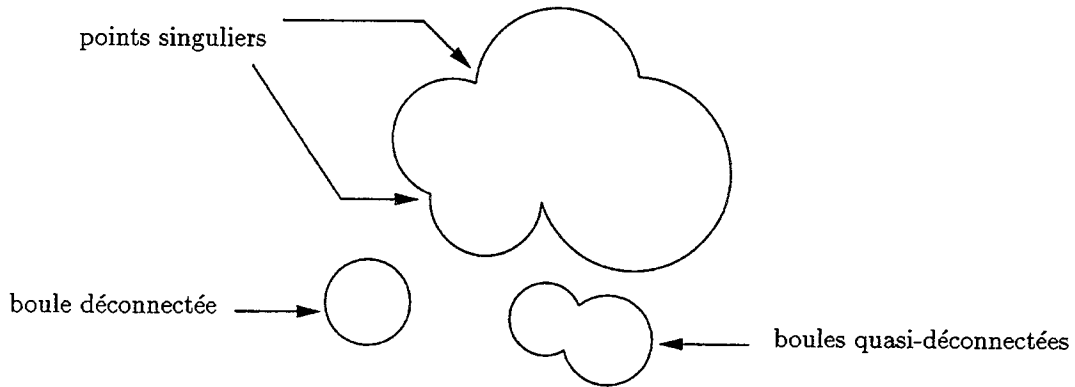


FIG. 34 - Vocabulaire.

4.3.3 Squelette

Afin de simplifier notre étude et pour éviter de rendre les démonstrations trop fastidieuses, nous allons supposer, à partir de maintenant, qu'il n'existe pas deux boules génératrices tangentes. Cette hypothèse n'est pas très restrictive. Elle correspond, en quelque sorte, à l'hypothèse faite dans le chapitre précédent sur les approximations polygonales et qui supposait que les polygones frontières étaient simples.

Hypothèse 4.1 Nous supposons qu'il n'existe pas deux boules génératrices tangentes.

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour décrire le squelette d'une polyboule en 2D comme en 3D.

Proposition 4.3 (Structure du squelette 2D) Soit $Y \subset \mathbb{R}^2$, une polyboule. Le squelette de Y est formé (voir figure 35) :

- des centres des disques déconnectés,
- d'un sous-graphe du graphe de Voronoï des points singuliers. Ce sous-graphe est formé des points $m \in Y$ pour lesquels il existe un point singulier p tel que $d(m, p) = d(m, \partial Y)$.

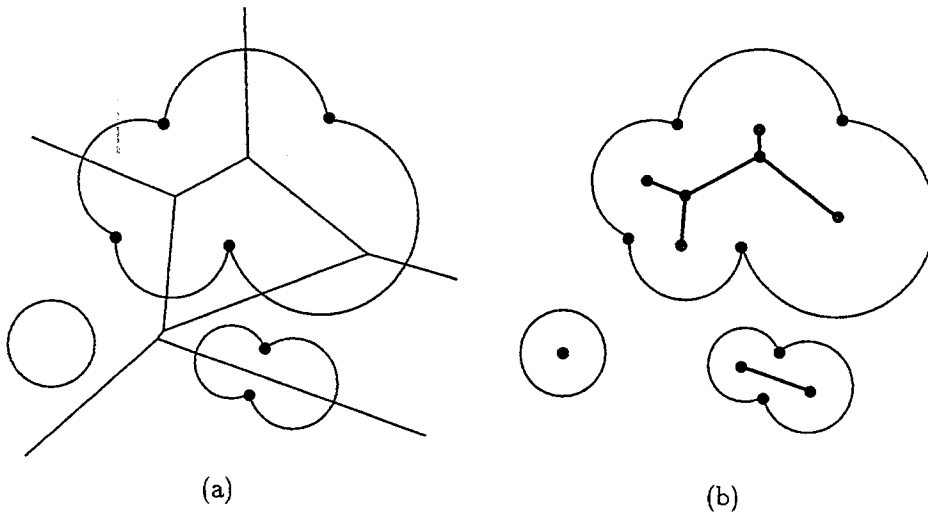


FIG. 35 - Structure du squelette 2D. (a) Graphe de Voronoï des points singuliers. (b) Squelette.

Démonstration. Soit m un point du squelette et B la boule maximale centrée en m . Comme B est maximale, B a au moins deux points de contact avec la frontière de Y .

Supposons, dans un premier temps, que tous les points de contact de B avec la frontière de Y sont des points singuliers. B passe par au moins deux points singuliers et son intérieur n'en contient aucun. Par conséquent, m se trouve sur le graphe de Voronoï des points singuliers. Remarquons que si B passe par exactement 2 points singuliers, m appartient à une arête du graphe de Voronoï. Si B passe par plus de 3 points singuliers, m est un sommet du graphe de Voronoï.

Supposons maintenant que l'un des points de contact de B avec la frontière de Y n'est pas un point singulier mais se trouve sur la frontière de la boule génératrice B_i . Notons x ce point de contact. Nous allons montrer que $B_i = B$. D'après l'hypothèse 4.1, un point non singulier se trouve forcément sur une unique boule génératrice.

Par conséquent, il existe ϵ tel que $Y \cap B(x, \epsilon) = B_i \cap B(x, \epsilon)$. Autrement dit, dans un voisinage autour de x , Y est égal à B_i . Comme d'après hypothèse, $B \subset Y$, on en déduit immédiatement que $B \subset B_i$. Or, B est une boule maximale telle que $B \subset B_i \subset Y$. Par conséquent, $B = B_i$. Ainsi, en utilisant de nouveau l'hypothèse 4.1, deux cas sont à distinguer pour le point m . Soit B_i est déconnectée, auquel cas m est bien le centre d'une boule déconnectée, soit B_i touche au moins deux points singuliers et par conséquent m se trouve sur le graphe de Voronoï des points singuliers.

Réciproquement, le centre d'une boule déconnectée est, de façon immédiate, un point du squelette.

Soit m , un point du graphe de Voronoï des points singuliers tel que $m \in Y$ et pour lequel il existe un point singulier p vérifiant $d(m, \partial Y) = d(m, p)$. Notons B la boule centrée en m et passant par p . On a $B \subset Y$. Donc, l'intérieur de B ne contient pas de points singuliers et, par conséquent, p est l'un des plus proches points singuliers de m . Notons q un autre point singulier tel que $d(m, p) = d(m, q)$. $B \subset Y$ et B touche la frontière de Y en les points p et q . Donc B est une boule maximale et m un point du squelette. ■

La proposition 4.3 se généralise aisément à l'espace $3D$.

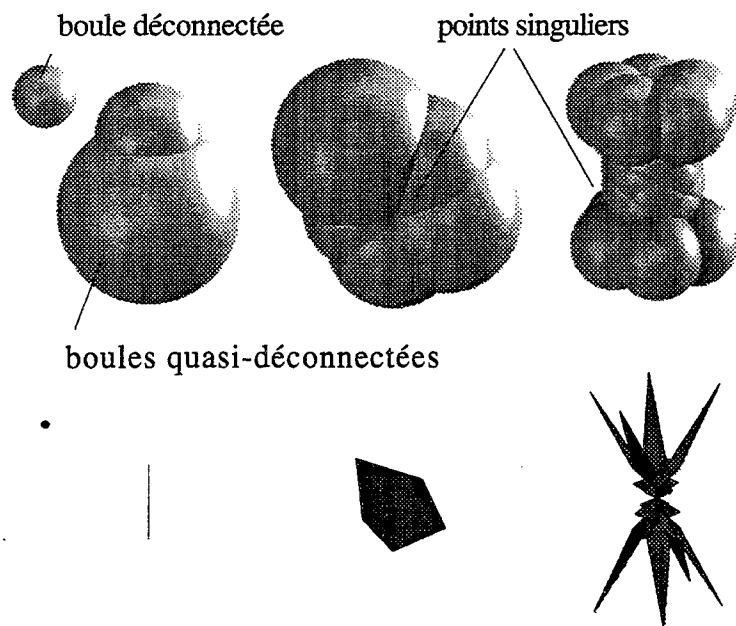


FIG. 36 - Polyboules $3D$ et squelettes correspondants.

Proposition 4.4 (Structure du squelette 3D) *Soit $Y \subset \mathbb{R}^3$, une polyboule. Le squelette de Y est formé (voir figure 36) :*

- *des centres des sphères déconnectées,*
- *des segments de droite joignant les centres des sphères quasi-déconnectées,*
- *d'un sous-graphe du graphe de Voronoï des points singuliers. Ce sous-graphe est formé des points $m \in Y$ pour lesquels il existe un point singulier p tel que $d(m, p) = d(m, \partial Y)$.*

Démonstration. Soit m un point du squelette et B la boule maximale centrée en m . B étant maximale, B a au moins deux points de contact avec la frontière de Y .

Supposons, dans un premier temps, que tous les points de contact de B avec la frontière de Y sont des points singuliers. Comme dans le cas $2D$, B passe alors par au moins deux points singuliers et son intérieur n'en contient aucun. Par conséquent, m se trouve sur le graphe de Voronoï des points singuliers. Remarquons que si B passe par exactement 2 points singuliers, m appartient à un polygone de Voronoï, si B passe par exactement 3 points singuliers, m appartient à une arête du graphe de Voronoï. Dans les autres cas, m est un sommet du graphe de Voronoï.

Supposons maintenant que l'un des points de contact ne soit pas un point singulier mais se trouve sur l'intersection C_{ij} de deux boules B_i et B_j . Comme B_i et B_j ne sont pas tangentes (hypothèse 4.1), le cercle C_{ij} n'est pas réduit à un point. B prend alors appui sur la totalité du cercle C_{ij} et m se trouve sur le segment de droite joignant les centres des boules B_i et B_j .

Supposons finalement que l'un des points de contact de B avec la frontière de Y se trouve sur la frontière de la boule génératrice B_i . En utilisant exactement le même raisonnement que dans le cas $2D$, il est possible de montrer $B_i = B$. Ainsi, m est le centre d'une boule génératrice. Il s'ensuit que m peut être le centre d'une boule déconnectée, quasi-déconnectée ou se trouver sur le graphe de Voronoï des points singuliers.

Réciproquement, le segment de droite joignant deux boules quasi-déconnectées fait partie du squelette. Le reste de la réciproque se démontre exactement de la même façon que dans le cas $2D$. ■

4.3.4 Exosquelette

En analyse d'images, le squelette du complémentaire d'un objet est encore appelé l'*exosquelette*. Un ennui des polyboules est que l'exosquelette a une forme nettement plus complexe que le squelette. Intuitivement, cela provient du fait que l'intérieur et l'extérieur d'une polyboule n'ont pas un rôle symétrique, contrairement aux polygones et polyèdres. Néanmoins, nous allons voir que l'exosquelette d'une polyboule est directement lié à la notion de *diagramme à poids additifs*.

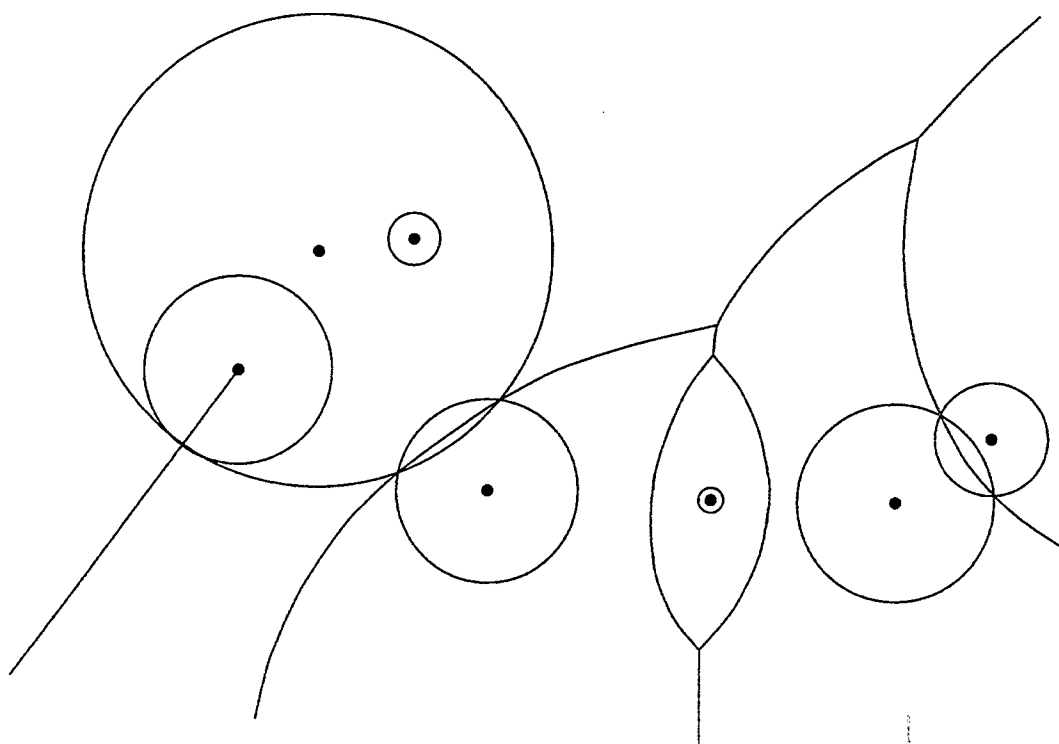


FIG. 37 - *Diagramme à poids additifs (extrait de [Sha85]).*

Le diagramme à poids additifs constitue une extension du diagramme de Voronoï [Sha85, Boi95]. Dans un diagramme à poids additifs, les germes ne sont plus un ensemble de points mais un ensemble de boules $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$, que l'on peut également interpréter comme un ensemble de points pondérés. La distance aux boules se mesure alors avec la distance additive d_+ . Si B représente une boule de centre m et de rayon r et x un point quelconque, on a :

$$d_+(x, B) = d(x, m) - r$$

La distance additive est une quantité positive à l'extérieur de la boule, nulle sur la frontière et négative à l'intérieur. Le diagramme à poids additifs de $\mathcal{B}$ est une

partition de l'espace en cellules définies comme suit :

$$V(B, \mathcal{B}) = \{m \in \mathbb{R}^N, d_+(m, B) \leq d_+(m, B'), \forall B' \in \mathcal{B}\}$$

La frontière des cellules est formée de morceaux d'hyperboles. Remarquons que si les boules de $\mathcal{B}$ ont même rayon, le diagramme à poids additifs coïncide avec le graphe de Voronoï.

De façon immédiate, nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.5 *Soit Y une polyboule et supposons que $Y = \cup_{i=1}^k B_i$ soit une écriture minimale. L'exosquelette de Y est l'intersection du diagramme à poids additifs des boules B_i avec le complémentaire de Y .*

Démonstration. La preuve est immédiate. Il suffit de constater que la distance additive d'un point à une boule n'est autre que la distance de ce point à la boule : $d_+(m, B) = d(m, \partial B)$, lorsque que $m \notin B$. ■

Le calcul de l'exosquelette se ramène donc au calcul d'un diagramme à poids additifs. Ce dernier a une complexité en $O(k^{\lfloor N/2 \rfloor + 1})$ et peut être calculé en temps $O(k^{\lfloor N/2 \rfloor + 1})$, où k désigne le nombre de germes et N la dimension de l'espace. Dans [Boi95], les auteurs montrent comment le calcul d'un diagramme à poids additifs dans un espace de dimension N peut être ramené au calcul d'une enveloppe convexe dans un espace de dimension $N + 2$.

Nous ne nous attarderons pas plus longtemps sur l'exosquelette d'une polyboule. Par la suite, nous nous focaliserons uniquement sur le calcul du squelette.

4.4 Construction

Dans cette section, un algorithme de calcul du squelette est décrit puis analysé dans le cas général (section 4.4.2) et dans un cas particulier (section 4.4.3).

Une nouvelle méthode continue de squelettisation est simultanément proposée.

4.4.1 Algorithme

Pour calculer le squelette, nous n'allons pas utiliser telles quelles les propositions 4.3 et 4.4. En effet, le graphe de Voronoï des points singuliers est difficile à exploiter

pour deux raisons. D'une part, il ne contient pas la totalité du squelette. D'autre part, les éléments du squelette qu'il contient ne coïncident pas forcément avec ses propres éléments. L'extraction du squelette nécessite alors une phase de découpage des éléments de Voronoï, manipulation qui peut être évitée comme nous allons le voir maintenant.

L'idée clé consiste à rajouter de façon artificielle des points sur les faces des polyboules de telle sorte que le graphe de Voronoï des points singuliers E_0 et des points ajoutés E_1 contienne entièrement le squelette (voir figure 38).

Le bien fondé de cette démarche est justifié par les propositions 4.6 et 4.7.

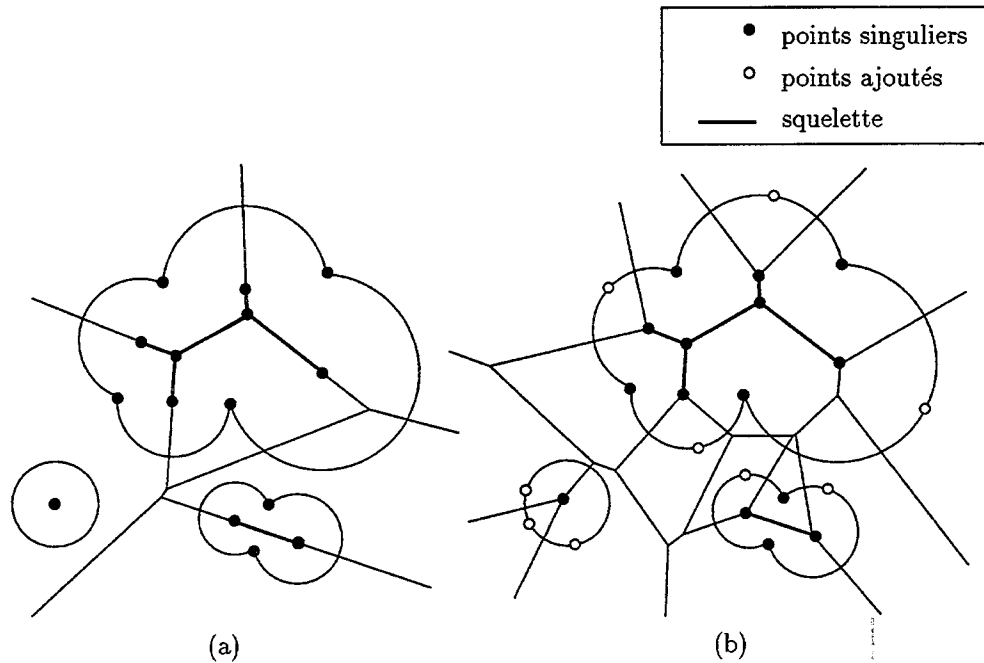


FIG. 38 - (a) Graphe de Voronoï des points singuliers. (b) Graphe de Voronoï des points singuliers et des points ajoutés.

Proposition 4.6 (Construction du squelette 2D) Soit $Y \subset \mathbb{R}^N$, une polyboule. Soit E_0 , l'ensemble des points singuliers de Y . Soit E_1 l'ensemble obtenu en choisissant arbitrairement $3-t$ points distincts sur l'intérieur de chaque face de Y possédant $t \leq 3$ points singuliers.

Le squelette de Y est un sous-graphe du graphe de Voronoï de $E_0 \cup E_1$. Ce sous-graphe est formé des points $m \in Y$ pour lesquels il existe un point singulier p tel que $d(m, p) = d(m, \partial Y)$.

Proposition 4.7 (Construction du squelette 3D) Soit $Y \subset \mathbb{R}^N$, une polyboule. Soit E_0 , l'ensemble des points singuliers de Y . Soit E_1 l'ensemble obtenu en choisissant arbitrairement et dans cet ordre :

- 3- t points distincts sur l'intérieur des arêtes frontières $B_i \cap B_j \cap \partial Y \neq \emptyset$ passant par $t \leq 3$ points singuliers,
- 4- t points distincts sur l'intérieur des faces frontières $B_i \cap \partial Y \neq \emptyset$ passant par $t \leq 4$ points singuliers ou ajoutés.

Le squelette de Y est un sous-graphe du graphe de Voronoï de $E_0 \cup E_1$. Ce sous-graphe est formé des points $m \in Y$ pour lesquels il existe un point singulier p tel que $d(m, p) = d(m, \partial Y)$.

Les démonstrations ne sont pas données car analogues aux démonstrations des propositions 4.3 et 4.4. Un algorithme de calcul du squelette se déduit immédiatement des propositions 4.6 et 4.7. Etant donné une polyboule Y , il comporte les trois étapes suivantes :

1. construction de la frontière du polyboule Y ainsi que des ensembles E_0 et E_1 conformément aux propositions 4.6 et 4.7 ;
2. calcul du graphe de Voronoï de $E_0 \cup E_1$;
3. extraction du sous-graphe formant le squelette.

La complexité de cet algorithme est discutée dans les parties suivantes.

4.4.2 Cas général

Dans le cas général, Y est définie par un ensemble de k boules connues par leurs centres et leurs rayons.

Etape 1

La première étape consiste à calculer de façon explicite la frontière d'une union de k boules. Ce problème a été résolu en $O(k \log k)$ pour $N = 2$ et en $O(k^2)$ pour $N = 3$ [Ima85, Aur88]. Parmi les méthodes proposées, la plus générale consiste à calculer au préalable le diagramme de puissance. Il est également possible de ramener ce calcul à celui d'une enveloppe convexe dans un espace de dimension $N + 1$ [Boi95].

Etape 2

Soit n , le nombre de points de $E_0 \cup E_1$. La deuxième étape consiste à calculer le graphe de Voronoï de ces n points. Ce calcul s'effectue en $O(n \log n)$ pour $N = 2$ et en $O(n^2)$ pour $N = 3$. Ainsi, l'étape 1 cumulée avec l'étape 2 est en $O(k \log k)$ pour $N = 2$ et en $O(k^4)$ pour $N = 3$. Dès à présent, une conclusion s'impose : le calcul du squelette dans le cas général est relativement complexe.

Etape 3

Un simple parcours du graphe de Voronoï en $O(n)$ permet d'extraire le squelette.

Pour conclure, la construction du squelette d'une polyboule Y définie par k boules a une complexité en temps de $O(k \log k)$ en $2D$ et de $O(k^4)$ en $3D$. L'étude d'un cas particulier va permettre de réduire la complexité du cas général en s'affranchissant de l'étape 1, très coûteuse en temps.

4.4.3 Cas particulier

Notre but maintenant est d'utiliser l'outil "polyboule" pour approcher n'importe quelle forme continue ainsi que son squelette. Ce faisant, nous proposons une nouvelle méthode continue de squelettisation, qui coïncide avec la méthode 2 du chapitre 3. Néanmoins, l'avantage de cette nouvelle formulation est une interprétation intuitive et immédiate du squelette approché.

Pour parvenir à ce but, nous allons nous placer dans un cas particulier de construction du squelette d'une polyboule. En effet, au lieu de définir Y par une collection quelconque de boules, Y est définie à partir d'un échantillon de sa frontière. Cette hypothèse sur les données n'est pas innocente et permet de simplifier considérablement la construction du squelette.

Soit X une forme continue et X_w une approximation polygonale de densité w . Dans un premier temps, nous allons approcher X par une polyboule Y_w . Pour cela, le graphe de Voronoï des sommets de X_w est calculé. Notons $B_w(s, r)$, la boule de Delaunay associée au sommet s . La polyboule Y_w est définie comme la réunion des boules de Delaunay dont le centre appartient à X :

$$Y_w = \bigcup_{s \in X, s \text{ sommet de } \text{Vor}(E_w)} B_w(s, r)$$

Sans hypothèse particulière, il n'y aucune raison pour que Y_w converge vers X lorsque $w \rightarrow \infty$. Dans le cas le plus général, nous avons juste le résultat suivant :

Proposition 4.8 $\lim_{w \rightarrow \infty} Y_w \subset \overline{X}$.

Démonstration. Soit s un sommet de Voronoï inclus dans X et $B(s, r)$ la boule de Delaunay de centre s . Si $r < w^{-1}$, pour tout point y de $B(s, r)$, on a $d(y, X) < w^{-1}$. Si $r \geq w^{-1}$, alors $B(s, r - w^{-1}) \subset X$ et de même $d(y, X) < w^{-1}$. Dans tous les cas de figure :

$$\max_{y \in Y_w} d(y, X) < w^{-1}$$

Puisque $\overline{X}$ et Y_w sont tous les deux fermés, on en déduit le résultat. ■

Néanmoins, si la frontière de X est une surface topologique de classe C^3 au moins, il a été montré que les boules de Delaunay tendent vers les boules maximales et que réciproquement toute boule maximale est atteinte par une suite de boules de Delaunay [Sch89]. Par conséquent :

$$\lim_{w \rightarrow \infty} Y_w = X$$

Une façon naturelle d'approcher le squelette de X est alors de considérer le squelette exact de Y_w (voir figure 39) :

$$\text{Sk}_5(X_w) = \text{Sk}(Y_w)$$

Les hypothèses de régularité sur X rappelées plus haut permettent d'assurer la convergence de la méthode [Sch89] :

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \text{Sk}(Y_w) = \text{Sk}(X)$$

Nous pouvons maintenant analyser la construction du squelette. Remarquons que la polyboule Y et son squelette sont calculés simultanément. En effet, à partir du moment où les boules de Delaunay faisant partie de Y_w sont sélectionnées, le squelette est complètement déterminé.

Etape 1

L'étape 1 est réduite à néant puisque les sommets de l'approximation polygonale X_w fournissent directement l'ensemble $E_0 \cup E_1$.

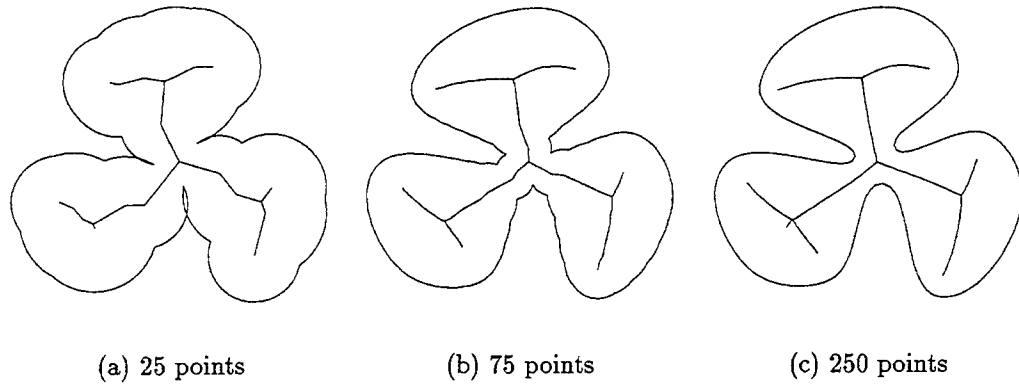


FIG. 39 - Polyboules approchant une forme et squelettes correspondants.

Etape 2

L'étape 2 reste inchangée.

Etape 3

Pour extraire le squelette du graphe de Voronoï des points $E_0 \cup E_1$, il suffit d'attribuer à chaque sommet de Voronoï une étiquette indiquant s'il est inclus ou non dans le squelette. Le squelette est alors formé des éléments de Voronoï prenant appui uniquement sur des sommets intérieurs. Un algorithme pour déterminer le type des sommets de Voronoï se réduit aux quelques lignes suivantes :

C A L C U L D U T Y P E D E S S O M M E T S

Pour tous les sommets s de G
 Si s appartient à X
 type[s] $\leftarrow$ intérieur ;
 Sinon
 type[s] $\leftarrow$ extérieur ;

Pour établir la complexité de l'étape 3, nous allons supposer qu'il est possible de déterminer en temps constant si un point s appartient à X ou non. Si l'objet est connu sous une forme implicite ou encore s'il a été binarisé, cette hypothèse est vérifiée. Le temps de calcul est alors en $O(v)$, où v désigne le nombre de sommets de Voronoï.

Finalement, le calcul du squelette d'une polyboule déterminée par n points frontières s'effectue en $O(n \log n)$ en $2D$ et en $O(n^2)$ en $3D$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les unions finies de sphères, que nous avons appelées des polyboules. Afin de pouvoir les décrire aisément, nous avons introduit un vocabulaire spécial. Nous avons appelé boules génératrices, les boules participant à l'écriture minimale et points singuliers, les sommets des faces frontières.

Nous avons montré à travers les propositions 4.3 et 4.4 que le squelette d'une polyboule est formé de segments de droite en $2D$ et de polygones en $3D$. Il possède une structure extrêmement simple et se calcule à partir du graphe de Voronoï des points singuliers. Sa complexité est en $O(n \log n)$ en $2D$ et $O(n^4)$ en $3D$.

Enfin, nous avons utilisé ce résultat pour reformuler les méthodes continues de squelettisation. Le squelette approché s'interprète alors comme le squelette exact d'une polyboule.

Dans ce chapitre, nous avons privilégié une approche par boules de Delaunay. Dans le chapitre suivant, nous allons encore une fois utiliser les boules de Delaunay dans le but de résoudre un nouveau problème.

Chapitre 5

Interpolation d'un ensemble de points

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons le *problème de l'interpolation* d'un ensemble de points par une surface affine par morceaux. Etant donné un nuage de points répartis sur une surface S , il s'agit de trianguler ces points de façon à approcher au mieux S . Les points sont connus uniquement par leurs coordonnées et forment un ensemble sans aucune structure.

Ces points peuvent provenir de mesures directes sur la surface d'un objet avec un palpeur 3D (système Optotrak) ou par balayage laser. Mais, ils peuvent également être obtenu par un traitement préliminaire comme la segmentation d'un volume d'images scanner ou encore la recherche de points homologues dans une paire d'images stéréoscopiques. Les champs d'application sont nombreux. Ils concernent le domaine médical avec la constitution d'atlas informatiques, la géographie avec la création de modèles numériques de terrains, la conception assistée par ordinateur avec le *design* de surfaces.

La donnée d'un ensemble de points mesurés sur une surface constitue une information assez pauvre. Mais, si de plus un maillage de la surface est connu, les opérations suivantes deviennent alors possibles et montrent l'importance du problème d'interpolation :

- étude de la géométrie (calcul de paramètres comme le volume, la surface, les directions principales,...) ;
- modélisation physique (gestion des déformations et des contacts) ;
- interpolation par des fonctions lisses (chaque facette du maillage est interpolée par des polynômes de degré plus ou moins élevé) ;
- rendu (l'aspect de la surface peut encore être amélioré grâce à du lissage de Gouraud ou grâce à une interpolation par des fonctions lisses).

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la section 5.2, nous faisons un tour d'horizon des méthodes d'interpolation. Après avoir mis en exergue leurs avantages et leurs inconvénients, nous présentons dans la section 5.3 une nouvelle approche, fondée sur le calcul du graphe de Delaunay. Des résultats théoriques et expérimentaux valident notre travail. La section 5.3.4 récapitule les avantages de notre méthode, spécifiques

à l'utilisation du graphe de Delaunay. Finalement, nous présentons quelques perspectives dans la section 5.4 avant de conclure section 5.5.

5.2 Etat de l'art

Une façon d'énoncer le *problème de l'interpolation* étudié dans ce chapitre est la suivante : soit $\{p_i\}_{i=1}^n$, un ensemble fini de n points répartis sur une surface S . La surface S est inconnue. A partir de la seule donnée de l'ensemble $\{p_i\}_{i=1}^n$, il s'agit de trouver une triangulation "naturelle" de la surface S , dont les sommets sont les points p_i . Autrement dit, il s'agit de munir l'ensemble $\{p_i\}_{i=1}^n$ d'une structure topologique induite par la surface S . Un autre point de vue plus géométrique consiste à définir le résultat de l'interpolation comme la surface affine par morceaux qui approche "au mieux" la surface S . Dans tous les cas de figures, le problème de l'interpolation demeure délicat à formaliser. Nous reviendrons plus en détail sur son énoncé dans la section 5.3.1 où une formulation précise et originale sera proposée.

Pour résoudre le problème de l'interpolation, de nombreuses méthodes existent que nous allons classer selon deux critères différents. Dans un premier temps, nous allons les étudier au regard des hypothèses faites sur les données ou le résultat (section 5.2.1). Puis, les méthodes seront répertoriées selon les outils qu'elles utilisent (section 5.2.2).

5.2.1 Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices envisagées pour résoudre le problème d'interpolation portent soit sur l'espace de travail, soit sur les données initiales $\{p_i\}_{i=1}^n$, soit sur la surface recherchée. Nous nous proposons de passer en revue ces hypothèses et de voir quelles sont leurs conséquences sur les méthodes d'interpolation.

Espace de travail

Le problème a été étudié en $2D$ comme en $3D$. Dans sa version $2D$, les points p_i sont supposés se trouver sur des portions de courbes qu'il faut approcher "au mieux" par des segments de droites. L'étude du cas $2D$ permet d'appréhender plus facilement le cas $3D$.

Informations supplémentaires sur les données

Des informations supplémentaires sont parfois disponibles et influencent fortement les stratégies d'interpolation, comme par exemple la connaissance de la normale en chaque point p_i [Boi82].

Reconstruction à partir de coupes

Un autre cas très étudié est celui où les données sont disposées selon des sections planes et parallèles. En effet, de nombreux systèmes d'acquisition fournissent une information de ce type. C'est le cas du microscope confocal à balayage laser, qui réalise des coupes optiques de spécimens transparents ou fluorescents. C'est le cas également de techniques d'imagerie médicales comme la tomodensitométrie ou l'imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM).

Pour reconstruire des objets 3D à partir de coupes parallèles, il est possible soit de déterminer une triangulation entre deux coupes successives [Boi88, Sch90, Boi92b], soit d'inférer une série de coupes intermédiaires [Rol91, Mon93, Oli95].

A partir de maintenant, nous allons supposer que les seules données dont on dispose sont les coordonnées (x_i, y_i, z_i) des points p_i . Selon le type de surface cherchée S , différentes stratégies d'interpolation ont vu le jour.

Genre des surfaces

Théoriquement, la surface S cherchée est quelconque. Elle peut être formée de plusieurs composantes connexes et avoir n'importe quel genre. Néanmoins, dans la pratique, il est très courant de supposer S connexe. Des hypothèses supplémentaires permettent de se restreindre à la recherche d'une surface à bord (ouverte) ou sans bord (fermée) ou d'une surface ayant le type d'homotopie d'une sphère.

Si la surface possède un bord, les méthodes seront plutôt du type surfacique, et vont procéder par une triangulation des points p_i . Si la surface est fermée, les méthodes seront plutôt du type volumique, et vont passer par une tétraédrisation de l'espace.

Surface radiale

Des méthodes particulières ont été développées dans le cas où la surface S cherchée est radiale, c'est-à-dire du type $z = f(x, y)$. Elles consistent à projeter les points $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ dans le plan $z = 0$, à trianguler les points (x_i, y_i) , puis à surélever la triangulation plane en tenant compte de l'altitude z_i des points. Deux points de vue sont alors possibles : trianguler les points (x_i, y_i) sans tenir compte de leur altitude z_i ou au contraire, considérer des triangulations dépendantes des données. Dernièrement, Rippa a établi un résultat en faveur de la première approche. Il a montré que la triangulation de Delaunay des points (x_i, y_i) minimise un *critère de rugosité* sur l'ensemble des triangulations possibles des points p_i [Rip90]. Néanmoins, la triangulation de Delaunay ne fournit pas toujours les meilleurs résultats, surtout dans le cas d'une fonction f possédant une direction privilégiée [Dyn90].

En $2D$, le problème revient à déterminer une fonction f du type $y = f(x)$, affine par morceaux et interpolant les points $p_i = (x_i, y_i)$. L'unique façon de résoudre ce problème consiste à ordonner les points selon leurs abscisses puis à relier deux points par un segment de droite s'ils se succèdent. Ainsi, en $2D$, l'interpolation d'un ensemble de points se ramène à un problème de tri, ce qui s'effectue de façon optimale en $O(n \log n)$.

Surface visible d'un point

Le fait de considérer uniquement des surfaces radiales est très restrictif. En particulier, les surfaces fermées comme les patatoïdes ne rentrent pas dans cette catégorie. Pour contourner ce problème, Choi *et al.* considèrent les surfaces S dont tous les points sont visibles depuis un point c [Cho88]. La famille de surfaces possédant cette propriété comprend les sphères, les ellipsoïdes, les plans et même les surfaces radiales (le point c se trouve alors localisé à l'infini).

La méthode proposée par Choi *et al.* repose sur un schéma en trois étapes. Les points p_i sont projetés sur une sphère de centre c , triangulés, puis ramenés dans leur position initiale. Le principal inconvénient est la nécessité de connaître *a priori* le point c .

Dans [Rou94], Roux s'affranchit de cette hypothèse et propose une méthode encore plus générale fondée sur le même principe. La surface est approchée localement par une sphère sur laquelle une partie des points p_i est projetée, triangulée puis

remise dans sa position initiale. La sphère tangente est préférée au plan tangent car l'opération de projection concerne un plus grand nombre de points.

5.2.2 Graphes de voisinage

Remarquons avant de poursuivre que le problème d'interpolation énoncé au début du chapitre revient à déterminer pour chaque point p_i l'ensemble le plus "naturel" de ses voisins. Il s'agit donc de déterminer un graphe ayant pour sommets les points p_i et constituant un maillage de la surface S . Pour déterminer ce graphe, la très grande majorité des méthodes partent d'un graphe de voisinage connu (graphe des k plus proches voisins, graphe de Delaunay,...) pour lequel un algorithme de calcul efficace existe. Le problème consiste alors à sélectionner un sous-graphe pertinent de ce graphe de voisinage.

Nous proposons maintenant une autre façon de classer les méthodes d'interpolation selon le graphe de voisinage qu'elles utilisent.

Graphe des k plus proches voisins

Il semble naturel à première vue d'utiliser le graphe des k plus proches voisins pour interpoler un ensemble de points, d'autant que la recherche des k plus proches voisins d'un point donné s'effectue efficacement en $O(\log n + k)$ avec un pré-calcul en $O(k^2 n \log n)$ en $2D$ [Pre88, Mur90, Dic92].

Dans [Boi84], Boissonnat utilise le graphe des k plus proches voisins pour faire croître une surface triangulée jusqu'à ce qu'elle contienne l'ensemble des points p_i . Le processus est initialisé à partir d'un segment joignant un point p_0 à son plus proche voisin. Puis, le bord de la surface courante est propagé en ajoutant un à un de nouveaux triangles. Pour cela, étant donné une arête $[p_i p_j]$ sur le bord de la surface, son plan tangent est approché à partir des k plus proches voisins de p_i et de p_j . Le point p , dans le voisinage de p_i et p_j est ajouté si son projeté sur le plan tangent optimise un certain critère. Des précautions supplémentaires doivent être prises pour faire en sorte que le triangle $(pp_i p_j)$ n'intersecte pas la surface courante. La complexité en temps est en $O(n \log n)$.

Dans [Hop92], le graphe des k plus proches voisins est utilisé pour estimer une distance signée à la surface S . Dans un premier temps, le plan tangent à chaque point p_i est approché à partir de ses k plus proches voisins. Puis, l'orientation de la

surface est calculée en propageant le vecteur normal de proche en proche le long du graphe des k plus proches voisins. Après cette étape, une distance signée à l'objet est estimée et permet de partitionner la surface en cubes. Finalement, un algorithme de "marching cubes" fournit la triangulation cherchée.

En conclusion, le graphe des k plus proches voisins possède deux inconvénients majeurs. Son utilisation ne donne pas de bons résultats si les points p_i ne sont pas régulièrement répartis sur la surface S . Enfin, le choix du paramètre k pose un problème délicat.

Enveloppe convexe

L'enveloppe convexe des points p_i est le plus petit convexe contenant les points p_i . Son calcul s'effectue en $\theta(n \log n)$ en 2D et 3D [Boi95]. Un moyen simple pour trouver une surface interpolant un ensemble de points consiste à calculer l'enveloppe convexe et à la déformer jusqu'à ce qu'elle passe par l'ensemble des points p_i . Différentes façons de "sculpter" l'enveloppe convexe ont été proposées dans la littérature.

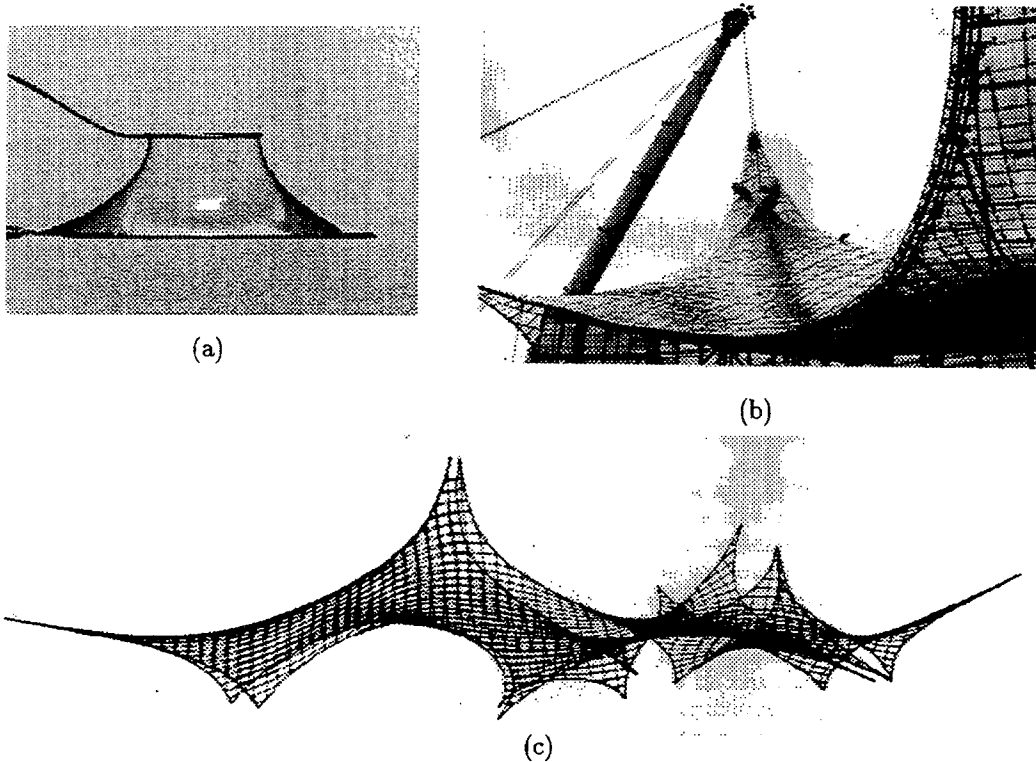


FIG. 40 - (a) Les films de savon définissent des surfaces minimales, dont les architectes s'inspirent pour concevoir des toits. (b,c) Toit du stade olympique de Munich conçu par Frei Otto (Extrait de [Hil91]).

Dans [ORo81], O'Rourke postule que le polyèdre d'aire minimale passant par les points p_i est la meilleure surface fermée interpolante. Cette heuristique s'inspire du phénomène physique suivant : une bulle de savon prenant appui sur une courbe fermée va minimiser sa tension interne et par conséquent sa surface (voir figure 40). L'algorithme développé par O'Rourke part de l'enveloppe convexe des points p_i . Si les points p_i se trouvent tous sur l'enveloppe convexe, cette dernière est une surface d'aire minimale répondant au problème. Sinon, l'enveloppe convexe est creusée petit à petit jusqu'à obtenir une surface passant par la totalité des points p_i . Le point ajouté à la surface à un moment donné minimise le rapport entre l'aire qui apparaît et l'aire qui disparaît, du fait de son insertion.

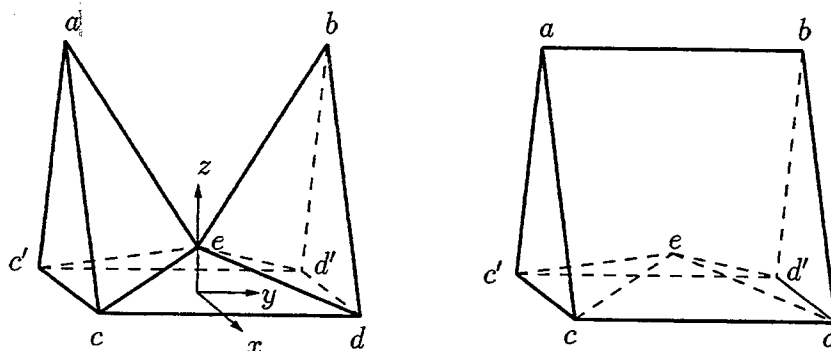


FIG. 41 - Le polyèdre de surface minimale (à gauche) n'est pas forcément le plus naturel (à droite). $a(0, -1, 1)$, $b(0, 1, 1)$, $c(x, -1, 0)$, $c'(-x, -1, 0)$, $d(x, 1, 0)$, $d'(-x, 1, 0)$, $e(0, 0, h)$ (extrait de [Boi84]).

Boissonnat [Boi84] a montré sur l'exemple de la figure 41 que minimiser l'aire peut conduire à des résultats surprenants et non intuitifs. Cette heuristique ne donne pas toujours la "meilleure" surface.

Graphe de Delaunay

Le graphe de Delaunay dont la complexité est en $O(n \log n)$ en 2D et $O(n^2)$ en 3D possède plusieurs avantages sur les graphes précédents. Pour commencer, le graphe de Delaunay contient l'enveloppe convexe. De plus, contrairement aux k plus proches voisins, le voisinage de Delaunay est isotrope (voir figure 42) [Ahu82, Boi84]. Chaque point p a au moins $N + 1$ voisins, qui représentent en quelque sorte les plus proches points dans une direction donnée. Ces résultats peuvent être justifiés "proprement" en considérant l'inversion de centre p [Boi84].

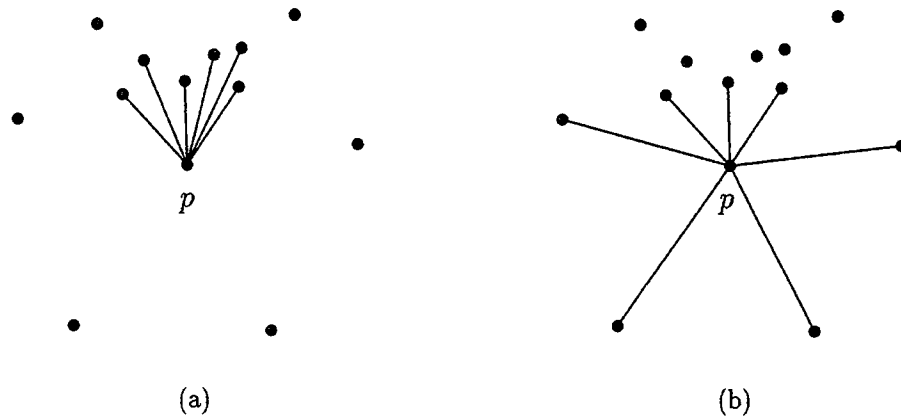


FIG. 42 - Comparaison des graphes de voisinage. (a) 6 plus proches voisins du point p . (b) Voisins de Delaunay du point p .

Dans [Boi84], Boissonnat suggère de modifier l'enveloppe convexe en supprimant des tétraèdres de Delaunay jusqu'à ce que tous les points p_i se trouvent sur la surface courante. Un tétraèdre T est supprimé uniquement si sa suppression ne modifie pas le genre de la surface. Les tétraèdres T susceptibles d'être supprimés à un moment donné sont triés selon un critère $V(T)$. Boissonnat propose une mesure fondée sur la distance entre une face et la portion de sphère circonscrite à cette face.

Un problème inhérent à la méthode est que les changements de topologie sont interdits. Il est donc impossible en partant de l'enveloppe convexe d'obtenir une surface ayant des cavités, ou formée de plusieurs composantes connexes.

Veltkamp met en évidence un autre problème [Vel92]. Pour certaines répartitions de points, le processus de sculpture peut se bloquer sans qu'il soit possible d'atteindre la totalité des points p_i (voir figure 43).

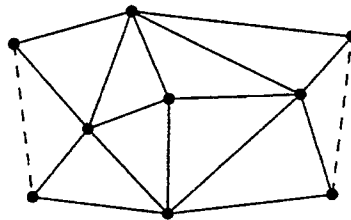


FIG. 43 - La sculpture d'une triangulation de Delaunay peut se bloquer (extrait de [Vel92]).

Graphe de γ -voisinage

Dans [Vel92], Veltkamp propose également de trouver un polyèdre passant par les points p_i à l'aide d'un algorithme de sculpture de l'enveloppe convexe. Pour cela, il introduit la notion de $\gamma([c_0, c_1], [c_2, c_3])$ -graphe. Un $\gamma([c_0, c_1], [c_2, c_3])$ -graphe est une extension du graphe de Delaunay que nous ne détaillerons ici. Les points importants à retenir sont les suivants. Le $\gamma([-1, 1], [0, 1])$ -graphe n'est autre que le graphe de Delaunay. C'est celui que Veltkamp utilise en pratique dans son algorithme de recherche d'un polyèdre. Si jamais le graphe de Delaunay ne possède pas de cycle hamiltonien, comme dans la figure 44, le problème ne possède pas de solution. Veltkamp considère alors un graphe voisin $\gamma([-1, 1], [\epsilon, 1])$. Le choix du tétraèdre T à supprimer s'effectue selon un critère analogue à celui proposé dans [Boi84]. Ce critère repose sur le calcul d'une distance normalisée entre une face de Delaunay et la portion de sphère circonscrite à cette face.

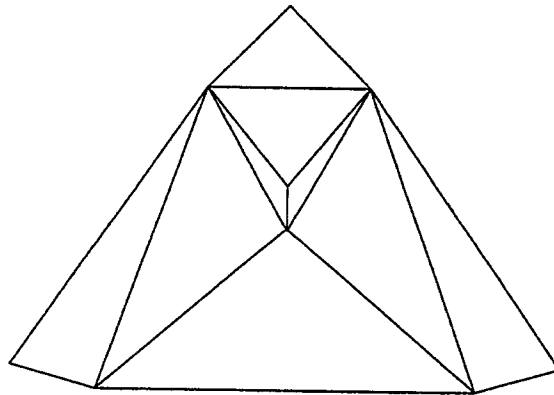


FIG. 44 - Triangulation de Delaunay non dégénérée sans cycle hamiltonien (extrait de [Dil87]). Il est impossible de trouver un polygone simple passant par tous les points.

Graphe de Voronoï

Le graphe de Voronoï est parfois utilisé en complément du graphe de Delaunay et permet d'obtenir des informations sur le squelette. Nous décrivons trois approches différentes, qui ont toutes été proposées en 2D. Le problème d'interpolation consiste alors à trouver un ou plusieurs polygones passant "au mieux" par les points p_i .

Dans [Fai83], Fairfield propose une technique pour chaîner un ensemble de n points $\{p_i\}$ dans le plan. Pour cela, le graphe de Voronoï et la triangulation de

Delaunay de ces n points sont au préalable construits. Puis, à tout point x du graphe de Voronoï est associé l'angle $\widehat{p_i x p_j}$ sous lequel x voit ses deux plus proches points p_i et p_j . Les portions du graphe de Voronoï où cet angle ne varie pas trop définissent des bouts de squelette, qui, par dualité, fournissent un ensemble de polygones.

Dans [ORo87], les auteurs cherchent un unique polygone passant par n points du plan. Pour cela, ils commencent par diminuer la complexité du problème, en se limitant à chercher un cycle hamiltonien dans la triangulation de Delaunay des n points. Cependant, un parcours exhaustif de l'ensemble des polygones prenant appui sur des arêtes de Delaunay reste prohibitif car en $\binom{3n-6}{n} = O(3^n)$. Les auteurs proposent alors de reformuler le problème dans l'espace dual. En effet, à tout polygone dans la triangulation de Delaunay correspond par dualité un arbre dans le graphe de Voronoï. Cet arbre forme ce qu'ils appellent le *squelette de Voronoï*. Les auteurs postulent alors que le "meilleur" squelette possible est l'arbre minimal de longueur $n - 2$. Veltkamp a étendu cette méthode à l'espace $3D$ pour pouvoir la comparer à d'autres approches [Vel92]. Les résultats obtenus sont moins probants qu'en $2D$.

Dans [Col92], une méthode extrêmement simple est proposée pour déterminer un ensemble de polygones passant "au mieux" par n points du plan. L'heuristique utilise à la fois des informations contenues dans la triangulation de Delaunay et le graphe de Voronoï. Une arête de Delaunay forme une arête frontière d'un polygone si et seulement si elle est plus courte que son arête de Voronoï associée. Cette méthode s'étend facilement à l'espace $3D$. Il suffit alors de comparer le diamètre d'un triangle de Delaunay à la longueur de son arête de Voronoï duale. Dans la pratique, rien ne garantit que les arêtes trouvées forment des objets fermés. De plus, cette méthode a tendance à fournir plus d'arêtes que nécessaire. Par exemple, l'enveloppe convexe est forcément incluse dans le résultat.

α -convexes et α -formes

Les α -convexes et α -formes sont des généralisations de l'enveloppe convexe introduites par Edelsbrunner, Kirkpatrick et Seidel en 1983 [Ede83]. L'intérêt principal des α -formes est que, pour certaines valeurs de α , elles semblent approcher de façon naturelle un ensemble de points. Une implémentation $3D$ a récemment été proposée dans [Ede94].

Pour définir un α -convexe, les auteurs sont partis de la constatation suivante : l'enveloppe convexe d'un ensemble de points E est l'intersection des demi-plans

contenant E . Les auteurs ont alors généralisé cette définition en considérant non plus l'intersection de demi-plans mais l'intersection de boules généralisées de rayon $1/\alpha$ (voir figure 45).

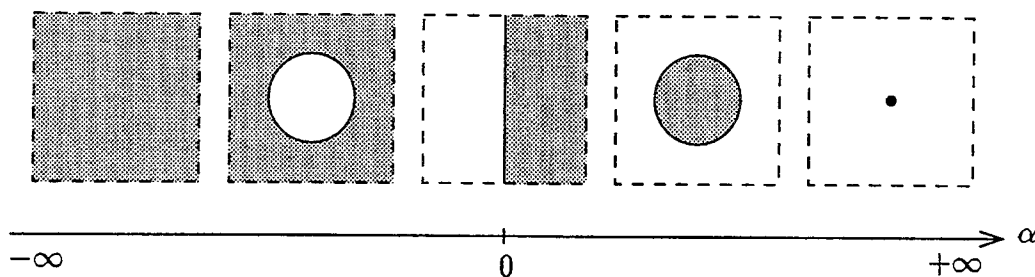


FIG. 45 - Boules généralisées de rayon $1/\alpha$.

Définition 5.1 (Boule généralisée de rayon $1/\alpha$) Une boule généralisée de rayon $1/\alpha$ est une boule fermée de rayon $1/\alpha$, pour $\alpha \leq 0$ et le complémentaire d'une boule ouverte de rayon $1/\alpha$, pour $\alpha \geq 0$.

Définition 5.2 (α -convexe) Soit E un ensemble de points. Un α -convexe de E est l'intersection des boules généralisées de rayon $1/\alpha$ contenant E .

Un α -convexe est délimité par des arcs de cercles en $2D$ et des portions de sphères en $3D$ de courbure α . Pour des valeurs décroissantes de α , l' α -convexe d'un ensemble E vaut successivement l'espace en entier, puis la plus petite boule englobante, puis l'enveloppe convexe (pour $\alpha = 0$) qui se creuse petit à petit pour donner finalement E . Dans [Ede94], Edelsbrunner et Mücke suggèrent qu'il existe une valeur négative de α pour laquelle une α -forme fournit une surface naturelle approchant l'ensemble des points E . Malheureusement, cette valeur semble délicate à déterminer *a priori*. De plus, comme cette valeur s'applique de façon globale à l'ensemble des points, cela suppose que ces derniers sont répartis de façon uniforme.

Les α -formes s'obtiennent à partir des α -convexes en remplaçant chaque arc de cercle frontière par une arête en $2D$ et chaque portion de sphère par un triangle en $3D$. Il s'avère qu'une α -forme est toujours, soit un sous-graphe de la triangulation de Delaunay (pour $\alpha \leq 0$), soit un sous-graphe de la triangulation de Delaunay du point le plus éloigné (pour $\alpha \geq 0$). Par conséquent, la construction des α -formes et des α -convexes est directement liée à la construction de la triangulation de Delaunay. Le calcul de la totalité des α -formes et α -convexes peut se faire en $O(n \log n)$ en $2D$

et en $O(n^2 + m \log m)$ en $3D$, où n désigne le nombre de points de E et m le nombre de tétraèdres de Delaunay de E .

5.3 Méthode proposée

Dans cette section, nous ajoutons notre pierre à l'édifice en proposant une nouvelle méthode d'interpolation d'un ensemble de points. Cette méthode possède les avantages suivants :

- elle s'applique en $2D$ comme en $3D$;
- elle détecte des surfaces fermées ayant n'importe quel genre. En particulier, elle est capable de trouver des surfaces comportant plusieurs composantes connexes, des trous et des cavités ;
- en $2D$, elle trouve une justification dans les théorèmes 5.1 et 5.2. Remarquons que, dans la littérature, peu de résultats mathématiques viennent valider le bien-fondé des approches proposées [Rip90, Fav93]. Généralement, les méthodes d'interpolation sont uniquement justifiées par des résultats expérimentaux.

5.3.1 Cadre de travail

Avant toute chose, nous allons reformuler le problème de l'interpolation à l'aide des notions de forme r -régulière, d'échantillon et d'approximation polygonale normalisée introduites dans le chapitre 3. En effet, tel qu'il est énoncé au début de ce chapitre, le problème de l'interpolation demeure mal posé.

Pour parvenir à une formulation plus précise, nous allons nous placer dans un cas particulier. Nous allons supposer que la surface S est la frontière d'une forme r -régulière X et que les n points $\{p_i\}_{i=1}^n$ constituent un échantillon de S de densité w . Dans ce contexte, l'approximation polygonale normalisée des points p_i constitue une solution pertinente au problème de l'interpolation. Elle converge vers la forme initiale lorsque la densité augmente et sa frontière forme une triangulation naturelle de la surface. C'est cette triangulation particulière que notre méthode d'interpolation va chercher à construire.

Proposition 5.1 (Existence de solutions dans le graphe de Delaunay) *Soit*

$\{p_i\}_{i=1}^n$, un ensemble de points échantillonnant la frontière S d'une forme r -régulière avec une densité $w > \frac{1}{2r}$. Alors, l'approximation polygonale normalisée associée aux points p_i existe et est incluse dans le graphe de Delaunay des points p_i .

Démonstration. Ce résultat découle directement de la propriété 3.4. ■

Ainsi, lorsque la densité d'échantillonnage des points p_i devient suffisamment importante, le graphe de Delaunay contient l'approximation polygonale normalisée, qui constitue la solution retenue au problème de l'interpolation. Notre méthode tire parti de cette propriété en restreignant la recherche des triangles frontières aux faces de Delaunay.

Le principe de notre méthode d'interpolation est le suivant : dans un premier temps, le graphe de Delaunay des points p_i est calculé. Puis, les tétraèdres de Delaunay sont agrégés les uns aux autres, selon une certaine heuristique. Après cette phase de fusion, on obtient un ensemble d'objets dont la frontière constitue la triangulation cherchée. L'heuristique guidant la fusion utilise un critère δ qui mesure le degré d'appartenance d'une face de Delaunay à la surface S . Notre méthode comprend donc deux ingrédients que nous allons détailler successivement :

- un critère s'appliquant aux triangles de Delaunay expliqué section 5.3.2,
- un algorithme de fusion des tétraèdres de Delaunay décrit dans la section 5.3.3.

5.3.2 Détection grossière des surfaces

Cette section a pour but d'attribuer à chaque triangle de Delaunay T un critère $\delta(T)$ d'appartenance à la surface S . Nous étudions également la surface S_{δ_0} formée des triangles T pour lesquels $\delta(T) \leq \delta_0$. L'application directe du critère δ conduit donc à une première méthode d'interpolation dont nous allons établir la convergence en $2D$. Malheureusement, en $3D$, cette méthode naïve s'avère insuffisante car elle conduit à des surfaces "trouées" qui ne peuvent être utilisées telles quelles.

Le choix du critère δ repose sur la remarque fondamentale suivante : lorsque la densité d'échantillonnage w tend vers l'infini, les boules de Delaunay tendent vers les boules maximales de l'objet X et de son complémentaire [Sch89]. Une conséquence est qu'elles deviennent tangentes à la frontière S . Ainsi, deux boules de Delaunay voisines et de part et d'autre de la frontière vont avoir une intersection "quasiment"

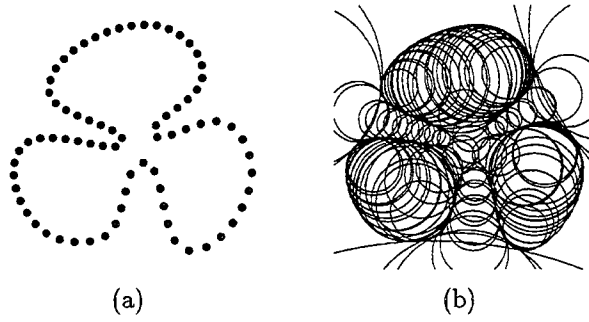


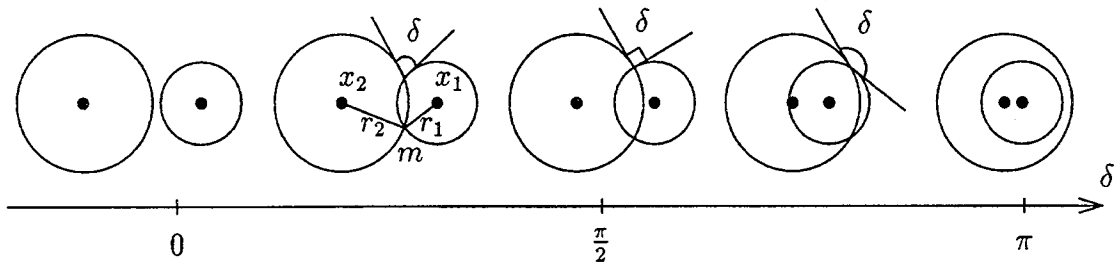
FIG. 46 - (a) Echantillon. (b) Disques de Delaunay.

vide. Par contre, deux boules de Delaunay voisines et à l'intérieur de la forme vont être "quasiment" confondues (voir figure 46).

Pour évaluer précisément la distance entre deux boules, nous introduisons une notion d'angle comme suit :

Définition 5.3 (Angle entre deux boules) Soient B_1 et B_2 , deux boules ayant respectivement pour centres x_1 et x_2 et pour rayons r_1 et r_2 . L'angle entre les boules B_1 et B_2 est compris entre 0 et π et vaut :

- 0, si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$;
- $\pi - \widehat{x_1 m x_2}$, si $\partial B_1 \cap \partial B_2 \neq \emptyset$; m désigne alors un point quelconque de $\partial B_1 \cap \partial B_2$;
- π , si $B_1 \subset B_2$ ou $B_2 \subset B_1$.

FIG. 47 - Cercles formant un angle δ variable.

Ainsi, deux cercles presque confondus vont former un angle proche de π . Par contre, deux cercles presque distincts vont former un angle proche de 0. Des exemples de disques formant un angle variable ou constant sont présentés figures 47 et 48.

Remarquons que deux boules $B(x_1, r_1)$ et $B(x_2, r_2)$ sont orthogonales (autrement dit, forment un angle de $\frac{\pi}{2}$) si et seulement si $r_1^2 + r_2^2 = d(x_1, x_2)^2$.

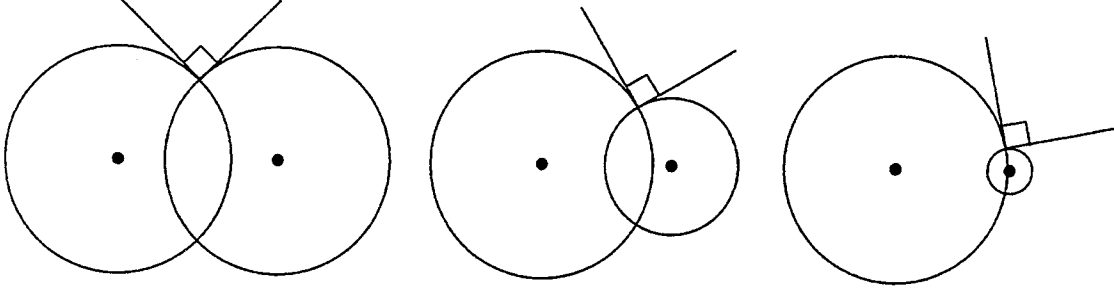


FIG. 48 - Cercles orthogonaux.

Pour mesurer le degré d'appartenance d'un triangle T à la frontière, nous allons donc regarder l'angle $\delta(T)$ que forme les deux boules de Delaunay passant par les sommets du triangle T . Lorsque $\delta(T)$ est proche de 0, le triangle T aura de fortes chances d'être un triangle frontière. Inversement, lorsque $\delta(T)$ est proche de π , le triangle T aura de fortes chances d'être inclus dans X ou dans son complémentaire X^c . Remarquons que notre critère reste proche de celui utilisé par Boissonnat dans [Boi85]. Ce dernier mesure la distance entre une face de Delaunay T et le cercle de Delaunay passant par T et exploite également le fait que les boules de Delaunay tendent vers la frontière lorsque la densité augmente. Néanmoins, le critère proposé ici possède l'avantage d'être symétrique par rapport à la frontière.

L'ensemble des triangles T pour lesquels $\delta(T) \leq \delta_0$ forme la surface S_{δ_0} . Nous allons montrer en $2D$ que si X est une forme r -régulière, échantillonnée par l'ensemble $\{p_i\}_{i=1}^n$ avec une densité $w > \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{8}) r} \approx \frac{1}{0.38 r}$, la surface $S_{\frac{\pi}{2}}$ n'est autre que l'approximation polygonale normalisée associée aux points p_i . Pour cela, nous allons caractériser les approximations polygonales normalisées à travers les théorèmes 5.2 et 5.3.

Proposition 5.2 (Cercles voisins sur la frontière) Soit $X \subset \mathbb{R}^2$, un objet r -régulier et X_w , une approximation polygonale normalisée de densité w . Si $w^{-1} < \frac{r}{2}$, alors pour toute arête frontière $[pq]$, les cercles de Delaunay passant par les points p et q forment un angle $\delta < \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Notons $B(x_1, r_1)$ et $B(x_2, r_2)$, les deux boules associées à l'arête frontière $[pq]$. Notons m le milieu du segment $[pq]$ (voir figure 49). Nous avons :

$$\delta = \pi - \widehat{x_1 p m} - \widehat{m p x_2}$$

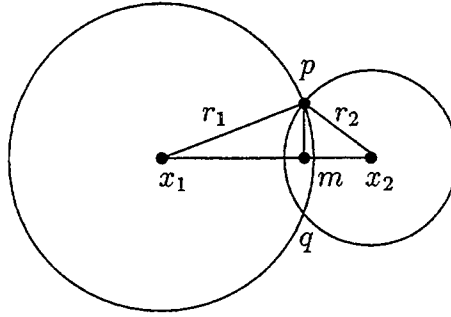


FIG. 49 - Illustration de la démonstration de la proposition 5.1.

Pour majorer l'angle δ , il suffit donc de minorer les angles $\widehat{x_1pm}$ et $\widehat{mpx_2}$. Or, d'après la propriété 3.3, tout cercle intersectant en trois points distincts une forme r -régulière a un rayon supérieur à r . Par conséquent, $r_1 \geq r$ et $r_2 \geq r$. De plus, d'après la proposition 3.4, la longueur des arêtes frontières est majorée comme suit : $d(p, m) < w^{-1}$. Ainsi :

$$\cos(\widehat{x_1pm}) = \frac{d(p, m)}{r_1} < \frac{w^{-1}}{r} < \frac{1}{2}$$

$$\cos(\widehat{mpx_2}) = \frac{d(p, m)}{r_2} < \frac{w^{-1}}{r} < \frac{1}{2}$$

Par conséquent, $\widehat{x_1pm} > \frac{\pi}{3}$, $\widehat{mpx_2} > \frac{\pi}{3}$ et $\delta < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$. ■

Proposition 5.3 (Cercles voisins dans la forme) Soit $X \subset \mathbb{R}^2$, un objet r -régulier et X_w , une approximation polygonale normalisée de densité w . Si $w^{-1} < \sin(\frac{\pi}{8}) r$, alors pour toute arête de Delaunay $[pq]$ incluse dans l'intérieur de X ou dans l'intérieur de son complémentaire X^c , les cercles de Delaunay passant par les points p et q forment un angle $\delta > \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Nous allons uniquement montrer le résultat pour les arêtes de Delaunay incluses dans l'intérieur de X . Un raisonnement analogue permet de déduire le cas des arêtes incluses dans l'intérieur du complémentaire X^c . Les angles considérés au cours de la démonstration ne sont pas orientés et sont calculés modulo π .

Par la suite, on appelle cercle de Delaunay intérieur, un cercle de Delaunay dont le centre appartient à X_w . Soit p un sommet de l'approximation polygonale X_w . Notons $[pp_1]$ et $[pp_2]$, les deux arêtes frontières passant par p . Notons B_1 et B_2 , les cercles de Delaunay intérieurs passant respectivement par les arêtes $[pp_1]$ et $[pp_2]$.

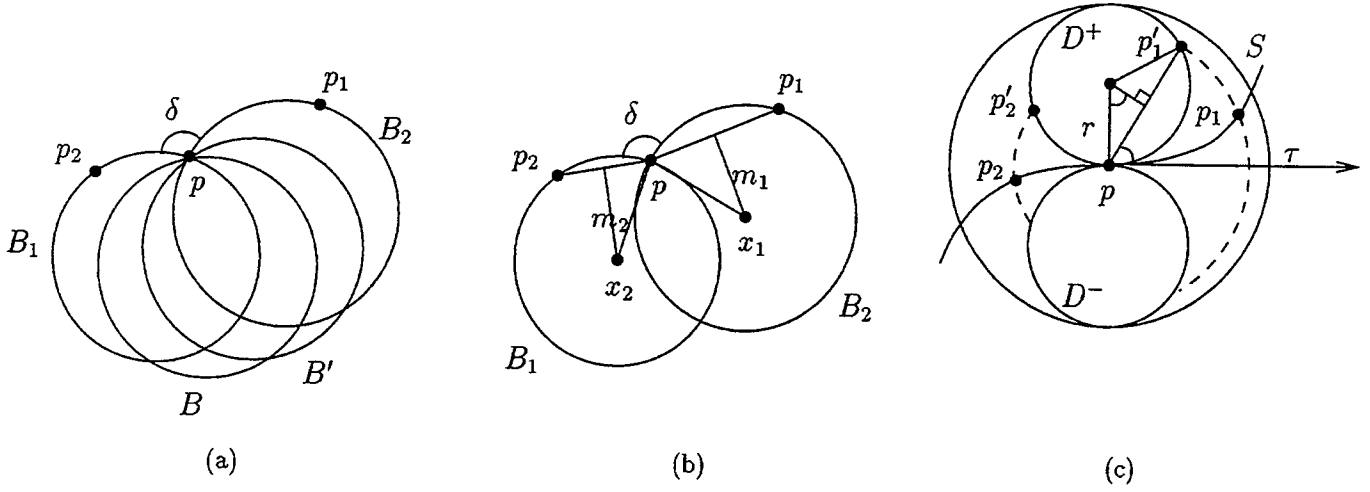


FIG. 50 - Illustration de la démonstration de la proposition 5.2. (a) Faisceau de cercles passant par le point p . (b) Angle δ . (c) Voisinage du point p .

Remarquons que pour toute paire de cercles intérieurs (B, B') passant par p , l'angle que forment B et B' est supérieur ou égal à l'angle formé par B_1 et B_2 (voir figure 50a). Ainsi, pour établir le résultat, il suffit de minorer l'angle δ entre B_1 et B_2 . Notons m_1 et m_2 , les milieux des segments $[p_1p]$ et $[p_2p]$. Notons x_1 et x_2 , les centres des cercles B_1 et B_2 (voir figure 50b). Nous pouvons écrire :

$$\delta = \widehat{p_1 p p_2} - \widehat{m_1 x_1 p} - \widehat{p x_2 m_2} \quad (11)$$

Or, d'après les propositions 3.3 et 3.4 sur les formes r -régulières, nous avons les inégalités suivantes : $d(p, x_1) \geq r$, $d(p, x_2) \geq r$, $d(p, m_1) < w^{-1}$ et $d(p, m_2) < w^{-1}$. Ainsi :

$$\sin(\widehat{m_1 x_1 p}) = \frac{d(p, m_1)}{d(p, x_1)} < \frac{w^{-1}}{r} \quad (12)$$

$$\sin(\widehat{p x_2 m_2}) = \frac{d(p, m_2)}{d(p, x_2)} < \frac{w^{-1}}{r} \quad (13)$$

Pour minorer l'angle $\widehat{p_1 p p_2}$, nous allons localiser les points p_1 et p_2 dans le voisinage du point p (voir figure 50c). Comme X est une forme r -régulière, il existe deux disques tangents D^+ et D^- respectivement inclus dans X et dans X^c passant par le point p et de rayon r . Le point p_1 (resp. p_2) se trouve alors sur un arc de cercle centré en p , de rayon $d(p, p_1)$ (resp. $d(p, p_2)$) et délimité par les disques D^+ et D^- . Notons p'_1 (resp. p'_2), l'extrémité de cet arc de cercle appartenant au disque D^+ . Nous avons :

$$\widehat{p_1 p p_2} > \widehat{p'_1 p p'_2} \quad (14)$$

Si τ désigne la tangente au point p , on a :

$$\sin(\widehat{\tau, pp'_1}) = \frac{d(p, p'_1)}{2r} < \frac{w^{-1}}{r} \quad (15)$$

$$\sin(\widehat{\tau, pp'_2}) = \frac{d(p, p'_2)}{2r} < \frac{w^{-1}}{r} \quad (16)$$

D'après les équations 15 et 16, on a :

$$\widehat{p'_1 pp'_2} = \pi - (\widehat{\tau, pp'_1}) - (\widehat{\tau, pp'_2}) > \pi - 2 \arcsin\left(\frac{w^{-1}}{r}\right) \quad (17)$$

Nous sommes maintenant en mesure de minorer l'angle δ , en combinant les équations 11, 12, 13, 14 et 17 :

$$\delta > \pi - 4 \arcsin\left(\frac{w^{-1}}{r}\right)$$

Finalement, l'hypothèse $\frac{w^{-1}}{r} < \sin(\frac{\pi}{8}) \approx 0.38$ permet de conclure :

$$\delta > \frac{\pi}{2}$$

■

Corollaire 5.1 *Soit $\{p_i\}_{i=1}^n$, un ensemble de points échantillonnant une forme r -régulière X avec une densité w . Si $w^{-1} < \sin(\frac{\pi}{8}) r$, alors $S_{\frac{\pi}{2}}$ n'est autre que l'approximation polygonale normalisée de X associée aux points p_i .*

Démonstration. En effet, la proposition 5.2 permet de caractériser les arêtes de Delaunay frontières et la proposition 5.3, les arêtes de Delaunay incluses strictement dans X ou X^c . ■

Corollaire 5.2 *Soit S la frontière d'une forme r -régulière échantillonnée par l'ensemble $\{p_i\}_{i=1}^n$ de densité w . Lorsque $w \rightarrow \infty$, $S_{\frac{\pi}{2}} \rightarrow S$.*

Démonstration. Le résultat vient du fait que l'approximation polygonale normalisée tend vers la surface S lorsque $w \rightarrow \infty$. ■

En 2D, nous venons d'établir la convergence de cette première méthode pour $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$. La "beauté" de notre approche réside dans le fait que la connaissance des paramètres r et w n'est pas nécessaire pour trouver la solution. De plus, la densité n'a pas besoin d'être infinie pour que la méthode se comporte bien. Il suffit que l'inverse

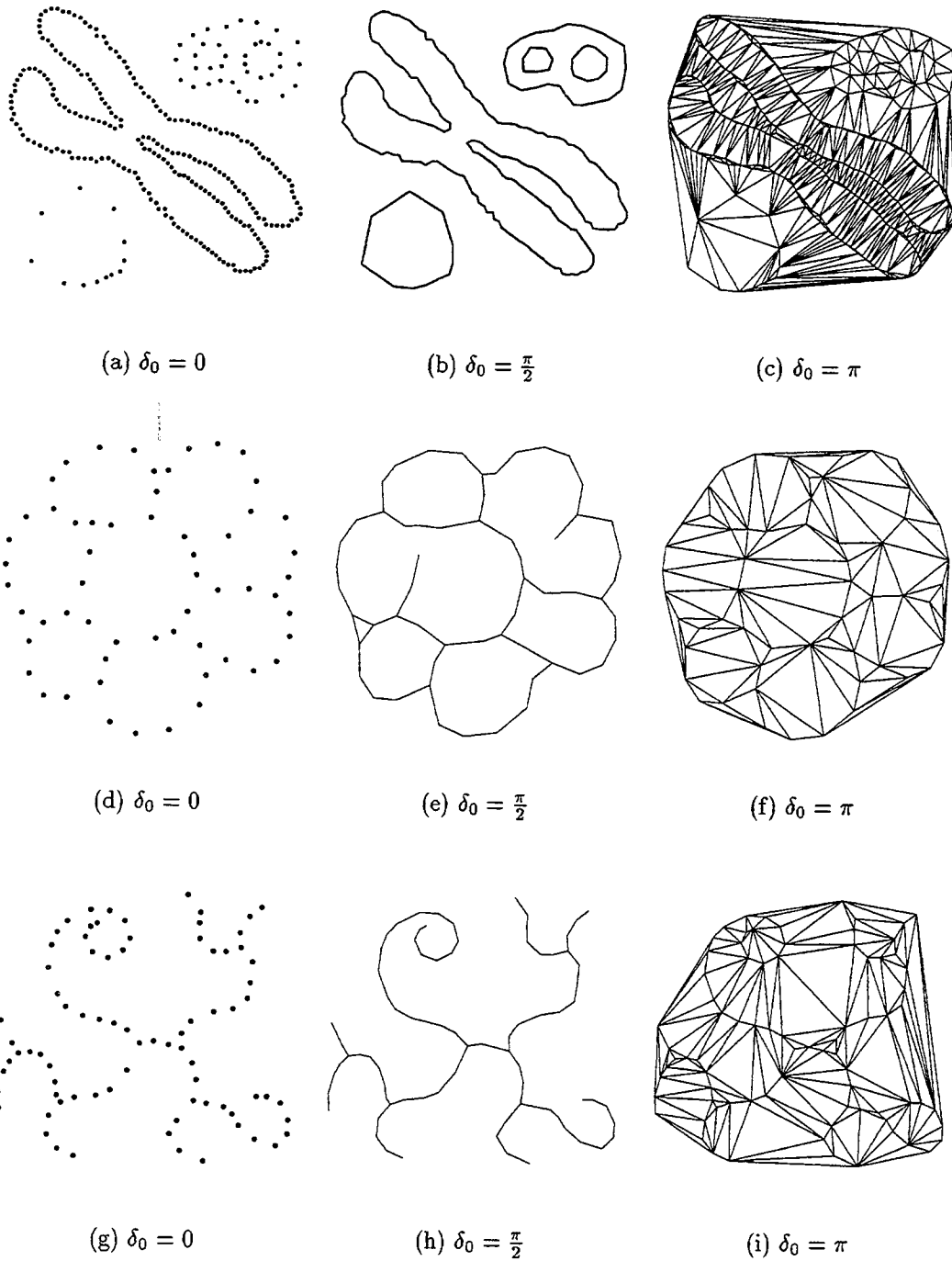


FIG. 51 - Arêtes sélectionnées pour différentes valeurs du paramètre δ_0 . Les points p_i sont répartis sur des objets déconnectés et possédant des trous en (a,b,c), puis sur des cellules dont les parois se touchent en (d,e,f) et finalement sur des portions de courbes en (g,h,i).

de la densité d'échantillonnage soit du même ordre de grandeur que la constante r caractérisant la forme cherchée. La figure 51 présente des résultats obtenus sur différents objets 2D échantillonnés plus ou moins régulièrement. La méthode donne de très bons résultats, et s'avère robuste.

En 3D, les choses se passent moins bien car un phénomène nouveau apparaît. En effet, même pour une forte densité d'échantillonnage, il est impossible de minorer le rayon des boules de Delaunay. Ainsi, il arrive que certaines boules prenant appui sur 4 points voisins coupent la surface sans y être tangente comme le montre la figure 52. Il en résulte que pour $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$, notre méthode ne va pas détecter la totalité des triangles frontières. Quelques triangles vont donc manquer dans l'ensemble S_{δ_0} .

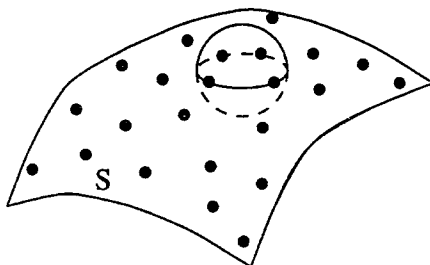


FIG. 52 - *Sphère de Delaunay intersectant la surface S.*

Nous avons, malgré tout, testé la méthode sur des surfaces de genres différents et obtenu de bons résultats. Dans la figure 53, les points ont été répartis aléatoirement sur une surface de type $z = f(x, y)$ puis sur deux tores entrelacés. Le nombre de points dans les deux cas vaut $n = 1600$. Puis, dans la figure 54, les points ont été obtenus par croissance d'un modèle déformable dans un objet synthétique et dans une vertèbre [Bai92]. Le recours à cette technique permet d'obtenir un ensemble de points répartis sur une surface lisse. Dans le cas de la vertèbre, seulement 2011 points ont été retenus de façon arbitraire parmi les 19000 points générés par le processus de croissance du contour actif [Bai92].

Enfin, nous avons voulu voir l'influence de la répartition des points sur la méthode proposée, et plus généralement, sur le graphe de Delaunay (voir figure 55). Pour cela, nous avons distribué les points sur une surface du type $z = f(x, y)$ selon trois schémas différents : 1) suivant une grille carrée, 2) suivant une grille triangulaire puis 3) de façon aléatoire. Les résultats expérimentaux montrent que le pire cas se produit pour un maillage irrégulier. La reconstruction à partir d'un maillage carré s'avère plus délicate qu'à partir d'un maillage triangulaire. Des études passionnantes

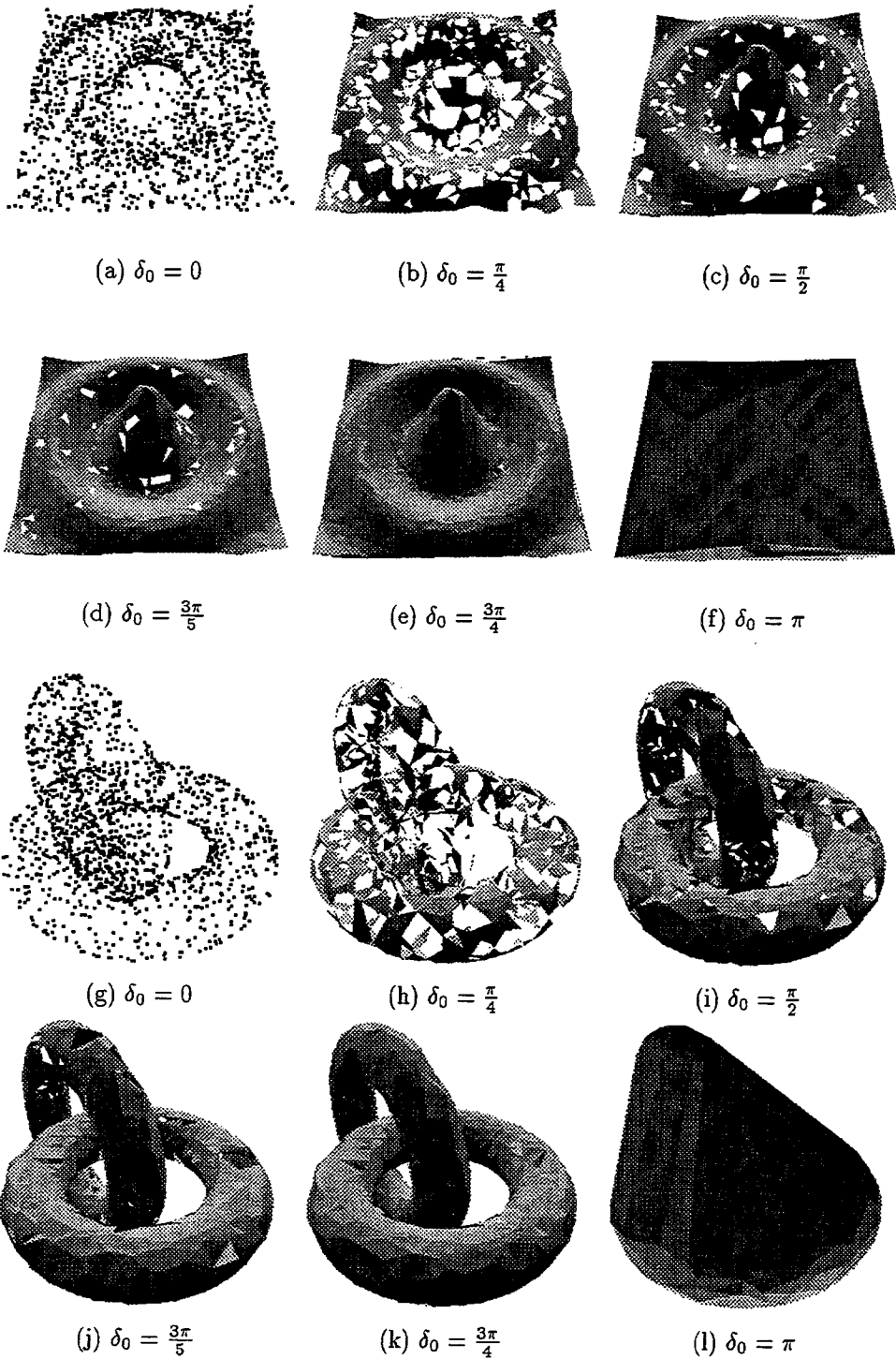


FIG. 53 - Triangles trouvés pour des valeurs décroissantes du paramètre δ_0 . Les points sont répartis aléatoirement sur une surface radiale (1600 points) et sur deux tores enchaînés (1600 points).

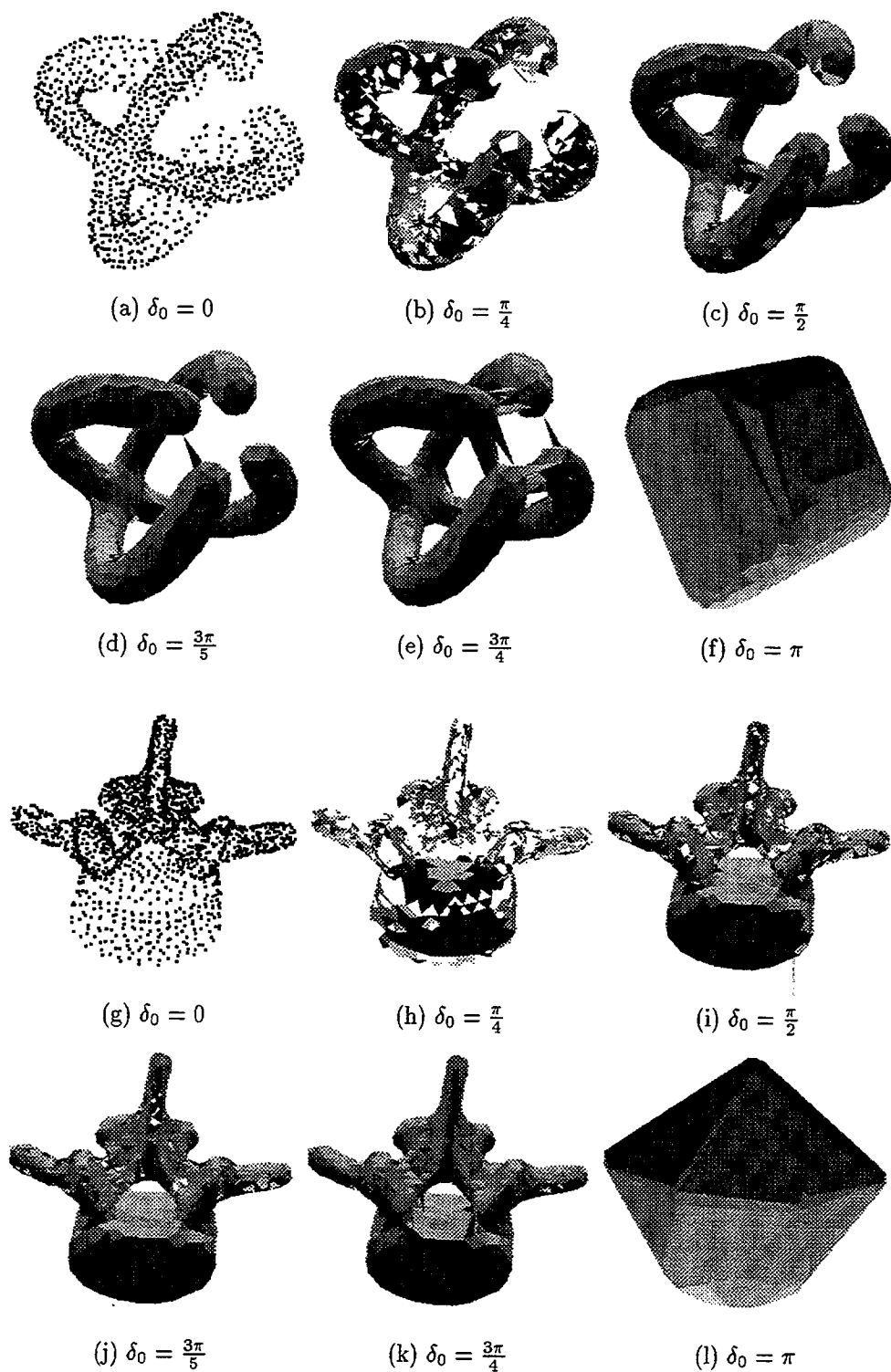


FIG. 54 - Triangles trouvés pour des valeurs décroissantes du paramètre δ_0 . Les points ont été obtenus par croissance d'un contour actif dans un objet synthétique (1191 points) et dans une vertèbre (2011 points).

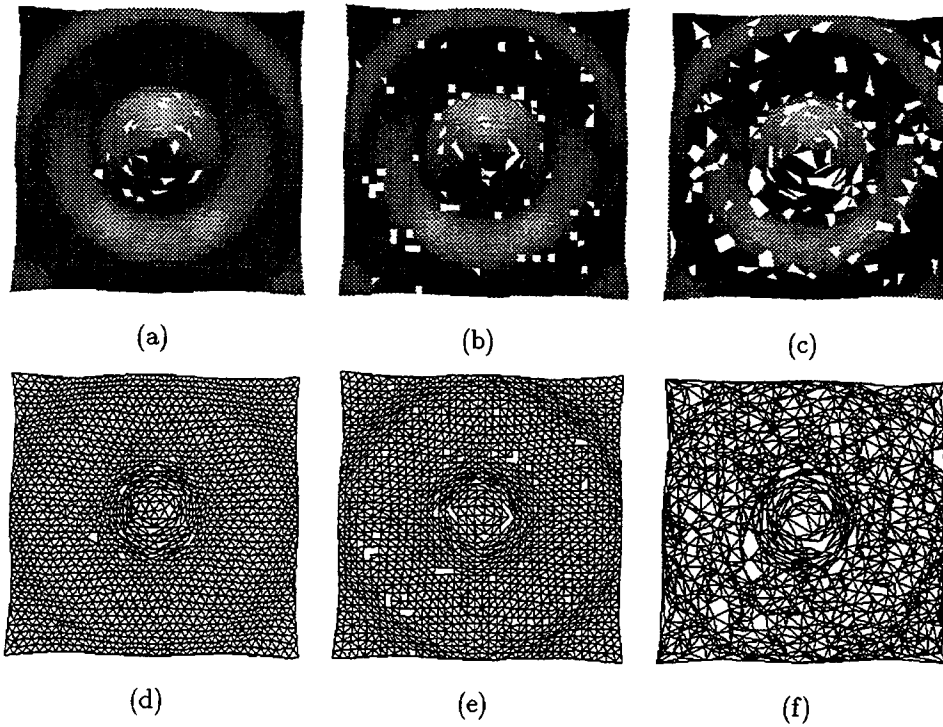


FIG. 55 - Influence de la répartition des points sur l'ensemble des triangles trouvés pour $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$. (a,d) Maillage triangulaire. (b,e) Maillage carré. (c,f) Maillage irrégulier.

sur les problèmes de stabilité du graphe de Delaunay et leur conséquence en analyse d'images peuvent être trouvées dans [Mar93, Ber94a].

5.3.3 Recherche de surfaces fermées

Dans cette section, nous proposons un algorithme qui permet de trouver les triangles manquants des surfaces S_{δ_0} . Le résultat est un ensemble de surfaces fermées $S_{\delta_0}^*$ dont le genre est quelconque. Ce genre est déterminé automatiquement par l'algorithme.

Notre approche est de type volumique. Au lieu de chercher directement un ensemble de surfaces, nous cherchons un ensemble d'objets ayant pour frontière les surfaces voulues. Le principe de la méthode consiste à fusionner peu à peu les tétraèdres de Delaunay selon une heuristique, jusqu'à obtenir une partition satisfaisante de l'espace en un certain nombre d'objets (voir figure 56). Notre processus d'agrégation des tétraèdres de Delaunay comporte les trois étapes suivantes :

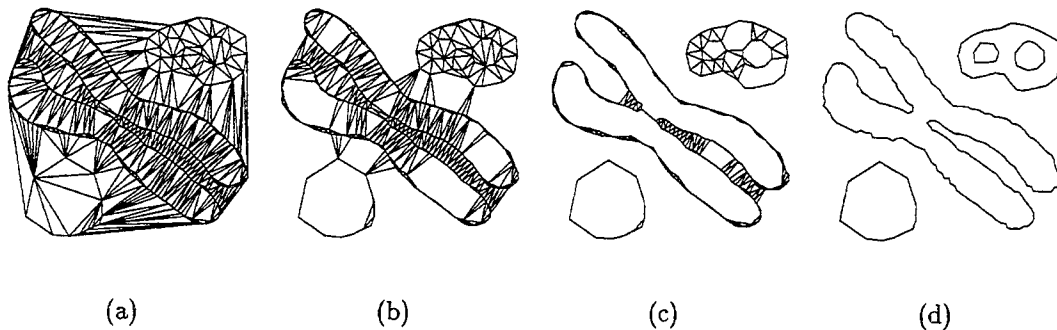


FIG. 56 - Différentes étapes du processus d'agrégation des triangles en 2D.

1. INITIALISATION DES OBJETS : Les tétraèdres de Delaunay et le complémentaire de l'enveloppe convexe des points p_i forment autant d'objets différents. (Chaque tétraèdre se voit attribuer une étiquette unique.)
2. HEURISTIQUE GUIDANT LA FUSION DES OBJETS : La liste $\mathcal{L}$ des triangles de Delaunay est calculée puis triée selon le diamètre des triangles. Le diamètre d'un triangle est la longueur de son plus grand côté.
3. FUSION DES OBJETS: Tant que la liste $\mathcal{L}$ n'est pas vide, on extrait de $\mathcal{L}$ le triangle T ayant le plus grand diamètre. Si T sépare deux objets différents O_1 et O_2 (c'est-à-dire, si les tétraèdres de part et d'autre de T ont des étiquettes différentes), on les fusionne à condition que :
 - cette fusion ne fasse pas disparaître de triangles frontières appartenant à S_{δ_0} . Autrement dit, $\forall T' \subset O_1 \cap O_2, \delta(T') > \delta_0$;
 - cette fusion n'isole pas de points p_i à l'intérieur de $O_1 \cup O_2$. Autrement dit, après la fusion, tous les points p_i doivent encore se trouver sur la frontière d'au moins un objet (voir figure 57).

(La fusion des objets O_1 et O_2 consiste simplement à leur attribuer la même étiquette.)

Remarquons que dès que deux objets ont en commun un nombre important de triangles frontières, ils ne peuvent généralement plus fusionner. Les règles choisies

ici pour fusionner les tétraèdres différent de celles adoptées dans [Boi84] pour sculpter l'enveloppe convexe. En particulier, un plus grand nombre d'opérations sont autorisées de façon à permettre des changements de topologie.

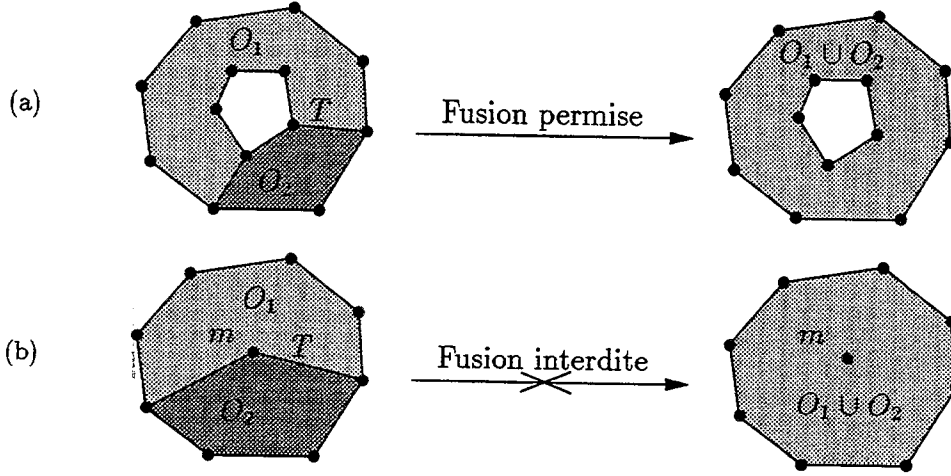


FIG. 57 - (a) Fusion autorisée. (b) Fusion interdite, car le point m se trouverait alors isolé dans $O_1 \cup O_2$.

A la fin du processus d'agrégation des tétraèdres, la frontière des objets trouvés constitue par définition la surface $S_{\delta_0}^*$. Cette dernière, bien qu'elle dépende fortement de l'ordre choisi pour trier la liste $\mathcal{L}$, contient toujours la surface S_{δ_0} .

Si k désigne le nombre de faces de Delaunay placées dans la liste au début de l'algorithme, la complexité est en $O(k \log k + kn^2)$. En effet, le tri s'effectue en $O(k \log k)$. Par contre, pour détecter une possible fusion entre deux objets, il est nécessaire de regarder les voisins de chacun des n points p_i , soit n dans le pire cas. Ainsi, notre algorithme est en $O(n^3)$ en 2D et $O(n^4)$ en 3D. En pratique, cette complexité n'est jamais atteinte, puisque la fusion des ensembles ne se posent que si les triangles ne font pas partie de S_{δ_0} . Nous avons malgré tout observé des temps de calcul assez long. Tandis que le calcul du graphe de Voronoï prend moins de 30s sur une Silicon graphics INDIGO RS4000 pour 4000 points, il faut environ 10min pour trouver les composantes connexes correspondantes.

Les figures 58 et 59 présentent quelques résultats pour $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$. A titre de comparaison, nous avons également implémenté la méthode 2D proposée par Colchester et al. [Col92]. Bien que très séduisante en raison de sa simplicité, les résultats sont nettement moins bons. En 3D, le nombre d'objets détectés par notre méthode est relativement faible. Il comprend un objet principal, formé de la quasi-totalité des

tétraèdres de Delaunay, puis quelques objets ayant un petit nombre de tétraèdres. Le nombre d'objets détectés vaut 10 dans le cas des tores enchaînés, 1 dans le cas de la forme synthétique à quatre branches et 19 dans le cas de la vertèbre. Le pourcentage de tétraèdres ne participant pas aux composantes principales représente à chaque fois moins de 0.5%.

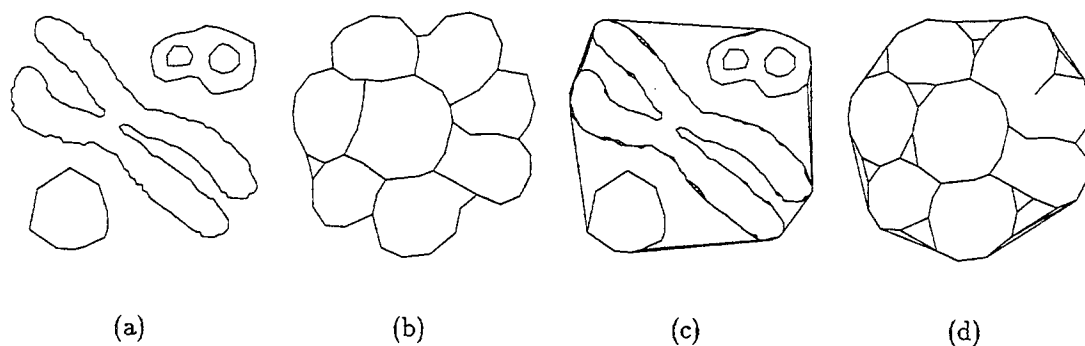


FIG. 58 - (a,b) Composantes connexes résultant du processus d'agrégation des triangles. (c,d) Comparaison avec la méthode proposée par Colchester et al. dans [Col92].

5.3.4 Produits dérivés

La connaissance du graphe de Delaunay permet d'obtenir rapidement d'autres structures utiles dans la représentation et l'analyse des objets.

Enveloppe convexe

L'enveloppe convexe des points $\{p_i\}_{i=1}^n$ est contenue dans leur graphe de Delaunay et ne nécessite pas de calcul supplémentaire. Si un unique objet a été détecté comme passant par les points p_i , notre méthode en fournit immédiatement l'enveloppe convexe.

Polyboule

Les objets interpolant les points p_i sont formés d'une réunion de tétraèdres. En substituant à chaque tétraèdre sa boule de Delaunay associée, on obtient des polyboules dont la frontière approche la surface initiale.

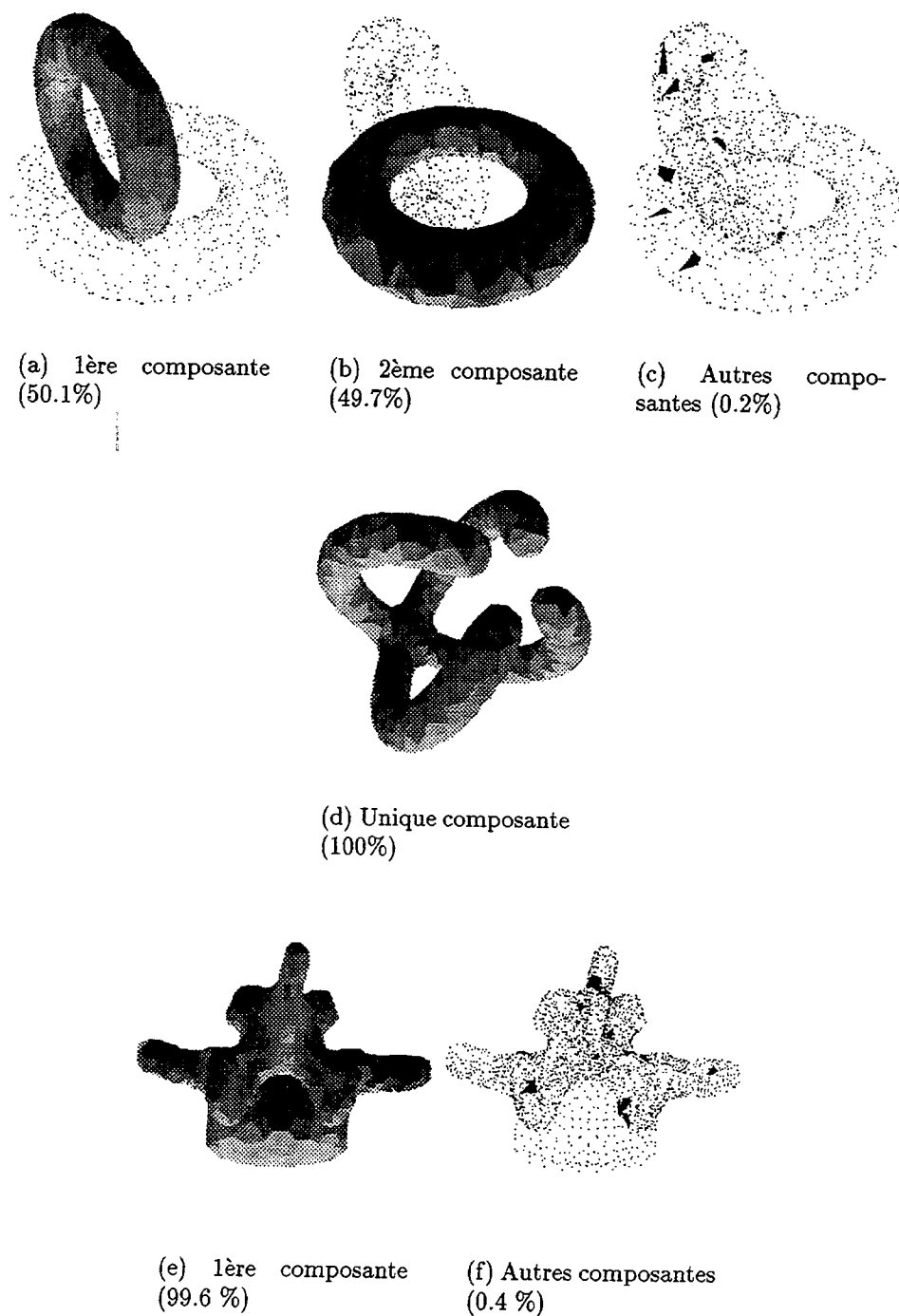


FIG. 59 - Composantes connexes résultant du processus d'agrégation des tétraèdres. Le pourcentage de tétraèdres de Delaunay faisant partie des objets est indiqué entre parenthèses.

Squelette

Le dual des objets fournit une approximation de leurs squelettes, utile en description de formes.

5.4 Extensions et perspectives

Avant de conclure ce chapitre, nous présentons quelques problèmes captivants soulevés par notre méthode.

Robustesse au bruit

Si les points p_i sont bruités, ils peuvent former des motifs en dents de scie qu'il est difficile de capturer à l'aide du seul critère $\delta(T)$.

Cette constatation conduit à reformuler le problème d'interpolation en tenant compte du bruit de la façon suivante. Soit $\{q_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de n points. Chaque point q_i s'écrit sous la forme $q_i = p_i + e_i$. Les points p_i sont répartis sur une surface S inconnue mais lisse. Les vecteurs e_i modélisent le bruit. Nous pouvons supposer par exemple qu'il existe une constante K telle que $\forall i, \|e_i\| < K$. Il s'agit alors de trouver une surface affine par morceaux passant par les points p_i et qui approche "au mieux" la surface S .

Autre traitement pour les surfaces fermées

L'algorithme présenté pour fermer les surfaces, bien que donnant de bons résultats, est assez coûteux en temps de calcul. D'autres procédés pourraient être envisagés comme la minimisation d'un critère global à l'aide d'un procédé de recuit simulé.

Traitement des surfaces ouvertes

Jusqu'à présent, nous avons uniquement traité le cas des surfaces fermées. Mais que faire si les surfaces sont ouvertes? Comment trouver les triangles manquants?

Il est clair que de nombreuses améliorations peuvent être apportées à notre méthode. Des perspectives intéressantes sont également envisageables. Toutes ces remarques pourront faire l'objet de futurs développements.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la reconstruction de surfaces à partir d'un nuage de points. Au vu des différents algorithmes proposées dans la littérature, il apparaît que la façon dont on formalise le problème est importante et conditionne le type d'algorithme obtenu.

Pour notre part, nous avons proposé une formulation simple et originale de ce problème. La solution y est définie comme l'approximation polygonale normalisée d'une forme r -régulière. Nous avons ensuite présenté un algorithme construisant cette solution à partir du graphe de Delaunay du nuage de points. Une telle approche se trouve justifiée par le fait que le graphe de Delaunay contient l'approximation polygonale normalisée lorsque la densité d'échantillonnage devient suffisamment forte.

La méthode proposée est de type volumique. Les tétraèdres de Delaunay sont agrégés petit à petit de façon à former des objets plus complexes dont la frontière est finalement la triangulation recherchée. Un des points forts de la méthode est qu'elle permet d'obtenir des objets de n'importe quel genre topologique. De plus, certaines structures telles que l'enveloppe convexe ou le squelette sont directement accessibles. Une liste de perspectives portant sur le cas de surfaces bruitées ou ouvertes conclut notre étude.

Chapitre 6

Simplification du squelette

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons plusieurs méthodes pour simplifier efficacement les squelettes continus $2D$ et $3D$. Ce traitement est rendu nécessaire en raison de la non continuité de la squelettisation. En effet, de petites perturbations sur la frontière de l'objet génèrent des branches dans le squelette qui ne sont pas associées à des régions significatives de la forme (voir figure 60). La simplification a pour but de supprimer ces branches et d'obtenir un squelette épuré à partir duquel il sera aisé de faire de la description de formes et de la quantification.

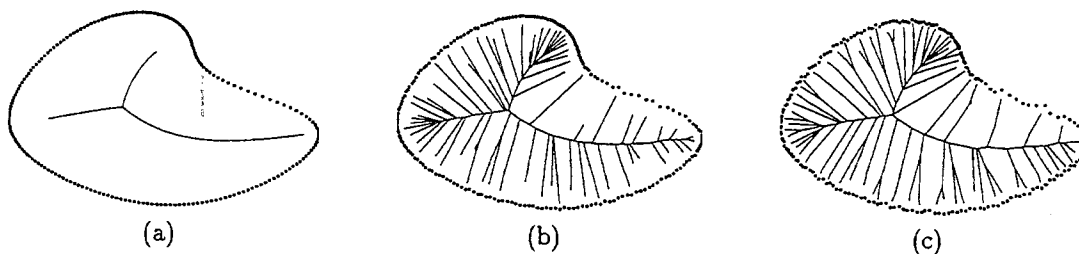


FIG. 60 - *Le squelette est très sensible au bruit sur la frontière.*

Ainsi, malgré l'existence de théorèmes de convergence, le squelette calculé par des techniques discrètes ou continues est rarement exploité tel quel mais toujours simplifié au préalable.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 6.2, nous parlons des méthodes d'élagage en général. Ces méthodes ont été proposées essentiellement pour des squelettes discrets et dans l'espace $2D$. Pour cette raison, nous nous sommes intéressés à la simplification des squelettes continus $3D$, champ d'investigation pratiquement vierge. Dans la section 6.3, un schéma général pour la simplification des squelettes continus est proposé. En $3D$, il permet d'obtenir très facilement soit un squelette surfacique, soit un squelette filiforme selon l'application envisagée. Enfin, deux critères de suppression des sommets sont proposés dans les sections 6.4 et 6.5.

6.2 Etat de l'art

Nous commençons le chapitre par une présentation générale des méthodes de simplification encore appelées méthodes d'*élagage*. Notre discussion se place uniquement dans l'espace $2D$ puisque hormis dans [Sze92, Att94b], il existe très peu de

méthodes de simplification 3D.

A partir de maintenant, et jusqu'à la fin de la section, le terme *squelette* désigne indifféremment un squelette discret ou continu. Le terme *élément* fait référence soit à un pixel du squelette discret, soit à un sommet de Voronoï du squelette continu. Deux éléments sont *voisins* s'ils sont 8-voisins (cas discret) ou voisins de Delaunay (cas continu). Enfin, on appelle *élément terminal*—*textbf* ou *extrémité*, tout élément du squelette possédant un unique voisin.

Les méthodes de simplification reposent sur le même schéma d'ensemble, que ce soit dans le cas discret ou dans le cas continu [Att93b]. Il s'agit de raccourcir petit à petit les branches du squelette en supprimant les éléments terminaux "jugés" non importants selon un certain critère. Ce faisant, on est sûr de préserver le type d'homotopie du squelette. Lorsqu'un élément terminal est supprimé, son voisin peut devenir à son tour élément terminal et être supprimé ultérieurement.

Les méthodes de simplification diffèrent uniquement suivant le critère de suppression des points terminaux. Le choix du critère dépend du but à atteindre, autrement dit, de ce que l'on entend par squelette simplifié. Deux écoles existent qui donnent lieu à deux familles de méthodes différentes :

- les méthodes qui cherchent à limiter la perte d'information.
- les méthodes qui cherchent à garder les branches significatives.

Remarquons que d'autres méthodes pourraient être envisagées si l'on permettait au squelette initial de se déformer. Cependant, nous allons supposer ici que le squelette simplifié est toujours un sous-ensemble du squelette initial.

6.2.1 Méthodes limitant la perte d'information

Un moyen simple pour contrôler la simplification consiste à mesurer la perte d'information consécutive à la suppression d'éléments dans le squelette. Cette perte est évaluée en mesurant la différence $|F - F'|$ entre la forme initiale F et la forme F' reconstruite à partir du squelette simplifié. Dans les méthodes utilisant ce critère, les branches du squelette sont raccourcies tant que la différence $|F - F'|$ reste faible. Cette différence peut être évaluée soit en mesurant la distance de Hausdorff entre F et F' , soit en évaluant l'aire perdue, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants.

Distance entre forme reconstruite et forme initiale

Dans le cas des méthodes continues, la forme est reconstruite en prenant l'union des boules de Delaunay des sommets restants. Supposons que s soit une extrémité du squelette simplifié et $[pqr]$ son triangle de Delaunay associé. La forme est reconstruite en remplaçant le morceau de frontière $\partial F(p, q, r)$ passant par p, q et r par l'arc de cercle passant par p, q et r et centré en s . Dans [Bra92], Brandt et Algazi proposent d'évaluer la différence entre ces deux courbes de la façon suivante (voir figure 61a) :

$$C(s) = \max_{x \in \partial F(p, q, r)} (d(s, x) - d(s, p))$$

Un élément terminal s est supprimé si le critère $C(s)$ est inférieur à un seuil donné ξ , choisi de façon arbitraire (par exemple, $\xi = 1$).

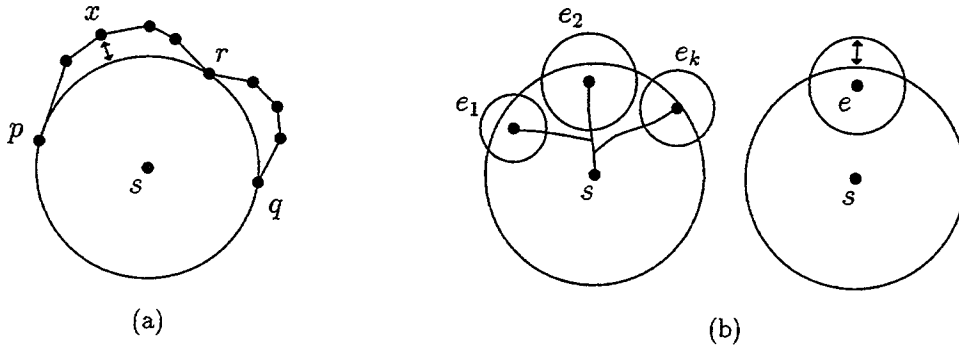


FIG. 61 - Distance entre forme reconstruite et forme initiale. (a) Cas continu. (b) Cas discret.

Dans le cas des méthodes discrètes, la formule précédente ne peut pas être utilisée directement car les éléments du squelette ne connaissent pas les points de la frontière qui leur sont les plus proches. Il faut donc procéder autrement. Dans [Thi94], Thiel propose de mémoriser, durant le processus de simplification, la liste des extrémités $\{e_1, \dots, e_k\}$ du squelette initial qu'il a fallu supprimer avant d'atteindre l'élément s . Pour approcher la distance entre la forme initiale et la forme reconstruite, on peut alors mesurer la quantité suivante (voir figure 61b) :

$$C(s) = \max_{e \in \{e_1, \dots, e_k\}} (r(e) + d(e, s) - r(s))$$

où $r(x)$ désigne la boule maximale centrée en x . Le pixel s est supprimé à condition que $C(s) < \xi$. Le paramètre ξ donne une estimation de l'épaisseur en nombre de pixels que l'on accepte de perdre sur le bord de l'objet (typiquement, $\xi=2$).

Aire perdue

Certains auteurs ont cherché à affiner les critères précédents en mesurant l'aire de la forme initiale F qu'il n'est pas possible de recouvrir à partir du squelette simplifié. Dans le cas discret, cette mesure donne précisément le nombre de pixels de l'objet perdus lors de la simplification. Une branche du squelette est alors raccourcie tant que l'aire perdue au niveau de cette branche reste inférieure à un certain seuil ξ .

Tandis que dans le cas continu, le calcul de l'aire perdue est extrêmement simple, puisque la forme initiale est partitionnée en triangles de Delaunay [Kof86], dans le cas discret, il est nécessaire de recourir à des formules approchées. Par exemple, dans [Att95b], les auteurs proposent de mesurer en chaque sommet s :

$$C(s) = \max_{e \in \{e_1, \dots, e_k\}} (r(s) - r(e))(\tan \alpha - \alpha), \quad \text{avec } \alpha = \frac{d(s, e)}{r(s) - r(e)}$$

Dans [Sha95], on trouve également :

$$C(s) = 2r(s)\sqrt{1 - r'(s)^2} \cdot (1 - r'(s))$$

où $r'(s)$ désigne la dérivée de la fonction d'étanchéité calculée au point s . Ces formules donnent une bonne approximation de l'aire perdue lorsque le point s reste proche d'une extrémité du squelette initial. Dans tous les cas, le point s est supprimé si $C(s) < \xi$.

6.2.2 Méthodes gardant les branches significatives

Pour mesurer l'importance d'une branche dans le squelette, diverses heuristiques ont été proposées dont nous donnons maintenant un aperçu. Le squelette obtenu est jugé satisfaisant si le résultat est visuellement plaisant.

Longueur des branches du squelette

La longueur d'une branche est l'un des tous premiers critères qui a été utilisé pour élaguer le squelette. Les *branches périphériques* dont la longueur est inférieure à un certain seuil sont systématiquement supprimées. Ce critère ne s'applique efficacement que pour des objets particuliers (caractères, lettres, ...) dont l'épaisseur est constante.

Longueur mesurée sur la frontière des formes

Ogniewicz propose dans [Ogn92a] des techniques efficaces pour simplifier les squelettes dans le cas des méthodes continues. Soient s et s' , deux éléments voisins du squelette et $[pq]$, l'arête de Delaunay associée à la branche $[ss']$. Ogniewicz propose d'évaluer la longueur du plus court chemin entre p et q le long de la frontière de F et de la comparer à la distance entre p et q :

$$C(s) = d_{\partial F}(p, q) - d(p, q)$$

Le squelette est simplifié en gardant les sommets pour lesquels $C(s) > \xi$. Usuellement, ξ est choisi dans l'intervalle $[1.0, 3.0]$. Dans [Ogn94], la méthode précédente est améliorée en lissant au préalable la frontière de l'objet avec un opérateur $\mathcal{L}(\cdot)$. Ainsi, le critère devient :

$$C(s) = d_{\mathcal{L}(\partial F)}(\mathcal{L}(p), \mathcal{L}(q)) - d(\mathcal{L}(p), \mathcal{L}(q))$$

Le choix des seuils et paramètres à appliquer est plus délicat. Néanmoins, l'ensemble des squelettes simplifiés forment une meilleure représentation hiérarchique de l'objet.

Pour conclure, remarquons que la structure de graphe des squelettes continus permet de réaliser des calculs plus complexes et plus réalistes que dans le cas discret.

6.3 Schéma général pour les squelettes continus

Dans cette section, nous présentons un schéma général pour simplifier les squelettes continus $2D$ ou $3D$. Ce schéma s'applique indépendamment du critère de suppression des sommets retenus. C'est seulement dans la section suivante (6.4 et 6.5) que nous aborderons le problème délicat du choix d'un critère de suppression en vue d'applications particulières.

Le point de départ est le squelette continu calculé par l'une des méthodes présentées dans le chapitre 3. Pour simplifier notre propos, nous appelons $Sk^*(F)$ le squelette ainsi calculé et F la forme obtenue en prenant le dual du squelette. A partir de maintenant, le terme *forme* ou *objet* fait référence à F et non pas à l'approximation polygonale X_w . En d'autres termes, nous supposons qu'il y a dualité entre la forme et son squelette.

6.3.1 Principe

Le procédé de simplification que nous proposons exploite la dualité entre la forme F et son squelette $Sk^*(F)$. Notre méthode consiste à simplifier la forme sans modifier sa topologie, et à répercuter ces modifications dans le squelette de façon à préserver la dualité entre forme simplifiée et squelette simplifié. Le principe reste le même en $2D$ et en $3D$.

Plus précisément, durant le processus de simplification, un simplexe T (triangle en $2D$ ou tétraèdre en $3D$) est supprimé de la forme courante si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. le type d'homotopie de la forme courante reste inchangé (voir la section 6.3.2) ;
2. T vérifie un critère de non-importance (voir les sections 6.4 et 6.5).

Lorsqu'un simplexe T est supprimé de la forme courante, le squelette est également modifié comme suit : le sommet de Voronoï v associé au tétraèdre T et tous les éléments de Voronoï adjacents au sommet v sont supprimés du squelette.

Au début de l'algorithme, les simplexes qui peuvent être supprimés sans modifier le type d'homotopie de F sont placés dans une file. Au cours de l'algorithme, le simplexe T le plus ancien présent dans la liste est extrait puis examiné. Si on décide de supprimer le simplexe T de la forme courante, ses simplexes voisins sont à leur tour placés dans la file pour pouvoir être examinés ultérieurement. L'algorithme continue tant que la file n'est pas vide.

Si l'on suppose que le calcul du critère de non-importance d'un sommet s'effectue en temps constant, la simplification du squelette est alors en $O(m)$ où m représente le nombre de sommets du squelette. En effet, dans le pire des cas, chaque sommet est placé 3 fois dans la liste en $2D$ et 4 fois en $3D$.

6.3.2 Conservation de l'homotopie

Pour savoir quelles sont les opérations qui permettent de conserver le type d'homotopie, il est possible de raisonner soit sur le squelette, soit sur la forme. Nous avons choisi la deuxième solution, sachant que, par dualité, toute opération sur la forme possède une interprétation dans le squelette.

Dans cette section, nous nous proposons donc d'énumérer les triangles et tétraèdres de Delaunay dont la suppression ne modifie pas l'homotopie de la forme

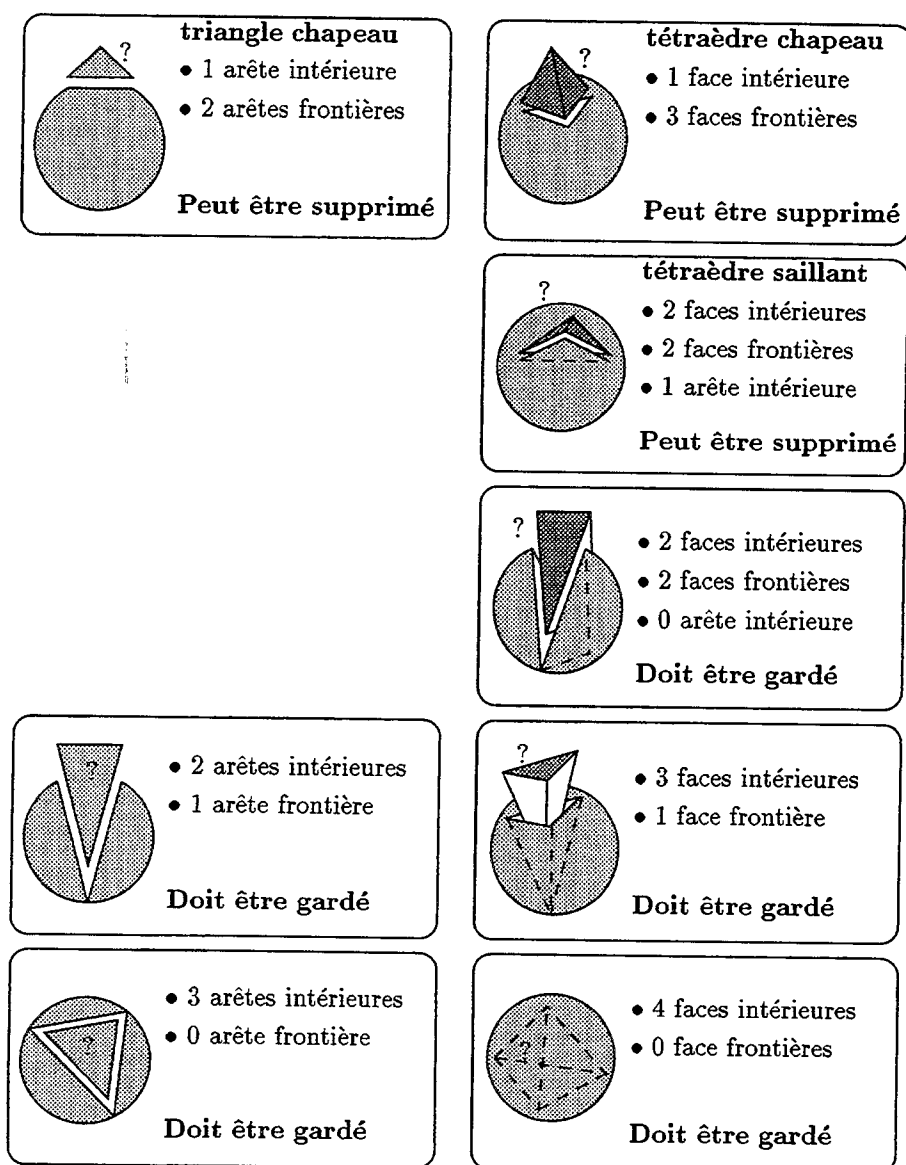


FIG. 62 - Classification des simplexes. Seuls les triangles chapeau, les tétraèdres chapeau et les tétraèdres saillants peuvent être supprimés sans modifier le type d'homotopie de la forme.

courante. La figure 62 résume les différents cas possibles. Par la suite, une arête ou une face *intérieure* (resp. *frontière*) désigne une arête ou une face incluse dans l'intérieur (resp. dans la frontière) de la forme courante.

En $2D$, les triangles pouvant être supprimés sont tous du même type. Ils possèdent une arête intérieure et deux arêtes frontières. Par dualité, ils sont associés à des extrémités du squelette. A cause de leur forme bien particulière, nous avons choisi de les appeler des *triangles chapeau*. En $3D$, les tétraèdres que l'on peut supprimer sont de deux types, parmi lesquels, on distingue :

- *les tétraèdres chapeau*. Ces derniers possèdent trois faces frontières et une face intérieure. Les sommets de Voronoï auxquels ils sont associés par dualité sont appelés les *extrémités* du squelette $3D$. La suppression d'un tétraèdre chapeau a pour conséquence de raccourcir une branche du squelette (voir figure 63).
- *les tétraèdres saillants*. Ces derniers possèdent deux faces frontières, deux faces intérieures et une unique arête intérieure $[ab]$. Les sommets de Voronoï auxquels ils sont associés par dualité sont appelés par la suite les *bords* du squelette. La suppression d'un tétraèdre T revient à enlever un morceau de surface du squelette. Plus précisément, cette suppression conduit à supprimer le sommet de Voronoï v associé au tétraèdre T et par voie de conséquence, le polygone de Voronoï dual de l'arête $[ab]$ (voir figure 63).

Les deux transformations élémentaires permettant de simplifier les objets $3D$ sont d'une part la suppression d'un tétraèdre chapeau et d'autre part la suppression d'un tétraèdre saillant. Les conséquences sur le squelette sont respectivement la disparition d'une extrémité et la disparition d'un bord.

6.3.3 Stratégies de simplification

Dans l'espace $3D$, il est possible de simplifier le squelette selon deux stratégies différentes, qui permettent d'aboutir soit à un squelette surfacique, soit à un squelette filiforme. Pour obtenir un squelette surfacique, il suffit de supprimer systématiquement les tétraèdres chapeau et de garder les tétraèdres saillants associés à des bords significatifs du squelette. Inversement, pour obtenir un squelette filiforme, il suffit de supprimer systématiquement les tétraèdres saillants et de garder les tétraèdres chapeau, associés à des extrémités significatives.

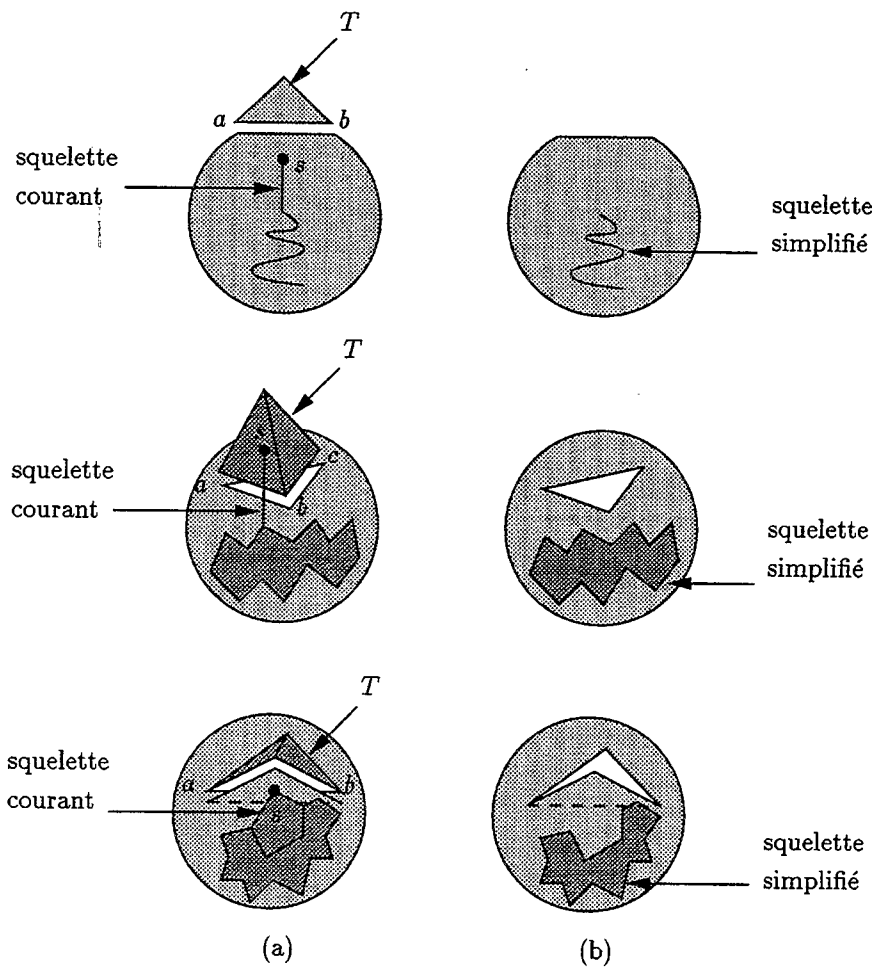


FIG. 63 - Conséquence de la suppression du simplexe T et du sommet s . (a) Avant suppression. (b) Après suppression.

6.4 Critère local

Dans cette section, nous proposons un premier critère pour évaluer l'importance des sommets du squelette et décider de leur suppression. Après avoir défini un cadre de travail dans la section 6.4.1, nous présentons notre approche dans l'espace $2D$ (section 6.4.2). Puis, notre critère est généralisé à l'espace $3D$ de façon à obtenir soit un squelette surfacique, soit un squelette filiforme (section 6.4.3).

6.4.1 Objectifs

Notre objectif est de simplifier à l'extrême la structure du squelette en gardant les branches réellement significatives. En particulier, nous voulons que le critère de suppression soit suffisamment puissant pour simplifier efficacement les squelettes $3D$ présentés dans le chapitre 3. Or, pour parvenir à un squelette filiforme en $3D$, il faut accepter de perdre une grande quantité d'informations sur le bord de l'objet. Nous avons donc privilégié d'entrée de jeu le deuxième type d'approches présenté dans la section 6.2.

La présence de branches parasites dans le squelette s'explique traditionnellement par la présence de bruit sur la frontière de l'objet. Il est donc logique de modéliser le type de bruit que l'on se propose d'éliminer. Par la suite, nous retenons les hypothèses suivantes :

La forme X que l'on cherche à squelettiser est r -régulière. Elle est connue uniquement à travers un échantillon bruité de sa frontière, $\{q_i\}_{i=1}^n$. Les points q_i sont les sommets de la forme polygonale F . Nous supposons que chaque point q_i s'écrit sous la forme $q_i = p_i + e_i$. Les points p_i se trouvent exactement sur la frontière de X et échantillonnent X avec une forte densité $w : w \gg r^{-1}$. Les vecteurs e_i modélisent le bruit ajouté en chaque point frontière. Nous supposons que le bruit ajouté reste faible : $\forall i, \|e_i\| < 2w^{-1}$.

Malgré sa simplicité, ce modèle est réaliste. Dans le cas d'images obtenues par numérisation d'un document de bonne qualité à l'aide d'un scanner, les objets présents dans l'image ont généralement une épaisseur supérieure à 10 pixels ($r < 5$) et l'erreur due à la discrétisation est inférieure au pixel.

6.4.2 Cas 2D

Avant de présenter notre critère de suppression, nous rappelons la définition de la fonction d'étanchéité donnée dans le chapitre 2 et nous introduisons la notion d'angle bissecteur (voir figure 64a).

Définition 6.1 (Fonction d'étanchéité) Soit X une forme continue et $\text{Sk}(X)$ son squelette. La fonction d'étanchéité $\rho(\cdot)$ est la fonction qui, à chaque point s du squelette, associe le rayon de la boule maximale centrée en s .

Définition 6.2 (Angle bissecteur) Soit X une forme continue et $\text{Sk}(X)$ son squelette. Soit s , un point simple du squelette. La boule maximale centrée en s possède deux points de contact p_0 et p_1 avec la frontière de X . On appelle angle bissecteur, l'angle $\widehat{p_0 s p_1}$ compris entre 0 et π . Par la suite, l'angle bissecteur calculé au point s est noté $\alpha(s)$. L'angle bissecteur aux points terminaux et multiples se calcule par passage à la limite.

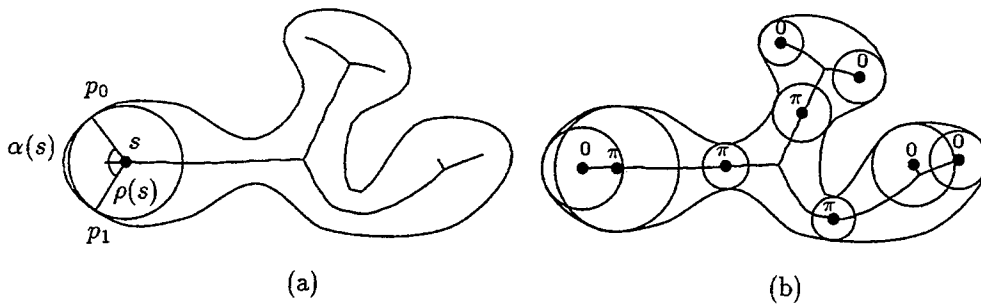


FIG. 64 - (a) Angle bissecteur et fonction d'étanchéité au point s . (b) Valeurs particulières de la fonction d'étanchéité.

L'angle bissecteur possède les deux propriétés remarquables suivantes : il vaut π uniquement là où la fonction d'étanchéité possède des extréma. Il est nul uniquement aux extrémités du squelette (voir figure 64b). Autrement dit, un moyen simple de caractériser les extrémités du squelette consiste à regarder la valeur de l'angle bissecteur. Si l'angle bissecteur est proche de 0, alors le point regardé est proche d'une extrémité. L'angle bissecteur, du fait de ses propriétés remarquables, a déjà été utilisé en analyse d'images pour segmenter des amas de cellules [Tal92].

Notre critère de suppression est fondé sur le calcul de la fonction d'étanchéité et de l'angle bissecteur. Dans le cas de squelettes approchés par le graphe de Voronoï,

ces fonctions sont faciles à estimer. Soit s un sommet de Voronoï, s_0, s_1 et s_2 les trois voisins de Voronoï du point s et $(p_0 p_1 p_2)$ son triangle de Delaunay associé dans lequel le sommet s_k est le dual de l'arête $[p_{k+1}, p_{k+2}]$. Les indices sont calculés modulo 3. La fonction d'étanchéité au sommet s est approchée par le rayon de la boule de Delaunay centrée en s :

$$\rho^*(s) = d(s, p_0) = d(s, p_1) = d(s, p_2)$$

Notons α_k l'angle $\widehat{p_{k+1} s p_{k+2}}$ (voir figure 65a). Pour approcher l'angle bissecteur, nous utilisons :

$$\alpha^*(s) = \max\{s_k \in \text{Sk}^*(F), \alpha_k\} \quad (18)$$

En effet, supposons que la boule de Delaunay centrée en s tende vers une boule maximale ayant deux points de contact a et b avec la frontière. Alors, le triangle de Delaunay $(p_0 p_1 p_2)$ prend une forme aplatie dans laquelle un des sommets (par exemple p_0) tend vers a et les deux autres sommets (par exemple p_1 et p_2) tendent vers b (voir figure 65b). Par conséquent, $\rho^*(s) \rightarrow \rho(s)$, $\alpha_0 \rightarrow 0$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha(s)$ et $\alpha^*(s) \rightarrow \alpha(s)$. Pour simplifier, à partir de maintenant, α^* et ρ^* seront notées également α et ρ .

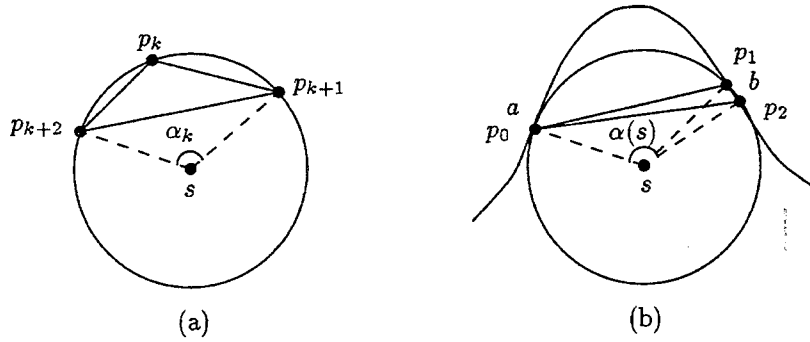


FIG. 65 - Calcul de l'angle bissecteur.

Notre critère consiste à supprimer du squelette courant les extrémités s pour lesquelles la fonction d'étanchéité est inférieure à une distance donnée ρ_0 et l'angle bissecteur est inférieur à un angle donné α_0 . Le squelette simplifié dépend donc de deux paramètres : un rayon seuil ρ_0 et un angle seuil α_0 . Le critère $C(s)$ appliqué en chaque extrémité est le suivant :

$$C(s) = (\rho(s) < \rho_0) \text{ ou } (\alpha(s) < \alpha_0)$$

L'extrémité s est supprimée si $C(s)$ est vrai (voir figure 66).

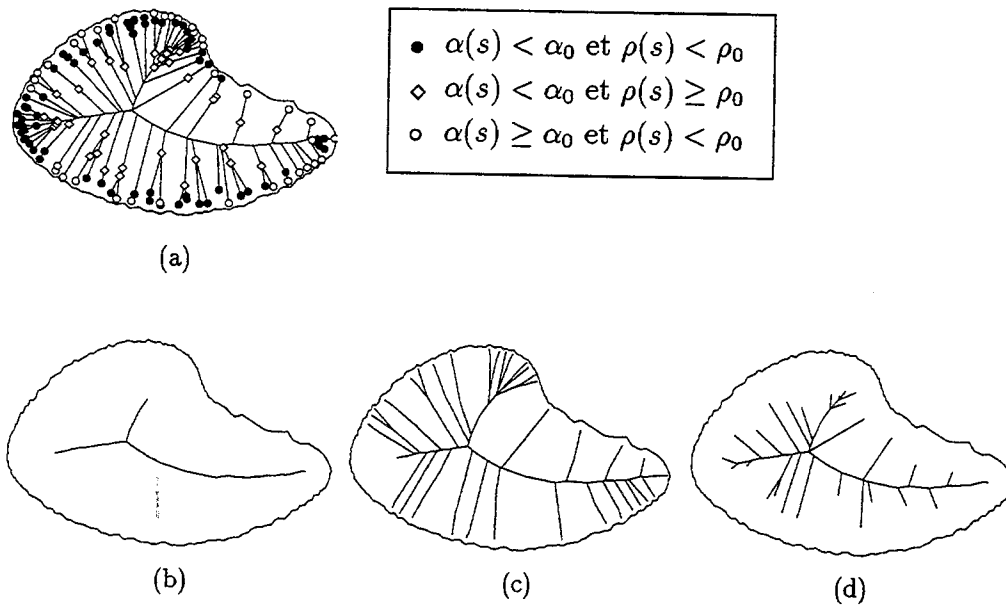


FIG. 66 - Pour simplifier efficacement le squelette, il faut tenir compte à la fois de la fonction d'étanchéité et de l'angle bissecteur. (a) Sommets du squelette initial vérifiant le critère $C(s)$. (b) Squelette simplifié avec $\alpha_0 = \frac{2\pi}{5}$ et $\rho_0 = 0.2$. (c) Résultat obtenu en appliquant le critère partiel $C(s) = (\alpha(s) < \alpha_0)$. (d) Résultat obtenu en appliquant le critère partiel $C(s) = (\rho(s) < \rho_0)$.

Interprétation et choix des paramètres

Dans un premier temps, nous allons examiner l'effet de notre critère sur le squelette exact $\text{Sk}(X)$ d'une forme continue X . Si le seuil ρ_0 reste inférieur au rayon de la plus petite boule centrée en une extrémité, seul le calcul de l'angle bissecteur a une influence sur le squelette simplifié. Le seuil α_0 contrôle en quelque sorte la perte d'informations au niveau des branches. Si $\alpha_0 = 0$, le squelette n'est pas simplifié. Si α_0 reste proche de 0, le squelette est peu simplifié. Si $\alpha_0 = \pi$, les branches du squelette sont raccourcies jusqu'à rencontrer un point où la fonction d'étanchéité possède un maximum local.

Ces constatations montrent que des choix pertinents pour les seuils ρ_0 et α_0 sont :

- ρ_0 inférieur au rayon de la plus petite boule centrée en une extrémité. Lorsque les données proviennent d'images binaires, nous prendrons $\rho_0 = 5$ pixels.
- α_0 suffisamment faible pour limiter la perte d'information. La valeur $\frac{2\pi}{5}$ est un bon compromis.

En choisissant notre critère, nous cherchions à éliminer les sommets les plus sensibles au bruit sur la frontière. Or, expérimentalement, les points correspondant à un ρ grand et α proche de π sont les plus stables par rapport au bruit.

Résultats

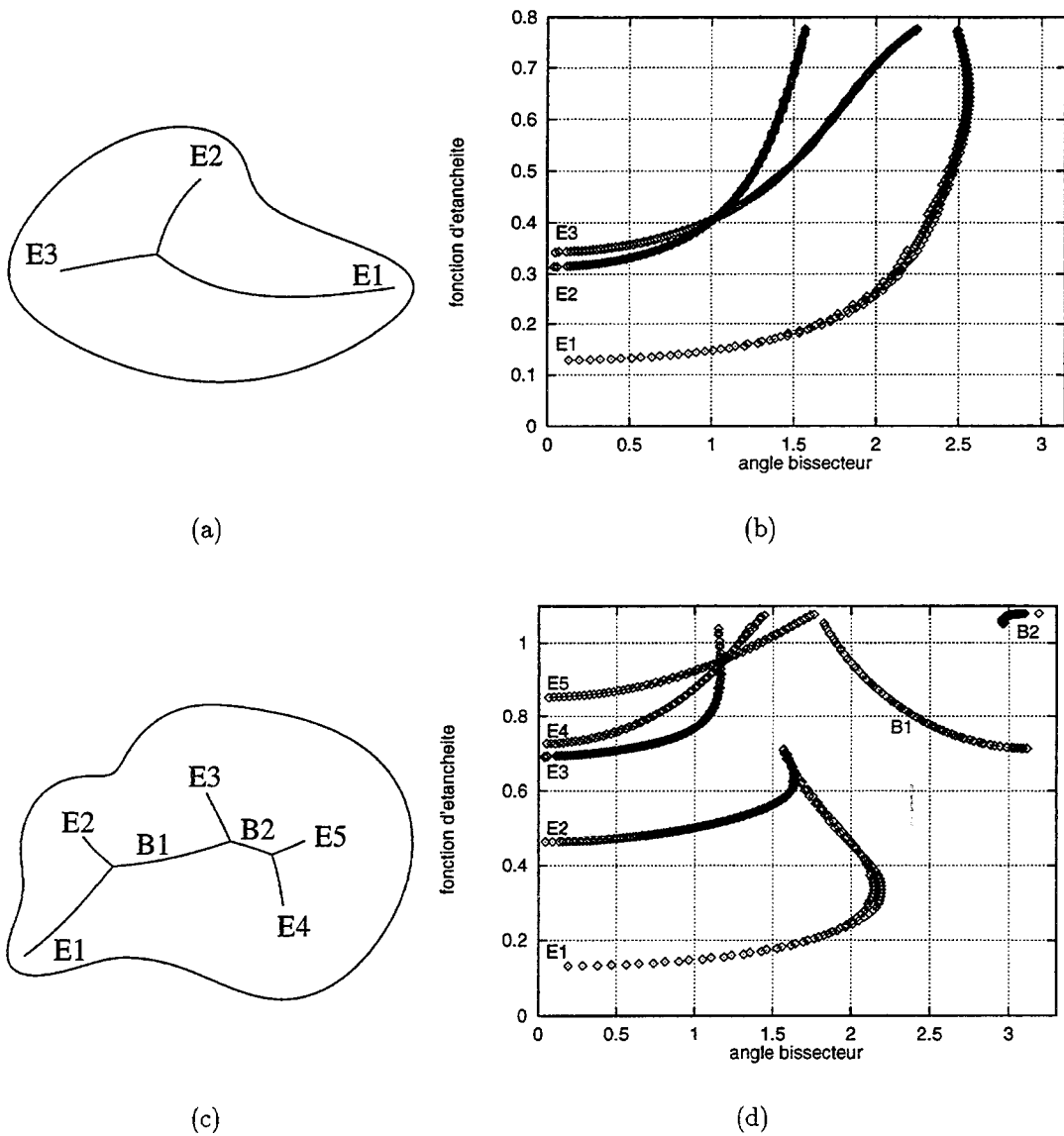


FIG. 67 - (a,c) Squelettes. (b,d) Graphe des paramètres (α, ρ) .

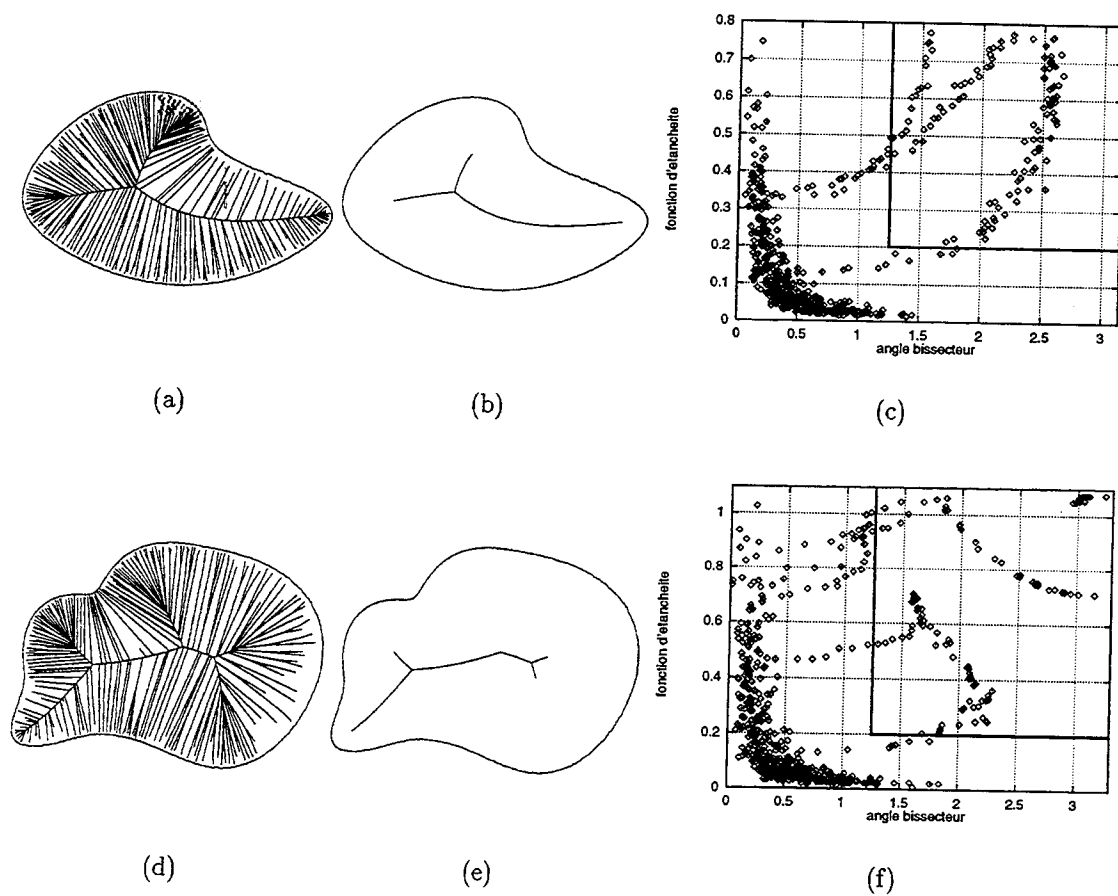


FIG. 68 - (a,d) *Squelettes bruités.* (b,e) *Résultat de la simplification avec $\alpha_0 = \frac{2\pi}{5}$ et $\rho_0 = 0.2$.* (c,f) *Graphes des paramètres (α, ρ) .*

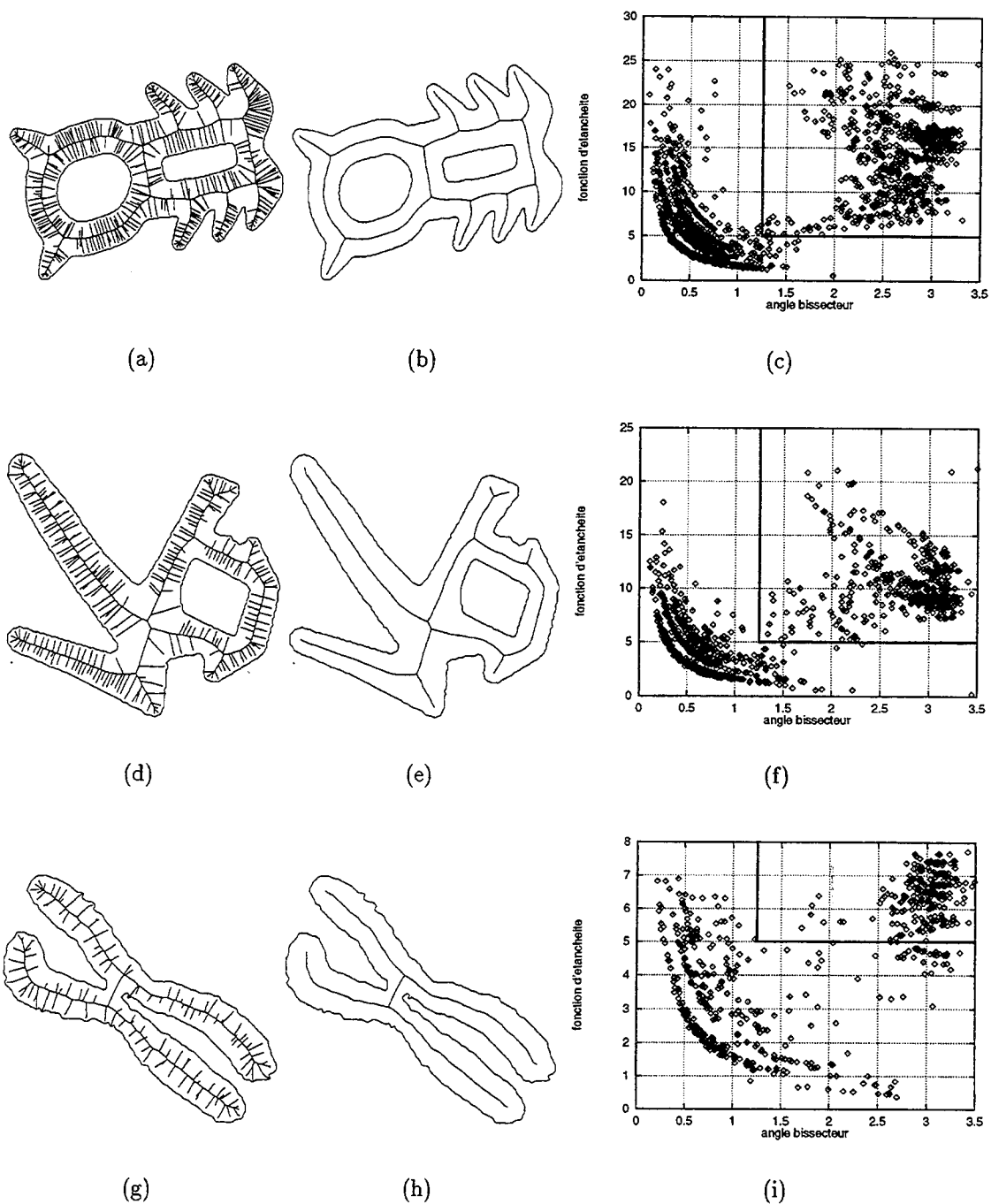


FIG. 69 - (a,d,g) Squelettes bruités. (b,e,h) Résultat de la simplification avec $\alpha_0 = \frac{2\pi}{5}$ et $\rho_0 = 0.2$. (c,f,i) Graphes des paramètres (α, ρ) .

Pour visualiser le comportement de notre méthode, nous avons représenté les sommets du squelette sur un graphe appelé le *graphe des paramètres* et dans lequel la position des points est repérée par la valeur des paramètres $\alpha(s)$ et $\rho(s)$ au lieu de leurs coordonnées cartésiennes classiques. Plus précisément, à chaque sommet s du squelette initial correspond dans le graphe des paramètres un point de coordonnées $(\alpha(s), \rho(s))$.

La figure 67 présente le squelette exact de formes continues échantillonnées chacune avec 600 points. Les différents éléments du squelette apparaissent clairement sur le graphe des paramètres. Les extrémités se trouvent sur la droite verticale $\alpha = 0$ et chaque portion de courbe représente une branche du squelette.

Dans la figure 68, du bruit a été ajouté artificiellement sur la frontière des formes continues et entraîne une nouvelle répartition des points sur le graphe des paramètres. Une grande partie des sommets qui se trouvaient sur les branches du squelette se retrouvent à présent localisée sur une courbe de forme “hyperbolique”. Le même phénomène apparaît également dans le cas d’objets obtenus à partir d’images discrètes (voir figure 69). Néanmoins, dans ce cas-là, les points s’organisent en strates parallèles.

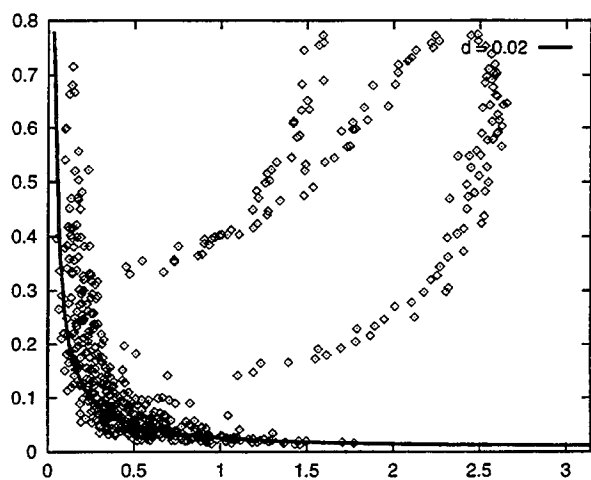
Nous proposons une explication simple permettant de comprendre la forme “hyperbolique” des courbes et des strates obtenues. Soit s un sommet du squelette initial. Notons a et b les deux points frontières ayant permis de calculer $\alpha(s)$ et $\rho(s)$. On a $\alpha(s) = \widehat{asb}$ et $\rho(s) = d(a, s) = d(b, s)$. L’ensemble des sommets s générés par des points a et b distants de d a pour équation :

$$\rho = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

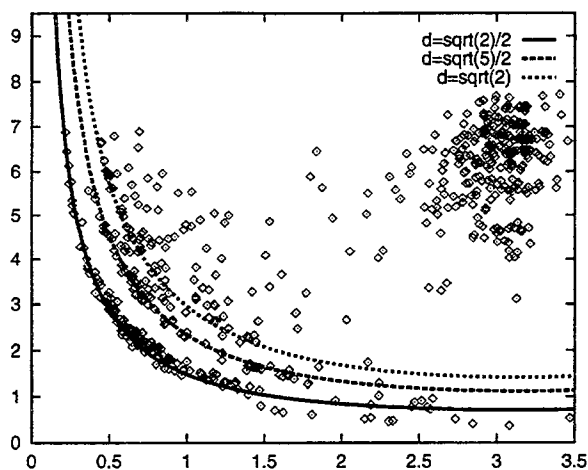
Il est alors possible de tracer la courbe ρ fonction de α à d fixé dans le graphe des paramètres. Pour certaines valeurs du paramètre d , nous avons constaté, de façon expérimentale, que la courbe précédente modélise parfaitement la forme du nouveau nuage de points apparaissant avec le bruit (voir figure 70). Dans le cas d’objets obtenus à partir d’images discrètes, la distance d entre deux points frontières est quantifiée et prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable (par exemple, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{2}$). La présence de strates dans le nuage exprime l’existence de valeurs interdites pour d .

Ainsi, le bruit a pour effet de perturber les relations de voisinage dans le graphe de Voronoï. Les points frontières se trouvant à une certaine distance d les uns des autres

se mettent à interagir, autrement dit, à devenir voisin de Delaunay. Ils génèrent alors des branches parasites dans le squelette. Tant que le bruit reste faible, la distance d le reste également. Les perturbations ont un aspect local.



(a)



(b)

FIG. 70 - Modélisation du bruit avec la courbe d'équation $\rho = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ tracée à d constant.

Notre critère consiste à garder les sommets se trouvant au-dessus de la ligne tracée en gras sur les graphes des paramètres. Son efficacité s'explique par le fait que les points à supprimer forment un nuage "compact" qu'il est facile d'isoler du reste.

6.4.3 Cas 3D

Nous proposons à présent deux extensions du critère $C(s)$ permettant d'obtenir soit un squelette surfacique, soit un squelette filiforme. La difficulté majeure consiste à étendre la notion d'angle bissecteur de façon cohérente.

Squelettes surfaciques

La stratégie pour obtenir un squelette surfacique consiste à supprimer systématiquement les tétraèdres chapeau et à supprimer les tétraèdres saillants associés à des bords non significatifs du squelette. Soit T un tétraèdre saillant et s son sommet de Voronoï associé. Notons $\rho(s)$ le rayon de la boule de Delaunay centrée en s et $\beta(s)$ l'angle formé par les deux faces frontières de T . Nous proposons de supprimer s si le rayon $\rho(s)$ est suffisamment petit ou encore si l'angle $\beta(s)$ est suffisamment proche de π . Plus formellement, le sommet s est supprimé s'il vérifie le critère suivant :

$$C_1(s) = \text{chapeau}(s) \text{ ou } (\text{saillant}(s) \text{ et } (\rho(s) < \rho_0) \text{ et } (\beta(s) > \beta_0))$$

L'utilisation de l'angle $\beta(s)$ nous a été suggérée par la constatation suivante : en $2D$, si s est une extrémité du squelette courant, et $\beta(s)$ l'angle entre les deux arêtes frontières de son triangle de Delaunay, nous avons $\beta(s) = \pi - \frac{\alpha(s)}{2}$ (voir figure 71a). Lorsque $\alpha(s) = 0$, on a $\beta(s) = \pi$. Ainsi, en $2D$, le critère $C(s)$ consiste à supprimer les triangles chapeau qui ne sont pas suffisamment pointus.

Pour faciliter le choix des paramètres ρ_0 et β_0 , il semble attractif à première vue d'utiliser à nouveau un graphe de paramètres sur lequel on puisse lire les meilleurs seuils à appliquer. Malheureusement, le diagramme obtenu présente un aspect confus qu'il n'est pas possible d'exploiter efficacement (voir figure 72). Aussi, sachant que pour les objets testés, les points frontières sont peu bruités, nous avons choisi systématiquement $\rho_0 = 0$, sauf dans le cas du chromosome. La valeur $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$ représente un bon compromis pour l'angle (voir figure 73).

Squelettes filiformes

Pour obtenir un squelette filiforme, nous supprimons systématiquement les tétraèdres saillants et nous gardons les tétraèdres chapeau associés à des extrémités significatives. Soit T un tétraèdre chapeau et s son sommet de Voronoï associé. Notons $\rho(s)$ le rayon de la boule de Delaunay centrée en s et $\omega(s)$ l'angle solide sous

lequel le sommet s voit les trois faces frontières de T . Le sommet s est supprimé si le critère suivant est vérifié :

$$C_2(s) = \text{saillant}(s) \text{ ou } (\text{chapeau}(s) \text{ et } (\rho(s) < \rho_0) \text{ et } (\omega(s) < \omega_0))$$

L'angle solide est une notion bien connue des physiciens (voir figure 71). Etant donné une surface S prenant appui sur un contour C et un point o , l'angle solide sous lequel le point o voit la surface S vaut Σ/R^2 , où R représente le rayon d'une sphère centrée en o et Σ l'aire de la portion de cette sphère incluse dans le cône de centre o et de directrice C . L'angle solide est une quantité sans dimension, exprimée en *stéradian*. Sa valeur absolue appartient à l'intervalle $[0, 4\pi]$. L'angle solide généralise à l'espace $3D$ la notion d'angle dans le plan. Ainsi, dans le cas $2D$, si s est une extrémité du squelette, l'angle $\alpha(s)$ peut s'interpréter comme l'angle solide sous lequel s voit les arêtes frontières de son triangle associé.

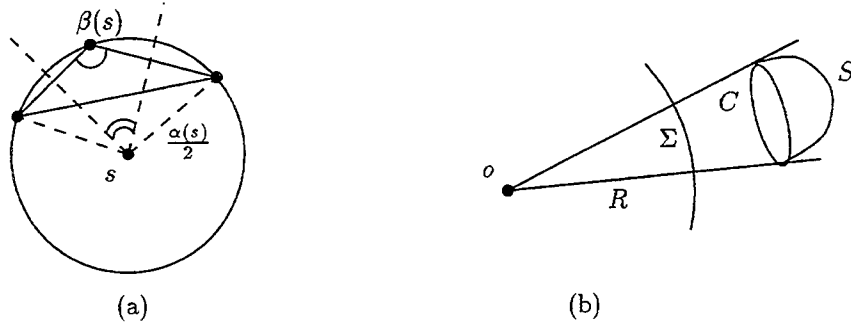


FIG. 71 - Généralisation de l'angle bissecteur.

Pour étudier la pertinence de notre critère, nous avons voulu voir dans un premier temps si le graphe des paramètres permettait d'apporter une information précieuse sur le choix des seuils. Expérimentalement, nous avons constaté un regroupement des sommets dans la zone $\omega < \pi$ (voir figure 72). L'angle solide ω semble donc posséder un meilleur pouvoir discriminatoire sur les sommets que l'angle β . Nous avons testé la méthode sur différents objets, avec $\omega_0 = \frac{3\pi}{2}$ et $\rho_0 = 0$. Les résultats obtenus sont décevants (voir figure 73). Bien que les sommets retenus soient localisés dans le centre de la forme, la méthode retient une multitude de branches parasites, très courtes, sans réelle signification. Cette section se conclut donc par un constat d'échec et la nécessité de recourir à une autre méthode pour obtenir des squelettes filiformes $3D$ satisfaisants.

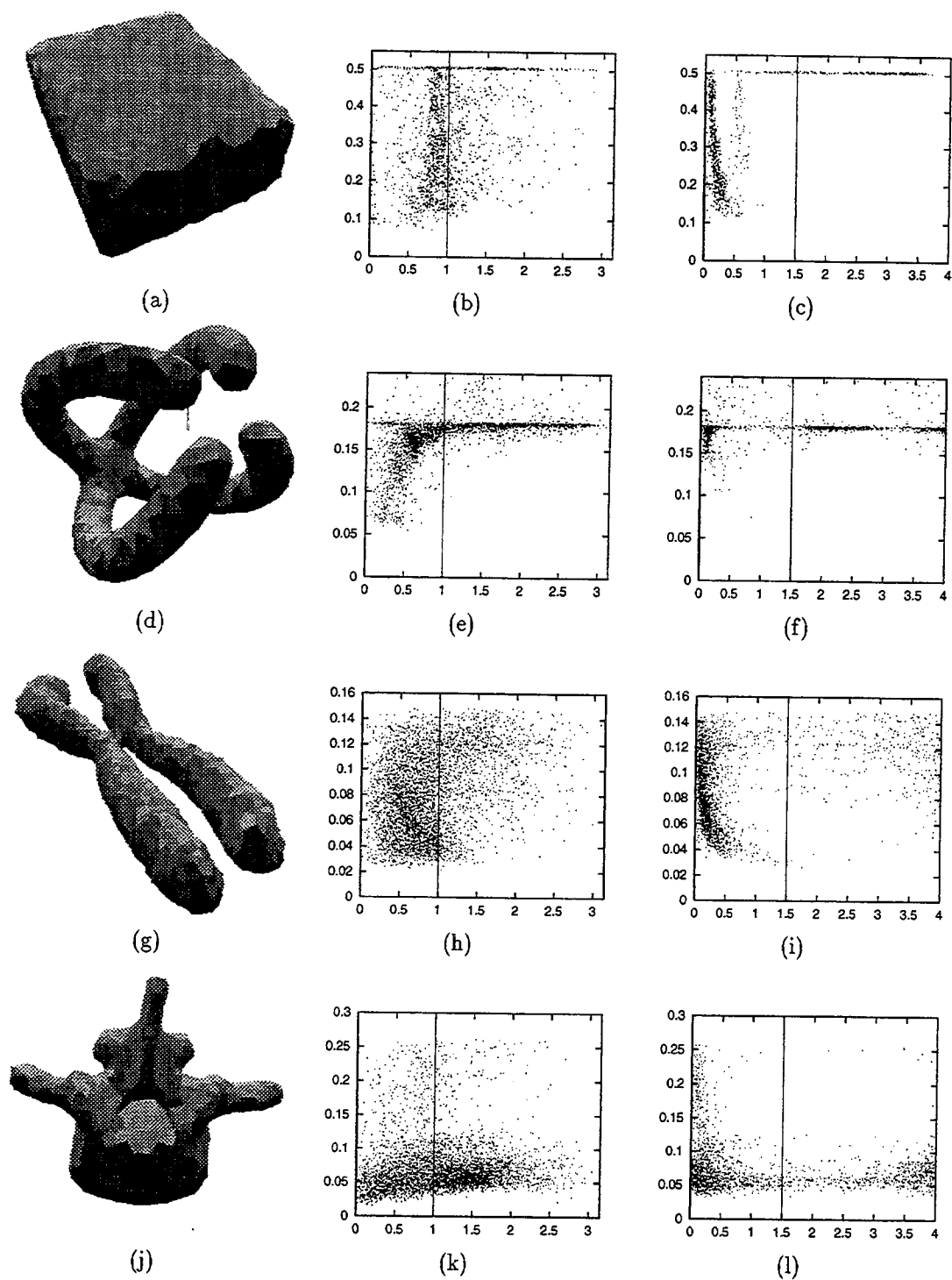


FIG. 72 - (a,d,g,j) Formes continues. (b,e,h,k) Graphes des paramètres (β, ρ) . (c,f,i,l) Graphes des paramètres (ω, ρ)

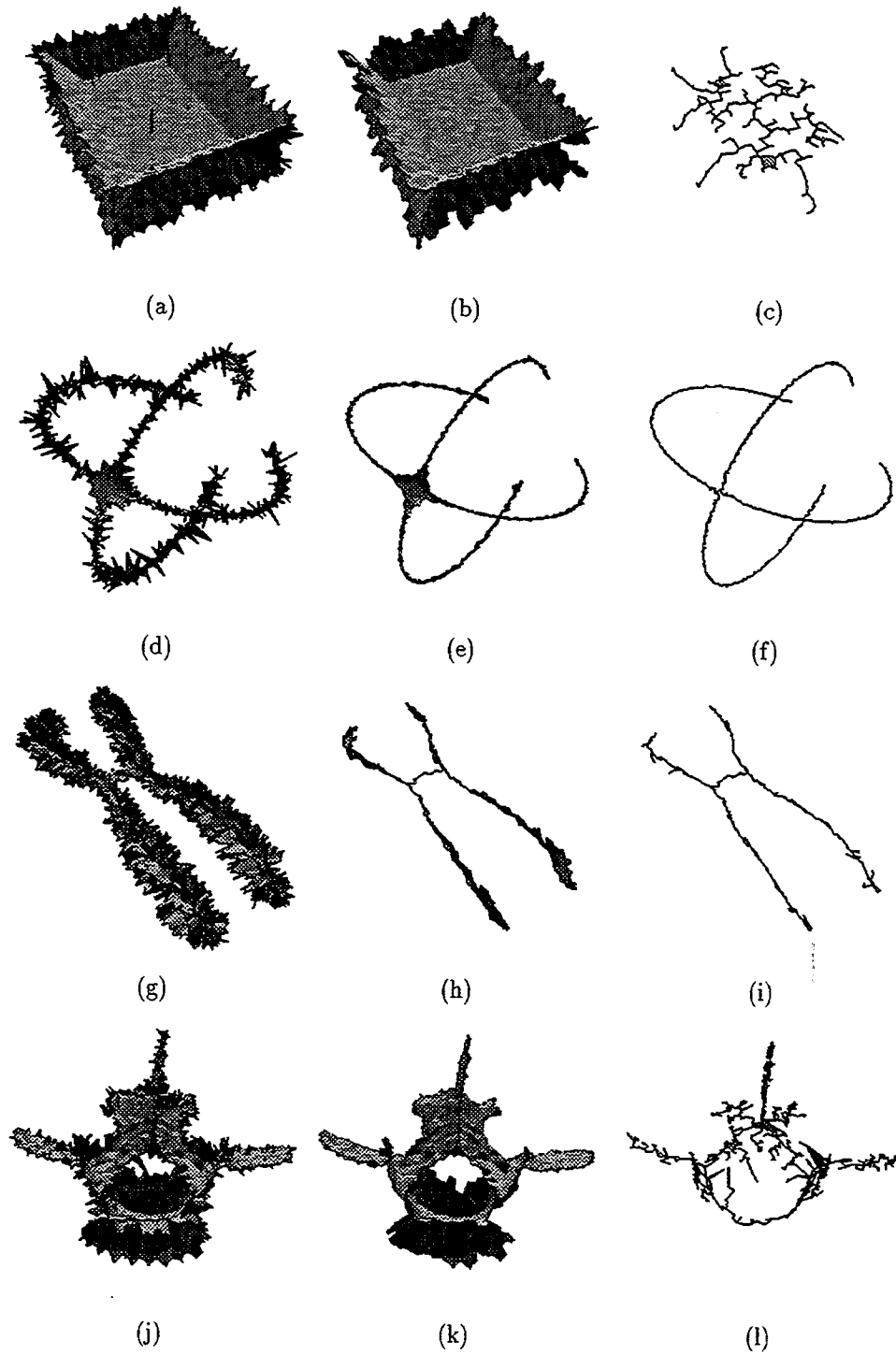


FIG. 73 - (a,d,g,j) *Squelettes initiaux*. (b,e,h,k) *Squelettes simplifiés avec le critère C_1* . (c,f,i,l) *Squelettes simplifiés avec le critère C_2* .

6.5 Critère global

Dans cette section, nous présentons un nouveau critère de suppression des sommets remarquablement efficace pour obtenir des squelettes filiformes 3D [Att95a].

Ce critère consiste à approcher d'une autre façon l'angle bissecteur utilisé dans la section précédente. Plus précisément, au lieu de supprimer un sommet uniquement à partir d'informations locales à ce sommet, nous allons prendre en compte les sommets qui ont déjà disparu du squelette avant lui, de même que le proposait déjà Ogniewicz dans [Ogn94].

6.5.1 Cas 2D

La simplification du squelette $Sk(F)$ va de pair avec la simplification de la forme F . Ainsi, la suppression d'une branche du squelette s'accompagne de la disparition d'une région de la forme. Soit $[ss_0]$ une branche périphérique du squelette courant et s l'extrémité de cette branche. Notons $[ab]$ le segment de Delaunay associé à $[ss_0]$. Ce segment partage la forme initiale F en deux régions disjointes. Plus précisément, il sépare les triangles de Delaunay amenés à disparaître avec s , de ceux qui restent dans la forme courante après sa suppression. Notons $\ell(s)$ la longueur du morceau de frontière passant par les points a et b et qui est amené à disparaître avec le sommet s .

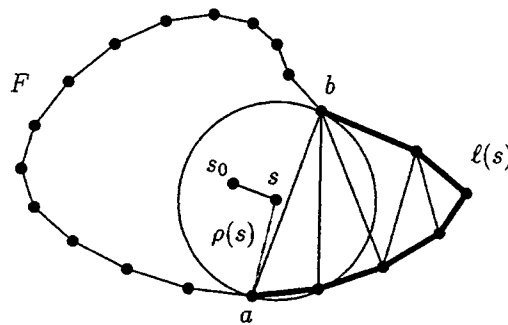


FIG. 74 - Approximation de l'angle bissecteur.

Pour décider de la suppression du sommet s , nous allons évaluer deux quantités : $\rho(s)$ et $\Omega(s)$ (voir figure 74). Comme précédemment, $\rho(s)$ désigne le rayon de la

boule de Delaunay centrée au point s ; $\Omega(s)$ est une grandeur sans dimension définie par le rapport :

$$\Omega(s) = \frac{\ell(s)}{\rho(s)}$$

Intuitivement, si la portion de la frontière dont on mesure la longueur approche un arc de cercle, $\Omega(s)$ approche l'angle solide sous lequel la portion de frontière est vue de s . Le point s est supprimé du squelette s'il vérifie le critère :

$$C'(s) = (\rho(s) < \rho_0) \text{ ou } (\Omega(s) < \Omega_0)$$

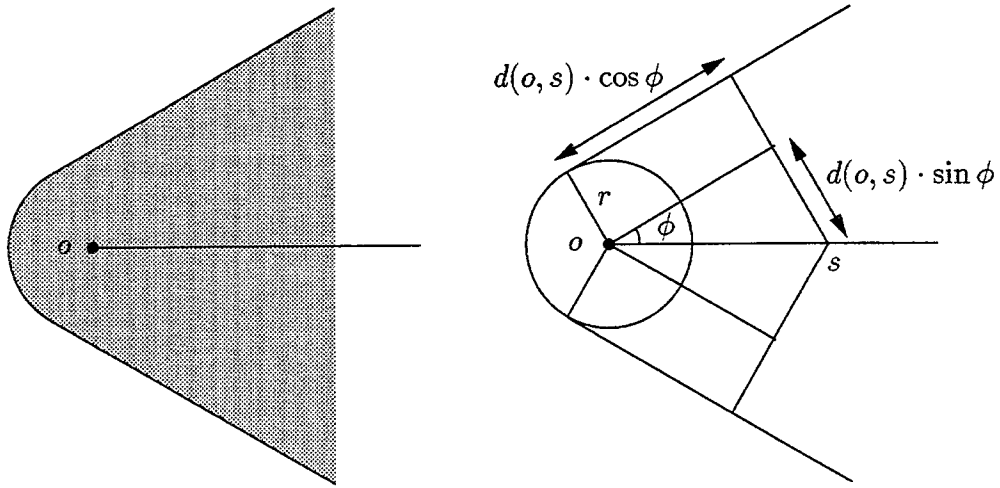


FIG. 75 - Modèle pour les objets.

Pour comprendre l'intérêt de remplacer $\alpha(s)$ par $\Omega(s)$, regardons ce qui se passe dans le cas particulier de la forme de la figure 75. Cette forme a pour squelette une demi-droite d'extrémité o . En tout point s du squelette, la fonction d'étanchéité ρ , l'angle bissecteur α et la fonction Ω se calculent aisément :

$$\begin{aligned} \rho(s) &= r + d(o, s) \cdot \sin \phi \\ \alpha(s) &= \pi - 2\phi \\ \Omega(s) &= \frac{r\pi - 2r\phi + 2d(o, s) \cdot \cos \phi}{r + d(o, s) \cdot \sin \phi} \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, l'angle bissecteur α possède la particularité d'être constant en tout point du squelette. Ainsi, le résultat de la simplification du squelette avec le critère $C(s)$ de la section précédente donne un résultat simpliste : soit l'angle seuil α_0 vérifie $\alpha_0 \geq \pi - 2\phi$, auquel cas tout le squelette disparaît ; soit $\alpha_0 < \pi - 2\phi$,

auquel cas le squelette reste inchangé. La méthode a donc un comportement du type tout ou rien. L'utilisation de l'angle Ω permet de moduler le résultat obtenu. Avec le nouveau critère :

- si $\alpha_0 < \pi - 2\phi$, le squelette n'est pas simplifié ;
- si $\alpha_0 \in [\pi - 2\phi, \frac{2}{\tan \phi}]$, le squelette est simplifié jusqu'au point s vérifiant $\Omega(s) = \alpha_0$;
- si $\alpha_0 > \frac{2}{\tan \phi}$, le squelette disparaît entièrement.

Par exemple, si $\phi = 0$, le choix du seuil $\alpha_0 = \pi + \epsilon$ permet de raccourcir le squelette sur une longueur valant $\frac{\epsilon}{2}$. Or, les objets d'épaisseur constante tels les chromosomes sont particulièrement bien représentés par des formes du type précédent dans lesquelles $\phi = 0$. Par conséquent, pour supprimer le bruit sans supprimer les branches significatives, un choix judicieux de l'angle seuil consiste à prendre $\alpha_0 = \pi$. Si le bruit reste faible, il suffit de prendre $\rho_0 = 0$.

Nous avons comparé ce nouveau critère au critère précédent et ceci pour différents seuils. Les résultats observés correspondent bien au comportement attendu. Le nombre de branches supprimées est nettement plus important et laisse envisager de meilleurs résultats dans le cas 3D (voir figure 76).

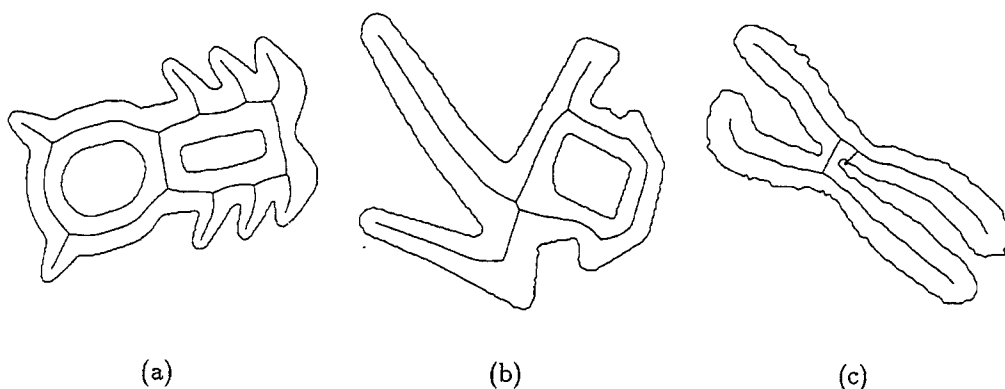


FIG. 76 - Squelettes simplifiés obtenus avec le critère global C' pour $\Omega_0 = \pi$ et $\rho_0 = 0$.

Pour conclure, remarquons que le calcul de $\ell(s)$ ne pose pas de problèmes particuliers et n'augmente pas le temps de calcul du processus de simplification. Il

s'effectue en cumulant les longueurs trouvées pour les voisins du sommet courant. La grandeur $\ell(s)$ intervient déjà dans les méthodes de simplification proposées par Ogniewicz [Sze92, Ogn94].

6.5.2 Cas 3D

Dans l'espace 3D, les choses ne sont pas aussi simples car si $[ss']$ est une branche du squelette et (abc) son triangle de Delaunay associé, ce dernier ne partage pas la frontière de la forme initiale en deux parties disjointes.

Le problème essentiel abordé dans cette section concerne donc le choix d'un ensemble de sommets qui doivent intervenir dans la suppression de s . Nous proposons deux solutions. La première, trop coûteuse, n'est pas utilisée en pratique. Néanmoins, sa description permet de mieux situer le problème. La deuxième calcule un équivalent 3D de la grandeur $\ell(s)$ sans passer par un découpage explicite de la forme. Cette astuce permet d'obtenir d'excellents résultats sans augmenter pour autant la complexité de notre procédé de simplification.

Digression sur la coupure du squelette 3D

Il s'agit d'attribuer à chaque sommet s un ensemble $A(s)$ de sommets pouvant influencer sur sa disparition. Pour cela, nous allons orienter dans un premier temps le graphe de Voronoï. L'ensemble $A(s)$ sera alors défini comme l'ensemble des antécédents de s dans le graphe de Voronoï orienté.

Supposons tout d'abord que l'on simplifie totalement le squelette en supprimant systématiquement les tétraèdres chapeau et saillants sans se préoccuper d'un critère quelconque. Après cette opération, les sommets sont ordonnés par leur date de disparition. Cet ordre dépend de l'ordre dans lequel ont été examinés les tétraèdres au cours de la simplification. Nous avons choisi d'examiner les tétraèdres saillants et chapeau se trouvant sur la périphérie du squelette initial dans un ordre aléatoire ; les résultats obtenus sont suffisamment convaincants.

Définition 6.3 (Relation $\prec$ entre les sommets) Soient s et s' deux sommets de Voronoï. On a $s \prec s'$ si et seulement si s et s' sont voisins dans le graphe de Voronoï et s' est amené à disparaître avant s lors du processus de simplification.

Définition 6.4 (Antécédent) Soient s et s' deux sommets de Voronoï. On dit que s' est un antécédent de s si et seulement si il existe $k + 1$ sommets $\{s_i\}_{i \in \{0, \dots, k\}}$ tels que $s = s_0 \prec s_1 \prec \dots \prec s_k = s'$. On note $A(s)$ l'ensemble des antécédents de s .

$A(s)$ représente l'ensemble des sommets du squelette qu'il a fallu supprimer avant de pouvoir supprimer s (voir figure 77). Malheureusement, le découpage du squelette à l'aide des antécédents possède les inconvénients suivants :

- les ensembles $A(s)$ forment un recouvrement du squelette et non une partition. En effet, un sommet s' peut être l'antécédent de plusieurs sommets.
- le calcul de $A(s)$ s'effectue en $O(m)$ où m est le nombre de sommets de Voronoï. Si ce calcul est effectué pour chaque sommet s observé, il augmente considérablement la complexité du procédé de simplification.

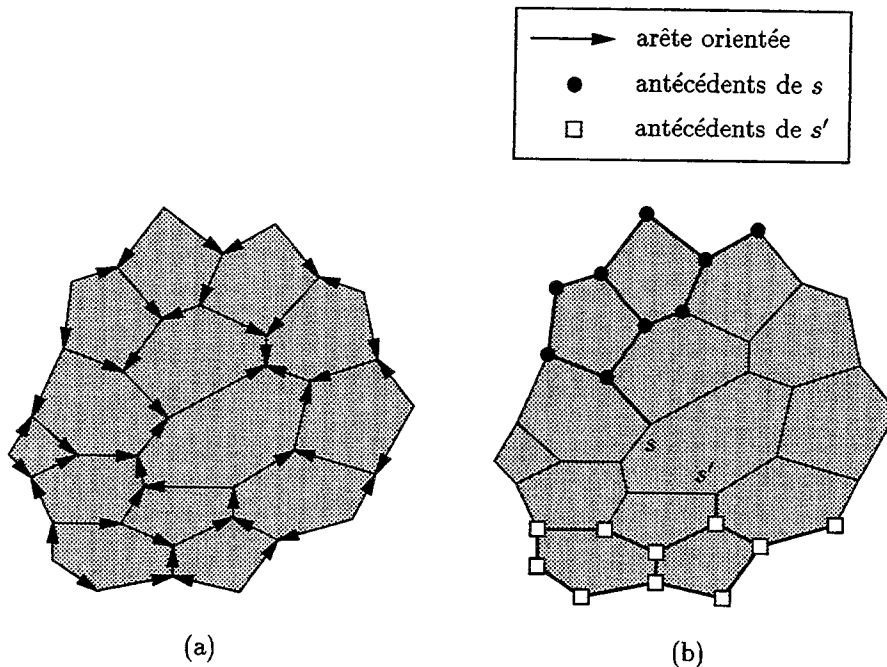


FIG. 77 - Portion de squelette 3D. Le squelette est maillé par des polygones de Voronoï. (a) Exemple de graphe orienté obtenu après la simplification complète du squelette. (b) Antécédents de s et s' .

A chaque ensemble $A(s)$, correspond par dualité un ensemble de tétraèdres dans l'objet, formant une région plus ou moins étendue. Sur la figure 78, nous avons représenté pour différents sommets s , la frontière de la région associée. La section suivante a pour but de trouver un moyen simple d'évaluer l'angle solide sous lequel un sommet s voit la surface ainsi découpée sur la frontière de l'objet.

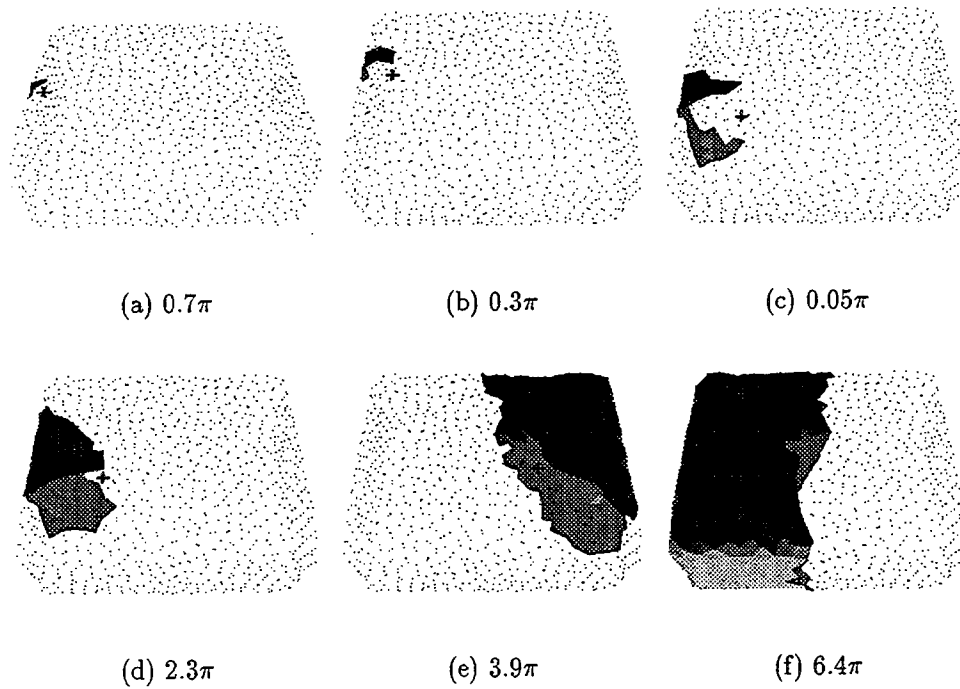


FIG. 78 - Antécédents d'un sommet s visualisés en représentant la surface des tétraèdres associés. L'angle $\Omega(s)$ calculé est indiqué dans les sous-légendes.

Approximation de l'angle solide

Pour approcher l'angle solide sous lequel un sommet s voit la région associée à l'ensemble $A(s)$, il est nécessaire de calculer au préalable un équivalent 3D de $\ell(s)$.

1. INITIALISATION: Si s est un sommet du squelette initial dont le tétraèdre associé T possède k ($0 \leq k \leq 4$) faces frontières $\{f_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$, on pose :

$$\ell(s) = \text{aire}(f_1) + \dots + \text{aire}(f_k).$$

Par exemple, si T est un tétraèdre chapeau, $k = 3$ et si T est un tétraèdre saillant $k = 2$. Mais ce calcul est aussi effectué pour les autres tétraèdres.

2. PROPAGATION: De façon imagée, nous pouvons dire qu'au moment où un sommet s disparaît du squelette courant, il partage équitablement ce qu'il possède (c'est-à-dire $\ell(s)$) entre ses voisins restant dans le squelette. Plus formellement, si s possède k voisins dans le squelette, chacun de ses voisins s_i reçoit $\ell(s_i) \leftarrow \ell(s_i) + \frac{\ell(s)}{k}$

La “beauté” de ce partage est qu’il permet de laisser invariant au cours du temps l’aire répartie sur l’ensemble des sommets. L’angle solide est alors approché en évaluant la quantité (voir figure 79) :

$$\Omega(s) = \frac{\ell(s)}{\rho(s)}$$

Pour simplifier les squelettes 3D, nous appliquons le critère :

$$C'_2(s) = \text{saillant}(s) \text{ ou } (\text{chapeau}(s) \text{ et } (\rho(s) < \rho_0) \text{ et } (\Omega(s) < \Omega_0))$$

Les seuils choisis sont $\rho_0 = 0$ et $\Omega_0 = 2\pi$. Autrement dit, une extrémité est jugée importante si les tétraèdres qui influent sur sa disparition couvrent un demi-espace autour d’elle. Les résultats obtenus sont excellents (voir figure 79). Le nombre de branches détectées vaut 4 pour la boîte, 4 pour le chromosome, 4 pour la forme synthétique, et 13 pour la vertèbre.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un schéma général de simplification des squelettes 2D et 3D. Ce schéma consiste à supprimer séquentiellement les extrémités et les bords du squelette jugés non significatifs selon un certain critère.

Nous avons ensuite proposé deux critères permettant de mesurer l’importance d’un sommet : un critère local fondé sur le calcul de l’angle bissecteur et de la fonction d’étanchéité, et un critère global dans lequel l’angle bissecteur est remplacé par l’angle solide sous lequel un sommet voit sa surface d’influence. Le critère local permet de simplifier efficacement les objets 2D lorsque le bruit reste faible. Le critère global s’avère particulièrement efficace pour trouver des squelettes filiformes associés aux objets.

Les approches proposées ont été rendues possibles grâce à l’utilisation de squelettes continus, contenant plus d’informations que leurs homologues discrets. De plus, les résultats sur la convergence des squelettes continus nous ont permis de tester nos méthodes en présence de bruit, chose impossible dans le cas discret.

L’un des points forts du chapitre a consisté à introduire la notion de graphe de paramètres. Ce dernier fournit une représentation synthétique du squelette. Il permet de visualiser directement l’influence du bruit et de choisir en conséquence les paramètres de la simplification.

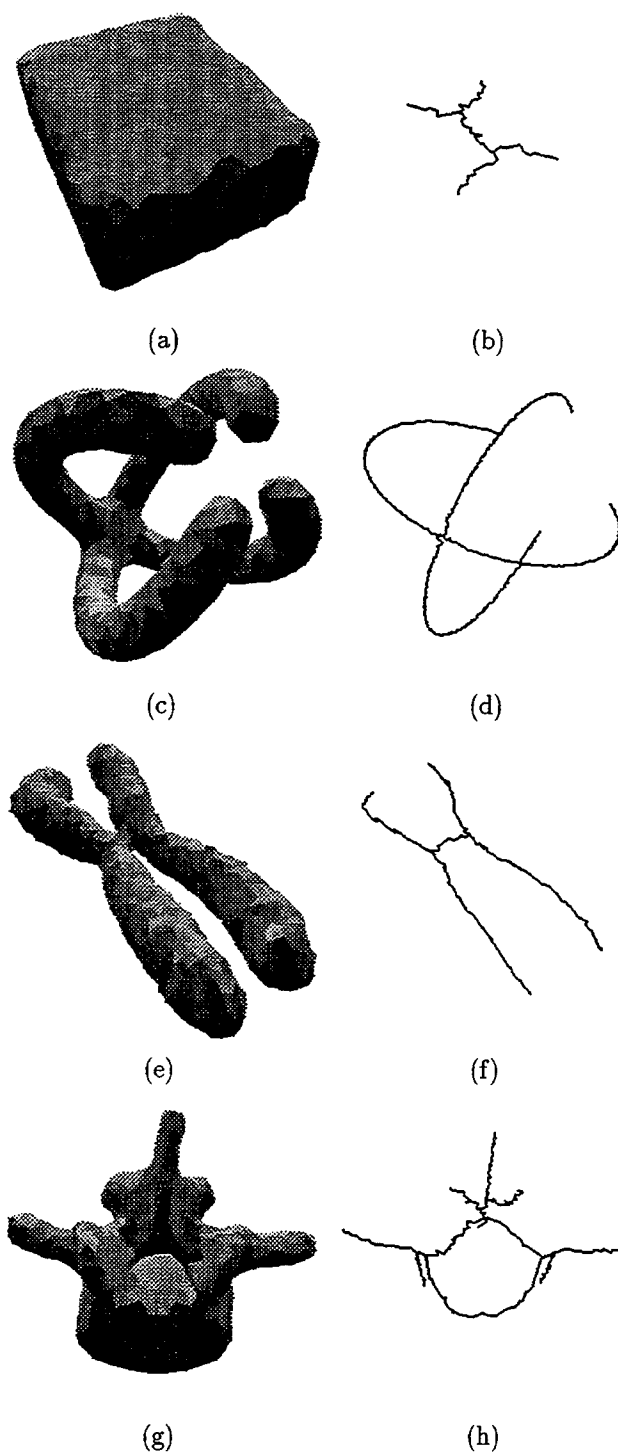


FIG. 79 - (a,c,e,g) *Formes continues.* (b,d,f,h) *Squelettes filiformes obtenus avec le critère C'_2 pour $\Omega_0 = 2\pi$ et $\rho_0 = 0$.*

L'extension de ces méthodes peut s'envisager selon deux directions différentes. Tout d'abord, on peut vouloir supprimer des sommets uniformément sur tout le squelette et non plus uniquement sur la périphérie. Ensuite, nous avons supposé que le squelette simplifié formait un sous-ensemble du squelette initial ; or, lorsque la forme initiale contient des petits trous dus aux bruits, il peut être intéressant de déformer le squelette afin de le recentrer dans la forme.

Chapitre 7

Applications

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une application des squelettes 2D qui valide notre approche et illustre son intérêt sur des données biologiques.

En 1993, le laboratoire TIMC-IMAG était impliqué dans un projet européen dans le domaine de la biologie et de la médecine (programme AIM, project IMPACT A2017 92-93). Notre contribution a consisté à inclure dans l'environnement du microscope informatisé Zeiss AxioHOME, un outil efficace permettant d'extraire des zones d'influence sur des structures de tissus humains.

Tandis que la section 7.2 décrit brièvement le projet IMPACT, la section 7.3 présente notre contribution personnelle à ce projet. Finalement, la section 7.4 conclut ce chapitre.

7.2 Contexte

7.2.1 Histopathologie

L'histopathologie est l'étude des structures présentes dans des coupes de tissus humains (voir figures 80 et 81). L'organisation des cellules et des glandes dans le liquide intercellulaire permet de grader l'état d'avancement d'une pathologie (cancer, hyperplasie, atrophie, inflammation, etc). Pour quantifier de façon objective les structures présentes sur la lame, on aimerait pouvoir substituer à l'évaluation différentielle et subjective du pathologiste, la mesure automatique d'un paramètre traduisant l'évolution de l'état normal vers l'état cancéreux ou l'hyperplasie. Des techniques existent, qui utilisent pour la plupart un partitionnement de Voronoï [Ahu82, Ahu89, Mar93].

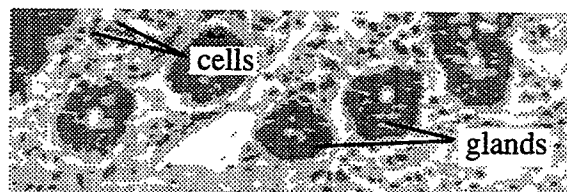
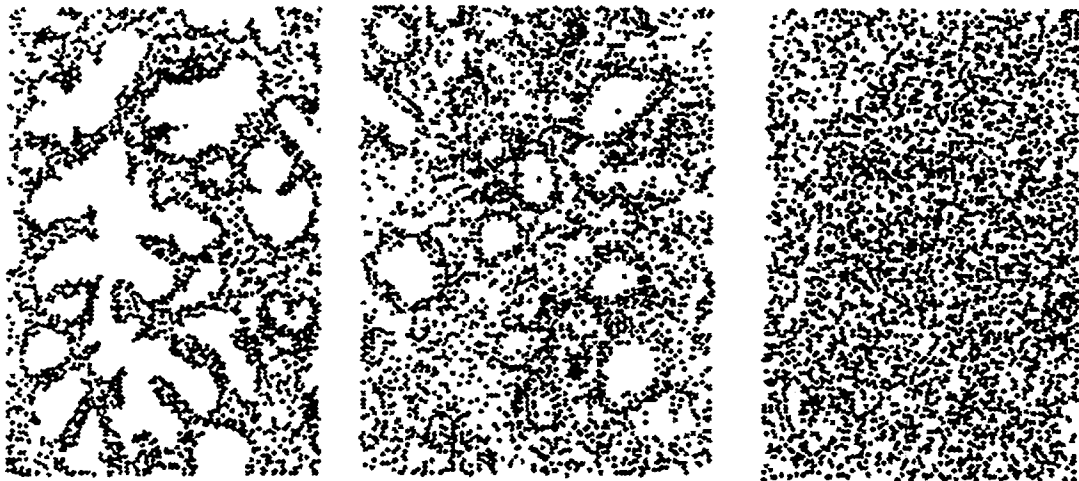


FIG. 80 - *Exemple d'éléments présents sur une lame.*

Dans le cas d'une population formée d'un seul type d'entités (cellules), ces techniques consistent à représenter chaque élément par son centre de gravité et à calculer

le graphe de Voronoï des centres de gravité. Chaque cellule se voit ainsi associer un polygone de Voronoï dont la forme et la surface varient au sein de la population. La mesure de ces variations permet de caractériser la topographie de la population. Par exemple, Marcelpoil [Mar93] propose de calculer trois paramètres (non explicités ici) qui sont :

- le facteur de forme moyen des polygones,
- l'homogénéité géométrique,
- le désordre surfacique.



(a) Hyperplasie

(b) Tissu normal

(c) Carcinome

FIG. 81 - *Différentes organisations de cellules dans un tissu prostatique. Seuls les centres de gravité des noyaux des cellules ont été représentés (extrait de [Mar93]).*

Dans le cas de tissus formés de structures complexes (cellules + glandes), les mesures précédentes doivent être effectuées sur des sous-populations de cellules dans le voisinage d'une glande donnée. Le squelette par zone d'influence permet alors de trouver quelles sont les sous-populations de cellules à considérer et fournit un découpage pertinent du tissu à étudier.

7.2.2 Microscope informatisé AxioHOME

Le microscope informatisé HOME est un prototype qui a été développé dans le laboratoire RFMQ - TIMC dans le cadre de deux projets européens successifs HOME (Highly Optimized Microscope Environment - 1989/1991) et IMPACT (Integration Microscopy for Pathology Activities and Computer Technology - 1991/1994) de l'action concertée AIM (Advanced Informatic in Medecine) de la Communauté européenne [Bru92]. Ces projets ont regroupé des laboratoires européens de recherche et développement (MRC - Edinburgh, TIMC - Grenoble, Sylvius Laboratories - Leiden), des laboratoires de pathologie (Academisch Ziekenhuis - Nijmegen, St Bartholomews - London, Rigshospitalet - Copenhagen) et des partenaires industriels (Zeiss, Alcatel).

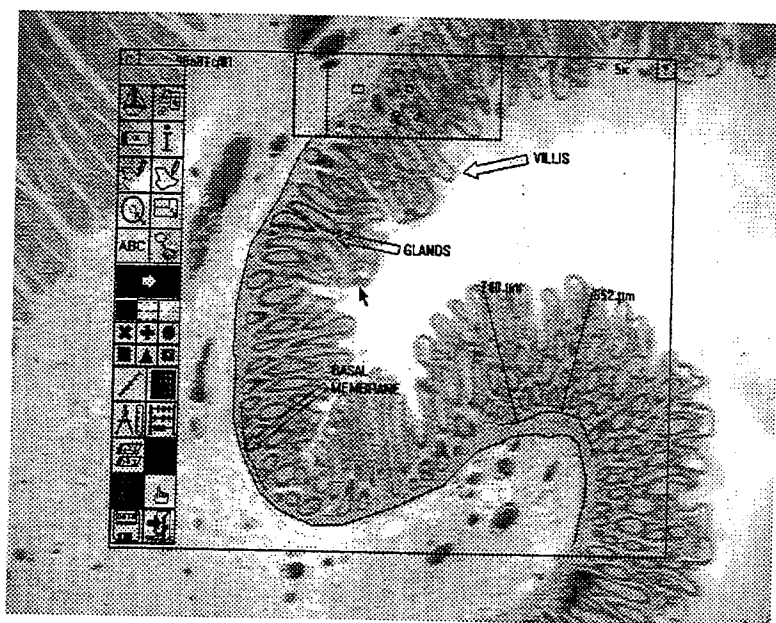


FIG. 82 - Interface utilisateur superposée à l'image optique d'une lame.

L'environnement de travail HOME comprend un ordinateur et un microscope optique. Les déplacements de la platine du microscope ainsi que les changements d'objectif sont transmis à l'ordinateur. De plus, un système permet à l'utilisateur de voir à travers les oculaires du microscope le contenu de l'écran superposé à l'image de la lame [Kri93] (voir figure 82). Ce système a l'avantage de ne pas entraîner de fatigue visuelle supplémentaire due à l'accommodation entre l'image microscopique d'une part et l'écran de l'ordinateur d'autre part. La convivialité est ainsi optimale.

7.2.3 Logiciel

Le logiciel développé sous HOME a pour but de fournir aux pathologistes un outil simple pour les aider à établir un diagnostic. L'interface fournit les mêmes fonctionnalités qu'un logiciel de dessin vectoriel. L'utilisateur sélectionne les différents objets qu'il désire étudier en traçant leur contour à l'aide d'une souris. Les glandes sont donc représentées par des polygones et les cellules par des points [Ber94c].

La philosophie HOME est propice à une approche continue. Les objets sont segmentés à la main par l'utilisateur qui en donne directement une approximation polygonale. Dans ce contexte, nous avons cherché à calculer le squelette par zones d'influences d'un ensemble de glandes approchées par des polygones.

7.3 Squelette par zones d'influence

7.3.1 Définitions - généralités

Le squelette par zones d'influence, encore appelé graphe de Voronoï généralisé se définit à partir de la notion de *zones d'influence*:

Définition 7.1 (Zone d'influence) Soit $\mathcal{X} = \cup X_i$, un ensemble fini d'objets X_i disjoints deux à deux. La zone d'influence $iz(X_i)$ associée à l'objet X_i est l'ensemble des points du plan plus proche de X_i que de tout autre objet :

$$iz(X_i) = \{m \in \mathbb{R}^N, \forall j \neq i, d(m, X_i) < d(m, X_j)\}$$

Définition 7.2 (Squelette par zones d'influence) Soit $\mathcal{X} = \cup X_i$, un ensemble fini d'objets disjoints deux à deux. Le squelette par zones d'influence $Skiz(\mathcal{X})$ est formé de la frontière des zones d'influence des objets X_i .

$$Skiz(\mathcal{X}) = \bigcup_i \partial iz(X_i)$$

Le squelette par zones d'influence ne doit pas être confondu avec le squelette du complémentaire dans lequel il est inclus. Un exemple de squelette par zones d'influence non connexe est présenté figure 83.

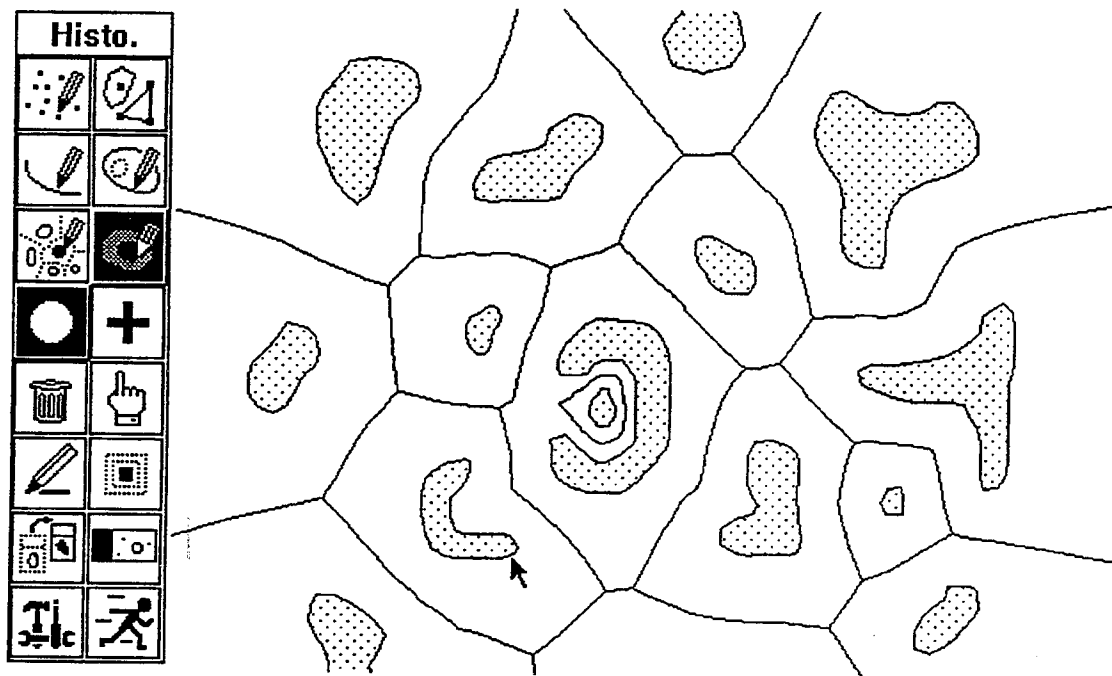


FIG. 83 - *Squelette par zones d'influence calculé sous HOME.*

7.3.2 Calcul

Le squelette par zones d'influence d'un ensemble $\mathcal{X}$ d'objets X_i est calculé à partir du graphe de Voronoï des points échantillonnant la frontière des objets X_i . Il est formé des sommets et des arêtes de Voronoï dont le dual (triangle de Delaunay ou arête de Delaunay) prend appui sur au moins deux objets différents (voir figures 83 et 84). Le squelette par zones d'influence ainsi approché possède l'avantage d'être toujours défini. Aucun cas pathologique n'est à considérer.

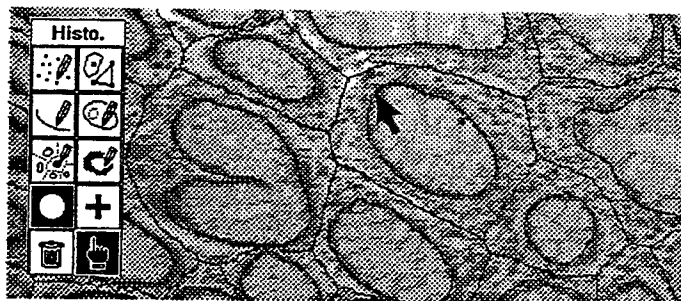


FIG. 84 - *Squelette par zones d'influence d'un ensemble de glandes sélectionnées par l'utilisateur.*

La complexité du calcul est en $O(n \log n)$, où n représente le nombre de points

échantillonnant la frontière des objets. Sur un PC compatible 486, le calcul est rapide et s'avère totalement adapté à une application ayant des impératifs de temps réel.

Une amélioration possible porte sur l'échantillonnage des objets. En effet, lorsque l'utilisateur dessine un polygone, la distribution des sommets de ce polygone dépend du mouvement effectué avec la souris. Si le mouvement du curseur est rapide (dessin d'une ligne droite), le nombre de sommets est faible. Au contraire, lorsque l'utilisateur dessine lentement, le nombre de sommets est élevé. Ceci peut conduire à des squelettes présentant un aspect en dent de scie déplaisant.

Un rééchantillonnage de la frontière permettrait d'atténuer ce phénomène. Dans [Boi92b], un procédé d'ajout des points force le squelette à rester à l'intérieur de la forme. Des améliorations pourraient être envisagées qui autorisent la suppression ou le déplacement de points frontières. Ce thème de recherche offre d'intéressantes perspectives de travail.

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé avec succès l'approche continue pour calculer des zones d'influence $2D$. Notre démarche s'avère particulièrement bien adaptée à ce genre de problème où la seule information disponible est une approximation polygonale de la frontière. Les temps de calcul sont faibles et les résultats obtenus nous ont encouragés à poursuivre dans cette voie.

D'autres applications, portant cette fois-ci sur des données médicales $3D$, sont en cours de réalisation et seront esquissées dans la conclusion générale.

Chapitre 8

Conclusion

8.1 Bilan

Dans ce mémoire de thèse, nous avons étudié la définition, le calcul et la simplification des squelettes d'objets $2D$ et $3D$. Le graphe de Voronoï s'est avéré un outil précieux, permettant de résoudre de nombreux problèmes comme la squelettisation mais aussi l'interpolation d'un ensemble de points.

Dans le chapitre 2, nous avons réalisé un état de l'art des méthodes de squelettisation. Trois familles de méthodes y sont présentées : les méthodes discrètes, les méthodes continues et les méthodes exactes. Le chapitre 2 se conclut par une étude portant sur le calcul de grandeurs géométriques d'un objet (surface, barycentre, directions principales, ...). Nous avons présenté une formule originale qui permet de transformer une intégrale double sur l'objet en une intégrale simple sur le squelette.

Dans le chapitre 3, nous avons réalisé une synthèse des méthodes continues de squelettisation. Le principe de ces méthodes consiste à utiliser le graphe de Voronoï de points échantillonnant la frontière pour approcher le squelette. Les différentes façons de procéder ont été énumérées puis comparées dans des cas pathologiques comme dans des cas de convergence. Le résultat le plus original de ce chapitre porte sur une condition d'équivalence des deux principales méthodes de squelettisation.

Dans le chapitre 4, nous avons étudié les unions finies de sphères, appelées pour simplifier des *polyboules*. Nous avons analysé leur structure et mis à jour certaines analogies avec les polytopes. Il ressort de cette étude que le squelette d'une polyboule peut se construire de façon exacte à l'aide d'éléments très simples comme des segments de droite en $2D$ et des polygones en $3D$. Ce résultat nous a permis d'aboutir à une formulation originale des méthodes continues de squelettisation à partir des boules de Delaunay.

Dans le chapitre 5, nous avons abordé le problème de l'interpolation d'un ensemble de points $3D$ par des facettes triangulaires. Nous avons proposé une méthode originale, fondée sur le calcul du graphe de Delaunay. Le point fort de cette méthode est l'existence d'un théorème de convergence dans l'espace $2D$. Les résultats obtenus sont très convaincants en $2D$ comme en $3D$.

Dans le chapitre 6, nous avons décrit différentes façons de simplifier le squelette. La première méthode est fondée sur le calcul local de l'angle bissecteur et de la fonction d'étanchéité. Une représentation de ces deux paramètres sur un même graphe nous a permis de visualiser et de comprendre l'influence du bruit sur le squelette.

La deuxième méthode de simplification prend en compte des informations plus globales sur l'objet. Elle permet d'obtenir des squelettes filiformes 3D particulièrement représentatifs.

Enfin, nous avons appliqué nos travaux dans le cadre d'un projet médical européen. Cette expérience nous a permis de montrer la pertinence d'une approche continue.

8.2 Perspectives

De nombreuses perspectives de recherche et d'applications peuvent être envisagées, que nous récapitulons à présent. Certaines ont déjà été discutées au cours de ce mémoire.

Complexité de la représentation 3D

En 3D, nous avons constaté de façon expérimentale que le nombre de tétraèdres nécessaires au partitionnement d'un objet échantillonné par n points est de l'ordre de $8n$. La recherche de bornes linéaires inférieures et supérieures est un problème ouvert.

Interpolation

Dans le chapitre 5, nous avons proposé une technique pour trouver des surfaces fermées interpolant un ensemble de points. Un travail analogue pourrait être mené dans le cas de surfaces ouvertes.

Codage minimal

Le codage par boules maximales n'est pas optimal en nombre de boules extraites. Un procédé de sélection du nombre minimal de boules permettant malgré tout de reconstruire l'objet avec une précision donnée promet de beaux développements. Cela permettrait en particulier de construire de façon automatique des modèles suffisamment compacts pour pouvoir être utilisé pour l'animation en temps réel. Une collaboration sur ce sujet utilisant des données médicales 3D est en cours avec le laboratoire iMAGIS-IMAG.

Rééchantillonnage du squelette

Nous avons constaté que les sommets de Voronoï sont répartis de façon irrégulière sur le squelette. La distance entre deux sommets consécutifs varie considérablement selon que l'on se trouve sur la périphérie ou vers l'intérieur du squelette. Or, pour certaines applications comme l'analyse des chromosomes étalés dans la métaphase, il est nécessaire de pouvoir parcourir à intervalles réguliers le squelette afin d'obtenir des profils d'intensité de fluorescence. Un rééchantillonnage des branches du squelette s'avère alors nécessaire.

Rééchantillonnage de la frontière

Les sommets des polygones approchant les objets sont parfois mal distribués et ne permettent pas un calcul optimal du squelette. En effet, il se peut qu'à certains endroits, la densité des points soit trop faible. À d'autres endroits, elle peut être inutilement élevée. Un rééchantillonnage de la frontière permettrait d'augmenter les performances de la squelettisation.

Découpage des formes

Tandis que dans le plan, un segment prenant appui sur la frontière d'un polygone suffit à partager ce polygone en deux, dans l'espace, un triangle prenant appui sur la frontière d'un polyèdre ne permet pas de le partitionner. Des algorithmes pour décomposer des objets 3D en sous-objets pourront faire l'objet de futurs travaux.

Nous espérons que ces quelques perspectives nous permettront de poursuivre avec bonheur les travaux exposés dans ce mémoire.

Annexe A

Homotopie

A.1 Généralités - Définitions

La topologie est un domaine mathématique qui s'intéresse aux propriétés des objets qui demeurent inchangées par des déformations continues (voir figure 86). Intuitivement, deux objets sont "topologiquement équivalents" si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation "continue". La condition essentielle est que les points de l'objet qui étaient proches les uns des autres avant la transformation demeurent proches les uns des autres dans l'objet transformé (voir figure 85).

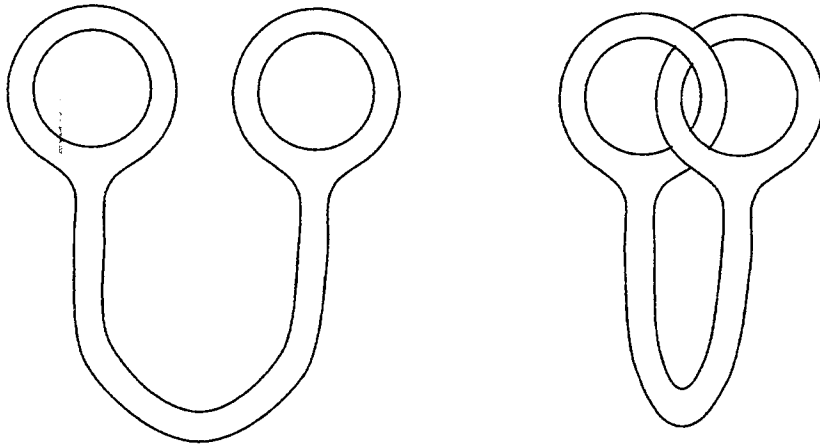


FIG. 85 - Deux objets topologiquement équivalents.

La notion mathématique permettant de formaliser le concept d'objets "topologiquement équivalents" est le type d'homotopie. Deux objets ont même type d'homotopie s'ils sont "topologiquement équivalents". Les définition du type d'homotopie nécessite d'introduire les notions d'applications homotopes et d'homotopies [God71].

Définition A.1 (Applications homotopes et homotopies) Soient f_0 et f_1 deux applications continues d'un espace X dans un espace Y . L'application f_0 est homotopie à l'application f_1 s'il existe une application continue F du produit $X \times [0, 1]$ dans Y telle que $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$. On dit que F est une homotopie de f_0 à f_1 .

Définition A.2 (Type d'homotopie) Deux espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe une application continue $f : X \rightarrow Y$ et une application continue $g : Y \rightarrow X$ telles que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ soient respectivement homotopes aux applications identiques de X et de Y .

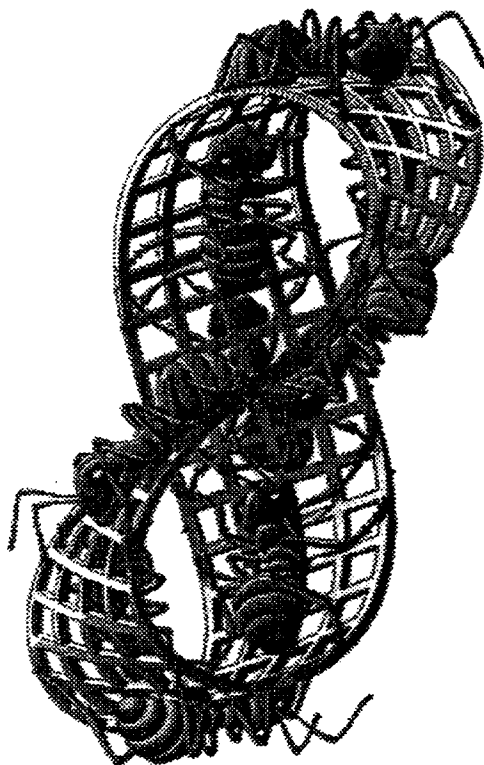


FIG. 86 - Le ruban de Möbius (dessin de M.C. Escher). D'un point de vue topologique, le ruban de Möbius se décrit comme une surface non orientable à un seul bord.

Nous rappelons le résultat suivant :

Proposition A.1 Deux espaces homéomorphes¹ ont même type d'homotopie.

Démonstration. Ce résultat se démontre de façon immédiate. Si X et Y sont homéomorphes, il existe une application bijective et continue $f : X \rightarrow Y$ dont la réciproque est continue. Comme $f \circ f^{-1} = Id_Y$, les applications $f \circ f^{-1}$ et Id_Y sont trivialement homotopes. Pour la même raison, les applications $f^{-1} \circ f$ et Id_X sont homotopes car égales. ■

Par la suite, nous rappelons deux résultats portant respectivement sur le type d'homotopie des squelettes (section A.2) et des graphes (section A.3). Ces résultats interviennent à des endroits clef du document (chapitres 2, 3 et 6) sans pourtant être clairement énoncés. Il nous a paru important de les regrouper dans une annexe et de donner des éléments de démonstration dans l'espace 2D.

1. On dit que deux espaces X et X' sont homéomorphes s'il existe une application bijective et continue $f : X \rightarrow X'$ dont la réciproque est continue.

A.2 Type d'homotopie du squelette

Il est généralement admis dans la littérature que l'objet et son squelette ont même type d'homotopie. Cette propriété est essentielle car elle justifie l'utilisation du squelette en temps que descripteur de formes. Dans cette section, nous rappelons quelles hypothèses sont nécessaires pour établir ce résultat. Puis, nous donnons une démonstration dans l'espace $2D$.

Proposition A.2 *Soit X un ouvert du plan vérifiant les hypothèses 2.1. Alors, X et $\text{Sk}(X)$ ont même type d'homotopie.*

Démonstration. Il s'agit de trouver deux applications continues $\sigma : X \rightarrow \text{Sk}(X)$ et $i : \text{Sk}(X) \rightarrow X$ telles que $\sigma \circ i$ soit homotope à $\text{Id}_{\text{Sk}(X)}$ et $i \circ \sigma$ soit homotope à Id_X .

Comme $\text{Sk}(X) \subset X$, nous pouvons définir $i : \text{Sk}(X) \rightarrow X$ comme l'injection canonique. Pour tout $x \in \text{Sk}(X)$, $i(x) = x$.

Pour définir σ , nous utilisons la notion d'amont [Sch93]. L'amont d'un point x de X est l'ensemble suivant:

$$A_m(x) = \{y, d(y, X^c) = d(x, X^c) + d(x, y)\}$$

Il est possible de montrer que l'amont de x est un segment (éventuellement réduit à un point) qui relie x au squelette. Nous définissons $\sigma(x)$ comme l'extrémité de l'amont appartenant au squelette:

$$\sigma(x) = A_m(x) \cap \text{Sk}(x)$$

Schmitt [Sch93] a montré que l'application σ ainsi définie est continue si le squelette est un graphe de type fini², autrement dit si X vérifie les hypothèses 2.1.

Comme $\sigma \circ i = \text{Id}_{\text{Sk}(X)}$, les applications $\sigma \circ i$ et $\text{Id}_{\text{Sk}(X)}$ sont trivialement homotopes.

Montrons maintenant que l'application $i \circ \sigma$ est homotope à l'identité Id_X . Le segment $[x, \sigma(x)]$ étant inclus dans X , il est possible de définir F de la façon suivante:

$$F : \begin{cases} X \times [0, 1] & \rightarrow X \\ (x, t) & \mapsto F(x, t) = t \cdot x + (1 - t) \cdot i \circ \sigma(x) \end{cases}$$

L'application F ainsi définie est continue. De plus, $F(x, 0) = i \circ \sigma(x)$ et $F(x, 1) = x$. F est bien une homotopie ce qui conclut la démonstration. ■

2. Un graphe est de type fini si le nombre d'arêtes incidentes à un sommet est fini et si l'ensemble des sommets du graphe est isolé.

A.3 Type d'homotopie du graphe dual

Dans le chapitre 3, nous avons admis que l'approximation polygonale X_w et le squelette défini par dualité $\text{Dual}(X_w)$ avaient même type d'homotopie. Ce résultat est également utilisé dans le chapitre 6 pour simplifier les squelettes. Dans cette section, nous nous proposons de revenir plus en détail sur ce résultat, au travers de la proposition A.3. Les notations utilisées sont celles définies dans le paragraphe 3.2.

Proposition A.3 *Soit E un ensemble fini de points et $\text{Vor}(E)$, son graphe de Voronoï. Soit G un sous-ensemble borné de $\text{Vor}(E)$. Les deux ensembles G et $\text{Dual}(G)$ ont même type d'homotopie (voir figure 87).*

Dans la proposition, G représente un squelette et $\text{Dual}(G)$ la forme associée. Cette forme a la particularité d'être un ouvert.

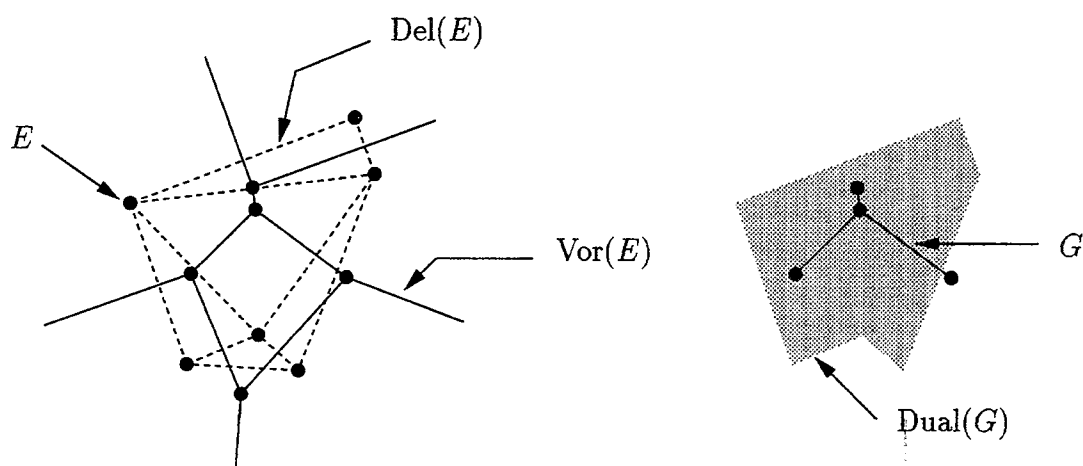


FIG. 87 - Illustration de la proposition A.3.

Démonstration. Nous allons nous contenter de démontrer la proposition dans l'espace $2D$, le cas $3D$ se déduisant facilement du cas $2D$.

Par la suite, G sera indifféremment considéré soit comme un graphe :

$$G = \langle V(G), E(G) \rangle$$

soit comme un ensemble de points :

$$G = \left(\bigcup_{v \in V(G)} \{v\} \right) \cup \left(\bigcup_{[v_0 v_1] \in E(G)}]v_0 v_1[\right)$$

Comme un sommet de Voronoï n'est pas forcément inclus dans son triangle de Delaunay, il en résulte que G n'est pas toujours inclus dans son dual. Pour démontrer le résultat, nous allons utiliser un graphe intermédiaire G^* qui aura la propriété d'être inclus dans $\text{Dual}(G)$ (voir figure 88). Notons $B(v)$, le barycentre du triangle de Delaunay associé au sommet v . Le graphe G^* est construit en remplaçant chaque sommet v de G par le point $B(v)$ et chaque arête $]v_0v_1[$ par le segment $]B(v_0)B(v_1)[$. Nous avons :

$$G^* = \left(\bigcup_{v \in V(G)} \{B(v)\} \right) \cup \left(\bigcup_{]v_0v_1[\in E(G)}]B(v_0)B(v_1)[\right)$$

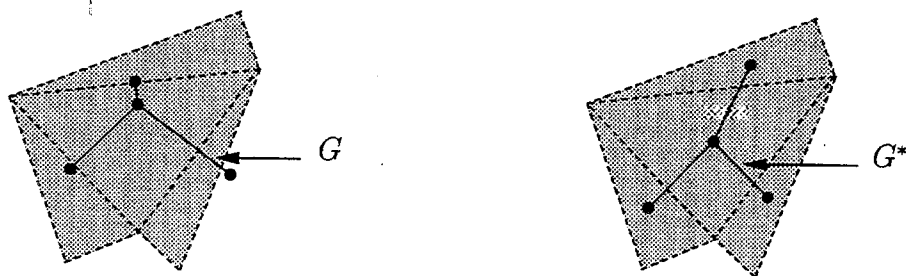


FIG. 88 - Les graphes G et G^* .

Nous allons montrer dans un premier temps que G et G^* ont même type d'homotopie. D'après la proposition A.1, il suffit de trouver un homéomorphisme $f : G \rightarrow G^*$. Soit m , un point quelconque de G . m s'écrit sous la forme $m = \lambda \cdot v + (1 - \lambda) \cdot v'$, où $\lambda \in [0, 1]$, $v \in V(G)$ et $v' \in V(G)$. Posons $f(m) = \lambda \cdot B(v) + (1 - \lambda) \cdot B(v')$. L'application f est bien un homéomorphisme.

Montrons à présent que G^* et $\text{Dual}(G)$ ont même type d'homotopie. Pour cela, nous allons trouver deux applications continues $\sigma : \text{Dual}(G) \rightarrow G^*$ et $i : G^* \rightarrow \text{Dual}(G)$ telles que $\sigma \circ i$ soit homotope à Id_{G^*} et $i \circ \sigma$ soit homotope à $\text{Id}_{\text{Dual}(G)}$. Par construction, $G^* \subset \text{Dual}(G)$. Notons $i : G^* \rightarrow \text{Dual}(G)$, l'injection canonique. Pour tout $m \in \text{Dual}(G)$, $i(m) = m$. Reste à construire une application continue $\sigma : \text{Dual}(G) \rightarrow G^*$. Soit $m \in \text{Dual}(G)$. Plusieurs cas sont à distinguer (voir figure 89) :

- m se trouve sur une arête de Delaunay $]ab[$. Posons alors :

$$\sigma(m) = [ab] \cap G$$

- m appartient au triangle de Delaunay $]abc[$ de barycentre $B(v)$ et plus particulièrement au sous-triangle $[abB(v)]$, dans lequel $]ab[\not\subset \text{Dual}(G)$. Posons alors :

$$\sigma(m) = B(v)$$

- m appartient au triangle de Delaunay $]abc[$ de barycentre $B(v)$ et plus particulièrement au sous-triangle $[akB(v)]$, dans lequel $]ab[\subset \text{Dual}(G)$ et $k = [ab] \cap G$. Posons alors :

$$\sigma(m) = (ma) \cap [kB(v)]$$

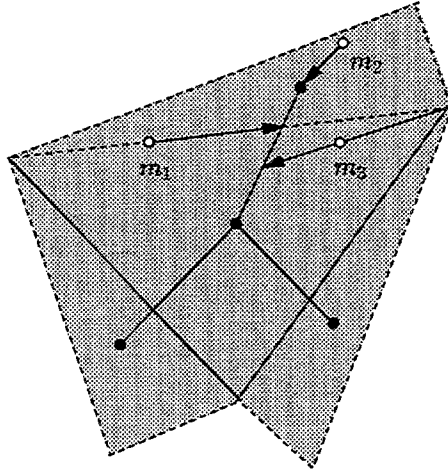


FIG. 89 - Les points m_1 , m_2 et m_3 correspondent aux trois cas de figures rencontrés pour définir l'application σ . Les extrémités des flèches pointent sur les projetés $\sigma(m_1)$, $\sigma(m_2)$ et $\sigma(m_3)$.

L'application σ est continue par construction. Comme $\sigma \circ i = Id_{G^*}$, les applications $\sigma \circ i$ et Id_{G^*} sont trivialement homotopes. Montrons maintenant que l'application $i \circ \sigma$ est homotope à l'identité $Id_{\text{Dual}(G)}$. Le segment $[m, \sigma(m)]$ étant inclus dans $\text{Dual}(G)$, il est possible de définir F de la façon suivante :

$$F : \begin{cases} \text{Dual}(G) \times [0, 1] & \rightarrow \text{Dual}(G) \\ (m, t) & \mapsto F(m, t) = t \cdot m + (1 - t) \cdot i \circ \sigma(m) \end{cases}$$

L'application F ainsi définie est continue. De plus, $F(m, 0) = i \circ \sigma(m)$ et $F(m, 1) = m$.

Par transitivité de la relation "à même type d'homotopie", nous venons d'établir le résultat. ■

Bibliographie

- [Ahu82] N. Ahuja. Dot pattern processing using Voronoi neighborhoods. *IEEE Trans. on PAMI*, 4(3):336–343, May 1982.
- [Ahu89] N. Ahuja and M. Tuceryan. Extraction of early perceptual structure in dot patterns: Integrating region, boundary, and component gestalt. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 48:304–356, 1989.
- [Arc81] C. Arcelli. Pattern thinning by contour tracing. *Computer Graphics and Image Processing*, 17:130–144, 1981.
- [Arc89] C. Arcelli and G. Sanniti di Baja. A one-pass two-operation process to detect the skeletal pixels on the 4-distance transform. *IEEE Trans. on PAMI*, 11(4):411–414, 1989.
- [Att93a] D. Attali and A. Montanvert. Squelettes et diagrammes de Voronoi. Technical Report RR 922, IMAG, Grenoble, 1993.
- [Att93b] D. Attali and E. Thiel. Du squelette discret ou continu. In *Discrete Geometry for Computer Image*, pages 236–244, Strasbourg, September 1993.
- [Att94a] D. Attali, P. Bertolino, and A. Montanvert. Using polyballs to approximate shapes and skeletons. In *12th International Conference on Pattern Recognition*, pages 626–628, Jerusalem, Israel, October 1994.
- [Att94b] D. Attali and A. Montanvert. Semicontinuous skeletons of 2D and 3D shapes. In C. Arcelli et al., editors, *Aspects of Visual Form Processing*, pages 32–41. World Scientific, Singapore, 1994.
- [Att95a] D. Attali and A. Montanvert. Computing and simplifying 2D and 3D semicontinuous skeletons. *CVGIP: Image Understanding*, 1995. To appear.

- [Att95b] D. Attali, G Sanniti di Baja, and E. Thiel. Pruning discrete and semi-continuous skeletons. In L. De Floriani C. Braccini and G. Vernazza, editors, *Lecture Notes in Computer Science, Image Analysis and Processing*, volume 974, pages 488–493. Springer-Verlag, 1995. Proc. of the 8th International Conference on Image Analysis and Processing.
- [Aur88] F. Aurenhammer. Improved algorithms for discs and balls using power diagrams. *J. Algorithms*, 9:151–161, 1988.
- [Aur91] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 33(3):345–405, 1991.
- [Avis88] D. Avis, B. K. Bhattacharya, and H. Imai. Computing the volume of the union of spheres. *Visual Comput.*, 3:323–328, 1988.
- [Bai92] E. Bainville. Reconstruction d'objets tridimensionnels à partir de silhouettes. Master's thesis, ENS de Lyon, Lyon, 1992.
- [Ber78] M. Berger. *Géométrie : 3. Convexes et Polytopes, Polyédres régulier, Aires et Volumes*. CEDIC, Fernand Nathan, CNRS, 1978.
- [Ber92] E. Bertin and J.-M. Chassery. 3D Voronoi diagram: Application to segmentation. In *11th International Conference on Pattern Recognition*, pages 197–200, The Netherlands, 1992.
- [Ber94a] E. Bertin. *Diagrammes de Voronoï 2D et 3D: Applications en analyse d'images*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1994.
- [Ber94b] E. Bertin and J.-M. Chassery. 3D generalized Voronoi diagram for a set of polyhedra. In P.-J. Laurent, A. le Mehautè, and L. L. Schumaker, editors, *Curves and Surfaces in Geometric Design*, pages 43–50. A. K. Peters, Wellesley, MA, 1994.
- [Ber94c] P. Bertolino and C. Sowter. Histometry: A new concept for an old word and its potential for quantitative pathology. In *Third Conference of the European Society of Analytical Cellular Pathology*, page 251, Grenoble, 1994.

- [Blu67] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380, Cambridge, MA, 1967. M.I.T. Press.
- [Blu78] H. Blum and R. N. Nagel. Shape description using weighted symmetric axis features. *Pattern Recognition*, 10:167–180, 1978.
- [Boi82] J. D. Boissonnat. Representation of objects by triangulating points in 3-D space. In *Proc. of the 6th International Conference on Pattern Recognition*, pages 830–832, 1982.
- [Boi84] J. D. Boissonnat. Geometric structures for three-dimensional shape representation. *ACM Transactions on Graphics*, 3(4):266–286, October 1984.
- [Boi85] J. D. Boissonnat. Reconstruction of solids. In *Proc. of the symposium on Computational Geometry*, pages 46–54, Baltimore, Maryland, 1985.
- [Boi88] J. D. Boissonnat. Shape reconstruction from planar cross sections. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 44:1–29, 1988.
- [Boi92a] J. D. Boissonnat, A. Cérézo, O. Devillers, J. Duquesne, and M. Yvinec. An algorithm for constructing the convex hull of a set of spheres in dimension d . In *Proc. 4th Cand. Conf. Comput. Geom.*, pages 269–273, 1992.
- [Boi92b] J. D. Boissonnat and B. Geiger. Three dimensional reconstruction of complex shapes based on the Delaunay triangulation. Technical Report No. 1697, INRIA, May 1992.
- [Boi95] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec. *Géométrie Algorithmique*. Ediscience international, 1995.
- [Boo79] F. L. Bookstein. The line skeleton. *Comput. Graphics Image Process.*, 11:123–137, 1979.
- [Bor86] G. Borgefors. Distance transformations in digital images. *Computer Graphics and Image Processing*, 34:344–371, 1986.
- [Bor93] G. Borgefors. Centres of maximal disks in the 5-7-11 distance transform. In *Proc. of the 8th Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pages 105–111, Tromsø, Norway, 1993.

- [Bra92] J. W. Brandt and V. R. Algazi. Continuous skeleton computation by Voronoi diagram. *CVGIP: Image Understanding*, 55(3):329–337, 1992.
- [Bra94] J. W. Brandt. Convergence and continuity criteria for discrete approximations of the continuous planar skeletons. *CVGIP: Image Understanding*, 59(1):116–124, 1994.
- [Bru92] G. Brugal, R. Dye, B. Krief, J.-M. Chassery, H. Tanke, and J. Tucker. HOME: Highly Optimized Microscope Environment. *Cytometry*, 13:109–116, 1992.
- [Cha91] J.-M. Chassery and A. Montanvert. *Géométrie discrète en analyse d'images*. Editions Hermès, 1991.
- [Cho88] B. K. Choi, H. Y. Shin, Y. I. Yoon, and J. W. Lee. Triangulation of scattered data in 3D space. *Computer Aided Design*, 20(5):239–248, 1988.
- [Col92] A. C. F. Colchester, G. P. Robinson, and L. D. Griffin. A unified approach to the segmentation of grey-level and dot-pattern. In *Proc. of the 11th International Conference on Pattern Recognition*, pages 319–322, The Netherlands, 1992.
- [Dan80] P. E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 7:227–248, 1980.
- [Dev92a] O. Devillers. Randomization yields simple $O(n \log^* n)$ algorithms for difficult Ω problems. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 2(1):97–111, 1992.
- [Dev92b] O. Devillers, S. Meiser, and M. Teillaud. The space of spheres, a geometric tool to unify duality results on Voronoi diagrams. In *Proc. 4th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pages 263–268, 1992.
- [Dic92] M. T. Dickerson, R. L. Drysdale, and J. R. Sack. Simple algorithms for enumerating interpoint distances and finding k nearest neighbors. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 2(3):221–239, 1992.
- [Dil87] M. B. Dillencourt. A non-Hamiltonian, nondegenerate Delaunay triangulation. *Information Processing Letters*, 25(3):149–151, 1987.

- [Dor86] L. Dorst. Pseudo-euclidean skeletons. In *8th International Conference on Pattern Recognition*, pages 286–288, 1986.
- [Dwy88] R. A. Dwyer. Average-case analysis of algorithms for convex hulls and Voronoi diagrams. Technical Report CMU-CS-88-132, Departement of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1988.
- [Dye79] C. R. Dyer and A. Rosenfeld. Thinning algorithms for gray-scale pictures. *IEEE Trans. on PAMI*, 1(1):88–89, 1979.
- [Dyn90] N. Dyn, D. Levine, and S. Rippa. Data dependant triangulations for piecewise linear interpolation. *IMA J. Numer. Anal.*, 10:137–154, 1990.
- [Ede83] H. Edelsbrunner, D. G. Kirkpatrick, and R. Seidel. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(4):551–559, 1983.
- [Ede93] H. Edelsbrunner. The union of balls and its dual shape. In *9th annual symposium on Computational Geometry*, pages 218–229, San Diego, California, May 1993.
- [Ede94] H. Edelsbrunner and E. P. Mucke. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Transactions on Graphics*, 13(1):43–72, 1994.
- [Fai83] J. Fairfield. Segmenting dot patterns by voronoi diagram concavity. *IEEE Trans. on PAMI*, 5(1):104–110, 1983.
- [Fav93] C. Favardin. *Détermination automatique de structures géométriques destinées à la reconstruciton de courbes et de surfaces à partir de données ponctuelles*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1993.
- [For87] S. J. Fortune. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. *Algorithmica*, 2:153–174, 1987.
- [Fri94] D. S. Fritsch, S. M. Pizer, B. S. Morse, D. H. Eberly, and A. Liu. The multiscale medial axis and its applications in image registration. *Pattern Recognition Letters*, 15:445–452, May 1994.
- [Gab69] K. R. Gabriel and R. R. Sokal. A new statistical approach to geographic variation analysis. *Systematic Zoology*, 18:259–278, 1969.

- [Gas93] M.-P. Gascuel. An implicit formulation for precise contact modeling between flexible solids. In *SIGGRAPH'93*, pages 313–320, Anaheim, California, August 1993.
- [Gla91] A. S. Glassner. *An introduction to ray tracing*. Academic Press, 1991.
- [God71] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, 1971.
- [Gon90] W. Gong and G. Bertrand. A simple parallel 3-D thinning algorithm. *10th International Conference on Pattern Recognition*, pages 188–190, 1990.
- [Haf84] K. J. Hafford and K. Preston. Three-dimensional skeletonization of elongated solids. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 27:78–91, 1984.
- [Hal94] D. Halperin and M. H. Overmars. Spheres, molecules and hidden surface removal. In *Proc. 10th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 113–122, 1994.
- [Hil91] S. Hildebrandt and A. Tromba. *Mathématiques et formes optimales : l'explication des structures naturelles*. L'univers des sciences. Pour la science - Diffusion Belin, 1991.
- [Hop83] J. E. Hopcroft, J. T. Schwartz, and M. Sharir. Efficient detection of intersections among spheres. *Internat. J. Robot. Res.*, 2(4):77–80, 1983.
- [Hop92] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonnald, and W. Stuetzle. Surface reconstruction from unorganized points. *SIGGRAPH'92, Computer Graphics*, 26(2):71–77, 1992.
- [Hu91] H. T. Hu. *Diagramme de Voronoï Généralisé pour un ensemble de Polygones*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1991.
- [Ima85] H. Imai, M. Iri, and K. Murota. Voronoi diagram in the Laguerre geometry and its applications. *SIAM J. Comput.*, 14(1):93–105, 1985.
- [Ked86] K. Kedem, R. Livne, J. Pach, and M. Sharir. On the union of Jordan regions and collision-free translational motion amidst polygonal obstacles. *Discrete and Computational Geometry*, 1:59–71, 1986.

- [Kir79] D. G. Kirkpatrick. Efficient computation of continuous skeletons. In *20th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 18–27, 1979.
- [Kle89] R. Klein. Concrete and abstract Voronoi diagram. In *Lecture notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1989.
- [Kof86] P.-A. Kofakis. *Prise et Reconnaissance des objets en Vrac*. PhD thesis, Université Paris XI, Orsay, 1986.
- [Kri93] B. Krief. *HOME: Highly Optimized Microscope Environment. Concept et développement d'un système de microscopie assistée par ordinateur appliqué à la pathologie de routine*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1993.
- [Lam92] L. Lam, S.-W. Lee, and C. Y. Suen. Thinning methodologies - a comprehensive survey. *IEEE Trans. on PAMI*, 14(9):869–885, September 1992.
- [Lav92] D. Lavender, A. Bowyer, J. Davenport, A. Wallis, and J. Woodwark. Voronoi diagrams of set-theoretic solid models. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(5):69–77, 1992.
- [Lee82] D. T. Lee. Medial axis transformation of a planar shape. *IEEE Trans. on PAMI*, 4(4):363–369, July 1982.
- [Lee94] T.-C. Lee and Kashyap R. L. Building skeleton models via 3-D medial surface/axis thinning algorithms. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 56(6):462–478, November 1994.
- [Ley92] F. Leymarie and M. D. Levine. Simulating the grassfire transform using an active contour model. *IEEE Trans. on PAMI*, 14(1):56–75, 1992.
- [Lob80] S. Lobregt, W. Verbeek, and F. C. A. Groen. Three-dimensional skeletonization: Principle and algorithm. *IEEE Trans. on PAMI*, 2:75–77, 1980.
- [Mal92] G. Malandain and G. Bertrand. Fast characterization of 3D simple points. In *11th International Conference on Pattern Recognition*, pages 232–235, 1992.

- [Mar87] M. P. Martinez-Perez, J. Jimenez, and J. L. Navalon. A thinning algorithm based on contours. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 39:186–201, 1987.
- [Mar93] R. Marcelpoil. *Méthodologie pour l'étude de la sociologie cellulaire : application à l'étude de tissu prostatique*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1993.
- [Mat88] G. Matheron. Examples of topological properties of skeletons. In J. Serra, editor, *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*, chapter 11, pages 217–238. Academic Press, London, 1988.
- [Mat93] J. Mattioli. *Problèmes Inverses et Relations Différentielles en Morphologie Mathématique*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 1993.
- [May95] N. Mayya and V.T. Rajan. An efficient shape representation scheme using Voronoi skeletons. *Pattern Recognition Letters*, 16(2):147–160, 1995.
- [Mig94] S. Miguet and V. Marion-Poty. A new 2-D and 3-D thinning algorithm based on successive border generations. In *4th Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 195–206, Grenoble, September 1994.
- [Mon69] U. Montanari. Continuous skeletons from digitized images. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 16(4):534–549, October 1969.
- [Mon87] A. Montanvert. *Contribution au traitement de formes discrètes : Squelettes et codage par graphe de ligne médiane*. PhD thesis, Université Joseph Fourier and INPG, Grenoble, 1987.
- [Mon93] A. Montanvert and Y. Usson. Discrete distances applied to 2D granulometry and 3D reconstruction. In *Proc. of the 8th SCIA*, pages 1153–1160, Tromsø, Norway, 1993.
- [Mur90] O. J. Murphy and S. M. Selkow. Finding nearest neighbors with Voronoi tessellations. *Inform. Process. Lett.*, 34(1):37–41, February 1990.
- [Nib92] C. W. Niblack, P. B. Gibbons, and D. W. Capson. Generating skeletons and centerlines from the distance transform. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 54(5):420–437, 1992.

- [Ogn92a] R. Ogniewicz. *Discrete Voronoi Skeletons*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, 1992.
- [Ogn92b] R. Ogniewicz and M. Ilg. Voronoi skeletons: Theory and applications. In *Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 63–69, Champaign, Illinois, June 1992.
- [Ogn94] R. Ogniewicz. A multiscale MAT from Voronoi diagrams: the skeleton-space and its application to shape description and decomposition. In C. Arcelli et al., editors, *Aspects of Visual Form Processing*, pages 430–439. World Scientific, Singapore, 1994.
- [Oli95] Oliva J. M. and M. Perrin. A new general method for reconstructing polyhedral shape robust to topology variation. In *Eurographics'95*, 1995. Submitted.
- [ORo81] J. O'Rourke. Polyhedra of minimal area as 3d objects models. In *Proc. of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 664–666, 1981.
- [ORo87] J. O'Rourke, H. Booth, and R. Washington. Connect-the-dots: A new heuristic. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 39:258–266, 1987.
- [Pav80] T. Pavlidis. A thinning algorithm for discrete binary images. *Computer Graphics and Image Processing*, 13:142–157, 1980.
- [Pre88] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry: an Introduction*. Springer-Verlag, 1988.
- [Ril64] J. Riley and L. Calabi. Certain properties of circles inscribed in simple closed curves. Technical Report 59281, Park Math. Lab. Inc., One River Road, Carlisle, Massachusetts, 1964.
- [Rip90] S. Rippa. Minimal roughness property of the Delaunay triangulation. *Computer Aided Geometric Design*, 7:489–497, 1990.
- [Rol91] F. Rolland, A. Montanvert, and J.-M. Chassery. 3D medial axis and 3D skeletons. In *Proc. of the 7th Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pages 395–402, Aalborg, Denmark, 1991.

- [Rol92] F. Rolland, J.-M. Chassery, and A. Montanvert. 3D medial surfaces and 3D skeletons. In C. Arcelli, L.P. Cordella, and G. Sanniti di Baja, editors, *Visual Form-Analysis and Recognition*, pages 443–450, New-York, 1992. Plenum.
- [Ros66] A. Rosenfeld and J. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 13(4):471–494, 1966.
- [Rou94] J.-C. Roux. *Méthodes d'approximation et de géométrie algorithmique pour la reconstruction de courbes et surfaces*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, February 1994.
- [San92] M. Sanner. *Sur la modélisation des surfaces moléculaires*. PhD thesis, Université de Haute Alsace, Mulhouse, 1992.
- [Sch89] M. Schmitt. Some examples of algorithms analysis in computational geometry by means of mathematic morphology techniques. In J. D. Boissonnat and J. P. Laumond, editors, *Lecture Notes in Computer Science, Geometry and Robotics*, volume 391, pages 225–246, Berlin, 1989. Springer-Verlag.
- [Sch90] L. L. Schumaker. Reconstructing 3D objects from cross-sections. In W. Dahemen et al., editor, *Computation of Curves and Surfaces*, pages 275–309, 1990.
- [Sch93] M. Schmitt and J. Mattioli. *Morphologie Mathématique*. Masson, 1993.
- [Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [Sha85] M. Sharir. Intersection and closest-pair problems for a set of planar discs. *SIAM J. Comput.*, 14(2), 1985.
- [Sha95] D. Shaked and A. M. Bruckstein. Pruning medial axes. Technical Report 9511, Technion - Israel Institute of technology, Haifa, Israel, 1995.
- [Sze92] G. Székely, C. Brechbuhler, O. Kubler, R. Ogniewicz, and T. Budinger. Mapping the human cerebral cortex using 3D medial manifolds. In *VBC'92, SPIE*, volume 1808, pages 130–143, 1992.

- [Tal92] H. Talbot and L. Vincent. Euclidean skeletons and conditional bisectors. In *Proc. SPIE Visual Communications and Image Processing*, volume 1818, Boston, MA, 1992.
- [Thi94] E. Thiel. *Les distances de chanfrein en analyse d'images: Fondements et Applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1994.
- [Tsa81] Y. F. Tsao and K. S. Fu. A parallel thinning algorithm for 3-D pictures. In *Computer Graphics and Image Processing*, volume 17, pages 315–331, 1981.
- [Vel92] R. C. Veltkamp. The γ -neighborhood graph. *Computational Geometry, Theory and Applications*, 1(4):227–246, 1992.
- [Whi94] R. Whitaker and G. Gerig. Vector-valued diffusion. In Bart M. ter Haar Romeny, editor, *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, volume 1 of *Series on Computational Imaging and Vision*, pages 93–134. Kluwer Academic Publishers, October 1994.
- [Xia89] Y. Xia. Skeletonization via the realization of the fire front's propagation and extinction in digital binary shapes. *IEEE Trans. on PAMI*, 11(10):1076–1086, October 1989.
- [Yap87] C. K. Yap. An $O(n \log n)$ algorithm for the Voronoi diagram of a set of simple curve segments. *Discret Comput. Geom.*, 2:153–174, 1987.

Index

- α -convexe, **89**
- α -forme, **89**
- r -régularité, **36**, **41**, 91, 119
- abscisse curviligne, **21**
- aire, 19, 113, **138**
- algorithme de “marching cubes”, **85**
- amincissement homotopique, **15**
- analyse d’images, **2**, 10
- analyse randomisée, **18**
- angle
 - bissecteur, **120**
 - entre deux boules, **93**
 - solide, **129**, 133, 137
- antécédent, **135**
- application homotope, **154**
- approximation polygonale, **36**, **38**
 - normalisée, **43**, 53, 94, 95, 97
- atlas informatique, **80**
- atome, **61**
- axe médian, **14**
- balayage laser, **2**, 35, **80**
- barycentre, **19**
- bord du squelette, **117**
- boule
 - de Delaunay, **33**
 - généralisée, **90**
 - génératrice, **65**
 - génératrice déconnectée, **66**
 - génératrice quasi-déconnectée, **66**
 - maximale, **10**, 14
- boules orthogonales, **94**
- boîte englobante, **62**
- branche du squelette
 - périphérique, **113**
 - significative, **113**
- bruit, 107, 119, 126
- carte de distances, **15**
- cellule, **143**
- changement de variables, **24**
- codage, **11**
- complexité, 54, 74, 77, 104, 115, 136
- conception assistée par ordinateur, **80**
- constante d’Euler, **54**
- convergence, 37, 39, 40, 44, 46, 76, 97
- coupure
 - d’une boule, **56**
 - d’une forme, **58**
 - du squelette, **135**
- courbure du squelette, **25**
- covariance, **20**
- critère de simplification
 - global, **132**
 - local, **119**
- cycle hamiltonien, **88**

- densité d'échantillonnage, **36**
- description de formes, 2, 10, 110
- design de surfaces, 80
- diagramme
 - de puissance, 74
 - de Voronoï, **32**
 - à poids additifs, **71**
- diamètre, 103
- direction principale, 19
- distance
 - de chanfrein, 3, 14
 - de Hausdorff, 111
 - euclidienne, 3, 30
- dualité, 34, 48, 157
- échantillon, 35, **36**
- échantillonnage, 2, 35, 80, 147
- écriture minimale, **64**
- élagage, 110
- élément
 - de Delaunay, **34**
 - de Voronoï, **32**
 - extérieur, **47**
 - frontière, **47**
 - intérieur, **47**
 - terminal, 111
- enveloppe convexe, 74, 85
- épaisseur, 12, 26, 113
- Euler, 54
- exosquelette, **71**
- extrémité du squelette, **111**
- face d'une polyboule, **64**
- fonction d'étanchéité, 11, **25**, 120
- forme r -régulière, 36, **41**, 91, 119
- front d'onde, 10, 16, 18
- genre d'une surface, 82
- glande, 143
- graphe
 - de γ -voisinage, 88
 - de Delaunay, **32**, 86
 - de Gabriel, **34**, 50
 - de voisinage, 84
 - de Voronoï, 4, 18, **31**, 88
 - de Voronoï généralisé, 17, **145**
 - des paramètres, **126**
 - des plus proches voisins, **84**
 - enveloppe convexe, 74, **85**
- géométrie algorithmique, **3**, 13, 30, 62
- géométrie discrète, **3**, 13
- histopathologie, 142
- homotopie, 12, 44, 48, 111, 115, **154**
- image
 - binaire, **3**, 13
 - en niveaux de gris, **3**, 17
 - scanner, 80
- imagerie médicale, 82
- images stéréoscopiques, 80
- interpolation, 80
- interprétation, 2
- intégrale
 - double, 19
 - simple, 19
- intégration, 24
- isotropie, 86
- jacobien, 25
- lancer de rayon, 62

- lissage, 114
- lissage de Gouraud, 80
- matrice d'inertie, 20
- microscope
 - confocal, 2, 82
 - informatisé, 144
 - optique, 144
- mise en correspondance, 12
- modèle
 - déformable, 36, 99
 - mathématique, 35
 - numérique de terrains, 80
 - physique, 80
- molécule, 61
- morphologie mathématique, 41
- méthode de squelettisation
 - continue, 13, 18, 30, 75
 - discrète, 13
 - en niveaux de gris, 17
 - exacte, 13, 17, 60
- ordre de connexité, **22**
- palpeur, 80
- paramétrisation, 21
- partition, 32, 47, 136
- perte d'information, 111
- planification de trajectoire, 61
- point
 - de coupure, **22**
 - multiple, **22**
 - simple, 15, **22**
 - simple non terminal, 15
 - singulier, **67**
 - terminal, **22**
- points homologues, 80
- polyboule, 44, 60, **63**
- polytope, **63**
- principe de Huygens, 16
- prétraitement, 2
- rayon de van der Waals, 61
- reconstruction à partir de coupes, 82
- recouvrement, 136
- rendu, 80
- représentation des objets, 2, 35
- représentation hiérarchique, 114
- représentation sphérique, 61
- robotique, 61
- région de Voronoï, **31**
- réversibilité, 11, 44, 48
- scanner, 119
- sculpture, 85
- segmentation, 2, 80
- semi-continuité, 13
- simplexe de Delaunay, **33**
- simplification du squelette, 110
- squelette, **10**
 - approché, 44
 - d'un polygone, 17, 60
 - d'un polyèdre, 60
 - de Voronoï, 89
 - discret, 14
 - exact, 13, 17, 60
 - filiforme, 56, 117, 128
 - mince, 12, 14
 - par zones d'influence, **145**
 - pondéré, 16
 - surfactive, 56, 117, 128

- squelettisation, **10**
- stabilité, 102
- structure de graphe du squelette, 12, 18
- stéradian, 129
- surface
 - fermée, 82
 - minimale, 86
 - moléculaire, 61
 - ouverte, 82
 - radiale, 83
 - sans bord, 82
 - visible d'un point, 83
 - à bord, 82
- synthèse d'images, 62
- système d'acquisition, 2, 80
- topologie, 154
- topologie en tout ou rien, 45
- triangle chapeau, **117**
- triangulation de Delaunay, **33**
- type d'homotopie, 12, 44, 48, 111, 115, **154**
- tétraèdre chapeau, **117**
- tétraèdre saillant, **117**
- variance, 20
- zone d'influence, **145**

