



**HAL**  
open science

# Observateurs et commande basée sur un observateur pour les systèmes bilinéaires

Benjamin Gérard

► **To cite this version:**

Benjamin Gérard. Observateurs et commande basée sur un observateur pour les systèmes bilinéaires. Automatique / Robotique. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2008. Français. NNT: . tel-00347367

**HAL Id: tel-00347367**

**<https://theses.hal.science/tel-00347367>**

Submitted on 15 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Observateurs et commande basée sur un observateur pour les systèmes bilinéaires

## THÈSE (version provisoire)

présentée et soutenue publiquement le 14 novembre 2008 (prévue)

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1  
(spécialité automatique)

par

**Benjamin GERARD**

Ingénieur ENSEEIHT - Toulouse -France

### Composition du jury

*Rapporteurs* : M. FARZA Professeur, GREYC, Ensicaen, Caen  
G. GARCIA Professeur, LAAS, Université Paul Sabatier, Toulouse

*Examineurs* : M. FLIESS Directeur de recherche, Laboratoire LIX, Ecole Polytechnique, Palaiseau  
A. RICHARD Professeur, CRAN, Nancy Université, Nancy  
M. ZASADZINSKI Professeur, CRAN, Nancy Université, Nancy  
H. SOULEY ALI Maître de conférences, CRAN, Nancy Université, Nancy

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués, sous la responsabilité scientifique de Monsieur Michel ZASADZINSKI, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et de Monsieur Harouna SOULEY ALI, Maître de conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I, au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN, UMR 7039, CNRS,) dirigé par Monsieur Alain RICHARD, plus particulièrement au sein de l'équipe de Longwy du CRAN, dirigée par Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Germain GARCIA, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées et Sous Directeur de Recherche au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS) et Monsieur Mondher FARZA, Professeur à l'Université de Caen et membre du Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen (GREYC-CNRS). Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

Je suis honoré par la présence de Monsieur Michel FLIESS, Directeur de recherche au Laboratoire d'Informatique de l'Ecole Polytechnique (LIX-CNRS), ainsi que de Monsieur Alain RICHARD, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et directeur du CRAN (Centre de Recherche en Automatique de Nancy). Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury.

Que Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et responsable de l'équipe de Longwy du CRAN, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli au sein de son équipe, pour m'avoir encouragé et aidé tout au long de mes recherches et pour m'avoir offert de très bonnes conditions de travail.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Michel ZASADZINSKI, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, mon Directeur de Thèse, pour sa disponibilité et son soutien permanent. Ses qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je lui en suis très reconnaissant.

Mes remerciements vont également à Monsieur Harouna SOULEY ALI, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche et pour ses conseils judicieux, nos discussions fructueuses et son soutien de tous les instants..

J'adresse un grand merci à tous les membres de l'équipe de Longwy du CRAN que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant la durée de ma thèse : Hugues RAFARALAHY, Mohamed BOUTAYEB, Christophe FONTE, Latifa BOUTAT-BADDAS, Cédric DELATTRE,

Ali ZEMOUCHE, Boulaïd BOULKROUNE, Bertrand GRANDVALLET, Mohamed TAFRAOUTI, Souheil HALABI et Adil ALIF. Ils ont tous, de près ou de loin, contribué, par les nombreuses discussions que nous avons pu tenir, leur conseils ou leur bonne humeur, à l'excellent déroulement de ma thèse.

Je tiens à remercier Madame Marie-Pascale SAINT MICHEL, secrétaire de l'équipe de Longwy du CRAN et Madame Joëlle PINELLI, ancienne secrétaire, pour leurs soutiens.

Je remercie également l'ensemble du personnel de l'IUT de Longwy, du laboratoire du CRAN et de l'IUT Nancy Brabois de Nancy.

Durant ces longues années, mes parents, Hubert et Marie-France ainsi que ma sœur Emilie, ont toujours été présents et m'ont apporté leur soutien. Mes amis, proches comme Sam, Fuf, Emilie, Sylvain et Mickael et leur famille, ou lointains comme G1z, Yann ou Pitnik, m'ont toujours accueilli avec plaisir. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

*à mes parents.  
à l'équipe de Longwy.*



# Table des matières

<b>Symboles et abbréviations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1</b>	
<b>Présentation de l'état de l'art sur les systèmes bilinéaires</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Présentation des systèmes bilinéaires étudiés . . . . .	6
1.3 Outils pour l'analyse des systèmes linéaires . . . . .	9
1.3.1 Stabilité quadratique . . . . .	9
1.3.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$ , gain $\mathcal{L}_2$ et lemme borné réel . . . . .	9
1.3.3 Application aux systèmes LTV . . . . .	11
1.3.4 Systèmes polytopiques . . . . .	11
1.3.4.1 Extension à une classe de systèmes LTV . . . . .	12
1.4 Observabilité et observateurs des systèmes bilinéaires . . . . .	14
1.4.1 Résolution de l'équation d'état . . . . .	14
1.4.2 Discernabilité et caractérisation des entrées . . . . .	15
1.4.3 Observabilité des systèmes bilinéaires . . . . .	16
1.4.4 Observateurs pour les systèmes bilinéaires . . . . .	18
1.4.4.1 Observateurs exponentiels sans borne sur la commande pour les systèmes bilinéaires non uniformément observable	18
1.4.4.2 Observateurs asymptotiques ou exponentiels avec une com- mande bornée pour les systèmes bilinéaires non uniformé- ment observables . . . . .	19
1.4.4.3 Observateurs exponentiels pour les systèmes bilinéaires uniformément observables . . . . .	19
1.5 Commandes par retour d'état des systèmes bilinéaires . . . . .	20



1.5.1	Commande bang-bang . . . . .	21
1.5.2	Commande quadratique . . . . .	22
1.5.2.1	Commande quadratique : cas général . . . . .	22
1.5.2.2	Commande quadratique : partie linéaire quasi stable . . . . .	23
1.5.3	Commande linéaire . . . . .	24
1.6	Conclusion . . . . .	25

**Chapitre 2**

**Approche LPV pour l'observation des systèmes bilinéaires 27**

2.1	Introduction . . . . .	27
2.2	Filtrage à grand gain . . . . .	29
2.2.1	Approche LPV . . . . .	29
2.2.2	Observateur LPV robuste à grand gain . . . . .	33
2.3	Observateur fonctionnel : approche LPV . . . . .	40
2.3.1	Premier cas : construction du filtre avec la contrainte de type 1 . . . . .	43
2.3.2	Second cas : construction du filtre avec la contrainte de type 2 . . . . .	47
2.4	Les exemples . . . . .	50
2.4.1	Exemple d'observateur à grand gain . . . . .	50
2.4.2	Exemple d'observateur fonctionnel sans degré de liberté sur le gain . . . . .	55
2.4.3	Comparaison des filtres . . . . .	57
2.4.3.1	L'observateur à grand gain . . . . .	58
2.4.3.2	Observateur fonctionnel avec la contrainte de type 1 . . . . .	58
2.4.3.3	Observateur fonctionnel avec la contrainte de type 2 . . . . .	59
2.4.3.4	Les simulations . . . . .	60
2.4.4	Observateur fonctionnel pour les deux exemples du chapitre 1 . . . . .	63
2.4.4.1	Actionneur électromécanique . . . . .	63
2.4.4.2	Suspension active . . . . .	69
2.5	Conclusion . . . . .	72

**Chapitre 3**

**Commande basée observateur pour les systèmes bilinéaires 75**

3.1	Commande bang-bang basée sur un observateur . . . . .	76
3.1.1	Préliminaires . . . . .	76
3.1.2	Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur à grand gain . . . . .	77

---

3.1.3	Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel . . . . .	80
3.1.3.1	Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre plein . . . . .	80
3.1.3.2	Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre réduit . . . . .	82
3.1.4	Exemples . . . . .	85
3.1.4.1	Premier exemple . . . . .	85
3.1.4.2	Deuxième exemple . . . . .	87
3.1.4.2.1	Observateur à grand gain . . . . .	88
3.1.4.2.2	Observateur fonctionnel d'ordre plein . . . . .	90
3.1.4.2.3	Observateur fonctionnel d'ordre réduit . . . . .	92
3.1.4.2.4	Analyse des simulations . . . . .	93
3.2	Commande quadratique basée sur un observateur . . . . .	94
3.2.1	Commande quadratique adaptée pour une matrice $A_0$ quelconque . . . . .	94
3.2.1.1	Synthèse de la commande par retour d'état . . . . .	94
3.2.1.2	Test de cette commande avec un observateur fonctionnel d'ordre plein . . . . .	96
3.2.2	Commande quadratique basée sur un observateur avec une matrice $A_0$ quasi-stable . . . . .	100
3.2.2.1	Synthèse de la loi de commande . . . . .	102
3.2.2.2	Exemple . . . . .	103
3.3	Commande linéaire basée sur un observateur . . . . .	106
3.3.1	Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur à grand gain . . . . .	107
3.3.2	Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre plein . . . . .	109
3.3.3	Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre réduit . . . . .	110
3.3.4	Stabilité locale de la commande linéaire basée sur un observateur . . . . .	112
3.4	Combinaison des commandes quadratique et linéaire basée sur un observateur . . . . .	113
3.4.1	Synthèse de la loi de commande . . . . .	113
3.4.2	Exemple . . . . .	116
3.5	Conclusion . . . . .	121

<b>Chapitre 4</b>	
<b>Synthèse d'un observateur à deux étages</b>	<b>123</b>
4.1 Introduction . . . . .	123
4.2 Présentation du système bilinéaire à deux étages . . . . .	124
4.3 Observateur à deux étages : le premier sous-système est uniformément observable . . . . .	126
4.3.1 Synthèse de l'observateur pour le sous-système uniformément observable . . . . .	126
4.3.2 Synthèse de l'observateur associé au deuxième sous-système . . . . .	126
4.3.3 Stabilité de l'observateur à deux étages . . . . .	128
4.3.4 Atténuation des perturbations avec stabilité . . . . .	130
4.4 Observateur à deux étages : le premier sous-système n'est pas uniformément observable . . . . .	132
4.4.1 Stabilité de l'observateur à deux étages . . . . .	133
4.4.2 Atténuation des perturbations avec stabilité . . . . .	133
4.4.2.1 Atténuation des perturbations avec stabilité : premier cas	134
4.4.2.2 Atténuation des perturbations avec stabilité : deuxième cas	135
4.5 Exemple . . . . .	136
4.6 Conclusion . . . . .	138
<b>Conclusion générale</b>	<b>139</b>
—————	
<b>Annexe A</b>	
<b>Définitions algèbre de Lie</b>	<b>141</b>
A.1 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs . . . . .	141
A.2 Dérivées de Lie . . . . .	141
<b>Annexe B</b>	
<b>Compléments mathématiques</b>	<b>143</b>
B.1 Lemmes de majoration . . . . .	143
B.2 Lemme de Schur . . . . .	144
<b>Annexe C</b>	
<b>Forme canonique des systèmes bilinéaires uniformément observables</b>	<b>145</b>

---

C.1	Forme canonique . . . . .	145
C.2	Observateur à grand gain . . . . .	145
<b>Annexe D</b>		
<b>Lemmes bornés réels</b>		<b>147</b>
D.1	Lemme Borné Réel pour les systèmes LPV . . . . .	147
D.2	Lemme Borné Réel Totalement Paramétré (LBRT) . . . . .	149
<b>Annexe E</b>		
<b>Résultats sur les systèmes en cascade</b>		<b>151</b>
E.1	Systèmes et hypothèses . . . . .	151
E.2	Lemmes . . . . .	152
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>
	<b>Résumé</b>	<b>159</b>
	<b>Abstract</b>	<b>160</b>



# Symboles et abbréviations

## Ensembles

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	l'ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$
$\text{fr}(E)$	la frontière de l'ensemble $E$

## Sous-espaces de fonctions

$f(\cdot) > 0$	la fonction $f(\cdot)$ est définie positive
$f(\cdot) \leq 0$	la fonction $f(\cdot)$ est définie non positive
$f(\cdot) < 0$	la fonction $f(\cdot)$ est définie négative
$f(\cdot) \geq 0$	la fonction $f(\cdot)$ est définie non négative
$\langle X, Y \rangle = X^T Y$	est le produit scalaire des vecteurs $X$ et $Y$
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}; \mathbb{R})$	ensemble des fonctions $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables $k$ fois

## Normes

$\ \cdot\ $	norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice
$\ f\ _{\mathcal{L}_2}^2 = \mathbf{E}\{\int_0^\infty \ f(t)\ ^2 dt\} = \int_0^\infty \mathbf{E}\{\ f(t)\ ^2\} dt < \infty$	avec $f(\cdot) = (f(t))_{t \in [0, \infty)} \in \mathbb{R}^k$ , par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$
$\ x\ _\infty$	norme $\mathcal{L}_\infty$ du signal $x \in \mathcal{L}_\infty[0, \infty)$
$\ x\ _2$	norme $\mathcal{L}_2$ du signal $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$
$\ G\ _\infty$	norme $\mathcal{H}_\infty$ du système continu $G(s)$

## Matrices, opérations et relations matricielles

$P > 0, P \geq 0$	matrice $P$ symétrique définie (resp. semi-définie) positive
$P > Q, P \geq Q$	$P - Q > 0$ (resp. $P - Q \geq 0$ ) pour $P, Q$ symétriques $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{tr}(A)$	trace de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{rang}(A)$	rang de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\det(A)$	déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{Im}(A)$	espace image de $A : \{y \text{ tel que } y = Ax\}$
$\text{Re}(A)$	partie réelle de $A$
$(A)_{ik}$	$(i, k)^{\text{th}}$ élément de $A$
$A^\perp$	matrice $Z$ telle que $AZ = 0$ et $[A^T \ Z]$ de rang maximal
$\ker(A)$	noyau de $A : \{x \text{ tel que } Ax = 0\}$
$\lambda(A)$	valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\lambda_{\max}(A), \lambda_{\min}(A)$	valeur propre de module maximal (resp. minimal) de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$A^T, A^{-T}$	transposée de $A$ (resp. de l'inverse de $A$ ) $\in \mathbb{R}^{n \times m}$
$A^{-1}$	inverse de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(A) \neq 0$
$A^\dagger$	pseudo-inverse de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vérifiant $AA^\dagger A = A$
$I, 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
$I_n, 0_{n \times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$ )
$\text{diag}(A_1, \dots, A_p)$	matrice diagonale constituée avec les éléments de la diagonale des matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, p$
$\text{bdiag}(A_1, \dots, A_p)$	matrice bloc-diagonale constituée avec $A_1, \dots, A_p$ ( $A_i \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ) matrices $A_i \in \mathbb{C}^{n \times n}, i = 1, \dots, p$
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (1,2)^T & A_{22} \end{bmatrix}$	matrice partitionnée telle que le symbole $(1,2)^T$ représente le transposé du bloc $(1,2)$ , soit $A_{12}^T$

---

## Abréviations

LBRT	Lemme Borné Réel Totalement Paramétré
ln	logarithme népérien
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> - Inégalité Matricielle Bilinéaire
BRL	<i>Bounded Real Lemma</i> - Lemme Borné Réel
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> - Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	<i>Linear Parameter Varying</i> - Linéaire à Paramètres Variants
LTI	<i>Linear Time Invariant</i> - Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	<i>Linear Time Varying</i> - Linéaire à Variant dans le Temps
MIMO	<i>Multi Input Multi Output</i> - Multi-Entrée Multi-Sortie
SISO	<i>Single Input Single Output</i> - Mono-Entrée Mono-Sortie





# Introduction

La commande et l'estimation pour des systèmes bilinéaires restent des problèmes ouverts en automatique du fait de la nature non linéaire de ces systèmes. Devant les récents progrès techniques, la mise en œuvre de lois de commande pour les systèmes physiques ou technologiques est un problème qui présente un intérêt croissant. Ainsi, le respect de performances spécifiques nécessite un choix judicieux du correcteur. Pour ce faire, l'idéal serait de disposer complètement des états et des entrées du système. Cependant, pour des raisons intrinsèques au système ou pour des coûts d'installation des capteurs très élevés, il est fréquent que de la mesure de l'état ne soit que partielle. De plus, les mesures peuvent être affectées par des bruits de mesure. La démarche consiste alors à construire un correcteur performant en se basant uniquement sur des mesures partielles et bruitées. C'est pourquoi les correcteurs proposés dans la littérature sont souvent basés sur des observateurs, c'est-à-dire qu'ils intègrent un filtre estimant soit l'ensemble du vecteur d'état, soit la partie non mesurée de ce vecteur, ou encore une combinaison linéaire des coordonnées de celui-ci.

La synthèse d'un observateur pour les systèmes bilinéaires, même si ces systèmes semblent "proches" des systèmes linéaires, nécessite une approche différente. En effet, les entrées peuvent être singulière (voir 1, ce qui influe sur la synthèse des observateurs. Ces entrées doivent être prises en compte pour la détermination de lois de commande basées sur ces derniers. Cette spécificité du rôle des entrées dans les propriétés des systèmes bilinéaires nous a amené à traiter le problème de l'observation à partir de différentes approches. Dans la littérature, le filtre de Kalman est souvent utilisé pour estimer l'état des systèmes du fait de sa robustesse aux bruits blancs. Cependant, le filtre  $\mathcal{H}_\infty$ , auquel nous allons principalement nous intéresser dans ce mémoire, présente de nombreux avantages par rapport au filtre de Kalman. En effet, contrairement au filtre de Kalman, le filtre  $\mathcal{H}_\infty$  ne nécessite pas la caractérisation statistique des bruits affectant le système : il suffit que ces bruits soient à énergie bornée, le filtre  $\mathcal{H}_\infty$  est donc moins sensible aux variations du bruit. Pour obtenir un filtre  $\mathcal{H}_\infty$ , nous nous intéresserons principalement à deux approches, l'une s'appuyant explicitement sur le modèle, l'autre se basant sur l'analyse structurelle des systèmes bilinéaires en exploitant différemment les parties uniformément observables et non uniformément observables.

L'une des contributions de mon travail de recherche réside dans l'utilisation de l'approche LPV pour la prise en compte des entrées de commande afin de concevoir un observateur pour les systèmes bilinéaires : l'observateur à grand gain, spécialement adapté aux systèmes uniformément observables, et l'observateur fonctionnel. Des approches LMI

permettent la synthèse et/ou l'optimisation de ces filtres. Une LMI <sup>1</sup> est un système d'inégalités matricielles de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i < 0$$

où les matrices  $F_i$  sont connues (et symétrique dans ce mémoire) et où les scalaires  $x_i$  sont les variables inconnues à déterminer. L'observateur ou le correcteur à synthétiser est une fonction de ces variables  $x_i$ .

L'intérêt des méthodes basées sur des LMI vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. Avec cette approche, on n'est plus limité aux problèmes ayant une solution analytique. En résolvant ces inégalités, on obtient un domaine de solutions faisables, c'est-à-dire de solutions satisfaisant ces LMI, plus vaste que celui généré par la recherche de solutions analytiques. En utilisant le fait qu'une inégalité possède davantage de solutions qu'une égalité, il est possible d'employer les degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus. Ainsi, en utilisant une approche de type Lyapunov, un nombre important de problèmes de commande et de filtrage, incluant simultanément plusieurs spécifications, peuvent se mettre sous une forme LMI.

En s'appuyant sur les observateurs LPV <sup>2</sup>, différentes commandes saturées basées sur ces observateurs ont été proposées :

- la commande bang-bang,
- la commande quadratique,
- la commande linéaire,
- l'utilisation couplée de ces différentes commandes.

Une autre partie de mon travail a consisté à exploiter la structure des systèmes bilinéaires afin de relaxer le conservatisme dans le traitement des entrées lors de la synthèse d'un observateur. Nous avons ainsi conçu des observateurs à deux étages afin de séparer les dynamiques uniformément observables et celles qui ne le sont pas afin d'y appliquer différents types d'observateurs LPV. Cette approche montre en outre les possibilités d'association de divers types d'observateurs pour les systèmes de grandes dimensions. En s'appuyant sur la décomposition structurelle évoquée ci dessus, nous avons étudié le couplage de divers observateurs.

Tous les filtres et les commandes basées sur un observateur proposés dans ce mémoire sont illustrés par des exemples.

Les développements résumés ci-dessus constituent les quatre chapitres de ce mémoire. Nous allons en décrire les principaux aspects.

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, certains développements extraits de la littérature et utilisés dans ce mémoire sont donnés en annexe.

---

<sup>1</sup>LMI pour "Linear Matrix Inequality" ou Inégalité Matricielle Linéaire.

<sup>2</sup>LPV pour "Linear Parameter Variant" ou Linéaire à Paramètres Variants.

---

## Chapitre 1 : Présentation de l'état de l'art sur les systèmes bilinéaires

Ce chapitre est consacré à des rappels de notions sur les systèmes bilinéaires ainsi que quelques outils permettant l'analyse des systèmes linéaires à paramètres variants. Ces notions sont utilisées tout au long de ce mémoire.

Nous avons d'abord présenté les systèmes bilinéaires en donnant la forme de ceux que nous avons étudiés ainsi que deux exemples de processus pouvant être modélisés par des systèmes bilinéaires, un actionneur électromécanique et une suspension active.

Ensuite une étude approfondie de l'observabilité des systèmes bilinéaires, de la caractérisation des entrées ainsi qu'un rappel des observateurs et de leurs méthodes de synthèse ont été présentés. Finalement les commandes utilisées dans ce rapport

- la commande bang-bang,
- les commandes quadratiques,
- la commande linéaire,

sont détaillées.

## Chapitre 2 : Filtrage fonctionnel d'ordre réduit pour les systèmes linéaires

Ce chapitre est consacré au filtrage pour les systèmes bilinéaires. Le filtrage à grand gain (dont un rappel est fait en annexe C) ainsi que le filtrage fonctionnel ont été proposés. Ce dernier est d'ordre  $r$ , c'est-à-dire d'ordre égal à la dimension de la fonctionnelle à estimer alors que le filtre à grand gain est de la taille du système.

Le filtre à grand gain présenté n'a qu'un paramètre  $\theta$  comme degré de liberté. Une approche LPV-LMI a été utilisée pour choisir la valeur de ce paramètre pour que la stabilité de l'erreur d'observation soit assurée tout en minimisant l'influence des perturbations. Pour le filtre fonctionnel, une mise en forme requérant la résolution de multiples équations de Sylvester et nécessitant l'introduction de contraintes permet de remplacer la recherche des diverses matrices de gain du filtre en une recherche d'une seule matrice via la résolution de LMI. Des théorèmes ont été établis en se basant sur une version "descriptor" du lemme borné réel présentée en annexe D et en transformant le système qui représente l'erreur d'observation en un système LPV.

Des exemples illustrent les résultats obtenus dans ce chapitre et compare les différents filtres présentés.

## Chapitre 3 : Commande basée sur un observateur pour les systèmes bilinéaires

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la commande basée sur un observateur pour les systèmes bilinéaires. Afin de pouvoir utiliser les observateurs du chapitre 2, nous traiterons principalement les commandes saturées. Pour chaque type de commande,

présenté au premier chapitre, l'observateur à grand gain, l'observateur fonctionnel d'ordre plein et l'observateur fonctionnel d'ordre réduit seront utilisés pour la réalisation de la commande.

Des conditions de stabilité et des procédures de synthèse seront présentées. Nous traiterons, dans un premier temps, la commande bang-bang basée observateur par une approche algébrique, puis la commande quadratique par une approche analytique, ensuite la commande linéaire par des approches algébrique et analytique, enfin la commande quadratique combinée à la commande linéaire.

## **Chapitre 4 : Synthèse d'un observateur à deux étages**

Ce dernier chapitre est consacré à la synthèse d'observateurs "à deux étages" pour les systèmes bilinéaires. Il s'agit d'exploiter la structure des systèmes bilinéaires afin de relaxer le conservatisme dans le traitement des entrées lors de la synthèse d'un observateur. Les observateurs à deux étages permettent de séparer les dynamiques uniformément observables et celles qui ne le sont pas afin d'y appliquer les différents types d'observateurs présentés au chapitre 2.

L'observateur "à deux étages" est obtenu en combinant deux observateur synthétisés séparément sur chaque des étages. La preuve de la stabilité de l'erreur d'observation est basée sur des travaux de Vidyasagar [Vid80a] présentés dans l'annexe E. L'efficacité de cette approche est illustrée par un exemple.

# Chapitre 1

## Présentation de l'état de l'art sur les systèmes bilinéaires

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>Présentation des systèmes bilinéaires étudiés</b>	<b>6</b>
<b>1.3</b>	<b>Outils pour l'analyse des systèmes linéaires</b>	<b>9</b>
1.3.1	Stabilité quadratique	9
1.3.2	Norme $\mathcal{H}_\infty$ , gain $\mathcal{L}_2$ et lemme borné réel	9
1.3.3	Application aux systèmes LTV	11
1.3.4	Systèmes polytopiques	11
<b>1.4</b>	<b>Observabilité et observateurs des systèmes bilinéaires</b>	<b>14</b>
1.4.1	Résolution de l'équation d'état	14
1.4.2	Discernabilité et caractérisation des entrées	15
1.4.3	Observabilité des systèmes bilinéaires	16
1.4.4	Observateurs pour les systèmes bilinéaires	18
<b>1.5</b>	<b>Commandes par retour d'état des systèmes bilinéaires</b>	<b>20</b>
1.5.1	Commande bang-bang	21
1.5.2	Commande quadratique	22
1.5.3	Commande linéaire	24
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>

---

### 1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à des rappels de notions sur les systèmes bilinéaires ainsi qu'à la présentation de quelques outils permettant l'analyse des systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps. Ces notions sont utilisées tout au long de ce mémoire.

Dans la première partie de ce chapitre (section 1.2), nous présentons quelques exemples de la littérature décrivant des processus réels pouvant être modélisés par des équations d'état bilinéaires. Ces dernières sont utilisées lorsque le comportement dynamique d'un

système ne permet pas de le modéliser de manière satisfaisante par un système linéaire. Ensuite, nous rappelons les principaux concepts sur l'observabilité des systèmes bilinéaires ou, plus généralement, des systèmes non linéaires. Contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes bilinéaires dépend fortement des entrées exogènes, c'est-à-dire qu'il existe des entrées exogènes pour lesquelles le système bilinéaire est observable et d'autres pour lesquelles le système ne l'est pas. Ces dernières, appelées entrées singulières, ne permettent pas de discerner, à partir des mesures, deux états initiaux distincts : les mesures générées par ces entrées singulières à partir de deux états initiaux distincts peuvent donc être confondues. Dans notre cas, seules les entrées de commande peuvent être singulières puisque les perturbations agissent de manière linéaire dans l'équation d'état et n'influent donc pas sur l'observabilité du système.

La littérature sur la commande des systèmes bilinéaires étant relativement vaste et puisque ce n'est pas le thème central de ce mémoire, nous ne ferons donc pas une étude approfondie de la commande des systèmes bilinéaires. En effet, nous nous intéressons à la commande basée sur un observateur, c'est-à-dire à l'influence d'un observateur dans une structure de commande en boucle fermée. C'est pourquoi, dans ce chapitre, seule sera présentée la littérature sur les techniques de commande des systèmes bilinéaires par retour d'état utilisées dans la suite de ce mémoire. Les commandes calculant les gains en ligne (voir [AG94] par exemple) ne seront pas exposées. Nous traiterons trois types de commandes qui sont bien adaptées aux système bilinéaires.

- La commande bang-bang proposée par Longchamp (voir [Lon80]) est une commande où chaque entrée peut prendre deux valeurs opposées, elle est donc discontinue et n'est pas adaptée aux systèmes ayant une partie linéaire sur la commande.
- La commande quadratique a été beaucoup étudiée de fait de sa structure particulièrement adaptées aux systèmes bilinéaires (voir [MA73, Jac79, Gut81, GK92, Lin95]).
- Enfin, nous présenterons la commande linéaire introduite dans [DN80] qui est une commande locale.

Différentes stabilités seront étudiées en fonction de certaines caractéristiques du système bilinéaire, la stabilité pratique (voir [LL61, Mys92, RM05]), asymptotique, quadratique et exponentielle, locale ou globale (voir [Vid80b]).

## 1.2 Présentation des systèmes bilinéaires étudiés

Les systèmes bilinéaires étudiés tout au long de ce mémoire de thèse sont des systèmes pouvant s'écrire sous la forme suivante

$$\dot{x} = A_0x + \sum_{i=1}^m u_i A_i x + Ru + Bw \quad (1.1a)$$

$$y = Cx + Dw \quad (1.1b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des commandes (mesurées),  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  le vecteur des perturbations (non mesurées) et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des mesures, ce sera le cas dans tout ce mémoire.

Cette représentation englobe plusieurs types de systèmes bilinéaires étudiés tout au long de ce mémoire. Nous serons amené à nous intéresser aux systèmes bilinéaires sans entrée linéaire (partie  $Ru$ ), sans perturbation...

*Remarque 1.2.1* (Notations des bilinéarités). Dans toute cette thèse, nous utilisons les notations suivantes :  $u_i(t)$  est la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée du vecteur des commandes  $u(t)$  et  $A_i$  est la matrice associée à la coordonnée  $u_i(t)$  dans le système (1.1). Ainsi la matrice  $A_0$  décrit la dynamique de la partie linéaire du système bilinéaire.  $\square$

De nombreux processus en biologie, en écologie et en économie [Moh73, Moh91] (modélisation d'un réacteur biologique dans [Wil77] ou d'échange commerciaux), ainsi qu'en mécanique [Rug81, Hač92, ZRMD98] (modélisation d'une suspension active), et en chimie (approximation du comportement d'une colonne à distiller dans [EL77]) peuvent être modélisés par des systèmes bilinéaires. A titre d'exemples pris dans la littérature, considérons les cas d'un actionneur électromécanique et d'un véhicule avec une suspension semi-active.

Dans [Moh91, ZRMD98], les auteurs proposent un modèle bilinéaire pour un actionneur électromécanique constitué par un moteur à courant continu avec un accouplement élastique et une charge, décrit par la figure suivante.

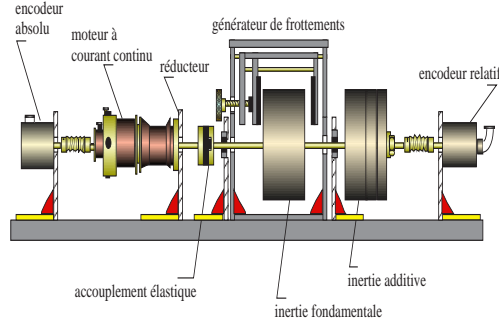


FIG. 1.1: Actionneur électromécanique.

Ce processus peut être modélisé par le système suivant

$$\dot{x} = A_0x + u_1A_1x + Ru + Bw,$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-F_m}{J_m} & 0 & \frac{-k_r}{NJ_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k_r}{J_c} & \frac{-F_c}{J_c} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k_a}{L_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_a}{J_m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{J_c} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_m \\ \Delta_\Gamma \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_e \\ v_a \end{bmatrix},$$



où  $J_m$  et  $J_c$  sont les moments d'inertie du moteur et de la charge,  $F_m$  et  $F_c$  sont les coefficients de frottements visqueux du moteur et de la charge,  $k_a$  est la constante du couple du moteur,  $k_r$  est le coefficient de couplage rigide,  $R_a$  et  $L_a$  sont la résistance et l'inductance du rotor.

Le vecteur d'état  $x(t)$  est composé du courant du rotor  $i_a(t)$ , de la vitesse de rotation de l'arbre du moteur  $\omega_m(t)$ , de la position angulaire de l'arbre du moteur  $\theta_m(t)$ , de la rotation angulaire  $\Delta_r(t)$  entre les arbres du moteur et de la charge, due à l'accouplement élastique, et de la vitesse de rotation de l'arbre de la charge  $\omega_c(t)$ . Le vecteur des commandes  $u(t)$  est composé du courant du stator  $i_e(t)$  et de la tension du rotor  $v_a(t)$ . La perturbation  $w(t)$  est due à des frottements secs et aux couples de réaction de la charge.

Dans [Hać92], l'auteur propose un modèle bilinéaire pour un véhicule avec une suspension semi-active décrite par la figure suivante.

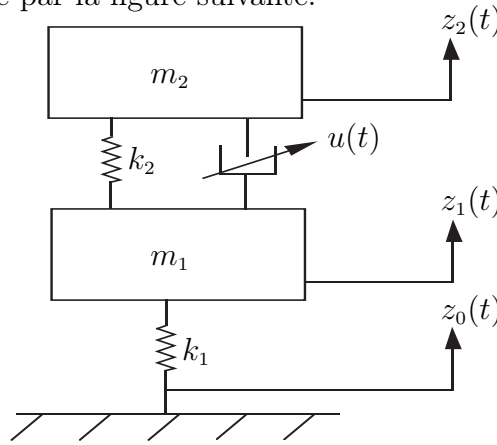


FIG. 1.2: Suspension semi-active.

Ce processus peut être modélisé par le système suivant

$$\dot{x} = A_0 x + u A_1 x + B w,$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{m_1} & 0 & \frac{1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & \frac{-1}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{bmatrix} z_1 - z_0 \\ z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix},$$

où  $m_1$  est la masse de la roue et de la moitié de l'essieu,  $m_2$  est la masse du véhicule,  $k_1$  est la constante de raideur du pneu,  $k_2$  est la constante de raideur des suspensions,  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  sont les déplacements absolus de la roue et du véhicule, et  $z_0(t)$  est l'élévation de la route au point de contact avec le pneu. La commande  $u(t)$  est le coefficient d'amortissement de la suspension contrôlée électroniquement. La perturbation  $w(t)$  est la variation de l'élévation de la route.

Le lecteur trouvera une étude exhaustive des systèmes bilinéaires dans [Moh73, MK80, Rug81, Moh91].

## 1.3 Outils pour l'analyse des systèmes linéaires

Nous allons donner dans cette section une série de définitions, de lemmes et de théorèmes s'appliquant aux systèmes linéaires qui nous seront utiles dans la suite de notre travail, les systèmes bilinéaires de la forme (1.1) pouvant être considéré comme des systèmes linéaires à temps variant.

### 1.3.1 Stabilité quadratique

**Définition 1.3.1** (Stabilité quadratique). [RCDP93] *Considérons le système LTI décrit par*

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.2)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état. On dit alors que le système est quadratiquement stable s'il existe une matrice  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que, pour tout  $x(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$x^T(PA(t) + A^T(t)P)x < 0. \quad (1.3)$$

△

### 1.3.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$ , gain $\mathcal{L}_2$ et lemme borné réel

On considère désormais le système LTI décrit par

$$G := \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bw \\ z &= Cx + Dw \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie et  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  celui de l'entrée.

**Définition 1.3.2** (Norme  $\mathcal{H}_\infty$ ). [Fra87] *La norme  $\mathcal{H}_\infty$  du système (1.4), stable ou instable, est définie par*

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{\max}(G(j\omega)G^T(-j\omega)) \quad (1.5)$$

dans le cas où le système (1.4) n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire. △

**Définition 1.3.3.** *On définit l'énergie  $E$  d'un signal  $w(t)$  comme l'intégrale de sa puissance :*

$$E = \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt. \quad (1.6)$$

En d'autres termes, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une fonction de transfert représente le maximum sur toute la bande de fréquence de la valeur singulière maximale de la réponse fréquentielle du système considéré. Elle permet de spécifier des conditions de *pire cas*. Cette propriété en fait une norme très pertinente pour traiter les problèmes de robustesse.

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  est définie par (1.5), que le système soit stable ou instable, tant que le système ne possède pas de pôles sur l'axe imaginaire. En effet,  $\left\| \frac{1}{s+1} \right\|_\infty = \left\| \frac{1}{s-1} \right\|_\infty = 1$ , tandis que  $\left\| \frac{1}{s} \right\|_\infty = \infty$ . Toutefois, pour une entrée bornée, le système  $\frac{1}{s+1}$  possède une sortie bornée, ce qui n'est pas vrai pour le système  $\frac{1}{s-1}$ . Il est donc nécessaire de définir le gain  $\mathcal{L}_2$ .

**Définition 1.3.4** (Gain  $\mathcal{L}_2$ ). [GL95] Si le système (1.4) est asymptotiquement stable, alors,  $w(t) \in \mathcal{L}_2$  implique  $z(t) \in \mathcal{L}_2$  et, pour  $x(0) = 0$ , le gain  $\mathcal{L}_2$  du système (1.4) est donné par

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, \quad \|w\|_2 \neq 0. \quad (1.7)$$

△

Le gain  $\mathcal{L}_2$  sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système. Si ce gain est inférieur à 1, on dit que le système est contractif ou non expansif. Ainsi, la notion de gain  $\mathcal{L}_2$  est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes.

*Remarque 1.3.1* (Norme  $\mathcal{H}_\infty$  et gain  $\mathcal{L}_2$ ). L'utilisation du théorème de Parseval permet d'interpréter (1.7) comme un gain fréquentiel ou temporel sur les signaux (la norme  $\mathcal{L}_2$  d'un signal temporel est la même que la norme  $\mathcal{L}_2$  de la transformée de Fourier de ce même signal). Ainsi, pour un système stable, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de la fonction de transfert est la norme induite  $\mathcal{L}_2$  de l'opérateur d'entrée-sortie associé au système, c'est donc le gain  $\mathcal{L}_2$  du système. De plus, les équations (1.5) et (1.7) permettent de considérer  $\|G\|_\infty$  comme une généralisation de la norme spectrale des matrices constantes. □

*Remarque 1.3.2.* D'après la définition 1.3.4, la norme  $\|G\|_\infty$  est une norme induite, elle vérifie donc l'inégalité multiplicative

$$\|GF\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|F\|_\infty.$$

Cette propriété s'avère très utile pour les problèmes de robustesse. □

Le lemme borné réel est donné par le théorème suivant.

**Théorème 1.3.1** (Lemme borné réel). *Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

1.  $A$  est stable et  $\|G\|_\infty < \gamma$ .
2.  $\exists X = X^T > 0$  telle que [Wil71, AV73, SMN90]

$$R = \gamma^2 I_m - D^T D > 0, \quad (1.8)$$

$$A^T X + X A + C^T C + (X B + C^T D) R^{-1} (X B + C^T D)^T < 0. \quad (1.9)$$

3.  $\exists X = X^T > 0$  telle que [BEFB94, Sch90]

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma^2 I_m & D^T \\ C & D & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (1.10)$$

■

Le théorème 1.3.1 peut s'écrire en fonction d'une équation algébrique de Riccati en remplaçant  $\exists X = X^T > 0$  par  $\exists X = X^T \geq 0$  et le symbole d'inégalité dans l'inégalité algébrique de Riccati (1.9) par le symbole d'égalité.

Le lemme borné réel, qui fournit une majoration du gain  $\mathcal{L}_2$  entre l'entrée et la sortie d'un système, peut être utilisé pour quantifier l'atténuation des perturbations.

### 1.3.3 Application aux systèmes LTV

Dans le cas des systèmes LTV, les matrices  $(A, B, C, D)$  dépendent du temps et on a

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w \quad (1.11a)$$

$$z = C(t)x + D(t)w \quad (1.11b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie et  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  celui de l'entrée.

Ne pouvant définir de fonction de transfert pour les systèmes LTV, nous ne pouvons pas parler de norme, mais nous pouvons considérer le gain induit suivant

$$J = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w\|_{\mathcal{L}_2}}, \quad \|w\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0. \quad (1.12)$$

Le lemme borné réel pour les systèmes LTV est donné le théorème suivant.

**Théorème 1.3.2** (Lemme borné réel pour les systèmes LTV). *Sous l'hypothèse  $x(0) = 0$ , le système LTV (1.11) vérifie  $J < \gamma$  dans le cas continu, avec  $\gamma > 0$  donné, si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive ( $P = P^T > 0$ ) telle que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) & P(t)B(t) & C^T(t) \\ B^T(t)P(t) & -\gamma^2 I_m & D^T(t) \\ C(t) & D(t) & -I_p \end{bmatrix} < 0, \forall t. \quad (1.13)$$

■

### 1.3.4 Systèmes polytopiques

**Définition 1.3.5** (Système avec incertitudes polytopiques). *Considérons le système polytopique LTI suivant*

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad (1.14a)$$

$$z = Cx + Dw \quad (1.14b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie et  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  celui de l'entrée. Les matrices  $A, B, C$  et  $D$  du système ne sont pas connues car incertaines, mais elles appartiennent à un ensemble compact et convexe  $\mathcal{P}$  défini ainsi

$$\mathcal{P} := \left\{ (A, B, C, D) \mid (A, B, C, D) = \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i (A_i, B_i, C_i, D_i); \tau_i \geq 0; \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i = 1 \right\}. \quad (1.15)$$

$\mathcal{P}$  est un polytope convexe dont les  $\nu$  sommets sont connus, le  $i^{\text{ème}}$  sommet étant défini par le système  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$ . △

Du fait de la convexité, l'étude de certaines propriétés du système revient alors à l'étude des différents sommets du polytope auquel il appartient. Nous pouvons aussi avoir souvent une représentation polytopique de certains systèmes LTV (voir 1.3.4.1).

Nous allons énoncer le lemme suivant pour la stabilité et la performance des systèmes polytopiques.

**Lemme 1.3.1** (Stabilité quadratique des systèmes polytopiques). *Le système polytopique (1.14) est stable avec une atténuation de perturbation  $\gamma$  au sens de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  s'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i & P B_i & C_i^T \\ B_i^T P & -\gamma^2 I_m & D_i^T \\ C_i & D_i & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, \nu. \quad (1.16)$$

◦

*Démonstration.* Il suffit d'écrire la condition de la stabilité quadratique, pour le système polytopique (1.14) et d'appliquer l'expression convexe (1.15). •

### 1.3.4.1 Extension à une classe de systèmes LTV

Nous donnons aussi un aperçu sur une classe de systèmes LTV dans cette partie. L'intérêt pour nous d'introduire cette classe de systèmes (même si une étude spécifique n'y est pas faite) réside dans le fait que les systèmes bilinéaires peuvent être vus comme des systèmes LTV [Wil77].

Considérons le système linéaire LTV suivant

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w \quad (1.17a)$$

$$z = C(t)x + D(t)w \quad (1.17b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie et  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  celui de l'entrée.  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  et  $D(t)$  sont des matrices variant dans le temps.

Le système LTV (1.17) est polytopique si les matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  et  $D(t)$  peuvent s'écrire sous la forme suivante [Ben97]

$$A(t) = M_0 + \sum_{k=1}^s M_k q_k(t) \quad (1.18a)$$

$$B(t) = N_0 + \sum_{k=1}^s N_k q_k(t) \quad (1.18b)$$

$$C(t) = R_0 + \sum_{k=1}^s R_k q_k(t) \quad (1.18c)$$

$$D(t) = S_0 + \sum_{k=1}^s S_k q_k(t). \quad (1.18d)$$

où les  $s$  paramètres  $q_k(t)$  vérifient

$$q_k^- \leq q_k(t) \leq q_k^+, k = 1, \dots, s. \quad (1.19)$$

Le système (1.17) est donc un système linéaire polytopique car il appartient à un polytope  $\mathcal{P}$  ayant  $\nu$  sommets

$$\mathcal{P} := \{(A_1, B_1, C_1, D_1), \dots, (A_\nu, B_\nu, C_\nu, D_\nu)\} \quad (1.20)$$

où  $\nu = 2^{(s+1)}$  et  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  représente un des sommets du polytope. Une explosion du nombre de sommets apparaît dès que le nombre de paramètres  $q_k(t)$  augmente. Cette représentation, tout en étant très importante d'un point de vue théorique, reste limitée à des systèmes ayant peu de paramètres  $q_k(t)$  (c'est-à-dire où  $s$  est faible) pour une application pratique. Cependant, avec l'amélioration constante de la rapidité des microprocesseurs, la définition d'un  $s$  faible évolue, de plus rien n'empêche de ne prendre en compte qu'une partie des incertitudes par cette approche.

Les  $\nu$  sommets du polytope peuvent ainsi être calculés à partir des bornes des paramètres  $q_k(t)$  en permutant les différentes valeurs de  $q_k(t)$  par

$$A_i = M_0 + \sum_{k=1}^{\nu} M_k q_k(t) \Big|_{q_k(t)=q_k^- \text{ ou } q_k^+}, \quad k = 1, \dots, s \text{ et } i = 1, 2, \dots, \nu, \quad (1.21a)$$

$$B_i = N_0 + \sum_{k=1}^{\nu} N_k q_k(t) \Big|_{q_k(t)=q_k^- \text{ ou } q_k^+}, \quad k = 1, \dots, s \text{ et } i = 1, 2, \dots, \nu, \quad (1.21b)$$

$$C_i = R_0 + \sum_{k=1}^{\nu} R_k q_k(t) \Big|_{q_k(t)=q_k^- \text{ ou } q_k^+}, \quad k = 1, \dots, s \text{ et } i = 1, 2, \dots, \nu. \quad (1.21c)$$

$$D_i = S_0 + \sum_{k=1}^{\nu} S_k q_k(t) \Big|_{q_k(t)=q_k^- \text{ ou } q_k^+}, \quad k = 1, \dots, s \text{ et } i = 1, 2, \dots, \nu. \quad (1.21d)$$

à un problème avec incertitudes

Les  $\nu$  sommets du polytope peuvent ainsi être calculés à partir des bornes des paramètres  $q_k(t)$  en permutant les différentes valeurs de  $q_k(t)$  par

$$A_i = M_0 + \sum_{k=1}^{\nu} M_k q_k(t) \Big|_{q_k(t)=q_k^- \text{ ou } q_k^+}, \quad k = 1, \dots, s \text{ et } i = 1, 2, \dots, \nu, \quad (1.22a)$$

$$B_i = N_0 + \sum_{k=1}^{\nu} N_k q_k(t) \Big|_{q_k(t)=q_k^- \text{ ou } q_k^+}, \quad k = 1, \dots, s \text{ et } i = 1, 2, \dots, \nu, \quad (1.22b)$$

$$C_i = R_0 + \sum_{k=1}^{\nu} R_k q_k(t) \Big|_{q_k(t)=q_k^- \text{ ou } q_k^+}, \quad k = 1, \dots, s \text{ et } i = 1, 2, \dots, \nu. \quad (1.22c)$$

$$D_i = S_0 + \sum_{k=1}^{\nu} S_k q_k(t) \Big|_{q_k(t)=q_k^- \text{ ou } q_k^+}, \quad k = 1, \dots, s \text{ et } i = 1, 2, \dots, \nu. \quad (1.22d)$$

## 1.4 Observabilité et observateurs des systèmes bilinéaires

Un système est dit observable si l'observation de ses entrées et sorties pendant un intervalle de temps fini  $[t_i ; t_f]$  permet de retrouver l'état initial  $x(t_i)$ .

A la différence des systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes bilinéaires dépend des entrées. Ainsi, les entrées interviennent dans la synthèse des observateurs des systèmes bilinéaires. C'est pourquoi, parallèlement aux définitions liées à l'observabilité, nous allons aussi nous intéresser à la caractérisation des entrées.

Dans cette section, on considérera le système bilinéaire (1.1) sans perturbation, c'est-à-dire avec  $w(t) \equiv 0$  :  $w(t)$  étant inconnu et intervenant linéairement dans (1.1).

### 1.4.1 Résolution de l'équation d'état

La matrice de transition  $\Phi_u(t, t_0)$  donnée par

$$\Phi_u(t, t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^t \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(\tau) A_i \right\} d\tau \right) \quad (1.23)$$

est solution de l'équation différentielle homogène suivante

$$\dot{\Phi}_u(t, t_0) = \left( A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i \right) \Phi_u(t, t_0), \quad (1.24)$$

avec  $\Phi_u(t_0, t_0) = I_n$  comme condition initiale et  $t_0$  comme instant initial, si pour une commande  $u(t)$  donnée et  $t_0 \leq \tau \leq t$ , la matrice  $\Phi_u(\tau, t_0)$  est non singulière. En utilisant (1.23) et (1.24), la solution de l'équation différentielle bilinéaire (1.1a) avec  $w(t) \equiv 0$  est donnée par [Moh91]

$$x(t) = \Phi_u(t, t_0)x(t_0) + \Phi_u(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi_u^{-1}(\tau, t_0) R u(\tau) d\tau. \quad (1.25)$$

Si nous posons

$$A(t) = A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i, \quad (1.26)$$

alors l'équation différentielle (1.24) est linéaire à temps variant et donnée par

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad (1.27)$$

et le système bilinéaire (1.1) avec  $w(t) \equiv 0$  peut être décrit par un système linéaire à temps variant

$$\dot{x} = A(t)x + Ru \quad (1.28a)$$

$$y = Cx. \quad (1.28b)$$

## 1.4.2 Discernabilité et caractérisation des entrées

Lors de l'étude de l'observabilité des systèmes bilinéaires, le signal de commande  $u(t)$  peut être caractérisé par les définitions suivantes.

**Définition 1.4.1** (Discernabilité). [HK77, BCC88, BCCG93, Vid93] Deux états initiaux distincts  $x_1$  et  $x_2$  sont dits discernables pour le système bilinéaire (1.1) s'il existe une commande  $u(t)$  et un instant  $t$  tels que

$$y(t, x_1, u) \neq y(t, x_2, u) \quad (1.29)$$

où  $y(t, x_i, u)$  pour  $i = 1, 2$  est la sortie du système bilinéaire obtenue avec une commande  $u(t)$  et un état initial  $x(0) = x_i$ . Si pour toutes commandes  $u(t)$ , on a  $y(t, x_1, u) = y(t, x_2, u)$ , alors les états initiaux distincts  $x_1$  et  $x_2$  sont dits indiscernables.  $\triangle$

Cette notion de discernabilité conduit au concept d'entrée universelle.

**Définition 1.4.2** (Entrée universelle). [BCC88, BCCG93] Une entrée  $u(t)$  est dite universelle pour le système bilinéaire (1.1) sur l'intervalle  $[0, t]$  si tout couple d'état initiaux distincts  $(x_1, x_2)$  peut être discerné par les sorties sur l'intervalle  $[0, t]$ , le système étant excité par la commande  $u(t)$ . Une entrée  $u(t)$  qui n'est pas universelle est dite singulière.  $\triangle$

La matrice de transition définie par (1.23) permet de généraliser la notion de grammien d'observabilité  $W_u(t, t_0)$  au système bilinéaire (1.1) [BCC88, BCCG93]

$$W_u(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi_u^T(\tau, t_0) C^T C \Phi_u(\tau, t_0) d\tau. \quad (1.30)$$

Le grammien d'observabilité permet de définir l'indice d'observabilité  $\gamma_u(t, t_0)$  comme étant la valeur singulière minimale du grammien d'observabilité  $W_u(t, t_0)$

$$W_u(t, t_0) \geq \gamma_u(t, t_0) = \lambda_{\min}(W_u(t, t_0)W_u^T(t, t_0)) \geq 0. \quad (1.31)$$

Les définitions du grammien et de l'indice d'observabilité permettent d'énoncer le théorème suivant sur les entrées universelles.

**Théorème 1.4.1** (Entrée universelle et grammien d'observabilité). [BCC88, BCCG93] Une entrée  $u(t)$  est universelle pour le système bilinéaire (1.1) sur l'intervalle  $[0, t]$  si et seulement si  $\gamma_u(t, t_0) > 0$  où  $\gamma_u(t, t_0)$  est l'indice d'observabilité défini par (1.31).  $\blacksquare$

Avec la définition 1.4.2, il s'en suit qu'une entrée  $u(t)$  universelle sur l'intervalle  $[0, t_1]$  est aussi universelle sur l'intervalle  $[0, t_2]$  si  $0 < t_1 < t_2$ . Par contre cette entrée n'est pas nécessairement universelle sur l'intervalle  $[t_i, t_1]$  avec  $0 < t_i < t_1$ . Il s'en suit que le concept d'entrée universelle n'est pas suffisant pour garantir à un observateur un bon comportement en présence de perturbation. En effet, supposons que la commande  $u(t)$  soit une entrée universelle sur l'intervalle  $[0, t_1[$ , mais pas sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ . Il existe donc au moins un couple d'états initiaux distincts  $x_1(t_1)$  et  $x_2(t_1)$  qui est indiscernable. Supposons qu'il apparaisse une perturbation lors de l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  affectant



l'état  $x(t, x_1(t_1), u)$  et l'état  $x(t, x_2(t_1), u)$  (avec  $x(t, x_1(t_1), u) \neq x(t, x_2(t_1), u)$ ), mais pas la mesure  $y(t)$  (c'est-à-dire  $y(t, x_1(t_1), u) = y(t, x_2(t_1), u)$ ), alors un observateur ne pourra pas réagir à cette perturbation.

Ainsi, que l'entrée soit universelle ne suffit pas à garantir un bon comportement de l'observateur en présence de perturbations. Ceci est dû au fait qu'une entrée peut être universelle sur un intervalle de temps, mais pas sur un autre. Il est donc nécessaire d'introduire la notion d'entrée régulièrement persistante qui correspond à une entrée universelle sur l'intervalle de temps  $[0, +\infty[$ .

**Définition 1.4.3** (Entrée régulièrement persistante). [BCC88, BCCG93] Une entrée  $u(t)$  est dite régulièrement persistante pour le système bilinéaire (1.1) s'il existe  $T > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $t_0 > 0$  tels que

$$\gamma_u(t + T, t) \geq \alpha \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.32)$$

△

La définition d'une entrée régulièrement persistante permet de garantir que cette dernière n'est pas "trop proche" d'une "mauvaise" entrée, c'est-à-dire d'une entrée singulière, elle permet aussi la prise en compte de l'effet des perturbations sur l'état estimé.

### 1.4.3 Observabilité des systèmes bilinéaires

L'observabilité étant par définition la possibilité de déterminer, de manière unique, l'état initial en utilisant l'information contenue dans les mesures et dans les entrées d'un système [Kal63], l'observabilité du système bilinéaire (1.1), c'est-à-dire la discernabilité des états initiaux, est donc liée aux entrées (voir définitions 1.4.1 et 1.4.2).

**Définition 1.4.4** (Observabilité). [HK77, BCC88, BCCG93, Vid93] Le système bilinéaire (1.1) est observable pour une commande  $u(t)$  s'il ne possède pas de paire d'état initiaux indiscernables pour cette commande, c'est-à-dire si la commande  $u(t)$  est universelle. △

Cette définition conduit à celle de l'observabilité uniforme.

**Définition 1.4.5** (Observabilité uniforme). [BCC88, BCCG93, Vid93] Le système bilinéaire (1.1) est uniformément observable s'il ne possède pas d'entrée singulière, c'est-à-dire si toutes les entrées possibles sont universelles. △

Des formes canoniques liées aux systèmes bilinéaires uniformément observables existent, le cas monosortie est présenté dans l'annexe C. Le cas multisortie a aussi été étudié dans [Nij81, BCCG93] et l'est encore par Liu dans [LFMH07, LFMH08].

L'observabilité d'un système dynamique peut être caractérisée via un critère de rang, c'est-à-dire un critère garantissant que le sous-espace inobservable est de dimension nulle [Kal63].

Dans un premier temps considérons le système linéaire à temps variant (1.28). Les dérivées successives de la mesure  $y(t)$  du système (1.28) permettent d'obtenir les relations

suivantes

$$\begin{cases} y(t) & = Cx(t) = (\Delta_0 C^T)^T x(t), \\ \dot{y}(t) - Ru(t) & = CA(t)x(t) = (\Delta C^T)^T x(t), \\ \ddot{y}(t) - CA(t)Ru(t) - R\dot{u}(t) & = (CA(t)A(t) + C\dot{A}(t))x(t) = (\Delta^2 C^T)^T x(t), \\ & \vdots \end{cases}$$

où l'opérateur  $\Delta^k$  est défini par

$$\begin{cases} \Delta_0 C^T & = C^T, \\ \Delta C^T & = A^T(t)C^T + \frac{d}{dt}C^T = A^T(t)C^T, \\ \Delta^k C^T & = \frac{d}{dt}\Delta^{k-1}C^T + \Delta^{k-1}C^T. \end{cases}$$

Le système linéaire à temps variant (1.28) est observable si l'état initial  $x_0$  peut être déterminé de manière unique en utilisant les informations contenues dans  $u(t)$  et  $y(t)$ , c'est-à-dire si la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  donnée par

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C^T & \Delta C^T & \dots & \Delta^k C^T & \dots \end{bmatrix}^T$$

vérifie

$$\text{rang } \mathcal{O} = n.$$

Dans le cas des systèmes linéaires à temps invariant, c'est-à-dire avec  $A(t) = A$  dans (1.28a), l'opérateur  $\Delta^k$  se simplifie, et nous avons  $\Delta^k C^T = (A^T)^k C^T$  et

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^T$$

qui correspond à la matrice d'observabilité de Kalman [Kal63].

En utilisant la relation (1.26) reliant le système linéaire à temps variant (1.28) au système bilinéaire (1.1), Williamson [Wil77] a montré, pour les systèmes bilinéaires, que l'opérateur  $\Delta^k(u)$  est donné par

$$\begin{cases} \Delta_0(u)C^T & = C^T, \\ \Delta(u)C^T & = (A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_i)^T C^T + \frac{d}{dt}C^T = \left( A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_i \right)^T C^T, \\ \Delta^k(u)C^T & = \frac{d}{dt}\Delta^{k-1}(u)C^T + \Delta^{k-1}(u)C^T. \end{cases} \quad (1.33)$$

En utilisant (1.33) et en appliquant la même approche que pour les systèmes linéaires à temps variant, les dérivées successives de la mesure  $y(t)$  du système bilinéaire (1.1) permettent d'obtenir le système suivant

$$\begin{cases} y(t) & = Cx = (\Delta_0(u)C^T)^T x(t), \\ \dot{y}(t) - Ru(t) & = (\Delta(u)C^T)^T x(t), \\ \ddot{y}(t) - CA_0(t)Ru(t) - R\dot{u}(t) & = (\Delta^2(u)C^T)^T x(t), \\ & \vdots \end{cases}$$

et donc la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}(u)$  du système bilinéaire (1.1) est donnée par [Wil77]

$$\mathcal{O}(u) = \begin{bmatrix} C^T & \Delta(u)C^T & \dots & \Delta^k(u)C^T \end{bmatrix}^T. \quad (1.34)$$

L'opérateur  $\Delta^k(u)$  et la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}(u)$  (1.33) permettent de généraliser le critère de rang des systèmes linéaires [Kal63] et de caractériser différentes notions d'observabilité ainsi que le montre le théorème suivant.

**Théorème 1.4.2** (Observabilités totale, complète et uniforme). [Wil77] *Considérons la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}(u)$  donnée par (1.34) avec l'opérateur  $\Delta^k(u)$  défini par (1.33). Le système bilinéaire (1.1) est*

- (i) *complètement observable sur l'intervalle  $[t_0, t]$  si, pour toute commande  $u(t)$  définie sur  $[t_0, t]$ , la matrice  $\mathcal{O}(u)$  existe presque partout et  $\text{rang } \mathcal{O}(u) = n$  presque partout,*
- (ii) *totalement observable sur l'intervalle  $[t_0, t]$  si, pour toute commande  $u(t)$  définie sur  $[t_0, t]$ , la matrice  $\mathcal{O}(u)$  existe partout et  $\text{rang } \mathcal{O}(u) = n$  presque partout,*
- (iii) *uniformément observable sur l'intervalle  $[t_0, t]$  si, pour toute commande  $u(t)$  définie sur  $[t_0, t]$ , la matrice  $\mathcal{O}(u)$  existe partout et  $\text{rang } \mathcal{O}(u) = n$  partout.*

■

Ce théorème montre que l'observabilité d'un système bilinéaire dépend des dérivées de la commande  $u(t)$ . Une entrée  $u(t)$  est donc singulière si  $\ker \mathcal{O}(u) \neq \{0\}$  [GK88]. Williamson dans [Wil77] lie la condition  $\ker \mathcal{O}(u) = \{0\}$  avec la structure du système bilinéaire, il présente une forme canonique qui assure  $\ker \mathcal{O}(u) = \{0\}$  (voir annexe C).

Le système bilinéaire (1.1) est détectable (c'est-à-dire qu'il existe un observateur dont la dynamique de l'erreur de reconstruction est asymptotiquement stable) si, pour toute commande  $u(t)$  singulière, la partie inobservable du système linéaire à temps variant obtenue en appliquant cette entrée est stable [GK88]. Ainsi toutes les entrées singulières emmènent l'état du système à zéro.

## 1.4.4 Observateurs pour les systèmes bilinéaires

### 1.4.4.1 Observateurs exponentiels sans borne sur la commande pour les systèmes bilinéaires non uniformément observable

L'observabilité uniforme du système bilinéaire (1.1) n'est pas requise pour les observateurs exponentiels décrits ci-dessous. La dynamique de l'erreur de reconstruction de ces observateurs converge uniformément par rapport au signal de commande  $u(t)$ , sans prendre en compte de borne sur ce signal.

Un observateur dont la dynamique de l'erreur de reconstruction est linéaire a été proposé par Hara et Furuta [HF76]. Cet observateur n'a pas de gain sur les bilinéarités. Les conditions d'existence de cet observateur sont données par Dérèse et Noldus [DN81]. Zasadzinski *et al.* [ZRMD98] ont montré que la synthèse de ce type d'observateur est équivalente à celle d'un observateur à entrées inconnues pour un système linéaire particulier.

Un observateur avec des gains sur les bilinéarités a été proposé par Funahashi [Fun79] et [TH89]. La dynamique de l'erreur de reconstruction de cet observateur vérifie une équation différentielle bilinéaire. La synthèse de cet observateur étant basée sur la résolution

de  $m + 1$  équations de Lyapunov dont  $m$  équations avec une contrainte nulle, c'est-à-dire basée sur la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique dont la dérivée temporelle le long de la trajectoire de cette erreur est indépendante du signal de commande  $u(t)$ , la convergence de cet observateur est donc indépendante de  $u(t)$ .

Un observateur sans gain sur les bilinéarités a été proposé par Tsinias [Tsi89] en utilisant des contraintes liant le noyau de la matrice de mesure  $C$  (1.1b) et le noyau des termes bilinéaires de la dérivée temporelle d'une fonction de Lyapunov quadratique le long de la trajectoire de l'erreur d'estimation.

#### 1.4.4.2 Observateurs asymptotiques ou exponentiels avec une commande bornée pour les systèmes bilinéaires non uniformément observables

Des observateurs sans gain sur les bilinéarités ont été proposés par Thau [Tha73], Dérèse *et al.* [DSN79], Raghavan et Hedrick [RH94] et Rajamani *et al.* [RC95, Raj98]. Ces observateurs sont obtenus en recopiant la partie non linéaire du système dans l'observateur. La philosophie de ces observateurs est la suivante : compenser l'effet des non linéarités sur la convergence de la dynamique de l'erreur de reconstruction en utilisant un grand gain pour la partie linéaire de l'observateur. Ces observateurs requièrent que le système bilinéaire soit localement Lipschitz, ce qui est le cas lorsque le signal de commande  $u(t)$  est borné.

En se basant sur une approche similaire à celle utilisée lorsque les bornes sur la commande  $u(t)$  ne sont pas prises en compte, Tsinias [Tsi89] propose un observateur exponentiel uniforme sans gain sur les bilinéarités lorsque la commande  $u(t)$  est bornée.

Wang et Kao [WK91] proposent un observateur asymptotique pour le système bilinéaire (1.1) avec des gains sur les bilinéarités. La convergence de l'erreur de reconstruction est assurée en utilisant la théorie des mesures de matrices [Vid93].

Dans [THS96], Tibken *et al.* proposent un observateur pour le système bilinéaire (1.1) en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique. La synthèse de cet observateur est basée sur la résolution de deux LMI. Toujours avec une approche se basant sur la résolution de LMI, dans [SZDR01, SZRD02], un filtre fonctionnel  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit a été présenté.

Besançon et Hammouri [BH95, BH96] caractérisent une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables pour lesquels il existe un observateur et proposent un observateur d'ordre réduit pour ces systèmes. Les auteurs montrent que cet observateur englobe ceux proposés dans [Tha73, HF76, Fun79, RH94, RC95, Raj98].

A partir de la connaissance de bornes sur les entrées, Souley Ali *et al.* dans [SZRD06] proposent de prendre en compte les bilinéarités sous la forme d'incertitude et d'utiliser une approche LMI pour les systèmes incertains afin de synthétiser un observateur fonctionnel.

#### 1.4.4.3 Observateurs exponentiels pour les systèmes bilinéaires uniformément observables

Dans [BCC88] et [BCCG93], Bornard *et al.* ont proposé des observateurs à gain variable du type Kalman pour les systèmes non linéaires uniformément observables, tels les systèmes bilinéaires.

En utilisant la forme canonique des systèmes non linéaires uniformément observables, Deza *et al.* [DG91, DBGR92, DBB<sup>+</sup>93] ont proposé un observateur à grand gain basé sur une équation de Lyapunov paramétrée [DG91] ou sur une équation de Riccati paramétrée [DBGR92, DBB<sup>+</sup>93] (voir annexe C). Le système doit être Lipschitz globalement en l'état  $x(t)$  et uniformément vis-à-vis de la commande  $u(t)$ . C'est le cas pour le système bilinéaire (1.1) si la commande  $u(t)$  est bornée.

Williamson [Wil77] a proposé un observateur à gain variable du type Kalman pour le système bilinéaire (1.1) si ce système est uniformément observable. La synthèse de cet observateur est basée sur la forme canonique observable des systèmes bilinéaires.

## 1.5 Commandes par retour d'état des systèmes bilinéaires

La littérature sur la commande des systèmes bilinéaires étant relativement vaste et étant donné que ce n'est pas le thème central de ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement à la la commande basée observateur, nous ne ferons donc pas une étude approfondie des commandes bilinéaires. Dans cette section, nous présentons la littérature sur la commande des systèmes bilinéaires par retour d'état utilisée dans la suite de ce mémoire. Les commandes calculant les gains en ligne (voir [AG94] par exemple) ne seront pas présentées. La littérature présentée traite des deux systèmes suivants :

- $\dot{x} = A_0x + \sum_{i=1}^m A_i u^i x$
- $\dot{x} = A_0x + \sum_{i=1}^m A_i u^i x + Ru$

avec  $R = [r_1, \dots, r_m]$ ,  $r_i \in \mathbb{R}^n$ .

La présence ou non de la partie linéaire de l'entrée permet d'appliquer différentes commandes.

Avant de donner les différentes commandes, nous rappelons la définition de la stabilité quadratique.

**Définition 1.5.1** (Stabilité quadratique). [RCDP93] *Considérons le système défini par*

$$\dot{x} = F(t, x)x, \tag{1.35}$$

avec  $t \in \mathbb{R}$  désignant le temps,  $x(t)$  le vecteur d'état et  $F(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  une fonction connue et continue.

On dit alors que le système (1.35) est quadratiquement stable s'il existe une matrice  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que, pour tout  $x(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$x^T P F(t, x)x < 0. \tag{1.36}$$

△

### 1.5.1 Commande bang-bang

Longchamp (voir [Lon80]) a proposé une commande bang-bang par retour d'état pour stabiliser une classe de systèmes bilinéaires. Ce type de commande dans [Lon80] est appliquée aux systèmes bilinéaires sans entrée linéaire et sans perturbation, donc de la forme suivante

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m A_i u_i x \quad (1.37)$$

L'hypothèse suivante doit être faite sur le système bilinéaire, afin de pouvoir lui appliquer cette commande.

**Hypothèse 1.5.1.** *Il existe des réels  $\alpha_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  tels que  $A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$  est une matrice Hurwitz (c'est-à-dire que ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative).*  $\diamond$

*Remarque 1.5.1.* Afin d'obtenir de tels  $\alpha_i$ , on peut implémenter des boucles vérifiant la négativité des valeurs propres de  $A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$ .  $\square$

**Théorème 1.5.1.** *Si on suppose que l'hypothèse 1.5.1 est vérifiée pour le système (1.37) alors il existe une matrice  $F = F^T > 0$  telle que*

$$u = - \begin{bmatrix} |\alpha_1| \operatorname{sgn}(x^T A_1^T F x) \\ \vdots \\ |\alpha_m| \operatorname{sgn}(x^T A_m^T F x) \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

*est une commande assurant la stabilité quadratique du système (1.37).*  $\blacksquare$

*Démonstration.* Pour le système (1.37), supposons l'existence de réels  $\alpha_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ , tels que  $A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$  soit Hurwitz, alors il existe deux matrices  $F = F^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$  telles que

$$(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i)^T F + F(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i) = -Q. \quad (1.39)$$

La fonction de Lyapunov suivante

$$V_x = x^T F x \quad (1.40)$$

a pour dérivée le long de la trajectoire du système (1.37) la relation suivante

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= x^T \left[ (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i)^T F + F(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i) \right] x \\ &= x^T \left[ -Q + \sum_{i=1}^m (u_i - \alpha_i) A_i^T F + \sum_{i=1}^m F(u_i - \alpha_i) A_i \right] x. \end{aligned} \quad (1.41)$$

En utilisant la commande (1.38), on obtient

$$\dot{V}_x = x^T(-Q + 2 \sum_{i=1}^m (-|\alpha_i| \operatorname{sgn}(x^T A_i^T F x) - \alpha_i) A_i^T F)x < -x^T Q x, \quad (1.42)$$

ce qui prouve la stabilité quadratique du système contrôlé par la commande bang-bang (1.38). •

## 1.5.2 Commande quadratique

La commande quadratique par retour d'état pour stabiliser une classe de systèmes bilinéaires est étudiée depuis de nombreuses années (voir [MA73, Jac79, Gut81, GK92, Lin95]). Ce type de commande a été appliquée aux systèmes bilinéaires non perturbés, sans incertitude (avec ou sans entrée linéaire) donc de la forme suivante

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m A_i u_i x + R u \quad (1.43)$$

De plus, pour cette commande, selon les hypothèses prises sur le système (1.43), “différents types de stabilité” seront obtenus, selon que la matrice  $A_0$  est quelconque ou quasi stable.

### 1.5.2.1 Commande quadratique : cas général

Dans cette section, on désire construire une commande quadratique pour le système (1.43) sous l'hypothèse suivante (voir [Gut81]).

**Hypothèse 1.5.2.** *Il existe une matrice  $F_\beta = F_\beta^T > 0$  telle que*

$$\forall \tilde{x} \in \{x \neq 0 \mid x^T (F_\beta A_0 + A_0^T F_\beta) x \geq 0\}, \begin{bmatrix} \tilde{x}^T A_1 F_\beta \tilde{x} \\ \vdots \\ \tilde{x}^T A_m F_\beta \tilde{x} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (1.44)$$

Pour ce type de commande une stabilité asymptotique ne peut pas être obtenue si la matrice  $A_0$  n'est pas Hurwitz, on peut tout de même parvenir à assurer la stabilité pratique, la convergence de l'état du système est assuré dans un voisinage de l'origine. Cette stabilité peut s'avérer utile et suffisante, elle a été souvent utilisée pour la stabilisation des systèmes incertains [Mys92, RM05].

On définit ainsi une notion spéciale de stabilité, la  $\varepsilon$ -stabilité

**Définition 1.5.2** ( $\varepsilon$ -stabilité). *On considère le système (1.43) avec la condition initiale suivante,  $x(t_0) = x_0$ .  $\Omega_0$  est une région (nulle) stabilisable si, pour tout  $x_0 \in \Omega_0$  et pour tout voisinage  $\mathcal{W}_\varepsilon$  de l'origine, il existe une fonction  $u_\varepsilon(t)$  bornée localement,  $t \leq t_0$ , et un intervalle de temps  $T$ , tels que l'état du système (1.43) avec  $u(t)$  comme en entrée de commande, satisfait la relation*

$$x(t) \in \mathcal{W}_\varepsilon \quad \forall t > t_0 + T. \quad (1.45)$$

Si  $\Omega_0 = \mathbb{R}^n$  le système est dit stabilisable.  $\triangle$

Dans cette définition, le choix du voisinage  $\mathcal{W}_\varepsilon$  "d'arrivée de l'état" détermine le choix de l'entrée  $u_\varepsilon(t)$ .

**Lemme 1.5.1.** [Gut81] Soit un système bilinéaire du type (1.43), si l'hypothèse 1.5.2 est vérifiée alors il existe des réels positifs  $\beta_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, m$  tels que la commande

$$u_i = -\beta_i(A_i x + r_i)^T F_\beta x \quad i = 0, \dots, m \quad (1.46)$$

$\varepsilon$ -stabilise le système. ◦

Dans ce lemme, le choix du paramètre  $\beta$  est déterminé par la sélection de la région dans laquelle on souhaite voir l'état se stabiliser. Pour illustrer ceci, on peut redonner un exemple déjà présenté par Gutman (voir [Gut81]).

Pour le système suivant

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_1 x + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_2 x \quad (1.47)$$

avec  $F_\beta = I_2$  l'hypothèse 1.5.2 est satisfaite et les commandes  $u_1, u_2$  peuvent être calculées à partir de l'équation (1.46). De simples calculs permettent de montrer que si

$$\beta > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (1.48)$$

alors

$$\|x\| = x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon^2. \quad (1.49)$$

Par cet exemple, on remarque bien le lien existant entre la région dans laquelle on arrive à maintenir l'état et le choix de la commande,  $\varepsilon$  apparaissant explicitement dans l'entrée de commande à travers  $\beta$  et dans la définition (1.49) de la "région d'arrivée" de l'état.

### 1.5.2.2 Commande quadratique : partie linéaire quasi stable

Dans cette section, nous changeons l'hypothèse pour la synthèse de la commande quadratique. La matrice  $A_0$  du système bilinéaire (1.43) satisfait l'hypothèse suivante

**Hypothèse 1.5.3.** Il existe une matrice définie positive  $F$  telle que  $A_0^T F + F A_0 \leq 0$  c'est-à-dire  $A_0$  a des valeurs propres à partie réelle négative ou nulle. ▽

On définit alors les ensembles suivants (voir [Lin95])

$$D = \{ \text{ad}_{A_0 x}^k(A_i x + r_i), k=0, \dots, n-1, i=1, \dots, m \} \quad (1.50)$$

$$\Pi_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n | x^T F A_0^k x = 0, k = 1, \dots, n \} \quad (1.51)$$

$$\Pi_2 = \{ x \in \mathbb{R}^n | \mathcal{L}_{A_0 x}^k \mathcal{L}_\tau(x^T F x) = 0, \forall \tau \in D, k = 0, \dots, n-1 \} \quad (1.52)$$

avec la matrice  $F$  donné par l'hypothèse 1.5.3, (voir annexe A pour les définitions de l'algèbre de Lie utilisées pour les définitions de  $D, \Pi_1$  et  $\Pi_2$ ). On définit aussi l'hypothèse suivante



**Hypothèse 1.5.4.**  $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0\}$ . ▽

Après cette présentation des différentes hypothèses, on peut donner le théorème suivant basé sur les différents travaux sur la commande quadratique pour les systèmes bilinéaires quasi stables (voir [Jac79, GK92, Lin95]).

**Théorème 1.5.2.** [Lin95] *Soit un système bilinéaire du type (1.43) tel que l'hypothèse 1.5.3 est vérifiée. Si l'hypothèse 1.5.4 est aussi satisfaite, alors  $\forall \gamma_i > 0, \forall \alpha_i > 0, i = 1, \dots, m, x = 0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable avec la loi de commande saturée (bornée) suivante*

$$u_i(x) = -\gamma_i \operatorname{sgn}((A_i x + r_i)^T F x) \min(|(A_i x + r_i)^T F x|, \alpha_i). \quad (1.53)$$

■

*Remarque 1.5.2.* Les réels  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), seuls changements par rapport à la commande de Lin (voir [Lin95]), ne changent pas la validité de la preuve appliquée aux systèmes bilinéaires puisqu'ils doivent être pris strictement positifs. Ces réels permettent juste d'avoir des degrés de liberté supplémentaires, permettant de jouer par exemple sur les bornes des dérivées de l'entrée de commande pour un état borné. □

### 1.5.3 Commande linéaire

La commande linéaire du type  $Kx$ , introduite dans [DN80], est une commande locale. Dans [MTG02], une approche polytopique a été présentée permettant de construire la matrice de gain  $K$  et le polytope d'initialisation de l'état.

En effet, si on définit le polytope  $\mathcal{Q}(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$  tel que

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon] \times \dots \times [-\varepsilon, \varepsilon]. \quad (1.54)$$

alors,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x\| < \varepsilon$ , on a  $x \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$ . On définit aussi l'ensemble  $\mathcal{T}(\varepsilon)$  des  $\nu = 2^n$  sommets du polytope  $\mathcal{Q}(\varepsilon)$

$$\mathcal{T}(\varepsilon) = \left\{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_i \dots \delta_n]^T \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [1, n], \delta_i = \pm \varepsilon \right\}. \quad (1.55)$$

Avant de continuer, le système (1.43) est réécrit sous la forme équivalente suivante

$$\dot{x} = A_0 x + N(x)u + Ru \quad (1.56)$$

avec  $N(x) = \sum_{i=1}^n N_i x_i$  et où  $(N_k)_{ij} = (A_j)_{ik}$ , avec  $(A)_{ik}$  représentant l'élément de la  $i$ -ième ligne et  $k$ -ième colonne de la matrice  $A$  (voir [MZD99]). On peut maintenant donner le lemme suivant

**Lemme 1.5.2.** [MTG02] *S'il existe des matrices  $P_1 = P_1^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et un réel  $\zeta_1$  tel que  $\forall X_j \in \mathcal{T}(\varepsilon)$ , on a*

$$P_1 A_0^T + A_0 P_1 + Y_1^T N(X_j)^T + N(X_j) Y_1 + R Y_1 + Y_1^T R^T - \zeta_1 P_1 < 0 \quad (1.57)$$

alors la commande suivante

$$u = Kx \quad (1.58)$$

avec la matrice de gain  $K = Y_1 P_1^{-1}$  stabilise le système bilinéaire (1.56), avec un taux de convergence  $\zeta_1$ ,  $\forall x_0$  tel que  $\|x_0\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_1)}{\lambda_{\max}(P_1)}} \varepsilon$ . ◦

*Démonstration.* On reprend l'approche utilisée dans [MTG02] permettant de lier la stabilité du système commandé à la LMI (1.57), excepté qu'on ajoute un taux de convergence exponentielle pour s'assurer que l'état reste dans le polytope  $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ ,  $\forall t$ . En effet, si  $\|x_0\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_1)}{\lambda_{\max}(P_1)}}\varepsilon$  et comme  $\|x\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}}\|x_0\| \exp(-\zeta_1 t)$  (voir LMI (1.57)), on a  $\|x\| \leq \varepsilon$  et par conséquent  $x \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$ . •

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un tour d'horizon sur les systèmes bilinéaires en nous focalisant sur les aspects utilisés dans la suite de ce mémoire. Ce chapitre a été consacré à des rappels de notions sur les systèmes bilinéaires ainsi que sur quelques outils permettant l'analyse des systèmes linéaires à temps variant, les systèmes bilinéaires pouvant être vus comme tels. Ces notions sont utilisées tout au long de ce mémoire.

Nous avons d'abord présenté les systèmes bilinéaires ainsi que deux exemples de processus pouvant être modélisés par ces derniers : un actionneur électromécanique et une suspension active.

Un rappel sur les outils pour l'analyse des systèmes linéaires, principalement linéaire à temps variant, a ensuite été proposé.

Ensuite une étude approfondie de l'observabilité des systèmes bilinéaires et de la caractérisation des entrées a été réalisée ce qui nous a permis de présenter les principales classes d'observateurs pour ces systèmes.

Enfin, les principes des commandes

- bang-bang,
- quadratiques,
- et linéaire,

appliquées aux systèmes bilinéaires ont été détaillées. Dans la suite de ce mémoire, elles seront associées à un observateur afin de réaliser des commandes basées sur un observateur pour les systèmes bilinéaires lorsque l'état est partiellement mesuré.



# Chapitre 2

## Approche LPV pour l'observation des systèmes bilinéaires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Filtrage à grand gain</b>	<b>29</b>
2.2.1	Approche LPV	29
2.2.2	Observateur LPV robuste à grand gain	33
<b>2.3</b>	<b>Observateur fonctionnel : approche LPV</b>	<b>40</b>
2.3.1	Premier cas : construction du filtre avec la contrainte de type 1	43
2.3.2	Second cas : construction du filtre avec la contrainte de type 2	47
<b>2.4</b>	<b>Les exemples</b>	<b>50</b>
2.4.1	Exemple d'observateur à grand gain	50
2.4.2	Exemple d'observateur fonctionnel sans degré de liberté sur le gain	55
2.4.3	Comparaison des filtres	57
2.4.4	Observateur fonctionnel pour les deux exemples du chapitre 1	63
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>72</b>

---

### 2.1 Introduction

Ce chapitre propose une nouvelle approche pour la synthèse des filtres  $\mathcal{H}_\infty$  pour une classe de systèmes bilinéaires. Les systèmes bilinéaires considérés sont soumis à des perturbations non mesurées qui sont à énergie finie et à des entrées de commande bornées et sont traitées comme des “paramètres variants” lors de la synthèse de l'observateur.

Williamson [Wil77] est le premier à avoir mis en évidence l'équivalence entre l'observabilité uniforme d'un système bilinéaire et la forme canonique associée. Plus tard, Gauthier *et al* [GHO92] ont proposé un observateur à grand gain pour les systèmes bilinéaires uniformément observables. Sur ce même observateur, Deza *et al* [DG91] ont démontré la capacité de filtrage des perturbations non mesurées pour cet observateur, mais dans [DG91] les perturbations n'affectent que les sorties et sont des bruits blancs (comme pour

le filtre de Kalman). L'observateur à grand gain n'a qu'un degré de liberté, c'est-à-dire que pour un système donné, l'observateur est synthétisé à partir du choix d'un réel positif généralement appelé  $\theta$ . Outre ce faible nombre de variables de décision, cet observateur à un second inconvénient : il est structurellement d'ordre plein. Il existe d'autres variantes de cet observateur à grand gains (voir [BLM99, RHMB08]).

Ces "faiblesses" du filtre à grand gain nous ont dirigés vers les observateurs fonctionnels qui peuvent être d'ordre réduit car la dimension du vecteur d'état de ces filtres est la même que celle de la combinaison linéaire de l'état du système que l'on souhaite estimer. Le filtre obtenu est non biaisé, c'est-à-dire que la dynamique de l'erreur d'estimation ne dépend pas de l'état du système. Une condition nécessaire et suffisante de non biais du filtre est donnée dans la suite de ce chapitre. Alors que dans [SZDR01, SZRD06], les entrées sont assimilées à des incertitudes, le problème de filtrage fonctionnel d'ordre réduit pour un système bilinéaire ayant des entrées de commande bornées est transformé en un problème de filtrage pour un système linéaire à paramètres variants. La stabilité exponentielle de l'erreur d'observation et un niveau d'atténuation au sens  $\mathcal{L}_2$  du gain entre les perturbations et cette erreur sont obtenue via la résolution d'une LMI. L'atténuation  $\mathcal{L}_2$  est une généralisation, pour les systèmes non linéaires, de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  des systèmes linéaires.

Ce chapitre sera scindé en trois parties : la première traitant de l'observateur à grand gain, la deuxième des filtres fonctionnels et la troisième dédiée à une série d'exemples illustrant ce chapitre.

On considère les systèmes bilinéaires de la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + \sum_{i=1}^m A_i u_i x + Ru + Bw \\ y = Cx + Dw \\ z = Lx \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties mesurées et  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une combinaison linéaire du vecteur d'état à estimer où  $r \leq n$ . Le vecteur  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  représente le vecteur des perturbations à énergie bornée. Sans perte de généralité, la commande est supposée continue et bornée c'est-à-dire  $u(t) \in \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$  où

$$\Omega = \left\{ u : t \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \forall t \in \mathbb{R}^+, u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}, \mu_{i,\min} \leq \dot{u}_i(t) \leq \mu_{i,\max}, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Pour caractériser l'atténuation des perturbations, on introduit la définition suivante.

**Définition 2.1.1** (Atténuation du gain au sens  $\mathcal{L}_2$ ). *Soit  $\gamma > 0$ , l'atténuation de perturbation entre  $e(t)$  et la perturbation  $w(t)$  a un gain  $\mathcal{L}_2$  inférieur ou égal à  $\gamma$  si*

$$J_{ew} = \int_0^\infty \left( \|e(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0 \quad (2.2)$$

$\forall w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ , et avec des conditions initiales nulles.  $\triangle$

Cette définition 2.1.1 peut être vue comme une généralisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  des systèmes linéaires (voir [van92]).

## 2.2 Filtrage à grand gain

Dans cette partie, nous allons étudier l'observateur à grand gain, introduit dans [GHO92] (on peut aussi citer [DG91, DBGR92, DBB<sup>+</sup>93, GSZD07a]). Cet observateur est lié à la structure des systèmes bilinéaires uniformément observables mise en exergue par Williamson [Wil77]. La matrice de gain de l'observateur est donnée par la résolution d'une équation de Riccati paramétrée par un scalaire  $\theta$ . L'existence d'un  $\theta_0$  tel que, pour tout  $\theta > \theta_0$ , la matrice de gain de l'observateur stabilise exponentiellement l'erreur d'observation, a été montrée dans [GHO92].

La méthodologie pour obtenir un  $\theta$  "suffisamment grand" par des majorations de  $\theta_0$  valeur minimale assurant une stabilité exponentielle de l'erreur d'observation peut s'avérer conservative. Dans [GHO92], rien ne prouve que la majoration présentée ne peut pas être affinée. Par la suite, nous montrons l'efficacité d'une approche LPV pour avoir des éléments permettant de choisir un  $\theta$ , on peut ajouter un critère à optimiser lors de la recherche de ce paramètre  $\theta$  : l'atténuation des perturbations.

On considère le système (2.1), avec l'hypothèse qu'il est uniformément observable, il existe alors une matrice de changement de base  $Q$  ( $x_h = Qx$ ) qui permet de mettre le système (2.1) sous une forme canonique (voir annexe C, la forme canonique est présentée par le système (C.2)).

On rappelle le lemme donné en annexe

**Lemme 2.2.1.** [DG91, DBGR92, DBB<sup>+</sup>93] *Le système*

$$\dot{\hat{x}} = \mathcal{A}(u)\hat{x} + Ru - S_\infty^{-1}(\theta)C^T(C\hat{x} - y) \quad (2.3)$$

avec

$$\mathcal{A}(u) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i \quad (2.4)$$

est un observateur exponentiel pour le système (2.1) avec  $S_\infty(\theta) = Q^{-1}\bar{S}_\infty(\theta)Q^{-T}$  où  $\bar{S}_\infty(\theta) = \bar{S}_\infty^T(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est donné par l'équation de Riccati suivante

$$-\theta\bar{S}_\infty(\theta) - \bar{A}^T\bar{S}_\infty(\theta) - \bar{S}_\infty(\theta)\bar{A} + C_h^T C_h = 0, \quad (2.5)$$

avec  $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\theta \in \mathbb{R}^{*+}$  suffisamment grand. ◦

### 2.2.1 Approche LPV

On recherche désormais une valeur du paramètre  $\theta$  pour assurer soit

1. la stabilité quadratique de l'erreur d'observation  $e(t) = x(t) - \hat{x}$  où  $\hat{x}$  représente l'état de l'observateur (2.3),
2. simultanément la stabilité quadratique et une atténuation de perturbation inférieure à un scalaire donné  $\gamma$  (voir la définition (2.1.1)).

Tout d'abord, on traitera le problème de la stabilité quadratique de l'erreur d'observation seul. Considérons l'observateur (2.3), la dynamique de l'erreur d'observation  $e(t) = x(t) - \hat{x}$  est décrite par le système suivant

$$\begin{cases} \dot{e} = \mathcal{A}_\infty(\theta, u)e \\ s = e \end{cases} \quad (2.6)$$

avec

$$\mathcal{A}_\infty(\theta, u) = \mathcal{A}(u) - S_\infty(\theta)^{-1}(\theta)C^T C. \quad (2.7)$$

Pour l'obtention de  $S_\infty$ , on peut se reporter au lemme 2.2.1.

**Théorème 2.2.1.** *Pour un paramètre  $\theta$  donné, le système (2.3) est un observateur quadratique pour le système (2.1) s'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que l'inégalité suivante est vérifiée*

$$P\mathcal{A}_\infty(\theta, u) + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)P < 0 \quad (2.8)$$

où  $u(t) \in \Omega$  et  $\mathcal{A}_\infty(\theta, u)$  est une matrice définie par l'équation (2.7).

Comme nous désirons pouvoir choisir une matrice de Lyapunov qui est fonction des paramètres, on présente le théorème suivant.

**Théorème 2.2.2.** *[GSZD07a, GSZD08a] Pour un paramètre  $\theta$  donné, le système (2.3) est un observateur quadratique pour le système (2.1) s'il existe une matrice  $P(u) = P(u)^T > 0$  et une matrice  $F$  telles que l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(u) + F\mathcal{A}_\infty(\theta, u) + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)F^T + I_n & P(u) - F + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)F^T \\ * & -F - F^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.9)$$

où  $u(t) \in \Omega$  et  $\mathcal{A}_\infty(\theta, u)$  est une matrice définie par l'équation (2.7).

*Démonstration.* Si on applique le lemme D.1 au système LPV (2.6), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(u) + F\mathcal{A}_\infty(\theta, u) + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)F^T & P(u) - F + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)F^T & I_n \\ * & -F - F^T & 0 \\ * & * & -I_n \end{bmatrix} < 0. \quad (2.10)$$

En appliquant le lemme de Schur (voir l'annexe B (B.2.1)), on remarque que les inégalités (2.9) et (2.10) sont équivalentes. • •

*Remarque 2.2.1.* On notera que l'inégalité (2.9) implique le fait que  $\det F \neq 0$ . □

Avec  $w \neq 0$ , la dynamique de l'erreur de filtrage  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  du filtre grand gain du lemme 2.2.1 pour le système bilinéaire (2.1) peut être vu comme un système LPV

$$\begin{cases} \dot{e} = \mathcal{A}_\infty(\theta, u)e + \mathcal{B}(\theta)w \\ s = e \end{cases} \quad (2.11)$$

avec

$$\mathcal{B}(\theta) = B - S_\infty^{-1}(\theta)C^T D. \quad (2.12)$$

On déduit du lemme D.1 le théorème suivant.

**Théorème 2.2.3.** [GSZD07a, GSZD08a] Pour un paramètre  $\theta$  donné, le système (2.3) est un observateur quadratique ou le système (2.1) assurant une atténuation de perturbation inférieure à un scalaire donné  $\gamma$  (voir la définition 2.1.1) s'il existe une matrice  $P(u) = P(u)^T > 0$  et une matrice  $F$  telles que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(u) + F\mathcal{A}_\infty^T(\theta, u) + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)F^T + I_n & P(u) - F + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)F^T & F\mathcal{B}(\theta) \\ * & -F - F^T & F\mathcal{B}(\theta) \\ * & * & -\gamma^2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (2.13)$$

où  $u(t) \in \Omega$  et  $\mathcal{A}_\infty(\theta, u)$  est une matrice définie par l'équation (2.7). ■

*Démonstration.* Si on applique le lemme D.1 au système LPV (2.11), on obtient l'inégalité matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(u) + F\mathcal{A}_\infty^T(\theta, u) + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)F^T & P(u) - F + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)F^T & F\mathcal{B}(\theta) & I_n \\ * & -F - F^T & F\mathcal{B}(\theta) & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I_n & 0 \\ * & * & * & -I_n \end{bmatrix} < 0. \quad (2.14)$$

Si on applique encore le lemme de Schur, on remarque que les inégalités (2.13) et (2.14) sont équivalentes. ● ●

Les inégalités (2.9) et (2.14) ne permettent pas une résolution simple du problème. Puisque les entrées et leurs dérivées sont bornées et donc appartiennent à un polytope convexe, nous allons calculer les solutions en résolvant ces inégalités sur tous les sommets du polytope  $\Omega$ . Pour cela, on considère le paramètre  $\rho(t)$  suivant

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_1(t) \\ \vdots \\ \rho_m(t) \\ \rho_{m+1}(t) \\ \vdots \\ \rho_{2m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \\ \dot{u}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

L'unification de l'entrée et de sa dérivée dans un vecteur commun  $\rho(t)$  permet la mise en forme LPV.

On définit

$$\widehat{\mathcal{A}}_\infty(\theta, \rho) = A_0 + \sum_{i=1}^m \rho_i A_i - S_\infty^{-1}(\theta) C^T C = \mathcal{A}_\infty(\theta, u) \quad (2.16)$$

Avec ces notations, on a

$$\rho \in \mathcal{P} \quad (2.17)$$



où  $\mathcal{P}$  est un polytope convexe donné par

$$\mathcal{P} = [u_{1,\min}, u_{1,\max}] \times \dots \times [u_{m,\min}, u_{m,\max}] \times [\mu_{1,\min}, \mu_{1,\max}] \times \dots \times [\mu_{m,\min}, \mu_{m,\max}]. \quad (2.18)$$

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des sommets de  $\mathcal{P}$  est défini par

$$\mathcal{S} = \left\{ \beta = [\alpha_1 \dots \alpha_{2m}]^T \in \mathbb{R}^{2m} \mid \forall i \in [1, m], \right. \\ \left. \alpha_i \in \{u_{i,\min}, u_{i,\max}\} \text{ et } \forall i \in [m+1, 2m], \alpha_i \in \{\mu_{i,\min}, \mu_{i,\max}\} \right\}. \quad (2.19)$$

Le cardinal de  $\mathcal{S}$  est  $\nu = 2^{2m}$ .

Pour la matrice de Lyapunov  $P(u)$ , nous choisissons, vu le système (2.1), la structure “bilinéaire” suivante

$$P(u) = P_0 + \sum_{i=1}^m u_i P_i \quad (2.20)$$

où  $P_i$  sont des matrices constantes. Par conséquent, on a

$$\dot{P}(u) = \sum_{i=1}^m \dot{u}_i P_i. \quad (2.21)$$

Avec (2.20), (2.21) et (2.15), on peut définir  $\tilde{P}(\rho)$  et  $\bar{P}(\rho)$  comme suit

$$\tilde{P}(\rho) = P_0 + \sum_{i=1}^m \rho_i P_i = P(u) \quad (2.22a)$$

$$\bar{P}(\rho) = \sum_{i=1}^m \rho_{m+i} P_i = \dot{P}(u). \quad (2.22b)$$

Grâce à la mise en forme présentée ci-dessus, on déduit le théorème suivant du théorème 2.2.3.

**Théorème 2.2.4.** [GSZD07a, GSZD08a] *Pour un paramètre  $\theta$  donné, le système (2.3) est un observateur quadratique pour le système (2.1) et a une atténuation de perturbation inférieure à un réel donné  $\gamma$  (voir la définition 2.1.1) s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T$ ,  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (pour  $i = 0, \dots, m$ ),  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telles que pour  $j = 1, \dots, 2^m$ ,  $\tilde{P}(\beta^j) > 0$  et*

$$\begin{bmatrix} \bar{P}(\beta^j) + F \hat{\mathcal{A}}_\infty(\theta, \beta^j) + \hat{\mathcal{A}}_\infty^T(\theta, \beta^j) F^T + I_n & \tilde{P}(\beta^j) - F + \hat{\mathcal{A}}_\infty^T(\theta, \beta^j) F^T & F \mathcal{B}(\theta) \\ * & -F - F^T & F \mathcal{B}(\theta) \\ * & * & -\gamma^2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (2.23)$$

avec  $\beta^j \in \mathcal{S}$  et  $\hat{\mathcal{A}}_\infty(\theta, \beta^j)$  est une matrice définie par l'équation (2.16). ■

Si on résout les LMI (2.23) en minimisant  $\gamma$  en parallèle avec le calcul de  $S_\infty(\theta)$  pour un paramètre  $\theta$  donné, on obtient une courbe  $\gamma_{\min}$  en fonction de  $\theta$ , ce qui permet d'obtenir  $\gamma_{\text{opt}}$  (voir la figure 2.1 dans la section 2.4.3.1). De plus l'existence (due à l'uniforme

observabilité) d'une valeur minimale  $\theta_0$  assurant la stabilité de l'erreur d'observation n'implique pas la solvabilité des LMI à partir de  $\theta_0$ . En effet, les théorèmes ne donnent que des conditions nécessaires. Cependant cette absence d'équivalence nous permet d'être moins conservatif pour le choix du gain  $\theta$ , car la recherche se fait sans majoration, juste à partir de résolutions de LMI. De plus, cette approche permet d'optimiser la performance  $\mathcal{H}_\infty$  de l'observateur à grand gain.

*Remarque 2.2.2.* Ce filtre à grand gain et l'approche LPV-LMI peuvent aussi être appliqués aux systèmes non uniformément observables. Pour ce faire, on travaille dans une base où la matrice de sortie  $C$  est "sous la forme compagne  $[1 \ 0 \ \dots \ 0]$ ", on résout l'équation (2.5) pour obtenir la matrice de gain, on utilise l'observateur (2.3) comme si le système avait la forme désirée et on vérifie la stabilité de l'observation à l'aide du théorème 2.2.4. L'existence d'une solution (c'est-à-dire du paramètre  $\theta_0$  assurant la convergence de l'erreur d'estimation pour tout  $\theta > \theta_0$ ) ne peut alors être assurée qu'à partir de l'existence d'une solution à la LMI (2.23) du théorème 2.2.4, comme dans l'exemple de la section 3.1.4.2.1.

*Remarque 2.2.3.* Les théorèmes restent valables pour des non linéarités de la forme  $xf(u)$ , à condition que  $f(u)$  et ses dérivées soient bornées et  $f(u(t))$  uniformément continues.  $\square$

## 2.2.2 Observateur LPV robuste à grand gain

Dans cette section, nous considérons le système incertain sans entrée linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + \Delta A_0(t))x + \sum_{i=1}^m (A_i + \Delta A_i(t))u_i(t)x + Bw \\ y = (C + \Delta C(t))x + Dw \end{cases} \quad (2.24)$$

dont la partie nominale est uniformément observable, avec

$$\Delta A_i(t) = M_i \mathcal{F}(t) N_i \text{ et } \Delta C(t) = M_C \mathcal{F}(t) N_C \quad (2.25a)$$

$$\mathcal{F}(t)^T \mathcal{F}(t) \leq I \quad (2.25b)$$

$$\mathcal{F}(t)^T M_C^T M_C \mathcal{F}(t) \leq I. \quad (2.25c)$$

où  $M_i, N_i, M_C, N_C$  sont connus a priori.

*Remarque 2.2.4.* Les incertitudes  $\Delta X(t)$  varient dans le temps, pour simplifier les notations, la dépendance au temps sera omise.  $\square$

*Remarque 2.2.5.* La dernière inégalité n'est pas habituelle dans le traitement des systèmes incertains, elle introduit un conservatisme. On peut le lever en pondérant  $M_C$  et en rejetant cette pondération dans  $N_C$ . En effet si les relations (2.25a) et (2.25b) sont vérifiées et la relation (2.25c) ne l'est pas alors en choisissant un réel  $p_C > 1$  convenable, on a  $\Delta C = M_C \mathcal{F}(t) N_C = \frac{M_C}{p_C} \mathcal{F}(t) (p_C N_C)$ . Si on pose  $M_{CN} = \frac{M_C}{p_C}$  et  $N_{CN} = p_C N_C$ , on a alors toutes les relations (2.25a) à (2.25c) qui sont vérifiées  $\square$

Deza *et al* dans [DG91] traitent des systèmes bilinéaires uniformément observables incertains, cependant seule une majoration de l'erreur d'observation est garantie, mais pas la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation.

Nous allons, comme précédemment, rechercher le paramètre  $\theta$  optimisant l'atténuation de perturbation (c'est-à-dire obtenir un  $\gamma$  le plus petit possible, voir la définition 2.1.1) tout en stabilisant le système bilinéaire incertain. Avec l'observateur suivant

$$\dot{\hat{x}} = \mathcal{A}_\infty(\theta, u)\hat{x} + S_\infty^{-1}(\theta)C^T y, \quad (2.26)$$

( $\mathcal{A}_\infty(\theta, u)$  toujours défini par (2.7)) la dynamique de l'erreur d'observation est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{e} = & \mathcal{A}_\infty(\theta, u)e + (\mathcal{B}(\theta) - S_\infty^{-1}(\theta)\Delta C^T)w \\ & + \left( \Delta A_0 + \sum_{i=1}^m \Delta A_i u_i - S_\infty^{-1}(\theta)(\Delta C^T \Delta C + \Delta C^T C + C^T \Delta C) \right) x, \end{aligned} \quad (2.27)$$

on peut alors donner le théorème suivant.

**Théorème 2.2.5.** [GSZD07a, GSZD08a] Soit le système bilinéaire incertain (2.24) associé à l'observateur (2.26) (avec  $\theta$  fixé), la dynamique de l'erreur d'observation et du système est quadratiquement stable et possède une atténuation de perturbation  $\gamma$  entre  $w(t)$

et  $e(t)$ , s'il existe une matrice  $P(u) = P(u)^T = \begin{bmatrix} P_1(u) & P_2(u) \\ P_2^T(u) & P_4(u) \end{bmatrix} > 0$  pour tout  $u(t) \in \Omega$ ,

une matrice  $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}$  (les matrices  $P_i$  et  $F_i$  sont des matrices carrées de taille  $n$ )

et des réels strictement positifs  $\{\delta_j^k, \alpha_j, \varepsilon_{ij}^k | k \in \{1, 2\}, i \in \{0, \dots, m\}, j \in \{x, e, \dot{x}, \dot{e}\}\}$ , tels que l'inégalité suivante est vérifiée

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Upsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & 0 & \Upsilon_2 & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & 0 & 0 & \Upsilon_3 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & \Pi_{45} & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_4 \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

où  $u(t) \in \Omega$  et

$$\Pi_{11} = \dot{P}_1(u) + F_1 \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}^T(u) F_1^T + \varsigma N_C^T N_C + \sigma C^T M_C M_C^T C \quad (2.29a)$$

$$\Pi_{22} = \dot{P}_4(u) + I + F_4 \mathcal{A}_\infty(\theta, u) + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u) F_4^T \quad (2.29b)$$

$$\Pi_{33} = -F_1 - F_1^T \quad (2.29c)$$

$$\Pi_{44} = -F_4 - F_4^T \quad (2.29d)$$

$$\Pi_{55} = \tau D^T M_C^T M_C D - \gamma^2 I \quad (2.29e)$$

$$\Pi_{12} = \dot{P}_2(u) + F_2 \mathcal{A}_\infty(\theta, u) + F_3 \mathcal{A}(u) \quad (2.29f)$$

$$\Pi_{13} = P_1(u) - F_1 + F_1 \mathcal{A}(u) \quad (2.29g)$$

$$\Pi_{14} = P_2(u) - F_2 + F_3 \mathcal{A}(u) \quad (2.29h)$$

$$\Pi_{15} = F_1 B + F_2 \mathcal{B}(\theta) \quad (2.29i)$$

$$\Pi_{23} = P_2^T - F_3 + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u) F_2^T \quad (2.29j)$$

$$\Pi_{24} = P_4 - F_4 + \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u) F_4^T \quad (2.29k)$$

$$\Pi_{25} = F_3 B + F_4 \mathcal{B}(\theta) \quad (2.29l)$$

$$\Pi_{34} = -F_2 - F_3^T \quad (2.29m)$$

$$\Pi_{35} = F_1 B + F_2 \mathcal{B}(\theta) \quad (2.29n)$$

$$\Pi_{45} = F_3 B + F_4 \mathcal{B}(\theta) \quad (2.29o)$$

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_x + 2\delta_x^1} F_2 S_\infty^{-1}(\theta) N_C^T & \sqrt{\delta_x^2} F_2 S_\infty^{-1}(\theta) C^T M_C & \sqrt{\lambda_0} u_0 N_0 & \dots & \sqrt{\lambda_m} u_m N_m \\ & & \sqrt{\mu_{0x}} F_1 M_0 & \dots & \sqrt{\mu_{mx}} F_1 M_m \end{bmatrix} \quad (2.30a)$$

$$\Upsilon_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_e + 2\delta_e^1} F_4 S_\infty^{-1}(\theta) N_C^T & \sqrt{\delta_e^2} F_4 S_\infty^{-1}(\theta) C^T M_C & \sqrt{\mu_{0e}} F_3 M_0 & \dots & \sqrt{\mu_{me}} F_3 M_m \end{bmatrix} \quad (2.30b)$$

$$\Upsilon_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_x + 2\delta_x^1} F_2 S_\infty^{-1}(\theta) N_C^T & \sqrt{\delta_x^2} F_2 S_\infty^{-1}(\theta) C^T M_C & \sqrt{\mu_{0x}} F_1 M_0 & \dots & \sqrt{\mu_{mx}} F_1 M_m \end{bmatrix} \quad (2.30c)$$

$$\Upsilon_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_e + 2\delta_e^1} F_4 S_\infty^{-1}(\theta) N_C^T & \sqrt{\delta_e^2} F_4 S_\infty^{-1}(\theta) C^T M_C & \sqrt{\mu_{0e}} F_3 M_0 & \dots & \sqrt{\mu_{me}} F_3 M_m \end{bmatrix} \quad (2.30d)$$

$$\varsigma = \sum_{j=\{x,e,\dot{x},\dot{e}\}} \frac{1}{\delta_j^1} \quad (2.31a)$$

$$\sigma = \sum_{j=\{x,e,\dot{x},\dot{e}\}} \frac{1}{\delta_j^2} \quad (2.31b)$$

$$\tau = \sum_{j=\{x,e,\dot{x},\dot{e}\}} \frac{1}{\alpha_j} \quad (2.31c)$$

$$\lambda_i = \sum_{j=\{x,e,\dot{x},\dot{e}\}} \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 \quad i \in 0, \dots, m \quad (2.31d)$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_{ij}^1} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}^2} \quad i \in 0, \dots, m \quad j \in \{x, e, \dot{x}, \dot{e}\} \quad (2.31e)$$

avec  $u_0 = 1$  pour simplifier les notations. ■

*Démonstration.* De façon similaire à la preuve du lemme D.1.1, considérons la dynamique de l'état augmenté  $X = [x^T \ e^T]^T$  sous la forme singulière suivante (avec  $\phi = \dot{X}$ )

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{2n} \\ \mathbb{A}(\theta, u) & -I_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}(\theta) \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (2.32)$$

avec

$$\mathbb{A}(\theta, u) = \begin{bmatrix} \left( \mathcal{A}(u) + \Delta A_0 + \sum_{i=1}^m \Delta A_i u_i \right) & 0 \\ \left( \Delta A_0 + \sum_{i=1}^m \Delta A_i u_i - S_\infty^{-1}(\theta) (\Delta C^T \Delta C + \Delta C^T C + C^T \Delta C) \right) & \mathcal{A}_\infty(\theta, u) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}(\theta) = \begin{bmatrix} B \\ \mathcal{B}(\theta) - S_\infty^{-1}(\theta) \Delta C^T D \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$\begin{aligned} V(X) &= X^T P(u) X = \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}^T Q(u) \bar{E} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{X}^T Q(u) \bar{E} \mathcal{X} \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x \\ e \\ \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}, \quad Q(u) = \begin{bmatrix} P(u) & F \\ 0 & F \end{bmatrix},$$

$$P(u) = P^T(u(t)) = \begin{bmatrix} P_1(u) & P_2(u) \\ P_2^T(u) & P_4(u) \end{bmatrix} > 0,$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}.$$

La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov  $V(X)$  le long de la trajectoire de  $X(t)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \mathcal{X}^T \begin{bmatrix} P(u) & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \bar{E} \dot{\mathcal{X}} + \dot{\mathcal{X}}^T \bar{E}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ F^T & F^T \end{bmatrix} \mathcal{X} + \mathcal{X}^T \begin{bmatrix} \dot{P}(u(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{X} \\ &= 2 \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}^T Q(u) \begin{bmatrix} \dot{X} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{P}(u(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}^T Q(u) \begin{bmatrix} \dot{X} \\ -\dot{X} + \mathbb{A}(\theta, u)X + \mathbb{B}(\theta)w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{P}(u(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Nous développons le terme

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}^T Q(u) \begin{bmatrix} \dot{X} \\ -\dot{X} + \mathbb{A}(u(t))X + \mathbb{B}w \end{bmatrix} \\ &= x^T P_1(u) \dot{x} + e^T P_2^T(u) \dot{x} + x^T P_2(u) \dot{e} + e^T P_4(u) \dot{e} \\ &+ (x^T F_1 + e^T F_3 + \dot{x}^T F_1 + \dot{e} F_3) (\mathcal{A}(u)) x \\ &+ (x^T F_1 + e^T F_3 + \dot{x}^T F_1 + \dot{e} F_3) (\Delta A_0 + \sum_{i=1}^m \Delta A_i u_i) x \\ &+ (x^T F_2 + e^T F_4 + \dot{x}^T F_2 + \dot{e}^T F_4) (\Delta_\Delta) x \\ &- x^T F_1 \dot{x} - e^T F_3 \dot{x} - \dot{x}^T F_1 \dot{x} - \dot{e}^T F_3 \dot{x} \\ &- x^T F_2 \dot{e} - e^T F_4 \dot{e} - \dot{x}^T F_2 \dot{e} - \dot{e}^T F_4 \dot{e} \\ &+ x^T F_1 B w + e^T F_3 B w + \dot{x}^T F_1 B w + \dot{e}^T F_3 B w \\ &+ (x^T F_2 + e^T F_4 + \dot{x}^T F_2 + \dot{e}^T F_4) \mathcal{B}(\theta) w \\ &+ (x^T F_2 + e^T F_4 + \dot{x}^T F_2 + \dot{e}^T F_4) (-S_\infty^{-1}(\theta) \Delta C^T D) w \\ &+ (x^T F_2 + e^T F_4 + \dot{x}^T F_2 + \dot{e}^T F_4) \mathcal{A}_\infty(u) e \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec

$$\Delta_\Delta = \Delta A_0 + \sum_{i=1}^m \Delta A_i u_i - S_\infty^{-1}(\theta) (\Delta C^T \Delta C + \Delta C^T C + C^T \Delta C). \quad (2.36)$$

Nous utilisons le lemme B.1.1 pour majorer les termes contenant les incertitudes. Pour  $j \in \{x, e, \dot{x}, \dot{e}\}$  et  $i \in \{0, \dots, m\}$  (on prend  $u_0 = 1$ ), on obtient, avec les réels strictement positifs  $\varepsilon_{ij}^k, \delta_j^k, \alpha_j$ , les inégalités suivantes

$$2j^T F_1 \Delta A_i u_i x \leq \varepsilon_{ij}^1 j^T F_1 M_i M_i^T F_1^T j + \frac{1}{\varepsilon_{ij}^1} x^T N_i^T N_i u_i^2 x, \quad (2.37a)$$

$$2j^T F_2 \Delta_\Delta x \leq \sum_{i=0}^m (\varepsilon_{ij}^2 j^T F_2 M_i M_i^T F_2^T j + \frac{1}{\varepsilon_{ij}^2} x^T N_i^T N_i u_i^2 x) \quad (2.37b)$$

$$\begin{aligned} & + \delta_j^2 j^T F_2 S_\infty^{-1}(\theta) C^T M_C M_C^T C S_\infty^{-1}(\theta) F_2^T j + \frac{1}{\delta_c^2} x^T C^T M_C M_C^T C x \\ & + 2\delta_j^1 j^T F_2 S_\infty^{-1}(\theta) N_C^T N_C S_\infty^{-1}(\theta) F_2^T j + 2\frac{1}{\delta_c^1} x^T N_C^T N_C x, \end{aligned} \quad (2.37c)$$

$$2j^T F_2 S_\infty^{-1}(\theta) \Delta C^T D w \leq \alpha_j j^T F_2 S_\infty^{-1}(\theta) N_C^T N_C S_\infty^{-1}(\theta) F_2^T x + \frac{1}{\alpha_j} w^T D^T M_C^T M_C D w. \quad (2.37d)$$

Pour obtenir une atténuation de perturbation  $\gamma$  entre  $w(t)$  et  $e(t)$  avec la stabilité de notre système, il suffit que

$$J_{ew} \leq \int_0^\infty (e^T e - \gamma^2 w^T w) dt + V(\infty) - V(0) \quad (2.38)$$

$$\leq \int_0^\infty \left( e^T e - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(x) \right) dt \leq 0. \quad (2.39)$$

En introduisant les inégalités (2.37) dans (2.35), on majore  $\dot{V}(X)$  donnée par (2.34). L'insertion de cette majoration dans (2.38) puis l'application du lemme de Schur sur l'inégalité ainsi obtenue donnent l'inégalité (2.28). •

Afin de résoudre la LMI (2.28), on réduit le domaine d'éligibilité de la matrice  $P(u)$  : on pose  $P_1(u) = P_{01} + \sum_{i=1}^m P_{i1} u_i$ ,  $P_2(u) = P_{02} + \sum_{i=1}^m P_{i2} u_i$  et  $P_4(u) = P_{04} + \sum_{i=1}^m P_{i4} u_i$ . Comme les signaux  $u_i(t)$  et  $\dot{u}_i(t)$  sont bornés, à partir de la définition de  $\rho(t)$  donnée par (2.15), on pose les notations suivantes

$$\tilde{P}_1(\rho) = P_{01} + \sum_{i=1}^m \rho_i P_{i1} = P_1(u) \quad (2.40)$$

$$\bar{P}_1(\rho) = \sum_{i=1}^m \rho_{m+i} P_{i1} = \dot{P}_1(u) \quad (2.41)$$

$$\tilde{P}_2(\rho) = P_{02} + \sum_{i=1}^m \rho_i P_{i2} = P_2(u) \quad (2.42)$$

$$\bar{P}_2(\rho) = \sum_{i=1}^m \rho_{m+i} P_{i2} = \dot{P}_2(u) \quad (2.43)$$

$$\tilde{P}_4(\rho) = P_{04} + \sum_{i=1}^m \rho_i P_{i4} = P_4(u) \quad (2.44)$$

$$\bar{P}_4(\rho) = \sum_{i=1}^m \rho_{m+i} P_{i4} = \dot{P}_4(u). \quad (2.45)$$

De plus, on note  $\tilde{P}_t(\rho) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1(\rho) & \tilde{P}_2(\rho) \\ \tilde{P}_2^T(\rho) & \tilde{P}_4(\rho) \end{bmatrix}$ . On note aussi

$$\mathcal{A}(\rho) = A_0 + \sum_{i=1}^m \rho_i A_i \quad (2.46)$$

Après ces mises en forme, on peut donner le théorème suivant permettant de résoudre le problème sous la forme de LMI.

**Théorème 2.2.6.** [GSZD07a, GSZD08a] *Le système (2.24) associé à l'observateur (2.26) (à  $\theta$  fixé), la dynamique de l'erreur d'observation et du système est quadratiquement stable et possède une atténuation de perturbation  $\gamma$  entre  $w(t)$  et  $e(t)$ , s'il existe une des ma-*

*trices  $P_i = P_i^T = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i2}^T & P_{i4} \end{bmatrix}$ , une matrice  $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}$  et des réels strictement positifs  $\{\delta_j^k, \alpha_j, \varepsilon_{ij}^k | k \in \{1, 2\}, i \in \{0, \dots, m\}, j \in \{x, e, \dot{x}, \dot{e}\}\}$ , telles que pour  $j = 1, \dots, \nu$ ,*

$\tilde{P}_t(\beta^j) > 0$  et

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Upsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & 0 & \Upsilon_2 & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & 0 & 0 & \Upsilon_3 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & \Pi_{45} & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_4 \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.47)$$

où  $\beta^j \in \mathcal{S}$  et

$$\Pi_{11} = \bar{P}_1(\beta^j) + F_1 \hat{\mathcal{A}}(\beta^j) + \hat{\mathcal{A}}^T(\beta^j) F_1^T + \varsigma N_C^T N_C + \sigma C^T M_C M_C^T C \quad (2.48a)$$

$$\Pi_{22} = P_4(\beta^j) + I + F_4 \hat{\mathcal{A}}_\infty(\theta, \beta^j) + \hat{\mathcal{A}}_\infty^T(\theta, \beta^j) F_4^T \quad (2.48b)$$

$$\Pi_{33} = -F_1 - F_1^T \quad (2.48c)$$

$$\Pi_{44} = -F_4 - F_4^T \quad (2.48d)$$

$$\Pi_{55} = \tau D^T M_C^T M_C D - \gamma^2 I \quad (2.48e)$$

$$\Pi_{12} = P_2(\beta^j) + F_2 \hat{\mathcal{A}}_\infty(\theta, u) + F_3 \hat{\mathcal{A}}(\beta^j) \quad (2.48f)$$

$$\Pi_{13} = \tilde{P}_1(\beta^j) - F_1 + F_1 \hat{\mathcal{A}}(\beta^j) \quad (2.48g)$$

$$\Pi_{14} = \tilde{P}_2(\beta^j) - F_2 + F_3 \hat{\mathcal{A}}(\beta^j) \quad (2.48h)$$

$$\Pi_{15} = F_1 B + F_2 \mathcal{B}(\theta) \quad (2.48i)$$

$$\Pi_{23} = \tilde{P}_2^T - F_3 + \hat{\mathcal{A}}_\infty^T(\theta, \beta^j) F_2^T \quad (2.48j)$$

$$\Pi_{24} = \tilde{P}_4 - F_4 + \hat{\mathcal{A}}_\infty^T(\theta, \beta^j) F_4^T \quad (2.48k)$$

$$\Pi_{25} = F_3 B + F_4 \mathcal{B}(\theta) \quad (2.48l)$$

$$\Pi_{34} = -F_2 - F_3^T \quad (2.48m)$$

$$\Pi_{35} = F_1 B + F_2 \mathcal{B}(\theta) \quad (2.48n)$$

$$\Pi_{45} = F_3 B + F_4 \mathcal{B}(\theta) \quad (2.48o)$$

avec  $\hat{\mathcal{A}}_\infty(\theta, \beta^j)$  donné par l'équation (2.16).

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_x + 2\delta_x^1} F_2 S_\infty^{-1}(\theta) N_C^T & \sqrt{\delta_x^2} F_2 S_\infty^{-1}(\theta) C^T M_C & \sqrt{\lambda_0} \beta_0^j N_0 & \dots & \sqrt{\lambda_m} \beta_m^j N_m \\ & & \sqrt{\mu_{0x}} F_1 M_0 & \dots & \sqrt{\mu_{mx}} F_1 M_m \end{bmatrix} \quad (2.49a)$$

$$\Upsilon_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_e + 2\delta_e^1} F_4 S_\infty^{-1}(\theta) N_C^T & \sqrt{\delta_e^2} F_4 S_\infty^{-1}(\theta) C^T M_C & \sqrt{\mu_{0e}} F_3 M_0 & \dots & \sqrt{\mu_{me}} F_3 M_m \end{bmatrix} \quad (2.49b)$$



$$\Upsilon_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_{\dot{x}} + 2\delta_{\dot{x}}^1} F_2 S_{\infty}^{-1}(\theta) N_C^T & \sqrt{\delta_{\dot{x}}^2} F_2 S_{\infty}^{-1}(\theta) C^T M_C & \sqrt{\mu_{0\dot{x}}} F_1 M_0 & \dots & \sqrt{\mu_{m\dot{x}}} F_1 M_m \end{bmatrix} \quad (2.49c)$$

$$\Upsilon_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_{\dot{e}} + 2\delta_{\dot{e}}^1} F_4 S_{\infty}^{-1}(\theta) N_C^T & \sqrt{\delta_{\dot{e}}^2} F_4 S_{\infty}^{-1}(\theta) C^T M_C & \sqrt{\mu_{0\dot{e}}} F_3 M_0 & \dots & \sqrt{\mu_{m\dot{e}}} F_3 M_m \end{bmatrix} \quad (2.49d)$$

$$\varsigma = \sum_{j=\{x,e,\dot{x},\dot{e}\}} \frac{1}{\delta_j^1} \quad (2.50a)$$

$$\sigma = \sum_{j=\{x,e,\dot{x},\dot{e}\}} \frac{1}{\delta_j^2} \quad (2.50b)$$

$$\tau = \sum_{j=\{x,e,\dot{x},\dot{e}\}} \frac{1}{\alpha_j} \quad (2.50c)$$

$$\lambda_i = \sum_{j=\{x,e,\dot{x},\dot{e}\}} \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 \quad i \in 0, \dots, m \quad (2.50d)$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_{ij}^1} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}^2} \quad i \in 0, \dots, m \quad j \in \{x, e, \dot{x}, \dot{e}\} \quad (2.50e)$$

avec  $\beta_0^j = 1$  pour simplifier les notations et  $\beta_i^j$  représente la  $i$ -ème composante du sommet  $\beta^j$ . ■

*Démonstration.* Ce théorème est une résolution polytopique du théorème 2.2.5. •

Nous avons présenté l'approche LPV pour l'obtention d'un filtre grand gain pour les systèmes bilinéaires uniformément observable. Cependant le filtre peut s'avérer tout aussi efficace avec des systèmes non uniformément observable, la différence principale est que l'existence d'une solution, d'un  $\theta_0$  assurant la stabilité de l'erreur d'observation n'est plus assurée.

Cet observateur n'a qu'un degré de liberté, le paramètre  $\theta$ .

## 2.3 Observateur fonctionnel : approche LPV

Dans cette section, nous considérons les systèmes bilinéaires de la forme générale (2.1) sans hypothèse sur la structure, à la différence de la section 2.2 : l'observabilité uniforme n'est pas requise, les entrées de commande non universelles sont donc admises. Nous proposons le filtre fonctionnel suivant

$$\begin{cases} \dot{\eta} = H_0 \eta + \sum_{i=1}^m H_i u_i \eta + J_0 y + \sum_{i=1}^m J_i u_i y + G u \\ \hat{z} = \eta + E y \end{cases} \quad (2.51)$$

où  $\eta \in \mathbb{R}^r$  et  $\widehat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$  est l'estimation de  $z(t)$  le vecteur à estimer, combinaison linéaire de l'état. Nous devons donc avoir une forme de détectabilité<sup>3</sup> du système bilinéaire initial, détectabilité qui dépendra de la fonctionnelle recherchée.

On définit l'erreur de filtrage comme suit

$$\begin{aligned} e &= z - \widehat{z} = Lx - \widehat{z} \\ &= \bar{e} - EDw \end{aligned} \quad (2.52)$$

où

$$\bar{e} = \Psi x - \eta \quad (2.53a)$$

$$\Psi = L - EC. \quad (2.53b)$$

A partir de (2.1) et (2.52), on peut voir que la dérivée de l'erreur  $e(t)$  est fonction de la dérivée de la perturbation  $w(t)$ . Pour éviter de faire intervenir le terme  $\dot{w}$  dans la dynamique de l'erreur, on introduit un système liant  $w$  à  $e$  avec la réalisation d'espace d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{e}} = (H_0 + \sum_{i=1}^m u_i H_i) \bar{e} + (\Psi A_0 - H_0 \Psi - \Upsilon^0 C - H_0 EC)x \\ \quad + \sum_{i=1}^m (\Psi A_i - H_i \Psi - \Upsilon^i C - H_i EC) u_i x + (\Psi R - G)u \\ \quad + (LB - ECB - \Upsilon_0 D - H_0 ED - \sum_{i=1}^m (\Upsilon_i D + H_i ED) u_i) w \\ e = \bar{e} - EDw \end{array} \right. \quad (2.54)$$

avec

$$\Upsilon_i = J_i - H_i E \text{ pour } i = 0, \dots, m. \quad (2.55)$$

Ces équations de Sylvester représentant le non-biais (voir [GM89], [SBG97], p. 176, [Dar00] ou [WG98])

$$\Psi A_i - H_i \Psi - \Upsilon_i C - H_i EC = 0 \quad i = 0, \dots, m \quad (2.56)$$

doivent être satisfaites et  $G$  doit être choisi tel que

$$G = \Psi R. \quad (2.57)$$

En l'absence de perturbation non mesurable ( $w = 0$ ), les équations (2.56) et (2.57) permettent de "découpler" l'erreur d'observation de l'état et donc d'assurer la stabilité de cette erreur même si l'état  $x(t)$  du système (2.1) ne converge pas vers l'origine (suivi de trajectoire,  $u(t)$  constante non nulle à l'infini).

En utilisant (2.53b), l'équation (2.56) devient

$$LA_i - ECA_i - H_i L - \Upsilon_i C = 0 \quad i = 0, \dots, m. \quad (2.58)$$

<sup>3</sup>voir les travaux de Vidyasagar [Vid80b], Sontag *et al.* [SW95] ou Hespana *et al.* [HM99].

On peut remarquer que l'équation (2.58) peut être réécrite sous la forme compacte suivante

$$\mathcal{N}\mathcal{F} = A_L \quad (2.59)$$

où les matrices  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $A_L$  sont donnés par

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} E & H_0 & \dots & H_m & \Upsilon_0 & \dots & \Upsilon_m \end{bmatrix} \quad (2.60a)$$

$$\mathcal{F}^T = \begin{bmatrix} A_C^T & \tilde{L}^T & \tilde{C}^T \end{bmatrix} \quad (2.60b)$$

$$A_L = L\tilde{A}, \quad (2.60c)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_0 & \dots & A_m \end{bmatrix} \\ \tilde{L} &= \begin{bmatrix} L & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} C & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C \end{bmatrix} \\ A_C &= C\tilde{A}. \end{aligned}$$

L'équation (2.59) admet une solution  $\mathcal{N}$  si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite (voir [RM71])

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A_L^T & \mathcal{F}^T \end{bmatrix}^T = \text{rang } \mathcal{F}. \quad (2.61)$$

Sous cette condition, la solution générale de (2.59) est donnée par (voir [RM71])

$$\mathcal{N} = A_L\mathcal{F}^\dagger + Z(I_\alpha - \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger) \quad (2.62)$$

où  $Z$  est une matrice arbitrairement choisie de dimensions appropriées et  $\alpha = p + (m + 1)(r + p)$  (voir [Dar00] ou [WG98]). A partir de l'équation (2.62), les matrices  $E$ ,  $H_i$  et  $\Upsilon_i$  sont données par

$$E = E_1 + ZE_2 \quad (2.63a)$$

$$H_i = H_{i,1} + ZH_{i,2} \quad (2.63b)$$

$$\Upsilon_i = \Upsilon_{i,1} + Z\Upsilon_{i,2}, \quad (2.63c)$$

avec

$$E_1 = A_L\mathcal{F}^\dagger M_E \quad (2.64a)$$

$$H_{i,1} = A_L\mathcal{F}^\dagger M_{H_i} \quad (2.64b)$$

$$\Upsilon_{i,1} = A_L \mathcal{F}^\dagger M_{\Upsilon_i} \quad (2.64c)$$

$$E_2 = (I_\alpha - \mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger) M_E \quad (2.64d)$$

$$H_{i,2} = (I_\alpha - \mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger) M_{H_i} \quad (2.64e)$$

$$\Upsilon_{i,2} = (I_\alpha - \mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger) M_{\Upsilon_i} \quad (2.64f)$$

et

$$M_{H_i} = \begin{bmatrix} 0_{p \times r} \\ 0_{(i-1)r \times r} \\ I_r \\ 0_{(m+1-i)r \times r} \\ 0_{(m+1)p \times r} \end{bmatrix}, \quad M_{\Upsilon_i} = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} \\ 0_{(m+1)r \times p} \\ 0_{(i-1)p \times p} \\ I_p \\ 0_{(m+1-i)p \times p} \end{bmatrix}, \quad M_E = \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(m+1)r \times p} \\ 0_{(m+1)p \times p} \end{bmatrix}.$$

Ces dernières matrices sont donc des matrices de sélection (de projection) qui permettent de sélectionner à chaque fois la matrice qui nous intéresse.

Dans la suite de cette section, on considère que la condition de rang (2.61) est satisfaite. A partir des équations (2.57) et (2.63), le système (2.54) peut être réécrit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{e}} = (H_{0,1} + ZH_{0,2} + \sum_{i=1}^m u_i (H_{i,1} + ZH_{i,2})) \bar{e} + (LB - (E_1 + ZE_2)CB - (\Upsilon_{0,1} + Z\Upsilon_{0,2})D) \\ - \underbrace{(H_{0,1} + ZH_{0,2})(E_1 + ZE_2)D}_{\Gamma_0} - \sum_{i=1}^m ((\Upsilon_{i,1} + Z\Upsilon_{i,2})D + \underbrace{(H_{i,1} + ZH_{i,2})(E_1 + ZE_2)D}_{\Gamma_i}) u_i w \\ e = \bar{e} - (E_1 + ZE_2)Dw. \end{array} \right. \quad (2.65)$$

On peut noter que l'expression  $\Gamma_i$  est quadratique en  $Z$ , en effet elle contient des termes du type

$$ZH_{i,2}Z, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.66)$$

Si on appliquait le lemme borné réel (BRL) (voir annexe E sur le système (2.65), cela nous conduirait à une inégalité matricielle non linéaire, pour éviter ces non linéarités, on introduit une contrainte supplémentaire sur les matrices du filtre. On considérera deux cas pour cette contrainte.

### 2.3.1 Premier cas : construction du filtre avec la contrainte de type 1

La matrice de gain  $Z$  à déterminer est choisie telle que

$$ZE_2D = 0, \quad (2.67)$$

La solution générale de (2.67) (la contrainte de type 1) est donc donnée par

$$Z = Z_1 (I_\alpha - E_2D(E_2D)^\dagger), \quad (2.68)$$

où  $Z_1$  est une matrice arbitrairement choisie de dimensions appropriées (voir [SDZ06]), ainsi  $\Gamma_i$  devient (voir (2.65))

$$\Gamma_i = (H_{i,1} + Z_1 (I_\alpha - E_2 D (E_2 D)^\dagger) H_{i,2}) E_1 D \quad (2.69)$$

et les equations (2.63) peuvent être réécrites comme suit

$$E = E_{11} + Z_1 E_{21} \quad (2.70a)$$

$$H_i = H_{i,11} + Z_1 H_{i,21} \quad (2.70b)$$

$$\Upsilon_i = \Upsilon_{i,11} + Z_1 \Upsilon_{i,21} \quad (2.70c)$$

avec

$$E_{11} = E_1 \quad (2.71a)$$

$$H_{i,11} = H_{i,1} \quad (2.71b)$$

$$\Upsilon_{i,11} = \Upsilon_{i,1} \quad (2.71c)$$

$$E_{21} = \Phi M_E \quad (2.71d)$$

$$H_{i,21} = \Phi M_{H_i} \quad (2.71e)$$

$$\Upsilon_{i,21} = \Phi M_{\Upsilon_i} \quad (2.71f)$$

où

$$\Phi = (I_\alpha - E_2 D (E_2 D)^\dagger) (I_\alpha - \mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger). \quad (2.72)$$

En prenant en compte la contrainte (2.67), le système (2.65) se réécrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}} = (A_{u1}(u) + Z_1 A_{z1}(u)) \bar{e} + (B_{u1}(u) + Z_1 B_{z1}(u)) w \\ e = \bar{C} \bar{e} + \bar{D}_1 w \end{cases} \quad (2.73)$$

où

$$A_{u1}(u) = H_{0,11} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,11} \quad (2.74a)$$

$$A_{z1}(u) = H_{0,21} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,21} \quad (2.74b)$$

$$B_{u1}(u) = LB - E_{11} CB - \left( \Upsilon_{0,11} + \sum_{i=1}^m u_i \Upsilon_{i,11} + (H_{0,11} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,11}) E_{11} \right) D \quad (2.74c)$$

$$B_{z1}(u) = -E_{21} CB - \left( \Upsilon_{0,21} + \sum_{i=1}^m u_i \Upsilon_{i,21} + (H_{0,21} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,21}) E_{11} \right) D \quad (2.74d)$$

$$\bar{C} = I_r \quad (2.74e)$$

$$\bar{D}_1 = -E_{11} D. \quad (2.74f)$$

Cette mise en forme mène au théorème suivant.

**Théorème 2.3.1.** [GSZD07b, GSZD08a] On considère que la condition de rang (2.61) est satisfaite. Sous la contrainte (2.67), le système (2.51) est un filtre pour le système (2.1) satisfaisant une atténuation de perturbation  $\gamma$  s'il existe une matrice  $P(u) = P^T(u) > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  (pour  $i = 0, \dots, m$ ),  $F \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{r \times \alpha}$  telles que

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & I_r \\ (1,2)^T & -F - F^T & (1,3) & 0 \\ (1,3)^T & (1,3)^T & -\gamma^2 I_q & -\overline{D}_1^T \\ I_r & 0 & -\overline{D}_1 & -\overline{C} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.75)$$

où

$$\begin{aligned} (1,1) &= \dot{P}(u) + FA_{u1}(u) + YA_{z1}(u) + A_{u1}^T(u)F^T + A_{z1}^T(u)Y^T \\ (1,2) &= P(u) - F + A_{u1}^T(u)F^T + A_{z1}(u)^T Y^T \\ (1,3) &= FB_{u1}(u) + YB_{z1}(u). \end{aligned}$$

avec  $u(t) \in \Omega$ . Si cette inégalité matricielle a une solution, la matrice de gain  $Z_1$  est donné par

$$Z_1 = F^{-1}Y. \quad (2.76)$$

■

*Démonstration.* Comme la condition de rang (2.61) est supposée satisfaite, le système (2.73) représente l'erreur de filtrage du filtre (2.51) puisque la contrainte (2.67) est satisfaite. Si l'inégalité (2.75) a une solution alors  $F + F^T > 0$  et la matrice  $F$  est inversible : le gain  $Z_1$  est donc calculable.

Si on ajoute la relation  $Y = FZ_1$  (voir (2.76)) au lemme D.1, le système (2.73) est quadratiquement stable et assure une atténuation au sens  $\mathcal{L}_2$  entre la perturbation  $w(t)$  et l'erreur d'observation  $e(t)$  inférieure ou égale à  $\gamma > 0$  pour  $u(t) \in \Omega$ .

Après avoir calculé le gain  $Z_1$ , les matrices  $H_i$ ,  $\Upsilon_i$  et  $E$  du filtre sont données par (2.70), puis les matrices  $J_i$  sont tirées de (2.55) et  $G$  de (2.57). •

L'inégalité (2.76) ne permet pas une résolution simple du problème. Puisque les entrées et leurs dérivées sont bornées et donc appartiennent à un polytope convexe, nous allons calculer les solutions en résolvant ces inégalités sur tous les sommets du polytope  $\Omega$ . Ainsi afin de finaliser la construction du filtre  $\mathcal{H}_\infty$  (2.51), on définit les matrices suivantes, avec  $\rho(t)$  défini dans (2.15)

$$\widehat{A}_{\rho 1}(\rho) = H_{0,11}0 + \sum_{i=1}^m \rho_i H_{i,11} = A_{u1}(u) \quad (2.77a)$$

$$\widehat{A}_{z1}(\rho) = H_{0,21} + \sum_{i=1}^m \rho_i H_{i,21} = A_{z1}(u) \quad (2.77b)$$

$$\widehat{B}_{\rho 1}(\rho) = LB - E_{11}CB - \left( \Upsilon_{0,11} + \sum_{i=1}^m \rho_i \Upsilon_{i,11} + (H_{0,11} + \sum_{i=1}^m \rho_i H_{i,11})E_{11} \right) D = B_{u1}(u) \quad (2.77c)$$

$$\widehat{B}_{z_1}(\rho) = -E_{z_1}CB - \left( \Upsilon_{0,z_1} + \sum_{i=1}^m \rho_i \Upsilon_{i,z_1} + (H_{0,z_1} + \sum_{i=1}^m \rho_i H_{i,z_1})E_{11} \right) D = B_{z_2}(u) \quad (2.77d)$$

A partir des notations et des définitions (2.15), (2.22) et (2.77), le théorème suivant permet de construire la matrice de gain  $Z_1$  du système (2.73) à partir d'une LMI.

**Théorème 2.3.2.** [GSZD07b, GSZD08a] *On considère que la condition de rang (2.61) est satisfaite. Sous la contrainte (2.67), le système (2.51) est un filtre pour le système (2.1) satisfaisant une atténuation de perturbation  $\gamma$  s'il existe des matrices  $P_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$  (pour  $i = 0, \dots, m$ ),  $F \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{r \times \alpha}$  telles que  $\widetilde{P}(\beta^j) = \widetilde{P}(\beta^j)^T > 0$  pour  $j = 1, \dots, \nu$  et*

$$\begin{bmatrix} (1,1)^j & (1,2)^j & (1,3)^j & I_r \\ (1,2)^{jT} & -F - F^T & (1,3)^j & 0 \\ (1,3)^{jT} & (1,3)^{jT} & -\gamma^2 I_q & -\overline{D}_1^T \\ I_r & 0 & -\overline{D}_1 & -\overline{C} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.78)$$

où

$$\begin{aligned} (1,1)^j &= \overline{P}(\beta^j) + F \widehat{A}_{\rho_1}(\beta^j) + Y \widehat{A}_{z_1}(\beta^j) + \widehat{A}_{\rho_1}^T(\beta^j) F^T + \widehat{A}_{z_1}^T(\beta^j) Y^T \\ (1,2)^j &= \widetilde{P}(\beta^j) - F + \widehat{A}_{\rho_1}^T(\beta^j) F^T + \widehat{A}_{z_1}(\beta^j)^T Y^T \\ (1,3)^j &= F \widehat{B}_{\rho_1}(\beta^j) + Y \widehat{B}_{z_1}(\beta^j). \end{aligned}$$

avec  $\beta^j \in \mathcal{S}$  (voir (2.19)). Si cette LMI a une solution, la matrice de gain  $Z_1$  est donnée par

$$Z_1 = F^{-1}Y. \quad (2.79)$$

■

*Démonstration.* De façon similaire au théorème 2.2.4, la résolution de l'inégalité matricielle (2.78) sur les sommets de  $\mathcal{P}$  (voir l'équation (2.18)) assure la stabilité quadratique du système (2.73) et assure une atténuation au sens  $\mathcal{L}_2$  entre la perturbation  $w(t)$  et l'erreur d'observation  $e(t)$  inférieure ou égale à  $\gamma > 0$  pour  $u \in \Omega$ . •

Avec ces résultats, le problème de la construction du filtre  $\mathcal{H}_\infty$  se réduit à la recherche d'une matrice de gain  $Z_1$  capable de stabiliser le système (2.73) et de garantir une performance  $\mathcal{H}_\infty \gamma$ . Si la recherche est fructueuse, on peut alors conclure à la détectabilité du système (2.1).

On peut noter que pour bénéficier des degrés de liberté de la matrice de gain  $Z_1$ , la matrice  $\Phi$  (voir equation (2.72)) doit satisfaire  $\Phi \neq 0$ . Mais les degrés de liberté ne sont pas indispensables puisqu'on peut trouver un observateur même avec  $\Phi = 0$ , en effet la LMI (2.78) peut avoir une solution même si  $\Phi = 0$ . Dans le théorème suivant, une condition suffisante pour s'assurer que  $\Phi \neq 0$  est donnée, et ainsi être assuré de l'intérêt d'une recherche de matrices de gain.

**Théorème 2.3.3.** [GSZD07b, GSZD08a] Soit une matrice  $\Phi$  donnée par (2.72) et  $q, p, m, r, n$  des entiers représentant respectivement les dimensions des vecteurs  $w(t), y(t), u(t), z(t)$  et  $x(t)$ . Si

$$q < p + (m + 1)(p + r - n), \quad (2.80)$$

alors

$$\Phi \neq 0. \quad (2.81)$$

■

*Démonstration.* Puisque

$$\text{Im}((I_\alpha - \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger)^T) = \ker(\mathcal{F}^T) \quad (2.82)$$

donc

$$\dim(\text{Im}(I_\alpha - \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger)) \geq \alpha - (m + 1)n. \quad (2.83)$$

Comme

$$\ker(I_\alpha - (E_2D(E_2D)^\dagger)) = \text{Im}(E_2D), \quad (2.84)$$

on a

$$\dim(\ker(I_\alpha - (E_2D(E_2D)^\dagger))) = \text{rang}(E_2D) \leq q, \quad (2.85)$$

avec  $\alpha = p + (m + 1)(r + p)$ .

Si  $q < p + (m + 1)(p + r - n)$  est vérifié, alors les relations (2.83) et (2.85) mènent à

$$\text{Im}(I_\alpha - \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger) \not\subset \ker(I_\alpha - E_2D(E_2D)^\dagger), \quad (2.86)$$

ce qui implique que  $\Phi \neq 0$ . •

*Remarque 2.3.1.* Lorsque les conditions du théorème ne sont pas vérifiées et pour continuer à bénéficier des degrés de liberté à travers  $Z_1, n, m, p$  et  $q$  étant des données fixées en fonction du système étudié, le seul moyen d'augmenter les possibilités d'avoir  $\Phi \neq 0$  est d'augmenter  $r$ , c'est-à-dire augmenter la dimension du filtre. □

### 2.3.2 Second cas : construction du filtre avec la contrainte de type 2

Pour éviter les bilinéarités en  $Z$  (voir (2.66)), on peut remplacer la contrainte (2.67) (de type 1) par la contrainte de type 2

$$ED = 0, \quad (2.87)$$

ainsi on obtient  $\Gamma_i = 0$  (voir (2.65)). A partir de  $ED = 0$  et de l'équation (2.59), on obtient

$$\bar{\mathcal{N}} \bar{\mathcal{F}} = [0 \ A_L] = \bar{A}_L \quad (2.88)$$

avec  $\bar{\mathcal{F}} = [\mathcal{D} \ \mathcal{F}]$  où  $\mathcal{D}^T = [D^T \ 0 \ 0]$ . L'équation (2.88) a une solution  $\bar{\mathcal{N}}$  si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & A_L \\ \mathcal{D} & \mathcal{F} \end{bmatrix} = \text{rang} [\mathcal{D} \ \mathcal{F}]. \quad (2.89)$$



Les ensembles d'observateurs satisfaisant chaque contrainte sont disjoint, d'où l'intérêt d'exposer les deux possibilités.

Sous cette condition, toutes les solutions  $\bar{\mathcal{N}}$  sont données par (voir [RM71])

$$\bar{\mathcal{N}} = \bar{A}_L \bar{\mathcal{F}}^\dagger + Z_2(I_\alpha - \bar{\mathcal{F}} \bar{\mathcal{F}}^\dagger) \quad (2.90)$$

où  $Z_2$  est une matrice arbitraire avec des dimensions appropriées.

Les matrices  $E$ ,  $H_i$  et  $\Upsilon_i$  sont alors données par

$$E = E_{12} + Z_2 E_{22} \quad (2.91a)$$

$$H_i = H_{i,12} + Z_2 H_{i,22} \quad (2.91b)$$

$$\Upsilon_i = \Upsilon_{i,12} + Z_2 \Upsilon_{i,22} \quad (2.91c)$$

où

$$E_{12} = \bar{A}_L \bar{\mathcal{F}}^\dagger M_E \quad (2.92a)$$

$$H_{i,12} = \bar{A}_L \bar{\mathcal{F}}^\dagger M_{H_i} \quad (2.92b)$$

$$\Upsilon_{i,12} = \bar{A}_L \bar{\mathcal{F}}^\dagger M_{\Upsilon_i} \quad (2.92c)$$

$$E_{22} = (I_\alpha - \bar{\mathcal{F}} \bar{\mathcal{F}}^\dagger) M_E \quad (2.92d)$$

$$H_{i,22} = (I_\alpha - \bar{\mathcal{F}} \bar{\mathcal{F}}^\dagger) M_{H_i} \quad (2.92e)$$

$$\Upsilon_{i,22} = (I_\alpha - \bar{\mathcal{F}} \bar{\mathcal{F}}^\dagger) M_{\Upsilon_i}. \quad (2.92f)$$

A partir des notations (2.91), le système (2.65) devient

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}} = (A_{u_2}(u) + Z_2 A_{z_2}(u)) \bar{e} + (B_{u_2}(u) + Z_2 B_{z_2}(u)) w \\ e = \bar{C} \bar{e} + \bar{D}_2 w \end{cases} \quad (2.93)$$

où

$$A_{u_2}(u) = H_{0,12} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,12}, \quad (2.94a)$$

$$A_{z_2}(u) = H_{0,22} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,22}, \quad (2.94b)$$

$$B_{u_2}(u) = LB - E_{12}CB - \left( \Upsilon_{0,12} + \sum_{i=1}^m u_i \Upsilon_{i,12} \right) D \quad (2.94c)$$

$$B_{z_2}(u) = -E_{22}CB - \left( \Upsilon_{0,22} + \sum_{i=1}^m u_i \Upsilon_{i,22} \right) D \quad (2.94d)$$

$$\bar{C} = I_r \quad (2.94e)$$

$$\bar{D}_2 = 0. \quad (2.94f)$$

A partir de cette mise en forme, on peut donner le théorème suivant.

**Théorème 2.3.4.** [GSZD07b, GSZD08a] On considère que la condition de rang (2.89) est satisfaite (donc la contrainte (2.87) est satisfaite), le système (2.51) est un filtre pour le système (2.1) satisfaisant une atténuation de perturbation  $\gamma$  s'il existe une matrice  $P(u) = P^T(u) > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  (pour  $i = 0, \dots, m$ ),  $F \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{r \times \alpha}$  telles que

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & I_r \\ (1,2)^T & -F - F^T & (1,3) & 0 \\ (1,3)^T & (1,3)^T & -\gamma^2 I_q & -\overline{D}_1^T \\ I_r & 0 & -\overline{D}_1 & -\overline{C} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.95)$$

où

$$\begin{aligned} (1,1) &= \dot{P}(u) + FA_{u2}(u) + YA_{z2}(u) + A_{u2}^T(u)F^T + A_{z2}^T(u)Y^T \\ (1,2) &= P(u) - F + A_{u2}^T(u)F^T + A_{z2}(u)^T Y^T \\ (1,3) &= FB_{u2}(u) + YB_{z2}(u). \end{aligned}$$

avec  $u(t) \in \Omega$ . Si cette inégalité a une solution, la matrice de gain  $Z_2$  est donnée par

$$Z_2 = F^{-1}Y. \quad (2.96)$$

■

*Démonstration.* Voir la démonstration du théorème 2.3.1. •

Comme précédemment afin de rendre le théorème utilisable, on donne sa version polytopique en définissant d'abord les matrices suivantes

$$\widehat{A}_{\rho 2}(u) = H_{0,12} + \sum_{i=1}^m \rho_i H_{i,12} = A_{u2}(u) \quad (2.97a)$$

$$\widehat{A}_{z2}(u) = H_{0,22} + \sum_{i=1}^m \rho_i H_{i,22} = A_{z2}(u) \quad (2.97b)$$

$$\widehat{B}_{\rho 2}(u) = LB - E_{12}CB - \left( \Upsilon_{0,12} + \sum_{i=1}^m \rho_i \Upsilon_{i,12} \right) D = B_{u2}(u) \quad (2.97c)$$

$$\widehat{B}_{z2}(u) = -E_{22}CB - \left( \Upsilon_{0,22} + \sum_{i=1}^m \rho_i \Upsilon_{i,22} \right) D = B_{z2}(u) \quad (2.97d)$$

On donne alors la version polytopique du théorème (2.3.4).

**Théorème 2.3.5.** [GSZD07b, GSZD08a] On considère que la condition de rang (2.89) est satisfaite (donc la contrainte (2.87) est satisfaite), le système (2.51) est un filtre pour le système (2.1) satisfaisant une atténuation de perturbation  $\gamma$  s'il existe des matrices

$P_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$  (pour  $i = 0, \dots, m$ ),  $F \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{r \times \alpha}$  telles que  $\tilde{P}(\beta^j) = \tilde{P}(\beta^j)^T > 0$  pour  $j = 1, \dots, \nu$  et

$$\begin{bmatrix} (1,1)^j & (1,2)^j & (1,3)^j & I_r \\ (1,2)^{jT} & -F - F^T & (1,3)^j & 0 \\ (1,3)^{jT} & (1,3)^{jT} & -\gamma^2 I_q & -\overline{D}_1^T \\ I_r & 0 & -\overline{D}_1 & -\overline{C} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.98)$$

où

$$\begin{aligned} (1,1)^j &= \overline{P}(\beta^j) + F\widehat{A}_{\rho 2}(\beta^j) + Y\widehat{A}_{z 2}(\beta^j) + \widehat{A}_{\rho 2}^T(\beta^j)F^T + \widehat{A}_{z 2}^T(\beta^j)Y^T \\ (1,2)^j &= \tilde{P}(\beta^j) - F + \widehat{A}_{\rho 2}^T(\beta^j)F^T + \widehat{A}_{z 2}(\beta^j)^T Y^T \\ (1,3)^j &= F\widehat{B}_{\rho 2}(\beta^j) + Y\widehat{B}_{z 2}(\beta^j). \end{aligned}$$

avec  $\beta^j \in \mathcal{S}$  (voir (2.19)). Si cette LMI a une solution, la matrice de gain  $Z_2$  est donnée par

$$Z_2 = F^{-1}Y. \quad (2.99)$$

■

*Démonstration.* Voir la démonstration du théorème 2.3.2. •

Avec le théorème (2.3.5), la synthèse du filter  $\mathcal{H}_\infty$  est équivalente à la détermination d'une matrice  $Z_2$  stabilisant le système (2.93) et assurant une atténuation au sens  $\mathcal{L}_2$  entre la perturbation  $w(t)$  et l'erreur d'observation  $e(t)$  inférieure ou égale à  $\gamma > 0$  pour  $u \in \Omega$ .

*Remarque 2.3.2.* Les théorèmes de tout ce chapitre sont valables pour des non linéarités de la forme  $xf(u(t))$  dans le système (2.1), à condition que  $f(u(t))$  et ses dérivées soient bornées. □

L'étude du système incertain n'a pas été réalisée mais pourrait se faire de façon similaire à la section 2.2.2, on pourrait utiliser l'approche "commande robuste" présentée dans [SZRD06] ou une approche LPV-polytopique.

## 2.4 Les exemples

Afin d'illustrer l'approche LPV développée dans ce chapitre et de montrer l'intérêt des différents observateurs, nous allons exposer quelques exemples ayant diverses caractéristiques. Dans tous ces exemples les perturbations seront des signaux trapézoïdaux.

### 2.4.1 Exemple d'observateur à grand gain

Prenons le système bilinéaire instable et perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} ux + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + w \end{cases} \quad (2.100)$$

L'entrée de commande  $u(t)$  et sa dérivée  $\dot{u}(t)$  sont bornées comme suit

$$-1 \leq u(t) \leq 1 \quad (2.101)$$

$$-1000 \leq \dot{u}(t) \leq 1000 \quad (2.102)$$

On va simuler le système et estimer l'état avec l'observateur à grand gain suivant

$$\dot{\hat{x}} = \left( A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i \right) \hat{x} - S_\infty^{-1}(\theta) C^T (C \hat{x} - y). \quad (2.103)$$

On cherche la valeur de  $\theta$  permettant de minimiser l'influence des perturbations. Pour cela, on applique le théorème 2.2.4 dans une boucle sur  $\theta$  afin d'obtenir la valeur  $\theta_{\text{opt}}$ . On obtient la courbe suivante où, par convention,  $\gamma_{\min}(\theta)$  est fixé à  $-1$  quand la LMI (2.23) n'est pas vérifiée.

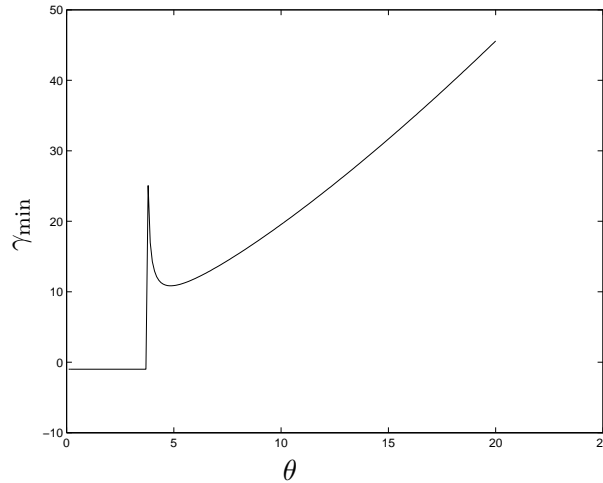


FIG. 2.1: Courbe  $\gamma_{\min}(\theta)$

La courbe dans la figure 2.1 donne une valeur minimale de  $\gamma_{\min}$  pour une valeur de  $\theta = \theta_{\text{opt}} = 4.85$ .

*Remarque 2.4.1.* Pour  $\theta$  trop petit ( $\theta < \theta_0$ ), l'erreur d'observation n'est pas stable. Les valeurs de  $\theta$  proches de la valeur minimale qui permet de stabiliser l'erreur d'observation donnent des valeurs de  $\gamma_{\min}$  très grandes ( $\gamma$  tend vers  $\infty$  quand  $\theta$  s'approche de la valeur limite pour laquelle la LMI (2.23) a une solution).  $\square$

*Remarque 2.4.2.* Le choix de  $\theta$  influe sur l'atténuation des perturbations (performance  $\mathcal{H}_\infty$ ) ainsi que sur la vitesse de convergence du filtre.  $\square$

Testons maintenant l'observateur pour  $\theta = 1$ ,  $\theta = \theta_{\text{opt}} = 4.85$  et  $\theta = 10$ . On obtient les résultats présentés sur les figures 2.4 ( $\theta = 1$ ), 2.5 et 2.6 ( $\theta = \theta_{\text{opt}}$  et  $\theta = 10$ ), la perturbation  $w(t)$  étant un signal trapézoïdal.

L'entrée est donnée par la figure 2.2. Les deux états du système (2.100) sont représentés sur la figure 2.3.

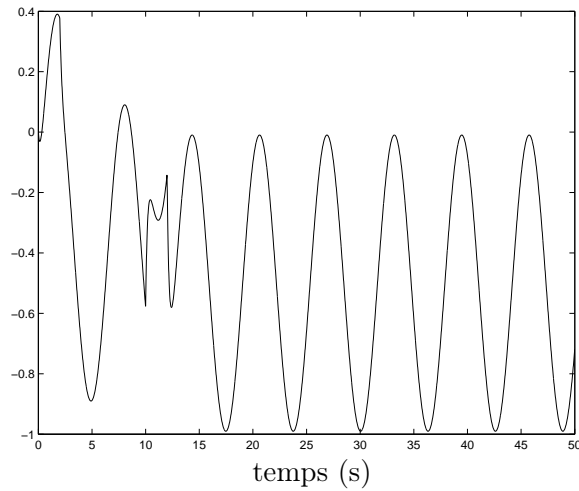
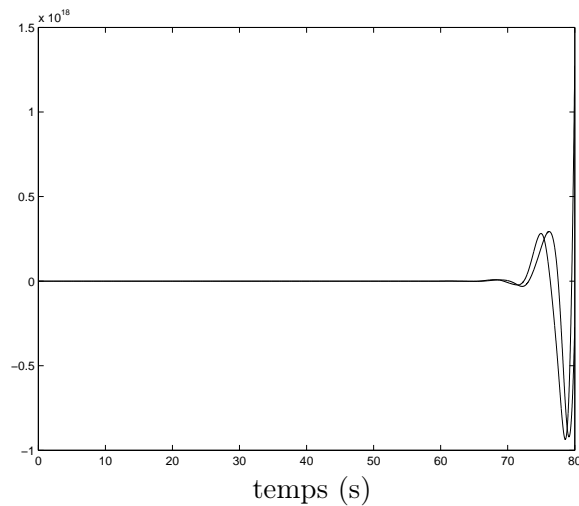
Les matrices de gain associées à ces différents choix de  $\theta$  sont les suivantes

$$S_\infty = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{pour } \theta = 1$$

$$S_\infty = \begin{bmatrix} 0.2062 & -0.0425 \\ -0.0425 & 0.0175 \end{bmatrix} \text{ pour } \theta = \theta_{\text{opt}} = 4.85$$

$$S_\infty = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.01 \\ -0.01 & 0.002 \end{bmatrix} \text{ pour } \theta = 10.$$

Les résultats sont conformes à ce qui est attendu. En effet, pour  $\theta = 1$ , l'erreur d'observation diverge. De plus, l'effet de la perturbation  $w(t)$  sur l'erreur d'observation  $e(t)$  est plus faible pour  $\theta = \theta_{\text{opt}}$  que pour  $\theta = 10$ . On remarque aussi que la convergence de l'erreur d'observation est plus rapide avec  $\theta = 10$  (effet "grand gain").

FIG. 2.2: Entrée de commande  $u(t)$ FIG. 2.3: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  du système (2.100)

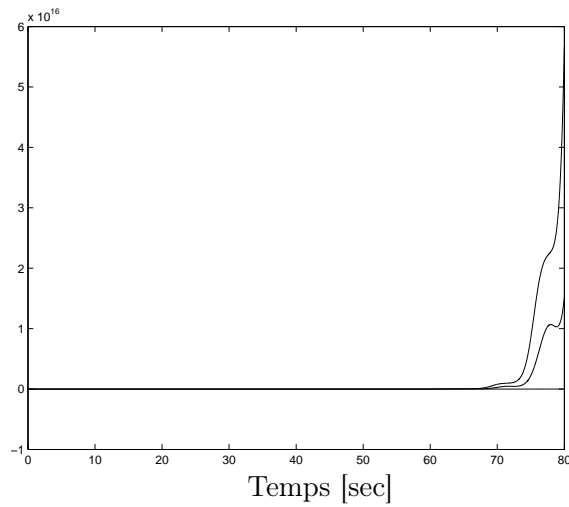


FIG. 2.4: Erreur d'observation pour les états  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  du système (2.100) avec  $\theta = 1$

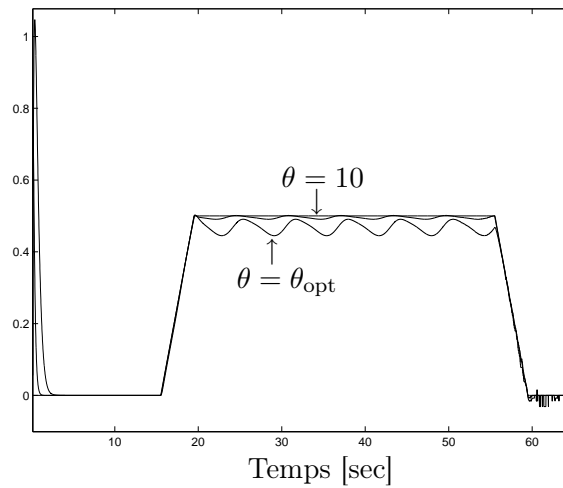


FIG. 2.5: Erreur d'observation pour l'état  $x_1(t)$  du système (2.100) avec  $\theta = \theta_{\text{opt}}$  et  $\theta = 10$  et perturbation  $w(t)$

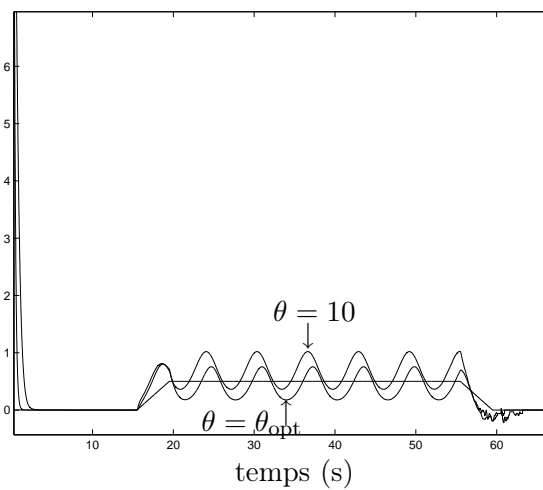


FIG. 2.6: Erreur d'observation pour l'état  $x_2(t)$  du système (2.100) avec  $\theta = \theta_{\text{opt}}$  et  $\theta = 10$  et perturbation  $w(t)$

## 2.4.2 Exemple d'observateur fonctionnel sans degré de liberté sur le gain

Pour continuer l'illustration de nos travaux, nous allons étudier le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -0.146 & 0 \\ -0.1763 & -1.197 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.097 & 0.09 \\ 0.08 & 0.05 \end{bmatrix} u_1 x + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} u_2 x + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0.09w \\ z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (2.104)$$

$u(t)$  est borné comme suit (pour  $i = 1, 2$ )

$$-1 \leq u_i(t) \leq 1 \quad (2.105a)$$

$$-100 \leq \dot{u}_i(t) \leq 100. \quad (2.105b)$$

Le filtre utilisé pour cet exemple est le filtre fonctionnel suivant

$$\begin{cases} \dot{\eta} = H_0 \eta + \sum_{i=1}^m H_i u_i \eta + J_0 y + \sum_{i=1}^m J_i u_i y + G u \\ \hat{z} = \eta + E y \end{cases} \quad (2.106)$$

Pour le système (2.104), on a  $\Phi = 0$  (plus précisément, on a  $I_\alpha - \mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger = 0$  avec  $\mathcal{F}$  défini par l'équation (2.60)). Ainsi, on n'a aucun degré de liberté pour la synthèse du filtre fonctionnel. Le filtre (2.106) synthétisé avec la contrainte  $ED = 0$  mène à une erreur de filtrage instable par contre si on utilise la contrainte  $ZE_2 D = 0$ , les équations (2.70) donnent les matrices suivantes, les matrices  $E_2, H_{i,2}, \Upsilon_{i,2}$  pour  $i = 0, \dots, 2$  étant nulles (voir (2.64))

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{0,1} = -1.197, & H_1 &= H_{1,1} = 0.0091, & H_2 &= H_{2,1} = 0.6351, & E &= E_1 = 0.455, \\ J_0 &= \Upsilon_{0,1} + H_{0,1} E_1 = -0.6545, \\ J_1 &= \Upsilon_{1,1} + H_{1,1} E_1 = 0.1283, \\ J_2 &= \Upsilon_{2,1} + H_{2,1} E_1 = -1.1660. \end{aligned}$$

Ici nous n'appliquons aucun théorème pour obtenir les matrices de gain du filtre. On vérifie seulement la stabilité de l'erreur de filtrage ainsi que la performance  $\mathcal{H}_\infty$ . En effet la nullité de  $\Phi$  (du fait de la nullité de  $I_\alpha - \mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger$ ) rend inutile la recherche d'un gain  $Z$ . Ainsi

$$Y = 0,$$

et donc

$$Z = 0,$$

et

$$P_0 = 1.8456, P_1 = 0 = P_2, F = 1.8456,$$

et on a  $\gamma = 0.8105$ .



Une simulation a été réalisée. Les entrées sont données sur les figures 2.7 et 2.8, la fonctionnelle  $z(t)$  et son estimation  $\hat{z}(t)$  par la figure 2.9. L'erreur de filtrage et la perturbation  $w(t)$  (le signal trapézoïdal) sont données par la figure 2.10.

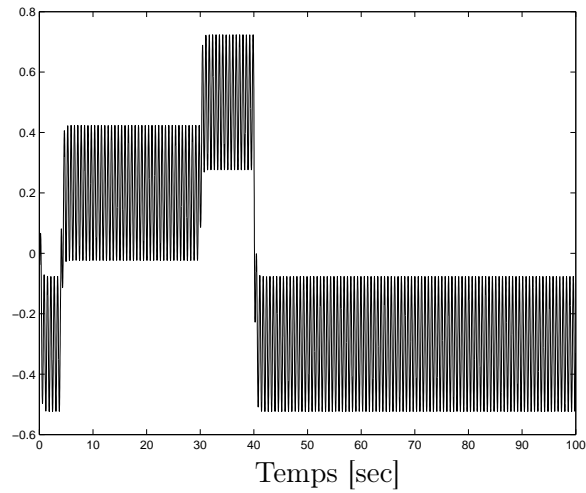


FIG. 2.7: Entrée  $u_1(t)$

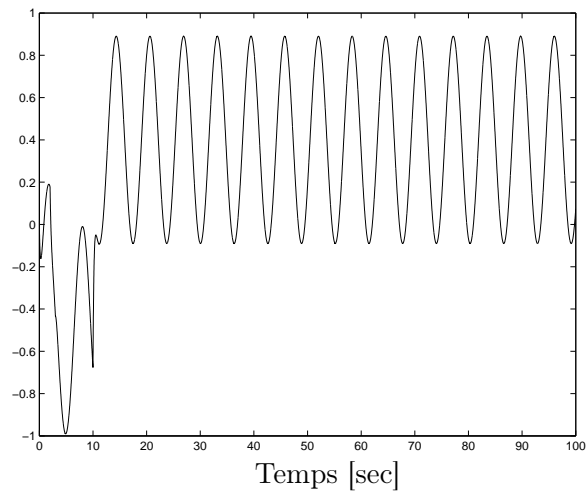
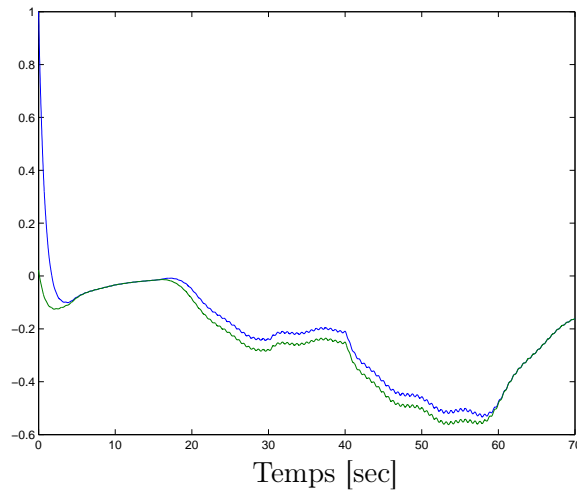
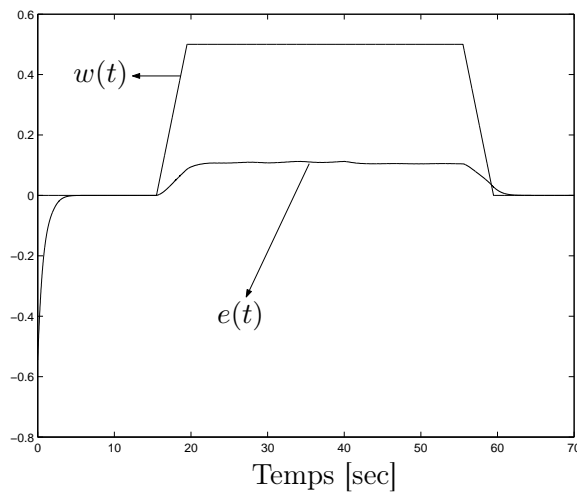


FIG. 2.8: Entrée  $u_2(t)$

FIG. 2.9: Vecteur à estimer  $z(t)$  et son estimation  $\hat{z}(t)$ FIG. 2.10: Erreur de filtrage  $e(t)$  et la perturbation

### 2.4.3 Comparaison des filtres

Pour continuer l'illustration de nos travaux, nous allons comparer les différents filtres à grand gain et fonctionnels (avec les deux type de contraintes) obtenus par les différentes méthodes présentées pour le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ux \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + w \\ z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (2.107)$$

$u(t)$  est borné comme suit

$$-1 \leq u(t) \leq 1 \quad (2.108a)$$

$$-10 \leq \dot{u}(t) \leq 10. \quad (2.108b)$$

### 2.4.3.1 L'observateur à grand gain

On rappelle la forme du filtre à grand gain

$$\dot{\hat{x}} = \left( A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i \right) \hat{x} - S_\infty^{-1}(\theta) C^T (C \hat{x} - y). \quad (2.109)$$

De la même manière que dans la section 2.4.1, on cherche la valeur de  $\theta$  permettant de minimiser l'influence des perturbations. Pour cela, on applique le théorème 2.2.4 dans une boucle sur  $\theta$  afin d'obtenir la valeur  $\theta_{\text{opt}}$ . On obtient la courbe suivante, seules sont présentés les valeur de  $\theta$  pour lesquelles on a eu une solution à la LMI (2.23).

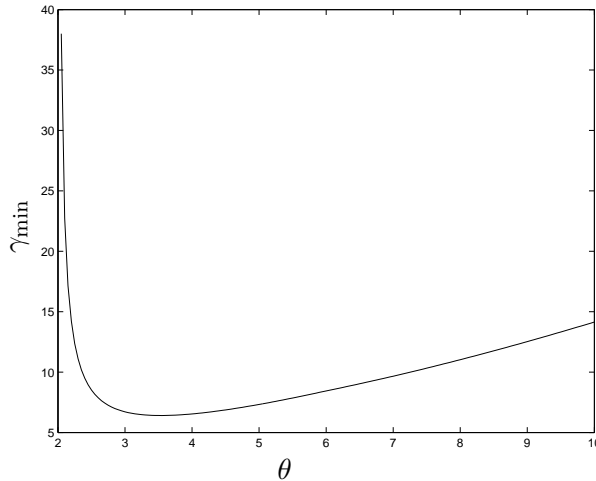


FIG. 2.11: Courbe de  $\gamma_{\min}(\theta)$

On a donc d'après la figure 2.11  $\theta_{\text{opt}} = 3.5$  et  $\gamma_{\min} = 6.4$ .

### 2.4.3.2 Observateur fonctionnel avec la contrainte de type 1

Ici on applique directement le théorème 2.3.2, ce qui donne

$$P_0 = \begin{bmatrix} 21.767 & -5.3069 \\ -5.3069 & 1.8337 \end{bmatrix}, P_1 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = 10^4 \times \begin{bmatrix} -45.77 & -14.09 & -59.77 & 24.93 & 0 & -14.09 & 24.93 \\ -182.78 & 0.16 & -189.43 & 66.65 & 0 & 0.16 & 66.65 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 9.927 & -2.957 \\ -2.957 & 1.0613 \end{bmatrix},$$

alors la matrice de gain  $Z_1$  est la suivante

$$Z_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -32.87 & -0.81 & -34.80 & 12.48 & 0 & -0.81 & 12.48 \\ -108.82 & -2.24 & -114.81 & 41.04 & 0 & -2.24 & 41.04 \end{bmatrix}.$$

Les matrices du filtre (2.51) sont alors les suivantes

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{bmatrix} -5.9425 & 0.4 \\ -13.9582 & -0.4 \end{bmatrix}, & H_1 &= \begin{bmatrix} 0.0483 & 0 \\ -3.5626 & 1 \end{bmatrix}, \\ J_0 &= \begin{bmatrix} 2.537 \\ 4.4233 \end{bmatrix}, & J_1 &= \begin{bmatrix} 0.3807 \\ 3.425 \end{bmatrix}, \\ E &= \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour ce filtre, on obtient  $\gamma_{\text{opt}} = 4.225$ .

### 2.4.3.3 Observateur fonctionnel avec la contrainte de type 2

Dans cette partie nous allons rechercher l'observateur fonctionnel avec la contrainte de type 2. Pour ce faire, nous appliquons le théorème 2.3.5, ce qui donne

$$\begin{aligned} P_0 &= \begin{bmatrix} 7.6992 & -3.7671 \\ -3.7671 & 2.4713 \end{bmatrix}, & P_1 &= 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0.8051 & -0.2253 \\ -0.2253 & 0.0640 \end{bmatrix}, \\ Y &= 10^5 \times \begin{bmatrix} -10.299 & -2.377 & 4.198 & -3.171 & 0 & -2.377 & -3.171 \\ -22.420 & -5.981 & 2.356 & -2.778 & 0 & -5.981 & -2.778 \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} 3.2741 & -1.979 \\ -1.979 & 1.3876 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

alors la matrice de gain  $Z_2$  est la suivante

$$Z_2 = 10^7 \times \begin{bmatrix} -0.9362 & -0.2415 & 0.1674 & -0.1580 & 0 & -0.2415 & -0.1580 \\ -1.4968 & -0.3876 & 0.2557 & -0.2453 & 0 & -0.3876 & -0.2453 \end{bmatrix}.$$

Les matrices du filtre (2.51) sont alors les suivantes

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{bmatrix} -7.0353 & 1 \\ -8.4818 & 0 \end{bmatrix}, & H_1 &= \begin{bmatrix} -0.0006 & 0 \\ -1.9121 & 1 \end{bmatrix}, \\ J_0 &= \begin{bmatrix} 7.0353 \\ 7.4818 \end{bmatrix}, & J_1 &= \begin{bmatrix} 1.0006 \\ 3.9121 \end{bmatrix}, \\ E &= 0. \end{aligned}$$

Avec la contrainte  $ED = 0$ , la valeur optimale d'atténuation de perturbation est la suivante  $\gamma_{\text{opt}} = 5.09$ .

### 2.4.3.4 Les simulations

L'entrée est donnée par la figure 2.12,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  par la figure 2.13.

Les erreurs de filtrage et la perturbation  $w(t)$  (le signal trapézoïdal) sont données par les figures 2.14, 2.16, 2.15, 2.17, 2.19 et 2.18.

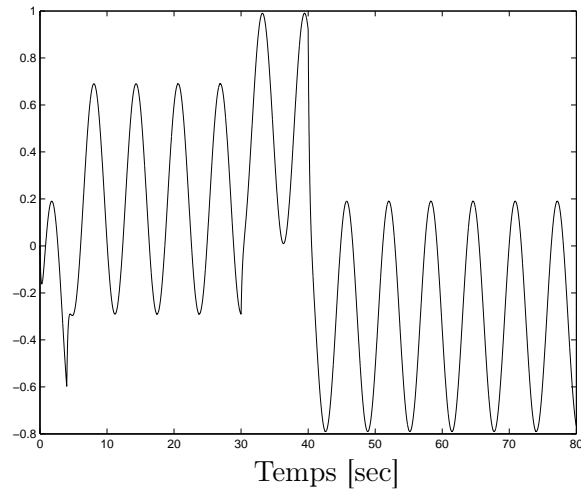


FIG. 2.12: Entrée  $u(t)$

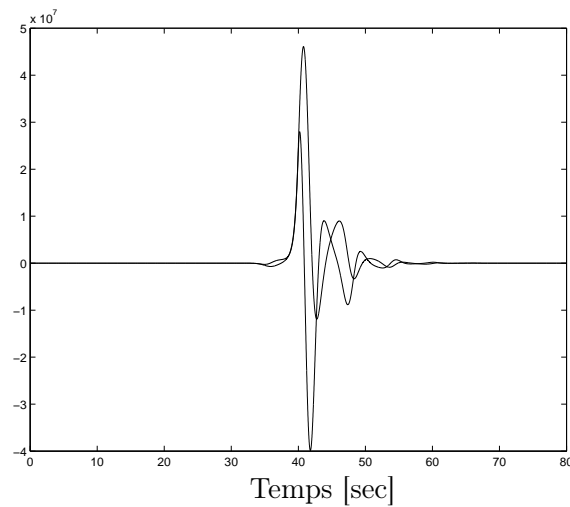
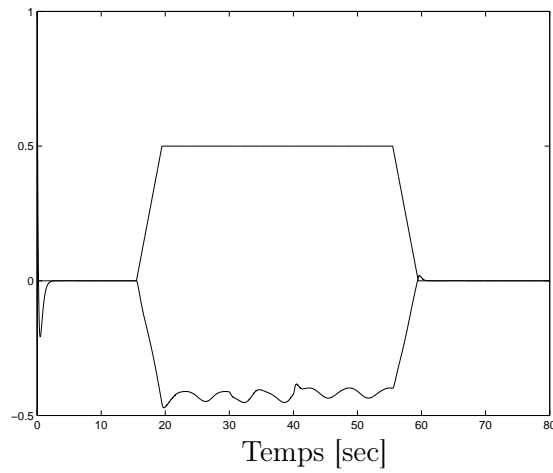
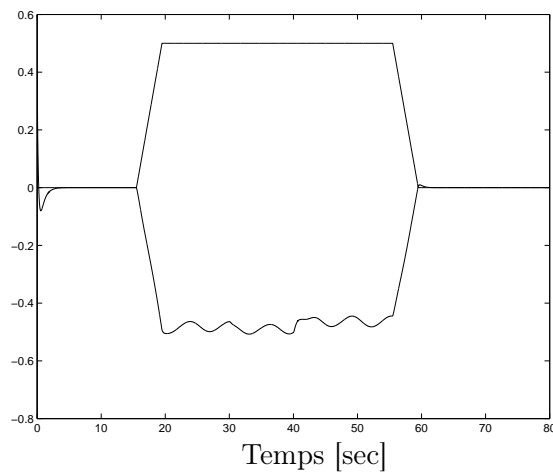
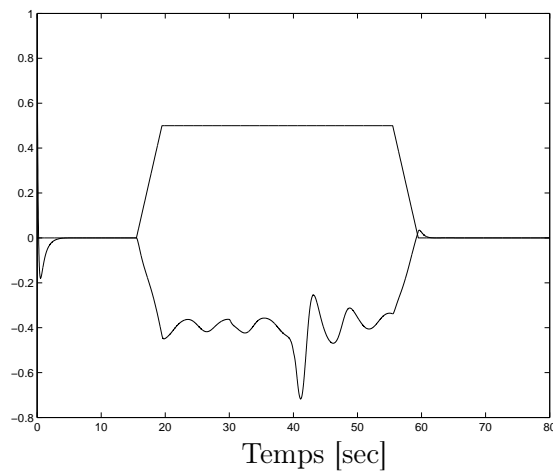


FIG. 2.13: Les états du système

FIG. 2.14: Erreur de filtrage  $e_1(t)$  et perturbation avec le filtre à grand gainFIG. 2.15: Erreur de filtrage  $e_1(t)$  et perturbation avec le filtre fonctionnel et la contrainte  $ZE_2D = 0$  de type 1FIG. 2.16: Erreur de filtrage  $e_1(t)$  et perturbation avec le filtre fonctionnel et la contrainte  $ED = 0$  de type 2

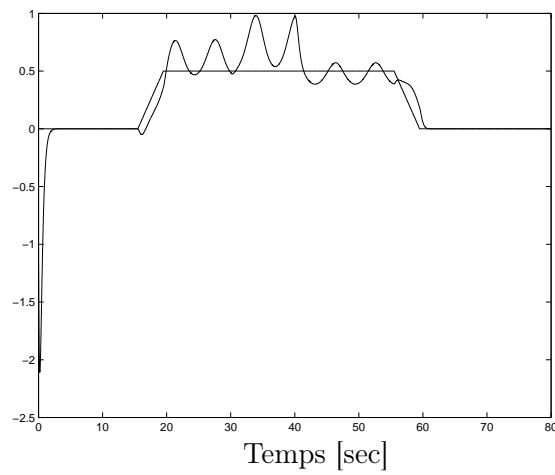


FIG. 2.17: Erreur de filtrage  $e_2(t)$  et perturbation avec le filtre à grand gain

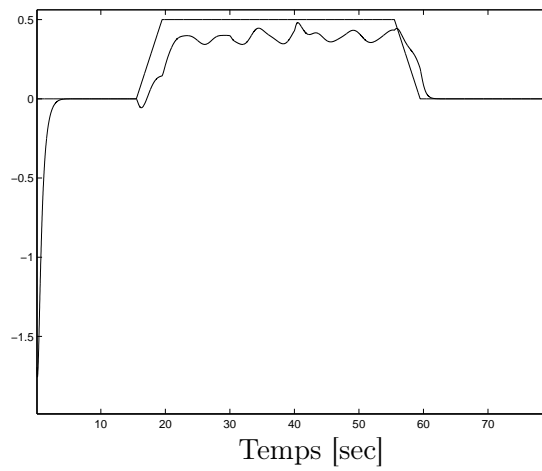


FIG. 2.18: Erreur de filtrage  $e_2(t)$  et perturbation avec le filtre fonctionnel et la contrainte  $ZE_2D = 0$  de type 1

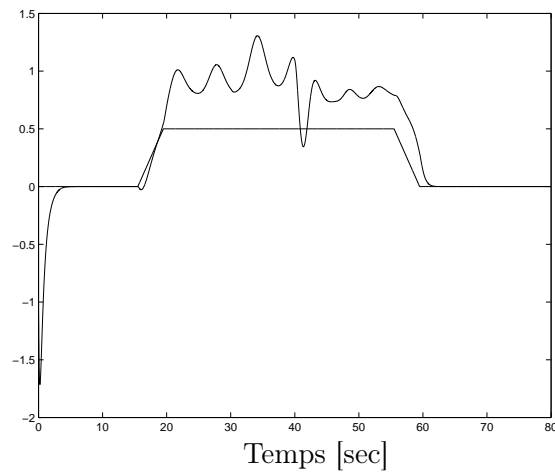


FIG. 2.19: Erreur de filtrage  $e_2(t)$  et perturbation avec le filtre fonctionnel et la contrainte  $ED = 0$  de type 1

On remarque une amélioration des performances avec le filtre fonctionnel utilisant la contrainte de type 1 ( $ZE_2D = 0$ ). Sur l'erreur de filtrage  $e_1(t)$  tout d'abord, on évite le pic présent sur la figure 2.16. De plus, pour l'estimation du deuxième état, on remarque aisément que seul l'erreur de filtrage obtenue à partir du filtre fonctionnel utilisant la contrainte de type 1 reste sous la perturbation. Tout ceci confirme les résultats obtenus.

## 2.4.4 Observateur fonctionnel pour les deux exemples du chapitre 1

### 2.4.4.1 Actionneur électromécanique

Dans cette section nous allons rechercher l'observateur fonctionnel avec la contrainte de type 1 pour l'actionneur électromécanique présenté à la section 1.2 (voir la figure 1.1). Ce processus peut être modélisé par le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + u_1A_1x + Ru + Bw \\ y = Cx \\ z = x \end{cases}$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-F_m}{J_m} & 0 & \frac{-k_r}{NJ_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k_r}{J_c} & \frac{-F_c}{J_c} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k_a}{L_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_a}{J_m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{J_c} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_m \\ \Delta_\Gamma \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_e \\ v_a \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où  $J_m = 2.4 \times 10^{-4}$  et  $J_c = 0.0825$  sont les moments d'inertie du moteur et de la charge,  $F_m = 0.0032$  et  $F_c = 0.0032$  sont les coefficients de frottements visqueux du moteur et de la charge,  $k_a = 0.156$  est la constante du couple du moteur,  $k_r = 37.7$  est le coefficient de couplage rigide,  $R_a = 1$  et  $L_a = 0.05$  sont la résistance et l'inductance du rotor,  $N = 20$  est le rapport de réduction de vitesse.



Ici on applique directement le théorème 2.3.2 avec

$$-10 \leq u_1(t) \leq 10 \quad (2.110a)$$

$$-400 \leq u_2(t) \leq 400 \quad (2.110b)$$

$$-10000 \leq \dot{u}_1(t) \leq 10000 \quad (2.110c)$$

$$-10000 \leq \dot{u}_2(t) \leq 10000. \quad (2.110d)$$

, ce qui donne

$$P_0 = 10^7 \times \begin{bmatrix} 6.1812 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 4.8721 & 0 & 3.8009 & 0.0003 \\ 0 & -0.0000 & 6.1810 & 0 & 0 \\ 0 & 3.8009 & 0 & 9.1736 & 0.0007 \\ 0 & 0.0003 & 0 & 0.0007 & 6.1812 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 1.4875 & -0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1066 & 0 & 0.0196 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4875 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0196 & 0 & 1.4899 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 1.4875 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 2.5727 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0267 & 0 & 0.0175 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5726 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0175 & 0 & 2.6115 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 2.5727 \end{bmatrix},$$

et la matrice de gain

$$Z_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0.0047423183 & 0.0000000449 & -0.0000000016 & -1.0060028211 \\ -0.0000001279 & 10057.5613645448 & 17.1383600412 & 0.0000409870 \\ 0 & 0.00004999963745 & 0 & 0 \\ 0.0000000015 & -1.3009504525 & -0.0000264310 & -0.0000000149 \\ 0 & 0.0001957879 & 0.0000047758 & 0 \\ -0.0000000449 & 0 & 0 & 0.0000000063 \\ -10057.5613638844 & 0.0474141366 & -785.08637817280 & 111.3556396760 \\ -0.4999963745 & -1.0535242457 & -0.0000000015 & -0.0000000464 \\ 1.3009504524 & -0.0000078386 & 0.0145927749 & 0.5000694460 \\ -0.0001957879 & 0.0000000098 & -0.0021873882 & -1.0534234228 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0.0000000011 & 0.0147960330 & 0 & 0 & 0 \\
324.9999324785 & 0.0000000079 & -0.0000003921 & 0 & -0.0000001727 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0000000399 & 0.0000000047 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.0000000013 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1008491865 \\
-0.0000091603 & 0 & 0.0000045496 & 0 & -0.000003276 & -0.0000403708 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000000448 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.0000000063 & -0.0000000011 & 0 & & \\
-0.0474141588 & 112.4713557495 & 324.9999303107 & 0.0000008106 & & \\
0.10535242456 & -0.0000000546 & 0 & 0 & & \\
0.0000078386 & -0.4997970893 & 0.0000000402 & 0 & & \\
-0.0000000098 & 1.0534871903 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
-0.0000000437 & -0.0000121857 & 0.0000044331 & -0.0000007923 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0.0000000019 & 0 & 0 & & \\
0.0000000013 & 0 & 0 & 0 & & 
\end{bmatrix}.$$

Les matrices du filtre (2.51) sont alors les suivantes

$$H_0 = \begin{bmatrix}
-1.05346 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -10064.22803 & 0.047414148 & -7854.1667 & -0.557858 \\
0 & 0 & -1.05352 & 0 & 0 \\
0 & 1.32595 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.000196 & 0 & 0 & -1.05346
\end{bmatrix},$$

$$H_1 = 10^{-7} \begin{bmatrix}
0.01138 & -93.3338 & 0.00419 & 0 & -0.00039 \\
686.05368 & 0.89695 & -6.01352 & 0 & -0.00064498 \\
0.00395 & -0.00026 & 0.00743 & 0 & 0.00023 \\
-0.40044 & 0.04665 & 0.00048 & 0 & -0.00535 \\
0.0008 & 0.00116 & 0.00006 & 0 & -0.01331
\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= 10^{-8} \begin{bmatrix} -0.01156 & 0 & 0.000003 & 0 & 0.00035 \\ 151.27327 & 0 & 5.82517 & 0 & 23.23114 \\ -0.00002 & 0 & 0.01483 & 0 & 0 \\ -0.03312 & 0 & 0.00089 & 0 & -0.00484 \\ -0.00106 & 0 & 0.000047 & 0 & 0.00906 \end{bmatrix}, \\
 J_0 &= \begin{bmatrix} -5.66784 \times 10^{-5} & -4.517549 \times 10^{-4} & 0 \\ -3.005 \times 10^{-4} & -1.01144 \times 10^{-8} & -3.57 \times 10^{-11} \\ -1.54787 \times 10^{-10} & 3.64433 \times 10^{-2} & 9 \\ 6.80218 \times 10^{-8} & 1.3327 \times 10^{-4} & -1 \\ 6.97095 \times 10^{-10} & -1.968 & 0 \end{bmatrix}, \\
 J_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -9.3809 \times 10^{-2} & 0 \\ 650 & 9.01519 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & -2.5636 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 4.6885 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.16309 \times 10^{-6} & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4.5 \times 10^{-12} & 4.5 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 E &= \begin{bmatrix} 1 & 4.4942 \times 10^{-8} & 0 \\ 2.87485 \times 10^{-8} & 1.005 \times 10^4 & 0 \\ -8.17518 \times 10^{12} & 1 & 0 \\ 1.49513 \times 10^{-9} & -1.27595 & 0 \\ 3.709 \times 10^{-11} & 1.9579 \times 10^{-4} & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Pour ce filtre, on obtient  $\gamma_{\text{opt}} = 6.6761 \times 10^{-10}$ . Il ne faut pas être surpris de la petitesse de ce  $\gamma$  étant donné que dans [ZRMD98], Zasadzinski *et al.* ont synthétisé un observateur à découplage des perturbations.

Les entrées sont données par les figures 2.20 et 2.21, les états  $\omega_m(t)$  par la figure 2.22 et l'état  $\Delta_F(t)$  par la figure 2.23.

Les erreurs de filtrage et la perturbation  $w(t)$  (des créneaux) sont données par les figures 2.24, 2.25, 2.26 (nous ne donnons pas les erreurs de filtrage pour les états qui sont aussi des sorties).

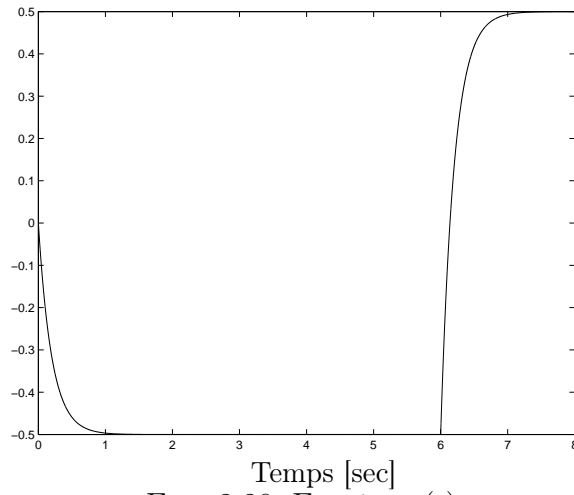


FIG. 2.20: Entrée  $u_1(t)$

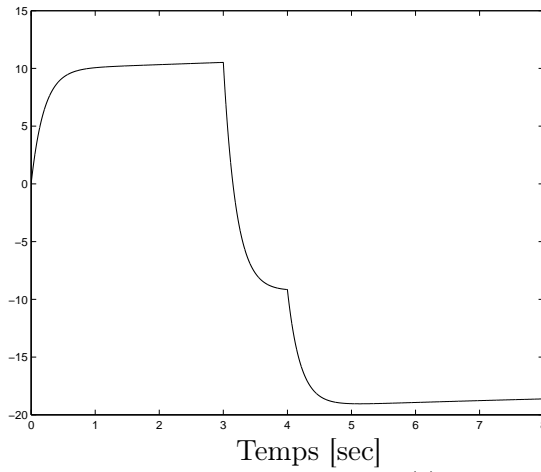


FIG. 2.21: Entrée  $u_2(t)$

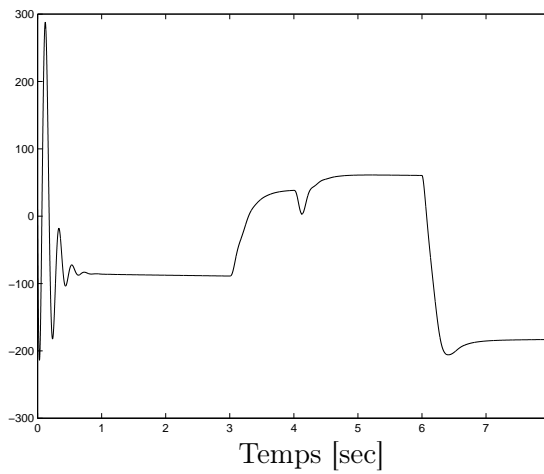


FIG. 2.22:  $\omega_m(t)$

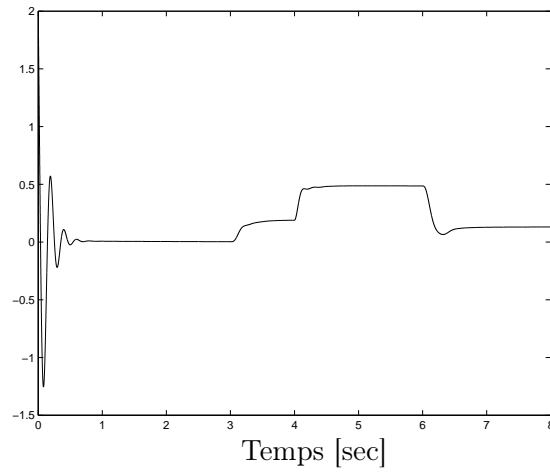


FIG. 2.23:  $\Delta_\Gamma(t)$

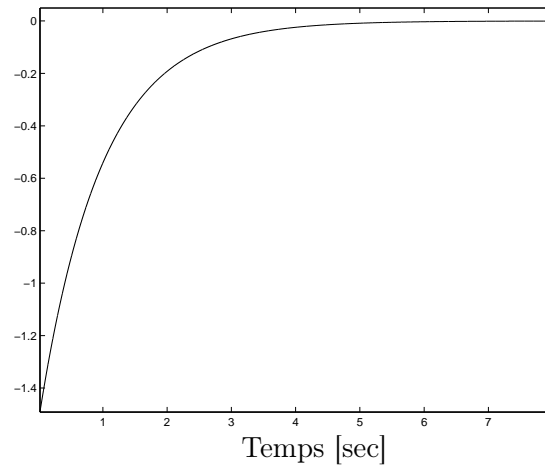


FIG. 2.24: Erreur de filtrage  $e(t)$

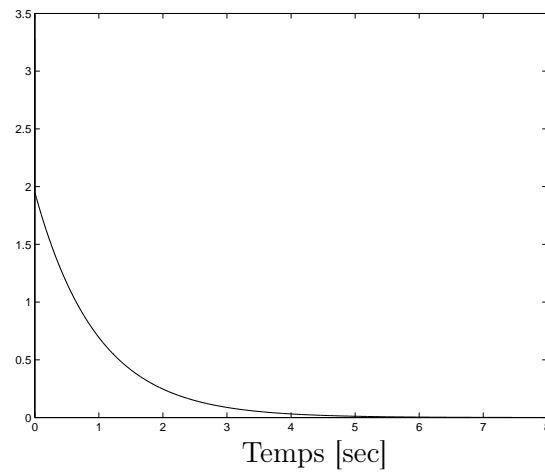


FIG. 2.25: Erreur de filtrage  $e_4(t)$

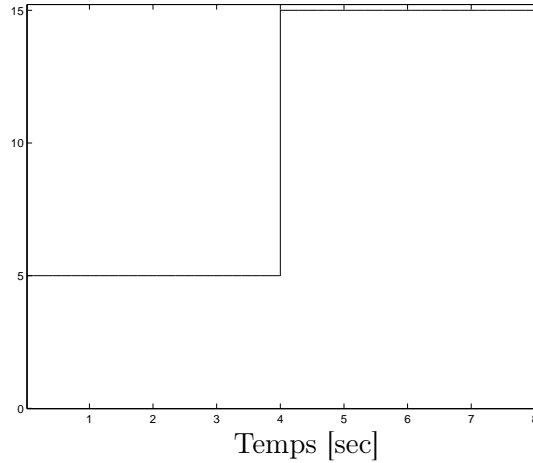


FIG. 2.26: La perturbation

#### 2.4.4.2 Suspension active

Dans cette section nous allons rechercher l'observateur fonctionnel avec la contrainte de type 1 pour la suspension active présentée à la section 1.2 (voir la figure 1.2). Ce processus peut être modélisé par le système suivant (voir [Sai94])

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + uA_1x + Bw \\ y = Cx \\ z = x \end{cases}$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3.6 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 360 & 0 & -3600 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.004 & 0 & 0.004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & -0.04 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} z_1 - z_2 \\ \dot{z}_1 \\ z_2 - z_0 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

où  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  sont les déplacements absolus de la roue et du véhicule, et  $z_0(t)$  est l'élévation de la route au point de contact avec le pneu. La commande  $u(t)$  est le coefficient d'amortissement de la suspension contrôlée électroniquement. La perturbation  $w(t)$  est la variation de l'élévation de la route.

Ici on applique directement le théorème 2.3.2 avec

$$0 \leq u(t) \leq 10 \quad (2.111a)$$

$$-10 \leq \dot{u}(t) \leq 10, \quad (2.111b)$$

ce qui donne les matrices du filtre (2.51) suivantes

$$H_0 = \begin{bmatrix} -1.023 & 0.2547 & 0.08922 & -0.02931 \\ -0.2131 & -1.0153 & 0.03762 & 0.09812 \\ 0.07037 & -0.09454 & -1.2405 & 0.01519 \\ 0.02674 & 0.0846 & -0.009536 & -0.9396 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.6344 & -6.606 & -7.707 & 24.45 \\ -442.7 & -3982 & -173.7 & 632 \\ 17.61 & 13.5 & 1.202 & -15.54 \\ 1.471 & 0.25056 & 5.473 & -12.54 \end{bmatrix}, J_0 = \begin{bmatrix} -0.2497 & -0.255 & 0.5946 \\ -2.2611 & 1.0158 & -1.65 \\ 1.1482 & 0.09502 & -1.214 \\ 0.1403 & -0.08463 & -0.02255 \end{bmatrix},$$

$$J_1 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 6.39071553 & 6.612 & 0 \\ 2018 & 3983.5 & 0 \\ 3.915 & -13.4 & 0 \\ 1.341 & -0.2522 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.7445 & 0.0001652 & 0 \\ 0.5177 & -0.0004583 & 0 \\ -0.9038 & -0.00033731 & 1 \\ -0.08458 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour ce filtre, on obtient  $\gamma_{\text{opt}} = 1.262 \times 10^{-6}$ . Il ne faut pas être surpris de la petitesse de ce  $\gamma$  car comme pour l'exemple précédent, dans [ZRMD98], Zasadzinski *et al.* ont synthétisé un observateur à découplage des perturbations.

L'entrée est donnée par la figure 2.27, l'état  $\dot{z}_1(t)$  par la figure 2.28 et l'état  $z_2(t) - z_0(t)$  par la figure 2.29.

Les erreurs de filtrage et la perturbation  $w(t)$  sont données par les figures 2.30, 2.31, 2.32 (nous ne donnons pas les erreurs de filtrage pour les états qui sont aussi des sorties).

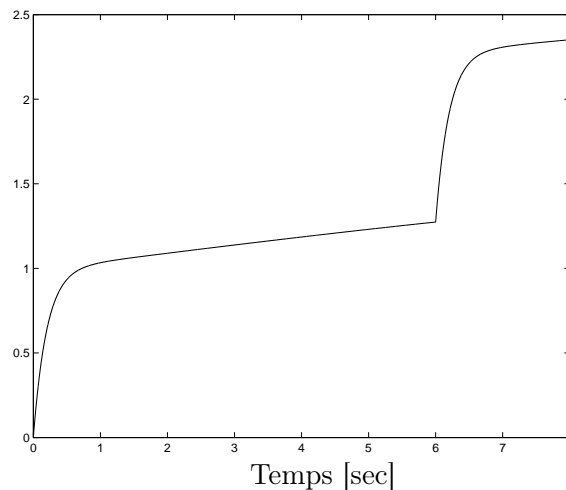


FIG. 2.27: Entrée  $u_1(t)$

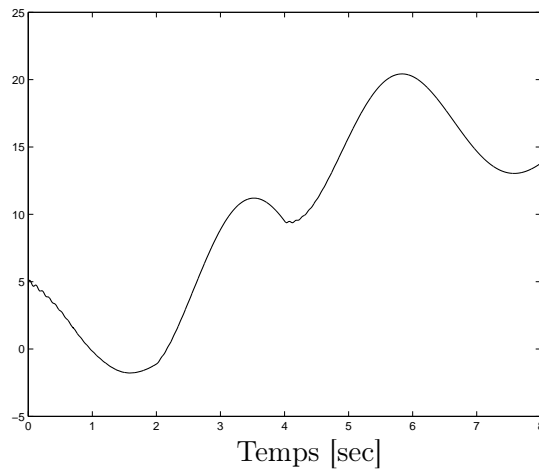


FIG. 2.28:  $\dot{z}_1(t)$

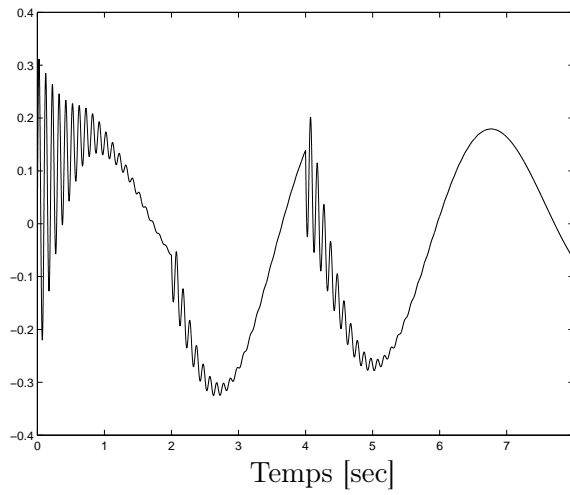


FIG. 2.29:  $z_2(t) - z_0(t)$

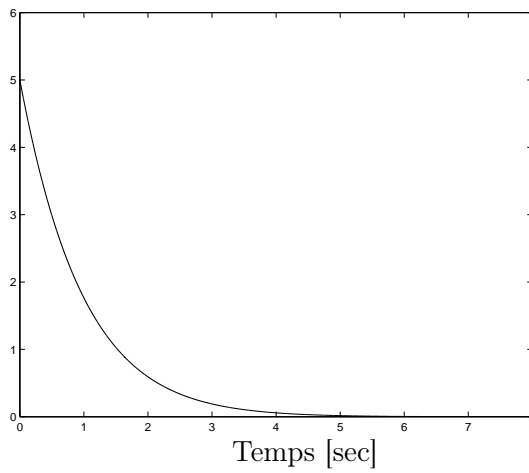


FIG. 2.30: Erreur de filtrage  $e_2(t)$



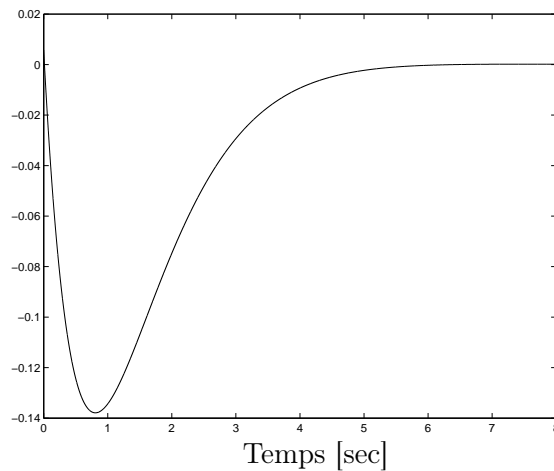


FIG. 2.31: Erreur de filtrage  $e_4(t)$

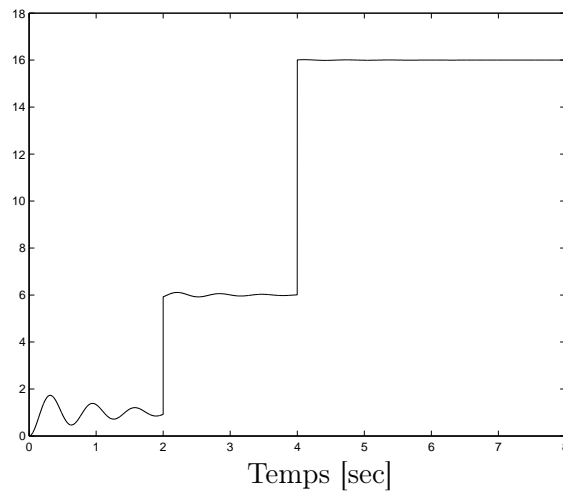


FIG. 2.32: La perturbation

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la synthèse de filtres  $\mathcal{H}_\infty$  pour une classe de systèmes bilinéaires. Les systèmes bilinéaires considérés sont soumis à des perturbations non mesurées à énergie finie et à des commandes bornées, leur dérivée première pouvant aussi l'être. Le filtrage à grand gain ainsi que le filtrage fonctionnel ont été proposés. Ce dernier est d'ordre  $r$ , c'est-à-dire d'ordre égal à la dimension de la fonctionnelle à estimer alors que le filtre à grand gain est de taille  $n$  qui est la taille du système.

Pour le filtre à grand gain, nous avons établi un théorème donnant une LMI assurant la stabilité de l'erreur d'observation à partir d'une approche LPV. Ce filtre n'a qu'un paramètre  $\theta$  comme degré de liberté. L'approche LPV-LMI peut être utilisée pour choisir la valeur de ce paramètre afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'observation tout en minimisant l'influence des perturbations.

Pour le filtre fonctionnel  $\mathcal{H}_\infty$ , une mise en forme, nécessitant notamment l'introduction d'une contrainte algébrique, permet de transformer la recherche des matrices du filtre en la recherche d'une unique matrice de gain, cette dernière correspondant à un paramétrage de toutes les solutions du problème. Grâce à l'approche LPV utilisée, ce paramétrage est basé sur la résolution de multiples équations de Sylvester assurant le non-biais du filtre et par l'introduction d'une contrainte : il nous a permis de convertir le problème de stabilité de l'erreur d'observation et d'atténuation des perturbations en une LMI à résoudre dans un polytope convexe.

Des exemples illustrant les résultats présentés dans ce chapitre et comparant les filtres proposés mettent en évidence l'intérêt de l'approche LMI-LPV pour l'obtention de filtres pour les systèmes bilinéaires.

Ces travaux peuvent être étendu à d'autres classes de systèmes non linéaires, comme cela a été fait dans [GSZD08b].



# Chapitre 3

## Commande basée observateur pour les systèmes bilinéaires

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Commande bang-bang basée sur un observateur . . . . .</b>	<b>76</b>
3.1.1	Preliminaires . . . . .	76
3.1.2	Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur à grand gain . . . . .	77
3.1.3	Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel . . . . .	80
3.1.4	Exemples . . . . .	85
<b>3.2</b>	<b>Commande quadratique basée sur un observateur . . . . .</b>	<b>94</b>
3.2.1	Commande quadratique adaptée pour une matrice $A_0$ quelconque	94
3.2.2	Commande quadratique basée sur un observateur avec une matrice $A_0$ quasi-stable . . . . .	100
<b>3.3</b>	<b>Commande linéaire basée sur un observateur . . . . .</b>	<b>106</b>
3.3.1	Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur à grand gain . . . . .	107
3.3.2	Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre plein . . . . .	109
3.3.3	Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre réduit . . . . .	110
3.3.4	Stabilité locale de la commande linéaire basée sur un observateur	112
<b>3.4</b>	<b>Combinaison des commandes quadratique et linéaire basée sur un observateur . . . . .</b>	<b>113</b>
3.4.1	Synthèse de la loi de commande . . . . .	113
3.4.2	Exemple . . . . .	116
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>121</b>

---

## Introduction

L'étude de lois commandes basées sur un observateur a fait l'objet de nombreux travaux jusqu'à nos jours (voir [KS72, ZDG96]). En effet, pour la plupart des systèmes physiques, seule une partie de l'état est accessible via des capteurs, c'est pourquoi l'utilisation d'un observateur permettant de palier le manque d'informations pour synthétiser la commande est devenue courante. Pour les systèmes linéaires, le principe de séparation a été établi et permet de calculer séparément l'observateur et la commande mais aussi de choisir indépendamment leur rapidité. Pour les systèmes non linéaires, ceci n'est généralement pas possible. Cependant Gauthier et Kupka dans [GK92] établissent le principe de séparation pour un type particulier de système bilinéaire. Nous allons dans ce chapitre établir des méthodologies permettant d'assurer la stabilité des lois de commandes basées sur un observateur pour les systèmes bilinéaires.

Ce sujet est resté plutôt ouvert. Magarotto et *et al.* [MZD99] proposent une commande linéaire basée observateur en imposant l'appartenance de l'état initial et de l'erreur d'observation initiale à des ellipsoïdes. Dans [ZLCL04], Zhang *et al.*, quant à eux, proposent une commande bang-bang basée sur un observateur de type "Luenberger", ces travaux ont été étendus à un autre type d'observateur dans [GSZD07c]. Ce chapitre se propose de diversifier les possibilités d'association de commandes et d'observateurs (voir [GSZD08c]). Les différentes commandes présentées au premier chapitre ainsi que les observateurs présentés au deuxième chapitre seront utilisés afin de réaliser des commandes basées sur un observateur. Des conditions de stabilité et des méthodes de synthèse seront présentées, utilisant des approches algébriques et analytiques.

Nous traiterons, dans un premier temps, la commande bang-bang basée observateur par une approche algébrique, puis la commande quadratique par une approche analytique, ensuite la commande linéaire par des approches algébrique et analytique, enfin la commande quadratique combinée à la commande linéaire.

## 3.1 Commande bang-bang basée sur un observateur

### 3.1.1 Préliminaires

Le but de cette partie est la réalisation d'une commande basée observateur pour un certain type de systèmes bilinéaires MIMO en se basant sur la commande bang-bang par retour d'état (voir la section 1.5.1) et des observateurs synthétisés par l'approche LPV du chapitre 2. Le type de systèmes considérés dans cette section est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m A_i u_i x \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties mesurées.

L'hypothèse suivante, faite pour la commande par retour d'état, est toujours nécessaire.

**Hypothèse 3.1.1.** *Il existe des réels  $\alpha_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  tels que  $A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$  est Hurwitz, c'est-à-dire, il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que*

$$F(A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i) + (A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i)^T F < 0. \quad (3.2)$$

◇

Quel que soit l'observateur utilisé, à grand gain, fonctionnel d'ordre plein ou d'ordre réduit, on peut mettre le système avec sa commande basée sur un observateur sous la forme suivante

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{e} = M_1(u)e \\ \dot{\hat{x}} = (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i(\hat{x}))\hat{x} + Bu + M_2(u(\hat{x}))e = f_{e\hat{x}}(e, \hat{x}) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec  $M_1(u)$  et  $M_2(u)$  dépendant de l'observateur utilisé

- $M_1(u) = \mathcal{A}(u) - S_\infty^{-1}(\theta)C^T C$  et  $M_2(u) = S_\infty^{-1}(\theta)C^T C$  pour l'observateur à grand gain,
- $M_1(u) = \mathcal{H}(u)$  et  $M_2(u) = \mathcal{A}(u) - \mathcal{H}(u)$  pour l'observateur fonctionnel d'ordre plein ( $L = I_n$ ),
- $M_1(u) = \mathcal{H}(u)$  et  $M_2(u) = \mathcal{A}(u) - \mathcal{T}_1 \mathcal{H} L$  pour l'observateur fonctionnel d'ordre réduit ( $L$  est le complémentaire de  $C$ , voir (3.29), (3.41) et (3.46)),

et  $\hat{x}$  dépendant aussi de l'observateur utilisé,  $e = x - \hat{x}$ .

- $\hat{x}$  est l'état de l'observateur à grand gain ((voir le lemme 2.2.1, et le théorème 3.2.2 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ),
- $\hat{x}$  est la sortie de l'observateur fonctionnel d'ordre plein ( $L = I_n$ ) (voir le filtre (2.51) présenté à la section 2.3 du chapitre 2 et le théorème 3.2.3 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ),
- $\hat{x}$  est une combinaison de la sortie de l'observateur et de la sortie mesuré du système (3.62), pour l'observateur fonctionnel d'ordre réduit,  $L$  est le complément de  $C$ , (voir (3.41) et (3.30) ainsi que le filtre (2.51) présenté à la section 2.3 du chapitre 2 et le théorème 3.2.3 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ).

L'entrée de commande  $u(t)$  aussi dépend de l'observateur,  $u(t) = u(\hat{x})$ .

### 3.1.2 Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur à grand gain

Pour la commande bang-bang basé sur l'observateur à grand gain, seul le cas MISO sera étudié, le cas MIMO peut se déduire de ces travaux ainsi que de ceux de Liu *et al.* (voir [LFMH07, LFMH08]).

On redonne la forme de l'observateur à grand gain (voir le lemme 2.2.1).

$$\dot{\hat{x}} = \left( A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i \right) \hat{x} - S_\infty^{-1}(\theta)C^T(C\hat{x} - y) \quad (3.4)$$

avec  $S_\infty$  calculé à  $\theta$  fixé à partir de l'équation (2.5).

Afin d'obtenir notre commande basée sur un observateur pour le système (3.1), on utilise la commande bang-bang (1.38) où l'état  $x(t)$  est remplacé par  $\hat{x}(t)$  ( $\hat{x}(t)$  est l'état de l'observateur à grand gain), ce qui donne la commande suivante

$$u = - \begin{bmatrix} |\alpha_1| \operatorname{sgn}(\hat{x}^T A_1^T F \hat{x}) \\ \vdots \\ |\alpha_m| \operatorname{sgn}(\hat{x}^T A_m^T F \hat{x}) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

où les réels  $\alpha_i$  vérifient l'hypothèse 3.1.1. Chaque commande  $u_i$  est donc bornée comme suit

$$-|\alpha_i| \leq u_i \leq |\alpha_i| \quad \text{pour } i = 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

On peut alors définir le polytope convexe

$$\mathcal{P} = [-|\alpha_1|, |\alpha_1|] \times \dots \times [-|\alpha_m|, |\alpha_m|]. \quad (3.7)$$

De façon similaire à ce qui a été présenté au chapitre 1, nous allons considérer la commande  $u(t)$  comme un paramètre variant dans le polytope  $\mathcal{P}$  dont l'ensemble des sommets est l'ensemble  $\mathcal{S}$  suivant

$$\mathcal{S} = \left\{ \beta = [\beta_1 \dots \beta_m]^T \in \mathbb{R}^m \mid \forall i \in [1, m], \beta_i \in \{-|\alpha_i|, |\alpha_i|\} \right\}. \quad (3.8)$$

On peut alors donner le théorème suivant.

**Théorème 3.1.1.** *Pour un  $\theta$  donné, si l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite et s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$  et  $F = F^T > 0$  telles que les LMI suivantes sont satisfaites pour tout  $j = 1, \dots, 2^m$*

$$\begin{bmatrix} -Q & (1,2) & 0 \\ (1,2)^T & (2,2)^j & 0 \\ 0 & 0 & (3,3) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

où

$$(1,2) = FS_\infty^{-1}(\theta)C^T C, \quad (3.10)$$

$$(2,2)^j = (A_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i^j A_i - S_\infty^{-1}(\theta)C^T C)^T P + P(A_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i^j A_i - S_\infty^{-1}(\theta)C^T C), \quad (3.11)$$

$$(3,3) = (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i)^T F + F(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i) + Q, \quad (3.12)$$

et où  $\beta^j$  représente un élément de  $\mathcal{S}$  (et est donc un vecteur de  $m$  composantes : de  $\beta_1^j$  à  $\beta_m^j$ ) alors la commande basée sur observateur avec la loi de commande suivante

$$u = - \begin{bmatrix} |\alpha_1| \operatorname{sgn}(\hat{x}^T A_1^T F \hat{x}) \\ \vdots \\ |\alpha_m| \operatorname{sgn}(\hat{x}^T A_m^T F \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

stabilise le système bilinéaire (3.1). ■

*Démonstration.* On pose comme fonction de Lyapunov la fonction suivante

$$V = \widehat{x}^T F \widehat{x} + e^T P e, \quad (3.14)$$

elle a pour dérivée le long de la trajectoire du système (3.3), donc du système (3.1), associé à l'observateur (3.4) et à la commande (3.13), la relation suivante

$$\dot{V} = \widehat{x}^T \Pi_x \widehat{x} + e^T \Pi_e e + \widehat{x}^T \Pi_{xe} e + e^T \Pi_{xe}^T \widehat{x} \quad (3.15)$$

avec

$$\Pi_x = (A_0 - \sum_{i=1}^m A_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x}))^T F + F (A_0 - \sum_{i=1}^m A_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x})), \quad (3.16a)$$

$$\Pi_e = (A_0 + \sum_{i=1}^m u_i A_i - S_\infty^{-1}(\theta) C^T C)^T P + P (A_0 + \sum_{i=1}^m u_i A_i - S_\infty^{-1}(\theta) C^T C), \quad (3.16b)$$

$$\Pi_{xe} = F S_\infty^{-1}(\theta) C^T C. \quad (3.16c)$$

Si le terme (3,3) de l'inégalité (3.9) est strictement négatif, avec les mêmes arguments que dans le théorème 1.5.1, on peut déduire

$$x^T \Pi_x x < -x^T Q x. \quad (3.17)$$

On peut noter que les éléments  $(-|\alpha_i|) \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x})$ , pour  $i = 1, \dots, m$ , correspondent aux éléments de  $\mathcal{S}$  (voir (3.8)) pour un  $\widehat{x}(t)$  donné, ce qui permet d'utiliser une approche polytopique.

A partir des expressions (3.16) et (3.17), si l'inégalité matricielle (3.9) est vérifiée sur les  $2^m$  sommets du polytope convexe  $\mathcal{P}$ , l'inégalité est donc satisfaite pour chaque élément  $\beta^j$  de l'ensemble  $\mathcal{S}$  (voir [AGB94, AT98]), alors  $\dot{V} < 0$ , ce qui conclut la preuve. •

On remarque que ce qui fait l'originalité de cette preuve est que la commande est en partie considérée comme un paramètre variant et en partie comme définie par son expression (3.13).

On peut alors donner la procédure à suivre pour synthétiser la commande bang-bang basée sur un observateur.

Etape 1 : Trouver des paramètres  $\alpha_i$  tels que  $A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$  est Hurwitz.

Etape 2 : Trouver  $\theta$  tel que la LMI (3.9) est vérifiée sur les sommets du polytope  $\mathcal{P}$ , avec comme inconnues les matrices  $P$  et  $Q$ , la matrice  $F$  étant donnée par l'étape précédente (voir l'équation (3.2)).

*Remarque 3.1.1.* Si la matrice  $A_i F$  est définie positive ou négative, ou semi définie positive ou négative, on peut réduire le nombre de sommets accessibles pour l'entrée de commande  $u(t)$ . En effet, dans ce cas l'expression de  $u_i$  devient  $(-|\alpha_i|) \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x})$  et prend donc une valeur constante avec la bonne définition pour  $\operatorname{sgn}(0)$ . □



### 3.1.3 Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel

Nous allons maintenant associer la commande bang-bang et l'observateur fonctionnel suivant

$$\begin{cases} \dot{\eta} = H_0\eta + \sum_{i=1}^m H_i u_i \eta + J_0 y + \sum_{i=1}^m J_i u_i y + Gu \\ \hat{z} = \eta + Ey \end{cases} \quad (3.18)$$

déjà étudié dans la section 2.3 du chapitre 2. Nous traiterons deux cas

- l'ordre plein  $r = n$ , dans ce cas  $\hat{z} = \hat{x}$ ,
- l'ordre réduit  $r = n - p$ .

#### 3.1.3.1 Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre plein

Afin d'obtenir notre commande basée sur un observateur pour le système (3.1), on utilise la commande bang-bang (1.38) où l'état  $x(t)$  est remplacé par  $\hat{x}(t)$  où  $\hat{x}(t)$  est la sortie de l'observateur fonctionnel (2.51), avec comme fonctionnelle  $z(t) = x(t)$ . De façon similaire à ce qui a été présenté au paragraphe précédent, nous allons considérer la commande  $u(t)$  comme un paramètre variant dans le polytope  $\mathcal{P}$ , ce qui nous permet de donner le théorème suivant.

**Théorème 3.1.2.** *[GSZD07c] Si l'hypothèse 3.1.1 est vérifiée, s'il existe des matrices  $Z$ ,  $P = P^T > 0$ ,  $F = F^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$  telles que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée pour tout  $\beta \in \mathcal{S}$*

$$\begin{bmatrix} -Q & (1,2)^j & 0 \\ (1,2)^{jT} & (2,2)^j & 0 \\ 0 & 0 & (3,3) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

où

$$(1,2)^j = F(A_0 - H_{01} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j (A_i - H_{i1})) - FZ(H_{02} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i2}), \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} (2,2)^j &= (H_{01} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i1})^T P + P(H_{01} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i1}) \\ &\quad + (H_{02} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i2})^T Z^T P + PZ(H_{02} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i2}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$(3,3) = (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i)^T F + F(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i) + Q, \quad (3.22)$$

alors la commande basée sur un observateur avec la loi de commande suivante

$$u = - \begin{bmatrix} |\alpha_1| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_1^T F \widehat{x}) \\ \vdots \\ |\alpha_m| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_m^T F \widehat{x}) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

stabilise le système bilinéaire (3.1). ■

*Démonstration.* De façon similaire à la preuve du théorème 3.1.1, on choisit comme fonction de Lyapunov :

$$V = \widehat{x}^T F \widehat{x} + e^T P e. \quad (3.24)$$

Pour dériver cette fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (3.3), on a besoin de la dérivée de  $\widehat{x}(t)$ . Vu que (2.59) est satisfaite, on obtient  $\dot{\widehat{z}}$  à partir de l'équation (2.51)

$$\dot{\widehat{z}} = (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i) \widehat{z} + (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i - H_0 - \sum_{i=1}^m H_i u_i) e \quad (3.25)$$

et la dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (3.3), donc du système (3.1), associé à l'observateur (3.4) et à la commande basée sur l'observateur (3.13) devient

$$\dot{V} = x^T \Pi_x x + e^T \Pi_e e + 2x^T \Pi_{xe} e \quad (3.26)$$

avec

$$\Pi_x = (A_0 - \sum_{i=1}^m A_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x}))^T F + F (A_0 - \sum_{i=1}^m A_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x})), \quad (3.27a)$$

$$\Pi_e = (H_0 - \sum_{i=1}^m H_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x}))^T P + P (H_0 - \sum_{i=1}^m H_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x})), \quad (3.27b)$$

$$\Pi_{xe} = F ((A_0 - \sum_{i=1}^m A_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x})) + (H_0 - \sum_{i=1}^m H_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x}))). \quad (3.27c)$$

Si le terme (3,3) de l'inégalité (3.19) est défini négatif, à partir des mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 1.5.1, on déduit

$$x^T \Pi_x x < -x^T Q x. \quad (3.28)$$

En observant que les termes  $(-|\alpha_i|) \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_i^T F \widehat{x})$ , pour  $i = 1, \dots, m$ , correspondent aux éléments de  $\mathcal{S}$  (voir (3.8)) quel que soit l'état de l'observateur  $\widehat{x}(t)$ , on peut utiliser une approche polytopique pour assurer la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov (3.26).

A partir de (3.27) et (3.28), si l'inégalité (3.19) est vérifiée sur les  $2^m$  sommets du polytope convexe  $\mathcal{P}$ , cette inégalité est donc satisfaite pour chaque éléments  $\beta^j$  de l'ensemble  $\mathcal{S}$  (voir [AGB94, AT98]), alors  $\dot{V} < 0$ . Ceci conclut cette démonstration. ●

Les produits de matrices “ $FZ$ ” et “ $PZ$ ”, avec les matrices  $F$ ,  $P$  et  $Z$  comme matrices inconnues, induisent des non linéarités, ceci explique que l’inégalité (3.19) mène à un problème non-convexe. Afin de résoudre notre problème, on peut suivre la procédure suivante pour synthétiser notre commande basée sur un observateur

Etape 1 : Trouver les  $\alpha_i$  tels que  $A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$  est Hurwitz.

Etape 2 : Trouver  $Y = PZ$  et  $P$  tels que le terme (2, 2)  $< 0$  (voir (3.21)), et en déduire  $Z = P^{-1}Y$ .

Etape 3 : Résoudre la LMI (3.19) sur les sommets de  $\mathcal{P}$ , où  $P$ ,  $F$  et  $Q$  sont des matrices à déterminer et où la matrice du gain  $Z$  est donnée par l’étape précédente.

Etape 4 : Calculer  $E$ ,  $H_i$ ,  $J_i$  à partir de (2.55) et (2.91).

### 3.1.3.2 Synthèse de la commande bang-bang basée sur un observateur : avec l’observateur fonctionnel d’ordre réduit

Pour obtenir, notre commande basée sur un observateur pour le système (3.1), plutôt que d’utiliser l’observateur fonctionnel avec  $L = I_n$ , on peut réaliser un observateur d’ordre réduit.

Sans perte de généralité, on suppose que la matrice  $C$  est surjective. On définit

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

avec la matrice  $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$  telle que  $\text{rang } L + \text{rang } C = \text{rang} \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix}$  et que la matrice  $L$  soit surjective, on a donc  $\mathcal{T}$  est inversible.

La commande bang-bang (1.38) voit son état  $x(t)$  remplacé par

$$\hat{x}(t) = \mathcal{T}^{-1} \left[ \hat{z}^T(t) \ y^T(t) \right]^T \quad (3.30)$$

où  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$  est donné par la sortie de l’observateur fonctionnel (3.18) et est l’estimation de  $z(t) = Lx(t)$ . Grâce à l’observateur réduit, on minimise la taille de l’observateur en évitant les redondances, c’est-à-dire en évitant d’estimer tout ou partie des sorties mesurées. De façon similaire à ce qui a été présenté dans le début de ce chapitre, nous allons considérer la commande  $u(t)$  comme un paramètre variant dans le polytope  $\mathcal{P}$ , ce qui nous permet de donner le théorème suivant.

**Théorème 3.1.3.** *Si l’hypothèse 3.1.1 est vérifiée, si l’équation de non-biais (2.59) de l’observateur fonctionnel est satisfaite avec  $z(t) = Lx(t)$ , s’il existe des matrices  $Z$ ,  $P = P^T > 0$ ,  $F = F^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$  telles que l’inégalité matricielle suivante est vérifiée pour tout  $\beta \in \mathcal{S}$*

$$\begin{bmatrix} -Q & (1, 2)^j & 0 \\ (1, 2)^{j,T} & (2, 2)^j & 0 \\ 0 & 0 & (3, 3) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

où

$$(1, 2)^j = F [\mathcal{T}_1 (\Upsilon_T(\beta^j)C + ECA(\beta^j)) + \mathcal{T}_2 CA(\beta^j)], \quad (3.32)$$

$$(2, 2)^j = (H_{01} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i1})^T P + P(H_{01} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i1}) \\ + (H_{02} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i2})^T Z^T P + PZ(H_{02} + \sum_{i=1}^m \beta_i^j H_{i2}), \quad (3.33)$$

$$(3, 3) = (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i)^T F + F(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i) + Q, \quad (3.34)$$

et

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\Upsilon_T(u) = \Upsilon_0 + \sum_{i=1}^n \Upsilon_i u_i, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{A}(u) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i u_i, \quad (3.37)$$

alors la commande basée sur un observateur avec la loi de commande suivante

$$u = - \begin{bmatrix} |\alpha_1| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_1^T F \widehat{x}) \\ \vdots \\ |\alpha_m| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T A_m^T F \widehat{x}) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

stabilise le système bilinéaire (3.1). ■

*Démonstration.* De façon similaire à la preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, on choisit comme fonction de Lyapunov :

$$V = \widehat{x}^T F \widehat{x} + e^T P e. \quad (3.39)$$

où  $\widehat{x}(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{z} \\ y \end{bmatrix}$  et  $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$ , de plus on rappelle que  $\widehat{z} = \eta + ECx(t)$ .

Pour dériver cette fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (3.1), associé à l'observateur (3.4) et à la commande (3.13), on a besoin de la dérivée de  $\widehat{x}(t)$ . Vu qu'on considère que l'équation (2.59) est satisfaite, on obtient  $\widehat{x}$  à partir de l'équation (2.51) et en notant

$$\mathcal{H}(u) = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i u_i, \quad (3.40)$$

on obtient

$$\dot{\widehat{x}} = T^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\widehat{z}} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{H}(u)\eta + \mathcal{J}(u)Cx + ECA(u)x \\ CA(u)x \end{bmatrix} \\ = T^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{H}(u)\widehat{z} + \Upsilon_C(u)x \\ CA(u)\widehat{x} + CA(u)e \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{T}^{-1} \begin{bmatrix} \left( \mathcal{H}(u) \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0_{(n-p) \times p} \end{bmatrix}^T + \Upsilon_C(u) \right) \hat{x} + \Upsilon_C(u)e \\ CA(u)\hat{x} + CA(u)e \end{bmatrix} \\
 &= \mathcal{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{H}(u)L + \Upsilon_C(u) & \Upsilon_C(u) \\ CA(u) & CA(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix}, \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

avec

$$\Upsilon_C(u) = \Upsilon_T(u)C + ECA(u). \tag{3.42}$$

A partir de l'équation (2.59) de non biais de l'observateur, on peut écrire

$$\mathcal{H}(u)L + \Upsilon_C(u) = LA(u). \tag{3.43}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (3.1), associé à l'observateur (3.4) et à la commande basée (3.13) devient donc

$$\dot{V} = \hat{x}^T \Pi_x \hat{x} + e^T \Pi_e e + \hat{x}^T \Pi_{xe} e + e^T \Pi_{xe}^T \hat{x} \tag{3.44}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Pi_x &= F [\mathcal{T}_1 LA(u) + \mathcal{T}_2 CA(u)] + [\mathcal{T}_1 LA(u) + \mathcal{T}_2 CA(u)]^T F \\
 &= F \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(u)^T F \\
 &= (A_0 - \sum_{i=1}^m A_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\hat{x}^T A_i^T F \hat{x}))^T F + F (A_0 - \sum_{i=1}^m A_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\hat{x}^T A_i^T F \hat{x})), \tag{3.45a}
 \end{aligned}$$

$$\Pi_e = (H_0 - \sum_{i=1}^m H_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\hat{x}^T A_i^T F \hat{x}))^T P + P (H_0 - \sum_{i=1}^m H_i |\alpha_i| \operatorname{sgn}(\hat{x}^T A_i^T F \hat{x})), \tag{3.45b}$$

$$\Pi_{xe} = F [\mathcal{T}_1 (\Upsilon_T(u)C + ECA(u)) + \mathcal{T}_2 CA(u)] \tag{3.45c}$$

car

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Comme précédemment, si le terme (3,3) de l'inégalité (3.31) est strictement négatif, on déduit

$$\hat{x}^T \Pi_x \hat{x} < -\hat{x}^T Q \hat{x}. \tag{3.47}$$

A partir de (3.45) et (3.47), si l'inégalité (3.19) est vérifiée sur les  $2^m$  sommets du polytope convexe  $\mathcal{P}$ , cette inégalité est donc satisfaite pour chaque éléments  $\beta^j$  de l'ensemble  $\mathcal{S}$  (voir [AGB94, AT98]), alors  $\dot{V} < 0$ . Ceci conclut cette démonstration. •

Les produits de matrices “ $FZ$ ” et “ $PZ$ ”, avec les matrices  $F$ ,  $P$  et  $Z$  comme matrices inconnues induisent des non linéarités, ceci explique que l'inégalité (3.19) mène à un problème non-convexe. Afin de résoudre notre problème, on peut suivre la procédure suivante pour synthétiser notre commande basée sur un observateur

Etape 1 : Trouver les  $\alpha_i$  tels que  $A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$  est Hurwitz.

Etape 2 : Trouver  $Y = PZ$  et  $P$  tels que le terme (2, 2)  $< 0$  (voir (3.33)), et en déduire  $Z = P^{-1}Y$ .

Etape 3 : Résoudre la LMI (3.19) sur les sommets de  $\mathcal{P}$ , où  $P$ ,  $F$  et  $Q$  sont des matrices à déterminer et où la matrice du gain  $Z$  est donnée par l'étape précédente.

Etape 4 : Calculer  $E$ ,  $H_i$ ,  $J_i$  à partir de (2.55) et (2.91).

### 3.1.4 Exemples

#### 3.1.4.1 Premier exemple

Afin d'illustrer notre approche, nous allons effectuer la synthèse d'une commande bang-bang basée sur un observateur LPV pour le système bilinéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_1 x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_2 x \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (3.48)$$

où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $u(t)$  représentent toujours les même signaux.

Les scalaires  $\alpha_1 = -1$  et  $\alpha_2 = -1$  satisfont l'hypothèse 3.1.1.

En appliquant le théorème 3.1.2, on obtient

$$Z = \begin{bmatrix} -152.6 & 198 & 0 & -6 & 0 \\ 690.2 & -448.1 & -683.5 & -248.8 & -2241.3 \\ -107.2 & 56.5 & 246.8 & -6 & -155 \\ -223.2 & 693.1 & -447.1 & -2479.8 & -678.8 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.42 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 6.06 \times 10^{-4} & 9.19 \times 10^{-5} \\ 9.19 \times 10^{-5} & 1.51 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.65 \times 10^{-3} & 7.75 \times 10^{-4} \\ 7.75 \times 10^{-4} & 8.43 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -305.5 & 396.3 & 0 & -12 & 0 \\ 290 & -188.3 & -287.2 & -1042.3 & -941.7 \\ -214.6 & 113 & 494 & -12 & -310.4 \\ -93.8 & 291.2 & -187.9 & -1041.9 & -285.2 \end{bmatrix}.$$

Finalement, les matrices de l'observateur sont les suivantes

$$H_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -47.81 \\ 227.8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 23.9 \\ 1 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 48 \\ 10892 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 48.81 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les entrées de commande, les états et les erreurs d'observation sont donnés dans les figures 3.1 à 3.5.

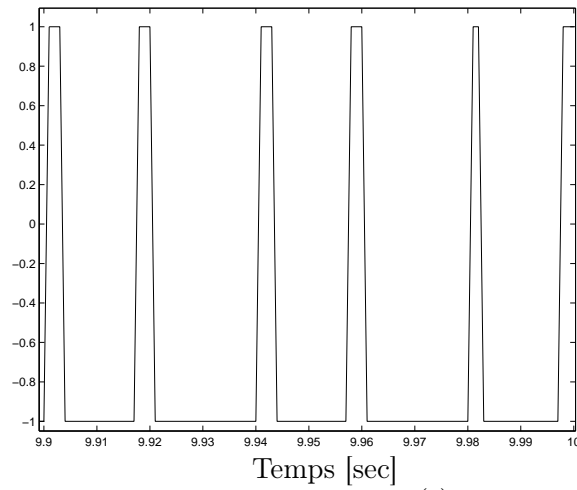


FIG. 3.1: Entrée  $u_1(t)$

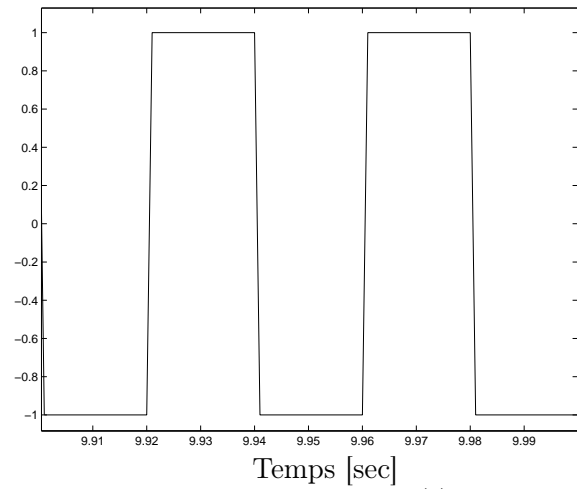


FIG. 3.2: Entrée  $u_2(t)$

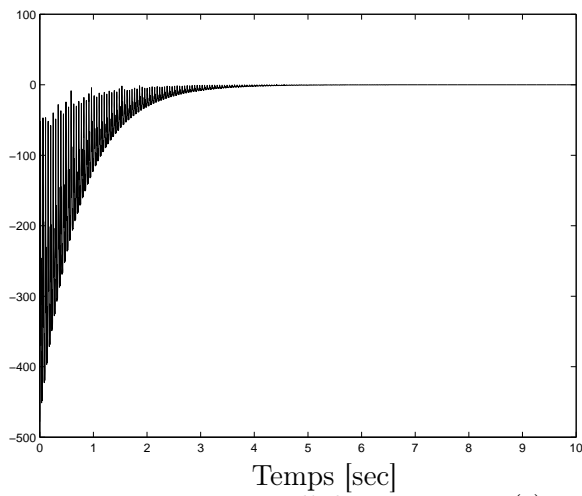


FIG. 3.3: Erreur d'observation  $e_1(t)$

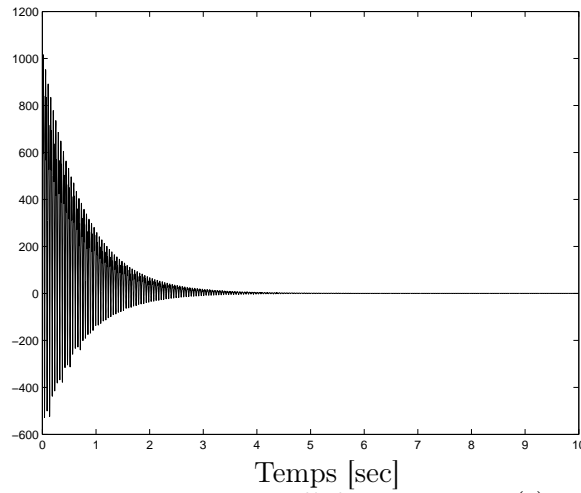


FIG. 3.4: Erreur d'observation  $e_2(t)$

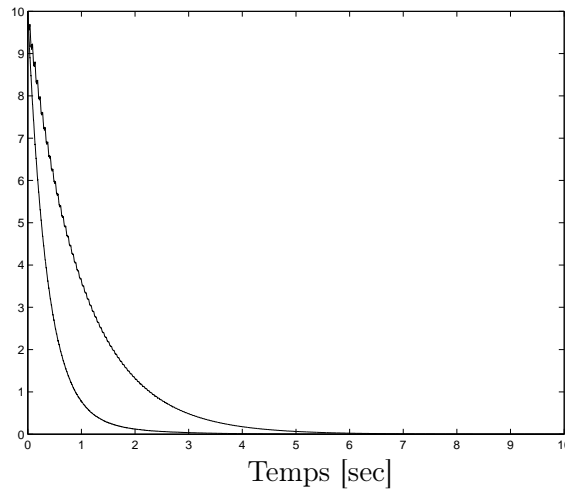


FIG. 3.5: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$

### 3.1.4.2 Deuxième exemple

Afin d'illustrer notre approche, nous allons effectuer la synthèse d'une commande bang-bang basée sur un observateur LPV pour le système bilinéaire suivant, système avec une matrice  $A_0$  instable

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_1 x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_2 x \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $u(t)$  sont définis à la section 3.1.1.

Les scalaires  $\alpha_1 = -1$  et  $\alpha_2 = -1$  remplissent toujours l'hypothèse 3.1.1.



### 3.1.4.2.1 Observateur à grand gain

Ce système n'est pas uniformément observable, mais en appliquant la méthodologie expliquée dans la remarque (2.2.2), on assure l'existence d'un  $\theta$  assurant la convergence de l'observateur

$$\dot{\hat{x}} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_2 \right) \hat{x} - S_\infty^{-1}(\theta) C^T (C\hat{x} - y) \quad (3.50)$$

par la résolution de LMI (voir la section 2.2).

En résolvant la LMI (3.9) du théorème 3.1.1, avec  $\theta = 1.1$  et donc

$$S_\infty = \begin{bmatrix} 0.9091 & -0.8264 \\ -0.8264 & 1.5026 \end{bmatrix}, \text{ on obtient les solutions suivantes}$$

$$P = \begin{bmatrix} 164.4959 & 64.6498 \\ 64.6498 & 80.3020 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 11.8880 & -2.1084 \\ -2.1084 & 1.7665 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 24.4769 & -8.3420 \\ -8.3420 & 12.0858 \end{bmatrix}.$$

Les entrées de commande, les états et les erreurs d'observation sont donnés dans les figures 3.6 à 3.10.

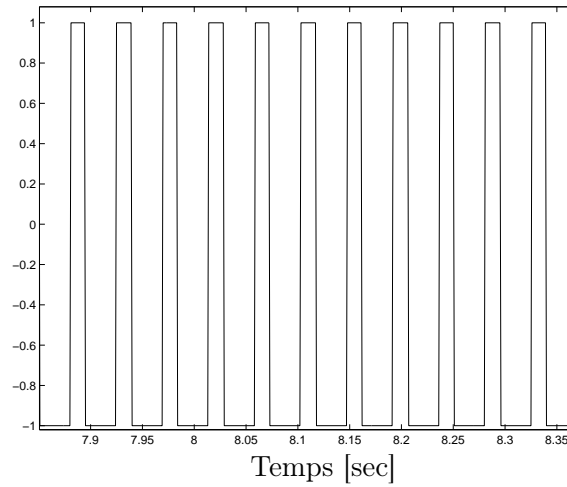


FIG. 3.6: Entrée  $u_1(t)$

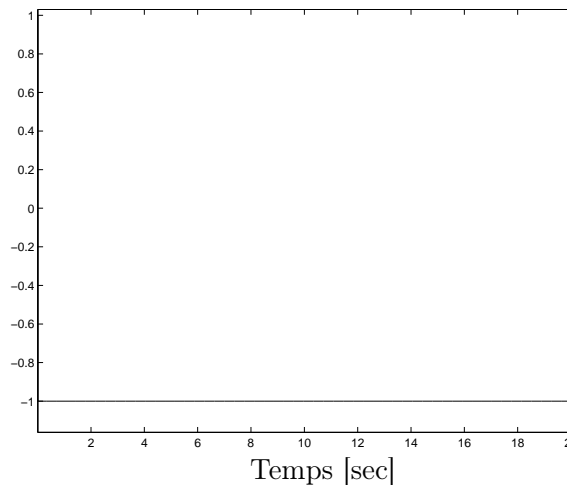


FIG. 3.7: Entrée  $u_2(t)$

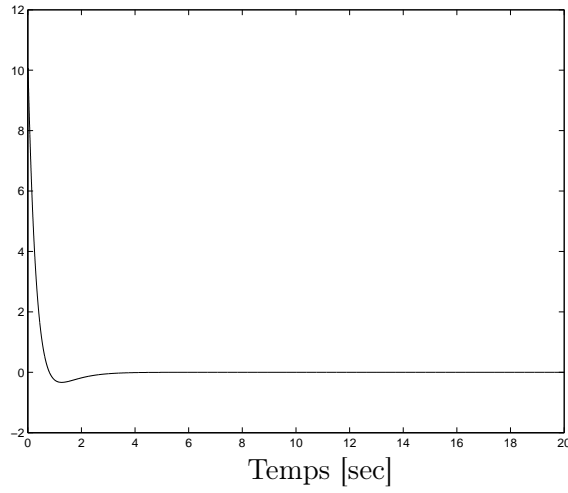


FIG. 3.8: Erreur d'observation  $e_1(t)$

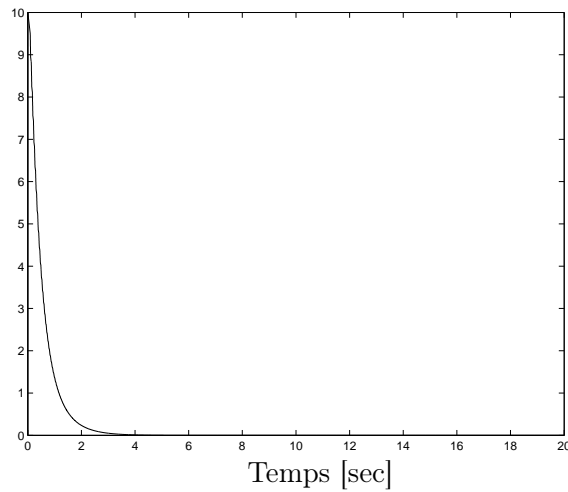


FIG. 3.9: Erreur d'observation  $e_2(t)$

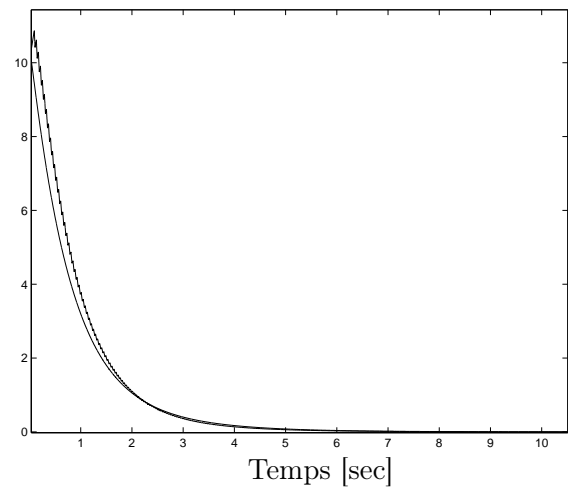


FIG. 3.10: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$

### 3.1.4.2.2 Observateur fonctionnel d'ordre plein

On synthétise d'abord l'observateur et on obtient

$$H_0 = \begin{bmatrix} -1.0820 & 0.0099 \\ 0.0125 & -2.0514 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} -0.0005 & 0 \\ 0.0135 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0099 \\ -0.0043 & -0.0514 \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0.01130.8944 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0513 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0.0105 \\ -0.0540 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.9901 \\ 0.0514 \end{bmatrix}.$$

En appliquant le théorème 3.1.2, on obtient

$$F = \begin{bmatrix} 7.2006 & -2.8366 \\ -2.8366 & 4.0748 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3.9212 & -1.1163 \\ -1.1163 & 0.4960 \end{bmatrix}.$$

Les entrées de commande, les états et les erreurs d'observation sont donnés dans les figures 3.11 à 3.15.

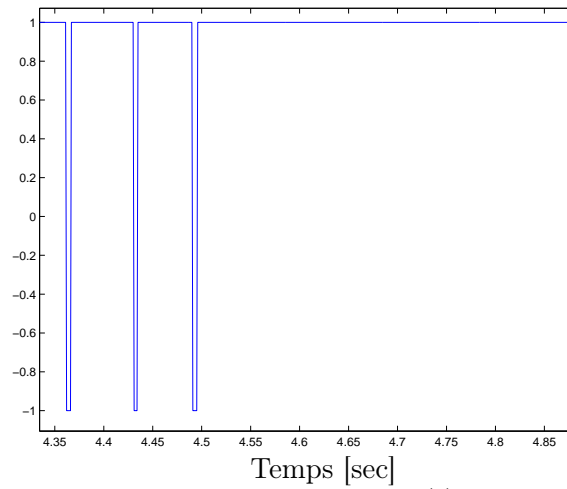


FIG. 3.11: Entrée  $u_1(t)$

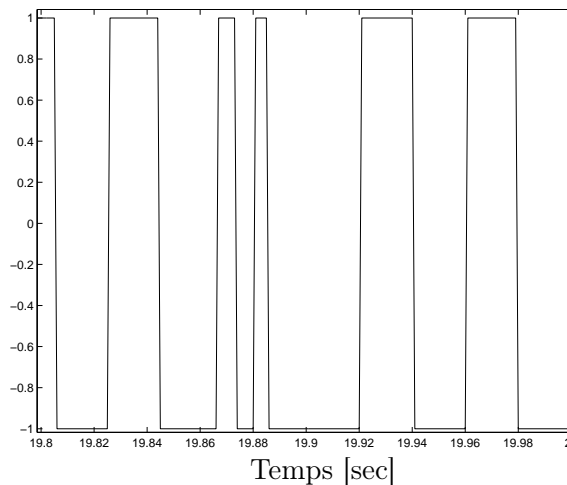


FIG. 3.12: Entrée  $u_2(t)$

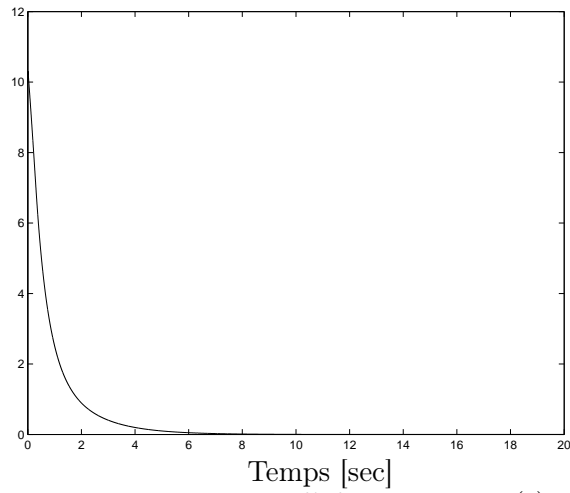


FIG. 3.13: Erreur d'observation  $e_1(t)$

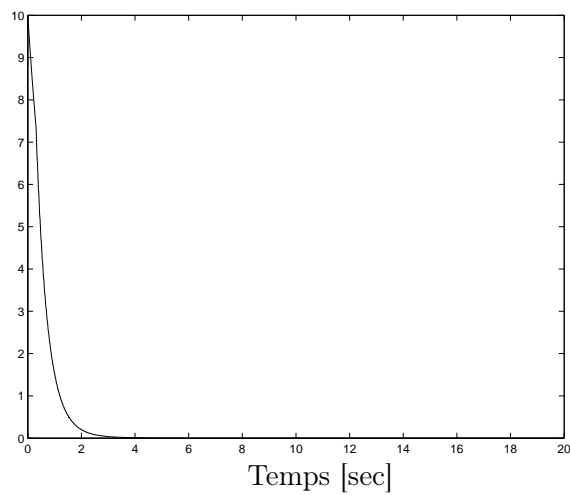


FIG. 3.14: Erreur d'observation  $e_2(t)$

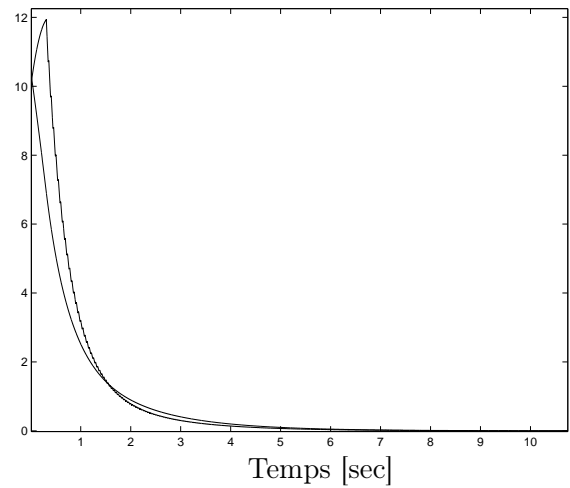


FIG. 3.15: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$

### 3.1.4.2.3 Observateur fonctionnel d'ordre réduit

L'observateur obtenu est le suivant

$$\begin{aligned} H_0 &= -1.9307, & H_1 &= 1, & H_2 &= 0.0693 \\ J_0 &= 1.1339, & J_1 &= 0.9307, & J_2 &= 0.0645, & E &= -0.0693 \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 3.1.3, on obtient alors

$$F = \begin{bmatrix} 16.6745 & -5.6337 \\ -5.6337 & 10.1583 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 8.4866 & -3.3808 \\ -3.3808 & 2.5667 \end{bmatrix}.$$

Les entrées de commande, les états et les erreurs d'observation sont donnés dans les figures 3.16 à 3.19.

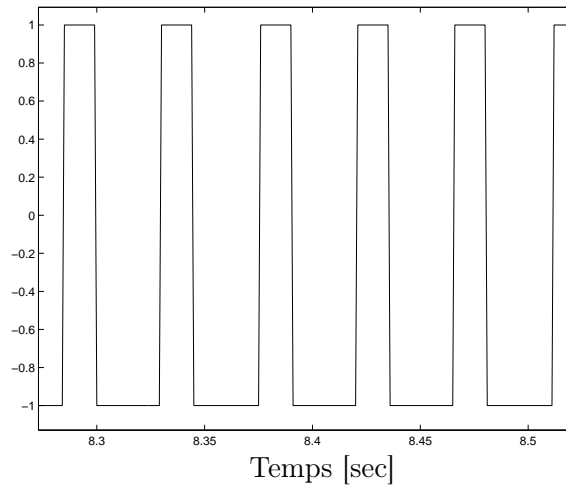


FIG. 3.16: Entrée  $u_1(t)$

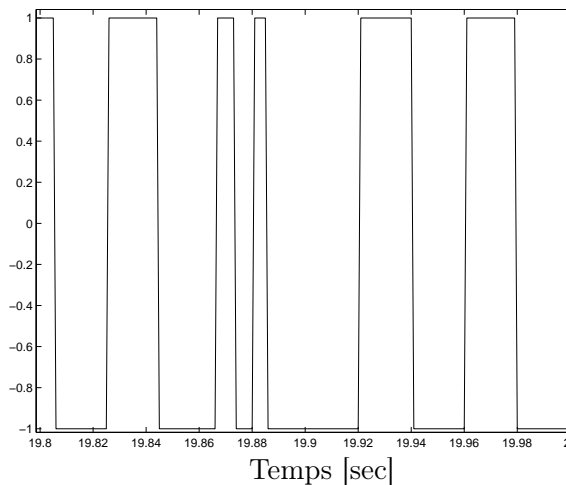


FIG. 3.17: Entrée  $u_2(t)$

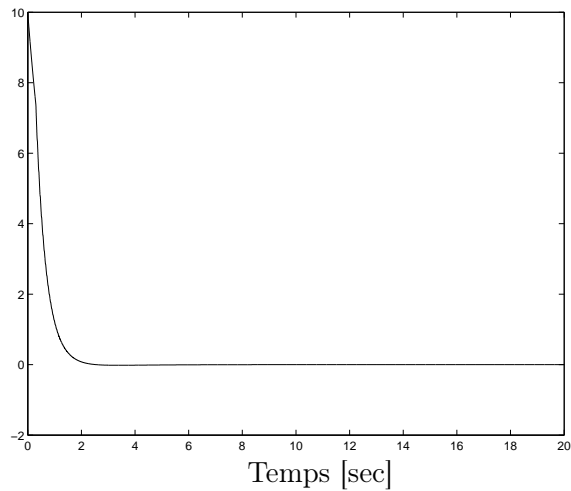


FIG. 3.18: Erreur d'observation  $e_2(t)$

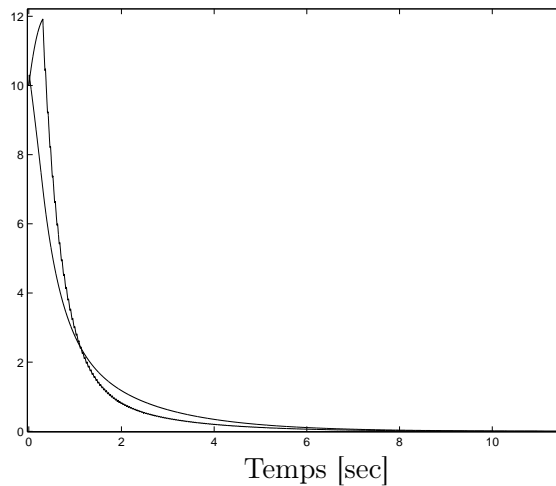


FIG. 3.19: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$

#### 3.1.4.2.4 Analyse des simulations

Dans cette section nous avons présenté une solution facilement calculable par un solveur LMI pour la synthèse d'une commande bang-bang basée sur un observateur pour systèmes bilinéaires. Cette approche est illustrée par deux exemples numériques.

L'un des avantages de la commande bang-bang présentée est la stabilité globale. Un des inconvénients de la commande bang-bang est que des effets de "chattering", de résonance ( voir les figures (3.3) et (3.3)) peuvent se produire. Nous allons continuer en présentant un autre type de commande particulièrement adapté aux systèmes bilinéaires.

## 3.2 Commande quadratique basée sur un observateur

### 3.2.1 Commande quadratique adaptée pour une matrice $A_0$ quelconque

Dans cette section, on désire construire une commande quadratique saturée basée sur un observateur pour le système (3.1) sous l'hypothèse 1.5.2 (voir [Gut81] et les rappels de la section 1.5.2.1).

Si la matrice  $A_0$  n'est pas Hurwitz, on ne peut pas avoir de commande par retour d'état  $u(x)$  stabilisant le système (3.1) si  $u(0) = 0$ . On utilise ainsi une notion spéciale de stabilité, la  $\varepsilon$ -stabilité (voir définition 1.5.2 du chapitre 1, où cette stabilité pratique est définie).

La commande

$$u_i = -\beta_i(A_i x)^T F_\beta x \quad i = 0, \dots, m \quad (3.51)$$

présentée dans [Gut81] est non-bornée, ce qui interdit l'approche LPV pour l'observation. De plus une commande non bornée est difficilement applicable sur un système physique et du coup manque de réalisme, nous ne proposerons donc pas de commande basée sur un observateur avec la commande (3.51). Pour palier à ce problème, on peut coupler la commande (3.51) avec une commande bang-bang. D'un autre point de vue, associer la commande quadratique à la commande bang-bang permet de palier aux inconvénients de la commande bang-bang seule. Cependant cela nous oblige à ne traiter que les systèmes du type (3.1), c'est-à-dire sans partie linéaire pour la commande ou autrement dit,  $R = 0$  pour le système (1.1).

#### 3.2.1.1 Synthèse de la commande par retour d'état

Avant d'attaquer la synthèse de la commande quadratique saturée, nous donnons ce lemme liant les hypothèses suffisantes à la réalisation de la commande quadratique (3.51) et de la commande bang-bang (3.5).

**Lemme 3.2.1.** *L'hypothèse 3.1.1 implique l'hypothèse 1.5.2.* ◦

*Démonstration.* Nous allons le prouver par l'absurde. Supposons que le lemme 3.2.1 est faux, alors il existe au moins un cas où l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite sans que l'hypothèse 1.5.2 ne le soit. Ainsi nous pouvons déterminer des réels  $\alpha_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  tels qu'il existe une matrice  $F_\alpha = F_\alpha^T > 0$  telle que

$$(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i)^T F_\alpha + F_\alpha (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i) < 0. \quad (3.52)$$

L'hypothèse 1.5.2 n'étant pas vérifiée, pour toute matrice  $F_\delta = F_\delta^T > 0$ , on a

$$\exists \tilde{x} \in \{x \neq 0 \mid x^T (F_\delta A_0 + A_0^T F_\delta) x \geq 0\}, \text{ tel que } \begin{bmatrix} \tilde{x} F_\delta A_1^T \tilde{x}^T & \dots & \tilde{x} F_\delta A_m^T \tilde{x}^T \end{bmatrix} = 0.$$

Ainsi, avec  $F_\delta = F_\alpha$ ,

$$\exists x_c \in \{x_c \neq 0 \mid x_c^T (F_\alpha A_0 + A_0^T F_\alpha) x_c \geq 0\} \quad (3.53)$$

telle que

$$\begin{bmatrix} x_c^T A_1 F_\alpha x_c \\ \vdots \\ x_c^T A_m F_\alpha x_c \end{bmatrix} = 0. \quad (3.54)$$

Ainsi, avec  $x_c$ , on obtient

$$\begin{aligned} & x_c^T \left( \left( A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i \right)^T F_\alpha + F_\alpha \left( A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i \right) \right) x_c \\ &= -x_c^T Q x_c \\ &= x_c^T (A_0^T F_\alpha + F_\alpha A_0) x_c \end{aligned}$$

qui est en contradiction avec le fait que  $x_c^T (F_\alpha A_0 + A_0^T F_\alpha) x_c \geq 0$ . Ainsi l'hypothèse initiale est fausse et le lemme 3.2.1 est prouvé. •

On peut donc donner le théorème suivant pour un système avec une seule entrée de commande.

**Théorème 3.2.1.** *Si l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite avec  $\alpha$  pour un système de la forme (3.1) avec  $m = 1$  alors pour tout réel  $\delta$ , pour toutes matrices  $F_\alpha$  telles que*

$$(A_0 + A_1 \alpha)^T F_\alpha + F_\alpha (A_0 + A_1 \alpha) < 0, \quad (3.55)$$

la commande

$$u = \begin{cases} -|\alpha| & \text{si} & -\delta x^T A_1 F_\alpha x \leq -|\alpha| \\ -\delta x^T A_1 F_\alpha x & \text{si} & -|\alpha| \leq -\delta x^T A_1 F_\alpha x \leq |\alpha| \\ |\alpha| & \text{si} & -\delta x^T A_1 F_\alpha x \geq |\alpha| \end{cases} \quad (3.56)$$

$\varepsilon$ -stabilise le système. ■

*Démonstration.* Comme l'hypothèse 3.1.1 est vérifiée avec le réel  $\alpha$ , il existe une matrice  $F_\alpha = F_\alpha^T > 0$  telle que

$$(A_0 + A_1 \alpha)^T F_\alpha + F_\alpha (A_0 + A_1 \alpha) < 0. \quad (3.57)$$

Par conséquent, la fonction de Lyapunov

$$V(x) = x^T F_\alpha x \quad (3.58)$$

a une dérivée négative le long de la trajectoire du système (3.1), associé à la commande basée sur un observateur (3.56) si on est et hors de la boule  $B_\varepsilon$  de centre zéro et de rayon  $\varepsilon$ . La preuve de l' $\varepsilon$ -stabilité est obtenue en reprenant la démonstration donnée dans l'annexe de [Gut81] à partir de l'équation (A.3). •



### 3.2.1.2 Test de cette commande avec un observateur fonctionnel d'ordre plein

La stabilité de la commande (3.56) basée sur un observateur n'est pas prouvée et reste un problème ouvert : les termes croisés du type  $\hat{x}^T \Pi_{x_e} e$  (voir (3.16)) posent des problèmes encore non surmontés. Afin d'illustrer notre approche, nous allons effectuer la synthèse d'une commande bang-bang/quadratique basée sur un observateur LPV pour le système bilinéaire suivant, dont une matrice  $A_0$  est instable

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ux \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (3.59)$$

où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $u(t)$  sont définis à la section 3.1.1.

Le scalaire  $\alpha = -1$  remplit l'hypothèse 3.1.1.

En appliquant le théorème 3.2.1, on obtient

$$F_\alpha = \begin{bmatrix} 2.1820 & -0.6851 \\ -0.6851 & 0.9011 \end{bmatrix}.$$

Nous allons appliquer la commande (3.56) pour deux valeurs de  $\delta$ .

Pour le premier cas, nous prenons  $\delta = 10$ .

La commande est donc

$$u = \begin{cases} -1 & \text{si } -10 (2.182x_1^2 + 1.4969x_1x_2 - 0.6851x_2^2) \leq -|\alpha| \\ a & \text{si } -1 \leq -10 (2.182x_1^2 + 1.4969x_1x_2 - 0.6851x_2^2) \leq 1 \\ 1 & \text{si } -10 (2.182x_1^2 + 1.4969x_1x_2 - 0.6851x_2^2) \geq 1 \end{cases} \quad (3.60)$$

avec  $a = -10 (2.182x_1^2 + 1.4969x_1x_2 - 0.6851x_2^2)$ .

Les entrées de commande, les états et les erreurs d'observation sont donnés dans les figures 3.20 à 3.24.

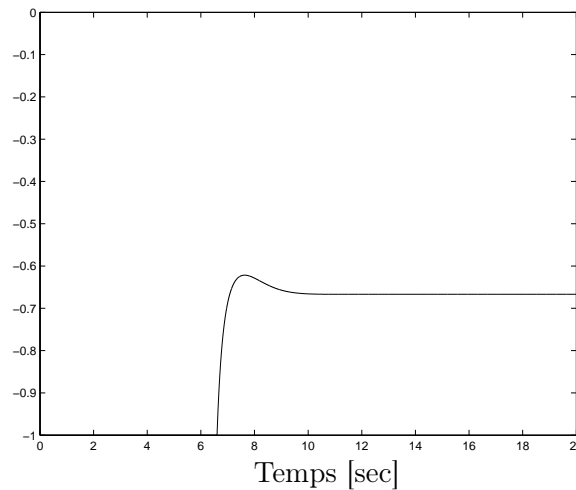


FIG. 3.20: Entrée  $u(t)$  :  $\delta = 10$

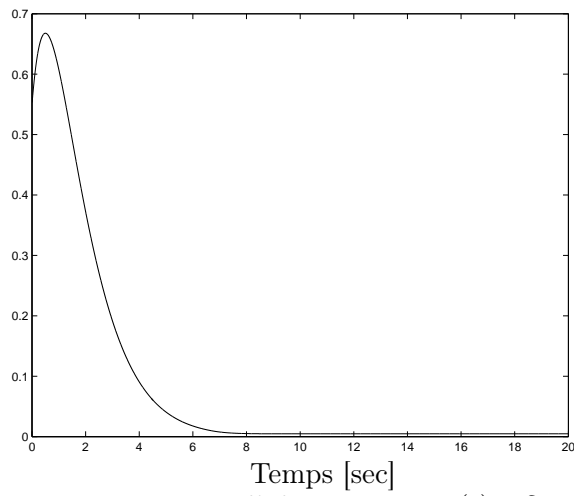


FIG. 3.21: Erreur d'observation  $e_1(t)$  :  $\delta = 10$

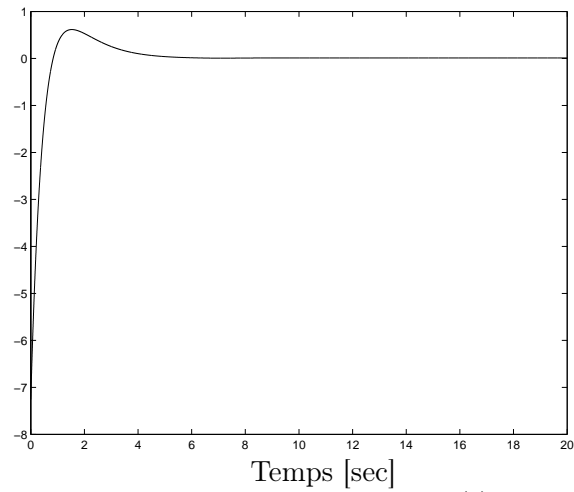


FIG. 3.22: Erreur d'observation  $e_2(t)$  :  $\delta = 10$

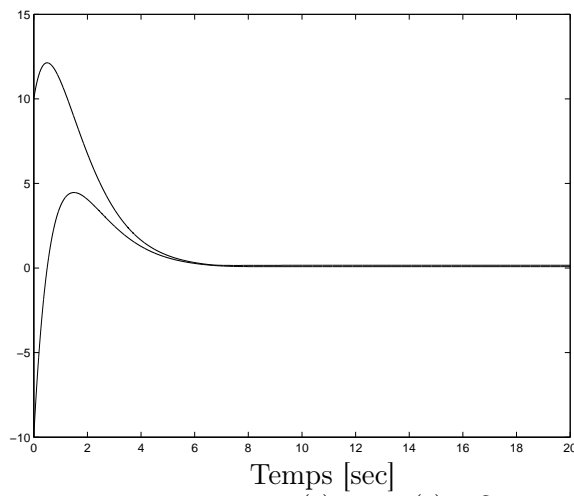


FIG. 3.23: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  :  $\delta = 10$

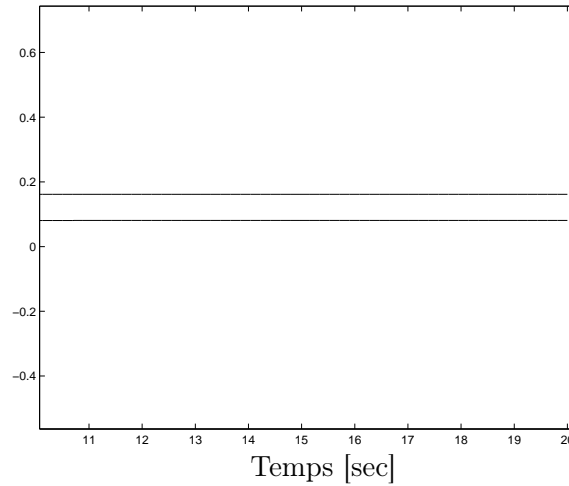


FIG. 3.24: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  : régime permanent  $\delta = 10$

Nous allons maintenant traiter le deuxième cas avec  $\delta = 100$ .

La commande est donc

$$u = \begin{cases} -1 & \text{si } -100 (2.182x_1^2 + 1.4969x_1x_2 - 0.6851x_2^2) \leq -|\alpha| \\ a & \text{si } -1 \leq -100 (2.182x_1^2 + 1.4969x_1x_2 - 0.6851x_2^2) \leq 1 \\ 1 & \text{si } -100 (2.182x_1^2 + 1.4969x_1x_2 - 0.6851x_2^2) \geq 1 \end{cases} \quad (3.61)$$

avec  $a = -100 (2.182x_1^2 + 1.4969x_1x_2 - 0.6851x_2^2)$ .

Les entrées de commande, les états et les erreurs d'observation sont donnés dans les figures 3.25 à 3.29.

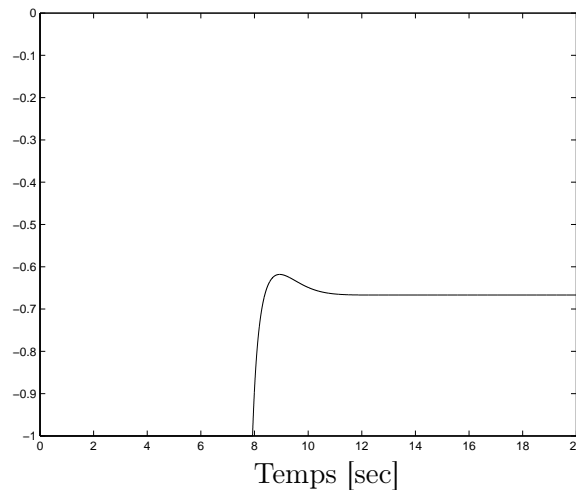


FIG. 3.25: Entrée  $u$  :  $\delta = 100$

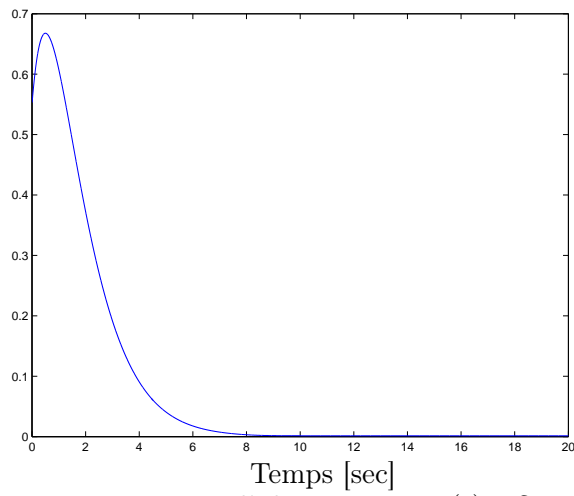


FIG. 3.26: Erreur d'observation  $e_1(t)$  :  $\delta = 100$

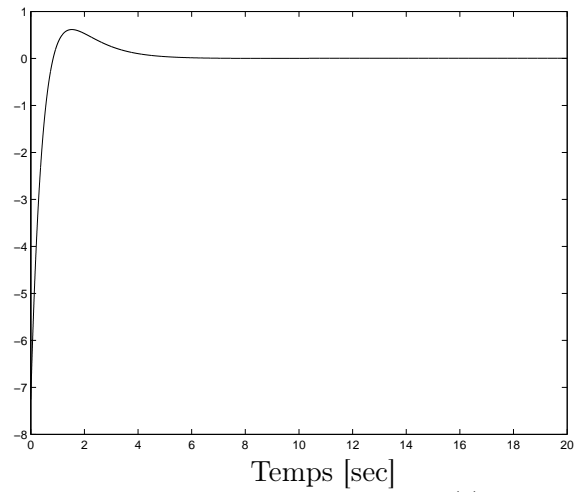


FIG. 3.27: Erreur d'observation  $e_2(t)$  :  $\delta = 100$

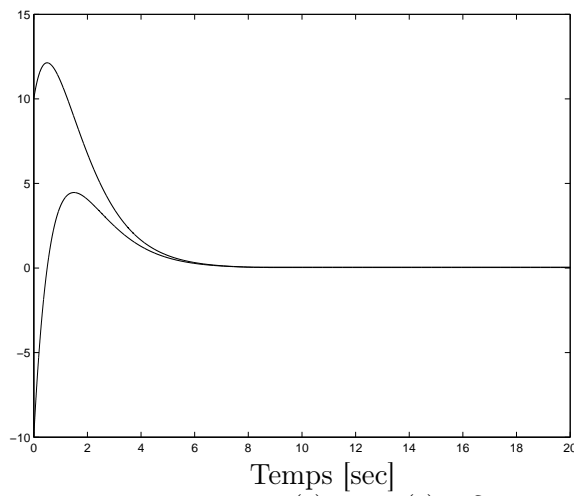


FIG. 3.28: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  :  $\delta = 100$

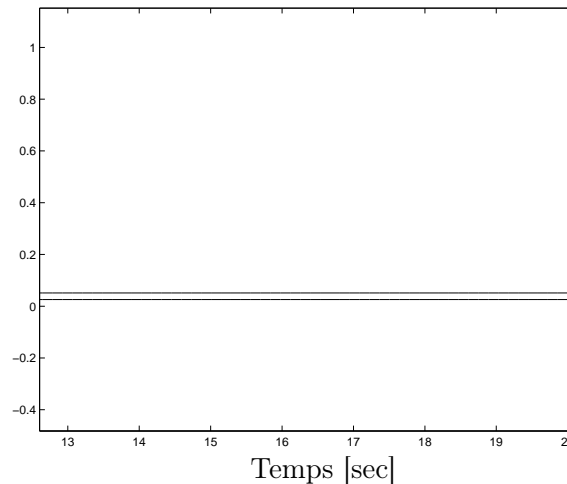


FIG. 3.29: Etats  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  : régime permanent  $\delta = 100$

Dans cette section nous avons présenté une solution facilement calculable pour la synthèse d’une commande quadratique basée observateur pour systèmes bilinéaires avec une matrice  $A_0$  quelconque. Bien que la stabilité n’ait pas été effectivement démontrée, l’illustration par un exemple numérique met en évidence l’importance du choix du facteur  $\delta$  sur la “zone” de convergence des états du système. En effet, on remarque facilement, en comparant les figures 3.24 et 3.29, l’amélioration de la convergence avec un  $\delta$  plus grand, sans pour autant avoir une convergence vers l’origine.

Au départ (jusqu’à  $t = 6.5$  secondes, la commande étant saturée pour les deux systèmes, les états, les erreurs d’observations et la commande sont strictement identiques.

Un des inconvénients de cette commande est que l’origine n’est pas un point d’équilibre du système. Nous allons continuer en présentant une commande similaire particulièrement adaptée aux systèmes bilinéaires ayant une matrice  $A_0$  quasi-stable.

### 3.2.2 Commande quadratique basée sur un observateur avec une matrice $A_0$ quasi-stable

La commande quadratique pour stabiliser une classe de systèmes bilinéaires basée sur la connaissance de tout le vecteur d’état du système a été présentée au chapitre 1 pour le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m A_i u_i x + R u \\ y = C x \end{cases} \quad (3.62)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d’état du système,  $u(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$  l’entrée de commande et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  la sortie mesurée.  $r_i$  est la  $i^{\text{th}}$  colonne de la matrice  $R$ . De plus, ce système satisfait les hypothèses 1.5.3 et 1.5.4 (voir p. 24).

Dans un premier temps, nous rappelons que  $\mathcal{S}$  représente l’ensemble des sommets du polytope contenant la commande  $u(t)$ .

Avant de continuer, nous donnons différents théorèmes qui sont des extensions de ceux présentés aux chapitre 2.

Considérons le polytope convexe  $\mathcal{S}$  donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \beta = [\beta_1 \dots \beta_m]^T \in \mathbb{R}^m \mid \forall i \in [1, m], \beta_i \in \{-\alpha_i \gamma_i, \alpha_i \gamma_i\} \right\} \quad (3.63)$$

où les réels  $\gamma_i$  et  $\alpha_i$  sont définis dans le théorème 1.5.2.

Pour l'observateur à grand gain, on a le théorème suivant.

**Théorème 3.2.2.** *Pour un  $\theta$  donné, s'il existe une matrice  $P_2 = P_2^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $\forall j = 1, \dots, 2^m$*

$$P_2 \mathcal{A}_\infty(\tau^j, \theta) + \mathcal{A}_\infty^T(\tau^j, \theta) P_2^T + \zeta_2 P_2 < 0 \quad (3.64)$$

où  $\tau^j$  représente un sommet du polytope  $\mathcal{S}$  (voir (3.63)), alors le système (3.50) est un observateur pour le système (3.62) avec un taux de convergence exponentielle  $\zeta_2$ . ■

On fait de même pour l'observateur fonctionnel.

**Théorème 3.2.3.** *Le système (2.51) est un observateur fonctionnel à taux de convergence exponentielle  $\zeta_3$  pour le système (3.62) s'il existe des matrices  $P_3 = P_3^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times \alpha}$  telles que  $\forall j = 1, \dots, 2^m$*

$$P_3 A_u(\tau^j) + Y_3 A_z(\tau^j) + A_u^T(\tau^j) P_3^T + A_z^T(\tau^j) Y_3^T + \zeta_3 P_3 < 0 \quad (3.65)$$

avec  $\tau^j \in \mathcal{S}$  représentant un sommet du polytope  $\mathcal{S}$  (voir (3.63)), les matrices  $A_u$  et  $A_z$  sont données par les équations (2.74) ou (2.94). ■

Quel que soit l'observateur utilisé, à grand gain, fonctionnel d'ordre plein ou d'ordre réduit, on peut mettre le système avec sa commande basée sur un observateur sous la forme suivante

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{e} = M_1(u)e \\ \dot{\hat{x}} = (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i) \hat{x} + Ru + M_2(u)e = f_{e\hat{x}}(e, \hat{x}) \end{cases} \quad (3.66)$$

avec  $M_1(u)$  et  $M_2(u)$  dépendant de l'observateur utilisé

- $M_1(u) = \mathcal{A}(u) - S_\infty^{-1}(\theta) C^T C$  et  $M_2(u) = S_\infty^{-1}(\theta) C^T C$  pour l'observateur à grand gain,
- $M_1(u) = \mathcal{H}(u)$  et  $M_2(u) = \mathcal{A}(u) - \mathcal{H}(u)$  pour l'observateur fonctionnel d'ordre plein ( $L = I_n$ ),
- $M_1(u) = \mathcal{H}(u)$  et  $M_2(u) = \mathcal{A}(u) - \mathcal{T}_1 \mathcal{H} L$  pour l'observateur fonctionnel d'ordre réduit ( $L$  est le complémentaire de  $C$ , voir (3.29), (3.41) et (3.46)),

et  $\hat{x}$  dépendant aussi de l'observateur utilisé,  $e = x - \hat{x}$ .

- $\hat{x}$  est l'état de l'observateur à grand gain ((voir le lemme 2.2.1, et le théorème 3.2.2 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ),
- $\hat{x}$  est la sortie de l'observateur fonctionnel d'ordre plein ( $L = I_n$ ) (voir le filtre (2.51) présenté à la section 2.3 du chapitre 2 et le théorème 3.2.3 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ),
- $\hat{x}$  est une combinaison de la sortie de l'observateur et de la sortie mesurée du système (3.62), pour l'observateur fonctionnel d'ordre réduit,  $L$  est le complément de  $C$ , (voir (3.41) et (3.30) ainsi que le filtre (2.51) présenté à la section 2.3 du chapitre 2 et le théorème 3.2.3 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ).

L'entrée de commande  $u(t)$  aussi dépend de l'observateur,  $u(t) = u(\hat{x})$ .

### 3.2.2.1 Synthèse de la loi de commande

Grâce à la mise en forme donnée par le système augmenté (3.66), on peut énoncer le théorème suivant (extension de [GSZD08c]).

**Théorème 3.2.4.** *Si les hypothèses 1.5.3 et 1.5.4 sont satisfaites, si un observateur est obtenu pour un choix de réels  $\gamma_i > 0$  et  $\alpha_i > 0$  permettant de définir les bornes de l'entrée de commande (voir théorème 1.5.2 du premier chapitre) alors la commande basée sur un observateur suivante*

$$u_i(\hat{x}) = -\gamma_i \operatorname{sgn}((A_i \hat{x} + r_i)^T F \hat{x}) \min(|(A_i \hat{x} + r_i)^T F \hat{x}|, \alpha_i) \quad (3.67)$$

assure la stabilité semi-globale asymptotique du système bilinéaire (3.62). ■

*Démonstration.* On va s'inspirer de la preuve du théorème E.2.1 de l'annexe E appliqué au système (3.66) (voir [Vid80a]) avec comme commande

$$u_i(\hat{x}) = -\gamma_i \operatorname{sgn}((A_i \hat{x} + b_i)^T F \hat{x}) \min |(A_i(\hat{x} + b_i))^T F \hat{x}|, \alpha_i \quad (3.68)$$

quel que soit l'observateur utilisé, on ne peut pas utiliser directement le théorème E.2.1 car  $u$  dépend de  $\hat{x}$ .

On assure la stabilité globale exponentielle de l'observateur synthétisé par une approche polytopique grâce à la connaissance des réels  $\gamma_i$  et  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . On peut ainsi définir qui est l'ensemble des sommets du polytope contenant  $u(t)$

$$\mathcal{S} = \left\{ \beta = [\beta_1 \dots \beta_m]^T \in \mathbb{R}^m \mid \forall i \in [1, m], \beta_i \in \{-\alpha_i \gamma_i, \alpha_i \gamma_i\} \right\}. \quad (3.69)$$

Pour  $e = 0$ , à partir du théorème 1.5.2,  $\hat{x} = 0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du système

$$\dot{\hat{x}} = (A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i) \hat{x} + R u(\hat{x}) = f_{\hat{x}}(\hat{x}) \quad (3.70)$$

avec  $u(\hat{x})$  défini par l'équation (3.68).

Montrons désormais que la stabilité asymptotique locale du système (3.66).

Commençons par montrer la stabilité uniforme du point d'équilibre  $[e^T \ x^T]^T = [0 \ 0]^T$ . La commande étant saturée par définition (on peut donc utiliser explicitement les sommets du polytope contenant la commande  $u$  dans la synthèse de l'observateur), l'erreur d'observation est exponentiellement stable. Soit  $\epsilon > 0$ , il existe donc deux réels  $M_1$ ,  $\lambda_1$  tels que  $\|e\| \leq M_1 \|e_0\| \exp(-\lambda_1 t)$ , donc si  $\|e_0\| \leq \frac{\epsilon}{M_1}$  alors  $\|e\| \leq \epsilon$ .

Pour un réel  $c$  donné, la stabilité asymptotique du système (3.70) implique l'existence d'une fonction de Lyapunov continue et différentiable  $V_2(t, \hat{x})$ , de fonctions de classe  $K$  (voir définition E.1.1),  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  et  $\psi_3$  telles que

$$\psi_1(\|\hat{x}\|) \leq V_2(\hat{x}) \leq \psi_2(\|\hat{x}\|) \quad \hat{x} \in B_c, \quad (3.71)$$

où  $B_c$  représente la boule de rayon  $c$  centré en zéro. La dérivée de la fonction de Lyapunov  $V_2$  le long de la trajectoire du système (3.70) vérifie

$$\dot{V}_{2,(3.70)}(\hat{x}) = \nabla_{\hat{x}} V_{\hat{x}}(\hat{x}) f_{\hat{x}}(0, \hat{x}) \leq -\psi_3(\|\hat{x}\|) \quad \forall \hat{x} \in B_c \quad (3.72)$$

et

$$\sup_{\|\hat{x}\| \leq c} \|\nabla_{\hat{x}} V_2(\hat{x})\| \leq L_2. \quad (3.73)$$

De plus, on a

$$\sup_{\|e\|, \|\hat{x}\| \leq c} \max(\|\nabla_e f_{e\hat{x}}(e, \hat{x})\|, \|\nabla_{\hat{x}} f_{e\hat{x}}(e, \hat{x})\|) \leq R_2. \quad (3.74)$$

On choisit un réel  $\epsilon_1 > 0$  tel que  $\psi_2(\epsilon_1) \leq \psi_1(\epsilon)$  (on a donc  $\epsilon_1 \leq \epsilon$ ) et on fixe un réel  $\delta_1 > 0$  tel que  $\delta_1 \leq \epsilon_1$  et

$$L_2 R_2 \delta_1 \leq \psi_3(\epsilon_1). \quad (3.75)$$

On fixe ensuite un réel  $\delta > 0$  tel que  $\delta = \min(\frac{\delta_1}{M_1}, \delta_1, c)$ . Supposons que  $\|e_0\| < \delta$  et  $\|\hat{x}_0\| < \delta$ , comme  $\delta \leq \frac{\delta_1}{M_1}$ , on obtient

$$\|e\| \leq \delta_1 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon. \quad (3.76)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov  $V_2$  le long de la trajectoire du système augmenté (3.66) vérifie

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,(3.66)}(\hat{x}) &= \dot{V}_{2,(3.70)}(\hat{x}) + \nabla_{\hat{x}} V_{\hat{x}}(\hat{x}) [f_{\hat{x}}(e, \hat{x}) - f_{\hat{x}}(0, \hat{x})] \\ &\leq -\psi_3(\|\hat{x}\|) + L_2 R_2 \|x_1\| \quad \forall \hat{x} \in B_c. \end{aligned} \quad (3.77)$$

D'après l'équation (3.75), et si  $\|e\| \leq \delta_1$  et  $\|\hat{x}\| > \epsilon_1$ , pour  $\|\hat{x}\| \leq c$ , on obtient  $\frac{d}{dt} V_{2,(3.66)}(\hat{x}) \leq 0$ .

On peut donc dire que si  $\|\hat{x}_0\| \leq \delta \leq \epsilon_1$  alors  $V_{2,(3.66)}(t, \hat{x}) \leq \psi_2(\epsilon_1)$ . Comme  $\psi_2(\epsilon_1) \leq \psi_1(\epsilon)$ , on peut conclure que

$$\|\hat{x}(t)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.78)$$

A partir de (3.76) et (3.78), on peut affirmer que  $e = 0$  et  $\hat{x} = 0$  est un point d'équilibre uniformément stable.

Pour montrer que  $e = 0$  et  $\hat{x} = 0$  est uniformément attractif, on reprend directement la preuve de [Vid80a] à partir de la relation (II.20), ce qui permet de conclure que  $e = 0$  et  $\hat{x} = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (3.66). Tout ceci étant vrai quel que soit  $c$ , la stabilité est semi-globale. •

### 3.2.2.2 Exemple

Afin d'illustrer notre approche, nous allons effectuer la synthèse d'une commande quadratique basée sur un observateur LPV pour le système bilinéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} ux \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (3.79)$$

où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $u(t)$  représentent toujours les même éléments.



Avec  $F = I_2$ , l'hypothèse 1.5.3 est satisfaite. En effet les valeurs propres de  $A_0$ ,  $-1$  et  $0$ , sont à partie réelle négative ou nulles. De plus, l'hypothèse 1.5.4 est vérifiée. En effet, on a

$$\Pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T F A_0^k x = 0, k = 1, \dots, n\} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} D &= \{\text{ad}_{A_0 x}^k(A_i x + r_i), k=0, \dots, n-1, i=1, \dots, m\} \\ &= \left\{ \tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x, \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x \right\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

d'où

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n | \mathcal{L}_{A_0 x}^k \mathcal{L}_{\tau} (x^T F x) = 0, \forall \tau \in D, k = 0, \dots, n-1\} \\ &= \{0\} \end{aligned} \quad (3.82)$$

car  $\mathcal{L}_{A_0 x}^0 \mathcal{L}_{\tau_1} (x^T F x) = 0 \Leftrightarrow 2x_1(x_1 + 2x_2) = 0$   
 et  $\mathcal{L}_{A_0 x}^1 \mathcal{L}_{\tau_1} (x^T F x) = 0 \Leftrightarrow 2x_1(2x_1 + x_2) = 0$   
 et  $\mathcal{L}_{A_0 x}^0 \mathcal{L}_{\tau_2} (x^T F x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$ .

On a bien  $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0\}$ , l'hypothèse 1.5.4 est donc vérifiée.

En appliquant le théorème 3.2.4 avec  $\alpha = \gamma = 1$  avec l'observateur fonctionnel d'ordre plein (2.51), on obtient

$$Z = \begin{bmatrix} 0.1658 & -0.9958 & 0 & -0.3316 & 0 & 0.9958 & 0.1658 \\ 0.3305 & -0.0018 & 0 & -0.6611 & 0 & 0.0018 & 0.3305 \end{bmatrix}.$$

Finalement, les matrices de l'observateur sont les suivantes

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{bmatrix} -0.9958 & 0 \\ -0.0018 & -1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.0017 & 0 \\ 0.0056 & 0 \end{bmatrix}, \\ J_0 &= \begin{bmatrix} 0.4988 \\ -9963 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } E = \begin{bmatrix} 0.4992 \\ 0.9972 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

avec

$$u_1(\hat{x}) = -\text{sgn}(\hat{x}_1^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2) \min(|\hat{x}_1^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2|, 1). \quad (3.83)$$

La commande  $u_1(t)$ , les erreurs d'estimation et les états du système (3.79) sont donnés pas les figures 3.30 à 3.32, respectivement.

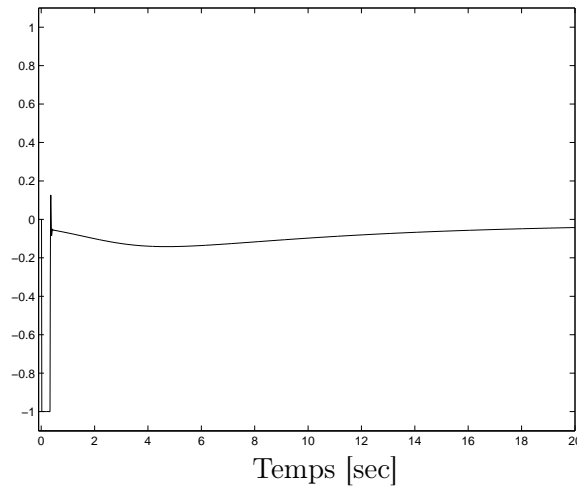


FIG. 3.30: Entrée  $u(t)$

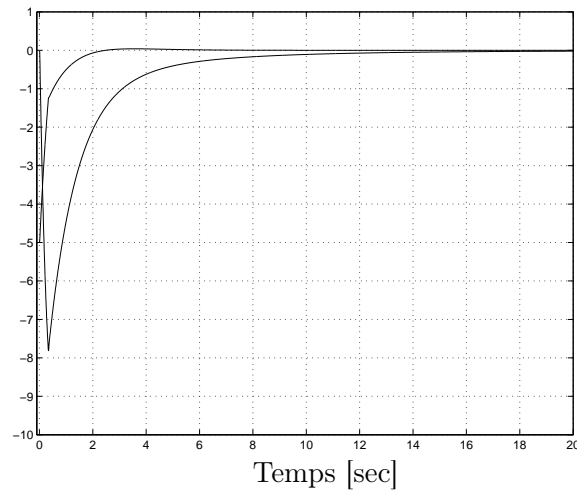


FIG. 3.31: Erreur d'observation  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$

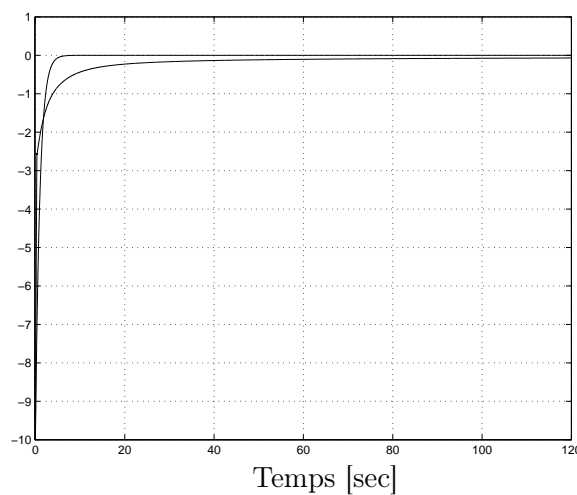


FIG. 3.32: Etat  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$

Dans la figure 3.32, on visualise les résultats de la simulation sur un horizon temporel plus grand, on remarque que la convergence de l'état  $x_2(t)$  est lente.

Dans cette section, nous avons présenté une solution facilement calculable pour la synthèse d'une commande quadratique basée observateur pour systèmes bilinéaires. Cette approche utilisant le fait que la commande est bornée permet, une fois les bornes de la commande connues, de synthétiser séparément l'observateur et la commande. La convergence n'est pas très rapide lorsqu'on s'approche de l'origine, la forme quadratique de la commande impose une stabilité non exponentielle vers 0. Une commande linéaire autour de l'origine peut alors s'avérer plus appropriée.

### 3.3 Commande linéaire basée sur un observateur

La commande linéaire pour stabiliser une classe de systèmes bilinéaires basée sur la connaissance de tout le vecteur d'état du système a été présentée au premier chapitre pour le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + \sum_{i=1}^m A_i u_i x + Ru \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.84)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état du système,  $u(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$  l'entrée de commande et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  la sortie de mesure.  $r_i$  est la  $i^{\text{th}}$  colonne de la matrice  $R$ . De plus, ce système satisfait les hypothèses 1.5.3 et 1.5.4 (p. 24).

De manière analogue à ce qui est présenté au chapitre 1, le système (1.43) est réécrit sous la forme équivalente suivante

$$\dot{x} = A_0x + N(x)u + Ru \quad (3.85)$$

avec  $N(x) = \sum_{i=1}^m N_i x_i$  et où  $(N_k)_{ij} = (A_j)_{ik}$ , avec  $(A)_{ik}$  représentant l'élément de la  $i$ -ième ligne et  $k$ -ième colonne de la matrice  $A$  (voir [MZD99]).

De façon similaire à la partie 3.2.2, quel que soit l'observateur utilisé, à grand gain, fonctionnel d'ordre plein ou d'ordre réduit, si on associe à l'état  $x(t)$  du système (3.85) et l'erreur d'observation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , on peut mettre le système avec sa commande basée sur un observateur sous la forme suivante

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{e} = M_1(u)e \\ \dot{x} = A_0x + N(x)Kx + RKx - \mathcal{K}e \end{cases} \quad (3.86)$$

avec  $M_1(u)$  dépendant de l'observateur utilisé

- $M_1(u) = \mathcal{A}(u) - S_\infty^{-1}(\theta)C^T C$  et  $\mathcal{K}(x) = (N(x)K + RK)$  pour l'observateur à grand gain,
- $M_1(u) = \mathcal{H}(u)$  et  $\mathcal{K}(x) = (N(x)K + RK)$  pour l'observateur fonctionnel d'ordre plein ( $L = I_n$ ) (voir le filtre (2.51) présenté à la section 2.3 du chapitre 2 et le théorème 3.2.3 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ),
- $M_1(u) = \mathcal{H}(u)$  et  $\mathcal{K}(x) = (N(x)K + RK)\mathcal{T}_1$  pour l'observateur fonctionnel d'ordre réduit,  $L$  est le complémentaire de  $C$ , (voir (3.41) et (3.30) ainsi que le filtre (2.51) présenté à la section 2.3 du chapitre 2 et le théorème 3.2.3 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ )

et  $u(t)$  dépendant aussi de l'observateur utilisé

- $u = K\hat{x}$  pour l'observateur à grand gain,
- $u = K\hat{z}$ , avec  $z = x$  pour l'observateur fonctionnel d'ordre plein ( $L = I_n$ ),
- $u = K(\mathcal{T}^{-1}[\hat{z}^T(t) y^T(t)]^T)$  (voir (3.30)), où  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$  est donné par la sortie de l'observateur fonctionnel (2.51) et est l'estimation de  $z(t) = Lx(t)$ , pour l'observateur fonctionnel d'ordre réduit ( $L$  est le complément de  $C$ ).

On peut utiliser une approche de Lyapunov pour assurer la stabilité de la commande linéaire basée sur ces observateurs.

Pour un réel  $\varepsilon > 0$  donné, on définit le polytope  $\mathcal{Q}(\varepsilon)$

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon] \times \dots \times [-\varepsilon, \varepsilon] \quad (3.87)$$

et l'ensemble de ses sommets  $\mathcal{T}(\varepsilon)$

$$\mathcal{T}(\varepsilon) = \left\{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_i \dots \delta_n]^T \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [1, n], \delta_i = \pm\varepsilon \right\}. \quad (3.88)$$

Par souci de simplification, on a décidé de définir un polytope centré sur l'origine et ayant tous ses sommets équidistants du centre.

### 3.3.1 Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur à grand gain

Nous allons utiliser une approche polytopique pour la synthèse de cette commande basée sur un observateur à grand gain (voir le lemme (2.2.1), et le théorème 2.2.4 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ).

Si  $x \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$  alors avec  $\hat{x}_0 = 0$ , on a  $e_0 \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$ , comme  $u = K\hat{x} = K(x - e)$ , on peut alors donner le théorème suivant.

**Théorème 3.3.1.** *Pour un réel  $\theta > 0$  donné, s'il existe des matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F = F^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$  telles que  $\forall (\xi_e^j, \xi_x^j) \in \mathcal{T}(\varepsilon) \times \mathcal{T}(\varepsilon)$  (voir équation (3.88)), l'inégalité matricielle*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_\infty^T(\theta, K(\xi_x - \xi_e^j))P + P\mathcal{A}_\infty(\theta, K(\xi_x - \xi_e^j)) + \zeta_\ell P & -F(N(\xi_x^j) + R)K \\ -(F(N(\xi_x^j) + R)K)^T & (2, 2) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.89)$$

est vérifiée avec

$$(2, 2) = (A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K)^T F + F(A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K) + \zeta_\ell F,$$

alors la commande basée sur un observateur suivante

$$u(\hat{x}) = K\hat{x} \quad (3.90)$$

stabilise le système bilinéaire (3.84) avec un taux de convergence  $\zeta_\ell$ ,  $\forall x_0$  tel que  $\|x_0\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P, F)}{2\lambda_{\max}(P, F)}}\varepsilon$  et en posant  $\hat{x}_0 = 0$ . ■

*Démonstration.* On s'intéresse au système augmenté (3.86) ayant pour état  $[e^T \ x^T]^T$ .

On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V = x^T F x + e^T P e, \quad (3.91)$$

dont la dérivée le long de la trajectoire du système (3.86) est donné par

$$\dot{V} = x^T \Pi_x x + e^T \Pi_e e + x^T \Pi_{xe} e + e^T \Pi_{xe}^T x \quad (3.92)$$

avec

$$\Pi_x = (A_0 + (N(x) + R)K)^T F + F(A_0 + (N(x) + R)K), \quad (3.93a)$$

$$\Pi_e = \mathcal{A}_\infty^T(\theta, u)P + P\mathcal{A}_\infty(\theta, u), \quad (3.93b)$$

$$\Pi_{xe} = -F(N(x) + R)K. \quad (3.93c)$$

A partir des expressions (3.93), la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov (3.91) est équivalente à la validité de l'inégalité matricielle (3.89) sur les  $2^{2n}$  sommets du polytope convexe  $\mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon)$  (voir [AGB94, AT98]).

Supposons que l'inégalité matricielle (3.89) est vérifié sur les  $2^{2n}$  sommets du polytope convexe  $\mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon)$  et que  $\|x_0\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P, F)}{2\lambda_{\max}(P, F)}}\varepsilon$ .

En posant  $\hat{x}_0 = 0$ , on a  $e_0 = x_0$ . Puisque

$$\|x_0\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P, F)}{2\lambda_{\max}(P, F)}}\varepsilon, \quad (3.94)$$

et puisque  $\left\| \begin{bmatrix} e_0^T & x_0^T \end{bmatrix}^T \right\|^2 = \|e_0\|^2 + \|x_0\|^2$ , on obtient

$$\left\| \begin{bmatrix} e_0 \\ x_0 \end{bmatrix} \right\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P, F)}{\lambda_{\max}(P, F)}}\varepsilon. \quad (3.95)$$

Supposons par l'absurde l'existence d'un réel  $t_2 > 0$  tel que

$$\begin{bmatrix} e(t_2) \\ x(t_2) \end{bmatrix} \notin \mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon). \quad (3.96)$$

Par continuité, il existe  $t_1 < t_2$  tel que

$$\begin{bmatrix} e(t_1) \\ x(t_1) \end{bmatrix} \in \text{fr}(\mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon)), \quad (3.97)$$

où  $\text{fr}(\mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon))$  est la frontière de  $\mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon)$ .

L'inégalité (3.89) nous permet d'établir que  $\dot{V} \leq -\zeta_\ell V$  sur  $\mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon)$ , ce qui permet d'assurer un taux de convergence exponentielle  $\zeta_\ell$  de la fonction de Lyapunov et d'établir que,  $\forall t \leq t_1$

$$\left\| \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P, F)}{\lambda_{\min}(P, F)}} \left\| \begin{bmatrix} e_0 \\ x_0 \end{bmatrix} \right\| \quad (3.98)$$

et donc en insérant (3.95) dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\left\| \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \right\| < \varepsilon \quad (3.99)$$

en particulier pour  $t = t_1$ , ce qui est en contradiction avec (3.97).

Ainsi l'hypothèse de l'existence d'un réel  $t_2 > 0$  tel que

$$\begin{bmatrix} e(t_2) \\ x(t_2) \end{bmatrix} \notin \mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon) \quad (3.100)$$

est fausse, d'où  $\forall t > 0$

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}(\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\varepsilon) \quad (3.101)$$

et donc, l'inégalité (3.89) vérifie bien la stabilité de l'état. •

- Etape 1 : Fixer un réel  $\varepsilon > 0$  permettant de définir l'ensemble des sommets  $\mathcal{T}(\varepsilon)$  de  $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ .  
 Etape 2 : Trouver une matrice de gain  $K$  telle que le théorème 1.5.2 est vérifié. Si on n'obtient pas de solution, revenir à l'étape 1 en choisissant un  $\varepsilon$  plus petit, sinon passer à l'étape suivante.  
 Etape 3 : Trouver  $\theta > 0$  tel que l'inégalité (3.89) est vérifiée sur les sommets de  $\mathcal{T}(\varepsilon) \times \mathcal{T}(\varepsilon)$ , où  $P$  et  $F$  sont des matrices à déterminer et où la matrice du gain  $K$  est donnée par l'étape 2. Si on n'obtient pas de solution, revenir à l'étape 1 en choisissant un  $\varepsilon$  plus petit.

### 3.3.2 Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre plein

Dans cette section, on considère que l'observateur fonctionnel avec la fonctionnelle est  $z = x$ , (voir le filtre (2.51) présenté à la section 2.3 du chapitre 2 et le théorème 3.2.3 avec  $B = 0$  et  $D = 0$ ).

Comme dans la section précédente, si  $x \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$  alors avec  $\hat{x}_0 = 0$ , on a  $e_0 \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$ , comme  $u = K\hat{z} = K\hat{x} = K(x - e)$ , on peut alors donner le théorème suivant.

**Théorème 3.3.2.** *Si il existe des matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times (p+(m+1)(n+p))}$  et  $F = F^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que  $\forall (\xi_e^j, \xi_x^j) \in \mathcal{T}(\varepsilon) \times \mathcal{T}(\varepsilon)$  (voir equation (3.88)), la LMI*

$$\begin{bmatrix} (1, 1) + \zeta_\ell P & -F(N(\xi_x^j) + R) \\ -(N(\xi_x^j) + R)^T F & (A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K)^T F + F(A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K) + \zeta_\ell F \end{bmatrix} < 0 \quad (3.102)$$

est vérifiée avec

$$(1, 1) = (H_{01} + \sum_{i=1}^m H_{i1} K(\xi_e - \xi_x)_i^j)^T P + P(H_{01} + \sum_{i=1}^m H_{i1} K(\xi_e - \xi_x)_i^j)$$

$$+ (H_{02} + \sum_{i=1}^m H_{i2} K(\xi_e - \xi_x)_i)^T Y^T + Y(H_{02} + \sum_{i=1}^m H_{i2} K(\xi_e - \xi_x)_i),$$

où  $K$  est donné par le théorème 1.5.2 et  $K(\xi_e - \xi_x)_i^j$  représente la  $i$ -ème composante de  $K(\xi_e^j - \xi_x^j)$ ,

alors la commande linéaire basée sur un observateur suivante

$$u(t) = K\hat{x} \quad (3.103)$$

stabilise le système bilinéaire (3.84) avec un taux de convergence  $\zeta_\ell$ ,  $\forall x_0$  tel que  $\|x_0\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P,F)}{2\lambda_{\max}(P,F)}}\varepsilon$  et en posant  $\hat{x}_0 = 0$ . ■

*Démonstration.* Similaire à la preuve du théorème 3.3.1. •

Etape 1 : Fixer un réel  $\varepsilon > 0$  permettant de définir l'ensemble des sommets  $\mathcal{T}(\varepsilon)$  de  $\mathcal{Q}(\varepsilon)$

Etape 2 : Trouver une matrice  $K$  telle que le théorème 1.5.2 est vérifié. Si on n'obtient pas de solution, revenir à l'étape 1 en choisissant un  $\varepsilon$  plus petit, sinon passer à l'étape suivante.

Etape 3 : Trouver  $Y = PZ$ ,  $P$  et  $F$  telles que la LMI (3.102) est vérifiée sur l'ensemble de sommets  $\mathcal{T}(\varepsilon) \times \mathcal{T}(\varepsilon)$ , ( $(A_0, C)$  doit être détectable). Si on n'obtient pas de solution, revenir à l'étape 1 en choisissant un  $\varepsilon$  plus petit, sinon passer à l'étape suivante.

Etape 4 : Calculer  $E$ ,  $H_i$ ,  $J_i$  à partir de (2.55) et (2.91) pour finaliser la synthèse de l'observateur.

### 3.3.3 Synthèse de la commande linéaire basée sur un observateur : avec l'observateur fonctionnel d'ordre réduit

Comme dans la partie précédente, on doit donc effectuer le calcul préalable du gain  $K$  à partir de la commande linéaire par retour d'état (voir le théorème 1.5.2).

De façon analogue à ce qui a été fait dans la section 3.1.3.2, on définit

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}, \quad (3.104)$$

avec une matrice  $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$  telle que  $\mathcal{T}$  est inversible.

Comme dans la section 3.1.3.2, on définit

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.105)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} u &= K\hat{x}(t) = K\mathcal{T}^{-1} \begin{bmatrix} y^T & \hat{z}^T \end{bmatrix}^T \\ &= K\mathcal{T}_1 Cx + K\mathcal{T}_2 \hat{z} \\ &= K\mathcal{T}_1 Cx + K\mathcal{T}_2 (Lx - e) \end{aligned}$$

$$= K(x - \mathcal{T}_2 e), \quad (3.106)$$

où  $\widehat{z}(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$  est donné par la sortie de l'observateur fonctionnel (3.18) et est l'estimation de  $z(t) = Lx(t)$ . Grâce à l'observateur réduit (estimant  $z(t)$ , d'où l'erreur d'observation,  $e(t) = Lx - \widehat{z}$ ), on réduit la taille de l'observateur en évitant les redondances, c'est-à-dire en évitant d'estimer les sorties mesurées.

Pour pouvoir borner le signal de commande, on considère que, préalablement, un changement de base a été effectué, la sortie mesurée s'écrit alors :  $C = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}$ , ainsi on peut choisir  $L = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$  pour  $\mathcal{T}$  soit inversible. Avec  $x_2 = Lx$ , on a  $x = \begin{bmatrix} y^T & x_2^T \end{bmatrix}^T$ . Ceci permet d'assurer que si  $x \in \mathcal{Q}(\varepsilon)$  en posant  $\widehat{z} = 0$ , alors  $T_2 e_0 \in \mathcal{Q}_e(\varepsilon)$  où

$$\mathcal{Q}_e(\varepsilon) = \underbrace{[-\varepsilon, \varepsilon] \times \dots \times [-\varepsilon, \varepsilon]}_{(n-p)\text{elements}}. \quad (3.107)$$

L'ensemble des sommets du polytope  $\mathcal{Q}_e(\varepsilon)$  est

$$\mathcal{T}_e(\varepsilon) = \left\{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_i \dots \delta_{n-p}]^T \in \mathbb{R}^{n-p} \mid \forall i \in [1, n-p], \delta_i = \pm \varepsilon \right\}. \quad (3.108)$$

On peut maintenant donner le théorème suivant.

**Théorème 3.3.3.** *S'il existe des matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{r \times (p+(m+1)(r+p))}$  et  $F = F^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que  $\forall (\xi_e^j, \xi_x^j) \in \mathcal{T}_e(\varepsilon) \times \mathcal{T}(\varepsilon)$  (voir les équations (3.88)), l'inégalité matricielle*

$$\begin{bmatrix} (1, 1) + \zeta_\ell P & -F(N(\xi_x^j) + R)\mathcal{T}_2 \\ -(F(N(\xi_x^j) + R)\mathcal{T}_2)^T & (A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K)^T F + F(A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K) + \zeta_\ell F \end{bmatrix} < 0 \quad (3.109)$$

est vérifiée avec

$$\begin{aligned} (1, 1) = & (H_{01} + \sum_{i=1}^m H_{i1}(K(\xi_e - \xi_x)_i^j)^T P + P(H_{01} + \sum_{i=1}^m H_{i1}(K(\xi_e - \xi_x)_i^j))) \\ & + (H_{02} + \sum_{i=1}^m H_{i2}(K(\xi_e - \xi_x)_i^j))^T Y^T + Y(H_{02} + \sum_{i=1}^m H_{i2}(K(\xi_e - \xi_x)_i^j)), \end{aligned}$$

où  $K$  est donné par le théorème 1.5.2 et  $K(\xi_e - \xi_x)_i^j$  représente la  $i$ -ème composante de  $K(\xi_e^j - \xi_x^j)$ ,

alors la commande linéaire basée sur un observateur suivante

$$u(t) = K(\mathcal{T}_1 y + \mathcal{T}_2 \widehat{z}) \quad (3.110)$$

stabilise le système bilinéaire (3.84) avec un taux de convergence  $\zeta_\ell$ ,  $\forall x_0$  tel que  $\|x_0\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P, F)}{2\lambda_{\max}(P, F)}} \varepsilon$  et en posant  $\widehat{x}_0 = 0$ . ■



*Démonstration.* On s'intéresse au système augmenté (3.86) ayant pour état  $[e^T \ x^T]^T$  et pour commande  $u = K\hat{x}(t) = K\mathcal{T}^{-1} [y^T \ \hat{z}^T]^T$ . Ceci donne pour la dynamique de l'état

$$\dot{x} = A_0x + N(x)Kx + RKx - (N(x) + R)K\mathcal{T}_2e. \quad (3.111)$$

La fin de la preuve est similaire à celle du théorème 3.3.1. •

Etape 1 : Fixer un réel positif  $\varepsilon > 0$  permettant de définir  $\mathcal{T}_e(\varepsilon)$  et  $\mathcal{T}(\varepsilon)$ .

Etape 2 : Trouver la matrice  $K$  telle que le théorème 1.5.2 est vérifié. Si on n'obtient pas de solution, revenir à l'étape 1 en choisissant un  $\varepsilon$  plus petit, sinon passer à l'étape suivante.

Etape 3 : Trouver  $Y = PZ$ ,  $P$  et  $F$  telles que la LMI (3.109) est vérifiée sur l'ensemble de sommets de  $\mathcal{T}_e(\varepsilon) \times \mathcal{T}(\varepsilon)$ , ( $(A_0, C)$  doit être détectable). Si on n'obtient pas de solution, revenir à l'étape 1 en choisissant un  $\varepsilon$  plus petit, sinon passer à l'étape suivante.

Etape 4 : Calculer  $E$ ,  $H_i$ ,  $J_i$  à partir de (2.55) et (2.91).

### 3.3.4 Stabilité locale de la commande linéaire basée sur un observateur

Dans le théorème suivant, nous allons assurer l'existence d'un réel  $\varepsilon$  satisfaisant les théorèmes précédents sous les conditions  $(A_0, C)$  détectable et  $(A_0, R)$  stabilisable.

Grâce à la mise en forme donnée par le système augmenté (3.86) et en ajoutant une saturation sur les commandes, on peut énoncer le théorème suivant.

**Théorème 3.3.4.** *Si un observateur est obtenu pour un choix de  $\varepsilon$  donné, s'il existe des matrices  $P_1 = P_1^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que  $\forall X_j \in \mathcal{T}(\varepsilon)$  (voir equation (3.88)) et si la LMI*

$$P_1A_0^T + A_0P_1 + Y_1^T N(X_j)^T + N(X_j)Y_1 + RY_1 + Y_1^T R^T < 0 \quad (3.112)$$

*est vérifiée, alors, avec la matrice du gain  $K = Y_1P_1^{-1} = [k_1^T(t) \ \dots \ k_m^T(t)]^T$ , la commande basée sur un observateur suivante*

$$u_i(\hat{x}) = \max(k_i\hat{x}, \alpha_i) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.113)$$

*stabilise localement le système bilinéaire (3.84), où  $\alpha_i > 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont réels donnés et  $k_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  de la matrice de gain  $K$ .* ■

*Démonstration.* De façon similaire à la preuve du théorème 3.2.4 et en appliquant la même démarche que dans la preuve par l'absurde du théorème (3.3.1), on a la stabilité locale de la commande (3.113). •

On a bien prouvé la stabilité locale de la commande linéaire basée sur un observateur. Cependant comme nous manquons de renseignements sur les ensembles d'initialisation de l'état et de l'erreur d'observation permettant d'assurer la stabilité, nous allons utiliser une approche LMI afin de définir ces ensembles.

Pour éviter le côté trop local de cette commande linéaire et palier au côté souvent lent de la commande quadratique au voisinage de l'origine, nous allons combiner la commande quadratique et la commande linéaire dans la section suivante.

## 3.4 Combinaison des commandes quadratique et linéaire basée sur un observateur

### 3.4.1 Synthèse de la loi de commande

On considère les systèmes bilinéaires du type

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + \sum_{i=1}^m A_i u_i x + Ru \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.114)$$

vérifiant les hypothèses 1.5.3 ( $A_0$  quasi stable), 1.5.4 ( $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0\}$ ) et 3.4.1.

**Hypothèse 3.4.1.**  $(A_0, R)$  est stabilisable.

Dans cette section, le but est d'étudier la stabilité de la combinaison des commandes quadratique et linéaire basées sur un observateur pour le système (3.114). L'étude séparée de la stabilité de chacune de ces deux commandes basées sur un observateur a été faite dans les sections 3.2 et 3.3.

Le système (3.114), commandé par une commande quadratique, converge asymptotiquement vers 0 si les hypothèses 1.5.3 et 1.5.4 sont vérifiées et si  $A_0$  est quasi stable mais ne converge pas exponentiellement vers 0. C'est pourquoi, sous certaines conditions, nous proposons de passer à une commande linéaire dès que le système arrive dans un voisinage donné de 0. La synthèse d'une telle commande nécessite de déterminer les conditions permettant de passer d'une commande basée sur un observateur à l'autre, tout en assurant la stabilité du système commandé.

On considère qu'une borne pour  $\|e(0)\|_{\max}$  est connue. Nous allons utiliser une commande quadratique saturée, on peut donc définir l'ensemble des sommets du polytope contenant  $u(t)$  ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{ \beta = [\beta_1 \dots \beta_m]^T \in \mathbb{R}^m \mid \forall i \in [1, m], \beta_i \in \{-\alpha_i \gamma_i, \alpha_i \gamma_i\} \right\}. \quad (3.115)$$

On cherche désormais la condition de passage de la commande quadratique à la commande linéaire : le théorème suivant donne une solution à ce problème.

**Théorème 3.4.1.** *Considérons que l'hypothèse 3.4.1 est vérifiée, considérons aussi que les conditions du théorème 3.2.4 sont satisfaites, on peut donc choisir des réels  $\alpha_i$  et  $\gamma_i$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$  afin de définir la commande quadratique et ses bornes. Ceci nous permet d'obtenir l'ensemble  $\mathcal{S}$  (voir (3.115)) des sommets du polytope convexe auquel appartient la commande.*

*Si pour cet ensemble  $\mathcal{S}$ , il existe*

*i) – des réels  $\theta_1$  et  $\zeta_{21}$  et une matrice  $P_{21} = P_{21}^T > 0$  satisfaisant la LMI du théorème 3.2.2,*

*ou*

*– un réel  $\zeta_{31}$  et des matrices  $Z_1, P_{31} = P_{31}^T > 0, Y_{31}$  satisfaisant le théorème 3.2.3.*

ii) des matrices  $K, P = P^T > 0, F = F^T > 0$  ou  $Y$  vérifiant l'une des trois inégalités matricielles suivantes

a) l'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_\infty^T(\theta_2, K(\xi_x^j - \xi_e^j))P + P\mathcal{A}_\infty(\theta_2, K(\xi_x - \xi_e^j)) + \zeta_\ell P & -F(N(\xi_x^j) + R)K \\ -(F(N(\xi_x^j) + R)K)^T & (2, 2) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.116)$$

avec

$$(2, 2) = (A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K)^T F + F(A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K) + \zeta_\ell F$$

et  $\theta_2$  donné,  $\forall (\xi_e^j, \xi_x^j) \in \mathcal{T}(\varepsilon_e) \times \mathcal{T}(\varepsilon_x)$ ,

b) l'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} (1, 1) + \zeta_\ell P & -F(N(\xi_x^j) + R) \\ -(F(N(\xi_x^j) + R))^T & (2, 2) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.117)$$

avec

$$\begin{aligned} (1, 1) = & (H_{01} + \sum_{i=1}^m H_{i1} K(\xi_e - \xi_x)_i^j)^T P + P(H_{01} + \sum_{i=1}^m H_{i1} K(\xi_e - \xi_x)_i^j) \\ & + (H_{02} + \sum_{i=1}^m H_{i2} K(\xi_e - \xi_x)_i^j)^T Y^T + Y(H_{02} + \sum_{i=1}^m H_{i2} K(\xi_e - \xi_x)_i^j) \end{aligned}$$

et

$$(2, 2) = (A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K)^T F + F(A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K) + \zeta_\ell F$$

$\forall (\xi_e^j, \xi_x^j) \in \mathcal{T}(\varepsilon_e) \times \mathcal{T}(\varepsilon_x)$ ,

c) l'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} (1, 1) + \zeta_\ell P & -F(N(\xi_x^j) + R)\mathcal{T}_2 \\ -(F(N(\xi_x^j) + R)\mathcal{T}_2)^T & (2, 2) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.118)$$

avec

$$\begin{aligned} (1, 1) = & (H_{01} + \sum_{i=1}^m H_{i1} (K(\xi_e - \xi_x)_i^j))^T P + P(H_{01} + \sum_{i=1}^m H_{i1} (K(\xi_e - \xi_x)_i^j)) \\ & + (H_{02} + \sum_{i=1}^m H_{i2} (K(\xi_e - \xi_x)_i^j))^T Y^T + Y(H_{02} + \sum_{i=1}^m H_{i2} (K(\xi_e - \xi_x)_i^j)), \end{aligned}$$

$$(2, 2) = (A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K)^T F + F(A_0 + (N(\xi_x^j) + R)K) + \zeta_\ell F$$

$\forall (\xi_e^j, \xi_x^j) \in \mathcal{T}(\varepsilon_e) \times \mathcal{T}(\varepsilon_x)$ ,

alors la combinaison des commandes quadratique et linéaire basées sur un observateur stabilise le système bilinéaire (3.114) avec

1. si  $t < t_1$  ou  $\|\hat{x}\| > \varepsilon_2$  alors

$$u_i(\hat{x}) = -\gamma_i \operatorname{sgn}((A_i \hat{x} + b_i)^T F \hat{x} \min |(A_i(\hat{x} + b_i)^T F \hat{x}|, \alpha_i) \quad (3.119)$$

avec  $\varepsilon_2 = \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P, F)}{\lambda_{\max}(P, F)}} \varepsilon_x$  et

$$t_1 = \frac{2}{\zeta_{i1}} \ln \left( \frac{\|e_0\|_{\max}}{\min(\varepsilon_e, \sqrt{1 - \mu} \varepsilon_x)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_{i1}) \lambda_{\max}(P, F)}{\lambda_{\min}(P_{i1}) \lambda_{\min}(P, F)}} \right) \quad (3.120)$$

pour  $i = 2$  ou  $i = 3$  et  $\mu$  réel tel que  $0 < \mu < 1$ ,

2. si  $t \geq t_1$  et  $\|\hat{x}\| \leq \varepsilon_2$  alors  $u(\hat{x}) = K\hat{x}$ . ■

*Démonstration.* Pour la partie quadratique du contrôle, comme  $e = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement de l'erreur d'observation stable et comme la LMI (3.64) (où  $P_{21}$  remplace de  $P_2$ ) ou la LMI (3.65) (où  $P_{31}$  remplace de  $P_3$ ) est satisfaite sur l'ensemble  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S}$  est l'ensemble des sommets du polytope contenant la commande, voir (3.115)) alors on a

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_{i1})}{\lambda_{\min}(P_{i1})}} \|e_0\| \exp \left( -\frac{\zeta_{i1}}{2} t \right) \quad (3.121)$$

avec  $i = 2$  ou  $i = 3$ . On pose  $e_{02}$  la valeur de l'erreur d'observation à un instant  $t_2$  avec  $t_2 \geq t_1$  et  $\|\hat{x}(t_2)\| < \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P, F)}{\lambda_{\max}(P, F)}} \varepsilon_x$ , pour un réel  $\mu$  donné tel que  $0 < \mu < 1$ .  $t_2$  est l'instant du changement de la commande. Puisque les conditions du théorème 3.2.4 sont remplies,  $t_2$  existe. Comme  $t_2 > t_1$  en injectant la relation (3.120) dans la majoration (3.121), on obtient

$$\|e_{02}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P, F)}{\lambda_{\max}(P, F)}} \min(\varepsilon_e, \sqrt{1 - \mu} \varepsilon_x). \quad (3.122)$$

Puisque l'inégalité matricielle (3.116), (3.117) ou (3.118) assure que l'erreur d'observation vérifie

$$\|e\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P, F)}{\lambda_{\min}(P, F)}} \|e_{02}\|, \quad (3.123)$$

alors l'inégalité (3.122) implique  $\|e\| \leq \varepsilon_e$  pour  $t \geq t_2$  (voir la preuve par l'absurde du théorème 3.3.1).

De plus comme  $\|\hat{x}\| \geq \varepsilon_2$  au passage à la commande linéaire basée sur un observateur, on a pour  $t \geq t_2$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\leq \frac{\lambda_{\max}(P, F)}{\lambda_{\min}(P, F)} \|x_{02}\|^2 = \frac{\lambda_{\max}(P, F)}{\lambda_{\min}(P, F)} \left( \|e_{02}\|^2 + \|\hat{x}_{02}\|^2 \right) \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(P, F)}{\lambda_{\min}(P, F)} \left( \frac{\lambda_{\min}(P, F)}{\lambda_{\max}(P, F)} (1 - \mu) \varepsilon_x^2 + \frac{\lambda_{\min}(P, F)}{\lambda_{\max}(P, F)} \mu \varepsilon_x^2 \right) \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon_x^2 \tag{3.124}$$

avec  $x(t_2) = x_{02}$  et  $\hat{x}(t_2) = \hat{x}_{02}$ .

Ainsi on s'assure d'avoir les conditions initiales adéquates pour la commande linéaire basée observateur et donc la stabilité asymptotique de la combinaison des deux commandes. •

Finalement, nous rappelons les six étapes de construction de la combinaison des commandes quadratique et linéaire basée sur un observateur.

- 1 Vérifier les hypothèses 1.5.3, 1.5.4 et 3.4.1.
- 2 Synthétiser une commande quadratique par retour d'état à partir des bornes de  $u(t)$  de l'étape 2 (voir l'item (i) du théorème ci-dessus).
- 3 Synthétiser un observateur LPV à partir des bornes de  $u(t)$  de la commande quadratique.
- 4 Trouver  $\varepsilon > 0$  permettant la synthèse d'une commande linéaire par retour d'état.
- 5 Résoudre l'une des trois LMI de l'item (ii) du théorème ci-dessus en utilisant le gain  $K$  calculé à l'étape précédente. Si aucune solution n'est trouvée, recommencer à l'étape 4 avec un  $\varepsilon$  plus petit.
- 6 Synthétiser un observateur LPV à partir de la solution de la LMI résolue à l'étape 5.
- 7 Déterminer  $t_1$  et  $\varepsilon_2$  qui sont les conditions de passage d'une commande à l'autre.

L'existence d'un réel  $\varepsilon$  choisi à l'étape 4 et permettant de valider l'étape 5 est assuré par le théorème 3.3.4.

### 3.4.2 Exemple

Afin d'illustrer notre approche, nous allons effectuer la synthèse d'une commande quadratique basée sur un observateur LPV pour le système bilinéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ux + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \tag{3.125}$$

où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $u(t)$  représentent toujours les même signaux.

Avec  $F = I_2$ , l'hypothèse 1.5.3 est satisfaite. De plus, les hypothèses 1.5.4 et 3.4.1 sont aussi vérifiées.

La commande quadratique est, avec  $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$ ,

$$u(\hat{x}) = -\operatorname{sgn}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_2 + 2\hat{x}_2) \min(|\hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\hat{x}_2 + 2\hat{x}_2|, 1), \tag{3.126}$$

En appliquant le théorème 3.2.4 avec  $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$ , l'observateur fonctionnel d'ordre plein (2.51) et  $\zeta_{31} = 1$ , on obtient

$$Z = \begin{bmatrix} 0.0357 & -1 & 0.0357 & -0.1429 & -0.0357 & 1 & 0.1071 \\ -0.2857 & -0.25 & -0.2857 & -0.1071 & 0.2857 & 0.25 & 0.3929 \end{bmatrix}$$

et

$$P = 10^8 \times \begin{bmatrix} 4.1944 & 0 \\ 0 & 4.1944 \end{bmatrix}. \quad (3.127)$$

Finalement, les matrices de l'observateur sont les suivantes

$$H_0 = \begin{bmatrix} -1 & -0.25 \\ 0.25 & -1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.9375 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.0625 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On choisit  $\|e_0\|_{\max} = 10\sqrt{2}$  et  $\mu = 0.5$ .

Avec  $\varepsilon = 1$  et  $\zeta = 0.5$ , la commande linéaire a le gain suivant

$$K = \begin{bmatrix} -0.1367 & 0.2780 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

avec la matrice de Lyapunov associée suivante

$$P_1 = \begin{bmatrix} 104.7874 & -23.4743 \\ -23.4743 & 67.0349 \end{bmatrix}, \quad (3.129)$$

ce qui donne  $\frac{\lambda_{\min}(P_1)}{\lambda_{\max}(P_1)} = 0.4808$ . On a vérifié l'inégalité matricielle (3.117) avec le gain  $K$  et l'observateur fonctionnel d'ordre plein synthétisé dans le début de l'exemple.

On obtient alors l'instant de commutation des commandes  $t_1 = 4.5269$  et une valeur pour l'état estime de  $\varepsilon_2 = \sqrt{0.5}$ .

La commande  $u(t)$ , les erreurs d'estimation et les états du systèmes (3.125) sont donnés pas les figures 3.33 à 3.37.

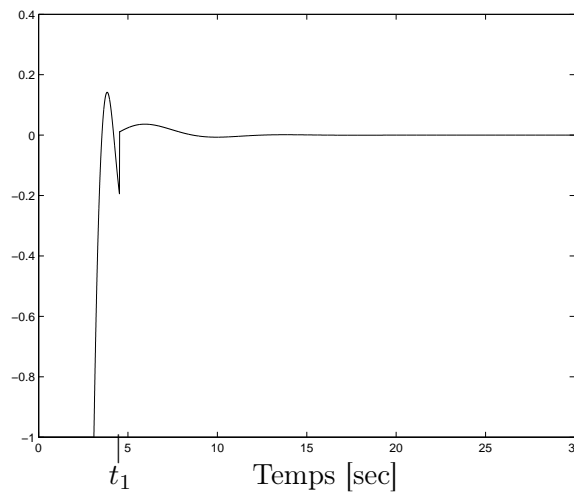


FIG. 3.33: Entrée  $u(t)$

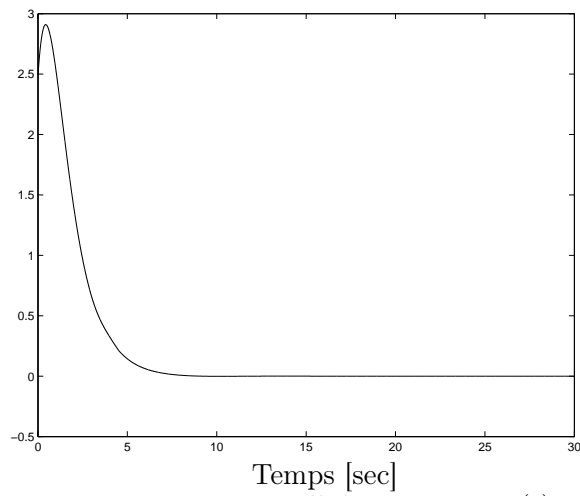


FIG. 3.34: Erreur d'observation  $e_1(t)$

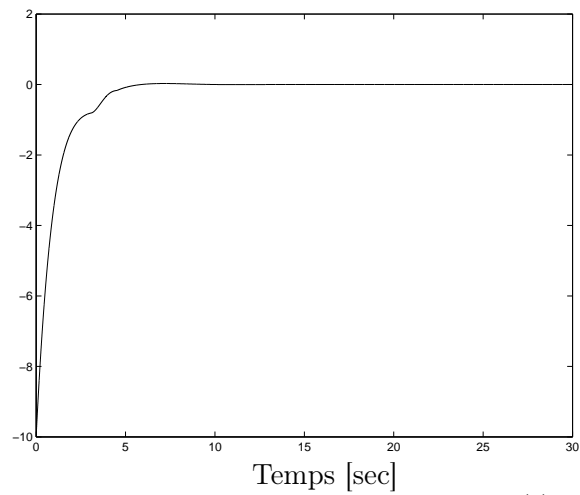


FIG. 3.35: Erreur d'observation  $e_2(t)$

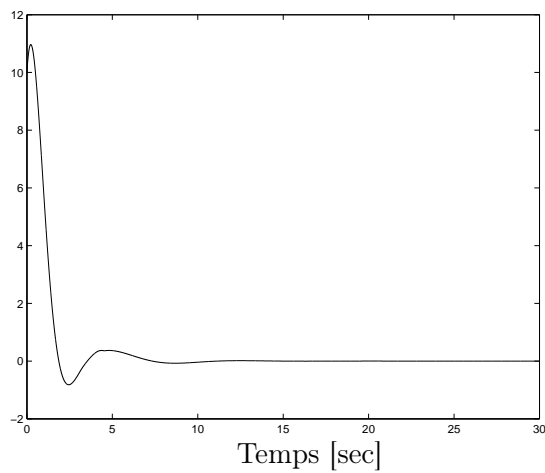


FIG. 3.36: Etats  $x_1(t)$

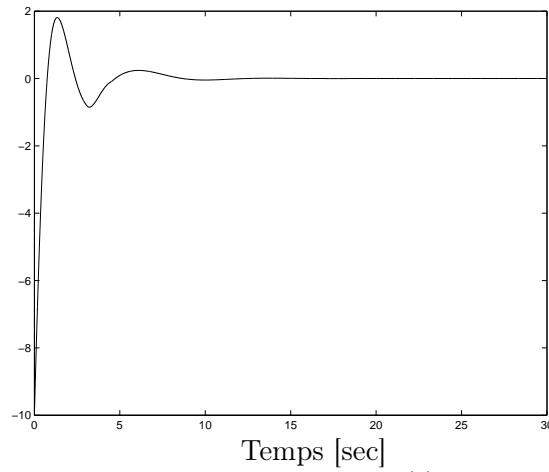


FIG. 3.37: États  $x_2(t)$

Si on applique la commande linéaire seule, les états divergent comme le montrent les figures 3.38 et 3.39.

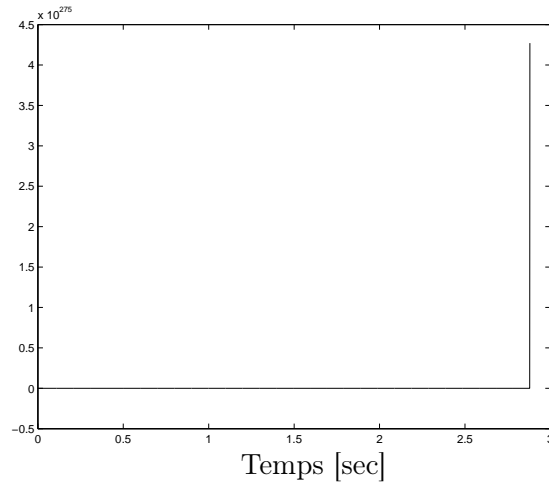


FIG. 3.38: États  $x_1(t)$

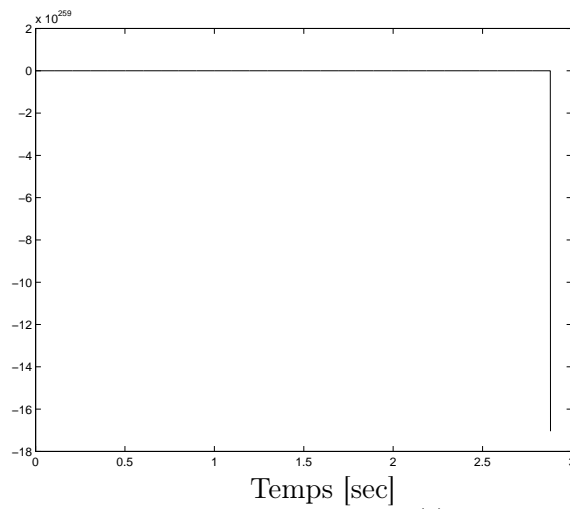


FIG. 3.39: États  $x_2(t)$



Si on applique la commande quadratique seule, la convergence est légèrement plus lente que dans le cas où on a combiné les deux commandes. Les états sont alors donnés par les figures 3.40 et 3.41.

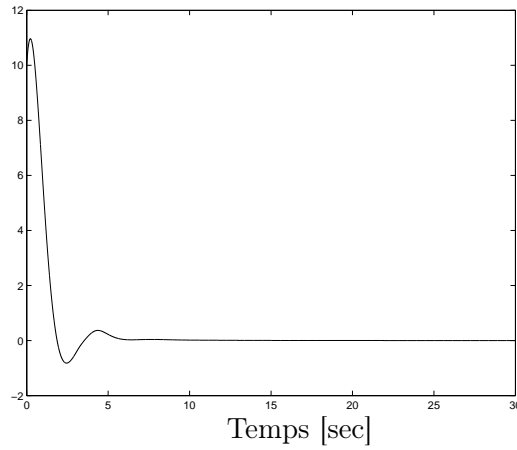


FIG. 3.40: Etats  $x_1(t)$

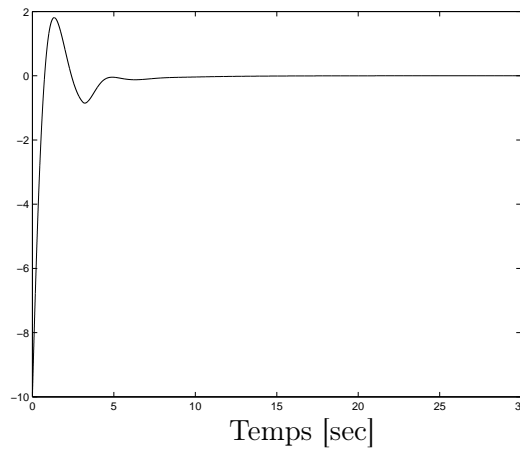


FIG. 3.41: Etats  $x_2(t)$

Pour comparer la rapidité, on réalise le zoom suivant.

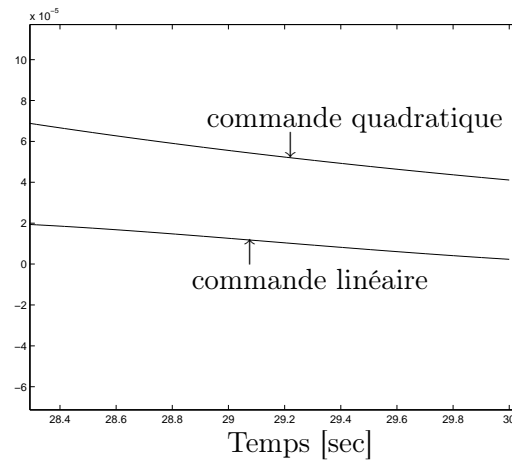


FIG. 3.42: Etats  $x_2(t)$

Un autre avantage de la commande linéaire est la possibilité d'ajouter des critères de robustesse (voir [MTG02]) ou d'atténuation de perturbation, ce qui est laissé en perspective.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la commande basée sur un observateur pour les systèmes bilinéaires. Afin de pouvoir utiliser les observateurs du chapitre 2, nous avons principalement traité des commandes saturées. Pour chaque type de commande, l'observateur à grand gain, l'observateur fonctionnel et l'observateur fonctionnel réduit ont été utilisés pour la réalisation de la commande basée sur un observateur.

Des conditions de stabilité et des procédures de synthèse ont été présentées. Une approche algébrique pour les commande bang-bang et linéaire mène à des théorèmes assurant la stabilité des systèmes bilinéaires commandés par l'intermédiaire de LMI. Une approche analytique pour les commandes quadratique et linéaire permet, sous des conditions données, d'assurer la stabilité des systèmes bilinéaires commandés. Nous avons traité dans l'ordre la commande bang-bang, la commande quadratique, la commande linéaire puis la commande quadratique combinée à la commande linéaire.

Certains problèmes restent ouverts, dont la stabilité de la commande quadratique basée sur un observateur avec un système bilinéaire dont la matrice  $A_0$  est instable. D'autres perspectives sont possibles, telles que la réalisation de commandes basées sur un observateur fonctionnel d'ordre réduit, mais où, plutôt que de d'avoir une fonctionnelle constituée par le complément de la sortie mesurée par rapport à l'état, elle peut être le complément de la sortie mesurée par rapport à la commande. En outre, l'association d'autres types de commandes avec un observateur peut être étudiée.



# Chapitre 4

## Synthèse d'un observateur à deux étages

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>123</b>
<b>4.2</b>	<b>Présentation du système bilinéaire à deux étages</b>	<b>124</b>
<b>4.3</b>	<b>Observateur à deux étages : le premier sous-système est uniformément observable</b>	<b>126</b>
4.3.1	Synthèse de l'observateur pour le sous-système uniformément observable	126
4.3.2	Synthèse de l'observateur associé au deuxième sous-système	126
4.3.3	Stabilité de l'observateur à deux étages	128
4.3.4	Atténuation des perturbations avec stabilité	130
<b>4.4</b>	<b>Observateur à deux étages : le premier sous-système n'est pas uniformément observable</b>	<b>132</b>
4.4.1	Stabilité de l'observateur à deux étages	133
4.4.2	Atténuation des perturbations avec stabilité	133
<b>4.5</b>	<b>Exemple</b>	<b>136</b>
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>138</b>

---

### 4.1 Introduction

Dans la chapitre 2, la propriété de bornitude des commandes nous a conduit à une approche LMI polytopique pour la recherche des gains de l'observateur à grand gain et "fonctionnel". Les théorèmes établis ne donnent que des conditions suffisantes pour l'obtention de ces gains. Or, sous la même condition de bornitude des commandes, l'obtention d'un gain pour l'observateur à grand gain pour les systèmes bilinéaires uniformément observables est garanti analytiquement (voir [GHO92]). Cependant l'observabilité uniforme est un conservatisme qu'il faut rechercher à "relâcher". En effet l'observabilité uniforme impose qu'il n'existe pas d'entrée de commande non universelle, ce qui n'est pas toujours

le cas. Ainsi le fait que les commandes soient supposées bornées, ce qui n'est pas très contraignant en soi, nous a permis de synthétiser des observateurs fonctionnels avec une approche LMI polytopique, c'est-à-dire que certaines entrées peuvent être singulières.

L'objectif est d'utiliser l'analyse structurelle des systèmes bilinéaires pour mettre en évidence les propriétés géométriques qui permettront de séparer les parties observables des parties non observables afin de synthétiser un observateur. Cette séparation entre les espaces observables et non observable a été initiée pour proposer un estimateur à deux étages : chaque étage est associé à l'un de ces deux espaces permettant ainsi de relaxer les contraintes associées à la prise en compte des bornes des commandes  $u_i$  lors de la synthèse de l'estimateur.

Nous avons ainsi conçu des observateurs à deux étages (voir [GZSD07a, GZSD07b]) afin de séparer les dynamiques uniformément observables et celles qui ne le sont pas afin d'y appliquer les différents observateurs LPV présentés au chapitre 2.

Cette approche s'appuie sur des travaux réalisés sur les systèmes en cascade [MMT78] ou de grandes dimensions [Vid80a, Vid80b, Vid80c]. Sous certaines conditions la stabilité des systèmes "déconnectés" implique la stabilité des systèmes interconnectés. L'approche présentée dans ce chapitre peut en outre permettre l'association de divers types d'observateurs pour les systèmes bilinéaires de grandes dimensions. En s'appuyant sur la décomposition structurelle évoquée ci dessus, nous avons étudié le couplage de divers observateurs pour les systèmes bilinéaires.

Ce chapitre est scindé en quatre parties. Dans un premier temps, nous avons présenté la structure en cascade des systèmes bilinéaires étudiés. Dans la seconde partie, nous avons développé la synthèse de l'observateur à deux étages pour le cas où le premier sous-système est uniformément observable alors que, dans la troisième partie, nous avons développé la synthèse de l'observateur à deux étages dans le cas où le premier sous-système n'est pas uniformément observable. Enfin un exemple illustre les résultats de ce chapitre.

## 4.2 Présentation du système bilinéaire à deux étages

Dans cette partie, nous traitons uniquement de l'observation, pour des systèmes bilinéaires sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + \sum_{i=1}^m A_i u_i(t)x + Ru + Bw \\ y = Cx + Dw \\ z = Lx \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $y \in \mathbb{R}^p$  représente les mesures,  $u^T = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des commandes,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur à estimer où  $r \leq n$ . Le vecteur  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  représente le vecteur des perturbations (à énergie bornée). Les entrées sont considérées uniformément continues et bornées,  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$  où

$$\Omega = \{u : t \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \forall t \in \mathbb{R}^+, u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}, \mu_{i,\min} \leq \dot{u}_i(t) \leq \mu_{i,\max}, i = 1, \dots, m\}. \quad (4.2)$$

On suppose que le système (4.1) est décomposable de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(u) & 0 \\ \mathcal{A}_{21}(u) & \mathcal{A}_{22}(u) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\mathcal{A}_{k\ell}(u) = A_{k\ell}^0 + \sum_{i=1}^m A_{k\ell}^i u_i(t)$  avec  $k$  et  $\ell \in \{1, 2\}$  et  $\ell \leq k$ .

On a donc séparé les vecteurs initiaux ainsi  $x^T = [x_1^T, x_2^T]$ ,  $y^T = [y_1^T, y_2^T]$  et  $z = z_1 + z_2$ , ce qui permet de réécrire le système initial de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mathcal{A}_{11}(u)x_1 + R_1 u + B_1 w \\ y_1 = C_{11}x_1 + D_1 w \\ z_1 = L_1 x_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \mathcal{A}_{21}(u)x_1 + \mathcal{A}_{22}(u)x_2 + R_2 u + B_2 w \\ y_2 = C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + D_2 w \\ z_2 = L_2 x_2 \end{cases} \quad (4.5)$$

avec  $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  et  $n_1 + n_2 = n$ ,  $y_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$ ,  $y_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$  et  $p_1 + p_2 = p$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}^r$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^r$ .

Comme dans le chapitre 2,  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$  représente l'estimation de  $z(t)$  et  $e(t) \in \mathbb{R}^r$  sera l'erreur de filtrage, c'est-à-dire  $e = z - \hat{z}$ . De plus, on considère toujours la définition 2.1.1 pour caractériser l'atténuation des perturbations.

**Problème 4.2.1.** Dans ce chapitre, nous traitons de la synthèse de filtre fonctionnel  $\mathcal{H}_\infty$  pour les systèmes de type (4.3) en considérant deux cas

1. le système (4.4) est uniformément observable et (4.3) ne l'est pas <sup>4</sup> (voir la section 4.3).
2. les systèmes (4.3) et (4.4) ne sont pas uniformément observables (voir la section 4.4). △

*Remarque 4.2.1.* Le cas où le système (4.3) est uniformément observable a été étudié dans [Nij81, BCCG93, LFMH07, LFMH08]. □

Pour faciliter la lecture, les observateurs du chapitre 2 seront succinctement exposés succinctement.

<sup>4</sup>voir les travaux de Vidyasagar [Vid80b], Sontag *et al.* [SW95] ou Hespana *et al.* [HM99].

## 4.3 Observateur à deux étages : le premier sous-système est uniformément observable

### 4.3.1 Synthèse de l'observateur pour le sous-système uniformément observable

On considère dans cette section que le système (4.4) est uniformément observable. D'après [Wil77], il existe donc une matrice  $Q \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  (avec  $\det Q \neq 0$ ) telle que le système bilinéaire (4.4) se réécrit sous la forme canonique observable (voir l'annexe C) : le changement de base  $\tilde{x}_1 = Qx_1$ , correspondant à  $(A_{11}^i, C_{11}) \xrightarrow{Q} (\tilde{A}_{11}^i, \tilde{C}_{11})$ , donne la forme compagne pour  $(\tilde{A}_{11}^0, \tilde{C}_{11})$  et la forme triangulaire inférieure pour  $\tilde{A}_{11}^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). A partir des travaux de Gauthier *et al.* [GHO92] (on peut aussi regarder [DG91, DBGR92, DBB<sup>+</sup>93]), dans la base initiale, l'observateur à grand gain donné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \mathcal{A}_{11}(u)\hat{x}_1 + R_1 u - S_\infty^{-1}(\theta)C_{11}^T(C_{11}\hat{x}_1 - y_1) \\ \hat{z}_1 = L_1\hat{x}_1 \end{cases} \quad (4.6)$$

est un observateur exponentiel pour le système (4.4) avec  $S_\infty(\theta) = Q^{-1}\bar{S}_\infty(\theta)Q^{-T}$  et  $\bar{S}_\infty(\theta) = \bar{S}_\infty^T(\theta) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  donné par l'équation de Riccati suivante

$$-\theta\bar{S}_\infty(\theta) - \bar{A}^T\bar{S}_\infty(\theta) - \bar{S}_\infty(\theta)\bar{A} + \tilde{C}_{11}^T\tilde{C}_{11} = 0, \quad (4.7)$$

avec  $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\theta \in \mathbb{R}^{*+}$  suffisamment grand.

La dynamique de l'erreur d'observation peut alors se mettre sous la forme suivante avec  $\varepsilon_1 = x_1 - \hat{x}_1$  et  $e_1 = z_1 - \hat{z}_1$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \mathcal{A}_{11,\infty}(u, \theta)\varepsilon_1 + \mathcal{B}(\theta)w \\ e_1 = L_1\varepsilon_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

où

$$\mathcal{A}_{11,\infty}(u, \theta) = \mathcal{A}_{11}(u) - S_\infty^{-1}(\theta)C_{11}^T C_{11}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{B}(\theta) = B_1 - S_\infty^{-1}(\theta)C_{11}^T D_1. \quad (4.10)$$

La convergence de cet observateur peut être assurée par une approche LPV (voir le chapitre 2) ou analytique (voir notamment [GHO92]).

### 4.3.2 Synthèse de l'observateur associé au deuxième sous-système

Notons que même si la matrice  $L$  est de rang plein lignes, rien ne garantit que la matrice  $L_2$  le soit. Il s'en suit qu'en estimant  $z_2(t)$ , on estime alors des variables redondantes. A la différence de l'observateur à grand gain qui est d'ordre plein, il est intéressant de prendre

en compte cette redondance pour un observateur fonctionnel d'ordre réduit. Nous allons donc reformuler la fonctionnelle comme suit

$$z_2 = L_2 x_2 = U \begin{bmatrix} L_{r_2} \\ 0 \end{bmatrix} x_2 = U \begin{bmatrix} z_{r_2} \\ 0 \end{bmatrix} = U_{r_2} z_{r_2}, \quad (4.11)$$

où  $U \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est une matrice inversible (voir [RM71, LT85]), la matrice  $U_{r_2}$  correspond au  $r_2$  premières colonnes de la matrice  $U$ , la matrice  $L_{r_2} \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$  est de rang plein lignes et  $z_{r_2} = L_{r_2} x_2$ .

Par conséquent, afin de réduire la dimension du filtre fonctionnel, plutôt que d'étudier le sous-système (4.5) on étudie le sous-système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \mathcal{A}_{21}(u)x_1 + \mathcal{A}_{22}(u)x_2 + R_2 u + B_2 w \\ y_2 = C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + D_2 w \\ z_{r_2} = L_{r_2} x_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

puisque  $\dim(z_{r_2}) = \text{rang } L_2 \leq \dim(z_2)$ .

Le système (4.12) est couplé avec le système (4.4) via l'état  $x_1(t)$ . Pour la synthèse du filtre "du deuxième étage" pour le système (4.3), nous allons remplacer le système (4.5) par le sous-système découplé suivant (dédduit du système (4.12))

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = \mathcal{A}_{22}(u)\bar{x}_2 + R_2 u + B_2 w \\ \bar{y}_2 = C_{22}\bar{x}_2 + D_2 w \\ \bar{z}_{r_2} = L_{r_2}\bar{x}_2 \end{cases} \quad (4.13)$$

et on peut donc définir  $\bar{z}_2 = U_{r_2} L_{r_2} \bar{x}_2$ .

Dans cette section, nous ne faisons pas d'hypothèse sur l'observabilité uniforme du système (4.13).

Puisque le vecteur des entrées  $u$  est borné, un observateur pour le système (4.13) peut être synthétisé avec une approche LPV (voir chapitre 2, [GSZD07b] ou [GSZD08a]). Dans ce chapitre, seules les principales notations utilisées dans la suite sont rappelées. L'observateur a la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{\eta}} = \mathcal{H}(u)\eta + \mathcal{J}(u)y_2 + Gu \\ \hat{z}_{r_2} = \hat{\eta} + Ey_2 \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $\eta \in \mathbb{R}^{r_2}$  et où  $\hat{z}_{r_2}(t) \in \mathbb{R}^{r_2}$  représente l'estimation de  $\bar{z}_{r_2}(t)$  et avec  $\mathcal{H}(u) = H_0 + \sum_{i=1}^m H_i u_i$

et  $\mathcal{J}(u) = J_0 + \sum_{i=1}^m J_i u_i$ .

L'erreur de filtrage est définie comme suit

$$\bar{e}_{r_2} = \bar{z}_{r_2} - \hat{z}_{r_2} = L_{r_2}\bar{x}_2 - \hat{z}_{r_2} = \bar{e}_{r_2} - ED_2 w, \quad (4.15)$$



où

$$\bar{\varepsilon}_{r_2} = \Psi x_2 - \bar{\eta}, \quad (4.16a)$$

$$\Psi = L_{r_2} - EC_{22}. \quad (4.16b)$$

En prenant comme contrainte “ $ZE_2D_2 = 0$ ” (voir section 2.3.1), l'erreur de filtrage est paramétrée comme suit

$$\begin{cases} \dot{\bar{\varepsilon}}_{r_2} = (A_{u_1}(u) + ZA_{z_1}(u))\bar{\varepsilon}_{r_2} + (B_{u_1}(u) + ZB_{z_1}(u))w \\ \bar{e}_{r_2} = \bar{C}\bar{\varepsilon}_{r_2} + \bar{D}_1w \end{cases} \quad (4.17)$$

où  $Z$  est la matrice de gain à calculer et

$$A_{u_1}(u) = H_{0,11} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,11}, \quad A_{z_1}(u) = H_{0,21} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,21}, \quad (4.18a)$$

$$B_{u_1}(u) = L_{r_2}B_2 - E_{11}C_{22}B_2 - \left( \Upsilon_{0,11} + \sum_{i=1}^m u_i \Upsilon_{i,11} + (H_{0,11} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,11})E_{11} \right) D_2, \quad (4.18b)$$

$$B_{z_1}(u) = -E_{21}C_{22}B_2 - \left( \Upsilon_{0,21} + \sum_{i=1}^m u_i \Upsilon_{i,21} + (H_{0,21} + \sum_{i=1}^m u_i H_{i,21})E_{11} \right) D_2, \quad (4.18c)$$

$$\bar{C} = I_{r_2}, \quad \bar{D}_1 = -E_{11}D_2 \quad (4.18d)$$

avec

$$E = E_{11} + ZE_{21}, \quad (4.19a)$$

$$H_i = H_{i,11} + ZH_{i,21}. \quad (4.19b)$$

La synthèse du filtre 4.15 est détaillée dans la section 2.3.1. Si on remplace la contrainte  $ZE_2D_2 = 0$  par  $ED = 0$ , la synthèse du filtre est donnée dans la section 2.3.2.

### 4.3.3 Stabilité de l'observateur à deux étages

Puisque cette section est dédiée à la stabilité de l'erreur de filtrage, on s'intéresse donc à l'observateur seul : on pose  $w = 0$ . Le but de cette section est de montrer comment à partir d'observateurs pour les sous-systèmes (4.4) et (4.12), c'est-à-dire, à partir des deux observateurs (4.6) et (4.14), on peut obtenir un observateur pour le système (4.3).

Pour y parvenir, puisque nous utilisons la sortie mesurée réelle  $y_2(t)$  qui est notamment fonction de l'état  $x_1(t)$  et non la sortie “virtuelle”  $\bar{y}_2(t)$  qui est indépendante de  $x_1(t)$ , il est indispensable de compenser l'effet de  $x_1(t)$  au niveau de l'observateur (4.14). Le couplage dû à  $x_1(t)$  entre les sous-systèmes (4.4) et (4.5), représenté par les matrices  $A_{z_1}^i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) et  $C_{21}$ , est compensé dans le théorème suivant qui prouve la stabilité de l'observateur à deux étages à partir de la stabilité d'un l'observateur pour chacun des deux étages. L'approche proposée dans la démonstration est basée sur [Vid80a] (voir annexe E), ainsi que sur [GZSD07a, GZSD07b]. A la différence de ce mémoire, dans [GZSD07a, GZSD07b], nous avons posé  $z = x$  dans le système (4.1).

**Théorème 4.3.1.** *Le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11,\infty}(u, \theta) & 0 \\ \Psi \mathcal{A}_{21}(u) - \mathcal{J}(u)C_{21} & \mathcal{H}(u) \end{bmatrix} \chi + \begin{bmatrix} S_{\infty}^{-1}(\theta)C_{11}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{J}(u) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} R_1 \\ G \end{bmatrix} u \\ \hat{z} = \begin{bmatrix} L_1 - U_{r_2}EC_{21} & U_{r_2} \end{bmatrix} \chi + \begin{bmatrix} 0 & U_{r_2}E \end{bmatrix} y \end{cases} \quad (4.20)$$

avec  $\chi^T = [\hat{x}_1^T \ \eta^T] \in \mathbb{R}^{n_1+r_2}$  et avec  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$  une estimation de  $z(t)$  (avec  $\hat{z} = \hat{z}_1 + U_{r_2}\hat{z}_{r_2}$ ),

est un observateur fonctionnel à deux étages globalement exponentiellement stable pour le système (4.3) si et seulement si les systèmes (4.6) et (4.14) sont respectivement des observateurs exponentiellement stables pour les sous-systèmes (4.4) et (4.13). ■

*Démonstration.* Tout d'abord, mettons la dynamique de l'erreur d'observation du système (4.3) obtenue à partir de l'observateur (4.20) sous la forme donnée par l'équation (E.1). Pour cela, on considère le système suivant obtenu en introduisant les termes de couplage dans l'observateur (4.14)

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \Psi \mathcal{A}_{21}(u)\hat{x}_1 + \mathcal{H}(u)\eta + Gu + \mathcal{J}(u)(y_2 - C_{21}\hat{x}_1) \\ \hat{z}_{r_2} = \eta + E(y_2 - C_{21}\hat{x}_1) \end{cases} \quad (4.21)$$

Dans cet observateur, on a remplacé  $(\bar{\eta}, \hat{z}_{r_2})$  par  $(\eta, \hat{z}_{r_2})$ . On définit l'erreur d'observation  $e_{r_2} = z_{r_2} - \hat{z}_{r_2}$  en utilisant le système (4.21) comme un observateur pour le sous-système (4.12). Puisque on a posé  $w = 0$  dans cette section, on obtient

$$e_{r_2} = z_{r_2} - \hat{z}_{r_2} = \Psi x_2 - \eta - EC_{21}\varepsilon_1, \quad (4.22)$$

ce qui donne la dynamique suivante

$$\dot{e}_{r_2} = \Psi \mathcal{A}_{21}(u)\varepsilon_1 - \mathcal{J}(u)C_{21}\varepsilon_1 - EC_{21}\dot{\varepsilon}_1 + \mathcal{H}(u)(e_{r_2} + EC_{21}\varepsilon_1). \quad (4.23)$$

A partir de l'expression de  $\dot{\varepsilon}_1$  donnée dans l'équation (4.8), on obtient

$$\dot{e}_{r_2} = T(u)\varepsilon_1 + \mathcal{H}(u)e_{r_2} = f_2(\varepsilon_1, e_{r_2}), \quad (4.24)$$

où

$$T(u) = \Psi \mathcal{A}_{21}(u) - EC_{21}(\mathcal{A}_{11,\infty}(u, \theta)) - \mathcal{J}(u)C_{21} + \mathcal{H}(u)EC_{21}. \quad (4.25)$$

Afin d'étudier la stabilité de l'erreur d'observation, on définit les systèmes  $(\Sigma_1)$ ,  $(\Sigma_2)$  et  $(\Sigma)$  comme suit (voir les équations (E.1) et (E.2))

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) & : \dot{\varepsilon}_1 = f_1(\varepsilon_1) = (\mathcal{A}_{11,\infty}(u, \theta))\varepsilon_1 \\ (\Sigma_2) & : \dot{e}_{r_2} = f_2(0, e_{r_2}) \\ (\Sigma) & : \begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = f_1(\varepsilon_1) \\ \dot{e}_{r_2} = f_2(\varepsilon_1, e_{r_2}) \end{cases} \end{aligned}$$

On peut désormais appliquer le théorème E.2.1 pour prouver la stabilité du système  $(\Sigma)$ , c'est-à-dire la stabilité de l'erreur d'observation. On note que

- L'hypothèse **A-1** du lemme E.2.3 est satisfaite puisque,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ , les entrées de commandes  $u_i(t)$  sont considérées comme des fonctions continues, par conséquent  $f_1$  et  $f_2$  le sont tout autant, de plus  $f_j(0, 0) = 0$ .
- L'hypothèse **A-2** du lemme E.2.3 est aussi vérifiée vu que,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ , les entrées de commande  $u_i(t)$  sont bornées (voir (4.2)). Dans le contexte de cette démonstration, la relation (E.4) devient

$$\sup_{\|\omega_1\|} \|\nabla_{\omega_1} f_1(\omega_1)\| = \sup_{u(t)} \|\mathcal{A}_{11,\infty}(u, \theta)\| < \infty \quad (4.26)$$

et

$$\sup_{\|\omega_2\|} \|\nabla_{\omega_2} f_2(\omega_2)\| = \sup_{u(t)} \left\| \begin{bmatrix} T(u) \\ \mathcal{H}(u) \end{bmatrix} \right\| < \infty. \quad (4.27)$$

Ainsi, à partir du lemme E.2.3,  $\varepsilon_1 = 0$  et  $e_{r_2} = 0$  sont respectivement des points d'équilibre globalement exponentiellement stables des systèmes  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  si et seulement si  $[\varepsilon_1^T \ e_{r_2}^T]^T = 0$  est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable de  $(\Sigma)$ . Comme  $z = L_1 x_1 + U_{r_2} L_{r_2} x_2$  et  $\hat{z} = L_1 \hat{x}_1 + U_{r_2} (\eta + E y_2 - E C_{21} \hat{x}_1)$ , la preuve du théorème 4.3.1 est finie. •

#### 4.3.4 Atténuation des perturbations avec stabilité

Dans ce paragraphe, la perturbation  $w(t)$  est prise en compte.

**Théorème 4.3.2.** *Si*

- le système (4.6) est un filtre globalement exponentiellement stable pour le système (4.4) avec une atténuation de perturbation inférieure à un réel donné  $\gamma_1$ ,
- le système (4.6) est un filtre globalement exponentiellement stable pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mathcal{A}_{11}(u)x_1 + R_1 u + B_1 w \\ y_1 = C_{11}x_1 + D_1 w \\ z_{T_1} = x_1 \end{cases} \quad (4.28)$$

avec une atténuation de perturbations inférieure à un réel donné  $\bar{\gamma}_1$ ,

- le système

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{r_2} = (A_{u_1}(u) + Z_1 A_{z_1}(u)) \varepsilon_{r_2} + (B_{\alpha_0}(u) + Z_1 B_{\beta_0}(u)) \check{w} \\ e_{r_2} = \varepsilon_{r_2} + [-E_{11} D_2 \ 0] \check{w} \end{cases} \quad (4.29)$$

est un système globalement exponentiellement stable avec une atténuation des perturbations inférieure à un réel donné  $\gamma_{r_2}$ , où

$$B_{\alpha_0}^T(u) = \left[ \begin{array}{c} (-E_{11} C_{21} \mathcal{B}(\theta) + B_{u_1}(u))^T \\ \left( (L_{r_2} + E_{11} C_{22})(\mathcal{A}_{21}(u)) - (\Upsilon_{0,11} + \sum_{i=1}^m \Upsilon_{i,11} u_i) C_{21} - E_{11} C_{21} \mathcal{A}_{11,\infty}(u, \theta) \right)^T \end{array} \right]^T,$$

$$B_{\beta_0}(u) = \begin{bmatrix} E_{21}C_{21}\mathcal{B}(\theta) + B_{z_1}(u) & (2, 1) \end{bmatrix},$$

avec le “nouveau” vecteur de perturbation  $\check{w} = [w^T \ \varepsilon_1^T]^T$ ,  $\varepsilon_{r_2} = \Psi x_2 - \eta$  et où

$$(2, 1) = \left( E_{21}(C_{22}\mathcal{A}_{21}(u) - C_{21}\mathcal{A}_{11,\infty}(u, \theta)) - (\Upsilon_{0,21} + \sum_{i=1}^m \Upsilon_{i,21}u_i)C_{21} \right)$$

et les matrices  $B_{u_1}(u)$  et  $B_{z_1}(u)$  sont données par (4.18), les matrices  $\Upsilon_{i,j_1}$  par (2.63) et  $E_{i_1}$  par (4.19),

alors le système (4.20) est un filtre à deux étages exponentiellement stable pour le système (4.3) avec une atténuation des perturbations inférieure à un réel donné  $\gamma$  où  $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_{r_2}^2(1 + \bar{\gamma}_1^2)}/\lambda_2$ , avec  $\lambda_2 = \lambda_{\min}(U_{r_2}^T U_{r_2})$ . ■

*Démonstration.* La stabilité exponentielle de l’erreur de filtrage avec  $w = 0$  est démontrée avec du théorème 4.3.1. On suppose, pour traiter l’atténuation des perturbations que la performance  $\mathcal{H}_\infty$  pour le système (4.4) est garantie par le théorème 2.2.4. Comme une perturbation sur le sous-système (4.4) affecte le second sous-système (4.5) à travers le terme de couplage  $\varepsilon_1(t)$  dans (4.24), on considère ce terme  $\varepsilon_1(t)$  comme une perturbation. Si on prend en compte la perturbation  $w(t)$  dans l’équation (4.5) de l’erreur d’observation, à partir (4.17), (4.18) et (4.19), on obtient l’erreur de filtrage (4.29). Ensuite, en appliquant le lemme borné réel adapté aux systèmes LPV, c’est-à-dire le lemme D.1.1 sur le système (4.29), on trouve le gain  $Z$  qui assure la stabilité de l’erreur de filtrage et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$J_{e_2\check{w}} = \int_0^\infty \left( \|e_{r_2}(t)\|^2 - \gamma_{r_2}^2 \|\check{w}(t)\|^2 \right) dt \leq 0 \quad (4.30)$$

$$= \int_0^\infty \left( \|e_{r_2}(t)\|^2 - \gamma_{r_2}^2 \|w(t)\|^2 - \gamma_{r_2}^2 \|\varepsilon_1(t)\|^2 \right) dt \leq 0, \quad (4.31)$$

$\forall \check{w}(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ , et avec des conditions initiales nulles.

Afin de finaliser la démonstration de ce théorème, on doit assurer que le filtre (4.20) garantit la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$J_{ew} = \int_0^\infty \left( \|e(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0 \quad (4.32)$$

avec des conditions initiales nulles  $e^T = [e_1^T \ e_2^T]$ .

Si les hypothèses du théorème 4.3.2 sont vérifiées, on a

$$\int_0^\infty \left( \|e_1(t)\|^2 - \gamma_1^2 \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0 \quad (4.33)$$

et

$$\int_0^\infty \left( \|\varepsilon_1(t)\|^2 - \bar{\gamma}_1^2 \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0. \quad (4.34)$$

En utilisant (4.34), l’inégalité (4.31) se réécrit

$$\int_0^\infty \left( \|e_{r_2}(t)\|^2 - \gamma_{r_2}^2(1 + \bar{\gamma}_1^2) \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0, \quad (4.35)$$

par conséquent, on a

$$\int_0^\infty \left( \|e_2(t)\|^2 - \frac{\gamma_{r_2}^2(1 + \bar{\gamma}_1^2)}{\lambda_2} \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0. \quad (4.36)$$

En additionnant ant les inégalités (4.33) et (4.36), on obtient

$$\int_0^\infty \left( \|e(t)\|^2 - \left( \gamma_1^2 + \frac{\gamma_{r_2}^2(1 + \bar{\gamma}_1^2)}{\lambda_2} \right) \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0, \quad (4.37)$$

ce qui conclut la démonstration. •

## 4.4 Observateur à deux étages : le premier sous-système n'est pas uniformément observable

Pour parvenir à estimer  $z_1(t)$  et à compenser l'influence de  $x_1(t)$  sur le deuxième sous système, nous devrions estimer  $\begin{bmatrix} A_{21}^0 T & \dots & A_{21}^m T & C_{21}^T & L_1^T \end{bmatrix}^T x_1(t)$ . Ainsi il n'est pas pertinent, à la différence de la section 4.3 (voir (4.6)), d'estimer  $z_1(t)$  via l'observateur (4.38). C'est pourquoi, nous choisissons dans le premier étage de l'observateur : le système suivant est le filtre choisi pour le premier sous-système

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \mathcal{H}_1(u)\eta_1 + \mathcal{J}_1(u)y_1 + G_1 u \\ \hat{x}_1 = \eta_1 + \bar{E}_1 y_1 \end{cases} \quad (4.38)$$

où  $\hat{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$  est l'estimé de  $x_1(t)$  avec  $\mathcal{H}_1(u) = H_1^0 + \sum_{i=1}^m H_1^i u_i$  et  $\mathcal{J}_1 = J_1^0 + \sum_{i=1}^m J_1^i u_i$ .

En prenant comme contrainte " $ZE_2D_2 = 0$ " (voir section 2.3.1), l'erreur de filtrage  $\varepsilon_1 = x_1 - \hat{x}_1$  est paramétrée comme suit

$$\begin{cases} \dot{\bar{\varepsilon}}_{n_1} = A_{n_1}(u)\bar{\varepsilon}_{n_1} + B_{n_1}(u)w \\ \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_{n_1} + D_{n_1}w \end{cases} \quad (4.39)$$

Pour le deuxième sous-système (4.12), on peut utiliser un filtre à grand gain ou le filtre fonctionnel. Comme l'utilisation du filtre à grand gain (4.6) peut se déduire facilement de l'utilisation du filtre fonctionnel (4.14), nous n'utiliseront que ce dernier dans la suite de cette section.

*Remarque 4.4.1.* Les résultats suivants peuvent être appliqués dans le cadre de l'étude de l'observation ou du filtrage des systèmes bilinéaires de grande taille. De plus, on peut facilement utiliser un filtre de Kalman à la place du filtre à grand gain étant donné l'analogie de leur structure. □

#### 4.4.1 Stabilité de l'observateur à deux étages

De façon similaire à la section 4.3.3, on traite d'abord le cas sans perturbation ( $w = 0$ ) car nous nous intéressons à la stabilité. Avec  $w(t) = 0$ , si on applique le lemme E.2.3 sur l'erreur d'observation (4.17), nous pouvons énoncer le théorème suivant.

**Théorème 4.4.1.** *Le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1(u) & 0 \\ \Psi A_{21}(u) - \mathcal{J}(u)C_{21} & \mathcal{H}(u) \end{bmatrix} \chi + \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1(u) & 0 \\ (\Psi A_{21}(u) - \mathcal{J}(u)C_{21})\bar{E}_1 & \mathcal{J}(u) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u \\ \hat{z} = \begin{bmatrix} L_1 - U_{r_2}EC_{21} & U_{r_2} \end{bmatrix} \chi + \begin{bmatrix} (L_1 - U_{r_2}EC_{21})\bar{E}_1 & U_{r_2}E \end{bmatrix} y \end{cases} \quad (4.40)$$

avec  $\chi(t) = [\eta_1^T \ \eta^T]^T \in \mathbb{R}^{r+r_2}$  et avec  $\mathcal{A}_I(u) = A_I^0 + \sum_{i=1}^m A_I^i u_i$ , est un observateur fonctionnel à deux étages globalement exponentiellement stable pour le système (4.3) si et seulement si les systèmes (4.14) et (4.38) sont respectivement des observateurs exponentiellement stables pour les systèmes (4.13) et

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mathcal{A}_{11}(u)x_1 + R_1 u \\ y_1 = C_{11}x_1 \\ z_{T_1} = x_1 \end{cases} \quad (4.41)$$

■

*Démonstration.* Similaire à la preuve du théorème 4.3.1. •

#### 4.4.2 Atténuation des perturbations avec stabilité

Dans cette section, on prend en compte la perturbation. De façon similaire à l'équation (4.16), on introduit les notations suivantes

$$\underline{e}_{r_2} = \bar{e}_{r_2} - EC_{21}\varepsilon_1 = \bar{e}_{r_2} - E_{11}C_{21}\varepsilon_1. \quad (4.42)$$

Pour le filtrage, en prenant en compte le couplage (4.4) et (4.5), on obtient l'erreur de filtrage  $e_{r_2} = z_{r_2} - \hat{z}_{r_2}$  suivante

$$e_{r_2} = \underline{e}_{r_2} - E(D_2 - C_{21}L_1\bar{E}_1D_1)w = \underline{e}_{r_2} - E_{11}(D_2 - C_{21}\bar{E}_1D_1)w. \quad (4.43)$$

qui se réécrit de manière équivalente comme suit

$$e_{r_2} = \bar{e}_{r_2} + (E_{11}D_2 - EC_{21}L_1\bar{E}_1D_1)w = z_{r_2} - \hat{z}_{r_2}. \quad (4.44)$$

Dans la suite de cette section, on présentera deux approches basées soit sur l'équation (4.43), soit sur l'équation (4.44). Dans l'expression (4.43), le terme “ $-EC_{21}\varepsilon_1$ ” est “intégré” dans l'erreur  $\underline{e}_{r_2}$  et l'erreur  $\varepsilon$  sera dérivée lors l'obtention du système (4.47). Dans l'expression (4.44), le terme “ $-EC_{21}\varepsilon_1$ ” est considéré comme un vecteur de perturbation, ce qui mène au système (4.49).

Avant de donner les théorèmes, nous introduisons une contrainte supplémentaire sur la matrice de gain  $Z$  du filtre (4.14) afin d'éviter les non linéarités du même type que celle présentées au chapitre 2, (voir (2.66)). Nous imposons  $ZE_2C_{21} = 0$ . Nous remplaçons alors la contrainte (2.67) de la section (2.3.1) par la contrainte suivante

$$ZE_2 \begin{bmatrix} D_2 & C_{21} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.45)$$

et la solution générale de cette équation est

$$Z = Z_2 \left( I_\alpha - E_2 \begin{bmatrix} D_2 & C_{21} \end{bmatrix} \left( E_2 \begin{bmatrix} D_2 & C_{21} \end{bmatrix} \right)^\dagger \right), \quad (4.46)$$

où  $Z_2$  est une matrice arbitrairement choisie de dimensions appropriées. La suite de la synthèse du filtre est similaire à la méthodologie développée dans la section (2.3).

#### 4.4.2.1 Atténuation des perturbations avec stabilité : premier cas

Si on prend en compte les perturbations  $w(t)$  du système (4.3) dans l'erreur d'observation (4.17), en utilisant l'expression de la dérivée de  $\varepsilon_1$ , avec l'équation (4.43) pour exprimer  $e_{r_2}$ , on obtient le théorème suivant.

**Théorème 4.4.2.** *Si*

- le système (4.38) est un filtre à stabilité exponentielle pour le système (4.41) avec une atténuation des perturbations inférieure à un réel donné  $\underline{\gamma}_{n_1}$ ,
- le système

$$\begin{cases} \dot{\underline{e}}_{r_2} = (A_{u_1}(u) + Z_2 A_{z_1}(u)) \underline{e}_{r_2} + (B_{\alpha_1}(u) + Z_2 B_{\beta_1}(u)) \check{w} \\ e_{r_2} = \underline{e}_{r_2} + [E_{11}(D_2 - C_{21} \bar{E}_1 D_1) \quad 0] \check{w} \end{cases} \quad (4.47)$$

est un système globalement exponentiellement stable avec une atténuation des perturbations inférieure à un réel donné  $\underline{\gamma}_{r_2}$  où (voir (4.14) à (4.19))

$$B_{\alpha_1}(u)^T = \begin{bmatrix} (((E_{11}C_{22} - L_{r_2})A_{21} + (\Upsilon_{11}(u) + \mathcal{H}_{11}(u)E_{11})C_{21}) \bar{E}_1 D_1 \\ + B_{u_1} - E_{11}C_{21}B_{n_1})^T \\ ((E_{11}C_{22} - L_{r_2})A_{21} + (\Upsilon_{11}(u) + \mathcal{H}_{11}(u)E_{11})C_{21})^T \end{bmatrix},$$

$$B_{\beta_1}(u)^T = \begin{bmatrix} ((A_{n_1} - E_{21}C_{22}A_{21} - (\Upsilon_{21}(u) - \mathcal{H}_{21}(u)E_{11})C_{21}) \bar{E}_1 D_1 \\ + B_{z_1} - E_{11}C_{21}A_{n_1})^T \\ (-E_{21}C_{22}A_{21}(u) - \Upsilon_{21}C_{21} - \mathcal{H}_{21}(u)E_{11})C_{21})^T \end{bmatrix},$$

avec le "nouveau" vecteur des perturbations  $\check{w} = [w^T \quad \varepsilon_1^T]^T$ , et où

$$\Upsilon_{11}(u) = \Upsilon_{0,11} + \sum_{i=1}^m \Upsilon_{i,11} u_i,$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{21}(u) &= \Upsilon_{0,21} + \sum_{i=1}^m \Upsilon_{i,21}u_i, \\ \mathcal{H}(u) &= \mathcal{H}_{11}(u) + Z_2\mathcal{H}_{21}(u),\end{aligned}$$

les matrices  $\Upsilon_{i,i_1}$  sont données par (2.63) et  $E_{i_1}$  données par (4.19), alors le système (4.40) est un filtre fonctionnel à deux étages globalement exponentiellement stable pour le système (4.3) avec une atténuation des perturbations inférieure à un réel donné  $\gamma$  où

$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2(1 + \bar{\gamma}_1^2)} \quad (4.48)$$

avec  $\gamma_2 = \underline{\gamma}_{r_2}/\lambda_{\min}(U_{r_2}^T U_{r_2})$  et  $\gamma_1 = \underline{\gamma}_{n_1}/\lambda_{\min}(L_1^T L_1)$ . ■

*Démonstration.* Similaire à la preuve du théorème 4.3.2 avec l'utilisation du théorème D.2.1 pour obtenir  $\bar{\gamma}_{r_2}$  •

#### 4.4.2.2 Atténuation des perturbations avec stabilité : deuxième cas

Si on prend en compte les perturbations  $w(t)$  du système (4.3) dans l'erreur d'observation (4.17), en utilisant l'expression de la dérivée de  $\varepsilon_1$ , avec l'équation (4.44) pour exprimer  $e_{r_2}$ , on obtient le théorème suivant.

**Théorème 4.4.3.** *Si*

- le système (4.38) est un filtre globalement exponentiellement stable pour le système (4.41) avec une atténuation des perturbations inférieure à un réel donné  $\bar{\gamma}_{n_1}$ ,
- le système

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_{r_2} = (A_{u_1}(u) + Z_2 A_{z_1}(u))\bar{e}_{r_2} + (B_{\alpha_2}(u) + Z_2 B_{\beta_2}(u))\check{w} \\ e_{r_2} = \bar{e}_{r_2} + \begin{bmatrix} -E_{11}D_2 - \bar{E}_1D_1 & E_{11}C_{21} \end{bmatrix} \check{w} \end{cases} \quad (4.49)$$

est un système globalement exponentiellement stable avec une atténuation des perturbations inférieure à un réel donné  $\underline{\gamma}_{r_2}$  où (voir (4.14) à (4.19))

$$\begin{aligned} B_{\alpha_1}(u)^T &= \begin{bmatrix} (((E_{11}C_{22} - L_{r_2})A_{21} + (\Upsilon_{11}(u) + \mathcal{H}_{11}(u)E_{11})C_{21})\bar{E}_1D_1 + B_{u_1})^T \\ ((E_{11}C_{22} - L_{r_2})A_{21} + (\Upsilon_{11}(u) + \mathcal{H}_{11}(u)E_{11})C_{21})^T \end{bmatrix}, \\ B_{\beta_1}(u)^T &= \begin{bmatrix} ((A_{n_1} - E_{21}C_{22}A_{21} - (\Upsilon_{21}(u) - \mathcal{H}_{21}(u)E_{11})C_{21})\bar{E}_1D_1 \\ + B_{z_1} - E_{11}C_{21})^T \\ (-E_{21}C_{22}A_{21}(u) - \Upsilon_{21}C_{21} - \mathcal{H}_{21}(u)E_{11})C_{21})^T \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

avec le “nouveau” vecteur des perturbations  $\check{w} = [w^T \ \varepsilon_1^T]^T$ , et où

$$\begin{aligned}\Upsilon_{11}(u) &= \Upsilon_{0,11} + \sum_{i=1}^m \Upsilon_{i,11}u_i, \\ \Upsilon_{21}(u) &= \Upsilon_{0,21} + \sum_{i=1}^m \Upsilon_{i,21}u_i,\end{aligned}$$



$$\mathcal{H}(u) = \mathcal{H}_{11}(u) + Z_2 \mathcal{H}_{21}(u),$$

les matrices  $\Upsilon_{i,i1}$  sont données par (2.63) et  $E_{i1}$  données par (4.19), alors le système (4.40) est un filtre fonctionnel à deux étages globalement exponentiellement stable pour le système (4.3) avec une atténuation des perturbations inférieure à un réel donné  $\gamma$  où

$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2(1 + \bar{\gamma}_1^2)} \quad (4.50)$$

avec  $\gamma_2 = \bar{\gamma}_{r_2}/\lambda_{\min}(U_{r_2}^T U_{r_2})$  et  $\gamma_1 = \bar{\gamma}_{n_1}/\lambda_{\min}(L_1^T L_1)$ . ■

Démonstration. Similaire la preuve du théorème 4.3.2. •

## 4.5 Exemple

Pour illustrer nos travaux, nous allons étudier le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.1 & 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] x + \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{array} \right] u_1 x + \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 \end{array} \right] u_2 x + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0 \end{array} \right] w \\ y = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] x + \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0.1 \end{array} \right] w \\ z = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0.4 & 0.8 & -1 & 1 \\ \hline -0.4 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] x \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Les entrées de commande sont bornées comme suit

$$-0.5 \leq u_i(t) \leq 0.5 \quad i = 1, 2, \quad (4.52)$$

$$-10000 \leq \dot{u}_i(t) \leq 10000 \quad i = 1, 2. \quad (4.53)$$

La partie correspondant à (4.4) est uniformément observable alors que le sous-système correspondant à (4.13) n'est pas uniformément observable, nous appliquons donc le théorème 4.3.1 afin d'obtenir un observateur pour le système (4.51).

Avec la méthodologie développée dans le chapitre 2, on obtient  $\theta_{\text{opt}} = 2.425$  avec  $\gamma_{1,\min} = 1.485$  et  $\bar{\gamma}_{1,\min} = 3.26$ . Pour l'observateur à grand gain, la solution de l'équation de Lyapunov (2.5) est alors

$$S_{\infty}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.4124 & -0.17 \\ -0.17 & 0.1402 \end{bmatrix},$$

tandis que les matrices de l'observateur fonctionnel sont les suivantes

$$H_0 = \begin{bmatrix} -0.78 & 0.079 \\ 3.91 & -2.68 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} -0.043 & 0.043 \\ 0.11 & -0.11 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -0.063 & -0.0071 \\ 0.11 & 0.011 \end{bmatrix}, J_0 = \begin{bmatrix} -1.65 \\ 5.05 \end{bmatrix},$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1.65 \\ 0.2 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} -0.036 \\ 0.064 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.77 \end{bmatrix},$$

avec  $\gamma_{2 \min} = 0.6$ . Par conséquent, à partir du théorème 4.3.2, on obtient le niveau d'atténuation des perturbations  $\gamma = 2.53$  pour le système complet.

Pour la simulation de cet exemple, les entrées sont données par la figure 4.1 et la fonctionnelle  $z(t)$  du système (4.51) est représentée sur la figure 4.2. Les erreurs de filtrage  $e_1(t) = z_1(t) - \hat{z}_1(t)$  et  $e_2(t) = z_2(t) - \hat{z}_2(t)$  sont données par la figure 4.3, la perturbation  $w(t)$  étant un signal trapézoïdal.

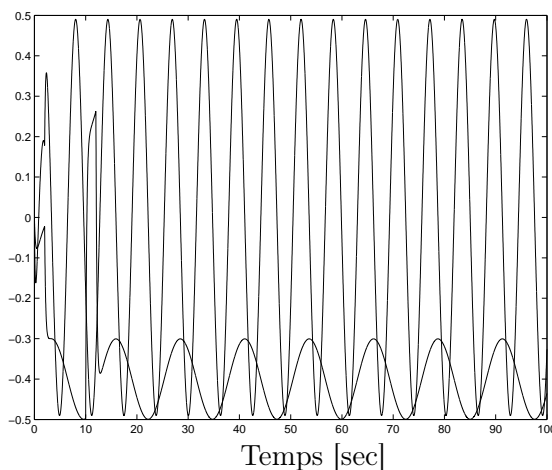


FIG. 4.1: Entrées de commande  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$

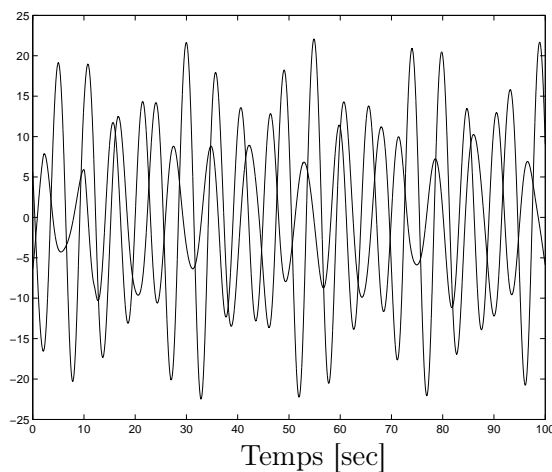


FIG. 4.2: Vecteurs à estimer  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  pour le système (4.51)

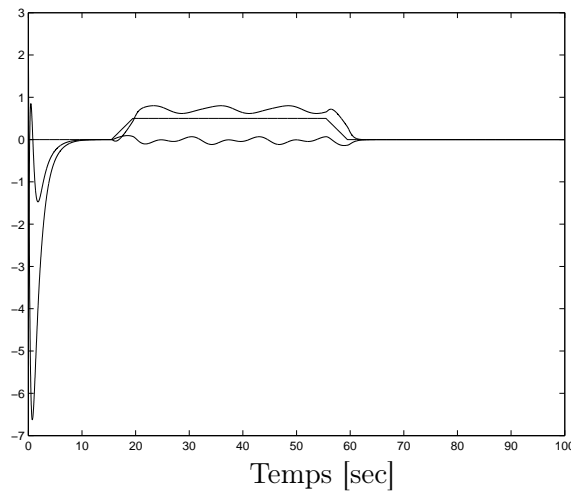


FIG. 4.3: Erreur de filtrage  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  et la perturbation

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté, un filtre à deux étages pour les systèmes bilinéaires couplés, ces filtres sont synthétisés directement à partir de la connaissance de filtres pour les systèmes bilinéaires découplés et des matrices de couplage. La performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système couplé est déduite de la performance  $\mathcal{H}_\infty$  des sous-systèmes. L'efficacité de cette approche est illustrée par un exemple.

L'approche proposée dans ce chapitre peut être vue comme une approche permettant de traiter les systèmes décentralisés ou peut être appliquée aux systèmes de grandes dimensions notamment afin de minimiser la taille des LMI à résoudre. Dans la même optique, une extension de ces travaux serait de remplacer l'observateur d'ordre plein pour le premier sous-système par un observateur d'ordre réduit.

De la manière similaire à la méthodologie utilisée dans ce chapitre pour associer différents types d'observateurs pour un système bilinéaire, on peut proposer d'associer différents types de commandes. Ceci est laissé en perspective.

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons traité l'observation et la commande basée sur un observateur pour les systèmes bilinéaires. Sans perte de généralité, les entrées de commande sont supposées bornées leur dérivée première pouvant aussi l'être. Les entrées de commande sont alors considérées comme des paramètres variants dans un polytope convexe.

L'assimilation des entrées à des paramètres variants a permis l'élaboration de méthodologies de synthèse de filtres  $\mathcal{H}_\infty$  pour les systèmes bilinéaires. La synthèse de l'observateur à grand gain mise en œuvre dans ce mémoire se résume à la recherche d'un paramètre réel assurant la stabilité de l'erreur d'observation. Grâce à l'approche polytopique découlant de la bornitude des entrées, la recherche de ce paramètre est réalisée par une résolution de LMI. Contrairement à l'approche purement analytique de l'observateur à grand gain, l'approche présentée peut s'appliquer à tout type de systèmes bilinéaires, notamment lorsque l'observabilité uniforme n'est pas vérifiée.

Cette approche polytopique basée sur les systèmes à paramètres variants a été appliquée à la synthèse d'observateurs fonctionnels pour les systèmes bilinéaires. Le filtre obtenu est non-biaisé : le paramétrage de la résolution des contraintes de non-biais, nous a permis de transformer la recherche des matrices du filtre en la détermination d'une matrice de gain unique. Le calcul de cette matrice gain via la résolution de LMI dans un polytope convexe nous a permis de garantir la stabilité de l'erreur d'observation et un niveau d'atténuation des perturbations.

Les observateurs de type LPV présentés dans ce mémoire ont été utilisés pour concevoir des commandes basées sur un observateur pour les systèmes bilinéaires. Selon le type de commandes mises en œuvre, nous avons proposé des approches algébriques basées sur la résolution de LMI ou des approches analytiques basées sur la structure du système bilinéaire commandé. La stabilité du système bilinéaire bouclé avec une commande basée sur un observateur est garantie via la résolution de LMI pour la commande bang-bang ou la commande linéaire, tandis que la stabilité est prouvée via une approche analytique lorsqu'on utilise une commande quadratique ou linéaire. Nous avons proposé de combiner une commande quadratique avec une commande linéaire, l'intérêt de cette dernière étant d'améliorer la vitesse de convergence vers le point d'équilibre. Les conditions de transition de la commande quadratique à la commande linéaire ont été formulées.

Afin d'exploiter les propriétés des observateurs proposés dans ce mémoire (nécessité ou non de l'observabilité uniforme du système bilinéaire), nous nous sommes intéressés aux observateurs à deux étages : nous décomposons le système bilinéaire en deux parties et nous appliquons séparément un observateur sur chaque partie en tenant compte des propriétés géométriques de chacune d'entre elles. La synthèse de ces observateurs à deux

étages s'effectue directement à partir de la connaissance des filtres pour les systèmes bilinéaires découplés et des matrices de couplage. La stabilité de l'erreur d'observation associée à l'observateur à deux étages est démontrée en utilisant la théorie des systèmes interconnectés. Cette approche permet de diminuer le conservatisme lié aux entrées ou à la taille des systèmes. En effet, l'observabilité uniforme peut être vérifiée sur un sous-système du système bilinéaire étudié sans l'être sur le système total. Ainsi nous pouvons proposer un observateur à deux étages associant un observateur spécialement adapté aux systèmes bilinéaires uniformément observables et un observateur fonctionnel ne nécessitant pas de l'observabilité.

Tous les développements réalisés dans ce mémoire ont été illustrés par des simulations numériques.

## Perspectives

Suite aux travaux exposés dans ce mémoire, les extensions et les perspectives suivantes nous semblent être des pistes de recherche à approfondir :

1. sur la synthèse des observateurs :
  - étendre l'approche LPV à d'autres types d'observateurs,
  - étendre l'approche LPV à la synthèse de filtres robustes pour les systèmes bilinéaires incertains,
2. sur la commande basée sur un observateur :
  - relaxer les conditions de stabilité des commandes basées sur un observateur,
  - étendre les approches présentées à la synthèse de commandes robustes basées sur un observateur
  - étudier l'atténuation de perturbation pour les systèmes commandés,
3. sur les systèmes bilinéaires à deux étages :
  - associer différents types de commandes pour ces systèmes bilinéaires,

Enfin, il serait intéressant de valider les résultats présentés dans ce mémoire sur des processus réels.

# Annexe A

## Définitions algèbre de Lie

### A.1 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

Soit  $V$  une variété différentielle et  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur  $V$ . On note  $X.f$  la dérivée de la fonction  $f$  dans la direction du champ  $X$ . Le crochet de Lie de  $X$  et  $Y$  est l'unique champ de vecteur, noté  $[X, Y]$ , tel que, pour toute fonction  $f$  indéfiniment dérivable,

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f). \quad (\text{A.1})$$

Cette définition donne pour des variétés différentielles du types  $Ax, Bx, [Ax \ Bx] = AB - BA$ .

Pour condenser les notations, on introduit la définition suivante.

**Définition A.1.1.** *On peut maintenant définir inductivement, pour  $k = 0, \dots, n-1$*

$$\text{ad}_{A_0x}^{k+1}(A_ix + b_i) = [A_0x, \text{ad}_{A_0x}^k(A_ix + b_i)] \quad (\text{A.2})$$

avec  $\text{ad}_{A_0x}^0(A_ix + b_i) = A_ix + b_i$ . △

### A.2 Dérivées de Lie

La dérivée de Lie généralise aux variétés différentielles la notion de dérivée directionnelle d'une fonction numérique.

Si  $f$  est une fonction différentiable de la variété différentielle  $M$  dans  $\mathbb{R}$ , si  $X$  est un champ de vecteurs sur  $M$ , la dérivée de Lie de  $f$  au point  $p$  est :

$$\mathcal{L}_X f(p) = X_p \cdot f = \text{d}f(p) [X(p)]. \quad (\text{A.3})$$

Cette définition donne pour des variétés différentielles du type  $Ax$ ,  $\mathcal{L}_{Ax} V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} Ax$ .

Pour condenser les notations, on introduit la définition suivante

**Définition A.2.1.** *Les dérivées de Lie d'ordre supérieur peuvent être définies inductivement comme suit, pour  $k = 0, \dots, n-1$*

$$\mathcal{L}_{Ax}^{k+1} V(x) = \mathcal{L}_{Ax} (\mathcal{L}_{Ax}^k V(x)), \quad (\text{A.4})$$

avec  $\mathcal{L}_{Ax}^0 V(x) = V(x)$ . △



# Annexe B

## Compléments mathématiques

### B.1 Lemmes de majoration

**Lemme B.1.1 (Lemme de majoration).** [WXD92, XC03] Soit les matrices réelles suivantes  $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{W}$  et  $F$  de dimensions appropriées telles que  $\mathcal{W} > 0$  et  $F^T F < I$ . Alors nous avons les inégalités suivantes Pour tout scalaire  $\mu > 0$  et deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$2x^T \mathcal{D} F \mathcal{S} y \leq \mu^{-1} x^T \mathcal{D} \mathcal{D}^T x + \mu y^T \mathcal{S}^T \mathcal{S} y. \quad (\text{B.1})$$

◦

**Lemme B.1.2.** Soit  $a, b, s, r \neq s$  des réels positifs, on a

$$0 \leq \left(a - \frac{b}{s-r}\right)e^{-st} + \frac{b}{s-r}e^{-rt} \leq \left(a + \left|\frac{b}{s-r}\right|\right)e^{-\min(s,r)t}. \quad (\text{B.2})$$

◦

*Démonstration.* On définit

$$L(a, b, s, r, t) = \left(a - \frac{b}{s-r}\right)e^{-st} + \frac{b}{s-r}e^{-rt}.$$

Comme  $\text{sign}\left(\frac{b}{s-r}\right) = \text{sign}(e^{-rt} - e^{-st})$ , on a

$$L(a, b, s, r, t) = ae^{-st} + \frac{b}{s-r}(e^{-rt} - e^{-st}) > 0.$$

Si  $r < s$ , alors

$$\begin{aligned} L(a, b, s, r, t) &\leq ae^{-st} + \frac{b}{s-r}e^{-rt} \\ &\leq \left(a + \frac{b}{s-r}\right)e^{-rt}. \end{aligned}$$

Si  $s < r$ , alors

$$\begin{aligned} L(a, b, s, r, t) &\leq e^{-st} \left(a + \frac{b}{s-r}(e^{(s-r)t} - 1)\right) \\ &\leq \left(a - \frac{b}{s-r}\right)e^{-st}. \end{aligned}$$

•



## B.2 Lemme de Schur

**Lemme B.2.1 (Lemme de Schur).** [BEFB94] Etant données trois matrices  $Q$ ,  $R$  et  $S$  ( $Q = Q^T$  et  $S = S^T$ ), les deux propositions suivantes sont équivalentes

(1)

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.3})$$

(2)

$$S < 0 \text{ et } Q - RS^{-1}R^T < 0 \quad (\text{B.4})$$

◦

La matrice  $Q - RS^{-1}R^T$  est aussi appelée complément de Schur de  $S$ . Ce lemme reste vérifié lorsque l'on remplace “<” par “≤”, et “>” par “≥”.



mément observables mise en exergue par Williamson [Wil77]. La matrice gain de l'observateur est donné par la résolution d'une équation de Riccati paramétrée par un scalaire  $\theta$ . L'existence d'un  $\theta_0$  tel que pour tout  $\theta > \theta_0$  le gain de l'observateur stabilise exponentiellement l'erreur d'observation a été montrée dans [GHO92], ce qui donne le lemme suivant.

**Lemme C.2.1.** [DG91, DBGR92, DBB<sup>+</sup>93] *Le système*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \mathcal{A}(u)\hat{x} + Ru - S_\infty^{-1}(\theta)C^T(C\hat{x} - y) \\ \hat{z} = L\hat{x} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\mathcal{A}(u) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_i(t) \quad (\text{C.4})$$

est un observateur exponentiel pour le système (C.1) avec  $S_\infty(\theta) = Q^{-1}\bar{S}_\infty(\theta)Q^{-T}$  où  $\bar{S}_\infty(\theta) = \bar{S}_\infty^T(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est donné par l'équation de Riccati suivante

$$-\theta\bar{S}_\infty(\theta) - \bar{A}^T\bar{S}_\infty(\theta) - \bar{S}_\infty(\theta)\bar{A} + \tilde{C}^T\tilde{C} = 0, \quad (\text{C.5})$$

où  $A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\theta \in \mathbb{R}^{*+}$  suffisamment grand. ◦

De plus la dérivée de l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$  est donnée par

$$\dot{e} = \mathcal{A}_\infty(\theta)(u)e \quad (\text{C.6})$$

avec

$$\mathcal{A}_\infty(\theta, u) = (\mathcal{A}(u) - S_{\infty h}^{-1}(\theta)C^TC) \quad (\text{C.7})$$

et est borné par

$$\|e(t)\| \leq K(\theta) \exp(-\theta t/3) \|x_{0,h} - \hat{x}_{0,h}\| \quad (\text{C.8})$$

où  $K$  représente un polynôme.

# Annexe D

## Lemmes bornés réels

### D.1 Lemme Borné Réel pour les systèmes LPV

Ce lemme est basé sur les travaux [FS02, CM04], il se base sur l'approche descripteur des systèmes singuliers.

**Lemme D.1.1.** *Le système LPV suivant*

$$\begin{cases} \dot{e} = \mathbb{A}(u)e + \mathbb{B}(u)w \\ s = \mathbb{C}e + \mathbb{D}w \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

avec  $u(t) \in \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$  où

$$\Omega = \{u : t \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \forall t \in \mathbb{R}^+, u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}, \mu_{i,\min} \leq \dot{u}_i(t) \leq \mu_{i,\max}, i = 1, \dots, m\}.$$

est quadratiquement stable et a une atténuation de perturbation inférieure à un réel donné  $\gamma$  si il existe des matrices  $P(u) = P(u)^T > 0$  et  $F$  telles que l'inégalité matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(u) + F\mathbb{A}(u) + \mathbb{A}^T(u)F^T & P(u) - F + \mathbb{A}^T(u)F^T & F\mathbb{B}(u) & \mathbb{C}^T \\ * & -F - F^T & F\mathbb{B}(u) & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \mathbb{D}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.2})$$

est vérifiée pour tout  $u$  appartenant à  $\Omega$ . ◦

*Démonstration.* Comme dans [CM04], on utilise l'“approche descripteur” pour représenter le système (D.1) : ( $\phi = \dot{e}$ ).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathbb{A}(u) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}(u) \end{bmatrix} w \\ s = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \phi \end{bmatrix} + \mathbb{D}w. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

On pose comme fonction de Lyapunov la fonction  $V(e)$  défini comme suit

$$V(e) = e^T P(u) e = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \bar{E} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}$$

avec

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P(u) = P^T(u) > 0.$$

Si on dérive

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= 2 \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \bar{E} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{P}(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{P}(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ -\dot{e} + \mathbb{A}(u)e + \mathbb{B}(u)w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{P}(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

En combinant (D.3) et (D.4), et en utilisant le fait que  $V(0) = 0$  et  $V(\infty) \geq 0$ , avec l'équation (2.2), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} J_{sw} &\leq \int_0^\infty (s^T s - \gamma^2 w^T w) dt + V(\infty) - V(0) \\ &\leq \int_0^\infty (s^T s - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(e)) dt, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

ce qui est équivalent à (voir (D.4))

$$J_{sw} \leq \int_0^\infty \left( \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^T & \mathbb{D}^T \mathbb{D} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ w \end{bmatrix} \right) dt, \quad (\text{D.6})$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \begin{bmatrix} P(u) & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathbb{A}(u) & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathbb{A}(u) & -I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u) & 0 \\ F^T & F^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{C} + \dot{P}(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Theta_{12} &= \begin{bmatrix} P(u) & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}(u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{D} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, si la relation suivante

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^T & \mathbb{D}^T \mathbb{D} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.7})$$

est satisfaite, alors on a  $J_{sw} < 0$ . En appliquant le lemme de Schur (voir l'annexe B (B.2)) à l'inégalité (D.7), on obtient l'inégalité (D.2). •

On peut rapprocher l'approche développée dans cette démonstration avec l'article de Masubuchi [MKOS97], en effet la paire  $(E, A)$  représenté ici par  $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathbb{A}(u) & -I \end{bmatrix}$  est bien admissible de part sa structure. la condition  $E^T X = X E \geq 0$  est belle et bien vérifiée.

Le but est d'éviter les produits de matrices paramétrées c'est-à-dire d'éliminer les produits  $P(u(t))A(u(t))$  afin de garder des LMI où les paramètres apparaissent de façon linéaire.

En discret, une autre approche d'élimination des produits de matrices paramétrées a été proposé par De Oliveira (voir [DBG99]) pour les systèmes discrets.

## D.2 Lemme Borné Réel Totalemment Paramétré (LBRT)

Nous donnons le lemme borné réel pour un type de système avec calcul d'une matrice de gain stabilisant le système

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_z = (A_{z_1}(u) + Z A_{z_2}(u))\bar{e}_z + (B_{z_1}(u) + Z B_{z_2}(u))w \\ e_z = (C_{z_1}(u) + Z C_{z_2}(u))\bar{e}_z + (D_{z_1}(u) + Z D_{z_2}(u))w \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

On peut noter que, pour ce système, la matrice de gain  $Z$  a la particularité d'être dans la dynamique et dans la sortie.

**Théorème D.2.1.** *Le système LPV (D.8) est quadratiquement stable et a une atténuation de perturbation inférieure à un réel donné  $\bar{\gamma}$  si il existe des matrices  $P(u) = P(u)^T > 0$ ,  $F$  et  $Y$  telles que*

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & C_{z_1}^T(u)F^T + C_{z_2}^T(u)Y^T \\ * & -F - F^T & (1,3) & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I_q & -D_{z_1}^T(u)F^T - D_{z_2}^T(u)Y^T \\ * & * & * & I_r \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{D.9})$$

pour tout  $u(t) \in \Omega$  où

$$\begin{aligned} (1,1) &= \dot{P}(u) + F A_{z_1}(u) + Y A_{z_2}(u) + A_{z_1}^T(u)F^T + A_{z_2}^T(u)Y^T \\ (1,2) &= P(u) - F + A_{z_1}^T(u)F^T + A_{z_2}^T(u)Y^T \\ (1,3) &= F B_{z_1}(u) + Y B_{z_2}(u), \end{aligned}$$

et

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \quad (\text{D.10})$$

avec  $\beta = \sqrt{\lambda_{\min}(F^T F)}$  et  $Z = F^{-1}Y$ . ■

*Démonstration.* Tout d'abord, on suppose l'existence de matrices  $P(u)$ ,  $F$  et  $Y$  telles que la LMI (D.9) est vérifiée. Si on définit comme nouvelle sortie du système (D.8) l'expression suivante  $\tilde{e}_z = Fe_z$ , la LMI (D.9) assure la stabilité quadratique et une performance  $\mathcal{H}_\infty$  avec un gain  $\gamma$  pour le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_z = (A_{z_1}(u) + ZA_{z_2}(u))\tilde{e}_z + (B_{z_1}(u) + ZB_{z_2}(u))w \\ \tilde{e}_z = (FC_{z_1}(u) + YC_{z_2}(u))\tilde{e}_z + (FD_{z_1}(u) + YD_{z_2}(u))w \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Comme  $F$  est invertible (car la LMI (D.9) est vérifiée), la stabilité quadratique du système (D.11) assure la stabilité quadratique de (D.8). De plus, il existe un réel positif  $\beta$  tel que  $\forall x : \beta \|x\| \leq \|Fx\|$ .

Avec des conditions initiales nulles pour  $\tilde{e}_z$  ce qui est équivalent aux conditions initiales nulles pour  $e_z$ , on a

$$\int_0^\infty \left( \|\tilde{e}_z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 \right) dt \leq \int_0^\infty \left( \beta \|e_z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0. \quad (\text{D.12})$$

En divisant (D.12) par  $\beta$ , et si on définit  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ , on obtient

$$\int_0^\infty \left( \|e_z(t)\|^2 - \bar{\gamma}^2 \|w(t)\|^2 \right) dt \leq 0, \quad (\text{D.13})$$

ce qui conclut la preuve du lemme. •

# Annexe E

## Résultats sur les systèmes en cascade

### E.1 Systèmes et hypothèses

**Définition E.1.1.** [Vid80a] Une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est de classe K si  $f$  est continue, strictement croissante et  $f(0) = 0$ . Si en plus,  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(\sigma) = \infty$ ,  $f$  est de classe KR.  $\triangle$

On considère les systèmes de grandes tailles suivants

$$(\Sigma) : \dot{x}_j = f_j(t, x_1(t), \dots, x_j(t)), \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \quad (\text{E.1})$$

et

$$\forall j \in \{1, \dots, \ell\}, (\Sigma_j) : \dot{x}_j = f_j(t, 0, \dots, 0, x_j(t)) \quad (\text{E.2})$$

et les hypothèses

**A-1** Les  $f_j$  sont continues et  $f_j(t, 0, \dots, 0) = 0, \forall t \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, \ell\}$ .

**A-2**  $\exists c \in \mathbb{R}^+$ , avec  $\omega_j = [x_1^T \dots x_j^T]^T$ , tel que :

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{\|\omega_j\| \leq c} \|\nabla_{\omega_j} f_j(t, \omega_j)\| < \infty, \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\}. \quad (\text{E.3})$$

**A-3** Avec  $\omega_j = [x_1^T \dots x_j^T]^T$ , on a

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{\|\omega_j\|} \|\nabla_{\omega_j} f_j(t, \omega_j)\| < \infty, \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\}. \quad (\text{E.4})$$

**A-4** Il existe une fonction de Lyapunov  $V_j$  et des fonctions  $\phi_{j1}, \phi_{j2}$  de classe KR,  $\phi_{j3}$  de classe K telles que

$$\phi_{j1}(\|x\|) \leq V_j(t, x_j) \leq \phi_{j2}(\|x\|), \quad (\text{E.5})$$

$$\dot{V}_{j(\Sigma_j)}(t, x_j) = \frac{\partial}{\partial t} V_j(t, x_j) + \nabla_x V_{x_j}(t, x_j) f_j(t, 0, \dots, x_j) \leq -\phi_{j3}(\|x\|), \quad \forall t, \forall x_j \quad (\text{E.6})$$

$$\lim_{\|x_j\| \rightarrow \infty} \frac{\nabla_x V_{x_j}(t, x_j)}{\phi_{j3}(\|x\|)} = 0, \text{ uniformément en } t \quad (\text{E.7})$$



## E.2 Lemmes

**Lemme E.2.1.** [Vid80a] Si les hypothèses **A-1** et **A-2** sont satisfaites, alors  $x = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable de  $(\Sigma)$  si et seulement si  $x_j = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable de  $(\Sigma_j) \forall j \in \{1, \dots, \ell\}$ .  $\circ$

**Lemme E.2.2.** [Vid80a] Si les hypothèses **A-1** et **A-2** sont satisfaites, alors  $x = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement stable de  $(\Sigma)$  si et seulement si  $x_j = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement stable de  $(\Sigma_j) \forall j \in \{1, \dots, \ell\}$ .  $\circ$

**Lemme E.2.3.** [Vid80a] Si les hypothèses **A-1** et **A-3** sont satisfaites, alors  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable de  $(\Sigma)$  si et seulement si  $x_j = 0$  est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable de  $(\Sigma_j) \forall j \in \{1, \dots, \ell\}$ .  $\circ$

**Lemme E.2.4.** [Vid80a] Si on suppose que  $x_j$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable de  $(\Sigma_j) \forall j \in \{1, \dots, \ell\}$  et que les hypothèses **A-1** et **A-4** sont satisfaites et que il existe des fonctions  $\psi_i$  de classe  $K$  telles que

$$\|f_j(t, x_1, \dots, x_j) - f_j(t, 0, \dots, 0, x_j)\| \leq \psi_i(\|[x_1^T \dots x_j^T]\|) \quad \forall t \geq 0, \forall x. \quad (\text{E.8})$$

alors  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable de  $(\Sigma)$ .  $\circ$

# Bibliographie

- [AG94] Z. Aganovic and Z. Gajic. The successive approximation procedure for finite-time optimal control of bilinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 39 :1932–1935, 1994.
- [AGB94] P. Apkarian, P. Gahinet, and J.M. Biannic. Affine parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainty. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, pages 2026–2031, Lake Buena Vista, USA, 1994.
- [AT98] P. Apkarian and H.D. Tuan. Robust control via concave minimization : local and global algorithms. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Tampa, USA, 1998.
- [AV73] B.D.O. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network Analysis and Synthesis : A Modern Theory Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [BCC88] G. Bornard, N. Couenne, and F. Celle. Regularly persistent observers for bilinear systems. In J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, and D. Leborgne, editors, *New Trends in Nonlinear Control Theory*, volume 122 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 130–140. Springer-Verlag, 1988.
- [BCCG93] G. Bornard, F. Celle-Couenne, and G. Gilles. *Systèmes Non Linéaires*, volume 1 of *Série Automatique*, chapter Observabilité et observateurs, pages 177–221. Masson, Paris, 1993.
- [BEFB94] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [Ben97] R.E. Benton Jr. *Linear Matrix Inequality Approach to Robust Emergency Lateral Control of a Highway Vehicle with Time-Varying uncertainties*. PhD thesis, Louisiana State University, U.S.A, Baton Rouge, USA, 1997.
- [BH95] G. Besançon and H. Hammouri. Reduced order observer for a class of non-uniformly observable systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, New Orleans, USA, 1995.
- [BH96] G. Besançon and H. Hammouri. On uniform observation of nonuniformly observable systems. *Syst. & Contr. Letters*, 29 :9–19, 1996.
- [BLM99] K. Busawon and J. De Leon-Morales. An improved high gain observer for single input uniformly observable systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [CM04] S.S. Chughtai and N. Munro. Lmi based gain-scheduled control. In *Proc. Control*, University of Bath, UK, 2004.

- [Dar00] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 45 :940–943, 2000.
- [DBB<sup>+</sup>93] F. Deza, D. Bossanne, E. Busvelle, J.P. Gauthier, and D. Rakotopara. Exponential observers for nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 38 :482–484, 1993.
- [dBG99] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Syst. & Contr. Letters*, 37 :261–265, 1999.
- [DBGR92] F. Deza, E. Busvelle, J.P. Gauthier, and D. Rakotopara. High gain estimation for nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 18 :295–299, 1992.
- [DG91] F. Deza and J.P. Gauthier. A simple and robust nonlinear estimator. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Brighton, UK, 1991.
- [DN80] I.A. Derese and E.J. Noldus. Design of linear feedback laws for bilinear systems. *Int. J. Contr.*, 31 :219–237, 1980.
- [DN81] I.A. Derese and E.J. Noldus. Existence of bilinear state observers for bilinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 26 :590–592, 1981.
- [DSN79] I.A. Derese, P. Stevens, and E.J. Noldus. Observers for bilinear systems with bounded input. *Int. J. Syst. Sci.*, 10 :649–668, 1979.
- [EL77] M. España and I.D. Landau. Reduced order bilinear models for distillations columns. *Automatica*, 14 :345–355, 1977.
- [Fra87] B.A. Francis. *A course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [FS02] E. Fridman and U. Shaked. A descriptor system approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control of linear time-delay systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 47 :253–270, 2002.
- [Fun79] Y. Funahashi. Stable state estimator for bilinear systems. *Int. J. Contr.*, 29 :181–188, 1979.
- [GHO92] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems, applications to bioreactors. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 37 :875–880, 1992.
- [GK88] J.P. Gauthier and D. Kasakos. Observabilité et observateurs de systèmes non linéaires. *RAIRO-APII*, 22 :201–212, 1988.
- [GK92] J.P. Gauthier and I. Kupka. A separation principle for bilinear systems with dissipative drift. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 37 :1970–1974, 1992.
- [GL95] M. Green and D.N.J. Limebeer. *Robust Linear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [GM89] G.C. Goodwin and R.H. Middleton. The class of all stable unbiased estimators. *Syst. & Contr. Letters*, 13 :161–163, 1989.
- [GSZD07a] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. Filtrage robuste des systèmes bilinéaires uniformément observables. In *Journées Doctorales Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes Dynamiques.*, Reims, France, 2007.

- 
- [GSZD07b] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. LPV approach for  $\mathcal{H}_\infty$  reduced-order filters for bilinear systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Kos, Greece, 2007.
- [GSZD07c] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. LPV approach for observer-based compensator for bilinear systems. In *Conf. on Systems and Control*, Marrakech, Morocco, 2007.
- [GSZD08a] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach.  $\mathcal{H}_\infty$  filter for bilinear systems using LPV approach. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 2008. soumis.
- [GSZD08b] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. LPV approach for  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for a class of nonlinear systems. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [GSZD08c] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. LPV approach for observer-based quadratic compensator for bilinear systems. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Ajaccio, France, 2008.
- [Gut81] P.O. Gutman. Stabilizing controllers for bilinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 26 :917–922, 1981.
- [GZSD07a] B. Gérard, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and M. Darouach. Two-stage functional  $\mathcal{H}_\infty$  filter for a class of bilinear systems. In *Conf. on Systems and Control*, Marrakech, Morocco, 2007.
- [GZSD07b] B. Gérard, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and M. Darouach. Two-stage observer for a class of bilinear systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Kos, Greece, 2007.
- [Hać92] A. Hać. Design of disturbance decoupled observer for bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 114 :556–562, 1992.
- [HF76] S. Hara and K. Furuta. Minimal order state observers for bilinear systems. *Int. J. Contr.*, 24 :705–718, 1976.
- [HK77] R. Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 22 :728–740, 1977.
- [HM99] J.P. Hespanha and A.S. Morse. Certainty equivalence implies detectability. *Syst. & Contr. Letters*, 36 :1–13, 1999.
- [Jac79] D.H. Jacobsen. *Extension of Linear-Quadratic Control, Optimization and matrix Theory*. Academic Press, London, 1979.
- [Kal63] R.E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM J. Contr.*, 1 :152–192, 1963.
- [KS72] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control*. Wiley Interscience, New York, USA, 1972.
- [LFMH07] F-L. Liu, M. Farza, M. M’saad, and H. Hammouri. High gain observer based on coupled systems. In *Conf. on Systems and Control*, Marrakech, Morocco, 2007.
- [LFMH08] F-L. Liu, M. Farza, M. M’saad, and H. Hammouri. Observer design for a class of uniformly observable MIMO nonlinear systems with coupled structure. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.

- [Lin95] W. Lin. Input saturation and global stabilization of nonlinear systems via state and output feedback. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 40 :776–782, 1995.
- [LL61] J. Lasalle and S. Lepschetz. *Stability by Liapunov’s direct method*. Academic Press, New York, 1961.
- [Lon80] R. Longchamp. Stable feedback control of bilinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 25 :302–306, 1980.
- [LT85] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, Orlando, USA, 2nd edition, 1985.
- [MA73] P. J. Moylan and B. D. O. Anderson. Non linear regulator theory. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 18 :460–465, 1973.
- [MK80] R.R. Mohler and W.J. Kolodziej. An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Trans. Syst. Man Cyber.*, 10 :683–688, 1980.
- [MKOS97] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda.  $\mathcal{H}_\infty$  control for descriptor systems : A matrix inequality approach. *Automatica*, 33 :669–672, 1997.
- [MMT78] A.N. Michel, R.K. Miller, and W. Tang. Liapunov stability of interconnected systems : Decomposition into strongly connected systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 25 :799–809, 1978.
- [Moh73] R.R. Mohler. *Bilinear Control Processes*, volume 106 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New York, 1973.
- [Moh91] R.R. Mohler. *Nonlinear systems : Applications to Bilinear Control*, volume 2. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [MTG02] V. Mahout, S. Tarbouriech, and G. Garcia. Controller design for unstable uncertain bilinear systems. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Lisbon, Portugal, 2002.
- [Mys92] P. Myszkorowski. Practical stabilization of a class uncertain nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 18 :233–236, 1992.
- [MZD99] E. Magarotto, M. Zasadzinski, and M. Darouach. An  $\mathcal{H}_\infty$  reduced-order controller for bilinear systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Phoenix, USA, 1999.
- [Nij81] H. Nijmeijer. Observability of a class of non linéar systems : a geometric approach. *Ricerche Di Automatica*, 12, 1981.
- [Raj98] R. Rajamani. Observer for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 43 :397–401, 1998.
- [RC95] R. Rajamani and Y.M. Cho. Performance of active automotive suspensions with hydraulic actuators : theory and experiment. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, New Orleans, USA, 1995.
- [RCDP93] M.A. Rotea, M. Corless, D. Da, and I.R. Petersen. Systems with structured uncertainty : relations between quadratic and robust stability. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 38 :799–803, 1993.
- [RH94] S. Raghavan and J.K. Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 59 :515–528, 1994.

- 
- [RHMB08] M. Rodrigues, H. Hammouri, C. Mechmeche, and N. Benhadj Braiek. A high gain observer based LMI approach. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [RM71] C.R. Rao and S.K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. Wiley, New York, 1971.
- [RM05] V. Ryali and K.M. Moudgalya. Practical stability analysis of uncertain nonlinear systems. In *Nat. Conf. on Control and dynamical system*, Bombay, India, 2005.
- [Rug81] W.J. Rugh. *Nonlinear System Theory*. Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [Sai94] M. Saif. A disturbance accommodating estimator for bilinear systems. *Control Theory & Advanced Technology*, 3 :431–446, 1994.
- [SBG97] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, and G.C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [Sch90] C.W. Scherer. *The Riccati Inequality and State-Space  $\mathcal{H}_\infty$ -Optimal Control*. PhD thesis, Dissertation zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades der Bayerischen Julius Maximilians-Universität Würzburg, 1990.
- [SDZ06] H. Souley Ali, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Approche LMI pour la synthèse des filtres  $\mathcal{H}_\infty$  non biaisés. In *Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bordeaux, France, 2006.
- [SMN90] M. Sampei, M. Mita, and M. Nakamichi. An algebraic approach to  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback control problems. *Syst. & Contr. Letters*, 14 :13–24, 1990.
- [SW95] E.D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Syst. & Contr. Letters*, 24 :351–359, 1995.
- [SZDR01] H. Souley Ali, M. Zasadzinski, M. Darouach, and H. Rafaralahy. Reduced order unbiased filtering for a class of uncertain bilinear systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Orlando, USA, 2001.
- [SZRD02] H. Souley Ali, M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, and M. Darouach.  $\mathcal{H}_\infty$  functional unbiased filtering for uncertain bilinear systems. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [SZRD06] H. Souley Ali, M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, and M. Darouach. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  reduced order functional filtering for uncertain bilinear systems. *Automatica*, 42 :405–413, 2006.
- [TH89] B. Tibken and E.P. Hofer. Systematic observer design for bilinear systems. In *IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst.*, Portland, USA, 1989.
- [Tha73] F.E. Thau. Observing the state of non-linear dynamic systems. *Int. J. Contr.*, 17 :471–479, 1973.
- [THS96] B. Tibken, E.P. Hofer, and A. Sigmund. The ellipsoid method for systematic bilinear observer design. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Chicago, USA, 1996.

- [Tsi89] J. Tsiniias. Observer design for nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 13 :135–142, 1989.
- [van92] A.J. van der Schaft.  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 37 :770–784, 1992.
- [Vid80a] M. Vidyasagar. Decomposition techniques for large-scale systems with non-additive interactions : stability and stabilizability. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 25 :773–779, 1980.
- [Vid80b] M. Vidyasagar. On the stabilization of nonlinear systems using state detection. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 25 :504–509, 1980.
- [Vid80c] M. Vidyasagar. On the well-posedness of large-scale interconnected systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 25 :413–421, 1980.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.
- [WG98] J.T. Watson and K.M. Grigoriadis. Optimal unbiased filtering via linear matrix inequalities. *Syst. & Contr. Letters*, 35 :111–118, 1998.
- [Wil71] J.C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equations. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 16 :621–634, 1971.
- [Wil77] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254, 1977.
- [WK91] W.J. Wang and C.C. Kao. Estimator design for bilinear systems with bounded inputs. *J. of the Chinese Institute of Engineering*, 14 :157–163, 1991.
- [WXD92] Y. Wang, L. Xie, and C.E. De Souza. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 19 :139–149, 1992.
- [XC03] S. Xu and T. Chen. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements. *Automatica*, 39 :500–516, 2003.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [ZLCL04] Z. Zhang, J. Lu, J. Cao, and G. Lu.  $\mathcal{H}_\infty$  observer-based compensator design for bilinear continuous-time systems. In *Proc. Cong. Intelligent Contr. and Aut.*, Hangzhou, China, 2004.
- [ZRMD98] M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, C. Mechmeche, and M. Darouach. On disturbance decoupled observer for a class of bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 120 :371–377, 1998.

## Résumé

La commande et l'estimation des systèmes bilinéaires restent un problème ouvert en automatique du fait de la nature non linéaire des systèmes. Même si ces systèmes semblent "proches" des systèmes linéaires, leur étude nécessite une approche différente. En effet, les entrées peuvent générer des singularités qui doivent être explicitement prises en compte dans la synthèse de lois de commande et des observateurs. Cette spécificité du rôle des entrées dans les propriétés des systèmes bilinéaires nous a amené à traiter le problème de l'observation à partir de deux approches principales :

- une approche de type LPV (Linear Parameter Varying, Linéaire à Paramètres Variants) s'appuyant explicitement sur le modèle,
- une approche basée sur l'analyse structurelle des systèmes bilinéaires en exploitant différemment les parties uniformément observables et non uniformément observables.

L'une des contributions présentées dans ce mémoire réside dans l'utilisation de l'approche LPV pour la prise en compte des entrées de commande afin de concevoir un observateur pour les systèmes bilinéaires.

L'approche  $\mathcal{H}_\infty$  pour le filtrage des perturbations a été étudiée pour deux types d'observateurs, l'observateur à grand gain, spécialement adapté aux systèmes uniformément observables, et l'observateur fonctionnel. Des approches LMI permettent la synthèse et/ou l'optimisation de ces filtres. En s'appuyant sur cette approche, différentes commandes saturées basées sur ces observateurs ont été proposées :

- la commande bang bang,
- la commande quadratique,
- la commande linéaire,
- l'utilisation couplée de différentes commandes.

Une autre partie de mon travail a consisté à exploiter la structure des systèmes bilinéaires afin de relaxer le conservatisme dans le traitement des entrées lors de la synthèse d'un observateur. Nous avons ainsi conçu des observateurs à deux étages afin de séparer les dynamiques uniformément observables et celles qui ne le sont pas afin d'y appliquer différents types d'observateurs LPV. Cette approche montre en outre les possibilités d'association de divers types d'observateurs pour les systèmes de grandes dimensions. En s'appuyant sur la décomposition structurelle évoquée ci-dessus, nous avons étudié le couplage de diverses commandes et divers observateurs pour les systèmes bilinéaires.



# Abstract

The control and the estimation of the bilinear systems remain a problem opened in automatic because of the nonlinear nature of the systems. Even if these systems seem “close” of the linear systems, their study requires a different approach. Indeed, control input can generate singularities which must be explicitly taken into account in the synthesis of the control laws and the observers. This brought us to treat the problem of the observation with two main approaches :

- an LPV approach (Linear Parameter Varying) leaning explicitly on the model,
- an approach based on the structural analysis of the bilinear systems by differently exploiting the parts uniformly observable and not uniformly observable.

One of the contributions presented in this memory resides in the use of approach LPV for the taking into account of the inputs of command in order to design an observer for the bilinear systems.

The  $\mathcal{H}_\infty$  approach for the filtering of the disturbances was studied for two kinds of observers, the observer with high gain, especially adapted to the uniformly observable systems, and the functional observer. LMI approaches allow the synthesis and/or the optimization of these filters. Thanks to this approach, various saturated control laws based on these observers were proposed.

- the bang bang control,
- the quadratic control,
- the linear control,
- the coupled use of various controls.

Another part of my work consisted in exploiting the structure of the bilinear systems in order to reduce conservatism in the processing of the inputs in observer synthesis. We thus designed two-stage observers in order to separate dynamic the uniformly observable ones and those which are not it in order to apply various types of observers LPV to it. This approach shows moreover the possibilities of association of various types of observers for the large-scale systems. While being based on the structural decomposition to evoke above, we studied the coupling of various controls and various observers for the bilinear systems.