



**HAL**  
open science

# Etude numérique de la localisation à l'aide de modèles de second gradient : Perte d'unicité et évolution de la taille de la zone localisée

Samah Al Holo-Al Radi

► **To cite this version:**

Samah Al Holo-Al Radi. Etude numérique de la localisation à l'aide de modèles de second gradient : Perte d'unicité et évolution de la taille de la zone localisée. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00348158

**HAL Id: tel-00348158**

**<https://theses.hal.science/tel-00348158>**

Submitted on 17 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée par

**Samah AL HOLO-AL RADI**

Ingénieur en génie Civil diplômée de l'université Syrienne

Pour obtenir le titre de DOCTEUR de  
**l'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I**

Spécialité : Mécanique

---

**Etude numérique de la localisation  
à l'aide de modèles de second gradient :  
Perte d'unicité et évolution de  
la taille de la zone localisée**

---

Date de soutenance : 30 Mai 2005

Composition du jury :

Président	M. Gioacchino VIGGIANI	Professeur de l'Université Joseph Fourier
Rapporteurs	M. Robert CHARLIER	Professeur ordinaire de l'Université de Liège
	M. Claudio TAMAGNINI	Professeur de l'Université de Perugia
Examineurs	M. René CHAMBON	Professeur de l'Université Joseph Fourier
	M. Pierre BESUELLE	Chargé de recherche au CNRS

Thèse préparée au sein du laboratoire Sols Solides Structures de Grenoble  
Laboratoire mixte : UJF - INPG - CNRS (UMR 5521)



# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué dans le laboratoire Sols, Solides, Structures de Grenoble au sein de l'équipe Déformation et Rupture.

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude à M. René CHAMBON, Professeur à l'université Joseph Fourier, qui a dirigé cette thèse. Je lui dois mes premiers pas dans la recherche. Sa disponibilité, ses conseils m'ont été précieux pour mener à bien ce travail.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à :

- M. Gioacchino VIGGIANI, Professeur de l'Université Joseph Fourier. J'exprime toute ma reconnaissance pour ses conseils et son dévouement.
- M. Robert CHARLIER, Professeur ordinaire de l'Université de Liège, et M. Claudio TAMAGNINI Professeur de l'Université de Perugia d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.
- M. Pierre BESUELLE, Chargé de recherche au CNRS et F.Collin pour leurs conseils sur l'utilisation du code Lagamine qui m'ont été d'un grand secours.

Je voudrais tout particulièrement remercier Cécile avec qui j'ai passé mes cinq ans de thèse dans le même bureau, et la relation privilégiée que j'ai eu.

Merci enfin à ceux qui m'ont aidé indirectement à ramener ce travail à terme Zohra et Gennyfere.

Je voudrais à présent remercier ce qui sont toujours présents dans mon coeur malgré la distance, ma grande famille en Syrie, mes parents et mes soeurs, je vous dois plus que je ne saurais l'exprimer. Ce mémoire leur est dédié.

Enfin, je réserve ma dernière mention à ma petite famille en France, mon mari Mahmoud et mes petites princesses Hamsa et Racha, sans le soutien de mon mari cette thèse n'aurait sans doute jamais vu le jour.

Samah AL HOLO  
le 19 juin 2005.



# Résumé

Nous présentons une étude numérique de la localisation des déformations en bande de cisaillement dans les géomatériaux.

Nous utilisons les modèles de second gradient locaux : sur problème de cisaillement dans un milieu unidimensionnel, et de simulation de creusement de puits bidimensionnels.

Dans un premier temps, nous avons réalisé une analyse du problème de cisaillement unidimensionnel avec la mécanique des milieux continus classique, et pour un comportement quasi-fragile élasto-plastique. Afin de jouer des calculs non restreintes, nous avons employé la méthode de longueur d'arc dans un code aux éléments finis unidimensionnel pour un milieu de second gradient. Nous avons choisi de réaliser notre expérience numérique en utilisant une loi de comportement plus réaliste.

Le modèle de second gradient bidimensionnel a été utilisé pour réaliser des simulations numériques d'excavation avec une loi de comportement quasi-fragile. Nous avons réalisé la simulation sur un puits complet en utilisant le code aux éléments finis en grandes déformation Lagamine.

Les résultats obtenus sont significatifs. Ils ont illustré la non unicité des solutions, dont différents modes localisés ont été obtenus, qualitativement semblable à la rupture de puits observés dans les laboratoires.

## Mots-clés

Localisation, Post-localisation, Modèles locaux de second gradient, Evolution de la taille de la bande de cisaillement, Comportement de snap back, Stabilité du puits, Grandes déformations, Eléments finis.



# abstract

We present some numerical studies of the localization of the deformation in shear bands in geo-materials. Local second gradient models were used for a one dimensional problem of shear localization inside a band , and for a simulation of the excavation of a well.

First of all we carried out an analysis of one dimensional problem of shear localization inside a band using a classical quasi-fragile constitutive equation. In order to obtain calculations without restriction, an arc length method has been introduced for a one dimensional second gradient computation. Then, we chose to carry out some numerical experiments with a more realistic law (involving a progressive degradation).

Second, a two dimensional second gradient model was used to perform numeric simulations of excavation in the case of a quasi-fragile constitutive equation. The simulations are performed on a complete well by using the two dimensional finite element code Lagamine. Since a second gradient model was used, the results obtained are objective. They illustrated the loss of uniqueness of the solutions and different localized patterns were obtained, qualitatively similar to the rupture of wells observed in laboratories.

## Keywords

Strain localization, Post-localization, Local second gradient models, Evolution of the size of shear bands, Snap back, Borehole stability problems, Large strain, Finite elements.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Etude théorique de la localisation des déformations en bande de cisaillement</b>	<b>17</b>
2.1	Position du problème : Les équations d'équilibre . . . . .	17
2.2	Le problème formulé en vitesse . . . . .	18
2.3	Les travaux de Hill . . . . .	19
2.4	Etude théorique de la localisation de la déformation en bande de cisaillement	21
2.4.1	La théorie de Rice 1976 . . . . .	21
2.4.2	La condition cinématique . . . . .	22
2.4.3	La condition statique . . . . .	22
2.4.4	La condition de bifurcation . . . . .	22
2.5	Cas des lois multi-linéaires . . . . .	23
2.5.1	Bifurcation continue et bifurcation discontinue . . . . .	24
2.6	Application aux loi incrémentalement non linéaires . . . . .	25
2.7	Le comportement en post-localisation . . . . .	27
2.8	Les approches continues pour la post-localisation . . . . .	27
2.8.1	Les milieux de Cosserat . . . . .	27
2.8.2	Les modèles non locaux . . . . .	29
2.9	Les approches discontinues . . . . .	31
2.10	Conclusion . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Les modèles du second gradient</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	Les modèles non locaux de second gradient . . . . .	36
3.3	Généralités sur les milieux continus avec micro-structure . . . . .	37
3.3.1	Le travail virtuel des efforts intérieurs . . . . .	38
3.3.2	Écriture du travail virtuel des efforts extérieurs . . . . .	39
3.3.3	L'équation d'équilibre . . . . .	39
3.3.4	Étude analytique d'un problème unidimensionnel dans un milieu avec microstructure . . . . .	42
3.4	Le modèle de Cosserat . . . . .	43
3.5	Les modèles du second gradient . . . . .	44
3.5.1	Modèle analytique unidimensionnelle . . . . .	45
3.5.2	Modèle analytique bidimensionnel . . . . .	49

3.5.2.1	Application du modèle second gradient dans une couche cisailé . . . . .	50
3.6	Conclusion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Modélisation numérique de la post-localisation avec la méthode des éléments finis</b>	<b>59</b>
4.1	Introduction . . . . .	59
4.2	Le principe général de la méthode des éléments finis pour un milieu classique	60
4.2.1	Calcul du résidu . . . . .	64
4.2.2	Assemblage des matrices élémentaires . . . . .	64
4.2.3	Procédure itérative . . . . .	65
4.2.4	Algorithme 1 . . . . .	65
4.3	Traitement numérique du modèle de second gradient unidimensionnel avec l'élément conforme . . . . .	66
4.3.1	Élément isoparamétrique . . . . .	67
4.3.2	Algorithme 2 . . . . .	70
4.3.3	Introduction de la loi . . . . .	71
4.3.4	Test numérique . . . . .	72
4.4	Traitement numérique d'un modèle bidimensionnel avec le multiplicateur de Lagrange . . . . .	73
4.4.1	Formulation dans le cas bidimensionnel . . . . .	75
4.4.2	Discrétisation aux éléments finis . . . . .	77
4.4.3	Transformation matricielle . . . . .	78
4.4.4	Les modèles constitutifs utilisés . . . . .	82
4.4.5	Calcul numérique de la matrice tangente . . . . .	84
4.4.6	Simulation numérique . . . . .	85
4.5	La méthode de longueur d'arc . . . . .	86
4.5.1	Description analytique de la méthode de longueur d'arc . . . . .	87
4.5.1.1	La procédure itérative dans le cas général . . . . .	88
4.5.2	Application au modèle du second gradient unidimensionnel . . . . .	90
4.5.3	Quelques modifications apportées dans le code Simpconf . . . . .	92
4.5.4	Algorithme 4 . . . . .	94
4.6	Conclusion . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Etude unidimensionnelle de la post-localisation dans un problème de cisaillement : l'évolution de la longueur des zones localisées</b>	<b>97</b>
5.1	Introduction . . . . .	97
5.2	Le problème de cisaillement dans une couche en mécanique des milieux continus classique . . . . .	98
5.2.1	Loi de comportement quasi- fragile . . . . .	100
5.2.1.1	Les solutions du problème . . . . .	101
5.2.1.2	Illustration des solutions possibles . . . . .	103
5.2.2	Un cas de loi de comportement ductile . . . . .	105
5.2.3	L'évolution de la bande du cisaillement dans un milieu du second gradient . . . . .	107
5.3	Résultats numériques . . . . .	108

5.3.1	Calcul en petites déformations . . . . .	110
5.3.2	Expérience numérique sans traitement spécial (petites déformations)	111
5.4	Taille de la bande de cisaillement . . . . .	116
5.5	Analyse de l'évolution de la taille de la bande en étudiant le comportement d'un point matériel situé sur un point de Gauss sur le bord de la bande . .	118
5.6	L'introduction d'imperfection . . . . .	121
5.7	Indépendance de maillage . . . . .	122
5.8	Calcul en grandes déformations . . . . .	126
5.9	Conclusion . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Simulation d'excavation en comportement quasi-fragile</b>	<b>131</b>
6.1	Introduction . . . . .	131
6.2	Etude bibliographique . . . . .	133
6.2.1	Observations expérimentales . . . . .	133
6.2.2	Les modèles analytiques . . . . .	135
6.2.3	Les modèles numériques . . . . .	136
6.3	Modélisation numérique avec le modèle du second gradient local . . . . .	138
6.3.1	Formulation générale du problème et implémentation numérique . .	138
6.4	Description du modèle . . . . .	139
6.4.1	Géométrie du problème et maillage . . . . .	139
6.4.2	Les conditions aux limites et le chargement . . . . .	140
6.5	Simulation numérique . . . . .	141
6.5.1	Les calculs effectués avec l'introduction d'imperfection . . . . .	141
6.5.2	Les calculs effectués à l'aide de tirage aléatoire . . . . .	144
6.5.3	Les calculs avec pression de confinement . . . . .	151
6.6	Conclusion . . . . .	152
<b>7</b>	<b>Conclusion Générale et perspective</b>	<b>159</b>



# Chapitre 1

## Introduction générale

La rupture dans les géomatériaux est souvent caractérisée par la formation de zones de déformations localisées, des zones de déformations cessent d'être homogènes pour évoluer vers des modes de déformations non-homogènes. Les zones de déformations localisées sont des zones de tailles réduites ; les déformations à l'intérieur de cette zone sont intenses alors qu'à l'extérieur de la zone de localisation, le matériau se déforme peu. Ces zones de déformations localisées sont le plus souvent des bandes de cisaillement. Dans le cas des essais de laboratoire celles-ci peuvent se multiplier dans un seul échantillon. Selon l'échelle d'observation, la rupture est caractérisée par le glissement relatif de deux blocs quasi rigides le long d'une surface plane dite surface ou plan de rupture et qui correspond à la bande de cisaillement ( Desrues [34]).

Les phénomènes de localisation des déformations peuvent se produire à grande échelle. La formation de failles dans un massif rocheux est le résultat d'un mode de localisation en bandes de cisaillement. On considère généralement les failles comme des surfaces de rupture plane, avec mouvement relatif du massif rocheux de part et d'autre du plan. Elles peuvent être assimilées à des plans de rupture en cisaillement. Ce phénomène de rupture est couramment rencontré dans les massifs naturels, dans les ouvrages de surface ou dans les ouvrages souterrains à grande profondeur (tunnels profonds, galeries minières, forages pétroliers).

Dans le cas où la modélisation des matériaux est basée sur une approche continue, de nombreux travaux ont été effectués pour modéliser le phénomène de localisation. Ils débouchent sur un problème qui ne permet pas de préciser la largeur de bande. Et nécessitent le recours à des techniques de régularisation.

Le point de vue théorique consiste à étudier ce phénomène comme le changement spontané du mode de déformation appelé aussi *une bifurcation de l'équilibre*. Cela pose différents points d'interrogation, car la notion de bifurcation qui exprime le passage d'une solution unique à un ensemble de solutions apporte de nombreuses difficultés à la fois du point de vue expérimental, mathématique et numérique.

En effet, l'apparition de bande localisée, lorsqu'un milieu continu est soumis à une sollicitation est caractérisé par une charge critique.

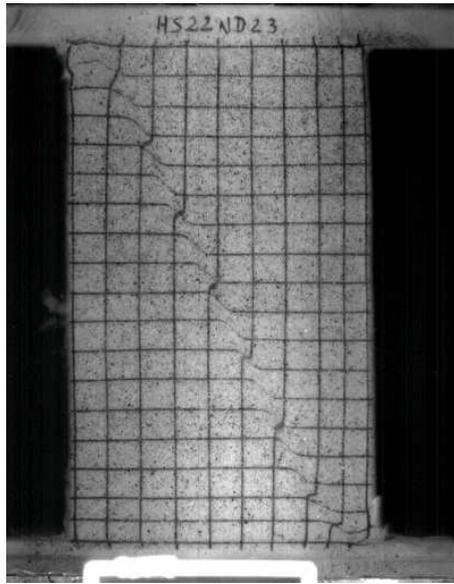


FIG. 1.1 – Mode de déformation localisé pour un essai biaxial, d'après Roger. [93].



FIG. 1.2 – Mode de déformation localisé in situ, réalisé par J.Desrues

Du point de vue mathématique, les solutions des équations régissant l'équilibre et les équations constitutives donnent des solutions différentes de la solution triviale.

Les résultats théoriques relatifs à la perte d'unicité de la solution sont établis pour une classe restreinte de problème. La définition de critère de bifurcation nécessite l'introduction d'hypothèses limitant leur champ d'application. De plus la théorie de la bifurcation permet de déterminer le moment d'apparition de la bande de cisaillement ainsi que son orientation. Par contre il ne permet pas de modéliser le régime en post-localisation.

L'évolution des zones dans lesquelles les gradients de déformations sont très élevés nécessite le passage à une échelle d'observation plus petite que l'échelle macroscopique, l'échelle dont la contribution des micro-structure à la déformation n'est pas négligeable. De plus la modélisation du régime post-localisation par la mécanique des milieux continus classiques ne permet pas de mettre en évidence les caractéristiques de ce régime. Or la largeur de la bande de cisaillement semble être une caractéristique interne du matériau. Avec les milieux classiques, la modélisation de la taille de la bande de cisaillement dépend de la taille du maillage utilisée pour la discrétisation en éléments finis du problème numérique, ce qui rend l'infinité de solutions en post-localisation dépendantes du choix de modélisateur.

Il est donc indispensable d'enrichir la description du milieu classique par l'intermédiaire des termes additionnels qui traduisent les phénomènes se produisant à l'échelle de la micro-structure, deux méthodes ont été proposées :

- La première consiste à enrichir le milieu continu classique. Nous citons : les modèles non locaux, les modèles de second gradient et les milieux de Cosserat.
- La seconde méthode introduit au sein de la structure, une discontinuité de déplacement, cela revient à un saut du champ des déplacements (une discontinuité forte) ou bien à un saut du champ des déformations (une discontinuité faible), Jirasek [54]. Dans le cadre des approches discontinues il est possible de modéliser le comportement des bandes de cisaillement à l'aide d'interface ( Crochepeyre [28]).

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la modélisation théorique et numérique du comportement en post-localisation avec les modèles locaux de second gradient, mais avant d'indiquer les principales étapes de ce travail, nous précisons la différence entre les modèles locaux et non locaux.

En effet, les modèles locaux de second gradient consistent à une description relativement fine de la cinématique pour tout point matériel, alors que dans les modèles de second gradient non locaux n'intervient que la dérivée de variables cinématiques ou variables internes (par exemple : les déformations plastiques).

Nous allons partir de la théorie générale des milieux à micro-structure. Cette théorie a été développée par Mindlin ( [65] et [66]) dans le cadre de l'élasticité linéaire. Par la suite Germain [41] a étudié cette formulation pour donner une forme plus générale en utilisant la méthode des puissances virtuelles.

Dans le chapitre 2 de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la théorie de la bifurcation comme un problème de perte d'unicité de la solution dans un problème aux limites en vitesse. Nous rappelons la formulation des problèmes aux limites en général et pour le problème de la localisation des déformations en particulier. Les résultats théoriques obtenus pour le problème de bifurcation en bande de cisaillement nécessitent des hypothèses rigoureuses qui ne sont valables que pour certaines lois de comportement. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à une présentation générale des modèles enrichis. Ils sont classés en deux branches :

- les modèles continus : ces modèles consistent à appliquer les équations constitutives en tout point matériel du milieu continu, nous allons présenter les modèles non locaux, les milieux de Cosserat, et les modèles du second gradient locaux.
- Les modèles discontinus : dans ce cadre, nous citons les modèles qui reposent sur la discontinuité des déplacements, nous présentons les travaux de Jirasék. Ensuite, nous présentons les modèles d'interface proposés par Chambon et Chambon [28] et Crochpeyre comme des modèles associés aux modèles discontinus.

Le chapitre 3, est consacré aux modèles du second gradient. Plusieurs travaux dans le cadre des modèles non locaux seront exposés.

Ensuite la formulation générale de la théorie des milieux avec micro-structure (Chambon et al.[20]) sera présentée. Nous allons voir comment plusieurs modèles enrichis peuvent être obtenus à partir de cette théorie, particulièrement les modèles de second gradient locaux. L'analyse des modèles de second gradient pour des milieux unidimensionnels et bidimensionnels sera abordé, les solutions analytiques seront exposées.

Dans le chapitre 4 nous rappelons les principes généraux de la méthode des éléments finis pour un milieu classique. L'analyse numérique des modèles unidimensionnels et bidimensionnels de second gradient sera détaillée.

Ensuite, et dans le but de pouvoir suivre l'évolution de la taille de la bande de cisaillement en post-localisation sans des conditions restreintes et de pouvoir modéliser un comportement snap back, la méthode de longueur d'arc sera introduite dans le code aux éléments finis unidimensionnel développé par EL Hassan [38]. La dernière partie de ce chapitre est donc consacrée à l'analyse de la méthode de longueur d'arc, les équations seront détaillées et la procédure itérative sera discuté dans ce chapitre.

Le chapitre ?? constitue une analyse théorique du problème de cisaillement unidimensionnel dans des milieux classiques dans le but d'illustrer l'incapacité des milieux usuels à modéliser le phénomène de post-localisation et de suivre l'évolution de la bande de cisaillement, le problème sera abordé pour une loi de comportement quasi fragile élasto-plastique, cette étude sera généralisée pour un comportement élasto-plastique avec un adoucissement brutal. Ensuite le problème de cisaillement sera étudié dans le cadre des milieux de second gradient locaux dans le but de modéliser numériquement ce problème avec la méthode de longueur d'arc.

Les résultats numériques de ce problème seront présentées dans ce chapitre. Les simulations numériques ont été réalisées pour les lois de comportement quasi-fragile et ductile dans le cadre des petites déformations ainsi que des grandes déformations.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude de certains résultats du modèle de second gradient bidimensionnel développé par Matsushima et al. ([99] et [20]) dans le code aux éléments finis Lagamine. Nous avons simulé un problème de forage d'un puits, la modélisation est réalisée dans le cas le plus simple. Pour cela nous avons supposé que les contraintes initiales sont isotropes dans le plan du milieu avant le creusement.

Les résultats ont été obtenus à l'aide des différentes procédures d'initialisation : l'introduction d'imperfection dans le milieu et l'initialisation aléatoire des processus itératifs de résolution des équations de l'équilibre sur un pas de temps. Ces procédures d'initialisations ont été indispensables pour simuler les essais avec des déplacements nuls aux points de la frontière extérieure, alors que d'autres essais où les pressions sont supposées constantes sur les points de la frontière extérieure se localisent à un moment où la zone plastifiée est relativement large sans avoir besoin d'initialisation aléatoire ou d'une imperfection matérielle.



# Chapitre 2

## Etude théorique de la localisation des déformations en bande de cisaillement

Dans ce chapitre, le phénomène de localisation des déformation en bande de cisaillement est abordé comme un problème de bifurcation. L'étude de ce problème de bifurcation est associé à la perte d'unicité. Il est indispensable dans des calculs numériques effectuées au moyen de la méthode des éléments finis, de savoir si une solution apportée par une simulation numérique est unique ou non.

Ce chapitre est divisé en deux parties. La première traite le problème de bifurcation comme une perte d'unicité des solutions dans un problème aux limites en vitesse. Les résultats théoriques seront présentés d'abord pour un problème général et ensuite pour un problème particulier qui est la localisation des déformations. Nous allons voir que les résultats théoriques laissent le problème largement ouvert pour de nombreuses lois constitutives. Le passage aux théories en post-localisation sera fait dans une deuxième partie. Différents modèles enrichis seront présentés, l'introduction de la notion de longueur interne permettant de limiter le nombre de solutions du problème et de préciser la largeur de la bande.

### 2.1 Position du problème : Les équations d'équilibre

Le problème consiste à étudier l'évolution d'un milieu continu soumis à une sollicitation entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$ . Dans cette étude on parle de formulation en grande transformation, cette étude est restreinte aux matériaux non visqueux. Les sollicitations se réduisent à des sollicitations quasi-statiques et il n'y a aucun terme d'inertie à prendre en compte, ce qui réduit le temps à une variable d'évolution n'influençant pas les phénomènes.

L'écriture des équations d'équilibre à un instant donné  $t \in [t_0, t_1]$  est exprimée au moyen du principe de puissance virtuelle. Les équations d'équilibre sont écrites à l'instant  $t$  :

Pour tout champ cinématiquement admissible

$$\int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^t \frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial x_j^t} d\Omega^t - \int_{\Omega^t} \rho^t f_i^t \dot{u}_i^* d\Omega^t - \int_{\Gamma_\sigma^t} t_i^t \dot{u}_i^* d\Gamma^t = 0 \quad (2.1)$$

où :

- $\Omega^t$  volume défini par le solide considéré à l'instant  $t$ .
- $\Gamma_\sigma^t$  partie de la frontière totale  $\Gamma^t$  sur laquelle les contraintes sont supposées connues à l'instant  $t$ . Ces forces sont définies par unité de surface.
- $\Gamma_u^t$  partie de la frontière totale  $\Gamma^t$  sur laquelle les déplacements sont supposés connus à l'instant  $t$ .
- $\sigma_{ij}^t$  sont les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy à l'instant  $t$ .
- $\dot{u}_i^*$  sont les composantes du champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissibles à l'instant  $t$ , (notons que les champs virtuels cinématiquement admissible doivent être dérivables et que  $\dot{u}^*(0) = 0$  sur  $\Gamma_u^t$ ). Les  $(\star)$  désignent les quantités virtuelles
- $t_i^t$  sont les composantes des forces appliquées aux frontières et supposées connues à l'instant  $t$ . Ces forces sont définies par unité de surface.
- $\rho^t$  champ de masse volumique à l'instant  $t$ .
- $f_i^t$  composantes des forces volumiques supposées connues à l'instant  $t$ . Ces forces sont définies par unité de masse.

## 2.2 Le problème formulé en vitesse

La formulation du problème en vitesse consiste à définir des amorces de chemin d'équilibre, plutôt que des chemins d'équilibre. Le problème en vitesse est obtenu en écrivant la limite quand  $\Delta t$  tend vers zéro, de la différence entre l'équation (2.1) écrite à l'instant  $t + \Delta t$  et la même équation écrite à l'instant  $t$ . Nous supposons que les conditions aux limites se restreignent uniquement à des termes des pressions.

Pour tout champ cinématiquement admissible  $\dot{u}_i^*$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^t} [\sigma_{ik}^t + \sigma_{ik}^t \frac{\partial \dot{u}_l}{\partial x_l^t} - \sigma_{ij}^t \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j^t}] \frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial x_k^t} d\Omega^t \\
& - \int_{\Gamma_\sigma^t} [p^t n_i^t + p^t [\frac{1}{dA^t} \varepsilon_{ijk} v^t \omega^t_m [\delta_{jl} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_m^t} + \delta_{km} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_l^t}]]] \dot{u}_i^* d\Gamma^t \\
& - \int_{\Omega^t} \rho^t f_i^t \dot{u}_i^* d\Omega^t = 0 \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$dA^t$  est la surface élémentaire.

Le développement des calculs est présenté par Crochepeyre [28]. Les conditions aux limites sur la frontières  $\Gamma_\sigma^t$  se réduisent à des pressions notées  $p$ .

En petites déformations la formulation (2.2) devient pour tout champ cinématiquement admissible  $\dot{u}_i^*$  :

$$\int_{\Omega^0} \dot{\sigma}_{ik}^t \frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial x_k^0} d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} \rho^t f_i^t \dot{u}_i^* d\Omega^0 - \int_{\Gamma_\sigma^0} p^t n_i^0 \dot{u}_i^* d\Gamma^0 = 0 \quad (2.3)$$

## 2.3 Les travaux de Hill

La théorie de Hill [48] a été développée pour un problème formulé en vitesses. Pour ce problème, il considère un solide de volume  $\Omega$ . Les positions initiales et courantes des

points du milieu sont désignées par les coordonnées cartésiennes  $x_i^0$  et  $x_i^t$ . La contrainte est définie par le tenseur  $s_{ij}$  que Hill dénomme tenseur nominal qui est en fait le transposé du tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff  $n^o1$ , qui s'exprime par rapport au tenseur de contrainte de Cauchy  $\sigma_{ij}$  par :

$$s_{ij} = \sigma_{ik}^t \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k^t} \det(J^{0t}) \quad (2.4)$$

où  $\det(J^{0t})d\Omega^0 = d\Omega^t$

Hill démontre que l'unicité du problème formulé en vitesse est assurée si la relation :

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{s}_{ij} \frac{\partial \Delta \dot{u}_j}{\partial x_i} d\Omega > 0 \quad (2.5)$$

est vérifiée pour tout couple de champs de vitesse  $\dot{u}^1$  et  $\dot{u}^2$  continus et différentiable et vérifiant les conditions aux limites cinématiques sur  $\Gamma_u$ . Le terme  $\Delta$  correspond ici à la différence entre deux champs alternativement admissibles, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u}_j &= \dot{u}_j^2 - \dot{u}_j^1 \\ \Delta \dot{s}_{ij} &= \dot{s}_{ij}^2 - \dot{s}_{ij}^1 \end{aligned}$$

Le critère d'unicité est interprété de la façon suivante : tant que le produit sur le volume est positif, la solution du problème formulé en vitesse est unique, dès que le produit devient nul, cela signifie qu'une réponse donnée peut être fournie par deux sollicitations distinctes, d'où la perte d'unicité. La relation d'unicité de Hill (2.5) est exprimée en grande transformation. Dans le cas des petites déformations, la condition d'unicité (2.5) devient :

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV > 0 \quad (2.6)$$

où  $\dot{\sigma}$  représente le taux de contrainte de Cauchy, et  $\dot{\epsilon}$  le taux de déformation. Dans ce cas , et pour certains modèles le critère (2.6) est vérifié si une condition plus restrictive est satisfaite :

*Pour tout point de  $\Omega$*

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} > 0 \quad (2.7)$$

Pour certaines lois l'unicité est satisfaite si en chaque point du solide, le travail du second ordre est positif

$$d^2W = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0 \quad (2.8)$$

Le critère (2.8) n'est pas un critère applicable à toutes les lois. Il n'a été démontré que pour les lois élasto-plastiques à un mécanisme, les modèles d'endommagement, et les modèles hypoplastiques (Chambon [19]).

L'analyse de bifurcation est délicate avec des lois constitutives non linéaires. L'analyse peut parfois être simplifiée à l'étude d'un problème linéaire ce qui nous donne des résultats utilisables :

- **Cadre des lois élasto-plastiques standard**

Hill ([46], [48]) a introduit la notion de solide linéaire de comparaison . Ce solide est un solide fictif qui pour toutes les sollicitations possibles, reproduit le comportement en charge du solide élasto-plastique réel, les mécanismes plastiques étant tous activés. Hill démontre que la bifurcation dans le solide réel ne peut précéder celle du solide linéaire de comparaison.

- **Les cadre de lois l'élasto-plasticité non standard**

Huckel et Maier [49], Raniecki [83], Raniecki et Bruhns [84], ainsi que Bigoni et Hueckel [7] ont formulé des conditions suffisantes d'unicité pour des lois élasto-plastiques non standard à un mécanisme.

Raniecki et Bruhns ont introduit de nouveaux solides linéaires de comparaison (ces derniers étant des matériaux standards) dans le but de réaliser un encadrement du chargement critique pour lequel une bifurcation est possible en définissant deux limites inférieures et supérieures de bifurcation du solide réel.

Le solide de comparaison qui permet d'obtenir la borne inférieure du chargement qui provoquera la bifurcation possède le tenseur constitutif d'un matériau standard, avec introduction d'un paramètre scalaire choisi a priori constant dans le domaine à étudier. Ce paramètre très important doit donc être ajusté pour optimiser la borne inférieure de bifurcation. Le solide linéaire de comparaison qui permet d'obtenir la borne supérieure de bifurcation du solide réel correspond à la charge plastique dans le solide. La loi de comportement qui lui est associée est donc celle du solide élasto-plastique réel sur un chemin de poursuite du chargement.

- **Les lois incrémentales non linéaires**

Chambon et Caillerie ([9],[10]) ont mené des travaux en petites déformations sur la loi incrémentale non linéaire hypoplastique développé par Chambon et al. ([13], [12], [15]). Cette loi est définie par l'équation constitutive reliant le taux de contrainte de Cauchy au taux de déformation

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{b}' \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|) \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}'$  sont deux tenseurs constitutifs dépendant uniquement de l'état du matériau considéré.

Chambon et Caillerie ([9],[10]) ont alors établi deux théorèmes prouvant respectivement l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites formulées en vitesses utilisant une loi constitutive incrémentalement non linéaire CLoE, qui est un modèle hypoplastique développé par Chambon et al. ([15], [12], [13]). En particulier, ils ont montré que la positivité du travail du second ordre (défini par l'équation 2.8) en tout point du solide était une condition suffisante d'unicité de la solution du problème aux limites formulée en vitesse.

## 2.4 Etude théorique de la localisation de la déformation en bande de cisaillement

La localisation des déformations en bande de cisaillement est analysée comme une bifurcation pour laquelle le mode alternatif des déformations est supposé. Le choix de cette hypothèse est guidé par les observations expérimentales in situ et au laboratoire. Les premiers travaux relatifs à l'étude théorique de la localisation remontent aux travaux d'Hadamard [44]. Ces travaux reposent sur l'analyse de la vitesse de propagation d'ondes d'accélération dans les solides élastiques linéaires. Ensuite une approche quasi-statique a été introduite par Rice [86], Hill et Hutchinson [47], Rudnicki et Rice [90], Rice [88]. Ces travaux ont permis d'intégrer dans le cadre général de la mécanique des milieux continus, les concepts de localisation du mode de déformation.

### 2.4.1 La théorie de Rice 1976

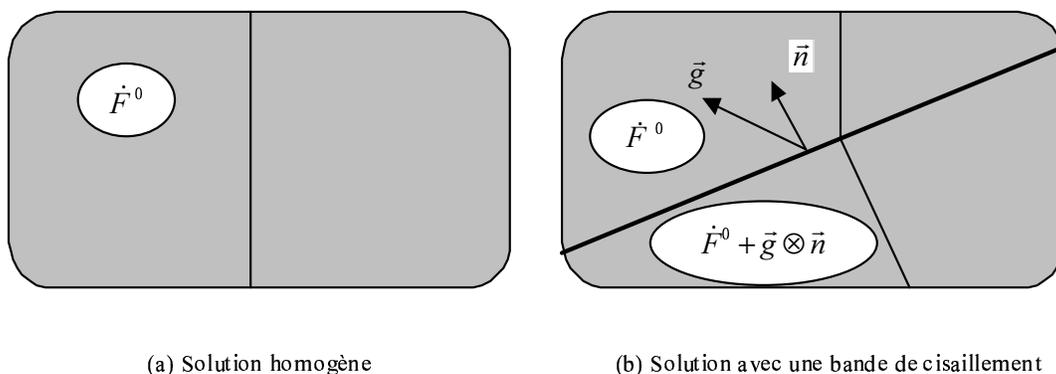


FIG. 2.1 – Principe de l'analyse de bifurcation en bande de cisaillement.

Le développement effectué par Rice [89] suppose que le milieu étudié est infini et homogène vis à vis des variables d'état (contrainte, déformation,...) ; et que le problème se limite aux solides non visqueux. Ces hypothèses permettent d'étudier la localisation de la déformation comme un problème de bifurcation et l'existence d'une solution homogène au problème formulé en vitesse est supposée. Ayant ainsi défini le cadre de l'étude, l'objectif de Rice [89] est de rechercher si une déformation suivant un mode localisé peut constituer une autre solution que le mode homogène. (Cf. la figure 2.1)

### 2.4.2 La condition cinématique

On définit  $\underline{\dot{F}}^0$  le gradient de vitesse dans le milieu homogène, à l'extérieur de la bande. Soit  $\underline{\dot{F}}^{int}$  le gradient de vitesse dans la bande. On suppose que la relation liant les gradients de vitesse dans la bande et à l'extérieur de la bande dans un repère global du milieu s'écrit de la façon suivante :

$$\underline{\dot{F}}^{int} = \underline{\dot{F}}^0 + \underline{g} \otimes \underline{n} \quad (2.10)$$

–  $\underline{n}$  : vecteur unitaire normal à la bande de cisaillement.

–  $\underline{g}$  : vecteur quelconque

En notation indicielle, on obtient :

$$\dot{F}_{ij}^{int} = \dot{F}_{ij}^0 + g_i n_j \quad (2.11)$$

### 2.4.3 La condition statique

L'équilibre requiert la continuité de la vitesse du vecteur contrainte sur la frontière séparant la bande du milieu extérieur. La dérivée temporelle (par rapport à un repère fixe) de la contrainte de cauchy est notée  $\underline{\dot{\sigma}}^0$  à l'extérieur de la bande et  $\underline{\dot{\sigma}}^{int}$  à l'intérieur de la bande. D'après Rudnicki et Rice [90] l'équation d'équilibre, à l'interface entre la bande et l'extérieur, exprimée en vitesses, donne :

$$\underline{\dot{\sigma}}^{int} \underline{n} = \underline{\dot{\sigma}}^0 \underline{n} \quad (2.12)$$

### 2.4.4 La condition de bifurcation

L'introduction d'une équation constitutive traduisant le comportement du matériau est indispensable pour résoudre le problème. La loi de comportement du matériau peut être présentée sous la forme suivante :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{h}(\underline{\dot{F}}) \quad (2.13)$$

où

- $\underline{\dot{\sigma}}$  représente la dérivée de la contrainte de Cauchy par rapport à un repère fixe et
- $\underline{h}$  une fonction tensorielle dépendant de l'état.

En remplaçant la condition cinématique (2.10) et la loi de comportement (2.13) dans la condition statique (2.12), on obtient la condition de bifurcation générale :

$$[\underline{h}(\underline{\dot{F}}^0 + \underline{g} \otimes \underline{n}) - \underline{h}(\underline{\dot{F}}^0)] \quad (2.14)$$

La naissance de la bande de cisaillement a lieu s'il existe un vecteur  $\underline{n}$  et un vecteur  $\underline{g}$  non nul tel que l'équation (2.14) est vérifiée.

Dans la cas développé par Rice [88] pour une loi de comportement linéaire, on peut écrire

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{D} \cdot \underline{\dot{F}} \quad (2.15)$$

Où  $D$  est un tenseur constitutif.

Ainsi, la condition de bifurcation générale (2.14) devient après simplification :

$$\det(\underline{n} \cdot \underline{D} \cdot \underline{n}) = 0 \quad (2.16)$$

Nous pouvons faire ici deux remarques :

*Remarque 1* : Le critère de bifurcation de Rice (l'équation 2.16) est décrit dans le cas des lois de comportement linéaire.

*Remarque 2* : Le critère (2.16) est également appelé critère d'ellipticité car il correspond, dans le cas d'une analyse linéaire, à la perte d'ellipticité de système d'équation aux dérivées partielles gouvernant l'équilibre local.

## 2.5 Cas des lois multi-linéaires

Rudnicki et Rice [90] ont été les premiers à étudier les lois multi-linéaires, et dans un cadre plus général, Chambon [11] a établi un théorème fondamental permettant l'analyse de la bifurcation pour les lois multi-linéaires. Les hypothèses sont les suivantes :

La loi de comportement (2.15) est divisée en  $n$  relation linéaire liant  $\dot{F}$  à  $\dot{\sigma}$  de telle sorte que chaque relation linéaire soit valable pour des valeurs de  $\dot{F}$  appartenant à un hypercône noté  $H^\alpha$ . La loi pourra ainsi s'écrire :

$$\dot{F} \in H^\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma}_{ij} = N_{ijkl}^\alpha \dot{F}_{kl} \quad \text{pour } \alpha \in (0, 1, \dots, n-1) \quad (2.17)$$

On suppose de plus que l'ensemble  $n$  des hypercônes forme une partition de l'espace des valeurs de  $\dot{F}$ . Ça implique enfin que sur la frontière entre deux hypercônes  $H^\alpha$  et  $H^\beta$ , la réponse obtenue au moyen des tenseur  $\underline{N}^\alpha$  et  $\underline{N}^\beta$  est identique :

$$(N_{ijkl}^\alpha - N_{ijkl}^\beta) \dot{F}_{kl} = 0 \quad (2.18)$$

La surface entre deux hypercônes  $H^\alpha$  et  $H^\beta$  est un hyperplan dont la normale  $a_{kl}^{\langle\alpha/\beta\rangle}$  a pour composante

$$a_{kl}^{\langle\alpha/\beta\rangle} \dot{F}_{kl} = 0 \quad (2.19)$$

L'exposant  $\langle\alpha/\beta\rangle$  signifie qu'il s'agit de la frontière entre les deux hypercônes  $H^\alpha$  et  $H^\beta$ . Comme tous les champs de vitesse  $\dot{F}_{kl}$  vérifiant (2.18) doivent également vérifier (2.19), on en déduit la relation :

$$(N_{ijkl}^\alpha - N_{ijkl}^\beta) = b_{ij}^{\langle\alpha/\beta\rangle} a_{kl}^{\langle\alpha/\beta\rangle} \quad (2.20)$$

Dans cette définition très générale entrent toutes les catégories de modèles élastoplastiques ainsi que les modèles développés.

En supposant que  $\underline{F}^0$  et  $\underline{F}^{int} = \underline{F}^0 + g \otimes n$  appartiennent respectivement aux hypercônes  $H^0$  et  $H^{int}$ , on obtient :

$$[(N_{ijkl}^{int} - N_{ijkl}^0) \dot{F}_{kl} + N_{ijkl}^{int} g_k n_l] n_j = 0 \quad (2.21)$$

on suppose que le comportement est décrit par le même tenseur constitutif entre l'intérieur et l'extérieur de la bande, alors  $\dot{F}^0$  et  $\dot{F}^{int}$  appartiennent au même hypercône ( $H^0 = H^{int}$ ). On retrouve ainsi que le critère de Rice (2.16) correspond à l'étude d'une loi linéaire :

$$\det(N_{ijkl}^{int} n_j n_l) = 0 \quad (2.22)$$

### 2.5.1 Bifurcation continue et bifurcation discontinue

Dans le cadre des lois multi-linéaires, on définit les notions de bifurcation continue et bifurcation discontinue au sens de Rice [89]. La bifurcation continue se traduit par la description du comportement à l'extérieur et à l'intérieur de la bande par un même tenseur constitutif (2.22), dont on limite la recherche du couple  $\underline{g}$  et  $\underline{n}$  à ceux pour lesquels  $\underline{N}^{int}$  est assez proche de  $\underline{N}^0$  de telle sorte que dans ce voisinage

de  $\underline{F}^0$  la loi puisse s'écrire comme en équation (2.13). Alors que avec la bifurcation discontinue, la possibilité pour  $\underline{N}^{int}$  de ne pas appartenir au domaine proche de  $\underline{N}^0$  où la loi peut s'exprimer comme en (2.13). Dans un cadre plus général, Chambon [11] a étudié aussi bien la bifurcation continue que la bifurcation discontinue (sous forme de localisation en bande de cisaillement) pour des lois incrémentalement multi-linéaire. Il a ensuite établi un théorème fondamental lui permettant l'analyse de la bifurcation de ces lois. Ainsi, il a pu retrouver des résultats classiques antérieurs. Les termes,  $N^\alpha$  sont continus par rapport aux variables d'états donnée et des paramètres de chargement.

Chambon [11] a établi le théorème suivant : au cours d'un chargement monotone repéré par le paramètre strictement croissant  $\lambda$ , la valeur critique  $\lambda^c$  (valeur minimale pour laquelle la bifurcation est possible), correspond au moins à une solution non triviale ( $\underline{F}^0 + \underline{g} \otimes \underline{n}$ ) telle que cette solution :

- ou bien appartienne à une frontière de zone.
- ou bien telle que  $\underline{g}$  ait des composantes infinies

A partir de ce théorème, il a établi une méthode générale de résolution du problème complet de localisation pour les modèles multi-linéaires. Par exemple, on appliquant cette méthode aux lois élasto-plastique à deux zones, il a pu retrouver les résultats de Rice et Rudnicki [91].

## 2.6 Application aux loi incrémentalement non linéaires

Des modèles basés sur une formulation entièrement non linéaire ont été développés pour décrire le comportement des géomatériaux. Pour cette famille de lois, se pose aussi le problème de la bifurcation continue et de la bifurcation discontinue. La plupart du temps, ces modèles admettent une linéarisation directionnelle au voisinage d'une direction

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\underline{N}}(\underline{dir} \underline{\dot{F}}^*) : \underline{\dot{F}} + \underline{\dot{t}} \quad (2.23)$$

avec :

$$\lim_{\underline{dir} \underline{\dot{F}} \rightarrow \underline{dir} \underline{\dot{F}}^*} \frac{\underline{\dot{t}}}{\|\underline{dir} \underline{\dot{F}} - \underline{dir} \underline{\dot{F}}^*\|} = 0 \quad (2.24)$$

Comme l'ont souligné Desrues et Chambon [36], l'étude n'est jamais réalisée de façon complète, elle est bien souvent simplifiée. Ces derniers ont classé les différents types d'études réalisées sous différentes hypothèses restrictives :

- Première hypothèse : elle considère que l'intensité du gradient de vitesse à l'intérieur de la bande est négligeable devant celle du milieu homogène :

$$\underline{g} \otimes \underline{n} \ll \underline{\dot{F}}^0 \quad (2.25)$$

alors :

$$F^{\dot{int}} = \dot{F}^0 + g \otimes n \approx \dot{F}^0 \quad (2.26)$$

On obtient :

$$dir F^{\dot{int}} \approx dir \dot{F}^0 \quad (2.27)$$

Enfin nous avons :

$$det(n.D(dir \dot{F}^0).n) = 0 \quad (2.28)$$

On retrouve une forme analogue au critère de localisation classique utilisé pour les modèles linéaires (équation 2.22). Cette approche a été adoptée par Rudnicki et Rice [90] et Vardoulakis [101]. Cependant, cette hypothèse semble peu réaliste au vu des résultats expérimentaux qui montrent une intensité très importante de la déformation à l'intérieur de la bande par rapport à celle en-dehors de la bande.

- Deuxième hypothèse : l'intensité du gradient de vitesse à l'intérieur de la bande est largement supérieure à celle du milieu homogène :

$$g \otimes n \gg \dot{F}^0 \quad (2.29)$$

alors :

$$F^{\dot{int}} = \dot{F}^0 + g \otimes n \approx g \otimes n \quad (2.30)$$

On obtient la condition de bifurcation qui est non linéaire :

$$n .h(g \otimes n) = 0$$

- Troisième hypothèse : il est supposé que la réponse fondamentale a la forme d'un cisaillement parallèle à la bande :

$$g \otimes n = \mu \dot{F}^0 \quad (2.31)$$

alors :

$$F^{\dot{int}} = (1 + \mu)\dot{F}^0 \quad (2.32)$$

On suppose par ailleurs que :

$$dir(F^{\dot{int}}) = dir(\dot{F}^0)$$

. Le critère de bifurcation classique est alors obtenu.

- Le cas général : si aucune de ces hypothèses n'est utilisée, on obtient l'équation suivante :

$$n.D(\dot{F}^0 + g \otimes n) = n.D(\dot{F}^0) \quad (2.33)$$

Pourtant il n'existe aucune méthode générale permettant de résoudre théoriquement le problème complet de localisation avec des modèles incrémentalement non linéaires.

Généralement, l'exploration numérique est nécessaire. Cependant, certaines formulations de l'équation constitutive permettent de réaliser une étude analytique complète. Ainsi, Chambon et Desrues [12] ont étudié un modèle heuristique non linéaire très simple dans sa formulation en considérant un matériau incompressible non sensible à la contrainte moyenne avec une surface limite de Von Misès standard et

une règle d'écoulement associée. Ils ont démontré par une étude analytique que l'approche discontinue au sens de Rice [88] correspondant à la solution générale de l'équation (2.33) fournit une bifurcation plus précoce que l'approche continue de la loi linéarisée.

Chambon et al ([13], [14]) ont développé la loi incrémentale non linéaire CLoE dans le but d'étudier le problème général de la localisation sans hypothèse restrictive. CLoE est un modèle hypoplastique. Il est définie en petites déformations par l'équation constitutive reliant le taux de contrainte de Cauchy au taux de déformation :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{b}' \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|) \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}'$  sont deux tenseurs constitutifs dépendant uniquement de l'état considéré. Sous l'hypothèse d'évolution continue des tenseurs par rapport aux variables d'état, la localisation de la déformation, pour tout mode hypoplastique et pour CLoE, est possible, dès qu'il existe un vecteur unitaire  $\underline{n}$ , désignant la normale à la bande, tel que :

$$\left\| \frac{1}{2} (\Lambda_{ki}^{-1} b_{ij} n_j n_l + \Lambda_{li}^{-1} b_{ij} n_j n_k) \right\| - 1 = 0 \quad (2.35)$$

avec :

$$\Lambda_{ik} = D_{ijkl} n_j n_l$$

$$D_{ijkl} = \frac{1}{2} (A_{ijkl} + A_{ijlk} - \sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \sigma_{jl} - \delta_{il} \sigma_{kj})$$

$\delta_{ij}$  symbole de Kronecker

$$b_{ij} = A_{ijkl} b'_{kl}$$

## 2.7 Le comportement en post-localisation

Le comportement en post-localisation désigne la phase suivant l'apparition de la localisation dans le milieu. Les travaux expérimentaux ont montré que l'apparition de la bande peut être accompagnée par différents effets.

Dans l'étude des phénomènes de couplage hydromécanique, la perméabilité du matériau est un facteur important. Après l'apparition de la bande, il peut exister des zones dans lesquelles la perméabilité devient critique. Ainsi la perméabilité globale du matériau peut être affectée par la taille de la bande (Bésuelle [4]).

La mécanique des milieux continus classiques est incapable de rendre compte des observations, notamment la dimension de la zone localisée.

Afin de traiter ce problème, deux approches sont possibles :

- La première comprend les approches continues enrichies où les équations constitutives sont modifiées par l'introduction d'un paramètre de longueur interne, la continuité du champ de déplacement est postulée, et les équations constitutives qui résultent de l'enrichissement sont appliquées en tout point du solide. Nous citons les modèles non locaux, les milieux de Cosserat, et les modèles du second gradient locaux. Dans notre mémoire les travaux numériques seront effectués sur

des modèles locaux appelés modèles du second gradient. Nous avons donc prévu de détailler ces modèles dans les chapitres suivants.

- La seconde comprend les approches discontinues. Il existe deux types de discontinuités, on distingue la discontinuité forte caractérisé par un saut de déplacements (champ des déformations infini), et la discontinuité faible caractérisées par un saut de déformations. Nous citons Jirasek [53].

D'autres travaux peuvent être associés à cette approche, et notamment le concept de bande de cisaillement considère cette zone de discontinuité comme une surface de contact ou une interface entre deux solides. Nous présenterons un exemple proposé par Chambon et Crochepeyre [28]

## 2.8 Les approches continues pour la post-localisation

### 2.8.1 Les milieux de Cosserat

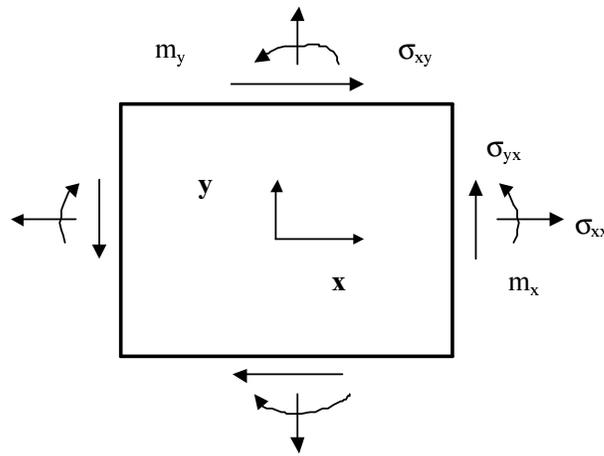


FIG. 2.2 – Les variables statiques dans le milieu de Cosserat

La théorie des milieux continus de Cosserat a été développée par Cosserat et Cosserat [26]. Elle a ensuite été appliquée par Mindlin [64, 65], avant d'être utilisée et développée par de nombreux auteurs dans le cadre de l'élastoplasticité (Mülhaus et Vardoulakis [70], Mülhaus [71, 72], Vardoulakis et Sulem [103], Sulem et Vardoulakis [104], De Borst [33] ).

Nous la présentons ici pour le cas plan écrite dans un repère  $(O; (x, y))$  (Sluys [?], El Hassan [38]). La théorie consiste à ajouter un degré de liberté supplémentaire à chaque point matériel sous la forme d'une micro-rotation d'axe perpendiculaire au plan  $(x, y)$ . Ainsi chaque micro-élément est caractérisé par un champ de déplacement classique composé de deux déplacements  $u_x$  et  $u_y$  et d'une rotation  $\omega_z$ . Le vecteur des déplacements généralisés d'un milieu plan de Cosserat peut donc s'écrire

$$[u]^T = [u_x, u_y, \omega_z] \quad (2.36)$$

Comme dans un milieu classique, les déformations normales sont définies par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.37)$$

et

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.38)$$

Les déformations de cisaillement sont définies de manière différente

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \omega_z \quad (2.39)$$

et

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \omega_z \quad (2.40)$$

où  $\varepsilon_{xy}$  et  $\varepsilon_{yx}$  peuvent être vues comme la déformation relative entre les macro-gradients du déplacement  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$  ou  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$  et la micro-rotation  $\omega_z$ .

La théorie de Cosserat introduit aussi de nouvelles quantités cinématiques appelées les micro-courbures :

$$\kappa_{xz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad (2.41)$$

et

$$\kappa_{yz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (2.42)$$

Le tenseur des déformations est divisé en deux parties, la première est symétrique et lié aux taux des macro-déformations, alors que la deuxième partie est non symétrique, et correspond aux taux des déformations relatives.

La description du comportement d'un tel matériau introduit naturellement une longueur interne intrinsèque  $l$ . Le vecteur de déformation générale s'écrit :

$$[\varepsilon] = \left[ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yx} \quad \kappa_{xz}l \quad \kappa_{yz}l \right]^T \quad (2.43)$$

Maintenant ces variables sont associées par dualité respectivement, à un tenseur de comportements non symétriques des contraintes  $\sigma_{xy}$ , à un tenseur des couples de contraintes de comportement  $m_{xz}$  et  $m_{yz}$

$$[\sigma] = \left[ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yx} \quad \frac{m_{xz}}{l} \quad \frac{m_{yz}}{l} \right]^T \quad (2.44)$$

Le milieu de Cosserat est un milieu plus riche qu'un milieu continu classique. En général chaque point matériel possède trois degrés de liberté de rotation et trois degrés de libertés de translation.

La théorie de Cosserat a été utilisée pour étudier la localisation des déformations dans les milieux granulaires. Mühlhaus et Vardoulakis [70] ont montré que cette théorie s'appliquait au sable soumis à un essai biaxial (chapitre ??). Ord et al. [74], après avoir réalisé des essais biaxiaux sur le grès de Gosford, suggèrent plutôt que ce

sont les micro-rotations et les déplacements des grains qui entraînent la localisation de la déformation. Les grains s'accommodent au cisaillement en se réarrangeant sans se fracturer. Ord et al. [74] apportent des arguments aux partisans du milieu continu de Cosserat sensé décrire correctement les milieux granulaires. Nous allons voir dans le chapitre 3 que la théorie de Cosserat peut être vue comme une simplification des milieux à microstructure. Dans ce cadre l'hypothèse principale de la théorie de Cosserat suppose que le terme cinématique des déformations microscopiques est nul.

## 2.8.2 Les modèles non locaux

Les modèles non locaux nous amènent aux travaux développés par Kroner [56], Krumhansl [57], et Eringen [39]. Cette théorie considère que la réponse d'un point du matériau dépend de la déformation en ce point ainsi que de la déformation des points voisins.

Prenons le cas de la plasticité standard à écrouissage isotrope. La fonction de charge  $f$  dépend de la contrainte  $\sigma$  et d'une variable interne  $\gamma^p$  tel que :

$$\gamma^p = \int \dot{\gamma}^p dt \quad (2.45)$$

avec  $\dot{\gamma}^p$  : un invariant du tenseur de déformation plastique  $\dot{\epsilon}^p$ .

Bazant et al [2] ont proposé de remplacer  $\dot{\gamma}^p$  par une valeur moyenne  $\bar{\dot{\gamma}}$ , qui prend en compte l'effet des autres points autour voisins à un distance  $s$

$$\bar{\dot{\gamma}} = \frac{1}{V_r(x)} \int_V g(s) \dot{\gamma}^p(x+s) dV \quad (2.46)$$

où :

$V_r(x) = \int_V g(s) dV$  : volume représentatif autour du point matériel de coordonnée  $x$

$s$  : distance entre le point matériel de coordonnée  $x$  et le point où on effectue le calcul de moyenne ;

$g(s)$  : fonction de pondération qui est prise en général comme la fonction d'erreur de Gauss

$$g(s) = e^{-\frac{s^2}{2l^2}} \quad (2.47)$$

où  $l$  est l'échelle de longueur interne du milieu continu non local. On introduit ainsi un paramètre de longueur interne.

Pijaudier-Cabot et Bazant [81], Pijaudier-Cabot et Benallal [82], Bazant et Pijaudier-Cabot [3] ont utilisé la théorie non locale en combinaison avec des modèles d'endommagement où la variable d'endommagement  $E$  a été seule considérée comme une variable non-locale. Cette variable est remplacée par une variable  $\bar{E}$  formulée de la même manière que dans l'équation (2.46), alors que toutes les autres quantités restent locales. Dans des cas des petites déformations ceci permet toujours d'utiliser des éléments standards de continuité  $C^0$ .

De Borst et Mülhaus [33] ont appliqué la théorie non locale aux loi élasto-plastique, mais la condition de consistence s'écrit sous une forme d'une équation différentielle au lieu d'une équation algébrique. Cette équation est difficile à résoudre, ainsi que son implantation dans un code du calcul. Autre type des modèles non locaux et particulièrement dans le cadre générale de l'élasto-plasticité sont les modèles de second gradient non locaux. Ils considèrent que la dérivée de déformation est spécifiée à la phase plastique. Les deux types de modèles seront détaillé dans le chapitre 3. Dans le cadre des approches continues d'autres modèles enrichis sont considérés, ces modèles consistent à considérer que la réponse d'un matériau dépend de la dérivée des déformations à chaque point matériel. Ce sont les modèles de second gradient locaux.

## 2.9 Les approches discontinues

Elles consistent à modéliser la zone localisé par une discontinuité du déplacement. Dans [53],et [54], Jirasek présente une vue d'ensemble des techniques d'approximation pour la résolution des fortes discontinuités (qui correspondent aux sauts du champ des déplacements alors que le champ des déplacements reste continu) qui peuvent traverser de manière quelconque un maillage d'éléments finis.

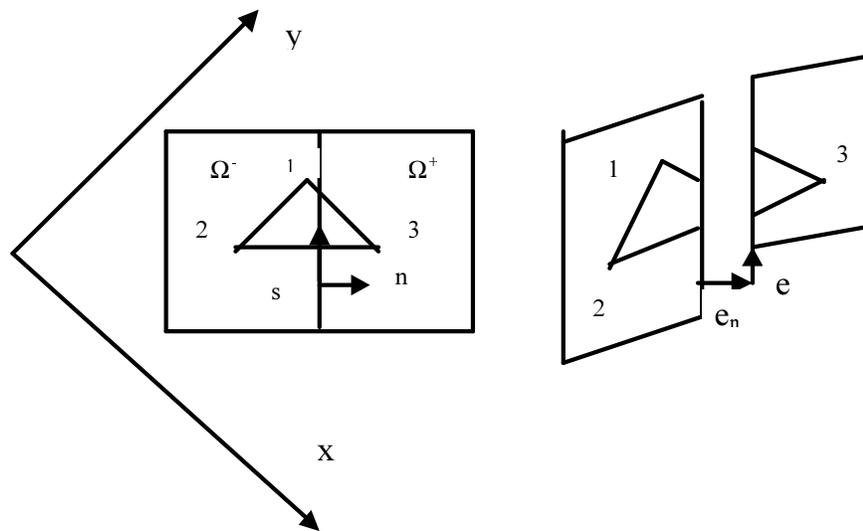


FIG. 2.3 – L'élément triangulaire avec une discontinuité EED-EAS

Deux extensions des éléments finis sont considérés. La première approche ajoute des degrés de liberté dans l'élément traversé par la fissure. Ces degrés de liberté sont liés au saut des déplacements. Considérons un élément triangulaire, et supposons qu'une fissure sépare le noeud 3 des autres (figure 2.9), alors deux degrés de liberté (dont une normale à la surface de fracture et l'autre perpendiculaire respectivement) sont rajoutés  $e = (e_n, e_s)$ (figure 2.9).

La contribution du saut de déplacement au champs des déformations  $\epsilon = \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}^T$

dans cet élément devient :

$$\epsilon = B(d - He) \quad (2.48)$$

où :

$d$  : vecteur de déplacement nodale.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

$H$  : vecteur de l'ensemble du milieu qui dépend de l'angle entre la normale à la fracture et l'axe x

Les contraintes  $\sigma = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}^T$  restent comme dans le cas classique fonction des déformations et du comportement qui est ici la matrice d'élasticité :

$$\sigma = D^e . \epsilon^e$$

Maintenant, pour l'introduction de cette approche dans un code aux éléments finis, la fonction d'interpolation dans une seule partie de la zone discontinue est une combinaison d'interpolations linéaires constantes liées au saut de déplacement et l'interpolation des noeuds dans cette zone, ce qui crée une discontinuité nécessitant l'utilisation des éléments non conforme.

La deuxième approche (X-FEM)(Extended Finite Element Method) utilise des degrés de liberté globaux supplémentaires, et dont le concept est basé sur la partition de l'unité (Melenk [63])

$$u(x) = \sum N_i(x)(d_i + \sum G_j(x)e_{ij}) \quad (2.49)$$

où

$N_i$  : fonction d'interpolation pour le noeud  $i$

$G_j$  : les fonctions d'interpolation effectuées sur les noeuds de la zone de discontinuité.

Ici l'interpolation reste continue et donc l'élément conforme reste valable.

Néanmoins, la nécessité d'introduction des degrés de liberté globaux durant le calcul et l'intégration du schéma autour de la fracture rend l'implémentation de cette méthode dans un code aux éléments finis assez compliquée.

La modélisation du comportement d'une structure en régime post-localisation peut être abordé au moyen d'un modèle d'interface. Chambon et Crochpeyre [28] ont développé un modèle qui décrit le comportement des structures en post-localisation par l'introduction dans les modélisations de la bande comme une interface entre deux blocs glissant l'un sur l'autre et en adoptant un modèle appelé Daphnis qui est un modèle basé sur deux principes

- une transition consistante entre la loi CLoE décrivant le comportement volumique global du matériau et le modèle Daphnis qui lui permet de décrire le comportement volumique dans la bande de cisaillement.
- le comportement radoucissant de Daphnis traduit une dégradation des caractéristiques du matériau à l'intérieur de la bande et en particulier une diminution de la densité. Pour cela il considère que le concept d'indice des vides critique correspond à une déformation de la bande en mode de cisaillement pur sous une contrainte constante.

Chambon et al. [28] ont choisi un modèle de CLoE associé à une surface limite de Mohr-Colomb qui représente le comportement d'un sable en déformation plan, alors que Daphnis sera associé à CloE au moment de la localisation. Daphnis est exprimé par  $\hat{T}$  la dérivée temporelle des contraintes  $\vec{T} = \underline{\sigma}\vec{n}$  par rapport à un référentiel lié aux frontières de la bande.

$$\hat{T} = f([\dot{u}], d) \quad (2.50)$$

avec :

- $[\dot{u}]$  la vitesse des déplacements relative entre la frontière supérieure et inférieure de la bande.
- $d$  la largeur de la bande.

Cette étude a été implantée dans le code aux éléments finis avec une prise en compte des grandes déformations ce qui a conduit à considérer séparément l'interface des frontières de la bande de cisaillement, contrairement aux développements réalisés en petites déformations. En effet la formulation de l'équilibre par le principe des puissances virtuelles est écrite dans la configuration actuelle.

## 2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats théoriques obtenus tel que la théorie de la bifurcation vue comme une perte d'unicité des solutions dans des problèmes formulés en vitesse. Ensuite des études théoriques ont été présentées pour un mode de bifurcation localisé. Nous avons rappelé que le critère de localisation en terme de déterminant du tenseur acoustique n'est valable que pour les modèles de comportement incrémentalement linéaires. Ce critère n'est pas toujours applicable aux modèles incrémentalement non linéaires (équation 2.28).

Par la suite, les différents enrichissements du milieu continu ont été présentés pour la modélisation en post-localisation.

L'introduction de modèle à la longueur interne permet de limiter les nombres de solutions du problème, et rend la largeur de la bande indépendante du maillage au niveau du calcul numérique.

Les approches discontinues sortent du cadre de la mécanique des milieux continus, elles ne considèrent plus la cinématique dans la zone localisée. Dans ce cadre, les modèles basés sur la notion de discontinuité forte nécessitent des modèles d'interface.

# Chapitre 3

## Les modèles du second gradient

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les développements de modèle de second gradient non local qui sera basé sur l'introduction de termes cinématiques d'ordre supérieurs dans la relation de comportement du milieu.

Ensuite nous proposons une étude théorique des modèles du second gradient local : le gradient des déformations est considéré en tous points matériels. Nous allons partir de la théorie générale des milieux à micro-structure. Cette théorie a été développée par Mindlin ([65] et [66]) dans le cadre de l'élasticité linéaire dans laquelle le potentiel densité d'énergie dépend de la déformation mais aussi de son gradient. Par la suite Germain [41] a étudié cette formulation pour donner une forme plus générale en utilisant la méthode des puissances virtuelles, Il a ainsi donné comme cas particulier une formulation cohérente des milieux de second gradient.

Dans l'article [20] Chambon et al. ont constitué une formulation générale de cette théorie dans le cadre des petites déformations, c'est à dire que toutes les configurations d'équilibre entre les différentes configurations d'équilibre sont infiniment proches. Chambon et al. ont appliqué cette étude sur un problème unidimensionnel pour un comportement élasto-plastique.

Plusieurs modèles enrichis peuvent être obtenus à partir des milieux avec micro-structure. On cite le modèle de Cosserat, lorsque la déformation microscopique est nulle. et le modèle du second gradient local où on considère que les micro-déformations sont égales au macro-déformations.

Les modèles enrichis donnent une description plus complète du comportement du milieu en utilisant des équations constitutives d'ordres supérieurs à celles utilisées dans le cas classique. La question des conditions aux limites additionnelles se pose pour ces modèles et d'autre part l'implantation de ces modèles dans un code numérique nécessite des procédures complexes. Nous allons voir dans la suite de ce mémoire différents exemples numériques ainsi que toutes les modifications exigées

pour valider le modèle du second gradient local dans les codes numériques.

## 3.2 Les modèles non locaux de second gradient

La plupart des cas sont traités ici dans le cadre général de l'élasto-plasticité. Dans ces modèles, le terme de second gradient est introduit sous la forme de la dérivée seconde de la déformation plastique dans la règle d'écoulement ou dans la condition de cohérence.

Zervos et al ([108], [109]) considèrent que la vitesse des contraintes totale  $\dot{\sigma}_{ij}$  dépend des déformations élastique et de leur Laplacien :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e (\dot{\epsilon}_{kl}^e - l_e^2 \nabla^2 \dot{\epsilon}_{kl}^e) \quad (3.1)$$

où  $C_{ijkl}^e$  est le tenseur élastique,  $l_e$  est un paramètre matériel de la dimension d'une longueur, et  $\nabla$  est le Laplacien de la déformation élastique  $\epsilon^e$ .

Dans la théorie classique de l'élasto-plasticité avec écrouissage isotrope la fonction de charge est définie :

$$F(\tau_{ij}, \psi) = 0 \quad (3.2)$$

Notons que les déformations plastiques dépendent de cette fonction puisque le matériau est considéré associé.

$\tau_{ij}$  est un terme de contrainte réduite qui s'exprime par :

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij} \quad (3.3)$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\alpha_{ij}$  s'exprime par :

$$\alpha_{ij} = -C_{ijkl}^e l_p^2 \nabla^2 \dot{\epsilon}_{kl}^p \quad (3.4)$$

où  $l_p$  a encore la dimension d'une longueur.

Il est clair que le terme de second gradient intervient lorsque les déformations plastiques deviennent importantes. Le multiplicateur plastique est défini à partir de la surface de charge comme dans le cas général de la théorie plastique.

Afin d'écrire la condition de cohérence, une équation différentielle est obtenue qui est une fonction de multiplicateur plastique (cette équation est algébrique dans le cas classique).

$$\left[1 - \frac{H_0}{H} (l_e^2 + l_p^2) \nabla^2\right] \dot{\psi} = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} C_{ijkl}^e (\dot{\epsilon} - l_e^2 \nabla^2 \dot{\epsilon}_{kl}) \quad (3.5)$$

où

$$H = H_0 + H_t \quad (3.6)$$

$$H_0 = \frac{\partial F}{\partial \tau_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} \quad (3.7)$$

$$H_t = -\frac{\partial F}{\partial \psi} \quad (3.8)$$

L'équation (3.5) est différentielle, pour la résoudre il faut des conditions aux limites sur le multiplicateur de plasticité et le second gradient, et donc pour éviter ces complications Zervos et al ([108], [109]) résolvent l'équation d'une manière approximative en considèrent que les longueurs matérielles  $l_e$  et  $l_p$  sont confondues. Pour modéliser le problème avec un code aux éléments finis, Zervos et al ([108], [109]) interprètent leur modèle à partir de la théorie d'élasticité linéaire avec micro-structure développée par Mindlin [65].

Un autre chemin suivi est celui de Zbib et Aifantis ([50], et [51]), dont l'équation constitutive est enrichie par l'introduction du Laplacien des déformation plastiques pour une loi de comportement radoucissante :

$$\tau = \bar{\tau}(\gamma, \dot{\gamma}) + C_1 \nabla^2 \gamma + C_2 \nabla^2 \dot{\gamma} + C_3 \nabla^4 \gamma + C_4 \nabla^4 \dot{\gamma} \quad (3.9)$$

Où  $\tau$  est le déviateur de contrainte et  $\gamma$  la déformation plastique tel que :

$$\gamma = \int \dot{\gamma} dt \quad (3.10)$$

$C_1, C_2, C_3, C_4$  sont des fonctions de  $(\gamma, \dot{\gamma})$  et  $\nabla^2$  est l'opérateur Laplacien. Ils ont appliqué la théorie à des matériaux rigides plastiques et viscoplastiques incompressibles. Ils ont aussi réalisé une analyse de localisation en déterminant la condition critique pour avoir la localisation ainsi que l'orientation critique. Pour un comportement quasi statique, ils arrivent à suivre la propagation de la bande de cisaillement et à définir sa direction ainsi que sa taille.

### 3.3 Généralités sur les milieux continus avec micro-structure

Dans le cadre des petites déformations, le mouvement du milieu continu classique est décrit par les variables suivantes : le champ des déplacements  $u_i$ , qui est une fonction des coordonnées  $x_i$ . Le gradient de déplacement  $F_{ij}$  est :

$$F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

Le champ de déformation s'écrit :

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}) \quad (3.12)$$

Et le champ de rotation est aussi décrit par :

$$R_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} - F_{ji}) \quad (3.13)$$

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, ces variables ne sont pas suffisantes pour décrire des phénomènes observés expérimentalement et qui résultent de processus microscopiques comme la localisation des déformations en bande de cisaillement dans différents types des matériaux granulaires ou cristallins.

On introduit  $f_{ij}$  champ de gradient microscopique. Il n'est pas symétrique, et il n'est pas relié au gradient du déplacement  $u_i$  qui est considéré propre à l'échelle macroscopique :

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{ji}) \quad (3.14)$$

et la rotation microscopique :

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji}) \quad (3.15)$$

Le gradient de  $f_{ij}$  s'écrit :

$$h_{ijk} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \quad (3.16)$$

### 3.3.1 Le travail virtuel des efforts intérieurs

La description de l'équation d'équilibre est réalisé à l'aide du principe des puissances virtuelles. Il est nécessaire de définir des variables virtuelles à partir des variables définies précédemment (Cf.3.3), ainsi que de définir les variables statiques duales, de telle sorte qu'on obtienne une puissance quand on multiplie les variables cinématiques par les variables statiques. Pour des raison d'objectivité Germain [41] montre que le travail virtuel ne dépend alors que de la macro-déformation virtuelle, du gradient de déformation relatif virtuelle défini comme la différence entre le macro-gradient de déplacement virtuel et le champ de micro-gradient virtuel, et du gradient (micro) virtuel. La densité volumique de travail virtuel des efforts intérieurs peut donc s'écrire :

$$w_{\text{int}}^* = \sigma_{ij} D_{ij}^* + \tau_{ij}(f_{ij}^* - F_{ij}^*) + \chi_{ijk} h_{ijk}^* \quad (3.17)$$

où :

- $\sigma_{ij}$  est le champ de contraintes macroscopiques.
- $\tau_{ij}$  est un champ de contraintes supplémentaire relié à la micro-structure qui n'est pas nécessairement symétrique. On l'appellera champ de micro-contraintes.
- $\chi_{ijk}$  a été définie par dualité avec  $h_{ijk}^*$ , on l'appellera champ des doubles contraintes.

Bien entendu, les champs  $D_{ij}^*$  et  $F_{ij}^*$  dépendent du champ virtuel de déplacement  $u_i^*$  par les équations analogue aux (3.11 et 3.12).  $h_{ijk}^*$  dépend de  $f_{ij}^*$  par des équations analogues à (3.16).

Finalement le travail virtuel des efforts intérieurs pour un milieu continu  $\Omega$  s'écrit :

$$W_{\text{int}}^* = \int_{\Omega} w_{\text{int}}^* dv = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} D_{ij}^* + \tau_{ij}(f_{ij}^* - F_{ij}^*) + \chi_{ijk} h_{ijk}^*) dv \quad (3.18)$$

### 3.3.2 Écriture du travail virtuel des efforts extérieurs

Concernant le travail virtuel des efforts extérieurs, il est important de le modifier. Chambon et al [20] supposent ici que seules les forces volumiques classiques  $G_i$  sont considérées. Alors que concernant les efforts surfaciques sur la surface frontière  $\partial\Omega$  du volume  $\Omega$  considéré, on tiendra compte des efforts classiques  $t_i$  et de doubles efforts additionnels  $T_{ij}$ . Ces hypothèses restreignent le cas général présenté par Germain [41] et dans ce cadre le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit

$$W_{\text{ext}}^* = \int_{\Omega} G_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega} (t_i u_i^* + T_{ij} v_{ij}^*) ds \quad (3.19)$$

Pour notre problème on suppose connaître  $G_i$  en tout point de  $\Omega$  et  $t_i$  et  $T_{ij}$ .

### 3.3.3 L'équation d'équilibre

En écrivant le principe des puissances virtuelles pour tous les champs virtuels cinématiquement admissibles, on obtient finalement les équations d'équilibre

$$\frac{\partial(\sigma_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial\chi_{ijk}}{\partial x_k} - \tau_{ij} = 0 \quad (3.21)$$

et les conditions aux limites en contraintes

$$(\sigma_{ij} - \tau_{ij})n_j = t_i \quad (3.22)$$

$$\chi_{ijk}n_k = T_{ij} \quad (3.23)$$

où  $n_j$  est la normale extérieure de la frontière  $\partial\Omega$ . Pour que le problème soit entièrement défini, il faut imposer sur la frontière  $\partial\Omega$  soit des valeurs pour  $t_i$  et  $T_{ij}$  soit des valeurs pour  $u_i$  et  $f_{ij}$ . Comme pour un milieu classique, il est aussi possible de supposer que des conditions mixtes en partie cinématique et en partie statique sont appliquées sur des parties de  $\partial\Omega$ .

Chambon et al [20] ont développé une étude théorique extension de la démarche classique pour la construction des équations de comportement (Truesdel et Noll [98]). L'ensemble des contraintes  $\sigma_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$  et  $\chi_{ijk}$  est regroupé sous la notation globale  $\Sigma$ . Elles sont connues en chaque point matériel si l'histoire des déformations généralisées  $D_{ij}$ ,  $fF_{ij} = f_{ij} - F_{ij}$  et  $h_{ijk}$ , regroupées sous le nom  $E$ , est connue pour le même point. L'histoire de toute la cinématique considéré dans le milieu donne l'ensemble de différentes contraintes pour ce milieu

$$\Sigma(t^f) = \mathcal{F}(E(t), t \in [0, t^f]) \quad (3.24)$$

où  $t$  est le temps et  $t^f$  est un instant donné.

Chambon et al. définissent ensuite un modèle hyperélastique avec un potentiel qui permet d'assumer une relation linéaire entre  $E$  et  $\Sigma$ , en introduisant des tenseurs symétriques  $\mathcal{K}^1, \mathcal{K}^2, \mathcal{K}^3$  :

$$\sigma_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^1 D_{kl} \quad (3.25)$$

$$\tau_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^2 f F_{kl} \quad (3.26)$$

$$\chi_{ijk} = \mathcal{K}_{ijklmn}^3 h_{lmn} \quad (3.27)$$

Chambon et al ont ensuite développé la théorie pour un modèle élasto-plastique à un seul mécanisme plastique (l'analyse a été généralisée pour des modèles multi-mécanismes mais nous avons choisi de présenter le cas le plus simple dans ce mémoire).

Généralement, et dans la théorie classique de plasticité, le taux de déformation est composé de deux parties, une partie élastique et une partie plastique :

$$\dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^p \quad (3.28)$$

La partie élastique est décrit à partir des équations précédentes ( 3.25, 3.26, 3.27)

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^1 \dot{D}_{kl}^e \quad (3.29)$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^2 f \dot{F}_{kl}^e \quad (3.30)$$

$$\dot{\chi}_{ijk} = \mathcal{K}_{ijklmn}^3 \dot{h}_{lmn}^e \quad (3.31)$$

On définit une surface de plasticité  $\phi(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa)$  où  $\kappa$  est un paramètre d'écrouissage. L'état de contrainte doit respecter la condition suivante :

$$\phi(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) \leq 0 \quad (3.32)$$

- Si  $\phi(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) < 0$  ou  $\phi(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) = 0$  et  $\dot{\phi}(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) < 0$  le point matériel est élastique.
- Si  $\phi(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) = 0$  et

$$\dot{\phi}(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) = 0$$

le point matériel est élasto-plastique.

Maintenant, supposons que le point représentatif de l'état des contraintes soit dans la zone élastique ( $\phi(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) \leq 0$ ) ou bien qu'il soit dans un état de décharge ( $\phi(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) = 0$  et  $\dot{\phi}(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) < 0$ ). Alors que le taux de déformation est élastique  $\dot{E} = \dot{E}^e$  et les taux de contraintes deviennent :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^1 \dot{D}_{kl} \quad (3.33)$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^2 f \dot{F}_{kl} \quad (3.34)$$

$$\dot{\chi}_{ijk} = \mathcal{K}_{ijklmn}^3 \dot{h}_{lmn} \quad (3.35)$$

Alors que si ce point est en charge plastique  $\phi(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) = 0$ ,  $\dot{\phi}(\sigma_{ij}, \tau_{ij}, \chi_{ijk}, \kappa) = 0$ , la direction de la déformation plastique est donnée par :

$$\dot{D}_{ij}^p = \lambda \psi_{ij}^D \quad (3.36)$$

$$\dot{f}F_{ij}^p = \lambda \psi_{ij}^{fF} \quad (3.37)$$

$$\dot{h}_{ijk}^p = \lambda \psi_{ijk}^h \quad (3.38)$$

Où  $\lambda$  est le multiplicateur plastique et  $\psi_{ij}^D$ ,  $\psi_{ij}^{fF}$  et  $\psi_{ijk}^h$  sont les directions des déformations plastiques, Ils sont définis comme des fonctions de l'état des contraintes et du paramètre d'écroissage.

Pendant la déformation plastique, l'état de contrainte doit rester sur la surface de plasticité, c'est à dire que la condition de cohérence (qui s'exprime par  $\dot{\phi} = 0$ ) doit être vérifiée, soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{ij}} \dot{\tau}_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial \chi_{ijk}} \dot{\chi}_{ijk} + \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (3.39)$$

Si on note le module d'écroissage  $h$ , on aura

$$\frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = -\lambda h \quad (3.40)$$

On définit  $H$  comme

$$H = h + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \mathcal{K}_{ijkl}^1 \psi_{kl}^D + \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{ij}} \mathcal{K}_{ijkl}^2 \psi_{kl}^{fF} + \frac{\partial \phi}{\partial \chi_{ijk}} \mathcal{K}_{ijklmn}^3 \psi_{lmn}^h \quad (3.41)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^1 \dot{D}_{kl}^e \quad (3.42)$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^2 \dot{f}F_{kl}^e \quad (3.43)$$

$$\dot{\chi}_{ijk} = \mathcal{K}_{ijklmn}^3 \dot{h}_{lmn}^e \quad (3.44)$$

Après certains calculs, l'ensemble de contraintes microscopiques devient :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & \mathcal{K}_{ijkl}^1 \dot{D}_{kl} - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijpq}^1 \psi_{pq}^D \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} \mathcal{K}_{mnkl}^1 \dot{D}_{kl} \\ & - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijpq}^1 \psi_{pq}^D \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{mn}} \mathcal{K}_{mnkl}^2 \dot{f}F_{kl} \\ & - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijpq}^1 \psi_{pq}^D \frac{\partial \phi}{\partial \chi_{krst}} \mathcal{K}_{krstlmn}^3 \dot{h}_{lmn} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{ij} = & \mathcal{K}_{ijkl}^2 \dot{f}F_{kl} - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijpq}^2 \psi_{pq}^{fF} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} \mathcal{K}_{mnkl}^1 \dot{D}_{kl} \\ & - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijpq}^2 \psi_{pq}^{fF} \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{mn}} \mathcal{K}_{mnkl}^2 \dot{f}F_{kl} \\ & - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijpq}^2 \psi_{pq}^{fF} \frac{\partial \phi}{\partial \chi_{krst}} \mathcal{K}_{krstlmn}^3 \dot{h}_{lmn} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}_{ijk} &= \mathcal{K}_{ijklmn}^3 \dot{h}_{lmn} - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijkpqr}^3 \psi_{pqr}^h \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} \mathcal{K}_{mnkl}^1 \dot{D}_{kl} \\
&\quad - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijkpqr}^3 \psi_{pqr}^h \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{mn}} \mathcal{K}_{mnkl}^2 f \dot{F}_{kl} \\
&\quad - \frac{1}{H} \mathcal{K}_{ijkpqr}^3 \psi_{pqr}^h \frac{\partial \phi}{\partial \chi_{kr s}} \mathcal{K}_{kr slmn}^3 \dot{h}_{lmn}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Les équations (3.45, 3.46, et 3.47) montrent la dépendance des contraintes classiques dans la phase plastique envers les termes de la partie microscopiques.

### 3.3.4 Étude analytique d'un problème unidimensionnel dans un milieu avec microstructure

Chambon et al [20] appliquent cette étude à un problème unidimensionnel, dont les variables cinématiques se réduisent à une composante  $u$  pour les déplacements mesurés le long de l'axe  $x$ , aux macro-déformations  $u'$ , à la micro-déformation  $f$  axiale le long de l'axe  $x$ , et le second gradient devient  $f'$ .

Les contraintes de macro et micro structure sont  $\sigma$ ,  $\tau$  et  $\chi$ . Les forces de volume sont supposées constantes et donc leur dérivée par rapport au temps devient nulle. Au niveau des conditions aux limites, un bord du milieu est supposée fixe (pour  $x = 0$ ), et une force  $F$  est appliquée sur l'autre bord ( $x = l$ ) où  $l$  la longueur du domaine.

L'état initial du milieu est homogène et les doubles forces sur les deux bords sont nulles.

Les équations ( 3.20 et 3.21) pour ce cas deviennent :

$$\dot{\sigma}' - \dot{\tau}' = 0 \tag{3.48}$$

$$\dot{\chi}' - \dot{\tau} = 0 \tag{3.49}$$

En tout point et pour  $x = l$  :

$$\dot{\sigma} - \dot{\tau} = \dot{F} \tag{3.50}$$

et pour  $x = 0, x = l$

$$\dot{\chi} = 0 \tag{3.51}$$

Dans ce cas les équations (3.45, 3.46, et 3.47) deviennent :

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma} &= \mathcal{K}^{11} \dot{u}' + \mathcal{K}^{12} \dot{f} + \mathcal{K}^{13} \dot{f}' \\
\dot{\tau} &= \mathcal{K}^{21} \dot{u}' + \mathcal{K}^{22} \dot{f} + \mathcal{K}^{23} \dot{f}' \\
\dot{\chi} &= \mathcal{K}^{31} \dot{u}' + \mathcal{K}^{32} \dot{f} + \mathcal{K}^{33} \dot{f}'
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Les coefficients  $\mathcal{K}^{ij}$  dépendent de l'équation constitutive, et de la condition de chargement, déchargement. En remplaçant  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\tau}$  et  $\dot{\chi}$  dans les équations (3.48 et 3.49), nous obtenons :

$$(\mathcal{K}^{11} - \mathcal{K}^{21}) \dot{u}'' + (\mathcal{K}^{12} - \mathcal{K}^{22}) \dot{f}' + (\mathcal{K}^{13} - \mathcal{K}^{23}) \dot{f}'' = 0 \tag{3.53}$$

$$\mathcal{K}^{31} \dot{u}'' - \mathcal{K}^{21} \dot{u}' - \mathcal{K}^{22} \dot{f} + (\mathcal{K}^{32} - \mathcal{K}^{23}) \dot{f}' + \mathcal{K}^{33} \dot{f}'' = 0 \tag{3.54}$$

Dans le cas où  $\mathcal{K}^{11} - \mathcal{K}^{21} = 0$ , l'équation (3.53) est une équation différentielle linéaire pour  $\dot{f}$ . Sinon elle permet de calculer  $u''$  comme fonction de  $\dot{f}'$  et de  $\dot{f}''$ . L'intégration de cette équation donne :

$$(\mathcal{K}^{11} - \mathcal{K}^{21})\dot{u}' + (\mathcal{K}^{12} - \mathcal{K}^{22})\dot{f} + (\mathcal{K}^{13} - \mathcal{K}^{23})\dot{f}' = \dot{F} \quad (3.55)$$

La valeur de  $u'$  est obtenue comme fonction de  $\dot{f}$  et  $\dot{f}'$ . Finalement en remplaçant  $\dot{u}''$  et  $\dot{u}'$  dans l'équation (3.54). On obtient une équation différentielle ordinaire en  $\dot{f}'$

$$\begin{aligned} & [-\mathcal{K}^{22}(\mathcal{K}^{11} - \mathcal{K}^{21}) - \mathcal{K}^{21}(\mathcal{K}^{22} - \mathcal{K}^{12})]\dot{f} \\ & + [(\mathcal{K}^{11} - \mathcal{K}^{21})(\mathcal{K}^{32} - \mathcal{K}^{23}) - \mathcal{K}^{21}(\mathcal{K}^{23} - \mathcal{K}^{13}) + \mathcal{K}^{31}(\mathcal{K}^{22} - \mathcal{K}^{12})]\dot{f}' \\ & + [\mathcal{K}^{33}(\mathcal{K}^{11} - \mathcal{K}^{21}) + \mathcal{K}^{31}(\mathcal{K}^{23} - \mathcal{K}^{13})]\dot{f}'' = \mathcal{K}^{21}\dot{F} \end{aligned} \quad (3.56)$$

qui donne des solutions contenant des produits exponentiels et sinusoides.

### 3.4 Le modèle de Cosserat

La théorie du milieu de Cosserat est un cas particulier de la théorie des milieux à microstructure. Elle correspond au cas où la micro-déformation est nulle ( $d_{ij} = 0$  et  $f_{ij} = -f_{ji}$ , donc  $f_{ij} = r_{ij}$ ).

$h_{ijk}$  n'est plus maintenant composée que de neuf composantes indépendantes puisque ce tenseur devient antisymétrique par rapport à ses deux premiers indices ( $h_{ijk} = -h_{jik}$ ).

La densité de travail virtuel des efforts intérieurs (cf. équation 3.17) s'écrit donc

$$w_{\text{int}}^* = \alpha_{ij}\varepsilon_{ij}^* + \tau_{ij}(r_{ij}^* - R_{ij}^*) + \chi_{ijk}h_{ijk}^* \quad (3.57)$$

où  $\alpha_{ij} = \sigma_{ij} - \tau_{ij}$ .

L'écriture de cette équation implique que  $\tau_{ij}$  est antisymétrique et que  $\chi_{ijk}$  est antisymétrique par rapport à ses deux premiers indices.

Le travail virtuel des forces intérieures s'écrit finalement :

$$W_{\text{int}}^* = \int_{\Omega} w_{\text{int}}^* dv = \int_{\Omega} (\alpha_{ij}\varepsilon_{ij}^* + \tau_{ij}(r_{ij}^* - R_{ij}^*) + \chi_{ijk}h_{ijk}^*) dv \quad (3.58)$$

L'équation (3.58) est équivalente à celles obtenues dans le chapitre précédent.

### 3.5 Les modèles du second gradient

Les modèles du second gradient sont des modèles qui supposent que les micro-déformations sont égales aux macro-déformations :

$$f_{ij} = F_{ij} \quad (3.59)$$

d'où :

$$f_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.60)$$

Les équations (3.17) et (3.19) deviennent alors :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} D_{ij}^* + \chi_{ijk} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_k}) dv = \int_{\Omega} G_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega} (p_i u_i^* + P_i D u_i^*) ds \quad (3.61)$$

où  $D$  est la dérivée normale d'une quantité  $q$ , ( $Dq = \frac{\partial q}{\partial x_k} n_k$ ) et  $D_j$  la dérivée tangentielle ( $D_j q = \frac{\partial q}{\partial x_j} - \frac{\partial q}{\partial x_k} n_k n_j$ ).

L'équation d'équilibre est obtenue par intégration du principe des puissances virtuelles (3.61) :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \chi_{ijk}}{\partial x_j \partial x_k} + G_i = 0 \quad (3.62)$$

Les conditions aux limites ne sont pas très simples à cause de la relation entre  $u_i$  et  $f_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  et donc entre les quantités virtuelles correspondantes sur la partie de la frontière où les forces et les doubles forces sont appliquées. L'équation (3.61) montre que nous avons un seul champ inconnu  $u_i$  ainsi qu'un seul champ virtuel.  $u_i^*$  et  $\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}$  ne sont pas indépendantes puisque  $u_i^*$  et sa dérivée tangentielle ne varient pas indépendamment.

Finalement, en supposant que la frontière est régulière ce qui veut dire qu'il y a existence et unicité de la normale pour chaque point de la frontière  $\partial\Omega$  du domaine étudié). Une intégration par partie supplémentaire nous donnent :

$$\sigma_{ij} n_j - n_k n_j D \chi_{ijk} - \frac{D \chi_{ijk}}{D x_k} n_j - \frac{D \chi_{ijk}}{D x_j} n_k + \frac{D n_l}{D x_l} \chi_{ijk} n_j n_k - \frac{D n_j}{D x_k} \chi_{ijk} = p_i \quad (3.63)$$

Et

$$\chi_{ijk} n_j n_k = P_i \quad (3.64)$$

L'analyse numérique de l'équation (3.61) a été effectuée par El Hassan [38] pour un problème bidimensionnel. Par la suite, elle a utilisé des éléments conformes dans le cas des petites déformations.

L'utilisation de l'élément conforme a été limité au cas des petites déformations puisque cet élément ne reste plus conforme dans le cas des grandes déformations. Dans ce cas il a été nécessaire de développer l'étude avec un élément non conforme.

On écrit les équations (3.59 et 3.60) son forme faible comme des contraintes mathématiques, ce qui introduit un multiplicateur de lagrange, noté  $\lambda_{ij}$ . Pour n'importe quel champ,  $u_i^*$  et  $f_{ij}^*$  cinématiquement admissible,

$$\int_{\Omega} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \chi_{ijk} \frac{\partial f_{ij}^*}{\partial x_k} + \lambda_{ij} (\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - f_{ij}^*)] dv = \int_{\Omega} G_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega} (t_i u_i^* + T_{ij} f_{ij}^*) ds \quad (3.65)$$

nous avons :

$$\int_{\Omega} \lambda_{ij}^* (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_{ij}) dv = 0 \quad (3.66)$$

### 3.5.1 Modèle analytique unidimensionnelle

El Hassan, Caillerie et Chambon ([37], [38], et [18]) ont réalisé une étude analytique du modèle du second gradient, pour une barre unidimensionnelle en traction, compression ou en cisaillement (comme dans le chapitre ??). La figure (3.1) définit la géométrie de la barre .

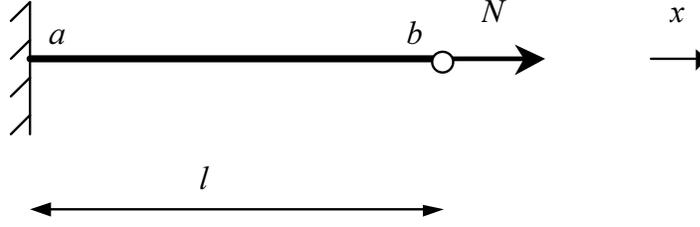


FIG. 3.1 – Barre soumise à une traction uniaxiale.

Les variables cinématiques définies dans ( 3.5) se réduisent à un champ de déplacement  $u$  (déplacement selon  $x$ ). La déformation s'écrit alors  $du/dx$  qu'on note  $u'$ , et les termes du second gradient se réduisent à un seul terme  $d^2u/dx^2$  que nous notons  $u''$ . Les variables statiques considérées sont ici réduites à la seule composante de contrainte, appelée par les auteurs  $N$  et à  $M$  seule composante de  $\chi_{ijk}$ .

Concernant les efforts extérieurs, les auteurs ont supposé qu'il n'y avait pas de force de volume dans la barre  $[a, b]$ . Les forces extérieures sont donc les forces de contact en  $a$  et en  $b$ . Soient  $\nu$  les forces classiques correspondantes (associées aux termes du premier gradient) et  $\mu$  les forces additionnelles correspondantes (associées aux termes du second gradient).

Nous pouvons écrire le principe du puissance virtuelles

$$-\int_a^b (N u^{*'} + M u^{*''}) dx = \nu_b u_b^* + \nu_a u_a^* + \mu_b u_b^{*'} + \mu_a u_a^{*'} \quad (3.67)$$

Comme dans le paragraphe précédent, l'analyse du problème est réalisé dans le cadre des petites déformations. L'équation (3.62) se réduit à :

$$N' - M'' = 0 \quad (3.68)$$

Les conditions aux limites sont :

$$M(a) = -\mu_a; M(b) = \mu_b; N(a) - M'(a) = -\nu_a; N(b) - M'(b) = \nu_b \quad (3.69)$$

Concernant le comportement du milieu, la partie première gradient de la loi a été choisie comme une loi élasto-plastique quasi-fragile : le matériau subi un comportement élastique jusqu'au seuil qui correspond à une déformation  $\varepsilon = e_{lim}$  et une force  $N = N_{pic}$ . La pente de la partie élastique est notée  $A_1$ . Ensuite si la déformation devient supérieure à  $e_{lim}$ , on obtient une chute de la contrainte alors que  $\varepsilon$  continue à augmenter. Cette relation est supposé linéaire, la pente négative de cette partie est  $A_2$  (la figure 3.2)

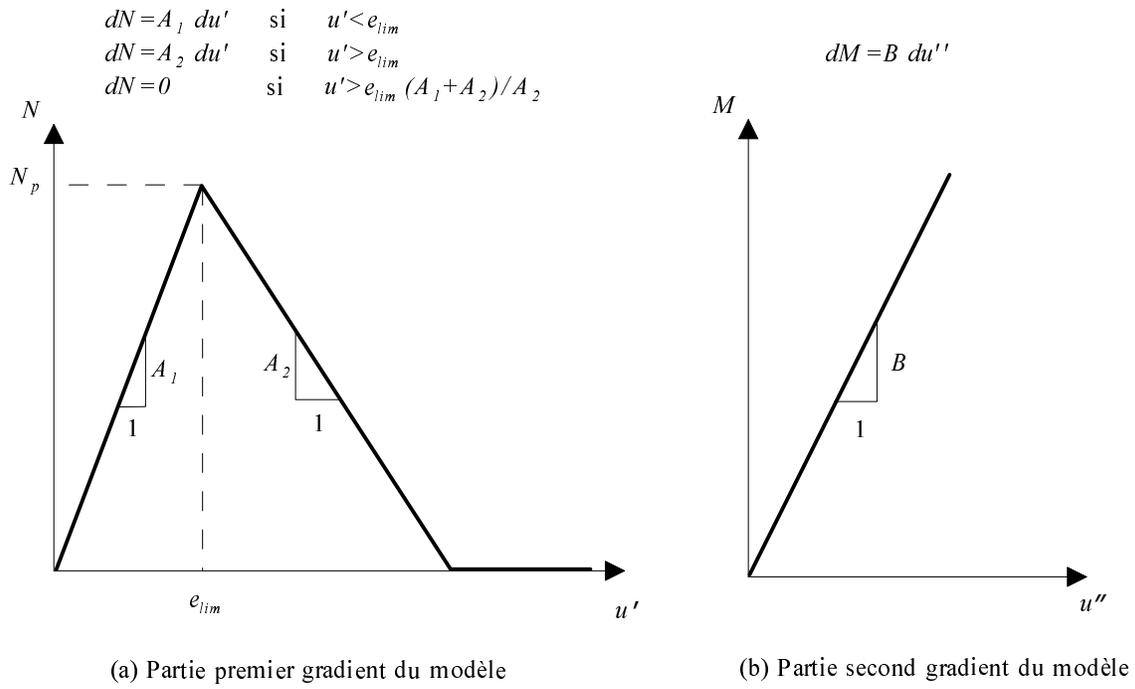


FIG. 3.2 – Modèle constitutif unidimensionnel.

Le comportement du terme de second gradient est élastique

$$\dot{M} = B \dot{u}'' \quad (3.70)$$

avec  $B = cte$ .

L'intégration de l'équation (3.68) donne l'équations différentielle :

$$Au - Bu'' = N_0 x + AK \quad (3.71)$$

La résolution de l'équation (3.71) donne des solutions partielles dépendent de coefficient  $A$ . Si une partie du milieu charge  $A = A_2$ , la solution est dite molle, et si elle décharge  $A = A_1$  elle est dite dure.

Ces solutions sont :

- pour  $u' < e_{lim}$  :

$$u = \frac{N_1}{A_1} x + K + \alpha \cosh(\omega x) + \beta \sinh(\omega x) \quad (3.72)$$

avec :

$$\omega^2 = \frac{A_1}{B} > 0$$

et cette solution est appelée solution dure ;

- pour  $u' > e_{lim}$  :

$$u = \frac{N_2}{A_2} x + K + \alpha \cos(\eta x) + \beta \sin(\eta x) \quad (3.73)$$

avec :

$$-\eta^2 = \frac{A_2}{B} < 0$$

et cette solution est appelée solution molle.

De plus, il y a continuité des efforts dans la barre de

$$N_1 = N - M' = cte \quad (3.74)$$

Remarquons que la partie qui charge contient les cosinus, ce qui implique l'intervention d'une longueur interne dans l'équation  $l = 2\pi\sqrt{-\frac{B}{A_2}}$ .

Les conditions aux limites sur les termes statiques sont :

$$N(b) - M'(b) = \nu_b; N(a) - M'(a) = -\nu_a \quad (3.75)$$

$$M(b) = \mu_b; M(a) = \mu_a \quad (3.76)$$

D'après l'équation (3.74), on a alors nécessairement dans ce cas

$$\nu_a = -\nu_b \quad (3.77)$$

Les auteurs ont ainsi construit des solutions analytiques globales à ce problème en assemblant des tronçons "mous" et "durs", en écrivant la continuité du déplacement  $u$ , de la déformation  $u'$  et des deux forces internes  $(N - M')$  et  $(M)$  aux extrémités des différents tronçons.

Un exemple des paramètres a alors été choisi ( $A_1 = 150$ ,  $A_2 = -75$ ,  $B = 0.8$ ,  $e_{lim} = 0.01$ ,  $l = 1m$ ), des conditions aux limites particulières ont été imposées ( $M_a = M_b = 0$ ;  $u_a = U_{imposé}$ ;  $u_b = 0$  aux deux extrémités  $a$  et  $b$  de la barre), et les auteurs ont pu trouver pour ce problème quatre solutions différentes, dont la solution homogène et trois solutions présentant de la localisation des déformations. Nous verrons plus tard que ces solutions analytiques ont un intérêt pour notre mémoire. Ils seront utilisées extensivement dans le chapitre ??

Nous présentons sur les figures (3.3) et (3.4) des exemples de ces solutions analytiques ([37], [38], et [18]). On aperçoit clairement sur la figure (3.3) les zones localisées pour lesquelles  $|u'| > |e_{lim}|$ . Il y a ainsi une seule zone localisée pour les solutions 3 et 4 alors que la solution 2 comporte deux zones localisées. La figure (3.4) présente aussi clairement les comportements globaux très différents de ces quatre solutions.

### 3.5.2 Modèle analytique bidimensionnel

Chambon et al ont résolu analytiquement le problème du cisaillement d'une couche de matériau pour un milieu de second gradient, dans le cadre de la théorie des petites déformations, avec une loi de comportement élasto-plastique.

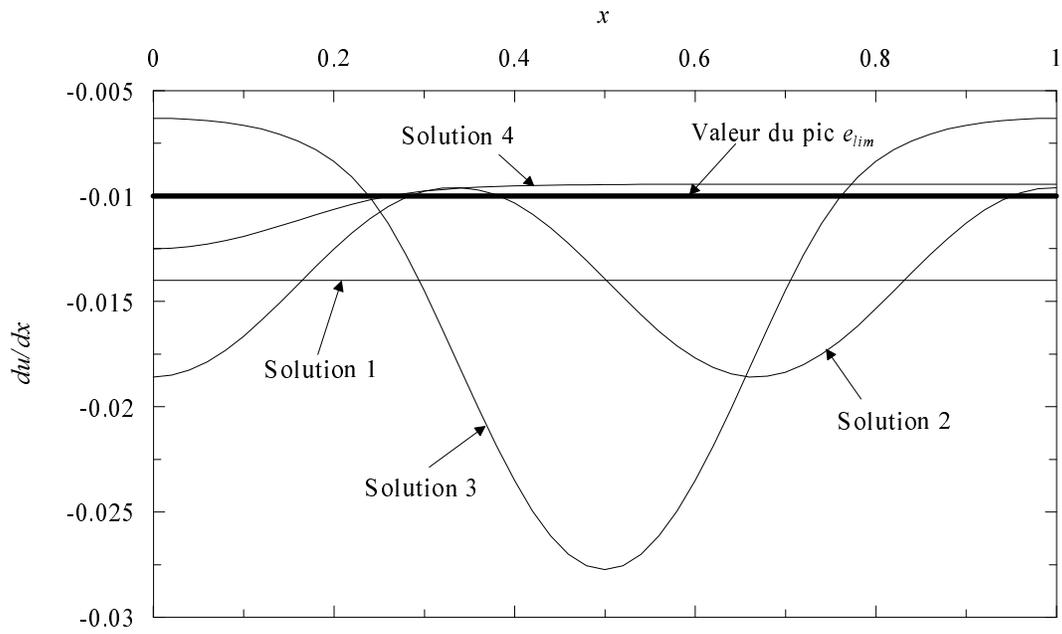


FIG. 3.3 – Gradient de déplacement  $u'$  le long de la barre pour les quatre solutions.

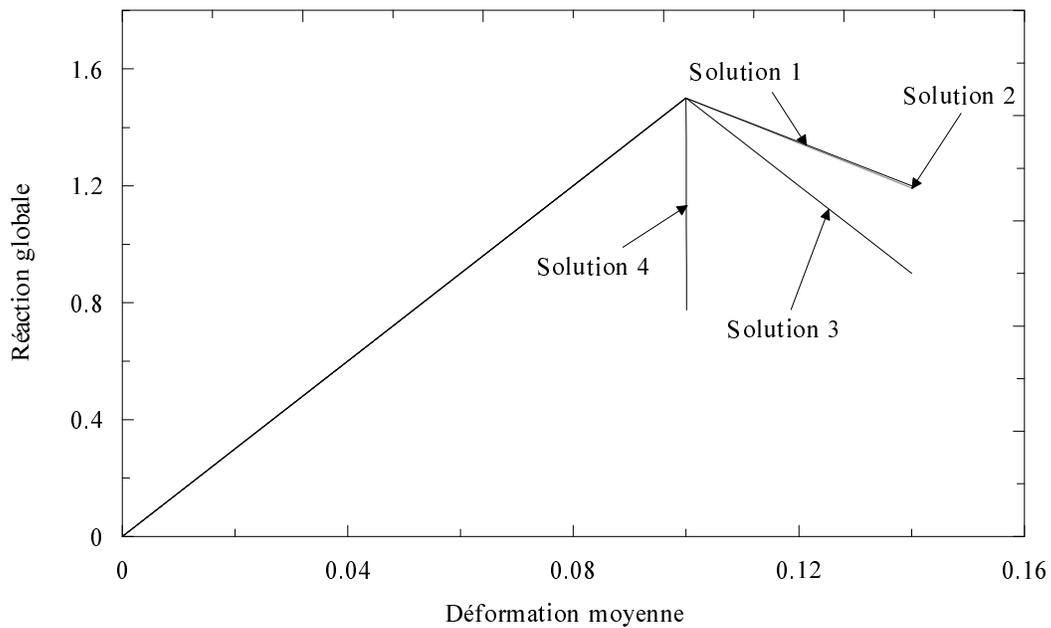


FIG. 3.4 – Comportement global de la barre : réaction  $R$  en fonction de la déformation moyenne  $U_a/l$  pour les quatre solutions.

Dans le cas où le milieu est en état de charge élastique où de décharge, les contraintes de Cauchy sont définies :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^1 \dot{D}_{kl}^e \quad (3.78)$$

Alors que si le matériau est en charge plastique on a :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}^1 \dot{D}_{kl} - \frac{\mathcal{K}_{ijpq}^1 \psi_{pq}^D \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} \mathcal{K}_{mnkl}^1 \dot{D}_{kl}}{h^\sigma + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} \mathcal{K}_{mnkl}^1 \psi_{kl}^D} \quad (3.79)$$

On remarque que les contraintes de la partie premier gradient ( équation 3.79) ne dépendent pas des termes de second gradient.

Ensuite on suppose que la partie du second gradient est élastique linéaire et isotrope :

$$\dot{\chi}_{ijk} = \mathcal{K}_{ijklmn}^2 \dot{h}_{lmn} \quad (3.80)$$

ou, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_{111} \\ \dot{\chi}_{112} \\ \dot{\chi}_{121} \\ \dot{\chi}_{122} \\ \dot{\chi}_{211} \\ \dot{\chi}_{212} \\ \dot{\chi}_{221} \\ \dot{\chi}_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{12345} & 0 & 0 & a^{23} & 0 & a^{12} & a^{12} & 0 \\ 0 & a^{145} & a^{145} & 0 & a^{25} & 0 & 0 & a^{12} \\ 0 & a^{145} & a^{145} & 0 & a^{25} & 0 & 0 & a^{12} \\ a^{23} & 0 & 0 & a^{34} & 0 & a^{25} & a^{25} & 0 \\ 0 & a^{25} & a^{25} & 0 & a^{34} & 0 & 0 & a^{23} \\ a^{12} & 0 & 0 & a^{25} & 0 & a^{145} & a^{145} & 0 \\ a^{12} & 0 & 0 & a^{25} & 0 & a^{145} & a^{145} & 0 \\ 0 & a^{12} & a^{12} & 0 & a^{23} & 0 & 0 & a^{12345} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_{111} \\ \dot{h}_{112} \\ \dot{h}_{121} \\ \dot{h}_{122} \\ \dot{h}_{211} \\ \dot{h}_{212} \\ \dot{h}_{221} \\ \dot{h}_{222} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Les constants du tenseurs  $\mathcal{K}^2$  dépendent de cinq paramètres ainsi qu'il a montré Mindlin ([66], [65]).

Pour la partie premier gradient, le modèle supposé est celui de Mohr-Coulomb plan (Vardoulakis et Sulem [105]). On obtient la partie de premier gradient sous une forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + G & K - G & 0 & 0 \\ K - G & K + G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & G \\ 0 & 0 & G & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{D}_{11} \\ \dot{D}_{22} \\ \dot{D}_{12} \\ \dot{D}_{12} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

où  $K$  et  $G$  sont respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement.

$\mathcal{K}_{ijkl}^1$  représente les modules élastiques où élasto-plastiques selon l'état du point matériel. Dans le cas de chargement plastique, l'équation ( 3.79) donne pour  $i, j \in$

{1, 2} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{1111}^1 &= K + G - \frac{1}{H}(K\mu + G\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau})(K\beta + G\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau}) \\
\mathcal{K}_{1112}^1 &= \mathcal{K}_{1121}^1 = -\frac{1}{H}(K\beta + G\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau})(\frac{G\sigma_{12}}{\tau}) \\
\mathcal{K}_{1122}^1 &= K - G - \frac{1}{H}(K\mu + G\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau})(K\beta + G\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\tau}) \\
\mathcal{K}_{1211}^1 &= \mathcal{K}_{2111}^1 = -\frac{1}{H}(\frac{G\sigma_{12}}{\tau})(K\mu + G\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau}) \\
\mathcal{K}_{1212}^1 &= \mathcal{K}_{1221}^1 = \mathcal{K}_{2112}^1 = \mathcal{K}_{2121}^1 = G - \frac{1}{H}(\frac{G\sigma_{12}}{\tau})^2 \\
\mathcal{K}_{1222}^1 &= \mathcal{K}_{2122}^1 = -\frac{1}{H}(\frac{G\sigma_{12}}{\tau})(K\mu + G\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\tau}) \\
\mathcal{K}_{2211}^1 &= K - G - \frac{1}{H}(K\mu + G\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\tau})(K\beta + G\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau}) \\
\mathcal{K}_{2212}^1 &= \mathcal{K}_{2221}^1 = -\frac{1}{H}(K\beta + G\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\tau})(\frac{G\sigma_{12}}{\tau}) \\
\mathcal{K}_{2222}^1 &= K + G - \frac{1}{H}(K\mu + G\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\tau})(K\beta + G\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\tau})
\end{aligned} \tag{3.83}$$

où le déviateur de contrainte  $\tau$  s'écrit :

$$\tau = \sqrt{(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2})^2 + (\sigma_{12})^2} \tag{3.84}$$

et  $\mu$  et  $\beta$  sont respectivement les angles de frottement et de dilataance.  
 $H$  est défini par l'équation :

$$H = h + K\mu\beta + G \tag{3.85}$$

avec  $h$  : le module d'écrourissage.

### 3.5.2.1 Application du modèle second gradient dans une couche cisailé

On considère une couche définie dans le plan  $(x, y)$ , l'axe  $z$  est l'axe perpendiculaire au plan. Chambon et al. considèrent une couche infinie comprise entre deux plans définis par  $x = 0$  et  $x = l$  (figure 3.5). Les champs des déplacements sont noté  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$ .  $\dot{u}$  et  $\dot{v}$  ne dépendent que de  $x$  et leurs dérivées par rapport à  $x$  seront notées  $'$ .

L'état initial du matériau est homogène. Concernant les conditions aux limites, ils supposent que :

- pour  $x = 0$   $\dot{u} = 0$ ,  $\dot{v} = 0$  et  $\dot{P}_1, \dot{P}_2 = 0$ .
- pour  $x = l$   $\dot{p}_2$  et  $\dot{P}_2$  sont connues.

La force de volume est supposée constante.

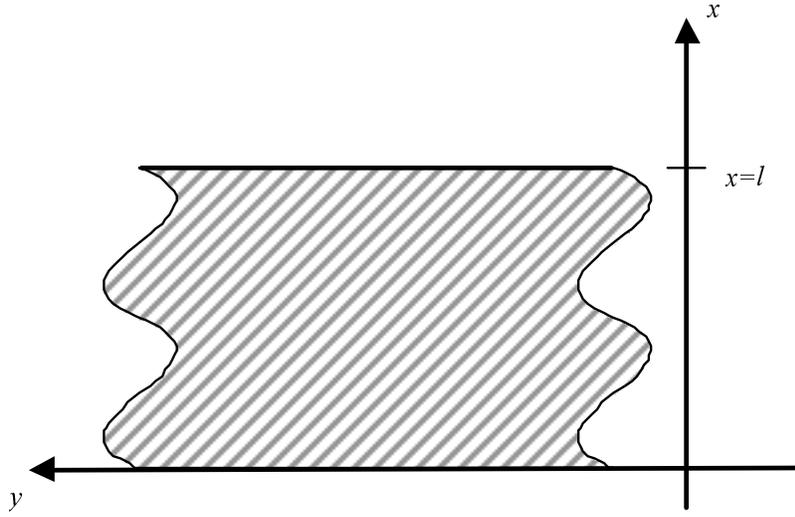


FIG. 3.5 – Domaine étudié.

On a donc le champ des gradient de vitesses des déplacements

$$\begin{bmatrix} \dot{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}' & 0 \\ \dot{v}' & 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

les vitesses des déformations

$$\begin{bmatrix} \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}' & \frac{1}{2}\dot{v}' \\ \frac{1}{2}\dot{v}' & 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

et les vitesses des rotations

$$\begin{bmatrix} \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\dot{v}' \\ \frac{1}{2}\dot{v}' & 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Les composantes non nulles du gradient des déformations  $h_{ijk}$  sont :

$$\dot{h}_{111} = \dot{u}'' \quad (3.89)$$

et

$$\dot{h}_{211} = \dot{v}'' \quad (3.90)$$

Les équations d'équilibres (3.62) deviennent ici :

$$\dot{\sigma}'_{11} - \dot{\chi}''_{111} = 0 \quad (3.91)$$

et

$$\dot{\sigma}'_{21} - \dot{\chi}''_{211} = 0. \quad (3.92)$$

En remplaçant les conditions aux limites pour  $x = l$  dans l'équation (3.63)

$$\dot{\sigma}_{11} - \dot{\chi}'_{111} = \dot{p}_1 \quad \dot{\sigma}_{21} - \dot{\chi}'_{211} = \dot{p}_2 \quad (3.93)$$

et

$$\dot{\chi}_{111} = \dot{P}_1 \quad \dot{\chi}_{211} = \dot{P}_2. \quad (3.94)$$

Et donc si on considère les conditions aux limites précédentes avec les équations d'équilibre nous obtenons :

$$\dot{\sigma}_{11} - \dot{\chi}'_{111} = \dot{p}_1 \quad (3.95)$$

et

$$\dot{\sigma}_{21} - \dot{\chi}'_{211} = \dot{p}_2 \quad (3.96)$$

En remplaçant les modèles constitutifs proposés dans ces équations d'équilibres, Chambon et al obtiennent deux équations différentielles

$$\mathcal{K}_{1111}^1 \dot{u}' + \mathcal{K}_{1112}^1 \dot{v}' - a^{12345} \dot{u}''' = \dot{p}_1 \quad (3.97)$$

et

$$\mathcal{K}_{2111}^1 \dot{u}' + \mathcal{K}_{2121}^1 \dot{v}' - a^{34} \dot{v}''' = \dot{p}_2 \quad (3.98)$$

où  $\dot{p}_1$  et  $\dot{p}_2$  sont les efforts surfaciques qui représentent les conditions aux limites sur les contraintes classiques.

***Solutions partielles*** La solution des équations (3.97 et 3.98) dépendent des valeurs des coefficients constitutifs. Les solutions des équations (3.97 et 3.98) dépendent des racines de l'équation caractéristique :

$$A(s)^4 - B(s)^2 + C = 0 \quad (3.99)$$

Où

$$\begin{aligned} A &= a^{12345} a^{34} \\ B &= a^{12345} \mathcal{K}_{2121}^1 + a^{34} \mathcal{K}_{1111}^1 \\ C &= \mathcal{K}_{2121}^1 \mathcal{K}_{1111}^1 - \mathcal{K}_{1112}^1 \mathcal{K}_{2111}^1 \end{aligned} \quad (3.100)$$

Si on note  $S = (s)^2$ , l'équation (3.99) devient :

$$A(S)^2 - BS + C = 0 \quad (3.101)$$

Le discriminant  $\Delta$  de l'équation (3.101) devient :

$$\Delta = (a^{12345} \mathcal{K}_{2121}^1 - a^{34} \mathcal{K}_{1111}^1)^2 + 4a^{12345} a^{34} \mathcal{K}_{1112}^1 \mathcal{K}_{2111}^1 \quad (3.102)$$

Ce discriminant est positif pour les matériaux élastiques et élasto-plastiques associés.

Pour les autres matériaux élasto-plastiques, habituellement  $C$  diminue quand le matériau charge. Donc  $\Delta$  est en général positif et les racines de l'équation (3.101) sont réelles.

Les solutions des équations (3.97 et 3.98) sont les suivantes :

1. Solution 1 : Dans le cas où les deux racines de l'équation (3.101) sont positives les solutions sont :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u}' \\ \dot{v}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}^{i0} \\ \dot{V}^{i0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}^{i1} \\ \dot{V}^{i1} \end{bmatrix} (\lambda^{11} \cosh(\eta^1 x) + \lambda^{12} \sinh(\eta^1 x)) \\ &+ \begin{bmatrix} \dot{U}^{i2} \\ \dot{V}^{i2} \end{bmatrix} (\lambda^{21} \cosh(\eta^2 x) + \lambda^{22} \sinh(\eta^2 x)) \end{aligned} \quad (3.103)$$

où  $\dot{U}^{i0}$  et  $\dot{V}^{i0}$  sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1111}^1 & \mathcal{K}_{1112}^1 \\ \mathcal{K}_{2111}^1 & \mathcal{K}_{2121}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}^{i0} \\ \dot{V}^{i0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

et  $(\eta^1)^2 = S^1$  et  $(\eta^2)^2 = S^2$  sont les deux racines de l'équation (3.101). Et d'autre part  $\dot{U}^{i1}$  and  $\dot{V}^{i1}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  vérifient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1111}^1 - S^i a^{12345} & \mathcal{K}_{1112}^1 \\ \mathcal{K}_{2111}^1 & \mathcal{K}_{2121}^1 - S^i a^{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}^{i1} \\ \dot{V}^{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

2. Solution 2 : Si une racine de l'équation (3.101) noté  $S^1$  est positive et une autre noté  $S^2$  est négative, dans ce cas les solutions sont :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u}' \\ \dot{v}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}^{i0} \\ \dot{V}^{i0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}^{i1} \\ \dot{V}^{i1} \end{bmatrix} (\lambda^{11} \cosh(\eta^1 x) + \lambda^{12} \sinh(\eta^1 x)) \\ &+ \begin{bmatrix} \dot{U}^{i2} \\ \dot{V}^{i2} \end{bmatrix} (\mu^{21} \cos(\omega^2 x) + \mu^{22} \sin(\omega^2 x)) \end{aligned} \quad (3.106)$$

Où  $\dot{U}^{i0}$  et  $\dot{V}^{i0}$  sont les solutions de l'équation (3.104),  $(\eta^1)^2 = S^1$ , Et  $(\omega^2)^2 = -S^2$  avec  $i \in \{1, 2\}$  vérifie l'équation (3.105)

3. Solution 3 : Si une racine de l'équation (3.101) est nulle (c'est à dire que  $C = 0$ ), et l'autre racine est positive noté  $S^1$ , les solutions sont :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u}' \\ \dot{v}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}^{i1} \\ \dot{V}^{i1} \end{bmatrix} (\lambda^{11} \cosh(\eta^1 x) + \lambda^{12} \sinh(\eta^1 x)) \\ &+ \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1112}^1 \dot{p}_2 - \mathcal{K}_{2121}^1 \dot{p}_1 \\ \mathcal{K}_{2111}^1 \dot{p}_1 - \mathcal{K}_{1111}^1 \dot{p}_2 \end{bmatrix} \frac{(x)^2}{2B} + \begin{bmatrix} -\mathcal{K}_{1112}^1 \\ \mathcal{K}_{1111}^1 \end{bmatrix} k^1 \frac{x}{B} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{a^{12345} \mathcal{K}_{1112}^1 \dot{p}_2 + a^{34} \mathcal{K}_{1111}^1 \dot{p}_1}{B(\mathcal{K}_{1111}^1 + \mathcal{K}_{1112}^1)} + \frac{B \mathcal{K}_{1112}^1}{a^{12345} \mathcal{K}_{1112}^1 \dot{p}_2 + a^{34} \mathcal{K}_{1111}^1 \dot{p}_1} k^2 \\ \frac{a^{12345} \mathcal{K}_{1112}^1 \dot{p}_2 + a^{34} \mathcal{K}_{1111}^1 \dot{p}_1}{B(\mathcal{K}_{1111}^1 + \mathcal{K}_{1112}^1)} - \frac{B \mathcal{K}_{1111}^1}{a^{12345} \mathcal{K}_{1112}^1 \dot{p}_2 + a^{34} \mathcal{K}_{1111}^1 \dot{p}_1} k^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.107)$$

où  $(\eta^1)^2 = S^1$ ; Et  $\dot{U}^{i1}$  et  $\dot{V}^{i1}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  vérifient l'équation (3.105).

Comme le comportement dans le terme du second gradient est supposé élastique, les paramètres  $a^{12345}$  et  $a^{34}$  sont positifs et donc  $A > 0$  (équation 3.100).  $C$  a le même signe que le produit de deux racines de l'équation (3.101), alors que  $B$  a

l'inverse du signe de la somme des deux racines.

Nous pouvons écrire :

$$C = \det(n_i \mathcal{K}_{ijkl}^1 n_l) \quad (3.108)$$

où  $n_i$  est la normale aux frontières ( $n_1 = 1$  et  $n_2 = 0$  dans notre étude). Ceci signifie que  $C$  est le déterminant du tenseur acoustique de la partie premier gradient du modèle constitutif (Critère de Rice). (Cf.l'équation 2.16).

Maintenant, si le milieu a un comportement élastique ( $C > 0$  et  $B > 0$ ), il existe une solution partielle au problème qui est la solution 1 (l'unicité des solutions reste assurée dans le comportement élastique avec le modèle du second gradient).

Si le milieu plastifie au cours de la sollicitation.  $C$  diminue, c'est à dire qu'une des racines de l'équation devient nulle, et une autre est positive. Dans ce cas les solutions sont du type de la solution 3, et une partie du milieu décharge. Ensuite cette racine devient négative et les parties du milieu qui décharge sont décrites par la solution 2, qui fait intervenir un cosinus. Une structure localisée apparaît alors et une longueur interne intervient. Donc on obtient que le seuil de localisation est lié au seuil de localisation de la partie premier gradient.

Cependant, comme l'écroutissage varie régulièrement, la longueur caractéristique prend une valeur infinie au point de bifurcation, puis va diminuer au fur et à mesure que les déformations se poursuivent (le chapitre ??). L'apparition de la bande dépend de la géométrie du milieu et des conditions aux limites.

Finalement, nous pouvons remarquer qu'il n'est pas possible d'avoir deux solutions négatives, car cela implique que  $C > 0$ , ce qui n'est pas logique lorsque la bande de cisaillement commence à se propager.

Les auteurs ont construit à partir des trois solutions présentées (de 3.103 au 3.107) des solutions globales pour le problème de la couche supposé. Pour un état donné, le milieu peut se divisé en  $N$  parties, chaque partie correspond à une solution partielle. On distingue deux types de solutions partielles : une solution dite "dure" pour les points matériels qui déchargent, et une solution dite "molle" pour les points matériels qui chargent. Pour construire les solutions globales, ils ont cinq inconnues par tronçon, correspondant aux quatre constantes indépendantes ( $\lambda^{ij}$  avec  $i \in \{1, 2\}$  dans 3.103, 3.106, et 3.107) aux quelles on ajoute la longueur du tronçon : il y a donc au total  $5N$  inconnus par tronçon et  $N - 1$  points de jonctions entre les tronçons au quel il y a nécessairement continuité de  $u'$  et de  $v'$ . Par ailleurs comme un point de jonction appartient à la fois à deux tronçons successifs, alors on doit écrire que les déformations correspondent à un chargement neutre en ce point. Avec le modèle constitutif utilisé ici, ceci revient à écrire

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})G\dot{u}' + 2\mu\tau K\dot{u}' + 2\sigma_{12}G\dot{v}' = 0 \quad (3.109)$$

En écrivant les équations bilan en chaque point jonction, les auteurs obtiennent

ainsi  $5(N - 1)$  équations, puis  $5N$  équations en écrivant les conditions aux limites de la couche (pour  $x = 0$  et  $x = l$ ) et en écrivant que la somme des longueurs des parties est égale à la largeur totale de la couche.

Le problème est ainsi résolu et il est possible de construire des solutions pour le problème en vitesses d'un modèle élastoplastique du second gradient.

**Exemple** Chambon et al ont testé cette étude sur une couche avec des paramètres des solutions composée des trois parties dont 2 sont en décharge et une est en charge au milieu de la couche, la partie qui charge est appelé molle, (évidemment d'autres solutions sont possibles à obtenir).

Les paramètres constitutifs du modèle, sont ceux de Vardoulakis et Sulem [105], à savoir :

- $K = 50Mpa$
- $G = 62.5Mpa$
- $\beta = 0.25rad$

Deux états de contraintes initiaux ont été proposés, le premier correspond aux contraintes principales par rapport aux axes  $(x, y)$  :

- $\sigma_{xx} = -1.8MPa$
- $\sigma_{yy} = -0.3MPa$
- $\sigma_{xy} = 0.MPa$

Et le deuxième suppose que les contraintes sont inclinées par rapport à l'axe  $x$  d'un angle  $-0.8rad$  :

- $\sigma_{xx} = -1.028MPa$
- $\sigma_{yy} = -1.072MPa$
- $\sigma_{xy} = -0.750MPa$

Selon la convention classique de mécanique des milieux continus, les contraintes négatives sont des contraintes de compression.

La hauteur de la couche est  $15cm$  et les coefficients du second gradient sont choisis pour donner une longueur interne raisonnable pour un sable, soit :

- $a^{12345} = 25MPa.m.$
- $a^{34} = 2.5MPa.m.$

Finalement, les conditions aux limites sont différentes dans les deux tests.

- Dans le premier cas :

- $\dot{t}_x = 1.$
- $\dot{t}_y = 0.$

- Et dans le deuxième :

- $\dot{t}_x = 0.$
- $\dot{t}_y = 1.$

Les figures 3.6, et 3.8, représentent les déformations amplifiées par un facteur multiplicatif.

Dans le but de comparer la largeur de la zone localisée, le critère charge-décharge (équation 3.109) a été tracé en fonction de  $x$  dans les figures (3.7et 3.9). Le

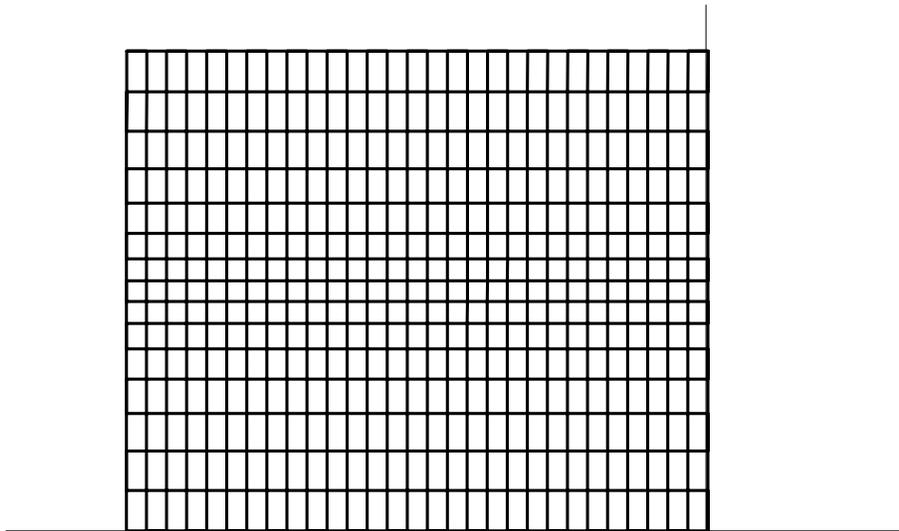


FIG. 3.6 – Configuration déformée amplifiée pour le cas 1.

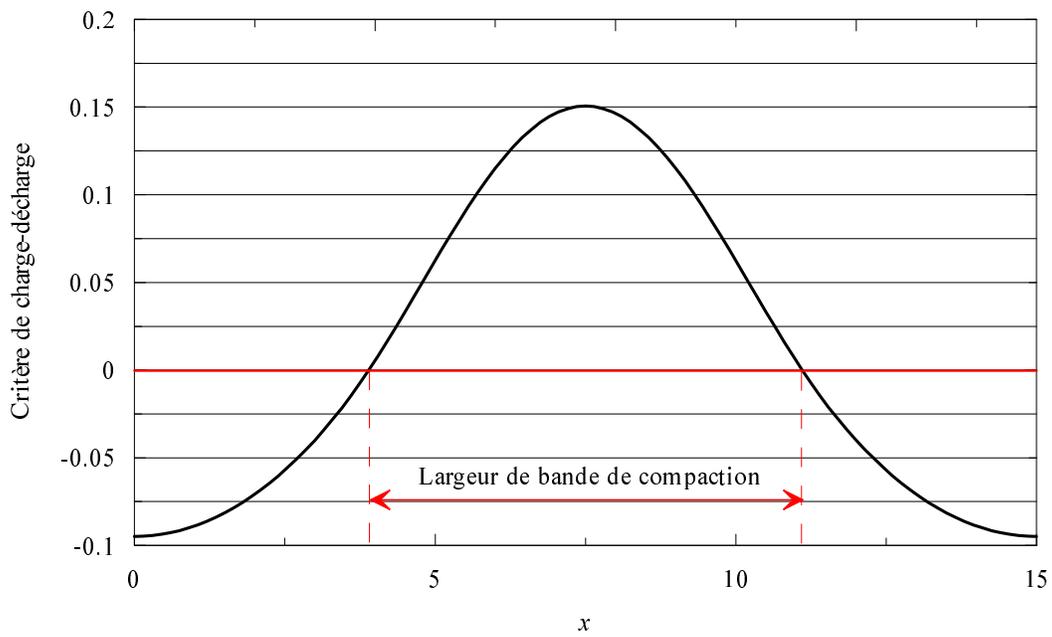


FIG. 3.7 – Critère de charge-décharge en fonction de  $x$  pour le cas 1.

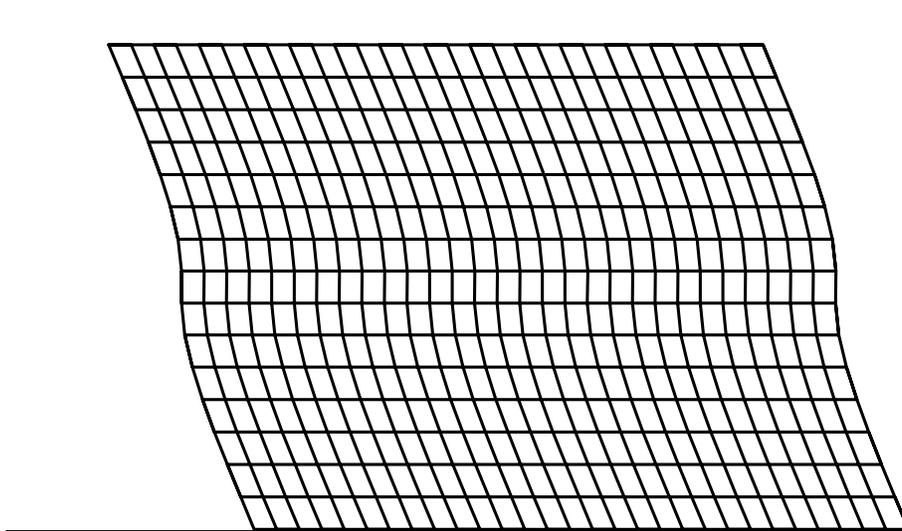


FIG. 3.8 – Configuration déformée amplifiée pour le cas 2.

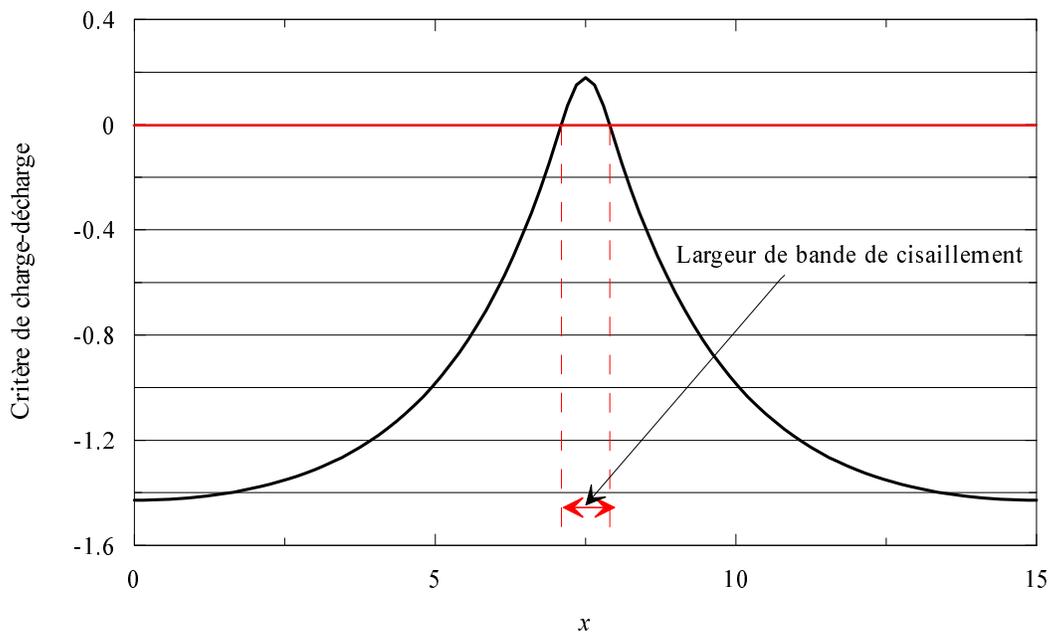


FIG. 3.9 – Critère de charge-décharge en fonction de  $x$  pour le cas 2.

critère s'annule exactement pour les bords de la zone de localisation. On peut ainsi remarquer que les deux solutions ne conduisent pas à la même largeur de bande, ce qui n'est pas évident en comparant les deux configurations déformées amplifiées.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu les modèles de second gradient qui consistent à introduire la longueur interne dans les modèles avec plusieurs voies. La première partie de ce chapitre a été consacré aux modèles non locaux.

Ensuite, la formulation générale de la théorie avec micro-structure a été présentée dans la partie suivante afin de définir toutes les variables cinématiques introduites. Il s'agit d'une théorie générale permettant de généraliser n'importe quelle loi de comportement.

Cette théorie comporte comme cas particulier le milieu de Cosserat et de second gradient locaux.

Les modèles de second gradient locaux ont été utilisé pour des problèmes unidimensionnel ainsi que bidimensionnel. Les solutions analytiques obtenues ont prouvé que le terme de second gradient permet de limiter les nombres des solutions au lieu d'une infinité des solutions possibles en post-localisation pour des milieux classiques de mécanique des milieux continus.

Ces solutions analytiques des problèmes ont donc été obtenues de manière exacte, sans avoir besoin de poser des conditions sur les équations constitutives ce qui ramènerait vers des solutions approchées.

De plus les modèles de second gradient sont basé sur une hypothèse forte (Cf. équation 3.59) pour laquelle on dispose de peu d'étude micro-mécanique la justifiant pour les géomatériaux (Matsushima et al.[62]).

# Chapitre 4

## Modélisation numérique de la post-localisation avec la méthode des éléments finis

### 4.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent les principes théoriques du modèle du second gradient ainsi que différentes études analytiques pour des milieux unidimensionnels et bidimensionnels.

Ce chapitre est consacré à l'implémentation numérique de ce modèle dans un code aux éléments finis pour des milieux de différentes dimensions. Néanmoins, nous avons choisi de montrer les principes généraux de la méthode des éléments finis dans les milieux continus classiques. Les principes du calcul de cette méthode seront présentés dans le but de rappeler comment la procédure itérative est réalisée et quels sont les dispositifs utilisés pour atteindre la solution recherchée.<sup>1</sup>

Ensuite nous montrerons comment le modèle du second gradient a été introduit dans cette méthode. Nous décrivons deux types d'éléments utilisés, l'élément conforme dans un milieu unidimensionnel, et l'élément non conforme dans un milieu bidimensionnel.

En effet, jusqu'à présent les études faites dans le cadre de la théorie de second gradient local ont été réalisées avec des modèles radoucissants quasi-fragile linéaire, ce qui ramène à une invariance de la zone localisée en post-localisation l'objectif de cette partie de notre thèse est d'explorer les problèmes de variation de la zone localisée. Afin de pouvoir faire une explorative sans restriction, il nous a fallu une méthode de longueur d'arc.

Afin de pouvoir modéliser des comportements de Snap back et ainsi de suivre dans ce cas l'évolution de la taille de la zone localisée au cours de chargement, il est nécessaire d'introduire la méthode de longueur d'arc. Nous avons

---

<sup>1</sup>La méthode des éléments finis est détaillée dans Chambon [17] et Charlier [25]

implémenté numériquement cette méthode pour le modèle second gradient unidimensionnel avec élément conforme (paragraphe 4.3). L'analyse numérique et les modifications apportées au code seront présentés dans ce chapitre.

## 4.2 Le principe général de la méthode des éléments finis pour un milieu classique

Pour traiter un problème quasi-statique de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis, classiquement on discrétise le temps, et la géométrie à chaque fin de pas de temps, et on résout le problème d'équilibre.

L'équilibre du milieu est vérifié à chaque fin de pas de temps. Comme les lois constitutives étudiées sont du type incrémental, et que notre étude est mécanique quasi statique et non visqueuse, le temps se réduit à une variable d'évolution et son échelle n'a pas d'influence sur les phénomènes. Le choix du pas est un problème. Pour diminuer le temps de calcul il est préférable que la taille du pas soit grande, alors que pour des raisons de précisions la convergence du calcul demande des pas de petite taille.

Pour un milieu continu, dont la configuration initiale est  $\Omega^0$ , son équilibre doit être assuré à l'instant  $t$  pour laquelle il occupe la configuration  $\Omega^t$ . L'équilibre s'écrit à travers le principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\Omega^t} (\sigma_{ij}^t \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^t}) d\Omega^t - \bar{P}_e^* = 0 \quad (4.1)$$

quelque soit  $u^*$  cinématiquement admissible (les champs virtuels cinématiquement admissible doivent être dérivables et que  $u^* = 0$  sur  $\Gamma_u^t$ ). Les  $(\star)$  désignent les quantités virtuelles

où :

- $\sigma_{ij}^t$  sont les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy à l'instant  $t$ .
- $u_i^*$  sont les composantes du champ de vitesses virtuelles

Rappelons que les indices inférieurs  $i, j$ , et  $k$  désignent les indices des tenseurs et vecteurs selon la dimension du milieu étudié.

$\bar{P}_e^*$  correspond au travail des efforts extérieurs :

$$\bar{P}_e^* = \int_{\Omega^t} \rho^t f_i^t u_i^* d\Omega^t + \int_{\Gamma_\sigma^t} p_i^t u_i^* d\Gamma^t \quad (4.2)$$

- $f_i^t$  sont les forces de volume par unité de masse au temps  $t$ .
- $\rho^t$  est la densité de masse au temps  $t$ .
- $p_i^t$  sont les composantes des forces par unité de surface.
- $\Gamma_\sigma^t$  est la partie de la frontière  $\Gamma^t$  où les vecteurs contraintes sont supposés connus à l'instant  $t$ . L'autre partie de  $\Gamma^t$  est notée  $\Gamma_u^t$

Pour un pas du temps quelconque l'équilibre du milieu est réalisé sur la configuration déformée à la fin de ce pas. Cette configuration finale est inconnue, alors que la configuration initiale est quant à elle connue. On cherche à obtenir l'équilibre de la configuration finale en résolvant le système d'équation (4.1) par une méthode itérative (méthode de Newton Raphson). Supposons connaître la configuration à *nime* itération  $\Omega^{tn}$ , cette configuration n'est à l'équilibre ce qui définit le résidu  $R^{tn*}$  :

$$\int_{\Omega^{tn}} (\sigma_{ij}^{tn} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{tn}}) d\Omega^{tn} - \bar{P}_e^{tn*} = R^{tn*} \quad (4.3)$$

définissons :

$$\begin{aligned} \Delta u_j^{tn} &= x_j^{t_{n+1}} - x_j^{tn} \\ \Delta \sigma_{il}^{tn} &= \sigma_{il}^{t_{n+1}} - \sigma_{il}^{tn} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nous cherchons une configuration  $\Omega^{t_{n+1}}$  pour laquelle l'équilibre est vérifié :

$$\int_{\Omega^{t_{n+1}}} (\sigma_{ij}^{t_{n+1}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{t_{n+1}}}) d\Omega^{t_{n+1}} - \bar{P}_e^{t_{n+1}*} = 0 \quad (4.5)$$

Le problème correspondant à (4.5) est non linéaire, pour le résoudre nous effectuons une linéarisation du système précédent (4.5) au voisinage de la configuration  $\Omega^{tn}$ . Cette démarche nécessite une écriture de l'équation (4.5) dans la configuration  $\Omega^{tn}$  et une soustraction de chaque terme de l'équation (4.3) au terme correspondant de l'équation résultante (4.5). Pour pouvoir intégrer l'équation (4.5) sur la configuration connue, nous reportons quelques modifications mathématiques réalisées sur les valeurs caractéristique de la configuration  $\Omega^{t_{n+1}}$  :

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^{tn}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} &= \delta_{ij} - \frac{\partial \Delta u_i^{tn}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{t_{n+1}}} &= \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^{tn}} \frac{\partial x_k^{tn}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^{tn}} (\delta_{kj} - \frac{\partial \Delta u_k^{tn}}{\partial x_j^{t_{n+1}}}) \end{aligned}$$

Le premier terme de l'équation (4.5) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{tn}} [\sigma_{ij}^{t_{n+1}} (\delta_{jk} - \frac{\partial \Delta u_k^{tn}}{\partial x_j^{t_{n+1}}}) \det(J) - \sigma_{ik}^{tn}] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^{tn}} d\Omega^{tn} = \\ \int_{\Omega^{tn}} [-\sigma_{ij}^{t_{n+1}} \frac{\partial \Delta u_k^{t_{n+1}}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} \det(J) + \sigma_{ik}^{t_{n+1}} \det(J) - \sigma_{ik}^{tn}] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^{tn}} d\Omega^{tn} \end{aligned} \quad (4.6)$$

où :

$\det(J)$  désigne le déterminant du jacobien de la transformation exprimant  $x_i^{t_{n+1}}$  en fonction de  $x_i^{tn}$ . Le terme général de cette matrice de transformation est  $\frac{\partial x_i^{t_{n+1}}}{\partial x_k^{tn}}$ . En fait, ce terme  $\det(J)$  mesure la variation de volume entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

Le volume élémentaire  $\Omega^{t_{n+1}}$  devient  $\Omega^{t_{n+1}} = \Omega_n^t \det(J)$ .

En retranchant les premiers termes des équations (4.1) et (4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{t_n}} [\sigma_{ij}^{t_{n+1}} (\delta_{jk} - \frac{\partial \Delta u_k^{t_n}}{\partial x_j^{t_{n+1}}}) \det(J) - \sigma_{ik}^{t_n}] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^{t_n}} d\Omega^{t_n} = \\ \int_{\Omega^{t_n}} [-\sigma_{ij}^{t_{n+1}} \frac{\partial \Delta u_k^{t_{n+1}}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} \det(J) + \sigma_{ik}^{t_{n+1}} \det(J) - \sigma_{ik}^{t_n}] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^{t_n}} d\Omega^{t_n} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Finalement nous avons :

$$\int_{\Omega^{t_n}} [\sigma_{ij}^{t_{n+1}} (\delta_{jk} - \frac{\partial \Delta u_k^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}}) \det(J) - \sigma_{ik}^{t_n}] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^{t_n}} d\Omega^{t_n} - (\bar{P}_e^{t_{n+1}} - \bar{P}_e^{t_n}) = -R^{t_n} \quad (4.8)$$

La linéarisation de (4.8) donne :

$\int_{\Omega^{t_n}} \left[ \Delta \sigma_{ik}^{t_n} - \sigma_{ij}^{t_n} \frac{\partial \Delta u_i^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} + \sigma_{ik}^{t_n} \frac{\partial \Delta u_k^{t_n}}{\partial x_l^{t_n}} \right] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{t_n}} d\Omega^{t_n}$  avec  $\Delta \sigma_{ik}^{t_n}$  est la différence entre le début de pas actuelle à la configuration  $\Omega^{t_n}$  et la fin de pas à la configuration  $\Omega^{t_{n+1}}$ . Ce terme est linéarisé par rapport à  $\frac{\partial \Delta u_k^{t_n}}{\partial x_l^{t_n}}$ . Cette linéarisation peut être réalisée par une méthode de perturbation numérique (Charlier [25]), ce qui définit  $D_{ijkl}$  dont nous allons présenter le principe dans la suite.

$$\Delta \sigma_{ij}^{t_n} = D_{ijkl} \frac{\partial \Delta u_k^{t_n}}{\partial x_l^{t_n}}$$

La matrice d'incidence  $D_{ijkl}$  représente l'influence sur l'état de contrainte final d'une perturbation effectuée sur chacune des composantes du gradient de vitesse. Notons qu'elle dépend fortement de l'hypothèse définissant l'évolution de la cinématique au cours du pas et qu'elle ne peut être considéré comme un opérateur linéaire auxiliaire que si la différence entre les états de contrainte résultant de l'intégration de la loi le long du chemin cinématique fondamental et le long d'un chemin cinématique perturbé est infiniment plus petite que l'incrément de contrainte sur le pas. Finalement une forme linéarisée est obtenue :

$$\int_{\Omega^{t_n}} \left[ D_{ijkl} \frac{\partial \Delta u_k^{t_n}}{\partial x_l^{t_n}} - \sigma_{ij}^{t_n} \frac{\partial \Delta u_k^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} + \sigma_{ik}^{t_n} \frac{\partial \Delta u_l^{t_n}}{\partial x_l^{t_n}} \right] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^{t_n}} d\Omega^{t_n}$$

La modification des termes de forces surfaciques dépend de l'hypothèse faite, alors que les termes des forces de volumes  $f_i^t$  sont plus simples à modifier. Le calcul des intégrales de l'équation (4.8) est réalisé d'une façon approchée, le milieu étudié est discrétisé en élément fini. Par la suite on utilise des éléments isoparamétrique. Pour simplifier le problème nous supposons que l'élément considéré est quadrilatéral. Pour systématiser le calcul, une transformation des coordonnées de cet élément dans un élément parent est effectuée. Les coordonnées de cet élément parent seront notées  $\xi_1, \xi_2$ . L'élément parent sera alors le carré limité par les droites  $(-1 < \xi_1 < 1)$  et  $(-1 < \xi_2 < 1)$ . L'équation (4.8) écrite pour cet

élément est transformée dans les nouveau repère d'axes, c'est à dire

$$\frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial x_k^{tn}} = \frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k^{tn}}$$

et

$$\frac{\partial \Delta u_i^{tn}}{\partial x_k^{tn}} = \frac{\partial \Delta u_i^{tn}}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k^{tn}}$$

Les dérivées partielles par rapport à  $\xi_1$  et  $\xi_2$  d'une variable dans la configuration de l'élément parent sont reliée a celles dans la configuration réel. ainsi on a :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^{tn}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_2^{tn}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^{tn}}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_2^{tn}}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

où  $[T]$  est l'inverse de Jacobien

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^{tn}}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_2^{tn}}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u_1^{tn} \\ \vdots \\ \partial u_2^{tn} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \partial u_1^{tn} \\ \vdots \\ \partial u_2^{tn} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$\phi_i$  sont les fonctions d'interpolation. Finalement, la matrice de rigidité élémentaire  $[k]$  permettant de définir le système linéaire auxiliaire de la procédure itérative est :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{elem}^{tn}} [U^*]^T [S]^T [T]^T [D] [T] [S] [dU^{tn}] d\Omega^{tn} = \\ [U_{node}^*]^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [S]^T [T]^T [D] [T] [S] d\xi_1 d\xi_2 [dU_{node}^{tn}] \\ \equiv [U_{node}^*]^T [k] [dU_{node}^{tn}] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [S]^T [T]^T [D] [T] [S] d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.12)$$

avec :

- $[D]$  la matrice de compliance corrigé par les contraintes.
- $dU_{node}^{tn}$  les incréments des déplacements nodales à l'itération  $t_n$
- $[U^*]^T$  les déplacements nodalux virtuels.

L'expression (4.12) est calculée par la méthode de Gauss :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [T]^T [S]^T [D] [T] [S] d\Omega^{tn} = \sum_{m=1}^{m=NPi} \sum_{n=1}^{n=NPi} [K(\xi_1, \xi_2)] W_i W_j \quad (4.13)$$

- $NPi$  est le nombre de points de Gauss
- $W_i$  est le poids de Gauss du point d'intégration.
- $\Sigma$  représente une sommation du produit de la valeur de l'intégration aux divers points d'intégration par les poids correspondants. Le choix du nombre de points d'intégration dépend de l'utilisateur, et les valeurs de  $W_i$  se retrouvent dans la littérature.

### 4.2.1 Calcul du résidu

Le résidu  $R^{t_n^*}$  est calculé pour un élément :

$$\bar{P}_e^{t_n^*} - [U_{node}^*]^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [T]^T [S]^T [\sigma^{t_n}] \det J^{t_n} d\xi_1 d\xi_2 = -R^{t_n^*} \quad (4.14)$$

Il est clair que l'expression (4.14) est associée à un champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible. Nous pouvons en déduire la matrice de second membre  $[f_{HE}]$  qui est donnée par :

$$[f_{HE}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [T]^T [S]^T [\sigma^{t_n}] \det J^{t_n} d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.15)$$

représente les efforts internes aux points de Gauss de chaque élément.

Avec la méthode de Gauss, l'équation (4.15) devient :

$$[f_{HE}] = \sum_{m=1}^{m=NPi} \sum_{n=1}^{n=NPi} \varphi(\xi_1, \xi_2) W_i W_j \quad (4.16)$$

### 4.2.2 Assemblage des matrices élémentaires

Après l'assemblage des matrices de rigidité élémentaire dans une matrice de rigidité globale  $K_G$  et des matrices des seconds membres élémentaires (4.15) dans une matrice globale nous obtenons un système d'équation linéaires actuelle de la méthode de Newton Raphson, il est de la forme :

$$[K_G][\Delta u] = [R_G] \quad (4.17)$$

où  $[R_G]$  définit le résidu qui rassemble les seconds membres élémentaires dans une matrice globale. L'objectif principal de la résolution est de trouver le champ des déplacements  $\Delta u$  correspondant à un résidu nul  $[R_G(u)] = 0$

### 4.2.3 Procédure itérative

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment obtenir un système linéarisé au voisinage de la configuration  $\Omega^{t_n}$ .

L'étape suivante est celle de la recherche d'équilibre entre les forces nodales extérieures et intérieures. La méthode démarre pour la première itération avec un champ de déplacement approximé ; différents choix de ce champ seront présentés dans notre mémoire, ensuite, l'équation (4.17) sera résolue permettant d'obtenir un nouveau champ de déplacement et la configuration est réactualisée :

$$[\Delta u]^{t_n} = -[K^{-1}_{G_p}](t_n, t_n)[R_G]_{t_n} \quad (4.18)$$

$$[u^{t_{n+1}}] = [\Delta u] + u^{t_n} \quad (4.19)$$

pour :

$$[x^{t_{n+1}}] = [\Delta x] + x^{t_n} \quad (4.20)$$

Finalement, nous résumons les étapes générales de la méthode des éléments finis dans l'algorithme suivant. Nous allons voir dans la suite que cet algorithme est valable aussi pour le modèle de second gradient avec la méthode des éléments finis.

#### 4.2.4 Algorithme 1

- 1– Initialisation
- 2– boucle sur un pas :  $ipas = 1, npas$ (nombre des pas)
- 3– Initialisation des données (les conditions aux limites, la discrétisations géométrique, les paramètres du modèle constitutif, ...).
- 4– Initialisation du champ des déplacements  $[\delta U_{node}^{t_n}]$ .
- 5– : Actualisation des coordonnées :  $x^{t_n}$  et du champ des déplacements  $[\delta U_{node}^{t_n}]$  (si on est dans l'option grandes déformations) :

$$\begin{aligned} u^{t_{n+1}} &= \Delta u + u^{t_n} \\ x^{t_{n+1}} &= \Delta x + x^{t_n} \end{aligned}$$

- 6– boucle sur les itérations :
- 7– boucle sur les éléments :
- 8– boucle sur les points d'intégration : pour chaque point d'intégration
  - calcul de la transformation au début et à la fin du pas.
  - calcul des fonctions d'interpolation.
- 9– Calculer la matrice de compliance.
- 10– calcul de la matrice de rigidité élémentaire  $[k]$ .
- 11– calcul de la matrice de la force hors équilibre élémentaire  $[f_{HE}]$
- 12– Assemblage des matrices de rigidité (et des forces hors équilibre) élémentaire dans une matrice de rigidité et de la force hors équilibre globale.
- 13– Résoudre le système des équations linéaires :  $[K_{G_p}][\Delta u] = [R_G]$
- 14– Test de convergence
  - Si convergence retour à 15
  - Si non convergence retour à 6
- 15– Si  $ipas < npas$  retour à 2
- 16– Stop

### 4.3 Traitement numérique du modèle de second gradient unidimensionnel avec l'élément conforme

Nous présentons dans ce paragraphe l'implantation du modèle du second gradient dans un code aux éléments finis. Résumons l'étude du milieu unidimensionnel réalisée par El Hassan et al. (Cf. [37]), constitué d'une barre d'une longueur  $l$  soumise à une compression (traction ou cisaillement sans variation de volume). Les variables statiques se réduisent à la contrainte usuelle  $N$ . Le principe de puissance virtuelle devient :

$$\int_{\Omega_t} (N_t u_t^{*'} + M_t u_t^{*''}) dx_t = P_e \quad (4.21)$$

Comme dans (4.2), en écrivant l'équation d'équilibre dans chacune des configurations voisines  $\Omega_{t_n}$  et  $\Omega_{t_{n+1}}$ , et en retranchant ces deux équations, on obtient une équation linéarisée :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\tau_n}} [(\Delta N_{\tau_n} - M_{\tau_{n+1}} \frac{d^2(\Delta u_{\tau_n})}{dx_{\tau_n}^2}) u_{\tau_n}^{*'} \\ & + (\Delta M_{\tau_n} - M_{\tau_{n+1}} \frac{d(\Delta u_{\tau_n})}{dx_{\tau_n}}) u_{\tau_n}^{*''}] dx_{\tau_n} = -R_{\tau_n}^* \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta N_{\tau_n} &= N_{\tau_{n+1}} - N_{\tau_n} \\ \Delta M_{\tau_n} &= M_{\tau_{n+1}} - M_{\tau_n} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nous avons vu précédemment comment le terme de contrainte lié au premier gradient est linéarisé avec la méthode de perturbation. Cette méthode est généralisée pour compenser le terme des forces liées au second gradient :

$$\begin{aligned} \Delta N_{\Omega_n} &\cong C_{11} \frac{d(\Delta u_{\Omega_n})}{dx_{\Omega_n}} + C_{12} \frac{d^2(\Delta u_{\Omega_n})}{dx_{\Omega_n}^2} \\ \Delta M_{\Omega_n} &\cong C_{21} \frac{d(\Delta u_{\Omega_n})}{dx_{\Omega_n}} + C_{22} \frac{d^2(\Delta u_{\Omega_n})}{dx_{\Omega_n}^2} \end{aligned}$$

la matrice de compliance  $[\mathcal{D}]$  obtenue :

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} - M \\ C_{21} - M & C_{22} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

On réécrit l'équation (4.22) :

$$\int_{\Omega_{\tau_n}} \begin{bmatrix} \frac{du^*}{dx_{\tau_n}} & \frac{d^2 u^*}{dx_{\tau_n}^2} \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} \frac{d(\Delta u_{\tau_n})}{dx_{\tau_n}} \\ \frac{d^2(\Delta u_{\tau_n})}{dx_{\tau_n}^2} \end{bmatrix} dx_{\tau_n} = -R_{\tau_n}^* \quad (4.25)$$

### 4.3.1 Élément isoparamétrique

Selon l'algorithme décrit précédemment (Cf.4.2.4) nous sommes dans l'étape 6 et donc nous devons effectuer le calcul dans chaque élément. Comme nous avons les déplacements et leur gradient qui apparaissent dans l'équation à résoudre (4.25), il est nécessaire d'assurer la continuité de ces déplacements et de leur gradient. Pour cela, on doit utiliser un élément conforme de continuité  $C^1$  (Hermitien). Pour le milieu unidimensionnel EL Hassan (Cf. [37]) considère un élément de longueur  $\ell$  comprenant deux noeuds  $a, b$  dans la configuration réelle tel que :

$$x_b - x_a = \ell$$

Dans la configuration parent, l'élément a une longueur 2, les extrémités  $x_a$  et  $x_b$  de l'élément réel correspondant aux coordonnées  $\xi = -1$ ,  $\xi = 1$  respectivement. Ceci implique que les extrémités de l'élément dans la configuration  $\Omega_{\tau_n}$ . ( $x_a^{\tau_n}$ ,  $x_b^{\tau_n}$ ) doivent correspondre à  $\xi = -1$ , et  $\xi = 1$ . L'abscisse d'un point de l'élément considéré est définie par :

$$x_1 = \Phi_1 x_a + \Phi_2 x'_a + \Phi_3 x_b + \Phi_4 x'_b$$

Pour avoir une correspondance entre les points de l'élément dans la configuration réelle et les point de l'élément dans la configuration parent nous réalisons

$$x_1 = \Phi_1 x_a + \Phi_2 \frac{dx_a}{dx_0} \frac{dx_0}{d\xi} \Big|_{\xi=-1} + \Phi_3 x_b + \Phi_4 \frac{dx_b}{dx_0} \frac{dx_0}{d\xi} \Big|_{\xi=1}$$

où  $x_{a_0}$ , et  $x_{b_0}$  sont les extrémités de l'élément réel dans la configuration initiale  $\Omega_0$ .

L'hypothèse la plus simple à prendre pour  $\frac{dx_a}{dx_0}$  est :

$$\frac{dx_0}{d\xi} = cte = \frac{x_{b_0} - x_{a_0}}{2} \text{ comme } \xi \text{ varie de } -1 \text{ à } 1.$$

où :

- $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  sont les fonctions d'interpolation. Ce sont des fonctions polynômiaux classiques Hermitien du troisième ordre en  $\xi$
- d'où :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\xi^3 - 3\xi + 2}{4} \\ \Phi_2 &= \frac{\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1}{4} \\ \Phi_3 &= \frac{-\xi^3 + 3\xi + 2}{4} \\ \Phi_4 &= \frac{\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1}{4} \\ x'_a &= \frac{dx_a}{d\xi} \Big|_{\xi=-1}, \quad x'_b = \frac{dx_b}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \end{aligned}$$

Le champ de déplacement  $u$  qui doit être continu du premier ordre peut être défini par :

$$u(\xi) = \Phi_1 u|_{\xi=-1} + \Phi_2 \frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi=-1} + \Phi_3 u|_{\xi=1} + \Phi_4 \frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi=1}$$

En suite nous avons à résoudre

$$\int_{\alpha_{\tau_n}}^{\beta_{\tau_n}} \left[ \frac{du^*}{dx_{\tau_n}} \quad \frac{d^2 u^*}{dx_{\tau_n}^2} \right] [D] \left[ \begin{array}{c} \frac{d(\Delta v_{\tau_n})}{dx_{\tau_n}} \\ \frac{d^2(\Delta u_{\tau_n})}{dx_{\tau_n}^2} \end{array} \right] dx_{\tau_n} \quad (4.26)$$

On a :

$$\frac{du}{dx_{\tau_n}} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} \quad (4.27)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx_{\tau_n}^2} &= \frac{d}{d\xi} \left( \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} \right) \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} = \frac{d^2u}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} \right)^2 + \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} \right) \\ &= \frac{d^2u}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} \right)^2 + \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} \frac{d^2\xi}{dx_{\tau_n}^2} \frac{dx_{\tau_n}}{d\xi} = \frac{d^2u}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx_{\tau_n}} \right)^2 + \frac{du}{d\xi} \frac{d^2\xi}{dx_{\tau_n}^2} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{d^2\xi}{dx_{\tau_n}^2} = \frac{1}{\frac{dx_{\tau_n}}{d\xi}} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\frac{dx_{\tau_n}}{d\xi}} \right) = - \frac{\frac{d^2x_{\tau_n}}{d\xi^2}}{\left( \frac{dx_{\tau_n}}{d\xi} \right)^3}$$

La forme matricielle de ces équations est

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dx_{\tau_n}} \\ \frac{d^2u}{dx_{\tau_n}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{dx_{\tau_n}}{d\xi}} & 0 \\ -\frac{\frac{d^2x_{\tau_n}}{d\xi^2}}{\left( \frac{dx_{\tau_n}}{d\xi} \right)^3} & \left( \frac{1}{\frac{dx_{\tau_n}}{d\xi}} \right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{d^2u}{d\xi^2} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{d^2u}{d\xi^2} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Dans le cas simple des petites déformations on a :

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_{b_0} - x_{a_0}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(x_{b_0} - x_{a_0})^2} \end{bmatrix}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{d^2u}{d\xi^2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{d\xi} & \frac{\partial\phi_2}{d\xi} & \frac{\partial\phi_3}{d\xi} & \frac{\partial\phi_4}{d\xi} \\ \frac{\partial^2\phi_1}{d\xi^2} & \frac{\partial^2\phi_2}{d\xi^2} & \frac{\partial^2\phi_3}{d\xi^2} & \frac{\partial^2\phi_4}{d\xi^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u|_{\xi=-1} \\ \frac{du_1}{d\xi}|_{\xi=-1} \\ u|_{\xi=1} \\ \frac{du_2}{d\xi}|_{\xi=1} \end{bmatrix} \\ &= [B] \begin{bmatrix} u|_{\xi=-1} \\ \frac{du_1}{d\xi}|_{\xi=-1} \\ u|_{\xi=1} \\ \frac{du_2}{d\xi}|_{\xi=1} \end{bmatrix} \quad (4.29) \end{aligned}$$

En dérivant

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{du}{dx_0} \frac{dx_0}{d\xi} = \frac{du}{dx_0} \frac{x_{b_0} - x_{a_0}}{2} \quad (4.30)$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u|_{\xi=-1} \\ \frac{du}{d\xi}|_{\xi=-1} \\ u|_{\xi=1} \\ \frac{du}{d\xi}|_{\xi=1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_{b0}-x_{a0}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_{b0}-x_{a0}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u|_{\xi=-1} \\ \frac{du}{dx_0}|_{\xi=-1} \\ u|_{\xi=1} \\ \frac{du}{dx_0}|_{\xi=1} \end{bmatrix} \\
&= [S] \begin{bmatrix} u|_{\xi=-1} \\ \frac{du}{dx_0}|_{\xi=-1} \\ u|_{\xi=1} \\ \frac{du}{dx_0}|_{\xi=1} \end{bmatrix} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

La première expression (4.25) devient :

$$\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} u^*|_{\xi=-1} \\ \frac{du^*}{dx_0}|_{\xi=-1} \\ u^*|_{\xi=1} \\ \frac{du^*}{dx_0}|_{\xi=1} \end{bmatrix}^T [S]^T [B]^T [T]^T [D] [T] [B] [S] \begin{bmatrix} u|_{\xi=-1} \\ \frac{du}{dx_0}|_{\xi=-1} \\ u|_{\xi=1} \\ \frac{du}{dx_0}|_{\xi=1} \end{bmatrix} \frac{dx_{c_n}}{d\xi} d\xi \quad (4.32)$$

La matrice de rigidité élémentaire  $[k]$  est donnée par :

$$[k] = \int_{-1}^1 ([S]^T [B]^T [T]^T [D] [T] [B] [S]) \frac{dx_{\tau_n}}{d\xi} d\xi \quad (4.33)$$

et le terme résidu élémentaire  $-r_{\tau_n}^*$

$$\begin{aligned}
-r_{\tau_n}^* &= \int_{\alpha_{\tau_n}}^{\beta_{\tau_n}} \begin{bmatrix} u^*{}'_{\tau_n} & u^*{}''_{\tau_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{\tau_n} \\ M_{\tau_n} \end{bmatrix} dx_{\tau_n} \\
&= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} u^*|_{\xi=-1} \\ \frac{du^*}{dx_0}|_{\xi=-1} \\ u^*|_{\xi=1} \\ \frac{du^*}{dx_0}|_{\xi=1} \end{bmatrix}^T [S]^T [B]^T [T]^T \begin{bmatrix} N_{\tau_n} \\ M_{\tau_n} \end{bmatrix} \frac{dx_{\tau_n}}{d\xi} d\xi \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Donc les forces hors équilibre élémentaire  $[f_{HE}]$  sont données par :

$$[f_{HE}] = \int_{-1}^1 ([S]^T [B]^T [T]^T \begin{bmatrix} N_{\tau_n} \\ M_{\tau_n} \end{bmatrix}) \frac{dx_{\tau_n}}{d\xi} d\xi \quad (4.35)$$

Après l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires dans une matrice de rigidité globale  $K_{G_p}^i$  et des matrices des forces hors équilibres élémentaires dans une matrice globale  $FH_p^i$  nous obtenons un système d'équation linéaires de la forme

$$[K_{G_p}^i]_{n,n} [\Delta u]_n = [FH_p^i]_n \quad (4.36)$$

Pour conclure l'analyse précédente, l'algorithme suivante présente le processus itératif en éléments finis avec le modèle du second gradient.

### 4.3.2 Algorithme 2

Nous présentons l'algorithme sur un pas (étape 2 de l'algorithme 4.2.4) puisque le début est semblable à celui du cas avec le modèle du second gradient.

- 1– Initialisation des données
- 2– une boucle sur un pas :
- 3– Initialisation des vitesses nodales  $[\delta U_{node}^{t_n}]$ 
  - **Pour des degrés de liberté fixes ou imposés** : vitesses nodales nulles ou imposées
  - **Pour des degrés de liberté imposés** : déplacement ou gradient de déplacement imposé
  - **Pour des degrés de liberté libres** :
    - Option 1 : vitesses à l'itération 1 du pas  $n$  = vitesses à la dernière itération convergée du pas  $n - 1$ .
    - Option 2 : vitesses nodales lues sur un fichier fourni par l'utilisateur.

Actualisation des coordonnées  $x_{t_n} = x_{t_{n-1}} + \dot{u}_{t_n} \Delta t_n$  (en grandes déformations)

- 4– boucle sur les itérations :
- 5– boucle sur les éléments :
- 6– boucle sur les points d'intégration : Pour chaque point d'intégration
  - caractérisation de l'élément dans les nouvelles coordonnées (calcul d'interpolation).
  - Actualisation de la contrainte  $N$  et de la double contrainte  $M$   $N_{t_n^i} = N_{t_{n-1}} + \Delta N_{t_n^i}$ ,  $M_{t_n^i} = M_{t_{n-1}} + \Delta M_{t_n^i}$
  - Calcul d'une matrice de compliance  $[C]$ .
  - Détermination de la matrice de rigidité élémentaire  $[k]$ .
  - Détermination de la matrice de la force hors équilibre élémentaire  $[f_{HE}]$
- 7– Assemblage des matrices de rigidité (et des forces hors équilibre) élémentaire dans une matrice de rigidité (et de la force hors équilibre) globale.
- 8– Résoudre le système d'équation linéaire :  $[K_{G_p}][\Delta u] = [FH_{G_p}]$
- 9– Test de convergence :
  - Si non convergence retour à 4
  - Si convergence retour à actualisation de la nouvelle configuration finale supposée,  $i = i + 1$ , aller en 2
- 10– Fin du pas de temps

### 4.3.3 Introduction de la loi

Une hypothèse cinématique est nécessaire pour calculer le champ des vitesses dans le but de pouvoir déterminer la matrice de compliance. Dans le cadre

des grandes déformations et pour cette formulation unidimensionnelle décrite au dessus, une hypothèse simple à résoudre a été considérée. Le gradient des vitesses  $L_{ij}^t = \frac{\partial \dot{u}_i^t}{\partial x_j^t}$  a été supposé constant pendant un pas de temps :

$$L_{ij}^{t-\Delta t} = \dots = L_{ij}^{(k)} = \dots = L_{ij}^{t_n} \equiv L_{ij}^c \quad (4.37)$$

$L_{ij}^c$  est la dérivée à partir du gradient des déformations du pas de temps précédent

$$L^c = \frac{1}{\Delta t} \log\left(\frac{dx^{t_n}}{dx^{t-\Delta t}}\right) = \frac{1}{\Delta t} \log\left(1 + \frac{d\Delta u^{t_n}}{dx^{t-\Delta t}}\right) \quad (4.38)$$

et :

$$\frac{dx^{(k+1)}}{dx^{(k)}} = \exp\left(L^c \frac{\Delta t}{N}\right) \quad (4.39)$$

où  $N$  est le nombre de sous-pas.

#### 4.3.4 Test numérique

El Hassan ([37], [38], et [18]) a développé un code d'éléments finis Simpconf afin d'écrire ces équations, pour les deux hypothèses des petites et des grandes déformations. Dans le cas des petites déformations les résultats ont été satisfaisants. Ils sont identiques aux résultats analytiques obtenus (Cf. figures 3.3 et 3.4)

Les quatre solutions analytiques obtenues ont été retrouvées numériquement en utilisant différentes initialisations de l'algorithme itératif (étape 3 de l'algorithme 2). Chaque solution a un champ des vitesses nodales correspondant déterminé en fonction des longueurs des parties qui chargent. Ensuite le code est initialisé numériquement avec le champ correspondant à la solution voulue.

Une autre méthode d'initialisation est réalisée à l'aide d'un champ de vitesses aléatoires (Moulet [69]). Au lieu d'imposer des valeurs connues à la première itération du pas correspondant à la localisation (qui correspond à  $|u'| > |e_{lim}|$  dans ce cas), des valeurs aléatoires pour les champs  $\dot{u}$  et  $\dot{u}'$  sont imposées, tout en veillant au respect des conditions aux limites à savoir qu'une extrémité de la barre est fixe (noeud b) alors qu'un déplacement est imposé à l'autre extrémité (noeud a). Les quatre solutions ont été obtenues selon l'appartenance des initialisations aux bassins d'attraction de chacune de ces solutions (le bassin d'attraction d'une solution est l'ensemble des initialisations qui conduisent à cette solution).

Une autre manière de tester la fiabilité du code est l'introduction d'imperfection matérielle dans la barre étudiée dans le but de voir si cette dernière peut restaurer l'unicité des solutions. L'inclusion d'imperfection est réalisée en diminuant

la limite élastique dans différents éléments au choix de l'utilisateur de la barre alors que les autres éléments de la barre gardent les mêmes caractéristiques.

L'introduction d'imperfections a été aussi réalisée par El Hassan et al. ([37], [38], et [18]), les quatre solutions analytiques ont été retrouvées mais ils ont également constaté qu'il suffisait de changer très légèrement l'emplacement d'un élément affaibli pour basculer d'une solution à une autre. Il est ainsi apparu très difficile de placer des éléments affaiblis en des endroits de la barre bien précis pour choisir une solution parmi les quatre possibles.

## 4.4 Traitement numérique d'un modèle bidimensionnel avec le multiplicateur de Lagrange

Le travail des efforts intérieurs s'écrit généralement avec le modèles du second gradient (Cf.3.5) :

$$\bar{P}_i^* = \int_{\Omega^t} (\sigma_{ij}^t \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^t} + \chi_{ijk}^t \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^t \partial x_k^t}) d\Omega^t \quad (4.40)$$

Une formulation bidimensionnelle basant sur l'utilisation de l'élément conforme de type Hermitiens  $C^1$  a été testé par El Hassan [38]. Cette formulation entraînait l'utilisation d'élément ayant une continuité  $C^1$ . La formulation affaiblie des équations d'équilibre en utilisant des multiplicateurs de Lagrange a été utilisée, dans le but de permettre de construire une discrétisation des éléments finis  $C^0$  avec des éléments non conformes. Le principe des puissances virtuelles devient avec le multiplicateur de Lagrange s'écrit :

$$\int_{\Omega^t} (\sigma_{ij}^t \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^t} + \chi_{ijk}^t \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^t}) d\Omega^t - \int_{\Omega^t} \lambda_{ij}^t (\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^t} - v_{ij}^*) d\Omega^t - P_e^* = 0 \quad (4.41)$$

$$\int_{\Omega^t} \lambda_{ij}^* (\frac{\partial u_i^t}{\partial x_j^t} - v_{ij}^t) d\Omega^t = 0 \quad (4.42)$$

Puisque cette étude pour un milieu bidimensionnel, on a donc  $i, j, k \in \{1, 2\}$ .  $f_i^t$  est la force de volumes classiques par unité de masse,  $\rho^t$  est la densité de masse,  $p_i^t$  est les forces extérieures classiques par unité de surface, et  $P_i^t$  les forces doublées par unité de surface. Toutes ces forces sont appliquées sur une partie de la frontière  $\Gamma^t$  (où elles sont imposées).

Pour effectuer l'analyse numérique nous devons d'abord réaliser une linéarisation des équations d'équilibre dans les configurations  $\Omega^{tn}$  et  $\Omega^{tn+1}$ . Nous cherchons à trouver les champs  $u_i^t$ ,  $v_{ij}^t$  et  $\lambda_{ij}^t$  tel que l'équation soit vérifié.

Soit  $\Omega^{tn}$  une configuration non équilibrée :

$$\int_{\Omega^{t_n}} \left( \sigma_{ij}^{t_n} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{t_n}} + \chi_{ijk}^{t_n} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^{t_n}} \right) d\Omega^{t_n} - \int_{\Omega^{t_n}} \lambda_{ij}^{t_n} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{t_n}} - v_{ij}^* \right) d\Omega^{t_n} - P_e^{*t_n} = R^{t_n} \quad (4.43)$$

et

$$\int_{\Omega^{t_n}} \lambda_{ij}^* \left( \frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} - v_{ij}^{t_n} \right) d\Omega^{t_n} = Q^{t_n} \quad (4.44)$$

on cherche  $\Omega^{t_{n+1}}$

$$\int_{\Omega^{t_{n+1}}} \left( \sigma_{ij}^{t_{n+1}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{t_{n+1}}} + \chi_{ijk}^{t_{n+1}} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^{t_{n+1}}} \right) d\Omega^{t_{n+1}} - \int_{\Omega^{t_{n+1}}} \lambda_{ij}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{t_{n+1}}} - v_{ij}^* \right) d\Omega^{t_{n+1}} - P_e^{*t_{n+1}} = (4.45)$$

$$\int_{\Omega^{t_{n+1}}} \lambda_{ij}^* \left( \frac{\partial u_i^{t_{n+1}}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} - v_{ij}^{t_{n+1}} \right) d\Omega^{t_{n+1}} = 0 \quad (4.46)$$

Alors que le terme des efforts extérieurs devient dans  $\Omega^{t_n}$

$$P_e^{*t_n} = \int_{\Omega^{t_n}} G^{t_n} u_i^* d\Omega^{t_n} + \int_{\partial\Omega^{t_n}} (p^{t_n} u_i^* + P^{t_n} D u_i^*) d\Gamma^{t_n} \quad (4.47)$$

où  $D$  est la dérivé normale de la quantité  $q$  ( $Dq = \frac{\partial q}{\partial x_k} n_k$ ) et dans  $\Omega^{t_{n+1}}$

$$P_e^{*t_{n+1}} = \int_{\Omega^{t_{n+1}}} G^{t_{n+1}} u_i^* d\Omega^{t_{n+1}} + \int_{\partial\Omega^{t_{n+1}}} (p^{t_{n+1}} u_i^* + P^{t_{n+1}} D u_i^*) d\Gamma^{t_{n+1}} \quad (4.48)$$

La soustraction de l'équation (4.41) écrite dans la configuration  $\Omega^{t_n}$  de l'équation écrite dans la configuration  $\Omega^{t_{n+1}}$  (4.41) donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{t_n}} \left[ \frac{\partial u_i^*}{\partial x_l^{t_n}} \left( \sigma_{ij}^{t_n} \frac{\partial x_l^{t_n}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} \det F - \sigma_{il}^{t_n} \right) + \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_l^{t_n}} \left( \chi_{ijk}^{t_{n+1}} \frac{\partial x_l^{t_n}}{\partial x_k^{t_{n+1}}} \det F - \chi_{ilk}^{t_n} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_l^{t_n}} \left( \lambda_{ij}^{t_{n+1}} \frac{\partial x_l^{t_n}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} \det F - \lambda_{il}^{t_n} \right) + v_{ij}^* \left( \lambda_{ij}^{t_{n+1}} \det F - \lambda_{ij}^{t_n} \right) \right] d\Omega^{t_n} \\ - \left( P_{\text{ext}}^{t_{n+1}} - P_{\text{ext}}^{t_n} \right) = -R^{t_n} \quad (4.49) \end{aligned}$$

et de la même manière pour (4.44) et (4.46)

$$\int_{\Omega^{t_n}} \lambda_{ij}^* \left[ \left( \frac{\partial u_i^{t_{n+1}}}{\partial x_k^{t_n}} \frac{\partial x_k^{t_n}}{\partial x_j^{t_{n+1}}} \det F - \frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} \right) - \left( v_{ij}^{t_{n+1}} \det F - v_{ij}^{t_n} \right) \right] d\Omega^{t_n} = -Q^{t_n} \quad (4.50)$$

De la même manière, la soustraction de l'équation (4.44) de l'équation (4.46) amène à :

$$\int_{\Omega^{t_n}} \left[ \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^{t_n}} \quad \frac{\partial v_{ik}^*}{\partial x_i^{t_n}} \quad v_{il}^* \right] \left( \left[ \begin{array}{c} d\sigma_{il}^{t_n} \\ d\chi_{ikl}^{t_n} \\ 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \sigma_{il}^{t_n} - \lambda_{il}^{t_n} \\ \chi_{ikl}^{t_n} \\ \lambda_{il}^{t_n} \end{array} \right] \frac{\partial du_m^{t_n}}{\partial x_m^{t_n}} \right. \\ \left. + \left[ \begin{array}{cc} -\sigma_{ij}^{t_n} + \lambda_{ij}^{t_n} & -1 \\ -\chi_{ikj}^{t_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial du_j^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} \\ d\lambda_{il}^{t_n} \end{array} \right] \right) d\Omega^{t_n} = \left( P_{\text{ext}}^{t_n+1*} - P_{\text{ext}}^{t_n*} \right) - R^{t_n*} \quad (4.51)$$

$$\int_{\Omega^{t_n}} \lambda_{ij}^* \left( \left( \frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} - v_{ij}^{t_n} \right) \frac{\partial du_m^{t_n}}{\partial x_m^{t_n}} + \frac{\partial du_i^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} - \frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial x_k^{t_n}} \frac{\partial du_k^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} - dv_{ij}^{t_n} \right) d\Omega^{t_n} = -Q^{t_n*} \quad (4.52)$$

Concernant l'équation (4.47), les calculs des termes extérieurs dépendent des hypothèses faites sur les forces appliquées. Les forces par unité de masse en général, sont constantes et dans ce cas leur contribution au système linéarisé est nulle :

$$f_i^{t_n+1} = f_i^{t_n} = f_i^{t_n} \quad (4.53)$$

En revanche les forces doublées sont considérées nulles pour des raisons de simplicité (Cf.4.3)

$$\bar{P}_i^{t_n+1*} = \bar{P}_i^{t_n*} = 0 \quad (4.54)$$

Il reste à déterminer les forces surfaciques liées au terme du premier gradient et comme les pressions imposées sur les frontières du domaine. Elles dépendent de la théorie c'est à dire si l'on est en grandes ou en petites déformations. Rappelons que dans le cas des grandes déformations, la résolution est réalisée sur la configuration actuelle et donc, la force dépendant de la configuration actuelle.

#### 4.4.1 Formulation dans le cas bidimensionnel

Par intégration de la loi de comportement et linéarisation consistante de cette intégrale. Les termes  $d\sigma_{ij}^{t_n}$  et  $d\chi_{ijk}^{t_n}$  peuvent être écrits sous une forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11}^{t_n} \\ d\sigma_{12}^{t_n} \\ d\sigma_{21}^{t_n} \\ d\sigma_{22}^{t_n} \end{bmatrix} = [C_{(4 \times 4)}^{t_n}] \begin{bmatrix} \frac{\partial du_1^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} \\ \frac{\partial du_1^{t_n}}{\partial du_1^{t_n}} \\ \frac{\partial x_2^{t_n}}{\partial du_2^{t_n}} \\ \frac{\partial x_1^{t_n}}{\partial du_2^{t_n}} \\ \frac{\partial du_2^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\begin{bmatrix} d\chi_{111}^{t_n} \\ d\chi_{112}^{t_n} \\ d\chi_{121}^{t_n} \\ \vdots \\ d\chi_{222}^{t_n} \end{bmatrix} = [D_{(8 \times 8)}^{t_n}] \begin{bmatrix} \frac{\partial dv_{11}^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} \\ \frac{\partial dv_{11}^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} \\ \frac{\partial dv_{12}^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial dv_{22}^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Remarquons que l'équation (4.55) représente la linéarisation du terme de premier gradient (Simo et Taylor [97]). Cette opération est généralisée pour contenir le terme du second gradient (équation 4.56).

Ces termes apparaissant dans le système linéarisé obtenu ci-dessus représentent la différence entre les contraintes à l'itération  $t_n$  et les contraintes à l'itération  $t_{n+1}$ . Ces termes peuvent être calculés avec une méthode de perturbation numérique.

Le vecteur du déplacement contient 20 variable

$$[dU^{t_n}]^T \equiv \left[ \begin{array}{cccccccccccc} \frac{\partial du_1^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} & \frac{\partial du_1^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} & \frac{\partial du_2^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} & \frac{\partial du_2^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} & \frac{\partial dv_{11}^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} & \frac{\partial dv_{11}^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} & \frac{\partial dv_{12}^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} & \cdots & \frac{\partial dv_{22}^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} \\ & & dv_{11}^{t_n} & dv_{12}^{t_n} & dv_{21}^{t_n} & dv_{22}^{t_n} & d\lambda_{11}^{t_n} & d\lambda_{12}^{t_n} & d\lambda_{21}^{t_n} & d\lambda_{22}^{t_n} \end{array} \right] \quad (4.57)$$

Le vecteur  $[U^*]^T$  est défini de la même manière pour les quantités virtuelles correspondantes.

Si nous écrivons l'équation (4.51) et (4.52) sous leur forme matricielle, nous obtenons :

$$\int_{\Omega^{t_n}} [U^*]^T [E^{t_n}] [dU^{t_n}] d\Omega^{t_n} = -R^{t_n^*} - Q^{t_n^*} \quad (4.58)$$

La matrice  $[E^{t_n}]$  est une matrice  $20 \times 20$

$$[E^{t_n}] = \begin{bmatrix} E1_{(4 \times 4)}^{t_n} & 0_{(4 \times 8)} & 0_{(4 \times 4)} & -I_{(4 \times 4)} \\ E2_{(8 \times 4)}^{t_n} & D_{(8 \times 8)}^{t_n} & 0_{(8 \times 4)} & 0_{(8 \times 4)} \\ E3_{(4 \times 4)}^{t_n} & 0_{(4 \times 8)} & 0_{(4 \times 4)} & I_{(4 \times 4)} \\ E4_{(4 \times 4)}^{t_n} & 0_{(4 \times 8)} & -I_{(4 \times 4)} & 0_{(4 \times 4)} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

où

$$[E1_{(4 \times 4)}^{t_n}] = [E3_{(4 \times 4)}^{t_n}] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sigma_{12}^{t_n} + \lambda_{12}^{t_n} & \sigma_{11}^{t_n} - \lambda_{11}^{t_n} \\ \sigma_{12}^{t_n} - \lambda_{12}^{t_n} & -\sigma_{11}^{t_n} + \lambda_{11}^{t_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{22}^{t_n} + \lambda_{22}^{t_n} & \sigma_{21}^{t_n} - \lambda_{21}^{t_n} \\ \sigma_{22}^{t_n} - \lambda_{22}^{t_n} & -\sigma_{21}^{t_n} + \lambda_{21}^{t_n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$[E2_{(8 \times 4)}^{t_n}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\chi_{112}^{t_n} & \chi_{111}^{t_n} \\ \chi_{112}^{t_n} & -\chi_{111}^{t_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi_{122}^{t_n} & \chi_{121}^{t_n} \\ \chi_{122}^{t_n} & -\chi_{121}^{t_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi_{212}^{t_n} & \chi_{211}^{t_n} \\ \chi_{212}^{t_n} & -\chi_{211}^{t_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi_{222}^{t_n} & \chi_{221}^{t_n} \\ \chi_{222}^{t_n} & -\chi_{221}^{t_n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

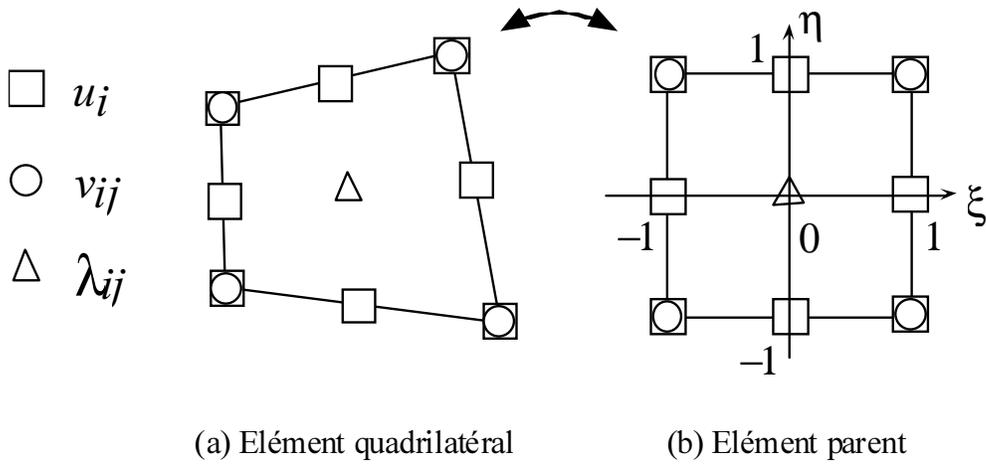


FIG. 4.1 – L'élément utilisé.

$$[E3_{(4 \times 4)}^{t_n}] = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{t_n} & 0 & 0 & \lambda_{11}^{t_n} \\ \lambda_{12}^{t_n} & 0 & 0 & \lambda_{12}^{t_n} \\ \lambda_{21}^{t_n} & 0 & 0 & \lambda_{21}^{t_n} \\ \lambda_{22}^{t_n} & 0 & 0 & \lambda_{22}^{t_n} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$[E4_{(4 \times 4)}^{t_n}] = \begin{bmatrix} 1 - v_{11}^{t_n} & -\frac{\partial u_1^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} & 0 & \frac{\partial u_1^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} - v_{11}^{t_n} \\ \frac{\partial u_1^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} - v_{12}^{t_n} & 1 & -\frac{\partial u_1^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} & -v_{12}^{t_n} \\ -v_{21}^{t_n} & -\frac{\partial u_2^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} & 1 & \frac{\partial u_2^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} - v_{21}^{t_n} \\ \frac{\partial u_2^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} - v_{22}^{t_n} & 0 & -\frac{\partial u_2^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} & 1 - v_{22}^{t_n} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Les matrices  $[C^{t_n}]$  et  $[D^{t_n}]$  sont définies comme précédemment alors que la matrice  $I_{(4 \times 4)}$  définit la matrice identité de dimension  $4 \times 4$

#### 4.4.2 Discrétisation aux éléments finis

Les éléments finis utilisés sont des éléments quadrilatéraux composés de 9 noeuds, dont 8 noeuds pour  $u_i$ , 4 noeuds pour  $v_{ij}$ , et un seul noeud pour  $\lambda_{ij}$ . La figure (4.1) montre la position des noeuds sur l'élément L'élément parent est défini dans l'espace  $\xi$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ) et  $\eta$  ( $-1 \leq \eta \leq 1$ ). Tous les champs ( $u_i$ ,  $v_{ij}$ , et  $\lambda_{ij}$ ) seront définis dans ce nouveau repère.

Le choix considéré d'assumer une valeur constante du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{ij}$  a été fait pour raison de simplicité. Matsushima et al. ([60], et [61]) ont proposé que l'élément utilisé est l'élément isoparamétrique et donc les fonctions correspondantes entre les coordonnées réelles ( $x_1^{t_n}$ ,  $x_2^{t_n}$ ) et les coordonnées de l'élément parent ( $\xi$ ,  $\eta$ ) sont les mêmes que celles utilisées pour le déplacement

$u_i^{t_n}(\xi, \eta)$  et leur gradient.

Les fonctions d'interpolations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta) \\ \phi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ \phi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta) \\ \phi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \\ \phi_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta) \\ \phi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ \phi_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta) \\ \phi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \end{array} \right. \quad (4.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ \psi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{array} \right. \quad (4.65)$$

La suite de ces équations :

$$x_i^{t_n}(\xi, \eta) = [ \phi_1(\xi, \eta) \quad \phi_2(\xi, \eta) \quad \dots \quad \phi_8(\xi, \eta) ] \begin{bmatrix} x_i^{t_n} |_{(\xi=-1, \eta=-1)} \\ x_i^{t_n} |_{(0, -1)} \\ \vdots \\ x_i^{t_n} |_{(-1, 0)} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Et les dérivées de  $x_i^{t_n}$  par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  s'écriront donc

$$\frac{\partial x_i^{t_n}}{\partial \xi} = [ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi_8(\xi, \eta)}{\partial \xi} ] \begin{bmatrix} x_i^{t_n} |_{(\xi=-1, \eta=-1)} \\ x_i^{t_n} |_{(0, -1)} \\ \vdots \\ x_i^{t_n} |_{(-1, 0)} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

et

$$\frac{\partial x_i^{t_n}}{\partial \eta} = [ \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi_8(\xi, \eta)}{\partial \eta} ] \begin{bmatrix} x_i^{t_n} |_{(\xi=-1, \eta=-1)} \\ x_i^{t_n} |_{(0, -1)} \\ \vdots \\ x_i^{t_n} |_{(-1, 0)} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

### 4.4.3 Transformation matricielle

Dans le but de remplacer les vecteurs  $[dU^{t_n}]$  et  $[U^*]$  en fonction des différentes variables obtenues précédentes , nous pouvons exprimer

$$\frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial \xi} = \frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} \frac{\partial x_1^{t_n}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} \frac{\partial x_2^{t_n}}{\partial \xi} \quad (4.69)$$



$$[b_u^i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$[b_v^i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \\ \psi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_i \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} [dU_{(\xi,\eta)}^{tn}]^T = \\ \left[ \frac{\partial du_1^{tn}}{\partial \xi} \quad \dots \quad \frac{\partial du_2^{tn}}{\partial \eta} \quad \frac{\partial dv_{11}^{tn}}{\partial \xi} \quad \dots \quad \frac{\partial dv_{22}^{tn}}{\partial \eta} \quad dv_{11} \quad \dots \quad dv_{22} \quad d\lambda_{11} \quad \dots \quad d\lambda_{22} \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} [dU_{node}^{tn}]^T = \\ \begin{bmatrix} du_1^{tn}(-1,-1) & du_2^{tn}(-1,-1) & dv_{11}^{tn}(-1,-1) & dv_{12}^{tn}(-1,-1) & dv_{21}^{tn}(-1,-1) & dv_{22}^{tn}(-1,-1) \\ du_1^{tn}(-1,0) & du_2^{tn}(-1,0) & & & & \\ du_1^{tn}(-1,1) & du_2^{tn}(-1,1) & dv_{11}^{tn}(-1,1) & dv_{12}^{tn}(-1,1) & dv_{21}^{tn}(-1,1) & dv_{22}^{tn}(-1,1) \\ du_1^{tn}(0,-1) & du_2^{tn}(0,-1) & & & & \\ d\lambda_{11}^{tn}(0,0) & d\lambda_{12}^{tn}(0,0) & d\lambda_{21}^{tn}(0,0) & d\lambda_{22}^{tn}(0,0) & & \\ du_1^{tn}(0,1) & du_2^{tn}(0,1) & & & & \\ du_1^{tn}(1,-1) & du_2^{tn}(1,-1) & dv_{11}^{tn}(1,-1) & dv_{12}^{tn}(1,-1) & dv_{21}^{tn}(1,-1) & dv_{22}^{tn}(1,-1) \\ du_1^{tn}(1,0) & du_2^{tn}(1,0) & & & & \\ du_1^{tn}(1,1) & du_2^{tn}(1,1) & dv_{11}^{tn}(1,1) & dv_{12}^{tn}(1,1) & dv_{21}^{tn}(1,1) & dv_{22}^{tn}(1,1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.81)$$

La matrice de rigidité élémentaire résultant est :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{elem}^{tn}} [U^*]^T [E^{tn}] [dU^{tn}] d\Omega^{tn} &= [U_{node}^*]^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [T^{tn}]^T [E^{tn}] [T^{tn}] [B] \det J^{tn} d\xi d\eta [dU_{node}^{tn}] \\ &\equiv [U_{node}^*]^T [k^{tn}] [dU_{node}^{tn}] \end{aligned} \quad (4.82)$$

Le résiduel défini dans l'équation (4.58) peut être réécrit pour chaque élément.

$$\begin{aligned}
\left(-R_n^{t_n^*} - Q_n^{t_n^*}\right)_{elem} &= W_e^{t_n^*} - \int_{\Omega_{elem}^{t_n}} \left[ \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{t_n}} \quad \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^{t_n}} \quad v_{ij}^* \quad \lambda_{ij}^* \right] \begin{bmatrix} \sigma_{ij}^{t_n} - \lambda_{ij}^{t_n} \\ \chi_{ij}^{t_n} \\ \lambda_{ij}^{t_n} \\ \frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}} - v_{ij}^{t_n} \end{bmatrix} d\Omega^{t_n} \\
&= W_e^{t_n^*} - \int_{\Omega_{elem}^{t_n}} [U_{(\xi,\eta)}^*]^T [\sigma^{t_n}] d\Omega^{t_n} \\
&= W_e^{t_n^*} - [U_{node}^*]^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [T^{t_n}]^T [\sigma^{t_n}] \det J^{t_n} d\xi d\eta \\
&\equiv W_e^{t_n^*} - [U_{node}^*]^T [f_{HE}^{t_n}] \tag{4.83}
\end{aligned}$$

où

$$[\sigma^{t_n}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{t_n} - \lambda_{11}^{t_n} & \dots & \sigma_{22}^{t_n} - \lambda_{22}^{t_n} & \chi_{111}^{t_n} & \dots & \chi_{222}^{t_n} & \lambda_{11}^{t_n} & \dots & \lambda_{22}^{t_n} \\ & & & \frac{\partial u_1^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}} - v_{11}^{t_n} & \dots & \frac{\partial u_2^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}} - v_{22}^{t_n} & & & \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

Nous avons indiqué précédemment que  $P_e^{t_n^*}$  comprend deux termes, les termes des forces de volumes et les termes provenant des efforts surfaciques, et que les doubles forces additionnelles surfaciques ne sont pas considérées dans cette étude.

*Introduction de la loi* : Matsushima et al. ([61] et [60]) ont adopté une hypothèse cinématique simple qui convient au cas bidimensionnel puisque l'hypothèse adoptée dans le cas unidimensionnel (4.3.2) n'est pas facile à réaliser. L'hypothèse considère que la vitesse pour chaque point matériel est constante pendant un pas de temps :

$$\dot{u}_i^{t_n - \Delta t} = \dots = \dot{u}_i^{(k)} = \dots = \dot{u}_i^{t_n} = \dot{u}_i^c = \frac{\Delta u_i^t}{\Delta t} \tag{4.85}$$

De plus, les conditions cinématiques sont actualisées à chaque sous-pas. Le gradient de vitesse est donc actualisé par la relation

$$L_{ij}^{(k)} F_{lj}^{(k-1)(k)} = \frac{\partial \dot{u}_i^{(k)}}{\partial x_j^{(k-1)}} = \frac{\partial \dot{u}_i^{(k-1)}}{\partial x_j^{(k-1)}} = L_{ij}^{(k-1)} \tag{4.86}$$

où

$$F_{ij}^{(k-1)(k)} = \delta_{ij} + L_{ij}^{(k-1)} \frac{\Delta t_n}{N} \tag{4.87}$$

où  $N$  est le nombre de sous-pas. Pour le terme de second gradient, la même hypothèse est faite :

$$\dot{v}_{ij}^{t_n - 1} = \dots = \dot{v}_{ij}^{(k)} = \dots = \dot{v}_{ij}^{t_n} = \dot{v}_{ij}^c = \frac{\Delta v_{ij}^{t_n}}{\Delta t_n} \tag{4.88}$$

$$\frac{\partial \dot{v}_{ij}^{(k-1)}}{\partial x_l^{(k-1)}} F_{lk}^{(k-1)(k)} = \frac{\partial \dot{v}_{ij}^{(k)}}{\partial x_k^{(k)}} \tag{4.89}$$

#### 4.4.4 Les modèles constitutifs utilisés

Matsushima et al. ([61] et [60]) ont proposé d'utiliser une loi de comportement quasi-fragile avec le modèle Von-Mises, alors que Moullet [69] a introduit une loi écouissable non associée pour un modèle plan de Mohr Coulomb. Comme dans le cas unidimensionnel il n'y a pas de couplage entre la partie premier gradient et la partie du second gradient.

Concernant le terme de premier gradient : il est divisé en une partie volumique et une partie déviatorique. Le tenseur de taux de déformation  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  qui est défini comme :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.90)$$

La vitesse de déformation moyenne :

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{\dot{\varepsilon}_{ii}}{3} \quad (4.91)$$

et la partie déviatorique du tenseur du taux de déformation est définis par :

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_m \delta_{ij} \quad (4.92)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ii} = 1$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ).

En revanche le tenseur des dérivées objectives des contraintes de Cauchy est divisé en une partie sphérique et une partie déviatorique :

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \overset{\nabla}{s}_{ij} + \overset{\nabla}{\sigma}_m \delta_{ij} \quad (4.93)$$

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\omega}_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \dot{\omega}_{kj} \quad (4.94)$$

On définit les deux parties des contraintes liées au terme premier gradient selon Prandtl-Reuss

$$\overset{\nabla}{\sigma}_m = 3K \dot{\varepsilon}_m \quad (4.95)$$

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = \begin{cases} 2G_1 \dot{e}_{ij} & (\text{pour } \|e\| \leq e_{lim}) \\ 2G_1 \left( \dot{e}_{ij} - \frac{G_1 - G_2}{G_2} \frac{s_{kl} \dot{e}_{kl}}{\|s\|^2} s_{ij} \right) & (\text{pour } \|e\| > e_{lim}) \end{cases} \quad (4.96)$$

où :

- $\|e\|$  : le second invariant du tenseur de déformations.
- $K$  : le module de compressibilité, (il est supposé constant).
- $G_1$  le module de cisaillement dans le cas de chargement élastique avant le pic et dans le cas de déchargement
- $G_2$  le module de cisaillement dans le cas de chargement élastique après le pic, il a une forme exponentielle :

$$G_2 = \bar{G}_2 \exp \left( \frac{\bar{G}_2}{G_1 e_{lim} - \sigma_{res}} (\|e\| - e_{lim}) \right) \quad (4.97)$$

où

- $\bar{G}_2$  est la valeur du module de cisaillement juste après la limite élastique  $e_{lim}$ .
- $\sigma_{res}$  la contrainte résiduelle de la partie exponentielle de la courbe (contrainte-déformation Figure 4.2), il est pris égal à 0.2.

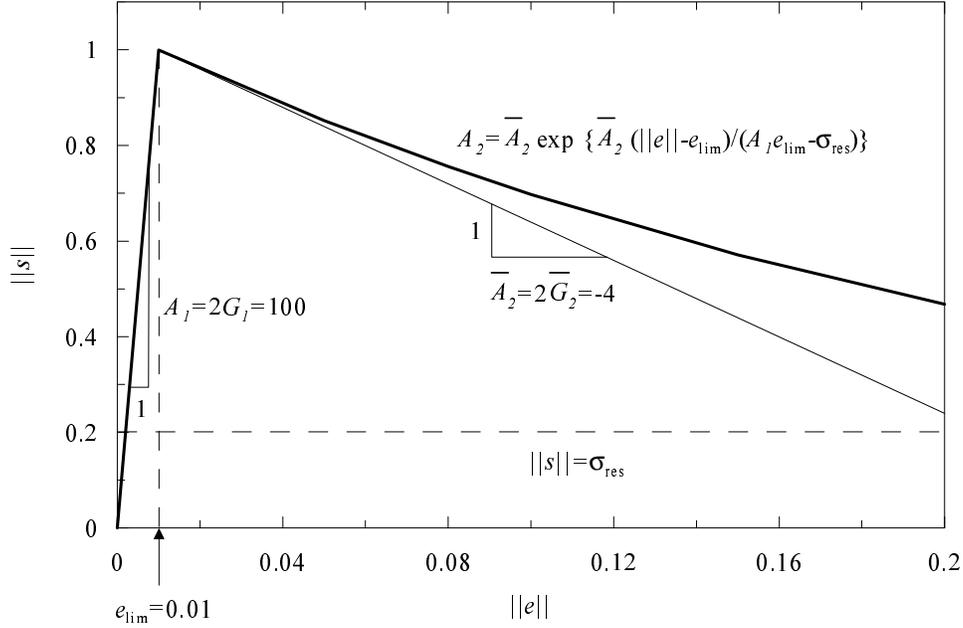


FIG. 4.2 – Relation constitutive de la partie premier gradient.

Pour la partie second gradient du comportement, on utilise un modèle isotrope linéaire simplifié en réduisant les paramètres à un seul coefficient D :

$$\begin{bmatrix} \nabla \chi_{111} \\ \nabla \chi_{112} \\ \nabla \chi_{121} \\ \nabla \chi_{122} \\ \nabla \chi_{211} \\ \nabla \chi_{212} \\ \nabla \chi_{221} \\ \nabla \chi_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\ 0 & D/2 & D/2 & 0 & -D/2 & 0 & 0 & D/2 \\ 0 & D/2 & D/2 & 0 & -D/2 & 0 & 0 & D/2 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & -D/2 & -D/2 & 0 \\ 0 & -D/2 & -D/2 & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ D/2 & 0 & 0 & -D/2 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\ D/2 & 0 & 0 & -D/2 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\ 0 & D/2 & D/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{v}_{11}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \dot{v}_{11}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{v}_{12}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \dot{v}_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{v}_{21}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \dot{v}_{21}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{v}_{22}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \dot{v}_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

où  $\dot{v}_{ij}$  est la dérivée par rapport au temps de  $v_{ij}$ , et  $\nabla \chi_{ijk}$  est la dérivée de Jaumann des doubles contraintes :

$$\nabla \chi_{ijk} = \dot{\chi}_{ijk} + \chi_{ljk} \omega_{li} + \chi_{imk} \omega_{mj} + \chi_{ijp} \omega_{pk} \quad (4.99)$$

#### 4.4.5 Calcul numérique de la matrice tangente

Dans l'algorithme suivant nous présentons la description du calcul de la matrice tangente consistante et de la contrainte aux points d'intégration, cet algorithme correspond à l'étape 8 de l'algorithme 1 (Cf.4.2.4). Il s'agit de :

- 1– Calcul des matrices  $[T^{t-\Delta t}][B]$  et  $[T^{t_n}][B]$
- 2– Calcul des matrices  $[U^{t_n}] = [T^{t_n}][B][U_{node}^{t_n}]$  et  $[\dot{U}^{t_n}] = [T^{t-\Delta t}][B][\dot{U}_{node}^{t_n}]$
- 3– Calcul des vitesses  $\frac{\partial u_i^{t_n}}{\partial x_j^{t_n}}, v_{ij}^{t_n}, \frac{\partial \dot{u}_i^{t-\Delta t}}{\partial x_j^{t-\Delta t}}$  et  $\frac{\partial \dot{v}_{ij}^{t-\Delta t}}{\partial x_k^{t-\Delta t}}$
- 4– Une boucle pour la méthode du perturbation (ILOOP=1, 5) :
  - Sauve garde  $\frac{\partial \dot{u}_i^{t-\Delta t}}{\partial x_j^{t-\Delta t}}$  et  $\frac{\partial \dot{v}_{ij}^{t-\Delta t}}{\partial x_k^{t-\Delta t}}$
  - si (ILOOP=2)  $(\frac{\partial \dot{u}_1^{t-\Delta t}}{\partial x_1^{t-\Delta t}})^\Delta = \frac{\partial \dot{u}_1^{t-\Delta t}}{\partial x_1^{t-\Delta t}} + \Delta(\frac{\partial \dot{u}_1^{t-\Delta t}}{\partial x_1^{t-\Delta t}})$
  - $\vdots$
  - si (ILOOP=5)  $(\frac{\partial \dot{u}_2^{t-\Delta t}}{\partial x_2^{t-\Delta t}})^\Delta = \frac{\partial \dot{u}_2^{t-\Delta t}}{\partial x_2^{t-\Delta t}} + \Delta(\frac{\partial \dot{u}_2^{t-\Delta t}}{\partial x_2^{t-\Delta t}})$
  - Introduction de la méthode de sous intervalle (INTV=1, NINTV) :
    - Déterminer  $F_{ij}^{(k-1)(k)} = \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{u}_i^{(k-1)}}{\partial x_j^{(k-1)}} \Delta T, \Delta T = \Delta t / NINTV$
    - Déterminer  $L_{ij}^{(k)}$  et  $\frac{\partial \dot{v}_{ij}^{(k)}}{\partial x_k^{(k)}}$  (équation 4.86 et 4.89)
    - Calcul de  $F_{ij}^{0,(k)} = F_{ik}^{(k-1),(k)} F_{kj}^{0,(k-1)}$
    - Calcul de  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$  et  $\dot{e}_m^{(k)}$  à partir de  $L_{ij}^{(k)}$
    - Calcul de  $e_{ij}^{0,(k)}$  à partir de  $F_{ij}^{0,(k)}$
    - Calcul de  $\|\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}\|, \|e_{ij}^{0,(k)}\|$  et  $\|s_{ij}^{(k)}\| \|\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}\|,$
    - Calcul de  $\|e_{ij}^{0,(k)}\|$  et  $\|s_{ij}^{(k)}\|$
    - Calcul de  $\sigma_{ij}^{\nabla(k)}$  et de  $\chi_{ijk}^{\nabla(k)}$  et puis  $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$  et  $\dot{\chi}_{ijk}^{(k)}$
    - Actualiser des contraintes globales  $\sigma_{ij}^{0,(k)} = \sigma_{ij}^{0,(k-1)} + \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} \Delta T, \chi_{ijk}^{0,(k)} = \chi_{ijk}^{0,(k-1)} + \dot{\chi}_{ijk}^{(k)} \Delta T$
  - $\sigma_{ij}^{t_n} = \sigma_{ij}^{(N)}$  et  $\chi_{ijk}^{t_n} = \chi_{ijk}^{(N)}$  (si ILOOP=1) et  $(\sigma_{ij}^{t_n})^\Delta = \sigma_{ij}^{(N)}$  (pour d'autre)
  - Calcul de la matrice de consistence (si ILOOP>1) :
    - si (ILOOP=2)

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \Delta(\sigma_{11}^{t_n}) \\ \Delta(\sigma_{12}^{t_n}) \\ \Delta(\sigma_{21}^{t_n}) \\ \Delta(\sigma_{22}^{t_n}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}^{t_n})^\Delta - \sigma_{11}^{t_n} \\ (\sigma_{12}^{t_n})^\Delta - \sigma_{12}^{t_n} \\ (\sigma_{21}^{t_n})^\Delta - \sigma_{21}^{t_n} \\ (\sigma_{22}^{t_n})^\Delta - \sigma_{22}^{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{t_n} \\ C_{21}^{t_n} \\ C_{31}^{t_n} \\ C_{41}^{t_n} \end{bmatrix} \Delta(\frac{\partial \dot{u}_1^{t_n}}{\partial x_1^{t_n}}) \quad (4.100)$$

$\vdots$   
Si (ILOOP=5)

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \Delta(\sigma_{11}^{t_n}) \\ \Delta(\sigma_{12}^{t_n}) \\ \Delta(\sigma_{21}^{t_n}) \\ \Delta(\sigma_{22}^{t_n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{14}^{t_n} \\ C_{24}^{t_n} \\ C_{34}^{t_n} \\ C_{44}^{t_n} \end{bmatrix} \Delta(\frac{\partial \dot{u}_2^{t_n}}{\partial x_2^{t_n}}) \quad (4.101)$$

#### 4.4.6 Simulation numérique

Le premier test effectué avec le modèle du second gradient bidimensionnel est celui de Matsushima et al. ([61] et [60]) : l'essai simule un essai biaxial (cas de déformation plane). L'échantillon a une largeur de 0.5m et une hauteur de 1m.

Matsushima et al. ([61] et [60]) ont validé le modèle du second gradient bidimensionnel. On utilise en introduisant une imperfection pour un élément du maillage. La valeur du pic est plus faible que les autres éléments. Des solutions présentant une bande de cisaillement orientée à 45 degrés ont été obtenues. En utilisant différents maillages et en utilisant plusieurs valeurs du paramètre du second gradient  $D$ , ils ont observé que la taille de la bande de cisaillement varie en fonction de la valeur de  $D$ .

Le modèle du second gradient bidimensionnel a été par la suite testé par Moullet et Chambon ([69] et [68]) avec la méthode d'initialisation aléatoire de l'algorithme, pour le même essai biaxial, et aussi pour un échantillon carré. Toutes les solutions ont été des solutions convergées étaient des solutions localisées dont les bandes de cisaillement présentaient une orientation de 45 degrés. Pour l'échantillon d'éclatement 2. Certaines solutions n'avaient qu'une bande de cisaillement (appelées solution globale 1), et d'autres avaient deux bandes de cisaillement (appelées solution globale 2). Pour l'échantillon d'éclatement 1, des solutions présentant une seule bande de cisaillement ont été trouvées (solution globale 3). L'analyse du comportement global du milieu réalisée par Moullet et Chambon ([69] et [68]) a montré que le comportement global du milieu est indépendant de la position de la bande dans l'échantillon et ne dépend que du nombre de bandes relatives à la hauteur de l'échantillon ainsi les solutions globales 3 et 2 sont quasi confondues.

Moullet et Chambon ([69] et [68]) ont testé le code avec d'autres données numériques comme un maillage comprenant une bande d'éléments inclinés de 35 degrés par rapport à  $x_2$ . Ils ont trouvé plusieurs orientations des bandes. Ce qui est confirmé avec la théorie de la bande de cisaillement.

Ce modèle du second gradient bidimensionnel a été implanté dans le code de calcul Lagamine par Bésuelle (Bésuelle [5]).

Ce modèle a été de nouveau validé pour un milieu unidimensionnel 1D. Ensuite les simulations bidimensionnelles ont été comparées avec les résultats publiés par Matsushima et al ([61] et [60]). Les résultats ont été totalement satisfaisants.

Ensuite nous avons modélisé le forage du puits dans le but de tester le modèle implémenté pour différents milieux continus, les résultats seront exposés dans le chapitre 6.

Le modèle du second gradient implanté dans Lagamine a été aussi validé pour un modèle d'endommagement (Kotronis et al.[55]).

## 4.5 La méthode de longueur d'arc

Comme nous voulons traiter la post-localisation sans restriction à suivre la taille de la zone localisée, il était nécessaire de pouvoir passer de comportements de snap back. Il est bien connu que la continuation d'un calcul quasi-statique peut conduire à un comportement de snap back (la figure 4.3). Ceci peut être dû à des non linéarités géométriques mais aussi à la non linéarité du comportement notamment dans le cas de la localisation. Dans ce cas le calcul piloté classiquement ne converge pas.

Une méthode classique pour traiter ce problème est de piloter le chargement

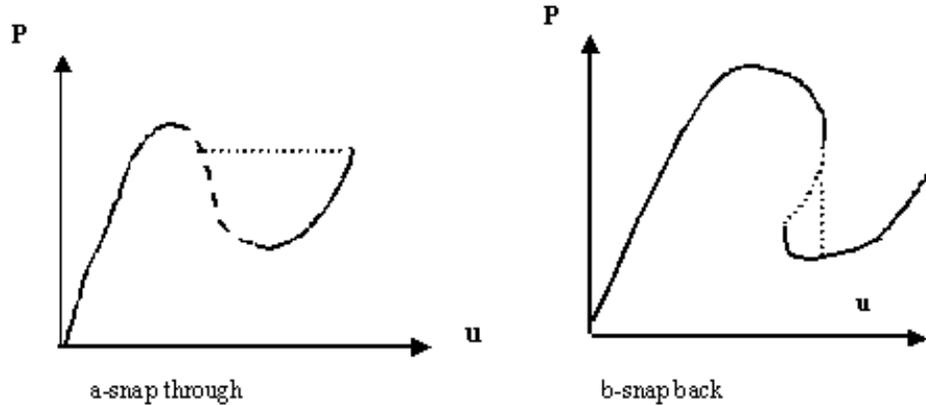


FIG. 4.3 – la non linéarité géométrique

par une méthode de longueur d'arc.

Riks [92] et Wempner [107] sont considérés comme les fondateurs de cette méthode, en montrant son intérêt dans les phénomènes d'instabilité qui peuvent être subi par les structures élastiques. Ensuite cette méthode a été développée par Crisfield [27] pour un comportement élasto-plastique.

Nous avons introduit cette méthode dans le code aux éléments finis avec le modèle du second gradient. Par souci de simplicité nous avons choisi un milieu unidimensionnel (Cf. paragraphe 4.3). Le code numérique Simpcnf développé par El Hassan ([37] et [38]), a été notre point de départ pour implémenter la méthode de longueur d'arc.

### 4.5.1 Description analytique de la méthode de longueur d'arc

Dans le paragraphe (4.2), nous avons vu que la méthode des éléments finis consiste à résoudre sur un pas de temps des équations non linéaire

$$\psi(\Delta u, \Delta \bar{u}, \Delta P, \Delta \bar{P}) = 0 \quad (4.102)$$

où :

- $\Delta u$  : représente les déplacements nodaux inconnus sur le pas de temps étudié.

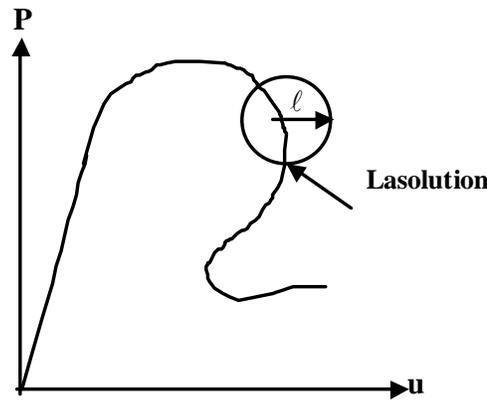


FIG. 4.4 – la méthode de longueur d’arc pour un comportement (snap back)

- $\Delta \bar{u}$  : représente les déplacements nodaux connus (ils sont appliqués sur une partie de la frontière totale  $\Gamma$ , elle est notée  $\Gamma_u$ ).
- $\Delta \bar{P}$  : les forces extérieures de surface appliquées sur la frontière  $\Gamma_\sigma$ . ( $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ ), elles sont supposées connues
- $\Delta P$  : les composantes des forces inconnues.

Le système des équations (4.102) est résolu par une méthode itérative (la méthode de Newton Raphson) (Cf. paragraphe 4.2). Dans certain cas on constate qu’il n’y a pas de solution où que la procédure itérative ne converge plus.

Pour mieux comprendre le problème, prenons le cas unidimensionnel de la figure (4.4). Soit nous imposons les forces  $\Delta \bar{P} > 0$  et donc l’équation (4.102) devient :

$$\psi(\Delta u, \Delta \bar{P}) = 0 \quad (4.103)$$

La solution du problème est perdue dans le cas de comportement snap through (la partie pointillée de la courbe (a) de la figure 4.3) comme dans le cas de snap back (la partie pointillée de la courbe (b) de la figure 4.3).

Ou bien nous imposons les déplacements  $\Delta \bar{u} > 0$ . L’équation (4.102) s’écrit :

$$\psi(\Delta \bar{u}, \Delta P) = 0 \quad (4.104)$$

et dans ce cas une solution existe dans le cas de snap through mais pas dans le cas de snap back. Par ailleurs pour des valeurs négatives de  $\Delta \bar{u}$  et  $\Delta \bar{P}$  on risque de trouver des solutions « en décharge »

Dans la méthode de longueur d’arc, on ne préjuge pas de signe de  $\Delta P$  et  $\Delta u$ , on se donne pour piloter le calcul  $\ell$  la longueur parcourue sur la courbe de la figure (4.4) . Par exemple la relation entre  $\Delta u$  et  $\Delta P$  est définie par :

$$\Delta u^2 + \Delta P^2 = \ell^2 \quad (4.105)$$

Dans ce cas, le système d'équation non linéaire (unique dans ce cas) à résoudre (4.102) devient l'équation :

$$\psi(\Delta u, \Delta P) = 0 \quad (4.106)$$

La solution recherchée est obtenue afin de résoudre l'ensemble des équations (4.105, et 4.106).

#### 4.5.1.1 La procédure itérative dans le cas général

Reprenons l'équation (4.102) dans le cas général pour lequel on n'a pas de solution pour le pilotage choisi. On peut écrire le problème de la manière suivante :

$$\psi(\Delta u, \lambda \Delta \bar{u}, \Delta P, \lambda \Delta \bar{P}) = 0 \quad (4.107)$$

où  $\lambda$  est une inconnue supplémentaire .

Il est donc nécessaire d'écrire une équation supplémentaire, l'équation supplémentaire s'écrit dans le cas générale :

$$\alpha^2 \|\underline{\Delta u}\|^2 + \lambda^2 \|\Delta \bar{P}\|^2 = \ell^2 \quad (4.108)$$

où

\*  $\underline{\Delta u} = \{\Delta u, \lambda \Delta \bar{u}\}$

–  $\|\underline{\Delta u}\|$  est la norme de déplacements qui peut ne faire intervenir qu'une seule composante de  $\underline{\Delta u}$

–  $\|\Delta \bar{P}\|$  est la norme qui fait intervenir une seule composante des forces.

\*  $\alpha$  est un facteur d'échelle homogène à une raideur

Remarquons qu'en général, les forces inconnues  $\Delta P$  sont calculées par des équations indépendantes, et comme ces forces dépendent des déplacements nodaux  $\Delta u$ . Le système des équations (4.107) à résoudre avec l'équation (4.108) devient :

$$\psi(\underline{\Delta u}, \lambda \Delta \bar{P}) = 0 \quad (4.109)$$

Dans la plus part des cas, l'équation supplémentaire (4.108) ne dépend en fait que d'une variable en déplacement qu'on appelle  $\Delta u_0$  et une variable en force que l'on note  $\Delta \bar{P}_0$ . C'est de cette manière que nous avons appliquée la méthode de longueur d'arc dans la suite. L'ensemble des équations (4.108) et (4.109) s'écrit donc :

$$\psi(\underline{\Delta u}, \lambda \Delta \bar{P}_0) = 0 \quad (4.110)$$

et

$$\alpha^2 (\Delta u_0)^2 + (\lambda \Delta \bar{P}_0)^2 = \ell^2 \quad (4.111)$$

Le système des équations (4.110) et (4.111) sera résolu avec la méthode de Newton Raphson.

Par ailleurs, nous utilisons les indices ( $i, j$ , et  $t_n$ ) dans la suite de cette étude. L'indice  $j$  définit le numéro d'équation ( $j \in \{1, Nqu\}$ ), et l'indice  $i$  définit les nombres des noeuds ( $i \in \{1, Nnode\}$ ), alors que l'indice  $t_n$  définit le numéro

d'itération ( $t_n \in \{1, Niter\}$ ).

En appliquant la procédure itérative, l'ensemble des équations (4.110) et (4.111) s'écrit pour une itération et avec les notations précédentes :

$$\psi_j^{t_n}(\Delta u_i, \lambda \Delta \bar{P}_0) = 0 \quad (4.112)$$

et

$$\alpha^2(\Delta u_0^{t_n})^2 + (\lambda^{t_n})^2 \Delta \bar{P}_0^2 = \ell^2 \quad (4.113)$$

$\Delta u_0$  est l'un des  $\Delta u$ . La méthode de Newton appliquée aux équations (4.112) et (4.113) donne pour une étape où les valeurs de  $\Delta u_i$  notées  $\Delta u_i^{t_n}$  :

$$\frac{\partial \psi_j^{t_n}}{\partial \Delta u_i^{t_n}} \delta(\Delta u_i^{t_n}) + \frac{\partial \psi_j^{t_n}}{\partial \lambda^{t_n}} \delta \lambda^{t_n} = -\psi_j^{t_n} \quad (4.114)$$

et

$$2\alpha^2 \Delta u_0^{t_n} \delta(\Delta u_i^{t_n}) + 2\lambda^{t_n} \Delta \bar{P}_0^2 \delta \lambda^{t_n} = \ell^2 - \Delta u_0^2 - \lambda^{t_n} \Delta \bar{P}_0^2 \quad (4.115)$$

On remarque que les termes  $\frac{\partial \psi_j^{t_n}}{\partial \Delta u_i^{t_n}} \delta(\Delta u_i^{t_n})$  sont les mêmes que ceux qu'on obtient lorsqu'on traite un problème classique où le pilotage est donné en force ou en déplacement. Alors que la présence de terme liée à la force  $\frac{\partial \psi_j^{t_n}}{\partial \lambda^{t_n}} \delta \lambda^{t_n}$  rend le problème plus compliquée à résoudre.

## 4.5.2 Application au modèle du second gradient unidimensionnel

Dans cette partie, nous allons présenter l'application de la méthode de longueur d'arc à un problème unidimensionnel.

Nous traitons le modèle du second gradient unidimensionnel (Cf.4.3). Nous rappelons que le problème étudié dans (4.3) est un problème de compression (ou de traction) dans une barre (la figure 4.5). Nous avons choisi de le valider pour un cas de cisaillement dans la suite de ce mémoire (chapitre 5).

Dans le paragraphe (4.3) le problème a été analysé pour un cas classique,

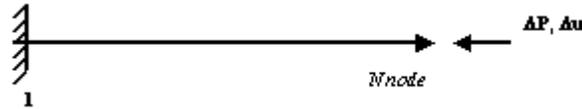


FIG. 4.5 – Barre soumise à une traction uniaxiale.

dont le chargement est imposé soit en déplacement  $\Delta u_{Nnode}$  ou bien en une force  $\Delta \bar{P}_{Nnode}$ . Pour notre étude avec la méthode de longueur d'arc nous allons donner  $\ell$  une longueur de la courbe de comportement globale de la structure :

$$\Delta \bar{P}_{Nnode}^2 + \alpha^2 \Delta u_{Nnode}^2 = \ell^2 \quad (4.116)$$

avec  $\alpha$  : est une remise à l'échelle relative au déplacement d'extrémité. Compte tenu des paramètres du modèle il est égal dans notre étude à 100.

Ici l'ensemble des équations non linéaires à résoudre est :

$$\psi_j(\Delta u_i, \Delta P_{Nnode}) = 0 \quad (4.117)$$

et

$$\Delta P_{Nnode}^2 + \alpha^2 \Delta u_{Nnode}^2 = \ell^2 \quad (4.118)$$

Remarquons qu'avec les notations du paragraphe (4.5.1) que nous abondonons par la suite. L'inconnue liée au terme de force dans l'équation (4.118) se réduit à  $\Delta P_{Nnode}$  au lieu de  $\lambda$ .

En appliquant une méthode de Newton. Les équations (4.119) et (4.120) donnent un système des équations de la forme suivante :

$$\frac{\partial \psi_j^{t_n}}{\partial \Delta u_i^{t_n}} \delta(\Delta u_i^{t_n}) + \frac{\partial \psi_j^{t_n}}{\partial \Delta P_{Nnode}^{t_n}} \Delta P_{Nnode}^{t_n} = -\psi_j^{t_n}(\Delta u_i^{t_n}, \Delta P_{Nnode}^{t_n}) \quad (4.119)$$

et

$$2\Delta P_{Nnode} \delta(\Delta P_{Nnode}^{t_n}) + 2\alpha^2 \Delta u_{Nnode}^{t_n} \delta \Delta u_{Nnode}^{t_n} = \ell^2 - \Delta P_{Nnode}^{t_n^2} + \alpha^2 \Delta u_{Nnode}^{t_n^2} \quad (4.120)$$

Nous cherchons la solution du problème qui correspond à :

$$\psi_j^{t_n}(\Delta u_i^{t_n}, \Delta P_{Nnode}^{t_n}) = 0 \quad (4.121)$$

Pour comprendre le processus de résolution, le système des équations que nous avons à résoudre (l'équation 4.120) est de la forme suivante :

$$[X]_{(Nnode.Nnode+1)} \cdot [Y]_{Nnode+1} = [B]_{Nnode} \quad (4.122)$$

Où :

- $[X]$  : une matrice composée de :

$$[X]_{(Nnode.Nnode+1)} = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} K_{11} & \dots & K_{1.Nnode} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{Nnode.1} & \dots & K_{Nnode.Nnode} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ Q_{(Nnode+1)} \end{array} \right] \end{array} \right]$$

avec :

$$- [K_G]_{(Nnode.Nnode)} = \left[ \begin{array}{ccc} K_{11} & \dots & K_{1.Nnode} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{Nnode.1} & \dots & K_{Nnode.Nnode} \end{array} \right]$$

est la matrice de rigidité globale (Cf.4.2.2) :

$$[K_G]_{(Nnode.Nnode)} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \Delta u_i}$$

- $-Q_{(Nnode+1)} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \Delta P_{Nnode}}$
- $[Y]_{(Nnode+1)}$  : le vecteur inconnu : des déplacements nodaux et la force imposé sur le noeud  $Nnode$  :

$$[Y] = \begin{bmatrix} \delta(\Delta u_1) \\ \vdots \\ \delta(\Delta u_{Nnode}) \\ \delta(\Delta P_{Nnode}) \end{bmatrix}$$

- $[B]_{(Nnode)}$  est le résidu à l'itération  $t_n$ , il est fonction des déplacements et des forces dans cette étude  $\psi(\Delta u_i, \Delta P_{Nnode})$

Sous une forme matricielle, nous écrivons :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1.Nnode} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{Nnode.1} & \dots & K_{Nnode.Nnode} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ Q_{(Nnode+1)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(\Delta u_1) \\ \vdots \\ \delta(\Delta u_{Nnode}) \\ \delta(\Delta P_{Nnode}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{Nnode} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Généralement et dans les cas classiques le système d'équation est de la forme :

$$[K_G]_{(Nnode.Nnode)} \cdot [\delta u]_{Nnode} = [B]_{(Nnode)} \quad (4.124)$$

Ce système est résolu avec la méthode de Gauss (par triangulation). Nous avons utilisé cette méthode pour notre système (4.123).

La triangulation est effectuée pour la matrice  $[K_G]_{(Nnode.Nnode)}$ , alors que le terme supplémentaire qui est réduit dans notre cas a une seule valeur  $Q_{(Nnode+1)}$  qui ne varie pas :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \acute{K}_{11} & \dots & \acute{K}_{1.Nnode} \\ \ddots & \vdots & \\ & & \acute{K}_{Nnode.Nnode} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ Q_{(Nnode+1)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(\Delta u_1) \\ \vdots \\ \delta(\Delta u_{Nnode}) \\ \delta(\Delta P_{Nnode}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \acute{B}_1 \\ \vdots \\ \acute{B}_{Nnode} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Ensuite on résoud la dernière équation du système d'équations résultant (4.125) avec l'équation linéaire (équation 4.120) :

$$\acute{k}_{(Nnode.Nnode)} \cdot \delta(\Delta u_{Nnode}) + Q_{Nnode} \cdot \delta(\Delta P_{Nnode}) = \acute{B}_{Nnode} \quad (4.126)$$

On obtient le déplacement  $\Delta u_{Nnode}$  et la force  $\Delta P_{Nnode}$  sur l'extrémité. Le reste des équations du système (4.125) est résolu d'une manière classique adoptée pour la méthode de Gauss.

Pour représenter la méthode de Newton graphiquement, nous pouvons constater à partir de l'ensemble des équations (4.120) et (4.126) que nous avons deux

droites :  $Z^{ln}$  (l'équation 4.120) et  $H^{ln}$  qui l'équation (4.126). Dans chaque itération le point d'intersection des deux droites est déterminé (Le figure 4.6), les itérations s'arrêtent au moment où les droites  $Z$  et  $H$  deviennent orthogonales

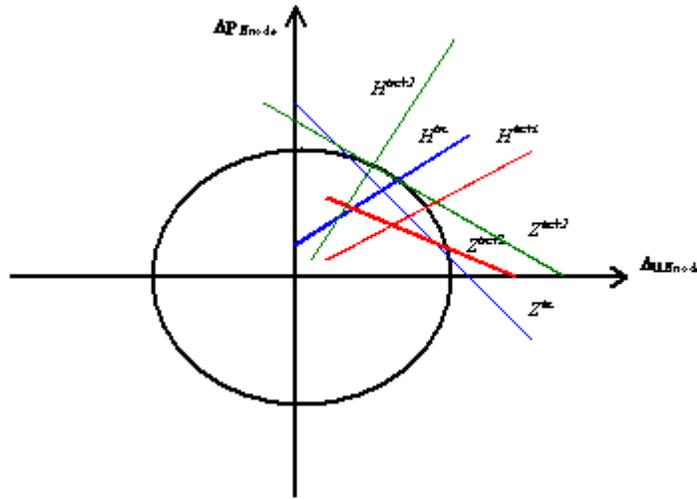


FIG. 4.6 – La méthode de Newton Raphson avec la longueur d'arc

Sur la courbe de comportement (figure 4.7), la procédure s'arrête au moment où ces deux droites se coïncident avec un point d'intersection de l'ellipse et de la courbe de comportement.

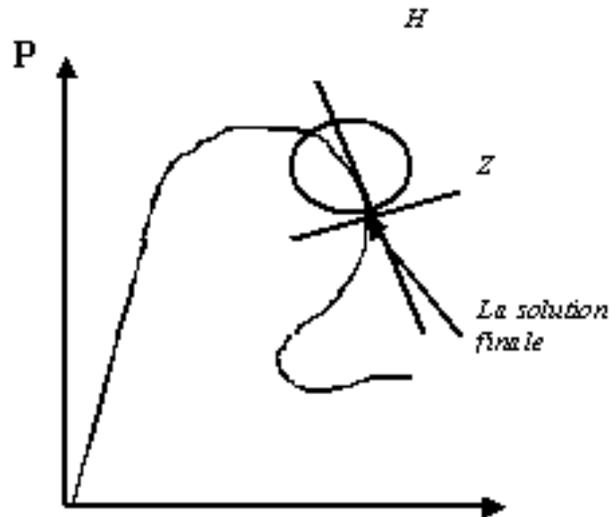


FIG. 4.7 – la fin de la procédure itérative

### 4.5.3 Quelques modifications apportées dans le code `Simpconf`

Dans cette partie nous présentons les modifications apportées sur le code aux éléments finis unidimensionnels développé par El Hassan et al. ([37], [38], et [18]) afin de permettre au code de fonctionner avec la méthode de longueur d'arc :

- Généralement et pour des raisons numériques et notamment la structure de la matrice de rigidité pour la suite de calcul, cette matrice est traitée par la méthode de pénalisation, qui consiste à mettre sur la diagonale de la matrice un terme correspondant à un déplacement connu un terme grand (Chambon [17]). Cette méthode n'est valable que lorsque les conditions aux limites sont imposées en déplacements. Elle a été désactivée pour  $(\Delta u_{Nnode})$  dans notre étude.
- Pour assurer la convergence de l'algorithme, deux choix majeurs sont importants : le premier est l'estimation qui permet d'initialiser la procédure, et le deuxième est le test d'arrêt. Revenons sur le premier choix, nous avons proposé deux étapes pour initialiser le déplacement  $\Delta u_{Nnode}$  et la force  $\Delta P_{Nnode}$  :
  - pour le premier pas qui est en principe situé sur la partie élastique de la courbe (force-déplacement), (figure 4.7)

$$\begin{aligned} \Delta u_{Nnode} &= \frac{\ell}{\sqrt{G_1^2 + \alpha^2}} \\ \Delta P_{Nnode} &= \sqrt{\ell^2 - \alpha^2 \Delta u_{Nnode}^2} \end{aligned} \quad (4.127)$$

où  $G_1$  : La pente de la partie élastique linéaire.

- Pour les pas suivants nous avons proposé que l'initialisation soit proportionnelle au pas précédent

$$\begin{aligned} \Delta u_{Nnode} &= \Delta u_{Nnode}^{t-1} \frac{\ell^t}{\ell^{t-1}} \\ \Delta P_{Nnode} &= \Delta P_{Nnode}^{t-1} \frac{\ell^t}{\ell^{t-1}} \end{aligned} \quad (4.128)$$

$t$  : représente le numéro du pas.

- Le deuxième choix concerne le test d'arrêt. Il repose sur trois termes :
  - Les deux premiers termes sont basés sur les déplacements (et leur gradient)

$$CRITD1 = \sqrt{\frac{VNORM1}{DNORM1}}$$

$$CRITD2 = \sqrt{\frac{VNORM2}{DNORM2}}$$

$VNORM1$  ( $VNORM2$ ) : sont les déplacements (gradient de déplacement) à l'itération étudiée.

$DNORM1$  ( $DNORM2$ ) sont les déplacements (gradient de déplacement) cumulés depuis le début du pas considéré [38]

- Le troisième terme détermine si l'ensemble des valeurs de la force et le déplacement obtenus donne une longueur infiniment proche de celle de  $\ell$

supposée  
 $CRITD3 = \frac{\Delta\ell}{\ell}$

où  
 $\Delta\ell = \ell^2 - \Delta P_{Nnode}^2 - \alpha^2 \Delta u_{Nnode}^2$

Finalement, nous résumons la procédure de calcul sur un pas de temps dans l'algorithme suivant en partant de l'étape 2 de l'algorithme 1.

#### 4.5.4 Algorithme 4

- 1– boucle sur un pas :  
     Calcul de  $\Delta u_{Nnode}$  et  $\Delta P_{Nnode}$  à partir de  $\ell$
- 2– Initialisation des champs de vitesses nodales
- 3– Boucle sur les itérations
- 4– Boucle sur les éléments :
- 5– Boucle sur les points d'intégration :  
     a– calcul de la transformation au début et à la fin du pas  $\xi$   
     b– calcul des fonctions d'interpolation.
- 6– Calcul d'une matrice compliance
- 7– Déterminer la matrice de rigidité élémentaire  $[K]$
- 8– Déterminer la matrice de second membre  $[f_{HE}]$
- 9– Assemblage des matrices de rigidité (et des second membre) élémentaire dans une matrice de rigidité (et de second membre) globale
- 10– Résoudre le système d'équation linéaire :

$$[X]_{(Nnode+1.Nnode+1)} \cdot [Y]_{Nnode+1} = [B]_{Nnode+1}$$

- Effectuer une triangulation sur la partie correspondant au cas classique :
  - $k_{(Nnode-1.Nnode-1)} \delta(\Delta u_{Nnode}) = B_{Nnode-1}$
  - Résoudre l'équation numéro ( $Nnode$ ) du système modifié (4.126) avec l'équation d'ellipse (4.118)
  - Actualiser les valeurs de déplacement et de force :  
 $\Delta u_{Nnode}^{t_n} = \Delta u_{Nnode}^{t_{n-1}} + \delta(\Delta u_{Nnode}^{t_n})$   
 et  
 $\Delta P_{Nnode}^{t_n} = \Delta P_{Nnode}^{t_{n-1}} + \delta(\Delta P_{Nnode}^{t_n})$
  - Calcul des valeurs de  $\ell$  correspondant aux nouvelles racines  $\Delta u_{Nnode}^{t_n}$  et  $\Delta P_{Nnode}^{t_n}$
  - Choisir les valeurs minimums de  $\ell$
  - Continuer à résoudre le système linéaire
- 11– Actualise les champs de déplacements et leur gradient
  - 12– Calcul du critère de convergence :
    - Si convergence retour à l'étape 13
    - Si non convergence retour à l'étape 3

13– Si  $ip_{as} < tp_{as}$  retour à l'étape 1

14– Stop

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'analyse de la méthode des éléments finis pour un comportement élasto-plastique du milieu. La première partie du chapitre est une présentation générale de la méthode. La recherche de l'équilibre du milieu a été ramenée à un système linéarisé approché, et donc la résolution du système a exigé l'utilisation de méthodes numériques comme la méthode de Newton. La solution du problème a été obtenue par exécution d'une procédure itérative.

La méthode des éléments finis non linéaires a été utilisée pour exploiter le modèle du second gradient. Nous avons vu dans la deuxième partie de ce chapitre comment l'implémentation du modèle de second gradient a restauré la non unicité des solutions au moment de la bifurcation pour un milieu élasto-plastique unidimensionnel. De plus il a été montré que les solutions obtenues ne dépendent pas du maillage. L'introduction des dérivées secondes des déplacements dans l'équation d'équilibre n'a pas donné lieu à d'importants changements dans la formulation classique, seule la continuité des gradients de déplacements a nécessité l'utilisation des éléments conformes.

La validation du modèle second gradient dans un milieu bidimensionnel a été également réalisée, et l'analyse numérique a été bien détaillée dans la troisième partie du chapitre. L'équation d'équilibre a été simplifiée en utilisant une contrainte mathématique qui est le multiplicateur de Lagrange, dans le but de simplifier le problème d'un point de vue numérique. Différents tests numériques ont été réalisés afin d'utiliser l'élément non conforme.

Une nouvelle technique a été utilisée dans le code unidimensionnel pour permettre au code de converger vers certaines solutions impossibles à obtenir dans le cas général. Ainsi la méthode de longueur d'arc a été implantée dans ce code. La procédure d'implantation a été détaillée dans la quatrième partie de ce chapitre et les opérations nécessaires ont été présentées. Les résultats de simulation numérique basée sur cette méthode seront présentés dans la suite de ce mémoire.

Finalement, chaque analyse a été suivie par un algorithme résumant la procédure numérique et montrant la différence privilégiée pour chaque formulation.

# Chapitre 5

## Etude unidimensionnelle de la post-localisation dans un problème de cisaillement : l'évolution de la longueur des zones localisées

### 5.1 Introduction

Le problème unidimensionnel de cisaillement est un problème important car d'une part il peut se traduire par une modélisation à une dimension et d'autre part il représente bien ce qui se passe perpendiculairement au bande de cisaillement, c'est pourquoi nous l'avons choisi pour étudier comment l'épaisseur de la zone localisée peut évoluer.

Dans le cadre des modèles simplifiés utilisés jusque là. A cause de la structure de la loi de comportement, la longueur de la zone localisée est quasi-constante du moins tant que le matériau n'est pas proche de son état résiduel.

En particulier, il est important de tester le comportement post-localisation pour des modèles plus réalistes pour lesquels on n'a pas de radoucissement brutal après le pic de contrainte.

Si dans une structure de bande de cisaillement, on effectue une coupe perpendiculaire à la bande, et si pour simplifier encore, on néglige les variations de volume, on arrive à un problème unidimensionnel dont la structure mathématique est exactement la même que le problème traité par El Hassan (Cf.3.5.1). En interprétant ce qui est dans la thèse de El Hassan (une traction où une compression) comme un effort de cisaillement.

Afin de poser clairement le problème, nous avons rappelé le problème du

cisaillement unidimensionnel dans le cadre des milieux continus classiques. Et nous avons détaillé ensuite la solution du problème dans le cadre des milieux de second gradient locaux, en utilisant la méthode de longueur d'arc décrite dans le chapitre précédent (Cf.4.5).

Nous allons montrer les résultats numériques obtenus avec le code aux éléments finis pour une loi de comportement dont la pente de la courbe de contrainte-déformation est fonction dérivable des déformations.

L'effet de la pente radoucissante sur la taille de la bande sera présenté. L'initialisation de la bifurcation sera réalisée avec deux différentes méthodes : l'introduction d'un champ des vitesses initiales de l'itération à un pas choisi (soit calculé pour une solution analytique, soit obtenue par un tirage aléatoire). L'autre est l'introduction d'imperfection matérielle en jouant sur la limite élastique des certains éléments.

L'indépendance des solutions obtenues par rapport au maillage sera présentée.

Enfin, la méthode de longueur d'arc sera testé avec l'hypothèse des grandes déformations et les résultats seront comparé avec les résultats obtenus dans le cadre des petites déformations.

## 5.2 Le problème de cisaillement dans une couche en mécanique des milieux continus classique

Nous allons étudier un problème de cisaillement dans une couche géométrique infinie dans une direction . Nous supposons que la couche soit placée entre deux parties( figure 5.1).

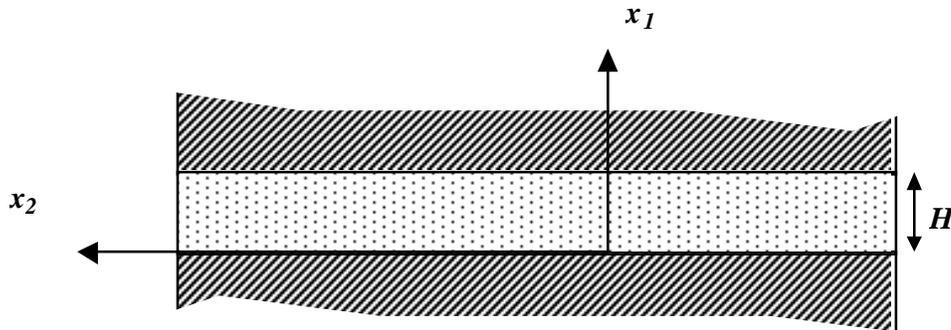


FIG. 5.1 – Géométrie du problème de cisaillement considéré

L'épaisseur de la couche est égale à  $H$ . Le milieu continu considéré est défini dans un plan  $(x_1, x_2)$ , dont l'axe vertical est  $x_1$  et l'axe horizontal est  $x_2$ , le mouvement de la couche est provoqué par des déplacements relatifs

entre le haut et le bas ou des contraintes appliquées dans la direction  $x_2$ . La couche est supposée incompressible donc la variation de volume est nulle. Le déplacement pour chaque point matériel de la couche a une seule composante dans la direction de l'axe  $x_2$  noté  $v_2(x_1, t)$  qui est une fonction de  $x_1$  et de  $t$ . Les composantes des déplacements et des contraintes de cisaillement se réduisent à des fonctions de  $x_1$  et du temps  $t$ . La seule composante de déformation est  $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1}$ , et la seule composante de contraintes  $\sigma_{12}$  sera noté dans la suite  $\tau$ . Nous allons considérer dans la suite la variable  $\gamma = 2\varepsilon_{12}$ . La surface inférieure de la couche est supposée infiniment rugueuse ce qui implique  $v_2(x_1, t) = 0$  pour  $x_1 = 0$ .

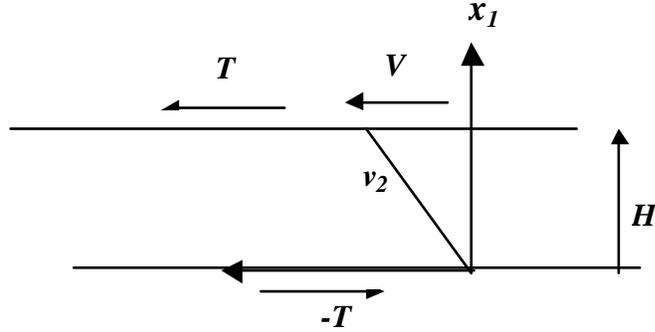


FIG. 5.2 – Conditions aux limites

Les forces de volumes sont négligées, ce qui permet d'écrire l'équation d'équilibre :

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1} = 0 \quad (5.1)$$

nous avons :

$$\tau(x_1, t) = K(t) \quad (5.2)$$

$K(t)$  est une variable indépendante de l'espace et qui ne dépend que du temps. Sous forme incrémentale, l'équation (5.2) devient :

$$\dot{\tau}(x_1, t) = \dot{K}(t) \quad (5.3)$$

En écrivant les conditions aux limites en contraintes, la force tangentielle par une unité de surface appliquée par la partie supérieure sur la couche appelée  $T$  vérifie :

$$T(t) = \tau(x_1, t) \quad \forall x_1 \in [0, H] \quad (5.4)$$

et

$$V = v_2(x_1, t) = 0 \quad (5.5)$$

Sous forme incrémentale, l'équation (5.4) devient :

$$\dot{T}(t) = \dot{\tau}(x_1, t) \quad \forall x_1 \in [0, H] \quad (5.6)$$

La figure (5.2) montre la définition de  $T$  et  $V$ . L'état initial de la couche est supposé homogène.

Par conséquent les conditions aux limites sont considérées comme données de  $V(t)$  ou  $T(t)$  ou encore par une association des deux valeurs (la méthode de longueur d'arc).

Le modèle constitutif est défini par la relation liant la contrainte  $\tau$  à la déformation  $\gamma$ . Nous supposons qu'il s'agit d'un modèle élasto-plastique classique. En conséquence, on peut écrire cette loi de comportement sous une forme incrémentale :

$$\dot{\tau}(x_1, t) = G\dot{\gamma}(x_1, t). \quad (5.7)$$

où  $G$  dépend de la déformation plastique et de sens de variation de  $\gamma$ .

Pour notre problème, la possibilité de l'apparition d'une bande correspond au pic de la courbe de chargement  $T$  fonction de  $\gamma$ , ce qui définit une valeur de déformation  $\gamma_{pic}$ . Nous allons examiner deux types différents de loi de comportement. Une loi de comportement dite quasi-fragile dont la structure est analogue au modèle utilisé par El Hassan (Cf.3.5.1). puis une loi de comportement pour laquelle on a une courbe de chargement  $\tau$  fonction dérivable de  $\gamma$  seront étudiées.

### 5.2.1 Loi de comportement quasi- fragile

Considérons le modèle élastoplastique quasi-fragile, il exhibe un radoucissement brutal après le pic. Il est décrit par trois paramètres :  $\gamma_{pic}$ , le module de cisaillement avant le pic  $G^{el}$  et le module de cisaillement après le pic  $G^{ep}$ . Ce modèle est représenté sur la figure (5.3).

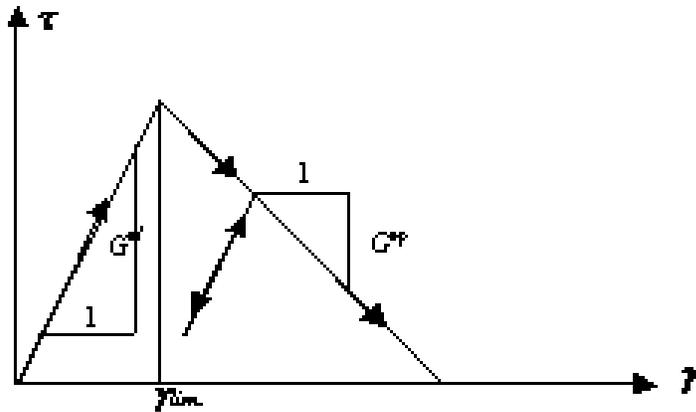


FIG. 5.3 – La loi de comportement quasi-fragile.

Le matériau a un comportement élastique jusqu'au  $\gamma_{pic}$ , ensuite deux types de comportement sont possibles : un comportement plastique et un com-

portement élastique. Le modèle constitutif (la figure 5.3) décrit ce comportement par :

$$\begin{aligned} & \gamma < \gamma_{lim} \\ \text{or} & & \Rightarrow \dot{\tau} = G^{el} \dot{\gamma} \\ & \gamma = \gamma_{lim} \quad \text{and} \quad \dot{\gamma} < 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

et

$$\gamma = \gamma_{lim} \quad \text{and} \quad \dot{\gamma} > 0 \Rightarrow \dot{\tau} = G^{ep} \dot{\gamma} \quad (5.9)$$

$G^{el}$  et  $G^{ep}$  sont les pentes des parties décroissantes et radoucissante respectivement.

Si le matériau a dépassé sa limite élastique dans le passé et a subi un comportement plastique, la valeur de  $\gamma_{lim}$  courant devient la valeur maximale de  $\gamma$ .

### 5.2.1.1 Les solutions du problème

Tout changement dans les conditions aux limites entraîne un changement de l'incrément de contrainte  $\dot{\tau}$  (équation 5.3).

On suppose d'abord que la couche se comporte de façon homogène. Ensuite le pic étant atteint, deux réponses homogènes de la couche en post-pic sont possibles : soit chaque point du milieu est en décharge élastique, soit chaque point du milieu est en charge plastique :

– dans le premier cas :

$$\dot{\gamma}(x_1, t) = \frac{\dot{K}(t)}{G^{el}}. \quad (5.10)$$

– dans le deuxième cas :

$$\dot{\gamma}(x_1, t) = \frac{\dot{K}(t)}{G^{ep}}, \quad (5.11)$$

En utilisant la définition de la déformation et les équations (5.6), nous pouvons écrire  $\dot{T}$  comme fonction de  $\dot{V}$  :

$$\dot{T} = G \frac{\dot{V}}{H} \quad (5.12)$$

où  $G = G^{el}$  ou  $G = G^{ep}$ .

Dans le cas où la couche ne se comporte pas d'une façon homogène, d'autres types de réponses sont possibles :

- une partie de la couche est soumise à un chargement élastoplastique. Ceci est supposé se produire dans la zone de largeur  $h$ . Dans cette zone :

$$\dot{\tau}(x_1, t) = G^{ep} \dot{\gamma}(x_1, t) \quad (5.13)$$

$$\dot{\gamma}(x_1, t) > 0 \quad (5.14)$$

- l'autre partie est en décharge élastique, la taille de cette zone est égal à  $(H - h)$ . Dans cette partie :

$$\dot{\tau}(x_1, t) = G^{el}\dot{\gamma}(x_1, t) \quad (5.15)$$

avec

$$\dot{\gamma}(x_1, t) < 0 \quad (5.16)$$

Ensuite, on suppose maintenant qu'on a une réponse localisée de longueur  $h$ , certains points situés à l'intérieur de cette zone localisée peuvent ensuite décharger, ce qui peut réduire la taille  $h$  à  $\bar{h}$  ( $\bar{h} \leq h$ ). La largeur effective de la zone de charge plastique dans la suite de l'histoire de chargement devient  $\bar{h}$ .

Comme on suppose que  $G^{el} > 0$ , nécessairement et qu'on a  $G^{ep} < 0$ , ce qui veut dire qu'il y a un radoucissement dans la partie plastique des équations constitutives, les équations (5.2, 5.15, et 5.13) peuvent être vérifiées simultanément.

Le déplacement total  $\dot{V}$  est égal à l'intégrale des déformations dans les deux zones

$$\dot{V} = \dot{\tau} \left( \frac{\bar{h}}{G^{ep}} + \frac{H - \bar{h}}{G^{el}} \right) \quad (5.17)$$

ou

$$\dot{\tau} = \frac{G^{ep}G^{el}}{\bar{h}G^{el} + (H - \bar{h})G^{ep}} \dot{V}. \quad (5.18)$$

Nous pouvons constater que  $\bar{h}$  n'est pas déterminée par les données de problème, il doit seulement vérifier la double inégalité  $0 \leq \bar{h} \leq h$ . On constate que dans notre problème la largeur de la zone localisée ne peut que décroître pour un problème d'évolution la fonction  $h(t)$  est donc une fonction décroissante du temps dont la valeur maximale est  $H$  est la valeur minimale est 0.

La figure 5.4 montre le comportement globale pour deux solutions extrêmes : le premier est une solution où tous les points matériels sont en décharge, la taille de la zone localisé dans ce cas a une taille égale à 0  $h(t) = 0 \forall t$ . Le deuxième représente la solution homogène dont tous les points de la couche continuent à charger  $h(t) = H \forall t$ .

De plus la chute des forces peut ramener la pente de la réponse globale de  $T$  et  $V$  vers  $-\infty$  (l'équation 5.18) :

$$\bar{h}G^{el} + (H - \bar{h})G^{ep} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{h} = \frac{-HG^{ep}}{G^{ep} - G^{el}} \quad (5.19)$$

### 5.2.1.2 Illustration des solutions possibles

Prenons l'exemple d'une solution localisée dans la figure (5.5). Il a été sup-

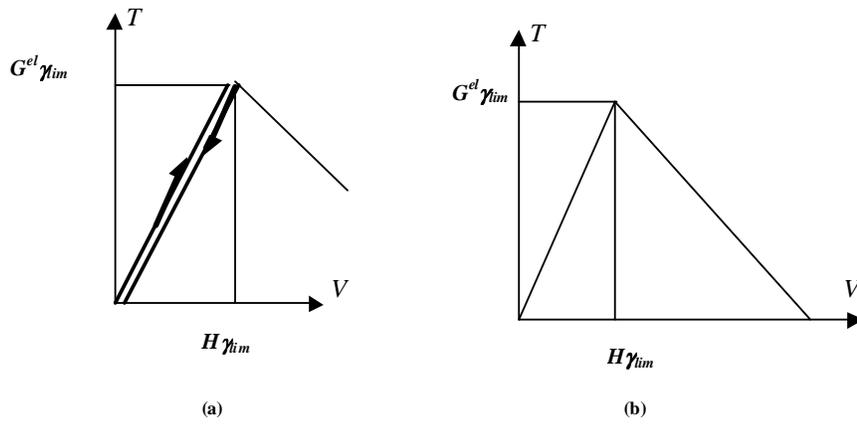


FIG. 5.4 – Les deux solution extrêmes : (a) solution sans aucune zone localisée, (b) solution entièrement localisée.

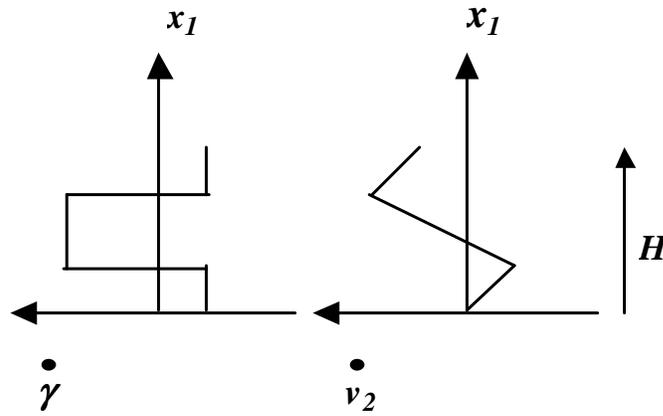


FIG. 5.5 – Un exemple de solution localisée pour le problème incrémental.

posé que la zone localisée est située au milieu de la couche et que, de plus, elle n'est constituée que d'une seule partie. On aurait pu aussi bien subdiviser la largeur  $\bar{h}$  de zone radoucissant en plusieurs zones et ne pas la placer au milieu de la couche, les équations globales à résoudre seront les mêmes.

Au début de chargement la couche a un comportement homogène jusqu'au pic. Dans ce cas nous pouvons écrire  $V = H\gamma_{lim}$  ou  $T = G^{el}\gamma_{lim}$ , puisque pour notre loi quasi-fragile  $\gamma_{lim} = \gamma_{pic}$ .

Les figures (5.6, 5.7, et 5.8) représentent un autre exemple de solution localisée. La figure (5.6) représente le comportement global de la couche, qui s'explique par l'examen des deux figures (5.7 et 5.8).

Dans cette solution présentée, on suppose qu'au pic une partie centrale continue à charger tandis que les deux zones extérieures déchargent. Le

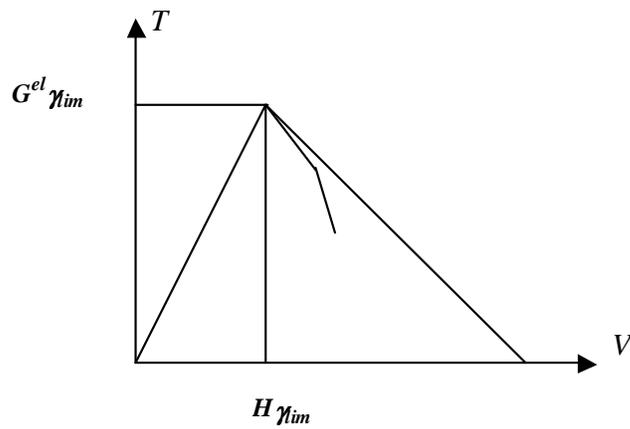


FIG. 5.6 – Exemple d’une solution : courbe force-déplacement.

point  $A$  est caractéristique de ces points qui déchargent (les points correspondant suivent le comportement décrit dans la figure 5.7,a). Ensuite, dans la zone centrale radoucissante jusqu’ici, deux parties se mettent à décharger élastiquement (les points correspondant suivent le comportement décrit dans la figure 5.7,b), alors que le centre de la zone constitue sa charge radoucissante. Le point  $C$  est un des ces points qui continue à charger (les points correspondants suivent le comportement décrit dans la figure 5.7,c).

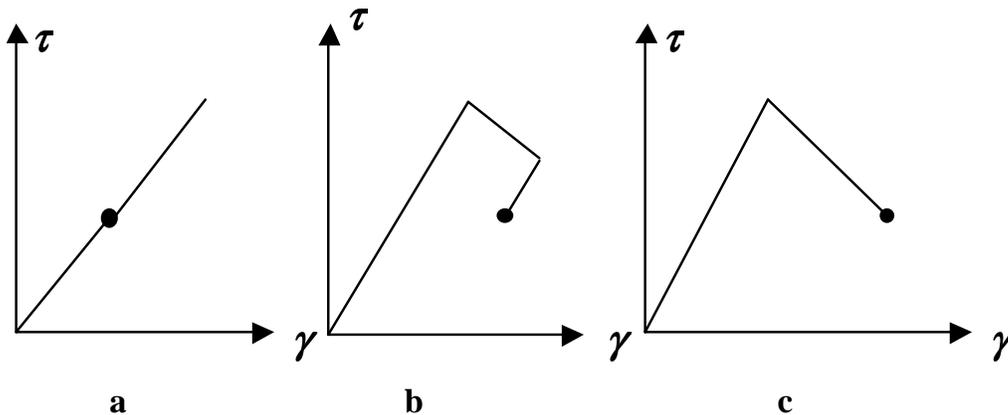


FIG. 5.7 – Les différents chemins de chargement

Nous pouvons constater que l’infinité des solutions correspondante à des comportements globaux est comprise entre deux solutions extrêmes : la solution entièrement localisée et celle qui ne présente pas de localisation des déformations (cf. figure 5.4).

D’autres solutions peuvent être obtenues analogue aux figures (5.6), (5.8), et (5.7). Ce sont des solutions dont  $\bar{h}(t)$  est fonction discontinue (figure 5.9) et d’autres dont  $\bar{h}(t)$  est fonction continue (la figure 5.10).

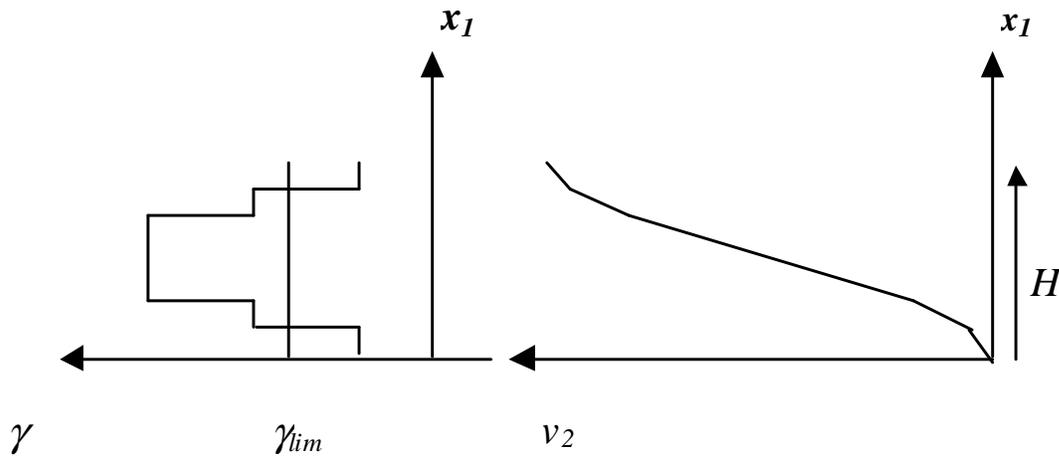


FIG. 5.8 – Exemple d’une solution : le déplacement et le cisaillement en fonction de  $x_1$ .

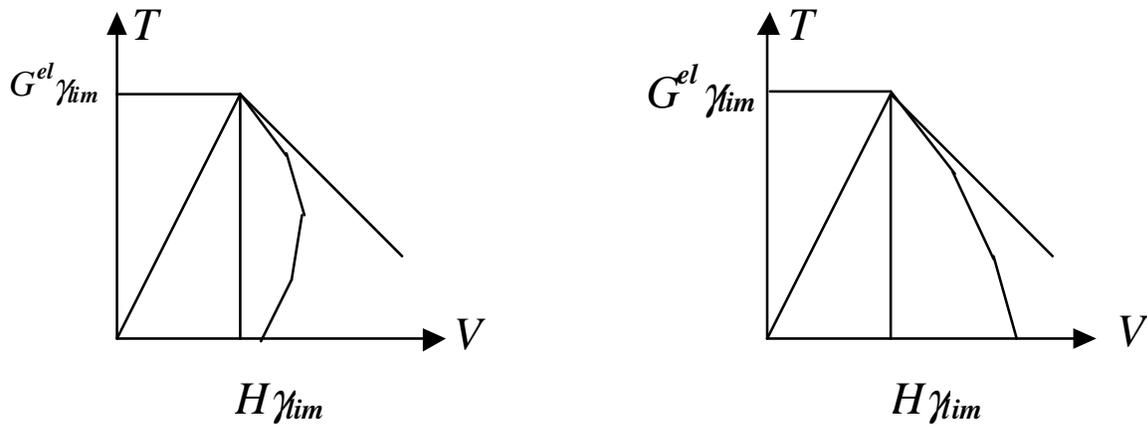


FIG. 5.9 – Solutions obtenues avec une fonction  $\bar{h}(t)$  discontinue.

Certaines de ces solutions sont impossibles à obtenir selon l’histoire de condition de chargement. Prenons par exemple dans le cas où la sollicitation est imposée en déplacement, il est indispensable que le radoucissement soit lié aux valeurs de déplacements croissants, ce qui implique la limite des solutions (les incréments des déplacements doivent garder un signe positif).

Le problème du cisaillement (Cf. 5.2) a illustré un point important : l’évolution de la taille de la zone localisée  $h(t)$  qui est fonction décroissante de temps, ce résultat est analogue avec notre choix de comportement radoucissant du milieu.

### 5.2.2 Un cas de loi de comportement ductile

L’étape suivante de cette étude consiste à généraliser l’évolution de la taille de la bande de cisaillement pour une loi de comportement dont la courbe

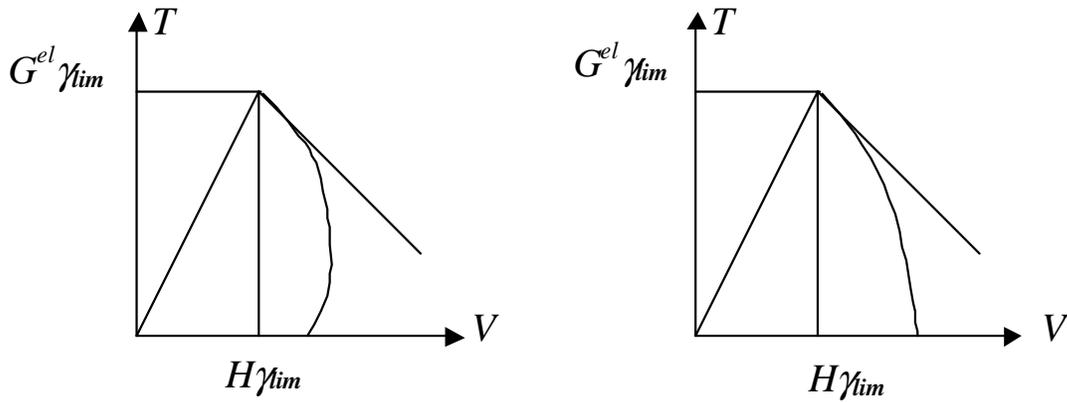


FIG. 5.10 – Solutions obtenues avec une fonction  $\bar{h}(t)$  continue.

de chargement est fonction dérivable de temps (Figure 5.11). Cette loi nous l'appelons dans la suite une loi de comportement ductile.

C'est important car bon nombre de lois de comportement utilisées pour les géomatériaux ne manifestent pas un radoucissement brusque, en particulièrement des lois utilisées pour les sols.

Pour simplifier le problème, nous avons choisi un exemple d'une loi ductile composé de trois parties en fonction de la pente  $G$

– Une partie (*el*) linéaire durcissante, cette partie défini la phase élastique du comportement du matériau, puisque notre choix de loi ne considère pas l'élasticité non linéaire telle que :

si

$$\gamma \leq \gamma_{lim} \Rightarrow G = G_1 \quad (5.20)$$

– Une partie (*nl*) où  $G$  est une fonction parabolique de  $\gamma$  telle que :

si

$$\gamma_{lim} < \gamma \leq \gamma_2 \Rightarrow G = 3a\gamma^2 + 2b\gamma + c \quad (5.21)$$

– une partie (*lp*) linéaire radoucissante qui traduit un écrouissage positif jusqu'au pic, négative ensuite :

si

$$\gamma > \gamma_2 \Rightarrow G = -G_3 \quad (5.22)$$

$a, b, c, d$  : sont des paramètres mathématiques. Ces sont les coefficients d'une fonction parabolique  $f(\gamma)$

$$f(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d$$

Nous avons :

– Pour  $\gamma = \gamma_1 \Rightarrow f'(\gamma_1) = G_1, \quad \tau = G_1 \cdot \gamma_1$

– Pour  $\gamma = \gamma_2 \Rightarrow f'(\gamma_1) = G_3, \quad \tau = G_1 \cdot \gamma_1$

L'analyse du problème réalisé pour une loi fragile dans (5.2.1) est aussi valable pour la loi choisie. Les deux solutions extrêmes (la solution entièrement localisée et la solution sans aucune zone localisée), plus la possibilité de se localiser dans une partie de la couche.

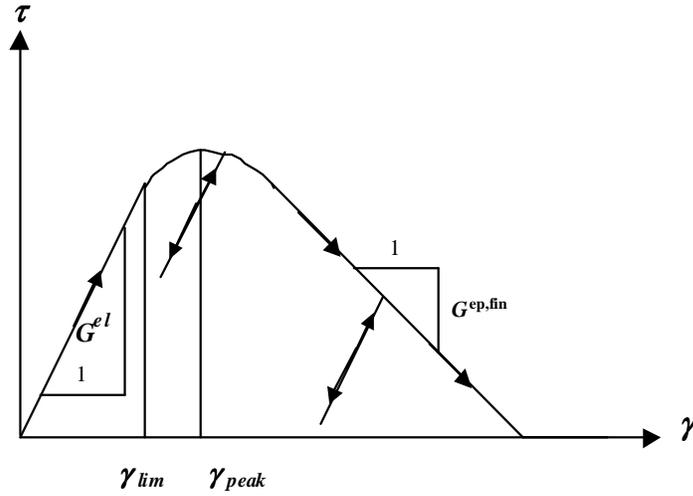


FIG. 5.11 – Le modèle constitutif ductile

### 5.2.3 L'évolution de la bande du cisaillement dans un milieu du second gradient

Dans cette partie, nous allons étudier le problème décrit dans le paragraphe (5.2) avec le modèle du second gradient unidimensionnel développé par El Hassan (Cf. 3.5.1). Transcrit avec nos notations le problème devient : les déformations sont  $\gamma(x_1)$  des déformations du cisaillement dans (Cf. 5.2) et les contraintes sont  $\tau(x_1)$ . Nous avons choisi de traiter le problème avec la loi de comportement ductile pour la partie premier gradient (Cf.5.2.2).

Afin d'écrire le principe des puissance virtuelle, l'équation d'équilibre (3.68) s'écrit :

$$\tau' - \mu'' = 0 \quad (5.23)$$

$\mu$  : les doubles contraintes (il est défini comme  $\chi_{211}$  dans 3.5.2.1).

La résolution de cette équation donne les déplacements à l'intérieur de la zone localisée et pour  $\gamma > \gamma_{pic}$  :

$$dv_{x1} = \frac{d\tau}{G^{ep}}x_1 + a + \alpha \cos(\eta x_1) + \beta \sin(\eta x_1) \quad (5.24)$$

$$-\eta^2 = \frac{G^{ep}}{B} < 0$$

et à l'extérieure de la bande  $\gamma < \gamma_{pic}$

$$dv_{x1} = \frac{d\tau}{G^{el}}x_1 + a + \alpha \cosh(\omega x_1) + \beta \sinh(\omega x_1) \quad (5.25)$$

$$\omega^2 = \frac{G^{el}}{B} > 0$$

$a$ ,  $\alpha$ , et  $\beta$  sont constants pour une partie donnée de la couche seulement c'est à dire pour une solution dans laquelle certain points matériels déchargent ou pour une solution dans laquelle certain points matériels chargent.

L'équation (5.24) donne les déplacements à l'intérieur de la zone localisé sous forme des termes sinusoïdes,  $\eta$  est fonction de la pente de la partie élasto-plastique  $G^{ep}$  dans notre étude, et de module de second gradient  $B$ .

On peut en déduire la dimension caractéristique de la zone :

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{-B}{G^{ep}}} \quad (5.26)$$

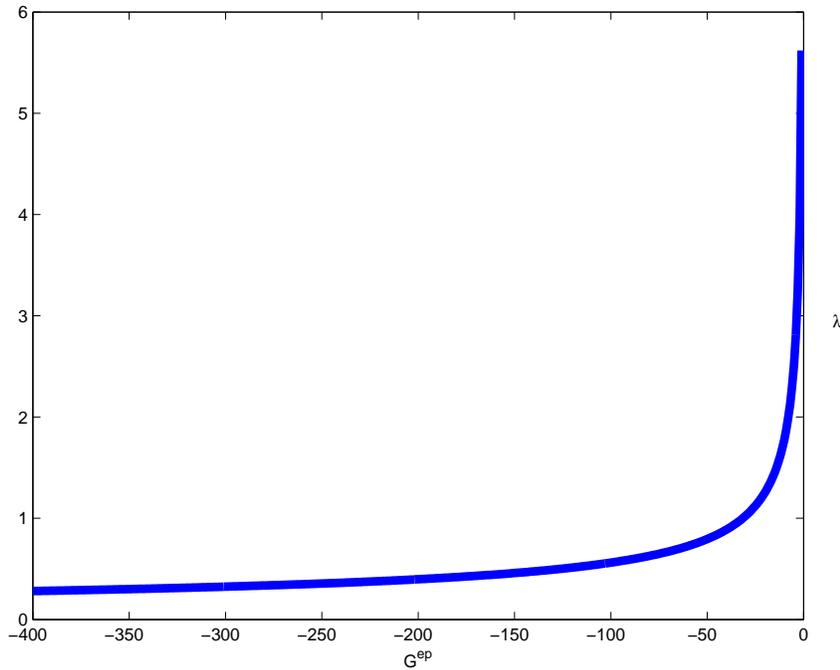


FIG. 5.12 – L'évolution de la zone localisé en fonction de la pente radoucissante

Lorsque la valeur de  $G^{ep}$  est proche de zéro,  $\lambda$  est relativement grande. Ensuite  $\lambda$  diminue en fonction de  $G^{ep}$  décroissante.

Nous allons comparer ces résultats théoriques avec une étude numérique portant sur une loi de comportement dont la pente  $G^{ep}$  varie régulièrement.

## 5.3 Résultats numériques

Nous rappelons qu'avec cette méthode, nous allons donner  $\ell$  une longueur d'arc sur la courbe de comportement global de la structure. Cette longueur sera donnée au code à chaque pas de temps. Le choix de cette valeur de  $\ell$  dépend de l'utilisateur. La valeur de la constante  $\alpha$  dans l'équation (4.118) est toujours égale à 100. L'épaisseur de la couche  $H$  est égale à : 1. Les applications sont étudiées dans le cadre des petites déformations. La discrétisation géométrique de la couche est réalisée en 100 éléments, chaque élément a deux noeuds et trois points d'intégrations.

Les 4 solutions analytiques obtenues par El Hassan (Cf. 3.5.1) seront notre objectif, nous les rappelons : la solution homogène dont tous les points de la couche continuent à charger en post-pic, la solution composée de trois parties( décharge-charge-décharge), la solution composée de 4 parties (décharge-charge-décharge-charge). et la solution composé de 2 parties(décharge-charge).

Nos expériences seront présentées dans les tableaux suivants : le tableau 5.1 présente les solutions obtenues avec l'initialisation de la localisation avec un champ de vitesses nodales introduit au moment choisi, ce champ de vitesses correspond soit à la solution recherchée, (obtenue à l'aide d'un code SOLANAL développée par El Hassan ([37] et [38]), soit peut être obtenue par un tirage aléatoire. Le tirage aléatoire a été implémenté dans le code aux éléments finis SIMPCONF par Moullet [69]. Pour aller plus vite, nous avons choisi de réaliser nos calculs avec le premier choix.

Le tableau 5.2 présente des résultats obtenus sans traitement numérique (introduction d'un champ de vitesses où introduction d'imperfection) Ensuite nous exposons les expériences numériques réalisées avec l'introduction d'imperfection dans la structure (tableau 5.4, 5.3).

### 5.3.1 Calcul en petites déformations

Nous avons utilisé deux types de paramètres pour le modèle de comportement du premier gradient ductil, avec ces deux jeux de paramètres nous avons réussi à retrouver les solutions analytiques obtenus par EL Hassan [37] ainsi que le phénomène de snap back. Avant d'exposer les résultats, nous allons présenter les étapes nécessaire pour effectuer le calcul dans le code SIMPCONF :

- Les paramètres du modèle ductile ont été déterminés par totalement afin de pouvoir observer le maximum de solutions.
- On détermine la pente correspondante à ce point  $G_i$ , ensuite on résoud les équations analytiques dans El Hassan [38] qui déterminent les longueurs des parties qui chargent  $l_c$  et les parties qui déchargent  $l_d$  qui dépend de la solution recherchée (charge-décharge-charge-décharge), (charge-décharge-charge), (décharge-charge).
- les valeurs  $(l_c, l_d)$  et la pente  $G_i$  sont introduites dans le code SOLANAL

	<b>Calcul 1</b>	<b>Calcul 2</b>	<b>Calcul 3</b>
le module $G_1$	150	150	150
le module $G_3$	-149	-300	-300
$\gamma_1$	0.008	0.008	0.008
$\gamma_2$	0.0120134	0.011	0.011
les valeurs du module tangente G	a=62188.7 b=39148.4 c=764.434 d=2.44182	$a = 1.66667 * 10^7$ b=400000 c=3050 d=-8.53333	$a = 1.66667 * 10^7$ b=400000 c=3050 d=-8.53333
la valeur de déformation $\gamma_i$ au moment de déclenchement de la localisation	0.0111	0.00975	0.0099
le module tangente au moment de la localisation	$G_i = -75$	$G_i = -75$	$G_i = -40$
la solution obtenue	charge- décharge- charge-décharge	décharge- charge-décharge	décharge- charge-décharge

TAB. 5.1 – *Calculs en petites déformations*

pour obtenir les champs des vitesses nodales correspondant à chaque solution.

- Le champ des vitesses obtenues est introduit dans SIMPCONF (modifié avec la méthode de longueur d’arc).

Nous présentons les résultats obtenus pour le calcul 1 (tableau 5.1), pour lequel la solution (charge-décharge-charge-décharge) est obtenue.

La figure(5.13) montre la réponse globale en fonction des déplacements. Nous pouvons remarquer la partie non linéaire au bout de la courbe, les déplacements continuent à augmenter pour une petite chute des contraintes. La courbe 5.14 montre le gradient de déplacement correspondant au moment de la localisation dans la réponse globale, dont la valeur de  $\gamma$

Ensuite nous avons obtenu la solution (décharge-charge-décharge) pour le calcul 2 (tableau 5.1). La figure 5.15 présente un phénomène de snap back, ce phénomène est connu dans le domaine expérimental surtout dans les matériaux très rigides (les roches, le ciment) Biolzi et al. [8]

Le gradient des déplacements pour cette solution est présenté dans la figure 5.16. Ce calcul a été délicat à obtenir il a fallu des pas de chargement suffisamment petits (d’ordre  $10^{-5}$ ), au cas où les pas de temps sont grands le code convergerait vers une réponse semblable à celle de la figure (5.13).

En revanche, nous n’avons pas réussi à trouver la solution (décharge-charge) avec les essais précédents, nous avons toujours obtenu la solution homogène. Cette solution sera obtenue avec d’autres paramètres.

### 5.3.2 Expérience numérique sans traitement spécial (petites déformations)

Prenons les essais décrits dans le tableau 5.2, le calcul 4 produit le phénomène de snap back (figure 5.17), avec une solution (charge-décharge-charge-décharge) correspondante à un point d’une pente  $G_i$  assez faible, cette solution s’est déclenchée spontanément.

Le calcul 5 est réalisé pour la loi de comportement quasi-fragile. Nous avons essayé de trouver la solution localisée au milieu de la couche (la solution décharge-charge-décharge), nous avons obtenus une solution composée de deux parties (décharge-charge)(la figure 5.18, et 5.19).

Ces deux derniers résultats nous permettent d’illustrer le fait que le bruit numérique peut intervenir dans les résultats finals dans un problème où l’unicité des solutions est perdue au cours du chargement.

De plus, il est possible que la réponse globale obtenue varie au cours du chargement. Prenons le calcul 2, les choix des grandes valeurs de  $\ell$  ont ramené le code à produire une réponse semblable à celle du calcul 1. Le calcul avec la loi quasi-fragile (calcul 5) est délicat. Il a fallu choisir des pas de tailles suffisamment petits surtout lorsque le code atteint le pic  $\gamma_{pic}$ . Finalement

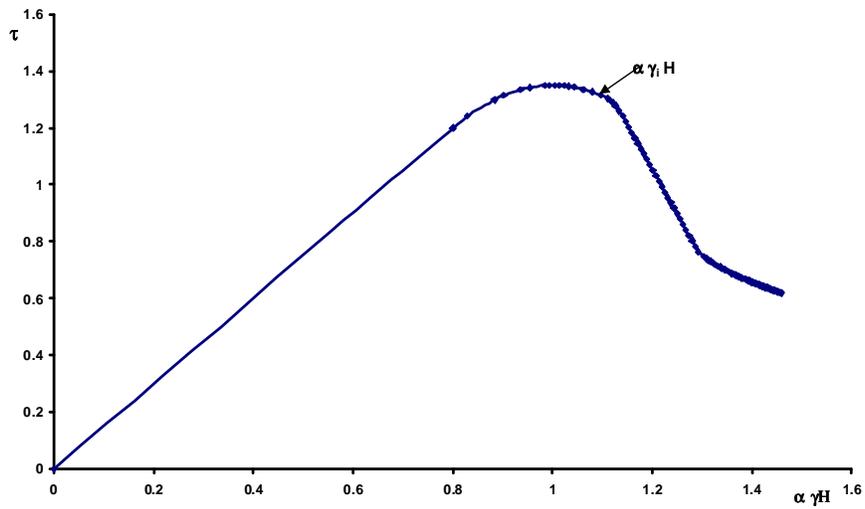


FIG. 5.13 – La réponse globale pour le calcul 1. La solution obtenue est la solution (charge-décharge-charge-décharge).

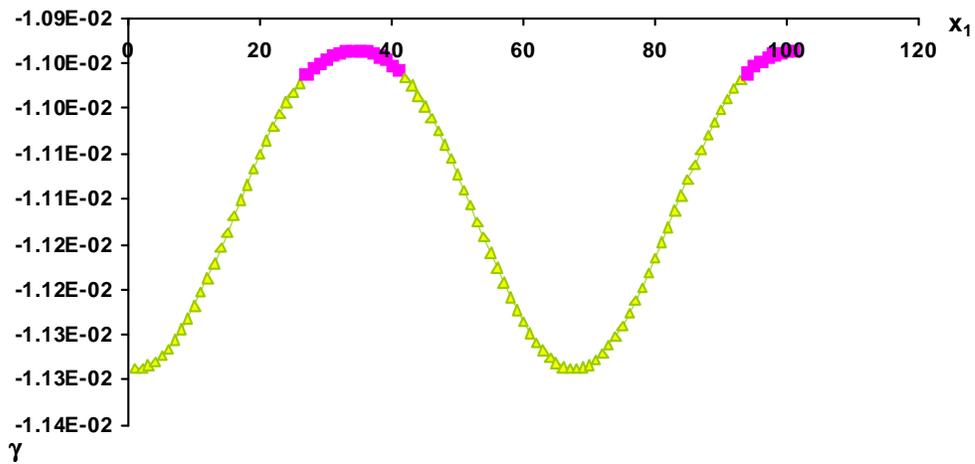


FIG. 5.14 – Le gradient des déplacements pour la solution ( charge-décharge-charge-décharge) de calcul 1.

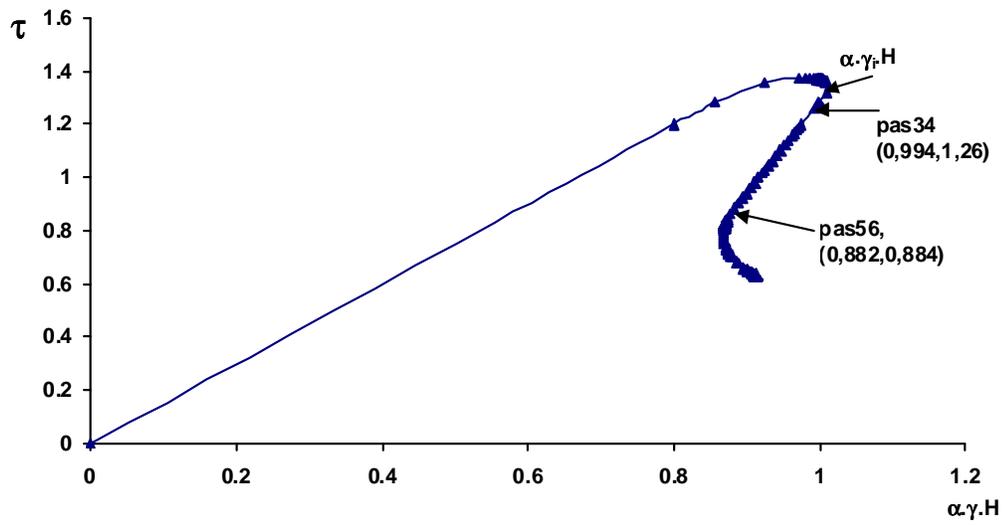


FIG. 5.15 – La réponse globale pour le calcul 2, la solution localisé est la solution (décharge-charge-décharge)

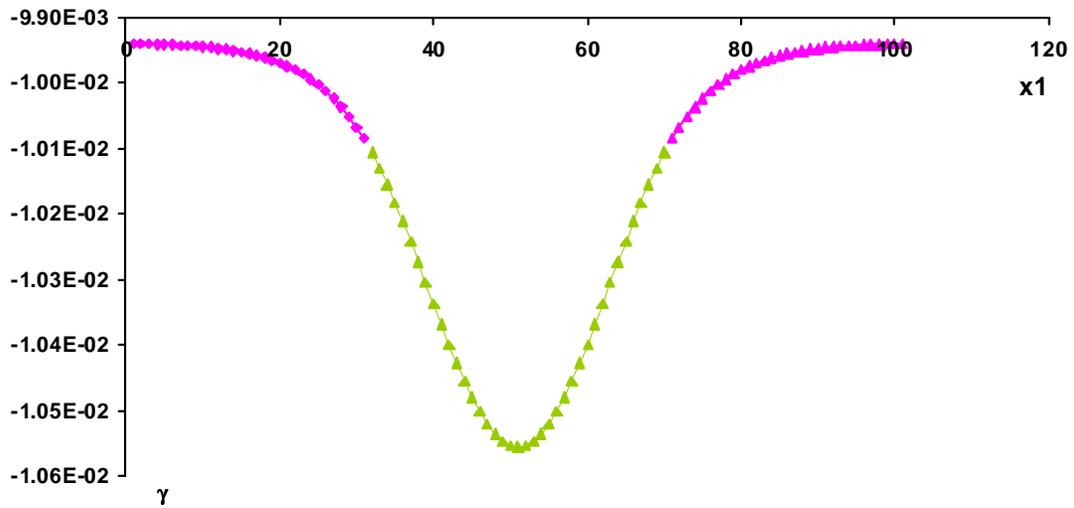


FIG. 5.16 – Le gradient des déplacements pour la solution (décharge -charge-décharge), calcul 2

	Calcul 4	Calcul 5
la pente $G_1$	150	150
la pente $G_3$	-450	
la pente $G_2$	-	-200
$\gamma_1$	0.008	sans objet
$\gamma_2$	0.01067	sans objet
$\gamma_{pic}$	-	0.01
les valeurs du module tangente G	a=4.21864*10 <sup>7</sup> b=1.06872*10 <sup>6</sup> c=8849.79 d=-25.1994	- - - -
la valeur de déformation $\gamma_i$ au moment de la localisation	0.00984	0.01
le module tangente au moment de déclenchement de la localisation	$G_i = -75$	sans objet
la solution obtenue	charge-décharge-charge-décharge	décharge-charge

TAB. 5.2 – *Calculs en petites déformations sans traitement numérique*

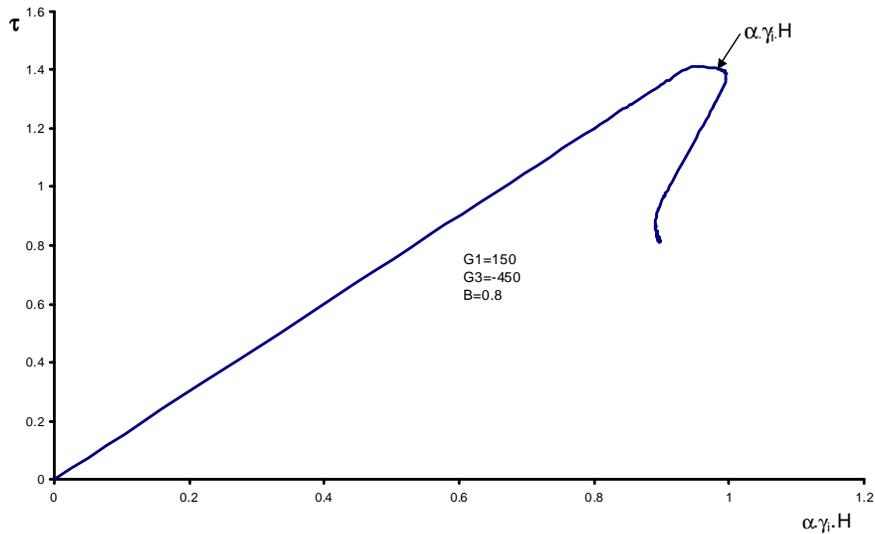


FIG. 5.17 – La réponse globale pour le calcul 4, la solution localisé est la solution (charge-décharge-charge-décharge)

l'influence de la valeur de  $G_3$  sur le temps de calcul n'est pas négligeable.

## 5.4 Taille de la bande de cisaillement

Considérons les calculs 1 et 2 présentés dans le paragraphe 5.3.1. Nous allons suivre la taille de la zone localisée à partir de l'instant de la localisation. La taille de cette zone peut être mesurée à l'aide du nombre de points de Gauss qui chargent. Dans la figure 5.20, nous présentons le champ de gradient des déplacements pour trois pas considérés. L'instant de la localisation correspond au pas 19. La taille de la zone localisée à cet instant est égale à  $l_c = 0.51$ , cette taille ne reste pas constante elle diminue dans les deux pas suivants (le pas 20 et 21).

La figure (la figure 5.21) montre l'évolution de la taille de la bande pour deux pas (31 et 32). Le moment de déclenchement de localisation correspond au pas 31 dont la taille de la bande est égale à  $l_c = 0.37$ , cette zone diminue brusquement dans le pas suivant  $l_c = 0.28$  ( $l_c$  représente la taille de la zone localisée sans tenir compte des zones localisées sur les bords).

Ensuite, et dans la figure 5.22 nous présentons les gradients des déplacements au moment de déclenchement de la localisation pour les calculs 2 et 3, la bande correspondant au calcul 3 a une taille beaucoup plus grande que celle du calcul 2.

Finalement, nous reportons sur la figure 5.23 une comparaison avec la courbe analytique obtenue à partir de l'équation (5.26). Sur cette figure nous reportons deux profils résultant des calculs 2 et 3 dont l'évolution de la taille de la bande en fonction de la pente correspondant à chaque pas a été tracée, cette taille représente la partie de la couche qui charge alors que la courbe analytique définit la longueur d'onde pour toute la couche. Les courbes des points numériques sont relativement identiques avec la courbe analytique.

## 5.5 Analyse de l'évolution de la taille de la bande en étudiant le comportement d'un point matériel situé sur un point de Gauss sur le bord de la bande

Pour suivre le comportement de la bande de cisaillement, prenons la courbe du comportement globale dans la figure 5.15. Cette courbe est la réponse globale du matériau. La figure (5.21) montre le gradient des déplacements pour deux premiers pas de l'apparition de la localisation. En comptant le nombre de points de Gauss qui chargent, il est possible de déterminer la taille de la bande à chaque pas. Nous avons remarqué que la taille diminue à partir d'instant de la localisation (qui correspond au pas 31 où  $l_c = 0.37$ ) jusqu'au

	Calcul 1	
	80%	85%
imperfection aux éléments 50 et 51	—	décharge-charge-décharge
imperfection aux éléments 33 et 34	charge-décharge	décharge-charge-décharge
imperfection aux éléments 33, 34, et 100	charge-décharge	charge-décharge-charge
imperfection aux éléments 33, 34, 99, et 100	décharge-charge	charge-décharge-charge

TAB. 5.3 – *Calculs avec introduction d'imperfection(5.1)*

pas 34 ( $l_c = 0.21$ ). le nombre des points de Gauss qui chargent diminuent entre la pas 31 et 34.

Nous avons repéré ces pas sur la réponse globale du structure dans la figure 5.15, cette partie de la courbe représente un radoucissement brutale. Ensuite et dans les pas placées sur la partie linéaire de la courbe 5.15, la taille devient constante ce qui correspond jusqu'au pas de chargement 65 et pour cette taille augmente de nouveau.

Pour comprendre ce comportement, nous avons sélectionnée l'élément sur le bord droit de la bande ( l'élément 62). Nous avons remarquée que le point de Gauss 2 de cet élément continue à charger après la localisation jusqu'au pas 34 (le figure 5.24). Ensuite il décharge au moment où la taille de la bande devient constante.

La figure (5.25) est un zoom de cette partie de la courbe. Le dernier point qui décharge correspond au pas 56 de la courbe ( 5.15). A partir du pas 57 un rechargement de ce point de Gauss se produit et encore à une réponse globale non linéaire et un élargissement de la bande de cisaillement.

L'évolution de la taille de la bande a une influence sur l'évolution de champs des déplacements (le figure 5.26).

## 5.6 L'introduction d'imperfection

Dans notre étude, nous sommes intéressés à utiliser cette approche avec le modèle du second gradient comme un moyen pour déclencher la localisation. L'introduction de cette approche est réalisée en considérant un seuil élastique plus faible pour certains éléments du milieu supposé, c'est à dire dans notre cas nous proposons une loi de comportement ductile non linéaire avec un seuil d'élasticité linéaire  $\gamma^{per}_1 \leq \gamma_1$  alors que le reste des paramètres est le même. Le premier test proposé a été pour :

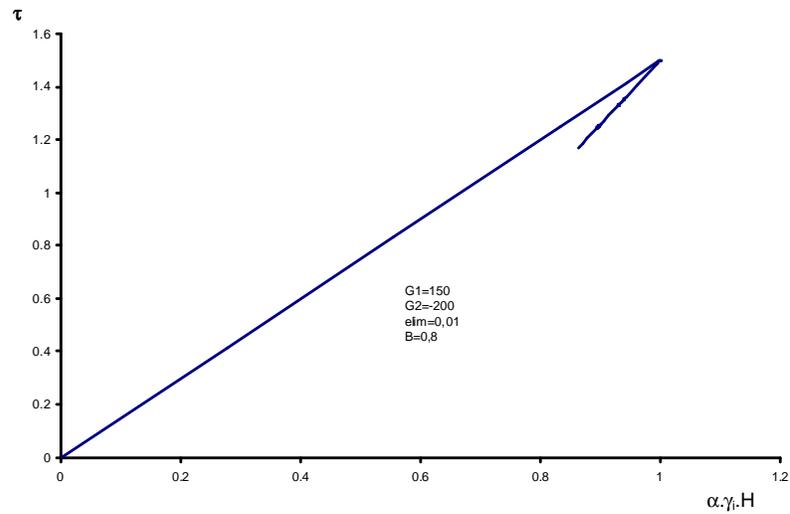


FIG. 5.18 – La réponse globale pour le calcul 5, la solution résultant est la solution (décharge-charge)

	Calcul 2		
	80%	85%	90%
imperfection aux éléments 50 et 51	décharge-charge-décharge	décharge-charge-décharge	décharge-charge-décharge
imperfection aux éléments 33 et 34	décharge-charge-décharge	---	---
imperfection aux éléments 33, 34, et 100	décharge-charge-décharge	---	---
imperfection aux éléments 33, 34, 99, et 100	décharge-charge-décharge	---	---

TAB. 5.4 – Calcul avec introduction d'imperfection dans le modèle décrit dans le Calcul 2 (5.1)

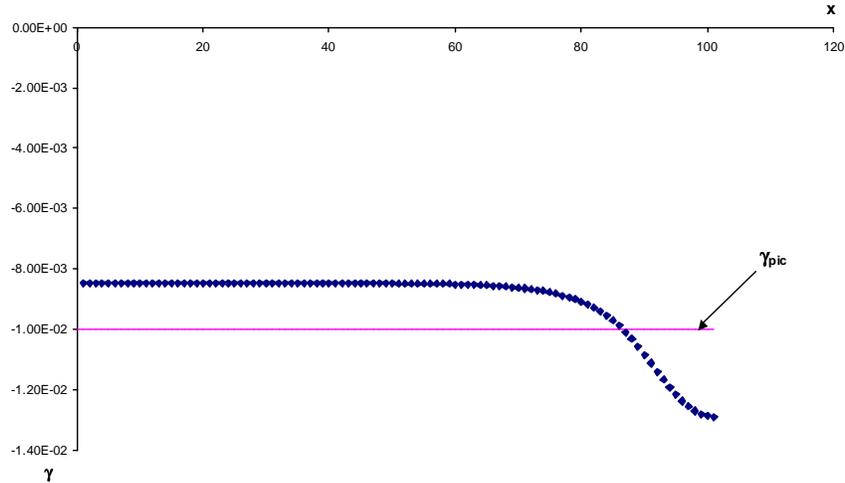


FIG. 5.19 – Le gradient des déplacement pour le calcul 5 .

$$\gamma_1^{per} = 80\% \gamma_1$$

En général lorsque le choix des éléments affaiblis par l'imperfection est réalisée, le code converge vers une solution localisé. Nous avons réalisé des calculs avec imperfections avec les modèles décrits dans le tableau ( 5.1).

Les tableaux (5.3 et 5.4) présentent les taux d'imperfections utilisés, les éléments perturbées à chaque calcul et les solution obtenues. La figure (5.27) présente le gradient des déplacements pour la loi décrite dans le calcul 2 (tableau. 5.1), les éléments perturbés sont les éléments du centre de la couche (les éléments 50 et 51). Ce qui nous permet toujours d'obtenir une zone localisée au centre. La solution (décharge-charge-décharge) est obtenue.

Ensuite, et pour le même modèle nous avons introduit l'imperfection au milieu de la couche avec deux taux du seuil élastique différents (85%, et 90%) . La figure (5.28) montre la réponse des trois taux d'imperfection. comparées avec la même solution localisée. Nous pouvons remarquer que le taux minimum produit une réponse plus raide (une pente plus grande). De plus, et pour une valeur de déformation quelconque, la bande de cisaillement a une taille minimale pour un taux d'imperfection minimal.

Les autres résultats présenté dans les tableaux (5.3, et 5.4) sont obtenus avec l'introduction d'imperfection dans différents éléments pour les trois taux d'imperfection précédents (80%,85%,90%).

Nous avons supposé que l'imperfection existe dans différents cas :

- cas1 : l'imperfection est introduite dans les éléments 33 et 34 de la couche et ceci pour voir si cette imperfection suffit à elle seule de déclencher la solution recherchée.
- cas2 : l'imperfection est introduite dans les éléments 33,34 et 100

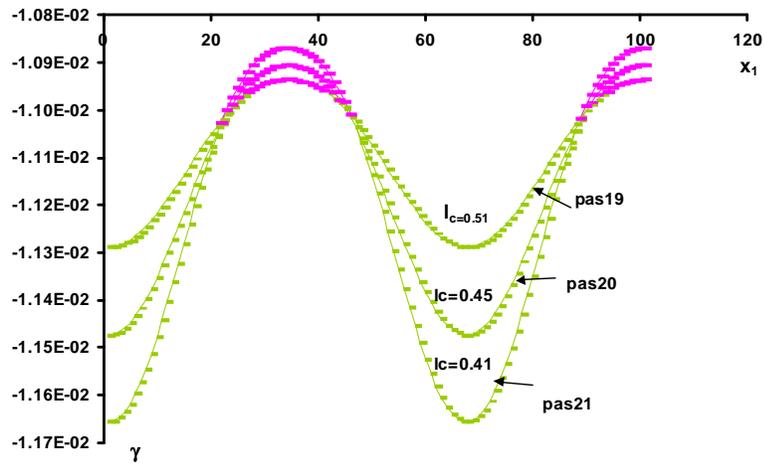


FIG. 5.20 – L'évolution de la taille de la bande de cisaillement pour le calcul 1 à partir de moment de localisation.

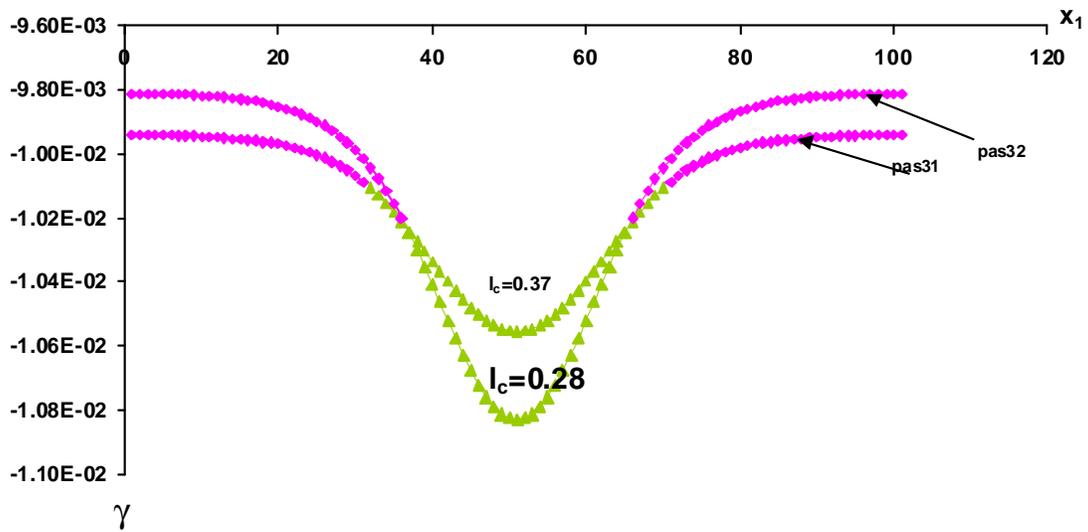


FIG. 5.21 – L'évolution de la taille de la bande de cisaillement dans le calcul 2 à partir de moment de localisation.

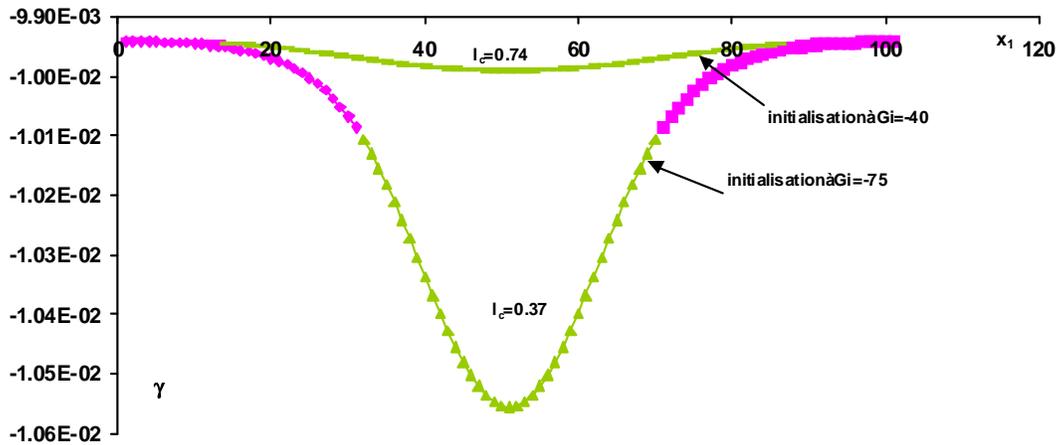


FIG. 5.22 – Comparaison de la taille de la zone localisée au moment de déclenchement de la localisation (les calculs 2 et 3). Les de gradient des déplacements.

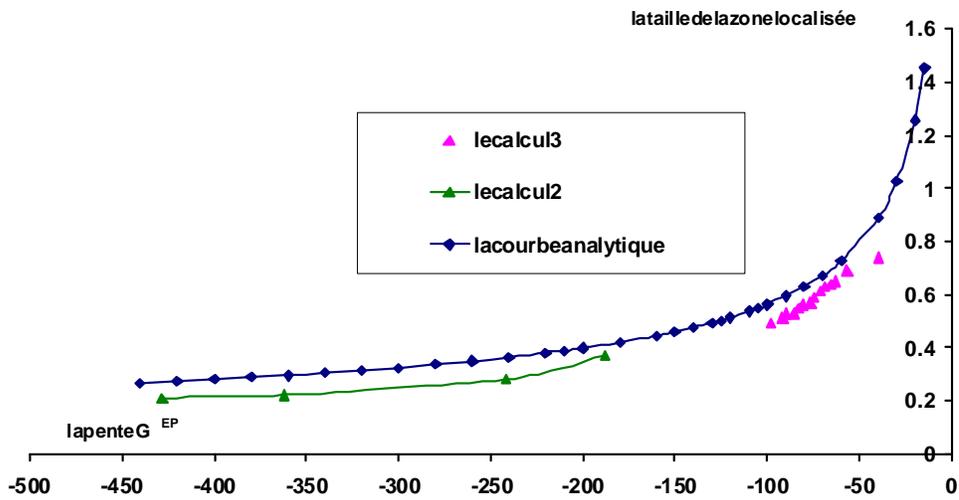


FIG. 5.23 – Comparaison entre la taille de la zone localisée obtenue numériquement et la taille obtenue analytiquement  $\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{-B}{G^{ep}}}$ .

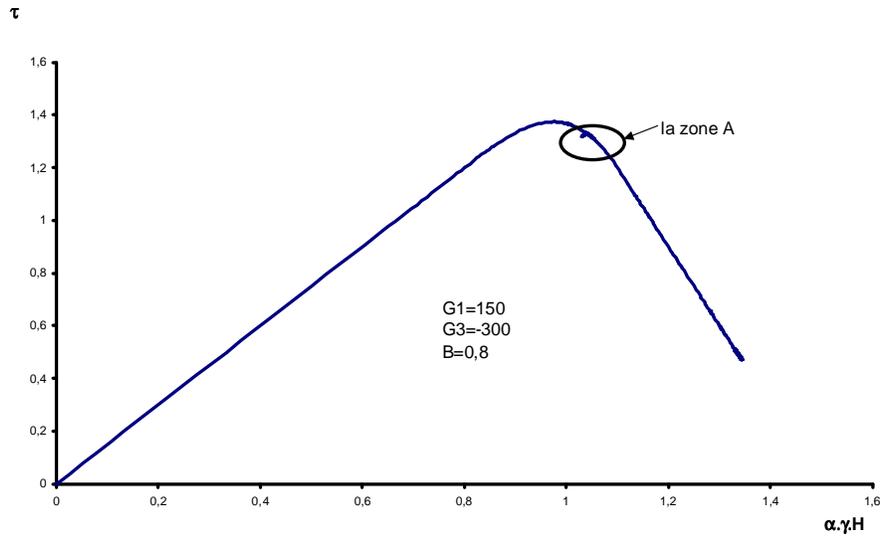


FIG. 5.24 – La réponse local du point de Gauss 2 de l'elem62, (calcul 2). L'effet de l'évolution de la taille de la zone localisée sur le comportement des points située dans cette zone.

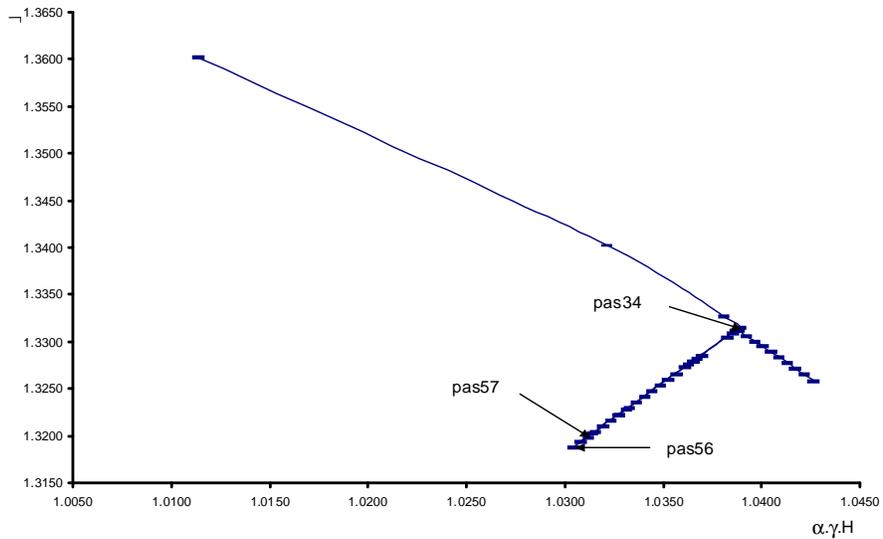


FIG. 5.25 – La zone A de la courbe (5.24). Le déchargement-rechargement du point de Gauss 2 d'élément 62. Calcul 2

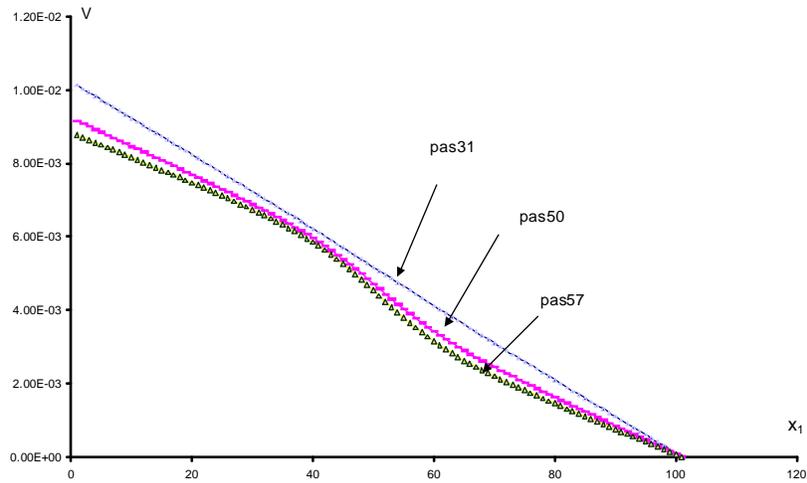


FIG. 5.26 – Les champs des déplacement pour trois pas de chargement de la courbe (5.15).

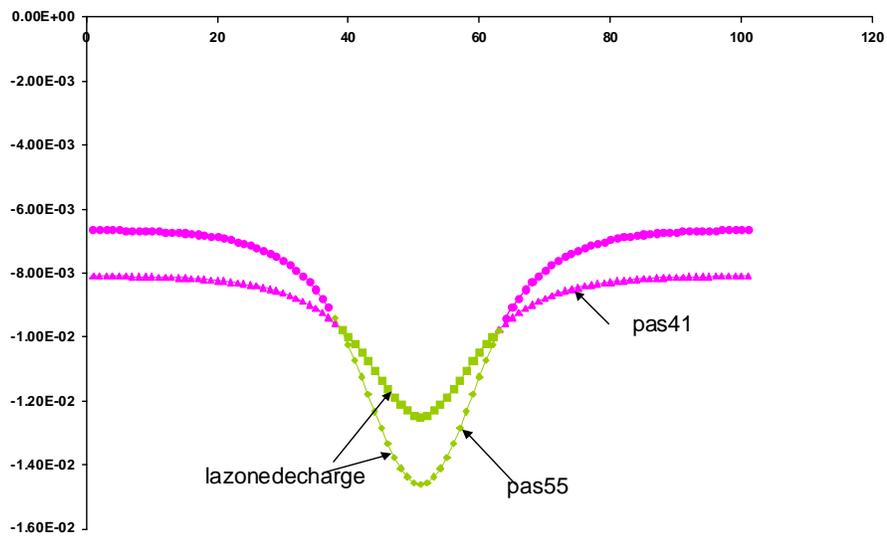


FIG. 5.27 – Gradient de déplacement, l'introduction de l'imperfection aux éléments 50 et 51 pour un modèle de comportement décrit dans le calcul 2, le taux d'imperfection est de 80%

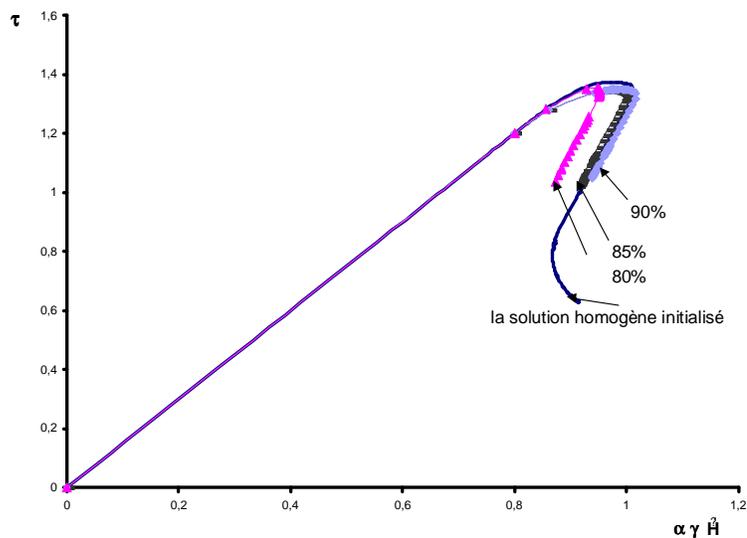


FIG. 5.28 – Une comparaison de différents taux d'imperfection dans les éléments 50 et 51, le calcul 2

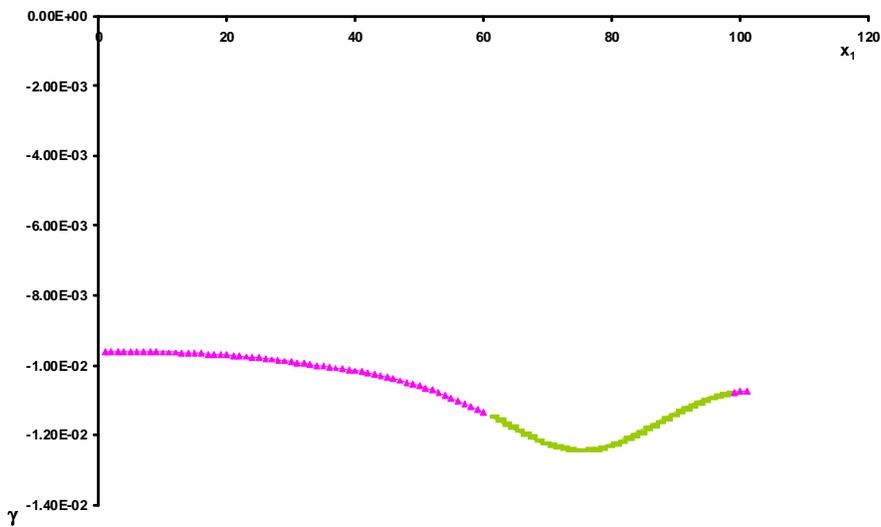


FIG. 5.29 – Gradient de déplacement pour l'introduction d'un taux d'imperfection 85% dans les éléments 33, et 34 pour le calcul 1

– cas3 : l'imperfection est introduite dans les éléments 33,34,99 et 100  
Dans les courbes (5.30) et (5.29) nous présentons les solutions obtenues avec les modèles en déterminant la position d'imperfection correspondant à chaque solution obtenue.  
Ces courbes montrent que la solution obtenue dépend du nombre des éléments perturbés et des positions des éléments dans le milieu discrétisé.

## 5.7 Indépendance de maillage

Pour vérifier l'indépendance de maillage sur la résolution numérique du problème, nous avons testé le code avec la loi de comportement d'une pente  $G3 = -149$  (calcul 1) et pour un maillage des 20, 50, et 100 éléments. Nous avons utilisé le même programme de chargement pour les trois types de maillage, l'initialisation des vitesses nodales a été réalisé à une pente  $G_i = -75$ . Pour les trois types de maillage. La figure 5.31 montre les champs des déplacements pour les trois types de maillage. Le maillage de 20 éléments montre une solution moins précise que les autres maillage, cependant les solutions des maillages avec 50 et 100 éléments sont très proches. De plus la taille de la bande de cisaillement reste la même avec les différents maillages, et la réponse globale des trois cas ne donne pas de différence discernable. Ensuite nous reportons sur la figure (5.32) le gradient des déplacements pour les trois maillages. Nous voyons que la longueur interne reste la même avec les différents maillage.

## 5.8 Calcul en grandes déformations

Dans cette partie nous traitons les modèles décrits précédemment avec l'hypothèse des grandes déformations, ici différemment au cas des petites déformations, la configuration au début de chaque pas diffère de la configuration initiale puisque nous actualisons les coordonnées à chaque pas. Nous intégrons donc sur la configuration finale de l'élément. De plus rentrant d'autre termes dus à l'effet des grandes déformations dans l'écriture générale du problème la matrice corrigée  $[D]$  au lieu de la matrice  $[C]$  (Cf. 4.24).

Concernant la géométrie du milieu, nous sommes retournés au problème traité par El Hassan qui un problème en compression ou en traction (Cf. paragraphe 3.5.1). La description du milieu unidimensionnel qui est la barre, ainsi que les conditions aux limites ne changent pas.

Au début nous avons réalisé un calcul pour obtenir la solution homogène, nous avons considéré le modèle décrit dans le calcul 1 (tableau 5.1). La figure 5.33 montre la réponse globale pour le cas de petites et grandes avec la solution homogène. La réponse en grande déformation est très proche de celle obtenue avec l'hypothèse des petites déformations. La figure 5.34 nous présentons le gradient des déplacements de la solution (décharge-charge-décharge-charge).

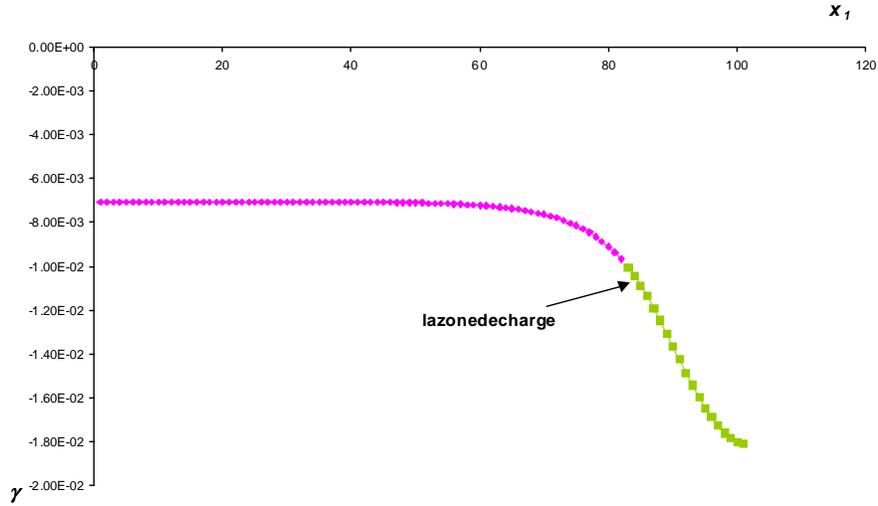


FIG. 5.30 – Gradient de déplacement pour l’introduction d’un taux d’imperfection 80% dans les éléments 33,34,99, et 100 pour le calcul 1

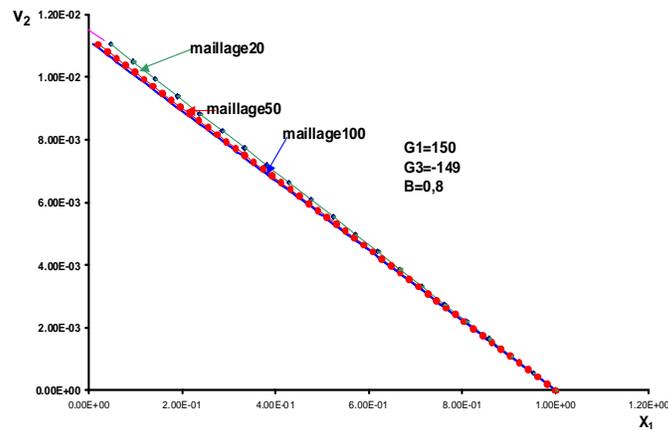


FIG. 5.31 – Les champs des déplacements pour la solution (charge décharge-charge-décharge), pour des maillage (20, 50, et 100 éléments), l’initialisation est réalisé à une pente  $G = -75$

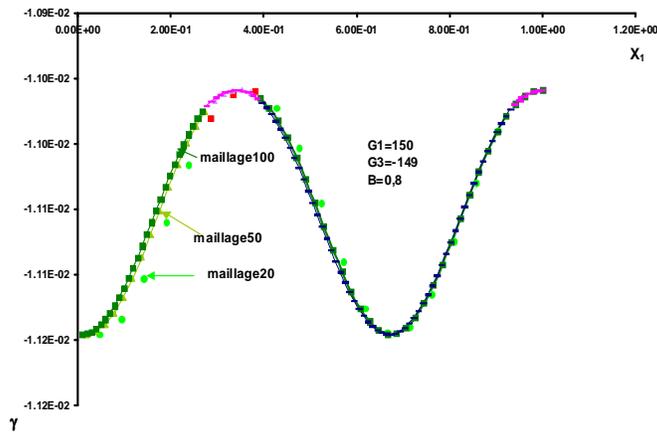


FIG. 5.32 – Le gradient des déplacements pour la solution (charge décharge-charge-décharge), pour des maillage (20, 50, et 100 éléments), l’initialisation est réalisée à une pente  $G = -75$

Le déclenchement de la localisation est réalisé aussi à une pente  $G_i = -75$ . Le calcul en grandes déformations pour les deux solutions obtenues a été délicat et sensible à la taille de pas de chargement. Le programme de chargement considéré dans le cas des petites déformations est différent de celui du cas des grandes déformations. Ce qui a provoqué une évolution de taille de la bande au cours de chargement différent de celui de cas des petites déformations. Ensuite nous avons changé le maillage de structure pour le même modèle (calcul 2), Avec un maillage de 50 éléments, le code convergeait vers une solution localisée spontanément.

La sensibilité de calcul avec l’hypothèse des grandes déformations peut être due à une perturbation numérique d’un effet beaucoup plus grand que celui dans le cas des petites déformations.

Finalement, nous avons réalisé un calcul en grande déformations avec des nouveaux paramètres dans le but de visualiser la différence entre petites et grandes déformations, nous considérons :

$G_1 = 5$ ,  $G_3 = -2.5$ ,  $B = 0.053$  dont la partie non linéaire est placée entre  $v_1 = 0.24$  et  $v_2 = 0.42$ . La formule mathématique non linéaire est définie par :  $a = 77.1605$ ,  $b = 97.2222$ ,  $c = 38.3333$ ,  $d = 3.46667$  Ces paramètres ont été choisis d’une façon à obtenir un plus grand rapport : forces sur modules et de telle sorte que la longueur d’onde soit la même dans partie linéaire radoucissante. Nous remarquons sur la figure 5.35 que la partie linéaire croissante de la courbe en grande déformation n’est plus une droite. D’autre part, on observe que la correction due aux grandes déformations implique la divergence entre les deux courbes dans la partie non linéaire des deux courbes. Au bout des parties radoucissantes les deux courbes se rapprochent.

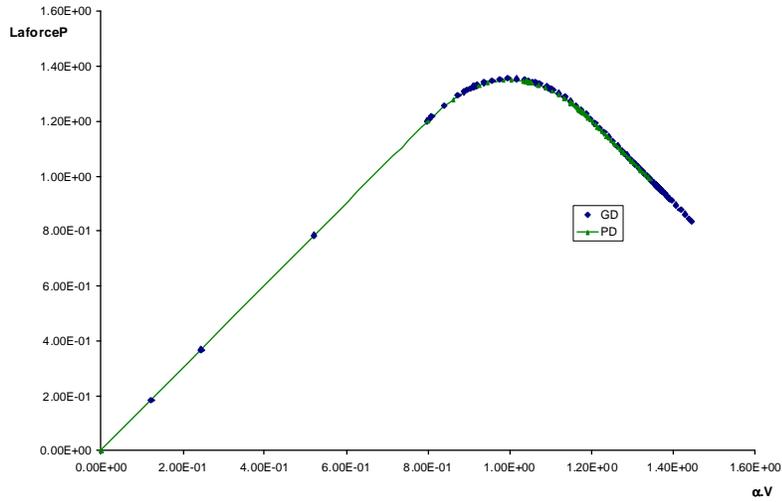


FIG. 5.33 – La réponse globale pour la solution homogène dans le cas des petites et grandes déformations, (pour un maillage de 100 éléments, et  $G_3 = -149$ )

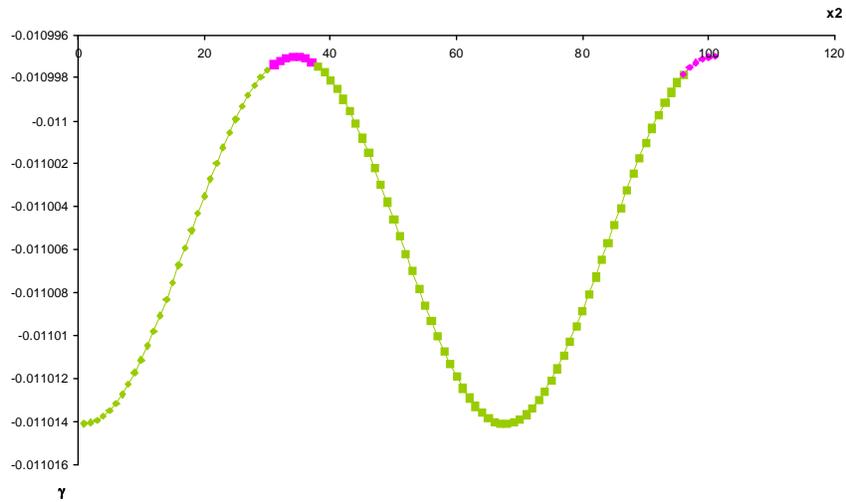


FIG. 5.34 – Le gradient des déplacements pour la solution (charge décharge-charge-décharge) en grandes déformations, et un maillage de 100 éléments,  $G_i = -75, G_3 = -149$

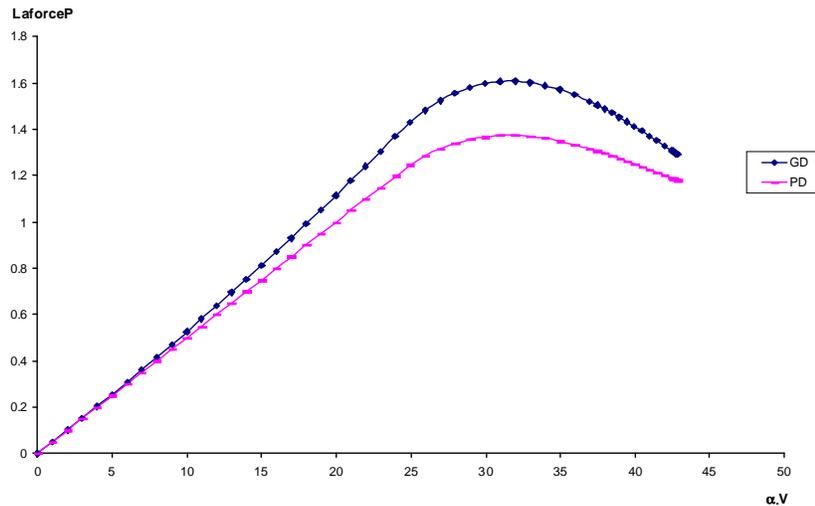


FIG. 5.35 – Comparaison petites et grandes déformations : la réponse globale du milieu pour des nouveaux paramètres pour la solution homogène

## 5.9 Conclusion

Dans ce chapitre , nous nous sommes intéressés à l'évolution de la taille de la bande de cisaillement en post-localisation.

Par simplicité nous avons considéré un problème de cisaillement unidimensionnel et avec un comportement élasto-plastique quasi-fragile radoucissant. Le problème a été abordé dans un premier temps dans le cadre des mécaniques des milieux continus classiques. L'analyse théorique du problème a montré que la taille de la bande est fonction décroissante de temps pour le type de comportement choisi dans cette étude, ainsi que la taille de la bande dépend du module radoucissant élasto-plastique.

Néanmoins, la taille de la bande n'intervient pas dans les équations constitutives écrites dans les milieux classiques, ce qui nécessite la modélisation de tel problème avec des modèles enrichis comme le modèle de second gradient local.

De plus et dans le but de pouvoir modéliser le comportement du milieu avec un radoucissement brutal, nous avons choisi un comportement dont les contraintes sont fonction dérivables des déformations.

Ensuite et pour pouvoir suivre l'évolution de la taille de la bande localisée sans conditions restreintes et de pouvoir passer à un comportement snap back. Nous avons modélisé la méthode de longueur d'arc dans le code aux éléments finis unidimensionnel développé par EL Hassan([38]).

Les résultats obtenus pour les deux lois de comportement ont été assez satisfaisants. Notre objectif d'obtenir un comportement snap back à l'aide de la méthode de longueur d'arc a été atteint, ainsi que nous avons réussi à suivre l'évolution de la taille de la bande de cisaillement au cours de chargement.

Nous avons constaté que lorsque l'on prend un terme de second gradient constant, la taille de la bande évolue en fonction du module radoucissant élasto-plastique.

Les perspectives immédiates de ce travail résident dans l'étude de l'évolution de la bande en faisant varier le terme de second gradient dans le même problème unidimensionnel.



# Chapitre 6

## Simulation d'excavation en comportement quasi-fragile

### 6.1 Introduction

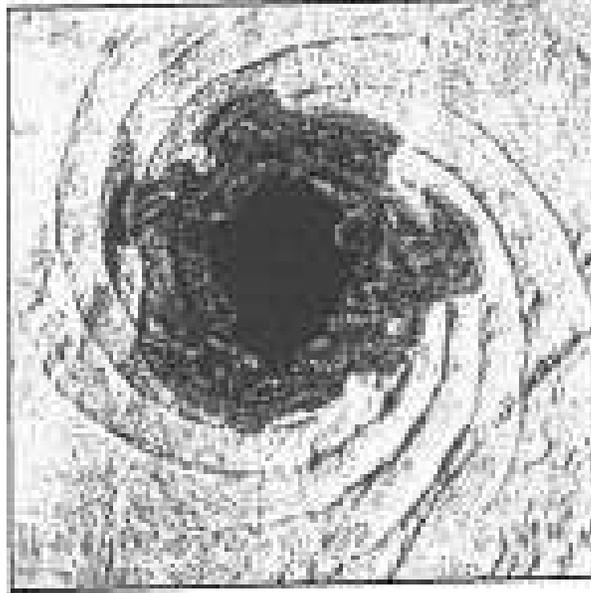


FIG. 6.1 – Mode de rupture dans les forages ( Van den Hoek. [100])

Dans ce chapitre nous avons choisi d'utiliser le modèle de second gradient bidimensionnel (Cf.Chapitre 4) pour modéliser la rupture apparaissant pendant une excavation dans une roche tendre. La rupture dans les forages est caractérisée par une perte de stabilité des massifs excavés. Cette perte de stabilité se manifeste par une modification de la géométrie du puits pour atteindre à la fin une forme quasi-elliptique. Ce problème est important d'un point de vue financier et dangereux d'un point de vue humain. L'observation expérimentale en laboratoire a montré différents mécanismes des ruptures des puits ainsi que le rôle de différents paramètres sur le mode de rupture (ex : grandeur du rayon des forages, effet de confinement). Nous allons voir dans

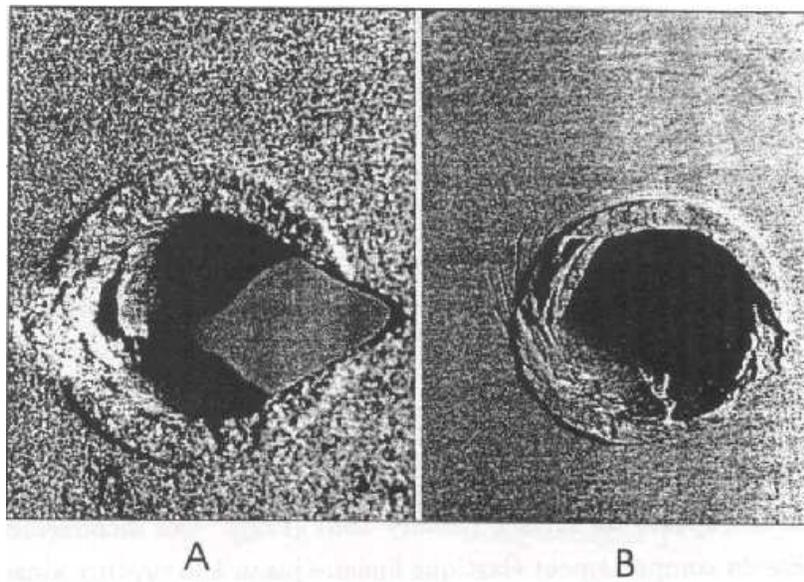


FIG. 6.2 – Différents mode de rupture dans les cylindres creux ( sur (A) ; le grès. (B) ; la dolomite. D’après Santarelli et al. [94])

la suite différents travaux réalisés par les expérimentateurs dans une étude bibliographique consacrée à la rupture pendant l’excavation.

Ensuite, nous présenterons l’implémentation numérique du modèle du second gradient dans le code aux éléments finis en grandes déformations Lagamine développé initialement au laboratoire Géomac à l’université de Liège, Belgique.

L’implémentation du modèle de second gradient bidimensionnel développée par Matsushima, Chambon, et Caillerie ([99] et [20]) dans le code Lagamine a été réalisé par Bésuelle [5]. Plusieurs subroutine ont été introduites dans Lagamine : la loi de comportement premier gradient, la loi de comportement second gradient, et l’élément utilisé (non conforme).

Cette modélisation a exigé certaines modifications dans l’interface Convilag et le programme de visualisation DESFIN, ces modifications ont été réalisé par F.Collin, Pour pouvoir s’étendre au modèle de second gradient.

Ensuite le code a été testé par Bésuelle [5] pour des problèmes unidimensionnels ainsi que bidimensionnel, les résultats ont été totalement satisfaisant , semblable aux résultats obtenus par Matsushima, Chambon, et Caillerie ([99] et [20]).

La troisième partie sera consacrée à une simulation numérique que nous avons effectuée de l’excavation du forage à l’aide du modèle de second gradient. Une description de géométrie du milieu et des conditions aux limites utilisées seront présentées et suivies par une présentation des résultats obtenus. Le but de cette simulation

- d’explorer les possibilités des modèles de second gradient.

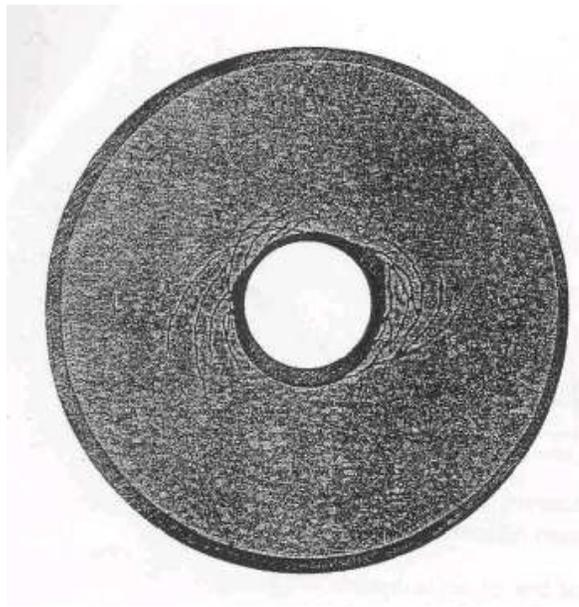


FIG. 6.3 – La rupture dans une argile synthétique( Chen et al [22])

- d'étudier la non unicité des solutions sur un problème plus compliqué que le biaxial.
- retrouver qualitativement l'ensemble des modes de rupture observé dans les expériences.

## 6.2 Etude bibliographie

### 6.2.1 Observations expérimentales

L'observation expérimentale aux laboratoires et in situ sont très délicats, de nombreux points restent à explorer. Rappelons d'abord les observations expérimentales classiques de la rupture des roches dans un essai triaxial.

Cook et Jaeger [52] ont décrit les modes de rupture dans les essais triaxiaux sur les roches en fonction de chargement selon trois formes différentes :

- Dans le cas des essais de compression uniaxial (confinement nul et aussi pour un confinement très bas), l'échantillon se rompt par une fissuration axiale (axial splitting). La courbe contrainte déviatoire-déformation axiale montre que l'échantillon a perdu l'essentiel de sa cohésion à la fin de l'essai.
- Dans les essais de confinement intermédiaires, l'échantillon se rompt par un cisaillement le long d'un plan unique. La courbe contrainte déviatoire en fonction de la déformation axiale montre que l'échantillon n'a perdu qu'une partie de sa cohésion à la fin de l'essai.
- Les essais de confinement élevés, l'échantillon se rompt par un cisaillement le long de plusieurs plans de cisaillement. La courbe (contrainte déviatoire-déformation axiale) montre que l'échantillon n'a perdu aucune partie de sa cohésion à la fin de l'essai.

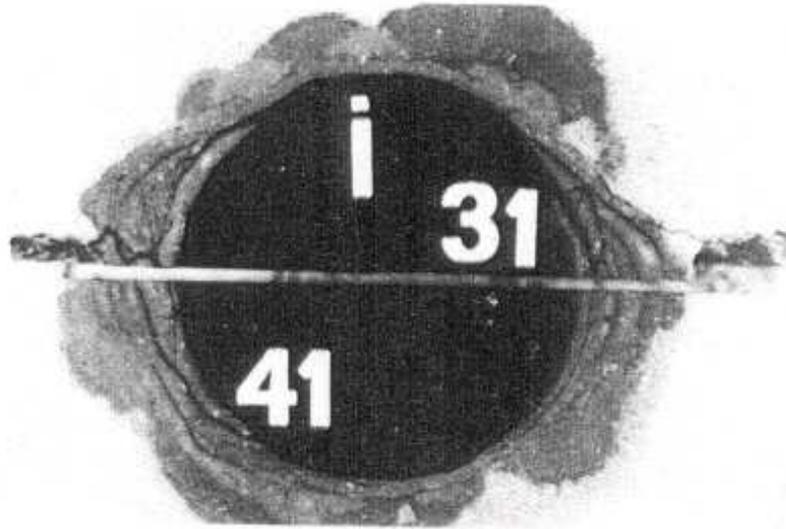


FIG. 6.4 – Un mode de rupture dans le grès(d’après Papanastasiou et al [77])

Le premier et le deuxième cas sont souvent appelés rupture fragile alors que le troisième est généralement appelé une rupture ductile. Paterson [80] distingue quatre phases successives dans le déroulement d’un essai triaxial de compression, :

- La première phase qui disparaît après l’application de la pression de confinement correspond à la fermeture élastique ou inélastique des vides dans l’échantillon.
- La deuxième phase pour laquelle la courbe contrainte déformation est linéaire correspond à une déformation élastique de l’échantillon.
- La troisième phase correspond au développement de micro-fissures à l’intérieur de l’échantillon dans la direction de la contrainte principale majeure.
- La quatrième phase correspond au développement des micro-fissures dans les parties de l’échantillon où les déformations sont localisées. Dans cette phase, la courbe classique contrainte-déformation n’est pas représentative du comportement de la roche car les déformations ne sont pas homogènes mais localisées (Paterson [80], Pariseau [79], Read et Hegemier [85]).

Nous nous sommes intéressés maintenant aux résultats des essais sur cylindres creux réalisés en laboratoire. Santarelli et Brown [94] ont réalisé des expériences avec une pression extérieure croissante alors que la pression intérieure reste nulle. ils ont obtenu une rupture des parois dans un mode dont la forme finale est souvent appelée oreilles de chiens (forme A de la figure 6.2). Cependant pour la dolomite Santarelli et al. [94] ont obtenue une forme différente (forme B de la figure 6.2), cette différence peut être liée à la dimension des grains élémentaires du matériau.

D’autres essais sur les cylindres creux ont été réalisés par Chen et al [22] en argile synthétique. Dans ce cas, le chargement est divisé en deux phases :

la première consiste à appliquer les mêmes pressions extérieurs et intérieurs croissantes dans le but d'atteindre les contraintes initiales avant le creusement. Ensuite la pression extérieure reste constante pendant le creusement décrit dans cet essai par une pression intérieure décroissante. Les auteurs ont augmenté la pression de confinement en gardant la pression intérieure résiduelle constante. Un mode localisé autour des parois intérieures est observé, il présente des différentes bandes (la figure 6.1).

Les essais expérimentaux ont eu tendance à observer l'effet de la taille d'échantillon ainsi que la pression de confinement sur l'initiation de la rupture.

Papamichos [76] considère que ces zones continuent à se propager tant que les contraintes concentrées sur les bords des fractures soient relativement fortes par rapport à la résistance du matériau. Lorsque ces contraintes deviennent faibles, les puits se stabilisent malgré la confinement appliquée. Finalement, on constate que la rupture dans des forages se produit par des modes très différents.

## 6.2.2 Les modèles analytiques

Différents modèles analytiques ont été développées pour décrire le comportement des géomatériaux pendant l'excavation et comprendre les mécanismes des ruptures.

Certains auteurs ont modélisé les phénomènes des ruptures des puits à l'aide des mécaniques de la fracture.

Germanovich [42] a supposé que la rupture a lieu en mode I, ce qui fait donc intervenir le facteur d'intensité des contraintes  $K_I$ . L'influence éventuelle d'une rupture par cisaillement modélisé par la fracture  $K_{II}$  n'est pas prise en compte. Germanovich [42] considère que la propagation des fractures est assurée tant que le facteur d'intensité des contraintes est égal à la résistance des roches nommées  $K_{IC}$ . Germanovich [42] montre que la présence des pressions normales aux fractures propagées réduit le facteur d'intensité des contraintes  $K_I$ . L'influence des pressions latérales se traduit donc de façon à réduire la force normale à la fissure et donc réduire l'ouverture des fissures.

La rupture dans les forages a aussi été étudiée dans le cadre de la théorie de bifurcation. Celle-ci considère l'instabilité des forages comme un phénomène de localisation. Vardoulakis et al. ([102] et [103]) ont mené une étude de bifurcation pour un forage de rayon initiale  $r_0$  soumis à une contrainte  $\sigma_\infty$  à l'infini. Le processus de chargement a été simulé par une réduction progressive de la contrainte  $\sigma_0$  sur les parois du forage. Le cas de chargement le plus sévère correspond à  $\sigma_0 = 0$  : Pour un tel problème une solution axisymétrique décrite par un champ de déplacements radiaux est toujours possible. Ce mode est le mode de déformation triviale.

Vardoulakis cherche une bifurcation en mode supposé. Il suppose une ondulation de paroi du forage. Le forage est considéré instable quand en plus de la

solution triviale précédente, la solution non triviale existe pour le problème considéré. Les composantes des champs des déplacements pour la solution non triviale (mode d'ondulation) sont données en deux fonctions inconnues du rayon normalisé  $\rho = \frac{r}{r_0}$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_r &= r_0 \hat{U}(\rho) \cos(m\theta) \\ \tilde{u}_\theta &= r_0 \hat{U}(\rho) \sin(m\theta)\end{aligned}\tag{6.1}$$

où  $m$  est le nombre d'ondes définissant un mode de bifurcation particulière ( $m = 1, 2, \dots$ ). Ce type d'analyse suppose une loi de comportement linéaire.

### 6.2.3 Les modèles numériques

La modélisation de la rupture des forages a été réalisée avec des modèles enrichis. Papanastasiou et al.[77] ont réalisé des calculs éléments finis en grandes déformations pour un matériau cohésif frottant et radoucissant. Ce matériau (le grès) dans lequel une localisation peut être principalement déduite des rotations des grains est décrit par un modèle élasto-plastique de type de Cosserat 2D. Leurs calculs ont été réalisés sur des cylindres creux à parois épaisses avec des dimensions différentes afin de bien simuler l'effet d'échelle. Pour obtenir une insensibilité au maillage, les dimensions des éléments au voisinage des parois (où se situe la concentration des contraintes la plus forte) ne doivent pas dépasser le double de la longueur interne du modèle qui est la dimension du grain. Ce qui amène à un maillage très fin et un nombre assez grand de degrés de liberté. L'étude de la bifurcation a été réalisée à partir d'une analyse des valeurs propres de la matrice de rigidité globale du problème. Quand la bifurcation est atteinte, au moins une valeur propre s'annule. C'est ainsi, qu'un champ de déplacement non axisymétrique autour du forage. Après que le point de bifurcation soit dépassé, les micro rotations jouent un rôle crucial dans les calculs.

Papanastasiou et al.[77] montrent que parmi les modes de rupture possibles un seul mode persiste dans le régime post-bifurcation qui est la localisation progressive en bande de cisaillement. La rupture est caractérisée par une formation progressive d'une zone localisée d'un matériau radoucissant entouré du matériau qui se décharge d'une manière élastique. C'est presque toute la région au voisinage des parois qui décharge à l'exception d'une zone de localisation très étroite qui continue de radoucir et qui s'étend en pénétrant à l'intérieur du massif. Ils considèrent aussi que la micro-rotation dans la théorie de Cosserat joue un grand rôle pendant le calcul de stabilité des forages. Ces micro-rotations ne sont pas négligeables dans la solution localisée, alors que la solution axisymétrique triviale est caractérisé par des micro-rotations nulles.

Crook et al. [29] ont adopté une approche continue qui modélise la rupture dans les matériaux quasi fragile pour un puit complet. Afin d'écrire le phénomène bien comme de la dépendance de la solution par rapport au maillage, il

utilise une méthode de régularisation artificielle de l'énergie de fracture. Pour un comportement radoucissant les déformations plastiques  $\epsilon_p^{f(e)}$  en post-pic dépendent de la longueur caractéristique matérielle  $l_c^{(m)}$ , mais aussi de la taille de l'élément.

$$\epsilon_p^{f(e)} = \epsilon_p^{f(m)} \frac{l_c^{(m)}}{l_c^{(e)}} \quad (6.2)$$

avec  $\epsilon_p^{f(m)} = \frac{2G_f}{l_c^{(m)}} f_t$

où

- $f_t$  est la force de traction
- $G_f$  est l'énergie de fracture
- $l_c^{(e)}$  est la longueur caractéristique de l'élément

Nous pourrions constater que cette méthode crée un lien entre les termes numériques et les termes théorique puisque la taille de l'élément joue un rôle sur les déformations plastique régularisé.

Ils obtiennent des formes de rupture sous termes de spirale analogue aux résultats de Van den Hoek. [100]

Zervos et al. ([108], [109], [110]) ont utilisé un modèle de second gradient pour modéliser la rupture progressive et l'effet d'échelle sur le comportement des cylindres creux pour un matériau granulaire et un comportement du type Mohr-Coulomb. La simulation numérique est réalisée sur un quart du puits seulement, leur calcul est basé sur un chargement croissant et isotrope sur les frontières extérieur du cylindre alors que la pression interne est maintenue égale à zéro (analogue aux essais de Chen et al.[22] ).

L'observation de l'évolution du calcul montre que suite au chargement, les contraintes concentrées sur les parois du forage continuent à charger et commencent à plastifier. Les déformations autour de la paroi restent symétriques. Cette symétrie est influencée par la géométrie du domaine ainsi que le chargement. Le chargement continue et pousse la symétrie à se rompre et les incréments des déplacements ressemblent aux solutions de formes sinusoïdales étudiées par Vardoulakis. L'analyse de ce phénomène montre que certains points matériels plastique commencent à décharger alors que d'autres continuent à charger en constituant des zones fines sous la forme de bandes localisées. La modélisation numérique a été faite pour des cylindres de différentes tailles. Les résultats ont montré que des cylindres de petits rayons sont beaucoup plus résistants que ceux de rayons plus grands.

Rappelons pour finir que dans l'ensemble de ces calculs aucune méthode n'a été utilisée pour déclencher la localisation, nous reviendrons sur ce point quand nous examinerons nos propres résultats numériques.

## 6.3 Modélisation numérique avec le modèle du second gradient local

### 6.3.1 Formulation générale du problème et implémentation numérique

La formulation générale du problème bidimensionnel avec le modèle du second gradient réalisé par Matsushima, Chambon, et Caillerie ([99] et [20]) a été introduit dans le code Lagamine développé à Liège <sup>1</sup>.

Nous avons présenté en détails (Cf.Chapitre 4) l'analyse numérique de cette étude. Nous ne détaillerons pas la démarche conduisant aux équations de la méthode itérative.

Le travail d'implémentation a été réalisé par Béusuelle [5]. Ce travail repose sur l'écriture des trois routines :

- La routine d'élément SGRA :  
C'est l'élément programmé par Matsushima ([60] et [61]) qui possède 9 noeuds chacun a 6 degrés de liberté (DDL). Pour les noeuds d'angles, les 6 DDL sont utilisés ( $u_x, u_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yx}, v_{yy}$ ). Les noeuds de milieu de coté ne comportent que les deux degrés de déplacement ( $u_x, u_y$ ) alors que les autres DDL sont bloqués.
- La routine EP1GDP :  
Cette routine décrit la loi de type Von Mises avec radoucissement, elle réalise l'intégration numérique de la loi et le calcul numérique de la matrice consistant. La loi donne la dérivée de Jaumann en fonction de la cinématique.
- La routine E2GDP :  
Elle décrit la loi du second gradient en utilisant la dérivée de Jaumann du tenseur double contrainte.Pour la loi de comportement proposé, une loi simple de type linéaire a été implantée (l'équation 4.98). Cette équation simplifiée ne dépend que de paramètres du module constitutif à un seule coefficient D (équation 4.98) .
- Modification des dispositifs auxiliaires :  
L'implémentation du modèle du second gradient a nécessité certain modifications dans le code :
  - L'interface CONVILAG a été étendue pour offrir une option supplémentaire correspondant au nouvel élément.
  - Le meilleur standard de Lagamine utilisé a été adopté à fonctionner avec le nouvel élément.
  - Le programme de visualisation des champs DESFIN a été adopté pour pouvoir être utilisé avec le nouvel élément.

La validation du modèle a été aussi réalisée par Béusuelle [4] sur Lagamine.

---

<sup>1</sup>à l'institut de Mécanique et Génie civil de l'université de Liège(Laboratoire Géomac)

Des simulations de chargement unidimensionnel ont été comparées avec un code NC2D développé précédemment par Matsushima et al. ([61] et [60]). D'autres simulations bidimensionnelles ont été comparées avec les résultats publiés précédemment, ces simulations bidimensionnelles ont été effectuées pour un essai biaxial (Cf.4.4.6) et comparées aussi avec ceux de code NC2D. Les solutions obtenues avec les deux codes sont identiques.

## 6.4 Description du modèle

### 6.4.1 Géométrie du problème et maillage

Nous supposons pour notre problème, que les conditions de déformations planes classiques sont respectées dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  du forage. La section courante du forage est définie dans le plan horizontal. Les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont défini dans ce plan horizontal. Le calcul est effectué dans ce plan.

Le rayon intérieur de la cavité est  $R_i$ , et le rayon extérieur est  $R_{ext}$ , nous avons choisi de modéliser le domaine complet dans le but de détecter tout mode de localisation qu'il possède certaine symétrie ou non.

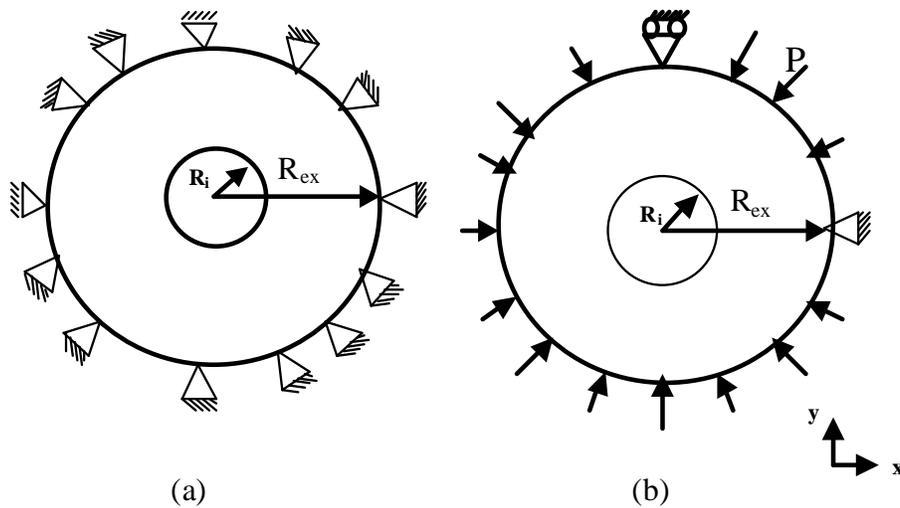


FIG. 6.5 – Géométrie du milieu continu considéré : (a) déplacement nul. (b) cas de confinement constant.

Le problème de la taille de rayon extérieur est important. Il est claire qu'il est préférable de prendre un grand rayon extérieur. Cependant pour des raisons de temps de calcul, il vaut mieux utiliser un petit rayon. Dans la suite, nous présentons des résultats avec deux rayons extérieurs différents : d'un part 10 fois le rayon intérieur qui nous a permis de faire plus de simulation et d'autre part un rayon extérieur égal à 70 fois le rayon intérieur qui nous a permis d'estimer l'influence des paramètre de rayon extérieur. Le contour intérieure

de la cavité est divisé en un certain nombre de secteurs, nous avons choisi 32 et 64 secteurs pour des rayons intérieurs 0.5 m, ce qui donne des tailles des éléments égaux à 10 cm et 5 cm respectivement.

## 6.4.2 Les conditions aux limites et le chargement

Deux types d'essais ont été modélisés : dans le premier on suppose que le déplacement des noeuds placé sur le rayon extérieur est nul (la figure (a) de 6.5), et dans le deuxième (la figure (b) de 6.5) essai on applique un confinement constant sur le rayon extérieur de la cavité. De plus, pour cet essai trois degrés de liberté sont bloqués sur le rayon extérieur pour éviter tout déplacement solide. L'état initial est supposé isotrope homogène.

Ensuite le creusement est modélisé par une diminution progressive de la pression intérieure depuis l'état de contrainte initiale jusqu'à une pression nulle. Cette diminution ne concerne que la pression appliquée sur les parois du trou, elle est caractérisée dans le code par un multiplicateur de force FMULT. Toutes les composantes des contraintes appliquées sur les parois internes seront réduites proportionnellement par ce multiplicateur. Ces conditions aux limites seront appliquées à l'aide d'éléments de frontières appelés LICHA. La valeur initiale des contraintes est égale à 3MPa.

Notre étude a été réalisée qu'avec le maillage structuré obtenu par notre subroutine que nous avons programmé en Fortran.

Dans le code Lagamine, le programme de chargement peut être introduit par deux moyens : soit un chargement automatique tel que pour un pas non convergé le code réduit le pas suivant automatiquement tant que la taille du pas ne dépasse pas la taille minimum imposée par l'utilisateur (DMINMU), si cette valeur est atteinte le programme s'arrête.

Ce mode de chargement a été utilisé au début du travail pour certain nombre du calcul, néanmoins le calcul s'est arrêté relativement tôt. Ensuite, nous avons utilisé un chargement manuel dont les incréments des forces imposé sont définis par l'utilisateur, avec un programme de chargement manuel le temps du calcul se réduit à 24 heure sur un serveur. Nous avons remarqué que le calcul pouvait aller plus loin et plus rapidement. La convergence a été réalisée avec un moyen de 7 à 10 itérations.

Afin de réaliser les calculs, nous avons découvert deux légères erreurs qui ont été corrigées avant d'effectuer les calculs présentés dans la suite de ce chapitre. Certain erreurs ont sollicité un mode localisé axisymétrique dans tous les calculs réalisés.

Finalement nous avons considéré la loi de comportement de type Von Misès avec radoucissement pour la partie premier gradient (Cf. 4.4.4). Les paramètres utilisés sont résumé dans le tableau (6.1)

	K	$G_1$	$G_2$	elim
élément normal	97 MPa	50 MPa	-2 MPa	0.01
élément perturbé	97 MPa	50 MPa	-2 MPa	0.0095

TAB. 6.1 – Paramètres de la loi de comportement premier gradient

## 6.5 Simulation numérique

Dans le tableau (6.2) nous présentons les essais numériques réalisés sur la cavité. Dans une partie entre eux, on considère que les déplacements sur les frontières extérieures sont nuls, dans ce cas le déclenchement de la solution localisée a été réalisé à l'aide d'introduction d'imperfection matérielle ou on effectuant une initialisation aléatoire à un instant donné (Cf.5.3). Alors que dans le cas où une pression constante est supposée sur les frontières extérieures, la localisation des déformations s'est déclenchée spontanément. Dans tous les résultats exposés nous reportons le second invariant des vitesses des déformations que nous appelons dans la suite les déformations plastiques équivalentes.

### 6.5.1 Les calculs effectués avec l'introduction d'imperfection

L'introduction d'imperfection a été réalisée en considérant que l'élément 1 situé sur les parois du forage et dans la direction horizontale ( $x > 0$ ) cet élément a un seuil élastique inférieur aux autres éléments dans le milieu. Le pic a 95% de pic de la loi de comportement original(le tableau 6.1).

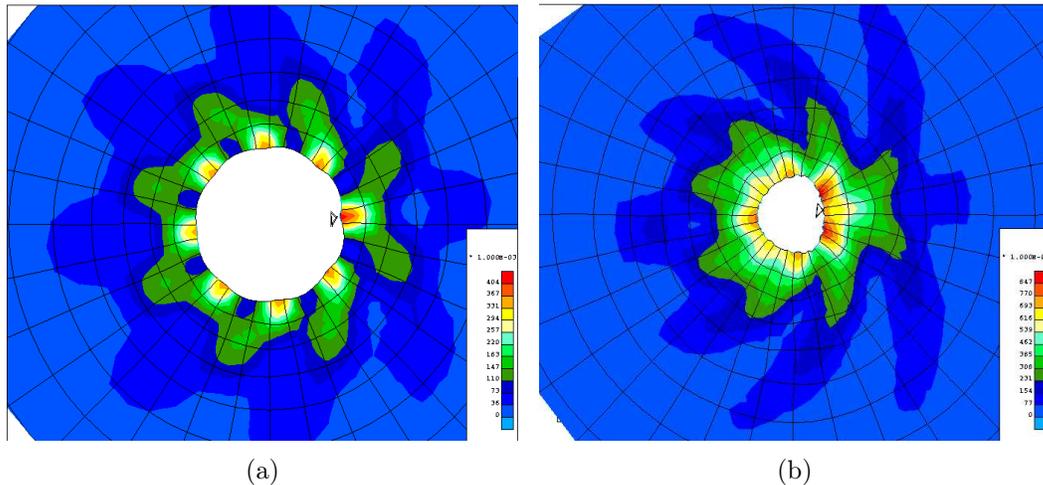


FIG. 6.6 – L'initiation d'imperfection dans les essais 14(figure a) et 15 (figure b), les cartes des déformations plastiques pour le dernier pas convergé.

TAB. 6.2 – Les essais simulés sur la cavité

L'essai	Conditions aux Limites extérieures	D	taille d'élément(cm)	$R_i(m)$	$R_{ext}(m)$	déclenchement de la localisation	valeur finale du diminution de pression (en pourcentage)	valeur du diminution de pression (en pourcentage) au moment de tirage aléatoire
1	Déplacement.nul	500	5	0.5	5	tirage	69%	58%
2	Déplacement.nul	500	5	0.5	5	tirage	83%	56%
3	Déplacement.nul	500	5	0.5	5	tirage	90%	57%
4	Déplacement.nul	250	5	0.5	5	tirage	61%	55%
5	pression constante	1200	5	0.5	5	sans	99%	-
6	pression constante	500	5	0.5	5	sans	72%	-
7	pression constante	250	5	0.5	5	sans	65%	-
8	pression constante	250	5	0.5	5	sans	78%	-
9	Déplacement.nul	500	5	0.5	5	tirage	86%	58%
10	Déplacement.nul	500	10	0.5	35	défaut	84%	-
11	Déplacement.nul	500	10	0.5	5	défaut	91%	-
12	Déplacement.nul	500	5	0.5	5	tirage	76%	58%
13	pression constant	500	5	0.5	5	sans	83%	-
14	Déplacement.nul	1200	10	0.5	5	défaut	99%	-
15	Déplacement.nul	1200	10	0.5	35	défaut	99%	-
16	Déplacement.nul	500	5	0.5	35	défaut	75%	-
17	Déplacement.nul	500	5	0.5	5	défaut	83%	-

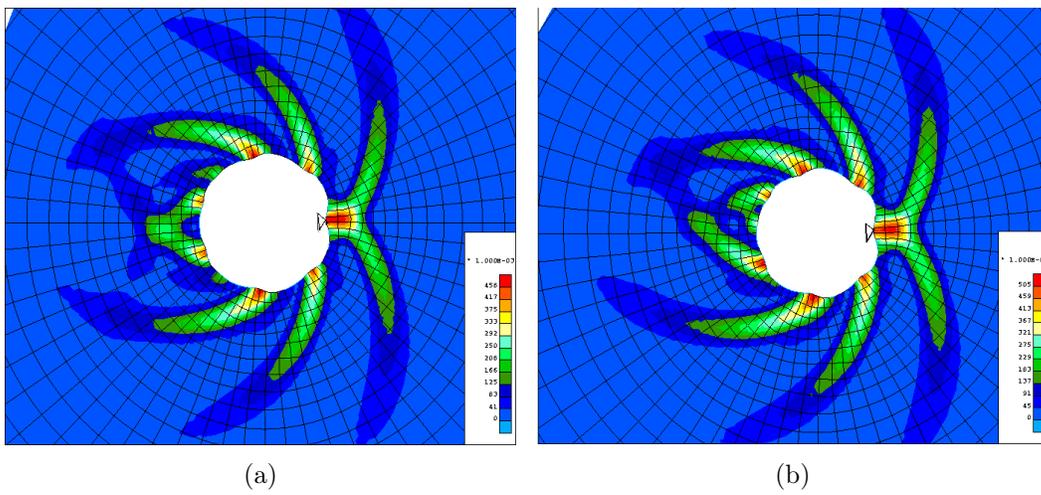


FIG. 6.7 – L’initiation d’imperfection dans les expériences 16 (figure a ) et 17 (figure b), les cartes des déformations plastiques.

Les essais numériques avec imperfection ont été numérotés : 10, 11, 14,15, 16, et 17. Nous les avons réalisé avec un chargement manuel. Ces calculs ont été assez rapides à converger. Pour cela nous les avons réalisés en variant : les valeurs de taille d’élément, de la valeur du module de second gradient  $D$ , et de la valeur du rayon extérieur du puits  $R_{ext}$ .

Dans les figures (6.6(a), 6.6(b)) et (6.7(a), 6.7(b)) nous présentons les déformations plastiques pour les derniers pas convergés dans les essais (14, 15, 16, et 17 respectivement.

L’échelle des déformations détermine la valeur correspondant à la couleur, et l’élément perturbé est indiqué par un triangle. Nous pouvons remarquer sur les quatre figures que la présence de défaut joue un rôle important sur le mode localisé obtenu. La taille du rayon extérieur n’a aucune influence sur le mode localisé. alors que la valeur du module de second gradient pour les essais 16 et 17 paraît plus intéressant avec les tailles des éléments choisis

### 6.5.2 Les calculs effectués à l’aide de tirage aléatoire

Nous avons réalisé des simulations numériques en effectuant une initialisation aléatoire.

En calcul usuelle on suppose un pas de temps pour différentes valeurs de la pression. Le début de calcul est effectué en considérant que le champ des vitesses obtenues à la fin du pas est le même pour début du pas suivant. Des calculs itératifs permettent de résoudre les équations non linéaire sur un pas de temps (l’algorithme 3 dans le chapitre 4). Ici au contraire pour un pas de temps donné, on effectue une initialisation aléatoire n’ayant pas de relation avec le pas précédent, cette procédure peut permettre de converger vers une solution localisée. En générale, la convergence du pas de tirage aléatoire nécessite un nombre d’itération assez grand, c’est le cas de nos simulations

effectuées avec le tirage aléatoires (figure 6.12).

Dans l'essai 1, le tirage aléatoire a été effectué au moment où la septième couche des éléments autour du puits avait un comportement élasto-plastique (le tableau 6.2). La figure 6.8 montre les déformations plastiques à la fin du pas de tirage à 58% de creusement, dont 12 bandes sont produites autour du parois. 4 bandes sont normales à la surface des parois alors que les 8 bandes sont obliques dans un sens inverse à celle des aiguilles. La figure (6.9) montre l'apparition d'une solution localisée sur ce pas de tirage. L'incrément des déformations plastiques sur le pas de tirage aléatoire sont présentées. La figure (6.10) présente les points qui sont en charge par des carrés situés dans l'endroit de chaque point de Gauss. Le mode localisé peut être estimé en regardant la figure (6.10) et les points qui chargent et qui déchargent.

Ensuite, le calcul après le tirage a été effectué avec un chargement automatique, le calcul n'a pas pu converger lorsqu'il a atteint 69% du creusement, la figure (6.11) présente la fin de calcul. Il s'agit des déformations déviatoriques à la fin du pas, une solution composée de 12 bandes en forme de spirale est obtenue. Cette solution est analogue au résultat obtenu par Van den Hoek [100](figure 6.1)

Une autre solution a été obtenue à l'instant 58% et pour les mêmes conditions aux limites (essai 9 du tableau 6.2). La fin de tirage montre 11 bandes normales à la surface des parois ( figure 6.13), l'incrément des déformations sur le pas de tirage aléatoire est présenté dans la figure (6.14). Si on la compare avec la figure (6.9) de l'essai 1, nous pouvons remarquer que les zones plastiques dans le mode localisé de l'essai 9 ( $54010^{-04}$  dans la figure 6.13) ont un niveau de valeurs des déformations supérieures à celle de l'essai 1 ( $48010^{-04}$  dans la figure 6.8).

La propagation de la bande sur un élément est plus important que celle de l'essai 1, ceci explique pourquoi le pas de tirage aléatoire de l'essai 9 a nécessité un nombre d'itération (73 itérations) plus important que celui de l'essai 1 (61 itérations) (figures 6.17, 6.12).

Dans ces deux figures, nous présentons les profils de convergences des deux essais de tirage réalisés au même moment. On aperçoit que pour les premières itérations l'erreur est relativement grande, le calcul garde cette valeur de l'erreur pendant quelque itération pour l'essai 9 alors que le calcul d'essai 1 se progresse vers une petite précision dès la troisième itération. Ensuite les deux courbes (pour les déplacements et les forces ) ont une chute plus brutale avec l'essai 9, ceci s'explique parce que le code s'approche d'une solution localisée. Les deux critères atteignent une bonne précision progressivement. Le calcul s'arrête à une bonne précision  $10^{-7}$  pour les forces et  $10^{-5}$  pour les déplacements. Les critères des convergence des forces gouvernent la fin de calcul dans tous les essais réalisés dans ce chapitre.

Nous avons réalisé la suite de ce calcul avec un chargement manuel dont

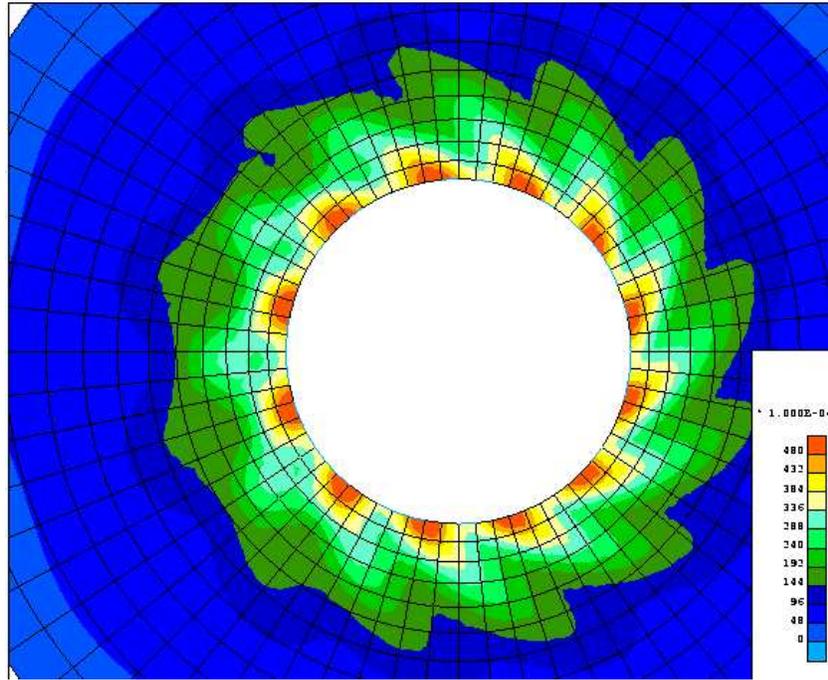


FIG. 6.8 – Essai 1 : carte des déformations plastiques à la fin de pas de tirage aléatoire

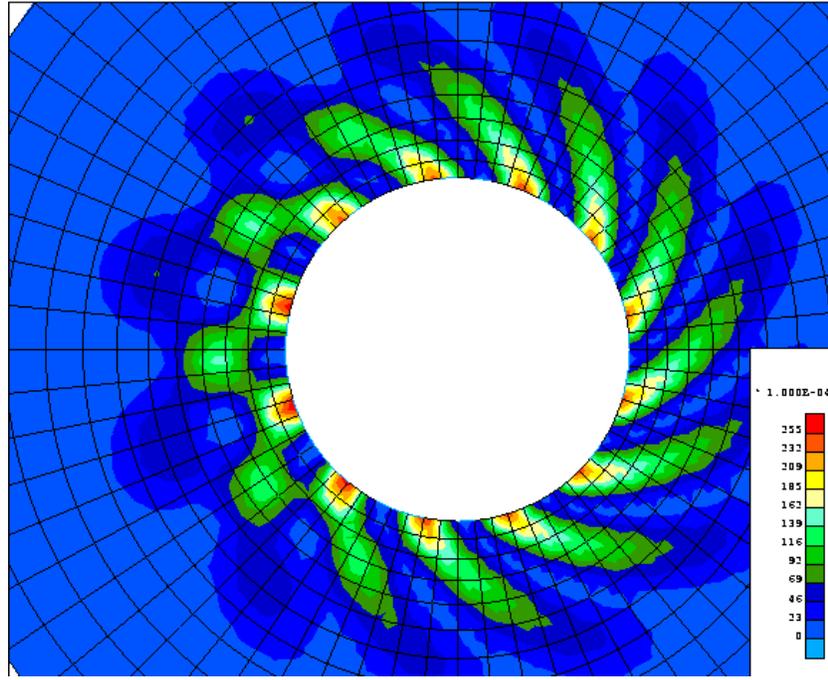


FIG. 6.9 – Essai 1 : l'incrément des déformations plastiques sur le pas de tirage aléatoire

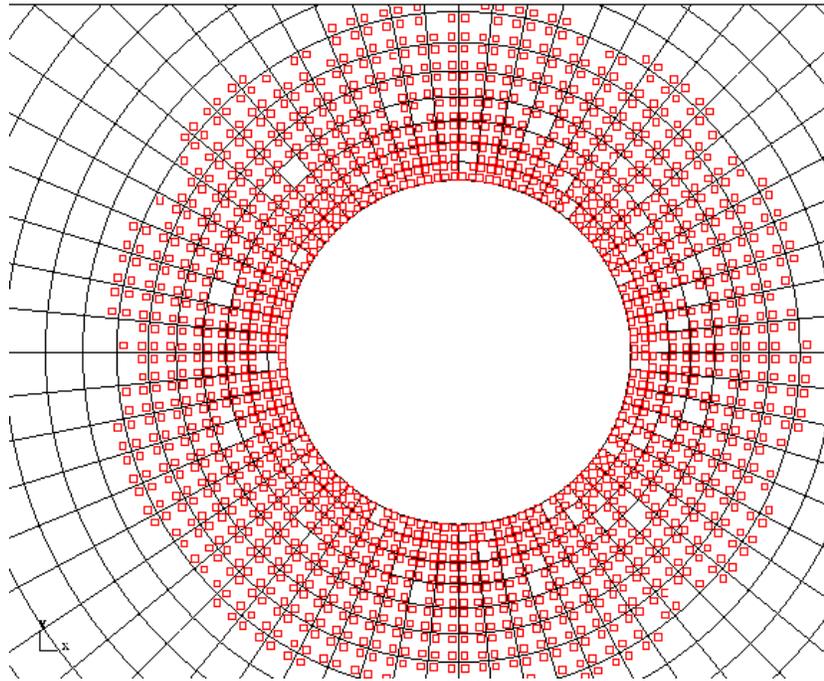


FIG. 6.10 – Essai 1 : la fin de pas de tirage aléatoire, les petits carrés indiquent les points de Gauss qui sont en charge.

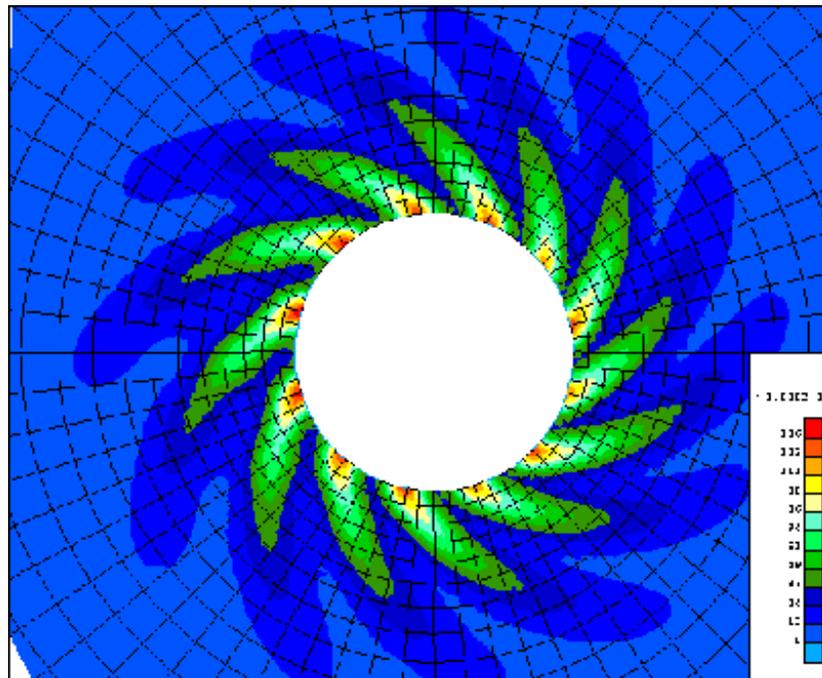


FIG. 6.11 – Essai 1 : les déformations plastiques à la fin de dernier pas convergé

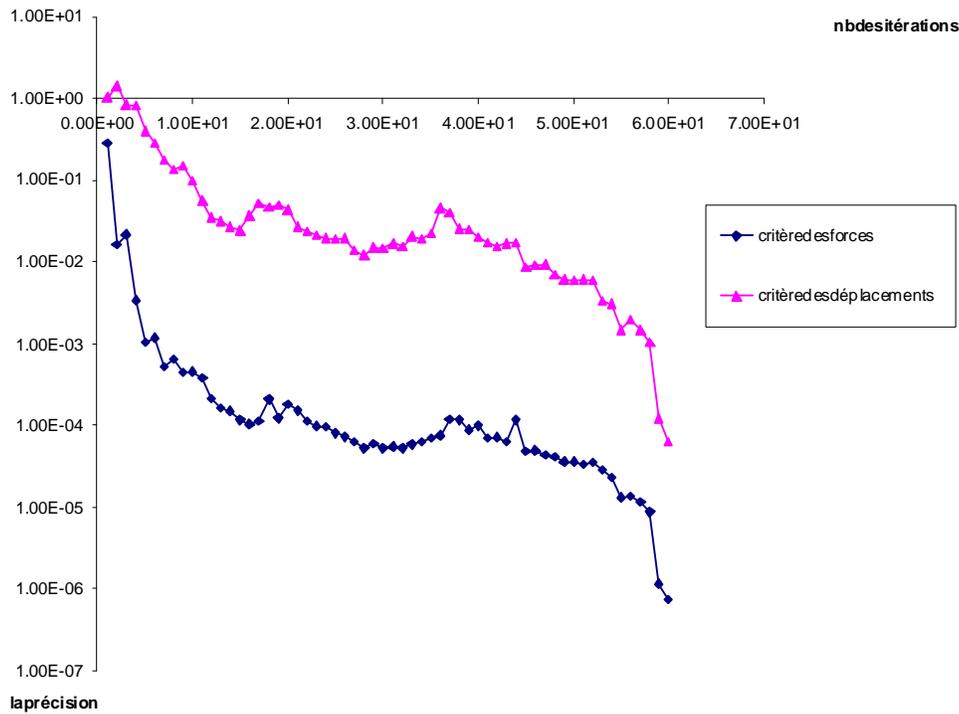


FIG. 6.12 – Essai 1 : la convergence pour le pas de tirage aléatoire.

la taille du pas de calcul dépend de notre choix, le calcul s'est arrêté à un instant 86%. La figure (6.18) montre la réponse d'un point de Gauss situé sur le parois du puit dans une direction horizontale ( $x = R_{int}$ ). Pour certain difficultés liées aux code il était difficile de tracer le comportement d'un points de Gauss en déchargeant.

Le nombre de bandes se réduit à 8 bandes dans la suite du calcul. Ces bandes sont plus larges que celles de pas de tirage, et elles s'éloignent des parois différemment, alors que certaines se fondent avec des bandes voisines.

Dans l'essai 2, nous avons effectué l'initialisation aléatoire à un instant de la diminution de la pression intérieur correspond à 56% et pour les mêmes conditions aux limites. Dans ce cas le tirage aléatoire est effectué lorsque la sixième couche autour de forage est élasto-plastique. Une perte de symétrie est apparue à la fin de pas de tirage et le nombre des bandes s'éleve à 15 bandes. Toutes les bandes sont en forme spirale plus ou moins long tournant dans les deux sens figures (6.19, 6.20, 6.21). Ceci est différent des calculs 1 et 9. Ce calcul s'est arrêté à un instant relativement proche de celui de l'essai 9 ce qui nous permis de tracer les réponses d'un point de Gauss située sur la parois du puit dans une direction horizontale ( $x = R_{int}$ ) (6.18) dont une petite différence entre les deux courbes dans les 8 derniers pas pour l'essai 2. Les 15 bandes apparaissant au moment de tirage aléatoire se réunissent dans 10 bandes relativement larges (figure 6.22). Ce mode localisé est semblable aux modes obtenus avec l'introduction d'imperfection (les essais 16 et 17).

Le problème de non convergence dans ces calculs peut être expliqué par l'his-

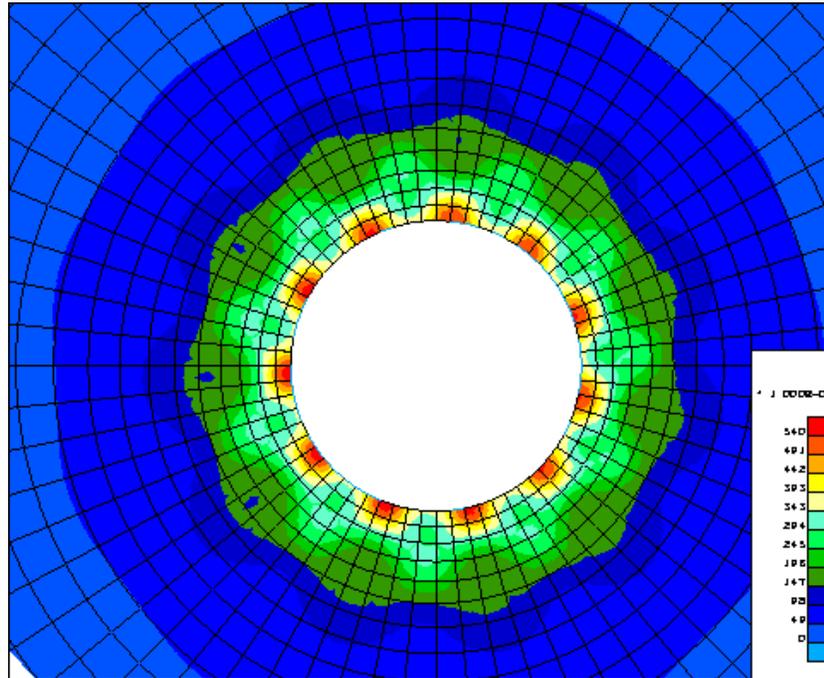


FIG. 6.13 – Essai 9 : carte des déformations plastiques à la fin de pas de tirage aléatoire

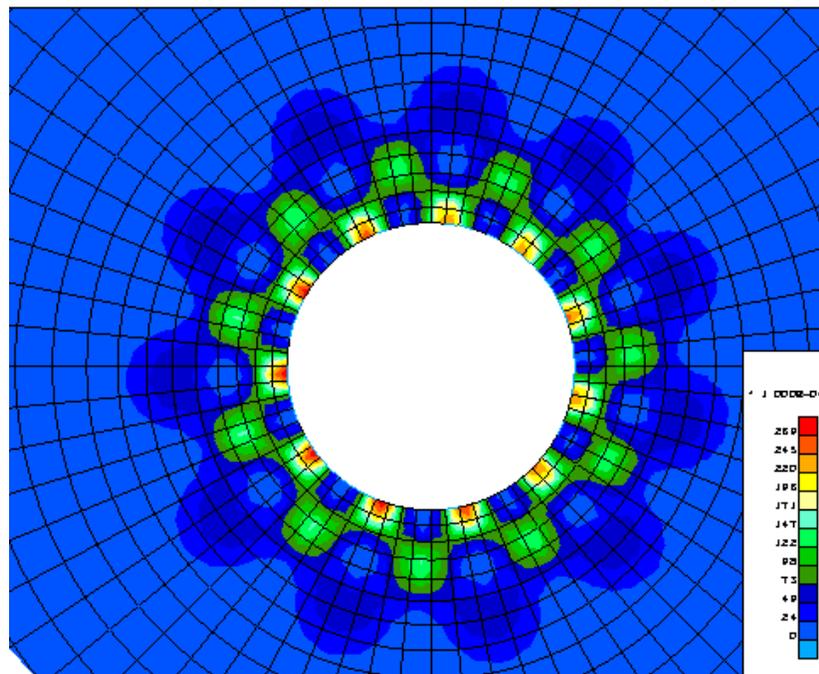


FIG. 6.14 – Essai 9 : l'incrément des déformations plastiques sur le pas de tirage aléatoire

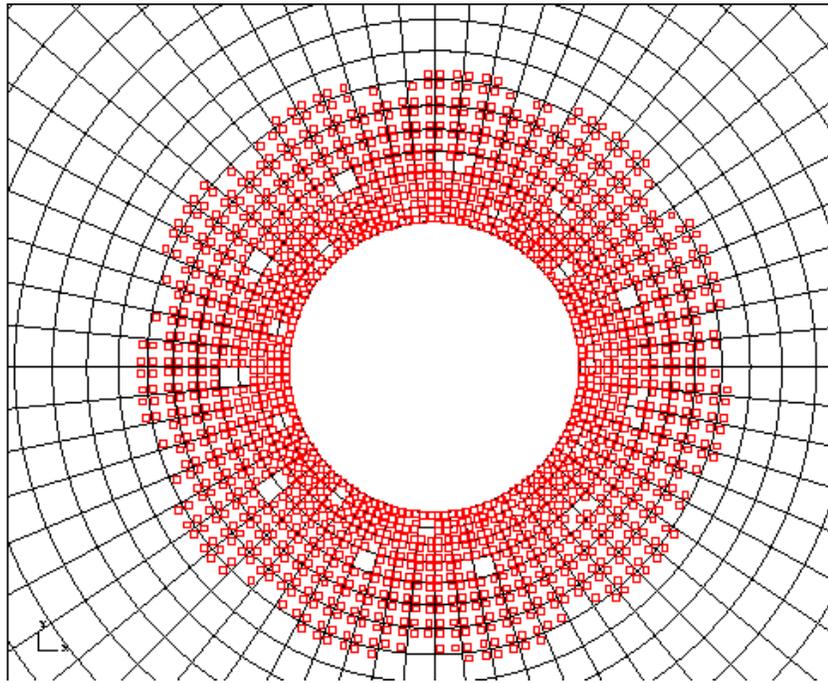


FIG. 6.15 – Essai 9 : la fin de pas de tirage aléatoire, les petits carrés indiquent les points de Gauss qui sont en charge.

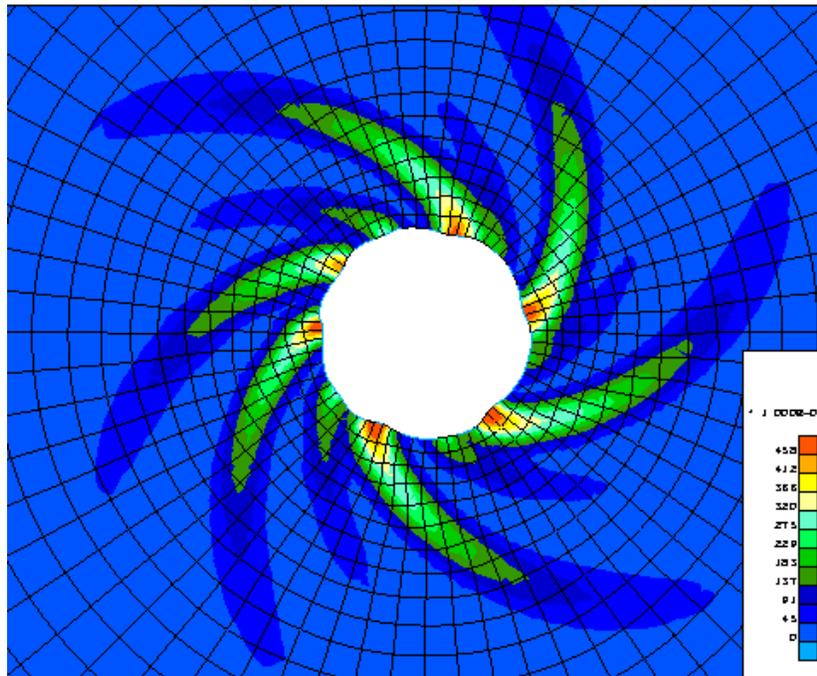


FIG. 6.16 – Essai 9 : les déformations plastiques à la fin de dernier pas convergé

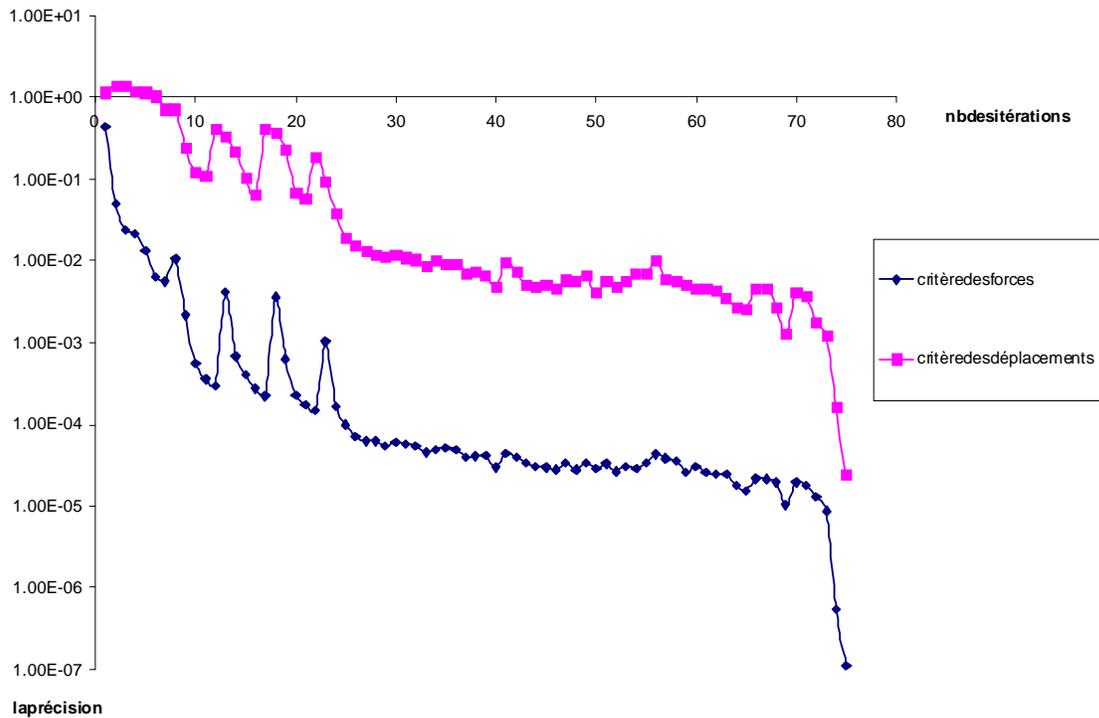


FIG. 6.17 – Essai 9 : la convergence pour le pas de tirage aléatoire.

toire de l'évolution de la taille de la bande de cisaillement (Cf.chapitre ??). Lorsque la réponse globale varie en fonction des déformations croissantes, le module élasto-plastique diminue en valeur absolue, et l'évolution de la bande sera gouverné par cette valeur du module. Il est possible que la méthode de longueur d'arc nous permet de résoudre ce phénomène de non convergence. L'expérience 3 du tableau (6.1) a été réalisée avec une initialisation avec tirage aléatoire à une valeur différente de la diminution de la pression. Un mode localisé semblable à celui obtenu avec l'expérience 9 et de nombre des bandes égales à 12 bandes, ces bandes se réduisent à 6 bandes.

### 6.5.3 Les calculs avec pression de confinement

Dans ce type d'essai, le déclenchement de la localisation ne dépend pas des moyens d'initialisation utilisées précédemment. Nous avons remarqué que le déclenchement d'un mode localisé est effectué au moment où la neuvième couche autour du parois est plastifiée.

Nous avons choisi de présenter les essais 5, 6, et 13.

Dans l'essai 13, à un instant (57%), on remarque l'initialisation de 15 bande autour de parois de forage, ces bandes se propagent dans le massif (les figures 6.23(a)), les douze bandes se propagent en deux directions différentes jusqu'au moment de creusement correspondant à (73%) ensuite certain bandes

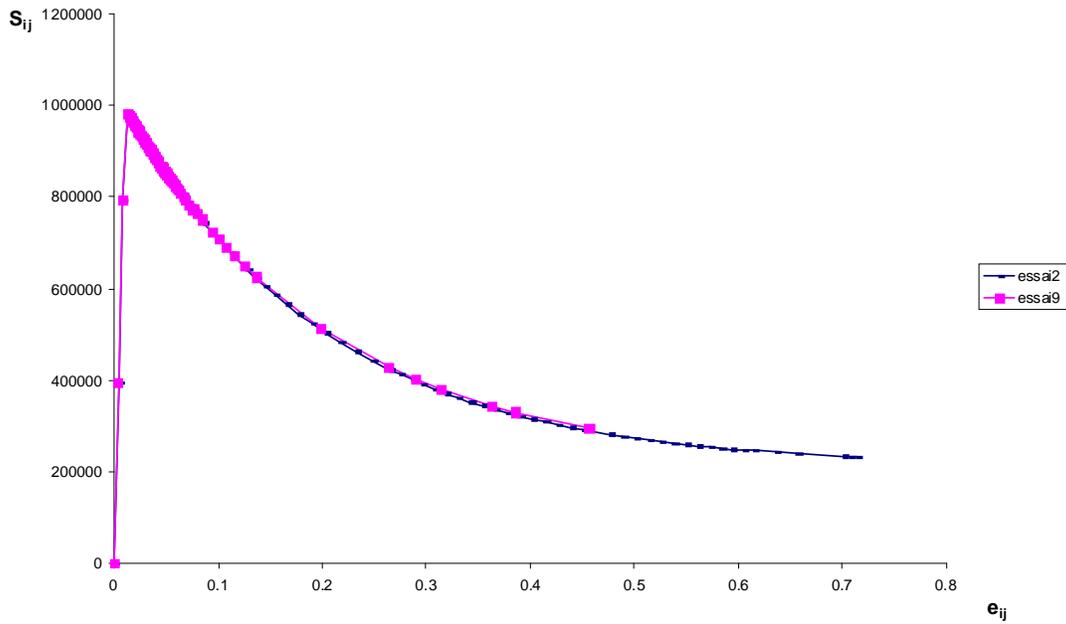


FIG. 6.18 – La réponse pour un point de Gauss de l’élément1, cet élément est situé sur les parois du puits dans la direction horizontale.

se fondent comme dans la figure (6.23(g)). Les 12 bandes se réduisent à 5 bandes, et une perte de symétrie est remarqué jusqu’au moment de la diminution de la pression intérieur égal à (83%). La courbe comportement globale est présenté dans la figure (6.25), l’absence de la bande propagée sur l’élément 1 est lié par un déchargement du point de Gauss. Ce calcul a été réalisé avec un stratégie manuelle.

Nous avons réalisé un calcul avec les mêmes conditions de l’essai 13 en chargement automatique (l’essai 6). Une solution semblable à la solution obtenue pour l’essai 1, la différence avec cette solution vient de la direction des bandes. Nous pouvons constater que la non unicité des solutions peut être déclenché par les tailles des pas de temps. Pour le même problème on a eu deux modes localisés différents. Ce résultat a été déjà aperçue dans l’étude unidimensionnelle (Chapitre ??).

L’essai 5 présente un calcul respectant les conditions de l’essai 13 avec une valeur différente de  $D = 1200$ . La solution est effectuée par D et les bandes sont plus grandes que celle des essais pour  $D=500$ , 8 bandes sont initié sur les parois de forages (figures 6.26, 6.27).

## 6.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons réalisé une simulation numérique d’excavation avec le modèle de second gradient bidimensionnel développée par Matsu-

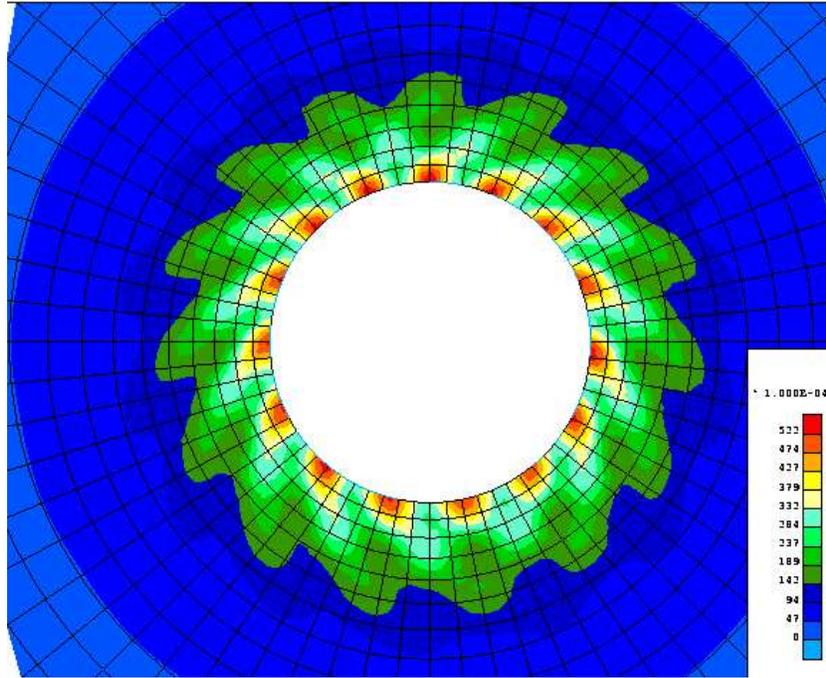


FIG. 6.19 – Essai 2 : carte des déformations plastiques à la fin de pas de tirage aléatoire.

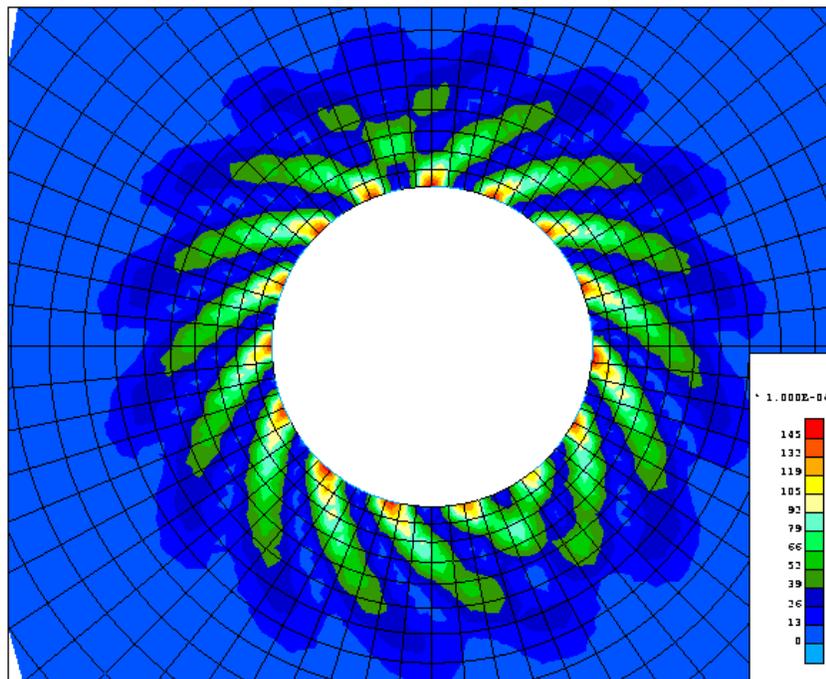


FIG. 6.20 – Essai 2 : l'incrément des déformations plastiques sur le pas de tirage aléatoire

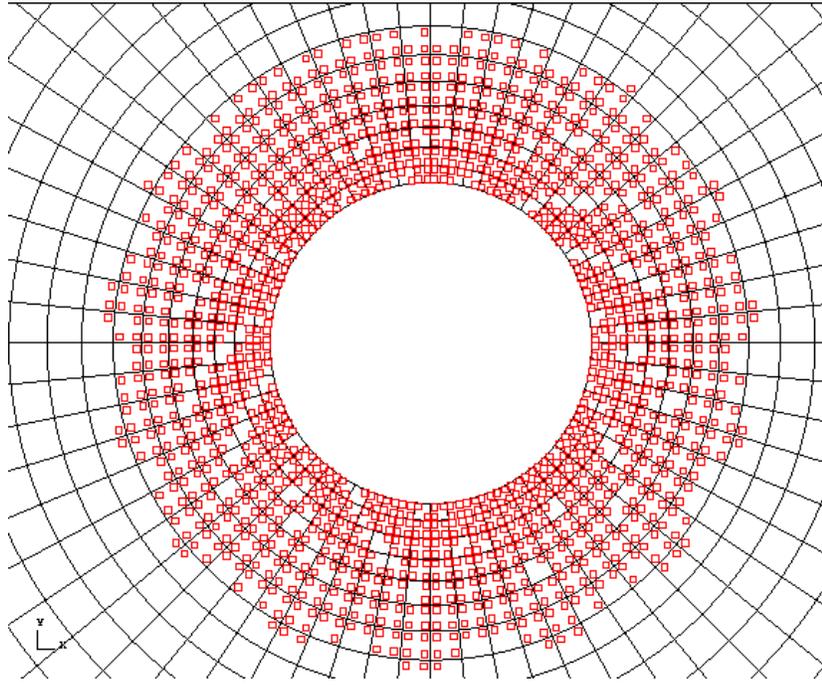


FIG. 6.21 – Essai 2 : la fin de pas de tirage aléatoire, les petits carrés indiquent les points de Gauss qui sont en charge.

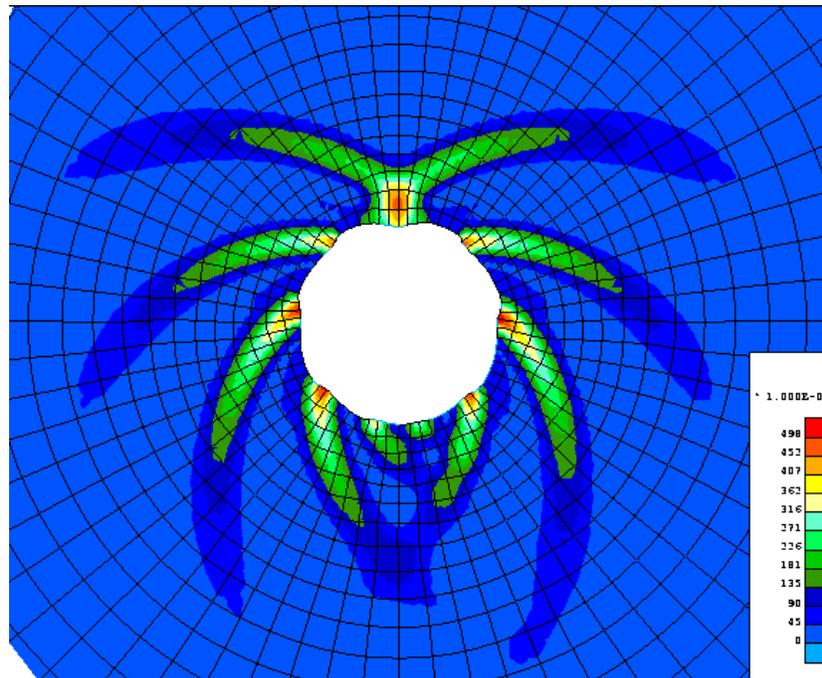


FIG. 6.22 – Essai 2 : les déformations plastiques à la fin de dernier pas convergé

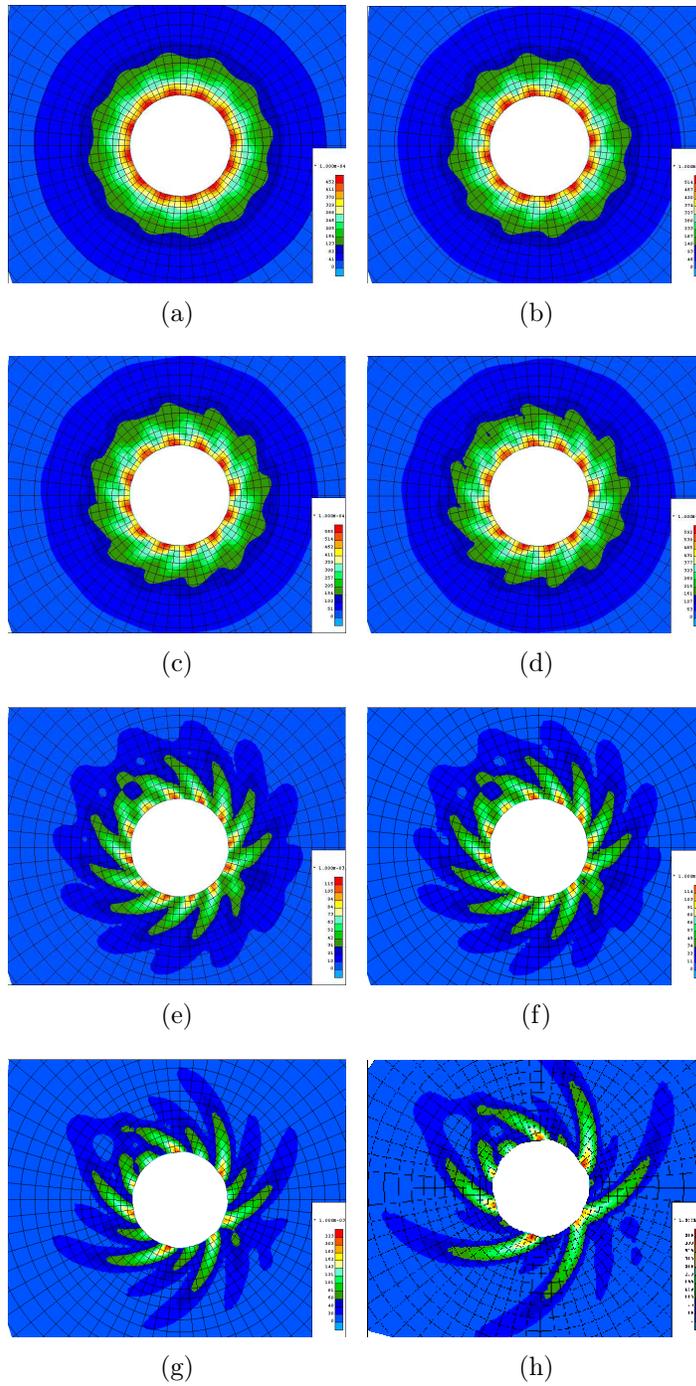


FIG. 6.23 – Essai 13 :l’histoire du creusement en différents instants (a) : 0.57,(b) : 0.59,(c) : 0.6,(d) : 0.61,(e) :0.67,(f) : 0.69,(g) : 0.73,(h) :0.83

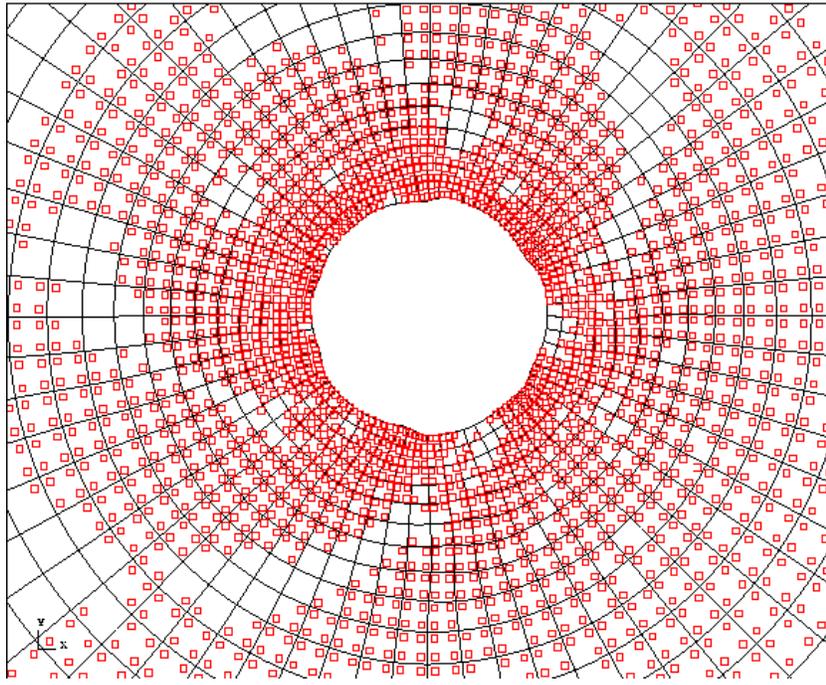


FIG. 6.24 – Essai 13 : les points de Gauss qui chargent en dernier pas convergé.

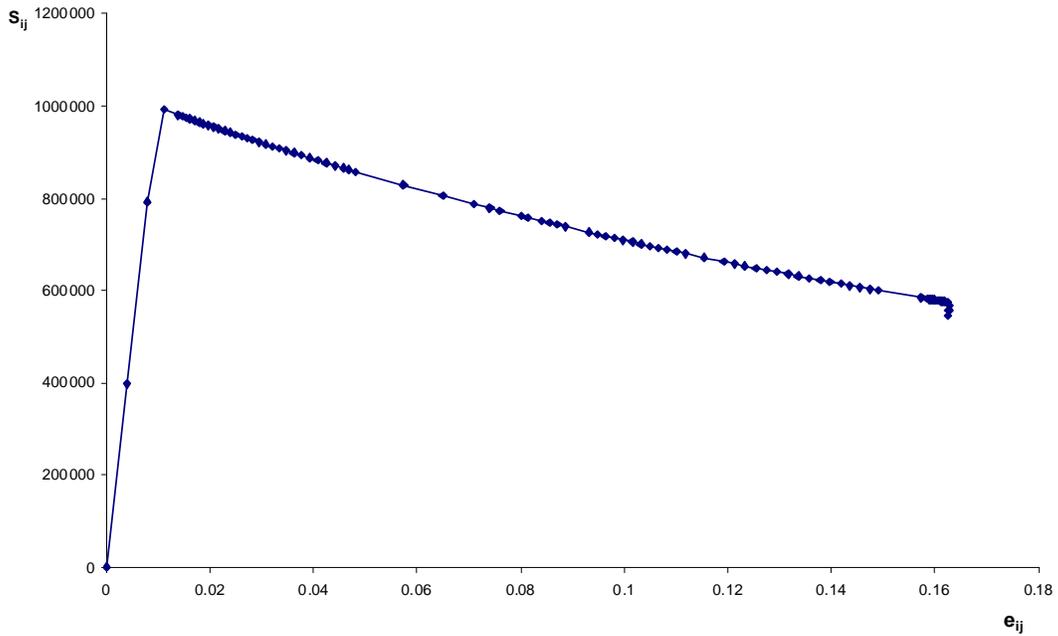


FIG. 6.25 – Essai 13 : La réponse pour un point de Gauss de l'élément 1, cet élément est situé sur les parois du puit dans la direction horizontale.

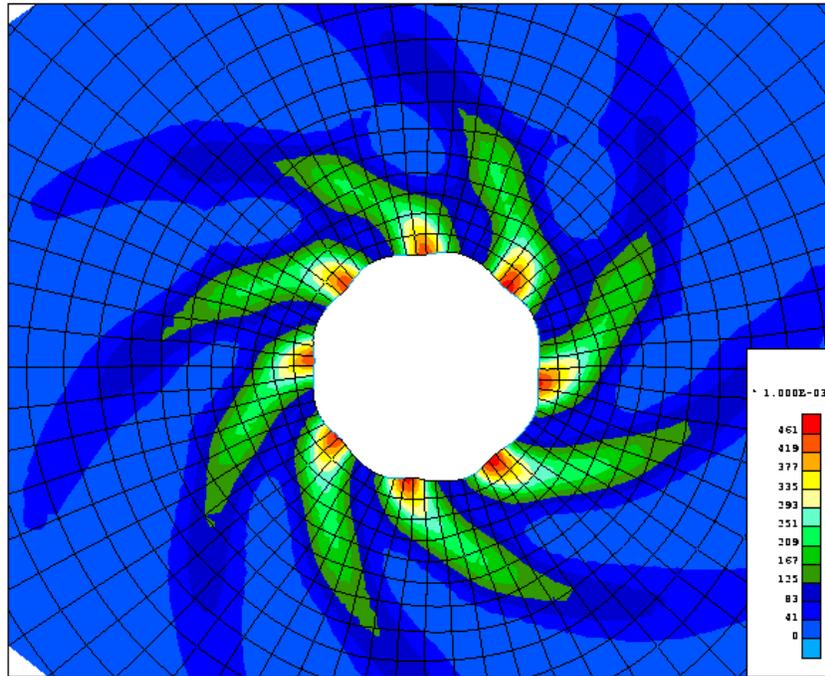


FIG. 6.26 – Les déformations plastiques en dernier pas convergé pour l’essai 5.

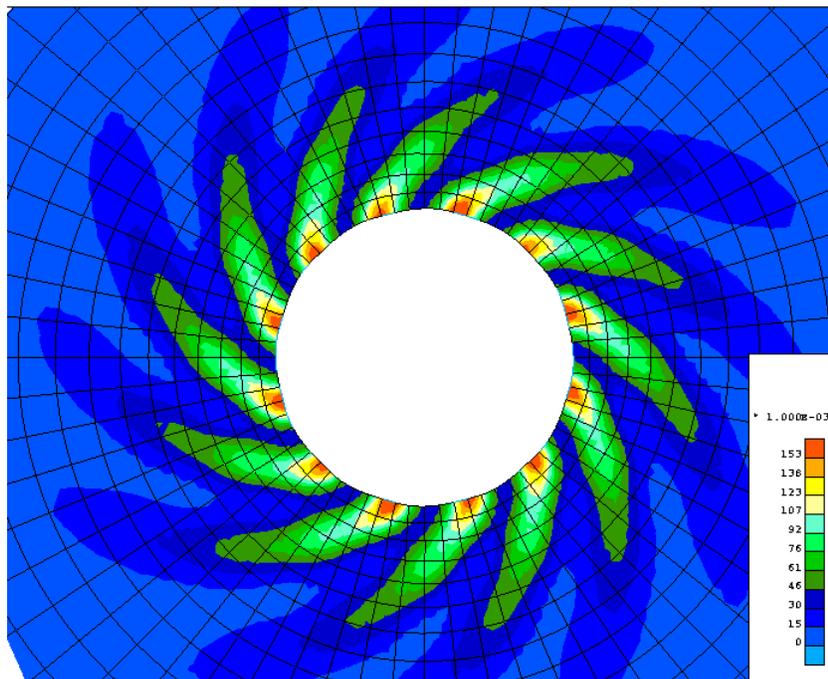


FIG. 6.27 – Les déformations plastiques en dernier pas convergé pour l’essai 6.

shima, Chambon, et Caillerie ([99] et [20]). Le comportement de la partie premier gradient est un comportement quasi-fragile. Nous avons réalisé notre simulation sur un domaine complet du puit pour accéder à tout mode localisé symétrique ou non.

L'objectif de cette étude est d'explorer les modèles de second gradient avec des problèmes différents de celui des essais biaxiaux qui sont souvent utilisés dans le domaine d'expérience numérique.

Le déclenchement des modes localisés a été réalisé à l'aide des deux méthodes pour certains calculs : l'introduction d'imperfection matérielle dans le milieu continu ou à l'aide d'initialisation du problème avec un champ de vitesses aléatoire pour un pas de temps, il a fallu utiliser ces méthodes pour les calculs avec des conditions de déplacements nuls imposés sur les frontières extérieures, alors que les calculs réalisés en imposant des pressions constantes sur les frontières extérieures ont localisé spontanément.

Les résultats obtenus ont illustré la non unicité des solutions. Différents modes localisés ont été obtenus. Ils sont analogues aux modes de rupture observés par les expérimentateurs (les figures 6.1, et 6.3).

Dans ces calculs on a pu trouver que l'évolution de la largeur de la bande est qualitativement semblable à celle du problème de cisaillement unidimensionnel (Cf.??). Ce phénomène s'est produit dans certains modes localisés obtenus dont le nombre des bandes s'est réduit au cours du chargement, ce phénomène a été suivi en traçant le comportement d'un point de Gauss qui décharge après un chargement élasto-plastique. Néanmoins la nature du problème induit par la croissance des déformations impose une évolution de cette largeur de la bande, ce qui peut être une raison pour laquelle le code ne pouvait pas converger jusqu'à la fin de creusement.

Donc il devient nécessaire d'utiliser une méthode de longueur d'arc et de permettre ainsi de pouvoir passer tout comportement possible (snap back).



# Chapitre 7

## Conclusion Générale et perspective

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à approfondir les études de la localisation de la déformation avec le modèle de second gradient.

Deux aspects ont été traités :

- l'évolution de taille de la bande de cisaillement.
- la perte d'unicité des solutions dans un problème du milieu continu différent de celui des essais biaxiaux.

Dans un premier temps, nous avons traité le premier point. Nous avons réalisé une analyse du problème de cisaillement unidimensionnel avec le mécanique des milieux continus classiques (chapitre ??). Le comportement du milieu a été supposé quasi-fragile élasto-plastique. Cette étude a montré que la taille de la bande est nécessairement fonction décroissante de temps.

Nous avons discuté ce problème avec le modèle du second gradient unidimensionnel.

Néanmoins pour pouvoir suivre cet évolution il a fallu permettre à la bande d'évoluer sans conditions restreindras liées aux conditions aux limites supposée et de permettre de passer un comportement de snap back. Il était donc nécessaire d'implémenter la méthode de longueur d'arc (chapitre 4). L'analyse numérique de cette méthode et les modifications apportées au code d'éléments finis ont été présenté dans le cas général et particularisé pour un modèle de second gradient unidimensionnel.

Nous avons implémenté cette méthode dans le code aux éléments finis unidimensionnels développés par El Hassan (Cf.4). Les résultats obtenu ont été assez satisfaisants, le comportement de snap back a été obtenus avec différents modes localisés, l'évolution de la taille de la bande a été suivi. La relation entre la taille des zones localisée et le module radoucissant a été similaire à celle obtenue analytiquement (Cf. la figure 5.23).

Même si cette étude a été réalisée dans un milieu unidimensionnel, elle donne un aspect général que la taille de la zone localisée peut être pilotée par le modèle de second gradient quelque soit le modèle du comportement choisi. Les modèles de second gradient paraissent susceptible d'avoir assez de souplesse pour faire varier la largeur de la bande.

Ce domaine de recherche est assez large et il nécessite encore beaucoup plus d'expériences numériques.

La deuxième partie de ce mémoire était consacrée à une simulation numérique d'excavation avec un modèle de comportement quasi-fragile.

Nous avons réalisé la simulation sur un puits complet avec le modèle de second gradient bidimensionnel développé par Matsushima ([60] et [61]) en utilisant le code aux éléments finis Lagamine. Le modèle a été introduit dans le code par Bésuelle [4].

Les résultats obtenus ont été assez satisfaisants et peuvent être résumés dans les points suivants :

- la non unicité des solutions, dont différents modes localisés ont été obtenus, ils sont analogue à la rupture des puits observés dans les laboratoires.
- l'indépendance des modes localisés par rapport aux méthodes numériques utilisés dans le code pour initialiser le déclenchement de la localisation.
- l'indépendance des solutions obtenues par rapport à la taille d'élément ainsi que du rayon extérieur du puits, ces résultats nous ont encouragé à réaliser le maximum des calculs avec un rayon extérieur réduit et ainsi de gagner plus de temps. L'évolution de taille de la bande a été observée dans cette étude, certains modes localisés ont eu tendance à réduire le nombre de bandes pendant le creusement, malheureusement nous n'avons pas réussi à avoir un calcul convergé jusqu'à la fin du creusement. Il semble intéressant d'utiliser à cet effet la méthode de longueur d'arc.

Dans le prolongement de ces résultats beaucoup de travaux sont à envisager. Modéliser les problèmes de mécanique en endommagement sur la partie second gradient, ces travaux sont en cours nous citons entre eux Kotronis et al.[55].

Une deuxième voie concerne le développement et l'étude de problèmes couplés, pour pouvoir modéliser de manière plus réaliste le comportement des géomatériaux, qui sont en général composés d'un squelette solide et d'eau (F.Collin).

Finalement il sera indispensable de continuer à explorer les possibilités des modèles en utilisant systématiquement des méthodes de longueur d'arc, et de pouvoir calibrer des modèles plus qualitatifs qui permettent a fin de réaliser des expériences numériques en comparant avec des mesures des champs réels.

# Bibliographie

- [1] Bažant,Z. (1976) Instability ductibility and size effects in strain softeneing concrete, A.S.C.E. J. Eng. Mech. N102, pp331-334.
- [2] Bazant Z.P and LIN F.-B, (1988), Non local yield limit degradation, Int.J.Num.Mech.Eng, N26, pp1805-1823.
- [3] Bazant Z.P and Pijaudier-Cabot G, (1988), Non local continuum damage, localization instability and convergence, A.S.M.E.J. Appl.Mech. N 55, pp287-293.
- [4] Bésuelle P and Rudnicki.JW, Localization : Shear bands and compaction bands , (aparaitre)
- [5] Bésuelle P, (2003), Implémentation d'un nouveau type d'élément fini dans le code Lagamine pour une classe de lois à longueur interne. rapport d'activité interne.
- [6] Bésuelle P, Chambon R and F.Collin, Swithing mode of deformation in post-localization solutions with a quasi brittle material, en préparation.
- [7] Bigoni D and Hueckel T,(1991), Uniqueness and localization-I associative and non associative elastoplasticity, Int. J. Solids Structures, N28(2), pp197-213.
- [8] Biolzi L and Labuz J.F, (1993), Global instability and bifurvation in Beams composed of rock-like materials, int.J.Solids structures, vol.30, NO3, pp359-370.
- [9] Caillerie D and Chambon R,(1994), Existance and uniqueness theorems for boundary value problems involving CLOE models. localization and Bifurcation Theory for Soil and Rocks, Chambon R, Desrues J. and Vardoulakis I. eds, Balkema, Rotterdam, pp35-40.
- [10] Chambon R and Caillerie D,(1999), Existance and uniqueness theorems for boundary value problems involving incrementally non linear models, Int.J.Solids Structures,N36, pp5089-5099.
- [11] Chambon R, (1986),Bifurcation par localisation en bande de cisaillement, une approche avec des lois incrementalement non linéaires, Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol 5, N 2, PP 277-298.
- [12] Chambon R et Desrues J, (1985) Plastic instability, chapitre Bifurcartion par localisation et non linéarité incrementale : un exemple heuristique d'analyse complète, Presses ENPC Paris, pp 101-119.

- [13] Chambon R, Desrues J, Charlier R, and Hamad W,(1994) CLOE, a new rate type constitutive model for geomaterials : theoretical basis and implementation,Int.J.Numer.Anal.Meth.Geomech, 18(4),pp253-278.
- [14] Chambon R, Desrues J, and Tillard D,(1994), Shear modulus identification using experimental localisation data, In Chambon R et al eds, Balkma, Rotterdam, pp101-112.
- [15] Chambon R, 1989, Une classe de lois de comportement incrémentalement non linéaire pour les sols visqueux- résolution de quelques problèmes de cohérence. CRAS Paris, 308 série II :1571-1576.
- [16] Chambon R, (2002), Small strain vs large strain formulation in computational mechanics, Numerical Modelling in Geomechanics,pages 1037-1049.
- [17] Chambon R, (2001), Méthode des éléments finis non linéaire, cours DEA.
- [18] Chambon R, Caillerie D and EL Hassan N (1998), One-dimensional localisation studied with a second grade model, Eur J.Mech.A solids,vol 337,N 3,637-656.
- [19] Chambon R, Problèmes aux limites pour des modèles de comportement inélastique, le cas de la plasticité. Bifurcation et localisation. Spécificité des géomatériaux, rapport interne.
- [20] Chambon R, Caillerie D, and Matsushima T, (2001), Plastic continuum with microstructure local second gradient theories for geomaterials : localization studies,Int.J.Solids and Structures, Vol , PP01-25.
- [21] Chambon R, Al Holo S and Besuelle P, Shear softening and localisation, modelling of the evolution of the width of the shear zone, à paraître.
- [22] Chen X, C.P.Tan, and Haberfield C.M, (1998), Modelling of the undrained behaviour of wellbores, The Geotechnics of Hard Soils-Soft Rocks, pp483.
- [23] Christian F Niordson, and John W Hutchinson, (2003), On lower order strain gradient plasticity theories, European journal of mechanics, 22, pp771-778.
- [24] Camacho G.T and Ortiz M, (1996), Computational modelling of impact damage in brittle materials, Int.J.Solids and Structures, N33, pp2899-2938
- [25] Charlier R, (1987), Approche unifiée de quelques problèmes non linéaire de mecanique des milieux continus par la méthode des éléments finis,thèse de doctorat.
- [26] Cosserat E, and Cosserat F, Théorie des corps déformables. A.Hermann, Paris, 1909.
- [27] Crisfield M.A, (1983), An arc-length method including line searches and accelerations, international journal for numerical methods in engineering, Vol 19, pp 1269-1289.
- [28] Crochepeyre S, (1998), Contribution à la modélisation numérique et théorique de la localisation et de la post-localisation dans les géomatériaux, thèse.

- [29] Crook.T, Willson.S, Guo Yu.J, and Owen, (2003), Computational modelling of the localized deformation associated with borehole breakout in quasi-brittle materials, *J. P. S. E.*, vol38, pp177-186.
- [30] Darve F, (1984), Rupture d'argiles naturelles par surfaces de cisaillement à l'essai triaxial, *Revue Française de Géotechnique*, vol 23, pp 27-37.
- [31] Dhatt G et Touzot G,(1987), Une présentation de la méthode des éléments finis.
- [32] De Borst R et Muhlhaus H.B, Continuum model for discontinuous media, (1991), *Fracture processes in concrete, rocks and ceramics*, pp601-618.
- [33] De Borst R, (1991), Simulation of strain localization : a reappraisal of the Cosserat continuum, *Engineering computations*, vol 8, pp317-332.
- [34] Desrues J, La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires, (1984), Thèse de Doctorat es Sciences.
- [35] Desrues J et Chambon R, (1984) , "Quelques remarques sur le problème de la localisation en bande de cisaillement", *Mech. Res. Comm.* 11, pp 145-153.
- [36] Desrues J et Chambon R, (1989), Shear band analysis for granular materials ; the question of incremental non linearity. *Ingenieur Archiv*, vol 59, pp 187-196.
- [37] EL Hassan N, Chambon R, and Caillerie D, (1998), One-dimensional localisation studied with a second grade model, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol 17,n 4, pp 637-656.
- [38] EL Hassan N, (1997), Modélisation théorique et numérique de la localisation de la déformation dans les géomatériaux, thèse.
- [39] Eringen A.C,(1972) Non local polar elastic continua, *Int.J.Engng Sci*, vol10, pp1-16.
- [40] Fairhurst C, and Cook NGW, (1966), The phenomenon of rock splitting parallel to the direction of maximum compression in the neighborhood of a surface, In : *Proceeding of 1st Congress International Society For Rock Mechanics*, Lisbon, pp 687-92.
- [41] Germain P, (1973), La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, *Journal de mécanique*, vol 12, N 2.
- [42] Germanovich.L N, Salganik. RL, Dyskin. AV, et Lee.KK, (1994), Mechanisms of brittle fracture of rock with multiple pre-existing cracks in compression, *Pure and applied geophysics (PAGEOPH)*, N143(13), pp117-49.
- [43] Germanovich.L N and Dyskin.A V, (2000), Fracture mechanisms and instability of openings in compression, *In.J.of rock mechanics and mining sciences*, vol 37, pp263-284.
- [44] Hadamard J, (1903), *Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Hermann, Paris.

- [45] Hammad W,(1991), Modélisation non linéaire et étude expérimentale des bandes de cisaillement dans les sables,PHD thesis, UJF Grenoble.
- [46] Hill R,(1978), Advances in Applied Mechanics, Academic Press,New York, N18, pp1-75.
- [47] Hill R and Hutchinson J.W, (1975) Bifurcation phenomena in the plane tension test, J.Mech.Phy.Solids, vol 23, pp 239-264.
- [48] Hill R,(1958), A general theory of uniqueness in elastic-plastic solids, J. Mech.Phys.Solids,N6, pp236-249.
- [49] Huckel T and Maier G,(1977) Incremental boundary value problems in the presence of coupling of elastic and plastic deformations : a rock mechanics oriented theory,Int. J. Solids Structures, N 13, pp1-15.
- [50] Hussein M. Zbib and Elias C. Aifantis, (1988), On the localisation and postlocalization. Behavior of plastic deformation. I.On the initiation of shear bands,Res Mechanica, vol.23,pp261-277.
- [51] Hussein M. Zbib and Elias C. Aifantis, (1988), On the localisation and postlocalization. Behavior of plastic deformation. I.,On the Evolution and thickness of shear bands,Res Mechanica, vol.23,pp279-292.
- [52] Jaeger J.C and Cook N.G.W.,(1979), Fundamentals of Rock Mechanics,3rd Edn, Chpman and Hall, London, pp593
- [53] Jirasek M, (2002), Computational resolution of strong discontinuities, Fifth World Congress on Comutational Mechanics, (2002)Vienna, Austria.
- [54] Jirasek M, (2002), Numerical modeling of strong discontinuities, numerical modelling in geomechanics, n6,pp1133-1146.
- [55] Kotronis P. Chambon R. Mazars J and Collin F, (2005), Local second gradient models and damage mechanics : application to concrete, 11th International conference on fracture, Turin, Italy, March,pp20-25.
- [56] Kroner E,(1967), Elasticity theory with long range cohesive forces, Int.J.Solids Structures, vol 3, pp731-742.
- [57] Krumhansl J.A,(1968), Some consideration of the relation between solid state physics and generalized continuum mechanics, mechanics of Generalized Continua, E Kroner eds, Springer-Verlag, berlin, pp198-311.
- [58] Kuczynski et Marciniak, (1967), Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal,Int.J.Mech.Sci,Vol 9, PP 609-620.
- [59] Labuz J.F and Biolzi L, (1991), Class I vs class II stability : A demonstration of Effect, Int.J.Rock Mech.Min.Sci.and Geomech.Abstr, Vol 28,no 2/3, pp 199-205.
- [60] Matsushima T,Chambon R, et Caillerie.D, (1998), 2-D Large strain second grade model with non-conforming elements, Internal report.
- [61] Matsushima T,Chambon R, et Caillerie.D, (2002), Large strain finite element analysis of a local second gradient model application to localization,Int.J.numer.meth.engng,vol54,pp499-521.

- [62] Matsushima T, Tsubokawa Y, Saomoto H and Yamada Y, Observation of grain rotation inside granular assembly during shear deformation, 16th ASCE Engineering Mechanics Conference, July 16-18, 2003, University of Washington, Seattle.
- [63] Melenk J.M, Babuska I, (1996), The partition of unity finite element method : Basic theory and application, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 39, pp289-314.
- [64] Mindlin R.D, (1963), Influence of couple-stress concentration, Exp.Mech, Vol 3, PP 1-7.
- [65] Mindlin R.D, (1964), Micro-structure in linear elasticity, Arch.Ration.Mech.Anal, Vol 16, pp 51-78.
- [66] Mindlin R.D, (1965) Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, Int.J.Solids Structure, Vol 1, pp 417-738.
- [67] Mokni M, (1992), Relation entre déformation en masse et déformation localisé dans les matériaux granulaire.
- [68] Moullet J.C and Chambon R, (2002), Bifurcation analysis for boundary value problems involving classical and second gradient models, In NUMOG VIII, Int.Symp.on Numerical Models in Geomechanics, Rome, pp 171-177. ed Balkema, Rotterdam.
- [69] Moullet J.C, (2003), Etude numérique de la bifurcation et de la localisation à l'aide de modèle de second gradient, thèse.
- [70] Mühlhaus H.B and Vardoulakis I, (1987), The thickness of shear bands in granular materials, Geotechnique, vol37, N 3, pp271-283.
- [71] Mühlhaus H.B, (1986), Shear band analysis in granular media by cosserat theory, Archiv, N 56, pp389-399.
- [72] Mühlhaus H.B, (1989), Application of cosserat theory in numerical solutions of limit load problems, Ingenieur Archiv, N 569, pp124-137.
- [73] Needleman A, et X.-P. Xu, Numerical simulation of fast crack growth in brittle solids, (1994), J.Mechanics and physics of solids, N42, pp1397-1434.
- [74] Ord A, Vardoulakis I and Kajewski R, (1991), Shear band formation in Gosford sandstone, Int. J. Rock. Mech.Min. Sci Geomech.Abstr, Vol28, N5, pp397-409.
- [75] Pablo Mira and Manuel Pastor, (2002), Non linear problems : Advanced Techniques, Numerical modelling in geomechanics, pp 1069-1081.
- [76] Papamichos.E, Liolios.P, and van den Hoek.PJ, (2004), Breakout stability experiments and analysis, ARMA American Rock Mechanics Association.
- [77] Papanastasiou.PC and Vardoulakis I, (1992), Numerical treatment of progressive localization in relation to borehole stability, Int.J.Numer.Anal.Methods Geomech, vol16, pp389-424.
- [78] Pandolfi A, Krysl P, and Ortiz M, Finite element simulation of ring expansion and fragmentation : The capturing of length and time scales through cohesive models of fracture, Int.J.Fracture, N95, pp279-297.

- [79] Pariseau W.G., (1979), A finite element approach to strain softening and size effects in rock mechanics, Proc, 3rd Int.Conf. On Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, pp545-558.
- [80] Paterson M.S., (1978), Experimental rock deformation : the brittle field, Springer-Verlag, Berlin, pp254.
- [81] Pijaudier-Cabot G and Bazant Z.P,(1987), Non local damage theory, A.s.C.E.J.Engeg Mech, N 113, pp1512-1533.
- [82] Pijaudier-Cabot G and Benallal A,(1993),Strain localization and bifurcation in non local continuum, Int.J.Solids Structures, N13,pp 1761-1775.
- [83] Raniecki B, (1979), Uniqueness criteria in solids with non associated plastic flow law at finite deformation, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Tech, N 27, pp391-399.
- [84] Raniecki B and Bruhns O.T,(1981), Bounds to bifurcation stresses in solids with non associated plastic flow rule at finite strain, J.Mech.Phys.Solids, N29, pp153-172.
- [85] Read H.E and Hegemier G.A, (1984), Strain softening of rock, soil and concrete : a review article, Mech.Mater. 3, pp271-294.
- [86] Rice J.R, (1973), Symposium on Plasticity in Soil Mechanics, chapter The Initiation and growth of Shear Bands, pp 263-278.
- [87] Rice J.R, (1973), The initiation and growth of shear bands. Symposium on plasticity in soil mechanics.
- [88] Rice J.R, (1976), Theoretical and Applied Mechanics, chapter The Localization of Plastic Deformation, North-Holland Publishing Company, pp207-220.
- [89] Rice J.R, (1976), The localization of plastic deformation, International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, W.D.Koiter eds, North Holland Publishing Comp.
- [90] Rudnicki and Rice, (1975), Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials,JMPS, vol 23, pp 371-394.
- [91] Rice J.R and Rudnicki J.W, (1980), A note on some features on the theory of localization of deformation. Int.J.Solids Structures, N16, pp597-605.
- [92] Riks E, (1979), An approche to the solution of snapping and buckling problems, international journal for Solids Structures, vol 15, pp529-551.
- [93] Roger V, (2000), Etude expérimentale et théorique de la localisation des déformations dans les matériaux granulaires en condition isochore.
- [94] Santarelli F.J et Brown.E.T, (1989), Failure of three sedimentary rocks in triaxial and hollow cylinder compression tests,Int.J.Rock.Mech.Min.Sci and Geomech,vol26,pp401-413.
- [95] Schreier H. L., and Chen Z., (1986) One dimensional softening with localization, A.S.M.E. J. App. Mech., N53, pp791-797.

- [96] Shu J.Y, King W.E, et Fleck N.A, (1999), Finite elements for materials with strain gradient effects, International journal for numerical methods in engineering, vol 44, pp 373-391.
- [97] Simo J.C and Taylor R.L, (1985), Tangent operators for elasto-plasticity, Comp.Meth.in App.Mech.Engng, N48, pp 101-118.
- [98] Truesdel C and Noll W, (1965), The non linear field theories of mechanics, Encyclopaedia of physics, Springer, Berlin.
- [99] Matsushima T, Chambon R, Caillerie D,(1998), 2D Large strain second grade model with non-conforming elements, rapport interne.
- [100] Van den Hoek P.J, (2001), Prediction of different type of cavity failure using bifurcation theory, In : Tinucci, J.P, Heasley, K.A. (Eds), Rock Mechanics in the National Interest. Swets and Zeitlinger, Lisse, pp 45-52.
- [101] Vardoulakis I, (1981), Bifurcation analysis of the plane rectilinear deformation on dry sample, In.J.Solids Structur, vol 17, pp1085-1101.
- [102] Vardoulakis I, Sulem J, and Guenot, (1988),Borhole instabilities as bifurcation phenomena, Int.J.Rock Mech.Min.Sci.Geomech.Abstr, 25(3), pp159-170.
- [103] Vardoulakis I and Sulem J,(1990), Bifurcation analysis of triaxial test on rocks specimens,Acta Mechanica, N83, pp195-212.
- [104] Vardoulakis I and Sulem J,(1993), Comprehensive Rock Mechanics, chapter Application of bifurcation theory to rock mechanics problems.
- [105] Vardoulakis I and Sulem J, Bifurcation analysis in geomchanics.
- [106] Vigiani G, (19), Instability phenomena and propagation of discontinuities in stiff clays,
- [107] Wempner G.A, (1971), Discrete approximation related to non-linear theories of solids,Int.J.Solids Struct,vol 13,pp1581-1599.
- [108] Zervos A, Papanastasiou P, et Vardoulakis I, (2001), Modelling of localisation and scale effect in thick-walled cylinders with gradient elastoplasticity, Int.J.Solids Struct,vol38,pp5081-5095.
- [109] Zervos A, Papanastasiou P, et Vardoulakis.I, (2001), Afinite element displacement formulation for gradient elastoplasticity, Int.J.for numerical methods in engineering,vol50,pp1369-1388.
- [110] Zervos A, Papanastasiou P, et Vardoulakis.I, (2000), Localisation of deformation in hollow cylinders based on gradient elastoplasticity, Int.J.for numerical methods in engineering,