



**HAL**  
open science

# Mélange et circulation océanique : une approche par la physique statistique.

Antoine Venaille

► **To cite this version:**

Antoine Venaille. Mélange et circulation océanique : une approche par la physique statistique.. Physique [physics]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT : . tel-00347063

**HAL Id: tel-00347063**

**<https://theses.hal.science/tel-00347063>**

Submitted on 13 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1  
Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels

Thèse

*En vue d'obtenir le grade de*

Docteur de l'Université de Grenoble 1 – Joseph Fourier  
Spécialité : Géophysique

Au titre de l'école doctorale Terre-Univers-Environnement

*Présentée et soutenue publiquement le 1er décembre 2008*

par Antoine VENAILLE

# Mélange et circulation océanique : une approche par la physique statistique

Directeurs de thèse : Freddy BOUCHET  
Joël SOMMERIA

Après avis de : Xavier CARTON  
Alain PUMIR

Devant la commission d'examen formée de :

Freddy	BOUCHET	(membre/directeur)
Xavier	CARTON	(membre/rapporteur)
Henk	DIJKSTRA	(membre)
Bernard	LEGRAS	(membre/président)
Alain	PUMIR	(membre/rapporteur)
Joël	SOMMERIA	(membre/directeur)
Hugo	TOUCHETTE	(membre)



---

Je tiens à remercier Alain Pumir et Xavier Carton d’avoir accepté la (pénible) tâche d’être rapporteur de cette thèse, ainsi que Bernard Legras, Henk Dijkstra et Hugo Touchette pour l’intérêt qu’ils ont porté à ce travail.

Je ne saurais assez remercier mes deux directeurs de thèse, Freddy Bouchet et Joel Sommeria, pour leur encadrement et leur soutien pendant ces trois années. Tout d’abord, ils m’ont proposé un sujet de thèse particulièrement stimulant. Ensuite, les résultats exposés dans ce manuscrit doivent tout à l’acuité et au recul du regard qu’ils portent sur les phénomènes physiques (et sur nos pratiques de physiciens). Sur le plan personnel, leurs encouragements, leur confiance et nos fréquentes discussions ont été essentiels. Mais surtout, j’espère avoir été à la hauteur de leur engagement dans cette thèse en ayant appris à leur contact à ne pas me satisfaire de “ce qui est bien connu”.

Des cours sur les solitons (à l’ENS Lyon) aux conférences sur la longue portée (à l’Ecole d’été des Houches), le travail de Thierry Dauxois a contribué de manière non négligeable à ma formation -outre l’immense plaisir que j’ai toujours à le rencontrer. Je lui dois de m’être tourné vers les écoulements géophysiques lors de mon année de DEA : ce sont ses conseils qui ont déterminé le choix de mon sujet de thèse.

Une grande partie des résultats théoriques présentés dans cette thèse doivent beaucoup aux calculs numériques réalisés avec ou par Eric Simonnet, même s’ils n’apparaissent pas explicitement dans le manuscrit. Je le remercie pour son aide et sa patience, ainsi que pour toutes les discussions que nous avons eues.

Je remercie Julien Le Sommer pour le temps qu’il a consacré à toutes mes interrogations sur les modèles numériques d’océans, et pour son accueil dans l’équipe MEOM. C’est de nos discussions qu’est né mon intérêt pour les approches “réalistes”.

Il m’est agréable de remercier les divers membres de l’équipe Coriolis. J’ai bénéficié des conseils de Chantal Staquet, Achim Wirth et Jan-Bert Flor, qui m’ont indiqué des références bibliographiques toujours très pertinentes. Enfin, l’enthousiasme de Louis Gostiaux pour l’océanographie “observationnelle” a été très communicatif. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Henri Didelle et Samuel Viboud ; les remercier pour la partie expérimentale de la thèse serait oublier les aides de toute sorte qu’ils ont pu m’apporter.

J’ai bénéficié d’échanges particulièrement riches et importants avec Pierre-Henri Chavanis et Emmanuel Villermeaux. Je leur adresse tous mes sincères remerciements.

---

Je remercie Ana Carolina Ribeiro-Teixeira pour sa relecture très détaillée de l'article sur la thermodynamique des écoulements 2D, dans la suite de nos discussions sur l'inéquivalence d'ensemble aux Houches. Une autre lecture de ce même article par Marianne Corvellec en a grandement amélioré l'anglais.

J'adresse mes remerciements à Julien Barré et Hugo Touchette, dont les thèses ont été pour moi un modèle de clarté et de pédagogie.

Je remercie également Amélie Gagnaire et Philippe Kramer qui ont effectué leurs stages de Licence sur les problèmes de mélange. Une partie du chapitre sur le mélange d'un traceur passif s'appuie sur leur travail.

Et je tiens enfin à remercier Sylvie Champavier à Grenoble, Nathalie Hamel et Isabelle Potier à Nice, ainsi que le personnel de la reprographie du LEGI pour le volet administratif de cette thèse.

Les discussions avec Damien Sous sur l'océanographie côtière (et bien plus) m'ont toujours passionné. Je le remercie pour ses encouragements et conseils. Merci aussi à Pierre Recouvreux, Sebastien Kawka, Lionel Jimenez, Mattia Romani, Karim Bouadim, Laurent Beaudou, Damien Pous, et tout ceux qui m'ont accompagné durant ces trois années.

Enfin, de Sintra à Assise, de Swann à Ignacio, nous avons découvert des possibles et des mondes qui vont bien au-delà d'un travail de fourmi réalisé pendant ces trois années de thèse. Comment ne pas remercier celle qui m'est si chère.

---

# Table des matières

---

Table des matières	iii
Nomenclature	vi
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Mécanique statistique d'écoulements océaniques</b>	<b>15</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>17</b>
1.1 Modèles quasi-géostrophiques . . . . .	18
1.2 Études antérieures des modèles d'océans QG . . . . .	28
1.3 Mécanique statistique des écoulements quasi-géostrophiques	33
1.4 Motivations et méthode pour l'étude des jets inertiels dirigés vers l'est . . . . .	40
<b>2 Jets intenses dirigés vers l'est dans un domaine fermé</b>	<b>45</b>
2.1 Jets intenses pour un modèle équivalent barotrope . . . . .	45
2.2 Équilibres statistiques pour un modèle à deux couches. . . . .	54
2.3 Conclusion et perspectives . . . . .	68
2.A Annexe : calcul des perturbations du jet . . . . .	70
2.B Annexe : l'algorithme de Turkington et Whitaker . . . . .	74
<b>3 Critères de stabilité : application aux jets dirigés vers l'est</b>	<b>77</b>

3.1	Classical criteria for stability, with an extension . . . . .	78
3.2	Application : linear stability of an eastward jet in a channel . . . . .	92
3.3	Propagation of a PV front . . . . .	99
3.4	Conclusion . . . . .	108
3.A	Annex : diagonalization of $\delta^2 H_C$ with the linear constraint . . . . .	111
3.B	Annex : asymptotic expansion of the stationary solution . . . . .	112
3.C	Annex : computation of the (generalized) eigenvalues of $\mathcal{H}_k$ . . . . .	114
3.D	Annex : linearized evolution of the PV front . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Inéquivalence d'ensemble et transitions de phases dans les écoulements bidimensionnels</b> . . . . .	<b>117</b>
4.1	Thermodynamique des systèmes à interaction à longue portée . . . . .	118
4.2	Résultats antérieurs et objectifs . . . . .	128
4.3	Thermodynamics of two-dimensional and Fofonoff flows . . . . .	130
4.4	Conclusion . . . . .	164
<b>II</b>	<b>Approche phénoménologique du mélange</b> . . . . .	<b>165</b>
<b>5</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>167</b>
5.1	Résultats expérimentaux antérieurs . . . . .	168
5.2	Approches phénoménologiques du mélange en fluide stratifié . . . . .	172
5.3	Objectifs et méthode . . . . .	177
<b>6</b>	<b>Le mélange turbulent comme un processus d'auto-convolution</b> . . . . .	<b>179</b>
6.1	Modèles . . . . .	180
6.2	Tests des modèles . . . . .	192
<b>7</b>	<b>Une approche statistique du mélange dans les fluides stratifiés</b> . . . . .	<b>203</b>
7.1	Profils d'équilibre statistique pour la densité du fluide . . . . .	204
7.2	Equations de relaxation . . . . .	209
7.3	Ajout d'un terme de dissipation des fluctuations de la PDF . . . . .	214
7.4	Perspective : fermeture du système avec une équation d'évolution pour l'énergie cinétique . . . . .	219
7.5	Conclusion et perspectives . . . . .	221

---

Conclusion générale et perspectives	223
Bibliographie	229

## Nomenclature

### Abréviations

QG	quasi-géostrophique
PDF	distribution de probabilité
PV	vorticité potentielle
RSM	Robert-Sommeria-Miller (théorie statistique)

### Symboles, partie I

$x$	coordonnée spatiale dirigée vers l'est
$y$	coordonnée spatiale dirigée vers le nord
$z$	coordonnée spatiale dirigée vers le haut
$q(x, y, t)$	champ microscopique de PV
$\sigma$	niveau de PV
$\rho(x, y, \sigma)$	PDF de mesurer le niveau $\sigma$
$p(x, y)$	<i>idem</i> pour un système à deux niveaux
$\bar{q}(x, y)$	champ macroscopique de PV
$\psi(x, y)$	fonction courant
$h(x, y)$	topographie
$\beta_c$	paramètre du plan bêta (variation de la force Coriolis)
$R$	rayon de déformation de Rossby
$\Gamma$ et $\mathcal{C}[q]$	circulation
$E$ et $\mathcal{E}[q]$	énergie
$\beta$ ou $C/R^2$	paramètre de Lagrange associé à l'énergie
$\gamma$	paramètre de Lagrange associé à la circulation
$\mathcal{S}_{BG}[\rho], \mathcal{S}[q], S(E, \Gamma)$	entropie de mélange, généralisée, et d'équilibre

---

## Symboles, partie II

$x, y$	coordonnées horizontales
$z$	coordonnée verticale, dirigée vers le haut
$\sigma$	concentration en traceur (colorant ou densité réduite)
$\rho(z, \sigma, t)$	PDF de mesurer le niveau $\sigma$
$p(z, t)$	<i>idem</i> pour un système à deux niveaux
$\bar{\sigma}(z)$	profil moyen de densité réduite
$e$	énergie cinétique turbulente
$l$	échelle caractéristique de l'écoulement
$s$	taux d'étirement turbulent



---

# Introduction générale

---

*La paramétrisation et la compréhension de l'effet des petites échelles – non résolues par les modèles numériques – sur les grandes échelles de la circulation océanique est un problème important, tant d'un point de vue pratique que théorique.*

*D'une part, l'énergie des fluctuations de vitesse peut être transférée vers les grandes échelles (horizontales) de la circulation océanique, et s'organiser en structures cohérentes. Dans ce cadre, nous nous demanderons d'abord si des modèles simples d'océans peuvent rendre compte de cette organisation à grande échelle. D'autre part, la stratification verticale globale des océans dépend d'événements de mélanges locaux, que nous tenterons de modéliser en nous appuyant sur une approche phénoménologique.*

*Dans les deux cas, le nombre de degrés de liberté est très élevé. La structure fine de ces écoulements ne peut être prédite en détail. Cela incite à étudier ces deux problèmes par une approche statistique.*

*De manière générale, l'étude des écoulements océaniques peut être abordée par : **i**) les observations, in situ ou par satellites, **ii**) les modèles numériques "réalistes" de circulation générale, **iii**) les idéalizations expérimentales, théoriques ou numériques de processus physiques ciblés, pris indépendamment des autres mécanismes. C'est ce dernier point de vue que nous avons choisi d'adopter. Dans ce cadre, un petit nombre de paramètres est isolé. Les modèles étudiés donnent alors une image très simplifiée de la réalité. Dans certains cas, des ingrédients essentiels de la dynamique océanique sont délibérément omis. Mais cette simplification est requise si nous voulons comprendre le système en détail.*

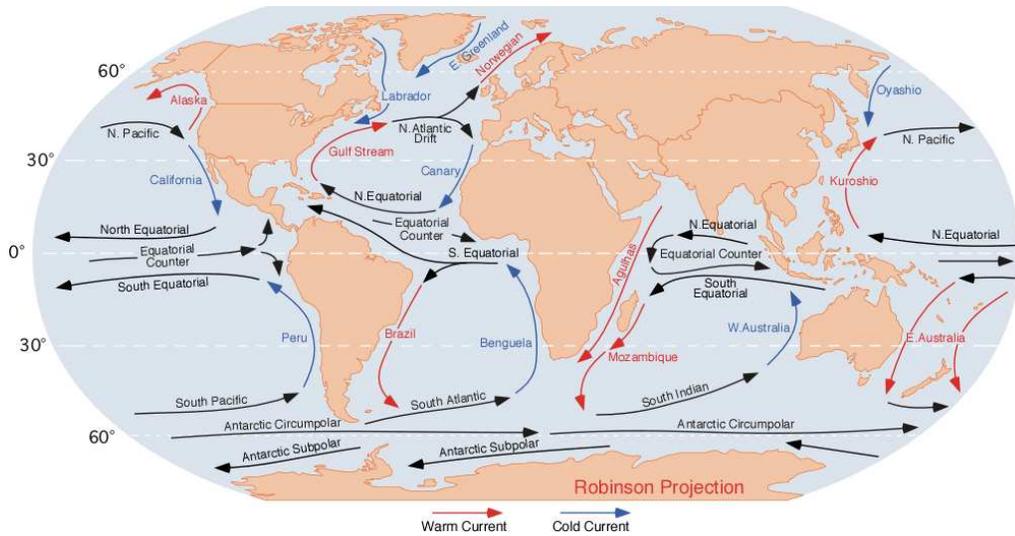


FIG. 0.1: Carte des courants océaniques de surface [1]

## L'organisation des courants océaniques en structures cohérentes à grande échelle

Le fait qu'il soit possible de tracer des cartes de courants océaniques de surface implique que ces écoulements sont organisés en structures cohérentes à grande échelle (voir figure 0.1). Malgré une importante variabilité<sup>1</sup>, cette organisation est robuste sur des échelles temporelles supérieures à la centaine d'années. On dispose par exemple de cartes du Gulf Stream dessinées par Franklin au XVIIIe siècle. Aux moyennes latitudes, une particularité remarquable de cette organisation est l'existence de **jets intenses (c'est-à-dire localisés et forts) de milieu de bassin dirigés vers l'est** : c'est le cas du Gulf Stream, du Kuroshio, et du courant antarctique circumpolaire.

Prenons par exemple le Gulf Stream, dans l'Atlantique nord (voir figure 0.2), ou le Kuroshio, dans le Pacifique nord. Ce sont des courants confinés dans la partie supérieure des océans, sur une profondeur  $H \sim 1000 \text{ m}$ . Ils sont caractérisés par une longueur  $L \sim 2000 \text{ km}$ , une largeur  $R \sim 50 \text{ km}$ , et des vitesses de l'ordre de  $U \sim 1 \text{ m.s}^{-1}$ .

<sup>1</sup>L'énergie des courants moyens est inférieure à l'énergie des fluctuations autour de ces courants.

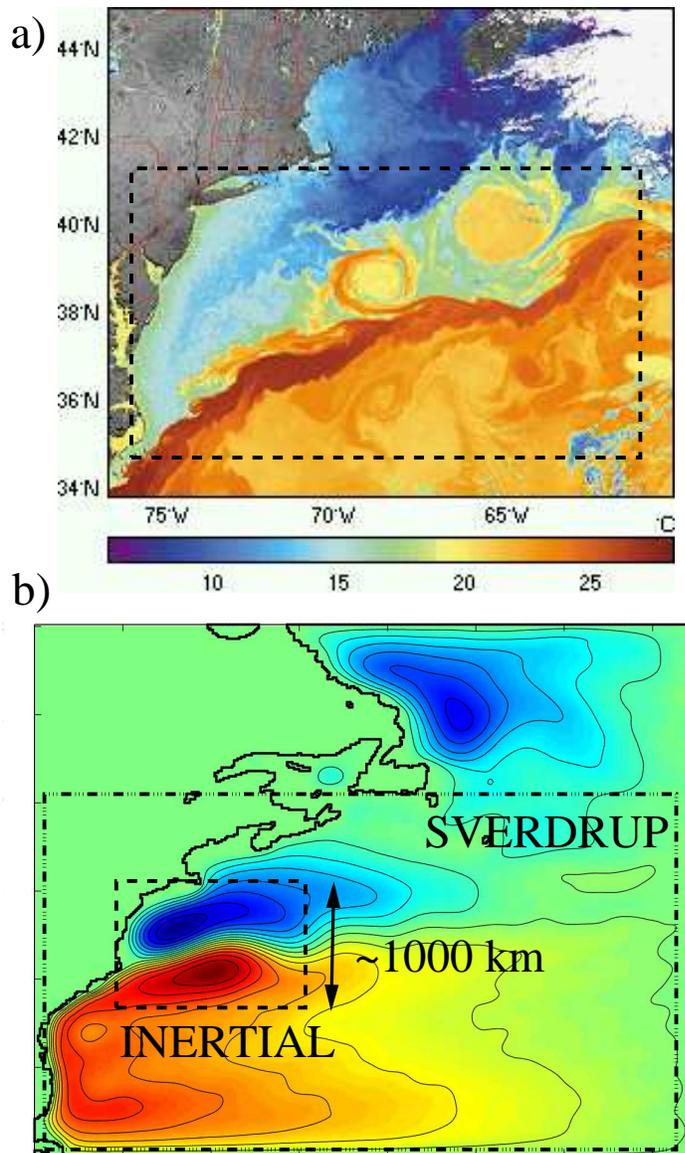


FIG. 0.2: **a)** Champ de température de surface (considéré ici comme étant représentatif de l'écoulement) dans l'Atlantique nord, visualisé par imagerie satellite [2]. On distingue clairement un jet dirigé vers l'est (le Gulf Stream), et une forte variabilité autour de ce jet (filamentations, méandres et anneaux). **b)** lignes de courant moyennée sur un an, pour un modèle numérique de complexité "intermédiaire" [3]. On distingue deux régions (imbriquées) : **b-i)** les gyres subtropicales et subpolaires, où l'équilibre de Sverdrup est bien vérifié **b-ii)** une zone inertielle, caractérisée un courant fort dirigé vers l'est. Dans cette zone, l'équilibre de Sverdrup n'est pas vérifié. Les cadres en "tirets" représentent la même région géographique sur les figures a) et b).

## 0. INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

Estimons le débit de ces courants :  $D = UHR \sim 50 Sv$ . Nous considérons ici le Sverdrup comme unité de mesure des débits :  $1 Sv = 10^6 m^3.s^{-1}$ . Pour comparaison, l'ensemble des rivières et fleuves du monde se jetant dans l'océan a un débit de  $1Sv$ . On voit que le **débit de ces jets vers l'est est très élevé**. Ces structures jouent de fait un rôle important dans la circulation océanique globale, et dans les processus d'interaction avec l'atmosphère.

**Ces écoulements sont turbulents** : si l'on considère que la distance caractéristique de ces écoulements est donnée par la largeur du Gulf Stream (et du Kuroshio)  $\sim 50km$ , on obtient un nombre de Reynolds  $Re = RU/\nu \sim 10^{10}$ . L'observation de la dynamique fine de ces écoulements révèle toute une variété de structures inertielles (i.e. ne dépendant pas du forçage et de la dissipation) : on distingue sur la figure 0.2-a) la création de filaments à petite échelle, la formation de méandres autour du jet, et d'anneaux d'environ  $200 km$  de diamètre. Les échelles de temps caractéristiques de ces structures sont de l'ordre de la semaine ou du mois.

On représente figure 0.2-b les courants de surface dans l'Atlantique nord, moyennés sur un an, obtenus par des simulations numériques d'un modèle d'océan quasi-géostrophique à trois couches, forcé par les vents en surface. Nous reviendrons ultérieurement sur la signification de ces modèles. On distingue clairement une zone inertielle où le Gulf Stream se détache du bord ouest, sous la forme d'un jet intense dirigé vers l'est (cadre en tirets intitulé "Inertial").

De part et d'autre du Gulf Stream (et du Kuroshio), il existe de grandes structures de circulation refermées sur elles-mêmes : le gyre subtropical (un monopole anticyclonique) et le gyre subpolaire (un monopole cyclonique). Ces gyres ont des extensions horizontales de l'ordre de  $\sim 5000 km$ , et sont fortement asymétriques (cadre en tirets intitulé "Sverdrup"). Prenons par exemple le gyre subtropical : les vitesses sont faibles ( $\sim 1 cm.s^{-1}$ ), principalement dirigées vers le sud, sauf le long du bord ouest de l'océan, où a lieu la majeure partie de la recirculation vers le nord sous la forme d'un courant intense. De même, le gyre subpolaire est caractérisé par des vitesses dirigées vers le nord, sauf le long du bord ouest où se trouve un fort courant de recirculation dirigé vers le sud.

L'existence des gyres est bien expliquée par les approches "classiques" de la circulation océanique [91, 89], qui ne considèrent que l'effet du forçage

---

par les vents (par un équilibre de Sverdrup) et de la dissipation.

En revanche, la partie inertielle du courant ne peut être décrite dans le cadre de ces approches, qui négligent les termes non-linéaires des équations du mouvement, et qui ne prennent donc pas en compte la nature turbulente des océans.

**C'est précisément cette partie inertielle des courants qui nous intéressera dans la première partie de cette thèse : nous négligerons l'effet du forçage et de la dissipation. La motivation principale de cette approche est la description des jets intenses dirigés vers l'est, et de la dynamique qui leur est associée.**

Précisons que les **courants océaniques de surface**, i.e. d'épaisseur  $H \sim 1000m$ , **sont quasi-horizontaux**. Les vitesses caractéristiques verticales de ces courants  $w \sim 1.10^{-3}m.s^{-1}$  sont bien plus faibles que les vitesses horizontales des structures que nous venons de présenter. Cela est dû à plusieurs effets :

1. **La stratification stable** qui limite les mouvements verticaux et confine l'écoulement en couches horizontales. On représente figure 0.3 un profil vertical de densité, caractéristique de la partie supérieure des océans, issu d'observations *in situ*, et un schéma de la structure verticale des océans figure 0.4.
2. **Le faible rapport d'aspect** entre les longueurs caractéristiques verticales et horizontales des courants. Par exemple, on distingue figure 0.4 la couche mélange (entre 10 et 300  $m$ ), la thermocline (qui désigne une variation de la densité due à une diminution de la température, autour de 1000  $m$ ), et l'océan profond ( $\sim 4 km$ ). Ces longueurs sont à comparer avec l'extension latérale des courants représentés figure 0.1.
3. **La forte rotation**. À grande échelle les écoulements océaniques sont dominés par la force de Coriolis, qui est compensée par un gradient horizontal de pression (équilibre géostrophique). Ceci tend à corrélérer verticalement les mouvements des différentes couches (effet Proudman-Taylor).

Enfin, **le nombre de degrés de liberté de ces écoulements est très élevé** : le rapport entre les plus grandes échelles de l'écoulement  $\sim 1000km$  et les échelles de dissipation visqueuse ou de diffusivité moléculaire  $\sim 1mm$  est de l'ordre de  $10^9$ . Si l'on considère naïvement que ce rapport donne la

taille de cellules élémentaires évoluant par une dynamique inertielle quasi bidimensionnelle, on obtient un nombre de degré de liberté  $\sim 10^{18}$ .

L'existence de **structures cohérentes à grande échelle** (i.e. la partie "inertielle" des jets dirigés vers l'est), de certaines **propriétés de mélange** conférées par la turbulence, et d'un **grand nombre de degrés de liberté**, incite à étudier ces problèmes du **point de vue de la physique statistique**.

### Une approche par la mécanique statistique

D'après ce qui précède, les écoulements océaniques de surfaces qui nous intéressent peuvent être considérés à l'ordre le plus bas comme étant quasi 2-D. Or les écoulements 2-D turbulents ont la propriété de s'organiser spontanément en **structures cohérentes à grandes échelles**, tout en créant des filaments de plus en plus fins à petite échelle. Il est dès lors possible de distinguer un **champ macroscopique** décrivant le courant à grande échelle, d'un **champ microscopique** décrivant la structure fine de l'écoulement. Étant donné le nombre élevé de degrés de liberté, il serait illusoire de chercher à décrire la dynamique du champ microscopique.

Il existe en revanche une théorie statistique, proposée par Robert et Sommeria [99], et indépendamment par Miller [81], qui explique et prédit l'organisation des grandes échelles (i.e. de l'état macroscopique) d'un écoulement 2-D en structures cohérentes. Il s'agit d'une mécanique statistique du mélange de la vortacité<sup>2</sup>.

La spécificité d'une telle approche est de réduire un problème initialement compliqué (la dynamique turbulente d'un écoulement) à l'étude d'un petit nombre de paramètres qui gouvernent la structure des grandes échelles de l'écoulement.

Le premier champ d'application de ces idées fut l'organisation de l'atmosphère jovienne. En particulier, la forme de la tâche rouge de Jupiter [19], et sa position dans l'hémisphère sud [123] ont été expliquées avec succès par la mécanique statistique d'équilibre.

---

<sup>2</sup>ou de la vorticité potentielle dans le contexte des écoulements géophysiques

---

L'application de cette théorie aux écoulements océaniques constitue un enjeu majeur dans ce domaine. Comme le Gulf Stream et le Kuroshio sont dominés par la dynamique inertielle (dans la zone où ces courants sont des jets intenses dirigés vers l'est), il est pertinent de se demander s'ils peuvent être interprétés comme des états d'équilibre statistique de la théorie Robert-Sommeria-Miller.

Une étape préalable à cette étude est de trouver des solutions inertielles qui présentent un jet intense de milieu de bassin dirigé vers l'est.

L'étude de certaines solutions stationnaires de modèles simples inertiels remonte à **Fofonoff, en 1954**, indépendamment du contexte de la mécanique statistique [51]. Ces solutions ont joué un rôle historique dans ce domaine, et sont présentées dans de nombreux livres d'océanographie [89]. Nous les présenterons plus en détail au chapitre suivant. Mentionnons simplement que les écoulements décrits par Fofonoff sont caractérisés par un courant faible et dirigé vers l'ouest à l'intérieur du bassin océanique, et des jets de recirculation dirigés vers l'est le long des frontières nord et sud du bassin. La structure de ces écoulements est donc très différente des courants inertiels observés dans l'océan.

La solution de Fofonoff est obtenue dans un cas particulier (limite des faibles énergies, pour une relation linéaire entre vorticité potentielle et fonction courant). **De manière surprenante, il n'existe à notre connaissance pas d'étude ayant cherché à généraliser ce type de solutions**, notamment pour des relations non-linéaires entre la vorticité potentielle et la fonction courant.

L'objectif de la première partie de cette thèse sera **i) de déterminer s'il existe des solutions inertielles présentant un jet dirigé vers l'est ii) d'étudier la stabilité et la dynamique de ces solutions iii) de déterminer si ce sont des états d'équilibre statistique.**

## **Intérêt de la mécanique statistique pour paramétrer l'effet des petites échelles**

L'énergie cinétique des courants océaniques de surface est dominée par la variabilité autour des courants moyens : cette énergie est en effet "portée" par les structures méso-échelles, dont les échelle caractéristiques de longueur

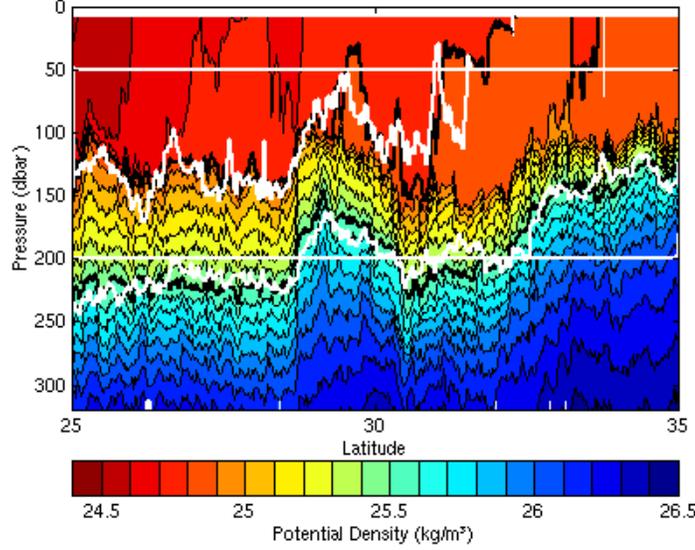


FIG. 0.3: Coupe verticale de la partie supérieure de l’océan pacifique (campagne de mesure *spice*), le long du méridien 140W [47]. On distingue la couche supérieure de mélange ( $\sim 100m$ ) au dessus de la thermocline, plus stratifiée ( $1 \text{ dbar} = 1 \text{ m}$ ). Les lignes blanches droites représentent les isobares à 50 et 200 *dbar*. Les lignes noires épaisses sont les isopycnés à  $24.8$  et  $25.5 \text{ kg/m}^3$ . Les lignes blanches épaisses sont des mesures de densité potentielle (c’est-à-dire la densité ramenée à une hauteur de référence) le long de ces deux isopycnés.

varient entre  $20 \text{ km}$  et  $200 \text{ km}$ .

Or cette variabilité ne peut être décrite dans le cadre de la mécanique statistique **d’équilibre** : cette théorie prédit l’organisation des écoulements à grande échelle, mais ne donne pas d’indication sur la dynamique à petite échelle. L’intérêt de la mécanique statistique d’équilibre des écoulements 2-D réside dès lors plus dans la compréhension des mécanismes physiques liés à l’organisation inertielle de ces écoulements à grande échelle que dans les paramétrisations qu’elle pourrait suggérer pour des modèles réalistes.

En revanche, les idées de mécanique statistique à l’équilibre ont inspirées des modèles **phénoménologiques hors équilibre**. Par exemple, Robert et Sommeria ont proposé des équations de relaxation vers l’équilibre pour les écoulement 2-D [100]. Ces équations maximisent la production d’entropie du système, tout en conservant les contraintes de la dynamique non visqueuse. Cette approche a été appliquée dans le contexte océanique par

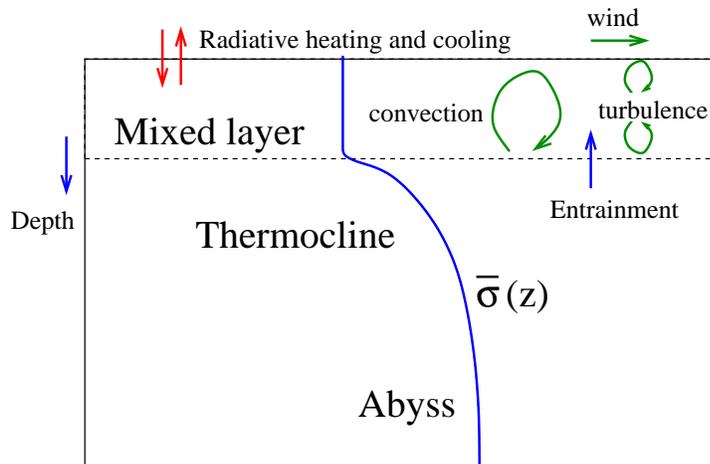


FIG. 0.4: Représentation schématique des processus de mélange dans l’océan, d’après [77]. On distingue trois régions dans le profil de densité  $\bar{\sigma}$  : i) la couche de mélange, homogène et turbulente, dont l’épaisseur varie en fonction des forçage (vent, convection...) ii) la thermocline, caractérisée par une brusque variation de la température iii) l’océan profond.

Kazantsev *et al* [66]. L’intérêt d’une description statistique pour décrire l’effet des structures méso-échelles sur l’organisation des écoulements à grande échelle avait auparavant été souligné par Holloway [58]. Puisque ces structures méso-échelles sont de mieux en mieux résolues par les modèles numériques d’océans, leur paramétrisation présente désormais moins d’intérêt.

Toutefois, **ces approches statistiques phénoménologiques pourraient être appliquées à la description du mélange turbulent (à petite échelle) des masses d’eau de densités différentes**. Il ne s’agit plus ici de décrire l’organisation de la vorticité potentielle dans un écoulement 2-D, mais de s’intéresser à la structure verticale des couches de mélange océanique, en décrivant les distributions de **densité du fluide** à différentes profondeurs. C’est ce qui a motivé les travaux de la seconde partie de cette thèse.

## Mélange dans les fluides stratifiés

Comme les échelles de temps (entre la seconde et quelques jours) et d’espace (entre le millimètre et la centaine de mètres) associées aux proces-

sus de micro-mélange sont bien plus petites que les résolutions des modèles réalistes de circulation océanique, il est nécessaire de les paramétrer. À ces échelles, les événements de mélange sont associés à des régimes turbulents tridimensionnels, provoqués par divers types de forçages présentés figure 0.4.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous nous intéresserons à des cas idéalisés de mélange dans les fluides stratifiés. Par exemple, nous supposons que les écoulements sont statistiquement homogènes dans les plans horizontaux, et nous considérerons des configurations de mélange turbulent en l'absence de mouvement moyen.

**L'objectif sera d'obtenir une équation d'évolution temporelle pour la distribution de probabilité (PDF) de densité du fluide à une profondeur donnée.**

Nous supposons dans un premier temps que la densité du fluide est purement advectée par l'écoulement turbulent. Cela nous permettra de faire une analogie avec le mélange de la vorticité (potentielle) en turbulence 2-D. Nous nous appuyerons sur cette analogie pour proposer des équations de relaxation des PDF de la densité similaires à celles obtenues par Robert et Sommeria dans le contexte des fluides 2-D.

Dans les écoulements réels, la diffusivité<sup>3</sup> de la densité est non nulle. L'effet combiné des cascades turbulentes vers les petites échelles et de cette diffusivité tend à lisser les fluctuations de densité à petite échelle. Il sera donc nécessaire de modéliser cet effet et de l'incorporer aux équations de relaxations obtenues dans un cas non visqueux.

Indépendamment des problèmes liés à la modélisation, la compréhension du mélange turbulent est un aspect important de la dynamique des couches océaniques supérieures. Ces processus de mélange modifient l'énergie potentielle des écoulements océaniques. Or cette énergie potentielle domine d'un facteur 100 l'énergie cinétique des courants de surface (y compris l'énergie cinétique des structures méso-échelles) [139]. Même dans le cadre de modèles simples d'océans (où la dynamique de l'écoulement ne modifie pas la stratification qui est fixée une fois pour toute), les échelles caractéris-

---

<sup>3</sup>Il s'agit de la diffusivité thermique quand la densité est gouvernée par les variations de température, et de la diffusivité moléculaire quand la densité est gouvernée par les variations de salinité.

---

tiques des écoulements à grande échelles dépendent de la stratification (via le rayon de déformation barocline de Rossby). **En ce sens, mélange à petite échelle (de 10 cm à 10 m) et circulation à grande échelle (de 50 km à 5000 km) sont intimement liés.**

## Plan de la thèse

Dans le **premier chapitre**, nous présenterons les équations quasi-géostrophiques à une couche et demie. C'est le modèle d'océan le plus simple qui prend en compte l'effet de la stratification verticale. Nous reviendrons sur les écoulements inertiels de Fofonoff et sur les modèles forcés et dissipés de type "Sverdrup". Nous introduirons ensuite la théorie statistique Robert-Sommeria-Miller (RSM), qui prédit et explique l'organisation inertielle des écoulements bidimensionnels turbulents.

Nous décrirons au **second chapitre** une classe de solutions inertielles qui, contrairement aux écoulements de Fofonoff, présentent un jet intense dirigé vers l'est au milieu d'un bassin océanique fermé, pour un modèle d'océan équivalent barotrope : les équations quasi-géostrophiques à une couche et demi. Il s'agit d'un résultat important pour l'étude des modèles inertiels d'océans. En effet, une fois ces solutions obtenues, de nombreuses approches théoriques (ou numériques) sont possibles : études de stabilité, description de l'évolution des perturbations... Le fait de décrire un état moyen permet de réduire grandement la complexité du problème initial, et d'envisager des études autour de quelques paramètres.

Nous montrerons que ces solutions ne sont pas des états d'équilibre statistique de la théorie RSM : cela n'avait jamais été démontré.

Ces résultats motiveront l'étude de modèles plus compliqués, baroclines : les équations quasi-géostrophiques à deux couches. Contrairement au cas des modèles à une couche et demie, ce modèle autorise les transferts d'énergie entre les couches inférieures et supérieures des océans. On peut dès lors se demander si ces transferts d'énergie induisent l'existence d'états d'équilibre différents de ceux observés pour le modèle à une couche et demi.

Nous verrons que les états d'équilibres statistiques de ces modèles sont en général dominés par la composante barotrope (la moyenne verticale) de l'écoulement. Cette barotropisation de l'écoulement montre que les transferts d'énergie entre les couches inférieures et supérieures des océans jouent

un rôle important dans la structure des états d'équilibre statistique.

Nous montrerons que la barotropisation des écoulements est incomplète : la composante barocline (la différence de vitesse entre les couches inférieures et supérieures) peut dans certains cas présenter un jet intense dirigé vers l'est. Cependant, ce jet barocline reste négligeable par rapport à la composante barotrope, dirigée vers l'ouest. Il s'agit là aussi d'un résultat nouveau.

Le fait que les jets intenses dirigés vers l'est ne soient pas des états d'équilibre statistique ne signifie pas pour autant que ces solutions sont instables dynamiquement. La discussion de la stabilité de ces jets intenses est un problème stimulant dans la mesure où les critères "classiques" de stabilité ne s'appliquent pas à ces solutions. Le **troisième chapitre** sera consacré au cas particulier d'un jet intense dirigé vers l'est, dans un canal d'extension zonale infinie (sans frontière à l'est et à l'ouest). Cette étude est un préalable à des travaux plus compliqués qui prendraient en compte le rôle des frontières à l'ouest.

Nous montrerons que ces jets sont linéairement stables, et nous décrirons l'évolution des perturbations. La méthode utilisée dans ce chapitre a un intérêt en soi, car elle permet de conclure à la stabilité dans un cas où les critères classiques de stabilité ne sont pas satisfaits.

Nous montrerons que les solutions qui présentent un jet intense sont des points selles d'une fonctionnelle "énergie-Casimir". Les critères classiques permettent de conclure à la stabilité quand les solutions sont des extrema de cette fonctionnelle [38]. Cependant, nous verrons que la prise en compte de contraintes supplémentaires, fournies par les invariants de la dynamique, permet de conclure à la stabilité. D'un point de vue théorique, nous réduisons l'étude de stabilité à la recherche du maximum d'un problème variationnel quadratique sous contrainte linéaire.

Les écoulements 2-D font partie d'une grande classe de systèmes caractérisés par des interactions non intégrables<sup>4</sup>. Qualitativement, cela signifie que les interactions ne sont pas locales. La mécanique statistique d'équilibre des systèmes à interaction à longue portée a justement fait l'objet de nombreuses études ces dernières années, en raison des propriétés physiques remarquables de ce type de systèmes. Contrairement à ce que la mécanique

---

<sup>4</sup>Le potentiel d'interaction entre particules fluides est logarithmique pour les écoulements 2-D

---

statistique usuelle montre pour les systèmes à courte portée, il est possible d'observer dans les systèmes à interaction à longue portée des capacités thermiques négatives (l'énergie diminue quand la température augmente!). De plus, les différents ensembles statistiques (microcanoniques, canoniques) ne sont pas toujours équivalents. On verra au **quatrième chapitre** que l'étude des états d'équilibre statistique RSM se révélera particulièrement féconde dans ce contexte.

D'une part, l'usage de méthodes théoriques classiques dans ce domaine nous permettra de calculer directement les solutions du problème variationnel fourni par la théorie statistique RSM (les états d'équilibres maximisent une entropie de mélange sous contraintes). Ces méthodes théoriques nous permettront en outre de prouver la stabilité non linéaire d'une grande partie des états d'équilibres statistique décrits. Il n'existe en effet pas de preuve générale de la stabilité des états d'équilibres statistiques ; il s'agit d'un problème théorique important.

D'autre part, nous montrerons que les états d'équilibres statistiques RSM sont caractérisés par les propriétés thermodynamiques propres aux systèmes à interaction à longue portée : nous décrirons l'existence d'une zone d'inéquivalence entre les ensembles, et de transitions de phase directement liées à cette inéquivalence. Nous verrons que ces transitions de phase correspondent à des changements importants dans la structure de l'écoulement. Nous mettrons en évidence certaines particularités thermodynamiques (points bicritiques, azéotropie) qui étaient prédites, mais n'avaient encore jamais été observées dans un système physique à longue portée.

Les états que nous décrirons sont caractérisés par une relation linéaire entre vorticité et fonction courant ; ils incluent donc les écoulements de Fofonoff. Ces écoulements de Fofonoff sont des états à basse énergie. Nous montrerons qu'à haute énergie, les écoulements peuvent avoir une structure très différente de celle décrite par Fofonoff.

Nous introduirons au **cinquième chapitre** une autre classe de problèmes pour lesquels une approche statistique pourrait être intéressante : la mélange dans les fluides stratifiés. Nous présenterons les observations expérimentales et les approches phénoménologiques antérieures, et montrerons qu'il est nécessaire de modéliser l'évolution temporelle des fluctuations de densité pour décrire correctement certains aspects du mélange.

Avant d'étudier les fluides stratifiés, nous nous intéresserons au mélange

d'un traceur qui n'interagit pas avec l'écoulement : le **sixième chapitre** sera consacré au problème du scalaire passif. Il s'agira de décrire par une approche phénoménologique l'évolution temporelle de la distribution d'un traceur mélangé par un écoulement turbulent à nombre de Reynolds modéré. Qualitativement, les fluctuations du traceur sont transférées vers les petites échelles par les processus de cascade turbulente, jusqu'à atteindre l'échelle de diffusion moléculaire, qui lisse ces fluctuations. La distribution du traceur tend vers un pic étroit centré autour de la moyenne, qui correspond à l'état mélangé.

Nous proposerons un modèle d'évolution de la distribution du traceur fondé sur un mécanisme d'auto-convolution de cette distribution. Nous comparerons cette approche à d'autres modèles, et testerons les hypothèses sous-jacentes grâce à des expériences de laboratoire. Ces expériences consistent simplement à mesurer les distributions de concentration d'un colorant advecté par un écoulement turbulent dans une conduite.

Nous appliquerons ces idées au cas du mélange d'un fluide stratifié dans le **septième chapitre**. Dans ce cas, le traceur est la densité du fluide, qui interagit avec l'écoulement (via la poussée d'Archimède). A partir d'une analogie avec le mélange de la vorticité en turbulence 2-D, nous proposerons un modèle d'évolution temporelle de la distribution de la densité du fluide qui comprendra i) un terme de diffusion turbulente ii) un terme de sédimentation iii) un modèle de mélange par les effets de cascade turbulente.

Les modèles "classiques" de diffusion turbulente ne prennent pas en compte le rôle des fluctuations de densité du fluide. Les termes de sédimentation des particules fluides de densité différentes et la dissipation des fluctuations autour de la moyenne (par le modèle d'auto-convolution) sont donc des aspects nouveaux qui n'ont jamais été intégrés dans la modélisation des fluides stratifiés.

Première partie

Mécanique statistique  
d'écoulements océaniques



## Chapitre 1

---

# Introduction

---



Afin de comprendre certains aspects de la dynamique inertielle des jets dirigés vers l'est aux moyennes latitudes, nous étudierons des modèles idéalisés d'océans. Ces modèles sont trop simples pour décrire un océan réel, mais permettent de comprendre l'organisation des écoulements 2-D par des arguments théoriques, des approches analytiques, ou des calculs numériques peu coûteux en temps.

Nous présenterons dans la première section de ce chapitre **les modèles d'océans quasi-géostrophiques (QG) à une couche et demi**. Ce sont les modèles les plus simples qui prennent en compte l'effet combiné de la stratification des océans et de la force de Coriolis.

La seconde section sera consacrée aux études antérieures des solutions de ces modèles d'océans. On distinguera deux approches, qui correspondent à deux limites opposées dans les équations du mouvement :

- l'étude d'une classe de solutions stationnaires inertielles (où le forçage et la dissipation sont négligés), par Fofonoff.
- les études de solutions stationnaires en présence de forçage et dissipation (où les termes d'advection non-linéaires sont négligés), par Sverdrup, Stommel et Munk.

D'une part, les modèles de type Sverdrup ne peuvent rendre compte de la formation de jets intenses, et d'autre part, les solutions inertielles

de Fofonoff ne présentent pas de jet dirigé vers l'est au centre d'un bassin océanique.

Nous expliquerons que les écoulements de Fofonoff sont un cas particulier de solutions inertielles parmi toute une variété de possibilités, qui n'ont à notre connaissance pas été explorées. Ceci motivera la première étape de notre étude : existe-t-il des solutions inertielles présentant un jet intense dirigé vers l'est ?

Nous introduirons dans la troisième section la **mécanique statistique de Robert-Sommeria-Miller (RSM)**, qui prédit l'organisation des grandes échelles pour ces modèles simples d'océans turbulents et bidimensionnels. Cette théorie "sélectionne" une des solutions stationnaires inertielles, et donne une explication pour l'émergence de cette solution.

Cela motivera la seconde étape de notre étude : les jets intenses dirigés vers l'est sont-ils des états d'équilibre statistique ?

Ce chapitre ne contient pas de résultats nouveaux, il précise le contexte et les enjeux des travaux présentés par la suite.

### 1.1 Modèles quasi-géostrophiques

Les écoulements océaniques sont dominés par l'équilibre géostrophique : dans les équations du mouvement, le terme dominant est la force de Coriolis, compensée par un gradient horizontal de pression. Cet équilibre lie la vitesse aux quantités thermodynamiques (champ de densité et de pression), mais ne donne aucune indication sur la dynamique. Afin de décrire cette dynamique, il faut étudier l'évolution temporelle de petites perturbations autour de l'équilibre géostrophique.

On obtient ainsi les équation quasi-géostrophiques, qui peuvent s'écrire sous la forme d'une advection d'un scalaire, la **vorticité potentielle**. Nous verrons que ces équations sont valables dans la limite d'un faible nombre de Rossby, qui compare l'effet des termes d'advection non-linéaires à ceux de la rotation.

## Les forçages de la circulation océanique

Avant de présenter les équations quasi-géostrophiques, précisons la nature des courants que l'on décrit, et leur lien avec les deux types de forçages de la circulation océanique : i) Le forçage en densité, par la différence de température entre les pôles et l'équateur et ii) le forçage par l'action du vent à la surface de l'eau.

Ces deux forçages jouent un rôle important dans la circulation océanique à grande échelle. Cependant, les courants de surface peuvent en première approximation être décrits en considérant seulement l'action du vent [20, 139].

Le forçage en densité intervient principalement dans le processus du **tapis roulant**. C'est une circulation tridimensionnelle globale qui traverse tous les bassins océaniques. Les courants de surface sont particulièrement affectés par cette circulation dans l'océan Atlantique, où l'on remarque une déviation du Gulf Stream vers le Nord. Le forçage par les vents joue aussi un rôle important dans ces processus [139].

Les causes et les implications de ces effets sont un sujet actif de recherche, tant du point de vue des mesures *in situ*, que des approches théoriques, expérimentales et numériques [97].

Dans les modèles numériques réalistes de circulation générale, les temps caractéristiques  $t_c$  nécessaires pour que l'océan atteigne un équilibre avec les différents forçages varient considérablement suivant les quantités considérées :

- Les variables thermodynamiques fixant la stratification atteignent un état d'équilibre avec les forçages en un temps  $t_c \sim 1000 \text{ ans}$
- Les champs de vitesse de surface atteignent un état d'équilibre avec les forçages en un temps  $t_c \sim 50 \text{ ans}$ .

Il existe donc une nette séparation d'échelle de temps entre les mécanismes qui modifient la stratification, et les mécanismes qui modifient l'organisation des courants en surface. Cela justifie qualitativement le choix de considérer des modèles simples d'océan à **stratification fixée**. **En conséquence, l'effet du forçage en densité ne sera pas abordé par la suite.**

La seule source d'énergie de ces écoulements provient du forçage par les vents, et l'on suppose que les courants ainsi créés ne modifient pas la stratification.

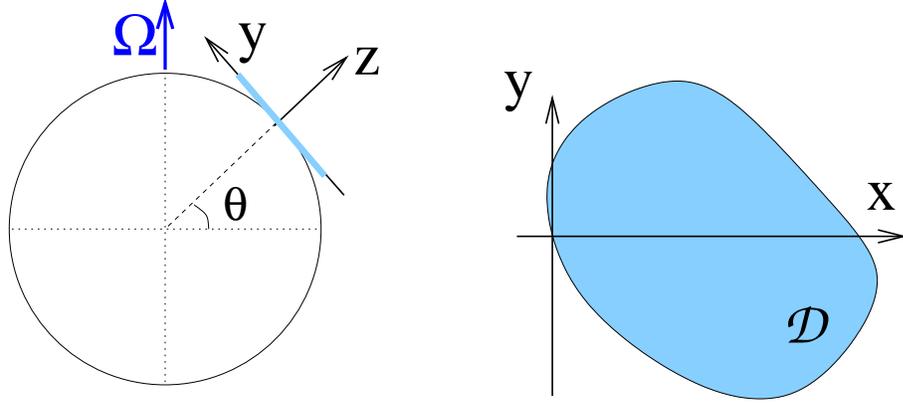


FIG. 1.1: Idéalisations de la géométrie et approximation de plan bêta aux moyennes latitudes

## Approximations et équations

On trouvera une dérivation systématique des équations QG dans le livre de Pedlosky [89]. On rappelle dans les paragraphes suivants les différentes étapes de calculs et approximations menant au système final d'équations. Le système d'équation final est résumé à la fin de cette sous-section.

Nous supposons ici que le forçage et la dissipation sont négligeables en tout point de l'écoulement, puisque nous voulons étudier l'organisation inertielle des écoulements océaniques.

Cette hypothèse est indépendante des approximations du modèle quasi-géostrophiques. Nous y reviendrons lors de la présentation des modèles de Sverdrup-Stommel-Munk.

La dynamique des écoulements est décrite par les équations d'Euler en présence de rotation :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g}$$

**Équilibre hydrostatique et géostrophique.** Nous avons expliqué dans l'introduction que les courants océaniques de surface peuvent être représentés par une couche active dans laquelle l'écoulement est horizontal, uniforme sur toute la profondeur de la couche, en raison de la stratification stable, de

la forte rotation, et du faible rapport d'aspect entre les dimensions verticales et horizontales.

De fait, les vitesses verticales observées dans l'océan sont très faibles, et l'équilibre hydrostatique est bien vérifié :

$$\partial_z P = -\rho g \quad (1.1)$$

où l'axe  $z$  est défini par la verticale (dirigé vers le haut) en un point donné de la sphère. On suppose à ce stade que la partie verticale de la force de Coriolis est négligeable par rapport aux gradients verticaux de pression.

Les mouvements horizontaux sont dominés par la force de Coriolis, équilibrés par les gradients de pression, **dans dans la limite des faibles nombres de Rossby**  $R_o = U/L\Omega \sin \theta$ . Ce nombre compare l'effet des termes d'advection non-linéaires à la force de Coriolis. Dans le Gulf Stream et le Kuroshio,  $R_o = 0.1$  (avec  $R = 10^5 m$ ,  $U = 1 ms^{-1}$  et  $\Omega \sin \theta \sim 10^{-4} s^{-1}$ ). La projection des équations du mouvement sur l'horizontale donne alors

$$2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z = -\nabla_H P \quad (1.2)$$

où  $\nabla_H$  désigne les gradients horizontaux. Cela définit la vitesse géostrophique. La rotation de la terre n'intervient que par sa projection sur la verticale, notée  $f = \Omega \sin \theta$ , où  $\theta$  est la latitude moyenne du bassin océanique étudié (on prendra  $\theta \sim 45^\circ$ ).

L'équilibre géostrophique est valable suffisamment loin de la surface libre. L'action des vent intervient directement dans la couche limite d'Ekman, dont l'épaisseur est estimée entre 50 et 100  $m$  [91], alors que les courants géostrophiques de surface sont caractérisés par une épaisseur variant entre 500 et 1000  $m$ . L'estimation des débits liés à ces deux effets montre que l'écoulement est dominé par le flux géostrophique.

**L'approximation de plan bêta.** Les échelles verticales (autour de 500  $m$ ) et horizontales (autour de 1000  $km$  pour la zone inertielle du Gulf Stream) des écoulements océaniques sont petites par rapport au rayon de la terre  $r_t \sim 6000 km$ . On suppose que la circulation se fait dans un plan tangent à un point de référence de latitude moyenne  $\theta_0 \sim 45^\circ$ . Le repère cartésien correspondant est représenté figure 1.1. A l'ordre le plus bas, on a une relation linéaire entre la latitude  $\theta$  et la coordonnée cartésienne  $y = (\theta - \theta_0)r_t$  dirigées vers le nord. La sphéricité de la terre intervient seulement via le terme  $f = \Omega \sin \theta$ , qui exprime la variation de la projection de la force de Coriolis

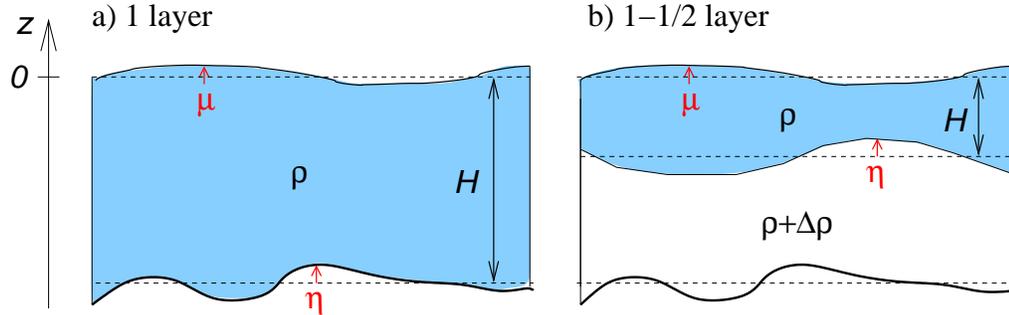


FIG. 1.2: Représentation schématique de deux modèles QG à une couche active a)  $H \approx 4$  km,  $\eta$  est donnée par la bathymétrie b)  $H \approx 500$  m, la couche inférieure est supposée animée d'un mouvement stationnaire connu, qui peut être nul.

sur la verticale avec la latitude. On linéarise  $f$  autour de  $\theta_0$ , à l'ordre le plus bas :

$$f \approx 2\Omega \sin \theta_0 + \frac{2\Omega \cos \theta_0}{R_T} y = f_0 + \beta_c y \quad (1.3)$$

C'est l'approximation de plan bêta, initialement proposée par Rossby [101], valable tant que  $\beta_c y \ll f_0$ . Comme  $f_0 \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  et  $\beta_c \approx 1.6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , la description de courants d'extension  $\sim 1000 \text{ km}$  est raisonnable dans le cadre de cette approximation.

**Modèles à une couche active.** On suppose que les courants de surface sont localisés dans une couche de densité homogène  $\rho$ , d'épaisseur moyenne  $H$ . La surface libre se trouve à une altitude  $\mu(x, y, t) \ll H$ . En l'absence de mouvement, l'interface est horizontale ( $\mu = 0$ ). On distingue deux types de modèles à une couche active, représentés sur la figure 1.2 :

- **Le modèle barotrope (1 couche)** : la couche active représente la totalité de l'océan :  $H = 4$  km. Les effets dus à la stratifications sont omis. Cela revient à considérer la composante barotrope de l'écoulement, c'est-à-dire la vitesse moyennée sur toute la hauteur. L'interface inférieure de la couche active, d'altitude  $-H + \eta$ , est fixée par la topographie du fond océanique (la bathymétrie), que l'on a choisie telle que  $\langle \eta \rangle = 0$ , où  $\langle \cdot \rangle$  représente une moyenne sur tout le domaine (nous utiliserons souvent cette notation dans la suite du chapitre).

On suppose de plus  $\eta \ll H$ . La conservation de la masse impose alors  $\langle \mu \rangle = 0$ .

- **Le modèle équivalent barotrope (1-1/2 couche)** : La couche active est restreinte à une épaisseur  $H \sim 500$  m (qui correspond effectivement à l'épaisseur des courants de surface observés dans l'océan). Cette couche active est séparée d'une couche d'eau profonde que l'on suppose aussi homogène, de densité  $\rho + \Delta\rho$ . C'est la manière la plus simple de prendre en compte la stratification de l'océan. L'ordre de grandeur de l'écart relatif de densité est  $\Delta\rho/\rho \sim 0.5\%$ . L'interface entre les deux couches se situe à l'altitude  $-H + \eta$ , avec  $\eta \ll H$ . La conservation de la masse impose  $\langle \mu - \eta \rangle = 0$ . On suppose que la couche inférieure est soit au repos, soit animée d'un mouvement stationnaire connu et indépendant de la couche supérieure.

Dans la couche active, l'équilibre hydrostatique (1.1) donne la pression  $P$  que l'on injecte dans l'expression de la vitesse géostrophique (1.2).

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi \quad \text{avec} \quad \psi = \frac{g}{f_0} \mu \quad (1.4)$$

où l'on a négligé les gradients horizontaux de pression atmosphérique  $P_0$ . La fonction courant  $\psi(x, y, t)$  de la couche active est donc indépendante de  $z$ , proportionnelle à la hauteur de la surface libre. Cette propriété est utilisée pour visualiser les courants de surface par imagerie satellite. Dans le cas du modèle QG à 1-1/2 couche, on calcule de même la pression  $P$ , puis la vitesse géostrophique de la couche inférieure :

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi_b \quad \text{avec} \quad \psi_b = \frac{g}{f_0} \mu + \frac{g'}{f_0} \eta \quad \text{où} \quad g' = \frac{\Delta\rho}{\rho} g \quad (1.5)$$

**La dynamique quasi-géostrophique.** L'équilibre géostrophique lie le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  aux variations horizontales du champ de pression  $P$ . Ces variations horizontale ne dépendent pas de  $z$  dans une couche donnée. Pour déterminer la dynamique de  $\mathbf{v}$ , il est nécessaire de considérer l'évolution temporelle d'une petite perturbation agéostrophique. On considère à cet effet le rotationnel de l'équation (1.1), que l'on projette sur l'axe vertical  $Oz$  : on élimine ainsi les termes dominants de l'équilibre géostrophique, en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas. Cela fournit une équation

dynamique :

$$\partial_t q + \mathbf{v} \nabla q = 0 \quad (1.6)$$

$$q = \Delta \psi + \beta_c y + \frac{f_0}{H} \eta \quad (1.7)$$

La quantité  $q$  est appelée **vorticité potentielle**, car elle contient un terme provenant de la vorticité relative ( $\Delta \psi \mathbf{e}_z = \nabla \times \mathbf{u}$ ), un terme dû à la variation de la vorticité planétaire ( $\beta_c y$ ), et un terme d'étirement de la colonne de fluide (via les variations de hauteur  $\eta$ ). Il s'agit d'une quantité centrale dans les travaux que nous présenterons. Il est remarquable que la dynamique de ces modèles simples s'exprime sous la forme d'une équation de transport d'un scalaire, purement advecté par le champ de vitesse. Soulignons que ce scalaire, la vorticité potentielle, est actif : on détermine la fonction courant (et donc le champ de vitesse) en inversant l'équation (1.7). On distingue deux cas selon le modèle :

- **modèle barotrope (1 couche)** :  $\eta$  est la bathymétrie, supposée connue.
- **modèle équivalent barotrope (1-1/2 couche)** : d'après (1.4) et (1.5),  $\eta = f_0 (\psi_2 - \psi_b) / g'$ . On suppose que le courant de la couche profonde (donné par  $\psi_b$ ) est connu. Ce courant a l'effet d'une topographie. La vorticité potentielle s'écrit alors

$$q = \Delta \psi - \frac{\psi}{R^2} + \beta_c y + \frac{\psi_b}{R^2} \quad \text{où} \quad R = \frac{\sqrt{g'H}}{f_0} \quad (1.8)$$

On remarque qu'une distance caractéristique ( $R = \sqrt{g'H}/f_0$ ) apparaît dans ces équations. Il s'agit du **rayon de déformation de Rossby interne (ou barocline)**. C'est une dimension caractéristique des déformations de l'interface  $\eta$ , et donc de l'écoulement  $\psi$  dans la couche active. Il varie entre 20 et 80km aux moyennes latitudes. Comme  $\psi$  fixe ensuite les variations de hauteur de surface libre  $\mu$ , il suffit de regarder cette quantité sur des images satellites d'océans pour remarquer l'existence de cette échelle et estimer son ordre de grandeur. Le rayon de déformation de Rossby caractérise la compétition entre les effets de gravité, qui tendent à ramener les écarts d'interface vers l'horizontale, et les effets de rotation, qui tendent à incurver l'interface en présence d'un courant à cause de l'équilibre géostrophique.

Dans ce qui précède, on a négligé l'effet des variations de hauteur de la surface libre dans l'évolution des perturbations agéostrophiques. C'est l'approximation de **toit rigide**. Les variations de la surface libre auraient apporté une contribution supplémentaire  $f_0/H\mu = \psi/R_{bt}^2$  dans l'équation (1.7), où  $R_{bt} = \sqrt{Hg}/f_0$  est une autre échelle caractéristique d'écrantage, le rayon de déformation de Rossby barotrope. Dans le cadre du modèle barotrope ( $H = 4 \text{ km}$ ), on évalue sa valeur à  $R_{bt} \approx 2000 \text{ km}$ . Comme cette longueur d'écrantage est supérieure à la taille du domaine lui-même, on néglige ce terme. Dans le cadre du modèle équivalent barotrope ( $H \sim 500 \text{ m}$ ), on évalue  $R_{bt} \approx 500 \text{ km}$ . Dans la mesure où cette longueur caractéristique est bien plus grande que le rayon de déformation de Rossby barocline introduit précédemment, on néglige là aussi les variations de la surface libre.

**Conservation de la masse.** Dans le cas du modèle à 1-1/2 couche, la conservation de la masse donne  $\int \psi dx dy = \langle \psi \rangle = 0$ . En effet, la fonction courant est proportionnelle à  $\eta$ , qui doit être de moyenne nulle si l'on a fait l'approximation de "toit rigide". Dans le cas du modèle barotrope, la conservation de la masse ne fournit pas de contrainte si l'on a fait l'approximation de "toit rigide".

**Conditions aux bords.** Les bassins océaniques étudiés dans les chapitres suivants sont des domaines fermés quelconques ou des "canaux" d'extension infinie suivant  $x$  et limités par des frontières nord et sud. Nous considérerons la condition d'imperméabilité aux bords du domaine :  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , où  $\mathbf{n}$  désigne la normale aux frontières  $\partial\mathcal{D}$ . Dire que la vitesse est tangente à la frontière du domaine revient à dire que la frontière est une ligne de courant : la condition aux bords consiste donc à considérer  $\psi$  constante sur  $\partial\mathcal{D}$ . Le champ de vitesse ne dépend pas du choix de cette constante. Pour le modèle 1-1/2 couche, la contrainte de conservation de la masse impose néanmoins la condition  $\langle \psi \rangle = 0$ , qui fixe la valeur de la fonction courant aux bords. Ce choix restant arbitraire pour le modèle à une couche, on gardera la contrainte  $\langle \psi \rangle = 0$ .

**Rôle des couches limites.** Dans un écoulement réel, la viscosité  $\nu$  intervient proche des bords du domaine, sur une échelle proportionnelle à  $\nu^{1/2}$ . Tant que cette couche limite reste le long des bords, elle n'influence pas l'écoulement inertiel à l'intérieur du domaine. En revanche, des études

numériques à nombres de Reynolds modérés ( $\sim 2000$ ) ont montré que ces couches limites se décolent parfois, injectant de la vorticité dans l'écoulement central inertiel [29] [30] : la paroi se comporte alors comme une source de vorticité. Le comportement de ces couches limites pour des nombres de Reynolds plus élevés n'est cependant pas connu.

### Résumé :

les modèles inertiels QG s'écrivent sous la forme d'une équation de transport pour la vorticité potentielle (PV) dans un domaine  $\mathcal{D}$  :

$$\partial_t q + \mathbf{v} \cdot \nabla q = 0 \quad (1.9)$$

$$q = \Delta \psi - \frac{\psi}{R^2} + h(x, y) \quad (1.10)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi$$

$$\psi = \psi_{fr} \text{ sur } \partial \mathcal{D}, \quad \langle \psi \rangle = 0 \quad (1.11)$$

Le cas  $h = 0$ ,  $R = +\infty$  correspond aux équations d'Euler bidimensionnelles, que l'on obtient indépendamment des écoulements géostrophiques.

### Invariants du modèle QG

Les équations (1.9) d'évolution temporelle des écoulements 2D admettent une infinité d'invariants, que nous présentons dans les paragraphes suivants. Nous verrons ensuite que l'existence de ces invariants joue un rôle important dans l'organisation des écoulements 2-D en structures cohérentes à grande échelle.

**Conservation de l'énergie** L'énergie cinétique et potentielle de la couche active s'écrivent

$$E_c = \frac{\rho H}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{v}^2 d\mathbf{r} \quad (1.12)$$

$$E_p = \Delta \rho g \int_{\mathcal{D}} \left( \int_0^\eta z dz \right) d\mathbf{r} = \frac{g' \rho}{2} \int_{\mathcal{D}} \eta^2 d\mathbf{r} \quad (1.13)$$

L'énergie potentielle est calculée en retranchant l'énergie potentielle de pesanteur de la couche active supposée "au repos"   celle de la couche active

“en mouvement”. Afin de simplifier les notations, on introduit l'énergie totale par unité de masse,  $E = (E_c + E_p)/m_{tot}$ , où  $m_{tot} = \rho H|\mathcal{D}|$ . C'est une quantité conservée par l'équation de transport (1.9). A l'aide des équations (1.4) et (1.5), on montre qu'elle s'écrit sous la forme

$$E = \frac{1}{2} \left\langle (\nabla\psi)^2 + \frac{\psi^2}{R^2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle (\psi - \psi_{fr})(q - h) \rangle \quad (1.14)$$

**Conservation des Casimirs** En plus de l'énergie, l'équation de transport (1.9) conserve une infinité de fonctionnelles Casimirs, définies par

$$\mathcal{C}_f[q] = \int_{\mathcal{D}} f(q) d\mathbf{r} = \langle f(q) \rangle , \quad (1.15)$$

où  $f$  est n'importe quelle fonction continue. La circulation  $\Gamma$  et l'enstrophie  $\mathcal{Z}$  sont des exemples de Casimirs :

$$\Gamma = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \langle q \rangle \quad \mathcal{Z} = \frac{1}{2} \langle q^2 \rangle \quad (1.16)$$

Comme le champ de vorticité potentielle  $q(\mathbf{r}, t)$  est advecté par un champ de vitesse à divergence nulle, l'aire  $g(\sigma)$  associée à chaque niveau de vorticité potentielle  $\sigma$  est conservée au cours de l'évolution temporelle de l'écoulement. On calcule aisément cette aire pour un champ connu de vorticité potentielle :

$$g(\sigma) = \int_{\mathcal{D}} \delta(q(\mathbf{r}, t) - \sigma) d\mathbf{r} . \quad (1.17)$$

La conservation de  $g(\sigma)$  est équivalente à la conservation des Casimirs. Selon l'usage que l'on souhaitera faire de ces invariants, il sera parfois utile de considérer les lois de conservation sous une forme plutôt qu'une autre.

**Invariants supplémentaires** Quand le domaine  $\mathcal{D}$  possède des symétries particulières, il faut considérer des quantités conservées additionnelles. Hormis ces contraintes géométriques, les seules quantités conservées sont l'énergie et les Casimirs.

## Etats stationnaires du modèle QG : relation $q - \psi$

Un calcul rapide montre que les solutions stationnaires du modèle QG sont les états où les lignes de niveau de vorticité potentielle  $q$  sont aussi des lignes de courant (i.e. des lignes de niveau de la fonction courant  $\psi$ ) :

$$\partial_t q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \nabla q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \psi \times \nabla q = 0 \quad (1.18)$$

En particulier, tout état défini par une relation

$$q = f(\psi) \quad (1.19)$$

est une solution stationnaire de l'équation QG. Ces états sont dégénérés : il en existe une infinité, paramétrés par l'ensemble des fonctions  $f$ . Il est en outre possible que plusieurs solutions stationnaires correspondent à la même fonction  $f$ .

On peut à ce stade préciser la motivation de notre étude : il s'agira de trouver une relation  $q = f(\psi)$  telle qu'il existe une solution caractérisée par un jet intense dirigé vers l'est. Il faudra ensuite justifier l'émergence de cette solution. On dispose à cet effet de plusieurs critères : cet état sera-t-il un équilibre statistique ? Sera-t-il stable ou instable ?

## 1.2 Études antérieures des modèles d'océans QG

Avant d'introduire la mécanique statistique des équations QG, présentons deux modèles "historiques" d'océan : l'écoulement inertiel de Fofonoff, et les écoulements forcés par les vents de Sverdrup, Stommel et Munk.

### La solution stationnaire inertielle de Fofonoff

Fofonoff est le premier à s'être intéressé à la limite inertielle des équations QG que nous venons de présenter [51]. Il a calculé une solution stationnaire de ces modèles, qui est maintenant décrite dans de nombreux livres d'océanographie [89].

**Description de la solution (voir figure 1.3).** Fofonoff suppose – par simplicité – que la relation entre la vorticité potentielle  $q$  et fonction cou-

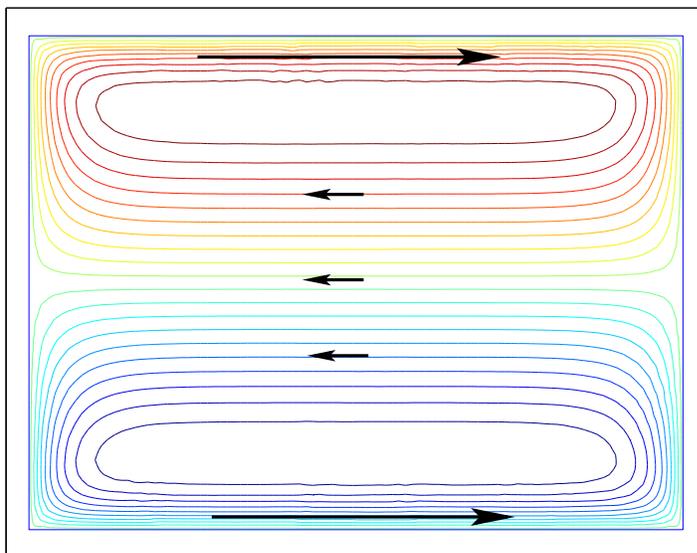


FIG. 1.3: **Solution de Fofonoff.** Les flèches donnent la direction et la valeur de la vitesse. Les couleurs chaudes et froides correspondent respectivement aux valeurs positives et négatives de la fonction courant  $\psi(x, y)$ .

rant  $\psi$  est linéaire, pour trouver une solution inertielle du modèle quasi géostrophique à une couche active :

$$q = a\psi - b = \Delta\psi - \frac{\psi}{R^2} + \beta_c y$$

Il fait de plus l'hypothèse  $a + \frac{1}{R^2} \gg 1$ , ce qui revient à considérer une limite de faible énergie (la solution tend vers 0). Le Laplacien est négligeable loin des bords, au-delà d'une distance  $l_c \sim (a + R^{-2})^{-1/2}$ . La fonction courant est alors donnée par

$$\psi = \frac{\beta_c y + b}{a + R^{-2}}$$

Ainsi, la fonction courant ne dépend pas de  $x$  en dehors des couches limites ; la vitesse est purement zonale ( $v_y = 0$ ), constante, faible, et dirigée vers l'ouest ( $v_x = -\partial_y \psi$ ). On peut calculer la solution dans les couches limites,

et montrer l'existence de jets de recirculation dirigés vers l'est aux frontières nord et sud.

**Intérêt historique de cette solution.** Les écoulements de Fofonoff ont joué un rôle important dans l'étude des modèles idéalisés de circulation océanique, en raison, notamment, des travaux de Salmon-Holloway-Hendershott [106, 57]. Ces auteurs ont généralisé aux modèles barotropes d'océan la mécanique statistique proposée par Kraichnan dans le cadre des équations d'Euler tronquées [70].

Ils prédisent l'organisation de l'écoulement en un état stationnaire défini par une relation linéaire entre vorticité potentielle et fonction courant, pour une troncature spectrale des modèles QG. Cela justifie l'émergence d'écoulements de Fofonoff. Ce type d'écoulements ont effectivement été observés dans des simulations numériques de [135, 66].

Cependant, la dynamique de ces modèles tronqués ne conserve que l'énergie et l'enstrophie parmi l'infinité d'invariants de la dynamique non tronquée. Nous présenterons dans la section suivante une autre approche, la théorie statistique Robert-Sommeria-Miller (RSM), qui prend en compte **tous les invariants** de la dynamique (non tronquée). La théorie requiert la connaissance de la distribution initiale des niveaux de vorticité  $g(\sigma)$ , et de l'énergie  $E$ . Elle sélectionne ensuite la solution stationnaire d'entropie maximale, étant données ces contraintes, et fournit la forme de la relation  $q = f(\psi)$ .

Nous verrons qu'il existe en fait une grande variété de relations  $q - \psi$  associées à ces états d'équilibre statistique. Nous concluons que le choix "a priori" d'une relation  $q - \psi$  linéaire n'a pas de justification physique. Il est donc pertinent de se demander s'il existe des états d'équilibre statistique qui ont une structure très différente des solutions de Fofonoff, quand la relation  $q - \psi$  est non-linéaire.

## L'approche "classique" : les modèles forcés et dissipés

Les approches classiques de la circulation océanique consistent à prendre en compte la forçage et la dissipation dans les équation QG (1.9), qui s'écrivent alors [91, 89] :

$$\partial_t q + \mathbf{v} \nabla q = \frac{1}{\rho H} \nabla \times \boldsymbol{\tau} + \textit{Dissipation} \quad (1.20)$$

où  $H$  est la profondeur de la couche active,  $\rho$  la densité de l'eau, et  $\boldsymbol{\tau}$  représente la friction des vents à la surface. Ce terme peut être grossièrement approximé par un forçage "double gyre" ( $\boldsymbol{\tau} \approx \tau \sin(2\pi y/L_{gyre})\mathbf{e}_z$ , où  $\tau \sim 0.1 \text{ N.m}^{-1}$  et  $L_{gyre} \sim 5000\text{km}$ ).

L'effet du frottement du vent à la surface des océans a d'abord été observé, puis expliqué qualitativement par **Nansen, en 1898**, et décrit plus quantitativement **en 1902 par Ekman**. Celui-ci a montré le rôle joué par la rotation terrestre en considérant un modèle simple d'océan. Qualitativement, l'écoulement proche de l'interface est donné par un équilibre entre forces de friction (dans la direction du vent), et forces de Coriolis (perpendiculaires à la vitesse), le tout étant compensé par un gradient horizontal de pression. Loin de l'interface, seul subsiste l'équilibre géostrophique entre vitesse et gradients horizontaux de pression. Après ces travaux, plusieurs modèles simples d'océans ont été proposés (voir le livre de Pond et Pickard [91] pour une présentation qualitative de ces modèles). Donnons une brève chronologie des principales contributions :

- **Sverdrup (1947 [117])** propose une estimation de la vitesse méridionale <sup>1</sup>  $v_y$  en considérant un équilibre entre le forçage dû aux vents, et le terme provenant de la variation de la force de Coriolis avec la latitude (ce qui revient à prendre  $\partial_t q = 0$ ,  $Dissipation = 0$  et  $\mathbf{v}\nabla q = v_y\partial_y(\beta_c y)$ ) dans l'équation précédente) :

$$\beta_c v_y = \frac{1}{\rho H} \nabla \times \boldsymbol{\tau} .$$

Ce modèle prédit une organisation des courants raisonnable à l'intérieur des bassins océaniques, mais n'explique pas les courants forts de recirculation sur les bords ouest des océans, comme le Kuroshio le long du Japon ou le Gulf Stream le long de la Floride.

- **Stommel (1948 [116])** explique l'intensification de bord ouest des courants aux moyennes latitudes, par des simulations numériques du modèle de Sverdrup auquel il ajoute un terme de friction de Rayleigh (un terme linéaire en la vitesse dans l'équation d'Euler) justifié par le pompage d'Ekman sur le fond océanique. A l'équilibre,

$$\beta v = \frac{1}{\rho H} \nabla \times \boldsymbol{\tau} + Dissipation$$

---

<sup>1</sup>Dans la direction nord-sud

- **Munk (1950 [83])** propose une description quantitative de la circulation de surface à partir des données du vent moyen, et de résultats analytiques, en utilisant les arguments précédents, mais en introduisant une autre friction, de type viscosité turbulente latérale.

Considérons par exemple le gyre subtropical, situé au sud du Gulf Stream. Dans cette région, l'équilibre de Sverdrup donne un ordre de grandeur de la vitesse méridionale  $v_y \sim 0.5 \text{ cm.s}^{-1}$ , dirigée vers le sud. Si l'on considère que l'extension zonale <sup>2</sup> de l'océan est  $L \sim 5000 \text{ km}$ , que la hauteur de la couche de surface est  $H \sim 1 \text{ km}$ , le flux correspondant est de l'ordre  $\sim 25 Sv$ , ce qui est en accord avec les mesures *in situ* dans ces gyres. La recirculation vers le Nord s'effectue le long du bord ouest des océans. Le débit mesuré au large de la Floride (avant la séparation du Gulf Stream se sépare du bord ouest) est effectivement de l'ordre de  $25 Sv$ .

Malgré les prédictions qualitatives et parfois quantitatives données par ces modèles simples de circulation, des **désaccords importants avec les observations** persistent :

- Ces modèles ne prévoient pas le **détachement des courants forts de bord ouest en un jet intense dirigé vers l'est**.
- Ils ne peuvent donc rendre compte de la **forte augmentation du débit**, qui double dans cette zone inertielle.

**Nous concluons qu'en présence de courants forts, il est nécessaire de considérer l'effet des termes d'advection non-linéaires.** Cela est aussi justifié par les échelles de temps associées aux différents processus : dans les simulations numériques de ces modèles QG simples forcés et dissipés, le temps caractéristique au-delà duquel la solution est en équilibre avec les forçage est de l'ordre de 4 ans. Rappelons pour comparaison que l'échelle de temps caractéristique de la dynamique inertielle (formation des méandres et des anneaux) varie entre la semaine et le mois.

Les travaux numériques de **Veronis [133] et Bryan [22]** ont illustré l'importance des termes d'advection non-linéaires, en incorporant ces contributions aux modèles de type "Sverdrup". La structure des écoulements observés est très différente de celle prédite par les approches précédentes : pour certain paramètres, un jet fort dirigé vers l'est est observé. Cependant, les nombres de Reynolds utilisés dans ces simulations restent très faibles, en

---

<sup>2</sup>Dans la direction est-ouest

raison des capacités numériques limitées de l'époque. L'écoulement décrit est dominé par la dissipation, contrairement aux océans réels. En particulier, la dynamique inertielle (formation d'anneaux, de méandres) propre aux jets n'est pas observée.

Les études ultérieures de ce type de modèles, réalisées dans le contexte des systèmes dynamiques, ont révélé toute une variété de comportements associés à des bifurcations pour des nombres de Reynolds de plus en plus élevés. Par exemple, ces modèles simples ont des propriétés de variabilité basse fréquence similaires à celles observées dans les océans réels. L'étude numérique et théorique de ces modèles simples forcés et dissipés reste un sujet de recherche actif [37].

Précisons qu'il existe par ailleurs toute une hiérarchie de modèles entre les équations quasi-géostrophiques et les équations primitives<sup>3</sup> utilisées dans les modèles "réalistes" d'océans.

**Pour conclure**, la formation de jets intenses dirigés vers l'est dans un océan turbulent n'est pas décrite de manière satisfaisante par les approches que nous venons de présenter. Pour cette raison, nous avons choisi d'aborder le problème d'un point de vue différent : nous allons négliger le forçage et la dissipation, et étudier l'effet des termes inertiels à l'ordre dominant.

La théorie statistique que nous présentons dans la section suivante permet de réduire la description des écoulements turbulents à quelques paramètres, quand le forçage et la dissipation sont négligés. Elle fournit donc un cadre théorique intéressant et pertinent pour étudier les jets intenses dirigés vers l'est.

## 1.3 Mécanique statistique des écoulements quasi-géostrophiques

**Organisation des grandes échelles en structures cohérentes.** On a vu dans l'introduction de cette partie que les grandes échelles des écoulements océaniques de surface peuvent être considérées comme bidimensionnelles (2-D) et turbulentes. Or les écoulements 2-D et turbulents ont la propriété de s'organiser en structures cohérentes à grande échelle. Les

---

<sup>3</sup>Ce type de modèle sera décrit plus en détail dans la sous-section "Qu'en est-il des modèles réalistes", dans le chapitre d'introduction de la seconde partie

FIG. 1.4: D'après Welander, *Tellus* 1955

anneaux du Gulf Stream, les jets de la circulation circumpolaire, la tache rouge de Jupiter sont autant d'exemples géophysiques de ce phénomène d'auto-organisation.

**Filamentation aux petites échelles.** Les écoulements turbulents bidimensionnels ont aussi la propriété de créer des filaments aux petites échelles. L'expérience de Welander présentée figure 1.4 illustre cet effet : une tache de colorant est advectée par un écoulement quasi 2D en rotation. Cette tache peut être qualitativement assimilée à une particule fluide portant une certaine valeur de vorticité potentielle. Au cours du temps, elle est étirée et repliée, jusqu'à former une structure complexe de filaments de plus en plus fins et enchevêtrés. Remarquons cependant que la tache de colorant est *passive* (elle n'interagit pas avec l'écoulement), alors que la tache de vorticité potentielle est *active* (on peut déterminer le champ de vitesse connaissant le champ de vorticité potentielle).

**La contribution d'Onsager.** La séparation entre une dynamique compliquée de filaments enchevêtrés à petite échelle, et l'émergence de structures cohérentes à grande échelle a été remarquée par Onsager, qui a, le premier, proposé une approche par la mécanique statistique : "The formation of large, isolated vortices is an extremely common, yet spectacular phenomenon in unsteady flow. Its ubiquity suggests an explanation on statistical grounds" [85]<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Voir l'article de revue [45] pour une présentation des travaux d'Onsager sur la turbulence, et leur développements ultérieurs

Onsager a donné des arguments pour l'émergence de structures cohérentes dans un écoulement de points vortex. Dans le cadre de ce modèle, le champ de vorticité est composé de fonctions Dirac de poids différents (les points vortex) qui évoluent dans un fond irrotationnel. Onsager suppose que ce système de points vortex atteint un maximum d'entropie, en raison des propriétés de mélange de l'écoulement crée par les points vortex eux-mêmes. Sans contraintes données par la dynamique, ce maximum d'entropie serait atteint par un état uniformément mélangé. Cependant, la dynamique des points vortex conserve l'énergie, empêchant ainsi le mélange uniforme. Cela justifie l'agrégation des vortex de même signe à haute énergie, et donc l'émergence d'une structure cohérente.

## La théorie Robert-Sommeria-Miller (RSM)

La mécanique statistique de la vorticité dans le cadre des équations continues d'Euler a été proposée par Robert [98] puis Robert et Sommeria [99], et indépendamment par Miller [81]. On trouvera une présentation plus générale de cette théorie dans le cours [114] donné aux Houches. Précisons d'abord ce que nous entendons par état macroscopiques et microscopiques pour ces systèmes.

** tats microscopiques.** On définit l'état microscopique du système par le champ de vorticité  $q(\mathbf{r}, t)$  de l'écoulement étudié. Nous avons représenté ce champ microscopique sur la partie a) de la figure 1.5, pour le cas particulier d'un système à deux niveaux (où la vorticité potentielle ne peut prendre que deux valeurs).

**Etats macroscopiques.** Il serait illusoire de chercher à prédire l'évolution des structures fines des configurations microscopiques, transférées vers des échelles de plus en plus petites. En revanche, il est possible de déterminer quelle sera la probabilité  $\rho(\mathbf{r}, \sigma)$  de mesurer une certaine valeur de vorticité potentielle  $\sigma$  au voisinage d'un point  $\mathbf{r}$ , pour des temps suffisamment longs. Connaissant  $\rho$  on obtient la vorticité potentielle "macroscopique", par la relation :

$$\bar{q}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}, \sigma) \sigma d\sigma \quad (1.21)$$

C'est ce que l'on a représenté schématiquement sur la partie b) de la figure 1.5. Un état défini par  $\rho(\mathbf{r}, \sigma)$  correspond à plusieurs états microscopiques.

**Principe de l'approche statistique** L'approche statistique consiste à chercher l'état macroscopique le plus probable, c'est-à-dire le champ  $\rho$  associé au plus grand nombre d'états microscopiques satisfaisant les contraintes du problème. Ces contraintes sont données par les invariants microscopiques des équations QG, qui s'expriment aussi en fonction du champ macroscopique  $\rho$  :

- **L'énergie.** On peut négliger l'énergie des fluctuations en remplaçant directement  $q$  par  $\bar{q}$  dans l'équation (1.14) [99]. L'énergie macroscopique s'écrit alors

$$\mathcal{E}[\rho] = -\langle (\bar{\psi} - \psi_{fr}) (\bar{q} - h) \rangle \quad (1.22)$$

est conservée par la dynamique. Rappelons que la notation  $\langle \cdot \rangle$  est utilisée pour une intégration sur tout le domaine. La fonction courant macroscopique  $\bar{\psi}$  est calculée en inversant la relation (1.10).

- **Les Casimirs.** Nous avons déjà mentionné le fait que la conservation des Casimirs (1.15) est équivalente à la conservation de l'aire  $g(\sigma)$  des niveaux de vorticité potentielle (1.17). On peut interpréter  $g(\sigma)$  comme la distribution de probabilité de  $\sigma$  dans le domaine, et  $\rho(\sigma, \mathbf{r})$  comme la densité de probabilité de mesurer  $\sigma$  dans le voisinage d'un point  $\mathbf{r}$  du domaine. On a alors la relation :

$$\mathcal{A}[\rho] = \int_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{r}, \sigma) d\mathbf{r} = g(\sigma) \quad (1.23)$$

  cela s'ajoute la condition de **normalisation** de la probabilité  $\rho$  en tout point :

$$\mathcal{N}[\rho] = \int \rho(\mathbf{r}, \sigma) d\sigma = 1 \quad (1.24)$$

**Ergodicité.** On suppose qu'un écoulement d'énergie  $E$  et de distribution  $g(\sigma)$  passe au cours du temps dans le voisinage (aussi petit que l'on veut) de chaque état admissible. Les  tats admissibles sont l'ensemble des  tats ayant une énergie  $E$  une distribution de vorticité  $g(\sigma)$ . C'est l'approche

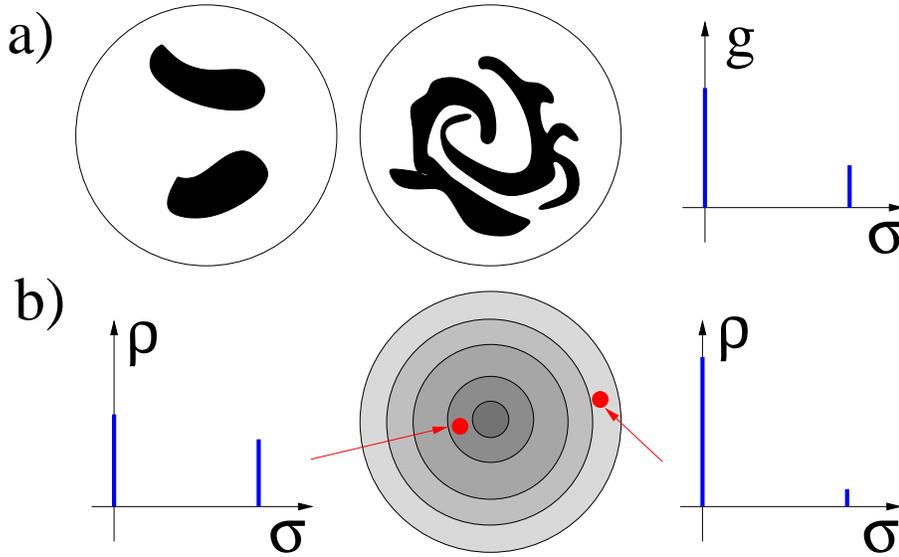


FIG. 1.5: Représentation schématique de l'organisation aux temps longs d'un écoulement initialement composé de taches homogènes de vorticité potentielles dans un fond irrotationnel. **a) Configuration microscopique** : les taches de vorticité potentielle sont étirées et repliées vers des échelles de plus en plus petites, tout en conservant leur aire totale, donnée par  $g(\sigma)$ . **b) État macroscopique**. On ne décrit plus la structure fine de l'écoulement, mais seulement la probabilité  $\rho$  d'observer le niveau de vorticité potentielle  $\sigma$  en un point donné.

microcanonique usuelle en physique statistique. Qualitativement, on s'attend à ce que la turbulence créée par l'écoulement lui-même assure une telle propriété. Cependant, cette hypothèse d'ergodicité n'est pas démontrée. Dans certaines circonstances particulières, elle est mise en défaut<sup>5</sup> (voir par exemple la formation d'un cristal dans les expériences de plasmas non neutres [110]). On s'attend tout de même à ce qu'une large classe de conditions initiales d'un écoulement non visqueux tende vers l'état prédit par la théorie statistique.

<sup>5</sup>Précisons que l'ergodicité est une propriété suffisante, mais pas nécessaire, pour que le système relaxe vers l'équilibre statistique. En physique statistique classique, elle est aussi parfois mise en défaut.

**Problème variationnel** Comme en thermodynamique classique, on maximise l'entropie de mélange (ou de Boltzmann-Gibbs),

$$\mathcal{S}_{BG}[q] = - \int_{\mathcal{D}} \int \rho(\mathbf{r}, \sigma) \ln \rho(\mathbf{r}, \sigma) d\sigma d\mathbf{r} \quad (1.25)$$

associée à l'état macroscopique  $\rho$ , tout en imposant les contraintes (1.22-1.23-1.24) données par les quantités conservées par la dynamique. L'entropie de mélange compte le nombre d'états microscopiques associés à une configuration  $\rho$ . Plus précisément, on peut montrer qu'elle est proportionnelle au logarithme du nombre de configurations microscopiques associées à l'état macroscopique  $\rho$ . On obtient alors un problème variationnel, dont la solution est l'entropie d'équilibre  $S_{RSM}(E, g)$  :

$$S_{RSM}(E, g) = \max_{\{\rho \mid \mathcal{N}[\rho]=1\}} \{\mathcal{S}[\rho] \mid \mathcal{A}[\rho] = g(\sigma) \ \& \ \mathcal{E}[\rho] = E\} \quad (1.26)$$

L'état  $\rho$  associé à l'entropie d'équilibre  $S(E, g)$  est l'état “macroscopique” le plus probable. Une écrasante majorité de configurations microscopiques est localisée autour de cet état macroscopique [79].

**Sélection de la relation  $q$ - $\psi$ .** On calcule les points critiques du problème variationnel en annulant les variations premières de l'entropie sous contraintes

$$\delta\mathcal{S} - \beta\delta\mathcal{E} - \int \mu(\sigma)\delta\mathcal{A}d\sigma = 0 \quad (1.27)$$

où l'on a introduit les multiplicateurs de Lagrange :

- $\beta$ , la “température inverse” associée à la conservation de l'énergie.
- $\mu(\sigma)$ , les “potentiels chimiques” associés à la conservation des niveaux de vortacité

Les appellations “température” et “potentiels chimiques” sont à prendre avec précaution. Ces termes désignent les propriétés d'un champ de vortacité à l'équilibre statistique. Ils n'ont aucun lien avec les propriétés intrinsèques du fluide considéré, décrites par les lois thermodynamiques usuelles.

On obtient l'expression de  $\rho$  à partir de (1.27) :

$$\rho = N e^{\beta\sigma\bar{\psi} - \mu(\sigma)} \quad (1.28)$$

où  $N(\mathbf{r})$  est une constante de normalisation. Les valeurs de  $\beta$  et  $\mu(\sigma)$  sont calculées en utilisant les contraintes (1.22) et (1.23) associées aux lois de

conservation (énergie et Casimirs) . En utilisant les relations (1.28) et (1.21), on calcule aisément la relation

$$\bar{q} = f(\bar{\psi}) = N \int d\sigma \sigma e^{\beta\sigma\bar{\psi} - \mu(\sigma)} . \quad (1.29)$$

Ce résultat montre que la théorie statistique sélectionne une relation  $f$  entre vorticité potentielle et fonction courant macroscopiques. Un calcul direct montre que cette relation est croissante si  $\beta > 0$ , et décroissante si  $\beta < 0$ .

Une configuration microscopique composée de deux niveaux de PV donne lieu à une relation  $q - \psi$  en  $\tanh$  (voir l’expression (1.29) pour  $\rho(\mathbf{r}, \sigma)$ ), alors qu’une configuration microscopique composée de trois niveaux de vorticité potentielle donne lieu à une relation  $q - \psi$  en  $\sinh$  (dans la limite où les niveaux extrêmes sont dilués). Dans tous les cas, la limite de fort mélange ( $\beta \rightarrow 0$ ) donne lieu à une relation  $q - \psi$  linéaire.

**Existence de températures négatives aux hautes énergies** Sans contrainte sur l’énergie ( $\beta = 0$ ), l’état d’équilibre (1.29) serait un champ de vorticité potentielle homogène en espace.

Considérons maintenant la contrainte sur l’énergie  $E$ . Pour des valeurs élevées de  $E$ , les taches de vorticité de même signe doivent se regrouper pour satisfaire la contrainte. Cela a pour effet une diminution de l’entropie (qualitativement, l’attraction entre vortex “trie” le champ de vorticité) : dans ce cas, une augmentation d’énergie implique une diminution d’entropie ( $\beta < 0$ ). D’où l’existence de températures négatives, une propriété peu courante en thermodynamique usuelle, remarquée par Onsager lorsqu’il a étudié le modèle des points vortex.

**Calcul des états d’équilibre.** La théorie RSM est prédictive pour l’organisation de l’écoulement à grande échelle, quelle que soit la condition initiale, pourvu que l’on soit capable de calculer les solutions du problème variationnel (1.26), qui implique un nombre infini de contraintes. Il serait illusoire de chercher directement la solution d’un tel problème, numériquement ou analytiquement. Il existe cependant des méthodes générales qui permettent de calculer des solutions de ce type de problèmes en “relaxant” les contraintes. Nous présenterons plus en détail ces méthodes au chapitre 5 sur l’inéquivalence d’ensemble. Dans le contexte des écoulements 2D, plusieurs méthodes numériques ont été proposées :

- **Des équations de relaxation** qui maximisent la production d'entropie tout en conservant les contraintes du problèmes. Ces équations garantissent ainsi la convergence vers des états d'équilibre locaux [100].
- **L'algorithme** numérique de Turkington et Whitaker [124], qui permet de résoudre le problème variationnel de la théorie RSM en linéarisant les contraintes. C'est une méthode efficace pour le calcul des états d'équilibre locaux.
- **Les méthodes classiques de continuation**, qui consistent à suivre une branche de solutions à partir d'un état stationnaire connu, puis à détecter les bifurcations éventuelles [111]. Bien que ces méthodes soient utiles pour calculer et classifier les états stationnaires, il n'est *a priori* pas évident de trouver la branche de solutions correspondant aux équilibres statistiques.

Ces méthodes ont été utilisées pour calculer, classifier, et décrire les états d'équilibres RSM de modèles à une couche (ou tout simplement de l'équation d'Euler), parmi les solutions de  $f(\psi) = \Delta\psi - \frac{\psi}{R^2} + h(x, y)$  [124, 120, 27, 65, 107]. La structure de ces état d'équilibre dépend de plusieurs paramètres :

1. La géométrie du domaine
2. la circulation  $\Gamma = \langle f(\psi) \rangle$
3. La forme de la relation  $q = f(\psi)$  (linéaire, proche d'un sinh ou proche d'un tanh, symétrique, asymétrique)
4. La topographie (en général un plan bêta  $h = \beta_c y$ )
5. Le rayon de déformation de Rossby  $R$

Aucune de ces études n'a rapporté l'existence de solutions présentant un jet dirigé vers l'est au centre du domaine de l'écoulement.

## 1.4 Motivations et méthode pour l'étude des jets inertiels dirigés vers l'est

Nous avons introduit les équations quasi-géostrophiques pour des modèles d'océans équivalents barotropes (à une couche et demi).

Notre but est de déterminer s'il existe des solutions inertielles stationnaires de ces modèles qui présentent des jets intenses dirigés vers l'est. Précisément,

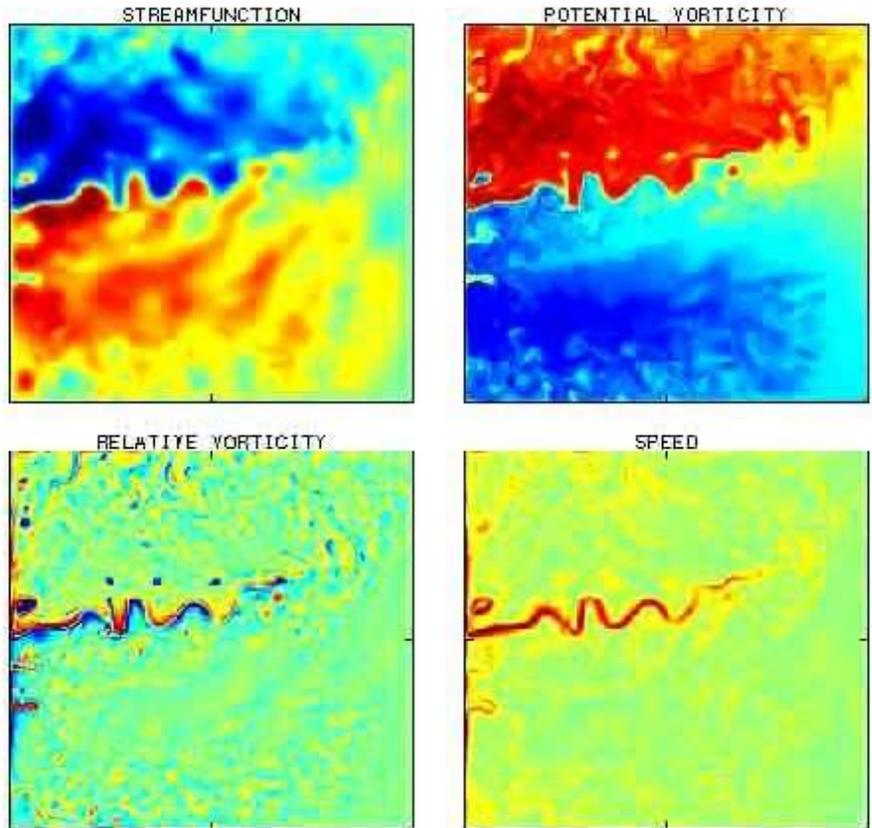


FIG. 1.6: Champs instantanés de la fonction courant, de la vitesse, et de la vorticité potentielle (et relative) dans la couche supérieure d'un modèle QG sur un plan  $\beta$ , à trois couches, dans un domaine fermé, forcé en surface par les vents (d'après [4, 15]). Les valeurs positives de vorticité (potentielle) et de fonction courant sont en rouge.

sons que l'on ne cherche pas à décrire les gyres subpolaires et subtropicaux, situés de part et d'autre de ces jets. Dans ces grands gyres, l'équilibre de Sverdrup est bien vérifié (qualitativement). Seule la région inertielle de ces courants nous intéresse dans le cadre des travaux présentés dans cette thèse (voir figure 0.2-b dans l'introduction).

Nous avons montré que les états inertiels stationnaires des modèles QG

sont caractérisés par une relation  $q = f(\psi)$  entre vorticité potentielle et fonction courant.

Nous avons présenté la solution de Fofonoff, obtenue pour une relation  $q - \psi$  linéaire, dans la limite des faibles énergies. Nous montrerons au chapitre 4 que ces écoulements sont des états d'équilibre statistique RSM, et que les solutions à haute énergie peuvent avoir une structure très différente des écoulements décrits par Fofonoff. Dans tous les cas, ces solutions ne présentent pas de jet dirigé vers l'est au centre d'un bassin océanique fermé.

De fait, les champs de fonction courant et de vorticité potentielle observés dans des simulations numériques d'écoulements quasi-géostrophiques sont très différents des écoulements de Fofonoff.

Considérons par exemple les simulations numériques de P. Berloff [4, 15], réalisées pour un modèle à trois couches, dans le cas d'un forçage "double-gyre" classique<sup>6</sup>, mais pour des nombres de Reynolds  $Re \sim 2000$  supérieurs aux valeurs traditionnellement considérées dans ce type de calculs numériques. Les différents champs représentés sont ceux de la couche supérieure.

On observe clairement un **front de vorticité potentielle associé aux jets dirigés vers l'est**, séparant deux zones où la vorticité potentielle est quasiment homogène.

Cela indique qu'il serait pertinent de considérer relation  $q - \psi$  proche d'une fonction de Heaviside ( $q = 1$  pour  $\psi < 0$  et  $q = -1$  pour  $\psi > 0$ ), lors de la recherche de solution stationnaires inertielles caractérisées par un jet dirigé vers l'est. Nous montrerons que de telles solutions existent effectivement dans un domaine fermé (chapitre 2), et dans un canal d'extension zonale infinie (sans frontière à l'est et à l'ouest).

Le fait de décrire ces écoulements est une première étape importante. Cela permet ensuite d'étudier les propriétés inertielles des jets intenses en détail : ces solutions sont-elles des équilibres statistiques ? Sont-elles stables ? Quelle est la dynamique des petites perturbations ?

Nous montrerons dans un premier temps que ces solutions ne sont pas des états d'équilibre statistique. L'étape suivante consistera à discuter leur stabilité. La réponse à cette question n'est pas évidente : d'une part, les jets

---

<sup>6</sup>Voir la sous-section "l'approche classique : les modèles forcés et dissipés", dans ce chapitre.

sont des structures robustes, mais de l'autre, leur dynamique présente une variabilité importante (formation d'anneaux, de méandres, oscillations du jet...).

Nous étudierons le cas le plus simple : un jet intense dans un canal d'extension zonale infinie (sans frontières à l'est et à l'ouest). Nous décrirons l'évolution des perturbations, et montrerons que ces solutions sont linéairement stables (chapitre 2).

On remarque sur la figure 1.6 l'existence d'une asymétrie est-ouest dans la structure de l'écoulement. Cela montre que la présence de frontières ouest et est dans le bassin océanique joue un rôle dans la description qualitative de ces écoulement. On s'attend donc à ce que la discussion de la stabilité (ou de l'instabilité) soit différente du cas d'un canal. Ce cas plus compliqué sera évoqué à la fin du chapitre 2.

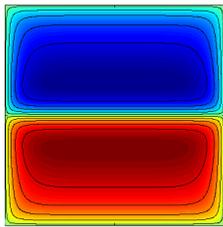


## Chapitre 2

---

# Jets intenses dirigés vers l'est dans un domaine fermé

---



Ce chapitre sera consacré à l'étude d'états d'équilibre statistiques des modèles quasi-géostrophiques. Nous répondrons aux questions suivantes :

1) Les jets intenses dirigés vers l'est sont-ils des états d'équilibre statistique du modèle quasi-géostrophique équivalent barotrope ?

2) Les états d'équilibre statistique de modèles plus compliqués (i.e. les équations quasi-géostrophiques baroclines, à deux couches) sont-ils caractérisés par des propriétés différentes du modèle équivalent barotrope ?

### 2.1 Jets intenses pour un modèle équivalent barotrope

On considère dans cette section le modèle quasi-géostrophique à 1.5 couche. Rappelons l'expression de la vorticité potentielle :

$$q = \Delta\psi - \frac{\psi}{R^2} + \beta_c y, \quad (2.1)$$

où  $\psi = \psi_{fr}$  aux frontières du domaine  $\partial\mathcal{D}$ , avec  $\langle\psi\rangle = 0$ . Hormis l'effet bêta, nous ne considérons pas de topographie.

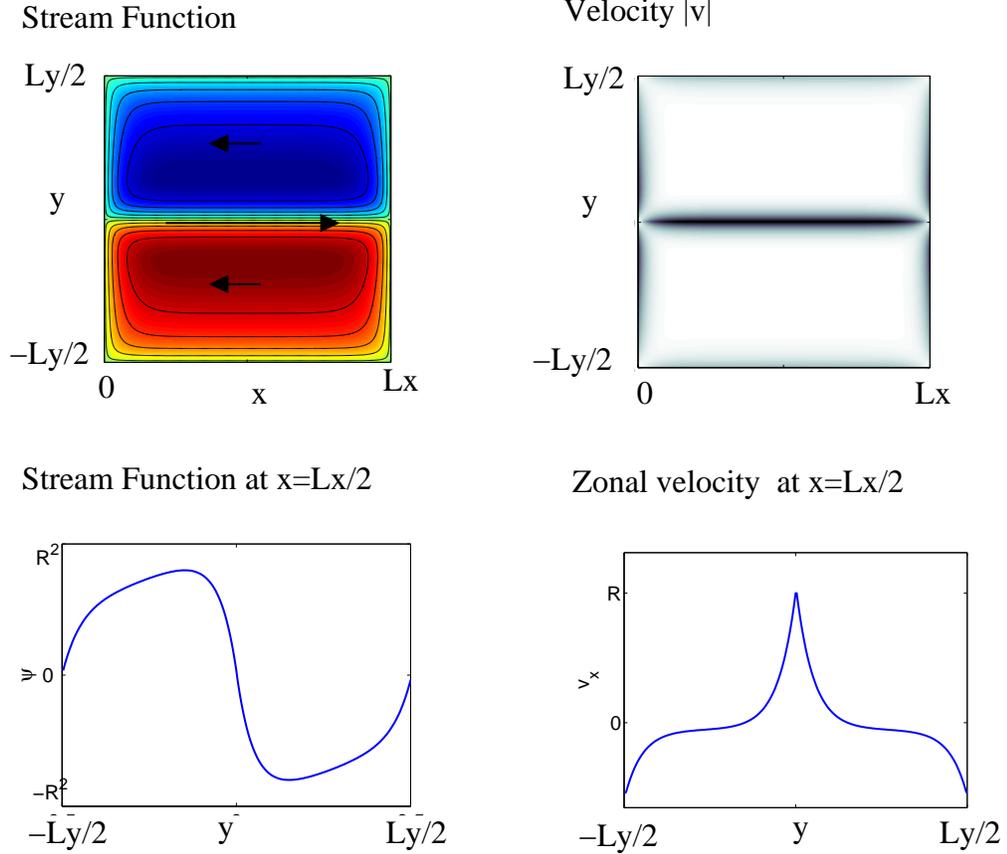


FIG. 2.1: Jet dirigé vers l'est. Le champ de vorticité potentielle est  $q = 1$  pour  $y > 0$ , et  $q = -1$  pour  $y < 0$ . ( $R = 0.1$ ,  $\beta_c = 0.5$ ,  $L_y = L_x = 1$ ). La vitesse zonale est  $v_x = -\partial_y \psi$ . La norme de la vitesse varie entre 0 (blanc) et  $R$  (noir).

## Description d'une solution stationnaire qui présente un jet intense dirigé vers l'est

Nous avons vu dans l'introduction que les états d'équilibre statistiques sont caractérisés par une relation  $q = f(\psi)$  donnée. Nous avons aussi observé (figure 1.6) que les champs de vorticité potentielle issus de simulations numériques des équations quasi-géostrophiques (pour un modèle à trois couches, forcé par les vents en surface, dans un régime turbulent) indiquent la présence de deux zones distinctes où la vorticité potentielle (moyennée) est quasiment homogène. Ces valeurs de vorticité potentielle

peuvent dans une bonne approximation être considérées comme opposées  $q = \pm\sigma$  dans les deux zones. on remarque que dans chaque zone, la fonction courant est de signe opposé à celui de la vorticité potentielle.

Cela indique qu'il est pertinent de chercher un état stationnaire caractérisées par  $q = \sigma - 2\sigma H(\psi)$ , où  $H$  est la fonction de Heaviside. En particulier, l'état qui nous intéresse est celui où la vorticité potentielle positive est localisée dans la moitié nord du domaine :  $q = \sigma > 0$  pour  $y > 0$ , et  $q = -\sigma$  pour tout  $y < 0$ .

Dans la suite de cette section, nous choisissons d'adimensionner les unités de temps et longueur de sorte à avoir  $\sigma = 1$  et  $L_y = 2$ , où  $L_y$  est l'extension nord-sud du bassin océanique.

Pour montrer qu'il existe une solution caractérisée par deux zones homogènes de vorticité potentielle séparées par un front zonal, et par la relation  $q = 1 - 2H(\psi)$ , il faut vérifier que l'on a bien  $\psi < 0$  pour  $y > 0$ , et  $\psi > 0$  pour  $y < 0$ .

Dans la limite  $R \rightarrow 0$ , nous pouvons faire une approximation de couche limite pour résoudre explicitement l'équation (2.1). Suffisamment loin des frontières et de l'interface entre les deux sous-domaines de vorticité potentielle homogène, le laplacien est négligeable, et la fonction courant est simplement donnée par

$$\psi = R^2 (\beta_c y - 1) \text{ pour } y > 0 \quad \psi = R^2 (\beta_c y + 1) \text{ pour } y < 0 . \quad (2.2)$$

La vitesse correspondante est purement zonale ( $v_y = \partial_x \psi = 0$ ), dirigée vers l'ouest :  $v_x = -\partial_y \psi = -R^2 \beta_c$ .

Lors du passage de l'interface en  $y = 0$ , la fonction courant varie brusquement de  $-R^2$  à  $R^2$ . Les couches limites étant caractérisées par une épaisseur  $R$ , la vitesse (zonale) le long de cette interface est  $v_x = -\partial_y \psi \sim -2R$ , dirigée vers l'est. Le rapport entre les vitesses du jet et les vitesses à l'intérieur des domaines est d'ordre  $1/R$ . **Il s'agit bien d'un jet intense.** Le calcul explicite de cette couche limite est fait dans l'annexe A, pour un cas plus général où le front de vorticité potentielle entre les deux zones est défini par une interface d'équation  $l(x)$  (voir figure 2.2). Par ailleurs, il existe aussi une couche limite d'épaisseur  $R$  le long des bords du bassin, de manière à raccorder la solution (2.2) aux conditions aux limites

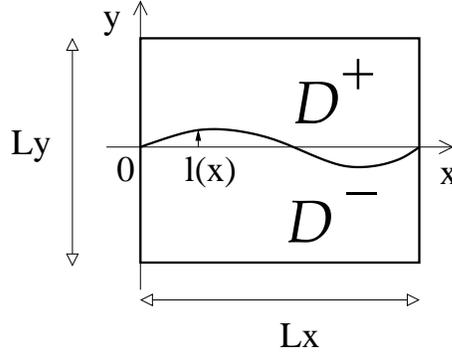


FIG. 2.2: Le domaine  $\mathcal{D}$  est séparé en deux sous-domaines  $\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{D}^-$  par une interface  $l(x)$ .

$\psi = \psi_{fr}$  aux frontières du bassin. Remarquons que dans le cas symétrique  $q(x, y) = -q(x, -y)$ , la condition  $\langle \psi \rangle = 0$  donne directement  $\psi_{fr} = 0$ .

D'après l'équation (2.2), l'hypothèse  $q = 1 - 2H(\psi)$  est vérifiée si  $\beta_c < 1$  (en unités adimensionnées). Nous reviendrons sur cette condition (et sur les valeurs des paramètres associés au Gulf Stream) au chapitre suivant, lors de l'étude du même type de solutions dans un canal d'extension zonale infinie.

Nous avons calculé numériquement ces solutions, que nous présentons sur la figure figure 2.1. Nous traçons le champ de fonction courant et de la norme de la vitesse, ainsi qu'un profil méridional (nord-sud) de fonction courant et de vitesse zonale  $v_x = -\partial_y \psi$ . On distingue nettement un jet dirigé vers l'est localisé au centre du domaine, et une faible recirculation vers l'ouest dans le reste du domaine. La recirculation sur les bords est d'autant plus importante que l'effet bêta est faible.

Le calcul numérique a été réalisé par un algorithme de continuation. Remarquons qu'il suffit d'utiliser un solveur aux différences finies pour résoudre l'équation de Helmholtz (2.1), car le champ  $q(x, y)$  est connu *a priori* dans le cas présenté figure 2.1. Cependant, l'avantage de l'algorithme de continuation est qu'il a ensuite été possible d'étudier l'existence de cette solution pour une classe plus large de relations  $q - \psi$ . Par exemple, nous avons pu "suivre" la branche des solutions qui présentent un jet intense, pour une relation  $q = \tanh(C\psi/R^2)$ . La valeur  $C \rightarrow -\infty$  correspond

Notre but est maintenant de déterminer si la solution obtenue est un état d'équilibre statistique RSM.

## Les jets intenses sont des points critiques du problème variationnel RSM

Avant de déterminer si les solutions qui présentent un jet intense dirigé vers l'est sont des maxima d'entropie, montrons que ces états sont des points critiques du problème variationnel (1.26) de la théorie statistique RSM, c'est à dire qu'ils annulent les variations premières de l'entropie sous contraintes.

La première étape est de trouver des configurations *microscopiques* qui correspondent aux états *macroscopiques* que l'on a décrit. Nous pourrions ensuite calculer les points critiques du problème variationnel de la théorie statistique dans l'ensemble des configurations microscopiques permises.

La solution "jet intense" est caractérisée par deux zones homogènes de vorticité potentielle  $\pm 1$ . Nous allons donc considérer le cas de configurations microscopiques où la vorticité potentielle ne peut prendre que ces deux valeurs  $q = \pm 1$ , et montrer que l'on obtient bien dans certains cas des points critiques caractérisés par une relation  $\bar{q} = 1 - 2H(\bar{\psi})$ .

Afin de calculer l'état macroscopique le plus probable, on introduit la probabilité  $p(x, y)$  de mesurer le niveau 1 en un point de l'écoulement. Le champ macroscopique de vorticité est directement lié à ce champ de probabilité :

$$\bar{q} = p - (1 - p) = 2p - 1 .$$

L'entropie de mélange (1.25) est dans ce cas particulier

$$\mathcal{S}_{BG} = - \langle (p \ln p + (1 - p) \ln (1 - p)) \rangle , \quad (2.3)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne une moyenne sur tout le domaine de l'écoulement. Dans le cas d'un système à deux niveaux, la contrainte sur la circulation fixe l'aire  $g(\pm 1)$  des niveaux de vorticité potentielle, et est ainsi équivalente à la conservation de *tous* les Casimirs. Le problème variationnel (1.26) de la théorie statistique n'implique donc que deux contraintes données par la conservation de l'énergie (1.22) et de la circulation  $\mathcal{C}[p] = 2 \langle p \rangle - 1$  :

$$S_{RSM}(E, \Gamma) = \max_{\{p\}} \{ \mathcal{S}_{BG}[p] \mid \mathcal{E}[p] = E \ \& \ \mathcal{C}[p] = \Gamma \} \quad (2.4)$$

Nous introduisons les multiplicateurs de Lagrange <sup>1</sup>  $C/R^2$  et  $\gamma$  afin de cal-

---

<sup>1</sup>En mécanique statistique, le paramètre de Lagrange associé à la conservation de l'énergie est traditionnellement noté  $\beta$ . Nous avons choisi d'utiliser ici la notation  $C/R^2$  pour ne pas confondre ce terme avec le paramètre  $\beta_c$  introduit lors de l'approximation

culer les points critiques de ce problème variationnel :

$$\delta\mathcal{S}_{BG} - \frac{C}{R^2}\delta\mathcal{E} - \gamma\delta\mathcal{C} = 0, \quad \text{avec}$$

$$\delta\mathcal{S}_{BG} = \left\langle \ln\left(\frac{1-p}{p}\right) \delta p \right\rangle, \quad \delta\mathcal{E} = -2 \langle (\bar{\psi} - \psi_{fr}) \delta p \rangle, \quad \delta\mathcal{C} = 2 \langle \delta p \rangle.$$

On obtient alors l'expression de  $p$  puis celle de

$$\bar{q} = \tanh\left(\frac{C}{R^2}(\bar{\psi} - \psi_{fr}) - \gamma\right).$$

La vorticité potentielle macroscopique peut donc varier continuellement entre deux valeurs extrêmes qui correspondent aux deux niveaux microscopiques  $\pm\sigma$ . Les deux paramètres  $C$  et  $\gamma$  dépendent des contraintes sur l'énergie  $E$  et la circulation  $\Gamma$ . Les  tats d'équilibre associés à ces configurations microscopiques composées de deux niveaux ont fait l'objet d'études dans le contexte de l'atmosphère jovienne [19], et des océans [107]. Nous reviendrons ultérieurement sur les résultats de ces études.

Considérons le cas  $C \rightarrow -\infty$ , et supposons que  $\bar{\psi}$  est d'ordre  $R^2$ . La relation  $q - \psi$  tend vers une fonction de Heaviside  $\bar{q} = 1 - 2H(\bar{\psi} - \psi_c)$ , avec  $\psi_c = C\psi_{fr}/R^2 - \gamma$ . Dans le cas de la solution décrite au paragraphe précédent,  $\psi_{fr} = \gamma = \psi_c = 0$ . On vérifie de plus que la fonction  $\bar{\psi}$  donnée par l'expression (2.2) est bien d'ordre  $R^2$ . **Nous concluons que l'état stationnaire qui présente un jet intense dirigé vers l'est est un point critique du problème variationnel de la théorie RSM.**

### Ces  tats ne sont pas des maxima d'entropie

Afin de déterminer si la solution qui présente un jet intense dirigé vers l'est est un maximum local d'entropie, on utilise un résultat classique pour l'étude des problèmes variationnels sous contraintes : un point critique du problème variationnel (2.4) est un maximum local d'entropie si et seulement si toute perturbation qui satisfait les contraintes *au premier ordre* ( $\delta\mathcal{E} = 0$  et  $\delta\mathcal{C} = 0$ ) vérifie

$$\delta^2\mathcal{S} - \frac{C}{R^2}\delta^2\mathcal{E} - \gamma\delta^2\mathcal{C} < 0 \tag{2.5}$$

---

de plan bêta. Le choix d'un préfacteur en  $1/R^2$  sera justifié *a posteriori*, quand nous considérerons la limite  $R \rightarrow 0$ .

L'état qui nous intéresse est caractérisé par  $\frac{C}{R^2} \rightarrow -\infty$ , et la circulation est une contrainte linéaire ( $\delta^2\mathcal{C} = 0$ ). La condition précédente devient donc :

$$\delta^2\mathcal{E} \leq 0 \quad \text{avec} \quad \delta\mathcal{C} = 0 \quad \text{et} \quad \delta\mathcal{E} = 0 \quad (2.6)$$

Ainsi, montrer que le point critique est un maximum local d'entropie revient à montrer que c'est un maximum local d'énergie pour des perturbations qui conservent la circulation totale.

Nous calculons dans l'annexe A l'énergie des états représentés schématiquement figure 2.2, obtenus en perturbant le front zonal de vorticité potentielle, défini par  $l(x)$  (le cas  $l = 0$  correspond à la solution stationnaire étudiée). La perturbation  $l(x)$  est choisie de manière à conserver l'aire des sous-domaines où la vorticité potentielle est homogène :  $\int_0^{L_x} l(x)dx = 0$ . Nous montrons dans l'annexe A qu'il existe toute une classe de perturbations  $l(x)$  qui augmentent l'énergie de la solution stationnaire  $l(x) = 0$ . Cet état n'est donc pas un maximum d'énergie. **Nous concluons que les solutions associées à un jet intense dirigé vers l'est ne sont pas des états d'équilibre statistique locaux, et *a fortiori* globaux.**

## Lien avec les études antérieures et conclusion

Les états d'équilibre statistique de systèmes à deux niveaux microscopiques de vorticité potentielle ont été étudiés juste avant le début de cette thèse par Nicolas Sauvage, lors de son stage de Master 2 encadré par Freddy Bouchet [107].

À l'aide de calculs numériques et analytiques, ils ont étudié l'effet des différents paramètres (circulation, effet bêta...) sur la structure des maxima d'entropie.

Nous présentons dans les paragraphes suivants les conclusions de cette étude liées à l'existence (ou non) de jets intenses, sans les détailler, et en y incluant les résultats présentés dans les paragraphes précédents. L'ensemble est résumé sur la figure 2.3.

En l'**absence d'effet bêta** (figure 2.3-a-b), les configurations qui correspondent à un **jet zonal dirigé vers l'ouest et vers l'est sont des maxima locaux d'entropie**. Ce peut être montré par le calcul numérique des maxima d'énergie et par le même type d'arguments théoriques qui nous

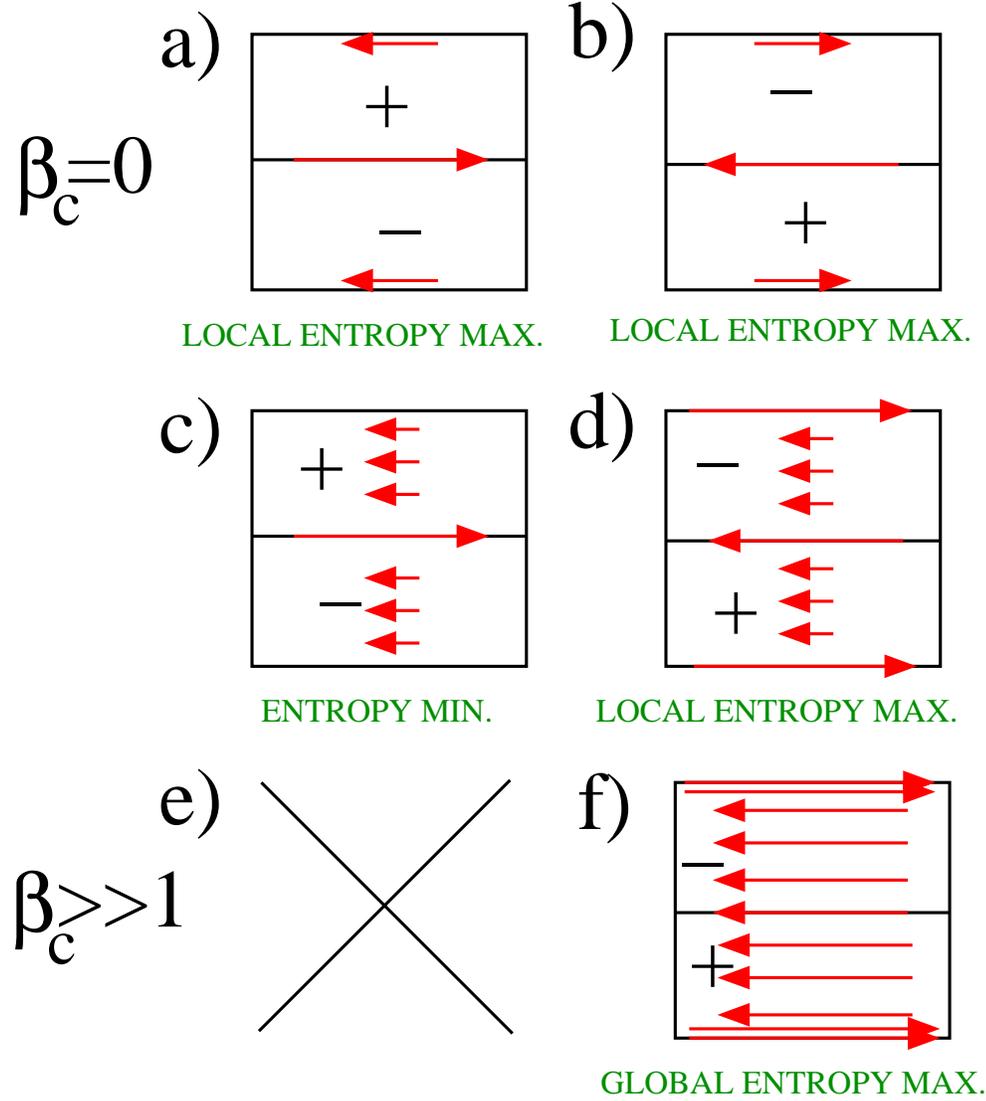


FIG. 2.3: **Jets zonaux dans un domaine fermé.** Représentation schématique de solutions stationnaires associées à deux zones homogènes de vorticité potentielle ( $\bar{q} = \pm 1$ ) dans deux configurations opposées : jet dirigé vers l'est (a-c-e) ou vers l'ouest (b-d-f), pour des valeurs croissantes de l'effet bêta  $\beta_c = 0$  (a-b),  $\beta_c < 1$  (c-d) et  $\beta_c \gg 1$  (e-f). Nous avons considéré un domaine d'aire unité. Nous verrons au chapitre suivant que la valeur "réelle" de  $\beta_c$  (en unités adimensionnées) est située autour de 1.

ont permis de conclure que les jets zonaux dirigés vers l'est *ne sont pas* des maxima locaux d'entropie<sup>2</sup> en présence de l'effet bêta.

Dans certaines configurations, comme par exemple un domaine suffisamment étiré dans la direction nord-sud, ces états sont des maxima globaux d'entropie.

Dans le cas limite opposé, où **l'effet bêta domine** les autres termes de l'équation  $\Delta\psi - \psi/R^2 = q - \beta_c y$ , **on retrouve la solution de Fofonoff**  $\psi \sim R^2\beta_c y$  : il n'y a plus de jet intense (hormis des recirculations le long des frontières nord et sud), et la seule configuration possible est celle où la vorticité potentielle négative est localisée au nord, comme représenté figure 2.3-f. En effet, une zone de vorticité potentielle négative au nord, où la fonction courant est positive, serait incompatible avec l'hypothèse d'une relation  $q = 1 - 2H(\psi)$ .

Dans la sous-section précédente, nous avons montré qu'il existe une solution où toute la vorticité potentielle positive est au nord quand  $\beta_c < 1$ . Ce cas est représenté figure 2.3-c. Nous avons montré que cet état n'est pas un maximum local d'entropie si  $\beta_c$  est strictement positif, indépendant de  $R$ . Le même type d'arguments peut être utilisé pour montrer que la solution associée à un **jet dirigé vers l'ouest est un maximum local d'entropie**. La solution correspondante est représentée figure 2.3-d. Comme dans le cas  $\beta_c = 0$ , il existe des configurations où cette solution est aussi un maximum global d'entropie (par exemple un domaine suffisamment étiré dans la direction nord-sud).

Dans l'océan "réel", l'effet bêta n'est pas négligeable par rapport aux valeurs de vorticité potentielle observées dans les couches supérieures. Nous concluons que les équilibres statistiques de modèles quasi-géostrophiques à une couche ne présentent pas de jet intense dirigé vers l'est pour des paramètres réalistes. Au contraire, les états dominés par l'effet bêta présentent un courant dirigé vers l'ouest.

A ce stade, nous pouvons envisager deux types d'études. La première possibilité est de s'intéresser à la stabilité et la dynamique autour des solu-

---

<sup>2</sup>Dans notre cas, la conclusion était fondée sur le fait que  $\beta_c > 0$  était fixé, indépendamment de  $R$

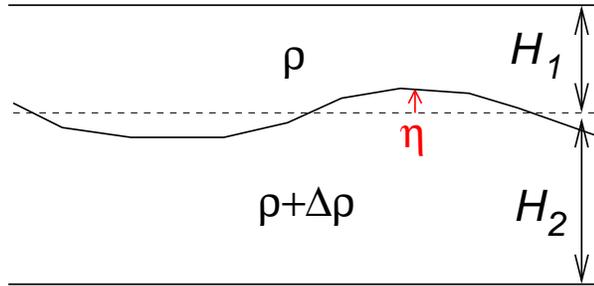


FIG. 2.4: Structure verticale du modèle à deux couches

tions que nous avons décrites au début de ce chapitre, pour déterminer si certaines propriétés des jets inertiels dirigés vers l'est sont bien représentées par ces modèles simples d'écoulement. Cela fera l'objet du chapitre suivant.

La suite de ce chapitre sera consacrée à la seconde possibilité, qui consiste à étudier les équilibres statistiques d'un modèle d'océan un peu plus complexe : les équations quasi-géostrophiques à deux couches. On peut en effet se demander si ce "degré" supérieur de complexité permet d'obtenir des états d'équilibres différents de ceux décrits dans la section précédente.

Les modèles à deux couches permettent de prendre en compte les transferts verticaux d'énergie dans l'océan. On distinguera un mode barotropes (une moyenne verticale sur les deux couches) et un mode barocline (une différence entre les deux couches). L'énergie cinétique des courants océaniques "réels" est principalement localisée dans la couche supérieure des océans, ce qui signifie que l'écoulement est dominé par la composante barocline. Cela est-il compatible avec l'existence d'un état d'équilibre statistique ? Existe-t-il des configurations où ces états présentent des jets intenses dirigés vers l'est, principalement localisés dans la couche supérieure, comme le Gulf Stream et le Kuroshio ?

## 2.2 Équilibres statistiques pour un modèle à deux couches.

### Modèle

Nous avons introduit au premier chapitre les modèles quasi-géostrophiques équivalents barotropes. Nous avons supposé que l'écoulement de la couche

inférieure était fixé, et que la dynamique était restreinte à une couche de surface active. Nous considérons maintenant que cette couche inférieure est aussi active, et qu'elle interagit avec la couche supérieure. La structure verticale est représentée figure 2.4. La couche supérieure a une épaisseur moyenne  $H_1 = \delta H$ , où  $H$  est la hauteur totale et  $\delta$  une constante entre 0 et 1. En pratique, nous considérerons  $\delta = 0.2$  : la couche supérieure représente la thermocline, d'épaisseur  $\sim 1000m$ , et surmonte la couche profonde d'épaisseur  $H_2 = (1 - \delta)H \sim 4000m$ .

La dynamique de l'écoulement s'écrit sous la forme d'équations d'advection de la vorticité potentielle dans chaque couche :

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla q_i = 0, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi_i, \quad (2.7)$$

$$q_1 = \Delta \psi_1 - \frac{\psi_1 - \psi_2}{R^2 \delta} + \beta_c y, \quad (2.8)$$

$$q_2 = \Delta \psi_2 - \frac{\psi_2 - \psi_1}{R^2 (1 - \delta)} + \beta_c y, \quad (2.9)$$

où  $R = \sqrt{g'H}/f_0$ , comme dans le cadre du modèle équivalent barotrope. Les différentes étapes pour obtenir ces équations sont les mêmes que pour le modèle à une couche (voir chapitre 1). Une présentation plus détaillée de ce modèle est disponible dans le livre de Pedlosky [88].

**Modes barotropes et baroclines.** Il sera commode d'écrire les équations précédentes sous la forme de modes barotropes et baroclines. La composante barotrope de l'écoulement est la moyenne verticale des fonctions courant pondérées par la hauteur des couches :

$$\psi_t = \delta \psi_1 + (1 - \delta) \psi_2$$

Le composante barocline de l'écoulement est la différence des fonctions courant dans les deux couches :

$$\psi_c = \psi_1 - \psi_2$$

On utilise les équations (2.8) et (2.9) pour déterminer ces deux modes :

$$\Delta \psi_t = \delta q_1 + (1 - \delta) q_2 - \beta_c y \quad (2.10)$$

$$\Delta\psi_c - \frac{\psi_c}{\delta(1-\delta)R^2} = q_1 - q_2 \quad (2.11)$$

Il est remarquable que la longueur  $R$  n'intervienne pas dans la définition de la composante barotrope. En revanche, la longueur  $R\sqrt{\delta(1-\delta)}$  est une longueur caractéristique d'écrantage dans l'équation de la composante barocline. C'est le (premier) rayon interne de déformation de Rossby<sup>3</sup>. Comme cette distance caractéristique est de l'ordre de 50 km, c'est à dire négligeable par rapport aux dimensions du bassin océanique, il sera pertinent de considérer la limite  $R \rightarrow 0$  pour les calculs théoriques.

Remarquons en outre que l'effet bêta n'intervient explicitement que dans l'équation (2.10) qui définit le champ de fonction courant barotrope. Si l'écoulement est dominé par la composante barocline, cet effet bêta n'interviendra pas dans l'organisation de l'écoulement à grande échelle. En revanche, si l'écoulement est dominé par la composante barotrope, la répartition des champs  $q_1$  et  $q_2$  dépendra de l'effet bêta.

**Conditions aux limites.** Comme pour le modèle à une couche, nous considérons que la vitesse est tangentielle aux frontières du domaine. Cela signifie que la frontière est elle-même une ligne de courant :  $\psi_i = \psi_{i,fr}$  sur  $\partial\mathcal{D}$ . La valeur  $\psi_{i,fr}$  de la fonction courant aux bords est contrainte par la conservation de la masse. Nous avons en effet vu au premier chapitre que l'interface entre les deux couches est proportionnelle à  $\psi_1 - \psi_2$ . La conservation de la masse impose alors  $\langle \psi_1 - \psi_2 \rangle = \langle \psi_c \rangle = 0$ . Nous ne disposons pas de contraintes supplémentaires (dans le cadre de l'approximation de toit rigide), ce qui laisse un degré de liberté pour le choix des valeurs de  $\psi_{1,fr}$  et  $\psi_{2,fr}$ . Nous choisissons d'imposer ces valeurs de sorte à ce que la fonction courant barotrope s'annule le long des frontières :  $\psi_{t,fr} = 0$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Quantités conservées** Comme dans le cas à une couche, les Casimirs  $\mathcal{C}_{g,i}[q_i] = \int_{\mathcal{D}} g(q_i) d\mathbf{r}$  associés aux équations de transport (2.7) dans chaque couche sont conservés ( $g$  est n'importe quelle fonction dérivable sur  $\mathcal{D}$ ). Par exemple, les circulations  $\Gamma_i = \int_{\mathcal{D}} q_i d\mathbf{r}$  de chacune des couches sont conservées.

---

<sup>3</sup>Nous utiliserons abusivement cette terminologie pour  $R$  lui-même.

Un calcul direct montre que l'énergie totale est aussi une quantité conservée

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( \delta (\nabla \psi_1)^2 + (1 - \delta) (\nabla \psi_2)^2 + \frac{(\psi_1 - \psi_2)^2}{R^2} \right) d\mathbf{r} \quad (2.12)$$

Les deux premiers termes représentent l'énergie cinétique des deux couches, et le dernier terme représente l'énergie potentielle. Comme dans le modèle à une couche, l'énergie potentielle est proportionnelle à  $\eta^2/R^2$ , où  $\eta = \psi_1 - \psi_2$  est l'écart de l'interface entre les deux couches par rapport à la position de repos.

L'énergie (2.12) peut aussi s'exprimer en fonction des composantes barotropes et baroclines :  $E = E_c + E_t + E_p$ , avec :

$$\text{Energie cinétique barotrope} \quad E_t = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} (\nabla \psi_t)^2 d\mathbf{r} \quad (2.13)$$

$$\text{Energie cinétique barocline} \quad E_c = \frac{\delta(1-\delta)}{2} \int_{\mathcal{D}} (\nabla \psi_c)^2 d\mathbf{r} \quad (2.14)$$

$$\text{Energie potentielle barocline} \quad E_p = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\psi_c^2}{R^2} d\mathbf{r} \quad (2.15)$$

Comme pour le modèle à une couche, la théorie statistique prédit l'état d'équilibre du modèle, qui maximise une entropie de mélange pour une énergie, et une distribution des niveaux de vorticités microscopiques (ce qui est équivalent à la connaissance des Casimirs) fixées. La théorie donne la forme de la relation  $q_i = f_i(\psi_i)$  ( $i = 1, 2$ ) entre vorticités potentielle et fonction courant dans chacune des deux couches.

## Etats d'équilibre statistique : système à deux niveaux

Nous voulons calculer les états d'équilibre statistique du modèle à deux couches, pour une configuration microscopique où la vorticités potentielle ne peut prendre que deux niveaux  $\sigma_i^\pm$  dans chacune des couches ( $i = 1, 2$ ). Nous faisons ce choix par simplicité, mais la prise en compte d'un continuum de niveaux de vorticités microscopiques proche de la distribution à deux niveaux ne changerait pas les résultats (au moins qualitativement) [66].

Nous supposons de plus que ces niveaux sont opposés ( $\sigma_i^+ = -\sigma_i^- = \sigma_i$ ), et nous considérerons le cas où les aires  $g(\pm\sigma_i)$  associées à chacun de

## 2. JETS INTENSES DIRIGÉS VERS L'EST DANS UN DOMAINE FERMÉ

---

ces niveaux microscopiques sont égales. La raison est la même que dans le cas du modèle à une couche : les simulations numériques de ces modèles quasi-géostrophiques indiquent que la vorticité potentielle est répartie de manière antisymétrique par rapport à l'axe  $y = 0$ , au milieu du bassin (voir figure 1.6).

Soit  $p_i(\mathbf{r})$  la probabilité de mesurer le niveau de vorticité potentielle  $\sigma_i$  au point  $\mathbf{r}$ . Le champ de vorticité macroscopique s'écrit alors

$$q_i = \sigma_i (2p_i - 1) .$$

L'entropie du système est

$$\mathcal{S}_{BG} = - \sum_{i=\{1,2\}} \langle p_i \ln p_i + (1 - p_i) \ln (1 - p_i) \rangle , \quad (2.16)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  représente une intégration sur tout le domaine  $\mathcal{D}$  de l'écoulement, d'aire unité. Comme dans le cas d'un système à deux niveaux pour le modèle à une couche, la conservation de tous les Casimirs est simplement donnée par la conservation de la circulation totale  $\mathcal{C}_i[p_i] = 2\sigma_i \langle p_i \rangle - \sigma_i$ . Le problème variationnel de la théorie statistique se réduit alors à un problème à trois contraintes :

$$S_{RSM}(E, \Gamma) = \max_{\{p\}} \{ \mathcal{S}_{BG}[p] \mid \mathcal{E}[p] = E \ \& \ \mathcal{C}_1[p] = \Gamma_1 \ \& \ \mathcal{C}_2[p] = \Gamma_2 \} \quad (2.17)$$

Afin de calculer les points critiques de ce problèmes, il est commode de récrire l'énergie (2.12), après une intégration par parties :

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \langle (q_i - \beta_c y) (\psi_i - \psi_{ifr}) \rangle$$

On introduit les multiplicateurs de Lagrange  $C/R^2$ ,  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  associés respectivement à l'énergie  $E$  et aux circulations  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Un calcul direct de  $\delta \mathcal{S}_{BG} - \frac{C}{R^2} \delta \mathcal{E} - \sum_i \gamma_i \delta \mathcal{C}_i$  donne le champ de probabilité  $p_i$ , puis le champ de vorticité potentielle

$$q_1 = \sigma_1 \tanh \left( \frac{C}{R^2} \delta (\psi_1 - \psi_{1c}) \right) \quad (2.18)$$

$$q_2 = \sigma_2 \tanh \left( \frac{C}{R^2} (1 - \delta) (\psi_2 - \psi_{2c}) \right) , \quad (2.19)$$

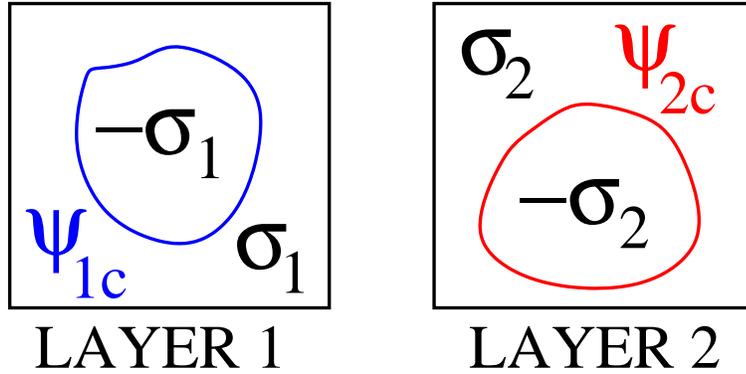


FIG. 2.5: Maxima d'énergie : on suppose que le champ de vorticité potentielle est composé de deux sous domaines où la vorticité est homogène. D'après l'équation (2.20), la frontière entre ces sous-domaines est la ligne de courant  $\psi_i = \psi_{ic}$ .

où  $\psi_{1c} = \psi_{1fr} - \gamma_1 R^2 / \delta C$  et  $\psi_{2c} = \psi_{2fr} - \gamma_2 R^2 / (1 - \delta) C$ .

Pour des niveaux de vorticité  $\sigma_i$  donnés et une valeur donnée de l'épaisseur relative de la couche supérieure  $\delta = H_1 / (H_1 + H_2)$ , les relations  $q_i - \psi_i$  dépendent de trois paramètres ( $C$ ,  $\psi_{1c}$  et  $\psi_{2c}$ ), qu'il faut déterminer en utilisant les contraintes sur  $E$ ,  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ .

### But

Nous avons déjà expliqué qu'il est pertinent de considérer la limite des faibles rayons de déformation de Rossby ( $R \rightarrow 0$ ) dans le contexte océanique. Cela nous permettra d'étudier analytiquement deux cas limites :

- i) le cas d'une fonction de Heaviside entre vorticité potentielle et fonction courant  $q_i = \sigma_i (1 - 2H(\psi_i))$  ( $C \rightarrow -\infty$ ).
- ii) le cas d'une relation  $q_i - \psi_i$  linéaire ( $C\psi_i \rightarrow 0$ ).

Le cas intermédiaire sera étudié numériquement.

### Maxima d'énergie

Un raisonnement similaire à celui énoncé dans les équations (2.5) et (2.6) de la première section de ce chapitre montre que les états d'équilibre d'énergie maximale sont caractérisés par  $C \rightarrow -\infty$ . Dans cette limite, si la fonction courant  $\psi_i$  est d'ordre  $R$  (ce qui sera effectivement le cas), les

relations  $q_i - \psi_i$  (2.18) et (2.19) sont des fonctions de Heaviside :

$$q_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } \psi_i < \psi_{ic} \\ -\sigma_i & \text{si } \psi_i > \psi_{ic} \end{cases} \quad (2.20)$$

Nous supposons que les champs de vorticité de ces  tats à haute énergie sont constitués de deux sous-domaines où la vorticité potentielle est homogène, représentés schématiquement figure 2.5. Ces hypothèses doivent être vérifiées *a posteriori*. Des arguments similaires à ceux utilisés dans l'annexe A de ce chapitre permettent dans certains cas de montrer analytiquement que les  tats obtenus sont bien des maxima globaux d'énergie. Dans des cas plus compliqués, il est nécessaire de recourir à des calculs numériques qui déterminent la configuration d'énergie maximale (voir la fin de l'annexe B).

### Ordre de grandeur des différentes contributions de l'énergie

Nous voulons déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique barotrope (2.13), de l'énergie cinétique barocline (2.14), et de l'énergie potentielle (2.15), pour les  tats maxima d'énergie.

Intéressons-nous dans un premier temps à la fonction courant barocline, donnée par l'équation (2.11). Les champs de vorticité potentielle  $q_1$  et  $q_2$  sont constitués de deux sous-domaines où leur valeur est constante, comme sur la figure 2.5. Le terme  $q_1 - q_2$  qui apparaît dans le membre de droite de l'équation (2.11) est donc constant dans quatre sous-domaines de l'écoulement, notés  $\mathcal{D}_{c,i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , où  $q_1 - q_2 = \pm(\sigma_1 \pm \sigma_2)$ . Pour simplifier le calcul d'ordre de grandeur, on utilisera la notation  $\sigma$  pour désigner les valeurs  $\pm(\sigma_1 \pm \sigma_2)$ .

Dans la limite des faibles rayons de déformation de Rossby ( $R \rightarrow 0$ ), il est possible de faire une approximation de couche limite dans l'équation (2.11) : suffisamment loin des frontières des sous-domaines  $\mathcal{D}_{c,i}$ , le laplacien est négligeable, et  $\psi_c = R^2 \delta (1 - \delta) (q_1 - q_2)$ . Le long des frontières de ces sous-domaines, le laplacien n'est plus négligeable, et  $\psi_c$  varie sur une échelle caractéristique  $R$ , passant brusquement d'une valeur de  $q_1 - q_2$  à une autre. Appelons  $\Delta\sigma$  le saut de vorticité potentielle barocline  $q_1 - q_2$  lors du passage d'une zone à l'autre. La vitesse associée à la brusque variation de fonction courant est alors  $v_c \sim R^2 \Delta\sigma / R$ .

L'énergie cinétique barocline (2.14) est localisée le long des frontières des sous-domaines  $\mathcal{D}_{c,i}$ , sur une épaisseur  $R$ . Puisque ces sous-domaines sont de l'ordre de grandeur du domaine total  $\mathcal{D}$  (d'aire unité), la longueur des frontières est d'ordre  $L \sim 1$ . Ainsi, l'énergie cinétique barocline est donnée par le carré des vitesses le long des jets ( $v_c^2 \sim R\Delta^2\sigma^2$ ) multiplié par la surface  $LR$ . On estime donc l'énergie cinétique barocline totale à  $E_c \sim \Delta\sigma^2 R^3 L$ .

L'énergie potentielle (2.15) est donnée par l'intégrale de  $\psi_c^2/R^2$  sur tout le domaine. Comme  $\psi_c \sim \sigma R^2$  dans les différents sous-domaines, l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle est donc estimé à  $E_p \sim \sigma^2 L^2 R^2$ .

Pour estimer la contribution de l'énergie barotrope (2.13), nous considérons l'équation (2.10) pour la composante  $\psi_t$  de la fonction courant. Comme aucune échelle d'écrantage n'apparaît dans cette équation, les échelles caractéristiques de variations de  $\psi_t$  sont de l'ordre de la longueur  $L$  du domaine. En estimant l'ordre de grandeurs des termes de droite et de gauche dans l'équation (2.10), on obtient  $\psi_t/L^2 \sim (\sigma + \beta_c L)$ . L'ordre de grandeur de la vitesse barotrope est donc  $v \sim \psi_t/L \sim L(\sigma + \beta_c L)$ . On estime alors l'énergie (2.13) à  $E_t \sim L^3(\sigma + \beta_c L)$ .

Pour conclure, les ordres de grandeur des différentes contributions à l'énergie sont :

$$E_c \sim \sigma^2 R^3 \quad E_t \sim L^3(\sigma + \beta_c L)^2 \quad E_p \sim \sigma^2 L R^2, \quad (2.21)$$

dans la limite des faibles rayons de déformation ( $R \rightarrow 0$ ). On a supposé que les sauts de vorticité potentielle sont de l'ordre de la vorticité potentielle elle-même ( $\Delta\sigma \sim \sigma$ ).

L'énergie est donc dominée par la contribution barotrope. On s'attend alors à ce que l'écoulement dans chaque couche soit dominé par la composante barotrope :  $\psi_1 \approx \psi_2 \approx \psi_t$ , avec seulement de faibles corrections.

### Structure de l'écoulement.

Nous venons de montrer qu'à l'ordre le plus bas, les fonctions courants sont les mêmes dans les deux couches. Nous avons pour cela supposé que le champ de vorticité potentielle de ces états est composé dans chaque couches de deux sous-domaines où la vorticité potentielle est homogène. D'après l'équation (2.20), les frontières de ces sous-domaines sont données par les ligne de courant  $\psi_1 = \psi_{1c}$  et  $\psi_2 = \psi_{2c}$  : pour  $\psi_i > \psi_{ic}$ , la vorticité est

## 2. JETS INTENSES DIRIGÉS VERS L'EST DANS UN DOMAINE FERMÉ

---

$q = -\sigma_i$ . Si nous supposons en outre que les aires des sous-domaines sont égales dans une couche donnée (ce qui revient à fixer la circulation à 0), nous avons nécessairement  $\psi_{2c} \approx \psi_{1c} \approx \psi_{tc}$ .

La recherche des états d'équilibre est alors réduite à un problème plus simple, qui consiste à trouver l'état d'énergie maximale pour un modèle barotrope (à une couche), composé de deux niveaux de vorticité potentielle :

$$\Delta\psi_t = \begin{cases} \sigma_t + \beta_c y & \text{si } \psi_t < \psi_{tc} \\ -\sigma_t + \beta_c y & \text{si } \psi_t > \psi_{tc} \end{cases} \quad (2.22)$$

avec  $\sigma_t = \sigma_1 + (1 - \delta)\sigma_2$ .

Remarquons que dans le cas où les aires des sous-domaines associées à  $q_i = \pm\sigma_i$  sont différentes, nous aurions obtenu le même résultat, sauf que le champ de vorticité potentielle barotrope serait composé de trois sous-domaines caractérisés par des valeurs différentes de vorticité potentielle (car nous aurions alors  $\psi_{1c} \neq \psi_{2c}$ ).

Une fois que la répartition de la vorticité barotrope  $q_t = \delta q_1 + (1 - \delta) q_2$  est déterminée par la maximisation de l'énergie barotrope, la répartition des niveaux  $\sigma_i$  est connue dans chaque couche (puisque  $\psi_t \approx \psi_1 \approx \psi_2$ ). Cela signifie que **la répartition spatiale de la vorticité barocline  $q_c = q_1 - q_2$  est complètement déterminée pas celle de vorticité potentielle barotrope**. Comme les champs de vorticité potentielle sont composés de sous-domaines où la vorticité potentielle est uniforme, on en déduit que la composante barocline des vitesses est localisée le long des frontières, sur une épaisseur  $R$ .

Dans la limite où le terme  $\beta_c y$  est très supérieur aux niveaux de vorticité potentielle barotropes  $\sigma_t$ , et dans le cas d'une circulation nulle dans chaque couche, la fonction courant est négative pour  $y < 0$  et positive pour  $y > 0$ . Les niveaux positifs ( $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ) et négatifs ( $-\sigma_1$  et  $-\sigma_2$ ) de vorticité potentielle sont donc localisés respectivement au nord ( $y > 0$ ) et au sud ( $y < 0$ ). **La frontière ( $y = 0$ ) entre ces deux sous-domaines correspond à un jet intense zonal de milieu de bassin**. La direction du jet dépend du signe de  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Si  $\sigma_1 > \sigma_2$ , alors la vorticité potentielle barocline  $q_1 - q_2$  est positive au nord et négative au sud : le jet est dirigé vers l'ouest. Si  $\sigma_1 < \sigma_2$ , le jet est dirigé vers l'est. Remarquons que le cas pertinent pour les océans est  $\sigma_1 > \sigma_2$  : on s'attend à ce que la couche supérieure soit ca-

ractérisées par des champs de vorticité potentielle plus forts que ceux de la couche inférieure. Dans tous les cas, ces jets baroclines restent négligeables par rapport à la composante barotrope, dirigés vers l'ouest.

Nous ne présentons pas ici une étude systématique des différents paramètres : effet de la circulation quand  $\beta_c y$  n'est plus le terme dominant, effet de la géométrie du domaine... Les états maxima d'énergie d'un système à deux niveaux ont été calculés, décrits et classifiés par N. Sauvage dans le cas d'un modèle équivalent barotrope, avec  $R \rightarrow 0 : \Delta\psi_t - \psi_t / R^2 = \pm\sigma_t - \beta_c y$  [107]. La limite  $R \rightarrow 0$  permet de prédire la forme de l'état d'énergie maximale par des calculs analytiques. Aucune des configurations obtenues ne présente de jet dirigé vers l'est. Dans notre cas, l'équation pour la composante barotrope (2.22) ne dépend pas de  $R$ , mais les calculs numériques de ces états n'ont pas montré une organisation qualitativement différente du champ de vorticité potentielle barotrope par rapport au cas équivalent barotrope. Nous choisissons de limiter la présentation de ces résultats à des paramètres pertinents dans le contexte océanique.

## Calcul numérique des états d'équilibre

Nous présentons ici le calcul numériques des états d'équilibres statistiques dans le cas où :

- $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$  : la circulation est nulle dans chaque couche.
- $\delta = 0.2$  : la couche supérieure est plus fine que la couche inférieure.
- $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.8$  : les niveaux de vorticité microscopiques sont supérieurs dans la couche de surface.

Nous avons adimensionné les unités de temps et de longueur de sorte à avoir  $L_y = 2$  et  $\beta_c = 1$ . Le choix  $\sigma_1 = 1$  est motivé par le fait qu'en présence d'un front de vorticité potentielle dans la couche supérieure, on retrouverait un jet barocline avec des vitesses de l'ordre du mètre (en unité dimensionnées) dans le cas où l'écoulement dans la couche inférieure serait négligeable par rapport à celle de la couche supérieure<sup>4</sup> La valeur  $\sigma_2 = 0.8$  est arbitraire. Nous discuterons des modifications induites par des varia-

---

<sup>4</sup>Nous verrons que ce ne sera pas le cas (à l'équilibre, c'est la composante barotrope qui dominera), mais ces paramètres ont été choisi de sorte à obtenir des valeurs réalistes pour la vitesse du jet barocline, s'il existe.

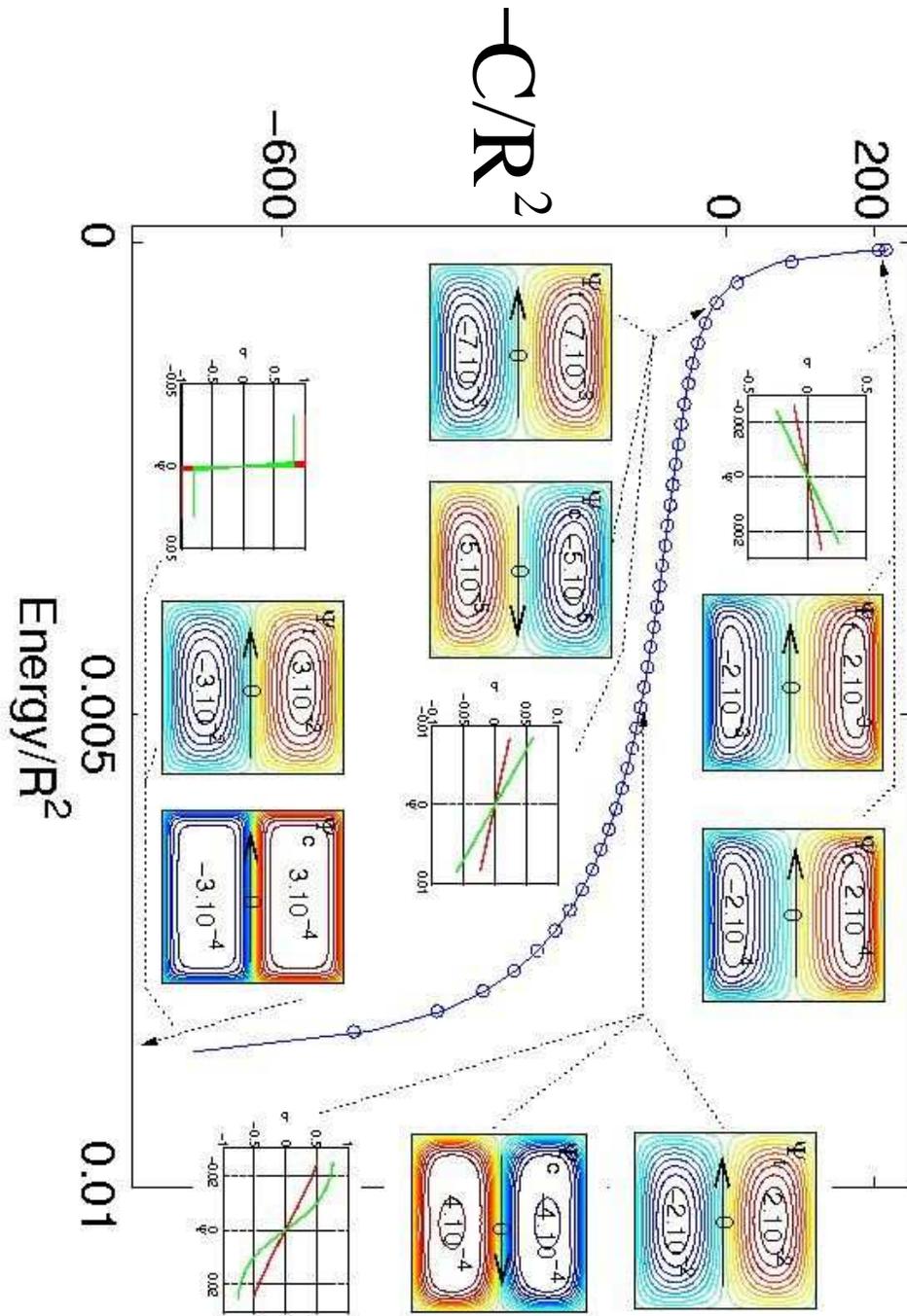


FIG. 2.6: Courbe calorique  $\frac{C}{R^2} = \frac{\partial S}{\partial E}$  en fonction de l'énergie  $E$ . Les relations  $q-\psi$  rouges et vertes correspondent aux couches supérieures et inférieures. La composante barotrope  $\psi_t$  est toujours dominante, et présente un courant dirigé vers l'ouest. On distingue des jets baroclines à haute énergie (les flèches indiquent la direction de l'écoulement). Ces jets sont dirigés vers l'ouest pour les énergies maximales, mais aussi vers l'est pour des énergies plus faibles. Les états à basse énergie sont les solutions de Fofonoff.

tions de ce paramètre.

Nous avons utilisé l’**algorithme de Turkington-Whitaker** afin de résoudre le problème variationnel (2.17). La difficulté du calcul des états d’équilibre vient de la contrainte quadratique (due à l’énergie) dans le problème variationnel. L’idée de l’algorithme est de procéder par itérations successives, en linéarisant la contrainte à chaque pas de temps. Le problème variationnel linéarisé admet alors une unique solution, qu’il est possible de calculer numériquement. L’algorithme est présenté plus en détails dans l’annexe B de ce chapitre.

Les résultats sont présentés figure 2.6, où les fonctions courant barotropes et baroclines sont tracées pour des états d’énergie différentes (les couleurs chaudes et froides correspondent respectivement aux valeurs positives et négatives de fonction courant). On donne en outre la forme de la relation  $q_i - \psi_i$  correspondante, dans les deux couches.

Afin de vérifier la cohérence de l’algorithme, nous avons représenté la courbe calorique  $\frac{C}{R^2}$  (en fonction de  $E$ ), calculée de deux manières différentes : i) la ligne bleue est tracée en prenant directement les valeurs de l’algorithme de Turkington-Whitaker ii) les cercles bleues sont obtenus en traçant  $\frac{\partial S}{\partial E}$ , où l’entropie d’équilibre  $S$  et l’énergie  $E$  sont calculées à partir des états d’équilibre donnés par l’algorithme.

**À faible énergie**, l’écoulement a la structure des solutions de Fofonoff : un courant faible dirigé vers l’ouest et des courants forts de recirculation le long des frontières nord et sud.

**À haute énergie**, les écoulements sont dominés par la composante barotrope, ce qui est cohérent avec l’analyse de la sous-section précédente. Cette composante présente un courant dirigé vers l’ouest à l’intérieur du domaine. Il existe une composante barocline (négligeable), qui présente un jet de milieu de bassin dirigé vers l’ouest. Si nous avons choisi  $\sigma_1 < \sigma_2$  le jet aurait été dirigé vers l’est.

Remarquons l’existence d’une zone d’énergie (proche de la valeur maximale) où il existe un **jet intense barocline dirigé vers l’est**. Ce jet est toujours négligeable par rapport à la composante barotrope, mais cela indique que la barotropisation de l’écoulement est incomplète. L’existence d’un tel jet dirigé vers l’est s’explique par un argument simple sur les pentes des relations  $q - \psi$ . A haute énergie (des valeurs de  $C \ll -1$ , mais finies),

les champs de vorticité potentielle sont fixées pas la composante barotrope  $q_1 > 0$  pour  $y < 0$  et  $q_2 < 0$  pour  $y > 0$ . En  $y = 0$ , les vorticités potentielles sont nulles dans les deux couches. Le sens du jet barocline dépend donc de la différence des pentes  $dq_1/d\psi_1|_0 - dq_2/d\psi_2|_0$ . Si cette différence est positive, le jet barocline est dirigé vers l'est. Cela fournit la condition  $\delta\sigma_1 < (1 - \delta)\sigma_2$ , d'après les équations (2.18) et (2.19).

**Les états d'énergies intermédiaires et de faibles énergies sont caractérisés par une relation linéaire entre vorticité potentielle et fonction courant.** De manière générale (c'est-à-dire quelques soient les paramètres : topographie, circulations...), les relations  $q_i - \psi_i$  (2.18) et (2.19) deviennent linéaires dans la limite  $C\psi \rightarrow 0$  :

$$q_1 = \sigma_1 \delta \frac{C}{R^2} \psi_1 + \Gamma_1 \quad (2.23)$$

$$q_2 = \sigma_2 (1 - \delta) \frac{C}{R^2} \psi_2 + \Gamma_2 \quad (2.24)$$

### Relations $q - \psi$ linéaires

Nous considérons maintenant les relations linéaires  $q_i - \psi_i$  données par les équations (2.23) et (2.24). En injectant ces expressions dans les équations (2.8) et (2.9), on obtient un système linéaire en  $\psi_1$  and  $\psi_2$  qui peut être diagonalisé explicitement. On trouve alors deux modes indépendants, qui satisfont chacun à une équation de type "QG équivalent barotrope". Ce calcul général ne présente pas d'intérêt pour notre propos. Nous considérons dans les prochains paragraphes deux cas limites, plus simples à traiter et à interpréter :

- i) La limite  $C \sim R^2 \rightarrow 0$  : nous montrerons que les modes barotropes et baroclines sont indépendants, et que l'écoulement est dominé par la composante barotrope.
- ii) La limite  $C \rightarrow -\infty$ ,  $R \rightarrow 0$ . Il s'agira d'une limite de faible énergie. Nous verrons que les écoulements sont indépendants dans chaque couche, et ont la structure des modes de Fofonoff.

**i) Limite  $C \sim R^2$**  On injecte les expressions (2.23) et (2.24) dans l'équation (2.11) pour la composante barocline. On suppose de plus que  $\psi_c$  est d'ordre  $R^2$ , et que  $\psi_t$  est d'ordre  $C/R^2$  (donc  $\psi_1 \approx \psi_2 \approx \psi_t$  à l'ordre le plus

bas). L'équation (2.11) s'écrit alors

$$\Delta\psi_c - \frac{\psi_c}{\delta(1-\delta)R^2} = \Gamma_1 - \Gamma_2 \quad (2.25)$$

On vérifie que  $\psi_c$  est bien d'ordre  $R^2$ . Considérons maintenant l'équation (2.11) pour la composante barotrope, qui s'écrit dans cette limite sous la forme :

$$\Delta\psi_t + \beta_c y = \tilde{\beta}\psi_t + \tilde{\Gamma} \quad (2.26)$$

avec  $\tilde{\beta} = \frac{C}{R^2}(\sigma_1\delta^2 + \sigma_2(1-\delta)^2)$  et  $\tilde{\Gamma} = \delta\Gamma_1 + (1-\delta)\Gamma_2$ . On vérifie que la composante barotrope  $\psi_t \sim C/R^2 \sim 1$  domine bien la composante barocline  $\psi_c \sim R^2$ . Cela est cohérent avec les hypothèses initiales.

La composante barotrope  $\psi_t$  satisfait à une équation de type "QG à une couche", pour une relation linéaire entre vorticité potentielle et fonction courant. L'ensemble des états d'équilibre statistique associés à ce type d'équations est calculé et décrit au chapitre 4, où nous concluons que ces états d'équilibre peuvent avoir une forme différente de la solution de Fofonoff, mais ne présentent pas de jet dirigé vers l'est.

**Limite** ( $C \rightarrow -\infty, R \rightarrow 0$ ). Nous supposons que  $C\psi_i \sim R^2$ . Les termes  $(\psi_1 - \psi_2)/R^2$  sont négligeables par rapport aux termes  $\frac{C}{R^2}\psi_{1,2}$  dans les équations (2.8) et (2.9). Les deux couches sont donc indépendantes, à l'ordre le plus bas en  $1/C$  :

$$\Delta\psi_1 = \delta\sigma_1\frac{C}{R^2}\psi_1 + \Gamma_1 - \beta_c y \quad (2.27)$$

$$\Delta\psi_2 = c(1-\delta)\sigma_2\frac{C}{R^2}\psi_2 + \Gamma_2 - \beta_c y \quad (2.28)$$

Nous pouvons alors faire une approximation de couche limite, et montrer que ces écoulements ont la structure des solutions de Fofonoff. Nous vérifions de plus que l'on a bien  $C\psi_i \sim \beta_c R^2 \rightarrow 0$ , ce qui est cohérent avec l'hypothèse initiale.

## Discussion

La conclusion principale de l'étude précédente est **l'existence d'une "barotropisation" des états d'équilibre statistique** du modèle à deux

couches, dans la limite  $R \rightarrow 0$ . Les états obtenus sont donc différents de ceux prédits par la modèle équivalent barotrope (une couche et demie). En effet, la structure des états du modèles équivalent barotrope dépend de l'échelle  $R$ , alors que cette échelle n'intervient pas dans la structures de la composante barotrope du modèle à deux couches.

Dans le contexte de la turbulence géostrophique des modèles à deux couches, l'image "classique" (due à Salmon [105]) des transferts d'énergie prédit une cascade inverse de l'énergie barotrope vers les grandes échelles, et une cascade directe de l'énergie barocline vers les petites échelles (pour des échelles supérieures au rayon de déformation Rossby  $R$ ).

Les résultats obtenus dans cette section montrent effectivement une concentration de l'énergie dans la composante barotrope des états d'équilibres.

Précisons cependant que dans les écoulements que nous avons présentés, **la barotropisation est incomplète** : à cause de la contrainte de conservation de l'aire des niveaux de vorticité potentielle, l'écoulement possède toujours une composante barocline (par exemple les jets de frontières entre les sous-domaines de vorticité potentielle homogènes, dans la limite des hautes énergies).

Par ailleurs, les états à haute énergie ont une structure différente de la solution de Fofonoff : il existe toujours un gyre cyclonique au sud et un gyre anticyclonique au nord, mais contrairement aux écoulements de Fofonoff, il n'y a plus de séparation entre un courant faible à l'intérieur du domaine et des jets de recirculation aux frontières nord et sud. En ce sens, nos résultats diffèrent des prédictions de la théorie statistique de Salmon-Holloway-Henderschott (pour une troncature des équations quasi-géostrophiques du modèle à deux couches) [106], qui décrivent bien une barotropisation de l'écoulement, mais qui prédisent uniquement l'émergence d'écoulements de Fofonoff.

## 2.3 Conclusion et perspectives

Nous avons décrit des solutions stationnaires qui présentent un jet intense dirigé vers l'est au milieu d'un bassin océanique fermé, pour le modèle quasi-géostrophique équivalent barotrope. L'obtention de ces solution constituait une étape préliminaire importante, qui a permis ensuite une étude théorique détaillée de ces états : nous avons démontré dans ce cha-

pitre que ces solutions ne sont pas des maxima d'entropie (même locaux). Le chapitre suivant sera consacré à la discussion de la stabilité de ces solutions.

Nous avons ensuite étudié les états d'équilibre statistique du modèle quasi-géostrophique à deux couches. Ces états sont dominés par leur composante barotrope, ce qui est cohérent avec les résultats classiques sur les transferts d'énergie dans ce type de systèmes. Cependant, nous avons vu que cette barotropisation est incomplète : la composante barocline est non nulle, et peut dans certain cas présenter un jet intense dirigé vers l'est.

Nous avons restreint l'étude de ce modèle barocline à la présentations des équilibres statistiques *globaux*, dans certaines configurations. La prolongation de ce travail nécessiterait une étude systématique de l'effet des différents paramètres, ainsi que la description de la structures des maxima d'entropie *locaux*.

## 2.A Annexe : calcul des perturbations du jet

Nous calculons dans cette section la fonction courant et l'énergie des écoulements caractérisés par le champ de vorticité potentielle présenté schématiquement figure 2.2, dans la limite  $R \rightarrow 0$ .

On considère le domaine rectangulaire  $\mathcal{D}$  de côtés  $L_y$  et  $L_x$ . Une interface  $\mathcal{L}_{jet}$  (le jet intense) sépare ce domaine en deux sous-domaines  $\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{D}^-$  où la vorticité potentielle est homogène, respectivement  $q = 1$  et  $q = -1$ . L'interface sera paramétrée par la courbe  $l(x)$ . Le cas  $l = 0$  correspond à la solution stationnaire tracée figure 2.1, qui présente un jet zonal intense dirigé vers l'est au centre du domaine.

Nous ne considérons que les perturbations  $l$  telles que  $l(0) = l(L_x) = 0$  : les frontières  $\mathcal{L}^+ = \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{L}^- = \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}^-$  sont fixées. Leur longueur est égale à  $L_x + L_y$ .

Nous supposons que la fonction courant s'annule aux frontières du domaine ( $\psi_{fr} = 0$ ) : nous verrons que la fonction courant calculée vérifiera bien la condition  $\langle \psi \rangle = 0$ .

Les calculs des fonctions courant et de l'énergie correspondante ont été effectués de manière plus générale par Sauvage et Bouchet [107] (circulation non nulle, frontières  $\mathcal{L}^+$  et  $\mathcal{L}^-$  non fixées...). Nous présentons ces calculs dans un cas particulier, car notre but est simplement de montrer qu'il existe des perturbations qui augmentent l'énergie de la configuration "jet intense zonal" (caractérisée par  $l(x) = 0$ ).

### Calcul de la fonction courant

Dans la limite  $R \rightarrow 0$ , nous pouvons faire une approximation de couche limite pour calculer la fonction courant.

Loin des frontières, le laplacien est négligeable dans l'équation (2.1) :  $\Delta\psi - \frac{\psi}{R^2} = q - \beta_c y$ . On obtient alors l'expression des fonctions courants  $\psi_{surf}^\pm$  à l'intérieur des sous-domaines  $\mathcal{D}^\pm$  :

$$\psi_{surf}^+ = R^2(\beta_c y - 1) \quad \text{et} \quad \psi_{surf}^- = R^2(\beta_c y + 1) \quad (2.29)$$

Le long des frontières des deux sous-domaines  $\partial\mathcal{D}^\pm$ , le laplacien n'est plus négligeable. Nous paramétrons ces frontières par la coordonnée curviligne  $s$ , et la direction orthogonale à la frontière par  $\zeta$ , dirigée vers l'intérieur du

sous-domaine considéré. L'équation (2.1) s'écrit alors :

$$\frac{d^2\psi^\pm}{d\zeta^2} - \frac{\psi^\pm}{R^2} = \pm 1 + \beta_c y \quad \text{au voisinage de } \partial\mathcal{D}^\pm$$

On distingue les couches limites le long des bords du domaine  $\mathcal{D}$ , et le long du jet  $\mathcal{L}_{jet}$ . Il ne sera pas nécessaire de calculer explicitement la fonction courant  $\psi_{bord}^\pm$  le long des bords du domaine  $\mathcal{D}$ , car cette partie de l'écoulement est inchangée par les perturbations de l'interface  $\mathcal{L}_{jet}$ .

Calculons la fonction courant le long de l'interface  $\mathcal{L}_{jet}$ , en utilisant la condition de continuité de la fonction courant  $\psi_{jet}^+(s, 0) = \psi_{jet}^-(s, 0)$  (et en ne gardant que la partie non divergente de la solution, pour  $\zeta \rightarrow +\infty$ ) :

$$\psi_{jet}^\pm(s, \zeta) = \pm R^2 e^{-\zeta/R} + R^2 (\beta_c y \mp 1)$$

Dans la limite  $\zeta \rightarrow +\infty$ , on retrouve bien la solution  $\psi_{surf}^\pm$ .

### Calcul de l'énergie

L'énergie totale de l'écoulement (1.22) s'écrit dans notre cas ( $\psi_{fr} = 0$ )

$$E = -\frac{1}{2} \langle (q - \beta_c y) \psi \rangle = E_{surf} + E_{bord} + E_{jet} .$$

L'énergie  $E_{surf}$  correspond à la contribution apportée par l'intérieur du domaine, où la fonction courant est  $\psi \approx \psi_{surf}^\pm$  :

$$E_{surf} = R^2 \int_0^{L_x} \int_{l(x)}^{L_y/2} (1 - \beta_c y)^2 dy dx + R^2 \int_0^{L_x} \int_{-L_y/2}^{l(x)} (1 + \beta_c y)^2 dy dx . \quad (2.30)$$

L'énergie des couches limites  $E_{bord}$  correspond à la contribution des bords du domaine  $\mathcal{D}$ , où  $\psi = \psi_{bord}^\pm$ . Comme les perturbations que l'on considère ne modifient pas le champ de vorticité le long de  $\partial\mathcal{D}$ , nous n'avons pas besoin de calculer explicitement cette contribution.

L'énergie de l'interface  $E_{jet}$  est calculée avec  $\psi_{jet}^\pm - \psi_{surf}^\pm$  :

$$E_{jet} = - \int_{\mathcal{L}_{jet}} \int_0^{+\infty} 2R^2 e^{-\zeta/R} (1 - \beta_c y) - 2R^2 e^{-\zeta/R} (-1 - \beta_c y) ds d\zeta , \quad (2.31)$$

Les contributions proportionnelles à  $\beta_c$  se compensent de part et d'autre du jet, et l'expression de l'énergie du jet se simplifie :

$$E_{jet} = -4L_{jet}R^3 \quad (2.32)$$

où l'on a introduit la longueur de l'interface entre les sous-domaines

$$L_{jet} = \int_{\mathcal{L}_{jet}} ds = \int_0^{L_x} \sqrt{1 + \left(\frac{dl}{dx}\right)^2} dx \quad (2.33)$$

### Application : le jet vers l'est n'est pas un maximum d'énergie

Soit  $E^0$  l'énergie totale de la solution non perturbée, i.e. de la solution stationnaire qui présente un jet dirigé vers l'est (caractérisée par  $l(x) = 0$  pour tout  $x$ ). On veut calculer la différence d'énergie induite par une perturbation  $l \neq 0$  :

$$\Delta E = E_{surf} - E_{surf}^0 + E_{jet} - E_{jet}^0 + E_{bord} - E_{bord}^0 .$$

Nous avons déjà mentionné que l'énergie des bords ne varie pas pour les perturbations considérées. Calculons la différence d'énergie  $E_{surf} - E_{surf}^0$  à partir de l'équation (2.30), :

$$\Delta E_{surf} = R^2 \int_0^{L_x} \int_0^{l(x)} (1 - \beta_c y)^2 dy dx + R^2 \int_0^{L_x} \int_0^{l(x)} (1 + \beta_c y)^2 dy dx .$$

qui se simplifie en

$$E_{surf} - E_{surf}^0 = 2R^2 \beta_c \int_0^{L_x} l^2(x) dx . \quad (2.34)$$

Ainsi, les perturbations de l'interface augmentent l'énergie de surface.

La différence d'énergie due à la variation de l'interface s'obtient directement avec l'équation (2.32) :

$$\Delta E_{jet} = -4R^3(L_{jet} - L_x) . \quad (2.35)$$

Ainsi, l'augmentation de la longueur du jet "coûte" de l'énergie.

Pour montrer qu'il existe des perturbations telles que  $\Delta E > 0$ , à circulation  $\Gamma$  fixée, considérons la cas particulier où  $l(x) = A \sin(k\pi x/L_x)$  (

$k \geq 1$  est un entier). La moyenne  $\int_0^{L_x} l(x) dx = 0$  est nulle : les aires des sous-domaines sont conservées. On utilise les expressions (2.34), (2.35) et (2.35) pour écrire la différence d'énergie totale

$$\Delta E = 2\beta_c R^2 \int_0^{L_x} \sin^2 \left( \frac{k\pi x}{L_x} \right) dx - 4R^3 \int_0^{L_x} \left( \sqrt{1 + k^2 A^2 \sin^2 \left( \frac{k\pi x}{L_x} \right)} - 1 \right) dx$$

On fait l'approximation de faible amplitude  $Ak^2 \ll 1$ , ce qui donne à l'ordre le plus bas :

$$\Delta E = A^2 L_x R^2 \left( \beta_c - R \frac{\pi^2 k^2}{L_x^2} \right)$$

Comme  $\beta_c$  ne dépend pas de  $R$ , et comme  $R \rightarrow 0$ , ces perturbations augmentent l'énergie, pour toute valeur de  $k$  :  $\Delta E > 0$ .

Nous avons donc trouvé une classe de perturbations qui augmentent l'énergie de la solution stationnaire "jet intense dirigé vers l'est", caractérisée par  $l(x) = 0$  pour tout  $x$ . **Nous concluons que cette solution n'est pas un maximum local d'énergie.**

## 2.B Annexe : l'algorithme de Turkington et Whitaker

Les résultats de la figures 2.6 sont obtenus en implémentant l'algorithme de Turkington et Whitaker [124]. En pratique, nous avons adapté au modèle à deux couche le code écrit par N. Sauvage lors de son stage de M2 sur les états d'équilibre du modèles QG à 1.5 couches [107].

Décrivons la procédure pour le calcul des états d'équilibre statistique RSM. Dans le cas du système à deux couches composées chacune de deux niveaux de vorticité potentielle  $\pm\sigma_1$  (pour la couche supérieure) et  $\pm\sigma_1$  (pour la couche inférieure) , **on cherche l'état**  $q_1(x, y), q_2(x, y)$

- **maximisant l'entropie (concave)** de mélange  $\mathcal{S}_{BG}[q_1, q_2]$ , donnée par l'équation (2.16), avec  $p_i = (q_i - 1)/2\sigma_i$ .
- avec deux **contraintes linéaires**  $\mathcal{C}[q_{i=1,2}] = \Gamma_{i=1,2}$ , les circulations dans chaque couche fixant la proportion relative des niveaux de vorticité,
- et une **contrainte quadratique**  $\mathcal{E}[q_1, q_2] = E$ . C'est cette contrainte que rend le problème difficile.

Le principe de l'algorithme est de procéder par itérations successives en linéarisant la contrainte sur l'énergie. En pratique, l'algorithme calcule une succession d'états  $q^k = \{q_1^k, q_2^k\}$  qui convergent vers l'état d'équilibre. L'état  $q^{k+1}$  est la solution d'un problème variationnel où la contrainte sur l'énergie est linéarisée autour de la solution  $q^k$  au pas précédent :

$$\max_{\{q_1, q_2\}} \left\{ \mathcal{S}_{BG}[q_1, q_2] \mid \mathcal{C}[q_{1,2}] = \Gamma_{1,2} \ \& \ \mathcal{E}[q^k] + \int \sum_i \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta q_i} \Big|_{q^k} (q_i - q_i^k) dx dy = E \right\}$$

Le fait de ramener le problème initial à la recherche du maximum d'une fonction concave, sous contrainte linéaire est très intéressant : le problème admet une solution unique, qu'il est possible de calculer en relaxant la contrainte linéaire.

Par ailleurs, on peut montrer que l'entropie croit à chaque pas , et que l'énergie  $E$  est atteinte par valeur supérieure :

$$\mathcal{S}_{BG}[q_1^{k+1}, q_2^{k+1}] > \mathcal{S}_{BG}[q_1^k, q_2^k] \quad \mathcal{E}[q_1^{k+1}, q_2^{k+1}] \geq E$$

L'entropie étant majorée (par celle de l'état totalement mélangé), la convergence de l'algorithme est assurée pour les états à température négative

( $C < 0$ ), si l'état initial  $q_1^0, q_2^0$  a une énergie supérieure à la contrainte  $E$ . Il est à cet effet utile de calculer au préalable les états maxima d'énergie pour initialiser l'algorithme. En outre, les états à température positive ( $C > 0$ ) sont uniques.

## Implémentation de l'algorithme

Les points critiques du problème variationnel précédent sont les points critiques du Lagrangien

$$L_k[q_1, q_2](\gamma_1, \gamma_2, C) = -\mathcal{S}_{BG}[q_1, q_2] + \sum_i \gamma_i (C[q_i] - \Gamma_i) \\ + \frac{C}{R^2} \left( \mathcal{E}[q^k] + \int \sum_i \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta q_i} \Big|_{q^k} (q_i - q_i^k) dx dy - E \right)$$

On cherche les valeurs de  $\gamma_1^{k+1}$ ,  $\gamma_2^{k+1}$  et  $C^{k+1}$  associées à la solution du problème variationnel précédent. Le calcul des points critique donne le champ de vorticité potentielle correspondant

$$q_i^{k+1} = \sigma_i \tanh (C_i^{k+1} (\psi_i^{k+1} - \psi_{ifr}^{k+1}) - \gamma_i^{k+1}) \quad (2.36)$$

avec  $C_1^{k+1} = \delta C^{k+1}$ ,  $C_2^{k+1} = (1 - \delta)C^{k+1}$ . On peut montrer que les paramètres de Lagrange  $\gamma_1^{k+1}$ ,  $\gamma_2^{k+1}$  et  $C^{k+1}$  sont l'unique maximum de la fonction

$$L_k^*(\gamma_1, \gamma_2, C) = \min_{q_1, q_2} \{L_k[q_1, q_2](\gamma_1, \gamma_2, C)\} = L_k[q_1^{k+1}, q_2^{k+1}](\gamma_1, \gamma_2, C)$$

On obtient l'expression de  $q_1^{k+1}, q_2^{k+1}$ , en utilisant l'équation (2.36), et les expressions de  $\psi_1^{k+1}, \psi_2^{k+1}$  obtenues en inversant les équations (2.8) et (2.8) pour  $q_i = q_i^k$ . Le problème est alors ramené à la recherche numérique du point où les dérivées premières de  $L_k^*(\gamma_1, \gamma_2, C)$  s'annulent. Un critère de convergence numérique est utilisé pour déterminer si la procédure doit être répétée ou non.

## Calcul numérique des maxima d'énergie

Les états maxima d'énergie sont caractérisés par  $C \rightarrow -\infty$  : pour un système à deux niveaux, la relation  $q - \psi$  est une fonction de Heaviside dans chaque couche, d'après (2.36) :

$$q_i = \begin{cases} \sigma_i^+ & \text{if } \psi_i < \psi_{ic} = R^2\gamma_i/C + \psi_{ifr} \\ -\sigma_i^- & \text{if } \psi_i > \psi_{ic} = R^2\gamma_i/C + \psi_{ifr} \end{cases} \quad (2.37)$$

Chercher les maxima d'énergie à circulation fixée revient à trouver le maximum de

$$L_k[q_1, q_2](\psi_{1c}, \psi_{2c}) = \mathcal{E}[q_1, q_2] - \sum_i \mu_i (\mathcal{C}[q_i] - \Gamma_i)$$

où  $\mu_i = \lim_{C \rightarrow -\infty} (R^2\gamma_i/C)$ . La procédure pour le calcul des maxima est alors :

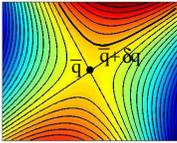
- Connaissant  $q_{1,2}^k$ , on calcule le champ de fonction courant  $\psi_{1,2}^{k+1}(x, y)$  en inversant les équations (2.8) et (2.8).
- On cherche ensuite les valeurs  $\psi_{c1, c2}^{k+1}$  qui maximisent  $L_k[q_1, q_2](\psi_{1c}, \psi_{2c})$  (le maximum existe et est unique)
- Le champ de vorticité  $q_{1,2}^{k+1}$  est ensuite calculé en appliquant la procédure 2.37 au champ  $\psi_{1,2}^{k+1}(x, y)$
- la procédure est répétée jusqu'à ce qu'un critère numérique de convergence soit atteint.

## Chapitre 3

---

# Critères de stabilité : application aux jets dirigés vers l'est

---



Dans le chapitre précédent, nous avons décrit des solutions stationnaires qui présentent un courant fort et localisé dirigé vers l'est (comme le Gulf Stream et le Kuroshio), dans le cadre de modèles quasi-géostrophiques (QG) “équivalents barotropes” (une couche). Nous avons conclu qu’il existe des états purement inertiels qui reproduisent certains aspects de la circulation effectivement observés dans les océans. L’étape suivante a consisté à déterminer si ces états inertiels sont des états prédits par la mécanique statistique. Nous avons montré que ce n’est pas le cas. Nous voulons maintenant discuter la stabilité de cette solution, et décrire l’évolution des perturbations.

Nous montrerons dans ce chapitre qu’en l’absence de frontières à l’ouest et à l’est d’un domaine rectangulaire, les jets intenses décrits dans la partie précédente sont linéairement stables. En pratique, on remplace la condition d’impermeabilité aux bords ouest et est du domaine par des conditions périodiques. Le résultat est aussi valable pour un canal<sup>1</sup> d’extension zonale infinie (ou périodique).

La méthode utilisée a un intérêt en soi, car elle permet de conclure à la

---

<sup>1</sup>Il s’agit d’un domaine sans frontières à l’est et à l’ouest.

stabilité dans un cas où les critères classiques ne peuvent être appliqués.

### Plan du chapitre

La **première section** sera consacrée au rappel des critères classiques de stabilité pour un domaine fermé ou pour un canal, et à la description de quelques extensions de ces critères. Nous montrerons dans la **deuxième section** que les critères classiques ne permettent pas de conclure à la stabilité linéaire des jets dirigés vers l'est, mais qu'il est en revanche possible de le faire en appliquant les extensions de ces critères. Nous donnerons dans **la troisième section** une présentation de l'évolution temporelle des perturbations de la position d'un front de vorticit e potentielle qui illustrera de mani ere qualitative les r esultats pr ec edents.

La suite du chapitre est r edig ee en anglais. Il s'agit d'une partie d'un article en pr eparation,  ecrit en collaboration avec F. Bouchet et E. Simonnet.

## 3.1 Classical criteria for stability, with an extension

We discuss in this section the different existing criteria in order to prove the stability of a flow. Let us consider the case of the equivalent barotropic, quasi-geostrophic equations in an arbitrary domain  $\mathcal{D}$  :

$$\partial_t q + J(\psi, q) = 0 \quad \text{with} \quad J(\psi, q) = \partial_x \psi \partial_y q - \partial_y \psi \partial_x q, \quad (3.1)$$

$$q = \Delta \psi - \frac{\psi}{R^2} + \beta_c y, \quad (3.2)$$

with boundary conditions  $\psi = \psi_{fr}$  on  $\partial\mathcal{D}$  : there is no normal flow across the boundary of the domain in which the flow takes place. To simplify the discussion, we will consider  $\psi_{fr} = 0$ , but this hypothesis can easily be relaxed. Similarly, all the results obtained in this subsection apply also for a flow taking place in a periodic domain, or in a channel (with a no normal flow condition on one side, and a periodic condition on the other side).

Our aim is here to discuss the stability of a stationary solution  $\bar{q}, \bar{\psi}$ . Any state of the flow is fully characterized by its streamfunction  $\psi$  and its

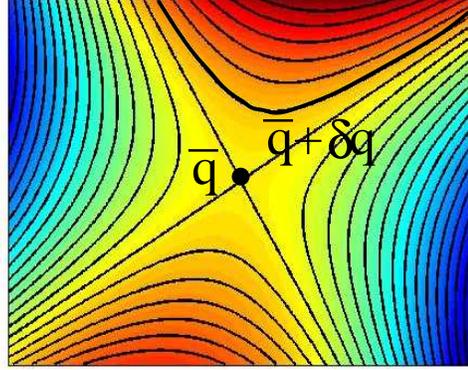


FIG. 3.1: Formal stability. We represent the isolines of a functional conserved by the dynamic, in the configuration space (any point corresponds to a state  $q(x, y)$ ). The functional has been chosen such that the stationary state  $\bar{q}$  is one of its extremizers. As the functional is conserved by the dynamics, any sufficiently small perturbation around  $\bar{q}$  is confined on one of the close isolines.

potential vorticity field  $q$ . It is stationary ( $\partial_t q = 0$ ) if and only if the isolines of the potential vorticity  $q$  are also streamlines (isolines of  $\psi$ ).

This section is organized as follows : we first present the different concepts of stability, then give more precisely the Arnold criteria for the nonlinear stability and propose an extension of the second criteria. Lastly, we review the classical criteria for linear stability when the flow takes place in a channel (with north and south boundaries, but no boundaries in the west or in the east), and give an extension of those criteria, following the same method as for the nonlinear stability.

## Nonlinear, formal and linear stability

We precise in this subsection the different stability properties for a dynamical system, around a stationary solution written  $\bar{q}$ . One can find more precise definitions and discussions of those concepts in [59].

Let us consider an arbitrary potential vorticity field  $q = \bar{q} + \delta q$ , which is related to the streamfunction  $\psi = \bar{\psi} + \delta\psi$  by

$$\bar{q} = \Delta\bar{\psi} - \frac{\bar{\psi}}{R^2} + \beta_c y \quad (3.3)$$

$$\delta q = \Delta\delta\psi - \frac{\delta\psi}{R^2} \quad (3.4)$$

The **nonlinear stability** of the solution  $\bar{q}$  means that any perturbation  $q = \bar{q} + \delta q$  remains bounded during its temporal evolution by the dynamics (3.1), which can be expressed in terms of a temporal evolution for  $\delta q$

$$\partial_t \delta q + J(\bar{\psi}, \delta q) + J(\delta\psi, \bar{q}) + J(\delta\psi, \delta q) = 0 ,$$

To show nonlinear stability, one has first to define a norm, and to show that any perturbation  $\delta q$  remains bounded for this norm during its temporal evolution through the nonlinear dynamics.

The **linear stability** of the solution  $\bar{q}$  means that any perturbation  $q = \bar{q} + \delta q$  remains bounded during its temporal evolution by the linearized dynamics

$$\partial_t \delta q + J(\bar{\psi}, \delta q) + J(\delta\psi, \bar{q}) = 0 , \quad (3.5)$$

As for the nonlinear stability, one has to define a norm and to show that the perturbation is bounded for this norm during its evolution through the linearized dynamics.

The **formal stability** of the solution  $\bar{q}$  means that there exists a conserved quantity (a functional  $F[q]$ ) whose first variation  $\delta F$  vanishes for  $q = \bar{q}$ , and whose second variations  $\delta^2 F$  are definite positive (or negative) for  $q = \bar{q}$ .

It can be shown that the second variations of  $F$  are conserved by the linearized dynamics, and then that formal stability implies linear stability. We will present the explicit computation later, in our case of interest.

Qualitatively, the isolines of  $\delta^2 F$  are closed around its minimum, namely the stationary solution  $\bar{q}$ , as in figure 3.1. Since  $\delta^2 F$  is conserved by the linearized dynamics, any perturbation  $\delta q$  of the stationary solution  $\bar{q}$  remains on one of these closed isolines during its evolution through the linearized dynamics.

In finite dimension, formal stability implies also nonlinear stability. In our case of interest (infinite dimension), formal stability does not necessarily implies nonlinear stability.

## The Arnold criteria

In this subsection, we recall the Arnold criteria for nonlinear stability. We then give an extension of these criteria, which provides a lower bound for nonlinear stability.

Let us consider first a stationary solution characterized by a single relation  $\bar{q} = f(\bar{\psi})$ . Let us then introduce the energy-Casimir functional

$$H_C[q] = \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{(\nabla\psi)^2}{2} + \frac{\psi^2}{2R^2} + s(q) \right) dx dy , \quad (3.6)$$

where  $\psi$  is (at least formally) obtained by inverting equation (3.2). Since the functional  $H_C[q]$  is the sum of the energy and of a Casimir functional, it is conserved by the non-linear dynamics.

**First variations.** Let us compute the first variations of  $H_C$

$$\delta H_C = \int_{\mathcal{D}} \left( \nabla\psi \nabla\delta\psi + \frac{\psi\delta\psi}{R^2} + s'(q) \delta q \right) dx dy = - \int_{\mathcal{D}} (\psi - s'(q)) \delta q dx dy ,$$

where the second equality is obtained after integrating by part the first term of the integral.

The first variations of  $H_C$  vanish when  $\psi = s'(q)$ . The function  $s(q)$  can always be chosen such that the first variations of  $H_C$  vanish for  $q = \bar{q}$ . Since we have the relation  $\bar{q} = f(\bar{\psi})$ , we conclude that when the derivative of  $s$  is the inverse of the function  $f$ , the stationary solution  $\bar{q}$  is a critical point of the energy-Casimir functional.

**First criterion.** By using the fact that the first variations of  $H_C$  vanish at  $q = \bar{q}$ , we have  $\int_{\mathcal{D}} \bar{\psi} \delta q dx dy = \int_{\mathcal{D}} s'(\bar{q}) \delta q dx dy$  and  $s''(\bar{q}) = 1/f'(\bar{\psi})$ . We obtain then

$$H_C[\bar{q} + \delta q] - H_C[\bar{q}] = \int \left( \frac{(\nabla\delta\psi)^2}{2} + \frac{(\delta\psi)^2}{2R^2} + s(\bar{q} + \delta q) - s(\bar{q}) - \frac{\delta q}{f'(\bar{\psi})} \right) dx dy$$

Let us suppose that  $f'(\bar{\psi}) > 0$ , and let then consider the quadratic functional

$$Q_1[\delta q] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( (\nabla\delta\psi)^2 + \frac{(\delta\psi)^2}{R^2} + \frac{(\delta q)^2}{\max\{f'(\bar{\psi})\}} \right) dx dy . \quad (3.7)$$

3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

By integrating twice the inequality  $s'(\bar{q}) \geq 1/\max\{f'(\bar{\psi})\}$ , we show easily that  $(s(\bar{q} + \delta q) - s(\bar{q}) - s'(\bar{q})\delta q) \geq (\delta q)^2 / (2\max\{f'(\bar{\psi})\})$ . We obtain therefore the inequality

$$Q_1[\delta q] \leq H_C[\bar{q} + \delta q] - H_C[\bar{q}] . \quad (3.8)$$

Notice that this equation is valid **whatever the perturbation  $\delta q$ , which is not necessarily small.**

A sufficient condition for stability is that  $Q_1[\delta q]$  is definite positive. In that case, it defines a norm for the perturbation  $\delta q$ . This norm is necessarily bounded, since the functional  $H_C$  is conserved by the dynamics :

$$\forall t , Q_1[\delta q_t] \leq H_C[\bar{q} + \delta q_0] - H_C[\bar{q}] , \quad (3.9)$$

where  $\delta q_t$  is the perturbation at a given time  $t$ , and  $\delta q_0$  is the initial perturbation.

We see from equation (3.7) that  $Q_1$  is **positive definite** if  $f'(\bar{\psi}) > 0$  everywhere. We conclude that **the stationary solution is always non-linearly stable if the potential vorticity  $\bar{q}$  is a strictly increasing function of the streamfunction  $\bar{\psi}$ .** This is the **first Arnold criterion.**

**Second criterion.** Let us now consider the case  $f'(\bar{\psi}) \leq 0$  everywhere. Let us then consider the quadratic functional

$$Q_2[\delta q] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( (\nabla \delta \psi)^2 + \frac{(\delta \psi)^2}{R^2} + \frac{(\delta q)^2}{\min\{f'(\bar{\psi})\}} \right) dx dy . \quad (3.10)$$

By using the same arguments than in the previous paragraph, we obtain first the inequality

$$Q_2[\delta q] \leq H_C[\bar{q}] - H_C[\bar{q} + \delta q_0] , \quad (3.11)$$

and then conclude that the solution  $\bar{q}$  is stable if  $Q_2$  is positive definite. We then introduce the orthonormal basis of Laplacian eigenmodes  $-\Delta e_i = \lambda_i e_i$ , with eigenvalues  $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$  in increasing order. The perturbation can be decomposed on this basis :  $\delta q = \sum_{i \geq 1} \delta q_i e_i$ , and the relation  $\delta q = \Delta \delta \psi - R^{-2} \delta \psi$  gives  $\delta q_i = -(\lambda_i + R^{-2}) \delta \psi_i$ . Finally, the quadratic form  $Q_2$  can be written :

$$Q_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left( \frac{1}{\lambda_i + R^{-2}} + \frac{1}{\tilde{\beta}} \right) \delta q_i^2 \quad \text{with} \quad \tilde{\beta} = \min \{ f'(\bar{\psi}) \} \quad (3.12)$$

We see that this quadratic form is positive definite when its smallest eigenvalue is strictly positive, which provides then the condition

$$-\left( \frac{1}{\lambda_i + R^{-2}} + \frac{1}{\tilde{\beta}} \right) > 0 \Rightarrow \tilde{\beta} > -(\lambda_1 + R^{-2})$$

We could have obtained similarly this result by using the **Poincaré inequality** ( $(\Delta \delta \psi)^2 > \lambda_1 (\nabla \delta \psi)^2$ ). However, it will be convenient to consider the previous decomposition to extend this second criterion.

We conclude that  $Q_2$  is **positive definite** if  $-(\lambda_1 + R^{-2}) < f'(\bar{\psi}) \leq 0$  everywhere. This is the second Arnold criterion for nonlinear stability : **the flow is stable if the potential vorticity  $\bar{q}$  is a decreasing function of the stream function  $\bar{\psi}$ , with the condition  $f' > -(\lambda_1 + R^{-2})$** . We notice that the presence of a finite Rossby radius of deformation  $R$  makes this criterion less restrictive than the barotropic case ( $R = +\infty$ ). In the limit  $R \rightarrow 0$ , there is stability of the flow, if  $f'(\bar{\psi})$  is negative and finite everywhere. **The Rossby radius of deformation has thus a stabilizing effect.**

## An extension of the second criterion

To obtain the Arnold criterion, we have taken advantage of the conservation of an energy-Casimir functional  $H_C$ . There exists an infinite number of additional conserved quantities, namely the other Casimir functionals. The perturbation  $\delta q_t$  at a given time is then constrained by the values of the Casimir functional prescribed by the initial perturbation  $\delta q_0$ .

**By using one of those additional constraints, it is shown in the following that it is possible to lower the bound for  $f'$  in the second Arnold criterion.**

Let us give first a qualitative picture of the proof for stability. Let us consider for instance a schematic representation of the isolines of  $H_C$ , projected on the plane  $\delta q_1, \delta q_2$ , the contribution of the two smallest Laplacian eigenmodes. In the case presented on figure 3.1,  $H_C$  is a saddle for  $\delta q = 0$ .

### 3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

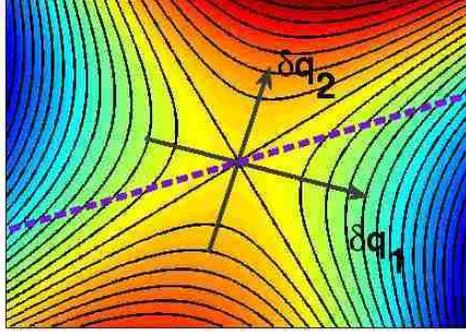


FIG. 3.2: Schematic representation of isolines of the functional  $H_C$  : the stationary state ( $\delta q = 0$ ) is a saddle. However, if one restrict the admissible range of PV fields during the evolution of the perturbation  $\delta q$ , this saddle becomes an extremum : this is the case when for instance the the perturbations are constrained to follow the dashed purple line (which does not necessarily pass through 0).

The “Arnold type” criterion cannot then be used directly to prove stability. However, if the conservation of the other Casimir functionals imposes a condition on the perturbations  $\delta q$ , the saddle can become an extremum. For instance, if the perturbation has to lie on a straight line (the dashed purple line on the figure, which does not necessary cross the saddle) then the functional  $H_C$  admits an extremum along this line.

Let us consider the quadratic functional  $Q_2$  given by equation (3.12). It will be convenient to distinguish a subset  $\{e'_i\}_{i \geq 1}$  on which the Laplacian eigenmodes are zero ( $\langle e'_i \rangle = 0$ ), and a subset  $\{e''_i\}_{i \geq 1}$  on which they are not zero ( $\langle e''_i \rangle \neq 0$ ). The corresponding Laplacian eigenvalues  $\lambda'_i$  and  $\lambda''_i$  are in increasing order in both subsets. We have

$$Q_2[\delta q] = - \sum_{i \geq 1} \Lambda'_i \delta q_i'^2 - \sum_{i \geq 1} \Lambda''_i \delta q_i''^2, \quad \text{with} \quad (3.13)$$

$$\Lambda'_i = \frac{1}{\lambda'_i + R^{-2}} + \frac{1}{\tilde{\beta}}, \quad \Lambda''_i = \frac{1}{\lambda''_i + R^{-2}} + \frac{1}{\tilde{\beta}}, \quad \tilde{\beta} = \min \{f'(\bar{\psi})\}.$$

The conservation of the total circulation ( $\mathcal{C}[\bar{q} + \delta q] = \langle \bar{q} + \delta q \rangle$ ) of the

flow by the dynamics provides the constraint

$$\langle \delta q \rangle = \delta q = \sum_{i \geq 1} \delta q_i'' \langle e_i'' \rangle = \langle \delta q_{t=0} \rangle = \delta \Gamma_0 .$$

We use then this constraint to express one coordinate in term of the others :

$$\delta q_1 = \frac{1}{\langle e_1'' \rangle} \left( \delta \Gamma_0 - \sum_{i=1}^{+\infty} \delta q_i \langle e_i'' \rangle \right) ,$$

where we have used two properties of the smallest Laplacian eigenmode  $e_1$  : i) it is always non degenerate ii) it has always a non-zero mean value ( $\langle e_1 \rangle \neq 0$ ). The quadratic functional  $Q_2$  given by equation (3.12) becomes then

$$Q_2[\delta q] = - \sum_{i \geq 2, j \geq 2} \left( \delta_{i,j} \Lambda_i'' + \frac{\langle e_i'' \rangle \langle e_j'' \rangle}{\langle e_1'' \rangle^2} \Lambda_1'' \right) \delta q_i'' \delta q_j'' - \sum_{i \geq 1} \Lambda_i' \delta q_i'^2 + \text{linear terms}$$

where  $\delta_{i,j}$  is the Kronecker symbol.

To show that this functional is definite positive, one has to diagonalize it, and to show that its smallest eigenvalue is strictly positive.

In the subspace of zero-mean Laplacian eigenvalues,  $Q_2[\delta q]$  is diagonal, and its smallest eigenvalue is positive if  $\tilde{\beta} > -(\lambda_1' + R^{-2})$ .

In the subspace of non zero-mean Laplacian eigenvalues, the functional  $Q_2[\delta q]$  is not diagonal, but it will not be necessary to diagonalize it explicitly. We want solely to know the critical value of  $\tilde{\beta}$  for which the smallest eigenvalue in this subspace is zero. For this critical value, one has

$$\forall i \geq 2 , \Lambda_i'' \delta q_i'' + \sum_{j \geq 2} \frac{\langle e_i'' \rangle \langle e_j'' \rangle}{\langle e_1'' \rangle^2} \Lambda_1'' \delta q_j'' = 0$$

By multiplying this equation by  $\langle e_i'' \rangle / \Lambda_i''$ , summing over  $i \geq 2$ , and dividing the whole sum by  $\sum_{j \geq 2} \langle e_j'' \rangle$ , we obtain the condition

$$\sum_i \frac{\langle e_i'' \rangle^2}{(\lambda_i'' + R^{-2})^{-1} + \tilde{\beta}^{-1}} = 0 \tag{3.14}$$

Let us call  $-(\lambda_1^* + R^{-2})$  the greatest value of  $\tilde{\beta}$  such that the previous equality is satisfied. This corresponds to the critical value of  $\tilde{\beta}$ , below which

the functional  $Q_2$  is no more positive definite in the subspace of non-zero mean Laplacian eigenmodes.

Remembering that  $\tilde{\beta} = \min \{f'(\bar{\psi})\}$ , we conclude that when taking into account the constraint given by the circulation conservation, the functional  $Q_2$  is positive definite, and thus **the flow is nonlinearly stable if :**

$$\min \{f'(\bar{\psi})\} > - \left( \min \{\lambda'_1, \lambda_1^*\} + \frac{1}{R^2} \right)$$

Let us show that this criterion lowers the bound given by the second Arnold criterion. It has already been said that the lowest Laplacian eigenmode is always associated to a non zero-mean eigenmode, and is non-degenerate :  $\lambda''_1 = \lambda_1$ . It implies  $\lambda''_1 < \lambda'_1$ . Furthermore, a direct analysis of (3.14) shows that  $\lambda''_1 < \lambda_1^*$ . Finally, we have  $(\min \{\lambda'_1, \lambda_1^*\} + R^{-2}) > (\lambda_1 + R^{-2})$ . Notice that the subset of zero-mean Laplacian eigenmodes is generically empty if the domain geometry admits no particular symmetry axis. In that case, the criterion for stability becomes simply  $\min \{f'\} > -(\lambda_1^* + R^{-2})$ .

**To conclude, taking into consideration the constraints given by the conservation laws of the dynamics allows to improve the stability criteria based on the energy-Casimir functional method.**

This result is particularly interesting in the context of the Robert-Sommeria-Miller statistical theory for the potential vorticity, in non viscous two-dimensional and geophysical flows : those theories predict a final (at sufficiently large time) organization of the flow, characterized by a monotonic  $\bar{q} - \bar{\psi}$  relation. It is an important issue to determine whether those states are nonlinearly stable or not. Thanks to the second Arnold criterion, this was proven for a large class of statistical equilibria. Our result extend the proof of nonlinear stability to an even larger class of equilibria. It is still an open question to prove this result for all the statistical equilibria.

## Link with linear and formal stability

We have explained earlier that nonlinear stability implies formal stability and linear stability. The link with formal stability becomes clear when computing the second variations of  $H_C$  :

$$\delta^2 H_C[\delta q] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( (\nabla \delta \psi)^2 + \frac{(\delta \psi)^2}{R^2} + \frac{(\delta q)^2}{f'(\bar{\psi})} \right) dx dy . \quad (3.15)$$

There is formal stability if  $\delta^2 H_C$  is positive (or negative) definite. To make explicit the link between formal and linear stability, let integrate by part the previous equation. We obtain then the expression

$$\delta^2 H_C[\delta q] = \frac{1}{2} \langle \delta q \mathcal{H} \delta q \rangle \quad \text{where} \quad \mathcal{H} = - \left( \Delta - \frac{1}{R^2} \right)^{-1} + \frac{1}{f'(\bar{\psi})} \quad (3.16)$$

It is then straightforward to check that the linear dynamics (3.5) can be written on the form

$$\partial_t \delta q = J(\mathcal{H} \delta q, \bar{q}) , \quad (3.17)$$

and then to show that the functional  $\delta^2 H_C$ , sometimes referred as pseudo-energy, is conserved by the linearized dynamics. From the previous analysis, two criteria for linear stability can readily be stated :

- **criterion (i)** If  $f'(\bar{\psi}) > 0$  everywhere, then  $\delta^2 H_C[\delta q] \geq Q_1[\delta q]$ , where  $Q_1$  is given by equation (3.7). This means that  $\delta^2 H_C$  is positive definite if  $Q_1$  is positive definite, which is true if  $\min \{f'(\bar{\psi})\} > 0$ .
- **criterion (ii)** Similarly, if  $f'(\bar{\psi}) < 0$  everywhere, then  $-\delta^2 H_C[\delta q] \geq Q_2[\delta q]$ , where  $Q_2$  is given by equation (3.10). This means that  $-\delta^2 H_C$  is positive definite if  $Q_2$  is positive definite, which is true if  $\min \{f'(\bar{\psi})\} > -(\min \{\lambda'_1, \lambda_1^*\} + \frac{1}{R^2})$ .

In both case,  $\pm \delta^2 H_C$  defines a norm for the perturbation, and is conserved by the linearized dynamics : it provides thus the linear stability of the solution  $\bar{q}$  when the previous criteria are fulfilled.

### Refinement of the criteria for linear stability

Notice that in case **ii)**, the inequality  $-\delta^2 H_C[\delta q] \geq Q_2[\delta q]$  is not optimal. As far as  $-\delta^2 H_C[\delta q]$  is itself a quadratic functional, one can obtain a better criterion for linear stability by diagonalizing it directly. To that purpose, we follow the method proposed by Ghil and Wolansky [138, 137], by considering the generalized eigenvalue problem

$$\Delta \phi - \frac{\phi}{R^2} + \mu \frac{\phi}{f'(\bar{\psi})} = 0 , \quad (3.18)$$

which has the familiar form of a Schrödinger equation for an energy level equal to zero. Since  $-f'(\bar{\psi}) > 0$ , the generalized eigenvalue problem has a complete set of eigenfunction  $\{\phi_i\}_{i \geq 1}$ , orthonormal with respect to the

### 3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

measure  $-dxdy/f'(\bar{\psi})$ , and associated to positive eigenvalues  $0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_i \rightarrow \infty$ . By using (3.16), it is then straightforward to show that  $\mathcal{H}e_i = -\lambda_i e_i / f'(\bar{\psi})$ , with  $e_i = -f'(\bar{\psi}) \phi_i$  and  $\lambda_i = 1 - 1/\mu_i$ . By decomposing the perturbation on this basis, we then obtain

$$-\delta^2 H_C = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \delta q_i^2 \quad \text{with} \quad \delta q = \sum_{i \geq 1} \delta q_i e_i(x, y) \quad (3.19)$$

**Without constraint on the perturbation  $\delta q$ , we see directly that this functional is positive definite if  $\lambda_1 > 0$ . In the following, this will be referred as criterion (ii-a).**

The previous case is the analogous of the second Arnold criterion. By following the same kind of computations than for the extension of the second Arnold criterion (see previous subsection), one can take advantage of the conservation of the quantity  $\langle \delta q \rangle = \delta \Gamma_0$  by the linearized dynamics (3.5) in order to obtain a larger criterion for stability. The computation is carried in annex A, where it is shown that the solution  $\bar{q}$  is formally (and then linearly) stable when

$$\min \{ \lambda'_1, \lambda_1^* \} > 0, \quad (3.20)$$

where  $\lambda'_1$  is the smallest generalized eigenvalues of  $\mathcal{H}$  associated to a zero-mean eigenmode<sup>2</sup> ( $\langle e'_1 \rangle = 0$ ), and where  $\lambda_1^*$  is the smallest zero of

$$f(x) = \frac{\langle e_1 \rangle^2}{\lambda_1} + \sum_{i \geq 2} \frac{\langle e_i \rangle^2}{\lambda_i - x}. \quad (3.21)$$

Since the smallest generalized eigenvector of  $\mathcal{H}$  is always non-degenerate, with a non-zero mean value, we have necessarily  $\lambda'_1 = \lambda_1 < \lambda_1^*$ . In addition, a direct analysis of equation (3.21) gives  $\lambda_1 < \lambda_1^*$ . **This criterion, that will be referred as (ii-b) in the following, is thus less restrictive than the criterion (ii-a).**

In practice, the discussion for the stability will require the computation of the solutions of the generalized eigenvalue problem (3.18).

---

<sup>2</sup>Notice that this eigenmode does not exist generically if the domain has no symmetry axis. In that case, one can consider  $\lambda'_1 = +\infty$ .

## The case of a channel

Because of its considerable simplification for analytical and numerical computations, the case of channel flows have been widely studied in the literature (see for instance [129, 38, 137, 138]). We consider here the case of either a periodic ( $\psi(x + L, y) = \psi(x, y)$ ) or of an infinite channel in the zonal ( $x$ ) direction, with north ( $y = 1$ ) and south ( $y = -1$ ) boundaries, which provide the conditions  $\psi(1) = \psi_{fr}$  and  $\psi(-1) = \psi_{-fr}$ . Notice that the constant  $\psi_{\pm fr}$  can a priori be different on both boundaries.

We consider in the following the particular case of a **parallel** stationary flow characterized by its potential vorticity  $\bar{q}(y)$  or its stream function  $\bar{\psi}(y)$ . There is no meridional velocity ( $\bar{u}_y = \partial_x \bar{\psi} = 0$ ), but only a zonal component  $\bar{u}_x = -\partial_y \bar{\psi}$ . Let us first present the classical criteria for the linear stability of such flows, then recall the link between those criteria and the formal stability, and finally give an extension of those criteria.

### The (classical) Rayleigh-Kuo-Fjortoft criteria

The **Rayleigh criterion (1880)** was originally proposed in the context of the Euler equation ( $R = +\infty$  and  $\beta_c = 0$ ). It states that **any stationary zonal solution is stable if the potential vorticity  $\bar{q}(y)$  is a monotone function of  $y$** . The **Kuo criterion (1949)** is the same, except that it includes the effect of a beta plane ( $\beta_c \neq 0$ ). Those criteria are also unchanged when one considers a finite value for  $R$ .

The **Fjortoft Criterion (1950)** is more general : it states that **any stationary zonal solution is stable if  $(\bar{u}_x - U_s) d\bar{q}/dy > 0$ , for any value of  $y$** , where  $U_s$  is a constant that can be chosen arbitrarily. This criterion is more general than the previous one : if one chooses  $U_s > \max_y \{\bar{u}(y)\}$  (or  $U_s < \min_y \{\bar{u}(y)\}$ ), then this sufficient condition becomes  $d\bar{q}/dy < 0$  (or  $d\bar{q}/dy > 0$ ).

To obtain the Fjortoft criterion, one must first notice that in the case of a channel flow, the problem is Galilean invariant in the  $x$  direction : the velocity is then defined by  $u_x(x, y) = -\partial_y \psi + U_s$ , where  $U_s$  is a constant than can be chosen arbitrarily.

Let us now consider the functional (3.22), written slightly differently :

$$\delta^2 H_C[\delta q] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( (\nabla \delta \psi)^2 + \frac{(\delta \psi)^2}{R^2} + \frac{d\bar{\psi}/dy}{d\bar{q}/dy} (\delta q)^2 \right) dx dy . \quad (3.22)$$

This functional is definite positive, conserved by linearized dynamics : the flow is therefore formally stable if  $(d\bar{\psi}/dy) / (d\bar{q}/dy) > 0$ , which gives then the sufficient condition  $-(\bar{u}_x - U_s) / (d\bar{q}/dy) > 0$ , whatever  $U_s$  : we recover the Fjortoft criterion for linear stability.

Notice that it is not necessary to assume that there is a single relation  $\bar{q} = f(\bar{\psi})$  in the whole domain to derive such condition for stability.

The previous criteria are obtained by finding a condition to have  $\delta^2 H_C$  positive definite, like for the first Arnold criterion **(i)**. Let us now give another criterion, by finding a condition to have  $\delta^2 H_C$  negative definite, like in the case of the second Arnold criterion **(ii)** and of its extension **(ii-a)** and **(ii-b)**. The translational invariance of the problem in the case of a channel flow will allow to improve the criterion **(ii-b)** given by (3.20) .

### An extension of the criteria for stability in a channel

Let us decompose the perturbation on Fourier modes in the  $x$  direction :

$$\delta q(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta q_k(y) \exp\left(2i\pi k \frac{x}{L}\right)$$

By projecting the equations (3.5) for the linearized dynamics on the Fourier modes (in the  $x$  direction), one finds that for each value of  $k$ ,

$$\partial_t \delta q_k = \frac{2i\pi k}{L} J(\mathcal{H}_k \delta q_k, \bar{q}) \quad \text{with} \quad \mathcal{H}_k = - \left( \frac{d^2}{dy^2} - \frac{4k^2\pi^2}{L^2} - \frac{1}{R^2} \right)^{-1} + \frac{1}{f'(\bar{\psi})} , \quad (3.23)$$

where  $i$  refers to the imaginary unit, and where  $\delta q_k$  is a function of  $y$  and time  $t$  only. To show the linear stability of the stationary solution  $\bar{q}$ , it is then sufficient to show the linear stability of the perturbation  $\delta q_k$ , for any value of  $k$ , since each component evolves independently of the others.

To that purpose, the formal stability of the solution can be shown by considering the functional  $-\delta^2 H_{C,k} = \langle \delta q_k \mathcal{H}_k \delta q_k \rangle$ , where the notation  $\langle \cdot \rangle$

stands now for an average in the  $y$  direction. This functional is quadratic and conserved by the linearized dynamics (3.23).

It is therefore sufficient to give a condition for this functional to be positive definite. Since the demonstration follows step by step the one presented on the sub-subsection "Refinement of the criteria for stability", we give only the result.

Let us call  $\{\mu_{k,i}\}_{i \geq 1}$  the set of solutions of the generalized eigenvalue problem

$$\frac{d^2 \phi_{k,i}}{dy^2} - \left( \frac{4\pi^2 k^2}{L^2} + \frac{1}{R^2} \right) \phi_{k,i} = -\mu_{k,i} f'(\bar{\psi}_C) \phi_{k,i} . \quad (3.24)$$

where the  $\{\phi_{k,i}\}_{i \geq 1}$  defines a complete basis, orthonormal with respect to the measure  $-dy f'(\bar{\psi})$ . It is straightforward to show that  $-\delta^2 H_{C,k} = \sum_i \geq \lambda_{k,i} \delta q_{k,i}^2$ , where

$$\lambda_{k,i} = 1 - \frac{1}{\mu_{k,i}} , \quad q_k = \sum_{i \geq 1} \delta q_{k,i} e_{k,i} \quad \text{with} \quad e_{k,i}(y) = -f'(\bar{\psi}) \phi_{k,i}(y).$$

If  $\lambda_{i,k} > 0$  whatever the values of  $i$  and  $k$ , then the flow is stable. This criterion is exactly the same as the criterion **(ii-a)**. In that case, the stationary solution is an extremum of the energy-Casimir functional.

However, it will now be possible to obtain a better criterion than **(ii-b)** by noticing that the quantity  $\langle \delta q_k \rangle$  is conserved by the linearized dynamics (3.23) for each given value of  $k$ . **It provides then an infinite number of constraints (one for each value of  $k$ ) that can be taken into account.** We obtain then the following criterion **(ii-b-channel)** : the flow is stable when

$$\forall k, \min \{ \lambda'_{k,1} , \lambda_{k,1}^* \} > 0 , \quad (3.25)$$

where the  $\lambda'_{k,i}$  is the smallest eigenvalue among  $\{\lambda_{k,i}\}_{i \geq 1}$ , associated to a zero mean eigenmode ( $\langle e_{k,i} \rangle = 0$ ), and where  $\lambda_1^*$  is the smallest zero of the function

$$f_k(x) = \frac{\langle e_{k,1} \rangle^2}{\lambda_{k,1}} + \sum_{i \geq 2} \frac{\langle e_{k,i} \rangle^2}{\lambda_{k,i} - x} . \quad (3.26)$$

Notice that criterion is better than (3.20). Suppose for instance that whatever the value of  $k$ ,  $\lambda_{k,1}$  is negative, while all the other eigenvalues are positive : the energy Casimir functional admits an infinite number

of unstable direction (the eigenmodes  $e_{k,1}(y)$ ). Taking into account the constraints, which provides the criterion (3.25), this saddle point becomes in some cases an extremum, which then provides the proof of the linear stability of the flow.

### 3.2 Application : linear stability of an eastward jet in a channel

In this section, we show the linear stability of an intense eastward jet characterized by a single  $\bar{q} - \bar{\psi}$  relation in the whole domain. The interest is twofold : i) such flow does exist in mid latitude oceans ; this point will be discussed at the end of this section, and ii) this is a case where none of the previous criteria but the extension (3.25) can be used to show the stability of the flow.

#### On the Boundary conditions

In the following, we consider the case a channel with the boundary conditions  $\bar{\psi}(-1) = \bar{\psi}(1) = \psi_{fr}$ . Because we look for a symmetric solution ( $\bar{\psi}(y) = -\bar{\psi}(-y)$ ), we choose  $\psi_{fr} = 0$ . We could have chosen *a priori* different values of  $\psi_{fr}$  at north and south boundaries to satisfy the impermeability constraint. However, if those north and south boundaries were connected by east or west boundaries, those values would have to be equal. This choice has thus to be interpreted as a first step toward the more complicated case of the stability of an eastward jet in a closed domain.

#### On the $q - \psi$ relation

Notice that a class of inertial solutions presenting an eastward jet in a channel have already been described in former studies [50, 49]. In those studies, the streamfunction profile  $\bar{\psi}(y)$  was first fixed, with the required properties, namely a strong and localized eastward jet around  $y = 0$  ( $\partial_y \bar{\psi} < 0$  for  $-y_c < y < y_c$ , with  $y_c \sim R$ ) and an uniform westward recirculation in the whole domain ( $\partial_y \bar{\psi} > 0$  for  $-y < y_c$  and for  $y > y_c$ ). This is for instance realized by the choice

$$\bar{\psi}(y) = -\tanh\left(\frac{y}{R}\right) + y \tanh\left(\frac{1}{R}\right),$$

Then the vorticity  $\bar{q}(y) = \bar{\psi}'' - \bar{\psi}/R^2 + \beta_c y$  can be computed. It is easy to show that for sufficiently high values of  $\beta_c$ ,  $\bar{q}(y)$  is monotonic, and then the jet is linearly stable, by using the Kuo criterion [88].

However, this solution could not been studied in the case of a closed domain (by considering east and west boundaries) : to each streamline above  $y_c$  (or below  $-y_c$ ) corresponds a single streamline between 0 and  $y_c$ . If they were east and west boundaries, those streamlines should be connected at boundaries, to satisfy the impermeability constraint, and thus be characterized by the same value of the potential vorticity  $\bar{q}$ , in order to be consistent with the fact that iso-lines of the potential vorticity are also streamlines for stationary flows. In the example given above, this is not the case.

Our point of view will be here rather to consider a given and unique relation  $\bar{q} = \bar{\psi}$ , to show that there exists a stationary solution with the required properties, and then to show the stability of the flow. The stability of those kind of flows is not an obvious issue : let consider any continuous, monotonic  $\bar{q} - \bar{\psi}$  relation, and a stationary profile  $\bar{\psi}(y)$ . Because of the boundary conditions in the channel ( $\bar{\psi}(\pm 1) = 0$ ), we have  $\bar{q}(-1) = \bar{q}(1)$ . The potential vorticity  $\bar{q}(y)$  is not a strictly monotonic function of  $y$ , and the Kuo criterion does not apply for such states. It means that we need to go further this criterion to prove linear stability of the states we describe.

## Description of a stationary solution presenting an eastward jet

We compute and describe in this subsection a stationary state presenting an eastward jet, in the case of the relation  $\bar{q} = 1 - 2H(\bar{\psi})$ , where  $H$  is the **Heaviside function** ( $H(\bar{\psi}) = 1$  if  $\bar{\psi} > 0$ , 0 else). We consider a case where there is as much positive as negative PV in the channel. We expect to have an eastward jet if all the positive PV is in the north ( $y > 0$ ), and all the negative PV is in the south ( $y < 0$ ). Let us first compute the streamfunction, by inverting the relation

$$\Delta \bar{\psi} - \frac{\bar{\psi}}{R^2} = 2H(y) - 1 - \beta_c y . \quad (3.27)$$

This equation can be directly solved. For  $y > 0$ , the solution is given by

$$\bar{\psi} = R^2 \cosh \frac{y}{R} + R^2 \left( 1 - \beta_c - \cosh \frac{1}{R} \right) \frac{\sinh \frac{y}{R}}{\sinh \frac{1}{R}} + R^2 (\beta_c y - 1) , \quad (3.28)$$

### 3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

and is antisymmetric :  $\bar{\psi}(-y) = -\bar{\psi}(y)$ . The form of the streamfunction is presented figure 3.2, for  $R = 0.05$  and  $\beta_c = 0.5$ . The corresponding velocity field is purely zonal. A strong eastward jet is distinguished at the middle of the domain, where  $\psi$  is decreasing, and a westward recirculation taking place in the whole domain, where  $\psi$  is increasing. In the limit of small Radius of deformation  $R \rightarrow 0$ , the jet width, defined by the distance between the extrema of  $\psi$ , is of order  $R$ , and the velocity at the middle of the eastward jet (in  $y = 0$ ) is of order  $R$  :

$$\bar{u}_x^0 = -\frac{d\bar{\psi}}{dy}\Big|_{y=0} = R - \beta_c R^2 + o(\beta_c R^2) \quad (3.29)$$

Two limit cases for the westward recirculation are distinguished, according to the value of  $\beta_c$  :

- if  $\beta_c \rightarrow 0$ , the westward recirculation of the flow is mostly confined at the north and south boundaries, as strong jets of characteristic width  $R$ .
- if  $\beta_c \rightarrow 1$ , the westward recirculation takes place in the whole channel, as a weak current of characteristic length 1.

The case presented on figure 3.2 is an intermediate situation between those two cases.

Notice that this solution exists if and only if the streamfunction  $\bar{\psi}(y)$  remains negative for any  $y \in [0, 1]$ . If the sign of the streamfunction changes in  $y \in [0, 1]$ , then the sign of the PV field also changes, as  $\bar{q} = 1 - 2H(\bar{\psi})$ , which is not consistent with the initial assumption that  $\bar{q}(y) > 0$  for  $y > 0$ . Taking the limit  $R \rightarrow 0$ , one finds that the condition for the existence of the solution with an eastward jet is then  $\beta_c < 1$ .

Because  $\bar{q}(y)$  is not a strictly increasing function of  $y$  ( $d\bar{q}/dy = 0$  everywhere but on the boundaries), the Rayleigh-Kuo-Fjortoft criteria do not apply. This case is singular because we have considered a non-continuous  $\bar{q}-\bar{\psi}$  relation. We then choose  $\bar{q}_C = -\tanh\left(\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C\right)$ , and will take at the end of our analysis the limit  $\psi \rightarrow +\infty$  in order to recover a step function. However, we have seen in the previous subsection that the Rayleigh-Kuo-Fjortoft criteria do not apply for zonal flow characterized by a continuous  $\bar{q}-\bar{\psi}$  relation in a channel (with the boundary condition  $\bar{\psi}(1) = \bar{\psi}(-1) = cst$ ). It will then be necessary to go further those criteria.

The first step is to check that the stationary solution (3.28) obtained for the step function still exists in the case  $\bar{q}_C = -\tanh\left(\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C\right)$ , for  $C \gg 1$ . By doing an asymptotic expansion of the solution in  $R^2/C$ , it is shown in annex B that this solution exists indeed. Its form is given by equation (3.28), with additional small corrections of order  $o(R^2/C)$ . We discuss in the following the stability of such a solution in the limit  $C \rightarrow +\infty$  and  $R \rightarrow 0$ . The case “ $C, R$  finite” will be discussed later by the mean of numerical computation.

### Linear stability of the eastward jet

To discuss the stability of the flow, it will be necessary to compute the eigenvalues  $\lambda_{k,i}$  related to the generalized eigenvalues  $\mu_{k,i}$  of (3.24) by  $\lambda_{k,i} = 1 - 1/\mu_{k,i}$ . It is shown in annex C that in the case of the stationary solution  $\bar{\psi}_C$  (3.28), which prescribes the “potential”  $f'_C$  (represented on figure 3.2), these eigenvalues are

$$\forall k, \quad \lambda_{k,1} = -\beta_c R + o(R^2) + o\left(\frac{1}{C}\right) \quad \text{and} \quad \forall i \geq 2, \quad \lambda_{k,i} = 1 + o\left(\frac{1}{C}\right) \quad (3.30)$$

For a given  $k$ , the smallest eigenvalue  $\lambda_{k,1}$  is negative, while the others eigenvalues are strictly positive. It means that the stationary solution is a saddle for the functional  $\delta^2\mathcal{H}_C$  given by (3.19), and the criterion **(ii-a)** cannot be fulfilled.

However, it is shown in the following that the criterion **(ii-b-channel)** given by (3.25) is fulfilled.

Notice first that for a given  $k$ , only the smallest eigenvalue  $\lambda_{k,1}$  is negative. Let us show that this eigenvalue is associated to an eigenmode of non-zero mean, with  $\langle e_{k,1} \rangle \sim 1$ .

The eigenmode  $\phi_{k,1}(y) = -e_{k,1}(y)/f'(\bar{\psi}_C)$  represented on figure 3.4 has been computed in annex C, see equations (3.40) and (3.46). It is a symmetric decreasing exponential localized on the jet, on a characteristic width  $\sim 1/\sqrt{R^{-2} + k^2}$ . This eigenmode is normalized such that  $-\langle \phi_{k,1}^2/f'(\bar{\psi}) \rangle = 1$ . In the limit  $C \rightarrow +\infty$ , this normalization condition gives  $\phi_{k,1}(0) = 1$ . We have then  $\langle e_{k,1} \rangle = -\langle \phi_{1,k} f'(\bar{\psi}_C) \rangle = 1$ , for  $C \rightarrow \infty$ .

Since  $\lambda_{k,1}$  is always associated to a non zero-mean eigenmode, and is the only negative eigenvalue for a given  $k$ , we conclude that all the eigenvalues

3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

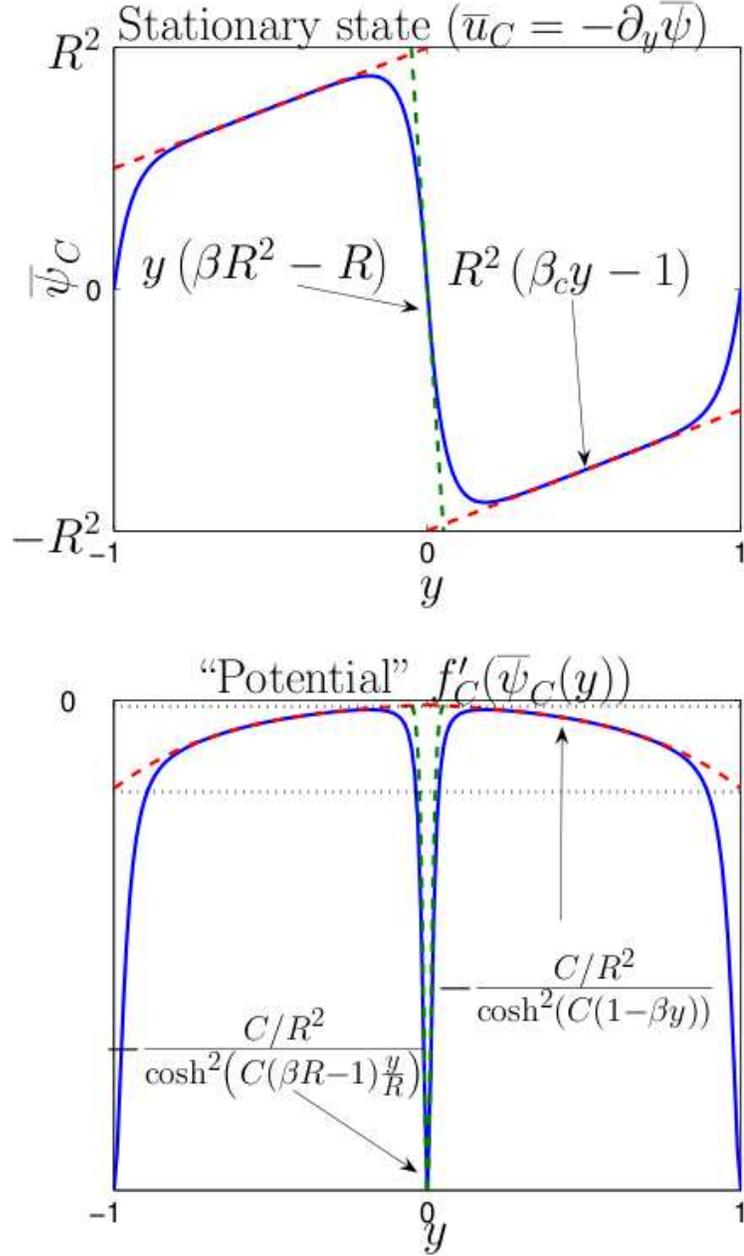


FIG. 3.3: **Above** : the  $\bar{q} - \bar{\psi}$  relation is a step function, with zero circulation, in the case where all the positive PV is in the north (see **section 1**). **Below** : corresponding potential when  $\bar{q}_C = f_C(\bar{\psi}_C) = -\tanh\left(\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C\right)$  with  $C \rightarrow +\infty$  (see **section 3**)

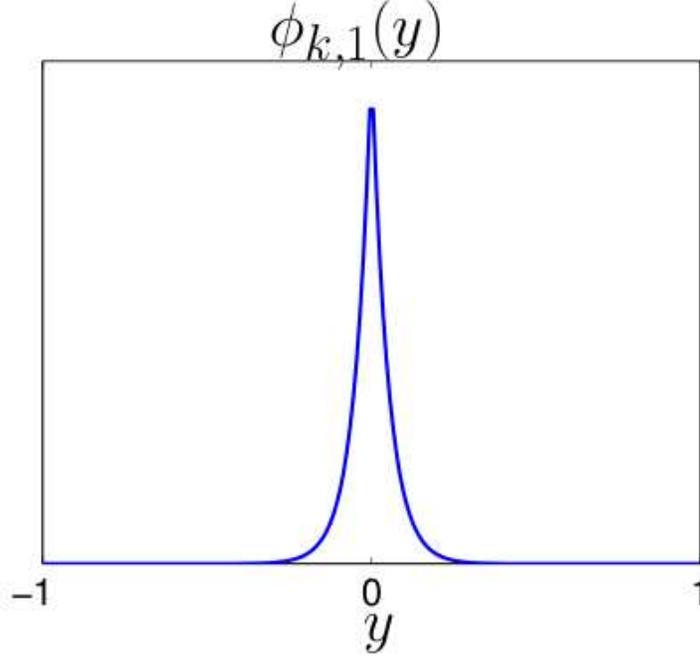


FIG. 3.4: The eigenmode  $\phi_{k,i} = -e_{k,1}/f'(\bar{\psi})$  is a symmetric, decreasing exponential localized around the jet ( $y = 0$ ), of characteristic width  $r = 1/\sqrt{R^{-2} + k^2}$ , see equation (3.40).

associated to a zero-mean eigenmode are strictly positive, and in particular  $\lambda'_{k,1} > 0$ .

We have then to check that the smallest zero of the function  $f_k(x)$  given by (3.26) is strictly positive, for any given value of  $k$ . We give a schematic representation of the two terms of this function  $f_k(x)$  on figure 3.2. The blue (plain) line corresponds to the term  $\sum_{i \geq 2} \langle e_{k,i} \rangle^2 / (\lambda_{k,i} - x)$  as a function of  $x$ , while the red (plain) line corresponds to the term  $\langle e_{k,1} \rangle^2 / \lambda_{k,1}$ , which does not depend on  $x$  and is negative. The zeros of  $f(x)$  are located at the crossing between the two curves.

In the schematic case presented figure 3.2, all the crossing points are located in the area  $x > 0$  : the criterion for stability is then fulfilled. Let us show that is is indeed the case for the solution presenting an eastward jet.

Let us inject the expressions (3.30) of  $\lambda_{k,i}$  in (3.26), which gives

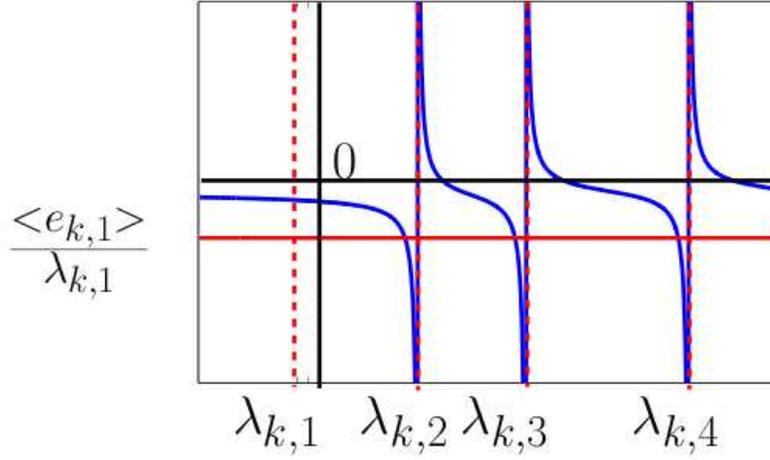


FIG. 3.5: Schematic representation of the criterion for stability : The  $\lambda_{k,i}$  are the eigenvalues of  $\mathcal{G}_k$ , with  $\lambda_{k,1} < 0$  and  $\lambda_{k,i} > 0$  for  $i \geq 2$ . The zeros of  $f(x)$  are located at the crossing between the red and blue curves, see equation (3.26). There is formal stability if the smallest zero is positive. In our case of interest ( $R \ll 1$  and  $C \gg 1$ ), all the  $\lambda_{k,i}$ ,  $i \geq 2$  tend to 1, and  $\langle e_{k,1} \rangle / \lambda_{k,1}$  tend to infinity, so the smallest zero of  $f$  tend also to one.

$$\forall j \geq 1, \quad x = 1 - \frac{\beta_c R}{\langle e_{k,1} \rangle^2} \sum_{i \geq 2} \langle e_{k,i} \rangle^2 + o(1/C) + o(R^2) .$$

Since  $\sum_{i \geq 1} \langle e_{k,i} \rangle^2 = 1$  and  $\langle e_{k,1} \rangle^2$  is of order 1, we conclude that  $x$ , and then all the zeros  $\lambda_{k,j}^*$  of the function  $f_k$  given by (3.26) tend to 1 :

$$\forall j \geq 1 \quad \lambda_{k,j}^* = 1 + o(1/C) + o(R) .$$

In particular, the minimum  $\min \{ \lambda_{k,j}^*, i \geq 1 \}$  tends to 1.

Finally, the criterion **ii-b-channel** given by (3.25) is fulfilled : the flow presenting an eastward jet is then linearly stable.

### Estimation of the parameters in oceanic context

In mid-latitudes oceans, the inertial part of the eastward jets such as the Gulf Stream or the Kuroshio are characterized by typical velocities  $U^* \sim 1 \text{ ms}^{-1}$  and a typical width given by the Rossby radius of deformation  $R^* \sim 50 \text{ km}$ . The notation “\*” is here used to indicate that we

consider the quantities in dimensional units. The jet is associated to a front of potential vorticity  $\Delta q^* = U^*/R^*$ . The meridional (north-south) extension of the recirculating flow around this inertial jet is given by  $L_y^* \sim 1000 \text{ km}$ . In the previous analysis, time and length units have been adimensionnalized such that the jump of the potential vorticity across the front is  $\Delta q = 2$ , and such that the meridional extension (in the  $y$  direction) of the channel is  $L_y = 2$ . With this length unit, the Rossby radius of deformation is  $R \approx 0.1$ . Our choice to take  $R \ll 1$  is justified by the scale separation with the domain size.

The parameter  $\beta_c$  can be expressed in terms of dimensional quantities :  $\beta_c = \beta_c^* R^* L_y^* / U^*$ . By taking the order of magnitude of the different quantities given previously, and  $\beta_c^* = 1.610^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , one obtains  $\beta_c \approx 0.8$ . Remember that the condition for the existence of the eastward jet associated to the front of potential vorticity on the channel was  $\beta_c < 1$ .

### 3.3 Propagation of a PV front

The eastward jet described in the previous section is associated to a zonal front of potential vorticity. We present in this section the evolution of small perturbations of such fronts. While the result obtained in the previous section is more general (the linear stability is shown for any perturbation of the solution, not only for the perturbation of the zonal front), this section gives a qualitative understanding of the evolution of the perturbations.

To that purpose, we first study qualitatively the evolution of any PV front, be it zonal or not, and then give a more quantitative study, which is focused on the evolution of small perturbations around a zonal PV front. The results presented in this section are not new, since such an approach has been studied numerically and theoretically in the 80ties, mainly by Pratt *et al* [94, 93, 34].

#### Description of some limit cases

Let us consider here an arbitrary domain composed of two sub-domains of uniform PV, differing by their sign. Let us call  $\gamma(s)$  the parametric curve corresponding to the front between the sub-domains, where  $s$  is the arc length of this front. At a given point  $s$  of this front, the curvature of the

3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

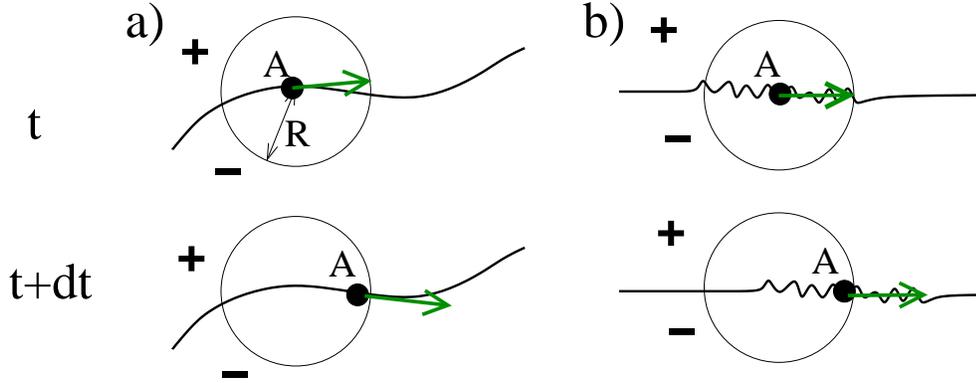


FIG. 3.6: PV front without beta effect. At time  $t$ , the velocity on point  $A$  depends only on the PV field inside the circle of radius  $R$ , as the interactions are screened at this length scale. **a)** The curvature  $C_v$  of the front is low compared to  $R^{-1}$  ( $C_v \ll R^{-1}$ ): at lowest order, **the front is a stream line.** **b)** Same case, with an additional perturbation of amplitude and wavelength smaller than  $R$ : **the perturbation is purely advected along the front.**

front is given by  $C_v = d^2\gamma(s)/ds^2$  (this is the inverse of the radius of the osculating circle at this point).

Our aim is to determine the evolution of the front in different cases, in the limit of small Rossby radius of deformation. To determine the velocity of the front, one needs to invert the equation  $\Delta\psi - \psi/R^2 = q - \beta_c y$  on the front. For that purpose, we introduce the Green operator, solution of

$$\Delta G - \frac{G}{R^2} = \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (3.31)$$

Let us consider the boundary condition  $G(y, x, 0, 0) = 0$  on the domain boundaries  $\partial\mathcal{D}$ . As the parameter  $R$  acts as a screening length for the interactions, and as we will consider the limit  $R \rightarrow 0$ , the computation of the velocity field at a given point of the PV front will depend only on the local distribution of the PV field. Let us be more precise. Far from the boundaries, equation (3.31) is invariant by rotation, so  $G$  depends only on

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

The equation (3.31) becomes  $\partial_{r'}(r'\partial_{r'}G) - r'G = \delta(r')/\pi$ , where  $r' = r/R$ .

- For  $r \gg R$ , the solution of this equation is  $G \sim e^{-r/R}$  with additional small corrections.

- For  $r \ll R$ , the solution of this equation is  $G \sim \ln r$  as in the two dimensional Euler equations.

One then obtains the expression of the streamfunction in term of this operator :

$$\psi(x, y) = \int (q(x', y') - \beta_c y') G(r/R) dx' dy' \quad (3.32)$$

As far as the field  $q$  is supposed to be known at a given time, one can use the linearity of the previous equation to distinguish two independent contributions for the streamfunction :  $\psi = \psi_q + \psi_{\beta_c}$ . The first term comes from the field  $q$  itself, while the second one comes from the beta effect  $\beta y$ . One then obtains a velocity field decomposed into those two contributions :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_{\beta_c}$ .

**Term due to the beta effect ( $\beta_c y$ ).** Let us consider first  $q = 0$  in (3.32). After a change of variable ( $Y = y - y'$ ) in this equation, and a straightforward computation, one obtains  $\psi_{\beta_c} = -\beta_c y R^2 + cst$ . Then, the variation of the Coriolis force with latitude implies a constant westward drift of any fluid particle, with velocity  $\mathbf{u}_{\beta_c} = -\beta_c R^2 \mathbf{e}_x$ .

**Term due the PV field  $q$  in the limit of a PV front having a small curvature  $C_v \ll R^{-1}$ , see figure 3.6-a).** We now consider  $\beta_c = 0$  in (3.32). At lowest order in  $RC_v$ , the PV front can be locally considered as a plane. Let us consider that the jump of PV is equal to one. At a given point of the front, we define a local coordinate  $\zeta$  in a direction normal to the interface. The streamfunction can then be easily computed :  $\psi(\zeta) = 1 - \exp(-\zeta/R)$  for  $\zeta > 0$ . It means that the velocity of each point of the front is (at lowest order) tangent to the front, equal to  $R$ . The front is thus left unchanged by the associated flow. Notice that if the curvature of the front is constant, whatever its value compared to  $R$ , the same analysis can be carried : at lowest order in the variation of the curvature, the velocity on the front is tangent to the front. One can shows that the magnitude of the velocity varies between 0 (when  $C_v \gg R^{-1}$ ) and  $R$  (when  $C_v \ll R^{-1}$ ).

**Advection of small perturbations on the PV front (figure 3.6-b).** We still consider the limit of small curvature  $RC_v \ll 1$  for the PV front, and  $\beta_c = 0$ , but with small additional perturbations on the front, of amplitude  $l \ll R$  and wavelength  $\lambda \ll R$ . The streamfunction is given by (3.32). In this

expression, the effect of the term  $G(r/R)$  is to smooth out the fluctuations of the PV field of typical length scales smaller than  $R$ . This term can be interpreted as a filtering operator of typical length scale  $R$ . It means that the small perturbation (of typical length  $r \ll R$ ) will have no effect on the velocity field, at least to lowest order. We conclude that these small perturbations are purely advected along the PV front.

### Application in oceanographic context

We show here that the previous analysis might be relevant to explain some qualitative features of the inertial eastward jets at mid-latitudes, as the Gulf stream or the Kuroshio.

**Evolution of an isolated patch of uniform PV in a background of PV with the opposite sign (figure 3.7-a).** On almost any satellite observation of the Gulf Stream, one can notice the existence of isolated patches almost circular, that are created by the occurrence of unstabilities on the jet, and that are then drifted westward. This occurs either at the north of the jet (the isolated patch have then negative values of PV), or at the south of the jet (the isolated patch has then positive values of PV). Their characteristic radius varies between 80 and 300  $km$ , their westward velocities vary between and  $ms^{-1}$ , and the velocity along the PV front is of the order of the velocity of the jet  $\sim 1 ms^{-1}$ .

One can model those structures as isolated patch with uniform PV values, evolving in a background of uniform PV having an opposite sign. Following the previous analysis, if the PV front has a curvature such that  $C_v \ll R^{-1}$ , or if its shape is closed to a circle (we neglect the variations of  $C_v$ ), then the isolated patch is drifted westward, at velocity  $\beta_c R^2$ , while keeping its shape. Meanwhile, there is a flow of velocity  $\sim R$  at the interface (in non dimensional unit, this also corresponds to the jet velocity). This is consistent with the observations reported.

**Evolution of perturbations on zonal front (see figure 3.7) :** We now consider that the PV front is close to a zonal line, which is the configuration of interest for this chapter, to study the stability of such front. We are interested in the description of the evolution of perturbations having a small amplitude. This case will be investigated more quantitatively in the next

subsection, and the comparison with observations will be further developed. Let us just briefly mentioned that perturbation of the zonal jet having long wavelength are known to propagate westward, “against” the jet, while perturbation of small wavelength are propagating eastward, almost purely advected by the jet [89]. Our previous analysis is consistent with this : we predict a westward drift of the long wavelength (for waves numbers  $k \ll R^{-1}$ ) at a velocity  $\sim R^2\beta_c$ , and an eastward advection of the small wavelength at the velocity of the jet  $\sim R$ . We make these arguments more precise in the next subsection.

### **Analytical approach in the case of small perturbations of a zonal PV front**

We focus on this subsection on the linearized evolution of small perturbations of a zonal PV front corresponding to an eastward jet, in a channel of infinite extension in the zonal direction. We obtain first a dynamical equation for the front  $l(x, t)$ . We then linearize this equation around the stationary state  $l = 0$ , and find that small perturbations are stable. We obtain a dispersion relation in agreement with the previous qualitative analysis.

#### **Dynamical equation for the PV front associated to an eastward jet**

At a given point of abscissa  $x$ , there is positive PV if  $y > l(x, t)$ , and negative PV if  $y < l(x, t)$ . The PV field is then fully prescribed by the knowledge of  $l$  :

$$q = 2H(y - l(x, t)) - 1 ,$$

where  $H$  is the Heaviside function. When  $l$  is known, one can compute the velocity field  $u_x(x, l)$ ,  $u_y(x, l)$  on the front. Our problem is thus reduced to the study of the dynamic of this front. We inject the previous expression of  $q$  in the advection equation  $\partial_t q + \mathbf{u}\nabla q$ . A straightforward computation gives

$$\partial_t l + u_x \partial_x l = u_y \tag{3.33}$$

The front is advected by the zonal component  $u_x = u_x(x, l(x, t))$ , and the meridional component  $u_y = u_y(x, l(x, t))$  acts as a source term for  $l$ . The velocity components depend on  $l$ ; the dynamic for  $l$  is thus autonomous.

3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

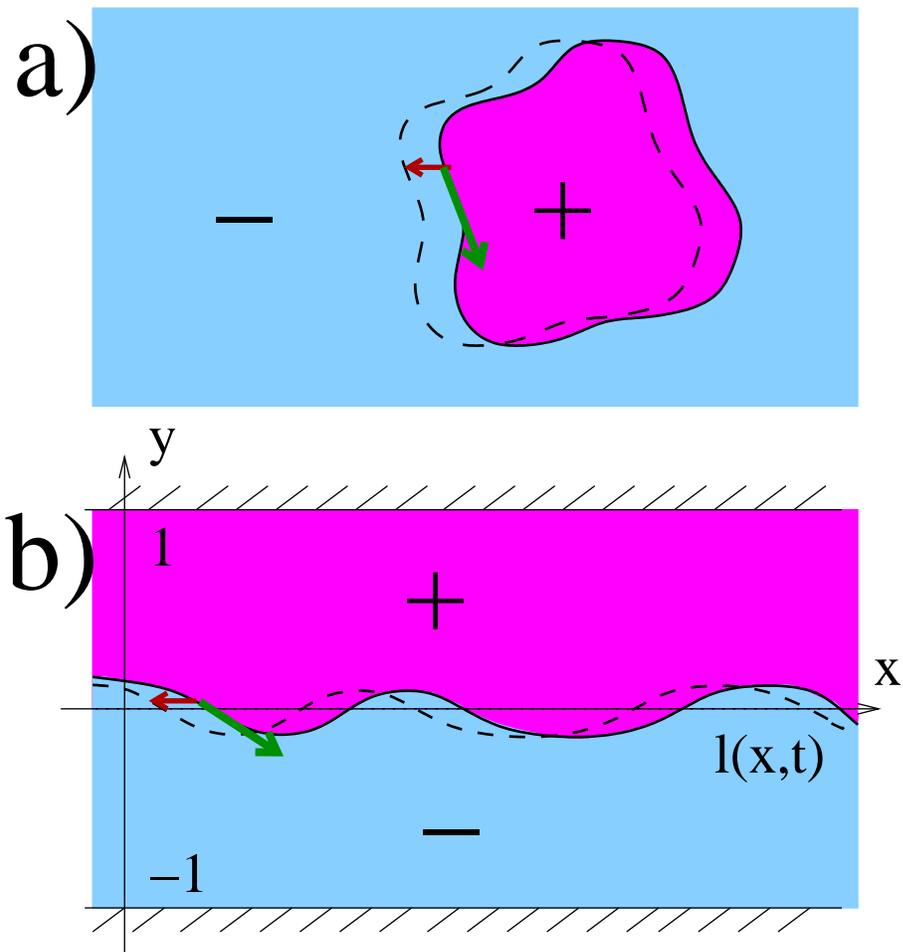


FIG. 3.7: a) isolated patch drifted westward by the beta effect b) perturbation of a zonal PV front corresponding to an eastward jet

The streamfunction of the flow can be decomposed into a mean component  $\bar{\psi}(y)$ , corresponding to the state  $l = 0$ , and a perturbation  $\delta\psi_l(x, y, t)$  :  $\psi = \bar{\psi} + \delta\psi_l$ .

### Perturbation around the stationary state

The mean state  $\bar{\psi}(y)$  has been already computed and described in the first section of this chapter, see equation (3.28). Remember that this solution present an eastward jet that has a characteristic width  $\sim R$  and a characteristic velocity  $\sim R$ , with a weak westward recirculating flow in the domain bulk. By using the equations (3.2) and (3.27), one finds that the perturbation satisfies the equation

$$\left(\Delta - \frac{1}{R^2}\right) \delta\psi_l = 2(H(y-l) - H(y))$$

To solve it, we consider the Green operator, introduced in equation (3.31) :  $\Delta G - G/R^2 = \delta(x-x')\delta(y-y')$ . Because of the translational invariance in the  $x$  direction, we consider that  $G = G(x-x', y, y')$ . The boundary condition also provides  $G(x-x', \pm 1, y') = 0$ . The perturbed part of the streamfunction can then be expressed in term of  $G$  :

$$\delta\psi_l = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' [H(y-l(x')) - H(y)] G(x-x', y, y') \quad (3.34)$$

From this expression, one can deduce the corresponding velocity components :  $\delta u_{l,x} = -\partial_y \delta\psi_l$  and  $\delta u_{l,y} = \partial_x \delta\psi_l$ .

### Linearization of the dynamics

By using the relations  $u_x(x, l) = \bar{u}_x(x, l) + \delta u_{l,x}$  and  $u_y = \bar{u}_y + \delta u_{l,y}$  it is then possible to expand those quantities in series of  $l$ , and to keep only the lowest order terms in the dynamical equation (3.33). We then project this equation on Fourier modes. Due to translational invariance, it is expected, (and shown in annex D) that each of these Fourier modes evolves independently on the others :

$$\forall k, \partial_t l_k + i\omega_k l_k = 0 \quad \text{with} \quad \omega_k = k \left( \bar{u}_x^0 - \frac{\tanh(\sqrt{R^{-2} + k^2})}{\sqrt{R^{-2} + k^2}} \right)$$

### 3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

The term  $\bar{u}_x^0$  is the maximal (purely zonal, located on  $y = 0$ ) velocity of the unperturbed jet, given by equation (3.29). One then obtains an explicit expression of the PV front, as a superposition of propagating waves :

$$l(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} l_k^0 e^{i(kx - \omega_k t)} dk .$$

We see that any initial perturbation of the zonal PV front do not diverge (for the linearized dynamics). Each Fourier component of the initial perturbation is propagated with a phase (or group) velocity constant in time, depending only on the wave number  $k$ , while the amplitude of those Fourier components remains constant in time.

#### Dispersion relation

Let us study the dispersion relation in the limit of small Rossby radius of deformation :  $R \ll 1$ . The zonal velocity on the jet is  $\bar{u}_x^0 = R - \beta_c R^2 + o(R^2)$ , as obtained in equation (3.29). For wave numbers such that  $k \ll R^{-1}$ , the dispersion relation is

$$\omega_k = -kR^2 \left( \beta_c - \frac{1}{2}k^2 R \right) + o(R^3) .$$

The phase velocity  $v_\phi(k) = \omega_k/k$  and the group velocity  $v_g(k) = \partial_k \omega_k$  are presented on figure (3.3). In any case, a small wavelength corresponds to eastward propagation, and a large wavelength corresponds to westward propagation, consistently with the analysis carried at the beginning of this section. Both phase and group velocities are 0 at a critical wave number of order of magnitude  $\sim \sqrt{\beta_c/R}$  : at this value, the advection of the perturbation by the jet is compensated by the westward drift. It defines a characteristic length  $L_R = \sqrt{\beta_c/R}$  known as the Rhines scale (in dimensional unit, this scale is  $L_R^* = \sqrt{\beta_c^*/U^*}$ ).

#### Comparison with observations

Observations by satellite have made possible to characterize the variability of the Gulf-Stream. In particular, analysis of the meanders of the eastward jet have been proposed [72, 71]. Qualitatively, long wavelength ( $\sim 1500 \text{ km}$ ) are propagating westward with a phase velocity  $\sim 5 \text{ km.day}^{-1}$  ( $\approx 6 \text{ cm.s}^{-1}$ ), while short wavelength are propagating eastward. The fastest

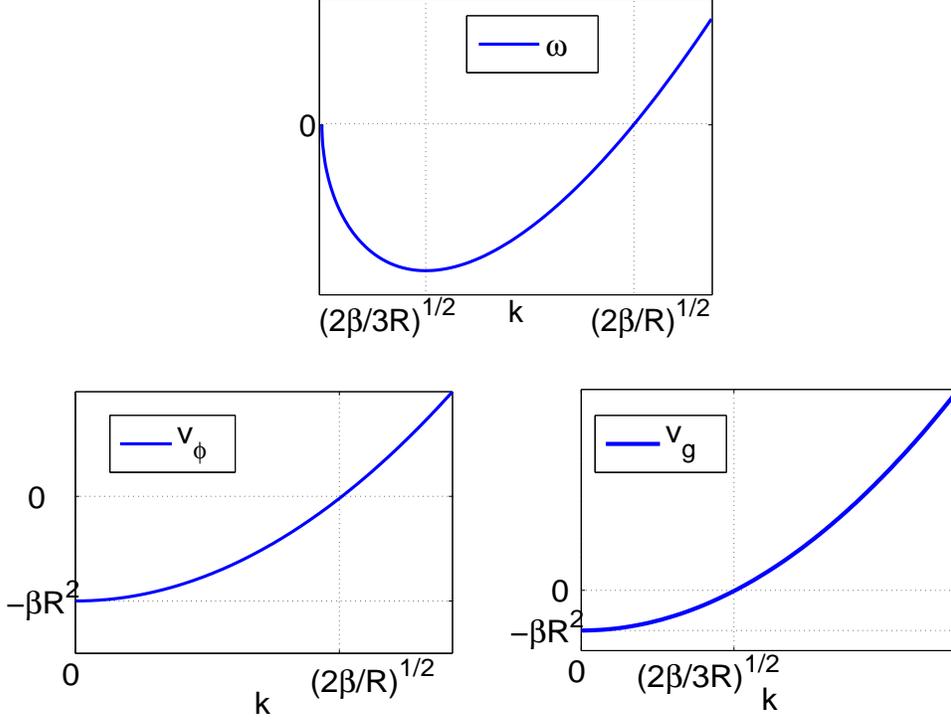


FIG. 3.8:  $\omega(\mathbf{k})$  : dispersion relation ;  $v_\phi = \omega/k$  : phase velocity of the perturbations ;  $v_g = d\omega/d\mathbf{k}$  : group velocity of the perturbations. Negative values of velocities corresponds to eastward propagation.

propagating meanders have a typical wavelength  $\lambda \sim 250\text{km}$  with a phase velocity  $\sim 40\text{ km.day}^{-1}$  ( $\approx 0.5\text{ m.s}^{-1}$ ). The critical, stationary waves have a typical length around  $500\text{ km}$ .

- From the previous paragraph on the dispersion relation, we expect :
- a westward propagation (in dimensional unit) of the order of  $\beta^* R^{*2} \approx 4\text{ cms}^{-1}$  for large wavelength. This is consistent with the reported observations. Notice that the westward drift of the Gulf Stream rings are of the same order of magnitude.
  - an eastward propagation increasing of the order of the jet velocity  $U^{*2} \approx 1\text{ ms}^{-1}$  for the smallest wavelength. This value is greater than the reported observations, but note that our analysis gives an upper bound for the eastward propagation, supposed to be reached for a

wavelength that tends to zero, while the reported “small” wavelength are  $\sim 100km$ .

- We predict a critical value for the stationary wavelength, at the order of the Rhines scale  $L_R \sim 250km$ . This underestimates the value reported from observations, but it gives a correct order of magnitude.

Notice that the rings of the Gulf Stream have a typical diameter of the order of the Rhines scale. It is tempting to interpret them as structures emerging from unstabilities taking place at a scale prescribed by the stationary wavelength. It would however require numerical and theoretical non linear analysis that are not done in this work.

The formation of those ring is often referred as the pinch off process. In real flows, the destabilization of the jet can a priori come from barotropic effects (due to horizontal shear), or baroclinic effects (due to interplay between vertical shear and earth rotation). This last effect has been shown to be an important process in the case of this pinch off process [48]. However, our study is here focused to the 1-1/2 QG model, which does not take into account such effect. Our aim is not to describe the nonlinear dynamics of the perturbations, it is rather to study the linearized dynamics in the limit of small perturbations, around a zonal jet.

### 3.4 Conclusion

Nous avons montré la stabilité linéaire de n'importe quelle perturbation autour d'un jet zonal dirigé vers l'est, caractérisé par une relation  $\bar{q} = -\tanh\left(\frac{C}{R^2}\bar{\psi}\right)$ , avec  $C \rightarrow +\infty$ . Ce travail constitue une partie d'un article en préparation, écrit avec F. Bouchet et E. Simonnet, où d'autres résultats sont présentés :

- deux autres preuves de la stabilité linéaire, pour une fonction de Heaviside entre  $q$  et  $\psi$ . Une de ces preuves est une application d'une méthode récente proposée par Lin [73]. L'autre preuve est fondée sur une étude directe de la transformée de Laplace de la dynamique linéarisée.
- Une étude numérique de la stabilité de ces solutions, par la méthode de Nyquist, en considérant que  $C$  est fini.

Les critères “classiques” (d'Arnold, pour la stabilité non-linéaire, ou de Rayleigh-Fjortoft-Kuo pour la stabilité linéaire ) sont fondés sur la recherche

d'une quantité conservée (la fonctionnelle "énergie-Casimir", ou pseudo-énergie) par la dynamique, définie positive [88]. Nous avons pu conclure à la stabilité dans un cas où cette fonctionnelle énergie-Casimir n'est pas défini positive. Nous avons pour cela considéré un invariant supplémentaire de la dynamique (la contrainte –linéaire – sur la circulation).

Bien que nous ne l'ayons appliquée que dans un cas particulier (la stabilité du jet dirigé vers l'est), nous pensons que cette méthode a un intérêt plus général, car elle permet de conclure à la stabilité dans des situations où la fonctionnelle d'énergie-Casimir est un point selle.

En particulier, nous étudierons au chapitre suivant le problème variationnel de la théorie RSM en utilisant une méthode similaire.

## Perspectives

Plusieurs extensions de ce travail sont envisageables :

**Le cas d'un modèle barocline.** Les modèles à une couche ne peuvent rendre compte que de l'instabilité barotrope, qui est liée au cisaillement horizontal. Les modèles à deux couches permettent de prendre en compte un mécanisme supplémentaire, i.e. l'instabilité barocline, qui est liée à un transfert de l'énergie potentielle disponible vers l'énergie cinétique. Certaines études indiquent que ce second type d'instabilité joue un rôle important dans la dynamique des jets dirigés vers l'est aux moyennes latitudes [48, 49]. La généralisation des solutions que l'on a présentées dans ce chapitre pour le cas barocline serait donc une étape importante. Il s'agit d'un travail en cours.

**Le cas d'un domaine fermé.** Nous n'avons pour l'instant pu conclure ni à la stabilité, ni à l'instabilité de la solution qui présente un jet intense dirigé vers l'est dans un domaine fermé, pour le modèle équivalent barotrope (voir chapitre précédent). Qualitativement, le fait que les perturbations de grande longueur d'onde du front de vorticité potentielle se déplacent vers l'ouest suggère une accumulation d'énergie sur la frontière ouest, créant une asymétrie est-ouest.

Le fait de briser l'invariance par translation en ajoutant des frontières est-ouest augmente considérablement la complexité du problème, car les

### 3. CRITÈRES DE STABILITÉ : APPLICATION AUX JETS DIRIGÉS VERS L'EST

---

modes de Fourier des perturbations n'évoluent plus indépendamment les uns des autres [112].

**L'évolution non linéaire de fronts de vorticité potentielle.** L'application des critères de stabilité précédents a permis l'obtention de résultats pour la stabilité linéaire du jet vers dirigé vers l'est. L'étude numérique de l'évolution non-linéaire des fronts de vorticité potentielle, de la formation d'anneaux, et de l'interaction entre ces fronts et les anneaux est un sujet actif de recherche [130]. Les outils de mécanique statistique pourraient être utilisés dans ce contexte, pour comprendre l'effet de la turbulence dans ces processus.

### 3.A Annex : diagonalization of $\delta^2 H_C$ with the linear constraint

We consider the quadratic functional  $-\delta^2 H_C[\delta q] = \sum_{i \in e_1} \lambda_i \delta q_i^2$ , where the perturbation  $\delta q = \sum_i \delta q_i e_i(x, y)$  is projected on the complete basis  $\{e_i\}_{i \geq 1}$  of eigenmodes of the operator  $\mathcal{H}$  given by (3.16), with eigenvalues  $\lambda_i$  in increasing order.

The aim of this annex is to diagonalize  $\delta^2 H_C$  when the constraint  $\sum_{i \geq 1} \delta q_i \langle e_i \rangle = \delta \Gamma_0$  (which is conserved by the linearized dynamics) is taken into account.

We introduce the subset  $\{e'_i\}_{i \geq 1}$  of zero mean eigenmodes ( $\langle e'_i \rangle = 0$ ), and the subset  $\{e''_i\}_{i \geq 1}$  of non-zero mean eigenmodes ( $\langle e''_i \rangle \neq 0$ ). The constraint can be used to express  $q'_1 = (\delta \Gamma_0 - \sum_{i \geq 2} q''_i \langle e''_i \rangle) / \langle e''_1 \rangle$ , and then

$$-\delta^2 H_C = \sum_{i \in e_1} \lambda'_i \delta q_i'^2 + \sum_{i \geq 2} \sum_{j \geq 2} \left( \lambda''_i \delta_{i,j} + \lambda''_1 \frac{\langle e''_i \rangle \langle e''_j \rangle}{\langle e''_1 \rangle^2} \right) \delta q''_i \delta q''_j + \text{lin. terms}$$

In the subspace  $\{e'_i\}_{i \geq 1}$ ,  $-\delta^2 H_C$  is positive definite if and only if  $\lambda'_1 > 0$ .

In the subspace  $\{e''_i\}_{i \geq 1}$ , it is necessary to diagonalize the purely quadratic part of  $-\delta^2 H_C$ . Let us consider the set of eigenvectors  $\{a_k = \sum_{i \geq 2} a_{k,i} e''_i\}_{k \geq 1}$ , with eigenvalues  $\lambda_k^*$  in increasing order of this quadratic part. By definition of those eigenvectors, we have

$$\forall j \geq 2, \quad \sum_{i \geq 2} \left( \lambda''_i \delta_{i,j} + \lambda''_1 \frac{\langle e''_i \rangle \langle e''_j \rangle}{\langle e''_1 \rangle^2} \right) a_{k,i} = \lambda_k^* a_{k,j} .$$

Finally, multiplying this last equation by  $\langle e''_j \rangle / (\lambda''_i - \lambda_k^*)$ , summing over  $j \geq 2$ , and dividing by  $\sum_{j \geq 2} \langle e''_j \rangle a_{k,j}$ , one finds that the set of eigenvalues  $\{\lambda_k^*\}_{k \geq 1}$  are given by the the zeros of the function :

$$f(x) = \frac{\langle e''_1 \rangle^2}{\lambda''_1} + \sum_{i \geq 2} \frac{\langle e''_i \rangle^2}{\lambda''_i - x} . \quad (3.35)$$

The functional  $-\delta^2 H_C$  is positive definite in the subset of non zero mean eigenmodes if the smallest zero of (3.35) ( $\lambda_1^*$ ) is positive.

To conclude,  $-\delta^2 H_C$  is positive definite if and only if  $\min \{\lambda'_1, \lambda_1^*\} > 0$ .

### 3.B Annex : asymptotic expansion of the stationary solution

Our aim is here to show the existence of a stationary solution presenting an eastward jet in the case  $\bar{q}_C = f_C(\bar{\psi}_C) = -\tanh\left(\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C\right)$  with  $C \rightarrow +\infty$ . We also consider the limit of small radius of deformation  $R \rightarrow 0$ .

Let us suppose that  $\bar{q}_C = \bar{q}_C(y)$  (case of a parallel flow), and that it is positive for  $y \in [0, 1]$  and negative for  $y \in [-1, 0]$ , with  $\bar{q}_C(y) = -\bar{q}_C(-y)$ . The corresponding streamfunction is then expected to be invariant in the  $x$  direction, and antisymmetric, with  $\bar{\psi}_C < 0$  for  $y \in [0, 1]$ . In the following, the case  $y > 0$  is considered. The streamfunction  $\bar{\psi}_C$  satisfies the equation

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{dy^2} - \frac{\bar{\psi}}{R^2} + \beta_c y = f_C(\bar{\psi}_C) \quad \text{with } \bar{\psi}_C(0) = \bar{\psi}_C(1) = 0. \quad (3.36)$$

Different asymptotic areas are distinguished, and then matched together, in order to prove the existence of the solution presenting an eastward jet.

**Area a)** Let us consider first the area where  $|\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C| \gg 1$ . We expect this to happen in the domain bulk. In this area, we have  $-\tanh\left(\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C\right) = -1 + e^{-\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C} + o\left(e^{-\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C}\right)$ . Let us write the streamfunction  $\bar{\psi}_C = \bar{\psi}_a + \bar{\psi}_{ac}$ , where

$$\bar{\psi}_a = A \cosh \frac{y}{R} + B \sinh \frac{y}{R} + R^2 (\beta_c y - 1) \quad (3.37)$$

is the solution of  $d^2\bar{\psi}_a/dy^2 - \bar{\psi}_a/R^2 + \beta_c y = 1$ . By using (3.36), one finds that the correction  $\bar{\psi}_{ac}$  satisfies the equation  $d^2\bar{\psi}_{ac}/dy^2 - \bar{\psi}_{ac}/R^2 = O\left(e^{-\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_a}\right)$ ; its order of magnitude is therefore  $\bar{\psi}_{ac} \sim e^{-C\bar{\psi}_a}$ .

**Area b)** Let us consider another region, where  $-\bar{\psi}_C + \beta_c y \ll f_C(\bar{\psi}_C)$ . We expect this to happen around  $y = 0$ . Let us write  $\bar{\psi}_C = \bar{\psi}_b + \bar{\psi}_{bc}$ , with

$$\frac{d^2\bar{\psi}_b}{d^2y} = -\tanh\left(\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_b\right) = -\frac{R^2}{C} \frac{d \log \left( \cosh \left( \frac{C}{R^2}\bar{\psi}_b \right) \right)}{d\bar{\psi}_b}.$$

This equation has the familiar form of a particle in a potential, where  $y$  and  $\bar{\psi}_b$  would be respectively the temporal and the spatial coordinates. The energy is a conserved quantity :

$$E_b = \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{\psi}_b}{dy} \right)^2 + \frac{R^2}{C} \log \left( \cosh \left( \frac{C}{R^2} \bar{\psi}_b \right) \right) . \quad (3.38)$$

**Matching between areas a) and b)** Let us match the solutions in the different asymptotic areas. Let us for that purpose consider a particular point  $y_c$  such that  $\bar{\psi}(y_c) = -R^2/C^\alpha$  with  $0 < \alpha < 1$ . Obviously,  $|\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C| \gg 1$ , and this point is in area a). Let us suppose that this point is also in area b), and that  $E_b$  is of order one. By using (3.38), one finds

$$y_c = \int_{-R^2/C^\alpha}^0 \frac{dy}{d\bar{\psi}_C} d\bar{\psi}_C = \int_{-R^2/C^\alpha}^0 \frac{d\bar{\psi}_C}{\sqrt{2E_b - 2R^2 \log \left( \cosh \left( C\bar{\psi}_C/R^2 \right) \right) / C}} ,$$

which gives  $y_c = 0 \left( \frac{R^2}{C^\alpha} \frac{1}{(2E_b)^{1/2}} \right)$ . Since  $y_c$  is also in area a), one can inject its previous expression in (3.37) : since  $y_c/R \ll 1$ , this expression can be developed at first order in  $y_c/R$ . It gives then

$$A = -R^2 + 0 \left( \frac{R^2}{C} \right) .$$

A similar reasoning at the north boundary (around  $y = 1$ ) would provide

$$B = R^2 \left( 1 - \beta_c - \cosh \frac{1}{R} \right) / \sinh \frac{1}{R} + O \left( \frac{R^2}{C} \right) .$$

The energy  $E_b$  can then be computed in area a), at lowest order in  $C$  :  $E_b = \frac{1}{2} + O(R^2/C)$ , which is of order one in  $C$ , consistently with the initial statement.

The other initial hypothesis, namely  $-\bar{\psi}_C \beta_c y \ll f_C(\bar{\psi}_C)$ , is also fulfilled in the area  $y \leq y_c$ , for sufficiently high value of  $C/R^2$ .

To conclude, the different asymptotic areas match together. The stationary solution  $\bar{\psi}_C$  is finally given by equation (3.28) with corrections of order  $R^2/C$ .

### 3.C Annex : computation of the (generalized) eigenvalues of $\mathcal{H}_k$

The aim of this annex is to compute  $\lambda_{k,i} = 1 - 1/\mu_{k,i}$  for a given  $k$ , where the  $\mu_{i,k}$  are the solutions of

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{R^2} - k^2 \right) \phi = -\mu f'_C(\bar{\psi}_C) \phi, \quad \text{with} \quad f'_C(\bar{\psi}_C) = \frac{-\frac{C}{R^2}}{\cosh^2\left(\frac{C}{R^2}\bar{\psi}_C\right)}, \quad (3.39)$$

for  $f'_C(\bar{\psi}_C) = -C/(R^2 \cosh(C\bar{\psi}_C/R^2))$  and  $\psi_C$  given by equation (3.28) (with additional corrections of order  $O(R^2/C)$ ).

Let us first suppose that there exists one of the eigenvalues  $\mu$  which does not diverge with  $C$ . Two different area “a” and “b” are distinguished and then matched together to compute the associated eigenmode  $\phi$ .

**Area a)** This area is defined by the region where  $|C\bar{\psi}_C/R^2| \gg 1$ , we have the relation  $f'_C(\bar{\psi}_C) = O\left(\frac{2C}{R^2 e^{C\bar{\psi}_C/R^2}}\right)$  and equation (3.39) becomes (at lowest order in  $C$ )

$$\phi = \phi_a + O\left(\frac{C}{e^{C\bar{\psi}_C}}\right) \quad \text{where} \quad \left( \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{R^2} - k^2 \right) \phi_a = 0$$

where the solution can be explicitly computed :

$$\phi_a = A^\pm e^{y\sqrt{R^{-2}+k^2}} + B^\pm e^{-y\sqrt{R^{-2}+k^2}} \quad \text{for } y \gtrsim 0. \quad (3.40)$$

**area b)** This area is defined by the region where  $|y| < y_c$ , with  $y_c \sim R^2/C$  is given by equation (??), where it was chosen such that  $y_c$  also belongs to area a. An integration of (3.39) between 0 and  $y$  gives at lowest order

$$\phi = \phi_b \quad \text{with} \quad \frac{d\phi_b}{dy} = \frac{\mu\phi_b(0)}{\bar{u}_x^0} \tanh C\bar{\psi}_C + o(y) \quad (3.41)$$

where it has been supposed that  $\phi_b = \phi_b(0) + o(y)$ . As far as  $y_c$  is chosen such that is it also in area a), we have the relation

$$A^\pm + B^\pm = \phi_b(0) + o\left(\frac{1}{C}\right). \quad (3.42)$$

In addition, equation (3.41) provides two conditions :

$$A^\pm - B^\pm = (A^\pm + B^\pm) \frac{\mu}{\bar{u}_x^0 \sqrt{R^{-2} + k^2}} + o\left(\frac{1}{C}\right) \quad (3.43)$$

A similar reasoning at the north and south boundaries would provide the conditions

$$A^\pm e^{\pm\sqrt{R^{-2}+k^2}} + B^\pm e^{\mp\sqrt{R^{-2}+k^2}} = o\left(\frac{1}{C}\right) , \quad (3.44)$$

By using (3.42), (3.43) and (3.44), one finds

$$\mu = \frac{\bar{u}_x^0}{R} \frac{\sqrt{R^{-2} + k^2}}{\tanh \sqrt{R^{-2} + k^2}} + o\left(\frac{1}{C}\right) , \quad (3.45)$$

$$B^+ = -A^+ e^{2\sqrt{R^{-2}+k^2}} \quad A^- = -A^+ e^{2\sqrt{R^{-2}+k^2}} \quad B^- = A^+ , \quad (3.46)$$

with additional small corrections of order  $o(C^{-1})$ . The constant  $A^+$  is determined by the normalization condition  $-\langle \phi^2 f'(\bar{\psi}_C) \rangle = 1$ . The initial hypothesis that  $\mu$  has to be of order one is fulfilled. We see in addition that this eigenvalue is unique (for a given  $k$ ). It is then necessary the smallest one, referred as  $\mu_{k,1}$ . In the limit of a small Rossby radius of deformation ( $R \ll 1$ ), one find its expression by using equations (3.29) and (3.45) :

$$\mu_{k,1} = (1 - \beta_c R) + o\left(\frac{1}{C}\right) .$$

The corresponding eigenmode  $\phi_{k,1}$  is a symmetric decreasing exponential, localized in the jet. Its analytic expression is given by injecting the values of the constants  $A^\pm$  and  $B^\pm$  (3.46) in the expression (3.40).

Since we know that for a given  $k$  i) there exists an infinite number of eigenvalues  $\mu_{k,i}$ , with  $0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_i \rightarrow \infty$  (see [137, 138]), ii) that only the smallest one ( $\mu_{k,1}$ ) does not diverge with  $C$  (following the previous analysis), we conclude that all the other eigenvalues diverge with  $C$  :

$$\forall i \geq 1 , \quad \lim_{C \rightarrow +\infty} \mu_{k,i} = +\infty .$$

Finally, in the limit of large  $C$  and small  $R$ , we have

$$\forall k, \quad \lambda_{k,1} = -\beta_c R + o(R^2) + o\left(\frac{1}{C}\right) \quad \text{and} \quad \forall i \geq 2, \quad \lambda_{k,i} = 1 + o\left(\frac{1}{C}\right) .$$

### 3.D Annex : linearized evolution of the PV front

The streamfunction on the PV front characterized by  $y = l(x, t)$  is written

$$\psi(x, l) = \bar{\psi}(l) + \delta\psi_l(x, l)$$

where  $\bar{\psi}(y)$  is given by (3.28) and  $\delta\psi_l(x, l)$  is the part of the streamfunction due to the perturbation of the PV front, given by (3.34). Let us suppose that  $l \ll 1$ . At first order in  $l$ , we have

$$\delta\psi_l(x, l) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G(x - x', 0, 0) l(x', t) ,$$

It is then possible to compute the velocity components ( $u_x = -\partial_y\psi$  and  $u_y = \partial_x\psi$ ). At lowest order in the dynamical equation (3.33) for the PV front, we obtain :

$$\partial_t l + \bar{u}_x^0 \partial_x l = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \partial_x G(x - x', 0, 0) l(x', t) ,$$

where  $\bar{u}_x^0$  is given by (3.29). Let us introduce the Fourier modes of the PV front and of the Green function

$$l_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(x, t) e^{-ikx} dx \quad G_k(y, y') = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, y') e^{-ikx} dx .$$

Each Fourier mode of the PV front evolves independently to the other :

$$\partial_t l_k + ik (\bar{u}_x^0 + 2G_k^0) l_k = 0 \quad \text{with} \quad G_k^0 = G_k(0, 0) .$$

Let us compute  $G_k^0$ . The first step is to determine the solution of

$$\frac{d^2 G_k}{dy^2} - \Lambda_k G_k = \delta(y - y') \quad \text{with} \quad \Lambda_k = \frac{1}{R^2} + k^2 .$$

One can show that  $G_k(y, 0) = (\text{sign}(y) \sinh \Lambda_k y - \tanh \Lambda_k \cosh \Lambda_k y) / 2\Lambda_k$ , and finally, by injecting the expression of  $\Lambda_k$  in the previous equation, one get :  $G_k^0 = -\tanh \sqrt{R^{-2} + k^2} / \sqrt{R^{-2} + k^2}$ . To conclude, the linearized evolution of the Fourier components of the perturbation is :

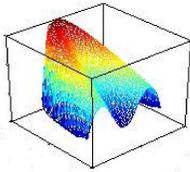
$$\partial_t l_k + ik \left( \bar{u}_x^0 - 2 \frac{\tanh \sqrt{R^{-2} + k^2}}{\sqrt{R^{-2} + k^2}} \right) l_k = 0$$

## Chapitre 4

---

# Inéquivalence d'ensemble et transitions de phases dans les écoulements bidimensionnels

---



Ce chapitre est consacré à l'étude d'équilibres statistiques d'écoulements bidimensionnels, dans le contexte de la **mécanique statistique des systèmes à interaction à longue portée**. L'objectif est double :

- Utiliser des méthodes développées dans ce domaine pour résoudre le problème variationnel de la théorie Robert-Sommeria-Miller (RSM), et calculer ainsi les états d'équilibre correspondants. Nous étudions ici le cas d'une **relation linéaire entre vorticité potentielle et fonction courant**, pour une large classe de modèles incluant les équations quasi-géostrophiques à une ou plusieurs couches et l'équation d'Euler, quels que soient les paramètres et la géométrie du domaine considéré.
- Faire le lien entre les écoulements obtenus et certaines **propriétés thermodynamiques étonnantes**, propres aux systèmes à interactions à longue portée : sauts de température lorsque l'énergie varie, capacités thermiques négatives... Ces propriétés sont associées à l'existence de zones d'**inéquivalence entre différents ensembles statistiques**.

## 4.1 Thermodynamique des systèmes à interaction à longue portée

### Les systèmes à interaction à longue portée

Les systèmes étudiés en thermodynamique usuelle ont des interactions à **courte portée**. Considérons un système isolé, et séparons-le en deux sous-systèmes. Dans la limite thermodynamique (lorsque le nombre  $N$  de degrés de liberté et le volume  $V$  tendent vers l'infini), la somme de l'énergie des sous-systèmes est égale à l'énergie du système total :  $E_1 + E_2 = E$ . Cela est dû au fait que les contributions de l'interface créée par la séparation des deux sous-systèmes sont négligeables par rapport à la contribution de l'énergie volumique, puisque les interactions sont locales. **L'additivité de l'énergie** de ces systèmes permet ensuite de montrer que les **ensembles statistiques microcanoniques** (où l'énergie est fixée), et **canoniques** (où la température est fixée par un "bain" couplé au système étudié) sont **équivalents** : chaque état du système réalisé dans un des ensembles peut l'être dans l'autre. D'autres propriétés, comme la **concavité de l'entropie en fonction de l'énergie**, sont une conséquence directe de l'additivité de l'énergie. C'est le cas par exemple du gaz parfait, ou des systèmes de spin caractérisés par des interactions entre proches voisins.

Il existe cependant toute une classe de systèmes physiques caractérisés par des interactions non locales : **la somme de l'énergie des sous-systèmes pris isolément n'est plus égale à l'énergie des sous-systèmes réunis**. En particulier, tous les systèmes caractérisés par un potentiel d'interaction décroissant en  $1/r^\alpha$ , où  $\alpha$  est plus petit que la dimension spatiale du système, sont des systèmes à interaction à longue portée : dans ce cas, la longue portée vient de la non-intégrabilité du potentiel d'interaction. Citons par exemple i) les **systèmes auto-gravitants 3D** (voir la revue de Padmanabhan [86]), caractérisés par une interaction attractive en  $1/r$  ii) **les écoulements bidimensionnels** (équation d'Euler en 2 dimensions), où le potentiel d'interaction entre particules fluides est logarithmique.

Remarquons que certains systèmes sont caractérisés par plusieurs paramètres internes. C'est le cas des écoulements bidimensionnels, qui admettent une infinité d'invariants (l'énergie et les Casimirs). Il est a priori possible d'observer des propriétés liées à la longue portée pour chacun de ces paramètres supplémentaires.

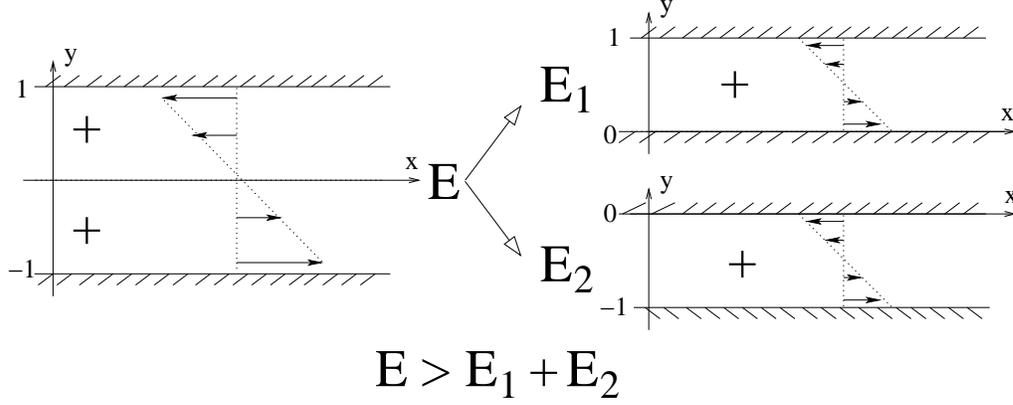


FIG. 4.1: **Non additivité de l'énergie dans les écoulements 2D.** Cas de l'équation d'Euler dans un canal, pour un champ de vorticité potentielle homogène, de valeur 1. L'énergie du système total (à gauche) est  $E = 1$ , l'énergie de chaque sous-système est  $E_1 = E_2 = 1/4$ .

### Exemple : un écoulement dans un canal

Nous illustrons sur la figure 4.1 la non additivité de l'énergie dans un cas simple : l'équation d'Euler dans un canal d'extension zonale infinie, avec des frontières au nord ( $y = 1$ ) et au sud ( $y = -1$ ), pour un champ de vorticité potentielle homogène  $q = 1$  :

$$\Delta\psi = 1 \quad \psi = 0 \text{ sur } y = \pm 1, \quad u_x = -\partial_y\psi, \quad u_y = \partial_x\psi$$

Un calcul rapide donne le champ de vitesse  $u_x = -y$ ,  $u_y = 0$ , puis l'énergie totale (par unité de longueur)  $E = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_x^2 dy = 1$ .

Séparons ce système en deux sous-systèmes. Cela nécessite la création d'une nouvelle frontière. Nous pouvons par exemple choisir d'ajouter une frontière en  $y = 0$ , comme sur la figure 4.1. Nous avons maintenant deux sous-systèmes identiques, d'énergies  $E_1 = E_2 = 1/4$ .

**Il apparaît dès lors clairement que l'énergie du système total est supérieure à la somme des énergies des sous-systèmes :  $E > E_1 + E_2$ .** L'hypothèse d'additivité de l'énergie ne peut donc être utilisée dans le cadre de la mécanique statistique de ce type de systèmes physiques.

Remarquons qu'en présence d'un rayon de déformation de Rossby et d'un champ de vortacité potentielle plus général ( $d^2\psi/dy^2 - \psi/R^2 = f(\psi) - h(x, y)$ ), l'inégalité entre les énergies est toujours vérifiée, mais tend vers une égalité dans la limite  $R \rightarrow 0$ . En effet, l'interaction devient alors à courte portée, puisque la longueur  $R$  d'écrantage des interactions tend vers 0.

## L'inéquivalence d'ensemble

De nombreux résultats de thermodynamique "usuelle" obtenus dans le contexte des systèmes à interaction à courte portée sont mis en défaut quand les paramètres internes du système (énergie, circulation, ...) ne sont plus additifs :

- les ensembles statistiques liés à la conservation ou non de ces paramètres internes ne sont pas nécessairement équivalents : pour une énergie  $\Gamma$  donnée, il est possible que les états d'équilibre microcanonique ne soient pas des états d'équilibre canonique.
- il existe des sauts de la température  $T(\Gamma) = 1/\gamma$ , où  $\gamma = dS/d\Gamma$  est la dérivée de l'entropie du système par rapport à l'énergie interne  $\Gamma$ . Il s'agit de transitions microcanoniques du premier ordre.
- la capacité thermique peut être négative ( $d\Gamma/dT < 0$ ) : une augmentation de l'énergie  $\Gamma$  est alors associée à une diminution de la température  $T$ . Une capacité thermique négative pour une énergie  $\Gamma$  donnée est équivalente à une entropie  $S(\Gamma)$  convexe en ce point, puisque  $d\Gamma/dT = 1/(dT/d\Gamma) = -\gamma^2/(d^2S/d\Gamma^2)$ .

C'est d'abord dans le contexte des **systèmes auto-gravitants** que de telles propriétés ont été mises en évidence, grâce aux travaux de Lynden Bell [74, 55, 56]. Ces phénomènes ont ensuite été prédits ou observés dans des domaines très différents, comme **la turbulence bidimensionnelle** [23, 113, 44], la **physique des plasmas** non écrantés [113, 68], les **systèmes de spins** ou les modèles jouets [12, 8, 32, 121], ainsi que pour des systèmes auto-gravitants dans des situations différentes du premier cas : [26, 80, 143, 115, 54, 119, 31]. On trouvera une description détaillée de ces différents points dans [17].

### Inéquivalence d'ensemble et simplification de problèmes variationnels

Considérons un système caractérisé par une configuration macroscopique  $q$ , et un problème microcanonique qui consiste à maximiser une fonctionnelle  $g(q)$  à contrainte  $c(q)$  fixée

$$S(C) = \max_q \{ \mathcal{S}(q) \mid \mathcal{C}(q) = \Gamma \} . \quad (4.1)$$

On suppose que l'on peut appliquer la règle des multiplicateurs de Lagrange, et on introduit le paramètre de Lagrange  $\gamma$  (appelé aussi variable duale) associé à la contrainte  $C$ . On introduit un problème variationnel relaxé (appelé aussi dual, ou canonique), qui admet les mêmes points critiques (c'est-à-dire les points  $q$  tels que  $\delta g - \gamma \delta c = 0$ ), mais qui n'est pas contraint :

$$F(\gamma) = \min_q \{ -\mathcal{S}(q) + \gamma \mathcal{C}(q) \} \quad (4.2)$$

On peut énoncer des résultats généraux liant les différents problèmes.

- **1)** Toute solution  $q_\gamma$  du problème relaxé (4.2) est aussi une solution du problème contraint (4.1) pour la contrainte  $\Gamma = \mathcal{C}(q_\gamma)$ .
- **2)** Une solution  $q_\Gamma$  du problème contraint (4.1) est un point critique du problème relaxé (4.2), mais ne correspond pas toujours à un maximum : **2-i)**  $q_\Gamma$  est solution du problème relaxé (4.2) si et seulement si  $\mathcal{S}(\Gamma)$  coïncide avec son enveloppe concave au point  $\Gamma$ . Il y a alors **équivalence** entre les deux ensembles. **2-ii)** Sinon, il y a **inéquivalence** entre le problème contraint (4.1) et relaxé (4.2), pour cette valeur de  $\Gamma$ .

On trouvera la démonstration de ces résultats dans un cadre général [43], ainsi qu'une discussion détaillée dans [17].

Soulignons que le point 2i) donne une caractérisation de l'inéquivalence d'ensemble : **pour une valeur donnée de la contrainte  $\Gamma$ , les ensembles microcanonique et canonique sont équivalents si et seulement si la courbe  $\mathcal{S}(\Gamma)$  coïncide avec son enveloppe concave.**

Remarquons en outre que la plupart des études thermodynamiques des systèmes à interaction à longue portée (dont les écoulements 2-D) se réduisent -rigoureusement- à l'étude de problèmes variationnels ayant la même structure que (4.1) et (4.2).

#### 4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

En plus de leur intérêt pour la description théorique des propriétés thermodynamiques des systèmes à interaction à longue portée, les points 1) et 2) donnent une méthode de résolution des problèmes variationnels sous contraintes, qui sera utile par la suite :

- La solution d'un problème variationnel "relaxé" est toujours solution d'un problème variationnel dual contraint, pour une certaine valeur de la contrainte. En pratique, trouver la solution d'un problème moins contraint est plus simple. On cherchera donc les solutions du problème "relaxé", et on calculera la valeurs des contraintes correspondant à ces solutions.
- Si certaines valeurs admissibles des contraintes ne sont pas atteintes par les solutions du problème "relaxé", il y a **inéquivalence** entre ce problème et le problème contraint. Pour ces valeurs des contraintes, on est obligé de résoudre directement le problème plus contraint.

Soulignons qu'en dehors des aspects thermodynamiques, la résolution des problèmes variationnels précédents revêt un intérêt particulier pour **montrer des propriétés de stabilité des systèmes étudiés**. En effet, les études de stabilités se réduisent souvent à la recherche d'une fonctionnelle conservée par la dynamique, admettant un maximum au point définissant l'état dont on souhaite étudier la stabilité [59]. Ainsi, toutes les méthodes de calcul développées dans le contexte de la thermodynamique auront un intérêt dans l'étude de la dynamique ces systèmes. Par exemple, nous présentons dans ce chapitre une méthode de résolution des problèmes variationnels de la théorie statistique RSM, que nous avons appliquée dans le chapitre 3 sur la stabilité linéaire d'un jet dirigé vers l'est.

#### Exemple pour un modèle "jouet"

Illustrons l'inéquivalence d'ensemble dans un cas simple, dont nous verrons qu'il présente certaines similarités avec le problème des écoulements 2-D. Considérons un système dont l'état est défini par deux coordonnées  $q_1, q_2$ . Soit le problème variationnel "microcanonique"

$$S_e(\Gamma) = \max_q \{ \mathcal{S}_e(q) \mid \mathcal{C}(q) = \Gamma \} ,$$

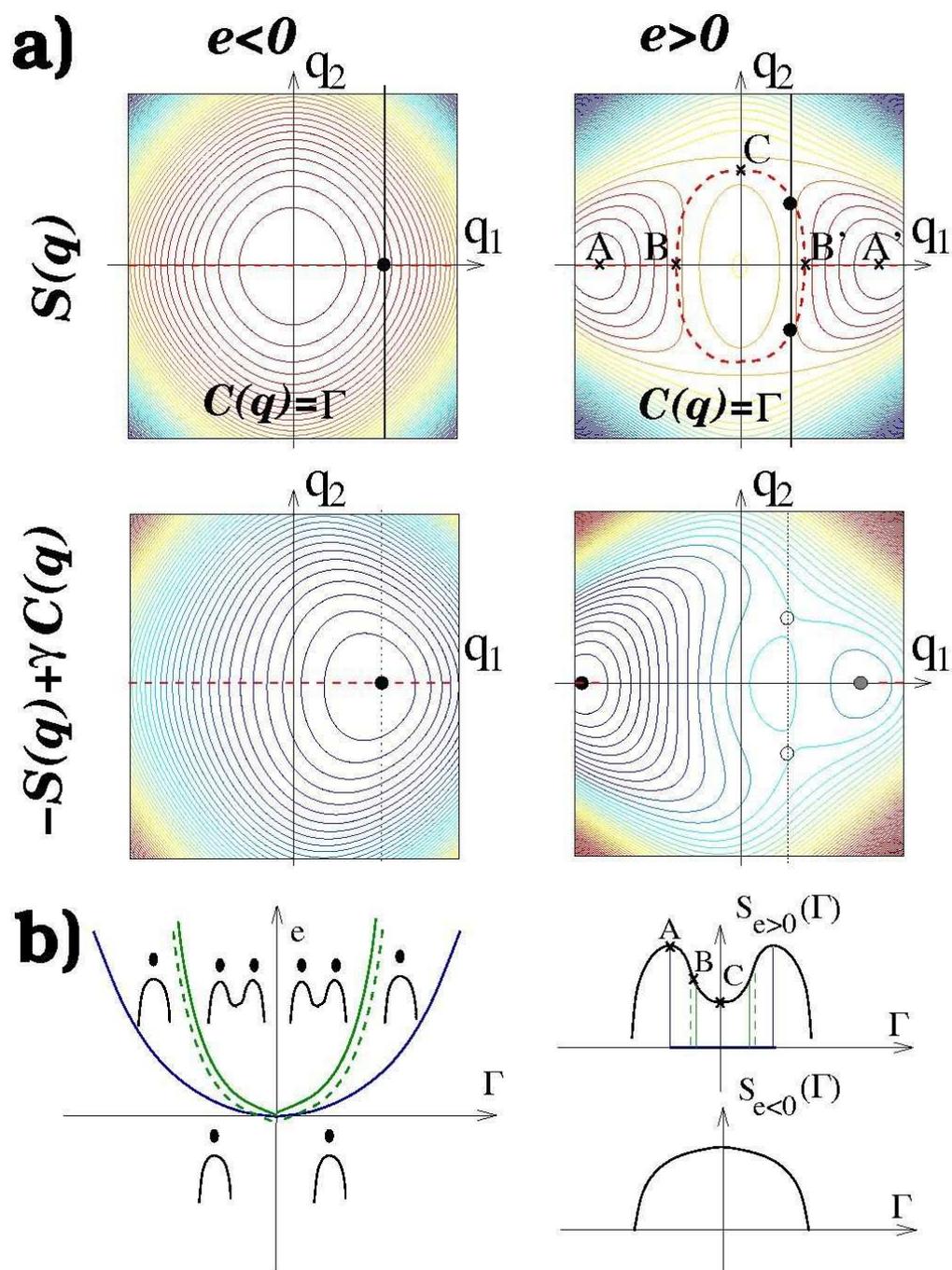


FIG. 4.2: Lignes de niveau des fonctions  $S_\lambda$  et  $\mathcal{F}_\lambda$ . Les couleurs chaudes et froides correspondent respectivement aux valeurs positives et négatives de ces fonctions. Les points noirs représentent les extrema globaux de ces fonctions. Les lignes en pointillé rouges représentent l'ensemble de ces extrema. La contrainte microcanonique est représentée par un trait gras noir.

4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS  
LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

$$\text{où } \mathcal{S}_e(q) = -q_1^4 - q_2^4 + eq_1^2 + 0.4eq_2^2 - 4q_1^2q_2^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(q) = q_1 .$$

L'entropie d'équilibre  $S_e(\Gamma)$  dépend d'un paramètre externe  $e$ , et d'un paramètre interne  $\Gamma$  qui fournit une contrainte sur les valeurs admissibles de  $q = (q_1, q_2)$ .

Les lignes de niveau de la fonction  $\mathcal{S}_e(q)$  sont représentées en haut de la figure 4.1. Pour  $e < 0$  (à gauche), la fonction  $\mathcal{S}_e(q)$  est strictement concave (et admet donc un unique maximum), alors que pour  $e > 0$ , la fonction  $\mathcal{S}_e(q)$  admet deux maxima (localisés sur l'axe  $q_1$ ) et deux points selles (localisés sur l'axe  $q_2$ ).

**Solutions microcanoniques.** Nous voulons déterminer l'entropie d'équilibre  $S_e(\Gamma)$ , pour  $e$  donné et  $\Gamma$  variant entre  $\pm\infty$ . La contrainte  $q_1 = \Gamma$  est représentée par un trait noir gras. Pour une valeur donnée de  $\Gamma$ , l'entropie  $S_e(\Gamma)$  est le maximum de  $\mathcal{S}_e(q)$  le long de cette ligne noire. L'ensemble des maxima globaux d'entropie est représenté par la ligne en tirets rouge, tracée en faisant varier la valeur de la contrainte  $\Gamma$ .

Dans le premier cas ( $e < 0$ ), le maximum d'entropie est toujours unique et localisé sur l'axe  $q_1$ , quelque soit la valeur de  $\Gamma$ . L'entropie  $S_e(\Gamma)$  est donc simplement donnée par la coupe de la fonction  $\mathcal{S}_e(q)$  le long de l'axe  $q_1$  : c'est une fonction concave (voir la représentation schématique sur la figure 4.1-b).

Le second cas ( $e > 0$ ) est un peu plus compliqué. Considérons d'abord que la contrainte  $q_1 = \Gamma$  est localisée à gauche du point  $B$  ou à droite du point  $B'$ . Dans cette région, la fonction  $\mathcal{S}_e(q)$  est concave, et l'entropie  $S_e(\Gamma)$  est simplement donnée par la coupe de  $\mathcal{S}_e(q)$  le long de l'axe  $q_1$ . Pour cette gamme de paramètres, l'entropie  $S_e(\Gamma)$  est concave.

Le point  $B$  correspond à une transition de phase : au-delà de ce point (lorsque l'on varie la valeur de  $\Gamma$ ), le maximum de la fonction  $\mathcal{S}_e(q)$  le long de la contrainte se scinde en deux maxima symétriques par rapport à l'axe  $q_1$ . On peut montrer que cette transition correspond effectivement à une discontinuité de la dérivée seconde de l'entropie  $\partial^2 S_e / \partial \Gamma^2$ , et notamment à un changement de concavité. Ce changement de concavité s'observe sur la figure 4.1 : lors du passage du point  $B$  au point  $C$ , l'entropie décroît le long

des tirets rouges, et les ligne de niveau sont de plus en plus espacées, ce qui indique que  $S_e(\Gamma)$  est convexe dans cette région : la capacité thermique  $-\gamma^2/(\partial^2 S_e/\partial\Gamma^2)a$  est négative

Remarquons que la fonction  $\mathcal{S}_e(q)$  est symétrique par rapport à  $q_1$ , et donc que l'entropie  $S_e(\Gamma)$  est symétrique par rapport à  $\Gamma$ , et que son maximum est atteint aux points  $A$  et  $A'$ . La courbe correspondante est représentée schématiquement sur la figure 4.1-b.

**Solutions canoniques.** Considérons le problème canonique (sans contrainte, ou "relaxé").

$$F_e(\gamma) = \min_q \{ \mathcal{F}_e(q) = -\mathcal{S}_e(q) + \gamma\mathcal{C}(q) = -\mathcal{S}_e(q) + \gamma q_1 \} .$$

La fonction  $\mathcal{F}_e(q)$  est l'opposé de l'entropie à laquelle nous ajoutons la contribution d'un plan  $\gamma q_1$ .

Considérons d'abord le cas  $e < 0$ . Quand  $\gamma = 0$ , le minimum de  $\mathcal{F}_e(q)$  est simplement le maximum de  $\mathcal{S}_e(q)$ . Quand  $\gamma > 0$ , ce minimum est translaté vers la gauche. Quand  $\gamma < 0$ , ce minimum est translaté vers la droite. C'est ce cas qui est représenté figure 4.1-a, où  $\gamma$  est choisi tel que le minimum de  $\mathcal{F}_e$  soit atteint au même point que le maximum de  $\mathcal{S}_e$  pour une valeur donnée de la contrainte  $\Gamma$ . Nous concluons que problèmes microcanoniques et canoniques sont équivalents pour toute valeur de  $\Gamma$ , lorsque  $e$  est négatif. Compte tenu des résultats généraux énoncés dans la sous-section précédente, cette observation n'est pas étonnante : deux ensembles "duals" (ici microcanonique et canoniques) sont équivalents lorsque l'entropie  $S_e(\Gamma)$  est confondue avec son enveloppe concave.

Considérons maintenant le cas  $e > 0$ . Quand  $\gamma = 0$ , le minimum global de  $\mathcal{F}_e(q) = -\mathcal{S}_e(q)$  ne correspond pas à une unique solution : il est atteint aux points  $A$  et  $A'$ . Lorsque  $\gamma > 0$ , ces deux minima sont décalés vers la gauche, et le minimum correspondant au point  $A$  devient un (unique) minimum global. Lorsque  $\gamma < 0$ , c'est le minimum correspondant au point  $A'$  qui devient l'unique solution (et qui est décalé vers la droite).

Finalement, les solutions du problème canonique sont toutes localisées sur l'axe  $q_1$ , à gauche du point  $A$  et à droite du point  $A'$ . Encore une fois, cela est cohérent avec le fait que l'entropie  $S_e(\Gamma)$  n'est pas confondue avec

#### 4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

sont enveloppe concave dans la zone localisée entre ces points : les ensembles microcanoniques et canoniques n'y sont pas équivalents.

**Remarquons que l'existence de la zone d'inéquivalence d'ensemble est liée à l'existence d'une transition canonique du premier ordre** : lorsque l'on varie continûment le paramètre  $\gamma$ , on passe brusquement de la "phase" correspondant un minimum A à la "phase "correspondant" au minimum A' en  $\gamma = 0$ , avec coexistence des deux états en ce point.

Nous avons résumé le diagramme de phase (pour les paramètres  $e$  et  $\Gamma$ ) de ce système dans la partie gauche de la figure 4.1-b. La zone d'inéquivalence d'ensemble est localisée à l'intérieur de la courbe en trait bleu. Nous remarquons une autre propriété intéressante : lors de la variation du paramètre  $e$ , l'apparition d'une zone d'existence d'inéquivalence d'ensemble dans la courbe  $S_e(\Gamma)$  s'accompagne de l'émergence simultanée de deux transitions de phases microcanoniques du second ordre (la courbe verte en traits doubles plein-tirets).

Ainsi, l'inéquivalence d'ensemble est directement associée à un changement d'état du système étudié. **Étudier l'inéquivalence d'ensemble est donc intéressant pour comprendre la thermodynamique des systèmes à interaction à longue portée.**

#### Inéquivalence d'ensemble et transitions de phase

L'exemple précédent fournit un exemple de passage d'une situation d'équivalence d'ensemble (pour  $e < 0$ ) à une situation d'inéquivalence d'ensemble (pour  $e > 0$ ). Cette brisure de l'équivalence d'ensemble est associée à une phénoménologie particulière dans l'ensemble microcanonique : dans l'exemple précédent, on a observé un point d'azéotropie du second ordre, qui est par définition le lieu où apparaissent simultanément deux transitions de phase du second ordre.

Bien que l'inéquivalence d'ensemble soit toujours associée à une transition de phase du premier ordre dans l'ensemble canonique, il existe diverses transitions de phases microcanoniques associées à la brisure de l'inéquivalence d'ensemble.

L'ensemble de ces phénoménologies ont été répertoriées par Bouchet et Barré [17]. Ils ont classifié "à la Landau" les différentes transitions de phases envisageables dans les systèmes à interaction à longue portée, et fait

le lien entre certaines de ces transitions et l'apparition de l'inéquivalence d'ensemble.

Toutes les transitions de phases et toutes les brisures d'équivalence d'ensemble recensées dans la littérature trouvent leur place dans cette classification. En revanche, certaines phénoménologies n'ont encore jamais été observées dans un système physique spécifique. C'est le cas par exemple de l'azéotropie du second ordre que nous avons présenté dans l'exemple précédent. Nous montrerons que les diagrammes de phase des états d'équilibres d'écoulements 2D présentent certaines de ces transitions de phase qui ont bien été prédites dans la classification, mais qui n'ont encore jamais été observées dans un système physique.

## Interprétation physique

Dans le cadre de la mécanique statistique des systèmes à **courte portée**, il est souvent naturel d'étudier les systèmes dans l'ensemble canonique : d'un point de vue théorique, les calculs sont souvent plus simples que dans l'ensemble microcanonique, et d'un point de vue expérimental, le système étudié est souvent couplé à un "bain" extérieur, fixant la température.

La signification d'un tel bain est souvent ambiguë pour un système à interactions à longue portée. Par exemple, les écoulements 2-D conservent la distribution de vorticité dans tout l'écoulement (les Casimirs). Il est difficile d'imaginer un "bain" pour cette distribution de vorticité.

L'introduction de problèmes duaux moins contraints reste néanmoins très utile pour calculer les  tats d'équilibres du problème microcanonique initial : il est toujours plus facile de résoudre un problème variationnel moins contraint.

De plus, l'étude de ces problèmes variationnels permet de montrer certaines propriétés physiques d'un système donné, comme sa stabilité, ou l'existence de transitions de phases qui changent de manière radicale l'état du système.

#### 4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

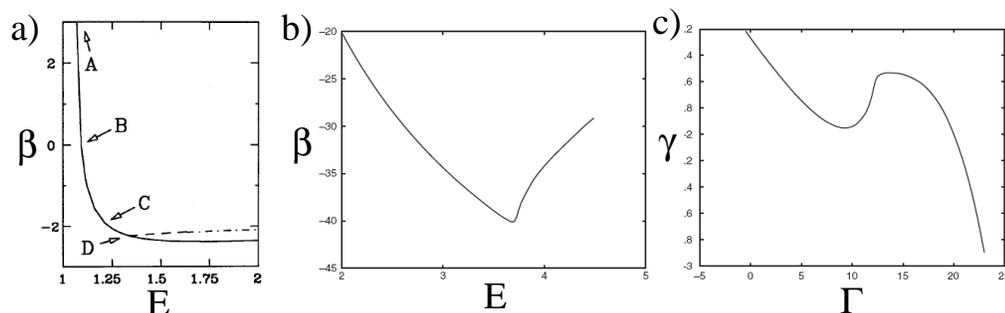


FIG. 4.3: Observations numériques antérieures de l'inéquivalence d'ensemble a) dans le modèle de points vortex [113], où  $E$  est l'énergie, et  $\beta = \partial S/\partial E$ , avec  $S$  l'entropie d'équilibre ; b,c) dans le modèle des équations QG [44].  $\Gamma$  est la circulation, et  $\gamma = \partial S/\partial \Gamma$ . Dans les figures a) et b), la température  $1/\beta$  est une fonction décroissante de l'énergie au-delà d'une valeur critique : la capacité thermique est négative dans cette zone.

## 4.2 Résultats antérieurs et objectifs

### Observation de l'inéquivalence d'ensemble dans les écoulements 2D

La possible existence de l'inéquivalence d'ensemble dans les écoulements bidimensionnels a été prédite mathématiquement [23], sans exemple explicite, puis observée numériquement (voir figure 4.2) :

- dans le modèle des points vortex [113]
- dans les équations quasi-géostrophiques [44] appliquées à la description de l'atmosphère jovienne, pour une relation  $q - \psi$  faiblement non linéaire.

Notre contribution sera de montrer analytiquement l'existence générique d'une zone d'inéquivalence d'ensemble pour une large gamme de paramètres et d'écoulements bidimensionnels. Nous expliquerons que cette zone d'inéquivalence est associée à des transitions de phase dans la structure de l'écoulement.

### Transitions de phases dans Euler 2D

L'étude des diagrammes de phase des écoulements prédits par la théorie statistique RSM a fait l'objet de plusieurs contributions dans les années 90,

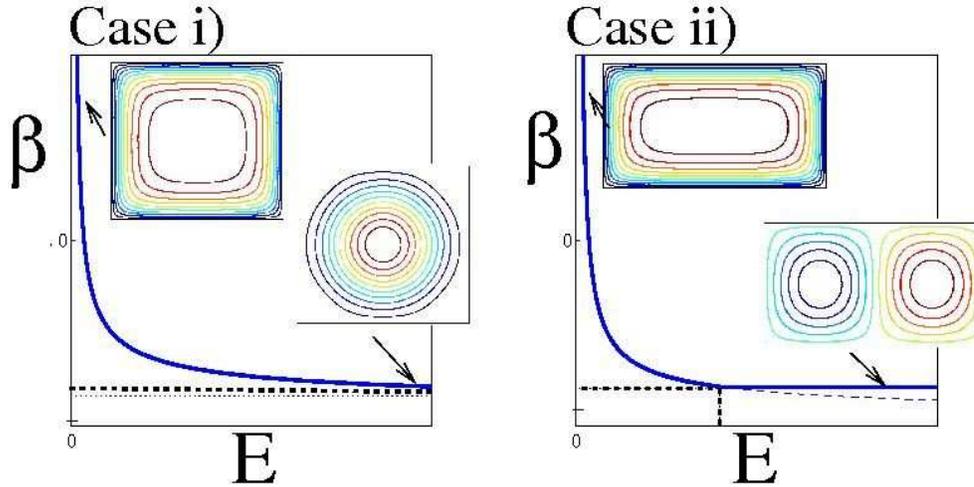


FIG. 4.4: Fonction courant des états d'équilibres RSM, dans un domaine rectangulaire, pour une circulation donnée (rouge : positif; bleu : négatif). Cas i) rapport d'aspect  $\tau = 1.1$ . Cas ii) rapport d'aspect  $\tau = 1.8$ . On observe dans ce cas une discontinuité de  $\partial\beta/\partial E$ , où  $\beta = \partial S/\partial E$  est la température inverse. Cela correspond à une transition de phase du second ordre (voir [27]).

indépendamment du contexte de la mécanique statistique des systèmes à interaction à longue portée [120, 65, 27].

Il s'agissait de comprendre et de classifier les différents types d'organisation des écoulements prédits par cette théorie. En étudiant analytiquement les états d'équilibres caractérisés par une relation  $q - \psi$  linéaire, Chavanis et Sommeria ont montré l'existence de transitions de phases particulières à haute énergie (voir figure 4.4).

Ces auteurs ont obtenu un critère sur la géométrie du domaine pour déterminer le type de diagrammes des équilibres statistiques. Pour une circulation fixée, le critère sélectionne une de ces deux possibilités :

- i) L'écoulement est un monopole quelle que soit son énergie. C'est ce qui est observé dans un domaine carré.
- ii) L'écoulement est un monopole pour des énergies inférieures à une valeur critique. Au-delà de cette valeur, il y a une transition du monopole vers un dipôle. À haute énergie, le dipôle domine l'écoulement. C'est ce qui est observé dans un domaine rectangulaire de rapport d'aspect supérieur à 1.12.

## Objectifs

Nous allons calculer explicitement les états d'équilibre du problème variationnel de la théorie RSM, dans le cas où ces états sont définis par une relation linéaire entre vorticité et fonction courant.

Cela permettra de retrouver, et généraliser les résultats de Chavanis et Sommeria, puis de clarifier la nature des transitions de phases qu'ils ont décrites auparavant. Nous montrerons que ces transitions sont la signature d'une zone d'inéquivalence d'ensemble, et décrirons les propriétés thermodynamiques associées à cette inéquivalence d'ensemble.

Nous montrerons en particulier que certaines des propriétés décrites étaient prédites par la classification de Bouchet et Barré [17], mais n'avaient encore jamais été observées dans un système physique spécifique.

La méthode utilisée a l'avantage d'être applicable à une large classe de modèles d'écoulements bidimensionnels, incluant les équations QG en couches et l'équation d'Euler, voire même à d'autres systèmes physiques. Nous appliquerons ces résultats à l'étude des écoulements de Fofonoff.

## 4.3 Thermodynamics of two-dimensional and Fofonoff flows

La suite de ce chapitre est rédigée en anglais. Il s'agit d'un article en préparation pour *Journal of Statistical Physics*, écrit en collaboration avec F. Bouchet. L'introduction et la première partie de l'article reprennent la plupart des résultats et motivations que nous venons de présenter. Une version courte de cet article est soumise à *Physical Review Letter*.

# Thermodynamics of two-dimensional and Fofonoff Flows

Antoine Venaille and Freddy Bouchet

2008

LEGI, UJF, INPG, CNRS; BP 53, 38041 Grenoble, France and INLN, CNRS, UNSA, 1361 route des lucioles, 06 560 Valbonne - Sophia Antipolis, France

05.20.-y, 05.70.Fh, 47.32.-y

## Introduction

In two dimensional and geophysical turbulence, the flow dynamics is not governed by local interactions. More precisely, the interaction potential between fluid particles is not integrable. This property is found in many different fields of physics : self gravitating systems [24, 62], unscreened plasmas or models describing interactions between waves and particles [75]. It can lead to strange or unexpected behavior [36]. Recently, a new light was shed on the equilibrium statistical mechanics of such systems with long-range interactions : there has been a mathematical characterization of ensemble inequivalence [43], a study of several simple models [12, 33], a full classification of phase transitions and ensemble inequivalence [17] and appearance of a very useful technique, namely the large deviation theory [11].

One of the striking features of the thermodynamics of systems with long range interactions is the generic existence of negative specific heat : temperature decreases when energy increases. This was first predicted in the context of astrophysics [74]. This strange phenomenon is possible as a consequence of the lack of additivity of the energy and is related to the

inequivalence between the microcanonical and canonical ensembles of statistical physics. Ensemble inequivalence means that a solution exists in a statistical ensemble while it does not in the others. For two dimensional flows, existence of such inequivalence has been mathematically proven for point vortices [23], numerically observed in Quasi-Geostrophic (QG) models [44], and in a Monte Carlo study of point vortices in a disk [113]. In this paper, we predict such an ensemble inequivalence for a large class of models of two-dimensional and geophysical flows, whatever the domain geometry, in the case of a linear relation between (potential) vorticity and streamfunction.

We use exact theoretical computations, which allow for a clear explanation of the occurrence of ensemble inequivalence, and relate it to previously observed phase transitions, computed in the Euler equation context by Chavanis and Sommeria. We will show that the thermodynamical properties of these transitions are intimately related to the existence of an ensemble inequivalence region in phase diagram.

When varying an external parameter, there are different routes leading to ensemble inequivalence. These routes correspond to different transitions in the microcanonical ensemble. All possible routes to ensemble inequivalence and all possible phenomenologies in the different ensembles have been classified and linked together, for systems with long range interactions [17]. Some of the transitions predicted have never been observed, neither in models, nor in real physical systems. In this paper, we report the finding of two such unobserved phase transitions, linked with the existence of an ensemble inequivalence area : bicritical points (a bifurcation from a first order towards two second order phase transitions) and second order azeotropy (the simultaneous appearance of two second order phase transitions). These phase transitions are governed by the domain geometry. We explain how to compute the transition points for any domain geometry.

Besides the detailed computations and discussions of the results presented in [131], this paper provides an application of these results to an academic ocean and atmosphere model, and a discussion on possible experiments. The study of geophysical flows is a promising field of application for statistical mechanics of systems with long range interactions. For instance, the structure of Jupiter's troposphere has been successfully explained by using the Robert-Sommeria-Miller (RSM) equilibrium theory : the Great Red Spot has been precisely and quantitatively modelled [19] and its position in the South hemisphere explained [123]. One of the major scopes

of this field is to go towards Earth's ocean applications. All textbooks in oceanography present the Fofonoff flows which have played an important historical role [89, 51]. We propose a theoretical description of such flows in the context of statistical theory which, for the first time, relates their properties to phase transitions, negative specific heat and ensemble inequivalence.

The paper is organized as follows : i) We present a class of models for two dimensional and geophysical flows, as well as the statistical mechanics of such flows. ii) Then we briefly review classical results on ensemble inequivalence and the study of variational problems in the context of long range interacting systems. iii) We compute and describe phase diagrams associated to any flow characterized by a linear relation between potential vorticity and stream function  $q - \psi$ . We observe the generic existence of ensemble inequivalence, and describe phase transitions in the flow structure associated to it. We then show the existence of new phase transitions predicted in the classification [17] (bicritical points and second order azeotropy). iv) We apply these results to the description of Fofonoff flows, to the proof of nonlinear stability of a large class of RSM equilibria (in a situation where Arnold's stability criteria do not hold) and discuss possible experimental observation of ensemble inequivalence.

## Equilibrium states of two dimensional flows

In this section we review classical models of two-dimensional flows, and the equilibrium statistical mechanics of such systems.

### Models : Euler and quasi-geostrophic equations

We consider a class of models, in which a scalar quantity, the potential vorticity (PV)  $q(x, y)$ , is purely advected by a non divergent velocity field :

$$\begin{aligned} \partial_t q + \mathbf{u} \cdot \nabla q &= 0 , \\ \mathbf{u} &= \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} , \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) , \\ q &= \Delta \psi - \frac{\psi}{R^2} + h. \end{aligned} \tag{4.3}$$

#### 4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

We have introduced the streamfunction  $\psi$ . The parameter  $R$  is called either the Rossby radius of deformation, in geophysical context [89], or the Debye length scale in the context of plasma physics. This is a characteristic length scale above which the interactions are screened. The field  $h(x, y)$  is supposed to be known. In geophysical context, it is often taken to be  $h = by$ , to account for the variation of the Coriolis force with latitude. It can also be interpreted as a topography above which the flow takes place. The case  $h = 0$ ,  $R = +\infty$  corresponds to the Euler equation. The topography is chosen such that  $\langle h \rangle = 0$ , where  $\langle \cdot \rangle$  stands for an average over the whole domain. In this study, the case of an arbitrary closed domain  $\mathcal{D}$  is considered, but the generalization to other kinds of domains (channel, doubly periodic...) is straightforward. The boundary condition is given by an impermeability constraint  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ , where  $\mathbf{n}$  is a vector normal to  $\partial\mathcal{D}$ . This condition is equivalent to saying that the streamfunction is constant on the domain boundary :  $\psi = \psi_{fr}$  on  $\partial\mathcal{D}$ . The velocity field does not depend on the constant  $\psi_{fr}$ . One can always choose

$$\psi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\mathcal{D} .$$

Other ways to express the impermeability constraint will be discussed later.

**Conserved quantities.** The transport equation conserves an infinite number of quantities, which are the energy

$$\mathcal{E}[q] = \frac{1}{2} \left\langle (\nabla\psi)^2 + \frac{\psi^2}{R^2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle (q - h) \psi \rangle , \quad (4.4)$$

and the Casimirs

$$\mathcal{C}_f[q] = \langle g(q) \rangle ,$$

where  $g$  is any continuous function on  $\mathcal{D}$ . A particular Casimir is the circulation

$$\mathcal{C}[q] = \langle q \rangle . \quad (4.5)$$

If the domain has particular symmetries, for instance a channel (translational invariance), or a circle (rotational invariance), then additional conserved quantities have to be taken into account.

### Statistical mechanics of 2D flows

The class of models we study (Euler or QG equations) are known to develop complex vorticity filaments at finer and finer scales. This makes almost impossible any attempt to have a deterministic approach of these systems. Rather than describing the fine-grained structures, equilibrium statistical theories of two dimensional turbulent flows, assuming ergodicity, predict final organization of the flow on a coarse grained level [99, 100, 81]. To keep track of the conservation laws of the transport equation, it is necessary to introduce the density of probability  $\rho(x, y, \sigma)$  of finding the PV level  $\sigma$  in a small neighborhood of the position  $(x, y)$ , where  $N[\rho] = \int_{\mathcal{D}} \rho(x, y, \sigma) d\sigma = 1$ . The vorticity distribution  $D[\rho](\sigma) = \int_{\mathcal{D}} \rho(x, y, \sigma) dx dy$  is conserved by the flow. The knowledge of this distribution is equivalent to the knowledge of the infinite number of Casimir constraints. The equilibrium statistical theory provides a variational problem. One has to maximize a mixing entropy  $\mathcal{S}[\rho] = - \int_{\mathcal{D}} \rho \ln \rho dx dy d\sigma$ , taking into account the constraints on the energy  $E$ , and on the vorticity distribution  $d(\sigma)$  :

$$S_{RSM}(E, d) = \max_{\{\rho | N[\rho]=1\}} \{\mathcal{S}[\rho] \mid \mathcal{E}[\rho] = E \ \& \ D[\rho] = d\} \quad (4.6)$$

Because this variational problem takes into account all the invariants of the dynamics, we call it *full microcanonical ensemble* in this paper : an isolated 2D turbulent flow would evolve towards the state predicted by this theory, which gives the *macroscopic* field  $\rho(x, y, \sigma)$ , and then the *macroscopic*, or *coarse-grained* vorticity field  $q(x, y) = \int \sigma \rho(x, y, \sigma) d\sigma$ . An overwhelming number of *microscopic* states (given by the *fine-grained* PV field) corresponds to the macroscopic state  $q(x, y)$ .

However, computing the solutions of the variational problem (4.6) would require the knowledge of the infinity of Casimir constraints. This is a huge practical limitation to apply this theory. Recently, many efforts have been devoted to find alternative approaches which could lead to practical and mathematical simplifications of this problem.

### Simplification of constrained variational problems

The study of constrained variational problems is ubiquitous in the context of thermodynamics of systems with long range interactions. There is a general method to solve such problems, based on the fact that dealing with un-

constrained variational problems is much easier than dealing with constrained ones.

Let us for instance consider a variational problem with one constraint :  $G(C) = \max_q \{g(q) \mid c(q) = C\}$ . We suppose that the Lagrange multiplier rules apply, and we introduce the Lagrange parameter  $\gamma$  (also called dual variable) associated to the constraint  $C$ . We introduce a relaxed (or dual) variational problem, having the same critical points (i.e. the points  $q$  such that  $\delta g - \gamma \delta c = 0$ ), but being less constrained :  $F(\gamma) = \min_q \{-g(q) + \gamma c(q)\}$ . The solutions of both variational problems are related to each other. In particular :

- Each solution  $q_\gamma$  of the unconstrained variational problem is also a solution of the constrained variational problem, for a constraint  $C = c(q_\gamma)$ .
- Each solution  $q_C$  of the constrained variational problem is a solution of the unconstrained variational problem if and only if  $G(C)$  coincide with its concave envelop at point  $C$ . If this is the case, there is ensemble equivalence for this parameter  $C$ . If not, there is ensemble inequivalence for this parameter  $C$ .

One can find a demonstration of these results in [43], and a more detailed discussion in [17].

### Application to the variational problem of the RSM theory

Following this idea presented in the previous paragraph, it has been proposed to treat the Casimir invariants canonically to compute RSM equilibria [16], by studying the following variational problem :

$$S(E, \Gamma) = \max_q \{\mathcal{S}[q] = \langle s(q) \rangle \mid \mathcal{E}[q] = E \ \& \ \mathcal{C}[q] = \Gamma\} . \quad (4.7)$$

We have introduced a function  $s(q)$ , supposedly concave, and the Casimir functional  $\mathcal{S}[q] = \int_{\mathcal{D}} s(q) d\mathbf{r}$ . Any solution to (4.7) is a RSM equilibrium (4.6), but the converse may be wrong. A proof and a wider explanation of this statement is developed in [16]. Because two constraints are kept, namely on energy and on circulation, we call this problem *microcanonical* by analogy with usual problems in thermodynamics, involving a constraint on the energy, and on the number of particle.

All the solutions to the microcanonical variational problem (4.6) will be finally interpreted as RSM equilibrium states. It is important to stress

that only the *full microcanonical ensemble* has a physical meaning, in the sense that it is obtained by maximization of a mixing entropy, taking into account *all* the constraints of the dynamics.

We will see that the introduction of this microcanonical ensemble leads to considerable simplification of the computation of the equilibrium states. In particular, we will be able to solve it directly for a large class of flows : we will compute all the statistical equilibria associated to a linear  $q-\psi$  relation. In addition, the computations in this ensemble make possible a proof of the non linear stability of its solutions, even for a range of parameters for which Arnold's criteria for stability are not satisfied.

Notice that it exists an alternative interpretation of the microcanonical variational problem (4.7), in terms of a prior distribution or generalized entropy [25, 44]. The prior distribution  $\Pi(\sigma)$  is a Lagrange parameter associated to the constraint on the Casimirs, and the function  $s$  appearing in the generalized entropy  $\mathcal{S} = \int s(q)dx dy$  is the Legendre-Fenchel transform of  $\Pi(\sigma)$ .

**Critical points.** We now explain how the  $q-\psi$  relation predicted by the RSM statistical theory is related to the function  $s$  introduced in the variational problem (4.7). For this purpose, let us compute the critical points of this variational problem. We introduce two Lagrange multipliers  $\beta$  and  $\gamma$  associated respectively with the energy and the circulation conservation. They are interpreted respectively as an inverse temperature and as a fugacity, by analogy with usual thermodynamics. These critical points satisfy  $\delta\mathcal{S} - \beta\delta\mathcal{E} - \gamma\delta\Gamma = 0$ , which yields  $q = s'^{-1}(-\beta\psi + \gamma)$ , where  $s'^{-1}$  is the inverse of the derivative of  $s$ . We conclude that the critical points of (4.7) are stationary states characterized by the  $q-\psi$  relation

$$f(\psi) = s'^{-1}(-\beta\psi + \gamma) . \quad (4.8)$$

In the following, we shall study the case of a quadratic function (the opposite of the enstrophy)

$$\mathcal{S}[q] = -\frac{1}{2}\langle q^2 \rangle , \quad (4.9)$$

where we have chosen  $s(q) = -\frac{1}{2}q^2$ , which corresponds to a linear  $q-\psi$  relation

$$f(\psi) = \beta\psi - \gamma .$$

The values of  $\beta$  and  $\gamma$  are prescribed by the constraints on  $E$  and  $\Gamma$ . Since all the solutions to the variational problem (4.7) are RSM statistical equilibria, we will compute all the statistical equilibria associated to a linear  $q - \psi$  relation if we are able to solve the problem (4.7) for any admissible value of  $E$  and  $\Gamma$ .

**Linear  $q - \psi$  relations.** Note that a linear relation is always expected in the limit of low energies. In the formalism of [44], the linear  $q - \psi$  relation is obtained for a Gaussian prior distribution (as noted before by [82, 27]).

In the context of the Euler equation ( $R = +\infty, h = 0$ ), Chavanis and Sommeria have computed and classified RSM equilibrium states corresponding to a linear  $q - \psi$  relation, in an arbitrary closed domain [27]. For a given circulation  $\Gamma$ , and a varying energy  $E$ , a criterion depending on the domain geometry was found : i) if the criterion is not fulfilled, the flow is a monopole whatever its energy. This is for instance the case of a square ; ii) if the criterion is fulfilled, there is a transition from a monopole to a dipole state while increasing the energy. This is the case for a rectangular domain of aspect ratio larger than 1.12. In case i), for a given energy and a varying circulation, another transition is observed. At  $\Gamma = 0$ , there are two equilibrium states, having the structure of a monopole, with opposite signs. When the circulation is slightly changed, one of the monopoles becomes metastable while the other remains the only equilibrium state.

In [27], the (analytic) computations were carried out in the limit of strong mixing, which lead to a linear  $q - \psi$  relation. Stationary solutions were computed, as well as their entropy (also expanded in the limit of strong mixing), in order to select the equilibrium states. This method lead to complicated discussions to find the entropy maxima.

In the present study, we treat canonically the constraints on the Casimirs, which allows for a clear explanation of the link between the variational problem (4.7) studied here, and the variational problem of the RSM theory. Our contribution here generalizes the results of [27] to a larger class of two-dimensional flows, clarifies the nature of the observed phase transitions, and links their peculiar properties with the occurrence of inequivalence between different statistical ensembles.

## Computation of equilibrium states, phase transitions and ensemble inequivalence

We present in this section the computation of the variational problems (4.7), that will provide any RSM equilibrium state associated to a linear  $q - \psi$  relation, classified according to its energy and circulation.

To solve the microcanonical problem (4.7), we will apply the same strategy that has been used previously to simplify the variational problem of the RSM theory (see paragraph "Simplification of constrained variational problems") : instead of considering directly the problem with two constraints  $E$  and  $\Gamma$ , we will introduce and solve relaxed variational problems, and then check if all the possible values of the constraints are reached by solutions to the relaxed variational problems.

### Decomposition on Laplacian eigenmodes

In order to compute the solutions to the variational problem (4.7), it will be convenient to project the different fields ( $q$ ,  $h$  and  $\psi$ ) on Laplacian eigenmodes, since the  $q - \psi$  relation is linear. We introduce the complete, orthonormal basis  $\{e_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}}$  of Laplacian eigenmodes on the domain  $\mathcal{D}$

$$\left( \Delta - \frac{1}{R^2} \right) e_i = -\lambda_i e_i .$$

The  $\lambda_i$  are all positive, in increasing order. They correspond to the Laplacian eigenvalues shifted by  $-1/R^2$ .

Potential vorticity and topography can be decomposed on this basis, as well as the streamfunction, computed by inverting the relation  $q - h = \Delta\psi - \psi/R^2$  :

$$q = \sum_i q_i e_i \quad h = \sum_i h_i e_i \quad \psi = \sum_i \frac{h_i - q_i}{\lambda_i} e_i .$$

The functionals  $\mathcal{S}$  (4.9),  $\mathcal{E}$  (4.4) and  $\mathcal{C}$  (4.5) involved in the microcanonical variational problems (4.7) can then be expressed in terms of the projections  $\{q_i\}$  :

$$\text{entropy} \quad \mathcal{S}[q] = -\frac{1}{2} \sum_i q_i^2, \quad (4.10)$$

$$\text{energy} \quad \mathcal{E}[q] = \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{\lambda_i} (q_i - h_i)^2, \quad (4.11)$$

$$\text{circulation} \quad \mathcal{C}[q] = \sum_i q_i \langle e_i \rangle, \quad (4.12)$$

where  $\langle e_i \rangle = \int_{\mathcal{D}} e_i(x, y) dx dy$ .

Following the notations of [27], we introduce two independent subspaces : the subspaces of the Laplacian eigenmodes having zero mean value ( $\langle e'_i(x, y) \rangle = 0, i \in \mathbb{N}^*$ ) and the subspace of the Laplacian eigenmodes having non-zero mean value ( $\langle e''_i(x, y) \rangle \neq 0, i \in \mathbb{N}^*$ ). The notation “prime” and “double prime” will be used to distinguish (when necessary) one subspace from the other : for instance, the Laplacian eigenvalues will be written  $\lambda'_i$  or  $\lambda''_i$ .

Notice first that it is a classical result that the smallest Laplacian eigenvalue is not degenerate, and that the associated Laplacian eigenmode can always be chosen to be positive everywhere. It is thus an eigenmode of non-zero mean value :  $e_1 = e''_1$ , and  $\lambda_1 = \lambda''_1$ . Then, we have necessarily  $\lambda'' < \lambda'_1$ .

Notice also that we expect the subspace of zero mean Laplacian eigenmode  $\{e'_i\}$  to be generically empty when the domain geometry  $\mathcal{D}$  admits no particular symmetry : a small perturbation of the domain changes the mean value of the eigenmode. If, by contrast, one imposes a symmetry axis in the domain geometry, then it exists generically eigenmodes having a zero mean (these eigenmodes are antisymmetric with respect to the symmetry axis). This is for instance the case for a rectangular domain, for which the eigenmodes and eigenvalues are given in Annexe C.

### Solution for the grand canonical problem

Since problems without constraints are easier to solve, we first look at the solutions in the grand canonical ensemble, where both constraints on

the energy and circulation are relaxed, by considering the thermodynamical potential :

$$J(\beta, \gamma) = \min_q \{ \mathcal{J}[q] = -\mathcal{S}[q] + \beta \mathcal{E}[q] + \gamma \mathcal{C}[q] \} . \quad (4.13)$$

Using expressions (4.10), (4.11) and (4.12) for entropy, energy and circulation functionals, we find :

$$\mathcal{J}[q] = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \left( 1 + \frac{\beta}{\lambda_i} \right) q_i^2 + \sum_{i \geq 1} \left( -\frac{\beta}{\lambda_i} h_i + \gamma \langle e_i \rangle \right) q_i . \quad (4.14)$$

We have thus to find the minimum of a quadratic functional, with a possible linear part. Let  $Q$  and  $L$  be the linear operators associated respectively to the purely quadratic part and to the purely linear part of this functional. Then we have three cases :

- **Case 1.** The smallest eigenvalue of  $Q$  is positive : the minimum exists and is achieved by an unique minimizer.
- **Case 2.** At least one eigenvalue of  $Q$  is strictly negative. There is no minimum.
- **Case 3.** The smallest eigenvalue of  $Q$  is zero (with eigenfunction  $e_0$ ). If  $L[e_0] = 0$  (case **3a**), the minimum exists, and each state of the neutral direction  $\{\alpha e_0\}$  is a minimizer. If  $L[e_0] \neq 0$  (case **3b**), then no minimum exists.

Since the quadratic part of  $\mathcal{J}$  is diagonal in the Laplacian eigenmode basis, we can immediately see that there is a unique solution to the variational problem if and only if  $\beta > -\lambda_1$  (case 1. above), whatever the value of  $\gamma$ . If  $\beta < -\lambda_1$  (case 2. above), there is no solution to the variational problem. If  $\beta = -\lambda_1$ , then  $Q[e_1] = 0$  (case 3. above) and there is a neutral direction if and only if  $L[e_1] = 0$ , which yields  $\gamma = h_1 / \langle e_1 \rangle$ .

We compute the energy and the circulation of all those states in Appendix A. We prove that there is a unique canonical solution at each point in the diagram  $(E, \Gamma)$  below the parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$  given by equation (4.26) in Appendix A, and above the parabola  $E_{\infty}(\Gamma)$  given by equation (4.27) in Appendix A.

#### 4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

We note that energies located above the parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$  are not achieved by grand canonical solutions (the values located below  $E_\infty(\Gamma)$  are not admissible).

Because it exists a range of admissible energies and circulations not reached by grand canonical solutions, we are in a situation of ensemble inequivalence. We then turn to the more constrained canonical problem to find solutions in this area.

#### Solution for the canonical problem

We now consider the canonical problem, obtained by keeping only the circulation constraint, and by considering the free energy

$$F(\beta, \Gamma) = \min_q \{ \mathcal{F}[q] = -\mathcal{S}[q] + \beta \mathcal{E}[q] \mid \mathcal{C}[q] = \Gamma \} . \quad (4.15)$$

It is possible to transform this constrained problem into an unconstrained variational problem. Actually, the circulation constraint is linear : one coordinate can be expressed in terms of the others :  $q_1 = (\Gamma - \sum_{i \geq 2} q_i \langle e_i \rangle) / \langle e_1 \rangle$  (recall  $\langle e_1 \rangle \neq 0$ ).

This expression is then injected into the functional  $\mathcal{F} = -\mathcal{S} + \beta \mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q] &= \frac{1}{2} \sum_{i \geq 2} \left( 1 + \frac{\beta}{\lambda'_i} \right) q_i^2 - \sum_{i \geq 2} \frac{\beta}{\lambda'_i} h'_i q'_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i, j \geq 2} \left( \delta_{ij} \left( 1 + \frac{\beta}{\lambda''_i} \right) + \left( 1 + \frac{\beta}{\lambda''_1} \right) \frac{\langle e''_i \rangle \langle e''_j \rangle}{\langle e''_1 \rangle^2} \right) q''_i q''_j \\ &- \sum_{i \geq 2} \left( \Gamma \frac{\langle e''_i \rangle}{\langle e''_1 \rangle^2} \left( 1 + \frac{\beta}{\lambda''_1} \right) - \frac{\beta}{\lambda''_i} h''_i + \frac{\langle e''_i \rangle}{\langle e''_1 \rangle} \frac{\beta}{\lambda''_1} h''_1 \right) q''_i \quad (4.16) \end{aligned}$$

where we have made the distinction between the two (independent) subspaces of Laplacian eigenmodes, having a zero mean value or not. The problem is now to find the minimizer  $\{q_i\}_{i \geq 2}$  of this functional, with no constraint.

To find the solutions to this problem, we use the same method as in the grand canonical case. We call  $Q$  and  $L$  the linear operators associated to the purely quadratic and linear parts of  $\mathcal{F}$ .

In the subspace of zero-mean Laplacian eigenmodes,  $Q$  is diagonal. Its smallest eigenvalue is strictly positive if and only if  $\beta > -\lambda'_1$ .

In the subspace of non zero-mean Laplacian eigenmodes,  $Q$  is not diagonal, so this case requires more computations. We look for the value of  $\beta$  such that the smallest eigenvalue of  $Q$  is zero in this subspace (that corresponds to case 3 above). Let us call  $-\lambda^*$  this value, and  $e^* = \sum_{i \geq 2} e_i^* e_i$  the corresponding eigenmode. Because  $Q[e^*] = 0$ , (remember that  $Q$  is the linear operator associated to the purely quadratic part of  $\mathcal{F}$  given by (4.16)), we have :

$$\forall i \geq 2, \left(1 + \frac{\lambda^*}{\lambda_i}\right) e_i^* + \frac{\langle e_i \rangle}{\langle e_1 \rangle^2} \left(1 + \frac{\lambda^*}{\lambda_1}\right) \sum_{j \geq 2} \langle e_j \rangle e_j^* = 0 \quad (4.17)$$

We deduce from this expression that  $\sum_{j \geq 2} \langle e_j \rangle e_j^* \neq 0$  : if not, each term  $e_i^*$  is zero. Multiplying (4.17) by  $\langle e_i \rangle / (1 + \lambda^* / \lambda_i)$  and summing on  $i \geq 2$ , we find that  $-\lambda^*$  is the smallest zero of the function <sup>1</sup>

$$f(x) = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i \langle e_i \rangle^2}{\lambda_i + x}. \quad (4.18)$$

Thus, when  $\beta = -\lambda^*$ , the smallest eigenvalue of  $Q$  (in the subspace of non zero-mean Laplacian eigenmodes) is zero.

We conclude that whatever the value of  $\Gamma$ , there is a single solution to the variational problem if and only if  $\beta > -\min\{\lambda^*, \lambda'_1\}$  (case 1. above). When  $\beta < -\min\{\lambda^*, \lambda'_1\}$ , there is no solution to the variational problem (case 2. above). When  $\beta = -\min\{\lambda^*, \lambda'_1\}$  (case 3. above), we have to consider two cases depending on the sign of  $\lambda^* - \lambda'_1$  :

- if  $\beta = -\lambda^* > -\lambda'_1$ . A minimizer exists (case 3a above) if  $L[e^*] = 0$ . This leads to

$$\sum_{i \geq 2} \left( \Gamma \frac{\langle e_i \rangle}{\langle e_1 \rangle^2} \left(1 + \frac{\beta}{\lambda_1}\right) - \frac{\beta}{\lambda_i} h_i + \frac{\langle e_i \rangle}{\langle e_1 \rangle} \frac{\beta}{\lambda_1} h_1 \right) e_i^* = 0$$

---

<sup>1</sup>By using the identity  $\sum_{i \geq 1} \langle e_i \rangle^2 = 1$ , we recover function 3.8 obtained in [27], where a discussion on the properties of this function is provided.

4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS  
LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

By (4.17), it yields the condition

$$\Gamma^* = \lambda^* \sum_{i \geq 1} \frac{\langle e_i \rangle h_i}{\lambda^* - \lambda_i}. \quad (4.19)$$

For  $\Gamma \neq \Gamma^*$ , there is no minimizer (case 3b).

- if  $\beta = -\lambda'_1 > -\lambda^*$ . A minimizer exists (case 3a above) if  $L[e'_1] = 0$ . This gives the condition  $h'_1 = 0$ . If  $h'_1 \neq 0$ , there is no minimizer (case 3b).

The solutions corresponding to all those cases, as well as their energy and circulation, are computed in Appendix B. In any case we find that all admissible values of circulation  $\Gamma$  and energy  $E$  are reached by canonical solutions.

We conclude that microcanonical and canonical ensembles are equivalent : all microcanonical solutions, characterized by a given energy and circulation, are also canonical solutions.

From the previous analysis, we are able to compute and describe all the thermodynamical properties of the phases diagrams in the plane  $(E, \Gamma)$ , as done in Appendix B, where it is explained that only three types of phase diagram exist :

- **case i** ( $\lambda^* < \lambda'_1$ ) : there is a first order transition line, defined by  $(\Gamma = \Gamma^*, E > E^*)$ , where  $\Gamma^*$  is given by equation (4.19). How to compute  $E^*$  is explained in appendix B.
- **case ii** ( $\lambda^* < \lambda'_1$  and  $h'_1 = 0$ ) : there is a second order transition line, defined by the parabola  $E_{\lambda'_1}$  given by equation (4.29).
- **case iii** ( $\lambda^* < \lambda'_1$  and  $h'_1 \neq 0$ ) : there is no phase transition.

In any case, there exists an ensemble inequivalence area above the parabola  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$ , given by equation (4.26), and all phase transitions occur inside this area.

Because the previous study is very abstract, we restrict ourself in the following to the case of the Euler equation ( $h = 0, R \rightarrow +\infty$ ), to present the phase diagrams and to describe the striking features associated to it. We

then explain the changes induced by the addition of a topography  $h(x, y)$  and of the parameter  $R$ .

## Phase diagrams for the Euler equation

The Euler equation corresponds to  $q = \Delta\psi$ . Since  $h = 0$ , there are only two types of phase diagrams, corresponding either to case i) ( $\lambda^* < \lambda'_1$ ) or to case ii) ( $\lambda^* > \lambda'_1$ ) above. We first explain that this criterion is governed only by the geometry of the domain. We then describe the thermodynamics of the phase diagram, and explain how it is related to changes in the flow structure. We finally report the existence of a bicritical point, when varying the domain geometry at fixed energy.

### Geometry governed criterion

As seen previously, The criterion for case i) or case ii) diagrams is the sign of  $\lambda'_1 - \lambda^*$ . This depends only on the Laplacian eigenvalues. They themselves depend only on the domain geometry.

If the domain admits no symmetry axis, only case i) is possible. As we already noticed, there is generically no zero-mean Laplacian eigenmodes for this class of domains.

If the domain admits a symmetry axis, the sign of  $\lambda'_1 - \lambda^*$  must be computed. In the case of a rectangular domain, there is a critical aspect ratio  $\tau_c \simeq 1.12$  (defined by  $L_x/L_y$ , with  $L_x$  and  $L_y$  the lengths of the rectangular domain), as already observed in [27]. For aspect ratios smaller than  $\tau_c$ , the phase diagram is in case i). For aspect ratios greater than  $\tau_c$ , the phase diagram is in case ii).

It is expected (but not proven) that any domain geometry admitting a symmetry axis, and sufficiently stretched in a direction perpendicular to this axis, be in case ii).

### Thermodynamic properties of the phase diagrams

From the knowledge of the Laplacian eigenvalues, one is able to draw the equilibrium entropy  $S(E, \Gamma)$  in terms of the internal parameters  $E$  and  $\Gamma$ , using the computations carried out in appendices A and B (the expression of the entropy in terms of the projections  $q_i$  is given by (4.9), and the expressions of these projections  $q_i$  are given by equations (4.21) and (4.28)).

4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

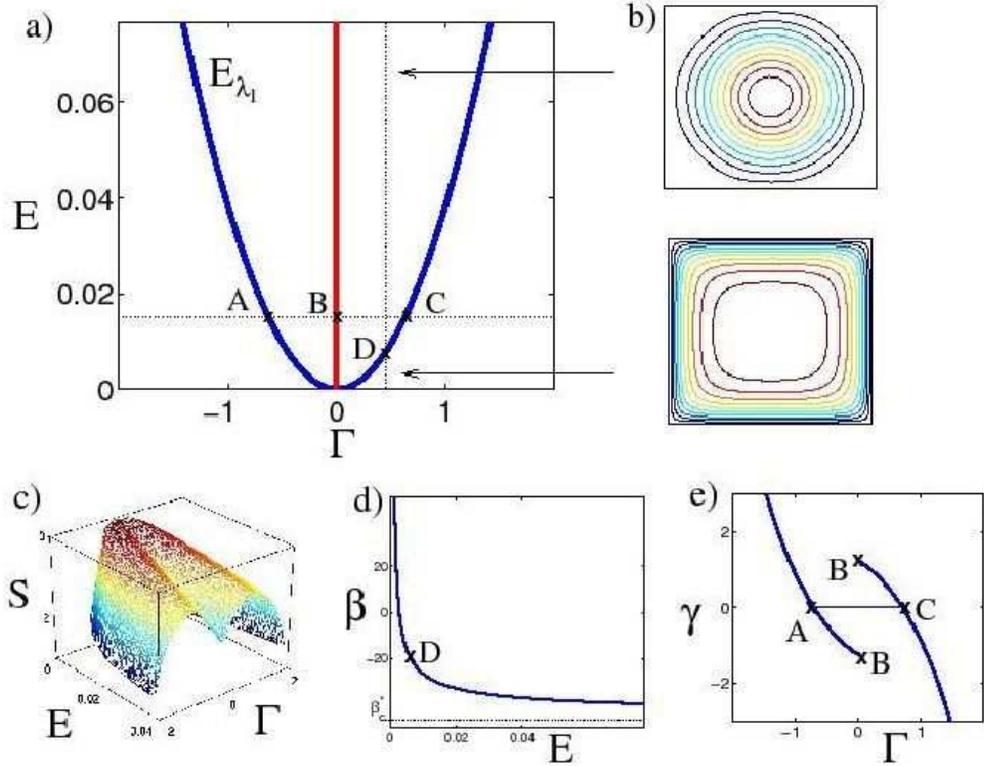


FIG. 4.5: **Phase diagram in case i** (for a rectangular domain of aspect ratio  $\tau = 1.1 < \tau_c$ ). Examples of flow structures are given on panel b. The ensemble inequivalence area is located above the blue parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$ . The red line at  $\Gamma = 0$  is a first order transition line, associated to a positive jump of  $\gamma$ .

We present such plot of  $S(E, \Gamma)$  on figures 4.5-c (for case i) and 4.6-c (for case ii). All the thermodynamical properties of the phase diagrams can be deduced from those plots.

**Ensemble inequivalence area.** The most striking feature appearing on figures 4.5-c and 4.6-c is the existence of a region of parameters  $E, \Gamma$  for which  $S(E, \Gamma)$  and its concave envelope do not coincide. We have explained before that this property implies ensemble inequivalence for those parameters.

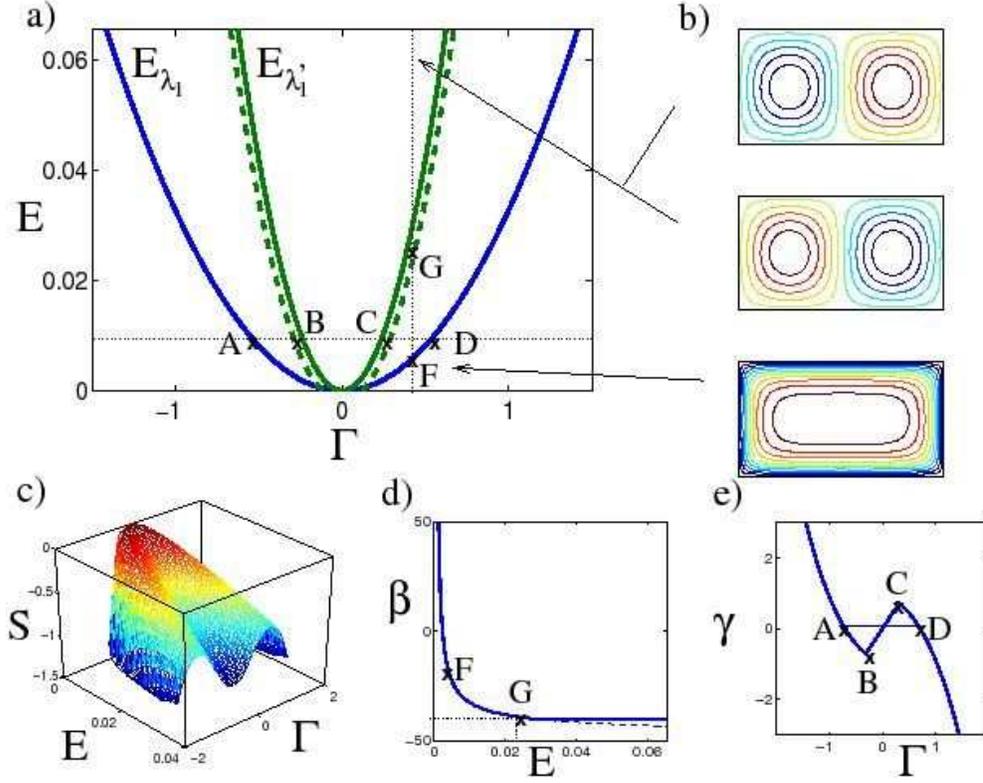


FIG. 4.6: **Phase diagram in case ii** (for a rectangular domain of aspect ratio  $\tau = 1.8 > \tau_c$ ). Examples of flow structures are given on panel b. The ensemble inequivalence area is located above the blue parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$ . The Green dashed parabola  $E_{\lambda_1'}(\Gamma)$  is a second order transition line. Inside this parabola,  $\partial^2 S / \partial \Gamma^2 > 0$

This area of ensemble inequivalence has been shown to be located above the parabola

$$E_{\lambda_1}(\Gamma) = \frac{1}{2\lambda_1 \langle e_1 \rangle} \Gamma^2,$$

obtained by taking  $h = 0$  in equation (4.26), in Appendix A. This parabola is represented as a blue line on figures 4.5-a and 4.6-a.

Notice that this result holds for any domain geometry. This is to our knowledge the first analytical description of such a generic occurrence of ensemble inequivalence in 2D flows.

We describe in the following peculiar microcanonical phase transitions associated to the existence of such ensemble inequivalence.

**Phase transitions for case i.** It is shown in appendix B that there exists a first order transition line defined by  $(\Gamma = \Gamma^* = 0, E > E^* = 0)$ , represented in red in figure 4.5-a.

We can see clearly that there is a discontinuity of the entropy  $S(E, \Gamma)$  across the line  $\Gamma = 0, E > 0$ , on the figure 4.5-c.

We see also on figure 4.5-e that this first order phase transition is associated to a positive jump of  $\gamma$ . Such a thermodynamical peculiarity would not be possible in an ensemble equivalence area : a positive jump of the derivative of the entropy  $(\partial S/\partial \Gamma)$  can only occur in a region where the entropy  $S(E, \Gamma)$  and its concave envelope do not coincide.

**Phase transitions for case ii.** We show in appendix B that the parabola

$$E_{\lambda'_1}(\Gamma) = \left( \frac{1}{2(f(\lambda'_1))^2} \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i \langle e_i \rangle^2}{(\lambda_i - \lambda'_1)^2} \right) \Gamma^2$$

is a second order transition line. We have written here the equation of this parabola by taking  $h = 0$  in (4.29). This second order transition line is represented as a green parabola on figure 4.6-b.

When the parabola  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$  is crossed, there is a discontinuity of  $\partial^2 S/\partial \Gamma^2$  and of  $\partial^2 S/\partial E^2$ , as observed on figures 4.6-c,e. This indicates clearly the occurrence of a second order microcanonical phase transition.

Notice the existence of positive values of  $\partial^2 S/\partial \Gamma^2$  in figure 4.6. This last property is similar to negative specific heat, but for the parameter  $\Gamma$  rather than for the energy  $E$ . This corresponds to a region of parameters  $E, \Gamma$  for which the entropy  $S(E, \Gamma)$  is convex : it does not then coincide with its concave envelope. We conclude that such a peculiarity can occur only in the ensemble inequivalence area.

### Changes in flow structure associated to phase transitions

The transitions described above are associated to drastic changes in the structure of the flow for the equilibrium states, that we present in the following.

**Case i.** Whatever the values of the energy  $E$  and of the circulation  $\Gamma$ , there is a single equilibrium state, having the structure of a monopole, as

represented at low and high energies on figure 4.5-d, except on the first order transition line, represented in red on figure 4.5-a.

When the first order transition line is crossed, the flow structure changes from a monopole of a given sign to a similar monopole with the opposite sign, with coexistence of both states on the transition line.

Notice that the high energy states tend to a solution dominated by eigenmode  $e^*$  (when  $\beta \rightarrow -\lambda^*$ ), given by equation (4.17). The structure of this eigenmode can be computed numerically. In the case of a rectangular domain of aspect ratio  $\tau < 1.12$ , it is always a monopole.

**Case ii.** Below the parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$ , there is a unique equilibrium state associated to each point  $(E, \Gamma)$ . Those low energy states have the structure of a monopole.

Above  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$ , each point corresponds to two equilibrium states. For a given circulation, the different states above the parabola differ only by the value of their projection on  $e'_1$  (a dipole). The choice of one state among the two possibilities above the parabola breaks the system's symmetry. At high energy, this contribution dominates : the flow is therefore a dipole.

For a fixed circulation, there is thus a transition from a monopole (at low energy) to a dipole (at high energy).

### Bicritical point

Let us fix the energy and vary the aspect ratio in the case of a rectangular domain. The phase diagram  $(\Gamma, \tau)$  is presented figure 4.7. Our previous analysis predicts a bifurcation from a microcanonical first order transition line (corresponding to the red line on figure 4.5) to two second-order transition lines (corresponding to the green line on figure 4.6), at the point  $\tau_c = 1.12, \Gamma = 0$ . Above this critical aspect ratio, there is actually a switch from case i) to case ii) phase diagrams.

Such a bifurcation is referred to as a bicritical point. Bicritical points have already been observed in the context of short range interacting systems (see [17] and reference therein). However, there is to our knowledge no example of such bifurcations for systems with long range interactions, while their possible existence was predicted in [17].

Small inserts on figure 4.7 are schematic representations of the generalized entropy  $\mathcal{S}[q]$ . The two directions correspond to the eigenmode  $e^*$

4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

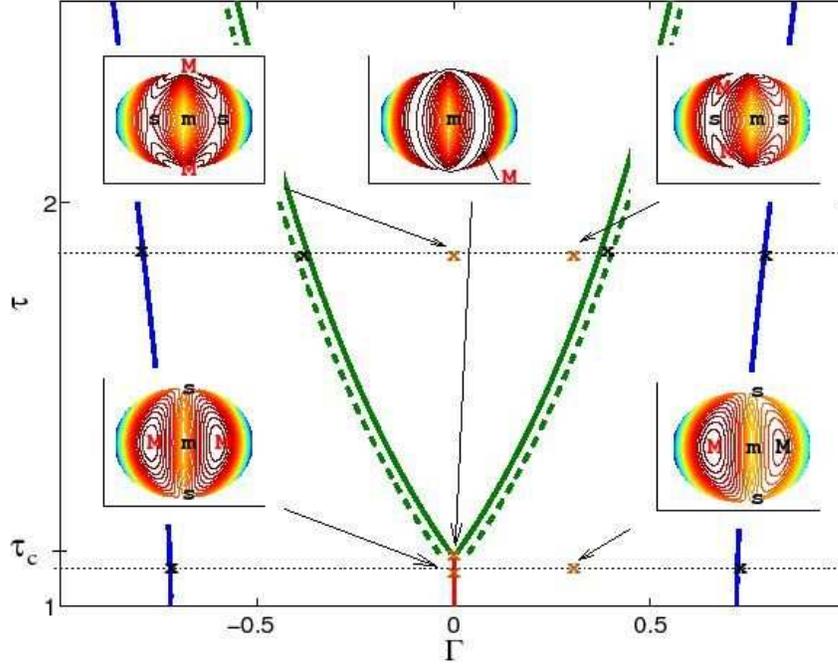


FIG. 4.7: **Bicritical point** : bifurcation from a first order phase transition line (in red) to two second order phase transitions lines (in green). Case of a rectangular domain, for the 2-D Euler equation. The aspect ratio  $\tau$  is taken as an external parameter, the circulation  $\Gamma$  as an internal parameter, and the energy is fixed. Small inserts are schematic representations of the entropy  $\mathcal{S}[q]$  in which the two directions correspond to the eigenmodes  $e^*$  (horizontal) and  $e'_1$  (vertical). **M**, **m** and **s** stand respectively for **M**aximum, **m**inimum and **s**addle

associated to  $\lambda^*$  (horizontal) and to the eigenmode  $e'_1$  associated to  $\lambda'_1$  (vertical).

Below the green dashed line (corresponding to  $\beta = -\lambda'_1 > -\lambda^*$ ) the maxima have no contribution on  $e'_1$ .

Let us consider the line  $\Gamma = 0$ . If  $\tau < \tau_c$ , there are two equilibrium states proportional to  $e^*$ , characterized by  $\beta = -\lambda^* > -\lambda'_1$ .

If  $\tau > \tau_c$ , there are two maxima proportional to  $e'_1$ , characterized by  $\beta = -\lambda'_1 > -\lambda^*$ . The bicritical point corresponds to a crossing between the eigenvalues  $\lambda'_1$  and  $\lambda^*$ . The maxima are then degenerate at this point.

When the line  $\Gamma = 0$  is crossed for  $\tau < \tau_c$ , one of the two maxima

becomes metastable.

When the line  $\Gamma = 0$  is crossed for  $\tau > \tau_c$ , each maximum (proportional to  $e^*$ ) is split into a metastable state and another global maximum, having both a contribution on  $e^*$ .

For fixed circulation, when the green dashed line is crossed with increasing  $\tau$ , the maxima are split into two new maxima, which differ from the sign of their contribution on  $e'_1$ .

### Addition of a topography

Let us now consider the case  $q = \Delta\psi + h$  (this corresponds to  $R = +\infty$  in equation (4.3)). The eigenvalues  $\{\lambda_i\}$  are unchanged compared to the previous case. We explain in the following how the phase diagrams presented on the figures 4.5 (case i) and 4.6 (case ii) are changed. The main difference with the 2D Euler equation is the occurrence of a new class of phase diagrams (case iii in Appendix B) (for  $\lambda'_1 < \lambda^*$  and  $h'_1 \neq 0$ ).

**Ensemble inequivalence** Whatever the case (referred to as i, ii or iii in Appendix B), there is still an ensemble inequivalence area, above the parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$ , given by equation (4.26). For  $h \neq 0$ , the minimum of this parabola is no more located on  $(E = 0, \Gamma = 0)$ , but its curvature radius is left unchanged.

**Thermodynamical properties** It is now necessary to distinguish between three cases for the phase diagrams (the computations are carried out in Appendix B) :

- i) ( $\lambda^* > \lambda'_1$ ). There is still a first order microcanonical transition half line, but the minimum of this line (the point  $\Gamma^*, E^*$ , computed in appendix B) is located strictly above the parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$ .
- ii) ( $\lambda'_1 > \lambda^*$  and  $h'_1 = 0$ ). This case corresponds to figure 4.8. There is still a second order transition line, the parabola  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$ , given by equation (4.29). The curvature radius of the parabola does not depend on  $h$ , but the minimum of the parabola is no more  $(E = 0, \Gamma = 0)$  : it is located strictly above  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$ .
- iii) ( $\lambda'_1 > \lambda^*$  and  $h'_1 \neq 0$ ). There is no microcanonical phase transition above  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$ .

**Changes in the flow structure** At low energy ( $\beta \rightarrow +\infty$ ), the equilibrium states are given by  $\psi = -h/\beta + \gamma/\beta$  in the domain bulk, because the Laplacian term becomes negligible in equation  $\Delta\psi - h(x, y) = \beta\psi - \gamma$ . Then the structure of the flow depends much on the topography.

Let us now discuss the structure of the high energy states

- i) ( $\lambda^* > \lambda'_1$ ). As in the Euler case, the flow is dominated by the contribution from the eigenmode  $e^*$  (a monopole for a rectangular domain of aspect ratio  $\tau < 1.12$ ) when  $\beta \rightarrow -\lambda^*$  : the topography does not influence the high energy state.
- ii) ( $\lambda'_1 > \lambda^*$  and  $h'_1 = 0$ ). At high energy, the flow is dominated by the dipole  $e'_1$ , above the second order transition line, as in the Euler case. The choice of sign of the contribution of this dipole breaks the systems symmetry. Once again, the high energy state is not influenced by the presence of a topography in that case.
- iii) ( $\lambda'_1 > \lambda^*$  and  $h'_1 \neq 0$ ). At high energy ( $\beta \rightarrow -\lambda'_1$ ), the flow is dominated by its component on  $e'_1$  (a dipole) . Contrary to the previous case, there is no symmetry breaking, as the sign associated to this dipole is prescribed by the sign of  $h'_1$ . This is the only case where the topography influences the structure of the high energy state.

**Second order azeotropy** In case ii) above, if we consider the energy as an external parameter, we have the simultaneous appearance of two second order phase transitions in the microcanonical ensemble (see point A figure 4.8-a).

The possible existence of this phenomenology was predicted by [17] but never observed in any specific physical system. It was referred to as second-order azeotropy, by analogy with similar transitions in binary mixtures, which are short range interacting systems.

Notice that the second order azeotropy occurs inside the ensemble inequivalence area.

### Addition of a Rossby radius of deformation

The existence and structure of the phase diagrams i), ii) and iii) are left unchanged when one considers any finite value for the Rossby radius of deformation (or Debye length scale),  $R$ . Only the eigenvalues  $\lambda_i$  are changed :

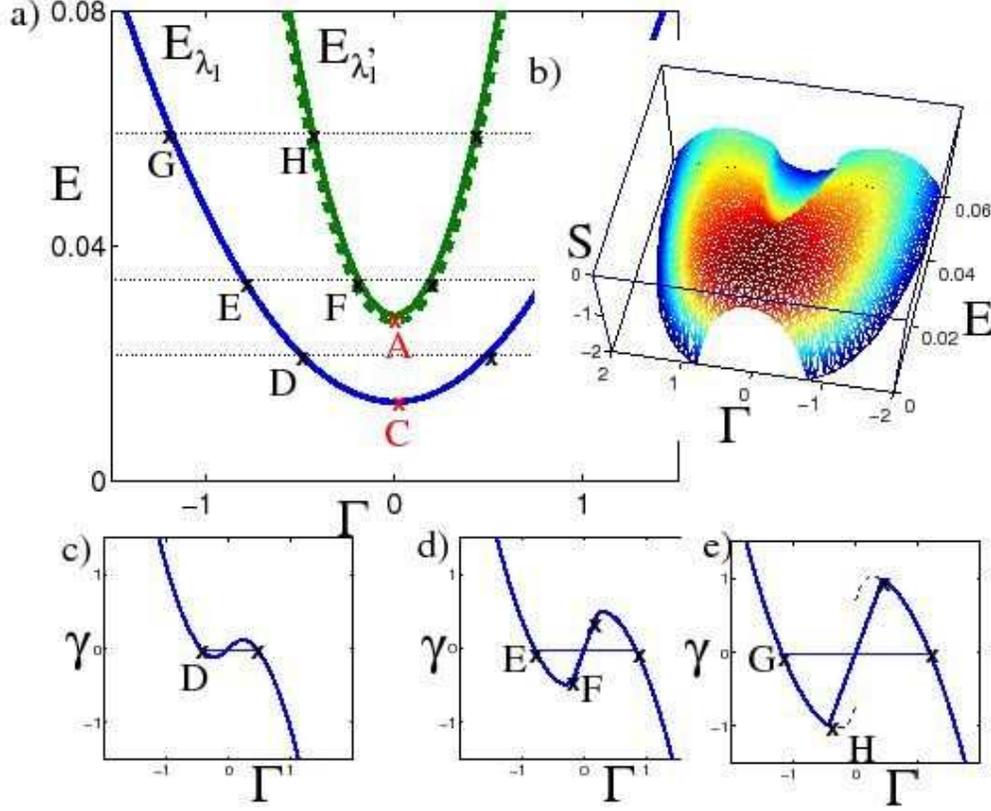


FIG. 4.8: **Second order azeotropy** : simultaneous appearance of two second order phase transition (at point A). Case of a rectangular domain of aspect ratio  $\tau = L_x/L_y > 1.12$  with  $h = \sin(\pi y/L_y)$ .

they are simply translated by the constant  $-1/R^2$ , which implies that the criterion  $\lambda_1' - \lambda^*$  for the phase diagram does not depend on  $R$ .

Notice however that the curvature of the parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$  (the boundary of ensemble inequivalence) and of the parabola  $E_{\lambda_1}'(\Gamma)$  (the line of second order phase transition) tend to infinity when  $R \rightarrow 0$ .

### Boundary conditions

Rather than taking arbitrarily  $\psi_{fr} = 0$  on  $\partial D$ , a more relevant way of prescribing the constant  $\psi_{fr}$  (in the context of geophysical flows) is to consider the constraint  $\langle \psi \rangle = 0$ . This comes from the mass conservation,

#### 4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

as  $\psi$  is related to the height of the interface with a lower layer, in the quasi-geostrophic model. The equation to be solved is now

$$q - h = \Delta\varphi - \frac{\varphi - \langle\varphi\rangle}{R^2} = \mathcal{O}[\varphi] \quad (4.20)$$

$$\psi = \varphi - \langle\varphi\rangle \quad \text{and} \quad \varphi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\mathcal{D} = 0$$

Notice that the linear operator  $\mathcal{O}$  is symmetric and negative definite. It is inverted by considering the boundary condition  $\varphi = 0$  on  $\partial\mathcal{D}$  :  $\psi = \mathcal{O}^{-1}[q - h]$ . This operator can be diagonalized, with eigenvalues and eigenmodes expressed in terms of Laplacian properties. The different phase diagrams can then be computed, and are found to be the same as in the previous case. More astonishingly, the criterion for phase diagram i, ii or iii does not depend on the choice of this boundary condition.

### Applications

We now apply the results obtained to the description of Fofonoff flows, to the proof of nonlinear stability of some RSM states, and we discuss possible experimental observations of ensemble inequivalence.

#### The case of an idealized ocean model : the Fofonoff flows

Fofonoff flows are stationary solutions of the quasi-geostrophic equations for a barotropic ocean in a closed domain  $\mathcal{D}$ , with  $h = -by$ , and  $q = \beta\psi - \gamma$  (see [89] for a more precise description of this model) :

$$\Delta\psi - \beta\psi = by - \gamma$$

$$\text{with} \quad \psi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\mathcal{D} .$$

Fofonoff computed and described the solutions of these equations independently of statistical theories, assuming  $\beta \gg 1$  [51]. Within this approximation, the contribution of the Laplacian term is negligible in the domain bulk :

$$\psi = \frac{b}{\beta}y - \frac{\gamma}{\beta}$$

It corresponds to a weak westward current ( $v_x = -\partial_y\psi = -b/\beta$ ) taking place in the whole domain. At boundaries, there are recirculating eastward jets.

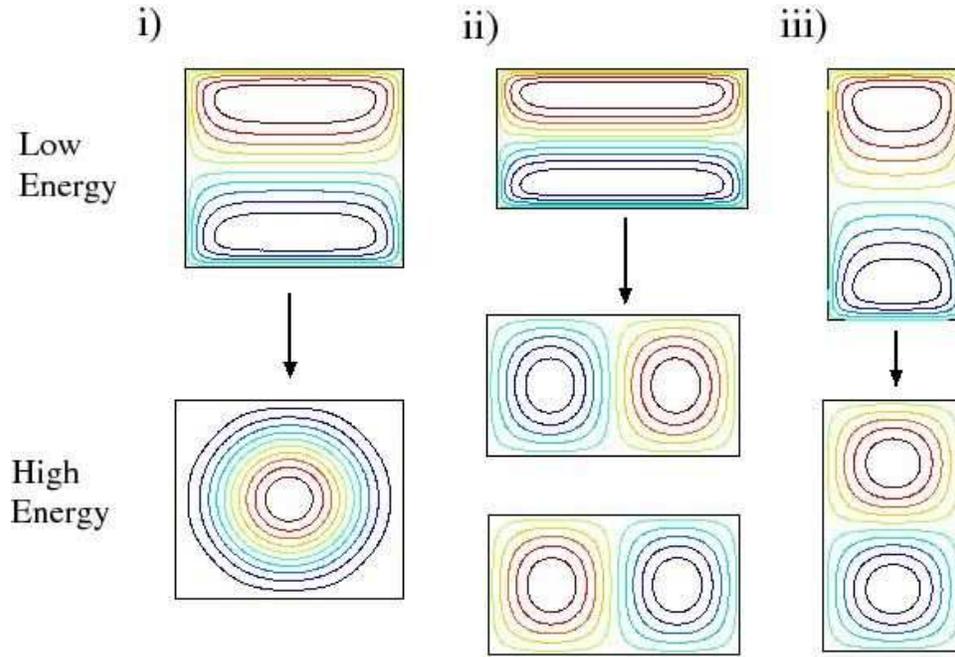


FIG. 4.9: **Fofonoff flows, for the three possible phase diagrams i), ii) and iii)** The circulation is fixed, slightly greater than zero, and  $h = by$ . The streamfunction is represented in a rectangular domain with different aspect ratios (cold and hot colors are respectively negative and positive values). At low energy, the flow is always the usual Fofonoff mode, with a weak westward flow in the domain bulk, and strong recirculating jets at the boundaries. If the domain is not stretched enough (**case i**), the high energy state is a monopole. If the domain is sufficiently stretched in the East-West direction (**case ii**), there is a second order phase transition : the high energy state is one dipole in the East-West direction. The choice of sign of this dipole breaks the system symmetry. If the domain is sufficiently stretched in the North-South direction (**case iii**), there is no phase transition. The high energy state is a dipole displaying the Fofonoff mode structure, but without strong jets confined at the boundaries.

These solutions are presented in many books about oceanic circulation, see for instance [89]. The emergence of such state in numerical simulations with small forcing and dissipation has been discussed ([135, 39]).

As far as spectrally truncated equilibrium states of the energy-enstrophy statistical theory of Kraichnan [69] corresponds to a linear relation between potential vorticity and streamfunction, Fofonoff flows have been widely studied in this context, after the work of Salmon-Holloway-Hendershott [106].

The results presented in the previous paragraph make possible a direct computation of all RSM equilibrium states of this model, whatever their energy and circulation. The interest is twofolds :

- Firstly, we show directly that Fofonoff flows are RSM equilibria, and that they are located in the ensemble equivalence area : the states characterized by  $\beta \gg 1$  are low energy states corresponding to grand canonical solutions of (4.13).
- Secondly, we compute also high energy states, and find that such states can have a flow structure very different from the classical Fofonoff solution, when they are located in the ensemble inequivalence area, see figure 4.9.

Such states could not be obtained in the context of truncated equilibrium statistical theory because there is no constraint on the circulation in this theory [106] : we have shown here that it is necessary to take into account this constraint to compute RSM equilibrium states in the ensemble inequivalence area.

In addition, all the phenomenology related to phase transitions and ensemble inequivalence applies for those models : according to the domain geometry, one can obtain the phase diagram corresponding to case i, ii or iii described in the previous sections (see figure 4.9).

In particular, any domain that admits a symmetry axis in the  $y$  direction, and that is sufficiently stretched perpendicularly to this axis, corresponds to the phase diagram presented figure 4.8, for which there is second order azeotropy.

This shows the interest of academic ocean models in the context of long range interacting systems. Although the Jovian great red spot is often mentioned as an application of statistical mechanics of 2D flows, the study of other simple geophysical flows, as academic ocean models have not been considered so far in this context, to our knowledge.

## Stability

Another application of the previous computation of the variational problems is the proof of nonlinear stability for a large class of equilibrium states computed previously, even when Arnold's criteria for nonlinear stability do not apply.

The nonlinear stability of equilibrium states has been shown previously for any  $\beta > -\lambda_1$ . This was proved for the Euler equation, where  $\lambda_1$  is the smallest Laplacian eigenvalue [98, 99], but it is straightforward to extend this result to quasi-geostrophic flows (where  $\lambda_1$  is then the smallest Laplacian eigenvalue translated by  $1/R^2$ ). We now extend this result to  $\beta > -\min\{\lambda^*, \lambda'_1\}$ , when the  $q - \psi$  relation is linear.

We have shown that in that case, whatever the value of  $\beta$  associated to an equilibrium state, there is a functional conserved by the dynamic (the functional  $\mathcal{F}[q]$  given by (4.16)), and that the equilibrium states are minimizers of this functional. In addition  $\mathcal{F}[q]$  was shown to be positive-definite for  $\beta > -\min\{\lambda^*, \lambda'_1\}$ .

Calling  $\bar{q}_\beta$  the corresponding equilibrium state, and  $\delta q$  a perturbation of this equilibrium, we can then define a norm for the perturbations :  $\mathcal{N}[\delta q] = \mathcal{F}[\bar{q}_\beta + \delta q]$ . Since this norm is conserved by the dynamics, this proves directly the nonlinear stability of the corresponding equilibrium state  $\bar{q}_\beta$ .

## Possible experimental realization of ensemble inequivalence

We have reported the generic existence of ensemble inequivalence and of peculiar phase transitions in a large class of 2D flows. The phase transitions that we have described induce huge physical changes in the flow structure, for instance a change from a monopole to a dipole.

One of the present challenging problems in physics of long range interacting systems is to find experimental setups for which ensemble inequivalence properties such as negative specific heat could be observed in laboratories. So far, no physical system has been proposed to realize such an experiment. The results presented in this paper indicate that 2D flows are serious candidates to first observe ensemble inequivalence.

Phase transitions associated to the existence of ensemble inequivalence are predicted in the microcanonical ensemble. This ensemble can show up

if the time scale for inertial organization of the flow is much smaller than the forcing and dissipation time scales.

When such separation of time scales does not exist, it is more relevant to include effects of forcing and dissipation. The understanding of the phase transitions taking place at equilibrium is then a starting point for studies out of equilibrium [18].

We thank J. Barré, P.H. Chavanis, Ana Carolina Ribeiro-Teixeira and J. Sommeria for interesting discussions. This work was supported by the ANR program STATFLOW ( ANR-06-JCJC-0037-01 ).

## Appendix A : grand canonical solution

We compute here the values of energy and circulation achieved by the solutions of the grand canonical problem (4.13).

We have shown that whatever the value of  $\gamma$ , there is a single solution  $q(\beta, \gamma)$  of the variational problem for  $\beta > -\lambda_1$ . As these solutions are critical points of the functional  $\mathcal{J}$  given by equation (4.14), a direct computation of such critical points yields :

$$q_i(\beta, \gamma) = \frac{-1}{\lambda_i + \beta} (\gamma \lambda_i \langle e_i \rangle + \beta h_i) . \quad (4.21)$$

A straightforward computation gives their circulation  $\Gamma = \sum_i q_i \langle e_i \rangle$  :

$$\Gamma = \gamma f(\beta) + \beta \sum_{i \geq 1} \frac{\langle e_i \rangle h_i}{\lambda_i + \beta} , \quad (4.22)$$

where

$$f(\beta) = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i \langle e_i \rangle^2}{\lambda_i + \beta} , \quad (4.23)$$

and their energy  $E = \frac{1}{2} \sum_i (q_i - h_i)^2 / \lambda_i$  :

$$E_\beta(\gamma) = \left( \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i h_i^2}{2(\lambda_i + \beta)^2} \right) + \gamma \left( \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i h_i \langle e_i \rangle}{(\lambda_i + \beta)^2} \right) + \gamma^2 \left( \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i \langle e_i \rangle^2}{2(\lambda_i + \beta)^2} \right) . \quad (4.24)$$

Using expression (4.22) that gives  $\gamma$  as a function of  $\Gamma$ , one obtains the expression of the energy in terms of the circulation :

$$E_\beta(\Gamma) = \mathcal{A}_\beta[h] + \mathcal{B}_\beta[h]\Gamma + \left( \frac{1}{2(f(\beta))^2} \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i \langle e_i \rangle^2}{(\lambda_i + \beta)^2} \right) \Gamma^2 . \quad (4.25)$$

Notice that  $\mathcal{A}_\beta[h] = \mathcal{B}_\beta[h] = 0$  when  $h = 0$ , whatever the value of  $\beta$ .

When  $\beta = -\lambda_1$ , we have shown that there are solutions (an infinite number, corresponding to a neutral direction) if and only if  $\gamma = -h_1/\langle e_1 \rangle$ . The solutions of this neutral direction correspond to the limit case  $\beta \rightarrow -\lambda_1$  in (4.21) and (4.23). Then, each solution of the neutral direction is parameterized by a value of  $\Gamma$ , and corresponds to a point of the parabola

$$E_{\lambda_1}(\Gamma) = \mathcal{A}_{\lambda_1}[h] + \mathcal{B}_{\lambda_1}[h]\Gamma + \frac{1}{2\lambda_1 \langle e_1 \rangle} \Gamma^2 , \quad (4.26)$$

obtained by taking the limit  $\beta \rightarrow -\lambda_1$  in (4.25).

We conclude that each point of the phase diagram  $(E, \Gamma)$  located on the set of parabolae  $\{E_\beta(\Gamma) \mid \beta > -\lambda_1\}$  corresponds to a unique grand canonical solution.

Notice that the curvature of the parabola  $E_\beta(\Gamma)$  does not depend on the topography  $h$ , and is a decreasing function of  $\beta$ .

Notice also that the lower bound for the (admissible) energies is obtained for  $\beta \rightarrow +\infty$ . This corresponds to the parabola

$$E_\infty(\Gamma) = \mathcal{A}_\infty[h] + \mathcal{B}_\infty[h]\Gamma + \frac{1}{2} \left( \sum_{i \geq 1} \lambda_i \langle e_i \rangle^2 \right)^{-1} \Gamma^2 . \quad (4.27)$$

This parabola tends to the line  $E = 0$  in the case of a rectangular domain, for  $h = 0$ .

Finally, the grand canonical solutions cover the whole area above the parabola  $E_\infty(\Gamma)$ , given by (4.27) and below the parabola  $E_{\lambda_1}(\Gamma)$  given by (4.26).

## Appendix B : canonical solutions

We compute here the values of energy and circulation achieved by the solutions of the canonical problem (4.15).

We have shown that whatever the value of  $\Gamma$ , there is a single solution  $q(\beta, \Gamma)$  for each value of  $\beta > -\min\{\lambda'_1, \lambda^*\}$ . Using equation (4.22), one can express  $\gamma$  as a function of  $\Gamma$ , and substitute it into equation (4.21) to obtain the expression of  $q(\beta, \Gamma)$ . The corresponding energy is given by (4.25).

We conclude that there is a single canonical solution at each point of the region spanned by the set of parabolae  $\{E_\beta(\Gamma) \mid \beta > -\min\{\lambda'_1, \lambda^*\}\}$ .

Since  $\min\{\lambda'_1, \lambda^*\} > \lambda_1$ , and since the curvature of these parabolae is a decreasing function of  $\beta$ , we can see that the set of grand canonical solutions is included in this one.

We have shown (see section “Canonical solutions” in the text) that when  $\beta = -\min\{\lambda'_1, \lambda^*\}$ , there are two cases for which a neutral direction exists : either  $\lambda^* < \lambda'_1$ , or  $\lambda'_1 < \lambda^*$  and  $h'_1 = 0$ . We now explain that these two cases correspond to two different phase diagrams, that we describe. We then discuss the remaining case ( $\lambda'_1 < \lambda^*$  and  $h'_1 \neq 0$ ), for which there exists no neutral direction.

**Case i (  $\lambda^* < \lambda'_1$  ).**

There is a neutral direction for  $\beta = -\lambda^* > -\lambda'_1$  if and only if  $\Gamma = \Gamma^*$  (where  $\Gamma^*$  is given by equation (4.19)).

The expression of the solutions is obtained by taking  $\beta = -\lambda^*$  in (4.21) : the solutions obtained are then parameterized by  $\gamma$ . The corresponding energies are given by equation (4.24). The value of the energy varies from a minimum value  $E^*$  to  $+\infty$ . The value  $E^*$  is obtained by taking  $\beta \rightarrow \lambda^*$  and  $\Gamma = \Gamma^*$  in equation (4.25). For each point  $\Gamma^*, E > E^*$ , there are two states parameterized by two different values of  $\gamma$ . In the Euler case ( $h = 0$ ),  $E^* = 0$  (take  $\gamma = 0$  in equation (4.24)).

Notice that if  $\Gamma \neq \Gamma^*$ , then the energy of the minimizers obtained in the case  $\beta > \lambda^*$  diverges when  $\beta \rightarrow \lambda^*$ . The set of parabolae  $\{E_\beta(\Gamma) \mid \beta > -\lambda^*\}$  hence covers the half plane  $E, \Gamma$  above  $E_\infty(\Gamma)$ , except the half line ( $\Gamma = \Gamma^*, E > E^*$ ), which corresponds to  $\beta = -\lambda^*$  previously described.

At each point of this line, there are two canonical solutions, differing only by the contribution of the eigenmode  $e^*$  computed above. Let us consider first a fixed energy  $E > E^*$  and a varying circulation  $\Gamma$ . There is a discon-

tinuity of  $\gamma(\Gamma)$  at  $\Gamma = \Gamma^*$ , as seen in equation (4.22) : as  $\gamma = \partial S/\partial \Gamma$ , we conclude that there is a first-order transition when this line is crossed at fixed energy. By considering the sign of  $f(\beta)$  around a point of this line, one can see that the discontinuity corresponds to a positive jump of  $\gamma$ .

Let us then consider  $\Gamma = \Gamma^*$ , and a varying energy  $E$ . For  $E > E^*$ ,  $\beta = -\lambda^*$  so  $\partial E/\partial \beta = 0$ . By contrast, a direct computation of (4.25) gives  $\partial E/\partial \beta \neq 0$  when  $\beta \rightarrow -\lambda^*$ , i.e. when  $E < E^*$ .

To conclude, for a fixed circulation  $\Gamma = \Gamma^*$  and a varying energy, there is a second-order phase transition when the point  $E = E^*$  is crossed as far as  $\partial^2 S/\partial E^2 = \partial \beta/\partial E$  is discontinuous.

**Case ii ( $\lambda'_1 < \lambda^*$  and  $h'_1 = 0$ ).**

There is a neutral direction whatever the value of  $\Gamma$ , when  $\beta = -\lambda'_1$ . The solutions of this neutral direction can be obtained by computing the critical points of  $\mathcal{J}$  (see equation (4.14)) for this value of  $\beta$ .

By doing this, we find that the solutions are

$$q = q(-\lambda'_1, \Gamma) + \alpha e'_1, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.28)$$

and have an energy

$$E = E_{\lambda'_1}(\Gamma) + \frac{1}{2\lambda'_1} \alpha^2,$$

where  $q(\lambda'_1)$  and  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$  are obtained by taking  $\beta \rightarrow -\lambda'_1$  in (4.21) and (4.25) :

$$E_{\lambda'_1}(\Gamma) = \mathcal{A}_{\lambda'_1}[h] + \mathcal{B}_{\lambda'_1}[h]\Gamma + \left( \frac{1}{2(f(\lambda'_1))^2} \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i \langle e_i \rangle^2}{(\lambda_i - \lambda'_1)^2} \right) \Gamma^2 \quad (4.29)$$

The set of parabolae  $\{E_\beta(\Gamma) \mid \beta > -\lambda'_1\}$  spans the whole range of parameters  $(E, \Gamma)$  located above  $E_\infty(\Gamma)$  and below  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$ . The canonical solutions of the neutral direction, parameterized by  $\Gamma$  and  $\alpha = q'_1$ , are located on the set of parabolae  $\{E_{\lambda'_1}(\Gamma) + \alpha^2/(2\lambda'_1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ , which covers the half plane above  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$ .

To each point  $(E, \Gamma)$  located above  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$  correspond two minimizers  $q$ , parameterized by  $\alpha$ , the value of their projection on  $e'_1$ . This value is zero

#### 4. INÉQUIVALENCE D'ENSEMBLE ET TRANSITIONS DE PHASES DANS LES ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---

on the parabola  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$ , and tends to infinity with increasing energy. High energy states are thus dominated by the eigenmode  $e'_1$ , which is a dipole.

Let us consider a fixed circulation. When  $E > E_{\lambda'_1}$ ,  $\beta = -\lambda'_1$  and then  $\partial E/\partial\beta = 0$ . By contrast,  $\partial E/\partial\beta \neq 0$  for  $\beta \rightarrow -\lambda_1$ , by a direct computation from equation (4.25). Thus, there is a discontinuity of  $\partial^2 S/\partial E^2 = \partial\beta/\partial E$  when the parabola  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$  is crossed.

Let us then consider a fixed energy and a varying circulation  $\Gamma$ . From equation (4.22), one finds that in the interior of the parabola  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$  (where  $\beta = -\lambda'_1$ ),  $\partial\gamma/\partial\Gamma = -1/f(\lambda'_1)$  is constant (positive), and  $\partial\gamma/\partial\Gamma \neq -1/f(\lambda'_1)$  when the circulation tend to the parabola from the outside. There is thus a discontinuity of  $\partial^2 S/\partial\gamma^2$  when the parabola  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$  is crossed.

To conclude,  $E_{\lambda'_1}(\Gamma)$  is a second order transition line. When it is crossed, the system chooses one among the two possible states differing by the value of their projection on  $e'_1$  (a dipole), which breaks the system symmetry.

**Case iii (  $\lambda'_1 < \lambda^*$  and  $h'_1 \neq 0$  ).**

In that case, there is no neutral direction. One can easily show that the energy of the minimizers obtained in the case  $\beta > \lambda^*$  diverges when  $\beta \rightarrow \lambda^*$ .

The set of parabolae  $\{E_\beta(\Gamma) \mid \beta > -\lambda'_1\}$  covers the whole half plane above  $E_\infty(\Gamma)$ . There is no phase transition.

#### Equivalence with the microcanonical problem

In any case, there exist canonical solutions at each point of the diagram  $(E, \Gamma)$  above the parabola  $E_\infty(\Gamma)$ , which is the boundary of admissible energies. There is thus equivalence with the microcanonical ensemble.

### Appendix C Laplacian eigenvalues of a rectangular domain

We present here the Laplacian eigenmodes ( $\Delta e_i = -\lambda_i e_i$ ) in a rectangular domain. Instead of indexing the eigenmodes of the Laplacian by  $i$ , we use two indices  $m, n$  corresponding to the wave number in the  $x$ - and  $y$  directions, for the eigenmodes

$$e_{mn} = 2 \sin(\pi n x / \sqrt{\tau}) \sin(\pi m y \sqrt{\tau}) ,$$

where  $\tau = L_x/L_y$  and the domain is supposed to be of area unity ( $L_y L_x = 1$ ). The corresponding eigenvalues are

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left( \frac{n^2}{\tau} + \tau m^2 \right) ,$$

and  $\langle e_{mn} \rangle = 8/(nm\pi^2)$  for  $n$  and  $m$  odd,  $\langle e_{mn} \rangle = 0$  for  $n$  or  $m$  even. To make the link with the previous notation, the eigenmode associated with the greatest eigenvalue  $\lambda_1$  is  $e_1 = e_{11}$  and the zero-mean eigenmode associated with the greatest eigenvalue  $\lambda'_1$  is  $e'_1 = e_{1,2}$  (if  $\tau > 1$ ). We see by considering equation (4.27) that in this case,  $E_\infty(\Gamma)$  is the line  $E = 0$  in the plane  $(E, \Gamma)$

## 4.4 Conclusion

Nous avons montré que **les solutions de Fofonoff sont des équilibres statistiques RSM de basse énergie**. À haute énergie, il existe des **transitions de phase dans la structure de l'écoulement** : les états d'équilibre peuvent dans ce cas être très différents des solutions de Fofonoff.

La méthode utilisée pour calculer explicitement ces états d'équilibre a permis de montrer aussi la **stabilité non-linéaire** d'une grande partie de ces états, dans un cas où le critère "classique" de stabilité d'Arnold ne peut s'appliquer. Remarquons que la stabilité non-linéaire des états d'équilibres statistiques est un problème théorique important : il n'existe à notre connaissance pas de preuve générale de ce résultat (voir le chapitre 3).

Nous avons en outre mis en évidence dans ces modèles simples d'océans des transitions de phase associées à des propriétés thermodynamiques remarquables, propres aux systèmes à interactions à longue portée : entropies non concaves, **inéquivalence entre les ensembles statistiques**, capacité thermique négative...

A notre connaissance, il s'agit de la première démonstration par des calculs analytiques explicites de l'existence d'une zone d'inéquivalence d'ensemble dans les écoulements 2-D. L'intérêt de cette étude est d'avoir fait le lien entre des transitions de phase dans la structure de l'écoulement et cette inéquivalence. Ces résultats indiquent que les écoulements 2-D sont de bons candidats à la mise en œuvre d'expériences de laboratoire qui permettraient d'observer certaines propriétés liées à l'inéquivalence d'ensemble. Il s'agit d'un enjeu majeur dans ce domaine.

Les résultats que nous avons présentés sont obtenus pour une relation linéaire entre vorticité potentielle et fonction courant. L'extension de ces résultats au cas de relations  $q - \psi$  faiblement non-linéaires constitue un prolongement naturel de ce travail.

Deuxième partie

Approche phénoménologique du  
mélange

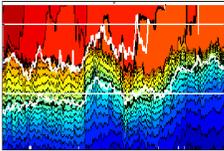


## Chapitre 5

---

# Introduction

---



Le mélange turbulent de fluides stratifiés de manière stable est une situation courante dans l'océan. On distingue deux régimes de mélange, suivant le mode de production de la turbulence :

- i) dans la couche de mélange, forcée en surface de diverses manières (vent, vagues, instabilités convectives...).
- ii) à l'intérieur de l'océan, forcé par des instabilités de cisaillement, par le déferlement d'ondes internes et par la double diffusion.

Nous nous intéresserons principalement au mélange turbulent dans la couche de mélange océanique. Nous avons montré dans l'introduction (figure 0.3) un exemple d'observation de cette couche de mélange. La turbulence produite en surface par des instabilités de convection ou par le cisaillement du vent est rapidement diffusée dans la partie supérieure de l'océan (voir figure 0.4). La présence d'une interface très nette qui sépare cette couche mélangée des eaux plus denses au repos bloque la diffusion de turbulence, car l'énergie cinétique n'est pas suffisante pour briser l'interface de densité. Quand le forçage augmente, l'énergie cinétique disponible à l'interface augmente, et de l'eau dense située sous l'interface est peu à peu incorporée à la couche supérieure, où elle est rapidement mélangée aux eaux plus légères. Cet effet augmente l'épaisseur de la couche mélangée, qui varie en général entre 10 et 100m. Paramétrer cette variation requiert la compréhension des divers mécanismes physiques en jeu. À cet effet, de nombreuses expériences de laboratoire ont été proposées [46, 126] : elles isolent un phé-

nomène particulier parmi les nombreux processus physiques en jeux dans l’océan.

Nous donnerons d’abord une brève synthèse de résultats antérieurs, expérimentaux et théoriques, puis nous préciserons la nature des phénomènes physiques que l’on souhaite modéliser.

**Notation : densité réduite et flottabilité** Dans ce qui suit, et dans les chapitres à venir, nous appliquerons l’approximation de Boussinesq : les variations de densité sont supposées n’intervenir que dans le terme de gravité.

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\nabla P^* - \sigma \mathbf{e}_z + F + D \quad \text{avec} \quad \sigma = g \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0}$$

où  $P^*$  est l’écart à la pression hydrostatique,  $g$  est la constante de gravité (l’axe  $0z$  pointe vers le haut), et  $F+D$  représente le forçage et la dissipation. La densité  $\varrho$  varie autour de  $\varrho_0$  (de l’ordre de  $1000 \text{kg.m}^{-3}$ ). On voit sur la figure 0.3 (présentée dans l’introduction générale) que la variation relative de densité dans la couche supérieure de l’océan est effectivement très faible :  $(\varrho - \varrho_0) / \varrho_0 \approx 2.10^{-3}$ . **On appellera “densité réduite” la quantité  $\sigma$ . C’est l’opposé de la flottabilité.** On désignera par  $\bar{\sigma}(z)$  le profil vertical moyen de densité réduite. En général, les variations de densité réduite sont dues à des variations de température ou de salinité dans l’écoulement.

## 5.1 Résultats expérimentaux antérieurs

Les nombreuses expériences de laboratoire qui ont été réalisées [46, 126] ont permis de classifier différents régimes de mélange. Les expériences varient suivant le type de stratification (continue, ou en couches), de forçage (par une grille horizontale ou verticale, par un cisaillement), et de géométrie (cuve de section rectangulaire, annulaire). Dans ce qui suit, nous ne présenterons que des situations où le forçage est tridimensionnel, sans cisaillement, et où **l’écoulement n’a pas de mouvement moyen. La vitesse caractéristique** de ces écoulements est de l’ordre de grandeur de la racine carrée de l’énergie cinétique turbulente :  $u \sim e^{1/2}$ . On notera  $l$  **l’échelle caractéristique** de l’écoulement.

**Nombres adimensionnels** Les mécanismes de mélange turbulent ne dépendent pas (à l'ordre le plus bas) du nombre de **Reynolds**  $Re = le^{1/2}/\nu$  et de **Peclet**  $Pe = le^{1/2}/\kappa_\sigma$  (où  $\kappa_\sigma$  est la diffusivité de la densité réduite<sup>1</sup>) tant que leurs valeurs sont suffisamment élevées. En particulier, il faut que le nombre de Reynolds soit tel que l'écoulement soit turbulent. Cette condition est en général satisfaite pour  $Re > 500$ .

En revanche, les propriétés de mélange dépendent de manière cruciale du nombre de **Richardson** :

- externe  $Ri_e = \Delta\sigma l/e$ , pour un fluide composé de deux couches, dont la différence en densité réduite est  $\Delta\sigma$ .
- interne  $Ri_i = -\partial_z \bar{\sigma} l^2/e$ , pour un fluide stratifié de manière continue.

**Le cas d'un forçage local** a fait l'objet de nombreuses études expérimentales, en raison de la similarités de ces configurations avec le mélange dans la couche supérieure des océans. La turbulence est produite par une grille horizontale oscillant verticalement, créant une couche turbulente de fluide de densité homogène. La plupart des études portent sur le mélange d'un fluide bicouche. Les propriétés de la turbulence ont d'abord été étudiées dans un cas homogène, sans stratification [61] : l'énergie cinétique turbulente varie en  $z^{-2}$ , où  $z$  est la distance à la grille, et l'échelle intégrale de la turbulence varie linéairement avec  $z$ . La grille peut indifféremment être placée dans la couche supérieure ou dans la couche inférieure. La turbulence diffuse rapidement dans la couche où se trouve la grille, est bloquée par l'interface qui avance lentement, par incorporation de filaments de la couche au repos. Ces expériences ont permis de déterminer différentes quantités :

- la **vitesse de l'interface**  $U_e$ , appelée aussi vitesse d'entraînement est une fonction décroissante du nombre de Richardson quand celui ci est suffisamment élevé. Les résultats expérimentaux peuvent être décrits par des lois de puissance  $U_e = Ri_e^{-n}$  [46]. Les valeurs mesurées de  $n$  varient entre 1 et 2, selon la géométrie de l'écoulement (recirculation à grande échelle, conditions aux bords, particularités liées à la grille utilisée...), et selon la nature de la stratification (en salinité ou en température).
- Selon les résultats expérimentaux de E et Hopfinger l'**épaisseur de l'interface**  $h$  entre les deux couches s'exprime en fonction de l'épais-

---

<sup>1</sup>Il s'agit de la diffusivité thermique si la densité réduite est liée à la température, ou de la diffusivité moléculaire si la diffusivité thermique est liée à la salinité

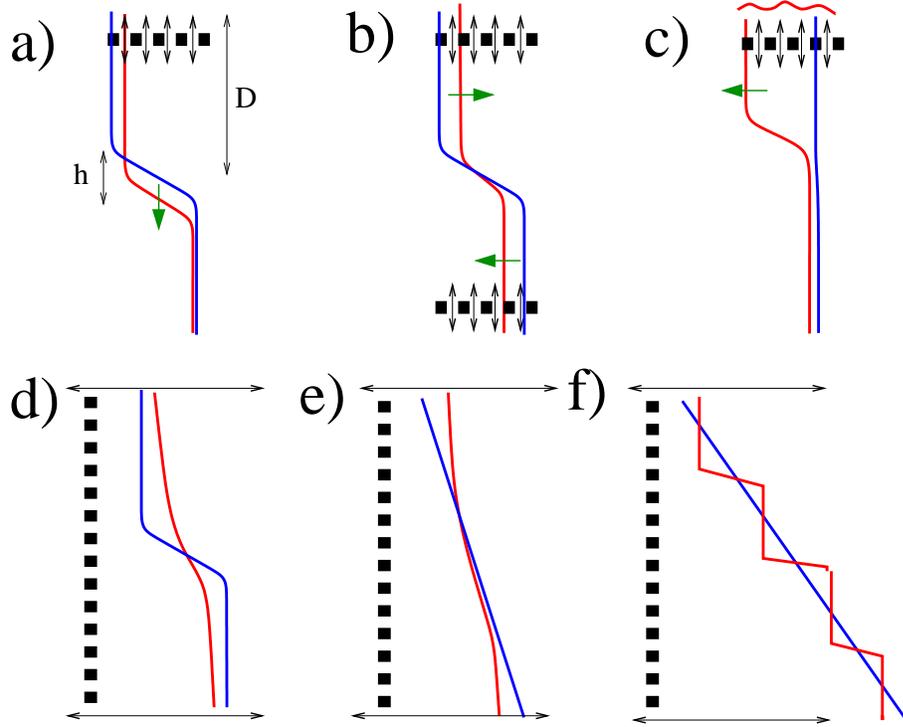


FIG. 5.1: Profils verticaux de densité (profil initial en bleu) dans diverses configurations expérimentales a) une grille oscillante dans un fluide bicouche [142] b) deux grilles oscillantes dans un fluide bicouche [125] c) une grille oscillante en présence d'un flux de chaleur [60] ; la formation d'une interface empêchant les échanges avec la couche inférieure n'est observée que dans une certaine gamme de paramètres d) une barre ou une grille oscillant verticalement dans un fluide faiblement stratifié, en couche [136] e) même forçage dans une stratification linéaire faible [13] : mélange aux bords f) même forçage pour une stratification linéaire plus forte : formation de couches [102] [87]

seur de la couche turbulente et du nombre de Richardson, :  $h = D(a + b/R_i)$  [142]. Cependant, ce résultat est controversé : d'autres expériences suggèrent plutôt que l'interface garde une épaisseur constante, proportionnelle à l'échelle caractéristique de l'écoulement [78].

Le taux d'entraînement ne change pas quand une grille oscille dans chacune des couches (figure 5.1) [125]. Dans ce cas, l'interface reste à la même altitude, et la vitesse d'entraînement est mesurée par les variations de la densité réduite moyenne dans chacune des deux couches.

**Le cas d'un forçage global** implique une évolution qualitativement différente du profil mélangé de densité réduite. Le mélange est produit par allers et retours successifs d'une grille ou de barres verticales on distingue deux régimes de mélange.

- Pour de **faibles nombres de Richardson**, Dans le cas d'un profil initial composé de deux couches, l'interface entre les deux couches s'élargit peu à peu jusqu'à homogénéisation de l'écoulement [136] (schéma d).

Dans le cas d'un profil initial linéaire, deux zones mélangées se forment aux extrémités supérieures et inférieures de la cuve, remplissant peu à peu l'intérieur, jusqu'à ce que le mélange complet soit atteint [13] (figure 5.1-e). Simultanément, le gradient de densité réduite diminue à l'intérieur du domaine.

- Pour des **nombres de Richardson suffisamment élevés**, un profil initialement linéaire évolue en une succession de "marches" de densités homogènes, séparées par des interfaces de l'ordre du centimètre [87, 102] (figure 5.1-f). Ces marches sont quasi-stationnaires (mais leur nombre diminue au cours du temps); les écarts de densité entre les marches diminuent jusqu'à homogénéisation de l'écoulement.

**Conclusion** La diversité des régimes qualitatifs observés, et la variabilité des mesures quantitatives réalisées dans des dispositifs expérimentaux similaires font du mélange dans les fluides stratifiés un problème encore mal compris. Du point de vue de la modélisation de ces écoulements, les approches adoptées sont pour la plupart phénoménologiques. Elles ne s'appliquent souvent qu'à un nombre restreint de configurations. On présente dans la partie suivante deux approches antérieures : i) les modèles d'évolutions de quantités moyennes, dont l'approximation principale consiste à exprimer les flux turbulents en fonctions de quantités locales ii) les modèles d'évolution stochastiques, qui décrivent l'évolution d'un profil vertical de densité réduite et de vitesse en prenant en compte les effets non locaux.

## 5.2 Approches phénoménologiques du mélange en fluide stratifié

### Les modèles de diffusion turbulente

Prenons le cas d'un fluide stratifié, caractérisé par un profil moyen de densité réduite  $\bar{\sigma}(z, t)$ . Cette quantité peut être interprétée comme une moyenne dans le plan horizontal. En l'absence de mouvement moyen, l'équation de conservation de la densité réduite s'écrit

$$\partial_t \bar{\sigma} = -\partial_z \bar{\mathcal{F}} \quad (5.1)$$

où  $\bar{\mathcal{F}}$  représente le flux turbulent de densité réduite. L'approximation de diffusion turbulente consiste à supposer que ce flux est proportionnel au gradient de densité réduite :

$$\partial_t \bar{\sigma} = \partial_z (le^{1/2} \partial_z \bar{\sigma}) \quad (5.2)$$

Le coefficient de diffusion turbulente  $le^{1/2}$  est interprété comme le produit d'une longueur caractéristique du mélange par la vitesse caractéristique de l'écoulement (ici donnée par la racine carrée de l'énergie cinétique turbulente). Quand ce coefficient ne dépend pas de  $z$ , on retrouve une simple équation de diffusion de chaleur. Dans un fluide stratifié, le gradient de densité modifie les propriétés de la turbulence et des échelles caractéristiques. Un exemple de paramétrisation est donné figure 5.2 : on représente le flux de densité réduite  $\mathcal{F}$  en fonction du gradient de densité réduite  $-\partial_z \bar{\sigma}$ . On distingue plusieurs zones :

- **Dans la zone A**, le gradient de densité réduite est petit ; cela correspond à de faibles nombres de Richardson. On s'attend à ce que la densité réduite se comporte comme un traceur passif : le coefficient de diffusion turbulente  $le^{1/2}$  ne dépend pas du gradient de densité.
- **Dans la zone B**, le flux est une fonction décroissante du gradient de densité. Cela est cohérent avec les résultats expérimentaux de mélange d'un fluide bicouche par une grille horizontale oscillante : le taux d'entraînement, donc le flux turbulent de densité réduite à l'interface, varie en  $R_i^{-n}$  avec  $n > 1$ , pour des nombres de Richardson suffisamment élevés.
- **Dans la zone C**, certains modèles prévoient une augmentation du flux avec le gradient de densité réduite, d'autres un prolongement du comportement de la zone B.

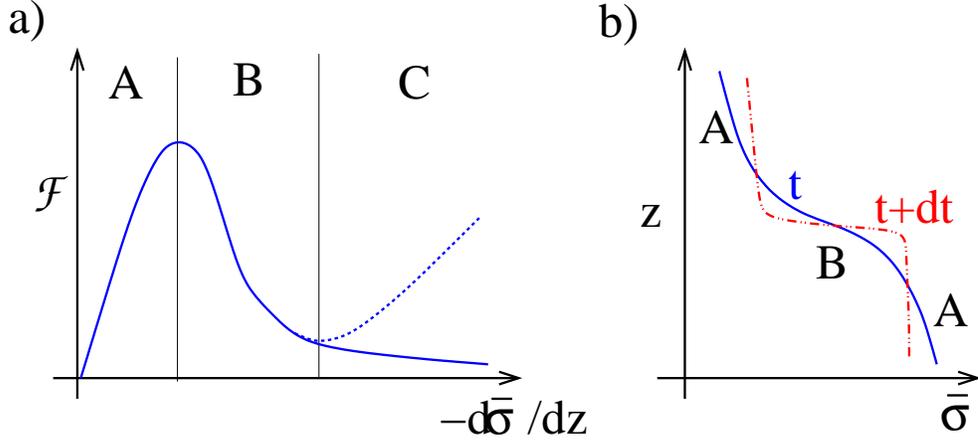


FIG. 5.2: a) flux en fonction du gradient de densité réduite. b) exemple d'évolution d'un profil de densité réduite.

Considérons le profil de densité réduite  $\bar{\sigma}(z)$  représenté en trait plein bleu figure 5.2-b. Supposons que l'évolution temporelle de ce profil est donnée par l'équation de diffusion (5.1), et que le flux  $\mathcal{F} = le^{1/2}\partial_z\bar{\sigma}$  est donné par la courbe en trait plein sur la figure 5.2. Les gradients de densité réduite situés dans la zone A s'amenuisent, alors que les gradients de densité situés dans la zone B se renforcent, créant ainsi une interface fine entre deux couches homogènes. Un tel modèle a été proposé indépendamment par **Phillips et Posmentier** [90, 92] pour expliquer la formation de couches, avant que celles-ci ne soient observées en laboratoire par [87, 102].

**Une première limite** du modèle vient de ce qu'il prédit une interface de plus en plus fine, alors que les expériences de laboratoire présentent des interfaces de l'ordre du centimètre. Balmforth et al proposent une explication pour l'épaisseur finie de ces interfaces en justifiant une forme de "N" pour le flux turbulent (en pointillés dans la zone C). Ils couplent à cet effet l'équation de diffusion pour la densité réduite à une équation de diffusion pour l'énergie cinétique, une paramétrisation de l'échelle de mélange  $l$ , et un modèle pour le terme de production d'énergie  $\mathcal{P}$  :

$$\partial_t e = a_e \partial_z (le^{1/2} \partial_z e) - le^{1/2} \partial_z \bar{\sigma} + \mathcal{P} - a_e l^{-1/2} e^{-3/2} \quad (5.3)$$

$$l = \frac{l_f e^{1/2}}{e^{1/2} + a_\sigma l_f \sqrt{\overline{\partial_z \bar{\sigma}}}} \quad (5.4)$$

où  $a_e$ ,  $a_\epsilon$ ,  $a_\sigma$  sont des constantes à déterminer. Nous reviendrons sur cette équation au chapitre 7. Précisons simplement que pour une **paramétrisation particulière du terme de production d'énergie  $\mathcal{P}$** , le flux turbulent  $\mathcal{F}$  est une fonction croissante du gradient de densité réduite dans la zone C de la figure 5.2. L'explication pour la formation de couches d'épaisseur finie repose entièrement sur la manière dont le forçage  $\mathcal{P}$  est paramétrisé.

**Une autre limite**, plus fondamentale, des modèles de Phillips, Posmentier ou Balmforth *et al*, vient de ce que **l'approximation locale de flux turbulent n'est plus valable au delà d'un certain nombre de Richardson** (c'est à dire au-delà d'une certaine valeur de  $-\partial_z \bar{\sigma}$  dans la figure 5.2). Holford et Linden ont observé expérimentalement que les couches se forment par des instabilité à grande échelle, quand les flux sont encore des fonctions croissantes du nombre de Richardson (comme dans la zone A). Une fois ces couches créées, le flux turbulent correspond bien à celui dessiné dans la zone B de la figure 5.2. Ces résultats suggèrent qu'une loi de Fick "locale" liant le flux  $\mathcal{F}$  au gradient moyen de densité réduite  $\partial_z \bar{\sigma}$  n'est plus valide dans les zone B et C de la figure 5.2.

Pour conclure, ces modèles de diffusion turbulente fournissent une explication pour la formation de couche, mais la réalité physique des mécanismes invoqués est toujours en débat. De plus, cette approche néglige l'effet des fluctuations de densité réduite. Seules les quantités moyennées localement interviennent. Or les fluctuations de densité réduite sont souvent importantes dans les expériences de laboratoire.

## Modèles stochastiques de turbulence en une dimension (ODT)

Nous avons mentionné au chapitre précédent l'importance des modèles d'évolution de la PDF dans le cadre du mélange turbulent de fluides réactifs. Certaines idées issues de ce domaine ont naturellement été proposées pour décrire le mélange de fluides stratifiés. C'est le cas du modèle stochastique de turbulence à une dimension proposé par Kernstein [67]. L'idée du modèle est de représenter les effets d'étirement et de repliement de la turbulence par une application  $f$  qui transforme une partie du profil vertical de vitesse

$(w(z, t) \rightarrow w(z, t + dt) = w(f[z], t))$  et de la densité réduite  $\sigma(z, t) \rightarrow \sigma(z, t + dt) = \sigma(f[z], t)$ .

En pratique, une échelle  $l$  et une hauteur  $z_0$  sont tirées aléatoirement à chaque pas de temps  $dt$ . Cela définit la localisation et l'extension d'un possible événement de mélange à ce pas de temps. Un autre tirage aléatoire détermine ensuite si cet événement de mélange a effectivement lieu pour ce pas de temps, cette échelle et cette hauteur. La probabilité d'occurrence de cet événement de mélange est donnée par un processus de Poisson de temps caractéristique  $\tau$ . C'est un temps de retournement calculé à partir des valeurs de vitesse et de densité réduite dans le segment  $]z_0, z_0 + l[$  du profil. Si le tirage aléatoire est négatif, aucun processus de mélange n'est modélisé à ce pas de temps. C'est le cas pour la plupart des événements car le temps caractéristique  $\tau$  est en général bien plus élevé que  $dt$ . Si le tirage est positif, le profil de densité réduite localisé sur le segment  $]z_0, z_0 + l[$  subit une transformation préservant la proportion relative de chaque niveau de densité réduite, comme celle présentée figure 5.3. Le champ de vitesse subit une transformation du même type, choisie de façon à ce que l'énergie  $\int_{z_0}^{z_0+l} (\frac{1}{2}w^2 + \sigma z) dz$  soit conservée. Les lois de probabilité utilisées pour tirer  $z_0$  et  $l$  sont respectivement une loi uniforme et une loi en  $B l^{-2}$ .

Ce modèle a été appliqué à des situations très différentes : convection [141], ou formation de couches dans les fluides stratifiés de manière stable [140].

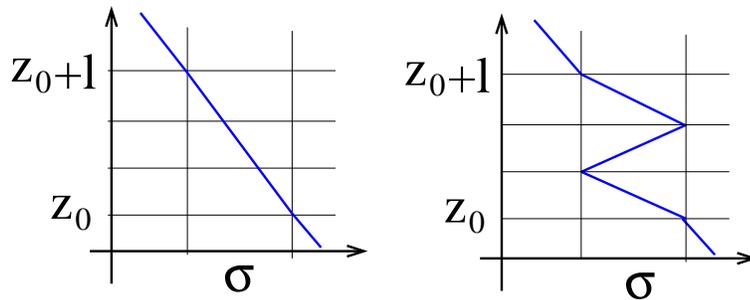


FIG. 5.3: Transformation du profil de densité réduite lorsqu'un événement de mélange d'extension  $l$  à l'altitude  $z_0$  intervient au pas de temps  $dt$  : sur le segment  $]z_0, z_0 + l[$ , le nouveau profil est la succession de trois répliques de l'ancien, contracté d'un facteur 3, celui du milieu étant retourné pour assurer la continuité. Le profil reste inchangé hors de  $]z_0, z_0 + l[$ .

## Qu'en est-il des modèles de circulation générale océanique ?

Nous venons de présenter deux approches phénoménologiques différentes pour le mélange dans les fluides stratifiés. Ces approches sont des modèles utilisés par les physiciens pour décrire les différents mécanismes possibles de mélange.

Décrivons brièvement la manière plus simple dont est traité le mélange dans le moteur océanique NEMO [76] fondé sur le modèle OPA (océan parallélisé), et utilisé par l'équipe MEOM du LEGI. Il s'agit d'un modèle aux équations primitives, à savoir i) l'équation de **Navier-Stokes** incompressible, ii) une **équation non-linéaire d'état** couplant température et salinité à la vitesse du fluide et iii) une succession d'approximations propres aux écoulements océaniques [76] :

- **l'hypothèse de Boussinesq** : les variations de densité n'interviennent que par la force d'Archimède (flottabilité).
- **l'approximation hydrostatique** : la projection des équations du mouvement sur la verticale est réduite à l'équilibre entre gravité et forces de pressions. La convection n'est donc pas résolue directement par ces modèles : cet effet est paramétré.
- **une relation de fermeture pour les flux turbulents** : les fluctuations de vitesses aux petites échelles (non résolues par la grille de calcul) peuvent induire des modifications importantes aux grandes échelles. Cet effet joue un rôle non négligeable tant pour l'organisation des courants que pour la stratification globale. Il doit donc aussi être paramétré.

Ces modèles sont régionaux ou globaux, formulés en coordonnées  $z$  ou isopycnales.

La grille verticale a une résolution d'environ  $10m$  dans les couches supérieures ( $\tilde{200}m$ ) et inférieures ( $\tilde{20}m$ ) océaniques, et une résolution d'environ  $\tilde{400}$  mètres dans l'océan profond, ces paramètres pouvant être modifiés. Une grille verticale caractéristique des simulations de ces modèles comporte un total entre 30 et 40 couches.

Le mélange vertical est décrit par une équation d'évolution de type "diffusion turbulente", ayant la forme (5.2), couplée à un modèle pour l'échelle caractéristique de l'écoulement, et à une équation pour l'énergie cinétique (similaire à 5.3, où  $\mathcal{P}$  est modélisé par la production d'énergie due au cisaillement), et où l'échelle caractéristique  $l$  intervenant dans la dissipation

d'énergie n'est pas nécessairement la même que celle intervenant dans le coefficient de diffusion.

Le coefficient de diffusion  $le^{1/2}$  dépend alors des propriétés locales (gradient de densité, énergie...). Dans les situations stables ( $\partial_z \bar{\sigma} < 0$ ), son ordre de grandeur varie entre  $10^{-6}$  et  $10^{-4} m^2 s^{-1}$ . Pour comparaison, les diffusivités moléculaires de la température et du sel dans l'eau sont respectivement  $10^{-7}$  et  $10^{-9} m^2 s^{-1}$ . Dans les situations instables ( $\partial_z \bar{\sigma} > 0$ ), ce coefficient est augmenté de manière importante, afin de lisser rapidement le gradient de densité dans la zone instable. Ce modèle surestime le mélange des masses d'eau par instabilité convective, mais reste un moyen efficace et peu coûteux en temps de calcul pour paramétriser cet effet [122, 76].

### 5.3 Objectifs et méthode

Les deux approches que nous venons de présenter sont fondées sur des points de vue différents :

- un modèle de diffusion turbulente, décrivant l'évolution de quantités moyennées, censées ne dépendre que des propriétés de l'écoulement localement moyennées. Il est utilisé en pratique dans les modèles réalistes d'océans.
- un modèle stochastique, décrivant l'évolution d'un profil 1D donné, qui reproduit l'effet de transfert vers les petites échelles par la turbulence tout en conservant l'énergie totale de l'écoulement. Ce modèle, bien qu'intéressant, est très différent des approches utilisées dans des situations pratiques.

Notre objectif est d'obtenir un modèle intermédiaire entre ces deux approches. Nous cherchons à modéliser par une équation déterministe l'évolution des distributions de probabilité (PDF) de mesurer une certaine densité réduite à une altitude donnée. Nous souhaitons d'une part retrouver les modèles de diffusion classiques pour les quantité moyennes, et de l'autre modéliser l'effet des processus de cascade turbulente sur l'évolution de la PDF.

Connaître la forme de la distribution de densité réduite (salinité ou température) est important pour décrire qualitativement des mécanismes physiques où les fluctuations de densité jouent un rôle non négligeable :

- **la restratification** : Prenons une situation initiale où des masses

d'eau de densité réduite différentes sont réparties en proportions égales dans les plans horizontaux, quelle que soit l'altitude, sans pour autant être mélangées aux échelles microscopiques. Cela peut arriver à cause d'une instabilité convective, ou à la suite d'un épisode de forçage mécanique intense. Le profil moyen est uniforme sur la verticale, mais les fluctuations autour de cette valeur moyenne sont importantes. Si le mélange microscopique n'est pas immédiat, les masses d'eau sédimentent, créant au fur et à mesure un gradient de densité stable. Un modèle de diffusion de type (5.2) ne prédit aucune évolution pour le profil de densité moyen initialement uniforme. Il est nécessaire de prendre en compte les fluctuations pour décrire les effets de sédimentation.

- **l'entraînement "inverse", une caractéristique des courants de gravité dans un milieu stratifié** : à une altitude donnée, les particules fluides du courant de gravité qui possèdent une densité réduite correspondant à celle du milieu ambiant restent autour de cette position d'équilibre. Au fur et à mesure de la progression du courant de gravité sur une pente descendante, celui-ci "perd" les particules fluides les plus légères.

Nous n'aborderons pas dans cette thèse les problèmes liés aux courants de gravité : notre objet est le cas le plus simple, à savoir le mélange turbulent dans la direction verticale, en l'absence de mouvement moyen.

Précisons qu'à l'instar des modèles présentés dans cette introduction, notre approche n'est pas dérivée des équations de Navier-Stokes, mais obtenue grâce à des considérations phénoménologiques.

Le **chapitre 6** est consacré à l'étude des effets des **cascades turbulentes** qui dissipent les fluctuations de densité réduite. Le but du **chapitre 7** est de proposer un modèle d'évolution temporelle pour la distribution de densité réduite, en prenant en compte :

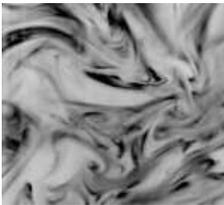
- i) les effets de **diffusion turbulente** similaires à ceux des modèles présentés auparavant
- ii) les effets de **sédimentation** des particules fluides, qui n'existent pas dans un modèle où les fluctuations de densité réduite sont négligées.
- iii) les effets de cascade turbulentes étudiés au chapitre 6.

## Chapitre 6

---

# Le mélange turbulent comme un processus d'auto-convolution

---



Ce chapitre est consacré à l'étude du rôle de la turbulence dans l'évolution temporelle de la distribution de probabilité (**PDF**) d'un traceur, mesuré à une résolution fixée (pixel, taille du capteur...). Le but est de **modéliser les effets de cascade turbulente**, pris indépendamment des autres processus en jeu

- **Le traceur est supposé passif** ; il marque une particule fluide, et n'interagit pas avec l'écoulement.
- Le traceur est supposé réparti de manière statistiquement homogène. **Les effets de transport turbulent sont négligés.**

Considérons un champ de traceur constitué de tache noires dans un fond blanc. La PDF correspondante est une double fonction delta, dont la hauteur des pics est proportionnelle aux surfaces noires et blanches. Un observateur mesure ce champ à une résolution fixée, par exemple l'échelle caractéristique du pixel de la caméra. Dans le cas où les taches de traceur sont initialement très grandes par rapport à cette résolution, la PDF mesurée reste proche d'une double fonction delta. On s'attend à ce qu'un écoulement turbulent homogénéise ce champ, en étirant les structures initia-

lement à grande échelles, transférant ainsi les fluctuations vers des échelles de plus en plus petites. Lorsque l'échelle spatiale de ces fluctuations est très inférieure à celle de l'instrument de mesure, l'écoulement observé est homogène (ici gris). La PDF est dans ce cas une simple fonction delta.

Quelle est la séquence de PDF correspondant aux étapes intermédiaires du mélange, i.e. d'une double fonction delta vers un pic centré autour de la moyenne ? Nous abordons ce problème d'un point de vue phénoménologique. Nous proposons un modèle de mélange où la PDF du champ filtré à l'échelle  $l$  évolue par auto-convolution.

### Plan du chapitre

Nous présentons dans un premier temps différentes approches phénoménologiques du mélange d'un traceur par un écoulement turbulent. Notre contribution est de proposer une équation continue pour décrire un processus de mélange par auto-convolution. Nous comparons cette approche à d'autres modèles de mélange. Nous discutons ensuite de l'intérêt de ces modèles et des hypothèses sous-jacentes, en nous appuyant sur des résultats expérimentaux.

## 6.1 Modèles

Un modèle pour l'évolution temporelle de la PDF d'un traceur mélangé par des processus de cascades turbulentes doit au moins satisfaire aux propriétés suivantes :

- i) conservation de la norme et de la moyenne.
- ii) conservation des bornes inférieures et supérieures des valeurs de concentrations du champs microscopique.

Dans le cadre de nos études phénoménologiques, nous souhaitons de plus que l'équation d'évolution de la PDF satisfasse aux propriétés suivantes

- iii) décroissance temporelle de la variance.
- iv) convergence aux temps longs vers une gaussienne centrée autour de la moyenne.

Le choix d'une convergence vers une gaussienne est une hypothèse corroborée par certaines observations expérimentales [64] et numériques [127], mais

c'est un sujet controversé.

Une première classe de modèles, très utilisée dans un contexte industriel, est fondée sur une description du mélange “par interaction avec la moyenne” (IEM) [63], aussi appelée “Linear mean square estimate” (LMSE) [84]. Ces modèles satisfont aux critères i-ii-iii, mais pas au critère iv : la PDF ne tend pas vers une gaussienne. Il existe une approche alternative : les modèles de type coalescence-dispersion (CD), initiés par les travaux de Curl [95], visant à décrire l'interaction entre les gouttes dans un système à deux fluides.

- **Coalescence** : deux gouttes de même volume, portant des concentrations indépendantes d'un traceur passif  $\sigma_0$  et  $\sigma'_0$ , décrites par la même loi de probabilité  $\rho_0(\sigma)$ , forment une nouvelle goutte portant la concentration moyenne  $\sigma = (\sigma_0 + \sigma'_0)/2$ .
- **Dispersion** : cette goutte se sépare immédiatement en deux nouvelles gouttes qui portent chacune la concentration  $\sigma$ .

La PDF  $\rho$  de mesurer une certaine valeur de traceur après la dispersion est la **convolution** de la PDF  $\rho_0$  avant la coalescence, avec un facteur de contraction :

$$\rho(\sigma) = 2 \int \rho_0(2\sigma - \sigma_0) \rho_0(\sigma_0) d\sigma_0$$

Dans ce qui suit, nous proposons une application de cette idée à la description du mélange par les effets de cascade turbulente, que nous comparons à d'autres approches.

## Un modèle pour la cascade turbulente

Nous proposons dans cette partie un modèle basé sur le processus de convolution de type coalescence-dispersion décrit ci-dessus. Le but est d'obtenir une équation d'évolution temporelle pour la PDF du champ de traceur filtré à une échelle  $l$ , correspondant à la résolution de l'observateur (pixel, taille du capteur...). Les **effets de diffusion moléculaire** du traceur sont **négligés**. On se place dans la limite des grands nombres de Schmidt  $Sc = \nu/K$  où  $K$  est la diffusivité du traceur. Plus précisément, on suppose que l'échelle de Batchelor  $l_b = \eta Sc^{-1/2}$ , à partir de laquelle les effets diffusifs interviennent, est très inférieure à l'échelle de résolution  $l$ , où  $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$  est l'échelle de Kolmogorov.

Intéressons-nous dans un premier temps à la structure spatiale du champ de traceur. La déformation par la turbulence de lignes et de surfaces ma-

6. LE MÉLANGE TURBULENT COMME UN PROCESSUS  
D'AUTO-CONVOLUTION

---

térielles, ainsi que l'évolution d'une petite tache, initialement sphérique, advectée par l'écoulement, ont été étudiées expérimentalement [14], numériquement [53], et analytiquement dans le cadre de modèles simplifiés d'écoulements [41]. Cette dernière étude montre qu'une sphère de traceur initialement petite est rapidement transformée en un ruban. Dans la suite, **nous supposons que le champ de scalaire est localement décrit par une succession de feuillets ou de rubans**, contractés dans une direction . On néglige donc la formation de structures en "cigare" créées lorsqu'il existe deux directions de contraction en un point donné. Soit  $r(t)$  l'épaisseur du feuillet dans la direction contractée, et  $s(t)$  le taux de contraction :

$$\frac{dr}{dt} = -s(t)r \quad \Leftrightarrow \quad r(t) = \frac{r_0}{f(t)} \quad \text{avec} \quad f(t) = \exp\left(\int_0^t s(t')dt'\right)$$

On décrit un écoulement turbulent simplifié, en faisant deux hypothèses :

- **i)** A l'échelle  $l$ , **le taux de contraction  $s(t)$  est le même pour tous les feuillets à un instant donné.** Dans un écoulement réel, ces variations sont liées à l'intermittence de la turbulence.
- **ii)** Deux feuillets séparés d'une distance  $l$  sont supposés indépendants : **l'écoulement turbulent associe de manière aléatoire des éléments du fluides provenant de régions séparées initialement par une distance supérieure à l'échelle de corrélation du champ de traceur.**

Supposons que la probabilité  $\rho_l(\sigma, t)$  de mesurer une certaine concentration  $\sigma$  à l'échelle  $l$  au temps  $t$  soit connue. D'après l'hypothèse **i)**, quand l'épaisseur  $l$  d'un feuillet est divisée par 2, celle des autres feuillets l'est aussi. Soit  $\tau_2$  l'intervalle de temps qui correspond à une telle contraction. D'après l'hypothèse **ii)**, deux feuillets adjacents au temps  $t + \tau_2$  sont indépendants. On retrouve alors un processus de type coalescence dispersion, illustré figure 6.1. La PDF au temps  $t + \tau_2$  est la convolution de la PDF à l'instant initial, avec un facteur de contraction :

$$\rho_l(\sigma, t + \tau_2) = 2 \int \rho_l(\sigma_1, t) \rho_l(2\sigma - \sigma_1, t) d\sigma_1$$

Ce produit de convolution s'exprime comme un produit des transformées de Laplace (la concentration  $\sigma$  est supposée positive ; on peut toujours revenir à ce cas en changeant  $\sigma$  en  $\sigma - \min(\sigma)$ ) :

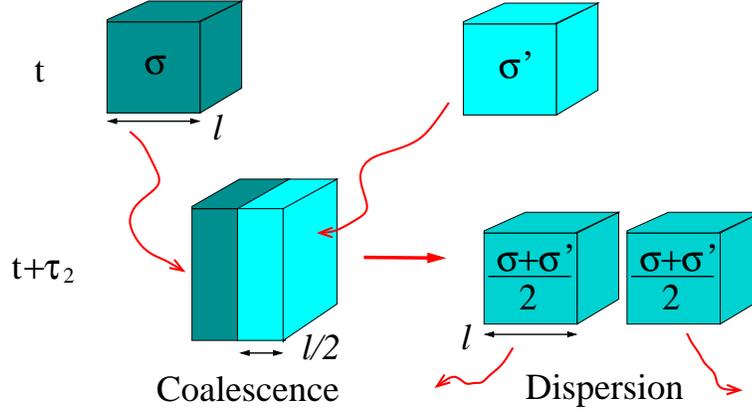


FIG. 6.1: On considère deux éléments de fluides de taille  $l$ , portant des concentrations  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Dans l'intervalle de temps  $\tau_2$ , ces éléments sont contractés d'un facteur deux et assemblés l'un à l'autre, le volume total étant conservé.

$$\widehat{\rho}_l(\kappa, t + \tau_2) = [\widehat{\rho}_l(\kappa/2, t)]^2 \quad \text{avec} \quad \widehat{\rho}_l(\kappa) = \int_0^{+\infty} \rho_l(\sigma) e^{-\kappa\sigma} d\sigma \quad (6.1)$$

En faisant un raisonnement similaire pour des temps  $\tau_n$  tels que la largeur des feuillets est divisée par un facteur  $n$ , on trouve :

$$\widehat{\rho}_l(\kappa, t + \tau_n) = [\widehat{\rho}_l(\kappa/n, t)]^n \quad (6.2)$$

Afin d'obtenir un processus continu associé à cette évolution discrète, on considère  $n = 1 + \epsilon$ , avec  $\epsilon = s(t)dt$  dans (6.2). On trouve alors  $\widehat{\rho}_l(\kappa + \epsilon\kappa, t + dt) = [\widehat{\rho}_l(\kappa, t)]^{1+\epsilon}$ . On prends ensuite la limite  $dt \rightarrow 0$ , et on obtient une équation dynamique pour  $\widehat{\rho}_l$  :

$$\partial_t \widehat{\rho}_l = s(t) [\widehat{\rho}_l \ln \widehat{\rho}_l - \kappa \partial_\kappa \widehat{\rho}_l] \quad (6.3)$$

On vérifie que la norme et la moyenne sont conservées, et que la solution est donnée par

$$\widehat{\rho}_l(\kappa, t) = \left[ \widehat{\rho}_l\left(\frac{\kappa}{f(t)}, 0\right) \right]^{f(t)} \quad (6.4)$$

Pour les valeurs entières de  $f(t)$ , on retrouve bien l'expression (6.2). On a donc obtenu un processus continu qui correspond à la description discrète du mélange par convolutions successives de feuillets. La variance décroît en  $c_2 = c_2^0/f$ . Cette relation peut être utilisée pour déterminer la fonction  $f$ . L'équation (6.3) et sa solution (6.4) décrivent un processus de convergence vers une gaussienne prédite par le théorème de la limite centrale. On vérifie cela en calculant les cumulants  $c_m(t) = (-\partial_\kappa)^m \ln(\rho_l(\kappa, t))|_{\kappa=0}$  à partir de (6.4) :

$$\forall m \geq 1 \quad c_m(t) = \frac{c_m^0}{[f(t)]^{m-1}} \quad (6.5)$$

Les trois premiers cumulants correspondent aux trois premiers moments centrés. La valeur relative des cumulants d'ordre  $m \geq 3$  par rapport au cumulants d'ordre 2 (la variance) décroît avec le temps ( $c_m(t)/[c_2(t)]^{m/2} \sim f(t)^{-(m/2-1)}$ ). Ainsi, n'importe quelle distribution initiale converge vers une gaussienne, caractérisée par des cumulants d'ordre supérieurs à 2 nuls.

### Discussion des hypothèses

**i) Taux d'étirement  $s(t)$  constant en espace** On a négligé les fluctuations du taux d'étirement en considérant que tous les feuillets sont contractés avec le même rapport en tout point de l'écoulement. Dans un écoulement réel, ce taux de contraction, et la direction associée, varient dans l'espace. On s'attend à ce que cet effet soit très important en présence de structures cohérentes : considérons la concentration au centre d'une structure tourbillonnaire, où l'étirement est très faible ; si ce tourbillon persiste durant le mélange, la concentration en traceur à l'intérieur de cette structure évolue lentement par rapport au reste de l'écoulement où la traceur est rapidement mélangé. On voit que les fluctuations de taux d'étirement induisent une corrélation entre le champ de vitesse et la concentration en traceur. Cette corrélation n'est pas prise en compte par le modèle de cascade turbulente.

**ii) Indépendance des feuillets** Une autre limite du modèle vient de l'hypothèse selon laquelle deux feuillets d'épaisseur  $l$  (donnée par l'échelle

de mesure) juxtaposés les uns aux autres ont des concentrations indépendantes. Dans le cas d'un champ de traceur composé de taches noires dans un fond blanc, cette hypothèse impose une condition très contraignante à la nature du champ de traceur : l'échelle caractéristique des structures blanches et noires doit être plus petite que  $l$ . Cela est toujours justifié aux temps longs, en absence de source, mais est incompatible avec certaines conditions initiales. En particulier, le modèle ne décrit pas correctement l'évolution initiale d'une PDF du champ de traceur filtré à l'échelle  $l$  composée de deux pics distincts. Le modèle prévoit la formation d'un troisième pic central aux premiers stades du mélange. Cela n'est jamais observé expérimentalement. Afin de comprendre en quoi la présence de plusieurs pics dans la PDF initiale du champ filtré contredit l'hypothèse ii, regardons les caractéristiques du champ de traceur associé à cette PDF. Prenons pour simplifier le cas d'un champ en deux dimensions. Un pic très étroit autour d'une concentration  $c$  correspond nécessairement à l'existence de surfaces de traceur de concentration homogène  $c$  et d'échelle caractéristique très supérieure à  $l$ . D'où la contradiction avec l'indépendance des feuillets de taille  $l$  aux temps courts.

**Conclusion.** L'hypothèse d'indépendance est la plus forte et la moins réaliste. Elle n'est valable que si le champ de traceur ne comporte pas de structures de tailles très supérieures à la résolution  $l$  de la mesure. Cela signifie que le modèle est valide pour un champ de traceur déjà suffisamment mélangé.

## L'approche de Curl

L'idée d'appliquer le schéma de coalescence-dispersion au mélange turbulent n'est pas nouvelle. Elle fut initialement proposée par Curl [95], puis fit l'objet de nombreuses études, avec notamment les contributions de Pope [103, 108]. On obtient une équation dynamique en supposant que la PDF au temps  $t + dt$  est une interpolation linéaire entre la PDF au temps  $t$  et sa convolution, le "poids" relatif  $\epsilon = 2s(t)dt$  de la convolution étant d'autant plus élevé que le taux de mélange turbulent  $s(t)$  est important (Le facteur 2 dans l'expression de  $\epsilon$  a été introduit de manière à ce que  $s(t)$  soit interprété comme le taux de décroissance de la variance des PDF).

$$\widehat{\rho}_l(\kappa, t + dt) = \epsilon \widehat{\rho}_l^2(\kappa/2, t) + (1 - \epsilon) \widehat{\rho}_l(\kappa, t) \quad (6.6)$$

## 6. LE MÉLANGE TURBULENT COMME UN PROCESSUS D'AUTO-CONVOLUTION

---

Si l'on considère un processus d'évolution discret en prenant  $\epsilon = 1$ , on obtient une description du mélange par auto-convolution, correspondant au modèle de cascade turbulente présenté précédemment (la PDF tend alors vers une gaussienne). Ce processus discret a été utilisé par Pumir *et al* [6]. Si l'on prend la limite  $dt \rightarrow 0$ , on obtient une équation d'évolution pour la transformée de Laplace de la PDF

$$\partial_t \widehat{\rho}(\kappa) = 2s(t) [\widehat{\rho}(\kappa/2) - \widehat{\rho}(\kappa)] \quad (6.7)$$

Cette équation, parfois appelée modèle de Curl, satisfait aux critères i-ii-iii-iv énoncés en début de chapitre : la norme et la moyenne sont conservées, la variance décroît en  $\partial_t c_2 = -sc_2$ , d'où  $c_2 = c_2^0/f(t)$ , avec  $f(t) = \exp\left(\int_0^t s(t')dt'\right)$ . Au temps long, ce modèle prévoit la relaxation de n'importe quelle condition initiale en un pic centré autour de la moyenne. Autour de ce pic, la PDF a une forme de cloche, mais n'est pas gaussienne. En particulier, le facteur de "flatness"  $\overline{(\sigma - \bar{\sigma})^4}/\overline{(\sigma - \bar{\sigma})^2}^2$  tend vers l'infini [108]. **D'un point de vue pratique, cette équation d'évolution reste intéressante : son implémentation numérique est plus aisée que celle des autres modèles d'évolution.** Cependant, la convolution est coûteuse en temps de calcul. Pope propose un modèle stochastique associée à cette équation déterministe, plus efficace en terme de temps de calcul.

### L'approche IEM/LMSE

Le modèle d'interaction avec la moyenne IEM/LMSE, mentionné dans l'introduction, peut être obtenu comme un cas limite des modèles de type coalescence-dispersion. Soit un feuillet de concentration  $\sigma'$  au temps  $t$ , de distribution  $\rho(\sigma', t)$ . On considère qu'au temps  $t + dt$ , la concentration  $\sigma$  de ce même feuillet est donné par  $\sigma = (1 - \epsilon)\sigma' + \epsilon\sigma''$ , où  $\epsilon = s(t)dt/2$ . La concentration  $\sigma''$  est supposée indépendante de  $\sigma'$ , et décrite par la même distribution. Cela revient à supposer que le feuillet initial a été mélangé à une petite partie d'un autre feuillet, le mélange étant d'autant plus efficace que l'intensité  $s(t)$  de la turbulence est importante. Le facteur 2 dans l'expression de  $\epsilon$  a été introduit de manière à ce que  $s(t)$  soit interprété comme le taux de décroissance de la variance des PDF. On obtient alors

$$\rho(\sigma, t + dt) = \frac{1}{1 - \epsilon} \int \rho(\sigma'', t) \rho\left(\frac{\sigma - \epsilon\sigma''}{1 - \epsilon}, t\right) d\sigma''$$

En prenant la limite  $dt \rightarrow 0$ , on retrouve l'équation du modèle IEM/LSME [63, 84], qui fut initialement proposée indépendamment du contexte des modèles de coalescence-dispersion :

$$\partial_t \rho = \frac{1}{2} s(t) \partial_\sigma [\rho (\sigma - \bar{\sigma})] \quad (6.8)$$

où  $\bar{\sigma}$  est la concentration moyenne de traceur. La variance décroît en  $\partial_t c_2 = -s c_2$ . De manière à comparer la structure de ce modèle aux autres approches, on peut écrire cette équation sous la forme  $\partial_t \hat{\rho} = s [-\kappa \hat{\rho} - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}] / 2$ . Il existe une solution explicite, ne dépendant que de la condition initiale et de  $f(t) = \exp\left(\int_0^t s(t') dt'\right)$  :

$$\rho(\sigma, t) = \rho(\sigma' + \bar{\sigma}, t) = f^{1/2} \rho(f^{1/2} \sigma' + \bar{\sigma}, 0) \quad (6.9)$$

où l'on a décomposé  $\sigma = \sigma' + \bar{\sigma}$  en une partie moyenne et une partie fluctuante. On vérifie que la gaussienne est bien une solution autosimilaire. En revanche, ce n'est pas une solution attractive. Le modèle IEM/LMSE prédit une séquence de PDF se contractant autour de la moyenne, tout en conservant la forme de la PDF initiale : **l'effet de la cascade turbulente est décrit par une simple contraction de la PDF, dépendant d'un seul paramètre**. Deux pics initialement distincts le restent, tout en se rapprochant autour de la moyenne (voir par exemple la figure 6.2), ce qui est contraire aux observations expérimentales [64]. Plusieurs améliorations des modèles IEM/LMSE ont été proposées pour essayer de résoudre ce problème [109, 96, 104, 128, 35]. Nous évoquerons certaines de ces approches dans le paragraphe "Tests des modèles".

## L'approche de Villermaux et Duplat

Plus récemment, un modèle de mélange par agrégation de feuillets de traceurs a été proposé par Villermaux et Duplat [42], à la faveur de l'étude expérimentale de divers aspects et configurations du mélange d'un traceur [40].

Bien que ce modèle soit lui aussi fondé sur un processus de convolution, le point de vue est différent : il s'agit de décrire le mélange d'une tache de colorant dans un fond uniforme.

Le modèle distingue deux mécanismes concomitants dans le mélange d'un traceur. L'un de ces mécanisme décrit l'interaction diffusive entre deux

6. LE MÉLANGE TURBULENT COMME UN PROCESSUS  
D'AUTO-CONVOLUTION

---

feuillet de traceurs dont l'épaisseur est fixée par l'échelle de Batchelor. Ces deux feuillets, de concentration  $\sigma'$  et  $\sigma''$  indépendantes, décrits par la même distribution  $\rho_0$ , en créent un troisième, dont la concentration est donnée par **l'addition**  $\sigma = \sigma' + \sigma''$  des concentrations des feuillets initiaux. La PDF de la concentration en traceur du feuillet ainsi créé est

$$\rho(\sigma) = \int \rho_0(\sigma')\rho_0(\sigma - \sigma')d\sigma'$$

La transformée de Laplace de cette équation donne

$$\widehat{\rho}(\kappa) = \widehat{\rho}^2(\kappa)$$

On retrouve ainsi l'équation (6.1) obtenue dans le cadre du modèle de cascade turbulente, sans le facteur de contraction 1/2 dans l'argument de  $\rho_0$ . De fait, ce mécanisme a des similarités avec le processus de coalescence-dispersion de Curl, mais se distingue de ce dernier par le point de vue adopté : l'interaction entre les feuillets est réalisée par un processus de diffusion, le rôle de la turbulence étant de réunir côte à côte deux feuillets indépendants. Ce processus, pris isolément, ne conserve pas la moyenne en traceur. D'où le rôle d'un second mécanisme, lié à l'évolution d'un feuillet indépendamment des autres. Cette évolution dépend de l'histoire des étirements subit par le feuillet. Qualitativement, la contraction du feuillet par le champ de vitesse est compensée par la diffusion moléculaire, l'équilibre entre les deux effets fixant la largeur du feuillet à l'échelle de Batchelor. Ce mécanisme a pour effet de diminuer la concentration du feuillet. Dans ce qui suit, nous donnons les différentes étapes menant à une équation d'évolution pour la PDF, en suivant la présentation de Duplat *et al* [40].

Afin de représenter un processus continu rendant compte du **premier mécanisme, à savoir l'interaction entre feuillets**, deux approches limites peuvent être retenues. Une première possibilité est de considérer une interpolation entre la PDF initiale et la PDF convoluée, le poids de la PDF convoluée  $\epsilon = s(t)dt$  dépendant de l'intensité du mélange :

$$\widehat{\rho}(\kappa, t + dt) = \epsilon \widehat{\rho}^2(\kappa, t) + (1 - \epsilon) \widehat{\rho}(\kappa, t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t \widehat{\rho} = s (\widehat{\rho}^2 - \widehat{\rho})$$

dont la solution asymptotique est une exponentielle  $\rho \sim \exp(-\sigma/f(t))$ . Cela revient à adopter le point de vue de Curl (6.7) dans le cadre d'une

interaction diffusive entre feuillets (c'est à dire sans le facteur de contraction  $1/2$  dans l'argument de la PDF convoluée). Une autre possibilité est de considérer que la PDF initiale est convoluée à l'ordre  $1 + \epsilon$  pour  $\epsilon = s(t)dt$  :

$$\widehat{\rho}(\kappa, t + dt) = \widehat{\rho}^{1+\epsilon}(\kappa, t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t \widehat{\rho} = s \widehat{\rho} \ln \widehat{\rho}$$

dont la solution est  $\widehat{\rho}(\kappa, t) = \widehat{\rho}^{f(t)}(\kappa, 0)$ . Cela revient à adopter le point de vue du modèle de cascade turbulente (6.3). Ces deux possibilités correspondent à deux cas limites du modèle de Villermaux et Duplat pour l'interaction entre feuillets, donné par [42] :

$$\partial_t \widehat{\rho} = s(t) f(t) (\widehat{\rho}^{1+1/f} - \widehat{\rho}) \quad \text{avec} \quad f = \exp\left(\int_0^t s(t') dt'\right)$$

Dans la limite  $f \rightarrow 1$  (étape initiale du mélange), on retrouve l'équation de type Curl, et dans la limite  $f \rightarrow +\infty$  (étapes finales du mélange), on retrouve l'équation de type cascade turbulente.

**Le second mécanisme, décrivant la diminution de la concentration d'un feuillet isolé** due à l'équilibre entre processus d'étirement et de diffusion dans la direction de contraction, est décrit par  $\rho(\sigma + \delta\sigma, t + dt) = \rho(\sigma, t)$ , où  $\delta\sigma/\sigma = -s(t)dt$ , ce qui donne

$$\partial_t \rho = s(t) \partial_\sigma (\sigma \rho) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \widehat{\rho} = -s(t) \kappa \partial_\kappa \widehat{\rho}$$

Finalement, l'équation d'évolution de la PDF est donnée par l'addition des deux mécanismes présentés ci dessus :

$$\partial_t \widehat{\rho} = s(t) [f(t) [\widehat{\rho}^{1+1/f} - \widehat{\rho}] - \kappa \partial_\kappa \widehat{\rho}], \quad (6.10)$$

On vérifie que la moyenne et la norme sont conservées et la variance décroît en  $\partial_t c_2 = -s(t) [c_2 - \bar{\sigma}/f(t)]$ .

## Discussion

Ce modèle prédit la convergence d'une distribution initiale arbitraire vers une forme universelle, les gamma PDF (dans le cas où  $\bar{\sigma} \neq 0$ ). Cette séquence de gamma PDF converge elle-même vers une gaussienne autour

## 6. LE MÉLANGE TURBULENT COMME UN PROCESSUS D'AUTO-CONVOLUTION

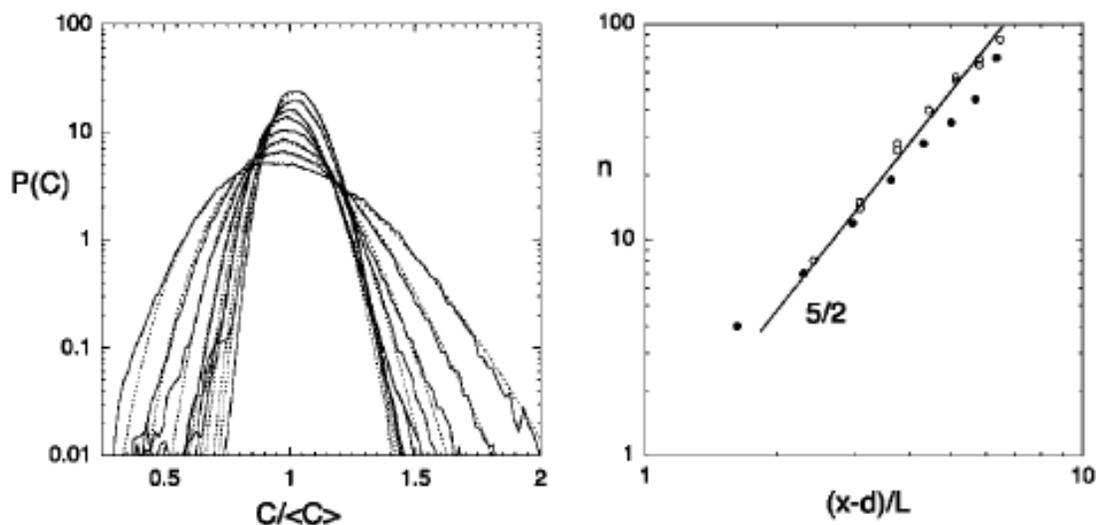


FIG. 6.2: Résultats expérimentaux de Villermaux et Duplat [42] (dispositif similaire à celui présenté dans la partie " tests expérimentaux" ). Les PDF sont ajustées avec une succession de Gamma PDF de même variance. La figure de droite représente l'inverse de la variance en fonction du temps ; .

de la moyenne tout en restant asymétrique. Ces distributions décrivent effectivement la succession de PDF mesurées par Villermaux et Duplat [42], reproduites figure 6.2.

En étudiant le rôle de l'injection dans des expériences similaires, nous montrerons que cette convergence n'est pas observée dans tous les cas. Les séquences de PDF ne semblent pas être universelles, tout au moins dans les régimes intermédiaires étudiés.

Le modèle d'agrégation de filaments a un sens pour décrire le mélange d'une tache initiale de colorant (de concentration  $\sigma$ ) rapidement transformée en un enchevêtrements de filaments de traceur dans un milieu de concentration 0. En pratique, il ne peut pas être appliqué à des configurations plus générales. En particulier, l'équation de décroissance de la variance  $\partial_t c_2 = -s(t) [c_2 - \bar{\sigma}/f(t)]$ , où  $\bar{\sigma}$  est la concentration moyenne en traceur, n'est pas invariante par une translation  $\sigma \rightarrow \sigma + cst$ . Remarquons toutefois que dans la limite diluée ( $\bar{\sigma} \rightarrow 0$ ), l'évolution de la variance ne dépend pas de la moyenne de concentration en traceur.

Remarquons cependant que l'application du modèle au cas du mélange d'une PDF initialement symétrique, composée de deux pics, décrit correctement la séquence de PDF par un micro-mélangeur chaotique [134]. Pour autant, l'application du modèle dépend là aussi de la convention choisie pour l'origine de la concentration. De plus, il n'est pas montré que le modèle d'agrégation donne une meilleure prédiction qu'une simple évolution par auto-convolution.

## Résumé

- Le modèle d'agrégation de filaments est équivalent à un simple processus de convolution aux temps longs, mais prédit une évolution initiale différente. L'idée d'inclure un processus autre que la convolution pour les premières étapes du mélange est intéressante (et nécessaire), mais
- il n'est pas montré que les étapes initiales du mélange sont bien décrites par ce modèle.
- L'intérêt de cette approche est de donner une explication physique pour l'évolution des PDF, que ne fournissent pas les modèles IEM/LSME, ou le modèle de Curl. Cependant, le modèle d'agrégation ne se généralise pas dans un contexte pratique : les équations ne sont pas invariantes par translation de la concentration.

## Lien avec les approches “rigoureuses” du scalaire passif

Les modèles présentés précédemment sont des approches phénoménologiques. Le problème du scalaire passif a aussi fait l'objet de nombreuses contributions théoriques [9], dans le cadre de modèles simplifiés d'écoulements. Citons par exemple le modèle de Kraichnan, où le champ de vitesse est aléatoire, delta corrélé en temps. L'idée de ces approches est que les PDF du traceur ne dépendent pas de la structure précise de la turbulence, mais sont associées à certaines propriétés statistiques “universelles”.

Ces modèles “jouets”, pertinents pour décrire des propriétés de la turbulence à haut nombre de Reynolds, ont été développés suite à l'observation de propriétés d'intermittence très nettes pour les incréments du traceur. Les incréments sont définis par la différence des concentrations en traceur mesurées à deux points séparés d'une distance  $r$ . Nous définissons ici l'intermittence comme l'écart à une distribution gaussienne. Plus la distance

de mesure  $r$  entre les incréments est petite, plus l'intermittence augmente. Au-delà de l'échelle intégrale de l'écoulement, la PDF des incréments est proche d'une gaussienne. L'attention a surtout été focalisée sur les incréments, car les PDF du traceur lui-même sont proches d'une gaussienne (pour un traceur suffisamment mélangé, à haut nombre de Reynolds). Toutefois, en présence d'un gradient moyen en traceur, la queue des PDF observées s'approche d'une exponentielle.

De nombreux résultats rigoureux ont été obtenus dans ce contexte durant les 20 dernières années [52]. Les résultats théoriques prédisent les exposants des différents moments des PDF des incréments, bien observés expérimentalement [5].

Cependant, ces modèles ne peuvent être utilisés dans les cas pratiques qui nous intéressent ici pour deux raisons : i) les écoulements que l'on veut décrire n'ont pas les propriétés des modèles de Kraichnan (on étudie des écoulements à nombre de Reynolds modérés) ii) les approches "rigoureuses" ne permettent pas de décrire directement l'évolution temporelle de la forme globale des PDF.

## 6.2 Tests des modèles

Nous présentons dans cette partie les résultats de deux études menées en vue de tester le modèle d'évolution par auto-convolution [7, 132]. En premier lieu, nous comparons ce modèle et l'approche IEM/LMSE, à partir de résultats de simulations numériques directes d'Eswaran et Pope [127]. en second lieu, nous proposons une étude expérimentale du mélange, à partir d'un dispositif similaire à celui de Villermaux et Duplat, la nouveauté venant de l'étude du rôle du type d'injecteur utilisé.

### Comparaison avec une DNS

Nous considérons les résultats de simulations numériques directes (DNS) d'Eswaran et Pope [127]. Ils observent la convergence d'une distribution initialement bimodale vers une gaussienne de variance décroissante, le traceur étant injecté dans un écoulement turbulent isotrope.

On compare figure 6.2 le modèle d'évolution par auto-convolution (6.4) et le modèle IEM-LMSE (6.9) aux résultats de la DNS [127]. Les deux modèles nécessitent en entrée la forme de la PDF initiale. On ne prend pas

comme condition initiale la PDF de la DNS au temps  $t = 0$ . On a expliqué au paragraphe “discussion des hypothèses” (section 1) que celui-ci ne peut rendre compte correctement du mélange initial quand la PDF contient deux pics étroits. On choisit donc de prendre comme condition initiale la PDF au temps suivant (en rouge sur la figure 6.2); cette distribution contient deux pics moins étroits que la précédente. Connaissant la variance initiale  $c_2^0$  associée à cette PDF, et la variance  $c_2(t)$  au temps pour lequel on souhaite déterminer la forme de la PDF, on calcule  $f(t) = c_2^0/c_2(t)$  et on applique les solutions des modèles d’évolution par auto-convolution (6.4) et des modèles IEM-LMSE (6.8), représentés respectivement figure 6.2-b et 6.2-c.

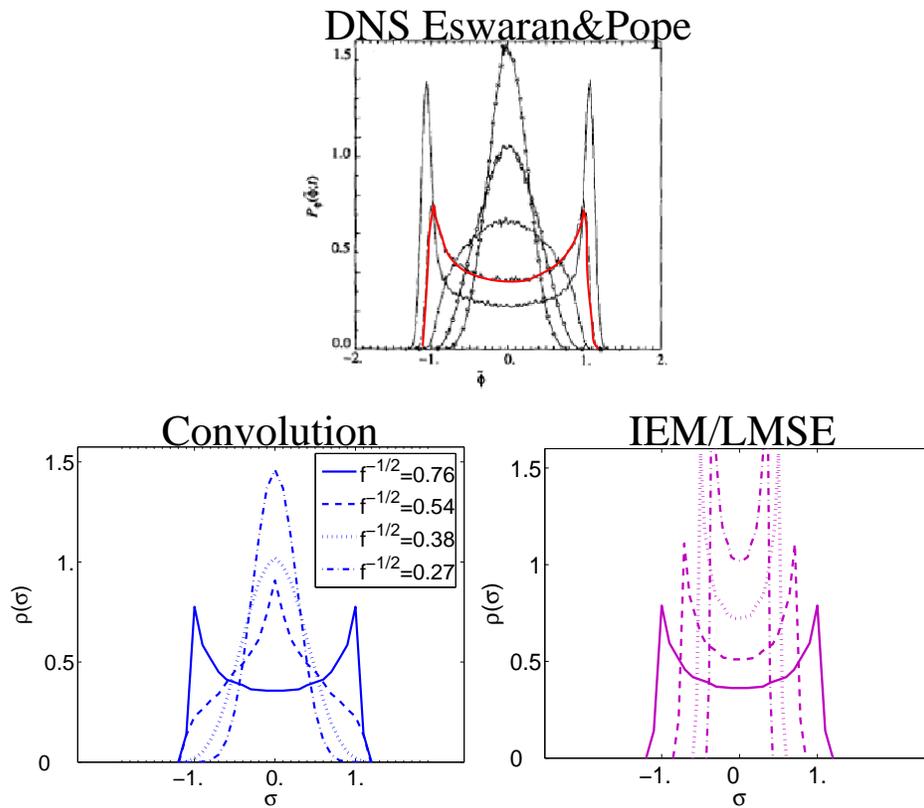


FIG. 6.3: On a reproduit la figure 10 d’Eswaran et Pope [127]. La PDF en rouge correspond à la condition initiale pour les modèles étudiés.

On s’intéresse dans un premier temps au modèle par auto-convolution. Comme dans la DNS de [108], les deux pics initiaux se déplacent initia-

lement vers la valeur moyenne, leur intensité diminue jusqu'à ce qu'ils ne forment plus qu'un pic autour de la moyenne. Bien que le modèle n'ait aucun paramètre ajustable, hormis la variance de la PDF, les prédictions restent qualitativement proches des résultats de la simulation numérique. On note cependant l'existence d'un pic anormalement étroit autour de la moyenne, au centre de la courbe en forme de cloche. Cette anomalie a été expliquée au paragraphe sur les limites du modèle, elle est due à l'indépendance des feuillets de traceur "moyennés" à l'échelle de mesure  $l$  donnée ici par le pas de grille de la DNS.

On a vu auparavant que le modèle IEM/LMSE prévoit une contraction de la PDF autour de la moyenne, représentée figure 6.2. La séquence de PDF ainsi prédite est très différentes des PDF données par la DNS. Citons deux contributions consacrées à l'amélioration du modèle IEM, les résultats de ces études étant comparées aux mêmes DNS :

- Sabelnikov *et al* proposent de considérer un processus stochastique pour l'échelle de temps  $1/s(t)$  [128]. Cela améliore la prédiction des PDF, mais les deux pics initiaux persistent plus longtemps que dans la DNS [127], et la PDF ne converge pas vers une gaussienne.
- L'addition d'un terme supplémentaire  $Ac_2\partial_{\sigma\sigma}\rho$  dans le membre de droite de l'équation 6.8 permet de décrire la relaxation de n'importe quelle condition initiale vers une gaussienne [108]. L'ajout de ce terme induit un problème important : les bornes initiales des concentrations en traceur ne sont plus conservées. Pour pallier cet effet, plusieurs modèles de fermeture pour la PDF jointe des vitesses et du traceur ont été proposés. C'est le cas du modèle de Fox [96]. Les résultats obtenus sont très proches de la DNS [127], sauf pour l'évolution initiale qui prédit des pics anormalement élevés pour les valeurs de concentrations extrémales. Remarquons cependant que l'addition d'un terme de diffusion dans l'équation pour la PDF ajoute un paramètre supplémentaire.

## Comparaison avec des expériences en laboratoire

L'article qui suit est une étude expérimentale du mélange. Un colorant fluorescent est injecté dans une conduite de section rectangulaire. Le colorant est simultanément advecté et mélangé par l'écoulement dans la conduite. Le nombre de Reynolds ( $Re \sim 10^4$ ) est tel qu'un régime turbulent "modéré" est établi. Les PDF de concentrations en colorant sont mesurées à

des distances croissantes de l'injection. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'injecteur, la PDF devient de plus en plus étroite et centrée autour de la moyenne. Une convergence vers une succession de gamma-PDF avait été auparavant observée dans un dispositif similaire [42]. Nous montrons qu'une telle convergence n'est pas universelles, au sens où la séquence des PDF mesurées dépend du type d'injection (par une ligne, ou par un point source). Nous déterminons ensuite les conditions d'application des modèles d'évolution par auto-convolution.

**Is Turbulent Mixing a Self-Convolution Process?**

Antoine Venaille\* and Joel Sommeria

*Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels (LEGI) CNRS-UJF-INPG, Coriolis, BP53, 38041 Grenoble, cedex9, France*  
(Received 28 November 2007; published 13 June 2008)

Experimental results for the evolution of the probability distribution function (PDF) of a scalar mixed by a turbulent flow in a channel are presented. The sequence of PDF from an initial skewed distribution to a sharp Gaussian is found to be nonuniversal. The route toward homogenization depends on the ratio between the cross sections of the dye injector and the channel. In connection with this observation, advantages, shortcomings, and applicability of models for the PDF evolution based on a self-convolution mechanism are discussed.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.234506

PACS numbers: 47.51.+a

Predicting the temporal evolution of the probability distribution function (PDF) of a tracer is of wide interest, in particular, for the dynamics of density stratified fluids or for reactive flows [1]. The scope of existing phenomenological approaches is to provide simple, efficient models to describe the evolution of the PDF, from an arbitrary initial condition to a sharp peak centered around the mean, representing the late stage of mixing.

One of the simplest and widely used models is the linear mean square estimate, also called interaction by exchange with the mean [2]. The main limitation of this model is that the PDF keeps its shape while it contracts around the mean by mixing. Many studies have been devoted to the improvement of this approach [3–7].

There exists an alternative class of models, based on a self-convolution process. The first occurrence of such a model is the coalescence dispersion (CD) mechanism of [8], originally intended to describe drop interactions in a two liquid system: two drops having independent scalar values  $\sigma_0$  and  $\sigma'_0$  coalesce into one drop having the average scalar value  $\sigma = (\sigma_0 + \sigma'_0)/2$ , which immediately splits into two drops with the same scalar value  $\sigma$ . The probability  $\rho$  to measure a given scalar value after coalescence is the convolution of the same probability function  $\rho_0$  before coalescence:  $\rho(\sigma) = 2 \int \rho_0(2\sigma - \sigma_0)\rho_0(\sigma_0)d\sigma_0$ . CD models with self-convolution have been widely studied and extended to turbulent flows [9] although some of the original underlying hypotheses become questionable [10]. Following the ideas of the CD approach, a model of aggregation of scalar streaks has been presented in [11]. In [12], a dynamical equation based on a pure self-convolution process is proposed for the coarse-grained PDF at a given scale  $l$ . The key idea is that random straining transfers scalar fluctuations toward scales smaller than  $l$ , so that the measured fluctuations are averaged over scale  $l$ .

The question of the PDF evolution of a passive tracer in a turbulent flow has been addressed experimentally in different configurations (see, for instance, [13,14]). For a flow without a mean scalar gradient, convergence from a very skewed PDF toward a Gaussian shape has been quali-

tatively observed, although some departure from gaussianity was noticed to persist even at late stages of mixing.

Surprisingly, there seem to be only few comparisons between phenomenological models and the laboratory experiments presented above. We consider here a fluorescent dye introduced in a channel, where it is advected by a turbulent flow. PDFs are measured at different locations along the channel. The PDF becomes sharper and sharper around the mean with increasing downstream distance from the injector. The sequence of PDF, from an initial skewed distribution to a sharp Gaussian, is found to be nonuniversal, depending on the injection system. Our aim here is to discuss the capability of models based on a self-convolution process to describe those experiments.

*Models.*—We consider an idealized case: the scalar field and the turbulent flow are supposed to be statistically homogeneous in space. We call  $\rho_l(\sigma, t)$  the PDF of a scalar value  $\sigma$  at time  $t$ , measured with a probe of size  $l$ . The scalar field measured by this probe is averaged at scale  $l$  by a low pass filter. The self-convolution model relies on two hypotheses: (1) it ignores fluctuations of the straining histories of scalar sheets and (2) it assumes independence of scalar values at two points separated by a distance  $l$ .

Hypothesis (1) implies that if the width of a scalar sheet, equal to  $l$  at time  $t = 0$ , is divided by 2 at time  $t$ , then the width of the adjacent sheets are also divided by a factor 2. This time interval  $t$  is related to the strain rate  $s$  by the relation  $\exp(\int_0^t s(t')dt') = 2$ . The probability to measure a given scalar value at scale  $l$  at time  $t$  is then  $\rho_l(\sigma, t) = 2 \int p_l(\sigma_1, 2\sigma - \sigma_1, 0)d\sigma_1$ , where  $p_l(\sigma_1, \sigma_2, 0)$  is the joint probability to measure the values  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  at two points separated by the distance  $l$ . The hypothesis (2) of independence gives  $\rho_l(\sigma, t) = 2 \int \rho_l(\sigma_1, 0)\rho_l(2\sigma - \sigma_1, 0)d\sigma_1$ .

Taking the limit of continuous times for this process, a dynamical equation for the Laplace transform of the PDF  $\hat{\rho}_l(\kappa) = \int_0^{+\infty} \rho_l(\sigma)e^{-\kappa\sigma}d\sigma$  has been provided in [12]:

$$\partial_t \hat{\rho}_l = s(t)[\hat{\rho}_l \ln \hat{\rho}_l - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}_l]. \quad (1)$$

Note that this equation is the continuous form of the discrete map used in [15]. The solution of (1) is

$$\hat{\rho}(\kappa, t) = \left[ \hat{\rho}\left(\frac{\kappa}{f}, 0\right) \right]^f, \quad f(t) = \exp\left(\int_0^t s(t') dt'\right). \quad (2)$$

From this expression, one can obtain the temporal evolution of the cumulant:  $c_n(t) = (-\partial_\kappa)^n \ln(\rho_l(\kappa, t))|_{\kappa=0} = c_n(0)/f^{n-1}$ . Cumulants are equal to the centered moments for  $1 \leq n \leq 3$ , and related to them for higher  $n$ . The application to the second moment yields  $dc_2/dt = -s(t)c_2$ . The cascade rate of variance is therefore proportional to the strain rate  $s$ .

The aggregation model provided in [11] leads to a different dynamical equation  $\partial_t \hat{\rho} = s(t)\{f(t)[\hat{\rho}^{1+1/f} - \hat{\rho}] - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}\}$ . The solution approaches a sequence of  $\gamma$  PDF at large time:  $\gamma(\sigma/\langle\sigma\rangle) = \frac{f^f}{\Gamma(f)} \frac{\sigma^{f-1}}{\langle\sigma\rangle^{f-1}} e^{-f\sigma/\langle\sigma\rangle}$ .

*Experimental setup.*—We drive a steady flow in a water duct of square section  $l_s \times l_s = 5 \times 5 \text{ cm}^2$ , at a steady volume rate  $Q$ , corresponding to a bulk velocity  $U = Q/(l_s^2)$ . The duct is 150 cm long. Straight circular buffer sections, 50 cm long and 5 cm in diameter, are fitted at both ends to reduce perturbations from end effects. Furthermore, the upstream buffer section is filled by a honeycomb. The fluorescent tracer (Rhodamin 6G) is introduced at 50 cm downstream from the duct inlet, and observed until an abscissa  $x = 80 \text{ cm}$  downstream, in a region of well established duct flow. Most of the experiments have been performed for  $U = 33 \text{ cm/s}$ , so the corresponding Reynolds number  $\text{Re} = l_s U/\nu$  is equal to  $1.6 \times 10^4$ . This is about 8 times the Reynolds number of transition, so that turbulence is well established. Test experiments performed at lower and higher  $\text{Re}$  (still of order  $10^4$ ) yield very similar results.

The mean kinetic energy dissipation rate is estimated using standard measurement on turbulent channel flows [16]:  $\epsilon \sim 8 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ . The corresponding dissipative Kolmogorov scale is  $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \sim 0.1 \text{ mm}$ . The velocity fluctuations can be estimated to be  $\sim 3.5\%$  of the mean velocity  $U$  [17]. The corresponding Taylor microscale and Reynolds numbers are, respectively,  $\lambda = 0.5 \text{ mm}$  and  $\text{Re}_\lambda \sim 5$ . This indicates the absence of a multiscale energy cascade.

The Schmidt number of the tracer is  $\text{Sc} = \nu/D \sim 1000$ , corresponding to a very low Batchelor scale  $l_b = \eta \text{Sc}^{-1/2} \sim 4 \mu\text{m}$ . Two kinds of dye injectors have been used. The first one is a tapped vertical tube with eight equidistant small holes, approximating a vertical line source with uniform flux. The second is a single tube of diameter 2 mm, curved in the downstream direction with dye flow rate adjusted to minimize shear with the background flow. It approximates a point source at the center of the duct.

Using the laser induced fluorescence technique, the scalar field is measured in a vertical plane perpendicular to the channel cross section (see Fig. 1). The PDF of concentration is measured as a histogram averaged over series of 300 images made at a given distance  $x$  down-

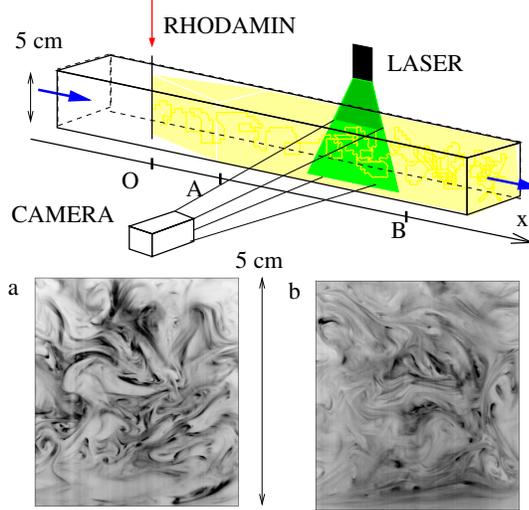


FIG. 1 (color online). Experimental setup. Images (a) and (b) correspond to points A and B.

stream from the injector. We limit the statistics to a central band,  $1/4$  of the duct width, where the mean concentration can be considered as uniform, and shearing by the mean flow negligible. Then the variation of the PDF with downstream distance can be assimilated as an evolution with time  $t = x/U$ , using the Taylor hypothesis. The spatial resolution of the images is  $50 \mu\text{m}$ . Analysis of the scalar spectra revealed no particular power law, as well as a cutoff at  $k \sim l^{-1}$  which corresponds to the laser sheet thickness  $l \sim 1 \text{ mm}$  (20 pixels). It implies that the scalar field measured is filtered at this scale  $l$ , which is also found to be a typical value of the scalar field correlation length.

*Mixing from a line source.*—Concentration PDFs measured at increasing distance from the injector are shown in Fig. 2. It has been compared to the prediction of the self-convolution model, shown as a solid line. For that purpose we start from the measured “initial” PDF at  $x = 36 \text{ cm}$ , and apply solution (2), with  $f(t)$  fitted to the measured variance  $c_2(t)$ . Strikingly, there is good agreement with the model based on a pure convolution mechanism. We see no tendency for the PDF to approach  $\gamma$  PDF (dashed line).

In Fig. 2, the initial PDF  $\rho_l(x_0)$  has been obtained by analyzing scalar fields at the resolution of the laser sheet. What would happen if the scalar field were coarse grained with a filtering function of length  $l' > l$ ? The PDF  $\rho_{l'}(x_0)$  is expected to become sharper and sharper around its mean value, as if the scalar field were “mixed.” This filtering process therefore has the qualitative effect of a diffusivity. The initial PDF  $\rho_l(x_0)$  is reproduced in Fig. 3. Let  $c_2(0)$  be its variance. We then compare the coarse-grained PDF  $\rho_{l'}(x_0)$  with the PDF  $\rho_l(x)$  measured at a distance  $x$  such that their variances have the common value  $c_2 = c_2(0)/2$ . We also plot the self-convolution of the initial PDF  $\rho_l(x_0)$ .

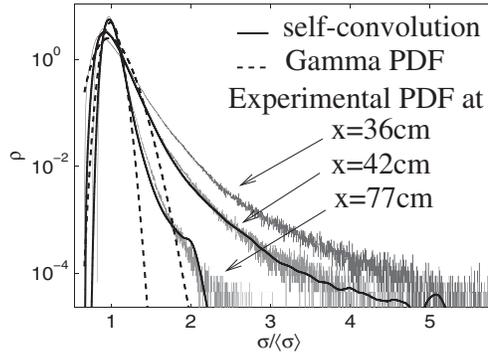


FIG. 2. Line injector. The experimental PDF at  $x = 36$  cm and variances at  $x = 42$  cm and  $x = 77$  cm are used for the prediction of the self-convolution model. The fit with  $\gamma$  distribution requires only the variance value.

The PDFs shown are zoomed close to the mean value because the filtering process reduces the number of independent events for the construction of the PDF  $\rho_l(x_0)$ . As expected, the coarse-grained evolution is qualitatively close to the temporal evolution, with discrepancy for low scalar value. In addition, the self-convolution of the initial PDF is in very good agreement with the coarse-grained PDF.

The comparison between the decay of different cumulants of the experimental PDF  $\rho_l$  with the prediction of the model reveals a limit of the self-convolution approach. In Fig. 4 we fit the variance decay with a power law  $c_2(x) \sim x^{-2.5}$ , which is consistent with experimental results of [11]. The self-convolution model predicts then a decay  $c_3 \sim x^{-5}$  and  $c_4 \sim x^{-7.5}$ . We notice fluctuations of experimental data around this prediction, and a slight overestimation of the actual decay of the cumulants, growing at increasing distance from the injector.

*Mixing from a point source.*—The sequence of experimental PDFs presented in Fig. 5 has a characteristic shape

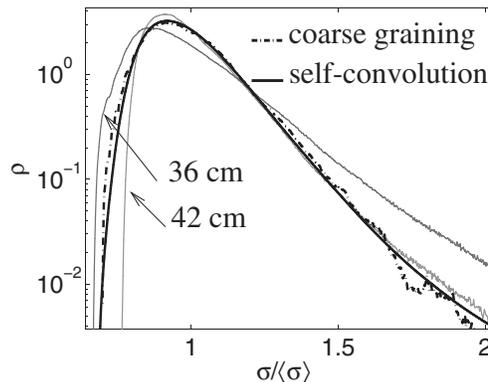


FIG. 3. Line injector. Experimental PDF at  $x = 36$  cm and  $x = 42$  cm. The coarse graining is applied to the scalar field at  $x = 36$  cm.

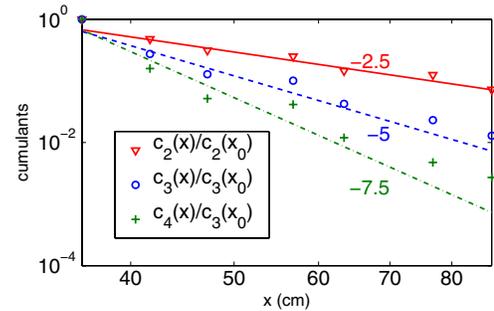


FIG. 4 (color online). Line injector. Evolution of the first cumulants. The dashed line and the dot-dashed line are predictions of the self-convolution model, by supposing  $f \sim x^\alpha$ , where  $\alpha = 2.5$  is obtained from the experimental variance decay.

that indicates that almost no mixing has occurred. There are two sharp peaks: one is the background flow, with a small mixed scalar concentration, and the other one corresponds to the existence of unmixed blobs of scalar. This second peak persists in the early evolution of the distribution. Then the peak disappears, but the PDF remains very skewed, showing no convergence toward a  $\gamma$  PDF. It is also clear that the model (1) does not provide good prediction in this case: there is a spurious peak.

*Discussion.*—We observe that the self-convolution model provides good predictions in the case of the line injector, but discrepancy clearly appears with the point injector. We discuss here the difference between these two cases in relation to our initial hypothesis. Since the capability of the model to describe the time evolution of the PDF depends on the scalar injection in the same turbulent flow, the observed discrepancy should not be sought in the fluctuations of  $f(t)$  (first model hypothesis).

To discuss the validity of the second hypothesis, i.e., the independence of scalar probability functions, let us consider a one-dimensional idealization of the injection sys-

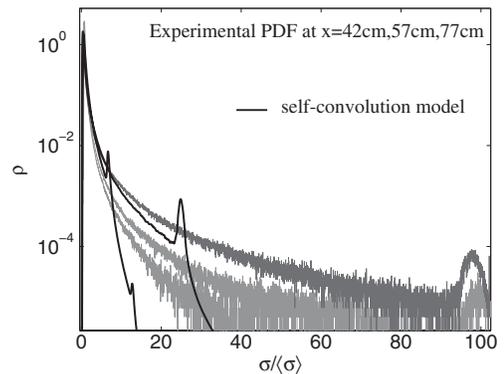


FIG. 5. Point injector. The fit with the model of pure self-convolution is done by taking the first measured PDF (dark gray) as the initial condition.

tem: the scalar field is supposed to be a succession of voids and colored segments, uncorrelated to each other. While the corresponding PDF is a double Dirac function in both cases, the PDF of the coarse-grained fields may be very different. Two coarse-grained scalar concentrations, separated by a distance  $l$ , can be considered independent only if  $l \gg \max\{\bar{l}_0(t), \bar{l}_\sigma(t)\}$ , where  $\bar{l}_0(t)$  and  $\bar{l}_\sigma(t)$  are typical lengths of voids and colored segments. For both the line and the point case, we are in a dilute limit:  $\bar{l}_0(t) \gg \bar{l}_\sigma(t)$ . As seen in Fig. 6(b), in the case of a point injector, the void's length scale  $\bar{l}_0$  is larger than the probe length scale  $l$  (20 pixels). It has been estimated more quantitatively to be around 80 pixels by computing the statistics of voids. It is thus not surprising that the self-convolution model does not work in that case. By contrast, as seen in Fig. 6(a), it is not possible to find void events in the coarse-grained scalar field. It indicates that the typical void length scale is smaller than the probe length scale  $l$ .

More generally, those length scales are related to the channel and the injector properties. The ratio of their cross section surface, respectively  $\sim r l_s / l_s^2$  and  $\sim r^2 / l_s^2$  for the line and the point case, is equal to the mean scalar value  $\langle \sigma \rangle = \bar{l}_\sigma(t) / (\bar{l}_0(t) + \bar{l}_\sigma(t))$ . The distance  $r \sim 2$  mm is the initial scalar sheet thickness (either the width of the vertical tube or the diameter of the small cylinder). This length is then reduced by straining effects  $\bar{l}_\sigma(t) = r/f(t)$ , and the random succession of scalar sheets creates void segments, while conserving  $\langle \sigma \rangle$ . This gives an estimation of the void length scale:  $\bar{l}_0(t) = l_s/f(t)$  for the line injector, and  $\bar{l}_0(t) = l_s^2/(r f(t))$  for the point injector. As far as  $r \ll l_s$ , we see that void length scales differ by an order of magnitude. This is consistent with experimental observation: void events are of the order of a few filtering scales  $l$  for the point injector, and smaller than  $l$  for the vertical injector. Note that at sufficiently large time, the condition for independence of scalar sheets will always be realized.

**Conclusion.**—If a  $\gamma$  PDF is initially created, our self-convolution model predicts that it will evolve toward a Gaussian through a succession of  $\gamma$  PDF, in exact agreement with [11]. Our experiments, however, provide no evidence for a general convergence of scalar PDF toward  $\gamma$  PDF, in contrast with the model prediction of [11]. Further comparisons of different injection systems would be needed to confirm this point.

In the case of a line injector, our experiments provide good support of the self-convolution model. In this model, the evolution of the scalar PDF by the straining effect is equivalent to coarse graining. We have directly checked this equivalence in the experiments. For practical purposes, this self-convolution model has two interesting properties: (i) it conserves scalar bounds and mean scalar value and (ii) it evolves toward a sharp Gaussian at large time, by contrast with the linear mean square estimate (or interaction by exchange with the mean) model.

The validity of the self-convolution model depends on the ratio between the cross sections of the injector and the

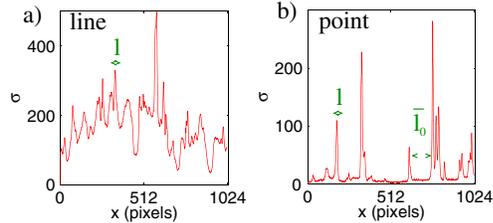


FIG. 6 (color online). Typical scalar profile on an image taken at 40 cm from the injector. The total length is 5 cm (1024 pixels). The filtering length scale  $l$  (laser sheet thickness) is around 20 pixels.

channel. This ratio prescribes length scales for the fine grained scalar structures (length of colored and void segments), which decrease with time by straining effects. The model is correct when the probe length scale  $l$  is larger than the typical scalar field length scales, to assure independence between scalar sheets at distance  $l$ .

The model also relies on the hypothesis of weak fluctuations for the straining rate. This is typically expected for the Batchelor regime of scalar cascade or for moderate Reynolds numbers, as in our experiments. Discrepancies are expected to arise from intermittency in a well developed Kolmogorov cascade.

H. Didelle and S. Viboud have been of great help for the setup of the experiment. We thank A. Gagnaire and P. Kramer for their participation in the experiments and data processing.

\*venaille@coriolis-legi.org

- [1] S. B. Pope, *Prog. Energy Combust. Sci.* **11**, 119 (1985).
- [2] E. O'Brien, in *Turbulent Reacting Flows* (Academic, London, 1980), pp. 185–203.
- [3] S. B. Pope, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **2**, 255 (1991).
- [4] R. O. Fox, *Phys. Fluids A* **4**, 1230 (1992).
- [5] S. Heinz, *Flow, Turbul. Combust.* **70**, 153 (2003).
- [6] V. Sabel'Nikov, M. Gorokhovskiy, and N. Baricault, *Combust. Theory Modell.* **10**, 155 (2006).
- [7] D. W. Meyer and P. Jenny, *Phys. Fluids* **19**, 028101 (2007).
- [8] R. L. Curl, *AIChE J.* **9**, 175 (1963).
- [9] S. B. Pope, *Combust. Sci. Technol.* **28**, 131 (1982).
- [10] C. Dopazo, *Phys. Fluids* **22**, 20 (1979).
- [11] E. Villermaux and J. Duplat, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 184501 (2003).
- [12] A. Venaille and J. Sommeria, *Phys. Fluids* **19**, 028101 (2007).
- [13] Jayesh and Z. Warhaft, *Phys. Fluids A* **4**, 2292 (1992).
- [14] H. Rehab, R. A. Antonia, and L. Djenidi, *Exp. Fluids* **31**, 186 (2001).
- [15] A. Pumir, B. Shraiman, and E. D. Siggia, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2984 (1991).
- [16] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill, New York, 1955).
- [17] J. O. Hinze, *Turbulence* (McGraw-Hill, New York, 1975).

## Conclusion

On résume les modèles de mélange présentés dans ce chapitre dans le tableau 6.4.

modèle	équation d'évolution	variance
i) auto-convolution[7]	$\partial_t \hat{\rho} = s [\hat{\rho} \ln \hat{\rho} - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}]$	$\partial_t c_2 = -s c_2$
ii) modèle de Curl [95]	$\partial_t \hat{\rho}(\kappa) = 2s [\hat{\rho}^2(\kappa/2) - \hat{\rho}(\kappa)]$	$\partial_t c_2 = -s c_2$
iii) agrégation [42]	$\partial_t \hat{\rho} = s [f [\hat{\rho}^{1+1/f} - \hat{\rho}] - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}]$	$\partial_t c_2 = -s [c_2 - \bar{\sigma}/f]$
iv) IEM/LMSE [84, 63]	$\partial_t \hat{\rho} = s [-\kappa \hat{\rho} - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}] / 2$	$\partial_t c_2 = -s c_2$

FIG. 6.4: Quand ce n'est pas spécifié, l'argument de la PDF est  $(\kappa, t)$ . On utilise la notation  $f(t) = \exp\left(\int_0^t s(t') dt'\right)$ . enfin, le facteur  $s$  est choisit pour chaque modèle de sorte à ce que la variance décroisse en  $f^{-1}$  dans tous les modèles.  $\bar{\sigma}$  est la concentration moyenne en traceur.

Seuls les modèles de convolution et d'agrégation tendent vers une gaussienne aux temps longs. Nous avons montré certaines situations expérimentales où les PDF ne tendent pas vers une distribution gamma (qui est prédite par le modèle d'agrégation), mais sont correctement prédites par un modèle d'évolution par auto-convolutions. Nous ne connaissons pas de cas où le modèle d'agrégation prédit une séquence de PDF qui n'est pas correctement décrite par une évolution par auto-convolution. Remarquons cependant que nous avons mis en évidence (et caractérisé) certaines situations où aucun des deux modèle ne prédit correctement l'évolution des PDF.

Les approches de type IEM/LMSE ou de Curl sont difficiles à justifier physiquement, contrairement au modèle d'évolution par auto-convolution, qui s'appuie sur un processus reproduisant simplement les effets de cascade turbulente. Toutefois, ces approches sont simples à mettre en œuvre, ce qui leur confère un intérêt pratique indéniable.

## Perspectives

Dans les analyses d'expériences ou de DNS présentées précédemment, nous avons ajusté le taux d'étirement  $s$  sur la décroissance observée de la variance de la PDF. Remarquons qu'il s'agit du seul paramètre ajustable

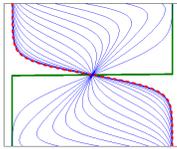
de ce modèle. Lors de la présentation du modèle, nous avons interprété ce terme comme un taux de contraction des feuillets de traceur. Ce taux de contraction était supposé ne pas dépendre de l'échelle considérée, ce qui est qualitativement correct pour une turbulence à nombre de Reynolds modéré. Nous avons de plus supposé que ce taux d'étirement est spatialement homogène. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans un écoulement réel, où la direction et la valeur de la contraction varient dans l'espace. Une clarification du sens de  $s$ , en lien avec une analyse des propriétés de la turbulence dans les écoulements turbulents à nombre de Reynolds modéré constituerait une étude intéressante. On peut en particulier se demander dans quelle mesure de faibles fluctuations de la direction et de la valeur du taux de contraction  $s$  modifient la forme des PDF au cours du mélange, en lien avec le modèle d'évolution par auto-convolution.



---

# Une approche statistique du mélange dans les fluides stratifiés

---



Ce chapitre est consacré à une approche statistique du mélange en fluide stratifié. Le but est de décrire l'évolution temporelle de la probabilité (PDF) de la densité réduite (température ou salinité) à une altitude donnée, sans décrire le détail des processus physiques en œuvre. La densité réduite, comme la vorticité potentielle en turbulence 2D, vérifie certaines lois de conservation qui, combinées à des propriétés de mélange causées par la turbulence, montrent la pertinence d'une approche par la mécanique statistique. Bien qu'il n'existe pas de théorie statistique rigoureuse pour les fluides stratifiés, l'analogie avec les écoulements 2D fournit un cadre intéressant pour une approche phénoménologique du problème.

Nous définirons dans un premier temps ce que nous entendons par équilibre statistique pour les fluides stratifiés, en considérant un modèle idéalisé d'écoulement. Nous présenterons ensuite une équation de relaxation vers cet état d'équilibre, caractérisée par une compétition entre effets de diffusion turbulente et de sédimentation. Enfin, nous ajouterons un terme de dissipation des fluctuations de densité par cascade turbulente en appliquant les approches présentées au chapitre précédent.

## 7.1 Profils d'équilibre statistique pour la densité du fluide

Nous proposons dans cette section une analogie entre le mélange de la densité réduite par la turbulence (3-D) et le mélange de la vorticité potentielle dans les écoulements 2-D.

### Niveaux de densité réduite et énergie potentielle

On considère un fluide stratifié de manière stable, statistiquement homogène dans les plans horizontaux  $oxy$ .

- les **configurations microscopiques** du système, décrites par le champ de densité réduite microscopique  $\sigma_m(x, y, z)$ , et de vitesse  $v_m(x, y, z)$ . On suppose que les écoulements que l'on décrit sont statistiquement invariants dans les plans horizontaux. On considère de plus qu'il n'y a que des fluctuations de vitesse turbulente : à une altitude donnée, la moyenne des vitesses est nulle. Pour simplifier la discussion, on ne prend en compte que les fluctuations de vitesse dans la direction verticale.
- les **états macroscopiques**, décrits par la probabilité  $\rho(\sigma, v, z)$  de mesurer la densité réduite  $\sigma$  et la vitesse  $v$  à l'altitude  $z$ .

**On considère que la densité réduite  $\sigma$  est purement advectée par l'écoulement** : on néglige donc puits et sources de densité réduite, en particulier la diffusion moléculaire. Comme dans le cas de vorticité potentielle dans les écoulements 2D (voir chapitre 1), le volume associé à chaque niveau  $\sigma$  est conservé

$$\frac{1}{SH} \int_{\mathcal{V}} \delta(\sigma - \sigma(\mathbf{r})) dx dy dz = g(\sigma) \quad (7.1)$$

où l'on a normalisé les volumes par le volume total  $SH$  ( $S$  est l'aire de la section horizontale de l'écoulement, et  $H$  est la hauteur totale). La distribution  $g(\sigma)$  caractérise complètement le champ microscopique de densité réduite. Elle s'exprime aussi en fonction du champ macroscopique de probabilité,

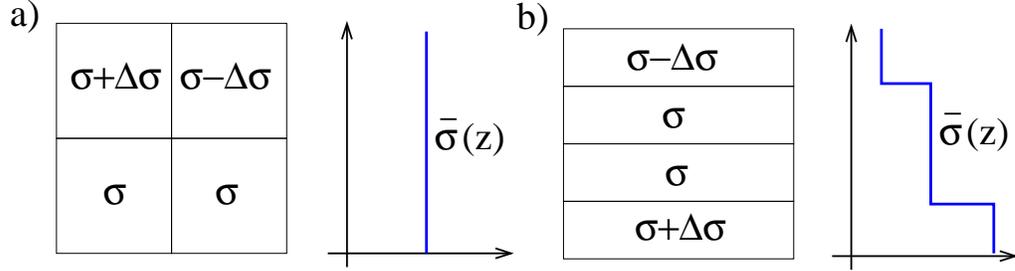


FIG. 7.1: Exemple d'un profil de densité réduite (a) et du profil trié correspondant (b). On représente dans chaque cas le profil moyen  $\bar{\sigma}(z)$ . L'énergie potentielle  $\int \bar{\sigma} z dz$  ne peut être inférieure à celle du profil trié

donnant ainsi une contrainte sur les valeurs admissibles de  $\rho$  :

$$\mathcal{H}_\sigma[\rho] = \frac{1}{H} \int_0^H \rho dz = g(\sigma) \quad (7.2)$$

L'organisation spatiale du champ de densité réduite détermine l'énergie potentielle du système. On définit trois quantités différentes :

- **L'énergie potentielle totale**  $\mathcal{E}_p$ , qui est aussi l'énergie potentielle du profil moyen  $\bar{\sigma}(z)$  :

$$\mathcal{E}_p[\rho] = \int \rho \sigma z d\sigma dz = \int \bar{\sigma} z dz \quad (7.3)$$

- **L'énergie potentielle  $\mathcal{E}_t$  du profil trié**, obtenue en plaçant les particules fluides les plus lourdes en bas de l'écoulement (voir par exemple figure 7.1-b) :

$$\mathcal{E}_t = \int_{\sigma_{min}}^{\sigma_{max}} z^*(\sigma) \sigma d\sigma \quad (7.4)$$

$$z^*(\sigma) = H \int_{\sigma}^{\sigma_{max}} g(\sigma') d\sigma' \quad (7.5)$$

Pour une distribution  $g(\sigma)$  donnée, l'énergie du profil trié est la valeur minimale des énergies potentielles que peut atteindre le système.

- **L'énergie potentielle disponible**  $\mathcal{E}_a$ , donnée par la différence entre l'énergie potentielle du profil moyen et du profil trié

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_t \quad (7.6)$$

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

Dans cette section, la distinction entre énergie potentielle totale et énergie potentielle disponible n'a pas d'intérêt : l'énergie potentielle du profil trié ne varie pas au cours du temps, en raison de la conservation de la proportion des niveaux de densité réduite  $g(\sigma)$ . En revanche, cette distinction sera nécessaire à la fin du chapitre lors de l'introduction d'un modèle de mélange "irréversible", modifiant la proportion  $g(\sigma)$  des niveaux de vorticité.

L'énergie cinétique de l'écoulement est

$$\mathcal{E}_c[\rho] = \int_0^H e(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^H \rho v^2 dz .$$

En l'absence de forçage et de dissipation, l' ** nergie totale**

$$\mathcal{E}[\rho] = \mathcal{E}_c[\rho] + \mathcal{E}_p[\rho] = \int \rho \left( \frac{v^2}{2} + \sigma z \right) dz \quad (7.7)$$

est conservée par l'écoulement.

### Etats d'équilibre statistique

Considérons un fluide stratifié caractérisé par une distribution de densité réduite  $g(\sigma)$ , et une énergie totale  $E$ . L'écoulement est supposé suffisamment turbulent pour que toute configuration microscopique admissible puisse être approchée par le système. Pour déterminer la configuration macroscopique la plus probable, on maximise l'entropie de mélange

$$\mathcal{S}_{BG} = - \int \rho \ln \rho d\sigma dv dz , \quad (7.8)$$

qui compte le nombre de configurations microscopiques associées au champ  $\rho$ , tout en prenant en compte les quantités conservées. Ce problème est similaire à celui de l'organisation de la vorticité potentielle en turbulence 2-D que nous avons présenté au chapitre 1. Afin de calculer les points critiques, on introduit les multiplicateurs de Lagrange  $\beta$  et  $\gamma(\sigma)$  associés aux contraintes sur l'énergie et les niveaux de densité réduite :

$$\delta \mathcal{S}_{BG} - \beta \delta \mathcal{E} - \int \gamma(\sigma) \delta \mathcal{H}_\sigma d\sigma = 0 \quad (7.9)$$

en utilisant l'expression de l'entropie (7.8), de l'énergie (7.7), et de l'aire des niveaux de densité (7.2), on trouve

$$\int (-1 - \ln(\rho) - \beta v^2 - \beta z \sigma) \delta \rho dv d\sigma dz = 0$$

Comme cette égalité est vraie pour tout  $\delta \rho$ , on obtient alors l'expression de la PDF :

$$\rho = \frac{\exp(-\beta v^2/2 - \beta \sigma z + \gamma(\sigma))}{\int \exp(-\beta v^2/2 - \beta \sigma z + \gamma(\sigma)) d\sigma dv} \quad (7.10)$$

Les valeurs des multiplicateurs de Lagrange  $\beta$  et  $\gamma$  sont déterminées par l'expression des contraintes  $\mathcal{E}[\rho] = E$  et  $\mathcal{H}_\sigma[\rho] = g(\sigma)$ .

Remarquons que la PDF peut s'exprimer comme un produit d'une PDF des vitesses  $\rho_v(v)$  par une PDF de densité réduite  $\rho_\sigma(\sigma, z)$ . Vitesse et densité réduite sont donc deux quantités indépendantes. De plus, la PDF des vitesses est gaussienne, et ne dépend pas de l'altitude. Le profil d'énergie cinétique

$$e = \frac{1}{2} \int v^2 \rho d\sigma dv = \frac{1}{2\beta}$$

est donc indépendant de  $z$ , et fixe la valeur de  $\beta$ , qui correspond à la variance des fluctuations de vitesse. Dans les écoulements turbulents étudiés en laboratoire, la PDF des vitesse est effectivement proche d'une gaussienne (contrairement aux incréments de vitesse). **Dans la suite de ce chapitre, on ne s'intéressera qu'aux PDF de densité :**

$$\rho_\sigma(\sigma, t) = \frac{\exp(-\beta \sigma z + \gamma(\sigma))}{\int \exp(-\beta \sigma z + \gamma(\sigma)) d\sigma} \quad (7.11)$$

De manière à alléger les notations, l'indice  $\sigma$  sera omis.

### Exemple : système à deux niveaux

Supposons pour simplifier que l'état initial est composé de deux niveaux de densité réduite (0 et  $\sigma$ ) en proportions égales. D'après l'équation (7.11), la probabilité  $p$  de mesurer la densité réduite  $\sigma$  à la hauteur  $z$  est

$$p(z) = \frac{e^{-\beta \sigma (z-H/2)}}{1 + e^{-\beta \sigma (z-H/2)}} \quad (7.12)$$

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

La probabilité de mesurer la densité réduite 0 est simplement donnée par  $1 - p$ . On a utilisé la symétrie  $p(z - H/2) = 1 - p(-z + H/2)$  pour déterminer le paramètre de Lagrange  $\gamma$  associé à la conservation de la masse. Le champ de densité réduite macroscopique est  $\bar{\sigma} = \sigma p$ . On trouve ainsi une distribution de type “Fermi-Dirac”, représentée figure (7.2). On distingue deux cas limites :

- Si  $\beta \rightarrow +\infty$  (limite des faibles énergies cinétiques  $e \rightarrow 0$ ), on retrouve le profil trié, à savoir la totalité des particules fluides de densité réduite  $\sigma$  localisée sous  $z = H/2$ . Pour de faibles valeurs de  $e$ , on estime l'épaisseur de l'interface à  $h \sim 1/\beta \sim e$ .
- Si  $\beta = 0$  (limite des hautes énergies cinétiques  $e \rightarrow +\infty$ ), les niveaux de densité sont complètement mélangés.

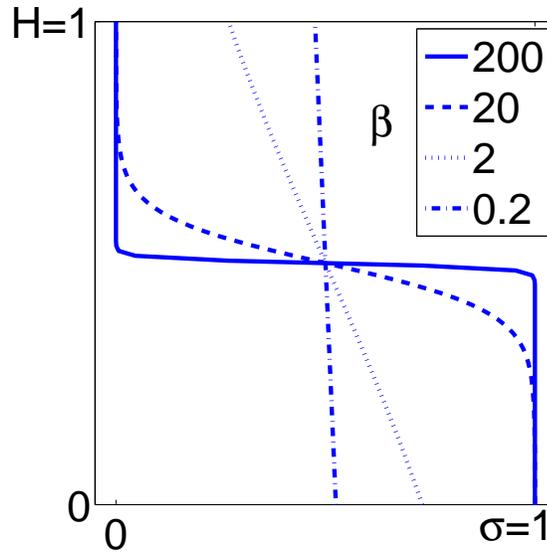


FIG. 7.2: Profils d'équilibre pour un système à deux niveaux. On représente  $\bar{\sigma}(z) = \sigma p(z, t)$  où  $p$  est donné par l'équation (7.12), pour plusieurs valeurs de  $\beta$ .

### Conclusion

L'analogie avec les écoulements 2D doit être considérée avec précaution, car les écoulements (3-D) que l'on décrit sont en fait constamment forcés et

dissipés, contrairement aux écoulements 2D décrits par la théorie Robert-Sommeria-Miller.

Ces approximations sont néanmoins utiles pour définir un état d'équilibre pour un fluide stratifié.

Cela constitue une première étape, avant l'élaboration d'un modèle de relaxation vers ces états d'équilibre statistiques. La recherche d'une équation qui tend vers un maximum d'entropie tout en conservant certaines quantités sera utilisée comme un guide pour la modélisation, et non comme un principe physique.

Nous présentons dans la section suivante une telle équation de relaxation, qui comprend d'une part des processus de diffusion turbulente, et d'autre part des processus de sédimentation.

L'approche statistique "à l'équilibre" que nous venons de présenter est similaire à celle proposée par Tabak [118]. Cependant, les équations de relaxation présentées dans la section suivante sont nouvelles (à notre connaissance).

## 7.2 Equations de relaxation

On introduit le flux turbulent de probabilité  $\mathcal{J}(\sigma, z, t)$ . En l'absence de puits et sources de densité réduite, et en l'absence de mouvement moyen, l'évolution temporelle de la PDF  $\rho(\sigma, z, t)$  s'écrit sous la forme

$$\partial_t \rho + \partial_z \mathcal{J} = 0 \tag{7.13}$$

avec  $\mathcal{J} = 0$  aux frontières. Cette équation conserve les niveaux de vorticité : pour une valeur de  $\sigma$  donnée,  $d \left( \int_0^H \rho dz \right) / dt = 0$ .

**Nous supposons maintenant que l'énergie cinétique  $e$  est fixée**, constante en espace et en temps. Nous reviendrons ultérieurement sur cette hypothèse, que nous faisons ici par simplicité : en pratique (dans les expériences de laboratoire), ce n'est pas l'énergie cinétique qui est fixée, mais plutôt la puissance injectée.

Nous voulons que l'équation d'évolution (7.13) décrive une relaxation vers l'état d'équilibre statistique (7.11) calculé dans la section précédente.

Dans l'esprit des approches classiques de la diffusion turbulente, nous proposons d'écrire le flux de probabilité comme une fonction de quantités

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

locales, sous la forme

$$\mathcal{J} = -D(\partial_z \rho - \beta(\rho(\sigma - \bar{\sigma}))) \quad D = a_1 l e^{1/2}, \quad \beta = 1/(2e) \quad (7.14)$$

On vérifie que  $\int \mathcal{J} d\sigma = 0$ , et donc que la norme de la PDF est bien conservée. On distingue deux contributions : un terme de diffusion “classique” et un terme nouveau de sédimentation, qui à notre connaissance n’apparaît pas dans les modèles existants. Avant de discuter le sens de ces deux termes, remarquons que **les états stationnaires de cette équation sont les états d’équilibre** présentés dans la section précédente. En effet,  $\mathcal{J} = 0$  implique

$$\partial_z \rho = -\beta(\rho(\sigma - \bar{\sigma})) \quad (7.15)$$

On retrouve alors l’équation (7.11). Les deux contributions du flux qui s’équilibrent correspondent à deux mécanismes physiques différents :

- **La diffusion turbulente.** ( $D\partial_z \rho$ ). Nous avons introduit un coefficient de diffusion turbulente  $D = a_1 l e^{1/2}$ . La quantité  $l$  est une échelle caractéristique de l’écoulement. Nous supposons pour l’instant que cette échelle est fixée, constante en espace et en temps. Nous reviendrons ultérieurement sur cette hypothèse. La constante  $a_1$  est un paramètre ajustable, sans dimension.

Ce terme de diffusion tend à homogénéiser l’écoulement, et donc à augmenter l’énergie potentielle du système si l’état initial est stratifié de manière stable. Remarquons que cette contribution injectée dans l’équation (7.13) donne  $\partial_t \bar{\sigma} = a_1 \partial_z l e^{1/2} \partial_z \bar{\sigma}$  : on retrouve alors le modèle de diffusion turbulente énoncé dans l’introduction de cette partie (équation 5.2).

- **La sédimentation** ( $D\beta\rho(\sigma - \bar{\sigma})$ ) tend à ramener les particules fluides vers leur position dans le profil trié. A une altitude  $z$  donnée, les particules plus légères que  $\bar{\sigma}(z, t)$  montent, et les particules plus denses que  $\bar{\sigma}(z, t)$  descendent, jusqu’à ce que chaque particule ait atteint sa position dans le profil trié (où  $\sigma = \bar{\sigma}$ ). Cet effet pris isolément ramène le système vers le profil trié. Rappelons que ce profil trié est le minimum d’énergie potentielle admissible étant donnée la contrainte d’incompressibilité (la conservation de la distribution  $g(\sigma)$  de densité réduite).

Le terme  $D\beta$  est un temps caractéristique de l’écoulement  $\tau = D\beta = a_1 l / (2e^{1/2})$ . Le choix de la forme du terme de sédimentation et de la constante de temps  $\tau$  a été motivé par le fait que l’on retrouve les états d’équilibre quand cette contribution compense la diffusion turbulente.

**Exemple : système à deux niveaux.** Dans ce cas, le profil moyen de densité réduite  $\bar{\sigma} = \sigma p$  ne dépend que de la probabilité  $p(z, t)$  de mesurer le niveau  $\sigma$  à une altitude donnée, qui satisfait l'équation de relaxation

$$\partial_t p = \partial_{zz} p + \beta \sigma \partial_z (p - p^2) \quad (7.16)$$

Comme nous supposons ici que  $e$  et  $l$  sont fixés (donc  $D$  et  $\beta$  sont fixés), nous avons adimensionné l'échelle de temps de manière à avoir  $D = 1$  dans (7.14).

Nous présentons figure 7.3 les résultats de l'équation de relaxation, pour trois conditions initiales différentes :

- a) un profil initialement mélangé à petite échelle ( $p(z, 0) = 0.5$  en tout point) : le terme de sédimentation domine dans l'évolution initiale.
- b) un profil trié stable ( $p(z, 0) = 1$  pour  $z < H/2$  et  $p(z, 0) = 0$  pour  $z > H/2$ ) : Le terme de diffusion domine dans l'évolution initiale.
- c) profil instable ( $p(z, 0) = 1$  pour  $z < H/2$  et  $p(z, 0) = 0$  pour  $z > H/2$ ) : c'est d'abord le terme diffusif qui élargit l'interface, créant une situation instable, puis le terme de sédimentation domine et conduit à l'état d'équilibre.

Dans tous les cas, le système relaxe vers l'état d'équilibre déterminé par la valeur de  $\beta = 1/2e$ .

### Lien avec les équations de relaxation obtenues par un principe de maximisation de la production d'entropie

Dans le cadre de la mécanique statistique des écoulements turbulents 2D<sup>1</sup>, Robert et Sommeria [100] ont proposé des équations de relaxation dont la solution tend vers l'état d'équilibre statistique, à partir d'une condition initiale arbitraire  $\rho^0(\mathbf{r}, \sigma)$  (le champ 2-D de densité de probabilité pour les niveaux de vorticit e potentielle  $\sigma$ ) :

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \nabla \rho = -\nabla \mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} = -D (\nabla \rho - \beta(t) \rho (\sigma - \bar{\sigma}) \nabla \bar{\psi})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \nabla \bar{\psi} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma} = \Delta \bar{\psi}$$

<sup>1</sup>Voir le chapitre 1 pour une pr esentation de la m ecanique statistique d' equilibre des  ecoulements 2D

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

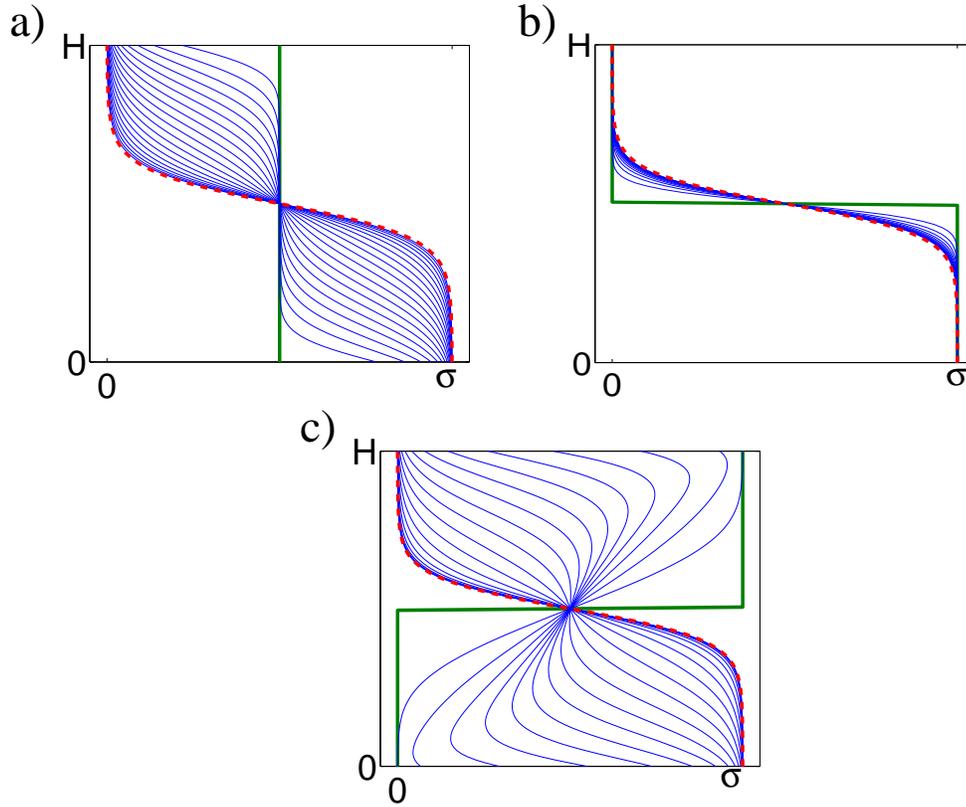


FIG. 7.3: Relaxation vers un état d'équilibre (rouge pointillé) dans le cas d'un système à deux niveaux (7.16), avec  $\beta = 20$ ,  $H = \sigma = 1$ , pour trois profils initiaux différents. Les courbes bleues représentent le profil de densité réduite moyen à intervalle de temps régulier. Les conditions initiales sont représentées en vert gras : a) mélangé b) trié stable c) trié instable.

où  $\beta(t)$  est choisi de sorte à ce que l'énergie totale de l'écoulement soit conservée.

Ces équations de relaxation ont la même structure que (7.13) et (7.14). Elles décrivent une évolution temporelle des PDF qui maximise la production d'entropie. **Bien qu'il n'y ait pas de justification physique pour la maximisation de la production d'entropie, cette propriété garantit la convergence vers un état maximum d'entropie.** Ces équations de relaxation furent initialement proposées pour calculer numériquement les états d'équilibre statistique d'équilibre de la théorie RSM. Ce type d'approche s'est en outre révélé intéressant pour paramétrer les effets de la

dynamique des petites échelles – non résolues par les modèles numériques – sur l'évolution des grandes échelles d'un écoulement. Ces idées ont été appliquées à l'étude des états d'équilibre de l'équation d'Euler et à la paramétrisation des petites échelles [100, 28], ainsi qu'à l'étude de modèles simples d'océans [66].

Les équations de relaxation pour la vorticité potentielle conservent la distribution des niveaux de vorticité **et** l'énergie totale de l'écoulement. Dans le cas des équations de relaxation (7.13) et (7.14), seule la distribution des niveaux de densité du fluide est conservée. En effet, nous avons supposé que l'énergie cinétique est imposée. Or le calcul des états d'équilibre a montré que  $\beta = 1/2e$  est fixé par cette énergie cinétique. On sort donc du cadre de l'analogie avec les écoulements 2-D en supposant que  $\beta$  est constant dans les équations de relaxation.

Nous reviendrons dans la dernière section de ce chapitre sur cette hypothèse : nous proposerons une équation d'évolution pour l'énergie cinétique  $e(z, t)$ , de manière à ce que l'énergie totale soit conservée par les équations de relaxation, en l'absence de forçage et de dissipation.

Pour clore cette section, nous résumons dans le tableau (7.4) l'analogie entre mélange turbulent de la densité réduite en fluide stratifié et de la vorticité potentielle dans un écoulement 2D .

	Écoulements 2D	Fluides stratifiés
$\sigma$	Vorticité potentielle	Densité Réduite
Config. micro.	$\sigma(x, y, t)$	$\sigma(z, x, y, t)$
Config. macro.	$\rho(\sigma, x, y)$	$\rho(\sigma, z)$
$\sigma$ macro.	$\bar{\sigma} = \int \rho \sigma d\sigma$	
Niveaux de $\sigma$	$\mathcal{A}_\sigma[\rho] = \int \rho d\mathbf{r} = g(\sigma)$	$\mathcal{H}_\sigma[\rho] = \int \rho dz = g(\sigma)$
Énergie	$\mathcal{E}[\rho] = \int \bar{\sigma} \psi d\mathbf{r} = E$	$\mathcal{E}_p[\rho] = \int \bar{\sigma} z dz = E_p$
Entropie	$\mathcal{S}_{BG} = - \int \rho \ln \rho d\sigma dz$	
$\partial_t \rho = -\partial_z \mathcal{J}, \mathcal{J} =$	$-D (\partial_z \rho + \beta \rho (\sigma - \bar{\sigma}) \nabla \psi)$	$-D (\partial_z \rho + \beta \rho (\sigma - \bar{\sigma}))$

FIG. 7.4: Résumé de l'analogie entre fluide stratifié et écoulements 2D

### 7.3 Ajout d'un terme de dissipation des fluctuations de la PDF

Que ce soit dans un fluide stratifié, ou dans un écoulement 2D, **l'hypothèse de conservation des niveaux de vorticité potentielle n'est pas valable dans un écoulement réel, même si la viscosité est très faible**. Dans le cas d'écoulements 2D, cet effet est mis en évidence par Brands *et al* [21] dans des simulations numériques de Navier-Stokes 2D à nombre de Reynolds modéré : la mécanique statistique ne prédit pas correctement l'organisation finale de l'écoulement, en partie parce que les niveaux de densité réduite évoluent au cours du temps.

De même, supposer que la densité du fluide est purement advectée par l'écoulement est valable si le temps  $t_\kappa$  au-delà duquel la diffusivité intervient est supérieur au temps d'organisation inertielle de l'écoulement  $t_i$ .

Pour estimer ce temps  $t_\kappa$ , considérons que le champ de densité est composé initialement de structures à l'échelle  $l_0$ . Soit  $s$  un taux de contraction des structures par l'écoulement turbulent. On suppose que ce taux de contraction ne dépend pas de l'échelle considérée (ce qui est raisonnable à nombre de Reynolds modéré) :  $s = U/l_0$ , où  $U$  est la vitesse caractéristique du fluide à l'échelle  $l_0$ . La taille caractéristique des structures diminue exponentiellement :  $l(t) \approx l_0 e^{-st}$ . La longueur  $l(t_\kappa)$  pour laquelle l'étirement est compensé par la diffusion est atteinte quand les temps caractéristiques associés à l'étirement ( $1/s = l_0/U$ ) et à la diffusion ( $l^2/\kappa$ ) sont du même ordre de grandeur :  $l_0/U \approx l_0^2 \exp(-2st_\kappa)$ . On obtient alors  $t_\kappa/t_i \approx \ln Pe$ , où  $Pe = Ul_0/\kappa$  est le nombre de Peclet, et où l'on a supposé que le temps d'organisation inertielle est donné par  $t_i = l_0/U$ .

Ainsi, le rapport  $t_\kappa/t_i$  augmente seulement de manière logarithmique avec le nombre de Peclet. Il est donc nécessaire de modéliser l'effet de la dissipation des fluctuations de densité en vue de l'application de ces modèles dans des situations réalistes.

Qualitativement, les fluctuations du champ de densité réduite sont transférées par cascade turbulente vers des échelles de plus en plus petites, jusqu'à ce que la diffusivité moléculaire intervienne, modifiant ainsi la distribution  $g(\sigma)$  des niveaux de vorticité au cours du temps. Par exemple, si l'on considère un système initialement composé de deux niveaux  $\{0, \sigma\}$ , cet effet de dissipation des fluctuations crée rapidement un troisième niveau de

densité réduite  $\sigma/2$ , qui lui même mélangé aux niveaux 0 et  $\sigma$ , formant ainsi des niveaux  $\sigma/4$  et  $3\sigma/4$ , et ainsi de suite...

On voit que les processus de cascade turbulent ont pour effet qualitatif de contracter la PDF autour de la moyenne. **Il est donc nécessaire d'ajouter un mécanisme de dissipation des fluctuations par mélange turbulent** dans les équations de relaxation. Le terme de dissipation doit en outre conserver la norme et la moyenne (par conservation de la densité réduite totale) de la PDF en un point donné. L'élaboration d'un tel modèle fut la motivation initiale de nos travaux sur le mélange d'un traceur passif par la turbulence.

Les différentes équations d'évolutions proposées dans la littérature pour modéliser cet effet sont résumées à la fin du chapitre précédent. Le seul paramètre de ces modèles est le taux de dissipation des fluctuations  $s(t)$ , qui dépend des caractéristiques locales de la turbulence ( $s$  est d'autant plus élevé que l'étirement vers les petites échelles est important).

Dans ce qui suit, nous incorporons ces modèles aux équations de relaxation pour le PDF dans un fluide stratifié, en considérant  $s \sim l^{-1}e^{1/2}$  (où  $l$  et  $e^{1/2}$  sont respectivement les échelles et vitesses caractéristiques de la turbulence) :

$$\partial_t \rho = \partial_z (D (\partial_z \rho + \beta \partial_z (\rho (\sigma - \bar{\sigma})))) + s \mathcal{D}_{cascade} \quad (7.17)$$

$$D = a_1 l e^{1/2} \quad \beta = 1/(2e) \quad s = a_2 e^{1/2}/l$$

où  $\mathcal{D}_{cascade}$  est un des modèles de dissipation présenté au chapitre précédent (voir le tableau dans la conclusion). En pratique, nous utiliserons le modèle le plus simple à implémenter, qui est celui de Curl :

$$\widehat{\mathcal{D}}_{cascade}(\kappa) = 2 (\widehat{\rho}(\kappa/2) - \widehat{\rho}(\kappa)) \quad \widehat{\mathcal{D}}_{cascade}(\kappa) = \int e^{-\sigma \kappa} \mathcal{D}_{cascade}(\sigma) d\sigma \quad (7.18)$$

Nous faisons ce choix par simplicité. Il s'agit d'une première étape. Les modifications apportées par l'usage d'un autre modèle de cascade (IEM/LMSE ou auto-convolution) devront être discutée dans des travaux futurs.

Nous supposons pour l'instant que l'énergie  $e$  et l'échelle  $l$  sont fixées, constantes en espace et en temps. Les coefficients  $D$ ,  $s$  et  $\beta$  sont donc des constantes ( $a_1$  et  $a_2$  sont deux paramètres ajustables du modèle). On peut toujours adimensionner l'unité de temps de sorte à ce que l'on ait  $D = 1$ . Il

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

n'y alors que deux paramètres indépendants :  $\beta$  et le temps caractéristique (adimensionné) de dissipation des fluctuations  $\tau_{diss} = l^2 a_1 / a_2$  :

$$\partial_t \rho = \partial_{zz} \rho + \beta \partial_z (\rho (\sigma - \bar{\sigma})) + \tau_{diss}^{-1} \mathcal{D}_{cascade} \quad (7.19)$$

On distingue quatre cas limites suivant les temps caractéristiques des différents mécanismes. On compare le “temps de vie”  $\tau_{diss}$  des niveaux de densité réduite, aux temps caractéristiques (adimensionnés) de diffusion et de sédimentation, respectivement donnés par  $\tau_{diff} = L^2$  (où  $L$  est une échelle caractéristique de variation du profil moyen de densité, qui peut être différente de  $l$ ) et  $\tau_{sedim} = \beta$ .

- **i) La diffusion et la sédimentation dominent la dissipation** ( $\tau_{diff} \ll \tau_{diss}$  et  $\tau_{sedim} \ll \tau_{diss}$ ). Le système relaxe vers l'état d'équilibre statistique avec un temps caractéristique  $\tau = \min \{ \tau_{diff}, \tau_{sedim} \}$ . Des niveaux de vorticité sont peu à peu crées ou détruits par le processus de dissipation. Le système passe par une succession d' tats d'équilibres statistiques, jusqu'à atteindre l'état totalement mélangé, en un temps caractéristique donné par  $\tau_{diss}$ .
- **ii) La dissipation domine la diffusion et la sédimentation** ( $\tau_{diss} \ll \tau_{diff}$  et  $\tau_{diss} \ll \tau_{sedim}$ ). Les fluctuations autour du profil moyen sont rapidement dissipées, en un temps  $\tau_{diss}$ . Le profil moyen évolue ensuite suivant le seul processus diffusif  $\partial_t \bar{\sigma} = \partial_{zz} \bar{\sigma}$ , jusqu'au mélange total, en un temps  $\tau_{diff}$ .
- **iii) La diffusion domine la dissipation qui domine la sédimentation** ( $\tau_{diff} \ll \tau_{diss} \ll \tau_{sedim}$ ). Le profil moyen évolue selon le seul processus diffusif  $\partial_t \bar{\sigma} = \partial_{zz} \bar{\sigma}$ , jusqu'à atteindre un profil vertical moyen homogène, en un temps  $\tau_{diff}$ . Les fluctuations autour de ce profil moyen sont ensuite dissipées en un temps  $\tau_{diss}$ .
- **iv) La sédimentation domine la dissipation, qui domine la diffusion** ( $\tau_{sedim} \ll \tau_{diss} \ll \tau_{diff}$ ). Le système relaxe vers le profil trié de la condition initiale en un temps  $\tau_{sedim}$ . Le profil moyen est alors donné par ce profil trié, qui n'admet pas de fluctuations. Il évolue ensuite par processus diffusif seul  $\partial_t \bar{\sigma} = \partial_{zz} \bar{\sigma}$ , jusqu'à homog n sation complète, en un temps  $\tau_{diff}$ .

Dans les cas limites **ii)**, **iii)** et **iv)**, le modèle d'évolution n'a pas d'intérêt par rapport à un simple modèle pour l'évolution temporelle de la moyenne.

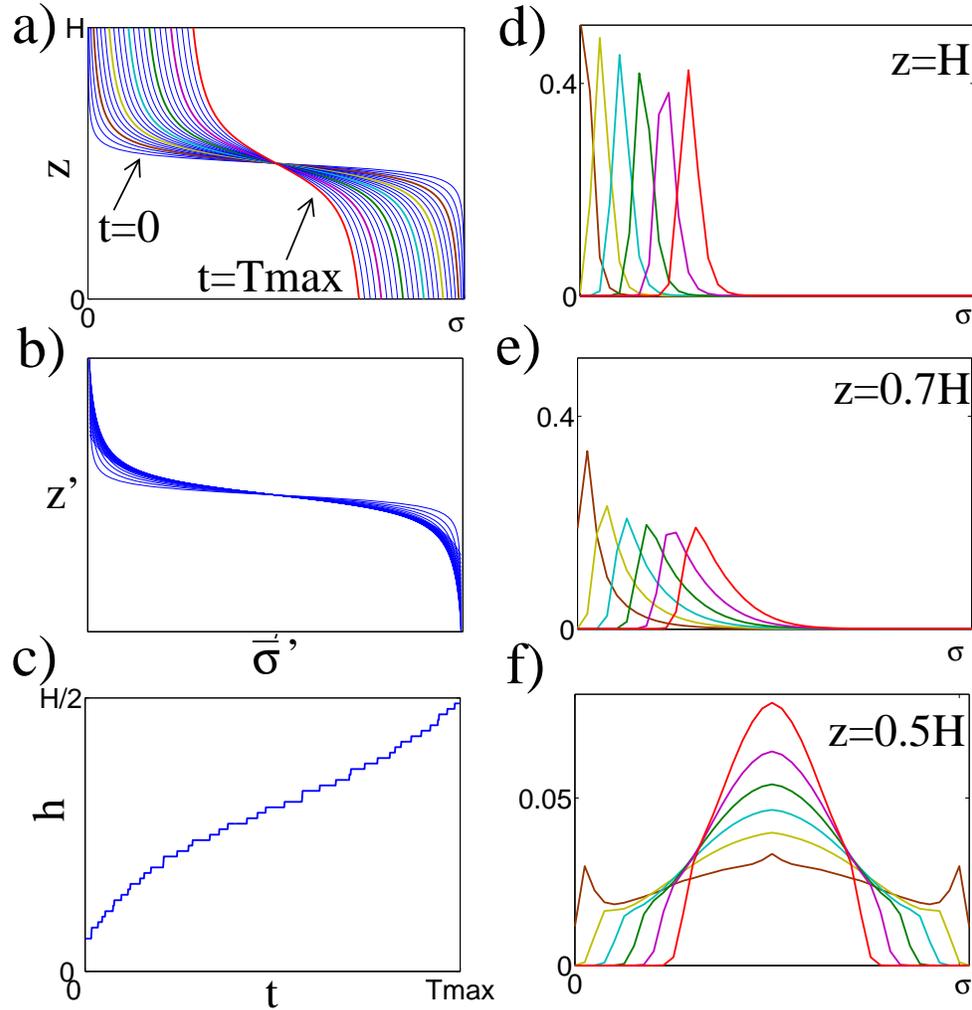


FIG. 7.5: La condition initiale est l'état d'équilibre d'un système à deux niveaux caractérisé par  $\beta = 200$ ,  $\tau_{diss} = 1000$ . a) évolution du profil moyen entre  $t = 0$  et  $t = 1000$  b) mêmes profils moyens redimensionnés en un profil quasi-autosimilaire (voir texte) c) évolution de l'épaisseur  $h$  de l'interface entre les deux couches (voir texte pour sa définition) d-e-f) évolution temporelle des PDF à différentes altitudes  $z$

Nous présentons figure 7.5 une situation proche du cas limite **i**). On considère les équations d'évolution (7.19) et (7.18). La condition initiale est l'état d'équilibre d'un système à deux niveaux (la densité du fluide vaut 0 ou 1), pour  $\beta = 200$ . On choisit un temps de vie des fluctuations  $\tau_{diss} \sim 1000$ ,

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

très supérieur au temps de relaxation vers l'équilibre statistique (de l'ordre de 1).

L'évolution temporelle du profil moyen de densité réduite est représenté sur la figure 7.5-a ; on donne l'évolution des PDF à trois altitudes  $z$  fixées sur les figures 7.5-d-e-f. Loin de l'interface (d), la PDF est un pic étroit. La valeur de densité réduite qui correspond à ce pic diminue peu à peu. Plus proche de l'interface (e), la PDF est asymétrique, avec des fluctuations importantes. Enfin, au milieu de l'interface (f), la PDF est symétrique, les bornes extrémales de densité réduite diminuant peu à peu.

Soulignons qu'il ne s'agit pas d'une évolution par diffusion turbulente "classique" : à l'ordre dominant, les processus de diffusions ont équilibrés par le terme de sédimentation. Le terme de dissipation crée peu à peu des niveaux de densité réduite intermédiaires, changeant ainsi le profil d'équilibre.

On représente l'évolution temporelle de l'épaisseur  $h$  de l'interface figure 7.5-c. On définit  $h(t)$  par  $\bar{\sigma}(h + H)/2 = 0.8\sigma_{max}$ . Un modèle diffusif "classique" prédirait une augmentation en  $t^{1/2}$ , qui n'est pas observée ici.

On propose de représenter ces profils moyens de densité réduite sous la forme d'un profil autosimilaire. On s'attend à ce que ces profils soient proches des états d'équilibres statistiques de systèmes à deux niveaux, ces deux niveaux étant les valeurs minimales ( $\sigma_{min}(t)$ ) et maximales ( $\sigma_{max}(t)$ ) de densité réduite du profil moyen. On déduit de l'équation (7.12) le profil d'équilibre

$$\bar{\sigma}(z, t) = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} - \frac{\Delta\sigma}{2} \tanh(\beta\Delta\sigma(z - H/2)) \quad \Delta\sigma(t) = \sigma_{max} - \sigma_{min}$$

Cette forme indique qu'il est pertinent de tracer

$$\bar{\sigma}'(z') = \frac{\bar{\sigma}(z', t) - (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2}{\Delta\sigma} \quad \text{où} \quad z' = \beta\Delta\sigma(z - H/2)$$

C'est ce qui est représenté 7.5-b. Le système passe bien par une succession de profils autosimilaires. L'écart à la forme proposée est due au fait que le système n'est pas strictement composé de deux niveaux.

## 7.4 Perspective : fermeture du système avec une équation d'évolution pour l'énergie cinétique

Nous avons jusque là supposé que l'énergie cinétique  $e$  et l'échelle caractéristique  $l$  de la turbulence étaient fixées. Cette hypothèse nous a permis de montrer les effets propres à la relaxation vers l'état d'équilibre statistique, en les dissociant des effets dus à la variation des coefficients de diffusion ( $D = le^{1/2}$ ).

Dans un écoulement réel, on ne peut pas imposer l'énergie cinétique. Le forçage impose soit la valeur de la vitesse en certains points, soit la puissance injectée dans le système. Il est dès lors nécessaire de considérer une équation d'évolution pour l'énergie cinétique. Nous proposons une équation de type diffusion turbulente :

$$\partial_t e = a_3 \partial_z (le^{1/2} \partial_z e) - \overline{\sigma \mathcal{J}} - a_4 l^{-1} e^{3/2} + \mathcal{P} \quad (7.20)$$

où  $\overline{\sigma \mathcal{J}}$  est le flux moyen de densité réduite (calculé à partir de l'équation (7.14) en prenant  $\beta = 1/2e$ ) qui exprime le transfert entre énergies potentielles et cinétiques :

$$\overline{\sigma \mathcal{J}} = -a_1 l e^{1/2} (\partial_z \overline{\sigma}) + \frac{1}{2e} (\overline{\sigma^2} - \overline{\sigma}^2) \quad (7.21)$$

Dans la limite où les fluctuations de densité sont nulles, on retrouve le modèle de Balmforth *et al* [10], présenté dans l'introduction (équation 5.3).

On distingue un terme de diffusion turbulente, un terme de dissipation turbulente ( $\sim l^{-1} e^{3/2}$ ), et un terme de production d'énergie par forçage mécanique extérieur ( $\mathcal{P}$ ) qui doit être modélisé selon les configurations étudiées (source ponctuelle ou globale, vitesse ou puissance imposée, etc). Remarquons que les fluctuations de densité sont une source d'énergie cinétique *via* le terme  $\frac{1}{2e} (\overline{\sigma^2} - \overline{\sigma}^2)$ .

En l'absence de forçage et de dissipation pour l'énergie cinétique ( $a_4 l^{-1} e^{3/2} = \mathcal{P}$  dans l'équation (7.20)) et pour les niveaux de densité réduite ( $\mathcal{D}_{cascade} = 0$  dans l'équation 7.17)), l'énergie totale  $E = \int_0^H (\overline{\sigma} z + e) dz$  est conservée par les équations (7.13) et (7.20).

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

Discutons pour finir de l'échelle caractéristique de l'écoulement : nous avons supposé jusque là que sa valeur ne varie pas. Dans un écoulement réel, ce n'est pas le cas. Par exemple, l'échelle verticale de l'écoulement est liée au gradient vertical de densité ( $l \sim -e^{1/2}/\partial_z \bar{\sigma}$ ), quand celui-ci est élevé : les mouvements verticaux sont inhibés par rapport aux mouvements horizontaux. Dans un écoulement non stratifié, l'échelle verticale de l'écoulement dépend du mode de production de la turbulence : l'échelle  $l = l_f$  est imposée par le type de forçage utilisé. On reprend la paramétrisation de Balmorth *et al* [10], qui couvre ces deux cas limites :  $l = l_f e^{1/2} / (e^{1/2} + a_5 l_f \sqrt{-\partial_z \bar{\sigma}})$ . Remarquons que d'autres modèles (en accord avec les cas limites) seraient envisageables pour  $l$ .

### Résumé : modèle complet

Nous résumons ici le modèle complet couplant l'évolution de l'énergie cinétique  $e(z, t)$  à celle des PDF de densité réduite  $\rho(z, \sigma, t)$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= -\partial_z \mathcal{J} + a_2 l^{-1} e^{1/2} \mathcal{D} \\ \mathcal{J} &= -a_1 l e^{1/2} (\partial_z \rho - (2e)^{-1} \rho (\sigma - \bar{\sigma})) \\ \hat{\mathcal{D}} &= (\hat{\rho} \ln \hat{\rho} - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}) \quad \hat{\mathcal{D}} = \int e^{-\sigma \kappa} \mathcal{D}(\sigma) d\sigma \\ \partial_t e &= a_3 \partial_z (l e^{1/2} \partial_z e) + \overline{\sigma \mathcal{J}} - a_4 l^{-1} e^{3/2} + \mathcal{P} \\ l &= \frac{l_f e^{1/2}}{e^{1/2} + a_5 l_f \sqrt{-\partial_z \bar{\sigma}}} \end{aligned}$$

Nous avons ici modélisé le terme de dissipation des fluctuations par le modèle d'auto-convolution. D'autres choix sont possibles (voir chapitre 6)

Deux quantités doivent être modélisées : le terme de forçage  $\mathcal{P}$  et l'échelle caractéristique  $l_f$  associée à ce forçage. On distingue en outre 5 paramètres intrinsèques :

- $a_1$  et  $a_3$  caractérisent la diffusivité turbulente pour la densité et pour l'énergie, respectivement.
- $a_2$  et  $a_4$  caractérisent l'efficacité de la dissipation des fluctuations de densité réduite et de vitesse turbulente.

- $a_5$  caractérise l'échelle verticale de la turbulence en présence de forte stratification.

Il reste à étudier numériquement ce modèle, et discuter sa sensibilité aux différents paramètres – cela constituera l'objet d'un travail ultérieur. La comparaison du modèle à des expériences de laboratoire sera ensuite envisageable.

## 7.5 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté les différentes étapes permettant de construire un modèle pour l'évolution temporelle des PDF de densité réduite, couplé à l'évolution de l'énergie cinétique de l'écoulement. Le modèle obtenu satisfait aux propriétés de conservation des niveaux de densité réduite et de l'énergie totale, en l'absence de forçage et dissipation.

Une comparaison des prédictions de ce modèle avec des expériences de laboratoire nécessiterait dans un premier temps de trouver des configurations simples, qui permettraient d'étudier un mécanisme pris isolément des autres. Revenons à ce propos sur les diverses observations expérimentales mentionnées dans l'introduction :

- La **formation de couches** est expliquée par les modèles de diffusion pour les quantités moyennes, pour une certaine paramétrisation des coefficients de diffusion. Décrire l'évolution des fluctuations n'est dans ce cas pas nécessaire.
- La **restratification** d'un fluide suite à une instabilité (par exemple Rayleigh-Taylor) ne peut être décrite par les modèles de diffusion classiques pour la quantité moyenne. **Dans ce cas, le modèle que nous avons présenté donne une prédiction pour l'évolution du profil moyen (et pour le forme des PDF), là où les modèles classiques ne prédiraient aucune évolution (dans le cas d'un profil moyen initialement uniforme pour la densité réduite).** Les prédictions du modèle pour l'évolution des fluctuations demanderaient à être testées dans ce type de configurations expérimentales.
- Une étude expérimentale des fluctuations de densité à l'interface d'un **fluide stratifié bicouche**, en présence d'une grille oscillant verticalement dans la couche inférieure est en cours.

De nombreuses expériences de mélange de fluides de densité différentes

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

ont été étudiées dans les années 60-90, notamment au DAMPT, à Cambridge par le groupe de Turner [126]. Citons par exemples l'intrusion de panaches denses dans la partie supérieure d'une cuve remplie d'un fluide plus léger. Les panaches créent dans un premier temps un écoulement turbulent qui mélange les panaches au fluide environnant, puis les différents niveaux de densité réduite ainsi créés sédimentent jusqu'au fond de la cuve. Il existe des lois d'échelles expliquant qualitativement ces observations expérimentales. Ces expériences pourraient maintenant être reproduites en utilisant les techniques modernes de visualisation (LIF, PIV). Cela permettrait de mesurer la structure fine de ces écoulements, en particulier les PDF de densité réduite.

---

## Conclusion générale et perspectives

---

Nous avons abordé deux aspects des écoulements océaniques de surface, i) la circulation à grande échelle, par l'étude d'équilibres statistiques de modèles simples d'océans, et ii) le mélange à petite échelle, par l'élaboration de modèles d'évolution temporelle pour la distribution de densité à différentes altitudes.

Les approches suivies dans les deux cas sont certes différentes, mais l'idée sous-jacente est la même : le grand nombre de degrés de liberté en jeu dans les phénomènes décrits rend illusoire le calcul de la dynamique fine de ces écoulements. D'où l'intérêt d'une approche statistique, qui réduit ces problèmes à l'étude de quelques paramètres.

**L'objectif de la première partie** était de déterminer si certaines solutions inertielles de modèles simplifiés d'océans présentent un jet intense dirigé vers l'est (comme le Kuroshio et le Gulf Stream), et d'étudier ces solutions dans le contexte des théories statistiques d'écoulements océaniques.

À notre connaissance, la seule solution inertielle étudiée dans le contexte des modèles idéalisés de circulation océanique (pour un domaine fermé) est celle de Fofonoff, qui ne présente pas de jet intense dirigé vers l'est en milieu de bassin [51] : cette solution est caractérisée par un courant faible dirigé vers l'ouest, avec des jets de recirculation intenses aux frontières nord et sud.

**Les jets intenses dirigés vers l'est sont des solutions inertielles de modèles simples d'océans.** Nous avons montré dans un premier temps qu'il existe des solutions inertielles présentant un jet intense dirigé vers l'est, dans le cadre des modèles QG équivalents barotropes sur un plan bêta et dans la limite des faibles rayons de déformation de Rossby, d'abord pour un bassin océanique fermé (chapitre 2), puis dans un canal périodique ou d'extension zonale infinie (chapitre 3).

**Ces jets ne sont pas des états d'équilibre statistiques.** Nous avons montré par des calculs analytiques que les solutions décrites au paragraphe précédent ne sont pas des maxima d'entropie de la théorie statistique Robert-Sommeria-Miller (chapitre 2).

Cela a motivé l'étude des équilibres statistiques de modèles baroclines (à deux couches). Nous avons montré que les états à haute énergie sont dominés par la composante barotrope (la moyenne verticale) de ces écoulements. Le calcul numérique des états d'équilibre statistiques pour des énergies intermédiaires a montré qu'il existe dans certains cas un jet barocline dirigé vers l'est, mais que ce jet est dominé par la composante barotrope de l'écoulement, dirigée vers l'ouest (chapitre 2). L'existence de ces structures barocline montre que la barotropisation des écoulements QG du modèle à deux couches n'est pas complète.

**Dans un canal, ces jets sont linéairement stables.** Les jets dirigés vers l'est ne sont pas des états d'équilibre statistiques, mais cela ne signifie pas pour autant qu'ils sont instables.

Dans le cas d'un canal (un domaine sans frontières à l'ouest et à l'est), nous avons montré la stabilité de ces jets là où les critères classiques de stabilité ne peuvent être appliqués.

La description qualitative de l'évolution des perturbations de faible amplitude montre que les grandes longueurs d'ondes, advectées vers l'ouest, pourraient déstabiliser la solution en présence d'une frontière ouest. Afin de comprendre la dynamique de ces jets dans un bassin océanique fermé, il conviendrait d'étudier plus en détail le rôle de ces frontières.

**Une étude thermodynamique des solutions "Fofonoff".** Nous avons calculé et décrit l'ensemble des états d'équilibres statistiques RSM caractérisés par une relation linéaire entre vorticité potentielle et fonction cou-

rant, pour une large classe d'écoulements 2-D (dont les équations quasi-géostrophiques).

La solution classique de Fofonoff, obtenue dans la limite des faibles énergies, fait partie des états décrits par cette étude. Nous avons prouvé que ces solutions sont des états d'équilibre statistiques RSM. De plus, nous avons montré l'existence de transitions de phases dans la structure de l'écoulement pour des énergies plus élevées. Les états décrits ont parfois une structure très différente de la solution de Fofonoff.

L'étude théorique de ces solutions s'est révélée particulièrement féconde dans le contexte de la physique des systèmes à interaction à longue portée. En effet, nous avons vu que de nombreux phénomènes thermodynamiques étonnants (inéquivalence entre les ensembles statistiques, capacités thermiques négatives...), propres à ce type de systèmes, peuvent être mis en évidence dans les écoulements 2-D.

Nous avons décrit par des calculs explicites l'existence de zones d'inéquivalence entre les ensembles statistiques (microcanonique, canoniques) — ce qui n'a à notre connaissance jamais été fait auparavant.

L'intérêt de notre étude est d'avoir lié cette inéquivalence à l'existence de transitions de phase dans la structure — facilement observable — de l'écoulement.

Ces résultats indiquent que les écoulements 2-D seraient de bons candidats à la mise en œuvre d'expériences de laboratoire qui permettraient d'observer certaines propriétés liées à l'inéquivalence d'ensemble. Il s'agit d'un enjeu majeur dans ce domaine.

Les calculs de ces états d'équilibre ayant été restreints aux solutions caractérisées par une relation linéaire entre vorticité potentielle et fonction courant, la prolongation de ce travail serait d'étudier l'effet de faibles non-linéarités pour cette relation. Il s'agit d'un travail en cours.

### **Une méthode pour montrer la stabilité des solutions stationnaires.**

La méthode utilisée au chapitre 4 pour calculer analytiquement les états d'équilibre de la théorie RSM est intéressante en soi. Nous avons réduit le problème variationnel de la théorie statistique au calcul du maximum d'une fonctionnelle quadratique, sous contrainte linéaire.

Cette méthode nous a permis de montrer la stabilité non-linéaire de certains états d'équilibres statistiques RSM (ce qui n'est a priori pas évident), dans un cas où le critère d'Arnold n'est pas satisfait (début du chapitre 3 et

fin du chapitre 4). Le critère d'Arnold consiste à chercher l'extremum d'une fonctionnelle d'énergie-Casimir ; dans la zone où les ensembles statistiques ne sont pas équivalents, les états d'équilibre statistique sont des points selle de cette fonctionnelle. La prise en compte de contraintes supplémentaires (i.e. la circulation, conservée par la dynamique) nous a permis de conclure à la stabilité non-linéaire de toute une classe d'écoulements situés dans la zones d'inéquivalence d'ensemble.

C'est la même méthode qui a été utilisée au chapitre 3 pour montrer la stabilité linéaire des jets dirigés ver l'est dans un canal, là où les critères classiques (de Rayleigh-Kuo-Fjortoft) ne peuvent être appliqués.

**Relation entre vorticité potentielle et fonction courant.** Les résultats décrits dans les paragraphes précédents sont obtenus en supposant une certaine relation entre vorticité potentielle et fonction courant. Une étude de l'existence (ou non) de ces relations, et de leurs propriétés, dans le cadre de données issues de l'altimétrie, ou de modèles réalistes de circulation, serait très intéressante. Nous avons entamé une collaboration en ce sens avec J. Le Sommer, dans l'équipe MEOM du LEGI.

**L'objectif de la seconde partie** était d'obtenir une équation d'évolution pour la probabilité de mesurer une certaine concentration en température ou salinité à une altitude donnée, de manière à décrire les processus de mélange dans des configurations simples de fluides stratifiés.

L'idée initiale était d'appliquer les idées de la mécanique statistique de la vorticité potentielle (en turbulence 2-D) au mélange de la température ou de la salinité (par la turbulence 3-D). Cette analogie a guidé l'élaboration d'un modèle d'évolution. Dans ce contexte, il est apparu nécessaire de modéliser la dissipation des fluctuations du traceur par les effets de cascade turbulente.

**Un modèle de dissipation des fluctuations de la PDF d'un traceur par des processus de cascade turbulente.** Nous avons choisi d'aborder ce problème en considérant dans un premier temps un cas plus simple, où le traceur est passif (il n'interagit pas avec l'écoulement). Nous avons proposé un modèle d'évolution par convolutions successives, testé les limites des hypothèses sous-jacentes, et comparé les prédictions à des expériences de laboratoire et à d'autres approches (chapitre 6). Le point de vue

adopté fait partie d'une classe d'approches très répandues dans le contexte du mélange de fluides réactifs (le traceur est alors un composé chimique pouvant être créé ou détruit, et interagir avec l'écoulement en changeant la température). L'échange d'idées entre les communautés travaillant sur les fluides réactifs et stratifiés pourrait être très productive. Les travaux de Kerstein vont dans ce sens [67].

Le modèle de dissipation des fluctuations a aussi un intérêt dans le contexte de la turbulence 2-D. En effet, en présence d'une viscosité, même très faible, les niveaux de vorticité potentielle ne sont pas conservés par un écoulement réel, qui mélange la vorticité potentielle à petite échelle, par les processus de cascade turbulente. Le modèle de dissipation des fluctuations pourrait être incorporé aux équations (phénoménologiques) de relaxation vers l'équilibre statistique des PDF de la vorticité potentielle [100].

**Application au cas d'un fluide stratifié.** Nous avons proposé en parallèle un modèle d'évolution des PDF de la densité (température ou salinité) dans un écoulement turbulent et stratifié (chapitre 7).

Nous avons dans un premier temps négligé les effets de dissipation par cascades turbulentes. Cela nous a permis de faire une analogie avec le mélange de la vorticité potentielle en turbulence 2-D : les "niveaux" de densité du fluide et l'énergie totale sont conservés par la dynamique non visqueuse.

À partir de cette analogie, nous avons obtenu un modèle qui décrit une relaxation des PDF vers un état d'équilibre. Ce modèle comprend un terme classique de diffusion turbulente, mais aussi un terme de sédimentation. C'est ce dernier terme qui constitue l'intérêt et la nouveauté de cette approche. Il est directement lié à la contrainte de conservation des différents niveaux de densité du fluide.

Afin de prendre en compte les effets de mélange par cascades turbulentes 3-D, nous avons ensuite incorporé le modèle de dissipation des fluctuations de densité évoqué au paragraphe précédent.

Le modèle ainsi obtenu demanderait à être testé par des expériences de laboratoire dans des configurations simples. L'analyse des PDF de la densité est en cours, dans deux situations différentes :

- Dans les expériences de mélange d'un fluide bicouche par une grille oscillante, réalisées à Coriolis avec J. Sommeria
- Dans les expériences de Taylor-Couette pour un fluide bicouche réalisées par E. Guiez et J.B. Flor

## 7. UNE APPROCHE STATISTIQUE DU MÉLANGE DANS LES FLUIDES STRATIFIÉS

---

Pour conclure, nous espérons que les travaux présentés dans cette thèse motiveront des études expérimentales permettant de clarifier la pertinence des approches statistiques, que ce soit pour le rôle des fluctuations de densité dans les fluides stratifiés, ou pour l'organisation des écoulements en structures cohérentes à grande échelle dans les fluides en rotation.

---

# Bibliographie

---

- [1] <http://www.physicalgeography.net/>.
- [2] <http://fermi.jhuapl.edu/avhrr/gs/index.html>.
- [3] Numerical simulation realized by E. Simonnet.
- [4] <http://www.whoi.edu/science/PO/people/pberloff/>.
- [5] A. Groisman, V. Steinberg. Efficient mixing at low reynolds numbers using polymer additives. *Nature*, 410 :905, 2001.
- [6] A. Pumir, B. Shraiman, E. D. Siggia. Exponential tails and random advection. *Phys. Rev. Lett.*, 66(23) :2984, 1991.
- [7] A. Venaille, J. Sommeria. A dynamical equation for the distribution of a scalar advected by turbulence. *Phys. Fluids*, 19 :028101, 2007.
- [8] M. Antoni, S. Ruffo, and A. Torcini. First- and second-order clustering transitions for a system with infinite-range attractive interaction. *Phys. Rev. E.*, 66(2) :025103–+, Aug. 2002.
- [9] B. I. Shraiman, E. D. Siggia. Scalar turbulence. *Nature*, 405 :639, 2000.
- [10] N. J. Balmforth, S. G. L. Smith, and W. R. Young. Dynamics of interfaces and layers in a stratified turbulent fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 355 :329–358, Jan. 1998.
- [11] J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo. Large deviation techniques applied to systems with long range interactions. *J. Stat. Phys.*, 119 1/2, 2005.

- [12] J. Barré, D. Mukamel, and S. Ruffo. Inequivalence of ensembles in a system with long-range interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 87(3) :030601, Jun 2001.
- [13] T. K. Barrett and C. W. van Atta. Experiments on the inhibition of mixing in stably stratified decaying turbulence using laser Doppler anemometry and laser-induced fluorescence. *Physics of Fluids*, 3 :1321–1332, May 1991.
- [14] G. Batchelor and A. Townsend. Turbulent diffusion. In *Surveys in Mechanics*, page 352. Cambridge University Press, 1956.
- [15] P. Berloff, A. M. Hogg, and W. Dewar. The Turbulent Oscillator : A Mechanism of Low-Frequency Variability of the Wind-Driven Ocean Gyres. *Journal of Physical Oceanography*, 37 :2363–+, 2007.
- [16] F. Bouchet. Simpler variational problems for statistical equilibria of the 2D Euler equation and other systems with long range interactions. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 237 :1976–1981, Aug. 2008.
- [17] F. Bouchet and J. Barré. Classification of phase transitions and ensemble inequivalence, in systems with long range interactions. *J. Stat. Phys.*, 118 5/6 :1073–1105, 2005.
- [18] F. Bouchet and E. Simonnet. Random changes of flow topology in two dimensional and geophysical turbulence. *ArXiv e-prints*, 804, Apr. 2008.
- [19] F. Bouchet and J. Sommeria. Emergence of intense jets and jupiter’s great red spot as maximum entropy structures. *J. Fluid. Mech.*, 464 :465–207, 2002.
- [20] P. Bougeault and R. Sadourny. *Dynamique de l’atmosphère et de l’océan*. Edition de l’école polytechnique, 2001.
- [21] H. Brands, S. R. Maassen, and H. J. H. Clercx. Statistical-mechanical predictions and Navier-Stokes dynamics of two-dimensional flows on a bounded domain. *Phys. Rev. E*, 60 :2864–2874, Sept. 1999.
- [22] K. Bryan. A Numerical Investigation of a Nonlinear Model of a Wind-Driven Ocean. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20 :594–606, Nov. 1963.

- 
- [23] E. Caglioti, P. L. Lions, C. Marchioro, and M. Pulvirenti. A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations : A statistical mechanics description. Part II. *Commun. Math. Phys.*, 174 :229–260, Dec. 1995.
- [24] P.-H. Chavanis. Phase transitions in self-gravitating systems : Self-gravitating fermions and hard-sphere models. *Phys. Rev. E*, 65(5) :056123, May 2002.
- [25] P.-H. Chavanis. Statistical mechanics of geophysical turbulence : application to jovian flows and Jupiter’s great red spot. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 200 :257–272, Jan. 2005.
- [26] P. H. Chavanis and M. Rieutord. Statistical mechanics and phase diagrams of rotating self-gravitating fermions. *Astronomy and Astrophysics*, 412 :1–17, Dec. 2003.
- [27] P. H. Chavanis and J. Sommeria. Classification of self-organized vortices in two-dimensional turbulence : the case of a bounded domain. *J. Fluid Mech.*, 314 :267–297, 1996.
- [28] P.-H. Chavanis and J. Sommeria. Thermodynamical Approach for Small-Scale Parametrization in 2D Turbulence. *Physical Review Letters*, 78 :3302–3305, Apr. 1997.
- [29] H. J. H. Clercx, S. R. Maassen, and G. J. F. van Heijst. Spontaneous Spin-Up during the Decay of 2D Turbulence in a Square Container with Rigid Boundaries. *Physical Review Letters*, 80 :5129–5132, June 1998.
- [30] H. J. H. Clercx, S. R. Maassen, and G. J. F. van Heijst. Decaying two-dimensional turbulence in square containers with no-slip or stress-free boundaries. *Physics of Fluids*, 11 :611–626, Mar. 1999.
- [31] I. Cohen, E.G. D. Ispolatov. Phase transitions in systems with  $1/r^\alpha$  attractive interactions. In T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens, editors, *Dynamics and Thermodynamics of Systems With Long Range Interactions*, 2002.
- [32] M. Costeniuc, R. S. Ellis, and H. Touchette. Complete analysis of phase transitions and ensemble equivalence for the Curie-Weiss-Potts model. *Journal of Mathematical Physics*, 46(6) :063301–+, June 2005.

- [33] M. Costeniuc, R. S. Ellis, and H. Touchette. Complete Analysis of Phase Transitions and Ensemble Equivalence for the Curie-Weiss-Potts Model. *J. Math. Phys.*, 46 :063301, 2005.
- [34] L. Cushman-Roisin, B. Pratt and E. Ralph. A General Theory for Equivalent Barotropic Thin Jets. *J. Phys. Oceanogr.*, 23 :91–103, 1993.
- [35] D. W. Meyer, P. Jenny. A mixing model for turbulent flows based on parametrized scalar profiles. *Phys. Fluids*, 19 :028101, 2007.
- [36] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens, editors. *Dynamics and Thermodynamics of Systems With Long Range Interactions*, 2002.
- [37] H. A. Dijkstra and G. M. Low-frequency variability of the large-scale ocean circulation : A dynamical systems approach. *Reviews of geophysics*, 43, 2005.
- [38] P. G. Drazin and W. H. Reid. Hydrodynamic stability. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 82 :17950–+, 1981.
- [39] J. K. Dukowicz and R. J. Greatbatch. Evolution of Mean-Flow Fofonoff Gyres in Barotropic Quasigeostrophic Turbulence. *Journal of Physical Oceanography*, 29 :1832–1852, Aug. 1999.
- [40] J. Duplat, C. Innocenti, and E. Villiermaux. Mixing by random stirring. *J. Fluid Mech. (soumis)*, 2008.
- [41] J. Duplat and E. Villiermaux. Persistency of material element deformation in isotropic flows and growth rate of lines and surfaces. *European Physical Journal B*, 18 :353–361, Nov. 2000.
- [42] E. Villiermaux, J. Duplat. Mixing as an aggregation process. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :184501, 2003.
- [43] R. S. Ellis, K. Haven, and B. Turkington. Large Deviation Principles and Complete Equivalence and Nonequivalence Results for Pure and Mixed Ensembles. *J. Stat. Phys.*, 101 :999, 2000.
- [44] R. S. Ellis, K. Haven, and B. Turkington. Nonequivalent statistical equilibrium ensembles and refined stability theorems for most probable flows . *Nonlinearity*, 15 :239–255, Mar. 2002.

- 
- [45] G. L. Eyink and K. R. Sreenivasan. Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence. *Reviews of Modern Physics*, 78 :87–135, Jan. 2006.
- [46] H. J. S. Fernando. Turbulent mixing in stratified fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23 :455–493, 1991.
- [47] R. Ferrari and D. L. Rudnick. Thermohaline variability in the upper ocean. *J. Geophys. Res.*, 105 :16857–16884, July 2000.
- [48] G. Flierl. Thin jet and contour dynamics models of Gulf Stream meandering. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 29 :189–215, July 1999.
- [49] G. R. Flierl, X. Carton, and C. Messenger. Vortex formation by unstable oceanic jet. In *ESAIM : Proceedings*, volume 7, pages 137–150. EDPscience, 1999.
- [50] G. R. Flierl, P. Malanotte-Rizzoli, and N. J. Zabusky. Nonlinear Waves and Coherent Vortex Structures in Barotropic  $\beta$ -plane Jets. *J. Phys. Oceanogr.*, 17 :1408–1438, Sept. 1987.
- [51] N. P. Fofonoff. Steady flow in a frictionless homogeneous ocean. *J. Mar. Res.*, 13 :254–262, 1954.
- [52] G. Falkovich, K. Gawedzky, M. Vergassola. Particles and fields in turbulence. *Rev. Mod. Phys.*, 73 :913–975, 2001.
- [53] S. S. Girimaji and S. B. Pope. Material-element deformation in isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 220 :427–458, Nov. 1990.
- [54] D. H. E. Gross and E. V. Votyakov. Phase transitions in “small” systems. *Eur. Phys. J. B*, 15 :115–126, Apr. 2000.
- [55] P. Hertel and W. Thirring. Free energy of gravitating fermions. *Commun. Math. Phys.*, 24 :22–36, Mar. 1971.
- [56] W. Hertel, P. Thirring. Soluble model for a system with negative specific heat. *Annals Phys.*, 63 :520–533, Apr. 1971.
- [57] G. Holloway. Eddies, waves, circulation, and mixing - Statistical geofluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18 :91–147, 1986.

- [58] G. Holloway. Representing Topographic Stress for Large-Scale Ocean Models. *Journal of Physical Oceanography*, 22 :1033–1046, Sept. 1992.
- [59] D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, and A. Weinstein. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys. Rep.*, 123 :1–2, July 1985.
- [60] E. J. Hopfinger and P. F. Linden. Formation of thermoclines in zero-mean-shear turbulence subjected to a stabilizing buoyancy flux. *Journal of Fluid Mechanics*, 114 :157–173, 1982.
- [61] E. J. Hopfinger and J.-A. Toly. Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 78 :155–175, Nov. 1976.
- [62] I. Isolatov and E. G. D. Cohen. Phase transitions in systems with  $1/r^\alpha$  attractive interactions. *Phys. Rev. E*, 64(5) :056103, Oct 2001.
- [63] V. J. and J. Devillon. Representation de la coalescence et de la re-dispersion des domaines de segregation dans un fluide par un modele d’interaction phenomenologique. In *Proceedings of the Second International Symposium on Chemical Reaction Engineering*. Elsevier, New York, 1972.
- [64] Jayesh, Z. Warhaft. Probability distribution, conditional dissipation and transport of passive temperature fluctuations in grid generated turbulence. *Phys. Fluids A*, 4 :2295, 1992.
- [65] B. Jüttner, A. Thess, and J. Sommeria. On the symmetry of self-organized structures in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, 7 :2108–2110, Sept. 1995.
- [66] E. Kazantsev, J. Sommeria, and J. Verron. Subgrid-scale eddy parameterization by statistical mechanics in a barotropic ocean model. *Journal of Physical Oceanography*, 28 :1017–1042, 1998.
- [67] A. R. Kerstein. One-dimensional turbulence : model formulation and application to homogeneous turbulence, shear flows, and buoyant stratified flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 392 :277–334, Aug. 1999.
- [68] M. K.-H. Kiessling and T. Neukirch. Negative specific heat of a magnetically self-confined plasma torus. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 100 :1510–1514, Feb. 2003.

- 
- [69] R. H. Kraichnan. Statistical dynamics of two-dimensional flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 67 :155–175, Jan. 1975.
- [70] R. H. Kraichnan and D. Montgomery. Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics*, 43 :547–619, May 1980.
- [71] P. Lee, T. Cornillon. Propagation of Gulf Stream Meanders between  $74^{\circ}$  and  $70^{\circ}$  W. *J. Phys. Oceanogr.*, 26 :205–224, 1996.
- [72] P. Lee, T. Cornillon. Propagation and Growth of Gulf Stream Meanders between  $75^{\circ}$  and  $45^{\circ}$  W. *J. Phys. Oceanogr.*, 26 :225–241, 1996.
- [73] Z. Lin. Some Stability and Instability Criteria for Ideal Plane Flows. *Communications in Mathematical Physics*, 246 :87–112, 2004.
- [74] D. Lynden-Bell and R. Wood. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 138 :495, 1968.
- [75] A. Macor, F. Doveil, and Y. Elskens. Electron Climbing a “Devil’s Staircase” in Wave-Particle Interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 95(26) :264102–+, Dec. 2005.
- [76] G. Madec. *NEMO ocean engine*, 2008.
- [77] R. Marshall, J. Plumb. *Atmosphere, ocean, and climate dynamics : an introductory text*. Amsterdam, Elsevier Academic Press, 2008.
- [78] J. L. McGrath, H. J. S. Fernando, and J. C. R. Hunt. Turbulence, waves and mixing at shear-free density interfaces. Part 2. Laboratory experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 347 :235–261, Sept. 1997.
- [79] J. Michel and R. Robert. Large deviations for Young measures and statistical mechanics of infinite-dimensional dynamical systems with conservation law. *Comm. Math. Phys.*, 159(1) :195–215, 1994.
- [80] B. N. Miller and P. Youngkins. Phase Transition in a Model Gravitating System. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :4794–4797, Nov. 1998.
- [81] J. Miller. Statistical mechanics of euler equations in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 65(17) :2137–2140, Oct 1990.
- [82] J. Miller, P. B. Weichman, and M. C. Cross. Statistical mechanics, Euler’s equation, and Jupiter’s Red Spot. *Phys. Rev. A*, 45 :2328–2359, Feb. 1992.

- [83] W. H. Munk. On the Wind-Driven Ocean Circulation. *Journal of Atmospheric Sciences*, 7 :80–93, Apr. 1950.
- [84] E. O'Brien. The probability density function (pdf) approach to reacting turbulent flows. In *turbulent reacting flows*, pages 185–203. London, Academic, 1980.
- [85] L. Onsager. Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento Suppl*, 6(279) :279, 1949.
- [86] T. Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating systems. *Phys. Rep.*, 188 :285, 1990.
- [87] Y.-G. Park, J. A. Whitehead, and A. Gnanadeskian. Turbulent mixing in stratified fluids : layer formation and energetics. *Journal of Fluid Mechanics*, 279 :279–311, 1994.
- [88] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics*. New York and Berlin, Springer-Verlag, 1982. 636 p., 1982.
- [89] J. Pedlosky. *Ocean Circulation Theory*. New York and Berlin, Springer-Verlag, 1998.
- [90] M. Phillips. Turbulence in a strongly stratified flow - is it unstable? *Deep-Sea Research*, 19 :79–81, 1972.
- [91] S. Pond and G. L. Pickard. *Introductory dynamical oceanography*. Pergamon Press, 1983.
- [92] E. S. Posmentier. The Generation of Salinity Finestructure by Vertical Diffusion. *Journal of Physical Oceanography*, 7 :298–300, 1977.
- [93] L. Pratt. Meandering and Eddy Detachment According to a Simple (Looking) Path Equation. *J. Phys. Oceanogr.*, 18 :1627–1640, 1988.
- [94] M. Pratt, L. Stern. Dynamics of Potential Vorticity Fronts and Eddy Detachment. *J. Phys. Oceanogr.*, 16 :1101–1120, 1986.
- [95] R. L. Curl. Dispersed phase mixing : 1. theory and effects in simple reactors. *AIChE*, 9 :175, 1963.
- [96] R. O. Fox. The fokker-planck closure for turbulent molecular mixing : Passive scalar. *Phys. Fluids A*, 4(6) :1230–1244, 1992.
- [97] S. Rahmstorf. Thermohaline circulation : The current climate. *Nature*, 421 :699–+, Feb. 2003.

- 
- [98] R. Robert. A maximum-entropy principle for two-dimensional perfect fluid dynamics. *J. Stat. Phys.*, 65 :531–553, 1991.
- [99] R. Robert and J. Sommeria. Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, 229 :291–310, Aug. 1991.
- [100] R. Robert and J. Sommeria. Relaxation towards a statistical equilibrium state in two-dimensional perfect fluid dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 69(19) :2776–2779, Nov 1992.
- [101] C.-G. Rossby. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *J. Mar. Res.*, pages 38–55, 1939.
- [102] B. Ruddick, T. McDougall, and T. J.S. The formation of layers in a uniformly stirred density gradient. *Deep Sea Research Part I : Oceanographic Research*, 36 :597–609, Apr. 1989.
- [103] S. B. Pope. An improved turbulent mixing model. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 28 :131, 1982.
- [104] S. Heinz. On fokker-planck equations for turbulent reacting flows. part 1. probability density function for reynolds-averaged navier-stokes equations. *Flow, Turb. Combust.*, 70 :115–152, 2003.
- [105] R. Salmon. Two-layer quasi-geostrophic turbulence in a simple special case. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 10 :25–52, 1978.
- [106] R. Salmon, G. Holloway, and M. C. Hendershott. The equilibrium statistical mechanics of simple quasi-geostrophic models. *Journal of Fluid Mechanics*, 75 :691–703, 1976.
- [107] N. Sauvage. Mécanique statistique d’écoulements océaniques. Master’s thesis, ENS-Lyon, 2005.
- [108] S.B. Pope. Pdf methods for turbulent reactive flows. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 11(2), 1985.
- [109] S.B. Pope. Mapping closures for turbulent mixing and reaction. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2 :255, 1991.
- [110] D. A. Schecter, D. H. E. Dubin, K. S. Fine, and C. F. Driscoll. Vortex crystals from 2D Euler flow : Experiment and simulation. *Physics of Fluids*, 11 :905–914, Apr. 1999.

- [111] R. Seydel. *Practical bifurcation and stability analysis*. New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1994.
- [112] E. Simonnet. On the unstable discrete spectrum of the linearized 2-d euler equations in bounded domains. *Physica D*, 237 :2539–2552, 2008.
- [113] R. A. Smith and T. M. O’Neil. Nonaxisymmetric thermal equilibria of a cylindrically bounded guiding-center plasma or discrete vortex system. *Physics of Fluids B*, 2 :2961–2975, Dec. 1990.
- [114] J. Sommeria. Course 8 : Two-Dimensional Turbulence. In M. Lesieur, A. Yaglom, and F. David, editors, *New Trends in Turbulence*, pages 385–+, 2001.
- [115] B. Stahl, M. K.-H. Kiessling, and K. Schindler. Phase transitions in gravitating systems and the formation of condensed objects. *Planet. Space Sci.*, 43 :271–282, Feb. 1995.
- [116] H. Stommel. The westward intensification of wind-driven ocean currents . *Trans. Amer. Geophys. Union*, 1948.
- [117] H. U. Sverdrup. Wind-Driven Currents in a Baroclinic Ocean ; with Application to the Equatorial Currents of the Eastern Pacific. *Proceedings of the National Academy of Science*, 33 :318–326, Nov. 1947.
- [118] E. Tabak and F. Tal. Mixing in simple models for turbulent diffusion. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 57 :563–589, 2004.
- [119] T. Tatekawa, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo. Thermodynamics of the self-gravitating ring model. *Phys. Rev. E.*, 71(5) :056111–+, May 2005.
- [120] A. Thess, J. Sommeria, and B. Jüttner. Inertial organization of a two-dimensional turbulent vortex street. *Physics of Fluids*, 6 :2417–2429, July 1994.
- [121] H. Touchette. Simple spin models with non-concave entropies. *American Journal of Physics*, 76 :26–30, Jan. 2008.
- [122] A. M. Treguier. Modelisation numerique pour l’oceanographie physique. *Annales mathematiques Blaise Pascal*, 9(2) :345–361, 2002.

- 
- [123] B. Turkington, A. Majda, K. Haven, and M. Dibattista. Statistical equilibrium predictions of jets and spots on Jupiter. *PNAS*, 98 :12346–12350, Oct. 2001.
- [124] B. Turkington and N. Whitaker. Statistical equilibrium computations of coherent structures in turbulent shear layers. *SIAM J. Sci. Comput.*, 17(6) :1414–1433, 1996.
- [125] J. S. Turner. The influence of molecular diffusivity on turbulent entrainment across a density interface. *Journal of Fluid Mechanics*, 33 :639–656, 1968.
- [126] J. S. Turner. Turbulent entrainment - The development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 173 :431–471, Dec. 1986.
- [127] V. Eswaran, S.B. Pope. Direct numerical simulations of the turbulent mixing of a passive scalar. *Phys. Fluids*, 31(3) :506, 1988.
- [128] V. Sabel’Nikov, M. Gorokhovskiy, N. Baricault. The extended iem mixing model in the framework of the composition pdf approach : application to diesel spray combustion. *Combust. Theo. Modelling*, 10(1) :155–169, 2006.
- [129] G. Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics : Fundamentals and Large-Scale Circulation*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., New York, U.S.A., 2005.
- [130] F. O. Vandermeirsch, X. J. Carton, and Y. G. Morel. Interaction between an eddy and a zonal jet - Part I. One-and-a-half-layer model. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 36 :247–270, Feb. 2003.
- [131] A. Venaille and F. Bouchet. Ensemble inequivalence, bicritical points and azeotropy for generalized Fofonoff flows. *ArXiv e-prints*, 710, Oct. 2007.
- [132] A. Venaille and J. Sommeria. Is Turbulent Mixing a Self-Convolution Process? *Physical Review Letters*, 100(23) :234506–+, June 2008.
- [133] G. Veronis. Wind-driven ocean circulation-Part 2. Numerical solutions of the non-linear problem. *Deep-Sea Res*, 7 :80–93, Apr. 1966.

- [134] E. Villiermaux, A. D. Stroock, and H. A. Stone. Bridging kinematics and concentration content in a chaotic micromixer. *Phys. Rev. E*, 77(1) :015301–+, Jan. 2008.
- [135] J. Wang and G. K. Vallis. Emergence of Fofonoff states in inviscid and viscous ocean circulation models. *Journal of marine research*, pages 83–127, 1994.
- [136] J. A. Whitehead and I. Stevenson. Turbulent mixing of two-layer stratified fluid. *Physics of Fluids*, 19(12) :125104–+, Dec. 2007.
- [137] G. Wolansky and M. Ghil. Stability of quasi-geostrophic flow in a periodic channel. *Physics Letters A*, 202 :111–116, Feb. 1995.
- [138] G. Wolansky and M. Ghil. An extension of arnol'd's second stability theorem for the euler equations. *Phys. D*, 94(4) :161–167, 1996.
- [139] C. Wunsch and R. Ferrari. Vertical Mixing, Energy, and the General Circulation of the Oceans. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36 :281–314, 2004.
- [140] S. Wunsch and A. Kerstein. A model for layer formation in stably stratified turbulence. *Physics of Fluids*, 13 :702–712, Mar. 2001.
- [141] S. Wunsch and A. R. Kerstein. A stochastic model for high-Rayleigh-number convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 528 :173–205, Apr. 2005.
- [142] E. Xuequan and E. J. Hopfinger. On mixing across an interface in stably stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 166 :227–+, 1986.
- [143] V. P. Youngkins and B. N. Miller. Gravitational phase transitions in a one-dimensional spherical system. *Phys. Rev. E*, 62 :4583–4596, Oct. 2000.



## Mixing and oceanic circulation : a statistical mechanics approach

**Abstract** Understanding how the small scales affect the large scales in oceans is an important issue for the description of surface currents and of the vertical structure of the oceans. The huge number of degrees of freedom involved in those problems makes any deterministic approach illusory. By contrast, the traditional tools of statistical mechanics allow to reduce those problems to the study of only a few parameters. In the first part, the equilibrium statistical mechanics of two-dimensional flows is applied to the study of simple ocean models. The second part is a phenomenological approach to turbulent mixing in stratified flows ; the aim is to describe the temporal evolution of the probability to measure a certain value of the fluid density at a given depth.

**Keywords** : turbulence ; Gulf Stream ; eastward jets ; Fofonoff flows ; long range interacting systems ; Statistical mechanics ; mixing ; stratified flows ; ensemble inequivalence

## Mélange et circulation océanique : une approche par la physique statistique

**Résumé** La compréhension de l'effet des petites échelles turbulentes sur l'organisation des grandes échelles des écoulements océaniques est un problème important, tant pour la description des courants de surface que pour la structure verticale des océans. Ces écoulements sont caractérisés par un nombre de degrés de liberté très élevé qui rend illusoire toute approche déterministe. Les outils de mécanique statistique permettent en revanche de réduire ces problèmes à l'étude de quelques paramètres. Dans la première partie, nous appliquons la mécanique statistique d'équilibre des écoulements bidimensionnels à l'étude de modèles simples d'océan. Il s'agit de comprendre les phénomènes d'organisation des courants à grande échelle. La seconde partie est une approche phénoménologique du mélange turbulent dans les fluides stratifiés. Il s'agit de décrire l'évolution temporelle de la probabilité de mesurer une certaine densité de fluide à une profondeur donnée.

**Mots clés** : turbulence ; Gulf Stream ; jets dirigés vers l'est ; écoulements de Fofonoff ; systèmes à interactions à longue portée ; mécanique statistique ; mélange ; fluides stratifiés ; inequivalence d'ensemble