



HAL
open science

Approximation des signaux: approches variationnelles et modèles aléatoires

Matthieu Kowalski

► **To cite this version:**

Matthieu Kowalski. Approximation des signaux: approches variationnelles et modèles aléatoires. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2008. Français. NNT: . tel-00347441

HAL Id: tel-00347441

<https://theses.hal.science/tel-00347441v1>

Submitted on 15 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE
U.F.R. M.I.M.
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET
INFORMATIQUE E.D. 184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE
Spécialité : Mathématiques appliquées

par

Matthieu KOWALSKI

sous la direction du Pr. Bruno TORRESANI

Titre :

**Approximation des signaux : approches
variationnelles et modèles aléatoires**

soutenue publiquement le 15 octobre 2008

JURY

M. Stéphane CANU	INSA Rouen	<i>Président du jury</i>
M. Emmanuel BACRY	Polytechnique	<i>Rapporteur</i>
M. Pierre VANDERGHEYNST	EPFL	<i>Rapporteur</i>
M. Rémi GRIBONVAL	INRIA-IRISA	<i>Examineur</i>
M. Liva RALAIVOLA	Université de Provence	<i>Examineur</i>
M. Bruno TORRÉSANI	Université de Provence	<i>Directeur de thèse</i>

À mes parents et mon frère
À Marie

«D'après une théorie, le jour où quelqu'un découvrira exactement à quoi sert l'Univers et pourquoi il est là, ledit Univers disparaîtra sur-le-champ pour se voir remplacé par quelque chose de considérablement plus bizarre et inexplicable.

Selon une autre théorie, la chose se serait en fait déjà produite.»

Douglas Adams - *Le guide galactique.*

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont naturellement à Bruno, pour sa patience, sa disponibilité et sa gentillesse. Merci de m'avoir fait confiance pour mener ces travaux pendant mes trois années de thèse. Merci aussi d'avoir pris le temps de répondre avec précision à toutes mes questions, souvent récurrentes. Difficile d'exprimer toute ma reconnaissance sans donner l'impression d'en faire « trop », je te dis donc un profond et sincère MERCI .

Je tiens aussi à remercier les rapporteurs pour leur lecture attentive de mes travaux, ainsi que tous les membres du Jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté vis à vis de mon travail.

Merci au CNRS et à la région PACA qui ont financé cette thèse, mais aussi GENESIS et son p-dg Patrick Boussard pour s'être porté « partenaire socio-économique ». J'en profite pour remercier Florent et Stéphane, ex et actuel ingénieur chez GENESIS, pour leur sympathie, que j'ai le plaisir de rencontrer occasionnellement.

Merci beaucoup à l'équipe METISS de l'IRISA, en particulier Rémi Grignonval et Emmanuel Vincent, pour leur accueil chaleureux et le plaisir que j'ai eu à travailler avec eux. Je n'oublie pas le GDR ISIS qui permet ce type d'échange.

Je tiens à remercier Fabienne et Jean-Michel qui m'ont mis le pied à l'étrier de l'enseignement, et Christophe qui prend le relais. Merci à toutes les personnes du « couloir » de l'IMT : Clothilde, Marie-Christine, Karine, Sandrine, Pierre, Liva, Anaïc, Émilie... mais aussi tous ceux qui viennent de temps à autres, ou qui y ont séjourné, qui ont contribué à rendre mes journées agréables.

J'en profite pour remercier la majorité des enseignants (scientifiques ou pas) que j'ai croisé au cours de scolarité, sans qui je ne serais jamais arrivé là.

Pour finir, j'ai une pensée particulière pour mes proches amis, que je ne remercierai jamais assez. Sans ordre particulier, merci Charles, Pierre, Arnaud, Sev, Amandine, Sam, Anne-Pauline, Guillaume et Émilie, Guillaume, Karine, Juju et Charlotte d'être toujours là. Je remercie mes parents et mon frère, pour m'avoir supporté toutes ces années malgré mes humeurs parfois désagréables, pour s'être souvent contenté d'un « ça va » pour toute réponse à leurs questions sur mon travail de thèse. Merci Marie, pour avoir choisi (en toute connaissance de cause) de supporter tout ça à ton tour...

RÉSUMÉ

Deux approches pour la décomposition parcimonieuse des signaux sont étudiées.

L'une utilise des méthodes variationnelles avec une attache aux données l_2 pénalisée par une norme mixte permettant de structurer la parcimonie. Les fonctionnelles sont minimisées par des algorithmes itératifs dont la convergence est prouvée. Les normes mixtes donnent des estimations par des opérateurs de seuillage généralisés, qui ont été modifiés pour les localiser ou introduire de la persistance.

L'autre modélise les signaux comme combinaisons linéaires parcimonieuses d'atomes temps-fréquence choisis dans l'union de deux bases orthonormées, à coefficients aléatoires. La distribution de ces coefficients fait intervenir deux niveaux d'aléa : leur valeur et leur position dans leur espace temps-fréquence. L'étude des coefficients d'analyse permet une estimation des cartes temps-fréquence. La projection du signal sur ces cartes donne une décomposition en deux couches plus un résidu.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	11
1 INTRODUCTION GÉNÉRALE	15
1.1 Quelques exemples courants	15
1.2 Quelques idées générales	16
1.3 Organisation du document	17
2 APPROXIMATION PARCIMONIEUSE À L'AIDE DE FORMES D'ONDES	21
2.1 Représentation dans un dictionnaire	21
2.1.1 Cadre mathématique	21
2.1.2 Analyse et synthèse	22
2.2 Parcimonie et problèmes inverses	23
2.2.1 Synthèse et reconstruction exacte	24
2.2.2 Synthèse et approximation	24
2.2.3 Analyse et problème inverse	27
2.3 Mesures de parcimonie et de diversité	28
2.3.1 Mesurer la parcimonie des coefficients d'analyse	28
2.3.2 Mesurer la parcimonie des coefficients de synthèse	30
2.4 La parcimonie en pratique	33
2.4.1 Dictionnaires temps fréquence	33
2.4.2 Modèles mathématiques d'approximation	37
2.4.3 Principaux algorithmes de décomposition parcimonieuse	39
2.5 Décomposition en couches	42
2.5.1 Analyse en composante morphologique	43
2.5.2 Modèles hybrides	44
2.6 Conclusion du chapitre et positionnement de cette thèse	45
I Approche variationnelle et normes mixtes	47
3 NORMES MIXTES	49
3.1 Définition	49
3.2 Quelques normes mixtes dans la littérature	51

3.2.1	Les normes mixtes et les espaces fonctionnels	51
3.2.2	Les normes mixtes en régression et apprentissage statistique	51
4	ESTIMATION SOUS CONTRAINTE D'ÉGALITÉ	53
4.1	Minimisation d'une norme mixte	53
4.2	Extension à la décomposition multi-couche	56
5	RÉGRESSION PARCIMONIEUSE	61
5.1	Interprétation Bayésienne	61
5.2	Solution par FOCUSS régularisée	62
5.3	Le cas unitaire	63
5.3.1	Pour une parcimonie faible : $p > 1$ et $q > 1$	64
5.3.2	Pour des groupes parcimonieux : $p > 1$ et $q = 1$	64
5.3.3	Pour une sélection parcimonieuse de coefficients à l'intérieur des groupes : $p = 1$ et $q > 1$	66
5.3.4	Résumé des principaux résultats	68
5.4	Généralisation	69
5.4.1	BCR	69
5.4.2	Itérations de Landweber	72
6	LE SEUILLAGE EN PRATIQUE : SIMULATIONS	77
6.1	Sélection de groupes pertinents	77
6.1.1	Re-numérotation	77
6.1.2	Fenêtrage	78
6.1.3	Simulations	79
6.2	Sélection parcimonieuse de coefficients à l'intérieur de groupes	82
6.2.1	Une approximation du E-LASSO	83
6.2.2	Introduction de persistance	83
6.2.3	Simulations	84
7	RÉSULTATS SUR SIGNAUX RÉELS	87
7.1	Quelques illustrations simples	87
7.1.1	Illustration du seuillage itératif de Landweber	87
7.1.2	Illustration de l'algorithme FOCUSS	90
7.1.3	Débruitage	92
7.1.4	Décomposition multi-couche d'un signal audio	94
7.2	Application à la séparation de sources	100
7.2.1	Régularisation ℓ_1	102
7.2.2	Régularisation $\ell_{1,2}$	103
7.2.3	Mélange anéchoïque	104
7.2.4	Mélange convolutif	105
7.2.5	Temps de calcul	107
7.3	Application aux signaux EEG	107
7.3.1	Introduction	107

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	13
7.3.2 Régression LASSO et G-LASSO	109
7.3.3 Décomposition multicouches	110
8 CONCLUSION PARTIELLE	117
II Analyse de modèles hybrides aléatoires	119
9 INTRODUCTION	121
9.0.4 Généralités	121
9.0.5 Modèle aléatoires hybrides	122
10 MODÈLES ALÉATOIRES DE CARTES TEMPS-FRÉQUENCE	125
10.1 Modèle de Bernoulli	125
10.1.1 Modèle	125
10.1.2 Coefficients d'analyse	126
10.1.3 Estimation des cartes	129
10.2 Modèle de Bernoulli-Hiérarchique	132
10.2.1 Généralités	132
10.2.2 Modèle	133
10.2.3 Estimation des cartes	133
10.3 Estimation de la variance	135
11 ALGORITHMES D'ESTIMATION	137
11.1 Algorithmes en champ moyen	137
11.1.1 Modèle de Bernoulli	137
11.1.2 Modèle de Bernoulli-Hiérarchique	138
11.1.3 Algorithme en champ moyen itératif	139
11.2 Algorithme itératif de seuillage adaptatif	139
11.2.1 Modèle de Bernoulli	140
11.2.2 Modèle Bernoulli-Hierarchique	140
11.3 Estimation des coefficients	140
11.3.1 Approche par régression	141
11.3.2 Algorithme type Wiener	142
12 RÉSULTATS	143
12.1 Application à la séparation en deux couches : transitoire + tonale	144
12.2 Application au débruitage	145
12.2.1 Bruit blanc gaussien synthétique	145
12.2.2 Comparaison Bernoulli vs Bernoulli-Hiérarchique	148
12.2.3 Débruitage de signaux provenant de l'INA	149
12.3 Application au codage audio	151
13 CONCLUSION PARTIELLE	153

Conclusion générale, annexes et références	157
14 CONCLUSION GÉNÉRALE	159
14.1 Rencontre des deux approches	159
14.2 Perspectives	161
A EM - CEM	165
B MDCT	167
B.1 Transformée de Fourier à fenêtre	167
B.2 Définition de la MDCT	168
C DÉMONSTRATIONS	169
C.1 Preuve de la proposition 5.1	169
C.2 Preuve de la proposition 5.2 (convergence de l'algorithme de point fixe)	170
C.3 Preuve de la proposition 5.3	172
C.4 Preuve du théorème 5.3	174
BIBLIOGRAPHIE	179

INTRODUCTION GÉNÉRALE



«Les entités ne doivent pas être multipliées par delà ce qui est nécessaire»
Guillaume d’Occam

Le rasoir d’Occam, aussi appelé principe de parcimonie, consiste à privilégier la solution la plus simple (ce qui ne veut pas dire «simplette») comme explication à un phénomène, avant d’envisager des théories complexes. Il faut comprendre «solution simple» comme une solution faisant intervenir le moins d’hypothèse possible pour expliquer une seule chose.

1.1 Quelques exemples courants

C’est ce principe que l’on va essayer de mettre en oeuvre pour expliquer des signaux. Pour cela, encore faut-il savoir ce qu’on entend par «expliquer» un signal. Prenons pour exemple un signal de musique. Une représentation pratique et quasi-idéale serait la partition du morceau. Cette représentation contient une quantité d’information importante (comment jouer chaque note, à quel rythme, pour chaque instrument), et permet de rejouer le morceau presque à l’identique. L’inconvénient de la partition est, que plus de savoir la lire, il faut savoir la jouer.

Pour un mélomane non musicien, cette représentation n’est au final pas la panacée. Il préférera une autre représentation : les échantillons du signal enregistré sur CD, la théorie de Shannon assurant une qualité d’écoute presque parfaite¹. Un inconvénient des enregistrements CD, est qu’ils prennent beaucoup de place : un CD audio ne contient que 80 minutes de musique. Pour un voyage de trois heures en TGV, cela nous oblige à apporter deux CD en plus du lecteur (voire quatre, si l’on ne veut pas écouter la même chose au retour). Aujourd’hui, on préfère ainsi souvent le stockage de la musique avec le MP3 (ou encore AAC, OGG et autres formats²), qui permet de stocker

¹On n’entrera pas ici dans les débats interminables sur la qualité d’un enregistrement sur CD ou sur disque vinyle...

²On ne fera pas non plus de comparaison de qualité entre les différents formats de compression, même si le MP3 est tout de même mauvais par rapport aux autres existant aujourd’hui.

plusieurs centaines de morceaux de musique sur le même CD que précédemment. Le principe de la compression MP3 est de ne garder que l'information «essentielle» des signaux audio pour restituer une qualité d'écoute convenable (c'est le principe de la compression avec perte).

On vient de voir en quelques lignes déjà trois façons différentes de représenter le signal : la partition de musique, les échantillons numériques du CD et la compression MP3. La partition explique la façon dont la musique est jouée, les échantillons permettent de représenter l'évolution de la pression de l'air qui transporte le signal audio, et le MP3 permet de en retenir que l'information «utile» pour écouter de la musique, et ainsi économiser de la place par rapport aux échantillons. Ainsi, en fonction de l'objectif ou du problème qu'on se pose, la notion d'information n'est pas la même.

Cependant, dans tous les cas, on cherche à représenter le signal de la façon la plus succincte possible. Dans cette thèse, on considérera de façon assez générale l'approximation d'un signal, avec le moins d'éléments possible. Si le but est la compression du signal, l'intérêt est immédiat. Mais cela sert aussi pour l'analyse d'un signal. Reprenons l'exemple de la partition. Imaginons qu'on veuille pouvoir rejouer un morceau qui nous plaît, mais qu'on ne dispose que de son enregistrement. Comment retrouver la partition facilement (sans avoir l'oreille absolue) ? Bien que le but de cette thèse ne soit pas la transcription automatique, l'approximation parcimonieuse peut être une piste judicieuse pour ce problème.

Maintenant l'intérêt de l'approximation parcimonieuse est posé, et que l'on a souligné quelques difficultés, nous allons donner quelques pistes, de façon très générale.

1.2 Quelques idées générales

Afin d'approximer au mieux un signal, on cherche en général un système de représentation idoine. Nous avons déjà parlé des échantillons temporels. Cependant, cette représentation ne rend pas compte du contenu fréquentiel du signal (le contenu fréquentiel étant l'information donnant la hauteur d'une note jouée par un piano par exemple). L'idéal serait de connaître l'évolution du contenu fréquentiel au cours du temps (comme pour une partition de musique). Il existe des représentations temps-fréquence, mais celles-ci se heurtent malheureusement au principe d'incertitude d'Heisenberg qui empêche d'être précis à la fois en temps et en fréquence.

Reprenons un exemple musical pour illustrer cette limitation. Imaginons un morceau joué par une guitare accompagnée d'une percussion. La percussion est un signal qui est localisé en temps : on entend une succession de frappes qui donnent le rythme, et il est très difficile d'associer une note précise à chaque frappe (même si les percussions paraissent plus ou moins graves). C'est ce qui sera appelé un «transitoire». Il convient alors d'avoir

un système assez précis en temps pour représenter les transitoires. À l'inverse, la guitare joue des notes qui se détachent, et qui sont parfaitement audibles. C'est ce qui sera appelé l'information «tonale». Pour elle, il nous faut un système précis en fréquence pour représenter les notes et leur évolution au cours du temps. Sur cet exemple, la limitation due au principe d'Heisenberg est bien illustré : il va falloir faire un choix (difficile !) entre la précision temporelle et fréquentielle. On peut ensuite compliquer encore un peu les choses, en remarquant que l'attaque d'une note à la guitare présente un transitoire, puis qu'elle est suivie de l'information tonale.

Pour essayer d'apporter une solution à ce problème, une idée est de considérer que le signal peut se décomposer en deux «couches» : une couche tonale (avec essentiellement l'information fréquentielle) et une couche transitoire (avec essentiellement l'information temporelle). Le problème étant alors de pouvoir identifier ces deux couches.

En trois paragraphes, on voit que la représentation d'un signal devient vite complexe. Une approche pourrait être de choisir plusieurs systèmes de représentation différents (échantillons, fréquence, temps-fréquence avec différents choix de précisions en temps et en fréquence...), puis de rechercher l'information qui nous intéresse effectivement. La difficulté devient : comment chercher et sélectionner ce qu'on veut parmi la masse d'information ?

L'objet de ce travail est de proposer deux méthodes assez générales, afin de sélectionner, ou de trouver une représentation parcimonieuse, c'est à dire concise, d'un signal dans un ensemble d'informations élémentaires (qu'on appellera atomes). Ces approches sont testées sur diverses applications, comme la séparation d'un signal en couches transitoire et tonale, le débruitage, ou encore la séparation de sources.

1.3 Organisation du document

Plutôt que d'écrire cette thèse en quelques gros chapitres, j'ai choisi de la diviser en deux parties quasi-indépendantes (à première vue!), la troisième regroupant la conclusion générale et les perspectives. En particulier, on montrera comment la deuxième partie semble apporter une solution au principal problème de la première. Elle contient également les annexes et les références bibliographiques. Chaque partie contient plusieurs chapitres, parfois assez brefs, ce qui permet de hiérarchiser le propos au maximum, et ainsi faire ressortir les parallèles, ou au contraire de bien distinguer certaines approches.

Le chapitre 2 permet de présenter le problème de façon générale, en faisant le parallèle entre l'approche *synthèse* et l'approche *analyse* de l'approximation d'un signal. On y discute de la notion de parcimonie, des problèmes que cela soulève. On effectue aussi un état de l'art des approches les plus populaires.

La première partie aborde le problème de la régression parcimonieuse à l'aide de normes mixtes qui sont un moyen simple de structurer l'information. Ces normes mixtes sont utilisées dans une formulation variationnelle pour approximer le signal. Cette approche fait intervenir une fonctionnelle constituée d'un terme d'attache aux données ℓ_2 , pénalisée par une norme mixte. On peut alors introduire de nouveaux «opérateurs de seuillage généralisés», qui permettent de sélectionner les coefficients pertinents, en essayant de tenir compte d'une certaine hiérarchie entre-eux. Ces opérateurs de seuillage peuvent être utilisés dans des algorithmes itératifs, dont la convergence vers le minimum de la fonctionnelle considérée est prouvée. Ces opérateurs de seuillage peuvent aussi être modifiés afin de corriger certaines limitations des normes mixtes : on peut les localiser ou introduire de la persistance. Cette partie repose sur les articles [Kow08, KT08b] pour les chapitres sur la régression parcimonieuse à l'aide de norme mixte et le seuillage. Les résultats en séparation de sources ont été publiés dans [KVG08].

La seconde partie modélise *a priori* les signaux comme combinaison linéaire parcimonieuse d'atomes temps-fréquence choisis dans l'union de deux bases orthonormées, à coefficients *aléatoires*. On suppose de plus qu'un signal x suit un modèle en couches additives du type $x = x_1 + x_2 + r$ où x_1 et x_2 sont supposés admettre une décomposition parcimonieuse dans une base (ou un repère) adaptée, et r un résidu ne pouvant pas être décrit de manière parcimonieuse (tel un bruit blanc). On cherche donc à décomposer un signal dans un dictionnaire construit comme l'union de deux bases, chacune étant adaptée à une caractéristique du signal. La distribution des coefficients fait intervenir plusieurs niveaux d'aléa, essentiellement leur valeur et leur position dans leur espace temps-fréquence respectif. L'étude des coefficients d'analyse (*i.e.* le produit scalaire du signal avec les atomes temps-fréquence) permet d'obtenir une estimation des cartes temps-fréquence par classification. Le signal peut ensuite être projeté sur ces cartes, afin d'obtenir une décomposition en deux couches plus un résidu. Les résultats théoriques et pratiques de cette partie ont été publiés dans [KT08a].

On verra dans la conclusion générale comment les deux parties peuvent se rejoindre, et aussi l'orientation des travaux futurs à plus ou moins courte échéance qui suivront cette thèse.

Les démonstrations sont en règle générale dans le corps du texte, sauf pour le chapitre 5 de la première partie. Dans ce chapitre, toutes les démonstrations sont reportées à l'annexe C, pour ne pas casser le rythme de lecture et faciliter ainsi l'enchaînement des idées.

Bien que ce travail repose beaucoup sur les transformations temps-fréquence ou en \star -lettres, il n'y a pas de chapitre dédié à ces transformations. On en rappellera le principe en temps voulu, et l'annexe B décrit brièvement la transformation MDCT beaucoup utilisée dans les applications. On

pourra se reporter à [Mal98] pour une description précise des principales transformations temps-fréquence ou en ondelettes.

Si les méthodes étudiées ont été testées sur des applications, ces dernières sont surtout là pour illustrer l'intérêt des méthodes. Un travail spécifique devrait être fait si le but visé est vraiment l'application elle-même. Cependant, les résultats obtenus sont souvent très encourageants et motivent ce travail supplémentaire (en particulier pour la séparation de source).

La conclusion générale décrit brièvement le rapprochement des deux parties, en donnant les idées principales. Ce rapprochement demande un travail précis qui sera une suite immédiate aux travaux effectués dans cette thèse.

APPROXIMATION PARCIMONIEUSE À L'AIDE DE FORMES D'ONDES

2

Ce chapitre situe le cadre mathématique de la représentation et de l'approximation des signaux. On attachera une importance particulière à la définition, voire aux définitions, de la *parcimonie*, et aux conséquences pratiques et théoriques de cette hypothèse.

Le cadre mathématique de la représentation parcimonieuse d'un signal dans un dictionnaire de formes d'ondes est présenté en premier lieu, puis les différences entre l'analyse d'un signal et sa synthèse. La parcimonie est alors introduite comme un modèle. Les hypothèses mathématiques correspondantes seront formulées avant d'aborder cette approche sous un angle pratique.

Enfin, on verra comment introduire et préciser la notion de *structures* pour la représentation des signaux.

2.1 Représentation dans un dictionnaire

2.1.1 Cadre mathématique

Le cadre général de la représentation des signaux est l'analyse hilbertienne. Un signal est un élément d'un espace de Hilbert \mathcal{H} séparable. Un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est associé à cet espace et on note $\|\cdot\|_2$ la norme issue du produit scalaire. Cette norme permet de mesurer l'*énergie* d'un signal $s \in \mathcal{H}$.

On travaille indifféremment dans un espace de dimension finie ou infinie. Lorsque l'hypothèse de la dimension finie est faite, celle-ci sera clairement précisée. Cette hypothèse n'est pas restrictive étant donné que les signaux numériques sont par nature de dimension finie, même si cette dernière peut être très grande.

En dimension infinie, un cadre pratique est donné par l'espace $L_2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie finie. Dans la suite, sauf mention contraire, on considérera $\mathcal{H} \subset L_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout signal $s \in \mathcal{H}$, $\|s\|_2 < +\infty$.

L'espace de Hilbert choisi étant séparable, on peut alors définir une base ou un repère¹ dans lequel représenter un signal donné. La définition d'un repère est rappelée ci-après.

Définition 2.1. Une famille $\{\phi_i, i \in \mathcal{I}\}$, où \mathcal{I} est un ensemble d'indices, est un repère de l'espace \mathcal{H} s'il existe deux constantes $0 < A \leq B < \infty$ telles que pour tout $x \in \mathcal{H}$

$$A\|x\|_2^2 \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} |\langle x, \phi_i \rangle|^2 \leq B\|x\|_2^2 .$$

Si $A = B$ on dit que le repère est ajusté.

Plus généralement, on parlera de *dictionnaire* $\mathcal{D} = \{\phi_i, i \in \mathcal{I}\}$ pour un ensemble sur-complet dont les éléments ϕ_i sont normés. Ces éléments sont aussi appelés *atomes* du dictionnaire. En dimension infinie, un dictionnaire n'est pas nécessairement un repère : la deuxième partie de l'inégalité de la définition 2.1 n'est pas toujours vérifiée si le dictionnaire est très redondant. On peut, par exemple, construire des dictionnaires par union de bases ou de repères.

2.1.2 Analyse et synthèse

Étant donné un signal $x \in \mathcal{H}$ et un dictionnaire $\mathcal{D} = \{\phi_i, i \in \mathcal{I}\}$, deux questions peuvent se poser.

La première consiste à se demander comment x se décompose dans le dictionnaire, c'est-à-dire quelle est l'information apportée par les atomes sur le signal. C'est l'approche *analyse*. L'analyse du signal se fait simplement par le calcul des produits scalaires avec tous les atomes du dictionnaire, et on s'intéresse alors aux coefficients $\{\langle x, \phi_i \rangle\}$.

La seconde question consiste à savoir comment représenter x avec les atomes du dictionnaire. C'est l'approche *synthèse*. On cherche les coefficients α_i de manière à représenter x comme une combinaison linéaire des atomes, c'est à dire tel que

$$x = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \phi_i . \tag{2.1}$$

On peut introduire l'opérateur de synthèse

$$\begin{aligned} \Phi : \ell_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{H} \\ \{\alpha_i\}_{i \in \mathcal{I}} &\mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \phi_i . \end{aligned}$$

qui permet de récrire (2.1) sous forme opératorielle

$$x = \Phi \alpha . \tag{2.2}$$

¹traduction française de *frame*.

En dimension finie, l'opérateur Φ sera noté comme une matrice dont les colonnes sont formées par les atomes du dictionnaire, et les coefficients α comme un vecteur colonne. Φ est appliquée au vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{|\mathcal{D}|})^T$ (où $|\mathcal{D}|$ représente le cardinal de l'ensemble \mathcal{D}).

L'opérateur adjoint de Φ sera noté Φ^* , qui est le trans-conjugué de Φ en dimension finie. Φ^* appliqué à x permettra l'analyse du signal.

Si le dictionnaire choisi est en fait une base orthonormée de \mathcal{H} , alors l'analyse et la synthèse de x sont simplement liées du fait de l'unicité de la décomposition. On a alors

$$x = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle x, \phi_i \rangle \phi_i .$$

À l'inverse, si \mathcal{D} est *redondant*, c'est-à-dire qu'on dispose plus d'atomes que nécessaire pour représenter le signal, il existe une infinité de représentations (2.1) possibles. Cependant, dans le cas où $\{\phi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est un repère, une représentation possible du signal est donnée à l'aide du repère dual canonique $\{\tilde{\phi}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ défini par $\tilde{\phi}_i = (\Phi\Phi^*)^{-1} \phi_i$ pour tout i . On a alors

$$x = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle x, \tilde{\phi}_i \rangle \phi_i .$$

On verra par la suite que cette représentation n'est pas toujours suffisante, et qu'une synthèse plus concise du signal à l'aide des atomes du dictionnaire est souvent plus judicieuse. La question sera alors de savoir quels sont les atomes significatifs, c'est-à-dire porteurs de l'information voulue, du dictionnaire.

Cette différence de point de vue entre l'analyse et la synthèse est essentielle. Suivant l'application visée on pourra privilégier l'une ou l'autre, bien que les deux approches soient complémentaires. On verra en particulier dans la partie II que l'analyse peut aider à trouver les atomes significatifs d'un dictionnaire et permettre ensuite de calculer les coefficients de synthèse.

Par exemple, si le but est de retrouver dans un signal de musique l'évolution de la fréquence fondamentale d'un instrument, on s'intéressera particulièrement à l'analyse donnée par des représentations temps-fréquence. Par contre, si le but est de compresser le signal, on cherchera à le représenter le mieux possible dans un dictionnaire : la synthèse est privilégiée.

2.2 Parcimonie et problèmes inverses

Sauf indication contraire, on notera dans cette section s un signal quelconque appartenant à l'espace \mathcal{H} . Étant donné un dictionnaire $\mathcal{D} = \{\phi_i, i \in \mathcal{I}\}$ de formes d'ondes, qui peut être redondant, on note Φ l'opérateur de synthèse associé au dictionnaire.

²On rappelle que l'adjoint A^* d'un opérateur $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ est défini tel que $\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2, \langle x, Ay \rangle = \langle A^*x, y \rangle$.

2.2.1 Synthèse et reconstruction exacte

Lorsque le dictionnaire choisi est redondant, il existe une infinité de solutions au problème (2.1). Ce problème, qui consiste à chercher les coefficients de synthèse d'un signal dans un dictionnaire, peut être vu comme un problème inverse mal posé.

Avec les notations utilisées ici, le problème consiste à trouver les coefficients $\alpha = \{\alpha_i, i \in \mathcal{I}\}$ tels que

$$s = \Phi\alpha . \quad (2.3)$$

Une première idée est de lever l'indétermination en contrôlant l'énergie des coefficients recherchés, on cherche alors à résoudre le problème

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \|\alpha\|_2^2 \\ \text{sous contrainte} \quad & s = \Phi\alpha = \sum_i \alpha_i \phi_i . \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle admet une solution analytique simple. Si l'on note $\hat{\alpha}$ la solution de (2.4), on l'obtient par

$$\hat{\alpha} = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}x . \quad (2.5)$$

Si cette solution peut être satisfaisante dans certains cas (c'est ainsi que l'on trouve le repère dual d'un repère donné), elle s'avère insuffisante lorsqu'on cherche à représenter x avec le moins de coefficients possibles.

Afin de trouver une solution parcimonieuse au problème (2.1), on va chercher à minimiser une mesure \mathcal{M} de la «diversité», ou de «l'étalement» des coefficients. On pose alors le problème :

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \mathcal{M}(\alpha) \\ \text{sous contrainte} \quad & s = \Phi\alpha = \sum_i \alpha_i \phi_i . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le problème est donc de trouver une bonne mesure \mathcal{M} de la parcimonie. Le choix de cette mesure sera discuté dans la section 2.3 et dépend de la définition choisie pour la parcimonie.

2.2.2 Synthèse et approximation

De manière générale, les conditions d'acquisition et de mesure introduisent sur le signal s une distortion. Cette distortion sera modélisée comme un bruit additif.

On considère alors que le signal à notre disposition, noté x , s'écrit sous la forme :

$$x = s + b \quad (2.7)$$

où $b \in \mathcal{H}$ est un bruit quelconque.

Afin de minimiser l'erreur entre x et s , on cherche à minimiser une mesure de distortion, notée \mathcal{L} :

$$\hat{s} = \underset{s}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(x - s) . \quad (2.8)$$

Comme pour la section précédente, on cherche à représenter s dans un dictionnaire adapté. Ainsi, le problème (2.8) s'écrit de manière équivalente

$$\hat{\alpha} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(x - \Phi\alpha) . \quad (2.9)$$

L'estimation de s étant donnée par $\hat{s} = \sum_i \hat{\alpha}_i \phi_i$.

Dans ce travail, on utilisera pour \mathcal{L} , en général, une norme ℓ_2 . La minimisation de cette norme nous impose de chercher un signal «assez proche» de l'observation x , dans le sens où l'énergie de l'erreur doit être faible. On verra dans la section 2.4.2 que dans un contexte Bayésien, cette norme correspond à modéliser b comme un bruit blanc gaussien.

Le problème 2.9 admettant une infinité de solutions sur les coefficients α , on doit le régulariser en fonction du type de solution que l'on souhaite obtenir.

Une des premières régularisations proposées est celle de Tikhonov, le problème se posant alors comme

$$\min_{\alpha} \|x - \Phi\alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_2^2 \quad (2.10)$$

où λ est un paramètre de Lagrange que l'on peut régler. Cette régularisation très classique en physique permet de contrôler l'énergie de la solution, et d'éviter ainsi qu'elle n'explose.

Comme pour le cas de la reconstruction exacte, ce problème admet une solution analytique simple :

$$\alpha = \Phi^*(\Phi\Phi^* + \lambda Id)^{-1}x. \quad (2.11)$$

Où Id est l'opérateur d'identité.

Dans le cas où Φ est orthogonale la solution s'obtient simplement par une pondération de tous les coefficients avec le même poids. En notant $\bar{x} = \Phi^*x$:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\bar{x}_i}{1 + \lambda}, \forall i . \quad (2.12)$$

Il apparaît clairement que la solution obtenue n'est pas parcimonieuse dans le sens où aucun coefficient n'est mis à zéro.

Comme lorsqu'on cherche une décomposition exacte, il convient de régulariser le problème avec une mesure \mathcal{M} favorisant une solution parcimonieuse :

$$\min_{\alpha} \|x - \Phi\alpha\|_2^2 + \lambda\mathcal{M}(\alpha) . \quad (2.13)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$ un paramètre de Lagrange.

Il existe deux autres formulations équivalentes du problème d'optimisation (2.13)

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha} \mathcal{M}(\alpha) \\ & \text{sous contrainte } \|x - \Phi\alpha\|_2^2 \leq \sigma , \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Ou bien

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha} \|x - \Phi\alpha\|_2^2 \\ & \text{sous contrainte } \mathcal{M}(\alpha) \leq m , \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec $m \in \mathbb{R}_+$.

Plus les paramètres λ et σ des formulations respectives (2.13) et (2.14) sont petits (ou plus le paramètre m est grand dans la formulation (2.15)), plus on va chercher à minimiser l'erreur $\|x - \Phi\alpha\|_2^2$, au détriment de la parcimonie. Inversement, plus les paramètres λ et σ sont grands (ou plus le paramètre m est petit dans la formulation (2.15)) plus on va chercher à minimiser $\mathcal{M}(\alpha)$ et donc à obtenir une décomposition parcimonieuse au détriment de l'erreur de reconstruction.

Suivant les cas, on utilisera l'une ou l'autre des formulations. Dans ce travail, on utilisera essentiellement les formulations (2.13) ou (2.14) pour illustrer le propos. L'avantage de la seconde formulation est d'englober le problème (2.6) si l'on prend $\sigma = 0$.

Si, pour un même problème, ces trois formulations sont équivalentes, le choix *a priori* des paramètres ne se fait pas de la même manière. Dans la formulation (2.14), on contrôle directement le bruit $\|x - \Phi\alpha\|_2^2$, ce qui peut être avantageux dans un problème de débruitage. La formulation (2.13) a l'avantage d'être sous la forme Lagrangienne, et permet d'obtenir facilement les équations variationnelles associées au problème.

Les paramètres λ , σ et m sont reliés de manière implicite lorsqu'on trace la courbe du chemin de régularisation. Cette courbe représente l'évolution de l'erreur $\mathcal{L}(\alpha) = \|x - \Phi\alpha\|_2^2$ en fonction de la mesure de parcimonie $\mathcal{M}(\alpha)$. Le lien entre λ , σ et m est alors donné par :

$$\sigma = \mathcal{L}(\alpha) \quad (2.16)$$

$$m = \mathcal{M}(\alpha) \quad (2.17)$$

$$\lambda = \frac{d \mathcal{L}}{d \mathcal{M}(\alpha)}(\alpha) . \quad (2.18)$$

La figure 2.1 montre un exemple de chemin de régularisation, et comment sont liés les paramètres des trois formulations.

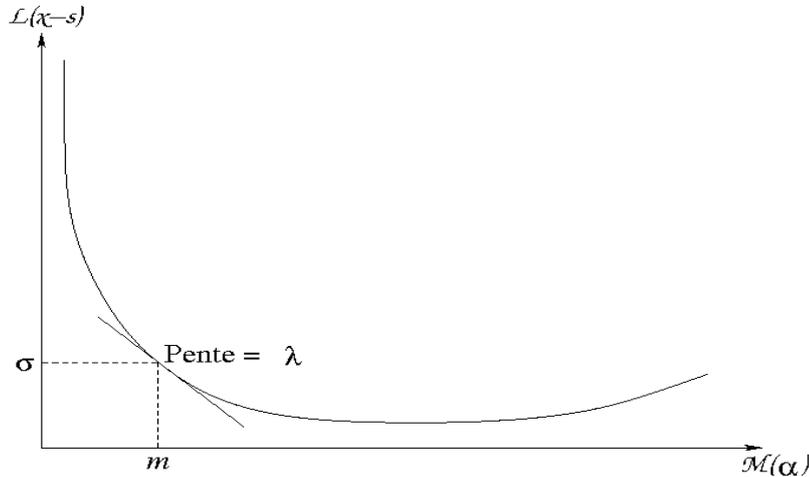


FIG. 2.1 – Chemin de régularisation : lien entre les paramètres λ , σ et m .

L'étude du chemin de régularisation associé à un type de problème (où la fonction d'erreur \mathcal{L} et la mesure de parcimonie \mathcal{M} sont fixées) est à l'origine d'algorithmes performants, et très utilisée en apprentissage statistique (voir en section 2.4.3).

2.2.3 Analyse et problème inverse

Si la recherche des coefficients de synthèse semble naturelle pour beaucoup d'applications, comme le codage, on peut aussi adopter le point de vue analyse.

On cherche alors à trouver une estimation y du signal s , telle que sa décomposition dans le dictionnaire soit parcimonieuse. Autrement dit, on cherche à résoudre

$$\begin{aligned} \min_y \quad & \mathcal{M}(\Phi^* y) \\ \text{sous contrainte} \quad & \|x - y\|_2^2 \leq \sigma. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si l'opérateur Φ est orthogonal, les deux approches synthèse et analyse données par les problème (2.19) et (2.14) sont équivalentes.

On trouvera dans [EMR07] une étude détaillée des deux approches. Si l'approche synthèse connaît un certain succès comparée à l'approche analyse, il n'y a pas de modèle meilleur que l'autre. L'approche synthèse a le mérite de s'interpréter facilement : on cherche à trouver un signal comme combinaison linéaire d'atomes, avec le moins d'atomes possibles.

Il reste la question du choix de la mesure de parcimonie, dont la réponse n'est ni évidente, ni unique. Ce choix dépend de la définition qu'on donne au mot «parcimonie», et ce que l'on veut modéliser derrière cette hypothèse. Au choix d'une mesure de parcimonie \mathcal{M} correspondra une définition intrinsèque de la parcimonie.

2.3 Mesures de parcimonie et de diversité

Cette section a pour but de discuter de l'hypothèse de parcimonie. Encore une fois, suivant le point de vue adopté, analyse ou synthèse, la notion de parcimonie sera différente.

Afin d'introduire les mesures de parcimonie, on va tout d'abord se placer du point de vue de l'analyse. Ensuite, on verra d'un point de vue synthèse quelles mesures sont a priori adaptées pour un problème donné.

2.3.1 Mesurer la parcimonie des coefficients d'analyse

Étant donné l'observation x d'un signal, on se pose la question de savoir si la décomposition de ce signal dans un dictionnaire \mathcal{D} donné est parcimonieuse ou, inversement, présente une forte diversité. On note Φ^* l'opérateur d'analyse associé à \mathcal{D} , et $\bar{x} = \Phi^*x$ les coefficients d'analyse.

Ici, l'idée derrière la notion de parcimonie est que si le signal observé admet une représentation avec peu de «gros» coefficients et beaucoup de «petits» coefficients, on pourra facilement l'approcher (au sens de l'erreur ℓ_2), avec un petit nombre de coefficients. On pourra alors espérer que cette approximation soit bonne.

La question qui se pose est alors : quand peut-on dire que le signal x admet effectivement une représentation parcimonieuse ? Un point de vue «dual» de la parcimonie est la *diversité* d'un signal, qu'on peut relier intuitivement en considérant que la diversité est «l'inverse» de la parcimonie.

Jusqu'à maintenant, la seule mesure rencontrée est la norme ℓ_2 qui permet de mesurer l'énergie contenue dans le signal. Cette norme possède la propriété remarquable de conservation de l'énergie dans n'importe quelle base orthonormale de \mathcal{H} . Ainsi, quelle que soit $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ une base orthonormale de \mathcal{H} , on peut écrire pour tout $x \in \mathcal{H}$ (théorème de Parseval)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i \in \mathcal{I}} |\langle x, e_i \rangle|^2 . \quad (2.20)$$

D'un point de vue énergétique, tous les coefficients d'analyse $\langle x, e_i \rangle$ ont donc le même poids. Dans le cas qui nous intéresse, on aimerait que pour un signal parcimonieux, la mesure \mathcal{M} de diversité soit petite. Pour cela, on aimerait que dans notre base, les petits coefficients d'analyse $|\langle x, e_i \rangle|$ comptent «plus» dans cette mesure. Une première mesure de diversité (resp.

de parcimonie) est alors donnée par les (quasi)-normes ℓ_p , avec $p < 2$ (resp. $p > 2$) définie ci-après

Définition 2.2. Soit $a = \{a_i, i \in \mathcal{I}\}$. On appelle norme ℓ_p pour $1 \leq p < \infty$ de a et quasi-norme ℓ_p pour $0 \leq p < 1$ la quantité

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} |a_i|^p \right)^{1/p} .$$

On définit la norme ℓ_∞ comme

$$\|a\|_\infty = \sup_{i \in \mathcal{I}} |a_i| .$$

Enfin, on définit les quasi-normes ℓ_p pour $-\infty < p < 0$ comme

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i \in \mathcal{I}, a_i \neq 0} |a_i|^p \right)^{1/p} .$$

Remarque 2.1. Dans les normes ℓ_p , plus p est grand, plus les gros coefficients prennent de l'importance dans le calcul de la norme. Donc, lorsqu'on cherche à minimiser une quantité du type $\|a\|_p^p$, si $p > 2$ on aura tendance à pénaliser plus fortement les gros coefficients, et donc à favoriser la diversité. À l'inverse, lorsque l'on choisit de minimiser $\|a\|_p^p$ avec $p < 2$, ce sont les plus petits coefficients qui seront pénalisés, voire annulés si $p \leq 1$, et la parcimonie est favorisée.

Finalement, suivant le choix de p , la quantité $\|a\|_p^p$ donne une idée de la parcimonie ou de la diversité de décomposition d'un signal dans un dictionnaire donné.

Un cas particulier des (quasi)-normes ℓ_p est la norme ℓ_0 qui est définie comme

$$\begin{aligned} \|a\|_0 &= \sum_{i \in \mathcal{I}} |a_i|^0 \\ &= \#\{a_i, a_i \neq 0\} . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Cette quasi-norme donne le nombre de coefficients non nuls d'un vecteur de coefficients et peut être vue comme une définition «idéale» de la diversité (ou l'étalement).

Il existe d'autres mesures pour avoir une idée de la parcimonie d'une décomposition. Parmi ces mesures on trouve les mesures d'entropies qui, comme le nom l'indique, permettent de mesurer le «désordre» d'une décomposition. Coifman et Wickerhauser [CW92] ont utilisés les mesures d'entropies issue de la théorie de l'information, pour mesurer la concentration des

coefficients. Ils utilisent ces mesures dans l'algorithme *Best Basis*, afin de choisir la base orthogonale dans laquelle les coefficients d'analyse sont le plus concentrés possible. La mesure d'entropie la plus connue est sûrement l'entropie de Shannon, introduite afin de mesurer la quantité d'information contenue dans un signal. Notée H_S , elle est définie comme suit

$$\begin{aligned} H_S(\alpha) &= - \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{|a_i|^2}{\|a\|_2^2} \log_2 \frac{|a_i|^2}{\|a\|_2^2} \\ &= -\mathbb{E}\{\log_2(p_i)\} , \end{aligned}$$

où $p_i = \frac{|a_i|^2}{\|a\|_2^2}$ mesure la probabilité d'apparition de l'évènement $|a_i|$. Grâce à cette définition, l'entropie est maximale lorsque tous les a_i ont la même probabilité d'apparition : le «désordre» est maximal, et le signal contient «trop» d'informations. Cette mesure d'entropie peut donc être utilisée comme mesure de parcimonie : on veut qu'un minimum de coefficients soient significatifs, et donc que leur probabilité d'apparition soit faible.

Une autre mesure d'entropie utile est l'entropie de Rényi, notée H_R et définie comme suit, pour $\beta \in \mathbb{R} - \{1\}$ fixé

$$H_R^\beta(a) = \frac{1}{\beta - 1} \log_2 \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{|a_i|^{2\beta}}{\|a\|_2^{2\beta}} \right) .$$

Cette entropie correspond, à une constante près, au log de la norme $\ell_{2\beta}$ des coefficients a . Elle peut être utilisée comme mesure de diversité pour $\beta \in]0, 1[$. On peut de plus montrer que $\lim_{\beta \rightarrow 1} H_R^\beta(a) = H_S(a)$.

Enfin, on mentionnera l'entropie de Gauss, notée H_G et définie par

$$H_G(a) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \ln |a_i|^2 .$$

L'intérêt de cette entropie réside dans la propriété suivante : en dimension finie, si l'on considère un vecteur a de taille N , alors

$$\exp \left\{ \frac{1}{2N} H_G(a) \right\} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |a_i|^p \right)^{1/p} .$$

C'est à dire que l'on peut voir l'entropie de Gauss comme la limite de la norme ℓ_p lorsque p tend vers 0.

2.3.2 Mesurer la parcimonie des coefficients de synthèse

Cas d'une reconstruction exacte

Idéalement, on souhaiterait trouver une représentation du signal, dans un dictionnaire donné, faisant intervenir très peu de coefficients non nuls. On a

vu précédemment qu'une mesure idéale de la parcimonie est donnée par la quasi-norme ℓ_0 .

Le problème d'optimisation permettant de retrouver une représentation parcimonieuse idéale d'un signal peut s'écrire alors

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\alpha\|_0 \\ \text{sous contrainte} \quad & s = \Phi\alpha . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Malheureusement un tel problème est très difficile à résoudre (c'est un problème NP-complet).

On aimerait donc trouver une mesure de la parcimonie qui permettrait de trouver une représentation parcimonieuse du signal dont la solution est calculable en temps «raisonnable». Une mesure populaire est la norme ℓ_1 qui s'écrit :

$$\|\alpha\|_1 = \sum_{i \in \mathcal{I}} |\alpha_i| . \tag{2.23}$$

Le problème d'optimisation associé, connu sous le nom de *Basis Pursuit* et introduit par Chen, Donoho et Saunders [CDS98] est le suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\alpha\|_1 \\ \text{sous contrainte} \quad & s = \Phi\alpha . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ce problème convexe, peut se résoudre relativement efficacement, grâce aux méthodes de programmation linéaire.

Regardons pourquoi la norme ℓ_1 est une bonne mesure de parcimonie. Pour cela on considère dans un premier temps la cas de la dimension finie, et on suppose $s \in \mathbb{C}^N$. s peut alors être représenté parfaitement avec au plus N coefficients non nuls dans n'importe quelle base (orthogonale ou non) de \mathbb{C}^N . Le problème (2.24) porte le nom de *Basis Pursuit* car il va sélectionner au plus N atomes dans un dictionnaire donné pour représenter le signal s . Il va chercher la «meilleure» base (généralement non orthogonale) dans laquelle représenter s , «meilleure» étant à prendre dans le sens : «base dans laquelle l'énergie mesurée par la norme ℓ_1 des coefficients est minimale».

Les auteurs du *Basis Pursuit* ont aussi remarqué expérimentalement la chose suivante : si le signal s admet une décomposition très parcimonieuse dans un dictionnaire (*i.e.* avec K coefficients non nul et $K \ll N$), alors dans la plupart des cas la solution au problème (2.24) est unique et coïncide avec cette décomposition. Cette remarque a été précisée et démontrée par la suite par Gribonval et Nielsen [GN07] pour toute une classe de mesures de parcimonie, et par Joel Tropp [Tro04] qui se concentre sur le *Matching Pursuit* orthogonal. Ce résultat fait appel à une mesure de cohérence du dictionnaire définie comme suit :

Définition 2.3. Soit $\mathcal{D} = \{\phi_\lambda\}$ un dictionnaire d'un espace de Hilbert \mathcal{H} . On appelle cohérence du dictionnaire \mathcal{D} la quantité μ suivante

$$\mu(\mathcal{D}) = \max_{k \neq k'} |\langle \phi_k, \phi_{k'} \rangle| .$$

Si la cohérence du dictionnaire est suffisamment petite et que s admet une décomposition très parcimonieuse dans ce dictionnaire, alors la solution associée aux problèmes (2.24) et (2.22) est unique (on se reportera à [GN07] et [Tro04] et leurs références pour plus de précisions).

Cas d'observations bruitées

Comme vu en section 2.2.2, l'observation du signal à notre disposition est en général bruitée. Ce bruit fait que, en pratique, lorsqu'on observe le signal x , ce dernier n'admet en général pas de décomposition parcimonieuse telle que décrite dans la section précédente, faisant intervenir moins de N coefficients. On ne peut donc pas espérer représenter le signal avec moins d'atomes que nécessaire pour former une base.

Cependant, ce signal étant une observation bruitée d'un signal original, on peut espérer que ce dernier admette une représentation parcimonieuse faisant intervenir seulement K coefficients, $K < N$. Un autre point de vue est de chercher à approximer au mieux le signal x avec le moins de coefficients possibles. Ce dernier point de vue étant celui de la compression des signaux.

Idéalement, le problème à résoudre peut alors se formuler ainsi

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \|\alpha\|_0 \\ \text{sous contrainte} \quad & \|x - \Phi\alpha\|_2^2 \leq \sigma , \end{aligned} \tag{2.25}$$

avec $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Encore une fois, ce problème ne peut pas se résoudre facilement, et l'on préfère remplacer la norme ℓ_0 par la norme ℓ_1 :

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \|\alpha\|_1 \\ \text{sous contrainte} \quad & \|x - \Phi\alpha\|_2^2 \leq \sigma . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Le choix de la norme ℓ_1 permet d'obtenir un problème convexe, et plusieurs algorithmes sont disponibles pour trouver une solution. La section 2.4.3 reviendra sur les principaux algorithmes permettant de trouver une décomposition parcimonieuse.

Afin de se convaincre que la norme ℓ_1 permet d'obtenir une solution parcimonieuse, regardons le cas où Φ est une matrice orthogonale. Le problème (2.26) revient alors à chercher le minimum de la fonctionnelle

$$\|\Phi^* x - \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 ,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Si l'on dérive cette fonctionnelle par rapport à un α_i donné, les équations variationnelles associées se découplent et l'on obtient la solution suivante pour tout $i \in \mathcal{I}$

$$|\alpha_i| = \begin{cases} |\bar{x}_i| - \lambda & \text{si } |\bar{x}_i| > \lambda \\ 0 & \text{si } |\bar{x}_i| \leq \lambda \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\arg(\alpha_i) = \arg(\bar{x}_i) . \quad (2.28)$$

La solution est donc obtenue par un seuillage doux, et permet de réduire à zéro les plus petits coefficients pour obtenir une solution parcimonieuse.

La norme ℓ_1 n'est pas la seule norme à assurer la parcimonie de la solution. Si l'on prend pour mesure de parcimonie \mathcal{M} la quantité $\|\alpha\|_p^p$, toutes les (quasi)-normes ℓ_p avec $-\infty < p \leq 1$ vont permettre d'obtenir une solution parcimonieuse. Le fait que les petits coefficients soient mis à zéro provient en fait de la non-dérivabilité en zéro de la fonctionnelle $\|\Phi^*x - \alpha\|_2^2 + \lambda\|\alpha\|_p^p$, lorsque $p \leq 1$. Cependant, le choix de $p = 1$ permet de conserver la convexité du problème, propriété généralement appréciée en optimisation.

2.4 La parcimonie en pratique

On a décrit jusqu'à présent tout le cadre mathématique et la modélisation permettant de prendre en compte la parcimonie. Il reste maintenant à savoir comment l'exploiter en pratique. On verra dans cette section comment choisir ou construire un dictionnaire \mathcal{D} convenable pour une classe de signaux donnée. Enfin, on donnera quelques algorithmes classiques utilisés pour les décompositions parcimonieuses en approche synthèse.

2.4.1 Dictionnaires temps fréquence

En règle générale, lorsqu'on enregistre un signal, la première représentation à notre disposition est l'ensemble des échantillons mesurés en l'état. Par exemple pour un signal audio, on observe l'évolution de la pression subie par la membrane du micro au cours du temps. Pour une image, on observe l'intensité lumineuse enregistrée par les capteurs. Cette première représentation, qui apporte déjà son lot d'informations, n'est généralement pas parcimonieuse. Une première représentation duale encore très utilisée est donnée par la transformée de Fourier. Cette dernière – souvent bien plus parcimonieuse dans le sens où, en général, seulement quelques grosses fréquences de distinguent de beaucoup de petites – apportent d'autres informations complémentaires à celles données par les échantillons. C'est le contenu fréquentiel du signal.

Ces deux approches «duales» sont exclusives dans le sens où la représentation temporelle des échantillons ne contient aucune information sur

le contenu fréquentiel, et la représentation des coefficients de Fourier fait perdre toute information temporelle. C'est afin de pouvoir représenter l'évolution du contenu fréquentiel en fonction du temps que les représentations temps-fréquences ont vu le jour. L'idée générale des transformées temps fréquence, et plus particulièrement de la transformée de Fourier à court terme, est d'utiliser une fenêtre glissante sur le signal, et d'effectuer la transformée de Fourier du signal ainsi fenêtré. Ces transformées sont malheureusement limitées par le principe d'incertitude d'Heisenberg qui interdit de pouvoir être à la fois précis en temps *et* en fréquence : un compromis subtil s'impose au choix de la transformée, dépendant du signal et de l'information que l'on veut faire ressortir. Ainsi, plus la fenêtre choisie a un support temporel grand, plus la transformée sera précise en fréquence (mais moins précise en temps). Inversement, plus le support de la fenêtre est petit, plus on sera précis en temps (mais moins en fréquence). La figure 2.2 est une illustration de ce principe d'incertitude.

Sans s'attarder particulièrement sur la construction des dictionnaires temps-fréquence existants, un dictionnaire temps-fréquence beaucoup utilisé est le dictionnaire de Gabor [Mal98]. Cette transformée, qui est une version discrétisée de la transformée de Fourier à court terme, se construit par translation temporelle et fréquentielle d'une fenêtre d'analyse (souvent une fenêtre de type gaussienne). Ce dictionnaire a l'avantage d'être très redondant et de fournir une analyse temps-fréquence du signal facilement interprétable par la représentation du spectrogramme (qui est l'image temps-fréquence construite par le module au carré des valeurs du produit scalaire entre le signal et les atomes).

Le principal inconvénient est soulevé par le théorème de Balian-Low, qui assure l'inexistence de bases de Gabor avec une fenêtre différentiable à support compact. Or, ce type de fenêtre est appréciable en traitement du signal pour au moins deux raisons : la première étant que si la fenêtre n'est pas différentiable, on introduit facilement des artefacts (comme, par exemple, le phénomène de Gibbs), la seconde raison, purement pratique, est que c'est très appréciable pour une bonne implémentation informatique. On utilisera alors souvent la transformée MDCT (Modified Discrete Cosinus Transform) qui est une base orthonormée d'atomes temps-fréquence. On se reportera à l'annexe B pour plus de détails sur la MDCT.

Un exemple de transformée temps-fréquence d'un signal de glockenspiel d'une durée d'environ 6 s échantillonné à 44,1 kHz (2^{18} échantillons) est donné sur la figure 2.2. Les échantillons temporels laissent clairement deviner le début de chaque note (qui a lieu lorsqu'on tape sur la cloche), et la longueur de celle-ci.

La représentation du haut de la figure 2.2, qui utilise une fenêtre d'analyse assez courte (environ 3 ms), fait clairement apparaître des lignes fréquentielles bien localisées en temps, au moment de l'attaque de chaque note (c'est ce qu'on nommera plus tard les transitoires). L'autre transformation

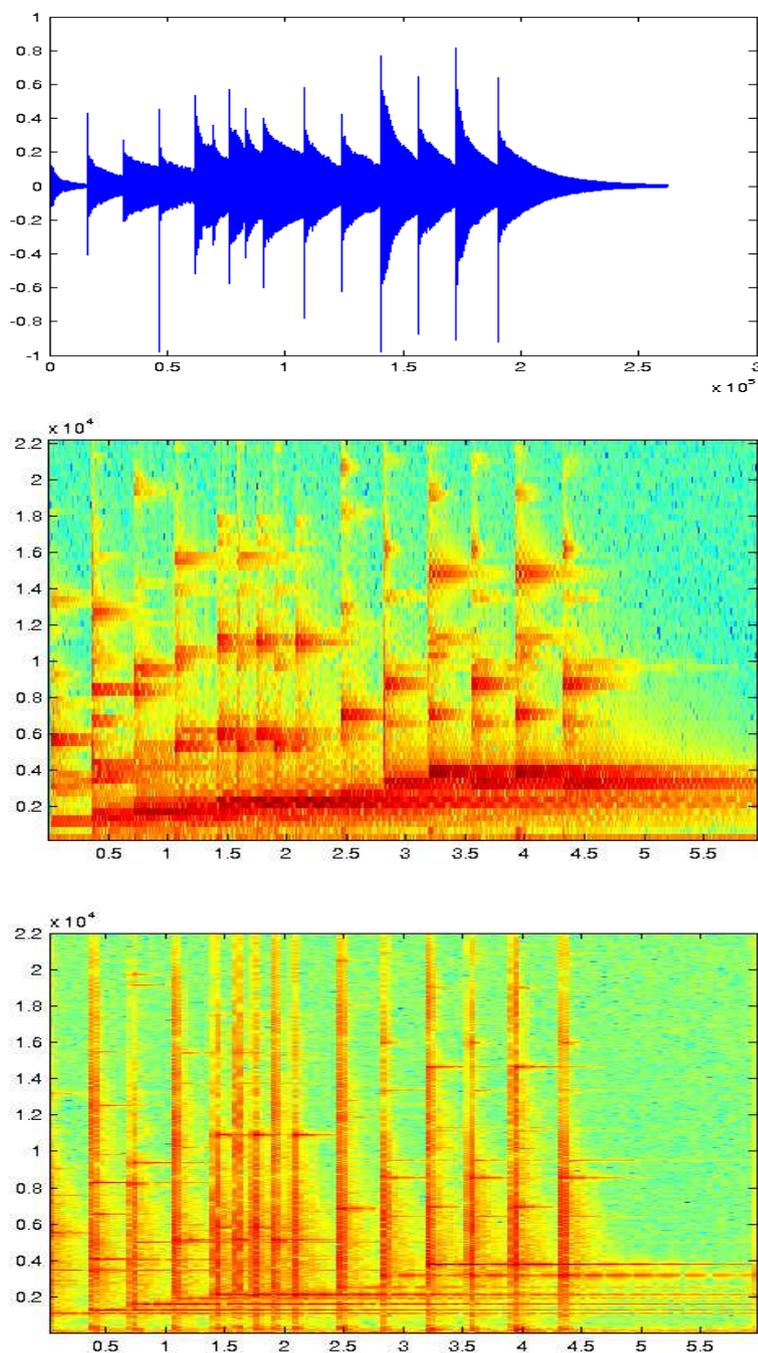


FIG. 2.2 – De haut en bas : échantillons d'un signal de Glockenspiel, transformée MDCT précise en temps (fenêtre d'analyse de 128 échantillons), transformée MDCT précise en fréquence (fenêtre d'analyse de 4096 échantillons).

MDCT du signal, avec une grande fenêtre d'analyse (environ 90 ms), fait apparaître les structures harmoniques du signal, bien localisées en fréquence (ce qu'on appellera la partie tonale).

Une multitude de dictionnaires existent, tels que les transformées en ondelettes et toutes les dérivées en \star -lettres, (surtout) développées pour l'analyse d'images, dans lesquelles la géométrie joue un rôle de première importance. On pourra citer notamment les curvelettes [CDDY06] et les bandelettes [PM07].

Mais alors, quel dictionnaire est adapté à un signal donné? On a vu dans la section 2.3 qu'il existe tout un choix de mesures de parcimonie afin de savoir quelle représentation est la plus parcimonieuse. L'idée étant que plus la décomposition est parcimonieuse, plus l'information est concentrée dans quelques coefficients significatifs. On se doute que le choix du dictionnaire (ondelettes, MDCT avec quelle taille de fenêtre...) sera naturellement guidé par la nature du signal. Le choix peut se faire aussi selon la performance d'approximation du dictionnaire, c'est-à-dire le dictionnaire capable d'approximer au mieux le signal pour un nombre de coefficients donné [Mal98, CDGO02].

Continuons sur les signaux audio pour illustrer le propos. On peut distinguer au moins deux catégories très générales de signaux audios. Les sons percussifs, comme une batterie, qui sont bien localisés en temps et auxquels il est impossible d'associer une note de musique précise. À l'opposé, il y a les sons musicaux qui produisent de belles notes, comme le piano, le violon ou autres. Cependant, chaque note doit avoir une durée minimale afin d'être perçue, et reconnue. En fonction de la catégorie du signal, on ne va pas choisir le même dictionnaire. On préférera représenter les sons percussifs dans des bases bien localisées en temps, comme les bases MDCT avec un petite fenêtre ou bien les bases d'ondelettes, et les sons musicaux seront *a priori* mieux représentés dans les bases localisées en fréquence, comme les bases MDCT avec une grande fenêtre.

Afin de s'en convaincre, plutôt que de calculer toute une série de mesures de parcimonie différentes, on peut représenter la distribution empirique des coefficients d'analyse de divers signaux dans différentes bases. C'est ce qu'on représente sur la figure 2.3 reprise de [DT06].

On remarque sur ces figures que le signal percussif de castagnettes est mieux représenté dans une base d'ondelettes, comme on pouvait s'y attendre, tandis que le signal d'orgue est mieux représenté par la base MDCT. En effet, on remarque de manière générale que les distributions sont piquées en zéro (beaucoup de petits coefficients contenant peu d'informations) et ont une queue lourde (quelques gros coefficients contenant l'information utile). Dans la base d'ondelettes, la distribution des coefficients du signal de castagnettes possède une queue beaucoup plus lourde que les coefficients du signal d'orgue : il y a plus de gros coefficients contenant de l'information utile. Et

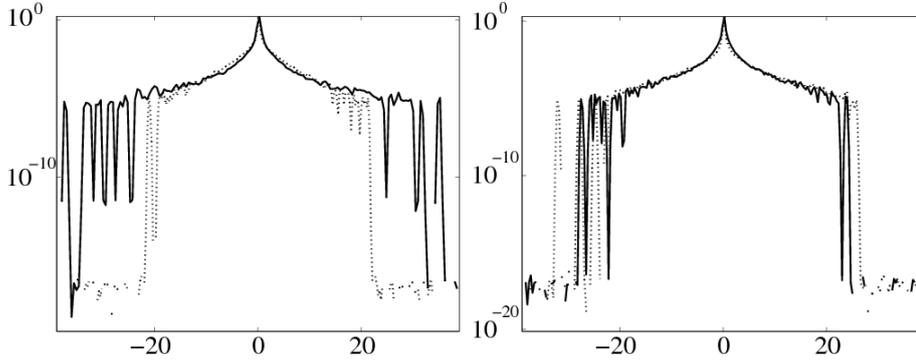


FIG. 2.3 – *ddp de diverses représentations de deux signaux : un signal de castagnettes (lignes continues) et d’orgue (pointillés). Gauche : coefficients dans une base d’ondelette. Droite : coefficients dans une base MDCT.*

inversement, la distribution des coefficients MDCT du signal d’orgue a une queue plus lourde que celle des coefficients MDCT du signal de castagnettes.

2.4.2 Modèles mathématiques d’approximation

Lorsqu’on choisit une base ou un repère, on peut se demander si on approxime le signal efficacement. L’efficacité de l’approximation est mesurée par l’erreur L_2 entre le signal original à approcher et son approximation. La théorie de l’approximation regarde comment évolue cette erreur suivant le choix de la base, et le nombre de vecteur retenu pour approcher le signal.

On distinguera l’approximation linéaire, qui consiste à projeter le signal sur M vecteurs de bases fixés, de l’approximation non-linéaire, qui consiste à choisir les M vecteurs de bases en fonction du signal. On peut distinguer deux approches : l’une se base sur les espaces fonctionnels, et étudie la vitesse de décroissance de l’erreur en fonction du nombre d’atomes retenus, l’autre pose un modèle probabiliste sur la distribution des coefficients de synthèses.

Espaces fonctionnels

Lorsqu’on se fixe une base, par exemple une base d’ondelettes, certaines fonctions sont mieux approchées que d’autres dans cette base. Des classes de fonctions peuvent ainsi être recherchées, qui regroupent les signaux pouvant s’approcher correctement dans une base donnée. Une classes très utilisées est donnée par les espaces de Besov. Ces espaces peuvent se définir ainsi :

Définition 2.4. *L’espace de Besov $\mathbf{B}_{\beta,\gamma}^s[0,1]$ est l’ensemble des fonctions $f \in \mathbb{L}^2[0,1]$ dont les coefficients d’une base d’ondelettes $\{\psi\}$ satisfont :*

$$\|f\|_{s,\beta,\gamma} = \left(\sum_{j=-\infty}^{J+1} \left[2^{-j(s+1/2-1/\beta)} \left(\sum_{n=0}^{2^j-1} |\langle f, \psi_{j,n} \rangle|^\beta \right)^{1/\beta} \right]^\gamma \right)^{1/\gamma} < \infty$$

L'intérêt de ces espaces, est qu'ils permettent de borner la vitesse de décroissance de l'erreur. Ainsi, si $p = \beta = \gamma$ et $s = 1/2 + 1/p$ alors la norme de Besov $\|\cdot\|_{s,\beta,\gamma}$ est une simple norme ℓ_p , et plus p est petit, plus la vitesse de décroissance est grande. On pourra se reporter à [Mal98, CDGO02] pour plus de précisions sur les espaces de Besov et la théorie d'approximation.

De façon plus générale, on peut se fixer une base ou un repère et une norme pour se donner un espace fonctionnel, et étudier les vitesses de décroissance d'erreur. Un autre espace fonctionnel utile est donné par les espaces de modulation définis à l'aide des repères de Gabor. Soit $\{g_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$ un repère de Gabor. f appartient à l'espace de modulation $\mathbf{M}_{p,q}^w$ si et seulement si [SS06]

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} w_{m,n}^p |\langle f, g_{m,n} \rangle|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty .$$

Ici aussi des résultats sur la vitesse de décroissance de l'erreur en approximation peuvent être obtenus, et sont donnés dans [GS00].

Modèles probabilistes

Le problème d'approximation (2.13) peut aussi s'interpréter sous un angle probabiliste.

En effet on a

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \|x - \Phi\alpha\|_2^2 + \lambda \mathcal{M}(\alpha) \right\} &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \left\{ e^{-[\|x - \Phi\alpha\|_2^2 + \lambda \mathcal{M}\alpha]} \right\} \\ &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \left\{ e^{-[\|x - \Phi\alpha\|_2^2]} e^{-[\lambda \mathcal{M}\alpha]} \right\} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ainsi, minimiser (2.13) revient à trouver les coefficients α qui maximisent la vraisemblance du système où le résidu est supposé être un bruit blanc gaussien, et les coefficients α sont distribués selon une loi de probabilité dépendant de la mesure \mathcal{M} . Par exemple, si $\mathcal{M}(\alpha) = \|\alpha\|_1$, alors les coefficients α sont indépendants et identiquement distribués selon une loi de Laplace.

Plus généralement, on peut modéliser le signal par une distribution des coefficients α permettant de prendre en compte la parcimonie. Si une distribution Laplacienne est équivalente au problème du LASSO (voir en section 2.4.3), on peut choisir d'autres types de distributions. Par exemple une distribution de student-t [FG06a], ou bien un mélange de gaussienne [DM04].

Ces approches probabilistes modélisent *a priori* les distributions des coefficients de synthèse permettent une modélisation très précise du signal, au prix d'une fonctionnelle complexe à optimiser. On utilise alors le théorème

de Bayes pour trouver la distribution *a posteriori* des coefficients de synthèse, sachant l'observation x . On utilise alors des approches type MCMC (Monte Carlo Markov Chain) qui permettent d'échantillonner les distributions voulues par tirages aléatoires.

2.4.3 Principaux algorithmes de décomposition parcimonieuse

Maintenant que le problème de décomposition ou d'approximation parcimonieuse d'un signal a été posé et discuté, on présente les principaux algorithmes permettant d'obtenir une décomposition, en fonction de la mesure de parcimonie choisie.

Matching Pursuit

Un des premiers algorithmes présentés puis étudiés dans le cadre de la décomposition parcimonieuse est le *Matching Pursuit* de Mallat et Zhang [MZ93].

Le principe du *Matching Pursuit*, décrit par l'algorithme 1 est de chercher dans un dictionnaire l'atome qui se rapproche le plus du signal, de retirer cet élément du signal, puis d'itérer jusqu'à obtenir l'approximation souhaitée. Cet algorithme glouton a été construit avec l'idée d'analyser le signal par la synthèse.

Algorithme 1 : Matching Pursuit

Initialisation : $m = 0$, $r^{(0)} = x$

while $\|r^{(m)}\| > \varepsilon$ **do**

 On choisit l'atome le plus corrélé avec le résidu actuel :

$$\varphi^{(m)} = \operatorname{argmax}_{\varphi_i \in \mathcal{D}} |\langle r^{(m)}, \varphi_i \rangle|$$

 On met à jour le résidu en retirant l'atome choisi :

$$r^{m+1} = r^{(m)} - \langle r^{(m)}, \varphi^{(m)} \rangle \varphi^{(m)}$$

$m = m + 1$

Le principal avantage du *Matching pursuit* est sa simplicité, et de nombreux résultats théoriques ont été obtenus pour cet algorithme : principalement, sa convergence vers la solution de norme ℓ_1 ou ℓ_0 minimale sous des hypothèses bien précises sur le dictionnaire et le signal (voir [Tro04]). On pourra remarquer que cet algorithme ne fait appel à aucune mesure de parcimonie.

Plusieurs variations de cet algorithme existent, dont le *Matching Pursuit orthogonal* [PRK93] et le *Stagewise Matching Pursuit* [DTDS07]. L'algorithme du *Matching Pursuit* entre dans le cadre général des algorithmes

gloutons, dont une revue des nombreuses variantes est faite par Temlyakov dans [Tem08].

Basis Pursuit

Le *Basis Pursuit* n'est pas un algorithme en tant que tel, mais désigne le problème (2.24) réécrit ci-dessous

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\alpha\|_1 \\ \text{sous contrainte} \quad & s = \Phi\alpha . \end{aligned}$$

Ce problème proposé dans [CDS98] peut se résoudre par des méthodes de programmation linéaire.

FOCUSS

FOCUSS [RKD99] (pour FOCal Underdetermined System Solver) permet de résoudre le problème plus général

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathcal{M}(\alpha) \\ \text{sous contrainte} \quad & x = \Phi\alpha \end{aligned} \tag{2.30}$$

pour certaines mesures de parcimonie ou de diversité \mathcal{M} , et en particulier pour $\mathcal{M}(\alpha) = \|\alpha\|_p^p$, $p < 2$.

Le principe de FOCUSS, décrit par l'algorithme 2 est le suivant : écrire $\nabla_\alpha \mathcal{M}(\alpha)$ sous forme factorisée $\nabla_\alpha \mathcal{M}(\alpha) = \Pi(\alpha)\alpha$, puis de travailler sur les équations variationnelles pour obtenir un algorithme itératif.

Cet algorithme fonctionne aussi pour des mesures d'entropie, comme pour l'entropie de Shannon ou l'entropie de Gauss. Rao et al montrent que minimiser l'entropie de Gauss avec FOCUSS revient à minimiser la norme ℓ_0 : l'algorithme converge vers un minimum local pour $p = 0$.

Algorithme 2 : FOCUSS

Initialisation : soit $\alpha^{(0)} \in \mathbb{C}^N$ vérifiant $x = \Phi\alpha$ et $m = 0$

repeat

$$\left| \begin{array}{l} \alpha^{(m+1)} = \Pi^{-1} \left(\alpha^{(m)} \Phi^* (\Phi \Pi^{-1}(\alpha^{(m)}) \Phi^*)^{-1} x \right) \\ m = m + 1 \end{array} \right.$$

until *convergence* ;

Cet algorithme converge vers un minimum (local) pour tout $p < 2$.

FOCUSS régularisé FOCUSS régularisé [REC⁺03] décrit par l’algorithme 3 est une simple variation de l’algorithme FOCUSS précédent, adapté au problème de débruitage

$$\min_{\alpha} \|x - \Phi\alpha\|_2^2 + \lambda\|\alpha\|_p^p. \quad (2.31)$$

Algorithme 3 : FOCUSS régularisé

Initialisation : Soit $\alpha^{(0)} \in \mathbb{C}^N$ vérifiant $x = \Phi\alpha$ et $m = 0$
repeat
 | $\alpha^{(m+1)} = \Pi^{-1} \left(\alpha^{(m)} \Phi^* (\Phi \Pi^{-1} (\alpha^{(m)}) \Phi^* + \lambda Id) \right)^{-1} x$
 | $m = m + 1$
until *convergence* ;

Une alternative comparable à FOCUSS régularisé est l’algorithme IRLS (Itérative Reweighted Least Square) [Gui]. Cependant, si la convergence de IRLS est prouvée pour $p = 1$, elle n’est pas assurée pour n’importe quel p .

BPDN, Lasso et variations

Le problème du *Basis Pursuit Denoising* de Chen, Donoho et Saunders [CDS98] ou LASSO de Tibshirani [Tib96]³ est la version “débruitage” du problème (2.24)

$$\min_{\alpha} \|x - \Phi\alpha\|_2^2 + \lambda\|\alpha\|_1 \quad (2.32)$$

On a vu en section 2.3.2 que si Φ est orthogonal, le minimum est obtenu par un seuillage des coefficients. Lorsque Φ n’est plus orthogonal mais correspond à un opérateur de repère, un minimum global de (2.32) peut être obtenu par des algorithmes de seuillage itératif.

Un de ces algorithmes qu’on adaptera par suite est le seuillage itératif de Landweber, proposé par Daubechies *et al* dans [DDDM04]. En notant S_{λ} l’opérateur de seuillage doux de seuil λ , ces itérations sont données par l’algorithme 4

On reviendra en détail sur cet algorithme dans le chapitre 5, qui le reprendra dans un cadre plus général de normes mixtes.

D’autres algorithmes de seuillage itératif existent pour obtenir une solution au problème (2.32). On pourra par exemple citer l’algorithme proposé par Elad dans [Ela06], ou bien l’amélioration du seuillage itératif de Landweber proposé par Fornasier dans [For07].

³Le nom de *Basis Pursuit Denoising* est surtout employé dans la communauté du traitement du signal, tandis que le nom du LASSO vient essentiellement de la communauté de l’apprentissage statistique. Cependant, le nom du LASSO semble aujourd’hui s’imposer.

Algorithme 4 : Seuillage de Landweber itératif

Initialisation : Soit $\alpha^{(0)} \in \mathbb{C}^N$ quelconque
repeat
 | $\alpha^{(m+1)} = \mathcal{S}_{\lambda/C} \left(\Phi^* x + C\alpha^{(m)} - \Phi^* \Phi \alpha^{(m)} \right) / C$
until *convergence* ;

Une alternative au seuillage itératif très utilisée en apprentissage statistique sont les algorithmes de type homotopie initialement proposé par Osborne [OPT00] et qui a inspiré l'algorithme du LARS [EHJT04]. L'avantage de ces algorithmes est qu'ils s'affranchissent du choix de λ . En effet, l'étude du chemin de régularisation associé à (2.32) permet de calculer pas à pas toutes les solutions possibles en fonction de λ . En partant du vecteur nul, on fait «rentrer» un coefficient à chaque itération. Le coût de chaque itération correspond au coût de la solution la moins contrainte (au sens des moindres carrés). C'est toute la force de ces approches.

2.5 Décomposition en couches

Dans la section 2.4.1, on a vu deux exemples de décomposition temps-fréquence dans deux bases MDCT avec une taille de fenêtre différente. On a vu aussi précédemment qu'il existe diverses mesures de parcimonie, afin de pouvoir décider «quelle représentation est la plus parcimonieuse». On a déjà fait remarquer en section 2.4.1 que, d'un point de vu intuitif, le choix du dictionnaire est guidé par la nature du signal.

Cependant, si l'on reprend l'exemple d'un signal audio, on trouve en général les deux types de composantes «transitoire» et «tonale». Ce qu'on appelle transitoire est la partie bien localisée en temps du début de la note, lorsque celle-ci est attaquée. La partie tonale correspondant elle a la partie de la tenue de note, bien localisée en fréquence. Pour les images, on trouve aussi deux types de composantes. Les contours géométriques de l'image (qui correspondraient aux transitoires audios), et la partie texture (qui correspondrait aux tonales).

Berger *et al.* [BCG94] donnent une technique de débruitage des signaux audios qui exploite cette remarque. L'idée est de décomposer le signal dans une première base adaptée à une particularité comme les transitoires, et de mettre à zéro les très petits coefficients (qui correspondent *a priori* au bruit). Le signal ainsi débruité est resynthétisé, puis on le redécompose dans une autre base, cette fois-ci adaptée à l'autre caractéristique (comme les tonales dans notre exemple), permettant de mettre les plus petits coefficients correspondant au bruit à zéro. Cette technique de débruitage donne de meilleurs

résultats que le seuillage dans une seule base choisie à l'avance. On s'adapte ici aux diverses caractéristiques présentes dans le signal.

Cette idée a ensuite été reprise par Daudet, Molla et Torrèsani dans le cadre du codage audio [DT02, DMT04] avec des modèles hybrides. On retrouve le même type d'idée dans l'analyse en composantes morphologiques proposée par Starck *et al.* dans [ESDQ05, SED05]. On peut l'écrire mathématiquement sous la forme suivante. On suppose que $x \in \mathcal{H}$ peut s'écrire comme

$$x = x_1 + x_2 + r \quad (2.33)$$

où $x_1 \in \mathcal{H}$ est une couche représentant une caractéristique donnée (comme les contours d'une image ou les parties transitoires d'un signal) et $x_2 \in \mathcal{H}$ une deuxième couche représentant une autre caractéristique (comme la texture d'une image ou la partie tonale d'un signal audio). On suppose que $r \in \mathcal{H}$ est un résidu qui n'admet pas de décomposition parcimonieuse (une composante stochastique tel qu'un souffle, un bruit...).

Chacune des couches est supposée admettre une décomposition parcimonieuse dans une base ou un repère bien choisi.

Il faut souligner que la définition d'un transitoire ou d'un tonal dans un signal audio, d'un contour ou d'une texture dans une image est très vague. Elle dépend bien souvent de la perception de chacun.

Ce problème peut se décrire dans le cadre général du *Basis Pursuit* (2.24) (Denoising (2.32)), lorsque le dictionnaire est construit comme l'union de deux bases (ou repères). On trouvera dans [GN03] (et ses références) une étude sur les conditions suffisantes pour qu'un signal admette une décomposition parcimonieuse unique lorsque le dictionnaire est l'union de deux bases orthogonales.

2.5.1 Analyse en composante morphologique

L'analyse en composante morphologique [SED05] (MCA) reprend le modèle du *Basis Pursuit* et l'adapte à l'équation (2.33). On choisit deux repères \mathcal{U} et \mathcal{V} , chacun adapté à une caractéristique voulue. On note U et V les opérateurs associés à ces repères. On cherche alors une décomposition parcimonieuse de chaque couche dans ces repères en cherchant une solution à :

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, \beta} \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1 \\ & \text{sous contrainte } \|x - U\alpha - V\beta\|_2^2 \leq \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ainsi, on aura $x_1 = U\alpha$ et $x_2 = V\beta$.

On peut aussi considérer la fonctionnelle

$$\Psi(\alpha, \beta) = \|x - U\alpha - V\beta\|_2^2 + \lambda\|\alpha\|_1 + \mu\|\beta\|_1 \quad (2.35)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$.

Les auteurs proposent un algorithme heuristique s'inspirant du Block Coordinate Relaxation [BST98] pour minimiser (2.35), qui peut s'interpréter sous l'angle du *Stagewise Matching Pursuit* [DTDS07]. Une telle fonctionnelle peut se minimiser formellement par l'algorithme de seuillage itératif de Landweber, qui a été étudié spécialement dans le cadre d'une telle fonctionnelle par Teschke dans [Tes06a].

L'algorithme 5 décrit l'approche MCA, où \mathcal{S}_λ est l'opérateur de seuillage doux de seuil λ .

Algorithme 5 : MCA

Initialisation : $\beta^{(0)} = 0, i = 1$
repeat
 Estimation de la première couche :
 $x_1^{(i)} = x - V\beta^{(i-1)}$
 $\alpha^{(i)} = \mathcal{S}_{\lambda_i}(U^T x_1)$
 Estimation de la seconde couche :
 $x_2^{(i)} = x - V\alpha$
 $\beta^{(i)} = \mathcal{S}_{\mu_i}(V^T x_2)$
 $i = i + 1$
 On fait décroître les seuils λ_i et μ_i .
until *convergence* ;

2.5.2 Modèles hybrides

Les modèles hybrides proposés par Daudet, Mollat et Torrèsani [DT02, DMT04] se basent aussi sur l'idée de décomposition du signal en couches afin de le compresser efficacement. Une différence essentielle avec l'analyse en composante morphologique est qu'on ne cherche pas à minimiser de fonctionnelle précise, mais à modéliser précisément chaque couche. L'idée est de prendre en compte certaines structures que l'on peut observer sur les cartes temps-fréquence, et de s'affranchir ainsi du modèle d'indépendance des coefficients qui est derrière la norme ℓ_1 .

Initialement proposé pour les signaux audios, ce modèle fait le choix d'une base d'ondelettes pour représenter la couche transitoire et d'une base MDCT pour la couche tonale. L'algorithme de compression hybride est décrit par l'algorithme 6

Une autre approche pour les décompositions hybrides est celle des puzzles temps-fréquence proposé par Florent Jaillet dans [JT07]. Cette approche est intéressante dans le sens où, en plus de donner des résultats satisfaisants, elle se base sur la minimisation d'un critère d'entropie sur les coefficients d'analyse pour choisir quelle représentation est adaptée à une zone du plan

Algorithme 6 : Décomposition hybride pour la compression

1. Modélisation de la partie tonale par une base MDCT et choisir le nombre de coefficients à conserver.
 2. Ne garder que les coefficients correspondant à la partie tonale. Ces derniers peuvent être seuillés individuellement (absence de structure), par groupe (seuillage N-termes), ou bien modéliser la persistance par une chaîne de Markov.
 3. Retirer la partie tonale ainsi estimée du signal original pour obtenir un signal «non tonal»
 4. Modélisation de la partie transitoire par une base d'ondelettes et choisir le nombre de coefficients à conserver.
 5. Ne garder que les coefficients correspondant à la partie transitoire. Ici encore, on peut faire un seuillage simple ou bien structuré sur l'arbre des coefficients d'ondelettes
 6. Retirer la partie transitoire ainsi estimée pour obtenir le résidu
-

temps-fréquence. On ne cherche donc pas à minimiser un critère de parcimonie sur les coefficients de synthèse.

Cet algorithme entièrement adaptatif est décrit par l'algorithme 7.

2.6 Conclusion du chapitre et positionnement de cette thèse

Ce chapitre a tenté d'exposer en parallèle l'approche analyse d'un signal et l'approche synthèse. Cette approche a été faite dans le cadre de la décomposition d'un signal dans un dictionnaire de forme d'ondes, en exploitant une hypothèse de parcimonie, sinon de concentration de l'information.

On a pu voir que le choix d'un dictionnaire, que ce soit pour l'analyse ou la synthèse, impose un «point de vue» sur le signal : l'information ne se concentre pas de la même façon.

De même, l'information est en général structurée : l'indépendance des coefficients sous-jacente à la mesure de parcimonie usuelle donnée par la norme ℓ_1 est une sur-simplification de la réalité.

Cette thèse contient deux parties, qui peuvent être lue indépendamment. Cependant, ce sera précisé dans les perspectives, les deux sont complémentaires. Un des buts de ce travail est de prendre en compte la structure de l'information. C'est le but des normes mixtes introduites dans la première partie, qui aborde le problème sous un angle «synthèse». La seconde partie introduit un modèle aléatoire de synthèse simple, afin de comprendre à partir des coefficients d'analyse, comment repérer l'information utile d'un

Algorithme 7 : Puzzle temps-fréquence

Initialisation : choisir un $\beta \in [0, 1]$ correspondant à une entropie de Rényi. Choisir deux repères de Gabor G_1 et G_2 . On pose $r^{(0)} = x$ et $i = 0$.

Se donner un découpage en super-tuiles du plan temps-fréquence.

repeat

1. Calculer les coefficients $G_1 r^{(i)}$ et $G_2 r^{(i)}$, puis calculer les entropies de Rényi pour ces deux ensembles de coefficients ainsi obtenus dans chaque super-tuile.
2. Sélectionner les super-tuiles dans lesquels l'entropie correspondant aux coefficients de $G_1 r^{(i)}$ est plus petite que celle correspondant aux coefficients $G_2 r^{(i)}$.
3. Reconstruire $x_1^{(i)} = (G_1 G_1^*)^{-1} G_1 r^{(i)}$
4. Calculer $r^{(i+1/2)} = r^{(i)} - x_1^{(i)}$
5. Calculer les coefficients $G_1 r^{(i+1/2)}$ et $G_2 r^{(i+1/2)}$, puis calculer les entropies de Rényi pour ces deux ensembles de coefficients ainsi obtenus dans chaque super-tuile.
6. Sélectionner les super-tuiles dans lesquels l'entropie correspondant aux coefficients de $G_2 r^{(i)}$ est plus petite que celle correspondant aux coefficients $G_1 r^{(i)}$.
7. Reconstruire $x_2^{(i)} = (G_2 G_2^*)^{-1} G_2 r^{(i)}$
8. Calculer $r^{(i+1)} = r^{(i+1/2)} - x_2^{(i)}$
9. $i = i + 1$

until $i < I$ et $\|r_i\| > \epsilon$;

signal supposé parcimonieux dans une union de base. Un second modèle permet de structurer l'information, toujours dans le but de pouvoir interpréter facilement les coefficients d'analyse.

Première partie

**Approche variationnelle et
normes mixtes**

NORMES MIXTES

3

Dans ce chapitre, nous rappelons la définition d'une norme mixte, ainsi que quelques propriétés utiles. A ma connaissance, les espaces fonctionnels définis à l'aide de normes mixtes ont été introduits et étudiés dans [BP61]. On trouvera un résumé des principales propriétés de ces espaces dans [SOS05].

3.1 Définition

Nous utiliserons les notations suivantes. Soit une suite $(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ indexée par un double indice $(g, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(\mathbf{x}) = (x_{g,m})_{(g,m) \in \mathbb{N}^2}$. On peut alors considérer les deux sous suites canoniques $(\mathbf{x}_g) = (x_{g,1}, x_{g,2}, \dots)$ pour g fixé, et $(\mathbf{x}_{.,m}) = (x_{1,m}, x_{2,m}, \dots)$.

La double indexation est purement conventionnelle et sert à introduire une dépendance entre les coefficients. Cette dépendance est utilisée dans la définition suivante d'une norme mixte

Définition 3.1. Soit $(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, indexée par un double indice $(g, m) \in \mathbb{N}^2$, et telle que pour tout (g, m) $w_{g,m} > 0$.

Soit $p \geq 1$ et $q \geq 1$. On appelle norme mixte (pondérée) de $(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la norme $\ell_{\mathbf{w};p,q}$ définie par

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w};p,q} = \left(\sum_g \left(\sum_m w_{g,m} |x_{g,m}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}.$$

Les cas $p = +\infty$ et $q = +\infty$ sont obtenus en remplaçant la norme correspondante par le supremum.

La norme mixte $\ell_{\mathbf{w};p,q}$ peut être vue comme une composition des normes $\ell_{\mathbf{w};p}$ et ℓ_q :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w};p,q} &= \left(\sum_g \|\mathbf{x}_g\|_{\mathbf{w};p}^q \right)^{1/q} \\ &= \left\| \left(\sum_m W_{.,m} |\mathbf{x}_{.,m}|^p \right)^{1/p} \right\|_q, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $|\mathbf{x}_{.,m}|^p$ est obtenu en prenant le module de chaque élément de la suite $(\mathbf{x}_{.,m})$ puis en les élevant à la puissance p ; et où $W_{.,m} = \text{diag}(w_{1,m}, \dots, w_{g,m}, \dots)$. Ce type de notation sera utilisée par la suite s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On peut remarquer facilement que les normes mixtes généralisent les normes ℓ_p usuelles si $p = q$: $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w};p,p} = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w};p}$.

Lorsque $p < 1$ ou $q < 1$ on ne peut plus parler de normes au sens strict, mais on peut généraliser la définition pour obtenir des quasi-normes (en particulier, on perd l'inégalité triangulaire).

Les deux indices g et m peuvent être interprétés comme une hiérarchie sur les coefficients. Les coefficients sont en effet séparés entre groupes aveugles les uns des autres (on verra qu'ils sont indépendants au sens statistique dans la section 5.1 du chapitre 5), et les coefficients d'un même groupe interagissent entre eux (et seront corrélés d'une certaine manière). Avec certaines normes mixtes, les coefficients d'un même groupe «s'uniront» tandis qu'avec un autre choix, ces coefficients entreront en compétition. Avec ces notations, l'indice g représente l'indice du groupe, et l'indice m l'indice de membre d'un groupe.

Remarque 3.1. *En dimension finie, il n'y a aucune raison particulière pour que le nombre M de membres dans un groupe soit le même pour tous les groupes. Cependant, on peut toujours ajouter dans ce cas des coefficients «fantômes» égaux à zéro afin que tous les groupes aient le même nombre de membres. Lorsqu'on se placera en dimension finie, on considérera donc pour des raisons de simplicité que tous les groupes ont chacun le même nombre M de membres.*

Les normes mixtes sont un moyen d'introduire explicitement un couplage entre les coefficients à la place de l'hypothèse d'indépendance qui est derrière les normes ℓ_p . La double indexation nécessaire à la définition de la norme mixte permet en effet de considérer les coefficients «par groupes». Ce couplage est très fortement dépendant des choix faits pour p et q . On a vu dans la remarque 2.1 du chapitre 2 que les normes ℓ_p sont utilisées pour mesurer la diversité pour les petites valeurs de p et la parcimonie pour les grandes valeurs de p . Les normes mixtes nous permettent de mélanger ces deux concepts. Si on les utilise dans un contexte de régression, elles favoriseront des types spécifiques de parcimonie et diversité jointes. On reviendra sur ce point, qui devrait s'éclaircir d'avantage, dans le chapitre 5 avec la formulation Bayésienne du problème de régression.

Les normes mixtes étant évidemment des normes, la proposition suivante précise les cas de convexité et de convexité stricte.

Proposition 3.1. *Si $p \geq 1$ et $q \geq 1$ alors la norme $\ell_{\mathbf{w};p,q}$ est convexe. La convexité stricte est obtenue pour $p > 1$ et $q > 1$.*

Les normes mixtes vont ainsi nous permettre de prendre en compte certaines structures qu'on peut trouver dans les signaux qu'on observe. Les propriétés classiques des normes, et en particulier la convexité, nous permettra de les utiliser dans un contexte de régression.

Comme rappelé en début de ce chapitre, l'utilisation des normes mixtes n'est pas nouvelle. On rappelle dans la section suivante quelques modèles classiques déjà étudiés qui utilisent des normes pour regrouper les variables.

3.2 Quelques normes mixtes dans la littérature

Quelques normes mixtes particulières sont déjà utilisées dans diverses situations. On voit d'abord dans cette section quelques espaces fonctionnels classiques qui peuvent être caractérisés à l'aide de normes mixtes, puis on présente des problèmes de régression qui utilisent aussi des normes mixtes, en particulier dans la communauté statistique.

3.2.1 Les normes mixtes et les espaces fonctionnels

Trois exemples d'espaces fonctionnels sont donnés : les espaces de Besov, Triebel-Lizorkin et les espaces de modulation. Une description des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin est donnée dans [Ryc99]. On pourra se reporter à [Fei06] et à ses références pour en savoir plus sur les espaces de modulation. Les définitions des espaces de Besov et de modulation sont rappelées à la section 2.4.2 du chapitre 2, et font intervenir des normes mixtes.

Les espaces de Triebel-Lizorkin sont définis de manière similaire aux espaces de Besov, en inversant le rôle de j et n dans la norme mixte qui intervient dans la définition.

3.2.2 Les normes mixtes en régression et apprentissage statistique

Plusieurs techniques de régression parcimonieuse ont été étudiées dans un contexte d'apprentissage supervisé. Si la plus connue est la régression ℓ_1 (problème du LASSO ou basis pursuit denoising présenté dans le chapitre 2), d'autres techniques de régression ont été introduites afin d'introduire une dépendance entre les coefficients.

Le Group-LASSO introduit par Yan et Lin dans [YL06], utilise une norme mixte $\ell_{2,1}$. Ils ont introduit cette norme afin de préserver des groupes entiers d'individus. Plus récemment, Fornasier et Rauhut ont étudié plus généralement des normes mixtes $\ell_{p,1}$ comme régularisation pour les problèmes inverses dans [FR08]; Teschke et Ramlau ont étudié ce même type de normes pour des problèmes inverses non linéaires dans [TR07].

Un autre exemple de normes mixtes est fournis par la pénalisation hiérarchique de Szafranski et Grandvalet dans [SGMM08]. La pénalisation hiérarchique modélise *a priori* le couplage des variables selon une hiérarchie

donnée. L'étude du problème conduit alors à un problème de régression pénalisé par une norme $\ell_{\frac{4}{3},1}$. Un des intérêts de cet article est de faire ressortir explicitement la hiérarchie entre les «groupes» et les «membres» d'un groupe lors de la modélisation des données.

Dans la communauté statistique, les normes mixtes ont été introduite de manière générale sous le nom de «Composite Absolute Penalties» par Peng Zhao *et al* dans [ZRY08]. Ce dernier papier étudie un algorithme qui utilise la norme $\ell_{\infty,1}$.

Maintenant que les normes mixtes ont été introduites, on va se concentrer dans les chapitres suivants sur les problèmes de régression en dimension finie. On abordera tout d'abord le problème de minimisation d'une norme mixte sous contrainte d'égalité grâce à l'algorithme FOCUSS, qui sera étendu au cas multi-couches. L'estimation d'un signal bruité est alors étudié, et on verra comment le seuillage itératif de Landweber permet de minimiser les fonctionnelles correspondantes. On s'attardera alors sur comment choisir sa norme mixte, et de nouveaux opérateurs de seuillages généralisés seont alors introduits. Enfin, quelques illustrations et résultats obtenus en pratique seront donnés.

ESTIMATION SOUS CONTRAINTE D'ÉGALITÉ

Le problème de l'estimation d'une fonction, ou d'un signal, sous la contrainte d'égalité (ou de reconstruction exacte) est considéré, et l'algorithme FOCUSS adapté au cas des normes mixtes, puis généralisé pour la décomposition d'un signal en couche. On se restreint dans ce chapitre au cas de la dimension finie. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^T$. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^N$ et un système de double indexation $g \in \{1, \dots, G\}$ et $m \in \{1, \dots, M\}$, avec $N = G \times M$, tel que $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_G)$, et pour tout g , $\boldsymbol{\alpha}_g = (\alpha_{g,1}, \dots, \alpha_{g,m}, \dots, \alpha_{g,M})$. Soit $\Phi \in \mathbb{C}^{T \times N}$ une matrice dont les colonnes sont les vecteurs d'un dictionnaire de \mathbb{C}^T , avec $T \leq N$. Les cas $p \leq 2$ et $q \leq 2$ ($p, q \neq 0$) sont considérés, car ils permettent de favoriser la parcimonie dans une des directions dépendantes de l'index, le problème restant convexe pour $1 \leq p, q \leq 2$.

4.1 Minimisation d'une norme mixte

Le problème que l'on souhaite résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\alpha}} \quad & \text{sgn}(pq) \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{w};p,q}^q \\ \text{sous contrainte} \quad & \mathbf{x} = \Phi \boldsymbol{\alpha} . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Le problème (4.1) peut être résolu avec l'algorithme FOCUSS [RKD99], qui est spécialement fait pour minimiser une mesure de parcimonie (ou de diversité), sous contrainte d'égalité. Une version de FOCUSS adaptée aux normes $\ell_{p,q}$ est décrite ci-dessous, et sa convergence est montrée.

Afin d'utiliser FOCUSS, on doit écrire le gradient de la mesure de diversité sous forme factorisée. On note $\mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha})$ la mesure de diversité de $\boldsymbol{\alpha}$. La forme factorisée du gradient s'écrit alors

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}) = \mu(\boldsymbol{\alpha}) \Pi(\boldsymbol{\alpha}) \bar{\boldsymbol{\alpha}} .$$

où $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ est le conjugué de $\boldsymbol{\alpha}$.

Par exemple, avec la mesure de parcimonie classique ℓ_p , $\mathcal{M}^{(p)}(\boldsymbol{\alpha}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|_p^p$, $\mu(\boldsymbol{\alpha}) = |p|$ et $\Pi(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}(|\alpha_n|^{p-2})$.

Dans le cas qui nous intéresse, on choisit $\ell_{\mathbf{w};p,q}$ pour mesure de diversité, *i.e.* $\mathcal{M}^{(p,q)}(\boldsymbol{\alpha}) = \text{sgn}(pq)\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{w};p,q}^q$. La dérivée partielle par rapport à $\alpha_{g,m}$ est

$$\frac{\partial \mathcal{M}^{(p,q)}(\boldsymbol{\alpha})^q}{\partial \alpha_{g,m}} = \text{sgn}(p)|q| w_{g,m} \bar{x}_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-2} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p},$$

Et donc

$$\mu(x) = \text{sgn}(p)|q| \text{ and } \Pi(x) = \text{diag}(w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-2} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p}) \quad (4.2)$$

Pour initialiser l'algorithme FOCUSS, on part d'un vecteur vérifiant la contrainte d'égalité. Un tel vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ est appelé une *solution faisable*; *i.e.* $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$ est une solution faisable si et seulement si $s = \Phi \boldsymbol{\alpha}^{(0)}$.

FOCUSS est un simple schéma itératif pour résoudre (4.1) donné par l'algorithme suivant :

Algorithme 8 : FOCUSS

Initialisation : Soit $\boldsymbol{\alpha}^{(0)} \in \mathbb{C}^N$ une solution faisable et $m = 0$.

repeat

$$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}^{(i+1)} = \Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \Phi^* (\Phi \Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \Phi^*)^{-1} \mathbf{x} \\ m = m + 1 \end{array} \right.$$

until *convergence* ;

où Φ^* représente la transposée Hermitienne de Φ .

Théorème 4.1. *Partant d'une solution faisable et bornée $\boldsymbol{\alpha}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, La suite des itérées générée par l'algorithme 8 est convergente, et minimise la mesure de diversité $\ell_{\mathbf{w};p,q}$.*

Démonstration. On suit et adapte la preuve originale de [RKD99]. Le point principal est de montrer que $\mathcal{M}^{(p,q)}(\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)}) < \mathcal{M}^{(p,q)}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)})$.

Afin de montrer la convergence de l'algorithme, on doit vérifier les hypothèses du théorème de convergence global [BS79], qui est rappelé ici

Théorème 4.2. *Soit \mathcal{A} un algorithme sur un ensemble X , et on suppose que, pour $x^{(0)}$ donné, une suite $\{x^{(i)}\}$ est générée et qui satisfait*

$$x^{(i+1)} = \mathcal{A}(x^{(i)}) .$$

Soit un ensemble de solution donnée $\Gamma \subset X$, et l'on suppose que

- i) Tous les points $x^{(m)}$ sont contenus dans un ensemble compacte $S \subset X$.*
- ii) Il existe une fonction continue (la fonction de descente) Z sur X telle que*

- a) Si $x \notin \Gamma$, alors $Z(y) < Z(x)$, $\forall y \in \mathcal{A}(x)$;
 b) Si $x \in \Gamma$, alors $Z(y) \leq Z(x)$, $\forall y \in \mathcal{A}(x)$;
 iii) L'opérateur \mathcal{A} est fermé sur les points en dehors de Γ .

Alors, la limite de n'importe quelle sous-suite convergente de $x^{(i)}$ est une solution, et $Z(x^{(i)}) \rightarrow Z(x^*)$ pour un $x^* \in \Gamma$.

On définit ici

$$\Gamma = \left\{ \boldsymbol{\alpha}^* : \Phi \boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{x}, \text{ and } \boldsymbol{\alpha}^* = P^*(\Phi P^*)^+ \mathbf{x} \right\},$$

où $P^* = (\Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^*))^{1/2}$ et $+$ représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Le point *iii*) ne pose aucun problème car \mathcal{A} est ici une fonction continue. La preuve du point *i*) se fait exactement comme dans [RKD99]. Seul la preuve du point *ii*) est écrite ici.

Afin de montrer le point *ii*), on utilise la même technique que celle utilisée dans la preuve originale, qui se base sur l'inégalité de Hölder : si $\alpha_i, x_i \geq 0$, $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, alors

$$\sum_i \alpha_i x_i \leq \left(\sum_i \alpha_i^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_i x_i^s \right)^{\frac{1}{s}}.$$

L'inégalité est inversée pour $r < 1$ ($r \neq 0$).

$\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)}$ s'écrit comme une fonction de la solution $b^{(i+1)}$ de norme ℓ_2 minimale, du problème $\Phi P^{(i+1)} b = \mathbf{x}$ où $P^{(i+1)} = \text{diag}(w_{g,m}^{-1/2} |\alpha_{g,m}^{(i)}|^{\frac{2-p}{2}} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{p-q}{2}})$. On a alors $\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)} = P^{(i+1)} b^{(i+1)}$

Introduisons maintenant \tilde{b} tel que $\tilde{b}_{g,m} = w_{g,m}^{1/2} \text{sgn}(\alpha_{g,m}^{(i)}) |\alpha_{g,m}^{(i)}|^{\frac{q}{2}} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{q-p}{2}}$ qui est une solution sous-optimale de $\Phi P^{(i+1)} b = \mathbf{x}$. Si $\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)} \neq \boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ (*i.e.* l'algorithme n'a pas convergé), alors

$$\begin{aligned} \|b^{(i+1)}\|_2^2 &< \|\tilde{b}\|_2^2 = \sum_g \sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{(i)}|^p \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p} \\ &= \sum_g \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p} \sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{(i)}|^p \\ &= \sum_g \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^p = \|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q. \end{aligned} \quad (4.3)$$

On peut souligner le fait que

$$\alpha_{g,m}^{(i+1)} = |\alpha_{g,m}^{(i)}|^{\frac{2-p}{2}} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i+1)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{p-q}{2}} b_{g,m}^{(i+1)},$$

et donc, pour $0 < p < 2$ et $0 < q < 2$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)}) &= \sum_g \left(\sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{(i+1)}|^p \right)^{q/p} \\
 &= \sum_g \left(\sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{(i)}|^{\frac{p(2-p)}{2}} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{p(p-q)}{2}} |b_{g,m}^{(i+1)}|^p \right)^{q/p} \\
 &= \sum_g \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{q(p-q)}{2}} \left(\sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{(i)}|^{\frac{p(p-2)}{2}} |b_{g,m}^{(i+1)}|^p \right)^{q/p} \\
 &\leq \sum_g \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{q(p-q)}{2}} \left(\sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{(i)}|^p \right)^{\frac{q(2-p)}{2p}} \left(\sum_m |b_{g,m}^{(i+1)}|^2 \right)^{\frac{pq}{2p}} \\
 &= \sum_g \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{q(p-q)}{2}} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{q(2-p)}{2}} \|\mathbf{b}_g^{(i+1)}\|_2^q \\
 &= \sum_g \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{\frac{2q-q^2}{2}} \|\mathbf{b}_g^{(i+1)}\|_2^q \\
 &\leq \left(\sum_g \|\boldsymbol{\alpha}_g^{(i)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^q \right)^{\frac{2-q}{2}} \left(\sum_g \|\mathbf{b}_g^{(i+1)}\|_2^2 \right)^{\frac{q}{2}} \\
 &< \left(\|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q \right)^{\frac{2-q}{2}} \left(\|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q \right)^{\frac{q}{2}} \\
 &= \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) ,
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder à la 4ème ligne avec $r = \frac{2}{2-p}$, $s = \frac{2}{p}$, et à la 7ème ligne avec $r = \frac{2}{2-q}$, $s = \frac{2}{q}$.

Le point *ii*) est alors montré. Les cas $p = 2$ ou $q = 2$ sont assez simples pour ne pas les écrire spécifiquement. Les cas $p < 0$ ou $q < 0$ sont similaires, en utilisant l'inégalité de Hölder renversée. ■

Remarque 4.1. Afin d'initialiser l'algorithme, une solution faisable bornée simple est la solution de norme ℓ_2 minimale, obtenue par la pseudo-inverse de Moore-Penrose de $\Phi : \boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \Phi^+ \mathbf{x}$.

4.2 Extension à la décomposition multi-couche

Dans certaines situations, les signaux considérés contiennent des composantes aux caractéristiques significativement différentes (appelées «couches»), qui sont mieux décrites par des repères ou des bases différentes. Cela mène à des problèmes de régression avec des dictionnaires construits comme union de bases ou de repères. Il semble alors cohérent

d'utiliser différentes normes sur les coefficients correspondants aux différentes bases. FOCUSS peut être adapté à une telle situation comme on va le voir dans la suite.

Afin de simplifier la compréhension et l'écriture, on se limite ici au cas de deux couches seulement. La généralisation à un nombre arbitraire de couches est directe. Le problème peut être formulé comme suit. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^T$ et $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{[1]} \\ \boldsymbol{\alpha}^{[2]} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$, avec $T < N$ et pour tout $i \in \{1, 2\}$, $\boldsymbol{\alpha}^{[i]} \in \mathbb{R}^{N_i}$, avec $N_i = K_i \times F_i$. Supposons que $\boldsymbol{\alpha}^{[i]} = (\boldsymbol{\alpha}_1^{[i]}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{G_i}^{[i]})$ et pour tout $g \in \{1, \dots, G_i\}$, $\boldsymbol{\alpha}_g^{[i]} = (\alpha_{g,1}^{[i]}, \dots, \alpha_{g,m}^{[i]}, \dots, \alpha_{G_i, M_i}^{[i]})$. Soit $\Phi \in \mathbb{C}^{T \times N}$ tel que $\Phi = [\Phi_1 \Phi_2]$, avec $\Phi_i \in \mathbb{C}^{T \times N_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$. On souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2} \left\{ \text{sgn}(p_1 q_1) \lambda_1 \|\boldsymbol{\alpha}^{[1]}\|_{\mathbf{w}^{[1]}}^{q_1} + \text{sgn}(p_2 q_2) \lambda_2 \|\boldsymbol{\alpha}^{[2]}\|_{\mathbf{w}^{[2]}}^{q_2} \right\}$$

sous contrainte $\mathbf{x} = \Phi \boldsymbol{\alpha} = \Phi_1 \boldsymbol{\alpha}^{[1]} + \Phi_2 \boldsymbol{\alpha}^{[2]}$, (4.4)

avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ fixé.

La mesure de diversité s'écrit :

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}) = \text{sgn}(p_1 q_1) \lambda_1 \|\boldsymbol{\alpha}^{[1]}\|_{\mathbf{w}^{[1]}}^{q_1} + \text{sgn}(p_2 q_2) \lambda_2 \|\boldsymbol{\alpha}^{[2]}\|_{\mathbf{w}^{[2]}}^{q_2} \quad (4.5)$$

$$= \text{sgn}(p_1 q_1) \lambda_1 \sum_{g_1=1}^{G_1} \left(\sum_{m_1=1}^{M_1} w_{g_1, m_1}^{[1]} |\alpha_{g_1, m_1}^{[1]}|^{p_1} \right)^{q_1/p_1} \quad (4.6)$$

$$+ \text{sgn}(p_2 q_2) \lambda_2 \sum_{g_2=1}^{G_2} \left(\sum_{m_2=1}^{M_2} w_{g_2, m_2}^{[2]} |\alpha_{g_2, m_2}^{[2]}|^{p_2} \right)^{q_2/p_2} \quad (4.7)$$

$$= \mathcal{M}_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1]}) + \mathcal{M}_2(\boldsymbol{\alpha}^{[2]}) . \quad (4.8)$$

Afin d'écrire le gradient de \mathcal{M} sous forme factorisée, on calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_{g_1, m_1}^{[1]}} = \text{sgn}(p_1) \lambda_1 |q_1| w_{g_1, m_1}^{[1]} \alpha_{g_1, m_1}^{[1]} |\alpha_{g_1, m_1}^{[1]}|^{p_1-2} \|\boldsymbol{\alpha}_{g_1}^{[1]}\|_{\mathbf{w}^{[1]}}^{q_1-p_1} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_{g_2, m_2}^{[2]}} = \text{sgn}(p_2) \lambda_2 |q_2| w_{g_2, m_2}^{[2]} \alpha_{g_2, m_2}^{[2]} |\alpha_{g_2, m_2}^{[2]}|^{p_2-2} \|\boldsymbol{\alpha}_{g_2}^{[2]}\|_{\mathbf{w}^{[2]}}^{q_2-p_2} . \quad (4.10)$$

Le gradient de l'énergie \mathcal{M} peut être écrit sous forme factorisée avec $\mu(\boldsymbol{\alpha}) = 1$ et $\Pi(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \Pi_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1]}) & 0 \\ 0 & \Pi_2(\boldsymbol{\alpha}^{[2]}) \end{pmatrix}$ où

$$\Pi_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1]}) = \text{sgn}(p_1) \lambda_1 |q_1| \text{diag}(w_{g_1, m_1}^{[1]} |\alpha_{g_1, m_1}^{[1]}|^{p_1-2} \|\boldsymbol{\alpha}_{g_1}^{[1]}\|_{\mathbf{w}^{[1]}}^{q_1-p_1})$$

et

$$\Pi_2(\boldsymbol{\alpha}^{[2]}) = \text{sgn}(p_2)\lambda_2|q_2| \text{diag}(w_{g_2,m_2}^{[2]}|\alpha_{g_2,m_2}^{[2]}|^{p_2-2}\|\boldsymbol{\alpha}_{g_2}^{[2]}\|_{\mathbf{w}^{[2],p_2}}^{q_2-p_2}) .$$

Une première idée serait d'appliquer l'algorithme 8 (FOCUSS) sans rien changer. Malheureusement, cet algorithme ne converge pas dans ce cas : la mesure de diversité \mathcal{M} n'est pas décroissante au cours des itérations. Afin de modifier l'algorithme dans le but d'assurer la décroissance de la mesure de diversité, et donc d'assurer la convergence, on va reprendre les idées de la preuve précédente, avec les mêmes notations, et les modifier en conséquence. On réécrit l'inégalité (4.3) :

$$\|b^{(i+1)}\|_2^2 = \|b^{[1](i+1)}\|_2^2 + \|b^{[2](i+1)}\|_2^2 \quad (4.11)$$

$$< \|\tilde{b}\|_2^2 = \|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q \quad (4.12)$$

$$= \|\boldsymbol{\alpha}^{[1](i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q + \|\boldsymbol{\alpha}^{[2](i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q . \quad (4.13)$$

Afin de montrer la stricte décroissance de \mathcal{M} au cours des itérations, on aimerait avoir $\|b^{[1](i+1)}\|_2^2 < \|\boldsymbol{\alpha}^{[1](i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q$ (resp. $\|b^{[2](i+1)}\|_2^2 < \|\boldsymbol{\alpha}^{[2](i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q$) et $\|b^{[2](i+1)}\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{\alpha}^{[2](i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q$ (resp. $\|b^{[1](i+1)}\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{\alpha}^{[1](i)}\|_{\mathbf{w};p,q}^q$). L'algorithme FOCUSS va donc être légèrement modifié pour garantir la stricte décroissance de la mesure \mathcal{M} .

Algorithme 9 : FOCUSS Multicouches

Initialisation : Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ une solution faisable et bornée.

repeat

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}^{[1](i+1)} = \Pi_1^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{[1](i)})\Phi_1^*(\Phi\Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)})\Phi^*)^{-1}\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\alpha}^{[2](i+1)} = \Pi_2^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{[2](i)})\Phi_2^*(\Phi\Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)})\Phi^*)^{-1}\mathbf{x} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{if } \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)}) \geq \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \text{ then} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{if } \mathcal{M}_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1](i+1)}) \geq \mathcal{M}_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1](i)}) \text{ then} \\ \quad \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}^{[1](i+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{[1](i)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{else} \\ \quad \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}^{[2](i+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{[2](i)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \end{array} \right.$$

until convergence ;

De cette manière, on est sûr d'obtenir une décroissance stricte de \mathcal{M}_1 ou \mathcal{M}_2 au cours des itérations, de sorte que la mesure \mathcal{M} est strictement décroissante. Cela assure la convergence de l'algorithme vers un minimum (qui peut être local) de la fonction \mathcal{M} .

L'algorithme FOCUSS nous permet d'estimer les coefficients dans un dictionnaire, sous la contrainte de reconstruction exacte du signal. Les observations d'un signal étant en général bruitées, il est alors utile de relâcher cette

contrainte d'égalité stricte lorsqu'on estime le signal et ses couches. FOCUSS et la généralisation précédente peuvent être modifié comme dans [REC⁺03] pour prendre le bruit en compte ; cependant cet algorithme ne semble pas le plus efficace dans ce cas, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, où une approche alternative est proposée.

RÉGRESSION PARCIMONIEUSE

5

On s'intéresse ici au cas bruité, *i.e.* le cas où les observations sont de la forme

$$\mathbf{x} = \Phi\boldsymbol{\alpha} + b ,$$

où b est un bruit non spécifié *a priori*. On utilise une formulation variationnelle classique du problème : la régression est faite classiquement en minimisant une erreur ℓ_2 entre le signal observé et son estimé, régularisé par une norme mixte. On se place ici dans le cas général de la dimension infinie. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, avec $\mathcal{H} \subset L_2(\mathbb{R})$ un espace de Hilbert séparable. Soit $\alpha \in \ell_2(\mathbb{C})$ et un opérateur linéaire $\Phi : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}$. Ainsi, on considère la fonctionnelle suivante à minimiser

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi\boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \frac{\lambda}{q} \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{w},p,q}^q , \quad (5.1)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

5.1 Interprétation Bayésienne

Dans un contexte Bayésien, le choix de la norme ℓ_2 pour le terme d'attache aux données est en général justifié en supposant que le bruit est i.i.d selon une distribution Gaussienne. La norme mixte conduit à une distribution *a priori* sur les coefficients de la forme

$$p(\boldsymbol{\alpha}) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{q} \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{w},p,q}^q\right\} \quad (5.2)$$

$$= \prod_g \exp\left\{-\frac{\lambda}{q} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_p^q\right\} , \quad (5.3)$$

qui est un produit de distributions de Gibbs. Cette formulation Bayésienne montre le couplage des coefficients comme cela était souligné au chapitre 3, et l'indépendance entre les groupes de coefficients.

5.2 Solution par FOCUSS régularisée

Plus généralement, pour une décomposition multicouche d'un signal, le but est d'utiliser une fonctionnelle telle que :

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_i}{q_i} \|\boldsymbol{\alpha}^{[i]}\|_{\mathbf{w}_i, p_i, q_i}^{q_i}, \quad (5.4)$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans le but de minimiser (5.4), en dimension finie, l'algorithme FOCUSS peut être adapté comme suggéré dans [REC⁺03]. On propose ici de modifier l'algorithme pour $I = 2$ seulement, dans un souci de simplicité

Algorithme 10 : FOCUSS régularisé adapté au cas multicouche

Initialisation : Soit $\boldsymbol{\alpha}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ une solution faisable et bornée.

repeat

$$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}^{[1](i+1)} = \Pi_1^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{[1](i)}) \Phi_1^* (\Phi \Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \Phi^* + Id)^{-1} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\alpha}^{[2](i+1)} = \Pi_2^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{[2](i)}) \Phi_2^* (\Phi \Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \Phi^* + Id)^{-1} \mathbf{x} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{if } E(\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)}) \geq E(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \text{ then} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{if } E_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1](i+1)}) \geq E_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1](i)}) \text{ then} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}^{[1](i+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{[1](i)} \\ \text{if } E_2(\boldsymbol{\alpha}^{[2](i+1)}) \geq E_2(\boldsymbol{\alpha}^{[2](i)}) \text{ then} \\ \quad \left| \boldsymbol{\alpha}^{[2](i+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{[2](i)} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

until convergence ;

avec

$$\Pi_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1]}) = \text{sgn}(p_1) \lambda_1 |q_1| \text{diag}(w_{g_1, m_1}^{[1]} |\alpha_{g_1, m_1}^{[1]}|^{p_1-2} \|\boldsymbol{\alpha}_{g_1}^{[1]}\|_{\mathbf{w}^{[1], p_1}}^{q_1-p_1}), \quad (5.5)$$

et

$$\Pi_2(\boldsymbol{\alpha}^{[2]}) = \text{sgn}(p_2) \lambda_2 |q_2| \text{diag}(w_{g_2, m_2}^{[2]} |\alpha_{g_2, m_2}^{[2]}|^{p_2-2} \|\boldsymbol{\alpha}_{g_2}^{[2]}\|_{\mathbf{w}^{[2], p_2}}^{q_2-p_2}). \quad (5.6)$$

À la différence de l'algorithme donné par Rao *et al* dans [REC⁺03], on peut remarquer la présence du terme $(\Phi \Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \Phi^* + Id)$ à la place de $(\Phi \Pi^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \Phi^* + \lambda Id)$. Cela vient du fait que, dans notre cas, le λ_j doit être intégré dans la matrice Π_j afin de pouvoir écrire l'algorithme.

Cet algorithme peut effectuer la minimisation pour n'importe quels $p, q < 2$ ($p, q \neq 0$). Cependant, il n'est pas très efficace et devient lent pour les problèmes de haute dimension, en raison de la présence d'une inversion de matrice à chaque itération.

Une alternative valable est fournie par l'algorithme de seuillages itératifs de Landweber, tel que l'algorithme introduit par Daubechies

dans [DDDM04]. On étudie dans la section suivante le cas simple où Φ est orthogonal (et correspond à l'opérateur d'une base orthogonale). Ensuite, l'algorithme de seuillage itératif est développé pour $1 \leq p, q \leq 2$. Bien que cet algorithme soit plus restrictif en terme de valeur admissible pour p et q que FOCUSS, il est bien plus rapide.

5.3 Le cas unitaire

Dans toute la section, Φ est supposée être un opérateur unitaire, *ie* $\Phi^* \Phi = \Phi \Phi^* = Id$. Ceci nous permet d'introduire des opérateurs utiles correspondant à une norme mixte. De plus, le problème de régression formulé dans le cas orthogonal donne une bonne idée de l'influence des normes mixtes lorsqu'elles sont utilisées comme terme de pénalité dans une fonctionnelle.

La régression dans le cas orthogonal est équivalente au problème d'optimisation suivant

$$\min_{\alpha} \left[\frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi \alpha\|_2^2 + \frac{\lambda}{q} \|\alpha\|_{\mathbf{w}; p, q}^q \right], \quad (5.7)$$

qui peut être écrit comme la minimisation en α de

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi \alpha\|_2^2 + \frac{\lambda}{q} \left(\sum_{g=1}^G \left(\sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^p \right)^{q/p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi \alpha\|_2^2 + \frac{\lambda}{q} \sum_g \|\alpha_g\|_{\mathbf{w}_g; p}^q. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Plusieurs cas doivent être pris en compte

- $p > 1$ et $q > 1$ La fonctionnelle Φ est différentiable partout.
- $p > 1$ et $q = 1$ La fonctionnelle Φ n'est pas différentiable aux points $\alpha_g = \mathbf{0}$.
- $p = 1$ et $q \geq 1$ La fonctionnelle Φ n'est pas différentiable aux points $\alpha_{g,m} = 0$.

Comme Φ est un opérateur unitaire, on a

$$\|\mathbf{x} - \Phi \alpha\|_2^2 = \|\Phi^* \mathbf{x} - \alpha\|_2^2 = \sum_{g,m} (\tilde{x}_{g,m} - \alpha_{g,m})^2$$

On note Φ^* l'adjoint de Φ et $\tilde{\mathbf{x}} = \Phi^* \mathbf{x}$. En notant $\theta_{\alpha_{g,m}}$ (resp. $\theta_{\tilde{x}_{g,m}}$) l'argument de $\alpha_{g,m}$ (resp. $\tilde{x}_{g,m}$), on a pour tout g, m

$$|\tilde{x}_{g,m} - \alpha_{g,m}|^2 = |\tilde{x}_{g,m}|^2 + |\alpha_{g,m}|^2 - 2|\alpha_{g,m}| |\tilde{x}_{g,m}| \cos(\theta_{\tilde{x}_{g,m}} - \theta_{\alpha_{g,m}}).$$

Ainsi, on peut différencier la fonctionnelle Φ par rapport au module de $\alpha_{g,m}$, pour un couple g, m fixé, et l'on obtient

$$|\alpha_{g,m}| = |\tilde{x}_{g,m}| \cos(\theta_{\tilde{x}_{g,m}} - \theta_{\alpha_{g,m}}) - \lambda w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-1} \|\alpha_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p}. \quad (5.9)$$

La différenciation de Φ par rapport a $\theta_{\alpha_{g,m}}$ donne

$$2|\alpha_{g,m}| |\tilde{x}_{g,m}| \sin(\theta_{\tilde{x}_{g,m}} - \theta_{\alpha_{g,m}}) = 0. \quad (5.10)$$

De (5.9) et (5.10), on peut déduire que $\theta_{\alpha_{g,m}} = \theta_{\tilde{x}_{g,m}}$ et donc écrire que les équations variationnelles sont équivalentes au système suivant :

$$|\alpha_{g,m}| = |\tilde{x}_{g,m}| - \lambda w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-1} \|\alpha_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p} \quad (5.11)$$

$$\arg(\alpha_{g,m}) = \arg(\tilde{x}_{g,m}) \quad (5.12)$$

Les équations variationnelles sont couplées, de sorte que la solution semble difficile à obtenir. La discussion qui va suivre montre qu'une solution analytique peut être trouvée dans beaucoup de cas, ou bien un algorithme itératif est donné pour obtenir cette solution. Il apparaîtra que la solution est obtenue par un opérateur de seuillage «généralisé», comme le suggèrent les équations variationnelles. Dans tous les cas, l'argument de $\alpha_{g,m}$ est le même que celui de $\tilde{x}_{g,m}$.

La suite utilisant beaucoup les opérateurs de seuillage doux, on en rappelle ici la définition.

Définition 5.1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On appelle opérateur de seuillage doux, de seuil λ , la fonction

$$S^\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto S^\lambda(x) = \begin{cases} \arg(x) (|x| - \lambda)^+ & \text{si } |x| > \lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pourra généraliser cette définition à un vecteur, où les seuils pourront être donnés coordonnée par coordonnée.

5.3.1 Pour une parcimonie faible : $p > 1$ et $q > 1$

On introduit la fonction $\mathcal{F} : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{C})$, $|\mathbf{v}| \mapsto \mathcal{F}(|\mathbf{v}|) = |\mathbf{v}| + \lambda W_g |\mathbf{v}|^{p-1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p}$. \mathcal{F} est bijective, et le système (5.11), (5.12) a une solution unique qui peut être obtenue numériquement.

5.3.2 Pour des groupes parcimonieux : $p > 1$ et $q = 1$

Pour le cas particulier $p = 2$ et $q = 1$, la proposition 5.1 ci-dessous donne une expression analytique de la solution. Le cas plus général $1 < p < 2$ et $q = 1$ est résolu en utilisant l'algorithme de point fixe 11 (voir ci-dessous).

Proposition 5.1. *Soit Φ un opérateur unitaire. On suppose que, pour tout g , et pour tout m , $w_{g,m} = w_g$. La solution du problème (5.7), où $\ell_{p,q} = \ell_{2,1}$ est donnée par*

$$|\alpha_{g,m}| = |\tilde{x}_{g,m}| \left(1 - \frac{\lambda \sqrt{w_g}}{\|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_2} \right)^+ .$$

Démonstration. La preuve est donnée en annexe C.1. ■

On souligne le fait que le terme de pondération qui nous permet d'obtenir la solution en fonction de $\tilde{x}_{g,m}$, dépend seulement de l'indice de groupe g , et pas de l'indice de membre m . On peut alors réécrire la solution sous forme vectorielle :

$$|\boldsymbol{\alpha}_k| = |\tilde{\mathbf{x}}_k| \left(1 - \frac{\lambda \sqrt{w_g}}{\|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_2} \right)^+ . \quad (5.13)$$

Remarque 5.1. *Le résultat donné à la proposition 5.1 montre un mélange de pondération type ℓ_2 , et un seuillage (qui rappelle la minimisation ℓ_1) qui opère sur un groupe entier de variable. Dans ce cas, les groupes qui contiennent beaucoup de «gros» coefficients (ou coefficients «significatifs») sont privilégiés par rapport aux groupes constitués de petits coefficients. Le couplage apparaît entre les coefficients significatifs.*

En outre, cette solution est identique à celle de l'estimateur du Group-LASSO donnée dans [YL06].

Pour le cas plus général $q = 1$ et $1 < p < 2$ on ne peut donner une expression analytique de la solution. Cependant, en dimension finie, un algorithme de seuillage itératif peut être construit.

Algorithme 11 : Itérations $p > 1$ $q = 1$

Initialisation $\boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \tilde{\mathbf{x}}$

for all g, m **do**

$$\left[\alpha_{g,m}^{(m+1)} = \arg(\tilde{x}_{g,m}) \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \lambda w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-1} \|\boldsymbol{\alpha}_k\|_{\mathbf{w}_g;p}^{q-p} \right)^+ \right.$$

Proposition 5.2. *Soit $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{G \times M}$ et $M_{\mathbf{w}_k} = \sum_{m=1}^M w_{k,\ell}$. L'algorithme de point fixe 11 converge pour*

$$\lambda < \frac{M_{\mathbf{w}_k}^{\frac{2(p-1)}{p(2-p)}}}{2(p-1)} \min_k (\|\mathbf{x}_k\|_{\mathbf{w}_g;p-2}) .$$

Démonstration. La preuve est donnée en annexe C.2 ■

Remarque 5.2. *En dépit du fait que la solution n'est pas donnée par une solution analytique, le résultat est obtenu par des seuillages itératifs. Ainsi, la solution est obtenue finalement par un seuillage, dont le seuil est obtenu a posteriori.*

Fornasier et Rauhut ont étudié plus précisément ce type de normes mixtes dans [FR08]. Ils montrent que la solution est donnée par opérateur de seuillage et ils donnent l'expression analytique de la solution pour les normes ℓ_1 , $\ell_{2,1}$ et $\ell_{\infty,1}$. L'étude de l'opérateur de seuillage pour la norme mixte $\ell_{p,1}$ est aussi faite par Teschke et Ramlau dans [TR07] dans le cadre des problèmes inverses non linéaires.

5.3.3 Pour une sélection parcimonieuse de coefficients à l'intérieur des groupes : $p=1$ et $q > 1$

On montre ici que la solution est obtenue là encore par seuillage. La proposition suivante donne le seuil de manière analytique pour le cas $q = 2$, et montre comment obtenir une estimation numérique dans les autres cas.

Proposition 5.3. *Soit Φ un opérateur unitaire. La solution du problème (5.7), où $\ell_{p,q} = \ell_{1,q}$ est donné par un seuillage doux, dont le seuil dépend du groupe g du coefficient. Le seuil ξ_g est la solution (unique) sur \mathbb{R}_+ de l'équation suivante*

$$\xi_g^{\frac{1}{q-1}} + \lambda^{\frac{1}{q-1}} M_{\mathbf{w}_g} \xi_g = \lambda^{\frac{1}{q-1}} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g}$$

avec $\|\mathbf{W}_g \tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g} = \sum_m \check{w}_{g,m} \check{x}_{g,m}$, où $\check{x}_{g,m}$ (resp. $\check{w}_{g,m}$) représente les coefficients $|\tilde{x}_{g,m}|$ (resp. $\check{w}_{g,m}$) rangés par ordre décroissant. La quantité M est le nombre tel que

$$\check{x}_{g,M} > \lambda \left(\sum_{m=1}^M \check{w}_{g,m} (\check{x}_{g,m} - \check{x}_{g,M}) \right)^{q-1} \quad \text{et} \quad \check{x}_{g,M+1} \leq \lambda \left(\sum_{m=1}^{M+1} \check{w}_{k,m} (\check{x}_{g,m} - \check{x}_{g,M+1}) \right)^{q-1} .$$

et $M_{\mathbf{w}_g} = \sum_{m=1}^M \check{w}_{g,m}$.

En particulier, pour $q = 2$, le seuil ξ_g est égal à

$$\frac{\lambda}{1 + M_{\mathbf{w}_g} \lambda} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g} .$$

Démonstration. La preuve est donnée à l'annexe C.3. ■

Remarque 5.3. *Cette proposition généralise le résultat donné dans le cadre des ondelettes et des espaces de Besov dans [CALL98].*

Dans le cas $q = 2$, on souligne quelques propriétés de la norme $\ell_{1,2}$ dans la remarque suivante.

Remarque 5.4. *Après une réécriture adéquate, la solution est obtenue par un mélange de pondération ℓ_2 et de seuillage ℓ_1 :*

$$\begin{aligned} |\alpha_{g,m}| &= |\tilde{x}_{g,m}| - \frac{\lambda}{1 + \lambda M_{\mathbf{w}_g}} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g} \\ &= |\tilde{x}_{g,m}| \left(1 - \frac{\lambda w_{g,m}}{1 + \lambda M_{\mathbf{w}_g}} \right) - \frac{\lambda}{1 + \lambda M_{\mathbf{w}_g}} \sum_{\ell=1, \tilde{x}_{g,\ell} \neq \tilde{x}_{g,m}}^M \check{w}_{g,m,\tilde{x}_{g,\ell}} . \end{aligned}$$

Ce mélange de pondération et de seuillage est ici très différent de celui obtenu dans le cas de la norme mixte $\ell_{2,1}$. Ici, on pondère chaque coefficient, avant de le comparer à un seuil qui dépend de la norme du groupe g : alors chaque coefficient est seuillé. La parcimonie est alors favorisée tout en préservant une certaine structure : le seuil dépend de la parcimonie selon m , à l'index g . Plus le signal est parcimonieux à l'index g , plus le seuil est petit.

Contrairement à la norme mixte $\ell_{2,1}$, le couplage n'est pas entre les coefficients significatifs : un coefficient apparaît comme significatif par rapport aux autres.

Remarque 5.5. *Attardons nous sur le cas $\lambda \gg 1$ et $w_{g,m} = 1$ pour tout g, m pour la norme $\ell_{1,2}$. Alors, pour un groupe g donné, au moins un coefficient n'est pas mis à zéro. En effet, si tous les coefficients étaient mis à zéro, alors $\|\tilde{\mathbf{x}}_g\| = 0$ et aucun coefficient ne pourrait être inférieur au seuil, ce qui est une contradiction évidente. Conséquemment, les normes mixtes $\ell_{1,2}$ ne peuvent pas donner un estimateur aussi parcimonieux que la norme ℓ_1 . Cette propriété est la conséquence de la structure de cette norme et illustre bien le couplage entre coefficients significatifs ou non significatifs, comme dit dans la remarque 5.4.*

Il est intéressant de remarquer que le minimum de la fonctionnelle (5.1) quand Φ est unitaire, est aussi la solution du problème

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \left[\sum_g \frac{1}{\xi_g} \sum_m |\tilde{x}_{g,m} - \alpha_{g,m}|^2 + \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \right] , \quad (5.14)$$

i.e. un problème de régression parcimonieuse avec une pénalisation ℓ_1 , et un terme d'attache aux données faisant intervenir une pondération dépendantes des données.

Bien qu'il n'y ait pas d'interprétation Bayésienne simple, une telle ré-interprétation montre qu'on peut s'attendre à ce que la solution se comporte particulièrement bien dans les situations où un signal parcimonieux

est plongé dans un bruit dont la variance varie suivant les groupes g dans le domaine des coefficients.

Le problème de régression associé à la norme mixte $\ell_{1,2}$ est appelé *Elitist-LASSO* (E-LASSO). Ce nom a été choisi suite au comportement de l'opérateur de seuillage calculé précédemment. En effet, cet opérateur a un comportement élitiste dans le sens où, pour chaque groupe, seul les «meilleurs» (*i.e.* les plus gros) coefficients seront gardés.

5.3.4 Résumé des principaux résultats

Afin de réutiliser les résultats donnés ci-dessus, et faciliter la lecture, on les résume en un seul théorème.

Théorème 5.1. *Soit $\alpha \in \ell_2(\mathbb{C})$ et $\mathbf{x} \in \ell_2(\mathbb{C})$. Soit $\Phi : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur unitaire. Soit $1 \leq p, q \leq 2$ et \mathbf{w} une suite de réel strictement positifs, tels que $\|\alpha\|_{\mathbf{w};p,q}^q = \sum_g (\sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^p)^{q/p}$. Alors la solution du problème d'optimisation suivant*

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_{\mathbf{w};p,q}^q,$$

est donnée par $\mathbf{S}_{\mathbf{w};p,q}^\lambda(\Phi^* \mathbf{x})$, avec $\mathbf{S}_{\mathbf{w};p,q}^\lambda$ un opérateur de seuillage doux défini coordonnée par coordonnée, par, pour tout g, m :

$$v_{g,m} \mapsto \arg(v_{g,m}) (|v_{g,m}| - \xi_{g,m})^+$$

où les $\xi_{g,m}$ sont donnés ci-après.

- Si $p > 1$ et $q > 1$. Alors le seuil est donné a posteriori, la solution est donnée par l'inverse de $\mathcal{F} : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{C})$, $|\mathbf{v}| \mapsto \mathcal{F}(|\mathbf{v}|) = |\mathbf{v}| + \lambda W_g |\mathbf{v}|^{p-1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{w};p}^{q-p}$;
- Si $p = 1$ et $1 \leq q < \infty$. Alors, pour tout m , $\xi_{g,m} = \xi_g$ est solution sur \mathbb{R}_+ de

$$\xi_g^{\frac{1}{q-1}} + \lambda^{\frac{1}{q-1}} M_{\mathbf{w}_g} \xi_g = \lambda^{\frac{1}{q-1}} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g}$$

avec $\|W_g \tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g} = \sum_{m=1}^M \check{w}_{g,\ell} \check{x}_{k,\ell}$, où $\check{x}_{g,m}$ (*resp.* $\check{w}_{g,m}$) représente les coefficients $|\tilde{x}_{g,m}|$ (*resp.* $\check{w}_{k,\ell}$) rangés en ordre décroissant. La quantité M est le nombre tel que

$$\check{x}_{k,M} > \lambda \left(\sum_{m=1}^M w_{g,m} (\check{x}_{k,m} - \check{x}_{k,M}) \right)^{q-1} \quad \text{and} \quad \check{x}_{k,M+1} \leq \lambda \left(\sum_{m=1}^{M+1} w_{g,m} (\check{x}_{g,m} - \check{x}_{g,M+1}) \right)^{q-1}.$$

$$\text{et } M_{\mathbf{w}_g} = \sum_{m=1}^M \check{w}_{g,m}.$$

- En particulier, si $p = 1$ et $q = 2$,

$$\xi_k = \frac{\lambda}{1 + M_{\mathbf{w}_g} \lambda} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g}$$

- Si $p = 2$ et $q = 1$, et pour un g donné, $w_{g,m} = w_g \forall m$. Alors

$$\xi_{g,m} = \frac{\lambda \sqrt{w_g}}{\tilde{x}_{g,m} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_2} ;$$

- Si $1 < p < 2$ et $q = 1$. Alors la solution est donnée en dimension finie par l'algorithme 11.

Le théorème précédent montre que le minimiseur est obtenue par un opérateur seuillage doux. Cette remarque donne le corollaire suivant

Corollaire 5.1. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^N$. Soit $\Phi : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur unitaire. Soit $1 \leq p, q \leq 2$ et \mathbf{w} une suite de réel strictement positif tels que $\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{w};p,q}^q = \sum_g (\sum_m w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^p)^{q/p}$.

Alors, pour tout $\mathbf{x} \in \ell_2(\mathbb{C})$, il existe une suite de réels positifs ξ (qui dépend de \mathbf{x}) tel que le minimum de la fonctionnelle

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \|\mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{w};p,q}^q ,$$

coïncide avec le minimum de la fonctionnelle

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \|\mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\xi;1} .$$

On a vu comment obtenir une estimation du signal dans le cas où Φ est un opérateur unitaire. Ainsi, on a défini des opérateurs nous permettant d'obtenir la solution. La section suivante pose le problème dans un cas plus général, et montre qu'un algorithme itératif inspiré par Daubechies *et al* dans [DDDM04] et par Teschke dans [Tes06b] peut être étendu dans ce nouveau contexte, avec les mêmes propriétés de convergence. Lorsque le dictionnaire considéré est construit par une union de bases orthonormées, un algorithme du type Block Coordinate Relaxation (BCR) peut être utilisé.

5.4 Généralisation

5.4.1 BCR

La section précédente donne une solution au problème 5.1 dans le cas simple où Φ est un opérateur unitaire (et correspond à une base orthonormée). On s'intéresse maintenant à un problème similaire où Φ est la concaténation de

deux opérateurs unitaires (et correspond à l’union de deux bases orthonormées). *L’a priori* choisi sur les coefficients correspondants aux deux bases peut être différent.

Une motivation à ce problème peut être la décomposition d’un signal audio en trois couches *Transitoire + Tonal + Bruit*, à l’aide de deux bases MDCT utilisant une résolution temps-fréquences différente. Des problèmes similaires se retrouvent en traitement d’image sous le nom de décomposition en *Cartoon + Texture + Bruit*. De tels problèmes ont été étudiés par divers auteurs et plusieurs types d’algorithmes sont disponibles. Des approches probabilistes ont été utilisées dans le domaine audio (voir [MT05, FTDG08], qui exploitent simultanément la parcimonie et la persistance. Des approches variationnelles (telles que l’analyse en composantes morphologiques) sont souvent préférées dans la littérature du traitement d’image, mais qui n’introduisent pas la notion de persistance. L’approche des normes mixtes sur laquelle on se concentre ici semble un bon compromis entre les deux approches précédentes, en permettant d’introduire de la persistance dans les formulations variationnelles.

On part d’un problème d’optimisation similaire à celui donné par le MCA (décrit à la section 2.5.1 du chapitre 2), qu’on rappelle ici

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \|\mathbf{x} - \Phi(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}})^T\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 + \mu\|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\|_1. \quad (5.15)$$

Plutôt que d’utiliser deux normes ℓ_1 pour estimer les couches tonales et transitoires, on va utiliser des normes mixtes. On définit alors la fonctionnelle suivante à minimiser

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \|\mathbf{x} - \Phi(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}})^T\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{\alpha}\|_{p,q}^q + \mu\|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\tilde{p},\tilde{q}}^{\tilde{q}} \quad (5.16)$$

où $\ell_{p,q}$ et $\ell_{\tilde{p},\tilde{q}}$ seront choisis de manière adéquate.

Pour décomposer un signal en plusieurs couches, il convient de choisir un dictionnaire pour chacune des couches. Dans l’exemple des signaux audios, la couche transitoire se représente bien dans un dictionnaire d’ondelette ou temps-fréquence (type Gabor ou MDCT) avec une fenêtre étroite. À l’opposé, la couche tonale est bien représentée dans des dictionnaires temps-fréquence avec une fenêtre large.

On choisit ici le cas particulier où chaque dictionnaire est une base orthonormée (par exemple, deux bases MDCT avec deux tailles de fenêtre différentes). On applique la méthode Block Coordinate Relaxation (BCR) [BST98] qui est à l’origine du MCA [SED04]. BCR est spécialement adapté à l’union de bases orthogonales, et converge vers un minimum de la fonctionnelle (5.15) du *basis-pursuit denoising*.

On introduit quelques notations. Soit \mathcal{U} et \mathcal{V} les deux bases en considération, et on note U et V les opérateurs correspondants. On note $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{U}}$ les coefficients correspondants à la base \mathcal{U} et $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}}$ les coefficients correspondants à la base \mathcal{V} . De cette façon, $U\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{U}}$ correspond à la couche tonale et $V\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}}$ à la

couche transitoire. Pour obtenir une estimation des deux couches, on choisit alors de minimiser la fonctionnelle suivante

$$\Psi(\alpha_{\mathcal{U}}, \alpha_{\mathcal{V}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - U\alpha_{\mathcal{U}} - V\alpha_{\mathcal{V}}\|_2^2 + \frac{\lambda}{q} \|\alpha_{\mathcal{U}}\|_{p,q}^q + \frac{\mu}{\tilde{q}} \|\alpha_{\mathcal{V}}\|_{\tilde{p},\tilde{q}}^{\tilde{q}} \quad (5.17)$$

L'algorithme BCR est alors légèrement modifié pour obtenir un minimiseur de (5.17) :

Algorithme 12 : Algorithme BCR

Initialisation : soit $\alpha_{\mathcal{U}}^{(0)}$ et $\alpha_{\mathcal{V}}^{(0)}$ quelconques

repeat

$$\mathbf{r}_{\mathcal{U}}^{(i)} = \mathbf{x} - V\alpha_{\mathcal{V}}^{(i)}$$

Estimer $\alpha_{\mathcal{U}}^{(i+1)}$ en résolvant

$$\alpha_{\mathcal{U}}^{(i+1)} = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - U\alpha\|_2^2 + \frac{\lambda}{q} \|\alpha\|_{p,q}^q$$

avec le théorème 5.1

$$\mathbf{r}_{\mathcal{V}}^{(i)} = \mathbf{x} - U\alpha_{\mathcal{U}}^{(i+1)}$$

Estimer $\alpha_{\mathcal{V}}^{(i+1)}$ en résolvant

$$\alpha_{\mathcal{V}}^{(i+1)} = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - V\alpha\|_2^2 + \frac{\mu}{\tilde{q}} \|\alpha\|_{\tilde{p},\tilde{q}}^{\tilde{q}}$$

avec le théorème 5.1

until *convergence* ;

En suivant la preuve donnée dans [BST98] pour l'algorithme BCR, on peut exploiter le travail fait dans [Tse93] et écrire

Théorème 5.2. *Soit U et V deux opérateurs unitaires de $\ell_2(\mathbb{C})$ dans \mathcal{H} . Soit $\mathbf{x} \in \ell_2(\mathbb{C})$ et $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\tilde{p} \geq 1$, et $\tilde{q} \geq 1$. Alors l'algorithme 12 converge vers un minimum de (5.17).*

Cet algorithme à l'avantage d'avoir une interprétation simple : on commence par estimer une couche, puis celle-ci est retirée avant d'estimer la seconde. On retire alors cette dernière estimation pour ré-estimer la première couche et ainsi de suite. L'inconvénient de cet algorithme est de se limiter au cas où Φ est l'union de bases orthonormées (le cas où Φ est composée de plus de deux bases orthonormées s'obtient directement). La section suivante présente un algorithme plus général, où Φ peut être l'opérateur d'un dictionnaire très général (union de bases, de repères etc.) et

permet même d'étendre l'approche au cas où Φ est un opérateur linéaire quelconque (comme un opérateur de convolution).

5.4.2 Itérations de Landweber

On étudie ici un cas plus général que le problème (5.7). Φ est un opérateur linéaire quelconque, et l'on veut exploiter la structure en couches qui peut apparaître dans un signal. Dans le cas particulier où Φ est un opérateur d'un dictionnaire construit comme l'union de bases orthogonales, on peut appliquer l'algorithme BCR décrit ci-dessus. L'algorithme étudié ici est plus général, et peut être appliqué à n'importe quel type d'opérateur linéaire Φ , comme un opérateur associée à un repère (ou l'union de repère), un opérateur de convolution etc.

Soit la fonctionnelle

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \sum_{i=1}^I \Phi_i \boldsymbol{\alpha}^{[i]}\|_2^2 + \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_i}{q_i} \mathcal{M}_i(\boldsymbol{\alpha}^{[i]}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \boldsymbol{\lambda} \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}) . \quad (5.18)$$

avec $\mathbf{x} \in \ell_2(\mathbb{C})$, pour tout i , $\Phi_i : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur linéaire et $\Phi = \bigoplus \Phi_i$. Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\alpha}^{[I]})$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{\lambda_1}{q_1}, \dots, \frac{\lambda_I}{q_I}) \in \mathbb{R}^{*I}$. On a $\Phi \boldsymbol{\alpha} = \sum_i \Phi_i \boldsymbol{\alpha}^{[i]}$ et $\mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}) = (\mathcal{M}_1(\boldsymbol{\alpha}^{[1]}), \dots, \mathcal{M}_I(\boldsymbol{\alpha}^{[I]}))$.

On choisit comme pénalité une norme mixte introduite auparavant. On a alors $\mathcal{M}_i(\boldsymbol{\alpha}^{[i]}) = \|\boldsymbol{\alpha}^{[i]}\|_{\mathbf{w}^{[i]}; p_i, q_i}$.

Pour résoudre le problème (5.18), en suivant [DDDM04, Tes06b], on introduit une fonctionnelle de remplacement¹

$$\Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \frac{C}{2} \|\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a}\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\Phi \boldsymbol{\alpha} - \Phi \mathbf{a}\|_2^2 + \boldsymbol{\lambda} \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (5.19)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_g \sum_m \left(C(\alpha_{g,m}^{[i]})^2 - 2\alpha_{g,m}^{[i]} [\Phi_i^* \mathbf{x} + C \mathbf{a}^{[i]} - \Phi_i^* \Phi \mathbf{a}]_{g,m} + \frac{\lambda_i}{q_i} \mathcal{M}_i(\boldsymbol{\alpha}^{[i]}) \right) + \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x}\|_2^2 + C \|\mathbf{a}\|_2^2 - \|\Phi \mathbf{a}\|_2^2 \right) \quad (5.20)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left(\sum_g \sum_m \left(C(\alpha_{g,m}^{[i]})^2 - 2\alpha_{g,m}^{[i]} [\Phi_i^* \mathbf{x} + C \mathbf{a}^{[i]} - \Phi_i^* \Phi \mathbf{a}]_{g,m} \right) + \frac{\lambda_i}{q_i} \sum_{g=1} \left(\sum_m w_{g,m}^{[i]} |\alpha_{g,m}^{[i]}|^{p_i} \right)^{q_i/p_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x}\|_2^2 + C \|\mathbf{a}\|_2^2 - \|\Phi \mathbf{a}\|_2^2 \right) , \quad (5.21)$$

¹où l'on utilise la notation $[\Phi^* y]_{g,m}$ pour désigner le coefficient de coordonnée (g, m) de $\Phi^* y$.

avec C tel que $C > C_1 + \dots + C_I$, où chaque C_i est un majorant de la norme de $\Phi^* \Phi$.

Alors, la solution du problème variationnel associé vérifie, pour tout i, g, m :

$$|\alpha_{g,m}^{[i]}| = C^{-1} \left| [\Phi_i^* \mathbf{x} + C\mathbf{a}^{[i]} - \Phi_i^* \Phi \mathbf{a}]_{g,m} \right| - \frac{\lambda_i}{C} w_{g,m}^{[i]} |\alpha_{g,m}^{[i]}|^{p_i-1} \|\alpha_g^{[i]}\|_{\mathbf{w}_g^{[i]}, p_i}^{q_i-p_i}. \quad (5.22)$$

Dans la situation habituelle, l'introduction d'une fonctionnelle de remplacement découple le problème en sous-problèmes scalaires. Dans le cas qui nous intéresse ici, elle procède aussi à un découplage en sous-problèmes vectoriels de plus petite dimension, qui peuvent être résolus comme décrit dans la section 5.3. Par conséquent, pour tout i , les opérateurs $\mathbf{S}_{\mathbf{w}^{[i]}, p_i, q_i}^{\lambda_i/C}$ donnés par le théorème 5.1 à la section 5.3.4, nous permet d'obtenir une solution pour (5.22) à partir de $C^{-1}[\Phi_i^* \mathbf{x} + C\mathbf{a}^{[i]} - \Phi \mathbf{a}]$.

Proposition 5.4. *Soit \mathbf{a} fixé. La fonctionnelle de remplacement $\Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a})$ admet un minimum donné par*

$$\operatorname{argmin}(\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{sur}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a})) = \mathbf{S}(C^{-1}[\Phi^* \mathbf{x} + C\mathbf{a} - \Phi^* \Phi \mathbf{a}]),$$

$$\text{où } \mathbf{S} = \left(\mathbf{S}_{\mathbf{w}^{[1]}, p_1, q_1}^{\lambda_1/C}, \dots, \mathbf{S}_{\mathbf{w}^{[I]}, p_I, q_I}^{\lambda_I/C} \right).$$

Démonstration. La fonctionnelle de remplacement nous permet de découpler les équations variationnelles. On a ensuite juste à exploiter le travail fait en section 5.3. ■

On peut alors en déduire l'algorithme itératif suivant

Algorithme 13 : Landweber

Initialisation : $\boldsymbol{\alpha}^{(0)} \in \ell_2(\mathbb{C})$

repeat

for $i = 1 : I$ **do**

$$\begin{aligned} |\alpha^{[i](m+1)}| &= \mathbf{S}_{\mathbf{w}_i, p_i, q_i}^{\lambda_i/C} (C^{-1}[\Phi_i^* \mathbf{x} + C\boldsymbol{\alpha}^{[i](m)} - \Phi_i^* \Phi \boldsymbol{\alpha}^{(m)}]) \\ &= \left(C^{-1} \left| [\Phi_i^* \mathbf{x} + C\boldsymbol{\alpha}^{[i](m)} - \Phi_i^* \Phi \boldsymbol{\alpha}^{(m)}] \right| - \xi^{[I](m)} \right)^+ \end{aligned}$$

until *convergence* ;

où les $\xi^{[i](m)}$ sont les vecteurs qui contiennent les seuils $\xi_{g,m}^{[i](m)}$. Ces seuils sont donnés par les opérateurs $\mathbf{S}_{\mathbf{w}^{[i]}, p_i, q_i}^{\lambda_i/C}$, associés à la norme mixte adéquate

ℓ_{p_i, q_i} , appliqués à $C^{-1}[\Phi_i^* \mathbf{x} + C \boldsymbol{\alpha}^{[i(m)} - \Phi_i^* \Phi \boldsymbol{\alpha}^{(m)}]$. Le théorème 5.1 donne un moyen pratique d'obtenir les seuils.

Comme dans [DDDM04, Tes06b], on montre que l'algorithme précédent converge, puis que le point de convergence est le minimum désiré (*i.e.*, une solution du problème (5.18)).

Théorème 5.3. *Soit $I \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, on pose Φ_i un opérateur linéaire tel que $\Phi_i : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}$. Soit Φ l'opérateur linéaire tel que $\Phi = \bigoplus \Phi_i$ et soit C tel que $C > \|\Phi^* \Phi\|$. On suppose que \mathbf{x} est un élément de \mathcal{H} et on note \mathbf{w} une suite de réels bornée inférieurement par un réel strictement positif. Alors, la suite des itérés générés par l'algorithme 13 avec $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$ choisi arbitrairement dans $\ell_2(\mathbb{C})$, converge vers un point fixe qui est le minimiseur de la fonctionnelle (5.18).*

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \sum_i \Phi_i \boldsymbol{\alpha}^{[i]\|_2^2 + \sum_i \lambda_i \mathcal{M}_i(\boldsymbol{\alpha}^{[i]}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \boldsymbol{\lambda} \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}) .$$

Démonstration. La preuve suit celle originalement proposée par Daubechies *et al* dans [DDDM04], et résumée dans plusieurs contributions comme [Tes06b] pour montrer la convergence (faible) des seuillages itératifs de Landweber. On choisit alors de reporter la preuve à l'annexe C.4.

■

La convergence faible de l'algorithme de seuillage itératif de Landweber nous permet d'énoncer le théorème suivant

Théorème 5.4. *Soit $I \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, on pose Φ_i un opérateur linéaire tel que $\Phi_i : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}$. Soit Φ l'opérateur linéaire tel que $\Phi = \bigoplus \Phi_i$ et soit C tel que $C > \|\Phi^* \Phi\|$. Soit $1 \leq p, q \leq 2$ et $\mathbf{w} = (w_{g,m})$ une suite de réel bornée inférieurement par un réel strictement positif.*

Soit $\mathbf{x}^{(n)}$ la suite générée par l'algorithme 13 et \mathbf{x}^ sa limite faible.*

Alors il existe une suite (non unique) $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{g,m}^{[i]})$ de \mathbb{R}_+ telle que

$$\Psi(x) = \|\mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \boldsymbol{\lambda} \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha})$$

et

$$\tilde{\Psi}(x) = \|\mathbf{x} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\boldsymbol{\xi}; 1}$$

ont le même minimum atteint au même point \mathbf{x}^ . De plus, un choix possible de $\boldsymbol{\xi}$ est donnée coordonnée par coordonnée par*

$$\xi_{g,m}^{[i]} \begin{cases} = w_{g,m} |\alpha^*|^{p-1} \|\boldsymbol{\alpha}_g^*\|_{\mathbf{w}_g; p, q}^q & \text{si } \alpha_{g,m}^* \neq 0 \\ \geq B & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$B = \prod_{i=1}^I \min\{\xi_{g,m}^{[i]} |\alpha_{g,m}^{[i]*} \neq 0\}^{-4/p_i} \|\mathbf{x}\|_2^{(2p_i(6+q_i-p_i)-4q_i)/(p_i q_i)} .$$

Démonstration. L'équation (5.22) nous dit que le minimum de Ψ est atteint en α^* tel que, pour tout $C > \|\Phi^* \Phi\|$

$$|\alpha_{k,\ell}^*| = C^{-1} [\Phi^* \mathbf{x} + C \alpha^* - \Phi^* \Phi \alpha^*]_{g,m} - \frac{\lambda}{C} w_{g,m} |\alpha_{g,m}^*|^{p-1} \|\alpha_g^*\|_{\mathbf{w}_{g,p}}^{q-p} .$$

On note $\tilde{\alpha}^*$ le minimiseur de $\tilde{\Psi}(\alpha)$, qui est la limite des itérés $\tilde{\alpha}^{(m)}$ générés par l'algorithme 13 appliqué à $\tilde{\Psi}$. Le lemme C.6 assure qu'il existe une borne uniforme $B(\mathbf{x}^{(0)})$ telle que $\|\alpha^{(m)}\| \leq B(\alpha^{(0)})$. Alors, $\xi_{g,m} \geq B(\alpha^{(0)})$ pour $\alpha_{g,m}^* = 0$ assure que $\tilde{\alpha}_{g,m}^* = 0$. La convergence ne dépendant pas du choix de $\tilde{\alpha}^{(0)}$, on peut donc choisir $\xi_{g,m} \geq B(\mathbf{0})$ où B est donné par le lemme C.6.

Ainsi, avec $\xi_{g,m}^{[i]} = w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{[i]*}|^{p_i-1} \|\alpha_g^{[i]*}\|_{\mathbf{w}_g^{[i]}, p_i}^{q_i-p_i}$ lorsque $\alpha_{g,m}^{[i]*} \neq 0$ on a

$$\alpha^* = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \Psi(\alpha) = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \tilde{\Psi}(\alpha) = \tilde{\alpha}^* .$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$

$$\begin{aligned} \|\alpha^{[i]*}\|_{\xi^{[i]}; 1} &= \lambda_i \sum_{g,m \mid \alpha_{g,m}^{[i]*} \neq 0} w_{g,m}^{[i]} |\alpha_{g,m}^{[i]*}|^{p_i-1} \|\alpha_g^{[i]*}\|_{\mathbf{w}_g^{[i]}, p_i}^{q_i-p_i} |\alpha_{g,m}^{[i]*}| \\ &= \lambda_i \sum_g \|\alpha_g^{[i]*}\|_{\mathbf{w}_g^{[i]}, p_i}^{q_i-p_i} \sum_m w_{g,m}^{[i]} |\alpha_{g,m}^{[i]*}|^{p_i} \\ &= \lambda_i \|\alpha^{[i]*}\|_{\mathbf{w}^{[i]}, p_i, q_i}^{q_i} \end{aligned}$$

et donc $\lambda \mathcal{M}(\alpha^*) = \|\alpha^*\|_{\xi; 1}$ et $\Phi(\alpha^*) = \tilde{\Phi}(\alpha^*)$. ■

Le théorème précédent nous permet d'énoncer

Théorème 5.5. *La suite $\alpha^{(n)}$ des itérées générée par l'algorithme 13 avec $\alpha^{(0)}$ arbitrairement choisi dans $\ell_2(\mathbb{C})$, converge fortement vers un point fixe qui est un minimiseur de la fonctionnelle (5.18).*

Démonstration. Soit α^* la limite faible de $\alpha^{(n)}$.

Soit $\tilde{\Psi}$ et ξ définis en appliquant le théorème 5.4 à Ψ . Soit $\tilde{\alpha}^{(m)}$ la suite des itérées générée par l'algorithme 13 appliquée à $\tilde{\Psi}$. Avec le théorème 5.4 cette suite converge – fortement (voir [DDDM04]) – vers α^* qui est un minimiseur de Ψ and $\tilde{\Psi}$.

Avec L l'opérateur définie dans le lemme C.3 (voir l'appendix C), on a

$$\Psi^{sur}(\alpha^{(n)}, \tilde{\alpha}^{(m)}) = \Psi(\alpha^{(n)}) + \|L(\alpha^{(n)} - \tilde{\alpha}^{(m)})\|_2^2 .$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(m)}) = \Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \Psi(\boldsymbol{\alpha}^*) .$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N, M , tels que pour tout $n > N$ et $m > M$,

$$\|L(\boldsymbol{\alpha}^{(n)} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(m)})\|_2^2 = |\Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(m)}) - \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(n)})| < \varepsilon .$$

Finalement, pour tout $n > N$ et $m > M$, avec μ une borne inférieure strictement positive du spectre de L^*L on a

$$\|\boldsymbol{\alpha}^{(n)} - \boldsymbol{\alpha}^*\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{\alpha}^{(n)} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(m)}\|_2^2 + \|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(m)} - \boldsymbol{\alpha}^*\|_2^2 < \frac{1}{\mu} \|L(\mathbf{x}^{(n)} - \tilde{\mathbf{x}}^{(m)})\|_2^2 + \varepsilon < \left(\frac{1}{\mu} + 1\right)\varepsilon .$$

Et l'on peut conclure que la suite des $\mathbf{x}^{(n)}$ converge fortement vers le point fixe $\boldsymbol{\alpha}^*$. ■

On a maintenant à disposition plusieurs algorithmes pour résoudre des problèmes de régressions spécifiques. Le chapitre suivant donne des illustrations de ces algorithmes et les influences des normes mixtes.

LE SEUILLAGE EN PRATIQUE : SIMULATIONS

6

Le but principal de ce chapitre est d'illustrer et commenter le choix de l'opérateur de seuillage généralisé, sur des problèmes spécifiques avec des signaux simulés. Pour cela, on se limite à la décomposition dans une base orthonormée (Φ est orthogonal). On a introduit dans le chapitre précédent deux opérateurs de seuillages généralisés : le G-LASSO et le E-LASSO, qui ont deux comportements complètement différents. On analyse et illustre ici le comportement de ces deux opérateurs, et on propose aussi des alternatives pour dépasser les limitations éventuelles dans des situations particulières.

À cette fin, on applique le G-LASSO et E-LASSO et des variations sur des signaux simulés, spécialement conçus pour illustrer leur comportement. Les signaux simulés sont obtenus comme suit. D'abord, les cartes temps-fréquence Λ sont simulées, en utilisant le modèle de Markov caché étudié dans [MT05], qui génère de la persistance le long de l'axe temporel. Cette carte est alors utilisée pour simuler un signal de la forme

$$x[t] = \sum_{\ell \in \Lambda} \alpha_{\ell} \varphi_{\ell}[t] . \quad (6.1)$$

L'ensemble d'indices $\Lambda = \{\ell : \alpha_{\ell} \neq 0\}$ est appelé la *carte de signifiante* où *carte temps-fréquence*. Les coefficients temps-fréquence correspondant (i.i.d) α_{ℓ} sont simulés suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Un exemple d'une telle carte de signifiante est donné sur la figure 6.1, et contient 8.5% de coefficients non nuls. Dans les exemples numériques ci-dessous, on considère deux cartes avec respectivement 8.5% et 1% de coefficients non nuls, pour étudier le comportement des opérateurs de seuillage à différents degrés de parcimonie.

6.1 Sélection de groupes pertinents

6.1.1 Re-numérotation

Dans certaines situations, tous les membres d'un groupe donné n'ont pas besoin d'être actifs en même temps. Lorsque les sous-groupes qui sont simulés

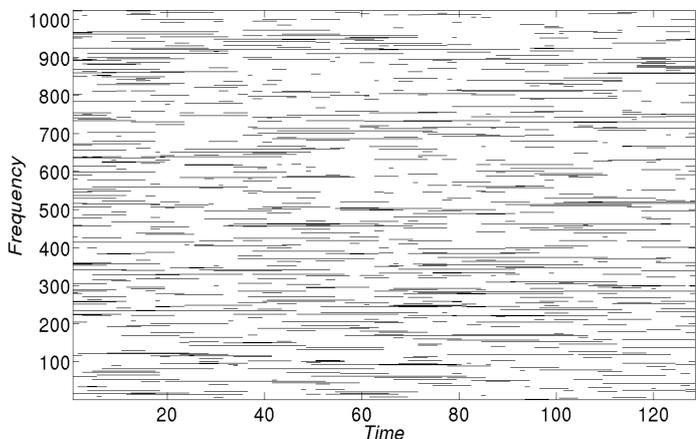


FIG. 6.1 – Carte temps-fréquence avec 8.5% de coefficients non nuls, générée avec une chaîne de Markov en fréquence fixe.

tanément actifs ou inactifs sont connus par avance, les coefficients peuvent être reindexés de sorte que l’estimateur G-LASSO classique peut être utilisé. Un exemple trivial d’une telle re-numérotation est montré sur la figure 6.2. Ici, la renumérotation est simplement une séparation des groupes en sous-groupes, mais des renumérotations plus complexe peuvent être envisagées.

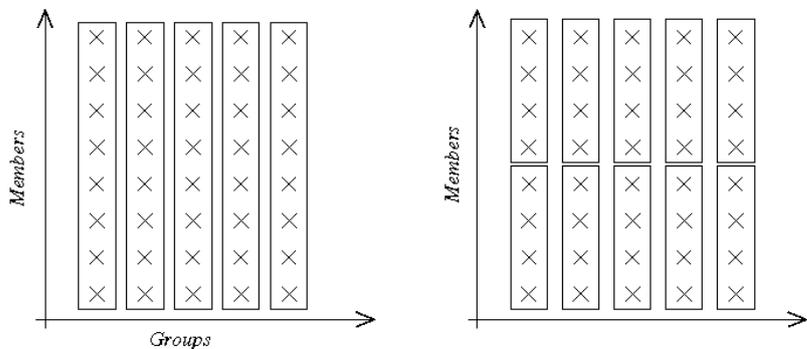


FIG. 6.2 – Un exemple de renumérotation des coefficients.

Cependant, ce n’est pas la situation la plus générale, et les sous-groupes de coefficients actifs ne sont en général pas connus à l’avance, ou même fixés. Pour cette raison, une alternative à «fenêtre glissante» pour l’approche précédente peut être judicieuse.

6.1.2 Fenêtrage

Pour cela, on suppose qu’une information supplémentaire sur les coefficients est disponible, nous disant pour chaque coefficients d’indice $k = (g, m)$ quels sont les autres coefficients qui peuvent être «actifs» ou «inactifs» simulta-

nément avec k . On génère ainsi un système de voisinage, qui associe à n'importe quel indice «groupe/membre» $k = 1, \dots, N$ un groupe $\mathcal{N}(k)$ d'indices «proches».

A présent, pour un indice k donné, il semble raisonnable d'utiliser seulement son voisinage dans $\mathcal{N}(k)$ pour estimer sa décomposition parcimonieuse, en exploitant la persistance à l'intérieur de $\mathcal{N}(k)$. En utilisant l'estimateur du G-LASSO dans le théorème 5.1, cela suggère de calculer

$$\hat{\alpha}_{g,m} = \bar{x}_{g,m} \left(1 - \frac{\lambda}{\|\bar{\alpha}_k\|_{\ell_2(\mathcal{N}(k))}} \right)^+, \quad (6.2)$$

où l'on a noté $\bar{\alpha}_k$ la sous-séquence

$$\bar{\alpha}_k = \{\bar{\alpha}_{k'}, k' \in \mathcal{N}(k)\}.$$

On appelle cet estimateur le *Windowed Group-LASSO* (WG-LASSO). Notons que contrairement à l'approche de la renumérotation précédente, chaque coefficients k utilise son propre voisinage, à la place d'un groupe entier. Comparé au théorème 5.1, le coefficient estimé $\hat{\alpha}_{g,m}$ est obtenu à partir des observations $\bar{x}_{g,m}$ en le multipliant par un masque qui dépend maintenant de l'indice $k = (g, m)$. Notons aussi que ce nouvel opérateur de seuillage n'est plus associé à un simple problème variationnel. La figure 6.3 montre un exemple d'une fenêtre glissante utilisée pour grouper un canal avec son voisinage, où m est l'indice du canal et g l'indice temps-fréquence.

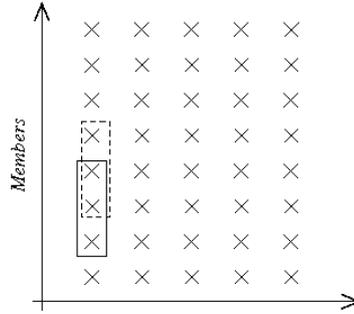


FIG. 6.3 – Un exemple de fenêtre glissante.

6.1.3 Simulations

On considère ici une décomposition d'un signal multicanal (échantillonné à 44100 Hz) sur une base MDCT donnée (avec une fenêtre longue de 23.3 millisecond) :

$$x_m[t] = \sum_{m \in \Lambda} \alpha_{g,m} \varphi_g[t], \quad (6.3)$$

où g est ici un indice temps-fréquence et m indexe les canaux. $\Lambda = \{g : x_{g,m} \neq 0\}$ est la *carte de signifiante*, ou *carte temps-fréquence*, et est supposée être la même pour tous les canaux. On note alors $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^M) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ le signal multicanal.

Dans ce contexte, les groupes indexés par g et les membres indexés par m correspondent respectivement à l'indice temps-fréquence et aux canaux. En d'autres termes, le modèle suppose une dépendance «entre les canaux».

Deux signaux multicanaux sont simulés comme suit

1. On choisit un pourcentage de coefficients non nuls, et on génère deux cartes temps-fréquence Λ_1 et Λ_2 avec les pourcentages choisis.
2. On simule deux ensembles de coefficients temps-fréquences i.i.d. selon une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, $x_{g,m}$, $m = 1, \dots, 4$ et $g \in \Lambda_1$ (resp. $m = 5, \dots, 8$ et $g \in \Lambda_2$).
3. On synthétise les signaux avec le modèle (6.3).

Les signaux simulés ont alors $M = 8$ canaux. Les quatre premiers partagent la carte temps-fréquence Λ_1 et les quatre derniers partagent la carte temps-fréquence Λ_2 .

Les divers opérateurs de seuillage généralisés décrit ci-dessus sont comparés dans le contexte d'un problème de débruitage. Un bruit blanc gaussien est ajouté au signal multicanal de manière à obtenir un rapport signal à bruit (SNR) égal à 10 dB. Dans un soucis de simplicité, le SNR n'est pas calculé canal par canal, mais en considérant l'ensemble du signal multicanal :

$$SNR(\underline{x}, \hat{\mathbf{x}}) = 20 \log \left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2} \right) \quad (6.4)$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme de Fröbenius du signal multicanal. Ce SNR peut être différent de la moyenne des SNR de tous les canaux, mais cette différence est inférieure à 1 dB et n'a aucune influence sur le comportement des courbes obtenues.

Les estimateurs considérés sont les suivants

- Le LASSO, qui correspond au problème

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \underset{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N \times M}}{\operatorname{argmin}} \|\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 .$$

Tous les coefficients «canal-temps-fréquence» sont indépendants, l'estimation est obtenue par seuillage doux.

- Le G-LASSO 1, qui correspond au problème

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \underset{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N \times M}}{\operatorname{argmin}} \|\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \sum_{g=1}^G \left(\sum_{m=1}^M |\alpha_{g,m}| \right)^2 .$$

Pour un indice temps-fréquence donné, tous les canaux sont rassemblés pour créer les groupes du G-LASSO. Les groupes sont indépendants. Cela correspond au regroupement donné sur la figure 6.2 (à gauche).

- G-LASSO 2, qui exploite l'information *a priori* sur les deux cartes temps-fréquence Λ_1 et Λ_2 , correspond à

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^{N \times M}} \|\bar{\mathbf{x}} - \alpha\|_2^2 + \sum_{g=1}^G \left[\left(\sum_{m_1=1}^4 |\alpha_{g,m_1}| \right)^2 + \left(\sum_{m_2=5}^8 |\alpha_{g,m_2}| \right)^2 \right].$$

Pour un indice temps-fréquence, les quatre premiers canaux sont rassemblés en un groupe, et les quatre derniers dans un autre groupe. Les groupes sont indépendants et correspondent au regroupement donné sur la figure 6.2 (à droite).

- Le WG-LASSO, qui correspond à l'estimation donnée par l'équation (6.2). Les deux plus proches voisins d'un canal sont rassemblés en utilisant une fenêtre glissante. Cela correspond au groupement donné sur la figure 6.3.

Ces différents estimateurs ont été utilisés pour plusieurs valeurs de λ . L'intervalle de valeur pour λ a été choisi de manière à obtenir des estimations avec différents degrés de parcimonie, de très peu de coefficients mis à zéro à beaucoup de coefficients nuls. Plus λ est gros, plus les estimations sont parcimonieuses.

Les courbes de la figure 6.4 montrent l'évolution du SNR comme une fonction du nombre de coefficients (qui dépend de la valeur de λ) de différents estimateurs pour le signal simulé en utilisant la carte de la figure 6.1 (*i.e.* 8.5% de coefficients non nuls). Des résultats similaires sont obtenus en utilisant une carte de signifiante plus parcimonieuse (1% de coefficients non nuls) sont montrés sur la figure 6.5.

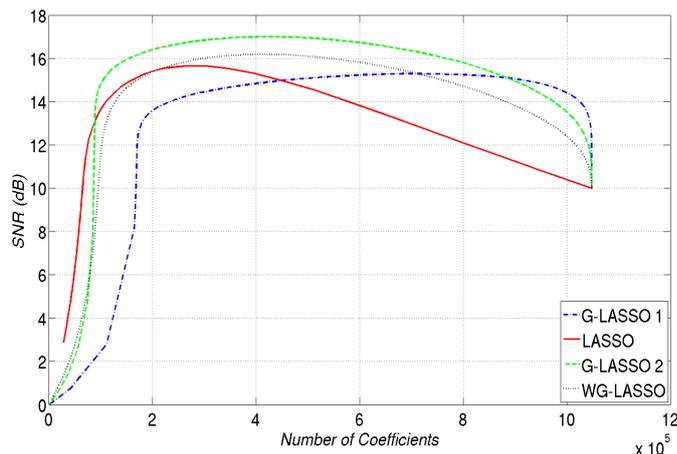


FIG. 6.4 – Comparaison entre le LASSO, 2 types de G-LASSO et le WG-LASSO.

Le comportement de ces estimateurs dépend clairement du degré de parcimonie du signal d'entrée. Dans les deux cas considérés, le G-LASSO 2 (qui

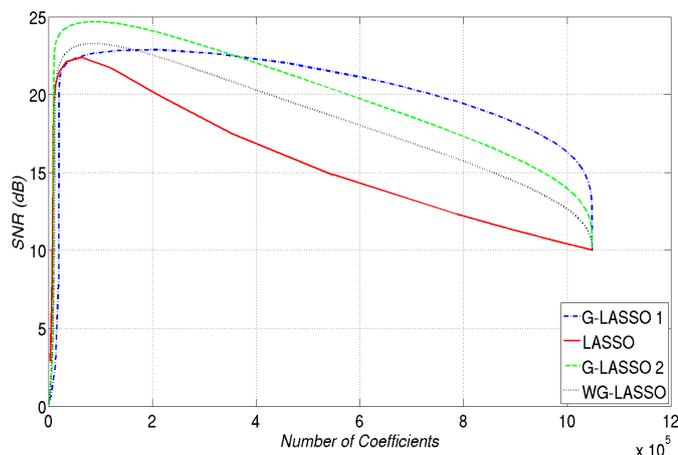


FIG. 6.5 – Comparaison entre le LASSO, 2 types de G-LASSO et le WG-GLASSO.

utilise plus d'*a priori* que les autres) atteint le meilleur SNR, et donne un meilleur SNR que les autres estimateurs lorsque le nombre de coefficients sélectionnés est proche du véritable nombre de coefficients non-nuls.

Le WG-LASSO est bien meilleur que le LASSO sur les deux courbes, sauf pour les grandes valeurs de λ (lorsqu'un grand nombre de coefficients sont mis à zéro); cependant, ce cas doit être évité si l'on veut avoir un bon estimateur (le SNR s'effondre rapidement).

Malgré leur aspect globalement différent, les courbes des figures 6.4 et Fig. 6.5 montrent des comportements qualitativement proches. Dans les deux cas, les meilleurs résultats sont obtenus lorsque les groupements sont connus à l'avance. Lorsqu'une telle information n'est pas disponible, le WG-LASSO est une bonne alternative pour exploiter les dépendances entre les coefficients. De plus, si les coefficients ne peuvent pas être classés en groupes, mais possèdent une relation de voisinage, le WG-LASSO est capable d'exploiter cette dernière.

6.2 Sélection parcimonieuse de coefficients à l'intérieur de groupes.

On regarde maintenant l'estimateur E-LASSO. On montre dans cette section des résultats numériques obtenus avec le E-LASSO, une version simplifiée du E-LASSO, et une variante proposée pour introduire de la persistance à travers les groupes.

6.2.1 Une approximation du E-LASSO

Comme on peut le voir sur le théorème 5.1, le E-LASSO suppose un classement des coefficients \bar{y} , et la détermination du nombre $M_g(\lambda)$ avec l'opération de seuillage effective. Lorsque ces opérations sont «oubliés», cela donne une approximation de l'estimateur, obtenue en remplaçant le seuil du théorème 5.1 de la section 5.3.4 du chapitre précédent

$$\xi_g = \frac{\lambda}{1 + \lambda L_g(\lambda)} \|\bar{\mathbf{x}}_g\|$$

par son approximation

$$\xi'_g = \frac{\lambda}{1 + \lambda L} \|\bar{\mathbf{x}}_g\|_1. \quad (6.5)$$

Cette approximation, appelée AE-LASSO (pour *Approximate E-LASSO*) et plus simple à calculer, a une interprétation pratique, en particulier pour les grandes valeurs de λ . En effet, si l'on prend $\lambda \rightarrow \infty$ dans l'équation (6.5), alors les coefficients sont seuillés par $\frac{\|\bar{\mathbf{x}}_{g,m}\|_1}{L}$, qui est la moyenne des coefficients $|\bar{x}_{g,m}|$ pour un groupe fixé d'indice g . Le principal inconvénient de cette approximation est que le seuil est borné par cette valeur moyenne, qui borne inférieurement le nombre de coefficients non nuls. Un avantage de cette approximation, est que le rôle du paramètre de régularisation est plus facile à comprendre. On verra dans les exemples numériques ci-dessous que lorsque le nombre de coefficients non nuls est assez grand, AE-LASSO est une bonne approximation du E-LASSO.

6.2.2 Introduction de persistance

Comme on l'a vu précédemment, la pénalisation $\ell_{1,2}$ des coefficients est très différente de la pénalisation $\ell_{2,1}$ qui mène à la régression du G-LASSO : elle favorise la parcimonie à l'intérieur des groupes des coefficients plutôt que la parcimonie à travers les groupes. Par exemple, la formule de seuillage (6.5) sélectionne un petit nombre de coefficients à l'intérieur de chaque groupe. Pour fixer les idées, on suppose qu'un seul coefficient est retenu à l'intérieur de chaque groupe. Ce coefficient est supposé varier d'un groupe à l'autre, puisque rien dans la norme ne l'empêche de le faire. Si l'on veut favoriser la persistance des coefficients retenus, une approche similaire à la précédente peut être développée, en prenant en compte les voisins du coefficient considéré. On commence par associer à chaque groupe d'indice g une famille $\mathcal{N}(g)$ de voisins. Alors, pour un g fixé, on peut résoudre le problème de minimisation $\ell_{1,2}$ sur le vecteur $\bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}(g)} = \{\bar{\mathbf{x}}_{g',m}, m = 1, \dots, M, g' \in \mathcal{N}(g)\}$

En appliquant la même approche que précédemment, la formule de seuillage généralisée (6.5) est alors remplacée par

$$\xi''_g = \frac{\lambda}{1 + \lambda |\mathcal{N}(g)|} \|\bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}(g)}\|_1, \quad (6.6)$$

$|\mathcal{N}(g)|$ étant la cardinalité de l'ensemble $\mathcal{N}(g)$. Encore une fois, ce seuillage généralisé n'est pas associé à une approche variationnelle simple. L'estimateur correspondant est appelé PE-LASSO (pour *Persistent Elitist LASSO*).

6.2.3 Simulations

Pour illustrer le comportement des estimateurs décrits ci-dessus, on simule un signal comme suit. Premièrement, une carte temps-fréquence est choisie comme précédemment (la carte 6.1 de la section précédente a été choisie) ; ensuite, les coefficients sont tirés selon une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour suivre le modèle donné par l'équation (5.14) du chapitre 5, à chaque index de temps, on ajoute un bruit blanc gaussien dont la variance est choisie uniformément entre 1 et 128. Le débruitage est alors fait en utilisant les estimateurs E-LASSO, AE-LASSO, PE-LASSO, WG-LASSO et LASSO, avec diverses valeurs pour le paramètre λ . L'estimateur PE-LASSO a été utilisé en introduisant de la persistance en temps, en prenant en compte les plus proches voisins (1 indice de temps avant et après). WG-LASSO a été utilisé en rassemblant 4 voisins en temps pour un coefficient temps-fréquence donné.

On montre sur les figures 6.6 et 6.7 le SNR comme une fonction du nombre de coefficients non nuls retenus pour les estimateurs précédents, pour deux valeurs différentes de SNR en entrée. Comme attendu, l'estimateur E-LASSO est bien meilleur dans cette situation. L'estimateur AE-LASSO est proche du E-LASSO, mais ne permet pas d'obtenir très peu de coefficients non nuls (comme expliqué précédemment). Le WG-LASSO est assez bon lors que le nombre de coefficients non nul est sur-estimé. Finalement, l'estimateur PE-LASSO est assez décevant, vu qu'il ne fait mieux que par rapport au LASSO. L'introduction de la persistance dans l'estimateur ne semble pas payer, même dans la situation où la persistance est présente dans le signal.

6.2. Sélection parcimonieuse de coefficients à l'intérieur de groupes.

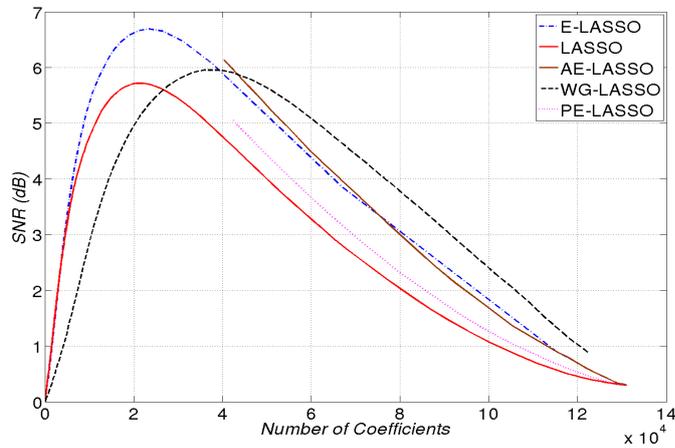


FIG. 6.6 – Comparaison entre le LASSO, E-LASSO, AE-LASSO (approximation du E-LASSO), PE-LASSO (E-LASSO avec persistance) et WG-LASSO; SNR en entrée : 3dB.

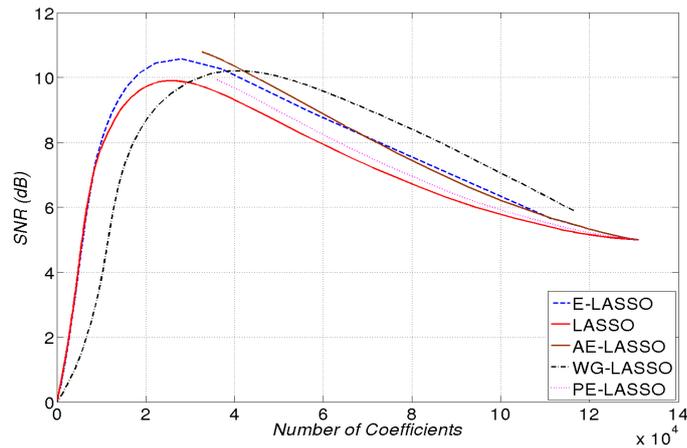


FIG. 6.7 – Comparaison entre le LASSO, E-LASSO, AE-LASSO (approximation du E-LASSO), PE-LASSO (E-LASSO avec persistance) et WG-LASSO; SNR en entrée : 5dB.

7.1 Quelques illustrations simples

On commence avec deux illustrations simples, afin de montrer le comportement du seuillage itératif de Landweber et de l'algorithme FOCUSS multi-couches. Ces deux illustrations utilisent des signaux audios. La première consiste à décliquer un signal de musique, tandis que la seconde est une décomposition en couches «tonales + transitoires» qu'on retrouve dans [DT02, DMT04]. On pourrait imaginer de manière similaire les mêmes applications au traitement des images.

7.1.1 Illustration du seuillage itératif de Landweber

Notre exemple de décliquage peut s'apparenter à un exemple jouet qui nous permet de montrer le comportement de la norme mixte $\ell_{1,2}$ comparée à la norme ℓ_1 . Ce choix sera clairement justifié dans la remarque 7.1 plus bas.

On choisit un signal de trompette d'une durée de 3 secondes (2^{17} échantillons, pour un taux d'échantillonnage de 44.1 kHz). On ajoute à ce signal des clicks aléatoires simulés par des impulsions de Dirac d'amplitudes ± 1 . Le signal ainsi obtenu est le signal \mathbf{x} de la théorie, et son rapport signal à bruit (SNR) est de 20.33 dB. Les échantillons du signal original et la version cliquée sont représentés sur la figure 7.1.

Le signal est ensuite décomposé dans un repère de Gabor avec une fenêtre gaussienne de taille 2048 échantillons, un décalage temporel de 128 échantillons, et de 2 en fréquence. La matrice correspondante de l'opérateur du repère de Gabor est la matrice Φ . Comme on peut le voir sur la représentation temps-fréquence de la figure 7.2, les clics apparaissent clairement comme des lignes verticales qui sont parcimonieuses en temps, mais recouvrent toutes les fréquences.

Plusieurs stratégies peuvent être imaginées pour décliquer le signal. On a tout d'abord utilisé un algorithme de seuillage itératif de Landweber avec une pénalisation ℓ_1 , comparée avec le même algorithme correspondant à une pénalisation ℓ_{12} .

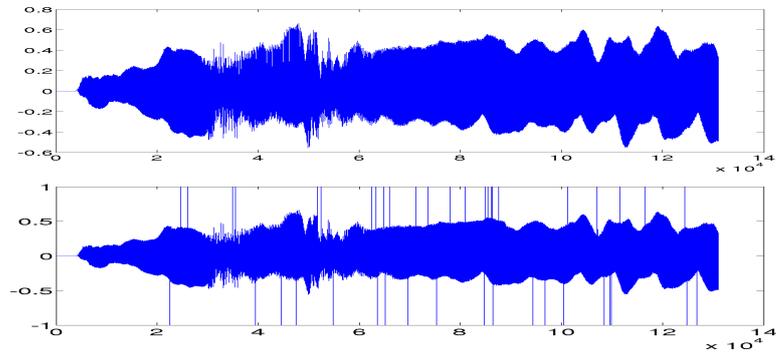


FIG. 7.1 – *Signal de trompette (haut) et sa version cliquée (bas).*

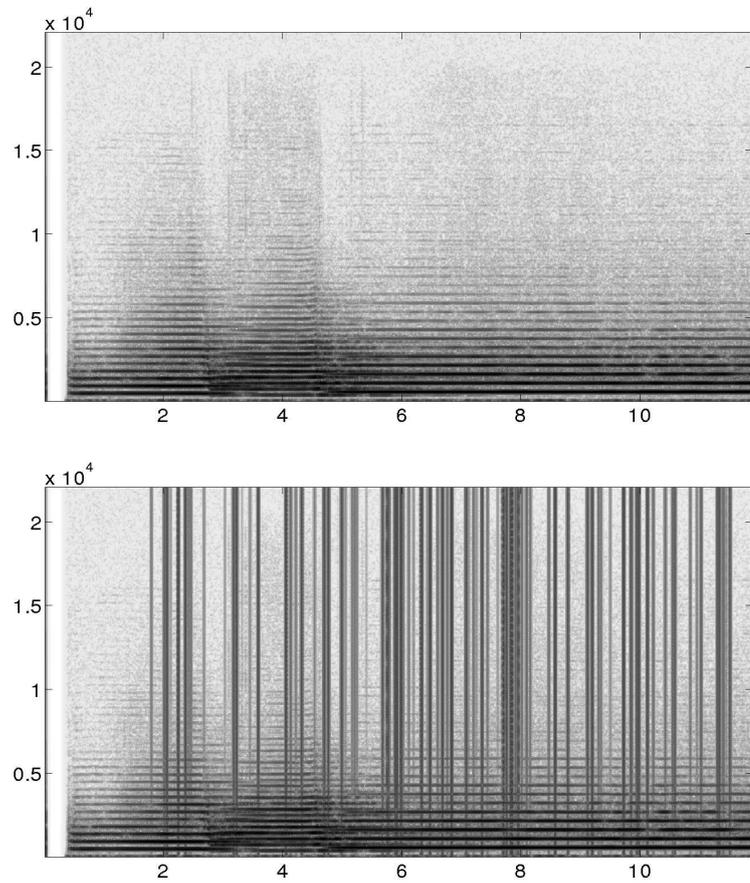


FIG. 7.2 – *Représentation temps-fréquence des coefficients de Gabor pour le signal original (haut) et sa version cliquée (bas).*

La fonctionnelle Ψ qu'on veut minimiser est la suivante :

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \Phi\alpha\|_2^2 + \frac{\lambda}{q} \left(\sum_{g=1}^G \left(\sum_{m=1}^M |x_{g,m}|^p \right)^{q/p} \right), \quad (7.1)$$

où \mathbf{x} est le signal cliqué et Φ la matrice associée à l'opérateur du repère de Gabor. Les paramètres p, q sont choisis comme suit

- $p = q = 1$. Ce qui correspond à la norme ℓ_1 classique.
- $p = 1$ et $q = 2$. L'indice de groupe g correspond au temps, et l'indice de membre m aux fréquences. Ce choix permet de favoriser la parcimonie en fréquence.

La figure 7.3 représente l'évolution du SNR en fonction du nombre de coefficients non nuls. La norme mixte permet d'obtenir de biens meilleurs résultats que la norme ℓ_1 classique. Afin d'illustrer le comportement de la norme mixte, la figure 7.4 montre les représentations temps-fréquence des coefficients de Gabor, pour un nombre comparable de coefficients non nuls pour les normes ℓ_1 et $\ell_{1,2}$. Il apparaît sur ces représentations que les clics sont mieux éliminés avec l'E-LASSO qu'avec le LASSO. : la norme ℓ_1 conserve plus de lignes verticales qui correspondent aux clics. De plus, les partiels sont mieux préservés par la norme mixte.

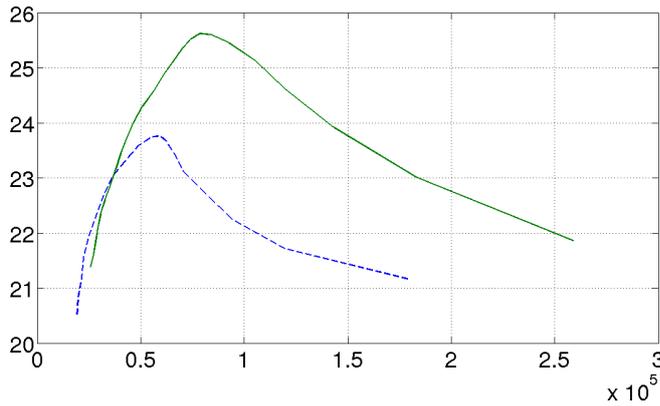


FIG. 7.3 – Évolution du SNR en fonction du nombre de coefficients non nuls. En trait plein : E-LASSO, en pointillé : LASSO.

Remarque 7.1. La norme mixte $\ell_{1,2}$ apparaît bien adaptée pour le problème choisi si l'on regarde l'estimateur donné dans le cas d'une base orthonormée à la proposition 5.3 de la section 5.3.3. Pour un index de temps g fixé, Le seuil est égal à $\frac{\lambda}{1+\lambda M} \| [A^* \mathbf{y}]_k \|$. Par conséquent, lorsqu'un clic apparaît à l'index de temps g , on s'attend à ce que le seuil soit plus grand qu'à un index de temps qui ne contient pas de clic.

On n'a pas utilisé le G-LASSO, car la norme mixte $\ell_{2,1}$ garde des groupes entiers (la parcimonie est sur les groupes, pas sur les coefficients). Cette structure en ligne ne semble pas vraiment adaptée pour le signal de trompette : les partiels peuvent évoluer lentement avec le temps, et leur nombre peut changer brutalement d'un indice temporel à l'autre.

Cependant, cette structure en ligne semblerait adaptée pour estimer seulement les clics, et donc obtenir un signal débruité dans le résidu. Cette

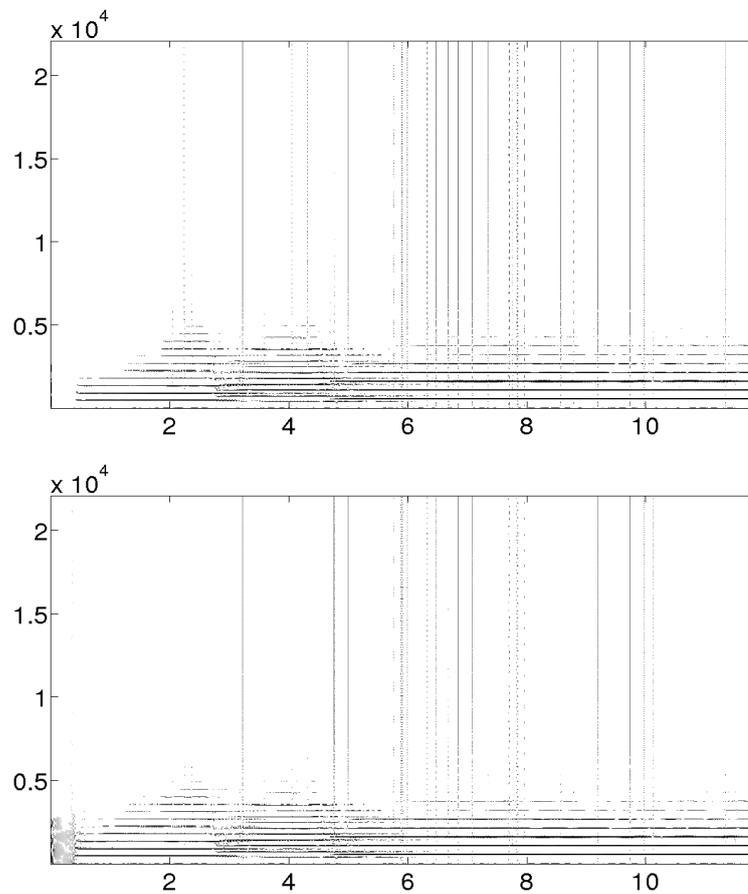


FIG. 7.4 – Représentations temps-fréquence des coefficients de Gabor d’une version débruité. Gauche : LASSO. Droite : E-LASSO.

stratégie correspond donc à une autre fonctionnelle que (7.1) et n’a pas été essayée ici.

7.1.2 Illustration de l’algorithme FOCUSS

Afin d’illustrer l’algorithme FOCUSS multi-couches, on a choisi un signal de xylophone d’une durée de 0.7 secondes (2^{15} échantillons) représenté sur la figure 7.5. Le but est de donner une décomposition en deux couches “tonale+transitoire” sous une condition de reconstruction exacte. Pour cela, on choisi de décomposer dans un dictionnaire construit comme l’union de deux bases MDCT. La première est choisie avec une fenêtre de taille 4096 échantillons (environ 90 ms) et est adaptée à la couche tonale. La seconde a une taille de 128 échantillons et est adaptée pour la couche transitoire. Les coefficients MDCT de la couche transitoire sont représentés sur la figure 7.5.

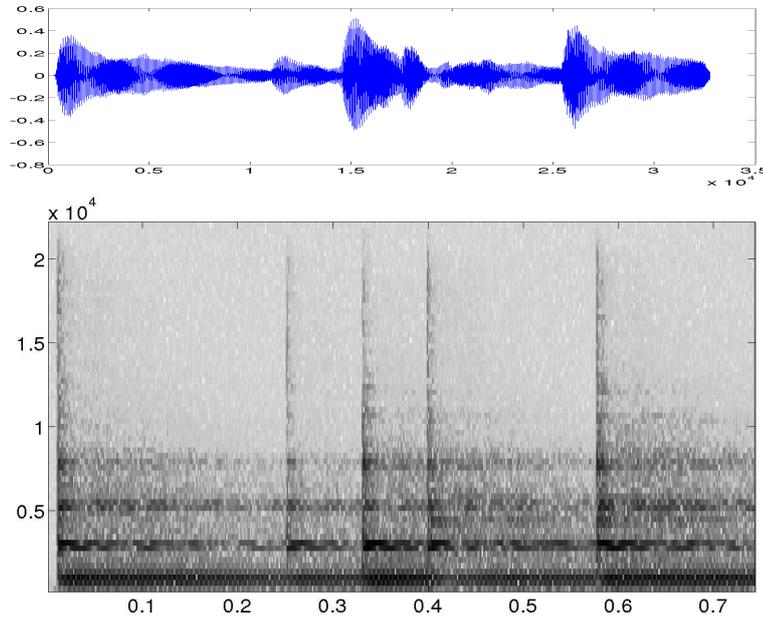


FIG. 7.5 – Gauche : le signal de xylophone. Droite : coefficients MDCT du signal, avec une fenêtre de traîle 128 échantillons.

La stratégie classique est de minimiser une norme ℓ_1 de tous les coefficients. Chaque couche est alors obtenue par la transformée inverse des coefficients MDCT correspondants. Cette minimisation est faite par l'algorithme FOCUSS classique.

Notre adaptation de FOCUSS (voir chapitre 4) est utilisée avec deux normes mixtes. Pour la couche tonale, on a choisi la norme ℓ_{p_1, q_1} pour favoriser la parcimonie en fréquence avec $p_1 = 1.2$ et $q_1 = 2$ (et donc, l'indice de groupe g correspond au temps et l'indice de membre m aux fréquences). Pour la couche transitoire, pour laquelle l'indice g correspond aux fréquences et l'indice m au temps, on a choisi une norme mixte ℓ_{p_2, q_2} avec $p_2 = 1$ et $q_2 = 1/2$. Ce dernier choix a été fait pour obtenir une couche très parcimonieuse, mais dont la parcimonie est structurée. On a choisi les paramètres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$.

On représente sur la figure 7.6 les coefficients MDCT de la couche transitoire estimée par la norme ℓ_1 et les normes mixtes. On peut voir que l'estimateur obtenu par la norme mixte est plus parcimonieuse que l'estimation ℓ_1 . On observe de plus que la norme mixte favorise des structures plus rectilignes que la norme ℓ_1 .

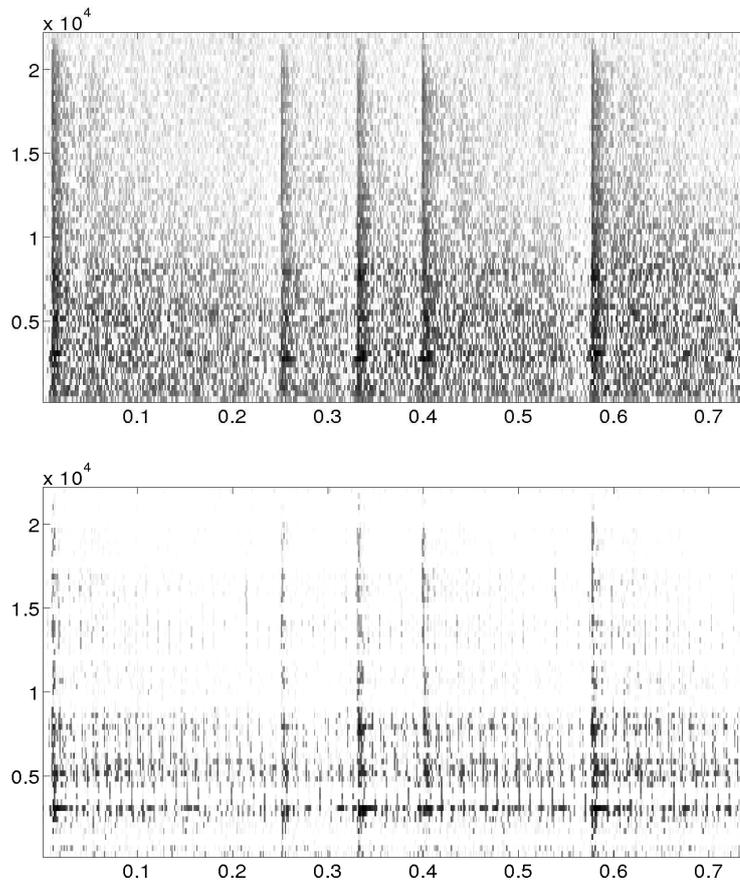


FIG. 7.6 – Coefficients MDCT de deux estimations de la couche transitoire pour le xylophone. Gauche : ℓ_1 . Droite : norme mixte.

7.1.3 Débruitage

Débruitage d'un signal multicanal

On considère un signal multicanal $\mathbf{y} = \{y_{gm}, g = 1, \dots, G, m = 1, \dots, M\}$, où g représente l'index de temps et m l'index du canal.

On choisit une base orthonormée $\mathcal{U} = \{u_g, g = 1, \dots, G\}$ (ici, g indexe les atomes de la base) pour un canal du signal. On s'intéresse à la décomposition de la forme $\mathbf{y} = \sum_g \mathbf{x}_g u_g$, où les vecteurs multicanaux sont représentés en gras. La base \mathcal{U} a été choisie de manière à ce que la suite des coefficients x soit parcimonieuse dans la direction g , et persistante à travers les canaux. On est donc dans un cas proche de celui décrit en section 6.1 du chapitre 6.

Les techniques d'approximation parcimonieuse ont été étendues aux cas des signaux multicanaux (voir [BMFS07, GRSV07] et leurs références). On attaque ce problème avec une approche de type *basis pursuit* généralisée, en utilisant une norme ℓ_1 dans la direction g , et une ℓ_2 norme à travers les

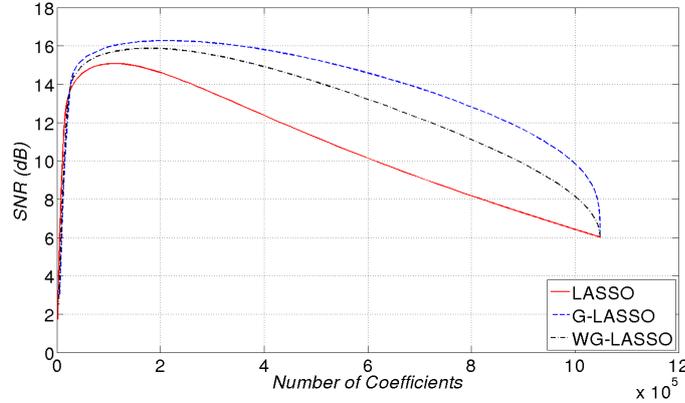


FIG. 7.7 – SNR en fonction du nombre de coefficients non nuls; dashed curve : LASSO; full curve : G-LASSO.

canaux. Le problème d'optimisation se formule de façon habituelle :

$$\min_{\mathbf{x}} \left(\|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_{p,q}^q \right) .$$

La matrice A étant orthogonale, les résultats précédents s'appliquent directement.

Puisque notre but est de privilégier les lignes de coefficients, on choisit ici l'estimateur G-LASSO, *i.e.* $p = 2$ et $q = 1$, et l'estimateur associée par le théorème 5.1 du chapitre 5.

On illustre cela avec un enregistrement audio de l'intérieur d'un wagon de train en marche.

Le signal considéré contient du bruit basse fréquence, des sonneries de téléphone, de la parole, des clics et d'autres composantes transitoires. Le signal contient quatre canaux, enregistrés avec trois micro directionnels et un micro multidirectionnel. Un a ajouté un bruit blanc gaussien à tous les canaux, et SNR du signal de sortie est ainsi de 6 dB. Le signal a été débruité en appliquant le seuillage doux du LASSO et le seuillage généralisé du G-LASSO. Comme souligné auparavant, ce choix a été fait dans le but d'utiliser les mêmes cartes de signifiante temps-fréquence (*i.e.* l'ensemble des coefficients non nul) pour tous les canaux. Diverses simulations ont été faites en changeant la valeur du seuil (*i.e.* la valeur du paramètre de Lagrange). Les courbes SNR correspondantes sont données sur la figure 7.7.

L'approche par normes mixtes permet clairement d'améliorer les résultats par rapport à l'approche ℓ_1 classique. Des résultats similaires (qui ne sont pas montrés ici), ont été obtenus sur d'autres signaux multicanaux. L'amélioration est d'autant plus significative que le nombre de canaux est élevé, comme attendu. Sur l'exemple considéré ici, on remarque que même si les quatre microphones sont différents (trois sont directionnels), les quatre

signaux sont assez cohérents pour que le G-LASSO améliore de façon significative les résultats comparés au LASSO.

Finalement, on peut aussi signaler que la même approche peut être développée pour le débruitage d'autres signaux multicanaux, comme les images couleurs, multispectrales...

Débruitage d'un bruit type "vinyle"

Les estimateurs E-LASSO et AE-LASSO sont comparés au LASSO dans le contexte du débruitage d'un signal mono canal. Si l'on choisit le benchmark habituel du bruit blanc gaussien, le seuillage doux donné par le LASSO semble un meilleur choix que le E-LASSO et ses dérivés. Cependant, l'équation (5.14) donne un point de vue intéressant pour le E-LASSO confirmé par les expériences de la section 6.2 du chapitre 6 : le E-LASSO fonctionne bien si la variance du bruit change avec l'indice g (ce qui était déjà visible dans les expériences de la section 6.2 du chapitre précédent).

On considère ici le cas d'un signal audio (mono canal), perturbé par un bruit additif non stationnaire, dont la variance varie significativement avec le temps. L'exemple considéré a été extrait d'un enregistrement vinyle¹. Le bruit d'enregistrement d'un vinyle (qui comporte des «craquements» et d'autres bruits non stationnaires) est ajouté à un signal musical (extrait d'environ 6 s, 2^{18} échantillons à un taux d'échantillonnage de 44100 Hz, du morceau *Mamavatu* de Susheela Raman), le SNR résultant est de seulement 1 dB. Ce signal bruité a ensuite été décomposé dans une base MDCT (avec une fenêtre de taille 512 échantillons, soit 11 ms). L'indice de groupe g a été choisi comme l'indice de temps des fonctions de base MDCT, et l'indice m est l'indice de fréquence.

La figure 7.8 montre l'évolution du SNR en fonction du nombre de coefficients non nuls pour le LASSO, E-LASSO, AE-LASSO, PE-LASSO et WG-LASSO. Le comportement de ces courbes est proche de celui observé sur les figures 6.6 et 6.7 de la section 6.2, même si le gain en terme de SNR n'est pas énorme.

7.1.4 Décomposition multi-couche d'un signal audio

On considère maintenant le problème de la décomposition d'un signal mono en couches de différentes natures, dans un but de séparation des composantes tonales et transitoires. Une telle tâche peut être effectuée selon différentes approches [FTDG08, MT05] (voir aussi l'algorithme MCA pour la décomposition d'images en cartoon + texture [SED04]). On illustre ici l'influence des normes mixtes dans le problème de régressions (5.17) du chapitre 5, en

¹Des échantillons de bruit d'enregistrements vinyles sont disponibles sur le site web www.universal_soundbank.com/audio.htm.

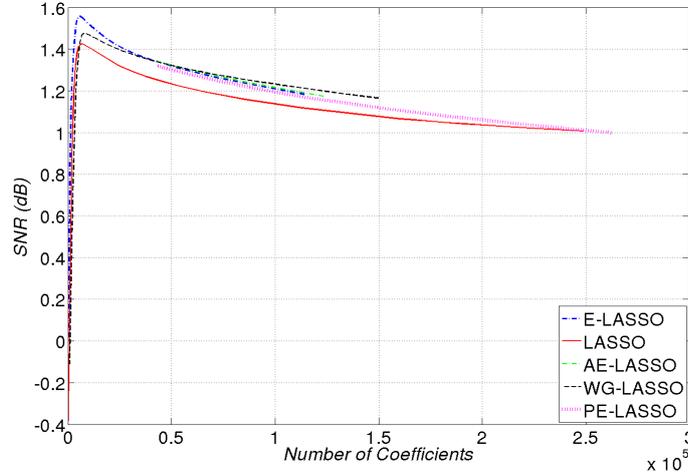


FIG. 7.8 – Comparaison entre le LASSO, E-LASSO, AE-LASSO, PE-LASSO et WG-LASSO. sur un signal audio mono avec un bruit additif de type «vinyl».

comparaison de la norme ℓ_1 usuelle utilisée dans le problème de régression MCA (5.15).

On choisit un signal musical extrait de *Mamavatu* qui contient des percussions, du chant et de la guitare, d'une durée d'environ 6 s (2^{18} échantillons). En gardant les notations de la section 2.4.3, on s'attend alors à obtenir une estimation $V\hat{x}_{\mathcal{V}}$ pour les transitoires et une estimation $U\hat{x}_{\mathcal{U}}$ de la couche tonale. On compare les estimations données en choisissant deux normes ℓ_1 (comme pour le MCA), et plusieurs normes mixtes que l'on précisera ci-dessous. On choisit pour \mathcal{U} une base MDCT avec une fenêtre de longueur 4096 échantillons, et pour \mathcal{V} une base MDCT avec une fenêtre de longueur 128 échantillons. Les représentations des coefficients MDCT de la couche tonale (resp. transitoire) dans \mathcal{U} (resp. \mathcal{V}) sont montrés sur la figure 7.9. Les structures particulières des deux couches, avec leurs propriétés de persistance apparaissent ici clairement.

La couche tonale doit être parcimonieuse dans le domaine fréquentiel, avec des fréquences émergentes qui peuvent évoluer lentement avec le temps (*i.e.* des lignes presque horizontales pour les gros coefficients MDCT). Les choix possibles pour l'estimation sont le E-LASSO (parcimonie à l'intérieur des groupes) dont l'indice de temps est l'indice de groupe, ou le G-LASSO (parcimonie à travers les groupes) avec l'indice de fréquence comme l'indice de groupe. Cependant, ce dernier choix n'est pas une bonne stratégie pour la couche tonale, les fréquences pouvant évoluer lentement avec le temps. En outre, les expériences montrent que pour cet exemple, le LASSO et le E-LASSO donnent des résultats similaires pour la couche tonale.

De manière similaire, la couche transitoire est supposée être parcimonieuse en temps, mais couvre tout le domaine fréquentiel. Si, pour la couche

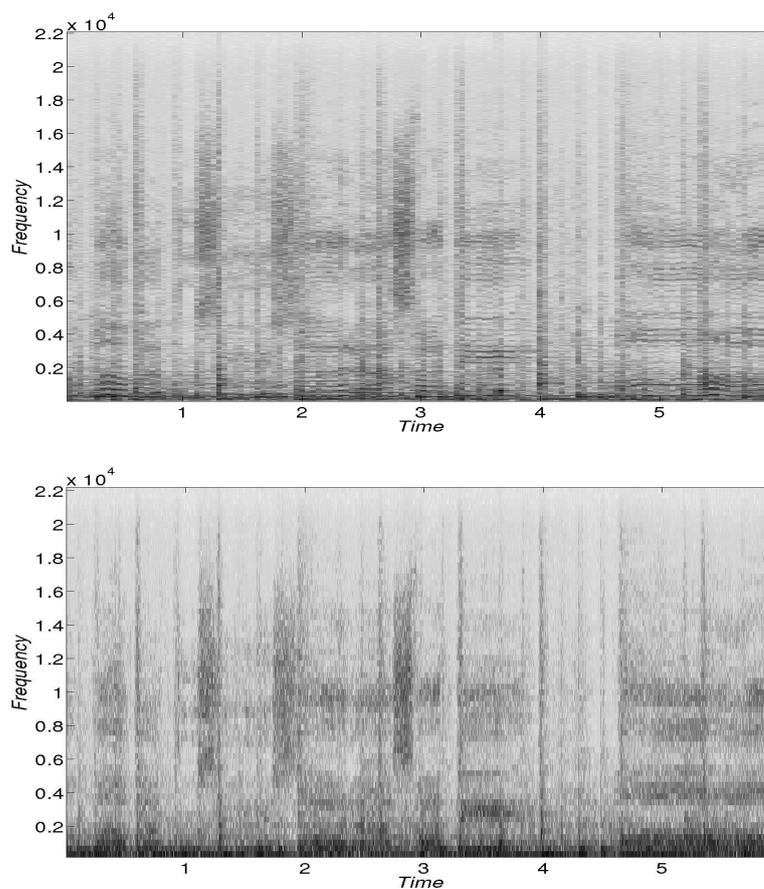


FIG. 7.9 – De haut en bas : couche tonale signal, couche transitoire.

transitoire, le E-LASSO avec l'indice de fréquence pour l'indice de groupe semble toujours être un choix pertinent, le G-LASSO (dont l'indice de temps est l'indice de groupe) peut aussi être intéressant en raison de la structure particulière des transitoires, qui sont en général très bien localisées en temps.

Ainsi, afin de montrer les différences entre les normes mixtes ℓ_1 , ℓ_{12} et ℓ_{21} , on a choisi de fixer la norme ℓ_1 pour l'estimation de la couche tonale, et de comparer les résultats avec les trois choix possibles pour la couche transitoire.

Dans les simulations numériques présentées ici, les paramètres λ et μ sont ajustés de façon à obtenir à peu près le même nombre de coefficients non nuls pour chaque fonctionnelle, et afin d'illustrer au mieux les différences de comportement entre les normes. La table 7.1 résume les divers résultats obtenus avec les trois fonctionnelles utilisées. La première ligne de la table contient les choix qui ont été faits pour les normes pour estimer les deux couches transitoires et tonales. La seconde et la troisième (resp. la quatrième et la cinquième) lignes donnent respectivement le nombre de coefficients retenus pour $x_{\mathcal{U}}$ (resp. $x_{\mathcal{V}}$) et le SNR de cette couche. Les deux dernières lignes donnent le total du nombre de coefficients retenus et le SNR de la reconstruction $x_{\mathcal{U}} + x_{\mathcal{V}}$. Ici, les mesures de SNR ne doivent pas être interprétées comme une mesure de performance, mais plutôt comme un moyen de comparer les comportements des trois estimations. On peut en effet voir qu'avec le choix LASSO/LASSO, la couche transitoire est plus proche du signal original qu'avec les deux autres choix, mais ne donne pas forcément le meilleur résultat attendu pour cette couche (voir ci-après).

Avec cette table, les figures 7.10 et 7.11 montrent clairement les différents comportements des estimateurs. Le E-LASSO encourage la persistance en comparaison du LASSO. Pour la couche transitoire, les structures verticales sont mieux préservées, comparées au LASSO qui capture beaucoup de composantes basse fréquence qui seraient mieux représentées par la couche tonale.

Il est intéressant de souligner que l'estimation de la couche transitoire par le G-LASSO (Fig. 7.11) préserve des lignes verticales bien marquées comme attendu. Ceci fait de cette norme un bon choix si l'on désire conserver de telles structures particulières.

Même si la reconstruction obtenue avec les trois décompositions sont très similaires (en terme de SNR et en terme d'écoute), le comportement des couches est très différent. Avec le choix LASSO/LASSO, les basses fréquences sont partagées entre les deux couches, tandis que les partiels sont mieux préservés dans la couche tonale avec les estimateurs LASSO/E-LASSO et LASSO/G-LASSO. La figure 7.10 montre les différences sur les coefficients temps-fréquence pour les trois estimations de la couche tonale.

Les fichiers sons des différentes estimations peuvent être écoutés sur le site web [urla].

On a aussi essayé de remplacer l'estimateur E-LASSO pour son ap-

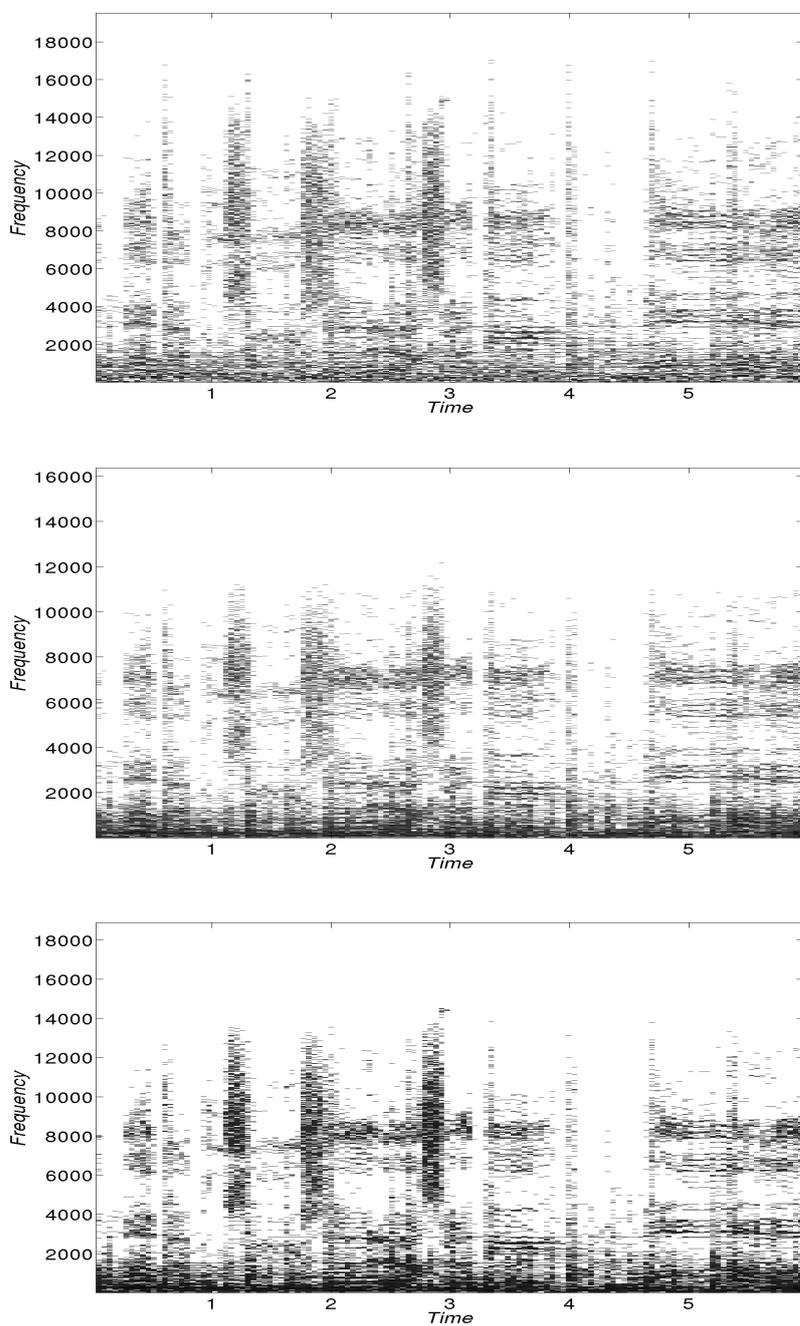


FIG. 7.10 – *Coefficients MDCT coefficients des trois estimations de la couche tonale. De haut en bas : LASSO/LASSO, LASSO/E-LASSO, LASSO/G-LASSO*

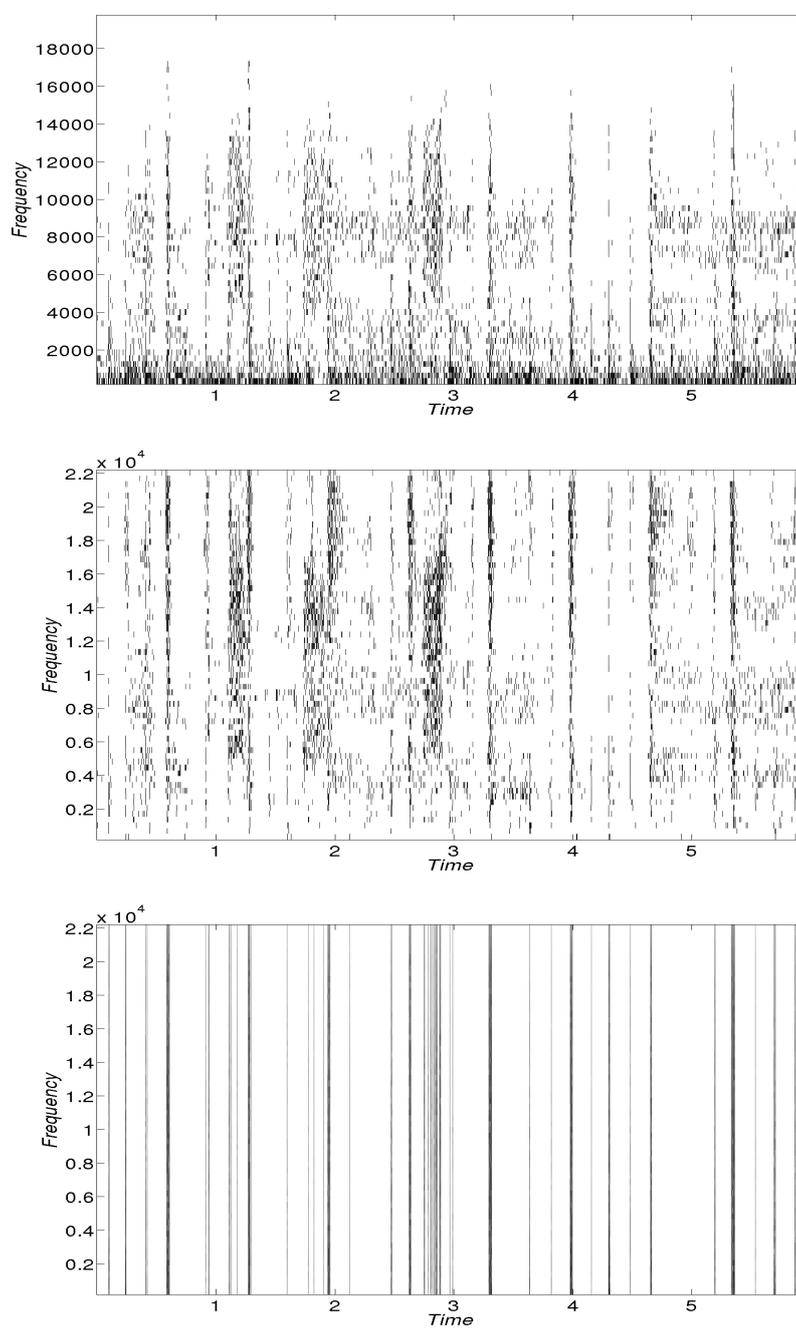


FIG. 7.11 – *Coefficients MDCT coefficients des trois estimations de la couche transitoire. De haut en bas : LASSO/LASSO, LASSO/E-LASSO, LASSO/G-LASSO.*

norms	L / L	L / EL	L / GL
nbcoeff $x_{\mathcal{U}}$	16.4%	16.5%	16.7%
SNR $x_{\mathcal{U}}$	7.6 dB	17.8 dB	20.2 dB
nbcoeff $x_{\mathcal{V}}$	7.4%	7.5%	7.4%
SNR $x_{\mathcal{V}}$	2.8 dB	0.22 dB	0.12 dB
nbcoeff $x_{\mathcal{U}} + x_{\mathcal{V}}$	23.8%	24.1	24.2%
SNR $x_{\mathcal{U}} + x_{\mathcal{V}}$	26.1 dB	25.4 dB	24.1 dB

TAB. 7.1 – Résultats obtenus pour trois choix différents d’estimateurs. Nombre de coefficients retenus pour chaque couche et la reconstruction, et le SNR correspondant. L pour LASSO, G-L pour G-LASSO et E-L pour E-LASSO.

proximation AE-LASSO (6.5) (même si la preuve de convergence de l’algorithme 12 n’est plus valide dans ce cas, il y a toujours eu convergence numérique en pratique). Comme le suggère les simulations du chapitre précédent, les résultats sont similaires au E-LASSO, si l’on ne veut pas avoir une estimation très parcimonieuse.

On souligne le fait que le principal inconvénient du E-LASSO est sa sensibilité aux paramètres de régularisation λ et μ : un léger changement des paramètres peut changer significativement la solution. Le AE-LASSO semble moins sensible au choix des paramètres de régularisation.

7.2 Application à la séparation de sources

La séparation de source consiste, à partir de l’observation d’un mélange, les sources originales qui composent ce mélange. L’application considéré ici est la séparation d’un mélange sous déterminé, c’est à dire qu’on dispose de moins d’observation que de sources à retrouver. Par exemple, on aimerait retrouver les trois ou quatre instruments d’un enregistrement stéréo sur CD.

Plus précisément, le problème considéré ici est la séparation de sources pour les mélanges convolutifs de la forme

$$\mathbf{x} = A \star \mathbf{s}, \quad (7.2)$$

avec $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M)^T$, $\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{T_x} \forall m$, les canaux du mélange observé, $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N)^T$, $\mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^{T_s} \forall n$, les signaux sources inconnus, et A le système de filtres de mélange. Dans le cas d’un mélange sous-déterminé ($M < N$), ce problème est en général séparé en deux étapes distinctes, qui sont l’estimation du système de mélange A et la reconnaissance des signaux sources \mathbf{s} étant donné A et \mathbf{x} . Les deux étapes sont des challenges difficiles. Dans la suite, on se concentre sur l’estimation de \mathbf{s} , supposant que A est connue.

Puisque le système linéaire (7.2) est sous-déterminé, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour «l’inverser» et estimer les sources origi-

nales. Une supposition classique est que seules quelques sources sont simultanément actives. Cette supposition est souvent assez bien satisfaite après avoir bien choisi une transformation, qui permet d'avoir une représentation parcimonieuse. Dans le cas des sources audio, c'est généralement le cas après être passé dans le domaine temps-fréquence par une transformation de Fourier à court terme (STFT). La transformation STFT des deux membres de l'équation (7.2) donne l'approximation en bande fréquentielle suivante

$$\hat{\mathbf{x}}(f, t) \approx \hat{A}(f)\hat{\mathbf{s}}(f, t) , \quad (7.3)$$

où $\hat{\mathbf{x}}$ (resp. $\hat{\mathbf{s}}$) est la transformée STFT de \mathbf{x} (resp. \mathbf{s}) et \hat{A} est la transformée de Fourier de A .

Cette approximation est justifiée par le lemme suivant

Lemme 7.1. *Soit $x \in L_2(\mathbb{R})$, $s \in L_2(\mathbb{R})$ et $A \in C^1(\mathbb{R})$ de dérivée bornée, tels que*

$$x = A \star s .$$

Alors, si l'on note S_x (resp. S_s) la transformée de Fourier à court terme, avec une fenêtre d'analyse g dans le Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R})$, de x (resp. s), pour tout (t, f)

$$S_x(t, f) = \hat{A}(f)S_s(t, f) + \mathcal{R}(t, f)$$

avec

$$|\mathcal{R}(t, f)| \leq \sup |A'| \|s\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}} |\nu \hat{g}(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2}$$

Démonstration. En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'égalité $x = A \star s$, on obtient $\hat{x} = \hat{A}\hat{s}$.

On peut alors écrire la transformée de Fourier à court terme de x comme

$$S_x(t, f) = \int_{\mathbb{R}} \hat{A}(\nu)\hat{s}(\nu)\hat{g}(\nu - f)e^{2i\pi\nu f} d\nu .$$

Le développement de Taylor à l'ordre 1 de \hat{A} en f est

$$\hat{A}(\nu) = \hat{A}(f) + (\nu - f)r_f(\nu)$$

avec $|r_f(\nu)| \leq \sup |\hat{A}'|$.

En réinjectant le développement de Taylor de \hat{A} dans l'expression de la transformée de Fourier à court terme, on obtient

$$S_x(t, f) = \hat{A}(f)S_s(t, f) + \int_{\mathbb{R}} r_f(\nu)\hat{s}(\nu)(\nu - f)\hat{g}(\nu - f)e^{2i\pi\nu f} d\nu .$$

On note $\mathcal{R}(t, f) = \int_{\mathbb{R}} r_f(\nu)\hat{s}(\nu)(\nu - f)\hat{g}(\nu - f)e^{2i\pi\nu f} d\nu$. Ainsi,

$$|\mathcal{R}(t, f)| \leq \sup |\hat{A}'| \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)| |(\nu - f)\hat{g}(\nu - f)| d\nu$$

Finalement, après l'application de l'inégalité de Cauchy-Swartz, on obtient

$$|\mathcal{R}(t, f)| \leq \sup |\hat{A}'| \|s\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}} |\nu \hat{g}(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} .$$

■

Ce lemme dit justifie l'approximation 7.3 si la fenêtre d'analyse choisie est suffisamment régulière (afin que le terme $\left(\int_{\mathbb{R}} |\nu \hat{g}(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2}$ reste assez petit), ce qui est en général le cas, et si les filtres du système de mélange restent assez localisés (pour que le terme $\sup |\hat{A}'|$ reste lui aussi assez petit). Ceci laisse donc supposer que pour des filtres de mélange assez longs, cette approximation n'est plus satisfaisante.

L'hypothèse de parcimonie suppose que pour chaque point temps-fréquence (f, t) , seules quelques sources sont actives simultanément. Une approche classique [ZP01, BZ01] pour identifier leurs contributions est de résoudre pour chaque point (f, t) le problème d'optimisation

$$\min_{\hat{s}} \|\hat{s}(f, t)\|_p^p = \min_{\hat{s}} \sum_{n=1}^N |\hat{s}_n(t, f)|^p \quad (7.4)$$

$$\text{sous contrainte } \hat{\mathbf{x}}(f, t) = \hat{A}(f)\hat{\mathbf{s}}(f, t) ,$$

où la norme ℓ_p est une mesure de la parcimonie pour $p \leq 1$. Des algorithmes tels que FOCUSS [RKD99] ou l'étude faite dans [Vin07] peuvent être utilisés pour résoudre (7.4). Tandis que cette approche donne M sources actives par point temps-fréquence pour de petite valeur de p [Vin07], une seule source active peut être sélectionnée si l'on utilise un algorithme de masquage temps-fréquence tel que DUET [YR04]. Un nombre variable de sources actives entre 0 et M peut aussi être déterminé par la minimisation d'un problème régularisé par une norme ℓ_1 [TSA06] ou par une approche probabiliste.

Les techniques de séparation de sources décrites ci-dessus ne peuvent être facilement appliquées à des mélange convolutifs, voire anéchoïque², avec de très longs délais, car l'approximation (7.3) devient alors mauvaise. En effet, même si les sources sont parcimonieuses et ont des supports de représentations temps-fréquence disjointes, leurs contributions $a_n \star s_n$ au mélange (où a_n est la n -ème colonne de la matrice de filtres A) peuvent avoir des représentations temps-fréquence qui se chevauchent beaucoup.

7.2.1 Régularisation ℓ_1

Une hypothèse possible est que les signaux sont parcimonieux dans le domaine temps-fréquence [ZP01]. Cette hypothèse a été utilisée en particulier par les algorithmes d'analyse en composante morphologique multicanale

²On dit aussi anéchoïde.

(MMCA) [BSFM07], qui utilisent la fonctionnelle suivante pour la séparation de source d'un mélange sur-déterminé instantané

$$\min_{\underline{\mathbf{s}}} \left[\left\| \mathbf{x} - A \left(\underline{\mathbf{s}} \Phi^T \right) \right\|_2^2 + \lambda \|\underline{\mathbf{s}}\|_1 \right] . \quad (7.5)$$

où Φ est choisi comme l'union de repères (ou bases) adaptés aux différentes composantes des sources.

Cependant, les expériences montrent que cette fonctionnelle n'est pas adaptée dans le cas sous-déterminé. En effet, cette fonctionnelle a tendance à seuiliser les sources à hautes fréquences, et de conserver tous les coefficients aux basses fréquences, où elles ont plus d'énergie. En d'autres termes, les sources sont distordues aux hautes fréquences, et restent très mélangées dans les basses fréquences.

7.2.2 Régularisation $\ell_{1,2}$

Afin de procéder à une meilleure séparation, on suit l'hypothèse usuelle faite dans le cas sous-déterminé : seules quelques sources sont actives pour chaque indice temps-fréquence. Cependant, on aimerait s'affranchir la «sur-parcimonisation» qui seuilisera les régions avec moins d'énergie (comme les hautes fréquences). Les normes mixtes semblent particulièrement adaptées ici.

Dans ce contexte de séparation de sources, la norme $\ell_{1,2}$ du E-LASSO peut être utilisée pour modéliser la parcimonie à travers les canaux. En effet, si l'on note k l'indice temps-fréquence et n l'indice des canaux, on considère la norme $\ell_{1,2}$ suivante sur les sources :

$$\|\underline{\mathbf{s}}\|_{1,2}^2 = \sum_k \left(\sum_n |\underline{\mathbf{s}}_{n,k}| \right)^2 .$$

Minimiser une telle quantité va donc favoriser la parcimonie à travers les canaux pour chaque indice temps-fréquence k , mais pas nécessairement la parcimonie sur les indices temps-fréquence eux-mêmes : pour un indice temps-fréquence donné, on espère garder seulement les coefficients correspondant aux canaux les plus significatifs.

Si l'on utilise cette norme mixte comme terme de régularisation, on obtient le problème d'optimisation suivant

$$\min_{\underline{\mathbf{s}}} \left[\Psi(\underline{\mathbf{s}}) := \left\| \mathbf{x} - A \star \left(\underline{\mathbf{s}} \Phi^T \right) \right\|_2^2 + \lambda \|\underline{\mathbf{s}}\|_{1,2}^2 \right] . \quad (7.6)$$

Cette fonctionnelle peut être minimisée par un seuillage itératif de Landwever, comme décrit à la section 5.4.2 du chapitre 5.

On a testé les performances en séparation de source de cet algorithme sur un mélange audio anéchoïque et un mélange audio convolutif. On a comparé

les performances avec une implémentation de DUET basée l'approximation STFT (7.3). La taille de la fenêtre a une influence sur les performances : une longueur de 1024 échantillons semble un bon compromis pour les deux exemples. Les résultats audio peuvent être téléchargés sur [urlb] pour une comparaison à l'oreille.

On rappelle que le système de mélange de filtre A est supposé connu.

7.2.3 Mélange anéchoïque

Le mélange anéchoïque est constitué de quatre sources musicales. Chaque source a été échantillonnée à 44100 Hz et a une durée de 2^{17} échantillons (environ 3 s). Le système de mélange a été obtenu en combinant la matrice instantanée suivante (disponible sur [urlc]) avec des délais compris entre 0 et 512 échantillons

$$\begin{pmatrix} 0.3420 & 0.6428 & 0.7934 & 0.9239 \\ 0.9397 & 0.7660 & 0.6088 & 0.3827 \end{pmatrix}.$$

Le dictionnaire choisi Φ est une base MDCT avec une fenêtre de longueur 2048 échantillons (environ 46 ms). Il faut noter que, ici aussi, une longueur différente peut changer les résultats. Le choix fait semble un bon compromis.

Les performances de l'algorithme sont évaluées avec les mesures définies dans [VGF06]. Trois mesures sont introduites : le SDR (Rapport signal à distortion), le SIR (rapport signal à interférence) et le SAR (rapport signal à artefacts). Le SDR mesure le rapport du signal estimé au bruit de fond, le SIR prend en compte le bruit du aux interférences provenant des autres sources, et le SAR mesure le rapport au bruit *musical*.

On montre sur la figure 7.12 les SDR, SIR et SAR moyennés sur les quatre sources, en fonction du paramètre λ . Une grande valeur de SDR/SIR/SAR signifie une meilleure qualité de séparation. Comme on pouvait s'y attendre, le SIR de DUET est toujours meilleur que le SIR de notre algorithme : puisque DUET utilise seulement une seule source pour chaque indice temps-fréquence, il interdit au maximum les interférences entre les sources. En contrepartie, DUET donne une moins bonne reconstruction des sources. À l'opposé, le SAR obtenu par notre algorithme est toujours meilleur, en raison du terme d'attache aux données.

La courbe de SDR donne une idée des performances globales, en prenant en compte les artefacts et les interférences. On peut voir que, pour un λ bien choisi, l'algorithme itératif est meilleur que DUET. Le choix du paramètre λ est certainement le principal inconvénient de l'approche fonctionnelle (7.6). Sur la figure 7.13 on représente le pourcentage de coefficients qui sont mis à zéro, et l'on peut voir que l'algorithme donne ses meilleurs résultats lorsqu'environ 50 % des coefficients sont mis à zéro. Ici, cela signifie qu'en moyenne, pour chaque point temps-fréquence, deux sources sont

considérées actives et deux sont mis à zéro. Cela semble un bon compromis pour les mélange stéréo, et on pense qu'une telle heuristique peut être utilisée comme une stratégie adaptative pour régler le paramètre λ .

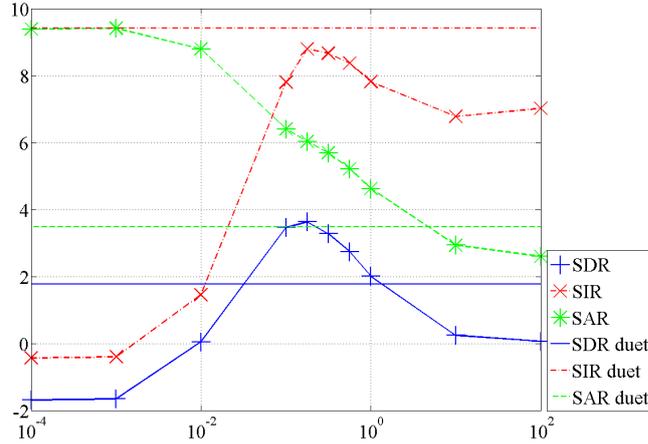


FIG. 7.12 – *SDR, SIR, SAR du seuillage itératif de Landweber et de DUET en fonction du paramètre λ (échelle logarithmique).*

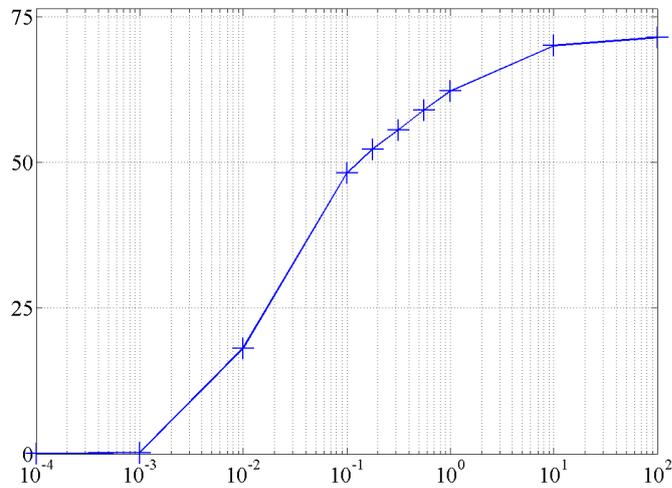


FIG. 7.13 – *Pourcentage des coefficients mis à zéro en fonction du paramètre λ (échelle logarithmique).*

7.2.4 Mélange convolutif

Le mélange convolutif a été fait en simulant une salle d'enregistrement avec une réverbération de délai 250 ms en utilisant une paire de microphones

omnidirectionnels espacés de 1 m. Les filtres de mélange ont été simulés par la méthode d'images et ont une longueur de 4000 échantillons.

Les sources sont quatre enregistrements de voix de femmes, échantillonnés à 16000 Hz, et d'une longueur de 2^{17} échantillons (environ 8 s). La matrice Φ correspond à une base MDCT, avec une fenêtre de 512 échantillons (environ 32 ms). Toutes les données (les sources et le système de mélange) sont disponibles sur [urlc].

Comme pour le mélange anéchoïque, on montre sur la figure 7.14 les SDR, SIR et SAR obtenus par le seuillage itératif de Landweber, moyennés sur les quatre sources, en fonction de λ . Ils sont comparés à ceux obtenus par DUET. La figure 7.15 montre le pourcentage de coefficients qui sont mis à zéro.

Dans ce cas aussi, on peut remarquer que le seuillage itératif est meilleur lorsqu'environ 50 % des coefficients sont mis à zéro, même si le point $\lambda = 10^4$ semble donner de meilleurs résultats que les autres en terme de SAR (et correspond à 75 % des coefficients mis à zéro). En effet, ces courbes sont faites en moyenne sur les quatre sources, et, par chance, la première source et la seconde sont très bien estimées pour cette valeur de λ . Ces deux sources sont les mieux estimées par DUET, ce qui peut expliquer pourquoi le seuillage itératif donne de bons résultats dans ce cas là. D'autres expériences montrent que, en général, le seuillage itératif donne ses meilleurs résultats quand 50 % des coefficients sont mis à zéro³.

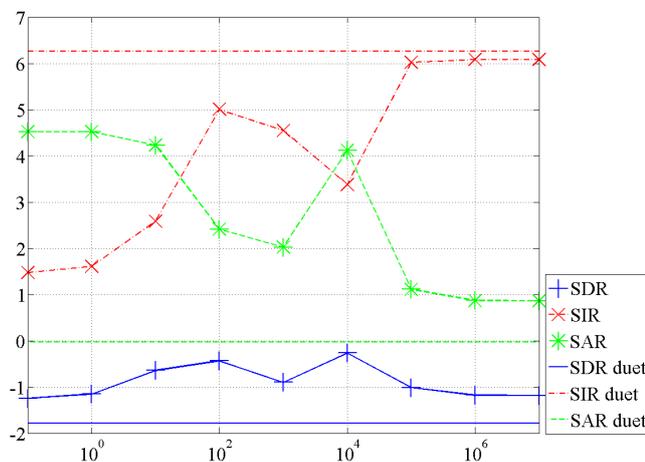


FIG. 7.14 – SDR, SIR, SAR du seuillage itératif de Landweber et de DUET en fonction du paramètre λ (échelle logarithmique).

³pour un mélange stéréo de quatre sources.

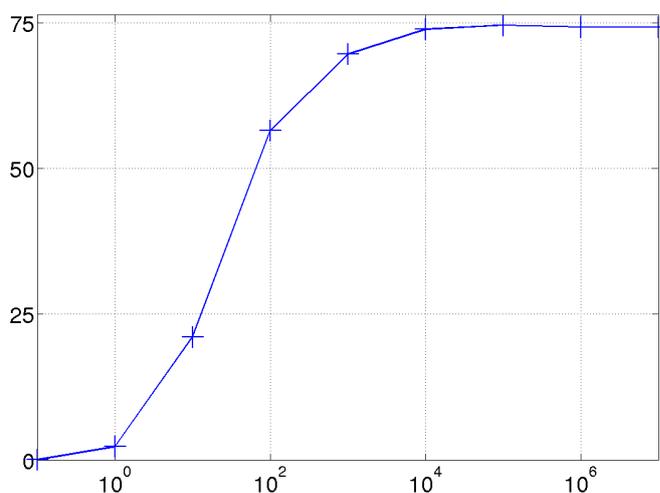


FIG. 7.15 – *Pourcentage des coefficients mis à zéro en fonction du paramètre λ (échelle logarithmique).*

7.2.5 Temps de calcul

Le temps de calcul de l'approche du seuillage itératif de Landweber dépend essentiellement de l'efficacité de la transformation temps-fréquence et du calcul de la convolution par le système de mélange et son adjoint. La convergence du seuillage itératif lui-même est connu pour être assez lent, mais des accélérations potentielles sont proposées dans la littérature [DFL07, For07]. Dans les expériences ci-dessus, le temps de calcul est d'environ 5 min dans le cas anéchoïque et entre 1 h pour les petites valeurs λ et 5 min pour les très grandes valeurs de λ dans le cas du mélange convolutif.

7.3 Application aux signaux EEG

7.3.1 Introduction

Les signaux provenant des expériences de neurosciences tels que les EEG ou les MEG sont de bons exemples pour tester les idées développées dans cette partie : ce sont des signaux multicanaux⁴, auxquels des techniques de régression parcimonieuse ont déjà été appliquées (voir par exemple [SHK06] pour une adaptation du matching pursuit multicanal, et ses références pour d'autres contributions). De plus, ils sont souvent bien représentés dans des bases ou des repères temps-fréquence ; cela produit des décompositions dans

⁴Typiquement, les signaux EEG sont donnés par un nombre de capteurs compris entre 20 et 50, tandis que les signaux MEG en demandent encore plus

des systèmes atomiques avec trois indices : le temps, la fréquence, et le canal.

$$\mathbf{x} = \sum_{t,f,c} \alpha_{t,f,c} \varphi_{t,f} \cdot \tag{7.7}$$

Un des principaux problèmes dans l’analyse de signaux *EEG*, est de séparer l’information utile de diverses sources de bruits et de caractéristiques moins importantes. C’est en raison de cela que les techniques de régression multicanales appropriées aux signaux issus de plusieurs capteurs, et qui font intervenir une modélisation adéquate, présentent un intérêt certain. On décrit par la suite les premières expériences faites en utilisant des techniques de modélisation décrites dans ce papier.

Dans les signaux EEG dont on parle ci-dessous, 34 canaux sont à notre disposition, avec une topographie⁵ donnée sur la figure 7.16. Le taux d’échantillonnage est de 1000 Hz. Les signaux multicanaux originaux sont représentés sur la figure 7.17.

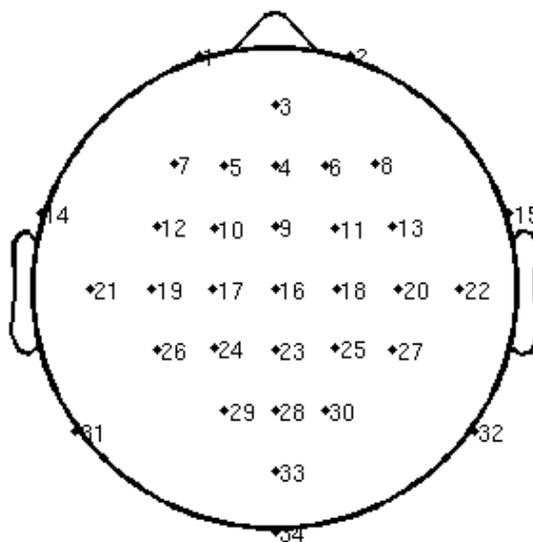


FIG. 7.16 – Localisation des électrodes pour les signaux EEG considérés.

Les signaux sont constitués d’environ 130 essais d’une durée de 1.2 s. Les essais résultent d’une expérience réalisée dans les mêmes conditions. Ils sont été concaténés afin d’être traités globalement. Sur cet ensemble de données particulier, les portions de signal qui présentent un intérêt particulier sont les potentiels évoqués, qui sont des signaux de durée courte, et qui apparaissent suite à un stimulus (à raison d’un stimulus par essai). Ces signaux ont une très faible amplitude comparés au fond généré par les divers signaux biologiques et le bruit de mesure. Une technique souvent utilisée est alors de

⁵La topographie exploitée dans des schémas de G-LASSO fenêtré comme vu plus haut.

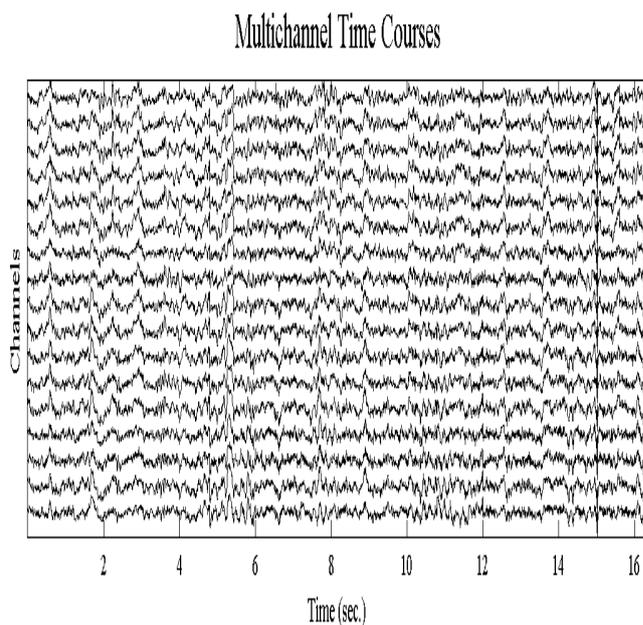


FIG. 7.17 – *Signaux EEG originaux.*

traiter la moyenne des essais. Cette moyenne a pour inconvénient une perte de précision due à la variabilité des essais. L'analyse d'un seul essai est donc un challenge majeur dans ce contexte.

Dans la suite, ces signaux sont décomposés en utilisant diverses méthodes de décomposition multicanale décrites précédemment, en utilisant des bases MDCT (voir l'annexe B et [VK95] pour plus de détails sur les bases MDCT).

7.3.2 Régression LASSO et G-LASSO

Afin de comparer les estimations données par le LASSO et le G-LASSO, on a utilisé des bases MDCT avec une fenêtre de longueur 256 ms. Le paramètre de régularisation a été choisi de manière à ce que l'énergie du résidu soit, à peu de chose près, égale dans les deux cas. Comme on peut le voir, les deux techniques de débruitage ont tendance à filtrer les hautes fréquences. Cependant, la qualité de l'estimateur du G-LASSO est meilleur aussi bien numériquement que visuellement, puisque les propriétés de persistance à travers les canaux ressortent. Afin de rendre les figures le plus clair possible, seuls les signaux des capteurs 3,4,7,8,9,12,13,17,18,21,22,23,26,27,29,30,33 sont représentés ici et dans les figures suivantes.

Dans les expériences numériques considérées ici, les paramètres μ ont été choisis tels que les signaux estimés aient le même pourcentage d'énergie par rapport au signal original (la valeur exacte, ici de 50%, a été choisie afin d'illustrer au mieux les différences entre les deux approches). Les différences entre les deux signaux estimés apparaissent clairement sur les figures 7.18

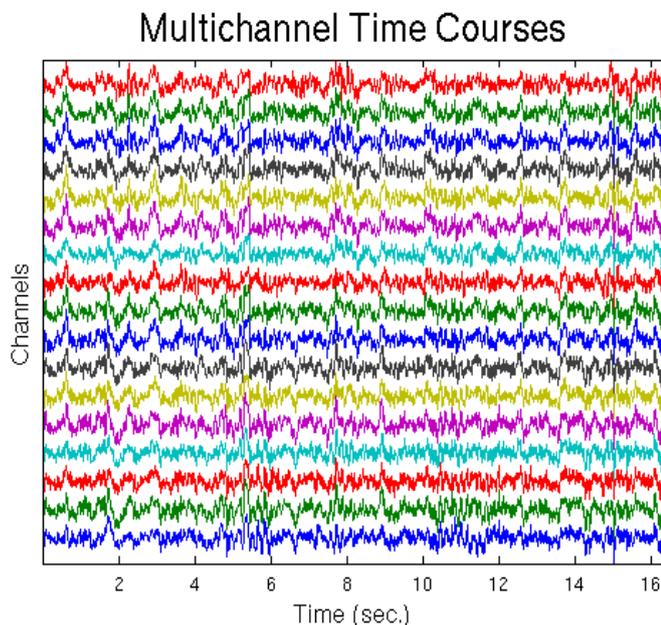


FIG. 7.18 – Signaux EEG débruités par le LASSO.

et 7.19. Comme on pouvait s’y attendre, le G-LASSO multicanal fait ressortir les composantes qui sont présentes sur tous les capteurs simultanément, tandis que le LASSO multicanal a une structure moins lisse, bien que les deux signaux aient tous les deux la même énergie.

L’indice g du chapitre 5 et en particulier du théorème 5.1 est ici un indice temps-fréquence ; par conséquent, l’estimation du G-LASSO équivaut à multiplier point par point les coefficients MDCT avec un masque temps-fréquence M_{tf} fixé. Parallèlement, l’estimateur du LASSO donne un masque temps-fréquence pour chaque canal. Bien qu’ils ne soient pas montrés ici, le masque du G-LASSO est significativement différent de la moyenne des masques donnée par le LASSO. La moyenne des masques du LASSO revient essentiellement à un filtre passe-bas, tandis que le masque du G-LASSO fait apparaître plus de structures.

Les résultats obtenus avec le G-LASSO fenêtré décrit au chapitre 6 sont reportés dans un autre travail.

7.3.3 Décomposition multicouches

Afin d’exploiter les approches décrites précédemment, on peut définir plusieurs façons de regrouper les coefficients (afin de favoriser la parcimonie dans les groupes, ou à travers les groupes) que l’on illustre sur la figure 7.20. Dans de telles situations, les choix naturels pour les groupes sont des lignes ou des plans.

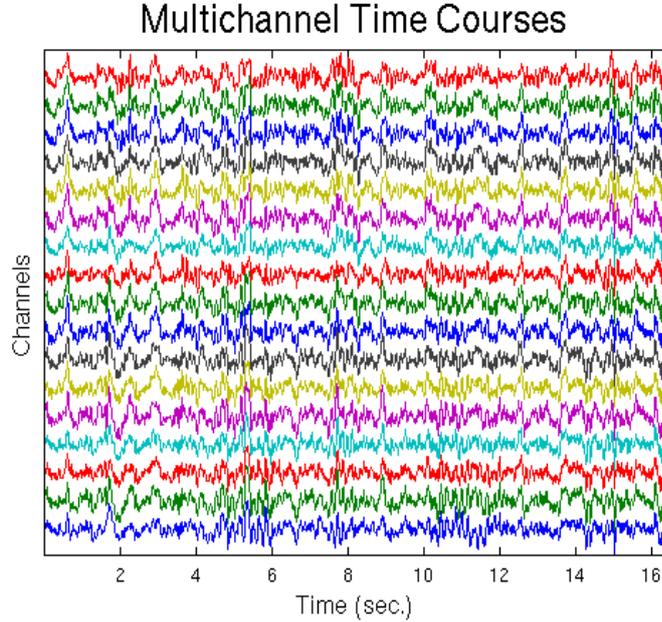


FIG. 7.19 – Signaux EEG débruités par le G-LASSO.

On se limite par la suite aux décompositions multicanales. Le dictionnaire utilisé est une union de deux bases orthonormées MDCT, avec une différence significative pour la résolution temps-fréquence des fenêtres. On cherche donc à minimiser une fonctionnelle du type

$$\Psi(\alpha, \beta) = \|x - U\alpha_U - V\alpha_V\|_2^2 + \mu_1 \mathbf{P}_1[\alpha_U] + \mu_2 \mathbf{P}_2[\alpha_V] .$$

Pour les composantes localisées en fréquence, l'hypothèse est qu'à l'intérieur de chaque plan $temps \times canal$, seules quelques fréquences remarquables vont apparaître, qui ne sont pas forcément les mêmes pour chaque plans. On utilise alors le troisième regroupement représenté sur la figure 7.20 (dans le coin inférieur gauche) et on utilise la norme mixte

$$\mathbf{P}_1[\alpha] = \sum_{t,c} \left(\sum_f |\alpha_{tfc}| \right)^2 . \quad (7.8)$$

Pour cette composante, on choisit une base MDCT avec une fenêtre de longueur 256 ms et correspond à la base \mathcal{U} .

Pour estimer les composantes localisées en temps, l'estimateur du G-LASSO semble le mieux adapté, pour sélectionner des groupes complets à des dates fixes, et ainsi favoriser la persistance en fréquences et à travers les canaux. Cela correspond donc à la norme mixte

$$\mathbf{P}_2[\beta] = \sum_t \sqrt{\sum_{f,c} |\beta_{tfc}|^2} . \quad (7.9)$$

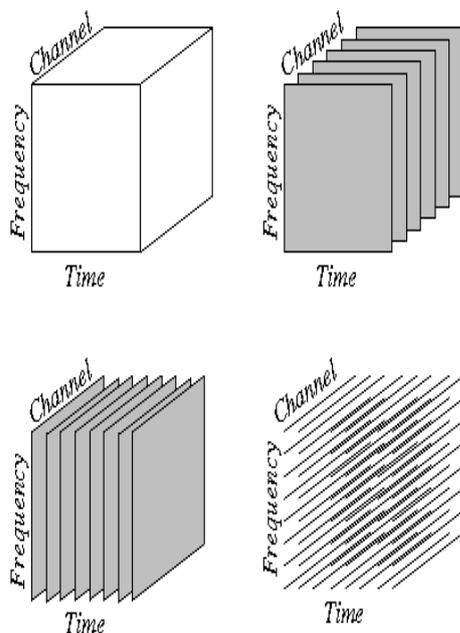


FIG. 7.20 – L'ensemble des indices temps-fréquence-canal (en haut à gauche) et divers regroupements (plans ou lignes).

La base MDCT choisie pour cette composante a une taille de fenêtre de 32 ms et correspond à la base \mathcal{V} .

Afin de favoriser la persistance en temps d'une fréquence, on a décidé d'utiliser la version fenêtrée de la norme $\ell_{1,2}$. Le système de voisinage est construit comme suit. Soit ℓ_t l'ensemble de toutes les fréquences au temps t . On considère alors toutes les fréquences contenues dans l'ensemble $\mathcal{N}(t) = \{\ell_{t-2}, \ell_{t-1}, \ell_t, \ell_{t+1}, \ell_{t+2}\}$, au lieu de considérer seulement ℓ_t à l'indice t donné. Finalement, on utilise l'opérateur de seuillage généralisé PE-LASSO et G-LASSO pour estimer les deux couches.

L'algorithme BCR décrit à la section 5.4.1 du chapitre 5 a été utilisé dans cette configuration. Pour la clarté des comparaisons, les résultats obtenus avec G-LASSO multicanal classique sont aussi illustrés. Les paramètres ont été choisis de façon à obtenir des résidus dont l'énergie est comparable (environ 10% de l'énergie du signal original). De plus, les poids relatifs des deux couches, donnés par le rapport μ_2/μ_1 , ont été choisis tels que les composantes localisées en temps soient restreintes à de très courts signaux transitoires (et ont donc une énergie faible).

Les composantes localisées en fréquences estimées par les deux méthodes sont difficilement différenciables visuellement. On a donc choisi de ne représenter qu'une seule d'entre elles sur la figure 7.21. Les seules différences entre les deux peuvent se remarquer sur les hautes fréquences (non montrées ici en raison du peu d'intérêt qu'elles présentent).

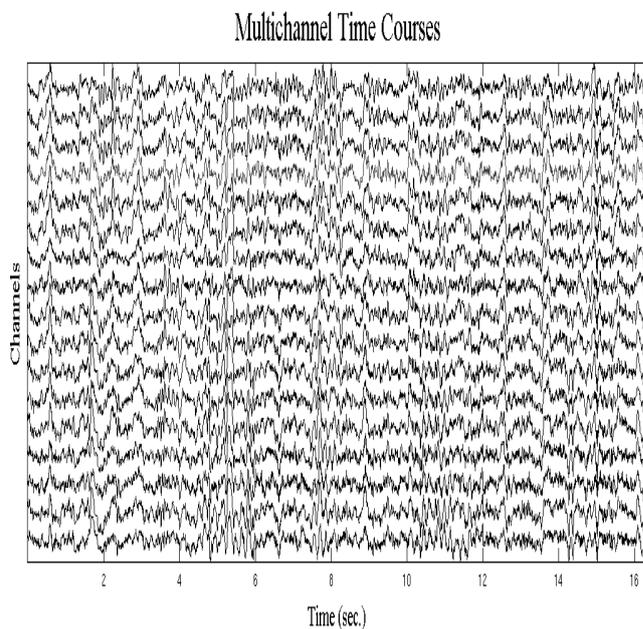


FIG. 7.21 – Composantes localisées en fréquence pour les signaux EEG représentés sur la figure 7.17, estimées avec l’approche décrite en section 7.3.3.

Les différences apparaissent plus visiblement sur les figures des composantes localisées en temps. En effet, l’estimateur du G-LASSO multicanal illustré sur la figure 7.22 met en relief des variations plus nettes, et des composantes très courtes et très oscillantes. Ces dernières disparaissent sur l’estimation donnée par l’algorithme 1. Plus précisément, elles sont capturées par la couche localisée en fréquence.

Ceci apparaît plus clairement si l’on se concentre sur un seul canal. On représente sur la figure 7.24 les deux estimations de la couche localisée en temps pour le canal 3. On remarque très clairement que l’approche proposée donne une solution plus parcimonieuse en temps.

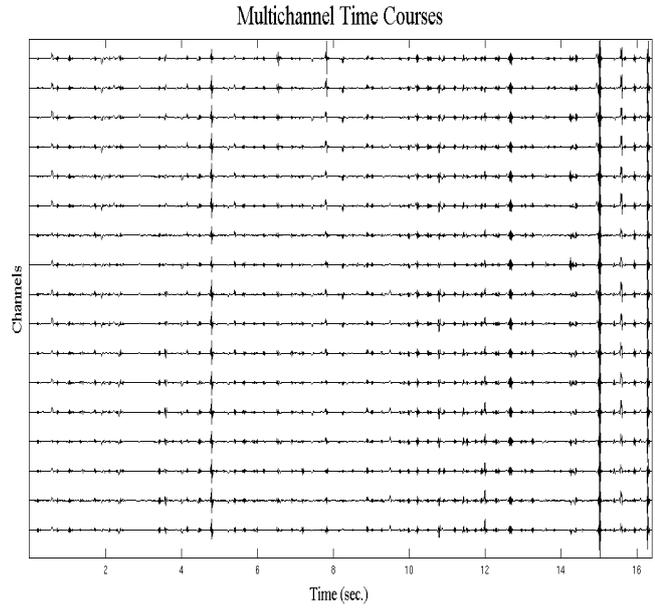


FIG. 7.22 – Composantes localisées en temps pour les signaux EEG représentés sur la figure 7.17, en utilisant l'estimateur du G-LASSO multicanal.

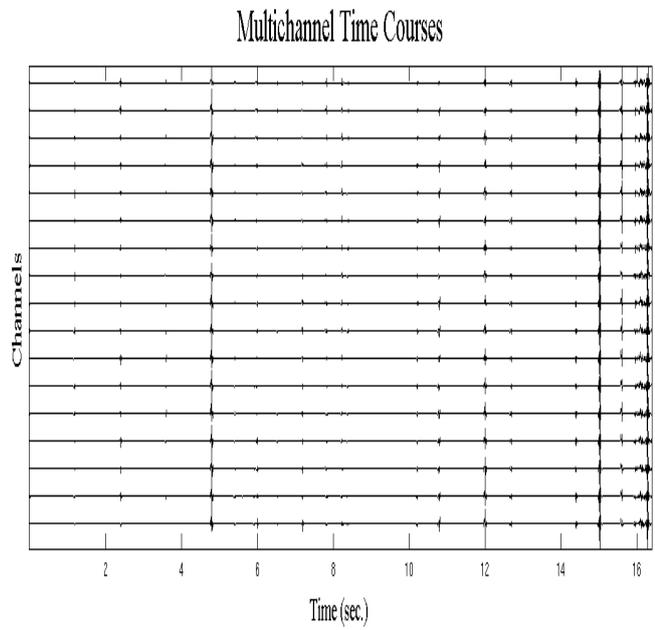


FIG. 7.23 – Composantes localisées en temps pour les signaux EEG représentés sur la figure 7.17, en utilisant l'approche de la section 7.3.3.

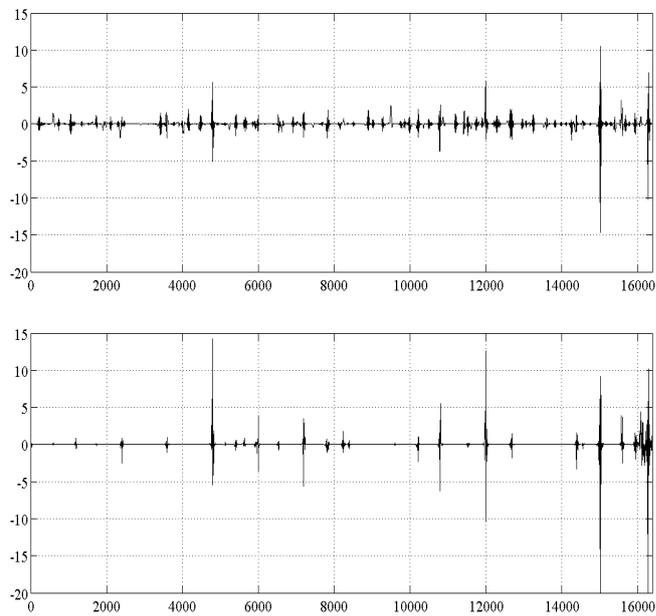


FIG. 7.24 – Composantes localisées en temps pour un canal particulier des signaux EEG représentés sur la figure 7.17, en utilisant les deux algorithmes. Haut : G-LASSO, bas : approche de la section 7.3.3.

CONCLUSION PARTIELLE

8

On a montré dans cette partie que, lorsque les données peuvent être indicées par un double indice, les normes mixtes aident à l'introduction de structures. Les indices peuvent en effet être utilisés pour introduire une hiérarchie entre les coefficients. Cette hiérarchie est alors utilisée de façon explicite et modélisée par les normes mixtes $\ell_{p,q}$. On peut alors jouer sur p et q pour favoriser une parcimonie structurée.

Ces normes sont adaptées à deux situations différentes de régression :

- L'estimation d'un signal sous contrainte de reconstruction exacte ;
- L'estimation d'un signal bruité.

Deux familles d'algorithmes ont été présentées pour résoudre ces deux problèmes : FOCUSS et deux algorithmes de seuillage itératifs (BCR et le seuillage itératif de Landweber). On résume leurs principaux inconvénients et avantages dans le tableau 8.1.

	FOCUSS	Seuillage itératif
Valeurs possibles pour p et q	$p, q \leq 2$ et $p, q \neq 0$	$1 \leq p, q \leq 2$, et pour tout $p \leq 1$ si $q = 2$. Les cas $q = 1$ et $1 \leq p < 2$ utilisent un algorithme itératif dont la convergence est prouvée pour λ choisi convenablement.
Vitesse	–	+
Facilité d'implémentation	+	+
Avec contrainte d'égalité	+	N'ont pas été créé pour
Avec sous contrainte d'inégalité	+	+

TAB. 8.1 – Comparaison des inconvénients et des avantages des deux familles d'algorithmes.

Les normes $\ell_{p,1}$ connaissent déjà un certain succès dans la communauté statistique pour la sélection de variable [YL06, SGMM08, ZRY08], et ont été plus particulièrement étudiées et appliquées à la restauration d'images

couleurs [FR08, TR07]. Ce travail étudie lui les normes mixtes d'une manière très générale, et on aimerait aussi souligner l'utilité des normes $\ell_{1,q}$ pour encourager des structures sans imposer la parcimonie seulement sur les groupes entiers de variables (voir la remarque 5.4 de la section 5.3.3 du chapitre 5, et la remarque 7.1 de la section 7.1.1 du chapitre 7). En particulier, l'application de l'estimateur E-LASSO à la séparation de sources dans le cas des mélanges convolutifs sous-déterminés s'est avéré particulièrement efficace.

Si l'on se limite à la combinaison de normes ℓ_1 et ℓ_2 , les opérateurs de seuillage généralisé obtenus ont un comportement bien identifié pour dépasser le seuillage simple. L'estimateur E-LASSO (et son approximation AE-LASSO) est une solution pour éviter la sur-parcimonisation du LASSO, et sélectionner dans chaque groupes les «meilleurs» coefficients. Le WG-LASSO s'est révélé être une alternative utile au G-LASSO lorsque les groupes ne sont pas correctement identifiés, voire leur définition impossible.

Le comportement des algorithmes de seuillage itératif a été illustré sur des exemples simples pour souligner l'influence des normes mixtes par rapport à la norme ℓ_1 classique. On a principalement utilisé des signaux audios pour les structures inhérentes aux représentations temps-fréquence. Cependant, les normes mixtes peuvent être utilisées dans n'importe quelle application faisant intervenir des structures, données par un choix judicieux de double indilage.

Deuxième partie

**Analyse de modèles hybrides
aléatoires**

INTRODUCTION

9

«*And Now For Something Completely Different*»
Monty Python

L'approche étudiée dans cette partie est une approche aléatoire, dans laquelle on modélise *a priori* le signal. On souhaite alors estimer l'ensemble des paramètres du modèle. En particulier, l'étude porte sur un modèle *hybride* adapté aux décompositions en couches type *transitoire + tonal + bruit* d'un signal.

Le but est ici de combiner les avantages d'un modèle probabiliste et des stratégies type "seuillage". Pour cela, on se base sur l'étude des coefficients d'analyse (ou coefficients observés) qui, comme on l'a vu dans le chapitre 2, ne correspondent pas forcément aux coefficients de synthèse. Lorsque le modèle du signal est suffisamment précis, le comportement de ces coefficients peut être caractérisé convenablement, ce qui donne des algorithmes simples pour l'identification de la décomposition du signal.

On commence par décrire les modèles aléatoires de formes d'ondes, exprimant un signal comme une somme parcimonieuse aléatoire de fonctions de base. Plus précisément, on se concentre sur un modèle de signal de la forme

$$x(t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i \alpha_i \varphi_i(t) ,$$

où \mathcal{I} est un ensemble d'indices génériques, les formes d'ondes φ_i forment le dictionnaire, les X_i sont des variables aléatoires booléennes qui contrôlent la parcimonie de la décomposition, et les α_i sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale.

9.0.4 Généralités

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert réel séparable (de dimension finie ou infinie), et soit $\mathcal{V} = \{v_n, n \in I\}$ et $\mathcal{U} = \{u_m, m \in I\}$ deux bases orthonormées de \mathcal{H} . Ici, I représente un ensemble générique d'indices (dans le cas de la dimension finie, on note $I = \{1, \dots, N\}$). On note

$$\mathcal{D} = \mathcal{V} \cup \mathcal{U}$$

le dictionnaire construit comme l'union de ces deux bases. \mathcal{D} est clairement (sur)complet dans \mathcal{H} , et n'importe quel $x \in \mathcal{H}$ admet une infinité d'expressions de la forme

$$x = \sum_{n \in I} \alpha_n v_n + \sum_{m \in I} \beta_m u_m ,$$

où $\alpha_n, \beta_m \in \mathbb{R}$ sont les *coefficients de synthèse*.

On s'intéresse aux *signaux parcimonieux*, *i.e.* les signaux $x \in \mathcal{H}$ qui peuvent s'écrire comme

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda v_\lambda + \sum_{\delta \in \Delta} \beta_\delta u_\delta + r , \quad (9.1)$$

où Λ, Δ sont des petits sous-ensembles de l'ensemble d'indices I , que l'on appelle *cartes de signifiante* et $r \in \mathcal{H}$ est un petit résidu.

Étant donné un tel signal parcimonieux, la non unicité de sa représentation dans le dictionnaire rend difficile l'identification sans ambiguïté du modèle (9.1). L'approche proposée utilise les *coefficients d'analyse*

$$a_n = \langle x, v_n \rangle , \quad b_m = \langle x, u_m \rangle , \quad (9.2)$$

et développe une stratégie pour estimer les coefficients effectivement pertinents, à partir desquels une décomposition parcimonieuse peut être identifiée.

Dans les applications numériques, on se limite à une paire de base orthonormée bien particulière : \mathcal{U} est une base de cosinus locaux (*i.e.* une base MDCT, voir l'annexe B et, par exemple, [VK95]) choisie de manière à avoir une bonne résolution fréquentielle, et \mathcal{V} est une base de cosinus locaux avec une bonne résolution temporelle. Les ensembles d'indices sont alors de dimension deux (un indice temporel et un indice fréquentiel), et on les écrit tel quel lorsque nécessaire. D'autres choix pour les bases sont possibles (par exemple une combinaison de bases MDCT et d'ondelettes, comme dans [DT02, MT05]), ou bien une extension aux repères (ce qui cependant nécessite des modifications notables).

9.0.5 Modèle aléatoires hybrides

On introduit ici un *modèle* explicite pour les signaux parcimonieux dans (9.1). Les ingrédients d'un tel modèle sont essentiellement au nombre de deux : un modèle pour les *cartes de signifiante* Λ et Δ , et, étant donné les cartes de signifiante Λ et Δ , un modèle pour les coefficients $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ et $\{\beta_\delta, \delta \in \Delta\}$.

Définition 9.1. *Étant donné deux bases orthonormées de \mathcal{H} comme ci-dessus, un modèle hybride aléatoire est défini par*

- i. *Un modèle de probabilité discret pour les cartes de signifiante. Les mesures de probabilité correspondantes pour les cartes aléatoires Λ et Δ sont notées*

\mathbb{P}_Λ et \mathbb{P}_Δ , et les espérances par \mathbb{E}_Λ et \mathbb{E}_Δ .

ii. Un modèle de probabilité pour les coefficients de synthèses $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ et $\{\beta_\delta, \delta \in \Delta\}$, conditionnellement aux cartes de signifiante. Les mesures de probabilité correspondantes et les espérances sont notées \mathbb{P}_0 et \mathbb{E}_0 . La mesure de probabilité globale et l'espérance sont notées par \mathbb{P} et \mathbb{E} respectivement.

On note X_n et \tilde{X}_n les variables indicatrices aléatoires, correspondant aux cartes Λ et Δ , *i.e.*

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \Lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \tilde{X}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \Delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9.3)$$

et par p_n et \tilde{p}_n les probabilités d'appartenance

$$p_n = \mathbb{P}_\Lambda \{X_n = 1\}, \quad \tilde{p}_m = \mathbb{P}_\Delta \{\tilde{X}_m = 1\}. \quad (9.4)$$

Le modèle de signal correspondant prend alors la forme

$$x = \sum_{n \in I} X_n \alpha_n v_n + \sum_{m \in I} \tilde{X}_m \beta_m u_m + r. \quad (9.5)$$

Le but des chapitres suivants est d'étudier précisément le comportement des coefficients d'analyse dans le cadre de modèles aléatoires précis. On verra que dans un tel contexte, sous des conditions appropriées, la distribution des coefficients d'analyse peut être modéliser par un mélange de Gaussiennes. Ce mélange pourra être identifié par des algorithmes adéquats, pour discriminer les coefficients qui appartiennent à la carte de signifiante des autres. Les conditions qui entrent en jeu sont essentiellement 1) la parcimonie du modèle de signal (qui est contrôlée par les variables booléenne X_i , et 2) l'incohérence du dictionnaire.

Cette partie est organisée comme suit. Le chapitre 10 décrit un modèle de Bernoulli et un modèle de Bernoulli-Hiérarchique pour les distributions des variables aléatoires Booléennes X_i . On y fait l'étude des coefficients d'analyse du signal selon ces modèles, afin d'obtenir des estimations pour les paramètres du modèle. Le chapitre 11 décrit les algorithmes déduits de l'étude faite au chapitre 10. Enfin, le chapitre 12 illustre le propos en présentant les résultats obtenus par les algorithmes, principalement en débruitage.

MODÈLES ALÉATOIRES DE CARTES TEMPS-FRÉQUENCE

10

On décrit ici deux modèles aléatoires simples, un modèle de Bernoulli et un modèle de Bernoulli-Hiérarchique, pour les cartes temps-fréquence. Après la description de chaque modèle, on procède à l'étude du comportement des coefficients d'analyse, qui nous permet d'obtenir des estimateurs pour les paramètres des modèles aléatoires.

10.1 Modèle de Bernoulli

10.1.1 Modèle

Le modèle le plus simple pour les coefficients, auquel on s'attache en premier lieu, suppose que les coefficients significatifs sont des variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, en d'autres termes leur ddp (conditionnellement à Λ et Δ) s'écrit

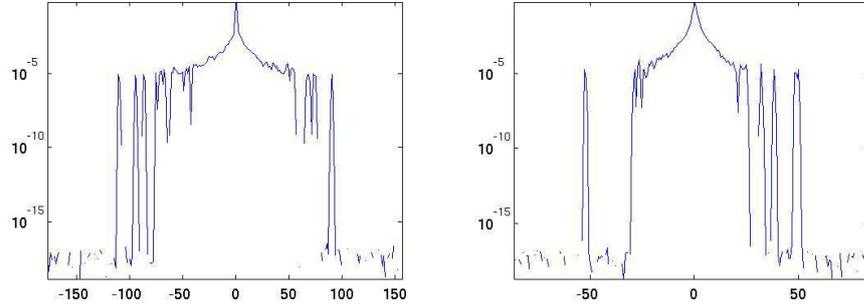
$$\begin{aligned} p_{\alpha_n|\Lambda} &= (1 - X_n)\delta_0 + X_n\mathcal{N}(0, \sigma_n^2) , \\ p_{\beta_n|\Delta} &= (1 - \tilde{X}_n)\delta_0 + \tilde{X}_n\mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_n^2) . \end{aligned}$$

Le résidu est modélisé ici comme un bruit blanc Gaussien centré de variance s^2 fixé.

Les variances σ_n^2 et $\tilde{\sigma}_n^2$ dépendent des coefficients. Pour plus de commodité, on introduit les variances réduites

$$\sigma_n = \sigma f_n , \quad \tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma} \tilde{f}_n , \quad (10.1)$$

où $\sigma = \max_n(\sigma_n)$ et $\tilde{\sigma} = \max_n(\tilde{\sigma}_n)$, de sorte que $f_n \leq 1$, $\tilde{f}_n \leq 1$. Plus loin, lorsqu'on s'attardera plus spécialement aux bases temps-fréquence \mathcal{U} et \mathcal{V} , f et \tilde{f} seront des *profils fréquentiels* fixés, qui modélisent une décroissance "typique" des coefficients avec la fréquence.


 FIG. 10.1 – *ddp d'un signal synthétisé avec le model (mdct + ondelettes)*

10.1.2 Coefficients d'analyse

Étant donné le modèle hybride de formes d'ondes, et une réalisation x d'un signal obéissant à ce modèle, les paramètres et les cartes de signifiante peuvent être estimés dans un cadre purement Bayésien, en considérant leur distribution de probabilité a posteriori, conditionnellement à l'observation. Cette approche, combinée aux algorithmes d'optimisation MCMC, a montré son efficacité pour le débruitage de signaux audio, au prix d'un coût calculatoire élevé [FDGT06].

Dans ce travail, on a choisi de se concentrer sur une approche plus simple, basée sur l'étude des *coefficients d'analyse*, définie par (9.2), à partir desquels une décomposition parcimonieuse de x dans le dictionnaire est estimée.

Pour commencer, on étudie la distribution de ces coefficients d'analyse, *conditionnellement aux cartes de signifiante*. En posant $\rho_n = \langle r, v_n \rangle$ et $\tilde{\rho}_n = \langle r, u_n \rangle$, on peut vérifier aisément que

$$a_n = \langle x, v_n \rangle = \alpha_n X_n + \sum_{m \in I} \beta_m \tilde{X}_m \langle u_m, v_n \rangle + \rho_n \quad (10.2)$$

$$b_n = \langle x, u_n \rangle = \beta_n \tilde{X}_n + \sum_{m \in I} \alpha_m X_m \langle v_m, u_n \rangle + \tilde{\rho}_n, \quad (10.3)$$

i.e. que les coefficients d'analyse peuvent s'exprimer comme la somme de variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale. Ainsi, on peut écrire

Proposition 10.1. *Conditionnellement aux cartes de signifiante, les coefficients a_n et b_n sont des variables aléatoires distribuées selon une loi normale de moyenne nulle, de matrice de covariance $C_{mn} = \mathbb{E}_0 \{a_m a_n\}$, $\tilde{C}_{mn} = \mathbb{E}_0 \{b_m b_n\}$, données par*

$$C_{mn} = (\sigma_m^2 X_m + s^2) \delta_{mn} + \sum_{i \in I} \tilde{X}_i \tilde{\sigma}_i^2 \langle v_m, u_i \rangle \langle u_i, v_n \rangle,$$

$$\tilde{C}_{mn} = (\tilde{\sigma}_m^2 \tilde{X}_m + s^2) \delta_{mn} + \sum_{i \in I} X_i \sigma_i^2 \langle u_m, v_i \rangle \langle v_i, u_n \rangle.$$

En particulier, les termes diagonaux sont égaux à

$$\mathbb{E}_0 \{a_n^2\} = \sigma_n^2 X_n + \sum_{i \in I} \tilde{X}_i \tilde{\sigma}_i^2 \langle v_n, u_i \rangle^2 + s^2 . \quad (10.4)$$

Si l'aléa des cartes de signifiante est pris en compte, les coefficients a (resp. b) sont distribués selon un mélange (aléatoire) de plusieurs variables aléatoires distribuées selon une loi normale centrée. Une telle distribution est gouvernée par les termes croisés dans le terme de droite des coefficients de covariance donnés par la proposition 10.1. Si on s'attarde sur les termes diagonaux de la matrice de covariance, on peut introduire les quantités suivantes

Définition 10.1. Soit Δ et Λ deux sous-ensembles de l'ensemble d'indices I . Pour $n \in I$, les poids de projection γ , sont les variables aléatoires définies par

$$\tilde{\gamma}_n(\Delta) = \sum_{\delta \in \Delta} \tilde{f}_\delta^2 \langle v_n, u_\delta \rangle^2 , \quad \gamma_n(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda^2 \langle u_n, v_\lambda \rangle^2 . \quad (10.5)$$

où f_λ et \tilde{f}_δ sont définis par l'équation (10.1).

Remarque 10.1. Les poids γ rappellent les poids de Parseval

$$\tilde{p}_n(\Delta) = \sum_{\delta \in \Delta} \langle v_n, u_\delta \rangle^2 , \quad p_n(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle u_n, v_\lambda \rangle^2 .$$

introduits dans [KT05, KT06]. En effet, dans le cas simple où les variances sont constantes ($\sigma_n = \sigma \forall n$), on a $\gamma_n(\Lambda) = p_n(\Lambda)$, et une expression similaire pour les poids $\tilde{\gamma}$. Les poids de Parseval ont une interprétation géométrique simple : en effet $\tilde{p}_n(\Delta)$ est la norme de la projection orthogonale de v_n sur l'espace vectoriel généré par $\{u_\delta, \delta \in \Delta\}$. Les poids γ devraient pouvoir s'interpréter de manière similaire. Soit \mathbf{M} (resp. $\tilde{\mathbf{M}}$) les opérateurs définis par une matrice diagonale dans la base \mathcal{V} (resp. \mathcal{U})

$$\mathbf{M}v_n = f_n v_n , \quad \tilde{\mathbf{M}}u_n = \tilde{f}_n u_n . \quad (10.6)$$

Alors $\gamma_n(\Lambda)$ est le carré de la norme de la projection orthogonale de $\mathbf{M}u_n$ sur l'espace vectoriel généré par les fonctions $\{v_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$:

$$\gamma_n(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle u_n, \mathbf{M}v_\lambda \rangle^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle \mathbf{M}u_n, v_\lambda \rangle^2 ,$$

Il suit de la formule de Parseval que pour tous les n et Λ ,

$$\gamma_n(\Lambda) \leq \|\mathbf{M}u_n\|^2 \leq 1 ,$$

(la dernière inégalité vient du fait que $f_n \leq 1 \forall n$), et une expression similaire pour $\tilde{\gamma}_n(\Delta)$.

\mathbf{M} est un opérateur bien défini dans le cas de la dimension finie. En situation de dimension infinie, *i.e.* pour les signaux en temps continu, des hypothèses additionnelles sur les variances normalisées f_n^2 , \tilde{f}_n^2 sont nécessaires pour assurer que \mathbf{M} soit borné.

Remarque 10.2. *Les termes diagonaux (10.4) de la matrice de covariance prennent la forme suivante :*

$$\mathbb{E}_0 \{a_n^2\} = \begin{cases} \sigma_n^2 + \tilde{\gamma}_n(\Delta)\tilde{\sigma}^2 + s^2 & \text{si } n \in \Lambda \\ \tilde{\gamma}_n(\Delta)\tilde{\sigma}^2 + s^2 & \text{si } n \notin \Lambda \end{cases} . \quad (10.7)$$

Si l'on prend en compte les poids γ , cela nous mène à la simple considération suivante sur le comportement des coefficients observés : si la distribution des poids γ est piquée vers une petite valeur (au sens de «petit devant 1»), alors les coefficients a_n ont un comportement significativement différent suivant que X_n s'annule ou pas. De plus, plus la variance des poids est petite, plus la discrimination des deux comportements est facile.

Caractériser la distribution des poids γ n'est pas une tâche aisée (une estimation des moments dans le cas du modèle de Bernoulli est donné ci-dessous). Néanmoins, si l'on suppose que les éléments de la carte de signifiante Λ (resp. Δ) sont identiquement distribués, avec $\mathbb{P}\{n \in \Lambda\} = p$ (resp. $\mathbb{P}\{n \in \Delta\} = \tilde{p}$), des estimateurs en *champ-moyen* pour les poids γ peuvent être obtenus. Par estimateur en champ moyen, on entend des estimateurs basés sur une moyenne par rapport à une seule des deux cartes de signifiante. Par exemple, les coefficients a_n (qui correspondent à la carte de signifiante Λ) sont étudiés, en utilisant une moyenne par rapport à Δ . Cela peut être utilisé par exemple pour initialiser des algorithmes itératifs pour lesquels une estimation initiale des cartes de signifiante est nécessaire.

Par exemple, le premier moment des poids γ s'écrit

$$\mathbb{E}_\Lambda \{\gamma_n(\Lambda)\} = p \|\mathbf{M}u_n\|^2 ; \quad \mathbb{E}_\Delta \{\tilde{\gamma}_n(\Delta)\} = \tilde{p} \|\widetilde{\mathbf{M}}v_n\|^2 . \quad (10.8)$$

On donne ci-dessous les estimateurs en champ moyen pour les coefficients a (*i.e.* en moyenne par rapport à \mathbb{P}_Δ , ce qui donne un résultat dépendant de Λ), des expressions similaires peuvent être dérivées pour les coefficients b .

Proposition 10.2. *En supposant que les éléments de la carte de signifiante Δ sont identiquement distribués, et en posant $\mathbb{P}\{n \in \Delta\} = \tilde{p}$, Alors l'estimateur en champ-moyen s'écrit*

$$\mathbb{E}_\Delta \left\{ \mathbb{E}_0 \{a_n^2\} \right\} = \sigma_n^2 X_n + \tilde{p} \|\widetilde{\mathbf{M}}v_n\|^2 \tilde{\sigma}^2 + s^2 .$$

Notre but est d'estimer la carte de signifiante Δ à partir des coefficients d'analyse. En ce sens, il est utile de normaliser les coefficients d'analyse par

les profils fréquentiels. De cette manière, les variances sont stabilisées, dans le sens où le terme principal ci-dessous a une variance σ^2 constante :

$$\mathbb{E}_\Delta \left\{ \mathbb{E}_0 \left\{ \frac{a_n^2}{f_n^2} \right\} \right\} = \sigma^2 X_n + \tilde{p} \frac{\|\widetilde{\mathbf{M}}v_n\|^2}{f_n^2} \tilde{\sigma}^2 + \frac{s^2}{f_n^2} \quad (10.9)$$

$$= \sigma^2 X_n + \tilde{p} \tilde{\sigma}^2 \sum_{i \in I} \frac{\tilde{f}_i^2}{f_n^2} \langle v_i, u_n \rangle^2 + \frac{s^2}{f_n^2} . \quad (10.10)$$

On remarque que la distribution des coefficients renormalisé est gouvernée par $\sum_{i \in I} \frac{\tilde{f}_i^2}{f_n^2} \langle v_i, u_n \rangle^2$.

Remarque 10.3. *Cette renormalisation assure que le terme principal $\sigma^2 X_n$ dans (10.9) a une variance σ^2 constante. La variance du second terme varie en fonction de n . Dans le but de d'atténuer une telle dépendance, se contraindre à des bases et des variances normalisées devront être imposées, comme nous le verrons à la section 10.1.3 suivante.*

10.1.3 Estimation des cartes

Supposons que les éléments de l'index sont iid. Alors la distribution de probabilité de la carte de signifiante est donnée par $\mathbb{P}\{\Delta\} = \tilde{p}^{|\Delta|} (1 - \tilde{p})^{N-|\Delta|}$, $\mathbb{P}\{\Lambda\} = p^{|\Lambda|} (1 - p)^{N-|\Lambda|}$, et la distribution marginale des coefficients d'analyse prend la forme simple

$$p_{a_n} = (1 - p) \sum_{\Delta} \mathbb{P}\{\Delta\} \mathcal{N}(0, \tilde{\gamma}_n(\Delta) \tilde{\sigma}^2 + s^2) + p \sum_{\Delta} \mathbb{P}\{\Delta\} \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 + \tilde{\gamma}_n(\Delta) \tilde{\sigma}^2 + s^2) . \quad (10.11)$$

La distribution des coefficients est alors un mélange de deux mélanges de gaussiennes, dont le comportement est conduit par les poids γ . Supposons dans un souci de simplicité que la distribution des variables aléatoires $\tilde{\gamma}_n(\Delta)$ est fortement concentrée en une petite valeur, qui soit la probabilité d'appartenance \tilde{p} (voir (10.8)). Alors les deux types de Gaussiennes du mélange sont centrés en zéro, et possèdent des variances significativement différentes. Dans de telles situations, on peut tenter de les séparer, dans le but d'estimer les valeurs n des indices qui appartiennent à la carte de signifiante. La séparation sera basée sur l'amplitude des coefficients : les gros coefficients (en valeur absolue) seront assignés à la carte de signifiante. On décrit ci-dessous comment les valeurs correspondantes aux seuils sont estimées.

Comme mentionné plus haut, dans le modèle de Bernoulli, les estimateurs des moments de la distribution des poids γ peuvent être obtenus, en

plus du premier donné en (10.8). Pour le second moment, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\Lambda \left\{ \gamma_n(\Lambda)^2 \right\} &= p^2 \sum_{m \neq m'} f_m^2 f_{m'}^2 \langle u_n, v_m \rangle^2 \langle u_n, v_{m'} \rangle^2 + p \sum_m f_m^4 \langle u_n, v_m \rangle^4 \\ &= (\mathbb{E}_\Lambda \{ \gamma_n(\Lambda) \})^2 + p(1-p) \sum_m \langle u_n, \mathbf{M}v_m \rangle^4, \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Var}\{\gamma_n(\Lambda)\} = p(1-p) \sum_m \langle u_n, \mathbf{M}v_m \rangle^4. \quad (10.12)$$

Le troisième moment peut aussi être calculé, et donne l'asymétrie (ou *skweness*)

$$S\{\gamma_n(\Lambda)\} = \frac{\mathbb{E}\{\gamma_n(\Lambda)^3\}}{\mathbb{E}\{\gamma_n(\Lambda)^2\}^{3/2}} = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}} \frac{\sum_{k=1}^N \langle v_k, \mathbf{M}u_n \rangle^6}{\left(\sum_{k=1}^N \langle v_k, \mathbf{M}u_n \rangle^4 \right)^{3/2}}. \quad (10.13)$$

Remarque 10.4. Comme souligné à la remarque 10.2 ci-dessous, la discrimination entre les deux types de coefficients d'analyse est plus facile lorsque les moments du premier et du second ordre des poids γ sont petits. En effet, dans de telles situations, la distribution des coefficients d'analyse est proche d'un mélange de deux Gaussiennes, qui ont des variances significativement différentes.

1. Le premier moment est essentiellement contrôlé par la parcimonie de la décomposition, représenté ici par la probabilité d'appartenance p . Plus la carte de signifiante est parcimonieuse, plus les poids γ sont petits.
2. La variance est contrôlée par la probabilité d'appartenance p et la cohérence du dictionnaire. En effet, si l'on introduit $B_4 = \sup_n \sum_m \langle u_n, \mathbf{M}v_m \rangle^4$, qui peut être vu comme une généralisation des fonctions 4 – *Babel* [Tro04], on obtient $\text{Var}\{\gamma_n(\Lambda)\} \leq p(1-p)B_4$.
3. Le skewness est contrôlé par la position de p par rapport à $1/2$.

Le problème de séparation du mélange des gaussiennes peut être formulé comme suit. On note Y_n l'estimateur MAP pour X_n :

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{P}\{X_n = 1|a_n, \Delta\} \geq \mathbb{P}\{X_n = 0|a_n, \Delta\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cet estimateur du MAP pour X_n donnera un seuil adapté pour *chaque* coefficient d'analyse, qui correspond à l'intersection des deux courbes gaussiennes du mélange. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_n = q|a_n, \Delta\} &\propto \mathbb{P}\{X_n = q\}\mathbb{P}\{a_n|X_n, \Delta\} \\ &\propto \begin{cases} p \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 + \tilde{\gamma}_n(\Delta)\tilde{\sigma}_n^2 + s^2) & \text{si } q = 1 \\ (1-p) \mathcal{N}(0, \tilde{\gamma}_n(\Delta)\tilde{\sigma}_n^2 + s^2) & \text{sinon } q = 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (10.14)$$

Soit pour simplifier

$$w_{n;0}^2 = \tilde{\gamma}_n(\Delta)\tilde{\sigma}_n^2 + s^2, \quad w_{n;1}^2 = w_{n;0}^2 + \sigma_n^2. \quad (10.15)$$

Alors le point d'intersection τ_n des deux gaussiennes $\mathcal{N}(0, w_{n;0}^2)$ et $\mathcal{N}(0, w_{n;1}^2)$, est donné par

$$\tau_n^2 = \frac{2 w_{n;1}^2 w_{n;0}^2}{w_{n;1}^2 - w_{n;0}^2} \ln \left[\left(\frac{1-p}{p} \right) \left(\frac{w_{n;1}^2}{w_{n;0}^2} \right) \right],$$

et l'on obtient immédiatement :

Proposition 10.3. *Supposons que les éléments de la carte de signifiante Λ (resp. Δ) soient iid, avec $\mathbb{P}\{n \in \Lambda\} = p$ (resp. $\mathbb{P}\{n \in \Delta\} = \tilde{p}$). Supposons que les coefficients de synthèse α_n (resp. β_n) soient des variables aléatoires indépendantes $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ (resp. $\mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_n^2)$). Alors l'estimateur du MAP Y_n pour X_n est donné par :*

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |a_n| \geq \tau_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

De plus, la simplicité du modèle nous permet de calculer les erreurs en probabilité, qui sont comme suit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y_n = 0|X_n = 1\} &= p \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{w_{n;0}^2}{\sigma_n^2} \ln \left[\frac{p}{1-p} \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{w_{n;0}^2} \right) \right]} \right), \\ \mathbb{P}\{Y_n = 1|X_n = 0\} &= (1-p) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{w_{n;0}^2}{\sigma_n^2} \right) \ln \left[\frac{1-p}{p} \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{w_{n;0}^2} \right) \right]} \right), \end{aligned}$$

où erfc est la fonction d'erreur complémentaire définie par [AS64]

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Remarque 10.5. Les erreurs en probabilité pour la carte de signifiante Λ sont contrôlées par $w_{n;0}^2/\sigma_n^2$. Ici encore, on remarque que les poids γ jouent un rôle crucial : plus les poids $\tilde{\gamma}_n(\Delta)$ sont petits (et la variance du bruit), plus l'erreur en probabilité est faible.

Remarque 10.6. La même analyse peut être faite en partant des estimateurs en champ moyen. Dans ce cas, on a vu à la remarque 10.4 que la distribution des coefficients d'analyse peut être approchée par un mélange d'un petit nombre de gaussienne. Ceci mène à un seuil global (avec les poids γ remplacés par leur moyenne) à la place des seuils dépendants de chaque coefficient.

Bases temps-fréquence pour les signaux audio

La discussion ci-dessus s'applique à n'importe quelles bases de \mathcal{H} . On décrit maintenant brièvement la situation qu'on considère ici. Les deux bases \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des bases MDCT, et l'ensemble des indices I (tout comme les cartes de signifiante) sont de deux sortes : des indices temporels et fréquentiels. La première base MDCT \mathcal{U} est construite à partir d'une large fenêtre, *i.e.* consiste en des atomes bien localisés en fréquence, tandis que la base \mathcal{V} , construite avec une fenêtre étroite, consiste en des atomes localisés en temps. Dans un tel contexte, la reconstruction partielle $\sum_{\delta \in \Delta} b_{\delta} u_{\delta}$ (resp. $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} v_{\lambda}$) sera appelée *couche tonale* (resp. *couche transitoire*) du signal.

Dans les applications numériques aux signaux audio plus loin, on se limitera aux situations où les variances normalisées $f_{k,\nu}^2$ et $\tilde{f}_{k,\nu}^2$ dépendent seulement de la partie fréquentielle ν , et modélisent une décroissance «typique» des coefficients en fréquence.

Si l'on revient sur la remarque 10.3, on suppose que les fonction des bases \mathcal{U} et \mathcal{V} en considération sont suffisamment bien localisée dans le domaine fréquentiel, de sorte que seulement quelques termes de la matrice des produits scalaires $\langle u_n, v_m \rangle$ ne sont pas négligeables. Si de plus les profils fréquentiels f_n et \tilde{f}_n varient lentement en fonction de l'index de la fréquence, la dépendance en n dans (10.10) peut être considérée comme faible en première approximation.

10.2 Modèle de Bernoulli-Hiérarchique

10.2.1 Généralités

Contrairement au modèle de Bernoulli, les modèles structurés pour les cartes de signifiante font apparaître des corrélations entre les éléments d'une carte de signifiante. Par exemple, si l'on suppose que \mathcal{U} est une base orthonormale d'atomes temps-fréquence, des corrélations peuvent être introduites entre plusieurs indices temporels consécutifs pour modéliser la persistance temporelle de la couche (tonale) correspondante. De manière similaire, on peut introduire des corrélations entre les fréquences pour modéliser les composantes du signal de courtes durées comme les transitoires (qui ont une persistance fréquentielle).

Dans de telles situations, la distribution marginale des coefficients d'analyse est toujours donnée par (10.11), mais les probabilités ne sont plus aussi simples qu'auparavant.

Il est intéressant de signaler que, dû à la décorrélation des coefficients α et β (les deux couches sont indépendantes), les corrélations intervenant dans les cartes de signifiante n'apparaissent pas dans les moments du second ordre des coefficients d'analyse a et b , *i.e.* dans les matrices \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$. Par exemple, ni $\mathbb{E}_\Lambda \{C_{mn}\}$ où $\mathbb{E}_\Delta \{\tilde{C}_{mn}\}$ ne font apparaître les fonctions de corrélation $\mathbb{E}_\Lambda \{X_m X_n\}$ ou $\mathbb{E}_\Delta \{\tilde{X}_m \tilde{X}_n\}$ des cartes de signifiante.

10.2.2 Modèle

Les dépendances entre les coefficients de voisinage peuvent être introduites de manière simple en remplaçant le modèle de Bernoulli précédent par un modèle de Bernoulli-Hiérarchique. On présente ce modèle dans le cadre d'une modélisation de la couche transitoire. L'idée est de prendre en compte les indices temporels pour lesquels aucun coefficient transitoire n'existe, et de segmenter les indices temporels entre ceux qui contiennent des transitoires des autres. Notons qu'un modèle similaire pourrait être développé pour la carte de signifiante tonale Δ .

Soit $n = (k_n, \nu_n) \in \Lambda = \Lambda_t \times \Lambda_f$ un indice temps-fréquence, avec Λ_t (resp. Λ_f) l'ensemble des indices temporels (resp. fréquentiels). Soit X_n la variable aléatoire indicatrice correspondante et T_{k_n} la variable aléatoire indicatrice correspondante à l'indice temporel. La variable aléatoire X_n est distribuée suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_1)$ conditionnellement à la variable indicatrice temporelle T_{k_n} qui est distribuée selon une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_2)$. Cela peut s'écrire

$$\tilde{X}_n \sim \mathcal{B}(\tilde{p}) ; X_n \sim T_{k_n} \mathcal{B}(p_2) + (1 - T_{k_n}) \delta_0 , \text{ avec } T_{k_n} \sim \mathcal{B}(p_2) . \quad (10.16)$$

10.2.3 Estimation des cartes

Afin d'estimer les cartes de signifiante, on s'attarde en premier sur la sous-carte Λ_t . Au lieu d'utiliser comme auparavant les coefficients d'analyse un par un, tous les coefficients d'un même indice temporel sont pris en compte dans la quantité suivante (avec $w_{k,\nu;0}$ et $w_{k,\nu;1}$ définis comme dans (10.15)).

$$c_k = \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \frac{a_{k,\nu}^2}{w_{k,\nu;0}^2} = \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \left[\frac{\alpha_{k,\nu}}{w_{k,\nu;0}} X_{k,\nu} + \tilde{\pi}_{k,\nu} \right]^2 , \quad (10.17)$$

où l'on a posé pour simplifier $\tilde{\pi}_{k,\nu} = \frac{1}{w_{k,\nu;0}} \sum_{\delta \in \Delta} \beta_\delta \langle u_\delta, v_{k,\nu} \rangle + \rho_{k,\nu}$.

On réécrit (10.17) pour séparer les coefficients c_k avec $k \in \Lambda_t$ des autres

$$c_k = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \left[\frac{\alpha_{k,\nu}}{w_{k,\nu;0}} X_{k,\nu} + \tilde{\pi}_{k,\nu}(\Delta) \right]^2 & \text{si } k \in \Lambda_t \\ \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \tilde{\pi}_{k,\nu}(\Delta)^2 & \text{si } k \notin \Lambda_t \end{cases}. \quad (10.18)$$

Les coefficients β_δ sont distribués selon une loi normale $\mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_\delta^2)$, et les coefficients $\rho_{k,\nu}$ selon $\mathcal{N}(0, s^2)$. Donc, comme les β_δ sont indépendants, les coefficients $\tilde{\pi}_{k,\nu}(\Delta)$ sont distribués selon une loi normale

$$\tilde{\pi}_{k,\nu}(\Delta) \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{\sum_{\delta \in \Delta} \tilde{\sigma}_\delta^2 \langle u_\delta, v_{k,\nu} \rangle^2 + s^2}{w_{k,\nu;0}^2} \right) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Dans le cas $k \notin \Lambda_t$, les coefficients c_k sont distribués selon une loi du χ^2 avec $|\Lambda_f|$ degré de liberté. On s'attend alors à ce que les $c_{k,\nu}$, $k \in \Lambda_t$, prennent une valeur élevée et apparaissent comme des points aberrants pour la distribution du χ^2 dont on parle ci-dessus.

Le principal inconvénient d'une telle approche est que la carte de signifiante Δ doit être connue pour normaliser les coefficients, et donc obtenir les coefficients c_k . Pour éviter cela, on se limite à une approximation des coefficients c_k , et l'on introduit les nouveaux coefficients c'_k :

$$c'_k = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \frac{a_{k,\nu}^2}{f_{k,\nu}^2} \\ \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \left[\frac{\alpha_{k,\nu}}{f_{k,\nu}} X_{k,\nu} + \tilde{\pi}'_{k,\nu}(\Delta) \right]^2 & \text{if } k \in \Lambda_t \\ \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \tilde{\pi}'_{k,\nu}(\Delta)^2 & \text{if } k \notin \Lambda_t \end{cases}, \quad (10.19)$$

avec $\tilde{\pi}'_{k,\nu} = \sum_{\delta \in \Delta} \frac{\beta_\delta \langle u_\delta, v_{k,\nu} \rangle + \rho_{k,\nu}}{f_{k,\nu}} \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{w_{k,\nu;0}^2}{f_{k,\nu}^2} \right)$.

Les coefficients c'_k rappellent ici la norme ℓ_2 en fréquence (avec une pondération par les profils fréquentiels) des coefficients d'analyses. Cela fait donc penser aux quantités calculées par le G-LASSO défini au chapitre 5 de la partie 1, où la sélection des groupes se fait en fonction de la norme ℓ_2 de ces derniers.

Bien que les variances des $\pi_{k,\nu}$ soient différentes, la distribution des $\{c'_{k,\nu}, k \notin \Lambda_t\}$ doit pouvoir s'approcher correctement par une loi du χ^2 à deux paramètres, et les coefficients $\{c'_{k,\nu}, k \in \Lambda_t\}$, seront alors cherchés comme des points aberrants pour cette loi du χ^2 . Après une présélection des coefficients d'analyse $\{a_{k,\nu}, k \in \Lambda_t\}$, le modèle de Bernoulli est utilisé pour finir la sélection, et obtenir une estimation de la carte de signifiante.

Remarque 10.7. Une alternative est de renormaliser tous les coefficients c_k selon leur appartenance à la sous-carte Λ_t :

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \left[\frac{\alpha_{k,\nu}}{w_{k,\nu;1}} X_{k,\nu} + \frac{1}{w_{k,\nu;0}} \sum_{\delta \in \Delta} \beta_\delta \langle u_\delta, v_{k,\nu} \rangle + \rho_{k,\nu} \right]^2 \text{ if } k \in \Lambda_t, \\ d'_k &= \sum_{\nu=1}^{|\Lambda_f|} \left[\frac{1}{w_{k,\nu;0}} \sum_{\delta \in \Delta} \beta_\delta \langle u_\delta, v_{k,\nu} \rangle + \rho_{k,\nu} \right]^2 \text{ if } k \notin \Lambda_t. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Dans ce cas, on obtient $p_1 |\Lambda_t|$ coefficients d_k distribués selon une loi du χ^2 avec $|\Lambda_f|$ degrés de liberté, et $(1 - p_1) |\Lambda_t|$ coefficients d'_k distribués selon la même loi du χ^2 que précédemment. Une estimation du MAP, notée Z_k pour les variables indicatrices T_k peut se formuler comme suit

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{si } p\chi^2(d_k) > (1-p)\chi^2(d'_k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (10.21)$$

10.3 Estimation de la variance

Si des estimateurs sont disponibles pour les cartes de signifiante, les poids γ peuvent aussi être estimés. La proposition suivante donne alors des estimateurs puissants pour les paramètres σ et $\tilde{\sigma}$.

Proposition 10.4. Soit p et \tilde{p} les probabilités d'appartenance. Soit a_n (resp. b_n) les coefficients d'analyse et f_n (resp. \tilde{f}_n) le profil fréquentiel correspondant. Soit

$$\theta_1 = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{a_\lambda^2}{f_\lambda^2}, \quad \theta_2 = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} \frac{b_\delta^2}{\tilde{f}_\delta^2}.$$

Alors, les estimateurs définis par,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\theta_1 - \epsilon_1 \theta_2}{1 - \epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \hat{\tilde{\sigma}}^2 = \frac{\theta_2 - \epsilon_2 \theta_1}{1 - \epsilon_1 \epsilon_2} \quad (10.22)$$

avec $\epsilon_1 = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\tilde{\gamma}_\lambda(\Delta)}{f_\lambda^2}$ et $\epsilon_2 = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} \frac{\gamma_\delta(\Lambda)}{\tilde{f}_\delta^2}$, sont convergents et non biaisés.

Démonstration. Pour commencer, les estimateurs pour σ et $\tilde{\sigma}$ sont non biaisés : sous forme matricielle, on a

$$\mathbb{E} \left\{ \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

En résolvant le système linéaire, on voit que les estimateurs $\hat{\sigma}^2$ et $\hat{\tilde{\sigma}}^2$ sont non biaisés.

Afin de montrer la convergence des estimateurs, il reste juste à montrer que la variance s'annule lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini

$$\text{var}\{\hat{\sigma}\} = \frac{\text{var}\{\theta_1\} + \epsilon_1^2 \text{var}\{\theta_2\} - 2\epsilon_1 \text{cov}\{\theta_1, \theta_2\}}{(1 - \epsilon_1 \epsilon_2)^2}.$$

θ_1 (resp. θ_2) est l'estimateur classique pour la moyenne de $\frac{a_\lambda^2}{f_\lambda^2}$, $\lambda \in \Lambda$ (resp. $\frac{b_\delta^2}{f_\delta^2}$, $\delta \in \Delta$). On a alors

$$\text{var}\{\theta_1\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad \text{var}\{\theta_2\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Il reste juste à montrer que $\text{cov}\{\theta_1, \theta_2\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Pour cela, on a besoin de calculer pour $\lambda \in \Lambda$ et $\delta \in \Delta$

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{a_\lambda^2}{f_\lambda^2} \frac{b_\delta^2}{f_\delta^2} \right\} = \sigma^2 \tilde{\sigma}^2 + \sigma^2 \tilde{\sigma}^2 \frac{\gamma_\lambda(\Delta)}{f_\lambda^2} \frac{\tilde{\gamma}_\delta(\Lambda)}{f_\delta^2} + \sigma^4 \frac{\langle u_\delta, v_\lambda \rangle^2}{f_\delta^2} + \tilde{\sigma}^4 \frac{\langle u_\delta, v_\lambda \rangle^2}{f_\lambda^2} + 4\sigma^2 \tilde{\sigma}^2 \langle u_\delta, v_\lambda \rangle^2.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\theta_1, \theta_2\} &= \mathbb{E}\{\theta_1 \theta_2\} - \mathbb{E}\{\theta_1\} \mathbb{E}\{\theta_2\} \\ &= \sigma^2 \tilde{\sigma}^2 + \sigma^2 \tilde{\sigma}^2 \epsilon_1 \epsilon_2 + \sigma^4 \epsilon_2 + \tilde{\sigma}^4 \epsilon_1 \\ &\quad + \frac{4\sigma^2 \tilde{\sigma}^2}{|\Lambda| |\Delta|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\delta \in \Delta} \langle u_\delta, v_\lambda \rangle^2 - (\sigma^2 + \epsilon_1 \tilde{\sigma}^2)(\tilde{\sigma}^2 + \epsilon_2 \sigma^2) \\ &= \frac{4\sigma^2 \tilde{\sigma}^2}{|\Lambda| |\Delta|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\delta \in \Delta} \langle u_\delta, v_\lambda \rangle^2 \leq \frac{4\sigma^2 \tilde{\sigma}^2}{|\Lambda| |\Delta|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\delta=1}^N \langle u_\delta, v_\lambda \rangle^2 = \frac{4\sigma^2 \tilde{\sigma}^2}{|\Delta|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \tag{10.23}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Maintenant que les modèles sont posés et étudiés, le chapitre suivant met en oeuvre des algorithmes d'estimation des paramètres des modèles. En particulier, ces algorithmes seront par la suite exploités pour la décomposition en couches *tonale* + *transitoire* + *bruit* des signaux.

ALGORITHMES D'ESTIMATION

11

Dans ce chapitre, les algorithmes déduits de l'analyse du modèle de la section 10.1.1 sont détaillés. On s'attarde tout d'abord sur l'estimation des cartes de significances : sont décrits un algorithme de seuillage itératif et un algorithme en champ moyen qui pourra aussi être utilisé comme initialisation. L'estimation des coefficients de synthèse, pour laquelle deux méthodes sont proposées, est alors considérée. Dans ces applications pratiques, \mathcal{H} est un espace de dimension finie. On note $N = \dim(\mathcal{H})$ la longueur du signal.

11.1 Algorithmes en champ moyen

Initialement, aucune information sur les cartes de signifiante n'est disponible. L'approximation en champ moyen donne naturellement des estimateurs pour les cartes de significances, qui peuvent être utilisés directement (voir l'application au débruitage en section 12.2), ou comme initialisation pour une approche plus précise. Les deux cartes de significances sont estimées chacune indépendamment.

11.1.1 Modèle de Bernoulli

Il a été montré à la section 10.1.3, et souligné dans la remarque 10.4 que la distribution des coefficients a_n et b_n peut être approchée par un mélange d'un petit nombre de gaussiennes. L'estimation correspondante peut être faite par un algorithme de type Expectation-Maximization (EM) adéquat. Une classification des coefficients d'analyse selon les gaussiennes estimées donne une estimation des cartes de significances.

L'algorithme EM que l'on propose est légèrement modifié pour être capable de traiter en parallèle les coefficients d'analyse renormalisés et les coefficients originaux. Ceci est nécessaire dans le but de prendre le bruit en compte. En effet, comme on peut le voir à l'équation (10.9), dans le cas $k \notin \Lambda$ et $s^2 \gg \tilde{\sigma}^2 \tilde{\gamma}(\Delta)^2$, la distribution gaussienne correspondante au bruit est déformée par la renormalisation : il est alors nécessaire de travailler sur

les coefficients d'analyse originaux pour estimer les paramètres de cette distribution normale. Les aspects théoriques et techniques de cet algorithme EM modifié sont donnés en annexe A.

Selon la remarque 10.6, la classification des coefficients d'analyse est équivalente à un seuillage adaptatif : les coefficients d'analyse dont la valeur absolue est plus grande que le seuil (calculé en fonction des coefficients) sont affectés à la carte de signifiante.

Le choix du nombre de termes (deux ou trois) à estimer dans le mélange de gaussiennes avec l'algorithme EM dépend de l'application visée. Lorsque la distribution des coefficients est estimée avec trois gaussiennes, la troisième correspond au bruit, et les coefficients correspondant ne sont pas pris en compte. Par conséquent, cela produit des cartes de signifiante plus parcimonieuses.

1. Séparation d'un mélange de deux distributions gaussiennes :
 - (a) Une première avec une grande variance correspond aux coefficients d'analyse qui appartiennent à la carte de signifiante, et la seconde avec une petite variance correspond aux autres coefficients. Les coefficients d'analyse renormalisés $\frac{a_n}{f_n}$ sont utilisés (voir l'équation (10.9)).
 - (b) Si le bruit est supposé avoir une variance assez large, la gaussienne avec la grosse variance est estimée sur les coefficients d'analyse renormalisés, tandis que la gaussienne avec la petite variance est estimée sur les coefficients d'analyse originaux (et cette gaussienne correspond au bruit).
2. Séparation d'un mélange de trois distributions gaussiennes. Comparé au premier algorithme, une troisième distribution gaussienne est ajoutée avec une très petite variance. Cette gaussienne correspond au bruit et est estimée sur les coefficients d'analyse originaux. Ce choix donne des cartes plus parcimonieuses.

Une stratégie pratique est d'abord d'essayer de séparer trois distributions gaussiennes et, si les cartes estimées ne contiennent pas assez de coefficients pour décrire le signal assez précisément (par exemple, moins de 0.001% de la taille du signal), on choisit à la place le modèle avec deux gaussiennes.

L'estimation de Bernoulli pour les cartes de signifiante donne des résultats assez satisfaisants pour la carte tonale. Pour la carte de signifiante des transitoires l'estimation avec un modèle de Bernoulli-Hiérarchique donne de meilleurs résultats.

11.1.2 Modèle de Bernoulli-Hiérarchique

Les coefficients c'_k définis à l'équation (10.19) sont utilisés pour obtenir une estimation de la sous-carte transitoire Λ_t , grâce à un test statistique. On a montré à la section 10.2.2 que la distribution des coefficients c'_k qui ne

correspondent pas à la sous-carte transitoire (ce qui sera notre hypothèse nulle) peuvent être approchés par une distribution du χ^2 à deux paramètres. On utilise un test d'adéquation pour notre détection de points aberrants, ce qui permet une détection des coefficients c'_k correspondant aux lignes transitoires. Les deux hypothèses du test sont

$$H_0 : \{c'_1, \dots, c'_{|\Lambda_t|}\} \text{ suivent une loi du } \chi^2$$

$$H_1 : \{c'_1, \dots, c'_{|\Lambda_t|}\} \text{ ne suivent pas une loi } \chi^2$$

Ce test est utilisé dans un algorithme de classification qui procède comme suit. Tant que le test d'adéquation sur les coefficients c'_k est rejeté (l'ensemble ne suit pas une loi du χ^2), le plus gros coefficient est rejeté. Les coefficients rejetés sont ceux qui correspondent aux lignes transitoires.

Le test d'adéquation choisi est le test de Kuiper. Ce dernier est plus approprié que le test de Kolmogorov, puisqu'il donne plus d'importance à la queue de la distribution, où les coefficients c'_k se trouvent. Une description de différents tests ainsi que leurs niveaux de confiance se trouve dans [Ste86]. Le test statistique est fait à un niveau de confiance de 1%. Trois cas doivent être pris en compte

- Le test est accepté dès le début. Aucun coefficient ne correspond à une ligne transitoire. Un ensemble vide est retourné et il n'y a pas de transitoires.
- Le test est toujours rejeté. Tous les coefficients correspondent à une ligne transitoire.
- Le test est rejeté pendant I itérations. C'est la situation la plus courante, où I coefficients correspondent à une ligne transitoire.

À la section 10.2.3 du chapitre précédent, on avait remarqué que les quantités calculées faisaient penser au G-LASSO. On voit ici que les groupes formés par les coefficients sur les lignes temporelles sont sélectionnés, au final, par un seuillage des coefficients c'_k . Cette sélection, ici adaptative, renforce ce rapprochement avec l'estimateur du G-LASSO, qui conserve les groupes dont la norme ℓ_2 est la plus grande.

Une fois la sélection des lignes transitoires effectuée, la sélection des fréquences peut être faite comme dans la section précédente.

11.1.3 Algorithme en champ moyen itératif

L'algorithme en champ moyen peut être itéré sur le résidu après une première passe de l'algorithme complet (avec estimation des coefficients). Cela peut améliorer l'estimation des différentes couches.

11.2 Algorithme itératif de seuillage adaptatif

Les algorithmes décrits en section 11.1 ci-dessus reposent sur une approximation en champ moyen des poids γ , qui sont utilisés pour calculer les seuils

des coefficients. On développe maintenant des algorithmes itératifs qui utilisent les estimées de l'itération précédente plutôt que les estimées en champ moyen. Les estimateurs en champ moyen sont utilisés comme initialisation.

11.2.1 Modèle de Bernoulli

Une première estimation pour les cartes de signifiante donne une estimation pour les poids γ . Après cela, tous les paramètres du modèle peuvent être estimés correctement grâce à la proposition 10.4 de la section 10.3.

Ces estimateurs peuvent être exploités dans un algorithme "Classification Expectation-Maximization" (CEM) [GC92] qui utilise les estimateurs MAP pour X_n et \tilde{X}_n décrit à la proposition 10.3 de la section 10.1.3. Quelques généralités sur l'algorithme CEM sont données à la fin de l'annexe A. L'algorithme peut être résumé comme suit. Après une initialisation pour les cartes de signifiante Λ et Δ et les paramètres p , \tilde{p} , σ et $\tilde{\sigma}$, les quatre séquences suivantes sont itérées :

1. Les poids γ sont calculés.
2. Les cartes sont réestimées en utilisant les estimateurs données à la proposition 10.3.
3. Les paramètres σ et $\tilde{\sigma}$ sont réestimés selon la proposition 10.4.
4. Les paramètres p et \tilde{p} sont réestimés avec $p = \frac{|\Lambda|}{N}$ et $\tilde{p} = \frac{|\Delta|}{N}$.

Il est important de souligner que l'on n'a pas d'estimateur pour la variance s du bruit, qui doit être connue par avance. De façon alternative, s peut être utilisé comme un paramètre de réglage pour l'algorithme, qui contrôle la parcimonie des cartes. Pour l'initialisation, on utilise les estimateurs donnés par les algorithmes décrits en section 11.1.

11.2.2 Modèle Bernoulli-Hierarchique

Un algorithme similaire au précédent a été développé dans le cas du modèle de Bernoulli-Hiérarchique. Le seul changement est l'estimation de la carte de signifiante Λ qui utilise d'abord une estimation du MAP formulée dans la remarque 10.7 en section 10.2.2. La première effectue une classification des coefficients d'analyse en temps, et la seconde exploite le modèle de Bernoulli pour finir la classification.

Le paramètre p_1 est un paramètre de réglage de l'algorithme : plus p_1 est petit, plus la carte de signifiante est parcimonieuse. p_2 est estimé avec l'algorithme EM utilisé pour finir la classification.

11.3 Estimation des coefficients

Après avoir estimé les cartes de signifiante, les coefficients significatifs correspondants doivent être estimés, ce qui revient à un problème de régression.

On suppose que les cartes de signifiante sont correctement estimées. L'estimation des coefficients peut être faite selon deux approches différentes :

- Une approche en champ moyen, dans laquelle les coefficients sont estimés par la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Cette approche ne donne pas forcément une décomposition parcimonieuse.
- Par régression linéaire, qui peut améliorer la parcimonie si désiré.

11.3.1 Approche par régression

Régression L^2

L'estimation des cartes de signifiante donne lieu en pratique à une réduction de dimension. Soit x un signal, et $\hat{\Lambda}$ et $\hat{\delta}$ les estimées des cartes de signifiante. Ces estimateurs génèrent un sous-dictionnaire $\hat{\mathcal{D}} = \{u_\delta, \delta \in \hat{\delta}\} \cup \{v_\lambda, \lambda \in \hat{\Lambda}\}$ du dictionnaire de formes d'ondes complet $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, et on note $\mathcal{H}_{\hat{\mathcal{D}}}$ le sous-espace de \mathcal{H} généré par $\hat{\mathcal{D}}$. Le moyen le plus simple pour estimer les deux couches $x_{\mathcal{U}}$ et $x_{\mathcal{V}}$, est de calculer une projection orthogonale du signal x sur $\mathcal{H}_{\hat{\mathcal{D}}}$

$$\hat{x} = \underset{y \in \mathcal{H}_{\hat{\mathcal{D}}}}{\operatorname{argmin}} \|x - y\|^2 . \quad (11.1)$$

On peut écrire

$$\hat{x} = \hat{x}_{\mathcal{V}} + \hat{x}_{\mathcal{U}} , \quad (11.2)$$

avec

$$\hat{x}_{\mathcal{V}} = \sum_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \hat{\alpha}_\lambda v_\lambda , \quad \hat{x}_{\mathcal{U}} = \sum_{\delta \in \hat{\delta}} \hat{\beta}_\delta u_\delta . \quad (11.3)$$

Les estimateurs $\hat{\alpha}_\lambda$ et $\hat{\beta}_\delta$ pour les coefficients sont obtenus en résolvant le système linéaire

$$\mathbf{G} \left(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{|\hat{\Lambda}|}, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{|\hat{\delta}|} \right)^T = \left(a_1, \dots, a_{|\hat{\Lambda}|}, b_1, \dots, b_{|\hat{\delta}|} \right)^T , \quad (11.4)$$

où \mathbf{G} est la matrice de Gram du dictionnaire $\hat{\mathcal{D}}$. La matrice de Gram \mathbf{G} est inversible à gauche si et seulement si les atomes sélectionnés forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\hat{\mathcal{D}}}$ qu'ils engendrent, ce qui est toujours vrai ici.

Régression parcimonieuse

Afin d'améliorer la parcimonie, la projection orthogonale peut être remplacée par une régression parcimonieuse, en résolvant par exemple :

$$\hat{x} = \underset{y \in \mathcal{H}_{\hat{\mathcal{D}}}}{\operatorname{argmin}} \|x - y\|_2^2 + \lambda \|y\|_1 , \quad (11.5)$$

où λ est un paramètre de réglable qui joue sur la parcimonie. Suivant Chen et Donoho dans [CDS98] pour le basis pursuit denoising, on choisit la valeur par défaut $\lambda = s \sqrt{2 \log(\#\hat{\mathcal{D}})}$. Ce problème de régression parcimonieuse peut être résolu de manière relativement efficace par divers algorithmes itératifs.

11.3.2 Algorithme type Wiener

Lorsque le signal n'est pas assez parcimonieux, et donc que les cartes de signifiante sont aussi trop grosses, l'inversion de la matrice de Gram devient vite coûteuse en temps de calcul. Dans une telle situation, une alternative valable est donnée par une méthode type «Wiener» ou en champ moyen sur les coefficients (et non plus par rapport aux cartes) qui minimise l'erreur quadratique moyenne (conditionnelle à une carte de signifiante)

$$\hat{x} = \underset{y}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_0 \left\{ \|x - y\|^2 \right\}, \quad (11.6)$$

où l'estimateur $y = \sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{\alpha}_\lambda v_\lambda + \sum_{\delta \in \Delta} \hat{\beta}_\delta u_\delta$ est cherché sous la forme spéciale :

$$\hat{\alpha} = t_\lambda \alpha, \quad \hat{\beta} = t_\delta \beta. \quad (11.7)$$

La minimisation peut être effectuée explicitement, et donne des estimateurs pour α_λ et β_δ qui prennent la forme des coefficients d'analyse pondérés judicieusement

$$\hat{\alpha}_\lambda = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \gamma_\lambda(\Delta)\tilde{\sigma}^2 + s^2} a_\lambda, \quad \hat{\beta}_\delta = \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2 + \gamma_\delta(\Lambda)\sigma^2 + s^2} b_\delta. \quad (11.8)$$

Puisque l'estimation des coefficients est postérieure à l'estimation de la carte de signifiante, les estimées pour Δ et Λ sont disponibles, et peuvent être utilisées dans une telle configuration. Ces estimateurs, provenant d'une moyenne sur l'aléa, sont naturellement moins bons que les précédents, mais beaucoup plus faciles et rapides à calculer.

Les modèles hybrides et les algorithmes correspondants ont été testés sur diverses applications «classiques» :

- Décomposition d'un signal en couche pour de la séparation de source aveugle avec un seul capteur ;
- Débruitage
- Codage audio

Pour chaque cas, on rapporte seulement les résultats obtenus avec la version de l'algorithme la mieux adaptée pour le problème considéré.

Les applications étant faites sur des signaux audio, on rappelle quelques termes spécifiques qu'on utilise par la suite. Un signal audio peut être modélisé comme la superposition de trois couches *tonale* + *transitoire* + *bruit* [DT02, DMT04, MT05]. La couche transitoire est bien définie en temps, comme les sons percussifs. La couche transitoire correspond aux notes musicales et vit principalement dans le domaine fréquentiel. Le modèle présenté semble adapté pour représenter ces différentes caractéristiques.

Sauf pour l'application au codage audio, on utilise l'algorithme en champ moyen correspondant au modèle de Bernoulli pour estimer la couche tonale. La couche transitoire est estimée par l'algorithme en champ moyen correspondant au modèle de Bernoulli-Hiérarchique. Comme mentionné à la section 11.1 du chapitre 11 les deux cartes de signifiante sont estimées indépendamment l'une de l'autre. Une fois les cartes de signifiante estimées, on a choisi d'utiliser une régression L^2 pour estimer les coefficients. Bien que cette méthode soit plus lente que les estimations de type Wiener, les estimations sont meilleures. Si l'on veut favoriser la vitesse d'exécution de l'algorithme plutôt que la qualité des résultats, les estimations type Wiener sont préférables.

Les paramètres utilisés pour les algorithmes sont les suivants. Le taux d'échantillonnage est de 44100 Hz. Sauf mention contraire, on utilise deux bases MDCT, l'une avec une fenêtre de longueur 128 échantillons pour modéliser les transitoires¹, et l'autre avec une fenêtre de taille 4096 échantillons

¹Même si la durée correspondante d'environ 3 *ms*, ne semble pas avoir énormément de sens d'un point de vu perceptuel, on obtient de bien meilleurs résultats avec de telles

pour modéliser les transitoires. On a segmenté le signal en signaux d'environ 186 ms pour estimer la couche transitoire. La couche tonale est en générale estimée sur tout le signal. Les profils fréquentiels sont les mêmes pour les deux bases, et ont la forme suivante : $f_{k,\nu} = \frac{1}{1+\frac{\nu}{\nu_0}}$. On a choisi $\nu_0 = 500Hz$.

Les algorithmes ont été développés sous MATLAB et testés sur des PC Linux cadencés à 2x3 GHz avec 2 Go de RAM

Tous les fichiers audio des différents exemples sont sur les sites [url1] et [url2].

12.1 Application à la séparation en deux couches : transitoire + tonale

Une des premières applications de la décomposition d'un signal audio sur une union de bases est la séparation *transitoire + tonale + bruit* [DT02, DMT04, MT05]. Ce problème peut être vu comme un problème de séparation de source avec un seul capteur, les sources étant les trois couches : transitoire, tonale et bruit. La séparation de source aveugle à l'aide d'un seul capteur est une tâche très difficile, et les techniques de séparation habituelles telles que l'analyse en composantes indépendantes (ICA) [Com94], nécessite au moins deux capteurs pour estimer deux sources.

On applique notre approche au problème de séparation d'un signal «tonal» et d'un autre plus impulsif à partir d'un seul mélange. La séparation des deux sources est faite en séparant le signal en deux couches : l'instrument tonal devant être retrouvé par la couche tonale et l'instrument transitoire par la couche transitoire.

Ceci est illustré dans l'exemple suivant : un mélange instantané d'un signal de trompette (le tonal) et d'un signal de castagnettes (le transitoire). Le mélange et la séparation sont visibles sur la figure 12.1, et les fichiers audio sur le site web [url3].

On a choisi trois gaussiennes pour approcher la distribution de la couche tonale avec le modèle de Bernoulli. Pour la couche transitoire, après une sélection en temps par le modèle Bernoulli-Hiérarchique, le même nombre de gaussiennes a été choisi pour la sélection en fréquence. L'algorithme est appliqué trois fois comme suggéré dans la section 11.1.3.

La taille de la fenêtre pour la base MDCT tonale est de 8192 échantillons (environ 186 ms), et la taille de la fenêtre pour la base MDCT transitoire est de 128 échantillons (environ 3 ms). Le signal de mélange a 2^{17} échantillons (environ 3 s de son).

Les principales caractéristiques de l'estimation peuvent être vues sur les représentations des couches estimées. Comme on peut le voir (et l'entendre

fenêtres courtes. La principale raison étant probablement que les deux fenêtres utilisées ont des tailles significativement différentes permettant la discrimination entre les deux couches.

sur les fichiers audio), la séparation est assez satisfaisante. Néanmoins, il apparaît clairement que l'estimation du signal de castagnettes a perdu sa partie «tonale», qui a été «capturée» par l'estimation du signal de trompette et se fait entendre comme des artefacts. Ceci n'est pas vraiment surprenant et correspond au modèle.

Une mesure de performance objective (qui ne fait malheureusement toujours vraiment sens pour les signaux audio) est donnée par le rapport signal à bruit (SNR). Le SNR pour le signal de trompette est de 10.8 dB et de 5.5 dB pour le signal de castagnettes. Le SNR très bas obtenu pour le signal de castagnettes s'explique par la perte de la partie tonale. Cependant, l'information pertinente pour ce signal est contenue dans la couche transitoire qui est très bien estimée.

12.2 Application au débruitage

12.2.1 Bruit blanc gaussien synthétique

Le débruitage est une application naturelle à ce type de décomposition. Le bruit blanc gaussien additif est une évaluation de référence, bien que ça soit une sorte de situation idéale. Dans un tel cas, le bruit n'est pas parcimonieux quelle que soit la base choisie pour décomposer le signal, et on s'attend à la retrouver dans le résidu r de l'équation (9.1).

Le bruit blanc gaussien a été ajouté à différents types de signaux de manière à obtenir un SNR d'environ 6 dB. Tous les signaux ont 2^{17} échantillons (environ 3 s de son). On suit la stratégie proposée dans la section 11.1.1. On essaie d'abord d'estimer la distribution de la couche tonale avec trois gaussiennes et, si la carte de signifiante semble insignifiante, on utilise deux gaussiennes pour l'approximation. Comme on s'attend à ce que la variance du bruit soit assez grande, on travaille en même temps sur les coefficients renormalisés et les coefficients originaux. La même stratégie est utilisée pour estimer la carte transitoire après une présélection dans le domaine temporel par le modèle de Bernoulli-Hiérarchique.

L'algorithme a d'abord été testé sur un signal de xylophone parfaitement adapté pour : le xylophone a des attaques percussives suivies d'une couche tonale bien perceptible. Les résultats sont donnés sur la figure 12.2. La reconstruction *tonal + transitoire* donne un signal débruité qui double le SNR : 12 dB sont obtenus. La couche tonale seule produit un SNR de 10 dB. Bien que la couche transitoire ne contienne pas l'information principale (au sens énergétique), retrouver les attaques permet d'améliorer le résultat final de façon appréciable.

Pour évaluer la qualité des résultats, on les a comparés avec ceux obtenus par trois algorithmes MCMC donnés dans [FDGT06], sur un signal de piano bruité par un bruit blanc gaussien de manière à obtenir un SNR de 10 dB. Les résultats numériques sont donnés sur la figure 12.3.

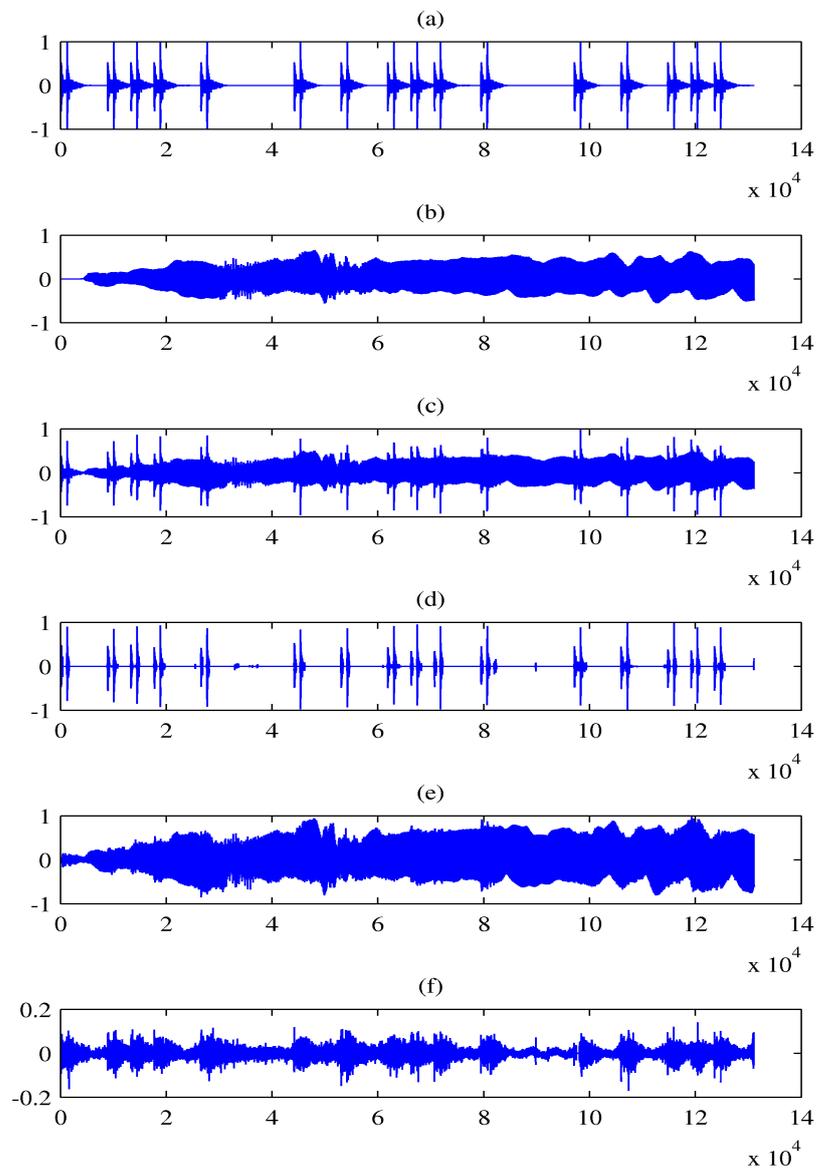


FIG. 12.1 – Séparation aveugle de sources d’un mélange de trompette et de castagnettes. De haut en bas : (a) signal de castagnettes original, (b) signal de trompette original, (c) mélange, (d) estimation du signal de castagnettes, (e) estimation du signal de trompette, (f) résidu.

Les trois algorithmes MCMC, correspondent au modèle suivant :

MCMC1 Les couches tonale et transitoire sont modélisées par un modèle de Bernoulli.

MCMC2 La couche tonale est modélisée à l'aide d'une chaîne de Markov ; la couche transitoire étant modélisée par un modèle de Bernoulli.

MCMC3 Les couches tonale et transitoire sont toutes les deux modélisées à l'aide d'une chaîne de Markov.

Les modèles de chaîne de Markov permettent de préserver des structures en «lignes» comme montré dans [MT05].

En plus de ces trois algorithmes MCMC, [FDGT06] donne les résultats obtenus avec un algorithme EM utilisant un prior de Jeffrey. Ce dernier algorithme est plus proche du notre.

Le comparatif est donné dans la table 12.1 (notre algorithme apparaissant sous le nom d'*algorithme hybride*). En terme de SNR, nos résultats sont de moins bonne qualité que les différents algorithmes MCMC. Ceci n'est pas surprenant, puisque ces approches sont supposées exploiter les distributions *a posteriori* des coefficients de synthèse, tandis que notre approche se contente d'approximations. Cependant, on rappelle que le SNR n'est pas une mesure de distortion complètement satisfaisante pour les signaux audio, et qu'une évaluation supplémentaire doit être faite en écoutant les signaux. À partir des fichiers audio, il apparaît clairement que l'algorithme MCMC3 fonctionne bien mieux que toutes les autres méthodes, au prix d'un coût calculatoire assez élevé. Notre approche donne une restauration des signaux plus plaisante à écouter que les algorithmes MCMC1 et MCMC2. Le dernier produit beaucoup d'artefacts et de bruit «musical», mais notre algorithme perd plus de hautes fréquences. Comparé à l'algorithme «Jeffrey's + EM», nos résultats sont indiscutablement meilleurs, aussi bien en terme de SNR qu'après écoute des fichiers audio.

En terme de temps de calcul, notre algorithme est plus rapide que les algorithmes MCMC : moins de cinq minutes sont nécessaires pour traiter une seconde de signal contre une demie heure pour l'approche Bayésienne + MCMC. L'inversion de la matrice de Gram est de loin l'opération la plus coûteuse, l'estimation à la Wiener donnant des algorithmes plus rapides.

Sur le site [url], on peut écouter les résultats obtenus sur différents types de signaux bruités. Parmi eux, le signal d'une flûte de pan est particulièrement intéressant. Une particularité de ce signal est la présence du souffle, qui peut être vu comme un résidu non parcimonieux dans le modèle (9.1). Comme attendu, le signal restauré donne une flûte de pan sans le souffle qui a été capturé par le résidu.

L'algorithme peut sembler lent comparé à d'autres algorithmes de débruitage classiques, comme le seuillage doux [Don95]. Mais notre algorithme ne demande pas de régler beaucoup de paramètres : seul le choix des deux bases est vraiment important et peut être fait simplement de façon intuitif.

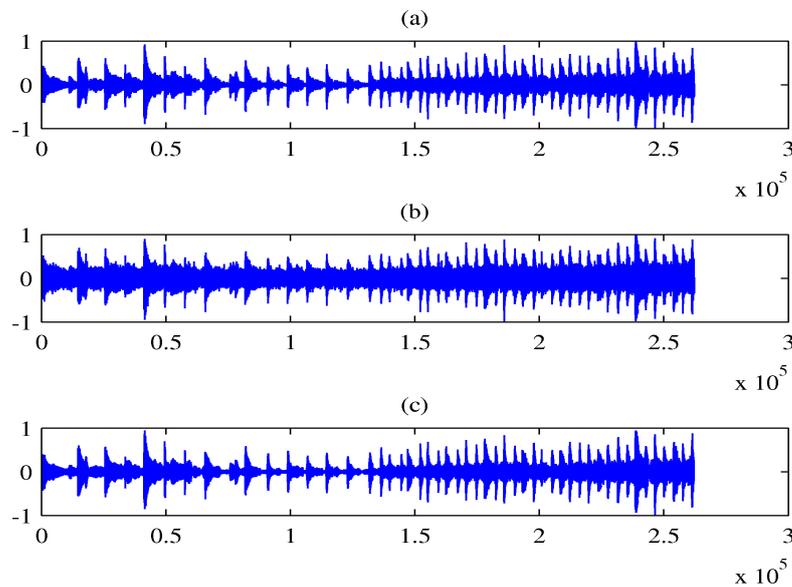


FIG. 12.2 – Signal de xylophone. De haut en bas : (a) signal original, (b) signal bruité, (c) signal restauré.

Algorithmes	SNR
MCMC 1	20.7
MCMC 2	21.6
MCMC 3	21.6
Jeffrey's + EM	15.3
Algorithme Hybrid	18.2

TAB. 12.1 – Comparaison des SNR entre divers algorithmes. Les lignes 1 à 4 sont reprises de [FDGT06].

tive, contrairement au choix d'un seuil. En outre, notre algorithme prend en compte les différentes couches présentes dans le signal comme dans [BCG94].

12.2.2 Comparaison Bernoulli vs Bernoulli-Hiérarchique

Le modèle de Bernoulli-Hiérarchique est comparé au modèle de Bernoulli simple sur le signal de glockenspiel bruité afin d'obtenir un rapport signal à bruit (SNR) de 6 dB. Ce signal se prête particulièrement bien à la décomposition en couches, en raison de l'attaque percussive nette présente au début de chaque note jouée. Le signal ainsi que les différentes couches obtenues après décomposition par chacun des algorithmes sont représentés en figure 12.4. Le modèle étant différent pour la partie transitoire, c'est sur cette partie que la différence ressort. Le modèle de Bernoulli-Hiérarchique permet d'obtenir des attaques bien marquées en temps, avec très peu d'artefacts entre deux notes. Le modèle de Bernoulli récupère de l'information

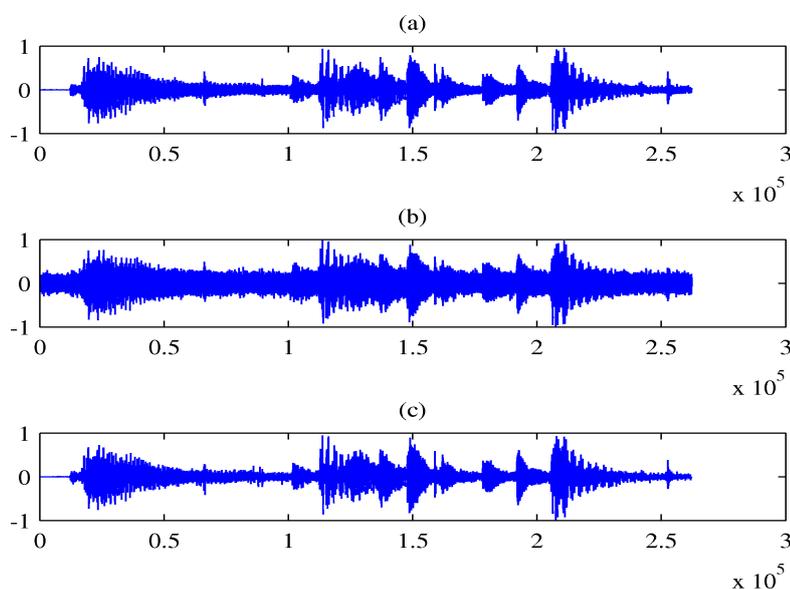


FIG. 12.3 – *Extrait d'un morceau de Norah Jones. De haut en bas : (a) signal original, (b) signal bruité, (c) signal restauré.*

basse-fréquence, et laisse entendre un bruit tout le long du signal transitoire. Ce bruit se retrouve lors de la reconstruction, qui donne un débruitage moins convaincant. En terme de SNR, les résultats sont équivalents : 17.1 dB pour le débruitage par Bernoulli simple contre 17.5 dB pour le débruitage par Bernoulli-Hiérarchique.

12.2.3 Débruitage de signaux provenant de l'INA

L'algorithme a aussi été testé sur deux extraits de signaux issus des archives radiophoniques françaises, gracieusement fournis par l'INA².

Le premier extrait présente un bruit de fond à basse fréquence et des clics. Le deuxième extrait présente un bruit de fond ainsi que de nombreux clics et craquements. On appelle ici « bruit de fond » le bruit qui n'est pas dû aux clics. C'est le bruit qui s'apparente au bruit blanc gaussien du modèle.

De manière générale, les clics restent présents lors de la reconstruction *tonal + transitoire* à la sortie de l'algorithme. Dans l'extrait 1, le bruit basse fréquence donne de gros coefficients lors de la transformation MDCT. Malgré la pondération due aux profils fréquentiels (voir (10.1)), il reste de nombreux artefacts dus à ces coefficients MDCT importants. Le « bruit de fond » est cependant atténué. Pour l'extrait numéro 2, le meilleur résultat semble être celui obtenu lorsque l'algorithme est itéré une seconde fois sur le

²Institut National de l'Audiovisuel. Merci à Vincent Fromont pour les extraits audio. Les résultats et les fichiers audio se trouvent sur le site [url].

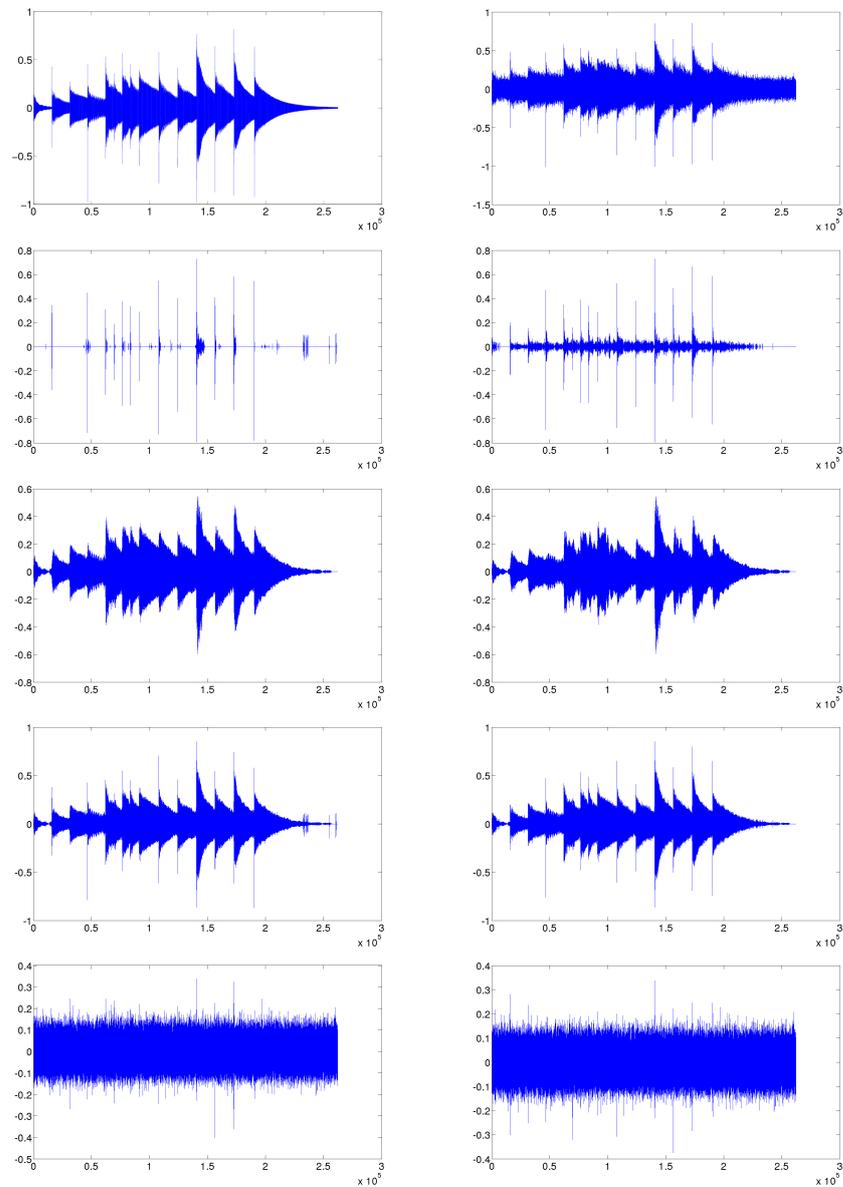


FIG. 12.4 – Débruitage du signal de glockenspiel. Comparaison entre le modèle de Bernoulli-Hiérarchique et le modèle de Bernoulli simple. En haut (1ère ligne) : signal original et signal bruité. De haut en bas, à gauche modèle de Bernoulli-Hiérarchique, à droite modèle de Bernoulli simple : couche transitoire, couche tonale, signal débruité (couche tonale + couche transitoire), résidu.

résidu : la partie tonale récupère en effet de l'information en haute fréquence. En revanche, la partie transitoire ajoute des clics lors de la deuxième itération, plutôt que d'améliorer le résultat. En ajoutant la partie tonale de la deuxième itération, à la partie transitoire de la 1ère, on obtient un résultat

correct, mais présentant un bruit « musical » à la place des clics (les clics recouvrant ce bruit). Sur cet extrait, le « bruit de fond » est en majorité retiré.

Comme l'on peut s'y attendre, les clics sont capturés par la partie transitoire du signal. On pourrait alors imaginer une discrimination entre les différents transitoires pour effectuer un décliquage.

12.3 Application au codage audio

Il a été montré avec succès que la décomposition en trois couches peut être utile pour le codage audio dans [DMT04].

L'algorithme CEM de la section 11.2.1 est utilisé avec différentes valeurs pour la variance s du bruit pour régler la parcimonie des cartes de signifiante. On rapporte ici seulement les résultats numériques obtenus en utilisant le modèle de Bernoulli-Hiérarchique, avec une régression L^2 ou une régression parcimonieuse, et on les compare avec deux autres approches. On utilise toujours le SNR comme critère de comparaison. Les deux approches de référence sont basées sur une décomposition dans une base MDCT, suivie d'un seuillage des coefficients MDCT, ou bien d'un seuillage des coefficients MDCT pondérés par les profils fréquentiels $f_{k,\nu}$. Cette dernière version est motivée par le fait que notre approche utilise des profils fréquentiels, ce qui dégrade le SNR mais produit de meilleures reconstructions d'un point de vue audio. Il est alors plus judicieux de comparer les résultats de notre approche avec ceux obtenus par le seuillage des coefficients MDCT pondérés.

La figure 12.5 montre l'évolution du SNR en fonction du pourcentage de coefficients retenus (*i.e.* la taille des cartes de signifiante). Comme attendu (voir précédemment), le seuillage MDCT donne une bien meilleure courbe de distortion, tandis que le seuillage des coefficients MDCT pondérés est comparable avec les deux versions de notre approche.

La partie droite de la figure 12.5 est un zoom sur les taux élevés de compression. Comme on peut le voir, pour ces taux très élevés (moins de 1% des coefficients sont retenus), notre décomposition hybride est plus performante que le seuillage pondéré.

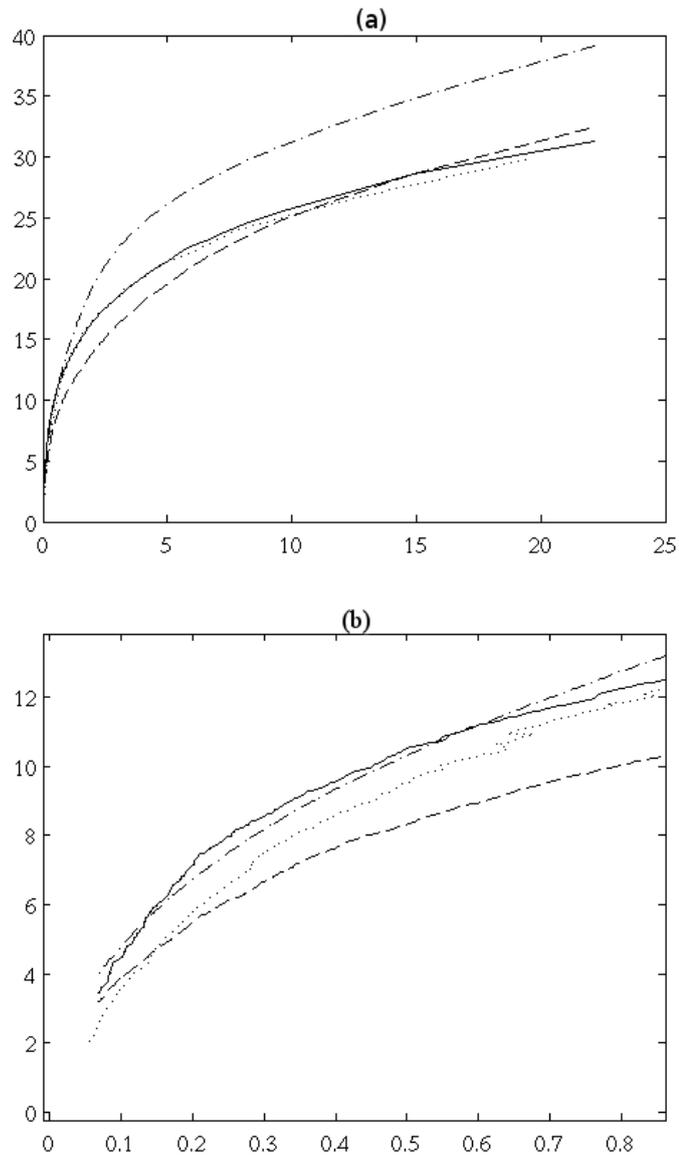


FIG. 12.5 – SNR comme fonction du pourcentage des coefficients non-nuls utilisés pour coder le signal. (a) la courbe entière, (b) zoom. Seuillage dans une base MDCT (tirets-pointillés), Seuillage après pondération des coefficients dans une base MDCT (tirets), décomposition hybride avec une projection L^2 (trait plein), décomposition hybride avec une projection parcimonieuse (FOCUSS) (pointillés).

CONCLUSION PARTIELLE

13

Nous avons décrit et étudié dans cette partie une famille de modèles aléatoires permettant d'obtenir des représentations parcimonieuses pour les signaux (en particulier les signaux audio). L'originalité de cette approche comparée aux autres travaux est de partir d'un modèle explicite du signal capable de reproduire les statistiques observées en pratique sur les signaux, en particulier la distribution des coefficients d'analyse. On s'est concentré sur des modèles relativement simples, mais des extensions à des situations plus complexes (et en particulier, des modèles de carte de significances plus complexes) sont envisageables.

L'étude théorique de ces modèles simples conduit à des algorithmes pratiques qui peuvent être utilisés dans des applications comme le débruitage, ou la décomposition d'un signal en couches. La simplicité des modèles se retrouve dans la simplicité des algorithmes mis en oeuvre. En effet, ces derniers ne demandent pas d'étape d'optimisation élaborée, et demande donc un temps de calcul très raisonnable pour obtenir une estimation des cartes de signifiante (sans avoir porté une attention particulière à l'implémentation des algorithmes).

Les algorithmes de type champ moyen sont équivalents à des algorithmes de seuillage dur adaptatifs, le seuil étant obtenu par la maximisation de la vraisemblance du modèle. Les algorithmes itératifs de seuillage donnent des seuils adaptés à *chaque* coefficients.

Les résultats numériques présentés ici montrent l'efficacité de cette approche pour les signaux audios. Parmi les différents algorithmes présentés, les algorithmes en champ moyen sont les plus efficaces, aussi bien en terme de résultats que d'efficacité de calcul.

Une extension naturel de ces modèles est le cas multicanal. Dans le cas d'un signal multicanal, l'idée est de «partager» les cartes de signifiante entre les différents capteurs. On réécrit alors le modèle (9.1), de façon vectorielle pour rendre compte du caractère multicanal :

$$\vec{x} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \vec{\alpha}_{\lambda} v_{\lambda} + \sum_{\delta \in \Delta} \vec{\beta}_{\delta} u_{\delta} + r . \quad (13.1)$$

On peut alors imaginer d'appliquer le premier niveau du modèle de Bernoulli Hiérarchique pour sélectionner les atomes u_λ et v_δ intervenant dans la décomposition. Mais on peut aussi regarder le modèle de Bernoulli «simple» dans le cas vectoriel. En conservant les mêmes notations, le modèle du signal prend la forme

$$\vec{x} = \sum_{n \in I} X_n \vec{\alpha}_n v_n + \sum_{m \in I} \tilde{X}_m \vec{\beta}_m u_m + r. \quad (13.2)$$

où les X_n et \tilde{X}_m sont les variables indicatrices, suivant une loi de Bernoulli. Pour les coefficients vectoriels $\vec{\alpha}_n$ et $\vec{\beta}_m$, on garde un modèle Gaussien, les lois multinormales étant à M dimensions, où M est le nombre de canaux du signal. Les ddp (conditionnellement à Λ et Δ) s'écrivent alors de manière similaire :

$$\begin{aligned} p_{\vec{\alpha}_n|\Lambda} &= (1 - X_n)\delta_0 + X_n\mathcal{N}(0, \Sigma_n), \\ p_{\vec{\beta}_n|\Delta} &= (1 - \tilde{X}_n)\delta_0 + \tilde{X}_n\mathcal{N}(0, \tilde{\Sigma}_n). \end{aligned}$$

où Σ et $\tilde{\Sigma}$ sont les matrices de covariance des lois multinormales. Ces matrices de covariance peuvent être un moyen d'introduire de l'*a priori* sur le signal multicapteur, en prenant en compte les corrélations qui peuvent intervenir entre les capteurs plus ou moins proches, de la même façon que les profils fréquentiels permettent de prendre en compte la décroissance des coefficients en fréquence.

Dans le cas multicapteur, les calculs du chapitre 10 peuvent se refaire de manière tout à fait similaire. On s'attend donc à pouvoir obtenir des estimateurs par maximum *a posteriori* pour les variables indicatrices X_n et \tilde{X}_n , et donc pouvoir estimer les cartes de signifiante avec un algorithme EM pour estimer le mélange des lois multinormales. Il serait alors intéressant de comparer la performance de l'estimation par un modèle de Bernoulli multicapteur, et le premier niveau du modèle de Bernoulli Hiérarchique.

Les travaux futurs devront aussi regarder des modèles plus réalistes pour les cartes de signifiante, et aussi des structures plus complexes faisant intervenir des correspondances entre les cartes de signifiante. Un premier point serait d'étendre les résultats théoriques de l'analyse à des modèles de cartes de signifiante plus élaborés, comme les modèles de Markov choisis dans [MT05, FG06b]. Une seconde amélioration serait de prendre en compte une dépendance explicite entre les deux cartes de signifiante. En effet, bien que naturel d'un point de vue théorique et algorithmique, l'hypothèse d'indépendance entre les couches tonale et transitoire est une simplification importante : dans le contexte des signaux audio, une note de musique commence par une attaque, et donc un transitoire est attendu avant la composante tonale. Cependant, l'extension du modèle en ce sens demande des algorithmes

d'estimation bien plus compliqués. La question est alors de savoir si l'ajout de cette difficulté donnera des améliorations significatives. Le point de vue de l'auteur est que les approches développées dans cette partie semblent un bon compromis entre le réalisme des modèles pour les signaux et la simplicité des algorithmes d'estimation.

Finalement, il convient de rappeler que des idées similaires peuvent être développées dans différents contextes, comme par exemple la décomposition d'images en couches "cartoon + texture + bruit".

Conclusion générale, annexes et références

Dans cette thèse nous avons présenté deux approches différentes pour l'approximation des signaux.

La première utilise un cadre variationnel et cherche à optimiser une fonction-coût adaptée à l'estimation d'un signal. Le but était de trouver un moyen simple de structurer les coefficients, pour corriger l'hypothèse d'indépendance cachée derrière la norme ℓ_1 utilisée classiquement. Les normes mixtes se sont révélées être un moyen flexible, pouvant être utilisées dans les algorithmes de seuillage itératifs habituels. Les estimateurs calculés dans le cas orthogonal ont pu être modifiés dans le cadre d'une stratégie de seuillage «pur», pour corriger certains défauts des normes mixtes.

La seconde méthode avait pour but de donner un modèle *a priori* sur le signal, afin de reproduire les observations statistiques que l'on peut faire sur les signaux (et en particulier, reproduire la distribution des coefficients d'analyse dans un dictionnaire favorisant la parcimonie). Le premier modèle, de Bernoulli, était volontairement simple, afin de permettre une série de calculs et d'études qui ont permis de construire des algorithmes d'estimation des paramètres du modèle. Le second modèle, construit pour l'estimation des transitoires, permet de structurer les coefficients de manière bien particulière. Là encore, des algorithmes d'estimation assez simples ont pu être construits.

Si ces deux approches sont indépendantes, la section suivante montre comment elles peuvent se compléter.

14.1 Rencontre des deux approches

Comme suggéré dans l'introduction, les deux approches présentées ici peuvent être utilisées de façon complémentaire, dans des cas particuliers.

Le principal inconvénient de l'approche variationnelle est le réglage du paramètre de Lagrange qui permet de régler le «poids» du terme de régularisation par rapport au terme d'attache aux données. L'étude des méthodes variationnelles pénalisées par une norme (mixte ou non) nous montre que la minimisation des fonctionnelles peut être effectuée par des algorithmes de seuillage.

La seconde approche, qui pose un modèle *a priori* sur le signal, aboutit finalement à un seuillage adaptatif. L'idée est alors simplement d'utiliser les seuils calculés par cette dernière approche, dans les algorithmes de seuillages itératifs.

On se place dans le cadre de la seconde partie dont on reprend les notations. C'est à dire que l'on observe un signal $x = s + b$, et l'on choisit un dictionnaire constitué par l'union de deux bases orthonormées $\mathcal{D} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Le but est d'estimer s , en supposant que le signal admette une décomposition en couches *tonale + transitoire*.

On suppose dans un premier temps que le signal suit le modèle de Bernoulli décrit à la section 10.1.1 du chapitre 10 pour les deux couches tonale et transitoire. On va utiliser ce modèle dans l'algorithme BCR décrit en section 5.4.1 du chapitre 5. En effet, si l'on choisit de minimiser une fonctionnelle telle que (5.17), avec deux normes ℓ_1 pour pénaliser les deux couches

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - U\alpha - V\beta\|_2^2 + \mu_1 \|\alpha\|_1 + \mu_2 \|\beta\|_1 ,$$

alors l'algorithme BCR procède à un seuillage doux itératif, avec un seuil fixé.

À chaque itération de l'algorithme, on propose donc de calculer le seuil avec l'algorithme EM issu du modèle de Bernoulli. On obtient alors l'algorithme 14 (en notant S_μ l'opérateur de seuillage doux, de seuil μ).

Les quelques expériences faites avec cet algorithme donne des résultats encourageants, sachant qu'il n'y a plus de paramètres à régler. Il reste à étudier proprement la convergence de cet algorithme (ici, les seuils sont réestimés à chaque itération), et vers quoi il converge.

La même idée peut être utilisée lorsqu'on utilise la norme mixte $\ell_{2,1}$ du G-LASSO. En effet, dans le cadre du modèle de Bernoulli-Hiérarchique, on estime d'abord quelles sont les lignes temporelles de la carte de signifiante transitoire qui sont actives. Cette sélection, faite par une détection d'outliers, revient au final à ne garder que les lignes dont la norme ℓ_2 est la plus grande, et donc à effectuer un seuillage similaire au G-LASSO. Si l'on utilise un modèle de Bernoulli pour la couche tonale et un modèle de Bernoulli-Hiérarchique (où l'on ne garde que le premier niveau de la hiérarchie), on peut alors modifier l'algorithme BCR pour obtenir l'algorithme 15.

Ici encore, la convergence de l'algorithme doit être étudiée proprement. Les quelques expérimentations faites donnent ici aussi des résultats encourageants. Le principal défaut à régler se retrouvant alors dans la détection des outliers, qui peut être plus ou moins sensible.

Dans le cas de la norme $\ell_{1,2}$ du E-LASSO, les modèles étudiés dans la partie 2 ne permettent pas d'estimer automatiquement un seuil adapté. Cependant, l'idée de la sélection par E-LASSO est de conserver les «meilleurs»

Algorithme 14 : Algorithme BCR modifiéInitialisation : soit $\alpha^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ et $\beta^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ **repeat**

$$\mathbf{r}_{\mathbf{U}}^{(i)} = \mathbf{x} - V\alpha_{\mathbf{V}}^{(i)}$$

Estimer le seuil $\mu_1^{(i)}$ en appliquant l'algorithme EM du modèle de Bernoulli à $\mathbf{r}_{\mathbf{U}}^{(i)}$.

Pour tout λ , estimer $\alpha_{\lambda}^{(i+1)}$ par seuillage doux :

$$\alpha_{\lambda}^{(i+1)} = S_{\mu_1^{(i)}}(\langle \mathbf{r}_{\mathbf{U}}^{(i)}, u_{\lambda} \rangle)$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{V}}^{(i)} = \mathbf{x} - U\alpha^{(i+1)}$$

Estimer le seuil $\mu_2^{(i)}$ en appliquant l'algorithme EM du modèle de Bernoulli à $\mathbf{r}_{\mathbf{V}}^{(i)}$.

Pour tout δ , estimer $\beta_{\delta}^{(i+1)}$ par seuillage doux :

$$\beta_{\delta}^{(i+1)} = S_{\mu_1^{(i)}}(\langle \mathbf{r}_{\mathbf{V}}^{(i)}, v_{\delta} \rangle)$$

until *convergence* ;

coefficients pour une ligne (fréquentielle ou temporelle) donnée. On peut alors estimer un seuillage doux dont le seuil est calculé pour chaque ligne (fréquentielle ou temporelle) par un algorithme EM issu d'un modèle de Bernoulli. L'intérêt d'utiliser ce type d'estimation plutôt qu'une estimation global d'un seuil est l'adaptivité à chaque indice (de temps ou de fréquence), plutôt qu'un seuillage global. Cependant, comme on dispose de moins de coefficients pour faire tourner l'algorithme EM, le risque d'une convergence vers un minimum local inadéquat, et donc de procéder à une mauvaise séparation, semble plus élevé.

14.2 Perspectives

Les perspectives de recherche suite à ces travaux sont multiples. Tout d'abord, et à court terme, l'étude précise de la rencontre des deux approches étudiées doit être menée. Ensuite, des travaux supplémentaires peuvent être menés séparément à l'issue de chacune des deux parties, aussi bien d'un point de vue théorique que d'un point de vue pratique.

Au niveau théorique, plusieurs pistes sont envisagées. On a vu dans la première partie que les opérateurs de seuillage généralisés associés aux

Algorithme 15 : Algorithme BCR modifié

Initialisation : soit $\alpha^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ et $\beta^{(0)} \in \mathbb{R}^N$

repeat

$$\mathbf{r}_{\mathbf{U}}^{(i)} = \mathbf{x} - V\alpha_{\mathbf{V}}^{(i)}$$

Estimer le seuil $\mu_1^{(i)}$ en appliquant l'algorithme EM du modèle de Bernoulli à $\mathbf{r}_{\mathbf{U}}^{(i)}$.

Pour tout λ , estimer $\alpha_{\lambda}^{(i+1)}$ par seuillage doux :

$$\alpha_{\lambda}^{(i+1)} = S_{\mu_1^{(i)}}(\langle \mathbf{r}_{\mathbf{U}}^{(i)}, u_{\lambda} \rangle)$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{V}}^{(i)} = \mathbf{x} - U\alpha^{(i+1)}$$

Estimer le paramètre $\mu_2^{(i)}$ en appliquant l'algorithme de détection d'outliers du modèle de Bernoulli-Hiérarchique à $\mathbf{r}_{\mathbf{U}}^{(i)}$.

Pour tout indice temps-fréquence $(k_{\delta}, \nu_{\delta})$, calculer

$\rho_{k_{\delta}, \nu_{\delta}} = \langle \mathbf{r}_{\mathbf{V}}^{(i)}, v_{k_{\delta}, \nu_{\delta}} \rangle$. Puis estimer $\beta_{k_{\delta}, \nu_{\delta}}^{(i+1)}$ par :

$$\beta_{k_{\delta}, \nu_{\delta}}^{(i+1)} = \rho_{k_{\delta}, \nu_{\delta}} \left(1 - \frac{\mu_2^{(i)}}{\|\rho_{k_{\delta}}\|_2} \right)^+$$

until convergence ;

normes mixtes peuvent être modifiés pour corriger certains défauts. Une idée assez naturelle est de les utiliser directement dans les algorithmes de seuillage itératif. Malheureusement, comme ils ne sont pas associés à une fonctionnelle simple (du moins, à première vue), les preuves de convergence ne peuvent pas être utilisées telles quelles. Même si les algorithmes semblent converger en pratique, il serait intéressant de pouvoir montrer cette convergence, et dans quelles conditions on peut l'obtenir. La question qui suit directement est de savoir vers quoi ces algorithmes convergent, et pourquoi le fait d'itérer le seuillage permet d'améliorer les estimations.

Dans la seconde partie, on aimerait pouvoir introduire des modèles *a priori* plus complexes, qui permettent de mieux structurer les coefficients. Cette structure peut intervenir au sein de chacune des couches d'une part, et entre les couches d'autre part. Une piste envisagée, est d'utiliser les modèles d'Ising pour structurer les cartes de signifiante.

Au niveau pratique, l'application à la séparation de mélange convolutif de sources est mené avec Emmanuel Vincent et Rémi Gribonval. Les premiers résultats montrés à la section 7.2 du chapitre 7 sont encourageants

et demandent des expérimentations approfondies (qui sont en cours). Le modèle variationnel peut ensuite être modifié pour essayer de structurer les coefficients de chaque source. On se pose aussi la question de savoir si la séparation en couche peut améliorer la séparation, et si cette dernière doit être faite comme un pré-traitement, ou bien avoir lieu en même temps que la séparation.

D'autres applications sont envisagées, notamment aux signaux MEEG, dont on a eu un aperçu à la section 7.3 du chapitre 7. Des discussions ont lieu dans le cadre d'un groupe de travail avec le pôle 3C de Marseille.

EM - CEM

A

On décrit ici le principe des algorithmes EM et CEM.

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ les données observées, qui sont des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X . La vraisemblance des données, conditionnellement au modèle de paramètre Θ est $\mathcal{L}(\Theta) = \mathbb{P}(X|\Theta) = \prod_i^n f(x_i|\Theta)$, où f représente la densité de probabilité (pdf).

Supposons que les données suivent un modèle de mélange *connu*, après une transformation ϕ des coefficients conditionnellement à leur classe d'appartenance. Notons les classes $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_c\}$ et $\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$ les données observées après la transformation, qui sont des réalisations de la variable aléatoire \tilde{X} définie par : $\tilde{x}_i = \phi_k(x_i)$ if $x_i \in \mathcal{C}_k$, avec $\phi : X \in \mathbb{R}^N \mapsto \tilde{X} = \phi(X) \in \mathbb{R}^N$.

La variable aléatoire X est une observation partielle. Soit Z une variable aléatoire qui correspond aux données manquantes cachées. Cette variable aléatoire donne la classe de l'observation x_i :

$$\begin{cases} z_{i,k} = 1 & \text{si } x_i \in \mathcal{C}_k \\ z_{i,k} = 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Soit $Y = (X, Z)$ les données complétées et $\tilde{Y} = (\tilde{X}, Z)$ les données complétées transformées. Soit $\pi_k = \mathbb{P}\{Z = k\}$, la log-vraisemblance complète $\log \mathcal{L}(\tilde{Y}|\Theta) = \log(P(\tilde{X}, Z|\Theta))$ devient

$$\log \mathcal{L}(\tilde{Y}|\Theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c z_{i,k} \log(\pi_k f(\phi_k(x_i)|\theta_k)) . \quad (\text{A.1})$$

Les $z_{i,k}$, qui représentent la classe de chaque x_i , nous permet d'écrire la log-vraisemblance, qui dépend des données observées x_i . Les transformations ϕ_k correspondent aux classes \mathcal{C}_k , sans connaître la partition. L'étape d'expectation $Q(\Theta|\hat{\Theta}^{(t)}) = \mathbb{E}\{\mathcal{L}(\Theta)|\tilde{X}, \hat{\Theta}^{(t)}\}$ à l'itération i est :

$$Q(\Theta|\hat{\Theta}^{(t)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c \mathbb{E}\{z_{i,k}|\tilde{X}, \hat{\Theta}^{(t)}\} \log(\pi_k f(\phi_k(x_i)|\theta_k)) ,$$

i.e. l'estimation de la moyenne des $z_{i,k}$:

$$\begin{aligned}\hat{z}_{i,k}^{(t)} &= \mathbb{E}\{Z_{i,k} | \tilde{X} = \tilde{x}_i, \hat{\Theta}^{(t)}\} = \mathbb{P}\{Z_{i,k} = 1 | \tilde{X} = \phi_k(x_i), \hat{\Theta}^{(t)}\} \\ &= \frac{\pi_k f(\phi_k(x_i), \theta_k)}{\sum_{q=1}^c \pi_q f(\phi_q(x_i), \theta_q)} .\end{aligned}$$

L'étape de maximisation est obtenue classiquement en résolvant les équations de vraisemblance, qui dépendent du modèle de mélange.

Pour l'approche "*Classification*", les $\hat{z}_{i,k}$ sont classés par Maximum A Posteriori (MAP), et l'étape de maximisation est faite directement par l'estimation des données classées.

Les bases de cosinus locaux, ou ondelettes de Malvar, ont été créées par Coifman, Meyer et Malvar. La création de ce type de base a été motivée par certaines limitations de la transformée de Fourier à fenêtre (où la fenêtre utilisée est en général de type gaussienne, modulée par une exponentielle imaginaire). Nous rappellerons brièvement la transformée de Fourier à fenêtre pour introduire les bases de cosinus locaux.

B.1 Transformée de Fourier à fenêtre

Définition B.1. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ une fenêtre symétrique $g(t) = g(-t)$ de norme $\|g\| = 1$. On module cette fenêtre par une exponentielle complexe de fréquence ξ , et on la translate de u afin d'obtenir l'atome temps-fréquence :

$$g_{(u,\xi)}(t) = g(t - u)e^{i\xi t} \tag{B.1}$$

La transformée de Fourier à fenêtre d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, est :

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{(u,\xi)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t - u)e^{-i\xi t} dt \tag{B.2}$$

Pour certaines applications où il est souhaitable d'avoir une analyse orthogonale, la principale limitation de la transformée de Fourier à fenêtre vient du théorème de Balian-Low :

Théorème B.1. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$, et $g_{(n,k)}(t) = e^{2k\pi it}g(t - n)$. On suppose g telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 dt < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \tag{B.3}$$

Alors la famille $\{g_{n,k}, (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ ne peut pas être une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$

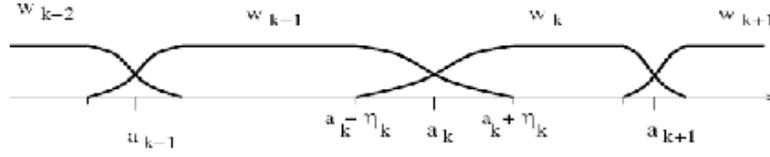


FIG. B.1 – Fenêtres $w_k(t)$ utilisées dans les bases de cosinus locaux

Ce théorème montre qu’une analyse orthogonale ne peut pas être obtenue avec la transformée de Fourier à fenêtre, si la fenêtre g utilisée est différentiable à support compact.

Les bases de cosinus locaux sont une sorte d’analyse de Fourier à fenêtre «améliorée» dans le sens où l’on obtient une base orthogonale, et que la transformée est réelle pour un signal réel.

La section suivante dit comment modifier les fenêtres et comment les moduler afin d’obtenir une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$.

B.2 Définition de la MDCT

Soit $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels, telle que $a_k < a_{k+1}$ et $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} a_k = \pm\infty$. On pose $\{\eta_k\}$ une série de nombres telle que $a_k + \eta_k < a_{k+1} - \eta_{k+1}$.

Soit une fenêtre $w_k(t)$ soumise aux conditions suivantes (voir figure B.1) :

1. $0 \leq w_k(t) \leq 1$, $w_k(t) = 1$ sur $[a_k + \eta_k, a_{k+1} - \eta_{k+1}]$
2. $w_k(t) = 0$ si $t \leq a_k - \eta_k$ ou $t \geq a_{k+1} + \eta_{k+1}$
3. $w_{k-1}(a_k + t) = w_k(a_k - t)$ sur $[a_k - \eta_k, a_k + \eta_k]$,
 $w_k(a_k + t)^2 + w_{k-1}(a_k + t)^2 = 1$ sur $[a_k - \eta_k, a_k + \eta_k]$

On définit :

$$u_{kn}(t) = \sqrt{\frac{2}{l_k}} w_k(t) \cos \left[\frac{\pi}{l_k} \left(n + \frac{1}{2} \right) (t - a_k) \right], \quad k \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.4})$$

avec $l_k = a_{k+1} - a_k$.

Théorème B.2. *La famille $\{u_{kn}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.*

Dans des applications comme le codage MP3 (mais pas le MP3-pro), les fenêtres utilisées sont identiques, ce qui donne les bases MDCT (pour *Modulated Discrete Cosine Transform*). Ce sont ces bases que nous utiliserons dans la suite.

L’avantage de ces bases orthogonales est, comme pour la transformée de Fourier à Fenêtre, de pouvoir choisir la taille de la fenêtre afin de prendre en compte plutôt l’information fréquentielle avec une fenêtre longue, ou plutôt l’information temporelle avec une fenêtre courte.

DÉMONSTRATIONS

C

C.1 Preuve de la proposition 5.1

Les équations variationelles du problème (5.7) sont les suivantes : pour tout g, m , tels que $\alpha_{g,m} \neq 0$ on a :

$$|\alpha_{g,m}| = \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \lambda w_g |\alpha_{g,m}| \|\alpha_g\|_{\mathbf{w}_g,2}^{-1} \right)^+ .$$

On peut alors exprimer λ :

$$\lambda = \frac{(|[\tilde{x}]_{g,m}| - |\alpha_{g,m}|)^+}{w_g |\alpha_{g,m}| \|\alpha_g\|_{\mathbf{w}_g,2}^{-1}} .$$

Puis éliminer λ de l'expression de $|\alpha_{g,m}|$:

$$\begin{aligned} |\alpha_{g,m}| &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \frac{|\tilde{x}_{g,\ell}| - |\alpha_{g,\ell}|}{|\alpha_{g,\ell}|} |\alpha_{g,m}| \right)^+ \\ |\alpha_{g,m}| \left(1 + \frac{(|\tilde{x}_{g,m}| - |\alpha_{g,\ell}|)^+}{|\alpha_{g,\ell}|} \right) &= |\tilde{x}_{g,m}| \\ |\alpha_{g,m}| &= \frac{|\tilde{x}_{g,m}|}{1 + \frac{(|\tilde{x}_{g,\ell}| - |\alpha_{g,\ell}|)^+}{|\alpha_{g,\ell}|}} \\ &= \frac{|\tilde{x}_{g,m}|}{|\tilde{x}_{g,\ell}|} |\alpha_{g,\ell}| \quad \forall \ell \text{ and } |[\Phi^* x]_{g,\ell}| \neq 0 . \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
 |\alpha_{g,m}| &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \frac{\lambda |\alpha_{g,m}| w_g}{\sqrt{\sum_l w_g |\alpha_{g,\ell}|^2}} \right)^+ \\
 &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \frac{\lambda |\alpha_{g,m}| w_g}{\sqrt{\sum_l \left(w_g |\tilde{x}_{g,\ell}|^2 \frac{|\alpha_{g,m}|^2}{|\tilde{x}_{g,m}|^2} \right)}} \right)^+ \\
 &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \frac{\lambda |\alpha_{g,m}| w_g}{\frac{|\alpha_{g,m}|}{|\tilde{x}_{g,m}|} \sqrt{w_g} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_2} \right)^+ \\
 &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \frac{\lambda \sqrt{w_g} (|\tilde{x}_{g,m}|)}{\|\mathbf{x}_g\|_2} \right)^+ \\
 &= |\tilde{x}_{g,m}| \left(1 - \frac{\sqrt{w_g} \lambda}{\|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_2} \right)^+,
 \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

C.2 Preuve de la proposition 5.2 (convergence de l'algorithme de point fixe)

On montre que pour tout g , la suite de vecteurs α_g converge vers un vecteur fixe unique. On note s l'opérateur de seuillage doux qui associe $|\alpha_g^{(m)}|$ à

$$|\alpha_g^{(m+1)}| = s(|\alpha_g^{(m)}|) \tag{C.1}$$

$$= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \lambda w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{(m)}|^{p-1} \|\alpha_g^{(m)}\|_{\mathbf{w}_g;p}^{1-p} \right)^+. \tag{C.2}$$

Pour montrer la proposition, on applique simplement le théorème du point fixe de Picard à s .

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial s(|\boldsymbol{\alpha}_g|)}{\partial |\alpha_{g,m}|} &= \begin{pmatrix} -\lambda w_{g,1} |\alpha_{g,1}|^{p-1} w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-1} (1-p) \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g; p}^{1-2p} \\ \vdots \\ -\lambda (1-p) w_{g,m}^2 |\alpha_{g,m}|^{2p-2} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g; p}^{1-2p} - \lambda (p-1) w_{g,m} |\alpha_{g,1}|^{p-2} \|\alpha_{g,m}\|_{\mathbf{w}_g; p}^{1-p} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= -\lambda w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-1} (1-p) \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g; p}^{1-2p} \begin{pmatrix} w_{g,1} |\alpha_{g,1}|^{p-1} \\ \vdots \\ w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-1} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &\quad - \lambda (p-1) w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-2} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g; p}^{1-p} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Pour trouver une borne supérieure de la norme ℓ_1 de s , on utilise l'inégalité de la moyenne généralisée : soit les quantités suivantes

$$M_p = \left(\frac{1}{\sum_{n=1}^N w_n} \sum_{n=1}^N w_n |\alpha_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $\alpha < \beta$, alors $M_\alpha < M_\beta$ pour tout α et β dans \mathbb{R}^* .

En notant $M_{\mathbf{w}_g} = \sum_{m=1}^M w_{g,m}$, et comme $1 < p < 2$, on peut donner une borne supérieure de la norme ℓ_1 de s :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial s(|\boldsymbol{\alpha}_g|)}{\partial |\alpha_{g,m}|} \right\|_1 &\leq \lambda(p-1) \left(\|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{1-2p} w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-1} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-1}^{p-1} + w_{g,m} |\alpha_{g,m}|^{p-2} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{1-p} \right) \\
&\leq \lambda(p-1) \left(\|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{1-2p} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-1}^{p-1} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-1}^{p-1} + \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2}^{p-2} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{1-p} \right) \\
&\leq \lambda(p-1) \left(M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2}{p}} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{1-2p} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{p-1} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{p-1} + M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2}^{p-2} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2}^{1-p} \right) \\
&\leq \lambda(p-1) \left(M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2}{p}} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p}^{-1} + M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}} \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2}^{-1} \right) \\
&\leq \lambda(p-1) \|\boldsymbol{\alpha}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2}^{-1} \left(M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2}{p} + \frac{2}{p(p-2)}} + M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}} \right) \\
&\leq \lambda(p-1) \|\mathbf{x}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2}^{-1} \left(2M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}} \right) \\
&\leq \lambda(p-1) \max_g (\|\mathbf{x}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2}^{-1}) \left(2M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}} \right) \\
&\leq \lambda(p-1) \frac{1}{\min_g (\|\mathbf{x}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2})} \left(2M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}} \right).
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de la moyenne à la ligne 3.

Ainsi, pour $\lambda < \frac{M_{\mathbf{w}_g}^{\frac{2(p-1)}{p(p-2)}}}{2(p-1)} \min_g (\|\mathbf{x}_g\|_{\mathbf{w}_g;p-2})$, la quantité $\left\| \frac{\partial s(|\boldsymbol{\alpha}_g|)}{\partial |\alpha_{g,m}|} \right\|_1$ est strictement plus petite que 1. Donc l'application s est contractante, ce qui assure la convergence de l'algorithme.

C.3 Preuve de la proposition 5.3

Pour tout g, m , l'équation (5.11) donne

$$|\alpha_{g,m}| = \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \lambda \|W_g \boldsymbol{\alpha}_g\|_1^{q-1} \right)^+.$$

On peut donc exprimer λ :

$$\lambda = \frac{|\tilde{x}_{g,m}| - |\alpha_{g,m}|}{\|W_g \boldsymbol{\alpha}_g\|_1^{q-1}}, \forall g, m$$

et donner l'expression de n'importe quel $|\alpha_{g,m}| \neq 0$ en fonction de n'importe quel $|\alpha_{g,\ell}|$:

$$|\alpha_{g,m}| = |\tilde{x}_{g,m}| - (|\tilde{x}_{g,\ell}| - |\alpha_{g,\ell}|).$$

On a donc, avec $M_{\mathbf{w}_g} = \sum_{\ell:|\alpha_{g,\ell}| \neq 0} w_{g,\ell} = \sum_{\ell:|x_{g,\ell}| > \lambda \|W_g \boldsymbol{\alpha}_g\|_1} w_{g,\ell}$, et $\|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g} = \sum_{\ell:|\alpha_{g,\ell}| \neq 0} w_{g,\ell} |x_{g,\ell}|$

$$\begin{aligned}
 |\alpha_{g,m}| &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \lambda \left(\sum_{\ell} w_{g,\ell} |\alpha_{g,\ell}| \right) \right)^{q-1}{}^+ \\
 &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \lambda \left(\sum_{\ell: |\alpha_{g,\ell}| \neq 0} w_{g,\ell} (|\tilde{x}_{g,\ell}| - |\tilde{x}_{g,m}| + |\alpha_{g,m}|) \right) \right)^{q-1}{}^+ \\
 &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \lambda \left(\left[\sum_{\ell: |\alpha_{g,\ell}| \neq 0} w_{g,\ell} |\tilde{x}_{g,\ell}| \right] - M_{\mathbf{w}_g} (|\tilde{x}_{g,m}| - |\alpha_{g,m}|) \right) \right)^{q-1}{}^+ \\
 &= \left(|\tilde{x}_{g,m}| - \lambda (\|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g} - M_{\mathbf{w}_g} (|\tilde{x}_{g,m}| - |\alpha_{g,m}|)) \right)^{q-1}{}^+ . \quad (\text{C.3})
 \end{aligned}$$

En notant $\xi_g = \lambda \|W_g \boldsymbol{\alpha}_g\|_1$, on doit maintenant déterminer l'ensemble $\{\ell : |\alpha_{g,\ell}| \neq 0\} = \{\ell : |x_{g,\ell}| > \xi_g\}$. Pour cela, pour un g fixé, on classe les $|x_{g,m}|$ (resp. $w_{g,m}$) par ordre décroissant, et l'on note ces coefficients ordonnés $\check{x}_{g,m}$ (resp. $\check{w}_{g,m}$). On doit avoir $\check{x}_{g,M+1} \leq \xi_g < \check{x}_{g,M}$. Alors, d'après (5.11) M est tel que

$$\check{x}_{g,M} > \lambda \left(\sum_{m=1}^M \check{w}_{g,m} (\check{x}_{g,m} - \xi_g) \right)^{q-1} \quad \text{and} \quad \check{x}_{k,M+1} \leq \lambda \left(\sum_{m=1}^{M+1} \check{w}_{g,m} (\check{x}_{g,m} - \xi_g) \right)^{q-1} .$$

Et finalement, M est tel que

$$\check{x}_{g,M} > \lambda \left(\sum_{m=1}^M \check{w}_{g,m} (\check{x}_{g,m} - \check{x}_{g,M}) \right)^{q-1} \quad \text{and} \quad \check{x}_{g,M+1} \leq \lambda \left(\sum_{m=1}^{M+1} \check{w}_{g,m} (\check{x}_{g,m} - \check{x}_{g,M+1}) \right)^{q-1} .$$

Alors, $\|W_g \tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g} = \sum_{m=1}^M \check{w}_{g,m} \check{x}_{g,m}$, et les seuils ξ_g peuvent être trouvés en résolvant sur \mathbb{R}_+ l'équation

$$\xi_g^{\frac{1}{q-1}} + \lambda^{\frac{1}{q-1}} M_{\mathbf{w}_g} \xi_g = \lambda^{\frac{1}{q-1}} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g} .$$

Chacun peut vérifier aisément que cette équation a une solution unique sur \mathbb{R}_+ .

On a alors

$$|\alpha_{g,m}| = (|\tilde{x}_{g,m}| - \xi_g)^+ .$$

Et dans le cas $q = 2$, $\xi_g = \frac{\lambda}{1 + M_{\mathbf{w}_g} \lambda} \|\tilde{\mathbf{x}}_g\|_{\mathbf{w}_g}$.

C.4 Preuve du théorème 5.3

Pour montrer la convergence de la suite des $\alpha^{(m)}$ obtenue par l'algorithme 13, on applique le théorème d'Opial [Opi67], que l'on rappelle ici :

Théorème C.1. *Soit l'application Φ de \mathcal{H} dans \mathcal{H} , qui satisfait les conditions suivantes :*

- i Φ n'est pas expansive : $\forall u, v \in \mathcal{H}, \|\Phi u - \Phi v\| \leq \|u - v\|$,*
- ii Φ est asymptotiquement régulière : $\forall v \in \mathcal{H}, \|\Phi^{n+1}v - \Phi^n v\| \rightarrow 0$,*
- iii L'ensemble \mathcal{E} des points fixe de Φ dans \mathcal{H} n'est pas vide.*

Alors, $\forall v \in \mathcal{H}$, la suite $(\Phi^n v)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un point fixe dans \mathcal{E} .

Soit l'application \mathbf{T} telle que :

$$\mathbf{T}\alpha = \mathbf{S}(C^{-1}[\Phi^* \mathbf{x} + C\alpha - \Phi^* \Phi \alpha]) .$$

Afin d'appliquer le théorème d'Opial à T , il suffit de vérifier les trois hypothèses du théorème précédent. On montre pour cela une série de lemmes.

Lemme C.1. *L'opérateur \mathbf{S} n'est pas expansif, i.e. pour tout $u, v \in \mathcal{H}$,*

$$\|\mathbf{S}u - \mathbf{S}v\| \leq \|u - v\| .$$

Démonstration. La non expansivité vient du fait que \mathbf{S} est définie à partir d'opérateurs de seuillage doux. ■

Lemme C.2. *L'application \mathbf{T} n'est pas expansive.*

Démonstration. Cela vient du fait que l'opérateur \mathbf{S} n'est pas expansif. On a alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}u - \mathbf{T}v\| &\leq \|(I - C^{-1}\Phi^*\Phi)(u - v)\| \\ &\leq \|I - C^{-1}\Phi^*\Phi\| \|u - v\| \\ &\leq \|u - v\| \text{ because } \|\Phi\|^2 < C . \end{aligned}$$

■

La première hypothèse du théorème d'Opial est maintenant vérifiée. Vérifions maintenant que la seconde hypothèse est satisfaite.

Lemme C.3. *$(\Psi(\alpha^{(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\Psi^{sur}(\alpha^{(m+1)}, \alpha^{(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$ sont des suites non croissantes.*

Démonstration. On introduit l'opérateur $L = \sqrt{CI - \Phi^*\Phi}$, de sorte que $C\|\mathbf{h}\|^2 - \|\Phi\mathbf{h}\|^2 = \|L\mathbf{h}\|^2$. Comme $\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}$ est le minimiseur de la fonctionnelle $\Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^{(m)})$,

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}) + \|L(\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)})\|^2 = \Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(m)}) \leq \Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}^{(m)}, \boldsymbol{\alpha}^{(m)}) = \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m)}) .$$

De plus,

$$\Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}^{(m+2)}, \boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}) \leq \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}) \leq \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}) + \|L(\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)})\|^2 = \Psi^{sur}(\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(m)}) .$$

■

Lemme C.4. *La série $\sum_{m=0}^{\infty} \|\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)}\|^2$ est convergente.*

Démonstration. Puisque L est un opérateur strictement positif, on a

$$\sum_{m=0}^M \|\boldsymbol{\alpha}^{m+1} - \boldsymbol{\alpha}^m\|^2 \leq \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^M \|L(\boldsymbol{\alpha}^{m+1} - \boldsymbol{\alpha}^m)\|^2 ,$$

où μ est une borne inférieure strictement positive du spectre de L^*L . Par le lemme C.3,

$$\sum_{m=0}^M \|L(\boldsymbol{\alpha}^{m+1} - \boldsymbol{\alpha}^m)\|^2 \leq \sum_{m=0}^M [\Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m)}) - \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)})] = \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}) - \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(M+1)}) \leq \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}) .$$

Il suit que la série $\sum_{m=0}^{\infty} \|\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)}\|^2$ converge. ■

Par conséquent, on a

Lemme C.5. *L'opérateur T est asymptotiquement régulier, i.e.*

$$\|T^{(m+1)}\boldsymbol{\alpha}^{(0)} - T^{(m)}\boldsymbol{\alpha}^{(0)}\| = \|\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)}\| \rightarrow 0 .$$

L'hypothèse (ii) du théorème d'Opial est vérifiée. Il reste à vérifier la dernière hypothèse.

Lemme C.6. *On peut uniformément borner inférieurement la suite des \mathbf{w} par un réel strictement positif. Alors la suite $\|\boldsymbol{\alpha}^{(m)}\|$ est uniformément bornée en m .*

Démonstration. Grâce au fait que l'on travaille en dimension fine, on peut uniformément borner inférieurement la suite \mathbf{w} par un réel strictement positif (en dimension infinie, cette hypothèse doit être faite). Ainsi on a $w_{g,m} \geq c$, uniformément en (g, m) , avec $c > 0$.

On peut écrire

$$\Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m)}) \leq \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m)}) \leq \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}) ,$$

grace au lemme C.3. Les $\Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(m)})$ sont alors uniformément bornés.

Donc, pour tout i

$$\|\boldsymbol{\alpha}^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i, q_i}^{q_i} \leq \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}) , \quad (\text{C.4})$$

et donc, pour tout g ,

$$\|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i}^{q_i} \leq \Psi(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}) . \quad (\text{C.5})$$

Pour tout i , on peut borner $\|\boldsymbol{\alpha}^{[i](m)}\|_2^2$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\alpha}^{[i](m)}\|_2^2 &\leq \sum_g \left(\sum_m |\alpha_{g,m}^{[i](m)}|^2 \right)^{2-q_i/p_i} \left(\sum_m |\alpha_{g,m}^{[i](m)}|^2 \right)^{q_i/p_i} \\ &\leq \max_g \left(\left(\|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_2 \right)^{2-q_i/p_i} \right) \sum_g \left(\sum_m |\alpha_{g,m}^{[i](m)}|^2 \right)^{q_i/p_i} \\ &\leq c^{-2q_i/p_i} \max_g \left(\left(\|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_2 \right)^{2-q_i/p_i} \right) \\ &\quad \sum_g \left(\sum_m w_{g,m}^{(2-p_i)/p_i} |\alpha_{g,m}^{[i](m)}|^{2-p_i} w_{g,m} |\alpha_{g,m}^{[i](m)}|^{p_i} \right)^{q_i/p_i} \\ &\leq c^{-2q_i/p_i} \max_g \left(\left(\|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_2 \right)^{2-q_i/p_i} \right) \max_g \left(\|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i}^{2-p_i} \right) \|\boldsymbol{\alpha}^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i, q_i}^{q_i} . \end{aligned}$$

En outre, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_2^2 &\leq c^{-2/p_i} \max(w^{(2-p_i)/p_i} |\alpha_{g,m}^{[i](m)}|^{2-p_i}) \|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i}^{p_i} \\ &\leq c^{-2/p_i} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i}^{2-p_i} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i}^{p_i} \\ &= c^{-2/p_i} \|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i}^2 , \end{aligned}$$

et que donc, on a $2 - q_i/p_i \geq 0$

$$\|\boldsymbol{\alpha}^{[i](m)}\|_2^2 \leq c^{-4/p_i} \max_g \left(\|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i}^{2(2-q_i/p_i)} \right) \max_g \left(\|\boldsymbol{\alpha}_g^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i}^{2-p_i} \right) \|\boldsymbol{\alpha}^{[i](m)}\|_{\mathbf{w}, p_i, q_i}^{q_i} ,$$

qui, avec les équations (C.4) et (C.5), nous permet de donner une borne supérieure uniforme pour $\|\boldsymbol{\alpha}^{(m)}\|_2^2$.

Évidemment, la dimension finie nous permet de conclure bien plus rapidement grace à l'équivalence des normes. Mais on a choisi de donner une preuve qui peut être appliquée en dimension infinie. ■

Comme souligné dans [DDDM04], on a

Lemme C.7. *On suppose que l'application T satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème d'Opial. Si une sous-suite de $(T^n v)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement, alors sa limite est un point fixe de T .*

Lemme C.8. *La suite $\alpha^{(m)} = T^m \alpha^{(0)}$, $m = 1, 2, \dots$ converge faiblement, et est un point fixe de T .*

Démonstration. Le lemme C.6 et le théorème de Banach-Alaoglu montrent que T a un point d'accumulation faible. Le lemme C.7 montre que ce point d'accumulation est un point fixe de T . Ainsi, l'ensemble des points fixe de T n'est pas vide. ■

Toutes les hypothèses du théorème d'Opial sont maintenant vérifiées, et l'on peut conclure que la suite des $\alpha^{(m)}$ converge vers un minimum de (5.19).

On veut maintenant montrer que le point fixe obtenu est un minimum de la fonctionnelle (5.18).

On note α^* un point fixe de l'algorithme 13. On a $\Psi^{sur}(\alpha^* + \mathbf{h}; \alpha^*) = \Psi(\alpha^* + \mathbf{h}) + C\|\mathbf{h}\|_2^2 - \|\Phi\mathbf{h}\|_2^2$.

On montre d'abord que, si α est un point critique de $\Psi^{sur}(\alpha, \alpha^{(m)})$, alors

$$\Psi^{sur}(\alpha + \mathbf{h}, \alpha^{(m)}) - \Psi^{sur}(\alpha, \alpha^{(m)}) \geq C\|\mathbf{h}\|_2^2 .$$

Pour ça, on calcule $\partial\Psi^{sur}(\alpha, \mathbf{a})$:

$$\partial\Psi^{sur}(\alpha, \mathbf{a}) = -\Phi^*(x - \Phi\alpha) + 2C(\alpha - \mathbf{a}) - 2\Phi^*(\Phi\alpha - \Phi\mathbf{a}) + \lambda\partial\Psi(\alpha) ,$$

de sorte que l'on peut vérifier

$$\Psi^{sur}(\alpha + \mathbf{h}, \alpha^{(m)}) - \Psi^{sur}(\alpha, \alpha^{(m)}) = \partial\Psi^{sur}(\alpha, \alpha^{(m)})\mathbf{h} + C\|\mathbf{h}\|_2^2 + \lambda\{\Psi(\alpha + \mathbf{h}) - \Psi(\alpha) - \partial\Psi(\alpha)\mathbf{h}\} .$$

Comme α est un point critique, *i.e.* pour tout \mathbf{v} dans $\partial\Psi^{sur}(\alpha, \alpha^{(m)})$ et pour tout \mathbf{h} , on a $\partial\Psi^{sur}(\alpha, \alpha^{(m)})\mathbf{h} = 0$, alors

$$\Psi^{sur}(\alpha + \mathbf{h}, \alpha^{(m)}) - \Psi^{sur}(\alpha, \alpha^{(m)}) = C\|\mathbf{h}\|_2^2 + 2\lambda\{\Psi(\alpha + \mathbf{h}) - \Psi(\alpha) - \partial\Psi(\alpha)\mathbf{h}\} .$$

Par définition du sous-gradient, un élément \mathbf{v} appartient à $\partial\Psi(\alpha)$ si et seulement si pour tout \mathbf{x} $\Psi(\alpha) + \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} - \alpha \rangle \leq \Psi(\mathbf{x})$. En particulier, pour $\mathbf{x} = \alpha + \mathbf{h}$, cela donne pour tout \mathbf{h} et pour tout $\mathbf{v} \in \partial\Psi(\alpha)$

$$\Psi(\alpha) + \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle \leq \Psi(\alpha + \mathbf{h}) \text{ i.e. } 0 \leq \Psi(\alpha + \mathbf{h}) - \Psi(\alpha) - \partial\Psi(\alpha)\mathbf{h} .$$

Finalement

$$\Psi^{sur}(\alpha + \mathbf{h}, \alpha^{(m)}) - \Psi^{sur}(\alpha, \alpha^{(m)}) \geq C\|\mathbf{h}\|_2^2 .$$

Comme $\Psi^{sur}(\alpha^*, \alpha^*) = \Psi(\alpha^*)$ et $\Psi^{sur}(\alpha^* + \mathbf{h}, \alpha^*) = \Psi(\alpha^* + \mathbf{h}) + C\|\mathbf{h}\|_2^2 - \|\Phi\mathbf{h}\|_2^2$, on peut conclure que pour tout \mathbf{h} :

$$\Psi(\alpha^* + \mathbf{h}) \geq \Psi(\alpha^*) + \|\Phi\mathbf{h}\|_2^2 ,$$

ce qui conclut la preuve.

BIBLIOGRAPHIE

- [AS64] Milton ABRAMOWITZ et Irene A. STEGUN : *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing édition, 1964.
- [BCG94] Jonathan BERGER, Ronald R. COIFMAN et Maxim J. GOLDBERG : Removing noise from music using local trigonometric bases and wavelet packets. *J. Audio Eng. Soc.*, 42(10):808–818, 1994.
- [BMFS07] Jérôme BOBIN, Yassir MOUDDEN, Jalal FADILI et Jean-Luc STARCK : Morphological component analysis for sparse multichannel data : Application to inpainting, 2007. Preprint, submitted.
- [BP61] Agnes BENEDEK et Rafael PANZONE : The space l^p with mixed norm. *Duke Mathematical Journal*, 28:301–324, 1961.
- [BS79] Mokhtar S. BAZARAA et C.M. SHETTY : *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*. New York, wiley édition, 1979.
- [BSFM07] Jérôme BOBIN, Jean-Luc STARCK, Jalal FADILI et Yassir MOUDDEN : Sparsity and morphological diversity in blind source separation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(11):2662–2674, November 2007.
- [BST98] Andrew G. BRUCE, Sylvain SARDY et Paul TSENG : Block coordinate relaxation methods for nonparametric signal denoising. *In Proceedings of the SPIE - The International Society for Optical Engineering*, numéro 3391, pages 75–86, 1998.
- [BZ01] P. BOFILL et M. ZIBULEVSKY : Underdetermined blind source separation using sparse representations. *Signal Processing*, 81:2353–2362, 2001.
- [CALL98] Antonin. CHAMBOLLE, Devore Ronald A., Nam-Yong LEE et Bradley J. LUCIER : Nonlinear wavelet image processing : variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage. *IEEE Transaction on Image Processing*, 7:320–353, 1998.

- [CDDY06] Emmanuel CANDÈS, Laurent DEMANET, David DONOHO et Lexing YING : Fast discrete curvelet transforms. *Multiscale Modeling and Simulation*, 5(3):861–899, 2006.
- [CDGO02] Albert COHEN, Ingrid DAUBECHIES, Onur G. GULERYUZ et Michael T. ORCHARD : On the importance of combining wavelet-based nonlinear approximation with coding strategies. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(7):1895–1921, 2002.
- [CDS98] S. Shaobing CHEN, David L. DONOHO et Michael A. SAUNDERS : Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1):33–61, 1998.
- [Com94] Pierre COMON : Independent component analysis, a new concept ? *Signal Processing*, 36(3):287–314, 1994. Special issue on Higher-Order Statistics.
- [CW92] Ronald Raphael COIFMAN et Mladen Victor WICKERHAUSER : Entropy based algorithms for best basis selection. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32:712–718, March 1992.
- [DDDM04] Ingrid DAUBECHIES, Michel DEFRISE et Christine DE MOL : An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 57(11):1413 – 1457, August 2004.
- [DFL07] Ingrid DAUBECHIES, Massimo FORNASIER et L. LORIS : Accelerated projected gradient methods for linear inverse problems with sparsity constraints. *Journal of Fourier Analysis and Application*, 2007. to appear.
- [DM04] Michael DAVIES et Nikos MITIANOUDIS : A simple mixture model for sparse overcomplete ica, 2004.
- [DMT04] Laurent DAUDET, Stéphane MOLLA et Bruno TORRÉSANI : Towards a hybrid audio coder. In Jian Ping LI, éditeur : *International Conference Wavelet analysis and Applications*, pages 13–24, Chongqing, China, 2004.
- [Don95] David L. DONOHO : De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(3):613–627, 1995.
- [DT02] Laurent DAUDET et Bruno TORRÉSANI : Hybrid representations for audiophonic signal encoding. *Signal Processing*, 82(11):1595–1617, 2002. Special issue on Image and Video Coding Beyond Standards.
- [DT06] Laurent DAUDET et Bruno TORRÉSANI : Sparse adaptive representations for musical signals. In Anssi KLAPURI et Manuel DAVY, éditeurs : *Signal Processing Methods for Music Transcription*. Springer, 2006.

-
- [DTDS07] David DONOHO, Yaakov TSAIG, Iddo DRORI et Jean-Luc STARCK : Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit, 2007.
- [EHJT04] B. EFRON, T. HASTIE, I. JOHNSTONE et R. TIBSHIRANI : Least angle regression, 2004.
- [Ela06] Michael ELAD : Why simple shrinkage is still relevant for redundant representations ?, 2006.
- [EMR07] Michael ELAD, Peyman MILANFAR et Ron RUBINSTEIN : Analysis versus synthesis in signal priors, 2007.
- [ESDQ05] Michael ELAD, Jean-Luc STARCK, David L. DONOHO et P QUERRE : Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (mca). *Journal on Applied and Computational Harmonic Analysis*, 19:340–358, November 2005.
- [FDGT06] Cédric FÉVOTTE, Laurent DAUDET, Simon J. GODSILL et Bruno TORRÉSANI : Sparse regression with structured priors : Application to audio denoising. *In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Audio Signal*, Toulouse, France, May 2006.
- [Fei06] Hans Georg FEICHTINGER : Modulation spaces : Looking back and ahead. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 5(3):109–140, 2006.
- [FG06a] Cédric FÉVOTTE et Simon J. GODSILL : A bayesian approach for blind separation of sparse sources, 2006.
- [FG06b] Cédric FÉVOTTE et Simon J. GODSILL : Sparse linear regression in unions of bases via Bayesian variable selection. *IEEE Signal Processing Letters*, 13(7):441–444, 2006.
- [For07] Massimo FORNASIER : Domain decomposition methods for linear inverse problems with sparsity constraints. *Inverse Problems*, 23:2505–2526, 2007.
- [FR08] Massimo FORNASIER et Holger RAUHUT : Recovery algorithm for vector-valued data with joint sparsity constraints. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(2):577–613, 2008.
- [FTDG08] Cédric FÉVOTTE, Bruno TORRÉSANI, Laurent DAUDET et Simon J. GODSILL : Sparse linear regression with structured priors and application to denoising of musical audio. *IEEE Transactions on Audio Speech and Language Processing*, 16(1):174–185, 2008.
- [GC92] Gérard GOVAERT et Gilles CELEUX : A classification em algorithm for clustering and two stochastic versions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 14(3):315–332, 1992.

- [GN03] Remi GIBONVAL et Morten NIELSEN : Sparse decompositions in unions of bases, 2003.
- [GN07] Rémi GRIBONVAL et Morten NIELSEN : Highly sparse representations from dictionaries are unique and independent of the sparseness measure. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 22(3):335–355, May 2007.
- [GRSV07] Rémi GRIBONVAL, Holger RAUHUT, Karin SCHNASS et Pierre VANDERGHEYNST : Atoms of all channels, unite! average case analysis of multi-channel sparse recovery using greedy algorithms, 2007. INRIA technical report PI 1848, submitted.
- [GS00] K. GROCHENIG et S. SAMARAH : Non-linear approximation with local fourier bases. *Constr. Approx.*, 16:317–332, 2000.
- [Gui] Antoine GUITTON : Huber solver versus irls algorithm for quasi l1 inversion. Stanford Exploration Project, Report 103, April 27, 2000, pages 205–266.
- [JT07] Florent JAILLET et Bruno TORRÉSANI : Time-frequency jigsaw puzzle : adaptive multiwindow and multilayered gabor representations, 2007.
- [Kow08] Matthieu KOWALSKI : Sparse regression using mixed norms, 2008.
- [KT05] Matthieu KOWALSKI et Bruno TORRÉSANI : A study of bernoulli and structured random audio models. In Rémi GRIBONVAL, éditeur : *Proceedings of the conference on Signal Processing with Adaptive and Sparse Structured Representations (SPARS'05)*, pages 59–62, Rennes, France, November 2005.
- [KT06] Matthieu KOWALSKI et Bruno TORRÉSANI : A family of random waveform models for audio coding. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Audio Signal*, Toulouse, France, May 2006.
- [KT08a] Matthieu KOWALSKI et Bruno TORRÉSANI : Random models for sparse signals expansion on unions of basis with application to audio signals. *IEEE Transaction On Signal Processing*, 56(8): 3468–3481, août 2008.
- [KT08b] Matthieu KOWALSKI et Bruno TORRÉSANI : Sparsity and persistence : mixed norms provide simple signals models with dependent coefficients. *Signal, Image and Video Processing*, 2008. doi :10.1007/s11760-008-0076-1.
- [KVG08] Matthieu KOWALSKI, Emmanuel VICENT et Rémi GRIBONVAL : Under-determined source separation via mixed-norm regularized minimization. *Proceedings of the European Signal Processing Conference*, 2008.

-
- [Mal98] Stéphane MALLAT : *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- [MT05] Stéphane MOLLA et Bruno TORRÉSANI : An hybrid audio scheme using hidden Markov models of waveforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 18(2):137–166, 2005.
- [MZ93] S. MALLAT et Z. ZHANG : Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41:3397–3415, 1993.
- [Opi67] Z. OPIAL : Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73:591–597, 1967.
- [OPT00] Michael R. OSBORNE, Brett PRESNELL et Berwin A. TURLACH : On the lasso and its dual, 2000.
- [PM07] Gabriel PEYRÉ et Stéphane MALLAT : A review of bandlet methods for geometrical image representation. *Numerical Algorithms*, 44(3):205–234, 2007.
- [PRK93] Y.C. PATI, Ramin REZAIIFAR et P.S. KRISHNAPRASAD : Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. *In Proceedings of the 27 th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, 1993.
- [REC⁺03] Bashkar RAO, Kjersti ENGAN, Shane F. COTTER, Jason PALMER et Kenneth KREUTZ-DELGADO : Subset selection in noise based on diversity measure minimization. *IEEE Transaction On Signal Processing*, 51(3):760–770, March 2003.
- [RKD99] Bashkar RAO et Kenneth KREUTZ-DELGADO : An affine scaling methodology for best basis selection. *IEEE Transaction On Signal Processing*, 47(1):187–200, January 1999.
- [Ryc99] Vyacheslav S. RYCHKOV : On restrictions and extensions of the besov and triebel–lizorkin spaces with respect to lipschitz domains. *Journal of London Mathematical Society*, 60(1):237–257, 1999.
- [SED04] Jean-Luc STARCK, Michael ELAD et David DONOHO : Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(10), 2004.
- [SED05] Jean-Luc STARCK, Michael ELAD et David L. DONOHO : Image decomposition via the combination of sparse representation and a variational approach. *IEEE Transaction on Image Processing*, 14(10):1570–1582, 2005.

- [SGMM08] Marie SZAFRANSKI, Yves GRANDVALET et Pierre MORIZET-MAHOUEAUX : Hierarchical penalization. *In* J.C. PLATT, D. KOLLER, Y. SINGER et S. ROWEIS, éditeurs : *Advances in Neural Information Processing Systems 20*. MIT Press, Cambridge, MA, 2008.
- [SHK06] Daniel STUDER, Ulrich HOFFMAN et Thomas KOENIG : From eeg dependency multichannel matching pursuit to sparse topographic eeg decomposition. *Journal of Neuroscience Methods*, 153(2):261–275, June 2006.
- [SOS05] Salti SAMARAH, S. OBEIDAT et Rania SALMAN : A shur test for weighted mixed-norm spaces. *Analysis Mathematica*, 31:277–289, 2005.
- [SS06] Salti SAMARAH et Rania SALMAN : Local fourier bases and modulation spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 30(4):447–462, 2006.
- [Ste86] Michael A. STEPHENS : Tests based on edf statistics. *In* Ralph B. D’AGOSTINO et Michael A. STEPHENS, éditeurs : *Goodness-of-fit techniques*. Marcel Dekker, Inc, 1986.
- [Tem08] Vladimir N. TEMLYAKOV : Greedy approximation. *Acta Numerica*, 17, 2008.
- [Tes06a] Gerd TESCHKE : Multi-frames representations in linear inverse problems with mixed multi-constraints. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 22(1):43–60, January 2006.
- [Tes06b] Gerd TESCHKE : Multi-frames representations in linear inverse problems with mixed multi-constraints. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 22(1):43–60, January 2006.
- [Tib96] Robert TIBSHIRANI : Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society Serie B*, 58(1):267–288, 1996.
- [TR07] Gerd TESCHKE et Ronny RAMLAU : An iterative algorithm for nonlinear inverse problems with joint sparsity constraints in vector valued regimes and an application to color image inpainting. *Inverse Problems*, 23:1851–1870, 2007.
- [Tro04] Joel A. TROPP : Greed is good. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50(10):2231–2242, October 2004.
- [TSA06] Masahito TOGAMI, Takashi SUMIYOSHI et Akio AMANO : Sound source separation of overcomplete convolutive mixture using generalized sparseness. *In Proc. Int. Workshop on Acoustic Echo and Noise Control (IWAENC)*, 2006.
- [Tse93] Paul TSENG : Dual coordinate ascent methods for non-strictly convex minimization. *Mathematical Programming*, 59:231–247, 1993.

-
- [urla] <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~kowalski/SIViP08.html>.
- [urlb] http://www.cmi.univ-mrs.fr/~kowalski/EUSIPCO08_bss.html.
- [urlc] <http://sassec.gforge.inria.fr/>.
- [urld] <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~kowalski/IEEE07.html>.
- [urle] <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~kowalski/GRETSI07.html>.
- [VGF06] Emmanuel VINCENT, Rémi GRIBONVAL et Cédric FÉVOTTE : Performance measurement in blind audio source separation. *IEEE Transactions on Speech, Audio and Language Processing*, 14(4):1462–1469, July 2006.
- [Vin07] Emmanuel VINCENT : Complex nonconvex l_p norm minimization for underdetermined source separation. *In Proc. Int. Conf. on Independent Component Analysis and Blind Source Separation (ICA)*, pages 430–437, 2007.
- [VK95] Martin VETTERLI et Jelena KOVACEVIĆ : *Wavelets and Sub-band Coding*. Signal Processing Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [YL06] Ming YUAN et Yi LIN : Model selection and estimation in regression with grouped variables. *Journal of the Royal Statistical Society Serie B*, 68(1):49–67, 2006.
- [YR04] O. YILMAZ et S. RICKARD : Blind separation of speech mixtures via time-frequency masking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(7):1830–1847, juillet 2004.
- [ZP01] M. ZIBULEVSKY et B.A. PEARLMUTTER : Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary. *Neural Computation*, 13(4):863–882, 2001.
- [ZRY08] Peng ZHAO, Guilherme ROCHA et Bin YU : The composite absolute penalties family for grouped and hierarchical variable selection. *The Annals of Statistics*, 2008. (à paraître).

Résumé

Deux approches pour la décomposition parcimonieuse des signaux sont étudiées.

L'une utilise des méthodes variationnelles avec une attache aux données L_2 pénalisée par une norme mixte permettant de structurer la parcimonie. Les fonctionnelles sont minimisées par des algorithmes itératifs dont la convergence est prouvée. Les normes mixtes donnent des estimations par des opérateurs de seuillage généralisés, qui ont été modifiés pour les localiser ou introduire de la persistance.

L'autre modélise les signaux comme combinaisons linéaires parcimonieuses d'atomes temps-fréquence choisis dans l'union de deux bases orthonormées, à coefficients aléatoires. La distribution de ces coefficients fait intervenir deux niveaux d'aléa : leur valeur et leur position dans leur espace temps-fréquence. L'étude des coefficients d'analyse permet une estimation des cartes temps-fréquence. La projection du signal sur ces cartes donne une décomposition en deux couches plus un résidu.

Mots-clés : Approximation parcimonieuse ; Seuillage structuré ; Normes mixtes ; modèles hybrides aléatoires ;

Abstract

Title : Signal approximation : variational approach and random models.

A probabilistic model and a variational method are being studied for sparse approximation.

The variational method use a L_2 data term regularized by a mixed norm. These mixed norms are used to structure the sparsity. The resulted functionals can be minimized by iterative algorithms which convergence is proved. These mixed norms give estimates by "generalized thresholding operators". These operators are then modified to localize them or to introduce more persistence.

The probabilistic one uses a model a priori of signals as sparse random series of waveforms, with random coefficients chosen in an union of two orthonormal basis. The pdf of these coefficients involve two levels of randomness : the position in the time-frequency space, and the value. The study of analysis coefficients allows us to estimate the time-frequency maps by classification. The signal is then estimated by an orthogonal projection on these maps, and one obtains a decomposition into two layers and a residual.

Keywords : Sparse approximation ; Structured thresholding ; Mixed norms ; random hybrid models

Laboratoire d'Analyse Topologie Probabilités,
UMR CNRS 6632
CMI, Université de Provence
39, rue F. Joliot-Curie,
13453 Marseille Cedex 13