



Analyse et optimisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides à commutations autonomes

Céline Quemard

► To cite this version:

Céline Quemard. Analyse et optimisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides à commutations autonomes. Automatique / Robotique. Université d'Angers, 2007. Français. NNT : . tel-00346436

HAL Id: tel-00346436

<https://theses.hal.science/tel-00346436>

Submitted on 13 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ANGERS
ISTIA

Année 2007
N° d'ordre **855**

Analyse et optimisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides à commutations autonomes

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Automatique

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement

le : 4 décembre 2007 à 14h (Amphi A)

à : l'Istia (Université d'Angers)

par : CÉLINE QUÉMARD

devant le jury ci-dessous :

JEAN-PIERRE BARBOT (rapporteur), Professeur, ENSEA de Cergy-Pontoise

EMMANUEL TRÉLAT (rapporteur), Professeur, Université d'Orléans

JACQUES BURGER (examinateur), Professeur émérite, Université d'Angers

FRÉDÉRIC ROTELLA (examinateur), Professeur, ENI de Tarbes

Directeur de thèse : JEAN-LOUIS FERRIER, Professeur, Université d'Angers

Co-encadrant : JEAN-CLAUDE JOLLY, Maître de Conférences, Université d'Angers

LABORATOIRE D'INGÉNIERIE DES SYSTÈMES AUTOMATISÉS – EA 4014
62, avenue Notre-Dame du Lac, F-49000 Angers, France

ED 363

*”Toute avancée des connaissances génère autant
d’interrogations qu’elle apporte de réponses”*

Pierre Joliot

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Motivations	12
1.2	Principaux résultats	13
1.3	Plan du mémoire	15
2	Analyse de s.d.h. à commutations autonomes	17
2.1	Présentation du modèle mathématique étudié	17
2.1.1	Présentation générale	17
2.1.2	Exemples étudiés	18
2.1.3	Autres applications possibles	24
2.2	Détermination des équations de cycles	31
2.2.1	Equations de cycles de période k , $k \geq 1$	31
2.2.2	Application Numérique : Thermostat à résistance d'anticipation	35
2.2.3	Application Numérique : Convertisseur statique	44
2.3	Etude de la stabilité des cycles limites	51
2.3.1	Présentation de la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov	51
2.3.2	Présentation de la méthode de l'application de Poincaré étendue aux systèmes hybrides	53
2.3.3	Equivalence des deux méthodes	57
2.3.4	Application aux cycles de périodes 1 et 2 pour le thermostat à résistance d'anticipation	58
2.3.5	Application aux cycles de périodes 1 et 2 pour le convertisseur statique	63
2.4	Conditions d'existence des commutations	67
2.4.1	Cas de la dimension un	67
2.4.2	Cas de la dimension deux	72

3	Bifurcations et chaos	79
3.1	Bifurcations de type nœud selle	80
3.1.1	Présentation générale	80
3.1.2	Théorème de bifurcation nœud selle	80
3.1.3	Exemple en dimension un	81
3.1.4	Non existence de bifurcation nœud selle pour l'exemple du thermostat de dimension deux	82
3.2	Bifurcation de type doublement de période	87
3.2.1	Présentation générale	87
3.2.2	Théorème de bifurcation doublement de période pour des systèmes unidimensionnels	88
3.2.3	Exemple en dimension un : la fonction logistique	89
3.2.4	Généralisation du théorème du bifurcation doublement de période en dimension N , $N \geq 1$	91
3.2.5	Application du théorème doublement de période au modèle du thermostat à résistance d'anticipation	103
3.2.6	Application du théorème doublement de période au modèle du convertisseur statique	111
3.3	En route vers le chaos	118
3.3.1	Mise en évidence graphique de la sensibilité aux condi- tions initiales du système	120
3.3.2	Calcul du plus grand exposant de Lyapunov	122
A	Annexe : points singuliers dans le plan	130
B	Annexe : calculs	131
B.1	Calcul de $\frac{\partial^2 h_{q_0 \mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \Big _{\mu=\mu_0} (\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, N$	132
B.2	Calcul de $\frac{\partial^2 h_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} (\Gamma^2)$, $i, j, k = 1, \dots, N$	142
B.3	Calcul de $\frac{\partial h_{q_0 \mu}}{\partial \mu} \Big _{\mu=\mu_0} (\Gamma^2)$	142
B.4	Calcul de $w^1 D^3 h_{q_0 \mu_0} (\Gamma^2)(v^1, v^1, v^1)$	144
4	Optimisation paramétrique	149
4.1	Optimisation de la valeur de la puissance P_{th}	152
4.1.1	Méthode générale et principe	152
4.1.2	Application numérique	158
4.2	Optimisation de cycles limites	160
4.2.1	Présentation et résolution du problème	161
4.2.2	Application numérique	162
4.2.3	Conclusion	165
4.3	Optimisation des surfaces de commutation	166
4.3.1	Présentation du problème d'optimisation	167

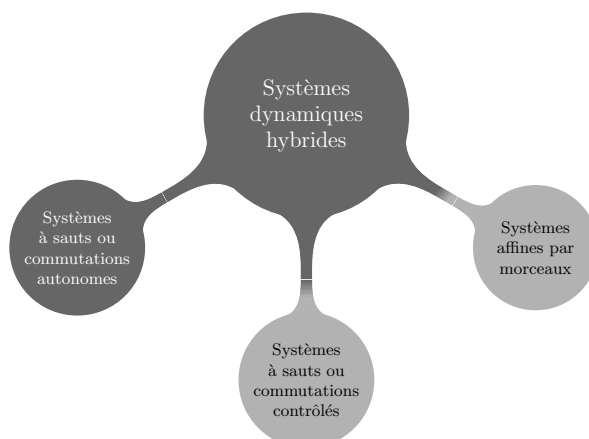
4.3.2	Rappel du calcul des variations dans le cas où il n'existe pas de commutation	169
4.3.3	Calcul des variations dans le cas général avec commutations	174
4.3.4	Optimisation de cycles limites : application au modèle du thermostat à résistance d'anticipation	181
4.3.5	Optimisation des instants de commutation. Application au modèle d'une voiture à deux rapports de transmission	185
4.3.6	Optimisation de règles de commutation. Application à la robotique	189
5	Conclusion et perspectives	193
5.1	Conclusion	193
5.2	Perspectives	195
	Références	196

Introduction

Les systèmes dynamiques hybrides (s.d.h.) peuvent être définis comme des systèmes où dynamiques continues et discrètes interagissent. De nombreux auteurs venant de différents horizons scientifiques comme de l'automatique, des mathématiques appliquées ou encore de l'informatique, ont introduit et formalisé cette notion de s.d.h. [67], [80], [85].

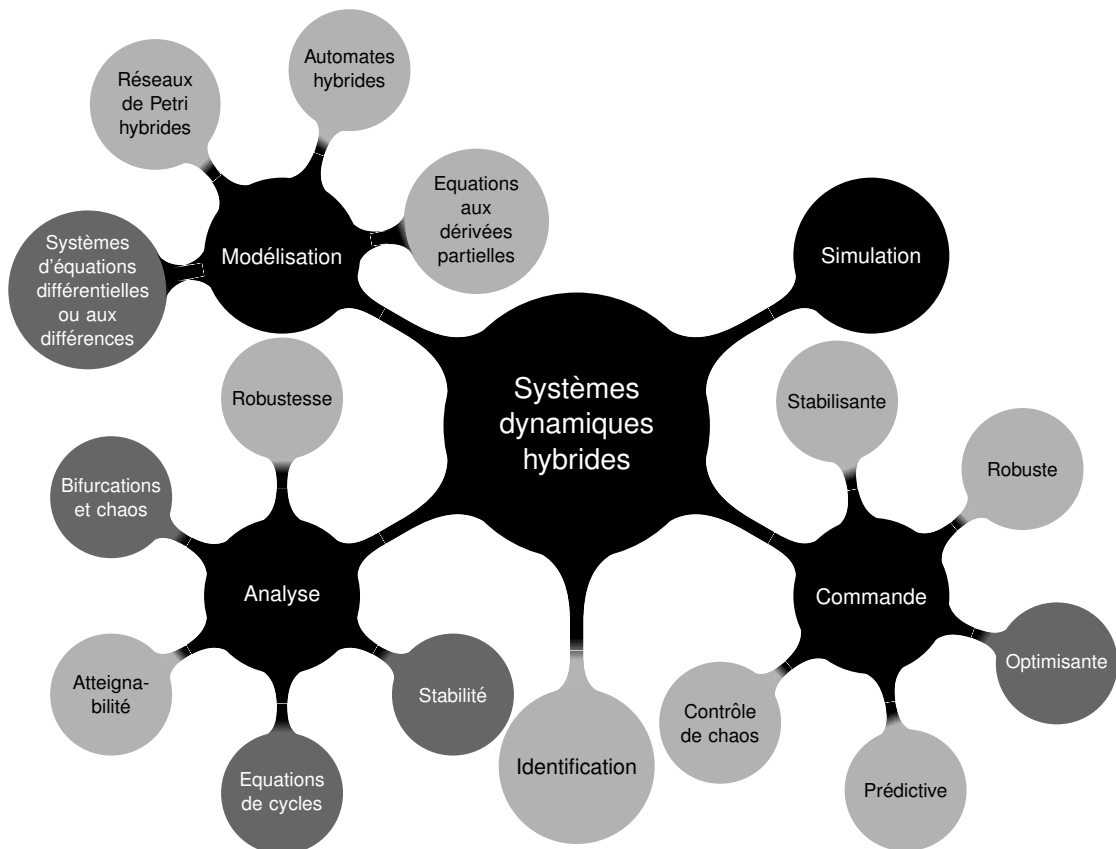
L'intérêt porté à ce type de systèmes a grandi ces dernières années du fait de leur présence dans un nombre important de domaines d'application comme, par exemple, ceux de l'aéronautique et spatial [9], de la thermique [18], [45], des systèmes de transport [12], [77], de la robotique [8], [16] ou encore de la biologie [1]...

Nos travaux portent plus particulièrement sur une classe de systèmes hybrides à commutations autonomes, ces dernières étant engendrées par un phénomène d'hystérésis.



1.1 Motivations

Les systèmes dynamiques hybrides ouvrent de nombreuses pistes de recherche. Les principaux thèmes, généralement étudiés, sont répertoriés sur le schéma suivant.



Les bulles dans lesquelles le texte est blanc correspondent aux différents points que nous aborderons dans ce mémoire.

En effet, nous considérons ici des s.d.h. de dimension N , $N \geq 1$, régis par un système d'équations différentielles où la variable discrète, qui suit un phénomène d'hystérésis, apparaît dans la matrice du système homogène et/ou dans le second membre du système différentiel.

Ce modèle est tout d'abord intéressant du point de vue des applications. En effet, non seulement il modélise des systèmes réels existant dans différents domaines (thermique, électronique, automobile...) mais surtout il présente l'avantage de posséder des applications de toute dimension (dès la dimension un).

Ainsi, ceci nous donne la possibilité d'augmenter progressivement la complexité du système (en ajoutant une dimension à chaque fois) et également d'établir des résultats pour les systèmes de petite dimension (un ou deux) en espérant pouvoir les généraliser à ceux de plus grande dimension.

De plus, trouver des phénomènes relativement complexes, comme des multi-cycles, des bifurcations ou encore du chaos, n'était *a priori* pas garanti du fait de la "simplicité" du modèle. C'est pourquoi cette démarche présentait un intérêt. Pour ce faire, les méthodes numériques et de simulation proposées dans [10], [84], [86] ont été utilisées. D'autres ont été mises en place et sont exposées dans ce mémoire. Aussi, pour approfondir cette étude, des résultats théoriques ont également été apportés.

Enfin, ce modèle et surtout ses applications nous incitent à nous poser certains problèmes d'optimisation paramétrique (et de commande optimale appliquée à l'optimisation) présentant non seulement un intérêt mathématique mais surtout un intérêt industriel pour, notamment, l'économie d'énergie.

Ainsi, cette classe particulière de s.d.h., bien qu'ayant un modèle relativement simple, soulève des questions dans les principaux thèmes de recherche liés aux s.d.h. (modélisation, analyse, simulation, optimisation) et permet alors une étude relativement complète.

1.2 Principaux résultats

De tels systèmes, globalement non linéaires, peuvent admettre des cycles comme solutions [33], [86]. Grâce à notre modèle relativement simple, leur détermination est réduite à la résolution d'un système d'équations implicites à solution souvent unique ce qui donne l'existence de cycles de période 1 [63]. Mais, parfois, ces systèmes peuvent également admettre simultanément deux solutions ou plus ce qui se traduit généralement par l'existence de cycles de période supérieure à 1 [61]. Dans le but de généraliser ces résultats, une méthode, différente de celle proposée dans [86], est donnée pour déterminer les équations de cycles de période k , $k \geq 1$ [57] (paragraphe 2.2.1). Elle présente l'avantage de fournir des équations qui sont plus rapides à manipuler que celles de [86] avec le calcul formel et notamment le logiciel *Maple*.

De plus, des conditions sur les paramètres du système sont établies dans le but de pouvoir choisir des valeurs numériques garantissant l'existence de commutations sur les seuils (paragraphe 2.4). Elles ne s'appliquent pour l'instant

qu'aux systèmes de dimensions un (et deux en cours) mais les résultats obtenus semblent (par simulation numérique) pouvoir se généraliser à n'importe quelle dimension N , $N \geq 1$.

Puis, dans la partie bifurcations et chaos (paragraphe 3.2), nous nous intéressons plus particulièrement au phénomène de bifurcation de type doublement de période (passage d'un cycle de période 1 à un cycle de période 2 à l'aide de la variation d'un paramètre du système). Pour prouver de façon théorique l'existence de ce type de bifurcation, une généralisation du théorème de [65], introduit pour les systèmes unidimensionnels, est réalisée pour les systèmes de dimension quelconque N , $N \geq 1$ [60]. La démonstration du théorème est également donnée en s'appuyant sur les indices fournis dans un exercice proposé dans [65]. Ce résultat est nouveau, la recherche bibliographique approfondie que nous avons menée n'ayant rien donné. Il permet ainsi de compléter l'étude sur les bifurcations qui n'est généralement basée que sur des outils graphiques (diagramme de bifurcations) [10], [53], [86]. Ce théorème, appliqué ici à deux systèmes [57], pourrait également permettre, par la suite, de prévoir la (ou les) valeur(s) du paramètre variable pour laquelle (lesquelles) il existe ce type de bifurcation.

Enfin, concernant la partie optimisation paramétrique et plus particulièrement la partie commande optimale appliquée à l'optimisation, nous retrouvons les résultats de [15] sur le problème d'optimisation des surfaces de commutation pour les s.d.h. à l'aide d'une autre méthode basée sur le calcul variationnel [17]. Cette dernière présente l'avantage, par rapport à celle de [15], de montrer clairement la signification de l'état adjoint dans le cadre de la commande optimale et également d'étendre les résultats aux surfaces de commutation mobiles. Ainsi, elle permet d'obtenir un algorithme d'optimisation des surfaces de commutations fixes ou mobiles [42] (paragraphe 4.3). Ce dernier est intéressant puisqu'il permet de résoudre des problèmes de différentes natures comme par exemple, le "design" par optimisation des cycles limites pour un thermostat à résistance d'anticipation, l'optimisation des temps de commutations pour une voiture devant se rendre à deux endroits successivement et ce, dans un minimum de temps, ou encore, l'optimisation des règles de commutation pour un robot devant éviter un obstacle mobile pour atteindre une cible fixe [58].

1.3 Plan du mémoire

Le chapitre 2 présente l'analyse de la classe de s.d.h. étudiée. Le modèle mathématique étant introduit et les applications présentées (paragraphe 2.1), une méthode de détermination des équations de cycles de période k , $k \geq 1$ est proposée et appliquée aux exemples du thermostat à résistance d'anticipation et à celui du convertisseur statique (paragraphe 2.2). Puis, deux méthodes équivalentes pour l'étude de la stabilité des cycles sont données (paragraphe 2.3). Il s'agit de la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov [49] et de celle de l'application de Poincaré adaptée aux systèmes hybrides [54], [33]. Enfin, des conditions d'existence de commutations sur les paramètres du système sont établies pour le modèle en dimension un. Leur généralisation semble possible pour le modèle de dimension deux (paragraphe 2.4).

Le chapitre 3 s'intéresse à deux types de bifurcation : bifurcations nœud selle et bifurcations doublement de période [10], [65], [86] (paragraphe 3.1 et 3.2). De plus, l'existence de propriétés caractéristiques des systèmes chaotiques comme la sensibilité aux conditions initiales est mise en avant (paragraphe 3.3).

La chapitre 4 est consacré à l'optimisation paramétrique et à la commande optimale appliquée à l'optimisation [17], [20], [78]. Après avoir optimisé la puissance délivrée par la résistance d'anticipation (paragraphe 4.1) et les seuils de commutation du thermostat (paragraphe 4.2), un algorithme est proposé pour l'optimisation des surfaces de commutation fixes ou mobiles (paragraphe 4.3) et appliqué à trois exemples de natures différentes.

Enfin, le chapitre 5 conclut ce mémoire (paragraphe 5.1) et propose quelques pistes de recherche (paragraphe 5.2).

Analyse d'une classe particulière de s.d.h. à commutations autonomes

2.1 Présentation du modèle mathématique étudié

2.1.1 Présentation générale

Dans \mathbb{R}^N , nous considérons une base qui est en pratique, soit la base canonique, soit une base de vecteurs propres généralisés ou non. Relativement à cette base, nous considérons le système dynamique hybride (s.d.h.) d'ordre N suivant :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{X}(t) = A(q(\xi(t)))X(t) + V(q(\xi(t))), \\ \xi(t) = cste - WX(t), \end{cases}$$

où A est une matrice carrée d'ordre N , V et X sont des matrices colonnes d'ordre N et W est une matrice ligne d'ordre N , toutes ces matrices étant supposées à valeurs réelles. Enfin, $cste$ est une constante appartenant à \mathbb{R} .

De plus, nous supposons que la matrice A possède uniquement des valeurs propres dont la partie réelle est strictement négative et que X et donc ξ sont continues.

Dans ce modèle, la variable discrète est q , qui peut prendre deux valeurs u_1, u_2 selon ξ en suivant un phénomène d'hystérésis décrit sur la figure 2.1 tracée dans un repère quelconque. Si ξ atteint son seuil inférieur S_1 par valeur décroissante alors q passe de la valeur u_1 à la valeur u_2 . De même, si ξ atteint son seuil

supérieur S_2 par valeur croissante alors q passe de la valeur u_2 à la valeur u_1 . Dans ces conditions, la multifonction $q(\xi)$ est donnée explicitement par :

$$(2.2) \quad \begin{cases} q(\xi(t)) = u_1 \text{ si } \xi(t^-) = S_2 \text{ et } q(\xi(t^-)) = u_2 \\ q(\xi(t)) = u_2 \text{ si } \xi(t^-) = S_1 \text{ et } q(\xi(t^-)) = u_1 \\ q(\xi(t)) = q(\xi(t^-)) \text{ sinon.} \end{cases}$$

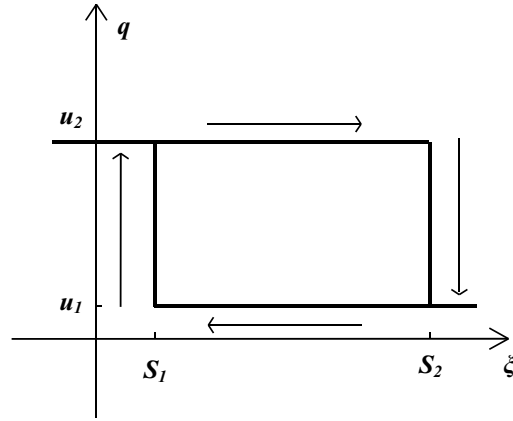


FIG. 2.1 – Phénomène d’hystérésis suivi par la variable discrète q

Dans les deux premiers cas de (2.2), t est appelé instant de commutation et par là même, S_1 et S_2 sont respectivement appelés plus précisément seuil inférieur et seuil supérieur de commutation.

2.1.2 Exemples étudiés

A. Thermostat à résistance d’anticipation

La première application que nous considérerons tout au long de l’exposé de notre travail est celle d’un thermostat à résistance d’anticipation qui commande un convecteur situé dans une même pièce [18]. Le processus thermique est présenté sur la figure 2.2 (à gauche) et la représentation de ce système en circuit électrique est donnée par la figure 2.3.

Nous noterons x la température du thermostat, y , celle de la pièce et z , celle du convecteur. Le principe de fonctionnement d’un tel thermostat est le suivant : les puissances P_c du convecteur et P_{th} du thermostat sont actives quand $q = 1$ et inactives quand $q = 0$. Si initialement nous chauffons, c’est-à-dire $q = 1$, du fait que la puissance du thermostat P_{th} est active, la température

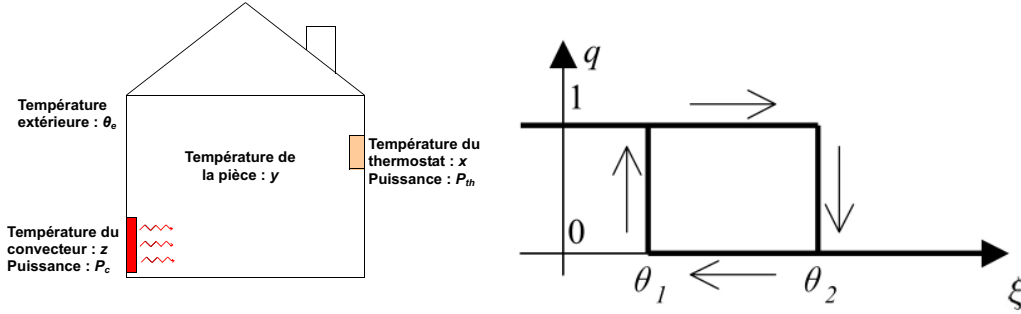


FIG. 2.2 – Processus thermique étudié et phénomène d’hystérésis pour le thermostat

désirée est atteinte d’abord par la température du thermostat x avant la température de la pièce y ce qui fait passer q de 1 à 0. Ainsi, l’amplitude de variation de la température de la pièce se trouve réduite avec l’introduction de la résistance d’anticipation dans le thermostat. Cependant, la température peut éventuellement continuer de monter du fait de l’inertie thermique du fluide de la pièce. Ce phénomène est illustré sur la figure 2.4 ; ceci présente un intérêt du point de vue économie d’énergie.

La loi de Fourier et un bilan de puissance [66] donnent le système différentiel suivant de dimension trois :

$$(2.3) \quad \begin{cases} m_{th}C_{th}\dot{x} = -\frac{x-y}{R_{th}} + q(x)P_{th} \\ m_pC_p\dot{y} = -\frac{y-x}{R_{th}} - \frac{y-z}{R_c} - \frac{y-\theta_e}{R_m} \\ m_cC_c\dot{z} = -\frac{z-y}{R_c} + q(x)P_c, \end{cases}$$

où les coefficients R_{th} , R_c , R_m (exprimés en $K.W^{-1}$) sont les résistances thermiques, C_{th} , C_p , C_c (exprimés en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) sont les chaleurs massiques et m_{th} , m_p , m_c (exprimés en kg) sont les masses selon les indices th , p , c et m qui correspondent respectivement au thermostat, à la pièce, au convecteur et au mur de la maison. De plus, P_{th} et P_c (exprimés en W) représentent respectivement les puissances du thermostat et du convecteur et θ_e (exprimé en K) correspond à la température extérieure.

Le système (2.3) est donc de la forme de (2.1) puisqu’il peut s’écrire de la façon suivante :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + q(\xi(t))B + C, \\ \xi(t) = LX(t), \end{cases}$$

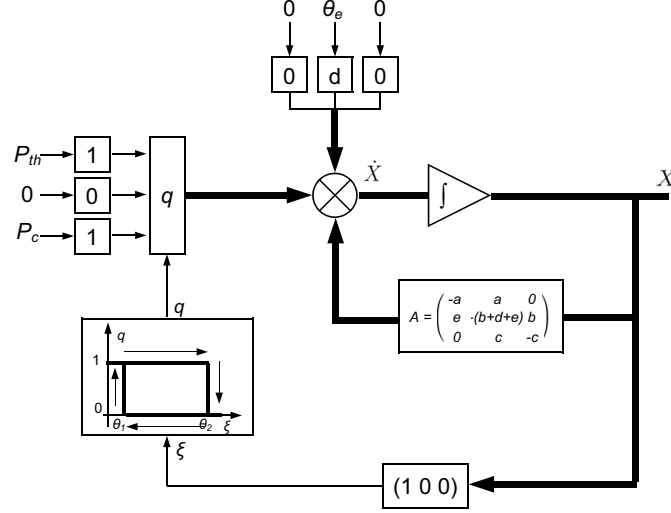


FIG. 2.3 – Circuit électrique équivalent au modèle du thermostat à résistance d'anticipation

avec A qui ne dépend pas ici de $q(\xi(t))$, $V(q(\xi(t))) = q(\xi(t))B + C$, B et C étant deux matrices colonnes de dimension trois, $cste = 0$, $W = -L$. Les matrices A , B , C et L sont alors données par :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ e & -(b+d+e) & b \\ 0 & c & -c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p_{th} \\ 0 \\ p_c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ d.\theta_e \\ 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\text{et } a = \frac{1}{m_{th}C_{th}R_{th}}, b = \frac{1}{m_pC_pR_c}, c = \frac{1}{m_cC_cR_c}, d = \frac{1}{m_pC_pR_m}, e = \frac{1}{m_pC_pR_{th}}, p_{th} = \frac{P_{th}}{m_{th}C_{th}}, p_c = \frac{P_c}{m_cC_c}.$$

Ici, la variable discrète q suit plus précisément le phénomène d'hystérésis décrit sur la figure 2.2 (à droite) où $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $S_1 = \theta_1$, $S_2 = \theta_2$ par rapport à la figure 2.1.

Remarque 2.1.1

Notons ici que nous avons considéré, pour ce modèle de dimension trois, une homogénéité de la température de l'air de la pièce et un convecteur de type "radiateur électrique à accumulation".

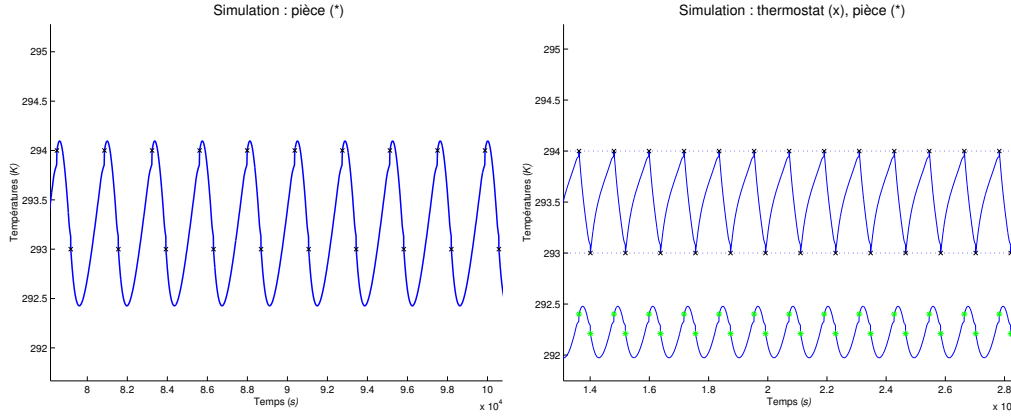


FIG. 2.4 – Simulations avec les mêmes valeurs numériques pour le cas du thermostat seul (à gauche) et le thermostat à résistance d’anticipation (à droite). Les variations de la température de la pièce sont plus faibles (environ 0.5 K) avec la résistance que sans (plus de 1.5 K)

B. Convertisseur statique DC/DC

La seconde application étudiée, plus classique, est celle d’un convertisseur statique DC/DC [86], [46]. Le circuit électrique équivalent au système étudié est donné par la figure 2.5.

Ce circuit comporte un convertisseur à générateur de tension continue et deux filtres LC (un d’entrée et un de sortie). La tension de sortie du circuit, donnée par σU_1 , $0 < \sigma < 1$, avec σ le gain du capteur, va être comparée au signal de référence U_{ref} (en V). La différence de ces deux quantités, notée $\xi = U_{ref} - \sigma U_1$ et appelée signal de déviation, est appliquée à l’élément de relais à hystérésis décrit sur la figure 2.6 pour former des créneaux dans le but de contrôler les éléments de commutation du convertisseur.

Ici, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $S_1 = -\chi_0$, $S_2 = \chi_0$.

Remarque 2.1.2

Comme expliqué dans [86], nous notons que dans la plupart des cas, le retour inclura un circuit correcteur comme par exemple un compensateur PI (proportionnel intégral) ou un compensateur PID (proportionnel intégral dérivé) afin de satisfaire des conditions de précision mais que la figure 2.5 montre seulement un exemple de convertisseur à retour proportionnel.

A partir de là, les lois de l’électronique (lois des noeuds, lois des mailles)

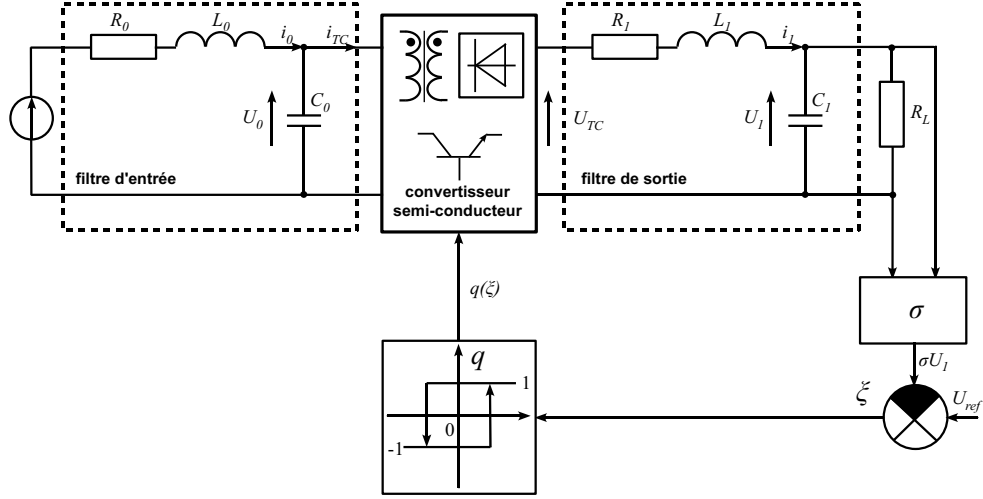


FIG. 2.5 – Circuit équivalent au convertisseur statique DC/DC étudié

donnent le système différentiel suivant :

$$(2.5) \quad \begin{cases} C_0 \dot{U}_0 + i_{TC} = i_0 \\ L_0 \dot{i}_0 + R_0 i_0 + U_0 = E_0 \\ C_1 \dot{U}_1 + \frac{U_1}{R_L} = i_1 \\ L_1 \dot{i}_1 + R_1 i_1 + U_1 = U_{TC}, \end{cases}$$

où les coefficients L_0 et L_1 (exprimés en H) sont les valeurs d'auto-inductance des bobines d'inductance, C_0 et C_1 (exprimés en F) sont les capacités des condensateurs, R_0 , R_1 et R_L (exprimés en Ω) sont les résistances. De plus, i_0 et i_1 (exprimés en A) sont les courants qui passent respectivement dans les bobines d'inductance à coefficients L_0 et L_1 . Les valeurs U_0 et U_1 (exprimées en V) sont les tensions aux bornes des condensateurs de capacités C_0 et C_1 respectivement selon les indices 0 et 1 qui représentent respectivement les éléments du filtre d'entrée et du filtre de sortie. Enfin, E_0 (en V) est la tension d'entrée.

Ici, nous avons aussi :

$$U_{TC} = \begin{cases} U_0 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad i_{TC} = \begin{cases} i_1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q = -1, \end{cases}$$

d'où :

$$U_{TC} = \frac{1}{2}(1 + q(\xi(t)))U_0 \quad \text{et} \quad i_{TC} = \frac{1}{2}(1 + q(\xi(t)))i_1.$$

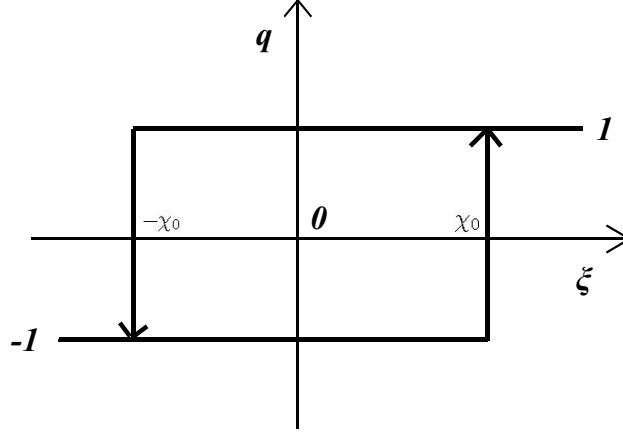


FIG. 2.6 – Phénomène d'hystérésis pour l'application du convertisseur statique

A partir de ces relations, le système (2.5) devient :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \dot{i}_0 = -\frac{R_0}{L_0}i_0 - \frac{1}{L_0}U_0 + \frac{E_0}{L_0} \\ \dot{U}_0 = \frac{1}{C_0}i_0 - \frac{1+q(\xi(t))}{2C_0}i_1 \\ \dot{i}_1 = \frac{1+q(\xi(t))}{2L_1}U_0 - \frac{R_1}{L_1}i_1 - \frac{1}{L_1}U_1 \\ \dot{U}_1 = \frac{1}{C_1}i_1 - \frac{1}{C_1R_L}U_1. \end{cases}$$

Puis, introduisons comme dans [86] les notations suivantes :

$$x_1 = \frac{R_0 i_0}{E^*}, \quad x_2 = \frac{U_0}{E^*}, \quad x_3 = \frac{R_0 i_1}{E^*}, \quad x_4 = \frac{U_1}{E^*},$$

où E^* est une tension qui nous permet de travailler avec des variables adimensionnelles ; nous la choisirons ici égale à un.

En utilisant ces nouvelles notations dans le système (2.6), nous obtenons le système différentiel final suivant :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \eta(-x_1(t) - x_2(t) + \Omega) \\ \dot{x}_2(t) = \gamma(x_1(t) - \frac{1}{2}(1 + q(\xi(t)))x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{\mu}{2}(1 + q(\xi(t)))x_2(t) - \nu x_3(t) - \mu x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \lambda(\frac{x_3(t)}{\alpha} - \frac{x_4(t)}{\beta}), \end{cases}$$

où $\eta = \frac{R_0}{L_0}$, $\Omega = \frac{E_0}{E^*}$, $\gamma = \frac{1}{C_0 R_0}$, $\mu = \frac{R_0}{L_1}$, $\nu = \frac{R_1}{L_1}$, $\lambda = \frac{1}{C_1 R^*}$, $\beta = \frac{R_L}{R^*}$, $\alpha = \frac{R_0}{R^*}$ avec R^* qui joue le rôle de résistance de normalisation et qui sera choisi ici égale à un.

Le système (2.7) est bien de la forme de (2.1) puisqu'il peut s'écrire de la façon suivante :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \dot{X} = A(q(\xi(t)))X(t) + V, \\ \xi(t) = U_{ref} - UX(t), \end{cases}$$

où V ne dépend plus de $q(\xi(t))$, $W = U$, $cste = U_{ref}$. Les matrices $A(q(\xi(t)))$, V et U sont données par :

$$A(q) = \begin{pmatrix} -\eta & -\eta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & -\frac{\gamma}{2}(1+q) & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{2}(1+q) & -\nu & -\mu \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\alpha} & -\frac{\lambda}{\beta} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \eta\Omega \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma E^* \end{pmatrix}^T.$$

2.1.3 Autres applications possibles

La liste des autres applications possibles pour ce système général (2.1) n'est bien sûr pas exhaustive. Cependant, elle donne un aperçu global de la grande richesse d'applications possibles et ce, dans diverses dimensions.

A. Convecteur seul

Une application de dimension un pour notre système général (2.1) est celle d'un convecteur seul en échange thermique direct avec le fluide extérieur. La température du convecteur est notée z (et est exprimée en Kelvin (K)) et la température extérieure est notée θ_e (en K).

Cet exemple n'est pas très réaliste mais a l'avantage d'être très simple pour déterminer des conditions de commutation sur les seuils et son cas sera traité de façon détaillée dans le paragraphe 2.4.1.

De même que pour l'application du thermostat à résistance d'anticipation, un bilan de puissance et la loi de Fourier conduisent à l'équation différentielle suivante :

$$(2.9) \quad m_c C_c \dot{z}(t) = \frac{-1}{R_c} z(t) + q(z(t)) P_c + \frac{\theta_e}{R_c},$$

qui s'écrit sous la forme de (2.1) de la façon suivante :

$$(2.10) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = -az(t) + q(z(t))b + c, \\ \xi(t) = z(t), \end{cases}$$

avec $a = \frac{1}{R_c m_c C_c}$, $b = \frac{P_c}{m_c C_c}$, $c = \frac{\theta_e}{R_c m_c C_c}$, R_c (en K.W^{-1}) étant la résistance du convecteur, m_c (en kg) étant sa masse, C_c (en $\text{J.kg}^{-1}.\text{W}^{-1}$) représentant sa chaleur massique et enfin P_c (en W) sa puissance.

La figure 2.7 est une simulation de l'évolution de la température du convecteur par rapport au temps réalisée avec *Matlab* pour un ensemble de paramètres fixés. Ici, il apparaît une suite (infinie) de commutations et nous verrons dans le paragraphe 2.4.1 que ce n'est pas toujours le cas.

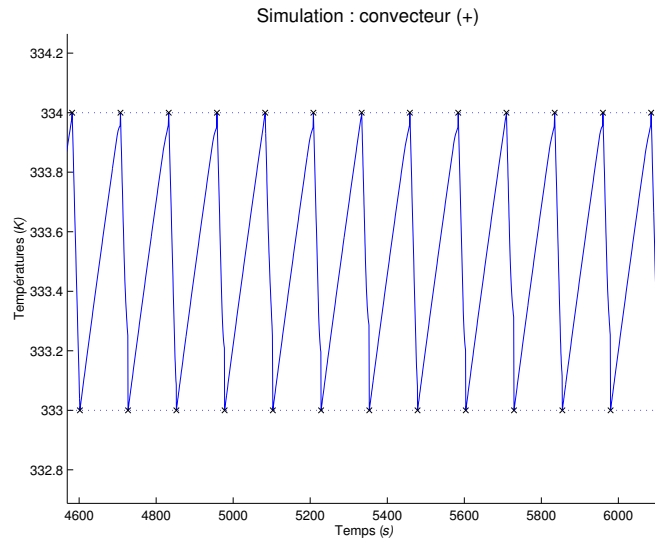


FIG. 2.7 – Exemple de comportement de la température du convecteur dans le cas en dimension 1 d'un convecteur seul

B. Thermostat et convecteur seuls

Une application possible en dimension deux pour le système général (2.1) est celle d'un thermostat seul (sans résistance d'anticipation) commandant un convecteur. La température de la pièce est notée y et celle du convecteur est notée z .

Le principe de fonctionnement est le suivant : la puissance du convecteur P_c est active quand $q = 1$ (c'est-à-dire jusqu'à ce que la température de la pièce atteigne le seuil supérieur du thermostat) et inactive quand $q = 0$ (jusqu'à ce que la température de la pièce atteigne le seuil inférieur du thermostat).

Toujours de la même façon, un bilan de puissance et la loi de Fourier donnent

le système différentiel de dimension deux suivant :

$$\begin{cases} m_p C_p \dot{y} = -\frac{y-z}{R_c} - \frac{y-\theta_e}{R_m} \\ m_c C_c \dot{z} = -\frac{z-y}{R_c} + q(y) P_c, \end{cases}$$

qui s'écrit sous la forme de (2.1) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b+d) & b \\ c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + q(y) \begin{pmatrix} 0 \\ p_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d.\theta_e \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \xi(t) = LX(t) \end{cases}$$

avec $b = \frac{1}{R_c m_p C_p}$, $c = \frac{1}{R_c m_c C_c}$, $d = \frac{1}{R_m m_p C_p}$, $p_c = \frac{P_c}{m_c C_c}$, $L = (1 \ 0)$ et où les coefficients R_c , R_m (en K.W^{-1}) sont les résistances thermiques, C_c , C_p (en $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) sont les chaleurs massiques et m_c , m_p (en kg) sont les masses selon les indices c , p , m qui représentent respectivement le convecteur, la pièce et le mur de la maison. De plus, P_c (en W) est la puissance du convecteur et θ_e (en K) est la température extérieure.

La figure 2.8 est une simulation des températures de la pièce et du convecteur réalisée à l'aide du logiciel *Matlab*, les grandes variations représentant les variations de la température du convecteur et les petites celles de la température de la pièce.

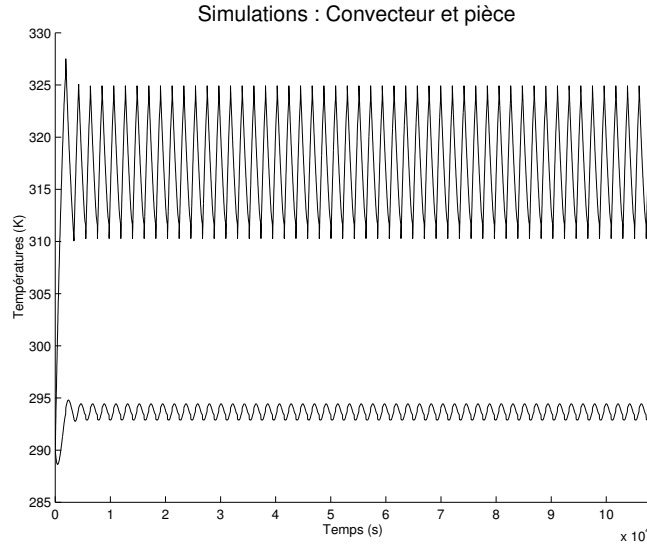


FIG. 2.8 – Exemple de comportement des températures du convecteur et de la pièce dans le cas en dimension 2 d'un thermostat seul

Comme pour le cas de la dimension 1 présenté ci-avant, nous verrons dans le paragraphe 2.4, que pour certaines valeurs de paramètres, il n'existe qu'une seule ou aucune commutation sur les seuils.

C. Thermostat à résistance d'anticipation contrôlant un convecteur situé dans une autre pièce

En plus du système du convertisseur statique présenté au paragraphe 2.1.2, une deuxième application possible en dimension quatre est celle d'un thermostat à résistance d'anticipation (température x_1), qui est situé dans une autre pièce (notée pièce n°2 et dont la température est notée x_2) que le convecteur (température x_4) qu'il contrôle. De plus, le fluide de cette pièce n°2 échange de la chaleur à travers une cloison de séparation (résistance thermique R_s) avec le fluide de la pièce n°1 (température x_3) où se situe le convecteur. Nous noterons également que les deux pièces sont aussi en échange thermique avec l'extérieur par un mur (résistances thermiques R_{m1} et R_{m2}). Une représentation du modèle physique est donnée par la figure 2.9.

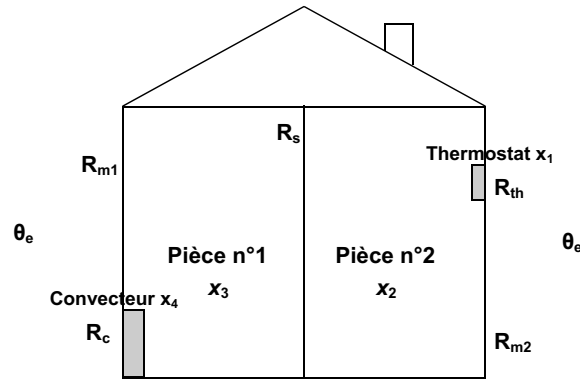


FIG. 2.9 – Représentation du thermostat à résistance d'anticipation qui commande un convecteur situé dans une autre pièce

Le système différentiel qui régit ce modèle physique est alors :

$$\begin{cases} m_{th}C_{th}\dot{x}_1 = -\frac{x_1-x_2}{R_{th}} + q(x_1)P_{th} \\ m_{p2}C_{p2}\dot{x}_2 = -\frac{x_2-x_1}{R_{th}} - \frac{x_2-\theta_e}{R_{m2}} - \frac{x_2-x_3}{R_s} \\ m_{p1}C_{p1}\dot{x}_3 = -\frac{x_3-\theta_e}{R_{m1}} - \frac{x_3-x_2}{R_s} - \frac{x_3-x_4}{R_c} \\ m_cC_c\dot{x}_4 = -\frac{x_4-x_3}{R_c} + q(x_1)P_c, \end{cases}$$

qui s'écrit sous la forme de (2.1) de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ d & -(b+c+d) & c & 0 \\ 0 & e & -(e+f+g) & f \\ 0 & 0 & h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + q(x_1) \begin{pmatrix} p_{th} \\ 0 \\ 0 \\ p_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b.\theta_e \\ g.\theta_e \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $a = \frac{1}{R_{th}m_{th}C_{th}}$, $b = \frac{1}{R_{m_2}m_{p_2}C_{p_2}}$, $c = \frac{1}{R_s m_{p_2} C_{p_2}}$, $d = \frac{1}{R_{th}m_{p_2}C_{p_2}}$, $e = \frac{1}{R_s m_{p_1} C_{p_1}}$, $f = \frac{1}{R_c m_{p_1} C_{p_1}}$, $g = \frac{1}{R_{m_1}m_{p_1}C_{p_1}}$, $h = \frac{1}{R_c m_c C_c}$, $p_{th} = \frac{P_{th}}{m_{th}C_{th}}$ et $p_c = \frac{P_c}{m_c C_c}$. Les coefficients R_{th} , R_{m_1} , R_{m_2} , R_s , R_c (en $K.W^{-1}$) sont les résistances thermiques, C_{th} , C_{p_1} , C_{p_2} , C_c (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) sont les chaleurs massiques et m_{th} , m_{p_1} , m_{p_2} , m_c (en kg) sont les masses selon les indices th , m_1 , m_2 , s , p_1 , p_2 , c qui représentent respectivement le thermostat, le mur séparant la pièce n°1 de l'extérieur, le mur séparant la pièce n°2 de l'extérieur, la pièce n°1, la pièce n°2 et le convecteur. Les puissances du thermostat, du convecteur et la température extérieure sont, comme l'exemple en dimension trois, notées respectivement P_{th} , P_c et θ_e .

La figure 2.10, obtenue à l'aide de *Matlab*, nous donne un exemple de comportement des différentes températures pour un jeu de valeurs de paramètres. Sur cette figure, les grandes variations représentent les variations de la température du convecteur, les variations tracées en gras représentent les variations de la température de la pièce n°1, les variations tracées avec un trait fin sont celles de la température de la pièce n°2 et les autres sont celles de la température du thermostat.

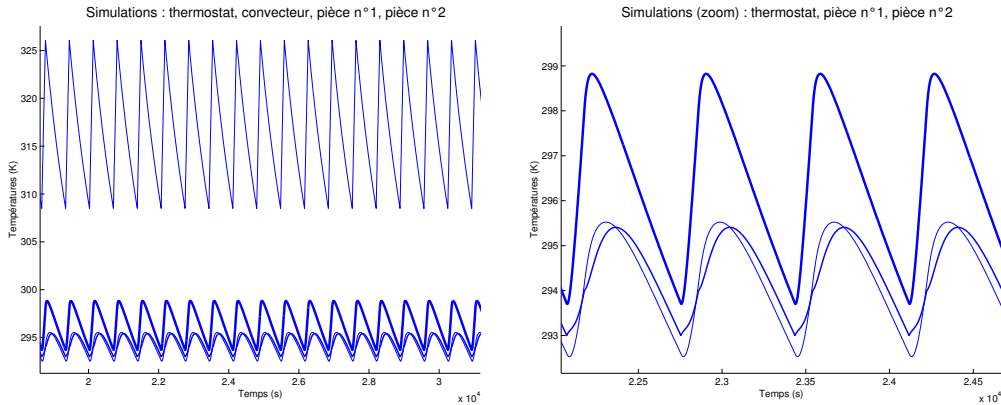


FIG. 2.10 – Simulations des températures du convecteur, du thermostat et des deux pièces avec un zoom sur les trois dernières à droite

D. Chaudière individuelle

La dernière application du système général (2.1) introduite dans ce paragraphe est celle d'une chaudière individuelle classique au fioul qui permet de chauffer l'eau qui passe dans les radiateurs d'une maison. Le modèle est aussi de dimension quatre et nous nous appuyons ici sur [45]. La figure 2.11 donne une représentation du modèle physique étudié.

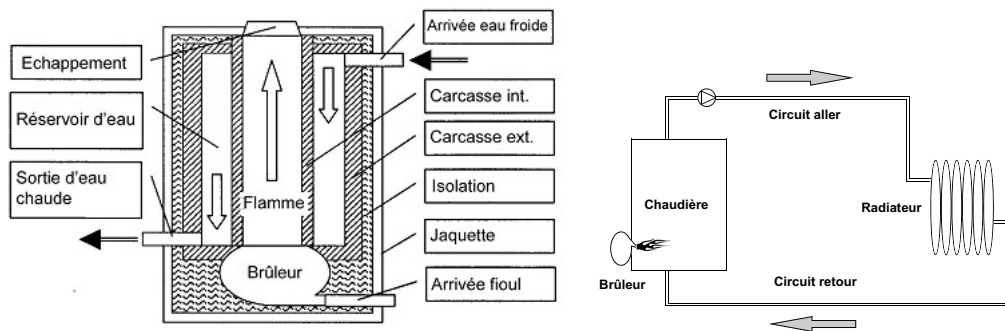


FIG. 2.11 – Représentation d'une chaudière individuelle au fioul

Les principaux composants d'une telle chaudière, qui sont mis en évidence sur la figure 2.11 à gauche, sont détaillés ci-dessous :

- un brûleur où le fioul est brûlé pour faire de la chaleur,
- un tunnel le long duquel la flamme perd de la chaleur et refroidit,
- une carcasse intérieure qui sépare la flamme des réservoirs d'eau,
- des réservoirs d'eau où l'eau est chauffée,
- une carcasse extérieure qui isole l'eau de la température ambiante,
- du matériel d'isolation et une jaquette qui recouvre le tout.

Le principe de fonctionnement de cette chaudière est le suivant : un aquastat, qui mesure la température de l'eau située à l'intérieur des réservoirs, va déclencher la mise en marche ($q = 1$) ou l'arrêt ($q = 0$) du brûleur selon cette température d'eau voulue.

Ici, nous nous retreignons, comme dans [45] au fonctionnement de la chaudière seule mais une autre application en dimension six cette fois-ci du modèle général (2.1) pourrait être par exemple, celle d'une chaudière située dans un sous-sol qui chaufferait l'eau destinée à aller dans un radiateur situé dans une autre pièce de la maison. Les deux variables supplémentaires seraient alors la température du radiateur et celle de la pièce avec une seconde variable

d'hystérésis qui pourrait commander le robinet thermostatique du radiateur selon la température de la pièce chauffée.

Le système différentiel qui modélise le fonctionnement de la chaudière seule est :

$$\begin{cases} m_{ci}C_{ci}\dot{x}_1 = -\frac{x_1-x_2}{R_{ci}} + q(x_2)P_b \\ m_eC_e\dot{x}_2 = -\frac{x_2-x_1}{R_{ci}} - \frac{x_2-x_3}{R_e} - \dot{m}c_e\rho_e(T_{es} - T_{ee}) \\ m_{ce}C_{ce}\dot{x}_3 = -\frac{x_3-x_2}{R_e} - \frac{x_3-x_4}{R_{ce}} \\ m_iC_i\dot{x}_4 = -\frac{x_4-x_3}{R_e} - \frac{x_4-T_0}{R_i} \end{cases}$$

qui s'écrit de la forme de (2.1) de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & -(b+c) & c & 0 \\ 0 & d & -(d+e) & e \\ 0 & 0 & f & -(f+g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + q(x_2) \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ gT_0 \end{pmatrix}$$

avec $a = \frac{1}{R_{ci}m_{ci}C_{ci}}$, $b = \frac{1}{R_{ci}m_eC_e}$, $c = \frac{1}{R_em_eC_e}$, $d = \frac{1}{R_em_{ce}C_{ce}}$, $e = \frac{1}{R_{ce}m_{ce}C_{ce}}$, $f = \frac{1}{R_{ce}m_iC_i}$, $g = \frac{1}{R_im_iC_i}$, $h = \frac{\dot{m}c_e\rho_e}{m_eC_e}$, $p = \frac{P_b}{m_{ci}C_{ci}}$. Les variables x_1 , x_2 , x_3 et x_4 représentent respectivement les températures de la carcasse intérieure, de l'eau des réservoirs, de la carcasse extérieure et du couple isolation + jaquette. Les coefficients R_{ci} , R_e , R_{ce} , R_i (en $K.W^{-1}$) sont les résistances thermiques, C_{ci} , C_e , C_{ce} , C_i (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) sont les chaleurs massiques, m_{ci} , m_e , m_{ce} , m_i (en kg) sont les masses selon les indices ci , e , ce , i qui correspondent respectivement à la carcasse intérieure, à l'eau des réservoirs, à la carcasse extérieure et au couple isolation + jaquette. De plus, c_e (en $J.m^{-3}.K^{-1}$), ρ_e (en $m^3.kg^{-1}$) représentent respectivement la chaleur volumique et le volume massique de l'eau, \dot{m} (en $kg.s^{-1}$) est le débit de l'eau, T_{es} , T_{ee} , T_0 (en K) sont respectivement les températures du circuit aller, du circuit retour et de la pièce où est située la chaudière.

Une illustration des variations des différentes températures pour un certain jeu de valeurs des paramètres est donnée par la figure 2.12. Les variations de la température la plus basse, tracées d'un trait épais, représentent les variations de la température de l'isolation, celles de la deuxième température la plus basse, tracées d'un trait plus fin, sont celles de la température de la carcasse extérieure. Enfin, les deux températures qui sont très proches l'une de l'autre sur la figure 2.12 correspondent aux variations de la température de la carcasse intérieure (trait fin sur la figure agrandie) et de l'eau qui est située dans les réservoirs (trait gras sur la figure agrandie).

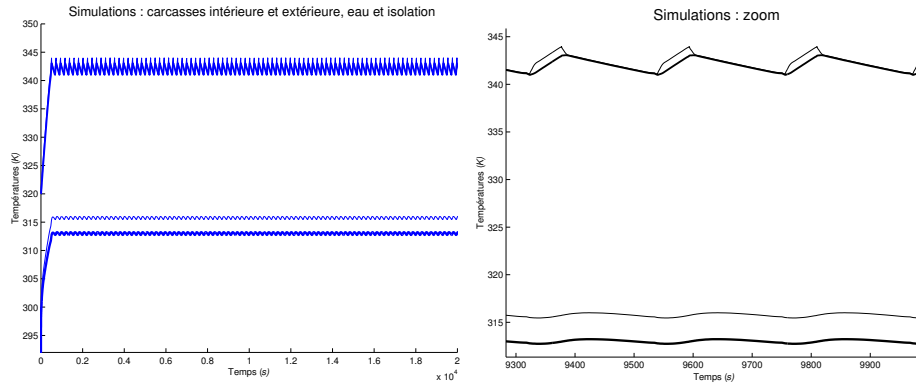


FIG. 2.12 – Simulations des températures de la carcasse intérieure, de l’eau, de la carcasse extérieure et de l’isolation pour l’exemple de la chaudière individuelle

2.2 Détermination des équations de cycles

En partant du système général (2.1), comme nous avons $\xi(t_n) = S_1$ ou S_2 (t_n étant le n -ième instant de commutation en supposant qu’il existe, S_1 et S_2 correspondant respectivement aux seuils inférieur et supérieur de commutation), la trajectoire tend vers un cycle par construction. Il est alors naturel de se poser la question de l’existence de cycles limites pour le système général. De plus, cette idée est renforcée par le fait que de tels systèmes, globalement non linéaires, peuvent admettre des cycles limites comme solutions comme cela a été montré dans [86], [33] entre autres.

2.2.1 Equations de cycles de période k , $k \geq 1$

Nous généralisons ici le travail commencé dans [63], [61] en donnant une méthode générale pour obtenir les équations de cycles de toute période k , $k \geq 1$ pour le système (2.1). Notons que cette méthode est différente de celle proposée dans [86], bien que conduisant aux mêmes résultats bien sûr, et qu’elle possède l’avantage, par rapport à cette dernière, d’obtenir des équations plus “simples” à manipuler avec le calcul formel. Ainsi, par exemple, elle demande moins de temps de calcul ; pour donner un ordre d’idée, il faut environ 12 minutes à *Maple*, avec cette méthode, pour tracer les surfaces correspondant aux équations de cycles et il lui en faut environ 21 pour le faire avec celle de [86].

Considérons t_0 un instant initial donné et $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$ la suite croissante d'instant de commutation successifs sur $[t_0, +\infty[$, nécessairement distincts puisque la définition de $q(\xi(t))$ implique $\xi(t_n) \neq \xi(t_{n-1})$.

Hypothèse 2.2.1

Supposons que l'instant t_n de la n -ième commutation existe et soit fini.

Pour simplifier par la suite les notations, posons $q_n \triangleq q(\xi(t_n))$ et nous avons $q(\xi(t)) = q_n$ sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$. De la même manière, posons $\xi_n \triangleq \xi(t_n)$, $A_n \triangleq A(q_n)$, $V_n \triangleq V(q_n)$. Une intégration classique du système différentiel général (2.1) donne alors sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$:

$$(2.11) \quad X(t) = e^{(t-t_n)A_n} \Gamma_n - A_n^{-1} V_n,$$

où $\Gamma_n \in \mathbb{R}^N$ correspondent aux constantes d'intégration, fonctions de n .

De là, en introduisant la notation $\sigma_n = t_n - t_{n-1} > 0$, $\forall n \geq 1$, (σ_n correspond alors à la durée entre deux instants de commutation successifs) et en considérant l'hypothèse de continuité de l'état à l'instant de commutation t_n , nous obtenons :

$$(2.12) \quad \forall n \geq 1, \Gamma_n = e^{\sigma_n A_{n-1}} \Gamma_{n-1} + A_n^{-1} V_n - A_{n-1}^{-1} V_{n-1}.$$

De plus, la constante Γ_0 est donnée par l'équation (2.11) pour le cas où $n = 0$ et $t = t_0$, par l'expression suivante :

$$(2.13) \quad \Gamma_0 = X(t_0) + A_0^{-1} V_0.$$

Posons $\forall n \geq 1$, $\xi_n = f(S_1, S_2, q_{n-1}, q_n)$, où f est une fonction de \mathbb{R}^4 à valeurs dans \mathbb{R} qui traduit le fait qu'à tout instant de commutation t_n , ξ_n est soit égal au seuil inférieur de commutation S_1 , soit égal au seuil supérieur de commutation S_2 selon la variable d'hystérésis q . Nous avons également par définition, $\forall n \geq 1$, $\xi_n = cste - W X(t_n) = cste - W(\Gamma_n - A_n^{-1} V_n)$. En combinant ces deux relations pour ξ_n , nous obtenons finalement l'équation suivante :

$$(2.14) \quad \forall n \geq 1, cste - W(\Gamma_n - A_n^{-1} V_n) - f(S_1, S_2, q_{n-1}, q_n) = 0.$$

La résolution du système (2.1), (2.2) aux inconnues $X(t)$, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ramenée à celle du système (2.12), (2.14) aux inconnues $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$, $(\sigma_n)_{n \geq 1}$. Si nous savons calculer σ_n en fonction de Γ_{n-1} à partir de (2.14) (après substitution de Γ_n donné par (2.12) dans (2.14)), alors l'équation (2.12) donne Γ_n en fonction de

Γ_{n-1} . Cependant, il est en général difficile de résoudre explicitement (2.14) de façon théorique, voir [41], [86]. Nous nous contenterons donc par la suite d'une résolution numérique.

De plus, de tels systèmes globalement non linéaires, peuvent admettre aucune (dans le cas où l'hypothèse 2.2.1 n'est pas satisfaite), une ou plusieurs solutions. Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe d'introduction de cette partie, l'équation $\xi_n = S_1$ ou S_2 suggère de chercher des solutions éventuelles sous forme de cycles correspondant donc à des suites $(\sigma_{2n}, \Gamma_{2n}, \sigma_{2n+1}, \Gamma_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ périodiques de période k , $k \geq 1$. Par exemple, un cycle de période 1, caractérisé par l'existence de deux durées différentes entre les instants de commutation successifs, correspond à une suite $(\sigma_{2n}, \Gamma_{2n}, \sigma_{2n+1}, \Gamma_{2n+1})$ constante. En revanche, un cycle de période 2, caractérisé par l'existence de quatre durées entre les instants de commutation, correspond à une suite $(\sigma_{2n}, \Gamma_{2n}, \sigma_{2n+1}, \Gamma_{2n+1})$ qui alterne entre deux quadruplets possibles différents.

A partir des équations (2.12), (2.14), nous allons pouvoir proposer une méthode pour déterminer les équations de cycles de toute période $k \geq 1$. Pour cela, introduisons la notation suivante pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$(2.15) \quad U_n^i = U_{2kn+i} \ , \quad n \geq 0,$$

pour $i = 1, \dots, 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ qui correspond à la période du cycle.

La suite des instants de commutation successifs est notée $(\sigma_n^1, \sigma_n^2, \dots, \sigma_n^{2k-1}, \sigma_n^{2k})_{n \in \mathbb{N}}$ et celle des constantes d'intégration est notée $(\Gamma_n^1, \Gamma_n^2, \dots, \Gamma_n^{2k-1}, \Gamma_n^{2k})_{n \in \mathbb{N}}$. Posons alors :

$$(2.16) \quad R_n \triangleq (\sigma_n^1, \Gamma_n^1, \dots, \sigma_n^{2k}, \Gamma_n^{2k}).$$

Le système d'équations (2.12), (2.14), $\forall n \geq 1$ est équivalent au système $H(R_n, R_{n+1}) = 0$, $\forall n \geq 0$, où $H = (H_1, \dots, H_{4k})^T$ est une fonction que nous définissons pour $i = 1, \dots, 2k$ par :

$$(2.17) \quad \begin{cases} H_i(R_n, R_{n+1}) = \Gamma_{n+1}^i - e^{\sigma_{n+1}^i A_{i-1}} \Gamma_n^{i-1} - A_i^{-1} V_i + A_{i-1}^{-1} V_{i-1} = 0, \\ H_{2k+i}(R_n, R_{n+1}) = cste - W(\Gamma_{n+1}^i - A_i^{-1} V_i) - f(S_1, S_2, q_{i-1}, q_i) = 0, \end{cases}$$

avec $r = n$ si $i = 1$, $r = n + 1$ sinon, $\Gamma_n^0 = \Gamma_n^{2k}$,

$$A_i = \begin{cases} A_0 & \text{si } i \text{ est pair} \\ A_1 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}, \quad V_i = \begin{cases} V_0 & \text{si } i \text{ est pair} \\ V_1 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}, \quad q_i = \begin{cases} q_0 & \text{si } i \text{ est pair} \\ q_1 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}.$$

Supposons maintenant que R_n ait une limite $R = (\sigma^1, \Gamma^1, \dots, \sigma^{2k}, \Gamma^{2k})$. Dans ces conditions, R est solution du système (2.17) c'est-à-dire satisfait $\forall i = 1, \dots, 2k$:

$$(2.18) \quad \begin{cases} H_i(R, R) = \Gamma^i - e^{\sigma^i A_{i-1}} \Gamma^{i-1} - A_i^{-1} V_i + A_{i-1}^{-1} V_{i-1} = 0, \\ H_{2k+i}(R, R) = cste - W(\Gamma^i - A_i^{-1} V_i) - f(S_1, S_2, q_{i-1}, q_i) = 0, \end{cases}$$

avec $\Gamma^0 = \Gamma^{2k}$.

A partir de chacune des $2k$ premières équations H_i , $i = 1, \dots, 2k$ de (2.17) et en utilisant les $2k - 1$ premières équations restantes, nous pouvons déterminer, à l'aide d'une récurrence, les Γ^i , $i = 1, \dots, 2k$, uniquement en fonction des σ^i , $i = 1, \dots, 2k$. Cela se fait de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma^i &= e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} \Gamma^{[i-1]} + A_i^{-1} V_i - A_{i-1}^{-1} V_{i-1} = e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} e^{\sigma^{[i-1]} A_{i-2}} \Gamma^{[i-2]} \\ &+ (I_N - e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}})(A_i^{-1} V_i - A_{i-1}^{-1} V_{i-1}) = \dots \\ &= e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} e^{\sigma^{[i-1]} A_{i-2}} \dots e^{\sigma^{[i-(2k-1)]} A_{i-2k}} \Gamma^{[i-2k]} + (I_N - e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} + e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} e^{\sigma^{[i-1]} A_{i-2}} \\ &+ \dots + (-1)^{2k-1} e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} e^{\sigma^{[i-1]} A_{i-2}} \dots e^{\sigma^{[i-(2k-2)]} A_{i-(2k-1)}})(A_i^{-1} V_i - A_{i-1}^{-1} V_{i-1}) \\ &= e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} e^{\sigma^{[i-1]} A_i} \dots e^{\sigma^{[i-(2k-1)]} A_i} \Gamma^{[i-2k]} + (I_N - e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} + e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} e^{\sigma^{[i-1]} A_i} \\ &+ \dots + (-1)^{2k-1} e^{\sigma^{[i]} A_{i-1}} e^{\sigma^{[i-1]} A_i} \dots e^{\sigma^{[i-(2k-2)]} A_{i-1}})(A_i^{-1} V_i - A_{i-1}^{-1} V_{i-1}), \end{aligned}$$

puisque $A_{2k} = A_{2k-2} = \dots = A_2 = A_0$ et $A_{2k-1} = A_{2k-3} = \dots = A_3 = A_1$.

Remarque 2.2.2

Pour réduire les notations, nous avons utilisé ici $[j] = j \bmod (2k)$. De plus, si $[j] = 0$, nous admettons que $\Gamma^{[j]} = \Gamma^{2k}$ et que $\sigma^{[j]} = \sigma^{2k}$.

Nous obtenons alors finalement :

$$(2.19) \quad \Gamma^i = (I_N - \prod_{m=1}^{2k} D_{(i-m+1) \bmod (2k)})^{-1} (I_N + \sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^j (\prod_{l=1}^{2k-j} D_{(i-l+1) \bmod (2k)})) (A_i^{-1} V_i - A_{i-1}^{-1} V_{i-1}),$$

avec $D_m = e^{\sigma^m A_{m-1}}$, $m = 1, \dots, 2k$ et en posant $D_0 = D_{2k}$.

Remarque 2.2.3

Notons que si les matrices A_m , $m = 1, \dots, 2k$ commutent entre elles alors :

$$\prod_{m=1}^{2k} D_{(i-m+1) \bmod (2k)} = \prod_{m=1}^{2k} D_m.$$

En remplaçant les Γ^i , $i = 1, \dots, 2k$ ainsi obtenus dans les $2k$ dernières équations H_{2k+i} , $i = 1, \dots, 2k$ du système (2.18), nous pouvons déduire, pour $i =$

$1, \dots, 2k$, le système suivant de $2k$ équations pour $2k$ inconnues, les $2k$ inconnues étant les σ^i , $i = 1, \dots, 2k$:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} F_i &= -W((I_N - \prod_{m=1}^{2k} D_{(i-m+1) \bmod (2k)})^{-1} (I_N + \sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^j (\prod_{l=1}^{2k-j} D_{(i-l+1) \bmod (2k)})) \\ & (A_i^{-1} V_i - A_{i-1}^{-1} V_{i-1}) - A_i^{-1} V_i) - f(S_1, S_2, q_{i-1}, q_i) + cste = 0. \end{aligned}$$

Comme dans [63], nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.4

Soit $q_0 \in \{u_1; u_2\}$ fixé. Supposons que le système (2.20) admette une ou plusieurs solutions $(\sigma^1, \dots, \sigma^{2k})$. Soit $\tilde{\sigma}^1 = t_1 - t_0$ un paramètre arbitraire positif non nul, soient $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^{2k-1}, \Gamma^{2k}$ des constantes données par (2.19) et soit la constante $\Gamma_0(\tilde{\sigma}^1)$ définie à l'aide de (2.12) et donnée par :

$$(2.21) \quad \Gamma_0(\tilde{\sigma}^1) = e^{-\tilde{\sigma}^1 A_0} (\Gamma^1 - (A_1^{-1} V_1 - A_0^{-1} V_0)).$$

La suite $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\Gamma_0 = \Gamma_0(\tilde{\sigma}^1)$ et $\Gamma_n = \Gamma^i$, si $n = 2kl + i$, $l \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, 2k$ et la suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ telle que $\sigma_1 = \tilde{\sigma}^1$ et $\sigma_n = \sigma^i$, $n = 2kl + i$, $l \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, 2k$ (sauf éventuellement pour $n = 1$ si $\sigma^1 \neq \tilde{\sigma}^1 = \sigma_1$) définissent par rapport à l'équation (2.11) et en considérant $t_n = \sigma_n + t_{n-1}$, une trajectoire $X(t)$ du s.d.h. (2.1) qui est un cycle de période k - ou orbite périodique de période k - pour $t \geq t_1 = t_0 + \sigma_1$; ce cycle est précédé par une portion de trajectoire définie sur l'intervalle $[t_0, t_1[$ avec pour condition initiale $X(t_0)$ la fonction paramétrée par $\tilde{\sigma}^1 > 0$ et donnée par :

$$(2.22) \quad X(t_0) = \Gamma_0(\tilde{\sigma}^1) - A_0^{-1} V_0.$$

Pour les deux applications détaillées qui vont suivre, le système (2.20) sera résolu de façon uniquement numérique, soit par une méthode originale basée sur l'utilisation conjointe du calcul formel et plus particulièrement du logiciel *Maple* et de l'analyse par intervalles avec le logiciel *Proj2D*, soit par une méthode classique utilisant un algorithme de Newton et le logiciel *Matlab*.

2.2.2 Application Numérique : Thermostat à résistance d'anticipation

Nous reprenons le modèle du thermostat à résistance d'anticipation introduit au paragraphe 2.1.2 et nous nous restreignons aux cas particuliers des

cycles de période 1 et 2. Adaptons pour cela les notations utilisées dans le cas général à cet exemple thermique :

- $\forall i \in 1, \dots, 2k, A_i = A_{i-1} = A$ car dans ce modèle, la variable d'hystérésis q n'apparaît pas dans la matrice de l'équation homogène et donc A est une matrice à valeurs réelles constantes,
- $\forall i \in 1, \dots, 2k, V_i = q_i B + C, q_i = q_1 = 1 - q_0$ si i est impair et $q_i = q_0$ si i est pair,
- $cste = 0, -W = L,$
- $f(S_1, S_2, q_{i-1}, q_i) = f(\theta_1, \theta_2, q_{i-1}, q_i) = q_i \theta_1 + q_{i-1} \theta_2.$

Le système (2.20) est alors équivalent, $\forall i = 1, \dots, 2k$ à :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i &= L(I_N - \prod_{m=1}^{2k} D_{(i-m+1) \bmod (2k)})^{-1} ((I_N + \sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^j (\prod_{l=1}^{2k-j} D_{(i-l+1) \bmod (2k)})) \\ &(A^{-1}(q_i B + C) - A^{-1}(q_{i-1} B + C)) - A^{-1}(q_i B + C)) - q_i \theta_1 - q_{i-1} \theta_2 = 0, \end{aligned}$$

soit, écrit autrement $\forall i = 1, \dots, 2k$:

$$\begin{aligned} (2.23) \quad \tilde{F}_i &= \Delta q_i L(I_N - \prod_{m=1}^{2k} D_{(i-m+1) \bmod (2k)})^{-1} (I_N + \sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^j (\prod_{l=1}^{2k-j} D_{(i-l+1) \bmod (2k)})) \\ &A^{-1} B - L A^{-1}(q_i B + C) - q_i \theta_1 - q_{i-1} \theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Or, $\Delta q_i = q_i - q_{i-1} = \pm 1 = -\Delta q_{i-1} = (-1)^2 \Delta q_{i-2} = \dots = (-1)^{i-1} \Delta q_1.$

Nous obtenons alors finalement comme système pour un cycle de période 1 :

$$(2.24) \quad \begin{cases} \tilde{F}_1(\sigma^1, \sigma^2) = \Delta q_1 L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^1 A}) A^{-1} B \\ -L A^{-1}(q_1 B + C) - q_1 \theta_1 - q_0 \theta_2 = 0 \\ \tilde{F}_2(\sigma^1, \sigma^2) = -\Delta q_1 L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^2 A}) A^{-1} B \\ -L A^{-1}(q_0 B + C) - q_0 \theta_1 - q_1 \theta_2 = 0. \end{cases}$$

Nous préférons pour l'étude numérique qui suit, le système équivalent à (2.24) suivant, obtenu en posant $K_1 = \tilde{F}_1, K_2 = \tilde{F}_1 - \tilde{F}_2$ (au facteur Δq_1 près) :

$$(2.25) \quad \begin{cases} K_1(\sigma^1, \sigma^2) = \Delta q_1 L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^1 A}) A^{-1} B \\ -L A^{-1}(q_1 B + C) - q_1 \theta_1 - q_0 \theta_2 = 0 \\ K_2(\sigma^1, \sigma^2) = L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^1 A}) (I_N - e^{\sigma^2 A}) A^{-1} B \\ + \theta_2 - \theta_1 = 0. \end{cases}$$

De la même façon, à partir de (2.23), nous obtenons pour un cycle de période 2 le système :

$$(2.26) \quad \begin{cases} \tilde{F}_1(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = \Delta q_1 L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^1 A} + e^{(\sigma^1 + \sigma^4)A} - e^{(\sigma^1 + \sigma^3 + \sigma^4)A}) A^{-1} B - LA^{-1}(q_1 B + C) - q_1 \theta_1 - q_0 \theta_2 = 0 \\ \tilde{F}_2(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = -\Delta q_1 L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^2 A} + e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A} - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^4)A}) A^{-1} B - LA^{-1}(q_0 B + C) - q_0 \theta_1 - q_1 \theta_2 = 0 \\ \tilde{F}_3(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = \Delta q_1 L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^3 A} + e^{(\sigma^2 + \sigma^3)A} - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3)A}) A^{-1} B - LA^{-1}(q_1 B + C) - q_1 \theta_1 - q_0 \theta_2 = 0 \\ \tilde{F}_4(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = -\Delta q_1 L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^4 A} + e^{(\sigma^3 + \sigma^4)A} - e^{(\sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A}) A^{-1} B - LA^{-1}(q_0 B + C) - q_0 \theta_1 - q_1 \theta_2 = 0, \end{cases}$$

et nous étudierons dans l'application numérique suivante, un système équivalent à ce dernier système (2.26) obtenu en posant $K_1 = \tilde{F}_1 - \tilde{F}_4$, $K_2 = \tilde{F}_3 - \tilde{F}_2$, $K_3 = \tilde{F}_2 - \tilde{F}_4$, $K_4 = \tilde{F}_1$ (au facteur Δq_1 près) :

$$(2.27) \quad \begin{cases} K_1(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^1 A}) (I_N - e^{\sigma^4 A} + e^{(\sigma^3 + \sigma^4)A} - e^{(\sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A}) A^{-1} B + \Delta \theta = 0 \\ K_2(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^3 A}) (I_N - e^{\sigma^2 A} + e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A} - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^4)A}) A^{-1} B + \Delta \theta = 0 \\ K_3(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A})^{-1} (e^{\sigma^2 A} (I_N - e^{\sigma^1 A} + e^{(\sigma^1 + \sigma^4)A}) - e^{\sigma^4 A} (I_N - e^{\sigma^3 A} + e^{(\sigma^2 + \sigma^3)A})) A^{-1} B = 0 \\ K_4(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = \Delta q_1 L(I_N - e^{(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4)A})^{-1} (I_N - e^{\sigma^1 A} + e^{(\sigma^1 + \sigma^4)A} - e^{(\sigma^1 + \sigma^3 + \sigma^4)A}) A^{-1} B - (1 - q_0) LA^{-1} B - LA^{-1} C - (1 - q_0) \theta_1 - q_0 \theta_2 = 0. \end{cases}$$

Cycles de période 1

Intéressons nous d'abord aux cycles de période 1 et résolvons pour cela le système (2.25) pour les valeurs numériques des paramètres données dans le tableau 2.1, du même ordre de grandeur que celles proposées dans [18].

Nous fixons les trois valeurs initiales des températures à 283 K et celle de q_0 à 1 (donc nous commençons par mettre en marche le thermostat). Une simulation à l'aide du logiciel *Matlab* donne la figure 2.13 (temps en abscisses (en s)

R_{th}	R_c	R_m	Q_{th}	Q_c	Q_p	P_{th}	P_c	θ_e	θ_1	θ_2
2	0.5	0.2	200	1500	18000	1	75	283	293	294

TAB. 2.1 – Valeurs numériques pour un cycle de période 1 pour l’application thermique avec les R_i , $i = th, c, m$ en $K.W^{-1}$, les $Q_i = m_i C_i$, $i = th, c, m$ en $J.K^{-1}$, les P_i , $i = th, c$ en W , θ_i , $i = e, 1, 2$ en K

et températures en ordonnées (en K)). Les petites variations représentent les variations de la température de la pièce, les moyennes représentent celles de la température du thermostat et les grandes sont celles de la température du convecteur.

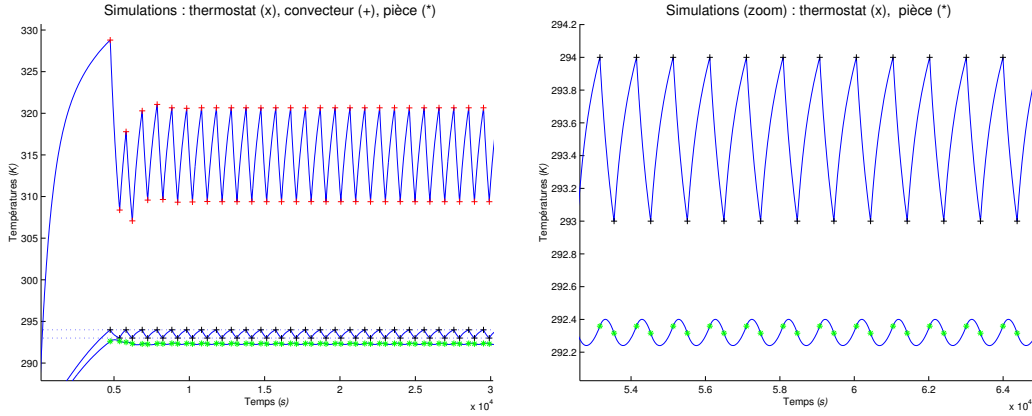


FIG. 2.13 – Illustration d’un cycle de période 1 pour l’application du thermostat à résistance d’anticipation

La figure 2.14 est le portrait de phase dans l’espace de dimension trois (x, y, z) . Le système ici ne fait qu’une seule rotation pour revenir au point initial et se répéter identique à lui-même. Ces deux figures confirment ainsi, de manière graphique, l’existence de cycles de période 1 pour cette application thermique. Pour résoudre de façon numérique le système (2.25) aux deux inconnues σ^1 et σ^2 , nous utilisons une méthode originale basée conjointement sur les outils graphiques de *Maple* et sur l’analyse par intervalles. Le principe est le suivant :

- **Première étape :** D’abord, avec le logiciel *Maple*, nous traçons dans l’espace des coordonnées (σ^1, σ^2, z) , les deux surfaces $z = K_1(\sigma^1, \sigma^2)$, $z = K_2(\sigma^1, \sigma^2)$. Puis, en faisant varier la fenêtre, nous recherchons le point d’intersection de ces deux surfaces avec le plan $z = 0$. Ceci permet

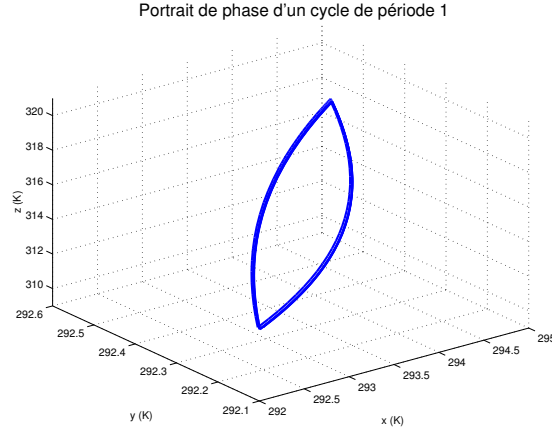


FIG. 2.14 – Portrait de phase dans le plan (x, y, z) pour un cycle de période 1 pour l'application thermique

alors de trouver des valeurs limites d'un rectangle $[\sigma_1^1, \sigma_2^1] \times [\sigma_1^2, \sigma_2^2]$ qui contient la solution recherchée.

Cette étape permet également de conclure sur l'existence ou non de solutions et de prévoir aussi leur nombre grâce à la régularité des surfaces explorées graphiquement.

La figure 2.15 donne une illustration de la première partie de la méthode que nous venons d'expliquer. La surface en noir correspond à $z = K_1(\sigma^1, \sigma^2)$, celle en gris clair correspond à $z = K_2(\sigma^1, \sigma^2)$ et le plan $z = 0$ est tracé en blanc.

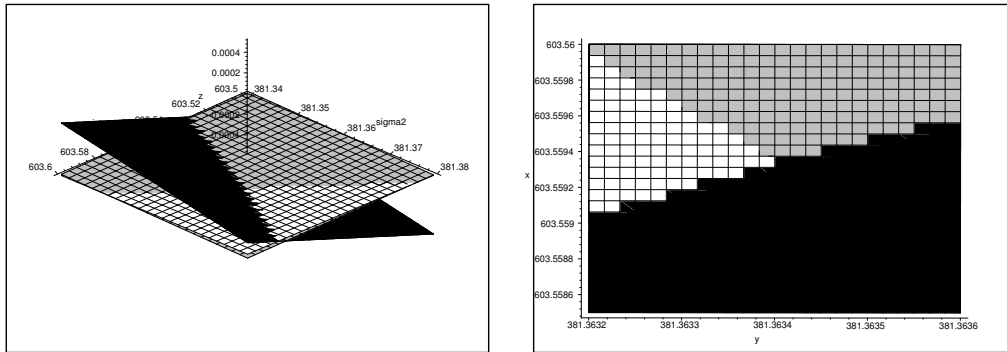


FIG. 2.15 – Illustration de la première étape graphique de la méthode de résolution du système pour les cycles de période 1

- **Seconde étape :** Puis, nous utilisons le rectangle obtenu comme intervalles de départ pour le logiciel d'analyse par intervalles *Proj2D*. Cet outil

numérique nous donne la possibilité d'affiner le résultat jusqu'à obtenir les premières décimales de la solution avec une bonne précision (pour cet exemple, douze chiffres après la virgule). En effet, l'analyse par intervalles sert ici à déterminer l'ensemble des points dont les images par K_i , $i = 1, 2$ sont nulles. Le logiciel *Proj2D* utilise pour cela trois couleurs : le bleu pour les boîtes ne contenant pas de solution, le rouge pour les boîtes contenant des solutions certaines et le jaune pour les boîtes contenant des solutions possibles.

Ici, nous n'obtenons que des boîtes jaunes (en gris clair sur la figure 2.16) et bleues (en gris foncé sur la figure) mais la première étape réalisée avec *Maple* permet de garantir les résultats trouvés.

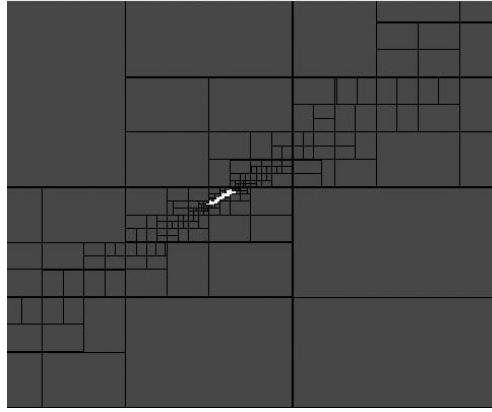


FIG. 2.16 – Illustration de la seconde étape graphique de la méthode de résolution du système pour les cycles de période 1

Remarque 2.2.5

Comparée à [33], après être revenus à $X(t_0)$ par (2.22), cette approche formelle rend plus facile la recherche de conditions initiales proches d'un cycle limite que la recherche de bonnes conditions initiales par simulation avec Matlab par exemple.

Pour les valeurs du tableau 2.1, nous obtenons par la méthode qui vient d'être présentée, les valeurs suivantes pour les deux inconnues du système (2.25) σ^1 et σ^2 :

$$\sigma^1 \simeq 603.559315507893, \quad \sigma^2 \simeq 381.3634413489532.$$

A l'aide de ces deux valeurs, nous pouvons alors calculer les valeurs numériques

pour les Γ^i , $i = 1, 2$ à l'aide de (2.19) ce qui donne :

$$\Gamma^1 \simeq \begin{pmatrix} 13.014 \\ 3.567 \\ -5.581 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 \simeq \begin{pmatrix} -8.449 \\ -2.821 \\ 4.070 \end{pmatrix}.$$

Enfin, à partir de (2.11), nous pouvons calculer les valeurs de cycles X_{inf} (valeurs minimales des températures obtenues aux instants de commutation pairs) et X_{sup} (valeurs maximales des températures obtenues aux instants de commutation impairs) :

$$X_{inf} \simeq \begin{pmatrix} 293 \\ 292.316 \\ 309.385 \end{pmatrix}, \quad X_{sup} \simeq \begin{pmatrix} 294 \\ 292.359 \\ 320.659 \end{pmatrix}.$$

Ces valeurs de cycle sont en accord avec celles obtenues de façon indépendante par simulation sous *Matlab*. En effet, nous obtenions par simulation pour ces valeurs :

$$X_{inf} \simeq \begin{pmatrix} 293 \\ 292.316 \\ 309.386 \end{pmatrix}, \quad X_{sup} \simeq \begin{pmatrix} 294 \\ 292.358 \\ 320.661 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.2.6

Il faut souligner ici que la méthode utilisée (Maple+Proj2D) n'est pas garantie. En effet, Proj2D ne calcule pas les exponentielles de façon garantie. Il est ainsi arrivé que Maple indique l'existence d'une solution mais que Proj2D ne la trouve pas. Cette limitation est liée à la version de Proj2D utilisée puisqu'il est possible en théorie de calculer ces exponentielles de façon "garantie", c'est-à-dire marge d'erreur comprise.

Cycles de période 2

Etudions maintenant la possibilité d'existence de cycles de période 2 pour cette application du thermostat à résistance d'anticipation. Pour cela, choisissons les valeurs numériques des paramètres présentées dans le tableau 2.2 qui permettent d'obtenir par simulation sous *Matlab* (figure 2.17) un comportement qui semble être un cycle de période 2.

Nous choisissons comme températures initiales pour le thermostat, la pièce et le convecteur, 292 K et comme valeur initiale pour q_0 , 1.

R_{th}	R_c	R_m	Q_{th}	Q_c	Q_p	P_{th}	P_c	θ_e	θ_1	θ_2
1.5	2	1	50	800	5000	0.8	50	281	293	294

TAB. 2.2 – Valeurs numériques choisies pour un cycle de période 2 pour l'application thermique

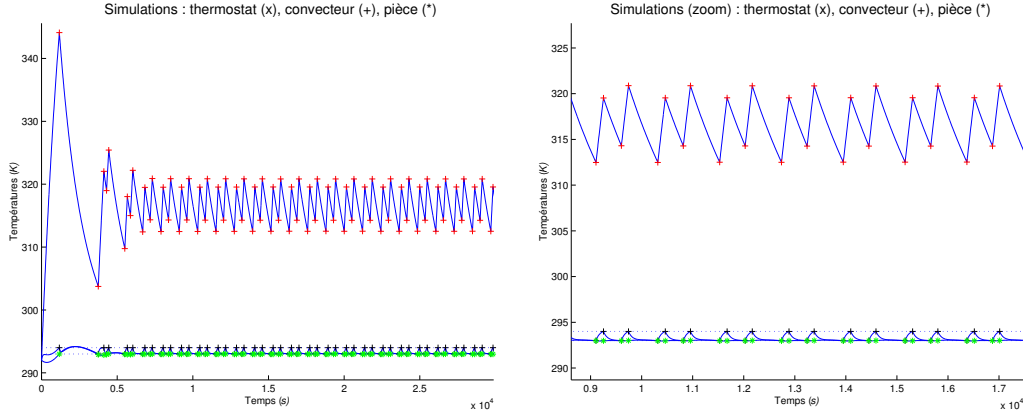


FIG. 2.17 – Illustration d'un cycle de période 2 pour l'application du thermostat

Le portrait de phase dans l'espace (x, y, z) présenté sur la figure 2.18 semble confirmer l'existence de cycles de période 2. En effet, le système doit effectuer deux tours complets avant de se répéter ce qui est la caractéristique des points 2-périodiques.

Vu que le système à résoudre (2.27) est un système de quatre équations pour quatre inconnues $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$, la méthode utilisée pour les cycles de période 1 n'est plus utilisable dans la mesure où nous ne pourrions pas tracer les surfaces dans un espace de dimension cinq $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, z)$.

Nous utilisons alors dans ce cas une méthode plus classique faisant intervenir un algorithme de Newton avec gradient (qui pourra être calculé à l'aide du calcul formel par *Maple*) [24]. Les simulations à l'aide de *Matlab* permettent de déterminer une approximation des durées $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$, ce qui nous donne des valeurs initiales pour l'algorithme suffisamment proches de la solution pour attendre une convergence plus ou moins rapide selon la précision requise. Ici, la condition d'arrêt choisie est $K^T K < 10^{-15}$, $K = (K_1, K_2, K_3, K_4)^T$ et le nombre d'itérations maximal est fixé à 1000.

La seule restriction de cette méthode par rapport à la méthode utilisant le

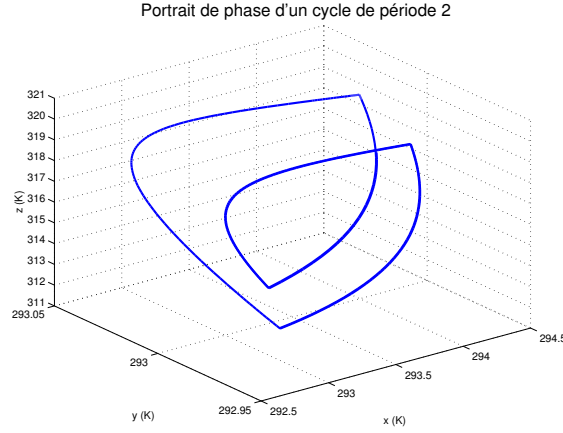


FIG. 2.18 – Portrait de phase pour un cycle de période 2 pour l'application thermique

calcul formel et l'analyse par intervalles vient du fait que nous ne pouvons pas ici prévoir le nombre de solutions, ce qui était possible avec l'étude graphique et *Proj2D*.¹

Pour les valeurs du tableau 2.2, l'algorithme de Newton converge au bout de quatre itérations pour nous donner finalement les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma^1 &\simeq 139.574990621150s, \sigma^2 \simeq 563.561226066455s, \\ \sigma^3 &\simeq 146.356308575764s, \sigma^4 \simeq 360.388097618754s.\end{aligned}$$

De la même façon que pour les cycles de période 1, à l'aide de ces résultats numériques et de l'équation (2.19), nous calculons les valeurs pour Γ^i , $i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned}\Gamma^1 &\simeq \begin{pmatrix} 16.1185 \\ 1.0284 \\ -4.1469 \end{pmatrix}, & \Gamma^2 &\simeq \begin{pmatrix} -50.5320 \\ -1.2116 \\ 11.7436 \end{pmatrix}, \\ \Gamma^3 &\simeq \begin{pmatrix} 15.8950 \\ 1.0434 \\ -3.9384 \end{pmatrix}, & \Gamma^4 &\simeq \begin{pmatrix} -50.2475 \\ -1.2040 \\ 11.4515 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

¹Cette restriction finalement n'en est plus une puisque la dernière version de *Proj2D* accepte maintenant quatre équations et il est donc possible, grâce à ce logiciel, de localiser les différentes solutions possibles pour le système.

et à l'aide de (2.11), nous obtenons les valeurs de cycles suivantes :

$$\begin{aligned} X_{inf_1} &\simeq \begin{pmatrix} 293 \\ 292.9735 \\ 312.5562 \end{pmatrix}, & X_{inf_2} &\simeq \begin{pmatrix} 293 \\ 292.9790 \\ 314.2227 \end{pmatrix}, \\ X_{sup_1} &\simeq \begin{pmatrix} 294 \\ 292.9999 \\ 320.8019 \end{pmatrix}, & X_{sup_2} &\simeq \begin{pmatrix} 294 \\ 292.9757 \\ 319.5850 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui sont en accord avec celles de la simulation de la figure 2.17 obtenues de façon indépendante avec *Matlab*.

2.2.3 Application Numérique : Convertisseur statique

Nous reprenons dans cette section le modèle électronique introduit au paragraphe 2.1.2. De même que pour l'application au thermostat à résistance d'anticipation, seuls les cycles de périodes 1 et 2 feront l'objet de l'étude numérique qui suit. Adaptons cette fois-ci les notations du modèle général (2.1) à cet exemple du convertisseur statique :

- $\forall i \in 1, \dots, 2k, A_i = A(q_i) = \begin{cases} A_0 = A(q_0) \text{ si } i \text{ est pair,} \\ A_1 = A(q_1) \text{ si } i \text{ est impair,} \end{cases}$
- $\forall i \in 1, \dots, 2k, V_i = V_{i-1} = V$ car dans ce modèle, la variable d'hystérésis q n'apparaît que dans la matrice de l'équation homogène $A(q)$ et V est une matrice colonne de dimension quatre à valeurs réelles constantes,
- $cste = U_{ref}, W = U,$
- $f(S_1, S_2, q_{i-1}, q_i) = f(-\chi_0, \chi_0, q_{i-1}, q_i) = \frac{1}{2}(q_{i-1}S_1 + q_iS_2) = \frac{1}{2}(-q_{i-1}\chi_0 + q_i\chi_0) = \frac{1}{2}\Delta q_i\chi_0.$

Le système (2.20) est alors équivalent $\forall i = 1, \dots, 2k$ à :

$$(2.28) \quad \begin{aligned} K_i &= -U((I_N - \prod_{m=1}^{2k} D_{(i-l+1) \bmod (2k)})^{-1}(I_N + \sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^j (\prod_{l=1}^{2k-j} D_{(i-l+1) \bmod (2k)})) \\ (A_i^{-1}V - A_{i-1}^{-1}V) - A_i^{-1}V) - \frac{1}{2}\Delta q_i\chi_0 + U_{ref} &= 0. \end{aligned}$$

Or, $\Delta q_i = q_i - q_{i-1} = \pm 2 = -\Delta q_{i-1} = (-1)^2 \Delta q_{i-2} = \dots = (-1)^{i-1} \Delta q_1$. Nous obtenons finalement le système suivant pour un cycle de période 1 :

$$(2.29) \quad \begin{cases} K_1(\sigma^1, \sigma^2) = U_{ref} - U((I_N - e^{\sigma^1 A_0} e^{\sigma^2 A_1})^{-1}(I_N - e^{\sigma^1 A_0})(A_1^{-1} - A_0^{-1})V - A_1^{-1}V) \\ -\frac{1}{2}(q_1 - q_0)\chi_0 = 0, \\ K_2(\sigma^1, \sigma^2) = U_{ref} - U((I_N - e^{\sigma^2 A_1} e^{\sigma^1 A_0})^{-1}(I_N - e^{\sigma^2 A_1})(A_0^{-1} - A_1^{-1})V - A_0^{-1}V) \\ -\frac{1}{2}(q_0 - q_1)\chi_0 = 0 \end{cases}$$

De manière identique, à partir de (2.28), nous obtenons le système suivant à résoudre pour un cycle de période 2 :

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = U_{ref} - U((I_N - e^{\sigma^1 A_0} e^{\sigma^4 A_1} e^{\sigma^3 A_0} e^{\sigma^2 A_1})^{-1} \\ (I_N - e^{\sigma^1 A_0} + e^{\sigma^1 A_0} e^{\sigma^4 A_1} - e^{\sigma^1 A_0} e^{\sigma^4 A_1} e^{\sigma^3 A_0}) (A_1^{-1} - A_0^{-1}) V - A_1^{-1} V) \\ - \frac{1}{2}(q_1 - q_0) \chi_0 = 0, \\ K_2(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = U_{ref} - U((I_N - e^{\sigma^2 A_1} e^{\sigma^1 A_0} e^{\sigma^4 A_1} e^{\sigma^3 A_0})^{-1} \\ (I_N - e^{\sigma^2 A_1} + e^{\sigma^2 A_1} e^{\sigma^1 A_0} - e^{\sigma^2 A_1} e^{\sigma^1 A_0} e^{\sigma^4 A_1}) (A_0^{-1} - A_1^{-1}) V - A_0^{-1} V) \\ - \frac{1}{2}(q_0 - q_1) \chi_0 = 0, \\ K_3(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = U_{ref} - U((I_N - e^{\sigma^3 A_0} e^{\sigma^2 A_1} e^{\sigma^1 A_0} e^{\sigma^4 A_1})^{-1} \\ (I_N - e^{\sigma^3 A_0} + e^{\sigma^3 A_0} e^{\sigma^2 A_1} - e^{\sigma^3 A_0} e^{\sigma^2 A_1} e^{\sigma^1 A_0}) (A_1^{-1} - A_0^{-1}) V - A_1^{-1} V) \\ - \frac{1}{2}(q_1 - q_0) \chi_0 = 0, \\ K_4(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = U_{ref} - U((I_N - e^{\sigma^4 A_1} e^{\sigma^3 A_0} e^{\sigma^2 A_1} e^{\sigma^1 A_0})^{-1} \\ (I_N - e^{\sigma^4 A_1} + e^{\sigma^4 A_1} e^{\sigma^3 A_0} - e^{\sigma^4 A_1} e^{\sigma^3 A_0} e^{\sigma^2 A_1}) (A_0^{-1} - A_1^{-1}) V - A_0^{-1} V) \\ - \frac{1}{2}(q_0 - q_1) \chi_0 = 0. \end{array} \right.$$

L'utilisation des outils graphiques et du calcul formel à l'aide du logiciel *Maple* pour les deux systèmes obtenus (2.29) et (2.30) est rendue plus difficile que dans le cas du thermostat à résistance d'anticipation. En effet, pour l'application thermique, il suffit de choisir une base de vecteurs propres pour la matrice A , de calculer tous les éléments dans cette nouvelle base et alors, les matrices A , A^{-1} et surtout $e^{A\sigma^i}$, $i = 1, \dots, 2k$ qui pouvaient poser problème, deviennent des matrices diagonales qu'il est très simple d'utiliser.

En revanche, pour le cas du convertisseur statique, il existe deux matrices A_0 et A_1 qui ne possèdent pas, bien sûr, les mêmes éléments propres et qui, de plus, sont non commutatives. Pour simplifier quand même certains calculs, nous nous plaçons dans une base de vecteurs propres de A_0 . Cependant, même avec cette nouvelle base, les calculs formels de matrices comme $e^{A_1 \sigma^i}$, $i = 1, \dots, 2k$, prennent du temps et, par exemple, en utilisant la même méthode pour les cycles de période 1 que pour le thermostat (*Maple+Proj2D*), le temps de calcul pour tracer les surfaces $z = K_1(\sigma^1, \sigma^2)$, $z = K_2(\sigma^1, \sigma^2)$ dans l'espace (σ^1, σ^2, z) est long. Malgré tout, notons que les temps de calcul, même longs (environ 12 minutes), sont beaucoup plus rapides que ceux que nous obtenons pour les équations de cycles présentées dans [86] (environ 21 minutes).

Cycles de période 1

Traitions d'abord le cas des cycles de période 1 et pour cela, résolvons le système (2.29) pour les valeurs numériques des paramètres données dans le tableau 2.3.

R_1	R_L	R_0	R^*	L_0	L_1	C_0	C_1	E_0	E^*	U_{ref}	σ	χ_0
2.1	80	0.5	1	10^{-4}	0.8	3.10^{-3}	$2.5.10^{-5}$	200	1	2.4	0.1	0.25

TAB. 2.3 – Valeurs numériques pour un cycle de période 1 pour l'application électronique avec les R_i , $i = 1, L, 0, *$ en Ω , les L_i , $i = 0, 1$ en H, les C_i , $i = 0, 1$ en F et U_{ref} , E_0 , E^* , χ_0 en V

Nous fixons à 5, 20, 5 et 20 (sans unité par définition des x_i , $i = 1, \dots, 4$) les valeurs initiales respectivement pour x_1 , x_2 , x_3 et x_4 et la variable q est initialisée à $q_0 = -1$. Une simulation à l'aide de *Matlab* donne le comportement du signal de déviation $\xi = U_{ref} - UX$ sur la figure 2.19 (temps en abscisses (s), tension du signal de déviation en ordonnée (V)) et une autre donne le comportement des quatre variables d'état x_i en fonction du temps (figure 2.20). Les courbes tracées d'un trait fin, d'un trait gras, en pointillés et avec des tirets correspondent respectivement aux variations de x_1 , de x_2 de x_3 et de x_4 . Le fait que les variations soient plus importantes sur la figure 2.19 qu'elles ne devraient (c'est-à-dire d'amplitude supérieure à $|S_1 - S_2| = |2\chi_0|$), doit être dû à l'inertie du système.

Pour résoudre de façon numérique le système (2.29) aux deux inconnues σ^1 et σ^2 , nous utilisons la seconde méthode proposée dans le paragraphe 2.2.2 qui fait intervenir un algorithme de Newton classique. Nous abandonnons ici l'idée d'utiliser la première méthode (*Maple + Proj2D*). En effet, les expressions de K_1 et de K_2 sont tellement longues même numériquement, qu'il est plus compliqué de vouloir les rentrer dans un fichier texte pour lancer le logiciel *Proj2D* que d'utiliser un algorithme de Newton directement.

Déjà, la première étape graphique avec *Maple* qui donne la figure 2.21 est obtenue après plusieurs minutes de calcul. Cette figure est malgré tout utile ici puisqu'elle nous donne la possibilité de conclure sur l'existence et l'unicité de la solution (toujours grâce à la régularité des surfaces explorées) et constitue une autre méthode que la simulation pour obtenir des valeurs initiales pour l'algorithme de Newton suffisamment proches de la solution recherchée. Notons que la surface noire représente $z = K_1(\sigma^1, \sigma^2)$, la surface tracée en gris clair

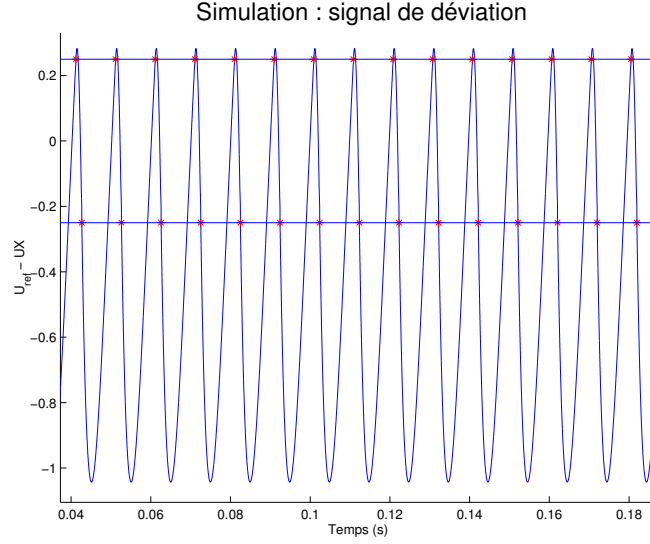


FIG. 2.19 – Illustration d'un cycle de période 1 pour le convertisseur statique : simulation du signal de déviation

correspond à $z = K_2(\sigma^1, \sigma^2)$, et le plan $z = 0$ est tracé en blanc.

Avec les mêmes conditions d'arrêt pour l'algorithme que dans le paragraphe 2.2.2, en choisissant $\sigma^1 = 0.00845$ s et $\sigma^2 = 0.00146$ s comme valeurs initiales obtenues par la figure de droite 2.21, l'algorithme de Newton converge au bout de sept itérations pour donner finalement les valeurs numériques suivantes, solutions de (2.29) :

$$\sigma^1 \simeq 0.0084730503, \quad \sigma^2 \simeq 0.0014703221.$$

A l'aide de ces valeurs et de l'équation (2.19), nous déduisons les valeurs pour Γ^i , $i = 1, 2$:

$$\Gamma^1 \simeq \begin{pmatrix} -1.2104 \\ 1.2105 \\ -1.1076 \\ -172.2046 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 \simeq \begin{pmatrix} 0.1141 \\ -0.1339 \\ 0.2651 \\ 64.45 \end{pmatrix}.$$

Enfin, avec (2.11), nous obtenons les valeurs de cycles des x_i , $i = 1, \dots, 4$:

$$X_{inf} \simeq \begin{pmatrix} 0.000206 \\ 199.99982 \\ 0.10302 \\ 21.450 \end{pmatrix}, \quad X_{sup} \simeq \begin{pmatrix} 0.11407 \\ 199.86611 \\ 0.26515 \\ 26.450 \end{pmatrix},$$

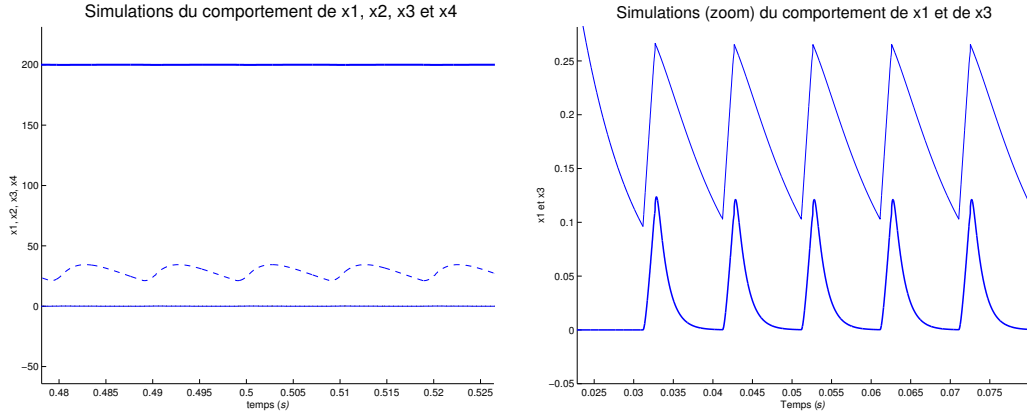


FIG. 2.20 – Illustration d'un cycle de période 1 pour le convertisseur statique : simulation des quatre variables x_i $i = 1, \dots, 4$ avec à droite un zoom sur x_1 et x_3

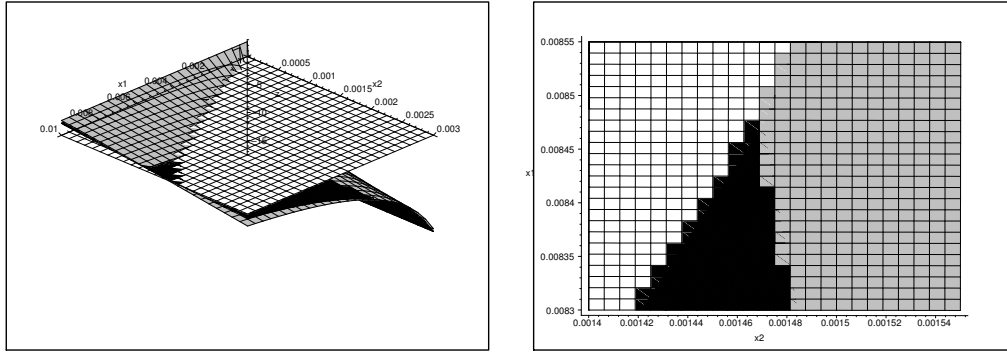


FIG. 2.21 – Surfaces $z = K_1(\sigma^1, \sigma^2)$ et $z = K_2(\sigma^1, \sigma^2)$ tracées à l'aide de *Maple* pour la première étape de résolution du système (2.29)

qui sont en accord avec les valeurs obtenues de façon indépendante par simulation.

Cycles de période 2

Résolvons à présent le système (2.30) obtenu pour les cycles de période 2. Fixons pour cela toutes les valeurs des paramètres du système avec les valeurs numériques présentées dans le tableau 2.4 :

Les figures 2.22, 2.23 présentent respectivement les simulations du comportement du signal de déviation $U_{ref} - UX$ et celles des quatre différentes variables d'état x_i , $i = 1, \dots, 4$. Sur la figure 2.23 située à gauche, les variations tracées

R_1	R_L	R_0	R^*	L_0	L_1	C_0	C_1	E_0	E^*	U_{ref}	σ	χ_0
2	80	5	1	0.2	0.08	3.10^{-6}	$2.5.10^{-5}$	200	1	2.4	0.1	0.25

TAB. 2.4 – Valeurs numériques pour un cycle de période 2 pour l’application électronique

en gras représentent les variations de x_4 , celles tracées d’un trait fin sont les variations de x_3 et les autres sont les variations de x_1 .

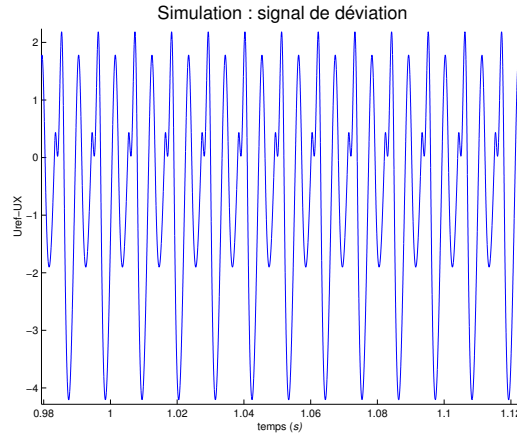


FIG. 2.22 – Illustration d’un cycle de période 2 pour l’application électronique : simulation du signal de déviation

Nous résolvons le système (2.30) à l’aide d’un algorithme de Newton comme pour les cycles de période 1. Les simulations à l’aide de *Matlab* nous donnent des valeurs pour x_i , $i = 1, \dots, 4$ pour initialiser l’algorithme suffisamment proche de la solution. Après 94 itérations, l’algorithme de Newton converge vers les valeurs suivantes des σ^i , $i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned}\sigma^1 &\simeq 0.0028334655, \sigma^2 \simeq 0.0027644440 \\ \sigma^3 &\simeq 0.0034944624, \sigma^4 \simeq 0.0018815105.\end{aligned}$$

De la même façon que pour les cycles de période 1, à l’aide de ces valeurs numériques et de l’équation (2.19), nous pouvons déduire les valeurs des Γ^i ,

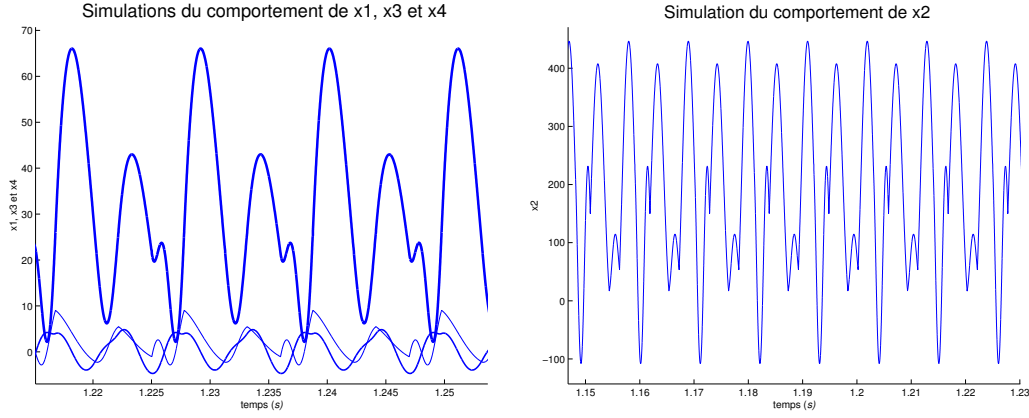


FIG. 2.23 – Illustration d'un cycle de période 2 pour l'application électronique : simulation de x_1 , x_3 , x_4 (à gauche) et de x_2 (à droite)

$i = 1, \dots, 4$ qui sont alors :

$$\Gamma^1 \simeq \begin{pmatrix} -16.174 \\ 37.100 \\ -12.545 \\ -162.408 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 \simeq \begin{pmatrix} 3.981 \\ -50.208 \\ 9.029 \\ 26.50 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^3 \simeq \begin{pmatrix} -13.132 \\ -171.294 \\ -13.758 \\ -162.408 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^4 \simeq \begin{pmatrix} 3.986 \\ -146.541 \\ 5.471 \\ 26.500 \end{pmatrix},$$

et à l'aide de (2.11), nous obtenons les valeurs de cycles suivantes :

$$X_{inf_1} \simeq \begin{pmatrix} -4.680 \\ 225.606 \\ -1.051 \\ 21.500 \end{pmatrix}, \quad X_{inf_2} \simeq \begin{pmatrix} -1.638 \\ 17.211 \\ -2.264 \\ 21.500 \end{pmatrix},$$

$$X_{sup_1} \simeq \begin{pmatrix} 3.981 \\ 149.792 \\ 9.029 \\ 26.500 \end{pmatrix}, \quad X_{sup_2} \simeq \begin{pmatrix} 3.986 \\ 53.459 \\ 5.471 \\ 26.500 \end{pmatrix},$$

qui sont en accord avec les valeurs obtenues, de façon indépendante, à chaque commutation par simulation avec *Matlab*.

2.3 Etude de la stabilité des cycles limites

Deux méthodes pour étudier la stabilité des cycles limites pour le système dynamique hybride considéré sont présentées de façon détaillée dans ce chapitre : il s'agit de la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov [5] et de la méthode, version hybride, de l'application de Poincaré [39], [74]. De plus, une application de ces deux méthodes aux cycles limites de périodes 1 et 2 trouvés pour les deux exemples thermique et électronique introduits aux paragraphes 2.2.2 et 2.2.3 est également proposée.

2.3.1 Présentation de la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov

La méthode des transformations ponctuelles d'Andronov, relativement ancienne et exposée dans [49], est une des possibilités pour étudier la stabilité des cycles limites pour les systèmes dynamiques hybrides. Donnons le principe de cette méthode pour un cycle de période k quelconque.

D'un point de vue analytique, une trajectoire est caractérisée par le fait que le système, en amorçant son mouvement à partir d'une certaine surface de l'espace de phases, revient régulièrement sur cette même surface aux instants $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$. Soient $\alpha_n = (\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^m)$ les m composantes de α_n qui définissent la position du point à la surface de l'espace des phases à l'instant t_n . De plus, supposons qu'il existe une relation connue entre ces coordonnées α_n et celles $\alpha_{n+1} = (\alpha_{n+1}^1, \dots, \alpha_{n+1}^m)$ à l'instant t_{n+1} :

$$(2.31) \quad f_i(\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^m, \alpha_{n+1}^1, \dots, \alpha_{n+1}^m) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Un m -cycle correspond au cas particulier où :

$$(2.32) \quad \alpha^i = \alpha_n^i = \alpha_{n+1}^i, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

donc (2.31) devient alors :

$$(2.33) \quad f_i(\alpha^1, \dots, \alpha^m, \alpha^1, \dots, \alpha^m) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ce système permet de calculer les paramètres du cycle. Il reste alors à étudier sa stabilité. Pour cela, il faut étudier le comportement de α_n à l'infini. Dans le but de linéariser le système (2.31), nous supposons que α_n ne diffère de α que d'une petite quantité β_n ce qui se traduit par :

$$\beta_n = \alpha_n - \alpha.$$

Le principe de stabilité est alors le suivant : si β_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, alors le cycle est stable. Dans le cas contraire, le cycle ne peut être stable.

Supposons à présent que les fonctions f_i , $i = 1, \dots, m$ soient suffisamment régulières et qu'un théorème de conditions de linéarisation comme celui de Hartman-Grobman [36] puisse s'appliquer ici. Alors, le développement en série de Taylor des f_i , $i = 1, \dots, m$ à l'ordre 1 au voisinage de α donne pour $i, j = 1, \dots, m$:

$$(2.34) \quad \begin{aligned} f_i(\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^m, \alpha_{n+1}^1, \dots, \alpha_{n+1}^m) &= f_i(\alpha^1, \dots, \alpha^m, \alpha^1, \dots, \alpha^m) \\ &+ \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_n^j} \Big|_{\alpha_n^j=\alpha^j, \alpha_{n+1}^j=\alpha^j} \beta_n^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_{n+1}^j} \Big|_{\alpha_n^j=\alpha^j, \alpha_{n+1}^j=\alpha^j} \beta_{n+1}^j + o(\beta_n, \beta_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

A partir de (2.33), en introduisant les notations suivantes, et si l'on admet que la condition de stabilité est préservée par approximation au premier ordre, nous avons :

$$(2.35) \quad \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_n^j} \Big|_{\alpha_n^j=\alpha^j, \alpha_{n+1}^j=\alpha^j} = a_{ij}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_{n+1}^j} \Big|_{\alpha_n^j=\alpha^j, \alpha_{n+1}^j=\alpha^j} = b_{ij},$$

l'équation (2.34) devient alors pour $i, j = 1, \dots, m$:

$$(2.36) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} \beta_n^j + \sum_{j=1}^m b_{ij} \beta_{n+1}^j + o(\beta_n, \beta_{n+1}) = 0.$$

De là, en considérant les β_n^j comme les échantillons de la fonction $\beta^j[n]$ et en utilisant la transformation discrète en z , l'équation (2.36) peut alors s'écrire :

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \beta_z^j + \sum_{j=1}^m z b_{ij} (\beta_z^j - \beta^j[0]) + o(\beta_z) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

c'est-à-dire :

$$(2.37) \quad \sum_{j=1}^m (z^{-1} a_{ij} + b_{ij}) \beta_z^j = \sum_{j=1}^m b_{ij} \beta^j[0] + o(\beta_z), \quad i = 1, \dots, m,$$

avec β_z^j représentant la transformée en z de $\beta^j[n]$.

L'équation (2.37) peut également s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$M \beta_z = N \beta[0] + o(\beta_z),$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} z^{-1}a_{11} + b_{11} & z^{-1}a_{12} + b_{12} & \dots & z^{-1}a_{1m} + b_{1m} \\ z^{-1}a_{21} + b_{21} & z^{-1}a_{22} + b_{22} & \dots & z^{-1}a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-1}a_{m1} + b_{m1} & z^{-1}a_{m2} + b_{m2} & \dots & z^{-1}a_{mm} + b_{mm} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}, \quad \beta_z = \begin{pmatrix} \beta_z^1 \\ \vdots \\ \beta_z^m \end{pmatrix}, \quad \beta[0] = \begin{pmatrix} \beta^1[0] \\ \vdots \\ \beta^m[0] \end{pmatrix}.$$

En supposant que la matrice M soit inversible, nous obtenons :

$$\beta_z = \frac{1}{\det M} \text{com}^T M \cdot N \cdot \beta[0] + o(\beta_z),$$

puis en posant $\det M = \Delta$, $\text{com}^T M \cdot N = S = (s_{ij})$, et $\Delta_j = \sum_{j=1}^m s_{ij} \beta^j[0]$, nous avons alors :

$$(2.38) \quad \beta_z^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}.$$

Rappelons ici que la condition de stabilité du cycle est :

$$(2.39) \quad \beta[n] \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Finalement, pour que cette condition (2.39) soit satisfaite, il faut et il suffit que l'équation caractéristique :

$$(2.40) \quad \Delta = 0$$

ait toutes ses racines à l'intérieur du disque unité ouvert.

2.3.2 Présentation de la méthode de l'application de Poincaré étendue aux systèmes hybrides

La seconde méthode proposée utilise l'idée classique de l'application de Poincaré étendue aux systèmes dynamiques hybrides [39], [33], [74]. Son principe est le suivant : l'étude de la stabilité d'un cycle revient, avec cette méthode, à chercher les valeurs propres de la matrice jacobienne de l'application de Poincaré dans le cas d'un cycle de période 1 et de la matrice jacobienne de la composée de l'application de Poincaré avec elle-même dans le cas d'un cycle de période 2. Notons J cette matrice jacobienne. Il faut ensuite appliquer le théorème suivant [33] :

Théorème 2.3.1

Soient λ_j , $j = 1, \dots, N$ les valeurs propres de J , matrice évaluée en un point fixe :

- si pour tout $j \in 1, \dots, N$, $|\lambda_j| < 1$ alors le cycle est stable,
- s'il existe $j' \in 1, \dots, N$ tel que $|\lambda_{j'}| > 1$ alors le cycle n'est pas stable,
- s'il existe $j' \in 1, \dots, N$ tel que $|\lambda_{j'}| = 1$ et pour tout $j \neq j'$, $|\lambda_j| \leq 1$, alors nous ne pouvons pas conclure quant à la stabilité du cycle.

Remarque 2.3.2

Le cas limite $|\lambda_{j'}| = 1$, $|\lambda_j| \leq 1$, $\forall j \neq j'$, n'apparaît pas dans la première méthode exposée au paragraphe 2.3.1 du fait de l'hypothèse d'équivalence par approximation au premier ordre.

Rappel : Application de Poincaré pour les systèmes dynamiques

Soit γ une orbite périodique de période k du système dynamique de dimension N régi par le système différentiel suivant $\dot{x} = f(x)$. Soit W un hyperplan transverse à γ au point x_T . L'application de Poincaré ou application de premier retour associée à W et à x_T est une application notée P qui à tout $z \in W$ au voisinage de x_T fait correspondre $P(z)$, première intersection de la trajectoire avec l'hyperplan W . La figure 2.24 illustre le principe.

Notons également que dans ce cas, le résultat énoncé dans le théorème 2.3.1 est indépendant du choix de l'application de Poincaré, c'est-à-dire que le résultat ne dépend ni de l'hyperplan (variété) transverse W ni du point x_T .

Application de Poincaré hybride associée au système (2.1)

Définissons l'application de Poincaré associée à notre système dynamique hybride général (2.1).

Pour cela, considérons d'abord les deux écritures différentes suivantes pour $\xi(t_n) = \xi_n$ données par le système suivant :

$$\begin{cases} \xi_n = f(S_1, S_2, q_{n-1}, q_n), \\ \xi_n = cste - WX(t_n^-) = cste - W(e^{\sigma_n A_{n-1}} \Gamma_{n-1} - A_{n-1}^{-1} V_{n-1}) \end{cases}$$

et qui conduisent à l'équation :

$$(2.41) \quad cste - W(e^{\sigma_n A_{n-1}} \Gamma_{n-1} - A_{n-1}^{-1} V_{n-1}) - f(S_1, S_2, q_{n-1}, q_n) = 0.$$

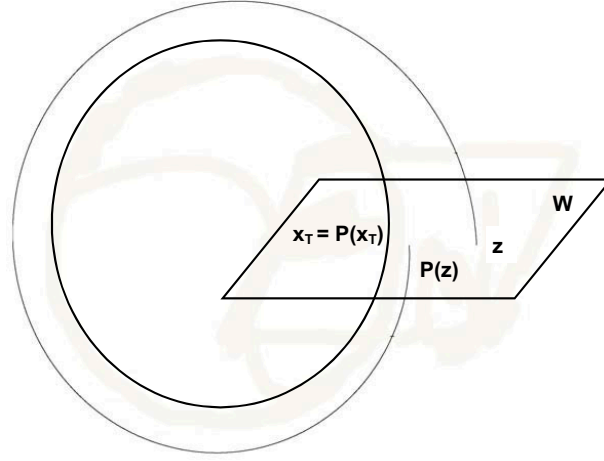


FIG. 2.24 – Application de Poincaré pour un système dynamique

Sous l'hypothèse 2.2.1, la durée σ_n , $n \geq 1$, implicitement donnée par l'équation obtenue (2.41), définit, pour $n \geq 1$, une fonction ψ_{q_n} de Γ_{n-1} telle que :

$$(2.42) \quad \sigma_n = \psi_{q_n}(\Gamma_{n-1}), \quad \forall n \geq 1.$$

De plus, l'équation (2.12), introduite au paragraphe 2.2, définit pour $n \geq 1$ une fonction g_{q_n} de σ_n et de Γ_{n-1} telle que :

$$(2.43) \quad \Gamma_n = g_{q_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}), \quad \forall n \geq 1.$$

Posons à présent :

$$(2.44) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, & G_{q_n}(\cdot) \triangleq g_{q_n}(\psi_{q_n}(\cdot), \cdot), \\ \forall n \geq 2, & h_{q_n} \triangleq G_{q_n} \circ G_{q_{n-1}}(\cdot). \end{cases}$$

Comme $q_n = q_0$ si n est pair et $q_n = q_1$ si n est impair, nous obtenons alors $h_{q_n} \triangleq h_{q_0}$ si n est pair et $h_{q_n} \triangleq h_{q_1}$ si n est impair ($n \geq 2$). Notons alors la fonction :

$$(2.45) \quad \begin{aligned} h : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \Gamma &\longmapsto \begin{cases} h_{q_0}(\Gamma) & \text{si } n \text{ est pair} \\ h_{q_1}(\Gamma) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction h ainsi définie par (2.45) correspond à l'application de Poincaré associée à notre système hybride. Les cycles de période 1 sont ainsi construits à partir des points fixes Γ^2 pour h_{q_0} et Γ^1 pour h_{q_1} . Un cycle de période 2 correspondra alors à un point 2-périodique Γ^4 pour h_{q_0} et Γ^1 pour h_{q_1} caractérisés par $h_{q_0}(\Gamma^4) = \Gamma^2$, $h_{q_1}(\Gamma^1) = \Gamma^3$ et $h_{q_0} \circ h_{q_1}(\Gamma^4) = h_{q_0}^2(\Gamma^4) = \Gamma^4$, $h_{q_1} \circ h_{q_0}(\Gamma^1) = h_{q_1}^2(\Gamma^1) = \Gamma^1$.

Remarque 2.3.3

Dans ce dernier cas, Γ^2 et Γ^3 sont aussi des points 2-périodiques respectivement pour h_{q_0} et h_{q_1} .

Donnons ici, en utilisant les notations générales, l'expression de la matrice jacobienne de $h_{q_n}(\Gamma_{n-2})$. Nous pourrons alors, dans les paragraphes qui suivent, l'appliquer plus particulièrement aux exemples du thermostat à résistance d'anticipation et du convertisseur statique.

La matrice jacobienne de $h_{q_n}(\Gamma_{n-2}) = G_{q_n} \circ G_{q_{n-1}}(\Gamma_{n-2})$ en Γ_{n-2} est donnée par :

$$(2.46) \quad \begin{aligned} Dh_{q_n}(\Gamma_{n-2}) &= DG_{q_n}(G_{q_{n-1}}(\Gamma_{n-2}))DG_{q_{n-1}}(\Gamma_{n-2}) \\ &= DG_{q_n}(\Gamma_{n-1})DG_{q_{n-1}}(\Gamma_{n-2}). \end{aligned}$$

Il faut donc exprimer $DG_{q_n}(\Gamma_{n-1})$. Par définition (2.44) de l'application G_{q_n} , la jacobienne de G_{q_n} en Γ_{n-1} est donnée par :

$$(2.47) \quad DG_{q_n}(\Gamma_{n-1}) = \frac{\partial g_{q_n}}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{q_n}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}) + \frac{\partial g_{q_n}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}).$$

Les calculs de $\frac{\partial g_{q_n}}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$ et de $\frac{\partial g_{q_n}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$ s'obtiennent facilement en dérivant le second membre de l'équation (2.12) respectivement par rapport à σ_n et à Γ_{n-1} ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{q_n}}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A_{n-1}e^{\sigma_n A_{n-1}}\Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial g_{q_n}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = e^{\sigma_n A_{n-1}}. \end{cases}$$

De plus, le calcul de $\frac{\partial \psi_{q_n}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1})$ est obtenu en différentiant l'équation implicite donnée par (2.41) par rapport à Γ_{n-1} avec $\sigma_n = \psi_{q_n}(\Gamma_{n-1})$, ce qui donne :

$$-W A_{n-1}e^{\sigma_n A_{n-1}}\Gamma_{n-1} \frac{\partial \psi_{q_n}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}) - W e^{\sigma_n A_{n-1}} = 0.$$

Si $-WA_{n-1}e^{\sigma_n A_{n-1}}\Gamma_{n-1} \neq 0$, ce que nous supposons, alors nous pouvons déduire :

$$(2.48) \quad \frac{\partial \psi_{q_n}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}) = \frac{-We^{\sigma_n A_{n-1}}}{WA_{n-1}e^{\sigma_n A_{n-1}}\Gamma_{n-1}}.$$

Nous pouvons finalement écrire :

$$(2.49) \quad DG_{q_n}(\Gamma_{n-1}) = \left(I_N - \frac{A_{n-1}e^{\sigma_n A_{n-1}}\Gamma_{n-1}W}{WA_{n-1}e^{\sigma_n A_{n-1}}\Gamma_{n-1}} \right) e^{\sigma_n A_{n-1}},$$

et en déduire l'expression de $Dh_{q_n}(\Gamma_{n-2})$ par (2.46).

Remarque 2.3.4

D'après l'équation (2.14) que nous rappelons ci-dessous :

$$cste - W(\Gamma_n - A_n^{-1}V_n) - f(S_1, S_2, q_{n-1}, q_n) = 0,$$

nous avons $-WD\Gamma_n = 0$ i.e. $-WDG_{q_n}(\Gamma_{n-1}) = 0$, par définition de G_{q_n} . Ceci signifie donc que $-W$ est un vecteur propre à gauche de $DG_{q_n}(\Gamma_{n-1})$ associé à la valeur propre 0 et donc également de $Dh_{q_n}(\Gamma_{n-2})$. Ainsi, la valeur 0 est toujours valeur propre de $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$ et aussi alors de $Dh_{q_0}^2(\Gamma^2)$.

2.3.3 Equivalence des deux méthodes

Le système $H(R_n, R_{n+1}) = 0$ donné par (2.17) est déduit du système suivant (2.50) construit à partir de (2.12) et de (2.41) :

$$(2.50) \quad \begin{cases} \tilde{H}_i(R_n, R_{n+1}) = \Gamma_{n+1}^i - e^{\sigma_{n+1}^i} \Gamma_r^{i-1} - A_i^{-1}V_i + A_{i-1}^{-1}V_{i-1} = 0, \\ \tilde{H}_{2k+i}(R_n, R_{n+1}) = cste - W(e^{\sigma_{n+1}^i A_{i-1}} \Gamma_r^{i-1} - A_{i-1}^{-1}V_{i-1}) - f(S_1, S_2, q_{i-1}, q_i) = 0, \end{cases}$$

avec $r = n$ si $i = 1$, $r = n + 1$ sinon, $\Gamma_{n+1}^0 = \Gamma_{n+1}^{2k}$. Cela se fait par la transformation linéaire donnée par $\forall i = 1, \dots, 2k$, $H_i(R_n, R_{n+1}) = \tilde{H}_i(R_n, R_{n+1})$, $H_{2k+i}(R_n, R_{n+1}) = \tilde{H}_{2k+i}(R_n, R_{n+1}) - W\tilde{H}_i(R_n, R_{n+1})$. Ainsi, la linéarisation de $H(R_n, R_{n+1})$ au voisinage de (R, R) est équivalente à celle de $\tilde{H}(R_n, R_{n+1})$. En supposant que les hypothèses du théorème des fonctions implicites soient satisfaites en (R, R) , les équations implicites $\tilde{H}_{2k+i}(R_n, R_{n+1})$, $i = 1, \dots, 2k$, de (2.50) donnent au voisinage de Γ_r^{i-1} , $i = 1, \dots, 2k$, $\sigma_{n+1}^i = \psi_{q_i}(\Gamma_r^{i-1})$ avec $\psi_{q_i} = \begin{cases} \psi_{q_0} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ \psi_{q_1} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$, $r = n$ si $i = 1$, $r = n + 1$ sinon, $\Gamma_{n+1}^0 = \Gamma_{n+1}^{2k}$.

Ceci est obtenu sous l'hypothèse :

$$(2.51) \quad \frac{\partial \tilde{H}_{2k+i}}{\partial \sigma_{n+1}^i}(R, R) = -W A_{i-1} e^{\sigma^i A_{i-1}} \Gamma^{i-1} \neq 0.$$

En incluant les expressions pour σ_{n+1}^i ainsi obtenues dans $\tilde{H}_i(R_n, R_{n+1})$, $i = 1, \dots, 2k$ du système (2.50), nous avons, avec les notations (2.44) :

$$(2.52) \quad \tilde{H}_i(R_n, R_{n+1}) = \Gamma_{n+1}^i - G_{q_i}(\Gamma_r^{i-1}) = 0$$

avec $G_{q_i} = \begin{cases} G_{q_0} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ G_{q_1} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$, $r = n$ si $i = 1$, $r = n+1$ sinon, $\Gamma_{n+1}^0 = \Gamma_{n+1}^{2k}$, et alors, nous obtenons :

$$(2.53) \quad \Gamma_{n+1}^i = G_{q_i} \circ G_{q_{i-1}}(\Gamma_r^{(i-2) \bmod(2k)}) = h_{q_i}(\Gamma_r^{(i-2) \bmod(2k)}),$$

avec $h_{q_i} = \begin{cases} h_{q_0} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ h_{q_1} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$, $r = n$ si $i = 1$ ou 2 , $r = n+1$ sinon, $\Gamma_{n+1}^0 = \Gamma_{n+1}^{2k}$.

De plus, pour le calcul des différentielles de G_{q_n} , le théorème des fonctions implicites renvoie à la linéarisation de $\tilde{H}_{2k+i}(R_n, R_n)$, $i = 1, \dots, 2k$ au voisinage de (R, R) . En conséquence, sous l'hypothèse (2.51), la linéarisation du système $H(R_n, R_{n+1}) = 0$ (2.17) au voisinage de (R, R) est équivalente à celle de (2.53) au voisinage de $\Gamma^{(i-2) \bmod(2k)}$, $i = 1, \dots, 2k$. Cette dernière conduit précisément à l'étude de la stabilité par la méthode de l'application de Poincaré hybride présentée au paragraphe 2.3.2. De là, il y a donc bien équivalence entre cette méthode de Poincaré et la convergence de la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers R pour le problème linéarisé (2.34) qui correspond à la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov.

2.3.4 Application aux cycles de périodes 1 et 2 pour le thermostat à résistance d'anticipation

Appliquons à présent les deux méthodes, présentées aux paragraphes précédents, aux cycles de périodes 1 et 2 trouvés pour l'exemple du thermostat à résistance d'anticipation. Commençons par exemple par utiliser la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov.

Application de la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov

Soit $R_n = (\sigma_n^1, \Gamma_n^1, \dots, \sigma_n^{2k}, \Gamma_n^{2k})$ le $4k$ -uplet qui définit les paramètres du cycle. Le système (2.31) à linéariser au voisinage de R donné par $R = (\sigma^1, \Gamma^1, \sigma^2, \Gamma^2)$ pour un cycle de période 1 et $R = (\sigma^1, \Gamma^1, \sigma^2, \Gamma^2, \sigma^3, \Gamma^3, \sigma^4, \Gamma^4)$ pour un cycle de période 2, correspond au système (2.17), qui pour cet exemple thermique s'écrit pour $i = 1, \dots, 2k$:

$$(2.54) \quad \begin{cases} H_i(R_n, R_{n+1}) = \Gamma_{n+1}^i - e^{\sigma_{n+1}^i A} \Gamma_r^{i-1} + (-1)^i \Delta q_1 A^{-1} B = 0, \\ H_{2k+i}(R_n, R_{n+1}) = L(\Gamma_{n+1}^i - A^{-1}(q_i B + C)) - q_i \theta_1 - q_{i-1} \theta_2 = 0, \end{cases}$$

avec $r = n$ si $i = 1$, $r = n+1$ sinon, $q_i = q_0$ si i est pair, $q_i = q_1 = 1 - q_0$ si i est impair. La linéarisation de ce système (2.54) au voisinage de (R, R) donne :

$$(2.55) \quad \frac{\partial H}{\partial R_n}(R, R)(R_n - R) + \frac{\partial H}{\partial R_{n+1}}(R, R)(R_{n+1} - R) = 0.$$

Posons maintenant $U_1 \triangleq \frac{\partial H}{\partial R_n}(R, R)$ et $U_2 \triangleq \frac{\partial H}{\partial R_{n+1}}(R, R)$, $T_n = R_n - R$, $T_{n+1} = R_{n+1} - R$. En appliquant la transformée en z sur (2.55), nous obtenons $U_1 T^* + z U_2 (T^* - T_0) = 0$ avec T^* qui représente la transformée en z de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc $T^* = (z^{-1} U_1 + U_2)^{-1} U_2 T_0$.

L'équation caractéristique Δ introduite au paragraphe 2.3.1 par (2.40) devient dans cet exemple $\Delta \triangleq |z^{-1} U_1 + U_2|$ ce qui donne également $\Delta \triangleq \frac{1}{z|W|} |U_1 + z U_2|$, $W = 2k(N+1)$, k étant la période du cycle et N la dimension du système.

Pour un cycle de période 1, nous obtenons :

$$|U_1 + z U_2| = \begin{vmatrix} -z A e^{\sigma^1 A} \Gamma^2 & z I_N & 0 & -e^{\sigma^1 A} \\ 0 & -z e^{\sigma^2 A} & -z A e^{\sigma^2 A} \Gamma^1 & z I_N \\ 0 & z L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z L \end{vmatrix}$$

d'où finalement :

$$(2.56) \quad |U_1 + z U_2| = z^{N+3} \cdot \begin{vmatrix} -A e^{\sigma^1 A} \Gamma^2 & I_N & 0 & -e^{\sigma^1 A} \\ 0 & -e^{\sigma^2 A} & -A e^{\sigma^2 A} \Gamma^1 & z I_N \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{vmatrix} = z^{N+3} \Delta^1.$$

De même, pour un cycle de période 2, nous avons :

$$|U_1 + zU_2| = \begin{vmatrix} zM_2 & zI_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 \\ 0 & zM_3 & zM_4 & zI_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & zM_5 & zM_6 & zI_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & zM_7 & zM_8 & zI_N \\ 0 & zL & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & zL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & zL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & zL \end{vmatrix}$$

avec $M_1 = -e^{\sigma^1 A}$, $M_2 = -Ae^{\sigma^1 A}\Gamma^4$, $M_3 = -e^{\sigma^2 A}$, $M_4 = -Ae^{\sigma^2 A}\Gamma^1$, $M_5 = -e^{\sigma^3 A}$, $M_6 = -Ae^{\sigma^3 A}\Gamma^2$, $M_7 = -e^{\sigma^4 A}$, $M_8 = -Ae^{\sigma^4 A}\Gamma^3$ et donc finalement :

(2.57)

$$|U_1 + zU_2| = z^{3N+5} \cdot \begin{vmatrix} M_2 & I_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 \\ 0 & M_3 & M_4 & I_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_5 & M_6 & I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_7 & M_8 & zI_N \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{vmatrix} \\ = z^{3N+5} \Delta^2.$$

La valeur 0 est donc racine de $|U_1 + zU_2|$. Il reste donc à chercher les racines de Δ^1 et de Δ^2 pour conclure sur la stabilité ou non des cycles limites trouvés selon l'appartenance de ces racines au disque unité ouvert. D'abord, remarquons que les coefficients associés à z^N dans Δ^1 et Δ^2 sont nuls donc Δ^1 et Δ^2 sont des polynômes de degré au plus $N - 1$.

Pour le cycle de période 1 présenté au paragraphe 2.2.2 avec les valeurs numériques du tableau 2.1, nous obtenons pour Δ^1 une racine conjuguée $z_{1,2} \simeq -0.056679 \pm 0.361446 i$. Toutes ces racines ont clairement des modules

strictement inférieurs à un donc nous pouvons alors conclure que ce cycle de période 1 est stable.

De la même façon, pour le cycle de période 2 présenté au paragraphe 2.2.2 avec les valeurs numériques du tableau 2.2, nous obtenons pour Δ^2 comme racines $z_1 \simeq 0.774463$ et $z_2 \simeq 0.002573$ qui sont également toutes à l'intérieur du disque unité ouvert (tout comme 0, autre racine de $|U_1 + zU_2|$). Ce cycle de période 2 est donc stable d'après la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov.

Application de la méthode de l'application de Poincaré hybride

Pour mettre en œuvre la méthode de l'application de Poincaré hybride, il faut appliquer l'expression générale de la jacobienne de $h_{q_n}(\Gamma_{n-2})$, introduite au paragraphe 2.3.2, à l'exemple du thermostat à résistance d'anticipation. L'équation (2.49) devient alors :

$$(2.58) \quad DG_{q_n}(\Gamma_{n-1}) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma_n A} \Gamma_{n-1} L}{LAe^{\sigma_n A} \Gamma_{n-1}} \right) e^{\sigma_n A},$$

ce qui donne plus particulièrement pour un cycle de période 1 :

$$\begin{cases} DG_{q_0}(\Gamma^1) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^2 A} \Gamma^1 L}{LAe^{\sigma^2 A} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A} \\ DG_{q_1}(\Gamma^2) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^1 A} \Gamma^2 L}{LAe^{\sigma^1 A} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^1 A}, \end{cases}$$

et pour un cycle de période 2 :

$$\begin{cases} DG_{q_0}(\Gamma^1) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^2 A} \Gamma^1 L}{LAe^{\sigma^2 A} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A} \\ DG_{q_0}(\Gamma^3) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^4 A} \Gamma^3 L}{LAe^{\sigma^4 A} \Gamma^3} \right) e^{\sigma^4 A} \\ DG_{q_1}(\Gamma^2) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^3 A} \Gamma^2 L}{LAe^{\sigma^3 A} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^3 A} \\ DG_{q_1}(\Gamma^4) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^1 A} \Gamma^4 L}{LAe^{\sigma^1 A} \Gamma^4} \right) e^{\sigma^1 A}. \end{cases}$$

Ainsi, l'équation (2.46) devient pour un cycle de période 1 :

$$(2.59) \quad \begin{cases} Dh_{q_0}(\Gamma^2) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^2 A} \Gamma^1 L}{LAe^{\sigma^2 A} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A} \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^1 A} \Gamma^2 L}{LAe^{\sigma^1 A} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^1 A} \\ \text{ou} \\ Dh_{q_1}(\Gamma^1) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^1 A} \Gamma^2 L}{LAe^{\sigma^1 A} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^1 A} \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^2 A} \Gamma^1 L}{LAe^{\sigma^2 A} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A}, \end{cases}$$

et pour un cycle de période 2 :

$$(2.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} Dh_{q_0}(\Gamma^2) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^4 A} \Gamma^3 L}{LAe^{\sigma^4 A} \Gamma^3} \right) e^{\sigma^4 A} \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^3 A} \Gamma^2 L}{LAe^{\sigma^3 A} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^3 A} \\ \text{ou} \\ Dh_{q_0}(\Gamma^4) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^2 A} \Gamma^1 L}{LAe^{\sigma^2 A} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A} \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^1 A} \Gamma^4 L}{LAe^{\sigma^1 A} \Gamma^4} \right) e^{\sigma^1 A} \\ \text{ou} \\ Dh_{q_1}(\Gamma^1) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^3 A} \Gamma^2 L}{LAe^{\sigma^3 A} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^3 A} \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^2 A} \Gamma^1 L}{LAe^{\sigma^2 A} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A} \\ \text{ou} \\ Dh_{q_1}(\Gamma^3) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^1 A} \Gamma^4 L}{LAe^{\sigma^1 A} \Gamma^4} \right) e^{\sigma^1 A} \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^4 A} \Gamma^3 L}{LAe^{\sigma^4 A} \Gamma^3} \right) e^{\sigma^4 A}. \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons remarqué précédemment, un cycle de période 2 correspond à quatre points 2-périodiques Γ^2 et Γ^4 pour h_{q_0} , Γ^1 et Γ^3 pour h_{q_1} tels que $h_{q_0}(\Gamma^2) = \Gamma^4$, $h_{q_0}(\Gamma^4) = \Gamma^2$, $h_{q_1}(\Gamma^1) = \Gamma^3$, $h_{q_1}(\Gamma^3) = \Gamma^1$ et donc $h_{q_0} \circ h_{q_0}(\Gamma^2) = \Gamma^2$, $h_{q_0} \circ h_{q_0}(\Gamma^4) = \Gamma^4$, $h_{q_1} \circ h_{q_1}(\Gamma^1) = \Gamma^1$, $h_{q_1} \circ h_{q_1}(\Gamma^3) = \Gamma^3$. Ainsi, il faut rechercher pour un cycle de période 2, les valeurs propres des jacobiniennes de $h_{q_0} \circ h_{q_0} = h_{q_0}^2$ et de $h_{q_1} \circ h_{q_1} = h_{q_1}^2$, matrices qui sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_{q_0}^2(\Gamma^2) = Dh_{q_0}(h_{q_0}(\Gamma^2))Dh_{q_0}(\Gamma^2) = Dh_{q_0}(\Gamma^4)Dh_{q_0}(\Gamma^2) \\ Dh_{q_0}^2(\Gamma^4) = Dh_{q_0}(\Gamma^2)Dh_{q_0}(\Gamma^4) \\ Dh_{q_1}^2(\Gamma^1) = Dh_{q_1}(\Gamma^3)Dh_{q_1}(\Gamma^1) \\ Dh_{q_1}^2(\Gamma^3) = Dh_{q_1}(\Gamma^1)Dh_{q_1}(\Gamma^3). \end{array} \right.$$

Le nombre de jacobiniennes à étudier pour les valeurs propres peut être réduit de moitié grâce au lemme suivant :

Lemme 2.3.5

Soient u, v des endomorphismes de E . Alors $u \circ v$ et $v \circ u$ ont mêmes valeurs propres.

Numériquement, nous obtenons, pour le cycle de période 1 présenté au paragraphe 2.2.2, pour les valeurs numériques du tableau 2.1, les mêmes valeurs propres pour $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$ et $Dh_{q_1}(\Gamma^1)$ qui sont les suivantes : $z_1 = 0$ (d'après la remarque 2.3.4), $z_{2,3} \simeq -0.056679 \pm 0.361446 i$ ayant toutes un module strictement inférieur à 1. Notons que nous obtenons effectivement les mêmes valeurs pour les valeurs propres de Dh_{q_n} que pour les racines de Δ^1 donné par la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov. Ceci confirme ainsi numériquement l'équivalence des deux méthodes.

De même, nous obtenons pour le cycle de période 2 présenté au paragraphe 2.2.2 pour les valeurs numériques du tableau 2.2, les mêmes valeurs propres pour $Dh_{q_0}^2(\Gamma^2)$, $Dh_{q_0}^2(\Gamma^4)$, $Dh_{q_1}^2(\Gamma^1)$, $Dh_{q_1}^2(\Gamma^3)$ à savoir $z_1 = 0$ (remarque 2.3.4), $z_2 \simeq 0.774463$, $z_3 \simeq 0.002573$. Ces valeurs propres ont toutes des modules strictement inférieurs à 1 ce qui confirme la stabilité de ce cycle de période 2. Nous remarquons que nous avons exactement les mêmes valeurs pour les valeurs propres de $Dh_{q_0}^2$ et de $Dh_{q_1}^2$ que pour les racines de Δ^2 obtenues par la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov. Ceci confirme de façon numérique l'équivalence des deux méthodes pour l'étude de la stabilité des cycles limites.

2.3.5 Application aux cycles de périodes 1 et 2 pour le convertisseur statique

Appliquons maintenant les deux méthodes aux cycles de périodes 1 et 2 trouvés pour l'exemple du convertisseur statique. Reprenons le même schéma que précédemment et appliquons d'abord la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov.

Application de la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov

Soit R_n le $4k$ -uplet défini comme précédemment. Le système (2.31) à linéariser au voisinage de R ($R = (\sigma^1, \Gamma^1, \sigma^2, \Gamma^2)$ pour un cycle de période 1 et $R = (\sigma^1, \Gamma^1, \dots, \sigma^4, \Gamma^4)$ pour un cycle de période 2) correspond au système (2.17) qui s'exprime pour $i = 1, \dots, 2k$ de la façon suivante pour le cas du convertisseur statique :

$$(2.61) \quad \begin{cases} H_i(R_n, R_{n+1}) = \Gamma_{n+1}^i - e^{\sigma_{n+1}^i A_{i-1}} \Gamma_r^{i-1} - (A_i^{-1} - A_{i-1}^{-1})V = 0, \\ H_{2k+i}(R_n, R_{n+1}) = U_{ref} - U(\Gamma_{n+1}^i - A_i^{-1}V) - \frac{1}{2}\Delta q_i \chi_0 = 0, \end{cases}$$

avec $r = n$ si $i = 1$, $r = n+1$ sinon, $\Gamma_{n+1}^0 = \Gamma_{n+1}^{2k}$, $q_i = q_0$ si i est pair et $q_i = q_1$ si i est impair.

La linéarisation de ce système (2.61) au voisinage de (R, R) et le passage à la transformée en z s'exécutent de façon identique à ce qui a été présenté au paragraphe 2.3.4 pour l'application du thermostat à résistance d'anticipation. En utilisant les mêmes notations introduites au paragraphe 2.3.4, l'étude de la stabilité des cycles limites à l'aide de la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov revient à chercher les racines de l'équation caractéristique

$|U_1 + zU_2|$ ($U_1 \triangleq \frac{\partial H}{\partial R_n}(R, R)$, $U_2 \triangleq \frac{\partial H}{\partial R_{n+1}}(R, R)$) donnée pour un cycle de période 1 par :

(2.62)

$$|U_1 + zU_2| = z^{N+3} \cdot \begin{vmatrix} -A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^2 & I_N & 0 & -e^{\sigma^1 A_0} \\ 0 & -e^{\sigma^2 A_1} & -A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1 & zI_N \\ 0 & -U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -U \end{vmatrix} = z^{N+3} \Delta^1,$$

et pour un cycle de période 2 par :

(2.63)

$$|U_1 + zU_2| = z^{3N+5} \cdot \begin{vmatrix} M_2 & I_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 \\ 0 & M_3 & M_4 & I_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_5 & M_6 & I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_7 & M_8 & zI_N \\ 0 & -U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -U & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U \end{vmatrix} = z^{3N+5} \Delta^2,$$

avec $M_1 = -e^{\sigma^1 A_0}$, $M_2 = -A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^4$, $M_3 = -e^{\sigma^2 A_1}$, $M_4 = -A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1$, $M_5 = -e^{\sigma^3 A_0}$, $M_6 = -A_0 e^{\sigma^3 A_0} \Gamma^2$, $M_7 = -e^{\sigma^4 A_1}$, $M_8 = -A_1 e^{\sigma^4 A_1} \Gamma^3$.

La valeur 0 est également toujours racine de $|U_1 + zU_2|$. Il reste donc à chercher les racines des équations caractéristiques Δ^1 et Δ^2 qui sont, pour la même raison qu'au paragraphe précédent, des polynômes de degré au plus $N - 1$.

Pour le cycle de période 1 présenté au paragraphe 2.29, pour les valeurs numériques du tableau 2.3, nous obtenons comme racines pour Δ^1 , $z_1 \simeq 0.0067439$, $z_2 \simeq 0.0003799$ et $z_3 \simeq 0$. Toutes ces racines ont clairement des modules strictement inférieurs à un donc nous pouvons conclure que ce cycle de période 1 est stable.

Numériquement, pour le cycle de période 2 présenté au paragraphe 2.2.2 pour les valeurs numériques du tableau 2.4, les racines de Δ^2 sont $z_1 \simeq 0.00416706$,

$z_{2,3} \simeq 0.05852533 \pm 0.75537726 i$ qui sont bien toutes à l'intérieur du disque unité ouvert. Ce cycle est donc également stable.

Application de la méthode de l'application de Poincaré hybride

Le but ici pour appliquer cette méthode de l'application de Poincaré hybride, est de calculer les jacobiniennes de h_{q_0} et de h_{q_1} pour le cycle de période 1 et celles de $h_{q_0}^2 = h_{q_0} \circ h_{q_0}$ et de $h_{q_1}^2 = h_{q_1} \circ h_{q_1}$ pour le cycle de période 2. Pour cela, reprenons l'expression de la jacobienne de G_{q_n} , $n \geq 1$, trouvée pour le système général (2.1) au paragraphe 2.3.4, et donnée par l'équation (2.49) :

$$DG_{q_n}(\Gamma_{n-1}) = \left(I_N - \frac{A_{n-1}e^{\sigma_n A_{n-1}} \Gamma_{n-1} W}{W A_{n-1} e^{\sigma_n A_{n-1}} \Gamma_{n-1}} \right) e^{\sigma_n A_{n-1}}.$$

Appliquons à présent cette équation au cas du convertisseur statique. L'équation (2.49) devient alors :

$$(2.64) \quad DG_{q_n}(\Gamma_{n-1}) = \left(I_N - \frac{A_{n-1}e^{\sigma_n A_{n-1}} \Gamma_{n-1} U}{U A_{n-1} e^{\sigma_n A_{n-1}} \Gamma_{n-1}} \right) e^{\sigma_n A_{n-1}},$$

ce qui donne plus particulièrement pour un cycle de période 1 :

$$\begin{cases} DG_{q_0}(\Gamma^1) = \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1 U}{U A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A_1} \\ DG_{q_1}(\Gamma^2) = \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^2 U}{U A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^1 A_0}, \end{cases}$$

et pour un cycle de période 2 :

$$\begin{cases} DG_{q_0}(\Gamma^1) = \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1 U}{U A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A_1} \\ DG_{q_0}(\Gamma^3) = \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^4 A_1} \Gamma^3 U}{U A_1 e^{\sigma^4 A_1} \Gamma^3} \right) e^{\sigma^4 A_1} \\ DG_{q_1}(\Gamma^2) = \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^3 A_0} \Gamma^2 U}{U A_0 e^{\sigma^3 A_0} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^3 A_0} \\ DG_{q_1}(\Gamma^4) = \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^4 U}{U A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^4} \right) e^{\sigma^1 A_0}. \end{cases}$$

Ainsi, les jacobiniennes de h_{q_0} et de h_{q_1} respectivement appliquées aux points Γ^2 , Γ^4 et Γ^1 , Γ^3 , sont alors données pour un cycle de période 1 par :

$$(2.65) \quad \begin{cases} Dh_{q_0}(\Gamma^2) = \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1 U}{U A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A_1} \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^2 U}{U A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^1 A_0} \\ Dh_{q_1}(\Gamma^1) = \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^2 U}{U A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^1 A_0} \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1 U}{U A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A_1}, \end{cases}$$

et pour un cycle de période 2 par :

$$(2.66) \quad \begin{cases} Dh_{q_0}(\Gamma^2) = \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^4 A_1} \Gamma^3 U}{U A_1 e^{\sigma^4 A_1} \Gamma^3} \right) e^{\sigma^4 A_1} \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^3 A_0} \Gamma^2 U}{U A_0 e^{\sigma^3 A_0} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^3 A_0} \\ Dh_{q_0}(\Gamma^4) = \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1 U}{U A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A_1} \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^4 U}{U A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^4} \right) e^{\sigma^1 A_0} \\ Dh_{q_1}(\Gamma^1) = \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^3 A_0} \Gamma^2 U}{U A_0 e^{\sigma^3 A_0} \Gamma^2} \right) e^{\sigma^3 A_0} \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1 U}{U A_1 e^{\sigma^2 A_1} \Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A_1} \\ Dh_{q_1}(\Gamma^3) = \left(I_4 - \frac{A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^4 U}{U A_0 e^{\sigma^1 A_0} \Gamma^4} \right) e^{\sigma^1 A_0} \left(I_4 - \frac{A_1 e^{\sigma^4 A_1} \Gamma^3 U}{U A_1 e^{\sigma^4 A_1} \Gamma^3} \right) e^{\sigma^4 A_1}. \end{cases}$$

De plus, la méthode de l'application de Poincaré hybride conclut sur la stabilité des cycles de période 2 en étudiant les valeurs propres de la jacobienne de la composée de l'application de Poincaré par elle-même car ces cycles sont construits à partir de points 2-périodiques. Cette jacobienne est donnée par :

$$\begin{cases} Dh_{q_0}^2(\Gamma^2) = D(h_{q_0} \circ h_{q_0})(\Gamma^2) = Dh_{q_0}(\Gamma^4) Dh_{q_0}(\Gamma^2) \\ Dh_{q_0}^2(\Gamma^4) = Dh_{q_0}(\Gamma^2) Dh_{q_0}(\Gamma^4) \\ Dh_{q_1}^2(\Gamma^1) = Dh_{q_1}(\Gamma^3) Dh_{q_1}(\Gamma^1) \\ Dh_{q_1}^2(\Gamma^3) = Dh_{q_1}(\Gamma^1) Dh_{q_1}(\Gamma^3). \end{cases}$$

Ainsi, pour l'étude numérique de la stabilité du cycle de période 1 du paragraphe 2.29 pour les valeurs numériques du tableau 2.3, nous trouvons les mêmes valeurs propres pour $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$ et $Dh_{q_1}(\Gamma^1)$ (lemme 2.3.5) à savoir $z_1 \simeq 0.0067439$, $z_2 \simeq 0.0003799$, $z_3 \simeq 0$ et $z_4 = 0$ (remarque 2.3.4). Ces racines, qui appartiennent au disque unité ouvert, confirment par la méthode de Poincaré cette fois-ci, que ce cycle de période 1 est stable. L'équivalence des deux méthodes pour l'étude de la stabilité est là encore mise en avant numériquement puisque nous obtenons une fois de plus les mêmes valeurs pour les valeurs propres de Dh_{q_0} et Dh_{q_1} (méthode de l'application de Poincaré) que pour les racines de Δ^1 (méthode des transformations ponctuelles d'Andronov). De même, pour le cycle de période 2 du paragraphe 2.2.2, l'application de la méthode de Poincaré nous permet de retrouver les mêmes valeurs pour les valeurs propres de $Dh_{q_0}^2$ et de $Dh_{q_1}^2$ et pour les racines de Δ^2 obtenues par la méthode d'Andronov ($z_1 \simeq 0.00416706$, $z_{2,3} \simeq 0.0585233 \pm 0.75537726 i$, $z_4 = 0$). Ceci permet de converger vers la même conclusion à savoir que ce cycle de période 2 est stable.

2.4 Détermination de conditions d'existence des commutations

2.4.1 Cas de la dimension un

Nous reprenons ici le modèle unidimensionnel du convecteur seul en relation directe avec le fluide extérieur de la pièce, modèle qui a été introduit au paragraphe 2.1.3.

Comme nous l'avions évoqué alors, pour certaines valeurs de paramètres, il y a parfois absence de commutation. En effet, à partir de certaines conditions initiales, la température du convecteur ne parvient pas à atteindre son seuil supérieur ou inférieur de commutation (voir figure 2.25 à gauche). De plus, dans certains cas, une seule commutation a lieu c'est-à-dire que la température du convecteur atteint une première fois son seuil supérieur (ou inférieur) de commutation mais sans jamais par la suite pouvoir atteindre son seuil inférieur (ou supérieur) (voir la figure 2.25 de droite).

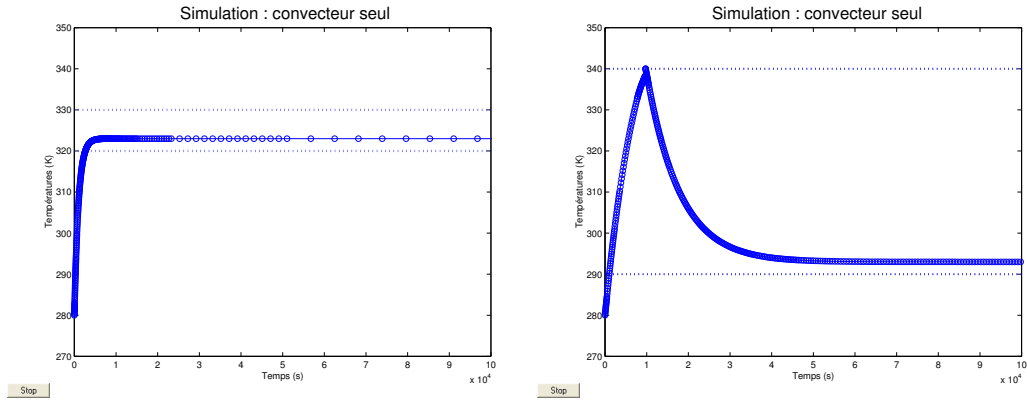


FIG. 2.25 – Illustration dans le cas de la dimension 1 de la possibilité d'absence de commutation (à gauche pour les valeurs $R_c = 10$, $Q_c = 100$, $\theta_e = 273$, $P_c = 5$; $\theta_1 = 320$, $\theta_2 = 330$, $z(t_0) = 280$) et de l'existence d'une seule commutation (à droite pour les valeurs $R_c = 8$, $Q_c = 1000$, $\theta_e = 293$, $P_c = 9$, $\theta_1 = 290$, $\theta_2 = 340$, $z(t_0) = 280$)

La suite de ce paragraphe a pour objectif de dégager certaines conditions sur les seuils et les paramètres pour éviter les deux cas que nous venons de présenter et ainsi pour garantir l'existence de commutations.

En dimension un, et en posant $L = 1$, $A = -a$, $B = b$, $C = c$, $\Gamma_n = \gamma_n$, le

système (2.17) est équivalent pour $n \geq 0$ à :

$$(2.67) \quad \begin{cases} \gamma_{n+1}^1 - e^{-a\sigma_{n+1}^1} \gamma_n^2 + \Delta q_1 a^{-1} b = 0, \\ \gamma_{n+1}^2 - e^{-a\sigma_{n+1}^2} \gamma_{n+1}^1 - \Delta q_1 a^{-1} b = 0, \\ \gamma_{n+1}^1 + a^{-1}(q_1 b + c) - q_1 \theta_1 - q_0 \theta_2 = 0, \\ \gamma_{n+1}^2 + a^{-1}(q_0 b + c) - q_0 \theta_1 - q_1 \theta_2 = 0. \end{cases}$$

Les commutations existent si la première commutation et les $\sigma_{n+1}^1, \sigma_{n+1}^2, n \geq 0$, durées entre les différents instants de commutation, existent.

Etudions d'abord les conditions sur l'existence des $\sigma_{n+1}^i, i = 1, 2, n \geq 0$. A partir des deux premières équations du système (2.67), nous pouvons déduire les expressions suivantes pour σ_{n+1}^1 et σ_{n+1}^2 :

$$\begin{cases} \sigma_{n+1}^1 = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{\gamma_{n+1}^1 + \Delta q_1 a^{-1} b}{\gamma_n^2} \right) \\ \sigma_{n+1}^2 = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{\gamma_{n+1}^2 - \Delta q_1 a^{-1} b}{\gamma_{n+1}^1} \right). \end{cases}$$

Nous pouvons alors conclure que σ_{n+1}^1 et σ_{n+1}^2 , qui doivent être des quantités strictement positives, existent si :

$$(2.68) \quad \begin{cases} 0 < \frac{\gamma_{n+1}^1 + \Delta q_1 a^{-1} b}{\gamma_n^2} < 1, \\ 0 < \frac{\gamma_{n+1}^2 - \Delta q_1 a^{-1} b}{\gamma_{n+1}^1} < 1. \end{cases}$$

En utilisant alors les relations pour $\gamma_{n+1}^1, \gamma_{n+1}^2$ données par les deux dernières équations du système (2.67), le système (2.68) devient ainsi :

$$\begin{cases} 0 < \frac{-a^{-1}(q_0 b + c) + q_1 \theta_1 + q_0 \theta_2}{-a^{-1}(q_0 b + c) + q_0 \theta_1 + q_1 \theta_2} < 1 \\ 0 < \frac{-a^{-1}(q_1 b + c) + q_0 \theta_1 + q_1 \theta_2}{-a^{-1}(q_1 b + c) + q_1 \theta_1 + q_0 \theta_2} < 1, \end{cases}$$

ce qui peut également s'écrire :

$$(2.69) \quad \begin{cases} 0 < 1 + \frac{\Delta q_1 (\theta_1 - \theta_2)}{-a^{-1}(q_0 b + c) + q_0 \theta_1 + q_1 \theta_2} < 1 \\ 0 < 1 - \frac{\Delta q_1 (\theta_1 - \theta_2)}{-a^{-1}(q_1 b + c) + q_1 \theta_1 + q_0 \theta_2} < 1. \end{cases}$$

Distinguons à partir de là les deux cas possibles :

- **Cas 1** : $q_0 = 1, q_1 = 0, \Delta q_1 = -1 < 0$,
- **Cas 2** : $q_0 = 0, q_1 = 1, \Delta q_1 = 1 > 0$.

1. Cas 1

Le système (2.69) devient alors :

$$(2.70) \quad \begin{cases} -1 < \frac{\theta_2 - \theta_1}{-a^{-1}(b+c) + \theta_1} < 0 \\ -1 < \frac{-(\theta_2 - \theta_1)}{-a^{-1}c + \theta_2} < 0. \end{cases}$$

- Vu que $\theta_2 - \theta_1 > 0$, pour que les hypothèses $\frac{\theta_2 - \theta_1}{-a^{-1}(b+c) + \theta_1} < 0$ et $\frac{-(\theta_2 - \theta_1)}{-a^{-1}c + \theta_2} < 0$ soient vérifiées, il faut que :

$$\begin{cases} \theta_1 < a^{-1}(b+c) \\ \theta_2 > a^{-1}c. \end{cases}$$

- Alors, vu que $\theta_2 - \theta_1 > 0$ et qu'il faut que $-a^{-1}(b+c) + \theta_1 < 0$, l'hypothèse $\frac{\theta_2 - \theta_1}{-a^{-1}(b+c) + \theta_1} > -1$ est vérifiée si :

$$a^{-1}(b+c) - \theta_1 > \theta_2 - \theta_1$$

autrement dit si :

$$\theta_2 < a^{-1}(b+c).$$

- Enfin, vu que $-(\theta_2 - \theta_1) < 0$ et qu'il faut que $-a^{-1}c + \theta_2 > 0$, l'hypothèse $\frac{-(\theta_2 - \theta_1)}{-a^{-1}c + \theta_2} > -1$ est vérifiée si :

$$-a^{-1}c + \theta_2 > \theta_2 - \theta_1,$$

autrement dit :

$$\theta_1 > a^{-1}c.$$

2. Cas 2

Le système (2.69) devient dans ce cas particulier :

$$(2.71) \quad \begin{cases} -1 < \frac{\theta_1 - \theta_2}{-a^{-1}c + \theta_2} < 0 \\ -1 < \frac{-(\theta_1 - \theta_2)}{-a^{-1}(b+c) + \theta_1} < 0. \end{cases}$$

Ce système est le même que (2.70) du premier cas donc la conclusion est identique.

Ces conditions sont des conditions nécessaires pour l'existence des σ_{n+1}^i , $i = 1, 2$, $n \geq 0$. Il reste maintenant à rechercher des conditions pour garantir l'existence de la première commutation.

La première commutation existe si et seulement si t_1 existe et autrement dit si et seulement si $\sigma_1 = t_1 - t_0$ existe. Or, d'après les équations (2.12) et (2.14) appliquées en $n = 1$ et pour le cas de la dimension un, nous avons :

$$(2.72) \quad \begin{cases} \gamma_1 = e^{-a\sigma_1} \gamma_0 - \Delta q_1 a^{-1} b \\ \gamma_1 = -a^{-1}(q_1 b + c) + q_1 \theta_1 + q_0 \theta_2. \end{cases}$$

De plus, la constante d'intégration γ_0 est donnée par l'équation (2.13) qui s'écrit dans le cas de la dimension un :

$$(2.73) \quad \gamma_0 = z_0 - a^{-1}(q_0 b + c),$$

où z_0 est la valeur au temps t_0 de la température du convecteur.

A partir de (2.72), nous obtenons :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{-a^{-1}(q_0 b + c) + q_1 \theta_1 + q_0 \theta_2}{z_0 - a^{-1}(q_0 b + c)} \right).$$

La durée σ_1 existe si :

$$(2.74) \quad 0 < \frac{-a^{-1}(q_0 b + c) + q_1 \theta_1 + q_0 \theta_2}{z_0 - a^{-1}(q_0 b + c)} < 1.$$

Distinguons encore les deux mêmes cas que précédemment.

1. Cas 1

La condition (2.74) devient dans ce cas :

$$(2.75) \quad 0 < \frac{-a^{-1}(b + c) + \theta_2}{z_0 - a^{-1}(b + c)} < 1.$$

En prenant en compte les conditions trouvées précédemment $a^{-1}c < \theta_1$, $\theta_2 < a^{-1}(b + c)$ pour l'existence des σ_{n+1}^i , $i = 1, 2$, $n \geq 0$, nous concluons que (2.75) est vérifiée si :

$$z_0 < \theta_2 < a^{-1}(b + c).$$

2. Cas 2

La condition (2.74) devient dans ce cas :

$$(2.76) \quad 0 < \frac{-a^{-1}c + \theta_1}{z_0 - a^{-1}c} < 1,$$

qui est satisfaite si :

$$z_0 > \theta_1 > a^{-1}c.$$

Finalement, si la condition nécessaire pour l'existence de σ_{n+1}^i , $i = 1, 2$, $n \geq 0$ à savoir $a^{-1}c < \theta_1 < \theta_2 < a^{-1}(b+c)$ est satisfaite et si de plus, la condition de première commutation donnée par :

$$q_0 = 1 \text{ et } z_0 < \theta_2 < a^{-1}(b+c) \text{ ou } q_0 = 0 \text{ et } z_0 > \theta_1 > a^{-1}c$$

est aussi satisfaite, alors le système hybride $\dot{z}(t) = -az(t) + qb + c$, $q = q(z(t))$ défini par (2.2), a pour unique solution un cycle. L'examen du raisonnement suivi montre que les conditions nécessaires trouvées sont également suffisantes.

À présent, illustrons numériquement ce qui vient d'être montré théoriquement. Pour cela, reprenons les valeurs numériques de la figure 2.25 de gauche par exemple que nous plaçons dans le tableau 2.5.

R_c	Q_c	P_c	θ_e	θ_1	θ_2	z_0	q_0
10	100	5	273	320	330	280	1

TAB. 2.5 – Valeurs numériques de la figure 2.25 de gauche pour illustrer l'absence de commutation

Pour ces valeurs, nous avons vu par simulation avec *Matlab* qu'il n'y avait pas de commutation. Cela se traduit de façon analytique par le fait qu'il n'existe aucune solution pour le système (2.25) appliqué en dimension un comme le confirme graphiquement la figure 2.26 sur laquelle sont tracées les surfaces $y = K_1(\sigma^1, \sigma^2)$, $y = K_2(\sigma^1, \sigma^2)$ et le plan $y = 0$ respectivement en gris, en noir et en blanc.

De plus, les calculs de $a^{-1}c$ et de $a^{-1}(b+c)$ qui donnent numériquement :

$$a^{-1}c = 273, \quad a^{-1}(b+c) = 323,$$

montrent que la condition d'existence des σ_{n+1}^i , $i = 1, 2$, $n \geq 0$ et la condition de première commutation ne sont pas satisfaites puisque $\theta_2 = 330 > a^{-1}(b+c)$. Pour garantir l'existence de commutations, choisissons alors pour ces mêmes valeurs numériques un seuil supérieur θ_2 qui satisfasse simultanément les deux conditions comme par exemple : $\theta_2 = 322$ K.

Une simulation sous *Matlab* (voir la figure 2.27 à gauche) confirme maintenant l'existence de commutations qui se traduit par le fait qu'il existe une solution au système (2.25) (voir la figure 2.27 à droite).

Nous pouvons également constater que pour $\theta_2 = 323$ K ou $\theta_1 = 273$ K, le système ne commute pas. De même, si nous choisissons par exemple $\theta_2 = 322$ K

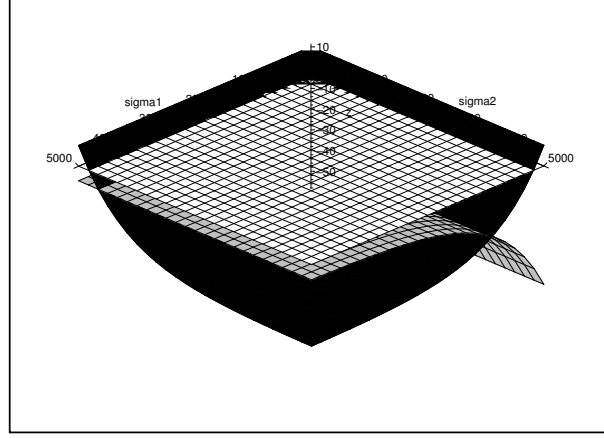


FIG. 2.26 – Illustration graphique de l’absence de commutation qui correspond à une absence de solution du système $K_1(\sigma^1, \sigma^2) = 0$, $K_2(\sigma^1, \sigma^2) = 0$

qui satisfait $x_0 < \theta_2 < a^{-1}(b + c)$ et $\theta_1 = 271$ K qui ne satisfait pas $\theta_1 > a^{-1}c$, alors on est dans le cas où il n’existe qu’une seule commutation (ce qui se confirme par le fait que la condition d’existence de la première commutation est vérifiée mais pas celle de l’existence des σ_{n+1}^i , $i = 1, 2$, $n \geq 0$). Tous ces résultats numériques confirment les conditions d’existence de commutations explicitées ci-avant.

2.4.2 Cas de la dimension deux

Ici, nous nous plaçons en dimension deux et pour cela, nous considérons le système du thermostat seul que nous avons introduit au paragraphe 2.1.3.

Comme pour le cas de la dimension un, pour certaines valeurs de paramètres, le système ne commute pas (voir figure 2.28 à gauche) ce qui se traduit ici par le fait que la température de la pièce n’atteint jamais le seuil supérieur (ou inférieur selon la valeur de q_0) de commutation. Pour d’autres valeurs numériques, le système peut ne commuter qu’une seule fois (voir figure 2.28 à droite), ce qui illustre le fait que la température de la pièce atteint une première fois son seuil supérieur (ou inférieur) de commutation mais qu’ensuite, elle n’atteint jamais son seuil inférieur (ou supérieur).

La démarche pour déterminer des conditions sur les seuils et les paramètres est identique à celle expliquée au paragraphe 2.4.1. La seule différence qui introduit plus de difficultés, vient du fait que chaque composante de Γ_{n+1}^i , $i = 1, 2$, $n \geq 0$, notée Γ_{n+1}^{ij} , $j = 1, 2$, ne peut plus être exprimée uniquement

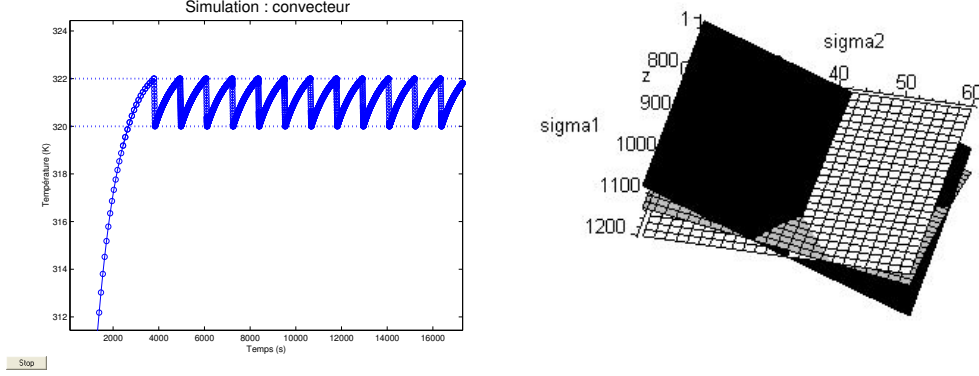


FIG. 2.27 – Illustration du fait que quand toutes les conditions sont satisfaites alors il y a bien commutations. À droite, les surfaces $y = K_1(\sigma^1, \sigma^2)$, $y = K_2(\sigma^1, \sigma^2)$ et le plan $y = 0$ tracés respectivement en gris, en noir et en blanc

en fonction des paramètres du système contrairement à la dimension un.

Soit \mathcal{V} , une base de vecteurs propres de la matrice A . La matrice de passage P et son inverse P^{-1} sont données par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{c+A_1}{c} & 1 \\ 1 & \frac{c}{c+A_2} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c}{A_1-A_2} & -\frac{c+A_2}{A_1-A_2} \\ -\frac{c+A_2}{A_1-A_2} & \frac{(c+A_1)(c+A_2)}{c(A_1-A_2)} \end{pmatrix},$$

avec A_i , $i = 1, 2$, qui correspondent aux valeurs propres de A , $A_1 = -\frac{1}{2}(b + c + d - \sqrt{\Delta}) < 0$, $A_2 = -\frac{1}{2}(b + c + d + \sqrt{\Delta}) < 0$, $\Delta = (b + c + d)^2 - 4cd$. Dans cette base, le système en dimension deux s'écrit : $\dot{X} = AX + qB + C$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-p_e(c+A_2)}{A_1-A_2} \\ \frac{(c+A_1)(c+A_2)p_c}{c(A_1-A_2)} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{cd\theta_e}{A_1-A_2} \\ \frac{-(c+A_2)d\theta_e}{A_1-A_2} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \frac{c+A_1}{c} & 1 \end{pmatrix} = (L_1 \quad L_2).$$

Le système (2.18) s'écrit alors de façon explicite de la façon suivante :

$$(2.77) \quad \begin{cases} \Gamma^{11} - e^{A_1\sigma^1}\Gamma^{21} - \Delta q_1 A_1^{-1} B_1 = 0 \\ \Gamma^{12} - e^{A_2\sigma^1}\Gamma^{22} - \Delta q_1 A_2^{-1} B_2 = 0 \\ \Gamma^{21} - e^{A_1\sigma^2}\Gamma^{11} + \Delta q_1 A_1^{-1} B_1 = 0 \\ \Gamma^{22} - e^{A_2\sigma^2}\Gamma^{12} + \Delta q_1 A_2^{-1} B_2 = 0 \\ L_1\Gamma^{11} + L_2\Gamma^{12} - A_1^{-1}L_1(q_1 B_1 + C_1) - A_2^{-1}L_2(q_1 B_2 + C_2) - q_1\theta_1 - q_0\theta_2 = 0 \\ L_1\Gamma^{21} + L_2\Gamma^{22} - A_1^{-1}L_1(q_0 B_1 + C_1) - A_2^{-1}L_2(q_0 B_2 + C_2) - q_0\theta_1 - q_1\theta_2 = 0. \end{cases}$$

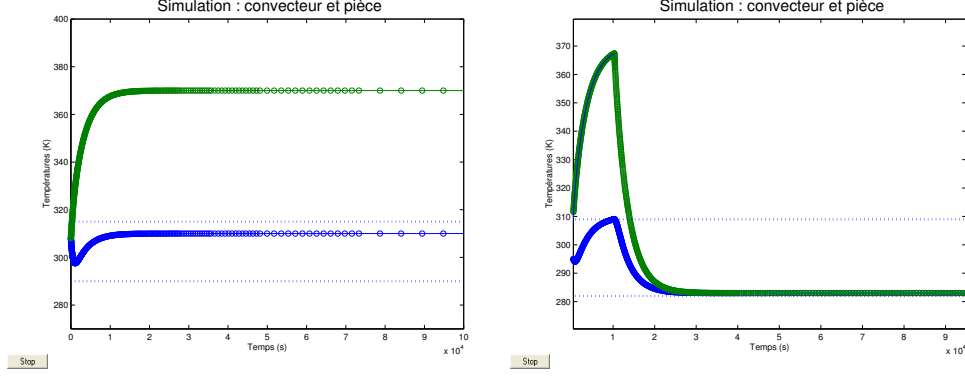


FIG. 2.28 – Illustration dans le cas de la dimension deux de la possibilité d'absence de commutation (à gauche pour les valeurs $R_c = 2$, $R_m = 0.9$, $Q_c = 1000$, $Q_p = 1000$, $P_c = 30$, $\theta_e = 283$, $\theta_1 = 282$, $\theta_2 = 311$, $X_0 = [300; 300]$) et de l'existence d'une seule commutation (à droite pour les mêmes valeurs de paramètres avec $\theta_2 = 309$)

A partir des quatre premières équations de (2.77), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \sigma^1 = \frac{1}{A_1} \ln \left(\frac{\Gamma^{11} - \Delta q_1 A_1^{-1} B_1}{\Gamma^{21}} \right) \\ \sigma^1 = \frac{1}{A_2} \ln \left(\frac{\Gamma^{12} - \Delta q_1 A_2^{-1} B_2}{\Gamma^{22}} \right) \\ \sigma^2 = \frac{1}{A_1} \ln \left(\frac{\Gamma^{21} + \Delta q_1 A_1^{-1} B_1}{\Gamma^{11}} \right) \\ \sigma^2 = \frac{1}{A_2} \ln \left(\frac{\Gamma^{22} + \Delta q_1 A_2^{-1} B_2}{\Gamma^{12}} \right). \end{cases}$$

Nous concluons alors que les σ^i , $i = 1, 2$ existent si :

$$(2.78) \quad \begin{cases} 0 < \frac{\Gamma^{11} - \Delta q_1 A_1^{-1} B_1}{\Gamma^{21}} < 1 \\ 0 < \frac{\Gamma^{12} - \Delta q_1 A_2^{-1} B_2}{\Gamma^{22}} < 1 \\ 0 < \frac{\Gamma^{21} + \Delta q_1 A_1^{-1} B_1}{\Gamma^{11}} < 1 \\ 0 < \frac{\Gamma^{22} + \Delta q_1 A_2^{-1} B_2}{\Gamma^{12}} < 1. \end{cases}$$

Seize possibilités se dégagent alors en combinant tous les cas possibles suivants :

$$\mathbf{1a} \begin{cases} L_1 \Gamma^{11} - \Delta q_1 L_1 A_1^{-1} B_1 > 0, \\ L_1 \Gamma^{21} > 0, \\ L_1 \Gamma^{11} - \Delta q_1 L_1 A_1^{-1} B_1 < L_1 \Gamma^{21}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{1b} \begin{cases} L_1 \Gamma^{11} - \Delta q_1 L_1 A_1^{-1} B_1 < 0, \\ L_1 \Gamma^{21} < 0, \\ L_1 \Gamma^{11} - \Delta q_1 L_1 A_1^{-1} B_1 > L_1 \Gamma^{21}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2a} \left\{ \begin{array}{l} L_2\Gamma^{12} - \Delta q_1 L_2 A_2^{-1} B_2 > 0, \\ L_2\Gamma^{22} > 0, \\ L_2\Gamma^{12} - \Delta q_1 L_2 A_2^{-1} B_2 < L_2\Gamma^{22}, \end{array} \right. & \text{ ou } \mathbf{2b} \left\{ \begin{array}{l} L_2\Gamma^{12} - \Delta q_1 L_2 A_2^{-1} B_2 < 0, \\ L_2\Gamma^{22} < 0, \\ L_2\Gamma^{12} - \Delta q_1 L_2 A_2^{-1} B_2 > L_2\Gamma^{22}, \end{array} \right. \\
\mathbf{3a} \left\{ \begin{array}{l} L_1\Gamma^{21} + \Delta q_1 L_1 A_1^{-1} B_1 > 0, \\ L_1\Gamma^{11} > 0, \\ L_1\Gamma^{21} + \Delta q_1 L_1 A_1^{-1} B_1 < L_1\Gamma^{11}, \end{array} \right. & \text{ ou } \mathbf{3b} \left\{ \begin{array}{l} L_1\Gamma^{21} + \Delta q_1 L_1 A_1^{-1} B_1 < 0, \\ L_1\Gamma^{11} < 0, \\ L_1\Gamma^{21} + \Delta q_1 L_1 A_1^{-1} B_1 > L_1\Gamma^{11}, \end{array} \right. \\
\mathbf{4a} \left\{ \begin{array}{l} L_2\Gamma^{22} + \Delta q_1 L_2 A_2^{-1} B_2 > 0, \\ L_2\Gamma^{12} > 0, \\ L_2\Gamma^{22} + \Delta q_1 L_2 A_2^{-1} B_2 < L_2\Gamma^{12}, \end{array} \right. & \text{ ou } \mathbf{4b} \left\{ \begin{array}{l} L_2\Gamma^{22} + \Delta q_1 L_2 A_2^{-1} B_2 < 0, \\ L_2\Gamma^{12} < 0, \\ L_2\Gamma^{22} + \Delta q_1 L_2 A_2^{-1} B_2 > L_2\Gamma^{12}. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Pour simplifier, restreignons la rédaction au cas $q_0 = 1$, $q_1 = 0$. Le cas $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ est traité de façon similaire et donne exactement les mêmes résultats. Sur les seize combinaisons, certaines ne sont pas possibles. Détaillons cela. D'abord, montrons que les cas **1a** et **2a** ne pourront jamais se présenter ensemble. En effet, d'après le cas **1a**, nous avons :

$$0 < L_1\Gamma^{11} + L_1A_1^{-1}B_1 < L_1\Gamma^{21}.$$

De même, à partir du cas **2a**, nous pouvons écrire :

$$0 < L_2\Gamma^{12} + L_2A_2^{-1}B_2 < L_2\Gamma^{22},$$

ce qui nous permet de conclure que :

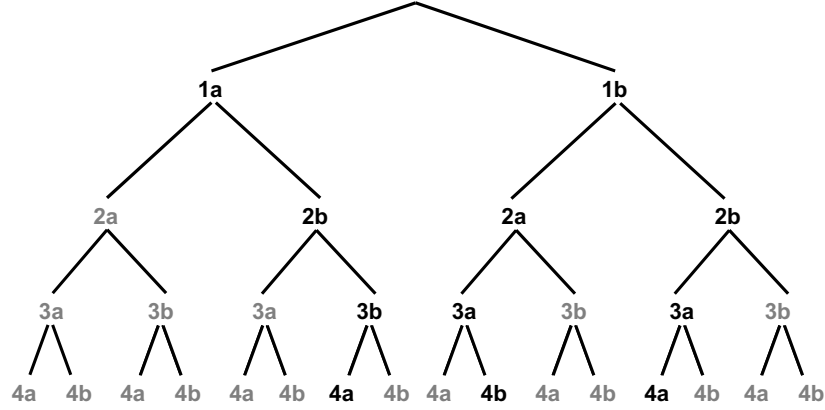
$$L_1\Gamma^{11} + L_2\Gamma^{12} + L_1A_1^{-1}B_1 + L_2A_2^{-1}B_2 < L_1\Gamma^{21} + L_2\Gamma^{22}.$$

A partir de là, en utilisant les deux dernières équations du système (2.77), nous obtenons :

$$LA^{-1}(B + C) + \theta_2 < LA^{-1}(B + C) + \theta_1, \text{ soit } \theta_2 < \theta_1,$$

ce qui est impossible compte tenu que θ_2 est le seuil supérieur de commutation. En raisonnant de la même façon, nous obtenons également cette contradiction en couplant les cas **3b** et **4b**, les cas **1a** et **4b** ainsi que les cas **2a** et **3b**.

De plus, les cas **1a** et **3a** sont également incompatibles puisque la troisième inéquation de **1a** est en contradiction avec celle de **3a**. Les mêmes remarques



peuvent être faites avec les cas **2a** et **4a**, les cas **1b** et **3b** ainsi qu'avec les cas **2b** et **4b**.

Ainsi, en retirant toutes ces incompatibilités, nous pouvons éliminer treize des seize possibilités de combinaison et sa schématisation sous forme d'arbre devient :

avec les combinaisons en gris qui représentent des combinaisons impossibles et celles en noir les combinaisons possibles. Il ne reste alors que trois possibilités données par :

- **1a-2b-3b-4a**,
- **1b-2a-3a-4b**,
- **1b-2b-3a-4a**.

Ces remarques ont été réalisées indépendamment des valeurs des paramètres du système. Pour continuer à restreindre le nombre de combinaisons possibles entre ces différents cas, montrons que $B_2 = -L_1 B_1 < 0$. Rappelons que $B_2 = \frac{(c+A_1)(c+A_2)p_c}{c(A_1-A_2)}$. Nous savons déjà que $\frac{p_c}{c(A_1-A_2)} > 0$, donc, il reste à étudier le signe de $(c + A_1)(c + A_2)$:

$$(c + A_1)(c + A_2) = c^2 + c(A_1 + A_2) + A_1 A_2.$$

Or :

$$A_1 A_2 = \frac{1}{4}((b + c + d)^2 - \Delta) = cd \text{ et } A_1 + A_2 = -(b + c + d).$$

D'où finalement :

$$(c + A_1)(c + A_2) = -c(b + d) + cd = -bc$$

ce qui permet de conclure que $B_2 < 0$.

À partir de là, le cas **1a** implique $L_1\Gamma^{11} > -L_1A_1^{-1}B_1 = L_2A_1^{-1}B_2 > 0$ donc le cas **3b** n'est pas compatible avec le cas **1a** (car ce dernier implique $L_1\Gamma^{11} < 0$). De même, le cas **2b** implique $L_2\Gamma^{12} < -L_2A_2^{-1}B_2 < 0$ donc ce cas n'est pas compatible avec le cas **4a** (car ce dernier donne $L_2\Gamma^{12} > 0$).

Ces deux dernières remarques nous permettent alors de supprimer encore deux combinaisons pour ne nous donner, finalement, qu'une seule combinaison possible qui est **1b-2a-3a-4b**.

À partir de cette combinaison, il semblerait que l'on retrouve les mêmes conditions de commutation que celles trouvées pour la dimension un, c'est-à-dire :

$$q_0 = 1 \text{ et } LX_0 < \theta_2 < -LA^{-1}(B + C) \text{ ou } q_0 = 0 \text{ et } LX_0 > \theta_1 > -LA^{-1}C$$

pour la condition de première commutation et :

$$-LA^{-1}C < \theta_1 < \theta_2 < -LA^{-1}(B + C),$$

pour l'existence des σ_{n+1}^i , $i = 1, 2$, $n \geq 0$.

Cependant, cette conclusion n'est pas directe. Il faut encore, pour y aboutir, considérer des sous-cas. C'est l'objectif de notre recherche actuelle.

Bifurcations et chaos

L'étude des cycles de période 1 et 2 ainsi que celle de leur stabilité sont des résultats indispensables pour l'analyse des bifurcations.

De nombreux auteurs (voir notamment [86], [65], [10], [35], [43]) se sont intéressés à ces phénomènes mais la plupart s'est arrêtée à une analyse numérique et graphique.

Ici, en considérant les résultats déjà trouvés au chapitre précédent, nous proposons d'apporter quelques éléments théoriques. Ainsi, par exemple, la démonstration de la non existence de bifurcation pour le modèle de dimension deux du thermostat seul est établie. Ce résultat permet de compléter l'analyse du système dans cette dimension déjà réalisée (équations de cycles, conditions de commutation). En particulier, par le calcul explicite et littéral des deux valeurs propres de la jacobienne de l'application de Poincaré associée au système, il permet également de conclure, de manière générale, sur la stabilité des cycles. De plus, une généralisation à la dimension N quelconque, $N \geq 1$, du théorème de bifurcation doublement de période, introduit dans [65] pour les systèmes de dimension un, est proposée et démontrée. C'est une des contributions de ce mémoire, aucune référence présentant déjà ce résultat n'ayant été trouvée. Ce théorème donne la possibilité de prouver, de façon théorique, l'existence de bifurcations doublement de période et constitue donc un élément d'étude plus fort que la simple observation du phénomène sur un diagramme de bifurcation. Il semblerait enfin que ce résultat puisse nous aider à déterminer les valeurs de paramètres pour lesquelles ce type de phénomène apparaît.

Pour ce chapitre, nous étudions la dynamique d'un système différentiel à un paramètre variable, proche d'un cycle limite en considérant son application de Poincaré notée $f_\mu(x) = f(x, \mu)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

3.1 Bifurcations de type nœud selle

3.1.1 Présentation générale

La variation d'un paramètre μ peut mettre graphiquement en évidence l'existence d'une bifurcation nœud selle. Cette dernière apparaît en (x_0, μ_0) lorsque :

- d'un côté du plan $\mu = \mu_0$, il n'y a pas de point fixe pour f_μ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de cycle solution,
- de l'autre côté de $\mu = \mu_0$, il existe deux points fixes pour f_μ , l'un attractif, l'autre répulsif, ce qui se traduit par l'existence de deux cycles solutions, l'un stable et l'autre instable.

De plus, au point x_0 pour la valeur $\mu = \mu_0$, la matrice jacobienne de l'application de Poincaré $Df_{\mu_0}(x_0)$ a une valeur propre égale à 1. La figure 3.1 illustre ce phénomène.

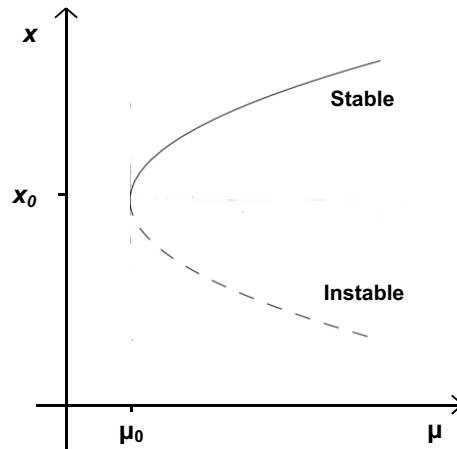


FIG. 3.1 – Schéma représentant une bifurcation nœud selle

3.1.2 Théorème de bifurcation nœud selle

Les auteurs de [65] ont présenté et démontré en dimension N , $N \geq 1$ quelconque, un théorème permettant de prévoir et de conclure de façon théorique à l'existence d'une bifurcation de type nœud selle (théorème 3.1.1).

Théorème 3.1.1

Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Posons $f_\mu(x) = f(x, \mu)$ et supposons que f_μ satisfasse les conditions suivantes :

1. Il existe une valeur μ_0 du paramètre μ pour laquelle f_{μ_0} a un point fixe x_0 c'est-à-dire $f(x_0, \mu_0) = x_0$,
2. La matrice jacobienne de f_{μ_0} en x_0 notée $Df_{\mu_0}(x_0)$ a pour valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et λ_j , $j = 2, \dots, N$ telles que $|\lambda_j| \neq 1$.
De plus, soient v^1 et w^1 les vecteurs propres à droite et à gauche respectivement de $Df_{\mu_0}(x_0)$ associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$,
3. La dérivée seconde de $w^1 f_{\mu_0}$ dans la direction v^1 est non nulle i.e. :

$$w^1[D^2(f_{\mu_0}(x_0))(v^1, v^1)] \neq 0,$$

4. La dérivée partielle par rapport au paramètre μ de $w^1 f_\mu$ est non nulle i.e. :

$$w^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \right) \neq 0.$$

Alors, il existe une bifurcation de type nœud selle en (x_0, μ_0) . Plus particulièrement, il est possible de paramétrer $\mu = m(s)$ et $x = h(s)$ tels que $m(0) = \mu_0$, $h(0) = x_0$, $h'(0) = v^1$ et $f(h(s), m(s)) \equiv h(s)$.

La démonstration de ce théorème est donnée de façon détaillée dans [65] avec deux méthodes possibles : la première utilise une variété centrale alors que la seconde se fait par la méthode de Lyapunov Schmidt et l'utilisation du théorème des fonctions implicites.

3.1.3 Exemple en dimension un

Pour illustrer ce théorème de façon simple, étudions l'application de Poincaré de dimension un suivante :

$$f_\mu(x) = f(x, \mu) = \mu + x(1 - x).$$

Pour cela, regardons les points fixes donnés par $x = \pm\sqrt{\mu}$. Nous concluons que :

- pour $\mu < 0$, il n'existe pas de point fixe pour f_μ ,
- pour $\mu = 0$, il existe un unique point fixe $x_0 = 0$,

- pour $\mu > 0$, il existe deux points fixes $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$, l'un stable, l'autre instable (puisque $Df_{\mu_0}(x_0) = 1 \pm 2\sqrt{\mu}$).

Considérons alors $\mu_0 = 0$ et $x_0 = 0$ et appliquons le théorème 3.1.1 en dimension un :

1. La première condition est clairement satisfaite : $f(0, 0) = 0$,
2. Calculons ensuite $f'_{\mu_0}(x_0)$: $f'_{\mu_0}(x_0) = 1 - 2x_0 = 1$ ce qui vérifie la deuxième condition,
3. Puis, $f''_{\mu_0}(x_0) = -2 \neq 0$,
4. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 1 \neq 0$.

Les quatre conditions du théorème sont satisfaites donc il existe bien une bifurcation de type nœud selle en (x_0, μ_0) .

La figure 3.2 illustre graphiquement ce qui vient d'être démontré de façon théorique.

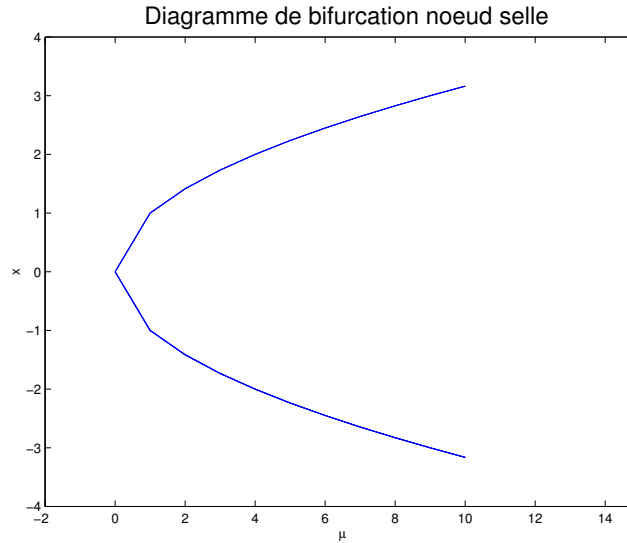


FIG. 3.2 – Diagramme de bifurcation nœud selle pour l'exemple en dimension un $f(x, \mu) = \mu + x(1 - x)$

3.1.4 Non existence de bifurcation nœud selle pour l'exemple du thermostat de dimension deux

L'objectif de ce paragraphe est de montrer qu'il n'existe pas de bifurcation de type nœud selle pour le modèle du thermostat seul, présenté au paragraphe

2.1.3. Pour cela, commençons par donner une formule explicite des valeurs propres de la matrice jacobienne de l'application de Poincaré h_{q_n} associée à notre système, application que nous avons introduite au paragraphe 2.3.2.

Restreignons-nous à l'étude de h_{q_0} , dans le cas où n est pair puisque, d'après le lemme 2.3.5 énoncé au paragraphe 2.3.4, $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$ et $Dh_{q_1}(\Gamma^1)$ possèdent les mêmes valeurs propres. Notons la matrice jacobienne $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$ de la façon suivante :

$$Dh_{q_0}(\Gamma^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_{q_0}^1}{\partial \Gamma_{n-1}^{21}}(\Gamma^2) & \frac{\partial h_{q_0}^1}{\partial \Gamma_{n-1}^{22}}(\Gamma^2) \\ \frac{\partial h_{q_0}^2}{\partial \Gamma_{n-1}^{21}}(\Gamma^2) & \frac{\partial h_{q_0}^2}{\partial \Gamma_{n-1}^{22}}(\Gamma^2) \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors :

$$\det(Dh_{q_0}(\Gamma^2) - zI_2) = z^2 - z\text{Tr}(Dh_{q_0}(\Gamma^2)) + \det(Dh_{q_0}(\Gamma^2)).$$

La remarque 2.3.4 du paragraphe 2.3.2, appliquée ici au modèle du thermostat seul, montre que 0 est toujours valeur propre de $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$. La deuxième valeur propre est ainsi donnée par $z = \text{Tr}(Dh_{q_0}(\Gamma^2))$. Donnons en alors une expression littérale explicite. Nous savons que :

$$(3.1) \quad \text{Tr}(Dh_{q_0}(\Gamma^2)) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1j}}(\Gamma^1) \frac{\partial G_{q_1}^j}{\partial \Gamma_{n-1}^{2i}}(\Gamma^2).$$

De même qu'au paragraphe 2.4.2, plaçons-nous dans une base de vecteurs propres de A et optons également pour les mêmes notations à savoir :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + qB + C \\ \xi = LX, \end{cases}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad L = (L_1 \quad L_2).$$

Les jacobienness $DG_{q_0}(\Gamma^1)$ et $DG_{q_1}(\Gamma^2)$ ont été explicitement calculées au paragraphe 2.3.2. Elles nous permettent d'obtenir les expressions de $\frac{\partial G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1j}}(\Gamma^1)$ et de $\frac{\partial G_{q_1}^j}{\partial \Gamma_{n-1}^{2i}}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, 2$, suivantes :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial G_{q_0}^1}{\partial \Gamma_n^{11}}(\Gamma^1) = e^{A_1 \sigma^2} \left(1 - \frac{A_1 \Gamma^{11} L_1 e^{A_1 \sigma^2}}{L_1 \Gamma^{11} A_1 e^{A_1 \sigma^2} + L_2 \Gamma^{12} A_2 e^{A_2 \sigma^2}} \right) \\ \frac{\partial G_{q_0}^1}{\partial \Gamma_n^{12}}(\Gamma^1) = - \frac{A_1 \Gamma^{11} L_2 e^{(A_1 + A_2) \sigma^2}}{L_1 \Gamma^{11} A_1 e^{A_1 \sigma^2} + L_2 \Gamma^{12} A_2 e^{A_2 \sigma^2}} \\ \frac{\partial G_{q_0}^2}{\partial \Gamma_n^{11}}(\Gamma^1) = - \frac{A_2 \Gamma^{12} L_1 e^{(A_1 + A_2) \sigma^2}}{L_1 \Gamma^{11} A_1 e^{A_1 \sigma^2} + L_2 \Gamma^{12} A_2 e^{A_2 \sigma^2}} \\ \frac{\partial G_{q_0}^2}{\partial \Gamma_n^{12}}(\Gamma^1) = e^{A_2 \sigma^2} \left(1 - \frac{A_2 \Gamma^{12} L_2 e^{A_2 \sigma^2}}{L_1 \Gamma^{11} A_1 e^{A_1 \sigma^2} + L_2 \Gamma^{12} A_2 e^{A_2 \sigma^2}} \right). \end{cases}$$

Nous obtenons, par symétrie, les expressions de $\frac{\partial G_{q_1}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, 2$, en remplaçant dans (3.2) σ^2 par σ^1 et σ^1 par σ^2 .

De plus, les expressions des Γ^{1i} , Γ^{2i} , $i = 1, 2$, sont fournies par la relation (2.19) du paragraphe 2.2.1. Elles donnent plus particulièrement ici :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Gamma^{11} = (1 - 2q_0) \frac{B_1(1 - e^{A_1\sigma^1})}{A_1(1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})} \\ \Gamma^{12} = (1 - 2q_0) \frac{B_2(1 - e^{A_2\sigma^1})}{A_2(1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)})} \\ \Gamma^{21} = -(1 - 2q_0) \frac{B_1(1 - e^{A_1\sigma^2})}{A_1(1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})} \\ \Gamma^{22} = -(1 - 2q_0) \frac{B_2(1 - e^{A_2\sigma^2})}{A_2(1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)})}. \end{cases}$$

Ainsi, en remplaçant Γ^{1i} , Γ^{2i} , $i = 1, 2$ par les expressions (3.3) dans (3.2), nous avons finalement :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial G_{q_0}^1}{\partial \Gamma_n^{11}}(\Gamma^1) = \frac{B_2 L_2 e^{(A_1 + A_2)\sigma^2} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})}{B_1 L_1 e^{A_1\sigma^2} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)}) + B_2 L_2 e^{A_2\sigma^2} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})}, \\ \frac{\partial G_{q_0}^1}{\partial \Gamma_n^{12}}(\Gamma^1) = -\frac{B_1 L_2 e^{(A_1 + A_2)\sigma^2} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)})}{B_1 L_1 e^{A_1\sigma^2} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)}) + B_2 L_2 e^{A_2\sigma^2} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})}, \\ \frac{\partial G_{q_0}^2}{\partial \Gamma_n^{11}}(\Gamma^1) = -\frac{B_2 L_1 e^{(A_1 + A_2)\sigma^2} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})}{B_1 L_1 e^{A_1\sigma^2} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)}) + B_2 L_2 e^{A_2\sigma^2} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})}, \\ \frac{\partial G_{q_0}^2}{\partial \Gamma_n^{12}}(\Gamma^1) = \frac{B_1 L_1 e^{(A_1 + A_2)\sigma^2} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)})}{B_1 L_1 e^{A_1\sigma^2} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)}) + B_2 L_2 e^{A_2\sigma^2} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})}. \end{cases}$$

Ici également, nous obtenons par symétrie les expressions de $\frac{\partial G_{q_1}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, 2$ en remplaçant dans (3.4) σ^2 par σ^1 et σ^1 par σ^2 .

En considérant (3.1) et (3.4), nous obtenons pour la trace de $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \text{Tr}(Dh_{q_0}(\Gamma^2)) &= \frac{B_2^2 L_2^2 e^{(A_1 + A_2)(\sigma^1 + \sigma^2)} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_2\sigma^2}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)})^2}{V_1 V_2} \\ &+ \frac{B_1 B_2 L_1 L_2 e^{(A_1 + A_2)(\sigma^1 + \sigma^2)} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_2\sigma^2}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)})}{V_1 V_2} \\ &+ \frac{B_1 B_2 L_1 L_2 e^{(A_1 + A_2)(\sigma^1 + \sigma^2)} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_1\sigma^2}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)})}{V_1 V_2} \\ &+ \frac{B_1^2 L_1^2 e^{(A_1 + A_2)(\sigma^1 + \sigma^2)} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_1\sigma^2}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)})^2}{V_1 V_2}, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} V_1 = B_1 L_1 e^{A_1\sigma^2} (1 - e^{A_1\sigma^1}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)}) + B_2 L_2 e^{A_2\sigma^2} (1 - e^{A_2\sigma^1}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)}) \\ V_2 = B_1 L_1 e^{A_1\sigma^1} (1 - e^{A_1\sigma^2}) (1 - e^{A_2(\sigma^1 + \sigma^2)}) + B_2 L_2 e^{A_2\sigma^1} (1 - e^{A_2\sigma^2}) (1 - e^{A_1(\sigma^1 + \sigma^2)}). \end{cases}$$

En remarquant que, dans la base de vecteurs propres, $L_1 B_1 = (\frac{c+A_1}{c})(\frac{-p_c(c+A_2)}{A_1-A_2}) = -L_2 B_2$ et en factorisant le numérateur, la relation (3.5) devient, après simplifications :

$$(3.6) \quad Tr(Dh_{q_0}(\Gamma^2)) = e^{(A_1+A_2)(\sigma^1+\sigma^2)} \left(\frac{T_1(\sigma^1, \sigma^2)T_2(\sigma^1, \sigma^2)}{T_3(\sigma^1, \sigma^2)T_4(\sigma^1, \sigma^2)} \right),$$

avec :

$$\begin{cases} T_1(\sigma^1, \sigma^2) = -(1 - e^{A_1\sigma^1})(1 - e^{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}) + (1 - e^{A_2\sigma^1})(1 - e^{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}) \\ T_2(\sigma^1, \sigma^2) = -(1 - e^{A_1\sigma^2})(1 - e^{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}) + (1 - e^{A_2\sigma^2})(1 - e^{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}) \\ T_3(\sigma^1, \sigma^2) = -e^{A_1\sigma^1}(1 - e^{A_1\sigma^2})(1 - e^{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}) + e^{A_2\sigma^1}(1 - e^{A_2\sigma^2})(1 - e^{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}) \\ T_4(\sigma^1, \sigma^2) = -e^{A_1\sigma^2}(1 - e^{A_1\sigma^1})(1 - e^{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}) + e^{A_2\sigma^2}(1 - e^{A_2\sigma^1})(1 - e^{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}) \end{cases}$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} T_1(\sigma^1, \sigma^2) &= -4e^{\frac{A_1\sigma^1}{2}} e^{\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \sinh\left(\frac{A_1\sigma^1}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \\ &\quad + 4e^{\frac{A_2\sigma^1}{2}} e^{\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \sinh\left(\frac{A_2\sigma^1}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \\ &= 4e^{\frac{(A_1+A_2)(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \left(-e^{-\frac{A_1\sigma^2}{2}} \sinh\left(\frac{A_1\sigma^1}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{A_2\sigma^2}{2}} \sinh\left(\frac{A_2\sigma^1}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \right) \\ &= 4e^{\frac{(A_1+A_2)(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \left(-\sinh\left(\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \left(\sinh\left(\frac{A_1\sigma^1}{2}\right) \cosh\left(\frac{A_1\sigma^2}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sinh\left(\frac{A_1\sigma^1}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_1\sigma^2}{2}\right) \right) + \sinh\left(\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \left(\sinh\left(\frac{A_2\sigma^1}{2}\right) \cosh\left(\frac{A_2\sigma^2}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sinh\left(\frac{A_2\sigma^1}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_2\sigma^2}{2}\right) \right) \right), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} T_3(\sigma^1, \sigma^2) &= -4e^{A_1\sigma^1} e^{\frac{A_1\sigma^2}{2}} e^{\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \sinh\left(\frac{A_1\sigma^2}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \\ &\quad + 4e^{A_2\sigma^1} e^{\frac{A_2\sigma^2}{2}} e^{\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \sinh\left(\frac{A_2\sigma^2}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \\ &= 4e^{\frac{(A_1+A_2)(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \left(-e^{\frac{A_1\sigma^1}{2}} \sinh\left(\frac{A_1\sigma^2}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{A_2\sigma^1}{2}} \sinh\left(\frac{A_2\sigma^2}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \right) \\ &= 4e^{\frac{(A_1+A_2)(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \left(-\sinh\left(\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \left(\sinh\left(\frac{A_1\sigma^2}{2}\right) \cosh\left(\frac{A_1\sigma^1}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sinh\left(\frac{A_1\sigma^1}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_1\sigma^2}{2}\right) \right) + \sinh\left(\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \left(\sinh\left(\frac{A_2\sigma^2}{2}\right) \cosh\left(\frac{A_2\sigma^1}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sinh\left(\frac{A_2\sigma^1}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_2\sigma^2}{2}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

D'où, nous pouvons conclure :

$$T_1(\sigma^1, \sigma^2) + T_3(\sigma^1, \sigma^2) = 4e^{\frac{(A_1+A_2)(\sigma^1+\sigma^2)}{2}} \left(-\sinh\left(\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \right. \\ \left. + \sinh\left(\frac{A_2(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \sinh\left(\frac{A_1(\sigma^1+\sigma^2)}{2}\right) \right) = 0,$$

et ainsi montrer que : $T_1(\sigma^1, \sigma^2) = -T_3(\sigma^1, \sigma^2)$.

De la même façon, nous obtenons également : $T_2(\sigma^1, \sigma^2) = -T_4(\sigma^1, \sigma^2)$.

Finalement, la relation (3.6) donne pour la seconde valeur propre de $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$:

$$z = e^{(A_1+A_2)(\sigma^1+\sigma^2)}$$

avec $(\sigma^1, \sigma^2) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$

De plus, la matrice A étant supposée stable, nous avons $A_1 < 0$, $A_2 < 0$ donc sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, nous concluons finalement que $0 < z < 1$.

Ainsi, la jacobienne $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$ possède deux valeurs propres connues, à savoir 0 et $e^{(A_1+A_2)(\sigma^1+\sigma^2)}$, toutes deux appartenant au disque unité ouvert, quelles que soient les valeurs des paramètres du système. Ceci nous permet de conclure, à l'aide du théorème 2.3.1 énoncé au paragraphe 2.3.2, que pour cette application du thermostat et du convecteur seuls, il n'existe que des cycles limites stables *i.e.* tout point fixe de l'application de Poincaré h_{q_0} est attractif.

Or, une bifurcation de type nœud selle implique, entre autre, l'existence de deux points fixes, l'un attractif et l'autre répulsif.

L'application de Poincaré associée à notre modèle n'ayant pas de point fixe répulsif, il ne peut exister de bifurcation de type nœud selle pour cette application en dimension deux du thermostat et du convecteur seuls.

Remarque 3.1.2

Il semblerait également qu'il n'existe pas de bifurcation de type nœud selle pour le modèle en dimension trois du thermostat à résistance d'anticipation. En utilisant les mêmes notations et la même démarche que précédemment, cette hypothèse serait confirmée si :

$$f(\sigma^1, \sigma^2) = \text{Tr}(Dh_{q_0}(\Gamma^2)) - \frac{\partial h_{q_{01}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{21}}(\Gamma^2) \frac{\partial h_{q_{02}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{22}}(\Gamma^2) - \frac{\partial h_{q_{01}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{21}}(\Gamma^2) \frac{\partial h_{q_{03}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{23}}(\Gamma^2) \\ - \frac{\partial h_{q_{02}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{22}}(\Gamma^2) \frac{\partial h_{q_{03}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{23}}(\Gamma^2) + \frac{\partial h_{q_{01}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{22}}(\Gamma^2) \frac{\partial h_{q_{02}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{21}}(\Gamma^2) + \frac{\partial h_{q_{01}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{23}}(\Gamma^2) \frac{\partial h_{q_{03}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{21}}(\Gamma^2) \\ + \frac{\partial h_{q_{02}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{23}}(\Gamma^2) \frac{\partial h_{q_{03}}}{\partial \Gamma_{n+1}^{22}}(\Gamma^2) - 1 \neq 0 \quad \forall (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}.$$

L'étude de cette fonction à deux variables présente quelques difficultés puisque contrairement au cas de la dimension deux, nous n'avons pas d'in-

dication précise sur les relations de grandeur entre les trois valeurs propres A_i , $i = 1, \dots, 3$ de A ou encore entre les trois quantités $L_i B_i$, $i = 1, \dots, 3$. Ainsi, de nombreux cas sont à envisager.

Le travail réalisé pour l'instant montre que :

$$\lim_{\sigma^1 \rightarrow +\infty, \sigma^2 \in \mathbb{R}^{+*}} f(\sigma^1, \sigma^2) = \lim_{\sigma^2 \rightarrow +\infty, \sigma^1 \in \mathbb{R}^{+*}} f(\sigma^1, \sigma^2) = -1,$$

$$\lim_{\sigma^1 \rightarrow 0^+, \sigma^2 \in \mathbb{R}^{+*}} f(\sigma^1, \sigma^2) < 0, \quad \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0^+, \sigma^1 \in \mathbb{R}^{+*}} f(\sigma^1, \sigma^2) < 0.$$

Il reste alors à étudier les points singuliers de la fonction f en calculant son gradient. Si cette dernière n'a pas de point singulier ou si tous ses points singuliers sont strictement négatifs alors nous pourrions conclure de façon théorique sur la non existence de cette bifurcation nœud selle pour le modèle du thermostat à résistance d'anticipation.

Ce dernier point est relativement complexe puisque l'expression littérale de la fonction f est très longue et donc le calcul du gradient ainsi que sa réduction pour pouvoir conclure posent pour l'instant quelques problèmes.

Remarque 3.1.3

Dans le paragraphe qui suit, nous nous intéressons aux bifurcations de type doublement de période qui apparaissent lors de la perte de stabilité d'un cycle de période k , $k \geq 1$ et l'apparition d'un cycle stable de période $2k$, $k \geq 1$ lors de la variation d'un paramètre. Là encore, les cycles pour l'application du thermostat et du convecteur seuls étant stables pour n'importe quelles valeurs des paramètres, il ne peut exister de bifurcations de type doublement de période pour ce système.

3.2 Bifurcation de type doublement de période

3.2.1 Présentation générale

Lorsqu'un cycle de période k , $k \geq 1$, stable pour les valeurs du paramètre μ variable $\mu < \mu_0$, perd sa stabilité en $\mu = \mu_0$ (une des valeurs propres de la jacobienne de l'application de Poincaré associée au système est égale à -1) et lorsqu'un cycle de période $2k$, $k \geq 1$ stable apparaît en $\mu = \mu_0$, alors on parle de bifurcation de type doublement de période ou bifurcation de type fourche.

La variation du seul paramètre μ du système sur un intervalle plus grand peut mettre en évidence ce phénomène plusieurs fois de suite : c'est ce qu'on appelle alors une cascade de bifurcations de type doublement de période.

La figure 3.3 représente des diagrammes de bifurcation et illustre ce type de bifurcations.

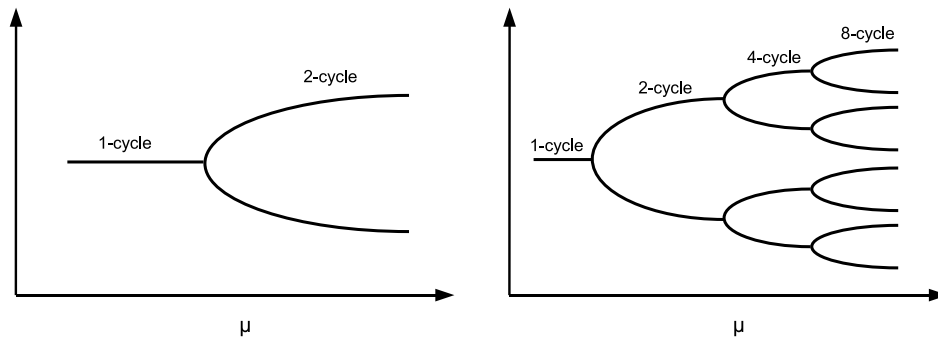


FIG. 3.3 – Illustration d'une bifurcation doublement de période avec le passage d'un 1-cycle à un 2-cycle (à gauche) et d'une cascade de bifurcations doublement de période (à droite)

3.2.2 Théorème de bifurcation doublement de période pour des systèmes unidimensionnels

Comme pour les bifurcations de type nœud selle, les auteurs de [65] ont proposé et démontré en dimension un un théorème de bifurcation doublement de période qui permet de démontrer et de prévoir ce phénomène pour des systèmes unidimensionnels. Reprenons ce résultat :

Théorème 3.2.1

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^p , $p \geq 3$, telle que f satisfasse les conditions suivantes. De plus, posons $f_\mu(x) = f(x, \mu)$.

1. Le point x_0 est un point fixe pour $\mu = \mu_0$ i.e. $f(x_0, \mu_0) = x_0$.
2. La dérivée de f_{μ_0} appliquée au point x_0 est égale à -1 i.e. $f'_{\mu_0}(x_0) = -1$. Puisque cette dérivée n'est pas égale à 1, il existe une courbe de points fixes notée $x(\mu)$ pour μ proche de μ_0 .
3. La dérivée de $f'_\mu(x(\mu))$ par rapport au paramètre μ est non nulle (la

dérivée varie le long de la famille de points fixes) i.e. :

$$\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x_0, \mu_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0.$$

4. La composée de f_{μ_0} par f_{μ_0} notée $f_{\mu_0}^2$ a son coefficient associé au terme cubique non nul i.e. :

$$\beta = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \right)^2 \neq 0.$$

Alors, il existe une bifurcation de type doublement de période en (x_0, μ_0) . Plus particulièrement, il existe une courbe différentiable de points fixes $x(\mu)$, passant par x_0 en μ_0 et la stabilité de ces points fixes change en μ_0 (le côté du plan $\mu = \mu_0$ pour lequel le cycle est stable dépend du signe de α). De plus, il existe une courbe différentiable γ passant par (x_0, μ_0) telle que $\gamma \setminus \{(x_0, \mu_0)\}$ soit l'union des cycles de période 2. Cette courbe γ est tangente à la droite $\mathbb{R} \times \{x_0\}$ en (x_0, μ_0) donc γ est le graphe d'une fonction de x , $\mu = m(x)$ avec $m'(x_0) = 0$ et $m''(x_0) = -2\frac{\beta}{\alpha} \neq 0$. La stabilité ou la non stabilité de ces cycles de période 2 dépend du signe de β .

La démonstration de ce théorème est également donnée dans [65].

3.2.3 Exemple en dimension un : la fonction logistique

Un exemple classique en dimension un est la fonction logistique donnée par :

$$(3.7) \quad f(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

où $x_n \in [0, 1]$, $r > 0$. Il fut introduit par Pierre François Verhulst [81] comme un modèle démographique puisqu'ici, x_n représente la population durant l'année n , x_0 représente la population initiale et r est une quantité prenant en compte le taux de fécondité et de mortalité (maladies, famine...).

Même si cet exemple est classique puisqu'employé par de nombreux scientifiques (voir notamment [86], [10], [71], [84]), il est intéressant ici de l'étudier pour une application simple du théorème.

D'abord, déterminons une valeur du paramètre r pour laquelle il y a possibilité d'existence de bifurcation doublement de période. Pour cela, recherchons les

points fixes de la fonction f :

$$f(x_n) = x_n \Leftrightarrow rx_n(1 - x_n) = x_n \Leftrightarrow x_n = \frac{r-1}{r} \text{ ou } x_n = 0.$$

Remarque 3.2.2

Ici, nous recherchons une bifurcation doublement de période avec le passage d'un cycle de période 1 à un cycle de période 2. Cependant, nous aurions pu rechercher une bifurcation doublement de période avec le passage d'un cycle de période 2 à un cycle de période 4 ou encore avec le passage d'un cycle de période 4 à un cycle de période 8... Pour cela, il faudrait chercher les points fixes de $f \circ f = f^2$ ou de $f \circ f \circ f \circ f = f^4$.

De plus, nous savons qu'au point de bifurcation doublement de période, la dérivée de f par rapport à la variable d'état est égale à -1 . Cette condition nous permet de repérer alors une valeur possible, en considérant $x_0 = \frac{r-1}{r}$. En effet :

$$f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow r - 2rx_0 = -1 \Leftrightarrow r - 2(r-1) = -1 \Leftrightarrow r = 3.$$

Nous avons alors le point $(\frac{2}{3}, 3)$ qui satisfait les deux premières conditions du théorème 3.2.1. Vérifions les deux dernières :

1. Troisième hypothèse

$$\alpha = (1 - 2x_0) + \frac{1}{2}(x_0(1 - x_0)(-2r)) = -1 \neq 0.$$

2. Quatrième hypothèse

$$\beta = (\frac{1}{2}(-2r))^2 = 9 \neq 0.$$

La fonction f vérifie au point $(\frac{2}{3}, 3)$ toutes les conditions du théorème 3.2.1 ce qui prouve de façon théorique l'existence d'une bifurcation doublement de période en ce point.

La figure 3.4 illustre l'existence de cette bifurcation et montre également une cascade de bifurcations doublement de période. Tous ces points de bifurcation peuvent être facilement retrouvés avant de faire la simulation numérique à l'aide du théorème et de la méthode que nous venons d'employer.

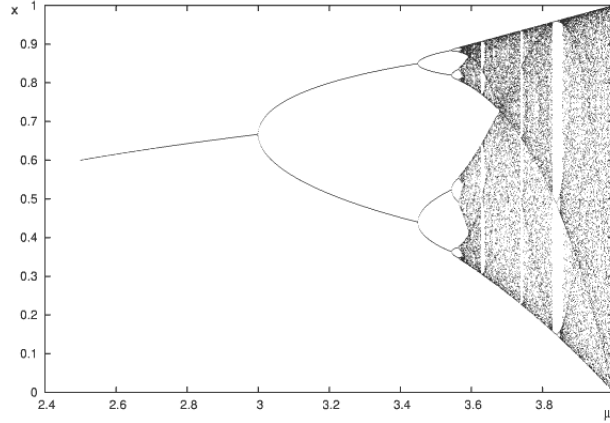


FIG. 3.4 – Diagramme de bifurcation associé à la fonction logistique

3.2.4 Généralisation du théorème du bifurcation doublement de période en dimension N , $N \geq 1$

Dans [65], le théorème de bifurcation doublement de période est limité puisqu'il ne s'applique qu'à des systèmes unidimensionnels. Dans le but de prévoir et de démontrer de façon théorique l'existence de bifurcations de type doublement de période pour nos applications thermique de dimension trois et électronique de dimension quatre, nous proposons une généralisation du théorème 3.2.1 en dimension N quelconque $N \geq 1$, ainsi que sa démonstration. Pour cela, nous nous aidons des indices fournis dans un exercice de [65].

Théorème 3.2.3

Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 3$. Nous écrirons $f_\mu(x) = f(x, \mu)$. Supposons que f satisfasse les conditions suivantes :

1. Le point x_0 est un point fixe de f_μ pour la valeur du paramètre $\mu = \mu_0$ i.e $f(x_0, \mu_0) = f_{\mu_0}(x_0) = x_0$.
2. La jacobienne de f_{μ_0} en x_0 que l'on notera $Df_{\mu_0}(x_0)$, a pour valeurs propres $\lambda_1(\mu_0) = -1$ et $\lambda_j(\mu_0)$, $j = 2, \dots, N$ avec $|\lambda_j(\mu_0)| \neq 1$.

Soit v^1 un vecteur propre à droite de $Df_{\mu_0}(x_0)$ associé à la valeur propre $\lambda_1(\mu_0)$. Posons $F = \langle v^1 \rangle$. Soient v^2, \dots, v^N , $N - 1$ vec-

teurs qui forment une base de E' , somme directe des sous-espaces caractéristiques (à droite) de $Df_{\mu_0}(x_0)$ autres que F . Nous avons alors notamment $F \oplus E' = \mathbb{R}^N$.

3. Soit $x(\mu)$ la courbe de points fixes de f_μ au voisinage de $x(\mu_0)$. Notons $\lambda_j(\mu)$, $j = 1, \dots, N$, les valeurs propres de la matrice des dérivées premières de f_μ par rapport à x , $\partial_x f_\mu(x(\mu))$. Nous avons :

$$\alpha = \frac{d}{d\mu} \lambda_1(\mu)|_{\mu_0} \neq 0.$$

4. Soit :

$$(3.8) \quad \beta = \frac{1}{3!} w^1 D^3 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, v^1, v^1) + \frac{1}{4} w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, (Df_{\mu_0} + Id_{\mathbb{R}^N})U) \\ + \frac{1}{4} w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, D^2 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, v^1)) \neq 0,$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ - \left[(\Pi Df_{\mu_0}(x_0)(v^2 \dots v^N))^2 - Id_{E'} \right]^{-1} \Pi(Df_{\mu_0}(x_0) + Id_{\mathbb{R}^N}) D^2 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, v^1) \end{pmatrix},$$

et Π qui correspond à la projection de \mathbb{R}^N sur $E' = \langle v^2 \dots v^N \rangle$ parallèlement à $F = \langle v^1 \rangle$,

Alors, il existe une bifurcation de type doublement de période en (x_0, μ_0) . Plus précisément, il existe une courbe de points fixes $x(\mu)$, passant par x_0 en μ_0 telle que la stabilité du point fixe change en μ_0 (dépend du signe de α). De plus, il existe aussi une courbe différentiable γ passant par (x_0, μ_0) telle que $\gamma \setminus (x_0, \mu_0)$ est l'union des orbites de période 2. La courbe γ est tangente à $\langle v^1 \rangle \times \{\mu_0\}$ en (x_0, μ_0) donc γ est le graphe d'une fonction de x , $\mu = m(x)$ avec $m'(x_0) = 0$ et $m''(x_0) = \frac{-2\beta}{\alpha} \neq 0$. Enfin, les orbites de période 2 sont d'un seul côté de $\mu = \mu_0$ et leur stabilité dépend du signe de β .

Remarque 3.2.4

Lorsque le paramètre μ est fixé à μ_0 , la fonction f_{μ_0} ne dépend alors uniquement que de x . C'est pourquoi, nous nous permettons la notation $Df_{\mu_0}(x)$ et nous appelons cette matrice, jacobienne de f_{μ_0} .

En revanche, si μ n'est pas fixé, nous préférons noter $\partial_x f_\mu(x)$ et appeler cette matrice, matrice des dérivées premières de f_μ par rapport à x .

Démonstration : Par hypothèse, la jacobienne de f_{μ_0} en x_0 , notée $Df_{\mu_0}(x_0)$ n'a pas la valeur 1 comme valeur propre donc, en appliquant le théorème des fonctions implicites, nous pouvons résoudre $t(x, \mu) = f(x, \mu) - x = 0$ en x au voisinage de (x_0, μ_0) ce qui donne l'existence de $x(\mu)$, ensemble des points fixes de f_μ proches de μ_0 avec plus particulièrement $x(\mu_0) = x_0$. De plus, en différentiant t , nous obtenons :

$$(\partial_x f_\mu(x) - Id_{\mathbb{R}^N}) dx + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu) d\mu = 0,$$

ce qui nous permet alors de calculer $x'(\mu) = \frac{dx}{d\mu}(\mu)$:

$$(3.9) \quad x'(\mu) = -(\partial_x f_\mu(x) - Id_{\mathbb{R}^N})^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu).$$

Plutôt que d'utiliser par la suite une variété centrale pour réduire le problème à une dimension, nous choisissons d'utiliser pour cette démonstration le théorème des fonctions implicites et plus précisément une méthode appelée réduction de Lyapunov-Schmidt.

Soit $v^1(\mu)$ un vecteur propre à droite de $\partial_x f_\mu(x(\mu))$ associé à la valeur propre $\lambda_1(\mu)$ avec plus particulièrement $v^1 = v^1(\mu_0)$ associé à $\lambda_1 = \lambda_1(\mu_0) = -1$. Posons $F(\mu) = \langle v^1(\mu) \rangle$ et $E'(\mu)$ la somme directe des sous-espaces caractéristiques de $\partial_x f_\mu(x(\mu))$ autres que $F(\mu)$. Soit $\mathcal{B}'_\mu = (v^2(\mu), \dots, v^N(\mu))$ une base de $E'(\mu)$ adaptée à sa décomposition. Nous avons donc $\mathbb{R}^N = F(\mu) \oplus E'(\mu)$ et $\mathcal{B}_\mu = (v^1(\mu), \dots, v^N(\mu))$ est une base de \mathbb{R}^N . Enfin, soient $\Pi(\mu)$ la projection sur $E'(\mu)$ parallèlement à $F(\mu)$ et $p(\mu) = \Pi(\mu) \circ f_{\mu|E'(\mu)}$. Nous notons plus particulièrement $v^2(\mu_0) = v^2, \dots, v^N(\mu_0) = v^N, F(\mu_0) = F, E'(\mu_0) = E', \Pi(\mu_0) = \Pi$ et $p(\mu_0) = p$.

La matrice des dérivées premières de f_μ par rapport à x s'écrit alors relativement dans cette base \mathcal{B}_μ de la façon suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_\mu}(\partial_x f_\mu(x(\mu))) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\mu) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \text{Mat}_{\mathcal{B}'_\mu}(Dp(\mu)) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

En effet, soit $\{w^j(\mu)\}_{j=1, \dots, N}$ la base duale de $\{v^j(\mu)\}_{j=1, \dots, N}$. Pour \mathbb{R}^N , l'espace dual peut être vu comme l'espace des vecteurs lignes et nous avons par définition [26] :

$$w^i(\mu)(v^j(\mu)) = w^i(\mu)v^j(\mu) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $w^1(\mu)$ représente ici un vecteur propre à gauche pour $\partial_x f_\mu(x(\mu))$ associé à la valeur propre $\lambda_1(\mu)$ (ainsi, $w^1(\mu)\partial_x f_\mu(x(\mu)) = \lambda_1(\mu)w^1(\mu)$) et

$w^1(\mu) \in E'(\mu)^\perp$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_\mu}(\partial_x f_\mu(x(\mu))) &= \begin{pmatrix} w^1(\mu) \\ \vdots \\ w^N(\mu) \end{pmatrix} \partial_x f_\mu(x(\mu)) \begin{pmatrix} v^1(\mu) & \dots & v^N(\mu) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1(\mu)w^1(\mu)v^1(\mu) & \dots & \lambda_1(\mu)w^1(\mu)v^N(\mu) \\ \lambda_1(\mu)w^2(\mu)v^1(\mu) & \dots & w^2(\mu)\partial_x f_\mu(x(\mu))v^N(\mu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(\mu)w^N(\mu)v^1(\mu) & \dots & w^N(\mu)\partial_x f_\mu(x(\mu))v^N(\mu) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_\mu}(\partial_x f_\mu(x(\mu))) &= \begin{pmatrix} \lambda_1(\mu) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w^2(\mu)\partial_x f_\mu(x(\mu))v^2(\mu) & \dots & w^2(\mu)\partial_x f_\mu(x(\mu))v^N(\mu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & w^N(\mu)\partial_x f_\mu(x(\mu))v^2(\mu) & \dots & w^N(\mu)\partial_x f_\mu(x(\mu))v^N(\mu) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1(\mu) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \text{Mat}_{\mathcal{B}'_\mu}(\Pi(\mu)Df_\mu(x(\mu))) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par la suite, nous appellerons $x_{0\mathcal{B}}$ la matrice colonne du vecteur $x_0 = x(\mu_0)$ écrite dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mu_0}$ avec $x_{0\mathcal{B}} = (x_{0\mathcal{B}}^1, \dots, x_{0\mathcal{B}}^N)^T = (w^1 \dots w^N)^T x_0$ et $x_{\mathcal{B}_\mu}(\mu)$ la matrice colonne du vecteur $x(\mu)$ écrite dans la base \mathcal{B}_μ avec $x_{\mathcal{B}_\mu}(\mu) = (x_{\mathcal{B}_\mu}^1(\mu), \dots, x_{\mathcal{B}_\mu}^N(\mu))^T = (w^1(\mu) \dots w^N(\mu))^T x(\mu)$ où x_0 et $x(\mu)$ sont considérés relativement à la base canonique.

De même, nous noterons $f_{\mu\mathcal{B}_\mu} = (f_{\mu\mathcal{B}_\mu}^1 \dots f_{\mu\mathcal{B}_\mu}^N)^T$, la matrice colonne du vecteur $f_\mu = (f_\mu^1 \dots f_\mu^N)^T$ écrite dans la base \mathcal{B}_μ et nous avons aussi $f_{\mu\mathcal{B}_\mu} = (w^1(\mu) \dots w^N(\mu))^T f_\mu$.

Ensuite, définissons la fonction Ψ suivante :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{N-1} \\ (x, \mu) &\longmapsto \Pi(\mu)(f_\mu^2(x) - x), \end{aligned}$$

avec f_μ^2 qui correspond à la composée de f_μ par elle-même. Nous avons alors, au voisinage de $\mu = \mu_0$, $\Psi(x(\mu), \mu) = 0$ car, par hypothèse, $x(\mu)$ est l'ensemble des points fixes de f_μ au voisinage de $\mu = \mu_0$.

De plus :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x(\mu), \mu) \\ &= \Pi(\mu) \left[\left(\frac{\partial f_{\mu \mathcal{B}_\mu}}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x(\mu)) \right)_{\mathcal{B}_\mu} \left(\frac{\partial f_{\mu \mathcal{B}_\mu}}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x(\mu)) \right)_{\mathcal{B}_\mu} - \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ I_{N-1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_\mu} \right], \end{aligned}$$

d'où :

$$(3.11) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x(\mu), \mu) = \left(\frac{\partial f_{\mu \mathcal{B}_\mu}^2 \dots f_{\mu \mathcal{B}_\mu}^N}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x(\mu)) \right)_{\mathcal{B}'_\mu}^2 - Id_{E'(\mu)}.$$

Comme $\lambda_j(\mu_0) \neq 1 \forall j \geq 2$, nous pouvons donc conclure que, dans un voisinage de μ_0 , $\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x(\mu), \mu)$ est une matrice inversible. De là, pour μ fixé dans ce voisinage, le théorème des fonctions implicites s'applique au voisinage de $x(\mu)$ et nous pouvons résoudre $\Psi(x, \mu) = 0$ en termes de $x_{\mathcal{B}_\mu}^1$. En effet, il existe alors une fonction φ_μ définie au voisinage de $x_{\mathcal{B}_\mu}^1(\mu)$ telle que :

$$\begin{aligned} \varphi_\mu : \mathbb{R} &\longrightarrow E'(\mu) \\ x_{\mathcal{B}_\mu}^1 &\longmapsto (x_{\mathcal{B}_\mu}^2, \dots, x_{\mathcal{B}_\mu}^N)_{\mathcal{B}'_\mu}, \end{aligned}$$

et :

$$(x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N)^T = \varphi_{\mu \mathcal{B}'_\mu}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1) = (\varphi_{\mu \mathcal{B}'_\mu}^2(x_{\mathcal{B}_\mu}^1) \dots \varphi_{\mu \mathcal{B}'_\mu}^N(x_{\mathcal{B}_\mu}^1))^T,$$

avec

$$(3.12) \quad \Psi((x_{\mathcal{B}_\mu}^1, \varphi_{\mu \mathcal{B}'_\mu}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1))_{\mathcal{B}_\mu}, \mu) \equiv 0.$$

De plus, notons que :

$$(3.13) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1}(x, \mu) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x, \mu) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1) = 0, \text{ en } x = (x_{\mathcal{B}_\mu}^1, \varphi_{\mu \mathcal{B}'_\mu}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1))_{\mathcal{B}_\mu},$$

et que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1}(x(\mu), \mu) &= \frac{\partial}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1} (\Pi(\mu)(f_\mu(f_\mu(x(\mu))) - x(\mu))) \\ &= \Pi(\mu) \left[\left(\frac{\partial f_{\mu \mathcal{B}_\mu}}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1}(x(\mu)) \frac{\partial f_{\mu \mathcal{B}_\mu}}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1}(x(\mu)) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{B}_\mu} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_{\mu \mathcal{B}_\mu}^2 \dots f_{\mu \mathcal{B}_\mu}^N}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x(\mu)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(\mu) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}_\mu} = 0_{E'}, \end{aligned}$$

en utilisant l'écriture de $\partial_x f_\mu(x(\mu))$ dans la base \mathcal{B}_μ .

Ainsi, comme $\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x(\mu), \mu)$ est inversible au voisinage de μ_0 , nous pouvons déduire à l'aide de (3.13) :

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1(\mu)) = 0_{E'}.$$

Par la suite, dans le but d'obtenir 0 comme point fixe au voisinage de tout μ , nous introduisons, dans la base \mathcal{B}_μ , la fonction ϕ_μ suivante au voisinage de $(0, \mu_0)$:

$$(3.14) \quad \phi_\mu(y) = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}_\mu}^1(\mu) + y \\ \varphi_\mu(x_{\mathcal{B}_\mu}^1(\mu) + y) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_\mu}.$$

Nous avons alors :

$$(3.15) \quad \begin{cases} \phi_\mu(0) = x(\mu) \\ \frac{\partial \phi_\mu}{\partial y}(0) = v^1(\mu). \end{cases}$$

À présent, introduisons la fonction g de la façon suivante :

$$(3.16) \quad g(y, \mu) = w^1(\mu) [f_\mu(\phi_\mu(y)) - \phi_\mu(y)].$$

Nous avons alors :

$$g(0, \mu) = w^1(\mu) [f_\mu(\phi_\mu(0)) - \phi_\mu(0)] = w^1(\mu) [f_\mu(x(\mu)) - x(\mu)] = 0,$$

car $x(\mu)$ est un point fixe de f_μ et $\phi_\mu(0) = x(\mu)$.

Puisque :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(0, y) &= w^1(\mu) (\partial_x f_\mu(x(\mu)) - Id_{\mathbb{R}^N}) \frac{\partial \phi_\mu}{\partial y}(0) \\ &= w^1(\mu) \partial_x f_\mu(x(\mu)) v^1(\mu) - w^1(\mu) v^1(\mu) = \lambda_1(\mu) - 1, \end{aligned}$$

le calcul de $\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial y}(0, \mu)$ permet d'étudier le changement de stabilité des points fixes le long de la courbe des points fixes. En effet, nous avons au voisinage de μ_0 :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial y}(0, \mu) = \frac{d\lambda_1}{d\mu}(\mu) \neq 0 \text{ d'après la troisième hypothèse du théorème,}$$

ce qui confirme que le signe de $\alpha = \frac{d\lambda_1}{d\mu}(\mu_0)$ détermine de quel côté du plan $\mu = \mu_0$, le point fixe va être attractif ($\alpha < 0$) ou au contraire répulsif ($\alpha > 0$).

Soit la fonction h définie par :

$$(3.17) \quad h(y, \mu) = w^1(\mu) [f_\mu^2(\phi_\mu(y)) - \phi_\mu(y)],$$

où f_μ^2 correspond à la composée de f_μ par elle-même. Notons que nous avons :

$$h(0, \mu) = w^1(\mu) [f_\mu \circ f_\mu(x(\mu)) - x(\mu)] = w^1(\mu) [f_\mu(x(\mu)) - x(\mu)] = 0,$$

car $\phi_\mu(0) = x(\mu)$ et $x(\mu)$ est un point fixe de f_μ .

Nous cherchons ici y non nul solution de $h(y, \mu) = 0$ ce qui nous donnera un point fixe $\phi_\mu(y)$ autre que $\phi_\mu(0) = x(\mu)$ pour f_μ^2 . En effet, $f_\mu^2(\phi_\mu(y)) = \phi_\mu(y)$ découle de (3.17) (projection sur $E'(\mu)^\perp$) et de (3.12) qui s'écrit ici $\Pi(\mu)(f_\mu^2(\phi_\mu(y)) - \phi_\mu(y)) = 0$ (projection sur $E'(\mu)$). Pour cela, introduisons la fonction M de la façon suivante :

$$(3.18) \quad M(y, \mu) = \begin{cases} \frac{h(y, \mu)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{h(y, \mu)}{y} = \frac{\partial h}{\partial y}(0, \mu) & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Calculons $M(0, \mu_0) = 0$:

$$\begin{aligned} M(0, \mu) &= \frac{\partial h}{\partial y}(0, \mu) = w^1(\mu) [(\partial_x f_\mu(x(\mu)))^2 - Id_{\mathbb{R}^N}] \frac{\partial \phi_\mu}{\partial y}(0) \\ &= \lambda_1(\mu) w^1(\mu) \partial_x f_\mu(x(\mu)) v^1(\mu) - w^1(\mu) v^1(\mu) = \lambda_1^2(\mu) - 1. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que $M(0, \mu_0) = 0$ car $\lambda_1(\mu_0) = -1$ d'après la deuxième hypothèse du théorème.

Calculons ensuite les dérivées partielles de M .

1. Calculons d'abord $M_\mu(0, \mu_0) = \frac{\partial M}{\partial \mu}(0, \mu_0)$:

(3.19)

$$M_\mu(0, \mu_0) = \frac{d}{d\mu}(M(0, \mu))|_{\mu=\mu_0} = 2 \frac{d\lambda_1}{d\mu}(\mu_0) \lambda_1(\mu_0) = -2 \frac{d\lambda_1}{d\mu}(\mu_0) \neq 0,$$

d'après la troisième hypothèse du théorème 3.2.3.

2. Puis, intéressons nous à $M_y(0, \mu_0) = \frac{\partial M}{\partial y}(0, \mu_0)$. Notons que, par définition de la dérivée partielle considérée et compte tenu de (3.19) :

$$M_y(0, \mu_0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{h(y, \mu_0)}{y^2}.$$

De plus, un développement limité de h au voisinage de $y = 0$ donne :

$$h(y, \mu_0) = h(0, \mu_0) + \frac{\partial h}{\partial y}(0, \mu_0) y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, \mu_0) y^2 + \mathcal{O}(y^3),$$

donc finalement au voisinage de $y = 0$, nous avons :

$$h(y, \mu_0) = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, \mu_0) y^2 + \mathcal{O}(y^3),$$

ce qui nous permet de conclure :

$$M_y(0, \mu_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, \mu_0).$$

Il reste alors à calculer la dérivée seconde de h par rapport à y . Déjà, nous savons :

$$\frac{\partial h}{\partial y}(y, \mu_0) = w^1 [Df_{\mu_0}(f_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y))) Df_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y)) - Id_{\mathbb{R}^N}] \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(y).$$

De là, nous pouvons déduire en dérivant h une seconde fois par rapport à y et en appliquant en $y = 0$:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, \mu_0) &= w^1 \frac{\partial}{\partial y} [Df_{\mu_0}(f_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y)))]|_{y=0} Df_{\mu_0}(x_0) v^1 \\ &+ w^1 Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial}{\partial y} [Df_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y))]|_{y=0} v^1 + w^1 (Df_{\mu_0}(x_0))^2 \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) - w^1 \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0), \end{aligned}$$

car $\phi_{\mu_0}(0) = x_0$, $\frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0) = v^1$ (voir (3.15)) et $f_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(0)) = f_{\mu_0}(x_0) = x_0$.

De plus :

$$w^1 (Df_{\mu_0}(x_0))^2 \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) - w^1 \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) = w^1 \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) - w^1 \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) = 0,$$

car w^1 est un vecteur à gauche de $Df_{\mu_0}(x_0)$ associé à -1 .

De même, nous avons :

$$\begin{aligned} &w^1 \frac{\partial}{\partial y} [Df_{\mu_0}(f_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y)))]|_{y=0} Df_{\mu_0}(x_0) v^1 + w^1 Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial}{\partial y} [Df_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y))]|_{y=0} v^1 \\ &= -w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) (Df_{\mu_0}(x_0) v^1, v^1) - w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1) \\ &= w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1) - w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1) = 0. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure que $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, \mu_0) = 0$ et donc finalement que $M_y(0, \mu_0) = 0$.

Puisque $M_\mu(0, \mu_0) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites s'applique, ce qui nous donne alors l'existence d'une fonction différentiable $\mu = m(y)$, $\mu_0 = m(0)$ telle que $M(y, m(y)) \equiv 0$ au voisinage de $(0, \mu_0)$. Ainsi, $\phi_{m(y)}(y)$ est un point fixe de période 2 de f_μ . En différentiant la fonction M , nous obtenons :

$$M_y(0, \mu_0) + M_\mu(0, \mu_0) m'(0) = 0,$$

et donc :

$$(3.21) \quad m'(0) = -\frac{M_y(0, \mu_0)}{M_\mu(0, \mu_0)} = 0,$$

car $M_y(0, \mu_0) = 0$.

Ainsi, la courbe de m , que nous noterons γ , est tangente à $\{v^1\} \times \{\mu_0\}$ en (x_0, μ_0) . Enfin, comme :

$$(3.22) \quad \mu = m(y) = m(0) + m'(0)y + \frac{1}{2!} m''(0)y^2 + \mathcal{O}(y^3) = \mu_0 + \frac{1}{2!} m''(0)y^2 + \mathcal{O}(y^3),$$

nous concluons alors qu'une condition suffisante pour que γ ne soit que d'un seul côté du plan $\mu = \mu_0$ est que $m''(0) \neq 0$. Pour calculer la dérivée seconde de $m(y)$ en 0, différencions une nouvelle fois l'équation $M_y(y, m(y)) + M_\mu(y, m(y))m'(y) = 0$. Nous obtenons alors :

$$M_{yy}(y, m(y)) + 2M_{\mu y}(y, m(y))m'(y) + M_{\mu\mu}(y, m(y))(m'(y))^2 + M_\mu(y, m(y))m''(y) = 0.$$

En évaluant cette dernière relation en $y = 0$ et en utilisant le calcul précédent pour $m'(0)$ (3.21), nous avons finalement pour la dérivée seconde de m en 0 :

$$(3.23) \quad m''(0) = -\frac{M_{yy}(0, \mu_0)}{M_\mu(0, \mu_0)}.$$

Le dénominateur ayant été calculé précédemment avec (3.19), il ne reste plus qu'à calculer le numérateur. Pour cela, donnons le développement limité à l'ordre 3 de $h(y, \mu_0)$ au voisinage de $y = 0$:

$$\begin{aligned} h(y, \mu_0) &= h(0, \mu_0) + \frac{\partial h}{\partial y}(0, \mu_0)y + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, \mu_0)y^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0)y^3 + \mathcal{O}(y^4) \\ &= \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0)y^3 + \mathcal{O}(y^4) \end{aligned}$$

et :

$$M(y, \mu_0) = M(0, \mu_0) + M_y(0, \mu_0)y + \frac{1}{2!}M_{yy}(0, \mu_0)y^2 + \mathcal{O}(y^3) = \frac{1}{2!}M_{yy}(0, \mu_0)y^2 + \mathcal{O}(y^3),$$

d'où :

$$(3.24) \quad M_{yy}(0, \mu_0) = \frac{1}{3}\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0).$$

Or, nous avons trouvé précédemment :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial y}(y, \mu_0) = w^1 R(y, \mu_0) \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(y) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y, \mu_0) = w^1 \frac{\partial R}{\partial y}(y, \mu_0) \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(y) + w^1 R(y, \mu_0) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(y), \end{cases}$$

avec $R(y, \mu_0) = Df_{\mu_0}(f_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y)))Df_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y)) - Id_{\mathbb{R}^N}$.

Ainsi, en dérivant $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y, \mu_0)$ par rapport à y une nouvelle fois et en appliquant en $y = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (3.25) \quad \frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0) &= w^1 \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0, \mu_0) \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0) + 2w^1 \frac{\partial R}{\partial y}(0, \mu_0) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) \\ &\quad + w^1 R(0, \mu_0) \frac{\partial^3 \phi_{\mu_0}}{\partial y^3}(0). \end{aligned}$$

Pour alléger les écritures, étudions chacun des trois termes de $\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0)$ donnés dans (3.25) séparément. Calculons d'abord le premier terme, à savoir :

$$\begin{aligned} w^1 \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0, \mu_0)v^1 &= \\ w^1 \frac{\partial}{\partial y} \left[D^2 f_{\mu_0}(f_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y))) \left(Df_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y)) \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(y), Df_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y))v^1 \right) \right] \\ &\quad + w^1 \frac{\partial}{\partial y} \left[Df_{\mu_0}(f_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y))) D^2 f_{\mu_0}(\phi_{\mu_0}(y)) \left(\frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(y), v^1 \right) \right], \end{aligned}$$

avec la convention pour toute fonction f et tout vecteur u_1 et $u_2 \in \mathbb{R}^N$: $D^2 f(x)(u_1, u_2) = D^2 f(x)(u_2, u_1) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) u_1^i u_2^j$. D'où :

$$\begin{aligned} w^1 \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0, \mu_0) v^1 &= w^1 D^3 f_{\mu_0}(x_0) \left(Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), Df_{\mu_0}(x_0) v^1 \right) \\ &+ w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(\frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0) \right), Df_{\mu_0}(x_0) v^1 \right) \\ &+ w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0), Df_{\mu_0}(x_0) v^1 \right) \\ &+ 2w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(\frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), v^1 \right) \right) \\ &+ w^1 Df_{\mu_0}(x_0) D^3 f_{\mu_0}(x_0) \left(\frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), v^1 \right) \\ &+ w^1 Df_{\mu_0}(x_0) D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(\frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0), v^1 \right), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} w^1 \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0, \mu_0) v^1 &= w^1 D^3 f_{\mu_0}(x_0) (-v^1, -v^1, -v^1) + 3w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) (-v^1, D^2 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1)) \\ &+ w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0), -v^1 \right) - w^1 D^3 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1, v^1) \\ &- w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(\frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0, \mu_0), v^1 \right). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (3.26) \quad w^1 \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0, \mu_0) v^1 &= -2w^1 D^3 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1, v^1) - 3w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, D^2 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1)) \\ &- w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(v^1, (Df_{\mu_0}(x_0) + Id_{\mathbb{R}^N}) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) \right). \end{aligned}$$

Puis étudions le deuxième terme de (3.25) :

$$\begin{aligned} w^1 \frac{\partial R}{\partial y}(0, \mu_0) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) &= w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) \right) \\ &- w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(\frac{\partial \phi_{\mu_0}}{\partial y}(0), \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) \right), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} (3.27) \quad w^1 \frac{\partial R}{\partial y}(0, \mu_0) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) &= -w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(v^1, Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) \right) \\ &- w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(v^1, \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) \right). \end{aligned}$$

Enfin, calculons le dernier terme de (3.25) :

$$(3.28) \quad w^1 R(0, \mu_0) \frac{\partial^3 \phi_{\mu_0}}{\partial y^3}(0) = w^1 ((Df_{\mu_0}(x_0))^2 - 1) \frac{\partial^3 \phi_{\mu_0}}{\partial y^3}(0) = w^1 \frac{\partial^3 \phi_{\mu_0}}{\partial y^3}(0) - w^1 \frac{\partial^3 \phi_{\mu_0}}{\partial y^3}(0) = 0,$$

car $w^1(Df_{\mu_0}(x_0))^2 = w^1$, w^1 étant un vecteur propre à gauche de $Df_{\mu_0}(x_0)$ associé à la valeur propre -1 .

Finalement, en regroupant les trois expressions pour les termes de (3.25) données par (3.26), (3.27) et (3.28), nous concluons :

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0) &= -2w^1 D^3 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1, v^1) - 3w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, D^2 f_{\mu_0}(x_0) (v^1, v^1)) \\ &\quad - 3w^1 D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(v^1, (Df_{\mu_0}(x_0) + Id_{\mathbb{R}^N}) \frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) \right). \end{aligned}$$

L'objectif à présent est d'écrire $M_{yy}(0, \mu_0) = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0)$ uniquement en fonction de $f_{\mu_0}(x_0)$, c'est-à-dire, il faut trouver une relation entre $\frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0)$ et $f_{\mu_0}(x_0)$. Pour cela, différencions une seconde fois la fonction Ψ donnée par (3.10) par rapport à $x_{\mathcal{B}_\mu}^1$. Nous obtenons :

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^{1^2}}(x, \mu) + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1 \partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x, \mu) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1) + \frac{\partial^2 \Psi}{(\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N)^2}(x, \mu) \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^1}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1) \right)^2 \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^2 \dots x_{\mathcal{B}_\mu}^N}(x, \mu) \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_{\mathcal{B}_\mu}^{1^2}}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1) = 0, \end{aligned}$$

en x satisfaisant $\Psi(x, \mu) = 0$, c'est-à-dire $x = (x_{\mathcal{B}_\mu}^1, \varphi_{\mu_{\mathcal{B}'_\mu}}(x_{\mathcal{B}_\mu}^1))_{\mathcal{B}_\mu}$.

Appliquée en (x_0, μ_0) , la relation (3.30) devient :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}}^{1^2}}(x_0, \mu_0) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}}^2 \dots x_{\mathcal{B}}^N}(x_0, \mu_0) \frac{\partial^2 \varphi_{\mu_0}}{\partial x_{\mathcal{B}}^{1^2}}(x_{0_{\mathcal{B}}}^1) = 0.$$

Comme nous l'avons noté précédemment, $\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}}^2 \dots x_{\mathcal{B}}^N}(x_0, \mu_0)$, donnée par (3.11), est une matrice inversible donc il reste à calculer $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}}^{1^2}}(x_0, \mu_0)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_{\mathcal{B}}^{1^2}}(x_0, \mu_0) &= \frac{\partial}{\partial x_{\mathcal{B}}^1} \left[\Pi \left(Df_{\mu_0}(f_{\mu_0}(x)) \frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x_{\mathcal{B}}^1}(x) \right) \right] \\ &= \Pi \left[D^2 f_{\mu_0}(x_0) \left(\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x_{\mathcal{B}}^1}(x_0), \frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x_{\mathcal{B}}^1}(x_0) \right) + Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial^2 f_{\mu_0}}{\partial x_{\mathcal{B}}^{1^2}}(x_0) \right] \\ &= \Pi \left[D^2 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, v^1) + Df_{\mu_0}(x_0) \frac{\partial^2 f_{\mu_0}}{\partial x_{\mathcal{B}}^{1^2}}(x_0) \right] = \Pi \left[(Df_{\mu_0}(x_0) + Id_{\mathbb{R}^N}) D^2 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, v^1) \right], \end{aligned}$$

car, par définition, $\frac{\partial^2 f_{\mu_0}}{\partial x_{\mathcal{B}}^{1^2}}(x_0) = D^2 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, v^1)$.

Ceci nous permet d'écrire finalement :

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{\mu_0}}{\partial x_{\mathcal{B}}^{1^2}}(x_{0_{\mathcal{B}}}^1) &= \\ &- \left[(\Pi Df_{\mu_0}(x_0)(v^2 \dots v^N))^2 - Id_{E'} \right]^{-1} \Pi (Df_{\mu_0}(x_0) + Id_{\mathbb{R}^N}) D^2 f_{\mu_0}(x_0)(v^1, v^1). \end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons trouver une expression de $\frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0)$ uniquement en fonction de $f_{\mu_0}(x_0)$ à savoir :

$$\frac{\partial^2 \phi_{\mu_0}}{\partial y^2}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_{\mu_0}}{\partial x_B^{1^2}}(x_{0_B}^1) \end{pmatrix}_B \quad \text{avec } \frac{\partial^2 \varphi_{\mu_0}}{\partial x_B^{1^2}}(x_{0_B}^1) \text{ donnée par (3.31).}$$

Nous concluons ainsi, à l'aide de (3.8) et de (3.29), que $\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0) = 3M_{yy}(0, \mu_0) = -12\beta \neq 0$ (d'après la quatrième et dernière hypothèse du théorème) et donc que :

$$(3.32) \quad m''(0) = -\frac{M_{yy}(0, \mu_0)}{M_\mu(0, \mu_0)} = -\frac{-4\beta}{-2\alpha} = -2\frac{\beta}{\alpha} \neq 0,$$

ce qui confirme que γ , courbe des points fixes 2-périodiques, ne soit que d'un seul côté $\mu = \mu_0$.

Il ne reste plus qu'à étudier la stabilité du cycle de période 2. Pour cela, il faut étudier la fonction $\frac{\partial h}{\partial y}(y, m(y))$ au voisinage de $y = 0$ et de $\mu = \mu_0$.

Utilisons alors le développement limité de $\frac{\partial h}{\partial y}(y, m(y))$:

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y}(y, m(y)) &= \frac{\partial h}{\partial y}(0, \mu_0) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, \mu_0)y + \frac{\partial^2 h}{\partial \mu \partial y}(0, \mu_0)(\mu - \mu_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0)y^2 + \mathcal{O}(y^3) + \mathcal{O}((\mu - \mu_0)^2) + \mathcal{O}(y^2(\mu - \mu_0)). \end{aligned}$$

Nous savons déjà que :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial y}(0, \mu_0) = 0, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, \mu_0) = 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial \mu \partial y}(0, \mu_0) = M_\mu(0, \mu_0) = -2\frac{d\lambda_1}{d\mu}(\mu_0) = -2\alpha, \\ \frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0, \mu_0) = 3M_{yy}(0, \mu_0) = -12\beta. \end{cases}$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial \mu \partial y}(0, \mu_0)(m(y) - m(0)) &= M_\mu(0, \mu_0)(\frac{1}{2}m''(0)y^2 + \mathcal{O}(y^3)) \\ &= -\frac{1}{2}M_\mu(0, \mu_0) \left(\frac{M_{yy}(0, \mu_0)}{M_\mu(0, \mu_0)} \right) y^2 + \mathcal{O}(y^3) = 2\beta y^2 + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression (3.33) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial y}(y, m(y)) = 2\beta y^2 - 6\beta y^2 + \mathcal{O}(y^3) = -4\beta y^2 + \mathcal{O}(y^3).$$

Ceci confirme la dernière donnée du théorème c'est-à-dire que la stabilité du cycle de période 2 dépend du signe de β (si $\beta > 0$ alors le cycle est stable et si $\beta < 0$ le cycle est instable). ■

Appliquons à présent ce théorème, dans un premier temps, à l'application de Poincaré associée au système du thermostat à résistance d'anticipation et, dans un second temps, à celle associée au système du convertisseur statique. Ceci permettra de démontrer de façon théorique l'existence de bifurcations doublement de période pour ces systèmes et ainsi d'aller plus loin que la seule observation de ces bifurcations sur les diagrammes de bifurcation.

3.2.5 Application du théorème doublement de période au modèle du thermostat à résistance d'anticipation

Le but de cette partie est de prouver théoriquement, à l'aide du théorème doublement de période pour les systèmes en dimension N , $N \geq 1$ (théorème 3.2.3), l'existence d'une bifurcation de type doublement de période pour les valeurs numériques des paramètres fixes du tableau 3.1 lorsque nous faisons varier le paramètre R_c , résistance du convecteur [60], [57].

R_t	R_m	Q_{th}	Q_c	Q_p	P_{th}	P_c	θ_e	θ_1	θ_2
1.5	1	50	800	5000	0.8	50	281	293	294

TAB. 3.1 – Valeurs numériques choisies pour illustrer le doublement de période pour le modèle du thermostat à résistance d'anticipation, R_c étant le paramètre variable

Ainsi, cette application du théorème doublement de période permettra également de confirmer les observations réalisées sur le diagramme de bifurcation de la figure 3.5.

Cette dernière a été obtenue à l'aide du logiciel *Matlab* de la façon suivante :

1. Pour chaque valeur du paramètre variable R_c , nous lançons un algorithme de Newton classique [69] pour résoudre le système de quatre équations à quatre inconnues σ^i , $i = 1, \dots, 4$ donné par (2.20) et appliqué au modèle du thermostat, que nous avons obtenu au paragraphe 2.2.1 pour la détermination des équations de cycles de période 2,
2. Puis, dans un plan où R_c est sur l'axe des abscisses et σ^2 et σ^4 sont sur l'axe des ordonnées, nous traçons après chaque convergence de l'algorithme de Newton, les valeurs de σ^2 et σ^4 correspondantes à la valeur de R_c . Il est naturel, d'après les définitions des σ^i , $i = 1, \dots, 4$, de dire que

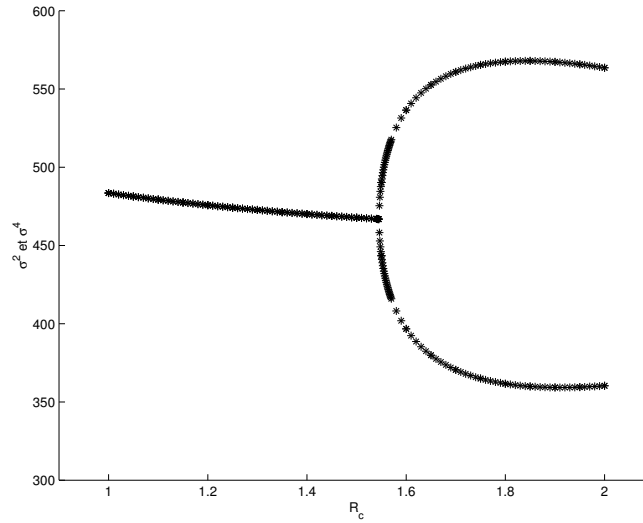


FIG. 3.5 – Diagramme de bifurcation lors de la variation du paramètre R_c pour le modèle du thermostat à résistance d'anticipation

si σ^2 et σ^4 d'une part et σ^1 et σ^3 d'autre part, ont des valeurs égales, alors l'algorithme de Newton converge vers un cycle de période 1. Sinon, il converge vers un cycle de période 2.

Remarque 3.2.5

- Nous choisissons ici de tracer les valeurs de σ^2 et de σ^4 qui correspondent aux durées entre une commutation impaire et une commutation paire successives. Nous aurions pu tout aussi bien opter pour les valeurs de σ^1 et σ^3 (durées entre une commutation paire et une commutation impaire successives). Le choix a été fait ainsi pour obtenir une meilleure visibilité de la bifurcation sur la figure car pour ces valeurs de paramètres en effet, la différence $|\sigma^2 - \sigma^4|$ est beaucoup plus importante que celle $|\sigma^1 - \sigma^3|$ quand les cycles de période 2 apparaissent.
- Nous avons également fait le choix de tracer cette figure 3.5 en gardant les valeurs des σ^i , $i = 1, \dots, 4$ alors que généralement dans la littérature [10], [86], [84], les diagrammes de bifurcation font intervenir en ordonnée les variables d'état (ici x , y et z). Nous aurions pu revenir à ces valeurs des variables d'état comme nous l'avons expliqué

au paragraphe 2.2.2 à l'aide de l'équation (2.19) pour obtenir les valeurs correspondantes des Γ^i , $i = 1, \dots, 4$ et de (2.11) pour remonter aux valeurs des variables d'état.

C'est à partir de la valeur $R_c = R_{c_0} \simeq 1.5453923$ que σ^2 et σ^4 commencent à prendre des valeurs numériques différentes et donc que l'algorithme de Newton commence à converger vers des cycles de période 2 alors que pour $R_c \leq R_{c_0}$, il convergeait vers des cycles de période 1. La figure 3.6 illustre ce phénomène à l'aide des simulations réalisées avec *Matlab*, l'une (à gauche), pour une valeur de $R_c \leq R_{c_0}$ et l'autre (à droite), pour une valeur de $R_c > R_{c_0}$.

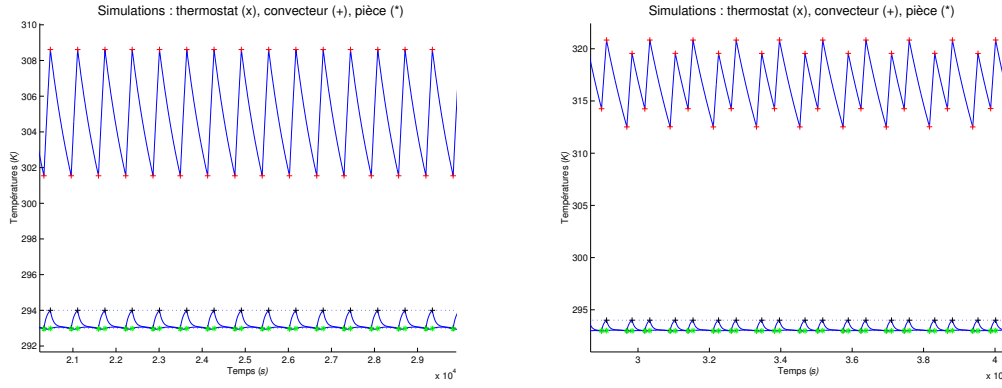


FIG. 3.6 – Différents comportements selon la valeur R_c pour les températures du thermostat (variations moyennes), de la pièce (petites variations) et du convecteur (grandes variations) : un cycle de période 1 (à gauche) pour $R_c < R_{c_0}$ et un cycle de période 2 pour $R_c > R_{c_0}$ (à droite).

Pour l'application du théorème de bifurcation doublement de période, nous avons besoin des valeurs numériques de σ^i et de Γ^i , $i = 1, 2$ pour $R_c = R_{c_0}$. Les durées σ^i , $i = 1, 2$ sont donc calculées à l'aide de l'algorithme de Newton et du système (2.20) et les constantes d'intégration Γ^i , $i = 1, 2$, sont calculées à partir des σ^i , $i = 1, 2$ et de l'équation (2.19). Nous avons ainsi :

$$\sigma^1 \simeq 144.473853, \quad \sigma^2 \simeq 466.851260,$$

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 15.172083 \\ 1.049091 \\ -3.221174 \end{pmatrix} \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} -47.749927 \\ -1.221632 \\ 8.971559 \end{pmatrix}.$$

À partir de ces valeurs, nous pouvons appliquer le théorème 3.2.3 à l'application de Poincaré associée au système du thermostat à résistance d'anticipation et donnée par :

$$h_{q_n} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$(\Gamma_{n-2}, R_c) \longmapsto \begin{cases} h_{q_0}(\Gamma_{n-1}^2, R_c) = h_{q_0_{R_c}}(\Gamma_{n-1}^2) \text{ si } n \text{ est pair} \\ h_{q_1}(\Gamma_{n-1}^1, R_c) = h_{q_1_{R_c}}(\Gamma_{n-1}^1) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Remarque 3.2.6

Nous considérons dans ce paragraphe des notations légèrement différentes pour l'application de Poincaré de celles utilisées au paragraphe 2.3.2 puisque R_c devient ici variable de cette application.

Nous restreignons ici l'application du théorème au cas où n est pair c'est-à-dire à $h_{q_0_{R_c}}(\Gamma_{n-1}^2)$. Le cas n impair et l'application du théorème à $h_{q_1_{R_c}}(\Gamma_{n-1}^1)$ donnent les mêmes résultats. Vérifions alors les quatre conditions du théorème de bifurcation doublement de période.

Première condition

Par construction de l'application de Poincaré introduite au paragraphe 2.3.4, Γ^2 est un point fixe pour $R_c = R_{c_0}$. En effet :

$$h_{q_0_{R_{c_0}}}(\Gamma^2) = G_{q_0_{R_{c_0}}} \circ G_{q_1_{R_{c_0}}}(\Gamma^2) = G_{q_0_{R_{c_0}}}(\Gamma^1) = \Gamma^2,$$

ce qui satisfait la première condition.

Deuxième condition

Pour vérifier cette seconde condition, le paramètre R_c est ici fixé à R_{c_0} et ne joue plus aucun rôle. C'est pourquoi, dans le but d'alléger les notations, nous l'omettrons pour la vérification de cette condition. À partir de là, l'application de Poincaré peut être vue comme une fonction uniquement de Γ_{n-1}^2 ce qui nous ramène alors aux notations du paragraphe 2.3.2.

Ainsi, nous pouvons appeler à nouveau jacobienne de $h_{q_0_{R_{c_0}}}(\Gamma^2) = h_{q_0}(\Gamma^2)$, la matrice $Dh_{q_0}(\Gamma^2) = \partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0_{R_{c_0}}}(\Gamma^2)$ et rappeler les expressions de $DG_{q_n}(\Gamma_{n-1})$, $n \geq 1$, obtenues au paragraphe 2.3.4 par (2.58) à savoir :

$$DG_{q_n}(\Gamma_{n-1}) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma_n A} \Gamma_{n-1} L}{L A e^{\sigma_n A} \Gamma_{n-1}} \right) e^{\sigma_n A}.$$

Comme $Dh_{q_0}(\Gamma^2) = DG_{q_0}(\Gamma^1)DG_{q_1}(\Gamma^2)$, nous avons dans la base de vecteurs propres de A :

$$Dh_{q_0}(\Gamma^2) = \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^2 A}\Gamma^1 L}{LAe^{\sigma^2 A}\Gamma^1} \right) e^{\sigma^2 A} \left(I_3 - \frac{Ae^{\sigma^1 A}\Gamma^2 L}{LAe^{\sigma^1 A}\Gamma^2} \right) e^{\sigma^1 A}.$$

Numériquement, nous obtenons :

$$Dh_{q_0}(\Gamma^2) \simeq \begin{pmatrix} -1.8419626299 & 0.4499899352 & -0.8182826401 \\ -0.0011184622 & 0.0097398043 & 0.0174088456 \\ 1.8430810922 & -0.4597297396 & 0.8008737945 \end{pmatrix},$$

qui possède les trois valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 \simeq -0.031348.$$

La jacobienne $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$ a bien une valeur propre égale à -1 et les deux autres valeurs propres ont un module différent de 1. Ainsi, la deuxième condition du théorème doublement de période est également vérifiée.

Troisième condition

Soit $x_f(R_c)$, la courbe des points fixes de $h_{q_0 R_c}$ (qui existe car, d'après la deuxième hypothèse, la jacobienne $Dh_{q_0 R_{c_0}}(\Gamma^2)$ n'a pas 1 comme valeur propre) avec, en particulier, $x_f(R_{c_0}) = \Gamma^2$. La matrice des dérivées premières de $h_{q_0 R_c}$ par rapport à Γ_{n-1}^2 en $x_f(R_c)$ prend alors la forme suivante $\forall n \geq 1$:

$$(3.34) \quad \partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)) = \left(\frac{\partial h_{q_0 R_c}^i(x_f(R_c))}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \right)_{i,j=1,\dots,3} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

où Γ_{n-1}^{2j} , $j = 1, \dots, 3$ représente la j -ième composante du vecteur Γ_{n-1}^2 et $h_{q_0 R_c}^i$, $i = 1, \dots, 3$ représente la i -ième composante de $h_{q_0 R_c}$. Notons que les a_i , b_i , c_i , $i = 1, \dots, 3$ sont choisis pour alléger les notations.

Ainsi, pour trouver les valeurs propres de $\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c))$, nous résolvons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \det(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)) - zI_3) &= -\lambda^3 + \lambda^2(\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) \\ &\quad - \lambda \text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) + \det(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c))) = 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la notation, pour toute matrice M , $\text{com}(M)$ qui correspond à la comatrice de la matrice M .

Or, d'après la remarque 2.3.4 énoncée au paragraphe 2.3.2, zéro est toujours valeur propre de $\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}$, donc $\det(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c))) = 0$. Ainsi, il reste à résoudre pour obtenir les deux autres valeurs propres :

$$(3.35) \quad -\lambda^2 + \lambda(\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) - \text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) = 0,$$

avec :

$$\begin{cases} \text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c))) = a_1 + a_2 + a_3, \\ \text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) = b_2 c_3 - b_3 c_2 + a_1 c_3 - a_3 c_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{cases}$$

Si $\lambda_1(R_c)$ (avec $\lambda_1(R_{c_0}) = -1$) est valeur propre de $\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c))$, alors $\lambda_1(R_c)$ vérifie l'équation (3.35), c'est-à-dire :

$$(3.36) \quad -\lambda_1^2(R_c) + \lambda_1(R_c)(\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) - \text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) = 0.$$

De là, en dérivant (3.36) par rapport au paramètre R_c , puis en appliquant cette dérivée en $R_c = R_{c_0}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & -2\lambda_1'(R_{c_0})\lambda_1(R_{c_0}) + \lambda_1'(R_{c_0})(\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_{c_0}}(\Gamma^2))) \\ & + \lambda_1(R_{c_0}) \frac{\partial}{\partial R_c} (\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c))))|_{R_c=R_{c_0}} \\ & - \frac{\partial}{\partial R_c} (\text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))))|_{R_c=R_{c_0}} = 0. \end{aligned}$$

Il vient alors pour l'expression de $\lambda_1'(R_{c_0}) = \frac{d\lambda_1}{dR_c}(R_{c_0})$:

$$(3.37) \quad \lambda_1'(R_{c_0}) = \frac{\frac{\partial}{\partial R_c} \left(\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c))) + \text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) \right)|_{R_c=R_{c_0}}}{\left(2 + \text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_{c_0}}(\Gamma^2)) \right)},$$

avec :

$$\begin{cases} \text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_{c_0}}(\Gamma^2)) = a_{1|R_c=R_{c_0}} + b_{2|R_c=R_{c_0}} + c_{3|R_c=R_{c_0}} \\ \frac{\partial}{\partial R_c} \left(\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c))) \right)|_{R_c=R_{c_0}} = a'_{1|R_c=R_{c_0}} + b'_{2|R_c=R_{c_0}} + c'_{3|R_c=R_{c_0}} \\ \frac{\partial}{\partial R_c} \left(\text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 R_c}(x_f(R_c)))) \right)|_{R_c=R_{c_0}} = b'_{2|R_c=R_{c_0}} c_{3|R_c=R_{c_0}} + b_{2|R_c=R_{c_0}} c'_{3|R_c=R_{c_0}} \\ - b_{3|R_c=R_{c_0}} c'_{2|R_c=R_{c_0}} - b'_{3|R_c=R_{c_0}} c_{2|R_c=R_{c_0}} + a'_{1|R_c=R_{c_0}} b_{2|R_c=R_{c_0}} + a_{1|R_c=R_{c_0}} b'_{2|R_c=R_{c_0}} \\ - a'_{2|R_c=R_{c_0}} b_{1|R_c=R_{c_0}} - a_{2|R_c=R_{c_0}} b'_{1|R_c=R_{c_0}} + a'_{1|R_c=R_{c_0}} c_{3|R_c=R_{c_0}} + a_{1|R_c=R_{c_0}} c'_{3|R_c=R_{c_0}} \\ - a'_{3|R_c=R_{c_0}} c_{1|R_c=R_{c_0}} - a_{3|R_c=R_{c_0}} c'_{1|R_c=R_{c_0}}. \end{cases}$$

Les dérivées premières de $h_{q_0 R_{c_0}}$ par rapport à Γ_{n-1}^2 ayant déjà été calculées lors de la vérification de la seconde condition, il reste ainsi à calculer les dérivées de $\frac{\partial h_{q_0 R_c}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^2}(x_f(R_c))$, $i = 1, \dots, 3$ par rapport au paramètre R_c (i.e a'_i , b'_i , c'_i , $i = 1, \dots, 3$). Notons alors que pour $i, j = 1, \dots, 3$, $n \geq 1$:

$$(3.38) \quad \frac{\partial}{\partial R_c} \left(\frac{\partial h_{q_0 R_c}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^2}(x_f(R_c)) \right) \Big|_{R_c=R_{c_0}} = \frac{\partial^2 h_{q_0 R_c}^i}{\partial R_c \partial \Gamma_{n-1}^2} \Big|_{R_c=R_{c_0}} (\Gamma^2) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 h_{q_0 R_{c_0}}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} (\Gamma^2) \frac{dx_f^k}{dR_c}(R_{c_0}),$$

où $x_f^k(R_c)$, $k = 1, \dots, 3$ représente la k -ième composante de $x_f(R_c)$.

De plus, pour calculer $x'_f(R_{c_0}) = \frac{dx_f}{dR_c}(R_{c_0})$, reprenons le même raisonnement que celui expliqué au début de la démonstration du théorème 3.2.3. Puisque $Dh_{q_0 R_{c_0}}(\Gamma^2)$ n'a pas 1 comme valeur propre (d'après la deuxième condition), le théorème des fonctions implicites s'applique et permet de résoudre $t(\Gamma_{n-1}^2, R_c) = h_{q_0 R_c}(\Gamma_{n-1}^2) - \Gamma_{n-1}^2 = 0$ en Γ_{n-1}^2 au voisinage de (Γ^2, R_{c_0}) ce qui donne l'existence de $x_f(R_c)$, courbe de points fixes de h_{q_0} pour R_c proche de R_{c_0} et :

$$(3.39) \quad x'_f(R_{c_0}) = \left(Dh_{q_0 R_{c_0}}(\Gamma^2) - I_3 \right)^{-1} \frac{\partial h_{q_0 R_c}}{\partial R_c} \Big|_{R_c=R_{c_0}} (\Gamma^2).$$

Remarque 3.2.7

Pour alléger la rédaction pour l'application du théorème de bifurcation doublement de période, le détail des calculs de $\frac{\partial^2 h_{q_0 R_c}^i}{\partial R_c \partial \Gamma_{n-1}^2}(x_f(R_c))$, $\frac{\partial^2 h_{q_0 R_c}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(x_f(R_c))$ et $\frac{\partial h_{q_0 R_c}}{\partial R_c}(x_f(R_c))$, $i, j, k = 1, \dots, 3$, nécessaires ici pour obtenir la valeur de $\lambda'_1(R_{c_0})$, est donné dans l'annexe B.

Finalement, à partir des calculs de $Dh_{q_0 R_{c_0}}(\Gamma^2)$ donné par (2.59) au paragraphe 2.3.4 (qui permet d'obtenir les valeurs de a_i , b_i , c_i , $i = 1, \dots, 3$ en $R_c = R_{c_0}$), de $x'_f(R_{c_0})$ donné par (3.39), de $\frac{\partial^2 h_{q_0 R_c}^i}{\partial R_c \partial \Gamma_{n-1}^2} \Big|_{R_c=R_{c_0}} (\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, 3$ explicité au paragraphe B.1 de l'annexe B, de $\frac{\partial^2 h_{q_0 R_{c_0}}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} (\Gamma^2)$, $i, j, k = 1, \dots, 3$, explicité au paragraphe B.2 de l'annexe B et de $\frac{\partial h_{q_0 R_c}}{\partial R_c} \Big|_{R_c=R_{c_0}} (\Gamma^2)$ donné au paragraphe B.3 de l'annexe B (qui permettent d'obtenir des valeurs pour a'_i , b'_i , c'_i , $i = 1, \dots, 3$ en $R_c = R_{c_0}$), l'équation (3.37) donne numériquement :

$$(3.40) \quad \lambda'_1(R_{c_0}) = \frac{d\lambda_1}{dR_c}(R_{c_0}) \simeq 16.9072 \neq 0,$$

ce qui vérifie la troisième condition du théorème 3.2.3.

Quatrième condition

Pour vérifier la quatrième et dernière condition du théorème 3.2.3, il faut calculer β donné dans le théorème de bifurcation doublement de période par (3.8). Comme pour la deuxième condition, nous omettrons volontairement dans les expressions qui suivent le paramètre R_c et sa valeur au point de bifurcation R_{c_0} puisqu'il ne joue aucun rôle dans la vérification de cette ultime condition. Pour cela, le calcul des dérivées seconde et troisième de $h_{q_0}^i$, $i = 1, \dots, 3$ est nécessaire. Dans cette partie, nous ne rentrerons pas dans le détail des calculs puisque nous les présentons explicitement dans l'annexe B mais nous donnons la formule générale de ces dérivées en fonction des dérivées seconde et troisième de $G_{q_0}^i$, $G_{q_1}^i$, $i = 1, \dots, 3$. Nous avons au premier ordre, $\forall i, j = 1, \dots, 3$:

$$\frac{\partial h_{q_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial G_{q_1}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2).$$

D'où, au second ordre, nous obtenons $\forall i, j, l = 1, \dots, 3$:

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 h_{q_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2l} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \left(\sum_{r=1}^3 \frac{\partial^2 G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial G_{q_1}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma_{n-1}^2) \right) \frac{\partial G_{q_1}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial^2 G_{q_1}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2l} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) \right). \end{aligned}$$

Et finalement, au troisième ordre, nous avons $\forall i, j, l, p = 1, \dots, 3$:

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 h_{q_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2p} \partial \Gamma_{n-1}^{2l} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) &= \\ &\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \left(\sum_{r=1}^3 \frac{\partial^3 G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1r} \partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial G_{q_1}^r}{\partial \Gamma_{n-1}^{2p}}(\Gamma_{n-1}^2) \right) \frac{\partial G_{q_1}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma_{n-1}^2) \right) \frac{\partial G_{q_1}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) \\ &+ \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial^2 G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial^2 G_{q_1}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2p} \partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma_{n-1}^2) \right) \frac{\partial G_{q_1}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) \\ &+ \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial^2 G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial G_{q_1}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma_{n-1}^2) \right) \frac{\partial^2 G_{q_1}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2p} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) \\ &+ \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial^2 G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial G_{q_1}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2p}}(\Gamma_{n-1}^2) \right) \frac{\partial^2 G_{q_1}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2l} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) \\ &+ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial G_{q_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial^3 G_{q_1}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2p} \partial \Gamma_{n-1}^{2l} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2). \end{aligned}$$

Puis, pour la deuxième condition, nous avons montré que $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$ possède trois valeurs propres distinctes notées λ_i , $i = 1, \dots, 3$. Ainsi, nous choisissons une base de vecteurs propres à droite de $Dh_{q_0}(\Gamma^2)$, $(v^1 \ v^2 \ v^3)$ telle que v^i soit associé à λ_i , $i = 1, \dots, 3$ avec, en particulier, v^1 associé à la valeur propre -1 . Nous avons numériquement :

$$(3.43) \quad v^1 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0.018670 \\ -1.018670 \end{pmatrix}, v^2 \simeq \begin{pmatrix} 1.037479 - 0.297064i \\ 0.811752 - 0.232431i \\ -1.849231 + 0.529494i \end{pmatrix}, v^3 \simeq \begin{pmatrix} 0.870614 - 0.066942i \\ 1.816933 - 0.139705i \\ -0.960593 + 0.073860i \end{pmatrix}.$$

De même, nous prenons comme base duale $\{w^j\}_{j=1,\dots,3}$ de $\{v^j\}_{j=1,\dots,3}$, les vecteurs propres à gauche de la matrice $Dh_{q_0}(\Gamma^2, R_{c_0})$ associés respectivement aux trois valeurs propres λ_i , $i = 1, \dots, 3$ tels que $w^i v^j = 1$ si $i = j$ et $w^i v^j = 0$ sinon. Nous obtenons ainsi numériquement :

$$(3.44) \quad w^1 \simeq \begin{pmatrix} 1.885527 \\ -0.448237 \\ 0.861079 \end{pmatrix}, w^2 \simeq \begin{pmatrix} -1.237960 - 0.354468i \\ -0.049794 - 0.014257i \\ -1.216183 - 0.348232i \end{pmatrix}, w^3 \simeq \begin{pmatrix} 0.575651 + 0.044262i \\ 0.575651 + 0.044262i \\ 0.575651 + 0.044262i \end{pmatrix}.$$

Le calcul de β est alors possible en utilisant les expressions données dans l'annexe B, les équations (3.41), (3.42) ainsi que les valeurs numériques des vecteurs v^i , w^i , $i = 1, \dots, 3$. Nous obtenons alors :

$$(3.45) \quad \beta \simeq 0.7049 \neq 0,$$

ce qui vérifie enfin la quatrième et dernière condition du théorème.

Ces quatre conditions prouvent alors, d'après le théorème doublement de période 3.2.3, qu'il existe pour $R_c \simeq R_{c_0} \simeq 1.5453923$ et les valeurs numériques du tableau 3.1, une bifurcation doublement de période qui met en évidence au point de bifurcation, la perte de stabilité d'un cycle de période 1 stable et l'apparition d'un cycle de période 2 stable.

3.2.6 Application du théorème doublement de période au modèle du convertisseur statique

Plusieurs auteurs (voir [86], [46]) se sont intéressés au problème des bifurcations doublement de période pour cette application électronique. En revanche, souvent, seuls des diagrammes de bifurcation sont venus appuyer la possibilité d'existence de tels phénomènes.

Ici, nous proposons également un diagramme de bifurcation pour mettre graphiquement en évidence le passage d'un cycle de période 1 à un cycle de

période 2 en faisant varier un paramètre. De plus, une de nos principales contributions ici est de démontrer de façon théorique, l'existence de ce type de bifurcation en appliquant, comme nous venons de le faire pour le système du thermostat à résistance d'anticipation, le théorème de bifurcation doublement de période 3.2.3 en dimension 4 [57].

Nous choisissons pour le système du convertisseur statique présenté au paragraphe 2.1.2, les valeurs numériques du tableau 3.2 pour les paramètres fixes du système.

R_1	R_0	R_L	L_1	C_0	C_1	U_{ref}	σ	χ_0	E_0
2	5	80	0.09	3.10^{-6}	2.10^{-5}	2.4	0.1	0.25	200

TAB. 3.2 – Valeurs numériques choisies pour l'application du théorème doublement de période pour le cas du convertisseur statique

La même méthode que celle employée pour le système du thermostat à résistance d'anticipation est appliquée. En effet, l'utilisation d'un algorithme de Newton classique pour résoudre le système (2.30) pour un cycle de période 2 en faisant varier la valeur d'inductance du filtre d'entrée L_0 après chaque convergence, nous permet d'obtenir le diagramme de bifurcation de la figure 3.7.

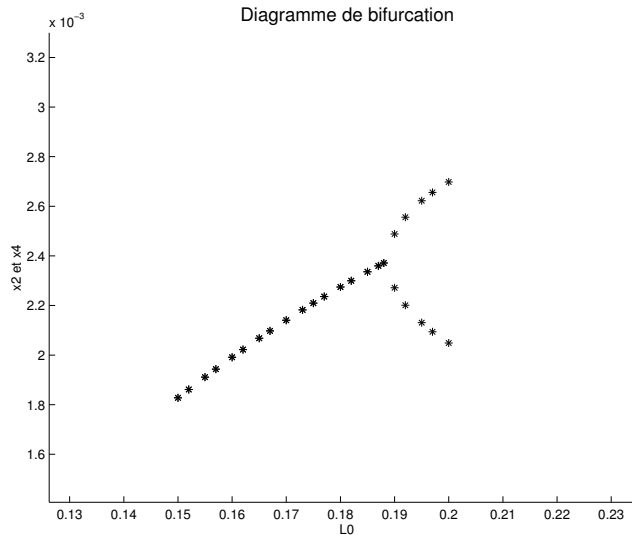


FIG. 3.7 – Diagramme de bifurcation pour le modèle du convertisseur statique en faisant varier le paramètre L_0

C'est à partir de la valeur $L_0 \simeq L_{0_0} \simeq 0.1888073$ que σ^2 et σ^4 , qui représentent

les durées entre une commutation impaire et une commutation paire successives (c'est-à-dire les intervalles de temps pendant lesquels $q = 1$), commencent à prendre des valeurs différentes. La figure 3.8 illustre le fait qu'en choisissant une valeur pour L_0 inférieure à L_{00} , l'algorithme de Newton converge vers un cycle de période 1 alors qu'en choisissant une valeur L_0 supérieure à L_{00} , l'algorithme converge vers un cycle de période 2.

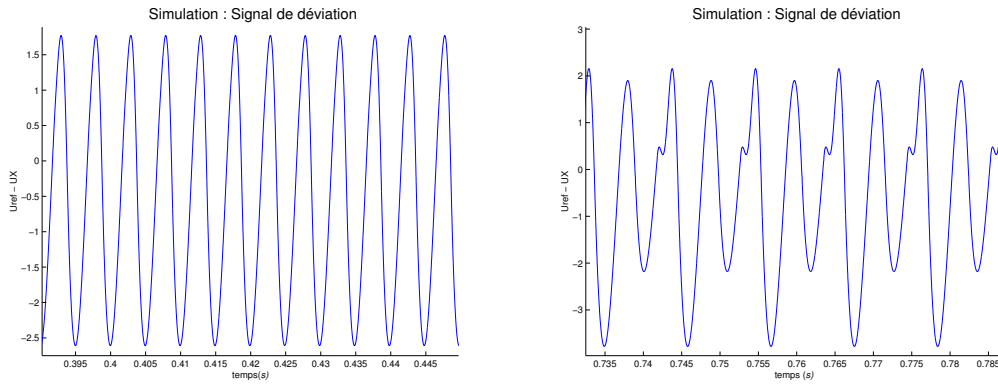


FIG. 3.8 – Différents comportements possibles selon les valeurs de L_0 pour le signal de déviation $U_{ref} - \sigma U_1$: un cycle de période 1 (à gauche) pour $L_0 < 0.1888073$ et un cycle de période 2 (à droite) pour $L_0 > 0.1888073$

Pour l'application du théorème, il faut les valeurs numériques de σ^i et de Γ^i , $i = 1, 2$ pour $L_0 = L_{00}$. Comme pour l'application thermique, les σ^i , $i = 1, 2$ sont calculés à l'aide de l'algorithme de Newton et du système (2.30), et les constantes d'intégration Γ^i , $i = 1, 2$ sont calculées à partir des valeurs de σ^i , $i = 1, 2$ et de l'équation (2.19). Nous avons :

$$\sigma^1 \simeq 0.0030227, \quad \sigma^2 \simeq 0.0023804,$$

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 7.690463 + 1.156466i \\ -54.176424 - 386.422063i \\ 6.198726 + 3.877207i \\ -81.201023 - 55.028682i \end{pmatrix} \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} -2.266522 + 0.741791i \\ -38.350035 + 113.343947i \\ -3.089738 + 0.286197i \\ 13.249970 + 39.465776i \end{pmatrix}.$$

A partir de là, regardons si les quatre conditions du théorème 3.2.3 sont vérifiées pour l'application de Poincaré associée à notre système $h_{q_0 L_0}$ (comme pour l'application thermique, nous vérifierons les conditions pour le cas n pair, le cas n impair donnant les mêmes résultats).

Première condition

Comme pour le cas du thermostat à résistance d'anticipation, la première condition est vérifiée par construction de l'application de Poincaré associée à notre système définie par (2.45).

Deuxième condition

Comme pour l'application thermique, pour cette condition, le paramètre L_0 est fixé à L_{0_0} et ne joue donc aucun rôle dans la vérification. Aussi, l'application de Poincaré peut à nouveau être vue uniquement comme une fonction de Γ_{n-1}^2 . A l'aide des valeurs numériques du tableau 3.2 et de celles de σ^i et de Γ^i , $i = 1, 2$, nous calculons numériquement la matrice jacobienne de h_{q_0} en Γ^2 et L_{0_0} donnée par (2.65) et nous avons :

$$Dh_{q_0}(\Gamma^2) \simeq \begin{pmatrix} -0.3194 - 0.2921i & 0.0048 - 0.0027i & 0.1451 - 0.0027i & 0.0165 - 0.0074i \\ 12.0276 + 6.8908i & -0.3194 + 0.2921i & 8.0084 + 9.1076i & 0.0673 + 1.1643i \\ 0.49640 + 0.1299i & 0.0091 + 0.0046i & -0.3067 - 0.0494i & -0.0126 - 0.0194i \\ 4.2869 - 5.3865i & 0.1065 - 0.0865i & -2.2699 + 3.4955i & -0.3067 + 0.4939i \end{pmatrix}.$$

Cette matrice possède quatre valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \simeq 0.079202$ et $\lambda_4 \simeq -0.331416$. Une de ces valeurs est bien égale à -1 et les autres ont toutes des modules strictement inférieurs à 1, donc la deuxième condition est satisfaite.

Troisième condition

Soit $x_f(L_0)$ la courbe des points fixes de $h_{q_0 L_0}$. La matrice des dérivées premières de $h_{q_0 L_0}$ par rapport à Γ_{n-1}^2 en $x_f(L_0)$ s'écrit alors pour le système du convertisseur statique :

$$\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0)) = \left(\frac{\partial h_{q_0 L_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(x_f(L_0)) \right)_{i,j=1,\dots,4} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Nous adoptons ici les mêmes notations a_i, b_i, c_i, d_i , $i = 1, \dots, 4$ que celles utilisées pour l'application thermique, toujours dans le but d'alléger les écritures. Puis, pour calculer $\lambda_1'(L_{0_0}) = \frac{d\lambda_1}{dL_0}(L_{0_0})$, nous procédons de la même façon que pour calculer $\lambda_1'(R_{c_0})$ de l'application thermique. En effet, nous développons là encore l'équation $\det(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0)) - \lambda I_4) = 0$ et nous la simplifions en utilisant le fait que zéro soit toujours valeur propre de $\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0))$ (voir remarque 2.3.4). En supposant que $\lambda_1(L_0)$ avec, en particulier, $\lambda_1(L_{0_0}) = -1$,

soit valeur propre de $\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0))$, nous obtenons :

$$(3.46) \quad \begin{aligned} & \lambda_1^3(L_0) - \lambda_1^2(L_0)(\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0)))) + \lambda_1(L_0)M_1(L_0) \\ & - \text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0)))) = 0, \end{aligned}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0))) = a_1 + b_2 + c_3 + d_4 \\ M_1(L_0) = a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1 c_3 - a_3 c_1 + a_1 d_4 - a_4 d_1 + b_2 c_3 - b_3 c_2 + b_2 d_4 \\ \quad - b_4 d_2 + c_3 d_4 - c_4 d_3 \\ \text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0)))) = a_1 b_2 c_3 + a_1 b_2 d_4 + a_1 c_3 d_4 + b_2 c_3 d_4 + b_3 c_4 d_2 \\ \quad + b_4 c_2 d_3 + a_2 b_4 d_1 + a_3 b_1 c_2 + a_3 c_4 d_1 + a_4 b_1 d_2 + a_4 c_1 d_3 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_4 d_2 \\ \quad - a_1 c_4 d_3 - a_1 b_3 c_2 - b_2 c_4 d_3 - b_3 c_2 d_4 - b_4 c_3 d_2 - a_3 c_1 d_4 - a_4 b_2 d_1 - a_4 c_3 d_1 \\ \quad - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_2 b_1 d_4. \end{array} \right.$$

La dérivée de (3.46) par rapport au paramètre L_0 donne, en $L_0 = L_{0_0}$, l'expression suivante pour $\lambda_1'(L_{0_0})$:

$$(3.47) \quad \lambda_1'(L_{0_0}) = \frac{\frac{\partial}{\partial L_0} \left(\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0))) + M_1(L_0) + \text{Tr}(\text{com}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_0}(x_f(L_0)))) \right)}{(3 + 2\text{Tr}(\partial_{\Gamma_{n-1}^2} h_{q_0 L_{0_0}}(\Gamma^2)) + M_1(L_{0_0}))} \Big|_{L_0=L_{0_0}}.$$

Ainsi, comme pour l'application thermique, le calcul de $\lambda_1'(L_{0_0})$ ne nécessite que les valeurs de $\frac{\partial h_{q_0 L_{0_0}}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2)$ (*i.e* de $a_{i|L_0=L_{0_0}}$, $b_{i|L_0=L_{0_0}}$, $c_{i|L_0=L_{0_0}}$, $d_{i|L_0=L_{0_0}}$, $i = 1, \dots, 4$) et celles de $\frac{\partial}{\partial L_0} \left(\frac{\partial h_{q_0 L_{0_0}}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(x_f(L_0)) \right) \Big|_{L_0=L_{0_0}}$, $i, j = 1, \dots, 4$ (*i.e* de $a'_{i|L_0=L_{0_0}}$, $b'_{i|L_0=L_{0_0}}$, $c'_{i|L_0=L_{0_0}}$, $d'_{i|L_0=L_{0_0}}$, $i = 1, \dots, 4$).

Les premières sont données par (2.65) au paragraphe 2.3.5. Enfin, les secondes sont calculées à partir des formules explicitées dans l'annexe B et adaptées aux notations du convertisseur statique. Plus précisément, le paragraphe B.1 permet le calcul de $\frac{\partial^2 h_{q_0 L_0}}{\partial L_0 \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \Big|_{L_0=L_{0_0}}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, 4$, le paragraphe B.2 per-

met celui de $\frac{\partial^2 h_{q_0 L_{0_0}}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2)$, $i, j, k = 1, \dots, 4$. Enfin, la valeur de $x'_f(L_{0_0})$ est obtenue en adaptant la formule (3.39) de l'application thermique, à savoir :

$$(3.48) \quad x'_f(L_{0_0}) = \left(D h_{q_0 L_{0_0}}(\Gamma^2) - I_4 \right)^{-1} \frac{\partial h_{q_0 L_0}}{\partial L_0} \Big|_{L_0=L_{0_0}}(\Gamma^2),$$

avec $\frac{\partial h_{q_0 L_0}}{\partial L_0} \Big|_{L_0=L_{0_0}} (\Gamma^2)$ fourni dans l'annexe B au paragraphe B.3.

Ces calculs étant effectués, nous obtenons numériquement :

$$(3.49) \quad \lambda'_1(L_{0_0}) \simeq 376.77 + 48.85i \neq 0,$$

ce qui satisfait donc la troisième condition du théorème 3.2.3.

Quatrième condition

Pour vérifier la dernière condition du théorème 3.2.3, il faut calculer β donné par (3.8). Pour cela, nous utilisons les expressions des dérivées première, seconde et troisième de $h_{q_0 L_0}^i$, $i = 1, \dots, 4$ données respectivement par (2.65), (3.41) et (3.42). Les expressions (3.41) et (3.42) ayant été présentées pour le modèle thermique, nous les adaptons au modèle du convertisseur en sommant, non plus de $k = 1$ à 3 mais de $k = 1$ à 4. De plus, nous utiliserons les résultats obtenus dans l'annexe B en dimension quatre.

Ainsi, il ne reste plus ici qu'à donner une base de vecteurs propres à droite et à gauche de $Dh_{q_0 L_{0_0}} (\Gamma^2)$. Pour la base de vecteurs propres à droite, nous choisissons $(v^1 \ v^2 \ v^3 \ v^4)$ avec v^i associé à λ_i , $i = 1, \dots, 4$ avec, en particulier, $\lambda_1 = -1$. Nous obtenons numériquement :

$$(3.50) \quad \begin{aligned} v^1 &\simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -11.442836 + 48.851737i \\ -0.426519 - 1.349074i \\ -18.867917 - 2.085051i \end{pmatrix}, \quad v^2 \simeq \begin{pmatrix} 0.5166742 - 0.78824872i \\ 17.01036378 + 44.12314420i \\ 0.65810329 - 0.22792681i \\ 9.27738581 + 1.11320087i \end{pmatrix} \\ v^3 &\simeq \begin{pmatrix} 0.01119889 - 0.01608901i \\ 0.52509800 + 0.08316542i \\ 0.01236110 + 0.00503187i \\ 0.12880400 - 0.12438117i \end{pmatrix}, \quad v^4 \simeq \begin{pmatrix} 0.01627771 - 0.18549512i \\ 2.81524460 + 8.90855146i \\ 0.05802415 + 0.01511695i \\ 0.50027614 - 0.62998584i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De même, nous prenons comme base duale $\{w^j\}_{j=1,\dots,4}$ de $\{v^j\}_{j=1,\dots,4}$ les vecteurs propres à gauche de $Dh_{q_0 L_0} (\Gamma^2)$ associés aux valeurs propres λ_i , $i =$

$1, \dots, 4$ avec $w^i v^j = 1$ si $i = j$ et $w^i v^j = 0$ sinon. Nous avons numériquement :

$$(3.51) \quad \begin{aligned} w^1 &\simeq \begin{pmatrix} -6.00780496 + 3.31230746i \\ -0.10257727 - 0.09040793i \\ -0.65155347 - 1.40122597i \\ -0.10158624 + 0.05428312i \end{pmatrix}, & w^2 &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.45187014 + 0.88898172i \\ 0.04698337 - 0.05759709i \end{pmatrix}, \\ w^3 &\simeq \begin{pmatrix} -0.15269597 - 0.97827008i \\ -0.007293202 - 0.01833645i \\ 0.44704526 + 0.83019484i \\ -0.026511494 + 0.06508790i \end{pmatrix}, & w^4 &\simeq \begin{pmatrix} 50.68797524 - 15.97723598i \\ 1.02351719 + 0.27277622i \\ 0.82854165 - 35.60644916i \\ -0.93039774 + 2.48628517i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, nous trouvons comme valeur de β :

$$(3.52) \quad \beta \simeq 0.076 - 0.13i \neq 0,$$

ce qui vérifie alors la dernière condition.

Les quatre conditions du théorème 3.2.3 étant satisfaites, ce dernier s'applique et permet de démontrer l'existence d'un point de bifurcation pour $L_0 = L_{0_0}$. Il confirme ainsi les observations réalisées sur le diagramme de bifurcation de la figure 3.7.

Remarque 3.2.8

Il est parfois difficile de trouver des valeurs numériques des paramètres pour lesquelles il existe une bifurcation de type doublement de période. Par exemple, l'utilisation de simulations numériques en faisant varier certaines valeurs de paramètres et en observant le comportement du système est une possibilité pour trouver une bifurcation de type doublement de période. Cependant, la "méthode" n'est pas garantie et la recherche peut être longue.

Pour se donner plus de chance, au moins deux autres moyens peuvent être employés. Donnons-en le principe en se basant sur l'application du thermostat à résistance d'anticipation :

1. Une méthode graphique avec la variation de deux paramètres (ici, la résistance du convecteur R_c et sa puissance P_c) : nous lançons un algorithme de Newton pour résoudre le système (2.27) d'équations de cycles de période 2, initialisé avec les conditions initiales trouvées par simulation. Puis, nous traçons, dans le plan (P_c, R_c) , en gris foncé les

valeurs de R_c et de P_c pour lesquelles l'algorithme converge vers un cycle de période 1 et en gris clair, celles pour lesquelles l'algorithme de Newton converge vers un cycle de période 2. Nous obtenons ici la figure 3.9.

En prenant les valeurs de R_c et de P_c à la limite d'une zone en gris clair et gris foncé, nous obtenons une approximation pour le passage d'un cycle de période 1 à un cycle de période 2. Ceci peut nous aider dans la recherche de bifurcations doublement de période.

2. Une méthode par résolution d'équations : nous prenons en compte le fait que s'il y a une bifurcation de type doublement de période, alors nous savons que la jacobienne de l'application de Poincaré h_{q_0} possède -1 comme valeur propre. Ainsi, en développant l'expression $\det(\partial_{\Gamma^2} h_{q_0}(\Gamma^2) - zI_3)$, en la simplifiant du fait que 0 est toujours valeur propre (voir au paragraphe 2.3.2) et enfin, en remplaçant z par -1 , nous obtenons une équation à deux inconnues Γ^2 et R_c . Or, comme Γ^2 est fonction de σ^1 et de σ^2 avec (2.19), nous avons une équation à trois inconnues σ^1 , σ^2 et R_c . Pour obtenir un système résoluble, nous ajoutons à cette équation le système (2.25), obtenu au paragraphe 2.2.2 en faisant apparaître R_c comme une variable. Ce système ainsi obtenu de trois équations à trois inconnues ne peut être résolu que numériquement. Pour cela, nous utilisons un algorithme de Broyden. La limite de cette méthode vient du fait que pour que l'algorithme converge, il faut l'initialiser très proche de la solution recherchée. Pour éviter ce problème, il serait intéressant d'abord d'utiliser l'analyse par intervalles et le logiciel *Proj2D* pour localiser les intervalles de solutions possibles.

Une fois le système résolu, il ne resterait plus qu'à appliquer le théorème 3.2.3 en vérifiant les autres conditions.

L'enchaînement répété de bifurcations doublement de période est une des façons pour un système dynamique à transiter vers un régime chaotique [25].

3.3 En route vers le chaos

Il est difficile de donner une définition exacte du terme chaos [10], [84], [38], [70], [53]. Cependant, cet état particulier du système possède des ca-

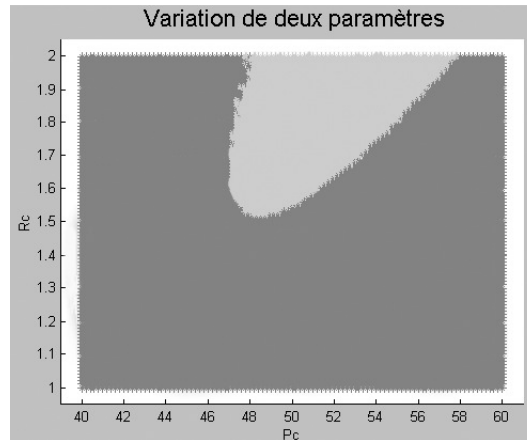


FIG. 3.9 – Variations de deux paramètres et illustration des comportements du système (en gris clair, les cycles de période 2, en gris foncé, ceux de période 1)

ractéristiques bien précises (voir [10], [34], [84], [86]) comme :

- la présence d’un nombre infini d’orbites périodiques instables,
- l’existence de trajectoires qui bougent apparemment aléatoirement entre ces orbites sans jamais être capables de s’installer de façon permanente sur l’une d’entre elles (ergodicité ou transitivité),
- la sensibilité aux conditions initiales.

Les systèmes pouvant présenter, pour un certain jeu de valeurs de paramètres, des mouvements chaotiques sont fréquents et interviennent dans de nombreux domaines [50], [34], comme :

- la météorologie : il est impossible de prévoir le temps à plus de six ou sept jours [72],
- la finance et l’économie avec la bourse [34],
- l’astrophysique du système solaire [54] et l’existence de mouvements chaotiques pour les comètes, les astéroïdes et les planètes,
- la médecine : par exemple, R. Cohen [75], cardiologue et physicien, en réalisant sur ordinateur une simulation des rythmes cardiaques, a découvert que le doublement de période est la clé de l’apparition d’une crise cardiaque. De plus, d’autres études, sur les comportements épileptiques notamment, font intervenir des applications chaotiques dans le but de diminuer le risque de crises,
- la biologie : par exemple, la création de systèmes nerveux artificiels pour

simuler le comportement du cerveau [2].

Le but ici est de montrer que le modèle étudié en dimension trois, avec l'application du thermostat à résistance d'anticipation, possède des caractéristiques de systèmes chaotiques. Ainsi, cela confirmerait qu'une grande complexité peut apparaître à partir de systèmes relativement simples.

Nous étudions dans ce paragraphe l'application thermique en "délaissant" le système du convertisseur statique car la dimension est plus petite pour le thermostat et le modèle est donc plus simple. De plus, pour l'application électronique, l'existence de comportements chaotiques a déjà été mise en évidence par plusieurs auteurs [46], [86].

Étudions alors ici la sensibilité aux conditions initiales du système, de deux façons différentes :

1. à l'aide d'une méthode graphique qui souligne que les variations des conditions initiales conduisent le système à adopter des comportements différents,
2. à l'aide du calcul du plus grand exposant de Lyapunov, qui mesure le taux de convergence ou de divergence de deux trajectoires possédant des conditions initiales très proches. La positivité de cet exposant caractérise la sensibilité aux conditions initiales du système.

3.3.1 Mise en évidence graphique de la sensibilité aux conditions initiales du système

Considérons ici le modèle en dimension trois du thermostat à résistance d'anticipation présenté au paragraphe 2.1.2. À partir du système (2.27), définissant les équations d'un cycle de période 2, nous pouvons émettre deux remarques :

1. Si nous intervertissons les valeurs de σ^1 et de σ^3 d'une part, et celles de σ^2 et de σ^4 d'autre part, le système (2.27) reste inchangé à la valeur près de l'état discret initial q_0 .

De là, reprenons les valeurs numériques du tableau 2.2, choisies pour illustrer l'existence de cycles de période 2 pour l'application thermique au paragraphe 2.2.2. Nous concluons que $\sigma^1 \simeq 146.35631$, $\sigma^2 \simeq 360.38810$, $\sigma^3 \simeq 139.57499$, $\sigma^4 \simeq 563.56122$ représentent aussi une solution du système (2.27). Notons que cette solution décrit, dans le portrait de phases, le même cycle de période 2 stable que la solution proposée au paragraphe 2.2.2.

2. De plus, si maintenant, nous posons $\sigma^1 = \sigma^3$ d'une part, et $\sigma^2 = \sigma^4$ d'autre part, le système (2.27) est réduit à deux équations $K_1 = 0$, $K_4 = 0$ pour deux inconnues σ^1 , σ^2 (puisque K_2 devient la même équation que K_1 et K_3 est réduite à zéro). La résolution de $K_1 = 0$, $K_4 = 0$ donne $\sigma^1 = \sigma^3 \simeq 142.27154$, $\sigma^2 = \sigma^4 \simeq 459.83169$, qui est donc aussi une solution du système (2.27). Notons ici que cette solution décrit un cycle de période 1. L'étude de sa stabilité par les méthodes proposées au paragraphe 2.3, montre que ce cycle de période 1 est instable (par exemple avec la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov, les racines de Δ^1 sont $\lambda_1 \simeq -1.0567$, $\lambda_2 \simeq -0.0472$).

Comme nous l'avons démontré au paragraphe 3.2.5, en gardant les mêmes valeurs numériques que celles du tableau 2.2 et en ne faisant varier que le paramètre R_c , il y a un doublement de période en $R_{c_0} \simeq 1.5453923$, avec du côté droit du plan $R_c = R_{c_0}$, l'existence de cycles de période 2 stables et de cycles de période 1 instables. Les deux remarques précédentes confirment également ce phénomène.

Ainsi, avec les conditions initiales choisies au paragraphe 2.2.2, l'algorithme de Newton converge vers une des solutions du système (2.27) qui décrit le cycle de période 2 stable. Néanmoins, avec d'autres conditions initiales, l'algorithme peut converger vers l'une ou l'autre des autres solutions présentées ci-avant de ce système.

C'est cette sensibilité aux conditions initiales que nous allons à présent mettre en valeur de façon graphique [86], [10]. Pour cela, il est intéressant de localiser toutes les valeurs initiales σ^i , $i = 1, \dots, 4$ pour lesquelles l'algorithme de Newton converge vers un même zéro du système (2.27). Nous utilisons ici le logiciel *Matlab* et nous choisissons de tracer avec la même couleur tous les points initiaux pour lesquels l'algorithme converge vers un même zéro. Pour une question de temps de calcul et de représentation graphique, nous fixons les valeurs initiales de σ^1 et de σ^3 pour ne faire varier que celles de σ^2 et de σ^4 . Nous obtenons ainsi dans le plan (σ^2, σ^4) les figures 3.10 obtenues pour deux valeurs initiales différentes de σ^1 .

Les ensembles gris clair et noir représentent tous les points initiaux pour σ^2 et σ^4 conduisant, au bout de quelques itérations, à la convergence de l'algorithme de Newton vers le cycle de période 2. Notons que nous avons distingué le zéro $\sigma^1 \simeq 139.57499$, $\sigma^2 \simeq 563.56122$, $\sigma^3 \simeq 146.35631$, $\sigma^4 \simeq 360.38810$ (gris clair), du zéro $\sigma^1 \simeq 146.35631$, $\sigma^2 \simeq 360.38810$, $\sigma^3 \simeq 139.57499$, $\sigma^4 \simeq 563.56122$

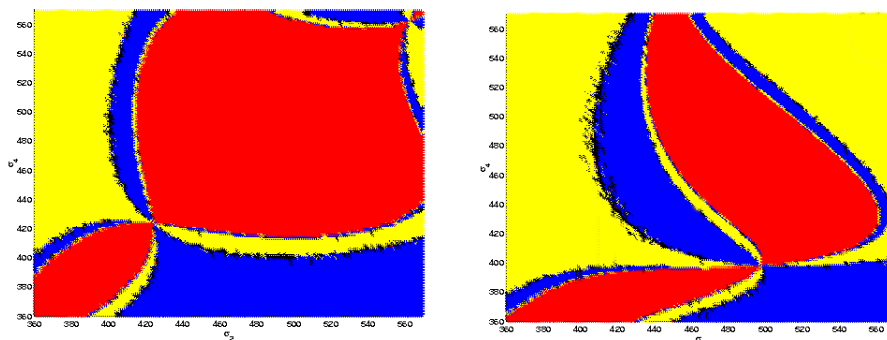


FIG. 3.10 – Illustration de la sensibilité aux conditions initiales pour les valeurs initiales fixes $\sigma^1 = \sigma^3 = 142$ (à gauche) et $\sigma^1 = 130, \sigma^3 = 142$ (à droite)

(noir). Enfin, l'ensemble des points en gris foncé correspond aux valeurs initiales de σ^2 et σ^4 pour lesquelles l'algorithme de Newton converge vers le cycle de période 1. Ces deux figures mettent ainsi en évidence les différents bassins d'attraction et la sensibilité aux conditions initiales du système principalement à la frontière de ces différents bassins, appelée séparatrice.

De plus, à partir des valeurs des durées $\sigma^i, i = 1, \dots, 4$, nous pouvons, à l'aide de (2.19) et de (2.11), calculer les valeurs de cycle pour le cycle de période 1 et pour le cycle de période 2. En choisissant par la suite ces dernières comme conditions initiales pour les trois températures x, y et z , nous obtenons la figure 3.11 avec à gauche, la simulation de la température du convecteur en partant des valeurs de cycle du cycle de période 1 et à droite, celle en partant des valeurs de cycle du cycle de période 2. À gauche, nous remarquons que le système suit le cycle de période 1 jusqu'à un certain temps t puis, à cause de l'instabilité de ce dernier, se replace progressivement sur le cycle de période 2 stable.

3.3.2 Calcul du plus grand exposant de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov mesurent le taux de convergence ou de divergence exponentielle de deux trajectoires initialement très proches l'une de l'autre [10], [46], [40], [84]... Un système de dimension N possède N exposants de Lyapunov et chacun d'entre eux mesure le taux de convergence ou de divergence suivant un des axes du système.

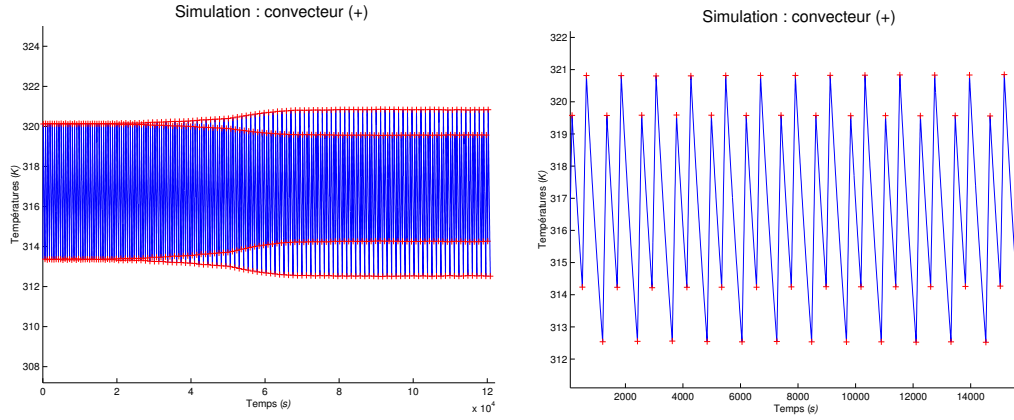


FIG. 3.11 – Simulation de la température du convecteur en partant des valeurs de cycle du cycle de période 1 (à gauche) et en partant des valeurs de cycle du cycle de période 2 (à droite)

Si nous considérons le système de dimension N suivant :

$$(3.53) \quad \dot{X} = f(X),$$

et si nous notons $F(X) = Df(X)$, la jacobienne de la fonction f , alors les N exposants de Lyapunov λ_i , $i = 1, \dots, N$ sont donnés [46] par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln(vp_i) \right),$$

où les vp_i , $i = 1, \dots, N$ correspondent aux valeurs propres de la matrice $e^{F(X)t}$. Le calcul du plus grand exposant de Lyapunov est le plus intéressant ici à effectuer. En effet, une valeur strictement positive pour cette quantité est généralement signe d'existence de chaos [10], [51], [86]...

Au moins trois méthodes existent pour calculer cet exposant : la méthode des séries temporelles utilisant des suites de points obtenues par mesures expérimentales, la méthode de la différence calculant deux trajectoires par intégration numérique et la méthode variationnelle prenant en compte une petite perturbation pour une trajectoire initiale. Dans [46], une comparaison de ces trois méthodes est réalisée et conclut que pour des systèmes présentant des discontinuités, la méthode variationnelle est la plus adaptée. Introduisons ici cette méthode.

Pour cela, appliquons au système (3.53) une petite perturbation qui donne :

$$\frac{d}{dt}(X + \delta X) = f(X) + F(X)\delta X.$$

En considérant (3.53), il vient :

$$(3.54) \quad \frac{d}{dt}(\delta X) = F(X)\delta X.$$

Ceci linéarise $f(X)$ en chaque point le long de la trajectoire de référence $X(t)$. Après un temps T suffisamment long, le plus grand exposant de Lyapunov prend la forme :

$$(3.55) \quad \lambda_{max} \simeq \frac{1}{T} \ln \left(\frac{\|\delta X(T)\|}{\|\delta X(0)\|} \right),$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme 2 pour un vecteur.

La méthode ici consiste à résoudre simultanément les systèmes (3.53) et (3.54) en formant le système augmenté suivant de dimension $2N$:

$$(3.56) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(X) \\ F(X)\delta X \end{pmatrix}.$$

Enfin, de nombreux auteurs ont proposé des algorithmes visant à calculer le plus grand exposant de Lyapunov [27], [40], [73], [83] mais en ne considérant que des systèmes lisses. Dans [51], un algorithme de calcul de cet exposant pour des systèmes dynamiques non linéaires avec des discontinuités est présenté. Il fait intervenir à chaque itération de l'algorithme une condition de transition sur l'état prenant en compte les discontinuités.

C'est donc ici cet algorithme de Müller que nous allons pouvoir appliquer au modèle hybride du thermostat à résistance d'anticipation.

A. Présentation de l'algorithme de Newton

Nous nous appuyons ici sur les travaux [51] repris par [46]. Le principe est d'appliquer une méthode variationnelle au système (3.56) en considérant les discontinuités du système à l'aide d'une condition de transition. C'est cette dernière que nous allons présenter ici.

Pour cela, nous considérons un système dynamique non linéaire avec des discontinuités [31]. Nous supposons que le système subit une discontinuité à l'instant $t = t_1$ et les équations du système peuvent alors être écrites de la façon suivante :

$$(3.57) \quad (t_0 \leq) t < t_1 : \quad \dot{X} = f_1(X), \quad X(t_0) = X_0, \quad f_1 \in \mathcal{C}^1,$$

$$(3.58) \quad t = t_1 : \quad 0 = h(X(t_1)), \quad h \in \mathcal{C}^1,$$

$$(3.59) \quad X(t_1^+) = g(X(t_1^-)), \quad g \in \mathcal{C}^1,$$

$$(3.60) \quad t_1 < t : \quad \dot{X} = f_2(X), \quad X(t_1) = X(t_1^+), \quad f_2 \in \mathcal{C}^1,$$

Les signes $-$ et $+$ indiquent les valeurs respectives juste avant et après l'apparition de la discontinuité. Nous supposons qu'entre deux instants où il y a discontinuité, le système est lisse. La fonction h est appelée fonction indicatrice et définit, à l'aide de (3.58), l'instant où intervient la discontinuité. La condition de transition du système en $t = t_1$ est donnée par la relation (3.59). Le détail de la démarche aboutissant à l'algorithme est exposé dans [51]. Nous ne donnerons ici que la version finale. Soit $H(X) = Dh(X)$ la jacobienne de la fonction h et $G(X) = Dg(X)$, celle de la fonction g . Comme dans [46], l'algorithme de Müller peut être résumé de la façon suivante :

Algorithme de Müller

Le but ici est de résoudre le système (3.56) en considérant les relations (3.57), (3.58), (3.59), (3.60) et donc les discontinuités existantes. Pour cela, il faut :

1. détecter les occurrences des discontinuités à l'aide de la fonction $h(X)$,
2. localiser l'instant t_i précis pour lequel $h(X) = 0$,
3. trouver les valeurs du vecteur d'état X^- et du vecteur de perturbation δX^- en t_i^- ,
4. résoudre l'équation suivante dans le but d'obtenir la valeur de δt :

$$(3.61) \quad H(X^-)[\delta X^- + f_1(X^-)\delta t] = 0,$$

5. calculer δX^+ à partir de :

$$(3.62) \quad \delta X^+ = G(X^-)\delta X^- + [G(X^-)f_1(X^-) - f_2(X^+)].$$

L'application de cet algorithme pour un temps suffisamment long, permet de calculer finalement le plus grand exposant de Lyapunov.

B. Application de l'algorithme de Müller au modèle du thermostat à résistance d'anticipation

Pour utiliser l'algorithme de Müller dans le but de calculer le plus grand exposant de Lyapunov pour l'application thermique, nous choisissons les valeurs numériques du tableau 3.3.

R_{th}	R_c	R_m	Q_{th}	Q_c	Q_p	P_{th}	P_c	θ_e	θ_1	θ_2
10^{-4}	0.01	0.01	5	700	0.02	0.1	1430	280	293	294

TAB. 3.3 – Valeurs numériques choisies pour le calcul du plus grand exposant de Lyapunov pour le modèle thermique

La figure 3.12 présente une simulation des trois températures (à gauche, la température du thermostat et du convecteur, à droite, la température de la pièce) toutes initialisées à 292 K. Il semble ici que la trajectoire se comporte de manière aléatoire.

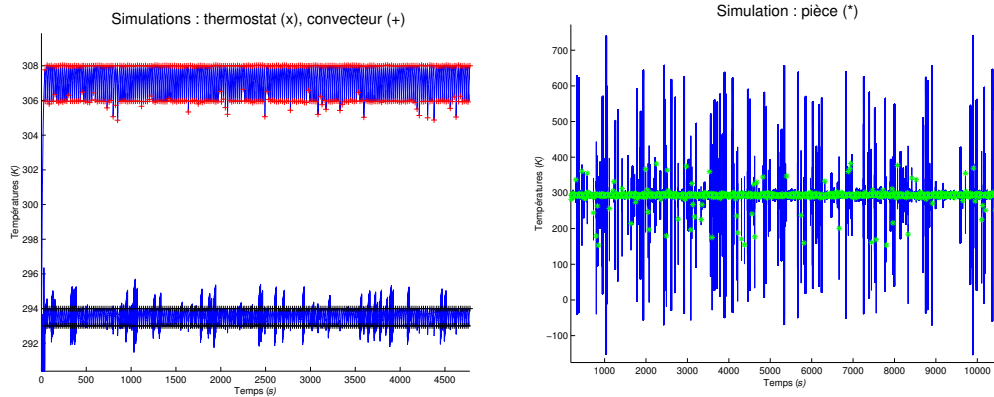


FIG. 3.12 – Simulations des températures du thermostat (la plus petite), du convecteur (à gauche) et de la pièce (à droite)

La figure 3.13 confirme cette observation. En effet, cette dernière représente la superposition des variations de la température du convecteur pour des conditions initiales différentes mais très proches les unes des autres : 292 K pour x , y , z pour la courbe en gras et $292 + 10^{-10}$ pour x , y , z pour la courbe tracée d'un trait fin. Nous remarquons que cette infime différence au début de la simulation entraîne, malgré tout, le système à se comporter de façon très différente.

Remarque 3.3.1

Nous nous limitons ici, pour la superposition des deux courbes, aux variations de la température du convecteur et sur un intervalle de temps restreint. Ceci a été choisi dans le but d'obtenir une meilleure visibilité sur la figure et en prenant soin de zoomer après un temps assez conséquent.

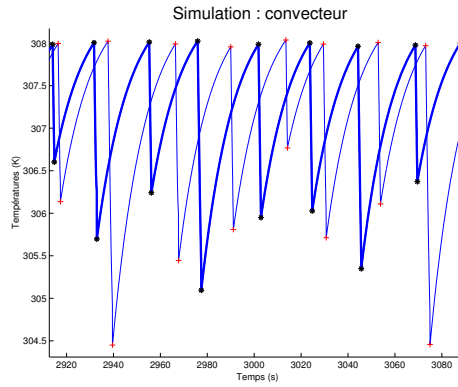


FIG. 3.13 – Simulation des variations de la température du convecteur pour des conditions initiales égales à 292 K pour les trois températures (courbe en gras) et égales à $292 + 10^{-10}$ K (courbe tracée d'un trait fin)

Nous allons à présent pouvoir appliquer l'algorithme de Müller. Le système (3.56) devient pour l'application thermique :

$$(3.63) \quad \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \delta \dot{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax + ay + qp_{th} \\ ex - (b + d + e)y + bz + \theta_e \\ cy - cz + qp_c \\ -a\delta x + a\delta y \\ e\delta x - (b + d + e)\delta y + b\delta z \\ c\delta y - c\delta z \end{pmatrix}.$$

Les discontinuités apparaissent dans ce modèle lors des commutations sur les deux seuils du thermostat. Il y a ici deux seuils donc deux fonctions indicatrices signalant l'occurrence d'une commutation :

$$\begin{cases} h_1(X) = LX - \theta_2, \\ h_2(X) = LX - \theta_1. \end{cases}$$

Les vecteurs g_1 et g_2 correspondants sont donnés par :

$$\begin{cases} g_1(X) = (\theta_2 \ y \ z)^T \\ g_2(X) = (\theta_1 \ y \ z)^T. \end{cases}$$

Nous pouvons alors calculer leurs jacobiniennes et obtenir :

$$\begin{cases} H_1 = (1 \ 0 \ 0), & H_2 = (1 \ 0 \ 0), \\ G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

La résolution de l'équation (3.61) permet de fournir une expression pour δt :

$$(3.64) \quad \begin{cases} \delta t = \frac{-\delta x^-}{-ax+ay+p_{th}} \text{ pour la fonction indicatrice } h_1 \\ \delta t = \frac{-\delta x^-}{-ax+ay} \text{ pour la fonction indicatrice } h_2. \end{cases}$$

À partir de là, l'expression de δX^+ donnée par (3.62) s'écrit :

$$(3.65) \quad \begin{cases} \delta X^+ = \begin{pmatrix} -(-ax+ay)\delta t \\ \delta y^- \\ \delta z^- + p_c \delta t \end{pmatrix} \text{ pour la fonction indicatrice } h_1 \\ \delta X^+ = \begin{pmatrix} -(-ax+ay+p_{th})\delta t \\ \delta y^- \\ \delta z^- - p_c \delta t \end{pmatrix} \text{ pour la fonction indicatrice } h_2. \end{cases}$$

La résolution du système (3.63) se fait à l'aide de *Matlab* en considérant (3.64) et (3.65). La figure 3.14 donne le calcul du plus grand exposant de Lyapunov en fonction du temps. Pour un temps t assez grand, cette quantité tend clairement vers une valeur strictement positive.

La sensibilité aux conditions initiales du système thermique est également ici mise en avant. Tous ces résultats sont donc encourageants dans l'idée qu'il existerait bien des phénomènes chaotiques pour notre modèle relativement simple du thermostat à résistance d'anticipation.

Remarque 3.3.2

Pour vérifier de façon expérimentale la bonne application de l'algorithme de Müller, nous l'appliquons pour un autre jeu de valeurs qui conduisent à

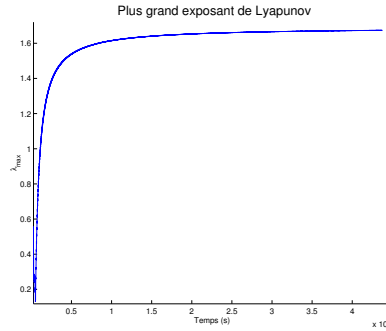


FIG. 3.14 – Comportement du plus grand exposant de Lyapunov pour le modèle du thermostat à résistance d’anticipation et les valeurs du tableau 3.3

un cycle de période 1. Nous savons que le plus grand exposant de Lyapunov pour un cycle limite est égal à zéro [51]. La figure 3.15 confirme que nous trouvons bien pour cet exposant une valeur qui tend vers zéro au fur et à mesure du temps.

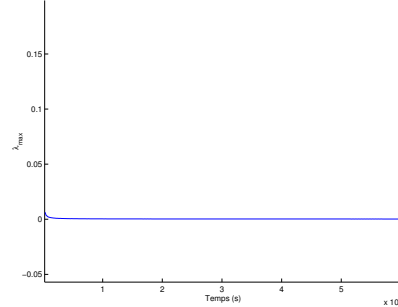


FIG. 3.15 – Plus grand exposant de Lyapunov pour un cycle limite

L’existence de certains phénomènes comme les bifurcations de type doublement de période et la vérification de certaines propriétés caractéristiques des systèmes chaotiques ont été établies dans ce chapitre. Ces travaux laissent ainsi penser qu’il existerait bien du chaos pour ce système de dimension trois, relativement simple, du thermostat à résistance d’anticipation. Pour conclure, il faudrait approfondir notre étude en vérifiant notamment que notre système satisfasse d’autres propriétés comme l’ergodicité et la transitivité. Ceci sera une de nos pistes de recherche pour le futur.

A Annexe : classification des points singuliers dans le plan

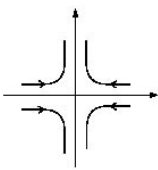
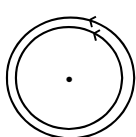
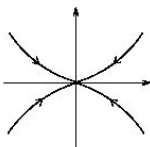
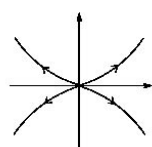
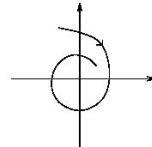
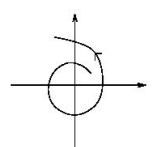
L'étude de la dimension deux va nous permettre de définir les cas et le vocabulaire utilisés pour les systèmes d'équations différentielles non linéaires [23]. Considérons le système de dimension deux suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{X} = AX.$$

Le point $(0, 0)$ est solution et point d'équilibre du système. Nous allons étudier à présent le comportement des trajectoires autour de ce point dans le plan de phases. Pour cela, considérons le polynôme caractéristique de la matrice A :

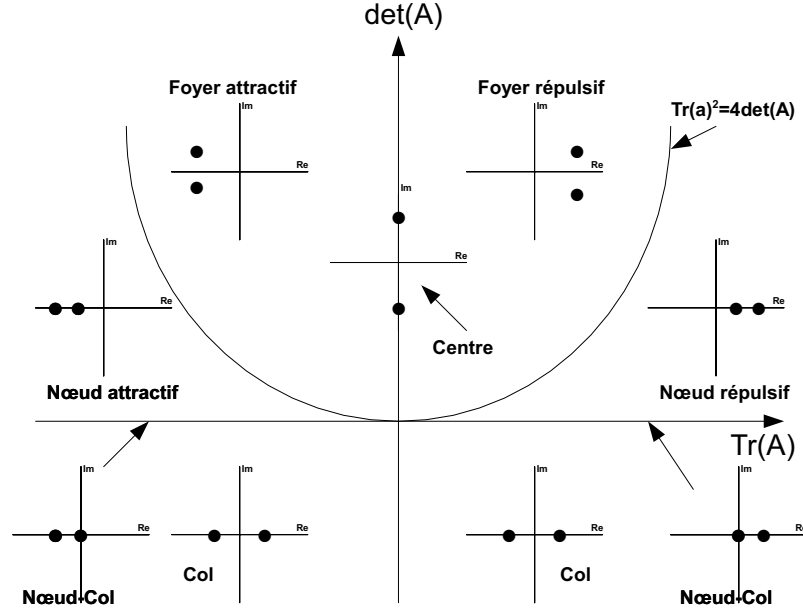
$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A),$$

où $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$ correspondent respectivement à la trace et au déterminant de la matrice A . Son discriminant est $\text{Tr}(A)^2 - 4\det(A)$. Les différentes possibilités sont les suivantes :

Det(A) < 0	Tr(A) ≠ 0 2 v.p. réelles de signes contraires.	
		point col ou point selle
Det(A) > 0	Tr(A) = 0 2 v.p. imaginaires pures	
		centre
Det(A) > 0	Tr(A)² ≥ 4det(A) 2 v.p. de même signe que Tr(A)	
	<div>Tr(A) < 0  Nœud attractif</div> <div>Tr(A) > 0  Nœud répulsif</div>	
Det(A) > 0	Tr(A)² < 4det(A) 2 v.p. complexes de partie réelle Tr(A)/2 et de de	
	<div>Tr(A) < 0  Foyer attractif</div> <div>Tr(A) > 0  Foyer répulsif</div>	
Det(A) = 0	Tr(A) ≠ 0 : Nœud col ou nœud selle	

v.p. : valeur propre

Dans le plan $(\text{Tr}(A), \det(A))$, les différents cas possibles sont représentés par :



B Annexe : détail des calculs pour l'application du théorème de bifurcation doublement de période

Cette annexe a pour but de détailler tous les calculs utilisés dans les paragraphes 3.2.5 et 3.2.6 pour l'application du théorème de bifurcation doublement de période 3.2.3 à l'exemple du thermostat à résistance d'anticipation et à celui du convertisseur statique.

Les deux principales différences pour ces deux applications viennent de la dimension (trois pour le thermostat à résistance d'anticipation et quatre pour le convertisseur statique) et de la notation du paramètre variable (R_c pour le thermostat à résistance d'anticipation et L_0 pour le convertisseur statique). Ainsi, pour éviter les répétitions inutiles, nous donnerons les formules générales pour des systèmes en dimension N , $N \geq 1$, qui possèdent une application de Poincaré $h_{q_n\mu}$, $n \geq 1$ ($h_{q_0\mu}$ quand n est pair et $h_{q_1\mu}$ quand n est impair) avec un point fixe Γ (Γ^2 quand n est pair et Γ^1 quand n est impair) pour la valeur du paramètre variable μ , $\mu = \mu_0$.

Commençons ici par détailler le seul calcul non effectué aux paragraphes 3.2.5 et 3.2.6 pour conclure dans la vérification de la troisième condition du

théorème 3.2.3, c'est-à-dire le calcul de $\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial h_{q_0 \mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(x_f(\mu)) \right) \Big|_{\mu=\mu_0}$, $j = 1, \dots, N$ donné par (3.38).

B.1 Calcul de $\frac{\partial^2 h_{q_0 \mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, N$

Ces dérivées d'ordre deux interviennent dans la vérification de la troisième condition du théorème de bifurcation doublement de période. Nous avons par construction et en faisant apparaître le paramètre variable $\mu : h_{q_0 \mu}^i(\Gamma_{n-1}^2) = G_{q_0 \mu}^i \circ G_{q_1 \mu}(\Gamma_{n-1}^2)$. Alors, en dérivant une première fois cette expression par rapport à Γ_{n-1}^{2j} , $j = 1, \dots, N$, nous obtenons $\forall i, j = 1, \dots, N$:

$$(3.66) \quad \frac{\partial h_{q_0 \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial G_{q_0 \mu}^i}{\partial \Gamma_n^{1k}}(G_{q_1 \mu}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial G_{q_1 \mu}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2),$$

et ainsi, nous avons finalement en dérivant par rapport au paramètre μ et en appliquant en Γ^2 et μ_0 , $\forall i, j = 1, \dots, N$:

$$(3.67) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 h_{q_0 \mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2) &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1k}}(\Gamma^1) \frac{\partial^2 G_{q_1 \mu}^k}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2) \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial^2 G_{q_0 \mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_n^{1k}} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^1) + \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1l} \partial \Gamma_n^{1k}}(\Gamma^1) \frac{\partial G_{q_1 \mu}^l}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2) \right] \frac{\partial G_{q_1 \mu_0}^k}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2). \end{aligned}$$

1. Calculs de $\frac{\partial G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1j}}(\Gamma^1)$ et de $\frac{\partial G_{q_1 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^1)$, $i, j = 1, \dots, N$

Les jacobienues de $G_{q_0 \mu_0}(\Gamma^1)$ et de $G_{q_1 \mu_0}(\Gamma^2)$ ont déjà été calculées au paragraphe 2.3.2 et sont données par (2.58) pour le modèle du thermostat à résistance d'anticipation et par (2.64) pour le modèle du convertisseur statique.

2. Calculs de $\frac{\partial G_{q_0 \mu}^i}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^1)$ et de $\frac{\partial G_{q_1 \mu}^i}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, N$

D'après la relation (2.43) et en faisant apparaître le paramètre variable μ , la fonction $G_{q_n \mu}$, $n \geq 1$, est donnée par :

$$(3.68) \quad G_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}) = g_{q_n \mu}(\psi_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \quad \forall n \geq 1.$$

Ainsi :

$$(3.69) \quad \frac{\partial G_{q_{n\mu}}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1}) = \frac{\partial g_{q_{n\mu}}}{\partial \mu}(\psi_{q_{n\mu}}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) + \frac{\partial g_{q_{n\mu}}}{\partial \sigma_n}(\psi_{q_{n\mu}}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{q_{n\mu}}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1}),$$

ce qui donne plus particulièrement pour $G_{q_{0\mu}}$:

$$(3.70) \quad \left. \frac{\partial G_{q_{0\mu}}}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^1) = \left. \frac{\partial g_{q_{0\mu}}}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0}(\sigma^2, \Gamma^1) + \frac{\partial g_{q_{0\mu_0}}}{\partial \sigma_n^2}(\sigma^2, \Gamma^1) \left. \frac{\partial \psi_{q_{0\mu}}}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^1).$$

La dérivée de $\left. \frac{\partial G_{q_{1\mu}}}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2)$ est déduite directement de l'équation (3.70) en remplaçant Γ^1 par Γ^2 , σ_n^2 par σ_n^1 , σ^2 par σ^1 , $g_{q_{0\mu}}$ par $g_{q_{1\mu}}$ et $\psi_{q_{0\mu}}$ par $\psi_{q_{1\mu}}$. Pour poursuivre les calculs, rappelons que la fonction $\psi_{q_{n\mu}}$, $n \geq 1$, a été construite au paragraphe 2.3.2 en appliquant le théorème des fonctions implicites à l'équation :

$$(3.71) \quad H_n(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = c_t - W(\mu)(e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1} - A_{n-1}^{-1}(\mu) V_{n-1}(\mu)) - f(S_1, S_2, q_{n-1}, q_n) = 0,$$

et que la fonction $g_{q_{n\mu}}$, $n \geq 1$, est donnée par :

$$(3.72) \quad \begin{aligned} \Gamma_n &= g_{q_{n\mu}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = g_{q_{n\mu}}(\psi_{q_{n\mu}}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \\ &= e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1} + A_{n-1}^{-1}(\mu) V_n(\mu) - A_{n-1}^{-1}(\mu) V_{n-1}(\mu). \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons à partir de (3.72) :

$$(3.73) \quad \begin{cases} \frac{\partial g_{q_{n\mu}}}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A_{n-1}(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial g_{q_{n\mu}}}{\partial \mu}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A'_{n-1}(\mu) \sigma_n e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1} + A_n^{-1}(\mu) (V'_n(\mu) - A'_n(\mu) A_n^{-1} V_n(\mu)) \\ \quad - A_{n-1}^{-1}(\mu) (V'_{n-1}(\mu) - A'_{n-1}(\mu) A_{n-1}^{-1}(\mu) V_{n-1}(\mu)), \end{cases}$$

où A' et V' représentent respectivement les dérivées de A et de V par rapport à μ .

De plus, en dérivant l'équation $H_n(\psi_{q_{n\mu}}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}, \mu)$ donnée par (3.71) par rapport à μ , nous avons :

$$(3.74) \quad \frac{\partial H_n}{\partial \mu}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{q_{n\mu}}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1}) = 0,$$

ce qui implique :

$$(3.75) \quad \frac{\partial \psi_{q_{n\mu}}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial H_n}{\partial \mu}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)}{\frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)},$$

avec :

$$(3.76) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_n}{\partial \mu}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -W'(\mu)(e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1} - A_{n-1}^{-1}(\mu) V_{n-1}(\mu)) \\ -W(\mu)(A'_{n-1}(\mu) \sigma_n e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1} + A_{n-1}^{-1}(\mu)(A'_{n-1}(\mu) A_{n-1}^{-1}(\mu) V_{n-1}(\mu) - V'_{n-1}(\mu))) \\ \frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -W(\mu) A_{n-1}(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

Pour l'application du thermostat à résistance d'anticipation, nous nous plaçons dans une base de vecteurs propres de la matrice A . Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + qB + C \\ \xi = LX, \end{cases}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, L = (L_1 \ L_2 \ L_3).$$

Le système (3.72) devient :

$$(3.77) \quad \begin{cases} \frac{\partial g_{q_n R_c}}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A(R_c) e^{\sigma_n A(R_c)} \Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial g_{q_n R_c}}{\partial R_c}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A'(R_c) \sigma_n e^{\sigma_n A(R_c)} \Gamma_{n-1} \\ + \Delta q_n A^{-1}(R_c)(B'(R_c) - A'(R_c) A^{-1}(R_c) B(R_c)). =, \end{cases}$$

où A' , B' correspondent aux dérivées de A et de B par rapport à R_c .

Plus particulièrement, nous avons :

$$(3.78) \quad \begin{cases} \frac{\partial g_{q_0 R_{c_0}}}{\partial \sigma_n^2}(\sigma^2, \Gamma^1) = A(R_{c_0}) e^{\sigma^2 A(R_{c_0})} \Gamma^1 \\ \frac{\partial g_{q_0 R_c}}{\partial R_c} \Big|_{R_c=R_{c_0}}(\sigma^2, \Gamma^1) = A'(R_{c_0}) \sigma^2 e^{\sigma^2 A(R_{c_0})} \Gamma^1 \\ - \Delta q_1 A^{-1}(R_{c_0})(B'(R_{c_0}) - A'(R_{c_0}) A^{-1}(R_{c_0}) B(R_{c_0})). \end{cases}$$

Nous déduisons ces mêmes dérivées pour la fonction $g_{q_1 R_c}$ à partir de (3.78) en remplaçant σ^2 par σ^1 , Γ^1 par Γ^2 , $-\Delta q_1$ par Δq_1 .

De même, le système (3.76) devient :

$$(3.79) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c) = L(R_c) A(R_c) e^{\sigma_n A(R_c)} \Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial H_n}{\partial R_c}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c) = L'(R_c)(e^{\sigma_n A(R_c)} \Gamma_{n-1} - A^{-1}(R_c)(q_{n-1} B(R_c) + C(R_c))) \\ + L(R_c)(A'(R_c) \sigma_n e^{\sigma_n A(R_c)} \Gamma_{n-1} + A^{-1}(R_c) A'(R_c) A^{-1}(R_c)(q_{n-1} B(R_c) + C(R_c))) \\ - L(R_c) A^{-1}(R_c)(q_{n-1} B'(R_c) + C'(R_c)), \end{cases}$$

ce qui implique plus particulièrement :

$$\left. \frac{\partial \psi_{q_0 R_c}}{\partial R_c} \right|_{R_c=R_{c_0}} (\Gamma^1) = - \frac{\frac{\partial H_0}{\partial R_c}(\sigma^2, \Gamma^1, R_{c_0})}{\frac{\partial H_0}{\partial \sigma_n^2}(\sigma^2, \Gamma^1, R_{c_0})},$$

avec :

$$(3.80) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_0}{\partial R_c}(\sigma^2, \Gamma^1, R_{c_0}) = L(R_{c_0})A(R_{c_0})e^{\sigma^2 A(R_{c_0})}\Gamma^1 \\ \frac{\partial H_0}{\partial R_c}(\sigma^2, \Gamma^1, R_{c_0}) = L'(R_{c_0})(e^{\sigma^2 A(R_{c_0})}\Gamma^1 - A^{-1}(R_{c_0})(q_1 B(R_{c_0}) + C(R_{c_0}))) \\ + L(R_{c_0})(A'(R_{c_0})\sigma^2 e^{\sigma^2 A(R_{c_0})}\Gamma^1 + A^{-1}(R_{c_0})A'(R_{c_0})A^{-1}(R_{c_0})(q_1 B(R_{c_0}) + C(R_{c_0}))) \\ - L(R_{c_0})A^{-1}(R_{c_0})(q_1 B'(R_{c_0}) + C'(R_{c_0}))). \end{cases}$$

À partir de là, il ne reste plus qu'à effectuer les calculs de $A' = A'(R_c)$, de $B' = B'(R_c)$, de $C' = C'(R_c)$, et de $L' = L'(R_c)$. Ces dérivées sont données plus précisément par :

$$(3.81) \quad A' = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 & 0 \\ 0 & A'_2 & 0 \\ 0 & 0 & A'_3 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \end{pmatrix}, L' = (L'_1 \ L'_2 \ L'_3).$$

Les expressions littérales des A_i , $i = 1, \dots, 3$ sont très longues à écrire explicitement. C'est pourquoi, pour le calcul de leurs dérivées par rapport au paramètre R_c , nous préférons utiliser le calcul formel à l'aide du logiciel *Maple*. À partir de ces valeurs notamment, nous pouvons ensuite donner les expressions des B'_i , C'_i , L'_i , $i = 1, \dots, 3$.

Pour cela, considérons la matrice de passage $P(R_c)$ suivante :

$$P(R_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{a+A_1}{a} & \frac{a+A_2}{a} & \frac{a+A_3}{a} \\ \frac{c(a+A_1)}{a(c+A_1)} & \frac{c(a+A_2)}{a(c+A_2)} & \frac{c(a+A_3)}{a(c+A_3)} \end{pmatrix}$$

et son inverse donné par :

$$P^{-1}(R_c) = \begin{pmatrix} -\frac{(a+A_2)(a+A_3)(c+A_1)}{(a-c)(A_3-A_1)(A_2-A_1)} & \frac{a(c+A_1)}{(A_3-A_1)(A_2-A_1)} & \frac{a(c+A_3)(c+A_2)(c+A_1)}{c(a-c)(A_3-A_1)(A_2-A_1)} \\ \frac{(a+A_3)(a+A_1)(c+A_2)}{(a-c)(A_3-A_2)(A_2-A_1)} & -\frac{a(c+A_2)}{(A_3-A_2)(A_2-A_1)} & -\frac{a(c+A_3)(c+A_2)(c+A_1)}{c(a-c)(A_3-A_2)(A_2-A_1)} \\ -\frac{(a+A_2)(a+A_1)(c+A_3)}{(a-c)(A_3-A_2)(A_3-A_1)} & \frac{a(c+A_3)}{(A_3-A_2)(A_3-A_1)} & \frac{a(c+A_3)(c+A_2)(c+A_1)}{c(a-c)(A_3-A_2)(A_3-A_1)} \end{pmatrix}.$$

Alors, dans cette base de vecteurs propres de A , nous avons :

$$B(R_c) = \begin{pmatrix} B_1(R_c) \\ B_2(R_c) \\ B_3(R_c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(c+A_1)(ap_c(c+A_2)(c+A_3)-cp_{th}(a+A_2)(a+A_3))}{c(a-c)(A_3-A_1)(A_2-A_1)} \\ \frac{(c+A_2)(cp_{th}(a+A_1)(a+A_3))-ap_c(c+A_1)(c+A_3)}{c(a-c)(A_3-A_2)(A_2-A_1)} \\ \frac{(c+A_3)(ap_c(c+A_1)(c+A_2)-cp_{th}(a+A_1)(a+A_2))}{c(a-c)(A_3-A_2)(A_3-A_1)} \end{pmatrix},$$

$$C(R_c) = \begin{pmatrix} C_1(R_c) \\ C_2(R_c) \\ C_3(R_c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a.d.\theta_e(c+A_1)}{(A_3-A_1)(A_2-A_1)} \\ -\frac{a.d.\theta_e(c+A_2)}{(A_3-A_2)(A_2-A_1)} \\ \frac{a.d.\theta_e(c+A_3)}{(A_3-A_2)(A_3-A_1)} \end{pmatrix},$$

$$L(R_c) = (L_1(R_c) \ L_2(R_c) \ L_3(R_c)) = (1 \ 1 \ 1).$$

Ainsi, en dérivant par rapport au paramètre R_c les expressions pour B , C et L , nous obtenons :

$$(3.82) \quad B'(R_c) = \begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \end{pmatrix},$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} B'_1 = B_1 \left(\frac{c'+A'_1}{c+A_1} - \frac{(c'(a-2c)(A_3-A_1)(A_2-A_1)+c(a-c)[(A'_3-A'_1)(A_2-A_1)+(A_3-A_1)(A'_2-A'_1)])}{c(a-c)(A_3-A_1)(A_2-A_1)} \right) \\ \quad + \frac{(c+A_1)(ap_c[(c'+A'_2)(c+A_3)+(c+A_2)(c'+A'_3)]-c'p_{th}(a+A_2)(a+A_3)-cp_{th}[A'_2(a+A_3)+A'_3(a+A_2)])}{c(a-c)(A_3-A_1)(A_2-A_1)} \\ B'_2 = B_2 \left(\frac{c'+A'_2}{c+A_2} - \frac{(c'(a-2c)(A_3-A_2)(A_2-A_1)+c(a-c)[(A'_3-A'_2)(A_2-A_1)+(A_3-A_2)(A'_2-A'_1)])}{c(a-c)(A_3-A_2)(A_2-A_1)} \right) \\ \quad + \frac{(c+A_2)(-ap_c[(c'+A'_1)(c+A_3)+(c+A_1)(c'+A'_3)]+c'p_{th}(a+A_1)(a+A_3)+cp_{th}[A'_1(a+A_3)+A'_3(a+A_1)])}{c(a-c)(A_3-A_2)(A_2-A_1)} \\ B'_3 = B_3 \left(\frac{c'+A'_3}{c+A_3} - \frac{(c'(a-2c)(A_3-A_2)(A_3-A_1)+c(a-c)[(A'_3-A'_2)(A_3-A_1)+(A_3-A_2)(A'_3-A'_1)])}{c(a-c)(A_3-A_2)(A_3-A_1)} \right) \\ \quad + \frac{(c+A_3)(ap_c[(c'+A'_1)(c+A_2)+(c+A_1)(c'+A'_2)]-c'p_{th}(a+A_1)(a+A_2)-cp_{th}[A'_1(a+A_2)+A'_2(a+A_1)])}{c(a-c)(A_3-A_2)(A_3-A_1)} \end{array} \right.$$

(3.83)

$$C'(R_c) = \begin{pmatrix} \frac{a.d.\theta_e((A_3-A_1)(A_2-A_1)(c'+A'_1)-[(A'_3-A'_1)(A_2-A_1)+(A_3-A_1)(A'_2-A'_1)](c+A_1))}{(A_3-A_1)^2(A_2-A_1)^2} \\ -\frac{a.d.\theta_e((A_3-A_2)(A_2-A_1)(c'+A'_2)-[(A'_3-A'_2)(A_2-A_1)+(A_3-A_2)(A'_2-A'_1)](c+A_2))}{(A_3-A_2)^2(A_2-A_1)^2} \\ \frac{a.d.\theta_e((A_3-A_2)(A_3-A_1)(c'+A'_3)-[(A'_3-A'_2)(A_3-A_1)+(A_3-A_2)(A'_3-A'_1)](c+A_3))}{(A_3-A_2)^2(A_3-A_1)^2} \end{pmatrix},$$

car a, d, θ_e ne dépendent pas de R_c et avec $c' = -\frac{1}{R_c^2 Q_c}$, $Q_c = m_c C_c$ et les A'_i , $i = 1, \dots, 3$ donnés par *Maple*.

Enfin, nous avons :

$$(3.84) \quad L' = (0 \ 0 \ 0).$$

Remarque B.1

Nous avons volontairement omis les R_c entre parenthèses pour alléger les notations.

Finalement, les systèmes (3.78) et (3.80) permettent, à l'aide de (3.70), le calcul de $\frac{\partial G_{q0}}{\partial R_c} \Big|_{R_c=R_{c0}} (\Gamma^1)$ pour l'exemple thermique et donc aussi par symétrie, le calcul de $\frac{\partial G_{q1}}{\partial R_c} \Big|_{R_c=R_{c0}} (\Gamma^2)$.

Remarque B.2

Pour ne pas alourdir cette annexe, nous ne détaillerons les calculs que pour l'exemple du thermostat à résistance d'anticipation, ceux pour l'exemple du convertisseur statique ayant été obtenus exactement de la même manière.

3. Calculs de $\frac{\partial^2 G_{q0\mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_n^{1j}} \Big|_{\mu=\mu_0} (\Gamma^1)$, de $\frac{\partial^2 G_{q1\mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \Big|_{\mu=\mu_0} (\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, N$

Pour ces calculs, reprenons l'expression de $\frac{G_{qn\mu}}{\partial \mu} (\Gamma_{n-1})$ donnée par (3.69) et dérivons-la par Γ_{n-1}^j , $j = 1, \dots, N$. Nous obtenons $\forall i, j = 1, \dots, N$:

$$(3.85) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{qn\mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^j} (\Gamma_{n-1}) &= \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^j} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}) \\ &+ \left[\frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial \mu \partial \sigma_n} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}) + \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial (\sigma_n)^2} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \mu} (\Gamma_{n-1}) \right] \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j} (\Gamma_{n-1}) \\ &+ \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \sigma_n} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \mu} (\Gamma_{n-1}) + \frac{\partial g_{qn\mu}^i}{\partial \sigma_n} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^j} (\Gamma_{n-1}), \end{aligned}$$

ce qui donne plus particulièrement pour $G_{q_0\mu}$ et appliqué en Γ^1 , μ_0 , $\forall i, j = 1, \dots, N$:

$$(3.86) \quad \begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2 G_{q_0\mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_n^{1j}} \right|_{\mu=\mu_0} (\Gamma^1) = \left. \frac{\partial^2 g_{q_0\mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_n^{1j}} \right|_{\mu=\mu_0} (\sigma^2, \Gamma^1) \\ & + \left[\left. \frac{\partial^2 g_{q_0\mu}^i}{\partial \mu \partial \sigma_n^2} \right|_{\mu=\mu_0} (\sigma^2, \Gamma^1) + \frac{\partial^2 g_{q_0\mu_0}^i}{\partial (\sigma_n^2)^2} (\sigma^2, \Gamma^1) \frac{\partial \psi_{q_0\mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0} (\Gamma^1) \right] \frac{\partial \psi_{q_0\mu_0}}{\partial \Gamma_n^{1j}} (\Gamma^1) \\ & + \frac{\partial^2 g_{q_0\mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1j} \partial \sigma_n^2} (\sigma^2, \Gamma^1) \frac{\partial \psi_{q_0\mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0} (\Gamma^1) + \frac{\partial g_{q_0\mu_0}^i}{\partial \sigma_n^2} (\sigma^2, \Gamma^1) \frac{\partial^2 \psi_{q_0\mu}}{\partial \mu \partial \Gamma_n^{1j}} \Big|_{\mu=\mu_0} (\Gamma^1). \end{aligned}$$

De la même façon que précédemment, nous pouvons déduire de (3.86), la valeur de $\left. \frac{\partial^2 G_{q_1\mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \right|_{\mu=\mu_0} (\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, N$ en remplaçant $g_{q_0\mu}$ par $g_{q_1\mu}$, $\psi_{q_0\mu}$ par $\psi_{q_1\mu}$, Γ^1 par Γ^2 , σ^1 par σ^2 ...

Les expressions de $\frac{\partial \psi_{q_n\mu}}{\partial \mu} (\Gamma_{n-1})$ et de $\frac{\partial g_{q_n\mu}}{\partial \sigma_n} (\psi_{q_n\mu} (\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1})$ ayant déjà été données par (3.75) et par la première relation de (3.73), il reste alors à calculer $\frac{\partial^2 g_{q_n\mu}}{\partial \mu \partial \sigma_n} (\psi_{q_n\mu} (\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1})$, $\frac{\partial^2 g_{q_n\mu}}{\partial (\sigma_n)^2} (\psi_{q_n\mu} (\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1})$, $\frac{\partial^2 g_{q_n\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \sigma_n} (\psi_{q_n\mu} (\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1})$, $\frac{\partial \psi_{q_n\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j} (\Gamma_{n-1})$, et $\frac{\partial^2 \psi_{q_n\mu}}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^j} (\Gamma_{n-1})$, $j = 1, \dots, N$.

Déjà, à partir de (3.73), nous avons :

$$(3.87) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 g_{q_n\mu}}{\partial \mu \partial \sigma_n} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = (A'_{n-1}(\mu) + A_{n-1}(\mu) A'_{n-1}(\mu) \sigma_n) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial^2 g_{q_n\mu}}{\partial (\sigma_n)^2} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A_{n-1}^2(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial^2 g_{q_n\mu}}{\partial \Gamma_{n-1} \partial \sigma_n} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A_{n-1}(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)}. \end{cases}$$

De plus, en dérivant l'équation $H_n(\psi_{q_n}(\Gamma_{n-1}, \mu), \Gamma_{n-1}, \mu)$ donnée par (3.71) par rapport à Γ_{n-1} , nous obtenons :

$$(3.88) \quad \frac{\partial H_n}{\partial \Gamma_{n-1}} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{q_n\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}} (\Gamma_{n-1}) = 0,$$

ce qui implique :

$$(3.89) \quad \frac{\partial \psi_{q_n\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}} (\Gamma_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial H_n}{\partial \Gamma_{n-1}} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)}{\frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)},$$

avec :

$$(3.90) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_n}{\partial \Gamma_{n-1}} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -W(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \\ \frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n} (\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -W(\mu) A_{n-1}(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

Enfin, pour le calcul de $\frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1})$, dérivons (3.88) par rapport à μ ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H_n}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial \sigma_n \partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial \mu \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1}) \right) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$(3.91) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}) = & - \frac{\frac{\partial^2 H_n}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial \sigma_n \partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1})}{\frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)} \\ & - \frac{\left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial \mu \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1}) \right) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1})}{\frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)}, \end{aligned}$$

avec :

$$(3.92) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H_n}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -(W'(\mu) + W(\mu)A'_{n-1}(\mu)\sigma_n)e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \\ \frac{\partial^2 H_n}{\partial \sigma_n \partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -W(\mu)A_{n-1}(\mu)e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \\ \frac{\partial^2 H_n}{\partial \mu \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = \\ -(W'(\mu)A_{n-1}(\mu) + W(\mu)A'_{n-1}(\mu) + W(\mu)A_{n-1}(\mu)A'_{n-1}(\mu)\sigma_n)e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)}\Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -W(\mu)A_{n-1}^2(\mu)e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)}\Gamma_{n-1}, \end{cases}$$

et $\frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1})$ et $\frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1})$ respectivement donnés par (3.75) et (3.89).

Pour l'application thermique, le système (3.73) devient :

$$(3.93) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 g_{qnR_c}}{\partial R_c \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = (A'(R_c) + A(R_c)A'(R_c)\sigma_n)e^{\sigma_n A(R_c)}\Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial^2 g_{qnR_c}}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A^2(R_c)e^{\sigma_n A(R_c)}\Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial^2 g_{qnR_c}}{\partial \Gamma_{n-1} \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A(R_c)e^{\sigma_n A(R_c)}. \end{cases}$$

De même, l'expression pour $\frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1})$ donnée par (3.89) devient également :

$$(3.94) \quad \frac{\partial \psi_{qnR_c}}{\partial \Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial H_n}{\partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c)}{\frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c)},$$

avec :

$$(3.95) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_n}{\partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c) = L(R_c)e^{\sigma_n A(R_c)} \\ \frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c) = L(R_c)A(R_c)e^{\sigma_n A(R_c)}\Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

Enfin, le système (3.92) s'adapte au modèle du thermostat à résistance d'anticipation de la façon suivante :

$$(3.96) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H_n}{\partial R_c \partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c) = (L'(R_c) + L(R_c)A'(R_c)\sigma_n)e^{\sigma_n A(R_c)} \\ \frac{\partial^2 H_n}{\partial \sigma_n \partial \Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c) = L(R_c)A(R_c)e^{\sigma_n A(R_c)} \\ \frac{\partial^2 H_n}{\partial R_c \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c) = (L'(R_c)A(R_c) + L(R_c)(A'(R_c) + A(R_c)A'(R_c)\sigma_n))e^{\sigma_n A(R_c)}\Gamma_{n-1} \\ \frac{\partial H_n}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, R_c) = L(R_c)A^2(R_c)e^{\sigma_n A(R_c)}\Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

Ainsi, les systèmes (3.93), (3.95) et (3.96) ainsi que (3.75) et (3.73) permettent, à l'aide de (3.85) le calcul de $\frac{\partial^2 G_{q_n R_c}^i}{\partial R_c \partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1})$, $i, j = 1, \dots, 3$, $n \geq 1$ et donc de $\frac{\partial G_{q_0 R_c}^i}{\partial R_c \partial \Gamma_n^{1j}} \Big|_{R_c=R_{c0}}(\Gamma^1)$ et de $\frac{\partial G_{q_1 R_c}^i}{\partial R_c \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \Big|_{R_c=R_{c0}}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, 3$.

4. Calculs de $\frac{\partial^2 G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1j} \partial \Gamma_n^{1k}}(\Gamma^1)$ et de $\frac{\partial^2 G_{q_1 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma^2)$, $i, j, k = 1, \dots, N$

Pour le calcul des hessiennes de $G_{q_0 \mu}^i$ et de $G_{q_1 \mu}^i$, $i = 1, \dots, N$, dérivons une première fois par rapport à Γ_{n-1}^j , $j = 1, \dots, N$, la fonction $G_{q_n \mu}$ donnée par (3.68). Nous avons ainsi pour $i, j = 1, \dots, N$:

$$(3.97) \quad \begin{aligned} \frac{\partial G_{q_n \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) &= \\ \frac{\partial g_{q_n \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\psi_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) &+ \frac{\partial g_{q_n \mu}^i}{\partial \sigma_n}(\psi_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{q_n \mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}). \end{aligned}$$

Puis, en dérivant (3.97) par Γ_{n-1}^k , $k = 1, \dots, N$, nous obtenons alors pour $i, j, k = 1, \dots, N$:

$$(3.98) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{q_n \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) &= \frac{\partial^2 g_{q_n \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^j}(\psi_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \\ &+ \frac{\partial^2 g_{q_n \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \sigma_n}(\psi_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{q_n \mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \\ &+ \frac{\partial^2 g_{q_n \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \sigma_n}(\psi_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{q_n \mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\ &+ \frac{\partial^2 g_{q_n \mu}^i}{\partial (\sigma_n)^2}(\psi_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{q_n \mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{q_n \mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\ &+ \frac{\partial g_{q_n \mu}^i}{\partial \sigma_n}(\psi_{q_n \mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{q_n \mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}). \end{aligned}$$

Les calculs de $\frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial(\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$ et $\frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial\Gamma_{n-1}^j \partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$, $i, j = 1, \dots, N$, sont respectivement donnés par la deuxième et troisième équations du système (3.87), $\frac{\partial g_{qn\mu}}{\partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$ est donné par la première relation de (3.73) et enfin, $\frac{\psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1})$, $k = 1, \dots, N$, a été calculé par (3.89) et (3.90).

Il reste alors à calculer $\frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial\Gamma_{n-1}^k \partial\Gamma_{n-1}^j}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$ et $\frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^k \partial\Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1})$, $i, j, k = 1, \dots, N$.

Déjà, comme nous savons que $\frac{\partial g_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)}$, nous concluons alors $\forall i, j, k = 1, \dots, N$:

$$\frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial\Gamma_{n-1}^k \partial\Gamma_{n-1}^j}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = 0.$$

Enfin, en dérivant l'équation (3.88) par rapport à Γ_{n-1}^k , $k = 1, \dots, N$, nous obtenons $\forall j, k = 1, \dots, N$:

(3.99)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H_n}{\partial\Gamma_{n-1}^j \partial\Gamma_{n-1}^k}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial\Gamma_{n-1}^j \partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial\Gamma_{n-1}^k \partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial(\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \right) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \frac{\partial H_n}{\partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^j \partial\Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

ce qui nous permet finalement d'écrire $\forall j, k = 1, \dots, N$:

(3.100)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^j \partial\Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) = & - \frac{\frac{\partial^2 H_n}{\partial\Gamma_{n-1}^j \partial\Gamma_{n-1}^k}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial\Gamma_{n-1}^j \partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1})}{\frac{\partial H_n}{\partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)} \\ & - \frac{\left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial\Gamma_{n-1}^k \partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial(\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \right) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1})}{\frac{\partial H_n}{\partial\sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)}, \end{aligned}$$

avec pour $j, k = 1, \dots, N$, $\frac{\partial^2 H_n}{\partial\Gamma_{n-1}^j \partial\Gamma_{n-1}^k}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = 0$, $\frac{\partial^2 H_n}{\partial\sigma_n \partial\Gamma_{n-1}^j}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)$ et $\frac{\partial^2 H_n}{\partial(\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)$ calculés respectivement par la deuxième et la dernière relations du système (3.92). De plus, $\frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial\Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1})$, $j = 1, \dots, N$ est donné par (3.89) et (3.90).

Pour l'exemple du thermostat à résistance d'anticipation, les systèmes (3.93), (3.77), (3.94) et (3.96) nous donnent la possibilité d'obtenir numériquement $\frac{\partial^2 G_{q_0 R_{c_0}}^i}{\partial\Gamma_n^{1j} \partial\Gamma_n^{1k}}(\Gamma^1)$ et par symétrie $\frac{\partial^2 G_{q_1 R_{c_0}}^i}{\partial\Gamma_{n-1}^{2j} \partial\Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma^1)$, $i, j, k = 1, \dots, 3$.

Finalement, les quatre points traités au cours de ce paragraphe B.1 conduisent

aux valeurs de $\frac{\partial^2 h_{q_0 R_{c0}}^i}{\partial R_c \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, 3$ et par symétrie, également aux valeurs de $\frac{\partial^2 h_{q_1 R_{c0}}^i}{\partial R_c \partial \Gamma_n^{1j}}(\Gamma^1)$, $i, j = 1, \dots, 3$.

B.2 Calcul de $\frac{\partial^2 h_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2)$, $i, j, k = 1, \dots, N$

En dérivant $\frac{\partial h_{q_0 \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2)$, $i, j = 1, \dots, N$ donné par (3.66) par rapport à Γ_{n-1}^{2k} , $k = 1, \dots, N$, nous obtenons $\forall i, j, k = 1, \dots, N$:

$$(3.101) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 h_{q_0 \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2) &= \sum_{l=1}^N \frac{\partial G_{q_0 \mu}^i}{\partial \Gamma_n^{1l}}(G_{q_1 \mu}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial^2 G_{q_1 \mu}^l}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma_{n-1}^2) \\ &+ \sum_{l=1}^N \left[\sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 G_{q_0 \mu}^i}{\partial \Gamma_n^{1l} \partial \Gamma_n^{1m}}(G_{q_1 \mu}(\Gamma_{n-1}^2)) \frac{\partial G_{q_1 \mu}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma_{n-1}^2) \right] \frac{\partial G_{q_1 \mu}^l}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma_{n-1}^2). \end{aligned}$$

Les dérivées premières et secondes de $G_{q_0 \mu}$ et de $G_{q_1 \mu}$ étant données par (2.49) et (3.98), le calcul de $\frac{\partial^2 h_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2)$, $i, j, k = 1, \dots, N$ est possible sans calcul supplémentaire.

B.3 Calcul de $\frac{\partial h_{q_0 \mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2)$

La dérivée de $h_{q_0 \mu}(\Gamma_{n-1}^2) = G_{q_0 \mu} \circ G_{q_1 \mu}(\Gamma_{n-1}^2)$ en (Γ^2, μ_0) s'écrit :

$$(3.102) \quad \frac{\partial h_{q_0 \mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2) = \frac{\partial G_{q_0 \mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^1) + DG_{q_0 \mu_0}(\Gamma^1) \frac{\partial G_{q_1 \mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2).$$

Le calcul des dérivées premières de $G_{q_n \mu}$, $n \geq 1$ étant donné par (2.49) et celui de $\frac{\partial G_{q_n \mu}}{\partial \mu}(\Gamma_{n-1})$, $n \geq 1$ par (3.69), nous pouvons alors calculer, pour les modèles du thermostat et du convertisseur, les valeurs de $\frac{\partial h_{q_0 R_c}}{\partial R_c} \Big|_{R_c=R_{c0}}(\Gamma^2)$ et $\frac{\partial h_{q_0 L_0}}{\partial L_0} \Big|_{L_0=L_{00}}(\Gamma^2)$. Ainsi, nous calculons, à l'aide de (3.9), les valeurs de $x'_f(R_{c0})$ pour le système thermique et $x'_f(L_{00})$ pour le système électronique.

Finalement, les valeurs de $\frac{\partial^2 h_{q_0 \mu}^i}{\partial \mu \partial \Gamma_{n-1}^{2j}} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2)$, $i, j = 1, \dots, N$, dans la partie B.1, de $\frac{\partial^2 h_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2)$, $i, j, k = 1, \dots, N$, dans la partie B.2 et enfin de

$\frac{\partial h_{q_0\mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0}(\Gamma^2)$, dans la partie B.3, nous donnent la possibilité de conclure sur la valeur de $\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial h_{q_0\mu}^1}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(x_f(\mu)) \right) \Big|_{\mu=\mu_0}$, utilisée pour la vérification de la troisième condition du théorème 3.2.3.

Poursuivons cette annexe en détaillant les calculs nécessaires pour la vérification de la dernière condition du théorème 3.2.3. Rappelons d'abord :

$$w^1 D^2 h_{q_0\mu_0}(\Gamma^2)(v^1, v^1) = \sum_{i,j,k} \frac{w^{1i} \partial^2 h_{q_0\mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma^2) v^{1j} v^{1k}.$$

Remarque B.3

La valeur du paramètre μ étant fixée à μ_0 pour la vérification de cette condition, la fonction $h_{q_0\mu_0}$ peut à nouveau être considérée uniquement en fonction de Γ_{n-1}^2 . C'est pourquoi nous nous autorisons à reprendre les notations $Dh_{q_0\mu_0}$ pour la jacobienne et $D^2 h_{q_0\mu_0}$ pour la hessienne de cette application.

Les valeurs de $\frac{\partial^2 h_{q_0\mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma^2)$, $i, j, k = 1, \dots, N$, ayant été obtenues dans la partie B.2, et celles de w^1 et de v^1 ayant été calculées pour chaque application aux paragraphes 3.2.5 et 3.2.6, le calcul de $w^1 D^2 h_{q_0\mu_0}(\Gamma^2)(v^1, D^2 h_{q_0\mu_0}(\Gamma^2)(v^1, v^1))$ devient alors possible.

De plus, la jacobienne de $h_{q_0\mu_0}$, $Dh_{q_0\mu_0}(\Gamma^2)$, est donnée par (2.49) et les valeurs de w^i , v^i , $i = 1, \dots, N$ sont données numériquement par (3.43), (3.44) pour le thermostat à résistance d'anticipation, et par (3.50), (3.51) pour le convertisseur statique. Ainsi, nous obtenons le calcul du vecteur U , donné dans le théorème 3.2.3. Ceci permet également de calculer numériquement $w^1 D^2 h_{q_0\mu_0}(\Gamma^2)(v^1, (Dh_{q_0\mu_0}(\Gamma^2) + I_N)U)$.

Pour conclure sur la valeur de β donnée par (3.8), il reste alors à calculer $w^1 D^3 h_{q_0\mu_0}(\Gamma^2)(v^1, v^1, v^1)$.

B.4 Calcul de $w^1 D^3 h_{q_0 \mu_0}(\Gamma^2)(v^1, v^1, v^1)$

Par définition, nous avons :

$$(3.103) \quad w^1 D^3 h_{q_0 \mu_0}(\Gamma^2)(v^1, v^1, v^1) = \sum_{i,j,k,l} \frac{w^{1i} \partial^3 h_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma^2) v^{1j} v^{1k} v^{1l}.$$

Il reste alors à donner une expression des dérivées d'ordre trois de $h_{q_0 \mu_0}^i$, $i = 1, \dots, N$. Pour cela nous dérivons $\frac{\partial^2 h_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma_{n-1}^2)$, $i, j, k = 1, \dots, N$, exprimé par (3.101), par rapport à Γ_{n-1}^{2l} , $l = 1, \dots, N$. Nous obtenons $\forall i, j, k, l = 1, \dots, N$:

$$(3.104) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^3 h_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma^2) = \\ & \sum_{m=1}^N \left(\sum_{p=1}^N \left(\sum_{r=1}^N \frac{\partial^3 G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1p} \partial \Gamma_n^{1r}}(\Gamma^1) \frac{\partial G_{q_1 \mu_0}^r}{\partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma^2) \right) \frac{\partial G_{q_1 \mu_0}^p}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma^2) \right) \frac{\partial G_{q_1 \mu_0}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2) \\ & + \sum_{m=1}^N \left(\sum_{p=1}^N \frac{\partial^2 G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1p}}(\Gamma^1) \frac{\partial^2 G_{q_1 \mu_0}^p}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma^2) \right) \frac{\partial G_{q_1 \mu_0}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j}}(\Gamma^2) \\ & + \sum_{m=1}^N \left(\sum_{p=1}^N \frac{\partial^2 G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1p}}(\Gamma^1) \frac{\partial G_{q_1 \mu_0}^p}{\partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma^2) \right) \frac{\partial^2 G_{q_1 \mu_0}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma^2) \\ & + \sum_{m=1}^N \left(\sum_{p=1}^N \frac{\partial^2 G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m} \partial \Gamma_n^{1p}}(\Gamma^1) \frac{\partial G_{q_1 \mu_0}^p}{\partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma^2) \right) \frac{\partial^2 G_{q_1 \mu_0}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k}}(\Gamma^2) \\ & + \sum_{m=1}^N \frac{\partial G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1m}}(\Gamma^1) \frac{\partial^3 G_{q_1 \mu_0}^m}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma^2). \end{aligned}$$

Les dérivées premières et secondes de $G_{q_0 \mu_0}$ et de $G_{q_1 \mu_0}$ étant données par (2.49) et (3.98), il faut à présent calculer leurs dérivées d'ordre trois.

Calculs de $\frac{\partial^3 G_{q_0 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_n^{1j} \partial \Gamma_n^{1k} \partial \Gamma_n^{1l}}(\Gamma^1)$ et de $\frac{\partial^3 G_{q_1 \mu_0}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^{2j} \partial \Gamma_{n-1}^{2k} \partial \Gamma_{n-1}^{2l}}(\Gamma^2)$, $i, j, k, l = 1, \dots, N$

D'une façon plus générale, calculons $\frac{\partial^3 G_{q_n \mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1})$, $i, j, k, l = 1, \dots, N$, $n \geq 1$. Pour cela, dérivons l'expression (3.98) une nouvelle fois par rapport à

Γ_{n-1}^l , $l = 1, \dots, N$. Nous aboutissons, pour $i, j, k, l = 1, \dots, N$ et $n \geq 1$, à :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 G_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) = \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \sigma_n}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^l \partial \sigma_n}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial (\sigma_n)^2}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \sigma_n}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l \partial \sigma_n}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial (\sigma_n)^2}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \sigma_n}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial (\sigma_n)^2}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial (\sigma_n)^3}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial (\sigma_n)^2}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial (\sigma_n)^2}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \sigma_n}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial (\sigma_n)^2}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\
& + \frac{\partial g_{qn\mu}^i}{\partial \sigma_n}(\psi_{qn\mu}(\Gamma_{n-1}), \Gamma_{n-1}) \frac{\partial^3 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}).
\end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial^2 g_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = 0$, $i, j, k = 1, \dots, N$, nous concluons directement, $\forall i, j, k, l = 1, \dots, N$:

$$(3.105) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = 0, \\ \frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

De plus, les dérivées première et seconde de ψ_{qn} par rapport à Γ_{n-1} sont respectivement données par (3.94) et (3.100). Enfin, nous connaissons également

les expressions de $\frac{\partial g_{qn\mu}^i}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$, $\frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$ et de $\frac{\partial^2 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$, $i, j = 1, \dots, N$ grâce respectivement à la première relation de (3.73), à la deuxième et à la troisième relations du système (3.87).

Il reste alors à calculer $\frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$, $\frac{\partial^3 g_{qn\mu}^i}{\partial (\sigma_n)^3}(\sigma_n, \Gamma_{n-1})$ et $\frac{\partial^3 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1})$, $i, j, k, l = 1, \dots, N$. A partir de (3.87), nous concluons :

$$(3.106) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 g_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1} \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A_{n-1}^2(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)}, \\ \frac{\partial^3 g_{qn\mu}}{\partial (\sigma_n)^3}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A_{n-1}^3(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

Enfin, la dérivation de l'équation (3.99) conduit, $\forall j, k, l = 1, \dots, N$ à :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \frac{\partial^2 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) + \frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \\ & + \frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \frac{\partial^3 H_n}{\partial (\sigma_n)^3}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) + \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \right) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \Gamma_{n-1}^j}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \frac{\partial^2 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) \\ & + \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l}(\Gamma_{n-1}) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k}(\Gamma_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = 0$, $\frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = 0$, $\forall j, k, l = 1, \dots, N$. Il vient alors pour $j, k, l = 1, \dots, N$:

$$(3.107) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l} = - \frac{\left(\frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial (\sigma_n)^2} \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l} \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \sigma_n} \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \Gamma_{n-1}^k} \right)}{\frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}} \\ & + \frac{\left(\frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial (\sigma_n)^2} \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l} + \frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial (\sigma_n)^2} \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2} \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \Gamma_{n-1}^k} + \frac{\partial^3 H_n}{\partial (\sigma_n)^3} \frac{\psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l} \frac{\psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k} \right) \frac{\psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j}}{\frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}} \\ & + \frac{\left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^k \partial \sigma_n} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2} \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^k} \right) \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \Gamma_{n-1}^j} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^l \partial \sigma_n} \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2} \frac{\partial \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^l} \frac{\partial^2 \psi_{qn\mu}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k}}{\frac{\partial H_n}{\partial \sigma_n}}. \end{aligned}$$

Remarque B.4

En omettant $(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)$ pour H_n et (Γ_{n-1}) pour $\psi_{q_{n\mu}}$ dans (3.107), nous avons fait un abus de notation volontaire dans le but d'alléger l'écriture pour $\frac{\partial^3 \psi_{q_{n\mu}}}{\partial \Gamma_{n-1}^j \partial \Gamma_{n-1}^k \partial \Gamma_{n-1}^l}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}), j, k, l = 1, \dots, N, n \geq 1$.

Dans (3.107), les dérivées d'ordres un et deux de $\psi_{q_{n\mu}}, n \geq 1$, par rapport à Γ_{n-1} sont connues (voir (3.94) et (3.100)). De plus, les dérivées $\frac{H_n}{\partial \sigma_n}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)$, $\frac{\partial^2 H_n}{\partial \Gamma_{n-1}^j}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu), j = 1, \dots, N$ et $\frac{\partial^2 H_n}{\partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu)$ sont respectivement données par (3.76) et (3.92). Enfin :

$$(3.108) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1} \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -W(\mu) A_{n-1}^2(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \\ \frac{\partial^3 H_n}{\partial (\sigma_n)^3}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = -W(\mu) A_{n-1}^3(\mu) e^{\sigma_n A_{n-1}(\mu)} \Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

Pour l'application thermique, le système (3.106) devient, pour $n \geq 1$:

$$(3.109) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 g_{q_{nR_c}}}{\partial \Gamma_{n-1} \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A^2(R_c) e^{\sigma_n A(R_c)} \\ \frac{\partial^3 g_{q_{nR_c}}}{\partial (\sigma_n)^3}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}) = A^3(R_c) e^{\sigma_n A(R_c)} \Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

De même, le système (3.108), adapté au thermostat à résistance d'anticipation, s'écrit :

$$(3.110) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 H_n}{\partial \Gamma_{n-1} \partial (\sigma_n)^2}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = L A^2(R_c) e^{\sigma_n A(R_c)} \\ \frac{\partial^3 H_n}{\partial (\sigma_n)^3}(\sigma_n, \Gamma_{n-1}, \mu) = L A^3(R_c) e^{\sigma_n A(R_c)} \Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

Ceci permet alors le calcul final de $w^1 D^3 h_{q_0 \mu_0}(\Gamma^2)(v^1, v^1, v^1)$ pour les deux applications et par là même, le calcul final de β . Ce calcul vérifiera alors la dernière condition du théorème 3.2.3.

Optimisation paramétrique

Ce chapitre est consacré à l'optimisation de certains paramètres du système. En effet, les applications liées au modèle mathématique étudié, comme le thermostat à résistance d'anticipation, se prêtent à la résolution de certains problèmes d'optimisation d'intérêt industriel et notamment d'un point de vue économie d'énergie. Il est ainsi intéressant, par exemple, d'optimiser certains paramètres du système comme la puissance délivrée par la résistance d'anticipation ou les seuils de commutation pour obtenir une température de la pièce la plus proche possible de celle désirée. Pour étendre nos résultats, des problèmes liés à des applications d'autres natures (transport, robotique) sont également traités.

Dans ce chapitre, nous négligerons dans le modèle du thermostat à résistance d'anticipation (paragraphe 2.1.2), le terme $e = \frac{1}{R_{th}m_pC_p}$ qui représente la chaleur que le thermostat dégage dans la pièce à chauffer. Cette quantité est donc petite (environ dix à cent fois plus petite que les valeurs des autres termes a , b , c , d pour l'exemple numérique traité au paragraphe 2.2.2). Plus particulièrement, dans le cas où l'état converge vers un cycle limite de période 1 (ce que nous supposerons tout au long de cette partie), elle ne modifie pas le comportement du système.

En effet, par exemple, reprenons les valeurs numériques du tableau 2.1, choisies pour illustrer les 1-cycles pour le modèle thermique (paragraphe 2.2.2). La figure 4.1 montre que le comportement du système avec le terme e (à gauche) et sans le terme e (à droite) est le même.

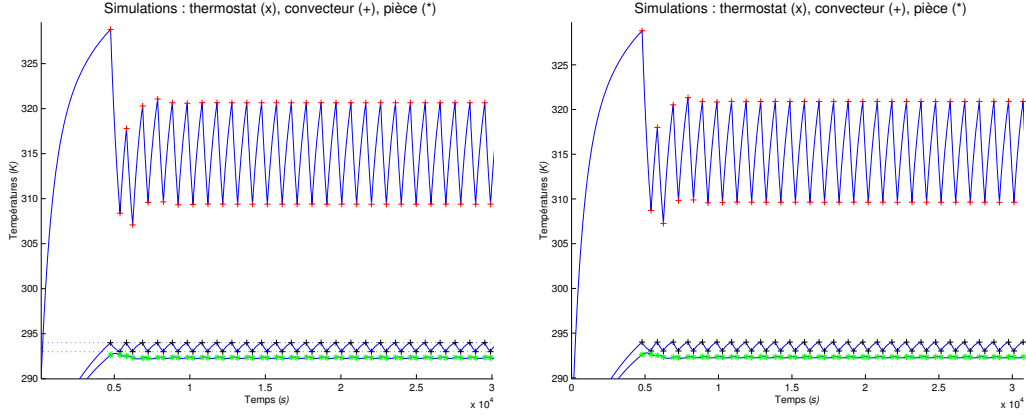


FIG. 4.1 – Variations des températures du convecteur, du thermostat et de la pièce en considérant le terme e (à gauche) et en le négligeant (à droite)

De plus, nous avons obtenu comme valeurs de cycle avec le terme e :

$$X_{inf} \simeq \begin{pmatrix} 293 \\ 292.316 \\ 309.385 \end{pmatrix}, \quad X_{sup} \simeq \begin{pmatrix} 294 \\ 292.359 \\ 320.659 \end{pmatrix},$$

et nous avons sans le terme e :

$$X_{inf} \simeq \begin{pmatrix} 293 \\ 292.306 \\ 309.631 \end{pmatrix}, \quad X_{sup} \simeq \begin{pmatrix} 294 \\ 292.347 \\ 320.904 \end{pmatrix},$$

ce qui confirme que les valeurs de cycle sont très proches les unes des autres. Enfin, ce choix de négliger le terme e nous permet alors de travailler avec des expressions littérales pour les racines de A beaucoup plus simples et ainsi de mener jusqu'au bout des calculs dont nous aurons besoin de façon explicite, sans avoir à utiliser le logiciel *Maple*. En effet, A devient :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -(b+d) & b \\ 0 & c & -c \end{pmatrix} \quad \text{qui possède comme valeurs propres :} \quad \begin{cases} A_1 = -a \\ A_2 = -\frac{1}{2}(b+c+d-\sqrt{\Delta}) \\ A_3 = -\frac{1}{2}(b+c+d+\sqrt{\Delta}), \end{cases}$$

avec $\Delta = (b+c+d)^2 - 4cd$.

Remarque 4.0.5

Nous pouvons ici nous permettre de négliger le terme e car nous nous intéressons au comportement standard du système (quand celui-ci suit un cycle de période 1). En revanche, quand nous étudions des comportements plus complexes, comme nous l'avons fait au chapitre précédent, avec l'apparition de cycles de période 2 notamment, le terme e ne peut plus être négligé car il joue un rôle sur la réponse du système.

En effet, par exemple, prenons les valeurs numériques du tableau suivant.

R_{th}	R_c	R_m	Q_{th}	Q_c	Q_p	P_{th}	P_c	θ_e	θ_1	θ_2
1.5	1.35	0.9	50	732.5	5000	0.8	50	281	293	294

La figure 4.2 donne la simulation des températures du convecteur, du thermostat et de la pièce en considérant le terme e (à gauche) et en le négligeant (à droite).

Nous constatons qu'ici, le système se comporte différemment selon la prise en compte ou non du terme e . En effet, en négligeant le terme e (figure 4.2 à droite), nous obtenons un cycle de période 2 alors qu'en le considérant (figure 4.2 à gauche), nous avons un cycle de période 1.

C'est pourquoi, nous avons pris soin, tout au long de ce chapitre, de vérifier, avec les valeurs numériques choisies, que le fait de négliger le terme e n'a pas de conséquence sur le comportement du système.

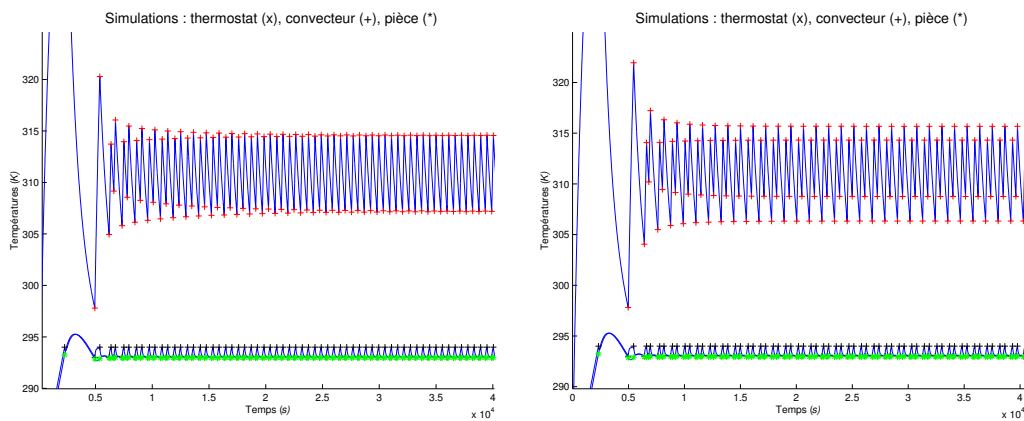


FIG. 4.2 – Variations des températures du convecteur, du thermostat et de la pièce en considérant le terme e (à gauche) et en le négligeant (à droite)

4.1 Optimisation de la valeur de la puissance délivrée par la résistance d'anticipation

4.1.1 Méthode générale et principe

Nous reprenons ici le modèle du thermostat à résistance d'anticipation introduit au paragraphe 2.1.2 en négligeant le terme e . Nous nous plaçons dans le cadre d'une réponse standard pour ce s.d.h., c'est-à-dire, dans le cas où l'état converge vers un cycle limite de période 1.

Le premier problème d'optimisation auquel nous nous intéressons est directement lié à ce système thermique [62]. En effet, nous pouvons considérer que ce dernier a pour entrées les deux seuils de commutation du thermostat et la puissance délivrée par la résistance d'anticipation, et pour sortie, la température de la pièce [18], [19].

Comme nous l'avons précisé au paragraphe 2.1.2, si initialement $q = 1$, du fait de la présence de la puissance P_{th} délivrée par la résistance d'anticipation, le seuil supérieur de commutation θ_2 est atteint par la température du thermostat x avant celle de la pièce y , ce qui fait passer q de la valeur 1 à la valeur 0. Cependant, la température de la pièce y peut éventuellement continuer de croître (du fait de l'inertie thermique du convecteur) pendant un temps s jusqu'à une température *désirée* θ_d puis décroît. Ainsi, θ_d est ici un maximum pour la température y .

De là, la question d'intérêt industriel qui se pose est de savoir comment nous pouvons commander ce maximum θ_d . Puisque la différence entre les deux seuils de commutation $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ est généralement fixée par la technologie [21], deux paramètres de commande sont possibles : le seuil inférieur de commutation θ_1 et la puissance P_{th} délivrée par la résistance d'anticipation. De plus, le seuil θ_1 étant le paramètre que l'utilisateur aura à ajuster pour réguler la température de la pièce, il est pratique de supposer que θ_1 est une fonction connue de θ_d , par exemple $\theta_1 = \theta_d + cste$. Ainsi, considérons P_{th} comme le paramètre de commande du maximum θ_d de y .

En revanche, au voisinage de ce maximum, le seuil supérieur θ_2 venant d'être atteint, la puissance délivrée par la résistance d'anticipation est inactive et donc, le problème est plus complexe. Ainsi, nous préférons par la suite étudier le problème contraire pour lequel P_{th} est active ($q = 1$) c'est-à-dire le problème de trouver la durée s et la puissance P_{th} qui déterminent le minimum θ_d pour

la température de la pièce.

Pour cette application, le système (2.3) est considéré dans une base initiale notée \mathcal{B}_i . Nous faisons donc l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1.1

Le système (2.3) a pour réponse un cycle de période 1 dont la composante y , qui correspond à la température de la pièce, atteint son minimum θ_d aux instants $\tau_n \in]t_{n-1}, t_n[$, définis par l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1. *il existe s^1 , $0 < s^1 < \sigma^1$, tel que les instants τ_n soient donnés pour n impair et $\tau_n = t_{n-1} + s^1$,*
2. *il existe s^2 , $0 < s^2 < \sigma^2$, tel que les instants τ_n soient donnés pour n pair et $\tau_n = t_{n-1} + s^2$.*

Il résulte de la régularité de y sur $]t_{n-1}, t_n[$ que τ_n vérifie les conditions nécessaires suivantes :

$$(4.1) \quad \begin{cases} y(\tau_n) = \theta_d, \\ \dot{y}(\tau_n) = 0. \end{cases}$$

Nous verrons également en (4.23) que (4.1) donne des conditions suffisantes de température minimale pour y sur $]t_{n-1}, t_n[$. Nous nous limitons par la suite au cas n impair. Le cas où n est pair pourra être directement déduit du cas n impair par symétrie des notations.

Commençons par donner une expression de $\dot{y}(t_{n-1} + s^1) = 0$.

Pour simplifier les calculs, nous choisissons une base $\underline{\mathcal{B}}_f$ de \mathbb{R}^3 qui diagonalise la matrice A de (2.4) en négligeant le terme e . Tous les éléments de \mathcal{B}_i écrits dans $\underline{\mathcal{B}}_f$ garderont les mêmes notations mais avec un soulignement en plus. Par exemple, A devient \underline{A} , B devient \underline{B} ... La matrice de passage de \mathcal{B}_i à $\underline{\mathcal{B}}_f$ est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e(c,\delta)}{e(a,\delta)} & \frac{e(c,-\delta)}{e(a,-\delta)} \\ 0 & e(c,\delta) & e(c,-\delta) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où $\delta = \sqrt{\Delta}$ avec $\Delta = (b + c + d)^2 - 4cd = (c - d)^2 + b^2 + 2b(c + d) > 0$, $e(c, \pm\delta) = 1 - \frac{\mu(\pm\delta)}{c}$, $e(a, \pm\delta) = 1 - \frac{\mu(\pm\delta)}{a}$ et $\mu(\delta) = \frac{1}{2}(b + c + d - \delta) > 0$.

Nous pouvons également calculer le déterminant et l'inverse de la matrice P

ce qui donne :

$$\begin{cases} \det(P) = \frac{\delta}{c}, \\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-(1-c/a)}{e(a,\delta)e(a,-\delta)} & \frac{b}{ae(a,\delta)e(a,-\delta)} \\ 0 & \frac{c}{\delta} & -\frac{c}{\delta}e(c,-\delta) \\ 0 & -\frac{c}{\delta} & \frac{c}{\delta}e(c,\delta) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons dans la nouvelle base $\underline{\mathcal{B}}_f$: $\underline{A} = P^{-1}AP$, $\underline{B} = P^{-1}B$, $\underline{C} = P^{-1}C$, $\underline{L} = LP$, $\underline{X} = P^{-1}X$. De plus, si \underline{D} est une matrice diagonale quelconque dans la base $\underline{\mathcal{B}}_f$ notée $\underline{D} = \text{diag}(\underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3)$, alors \underline{D} s'écrit D relativement à la base \mathcal{B}_i , à l'aide de la relation $D = P\underline{D}P^{-1}$, c'est-à-dire :

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} \underline{D}_1 & D_{12} & D_{13} \\ 0 & D_{22} & D_{23} \\ 0 & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}.$$

Pour la suite, seules les expressions de D_{23} et de D_{33} seront utiles. Explicitons-les :

$$(4.3) \quad \begin{cases} D_{23} = -\frac{c}{\delta}e(c,\delta)e(c,-\delta)(\underline{D}_2 - \underline{D}_3) = \frac{b}{\delta}(\underline{D}_2 - \underline{D}_3) \\ D_{33} = -\frac{c}{\delta}(e(c,-\delta)\underline{D}_2 - e(c,\delta)\underline{D}_3). \end{cases}$$

Puis, posons $Y = (0 \ 1 \ 0)$ relativement à la base initiale \mathcal{B}_i . D'après le système (2.4), $\dot{y}(t_{n-1} + s^1) = 0$ est équivalent à :

$$(4.4) \quad YAX(t_{n-1} + s^1) + d\theta_e = 0.$$

À l'aide de (2.15) et de (2.11), l'équation (4.4) devient :

$$(4.5) \quad YA(e^{s^1 A} \Gamma^2 - A^{-1}(q_0 B + C)) + d\theta_e = 0.$$

À partir de là, pour simplifier les notations, posons :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \Sigma^1(\sigma^1, \sigma^2) \triangleq \Delta q_1 (I_3 - e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A})^{-1} (I_3 - e^{\sigma^1 A}) - q_1 I_3 \\ \Sigma^2(\sigma^1, \sigma^2) \triangleq -\Delta q_1 (I_3 - e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A})^{-1} (I_3 - e^{\sigma^2 A}) - q_0 I_3 \\ \Sigma^3(\sigma^1, \sigma^2) = \Sigma^1(\sigma^1, \sigma^2) - \Sigma^2(\sigma^1, \sigma^2) = \Delta q_1 (I_3 - e^{(\sigma^1 + \sigma^2)A})^{-1} (I_3 - e^{\sigma^1 A}) (I_3 - e^{\sigma^2 A}). \end{cases}$$

Ainsi, les équations des systèmes (2.24) et (2.25) s'écrivent, en utilisant (4.6) :

$$(4.7) \quad \begin{cases} J_1(\sigma^1, \sigma^2) \triangleq L\Sigma^1(\sigma^1, \sigma^2)A^{-1}B - LA^{-1}C - q_1\theta_1 - q_0\theta_2 = 0, \\ J_2(\sigma^1, \sigma^2) \triangleq L\Sigma^2(\sigma^1, \sigma^2)A^{-1}B - LA^{-1}C - q_0\theta_1 - q_1\theta_2 = 0, \\ J_3(\sigma^1, \sigma^2) \triangleq L\Sigma^3(\sigma^1, \sigma^2)A^{-1}B + \Delta q_1 \Delta\theta = 0, \end{cases}$$

avec $\Delta q_1 = q_1 - q_0$ et $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Également, avec ces mêmes notations et en utilisant (2.19) adapté au modèle tridimensionnel du thermostat, Γ^1 et Γ^2 s'écrivent :

$$(4.8) \quad \begin{cases} \Gamma^1(\sigma^1, \sigma^2) \triangleq (\Sigma^1(\sigma^1, \sigma^2) + q_1 I_3) A^{-1} B \\ \Gamma^2(\sigma^1, \sigma^2) \triangleq (\Sigma^2(\sigma^1, \sigma^2) + q_0 I_3) A^{-1} B. \end{cases}$$

De là, à l'aide de l'expression de Γ^2 fournie par (4.8) et compte tenu de $YC = d\theta_e$, l'équation (4.5) devient :

$$(4.9) \quad YS^2B = 0,$$

avec :

$$(4.10) \quad S^2 \triangleq (\Sigma^2 + q_0 I_3) e^{s^1 A} - q_0 I_3 = -\Delta q_1 (I_3 - e^{(\sigma^1 + \sigma^2) A})^{-1} (I_3 - e^{\sigma^2 A}) e^{s^1 A} - q_0 I_3.$$

Si nous écrivons la matrice S^2 dans la base $\underline{\mathcal{B}}_f$, alors cette dernière est diagonale et de la forme $\underline{S}^2 \triangleq \text{diag}(\underline{S}_1^2, \underline{S}_2^2, \underline{S}_3^2)$. Ainsi, avec (4.2) et (4.3), nous calculons :

$$(4.11) \quad YS^2B = p_c S_{23}^2 = p_c \frac{b}{\delta} (\underline{S}_2^2 - \underline{S}_3^2),$$

où S_{23}^2 correspond à l'élément situé sur la deuxième ligne et la troisième colonne de S^2 .

Ainsi, (4.9) donne la condition suivante, équivalente à $\dot{y}(t_{n-1} + s^1) = 0$:

$$(4.12) \quad S_{23}^2 = 0, \text{ c'est-à-dire } \underline{S}_2^2 = \underline{S}_3^2.$$

De la même façon, la deuxième condition $y(t_{n-1} + s^1) = \theta_d$, *i.e.* $YX(t_{n-1} + s^1) = \theta_d$, donne, à l'aide des expressions (4.8), (2.11) et (4.10) :

$$(4.13) \quad Y A^{-1} S^2 B - Y A^{-1} C = \theta_d.$$

Notons que dans la base initiale \mathcal{B}_i , l'inverse de la matrice A est donnée par :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & -\frac{1}{d} & -\frac{b}{cd} \\ 0 & -\frac{1}{d} & -\frac{b}{cd} \\ 0 & -\frac{1}{d} & -\frac{(b+d)}{cd} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, avec (4.2) et (4.3), nous concluons :

$$y(t_{n-1} + s^1) = -\left(\frac{1}{d} S_{23}^2 + \frac{b}{cd} S_{33}^2\right) p_c + \theta_e.$$

Avec (4.12), nous déduisons :

$$(4.14) \quad y(t_{n-1} + s^1) = -\frac{b}{cd} p_c \underline{S}_2^2 + \theta_e = \theta_d,$$

ce qui donne finalement :

$$(4.15) \quad \underline{S}_2^2 = \underline{S}_3^2 = -\frac{cd}{bp_c} (\theta_d - \theta_e).$$

De plus, l'expression (4.10) relativement à la base $\underline{\mathcal{B}}_f$, s'écrit :

$$e^{s^1 \underline{A}} = \text{diag}(-as^1, -\mu(\delta)s^1, -\mu(-\delta)s^1) = (\underline{\Sigma}^2 + q_0 I_3)^{-1} (\underline{S}^2 + q_0 I_3).$$

Les deuxième et troisième éléments diagonaux de cette relation entre matrices diagonales donnent deux expressions pour s^1 à partir desquelles nous pouvons déduire les conditions suivantes, équivalentes à (4.15) :

$$(4.16) \quad J_0 \triangleq (\underline{\Sigma}_2^2 + q_0)(\underline{\Sigma}_3^2 + q_0) - \left(-\frac{cd}{bp_c} (\theta_d - \theta_e) + q_0 \right)^2 \left(\frac{\underline{\Sigma}_3^2 + q_0}{\underline{\Sigma}_2^2 + q_0} \right)^{\frac{b+c+d}{\delta}} = 0,$$

$$(4.17) \quad s^1 = -\frac{1}{\mu(\delta)} \ln \left(\left(\frac{1}{\underline{\Sigma}_2^2 + q_0} \right) \left(-\frac{cd}{bp_c} (\theta_d - \theta_e) + q_0 \right) \right).$$

Comme les durées entre les instants de commutation σ^1 et σ^2 sont positives et que la matrice \underline{A} est diagonale avec des valeurs propres strictement négatives, la relation (4.6) montre que $\underline{\Sigma}_2^2 + q_0$ et $\underline{\Sigma}_3^2 + q_0$ appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$. Ainsi, d'après l'équation (4.17), s^1 existe si :

$$(4.18) \quad \theta_d < \theta_e + q_0 p_c \frac{b}{cd}.$$

Posons à présent :

$$E(\delta) = \frac{e(c, -\delta)}{-\delta} \left(\frac{c}{a} \frac{e(c, \delta)}{e(a, \delta)} + \frac{c}{d} e(c, \delta) + \frac{b}{d} \right) = \frac{b}{\delta} \left(\frac{1}{ae(a, \delta)} + \frac{\mu(-\delta)}{cd} \right).$$

Le calcul $\underline{L}\underline{A}^{-1}\underline{C} = \underline{L}\underline{A}^{-1}\underline{C} = -\theta_e$ et la relation $\underline{L}\underline{A}^{-1}\underline{D}\underline{B} = \underline{L}\underline{A}^{-1}\underline{D}\underline{B}$ où nous remplaçons successivement \underline{D} , donné par (4.2), par $\underline{\Sigma}^1$, $\underline{\Sigma}^2$, $\underline{\Sigma}^3$, conduisent pour J_1 , J_2 , J_3 définies par (4.7), aux expressions :

$$(4.19) \quad \begin{cases} J_1 = - \left(p_{th} + \frac{b}{a} \frac{1}{e(a, \delta) e(a, -\delta)} p_c \right) \frac{\underline{\Sigma}_1^1}{a} - p_c (E(\delta) \underline{\Sigma}_2^1 + E(-\delta) \underline{\Sigma}_3^1) - q_1 \theta_1 - q_0 \theta_2 + \theta_e \\ J_2 = - \left(p_{th} + \frac{b}{a} \frac{1}{e(a, \delta) e(a, -\delta)} p_c \right) \frac{\underline{\Sigma}_1^2}{a} - p_c (E(\delta) \underline{\Sigma}_2^2 + E(-\delta) \underline{\Sigma}_3^2) - q_0 \theta_1 - q_1 \theta_2 + \theta_e \\ J_3 = - \left(p_{th} + \frac{b}{a} \frac{1}{e(a, \delta) e(a, -\delta)} p_c \right) \frac{\underline{\Sigma}_1^3}{a} - p_c (E(\delta) \underline{\Sigma}_2^3 + E(-\delta) \underline{\Sigma}_3^3) + \Delta q_1 \Delta \theta. \end{cases}$$

Le calcul de $K_0 = \underline{\Sigma}_1^1 J_2 - \underline{\Sigma}_1^2 J_1$ permet d'éliminer p_{th} et donne :

$$(4.20) \quad K_0 = (\theta_e - q_0\theta_1 - q_1\theta_2)\underline{\Sigma}_1^1 - (\theta_e - q_1\theta_1 - q_0\theta_2)\underline{\Sigma}_1^2 + p_c E(\delta)(\underline{\Sigma}_1^2 \underline{\Sigma}_2^1 - \underline{\Sigma}_1^1 \underline{\Sigma}_2^2) + p_c E(-\delta)(\underline{\Sigma}_1^2 \underline{\Sigma}_3^1 - \underline{\Sigma}_1^1 \underline{\Sigma}_3^2).$$

Enfin, la relation $J_3 = 0$ permet de déduire l'expression suivante pour p_{th} :

$$(4.21) \quad p_{th} = \Delta q_1 \Delta \theta \frac{a}{\underline{\Sigma}_1^3} - p_c \frac{b}{e(a, \delta)e(a, -\delta)} - p_c a E(\delta) \frac{\underline{\Sigma}_2^3}{\underline{\Sigma}_1^3} - p_c a E(-\delta) \frac{\underline{\Sigma}_3^3}{\underline{\Sigma}_1^3}.$$

Le système formé des équations (4.20), (4.21) est équivalent au système $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ donné par (2.25) pour la détermination des équations de cycles de période 1.

Ainsi, la résolution du système $J_0 = 0$ (4.16), $K_0 = 0$ (4.20) permet de calculer les durées σ^1 et σ^2 . Puis, à partir de ces valeurs, nous pouvons calculer les valeurs de s^1 à l'aide de (4.17) sous la condition (4.18) et p_{th} à l'aide de (4.21) pour déduire par la suite $P_{th} = Q_{th} p_{th}$. Tout ceci n'a de sens que si toutes ces valeurs sont positives et si, de plus, $s^1 < \sigma^1$.

Pour renforcer les conditions (4.1), étudions le signe de la dérivée seconde $\ddot{y}(\tau_n)$. Pour cela, restons dans le cas n impair. En considérant le système (2.4), nous avons :

$$\ddot{y}(\tau_n) = Y \ddot{X}(t_{n-1} + s^1) = Y A \dot{X}(t_{n-1} + s^1) = Y A^2 X(t_{n-1} + s^1) + q_0 Y A B + Y A C.$$

Nous savons alors que $Y A = (0 \quad -(b+d) \quad b)$, $Y A B = b p_c$, $Y A C = -(b+d)d\theta_e$, $Y A^2 = (0 \quad (b+d)^2 + bc \quad -b(b+c+d))$. Comme à cet instant, $y(\tau_n) = \theta_d$, nous pouvons écrire :

$$(4.22) \quad \ddot{y}(\tau_n) = ((b+d)^2 + bc)(q_0\theta_1 + q_1\theta_2) - b(b+c+d)z(\tau_n) + q_0 b p_c - (b+d)d\theta_e.$$

Comme, d'après (2.3), nous avons :

$$\dot{y}(\tau_n) = -(b+d)y(\tau_n) + bz(\tau_n) + d\theta_e,$$

nous concluons avec (4.1) :

$$z(\tau_n) = \theta_d + \frac{d}{b}(\theta_d - \theta_e).$$

Ainsi, la relation (4.22) devient après simplifications :

$$(4.23) \quad \ddot{y}(\tau_n) = q_0 p_c b - cd(\theta_d - \theta_e).$$

La condition (4.18) permet de conclure $\ddot{y}(\tau_n) > 0$ et donc que (4.1) donne également des conditions suffisantes de température minimale pour y sur $]t_{n-1}, t_n[$.

Remarque 4.1.2

Les résultats ont tous été obtenus pour n impair. Ceux pour n pair peuvent être déduits de la même façon en gardant les expressions pour K_0 et p_{th} , puis en remplaçant respectivement s^1 , q_0 , q_1 , $\underline{\Sigma}^2$ par s^2 , q_1 , q_0 , $\underline{\Sigma}^1$ dans les expressions (4.16), (4.17) et (4.23) de J_0 , s^1 et $\ddot{y}(\tau_n)$.

4.1.2 Application numérique

Illustrons cette méthode d'optimisation de la puissance P_{th} pour les valeurs numériques des paramètres du tableau 4.1.

R_{th}	R_c	R_m	Q_{th}	Q_c	Q_p	q_0	P_c	θ_e	θ_1	θ_2
2	0.5	0.2	200	300	16600	1	120	283	293	294

TAB. 4.1 – Valeurs numériques choisies pour l'optimisation de la puissance P_{th}

Le but de cette application est de calculer la valeur P_{th} pour laquelle la température de la pièce y a comme minimum fixe θ_d , choisi ici égal à 291 K. Nous vérifions d'abord que cette valeur de θ_d satisfait la condition d'existence de s^1 (4.18) (θ_d est effectivement ici strictement inférieur à $\theta_e + q_0 p_c \frac{b}{cd} = 307$). Puis, nous calculons, à l'aide des méthodes introduites au paragraphe 2.2.2 et des équations (4.16), (4.20), les valeurs de σ^1 et de σ^2 . Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= 83.904625547816, \\ \sigma^2 &= 166.397392972872.\end{aligned}$$

Remarque 4.1.3

Nous prenons soin ici de donner une grande précision pour les valeurs de σ^1 et de σ^2 car ces dernières sont utilisées par la suite pour d'autres calculs.

A partir de ces valeurs et de la relation (4.17), nous pouvons alors calculer la valeur de s^1 et trouver :

$$(4.24) \quad s^1 = 31.9677168890229,$$

qui satisfait bien $s^1 < \sigma^1$. De même, avec (4.21), nous avons :

$$p_{th} = 0.0181849797399928,$$

et ainsi :

$$(4.25) \quad P_{th} = Q_{th} p_{th} = 3.63699594799856.$$

Avec ces valeurs et en considérant les relations (2.19) et (2.11), nous déduisons les valeurs des températures de cycle :

$$X_{inf} \simeq \begin{pmatrix} 293 \\ 291.0177 \\ 301.4975 \end{pmatrix}, \quad X_{sup} \simeq \begin{pmatrix} 294 \\ 291.0384 \\ 322.7106 \end{pmatrix}.$$

Nous choisissons ici d'arrondir à quatre chiffres après la virgule, la précision étant suffisamment significative. Notons aussi que le cycle décrit par ces valeurs est stable (par exemple, avec la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov introduite au paragraphe 2.3.1, Δ^1 a pour racines $\lambda_1 \simeq 0.2467$ et $\lambda_2 \simeq 0.6741$).

De plus, la relation (4.23) donne $\ddot{y}(\tau_n) \simeq 3,2 \cdot 10^{-5}$. De là, θ_d est bien un minimum pour y et n est nécessairement impair (le premier instant pour lequel le minimum θ_d peut éventuellement être atteint, est sur l'intervalle $]t_2, t_3[$).

La figure 4.3 est une simulation de la température de la pièce avec les valeurs du tableau 4.1 et la valeur de P_{th} donnée par (4.25). Les points sur la courbe marquent les valeurs de y aux instants de commutation. Cette dernière est en accord avec les résultats trouvés.

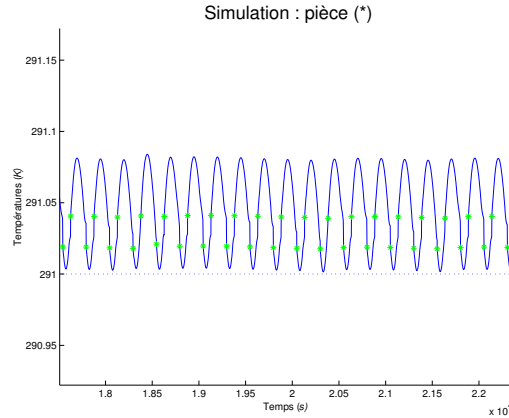


FIG. 4.3 – Variations de la température de la pièce avec P_{th} calculé pour lui donner un minimum $\theta_d = 291$

De plus, par simulation, nous obtenons, après seulement quelques commutations :

$$\sigma^1 \simeq 83.984, \quad \sigma^2 \simeq 166.695,$$

et en zoomant fortement sur chaque courbe, nous avons :

$$X_{inf} \simeq \begin{pmatrix} 293 \\ 291.0044 \\ 301.4574 \end{pmatrix}, \quad X_{sup} \simeq \begin{pmatrix} 294 \\ 291.0815 \\ 322.6560 \end{pmatrix}, \quad s^1 \simeq 31.$$

Toutes ces valeurs sont relativement proches de celles obtenues par le calcul. En conclusion, cette méthode est satisfaisante car il y a une bonne harmonie entre la méthode théorique (et les résultats calculés à partir de celle-ci) et la simulation (et les valeurs numériques obtenues avec cette dernière).

Remarque 4.1.4

Nous ne pouvons pas ici comparer nos résultats avec ceux obtenus dans [18], [19] puisque leurs données numériques de départ ne satisfont pas la condition (4.1).

Il reste à considérer le cas où les instants τ_n auxquels y atteint son minimum θ_d sont des instants de commutation *i.e* $\tau_n = t_{n-1}$ avec n toujours pair ou n toujours impair. Supposons par exemple n impair. La considération de s^1 et de (4.12) qui définit s^1 n'ont alors pu lieu d'être. La relation $y(t_{n-1}) = \theta_d$ sous la forme (4.14) est conservée. Il apparaît que p_{th} n'intervient pas dans cette expression. Ainsi, dans ce cas, p_{th} n'est pas un paramètre de commande pour $y(\tau_n) = \theta_d$ et le problème posé n'a pas de sens.

4.2 Optimisation de cycles limites

Le deuxième problème d'optimisation que nous allons résoudre ici [59], s'inspire d'un résultat assez récent de commande optimale des surfaces de commutation d'un s.d.h. proposé dans [16]. Il s'agit ici d'étendre ce résultat et de proposer une méthode d'optimisation du "design" des cycles limites. Plus précisément, nous montrons comment une composante de l'état du système obéissant à un phénomène d'hystérésis peut être choisie pour qu'une autre composante du système approche au mieux des valeurs limites désirées.

Tout ceci est, comme dans 4.1, directement lié à l'application du thermostat à résistance d'anticipation introduite au paragraphe 2.1.2. Là encore, nous nous plaçons dans le cadre d'une réponse standard pour ce s.d.h., c'est-à-dire dans le cas où l'état converge vers un cycle de période 1 et nous négligeons le terme e présent dans la matrice A .

4.2.1 Présentation et résolution du problème

Le problème considéré est le suivant : les seuils θ_1, θ_2 de commutation du thermostat n'étant plus fixés *a priori* (et donc leur écart également), comment les choisir pour qu'aux instants de commutation, la température de la pièce soit la plus proche possible des températures θ_l (seuil inférieur), θ_u (seuil supérieur) désirées ?

De plus, nous imposons la contrainte suivante, nécessaire sur le plan technologique :

$$(4.26) \quad \theta_2 - \theta_1 \geq \delta,$$

où δ est une constante positive non nulle.

Le critère à minimiser par rapport à θ_1 et θ_2 , pour résoudre ce problème, est alors le suivant :

$$(4.27) \quad J(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2K} \sum_{n=2K+1}^{4K} (y_n - \beta_n)^2, \text{ avec } \beta_n = q_n \theta_l + q_{n-1} \theta_u,$$

et où $y_n = y(t_n)$ correspond à la température de la pièce au temps de commutation t_n . Notons que l'entier K est choisi suffisamment grand pour que les valeurs de y_n soient considérées proches de celles du cycle limite. Si par exemple, $q_0 = 1$, c'est-à-dire, si initialement nous chauffons, le critère J devient plus précisément :

$$J = \frac{1}{2K} \sum_{n=K+1}^{2K} ((y_{2n} - \theta_l)^2 + (y_{2n-1} - \theta_u)^2).$$

De plus, la surface de commutation peut être exprimée de la façon suivante :

$$g_n(X) = LX - \alpha_n, \text{ avec } \alpha_n = q_n \theta_1 + q_{n-1} \theta_2.$$

En posant $X_n = X(t_n)$, nous avons donc $g_n(X_n) = 0$. Maintenant, si nous supposons $t_{n-1}, q_{n-1}, X_{n-1} = X(t_{n-1})$ donnés, l'état X_n est fonction de l'instant t_n , qui est lui-même fonction du paramètre α_n . Nous avons alors, en regardant J comme une fonction des $\alpha_n, n \geq 1$:

$$(4.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial g_n}{\partial X} \frac{dX_n}{dt_n} \frac{dt_n}{d\alpha_n} + \frac{\partial g_n}{\partial \alpha_n} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial J}{\partial X_n} \frac{dX_n}{dt_n} \frac{dt_n}{d\alpha_n}, \end{cases}$$

autrement dit :

$$(4.29) \quad \begin{cases} L(AX_n + q_n B + C) \frac{dt_n}{d\alpha_n} - 1 = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_n} = (0 \frac{(y_n - \beta_n)}{K} 0)(AX_n + q_n B + C) \frac{dt_n}{d\alpha_n}. \end{cases}$$

De plus, admettons que la trajectoire $X(t)$ ne soit jamais tangente à la surface $g_n(X) = 0$, *i.e.* $\frac{\partial g_n}{\partial X} \frac{dX_n}{dt_n} = L(AX_n + q_n B + C) \neq 0$. En posant : $Y = (0 \ 1 \ 0)$, nous pouvons ainsi déduire :

$$(4.30) \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha_n} = \frac{1}{K}(y_n - \beta_n) \frac{Y(AX_n + q_n B + C)}{L(AX_n + q_n B + C)}.$$

Comme $dJ = \sum_{n=2K+1}^{4K} \frac{\partial J}{\partial \alpha_n} d\alpha_n$, $d\alpha_n = q_n d\theta_1 + q_{n-1} d\theta_2$ et en tenant compte que $q_n = q_{n-2} = q_0$ ou q_1 , avec $(q_0, q_1) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$, nous trouvons finalement pour le gradient du critère :

$$(4.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \theta_1} = q_0 \frac{1}{K} \sum_{n=K+1}^{2K} (y_{2n} - \theta_l) \frac{Y(AX_{2n} + q_0 B + C)}{L(AX_{2n} + q_0 B + C)} \\ \quad + q_1 \frac{1}{K} \sum_{n=K+1}^{2K} (y_{2n-1} - \theta_l) \frac{Y(AX_{2n-1} + q_1 B + C)}{L(AX_{2n-1} + q_1 B + C)}, \\ \frac{\partial J}{\partial \theta_2} = q_1 \frac{1}{K} \sum_{n=K+1}^{2K} (y_{2n} - \theta_u) \frac{Y(AX_{2n} + q_0 B + C)}{L(AX_{2n} + q_0 B + C)} \\ \quad + q_0 \frac{1}{K} \sum_{n=K+1}^{2K} (y_{2n-1} - \theta_u) \frac{Y(AX_{2n-1} + q_1 B + C)}{L(AX_{2n-1} + q_1 B + C)}. \end{cases}$$

Ces résultats sont obtenus en supposant que l'instant t_n de la n -ième commutation existe et soit fini et sous l'hypothèse $L(AX_n + q_n B + C) \neq 0$ pour les indices n concernés.

À partir du gradient du critère (4.31), nous pouvons appliquer une méthode de descente [55] pour déterminer une solution optimale des valeurs des seuils θ_1 et θ_2 , sous la contrainte linéaire (4.26).

4.2.2 Application numérique

Pour l'application au modèle du thermostat à résistance d'anticipation, nous choisissons les valeurs des paramètres du tableau 4.2.

R_{th}	R_c	R_m	Q_{th}	Q_c	Q_p	P_{th}	P_c	θ_e
1	0.5	0.19	1000	860	7104.2	1	150	273

TAB. 4.2 – Valeurs numériques choisies pour l'optimisation des cycles limites pour l'application du thermostat à résistance d'anticipation

De plus, nous prenons comme valeurs initiales pour les variables d'état $X_0 = (290 \ 290 \ 290)^T$ et nous initialisons les deux seuils avec $\theta_1 = 291.5$ K et $\theta_2 = 292$ K. La figure 4.4 correspond à la simulation des variations de la température du thermostat (courbe en gras) et de la température de la pièce (courbe tracée d'un trait fin) pour ces valeurs numériques. Notons que les signes + et * marquent respectivement les valeurs de la température du thermostat et de celle de la pièce aux instants de commutation.

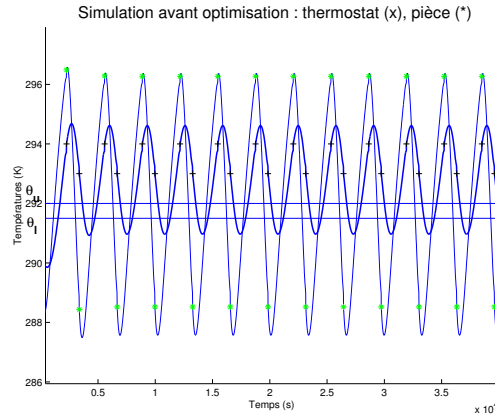


FIG. 4.4 – Variations de la température du thermostat (en gras) et de la pièce pour les valeurs numériques du tableau 4.2, $\theta_1 = 291.5$ K, $\theta_2 = 292$ K avant optimisation

De plus, nous choisissons $\theta_l = 291.5$, $\theta_u = 292$ ainsi qu'une valeur de K égale à 10 et nous imposons la contrainte linéaire $\delta = \theta_2 - \theta_1 = 0.1$.

À partir de là, l'emploi de la fonction *fmincon* de *Matlab* avec pour valeurs initiales $(\theta_1, \theta_2) = (291.5, 292)$, aboutit, au bout de quatorze itérations, à la sortie de la boucle d'optimisation. Nous obtenons ainsi la figure 4.5 et les valeurs optimales suivantes :

$$\begin{cases} (\theta_1, \theta_2) = (292.7954, 292.8954), \\ J = 2.1708, \\ \left(\frac{\partial J}{\partial \theta_1}, \frac{\partial J}{\partial \theta_2} \right) = (-3.6921, 3.3243). \end{cases}$$

La comparaison des figures 4.4 et 4.5 permet de visualiser le résultat d'optimisation. De plus, la simulation avant optimisation donnait comme valeurs pour la température de la pièce aux instants de commutation $y(t_{2k+1}) = 296.2736$

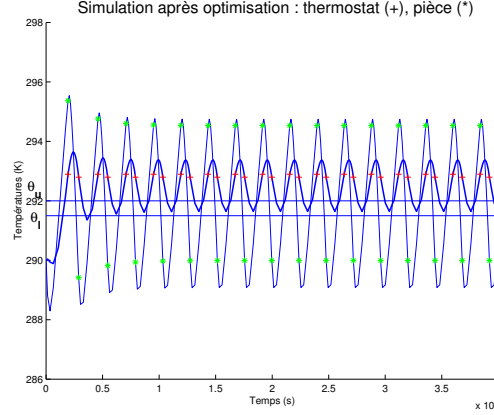


FIG. 4.5 – Variations de la température du thermostat (en gras) et de la pièce après optimisation pour $\theta_l = 291.5$ K et $\theta_u = 292$ K

K, $y(t_{2k}) = 288.5243$ K, $k \geq 1$. Après optimisation, nous avons $y(t_{2k+1}) = 294.5316$ K, $y(t_{2k}) = 289.9918$ K, $k \geq 1$, ce qui met en évidence que l'algorithme d'optimisation nous a permis d'obtenir une température de la pièce, aux instants de commutation, plus proche des valeurs $\theta_l = 291.5$ K et $\theta_u = 292$ K désirées.

Nous remarquons également ici que la valeur optimale trouvée rend la contrainte linéaire $\theta_1 + \delta = \theta_2$ active ce qui semble intuitif du fait de l'importance de l'amplitude des variations de la température de la pièce au regard de la différence entre θ_2 et θ_1 qui est seulement de 0.5 K (voir figure 4.4) pour ces valeurs de θ_l et de θ_u .

En revanche, un autre choix de θ_l et de θ_u peut conduire à une conclusion différente. Par exemple, si nous voulons que la température de la pièce, aux instants de commutation pairs, se rapproche du mieux possible de la valeur $\theta_l = 288$ K, et aux instants de commutations impairs, de la valeur $\theta_u = 296$ K, alors l'algorithme d'optimisation fournit après treize itérations la figure 4.6 et les valeurs optimales suivantes :

$$\begin{cases} (\theta_1, \theta_2) = (292.5243, 293.5530), \\ J = 3.10^{-3}, \\ \left(\frac{\partial J}{\partial \theta_1}, \frac{\partial J}{\partial \theta_2} \right) = (1.46.10^{-6}, 2.33.10^{-8}). \end{cases}$$

Dans ce cas, les valeurs de la température de la pièce aux différents instants de

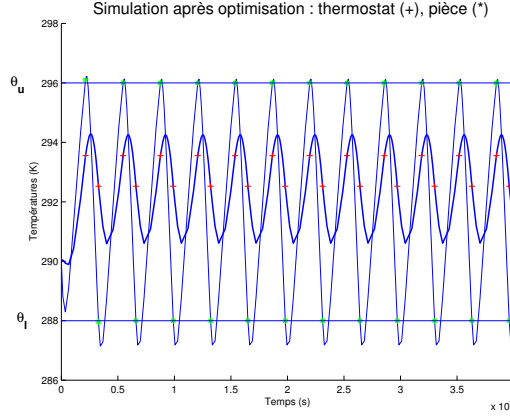


FIG. 4.6 – Variations de la température du thermostat (en gras) et de la pièce après optimisation pour $\theta_l = 288$ K et $\theta_u = 296$ K

commutation, atteignent bien les valeurs désirées θ_l et θ_u . De plus, la contrainte $\theta_1 + \delta = \theta_2$ n'est pas active pour la valeur optimale (θ_1, θ_2) trouvée.

4.2.3 Conclusion

Pour l'application numérique, les valeurs choisies sont d'un réalisme limité. En effet, comme nous l'avons mis en avant au paragraphe 2.1.2, les variations de la température de la pièce sont en réalité d'une amplitude inférieure à celle du thermostat du fait de la présence de la résistance d'anticipation. Cependant, ce choix a été fait dans un but illustratif et pour une meilleure visibilité des contraintes sur les figures.

Il est intéressant de comparer ce résultat d'optimisation avec celui du paragraphe 4.1 précédent. On voit sur les figures 4.5 et 4.6 que les températures de la pièce minimisées aux instants de commutation inférieurs ne sont effectivement pas les températures minimales de cycle. C'est ce que nous avons appelé effet d'inertie thermique.

L'idée d'optimiser un critère par rapport à des surfaces de commutation paramétrées pour un s.d.h. vient du résultat proposé dans [16]. Toutefois, leurs auteurs considèrent un critère différent du nôtre, de la forme :

$$J = \int_0^T \mathcal{L}(X) dt.$$

Le calcul du gradient, sensiblement plus complexe que celui que nous avons

présenté ici, passe par la résolution d'un système adjoint. L'application considérée pour illustrer leur résultat est d'ordre académique.

Sans chercher la plus grande généralité, nous avons développé nos calculs sur l'exemple du thermostat à résistance d'anticipation, d'intérêt industriel, et pour lequel nous disposons de quelques éléments d'analyse qualitative (réponse standard de type cycle limite de période 1), cruciaux pour guider le choix du critère à optimiser. Une présentation plus globale gagnerait à intégrer les résultats de [16]. Par exemple, pour notre application thermique, il serait intéressant de prendre en compte le critère suivant :

$$(4.32) \quad J(\theta_m) = \frac{1}{T} \int_T^{2T} (y - y_d)^2 dt,$$

où y_d représente la température moyenne désirée pour la pièce, T est un instant choisi, $\theta_m = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ avec un écart $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 > 0$ fixé. Toutefois, la minimisation de ce critère d'une seule variable θ_m n'en fait pas un exemple représentatif de la théorie développée. Ce serait par contre le cas d'un critère combinant les expressions (4.27) et (4.32). C'est ce que nous avons considéré dans une étude de synthèse ultérieure [42], [58] et c'est ce qui sera présenté dans la partie suivante.

4.3 Commande optimale appliquée à l'optimisation des surfaces de commutation fixes ou mobiles d'un s.d.h.

En se basant sur [17], nous retrouvons par une méthode différente et généralisons les résultats proposés dans [16] pour l'optimisation des surfaces de commutation d'un s.d.h. [42].

La méthode que nous employons ici utilise le calcul variationnel avec un critère augmenté. Nos résultats sont plus généraux que ceux obtenus dans [16], puisqu'ils prennent en compte la mobilité des surfaces de commutation et les termes spécifiques aux instants de commutation dans le critère.

Cependant, contrairement à [16] où la démonstration est donnée dans un cadre rigoureux et se rapproche dans l'esprit de celle du principe du maximum établi par [56], nous ne donnons pas, pas plus que dans [17], de conditions précises de régularité du problème pour la validité des résultats trouvés (voir le paragraphe 4.3.6 pour une illustration de cette limitation). Une approche

proposée dans [44] pourrait alors être mieux adaptée. C'est ce que nous pourrions étudier dans un prochain travail.

Nous allons donc, dans un premier temps, poser le problème et introduire les notations dont nous aurons besoin par la suite. Puis, nous rappellerons le calcul des variations dans le cas sans commutation [17]. Enfin, nous traiterons le cas général en faisant intervenir des commutations et en présentant une détermination originale des expressions connues du Hamiltonien et des sauts de l'état adjoint. Ceci fournira une méthode pour le calcul du gradient du critère et un algorithme de plus forte descente pourra être alors appliqué pour résoudre le problème. Trois applications viendront, à la fin, illustrer ces résultats théoriques [58].

4.3.1 Présentation du problème d'optimisation

Soient $t_0, x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ un instant et un état initiaux donnés. Soit t_1, \dots, t_N, t_{N+1} une suite croissante d'instants dont le processus de détermination sera donné plus loin, spécialement par l'hypothèse 4.3.1 ci-après. Le s.d.h. considéré subit des commutations telles que, pour $i = 1, \dots, N+1$, l'état $x_i = x(t_i)$ appartient à une surface mobile, paramétrée par $a_i \in \mathbb{R}^{r_i}$, d'équation :

$$(4.33) \quad \psi_i(x_i, t_i, a_i) = 0,$$

avec ψ_i de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans \mathbb{R} .

De plus, l'instant t_{N+1} correspond à l'instant final et ψ_{N+1} , à la contrainte finale. Pour déterminer un élément à l'instant final, nous utiliserons soit l'indice $N+1$, soit l'indice F . Par exemple, $t_{N+1} = t_F$, $\psi_{N+1} = \psi_F$, $a_{N+1} = a_F \dots$. Notons également que sur l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, N+1$, l'état $x(t)$ satisfait le système différentiel :

$$(4.34) \quad \dot{x} = f_i(x, t),$$

avec $f_i, i = 1, \dots, N+1$ de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans \mathbb{R}^n . Puis, faisons les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.3.1

Pour $i = 1, \dots, N+1$, si les paramètres a_1, \dots, a_{i-1} sont fixés alors t_i est le plus petit instant $t, t > t_{i-1}$ tel que $\dot{x}(t) = f_i(x(t), t)$ et $\psi_i(x(t), t, a_i) = 0$. Ceci définit t_i comme une fonction de a_1, \dots, a_i . De plus, nous supposons

qu'une telle suite t_1, \dots, t_{N+1} existe pour tout $(N+1)$ -uplet (a_1, \dots, a_{N+1}) appartenant à un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{r_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{r_{N+1}}$.

Hypothèse 4.3.2

Pour $i = 1, \dots, N+1$, si les paramètres a_1, \dots, a_{i-1} sont fixés alors t_i , vu comme une fonction partielle de a_i , est de classe \mathcal{C}^1 et obtenu par application du théorème des fonctions implicites aux contraintes $\dot{x}(t_i) = f_i(x(t_i), t_i)$, $\psi_i(x(t_i), t_i, a_i) = 0$. La différentielle de ψ_i donne :

$$0 = d\psi_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} dt_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial a_i} da_i,$$

avec $dx_i = f_{i|t_i} dt_i$. Ainsi, en particulier, nous avons :

$$(4.35) \quad \frac{\partial t_i}{\partial a_i} = - \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} f_{i|t_i} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right)^{-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial a_i},$$

où $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} f_{i|t_i} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \neq 0$.

Remarque 4.3.3

Pour les hypothèses 4.3.1 et 4.3.2, le cas où $\psi_i = t_i - \text{cste}$ est possible.

Notation 4.3.4

1. Dans la relation (4.35), le terme $f_{i|t_i}$, $i = 1, \dots, N+1$, correspond à la valeur de f_i en $x(t_i)$ et t_i soit $f_i(x(t_i), t_i)$. Cette notation est moins ambiguë que celle qui consiste à noter $f_i(t_i)$.
2. Comme les intervalles $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, N+1$ sont variables avec les paramètres a_i , il serait plus approprié de noter $x_i(t)$ ou $x(t, i)$ plutôt que $x(t)$, une solution du s.d.h. $\dot{x} = f_i(x, t)$, $i = 1, \dots, N+1$ comme dans [13]. Cependant ici, nous choisissons d'utiliser x_i pour désigner soit une variable libre, soit $x(t_i)$ selon le contexte dans lequel nous trouverons.

Le critère J^0 à optimiser est alors de la forme :

$$J^0 = J^0(x_0, \dots, x_{N+1}, t_0, \dots, t_{N+1}, a_1, \dots, a_{N+1}) = \sum_{i=1}^{N+1} J_i^0(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i, a_i),$$

où $J_i^0(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i, a_i) = \phi_i(x_i, t_i, a_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} L_i(x, t) dt$, avec ϕ_i et L_i , $i = 1, \dots, N+1$, fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Le problème d'optimisation considéré est le suivant : en supposant les hypothèses 4.3.1, 4.3.2 satisfaites, considérons t_i , $i = 1, \dots, N + 1$, comme une fonction des paramètres a_1, \dots, a_i , $i = 1, \dots, N + 1$. La trajectoire x et, en particulier x_1, \dots, x_{N+1} , est alors déterminée par (4.33) et (4.34). L'objectif est de trouver les valeurs de a_1, \dots, a_{N+1} qui optimisent le critère J^0 .

Par la suite, nous nous restreignons à la recherche d'une méthode de calcul pour la variation $dJ^0 = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{dJ^0}{da_i} da_i$. Ici, la notation $\frac{dJ^0}{da_i}$, $i = 1, \dots, N + 1$, prend en compte de façon directe, la variation de J^0 par rapport à a_i , à savoir $\frac{\partial J^0}{\partial a_i}$, mais aussi, de façon indirecte, les variations de J^0 par rapport à t_j et à $x_j = x(t_j)$, $j = i, \dots, N + 1$. L'utilisation d'un algorithme classique de descente [55], permet de poursuivre la résolution.

4.3.2 Rappel du calcul des variations dans le cas où il n'existe pas de commutation

Dans le cas sans commutation ($N = 0$), le calcul de $\frac{dJ_F^0}{da_F}$ est assez direct. C'est ce que nous montrerons plus loin par la méthode directe, c'est-à-dire sans introduction du critère augmenté.

Cependant, pour préparer le cas général avec commutations que nous traiterons dans le prochain paragraphe, et en suivant [17], nous allons introduire les paramètres de contrôle $\lambda_F(t)$ et ν_F . Ainsi, il s'agit ici de faire un calcul de variations pour le critère augmenté correspondant afin d'obtenir une expression pour dJ . Cette dernière correspondra à celle donnée par la formule (2.8.8) de la page 87 de [17] à la différence près qu'une erreur aura été corrigée (le terme $-L_F|_{t_0} dt$ manquait), que le contrôle u apparaissant dans le système à résoudre en temps croissant et dans le Lagrangien aura été supprimé et qu'enfin, un paramètre $a_F \in \mathbb{R}^{r_F}$ aura été ajouté dans la contrainte finale (qui prend alors la forme $\psi_F(x_F, t_F, a_F) = 0$).

Soient :

$$(4.36) \quad \begin{cases} \lambda_F(t), \\ H_F = L_F + \lambda_F^T f_F, \end{cases}$$

l'état adjoint et le Hamiltonien du système. Avec $\nu_F \in \mathbb{R}$, nous définissons le coût final augmenté Φ_F de la façon suivante :

$$(4.37) \quad \Phi_F = \phi_F + \nu_F \psi_F.$$

Par la suite, dans le but d'alléger les notations, l'indice F sera omis dans les termes de (4.36), de (4.37) et pour a_F , en les conservant cependant pour t_F et x_F . Ainsi, les contraintes (4.33), (4.34) prennent la forme :

$$(4.38) \quad \psi(x_F, t_F, a) = 0,$$

$$(4.39) \quad \dot{x} = f(x, t).$$

Puisque nous sommes dans le cas $N = 0$, cette simplification est aussi valable (voir paragraphes 4.3.1 et 4.3.3) pour $J_F^0 = J^0$, $J_F^1 = J^1$ et le critère augmenté $J_F = J$ définis par :

$$\begin{cases} J^0 = \phi(x_F, t_F, a) + \int_{t_0}^{t_F} L(x, t) dt, \\ J^1 = \nu \psi(x_F, t_F, a) + \int_{t_0}^{t_F} \lambda^T (f(x, t) - \dot{x}) dt, \\ J = J^0 + J^1. \end{cases}$$

Nous pouvons récrire plus précisément :

$$(4.40) \quad J = \Phi(x_F, t_F, a, \nu) + \int_{t_0}^{t_F} (H(x, t, \lambda) - \lambda^T \dot{x}) dt.$$

Calculons à présent, de façon directe, $\frac{dJ^0}{da}$. Pour cela, considérons t_0 et x_0 donnés. La résolution du système (4.39) donne $x_F = x(t_F)$. A l'aide de cette valeur, la relation (4.38) permet de trouver implicitement $t_F = t(a)$. Nous pouvons alors déduire :

$$\frac{dJ^0}{da} = \frac{d\phi}{da} + L|_{t_F} \frac{dt_F}{da} = \frac{\partial \phi}{\partial a} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_F} \frac{\partial x_F}{\partial t_F} + \frac{\partial \phi}{\partial t_F} + L \right) \Big|_{t_F} \frac{dt_F}{da},$$

et donc, en considérant (4.35), il vient :

$$(4.41) \quad \frac{dJ^0}{da} = \frac{\partial \phi}{\partial a} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \phi}{\partial t_F} + L \right) \Big|_{t_F} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \psi}{\partial t_F} \right)^{-1} \Big|_{t_F} \frac{\partial \psi}{\partial a}.$$

Notons que si t_F est fixé, *i.e.* $\psi = t_F - cste$, la relation (4.41) devient :

$$(4.42) \quad \frac{dJ^0}{da} = \frac{d\phi}{da} = \frac{\partial \phi}{\partial a}.$$

Cette méthode directe est donc rapide pour obtenir le calcul de $\frac{dJ^0}{da}$. Cependant, elle ne pourra pas se généraliser au cas avec commutations. C'est pourquoi ici,

nous introduisons un autre raisonnement pour retrouver l'expression de $\frac{dJ^0}{da}$ (4.41). Pour cela, calculons dJ . À partir des contraintes (4.38), (4.39) et pour les variations δx , $\delta \dot{x} = \widehat{\delta x}^1$, dt_0 , dt_F , dx_0 , dt_F (t_0 , x_0 variables *a priori*), nous calculons :

$$(4.43) \quad dJ = \frac{\partial \Phi}{\partial x_F} dx_F + \frac{\partial \Phi}{\partial t_F} dt_F + \frac{\partial \Phi}{\partial a_F} da_F + L|_{t_F} dt_F - L|_{t_0} dt_0 + \int_{t_0}^{t_F} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x - \lambda^T \delta \dot{x} \right) dt.$$

Dans [17], nous avons $\delta x_F = dx_F - \dot{x}(t_F) dt_F$ ce qui signifie que la variation totale dx_F résulte des variations de trajectoire δx et du temps final dt_F sous la contrainte (4.39). En intégrant par parties l'intégrale de (4.43), nous trouvons :

$$\int_{t_0}^{t_F} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x - \lambda^T \delta \dot{x} \right) dt = \int_{t_0}^{t_F} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x dt - [\lambda^T \delta x]_{t_0}^{t_F},$$

et ainsi :

$$(4.44) \quad dJ = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_F} - \lambda^T \right)_{|_{t_F}} dx_F + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_F} + L + \lambda^T f \right)_{|_{t_F}} dt_F + \frac{\partial \Phi}{\partial a} da + \lambda^T(t_0) dx_0 \\ - (L + \lambda^T f)_{|_{t_0}} dt_0 + \int_{t_0}^{t_F} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x dt.$$

Puis, contraignons $\lambda(t)$ à suivre le système dynamique :

$$(4.45) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T = 0,$$

et $\lambda(t_F)$, ν , à travers Φ , à satisfaire la condition limite suivante :

$$(4.46) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_F} - \lambda^T \right)_{|_{t_F}} = 0.$$

De plus, si la contrainte finale (4.38) correspond à un problème avec un instant final non fixé, *i.e.* si $\psi \neq t_F - cste$, alors choisissons aussi la condition :

$$(4.47) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_F} + H \right)_{t_F} = 0.$$

¹Remarque : cette précision signifie que la variation $\delta \dot{x}$ n'est pas libre mais contrainte par la relation suivante, déduite de la linéarisation de (4.34) :

$$\widehat{\delta x} = \frac{\partial f_i}{\partial x}(x, t) \delta x.$$

Sinon, si $\psi = t_F - cste$, comme $dt_F = 0$, il n'y a pas besoin de choisir la condition (4.47). Dans ce cas, nous choisirons à la place $\nu = 0$ comme condition (4.47). Par ce choix, la relation (4.37) devient $\Phi = \phi$ et donne un critère J dont la variation est en accord avec la relation (4.44).

Remarque 4.3.5

Notons que si t_0, x_0 ne sont pas fixés, à partir de la relation (4.44), nous avons :

$$(4.48) \quad \frac{\partial J}{\partial x_0|_{t_0}} = \lambda^T(t_0),$$

$$(4.49) \quad \frac{\partial J}{\partial t_0|_{t_0}} = -H|_{t_0}.$$

Si maintenant, nous fixons t_0 et x_0 , les choix (4.45), (4.46) et éventuellement (4.48) si t_F est libre, conduisent à :

$$(4.50) \quad dJ = \frac{\partial \Phi}{\partial a} da.$$

À présent, nous allons expliquer comment le calcul de la variation dJ (4.50) permet de retrouver l'expression obtenue (4.41) pour $\frac{dJ^0}{da_F}$.

Si t_0, x_0 et a sont fixés, les $(2n + 2)$ inconnues $x(t), \lambda(t), \nu, t_F$ ($2n$ inconnues $x(t), \lambda(t)$ si t_F est fixé) sont généralement données par les $2n$ équations des systèmes (4.39), (4.45) auxquelles nous adjoignons les $2n$ conditions aux bornes issues de (4.46), t_0, x_0 donnés et par les deux conditions (4.38), (4.47) (que nous n'ajoutons pas si t_F est fixé).

Ainsi, nous pouvons résoudre ce système de $(2n + 2)$ équations à $(2n + 2)$ inconnues (ou de $2n$ équations à $2n$ inconnues), qui inclut les contraintes, de la façon suivante. D'abord, à partir des conditions initiales données t_0, x_0 , le système (4.39) peut être résolu en temps croissant, ce qui nous permet d'obtenir $x(t)$. Les conditions finales t_F, x_F peuvent être calculées à l'aide de la relation (4.38). Puis, les équations (4.46) et (4.47) fournissent les valeurs de ν et de $\lambda(t_F)$. De là, nous pouvons résoudre en temps décroissant le système (4.45), qui donne $\lambda(t)$.

Les conditions, qui rendent ces calculs possibles, correspondent à la notion de contrôlabilité [17]. Pour nous, elles prennent la forme des hypothèses 4.3.1 et

4.3.2. En outre, comme nous sommes en train de le voir, l'absence de terme de contrôle instantané $u(t)$ avant le temps final nous permet d'améliorer cet algorithme en calculant ν et $\lambda(t_F)$.

Supposons que t_F n'est pas fixé. Une combinaison des relations (4.46), (4.47) donne :

$$\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_F} - \lambda^T \right) f + \frac{\partial \Phi}{\partial t_F} + H \right)_{|_{t_F}} = 0,$$

c'est-à-dire, en sachant que $H = L + \lambda^T f$:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \Phi}{\partial t_F} + L \right)_{|_{t_F}} = 0.$$

Comme $\Phi = \phi + \nu\psi$, nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \phi}{\partial t_F} + L \right)_{|_{t_F}} + \nu \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \psi}{\partial t_F} \right)_{|_{t_F}} = 0.$$

Sous les hypothèses (4.3.1), (4.3.2), il vient :

$$(4.51) \quad \nu = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \phi}{\partial t_F} + L \right)_{|_{t_F}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \psi}{\partial t_F} \right)_{|_{t_F}}^{-1}.$$

Les relations (4.46) et (4.51) donnent :

$$(4.52) \quad \lambda^T(t_F) = \frac{\partial \phi}{\partial x_F} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \phi}{\partial t_F} + L \right)_{|_{t_F}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \psi}{\partial t_F} \right)_{|_{t_F}}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_F}.$$

Remarquons que, quand t_F est fixé, la relation (4.46) avec $\Phi = \phi$, c'est-à-dire $\nu = 0$, donne explicitement $\lambda(t_F)$ sans aucune autre condition de contrôlabilité que l'hypothèse 4.3.1. Ceci veut simplement dire que l'instant t_F est atteignable pour le système (l'hypothèse 4.3.2 est également satisfaite).

Grâce à l'équation (4.52), nous pouvons retrouver l'expression (4.41) de $\frac{dJ^0}{da}$. Pour cela, posons $F(x(t), t) = f(x(t), t) - \dot{x}(t)$. Les contraintes (4.38), (4.39) donnent $\psi = 0$, $d\psi = 0$, $F = 0$, $dF = 0$. Nous pouvons alors déduire la variation de $J^1 = \nu\psi + \int_{t_0}^{t_F} \lambda^T F dt$:

$$dJ^1 = d\nu\psi + \nu d\psi + \lambda^T F|_{t_F} dt_F - \lambda^T F|_{t_0} dt_0 + \int_{t_0}^{t_F} (d\lambda^T F - \lambda^T dF) dt = 0.$$

De là, nous avons $dJ^0 = dJ - dJ^1 = dJ$. Pour des conditions initiales t_0 , x_0 données, la variation dJ est donnée par (4.50). Donc, nous avons ici $dJ^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial a} da$, avec :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial \phi}{\partial a} + \frac{\partial \nu}{\partial a} \psi + \nu \frac{\partial \psi}{\partial a} = \frac{\partial \phi}{\partial a} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial a}.$$

Ainsi, si t_F n'est pas fixé, la relation pour ν (4.51) donne :

$$(4.53) \quad \frac{dJ^0}{da} = \frac{\partial \phi}{\partial a} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \phi}{\partial t_F} + L \right) \Big|_{t_F} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_F} f + \frac{\partial \psi}{\partial t_F} \right)^{-1} \Big|_{t_F} \frac{\partial \psi}{\partial a}.$$

Si t_F est fixé, avec $\nu = 0$, $\Phi = \phi$, la relation (4.53) devient :

$$(4.54) \quad \frac{dJ^0}{da} = \frac{\partial \phi}{\partial a}.$$

Ainsi, nous avons retrouvé la relation (4.41). Même si la méthode utilisée ici qui conduit à la relation (4.41) est plus compliquée que la méthode directe que nous avons employée avant, c'est par ce moyen que nous pouvons trouver une généralisation pour le cas avec commutations. Notons que, lorsqu'il n'y a pas de commutation ($N = 0$), la détermination de l'état adjoint $\lambda(t)$ par la résolution de (4.45), (4.52) n'est pas nécessaire pour obtenir (4.53). Ce ne sera pas le cas lorsqu'il y a des commutations.

Remarque 4.3.6

La condition :

$$(4.55) \quad \frac{dJ^0}{da} = 0,$$

explicitée par (4.41), est une condition nécessaire d'optimalité. Cependant, trouver t_F , x_F , a avec les relations (4.38), (4.55) et le système (4.39), t_0 , x_0 étant donnés, est une tâche difficile en général. C'est pourquoi une méthode d'optimisation est proposée ici.

4.3.3 Calcul des variations dans le cas général avec commutations

Pour $i = 1, \dots, N+1$, nous définissons le critère augmenté $J_i = J_i(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i, a_i)$ par $J_i = J_i^0 + J_i^1$ où J_i^0 et J_i^1 sont donnés de la même façon qu'au paragraphe précédent 4.3.2 en remplaçant respectivement f , ψ , L , ϕ , λ , ν , H , Φ par f_i , ψ_i , L_i , ϕ_i , λ_i , ν_i , H_i , Φ_i et t_0 , t_F , $x_0 = x(t_0)$, $x_F = x(t_F)$ par t_{i-1} , t_i , $x_{i-1} = x(t_{i-1})$, $x_i = x(t_i)$. Le critère augmenté s'écrit :

$$(4.56) \quad J_i(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i, a_i) = \Phi_i(x_i, t_i, a_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_i - \lambda_i^T \dot{x}) dt,$$

où x_i et t_i sont tous les deux liés à la fois à x_{i-1} et à t_{i-1} par la contrainte $\dot{x} = f_i(x, t)$ sur $[t_{i-1}, t_i]$.

Nous définissons le critère augmenté global J par $J = \sum_{i=1}^{N+1} J_i$. De même, nous avons $J^0 = \sum_{i=1}^{N+1} J_i^0$, $J^1 = \sum_{i=1}^{N+1} J_i^1$, ce qui donne alors $J = J^0 + J^1$. L'intégration de la contrainte $\dot{x} = f_i(x, t)$ sur $[t_{i-1}, t_i]$ avec $\Psi_i(x_i, t_i, a_i) = 0$ définit, sous les hypothèses 4.3.1 et 4.3.2, les valeurs finales $x_i = x(t_i)$, t_i comme des fonctions de x_{i-1} , t_{i-1} , a_i , soit :

$$(4.57) \quad x_i \triangleq x_i(x_{i-1}, t_{i-1}, a_i), \quad t_i \triangleq t_i(x_{i-1}, t_{i-1}, a_i).$$

Ainsi, J_i donné par (4.56) est aussi une fonction de x_{i-1} , t_{i-1} , a_i , que nous notons :

$$J_i^*(x_{i-1}, t_{i-1}, a_i) = \Phi_i(x_i(x_{i-1}, t_{i-1}, a_i), t_i(x_{i-1}, t_{i-1}, a_i), a_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_i - \lambda^T \dot{x}) dt.$$

Remarque 4.3.7

Nous omettons, dans la première partie de ce paragraphe, les paramètres a_1, \dots, a_{N+1} qui ne jouent aucun rôle dans les prochains calculs.

Pour $i = 1, \dots, N + 1$, définissons $\tilde{J}_i(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i) = \tilde{J}_i^*(x_{i-1}, t_{i-1})$ par les relations de récurrence décroissante suivantes :

$$(4.58) \quad \tilde{J}_{N+1}(x_N, x_{N+1}, t_N, t_{N+1}) = J_{N+1}(x_N, x_{N+1}, t_N, t_{N+1}),$$

et $\forall i \leq n$:

$$(4.59) \quad \begin{cases} \tilde{J}_i(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i) = J_i(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i) + \tilde{J}_{i+1}^*(x_i, t_i), \\ \tilde{J}_i^*(x_{i-1}, t_{i-1}) = \tilde{J}_i(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i). \end{cases}$$

De plus, introduisons $\tilde{\Phi}_i$, pour $i = 1, \dots, N + 1$, de la façon suivante :

$$\tilde{\Phi}_i(x_i, t_i) = \Phi_i(x_i, t_i) + \tilde{J}_{i+1}^*(x_i, t_i).$$

L'équations (4.56) peut se récrire

$$(4.60) \quad \tilde{J}_i(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i) = \tilde{\Phi}_i(x_i, t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_i - \lambda_i^T \dot{x}) dt.$$

De là, l'application de (4.48), (4.49) à \tilde{J}_{i+1}^* sur $[t_i, t_{i+1}]$ donne les relations suivantes :

$$(4.61) \quad \lambda_{i+1}^T(t_i) = \frac{\partial \tilde{J}_{i+1}^*}{\partial x_i}(x_i, t_i),$$

$$(4.62) \quad H_{i+1|t_i} = -\frac{\partial \tilde{J}_{i+1}^*}{\partial t_i}(x_i, t_i).$$

Notons que la considération de \tilde{J}_{i+1} au lieu de \tilde{J}_{i+1}^* n'aurait pas permis de tenir compte de la dépendance de x_{i+1}, t_{i+1} en x_i, t_i pour ces dérivées partielles.

Remarque 4.3.8

Si t_i est fixé alors nous obtenons la même conclusion mais sans la relation (4.62).

De plus, les relations (4.45), (4.46), (4.47), dans le cas particulier $i+1 = N+1$, appliquées à $\tilde{J}_{N+1} = J_{N+1}$ sur $[t_N, t_{N+1}]$, conduisent à :

$$(4.63) \quad \frac{\partial H_{N+1}}{\partial x} + \dot{\lambda}_{N+1}^T = 0, \text{ pour } t_N \leq t \leq t_{N+1},$$

$$(4.64) \quad \left(\frac{\partial \Phi_{N+1}}{\partial x_{N+1}} - \lambda^T \right)_{|t_{N+1}} = 0,$$

$$(4.65) \quad \left(\frac{\partial \Phi_{N+1}}{\partial t_{N+1}} + H \right)_{|t_{N+1}} = 0.$$

Comme nous l'avons noté au paragraphe précédent, la dernière relation (4.65) est remplacée par $\nu_{N+1} = 0$ (4.65) si t_{N+1} est fixé.

De la même façon, les relations (4.45), (4.46), (4.47), appliquées à \tilde{J}_i sur $[t_{i-1}, t_i]$, compte tenu de (4.60), donnent :

$$(4.66) \quad \frac{\partial H_i}{\partial x} + \dot{\lambda}_i^T = 0, \text{ pour } t_{i-1} \leq t \leq t_i,$$

$$(4.67) \quad \lambda_i^T(t_i) = \frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial x_i}(x_i, t_i) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x_i, t_i) + \frac{\partial \tilde{J}_{i+1}^*}{\partial x_i}(x_i, t_i),$$

$$(4.68) \quad H_{i|t_i} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial t_i}(x_i, t_i) = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_i}(x_i, t_i) - \frac{\partial \tilde{J}_{i+1}^*}{\partial t_i}(x_i, t_i).$$

Puis, la comparaison de (4.61), (4.67) d'une part et de (4.62), (4.68) d'autre part, conduit aux relations suivantes :

$$(4.69) \quad \lambda_i^T(t_i) = \lambda_{i+1}^T(t_i) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x_i, t_i),$$

$$(4.70) \quad H_{i|t_i} = H_{i+1|t_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_i}(x_i, t_i),$$

pour $i = 1, \dots, N$.

Notons également que si t_i est donné alors les relations (4.68), (4.70) sont remplacées par $\nu_i = 0$ (4.70).

Les formules (4.69), (4.70) ainsi obtenues, posent toutefois un problème. En effet, considérons (4.66), (4.67), (4.68) à l'ordre supérieur qui donne λ_{i+1} sur $[t_i, t_{i+1}]$ par application de (4.45), (4.46), (4.47) à \tilde{J}_{i+1} . Cela définit $\lambda_{i+1}(t_i)$, $H_{i+1|t_i}$ que nous ne pouvons pas identifier de façon nécessaire aux expressions correspondantes données par (4.61), (4.62). En effet, ces dernières ont été obtenues par application de (4.48) et de (4.49) sur $[t_i, t_{i+1}]$ à un critère \tilde{J}_{i+1}^* différent de \tilde{J}_{i+1} . C'est pourquoi faire coïncider ces deux expressions est un postulat, et non pas un résultat. Mais ce postulat a du sens puisqu'il repose sur le résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy associé à une équation différentielle avec une condition au bord fixée [64]. Cela motive la définition suivante de l'état et des paramètres adjoints :

Définition 4.3.9

Nous considérons le problème d'optimisation posé au paragraphe 4.3.1. Soient a_1, \dots, a_{N+1} des paramètres fixés et t_0, x_0 des conditions initiales données.

Nous définissons l'état adjoint λ_i sur l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, N+1$, et les paramètres adjoints ν_i , $i = 1, \dots, N+1$ de la façon suivante :

- 1. Nous résolvons le système en temps croissant (4.34) pour $i = 1, \dots, N+1$. Dans le même temps, les suites t_i, x_i , $i = 1, \dots, N+1$, sont calculées par les contraintes (4.33).*
- 2. Puis, à partir de t_{N+1}, x_{N+1} obtenus, le système formé des équations (4.63), (4.66) est résolu en temps décroissant pour $i = N, \dots, 1$. En même temps, les suites $\nu_i, \lambda_i(t_i)$, $i = N+1, \dots, 1$, données par (4.64), (4.65) et par les conditions de saut (4.69), (4.70) peuvent être calculées.*

Cette définition est conforme aux expressions données dans [17], [28]. Ici, l'originalité est l'interprétation récursive du résultat classique exposé au paragraphe 4.3.2 qui permet l'introduction *a priori* des conditions de saut (4.69), (4.70).

À présent, pour montrer clairement l'intérêt de la définition 4.3.9 pour la

résolution de notre problème d'optimisation, explicitons la variation $dJ^0 = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\partial J_i^0}{\partial a_i} da_i$.

Pour cela, considérons t_0 et x_0 des conditions initiales données. Les mêmes calculs que ceux présentés dans le cas sans commutation au paragraphe 4.3.2 donnent $dJ^1 = 0$ et donc $dJ^0 = dJ - dJ^1 = dJ$.

En adaptant l'équation (4.44) au cas pour lequel il existe des commutations, nous obtenons l'expression suivante de la variation dJ en $x(t)$, donnée par la définition 4.3.9 :

$$\begin{aligned}
dJ &= \sum_{i=1}^{N+1} dJ_i = \sum_{i=1}^{N+1} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} - \lambda_i^T \right)_{|t_i} dx_i + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_i} + H_i \right)_{|t_i} dt_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_i} da_i \right. \\
&\quad \left. + \lambda_i^T(t_{i-1}) dx_{i-1} - H_{i|t_{i-1}} dt_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x} + \dot{\lambda}_i^T \right) \delta x dt \right] \\
&= \sum_{i=1}^{N+1} \left(\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} - \lambda_i^T \right)_{|t_i} dx_i + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_i} + H_i \right)_{|t_i} dt_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_i} da_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x} + \dot{\lambda}_i^T \right) \delta x dt \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^N \left(\lambda_{i+1}^T(t_i) dx_i - H_{i+1|t_i} dt_i \right) = \lambda_1^T(t_0) dx_0 - H_{1|t_0} dt_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \left(\left(\lambda_{i+1}^T(t_i) - \lambda_i^T(t_i) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \right) dx_i - \left(H_{i+1|t_i} - H_{i|t_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_i} \right) dt_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_i} da_i \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x} + \dot{\lambda}_i^T \right) \delta x dt \right) + \left(\frac{\partial \Phi_{N+1}}{\partial x_{N+1}} - \lambda_{N+1}^T(t_{N+1}) \right) dx_{N+1} + \left(\frac{\partial \Phi_{N+1}}{\partial t_{N+1}} + H_{N+1|t_{N+1}} \right) dt_{N+1} \\
&\quad + \int_{t_N}^{t_{N+1}} \left(\frac{\partial H_{N+1}}{\partial x} + \dot{\lambda}_{N+1}^T \right) \delta x dt.
\end{aligned}$$

À partir de là, en prenant en compte les relations (4.63), (4.64), (4.65) et (4.66), (4.69), (4.70), il vient :

$$(4.71) \quad dJ^0 = dJ = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_i} da_i, \text{ et donc : } \frac{dJ^0}{da_i} = \frac{dJ}{da_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_i},$$

où la dérivée $\frac{d}{da_i}$ est à comprendre au sens précisé à la fin du paragraphe 4.3.1. De là, puisque $\Phi_i = \phi_i + \nu_i \psi_i$, $i = 1, \dots, N+1$ et à l'aide de (4.33), nous avons pour $i = 1, \dots, N+1$:

$$\frac{dJ^0}{da_i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial a_i} + \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial a_i} + \frac{d\nu_i}{da_i} \psi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial a_i} + \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial a_i}.$$

L'existence des suites ν_i , $\lambda_i(t_i)$, $i = 1, \dots, N+1$ dans la définition 4.3.9 est liée aux conditions de contrôlabilité citées au paragraphe 4.3.2. Comme mentionné dans [17], la détermination de ces suites est essentielle pour assurer l'efficacité de l'algorithme donné dans 4.3.9 ce qui est une difficulté en général. Dans notre cas, l'absence de terme de contrôle instantané $u(t)$, en dehors des instants de

commutation, nous permet d'obtenir $\nu_i, \lambda_i(t_i), i = N+1, \dots, 1$ et les conditions de contrôlabilité et donc, rend l'algorithme efficace.

Pour $\nu_{N+1}, \lambda_{N+1}(t_{N+1})$, les mêmes calculs que ceux effectués au paragraphe 4.3.2 donnent les relations suivantes. Si t_{N+1} n'est pas fixé, *i.e.* $\psi_{N+1} \neq t_{N+1} - cste$, alors, nous avons :

$$(4.72) \quad \nu_{n+1} = - \left(\frac{\partial \phi_{N+1}}{\partial x_{N+1}} f_{N+1} + \frac{\partial \phi_{N+1}}{\partial t_{N+1}} + L_{N+1} \right) \Big|_{t_{N+1}} \left(\frac{\partial \psi_{N+1}}{\partial x_{N+1}} f_{N+1} + \frac{\partial \psi_{N+1}}{\partial t_{N+1}} \right)^{-1} \Big|_{t_{N+1}}.$$

En revanche, si t_{N+1} est fixé, *i.e.* $\psi_{N+1} = t_{N+1} - cste$, alors nous remplaçons (4.72) par $\nu_{N+1} = 0$ (4.72). Dans tous les cas, $\lambda_{N+1}(t_{N+1})$ est donné par (4.64), à savoir :

$$(4.73) \quad \lambda_{N+1}^T(t_{N+1}) = \frac{\partial \phi_{N+1}}{\partial x_{N+1}} + \nu_{N+1} \frac{\partial \psi_{N+1}}{\partial x_{N+1}}.$$

De plus, pour $i = N, \dots, 1$, une combinaison des relations (4.69), (4.70) en $t_i, x_i = x(t_i)$, donne :

$$\lambda_i^T f_i - H_i = \lambda_{i+1}^T f_i - H_{i+1} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_i}.$$

Puisque $H_i = L_i + \lambda_i^T f_i, \Phi_i = \phi_i + \nu_i \psi_i$, il vient :

$$L_i - L_{i+1} + \lambda_{i+1}^T (f_i - f_{i+1}) + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial t_i} + \nu_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) = 0.$$

Sous les hypothèses 4.3.1, 4.3.2, nous pouvons déduire pour $i = N, \dots, 1$:

$$(4.74) \quad \nu_i = - \left(L_i - L_{i+1} + \lambda_{i+1}^T (f_i - f_{i+1}) + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial t_i} \right) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right)^{-1} \text{ en } t_i, x_i.$$

Cette expression est valable pour t_i libre *i.e.* $\psi_i \neq t_i - cste$. Sinon, si t_i est fixé, *i.e.* $\psi_i = t_i - cste$, alors (4.74) est remplacé par $\nu_i = 0$ (4.74). Dans tous les cas, $\lambda_i(t_i)$ est donné par (4.69), à savoir, pour $i = N, \dots, 1$:

$$(4.75) \quad \lambda_i^T(t_i) = \lambda_{i+1}^T(t_i) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} + \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}.$$

Ainsi, les relations (4.72), (4.73), (4.74), (4.75) et une récurrence décroissante, nous permettent de déterminer $\nu_i, \lambda_{i+1}^T(t_i), i = N+1, \dots, 1$ en utilisant (4.66) pour calculer $\lambda_{i+1}^T(t_i)$ à chaque itération. Tout ceci est obtenu sous les hypothèses 4.3.1, 4.3.2 qui sont des conditions suffisantes de contrôlabilité.

Nous concluons finalement :

Théorème 4.3.10

Nous considérons le problème d'optimisation posé au paragraphe 4.3.1. Soient a_1, \dots, a_{N+1} des paramètres initialisés et t_0, x_0 des conditions initiales données. Supposons également les hypothèses 4.3.1, 4.3.2 satisfaites. L'algorithme de calcul pour la variation :

$$dJ = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{dJ^0}{da_i} da_i$$

en a_1, \dots, a_{N+1} , où le symbole $\frac{d}{da_i}$ indique qu'il faut tenir compte des dépendances directes et indirectes, est le suivant. Nous obtenons $x(t)$, $\lambda(t)$ avec la définition 4.3.9. Dans cette résolution, les suites $t_i, x_i, i = 1, \dots, N+1$ des états et instants de commutation sont calculées et la détermination des suites $\nu_i, \lambda_i(t_i), i = N+1, \dots, 1$ est rendue plus facile si les relations (4.72), (4.73), (4.74), (4.75) sont utilisées. Alors, nous pouvons déduire :

$$(4.76) \quad \frac{dJ^0}{da_i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial a_i} + \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial a_i}, \quad i = 1, \dots, N+1.$$

Enfin, à l'aide de ce gradient du critère, nous appliquons une méthode de descente pour obtenir les résultats optimaux.

Ce résultat, obtenu en s'appuyant sur [17], généralise ce qui est donné dans [16] où les auteurs n'ont traité que le cas $\dot{x} = f_i(x)$, $\psi_i(x_i, a_i) = 0$, $J_i^0 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} L_i(x) dt$ et où l'interprétation de l'état adjoint $\lambda(t)$ n'était pas clairement donnée en terme de contrôle (le critère augmenté J n'est pas considéré).

De plus, ce résultat est intéressant dans la mesure où une grande diversité d'applications peut venir illustrer cette théorie.

Par la suite, nous proposons trois applications plus ou moins classiques [58] :

1. l'optimisation de cycles limites pour le thermostat à résistance d'anticipation introduit au paragraphe 2.1.2,
2. l'optimisation d'instants de commutation pour un problème de minimisation de temps pour une voiture à deux rapports de transmission [32], [37],
3. l'optimisation de règles de commutation pour un problème d'obstacle mobile à éviter pour un robot [8], [28].

4.3.4 Optimisation de cycles limites : application au modèle du thermostat à résistance d'anticipation

A. Présentation du problème d'optimisation

Pour l'application de l'algorithme du théorème 4.3.10, nous choisissons les valeurs numériques du tableau 4.3 en négligeant toujours le terme e de la matrice A .

$a = \frac{1}{R_{th}Q_{th}}$	$b = \frac{1}{R_cQ_p}$	$c = \frac{1}{R_cQ_c}$	$d = \frac{1}{R_mQ_p}$	$p_{th} = \frac{P_{th}}{Q_{th}}$	$p_c = \frac{P_c}{Q_c}$	θ_e
10^{-3}	$2.81 \cdot 10^{-4}$	$11 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	274

TAB. 4.3 – Valeurs numériques choisies pour l'application de l'algorithme donné dans le théorème 4.3.10 au modèle du thermostat à résistance d'anticipation

Ici, nous considérons deux modes de chauffage : par exemple, un de jour et un de nuit. Chacun de ces modes possède son propre seuil inférieur (θ_1 pour le jour, θ_3 pour la nuit) et son propre seuil supérieur (θ_2 pour le jour, θ_4 pour la nuit). Le passage du mode jour au mode nuit s'effectue au temps $t = 20000$ s. La figure 4.7 correspond à la simulation des variations de la température du thermostat (les plus grandes) et de la température de la pièce. Elle a été obtenue à l'aide de *Matlab*, pour $t_0 = 0$, et pour les valeurs initiales des variables d'état $X(t_0) = (288 \ 288 \ 288)^T$ et des seuils de commutation $\theta_1 = 293$ K, $\theta_2 = 294$ K, $\theta_3 = 290$ K, $\theta_4 = 291$ K.

Le problème d'optimisation est le suivant : comment peut-on choisir les seuils de commutation du thermostat (supposés non fixés) θ_i , $i = 1, \dots, 4$ pour obtenir :

1. aux instants de commutation impairs (représentés par les étoiles les plus hautes sur la figure 4.7), une température pour la pièce la plus proche possible des températures désirées $\theta_{u_1} = 293$ K (pour le jour), $\theta_{u_2} = 290.5$ K (pour la nuit),
2. dans le même temps, une température moyenne pour la pièce aussi proche que possible de la température moyenne désirée $\theta_{d_1} = 292.5$ K (pour le jour), $\theta_{d_2} = 290$ K (pour la nuit) ?

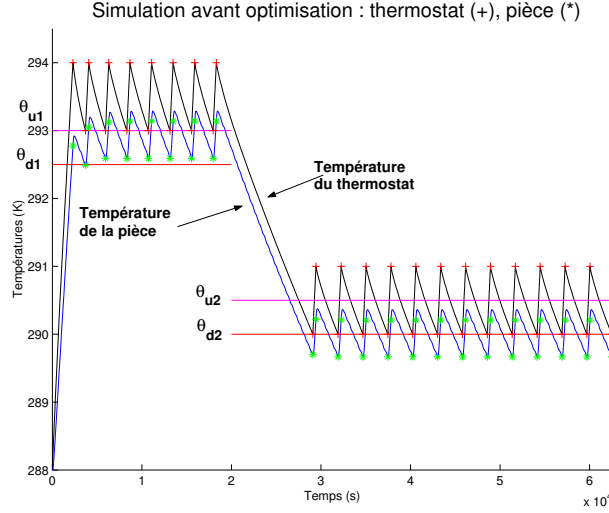


FIG. 4.7 – Simulation de la température du thermostat et de la pièce pour les valeurs du tableau 4.3 avant optimisation

B. Calcul du gradient - Minimisation du critère

Ici, d'après l'analyse réalisée dans la partie 2.2 et la figure 4.7, la trajectoire $X(t)$ semble converger vers un cycle limite. De plus, en utilisant les notations du paragraphe précédent, nous considérons le critère augmenté suivant $J = \sum_{i=1}^{N+1} J_i$ avec :

$$J_i = q_i \frac{\alpha}{N+1} (YX_i - \theta_{u_j})^2 + \nu_i \frac{1}{N+1} (DX_i - a_{ij}) + \frac{1}{t_{N+1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_i - \lambda_i^T \dot{X}_i) dt,$$

où :

- $q_i = 0$ si i est pair et $q_i = 1$ si i est impair,
- $D = (1 \ 0 \ 0)$, $Y = (0 \ 1 \ 0)$,
- $a_{ij} = \begin{cases} \theta_1 & \text{si } i \text{ est pair et } j = 1 \\ \theta_2 & \text{si } i \text{ est impair et } j = 1 \\ \theta_3 & \text{si } i \text{ est pair et } j = 2 \\ \theta_4 & \text{si } i \text{ est impair et } j = 2 \end{cases}$
- $H_i = L_i + \lambda_i^T f_i$ où $L_i = \beta(YX_i - \theta_{d_j})^2$, $f_i = AX_i + q_i B + C$,
- $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,
- $j = 1$ si $t_i < 20000$ et $j = 2$ si $t_i \geq 20000$.

Ainsi, J est vu comme une fonction des seuils $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$. Nous pouvons, à partir de là, appliquer l'algorithme du théorème 4.3.10 :

1. Dans un premier temps, nous résolvons, en temps croissant, le système différentiel $\dot{X} = f(X, t)$ donné au paragraphe 2.1.2 par (2.3). En même temps, nous calculons les instants de commutation t_i , les valeurs des variables d'état en t_i , ainsi que le temps et l'état finaux.
2. Puis, nous résolvons le système (4.66) en temps décroissant donné explicitement ici, pour $i = N + 1, \dots, 1$, par :

$$\dot{\lambda}_i^T = -\lambda_i^T A - (0 \ 2\beta(YX_i - \theta_{d_j}) \ 0),$$

avec $j = 1$ si $t_i < 20000$ et $j = 2$ si $t_i \geq 20000$. Dans le même temps, nous pouvons définir ν_i , $\lambda_i(t_i)$, $i = N + 1, \dots, 1$, à l'aide de (4.72), (4.73), (4.74), (4.75) qui correspondent ici à :

$$\begin{cases} \nu_{N+1} = -\frac{N+1}{Df_{N+1}} \left(q_{N+1} \frac{2\alpha}{N+1} (YX_{N+1} - \theta_{u_j}) Y f_{N+1} + \beta (YX_{N+1} - \theta_{d_j})^2 \right) \\ \nu_i = -\frac{N+1}{Df_i} \left(\beta ((YX_i - \theta_{d_j})^2 - (YX_{i+1} - \theta_{d_k})^2) + \lambda_{i+1}^T (f_i - f_{i+1}) \right. \\ \quad \left. + q_i \frac{2\alpha}{N+1} (YX_i - \theta_{u_j}) Y f_i \right), \\ \lambda_{N+1}^T(t_{N+1}) = q_{N+1} \frac{2\alpha}{N+1} (YX_{N+1} - \theta_{u_j}) Y + \nu_{N+1} \frac{D}{N+1} \\ \lambda_i^T(t_i) = \lambda_{i+1}^T(t_i) + q_i \frac{2\alpha}{N+1} (YX_i - \theta_{u_j}) Y + \frac{\nu_i}{N+1} D, \end{cases}$$

où $k = 1$ si $t_{i+1} < 20000$, $k = 2$ sinon.

3. De là, à partir de (4.76), nous pouvons calculer :

$$\frac{dJ^0}{da_i} = -\frac{\nu_i}{N+1}, \quad i = 1, \dots, N+1.$$

En regroupant ces termes selon les valeurs des instants de commutation t_i , $i = 1, \dots, N$ et selon la parité de i , nous obtenons le gradient du critère. Ceci nous donne alors la possibilité d'appliquer une méthode de descente pour déterminer une solution optimale à notre problème.

L'utilisation de *Matlab*, et plus particulièrement de la fonction *fmincon*, pour appliquer notre algorithme en partant des valeurs initiales $\alpha = \beta = 0.5$, $\theta_1 = 293$ K, $\theta_2 = 294$ K, $\theta_3 = 290$ K, $\theta_4 = 291$ K, donne à la sortie de la boucle d'optimisation, après treize itérations, les valeurs optimales suivantes :

$$\begin{cases} (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (292.32, 293.744, 290.149, 291.249), \\ J^0 = 18.5046. \end{cases}$$

La figure 4.8 met en évidence les variations des températures du thermostat (les plus grandes) et de la pièce après optimisation.

Initialement (figure 4.7), nous avions :

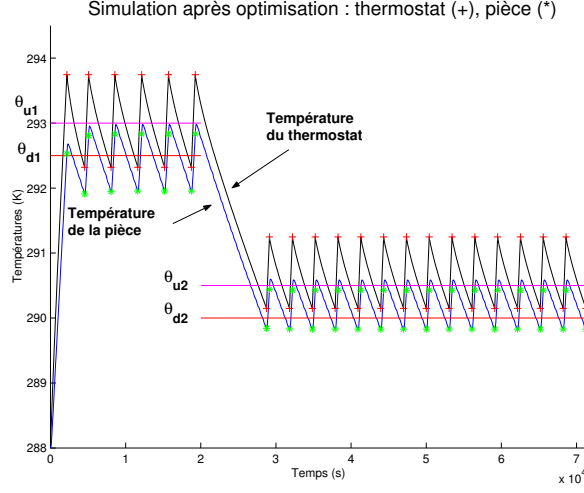


FIG. 4.8 – Simulation des températures du thermostat et de la pièce après optimisation

- $|YX_i - \theta_{u_1}| \simeq 0.2872$, $|YX_i - \theta_{u_2}| \simeq 0.1378$,
- $|\theta_{m_1} - \theta_{d_1}| \simeq 0.4371$, $|\theta_{m_2} - \theta_{d_2}| \simeq 0.0132$,

avec θ_{m_1} et θ_{m_2} qui correspondent respectivement aux moyennes de la température de la pièce pour $t < 20000$ et pour $t \geq 20000$.

Après optimisation (figure 4.8), nous obtenons :

- $|YX_i - \theta_{u_1}| \simeq 0.0222$, $|YX_i - \theta_{u_2}| \simeq 0.0865$,
- $|\theta_{m_1} - \theta_{d_1}| \simeq 0.0362$, $|\theta_{m_2} - \theta_{d_2}| \simeq 0.2058$.

Seul ce dernier résultat n'est pas amélioré, ce qui peut s'expliquer par le fait qu'il y a deux demandes pour l'optimisation, l'une portant sur la température de la pièce aux instants de commutation impairs, et l'autre portant sur sa moyenne. Ainsi, l'amélioration d'une de ces demandes peut se faire au détriment de l'autre.

De plus ici, numériquement, avec les simulations, nous n'avons pas rencontré de problème de discontinuité au moment du passage du mode de chauffage de jour à celui de nuit. Cependant, il faudrait peut-être étudier de plus près ce qu'il se produit vraiment, de façon théorique, à cet instant [31]. En effet, la faible amélioration ici de l'objectif est peut-être liée à la discontinuité et le résultat peut alors être faussé. C'est pourquoi il serait intéressant de comparer cet exemple avec celui où nous ne considérerons plus qu'un seul mode de chauffage. Ceci pourra être fait lors de prochains travaux.

4.3.5 Optimisation des instants de commutation. Application au modèle d'une voiture à deux rapports de transmission

A. Présentation du problème d'optimisation

Pour cette application plus classique, nous nous appuyons sur [37] et considérons le modèle d'une voiture à deux rapports de transmission régi par le système suivant :

$$(4.77) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-cx_2 + kx_3) \\ \dot{x}_3 = -x_2 \frac{g_q}{k} u, \end{cases}$$

où $q = 1, 2$. Dans [37], les auteurs montrent que le problème pour trouver l'accélération optimale $u \in [-0.1, 1.1]$ est essentiellement un modèle de type bang-bang, ce que nous supposons ici. Nous choisissons ainsi $u \in \{-0.1, 1.1\}$. De plus, les trois états continus du système représentent respectivement la position de la voiture (x_1), la vitesse de la voiture (x_2) et le déplacement angulaire de son arbre de transmission (x_3). La fonction g_q , tracée sur la figure 4.9, correspond à l'efficacité de la vitesse q . Enfin, les constantes m (masse de la voiture), c (amortissement dû aux frottements) et k (constante de l'arbre de transmission) sont prises égales à 1 sans perte de généralité.

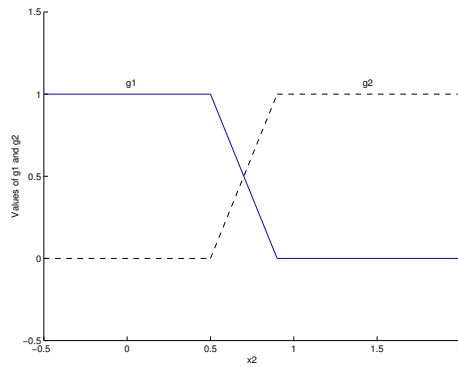


FIG. 4.9 – Comportements de g_1 (trait plein) et de g_2

Le problème d'optimisation que nous voulons résoudre, est ici le suivant. D'abord, contrairement à [37], nous imposons des règles naturelles pour l'évolution de la voiture qui sont répertoriées dans le tableau ci-après.

	$[t_0, t_1[$ $[t_4, t_5[$	$[t_1, t_2[$ $[t_5, t_6[$	$[t_2, t_3[$ $[t_6, t_7[$	$[t_3, t_4[$ $[t_7, t_8[$
Action	Accélération	Accélération	Freinage	Freinage
Vitesse	1 ^{ère}	2 ^{nde}	2 ^{nde}	1 ^{ère}

Ici, l'objectif est d'optimiser les temps de commutation t_i , $i = 1, \dots, 7$ et le temps final t_8 pour, dans un premier temps, arrêter la voiture aussi près que possible d'une première destination choisie ($x_1 = 0$), puis, dans un second temps, après un nouveau démarrage, pour arrêter la voiture aussi près que possible d'une seconde destination choisie ($x_1 = 5$) et ce, dans un temps minimum.

B. Calcul du gradient - Minimisation du critère

Nous considérons le critère augmenté $J = \sum_{i=1}^{N+1} J_i$, $N = 7$, avec :

$$J_i = \frac{\alpha}{N+1} \left(\frac{x_2}{\delta} - v_{g_i} \right)^2 + \nu_i \frac{t_i - a_i}{N+1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_i - \lambda_i^T \dot{X}) dt,$$

avec :

– $\delta = 50$ est l'amplitude de changement tolérable,

$$- v_{g_i} = \begin{cases} 0.8 & \text{pour } i = 1, 5 \\ 1.2 & \text{pour } i = 2, 6 \\ 0.2 & \text{pour } i = 3, 7 \\ 0 & \text{pour } i = 4, 8 \end{cases}$$

où les v_{g_i} , $i = 1, \dots, 8$ correspondent aux vitesses recommandées pour passer de la première à la seconde ou de la seconde à la première.

– $a_i = t_i$, $i = 1, \dots, 8$,

– $H_i = L_i + \lambda_i^T f_i$ où $L_i = \beta(x_1^2(t) + x_2^2(t))$, $i = 1, \dots, 4$, $L_i = \beta((x_1(t) - 5)^2 + x_2^2(t))$, $i = 5, \dots, 8$, $f_i = AX_i$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -g_q u & 0 \end{pmatrix}$$

avec $u = 1.1$ pour $i = 1, 2, 5, 6$, $u = -0.1$ pour $i = 3, 4, 7, 8$, $g_q = g_1$ pour $i = 1, 4, 5, 8$, $g_q = g_2$ pour $i = 2, 3, 6, 7$,

– $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$.

Ainsi, comme pour le problème lié au thermostat à résistance d'anticipation, nous appliquons l'algorithme du théorème 4.3.10.

1. Dans un premier temps, nous résolvons le système (4.77) pour définir les états et les instants de commutation ainsi que l'état et l'instant finaux.
2. Puis, nous résolvons en temps décroissant, à partir de t_8 , le système adjoint (4.66) qui est donné plus précisément ici par :

$$\dot{\lambda}_i^T = -\lambda_i^T A - (2\beta(x_1(t) - d) \ 2\beta x_2(t) \ 0),$$

où $t \in [t_{i+1}, t_i[$, $d = 0$ pour $i = 1, \dots, 4$, $d = 5$ pour $i = 5, \dots, 8$.

Dans le même temps, nous calculons les suites ν_i , $\lambda_i(t_i)$ données par (4.72), (4.73), (4.74), (4.75), ce qui donne ici pour $i = N, \dots, 1$:

$$\begin{cases} \nu_{N+1} = -8 \left((0 \ \frac{\alpha}{4}(\frac{x_2(t_{N+1})}{50} - v_{g8}) \ 0) f_{N+1} + \beta((x_1(t_{N+1}) - 5)^2 + x_2^2(t_{N+1})) \right) \\ \nu_i = -8(\beta((x_1(t_i) - d)^2 + x_2^2(t_i) - (x_1(t_{i+1}) - d_2)^2 - x_2^2(t_{i+1})) \\ + \lambda_{i+1}^T(f_i - f_{i+1}) + (0 \ \frac{\alpha}{4}(\frac{x_2(t_i)}{50} - v_{g_i}) \ 0) f_i) \\ \lambda_{N+1}^T(t_{N+1}) = (0 \ \frac{\alpha}{4}(\frac{x_2(t_{N+1})}{50} - v_{g_{N+1}}) \ 0) \\ \lambda_i^T(t_i) = \lambda_{i+1}^T(t_i) + (0 \ \frac{\alpha}{4}(\frac{x_2(t_i)}{50} - v_{g_i}) \ 0), \end{cases}$$

où $d = 0$ pour $i = 1, \dots, 4$, $d = 5$ pour $i = 5, \dots, 8$, $d_2 = 0$ pour $i = 1, \dots, 3$, $d_2 = 5$ pour $i = 4, \dots, 7$.

3. Alors, nous pouvons déduire, à l'aide de (4.76) :

$$\frac{dJ_i^0}{da_i} = -\frac{\nu_i}{8}, \quad i = 1, \dots, 8,$$

qui est le gradient du critère.

De là, nous appliquons une méthode de descente pour déterminer la solution optimale. Nous utilisons là encore *Matlab* et la fonction *fmincon* avec les valeurs initiales $\alpha = \beta = 0.5$ et les valeurs des t_i , $i = 1, \dots, 8$ du tableau ci-après.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
1.6	4.4	6.4	8.5	10.6	13.1	14.3	15.8

L'algorithme converge après dix-sept itérations et donne finalement les valeurs optimales suivantes :

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	J^0
1.26	4.77	6.43	8.28	10.09	13.21	14.32	15.81	71.358

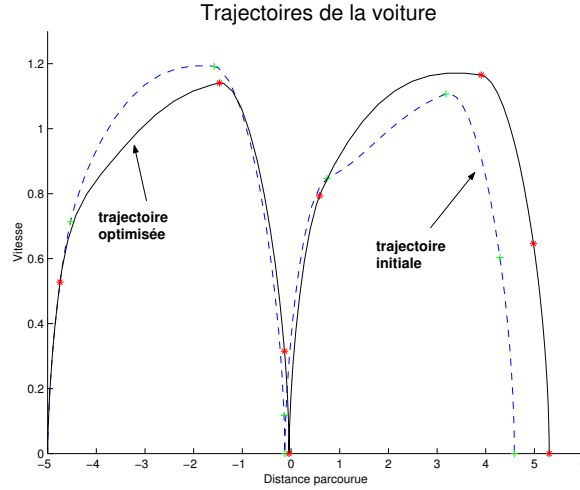


FIG. 4.10 – Trajectoire optimale (trait plein) et trajectoire initiale pour la voiture à deux rapports de transmission

La figure 4.10 montre la trajectoire de la voiture dans le plan de phases de x_1 et de x_2 avant optimisation (courbe tracée en pointillés) et après optimisation (courbe tracée d'un trait plein). Les étoiles indiquent les instants de commutation et l'instant final.

Le temps ici n'est pas réduit par rapport au temps final initial mais l'optimisation permet, pour un laps de temps similaire, d'emmener la voiture plus proche des deux destinations $x_1 = 0$, $x_1 = 5$ souhaitées. En effet, avant optimisation, la voiture s'arrête une première fois en $x_1 = -0.128$ ($|0 + 0.128| = 0.128$), puis une seconde fois en $x_1 = 4.587$ ($|5 - 4.587| = 0.413$). Après optimisation, la voiture s'arrête une première fois en $x_1 = -0.042$ ($|0 + 0.042| = 0.042$) et une seconde fois en $x_1 = 5.303$ ($|5 - 5.303| = 0.303$).

Outre l'hypothèse que nous avons faite qui simplifie le problème à propos du contrôle u de type bang-bang, cet algorithme est numériquement moins coûteux que celui utilisé dans [37].

4.3.6 Optimisation de règles de commutation. Application à la robotique

A. Présentation du problème d'optimisation

Nous nous appuyons ici sur [16] et considérons le système :

$$(4.78) \quad \begin{cases} \dot{x} = v \cos(\Omega) \\ \dot{y} = v \sin(\Omega) \\ \dot{\Omega} = \omega, \end{cases}$$

où (x, y) est la position du robot, Ω est son orientation, ω et v sont respectivement les vitesses angulaire et de translation contrôlées. De plus, nous supposons que le robot peut bouger selon deux modes : un, que nous appellerons le mode "approche de la cible" (Mode 1), l'autre que nous appellerons le mode "obstacle à éviter" (Mode 2). Ces deux modes sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Mode 1 : } & \begin{cases} v = 1 \\ \omega = C_1(\Omega_c - \Omega), \text{ avec } \Omega_c = \arctan\left(\frac{y_c - y}{x_c - x}\right), \end{cases} \\ \text{Mode 2 : } & \begin{cases} v = 1 \\ \omega = C_2(\Omega - \Omega_o), \text{ avec } \Omega_o = \arctan\left(\frac{y_o - y}{x_o - x}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Le point (x_c, y_c) définit la position de la cible que le robot doit atteindre et (x_o, y_o) définit la position de l'obstacle que le robot doit éviter. Ici, contrairement à [16], nous choisissons un obstacle mobile qui suit le cercle d'équation :

$$(x_o - 1)^2 + (y_o - 1)^2 - (0.3)^2 = 0,$$

où x_o et y_o sont donnés en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x_o(t) = 0.3 \cos(t) + 1 \\ y_o(t) = 0.3 \sin(t) + 1. \end{cases}$$

Le passage entre les deux modes se fait en définissant, pour chaque position de l'obstacle, deux surfaces de commutation d'équations :

$$\psi_i(x, y, a_i) = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - a_i^2, \quad i = 1, 2.$$

D'abord, le robot évolue en mode 1 jusqu'à ce qu'il atteigne la surface de commutation de rayon a_1 . Alors, il passe en mode 2. Il suit ce mode jusqu'à ce qu'il franchisse la surface de rayon a_2 et là, revient en mode 1.

Le problème d'optimisation à résoudre est alors le suivant : comment pouvons-nous choisir les rayons a_1, a_2 pour que le robot atteigne la cible fixe en minimisant la distance parcourue tout en évitant l'obstacle ?

B. Calcul du gradient - Minimisation du critère

Toujours en suivant [16], nous considérons le critère augmenté $J = \sum_{i=1}^{N+1} J_i$, $N = 2$, avec :

$$J_i = \nu_i ((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - a_i^2) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_i - \lambda_i^T \dot{X}) dt,$$

où $H_i = L_i + \lambda_i^T f_i$ avec $L_i = (x_c - x)^2 + (y_c - y)^2 + \beta e^{-\alpha((x_o - x)^2 + (y_o - y)^2)}$, $f_i = (v \cos(\Omega) \ v \sin(\Omega) \ \omega)^T$.

De plus, nous choisissons les valeurs numériques suivantes : $\alpha = \beta = 10$, $C_1 = 1.2$, $C_2 = 0.5$, $(x_c, y_c) = (3.5, 2.5)$.

À partir de là, comme pour le modèle du thermostat à résistance d'anticipation et pour celui de la voiture à deux rapports de transmission, nous pouvons appliquer l'algorithme du théorème 4.3.10.

1. Premièrement, résolvons en temps croissant le système (4.78) pour déterminer les états et les instants de commutation ainsi que l'état et l'instant finaux.
2. Puis, résolvons le système adjoint (4.66) en temps décroissant qui est donné ici par :

$$\dot{\lambda}_i^T = -\lambda_i^T \frac{\partial f_i}{\partial X} - \left(\frac{\partial L_i}{\partial x} \ \frac{\partial L_i}{\partial y} \ 0 \right)$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial L_i}{\partial x} = 2((x - x_c) + \alpha\beta(x_o - x)e^{-\alpha((x_o - x)^2 + (y_o - y)^2)}) \\ \frac{\partial L_i}{\partial y} = 2((y - y_c) + \alpha\beta(y_o - y)e^{-\alpha((x_o - x)^2 + (y_o - y)^2)}), \end{cases}$$

où, si le robot opère en mode 1 :

$$\frac{\partial f_i}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_1 \frac{y_c - y}{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} \\ 0 & 0 & -C_1 \frac{x_c - x}{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2} \\ -v \sin(\Omega) & v \cos(\Omega) & -C_1 \end{pmatrix}^T,$$

et si le robot suit le mode 2 :

$$\frac{\partial f_i}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -C_2 \frac{y_o - y}{(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2} \\ 0 & 0 & C_2 \frac{x_o - x}{(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2} \\ -v \sin(\Omega) & v \cos(\Omega) & C_2 \end{pmatrix}^T.$$

Dans le même temps, calculons les suites ν_i , $\lambda_i(t_i)$, $i = 3, \dots, 1$, données par (4.72), (4.73), (4.74), (4.75). Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_3 = -((x_c - x_3)^2 + (y_c - y_3)^2 + \beta e^{-\alpha((x_o(t_3) - x_3)^2 + (y_o(t_3) - y_3)^2)}) \\ (2v \cos(\Omega_3)(x_3 - x_o(t_3)) + 2v \sin(\Omega_{N+1})(y_3 - y_o(t_3)))^{-1} \\ \forall i = 1, 2, \nu_i = -((x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2 + \beta e^{-\alpha((x_o(t_i) - x_i)^2 + (y_o(t_i) - y_i)^2)}) \\ -(x_c - x_{i+1})^2 - (y_c - y_{i+1})^2 - \beta e^{-\alpha((x_o(t_{i+1}) - x_{i+1})^2 + (y_o(t_{i+1}) - y_{i+1})^2)} \\ + \lambda_{i+1}^T(f_i - f_{i+1}). \\ .(2v \cos(\Omega_i)(x_i - x_o(t_i)) + 2v \sin(\Omega_i)(y_i - y_o(t_i)) - 2(x - x_o)x'_o(t_i) - 2(y - y_o)y'_o(t_i))^{-1}, \\ \lambda_3^T(t_3) = 2\nu_3((x_3 - x_o(t_3)) \ (y_3 - y_o(t_3)) \ 0) \\ \forall i = 1, 2, \lambda_i^T(t_i) = \lambda_{i+1}^T(t_i) + 2\nu_i((x_i - x_o(t_i)) \ (y_i - y_o(t_i)) \ 0). \end{array} \right.$$

3. Enfin, l'équation (4.76) conduit ici à :

$$\frac{dJ_i^0}{da_i} = -2\nu_i a_i,$$

qui est le gradient du critère.

De là, nous appliquons une méthode de descente pour déterminer la solution optimale à notre problème. Nous initialisons a_1 et a_2 respectivement à 1.08 et 1.30. Après trente-deux itérations, l'algorithme converge vers la solution optimale et donne finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1.1227 \\ a_2 = 1.3227 \\ J^0 = 22.9423. \end{array} \right.$$

Les figures 4.11 illustrent, à gauche, la trajectoire du robot avant optimisation et à droite, la trajectoire du robot après optimisation. L'algorithme a permis de rapprocher le robot de la cible. Numériquement, nous obtenons comme ordonnée finale pour le robot $y(t_3) = 2.6476$ avant optimisation et $y(t_3) = 2.5895$ après optimisation.

La mobilité de l'obstacle nous empêche de comparer nos résultats à ceux de [16]. Par la suite, il serait intéressant, pour cette application par exemple, de considérer une trajectoire plus complexe pour l'obstacle et également, d'étudier le cas où la cible n'est plus fixe mais est aussi mobile.

C. Remarque

Cette application à la robotique est l'occasion de souligner une limitation théorique pour l'algorithme proposé dans le théorème 4.3.10. En effet, celui-

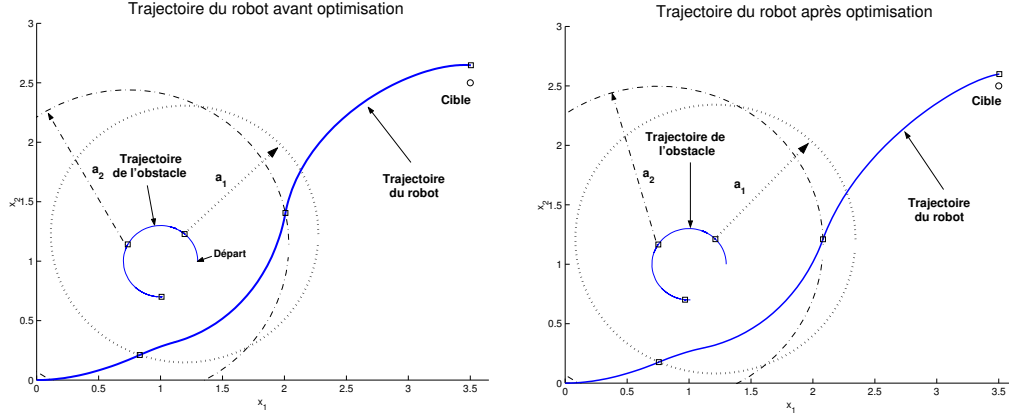


FIG. 4.11 – Trajectoires initiale (à gauche) et optimale (à droite) du robot devant éviter un obstacle mobile pour atteindre une cible fixe

ci a été obtenu sous l'hypothèse 4.3.2 qui suppose $\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i} f_{i|t_i} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t_i} \neq 0$, ce qui revient à dire que la trajectoire $x(t)$, solution de (4.34) ne tangente pas la surface mobile (4.33) à l'instant du contact. Cette situation correspond à une discontinuité du critère relative à la séquence des commutations considérées. En effet, d'un point de vue numérique, une commutation peut être "manquée" : la trajectoire $x(t)$ qui tangente $\Psi_i = 0$ peut "traverser" cette surface de façon fortuite, par exemple, par dépassement de la précision numérique retenue, ce qui revient à ne pas détecter la condition de commutation.

L'algorithme d'optimisation des surfaces de commutations fixes ou mobiles et l'utilisation d'une méthode de descente ont permis d'obtenir des résultats relativement satisfaisants pour nos problèmes. Cependant, l'usage de méthodes de tir et d'algorithmes dits de "détection" [47] pourrait nous donner la possibilité d'améliorer encore l'efficacité algorithmique et la précision.

Aussi, la comparaison des deux méthodes numériques et l'application de méthodes de tir sont des pistes de recherche pour la suite.

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Les paragraphes 2.1.2 et 2.1.3 ont eu pour but de répertorier, de façon non exhaustive, quelques applications liées au modèle mathématique général étudié et présenté au paragraphe 2.1.1. Ils soulignent ainsi la richesse des applications existant dans différents domaines industriels (thermique, électronique) et surtout étendus à plusieurs dimensions (ici, de la dimension un à la dimension six par exemple). Nous avons choisi, tout au long de l'exposé, l'application, assez originale et de dimension trois, du thermostat à résistance d'anticipation et celle, plus classique et de dimension quatre, du convertisseur statique. L'analyse de cette classe particulière de s.d.h. a été réalisée suivant le schéma 5.1.

Ainsi, après avoir introduit le modèle mathématique général, une méthode, différente de celle de [86], a été proposée pour la détermination des équations de cycles de n'importe quelle période k , $k \geq 1$ (paragraphe 2.2.1). Elle semble posséder l'avantage, sur la méthode présentée en [86], de prendre moins de temps avec le calcul formel et le logiciel *Maple*.

De plus, deux méthodes équivalentes (paragraphe 2.3.3) pour l'étude de la stabilité des cycles ont été présentées : la méthode de l'application de Poincaré adaptée aux systèmes hybrides, qui revient à calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne de l'application de Poincaré [23], [33] (paragraphe 2.3.2) et la méthode des transformations ponctuelles d'Andronov [49], qui revient, quant à elle, à calculer les racines d'un polynôme (paragraphe 2.3.1).

À partir de là, deux directions différentes ont été étudiées : d'une part celle des bifurcations et du chaos (chapitre 3), d'autre part, celle de l'optimisation

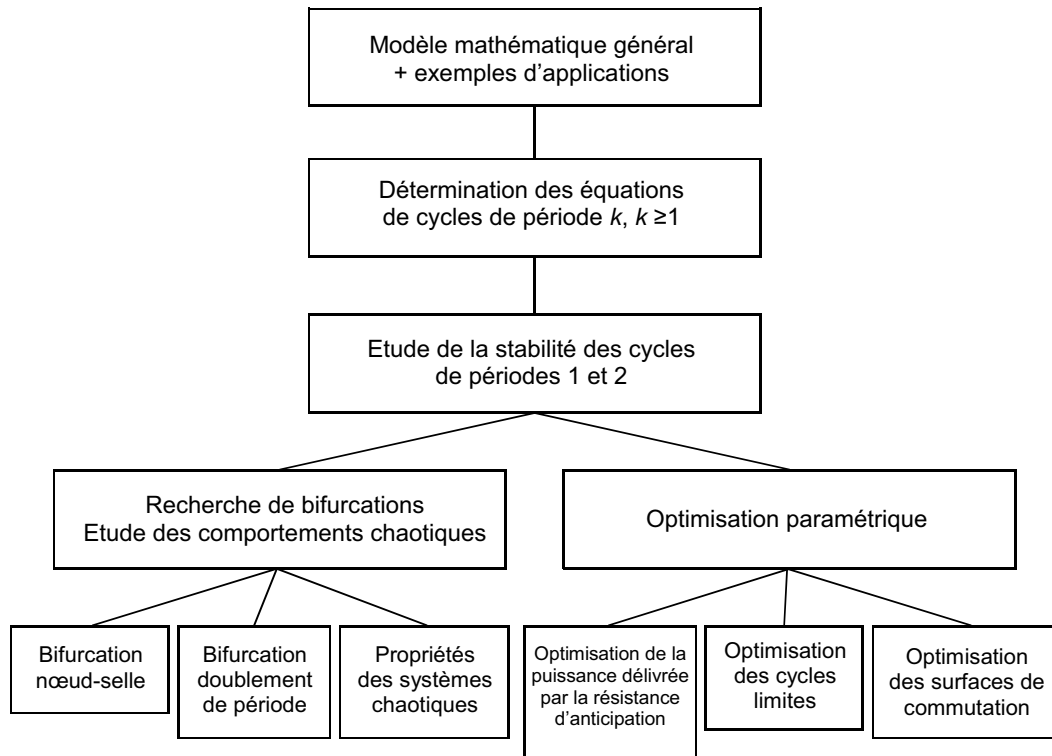


FIG. 5.1 – Schéma suivi lors de l'étude de la classe de s.d.h. régis par le système différentiel (2.1)

paramétrique (chapitre 4).

La première a permis de souligner l'existence de bifurcations pour le modèle mathématique étudié (paragraphe 3.1, 3.2) et aussi de vérifier certaines propriétés des systèmes chaotiques (paragraphe 3.3) comme la sensibilité aux conditions initiales (paragraphe 3.3.1 et 3.3.2).

La seconde nous a donné la possibilité de résoudre des problèmes d'optimisation d'intérêt industriel. Ainsi, une recherche des valeurs optimales de la puissance délivrée par la résistance d'anticipation (paragraphe 4.1) et des seuils de commutation du thermostat (paragraphe 4.2) a été réalisée. De plus, un algorithme d'optimisation de paramètres de contrôle de surfaces fixes ou mobiles a été développé (paragraphe 4.3). Il a ensuite pu être appliqué à l'optimisation des seuils du thermostat pour un mode de jour et un mode de nuit (paragraphe 4.3.4), à l'optimisation des temps de commutation pour une voiture à

deux rapports de transmission devant atteindre deux destinations différentes à la suite, en s'arrêtant à chaque fois, et ce en un minimum de temps (paragraphe 4.3.5). Enfin, la dernière application concerne l'optimisation des rayons d'un cercle, ce dernier étant la trajectoire d'un obstacle qu'un robot doit éviter en vue d'atteindre une cible fixe (paragraphe 4.3.6).

Ces travaux montrent donc l'intérêt de l'étude de cette classe particulière de s.d.h. en pointant le fait que, malgré une certaine simplicité du modèle, le système peut avoir des caractéristiques de systèmes chaotiques et également, faire l'objet de nombreux problèmes d'optimisation, intéressants d'un point de vue industriel et notamment, d'un point de vue économie d'énergie. Ces travaux offrent également de nombreuses pistes de recherche.

5.2 Perspectives

- **Concernant la partie analyse**, les conditions d'existence de commutation sur les seuils (paragraphe 2.4) semblent pouvoir être généralisées aux systèmes de dimension N , $N \geq 2$. Ceci permettrait de choisir, avant toute simulation, des valeurs numériques appropriées pour les paramètres et les seuils. De plus, il serait intéressant par la suite, de rechercher des cycles possédant une période supérieure à deux pour trouver, par exemple et si elles existent, des cascades de bifurcations de type doublement de période qui conduiraient le système à transiter vers une régime chaotique. Nous pourrions également réaliser une étude plus approfondie des bifurcations (par exemple, la recherche d'un troisième type de bifurcation, celle de Hopf-Andronov pourrait être faite) et du chaos (par exemple, certaines caractéristiques du système comme la transitivité ou l'ergodicité pourraient être mises en avant). Enfin, il serait aussi intéressant de confronter le système étudié, et en particulier celui du thermostat, à la réalité pratique en considérant cette fois-ci des perturbations et des incertitudes paramétriques (par exemple, une température extérieure non constante, des incertitudes sur les résistances).
- **Concernant la partie optimisation paramétrique**, en ce qui concerne l'optimisation des surfaces de commutation mobiles et son application au thermostat (paragraphe 4.3.4), il faudrait s'intéresser, de façon théorique, à la discontinuité à droite qui apparaît lors du passage du mode de chauffage de jour à celui de nuit et qui ne présente *a priori* pas de problème

avec la simulation numérique. Ceci pourrait être fait en s'appuyant sur les travaux de [31]. Pour l'application du robot devant éviter un obstacle (paragraphe 4.3.6), l'algorithme d'optimisation pourrait être relancé mais cette fois-ci, en considérant une trajectoire plus complexe que celle d'un cercle pour l'obstacle et une cible, non plus fixée, mais également mobile. De plus, refaire le travail d'optimisation en utilisant cette fois-ci des algorithmes dits de "détection" [47] et des méthodes de tir pourraient permettre de comparer l'efficacité de chacune des méthodes et ainsi d'améliorer la précision des résultats. Enfin, d'autres problèmes de contrôle optimal pourront être posés comme par exemple, le contrôle de chaos [70], et un supplément de théorie pourrait être apporté en se penchant notamment sur les travaux de [44], [52] et en adaptant les versions hybrides du principe du maximum de [4], [76] à nos problèmes.

Tous ces résultats et ceux présentés tout au long de cet exposé pourront trouver application sur d'autres systèmes industriels plus complexes que ceux du thermostat ou du convertisseur statique comme par exemple, le modèle du moteur pas à pas [3].

Références

- [1] A. Abate et A. Tiwari, *Box invariance of hybrid and switched systems*, ADHS, 2006.
- [2] K. Aihara, T. Takabe et M. Toyoda, *Chaotic Neural Networks*, Physics Letters A **144** (1998), 333–340.
- [3] F. Alin, B. Robert et C. Goedel, *Vers le contrôle du chaos dans le moteur pas à pas*, Colloque Electrotechnique du Futur (Gif-sur-Yvette, France), 2003.
- [4] A. Amadori, C. D’Apice, R. Manzo et B. Piccoli, *Hybridization of optimal control problems*, International Journal of Control **80** (2007), 268–280.
- [5] A.A. Andronov et C.E. Chaikin, *Theory of Oscillations*, Princeton University Press, 1949.
- [6] V.S. Anishchenko, *Dynamical Chaos - Models and Experiments. Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems*, Serie A, vol. 8, World Scientific, 1995.
- [7] P. Antsaklis, J.A. Stiver et M.D. Lemmon, *Hybrid system modelling and autonomous control systems*, Lectures Notes in Computer Science, Springer-Verlag, New York **736** (1993), 336–392.
- [8] R.C. Arkin, *Behavior Based Robotics*, The MIT Press Cambridge, 1998.
- [9] F. Bacconi, A. Casavola et E. Mosca, *Hybrid constrained formation flying control of micro-satellites*, ADHS, 2006.
- [10] G.-L. Baker et J.-P. Gollub, *Chaotic dynamics: an introduction*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1990.
- [11] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.

- [12] M.D. Di Benedetto, S. Di Gennaro et A. D’Innocenzo, *Critical states detection with bounded probability of false alarm and application to air traffic management*, ADHS, 2006.
- [13] A. Bensoussan et J.-L. Menaldi, *Hybrid Control and Dynamic Programming*, Discrete and Impulsive Systems **3** (1997), 395–442.
- [14] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, *L’espace chaotique*, Hermann, 1998.
- [15] M. Boccadoro, *Optimal Control of Switched Systems with applications to Robotics and Manufacturing*, Tesi di dottorato, Università degli Studi, Perugia, Italia, 2004.
- [16] M. Boccadoro, Y. Wardi, M. Egerstedt et E. Verriest, *Optimal Control of Switching Surfaces in Hybrid Dynamical Systems*, Discrete Event Dynamic Systems **15** (2005), 433–448.
- [17] A.E. Bryson et Y.C. Ho, *Applied Optimal Control*, Blaisdell Publishing Company, 1969.
- [18] B. Cébron, *Commande de systèmes dynamiques hybrides*, Thèse de doctorat, Université d’Angers, 2000, www.istia.univ-angers.fr/LISA/THESES/theses.html.
- [19] B. Cébron, M. Sechilariu, M. El Bagdouri et J. Burger, *Optimization of the Functioning of a Hybrid Dynamical System by a Fixed Point Method*, ADPM’2000, 2000.
- [20] J.-C. Culioli, *Introduction à l’optimisation*, Ellipses, Paris, 1994.
- [21] R. Cyssau, *Manuel de la régulation et de la gestion de l’énergie*, pyc ed., Association Confort Regulation, 1990.
- [22] H. Dang-Vu et C. Delcarte, *Bifurcations et chaos*, Ellipses, 2000.
- [23] M. Demazure, *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, 1989.
- [24] J-E. Dennis et R-V. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [25] R.L. Devaney, *Chaos, Fractals and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics*, Addison-Wesley, 1990.
- [26] P. Dupont, *Introduction à la géométrie*, De Boeck Université, 2002.
- [27] J.-P. Eckmann et D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Reviews of Modern Physics **57** (1985), 617–656.

- [28] M. Egerstedt, *Behaviour Based Robotics Using Hybrid Automata*, Lecture Notes in Computer Science: Hybrid Systems III Computation and Control (2000), 103–116.
- [29] M. El Bagdouri, B. Cébron, M. Sechilariu et J. Burger, *Variational Formalism Applied to the Control of Autonomous Switching Systems*, Control and Cybernetics **33** (2004), 535–549.
- [30] S.N. Elaydi, *An Introduction to difference equations*, 2nd ed., Springer, 1999.
- [31] A.F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [32] M. Gapaillard, *Optimal Control for a Class of Hybrid System via a Stochastic Method*, Proceedings of IEEE - ICCA, Montreal, 2003.
- [33] A. Girard, *Computation and Stability Analysis of Limit Cycles in Piece-wise Linear Hybrid Systems*, ADHS'2003 [Proc. of IFAC Conf.], 2003.
- [34] J. Gleick, *La théorie du chaos*, Champs Flammarion, 1991.
- [35] J. Guckenheimer et P.-J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 3rd ed., Springer, 1991.
- [36] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., SIAM, 2002.
- [37] S. Hedlund et A. Rantzer, *Convex Dynamic Programming for Hybrid Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **47** (2002), 1536–1540.
- [38] R.L. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, 1994.
- [39] I.A. Hiskens, *Stability of limit cycles in hybrid systems*, Proc. Hawai Int. Conf. on System Science, 2001.
- [40] T.M. Janaki et G. Rangarajan, *Computation of the Lyapunov spectrum for continuous-time dynamical systems and discrete maps*, Physical review E **60** (1999), 6614–6626.
- [41] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit et E. Walter, *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation*, Springer-Verlag, 2001.
- [42] J.-C. Jolly et C. Quémard, *Optimal Control Applied to Optimization of Mobile Switching Surfaces. Part I: Algorithm*, ICINCO, Barcelone, 2005.
- [43] Y.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, 2004.

- [44] G. Leitmann, *The Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer, 1981.
- [45] Z. Liao et F. Parand, *Develop a Dynamic Model of Gas and Oil Burned Boilers for Optimization of Boiler Control in Central Heating Systems*, IBPSA, Canada, 2002.
- [46] Y.H. Lim et D.C. Hamill, *Problems of computing Lyapunov exponents in power electronics*, International Symposium on Circuits and Systems, Orlando FL **5** (1999), 297–301.
- [47] P. Martinon et J. Gergaud, *Using switching detection and variational equations for the shooting method*, Optimal Control, Applications and Methods **28** (2007), 95–116.
- [48] A.S. Matveev et A.V. Savkin, *Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems*, Springer, 2000.
- [49] M. Meerov, Y. Mikhailov et V. Fiedman, *Principes de la commande automatique*, Mir, 1979.
- [50] F.C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics*, John Wiley & Sons, 1992.
- [51] P.C. Müller, *Calculation of Lyapunov Exponents for Dynamic Systems with Discontinuities*, Chaos, Solitons and Fractals **5** (1995), 1671–1681.
- [52] L.W. Neustadt, *Optimization: A Theory of Necessary Conditions*, Princeton University Press, 1976.
- [53] H.-O. Peitgen, H. Jurgens et D. Saupe, *Chaos and Fractals*, Springer-Verlag, 1992.
- [54] H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Mathematica **13** (1890), 1–270.
- [55] E. Polak, *Optimization*, Springer, 1997.
- [56] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkriedze et E.F. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, 1962.
- [57] C. Quémard, *Analysis of a Class of Hybrid Dynamical Systems with Hysteresis Phenomenon*, Numan (Numerical Analysis), Kalamata, 2007.
- [58] C. Quémard et J.-C. Jolly, *Optimal Control Applied to Optimization of Mobile Switching Surfaces. Part II: Applications*, ICINCO, Barcelone, 2005.

- [59] ———, *Optimisation de cycles limites. Application à un processus thermique*, JDMACS, Lyon, 2005.
- [60] ———, *Bifurcation doublement de période pour une classe particulière de systèmes dynamiques hybrides à commutations autonomes*, Congrès SMAI, Praz-sur-Arly, 2007.
- [61] C. Quémard, J.-C. Jolly et J.-L. Ferrier, *Search for Period-2 Cycles in a Class of Hybrid Dynamical Systems with Autonomous Switchings. Application to a Thermal Device*, ADHS'2006, Alghero, 2006.
- [62] ———, *Mathematical Study of a Thermal Process as a Hybrid Dynamical System*, IMACS'2005 World Congress, Paris, 2005.
- [63] ———, *Search for Cycles in Piecewise Linear Hybrid Dynamical Systems with Autonomous Switchings. Application to a Thermal Device*, IMACS'2005 World Congress, Paris, 2005.
- [64] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, séries et équations différentielles*, Masson, 1977.
- [65] C. Robinson, *Dynamical Systems*, 2nd ed., CRC Press, 1999.
- [66] J.-F. Saccadura, *Initiation aux transferts thermiques*, Lavoisier, 1998.
- [67] A.V. Savkin et R.J. Evans, *Hybrid Dynamical Systems*, 1st ed., Birkhäuser Boston, 2002.
- [68] ———, *Hybrid Dynamical Systems Controller and Sensor Switching Problems*, Springer, 2002.
- [69] R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice Hall, 1983.
- [70] H.G. Schuster, *Handbook of Chaos Control*, Wiley-VCH, 1998.
- [71] ———, *Deterministic Chaos*, Wiley-VCH, 2006.
- [72] A.M. Selvam et S. Fadnavis, *A Superstring Theory for Fractal Spacetime, Chaos and Quantumlike Mechanics in Atmospheric Flows*, Chaos, Solitons and Fractals **10** (1998), 1321–1334.
- [73] I. Shimada et T. Nagashima, *A numerical approach to ergodic problems of dissipative dynamical systems*, Progress of Theoretical Physics **61** (1979), 1605–1616.
- [74] S. Simic, K.H. Johansson, J. Lygeros et S. Sastry, *Hybrid limit cycles and hybrid Poincaré-Bendixon*, IFAC World Congress, Barcelone, 2002.

- [75] J.M. Smith et R.J. Cohen, *Simple Finite-Element Model Accounts for Wide Range of Cardiac Dysrhythmias*, National Academy of Sciences of the United States of America **81** (1984), 233–237.
- [76] H.J. Sussmann, *A very non-smooth maximum principle with state constraints*, IEEE Decision and Control Conference, 2005.
- [77] C. Tomlin, G.J. Pappas et S. Sastry, *Conflict Resolution for Air Traffic Management: A Study in Multiagent Hybrid Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **43** (1998), 509–541.
- [78] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie & applications*, Mathématiques concrètes, Vuibert, 2005.
- [79] YA. Tsypkin, *Relay Control Systems*, Cambridge University Press, 1984.
- [80] A. Van Der Schaft et H. Schumacher, *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, Springer, 1999.
- [81] P.F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population poursuit son accroissement*, Correspondance mathématique et physique **10** (1838), 113–121.
- [82] S. Wermter, *Hybrid Neural Systems*, Springer, 2000.
- [83] A. Wolf, J.B. Swift, H.J. Swinney et J.A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica D **16** (1985), 258–317.
- [84] J.A. Yorke, T.D. Sauer et K.T. Alligood, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1997.
- [85] J. Zaytoon, *Systèmes dynamiques hybrides*, Hermes, 2001.
- [86] Z. Zhusubaliyev et E. Mosekilde, *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*, Nonlinear Science, vol. 44, World Scientific, 2003.

