HAL
open science

Sur quelques aspects riemanniens des structures de contact en dimension trois

Patrick Massot

To cite this version:

Patrick Massot. Sur quelques aspects riemanniens des structures de contact en dimension trois. Mathématiques [math]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2008. Français. NNT : . tel-00347962

HAL Id: tel-00347962

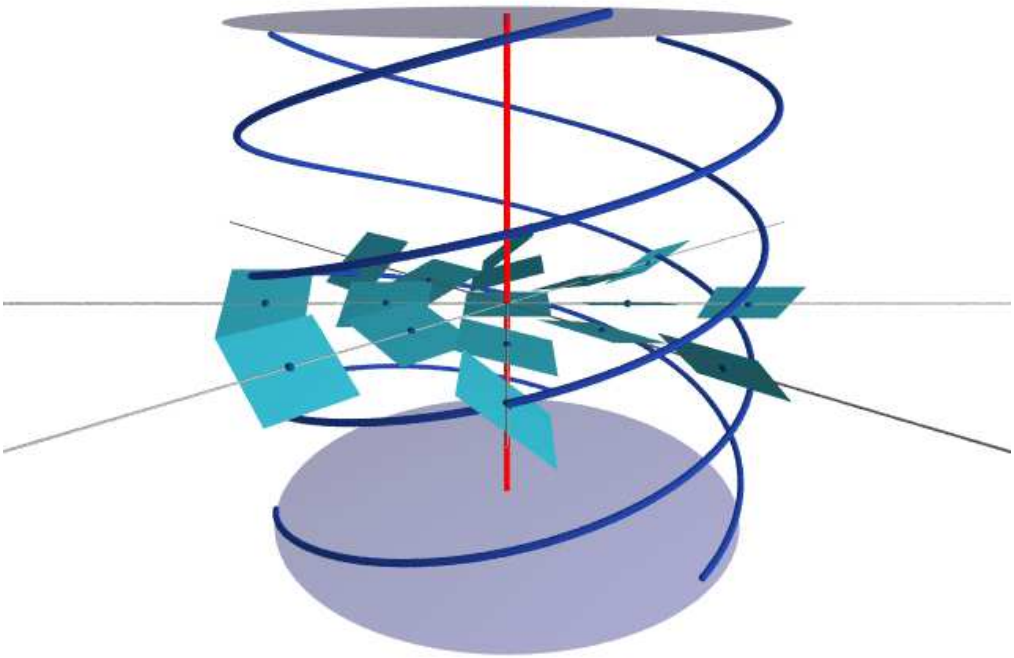
https://theses.hal.science/tel-00347962

Submitted on 17 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS RIEMANNIENNES DES STRUCTURES DE CONTACT EN DIMENSION TROIS



Patrick MASSOT

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Emmanuel Giroux. C'est lui qui m'a fait découvrir la géométrie de contact à l'occasion d'un cours de DEA mémorable et, depuis qu'il a commencé à m'encadrer lors de mon stage de M2 l'année suivante, il m'a toujours fait confiance au-delà de ce qui me semblait raisonnable. En plus de m'avoir posé une première question à la fois abordable et intéressante, il m'a laissé une grande initiative dans mes recherches tout en essayant de m'éloigner des pistes les plus invraisemblables et de soutenir les autres. Il a toujours été disponible pour m'écouter, me faire profiter de sa grande expérience de la géométrie de contact en dimension trois et m'encourager à poursuivre ma réflexion.

Je suis également très reconnaissant envers mes deux rapporteurs, Vincent Colin et Paolo Lisca, qui se sont intéressés à mes travaux bien avant la rédaction de ce manuscrit et avec qui j'ai pu discuter de nouvelles directions de recherche lors de séjours très agréables à Nantes et à Pise . De plus, leurs travaux ont inspiré mes recherches, très directement dans le cas de Paolo Lisca, et c'est un honneur qu'ils aient accepté de consacrer du temps à la lecture de ma thèse.

En remontant l'histoire des idées développées dans la première partie de cette thèse, on croise toujours Étienne Ghys à un moment ou à un autre. Par ailleurs il s'est souvent intéressé à mes recherches en étant très disponible, pour moi et pour beaucoup de jeunes mathématiciens, malgré ses nombreuses occupations. C'est pourquoi je suis très honoré et heureux qu'il ait accepté de faire partie de mon jury.

Depuis l'été précédent le début de cette thèse, je suis régulièrement en contact avec l'enthousiasme de Michel Boileau pour les relations entre la topologie et la géométrie en dimension trois. Cet enthousiasme communicatif m'encourage dans mes recherches et je lui suis d'autant plus reconnaissant d'avoir accepté d'être dans le jury de cette thèse un peu éloignée de ses habitudes mathématiques.

En plus des personnes déjà citées, j'ai eu l'occasion de discuter plus particulièrement les résultats de cette thèse et leurs possibles extensions avec Frédéric Bourgeois, Paolo Ghiggini, Ko Honda et András Stipsicz, je les remercie pour leur attention, leurs commentaires et leurs suggestions.

En dehors de mes voyages autour du monde à la rencontre de ces gens, j'ai pu profiter du cadre de thèse vraiment exceptionnel qu'offre l'UMPA, avec son ambiance à la fois joyeuse et studieuse. À défaut de pouvoir citer tout le monde, je remercie particulièrement mes cobureaux successifs : Benoît, Édouard, Hélène (par intérim), Nicky, Sylvain, Léa et Agnès. Du côté mathématique, j'ai pu discuter de topologie avec Maxime, de

géométrie de contact avec Klaus, de courbes holomorphes avec Jean-Claude et Jean-Yves, de géométrie en général avec Étienne et Ghani ou de n'importe quelles maths avec Bruno. D'une façon plus diffuse et difficile à résumer, Emmanuel, Étienne et Jean-Claude m'ont apporté une certaine idée de ce que sont de belles mathématiques et de la façon dont on peut essayer de les expliquer. Sur le plan administratif, la vie de l'UMPA est facilitée par les secrétaires : Virginia Goncalves, Hélène Schoch puis Magalie Le Borgne, et par son directeur Damien Gaboriau. Je les remercie, ainsi que tous ceux qui sont passés par l'UMPA pendant ces trois ans, pour le cadre idéal qu'ils ont contribué à offrir à cette thèse.

Lors des deux dernières années, j'ai eu la chance de participer au projet ANR Symplexe qui m'a notamment permis d'assister à plusieurs conférences enrichissantes. Je tiens à remercier ses instigateurs, en particulier Patrice Le Calvez et Étienne Ghys (encore !).

Pour finir je remercie Hélène et Élisabeth d'avoir relu cette thèse et enfin je remercie ma famille, en particulier Élisabeth et Cyrille, pour le soutien et l'équilibre indispensable apportés pendant ces trois années et longtemps avant.

Introduction

Cette thèse aborde l'étude de quelques propriétés riemanniennes des structures de contact en dimension trois et de leurs interactions avec la topologie de ces structures. Dans la première partie on décrit diverses notions de courbure de champs de plans sur des variétés riemanniennes de dimension trois en comparant plusieurs approches préexistantes mais souvent mal connues. Dans la deuxième partie on présente les techniques topologiques d'étude des structures de contact en dimension trois. Enfin la troisième partie, qui rassemble l'essentiel des résultats nouveaux de cette thèse, est une étude des structures de contact géodésibles en dimension trois à l'aide des outils présentés dans la deuxième partie.

Présentation des acteurs

Avant de décrire les résultats obtenus on rappelle brièvement quelques définitions et résultats de base et surtout on présente une liste d'exemples naturels et leurs liens avec la géométrie riemannienne. Ces exemples reviendront périodiquement dans ce texte. Le lecteur impatient peut se rendre directement page 19 où commence la description du contenu de cette thèse.

Structures de contact

Dans toute la suite les variétés sont de dimension trois. Un champ de plans sur une variété n'a pas de surfaces intégrales en général mais il a toujours des courbes intégrales passant par tout point avec n'importe quelle direction dans le champ de plans. On dit que de telles courbes sont legendriennes et on définit de façon analogue les feuilletages et les champs de vecteurs legendriens. Si $\mathcal{L}$ est un feuilletage legendrien (local) orienté d'un champ de plans ξ sur une variété M orientée alors, au voisinage de tout point, le

quotient $M/\mathcal{L}$ est une surface lisse orientée et la projection π une submersion. On dit que ξ tourne positivement ou négativement le long de $\mathcal{L}$ si le long de toute feuille de $\mathcal{L}$ le champ de droites $\pi_*\xi$ tourne négativement ou positivement respectivement.

Dans la suite tous les champs de plans seront coorientés sauf mention explicite du contraire et on dira qu'un champ de plans est le noyau d'une 1–forme si ce noyau est ξ avec sa coorientation. Les difféomorphismes considérés préserveront tous l'orientation.

Une structure de contact positive sur une variété orientée est un champ de plans qui vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

(C_1) au voisinage de tout point, ξ tourne positivement le long de tout feuilletage legendrien

(C_2) au voisinage de tout point, ξ tourne positivement le long d'un feuilletage legendrien

(C_3) pour tout repère mobile local direct (X, Y) de ξ, le champ $[X, Y]$ est négativement transversal à ξ

(C_4) ξ est le noyau d'une 1–forme α vérifiant $\alpha \wedge d\alpha > 0$

(C_5) ξ est le noyau d'une 1–forme α qui induit sur ξ une forme symplectique positive

(C_6) le champ de plans ξ est localement isomorphe au noyau de $dz - ydx$ sur $\mathbb{R}^3$ (représenté par la figure 1)

(C_7) le champ de plans ξ est localement isomorphe au noyau de $dz + r^2 d\theta$ sur $\mathbb{R}^3$ muni de coordonnées cylindriques (représenté par la figure 2)

(C_8) le champ de plans ξ est localement isomorphe au noyau de $\cos(z)dx - \sin(z)dy$ sur $\mathbb{R}^3$ (représenté par la figure 3).

Une structure de contact négative est un champ de plans qui vérifie ces conditions si on change l'orientation de V.

Commentons brièvement l'équivalence des trois modèles locaux listés dans les propriétés C_6, C_7 et C_8. On peut trouver des formules explicites de difféomorphismes reliant ces modèles mais il est aussi instructif – et moins courant – de discuter où les éléments les plus visibles des deux derniers modèles se retrouvent dans le premier. L'étoile de la figure 2 peut être tordue comme en haut de la figure 4 pour rentrer dans la figure 1 comme le montre le bas de la figure 4 qui montre successivement trois étages de la figure 1. Le feuilletage legendrien de la figure 3 est peut-être plus difficile à voir. Le difféomorphisme reliant ce modèle au premier particularise une des feuilles qui est envoyée sur l'axe (Ox) et les autres feuilles tournent en hélice autour de celle-là. La figure 5 montre la feuille spéciale entourée de deux feuilles « génériques ».

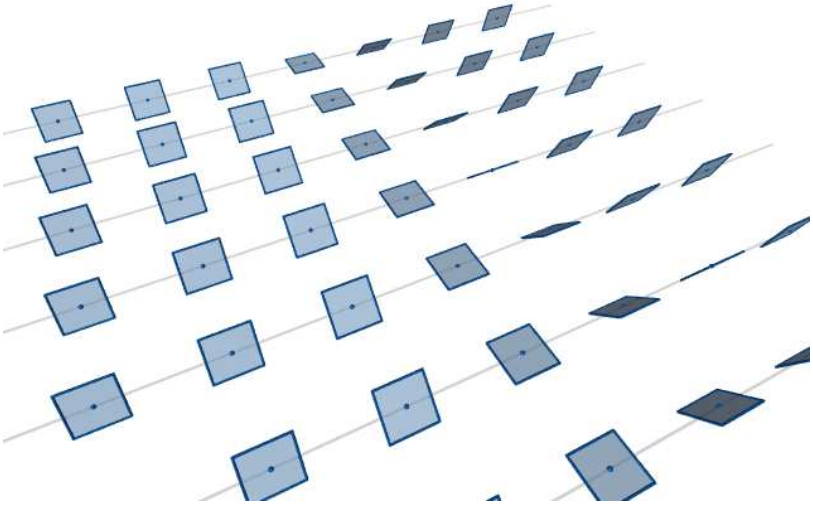


FIG. 1 – Structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$, premier aspect

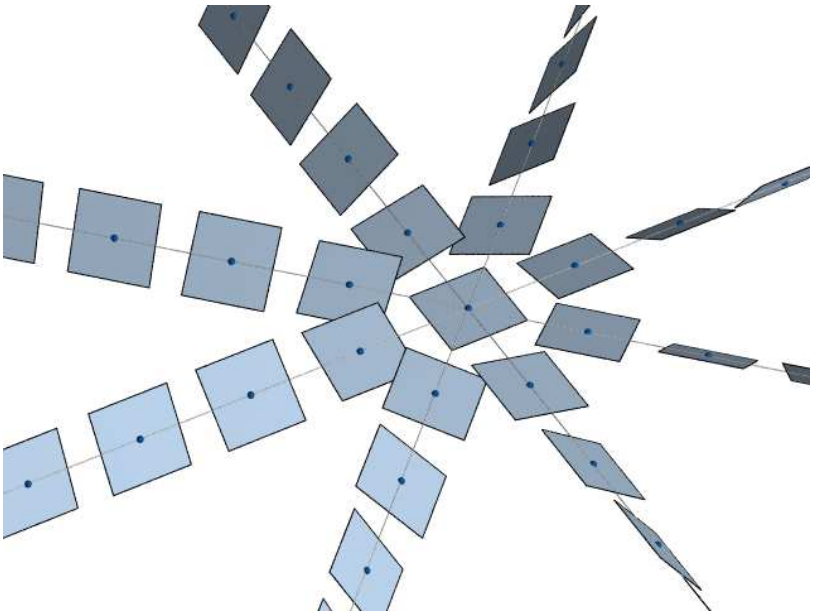


FIG. 2 – Structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$, deuxième aspect

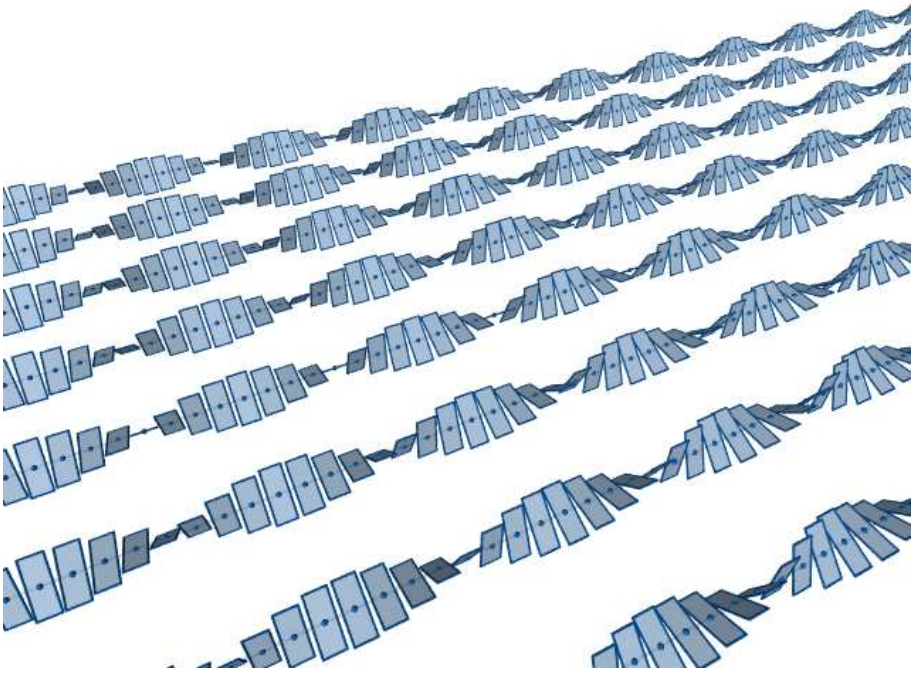


FIG. 3 – Structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$, troisième aspect

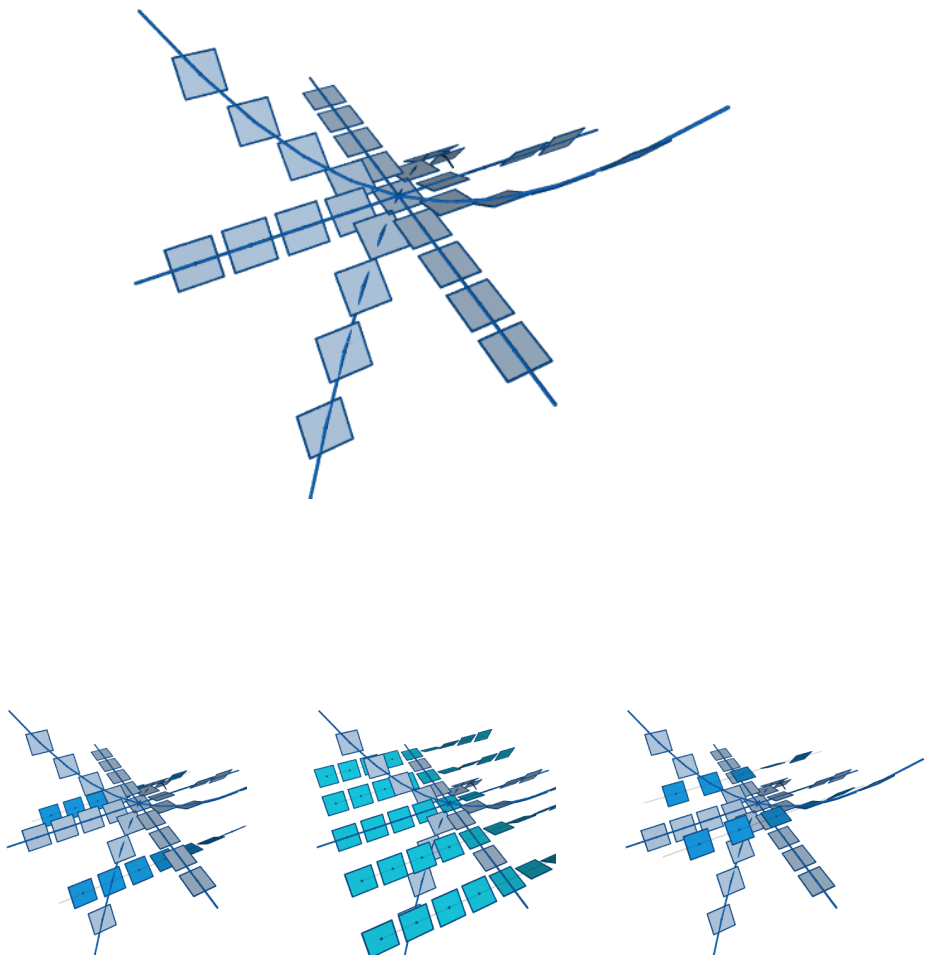


FIG. 4 – Lien entre les deux premiers aspects de la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$

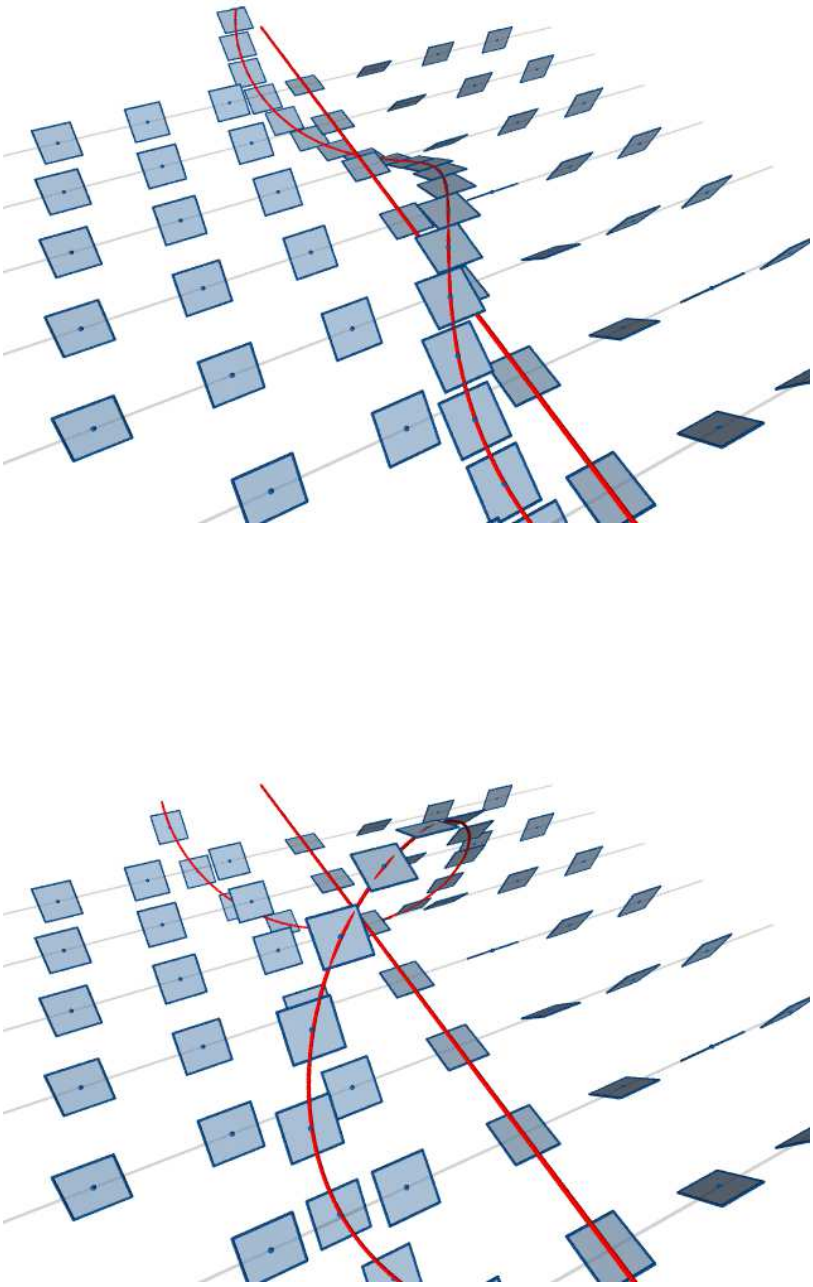


FIG. 5 – Lien entre le premier et le troisième aspect de la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$

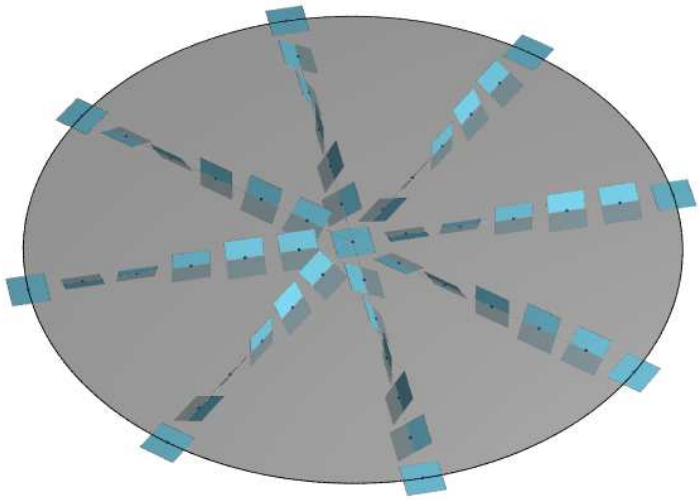


FIG. 6 – Disque vrillé

Les trois modèles discutés mettent l'accent sur des propriétés locales différentes des structures de contact. Le premier est celui qui est le plus directement relié à la propriété C_1 de rotation autour des feuilletages legendriens. Le deuxième met en avant à la fois une courbe transversale à la structure de contact et l'existence de courbes legendriennes partant dans toutes les directions en un point donné. Le troisième – ou plutôt son quotient par un sous-groupe des translations parallèles au feuilletage – fournit un modèle local pour les courbes legendriennes. Dans ce modèle on peut ajuster (en variant le sous-groupe) le nombre de tours que fait la structure de contact le long d'une feuille par rapport aux autres feuilles. L'opposé de ce nombre est appelé enroulement de la structure de contact pour ce feuilletage par cercles, il s'agit d'une notion qui jouera un rôle crucial dans la troisième partie de cette thèse.

Lorsqu'on ne mesure plus le nombre de tours que fait une structure de contact le long d'un cercle legendrien par rapport à des cercles legendriens voisins mais par rapport à une surface on peut le rendre nul comme sur la figure 6 où la surface choisie est un disque.

Cependant le théorème de Bennequin [Ben83] assure que ce dessin ne peut pas être inclus par difféomorphisme dans les figures 1, 2 ou 3 : on dit que la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$ est *tendue* contrairement à celle de la figure 6 qui est *vrillée* .

Dans toute cette thèse on appelle isotopie un chemin de difféomorphismes d'une variété dont le départ est l'identité. Si $\varphi = (\varphi_t)_t$ est un tel chemin et ξ est une structure de contact alors $t \mapsto \varphi_t^* \xi$ est un chemin de structures de contact, on dit qu'il provient de l'isotopie φ.

Théorème (Gray) *Sur une variété compacte sans bord, tout chemin de structures de contact provient d'une isotopie.*

Bien que ce théorème et sa démonstration soient bien connus, cette dernière n'est pas souvent accompagnée d'un dessin ni même d'une explication géométrique, on va donc combler cette lacune en profitant d'explications fournies par E. Giroux.

Ce théorème provient en droite ligne de la condition de rotation des structures de contact autour des champs de vecteurs legendriens et de la figure 2 représentant la structure de contact d'équation $dz + r^2 d\theta$ qui montre des courbes legendriennes partant dans toutes les directions et le comportement de la structure de contact autour de ces courbes. Soit $(\xi_t)_t$ un chemin de structures de contact. On veut construire un champ de vecteurs X_t générant une isotopie dont provient ce chemin (la compacité et l'absence de bord de la variété assurent que X_t fournit bien une isotopie). À tout instant t et au voisinage de tout point x, la structure de contact $\xi_t = \ker \alpha_t$ est isomorphe à l'exemple de la figure 2. Si le plan $\xi_{t+\varepsilon}$ coïncide avec ξ_t alors il n'y a rien à faire et sinon il l'intersecte transversalement le long d'une droite $d_{t,\varepsilon}$ qui sélectionne une direction radiale le long de laquelle ξ_t tourne d'un côté ou de l'autre selon le sens de parcours. On peut donc pousser ξ_t le long d'un champ de vecteurs dans $d_{t,\varepsilon}$ jusqu'à arriver à $\xi_{t+\varepsilon}$, voir la figure 7. Calculons cette direction $d_{t,\varepsilon}$:

$$d_{t,\varepsilon} = \{v \mid \alpha_{t+\varepsilon}(v) = \alpha_t(v) = 0\} = \{v \in \xi_t \mid \tfrac{1}{\varepsilon}(\alpha_{t+\varepsilon} - \alpha_t)(v) = 0\}$$

ce qui, en faisant tendre ε vers zéro, donne la direction $d_t = \xi_t \cap \ker(\dot{\alpha}_t)$.

La condition de contact C_5 assure que $(d\alpha_t)_{|\xi_t}$ met en bijection les champs de vecteurs legendriens et les 1–formes sur ξ donc le champ X_t est de direction d_t si et seulement si il vérifie $\iota_{X_t} d\alpha_t = f_t \dot{\alpha}_t$ sur ξ_t pour une certaine fonction f_t. Un calcul bien connu, voir par exemple [Gei08], assure que le bon choix est $f_t \equiv -1$.

Exemples fondamentaux de structures de contact

On présente maintenant quelques exemples classiques de structures de contact et surtout leurs liens avec la géométrie riemannienne. Le lien qui sera de loin le plus étudié dans ce texte est le suivant : un champ de plans est dit totalement géodésique pour une métrique riemannienne donnée si toute géodésique qui part tangente au champ de plans le reste à jamais.

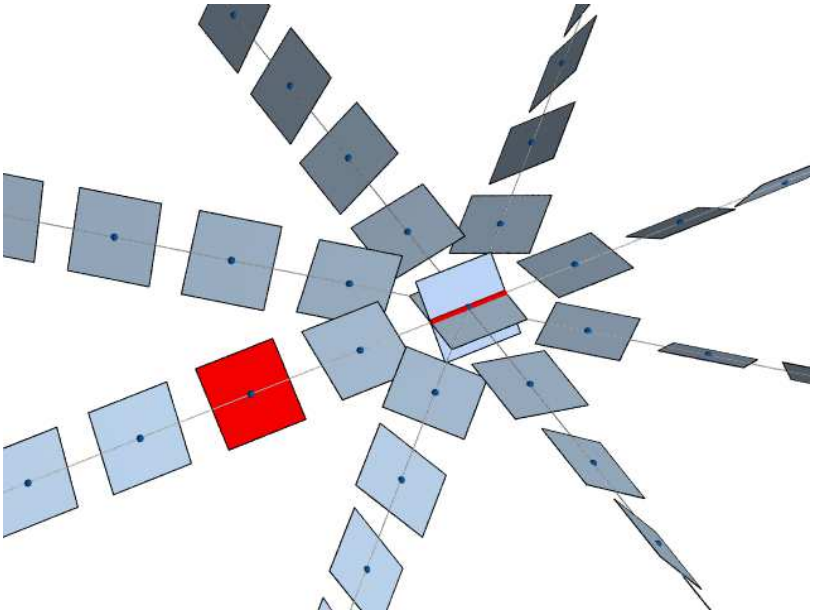


FIG. 7 – Démonstration du théorème de Gray

Le fibré des éléments de contact

Soit S une surface et $\pi\colon\ ST^*S \to S$ le fibré des rayons du fibré cotangent de S. Les éléments de ST^*S correspondent aux droites coorientées de TS. La structure de contact canonique ξ_S sur ST^*S est définie au point d comme l'image inverse par la différentielle de π de la droite coorientée d. La figure 8 montre une portion de surface S en bas et la portion correspondante de ST^*S au-dessus en identifiant haut et bas. Le champ de plans ξ_S est clairement tangent aux fibres de ST^*S et vérifie la propriété C_2 donc est une structure de contact. Si S est orientée alors ST^*S possède une orientation canonique pour laquelle ξ_S est négative. Cet exemple permet en fait de comprendre toutes les structures de contact tangentes aux fibres d'un fibré en cercles au-dessus d'une surface comme expliqué dans la proposition 3.18. Cette compréhension sera très utilisée dans la troisième partie de ce travail.

La restriction λ_S de la forme de Liouville sur T^*S à ST^*S fournit une équation canonique de ξ_S. Toute métrique riemannienne sur S permet de transporter ξ_S et son équation sur le fibré STS des rayons tangents à S. Le flot de Reeb de λ_S, c'est-à-dire le flot de l'unique champ de vecteurs R vérifiant $\lambda_S(R) = 1$ et $\iota_R d\lambda_S = 0$, est alors envoyé sur le flot géodésique, voir par exemple [Gei08][théorème 1.5.2]. Lorsque S

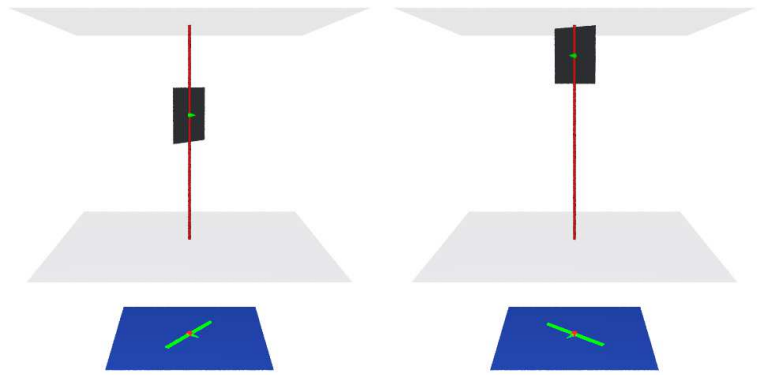


FIG. 8 – Structure de contact canonique sur le fibré des éléments de contact coorientés

est une surface hyperbolique ce flot de Reeb est d'Anosov et il existe une métrique lorentzienne canonique sur STS pour laquelle la structure de contact image de ξ_S est totalement géodésique.

Dans le cas général, il existe sur ST^*S une métrique riemannienne non canonique pour laquelle ξ_S est totalement géodésique. Cela découle de la propriété C_2 qui assure qu'on peut rendre ξ_S transversale aux fibres de ST^*S en la poussant dans la direction d'un champ de vecteurs legendrien transversal aux fibres et de la proposition 1.19.

La connexion de Levi-Civita

Soit (S, g) une surface munie d'une métrique riemannienne, (e_1, e_2) un repère mobile sur S, ω_1^2 sa forme de connexion et Ω_1^2 la forme de courbure associée. On considère l'identification

$$\begin{pmatrix} S \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \to & STS \\ (s, \varphi) & \mapsto & \cos(\varphi)e_1(s) + \sin(\varphi)e_2(s) \end{pmatrix}.$$

La connexion de Levi-Civita vue comme champ de plans sur STS est le noyau de la 1–forme $\alpha = d\varphi + \omega_1^2$. Cette 1–forme vérifie $\alpha \wedge d\alpha = d\varphi \wedge \Omega_1^2$. En particulier la connexion de Levi-Civita est une structure de contact positive (resp. négative) si et seulement si la courbure de S est partout strictement positive (resp. négative).

Les groupes de Lie de dimension trois

Soit G un groupe de Lie orienté de dimension trois dont l'algèbre de Lie admet une base directe (u_1, u_2, u_3) avec

$$[u_2, u_3] = -au_1, \quad [u_3, u_1] = -bu_2, \quad [u_1, u_2] = -cu_3.$$

La base duale $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ où les α_i sont vus comme 1–formes invariantes (à gauche) sur G vérifie

$$d\alpha_1 = a\,\alpha_2 \wedge \alpha_3, \quad d\alpha_2 = b\,\alpha_3 \wedge \alpha_1, \quad d\alpha_3 = c\,\alpha_1 \wedge \alpha_2$$

et pour toute 1–forme invariante $\alpha = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$

$$\alpha \wedge d\alpha = (ax^2 + by^2 + cz^2)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3.$$

Une telle 1–forme définit un champ de plans intégrable sur G si et seulement si $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, sinon elle définit une structure de contact de même signe que $ax^2 + by^2 + cz^2$. Quelles que soient les valeurs de a, b et c, l'ensemble des structures de contact invariantes de signe fixé est connexe et le théorème de Gray montre qu'il est constitué d'une seule classe d'isotopie. Stricto sensu le théorème de Gray ne s'applique pas faute de compacité de l'espace ambiant en général mais le champ de vecteurs construit lors de sa démonstration est ici invariant à gauche donc complet.

Tous les champs de plans définis comme noyau d'un α_i sont totalement géodésiques pour la métrique invariante qui rend la base (u_1, u_2, u_3) orthonormée, cela découlera du lemme 1.17.

La sphère S^3

On explique maintenant six façons de voir la structure de contact canonique sur la sphère S^3, leurs relations et la façon dont elles interagissent avec la géométrie riemannienne.

Le groupe $SU(2)$ est difféomorphe à la sphère S^3 et son algèbre de Lie peut être munie d'une base (X, Y, N) telle que

$$[X, Y] = N \qquad [Y, N] = X \qquad [N, X] = Y.$$

Il s'agit bien d'un des groupes de Lie étudiés précédemment. Le champ de plans ξ invariant à gauche engendré par X et Y vérifie la condition C_3, il s'agit donc d'une structure de contact.

Le champ de vecteurs N correspond au champ de Hopf sur S^3 et la métrique riemannienne invariante pour laquelle (X, Y, N) est une base orthonormée correspond à la

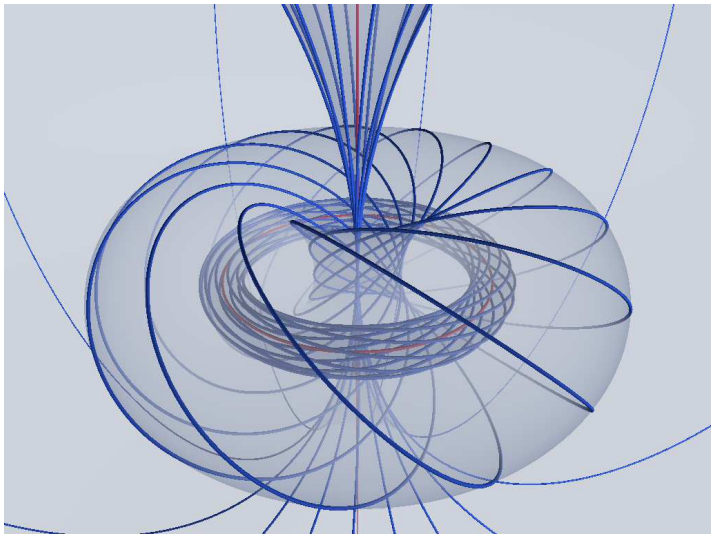


FIG. 9 – Vue globale de la fibration de Hopf

métrique ronde sur la sphère de rayon 2, de sorte que ξ est aussi l'orthogonal de la fibration de Hopf dans S^3. La figure 9, due à Benoît Kloeckner, montre la fibration de Hopf projetée stéréographiquement dans $\mathbb{R}^3$ d'un point de vue assez global. La figure 10 montre une autre sélection de fibres et leurs orthogonaux (en utilisant la conformité de la projection) qui révèle mieux la nature de contact de ξ. Le critère général discuté pour les groupes de Lie montre que ξ est totalement géodésique pour la métrique ronde. De plus la relation entre la fibration de Hopf et la structure de contact canonique sur S^3 est l'archétype du lien entre feuilletages riemanniens et champs de plans totalement géodésiques. Par ailleurs un théorème de R. Lutz et T. Hangan [HL83] affirme que tout champ de plans totalement géodésique sur la sphère ronde de dimension trois est conjugué à celui-ci par une transformation projective, ce qui est la rigidité la plus extrême possible ici. Cette rigidité est à opposer à la surprenante flexibilité des feuilletages de S^3 par grands cercles, la fibration de Hopf n'étant qu'un cas très particulier, voir [GW83].

On voit maintenant la sphère S^3 comme bord de la boule unité de $\mathbb{C}^2$. L'ensemble des droites complexes contenues dans TS^3 est, d'un point de vue réel, un champ de plans isomorphe à ξ. En particulier la forme symplectique standard de $\mathbb{C}^2$ est positive sur ξ et ξ définit l'orientation induite sur S^3. Cette relation dite de remplissage symplectique faible sera généralisée dans la proposition 5.2. Mieux, la boule que borde la sphère S^3 dans $\mathbb{C}^2$ est un domaine de Stein. Cette propriété n'a pas d'analogue en général pour les autres structures de contact géodésibles mais cela arrive parfois et se révèle alors

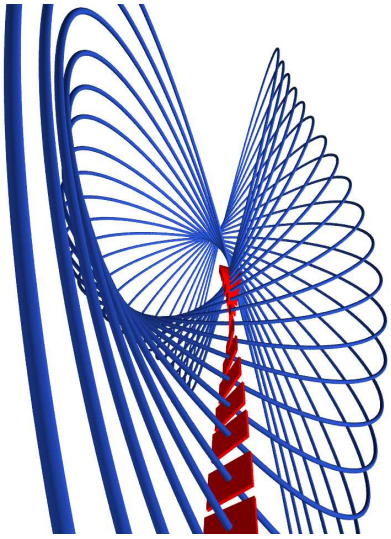


FIG. 10 – Orthogonal de la fibration de Hopf

très utile comme dans la proposition 5.5 ou dans le théorème D.

Par ailleurs S^3 est un revêtement double de $ST^*\mathrm{S}^2$ et de STS. En effet le groupe $SO(3)$ agit librement et transitivement sur ces deux espaces et est un quotient d'ordre deux de $SU(2)$. La structure de contact canonique sur $ST^*\mathrm{S}^2$ et la connexion de Levi-Civita de la métrique ronde sur S^2 se relèvent en structures de contact isomorphes à ξ.

Le groupe symplectique agit de façon linéaire sur $\mathbb{R}^4$ donc agit sur S^3 vu comme espace des rayons de $\mathbb{R}^4$. À chaque rayon $d \in \mathrm{S}^3$ on associe son orthogonal symplectique de dimension 3 qui contient d donc se projette en plan tangent à S^3 en d. On obtient ainsi un champ de plans sur S^3 qui coïncide avec ξ. Les géodésiques de la sphère sont obtenues par intersection avec les plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et celles qui sont tangentes à la structure de contact correspondent aux plans lagrangiens. On obtient ainsi une explication symplectique du caractère totalement géodésique de ξ. Cette explication apparaît dans [Ben83][page 140] où D. Bennequin l'attribue à S. Lie dans ce qui semble être le tout premier article de géométrie de contact.

Le groupe de Heisenberg

L'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}$ a pour base (X, Y, N) avec

$$[X, Y] = N \qquad [X, N] = [Y, N] = 0$$

Soit ξ la structure de contact invariante à gauche engendrée par X et Y. Il s'agit d'une structure de contact d'après la discussion générale et la variété de contact $(\mathbb{H}, \xi)$ est isomorphe à $\left(\mathbb{R}^3, \ker(dz + r^2 d\theta)\right)$.

La structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$ est donc totalement géodésique pour la métrique euclidienne. On explique maintenant ce fait de deux autres façons. La structure de contact canonique sur S^3 descend en structure de contact sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, et $\mathbb{R}^3$, vu comme $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ privé d'un plan projectif, hérite de la structure de contact ξ. Comme les géodésiques euclidiennes de $\mathbb{R}^3$ proviennent de celles de $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ qui elles-mêmes proviennent des géodésiques de la sphère S^3, on obtient que ξ est totalement géodésique pour la métrique euclidienne. Montrons maintenant cela de façon directe. Soit $P = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $V = (u, v, w)$ un vecteur non nul. La droite dirigée par V et passant par P est paramétrée par $t \mapsto (x_0 + tu, y_0 + tv, z_0 + tw)$. Elle est tangente à ξ au temps t si et seulement si $w + 1/2\,((x_0 + tu)v - (y_0 + tv)u) = 0$, c'est-à-dire $w + 1/2\,(x_0 v - y_0 u) = 0$ et cette condition est indépendante de t.

Le groupe résoluble de dimension trois

Soit A une matrice dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. On suppose que $\mathrm{tr}(A) > 2$ de sorte que A possède deux valeurs propres $\lambda > 1$ et $1/\lambda$. En particulier toutes les puissances réelles de A sont bien définies. On note v_1 et v_2 respectivement des vecteurs propres associés à λ et $1/\lambda$.

On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ de la loi de groupe

$$(t, v)(t', v') = (t + t', v + A^t v').$$

À isomorphisme près, le groupe de Lie ainsi obtenu ne dépend pas de A et on le note Sol. On note Γ_A le sous-groupe correspondant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ et $T_A^3 = {}_{\Gamma_A}\backslash^{\mathrm{Sol}}$ l'espace quotient. La projection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ sur le facteur $\mathbb{R}$ passe au quotient en fibration en tores sur le cercle de monodromie A^{-1}.

On considère la base de l'algèbre de Lie de Sol formée des vecteurs $X = (0, v_1)$, $Y = (0, v_2)$ et $T = (1, 0)$. On a les relations suivantes :

$$[X, Y] = 0 \qquad [T, X] = X \qquad [T, Y] = -Y.$$

La discussion générale des groupes de Lie montre qu'un champ de plans ξ invariant à gauche sur Sol est une structure de contact positive si et seulement si il est engendré par les champs de vecteurs invariants $aX + bY$ et $dX + eY + T$ avec a et b non nuls et de même signe. On rappelle que ces structures de contact ne forment qu'une seule classe

d'isotopie. Toute structure de contact invariante sur Sol est en particulier invariante sous l'action de Γ_A donc descend en structure de contact sur T_A. Le théorème de Gray, qui cette fois s'applique directement, assure là encore que cette structure fait partie d'une classe d'isotopie de structures de contact canonique. Pour toute direction D dans $\mathbb{R}^2$, on note $\xi_{A,D}$ la structure de contact sur Sol engendrée par T et $aX + bY$ où (a,b) engendre D.

Toutes ces structures de contact ξ invariantes à gauche sont totalement géodésiques pour toute métrique riemannienne invariante à gauche qui rend X orthogonal à ξ. Par ailleurs elles sont aussi totalement géodésiques pour des métriques Lorentziennes invariantes.

Orbifolds et variétés de Seifert

Les structures de contact qui seront étudiées en détail dans cette thèse vivent toutes sur des variétés de Seifert. On peut, si on ne craint par les anachronismes, voir ces variétés comme des généralisations des fibrés en cercles au-dessus des surfaces. En fait ce sont bien des fibrés mais au-dessus de surfaces orbifolds. Les orbifolds sont décrits en particulier dans [Thu] et [BMP03], on se contentera ici d'une présentation très informelle.

Une surface orbifold est un espace topologique localement modelé sur le quotient $D/\mathbb{Z}_\alpha$ du disque unité de $\mathbb{R}^2$ par l'action engendrée par la rotation d'angle $2\pi/\alpha$ autour de l'origine. L'image de l'origine dans le quotient est dite d'ordre α. Lorsque $\alpha > 1$ on parle de point exceptionnel (ces points sont isolés), sinon on parle de point régulier.

Un tel espace B admet une structure de surface topologique dont le genre est appelé genre de B. Une surface orbifold (orientable) est complètement déterminée par la donnée de son genre et la liste des ordres de ses points exceptionnels.

Le nom « orbifold » vient du fait que le quotient d'une variété lisse par l'action d'un groupe fini possède une structure d'orbifold pour laquelle la projection est un revêtement au sens des orbifolds.

La caractéristique d'Euler d'une surface orbifold B ayant r points exceptionnels d'ordres $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ est définie comme

$$\chi(B) = 2 - 2g - r + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\alpha_i}$$

et elle se comporte comme celle des surfaces lisses en présence d'un revêtement, ce qui permet d'établir le sens facile du théorème suivant :

Théorème ([Thu][théorème 13.3.6]) *Une surface orbifold orientable B n'admet aucun revêtement par une surface lisse si et seulement si son genre est nul et elle possède soit un point exceptionnel soit deux points exceptionnels d'ordres différents.*

En suivant Thurston [Thu], on peut définir une notion de fibré au-dessus d'un orbifold et les variétés de Seifert qui nous intéresseront seront exactement les fibrés en cercles à fibres orientées au-dessus des surfaces orbifolds orientées. On ne donne pas de détail sur cette approche car elle ne sera pas beaucoup utilisée mais il est crucial qu'elle permette de définir des analogues de tous les fibrés naturels de la géométrie différentielle pour les orbifolds. En particulier le fibré des éléments de contact coorientés considéré plus haut a un sens et est une variété de Seifert pour toute surface orbifold. Le plus célèbre de ces fibrés – qui ne soit pas au-dessus d'une surface lisse – est la sphère d'homologie de Poincaré qui correspond à l'orbifold de genre nul ayant trois points exceptionnels d'ordre 2, 3 et 5.

Les revêtements dans la catégorie des orbifolds ne correspondent pas en général à des revêtements des espaces topologiques sous-jacents mais plutôt à des revêtements ramifiés. Par contre il est important qu'ils induisent entre variétés de Seifert d'honnêtes revêtements de variétés lisses.

Proposition *Soit V une variété de Seifert de base B. Un revêtement orbifold $\widehat{B} \to B$ induit un fibré de Seifert $\widehat{V} \to \widehat{B}$ muni d'un revêtement (lisse et non-ramifié) $\widehat{V} \to V$.*

Le théorème et la proposition précédents permettent de dresser la liste des revêtements universels possibles pour les variétés de Seifert :

Corollaire *Le revêtement universel d'une variété de Seifert est isomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou S^3, où le feuilletage se relève en le facteur $\mathbb{R}$ dans les deux premiers cas et en une des structures de Seifert de S^3 (décrites plus loin dans l'exemple 1) dans le troisième.*

En notant D le disque unité de $\mathbb{C}$, une variété de Seifert V est localement isomorphe au quotient de $D \times \mathrm{S}^1$ par $(z,t) \sim (e^{\frac{2i\pi\nu}{\alpha}} z, t+1)$ avec α et ν premiers entre eux. En particulier V est munie d'une structure de variété lisse. Par ailleurs ce modèle local est muni d'une action lisse de S^1 donnée par $\theta(z,t) = (z, t+\alpha\theta)$. Les points de la forme $(0,t)$ sont envoyés sur une seule orbite dont tous les points ont des stabilisateurs cycliques d'ordre α et tous les autres points sont envoyés sur des points à stabilisateurs triviaux. Ces actions se recollent en action globale localement libre de S^1.

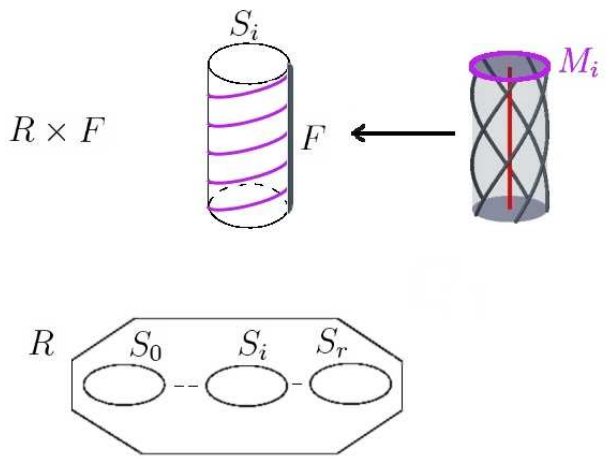


FIG. 11 – Invariants de Seifert. La surface R est obtenue en recollant les côtés du polygone deux à deux. La variété de Seifert est obtenue en identifiant en plus haut et bas de la partie haute du dessin.

Réciproquement toute variété de dimension trois orientée munie d'une action localement libre de S^1 préservant l'orientation provient d'une structure de variété de Seifert dont la base est son espace des orbites.

Toutes les variétés de Seifert s'obtiennent de la façon suivante et c'est la façon de voir qui sera utilisée dans toute la troisième partie. Soit B une surface orbifold de genre g ayant r points exceptionnels d'ordres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Soit f_0 un point régulier de B et $D_0, \ldots, D_r$ des disques deux à deux disjoints autour des f_i. On note R la surface lisse obtenue en retirant à B les intérieurs de D_i. Dans toute la suite les composantes de bord de R seront orientées comme bord des D_i.

On munit $R \times \mathrm{S}^1$ de l'orientation produit. Chacune des composantes connexes de son bord est munie d'une base canonique (S_i, F_i) où S_i est la classe d'homologie de $\partial D_i \times \{\cdot\}$ et F_i est la classe d'homologie de $\{\cdot\} \times \mathrm{S}^1$ (S signifie section et F fibre). On oriente ces composantes de bord pour imposer $S_i \cdot F_i = +1$. La variété de Seifert V d'invariants $(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r))$ est, par définition, la variété obtenue en remplissant chaque composante de bord de $R \times \mathrm{S}^1$ par un tore plein W_i dont les méridiens sont collés sur des courbes de classe d'homologie $M_i = \alpha_i S_i + \beta_i F_i$ avec $(\alpha_0, \beta_0) = (1, b)$ et $0 < \beta_i < \alpha_i$ pour $i > 0$. Chaque tore plein W_i est identifié au quotient d'un tore épais $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \times [0,1]$ où l'on a écrasé les cercles de pente β/α sur la composante de bord $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \times \{0\}$. Ce tore plein est feuilleté par les images des $\{\star\} \times \mathrm{S}^1 \times \{\star\}$ qui sont, par définition, les fibres de la structure de Seifert standard sur

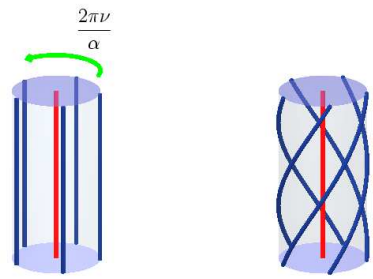


FIG. 12 – Voisinage d'une fibre exceptionnelle dans une variété de Seifert. On tord d'un angle $2\pi\nu/\alpha$ un disque épaissi avant de recoller haut et bas.

$W(\alpha,\beta)$, voir la figure 12 où ν est un inverse de β modulo α. Les feuilletages des W_i étendent le feuilletage trivial de $R \times \mathrm{S}^1$ en un feuilletage de V venant d'une structure de variété de Seifert de base B. Le nombre d'Euler entier de V est $e_0(V) = -b - r$ et son nombre d'Euler rationnel est $e(V) = -\sum_{i=0}^{r} \frac{\beta_i}{\alpha_i}$.

Si on note $r_i = (\alpha_i - \beta_i)/\alpha_i$ alors V admet le diagramme de Kirby de la figure 13. Il s'agit d'un diagramme de chirurgie expliquant comment passer de la boule B^4 à une variété de dimension quatre de bord V. On renvoie à [GS99] pour tout ce qui touche à ces diagrammes.

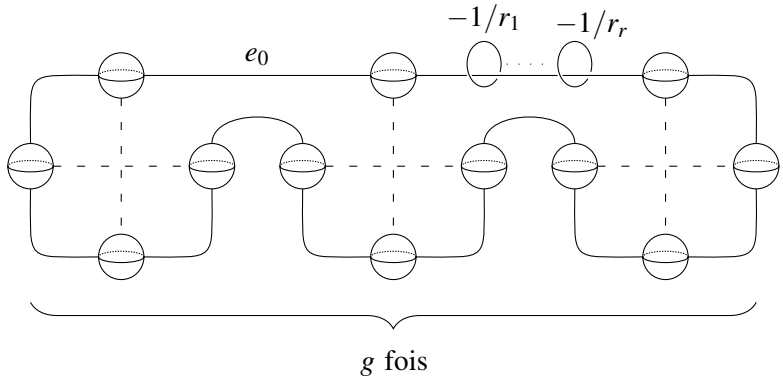


FIG. 13 – Diagramme de Kirby d'une variété de Seifert avec $g = 3$

Exemple 1 (Structures de Seifert sur S^3) Soit L_0 et L_1 deux fibres de la fibration de

Hopf. La sphère S^3 peut être vue comme un quotient de $T^2 \times [0,1]$ dont l'application de projection écrase le tore T_0 sur la fibre L_0 et T_1 sur L_1 où on a posé $T_t = T^2 \times \{t\}$ de façon à ce que pour tout x dans la fibre L_0 (resp. L_1), $p^{-1}(x)$ est un cercle $\{\star\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset T_0$ (resp. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{\star\} \subset T_1$). Les structures de variétés de Seifert de la sphère S^3 s'obtiennent toutes, à isomorphisme près, en projetant un feuilletage de $T^2 \times]0,1[$ par cercles non-homologues aux cercles précités et en rajoutant les fibres L_0 et L_1. En effet la simple connexité de la sphère S^3 et la proposition précédente impliquent que la base de n'importe laquelle de ses structures de variété de Seifert est une sphère lisse ou une surface orbifold n'étant pas revêtue par une surface lisse et le théorème de la page 16 affirme qu'il s'agit de sphères ayant un ou deux points exceptionnels. La description annoncée en découle directement.

Exemple 2 (Fibrés des éléments de contact coorientés) Le fibré ST^*B des droites coorientées tangentes à une surface orbifold B munie de l'orientation opposée à l'orientation naturelle est une variété de Seifert d'invariants

$$(g, 2-2g-r, (\alpha_1, 1), \ldots, (\alpha_r, 1)).$$

En particulier son nombre d'Euler rationnel est $e(ST^*B) = -\chi(B)$.

Présentation de la première partie

Dans la première partie on examine diverses notions de courbure des champs de plans en s'inspirant de ce qui est bien connu concernant les feuilletages mais en ayant toujours à l'esprit les structures de contact.

Au moins trois approches indépendantes dues à B. Reinhart, C. Albert et E. Giroux ont été proposées jusqu'à maintenant pour produire des notions de courbure. Un des premiers objectifs de cette partie consiste à expliquer les liens qui existent entre ces trois approches tout en développant les aspects géométriques de l'approche de Giroux. La comparaison se révèle aisée et permet de dégager les notions de courbure extrinsèque K_e et de courbure moyenne H d'un champ de plans sur une variété riemannienne.

Les champs de plans totalement géodésiques, c'est-à-dire ceux pour lesquels toute géodésique qui part tangente au champ de plans le reste à jamais, sont ceux pour lesquels ces deux courbures sont nulles. Dans le cas des feuilletages cela revient à dire que les feuilles sont (localement) des sous-variétés totalement géodésiques et cette classe de feuilletages a beaucoup été étudiée. On dit qu'un champ de plans est géodésible s'il existe une métrique riemannienne pour laquelle il est totalement géodésique. L'étude

du cas des structures de contact a été suggérée par É. Ghys dès le début des années 80 mais à l'époque aucun outil de topologie de contact ne permettait de l'aborder. En dimension trois, la classe des champs de plans géodésibles admet une caractérisation complètement topologique grâce aux travaux d'Y. Carrière :

Proposition ([Car84]) *Un champ de plans orientable ξ sur une variété fermée orientable de dimension trois V est géodésible si et seulement si la paire (V,ξ) est isomorphe à l'une des suivantes :*
- *une variété de Seifert munie d'un champ de plans transversal aux fibres ;*
- *un fibré en tores T^3_A de monodromie hyperbolique – $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{tr}(A) > 2$ – muni d'un champ de plans transversal au feuilletage engendré par une des directions propres de A.*

On rappellera les liens entre ces champs de plans et les feuilletages riemanniens et comment la proposition ci-dessus se déduit des résultats d'Y. Carrière concernant ces feuilletages. Pour les structures de contact, l'étude du cas des fibrés en tores se réduit très facilement à des résultats obtenus antérieurement à cette thèse par E. Giroux [Gir00] et K. Honda [Hon00b]. L'étude du cas des variétés de Seifert fait l'objet de la troisième partie de cette thèse. Dans les deux cas, le fait d'être géodésible entraîne de nombreuses interactions avec la topologie de contact, les géométries complexe et symplectique et la théorie des feuilletages. Lorsqu'on tente d'étendre ces liens au cadre de la géométrie lorentzienne on se heurte au théorème suivant :

Théorème (1.25) *Il existe des structures de contact vrillées totalement géodésiques sur des variétés lorentziennes compactes.*

On décrit cependant une condition de complétude sous laquelle on récupère sans doute de la rigidité.

Bien que les interactions entre la géométrie et la topologie des structures de contact géodésibles soient satisfaisantes, la classe de variétés portant de telles structures de contact est assez restreinte, en particulier elle évite complètement les variétés hyperboliques et c'est pourquoi on continue la recherche de conditions de courbures interagissant avec la topologie de contact. Du côté des feuilletages, le théorème egregium de Gauss lie les géométries extrinsèque et intrinsèque des feuilles et cette dernière contraint les propriétés globales du feuilletage. Dans le chapitre 2 on part à la recherche de l'analogue de la géométrie intrinsèque des feuilles pour une structure de contact.

Ce chapitre commence par une incursion du côté de la théorie de Chern–Weil en compagnie de C. Albert. Cette incursion incite à considérer la courbure qu'on appellera

ici courbure d'Albert : $K_e+K+\frac{1}{2}|A|^2$ où $|A|$ est un terme qui mesure la non-intégrabilité du champ de plans considéré et K sa courbure sectionnelle. Après cela on retourne vers les feuilletages en généralisant les notions de laplacien feuilleté et de mesure harmonique qui interviennent dans plusieurs théorèmes liant géométrie et topologie des feuilletages.

Une façon de chercher par élimination les notions de courbure interagissant avec la topologie consiste à examiner quelles sont les courbures qui peuvent être arbitrairement prescrites pour toute structure de contact indépendamment de toute contrainte topologique. Dans cette direction, des résultats étonnants de V. Krouglov [Kro08] ont très récemment permis d'écarter la courbure sectionnelle K et sa somme $K+K_e$ avec la courbure extrinsèque, une somme qu'on appellera courbure de Krouglov. Cependant ces résultats n'imposent rien à la métrique riemannienne et on peut espérer récupérer de la rigidité en étant plus restrictif de ce côté. Le théorème d'uniformisation et ses généralisations aux feuilletages incitent à se fixer une classe conforme de métriques et on montre, en utilisant les notions de laplacien et de mesures harmoniques évoquées plus haut, le théorème suivant :

Théorème (2.10) *Si ξ est un champ de plans sur une variété riemannienne compacte de dimension trois (M,g) dont la courbure $K_\lambda = K_e + K + \lambda|A|^2$ est de signe constant ε alors il n'existe pas de métrique dans la classe conforme de g qui rende cette courbure de signe $-\varepsilon$ partout.*

Toute cette partie dégage plus de questions qu'elle n'apporte de réponses mais elle permet déjà d'éclairer à la fois les résultats déjà connus et diverses approches à explorer dans l'avenir.

Présentation de la deuxième partie

Cette partie contient essentiellement un exposé de résultats et techniques en provenance de [Gir91, Gir00, Gir01a, Gir01b], certains des derniers résultats ayant été aussi obtenus indépendamment dans [Hon00a].

Le chapitre 3 rassemble des résultats de base de la topologie de contact en dimension trois. On commence par rappeler très rapidement les résultats fondateurs de la théorie des surfaces ξ–convexes et présenter les exemples qui jouent un rôle majeur dans la suite. On explique ensuite ce que deviennent les feuilletages legendriens de la condition C_2 lorsqu'ils existent globalement et ont une structure simple. Cette section rassemble

trois énoncés qui seront utilisés dans la troisième partie et mettent en jeu de façon cruciale ces feuilletages. Elle ne contient rien de nouveau mais les idées et dessins qui y sont exposés sont souvent difficiles à trouver explicitement dans la littérature.

Le chapitre 4 est l'élément principal de cette partie, il expose ce qui est connu de la classification des structures de contact tendues sur les tores épais et les tores pleins. Cet exposé vise trois buts. Le premier est de fournir sous une forme commode les outils qui seront utilisés tout au long de la partie suivante, le second est d'introduire à la lecture de [Gir00] et le troisième est de faire le pont entre l'approche de [Gir00] et celle de [Hon00a].

Bien que l'exposé suive d'assez près l'article [Gir00], il s'en détache par plusieurs aspects que l'on décrit ici brièvement au bénéfice des lecteurs ayant déjà une certaine familiarité avec le sujet. Les cas particuliers connus de la classification dans le cas où une ou plusieurs composantes de bord sont scindées par plus de deux courbes sont plus mis en avant que dans [Gir00], à la fois car ils seront utilisés dans la troisième partie et parce que les variantes de démonstrations présentées suggèrent une approche de la classification générale. Le lemme de préparation [Gir00][lemme 2.17] est présenté sous une forme spécialisée au cas du tore, ce qui permet d'être plus explicite et d'aller jusqu'à une description des types de bifurcations pouvant intervenir qui, bien que n'étant pas indispensable ici, permet une comparaison très facile avec la classification des attachements de rocades aux tores dans [Hon00a]. Ensuite des idées introduites seulement dans [Gir01a] et [Gir01b] mais qui sont passées depuis dans l'outillage usuel de la topologie de contact sont utilisées ici pour réduire le nombre d'idées mises en œuvre. Avec le même objectif, on remplace certaines techniques ad hoc utilisées dans la démonstration de [Gir00][proposition 3.22] par une idée qui est de toute façon présente dans la démonstration de [Gir00][proposition 3.40] : celle des bifurcations simultanées. De plus on expose directement ce qui se passe dans le cas de conditions au bord réglées. C'est à la fois le cas qui apparaît naturellement dans la troisième partie et celui qui permet une comparaison directe avec [Hon00a]. Cette comparaison est encore facilitée par une variante de la discussion de la multiplicité des formes normales ([Gir00][proposition 3.40] devenue ici la fin de l'explication du théorème 4.6).

La section 4.2 est la seule qui contienne des résultats nouveaux dans ce chapitre. Ces résultats découlent assez directement de la théorie mentionnée plus haut mais mettent en évidence plusieurs phénomènes mal connus.

Présentation de la troisième partie

La dernière partie constitue le cœur de cette thèse. Motivé par les structures de contact géodésibles et leur caractérisation par Y. Carrière, on se lance dans l'étude des structures de contact transversales aux fibres d'une variété de Seifert. Presque tous les résultats de cette partie ont été publiés dans [Mas08].

Soit ξ une structure de contact sur une variété de Seifert V. L'enroulement d'une fibre régulière legendrienne est le nombre de tours que fait la structure de contact le long de cette fibre par rapport aux fibres voisines. Une courbe (fermée) dans une variété de Seifert est dite verticale si elle est isotope à une fibre régulière. L'enroulement $e(L)$ d'une courbe legendrienne verticale L est définie comme le supremum sur les isotopies φ envoyant une fibre régulière L_0 sur L de l'enroulement de L_0 pour $\varphi_1^*\xi$. L'enroulement $e(\xi)$ d'une structure de contact ξ sur V est le supremum des enroulements de ses courbes legendriennes verticales. Il s'agit clairement d'un invariant de la classe d'isotopie de ξ et il provient directement de la définition de structure de contact. Historiquement la première apparition d'une version de cet invariant se trouve dans le travail de D. Bennequin [Ben83] où apparaissent la rigidité et les phénomènes globaux en géométrie de contact pour la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$. La présence de cette structure de contact ou de sa cousine sphérique au revêtement universel est une autre caractéristique globale de structure de contact. Le théorème suivant caractérise les classes d'isotopie contenant des structures de contact transversales aux fibres des variétés de Seifert – et donc géodésibles – par ces deux propriétés typiques du domaine de la topologie de contact.

Théorème A (Sections 5.1 and 5.4) *Une structure de contact sur une variété de Seifert est transversale aux fibres à isotopie près si et seulement si elle est universellement tendue et d'enroulement strictement négatif.*

Par ailleurs il se trouve que l'étude des structures de contact d'enroulement strictement négatif universellement tendues motivée par ce théorème se passe très bien de l'hypothèse sur le revêtement universel pour donner des résultats portant sur toutes les structures de contact d'enroulement strictement négatif.

Une fois la caractérisation du théorème A connue, la question la plus urgente devient celle de l'existence.

Théorème B (Section 5.3) *Soit V une variété de Seifert d'invariants*

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r))$$

et n un entier strictement positif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *V porte une structure de contact transversale aux fibres d'enroulement au moins $-n$;*

(ii) *V porte une structure de contact d'enroulement strictement négatif et au moins $-n$;*

(iii) *il existe des entiers $x_0, \dots, x_r$ tels que $\sum x_i = 2-2g$ et $\frac{x_i-1}{n} < \frac{\beta_i}{\alpha_i}$ pour $0 \leq i \leq r$, avec $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = b$.*

En oubliant les informations concernant l'enroulement on retrouve le corollaire suivant.

Corollaire *Une variété de Seifert d'invariants*

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

porte une structure de contact transversale aux fibres si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

- $-b - r \leq 2g - 2$;
- $g = 0$, $r \leq 2$ *et* $-b - \sum \beta_i/\alpha_i < 0$;
- $g = 0$, $r \geq 3$, $-b - r = -1$ *et il existe des entiers premiers entre eux* $0 < a < m$ *et une numérotation des paires* (α_i, β_i), $1 \leq i \leq r$, *tels que :*

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} > \frac{m-a}{m}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} > \frac{a}{m}, \quad \text{et} \quad \frac{\beta_i}{\alpha_i} > \frac{m-1}{m} \ \forall i \geq 3.$$

Ce corollaire a été démontré d'abord pour les fibrés en cercles ($r = 0$) par E. Giroux dans [Gir01a] et A. Sato et T. Tsuboi dans [ST94]. Ensuite le cas des variétés de Seifert générales a (presque) été traité par K. Honda dans [Hon98] et (complètement) par P. Lisca et G. Matić dans [LM04]. La démonstration de [Hon98] est directe et repose sur des résultats subtils concernant les difféomorphismes du cercle établis dans [EHN81, JN85a, JN85b, Nai94]. La démonstration de [LM04] combine le théorème de perturbation d'Eliashberg–Thurston avec l'inégalité d'adjonction en géométrie symplectique dont la saveur est nettement plus analytique. Dans le cas $g = 0$, $r = 3$ et $b = -2$, une preuve topologique du théorème B par P. Ghiggini est parue dans [Ghi08] durant la préparation de [Mas08].

L'outil principal de ce travail est un ensemble de formes normales qu'on décrit maintenant. On considère une variété de Seifert V vue comme réunion de $r+1$ tores pleins $W_0, \dots, W_r$ et d'un fibré trivial $R \times \mathrm{S}^1$ comme décrit dans la présentation des acteurs. On fixe sur R une structure complexe J qui définit son orientation. Pour toute 1–forme non singulière λ sur R, l'équation de Pfaff

$$\cos(n\theta)\, \lambda + \sin(n\theta)\, \lambda \circ J = 0$$

définit une structure de contact sur $R \times \mathrm{S}^1$ et toute structure de contact ξ qui l'étend sera notée

$$\xi = \xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r) \qquad \text{où} \quad \xi_i = \xi_{|W_i}, \quad 0 \leq i \leq r\,.$$

Si de plus l'entier $-n$ est l'enroulement $e(\xi)$ alors on dit que ξ est sous *forme normale*.

Le point de départ de cette étude est l'observation que toute classe d'isotopie de structures de contact d'enroulement strictement négatif sur une variété de Seifert contient des formes normales. En particulier les entiers de la condition (iii) du théorème d'existence sont les indices de λ le long des composantes de bord de R. La collection de ces indices est appelée multi-indice de la forme normale.

Les formes normales et leurs multi-indices sont les outils principaux de la classification des structures de contact d'enroulement strictement négatif qu'on va présenter. Le théorème suivant détermine les enroulements possibles sur une variété de Seifert pourvu que sa base soit de genre non nul.

Théorème C (Section 5.5) *Soit V une variété de Seifert d'invariants*

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r)), \quad g > 0,$$

et ξ une structure de contact sur V de type $\xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r)$, mais pas sous forme normale a priori, de multi-indice $(x_0, \ldots, x_r)$. L'enroulement $e(\xi)$ vaut $-n$ – et donc la structure de contact ξ est sous forme normale – si et seulement si, pour $0 \leq i \leq n$, les conditions suivantes sont vérifiées :

- *la structure de contact $\xi_i = \xi_{|W_i}$ est tendue ;*
- *$(x_i - 1)/n < \beta_i/\alpha_i$ et le triangle de sommets $(0,0)$, (α_i, β_i), $(n, x_i - 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ ne contient aucun point entier hors de ses sommets dont l'abscisse est strictement plus petite que n – là encore, $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = b$.*

Lorsque g est nul les conditions listées sont nécessaires.

On remarque que la deuxième condition est automatiquement satisfaite lorsque $n = 1$ et peut être aussi exprimée en terme de développement en fraction continue de β_i/α_i.

Pour classifier les structures de contact d'enroulement strictement négatif sur une variété de Seifert donnée il reste à comprendre quand est-ce que deux structures de contact sous forme normale et partageant le même enroulement sont isotopes. Deux cas se présentent dont les énoncés et démonstrations sont assez différents.

On rappelle qu'une structure de contact tendue ξ sur un tore plein W dont le bord est ξ–convexe a une classe d'Euler relative dans $H^2(W, \partial W)$: il s'agit de l'obstruction à étendre à l'intérieur de W une section de ξ tangente au bord de W – une telle section existe car ξ est supposée tendue.

Théorème D (Section 5.6) *Soit V une variété de Seifert d'invariants*

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r))$$

avec $-b - r < 2g - 2$.

a) Toute structure de contact sur V d'enroulement -1 a une forme normale dont le multi-indice est $(2 - 2g - r, 1, \ldots, 1)$ et un remplissage holomorphe dont la variété lisse sous-jacente ne dépend que de V.

b) Deux structures de contact $\xi(\lambda, 1, \xi_0, \ldots, \xi_r)$ et $\xi(\lambda', 1, \xi'_0, \ldots, \xi'_r)$ sous forme normale de multi-indice comme plus haut sont isotopes si et seulement si chaque ξ_i a la même classe d'Euler relative que ξ'_i.

c) Parmi toutes les classes d'isotopie de structures de contact d'enroulement -1, exactement deux contiennent des structures de contact transversales aux fibres – et une seule si on considère des structures de contact non orientées.

Dans le cas des bases de genre nul, la classification des structures de contact tendues sur les variétés de Seifert concernées par le théorème précédent a été obtenue auparavant par H. Wu dans [Wu04] (en utilisant la même stratégie pour distinguer les classes d'isotopie) mais sans les informations sur les structures de contact transversales aux fibres. Le cas des fibrés en cercles ($r = 0$) a aussi été traité par E. Giroux dans [Gir01a] mais sans le décompte précis des classes d'isotopie et par K. Honda dans [Hon00b] mais avec une faille dans la démonstration. La deuxième partie de ce théorème est ici démontrée en utilisant un résultat dû indépendamment à P. Lisca et G. Matić et à P. Kronheimer et T. Mrowka : les structures de contact sont distinguées par la première classe de Chern de leurs remplissages holomorphes.

On remarque ici qu'il existe des structures de contact géodésibles qui ne sont pas holomorphiquement remplissables, par exemple sur le tore T^3 comme on le déduit directement d'un théorème de Y. Eliashberg [Eli96]. Cependant, en réinterprétant des résultats connus, on montre que toutes les structures de contact géodésibles sont symplectiquement remplissables.

Dans le théorème suivant, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier plus grand que x. On appelle aussi R–classe d'une structure de contact sous forme normale $\xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r)$ la classe d'homotopie de λ parmi les 1–formes non singulières sur R.

Théorème E (Section 5.6) *Soit V une variété de Seifert d'invariants*

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r))$$

et n un entier strictement positif. On suppose que $-b - r = 2g - 2$ ou $n > 1$.

a) *Toute structure de contact sur V d'enroulement $-n$ a une forme normale et toute forme normale a comme multi-indice $(nb, \lceil n\beta_1/\alpha_1 \rceil, \ldots, \lceil n\beta_r/\alpha_r \rceil)$.*

b) *Si g est non nul, deux structures de contact sous forme normale $\xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r)$ et $\xi(\lambda', n, \xi'_0, \ldots, \xi'_r)$ sont isotopes si et seulement si elles ont la même R–classe et chaque ξ_i a la même classe d'Euler relative que ξ'_i.*

c) *Parmi toutes les classes d'isotopie de structures de contact d'enroulement $-n$ et de R–classe fixée, exactement une si $n\beta_i \equiv 1 \mod \alpha_i$ pour tous i et deux autrement contiennent des structures de contact transversales aux fibres – et une seule dans tous les cas si on considère des structures de contact non orientées.*

d) *Lorsque g est nul, les conditions du b) sont suffisantes pour assurer que deux structures de contact sous forme normales sont isotopes.*

Le cas des fibrés en cercles ($r = 0$) a été traité auparavant par E. Giroux et K. Honda dans [Gir01a, Hon00b]. Par ailleurs, dans le cas $g = 1$ et $r = 1$, les structures de contact tendues sur V ont été classifiées par P. Ghiggini dans [Ghi05b] mais sans le calcul de l'enroulement ni la détermination des structures de contact universellement tendues ni des classes d'isotopie contenant des structures de contact transversales aux fibres.

Le théorème précédent est basé de façon cruciale sur un résultat d'unicité à isotopie legendrienne près des courbes legendriennes verticales d'enroulement maximal. Cette unicité permet de plus de définir un nombre de rotation pour tous les nœuds legendriens verticaux. Si L est un tel nœud, alors il existe un anneau A immergé dont le bord est constitué de L et d'un nœud legendrien L' d'enroulement maximal. On définit le nombre de rotation de L comme obstruction à étendre à A la trivialisation de ξ définie par L et L' au-dessus du bord. Ce nombre ne dépend pas de A car un autre anneau A' fournirait un nombre de rotation différant de $\langle c_1(\xi), A \cup A' \rangle$ qui est nul d'après l'inégalité d'Eliashberg–Bennequin [Eli92] (voir [Gei08][page 243] pour la démonstration moderne due à E. Giroux).

On dit qu'un nœud legendrien L est obtenu par stabilisation simple d'un autre L' s'il existe un anneau A plongé, orienté et ξ–convexe avec $\partial A = L \cup (-L')$ et dont le découpage est constitué de courbes traversantes et d'exactement une courbe allant de L à lui-même. Le signe du demi-disque découpé par cette courbe est appelé signe de la stabilisation simple. On appelle stabilisation la composition d'un nombre fini de stabilisations simples. Une stabilisation simple change le nombre de rotation d'une unité dans un sens ou dans l'autre selon son signe.

Théorème F *Soit V une variété de Seifert d'invariants*

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r)), \qquad g > 0,$$

n un entier strictement positif et ξ une structure de contact d'enroulement $-n$ sur V. On suppose que $-b - r = 2g - 2$ ou $n > 1$.

Deux nœuds ξ–legendriens verticaux dans V sont isotopes parmi les nœuds legendriens si et seulement si ils ont même enroulement et même nombre de rotation. Tout nœud legendrien vertical est obtenu par stabilisation d'un nœud d'enroulement maximal.

Un théorème analogue a été obtenu par J. Etnyre et K. Honda dans [EH01] pour les structures de variété de Seifert de la sphère S^3 – mais le résultat était un corollaire et non un ingrédient de la classification des structures de contact sur la variété concernée. De plus notre étude éclaire les différences qui apparaissent entre les cas des nœuds toriques positifs et négatifs dans [EH01], voir la démonstration de la proposition 5.3. Par ailleurs le résultat du théorème F a été obtenu par P. Ghiggini dans [Ghi06] dans le cas du tore T^3.

D'après le critère d'existence du théorème B, les théorèmes D et E classifient toutes les structures de contact d'enroulement strictement négatif sur les variétés de Seifert dont la base est de genre non nul.

Première partie

Structures de contact sur une variété riemannienne

Chapitre 1

Courbures extrinsèques

Dans tout ce chapitre les variétés sont de dimension trois et les métriques sont riemanniennes sauf mention explicite du contraire. La plupart des résultats sont valables en dimension quelconque pour un champ de plans de codimension quelconque avec des modifications mineures. Un certain nombre d'entre eux s'étendent aussi aux connexions ne provenant pas de métriques mais on reste dans le cadre riemannien en dimension trois pour alléger et focaliser la présentation. On notera toujours ∇ la connexion de Levi-Civita de la métrique considérée. Enfin tous les champs de plans seront coorientés.

1.1 Surfaces osculatrices et seconde forme fondamentale

Par analogie avec le cas des surfaces et des feuilletages on cherche à définir la seconde forme fondamentale d'un champ de plans quelconque. La définition suivante est bien connue, elle semble avoir été écrite explicitement pour la première fois dans [Rei77]. L'idée est de partir de la définition de seconde forme fondamentale des feuilles d'un feuilletage en terme du champ de plans tangent. Cette définition a un sens pour un champ de plans quelconque mais la forme bilinéaire obtenue n'est symétrique que lorsque le champ de plans est intégrable. On symétrise donc cette forme qu'on appellera parfois seconde forme fondamentale non symétrisée.

Définition 1.1 Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M,g) et N son champ de vecteurs unitaire normal. On appelle *seconde forme fondamentale* de ξ la forme bilinéaire symétrique

$$I\!I \begin{pmatrix} \xi \times \xi & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & 1/2\,\langle \nabla_U V + \nabla_V U, N\rangle \end{pmatrix}$$

où U et V sont des champs de vecteurs étendant u et v.

On va maintenant relier cette forme quadratique sur ξ à une construction moins connue due à E. Giroux et qui fournit en particulier une définition de seconde forme fondamentale d'un champ de plans (on verra dans le chapitre suivant comment en tirer bien plus). On rappelle que deux surfaces S et S' tangentes en un point m d'une variété coïncident à l'ordre deux en m si une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

- pour tout système de coordonnées (x, y, z) centré en m avec ∂_z transversal à S et S', $S = \{z = h(x, y)\}$ et $S' = \{z = h'(x, y)\}$ avec $h = h'$ à l'ordre deux en 0 ;
- il existe un système de coordonnées (x, y, z) centré en m avec ∂_z transversal à S et S' tel que $S = \{z = h(x, y)\}$ et $S' = \{z = h'(x, y)\}$ avec $h = h'$ à l'ordre deux en 0 ;
- pour toute métrique riemannienne, les secondes formes fondamentales de S et S' coïncident en m ;
- il existe une métrique riemannienne telle que les secondes formes fondamentales de S et S' coïncident en m.

On rappelle aussi que dans une variété, une courbe γ tangente à une surface S en un point m a un contact d'ordre deux avec S en m si une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

- γ est incluse dans une surface ayant un contact d'ordre deux avec S en m ;
- γ coïncide à l'ordre deux en m avec une courbe incluse dans S ;
- il existe une métrique riemannienne telle que la normale unitaire N à S en m vérifie $\langle \ddot{\gamma}, N\rangle = I\!I(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ où $I\!I$ est la seconde forme fondamentale de S en m ;
- pour toute métrique riemannienne, la normale unitaire N à S en m vérifie $\langle \ddot{\gamma}, N\rangle = I\!I(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$.

En particulier toute courbe incluse dans une surface a un contact d'ordre deux avec celle-ci en tout point.

Définition 1.2 ([Gir94]) Soit ξ un champ de plans sur une variété. Une surface S est *osculatrice* à ξ en un point m si toute courbe tangente à ξ et passant par m a un contact d'ordre deux avec S en m.

Dans [Gir94], E. Giroux montre pour tout champ de plans l'existence et l'unicité à l'ordre deux en tout point d'une surface osculatrice. Dans la proposition suivante on donne une autre démonstration de ce résultat dans le cas qui nous occupe tout en le reliant à la seconde forme fondamentale de Reinhart.

Proposition 1.3 *Soit ξ un champ de plans sur une variété M. Pour tout point m de M, il existe une surface osculatrice à ξ en m et deux telles surfaces coïncident à l'ordre deux en m. Pour toute métrique sur M, la seconde forme fondamentale commune à toutes ces surfaces est la seconde forme fondamentale de ξ.*

Démonstration On commence par remarquer que les vitesses en m des courbes tangentes à ξ engendrent ξ_m. En effet, si on considère un système de coordonnées (x, y, z) centré en m et pour lequel $\xi_m = \ker dz$ alors pour tout vecteur (a, b) non nul, il existe une courbe γ tangente à ξ dont la projection sur le plan (x, y) est la courbe $t \mapsto (ta, tb)$ (il suffit pour voir cela d'intégrer le relevé dans ξ du champ de vecteurs constant (a, b) sur un voisinage de l'origine). Cela prouve la remarque car les relevés à ξ_m des vecteurs (a, b) engendrent clairement ξ_m.

Pour la suite de la démonstration on choisit arbitrairement une métrique riemannienne sur M et on note N le champ de vecteurs unitaires normal à ξ.

Montrons l'unicité à l'ordre deux des surfaces osculatrices. Pour tout vecteur $v \in \xi$, la remarque précédente fournit une courbe γ tangente à ξ au temps 0 et pour laquelle $\dot{\gamma}(0) = v$. L'équation

$$\mathit{II}(v, v) = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle \tag{1.1}$$

fixe la seconde forme fondamentale de toute surface osculatrice donc toutes ces surfaces coïncident à l'ordre deux.

Montrons maintenant l'existence de surfaces osculatrices et le calcul de leur seconde forme fondamentale. Comme toute forme quadratique sur ξ_m est la seconde forme fondamentale d'une surface tangente à ξ_m, il suffit de montrer que la seconde forme fondamentale de ξ vérifie bien l'équation 1.1 pour toute courbe tangente à ξ. Soit γ une telle courbe. On note $m = \gamma(0)$ et $v = \dot{\gamma}(0)$. Quitte à ne considérer γ qu'au voisinage de 0, il existe un champ de vecteurs X tangent à ξ au voisinage de m qui étend $\dot{\gamma}$. Pour tout t on a $\langle \dot{\gamma}, N \rangle = 0$, ce qui donne après dérivation

$$\langle \ddot{\gamma}, N \rangle + \left\langle \dot{\gamma}, \frac{D}{Dt} N \right\rangle = 0$$

et donc en terme de X,

$$\langle \ddot{\gamma}, N \rangle + \langle X, \nabla_X N \rangle (\gamma(t)) = 0$$

puis, en utilisant $\langle X, \nabla_X N \rangle = X \langle X, N \rangle - \langle \nabla_X X, N \rangle$,

$$\langle \ddot{\gamma}, N \rangle = \langle \nabla_X X, N \rangle$$

et donc pour $t = 0$

$$\langle \ddot{\gamma}, N \rangle = \mathit{II}(v, v)$$

où II est bien la seconde forme fondamentale de ξ. □

Cette proposition permet de donner une définition géométrique de la seconde forme fondamentale introduite précédemment par simple analogie avec le cas intégrable.

Corollaire 1.4 *Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M,g), m un point de M et v un vecteur unitaire dans ξ_m. Soit P le plan engendré par v et par N la normale unitaire à ξ_m. La courbe intégrale du feuilletage caractéristique $(\exp_m^* \xi)P$ passant par l'origine est de courbure $I\!I(v,v)$ pour la structure euclidienne $g(m)$.*

De même on a les formules d'Euler et de Meusnier déduites directement de leur version pour les surfaces via les surfaces osculatrices.

Définition 1.5 Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M,g) et $I\!I$ sa seconde forme fondamentale. On appelle *courbure extrinsèque* (resp. *courbure moyenne*) et on note K_e (resp. H) le déterminant (resp. la moitié de la trace) de $I\!I$ par rapport à la métrique g. On appelle *courbures principales* les valeurs propres de $I\!I$. La courbure moyenne change de signe lorsqu'on change de coorientation pour ξ (et donc de champ de vecteurs normal N) mais le vecteur $\vec{H} = HN$ et la courbure extrinsèque sont indépendants de la coorientation.

Remarque : la seconde forme fondamentale d'un champ de plans est nulle si et seulement si sa courbure extrinsèque et sa courbure moyenne le sont.

On donne maintenant une interprétation dynamique de la seconde forme fondamentale obtenue grâce à des discussions avec É. Ghys et P. Jammes.

Proposition 1.6 *Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M,g). Soit R le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent*[1] *STM, α la 1-forme de norme 1 définissant ξ et $\tilde{\alpha}$ cette 1-forme vue comme fonction sur STM. Pour tout v unitaire dans ξ, on a :*

$$I\!I(v,v) = -(R\tilde{\alpha})(v).$$

Démonstration On note φ_t le flot géodésique sur STM, N le champ de vecteurs unitaire normal à ξ et γ la géodésique de vitesse initiale v.

$$\begin{aligned} R\tilde{\alpha}(v) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \tilde{\alpha}(\varphi_t(v)) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \alpha(\dot{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \langle N, \dot{\gamma}(t)\rangle \\ &= \langle \nabla_v N, v\rangle + \langle N, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\rangle \\ &= \langle \nabla_v N, v\rangle = -I\!I(v,v). \end{aligned}$$

□

[1] On pourrait aussi considérer ici le fibré tangent.

Cette interprétation dynamique rend évidente et plus géométrique la proposition bien connue suivante.

Proposition 1.7 ([Rei79]) *Un champ de plans sur une variété riemannienne est totalement géodésique si et seulement si sa seconde forme fondamentale est nulle.*

Le lien entre la seconde forme fondamentale d'un champ de plans et ses surfaces osculatrices donne un autre éclairage sur l'implication la plus facile. En effet, si un champ de plans ξ est totalement géodésique, pour tout point x et tout vecteur v dans ξ_x, la géodésique γ partant avec la vitesse v est tangente à ξ. Elle a donc un contact d'ordre deux avec la surface osculatrice à ξ en x et l'équation (1.1) calcule, en utilisant la normale N à ξ en x : $I\!I(v,v) = \langle \ddot{\gamma}, N\rangle = 0$.

L'interprétation dynamique a aussi le corollaire suivant.

Corollaire 1.8 *Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M,g) compacte. Si la seconde forme fondamentale de ξ vue comme forme quadratique est de signe constant alors elle est nulle et ξ est totalement géodésique.*

Démonstration Soit F l'ensemble des vecteurs unitaires de ξ. L'hypersurface F sépare STM en deux composantes et la proposition 1.6 montre que l'hypothèse sur le signe de $I\!I$ est équivalente au fait que le flot géodésique R pointe toujours du même côté de F. Comme ce flot préserve le volume et que STM est compact, R est tangent à F et la proposition montre que la seconde forme fondamentale de ξ est nulle puis la proposition 1.7 assure que ξ est totalement géodésique. □

L'interprétation dynamique explique pourquoi une variété riemannienne dont le flot géodésique a une dynamique suffisamment compliquée, typiquement une variété à courbure strictement négative, ne peut pas avoir de champ de plans totalement géodésique : cela entrainerait l'existence de deux ouverts de mesure $1/2$ pour la mesure de Liouville constitués des vecteurs positivement et négativement transversaux au champ de plans qui seraient invariants par le flot géodésique.

Un calcul rapide et le théorème de Stokes donnent le lemme suivant qui fournit une interprétation de la courbure moyenne.

Lemme 1.9 *Soit N un champ de vecteurs unitaire sur une variété riemannienne et H la courbure moyenne de son orthogonal. On a*

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{div}N$$

donc un champ de plans est de courbure moyenne nulle si et seulement si son champ de vecteurs unitaire normal préserve le volume. Si de plus la variété est fermée alors la fonction H est de moyenne nulle.

Remarque 1.10 La dernière partie de ce lemme montre que la courbure extrinsèque d'un champ de plans sur une variété riemannienne fermée ne peut pas être partout strictement positive car alors les deux courbures principales seraient partout non nulles et de même signe et donc H aussi. Ce résultat découle aussi directement du corollaire 1.8.

Définition 1.11 Soit (M,g) une variété riemannienne et ξ une structure de contact sur M. Soit α l'unique équation de norme un de ξ. On note

$$A\begin{pmatrix} \xi\times\xi & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & \langle 1/2(\nabla_X Y-\nabla_Y X),N\rangle \end{pmatrix}$$

la partie anti-symétrique de la seconde forme fondamentale non symétrisée. Cette forme bilinéaire anti-symétrique est nulle si et seulement si ξ est intégrable, et non-dégénérée si et seulement si ξ est une structure de contact.

Remarque : pour toute base orthonormée directe (X,Y) de ξ, on a $|A|^2=2A(X,Y)^2$ et $\alpha\wedge d\alpha=-2A(X,Y)\mathrm{vol}_g$ lorsque α est de norme un. De plus, si on considère l'angle $\theta_p(t)=\angle((\varphi_t^*Y)_p,N_p)$ où φ_t est le flot de X et N la normale unitaire à ξ alors $-2A(X,Y)=\theta_p'(0)$. Ainsi, A mesure la vitesse de rotation de ξ autour des champs de vecteurs unitaires qui lui sont tangents.

Exemples

La définition suivante est très classique.

Définition 1.12 On dit qu'une métrique riemannienne g est *associée* à une structure de contact ξ si l'unique équation α de ξ qui est de norme un a pour champ de Reeb le vecteur unitaire normal à ξ et si la forme symplectique $d\alpha_{|\xi}$ et $g_{|\xi}$ sont compatibles, c'est-à-dire que $d\alpha_{|\xi}=\mathrm{vol}_\xi$.

Pour une métrique associée on a en particulier $\mathrm{vol}_g=\alpha\wedge d\alpha$ pour α de norme un et de noyau ξ.

Exemple 1.13 La métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ est associée à la structure de contact ξ d'équation $\cos(z)dx-\sin(z)dy=0$. La courbure extrinsèque de ξ vaut $-1/4$ partout et sa courbure moyenne est identiquement nulle.

Soit g une métrique associée à une structure de contact ξ et α une 1–forme de norme un définissant ξ. On vérifie facilement que le champ de Reeb R_α est un champ de vecteurs totalement géodésique et que la courbure moyenne de ξ pour g est nulle. Comme l'existence de métriques associées à une structure de contact est automatique, on voit que demander à une structure de contact d'être de courbure moyenne nulle pour une métrique riemannienne n'impose aucune restriction contrairement à ce qui se passe dans le monde des feuilletages. On reviendra sur cette remarque dans le chapitre suivant.

Bien que ces métriques associées soient naturelles en géométrie de contact, on ne se restreint pas à leur étude pour au moins deux raisons. La première est qu'elles ne sont pas suffisamment générales pour rendre compte de toutes les structures de contact géodésibles. La deuxième, moins immédiatement utile, est qu'elles excluent a priori les métriques hyperboliques à cause de l'observation ci-dessus et d'un théorème de A. Zeghib [Zeg93] qui interdit aux variétés hyperboliques compactes de porter des champs de vecteurs totalement géodésiques.

Exemple 1.14 (Fibrations de Boothby–Wang) Soit ω une forme d'aire sur une surface S pour laquelle $\int_S \omega = -2\pi n$ pour un entier n. Soit V le fibré en cercles de nombre d'Euler n au-dessus de S. La partie facile du théorème de Boothby–Wang [BW58] assure qu'il existe une forme de contact α sur V dont le champ de Reeb engendre l'action du cercle et qui définit une connexion sur le fibré principal $\pi\colon\ V \to S$ dont la courbure est ω (voir aussi [Gei08][section 7.2]). La courbure de la connexion est définie ici comme la projection sur la base de la 2–forme S^1–invariante $d\alpha$. Soit g_S une métrique sur la surface S dont la forme d'aire est ω. On note $\pi^* g_S$ le rappel sur $\ker\alpha$ de la métrique g_S. La métrique $\pi^* g_S + \alpha^2$ est associée à la structure de contact $\ker\alpha$ par construction.

Les structures de contact de l'exemple précédent sont totalement géodésiques pour la métrique riemannienne décrite. Cette classe inclue la connexion de Levi-Civita et la structure de contact canonique sur S^3 mais pas toutes les structures de contact géodésibles, une classe qu'on va maintenant examiner.

1.2 Structures de contact géodésibles

Définition 1.15 Un feuilletage de codimension deux est *riemannien* s'il existe un système de disques intersectant transversalement toutes les feuilles qu'on peut munir de métriques riemanniennes invariantes par holonomie.

Une métrique est quasi-fibrée pour un feuilletage riemannien si l'holonomie infinitésimale est une isométrie entre l'orthogonal des feuilles et les disques transversaux.

Une métrique est *quasi-fibrée* pour un champ de plans si son orthogonal est tangent à un feuilletage riemannien pour lequel la métrique est quasi-fibrée.

Exemple 1.16 Si $V \to S$ est un fibré en cercles au-dessus d'une surface munie d'une métrique riemannienne g_S alors pour tout champ de plans ξ transversal aux fibres il existe une métrique quasi-fibrée obtenue en forçant ξ à être orthogonal aux fibres, en le munissant du rappel de la métrique g_S et en munissant les fibres d'une métrique quelconque.

Le lemme suivant est une caractérisation commode des métriques quasi-fibrées, on peut trouver sa démonstration dans [Car84] par exemple.

Lemme 1.17 *Soit ξ un champ de plans sur une variété. Une métrique g est quasi-fibrée pour ξ si et seulement si pour tout champ de vecteurs N orthogonal à ξ et tout champ de vecteurs unitaire X tangent à ξ, on a $\langle X, [N,X]\rangle = 0$.*

En particulier ce lemme permet de montrer facilement que tout feuilletage provenant d'un flot isométrique est riemannien.

Proposition 1.18 *Un champ de plans ξ est totalement géodésique pour une métrique g si et seulement si g est quasi-fibrée pour ξ.*

Démonstration Pour tout champ de vecteurs unitaire X tangent à ξ on a

$$I\!I(X,X) = \langle \nabla_X X, N\rangle = -\langle X, \nabla_X N\rangle = \langle X, \nabla_N X\rangle - \langle X, \nabla_X N\rangle = -\langle X, [N,X]\rangle$$

et le lemme 1.17 et la proposition 1.7 fournissent l'équivalence voulue. □

Si g est une métrique quasi-fibrée pour un champ de plans ξ, alors la formule d'O'Neill calcule la courbure sectionnelle K de ξ en fonction de celle K^B des disques transverses (la courbure sectionnelle K de ξ est définie ponctuellement en x comme la courbure sectionnelle du plan ξ_x).

$$K = K^B - \frac{3}{2}|A|^2$$

On verra plus loin ce que devient cette formule pour une métrique quelconque.

On va maintenant expliquer la caractérisation topologique des champs de plans géodésibles donnée dans l'introduction.

La proposition suivante peut se déduire de la proposition 1.7 et du lemme 1.17 mais on en donnera une démonstration plus géométrique (non originale).

Proposition 1.19 *Un champ de plans sur une variété est géodésible si et seulement si il est transversal à un feuilletage riemannien de dimension un.*

Démonstration Soit M une variété compacte sans bord. Soit ξ un champ de plans sur M transversal à un feuilletage riemannien $\mathscr{F}$. On munit ξ du rappel par holonomie des métriques des disques transverses et on étend cette métrique à TM en rendant F orthogonal à ξ et en munissant F d'une métrique quelconque. On montre que ξ est totalement géodésique pour cette métrique.

Il suffit de montrer que pour tout $(x,v) \in \xi$ il existe une petite courbe γ tangente à ξ, minimisante et vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$ (dans cette démonstration on note par un prime les dérivées par rapport au temps). Soit T un disque transversal à $\mathscr{F}$ intersectant la feuille passant par x et soit π la projection d'un voisinage de x sur T le long des feuilles. Soit $\bar{\gamma}$ une petite géodésique de T partant de $\pi(x)$ avec la vitesse $\pi_* v$ et γ son unique relevé à M tangent à ξ. On pose $y = \gamma(t)$ pour un t petit. Pour toute courbe α vérifiant $\alpha(0) = x$ et $\alpha(t) = y$ on note α'_ξ la projection orthogonale de α' sur ξ. La courbe γ est plus courte que α car

$$\int |\alpha'| \geq \int |\alpha'_\xi| = \int |(\pi \circ \alpha)'| = l(\pi \circ \alpha) \geq l(\bar{\gamma}) = \int |\bar{\gamma}'| = \int |\gamma'|$$

où l est la fonction longueur sur T et on a utilisé le fait que $\pi_* : \xi \to TT$ est isométrique par construction et que $\bar{\gamma}$ est (localement) minimisante.

Réciproquement si ξ est un champ de plans totalement géodésique pour une métrique g alors $\xi^\perp$ s'intègre en un feuilletage riemannien $\mathscr{F}$. En effet pour tout système de disques transversaux à $\mathscr{F}$, tout point x sur une feuille intersectant un disque T en un point y définit une métrique sur T_yT en poussant g_ξ par holonomie infinitésimale. Pour montrer qu'on obtient des métriques bien définies et invariantes sur les disques transversaux il suffit de vérifier que, pour tout couple (x,x') sur la même plaque L, l'holonomie infinitésimale est une isométrie de ξ_x dans $\xi_{x'}$.

Or les géodésiques orthogonales aux plaques sont tangentes à ξ donc toutes les plaques voisines sont contenues dans des tubes autour de L d'après le lemme de Gauss (généralisé). Cela permet de paramétrer localement $\mathscr{F}$ par un flot préservant les tubes et la fibration en disques d'un voisinage tubulaire de L. Ce flot préserve alors les distances à L et fournit après dérivation l'isométrie voulue. □

Classification de Carrière

Exemple 1.20 Tout feuilletage provenant d'une action localement libre de S^1 est riemannien car il est isométrique pour une métrique riemannienne obtenue par moyen-

nisation.

Exemple 1.21 On voit S^3 comme la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. Toute paire de nombres réels (λ, μ) fournit un flot isométrique $\phi_t(z_1, z_2) = (e^{i\lambda t} z_1, e^{i\mu t} z_2)$ qui définit donc un feuilletage riemannien. Si λ est un multiple rationnel de μ alors on obtient un exemple du type précédent.

L'espace lenticulaire $L_{p,q}$ est le quotient de S^3 par l'action engendrée par $(z_1, z_2) \mapsto (e^{2i\pi/p} z_1, e^{2i\pi q/p} z_2)$ et le flot ϕ_t y induit un feuilletage riemannien.

Tous ces feuilletages sont $\mathcal{C}^\infty$–proches de fibrations de Seifert.

Exemple 1.22 Soit f une rotation d'angle irrationnel agissant sur S^2. Le feuilletage de $\mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}$ par $\{\star\} \times \mathbb{R}$ induit un feuilletage isométrique de

$$\frac{\mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}}{(x,t) \sim (f(x), t+1)} \simeq \mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$$

qui est $\mathcal{C}^\infty$–proche d'une fibration de Seifert.

Exemple 1.23 Pour toute matrice $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, si $\mathrm{tr}(A) > 2$ alors A a deux valeurs propres strictement positives $\lambda, 1/\lambda$. La direction propre correspondant à λ définit un feuilletage sur $T^2 \times \mathbb{R}$ qui descend en feuilletage riemannien T^3_A d'après le lemme 1.17 et la description de l'algèbre de Lie de Sol dans l'introduction.

Si $\mathrm{tr}(A) < -2$ il existe aussi un tel feuilletage mais il n'est pas orientable donc ne peut pas être transversal à une structure de contact coorientable.

Démonstration de la proposition page 20 La proposition 1.19 caractérise les champs de plans géodésibles comme étant ceux transversaux à un feuilletage riemannien de dimension un. Or la classification de ces feuilletages donnée par Y. Carrière dans [Car84] affirme qu'une variété compacte sans bord équipée d'un feuilletage riemannien est isomorphe à l'un des exemples suivants :

- le tore T^3 muni d'une feuilletage linéaire ;
- un espace lenticulaire muni d'un feuilletage de l'exemple 1.21 ;
- le produit $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$ muni d'un feuilletage de l'exemple 1.22 ;
- une variété de Seifert munie de sa fibration, voir l'exemple 1.20 ;
- un fibré en tores T^3_A, $\mathrm{tr}(A) > 2$, muni du feuilletage de l'exemple 1.23.

Comme la transversalité est une condition ouverte, un champ de plans est transversal à un des trois premiers types d'exemples seulement si il est aussi transversal à un exemple du quatrième type. □

Cas lorentzien

La définition des champs de plans totalement géodésiques s'étend sans modification aux variétés munies d'une connexion quelconque. On aborde maintenant brièvement l'étude des structures de contact totalement géodésiques pour une métrique lorentzienne. La non-compacité du groupe de Lorentz incite à attendre moins de rigidité que dans le cas riemannien. Avant cela, la première différence concerne l'existence de statuts différents pour les plans d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire lorentzien selon la nature de la restriction de ce produit scalaire au plan considéré. On appelle plan de type lumière un plan sur lequel la métrique restreinte est dégénérée et *lieu de lumière* d'un champ de plans sur une variété lorentzienne l'ensemble des points où il est de type lumière.

En général il n'est pas vrai que l'orthogonal d'un champ de plans ξ totalement géodésique sur une variété lorentzienne (M,g) est un feuilletage préservant une métrique transversale. Cependant si la métrique restreinte au champ de plans g_ξ est partout non dégénérée alors l'orthogonal de ξ est transversal à ξ et son holonomie préserve une métrique transversale dont la signature est la même que celle de g_ξ. Réciproquement tout champ de plans transversal à un feuilletage de dimension un dont l'holonomie préserve une métrique lorentzienne est totalement géodésique pour toute métrique lorentzienne construite comme les métriques quasi-fibrées du cas riemannien. Pour toutes ces choses on renvoie à [Mou05].

La structure de contact canonique ξ sur $\mathbb{R}^3$ d'équation $dz - r^2 d\theta = 0$ est totalement géodésique pour la métrique de Minkowski $dx^2 + dy^2 - dz^2$ car les géodésiques de cette métrique sont les droites euclidiennes. Le lieu de lumière de ξ est un cylindre autour de l'axe (Oz).

Proposition 1.24 *Soit (M,g) une variété lorentzienne. Si ξ est une structure de contact totalement géodésique sur M (pour la connexion de Levi-Civita ∇ de g) alors le lieu de lumière L de ξ est une surface fermée dans M de caractéristique d'Euler nulle. Si M est compacte alors cette surface est une réunion de tores.*

Démonstration On peut définir pour une connexion quelconque la seconde forme fondamentale d'un champ de plans comme

$$I\!I \begin{pmatrix} \xi \times \xi & \to & TM/\xi \\ (X,Y) & \mapsto & 1/2[\nabla_X Y + \nabla_Y X] \end{pmatrix}$$

et la seconde forme fondamentale d'un champ de plans totalement géodésique est toujours nulle.

Pour montrer que le lieu de lumière L est une surface fermée il suffit de montrer qu'au voisinage de tous ses points il est défini comme niveau régulier d'une fonction définie sur un ouvert de M. La question est purement locale donc on peut supposer que ξ est trivialisable. On peut alors trouver une base (X,Y) de ξ telle que $\langle X,X\rangle \neq 0$ et $\langle X,Y\rangle = 0$. On définit f de M dans $\mathbb{R}$ par $f = \langle Y,Y\rangle$ de sorte que $L = f^{-1}(0)$. Il suffit donc de montrer que, pour tout x dans L, $df(x) \neq 0$.

Or $df(x)(X) = X\langle Y,Y\rangle = 2\langle \nabla_X Y, Y\rangle$ et, en un point de L, $Y^\perp = \xi$ donc il suffit de montrer que $\nabla_X Y \notin \xi$.

La condition de contact C_3 donne $[X,Y] \notin \xi$. Or

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

et l'annulation de la seconde forme fondamentale donne

$$-\nabla_Y X \in \nabla_X Y + \xi$$

donc

$$[X,Y] \in 2\nabla_X Y + \xi$$

et donc $\nabla_X Y \notin \xi$.

Pour montrer que la caractéristique d'Euler de L est nulle, on remarque que l'orthogonal de ξ est un champ de droites tangentes à L. □

L'exemple de la structure de contact canonique sur l'espace de Minkowski illustre l'énoncé de la proposition avec un lieu de lumière cylindrique. Par ailleurs la métrique et la structure de contact sont invariantes par translation verticale et passent donc au quotient $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1$ pour donner un exemple de lieu de lumière torique.

Théorème 1.25 *Il existe des structures de contact vrillées totalement géodésiques sur des variétés lorentziennes compactes.*

Démonstration On décrit un exemple sur $V = \mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$ qui est facile à généraliser à toutes les variétés de Seifert. On considère sur V, vue comme fibré sur S^2, une structure de contact S^1–invariante ξ qui est tangente aux fibres le long de deux tores T et T' fibrés et donc vrillée (voir [Lut77] ou [Gir01a] pour plus de détails sur la construction de telles structures de contact). Soit N le tore épais bordé par T et T'. Dans un petit voisinage U de $T \cup T'$ on identifie (V,ξ) à un voisinage du lieu de lumière torique construit juste avant l'énoncé du théorème et on transporte la métrique lorentzienne de cet exemple de sorte que T et T' soient inclus dans le lieu de lumière

de la structure de contact ξ pour la métrique en construction et que la restriction de la métrique à ξ soit lorentzienne dans $U \cap \mathring{N}$ (il faut prendre garde aux orientations lors d'une des identifications). Dans $U \cap \mathring{N}$, l'holonomie du feuilletage par cercles de V préserve une métrique lorentzienne transversale qui se dépose donc sur un ouvert de la base S^2. On muni la base B de N d'une extension de cette métrique lorentzienne. Il s'agit essentiellement d'étendre le champ de cônes de lumière correspondant, ce qui est possible car B est un anneau et que tout champ de vecteurs non singulier de type lumière au bord est d'indice nul. On peut maintenant construire sur N une métrique lorentzienne en rappelant sur ξ la métrique de B et en paramétrant de façon arbitraire les fibres tout en les rendant orthogonales à ξ. À l'extérieur de N on a au voisinage de $T \cup T'$ une métrique dont la restriction à ξ est riemannienne et qui est S^1–invariante. On la projette sur la base de $U \setminus N$ et on l'étend en métrique riemannienne sur tout $\mathrm{S}^2 \setminus B$ puis on munit la restriction de ξ à $V \setminus N$ du rappel de cette métrique. Enfin on déclare les fibres orthogonales à ξ là où ce n'est pas déjà le cas et on leur attribue une longueur au carré strictement négative qui étend celle qu'elles ont dans $U \setminus N$. On obtient ainsi une métrique lorentzienne pour laquelle ξ est totalement géodésique.

Pour passer aux autres variétés de Seifert il suffit de considérer des structures de contact S^1–invariantes pour lesquelles les tores constitués de fibres legendriennes viennent par paires. □

Dans la construction précédente on a utilisé de façon cruciale la présence d'un lieu de lumière non vide. Si la restriction d'une métrique lorentzienne à un champ de plans totalement géodésique est partout euclidienne alors on peut construire facilement une métrique riemannienne pour laquelle ce champ de plans est totalement géodésique. On retrouve donc le cas riemannien. Si au contraire cette restriction est partout de signature neutre $(1,1)$ alors le champ de plans est transversal à un flot lorentzien et la situation est beaucoup plus riche.

Dans [BMT06], C. Boubel, P. Mounoud et C. Tarquini montrent qu'il existe des exemples exotiques de tels flots, et il est probable qu'ils sont parfois transversaux à des structures de contact vrillées, mais ils montrent aussi que sous une hypothèse de complétude naturelle ces phénomènes étranges disparaissent.

Un champ de plans totalement géodésique sur une variété lorentzienne est dit complet si toutes les géodésiques tangentes à ce champ de plans sont complètes.

Théorème 1.26 ([BMT06]) *Tout champ de plans totalement géodésique complet sur une variété lorentzienne qui n'est pas totalement géodésique pour une métrique riemannienne est transversal au flot géodésique du fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique ou à la suspension de l'action d'une matrice hyperbolique sur le tore T^2.*

La proposition 3.14 montre que les structures de contact transversales aux suspensions de matrices hyperboliques sont toutes universellement tendues. Par ailleurs la structure de contact canonique sur le fibré unitaire cotangent d'une surface hyperbolique envoyée par la métrique sur le fibré unitaire tangent est universellement tendue et transversale au flot géodésique mais il n'est pas certain que toutes les structures de contact transversales à ce flot soient universellement tendues.

1.3 Formule de Bochner

Les invariants riemanniens de champs de plans introduits précédemment ne sont pas indépendants, il existe au moins une relation les liant. Une version intégrale de cette relation sur les variétés compactes a été démontrée pour les feuilletages des variétés à courbure constante par D. Asimov dans [Asi78] puis étendue aux champs de plans quelconques (toujours sur des variétés compactes à courbure constante) par R. Lutz et T. Hangan dans [HL83]. Enfin C. Albert a démontré dans [Alb83] une formule dont on montrera plus loin qu'elle est équivalente à celle du théorème suivant. La formule du théorème a d'abord été démontrée directement puis P. Jammes m'a fait remarquer qu'elle ressemblait à la formule de Bochner. On montrera comment on peut en effet la déduire de cette formule.

Théorème 1.27 *Soit (M,g) une variété riemannienne, ξ un champ de plans sur M et N sa normale unitaire. On note vol_ξ le volume riemannien induit sur ξ, $k=\nabla_N N$ et S la courbure scalaire de g.*

On a toujours :

$$\left(K_e+\frac{1}{2}|A|^2+\frac{1}{2}K\right)\mathrm{vol}+d\left(H\mathrm{vol}_\xi+\frac{1}{2}\iota_k\mathrm{vol}\right)=\frac{S}{4}\mathrm{vol}$$

et, si M est fermée, on a la version intégrale :

$$\int_M\left(K_e+\frac{1}{2}|A|^2+\frac{1}{2}K\right)=\int_M\frac{S}{4}.$$

Dans le cas des métriques associées, la plupart des termes apparaissant dans ce théorème sont nuls ou constants et on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.28 *Si (M,ξ) est une variété de contact et g une métrique riemannienne associée alors*

$$K_e+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}K=\frac{S}{4}.$$

Comme corollaire du corollaire, on obtient que si g est une métrique associée à ξ alors (ξ, g) est K-contact (i.e. le champ de vecteurs normal unitaire est un champ de Killing) si et seulement si la courbure extrinsèque de ξ est nulle en utilisant [Bla02][théorème 7.1] et le fait que $S/2 - K = Ric(N)$ (noté $Ric(\xi)$ dans [Bla02]). Dans ce cas, la métrique associée est quasi-fibrée pour ξ qui est donc totalement géodésique.

Démonstration Il s'agit d'un énoncé purement local donc on peut supposer l'existence d'un repère mobile orthonormé (e_1, e_2, e_3) avec $e_3 = N$ et $\xi = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ tel que $I\!I(e_1) = k_1$, $I\!I(e_2) = k_2$ et $I\!I(e_1, e_2) = 0$. Soient $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ les 1-formes duales. La forme θ^3 sera aussi notée α pour insister sur le fait que son noyau est le champ de plans étudié.

La formule de Bochner donne ici

$$\langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = |\nabla\alpha|^2 + \mathrm{Ric}(\alpha).$$

On va interpréter chaque terme successivement. Par définition de la courbure de Ricci, on a

$$\mathrm{Ric}(\alpha) = \frac{S}{2} - K. \tag{1.2}$$

On définit les n_{ij} par[2] $\nabla_{e_i}\alpha = n_{ij}\theta^j$. On a alors :

$$\begin{array}{lll} n_{11} = -k_1 & n_{12} = -A(e_1, e_2) & n_{13} = 0 \\ n_{21} = A(e_1, e_2) & n_{22} = -k_2 & n_{23} = 0 \\ n_{31} = \langle e_1, k \rangle & n_{32} = \langle e_2, k \rangle & n_{33} = 0 \end{array}$$

On peut maintenant calculer $|\nabla\alpha|^2 = \langle \nabla_{e_i}\alpha, \nabla_{e_i}\alpha \rangle = \sum n_{ij}^2$ qui donne, en utilisant $\langle k, N \rangle = 0$:

$$|\nabla\alpha|^2 = k_1^2 + k_2^2 + |A|^2 + |k|^2 = 4H^2 - 2K_e + |A|^2 + |k|^2. \tag{1.3}$$

Il reste à calculer $\langle \Delta\alpha, \alpha \rangle$ sachant que $\Delta = \delta d + d\delta$. Comme

$$\delta\alpha = -\iota_{e_i}\nabla_{e_i}\alpha = -n_{ii} = k_1 + k_2 = 2H$$

et que, en degré p (et en dimension trois), on a $\star\star = (-1)^{p(3-p)}$ et $\delta = (-1)^{3(p+1)+1} \star d\star$, il vient

$$\langle d\delta\alpha, \alpha \rangle \,\mathrm{vol} = d\delta\alpha \wedge \star\alpha = 2dH \wedge \star\alpha = 2d\,(H \star \alpha) - 2Hd \star \alpha$$

avec $\star\alpha = \mathrm{vol}_\xi$ et

$$d \star \alpha = \star\star d \star \alpha = - \star \delta\alpha = -2H\mathrm{vol}$$

[2] Ici et dans toute la suite on utilise la convention de sommation d'Einstein.

donc

$$\langle d\delta\alpha, \alpha\rangle \,\mathrm{vol} = 2d\left(H\mathrm{vol}_\xi\right) + 4H^2\mathrm{vol}. \tag{1.4}$$

Par ailleurs

$$\langle \delta d\alpha, \alpha\rangle \,\mathrm{vol} = \alpha \wedge (\star\delta d\alpha) = \alpha \wedge (d \star d\alpha) = d\alpha \wedge \star d\alpha + d\left(\alpha \wedge \star d\alpha\right) \tag{1.5}$$

or

$$d\alpha = \theta^i \wedge \nabla_{e_i}\alpha = n_{ij}\theta^i \wedge \theta^j = 2A(e_1, e_2)\theta^1 \wedge \theta^2 - \langle e_1, k\rangle\, \theta^1 \wedge \theta^3 - \langle e_2, k\rangle\, \theta^2 \wedge \theta^3$$

d'où on tire

$$d\alpha \wedge \star d\alpha = |d\alpha|^2\mathrm{vol} = (2|A|^2 + |k|^2)\mathrm{vol}$$

et

$$\alpha \wedge \star d\alpha = \theta^3 \wedge \left(\langle e_1, k\rangle\, \theta^2 - \langle e_2, k\rangle\, \theta^1\right) = -\langle e_1, k\rangle\, \theta^2 \wedge \theta^3 + \langle e_2, k\rangle\, \theta^1 \wedge \theta^3 = -\iota_k\mathrm{vol}.$$

En reportant dans 1.5, on obtient

$$\langle \delta d\alpha, \alpha\rangle \,\mathrm{vol} = \left(2|A|^2 + |k|^2\right)\mathrm{vol} + d\left(\iota_k\mathrm{vol}\right).$$

Enfin on rassemble cette équation avec la formule de Bochner et les équations 1.2,1.3 et 1.4 pour obtenir

$$\left(2|A|^2 + |k|^2\right)\mathrm{vol} + d\left(\iota_k\mathrm{vol}\right) + 2d\left(H\mathrm{vol}_\xi\right) + 4H^2\mathrm{vol} = \left(4H^2 - 2K_e + |A|^2 + |k|^2 + \frac{S}{2} - K\right)\mathrm{vol}$$

c'est-à-dire

$$|A|^2\mathrm{vol} + d\left(\iota_k\mathrm{vol}\right) + 2d\left(H\mathrm{vol}_\xi\right) = \left(-2K_e + \frac{S}{2} - K\right)\mathrm{vol}$$

qu'on divise par deux avant de réordonner les termes pour obtenir la formule annoncée.

Démonstration alternative On fait maintenant le calcul par la méthode du repère mobile (voir par exemple [Spi79]) sans passer par la formule de Bochner. On omettra le symbole du produit extérieur. Soient (ω^i_j) les 1-formes de connexion du repère mobile introduit plus haut et Ω^i_j les 2-formes de courbures associées. Par définition, on a

$$\nabla_{e_k} e_j = \sum_i \omega^i_j(e_k) e_i$$

et[3]

$$R(e_k, e_l)e_j = -\sum_i \Omega^i_j(e_k, e_l)e_i$$

de sorte que la courbure sectionnelle soit donnée par

$$K(e_i, e_j) = \Omega^i_j(e_i, e_j) \text{ et } K(e_i, e_j)\mathrm{vol} = \varepsilon^i{}_j{}^k \Omega^i_j \theta^k.$$

De plus on a les relations structurelles :

$$d\theta^i = -\sum_k \omega^i_k \theta^k$$

et

$$d\omega^i_j = -\sum_k \omega^i_k \omega^k_j + \Omega^i_j.$$

En particulier on a $n_{ij} = -\omega^3_j(e_i)$. En utilisant le calcul des n_{ij} de la première démonstration, on obtient :

$$\begin{aligned} \omega^3_1\omega^3_2\theta^3 &= \left(\omega^3_1(e_i)\theta^i\right)\left(\omega^3_2(e_j)\theta^j\right)\theta^3 \\ &= (n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12})\theta^1\theta^2\theta^3 \\ &= \left(K_e + \frac{1}{2}|A|^2\right)\mathrm{vol} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \omega^3_1\theta^2 - \omega^3_2\theta^1 &= \left(\omega^3_1(e_1) + \omega^3_2(e_2)\right)\theta^1\theta^2 + \omega^3_1(e_3)\theta^3\theta^2 - \omega^3_2(e_3)\theta^3\theta^1 \\ &= 2H\theta^1\theta^2 + \langle k, e_1\rangle\,\theta^2\theta^3 - \langle k, e_2\rangle\,\theta^1\theta^3 \\ &= 2H\mathrm{vol}_\xi + \iota_k\mathrm{vol} \end{aligned}$$

qu'on dérive en utilisant les équations structurelles et la relation $\omega^i_j = -\omega^j_i$ dans le membre de gauche pour obtenir :

$$d\left(2H\mathrm{vol}_\xi + \iota_k\mathrm{vol}\right) = -2\omega^3_1\omega^3_2\theta^3 + \Omega^3_1\theta^2 - \Omega^3_2\theta^1$$

et on conclut en utilisant que

$$\Omega^3_1\theta^2 - \Omega^3_2\theta^1 = \left(\frac{1}{2}S - K_\xi\right)\mathrm{vol}. \qquad \square$$

[3] Ici R est le tenseur de Riemann de [GHL04] qui est l'opposé de celle de [Spi79].

Chapitre 2

Recherche d'une courbure intrinsèque

2.1 Ce qu'en dit la théorie de Chern–Weil

La théorie de Chern–Weil associe des formes différentielles aux fibrés vectoriels munis de connexions. On examine ici ce que donne cette association dans le contexte de notre étude.

Le point de vue le plus direct consiste à oublier le fibré tangent pour ne considérer un champ de plans ξ sur une variété riemannienne (M, g) que comme un fibré de rang deux muni d'une connexion. La connexion est ici induite par la connexion de Levi-Civita ∇ en projetant orthogonalement sur ξ (on note N la normale unitaire de ξ) :

$$\mathrm{D}_X U := \nabla_X U - \langle \nabla_X U, N \rangle N.$$

Si $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ est un corepère mobile adapté à ξ (c'est-à-dire que $\xi = \ker \theta^3$) alors les 1–formes de connexion et de courbure de D seront notées $\underline{\omega}_i^j$ et $\underline{\Omega}_i^j$ respectivement. Le lien avec les objets correspondants pour la connexion ambiante est $\underline{\omega}_1^2 = \omega_1^2$ et $\underline{\Omega}_1^2 = \Omega_1^2 + \omega_1^3 \omega_3^2$. En effet, pour tout vecteur v et champ de vecteurs U tangent à ξ, on a

$$\mathrm{D}_v U = \nabla_v U - \langle \nabla_v U, N \rangle N = \nabla_v U - \omega_1^3(v) N = \sum_{j=1}^{2} \omega_1^j(v) e_j$$

qui prouve la première formule, puis $d\underline{\omega}_1^2 = d\omega_1^2 = \Omega_1^2 + \omega_1^3 \omega_3^2$, donc

$$\underline{\Omega}_1^2 = \Omega_1^2 + \omega_1^3 \omega_3^2.$$

TAB. 2.1 – Image de $B\hat{\varphi}_\xi$

Dans $B\hat{W}^*_{21}$	Image par $B\hat{\varphi}_\xi$
θ^i	θ^i
σ^i	ω^i_3
π^{12}	ω^1_2
Π^{12}	Ω^1_2
Σ^i	Ω^i_3

La théorie de Chern–Weil (telle que résumée dans [MS74][annexe C] avec les mêmes notations qu'ici) fournit alors la classe d'Euler de ξ vu comme fibré de rang deux :

Proposition 2.1 *Pour tout repère mobile adapté à ξ, on a*

$$\chi(\xi) = \frac{1}{2\pi}\left[\Omega^1_2 + \omega^3_1\omega^3_2\right].$$

Un point de vue plus élaboré consiste à utiliser le champ de plans ξ pour réduire le groupe structurel de TM de $SO(3)$ à $SO(2)\times\{1\}$. Il s'agit de la stratégie adoptée par C. Albert dans [Alb83]. Le fibré des repères orthonormés affines de TM admet pour groupe structurel le groupe des isométries affines $ASO(3)$ et son algèbre de Weil $W^* = \Lambda^*\mathfrak{aso}^* \otimes S^*\mathfrak{aso}^*$ se décompose sous l'effet de la réduction par ξ du groupe structurel. Cette décomposition et son effet sur les équations structurelles des connexions sont étudiés en détail dans [Alb83] et conduisent à introduire une algèbre $B\hat{W}_{21}$ dont les éléments sont envoyés par le morphisme de Chern–Weil $B\hat{\varphi}_\xi$ sur des formes différentielles sur M. On ne détaillera pas cette construction ici mais on indique dans la table 2.1 quelles sont les images par $B\hat{\varphi}_\xi$ des éléments d'une base de $B\hat{W}_{21}$ introduite dans [Alb83] en termes d'un corepère mobile adapté à ξ et des formes de connexions et de courbures associées. Cela permet de calculer les invariants que C. Albert définit via ce morphisme en fonction des courbures extrinsèque, moyenne et sectionnelle de ξ. Le résultat de ces calculs est présenté dans le tableau 2.2.

Outre la définition de ces invariants, C. Albert explique pourquoi la théorie de Chern–Weil assure une égalité de formes différentielles qui, en utilisant le tableau 2.2, redonne la formule du théorème 1.27.

TAB. 2.2 – Correspondance avec l'article de C. Albert

Nom donné par Albert	Notation d'Albert	Interprétation
courbure de Gauss	γ_ξ	$K_e + \frac{1}{2}\|A\|^2$
courbure moyenne normale	μ_ξ	$2H$
courbure scalaire	τ_ξ	$K_e + K + \frac{1}{2}\|A\|^2$

En plus de fournir une démonstration plus sophistiquée du théorème 1.27 (mais essentiellement équivalente à la deuxième démonstration du chapitre précédent), cette théorie suggère l'étude de la courbure notée τ_ξ et qu'on appellera *courbure d'Albert*. On peut remarquer qu'il s'agit de la somme de la courbure sectionnelle et du déterminant de la seconde forme fondamentale non symétrisée. En ce sens il s'agit d'une généralisation naturelle de la courbure de Gauss des feuilletages. De plus on a $\tau_\xi \mathrm{vol} = 2\pi\lambda\theta^3$, où λ est la représentante de la classe d'Euler de ξ calculée plus haut.

2.2 Laplacien et mesures harmoniques

Après la théorie de Chern–Weil on examine une autre source d'inspiration qui vient de la théorie des feuilletages via un détour par la théorie des mesures harmoniques de feuilletages. Lorsqu'on cherche à transposer aux structures de contact des notions et théorèmes de la théorie des feuilletages on est confronté à l'absence d'analogue évident des mesures transverses (sous-entendu invariantes par holonomie). Une définition indirecte de ces mesures dans le cas des feuilletages permet de mieux cerner le problème. D'après D. Sullivan [Sul76] (voir aussi [CC00][chapitre 10]), les mesures transverses correspondent aux cycles feuilletés. On ne rappellera pas ici la définition de ces cycles mais on note qu'ils sont tous triviaux s'il existe une 2–forme exacte qui est positive sur le feuilletage (voir par exemple [CC00][lemme 10.2.6]). Les définitions et ce résultat se généralisent sans problème aux champs de plans quelconques et la condition de contact $\alpha \wedge d\alpha > 0$ garantit exactement la positivité de la 2–forme exacte $d\alpha$ sur $\ker \alpha$. Ainsi il n'y a, en ce sens, jamais de mesure transverse (non nulle) pour une structure de contact. On peut aussi réinterpréter en termes de ces cycles feuilletés le fait que toute structure de contact soit de courbure moyenne nulle pour une métrique bien choisie. Au passage on peut remarquer que, si on cherche à définir l'entropie d'une structure de contact sur une variété riemannienne par analogie avec le cas des feuilletages, un

théorème d'É. Ghys, R. Langevin et P. Walczak qui assure qu'un feuilletage d'entropie nulle possède une mesure transverse pousse à attendre des structures de contact que leur entropie ne soit jamais nulle.

Même dans le monde des feuilletages, les mesures transverses sont rares et cela a conduit, entre autres raisons, au développement de la notion de mesure harmonique pour un feuilletage muni d'une métrique riemannienne le long des feuilles. La définition [Gar83] est très simple. Si ξ est un champ de plans intégrable muni d'une métrique riemannienne g sur une variété M on appelle laplacien d'une fonction $f\colon M \to \mathbb{R}$ la fonction $\Delta^\xi f(x) = \Delta(f_{|L(x)})$ où $L(x)$ est la feuille contenant x munie de la métrique g. Les mesures harmoniques sont alors définies de façon duale comme étant les mesures μ pour lesquelles $\int \Delta^\xi f \, d\mu = 0$ pour toute fonction f.

Un champ de plans général n'a pas de feuille mais il a des surfaces osculatrices en tout point qui sont bien définies à l'ordre deux. On peut donc définir un laplacien en s'appuyant sur ces surfaces à condition de vérifier qu'il ne dépend pas du choix de surfaces osculatrices, ce qui sera fait dans la proposition suivante.

Définition 2.2 Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M,g) et f une fonction de M dans $\mathbb{R}$. On appelle *laplacien* de f pour ξ et on note $\Delta^\xi f$ la fonction qui à $m \in M$ associe le laplacien pour la métrique induite de la restriction de f à une surface osculatrice à ξ en m.

Proposition 2.3 *Soit (M,g) une variété riemannienne.*

a) Soit S une surface plongée dans M. On note $\vec{H}$ le vecteur de courbure moyenne de S. Pour toute fonction $f\colon M \to \mathbb{R}$, on a :

$$\Delta(f_{|S}) = -\mathrm{tr}\left((\mathrm{Hess}_f)_{|TS}\right) - 2\vec{H}f.$$

b) Soit ξ un champ de plans sur M. Le laplacien Δ^ξ est bien défini et ne dépend que de $g_{|\xi}$ et de la direction $\xi^\perp$, et pas de $g_{|\xi^\perp}$.

c) Si (X,Y) est un repère mobile orthonormé de ξ alors

$$\Delta^\xi f = -XXf - YYf + \langle Y, [X,Y]\rangle Xf + \langle X, [Y,X]\rangle Yf.$$

Démonstration Soit (X,Y,N) un repère mobile adapté à S au voisinage de m et (X^*,Y^*,N^*) le corepère dual.

Le gradient de $f_{|S}$ pour la métrique induite est le projeté $(\nabla f)^S$ du gradient de f sur TS. Le laplacien $\Delta(f_{|S})$ est l'opposé de la divergence de ce gradient. Or on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nabla f}\mathrm{vol}_S &= d(\iota_{\nabla f}\mathrm{vol}_S)\\
&= d\left(Xf\, Y^* - Yf\, X^*\right)\\
&= XXf\, X^*Y^* + YYf\, X^*Y^* + Xf\, dY^* - Yf\, dX^*.
\end{aligned}$$

La relation $d\alpha(X,Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y])$ appliquée à X^* et Y^* donne

$$dX^* = \langle \nabla_X X, Y\rangle \operatorname{vol}_S \quad \text{et} \quad dY^* = -\langle \nabla_Y Y, X\rangle \operatorname{vol}_S$$

donc

$$-\Delta(f_{|S}) = XXf + YYf - Xf\,\langle \nabla_Y Y, X\rangle - Yf\,\langle \nabla_X X, Y\rangle\,.$$

Or

$$\begin{aligned} XXf - Yf\,\langle \nabla_X X, Y\rangle &= (\nabla_X df)(X) + df(\nabla_X X) - Yf\,\langle \nabla_X X, Y\rangle \\ &= \operatorname{Hess}_f(X,X) + \langle \nabla f, \nabla_X X\rangle - Yf\,\langle \nabla_X X, Y\rangle \\ &= \operatorname{Hess}_f(X,X) + \langle Nf\,N + Xf\,X, \nabla_X X\rangle \\ &= \operatorname{Hess}_f(X,X) + Nf\,\langle N, \nabla_X X\rangle \\ &= \operatorname{Hess}_f(X,X) + Nf\,I\!I(X,X). \end{aligned}$$

En rassemblant ce résultat avec celui du calcul analogue pour Y on obtient la formule annoncée en a) car $2H = \operatorname{tr} I\!I = I\!I(X,X) + I\!I(Y,Y)$.

Considérons maintenant un champ de plans ξ sur M et une surface S osculatrice à ξ en un point m. Dans la formule du a) le premier terme ne dépend que de ξ_m et le deuxième ne dépend que de la seconde forme fondamentale de S en m qui elle-même ne dépend que de ξ. On a donc montré que Δ^ξ est bien défini. La fin du b) résulte directement de la formule du c) qu'on explique maintenant.

Cette formule semble une simple réécriture de celle du a) et de sa démonstration mais il y a une petite subtilité : les champs de vecteurs X et Y utilisés pour démontrer a) sont tangents à S mais pas à ξ hors de m en général. Cependant, dans la formule

$$-\Delta(f_{|S}) = \operatorname{Hess}_f(X,X) + \operatorname{Hess}_f(Y,Y) + I\!I(X,X) + I\!I(Y,Y),$$

tous les termes du membre de droite ne dépendent que de la valeur en m des champs de vecteurs X et Y. On peut donc remplacer ces champs par des champs de vecteurs tangents à ξ et remonter les calculs de la démonstration de a) pour obtenir, après simplification, la formule annoncée en c). □

Dans le cas d'un feuilletage, le c) de la proposition redonne bien l'indépendance vis-à-vis de la direction $\xi^\perp$ car les crochets de Lie intervenant sont tous dans ξ donc on peut calculer leurs produits scalaires avec des vecteurs dans ξ sans avoir besoin de projeter dans la direction de $\xi^\perp$.

Définition 2.4 Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M,g). Une mesure μ est dite *harmonique* pour ξ si pour toute fonction f de M dans $\mathbb{R}$

$$\int_M \Delta^\xi f\, d\mu = 0.$$

Ces mesures harmoniques existent toujours sur une variété compacte, cela découle du théorème de Hahn-Banach exactement comme dans le cas des feuilletages, voir par exemple [CC03][théorème 2.1.10].

Pour une structure de contact l'opérateur Δ^ξ est toujours hypoelliptique donc les mesures harmoniques sont toutes lisses, ce qui est une différence importante avec les feuilletages qui, même lorsqu'ils sont eux-mêmes lisses, engendrent des objets non lisses. Il est probable que le laplacien Δ^ξ puisse toujours être relié à un mouvement brownien legendrien et le fait que deux points d'une variété de contact puissent toujours être reliés par une courbe legendrienne expliquerait moralement la bonne diffusion de la chaleur associée à Δ^ξ dans le cas de contact et donc la régularité des mesures harmoniques. Cette interprétation pousse aussi à attendre l'unicité de la mesure harmonique pour les variétés riemanniennes compactes munies d'une structure de contact – de la même façon qu'il n'existe qu'une seule fonction harmonique normalisée sur une variété riemannienne compacte.

Les exemples les plus simples de mesures harmoniques se trouvent sur les groupes de Lie. Dans les exemples du groupe de Heisenberg et de $SU(2)$ décrits dans l'introduction, la structure de contact étudiée est engendrée par deux champs de vecteurs X et Y vérifiant $\nabla_X X = \nabla_Y Y = 0$ de sorte que la proposition 2.3 donne $\Delta^\xi = -XX - YY$. On retrouve le laplacien standard sur le groupe de Heisenberg (au signe près selon les conventions).

Par ailleurs, dans les deux cas, X et Y préservent le volume riemannien donc Δ^ξ est autoadjoint et le volume riemannien normalisé est une mesure harmonique. Sur $SU(2)$, [Bau04][corollaire 3.6] montre que le volume riemannien est la seule mesure harmonique ici.

Le fait que le laplacien (et donc les mesures harmoniques) dépendent de la direction $\xi^\perp$ lorsque ξ n'est pas intégrable semble fournir un cadre étrange mais il est naturel si on s'interesse aux champs de plans géodésibles. En effet on a expliqué pourquoi ces champs de plans sont transversaux à des flots riemanniens et pourquoi les métriques quasi-fibrées sont construites en deux temps : d'abord sur le champ de plans puis en mettant une métrique arbitraire sur l'orthogonal dont la direction est fixée. De plus lorsqu'on change une métrique dans une classe conforme, la relation d'orthogonalité ne change pas. Enfin pour les structures de contact la donnée d'une métrique g sur le champ de plans ξ génère une direction transversale : il s'agit de la direction de l'unique champ de Reeb provenant d'une équation α telle que $d\alpha_{|\xi}$ coïncide avec la forme d'aire de g.

Avant de donner des applications de la construction du laplacien Δ^ξ et des mesures harmoniques dans la section suivante, on fait une remarque sur le contenu géométrique

des mesures harmoniques. Sur la sphère S^3 vue comme fibré sur S^2, si on munit la structure de contact canonique ξ du rappel de la métrique ronde de S^2 et qu'on la rend orthogonale à la fibration de Hopf on définit pour toute paramétrisation des fibres de Hopf une métrique qui rend ξ totalement géodésique. On sait que pour toute paramétrisation, l'unique mesure harmonique est le volume riemannien normalisé de la métrique ronde car on a le résultat pour la métrique ronde et l'indépendance de Δ^ξ par rapport à $g_{|\xi^\perp}$. Or il n'y a qu'une paramétrisation des fibres qui donne ce volume riemannien donc l'unique mesure harmonique contient comme information une paramétrisation privilégiée des fibres : celle qui redonne la métrique ronde sur la sphère S^3. Il est probable que ce phénomène soit général pour les champs de plans géodésibles.

2.3 Prescription de courbure

On a vu que la formule de Bochner et la formule de Stokes imposent certaines restrictions aux courbures d'une structure de contact sur une variété fermée. À l'opposé, les travaux de V. Krouglov (rappelés plus loin) montrent que certaines conditions de courbure (par exemple $K = -1$) peuvent être réalisées pour toute structure de contact si on n'impose rien à la métrique riemannienne.

On détaille ici deux modifications de métriques riemanniennes et leurs effets. On commence par étudier l'effet d'une reparamétrisation de l'orthogonal d'un champ de plans. On a vu dans la section précédente que ces reparamétrisations ne changent pas le laplacien et les mesures harmoniques ni le caractère quasi-fibré d'une métrique. La définition suivante introduit une nouvelle courbure qui se révèlera elle aussi insensible à cette opération. Son nom sera motivé après la proposition suivante.

Définition 2.5 On appelle *courbure basique* d'un champ de plans sur une variété riemannienne $K_b := K_e + K + \frac{3}{2}|A|^2$.

Proposition 2.6 *Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M, g). Si on remplace g par $g_{|\xi} + ag_{|\xi^\perp}$ pour une fonction strictement positive a alors*
- *$|A|^2$ devient $a|A|^2$;*
- *K_e devient $\frac{1}{a}K_e$*
- *K_b est invariante.*

Expliquons pourquoi l'invariance de K_b est liée à la formule d'O'Neill (ce lien m'a été suggéré par P. Jammes). Cette formule affirme que s'il existe une submersion

riemannienne $(M,g) \to (B,g_B)$ pour laquelle ξ est l'orthogonal des fibres alors la courbure sectionnelle K^B de la base (qui est ici une surface) et la courbure sectionnelle K de ξ sont liées par la formule $K^B = K + \frac{3}{2}|A|^2$. Dans ce contexte la courbure extrinsèque de ξ est nulle, comme expliqué dans le chapitre précédent, donc le membre de droite est bien K_b et le membre de gauche est explicitement indépendant de $g_{|\xi^\perp}$. Cette discussion donne aussi une interprétation de K_b dans le cas des métriques quasi-fibrées (qui admettent localement des submersions comme plus haut) et motive son nom.

La première formule de la proposition est le résultat d'un calcul immédiat. La deuxième est démontrée dans [Kro08][lemme 3.2] et la troisième découle des deux premières et de [Kro08][lemme 3.1]. Les énoncés de ces lemmes sont beaucoup plus compliqués que celui de la proposition. On montrera plus loin comment notre formulation permet de simplifier aussi les démonstrations des théorèmes de prescription de courbure de Krouglov.

Définition 2.7 La *courbure de Krouglov* d'un champ de plans sur une variété riemannienne est la somme $K_e + K$ de sa courbure extrinsèque et de sa courbure sectionnelle.

Dans [Kro08] cette courbure est appelée courbure de Gauss car elle coïncide avec la courbure de Gauss classique dans le cas des champs de plans intégrables. Cependant il existe de nombreuses autres définitions de courbures ayant cette propriété, en particulier la courbure d'Albert et la courbure basique.

Théorème 2.8 ([Kro08]) *Soit ξ une structure de contact sur une variété riemannienne (M,g) compacte et f une fonction strictement négative sur M (par exemple $f \equiv -1$). Il existe des métriques riemanniennes g_1 et g_2 obtenues à partir de g par une reparamétrisation de l'orthogonal de ξ suivie d'une homothétie et telles que :*
- *la courbure sectionnelle de ξ pour g_1 est f ;*
- *la courbure de Krouglov de ξ pour g_2 est f.*

Démonstration Dans les deux cas on commence par trouver une fonction a strictement positive modifiant $g_{|\xi^\perp}$ comme dans la proposition 2.6 qui permet de transformer la courbure considérée en fD pour une constante D suffisamment positive. Une homothétie de facteur $1/D$ permet alors de ramener la courbure à f.

Pour la prescription de la courbure sectionnelle, la proposition 2.6 montre que K se transforme en $K_b - \frac{1}{a}K_e - a(3|A|^2/2)$. On veut donc

$$(3|A|^2/2)a^2 + (fD - K_b)a + K_e = 0.$$

Cette équation est quadratique en a et son coefficient dominant est strictement positif car ξ est une structure de contact. La compacité de M assure que toutes les fonctions intervenant sont bornées et le signe de f assure qu'on peut alors trouver D suffisamment grand pour que le discriminant et la demi-somme des racines de ce polynôme soient strictement positifs, ce qui garantit l'existence d'une solution a strictement positive.

Pour la prescription de la courbure de Krouglov, la proposition 2.6 montre que $K_e + K$ se transforme en $K_b - a(3|A|^2/2)$. On veut donc $a(3|A|^2/2) = K_b - fD$. Comme ξ est de contact, $|A| > 0$ et donc cette équation admet une solution strictement positive dès que D est strictement plus grand que le maximum de K_b/f (on utilise ici l'hypothèse $f < 0$). □

Dans la démonstration précédente la reparamétrisation de l'orthogonal de ξ suffit à rendre la courbure sectionnelle ou la courbure de Krouglov strictement négative partout. Cela semble indiquer que la courbure de Krouglov n'est peut-être pas celle dont la prescription est la plus significative et que la prescription de K_b est peut-être un problème intéressant. En fait l'invariance de K_b montre que la façon dont V. Krouglov rend négative sa courbure consiste à troquer cette propriété contre plus de positivité de $|A|^2$.

Par ailleurs, lorsque la métrique g est associée à une structure de contact alors K_b coïncide avec la courbure de Webster comme le montrent les formules de [CH85]. Étant données une structure de contact ξ et une classe conforme de métriques sur ξ, le problème de Yamabe CR consiste à trouver une métrique associée à ξ dont la restriction à ξ est dans la classe conforme donnée et dont la courbure de Webster est constante. Ce problème fait l'objet d'une vaste littérature et a été résolu en dimension trois dans [Gam01]. En particulier le signe de la courbure obtenue ne peut pas être choisi arbitrairement.

Dans [Kro08] la prescription de la courbure de Krouglov est présentée comme un théorème d'uniformisation. Cependant dans le cadre classique des théorème d'uniformisation on restreint la recherche de métrique à une classe conforme. La proposition suivante décrit comment se modifient quelques courbures dans une classe conforme fixée. On en déduira plus loin qu'il est impossible de préscrire la courbure de Krouglov en restant dans une classe conforme. Le laplacien en dimension deux se comporte particulièrement bien lors de transformations conformes. Le laplacien Δ^ξ des champs de plans, qui provient des surfaces osculatrices, apparaît donc naturellement ici.

Proposition 2.9 *Soit ξ un champ de plans sur une variété riemannienne (M, g) et N le champ de vecteurs unitaire normal à ξ. Si on remplace g par la métrique $e^{2u}g$ dans sa classe conforme alors on a les transformations indiquées par la table suivante.*

Pour g	*Pour* $e^{2u}g$
$\lvert A\rvert^2$	$e^{-2u}\lvert A\rvert^2$
K_e	$e^{-2u}\left(K_e + (Nu)^2 - 2\vec{H}u\right)$
H	$e^{-u}\left(H - Nu\right)$
K	$e^{-2u}\left(K - \mathrm{tr}\left((\mathrm{Hess}_u)_{\lvert\xi}\right) - (Nu)^2\right)$
$K_e + K$	$e^{-2u}\left(K_e + K + \Delta^\xi u\right)$
Δ^ξ	$e^{-2u}\Delta^\xi$.

Pour les trois premiers résultats il suffit de calculer la seconde forme fondamentale non symétrisée de ξ pour la nouvelle métrique en utilisant la formule de Koszul.

Pour la courbure sectionnelle on surmonte de barres les objets après changement de métrique et on emploie la formule :

$$\mathrm{Rm}_{\bar{g}} = e^{2u}\left(\mathrm{Rm}_g - g \odot \left(\mathrm{Hess}u - \nabla u \otimes \nabla u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 g\right)\right)$$

qu'on peut lire par exemple dans [Bes87][théorème 1.159 b)].

Le résultat sur $K_e + K$ n'est que la somme des deux précédents simplifiée en utilisant la proposition 2.3. Pour le laplacien il suffit d'appliquer le résultat pour le laplacien des variétés de dimension deux (qu'on peut trouver par exemple dans [Bes87][théorème 1.159 j)]) aux surfaces osculatrices.

Théorème 2.10 *Si ξ est un champ de plans sur une variété riemannienne compacte (M, g) dont la courbure $K_\lambda = K_e + K + \lambda|A|^2$ est de signe constant ε, alors il n'existe pas de métrique dans la classe conforme de g qui rende cette courbure de signe $-\varepsilon$ partout.*

Démonstration Soit μ une mesure harmonique pour (ξ, g). On repère par une barre les courbures calculées pour une métrique $\bar{g} = e^{2u}g$ dans la classe conforme de g. D'après la proposition précédente et la définition des mesures harmoniques,

$$\int_M K_\lambda \, d\mu = \int_M (K_\lambda + \Delta^\xi u)\, d\mu = \int_M e^{2u}\bar{K}_\lambda \, d\mu$$

donc K_λ et $\bar{K}_\lambda$ ne peuvent pas être partout de signes opposés. □

Le théorème précédent s'applique en particulier à la courbure basique ($\lambda = \frac{3}{2}$), à la courbure d'Albert ($\lambda = \frac{1}{2}$) et à la courbure de Krouglov ($\lambda = 0$). L'exemple de la sphère S^3 munie de sa métrique et de sa structure de contact canoniques (pour lequel toutes ces courbures sont strictement positives) montre en particulier que le théorème d'uniformisation de Krouglov ne peut pas être vrai si on fixe la classe conforme.

Du côté des feuilletages, si ξ est un champ de plans intégrable sur une variété riemannienne (M, g), il existe pour toute mesure transverse μ une caractéristique d'Euler $\chi(\xi, \mu)$ qu'on peut voir comme une moyenne de caractéristiques d'Euler de grands morceaux de feuilles et le théorème d'uniformisation de Candel [Can93] affirme qu'il existe une métrique dans la classe conforme de g pour laquelle toutes les feuilles sont hyperboliques (resp. elliptiques) si et seulement si $\chi(\xi, \mu) < 0$ (resp. $\chi(\xi, \mu) > 0$) pour toute mesure transverse μ (resp. et une telle mesure existe).

Ainsi les possibilités d'uniformisation des feuilletages sont contraintes par la topologie du feuilletage. Plus immédiatement, s'il existe une feuille torique il est clairement impossible de rendre toutes les feuilles hyperboliques donc un feuilletage présentant une composante de Reeb ne saurait être hyperbolisable. Du côté de la géométrie de contact on peut donc espérer des contraintes liées à la présence de disques vrillés qui sont analogues aux composantes de Reeb d'un feuilletage. Plus exactement un disque vrillé est analogue à un cycle évanouissant mais la classification des structures de contact vrillées par Y. Eliashberg dans [Eli89] fournit des tores pleins, dits de Lutz, feuilletés par des disques vrillés qui sont analogues aux composantes de Reeb et se prêtent peut-être mieux aux interactions avec les propriétés de courbure. De même cette classification fournit des suites de tores épais de torsion[1] arbitraire qui sont eux aussi de mesure non nulle. Cet espoir est cependant tempéré par le fait que le théorème d'hyperbolisation de Candel s'applique toujours lorsqu'il n'existe pas de mesure transverse et qu'on a expliqué plus haut pourquoi on peut considérer les structures de contact comme des champs de plans n'ayant jamais de mesure transverse.

Un autre théorème relié à ces questions est le théorème de Gauss–Bonnet–Ghys [Ghy88] qui affirme que pour toute mesure harmonique μ, si l'ensemble des feuilles sphériques est μ–négligeable alors l'intégrale de la courbure de Gauss des feuilles par rapport à μ est négative.

Ce théorème et les discussions précédentes suggèrent que la structure de contact standard sur la sphère S^3 peut être vue comme un feuilletage par des sphères totalement géodésiques mais n'ayant pas de feuille.

On passe maintenant au problème de la prescription de la courbure extrinsèque.

[1] cette notion est rappelée dans la deuxième partie

Proposition 2.11 ([Kro08][corollaire 3.6]) *Soit ξ une structure de contact sur une variété compacte M. Si la classe d'Euler $\chi(\xi)$ est nulle alors il existe une métrique sur M pour laquelle la courbure extrinsèque de ξ est strictement négative.*

Proposition 2.12 *Soit ξ une structure de contact sur une variété compacte M. Si il existe une métrique sur M pour laquelle la courbure extrinsèque de ξ est strictement négative alors la classe d'Euler $\chi(\xi)$ vérifie $2\chi(\xi) = 0$.*

Démonstration Si la courbure extrinsèque de ξ est strictement négative alors sa seconde forme fondamentale admet en tout point deux valeurs propres non nulles de signes opposés. Les sous-espaces propres correspondants sont des sous-fibrés de rang un de ξ et l'existence de tels sous-fibrés implique $2\chi(\xi) = 0$. □

Un corollaire de cette proposition et du corollaire 1.28 est que toute structure de contact associée à une métrique plate sur le tore T^3 est de classe d'Euler nulle. Il s'agit de la même restriction homotopique que celle qui contraint les structures de contact tendues sur cette variété. Il serait intéressant de savoir s'il existe des structures de contact vrillées auxquelles une métrique plate est associée sur T^3 (c'est peu vraisemblable) et, sinon, s'il en existe qui soient de courbure extrinsèque strictement négative pour une métrique plate (on peut aussi mettre la condition de courbure moyenne nulle ici).

Dans ce contexte on peut reprendre la démonstration du théorème 2.8 pour obtenir :

Théorème 2.13 ([Kro08]) *Soit ξ une structure de contact de classe d'Euler nulle sur une variété riemannienne (M, g) compacte et f une fonction sur M (par exemple $f \equiv 1$). Il existe une métrique riemannienne pour laquelle la courbure sectionnelle de ξ est la fonction f.*

Démonstration On applique la proposition 2.11 pour obtenir une métrique donnant à la structure de contact ξ une courbure extrinsèque strictement négative puis on change la paramétrisation de $\xi^{\perp}$. L'équation quadratique à résoudre comme dans la démonstration du théorème 2.8 a maintenant un coefficient dominant strictement positif et un terme constant strictement négatif. Cela assure que le discriminant est strictement positif, que la valeur en zéro est strictement négative et que la fonction tend vers $+\infty$ en l'infini donc il y a toujours une solution strictement positive. □

Question 2.14 Est-ce que certaines conditions de courbure portant sur une métrique et une structure de contact imposent à la structure de contact d'être tendue (outre $I\!I = 0$) ?

Question 2.15 Si on considère la courbure $K_\lambda = K_e + K + \lambda|A|^2$, $\lambda \geq 0$ pour une structure de contact ξ sur une variété riemannienne compacte (M, g) et une mesure harmonique μ, est-ce qu'il existe une métrique dans la classe conforme de g qui rende K_λ constante et du signe de $\int_M K_\lambda \, d\mu$?

Dans ces deux questions on peut doser différemment l'équilibre entre les contraintes mises sur la métrique et celles mises sur la relation entre la métrique et la structure de contact. Dans le cas des structures de contact géodésibles, toute la contrainte porte sur la relation, mais à l'opposé on peut s'intéresser à une classe de métriques restreinte, par exemple les métriques hyperboliques, mais imposer une relation moins forte avec la structure de contact (on a vu qu'une métrique hyperbolique n'admet aucun champ de plans totalement géodésique). Parmi les contraintes légères imaginables, demander que la structure de contact soit de courbure moyenne nulle pour la métrique donnée permet d'englober à la fois les métriques associées et les métriques quasi-fibrées.

Deuxième partie

Outils de topologie de contact

Chapitre 3

Résultats généraux

3.1 Surfaces dans les variétés de contact

L'étude des structures de contact sur les variétés de dimension trois s'appuie beaucoup sur les surfaces. Dans cette section on rappelle brièvement comment on peut comprendre une structure de contact au voisinage d'une surface et on présente les exemples qui serviront de base à l'étude conduite dans les chapitres suivants.

On appelle *feuilletage singulier* d'une surface une classe d'équivalence de champ de vecteurs pour la relation de multiplication par une fonction qui ne s'annule pas. On dit qu'un représentant d'une telle classe dirige le feuilletage. Si on se restreint aux multiplications par des fonctions strictement positives, on obtient des feuilletages singuliers orientés.

Une surface orientable S immergée dans une variété de contact (V, ξ) hérite d'un feuilletage singulier ξS appelé *feuilletage caractéristique* de S et dirigé par le dual pour une forme d'aire sur S de la restriction d'une équation de ξ, ces deux derniers objets étant choisis arbitrairement. Si S et ξ sont orientées alors ξS l'est aussi. Lorsqu'on considère une structure de contact sur un produit $S \times [0,1]$, la famille des feuilletages caractéristiques $\xi\left(S \times \{t\}\right)$ pour $t \in [0,1]$ est appelée *film* de ξ.

Les feuilles (ou orbites) d'un feuilletage singulier sont les courbes intégrales d'un champ de vecteurs quelconque le dirigeant. La notion intuitive de feuilletage singulier correspond plutôt à la donnée de ces feuilles. En géométrie de contact, cela ne génère pas d'ambiguïté grâce au lemme suivant, qu'on reproduit ici car il ne semble pas exister dans la littérature, bien qu'il soit mentionné dans [Gir00][page 629]. Ce lemme s'applique aux feuilletages caractéristiques de surfaces dans les variétés de contact.

Lemme 3.1 *Si deux feuilletages singuliers sur une surface ont les mêmes feuilles et si leurs singularités sont à divergence non nulle alors ils sont égaux.*

Démonstration La démonstration suivante est due à E. Giroux. Le lemme est clair hors des singularités et une partition de l'unité le ramène à un énoncé purement local, on se concentre donc sur un voisinage d'une singularité.

Soit Y et Y' deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ qui s'annulent à l'origine et ont les mêmes orbites. On pose

$$Y = f\partial_x + g\partial_y \quad \text{et} \quad Y' = f'\partial_x + g'\partial_y.$$

Toutes les assertions suivantes sont vraies dans un voisinage de l'origine qu'on ne rétrécira qu'un nombre fini de fois. Comme la divergence de Y est non nulle, quitte à changer de coordonnées linéairement, on peut supposer que $\partial_x f$ ne s'annule pas. Quitte à changer de coordonnées en invoquant le théorème des fonctions implicites, on peut même supposer que $f(x,y) = x$. Comme

$$f'(x,y) = f'(0,y) + x\int_0^1 \partial_x f'(tx,y)dt$$

on peut écrire $f' = xu(x,y) + v(y)$. Le long de la courbe $\{x = 0\}$, le champ de vecteurs Y est vertical ou nul donc il en est de même pour Y' donc f' s'annule aussi le long de cette courbe donc la fonction v s'y annule identiquement. Comme v ne dépend pas de x, elle est nulle partout. La condition de colinéarité ou de nullité simultanée de Y et Y' s'écrit :

$$\begin{vmatrix} x & xu \\ g & g' \end{vmatrix} = 0$$

qui donne $g' = ug$ quand x est non nul puis partout par continuité. On a donc bien $Y' = uY$ et le fait que les singularités de Y' sont aussi à divergence non nulle montre que la fonction u ne s'annule pas. □

Surfaces ξ–convexes

Définition 3.2 ([Gir91]) Une surface compacte à bord legendrien ou vide dans une variété de contact est ξ–convexe si elle est transversale à un champ de vecteurs préservant la structure de contact.

Les surfaces ξ–convexes sont plus accessibles que les autres car toute l'information utile à la compréhension des petits voisinages d'une telle surface est contenue dans une multi-courbe dont les propriétés inspirent la définition suivante.

Définition 3.3 ([Gir91]) Un feuilletage singulier $\mathscr{F}$ d'une surface S est *scindé* par une multi-courbe plongée Γ s'il existe une forme d'aire ω sur S et un champ de vecteurs Y dirigeant $\mathscr{F}$ tels que :
- la divergence de Y ne s'annule pas sur $S \setminus \Gamma$ – on note S^+ et S^- les régions où elle est respectivement positive et négative ;
- le champ de vecteurs Y sort transversalement de S^+ le long de Γ.

Si S est une surface ξ–convexe dans une variété de contact (M, ξ) et si X est un champ de vecteurs transversal à S et préservant ξ alors $\Gamma_X := \{s \in S \mid X(s) \in \xi(s)\}$ scinde ξS. Réciproquement toute surface dont le feuilletage caractéristique est scindé est ξ–convexe ([Gir91]).

Exemple 3.4 Dans $T^2 \times \mathbb{R}$ muni de la structure de contact ξ d'équation $\cos(2\pi x)dy - \sin(2\pi x)dt = 0$ où $(x, y) \in T^2$ et $t \in \mathbb{R}$, les tores $T^2 \times \{\star\}$ sont ξ–convexes et scindés par deux courbes de classe d'homologie $(0, 1)$. Le feuilletage caractéristique de ces tores présente deux cercles lisses de singularités : $\{x = 1/4\}$ et $\{x = 3/4\}$. Les fibres de la projection de ces tores ξ–convexes sur les cercles obtenus en fixant y et t sont legendriennes, on dit que ces tores (ou leurs feuilletages caractéristiques) sont *réglés*, les fibres de la projection constituant le réglage.

Si on perturbe ces tores en tores transversaux aux originaux le long des cercles de singularités alors on convertit ceux-ci en orbites périodiques non dégénérées dont l'orientation dépend de la direction de perturbation. Une version à un paramètre de ces perturbations permet d'obtenir sur un tore épais $T \times [-1, 1]$ le film de la figure 3.1 composé uniquement de tores ξ–convexes : les feuilletages caractéristiques des T_t pour $t \neq 0$ présentent deux orbites périodiques orientées dans le même sens et entre lesquelles toutes les autres orbites spiralent, le tore T_0 est réglé et les orbites périodiques de T_t pour $t < 0$ et $t > 0$ ont des orientations opposées. Pour tout entier n strictement positif, on peut, par revêtement, réaliser ce film avec $2n$ orbites périodiques ou cercles de singularités sur chaque tore T_t. On dit alors qu'on a un *retournement d'orbites* de classe d'homologie $\pm d$ où $2d$ est la classe d'homologie totale des orbites périodiques apparaissant.

En général la classe d'homologie d'un retournement d'orbite n'est définie qu'au signe près mais dans la suite une des deux classes possibles sera parfois naturellement privilégiée et c'est elle qu'on appellera la classe d'homologie du retournement.

Le lemme de réalisation qu'on va énoncer maintenant montre l'intérêt de la notion de découpage d'une surface ξ–convexe. Bien que son importance en fasse un théorème et qu'il soit énoncé comme une proposition dans [Gir91], on l'appelle lemme en raison de son utilité technique.

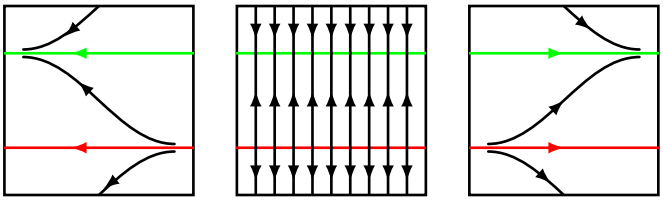


FIG. 3.1 – Retournement d'orbites

Lemme 3.5 ([Gir91][proposition II.3.6]) *Soit S une surface ξ–convexe scindée par une multi-courbe Γ. Pour tout feuilletage singulier $\mathscr{F}$ scindé par Γ il existe une isotopie δ à support dans un voisinage arbitrairement petit de S et telle que le feuilletage caractéristique de S pour la structure de contact $\delta_1^*\xi$ soit $\mathscr{F}$.*

La démonstration est une variante de celle du théorème de Gray. On explique maintenant pourquoi elle pousse le tore réglé de l'exemple 3.4 à se gondoler sous l'action de δ_ε au voisinage des cercles de singularités pour devenir un tore dont le feuilletage caractéristique est de Morse–Smale. Le long des cercles de singularités, la structure de contact ξ donnée et la structure de contact $\delta_\varepsilon^*\xi$ sont transversales et leur intersection est tangente aux cercles de singularités. Le champ de vecteurs fourni dans la démonstration du théorème de Gray est donc tangent à S et préserve ces cercles (sans les fixer point par point). Au voisinage de ces cercles ce champ de vecteurs contenu dans $\xi \cap \delta_\varepsilon^*\xi$ pousse toujours dans le même sens parallèlement à la surface (par continuité) mais la rotation de ξ autour du réglage le fait pointer d'un côté puis de l'autre de la surface lorsqu'on franchit un cercle de singularités.

Dans la suite on utilisera aussi deux versions à un paramètre du lemme de réalisation.

Lemme 3.6 ([Gir00][lemme 2.7]) *Sur le produit d'une surface F par un intervalle, soit ξ_0 et ξ_1 deux structures de contact qui impriment le même feuilletage au bord. Si tous les feuilletages $\xi_0 F_t$ et $\xi_1 F_t$ sont scindés par une même courbe Γ_t qui varie continûment avec t alors elle sont ∂–isotopes.*

La condition de continuité dans le lemme précédent est indispensable comme le montre l'exemple d'un voisinage homogène d'un tore ξ–convexe dans une variété tendue et de son image par un twist de Dehn, voir [Gir00][exemple 3.4].

Lemme 3.7 ([Gir01b][affaiblissement du lemme 7]) *Soit F une surface plongée dans une variété de contact (V,ξ) de dimension trois. On suppose que ξF est scindé par*

une multi-courbe Γ et que φ est une isotopie telle que $\xi\varphi_t(F)$ est scindé par $\varphi_t(\Gamma)$ pour tout t. Si $\xi(\varphi_1(F)) = \varphi_1(\xi F)$ alors φ est homotope à une isotopie ψ telle que $\xi(\psi_t(F)) = \psi_t(\xi F)$ pour tout t.

La définition suivante permet d'introduire le critère de ξ–convexité sur lequel toute la suite s'appuie.

Définition 3.8 Un feuilletage singulier sur une surface fermée vérifie la *propriété de Poincaré–Bendixson* si l'ensemble limite de toute demi-orbite est soit une singularité soit une orbite périodique soit une réunion de singularités et d'orbites les reliant.

Pour un feuilletage singulier vérifiant cette propriété, on appelle *graphe de Giroux* $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ où Γ^+ (resp. Γ^-) est la réunion des orbites périodiques répulsives (resp. attractives), des singularités positives (resp. négatives) et de leurs variétés stables (resp. instables).

Une connexion de selles est dite *rétrograde* lorsqu'elle relie une selle négative à une selle positive (cette notion ne dépend ni de l'orientation de la surface ni de celle de la structure de contact). L'exemple suivant illustre la notion de connexion de selles rétrograde et sert de base à la discussion de la multiplicité des formes normales dans le prochain chapitre.

Exemple 3.9 ([Gir00][exemple3.41]) Dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ muni de la structure de contact d'équation $\cos(2\pi z)dx - \sin(2\pi z)dy = 0$, on fixe un entier $n > 0$ et on considère la famille de vissages $\varphi_t((x,y),z) = (R_{2\pi nt}(x,y), z+t)$ où R_α désigne la rotation d'angle α (dans le sens direct) autour de l'origine. La surface formée de l'orbite d'un cercle passant par l'origine dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ sous l'action de $\mathbb{R}$ est invariante par translation entière le long du facteur $\mathbb{R}$ et passe au quotient en tore S de $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1$. Le long du cercle $\{0\} \times \mathrm{S}^1$ la structure de contact et le plan tangent à S tournent dans des sens opposés et le feuilletage caractéristique de S présente le long de ce cercle n selles de chaque signe reliées par des connexions de selles rétrogrades.

Proposition 3.10 ([Gir00][proposition 2.5]) *Soit S une surface dont le feuilletage caractéristique vérifie la propriété de Poincaré–Bendixson. On note $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ son graphe de Giroux. Si les orbites périodiques sont non dégénérées et s'il n'y a pas de connexion de selles rétrograde alors la surface S est ξ–convexe, S^+ est un voisinage régulier de Γ^+ et S^- de Γ^-.*

Grâce au critère précédent et aux propriétés génériques des feuilletages singuliers de surfaces on obtient la généricité des surfaces ξ–convexes.

Proposition 3.11 ([Gir91], [Hon00a]) *Soit S une surface compacte à bord legendrien ou vide dans une variété de contact de dimension trois. Si chaque composante du bord de S possède un voisinage collier feuilleté par des courbes legendriennes alors pour tout voisinage U de S, il existe une isotopie relative à un voisinage du bord de S et à support dans U qui envoie S sur une surface ξ–convexe.*

Exemple 3.12 Dans $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1$ muni de la structure de contact d'équation $dz - r^2 d\theta = 0$ où z est la coordonnée sur le cercle, tous les produits par S^1 de cercles centrés en l'origine de $\mathbb{R}^2$ sont pré-lagrangiens : leurs feuilletages caractéristiques sont linéaires. Lorsqu'un de ces feuilletages est périodique on peut perturber le tore relativement à $2n$ orbites pour rendre ces orbites non dégénérées, les autres orbites spiralant d'une orbite fermée à une autre. Les tores originaux ne sont pas ξ–convexes mais les tores perturbés le sont.

Le critère suivant ne sera utilisé que dans le sens facile assurant l'existence de disques vrillés.

Théorème 3.13 (Critère de Giroux [Gir01a][théorème 4.5 a)]) *Dans une variété de contact (M, ξ) de dimension trois, une surface ξ–convexe S possède un voisinage tendu si et seulement si son découpage ne contient pas de cercle homotopiquement trivial ou si S est difféomorphe à la sphère S^2 et son découpage est connexe.*

Le théorème de Darboux montre que localement toutes les surfaces dans une variété de contact sont transversales à des champs de vecteurs préservant la structure de contact. Les techniques de ξ–convexité permettent alors des résultats locaux sans hypothèse comme le lemme d'élimination qui permet de supprimer d'un feuilletage caractéristique un foyer et une selle de même signe reliés par une orbite, ou l'opération inverse qui remplace un segment d'orbite régulière par un tel couple de singularités (figure 3.2).

Il existe une version à un paramètre de ce processus d'élimination qui sera utilisée dans les explications du chapitre suivant. Son énoncé précis est assez technique, voir [Gir00][lemme 2.15].

3.2 Feuilletages legendriens globaux

Dans cette partie on étudie certaines variétés de contact munies d'un feuilletage legendrien global simple[1], ce feuilletage étant présent de façon explicite ou construit lors des démonstrations.

[1] l'existence d'un feuilletage legendrien global quelconque est une propriété purement homotopique dont on ne peut donc rien attendre

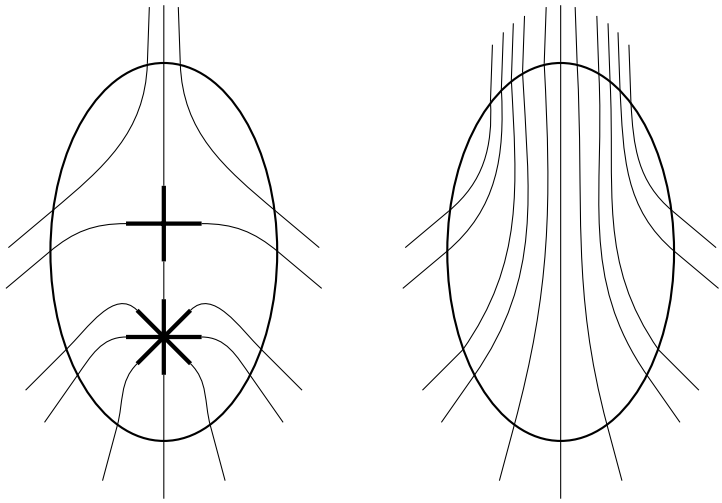


FIG. 3.2 – Lemme d'élimination

Connexions complètes sur $\mathbb{R}^3$

Le premier cas est celui de $\mathbb{R}^3$ vu comme fibré sur $\mathbb{R}^2$. Tout champ de plans transversal aux fibres peut être vu comme une connexion sur ce fibré. Un telle connexion est dite complète si tout chemin dans la base se relève (globalement) en chemin horizontal, c'est-à-dire tangent au champ de plans. Un tel champ de plans peut intervenir par exemple comme relevé au revêtement universel d'un champ de plans transversal aux fibres d'une variété de Seifert. Dans la démonstration de la proposition 3.5.6 de [ET98], la proposition suivante est présentée comme évidente :

Proposition 3.14 *Soit ξ une structure de contact transversale aux fibres de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Si ξ est une connexion complète alors ξ est isomorphe à la structure de contact standard. De plus la condition de complétude est indispensable, même pour une structure de contact provenant d'un quotient compact de $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration On note (x, y) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$ et z la coordonnée sur $\mathbb{R}$. Soit P le plan $\{x = 0\}$. Le feuilletage caractéristique ξP est transversal à la verticale et est dirigé par le champ de vecteurs Y relevé de ∂_y dans ξ. L'hypothèse de complétude entraîne la complétude de Y et le flot $\varphi\colon (Oz)\times\mathbb{R} \to P$ de Y permet de redresser ξP en un feuilletage linéaire. En effet φ restreint à l'axe des z est injectif car $\varphi(p,t) = \varphi(p',t')$ implique $\mathrm{pr}_y(\varphi(p,t)) = \mathrm{pr}_y(\varphi(p',t'))$ donc $t = t'$. On peut donc supposer ξP dirigé

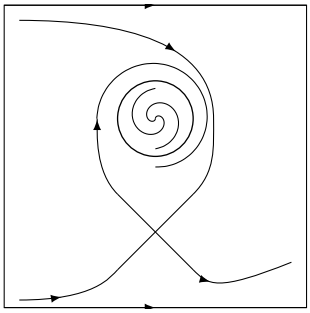


FIG. 3.3 – Structure de contact vrillée transversale à un feuilletage revêtu par un produit

par ∂_y. En utilisant de façon analogue le flot du relevé de ∂_x pour identifier $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ à $P \times \mathbb{R}$, on se ramène à $\xi = \ker(dz + g(x,y,z)dy)$ avec $g_{|P} = 0$. La condition de contact donne alors $\partial_x g > 0$ donc on peut remplacer la coordonnée x par g. Cette nouvelle coordonnée prend ses valeurs dans un intervalle ouvert qui n'est pas nécessairement tout $\mathbb{R}$ mais cela se corrige aisément par un ultime changement de coordonnées au terme duquel on obtient bien la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$.

Pour montrer que la complétude est indispensable on construit un contre-exemple dû à E. Giroux et illustré par la figure 3.3. On considère sur un tore T un feuilletage singulier ayant deux singularités, toutes deux positives : un centre entouré d'une orbite périodique attractive P_- et une selle dont les deux séparatrices instables s'accumulent sur P_- et dont les séparatrices stables proviennent d'une orbite périodique répulsive homotopiquement non triviale P_+. Les autres feuilles régulières spiralent soit entre le centre et l'orbite P_- soit de l'orbite P_+ à l'orbite P_-. Un peu de théorie des surfaces ξ–convexes montre que ce feuilletage est le feuilletage caractéristique des $T \times \{\star\}$ pour une structure de contact ξ qui est S^1 invariante sur $T \times \mathrm{S}^1$. Cette structure de contact est vrillée par construction. Soit Y un champ de vecteurs dirigeant le feuilletage singulier de T et j une structure complexe sur T. Le champ de vecteurs obtenu en ajoutant à jY un petit multiple du champ générant l'action de S^1 est transversal à ξ : c'est évident loin des singularités et découle du signe des singularités sinon. Ses orbites se relèvent en feuilletage produit sur $\mathbb{R}^3$ car ce feuilletage est transversal au relevé du feuilletage de $T \times \mathrm{S}^1$ par les $T \times \{\star\}$. □

Structures de contact purement rotatives

Une suspension sur un tore est un feuilletage (non singulier) qui admet une courbe transversale fermée intersectant toutes les feuilles. Une suspension σ sur un tore T

détermine une droite $D(\sigma)$ dans $H_1(T,\mathbb{R})$ appelée direction asymptotique de σ et définie dans [Sch57] : les cycles réels $[L_t]/t$ formés d'une orbite de longueur t fermée par un segment géodésique minimisant convergent presque tous vers des limites situées sur une droite $D(\sigma)$ indépendante de la métrique riemannienne utilisée. On dit qu'une telle droite est rationnelle si elle contient un point entier hors de l'origine. Dans le cas d'une suspension orientée cette droite est aussi orientée. Si σ est un feuilletage linéaire alors $D(\sigma)$ est engendrée par sa direction et si σ possède une orbite périodique alors sa classe d'homologie engendre $D(\sigma)$.

Dans toute la suite, pour chaque fibré en surfaces de fibre générique notée S, on notera S_t la fibre au-dessus du point t. Toutes les surfaces considérées seront orientées, toutes les surfaces épaisses $S \times [0,1]$ seront munies de l'orientation produit et toutes les structures de contact seront positives et orientées (donc aussi coorientées).

Définition 3.15 Une structure de contact ξ sur un tore épais $T \times [0,1]$ est *purement rotative*[2] si elle imprime une suspension sur chaque tore T_t. La fonction

$$\begin{pmatrix} [0,1] & \to & P(H_1(T,\mathbb{R})) \simeq \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \\ t & \mapsto & D(\xi T_t) \end{pmatrix}$$

est alors décroissante pour l'orientation de $H_1(T,\mathbb{R})$ donnée par la forme d'intersection. Sa variation totale est appelée amplitude de la structure de contact ξ.

Un exemple simple mais aussi peu générique que possible est fourni par la structure de contact d'équation $\cos(\alpha t)dx - \sin(\alpha t)dy = 0$ avec t la coordonnée dans $[0,1]$. Cette structure de contact est purement rotative d'amplitude $-\alpha$ et elle imprime sur chaque tore $T \times \{\star\}$ un feuilletage linéaire dont la direction tourne à vitesse constante.

Dans un film générique de structure de contact purement rotative, on observe une succession d'apparitions d'orbites dégénérées qui se scindent en couples d'orbites hyperboliques qui finissent par fusionner comme dans la figure 3.4.

Remarque 3.16 Pour une structure de contact ξ purement rotative sur un tore épais $T \times [0,1]$, s'il existe t tel que $D(\xi T_t)$ est irrationnelle ou bien que ξT_t est conjugué à la suspension d'une rotation alors la fonction $t \mapsto D(\xi T_t)$ est non constante.

Théorème 3.17 ([Gir00][théorème 3.3]) *Sur un tore épais, deux structures de contact purement rotatives qui coïncident au bord et ont même amplitude non nulle sont $\partial-$isotopes.*

[2] Ces structures de contact sont simplement appelées rotatives dans [Gir00] mais la terminologie employée ici évite la confusion avec celle de [Hon00a].

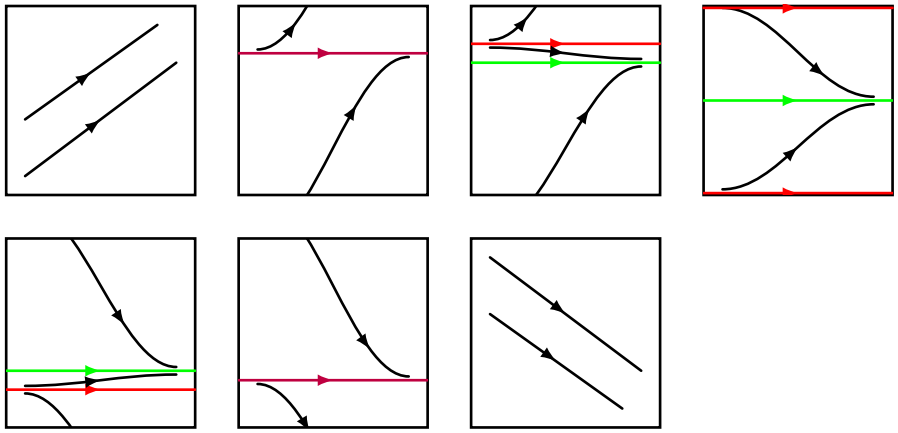


FIG. 3.4 – Séquence générique dans un film purement rotatif

Il s'agit d'une variante plus subtile de la proposition 3.14. Cette fois on veut comparer les structures de contact données à une structure de contact sur $T \times [0,1]$ pour laquelle le facteur $[0,1]$ est legendrien. Il n'y a plus de problème de complétude mais la construction du feuilletage legendrien analogue à celui dirigé par le relevé de ∂_x dans la démonstration précédente est beaucoup plus délicate car on veut qu'il ait la même holonomie entre T_0 et T_1 que le feuilletage modèle, c'est-à-dire l'identité de T. Quitte à découper l'intervalle $[0,1]$ et à perturber la structure produit du tore épais en utilisant un peu de théorie des surfaces ξ–convexes, on peut supposer deux propriétés : l'amplitude est faible (moins d'un demi tour) et les feuilletages caractéristiques τ_0 et τ_1 de T_0 et T_1 sont transversaux (vus comme feuilletages de T). Il existe alors un feuilletage par des anneaux A_s transversaux aux tores et à la structure de contact. Leurs feuilletages caractéristiques pris ensemble forment un premier feuilletage legendrien λ transversal aux tores mais dont l'holonomie ϕ reste à corriger. Cette correction est décrite par le lemme 3.2 de [Gir00] dont la figure 3.5 illustre la démonstration. Pour chaque point x de T on cherche à relier $(x,0) \in T_0$ à $(x,1) \in T_1$. Les deux propriétés citées plus haut montrent que les feuilles de $(x,0)$ pour τ_0 et de $\phi^{-1}(x,1)$ pour $\phi^*\tau_1$ se coupent en un unique point $\psi(x)$ pour peu qu'on les regarde dans le revêtement universel de T_0. La courbe legendrienne recherchée relie alors $(x,0)$ à $(x,1)$ via $\psi(x)$ et $\phi(\psi(x))$ en suivant d'abord τ_0 puis λ puis τ_1. On peut lisser simultanément les courbes ainsi obtenues pour tous les x et obtenir le feuilletage legendrien recherché.

La condition d'amplitude non-nulle est indispensable comme le montre l'exemple d'un voisinage homogène d'un tore convexe et son image par un twist de Dehn (le fait que

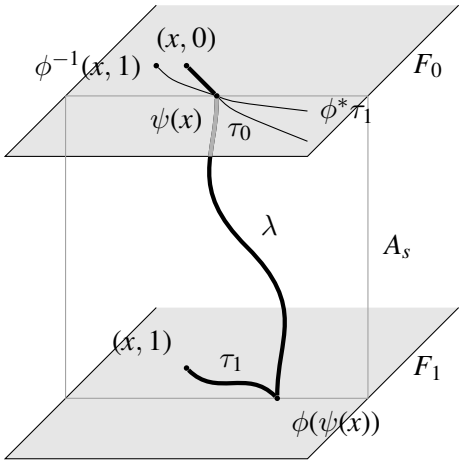


FIG. 3.5 – Lemme de redressement

ces deux structures de contact ne sont pas isotopes résulte des théorèmes du chapitre suivant).

Structures de contact tangentes aux fibres d'une variété de Seifert

Le fibré des éléments de contact coorientés d'une surface lisse est muni d'une structure de contact canonique décrite dans l'introduction. Cette structure est invariante par tout difféomorphisme relevé de la base, elle descend donc à tout quotient par une action engendrée par de tels difféomorphismes. En particulier pour toute surface orbifold B le fibré des éléments de contact coorientés ST^*B a lui aussi une structure de contact canonique ξ_B invariante par tout difféomorphisme relevé de B et pour laquelle toutes les fibres régulières sont legendriennes d'enroulement -1 (les recollements intervenant dans la construction globale de ST^*B sont eux aussi relevés de la base).

La proposition suivante étend [Gir01a][proposition 3.3] aux variétés de Seifert et sa démonstration en est identique en utilisant l'équivariance de toutes les constructions pour passer aux bases orbifolds.

Proposition 3.18 *Soit V une variété de Seifert de base B. L'application qui à un revêtement $\rho\colon V \to ST^*B$ fibré au-dessus de l'identité associe la structure de contact $\rho^*\xi_B$ est une bijection sur l'espace des structures de contact tangentes aux fibres.*

Chapitre 4

Tores épais et tores pleins

4.1 Introduction et énoncés

Dans ce chapitre on rappelle ce qui est connu de la classification des structures de contact sur les tores épais et les tores pleins, on en présente des applications directes (mais néanmoins nouvelles) et on propose une stratégie pour achever la classification sur le tore épais dans le cas des bords ξ–convexes.

Cônes et polygones de Giroux

On dit qu'un feuilletage singulier sur un tore est *admissible* si toutes ses orbites sont des cercles ou s'il est une suspension scindée ou un feuilletage réglé (il ne s'agit pas tout à fait de la définition de [Gir00]).

On dit qu'une classe d'homologie entière d dans le H_1 d'un tore T est *associée* à un feuilletage admissible orienté sur T s'il existe une orbite périodique ou un cercle de singularités de classe d'homologie d (en particulier d est primitive, c'est-à-dire n'est pas multiple entier d'une autre classe entière). Une telle classe est unique au signe près et unique pour une suspension. On note $D(d)$ la demi-droite engendrée par une classe d'homologie entière d. Pour une suspension scindée σ, la direction asymptotique $D(\sigma)$ coïncide avec $D(d)$ pour l'unique classe d'homologie d associée à σ.

Les définitions suivantes permettent de décrire les liens existant entre les structures de contact tendues sur un tore épais $T \times [0,1]$ et la géométrie de $H_1(T,\mathbb{R})$, son réseau $H_1(T,\mathbb{Z})$ et la forme d'intersection dont ils sont munis. Là et dans toute la suite, on

dit qu'une classe d'homologie a est à gauche (resp. à droite) d'une autre classe b si $a \cdot b \leq 0$ (resp. $a \cdot b \geq 0$).

Définition 4.1 Soit σ_0 un feuilletage singulier admissible orienté sur T et d_0 une classe d'homologie associée à σ_0. Soit σ_1 un feuilletage singulier admissible sur T. On oriente σ_1 et on choisit une classe d'homologie associée d_1 de sorte que l'intersection entre d_1 et d_0 soit positive. Le *cône de Giroux* $\mathcal{C}(\sigma_0, \sigma_1)$ de (σ_0, σ_1) est le cône convexe épointé bordé à gauche par $D(d_0)$ et à droite par $D(d_1)$. Les demi-droites épointées du bord font partie du cône si et seulement si les feuilletages correspondant sont scindés. Le cône ainsi défini dépend implicitement du choix de d_0 lorsque σ_0 est réglé.

On note E l'enveloppe convexe des points entiers $\mathcal{C}(\sigma_0, \sigma_1) \cap H_1(T, \mathbb{Z})$. Dans la suite on appelle côté d'une partie d'un réseau un ensemble maximal de points alignés. Le *polygone de Giroux* $\mathcal{P}(\sigma_0, \sigma_1)$ de (σ_0, σ_1) est l'ensemble des classes d'homologie entières qui appartiennent à un côté fini de ∂E ou sont à l'intersection de deux côtés infinis, ordonné par la forme d'intersection de gauche à droite. On note $\partial\mathcal{P}$ l'ensemble (éventuellement vide) de ses points extrémaux.

Si ξ est une structure de contact sur $T \times [0,1]$, on définit $\mathcal{C}(\xi) = \mathcal{C}(\xi T_0, \xi T_1)$ et de façon analogue $\mathcal{P}(\xi)$ (une fois choisie une classe d'homologie associée à ξT_0).

Toute structure de contact (positive) ξ imprimant au bord de $T \times [0,1]$ des feuilletages admissibles σ_0 et σ_1 possède une *classe d'Euler relative* une fois choisie une classe d'homologie d_0 associée à σ_0. Cette classe d'Euler relative, notée $\chi_\partial(\xi)$, est définie comme obstruction à étendre à l'intérieur une section de ξ tangente à T_0 et T_1 ayant des orbites périodiques dont la classe d'homologie intersecte positivement d_0 sur T_0 et d_1 sur T_1 (où d_1 est choisie comme plus haut). Ainsi le dual de Poincaré de $\chi_\partial(\xi)$ est la classe d'homologie du lieu des zéros d'une section générique de ξ qui étend la section donnée au bord.

Feuillages

Définition 4.2 (variante de [Gir00][définition 3.14]) Une structure de contact ξ sur un tore épais $T \times [0,1]$ est *élémentaire* si elle imprime des suspensions ou des feuilletages réglés sur tous les tores T_t. On appelle feuillage de ξ la réunion des orbites périodiques et des cercles de singularités de ces feuilletages. On appelle *feuilles* les composantes connexes du feuillage et *feuillage persistant* la réunion des feuilles qui sont des tores compressibles ou des anneaux.

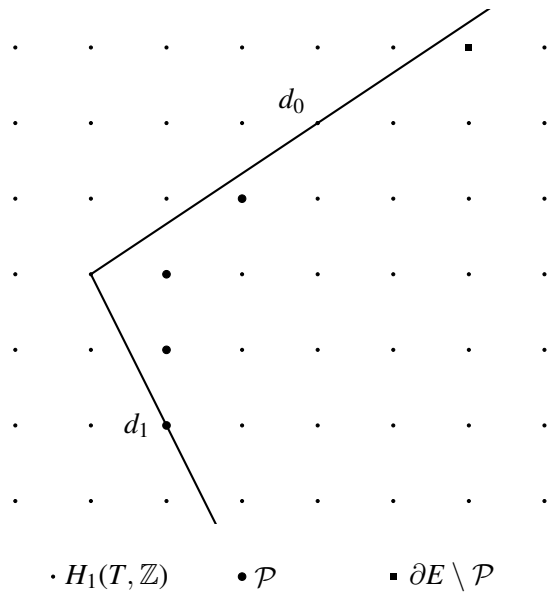


FIG. 4.1 – Un cône de Giroux et son polygone

L'exemple le plus simple de feuille, représenté par la figure 4.2, correspond au film de la figure 3.4. Il s'agit d'une feuille non persistante et de telles feuilles apparaissent à chaque fois que la direction asymptotique d'une des suspensions ξT_t est rationnelle. Sur cette figure comme sur toutes celles représentant du feuillage, les tores T_t sont vus comme des carrés dont on identifie les côtés opposés.

On appelle *feuillage principal* d'une structure de contact ξ élémentaire la réunion des feuilles intersectant un tore T_t réglé et des feuilles annulaires. Les seules feuilles laissées de côté dans cette définition sont des tores isotopes aux T_t apparaissant dans des séquences purement rotatives comme dans la figure 4.2. La figure 4.3 montre un exemple typique de feuillage principal. Ce feuillage contient ici un anneau s'appuyant sur chaque composante de bord, un tore compressible et un tore non persistant (qui intersecte donc un tore réglé du film). Le feuillage principal et la donnée des amplitudes des restrictions de ξ aux composantes connexes du complémentaire des tores réglés détermine la classe d'isotopie de la structure de contact d'après le théorème 3.17.

À chaque tore compressible du feuillage on associe la classe d'homologie d des composantes connexes de son intersection avec les tores T_t, orientées de sorte que $d \cdot d_0 \geq 0$. L'ensemble de ces classes d'homologie est appelé *lieu des tores compressibles* et noté $R'(\xi)$, il s'agit d'une partie du lieu de retournement $R(\xi)$ défini dans [Gir00]. En

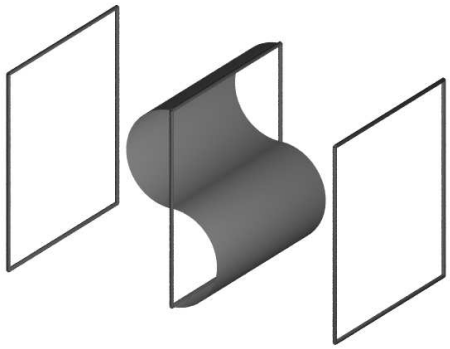


FIG. 4.2 – Feuille torique non persistante

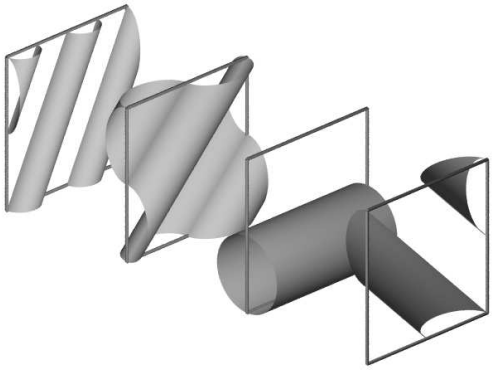


FIG. 4.3 – Exemple de feuillage principal

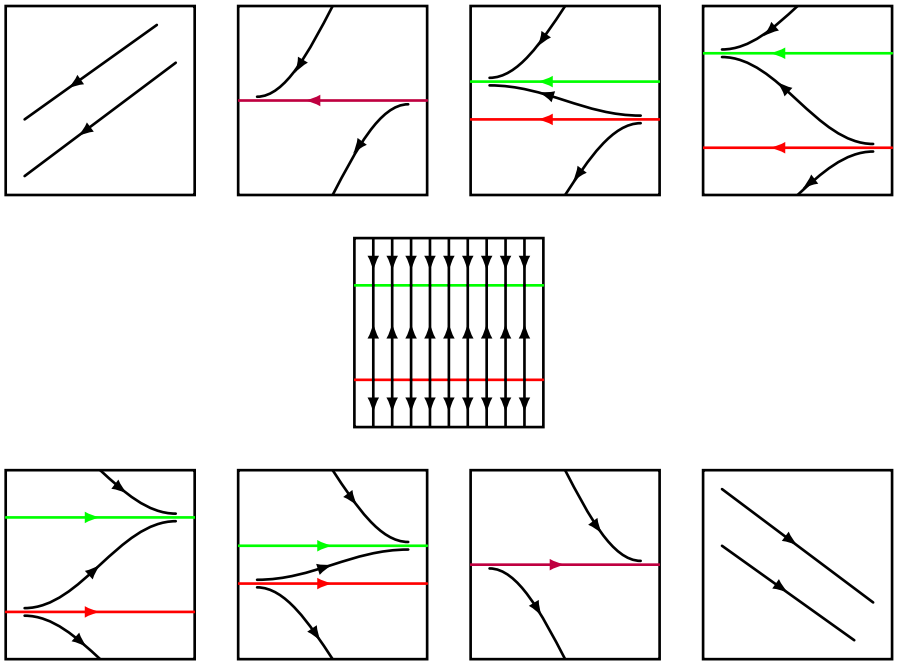


FIG. 4.4 – Retournement d'orbites périodiques et tores compressibles

effet les tores compressibles correspondent à des retournements d'orbites périodiques, comme dans le film de la figure 4.4 dont la figure 4.5 montre le feuillage.

Pour une structure de contact sous forme élémentaire, la fonction $t \mapsto D(\xi T_t)$, qui n'est bien définie que lorsque ξT_t est une suspension, se prolonge à $[0,1]$ de façon unique en fonction continue notée D_ξ.

Proposition 4.3 ([Gir00]) *Une structure de contact élémentaire est universellement tendue si et seulement si son feuillage ne contient pas de tore compressible.*

Une structure de contact élémentaire dont le feuillage contient un tore compressible est tendue si et seulement si la variation totale de D_ξ est supérieure à $-\pi$ (c'est-à-dire que les directions asymptotiques des suspensions du film font moins d'un tour de la droite projective) et :

- *la projection sur $[0,1]$ des tores compressibles de son feuillage n'intersecte pas celle d'autres feuilles ;*
- *son lieu des tores compressibles est inclus dans son polygone de Giroux.*

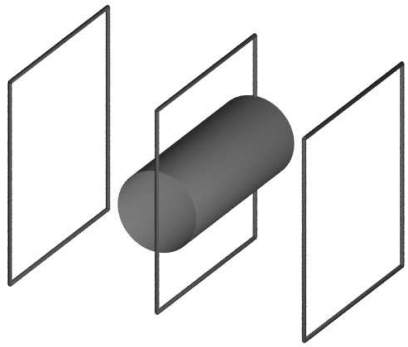


FIG. 4.5 – Tore compressible d'un feuillage

La figure 4.6 montre un exemple de structure de contact élémentaire universellement tendue. La figure 4.7 montre un exemple de structure de contact élémentaire virtuellement vrillée. La figure 4.8 montre deux exemples de structures de contact élémentaires vrillées car la projection d'un tore compressible intersecte celle d'autres feuilles. La figure 4.9 montre un exemple vrillé car la classe d'homologie d associée à un tore compressible n'est pas dans le polygone de Giroux correspondant représenté par la figure 4.10 : le segment $[d_0, d_1]$ montre que d n'est pas sur le bord de l'enveloppe convexe des points entiers du cône de Giroux.

On rappelle que la π–torsion d'une variété de contact (V, ξ) est définie par [Gir00], définition 1.2, comme le supremum des entiers $n \geq 1$ pour lesquels il existe un plongement de contact de

$$\left(T^2 \times [0,1], \ker\left(\cos(n\pi z)dx - \sin(n\pi z)dy\right)\right), \qquad (x,y,z) \in T^2 \times [0,1]$$

dans l'intérieur de (V, ξ) ou comme étant nulle si aucun entier de ce type n'existe. Dans la suite on raccourcira souvent π–torsion en torsion.

Proposition 4.4 ([Gir00][proposition 3.42]) *Soit ξ une structure de contact tendue élémentaire et A la variation totale de la fonction D_ξ. La π–torsion de la structure de contact ξ est $\lfloor -A/\pi \rfloor$.*

Pour les définitions et énoncés suivants on fixe des feuilletages admissibles au bord et on choisit une fonction strictement croissante $a \mapsto t(a)$ du polygone de Giroux dans $[0,1]$ vérifiant $t(a) = 0$ (resp. $t(a) = 1$) si et seulement si T_0 (resp. T_1) est scindé par deux courbes de classe d'homologie a.

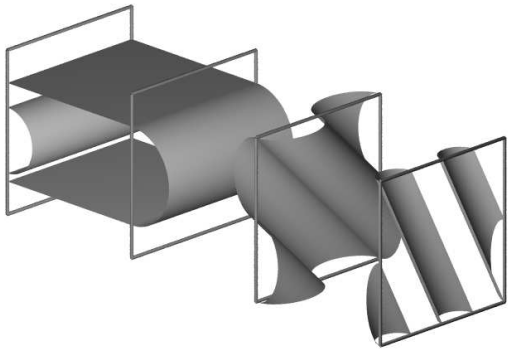


FIG. 4.6 – Feuillage d'une structure de contact universellement tendue

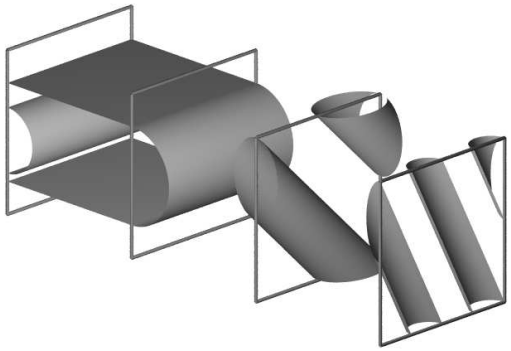


FIG. 4.7 – Feuillage d'une structure de contact virtuellement vrillée

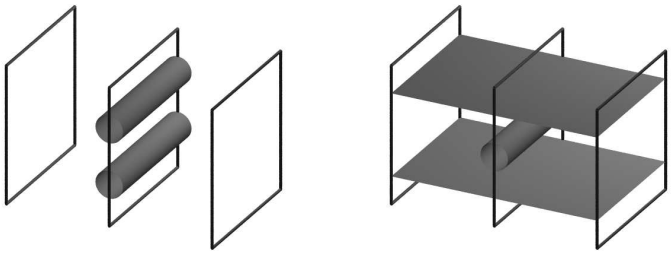


FIG. 4.8 – Feuillages de structures de contact vrillées

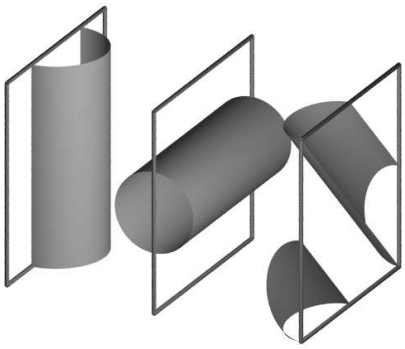


FIG. 4.9 – Tore compressible hors du polygone de Giroux

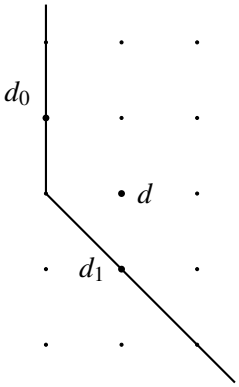


FIG. 4.10 – Polygone de Giroux pour la figure 4.9

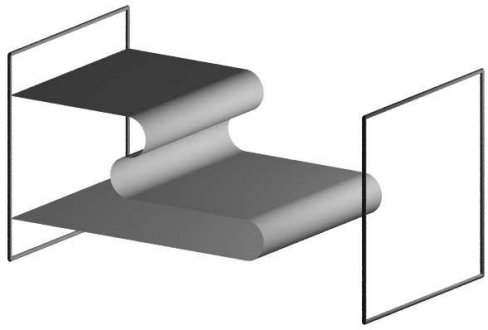


FIG. 4.11 – Structure de contact élémentaire non sous forme normale

On appelle cercles critiques du feuillage d'une structure de contact élémentaire les composantes connexes du lieu critique de la projection de $T \times [0,1]$ sur $[0,1]$ restreinte au feuillage.

Définition 4.5 Soit ξ une structure de contact élémentaire. On dit que ξ est sous *forme normale* si :
- son feuillage est constitué d'anneaux présentant zéro ou un cercle critique et de tores présentant deux cercles critiques ;
- pour chaque classe d'homologie a du polygone de Giroux de ξ le feuilletage $\xi T_{t(a)}$ est réglé, présente deux cercles de singularités et la classe d'homologie a lui est associée ;
- les autres tores T_t qui sont réglés intersectent tous un anneau du feuillage ;
- les réunions (à t fixé) des cercles de singularités des tores T_t réglés sont deux à deux non homologues lorsqu'on les oriente tous dans le même sens (cette condition signifie qu'il n'y a jamais deux retournements d'orbites dans une séquence formée de tores ξ–convexes).

La figure 4.11 montre une feuille de structure de contact élémentaire qui n'est pas sous forme normale à cause d'un excès de cercles critiques.

Pour une structure de contact sous forme normale, on appelle *tranche élémentaire* tout sous-tore épais $T \times [t(a), t(a')]$ avec a et a' deux classes successives sur le polygone de Giroux. La classe d'Euler relative d'une telle tranche (lorsqu'on choisit a comme classe d'homologie associée à $\xi T_{t(a)}$) est $\pm 2(a - a')$ et le signe intervenant est appelé signe de la tranche. Les feuilles intersectant le bord d'une tranche sont deux

anneaux s'appuyant chacun sur une composante de bord. Soit A l'anneau du feuillage s'appuyant sur $T := T_{t(a)}$ et A' celui s'appuyant sur $T' := T_{t(a')}$. Parmi les quatre classes d'isotopie possibles pour $A \cup A'$, exactement deux correspondent à un feuillage de tranche élémentaire. Lorsque la tranche est positive (resp. négative), A borde un tore plein avec l'anneau dans T allant du cercle de singularités positives à celui de singularités négatives en partant à gauche (resp. à droite) du cercle positif orienté par a et de même pour A' en remplaçant T par T', a par a' et en permutant positive et négative. Sur le grand tore épais, les tores compressibles du feuillage correspondent aux changements de signe entre des tranches adjacentes. Ainsi le film de la figure 4.4 montre le passage d'une tranche négative à une tranche positive si la classe d'homologie d_0 est à gauche de celles des orbites après retournement (un changement de choix de classe d'homologie associée au feuilletage réglé ξT_0 échange les signes de toutes les tranches élémentaires, ce qui est cohérent avec le fait qu'il change le signe de la classe d'Euler relative).

On appelle anneau intérieur un anneau du feuillage s'appuyant sur une composante de bord et intersectant un $T_{t(a)}$ (chaque composante T_0 ou T_1 du bord qui est $\xi-$convexe contient le bord d'exactement un anneau intérieur). Dans la figure 4.6, l'anneau s'appuyant sur le tore le plus en avant et le grand anneau s'appuyant sur le tore du fond sont intérieurs.

On dit que le feuillage principal d'une structure de contact sous forme normale est obtenu à partir de celui d'une autre par

- *permutation de tranches* s'ils coïncident en dehors d'un sous-tore épais formé de deux tranches élémentaires $T \times [t(a), t(a')]$ et $T \times [t(a'), t(a'')]$ de signes différents avec a, a' et a'' alignées ;
- *déplacement d'anneau* si leurs feuillages persistants sont $\partial-$isotopes mais pas leurs anneaux intérieurs.

La figure 4.12 montre une permutation de tranches faisant passer d'une suite de tranches élémentaires de signes $(+,-,+)$ à $(+,+,-)$. Cette figure montre aussi le lien entre les changements de signe et les tores compressibles. La figure 4.13 montre un exemple de déplacement d'anneau.

La figure 4.14 montre l'effet que peut avoir une permutation de tranches élémentaires sur les anneaux intérieurs. C'est cet effet qui était oublié dans [Hon00a][théorème 2.2 1)], une erreur partiellement corrigée dans [Hon01] où un résultat plus faible que ce théorème (mais correct) est finalement démontré.

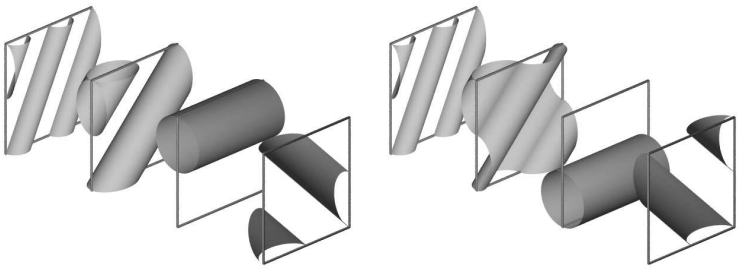


FIG. 4.12 – Permutation de tranches dans un feuillage

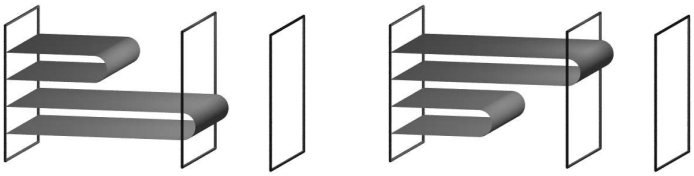


FIG. 4.13 – Déplacement d'anneaux dans un feuillage

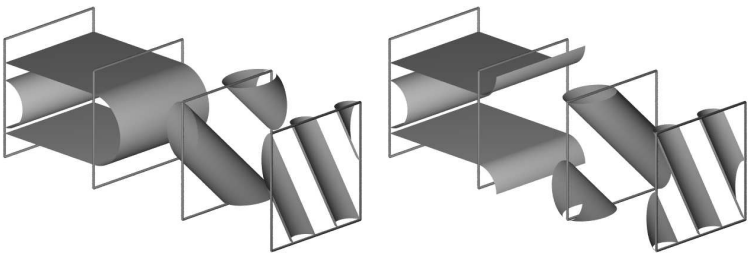


FIG. 4.14 – Effet d'une permutation de tranches sur une feuille annulaire

Classification

Théorème 4.6 ([Gir00]) *Soit σ_0 et σ_1 des feuilletages admissibles sur le bord d'un tore épais $T \times [0,1]$. On note $\mathcal{C}$ le cône de Giroux de (σ_0, σ_1), $\mathcal{SCT}$ l'ensemble des structures de contact tendues imprimant σ_0 et σ_1 au bord et $\mathcal{SCT}_n$ celles de π–torsion n. Dans la suite toutes les isotopies sont relatives au bord.*

a) Toute structure de contact dans $\mathcal{SCT}$ est isotope à une structure de contact sous forme normale ;

b) Pour $n > 0$ le feuillage d'une structure de contact sous forme normale dans $\mathcal{SCT}_n$ ne contient pas de tore compressible. Deux telles structures de contact sont isotopes si et seulement si leurs feuillages persistants le sont.

c) Deux structures de contact sous forme normale dans $\mathcal{SCT}_0$ dont les feuillages principaux sont liés par un nombre fini de permutations de tranches élémentaires, de déplacements d'anneaux et d'isotopies sont isotopes. La réciproque est vraie si les feuilletages σ_0 et σ_1 sont linéaires ou découpés par deux courbes ou si on se restreint aux structures de contact universellement tendues. De plus, dans le cas où le cône $\mathcal{C}$ est d'intérieur non vide et σ_0 et σ_1 sont découpés par deux courbes, toute classe d'isotopie est déterminée par sa classe d'Euler relative.

Conjecture 4.7 La réciproque évoquée à la fin du théorème précédent est toujours vraie.

On peut penser que cette conjecture est implicite dans [Hon01].

On passe maintenant à la classification sur les tores pleins. Tout tore plein W peut être vu comme un tore épais $T \times [0,1]$ dont on a écrasé la composante de bord T_0 sur une âme A de W. Pour peu que W et A soient orientés, il existe une classe d'homologie $M \in H_1(T)$ correspondant aux méridiens de W, il s'agit de la classe des bords de disques méridiens orientés de façon compatible avec leur coorientation héritée de A et avec l'orientation de W. On fixe un feuilletage linéaire σ_M sur T_0 dont la direction est engendrée par M. On note $L_M \subset H_1(T)$ l'ensemble des classes d'homologie d vérifiant $d \cdot M = 1$.

Toute structure de contact ξ sur le tore plein W est isotope à une structure de contact à laquelle A est transversale. Le modèle canonique d'une structure de contact au voisinage d'une courbe transversale montre que ξ se relève à $T \times [0,1]$ en structure de contact imprimant σ_M sur le tore T_0. On dit que ξ est élémentaire ou sous *forme normale* si son relevé $\hat{\xi}$ l'est. On appelle cône de Giroux, polygone de Giroux et feuillage de ξ

les objets correspondants pour $\hat{\xi}$ et on note $R'(\xi)$ l'ensemble des classes d'homologie associées à des tores compressibles du feuillage de $\hat{\xi}$.

On note $\mathcal{SCT}(\sigma)$ l'ensemble des structures de contact sur W imprimant le feuilletage singulier σ au bord.

Théorème 4.8 ([Gir00]) *Soit W un tore plein, σ un feuilletage orienté admissible sur ∂W et σ_M comme plus haut. On note $\mathcal{P}$ le polygone de Giroux $\mathcal{P}(\sigma_M, \sigma)$.*

a) Toute structure de contact $\xi \in \mathcal{SCT}(\sigma)$ est ∂–isotope à une structure de contact sous forme normale pour laquelle $R' \subset \mathcal{P}$.

b) Une structure de contact ξ sous forme normale sur W et imprimant σ au bord est tendue si et seulement si son feuillage ne contient pas de feuille torique compressible au-dessus d'une autre feuille, si $R'(\xi) \subset \mathcal{P} \cup L_M$ et si sa fonction D_ξ fait moins d'un tour de la droite projective. Elle est universellement tendue si et seulement si elle est tendue et $R'(\xi) \subset L_M$.

c) Si σ est linéaire ou scindé par deux courbes alors deux structures de contact dans $\mathcal{SCT}(\sigma)$ sont ∂–isotopes si et seulement si elles ont la même classe d'Euler relative.

Pour tout nombre rationnel $r > 1$ il existe un unique développement en fraction continue de la forme

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{\cdots - \cfrac{1}{a_N}}}$$

avec $a_i \geq 2$ pour tout i. Ce développement sera noté $[a_0, \ldots, a_N]$.

Corollaire 4.9 *Avec les mêmes notations que plus haut, si σ est scindé alors $\mathcal{P}$ est constitué d'un nombre fini de côtés $c_1, \ldots, c_k$ et*

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{SCT}(\sigma)\big) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Card}(c_i).$$

Si de plus on fixe une base du $H_1(\partial W)$ et des orientations pour les cercles méridiens et les courbes de découpage de sorte que leurs classes d'homologie respectives aient pour coordonnées (α, β) et $(1, 0)$ avec α et β strictement positifs alors

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{SCT}(\sigma)\big) = \prod_{i=0}^{N} (a_i - 1)$$

où $[a_0, \ldots, a_N]$ est le développement en fraction continue de $\alpha/(\alpha - \beta)$.

Corollaire 4.10 *Soit $(T \times [0,1], \xi)$ un tore épais muni d'une structure de contact tendue. Pour toute classe d'homologie entière primitive d dans $\mathcal{C}(\xi T_0, \xi T_1)$ il existe un tore parallèle au bord dont le feuilletage caractéristique est scindé par deux courbes de classe d'homologie d.*

Soit W un tore plein, σ un feuilletage orienté admissible sur ∂W, $\xi \in \mathcal{SCT}(\sigma)$ et σ_M un feuilletage linéaire sur ∂W engendré par des disques méridiens. Il existe un tore parallèle au bord découpé par deux courbes de classe d'homologie $d \in H_1(\partial W, \mathbb{Z})$ si et seulement si d est une classe primitive dans $\mathcal{C}(\sigma_M, \sigma)$.

4.2 Applications directes de la classification

4.2.1 Recollements et revêtements

Soit ξ une structure de contact sur un tore épais $T \times [0,1]$ à bord admissible et telle que le feuilletage caractéristique $\xi T_{1/2}$ est admissible. Si les restrictions de ξ aux sous-tores épais $T \times [0,1/2]$ et $T \times [1/2,1]$ sont élémentaires alors ξ l'est aussi. Cela permet d'utiliser la proposition 4.3 pour démontrer géométriquement des résultats de recollement de structures de contact tendues. Le lemme 5.19 de la partie suivante est un exemple de tel résultat. Le fait que l'ensemble des structures de contact élémentaires soit stable par recollement et par revêtement explique pourquoi on y accorde de l'importance au-delà de leur rôle d'intermédiaire dans la démonstration du théorème 4.6. Cette propriété fait défaut à l'ensemble des structures de contact sous forme normale.

On s'intéresse maintenant aux revêtements finis entre tores épais. Soit ρ un tel revêtement et d une classe d'homologie entière représentée par une collection C de cercles plongés. L'image inverse $\rho^{-1}(C)$ est une collection finie de cercles plongés dont la classe d'homologie sera notée $\rho^* d$.

Si ξ est une structure de contact élémentaire sur $T \times [0,1]$ de lieu des tores compressibles $\{d_1, \ldots, d_n\}$ et si ρ est un revêtement fini compatible avec la structure de produit de $T \times [0,1]$ alors $\rho^*\xi$ est élémentaire et son lieu des tores compressibles est $\rho^* d_1, \ldots, \rho^* d_n$ (les classes d'homologie non primitives apparaissant indiquent la présence de plusieurs tores compressibles de même classe d'homologie associée) donc la proposition 4.3 permet de détecter des revêtements vrillés.

Cette stratégie sera utilisée intensivement dans la section 5.4 mais elle permet déjà de répondre à la question de [Hon00b][page 97]. Étant donnée une structure de contact virtuellement vrillée ξ sur $T^2 \times [0,1]$ dont chaque composante de bord est scindée par

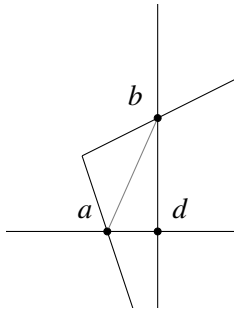


FIG. 4.15 – Détermination des revêtements vrillés

deux courbes, Honda demande quels sont les revêtements par $\mathbb{R}^2/(m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}) \times [0,1]$ qui héritent d'une structure de contact vrillée. On note $\xi(m,n)$ la structure de contact relevée et on explique plus loin comment déterminer des entiers n_0 et m_0 tels que la structure de contact $\xi(m,n)$ est vrillée dès que $n \geq n_0$ et $m \geq m_0$. Cette détermination ne laissera qu'un nombre fini de revêtements à examiner directement à l'aide de la proposition 4.3.

La différence essentielle entre cette question et la théorie générale des formes normales exposée plus haut est l'existence d'une base et d'une structure euclidienne canoniques sur $H_1(T^2)$ qui viennent s'ajouter au réseau et à la forme d'intersection déjà présents.

On suppose que le bord de $\mathcal{C}$ n'a pas de composante parallèle aux axes de coordonnées (les cas ainsi exclus peuvent se traiter de façon tout à fait similaire). Le théorème 4.6 a) assure que ξ est isotope à une structure de contact sous forme normale et la proposition 4.3 montre qu'il existe une classe d'homologie d dans l'intérieur $\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}$ du polygone de Giroux de ξ associée à un tore compressible du feuillage. Soit L_h et L_v les droites affines contenant d et dirigées par les deux vecteurs de base de $H_1(T^2)$. Il existe des points $a \in \partial\mathcal{C} \cap L_h$ et $b \in \partial\mathcal{C} \cap L_v$ tels que la droite (ab) divise $H_1(T^2,\mathbb{R})$ en deux demi-plans ouverts dont l'un contient l'origine et l'autre la classe d (figure 4.15). Soit l_h (resp. l_v) la distance entre d et a (resp. b). On pose $n_0 = \lfloor 1/l_h \rfloor + 1$ et $m_0 = \lfloor 1/l_v \rfloor + 1$. Si $n \geq n_0$ et $m \geq m_0$ alors le cône de Giroux relevé contient des classes entières $a' \in \rho^* \,]ad[$ et $b' \in \rho^* \,]bd[$ donc $\rho^* d$ n'est pas dans le polygone de Giroux, ce qui montre que $\xi(n,m)$ est vrillée d'après la proposition 4.3.

4.2.2 Isotopies de surfaces ξ–convexes

Lorsque deux surfaces plongées dans une variété de contact (V,ξ) de dimension trois sont topologiquement isotopes on peut chercher à les disjoindre ou à les faire coïncider

par une isotopie préservant la structure de contact. On peut disjoindre une surface d'elle-même par une isotopie arbitrairement petite si et seulement si elle est ξ–convexe. Par ailleurs le lemme 3.7 montre que si deux surfaces sont isotopes parmi les surfaces ξ–convexes alors, quitte à modifier le feuilletage caractéristique de l'une à l'aide du lemme de réalisation, il existe une isotopie envoyant l'une sur l'autre et préservant la structure de contact ξ (et donc ces surfaces peuvent aussi être disjointes par une telle isotopie). Les différences entre la classe d'isotopie topologique et la classe d'isotopie parmi les surfaces ξ–convexes d'une surface plongée reflète donc la topologie de contact de (V,ξ).

Dans cette section on applique la théorie des formes normales de structures de contact tendues sur les tores épais à l'étude de ces différences. Le théorème suivant décrit un exemple d'intersection persistante. Il contredit la proposition 10 de [Gir01b].

Théorème 4.11 *Soit $V = T \times [0,1]$ un tore épais. Il existe une structure de contact tendue ξ sur V imprimant au bord des feuilletages scindés par deux courbes, un tore ξ–convexe F dans V et une isotopie φ avec $\xi\varphi_1(F) = \varphi_1(\xi F)$ tels que, pour toute isotopie ψ qui déforme F parmi les surfaces ξ–convexes (en particulier toute isotopie préservant ξ), $\psi_1(F)$ est différente de $\varphi_1(F)$ et l'intersecte.*

Démonstration On paramètre V par $T^2 \times [0,1]$ et on note σ_0 et σ_1 des feuilletages réglés ayant deux cercles de singularités sur T_0 et T_1 admettant comme classe d'homologie associée $(1,2)$ sur T_0 et $(1,-1)$ sur T_1. Soit ξ une structure de contact sous forme normale imprimant σ_0 et σ_1 au bord et dont le lieu des tores compressibles est $\{(1,0)\}$. Le polygone de Giroux correspondant est constitué de quatre points alignés et la suite de signes de cette forme normale est $(+,+,-)$. On note $F = T_{t(1,0)}$. D'après la proposition 4.3 et le théorème 4.6 c), la structure de contact ξ est tendue et il existe une isotopie φ pour laquelle $\varphi_1^*\xi$ est sous forme normale avec comme suite de signes $(+,-,+)$ et donc comme lieu des tores compressibles $\{(1,1),(1,0)\}$. On peut supposer en outre que $\varphi_1^*\xi F = \xi F$. La figure 4.12 montre les feuillages principaux de ces deux formes normales.

On note $F' = \varphi_1(F)$. Soit N (resp. N') le sous-tore épais bordé par T_0 et F (resp. F'). Il ne peut y avoir d'isotopie qui préserve ξ et envoie F sur F' car une telle isotopie pousserait $\xi_{|N}$ sur $\xi_{|N'}$ alors que la proposition 4.3 affirme que l'une est universellement tendue tandis que l'autre est virtuellement vrillée.

De plus, si une isotopie déforme F en F' parmi les surfaces ξ–convexes alors le lemme 3.7 fournit une isotopie parmi les surfaces réglées. Une telle isotopie coïncide

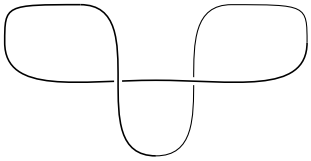


FIG. 4.16 – Bord d'un disque vrillé immergé

en restriction à F avec une isotopie préservant ξ (voir [Gei08][théorème 2.6.2]) et on est ramené au cas précédent.

Si une isotopie déforme F en F'' parmi les surfaces ξ–convexes et si F'' est disjointe de F' alors un théorème de J. Stallings assure que F'' et F' bordent un tore épais N'' et ξ est isotope à une structure de contact sous forme normale sur N'' dont le feuillage est nécessairement constitué de deux anneaux allant de F à F'' car la direction D_ξ est constante d'après les propositions 4.3 et 4.4. Cela montre que F'' et F' sont isotopes parmi les surfaces ξ–convexes et donc ramène au cas précédent. □

Par ailleurs, dans la sphère S^3 munie de sa structure de contact standard ξ, il existe des disques vrillés immergés ayant une auto-intersection de type morsure (la figure 4.16 montre la projection lagrangienne du bord d'un tel disque). Un voisinage régulier d'un tel disque est un tore plein W non noué dont le bord est un tore qui ne peut être déformé en un tore de Villarceau par une isotopie préservant ξ car, par construction, la restriction de ξ à W devient vrillée dans tout revêtement connexe non trivial de W. Des techniques analogues à celles utilisées dans la démonstration précédente mais basées sur le cas des tores pleins (théorème 4.8) permettent de construire d'autres tores exotiques scindés par des courbes dont on contrôle la classe d'homologie, mais pas a priori d'assurer la présence d'intersections (le théorème de Stallings ne s'applique pas ici).

Dans le cas du théorème ou dans le cas de la sphère il est facile de voir qu'on peut passer d'un tore standard à sa version exotique par un nombre fini de connexions de selles rétrogrades ne changeant pas le nombre de composantes du découpage. Ceci montre qu'il est vain d'espérer des théorèmes généraux d'élimination de suites de bifurcations dont l'effet total est nul.

Dans le cas du théorème la structure de contact ambiante est virtuellement vrillée et dans le cas de la sphère les tores considérés sont compressibles.

Par ailleurs on va expliquer rapidement pourquoi si ξ est une structure de contact universellement tendue sur un tore épais $T \times [0, 1]$ et si F est un tore ξ–convexe isotope

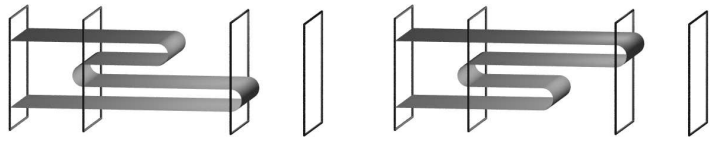


FIG. 4.17 – Extension d'un tore épais permettant une isotopie de surfaces ξ–convexes

aux T_t et scindé par deux courbes alors pour toute isotopie φ telle que $\xi\varphi_1(F) = \varphi_1(\xi F)$ il existe une isotopie de contact envoyant F sur $\varphi_1(F)$. On peut supposer que ξF est une suspension admissible. On met sous forme normale $\varphi_1^*\xi$ par une isotopie ψ relative au bord et à F. L'unicité des formes normales dans ce cas permet de supposer que $\psi_1^*\varphi_1^*\xi = \xi$. Comme $\varphi_1 \circ \psi_1(F) = F$, il ne reste plus qu'à montrer que le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité qui préservent ξ est connexe, ce qu'on peut faire en suivant la stratégie de [Gir01b].

Le calcul de torsion de la proposition 4.4 montre qu'une structure de contact de torsion non nulle sur un tore épais regorge de tores ξ–convexes non isotopes parmi les surfaces ξ–convexes qui partagent le même feuilletage caractéristique. Dans ce cas le bon objectif est de disjoindre ces tores, ce qui est toujours possible sur un tore épais. Sur une variété de contact tendue plus générale cette question est intimement liée à celle de la finitude de la torsion.

Enfin il existe aussi des effets de bord qui peuvent empêcher des surfaces ξ–convexes d'être isotopes. Par exemple les deux tores à l'intérieur du tore épais de la figure 4.13 ne sont clairement pas isotopes parmi les surfaces ξ–convexes mais le deviennent si on adjoint au tore épais considéré un tore épais comme dans la figure 4.17.

Question 4.12 Peut-on trouver des exemples de cohabitation de plusieurs classes d'isotopie de tores ξ–convexes scindés par deux mêmes courbes dans une classe d'isotopie de plongements incompressibles du tore dans des variétés de contact fermées universellement tendues de torsion nulle ?

4.3 Quelques éléments de démonstration

Dans cette section on donne quelques idées et beaucoup de dessins qui se cachent derrière les résultats cités dans l'introduction de ce chapitre.

Discrétisation

Soit ξ une structure de contact sur un tore épais $T \times [0,1]$ imprimant au bord des feuilletages admissibles qu'on supposera scindés pour simplifier un peu. La première idée consiste à obtenir un film présentant un nombre fini[1] de tores non ξ–convexes tout en contrôlant les raisons de cette non ξ–convexité comme dans la proposition 3.10.

Proposition 4.13 ([Gir01b][lemme 15]) *Toute structure de contact sur une surface épaisse $S \times [0,1]$ à bord ξ–convexe est ∂–isotope à une structure de contact ξ pour laquelle il existe un ensemble fini $\Sigma \subset [0,1]$ et un voisinage U de Σ vérifiant :*

- *les surfaces S_t avec $t \notin \Sigma$ sont ξ–convexes ;*
- *les feuilletages ξS_t pour $t \in U$ vérifient la propriété de Poincaré–Bendixson, n'ont que des singularités hyperboliques (au sens dynamique) et pas d'orbite périodique dégénérée ;*
- *les feuilletages ξS_t pour $t \in U \setminus \Sigma$ ne présentent aucune connexion de selles ;*
- *les feuilletages ξS_t pour $t \in \Sigma$ présentent exactement une connexion de selles et elle est rétrograde.*

Le lemme suivant décrit ce qui se passe lorsque le critère de ξ–convexité 3.10 ne s'applique plus à cause d'une connexion de selles rétrograde.

Lemme 4.14 (lemme de croisement 2.14 dans [Gir00]) *Soit ξ une structure de contact orientée sur une surface épaisse $S \times [0,1]$. On suppose que le feuilletage $\xi S_{1/2}$ présente une connexion de selles rétrograde : pour t proche de $1/2$ il existe une selle négative b_t^-, une selle positive b_t^+, une séparatrice instable c_t^- de b_t^- et une séparatrice stable c_t^+ de b_t^+ telles que $c_{1/2}^- = c_{1/2}^+$.*

Pour t proche de $1/2$ on repère les séparatrices par leur intersection avec une transversale orientée par la coorientation de ξ. Pour $t < 1/2$ (resp. $t > 1/2$) la séparatrice c_t^- est au-dessous (resp. au-dessus) de c_t^+.

[1] cette finitude n'est pas strictement nécessaire mais elle rend la discussion plus confortable

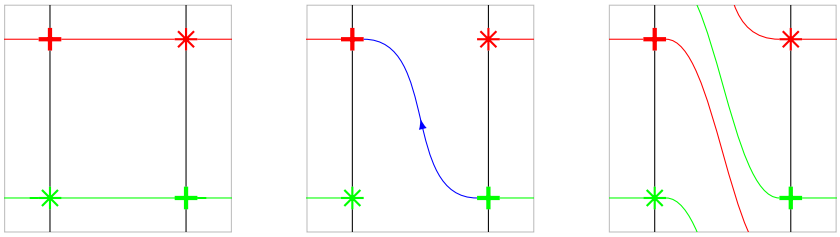


FIG. 4.18 – Lemme de croisement

La figure 4.18 illustre le lemme de croisement sur un tore obtenu en recollant le haut et le bas du carré ainsi que la gauche et la droite, la connexion de selles rétrograde étant repérée par une flèche sur le graphe de Giroux du milieu. Sur ce dessin et les suivants le sens de croisement impose à la séparatrice négative de tourner à droite après la connexion.

De même, il existe une description de la situation en présence d'une orbite périodique dégénérée : le lemme de naissance-mort 2.12 dans [Gir00], mais elle ne sera pas utilisée ici. On utilise par contre une remarque découlant de sa démonstration.

Lemme 4.15 ([Gir00][remarque 2.13]) *Dans une surface épaisse $S \times [0,1]$ munie d'une structure de contact ξ, la réunion des orbites périodiques des feuilletages caractéristiques ξS_t est toujours une surface.*

On peut voir la figure 4.4 comme une illustration de ce lemme dans un cas où le film présente des surfaces non ξ–convexes.

Feuillage

Pour faire apparaître le feuillage, on va faire disparaître à l'aide du lemme d'élimination toutes les singularités des feuilletages caractéristiques dans le voisinage U des tores non ξ–convexes fourni par la proposition 4.13. Après cette élimination, le complémentaire du voisinage U est formé de sous-tores épais au bord desquels ξ imprime des suspensions scindées, on peut alors appliquer le lemme 3.6 pour obtenir un film formé de suspensions scindées et d'au plus un tore réglé par composante connexe qui est nécessaire exactement quand les orbites périodiques des deux composantes de bord sont orientées en des sens opposés. Le film qui apparaît est alors celui du retournement d'orbites de la figure 3.1.

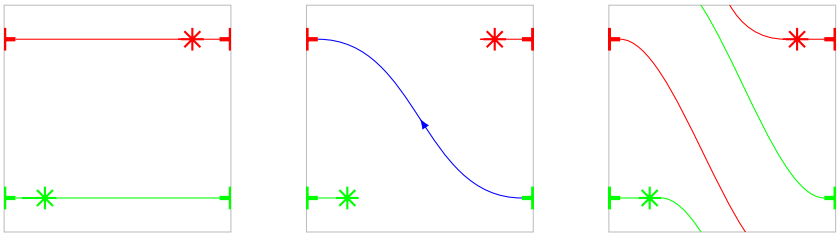


FIG. 4.19 – Changement de classe d'homologie du découpage

Sans démontrer que cette élimination est toujours possible, on va illustrer les différents cas se présentant lors des connexions de selles ; cette discussion est à comparer avec la discussion des attachements de rocades dans [Hon00a].

Dans les dessins qui suivent on représente en rouge [2] (resp. vert) le graphe Γ^+ (resp. Γ^-) de la définition 3.8 formé des variétés stables (resp. instables) des singularités positives (resp. négatives). On rappelle que le découpage (lorsque l'absence de connexion de selles rétrograde lui permet d'exister) borde un voisinage régulier de Γ^+ (et donc aussi de Γ^-). Sur ces dessins, les côtés verticaux des carrés ne sont pas en général des réunions d'orbites du feuilletage caractéristique, même lorsqu'ils contiennent deux singularités.

Dans le cas d'une structure de contact tendue il y a trois types de bifurcations. Le premier (figure 4.19) modifie la direction du découpage. Dans ce cas il y a exactement deux courbes de découpage avant et après la bifurcation. L'élimination de toutes les singularités donne alors un sous-tore muni d'une structure de contact purement rotative dont le bord présente deux orbites périodiques par composante, les classes d'homologie correspondantes ayant une intersection -1. Toute tranche élémentaire est isotope à une structure de contact imprimant un tel film. La figure 4.18 montre en plus du graphe de Giroux deux cercles dont la classe d'homologie donne la différence entre les classes d'homologie des découpages avant et après connexion. Un twist de Dehn le long d'une courbe traversant le carré de gauche à droite à mi-hauteur permet donc d'obtenir les dessins des autres différences possibles.

Le deuxième type modifie le nombre de courbes de découpage sans modifier leur direction. La figure 4.20 montre un exemple de diminution de ce nombre. La même figure vue dans un miroir[3] montre une augmentation. En éliminant les selles participant

[2] Dans une impression noir et blanc, le rouge semble noir et le vert gris.

[3] et pas seulement de droite à gauche pour que les croisements aient lieu dans le sens prescrit par le lemme de croisement

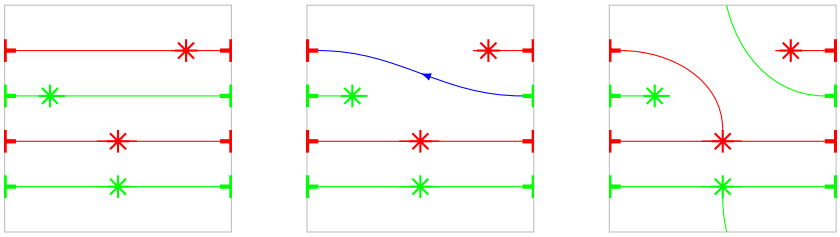


FIG. 4.20 – Diminution du nombre de composantes de découpage

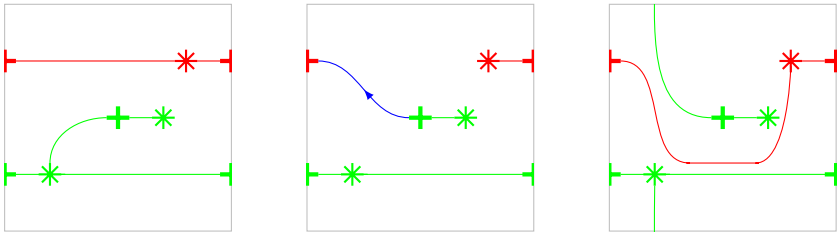


FIG. 4.21 – Bifurcation triviale

à la connexion le long des séparatrices faisant face à la connexion puis les autres singularités on obtient un sous-tore épais muni d'une structure de contact purement rotative d'amplitude nulle. La composante de bord avant connexion comporte (dans le cas d'une diminution) deux orbites périodiques de plus que l'autre composante, ces deux orbites fusionnant avant de disparaître tandis que les autres orbites se retrouvent sur tous les tores de la séquence comme l'indique le lemme 4.15. L'effet d'une telle bifurcation sur le feuillage après élimination peut être observé entre les deux tores les plus à gauche des figures 4.6 et 4.13 par exemple.

Enfin certaines bifurcations peuvent être complètement éliminées pour obtenir un film formé de tores ξ–convexes dans la composante de U concernée (la ξ–convexité est ici assurée par le critère 3.10). La figure 4.21 montre un exemple d'une telle bifurcation dite triviale.

Parmi les autres types de bifurcations imaginables, certaines sont exclues dans le cas d'une structure de contact tendue car elles font apparaître des tores convexes dont le découpage présente une composante homotopiquement triviale, ce qu'empêche le théorème 3.13. En outre une configuration est interdite pour une raison plus subtile qui fait l'objet du lemme suivant et qui réapparaîtra lors de la discussion des tores compressibles du feuillage. L'anneau mentionné dans ce lemme est ici une sous-surface d'un tore T_t.

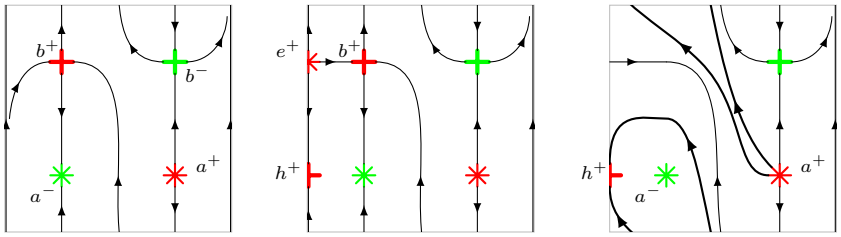


FIG. 4.22 – Anneau cachant un disque vrillé

Lemme 4.16 ([Gir00][lemme 2.17 et proposition 3.36]) *Si une structure de contact imprime sur un anneau un feuilletage caractéristique (représenté à gauche de la figure 4.22 dans laquelle haut et bas sont identifiés) qui présente une selle et un foyer de chaque signe tels que :*

- *les séparatrices instables de la selle b^+ (resp. b^-) vont vers le foyer a^- (resp. a^+) et forment un cercle homotopiquement non trivial ;*
- *il y a une connexion rétrograde entre les deux selles ;*
- *la séparatrice restante de b^+ provient d'une composante de bord et la dernière séparatrice va vers l'autre composante de bord ;*

alors cette structure de contact est vrillée.

Il s'agit d'un phénomène subtil car toutes les surfaces de la séquence sauf une sont ξ–convexes et possèdent un voisinage tendu d'après le critère de Giroux 3.13. C'est l'unique surface non ξ–convexe qui cache toute l'information à propos de cette séquence, en particulier son caractère vrillé.

Démonstration On crée, comme montré par la figure 4.22, une paire de singularités (e^+, h^+) sur la composante de bord répulsive puis on élimine la paire (e^+, b^+). Enfin on élimine la paire (h^+, a^+), ce qui fait apparaître une orbite périodique contractile et donc un disque vrillé. □

On arrive ainsi à l'existence d'une structure de contact élémentaire dans toute classe d'isotopie de structures de contact tendues. Pour passer aux formes normales il faut essentiellement simplifier le feuillage. Il suffit de savoir opérer les deux types de simplifications suivants :

- si dans un sous-tore épais on voit une feuille annulaire traversante, une feuille s'appuyant sur une composante de bord et une feuille s'appuyant sur l'autre composante de bord alors on peut disjoindre les projections sur $[0, 1]$ de ces deux dernières feuilles comme illustré par la figure 4.23 ;

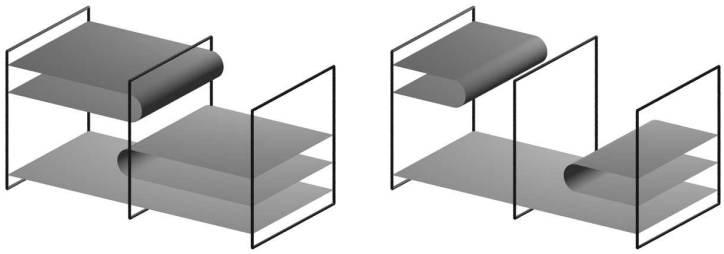


FIG. 4.23 – Disjonction de la projection de deux feuilles

– si dans un sous-tore épais on voit une feuille traversante ayant deux cercles critiques (l'anneau est en forme de « S » comme sur la figure 4.11) alors on peut faire disparaître ces deux cercles.

Ces simplifications correspondent à des films non génériques présentant deux connexions de selles rétrogrades simultanées. Un tel film se perturbe de deux façons en films faisant apparaître ces connexions dans un ordre ou dans l'autre, une des versions correspondant au film avant simplification et l'autre après. Les opérations de création de paires de singularités inverses des éliminations opérées pour obtenir une structure de contact élémentaire ramènent aux cas considérés plus bas.

Le premier type de simplification est immédiat, il correspond à deux connexions de selles rétrogrades modifiant le nombre de courbes de découpage (voir la figure 4.20) intervenant loin l'une de l'autre et qu'on peut mettre sur le même tore.

Le second type est un peu plus subtil. Le graphe de Giroux du tore non générique correspondant est représenté par la figure 4.24, la version générique avant simplification par la figure 4.25 et la version simplifiée par la figure 4.26.

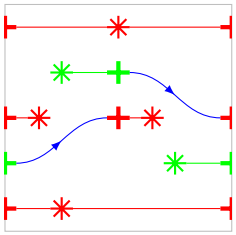


FIG. 4.24 – Tore non générique pour l'élimination d'un S

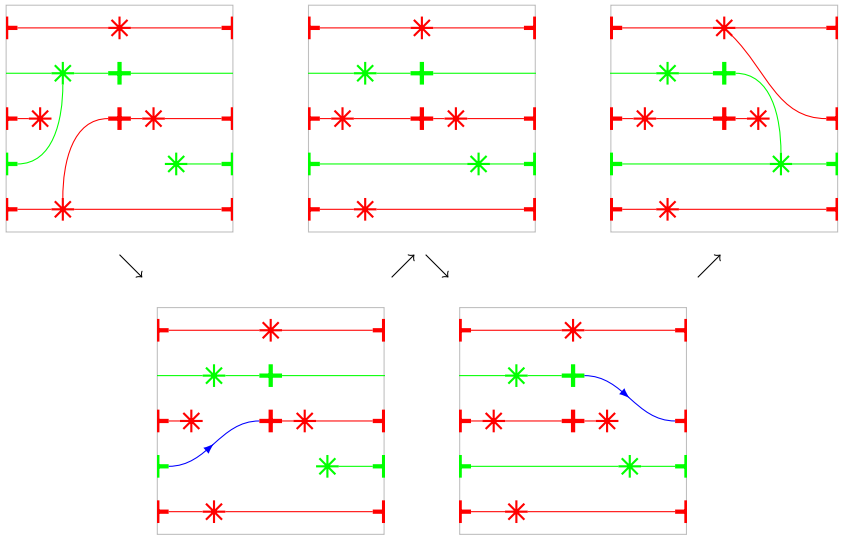


FIG. 4.25 – Avant élimination du S

Structures de contact tendues

On donne maintenant quelques idées de la démonstration de la proposition 4.3. Les simplifications opérées plus haut montrent qu'on peut supposer que les conditions sur les cercles critiques de la définition de forme normale sont satisfaites (les simplifications ne supposent pas la structure de contact tendue).

On commence par montrer que si le feuillage d'une structure de contact sous forme normale contient un tore compressible dont la projection sur $[0,1]$ intersecte celle d'une autre feuille alors la structure de contact est vrillée [Gir00][lemme 3.34]. Si plusieurs tores compressibles vérifient cette condition alors on en choisit un qui borde un tore plein ne contenant pas d'autre feuille. Les modifications servant à passer aux formes normales et une de leurs variantes (figure 4.13) permettent de supposer que, dans un sous-tore épais, le feuillage est constitué de $2(k-1)$ anneaux traversants et d'un tore compressible comme à droite de la figure 4.8 ($k=2$ sur cette figure). Quitte à modifier cette structure de contact parmi les structures de contact élémentaires on peut la rendre invariante par translation dans la direction du tore compressible. Le découpage d'un anneau transversal aux tores T_t et traversant le sous-tore épais est alors constitué de son intersection avec le feuillage qui comporte un cercle homotopiquement trivial que le critère de Giroux (théorème 3.13) convertit en disque vrillé. L'argument précédent est une variante de celui de [Gir00] qui fait apparaître explicitement une courbe transversale à ξ qui viole l'inégalité d'Eliashberg–Bennequin.

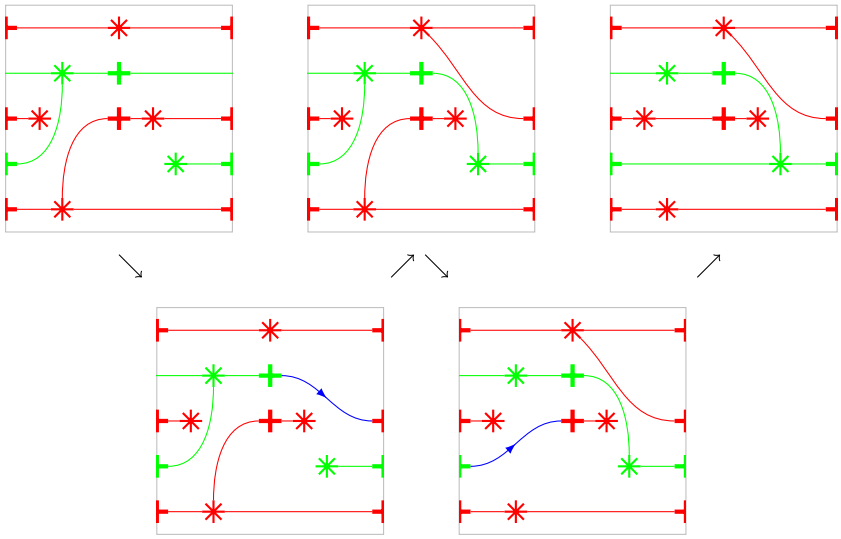


FIG. 4.26 – Après élimination du S

Pour montrer qu'une structure de contact est tendue dans le cas où les feuilletages caractéristiques au bord sont linéaires ou scindés par deux courbes et que l'amplitude de la fonction D_ξ est inférieure à un tour on la plonge dans une structure de contact holomorphiquement remplissable sur un espace lenticulaire ; on n'ajoutera rien à ce sujet. Pour se ramener au cas précédent, disons lorsque T_0 est scindé par plus de deux courbes, on étend la structure de contact à $T \times [-1, 1]$ comme sur la figure 4.27 de sorte que ξT_{-1} soit scindé par deux courbes de même direction que le découpage de T_0 et que sur ces courbes s'appuie un anneau du feuillage qui contient tous les anneaux du feuillage original de ξ s'appuyant sur T_0. On met ensuite cette structure de contact élémentaire sous forme normale et on applique le cas précédent. On fait de même du côté de T_1 si besoin est. On peut remarquer que la structure de contact étendue est isomorphe à la restriction de la structure ξ de départ à un sous-tore épais bordé par deux tores qui intersectent transversalement les deux anneaux intérieurs de ξ mais aucune autre feuille allant d'une composante de bord à elle même (à gauche de la figure 4.27 il s'agit des deux tores les plus à droite). Ce phénomène apparaît dans [Gir00][lemme 3.32] et dans [Hon00a][section 5.3.1] et est utilisé intensivement dans [HKM02] où il reçoit le nom de *attach = dig principle*.

Pour montrer qu'une structure de contact est universellement tendue on applique le résultat précédent à tous ses revêtements finis (qui sont automatiquement sous forme normale), ce qui suffit car un disque vrillé dans le revêtement universel $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$

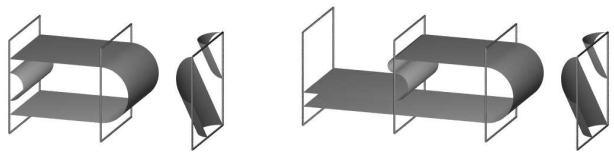


FIG. 4.27 – Extension de structure de contact équivalente à une restriction

serait plongé dans un revêtement fini.

Pour caractériser les structures de contact sous forme normale universellement tendues il suffit de montrer qu'une structure de contact est virtuellement vrillée dès que son feuillage comporte un tore compressible. Or, lorsqu'un tel tore S existe on peut construire un revêtement fini respectant la structure de produit du tore épais et pour lequel l'image inverse du tore S n'est pas connexe. La structure de contact relevée à ce revêtement est sous forme élémentaire et vrillée car les projections sur $[0,1]$ des images inverses de S s'intersectent comme à gauche de la figure 4.8.

La détermination des lieux de tores compressibles possibles commence par la remarque que la présence d'un tore compressible dans le feuillage d'une structure de contact tendue impose aux directions asymptotiques $D_\xi(t)$ de faire au plus un tour de la droite projective $PH_1(T)$. On explique ici le cas le plus simple (le cas général est une extension facile, voir [Gir00][proposition 3.36]). Sur $T^2 \times [0,1]$ on considère une structure de contact purement rotative en restriction à $T^2 \times \left(\left[0, 1/2\right[\cup \left]1/2, 1\right[\right)$, qui présente un retournement d'orbites de classe d'homologie $\pm(1,0)$ et dont les deux composantes de bord possèdent deux orbites périodiques de classe d'homologie $(0,-1)$ (figure 4.28). Tout anneau traversant ce tore épais transversalement aux T_t et dont le bord est constitué d'une orbite périodique de ξT_0 et d'une de ξT_1 a un feuilletage caractéristique ayant exactement une selle et un centre de signes différents (qui sont à l'intersection de l'anneau et du tore réglé $T_{1/2}$), en contradiction avec l'inégalité de Bennequin pour les surfaces à bord legendrien. On peut aussi conclure alternativement en utilisant le critère de Giroux (théorème 3.13) car cet anneau S est ξ–convexe et une des surfaces $S^\pm$ est un disque autour de son unique centre.

Si le feuillage d'une structure de contact élémentaire contient un tore compressible dont la classe d'homologie associée n'est pas dans son polygone de Giroux, un argument géométrique élémentaire montre qu'on peut paramétrer T par T^2 de sorte qu'il y ait

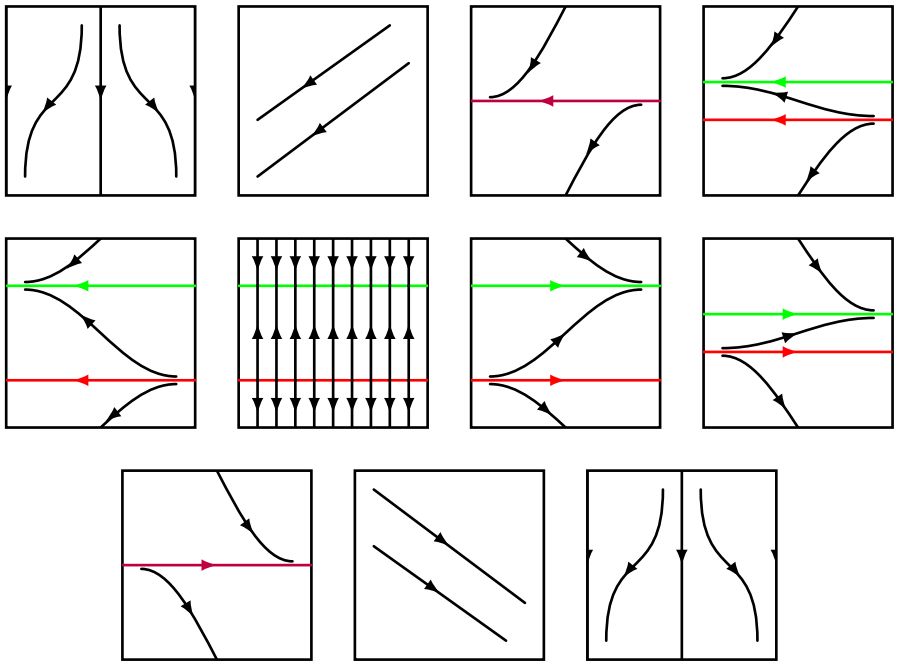


FIG. 4.28 – Retournement d'orbites périodiques et grande amplitude

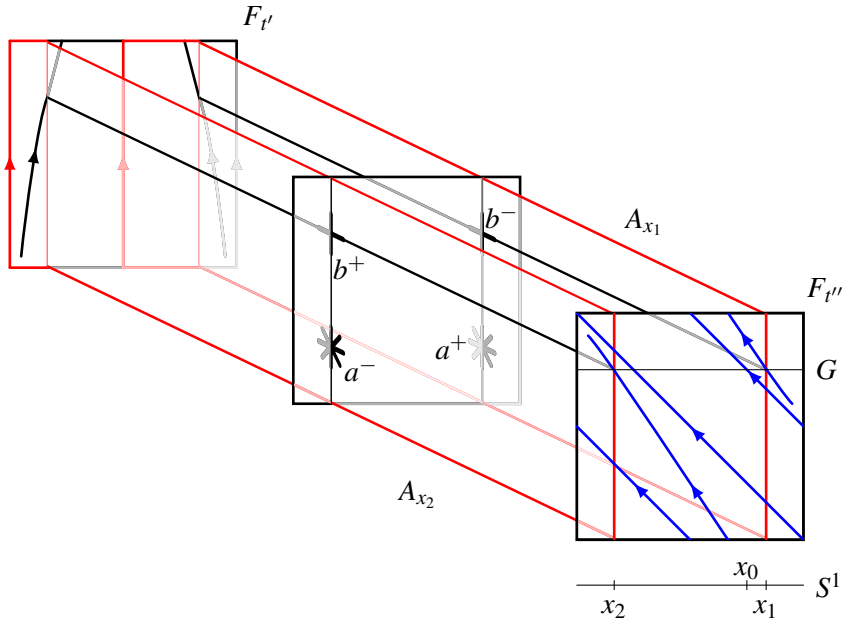


FIG. 4.29 – Retournement vrillé

un tore compressible de classe d'homologie associée $(1,0)$ et que le cône de Giroux contienne les classes $(0,1)$ et $(1,-1)$. Il s'agit du cas illustré par les figures 4.9 et 4.10. On reprend les notations de [Gir00][pages 670 et 671], illustrées par la figure 4.29. On définit t' et t'' de sorte que $T_{t'}$ (resp. $T_{t''}$) ait deux orbites périodiques de classe d'homologie $(0,1)$ (resp. $-(1,-1)$). Pour tout $x \in \mathrm{S}^1$, on note A_x l'anneau $\{x\} \times \mathrm{S}^1 \times [t',t'']$. On considère un anneau polyédral A dont le bord est constitué des orbites périodiques de $F_{t'}$ et qui est la réunion de deux anneaux dans $F_{t'}$, un anneau dans $F_{t''}$ et deux anneaux A_{x_1} et A_{x_2}. Quitte à modifier ξ par isotopie parmi les structures de contact sous forme normale, on peut choisir x_1, x_2 et les anneaux inclus dans $F_{t'}$ et $F_{t''}$ de sorte que A se lisse en anneau redevable du lemme 4.16 (la figure 4.29 est dans ce cas). Ce lemme affirme que la structure de contact considérée est vrillée.

Torsion

On donne maintenant le schéma de la démonstration de la proposition 4.4. On montre d'abord que toute structure de contact de torsion non nulle sur un tore épais est univer-

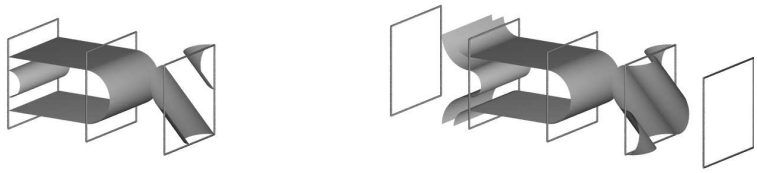


FIG. 4.30 – Extension de structure de contact pour le calcul de la torsion

sellement tendue.

Les plongements de tores épais de torsion non nulle dans une variété de contact tendue sont nécessairement incompressibles car sinon ils borderaient des tores pleins vrillés. Un théorème de Stallings assure qu'un tore épais incompressible dans un tore épais est isotope à un sous-tore épais. Toute structure de contact ξ de torsion τ non nulle sur un tore épais $T \times [0,1]$ est donc isotope à une structure de contact qui se restreint à $T \times [1/3, 2/3]$ en structure de contact élémentaire purement rotative d'amplitude $-\tau\pi$. On a expliqué plus haut pourquoi sa restriction à $T \times ([0,1/3] \cup [2/3,1])$ peut être supposée sous forme normale et la proposition 4.3 montre que son feuillage ne contient alors aucun tore compressible (car D_ξ fait plus d'un tour de la droite projective) puis que ξ est universellement tendue.

Il reste à calculer la torsion des structures de contact universellement tendues. L'absence de tore compressible du feuillage montre que la torsion est au moins celle annoncée, c'est-à-dire $\lfloor -A/\pi \rfloor$ où A est la variation totale de la fonction D_ξ. Pour montrer l'inégalité inverse on considère un plongement φ d'un tore épais de torsion τ qu'on peut supposer positionné de façon standard comme plus haut. Si la structure de contact ξ est purement rotative alors le théorème 3.17 permet de conclure assez facilement que $\tau \leq \lfloor -A/\pi \rfloor$. On construit maintenant une extension de ξ à $T \times [-1,2]$ isotope à une structure de contact purement rotative relativement à l'image de φ. Cela ramène au cas purement rotatif car la torsion de l'extension est bien sûr supérieure ou égale à celle de ξ. L'extension est choisie de sorte que tous les anneaux du feuillage de ξ s'étendent en tores isotopes aux tores T_t. Ces feuilles toriques correspondent donc à un nombre pair de retournements d'orbites qui peuvent être éliminés à l'aide du lemme d'unicité 3.6 (comparer avec l'effet d'un nombre impair de retournements d'orbites sur la figure 4.4). Après cette élimination le film ne comporte plus que des suspensions. La figure 4.30 montre un exemple d'extension de ce type.

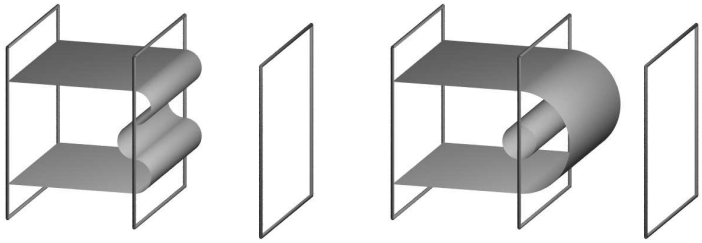


FIG. 4.31 – Distinction de deux classes d'isotopie par reconnaissance de motif

Classification

On passe maintenant au théorème de classification 4.6.

La première partie a déjà été expliquée. Pour la deuxième on a déjà expliqué pourquoi le feuillage d'une structure de contact de torsion non nulle ne peut pas contenir de tore compressible. Il ne peut pas non plus contenir d'anneau allant d'un bord à l'autre car sinon D_ξ serait constante. De plus il est clair que deux structures de contact dont les feuillages persistants sont isotopes et qui ont même torsion non nulle sont isotopes. Réciproquement on suppose que ξ_0 et ξ_1 sont deux structures de contact sous forme normale de même torsion non nulle qui sont ∂–isotopes et on montre que leurs feuilles s'appuyant sur T_0 sont isotopes (le cas de T_1 est identique). Pour toute structure de contact ξ sur $T \times [-1,0]$ qui coïncide avec ξ_0 et ξ_1 le long de T_0 les structures de contact $\xi \cup \xi_0$ et $\xi \cup \xi_1$ sur $T \times [-1,1]$ sont simultanément tendues. Si on suppose par l'absurde que les anneaux de ξ_0 et ceux de ξ_1 ne sont pas isotopes alors un choix judicieux de ξ révèle la contradiction. La figure 4.31 montre un exemple de choix judicieux. Cette stratégie apparaît dans [Gir00][proposition 4.6]. Elle apparaît aussi dans [Hon00a] (puis dans les travaux ultérieurs de K. Honda) sous le nom de *reconnaissance de motifs* (*template matching*).

On explique maintenant le théorème 4.6 c). Si les feuillages principaux de deux structures de contact sous forme normale se déduisent l'un de l'autre par déplacement d'anneau alors une variante des simplifications menant des formes élémentaires aux formes normales montre que les structures de contact sont isotopes. La permutation de tranche correspond à une opération plus subtile. Soit a, a' et a'' trois classes d'homologie successives et alignées dans le polygone de Giroux de ξ, en particulier $a'' \cdot a' = a' \cdot a = 1$ et $a' - a = a'' - a'$. Il existe un feuilletage du tore ayant une selle et un foyer de chaque signe notés h^+, h^-, e^+ et e^- tel que :

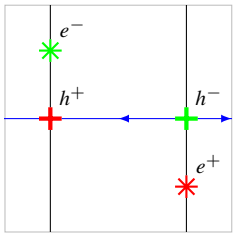


FIG. 4.32 – Tore non générique réalisant une permutation de tranches élémentaires

- les séparatrices instables de h^+ (resp. stables de h^-) sont liées a e^- (resp. e^+) et forment un cercle de classe d'homologie $a' - a = a'' - a'$;
- les deux séparatrices instables de h^- sont en connexions de selles rétrogrades avec h^+ et forment un cercle de classe d'homologie a'.

La figure 4.32 montre un tel feuilletage avec $a = (1,1)$, $a' = (1,0)$, $a'' = (1,-1)$ et donc $a' - a = a'' - a' = (0,-1)$. Le feuilletage ainsi construit apparaît comme feuilletage caractéristique du seul tore non ξ–convexe d'un film coïncidant au bord avec le film d'origine et dont les deux versions génériques font apparaître les signes $+$ et $-$ des tranches élémentaires dans un ordre ou dans l'autre.

Pour montrer que les opérations de déplacement d'anneaux et de permutation de tranches élémentaires sont suffisantes pour passer d'une forme normale à n'importe quelle autre lorsque la structure de contact est universellement tendue on utilise la technique de reconnaissance de motifs expliquée dans le contexte des structures de contact de torsion non nulle. Ici il n'y a pas de permutation de tranches élémentaires possible car il n'y a pas de tore compressible dans le feuillage.

Lorsque les deux composantes de bord sont découpées par deux courbes de directions différentes et que la torsion est nulle, un argument géométrique élémentaire montre que la contribution de chaque côté du polygone de Giroux à la classe d'Euler relative ne dépend que de la classe d'Euler relative totale. On est donc ramené au cas d'un polygone de Giroux rectiligne. Dans ce cas la classe d'Euler relative ne dépend que du nombre de tranches élémentaires positives et négatives et de la direction du polygone. Les permutations de tranches élémentaires permettent donc de passer d'une forme normale à n'importe quelle autre ayant la même classe d'Euler relative. Dans [Gir00], la notion de permutation de tranches élémentaires n'apparaît pas explicitement et le cas d'un polygone rectiligne est traité en une seule fois en exhibant un film ne contenant qu'un tore non ξ–convexe provenant de l'exemple 3.9. Les perturbations de ce film non générique donnent toutes les formes normales possibles. La figure 4.33 illustre cette stratégie dans le cas d'un côté de cardinal $p + q = 3$ dont la contribution à la classe

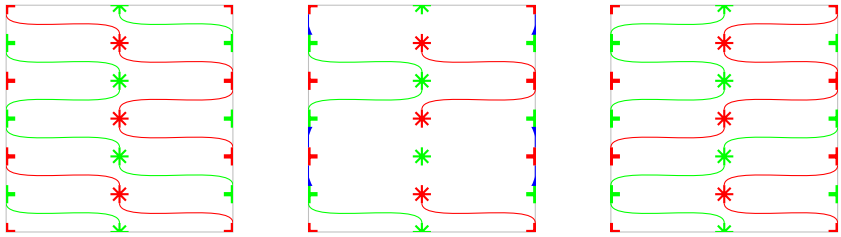


FIG. 4.33 – Multiplicité des formes normales

d'Euler relative est $q = 2$ fois un vecteur entier dirigeant le côté (les notations sont celles de [Gir00]). Le dessin du milieu montre le tore non générique correspondant.

On passe maintenant au cas des tores pleins. On applique le théorème précédent à la structure de contact relevée $\hat{\xi}$ pour obtenir la forme normale. Lorsqu'il existe un disque méridien dont le bord n'intersecte qu'une fois chaque composante du découpage du bord de W, le théorème découle assez directement de la théorie des surfaces ξ–convexes et de la classification des structures de contact tendues sur la boule par Y. Eliashberg [Eli92] comme montré par S. Makar-Limanov. Ce cas particulier permet d'obtenir une forme normale dont le lieu des tores compressibles est inclus dans $\mathcal{P}$ et permet la création de paires de tores compressibles sur la droite L_M. De telles paires ne contribuent pas à la classe d'Euler relative car la différence des classes d'homologie obtenues est multiple de M qui dirige L_M. Le reste de la démonstration suit la stratégie exposée dans le cas des tores épais.

Une stratégie pour le cas général

Le théorème 4.6 laisse en suspens la classification dans le cas où une des composantes de bord de $(T \times [0,1], \xi)$ est scindée par plus de deux courbes et que le cône de Giroux $\mathcal{C}(\xi)$ est d'intérieur non vide. Dans les explications précédentes, tous les changements (non triviaux) de feuillage sont construits à partir de surfaces présentant deux connexions de selles rétrogrades. Une stratégie de classification générale suggérée par ce point de vue[4] consiste à montrer que deux structures de contact sous forme normale isotopes sont reliées par un chemin de structures de contact qui sont toutes sous forme normale sauf un nombre fini d'entre elles pour lesquelles deux connexions de selles rétrogrades se rencontrent sur un même tore T_t. La classification générale découlerait de l'existence

[4]Les connexions de selles simultanées n'intervenaient dans [Gir00] que dans la proposition 3.40 et avec plus de deux connexions en général.

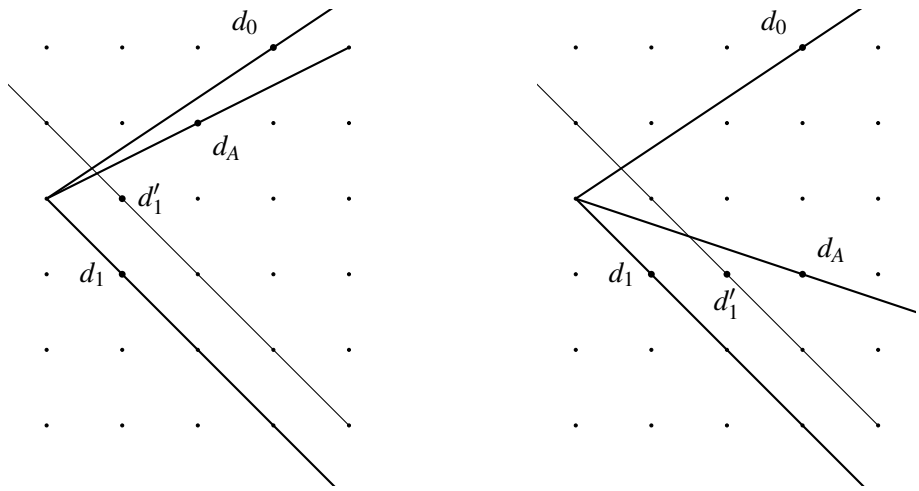


FIG. 4.34 – Deux exemples d'attachement de rocade

d'une telle famille et d'une description de tout ce qui peut advenir d'un feuillage lors d'un tel accident : conjecturalement uniquement les modifications de feuillage rencontrées pour passer des formes élémentaires aux formes normales et réciproquement et les modifications correspondant aux permutations de tranches élémentaires.

Si cette stratégie fonctionne elle pourrait aussi être utile à la compréhension des groupes fondamentaux d'espaces de structures de contact tendues et à celle des groupes de difféomorphismes préservant une structure de contact.

Méthode des rocades

Dans cette partie on explique le lien entre la classification précédente et l'article [Hon00a]. La technique des rocades de K. Honda assure l'existence de bifurcations dans le lemme suivant illustré par la figure 4.34 (à comparer avec [Hon00a][lemme 3.15]).

Lemme 4.17 *Soit ξ une structure de contact tendue sur un tore épais $N = T \times [0,1]$. On suppose que le bord de N est réglé et présente deux cercles de singularités par composante connexe. On note d_0 et d_1 des classes d'homologie associées à ξT_0 et ξT_1 avec $d_1 \cdot d_0 > 0$. S'il existe une classe d'homologie d_A avec $d_1 \cdot d_A > d_A \cdot d_0 > 0$ alors il existe dans N un tore réglé parallèle au bord, ayant deux cercles de singularités et*

auquel est associée la classe d'homologie d_1' telle que

$$d_1' \cdot d_A = \min\{d \cdot d_A \mid d_1 \cdot d = 1 \quad \text{et} \quad d \cdot d_A \geq 0\}.$$

La condition à la fin du lemme signifie que d_1' est, parmi les classes d'homologie entières qui sont à droite de d_A, la plus à gauche possible sur la droite $\{d_1 \cdot d = 1\}$ (trait fin sur la figure).

On explique maintenant brièvement de quelle façon les polygones de Giroux apparaissent implicitement dans l'approche de K. Honda basée sur ce lemme. On considère un tore épais $T \times [0,1]$ muni d'une structure de contact tendue ξ pour laquelle les deux composantes de bord sont réglées et comportent deux cercles de singularités.

Cette approche utilise comme préliminaire le cas où on peut associer aux composantes de bord des classes d'homologie d_0 et d_1 vérifiant $d_1 \cdot d_0 = 1$. Ce cas découle assez directement des résultats de base de la théorie des surfaces ξ–convexes et de la classification des structures de contact tendues sur la boule dans [Eli92]. On suppose maintenant que cette condition n'est pas satisfaite mais on note toujours d_0 et d_1 des classes d'homologie associées aux composantes de bord et vérifiant $d_1 \cdot d_0 > 0$.

Dans [Hon00a], K. Honda utilise le lemme 4.17 de façon répétée en choisissant toujours pour d_A la même classe d'homologie vérifiant $d_A \cdot d_0 = 1$. La propriété cruciale qui, du point de vue adopté ici, guide ce choix est que la partie du cône de Giroux $\mathcal{C}$ située à gauche de d_A ne contient aucune classe d'homologie entière d'après la formule de Pick. En effet, la *formule de Pick* [Pic99] (voir par exemple [AZ03] pour une démonstration en français) exprime l'aire d'un polygone à sommets entiers dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des nombres n_{int} et n_{bord} de ses points entiers en son intérieur et sur son bord respectivement :

$$\mathcal{A} = n_{\text{int}} + \frac{1}{2} n_{\text{bord}} - 1.$$

On montre maintenant que les classes d'homologie d obtenues par le lemme 4.17 parcourent de droite à gauche le polygone de Giroux de la structure de contact. Pour cela il suffit de montrer que la droite affine engendrée par deux points successifs d', d découpe le plan $H_1(T)$ en deux demi-plans ouverts dont l'un contient l'origine et aucun point entier du cône épointé bordé à gauche par $D(d_0)$ et à droite par $D(d')$.

Soit Π le demi-plan ouvert bordé par la droite $(d'd)$ et contenant l'origine. Si on suppose par l'absurde que $\Pi \cap \mathcal{C}$ contient une classe d'homologie entière alors la formule de Pick et la convexité de $\Pi \cap \mathcal{C}$ assurent qu'il existe une telle classe a vérifiant en outre $d' \cdot a = 1$. Or la caractérisation de d dans le lemme 4.17 assure que a est à gauche de d_A, ce qui est absurde vu le choix de d_A.

Au terme de ce processus, on dispose pour chaque classe d'homologie d du polygone de Giroux d'un tore réglé auquel d est associée et les tores épais bordés par les tores correspondant à deux classes d'homologie successives d et d' sont bien compris grâce au cas particulier évoqué plus haut. On obtient ainsi l'existence d'une forme normale. Les côtés du polygone de Giroux sont appelés blocs de fractions continues dans [Hon00a] et les permutations de signes sont décrites de façon différente, voir [Hon00a][lemme 4.14].

Troisième partie

Structures de contact sur les variétés de Seifert

Chapitre 5

Structures de contact d'enroulement strictement négatif

Dans ce chapitre, on étudie les structures de contact d'enroulement strictement négatif sur les variétés de Seifert. On rappelle que, pour une variété de Seifert V munie d'une structure de contact ξ, l'enroulement d'une fibre régulière legendrienne est le nombre de tours que fait la structure de contact le long de cette fibre par rapport aux fibres voisines. L'enroulement $e(L)$ d'une courbe legendrienne verticale L est définie comme le supremum sur les isotopies φ envoyant une fibre régulière L_0 sur L de l'enroulement de L_0 pour $\varphi_1^*\xi$. Enfin l'enroulement $e(\xi)$ de la structure de contact ξ est le supremum des enroulements de ses courbes legendriennes verticales.

5.1 Propriétés globales des structures de contact géodésibles

On commence l'étude globale des structures de contact géodésibles en décrivant leurs revêtements universels, en calculant leur enroulement sur les variétés de Seifert et en expliquant pourquoi elles apparaissent naturellement au bord de certaines variétés symplectiques. En particulier on va montrer dans cette section une petite moitié du théorème A.

Revêtement universel

Proposition 5.1 *Toute structure de contact géodésible sur une variété compacte de dimension trois induit au revêtement universel la structure de contact standard sur* $\mathbb{R}^3$

ou S^3. *De plus dans le cas d'un fibré en tores* $T^3_A = {}_{\Gamma_A}\backslash^{\mathrm{Sol}}$, *toute structure de contact géodésible est dans la classe d'isotopie canonique, c'est-à-dire celle qui contient les quotients de structures invariantes à gauche sur le groupe de Lie résoluble* Sol *(voir l'introduction).*

Démonstration Soit ξ une structure de contact géodésible sur une variété V compacte de dimension trois. La proposition page 20 de l'introduction affirme que (V,ξ) est une variété de Seifert munie d'une structure de contact transversale aux fibres ou un fibré en tores muni d'une structure de contact transversale à un feuilletage par droites propres.

Dans le cas d'une variété de Seifert il y a trois revêtements universels possibles (corollaire page 16 de l'introduction). Si la base est une surface orbifold revêtue par le plan $\mathbb{R}^2$ alors ce revêtement induit un revêtement $\widehat{V}$ de V par un fibré en cercles sur $\mathbb{R}^2$ et la structure de contact induite est transversale aux fibres. Le revêtement universel est alors $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ muni d'une connexion complète et on conclut par la proposition 3.14. Si le revêtement universel orbifold de la base B est compact alors le revêtement universel de V est isomorphe soit à $S^2 \times \mathbb{R}$ feuilleté par le facteur $\mathbb{R}$ soit à S^3 munie d'une de ses structures de variété de Seifert.

Dans le cas de S^3, il existe deux fibres L_0 et L_1 et une projection d'un tore épais sur $\widetilde{V}$ qui écrase les composantes de bord sur L_0 et L_1, voir l'exemple 1 page 18. Les modèles locaux au voisinage de courbes transversales à une structure de contact montrent que la structure de contact induite sur la sphère S^3 se relève en structure de contact sur le tore épais et le théorème 3.17 fournit une isotopie envoyant cette structure de contact sur la structure de contact standard car l'amplitude est contrainte par la condition de transversalité aux fibres à être inférieure à un tour et elle est non nulle car les directions asymptotiques des feuilletages caractéristiques des deux composantes de bord sont différentes.

Le cas de $S^2 \times \mathbb{R}$ ne peut pas se produire car alors V serait revêtue par $S^2 \times S^1$ qui est le quotient de $S^1 \times S^1 \times [0,1]$ par $(x,y,t) \sim (x',y,t)$ quand $t = 0$ ou 1, feuilleté par $\{\star\} \times S^1 \times \{\star\}$. La structure de contact relevée comme plus haut serait purement rotative d'amplitude non nulle car elle imprime des suspensions de rotations au bord (voir la remarque 3.16) et la direction asymptotique des feuilletages caractéristiques dans $H_1(T^2,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ irait de la direction $\mathbb{R} \times \{0\}$ à elle-même sans passer par la direction $\{0\} \times \mathbb{R}$ qui est celle des fibres.

Si V est un fibré en tores, on passe au revêtement par $T^2 \times \mathbb{R}$ ne dépliant pas les fibres. Pour tout t dans $\mathbb{R}$, la condition de transversalité à un feuilletage linéaire assure que le feuilletage caractéristique ξT_t est une suspension – on note D_t sa direction

asymptotique. La monodromie A du fibré envoie D_0 sur D_1 qui en est nécessairement distincte à cause de la remarque 3.16 car les directions propres de A sont irrationnelles. De plus la transversalité de ξ et d'une des directions propres de la monodromie confine les directions D_t à un des deux cônes ouverts bordés par les directions propres. La positivité de ξ assure qu'il s'agit du cône bordé à gauche par la direction propre contractante et à droite par la direction propre dilatante. Le théorème 3.17 appliqué à un petit voisinage de T_0 et à ses images sous l'action de $\mathbb{Z}$ assure qu'il existe une isotopie équivariante de $T^2 \times \mathbb{R}$ qui envoie la structure de contact ξ_{A,D_0} (voir l'introduction) sur une structure de contact ξ' transversale aux fibres et qui coïncide avec ξ le long de T_0. Une nouvelle application de ce théorème aux restrictions de ξ et ξ' à $T^2 \times [0,1]$ fournit l'isotopie désirée car ξ est aussi d'amplitude inférieure à un tour grâce à la condition de transversalité au feuilletage propre. Le fait que la structure de contact induite sur le revêtement universel est standard en découle immédiatement. □

Remarque La classification des structure de contact universellement tendues sur les fibrés en tores dans [Gir00] et [Hon00a] et la proposition précédente montrent que les structures de contact géodésibles sur les fibrés en tores sont exactement celles qui sont universellement tendues et de torsion nulle.

Remplissages symplectiques

Le fait que toutes les structures de contact transversales aux fibres d'une variété de Seifert sont symplectiquement remplissables est un corollaire immédiat de la proposition suivante.

Proposition 5.2 ([LM04]) *Pour toute variété de Seifert V, il existe une variété symplectique (W,ω) dont le bord, muni de son feuilletage caractéristique est isomorphe à V munie de son feuilletage de Seifert.*

Esquisse de démonstration Dans [LM04] cette proposition est déduite du théorème 2.1 de [MW95]. On indique maintenant brièvement une approche plus élémentaire.

Par définition, V est un fibré en cercles au-dessus d'une surface orbifold B. Soit ω_B une forme symplectique orbifold sur B. Soit W_0 le fibré en disques associé et ω_0 la forme symplectique (orbifold) définie en associant ω_B et la forme $d(r^2 d\theta)$ dans les fibres comme expliqué dans [MS98][théorème 6.3]. Les singularités de W_0 sont toutes à l'intérieur et on peut les résoudre explicitement en utilisant les techniques de K. Niederkrüger et F. Pasquotto dans [NP][partie 1.1]. □

Par ailleurs F. Ding et H. Geiges ont montré dans [DG01] que, sur les fibrés en tores T^3_A à monodromie hyperbolique, les structures de contact dans la classe d'isotopie canonique sont symplectiquement remplissables donc toutes les structures de contact géodésibles sont symplectiquement remplissables.

Enroulement

Proposition 5.3 *L'enroulement d'une structure de contact transversale aux fibres sur une variété de Seifert est strictement négatif.*

Démonstration Soit V une variété de Seifert de base B munie d'une structure de contact ξ. On remarque tout d'abord que si $\rho\colon \widehat{V} \to V$ est un revêtement fibré de degré fini k sur les fibres et si $\hat{\xi}$ est le relevé de ξ à $\widehat{V}$ alors l'enroulement de ξ est strictement négatif si celui de $\hat{\xi}$ l'est. En effet, si f est une fibre régulière de V et si $\hat{f}$ est une fibre de $\widehat{V}$ qui se projette sur f alors toute isotopie envoyant f sur une courbe ξ-legendrienne L se relève en une isotopie envoyant $\hat{f}$ sur une courbe $\hat{\xi}$-legendrienne $\widehat{L}$ vérifiant $e(\widehat{L}) = ke(L)$ donc une courbe legendrienne verticale d'enroulement positif en bas en engendre une en haut.

On montre maintenant la proposition. On suppose dans un premier temps que B est un quotient de $\mathbb{R}^2$. Soit $\widehat{V}$ le fibré en cercles induit au-dessus de $\mathbb{R}^2$ et $\rho\colon \widehat{V} \to V$ le revêtement associé. D'après la remarque préliminaire il suffit de montrer que la structure de contact $\hat{\xi}$ induite sur $\widehat{V}$ est d'enroulement strictement négatif. On va appliquer le théorème de Bennequin via une astuce apparaissant dans [Gir01a][page 229]. On construit des coordonnées (x, y, t) sur $[-a-1, a+1]^2 \times \mathrm{S}^1 \subset \widehat{V}$ (l'inclusion est fibrée) pour lesquelles $\hat{\xi}$ admet comme équation $dt - u(x, y, t)dx = 0$ avec $u(x, -a, t) = 0$, puis on plonge $]-a, a] \times [-a, a] \times \mathrm{S}^1$ dans $\mathbb{R}^3$ via

$$(x, y, t) \mapsto \left(r = u^{-1/2}, \theta = 2\pi t, z = 2\pi x\right).$$

La structure de contact $\hat{\xi}$ est envoyée sur $\ker(dz - r^2 d\theta)$ et les fibres sont envoyées sur des nœuds triviaux dont l'encadrement de Seifert coïncide avec l'image de celui fourni par la fibration. On peut donc appliquer le théorème de Bennequin pour obtenir $e(\hat{\xi}) \leq -1$.

On suppose maintenant que V est un quotient de la sphère S^3. D'après la remarque préliminaire on peut supposer que V est isomorphe à la sphère S^3 munie d'une de ses structures de fibré de Seifert (exemple 1 page 18). Les fibres régulières sont alors des nœuds toriques dont on note le type (p, q). Si on voit la sphère S^3 comme un tore épais

dont on a écrasé les composantes de bord comme dans l'exemple 1 et qu'on relève la structure de contact à ce tore épais $T \times [0,1]$ comme dans la démonstration de la proposition 5.1 alors le sens de rotation des directions asymptotiques des feuilletages ξT_t et le fait qu'ils sont transversaux aux fibres montrent que ces fibres sont des nœuds toriques *positifs*. L'encadrement de Seifert de ces nœuds diffère de pq de celui de la fibration (pq est l'enlacement de deux nœuds toriques disjoints contenus dans un même tore). Par ailleurs l'algorithme de Seifert montre que le genre de ces nœuds est au plus $(p-1)(q-1)/2$, (voir [Rol03][chapitre 5] par exemple). L'inégalité de Bennequin donne alors pour tout nœud legendrien vertical $e(L) = tb(L) - pq \leq 2g - 1 - pq \leq -p - q < 0$. □

Le lemme suivant est une généralisation facile de [Gir01a][proposition 2.4 b)].

Lemme 5.4 *Les structures de contact vrillées sur les variétés de Seifert sont d'enroulement infini.*

5.2 Exemples holomorphiquement remplissables

Dans cette section on explique comment le théorème d'Eliashberg–Gompf fournit des exemples de structures de contact holomorphiquement remplissables d'enroulement strictement négatif sur certaines variétés de Seifert. Ces structures de contact sont distinguées à isotopie près par le théorème de Lisca–Matić et Kronheimer–Mrowka et on calcule leur enroulement en utilisant l'inégalité de Bennequin dans les remplissages holomorphes.

5.2.1 Les exemples de Gompf

Proposition 5.5 *Soit V une variété de Seifert d'invariants*

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

et $[a_0^i, \dots]$ les développements en fractions continues des $\alpha_i/(\alpha_i - \beta_i)$. Si $e_0(V) \leq 2g-2$ alors V porte au moins

$$(2g - 1 - e_0(V)) \prod_i \prod_j \left(a_j^i - 1\right)$$

classes d'isotopie de structures de contact d'enroulement -1.

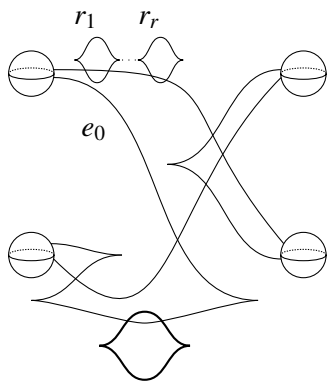


FIG. 5.1 – Diagramme de Kirby legendrien standard d'une variété de Seifert. On a dessiné le cas $g = 1$. Le cercle en trait épais ne fait pas partie du diagramme de Kirby, il représente une fibre régulière

Démonstration Le diagramme de Kirby de l'introduction peut être mis sous forme legendrienne standard au sens de Gompf [Gom98] comme indiqué par la figure 5.1.

Les développements en fractions continues des $1/r_i$ donnent lieu par twists de Rolfsen [Rol03] à un diagramme à coefficients entiers. L'arc d'attachement passant par les anses d'indice 1 a pour invariant de Thurston–Bennequin $2g-1$ et les autres ont un invariant 1. La condition d'Eliashberg et le calcul de classe de Chern de Gompf donnent alors autant de possibilités de variétés de Stein que le nombre de classes d'isotopie annoncé. En effet le H_2 du remplissage est isomorphe au groupe abélien libre engendré par les cercles d'attachement des anses d'indice 2 car tous ces cercles sont disjoints des anses d'indice 1 sauf un qui passe par chaque anse d'indice 1 une fois dans chaque sens (voir [GS99][proposition 4.5.11]). La proposition 2.3 de [Gom98] montre alors que les premières classes de Chern des remplissages obtenus sont toutes différentes. Le corollaire 4.2 de [LM98] assure ensuite que les structures de contact induites sur V sont dans des classes d'isotopie distinctes.

Il reste à vérifier qu'elles sont d'enroulement -1. Le cercle en trait gras sur la figure 5.1 est isotope aux fibres régulières de V et borde un disque dans X qui fournit la même trivialisation du fibré normal que la fibration de Seifert. Ce cercle a donc pour enroulement son invariant de Thurston–Bennequin, c'est-à-dire -1. Par ailleurs l'inégalité de Bennequin pour les remplissages holomorphes [LM98][théorème 3.4] assure que -1 est l'invariant de Thurston–Bennequin maximal des courbes legendriennes verticales donc toutes les structures de contact construites plus haut sont d'enroulement -1. $\square$

5.2.2 Des exemples d'enroulement -5

La proposition suivante a été obtenue en collaboration avec P. Lisca. Elle est inspirée de travaux de P. Lisca et G. Matić [LM98] et de J. Kim [Kim05], la partie vraiment nouvelle étant le calcul de l'enroulement.

Proposition 5.6 *Soit α et β des entiers strictement positifs premiers entre eux. On suppose que $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$ est strictement plus grand que 5 et on note $[a_0, \dots, a_N]$ son développement en fraction continue. Toute variété de Seifert dont les invariants sont de la forme*

$$(g = 0,\ b = -2,\ (2,1),\ (3,2),\ (\alpha,\beta))$$

porte au moins $(a_0 - 5)(a_1 - 1)\cdots(a_N - 1)$ structures de contact holomorphiquement remplissables d'enroulement -5.

Démonstration On note $\lambda = -\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$. La figure 5.2 (en négligeant pour l'instant les cercles verts[1]) montre comment modifier le remplissage (lisse) donné par la figure 13 en écrasant trois sphères d'auto-intersection -1 (voir par exemple [GS99][pages 150 et 151]). Le diagramme résultant correspond à une chirurgie le long d'un nœud de trèfle avec comme encadrement $\lambda + 6$. La figure 5.3 est une version legendrienne de ce diagramme de chirurgie avec un invariant de Thurston–Bennequin 1. Une première opération de slam-dunk (voir par exemple [GS99][page 163]) permet d'ajouter à ce diagramme un nœud trivial d'encadrement $-[a_1, \dots, a_N]$ enlaçant une fois le trèfle dont l'encadrement devient $6 - a_0$. On ajoute au nœud de trèfle des zig-zags pour satisfaire la condition d'Eliashberg, ce qui donne $1 - (6 - a_0) = a_0 - 5$ nombres de rotation possibles. Une succession de twists de Rolfsen (ou de slam-dunk) convertit ensuite le nœud trivial en chaîne de nœuds triviaux dont les encadrements sont les $-a_i$ avec $i \geq 1$. Le théorème d'Eliashberg–Gompf fournit alors le nombre annoncé de structures de contact holomorphiquement remplissables et leurs classes d'isotopie sont distinguées comme dans la section précédente. Il reste à calculer l'enroulement. Les cercles verts sur les figures 5.2 et 5.3 deviennent des fibres régulières après la chirurgie et le nombre qui leur est attaché est la différence entre l'encadrement de Seifert (donné par une surface de Seifert dans S^3) et l'encadrement canonique provenant de la fibration après chirurgie. Ces fibres régulières bordent des tores troués dans S^3 (puis dans le remplissage en poussant l'intérieur des tores dans la boule B^4 avant d'attacher les anses) et l'inégalité de Bennequin fournie par ce remplissage montre que la structure de contact fait au plus un tour par rapport à ces tores le long de toute courbe legendrienne

[1] Un vert qui peut être gris une fois imprimé

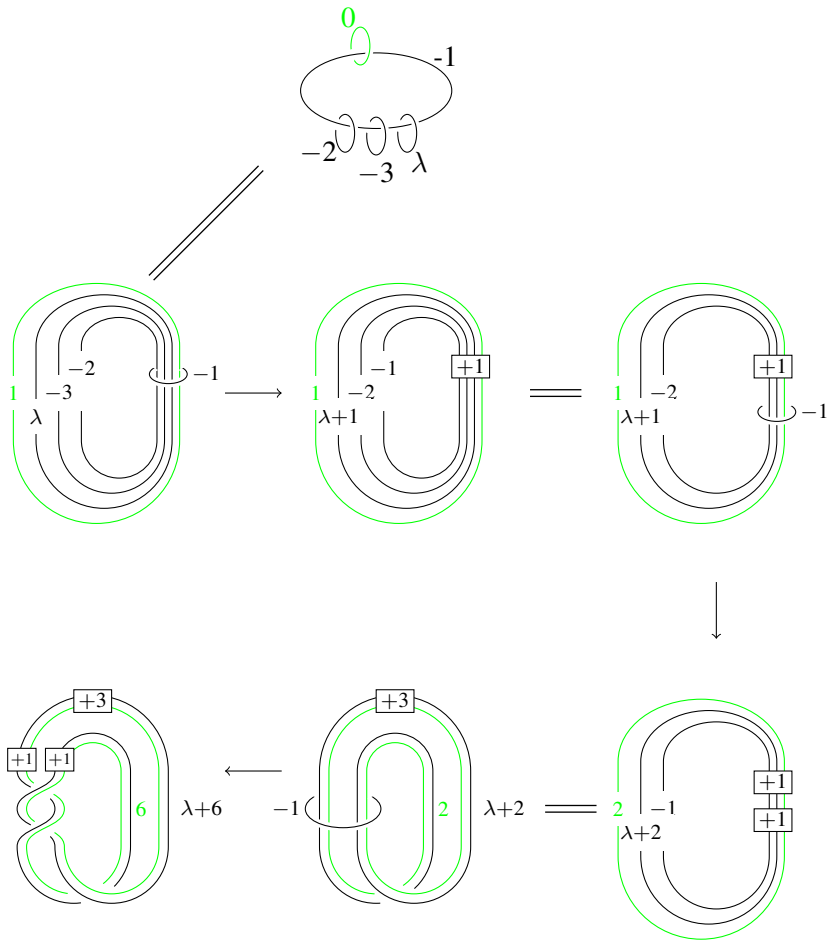


FIG. 5.2 – Modification du remplissage topologique. Les égalités sont à isotopie près et les flèches correspondent à des contractions de sphères d'auto-intersection -1. Les fibres régulières correspondent aux cercles verts.

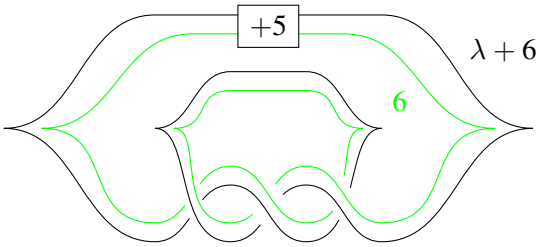


FIG. 5.3 – Diagramme de Kirby legendrien pour les exemples d'enroulement -5

isotope à ces cercles. L'encadrement provenant des tores troués est celui de Seifert donc diffère de 6 de celui de la fibration. L'enroulement maximal est donc inférieur à $1-6=-5$. De plus, la réalisation legendrienne de la figure 5.3 montre que cette borne est atteinte. □

5.3 Critère d'existence

Dans cette section on démontre le théorème B et son corollaire de l'introduction.

5.3.1 Critères arithmétiques

On explique d'abord comment le corollaire de l'introduction et le corollaire suivant découlent du théorème B par des considérations purement arithmétiques.

Corollaire 5.7 *Soit V une variété de Seifert. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *V a une structure de contact d'enroulement -1 ;*
- *V a une structure de contact transversale aux fibres d'enroulement -1 ;*
- *$e_0(V) \leq 2g-2$.*

Suivant [JN85b] et [Nai94], on dit qu'un r–uplet $(\gamma_1,\dots,\gamma_r) \in (\mathbb{Q}\cap]0,1[)^r$ est *réalisable* si $r \geq 3$ et s'il existe des entiers premiers entre eux $0<a<m$ tels que – quitte à renuméroter – on ait $\gamma_1 < a/m$, $\gamma_2 < (m-a)/m$ et $\gamma_i < 1/m$ pour tout $i \geq 3$. Pour une variété de Seifert V on pose $\Gamma(V) = (1-\beta_1/\alpha_1,\dots,1-\beta_r/\alpha_r)$.

Grâce à l'équivalence des points (i) et (iii) dans le théorème B, les deux corollaires se déduisent du fait purement arithmétique suivant :

Proposition 5.8 *Soit g et r des entiers positifs, b un entier et*

$$(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r)$$

des paires d'entiers telles que $1 \leq \beta_i < \alpha_i$ pour tout i. On pose $e_0 = -b - r$ et $e = -b - \sum \beta_i/\alpha_i$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) *Il existe un entier n strictement positif et des entiers $x_0, \ldots, x_r$ tels que*

$$(x_0 - 1)/n < b, \quad (x_i - 1)/n < \beta_i/\alpha_i \quad \text{pour} \quad i > 0 \quad \text{et} \quad \sum x_i = 2 - 2g.$$

(b) *Une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $e_0 \leq 2g - 2$;

(ii) $g = 0$, $r \leq 2$ *et* $e < 0$;

(iii) $g = 0$, $r \geq 3$, $e_0 = -1$ *et* $(1 - \beta_1/\alpha_1, \ldots, 1 - \beta_r/\alpha_r)$ *est réalisable.*

De plus, (a) est vérifiée avec $n = 1$ si et seulement si $e_0 \leq 2g - 2$.

Démonstration On remarque tout d'abord que si (a) est vérifiée alors $x_0 \leq nb$ et $x_i \leq n$ pour tout $i \geq 1$. De plus $2 - 2g = \sum x_i$ donc $2 - 2g \leq n(b + r) = -ne_0$ et donc $ne_0 \leq 2g - 2$.

Le cas du genre non-nul On suppose g strictement positif. Si (a) est vérifiée alors la remarque préliminaire donne $e_0 \leq (2g - 2)/n \leq 2g - 2$.

Réciproquement si (b) est vérifiée alors $e_0 \leq 2g - 2$ et on peut choisir $n = 1$, $x_0 \leq b$ et $x_1, \ldots, x_r \leq 1$ tels que $\sum x_i = 2 - 2g$.

Le cas du genre nul On considère maintenant le cas $g = 0$. Le même argument que plus haut montre que (a) est vérifiée avec $n = 1$ si et seulement si $e_0 \leq 2g - 2 = -2$.

On suppose dorénavant que (a) est vérifiée avec $n > 1$. La remarque préliminaire assure que e_0 est inférieur à $(2g - 2)/n$ qui est strictement négatif donc $e_0 \leq -1$ car e_0 est entier.

Si $e_0 \leq -2$ alors on conclut par la première remarque. On suppose désormais que $e_0 = -1$, de sorte que $b = 1 - r$.

Si $r = 0$ alors $b = 1$ donc $e = -b < 0$. Si $r \in \{1, 2\}$,

$$2 = \sum_{i=0}^{r} x_i < nb + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{n\beta_i}{\alpha_i} + 1 \right) = -ne + r$$

donc $e < (r - 2)/n \leq 0$ et $e < 0$.

Réciproquement si $e < 0$ alors $b \geq 1 - r$ et si $r = 0$ alors on peut choisir $n = 2$, $x_0 = 2$, si $r = 1$ alors $e < 0$ implique l'existence de n tel que $e < -1/n$ et on choisit $x_0 = nb$ et $x_1 = 2 - x_0$. Si $r = 2$ alors $e < 0$ signifie que $-b - \beta_2/\alpha_2 < \beta_1/\alpha_1$ donc il existe des entiers strictement positifs k et n tels que $-b - \beta_2/\alpha_2 < k/n < \beta_1/\alpha_1$ et on choisit $x_0 = nb$, $x_1 = k + 1$ et $x_2 = 2 - x_0 - x_1$.

Le seul cas restant est $g = 0$, $e_0 = -1$ et $r \geq 3$. Si (b) est vérifiée alors on choisit $n = m$, $x_0 = m(1 - r)$, $x_1 = m - a + 1$, $x_2 = a + 1$ et $x_i = m$ pour tout $i \geq 3$.

Réciproquement si (a) est vérifiée alors $x_0 \leq nb$ et on peut remplacer x_0 par nb et x_1 par $x_1 - (nb - x_0)$ sans perdre aucune propriété donc on peut supposer que $x_0 = nb$. On a alors $x_i \geq 2$ pour tout i strictement positif. En effet, on aurait dans le cas contraire

$$2 = \sum_{i \geq 0} x_i < nb + 2 + n(r - 1) = 2$$

ce qui est absurde. Il ne reste plus qu'à invoquer le lemme suivant. □

Lemme 5.9 *Si $r \geq 3$, $n \geq 2$ et $2 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_r \leq n$ sont des entiers tels que $\sum x_i = 2 + n(r - 1)$ alors il existe des entiers premiers entre eux $0 < a < m$ tels que*

$$\frac{x_1 - 1}{n} \geq \frac{m - a}{m}, \qquad \frac{x_2 - 1}{n} \geq \frac{a}{m}, \qquad \forall i \geq 3,\ \frac{x_i - 1}{n} \geq \frac{m - 1}{m}.$$

Démonstration On remarque tout d'abord qu'il est inutile de se soucier du fait que a et m soient premiers entre eux car on peut toujours les diviser par leur plus grand diviseur commun tout en conservant les relations qu'ils entretiennent avec les x_i.

On pose $k = x_1 + x_2 - 2 - n$. L'entier k est positif car

$$x_1 + x_2 = 2 + n(r - 1) - \sum_{i=3}^{r} x_i \geq 2 + n(r - 1) - n(r - 2) = 2 + n$$

(on a remplacé les x_i par n dans la somme).

On pose $l = n - x_3$. Par hypothèse, l est positif, et il est inférieur à k car

$$2 + n(r - 1) = \sum x_i = 2 + n + k + n - l + \sum_{i \geq 4} x_i \leq 2 + n + k + n - l + n(r - 3).$$

Comme les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, il suffit de montrer qu'il existe des entiers a et m vérifiant les conditions liées à x_1 et x_2 et tels que $(n - l - 1)/n \geq (m - 1)/m$. Cette dernière condition est équivalente à $m \leq n/(l + 1)$. On pose $m = \lfloor n/(l + 1) \rfloor$. On sait que $m \geq 2$ car $x_1 \leq n$ donc $x_2 \geq 2 + k$ et $n - l = x_3 \geq x_2$ donc

$n - l \geq 2 + k \geq 2 + l$ donc $n/(l+1) \geq 2$. Il ne reste qu'à vérifier l'existence de $0 < a < m$ vérifiant les conditions liées à x_1 et x_2.

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (n, x_1 - 1)$, $B = (n, -(x_2 - 1))$, $H = (n, 0)$ et $H' = (m, 0)$

On note A' (resp. B') l'intersection des droites $x = m$ et (OA) (resp. (OB)), voir la figure 5.4. D'après le théorème de Thalès, le segment $\left[A'B'\right]$ est de longueur $(n+k)m/n \geq m$ donc il contient un segment $\left[A''B''\right]$ de longueur m dont les extrémités ont des coordonnées entières. Soit a tel que l'ordonnée de A'' soit $m - a$ et celle de B'' soit $-a$. L'entier a vérifie $(x_1 - 1)/n \geq (m-a)/m$ et $(x_2 - 1)/n \geq a/m$ et de plus $a > 0$ car $a = 0$ entraînerait $x_1 \geq n + 1$ qui est absurde. □

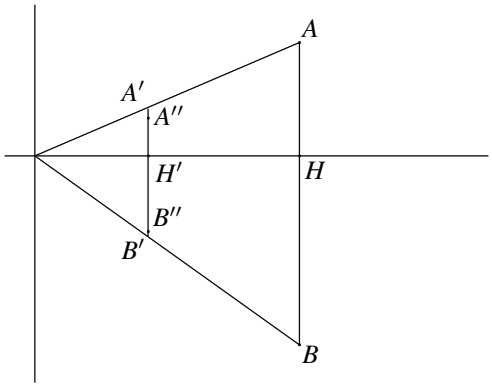


FIG. 5.4 – Théorème de Thalès et réalisabilité

Le théorème de perturbation d'Eliashberg–Thurston [ET98] appliqué à une variété de Seifert et à celle obtenue en renversant son orientation permet d'obtenir le corollaire suivant du théorème B.

Corollaire 5.10 ([EHN81, JN85a, JN85b, Nai94]) *Une variété de Seifert V portant un feuilletage C^2 transversal aux fibres vérifie une des conditions suivantes :*

- $e_0(V) \leq 2g - 2$ *et* $e_0(-V) \leq 2g - 2$ *;*
- $g = 0$ *et* $e(V) = e(-V) = 0$ *;*
- $g = 0$, $e_0(V) = -1$ *et* $\Gamma(V)$ *est réalisable ;*
- $g = 0$, $e_0(-V) = -1$ *et* $\Gamma(-V)$ *est réalisable.*

5.3.2 Formes normales

Soit R une surface orientable de genre g ayant $r+1$ composantes de bord et J une structure complexe sur R. On oriente R par J. La variété de Seifert V d'invariants

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r))$$

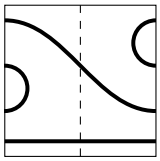
telle que décrite dans l'introduction est la réunion de $R \times \mathrm{S}^1$ et de $r+1$ tores pleins $W_0, \ldots, W_r$. On rappelle qu'une structure de contact ξ sur V est sous forme normale si sa restriction à $R \times \mathrm{S}^1$ admet une équation de la forme $\cos(n\theta)\lambda + \sin(n\theta)\lambda \circ J = 0$ pour une 1–forme non singulière λ sur R et où n est l'opposé de l'enroulement de ξ. Une telle structure de contact sera notée $\xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r)$ avec ξ_i la restriction de ξ à W_i. De plus on appelle multi-indice de ξ le $r+1$–uplet des indices de λ le long des composantes de bord de R.

Proposition 5.11 *Toute structure de contact d'enroulement strictement négatif sur une variété de Seifert est isotope à une structure de contact sous forme normale.*

Lemme 5.12 *Dans une variété de Seifert munie d'une structure de contact d'enroulement strictement négatif, pour tout anneau A s'appuyant sur deux courbes legendriennes verticales d'enroulement maximal il existe une isotopie arbitrairement $\mathcal{C}^0$–petite et relative au bord de A qui envoie A sur un anneau réglé par de telles courbes.*

Démonstration On fixe un voisinage U de A. Le modèle local au voisinage des courbes legendriennes et l'hypothèse d'enroulement assurent qu'une isotopie $\mathcal{C}^0$–petite relative au bord de A et à support dans U envoie A sur un anneau A_1 dont les deux composantes de bord sont munies de colliers feuilletés par des courbes legendriennes. La généricité des surfaces ξ–convexes (proposition 3.11) fournit alors une nouvelle isotopie à support dans U qui envoie A_1 sur un anneau A_2 ξ–convexe relativement au bord de A. Le découpage Γ de A_2 est nécessairement constitué de courbes traversantes car sinon il existerait un feuilletage singulier $\mathscr{F}$ de A_2 scindé par Γ et un cercle vertical L' réunion de feuilles et de singularités de $\mathscr{F}$ intersectant Γ moins souvent que le bord de A (figure 5.5). Le lemme de réalisation 3.5 fournirait alors une isotopie envoyant ce cercle sur une courbe legendrienne d'enroulement strictement plus grand que celui du bord de A, ce qui contredit l'hypothèse.

Pour passer à un anneau réglé il suffit d'appliquer le lemme de réalisation à A_2 en utilisant un feuilletage réglé par des courbes verticales et ayant des arcs de singularités parallèles au découpage de A. □



L'

FIG. 5.5 – Estimation d'enroulement sur un anneau obtenu en identifiant haut et bas du carré. Le découpage de l'anneau est indiqué en trait gras.

Le lemme précédent fournit indirectement des tores réglés dès qu'on dispose d'un tore contenant une courbe verticale d'enroulement maximal car un modèle local au voisinage de cette courbe ramène au cas d'un anneau.

Démonstration de la proposition 5.11 Soit ξ une structure de contact d'enroulement $-n$ strictement négatif sur la variété V. Soit L_0 une courbe legendrienne verticale d'enroulement $-n$. La définition de l'enroulement et le modèle local standard des voisinages de courbes legendriennes fournissent une première isotopie redressant L_0 sur une fibre régulière entourée d'un tore plein W fibré en courbes legendriennes d'enroulement $-n$. On considère un système de tores s'intersectant le long de L_0, dont les intersections avec W sont fibrées et possédant un voisinage régulier isotope à $R \times \mathrm{S}^1$. Le lemme 5.12 permet alors de déformer ces tores relativement à W pour qu'ils soient en outre réglés par des courbes legendriennes d'enroulement $-n$. Par ξ–convexité, il existe un voisinage régulier du système de tores ainsi construit muni d'une fibration legendrienne isotope à la fibration de $R \times \mathrm{S}^1$. L'isotopie inverse déforme ξ en structure de contact ξ' pour laquelle toutes les fibres de R sont legendriennes et d'enroulement $-n$.

Soit ρ' le revêtement associé à la structure de contact $\xi'_{|R\times\mathrm{S}^1}$ par la proposition 3.18. Quitte à reparamétrer les fibres, ce revêtement provient bien d'une structure de contact d'équation

$$\cos(n\theta)\,\lambda + \sin(n\theta)\,\lambda \circ J = 0$$

pour une certaine 1–forme λ. L'isotopie correspondant à cette reparamétrisation se prolonge en isotopie de V envoyant ξ' sur une structure de contact sous forme normale. $\square$

5.3.3 Critère

Démonstration du théorème B D'après la proposition 5.3, les structures de contact transversales aux fibres sont d'enroulement strictement négatif donc $(i) \Rightarrow (ii)$.

On montre maintenant que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit $\xi = \xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r)$ une structure de contact sous forme normale isotope à ξ donnée par (ii) et la proposition 5.11 et soit $(x_0, \ldots, x_r)$ son multi-indice. Les structures de contact sous forme normale étant complètement explicites au-dessus de R, on voit que chaque $\xi\partial W_i$ est scindé par des courbes dont la classe d'homologie totale (quand elles sont toutes orientées pour intersecter F_i positivement) est $2nS_i + 2(x_i - 1)F_i$.

D'après le théorème de Poincaré–Hopf appliqué à λ, $\sum x_i = 2 - 2g$, et $(x_i - 1)/n < \beta_i/\alpha_i$ car sinon le corollaire 4.10 fournirait un tore ξ–convexe scindé par des courbes verticales que le lemme de réalisation convertirait en une courbe legendrienne verticale d'enroulement nul.

On montre maintenant que $(iii) \Rightarrow (i)$. Comme $\sum x_i = 2 - 2g$, il existe une 1–forme non-singulière λ sur R dont les indices le long des composantes de bord ∂D_i de R sont les x_i. La structure de contact $\cos(n\theta)\lambda + \sin(n\theta)\lambda \circ J = 0$ correspondante sur $R \times \mathrm{S}^1$ peut être étendue à l'intérieur des W_i par des structures de contact ξ_i positivement transversales aux fibres, d'abord dans un voisinage de ∂W_i en utilisant le lemme de réalisation, puis explicitement par une structure de contact imprimant des suspensions sur des tores concentriques autour de la fibre centrale de W_i car $(x_i - 1)/n < \beta_i/\alpha_i$ donc les directions asymptotiques de ces suspensions peuvent aller de la demi-droite engendrée par M_i à celle engendrée par $nS_i + (x_i - 1)F_i$ sans rencontrer la direction des fibres. Ensuite on pousse légèrement la structure de contact ainsi construite dans la direction d'un champ de vecteurs legendrien transversal aux fibres au-dessus de l'intérieur de R et nul dans les W_i. Une petite isotopie supportée au voisinage de $\partial R \times \mathrm{S}^1$ achève alors de rendre la structure de contact transversale aux fibres partout. La structure ainsi obtenue est d'enroulement au moins $-n$ par construction et strictement négatif d'après la proposition 5.3. □

5.4 Formes normales universellement tendues

Dans cette section on termine la démonstration du théorème A tout en commençant celles des théorèmes D et E. Les démonstrations de cette section font intervenir de façon répétée les formes normales de structures de contact sur les tores épais et les tores pleins décrites dans le chapitre 4 et qu'il ne faut pas confondre avec les formes

normales de structures de contact d'enroulement strictement négatif sur les variétés de Seifert qui ne vivent pas sur les mêmes variétés.

Lemme 5.13 *Soit $W = W(\alpha, \beta)$ un tore plein muni d'une fibration de Seifert standard (voir l'introduction). On note M une classe d'homologie de méridiens intersectant positivement la classe F des fibres dans $H_1(\partial W)$. Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage singulier du bord de W dont les orbites régulières sont des arcs de fibres et présentant deux cercles lisses de singularités transversaux aux fibres qu'on peut orienter pour que leur classe d'homologie d vérifie $d \cdot F > 0$ et $d \cdot M > 0$.*

On note $\mathcal{SC}$ l'ensemble des structures de contact sur W imprimant $\mathscr{F}$ au bord et $\mathcal{SCT}$ le sous-ensemble de celles qui sont tendues.

a) Une structure de contact $\xi \in \mathcal{SC}$ est universellement tendue si et seulement si elle est ∂–isotope à une structure de contact transversale aux fibres à l'intérieur de W.
b) L'ensemble $\mathcal{SCT}$ est connexe si et seulement si $d \cdot M = 1$. Dans ce cas il contient des structures de contact tangentes aux fibres ainsi que des structures de contact positivement et négativement transversales aux fibres (à l'intérieur de W).
c) Si $d \cdot M > 1$ alors $\mathcal{SCT}$ est formé de deux composantes connexes contenant respectivement des structures de contact positivement et négativement transversales aux fibres (entre autres structures de contact).

Démonstration Le théorème 3.17 montre qu'une structure de contact transversale aux fibres dans l'intérieur de W est isotope à une structure de contact sous forme normale dont le feuillage ne contient pas de tore compressible. Dès lors, le théorème 4.8 b) assure qu'elle est universellement tendue.

Réciproquement le théorème 4.8 dénombre une ou deux classes d'isotopie de structures de contact universellement tendues dépendant potentiellement de l'orientation des orbites périodiques du feuilletage ξT_t au voisinage du bord de W. Les deux classes d'Euler relatives possibles exprimées à l'aide de l'application induite $i_* \colon H_1(\partial W) \to H_1(W)$ sont 0 et $2i_*(d - M')$ avec $M' \cdot M = 1$. Elles coïncident exactement quand i_*d et i_*M' diffèrent d'un élément du noyau de i_* c'est-à-dire quand $d \cdot M = M' \cdot M = 1$. Montrons maintenant que ces classes d'isotopie contiennent des structures de contact transversales aux fibres. Soit ξ une structure de contact universellement tendue sous forme normale dans $\mathcal{SCT}$. Si le feuillage de ξ ne contient pas de tore compressible alors il est clair qu'elle est isotope, parmi les structures de contact sous forme normale, à une structure de contact transversale aux fibres. Sinon, le théorème 4.8 affirme que ce feuillage contient exactement un tore compressible auquel est associé une classe d'homologie d du polygone de Giroux de ξ vérifiant $d \cdot M = 1$ (il y a

exactement une telle classe d"homologie dans le polygone). On suppose, pour fixer les idées, que la structure ξ est positivement transversale aux fibres après le retournement d'orbites correspondant (donc au voisinage du bord de W) et négativement avant. On note T le tore réglé du retournement et W_0 le tore plein bordé par T. Le théorème 4.8 et l'information $d \cdot M = 1$ assurent que toute structure de contact tendue sur W_0 qui coïncide avec ξ au bord lui est isotope. Or il existe une telle structure qui est positivement transversale aux fibres dans l'intérieur de W_0 (voir au besoin la démonstration du théorème B). L'isotopie fournie par le théorème 4.8 s'étend alors en isotopie de W qui envoie ξ sur une structure de contact positivement transversale aux fibres partout dans l'intérieur de W sauf le long de T où elle est tangente aux fibres. Une petite isotopie à support dans un voisinage de T la rend transversale aux fibres dans tout l'intérieur de W.

Comme une structure de contact tangente aux fibres peut être perturbée en structure de contact positivement ou négativement transversale, il ne reste plus qu'à montrer que $d \cdot M = 1$ entraîne l'existence d'une structure de contact tangente aux fibres dans $\mathcal{SC}$.

Soit (S, F) une base directe de $H_1(\partial W)$ avec F la classe des fibres et (α, β) les coordonnées de M dans cette base. Si $d \cdot M = 1$ alors les coordonnées (n, q) de d dans la base (S, F) vérifient $n\beta - q\alpha = 1$ donc $W(\alpha, \beta)$ est isomorphe au quotient

$$\big(D^2 \times \mathbb{R}\big) \big/ \big((z,t) \sim (e^{\frac{2i\pi n}{\alpha}} z, t+1)\big).$$

En effet, la classe d'homologie méridienne dans le modèle ci-dessus a pour intersection respective α et $-\beta$ avec les fibres induites par le facteur $\mathbb{R}$ et la section $s \mapsto \big(e^{-2i\pi qs}, -\beta s\big)$. Soit D la base de W. L'application

$$\begin{pmatrix} W(\alpha,\beta) & \to & W(\alpha,1) \simeq ST^*D \\ (z,t) & \mapsto & (z, nt) \end{pmatrix}$$

est un revêtement de degré n fibré au-dessus de l'identité. On peut choisir l'identification entre W et $W(\alpha, \beta)$ de sorte que ce revêtement, vu comme projetant W sur ST^*D, étende le revêtement au-dessus du bord de D associé à un germe de structure de contact imprimant $\mathscr{F}$ par (la version orientée de) [Gir01a][proposition 3.3] – énoncée dans un cadre à peine élargi comme la proposition 3.18. Le rappel de la structure de contact canonique sur ST^*D par ce revêtement est tangente aux fibres et imprime bien $\mathscr{F}$ au bord de W. □

En lisant l'énoncé suivant il faut garder à l'esprit qu'une structure de contact du type $\xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r)$ est sous forme normale seulement si son enroulement est $-n$.

Proposition 5.14 *Soit $V = (R \times \mathrm{S}^1) \cup W_0 \cup \cdots \cup W_r$ une variété de Seifert. Une structure de contact $\xi = \xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r)$ sous forme normale sur V est universellement tendue si et seulement si elle peut être coorientée de sorte que tous les ξ_i soient ∂–isotopes à des structures de contact positivement transversales aux fibres.*

Démonstration L'argument utilisé à la fin de la démonstration du théorème B montre que si toutes les structures de contact ξ_i sont isotopes à des structures positivement transversales aux fibres alors ξ l'est aussi et donc est universellement tendue d'après la proposition 5.1.

Réciproquement on suppose maintenant ξ universellement tendue. Pour tout i on note d_i la classe d'homologie des courbes de découpage de ∂W_i orientées pour intersecter positivement les fibres. On met chaque ξ_i sous forme normale en utilisant le théorème 4.6 a). Les feuilletages $\xi_i \partial W_i$ sont scindés par deux courbes car sinon le tore $T_t(d_i)$ (avec les notations du chapitre 4) qui est scindé par deux courbes de classe d'homologie d_i pourrait être perturbé par le lemme de réalisation pour être réglé par des courbes legendriennes d'enroulement strictement plus grand que $-n$, ce qui est absurde.

Le lemme 5.13 laisse au plus deux choses à vérifier. On doit d'abord montrer que les structures de contact ξ_i sont toutes universellement tendues (les exemples de la section 4.2.2 montrent que cela n'a rien d'évident en général), ce qui implique qu'elles sont isotopes à des structures de contact transversales aux fibres. Si $d_i \cdot M_i = 1$ pour tout i alors il n'y a rien de plus à vérifier car elles sont toutes isotopes à des structures de contact positivement transversales aux fibres. Sinon il existe i_0 tel que $d_{i_0} \cdot M_{i_0} > 1$ et on cooriente ξ pour que ξ_{i_0} soit isotope à une structure positivement transversale aux fibres. La deuxième chose à vérifier est alors que $d_j \cdot M_j = 1$ pour tout j tel que la structure de contact ξ_j est isotope à une structure négativement transversale aux fibres. Cette deuxième vérification assure que la structure ξ_j est aussi isotope à une structure positivement transversale aux fibres.

Grâce au théorème 4.8 a), on peut supposer que toutes les structures de contact ξ_i sont sous forme normale. Le théorème 4.8 b) convertit alors la première chose à vérifier en $d \cdot M_i = 1$ pour tout d dans le lieu des tores compressibles de ξ_i.

Soit $(\widetilde{V}, \tilde{\xi})$ le revêtement universel de (V, ξ) et ρ l'application de revêtement. Le théorème B dont V vérifie la condition (ii) interdit à $\widetilde{V}$ d'être difféomorphe à $\mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}$ car la base de V serait sphérique et son nombre d'Euler rationnel nul – en contradiction avec (iii) ou, alternativement, car la proposition 5.1 contredirait (iii). Il reste donc les cas d'un revêtement universel difféomorphe à S^3 ou à $\mathbb{R}^3$. On va commencer par le cas de $\mathbb{R}^3$ qui est le plus simple.

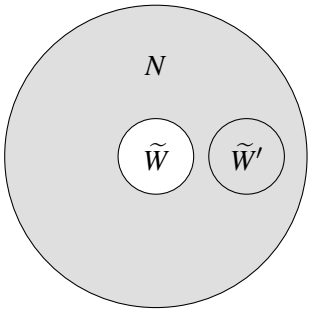


FIG. 5.6 – Configuration dans le revêtement

Premier cas Si $\widetilde{V}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ alors tous les tores pleins W_i sont revêtus par un $D^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ donc toutes les structures de contact ξ_i sont universellement tendues.

Pour la seconde vérification on considère un revêtement $\rho\colon \mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1 \to V$. Dans ce revêtement on considère une composante connexe $\widetilde{W}$ de W_{i_0} et un tore épais N autour de $\widetilde{W}$ (c'est-à-dire que $\widetilde{W} \cap N = \partial\widetilde{W}$) qui contient une composante connexe $\widetilde{W}'$ de l'image inverse de W_j mais n'intersecte pas d'autre composante de l'image inverse d'un W_i, voir la figure 5.6. La structure de contact relevée est positivement transversale aux fibres dans l'intérieur de $\widetilde{W}$. Dans N elle est négativement transversale aux fibres à l'intérieur de $\widetilde{W}'$ et tangente aux fibres ailleurs. On peut donc la pousser par une petite isotopie pour qu'elle soit négativement transversale aux fibres dans l'intérieur de N.

La structure de contact relevée devient alors élémentaire sur $\widetilde{W} \cup N$ et a un film qui présente un retournement d'orbites le long de $\partial\widetilde{W}$. Si on suppose par l'absurde $d_j \cdot M_j > 1$ alors les cercles de singularités du bord de $\widetilde{W} \cup N$ n'ont pas la même direction que le retournement d'orbites donc ce retournement correspond à un ou plusieurs tores compressibles du feuillage ayant la même projection sur $[0,1]$. S'il y en a plusieurs la proposition 4.3 montre que ce revêtement est déjà vrillé. On suppose donc qu'il n'y en a qu'un. La classe d'homologie associée à ce tore compressible est $\rho^* d_{i_0}$ et l'hypothèse $d_{i_0} \cdot M_{i_0} > 1$ assure que $\rho^* d_{i_0} \cdot \tilde{M} > 1$, où $\tilde{M} = \rho^* M_{i_0}$, correspond bien aux méridiens de $\widetilde{W}$. Le théorème 4.8 b) affirme donc que la structure de contact sur $\widetilde{W} \cup N$ est virtuellement vrillée, ce qui est absurde car tout revêtement de ce tore plein est induit par un revêtement de $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{S}^1$ et donc de V.

On remarque que, dans ce premier cas, l'hypothèse que la structure de contact $\xi = \xi(\lambda, n, \xi_0, \ldots, \xi_r)$ est d'enroulement $-n$ n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat avec les arguments ci-dessus. On a seulement utilisé $e(\xi_{|W_i}) = -n$ pour tout i pour

calculer le nombre de courbes de découpage au bord des W_i.

On remarque aussi que dans cette démonstration on a utilisé deux fois le fait que la structure de contact induite sur tout tore plein fibré dans V ou dans un revêtement fibré de V est automatiquement universellement tendue, ce qui n'est pas vrai dans les autres cas et explique les complications qui vont maintenant se présenter. Avant d'examiner ces complications on fait quelques observations.

Observations préliminaires Si une variété de Seifert Y est la réunion de voisinages tubulaires de deux fibres K et K' alors elle peut être vue comme un quotient fibré d'un tore épais $T \times [0,1]$ où T_0 se projette sur K et T_1 sur K' à la manière de l'exemple 1 page 18. On oriente T de façon compatible avec l'orientation du bord d'un voisinage de K choisie comme lors de la description des variétés de Seifert dans l'introduction. Toute structure de contact ξ transversale à K et K' se relève en structure de contact $\hat{\xi}$ sur $T \times [0,1]$.

Lorsque Y porte une structure de contact ξ d'enroulement strictement négatif (qu'on peut supposer transversale à K et K') il existe des classes d'homologie M et M' dans $H_1(T)$ correspondant aux méridiens des voisinages de K et K' respectivement et telles que $M' \cdot M$, $M' \cdot F$ et $M \cdot F$ sont strictement positifs (comme toujours, F désigne la classe d'homologie des fibres). En effet on peut toujours imposer les deux premières conditions et si la dernière est impossible alors la classe F est dans le cône de Giroux de $\hat{\xi}$. La théorie des formes normales du chapitre 4 fournit donc un tore isotope à un tore fibré qui est découpé par des courbes homologues aux fibres. Le lemme de réalisation convertit ce tore en tore contenant une courbe legendrienne verticale d'enroulement nul.

Si de plus Y est difféomorphe à S^3 alors $M' \cdot M = 1$ et le polygone de Giroux de $\hat{\xi}$ est $\{M' + M\}$ donc la proposition 4.3 force $M' \cdot d = 1$ et $d \cdot M = 1$ pour toute classe d'homologie d dans le lieu des tores compressibles de la structure $\hat{\xi}$.

Deuxième cas On se place dans le cas où $\widetilde{V}$ est difféomorphe à la sphère S^3 et n'a aucune fibre exceptionnelle.

Pour la première vérification on fixe un i et on considère une composante connexe $\widetilde{W}$ de l'image inverse de W_i. Le complémentaire de $\widetilde{W}$ dans $\widetilde{V}$ est aussi un tore plein et on se trouve dans la situation des observations préliminaires.

Pour toute classe d'homologie d dans le lieu des tores compressibles de la structure de contact ξ_i, la structure $\hat{\xi}$ introduite dans les observations préliminaires présente une collection finie de tores compressibles isotopes ayant la même projection sur

l'intervalle $[0,1]$ auxquels sont associés des classes d'homologie de somme $\rho^* d$ donc la proposition 4.3 assure que $\rho^* d$ est primitive. De plus $\tilde{\xi}_{|\widetilde{W}}$ est sous forme normale et le théorème 4.6 a) permet de supposer que $\hat{\xi}$ l'est aussi. Le dernier paragraphe des observations préliminaire assure alors que $\rho^* d \cdot M = 1$ et donc que $d \cdot M_i = 1$.

On s'occupe maintenant de la deuxième vérification si elle est nécessaire. On commence, comme dans le cas d'un revêtement universel difféomorphe à $\mathbb{R}^3$, en introduisant les $\widetilde{W}$ et N de la figure 5.6 et on obtient dans $\widetilde{W} \cup N$ un tore compressible auquel est associée la classe $\rho^* d_{i_0}$. Le bord de $\widetilde{W} \cup N$ est scindé par des courbes dont la classe d'homologie totale est $2d''$ vérifiant $d'' - \rho^* d_{i_0} = kF$ car les deux tores de ∂N sont réglés par des fibres legendriennes de même enroulement. De plus k est négatif car $d'' \cdot \rho^* d_{i_0}$ est positif. L'additivité des indices de la 1–forme λ le long des courbes montre que $d_j \cdot M_j = 1$ si et seulement si $k = 0$.

Le complémentaire de $\widetilde{W} \cup N$ dans $\widetilde{V}$ est un tore plein $\widetilde{W}''$ et on se trouve à nouveau dans la situation des observations préliminaires. Les théorèmes 4.8 a) et 4.6 a) fournissent des isotopies mettant $\tilde{\xi}_{|\widetilde{W}''}$ puis $\hat{\xi}$ sous forme normale. Par hypothèse, $d_{i_0} \cdot M_{i_0} > 1$ et donc $\rho^* d_{i_0} \cdot M > 1$ de sorte que les observations préliminaires assurent l'égalité $M'' \cdot \rho^* d_{i_0} = 1$. On en déduit

$$0 < M'' \cdot d'' = M'' \cdot \rho^* d_{i_0} + kM'' \cdot F = 1 + kM'' \cdot F$$

donc $-1 < k \leq 0$ et finalement $k = 0$.

Troisième cas Si $\widetilde{V}$ est difféomorphe à la sphère S^3 et contient au moins une fibre exceptionnelle alors V est un espace lenticulaire. On décompose V en $W_1 \cup N \cup W'$ où tous les morceaux sont fibrés et d'intérieurs disjoints, N est un tore épais contenant W_0 et W' est un tore plein qui coïncide avec W_2 si ce dernier existe. On se trouve encore dans la situation des observations préliminaires. On note $2d$ et $2d'$ les classes d'homologie totales dans $H_1(T)$ des courbes de découpage des bords respectifs de W_1 et W' lorsque celles-ci sont orientées pour intersecter les fibres positivement.

Pour la première vérification on distingue ce qui se passe dans le tore plein W_0 et dans les autres W_i. Pour conclure dans le cas de W_0, on discute selon la valeur $-n$ de l'enroulement de la structure de contact considérée. Si $n > 1$, la proposition 5.16 et le lemme 5.13 assurent que la structure de contact ξ_0 est universellement tendue. Si $n = 1$ alors le polygone de Giroux $\mathcal{C}(\xi_{|N})$ (figure 5.7) est constitué des classes entières du segment $[d, d']$. En effet $d \cdot F = d' \cdot F = 1$ donc la formule de Pick assure que ce cône de Giroux ne contient aucune classe entière à gauche de la droite (dd'). Ce polygone est lui-même inclus dans celui de la structure de contact $\hat{\xi}$. Le revêtement de V par S^3

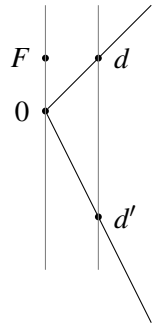


FIG. 5.7 – Polygone de Giroux pour une structure de contact d'enroulement -1 sur un espace lenticulaire

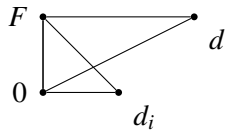


FIG. 5.8 – Triangles pour l'étude des tores compressibles du feuillage de ξ_i

induit un revêtement de $T \times [0,1]$ par le tore épais correspondant à la situation des observations préliminaires pour S^3. Toujours à cause du polygone associé à S^3 lors des observations préliminaires, $\hat{\xi}$ ne saurait présenter, dans l'intérieur de son polygone de Giroux, de classe d'homologie associée à un tore compressible de son feuillage. Il en est donc de même pour la structure de contact $\xi_{|N}$ et la proposition 4.3 garantit qu'elle est universellement tendue. Cette conclusion s'étend à ξ_0 car tout revêtement de W_0 est induit par un revêtement de N.

On passe maintenant aux tores pleins W_i pour $i > 0$. Soit d une classe d'homologie associée à un tore compressible du feuillage de la structure de contact ξ_i. On note Δ_i (resp. Δ) le triangle de sommets 0, F et d_i (resp. d) dans $H_1(\partial W_i)$, voir la figure 5.8. La classe d'homologie d n'est pas dans Δ_i car sinon Δ serait strictement inclus dans Δ_i et donc d'aire $1/2\, d \cdot F$ strictement plus petite que l'aire $1/2\, d_i \cdot F$ de Δ_i, en contradiction avec la proposition 5.16 qui interdit au cône $\mathcal{C}(\xi_i)$ de contenir une classe d'homologie entière d telle que $d \cdot F < d_i \cdot F$. Par linéarité de ρ^*, $\rho^* d$ n'est pas dans $\rho^* \Delta_i$. Or ce dernier triangle contient toutes les classes d'homologie entières a telles que $M' \cdot a = 1$, $\rho^* d_i \cdot a > 0$ et $a \cdot F > 0$ donc $M' \cdot \rho^* d > 1$ (figure 5.9). En effet, la bande strictement incluse entre la droite (OM) et la droite $\{M' \cdot a = 1\}$ ne peut pas contenir de point entier d'après la formule de Pick donc ne peut pas contenir la classe

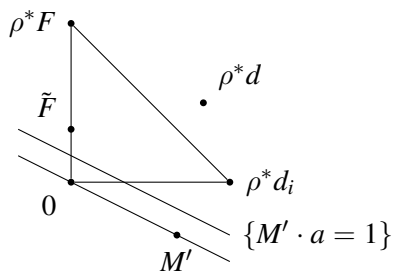


FIG. 5.9 – Triangles relevés pour l'étude des tores compressibles du feuillage de ξ_i. Dans le cas le plus défavorable, $\tilde{F} = \rho^*F$ et la droite $\{M' \cdot a = 1\}$ contient les points $\tilde{F}$ et ρ^*d_i mais jamais le point ρ^*d.

$\tilde{F}$ des fibres ni la classe ρ^*d_i. Ainsi l'intersection de la droite $\{M' \cdot a = 1\}$ et du cône bordé à gauche par la demi-droite $[OF)$ et à droite par la demi-droite $[O\rho^*d_i)$ est inclus dans $\rho^*\Delta_i$ donc ne contient pas ρ^*d. La proposition 4.3 assure que $\rho^*d \cdot M = 1$. Cela entraîne que $d \cdot M_i = 1$ et donc que ξ_i est universellement tendue. Ainsi on a bien effectué la première vérification dans tous les cas.

Pour la deuxième vérification on utilise directement que toute classe d'homologie $\hat{d}$ dans le lieu des tores compressibles de la structure de contact $\hat{\xi}$ vérifie $M' \cdot \hat{d} = 1$ ou $\hat{d} \cdot M = 1$ et que, comme dans le deuxième cas, la structure ξ_0 est isotope à une structure de contact tangente aux fibres si et seulement si $d = d'$. □

5.5 Calculs d'enroulement

Dans cette section on démontre le théorème C de l'introduction et on note le résultat suivant qui est un corollaire facile du théorème C et de la démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (i) dans le théorème B. Il précise l'équivalence de (i) et (ii) dans ce dernier théorème.

Corollaire 5.15 *Soit n un entier strictement positif. Une variété de Seifert dont la base n'est pas une sphère porte une structure de contact ξ avec $e(\xi) = -n$ si et seulement si elle porte une structure de contact ξ' transversale aux fibres avec $e(\xi') = -n$.*

5.5.1 Calcul local

On rappelle d'abord un peu d'arithmétique. Soit x un nombre réel, $a > 0$ et b des entiers. On dit que b/a est une meilleure approximation par défaut de x s'il est maximal

parmi les rationnels strictement inférieurs à x dont le dénominateur est inférieur à a.

On peut déterminer les meilleures approximations inférieures de x à partir de son développement en fraction continue de la forme

$$x = \langle a_0; a_1, \ldots \rangle := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots}}$$

où les a_i sont strictement positifs pour $i \geq 1$ et le dernier a_i avec $i \geq 1$ – s'il existe – est plus grand que deux (il s'agit d'une variante des développements intervenant dans la classification des structures de contact sur les tores pleins). La réduite d'ordre k de x est $\langle a_0; a_1, \ldots, a_k \rangle$ et les fractions intermédiaires d'ordre $k \geq 2$ sont les $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a \rangle$ avec $1 \leq a < a_k$.

Les meilleures approximations par défaut de x sont ses réduites et fractions intermédiaires d'ordres paires à l'exception de x lui-même.

Dans la proposition suivante on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur à x.

Proposition 5.16 *Soit W un tore plein muni d'une fibration de Seifert standard. Soit (S, F) une base de $H_1(\partial W, \mathbb{Z})$ telle que F est la classe d'homologie des fibres et que les cercles méridiens de ∂W – orientés de sorte qu'ils intersectent F positivement – ont pour classe d'homologie $M = \alpha S + \beta F$ avec $1 \leq \beta < \alpha$ si $\alpha > 1$.*

Si ξ est une structure de contact tendue sur W pour laquelle ∂W est scindé par des courbes qu'on peut orienter toutes dans le même sens de sorte que leur classe d'homologie totale soit $d = 2nS + 2(x-1)F$, $n > 0$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- *$e(\xi) = -n$;*
- *$(x-1)/n < \beta/\alpha$ et le cône positif épointé dans $\mathbb{R}^2$ bordé à gauche par la demi-droite engendrée par (α, β) exclue et à droite par celle engendrée par $(n, x-1)$ incluse ne contient pas de point entier d'abscisse strictement plus petite que n – en particulier $d/2$ est primitive ;*
- *soit $n = 1$ et $x - 1 < \beta/\alpha$, soit les conditions suivantes sont vérifiées :*
  (i) $x = \lceil n\beta/\alpha \rceil$;
  (ii) $n\beta \equiv 1 \mod \alpha$ ou $(x-1)/n$ est une meilleure approximation par défaut de β/α.

Démonstration Le fait que $d/2$ est primitive résulte de l'argument donné au début de la démonstration de la proposition 5.14. On note $\mathcal{C}$ le cône de Giroux de la structure

de contact ξ dans $H_1(\partial W)$. Le corollaire 4.10 et le lemme de réalisation montrent l'équivalence des deux premières assertions.

Par ailleurs la seconde partie de la deuxième assertion est clairement satisfaite lorsque $n = 1$. Il ne reste donc plus qu'à éclaircir l'équivalence des deuxième et troisième assertions lorsque $n > 1$.

On suppose la deuxième assertion vraie. Soit $q = \lceil n\beta/\alpha \rceil - 1$ le plus grand entier strictement plus petit que $n\beta/\alpha$. Le point entier d'abscisse n le plus proche du bord gauche de $\mathcal{C}$ vu de l'origine est (n, q) par construction. De plus le triangle de sommets 0, (n, q) et $(n, q-1)$ a pour aire $n/2 > 1/2$ donc la formule de Pick (rappelée page 111) assure qu'il contient au moins un point entier en plus de ses sommets. L'abscisse d'un tel point étant nécessairement strictement plus petite que n, le cône $\mathcal{C}$ ne contient pas $(n, q-1)$ et son bord droit est engendré par (n, q). Si $n \geq \alpha$ alors le même

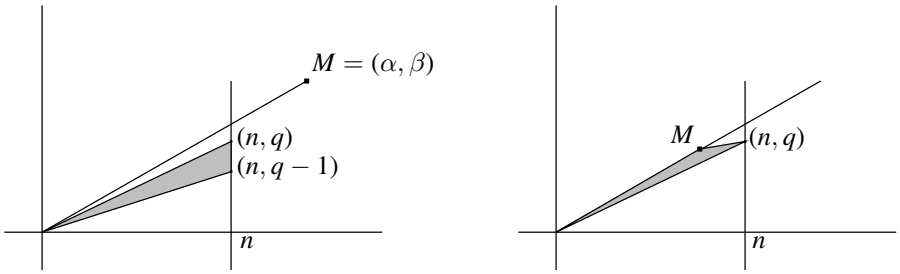


FIG. 5.10 – Calcul de l'enroulement local à partir de la formule de Pick

raisonnement appliqué au triangle de sommets 0, (α, β) et (n, q), dont les éventuels points entiers hors de ses sommets seraient tous dans $\mathcal{C}$ et d'abscisse strictement plus petite que n, montre que ce triangle est d'aire $1/2 = (n\beta - q\alpha)/2$ donc $n\beta \equiv 1\ [\alpha]$. En particulier si $\alpha > 1$ alors $n \neq \alpha$ et $\alpha \not| n\beta$ donc $q = \lfloor n\beta/\alpha \rfloor$ et $x = \lceil n\beta/\alpha \rceil$.

Si $n < \alpha$ alors la condition sur les points entiers de $\mathcal{C}$ est exactement la condition de meilleure approximation par défaut.

L'implication de la troisième assertion vers la deuxième se traite de façon tout à fait analogue. □

Remarque 5.17 Dans la deuxième condition de la proposition précédente, le cône peut être remplacé par le triangle de sommets 0, (α, β) et $(n, x-1)$. En effet, si des classes d'homologie entières M, d et F vérifient $d \cdot M > 0$, $d \cdot F > 0$ et $M \cdot F > 0$ et si le triangle de sommets 0, M, d ne contient pas de point entier a dans son intérieur

avec $a \cdot F < d \cdot F$ alors le cône bordé à gauche par la demi-droite engendrée par M et à droite par celle engendrée par d n'en contient pas non plus.

Démonstration Si $d \cdot F \leq M \cdot F$ alors la remarque est évidente car les points (réels) du cône qui intersectent F moins que d sont tous dans le triangle. Si $d \cdot F > M \cdot F$ alors tous les points réels de l'intérieur du triangle intersectent F moins que d car ces points s'écrivent $b = xd + yM$ avec x et y positifs et $x + y \leq 1$ donc $b \cdot F < (x+y)d \cdot F \leq d \cdot F$. Ce triangle ne contient donc pas de point entier et la formule de Pick fournit $d \cdot M = 1$ et donc (d, M) est une base du réseau. Si a est un point entier du cône alors il s'écrit $kd + lM$ avec $l \geq 0$ et $k \geq 1$ (le cône est ouvert du côté de M) donc $a \cdot F = kd \cdot F + lM \cdot F \geq d \cdot F$. □

5.5.2 Calcul global

Dans cette section et dans la suivante, on utilisera fréquemment l'idée de discrétisation topologique introduite en géométrie de contact par [Col97]. Pour toute surface F, le produit pincé $F \times_\partial [0,1]$ est obtenu à partir $F \times [0,1]$ en écrasant tous les segments $\{x\} \times [0,1]$ pour $x \in \partial F$. Deux surfaces plongées dans une variété de dimension trois sont dites parallèles si elles bordent un produit pincé plongé. Soit F une surface plongée dans une variété de dimension trois V et φ une isotopie de V relative au bord de F. Tout temps t dans $[0,1]$ a un voisinage J tel que φ restreinte à J déforme toutes les composantes connexes de F dans des produits pincés disjoints. On recouvre $[0,1]$ par un nombre fini de segments de ce type. Si $[a,b]$ est l'un d'entre eux et si φ restreinte à $[a,b]$ déforme F dans un produit pincé N, on peut la remplacer par une isotopie qui envoie $\varphi_a(F)$ dans ∂N suivie d'une isotopie qui envoie l'image de $\varphi_a(F)$ dans ∂N sur $\varphi_b(F)$. Il s'agit de l'idée de l'accordéon de Colin qui montre que l'isotopie φ est homotope à une concaténation d'isotopies φ^i relatives à ∂F et à toutes les composantes connexes de l'image de F par les φ^j précédents sauf une notée F_i et telles que $\varphi^i_0(F_i)$ et $\varphi^i_1(F_i)$ sont parallèles. Si V porte une structure de contact ξ alors la généricité des surfaces ξ–convexes permet de supposer que toutes les surfaces intermédiaires F_i du processus précédent sont ξ–convexes. Ce processus est appelé discrétisation topologique par opposition au processus de discrétisation de contact utilisé systématiquement pour la première fois par K. Honda dans [Hon02], et qui s'appuie sur la proposition 4.13 pour aller plus loin en imposant en plus des produits pincés les plus simples possibles d'un point de vue de contact. Dans cette section, l'utilisation de ce processus de discrétisation de contact sera en fait plus ou moins cachée dans l'invocation des théorèmes 4.6 et 4.8.

Lemme 5.18 *Soit V une variété de Seifert dont la base est un disque orbifold. On considère dans V des tores pleins fibrés $W_1, \dots, W_r$ tels que $V \setminus (W_1 \cup \dots \cup W_r)$ ne contient que des fibres régulières. Si ξ est une structure de contact telle que les fibres hors des W_i sont legendriennes d'enroulement $-n$ et si $e(\xi_{|W_i}) = -n$ pour tout i alors $e(\xi) = -n$ (en particulier ξ est tendue).*

Démonstration Soit $A_1, \dots, A_r$ des anneaux fibrés proprement plongés dans V et tels que

$$V \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_r) = W'_0 \cup \dots \cup W'_r,$$

où les W_i sont disjoints et chaque W'_i pour $i \geq 1$ contient le W_i correspondant (figure 5.11). Soit L_0 une fibre dans W'_0, L une courbe legendrienne verticale et φ une ∂–

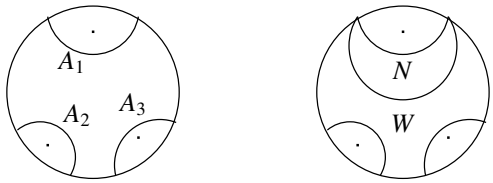


FIG. 5.11 – Calcul d'enroulement au-dessus d'un disque orbifold

isotopie envoyant L_0 sur L.

Par discrétisation topologique, on construit une famille d'anneaux A_i^j, $0 \leq j \leq K$ tels que :
- pour tout i, $A_i^0 = A_i$, $A_i^K = \varphi_1(A_i)$;
- pour tout j les A_i^j sont des anneaux ξ–convexes disjoints ;
- pour tout j il existe i_j tel que $A_i^{j+1} = A_i^j$ pour tout $i \neq i_j$;
- $A_{i_j}^j$ et $A_{i_j}^{j+1}$ bordent un produit pincé.

À chaque étape j, on muni V d'une structure de variété de Seifert ∂–isotope à l'originale et rendant tous les anneaux A_i^j fibrés.

On montre maintenant par récurrence sur j que le complémentaire de la réunion des anneaux A_i^j ne contient aucune courbe verticale legendrienne d'enroulement $e > -n$ et que chaque A_i^j est scindé par $2n$ courbes allant toutes d'une composante de bord à l'autre. Cela finira la démonstration de ce lemme puisque L est dans le complémentaire de la réunion des A_i^K.

Le lemme 5.12 et les hypothèses montrent que ces propriétés sont vérifiées à l'étape initiale $j = 0$. Si elles le sont à l'étape j, on pose $A = A_{i_j}^j$, $A' = A_{i_j}^{j+1}$ et on note N le

produit pincé que bordent ces anneaux. Chaque anneau A_i^j découpe un tore plein dans V qui ne contient aucun des autres anneaux. L'anneau A' est contenu soit dans le tore plein que découpe A soit dans le tore plein obtenu à partir de V en lui retirant tous les tores pleins découpés par les A_i^j. On note W ce tore plein contenant A' et $W' \subset W$ le complémentaire de N dans W.

Par hypothèse de récurrence, le découpage de A est constitué de $2n$ courbes traversantes. Comme A' est inclus dans W, il n'y aucune courbe legendrienne verticale d'enroulement $e > -n$ au voisinage de l'intérieur de A' donc l'enroulement $-n$ des composantes de bord de A' est maximal dans ce voisinage. Le lemme 5.12 assure donc que le découpage de A' est constitué de $2n$ courbes traversantes.

Si $n > 1$, la proposition 5.16 n'autorise qu'une classe d'homologie de découpage et assure donc que le découpage de W' est isotope à celui de W. La classification des structures de contact tendues sur les tores pleins en déduit l'existence d'une isotopie déformant A en A' parmi les surfaces ξ–convexes, ce qui garantit la condition d'enroulement recherchée.

Si $n = 1$, la proposition 5.16 ne laisse à vérifier que le fait que la structure de contact ξ est tendue en restriction à toutes les composantes connexes du complémentaire de la réunion des A_i^{j+1}. Or le lemme 5.4 et l'hypothèse de récurrence garantissent cette propriété pour toutes ces composantes connexes sauf une qui est la réunion d'un tore plein et d'un tore épais dont les composantes de bord sont chacune scindées par deux courbes de classe d'homologie $d = S + kF$ et $d' = S + k'F$ respectivement lorsqu'on les oriente pour intersecter les fibres positivement. Cette dernière composante connexe est donc tendue en vertu du lemme 5.19. □

Lemme 5.19 *Soit $W(\alpha, \beta) = T^2 \times [0,1]/\sim$ un tore plein équipé d'une fibration de Seifert standard (voir l'introduction) et ξ une structure de contact sur W pour laquelle les tores $T_{1/2}$ et T_1 sont scindés par deux courbes intersectant chacune une fois chaque fibre et dont le cône de Giroux ne contient pas la classe d'homologie des fibres régulières. Si $\xi_{|T^2\times[0,1/2]/\sim}$ et $\xi_{|T^2\times[1/2,1]/\sim}$ sont tendues alors ξ l'est aussi.*

Démonstration On note $\xi_1 = \xi_{|T^2\times[0,1/2]/\sim}$, $\xi_2 = \xi_{|T^2\times[1/2,1]/\sim}$. Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les polygones de Giroux respectifs des structures de contact ξ, ξ_1 et ξ_2 pour un choix de classe d'homologie associée à ξT_0 qui met ces polygones dans le demi-plan $\mathcal{H}$ formé des classes intersectant la classe des fibres positivement.

Les théorèmes 4.8 a) et 4.6 a) permettent de supposer que les structures de contact ξ_1 et ξ_2 sont sous forme normale et que leurs lieux des tores compressibles sont dans $\mathcal{P}_1$

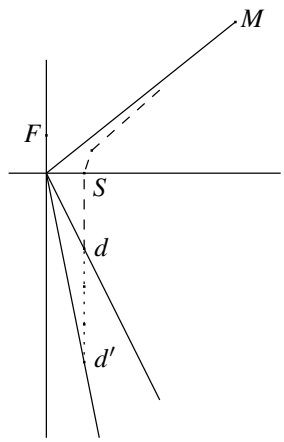


FIG. 5.12 – Polygones de Giroux du lemme de recollement

et $\mathcal{P}_2$ respectivement. Le théorème 4.8 montre que le lemme est vrai si et seulement si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. On note F et M les classes d'homologie respectives des fibres et des méridiens orientés pour intersecter positivement les fibres dans $H_1(T^2)$. L'hypothèse que la classe d'homologie des fibres n'est pas dans le cône de Giroux de ξ et celles sur le découpage des tores $T_{1/2}$ et T_1 permettent d'orienter ces courbes de découpage pour qu'elles aient une classe d'homologie d et d' respectivement avec $d \cdot F = d' \cdot F = +1$ et $d' \cdot d \geq 0$. En particulier il existe un entier k positif tel que $d = d' + kF$.

Pour tout x dans $\mathcal{H}$, l'aire algébrique du triangle de sommets d', x, d est

$$(x - d') \cdot (d - d') = (x - d') \cdot kF = k(x \cdot F - 1) \geq 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{P}_2 = [d', d]$ et que $[d', d] \subset \mathcal{P}$.

En particulier d est dans le polygone $\mathcal{P}$ et c'est exactement ce qui est requis pour assurer que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. En effet, soit E, E_1 et E_2 les enveloppes convexes des ensembles des classes d'homologie entières dans les cônes correspondants. L'affirmation à démontrer se reformule en $E = E_1 \cup E_2$. Il s'agit donc de montrer que $E' := E_1 \cup E_2$ est déjà convexe. Soit Δ la demi-droite issue de l'origine et contenant la classe d'homologie d. La convexité de E_1 et de E_2 ne laisse à vérifier que le fait que pour tout $x \in E_1$ et $y \in E_2$, le point $z = [x, y] \cap \Delta$ est dans E'. Comme d est dans le polygone $\mathcal{P}$, $E \cap \Delta = E' \cap \Delta$ et la convexité de E assurent que z est dans E donc dans E'. □

Démonstration du théorème C Soit L une courbe legendrienne verticale dans V. Soit ρ un revêtement fini de la base B provenant d'un revêtement de la surface topologique sous-jacente (qui par hypothèse n'est pas une sphère). La courbe L se relève en

courbe $\widehat{L}$ dans le revêtement induit $\widehat{V} \to V$. Pour un revêtement ρ assez grand, la courbe $\widehat{L}$ est contenue dans une variété de Seifert à bord $\widehat{V}'$ au-dessus d'un disque orbifold et y est ∂–isotope à une fibre régulière. Le lemme 5.18 estime alors $e(L) = e(\widehat{L}) \leq -n$. $\square$

Le cas des bases sphériques On discute maintenant les résultats partiels obtenus dans le cas des bases sphériques. Le théorème C s'étend au cas des variétés de Seifert dont la base est sphérique mais qui n'ont pas plus de deux fibres exceptionnelles. En effet ces variétés qui sont des espaces lenticulaires – au sens le plus large de ce mot – s'écrivent comme quotient du tore épais à la manière de l'exemple 1 page 18 et le corollaire 4.10 permet un calcul facile de l'enroulement. Par ailleurs il s'étend aussi aux cas où pour chaque tore plein W_i il n'y a qu'une classe d'isotopie de structures de contact tendues coïncidant avec ξ_i au bord (ces cas sont décrits par le lemme 5.13). En effet dans ce cas les structures de contact concernées sont isotopes à des structures de contact tangentes aux fibres dont l'enroulement se calcule bien (voir la section 5.6.3).

Concernant les petits fibrés de Seifert hors lenticulaires ($g = 0$, $r = 3$) qui ont fait l'objet de nombreux articles ces dernières années (par exemple [LM98, GS03, Wu04, GLS06, Ghi08]), il y a trois cas assez différents. Lorsque $e_0 \geq 0$ le théorème B interdit l'existence de structures de contact d'enroulement strictement négatif. Lorsque $e_0 \leq -3$, la condition (iii) du théorème B ne peut être vérifiée que si $n = 1$ et les résultats de H. Wu dans [Wu04] (ou le théorème D) se combinent à un résultat de [Wu06] (ou alternativement à la proposition 5.5) pour montrer que le théorème C s'étend là encore. Les cas restant $e_0 = -2$ et $e_0 = -1$ sont beaucoup plus problématiques, les résultats sont sporadiques, en particulier quand plusieurs enroulements strictement négatifs sont suggérés par les résultats en genre non nul.

Afin de placer ces résultats sporadiques dans le contexte de notre étude on considère deux familles d'exemples qui sont redevables de la proposition 5.6. La première famille (chronologiquement la deuxième) est le sujet de l'article de J. Kim [Kim05], elle est formée des variétés de Seifert d'invariants

$$(g = 0,\ b = -2,\ (2,1),\ (3,2),\ (\alpha,\beta))$$

avec $\beta/\alpha > 5/6$. Toute structure de contact d'enroulement strictement négatif sur une de ces variétés est d'enroulement -5. En effet, l'enroulement -1 est exclu par le corollaire 5.15, donc les tores pleins W_1 et W_2 imposent à l'enroulement $-n$ de vérifier $n \equiv 1$ [2] et $n \equiv 1$ [3] d'après la proposition 5.16. La condition $\beta/\alpha > 5/6$ et la remarque 5.17 assurent qu'il existe des structures de contact sur W_3 d'enroulement -5 et dont le bord est scindé par deux courbes de classe d'homologie $d_3 = 6S_3 + 5F_3$ car

le cône bordé à gauche par la demi-droite engendrée par $S_3 + F_3$ et à droite par d_3 ne contient pas de point entier dont l'intersection avec F_3 est strictement plus petite que 5.

Ainsi la proposition 5.6 fournit autant de structures de contact d'enroulements strictement négatifs sur ces variétés que la borne supérieure donnée par les résultats généraux dans le cas du genre nul, ce qui montre que les théorèmes C et E s'étendent à ces variétés et ce de façon non triviale puisqu'elles portent effectivement des structures de contact d'enroulement $e < -1$ dont certaines ne sont pas isotopes à des structures de contact transversales aux fibres d'après la proposition 5.14.

La deuxième famille est constituée des sphères de Brieskorn $V = -\Sigma(2,3,6k-1)$ qui ont une structure de variété de Seifert d'invariants $(0,-2,(2,1),(3,2),(6k-1,5k-1))$ et ont fait l'objet d'une étude suivie, en particulier dans [LM98]. Le théorème C montre que, pour une structure de contact ξ sur V, si $e(\xi) < 0$ alors

$$e(\xi) \in \{-(6l+5),\ 0 \leq l \leq k-2\}.$$

Le cas $e = -(6(k-2)+5)$ correspond d'après le lemme 5.13 à des structures de contact pouvant être rendues tangentes à toutes les fibres et la section 5.6.3 montre que l'enroulement est bien celui attendu et qu'il n'y a qu'une classe d'isotopie de telles structures de contact sur V. Une extension des théorèmes C et E au cas des bases sphériques fournirait $k-l-1$ classes d'isotopie de structures de contact d'enroulement $-(6l+5)$ et la proposition 5.6 confirme ce nombre pour $l = 0$. Ainsi les théorèmes s'étendent aux deux valeurs extrêmes de l mais seules des bornes supérieures sont disponibles pour les valeurs intermédiaires. Cependant, P. Ghiggini a annoncé très récemment une classification complète sur ces variétés qui confirme que les théorèmes C et E s'étendent à ces exemples.

Les techniques de remplissages holomorphes utilisées de façons cruciales dans les discussions précédentes ne sont sans doute pas applicables au cas général. En particulier il semble qu'aucun exemple connu ne permette de répondre à la question suivante.

Question 5.20 Soit V une variété de Seifert. On suppose qu'il existe une structure de contact sur V d'enroulement $e < 0$ holomorphiquement remplissable. Peut-il exister sur V une structure de contact holomorphiquement remplissable d'enroulement e' avec $e < e' < 0$?

Les techniques évoquées plus haut montrent qu'il n'y a pas de tel exemple sur les espaces lenticulaires et Y. Eliashberg a montré dans [Eli96] qu'il n'y en a pas non plus sur le tore T^3. Par ailleurs P. Ghiggini a fourni des exemples dans [Ghi05a] si on remplace les remplissages holomorphes par de simples remplissages forts.

5.6 Classification

5.6.1 Cas flexible

Dans cette section on montre le théorème D de l'introduction. Ce résultat a été annoncé par K. Honda pour les fibrés en cercles ($r = 0$) dans [Hon00b] mais démontré en utilisant le fait que les structures de contact concernées peuvent toujours être distinguées par leurs classes d'homotopie comme champs de plans orientés. Or ce fait est erroné. En effet, lorsqu'un tel fibré en cercles V au-dessus d'une surface B porte une structure de contact tangente aux fibres – c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier strictement positif n tel que $ne(V) = -\chi(B)$, voir [Gir01a] ou le théorème 5.26 – il n'y a qu'une seule classe d'homotopie de champs de plans transversaux aux fibres car la structure de contact tangente aux fibres se déforme à la fois en structure de contact positivement et négativement transversale aux fibres. Si $-n < -1$ et si la base B est de genre au moins deux alors $e(V) < 2g - 2$ donc les hypothèses du théorème sont bien satisfaites et il y a plusieurs classes d'isotopie de structures de contact transversales aux fibres qui sont toutes homotopes comme champs de plans orientés. L'erreur dans [Hon00b] provient de l'hypothèse implicite que la classe d'homologie des fibres dans $H_1(V)$ est d'ordre infini, ce qui est faux lorsque $e(V) \neq 0$ et qui fausse les calculs de classe d'Euler.

Lemme 5.21 *Soit V une variété de Seifert vérifiant $e_0(V) < 2g - 2$. Toute structure de contact sur V d'enroulement -1 est isotope à une structure de contact sous forme normale de multi-indice*

$$M_0 = (2 - 2g - r, 1, \dots, 1).$$

Si ξ et ξ' sont deux structures de contact sur V d'enroulement -1 sous forme normale de multi-indice M_0 alors ξ est isotope à une structure de contact sous forme normale de multi-indice M_0 et de même R–classe que ξ'.

Démonstration On commence par s'occuper du multi-indice. Soit ξ' une structure de contact sous forme normale isotope à ξ et $(x'_0, \dots, x'_r)$ son multi-indice. La proposition 5.16 donne la majoration $x'_i \leq 1$ pour tout $i \geq 1$. Par suite, la classe S_i est dans le cône de Giroux de la structure de contact ξ_i pour tout i. C'est pourquoi le corollaire 4.10 combiné au lemme de réalisation fournit dans chaque W_i un tore T_i parallèle au bord, réglé par des courbes legendriennes verticales d'enroulement -1 et scindé par deux courbes de classe d'homologie S_i après orientation convenable. Soit L_0 une fibre legendrienne d'enroulement -1 dans R. On considère une famille d'anneaux A_i ayant tous L_0 comme composante de bord, ne s'intersectant nulle part ailleurs,

dont les autres composantes de bord sont respectivement des courbes legendriennes du T_i associé et qui n'intersectent les tores T_i nulle part ailleurs. Quitte à modifier explicitement les anneaux A_i dans un voisinage standard de L_0, le lemme 5.12 appliqué à des sous-anneaux des A_i montre que ceux-ci sont isotopes, relativement à L_0 et à la réunion des tores T_i, à des anneaux s'intersectant seulement le long de L_0 et qui sont réglés par des courbes legendriennes verticales d'enroulement -1. La démonstration de la proposition 5.11 montre alors que ξ' est isotope à une structure de contact sous forme normale dont le multi-indice $(x_0, \dots, x_r)$ vérifie $x_i = 1$ pour tout $i \geq 1$. Le théorème de Poincaré–Hopf assure ensuite $x_0 = 2 - 2g - r$.

Il reste à montrer que si ξ et ξ' sont deux structures de contact sous forme normale sur V avec ce multi-indice alors ξ est isotope à une structure de contact sous forme normale ayant la même R–classe que ξ'. La démonstration provient assez directement de celle de [Gir00][lemme 3.8], même si elle n'est pas aussi élémentaire car les structures de contact considérées ne sont pas supposées transversales aux fibres au-dessus de D_0.

Le multi-indice étant fixé, la classe d'homotopie de la 1–forme λ intervenant dans la forme normale est déterminée par les indices de λ le long de cercles $C_1, \dots, C_{2g}$ s'intersectant en un unique point q et découpant la surface R en un disque à trous. Il suffit donc de savoir ramener tous ces indices à zéro. Soit C un tel cercle dont l'indice x est non nul. Quitte à changer l'orientation de C on suppose x strictement positif et une récurrence immédiate permet de supposer $x = 1$. Soit T la réunion des fibres au-dessus de C. L'indice de λ le long de C se reflète dans la classe d'homologie des cercles de singularités du feuilletage caractéristique ξT (qui est aussi celle de ses courbes de découpage) et l'objectif est de modifier ces cercles par un twist de Dehn négatif le long des fibres. La démonstration de l'existence de formes normales montre qu'il suffit de trouver un tore T' isotope à T relativement à la fibre q et scindé par deux courbes obtenues à partir du découpage de T par un tel twist. On note C_0 le bord de D_0 et C'' un cercle intersectant les C_i en q (uniquement) et bordant avec C un produit pincé N contenant D_0 et situé à droite de C (figure 5.13). Les cercles de découpage changent par isotopie lorsqu'on déforme C ou C'' par isotopie relative à q dans R. Or il existe une telle isotopie qui déforme C'' en la version lisse de la réunion de C, de C_0 et d'un arc les joignant dans le produit pincé N. Le processus de lissage montre que les cercles de singularités de C'' correspondent à l'action cumulée de $b - x_0$ twists négatifs le long des fibres si on les compare à ceux de C via la structure de produit pincé. Par hypothèse $b - x_0 = b - (2 - 2g - r)$ est strictement positif. Il ne reste donc qu'à voir qu'il existe dans le produit pincé au-dessus de N un tore intermédiaire dont le découpage n'a subi qu'un seul twist. Il s'agit d'un énoncé parallèle à celui du corollaire 4.10 et sa démonstration est tout à fait analogue. □

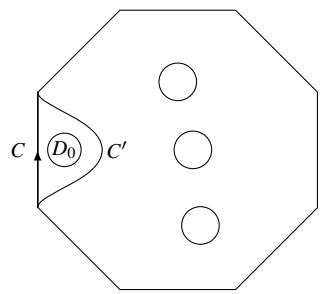


FIG. 5.13 – Modification de la R–classe dans le cas flexible. La surface R est obtenue en recollant les côtés opposés du polygone.

Il faut remarquer que ni le lemme précédent ni le théorème D n'affirment que toutes les formes normales des structures de contact étudiées ont le multi-indice cité, ce qui serait faux.

Démonstration du théorème D On fixe une 1–forme λ sur la surface R ayant comme multi-indice $(2-2g-r, 1, \ldots, 1)$ et on note ξ_0 la structure de contact au-dessus de R d'équation

$$\cos(\theta)\,\lambda + \sin(\theta)\,\lambda \circ J = 0.$$

Le lemme précédent montre que le nombre de structures de contact d'enroulement -1 sur V est au plus égal au nombre N de façons dont on peut étendre ξ_0 par des structures de contact tendues dans les tores pleins W_i. Ce nombre est fourni par le corollaire 4.9.

Les exemples de Gompf (proposition 5.5) montrent qu'il y au moins N structures de contact d'enroulement -1 sur V donc il y en a exactement N et toutes les structures de contact construites plus haut sont deux à deux non isotopes.

Il reste à discerner parmi ces structures de contact celles qui sont isotopes à des structures de contact transversales aux fibres. La proposition 5.14 assure que ce sont celles dont les restrictions ξ_i aux tores pleins W_i peuvent être simultanément rendues positivement ou négativement transversales aux fibres, elles forment donc au plus deux classes d'isotopie. Le lemme 5.13 déduit de la condition $d_0 \cdot M_0 > 1$ que ces deux possibilités sont exclusives dans le tore plein W_0 donc il y a exactement deux classes d'isotopie de structures de contact transversales aux fibres et d'enroulement -1 sur V.

Pour voir que ces deux classes n'en forment qu'une si on oublie les orientations, on considère des structures de contact ξ et ξ' sous forme normale qui coïncident au-dessus de R, sont isotopes à des structures de contact transversales aux fibres mais ne

sont pas isotopes entre elles. La rotation d'angle π dans les fibres de $R \times \mathrm{S}^1$ envoie ξ sur $-\xi'$ et les formes normales dans les tores pleins W_i montrent qu'elle s'étend en difféomorphisme de V isotope à l'identité et envoyant ξ sur $-\xi'$. En effet les extensions aux W_i permutent les classes d'isotopie d'anneaux s'appuyant sur les cercles de singularités du bord (lorsqu'il y en a deux) et donc échangent les deux feuillages possibles dans ce cas. □

5.6.2 Cas rigide

Dans cette section, on démontre le théorème E de l'introduction.

Proposition 5.22 *Soit n un entier strictement positif et V une variété de Seifert dont la base est de genre g. Si $e_0 = 2g-2$ ou $n > 1$ alors toute structure de contact $\xi(\lambda, n, \xi_0, \dots, \xi_r)$ avec $e(\xi_i) \leq -n$ pour tout i a comme multi-indice*

$$(nb, \lceil n\beta_1/\alpha_1 \rceil, \dots, \lceil n\beta_r/\alpha_r \rceil).$$

Démonstration Si $n > 1$ alors la proposition 5.16 permet de conclure immédiatement. Sinon on remarque en plus que le multi-indice $(x_0, \dots, x_r)$ de la structure de contact ξ vérifie $x_0 \leq b$, $x_i \leq 1$ si $i > 0$ et $\sum x_i = 2-2g$, donc l'hypothèse $2-2g = b+r$ force toutes les inégalités ci-dessus à être des égalités. □

La proposition suivante sera démontrée plus loin dans cette section. Il s'agit du seul endroit où l'hypothèse $g > 0$ est utilisée, une extension de cette proposition au cas des bases sphériques permettrait l'extension correspondante du théorème E.

Proposition 5.23 *Soit n un entier strictement positif et V une variété de Seifert dont la base est de genre $g > 0$. On suppose que $n > 1$ ou $e_0(V) = 2g-2$. Soit ξ une structure de contact sur V avec $e(\xi) = -n$. Si L_0 et L_1 sont des courbes legendriennes verticales d'enroulement maximal alors toute isotopie L_t entre L_0 et L_1 est homotope à une isotopie legendrienne.*

Démonstration du théorème E Si deux structures de contact ξ et ξ' sous forme normale et d'enroulement $-n$ ont la même R–classe alors ξ' est isotope parmi les structures de contact sous forme normale à une structure ξ'' ayant les mêmes classes d'Euler relatives que ξ' et la même 1–forme que ξ. La proposition 5.16 assure que les bords des tores pleins W_i sont scindés par deux courbes, ce qui permet d'appliquer le théorème 4.8 c) pour conclure que les structures de contact ξ'' et ξ sont isotopes.

Réciproquement, soit ξ et ξ' deux structures de contact sous forme normale et d'enroulement $-n$. On suppose qu'il existe une isotopie ϕ envoyant ξ' sur ξ et on la simplifie en trois étapes. Par la première étape, on rend ϕ relative à une fibre $L_0 \in R$, puis à un système de tores s'intersectant le long de L_0 et dont un voisinage régulier est isotope à $R \times \mathrm{S}^1$ par la deuxième, et enfin au bord de $R \times S^1$ par la troisième.

ÉTAPE 1 La proposition 5.22 permet de supposer – modulo une isotopie de ξ' parmi les structures de contact sous forme normale qui préserve sa R–classe – que ξ' et ξ coïncident en restriction au bord de $R \times \mathrm{S}^1$.

Soit L_0 une fibre dans R. La fibre L_0 et son image L_1 par ϕ_1 sont ξ–legendriennes et d'enroulement maximal donc la proposition 5.23 fournit une isotopie legendrienne induite par une isotopie ψ vérifiant $\psi_1 = \phi_1$. Comme la courbe $\psi_t(L_0)$ est ξ–legendrienne pour tout t, il existe une isotopie θ préservant la structure de contact ξ qui coïncide avec ψ en restriction à L_0 pour tout temps (voir au besoin [Gei08][théorème 2.6.2]). On note $\bar{\phi}$ l'isotopie formée des $\theta_t^{-1} \circ \psi_t$. Cette isotopie envoie ξ' sur ξ relativement à L_0 et de plus

$$\xi\bar{\phi}_1(\partial W_i) = \xi\phi_1(\partial W_i) = \phi_1(\xi'\partial W_i) = \phi_1(\xi\partial W_i) = \bar{\phi}_1(\xi\partial W_i).$$

ÉTAPE 2 Soit $T_1, \ldots, T_{2g+r}$ des tores fibrés dans $R \times \mathrm{S}^1$ s'intersectant exactement le long de L_0 et tels qu'un voisinage régulier de leur réunion est isotope à $R \times \mathrm{S}^1$.

On montre ci-dessous que $\bar{\phi}$ est homotope à une isotopie déformant les tores T_i parmi les surfaces ξ–convexes. La clef est la proposition 5.22 qui donne un multi-indice indépendant de la forme normale considérée.

Par discrétisation topologique, il suffit de montrer que si $\bar{\phi}$ est relative à tous les tores T_i sauf un, noté T, et si $T' := \bar{\phi}_1(T)$ borde un produit pincé N avec T alors $\bar{\phi}$ est homotope à une isotopie qui de surcroît déforme T parmi les surfaces ξ–convexes. Quitte à invoquer le lemme 5.12 et le lemme de réalisation, on peut supposer que le tore T' est réglé par des courbes legendriennes verticales d'enroulement $-n$ (le tore T l'est par définition des formes normales).

Le complémentaire de la réunion des tores T_i est une réunion de $r+1$ tores pleins. On note W celui qui contient T' et W' le complémentaire de N dans W. Le tore plein W se rétracte par déformation sur W' et la proposition 5.22 force cette rétraction à envoyer le découpage de W sur des courbes isotopes à celui de W'. Dès lors, le théorème 4.8 assure l'existence d'une isotopie homotope à $\bar{\phi}$ et déformant le tore T parmi les surfaces ξ–convexes.

Cela suffit à montrer que les 1–formes λ et λ' sont homotopes. En outre, comme $\xi\bar{\phi}_1(T_i) = \bar{\phi}_1(\xi' T_i)$, les tores $\bar{\phi}_1(T_i)$ sont réglés par des courbes verticales legendriennes et le lemme de réalisation à paramètre (lemme 3.7) fournit une isotopie φ homotope à $\bar{\phi}$ et pour laquelle, à tout instant et pour tout i, $\xi\varphi_t(T_i) = \varphi_t(\xi T_i)$.

ÉTAPE 3 À tout instant, il existe un voisinage régulier de la réunion des tores $\varphi_t(T_i)$ feuilleté par des courbes verticales legendriennes. Il existe donc une isotopie $\widetilde{\psi}$ telle que les tores de $\widetilde{\psi}_t(\partial R \times \mathrm{S}^1)$ soient réglés par des courbes verticales legendriennes à tout instant. Une nouvelle application du lemme 3.7 fournit alors une isotopie $\bar{\psi}$ homotope à $\widetilde{\psi}$ et telle qu'à tout instant

$$\xi\bar{\psi}_t\left(\partial R \times \mathrm{S}^1\right) = \bar{\psi}_t\left(\xi\left(\partial R \times \mathrm{S}^1\right)\right).$$

Soit $\bar{\theta}$ une isotopie préservant ξ coïncidant avec $\bar{\psi}$ en restriction au bord de $R \times \mathrm{S}^1$ (voir [Gei08][théorème 2.6.13] qui, modulo un morceau de phrase oublié dans l'énoncé, assure l'existence de $\bar{\theta}$). On note $\widetilde{\phi}$ l'isotopie formée des $\widetilde{\phi}_t = \bar{\theta}_t^{-1} \circ \bar{\psi}_t$. Cette isotopie envoie la structure de contact ξ' sur ξ relativement au bord de $R \times \mathrm{S}^1$. Elle se restreint donc en isotopie des tores pleins W_i envoyant les structures de contact ξ_i' sur les ξ_i qui partagent donc les mêmes classes d'Euler relatives.

Le décompte des structures de contact transversales aux fibres se fait de la même façon que pour le théorème D en utilisant la proposition 5.14, le lemme 5.13 et la proposition 5.16. Il n'y a qu'une seule classe d'isotopie de structures de contact transversales aux fibres à enroulement et R–classe fixés exactement lorsque $d_i \cdot M_i = 1$ pour tout i et dans ce cas la proposition 5.16 garantit que cette classe d'isotopie contient des structures de contact tangentes aux fibres. Cette situation spéciale fait l'objet d'une étude plus détaillée dans la section 5.6.3. □

Nœuds legendriens verticaux

Dans ce paragraphe on démontre la proposition 5.23 et le théorème F. Une première approche consiste à considérer un tore ξ–convexe vertical T contenant L_0, à discrétiser une isotopie ambiante induisant l'isotopie entre L_0 et L_1 et à montrer que toutes les bifurcations du feuilletage caractéristique du tore T peuvent être éliminées. Cependant, même si les techniques suivantes permettent de montrer qu'aucune de ces bifurcations ne peut changer la direction du découpage, on ne peut jamais éviter *a priori* l'existence de bifurcations modifiant le nombre de courbes de découpage à direction fixée en repliant le tore T dans un voisinage homogène. Les exemples de la section 4.2.2 montrent qu'une suite de bifurcations dont l'effet net est nul ne peut pas être

simplifiée en général. C'est pourquoi on va utiliser une astuce introduite par P. Ghiggini dans [Ghi05b][Proposition 5.4] : considérer deux tores s'intersectant le long de L_0 et discrétiser le mouvement de l'un tout en construisant une isotopie de l'autre parmi les surfaces ξ–convexes. Là encore tout sera basé sur le fait que les cônes de Giroux correspondants ne contiennent qu'un seul point entier dont l'intersection avec la classe des fibres régulières est la bonne.

Dans la suite on dit qu'une courbe intersecte efficacement le découpage d'une surface ξ–convexe si elle minimise le nombre d'intersections avec ce découpage dans sa classe d'isotopie.

Lemme 5.24 *Soit V une variété de Seifert et ξ une structure de contact d'enroulement $-n$ strictement négatif. Soit T et F des tores ξ–convexes verticaux transversaux tels que $T \cap F$ est une courbe legendrienne verticale qui intersecte le découpage de T efficacement. Si $n > 1$ ou $e_0(V) = 2g-2$ alors toute isotopie relative à T qui envoie F sur un tore F' ξ–convexe est homotope à une isotopie relative à T déformant F parmi les surfaces ξ–convexes.*

Démonstration Quitte à déformer la structure de Seifert de V par isotopie, on peut supposer que le tore T est fibré. On note $L = T \cap F = T \cap F'$ et $-n'$ le maximum des enroulements des courbes legendriennes isotopes aux fibres régulières de V relativement à T. Supposons un instant qu'on sache démontrer le lemme sous les hypothèses supplémentaires suivantes : le tore F contient une courbe legendrienne verticale d'enroulement $-n'$ et les tores F et F' vus comme anneaux de bord L bordent un produit pincé N qui n'intersecte le tore T que le long de L. Par définition de $-n'$, il existe un tore F_0 avec $F_0 \cap T = L$ et contenant une courbe legendrienne verticale d'enroulement $-n'$. Par discrétisation topologique il existe deux familles finies de tores F_i et F'_i allant de F_0 à F et F' respectivement et dont deux éléments successifs bordent un produit pincé le long de L. Le cas particulier du lemme que l'on a supposé savoir démontrer permet de montrer par récurrence que ces deux familles sont constituées de tores isotopes parmi les surfaces ξ–convexes relativement à T. À chaque étape de cette récurrence, une fois qu'on sait que F_i (ou F'_i) a le même découpage que F_0, on applique le lemme de réalisation pour le munir d'une courbe legendrienne verticale d'enroulement $-n'$ avant de passer à l'étape suivante de la récurrence. À la fin de ces récurrences on obtient que les tores F et F' sont tous les deux isotopes à F_0 parmi les surfaces ξ–convexes donc sont isotopes entre eux (toutes ces isotopies étant relatives au tore T).

Montrons maintenant le lemme sous ces hypothèses supplémentaires. Soit Σ et Σ' des tores bordant respectivement des voisinages réguliers de $T \cup F$ et $T \cup N$ et contenant

tous les deux une courbe legendrienne verticale L_0 d'enroulement $-n'$ (figure 5.14). Plus précisément on impose à Σ (resp. Σ') d'être isotope parmi les surfaces ξ–convexes à un lissage de $T \cup F$ (resp. $F' \cup T \cup F$).

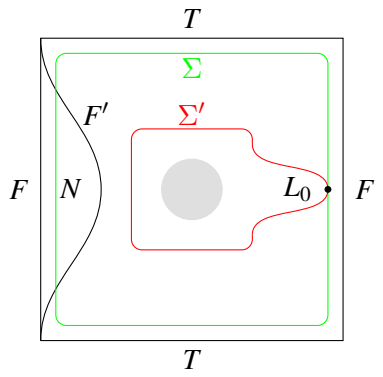


FIG. 5.14 – Démonstration du lemme 5.24. La zone grisée au centre cache de la topologie de R si $g > 1$.

Affirmation *Les tores Σ et Σ' sont tous deux scindés par des courbes dont la classe d'homologie totale, lorsqu'elles sont toutes orientées pour intersecter positivement les fibres, est $2(n'S - F)$.*

Démonstration Comme $-n'$ est maximal, le lemme 5.12 assure que les découpages respectifs des tores Σ et Σ' ont pour classe d'homologie totale, lorsqu'ils sont orientés pour intersecter les fibres positivement, $2n'S + 2kF$ et $2n'S + 2k'F$ respectivement. On montre d'abord que $k = k'$ puis que leur valeur commune est -1. Il y a deux cas.

Si $n' > 1$ alors la formule de Pick appliquée au triangle de sommets 0, $n'S + kF$ et $n'S + k'F$ montre que $k \neq k'$ entraînerait l'existence d'une classe entière $n''S + lF$ avec $n'' < n'$ dans le cône de Giroux du tore épais bordé par Σ et (un tore isotope parmi les surfaces ξ–convexes à) Σ' . Cette classe entière serait alors convertie par le corollaire 4.10 en tore ξ–convexe dont un voisinage homogène contiendrait, en vertu du lemme de réalisation, une courbe legendrienne verticale d'enroulement $-n'' > -n'$, ce qui est absurde.

Si $n' = 1$ alors $n = 1$. On construit un système de tores basé en L_0 qui n'intersectent Σ et Σ' nulle part ailleurs et qui sont réglés par des courbes legendriennes verticales d'enroulement -1. On déforme la structure de Seifert de V pour que ces tores deviennent

fibrés. On note W_0 la composante connexe du complémentaire de la réunion de ces tores qui ne contient aucune fibre exceptionnelle (à isotopie près il s'agit bien du W_0 correspondant à ce système de tores dans nos notations pour les variétés de Seifert). Les tores Σ et Σ' intersectent le tore plein W_0 le long d'anneaux appariés partageant le même bord. Ainsi le tore plein W_0 se rétracte sur des tores pleins W et W' dont les bords contiennent respectivement tout Σ et tout Σ' complétés par des anneaux contenus dans le bord de W_0. Les bords des tores pleins W_0, W et W' sont tous scindés par deux courbes de classe d'homologie de la forme $S + lF$ une fois orientées correctement. Or la proposition 5.22 montre que le cône de Giroux de W_0 ne contient qu'une seule classe d'homologie de ce type donc le nombre l est commun aux trois tores pleins. La classification des structures de contact tendues sur les tores pleins fournit alors une isotopie déformant parmi les surfaces ξ–convexes le bord de W en celui de W' relativement à celui de W_0. On obtient ici encore $k = k'$.

Il reste à montrer que, dans les deux cas, $k = -1$. On construit une courbe de classe d'homologie S qui n'intersecte que deux fois le découpage de Σ et avec la bonne orientation. Le découpage de T est formé de courbes qui traversent $T \setminus (T \cap F)$ et $2n'$ courbes du découpage de $F \setminus (T \cap F)$ traversent. La courbe recherchée n'intersecte le découpage de Σ qu'on voisinage de $T \cap F$. Elle est obtenue en lissant dans Σ la réunion dans $T \cup F$ d'une translatée vers le bas (par rapport à l'orientation vers le haut des fibres) d'une courbe de découpage traversant F, d'une courbe traversant T sans intersecter son découpage puis des deux mêmes segments dans l'autre sens. En arrondissant les angles selon K. Honda [Hon00a][lemme 3.11] on obtient les propriétés voulues. □

Cette affirmation permet d'ouvrir V le long de Σ' pour ne garder que le voisinage de $T \cup N$ dont on comble le bord par un tore plein W ayant des méridiens de classe d'homologie S dans $H_1(\Sigma')$ pour obtenir une variété V' difféomorphe au tore T^3. Le théorème 4.8 c) assure l'unicité à isotopie près d'une structure de contact tendue sur W étendant ξ en structure de contact ξ' sur V'. En ouvrant V' le long de T on obtient un tore épais N_1 muni d'une structure de contact ξ_1 dont les deux composantes de bord ont le même découpage. En retirant de ce tore épais le tore plein W et en l'ouvrant le long de F (devenu un anneau) on obtient un tore épais N_2 muni d'une structure de contact ξ_2 tendue (car elle apparaît déjà dans V) et dont les deux composantes de bord sont scindées par des courbes isotopes. Le théorème 4.8 b) assure donc que la restriction de ξ' à $N_2 \cup W$ est tendue. Il reste à recoller le long de F pour obtenir que ξ_1 est tendue. La théorie des formes normales exposée dans le chapitre 4 donne un modèle de tore épais muni d'une structure de contact tendue et traversé par un anneau dont le découpage est semblable à celui de F. En ouvrant ce tore épais le long de cet anneau on

obtient un tore plein qu'on peut identifier à $N_2 \cup W$ de sorte que sa structure de contact soit isotope à celle qui nous occupe grâce au théorème 4.8 c) (il n'y a qu'une classe de ∂–isotopie ici). Ainsi la structure de contact ξ_1 sur le tore épais N_1 est tendue. On voit maintenant F et F' comme des anneaux traversant N_1. Le découpage de F montre que la torsion de ξ_1 est nulle et [Gir00][théorème 4.5] affirme alors que le découpage de F ou de F' détermine le feuillage persistant de ξ_1 qui lui-même est déterminé par la classe de ∂–isotopie de ξ_1. Ainsi les découpages de F et F' sont isotopes si on identifie ces deux anneaux par une ∂–isotopie de N_1. Plus généralement tout anneau parallèle à F dans le produit pincé N bordé par F et F' a un découpage isotope à celui de F. On peut donc éliminer toutes les bifurcations d'un film sur N à la manière de la figure 4.21. On obtient ainsi une isotopie déformant F en F' parmi les surfaces ξ'–convexes relativement à $T \cup W$ donc cette isotopie provient bien d'une isotopie de V. □

Démonstration de la proposition 5.23 Soit φ une isotopie telle que $L_t = \varphi_t(L_0)$. Soit T et F des tores s'intersectant transversalement le long de L_0. Quitte à modifier φ relativement à L_0, on suppose que les tores $T' := \varphi_1(T)$ et $F' := \varphi_1(F)$ sont aussi ξ–convexes. L'enroulement des courbes L_0 et L_1 étant maximal, elles intersectent efficacement les découpages de T et F et T' et F' respectivement.

La méthode de discrétisation topologique montre que φ est homotope à une concaténation d'isotopie déformant successivement T en une suite de tores ξ–convexes $T = T_0, T_1, \ldots, T_N = T'$ tels que deux tores successifs bordent un produit. Le lemme de réalisation permet de supposer à chaque étape que T_i contient une courbe legendrienne verticale C_i qui intersecte efficacement le découpage de T_i et on choisit $C_0 = L_0$ et $C_N = L_1$.

On montre par récurrence sur i qu'il existe des tores F_i intersectant T_i le long de la courbe C_i et qui sont isotopes à F parmi les surfaces ξ–convexes. On initialise cette récurrence avec $F_0 = F$.

Une fois F_i construit on choisit comme F_{i+1} un tore isotope à F_i relativement à T_i et qui intersecte T_{i+1} le long de la courbe C_{i+1}. Le lemme 5.24 fournit une isotopie déformant F_i en F_{i+1} parmi les surfaces ξ–convexes.

Une fois arrivé à l'étape N on applique une dernière fois ce lemme pour obtenir une isotopie entre F_N et F' et achever ainsi la démonstration. □

Remarque 5.25 Dans le contexte de la section précédente, c'est-à-dire pour des structures de contact d'enroulement -1 sur des variétés de Seifert vérifiant $e_0 = 2g-2$, on peut utiliser le théorème D et la démonstration du lemme 5.21 pour montrer que si

L_0 et L_1 sont des courbes legendriennes verticales d'enroulement -1 alors il existe un difféomorphisme isotope à l'identité qui préserve ξ et envoie L_0 sur L_1. La connexité de l'ensemble de ces difféomorphismes entraînerait donc l'unicité à isotopie legendrienne près de ces courbes mais le seul résultat de ce type qui existe actuellement ne s'applique pas ici et est basé sur la proposition 5.23, malgré une tentative d'approche directe dans [Gir01b].

Dans l'autre sens, l'existence d'une isotopie legendrienne entre L_0 et L_1 permettrait de démontrer ce théorème D sans utiliser de théorie de jauge, dans l'esprit de la démonstration du théorème E.

Démonstration du théorème F La proposition 5.23 ne laisse à démontrer que le fait que tout nœud legendrien vertical est une stabilisation d'un nœud d'enroulement maximal (la classification par l'enroulement et le nombre de rotation s'en suit par des arguments classiques, voir par exemple [EH01]).

La démonstration est basée sur le lemme 5.24 en suivant la stratégie de P. Ghiggini dans [Ghi06][proposition 4.6]. Soit L un nœud legendrien vertical et T un tore ξ–convexe vertical le contenant. Si L n'intersecte pas efficacement le découpage de T alors le lemme de réalisation fournit un tore T' isotope à T parmi les surfaces ξ–convexes, parallèle à T et contenant une courbe legendrienne L' intersectant efficacement le découpage de T'. Tout anneau ξ–convexe bordé par L et L' montre que L est une stabilisation de L'. En effet le découpage d'un tel anneau est formé de composantes parallèles à L et de courbes traversantes et le lemme de réalisation permet de déformer cet anneau relativement à son bord en anneau contenant des nœuds legendriens intermédiaires se déduisant les uns des autres par stabilisation simple. On peut donc supposer dans la suite que L intersecte efficacement le découpage de T. Soit F un tore ξ–convexe vertical intersectant T transversalement le long de F (on utilise ici l'hypothèse sur le genre de la base). L'utilisation répétée du lemme 5.24 comme dans la démonstration de la proposition 5.23 fournit une isotopie déformant F parmi les surfaces ξ–convexes en un tore F' contenant une courbe legendrienne verticale d'enroulement maximal. Cela montre que le découpage de F autorise l'existence d'une telle courbe puis, via le lemme de réalisation, qu'il existe dans un voisinage homogène de F un anneau ξ–convexe bordé par L et par une courbe legendrienne d'enroulement maximal dont L est une stabilisation. □

5.6.3 Structures de contact tangentes aux fibres

Parmi les structures de contact transversales aux fibres d'une variété de Seifert à isotopie près, les plus remarquables sont celles qui, comme la structure de contact standard

sur la sphère S^3, peuvent être rendues tangentes aux fibres. Une isotopie $\mathcal{C}^\infty$–petite rend positivement ou négativement transversale aux fibres une telle structure de contact. Le théorème suivant les caractérise parmi les structures de contact d'enroulement strictement négatif, il découle directement de l'étude précédente.

Théorème 5.26 *Soit V une variété de Seifert d'invariants*

$$(g, b, (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r))$$

et n un entier strictement positif. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *$ne(V) = -\chi(B)$ et $n\beta_i \equiv 1 \mod \alpha_i$ pour tout i ;*

(2) *V porte une structure de contact ξ pour laquelle toutes les fibres sont legendriennes et les fibres régulières sont d'enroulement $-n$.*

De plus, dans la situation du (2), l'enroulement de ξ est égal à $-n$ et toute structure de contact sur V d'enroulement $-n$ est isotope à une structure de contact tangente aux fibres.

Enfin, si V porte une structure de contact d'enroulement $-n$ et $n > \max(\alpha_i)$ alors (1) et (2) sont vérifiées et cette structure de contact est isotope à une structure tangente aux fibres.

La conjecture suivante propose une caractérisation plus géométrique.

Conjecture 5.27 Une classe d'isotopie de structures de contact sur une variété de Seifert contient des structures de contact positivement et négativement transversales aux fibres si et seulement si elle contient des structures de contact tangentes aux fibres.

Cette conjecture découlerait des résultats de classification et du fait qu'une structure de contact positivement transversale aux fibres d'une variété de Seifert admette une forme normale dont les restrictions ξ_i sont positivement transversales aux fibres mais ce n'est pas ce qu'affirment les propositions 5.11 et 5.14.

Démonstration du théorème 5.26 L'équivalence de (1) et (2) est une conséquence directe de la proposition 3.18 car les conditions arithmétiques du (1) sont équivalentes à l'existence d'un revêtement fibré au-dessus de l'identité entre V et le fibré des éléments de contact coorientés de sa base.

Le calcul de l'enroulement découle du cas des fibrés en cercles traité dans le lemme 3.6 de [Gir01a] par revêtement sauf dans le cas des espaces lenticulaires déjà discuté dans la section 5.5. Le cas des fibrés en cercles est lui-même une conséquence du théorème

de Bennequin utilisé d'une façon analogue à celle de la démonstration de la proposition 5.3.

Supposons maintenant qu'une variété de Seifert V porte une structure de contact ξ tangente aux fibres d'enroulement $-n$ et montrons que toute structure de contact ξ' d'enroulement $-n$ sur V est isotope à une structure de contact tangente aux fibres. La proposition 5.11 permet de supposer ξ' sous forme normale. Puisque (2) $\Rightarrow$ (1), les invariants de Seifert de V vérifient $n\beta_i \equiv 1\ [\alpha_i]$. Si $n = 1$ alors cette congruence implique $\beta_i = 1$ pour tout i, ce qui se combine avec l'égalité $e(V) = -\chi(B)$ pour donner $e_0(V) = 2g - 2$. Dans tous les cas ($n = 1$ et $n > 1$), on peut appliquer la proposition 5.22 qui montre que les classes d'homologie d_i des courbes de découpage pour ξ' de ∂W_i – orientées pour intersecter positivement les fibres – vérifient $d_i \cdot M_i = 1$. Le lemme 5.13 fournit alors une isotopie rendant ξ' tangente aux fibres.

Lorsque $n > \max(\alpha_i)$, la proposition 5.16 fournit directement l'information $d_i \cdot M_i = 1$ qui permet d'appliquer le lemme 5.13 pour rendre toute structure de contact sous forme normale tangente aux fibres par une isotopie relative à $R \times \mathrm{S}^1$. □

Ces structures de contact sont classées à isotopie près par le théorème E puisque, d'après le théorème précédent, si une structure de contact ξ sur une variété de Seifert V de base B est tangente aux fibres et d'enroulement -1 alors $e(V) = -\chi(B)$ et $\beta_i = 1$ pour tout $i \geq 1$ donc $e_0(V) = 2g - 2$.

La proposition 3.18 permet la classification de ces structures de contact à conjugaison près comme dans [Gir01a][lemme 3.9 b)] (l'énoncé et la démonstration sont identiques).

Cette dernière remarque et la partie du théorème précédent qui affirme que toutes les structures de contact d'enroulement suffisamment négatif sur une variété de Seifert donnée sont isotopes à des structures de contact tangentes aux fibres permettent de dresser la liste des huit variétés de Seifert qui portent une infinité de structures de contact d'enroulements strictement négatifs deux à deux distincts. L'égalité $ne(V) = -\chi(B)$ dans le théorème précédent force ces variétés à vérifier $e(V) = 0$ puis $\chi(B) = 0$. Les bases sont donc des surfaces orbifold paraboliques, il y en a cinq d'après [Thu] et le théorème C montre que les espaces totaux sont ceux des fibrés des éléments de contact coorientés correspondant avec les deux orientations possibles. Les deux orientations possibles sont équivalentes exactement dans le cas du tore T^2 et de l'oreiller, ce qui conduit au chiffre huit annoncé.

Table des figures

1 Structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$, premier aspect 3

2 Structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$, deuxième aspect 3

3 Structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$, troisième aspect 4

4 Lien entre les deux premiers aspects de la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$ 5

5 Lien entre le premier et le troisième aspect de la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$ 6

6 Disque vrillé 7

7 Démonstration du théorème de Gray 9

8 Structure de contact canonique sur le fibré des éléments de contact coorientés 10

9 Vue globale de la fibration de Hopf 12

10 Orthogonal de la fibration de Hopf 13

11 Invariants de Seifert 17

12 Voisinage d'une fibre exceptionnelle dans une variété de Seifert 18

13 Diagramme de Kirby d'une variété de Seifert avec $g = 3$ 18

3.1 Retournement d'orbites 68

3.2 Lemme d'élimination 71

3.3 Structure de contact vrillée transversale à un feuilletage revêtu par un produit 72

3.4 Séquence générique dans un film purement rotatif 74
3.5 Lemme de redressement 75

4.1 Un cône de Giroux et son polygone 79
4.2 Feuille torique non persistante 80
4.3 Exemple de feuillage principal 80
4.4 Retournement d'orbites périodiques et tores compressibles 81
4.5 Tore compressible d'un feuillage 82
4.6 Feuillage d'une structure de contact universellement tendue 83
4.7 Feuillage d'une structure de contact virtuellement vrillée 83
4.8 Feuillages de structures de contact vrillées 83
4.9 Tore compressible hors du polygone de Giroux 84
4.10 Polygone de Giroux pour la figure 4.9 84
4.11 Structure de contact élémentaire non sous forme normale 85
4.12 Permutation de tranches dans un feuillage 87
4.13 Déplacement d'anneaux dans un feuillage 87
4.14 Effet d'une permutation de tranches sur une feuille annulaire 87
4.15 Détermination des revêtements vrillés 91
4.16 Bord d'un disque vrillé immergé 93
4.17 Extension d'un tore épais permettant une isotopie de surfaces ξ–convexes 94
4.18 Lemme de croisement 96
4.19 Changement de classe d'homologie du découpage 97
4.20 Diminution du nombre de composantes de découpage 98
4.21 Bifurcation triviale 98
4.22 Anneau cachant un disque vrillé 99
4.23 Disjonction de la projection de deux feuilles 100
4.24 Tore non générique pour l'élimination d'un S 100

4.25 Avant élimination du S 101
4.26 Après élimination du S 102
4.27 Extension de structure de contact équivalente à une restriction 103
4.28 Retournement d'orbites périodiques et grande amplitude 104
4.29 Retournement vrillé 105
4.30 Extension de structure de contact pour le calcul de la torsion 106
4.31 Distinction de deux classes d'isotopie par reconnaissance de motif . . 107
4.32 Tore non générique réalisant une permutation de tranches élémentaires 108
4.33 Multiplicité des formes normales 109
4.34 Deux exemples d'attachement de rocade 110

5.1 Diagramme de Kirby legendrien standard d'une variété de Seifert . . . 120
5.2 Remplissage pour les exemples d'enroulement -5 122
5.3 Diagramme de Kirby legendrien pour les exemples d'enroulement -5 123
5.4 Théorème de Thalès et réalisabilité 126
5.5 Estimation d'enroulement sur un anneau 128
5.6 Configuration dans le revêtement 133
5.7 Polygone de Giroux pour une structure de contact d'enroulement -1 sur un espace lenticulaire 136
5.8 Triangles pour l'étude des tores compressibles du feuillage de ξ_i . . . 136
5.9 Estimation d'enroulement sur un anneau 137
5.10 Calcul de l'enroulement local à partir de la formule de Pick 139
5.11 Calcul d'enroulement au-dessus d'un disque orbifold 141
5.12 Polygones de Giroux du lemme de recollement 143
5.13 Modification de la R–classe dans le cas flexible 148
5.14 Démonstration du lemme 5.24 153

Index

cône de Giroux, 80
classe d'Euler relative, 80
classe d'homologie
    associée à un feuilletage, 79
    associée à un retournement d'orbites, 69
    associée à un tore compressible, 81
connexion de selles rétrograde, 71
ξ–convexe, 68
courbure
    basique, 57
    d'Albert, 53
    de Krouglov, 58
    extrinsèque, 36
    moyenne, 36
    principale, 36
critère de Giroux, 72

découpage, 69
déplacement d'anneau, 88

feuillage
    général, 80
    persistant, 80
    principal, 81
feuilles, 80
feuilletage
    admissible, 79
    caractéristique, 67
    réglé, 69
    riemannien, 39
    singulier, 67
film, 67
forme normale
    sur un tore épais, 87
    sur un tore plein, 90
    sur une variété de Seifert, 26
formule de Pick, 113

graphe de Giroux, 71

laplacien pour un champ de plans, 54
lemme
    d'élimination, 72
    d'unicité, 70
    de croisement, 97
    de réalisation, 70
lieu de lumière, 43
lieu des tores compressibles, 81

mesure harmonique, 55
métrique
    associée, 38
    quasi-fibrée, 40

permutation de tranches, 88
polygone de Giroux, 80
propriété de Poincaré–Bendixson, 71
purement rotative, 75

réalisable, 125
reconnaissance de motifs, 109
retournement d'orbites, 69

scindé, 69
seconde forme fondamentale, 33
structure de contact
    élémentaire, 80
    définitions, 4
    de Levi-Civita, 12
    standard sur Sol, 16
    standard sur ST^*B, 11
    standard sur la sphère, 13
surface osculatrice, 34

tendue, 9
tranche élémentaire, 87

vrillée, 9

Bibliographie

[Alb83] Claude Albert. Invariants riemanniens des champs de plans. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 296(7) :329–332, 1983.

[Asi78] Daniel Asimov. Average Gaussian curvature of leaves of foliations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(1) :131–133, 1978.

[AZ03] Martin Aigner and Günter Ziegler. *Raisonnements divins*. Springer-Verlag, Paris, 2003. Including illustrations by Karl Hofmann.

[Bau04] Fabrice Baudoin. *An introduction to the geometry of stochastic flows*. Imperial College Press, London, 2004.

[Ben83] Daniel Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff. In *Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982)*, volume 107 of *Astérisque*, pages 87–161. Soc. Math. France, Paris, 1983.

[Bes87] Arthur Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Bla02] David Blair. *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, volume 203 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[BMP03] Michel Boileau, Sylvain Maillot, and Joan Porti. *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, volume 15 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[BMT06] Charles Boubel, Pierre Mounoud, and Cédric Tarquini. Lorentzian foliations on 3-manifolds. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 26(5) :1339–1362, 2006.

[BW58] W. M. Boothby and H. C. Wang. On contact manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 68 :721–734, 1958.

[Can93] Alberto Candel. Uniformization of surface laminations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 26(4) :489–516, 1993.

[Car84] Yves Carrière. Flots riemanniens. *Astérisque*, (116) :31–52, 1984. Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982).

[CC00] Alberto Candel and Lawrence Conlon. *Foliations. I*, volume 23 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[CC03] Alberto Candel and Lawrence Conlon. *Foliations. II*, volume 60 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[CH85] Shiing-Shen Chern and Richard Hamilton. On Riemannian metrics adapted to three-dimensional contact manifolds. In *Workshop Bonn 1984 (Bonn, 1984)*, volume 1111 of *Lecture Notes in Math.*, pages 279–308. Springer, Berlin, 1985. With an appendix by Alan Weinstein.

[Col97] Vincent Colin. Chirurgies d'indice un et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(6) :659–663, 1997.

[DG01] Fan Ding and Hansjörg Geiges. Symplectic fillability of tight contact structures on torus bundles. *Algebr. Geom. Topol.*, 1 :153–172 (electronic), 2001.

[EH01] John Etnyre and Ko Honda. Knots and contact geometry. I. Torus knots and the figure eight knot. *J. Symplectic Geom.*, 1(1) :63–120, 2001.

[EHN81] David Eisenbud, Ulrich Hirsch, and Walter Neumann. Transverse foliations of Seifert bundles and self-homeomorphism of the circle. *Comment. Math. Helv.*, 56(4) :638–660, 1981.

[Eli89] Yakov Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Invent. Math.*, 98(3) :623–637, 1989.

[Eli92] Yakov Eliashberg. Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42(1-2) :165–192, 1992.

[Eli96] Yakov Eliashberg. Unique holomorphically fillable contact structure on the 3-torus. *Internat. Math. Res. Notices*, (2) :77–82, 1996.

[ET98] Yakov Eliashberg and William Thurston. *Confoliations*, volume 13 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Gam01] Najoua Gamara. The CR Yamabe conjecture—the case $n = 1$. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 3(2) :105–137, 2001.

[Gar83] Lucy Garnett. Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. *J. Funct. Anal.*, 51(3) :285–311, 1983.

[Gei08] Hansjörg Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Ghi05a] Paolo Ghiggini. Strongly fillable contact 3-manifolds without Stein fillings. *Geom. Topol.*, 9 :1677–1687 (electronic), 2005.

[Ghi05b] Paolo Ghiggini. Tight contact structures on Seifert manifolds over T^2 with one singular fibre. *Algebr. Geom. Topol.*, 5 :785–833 (electronic), 2005.

[Ghi06] Paolo Ghiggini. Linear Legendrian curves in T^3. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 140(3) :451–473, 2006.

[Ghi08] Paolo Ghiggini. On tight contact structures with negative maximal twisting number on small Seifert manifolds. *Algebraic & Geometric Topology*, 8(1) :381–396, 2008.

[GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.

[Ghy88] Étienne Ghys. Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional foliations. *J. Funct. Anal.*, 77(1) :51–59, 1988.

[Gir91] Emmanuel Giroux. Convexité en topologie de contact. *Comment. Math. Helv.*, 66(4) :637–677, 1991.

[Gir94] Emmanuel Giroux. Sous-variétés osculatrices d'un champ de plans. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319(9) :979–980, 1994.

[Gir00] Emmanuel Giroux. Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces. *Invent. Math.*, 141(3) :615–689, 2000.

[Gir01a] Emmanuel Giroux. Structures de contact sur les variétés fibrées en cercles au-dessus d'une surface. *Comment. Math. Helv.*, 76(2) :218–262, 2001.

[Gir01b] Emmanuel Giroux. Sur les transformations de contact au-dessus des surfaces. In *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, volume 38 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 329–350. Enseignement Math., Geneva, 2001.

[GLS06] Paolo Ghiggini, Paolo Lisca, and András Stipsicz. Classification of tight contact structures on small Seifert 3-manifolds with $e_0 \geq 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(3) :909–916 (electronic), 2006.

[Gom98] Robert Gompf. Handlebody construction of Stein surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 148(2) :619–693, 1998.

[GS99] Robert Gompf and András Stipsicz. *4-manifolds and Kirby calculus*, volume 20 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[GS03] Paolo Ghiggini and Stephan Schönenberger. On the classification of tight contact structures. In *Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001)*, volume 71 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 121–151. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[GW83] Herman Gluck and Frank Warner. Great circle fibrations of the three-sphere. *Duke Math. J.*, 50(1) :107–132, 1983.

[HKM02] Ko Honda, William Kazez, and Gordana Matić. Convex decomposition theory. *Int. Math. Res. Not.*, (2) :55–88, 2002.

[HL83] Théodor Hangan and Robert Lutz. Champs d'hyperplans totalement géodésiques sur les sphères. In *Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982)*, volume 107 of *Astérisque*, pages 189–200. Soc. Math. France, Paris, 1983.

[Hon98] Ko Honda. Confoliations transverse to vector fields, 1998.

[Hon00a] Ko Honda. On the classification of tight contact structures. I. *Geom. Topol.*, 4 :309–368 (electronic), 2000.

[Hon00b] Ko Honda. On the classification of tight contact structures. II. *J. Differential Geom.*, 55(1) :83–143, 2000.

[Hon01] Ko Honda. Factoring nonrotative $T^2 \times I$ layers. *Geom. Topol.*, 2001.

[Hon02] Ko Honda. Gluing tight contact structures. *Duke Math. J.*, 115(3) :435–478, 2002.

[JN85a] Mark Jankins and Walter Neumann. Homomorphisms of Fuchsian groups to $\mathrm{PSL}(2,\mathrm{R})$. *Comment. Math. Helv.*, 60(3) :480–495, 1985.

[JN85b] Mark Jankins and Walter Neumann. Rotation numbers of products of circle homeomorphisms. *Math. Ann.*, 271(3) :381–400, 1985.

[Kim05] Jinhong Kim. Tight contact structures of certain Seifert fibered 3-manifolds with $e_0 = -1$. *Pacific J. Math.*, 221(1) :109–122, 2005.

[Kro08] Vladimir Krouglov. The curvature of contact structures on 3–manifolds. *Algebraic & Geometric Topology*, 8(3) :1567–1579, 2008.

[LM98] Paolo Lisca and Gordana Matić. Stein 4-manifolds with boundary and contact structures. *Topology Appl.*, 88(1-2) :55–66, 1998. Symplectic, contact and low-dimensional topology (Athens, GA, 1996).

[LM04] Paolo Lisca and Gordana Matić. Transverse contact structures on Seifert 3-manifolds. *Algebr. Geom. Topol.*, 4 :1125–1144 (electronic), 2004.

[Lut77] Robert Lutz. Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 27(3) :ix, 1–15, 1977.

[Mas08] Patrick Massot. Geodesible contact structures on 3-manifolds. *Geom. Topol.*, 12(3) :1729–1776, 2008.

[Mou05] Pierre Mounoud. Feuilletages totalement géodésiques, flots riemanniens et variétés de Seifert. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(4) :1411–1438, 2005.

[MS74] John Milnor and James Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[MS98] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1998.

[MW95] John McCarthy and Jon Wolfson. Symplectic gluing along hypersurfaces and resolution of isolated orbifold singularities. *Invent. Math.*, 119(1) :129–154, 1995.

[Nai94] Ramin Naimi. Foliations transverse to fibers of Seifert manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 69(1) :155–162, 1994.

[NP] Klaus Niederkrüger and Federica Pasquotto. Resolution of symplectic cyclic orbifold singularities.

[Pic99] Georg Pick. Geometrisches zur zahlenlehre. *Sitzungberichte Lotos Naturwissen Zeitschrift (Prague)*, 19 :311–319, 1899.

[Rei77] Bruce Reinhart. The second fundamental form of a plane field. *J. Differential Geom.*, 12(4) :619–627 (1978), 1977.

[Rei79] Bruce Reinhart. Foliations and second fundamental forms. In *Proceedings of the IV International Colloquium on Differential Geometry (Univ. Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1978)*, volume 15 of *Cursos Congr. Univ. Santiago de Compostela*, pages 246–253, Santiago de Compostela, 1979. Univ. Santiago de Compostela.

[Rol03] Dale Rolfsen. *Knots and links*. AMS Chelsea, 2003.

[Sch57] Sol Schwartzman. Asymptotic cycles. *Ann. of Math. (2)*, 66 :270–284, 1957.

[Spi79] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[ST94] Atsushi Sato and Takashi Tsuboi. Contact structures on closed manifolds fibered by the circle. *Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ.*, 33 :41–46, 1994.

[Sul76] Dennis Sullivan. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.*, 36 :225–255, 1976.

[Thu] William Thurston. The geometry and topology of three-manifolds, chapter 13.

[Wu04] Hao Wu. Tight contact small Seifert spaces with $e_0 \neq 0, -1, -2$, 2004.

[Wu06] Hao Wu. Legendrian vertical circles in small Seifert spaces. *Commun. Contemp. Math.*, 8(2) :219–246, 2006.

[Zeg93] Abdelghani Zeghib. Sur les feuilletages géodésiques continus des variétés hyperboliques. *Invent. Math.*, 114(1) :193–206, 1993.

Table des matières

Introduction **1**

I Structures de contact sur une variété riemannienne **29**

1 Courbures extrinsèques **31**

1.1 Surfaces osculatrices et seconde forme fondamentale 31

1.2 Structures de contact géodésibles 37

1.3 Formule de Bochner 44

2 Recherche d'une courbure intrinsèque **49**

2.1 Ce qu'en dit la théorie de Chern–Weil 49

2.2 Laplacien et mesures harmoniques 51

2.3 Prescription de courbure 55

II Outils de topologie de contact **63**

3 Résultats généraux **65**

3.1 Surfaces dans les variétés de contact 65

3.2 Feuilletages legendriens globaux 70

4 Tores épais et tores pleins **77**
4.1 Introduction et énoncés 77
4.2 Applications directes de la classification 90
4.2.1 Recollements et revêtements 90
4.2.2 Isotopies de surfaces ξ–convexes 91
4.3 Quelques éléments de démonstration 95

III Structures de contact sur les variétés de Seifert **113**

5 Enroulement strictement négatif **115**
5.1 Propriétés globales des structures de contact géodésibles 115
5.2 Exemples holomorphiquement remplissables 119
5.2.1 Les exemples de Gompf 119
5.2.2 Des exemples d'enroulement -5 121
5.3 Critère d'existence 123
5.3.1 Critères arithmétiques 123
5.3.2 Formes normales 127
5.3.3 Critère 129
5.4 Formes normales universellement tendues 129
5.5 Calculs d'enroulement 137
5.5.1 Calcul local 137
5.5.2 Calcul global 140
5.6 Classification 146
5.6.1 Cas flexible 146
5.6.2 Cas rigide 149
5.6.3 Structures de contact tangentes aux fibres 156

Table des figures **159**

Index **162**

Bibliographie **165**