HAL open science

Contribution à l'étude des solutions périodiques et des centres isochrones des systèmes d'équations différentielles ordinaires plans

Islam Boussaada

▶ To cite this version:

Islam Boussaada. Contribution à l'étude des solutions périodiques et des centres isochrones des systèmes d'équations différentielles ordinaires plans. Mathématiques [math]. Université de Rouen, 2008. Français. NNT : . tel-00348281v1

HAL Id: tel-00348281

https://theses.hal.science/tel-00348281v1

Submitted on 18 Dec 2008 (v1), last revised 20 Dec 2008 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Rouen

présentée par

Islam BOUSSAADA

Discipline	:	Mathématiques
Spécialité	:	Equations différentielles ordinaires

Contribution à l'étude des solutions périodiques et des centres isochrones des systèmes d'équations différentielles ordinaires plans

Date de soutenance : 9 décembre 2008

Composition du Jury

Président	:	R. FERNANDEZ	Professeur, Université de Rouen
Rapporteurs	:	C. CHRISTOPHER	Professeur, University of Plymouth (GB)
		I. A. GARCIA	Professeur, Universitat de Lleida (Espagne)
		E. VOLOKITIN	Directeur de Recherches, Institut Sobolev, Novosibirsk (Russie)
Examinateurs	:	G. DUCHAMP	Professeur, Université Paris 13
		J. MOULIN-OLLAGNIER	Professeur, Université Paris 12
Directeurs de Thèse	:	A. R. CHOUIKHA	Maitre de Conférence, Université Paris 13
		J-M. STRELCYN	Professeur, Université de Rouen

Thèse préparée à l'Université de Rouen

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, UMR-CNRS 6085

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes deux co-directeurs de thèse, Monsieur A. Raouf Chouikha, Maître de Conférence à l'Université Paris 13, et Monsieur Jean Marie Strelcyn, Professeur à l'Université de Rouen, grâce auxquels j'ai pu devenir un ATER à l'Université de Rouen ce qui m'a permis d'écrire cette thèse dans de très bonnes conditions.

Monsieur Chouikha m'a introduit aux thèmes traités dans cette thèse et m'a expliqué en détails les sujets et les problèmes sous-jacents. Monsieur Strelcyn, de sa main de fer m'a conduit à la soutenance en m'aidant de manière très substantielle. Qu'ils soient tous les deux très chaleureusement remerciés pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Deux autres personnes ; Madame Magali Bardet, Maître de Conférence à l'Université de Rouen, et Monsieur Andrzej J. Maciejewski, Professeur à l'Université de Zielona Gòra (Pologne), ont aussi joué un rôle dans la préparation de cette thèse. Je les remercie très sincèrement tous les deux.

Mes remerciements très sincères vont aussi à Monsieur Colin Christopher, Professeur à l'Université de Plymouth (GB), à Monsieur Isaac A. Garcia, Professeur à l'Université de Lleida (Espagne), et Monsieur Evgenï Volokitin, Directeur de recherche à l'Institut Sobolev à Novosibirsk (Russie), qui ont bien voulu rapporter sur cette thèse.

Monsieur Gérard Duchamp, Professeur à l'Université Paris 13 et Monsieur Jean Moulin-Ollagnier, Professeur à l'Université Paris 12 ont accepté d'être des examinateurs. Je les remercie très chaleureusement pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant ce fardeau.

Je tiens aussi à remercier beaucoup Monsieur Roberto Fernandez, Professeur à l'Université de Rouen, qui a bien voulu assurer la présidence de ce Jury.

J'ai beaucoup appris de l'atelier des doctorants autant sur le plan mathématiques que sur la façon de communiquer. Je remercie ses organisateurs : Monsieur Claude Dellacherie, Directeur de recherche CNRS à l'Université de Rouen, Madame Elise Janvresse, Chargée de recherche CNRS à l'Université de Rouen, et Monsieur Thierry de La Rue, Chargé de

recherche CNRS à l'Université de Rouen. Des remerciements particuliers à Claude Dellacherie pour sa disponibilité à écouter les doctorants ainsi que pour ses conseils et remarques qui m'ont toujours aidés.

Mes remerciements vont aussi à la direction du laboratoire de mathématiques Raphaël Salem (LMRS) : Monsieur Thierry de La Rue et Monsieur Nordine Mir, Professeur à l'Université de Rouen. Ils ont veillé au bon déroulement de la préparation de ma thèse. Je remercie aussi Monsieur Gérard Grancher, Ingénieur de recherche CNRS à l'Université de Rouen pour tous les éclaircissements qu'il m'a apporté sur l'usage des outils informatiques du laboratoire.

Des remerciements chaleureux à Monsieur Paul Raynaud de Fitte, Professeur à l'Université de Rouen, pour ses discussions enrichissantes du point de vue scientifiques ainsi que humaines. Je remercie aussi Madame Patricia Rageul, Professeur Agrégé à l'Université de Rouen pour m'avoir épaulé pour mes enseignements.

Je tiens aussi à remercier tous mes professeurs qui ont contribué dans ma formation ; ceux de l'Université Paris 7 Denis Diderot ainsi que ceux de la faculté des sciences de Bizerte avec une pensée particulière à Monsieur Mohamed Ali Toumi, Monsieur Khaled Bouhalleb et Madame Fatma Magliozzi qui m'ont encouragé à prendre cette voie.

Merci également à Madame Edwige Auvray et Madame Marguerite Losada, secrétaires du LMRS, pour leur présence et leur efficacité administrative. Merci à Madame Isabelle Lamitte qui gère remarquablement la Bibliothèque et qui a toujours toléré la remise des ouvrages avec du retard. Je remercie aussi Monsieur Marc Jolly pour avoir réalisé l'impression de cette thèse ainsi que pour sa générosité.

Bien évidemment, je remercie mes collègues ; doctorants du LMRS, avec qui j'ai passé des moments inoubliables : Aicha, Ali, Editha, Houda, Lahcen, Manel, Nicolas, les deux Olivier, Ouerdia, Sara et Vincent. Un remerciement spécial pour : Olivier B. celui avec qui j'ai partagé le même bureau et les cartons de café, pour Ali avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à apprendre la programmation en Scilab et Maple.

Je dédie cette thèse à ma famille, qui grâce à son amour, m'a permis de dépasser tous les moments difficiles. A mes parents qui m'ont toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et ont toujours cru en ma volonté de réussir. A ma femme Ouerdia et mon fils Rayan pour leur patience, compréhension et encouragement substantiel. A mes frères Issam et Khoubeb ainsi qu'à Radhia Nour et Nassim et bien évidemment et à mon oncle Habib et ma belle famille pour leur soutien indispensable.

Résumé

La première partie, (il s'agit d'un travail publié et écrit en collaboration avec A. Raouf Chouikha) est consacré à la recherche des solutions périodiques de "l'équation de Liénard généralisée". On démontre un théorème qui asure dans certains cas l'existence de telles solutions.

La seconde partie est consacré à la recherche de centres isochrones de systèmes d'équations différentielles ordinaires polynomiaux plans. Grâce à l'usage de C-algorithme, on détermine huit nouveaux cas. On montre aussi l'efficacité de la méthode des formes normales dans de telles recherches, en examinant des systèmes d'ordre 2, 3, 4 et en retrouvant de manière uniforme plusieurs résultats déjà connus. L'usage intensif du calcul formel s'avère indispensable pour l'application avec succés des méthodes utilisées dans ce travail.

Mots clés : Equation de Liénard, perturbations non autonomes, solutions périodiques, systèmes polynomiaux d'EDO plans, centres isochrones, fonction d'Urabe, formes normales, calcul formel.

Abstract

The first part (which is an already published paper, written in collaboration with A. Raouf Chouikha) is devoted to the search of periodic solutions of "generalized Liénard equation". A theorem is proved which insures the existence of such solutions under appropriate assumptions.

The second part is devoted to the search of isochronous centers of the planar polynomial systems of ordinary differential equations. Using C-algorithm we determine eight new cases. We prove also the efficiency of the normal forms method for such investigations ; studying some systems of order 2, 3, 4 and recovering in uniform way some already known results. The intensive use of computer algebra turns to be essential for successful application of the used methods.

Keywords : Liénard equation, non-autonomous perturbations, periodic solutions, polynomial planar systems of ODE, isochronous centers, Urabe function, normal forms, computer algebra.

Table des matières

Introduction **9**

Bibliographie 13

I Existence de solutions périodiques pour l'équation généralisée de Liénard perturbée **15**

Existence of periodic solution for perturbed generalized Lienard equations **17**

II Centres isochrones **27**

1 Isochronicity conditions for some real polynomial systems **29**

1.1 Introduction 30

1.2 Efficient algorithm 32

1.2.1 About isochronous centers 32

1.2.2 Algorithm 34

1.2.3 The choice of an appropriate Gröbner basis 35

1.3 Fourth degree perturbations 39

1.3.1 First family 40

1.3.2 Second family 45

1.4 Fifth degree homogeneous perturbations 47

1.5 The period function for an Abel polynomial system 49

1.5.1 Reduction to Liénard type system 49

1.5.2 Application to Volokitin and Ivanov system 51

Bibliography 57

2 Conditions nécessaires pour l'existence des centres isochrones par la méthode des formes normales 59

2.1 Formes normales 59

2.2 Les centres isochrones des systèmes quadratiques 63

2.3 Perturbations cubiques du centre linéaire 69

2.3.1 Perturbation $a_{1,0,3}$ 71

2.3.2 Perturbation $a_{1,3,0}$ 77

2.3.3 Perturbation $a_{2,0,3}$ 78

2.3.4 Perturbation $a_{1,1,2}$ 78

2.3.5 Perturbation $a_{2,2,1}$ 78

2.3.6 Perturbation $a_{1,0,2}$ 79

2.3.7 Perturbation $a_{1,2,0}$ 80

2.3.8 Perturbation $a_{2,1,1}$ 81

2.4 Perturbation homogène quartique du centre linéaire 83

2.4.1 Le système de Chavarriga, Giné et Garcia 83

2.4.2 Le système d'Abel à nonlinéarité homogène 84

Bibliographie 87

A 91

A.1 Bases de Gröbner et calcul formel 91

A.2 C-Algorithm 92

A.3 Calcul des commutateurs 93

Introduction

Cette thèse se compose de deux parties indépendantes qui concernent les équations différentielles ordinaires dans le champs réel.

La première partie reproduit le travail [2] dont le but est d'étudier les solutions périodiques de certaines perturbations non autonomes de l'équation de Liénard que voici

$$u'' + \varphi(u, u')u' + \psi(u) = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u').$$

La seconde partie est consacrée au problème des centres isochrones de certains systèmes polynômiaux d'équations différentielles plans.

Rappelons qu'un point singulier est un *centre* si, dans un certain voisinage de ce point, toutes les orbites sont fermées. Un centre est *isochrone* si le temps de parcours de ces orbites fermées est toujours le même. Dans ce qui suit, sans le répéter à chaque fois, on s'intéresse exclusivement au point singulier $O = (0, 0)$.

Pour les systèmes qui peuvent se réduire à des systèmes du type Liénard suivant

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y^2 \end{aligned}\right\}.$$

A. R. Chouikha a présenté dans [8] une procédure basé sur le théorème d'Urabe [16], qui donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'origine O soit un centre isochrone. Plus précisement cette procédure conduit à un algorithme appelé dans ce qui suit C-algorithm qui permet d'obtenir des conditions nécessaires. Une fois les centres isochrones possibles dépistés, il reste à montrer qu'ils le sont réellement. Pour cela, en suivant [8] il suffit de trouver explicitement une fonction impaire dite *d'Urabe*. Citons aussi les travaux [6, 7] qui s'y rattachent.

Comme application de cette méthode, dans [8] les centre isochrones de Loud [13] du

système quadratique suivant

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y + a_{1,1,1}xy \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2\end{aligned}\right\}.$$

ont été retrouvés ainsi que tous les centres isochrones du système cubique dépendant de cinq paramètres

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y + bx^2y \\ \dot{y} &= x + a_1x^2 + a_3y^2 + a_4x^3 + a_6xy^2\end{aligned}\right\}$$

Toujours par cette méthode, dans [9] on a déterminé les centres isochrones du système suivant, qui se réduit au système précédent pour $a = 0$,

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y + axy + bx^2y \\ \dot{y} &= x + a_1x^2 + a_3y^2 + a_4x^3 + a_6xy^2\end{aligned}\right\}.$$

Dans le Chapitre 1 nous présentons une version améliorée et complétée de notre travail [1] où nous examinons par la méthode de [8] le point singulier O des trois systèmes suivants :

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y + b_{1,1}yx + b_{2,1}yx^2 + b_{3,1}yx^3 \\ \dot{y} &= x + a_{2,0}x^2 + a_{3,0}x^3 + a_{0,2}y^2 + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{4,0}x^4\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

quand ou bien $b_{1,1} = a_{3,0} = 0$ ou bien $b_{1,1} = b_{2,1} = 0$,

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y + ayx^4 \\ \dot{y} &= x + bx^3y^2 + cx^5\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x(1 + P(y)),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

avec $P(y) = a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + ... + a_ny^n$. Pour $n = 3$ cette famille a été étudiée par Volokitin et Ivanov dans [17].

Pour le système (1) nous avons décelé **huit** cas de centres isochrones nouveaux, ou plutôt qui semblent être nouveaux ; vue l'abondance des travaux concernant les centres isochrones, il est impossible de les examiner tous. Il s'agit des six systèmes 4-7 du Théorème 1.3.2 et des quatre systèmes 4-7 du Théorème 1.3.3 du Chapitre 1 de la Partie 2.

Les cas de centre linéaire perturbé par une nonlinearité homogène que nous avons décélé ont été obtenus dans [5] avec une méthode différente de celle utilisé dans le Chapitre 1 de la Partie 2.

La description de tous les cas où l'origine O est un centre isochrone du système (1) reste pour le moment un problème ouvert.

Dans le cas du système (2) nous avons trouvé deux centres isochrones qui ont été identifiés par une autre méthode dans [15].

Pour le système (3) on démontre entre autres que pour $1 \leq n \leq 10$, l'origine O est un centre isochrone uniquement pour $n = 3$ quand $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 1$; un centre isochrone déjà connu par Volokitin et Ivanov [17]. Pour $n > 10$ la question reste ouverte.

Une fois un centre isochrone identifié, le problème de trouver explicitement le changement de variables qui le linéarise ([14, 11]) se pose. Nous appliquons avec succés la méthode de [11] pour linéariser explicitement un centre qui apparait dans le système (3) pour un polynôme P cubique approprié.

Le but du Chapitre 2 est de montrer sur quelques exemples concrets la puissance de la méthode des formes normales dans le dépistage des centres isochrones. La méthode des formes normales que nous allons utiliser est celle décrite dans la section 3.3 de [12] avec la mise en forme algorithmique de [18, 19].

La méthode des formes normales montre sa puissance en permettant de déceler de manière uniforme plusieurs exemples disparates de centres isochrones potentiels en fournissant les *conditions nécessaires* de leurs existences. Notons que cette méthode peut s'appliquer aussi dans la recherche des centres tout court.

Tout d'abord nous étudions le système quadratique

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,0}x^2 + a_{1,1,1}xy + a_{1,0,2}y^2 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,1,1}xy + a_{2,0,2}y^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Pour ce système W.S. Loud [13] a décrit tous les cas où O est un centre isochrone. A ce sujet voir aussi [6]. En cherchant les conditions nécessaires par la méthode des formes normales, nous identifions tous les cas de Loud, sans pour autant démontrer que dans les cas décelés, O est un centre isochrone. En continuant l'étude des centres isochrones des systèmes cubiques de [8] on a étudié les huit systèmes qui diffèrent du système étudié dans [8] par l'addition d'un monôme supplémentaire de degré 2 ou 3. Cela prolonge l'étude effectuée dans [9].

On peut trouver dans la littérature des systèmes dont le point O est un candidat à être un centre isochrone sans que cela soit démontré. Par exemple dans [3] J. Chavarriga, Giné et Garcia dépistent un système satisfaisant un ensemble de conditions nécessaires obtenues par la méthode du développement de la fonction période dans le cas du centre linéaire perturbé par une nonlinéarité quartique homogène. Moyennant la méthode des formes normales nous arrivons au même résultat. Le développement à des grands ordres de la formes normale associée, ne permet pas d'écarter ce candidat.

Enfin, dans la Section 2.4.2 on démontre que l'origine O est un centre isochrone pour le système (2.42), ce qui semble être nouveau.

En résumant, en tout on a décrit dans cette thèse **huit** centres isochrones qui semblent être nouveaux.

Vu l'ampleur des calculs algébriques nécessaires, l'usage de calcul formel s'impose. Pour mener à bien nos calculs nous avons utilisé MAPLE, SINGULAR, SCILAB ainsi que les différentes implantations liées aux bases de Gröbner tel ques FGb de [10].

Je remercie très sincèrement mes deux directeurs de thèse Monsieur A. Raouf Chouikha et Monsieur Jean-Marie Strelcyn. C'est Monsieur Chouikha qui m'a introduit aux sujets traités dans cette thèse, m'a aidé à me familiariser avec les centres des systèmes polynômiaux et notament aux algorithmes qui permettent de tester l'existence de centres isochrones et c'est Monsieur Strelcyn qui de sa main de fer m'a conduit à la soutenance. En particulier, il n'a pas ménagé d'efforts pour transformer la première version que je lui ai soumis de cette thèse en la version actuelle. Celà a permis entre autre à cette thèse d'aquérir son unité et sa rigueur actuelle.

C'est Monsieur Andrzej J. Maciejewski qui m'a fait découvrir la méthode des formes normales et m'a donné l'idée de l'utiliser dans la recherche des centres isochrones. C'est Madame Magali Bardet qui m'a guidé dans l'usage du calcul formel et des bases de Gröbner. Qu'il soient tous les deux très sincèrement remerciés.

Finalement, je tiens à remercier beaucoup Monsieur Isaac A. Garcia pour ses remarques et critiques dont j'ai taché de tenir compte dans la mesure du possible.

Bibliographie

[1] I. Boussaada Isochronicity conditions for some real polynomial systems,
Preprint : Arxiv 0807.0131, submitted (2008).

[2] I. Boussaada, A. R. Chouikha Existence periodic solution generalized Liénard equation,
Electron J. Diff. Eq. (2006) no. 140, 10p.

[3] J. Chavarriga, J. Giné and I. A. García , Isochronous centers of a linear center perturbed by fourth degree homogeneous polynomial,
Bull. Sci. Math 123 , (1999), 77-99.

[4] J. Chavarriga, J. Giné and I. A. García , Isochronous centers of a linear center perturbed by fifth degree homogeneous polynomials,
J. of Comput. and Appl. Mathematics 126 , (2000), 351-368.

[5] X. Chen, V. G. Romanovski, W. Zhang, Linearizability conditions of time-reversible quartic systems having homogeneous nonlinearities,
Nonlinear Analysis 69, (2008), 1525-1539.

[6] A. R. Chouikha, Monotonicity of the period function for some planar differential systems. Part I : conservative and quadratic systems,
Applicationes Mathematicae, 32 no. 3 (2005), 305-325.

[7] A. R. Chouikha, Monotonicity of the period function for some planar differential systems. Part II : Liénard and related systems,
Applicationes Mathematicae, 32 no. 4 (2005), 405-424.

[8] A. R. Chouikha, Isochronous centers of Lienard type equations and applications,
J. Math. Anal. Appl. 331 (2007), 358-376 .

[9] A. R. Chouikha, V. G. Romanovski, X. Chen Isochronicity of analytic systems via Urabe's criterion,
J. Phys. A, 40 (2007) N : 10 , 2313-2327.

[10] J. C. Faugère, FGb Salsa Software, http ://fgbrs.lip6.fr/salsa/Software/.

[11] I. A. García, S. Maza Linearization of analytic isochronous centers from a given commutator,
J. of Mathematical Analysis and Applications, 339, 1, (2008), 740-745.

[12] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields *Springer*, 2002. xvi+459 pp.

[13] W. S. Loud The behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers,
Contributions to Diff. Eq, 3 (1964) , 21-36.

[14] P. Mardesić, C. Rousseau, B. Toni, Linearization of isochronous Centers,
J. Diff. Eq. 121, p.67-108 (1995).

[15] V. G. Romanovski, X. Chen, X. H. Zhaoping, Linearizability of linear system perturbed by fifth degree homogeneous polynomials,
J. Phys. A, 40, (2007), no. 22, 5905-5919.

[16] M. Urabe, The potential force yielding a periodic motion whose period is an arbitrary continuous function of the amplitude of the velocity,
Arch. Rational Mech. Anal. 11 (1962) 27-33

[17] E. P. Volokitin and V. V. Ivanov, Isochronicity and commutation of polynomial vector fields,
Siberian Math. Journal. 40, p. 23-38, (1999).

[18] P. Yu, Q. Bi Symbolic computation of normal forms for semi-simple case,
J. Comput. Appl. Math. 102, (1999) p. 195-220.

[19] P. Yu, Computation of normal forms via a perturbation technique,
J. Sound Vibration. p.19-38, 211(1998).

Première partie

Existence de solutions périodiques pour l'équation généralisée de Liénard perturbée

Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006(2006), No. 140, pp. 1–10.
ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu
ftp ejde.math.txstate.edu (login: ftp)

EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTION FOR PERTURBED GENERALIZED LIÉNARD EQUATIONS

ISLAM BOUSSAADA, A. RAOUF CHOUIKHA

Abstract. Under conditions of Levinson-Smith type, we prove the existence of a τ-periodic solution for the perturbed generalized Liénard equation

$$u'' + \varphi(u, u')u' + \psi(u) = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u')$$

with periodic forcing term. Also we deduce sufficient condition for existence of a periodic solution for the equation

$$u'' + \sum_{k=0}^{2s+1} p_k(u){u'}^k = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u').$$

Our method can be applied also to the equation

$$u'' + [u^2 + (u + u')^2 - 1]u' + u = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u').$$

The results obtained are illustrated with numerical examples.

1. Introduction

Consider Liénard equation

$$u'' + \varphi(u)u' + \psi(u) = 0$$

where $u' = \frac{du}{dt}$, $u'' = \frac{d^2u}{dt^2}$, φ and ψ are C^1. Studying the existence of periodic solution of period τ_0 has been purpose of many authors: Farkas [3] presents some typical works on this subject, where the Poincaré-Bendixson theory plays a crucial role. In general, a periodic perturbation of the Liénard equation does not possess a periodic solution as described by Moser; see for example [1].

Let us consider the perturbed Liénard equation

$$u'' + \varphi(u)u' + \psi(u) = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u')$$

where ω is a *controllably periodic perturbation* in the Farkas sense; i.e., it is periodic with a period τ which can be choosen appropriately. The existence of a non trivial periodic solution for (2) was studied by Chouikha [1]. Under very mild conditions it is proved that to each small enough amplitude of the perturbation there belongs a one parameter family of periods τ such that the perturbed system has a unique periodic solution with this period.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 34C25.
Key words and phrases. Perturbed systems; Liénard equation; periodic solution.
©2006 Texas State University - San Marcos.
Submitted May 15, 2006. Published November 1, 2006.

Let us consider now the following generalized Liénard equation, which is "a more realistic assumption in modelling many real world phenomena" as stated in [3, page 105]

$$u'' + \varphi(u, u')u' + \psi(u) = 0. \tag{1.1}$$

Where φ and ψ are C^1 and satisfy some assumptions that will be specified below. The leading work of investigation for the existence of periodic solution of generalized Liénard systems was established by Levinson-Smith [4]. Let us define conditions C_{LS}.

Definition. The functions φ and ψ satisfy the condition C_{LS} if: $x\psi(x) > 0$ for $|x| > 0$,

$$\int_0^x \psi(s)ds = \Psi(x) \quad \text{and} \quad \lim_{x\to+\infty} \Psi(x) = +\infty, \quad \varphi(0,0) < 0.$$

Moreover, there exist some numbers $0 < x_0 < x_1$ and $M > 0$ such that:

$$\varphi(x, y) \geq 0 \quad \text{for } |x| \geq x_0,$$
$$\varphi(x, y) \geq -M \quad \text{for } |x| \leq x_0$$
$$x_1 > x_0, \quad \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y(x))dx \geq 10Mx_0$$

for every decreasing function $y(x) > 0$.

Proposition 1.1 (Levinson-Smith [4])**.** *When the functions φ and ψ are of class C^1 and satisfy condition C_{LS} then the generalized Lienard equation* (1.1) *has at least one non-constant τ_0-periodic solution.*

A non trivial solution will be denoted $u_0(t)$, and its period τ_0. This proposition has many improvements (under weaker hypotheses) due to Zheng and Wax Ponzo; see [3], among other authors.

This article is organized as follows: At first, we prove the existence of a periodic solution for the perturbed generalized Liénard equation

$$u'' + \varphi(u, u')u' + \psi(u) = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u'), \tag{1.2}$$

Where $t, \epsilon, \tau \in \mathbb{R}$ are such that $|\tau - \tau_0| < \tau_1 < \tau_0$, $|\epsilon| < \epsilon_0$ with $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$ sufficient small and τ_1 is a fixed real scalar. We will use the Farkas method which was effective for perturbed Liénard equation. In the third section, we will propose a criteria for the existence of periodic solution for

$$u'' + \sum_{k=0}^{2s+1} p_k(u){u'}^k = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u'), \tag{1.3}$$

with $s \in \mathbb{N}$ and p_k are C^1 functions, for all $k \leq 2s + 1$. In the second part of the section, using a result of De Castro [2] we will prove uniqueness of a periodic solution for the equation

$$u'' + [u^2 + (u + u')^2 - 1]u' + u = 0. \tag{1.4}$$

Sufficient condition for the existence of periodic solution to

$$u'' + [u^2 + (u + u')^2 - 1]u' + u = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u'). \tag{1.5}$$

will be found. At the end of the paper, some phase plane examples are given in order to illustrate the above results. In particular, we describe uniqueness of a

solution for equation (1.4) and the existence of a solution of equation (1.5) for $\omega(\frac{t}{\tau}, u, u') = (\sin 2t)\ u'$.

2. Periodic solution of perturbed generalized Lienard equation

In this part of this paper we prove the existence of periodic solution of the perturbed generalized Lienard equation (1.2) such that the unperturbed one (1.1) has at least one periodic solution. The method of proof that we will employ was described in [1, 3].

Consider the equation (1.1) We assume that φ and ψ are C^1 and satisfy C_{LS}. Then by Proposition 1.1 there exists at least a non trivial periodic solution denoted $u_0(t)$.

Let the least positive period of the solution $u_0(t)$ be denoted by τ_0 and U be an open subset of $\mathbb{R}^2$ containing $(0,0)$. These notation will be used in the rest of the paper.

Theorem 2.1. *Let φ and ψ be C^1 and satisfy C_{LS}. Suppose 1 is a simple characteristic multiplier of the variational system associated to (1.1). Then there are two real functions τ, h defined on $U \subset \mathbb{R}^2$ and constants $\tau_1 < \tau_0$ such that the periodic solution $\nu(t, \alpha, a + h(\epsilon, \alpha), \epsilon, \tau(\epsilon, \alpha))$ of the equation*

$$u'' + \varphi(u, u')u' + \psi(u) = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u'),$$

exists for $(\epsilon, \alpha) \in U$, $|\tau - \tau_0| < \tau_1$, $\tau(0,0) = \tau_0$ and $h(0,0) = 0$.

We point out that the characteristic multipliers are the eigenvalues of the characteristic matrix which is the fundamental matrix in the time τ_0.

Proof of Theorem 2.1. Following the method used in [3], we set $x_2 = u$, $x_1 = \frac{du}{dt} = u'$ and note $x = \mathrm{col}(x_1, x_2) = \mathrm{col}(u', u)$. The plane equivalent system of (1.1) is

$$x' = f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1' = -\varphi(x_2, x_1)x_1 - \psi(x_2) \\ x_2' = x_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

with

$$f(x) = \mathrm{col}(-\varphi(x_2, x_1)x_1 - \psi(x_2), x_1).$$

Then the system (2.1) has the periodic solution $q(t)$ with period τ_0. We define

$$q(t) = \mathrm{col}({u_0}'(t), u_0(t))$$

and therefore

$$q'(t) = \mathrm{col}(-\varphi(u_0(t), {u_0}'(t)){u_0}'(t) - \psi(u_0(t)), {u_0}'(t)).$$

The variational system associated with (2.1) is

$$y' = {f_x}'(q(t))y, \tag{2.2}$$

Without loss of generality, we take the initial conditions

$$t = 0, \quad u_0(0) = a < 0 \quad \text{and} \quad u_0'(0) = 0$$

Hence ${f_x}'(q(t))$ is the matrix

$$\begin{pmatrix} -{\varphi'}_{x_1}(u_0(t), {u_0}'(t)){u_0}'(t) - \varphi(u_0(t), {u_0}'(t)) & -{\varphi'}_{x_2}(u_0(t), {u_0}'(t)){u_0}'(t) - \psi'(u_0(t)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notice that $q'(t) = \mathrm{col}(-\varphi(u_0(t), {u_0}'(t)){u_0}'(t) - \psi(u_0(t), {u_0}'(t))$ is the first solution of the variational system. Now we calculate the second one, denoted by $\widehat{y}(t) =$

$\mathrm{col}(\widehat{y}_1(t), \widehat{y}_2(t))$ and linearly independent with $q'(t) = y(t)$, in order to write the fundamental matrix. Consider

$$I(s) = \exp\Big[-\int_0^s (\varphi'_{x_1}(u_0(\rho), u_0{}'(\rho))u_0{}'(\rho) + \varphi(u_0(\rho), u_0{}'(\rho)))d\rho\Big]$$

and

$$\begin{aligned}\pi(t) = -\int_0^t &\big(\varphi(u_0(\rho), u_0{}'(\rho))u_0{}'(\rho) + \psi(u_0(\rho))\big)^{-2}\big(\varphi'_{x_2}(u_0(t), u_0{}'(t))u_0{}'(t)\\ &+ \psi'(u_0(t))\big)I(\rho)d\rho\end{aligned}$$

We then obtain

$$\begin{aligned}\widehat{y}_1(t) &= -[\varphi(u_0(t), u_0{}'(t))u_0{}'(t) + \psi(u_0(t)]\pi(t),\\ \widehat{y}_2(t) &= u_0{}'(t)\pi(t) + \pi'(t)\frac{\varphi(u_0(t), u_0{}'(t))u_0{}'(t) + \psi(u_0(t)}{\varphi'_{x_2}(u_0(t), u_0{}'(t))u_0{}'(t) + \psi'(u_0(t))}\end{aligned}$$

It is known, [1, 3], that the fundamental matrix satisfying $\Phi(0) = Id_2$ is $\Phi(t)$ equals to

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi(u_0(t),u_0{}'(t))u_0{}'(t)+\psi(u_0(t))}{\psi(a)} & \psi(a)\pi(t)[\varphi(u_0(t), u_0{}'(t))u_0{}'(t) + \psi(u_0(t)] \\ -\frac{u_0{}'(t)}{\psi(a)} & -\psi(a)u_0'(t)\pi(t) - \psi(a)\pi'(t)\frac{\varphi(u_0(t),u_0{}'(t))u_0{}'(t)+\psi(u_0(t))}{\varphi'_{x_2}(u_0(t),u_0{}'(t))u_0{}'(t)+\psi'(u_0(t))} \end{pmatrix}$$

Thus,

$$\Phi(\tau_0) = \begin{pmatrix} 1 & \psi(a)^2\pi(\tau_0) \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}.$$

We use the Liouville's formula

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(0)\exp\int_0^t \mathrm{Tr}(f_x{}'(q(\tau)))d\tau.$$

Since $\det(\Phi(0)) = 1$, we deduce the characteristic multipliers associated with (2.2): $\rho_1 = 1$ and $\rho_2 = I(\tau_0) = \exp\Big[-\int_0^{\tau_0}(\varphi'_{x_1}(u_0(\rho), u_0{}'(\rho))u_0{}'(\rho)+\varphi(u_0(\rho), u_0{}'(\rho)))d\rho\Big]$.

From [3], we have:

$$J(\tau_0) = -Id_2 + \begin{bmatrix} -\psi(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \Phi(\tau_0)$$

Hence we obtain the jacobian matrix

$$J(\tau_0) = \begin{pmatrix} -\psi(a) & \psi(a)^2\pi(\tau_0) \\ 0 & \rho_2 - 1 \end{pmatrix},$$

Since 1 is a simple characteristic multiplier ($\rho_2 \neq 1$), $\det J(0, 0, 0, \tau_0) \neq 0$. We define the periodicity condition

$$z(\alpha, h, \epsilon, \tau) := \nu(\alpha + \tau, a + h, \epsilon, \tau) - (a + h) = 0. \tag{2.3}$$

By the Implicit Function Theorem there are $\epsilon_0 > 0$ and $\alpha_0 > 0$ and uniquely determined functions τ and h defined on $U = \{(\alpha, \epsilon) \in \mathbb{R}^2 : |\epsilon| < \epsilon_0, |\alpha| < \alpha_0\}$ such that: $\tau, h \in C^1$, $\tau(0, 0) = T_0, h(0, 0) = 0$ and $z(\alpha, h, \epsilon, \tau) \equiv 0$. Because of (2.3), the periodic solution of (1.2) has period $\tau(\epsilon, \alpha)$ near T_0 and has path near the path of the unperturbed solution. $\square$

In particular if $\rho_2 < 1$, the periodic solution is orbitally asymptotically stable i.e. stable in the Liapunov sense and it is attractive see [3, page 346]. Thus, the following inequality is a criteria of the existence of orbital asymptotical stable periodic solution of the equation (1.2).

$$\rho_2 < 1 \Longleftrightarrow \int_0^{\tau_0} ({\varphi'}_{x_1}(u_0(\rho), {u_0}'(\rho)){u_0}'(\rho) + \varphi(u_0(\rho), {u_0}'(\rho)))d\rho > 0. \tag{2.4}$$

Using Proposition 1.1, we conclude the existence of non trivial periodic solution for perturbed generalized Liénard equation.

3. Results on the periodic solutions

Special case. Let us now consider the equation

$$u'' + \sum_{k=0}^{2s+1} p_k(u){u'}^k = 0. \tag{3.1}$$

Let p_k be C^1 function, for all$k \leq 2s+1$ for $s \in \mathbb{N}$. This is a special case of Liénard equation with $p_0(u) = \psi(u)$ and

$$\varphi(u, u') = \sum_{k=1}^{2s+1} p_k(u){u'}^{k-1}.$$

We will suppose φ and ψ verify C_{LS} conditions. Let U be an open subset of $\mathbb{R}^2$ containing $(0,0)$. The associated perturbed equation, as denoted previously (1.3), is equation

$$u'' + \sum_{k=0}^{2s+1} p_k(u){u'}^k = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u').$$

Remark. The last non-zero term of the finite sum $\sum_{k=0}^{2s+1} p_k(u){u'}^k$ has an odd index. Then it is necessary to have the element $x_0 \neq 0$ in the C_{LS} conditions.

Theorem 3.1. *Let φ and ψ be C^1 and satisfy C_{LS}. If 1 is a simple characteristic multiplier of the variational system associated to (3.1) then there are two functions $\tau, h : U \to R$ and constants $\tau_1 < \tau_0$ such that the periodic solution $\nu(t, \alpha, a + h(\epsilon, \alpha), \epsilon, \tau(\epsilon, \alpha))$ of the equation*

$$u'' + \sum_{k=0}^{n} p_k(u){u'}^k = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u')$$

exists for $(\epsilon, \alpha) \in U$ with $|\tau - \tau_0| < \tau_1$, $\tau(0,0) = \tau_0$ and $h(0,0) = 0$.

Proof. We will use the same method as in the existence theorem for non-trivial periodic solution of the perturbed system. Consider the unperturbed equation to compute some useful elements. First we assume that $2s + 1 = n$, to simplify notation. Let $x_2 = u$ and $x_1 = \frac{du}{dt} = u'$. The equivalent plane system of (3.1) is

$$x' = f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1' = -\sum_{k=0}^{n} p_k(x_2){x_1}^k \\ x_2' = x_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

with

$$f(x) = \mathrm{col}(-\sum_{k=0}^{n} p_k(x_2){x_1}^k, x_1).$$

Let $q(t) = \mathrm{col}(u_0'(t), u_0(t))$ the periodic solution of (3.2). The variational system associated to (3.2) is

$$y' = f_x'(q(t))y$$

with the periodic solution

$$q'(t) = \mathrm{col}(-\sum_{k=0}^{n} p_k(u_0)(t){u_0'}^k(t), u_0'(t)),$$

hence

$$f_x'(q(t)) = \begin{pmatrix} -\sum_{k=1}^{n} kp_k(u_0(t))u_0'(t)^{k-1} & -\sum_{k=0}^{n} p_k'(u_0(t))u_0'(t)^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We assume the initial values:

$$t = 0, \quad u_0(0) = a < 0 \quad \text{and} \quad {u_0}'(0) = 0.$$

Then $q(0) = \mathrm{col}(0, a)$ and $q'(0) = \mathrm{col}(-\psi(a), 0)$.

In same way as the previous section we compute the fundamental matrix associated with (3.2), denoted $\Phi(t)$. Determine the second vector solution (linearly independent with $q'(t) = y(t)$). A trivial calculation described in [1, 3] gives us the second solution denoted $\widehat{y}(t)$, hence $\Phi(t) = (\frac{y(t)}{y(0)}, y(0)\widehat{y}(t))$. For that consider

$$I(s) = \exp\Big[-\int_0^s (\sum_{k=1}^{n} kp_k(u_0(\rho))u_0'(\rho)^{k-1})d\rho\Big],$$

and denote as in the previous section

$$\pi(t) = -\int_0^t (\sum_{k=0}^{n} p_k(u_0)(\rho)u_0'(\rho)^k)^{-2}(\sum_{k=0}^{n} p_k'(u(t)){u'}^k(t))I(\rho)d\rho.$$

Sine $\widehat{y}(t) = \mathrm{col}(\widehat{y}_1(t), \widehat{y}_2(t))$, where

$$\widehat{y}_1(t) = -(\sum_{k=0}^{n} p_k(u_0)(t)u_0'(t)^k)\pi(t),$$
$$\widehat{y}_2(t) = u_0'(t)\pi(t) + \pi'(t)\frac{\sum_{k=0}^{n} p_k(u_0)(t){u_0'}^k(t)}{\sum_{k=0}^{n} p_k'(u_0(t))u_0'(t)^k}.$$

Hence the fundamental matrix associated with our variational system is

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k(u_0)(t){u_0'}^k(t)}{\psi(a)} & \psi(a)(\sum_{k=0}^{n} p_k(u_0)(t)u_0'(t)^k)\pi(t) \\ -\frac{{u_0}'(t)}{\psi(a)} & -\psi(a)u_0'(t)\pi(t) - \psi(a)\pi'(t)\frac{\sum_{k=0}^{n} p_k(u_0)(t)u_0'(t)^k}{\sum_{k=0}^{n} p_k'(u_0(t))u_0'(t)^k} \end{pmatrix}.$$

We deduce the principal matrix (the fundamental one with $t = \tau_0$).

$$\Phi(\tau_0) = \begin{pmatrix} 1 & \psi(a)^2\pi(\tau_0) \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}.$$

By the Liouville's formula, we have the characteristic multipliers $\rho_1 = 1$ and

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \det(\Phi(\tau_0))\\ &= \exp\Big(\int_0^{\tau_0}(Trf_x{}'(q(\tau))d\tau\Big)\\ &= \exp\Big(-\int_0^{\tau_0}\sum_{k=1}^{n} kp_k(u_0(\tau))u_0'(\tau)^{k-1})d\tau\Big)\end{aligned}$$

Then we define the equivalence (2.4):

$$\rho_2 < 1 \Longleftrightarrow \int_0^{\tau_0}\Big(\sum_{k=1}^{n} kp_k(u_0(\tau))u_0'(\tau)^{k-1}\Big)d\tau > 0 \tag{3.3}$$

and the associated Jacobian matrix is

$$J(\tau_0) = \begin{pmatrix} -\psi(a) & \psi(a)^2\pi(\tau_0)\\ 0 & \rho_2 - 1\end{pmatrix}.$$

□

Uniqueness of the periodic solution for an unperturbed equation. Let us consider now equation (1.4):

$$u'' + [u^2 + (u+u')^2 - 1]u' + u = 0,$$

which is a special case of generalized Liénard equation with

$$\varphi(u,u') = (u^2 + (u'+u)^2 - 1) \text{ and } \psi(u) = u.$$

We will prove existence and uniqueness of non trivial periodic solution for equation (1.4). Existence will be ensured by C_{LS} conditions and for proving uniqueness we use a De Castro's result [5] (see also [2]).

Proposition 3.2 (De Castro [1])**.** *Suppose the following system has at least one periodic orbit*

$$\begin{aligned} y' &= -\varphi(x,y)y - \psi(x)\\ x' &= y.\end{aligned}$$

Then under the following two assumptions:

(a) $\psi(x) = x$;
(b) $\varphi(x,y)$ *increases, when* $|x|$ *or* $|y|$ *or the both increase*

this periodic orbit is unique.

Let us verify that (1.4) satisfies the above assumptions: Equation (1.4) is satisfied if and only if

$$\begin{gathered} u'' + \sum_{k=0}^{3} p_k(u)u'^k = 0,\\ p_0(u) = \psi(u) = u, \quad p_1(u) = 2u^2 - 1, \quad p_2(u) = 2u, \quad p_3(u) = 1.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Also if and only if

$$\begin{gathered} u'' + \varphi(u,u')u' + \psi(u) = 0,\\ \varphi(u,u') = (u^2 + (u'+u)^2 - 1), \quad \psi(u) = u.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Clearly, the assumptions of Proposition 3.2 are satisfied. In the following, we firstly verify conditions C_{LS}. In that case the equation

$$u'' + \varphi(u, u')u' + \psi(u) = 0$$

has at least a non trivial periodic solution. It is easy to see that $\psi(u) = u$ satisfies

$$x\psi(x) > 0 \quad \text{for } |x| > 0,$$
$$\int_0^x \psi(s)ds = \Psi(x), \quad lim_{x\to+\infty}\Psi(x) = +\infty$$

Now we have $\varphi(0, 0) = -1 < 0$. By taking $x_0 = 1$, $M = 1$, we have

$$\varphi(x, y) \geq 0 \quad \text{for } |x| \geq x_0,$$
$$\varphi(x, y) \geq -M \quad \text{for } |x| \leq x_0\,.$$

The following calculation gives us the optimal value of $x_1 > x_0$. Let

$$\begin{aligned}
H &= \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)dx \\
&= \int_1^{x_1} [x^2 + (x + y)^2 - 1]dx \\
&= \int_1^{x_1} [2x^2 + 2xy + y^2 - 1]dx \\
&= \Big[\frac{2}{3}x^3 + x^2y + x(y^2 - 1)\Big]_1^{x_1} \\
&= (x_1 - 1)(\frac{{x_1}^2 - 2x_1 + 1}{6} + 2(\frac{x_1 + 1}{2})^2 + 2y(\frac{x_1 + 1}{2}) + (y^2 - 1)) \\
&= (x_1 - 1)\Big(\frac{{x_1}^2 - 2x_1 + 1}{6} + \varphi(\frac{x_1 + 1}{2}, y)\Big)
\end{aligned}$$

Since $\frac{x_1+1}{2} \geqslant x_0 = 1$, using the inequality $\varphi(x, y) \geq 0$ for $|x| \geq x_0$, we obtain $H \geqslant \frac{(x_1-1)^3}{6}$. Hence, if $\frac{(x_1-1)^3}{6} = 10Mx_0 = 10$, then $x_1 = 1 + (60)^{\frac{1}{3}}$ which satisfies

$$x_1 > x_0, \quad \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dx \geq 10Mx_0,$$

for every decreasing function $y(x) > 0$.

Existence of periodic solution for perturbed equation satisfying C_{LS}. In the following we are dealing with the existence of periodic solution for the equation (1.5). We assume the initial values:

$$t = 0, \quad u_0(0) = a < 0, \quad {u_0}'(0) = 0.$$

Theorem 3.3. *Suppose* 1 *is a simple characteristic multiplier of the variational system associated to* (1.4)*. Then there are two functions* $\tau, h : U \to R$ *and constants* $\tau_1 < \tau_0$ *such that the periodic solution* $\nu(t, \alpha, a + h(\epsilon, \alpha), \epsilon, \tau(\epsilon, \alpha))$ *of the equation*

$$u'' + {u'}^3 + 2u{u'}^2 + (2u^2 - 1)u' + u = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u'),$$

exists for $(\epsilon, \alpha) \in U$ *with* $|\tau - \tau_0| < \tau_1$, $\tau(0, 0) = \tau_0$ *and* $h(0, 0) = 0$.

Proof. We proceed similarly as in the proof of Theorem 3.1. We substitute the fundamental matrix, the second characteristic multiplier is ρ_2. The following holds for equation (1.4),

$$\rho_2 < 1 \Longleftrightarrow \int_0^{\tau_0} (\sum_{k=1}^{3} kp_k(u_0(\tau))u_0'(\tau)^{k-1})d\tau > 0,$$

then

$$\rho_2 < 1 \Longleftrightarrow \int_0^{\tau_0} [2{u_0}^2(\tau) + 4u_0(\tau)u_0'(\tau) + 3u_0'(\tau)^2 - 1]d\tau > 0.$$

It ensures that 1 is a simple characteristic multiplier of the variational system associated to (1.4) it implies $J(\tau_0) \neq 0$. Then a periodic solution for the perturbed equation (1.5) exists. $\square$

Using Scilab we will describe the phase plane of equation (1.4) $u'' + [u^2 + (u + u')^2 - 1]u' + u = 0$. We take $x_0 = u_0(0) = a = -0.7548829$, $y_0 = {u_0}'(0) = 0$ and the step time of integration ($step = .0001$). Recall that the periodic orbit is unique.

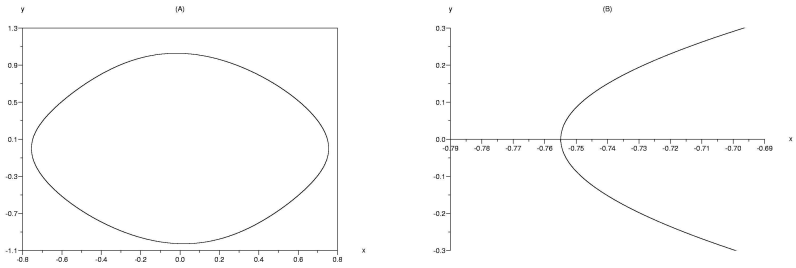

FIGURE 1. (A) The unique periodic orbit for $u'' + [u^2 + (u + u')^2 - 1]u' + u = 0$. (B) Zoom on the periodic orbit ($\times 20$)

We take $\epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u') = \epsilon sin(2t)u'$. Some illustrations of the phase portrait for the perturbed equation (1.5), those can explain existence of a bound ϵ_0, from which periodicity of the orbit will be not insured. In order to localize ϵ_0, we have taken several values of ϵ.

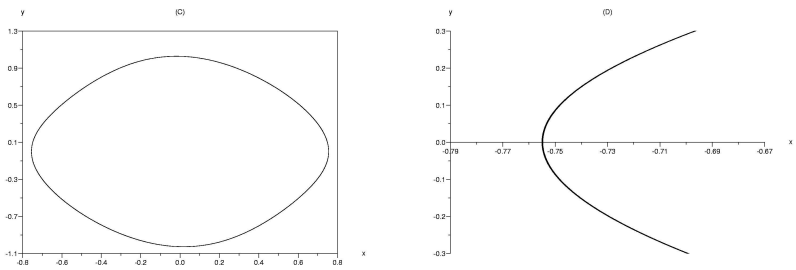

FIGURE 2. (C) The periodic orbit for $u'' + [u^2 + (u + u')^2 - 1]u' + u = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u')$, $\epsilon = 0.001$. (D) Zoom on the periodic orbit ($\times 20$)

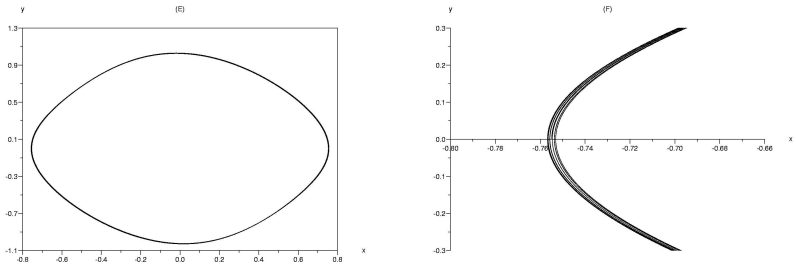

FIGURE 3. (E) Orbit for $u''+[u^2+(u+u')^2-1]u'+u = \epsilon\omega(\frac{t}{\tau}, u, u')$, $\epsilon = 0.01$. (F) Zoom on the orbit ($\times 10$) and loss of periodicity.

We see that from the range of $\epsilon = 0.01$ the orbit loses the periodicity.

TABLE 1. Period τ for some values of ϵ

ϵ	0	1/1000	1/900	1/800	1/700
τ	5.4296	5.4287	5.4286	5.4285	5.4283
ϵ	1/600	1/500	1/400	1/300	1/200
τ	5.4281	5.4278	5.4274	5.4267	5.4252

Acknowledgements. We thank Professors Miklos Farkas and Jean Marie Strelcyn for their helpful discussions; also the referees for their suggestions.

REFERENCES

[1] A. R. Chouikha, *Periodic perturbation of non-conservative second order differential equations*, Electron. J. Qual. Theory. Differ. Equ, 49 (2002), 122-136.
[2] A. De Castro, *Sull'esistenza ed unicita delle soluzioni periodiche dell'equazione* $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$, Boll. Un. Mat. Ital, (3) 9 (1954). 369–372.
[3] M. Farkas, *Periodic motions*, Springer-Verlag, (1994).
[4] N. Levinson and O. K. Smith, *General equation for relaxation oscillations*, Duke. Math. Journal., No 9 (1942), 382-403.
[5] R. Reissig G. Sansonne R. Conti; *Qualitative theorie nichtlinearer differentialgleichungen*, Publicazioni delĺ instituto di alta matematica, (1963).

ISLAM BOUSSAADA
LMRS, UMR 6085, UNIVERSITE DE ROUEN, AVENUE DE L'UNIVERSITÉ, BP.12, 76801 SAINT ETIENNE DU ROUVRAY, FRANCE
E-mail address: islam.boussaada@etu.univ-rouen.fr

A. RAOUF CHOUIKHA
UNIVERSITE PARIS 13 LAGA, VILLETANEUSE 93430, FRANCE
E-mail address: chouikha@math.univ-paris13.fr

Deuxième partie

Centres isochrones

Chapitre 1

Isochronicity conditions for some real polynomial systems

(Soumis)

Résumé

Cet article concerne les conditions asurants qu'une perturbation polynômiale de degré quatre ou cinq d'un centre linéaire est un centre isochrone. Quelques nouveaux cas de centres isochrones sont décrits. Pour les perturbations isochrones homogènes une integrale premère et un changement de variables linéarisant sont établis. Une famille de système pôlynomiale d'Abel est aussi étudié. Tous ces résultats sont obtenues moyennant un usage intensif du calcul formel.

Abstract

This paper studies the isochronicity of polynomial perturbation of degree four and five of linear center. Several new isochronous centers are found. For homogeneous isochronous perturbations, a first integral and a linearizing change of coordinates are presented. Moreover, a family of Abel polynomial systems is also considered. All these results are established using intensive computer algebra computations.

1.1 Introduction

We consider the planar dynamical system,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = X(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Y(x,y), \tag{1.1}$$

where (x,y) belongs to an open connected subset $U \subset \mathbb{R}^2$, $X, Y \in C^k(U,\mathbb{R})$, and $k \geq 1$. An isolated singular point $p \in U$ of (1.1) is a center if and only if there exists a punctured neighborhood $V \subset U$ of p such that every orbit in V is a cycle surrounding p.

The *period annulus* of p, denoted Γ_p is the largest connected neighborhood covered by cycles surrounding p. The *period function* $T : \Gamma_p \longrightarrow \mathbb{R}$ associate to every point $(x,y) \in \Gamma_p$ the minimal period of the cycle $\gamma_{(x,y)}$ containing (x,y).

We say that a center p is *isochronous* if the period function is constant for all cycles contained in Γ_p. The simplest example is the linear center at the origin $O = (0,0)$ given by the system $\dot{x} = -y,\ \dot{y} = x$.

For a cycle $\gamma \in \Gamma_p$ we denote by $C(\gamma) \subset U$ the open subset bounded by γ. We say that the period function is strictly increasing (decreasing) iff $T(\gamma_1) < T(\gamma_2)$, $(T(\gamma_1) \geq T(\gamma_2))$ for all γ_1 and γ_2 such that $C(\gamma_1) \subset C(\gamma_2)$.

An overview of J.Chavarriga and M.Sabatini [1] present the recent results concerning the problem of the isochronicity, see also [5, 6].

The main purpose of this paper is the study of the Liénard type equation

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0 \tag{1.2}$$

with rational f and g, or equivalently the study of its associated two dimentional (planar) system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

The Liénard type equation (1.2) appear for the first time in M.Sabatini paper [14], when the sufficient conditions of the isochronicity of the origin O for the system (1.3) with f and g of classe C^1 are given.

In the analytic case, the necessary and sufficient conditions for isochronicity are given by A. R. Chouikha in [7], where the particular case of system system (1.3)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + bx^2y \\ \dot{y} &= x + a_1x^2 + a_3y^2 + a_4x^3 + a_6xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

is studied. In this system as well as in all other considered systems, all parameters are real. All the values of the parameters for which the above system has the isochronous center at the origin O are found.

In [8] a similar result was obtained for more general system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + axy + bx^2y \\ \dot{y} &= x + a_1x^2 + a_3y^2 + a_4x^3 + a_6xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

The aim of this paper is to extend investigations made in [7, 8] for systems with higher order perturbations of the linear center $\dot{x} = -y,\ \dot{y} = x$. We investigate the practical applicability and the limitations of the method developed in the cited papers for more complicated systems.

First let us consider the following particular case of (1.3) which is more general then (1.5)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{1,1}yx + b_{2,1}yx^2 + b_{3,1}yx^3 \\ \dot{y} &= x + a_{2,0}x^2 + a_{3,0}x^3 + a_{0,2}y^2 + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{4,0}x^4 \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Because of computational complexity, we select for investigation two sub-families (first one $b_{1,1} = a_{3,0} = 0$, second one $b_{1,1} = b_{2,1} = 0$) of the above system which have the codimension two in the parameter space.

In section 3, for the selected families we found all the parameters values for which the origin O is an isochronous center. Thanks to this, among other, we found three additional isochronous cases of linear center perturbed by homogeneous polynomial, which are not covered by the classification established by Chavarriga, Giné and Garcia in [2], but recently found in [4]. For these three isochronous centers we give the explicit form of the first integral and the linearizing change of coordinates.

In the Section 4, an another particular case of the system (1.3) is considered, namely the fifth degree homogeneous polynomial perturbation of linear center

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + ayx^4 \\ \dot{y} &= x + bx^3y^2 + cx^5 \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

We found all the parameters values for which the center at the origin O is isochronous (two families). The explicit form of the first integral and the linearizing change of coordinates are given for them. These systems are not contained in the Chavarriga et al. classification

in [3], but recently found in [13]. In the last section, we investigate the following particular Abel polynomial system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= \sum_{k=0}^{n} P_k(x) y^k, \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

where $P_k(x) := a_k x$ and $a_k \in \mathbb{R}$, for $k = 0, \ldots, n$. This Abel system is also a particular case of (1.3), and hence we can use the C-algorithm to investigate its isochronicity.

Volokitin and Ivanov [15] proved that for $n = 3$ among systems of the form (1.8) with arbitrary polynomials $P_k(x) \in \mathbb{R}[x]$, there is only one family of isochronous centers. For $P_k(x) = a_k x$, this family reduces to exactly one system. Namely, the following one

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x(1+y)^3 \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

In the cited paper Volokitin and Ivanov formulated the problem, which restricted to Abel equations of the form (1.8), can be stated as follows. Do exist among systems (1.8) isochronous ones with $n \geq 4$? We give a partial negative answer to this question showing that for $4 \leq n \leq 9$ among systems (1.8) there is no an isochronous one.

1.2 Efficient algorithm for computing necessary conditions of isochronicity

1.2.1 About isochronous centers

We collect now the results concerning Liénard type equation (1.2) (or its associated planar system (1.3)) which will be used later.

Consider the Liénard type equation

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0,$$

where f and g are C^1 class functions defined in a neighborhood J of $0 \in \mathbb{R}$. Let us define the following functions

$$F(x) := \int_0^x f(s)ds, \quad \phi(x) := \int_0^x e^{F(s)}ds. \tag{1.10}$$

When $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$, define the function X by

$$\frac{1}{2}X(x)^2 = \int_0^x g(s)e^{2F(s)}ds. \tag{1.11}$$

Theorem 1.2.1 (H.Poincaré). *The planar system* (1.1) *with analytic data has an isochronous center at the origin O if and only if for some analytic change of variables $u = u(x, y) = x + \ldots,\ v = v(x, y) = y + \ldots$ the system* (1.1) *reduces to $\dot{u} = -kv,\ \dot{v} = ku$, where $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$ and $\ldots$ denotes the higher order terms.*

For more details see [12].

Theorem 1.2.2 (Sabatini,[14]). *Let $f,\ g \in C^1(J, \mathbb{R})$. If $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$, then the system* (1.3) *has a center at the origin O. When $f,\ g$ are analytic , this condition is also necessary.*

When $f,\ g \in C^1(J, \mathbb{R})$, the first integral of the system (1.3) *is given by the formula*

$$I(x, \dot{x}) = 2\int_0^x g(s)e^{2F(s)}ds + (\dot{x}e^{F(x)})^2 \tag{1.12}$$

Theorem 1.2.3 (Chouikha,[7]). *Let $f,\ g$ be functions analytic in a neighborhood J of* 0, *and $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$. Then system* (1.3) *has an isochronous center at O if and only if there exists an odd function h which satisfies the following conditions*

$$\frac{X(x)}{1 + h(X(x))} = g(x)e^{F(x)}, \tag{1.13}$$

the function $\phi(x)$ satisfies

$$\phi(x) = X(x) + \int_0^{X(x)} h(t)dt, \tag{1.14}$$

and $X(x)\phi(x) > 0$ for $x \neq 0$.

In particular, when f and g are odd, then O is an isochronous center if and only if $g(x) = e^{-F(x)}\phi(x)$, or equivalently $h = 0$.

The function h is called *Urabe function.* As a corollaries of the above theorem one has

Theorem 1.2.4 (Chouikha,[7]). *Let $f,\ g$ be functions analytic in a neighborhood of $0 \in \mathbb{R}$, and $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$. If $g'(x) + g(x)f(x) = 1$ then the origin O is isochronous center of system* (1.3) *and its associated Urabe funtion $h = 0$.*

Theorem 1.2.5 (Chouikha,[7]). *Let f, g be functions analytic in a neighborhood J of* 0, *Consider the system* (1.3) *having a center at the origin O. Let*

$$S(f,g) = 5g''^2(0) + 10g''(0)f(0) + 8f^2(0) - 3g'''(0) - 6f'(0).$$

Then the following holds:
(a)- $S(f,g) > 0$ then the period function T increases in a neighborhood of 0.
(b)- $S(f,g) < 0$ then the period function T decreases in a neighborhood of 0.
(c)- If (1.3) *has an isochronous center at* 0 *then $S(f,g) = 0$.*

1.2.2 Algorithm

The above Theorem 1.2.3 leads to an algorithm, first introduced by R. Chouikha in [7] (see also[8]), in what follow called C-algorithm, which allows to obtain necessary conditions for isochronicity of the center at the origin O for equation (1.2).

Below we recall basic steps of the algorithm.

Let h be the function defined in the Theorem 1.2.3, and $u = \phi(x)$. We assume that function ϕ is invertible near the origin O .

$$\tilde{g}(u) := \frac{X}{1 + h(X)}, \tag{1.15}$$

where now X is considered as a function of u. Our further assumption is that functions $f(x)$ and $g(x)$ depend polynomially on certain numbers of parameters $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$.

By Theorem 1.2.3, if the system (1.2) has isochronous center at the origin O, then the function h which is called the Urabe function, must be odd, so we have

$$h(X) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} X^{2k+1}, \tag{1.16}$$

and moreover,

$$\tilde{g}(u) = g(x)e^{F(x)}, \quad \text{where} \quad x = \phi^{-1}(u). \tag{1.17}$$

Hence, the right hand sides of (1.15) and (1.17) must be equal. Hence, we expand the both right hand sides into the Taylor series around the origin O and equate the corresponding coefficients. To this end we need to calculate k-th derivatives of (1.15) and (1.17).

For (1.15), by straightforward differentiation, we have

$$\frac{d^k \tilde{g}(u)}{du^k} = \frac{d}{dX}\left(\frac{d^{k-1}\tilde{g}(u)}{du^{k-1}}\right)\frac{dX}{du} \tag{1.18}$$

Using induction, one can show that for (1.17) we obtain

$$\frac{d^k \tilde{g}(u)}{du^k} = e^{(1-k)F(x)} S_k(x), \tag{1.19}$$

where $S_k(x)$ is a function of $f(x), g(x)$ and their derivatives.

Therefore to compute the first m conditions for isochronicity of system (1.2) we proceed as follows:

1. we fix m and write

$$h(X) = \sum_{k=1}^{m} c_{2k-1} X^{2k-1} + O(X^{2m}), \quad c := (c_1, c_3, \ldots, c_{2m-1}),$$

2. next, we compute

$$v_k := \frac{d^k \tilde{g}}{du^k}(0), \quad w_k = S_k(0)$$

   for $k = 1, \ldots, 2m+1$. Note that those quantities are polynomials in α and c.

3. by the Theorem 1.2.3 we obtain equations $v_k = w_k$ for $k = 1, \ldots, 2m+1$.

   It appears that we can always eliminate parameters c from these equations. In effect we obtain a certain number of polynomial equations $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s_M = 0$ with p unknows α_i. These equations gives m necessary conditions for isochronicity of system (1.2).

For more details see [7, 8].

1.2.3 The choice of an appropriate Gröbner basis

Let us consider the following system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{1,1} yx + \ldots + b_{n-1,1} yx^{n-1} \\ \dot{y} &= x + a_{2,0} x^2 + a_{0,2} y^2 + \ldots + a_{n-2,2} x^{n-2} y^2 + a_{n,0} x^n \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

which is reducible to the equation (1.2) with

$$f(x) = \frac{a_{0,2} + b_{1,1} + \ldots + (a_{n-2,2} + (n-1) b_{n-1,1}) x^{n-2}}{1 - b_{1,1} x - \ldots - b_{n-1,1} x^{n-1}}, \tag{1.21}$$

$$g(x) = (x + a_{2,0}x^2 + \ldots + a_{n,0}x^n)(1 - b_{1,1}x - \ldots - b_{n-1,1}x^{n-1}). \tag{1.22}$$

In this paper we have investigated the two types of high degree polynomial perturbations, homogeneous and non-homogeneous ones. It seems that C-algorithm is efficient for computing isochronicity necessary conditions for higher degree homogeneous perturbations. In this case system (1.20) reduces to the following one

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{k-1,1}yx^{k-1} \\ \dot{y} &= x + a_{k-2,2}x^{k-2}y^2 + a_{k,0}x^k \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

where $k \in \{2, \ldots, n\}$.

For this homogeneous polynomial perturbation of the linear center, C-algorithm generate homogeneous polynomial equations in the parameters $a_{k-2,2}, a_{k,0}$ and $b_{k-1,1}$. Solving these polynomials, gives all the parameters values for which the real polynomial differential system (1.23) is isochronous at the origin O.

However, for the non-homogeneous perturbation case, C-algorithm generate non-homogeneous polynomial system. Moreover, non-homogeneous perturbations depend on a bigger number of parameters.

We note that for $n = 3$, C-algorithm succeeds to establish isochronicity criteria, however for $n = 4$ the obtained polynomials from the algorithm are much more involved. For example, for the system (1.20) with $n = 4$ reduces to

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{1,1}yx + b_{2,1}yx^2 + b_{3,1}yx^3 \\ \dot{y} &= x + a_{2,0}x^2 + a_{3,0}x^3 + a_{0,2}y^2 + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{4,0}x^4 \end{aligned}\right\}$$

its associated first two non-zero polynomials obtained by applying C-algorithm are the followings

$$P_2 = 3\,b_{2,1} - 3\,a_{1,2} + {b_{1,1}}^2 - a_{2,0}b_{1,1} - 9\,a_{3,0} + 4\,{a_{0,2}}^2 - 5\,b_{1,1}a_{0,2} + 10\,{a_{2,0}}^2 + 10\,a_{2,0}a_{0,2}, \tag{1.24}$$

$$
\begin{aligned}
P_3 = {} & 72\, {b_{2,1}}^2 + 396\, a_{2,0} b_{1,1} a_{1,2} + 90\, b_{1,1} a_{0,2} a_{1,2} + 36\, b_{1,1} a_{2,2} + 324\, b_{3,1} a_{0,2} \\
& - 36\, b_{2,1} a_{1,2} - 468\, a_{2,0} b_{1,1} b_{2,1} + 612\, a_{2,0} b_{2,1} a_{0,2} - 4116\, b_{1,1} {a_{2,0}}^2 a_{0,2} \\
& + 108\, a_{2,0} b_{3,1} - 540\, a_{3,0} b_{2,1} - 324\, a_{4,0} b_{1,1} + 1566\, a_{3,0} b_{1,1} a_{0,2} - 288\, a_{2,0} a_{2,2} \\
& - 459\, a_{3,0} {b_{1,1}}^2 - 1296\, a_{4,0} a_{0,2} - 306\, b_{2,1} b_{1,1} a_{0,2} + 1428\, a_{2,0} {b_{1,1}}^2 a_{0,2} \\
& + 153\, b_{2,1} {b_{1,1}}^2 - 117\, {b_{1,1}}^2 a_{1,2} - 191\, a_{2,0} {b_{1,1}}^3 + 180\, a_{2,0} a_{0,2} a_{1,2} + 43\, {b_{1,1}}^4 \\
& - 2319\, a_{2,0} b_{1,1} {a_{0,2}}^2 - 289\, {b_{1,1}}^3 a_{0,2} - 360\, a_{0,2} a_{2,2} - 36\, {a_{1,2}}^2 - 171\, b_{2,1} {a_{0,2}}^2 \\
& + 513\, a_{3,0} {a_{0,2}}^2 + 537\, {b_{1,1}}^2 {a_{0,2}}^2 + 351\, {a_{0,2}}^2 a_{1,2} - 271\, b_{1,1} {a_{0,2}}^3 + 542\, a_{2,0} {a_{0,2}}^3 \\
& + 756\, a_{2,0} a_{3,0} a_{0,2} + 2268\, a_{2,0} a_{3,0} b_{1,1} - 20\, {a_{0,2}}^4 + 1120\, {a_{2,0}}^4 + 798\, {b_{1,1}}^2 {a_{2,0}}^2 \\
& - 2240\, b_{1,1} {a_{2,0}}^3 - 1512\, a_{2,0} a_{4,0} + 1008\, {a_{2,0}}^2 b_{2,1} - 252\, {a_{2,0}}^2 a_{1,2} \\
& + 1806\, {a_{2,0}}^2 {a_{0,2}}^2 + 2240\, {a_{2,0}}^3 a_{0,2}
\end{aligned}
$$

To solve the first nine non-zero obtained polynomials requests high performance computer and the standard accessible computer algebra systems for solving polynomial equations are not able to find a solution.

For solving polynomial equations the Gröbner bases are used. It is well known, see [16], that the form and the size of the Göbner basis of a polynomial ideal depends strongly on a choice of monomial ordering. A bad choice of the monomial ordering can be a main reason why the Gröbner basis cannot be practically determined.

Our basic observation concerning algebraic structure of polynomial equations which give necessary conditions for the isochronicity in a case of non-homogeneous perturbations is the following. Although the polynomials are not homogeneous, a careful analysis shows that they are quasi-homogeneous. In fact, one can notice that polynomial P_2 given by (1.24) is homogeneous if we give weight 2 for $b_{2,1}$, $a_{1,2}$ and $a_{3,0}$, and weight 1 for the remaining variables. More importantly we can find such a choice of weights for which all the obtained polynomials are homogeneous.

The above observation shows that our main problem, i.e., finding a Gröbner basis, concerns as a matter of fact, finding a Gröbner basis of a homogeneous ideal. It is well know, see [16, p. 466], that homogeneous Gröbner bases have many 'nice' properties which make them extremely useful for solving large and computationally demanding problems.

In fact, for non-homogeneous case of (1.20), the use of weighted degree gives a homogeneous Gröbner base.

To incorporate our observation into the C-algorithm we choose a new parametrization

for the problem. First, we observe that all polynomials which are obtained by means of the C-algorithm are homogeneous if we choose the following weights

1. $i+j-1$ for parameters $a_{i,j}$ and $b_{i,j}$
2. $2i+1$ for c_{2i+1}.

Knowing this we introduced new parameters $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, and C_{2i+1} putting

$$A_{i,j}^{i+j-1} = a_{i,j} \quad B_{i,j}^{i+j-1} = b_{i,j}, \quad C_{2i+1}^{2i+1} = c_{2i+1} \tag{1.25}$$

After this reparametrization system (1.20) reads

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + B_{1,1}yx + \ldots + B_{n-1,1}^{n-1}yx^{n-1} \\ \dot{y} &= x + A_{2,0}x^2 + A_{0,2}y^2 + \ldots + A_{n-2,2}^{n-1}x^{n-2}y^2 + A_{n,0}^{n-1}x^n \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

As in the case of isochronous center the Urabe function is odd, we search it under the form

$$h(X) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1}^{2k+1}X^{2k+1} = C_1X + C_3^3X^3 + C_5^5X^5 + C_7^7X^7 + \ldots \tag{1.27}$$

We emphasize that from the isochronicity conditions for (1.26), expressed in terms of its parameters, it is easy to reconstruct the parameters values for which the system (1.20) admits isochronous center at the origin O, by a simply use of (1.25).

Fact, that the described reparametrization gives rise homogeneous equations, allows to reduce the number of the parameters appearing in (1.26) by one. First, we assume $A_{2,0} = 0$, and then solve the isochronicity problem for system (1.26) under this assumption. Next, for $A_{2,0} \neq 0$, we apply on (1.26) the following change of coordinates

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{A_{2,0}}(x, y) \tag{1.28}$$

We obtain

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \left(\tfrac{B_{11}}{A_{2,0}}\right)xy + .. + \left(\tfrac{B_{n-1,1}}{A_{2,0}}\right)^{n-1} yx^{n-1} \\ \dot{y} &= x + x^2 + \left(\tfrac{A_{0,2}}{A_{2,0}}\right)y^2 + .. + \left(\tfrac{A_{n-2,2}}{A_{2,0}}\right)^{n-1} x^{n-2}y^2 + \left(\tfrac{A_{n,0}}{A_{2,0}}\right)^{n-1} x^n \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Hence, without loss of generality we can put $A_{2,0} = 1$, and find the parameters values for which the center is isochronous.

We note that for an arbitrary $k \in \mathbb{N}$, the problem of the isochonicity of the center for homogeneous perturbations of the form (1.23) reduces to solve a number of polynomial equations in 3 parameters.

Recall that linear center perturbed by homogeneous polynomial, was investigated by W.S. Loud in [9] for the quadratic case, and in [7] the author find Loud results by the described algorithm, see also [5].

Homogeneous perturbations was also studied by Chavarriga and coworkers. For the fourth and fifth degree homogeneous perturbations, see [2, 3], where the homogeneous perturbations different from those studied in the present paper are considered.

1.3 Fourth degree perturbations

Let us consider system (1.6)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{1,1}yx + b_{2,1}yx^2 + b_{3,1}yx^3 \\ \dot{y} &= x + a_{2,0}x^2 + a_{3,0}x^3 + a_{0,2}y^2 + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{4,0}x^4 \end{aligned}\right\}$$

For the system (1.6) having a center at the origin O, the following lemma gives a montonicity criteria for its period function

Lemme 1.3.1. *Let*

$$S = 10a_{2,0}^2 + 10a_{2,0}a_{0,2} - 3a_{1,2} + 3b_{2,1} - b_{1,1}a_{2,0} + b_{1,1}^2 - 9a_{3,0} + 4a_{0,2}^2 - 5b_{1,1}a_{0,2}$$

If $S > 0$ ($S < 0$) then the period function of (1.6) *is increasing (decreasing) at O.*

Proof. System (1.6) reduces to the Liénard type equation (1.2), with

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_{0,2} + b_{1,1} + (a_{1,2} + 2b_{2,1})x + (a_{2,2} + 3b_{3,1})x^2}{1 - b_{1,1}x - b_{2,1}x^2 - b_{3,1}x^3} \\ g(x) &= (x + a_{2,0}x^2 + a_{3,0}x^3 + a_{4,0}x^4)(1 - b_{1,1}x - b_{2,1}x^2 - b_{3,1}x^3) \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

then, we establish only three iterations (derivatives) of the C-algorithm given in Section 2, after elimination of c_1 of the Urabe function from the second derivatives, substitution in the third polynomial gives S. Using the Theorem 1.2.5, (See Corollary 2.8 of [7]), we prove the result.

Because of computational complexity, we select for isochronicity investigation, two subfamilies of the system (1.6), which have the codimension two in the parameters space.

1.3.1 First family

Let us assume $b_{1,1} = a_{3,0} = 0$, in this case (1.6) reduces to the system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{2,1}x^2y + b_{3,1}yx^3 \\ \dot{y} &= x + a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{4,0}x^4 \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

For this system having a center at the origin O, we give isochronicity necessary and sufficient conditions depending only on the following seven real parameters $b_{2,1}, b_{3,1}, a_{2,0}, a_{0,2}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{4,0}$.

Theorem 1.3.2. *The system* (1.31) *has an isochronous center at O if and only if its parameters satisfy one of the folowing conditions*

1. $a_{2,0} = a_{0,2} = b_{2,1} = a_{1,2} = 0,\ b_{3,1} = -4a_{4,0}/3, a_{2,2} = -16a_{4,0}/3$
2. $a_{2,0} = a_{0,2} = b_{2,1} = a_{1,2} = 0,\ a_{4,0} = -b_{3,1}/2,\ a_{2,2} = b_{3,1}/2$
3. $a_{2,0} = a_{4,0} = a_{0,2} = b_{2,1} = a_{1,2} = 0,\ a_{2,2} = b_{3,1}$

which give the homogeneous perturbations and remaining ones which give the non-homogeneous :

4. $a_{2,0} = a_{4,0} = a_{0,2} = 0,\ a_{2,2} = b_{3,1},\ b_{2,1} = a_{1,2}$
5. $a_{0,2} = -2a_{2,0},\ a_{1,2} = 8a_{2,0}^2/3,\ a_{2,2} = -8a_{2,0}^3/3,$
   $a_{4,0} = 0, b_{3,1} = -4a_{2,0}^3/3, b_{2,1} = 2a_{2,0}^2/3$
6. $a_{0,2} = -2a_{2,0},\ a_{1,2} = 8a_{2,0}^2/3,\ a_{2,2} = -16a_{2,0}^3/21,$
   $a_{4,0} = -4a_{2,0}^3/21,\ b_{3,1} = -4a_{2,0}^3/21,\ b_{2,1} = 2a_{2,0}^2/3$
7. $a_{2,0} \neq 0,\ a_{0,2} = -2a_{2,0},\ a_{4,0} = 0,\ a_{2,2} = 2b_{3,1},$
   $a_{1,2} = a_{2,0}^2(4 + b_{3,1}/a_{2,0}^3),\ b_{2,1} = a_{2,0}^2(2 + b_{3,1}/a_{2,0}^3)$

In our investigations we have used *Maple* in its version 10. To compute the Gröbner basis of the obtained polynomial equations in the ring of characteristic 0, we have used *Salsa Software* more precisely the implementation *FGb* [17]. In this proof, we do not present the algorithm generated polynomials which are too long.

Proof. We consider separately the two cases : homogeneous and non-homogeneous perturbations.

Homogeneous perturbations

In the homogeneous case system (1.31) reduces to

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{3,1}yx^3 \\ \dot{y} &= x + a_{2,2}x^2y^2 + a_{4,0}x^4 \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

which is reducible to (1.2) such that

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{(3b_{3,1} + a_{2,2})x^2}{1 - b_{3,1}x^3}, \\ g(x) &= (x - b_{3,1}x^3)(1 + a_{4,0}x^3) \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

C-algorithm gives three homogeneous perturbations of linear center, candidate to be isochronous. 19 derivatives was essential to obtain the necessary conditions of isochronicity. We give explicitly the Urabe function h associated to each system given by the algorithm.

Case 1: the system (1.32) becomes

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \tfrac{4}{3}a_{4,0}yx^3 \\ \dot{y} &= x - \tfrac{16}{3}a_{4,0}x^2y^2 + a_{4,0}x^4 \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

We can easily check that $f(x)g(x) + g'(x) = 1$, hence, following Corollary 2-7 of [7], the system (1.34) is isochronous and $h(X) \equiv 0$.

Case 2: the system (1.32) becomes

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{3,1}yx^3 \\ \dot{y} &= x + \frac{b_{3,1}}{2}x^2y^2 - \frac{b_{3,1}}{2}x^4 \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

The computations yield to the coefficients of the Urabe function :

$$\begin{aligned} &c_1 = 0, c_3 = \frac{b_{3,1}}{2}, c_5 = 0, c_7 = 0, \\ &c_9 = -\frac{b_{3,1}^3}{16}, c_{11} = 0, c_{13} = 0, c_{15} = \frac{3b_{3,1}^5}{256}, \\ &c_{17} = 0, c_{19} = 0, c_{21} = -\frac{5b_{3,1}^7}{2048}. \end{aligned}$$

Let $u_0 = c_3$, $u_1 = c_9$, $u_2 = c_{15}$, $u_3 = c_{21} \ldots$ We observe that for $k = 1, 2, 3, 4$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = -\frac{b_{3,1}^2(k+\frac{1}{2})(k+1)}{4(k+1)^2}$$

It is then natural to conjecture that this is always the case. By series summation we found the odd function

$$h(X) = \frac{b_{3,1}X^3}{\sqrt{4 + {b_{3,1}}^2 X^6}} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k X^k \tag{1.36}$$

By direct computations we verify that the above h satisfy the equation (1.13). Thus we conclude that the obtained h is the Urabe function.

This case is similar to the one found in Theorem 3 of [8].

Case 3: the system (1.32) becomes

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + a_{2,2}yx^3 \\ \dot{y} &= x + a_{2,2}x^2y^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

also this equation has an isochronous center at O since $f(x)g(x)+g'(x) = 1$ and $h(X) \equiv 0$.

We note that the case 3 is the case 4 with $a_{1,2} = 0$.
To complete the analysis, to each isochronous center obtained by homogeneous perturbation, using Theorem 1.2.2 we write explicitely the first integrals and thanks to the method described in [12] we compute the linearizing change of coordinates.

A first integral of the system (1.34) is

$$H_{(1.34)} = \frac{\left(a_{4,0}^2 x^8 + 2a_{4,0}\, x^5 + x^2 + y^2\right)^3}{729\,(3 + 4\, a_{4,0}\, x^3)^8}.$$

The following analytic change of coordinates

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x\,(1 + a_{4,0}\, x^3)}{3\,(3 + 4\, a_{4,0}\, x^3)^{4/3}} \\ v &= \frac{y}{3\,(3 + 4\, a_{4,0}\, x^3)^{4/3}} \end{aligned}\right\}$$

transforms the system (1.34) into the linear system :

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= -v \\ \dot{v} &= u \end{aligned}\right\}$$

A first integral of system (1.35) is

$$H_{(1.35)} = \frac{\left(x^2+y^2\right)^3}{b_{3,1}x^3-1},$$

then we give the linearizing change of coordinates

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x}{\sqrt[6]{-1+b_{3,1}x^3}} \\ v &= \frac{y}{\sqrt[6]{-1+b_{3,1}x^3}} \end{aligned}\right\}$$

A first integral of (1.37) is computed :

$$H_{(1.37)} = \frac{\left(x^2+y^2\right)^3}{\left(-1+a_{2,2}\,x^3\right)^2}$$

A linearizing change of coordinates is

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x}{\sqrt[3]{-1+a_{2,2}\,x^3}} \\ v &= \frac{y}{\sqrt[3]{-1+a_{2,2}\,x^3}} \end{aligned}\right\}$$

Non-homogeneous perturbations

For the non-homogeneous perturbation of the linear center, we add to C-algorithm two tricks expanded in the last Section (homogenization and reduction of the dimension of the parameters space by 1). This allows to proof that the cases (4)-(7) of Theorem 1.3.2 satisfy the necessary conditions of isochronicity. In what follow, we check that the necessary conditions are also sufficient for each case by establishing explicitely the associated Urabe function.

case 4 :

In the notations of the equation (1.2) we have

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{4\,b_{3,1}x^2+3\,b_{2,1}x}{b_{3,1}x^3+b_{2,1}x^2-1} \\ g(x) &= -x\left(b_{3,1}x^3+b_{2,1}x^2-1\right) \end{aligned}\right\}$$

In this case $f(x)g(x)+g'(x)=1$ then thanks to Theorem 1.2.4 we have $h=0$ and the origin O is an isochronous center.

case 5 :

In the notations of the equation (1.2) we have

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\left(-\frac{20}{3}\,{a_{2,0}}^3x^2+4\,{a_{2,0}}^2x-2\,a_{2,0}\right)\left(-4/3\,{a_{2,0}}^3x^3+2/3\,{a_{2,0}}^2x^2-1\right)^{-1}\\ g(x) &= -x\left(1+xa_{2,0}\right)\left(-4/3\,{a_{2,0}}^3x^3+2/3\,{a_{2,0}}^2x^2-1\right)\end{aligned}\right\}$$

In this case $f(x)g(x)+g'(x)=1$ by the Theorem 1.2.4 we have $h=0$ and the origin O is an isochronous center.

case 6 :

In the notations of the equation (1.2) we have

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\left(-4/3\,{a_{2,0}}^3x^2+4\,{a_{2,0}}^2x-2\,a_{2,0}\right)\left(-\frac{4}{21}\,{a_{2,0}}^3x^3+2/3\,{a_{2,0}}^2x^2-1\right)^{-1}\\ g(x) &= -x\left(1-\frac{4}{21}\,{a_{2,0}}^3x^3+xa_{2,0}\right)\left(-\frac{4}{21}\,{a_{2,0}}^3x^3+2/3\,{a_{2,0}}^2x^2-1\right)\end{aligned}\right\}$$

Also in this case $f(x)g(x)+g'(x)=1$ then by the Theorem 1.2.4 we have $h=0$ and the origin O is an isochronous center.

case 7 :

In the notations of the equation (1.2) we have

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{-\left(5\,b_{3,1}x^2+\left(2\,{a_{2,0}}^2\left(2+\frac{b_{3,1}}{{a_{2,0}}^3}\right)+{a_{2,0}}^2\left(4+\frac{b_{3,1}}{{a_{2,0}}^3}\right)\right)x-2\,a_{2,0}\right)}{\left(b_{3,1}x^3+{a_{2,0}}^2\left(2+\frac{b_{3,1}}{{a_{2,0}}^3}\right)x^2-1\right)}\\ g(x) &= -x\left(1+xa_{2,0}\right)\left(b_{3,1}x^3+{a_{2,0}}^2\left(2+\frac{b_{3,1}}{{a_{2,0}}^3}\right)x^2-1\right)\end{aligned}\right\}$$

In this case $f(x)g(x)+g'(x)=1$ then thanks to Theorem 1.2.4 we have $h=0$ and the origin O is an isochronous center.

In what concern non-homogeneous cases (4)-(7), it is possible (like the homogeneous cases) to write down using MAPLE first integrals but their expressions are to cumbersome to be reproduced here. Unfortunately we are at the present time unable to find the linearizing change of variables for them.

1.3.2 Second family

Consider system (1.6), with $b_{1,1} = b_{2,1} = 0$. We obtain the seven parameter real system of degree 4.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + b_{3,1}yx^3 \\ \dot{y} &= x + a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + a_{3,0}x^3 + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{4,0}x^4 \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

For this system having a center at the origin O, we give isochronicity necessary and sufficient conditions depending only on these seven real parameters $a_{3,0}, b_{3,1}, a_{2,0}, a_{0,2}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{4,0}$.

System (1.38) reduces to the equation (1.2) with

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_{0,2} + a_{1,2}x + (a_{2,2} + 3b_{3,1})x^2}{1 - b_{3,1}x^3}, \\ g(x) &= (x + a_{2,0}x^2 + a_{3,0}x^3 + a_{4,0}x^4)(1 - b_{3,1}x^3) \end{aligned}\right\}$$

Theorem 1.3.3. *The system* (1.38) *has an isochronous center at O if and only if its parameters satisfy one of the folowing conditions*

1. $a_{2,0} = a_{0,2} = b_{2,1} = a_{1,2} = 0,\ b_{3,1} = -4a_{4,0}/3, a_{2,2} = -16a_{4,0}/3$

2. $a_{2,0} = a_{0,2} = b_{2,1} = a_{1,2} = 0,\ a_{4,0} = -b_{3,1}/2,\ a_{2,2} = b_{3,1}/2$

3. $a_{2,0} = a_{4,0} = a_{0,2} = b_{2,1} = a_{1,2} = 0,\ a_{2,2} = b_{3,1}$

which give the homogeneous perturbations and remaining ones which give the non-homogeneous

4. $a_{2,0} = -a_{0,2}/2,\ a_{3,0} = a_{0,2}^2(9 - \sqrt{33})/48,\ a_{1,2} = a_{0,2}^2(-1 + \sqrt{33})/16$
   $a_{4,0} = 0,\ a_{2,2} = a_{0,2}^3(-21 + 5\sqrt{33})/64,\ b_{3,1} = a_{0,2}^3(-21 + 5\sqrt{33})/192$

5. $a_{2,0} = -a_{0,2}/2,\ a_{3,0} = {a_{0,2}}^2(9 + \sqrt{33})/48,\ a_{1,2} = -a_{0,2}^2(1 + \sqrt{33})/16$
   $a_{4,0} = 0,\ a_{2,2} = -a_{0,2}^3(21 + 5\sqrt{33})/64, b_{3,1} = -a_{0,2}^3(21 + 5\sqrt{33})/192$

6. $a_{2,0} = -a_{0,2}/2,\ a_{3,0} = a_{4,0} = 0,\ a_{1,2} = a_{0,2}^2/2$
   $a_{2,2} = a_{0,2}^3/2,\ b_{3,1} = a_{0,2}^3/4$

7. $a_{2,0} \neq 0,\ a_{0,2} = -2a_{2,0},\ \frac{a_{3,0}}{{a_{2,0}}^2} = \frac{64}{117} - \frac{5717}{9975888}\left(22868 + 468\sqrt{3297}\right)^{2/3}$
   $+\frac{1}{85264}\sqrt{3297}\left(22868 + 468\sqrt{3297}\right)^{2/3} - \frac{1}{117}\sqrt[3]{22868 + 468\sqrt{3297}},$

$$\frac{a_{2,2}}{a_{2,0}^3} = -\frac{344}{3549} - \frac{4720}{273}\frac{\sqrt{3297}}{\left(22868+468\sqrt{3297}\right)^{2/3}} + \frac{96896}{3549}\frac{1}{\sqrt[3]{22868+468\sqrt{3297}}}$$
$$+\frac{32}{273}\frac{\sqrt{3297}}{\sqrt[3]{22868+468\sqrt{3297}}} - \frac{2695088}{3549}\left(22868+468\sqrt{3297}\right)^{-2/3},$$
$$a_{1,2} = a_{2,0}^2\left(\frac{-584+\left(22868+468\sqrt{3297}\right)^{2/3}+14\sqrt[3]{22868+468\sqrt{3297}}}{39\sqrt[3]{22868+468\sqrt{3297}}}\right),\ b_{3,1} = \frac{a_{2,2}}{4},$$
$$\frac{a_{4,0}}{a_{2,0}^3} = \frac{2150}{10647} + \frac{11926}{10647}\frac{1}{\sqrt[3]{22868+468\sqrt{3297}}} - \frac{2}{91}\frac{\sqrt{3297}}{\sqrt[3]{22868+468\sqrt{3297}}}$$
$$-\frac{1085248}{10647}\left(22868+468\sqrt{3297}\right)^{-2/3} - \frac{160}{91}\frac{\sqrt{3297}}{\left(22868+468\sqrt{3297}\right)^{2/3}}$$

Proof. Thanks to C-algorithm we obtain the necessary conditions of the isochronicity of the center at the origin for system (1.38). We establish the seven cases given in the theorem.

The three first cases belong to the family of linear centers perturbed by fourth degree homogeneous polynomial. Those are analyzed in the proof concerned by the first family .

For the cases of linear center perturbed by non-homogeneous nonlinearity we show in the following that the necessary conditions are also sufficients by establishing for each case the associated Urabe function.

case 4 :

We use the equation (1.30) to obtain

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\left(1/32\, a_{0,2}{}^3\left(-21+5\sqrt{33}\right)x^2 + 1/16\, a_{0,2}{}^2\left(-1+\sqrt{33}\right)x + a_{0,2}\right)}{\left(\frac{1}{192}\, a_{0,2}{}^3\left(-21+5\sqrt{33}\right)x^3 - 1\right)} \\ g(x) &= -x\left(1 - 1/2\, x a_{0,2} + 1/48\, x^2 a_{0,2}{}^2\left(9-\sqrt{33}\right)\right)\left(\frac{1}{192}\, a_{0,2}{}^3\left(-21+5\sqrt{33}\right)x^3 - 1\right) \end{aligned}\right\}$$

In this case $f(x)g(x) + g'(x) = 1$ then thanks to Theorem 1.2.4 we have $h = 0$ and the origin O is an isochronous center.

case 5 : In this case f and g can be written

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\left(-1/32\, a_{0,2}{}^3\left(21+5\sqrt{33}\right)x^2 - 1/16\, a_{0,2}{}^2\left(1+\sqrt{33}\right)x + a_{0,2}\right)}{\left(-\frac{1}{192}\, a_{0,2}{}^3\left(21+5\sqrt{33}\right)x^3 - 1\right)} \\ g(x) &= -x\left(1 - 1/2\, x a_{0,2} + 1/48\, x^2 a_{0,2}{}^2\left(9+\sqrt{33}\right)\right)\left(-\frac{1}{192}\, a_{0,2}{}^3\left(21+5\sqrt{33}\right)x^3 - 1\right) \end{aligned}\right\}$$

In this case $f(x)g(x) + g'(x) = 1$, thanks to Theorem 1.2.4 we have $h = 0$ then the origin O is an isochronous center.

case 6 : In this case f and g can be written

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{5/4\, {a_{0,2}}^3 x^2 + 1/2\, {a_{0,2}}^2 x + a_{0,2}}{1/4\, {a_{0,2}}^3 x^3 - 1} \\ g(x) &= -x\,(1 - 1/2\, x a_{0,2})\left(1/4\, {a_{0,2}}^3 x^3 - 1\right) \end{aligned}\right\}$$

In this case $f(x)g(x) + g'(x) = 1$, thanks to Theorem 1.2.4 we have $h = 0$ then the origin O is an isochronous center.

case 7 : In this case restricted to $a_{2,0} = 1$ we check easily $f(x)g(x) + g'(x) = 1$. Then, by the rescaling

$$(x, y) \mapsto a_{2,0}(x, y) \tag{1.39}$$

we generalize the isochronicity for any $a_{2,0} \neq 0$ since by change of coordinate (1.39) the isochronicity is not lost. Hence the system (1.38) satisfying the conditions of the case 7 of the theorem has an isochronous center at the origin.

Note that the polynomials issued from the 19 derivations and associated eliminations for the system (1.6) (with 9 parameters), exceed the authorized memory of ordinary computers (2 Go of Random Access Memory) in computations of the Gröbner basis by the known efficient implementation FGb [17].

1.4 Fifth degree homogeneous perturbations

Let us consider the following system of degree 5.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + ayx^4 \\ \dot{y} &= x + bx^3y^2 + cx^5 \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

The systems given in the following theorem are additional isochronous cases to those established by Chavarriga et al in [3] but recently obtained in [13]

Theorem 1.4.1. *System* (1.40) *has an isochronous center at the origin O if and only if it reduces to one of the following systems*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + ayx^4 \\ \dot{y} &= x + 5ax^3y^2 - \frac{4}{5}ax^5 \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y + ayx^4\\ \dot{y} &= x + ax^3y^2\end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

Proof. We perform the C-algorithm with the functions f and g such that

$$\left.\begin{aligned}f(x) &= \frac{(b+4a)x^3}{(1-ax^4)}\\ g(x) &= (x+cx^5)(1-ax^4)\end{aligned}\right\}$$

then we obtain isochronicity necessary conditions for the system (1.40).For the two systems (1.41) and (1.42), it is easy to check that assymptions of Theorem 1.2.4 are satisfied then systems (1.41) and (1.42) are isochronous and their associated Urabe function $h = 0$.

As before, for each obtained isochronous center, we write explicitely the first integrals and the linearizing change of coordinates.

For the system (1.41) a first integral is

$$H_{(1.41)} = \frac{\left((-5+4\,ax^4)^2\,x^2 + 25\,y^2\right)^2}{625\,(-1+ax^4)^5}$$

We give the linearizing change of coordinates for the system (1.41)

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{(-5+4\,ax^4)\,x}{5\,(-1+ax^4)^{5/4}}\\ v &= \frac{y}{(-1+ax^4)^{5/4}}\end{aligned}\right\}$$

For the system (1.42) a first integral is

$$H_{(1.42)} = \frac{(x^2+y^2)^2}{-1+ax^4}.$$

We give the linearizing change of coordinates associated to (1.42)

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{x}{\sqrt[4]{-1+ax^4}}\\ v &= \frac{y}{\sqrt[4]{-1+ax^4}}\end{aligned}\right\}$$

1.5 The period function for an Abel polynomial system

This section is concerned with the following Abel system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= \sum_{k=0}^{n} P_k(x) y^k \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

where $P_k(x) := a_k x$, $a_0 := 1$, and $a_k \in R$, for $k = 1, \ldots, n$.

1.5.1 Reduction to Liénard type system

The system (1.43) can be written

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x(1 + P(y)), \end{aligned}\right\} \tag{1.44}$$

with $P(y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + ... + a_n y^n$.

Let define the functions X and ϕ as follow

$$\frac{1}{2} X(x)^2 =: \int_0^x \frac{s}{(1 + P(s))} ds \quad \text{and} \quad \phi(x) =: \int_0^x \frac{ds}{(1 + P(s))}.$$

We show the following theorem suggested to me by Professor A. R. Chouikha. Its proof is a modification of the proof of Theorem 2.1 of [7] (i.e. Theorem 1.2.3 of the present paper).

Theorem 1.5.1. *The origin O is a center for* (1.44).

Moreover, if $a_1^2 - 3a_2 > 0$ ($a_1^2 - 3a_2 < 0$) then the period function of (1.44) *is increasing (decreasing) at O.*

This center at O, is isochronous if and only if there exists an odd function h satisfying

$$\frac{X}{1 + h(X)} = x$$

and

$$\phi(x) = X(x) + \int_0^{X(x)} h(t) dt$$

such that $X\phi(x) > 0$ for $x \neq 0$.

In particular, when P is an even polynomial then the origin O is isochronous center if and only if $P = 0$.

Proof. From the symmetry criteria, the origin O is a center for (1.44), see [11, chap.4]. We see that when $P(0) = 0$, there exists an open connected interval J_1 containing 0 where $1 + P(y) \neq 0$. Then we can consider system in a neighborhood U of the origin O where $U = J_1 \times J_2$ with J_2 a suitable open interval containing 0. So, making the following transformation :

$$\left.\begin{aligned} y &= y \\ z &= x(1 + P(y)) \end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

we obtain,

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -y(1 + P(y)) + z^2 \frac{P'(y)}{(1 + P(y))} \end{aligned}\right\}$$

In effect, after renaming y as x and z as y we obtain the (1.2). The origin O is a center for (1.2) with

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{P'(x)}{(1 + P(x))} \\ g(x) &= x(1 + P(x)) \end{aligned}\right\}$$

For a fixed $n > 2$, we establish three iterations of the C-algorithm given in Section 2, after elimination of c_1 of the Urabe function from the second derivation, substitution in the third polynomial gives $a_1^2 - 3a_2$. By Using the Theorem 1.2.5 we prove the monotonicity result.

Let

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(s)ds = -\ln(1 + P(x)), \\ \phi(x) = u &= \int_0^x e^{F(s)}ds = \int_0^x \frac{ds}{(1 + P(s))} \end{aligned}\right\}$$

Then we obtain

$$\tilde{g}(u) = g(x)e^{F(x)} = x(1 + P(x))e^{-\ln(1+P(x))} = x$$

Following Theorem 1.2.3, $\tilde{g}$ satisfies

$$\tilde{g}(u) = \frac{X}{1 + h(X)}$$

where $u = X + H(X)$.

For the particular case when P is even, it is easy to see that f and g are odd. We use the Theorem 1.2.3, that leads us to obtain $x = X$ and $P \equiv 0$.

The following paragraph is devoted to illustrate the last theorem by example.

1.5.2 Application to Volokitin and Ivanov system

This section concerns the Abel polynomial system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= \sum_{i=0}^{n} P_i(x) y^i \end{aligned}\right\} \tag{1.46}$$

with $P_k \in R[x]$, $0 \leq k \leq n$.

For such system the origin O is not always a center.

Theorem 1.5.2 (Volokitin and Ivanov, [15])**.** *The polynomial Abel system*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= (x + a^2x^3)(1 + h(x)y)^3 + 3axy(1 + h(x)y)^2 - h'(x)y^3 \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

with an arbitrary number $a \in R$ and an arbitrary polynomial $h \in R[x]$ has an isochronous center at O.

Let us consider the Abel system (1.43) with $n = 9$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x + \sum_{i=1}^{9} a_i x y^i \end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

with $a_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq 9$. As follows from the symmetry criteria, the origin O is always a center for (1.48), see [11, chap.4].

Theorem 1.5.3. *Only in the case*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x + a_1 xy + \frac{a_1^2}{3} xy^2 + \frac{a_1^3}{27} xy^3 \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

the system (1.48) *has an isochronous center at the origin O. That is, only in the case when the system* (1.48) *belongs to the Volokitin-Ivanov class* (1.47).

Proof. We perform C-algorithm with

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{P'(x)}{(1+P(x))} \\ g(x) &= x(1+P(x)) \end{aligned}\right\}$$

where $P(x) = \sum_{i=1}^{9} a_i x^i$. We obtain the unique one-parameter family (1.49), and computations gives the Urabe function

$$h(X) = -\frac{a_1 X}{3} = \frac{k_1 X}{\sqrt{{k_2}^2 + k_3 X^2}}$$

with $k_1 = -a_1/3,\ k_2 = 1,\ k_3 = 0$.

It is interesting to note that this Urabe function is of the same nature that the Urabe function (1.36) of the system (1.35). (cf. also the proof of the Lemma 3.4 of [7] as well as Section 3 and 4 of [8].)

We transform system (1.49), by the following change of coordinates

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{a_1 x}{3} \\ \zeta &= \frac{a_1 y}{3}. \end{aligned}\right\}$$

Then, after renaming ξ as x and ζ as y we obtain the Volokitin and Ivanov system [15, p.24], which is a particular case of (1.47)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x(1+y)^3. \end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

In [15], they prove that O is an isochronous center of (1.50) showing that it commutes with some transversal polynomial system, but dont provide its first integral.

Thanks to our rescaling (1.45), we determine a first integral of (1.50)

$$I_{(1.50)}(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{(1+y)^2}$$

Indeed, let $P(x) = 3x + 3x^2 + x^3$. The system (1.50) reduces to the system (1.3) with

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{P'(x))}{(1+P(x))} \\ g(x) &= x(1+P(x)). \end{aligned}\right\}$$

By Theorem 1.2.2 we have

$$I(x,\dot{x}) = 2\int_0^x g(s)e^{2F(s)}ds + (\dot{x}e^{F(x)})^2.$$

is a first integral of (1.3) which, in our case, reduces to

$$I(x,y) = \frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{y^2}{(1+x)^6}$$

By the reciprocal of the rescaling (1.45), we obtain the first integral of the system (1.50)

$$I_{(1.50)}(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{(1+y)^2}.$$

By an algorithm presented in the Annexe A we establish a commutator Y transversal to the field X generated by the diffential system (1.50). Indeed, the existence of Y leads Volokitin and Ivanov to prove the isochronicity of the center at the origin for the system (1.50). Computations gives the following system as generator of the field Y :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + xy \\ \dot{y} &= -x^2y^3 + y^2 - 3\,y^2x^2 + y - 3\,yx^2 - x^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.51}$$

Thanks to the method suggested to me by Professor I. A. Garcia and described in [10], we obtain a linearizing change of coordinates for this system. First, we establish an inverse integrating factor $V(x,y)$ of the vector field X such that :

$$V(x,y) = -\,(y+1)\left(x^2 + 2\,yx^2 + y^2x^2 + y^2\right)$$

which leads to the first integrals H and I respectively of the systems (1.50) and (1.51) :

$$\left.\begin{aligned} H(x,y) &= x^2 + \frac{y^2}{(1+y)^2} \\ I(x,y) &= -x + \arctan\left(\frac{(y+1)\,x}{y}\right) \end{aligned}\right\}$$

Professor Jean-Marie Strelcyn (Université de Rouen) indicated to me that one can take as $\tilde{f}$ and $\tilde{g}$:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= z \\ \tilde{g}(z) &= tan(z). \end{aligned}\right\}$$

By the Theorem 4 of [10] we obtain the linearizing change of coordinates defined by

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{\tilde{f}(H(x,y))}\tilde{g}(I(x,y))}{\sqrt{1+\tilde{g}^2(I(x,y))}} \\ v &= \frac{\sqrt{\tilde{f}(H(x,y))}}{\sqrt{1+\tilde{g}^2(I(x,y))}} \end{aligned}\right\}$$

MAPLE produce the following more explicit formulas that we reproduce without any change

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{-\sqrt{\frac{x^2+2\,yx^2+y^2x^2+y^2}{(y+1)^2}}\tan\left(x-\arctan\left(\frac{(y+1)x}{y}\right)\right)}{\sqrt{1+\left(\tan\left(x-\arctan\left(\frac{(y+1)x}{y}\right)\right)\right)^2}} \\ v(x,y) &= \sqrt{\frac{x^2+2\,yx^2+y^2x^2+y^2}{(y+1)^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\tan\left(x-\arctan\left(\frac{(y+1)x}{y}\right)\right)\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.52}$$

The fact that this change of variables is really a linearizing one can be easily verified by MAPLE which gives

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= -v \\ \dot{v} &= u \end{aligned}\right\}$$

as it is expected.

In the light of Theorem 1.5.3, it is natural to ask if the system (1.49) is the unique system with isochronous center at the origin O inside the family (1.43).

Even for the system (1.43) whith $n = 10$, our actual computer possibilies are not sufficient to give an answer.

Acknowledgments

I would like to thank Professor A. Raouf Chouikha (University Paris 13, France) who introduced me to the subject, proposed me the problem studied in this paper and also for many important hints and discussions.

I would like to thank Professor Magali Bardet (University of Rouen) who introduced and guided me in the computer algebra side of use of Groebner basis and who explained to me the homogeneization in the practical use of them.

I thank Professor Jean Marie Strelcyn (University of Rouen, France) for many important and very useful discussions and for great help in the final redaction of this paper.

I thank Professor Andrzej J. Maciejewski (University of Zielona Gòra, Poland) who readed very carefully the first version of this chapter and who provided to me many important remarks and insights.

Last but not least, I thank warmly Professor Isaac A. Garcia (University of Lleida, Spain) for his very valuable critical remarks.

Bibliography

[1] J. Chavarriga, M. Sabatini , A survey of isochronous centers,
Qual. Theory of Dyn. Systems vol 1 , (1999), 1-70.

[2] J. Chavarriga, J. Giné and I. A. García , Isochronous centers of a linear center perturbed by fourth degree homogeneous polynomial,
Bull. Sci. Math 123 , (1999), 77-99.

[3] J. Chavarriga, J. Giné and I. A. García, Isochronous centers of a linear center perturbed by fifth degree homogeneous polynomials,
J. of Comput. and Appl. Mathematics 126 , (2000), 351-368.

[4] X. Chen, V. G. Romanovski, W. Zhang, Linearizability conditions of time-reversible quartic systems having homogeneous nonlinearities,
Nonlinear Analysis 69, (2008), 1525-1539.

[5] A. R. Chouikha, Monotonicity of the period function for some planar differential systems. Part I : conservative and quadratic systems,
Applicationes Mathematicae, 32 no. 3 (2005), 305-325.

[6] A. R. Chouikha, Monotonicity of the period function for some planar differential systems. Part II : Liénard and related systems,
Applicationes Mathematicae, 32 no. 4 (2005), 405-424.

[7] A. R. Chouikha, Isochronous centers of Lienard type equations and applications,
J. Math. Anal. Appl. 331 (2007), 358-376 .

[8] A. R. Chouikha,V. G. Romanovski, X. Chen Isochronicity of analytic systems via Urabe's criterion,
J. Phys. A, 40 (2007) 10 , 2313-2327.

[9] W. S. Loud The behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers,
Contributions to Diff. Eq, 3 (1964) , 21-36.

[10] I. A. García, S. Maza Linearization of analytic isochronous centers from a given commutator,
J. of Mathematical Analysis and Applications, 339, 1, (2008), 740-745.

[11] C. Christopher, Around the Center-Focus Problem, 1-90 pp. In C. Christopher, C. Li Limit cycles of differential equations. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. *Birkhäuser Verlag, Basel*, 2007. viii+171 pp.

[12] P. Mardesić, C. Rousseau, B. Toni, Linearization of isochronous Centers,
J. Diff. Eq. 121, p.67-108 (1995).

[13] V. G. Romanovski, X. Chen, X. H. Zhaoping, Linearizability of linear system perturbed by fifth degree homogeneous polynomials,
J. Phys. A, 40, (2007), no. 22, 5905-5919.

[14] M. Sabatini, On the period function of $x'' + f(x)x'^2 + g(x) = 0$,
J. Diff. Eq. 196, no. 1, p. 151-168 (2004).

[15] E. P. Volokitin, V. V. Ivanov, Isochronicity and commutation of polynomial vector fields,
Siberian Math. Journal. 40, p. 23-38, (1999).

[16] T. Becker, V. Weispfenning, Gröbner bases, *Springer-Verlag*, (1993).

[17] J. C. Faugère, FGb Salsa Software, http://fgbrs.lip6.fr/salsa/Software/.

Chapitre 2

Conditions nécessaires pour l'existence des centres isochrones par la méthode des formes normales

Résumé

Nous étudions les conditions nécessaires pour qu'un centre linéaire perturbé par une nonlinéarité quadratique ou cubique soit isochrone. Ces conditions sont obtenus grâce à la théorie des formes normales d'une part, le calcul formel et l'usage des bases de Gröbner de l'autre.

Abstract

We study the necessary conditions of isochronicity of the linear center perturbed by quadratic and cubic polynomials. Those conditions are obtained by the use of normal forms theory, computer algebra and the use of Gröbner basis.

2.1 Formes normales

Le but du Chapitre 2 est de montrer sur quelques exemples concrets la puissance de la méthode des formes normales dans le dépistage des centres isochrones.

La méthode des formes normales montre sa puissance en permettant de déceler de manière uniforme plusieurs exemples disparates de centres isochrones en fournissant les

conditions nécessaires de leurs existences. Notons que cette méthode peut s'appliquer aussi dans la recherche des centres tout court. La méthode des formes normales que nous allons utiliser ici est celle décrite dans la Section 3.3 de [16] avec la mise en forme algorithmique de [23, 25].

Considèrons le système deux dimensionnel géneral

$$\dot{x} = Lx + f(x) = Lx + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_k(x) + \ldots, \tag{2.1}$$

Où $f = (f_1, f_2)$, f_1, f_2 des polynômes en y_1 et y_2 sans termes constants ni termes linéaires. Lx représente la partie linéaire du système (2.1) et f_k la composante homogène de degré k. L'origine $O = (0, 0)$ est un point singulier du système (2.1). Etant intéressé par le cas où ce point est un centre on peut, sans restreindre la généralité, supposer une fois pour toute que $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$. L'idée fondamentale de la théorie des formes normales est de trouver un changement de variables de la forme

$$x = y + h(y) = y + h_2(y) + h_3(y) + \ldots + h_k(y) + \ldots, \tag{2.2}$$

qui permet de transformer le système (2.1) en

$$\dot{y} = Ly + g(x) = Ly + g_2(y) + g_3(y) + \ldots + g_k(y) + \ldots, \tag{2.3}$$

qui soit le plus simple possible. Ici $h_k(y)$ et $g_k(y)$ sont les composantes homogènes de degré k de h et de g respectivement.

Soit $U = (U_1, U_2)$, $V = (V_1, V_2)$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2[y_1, y_2]$.

Rappelons que le crochet $[U, V] = D(U)V - D(V)U$ où $D\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial y_1} & \frac{\partial A}{\partial y_2} \\ \frac{\partial B}{\partial y_1} & \frac{\partial B}{\partial y_2} \end{pmatrix}$.

Grâce aux équations (2.1), (2.2) et (2.3), nous pouvons obtenir des équations algébriques ordre par ordre afin de construire la forme normale à un certain ordre k. En dérivant l'équation (2.2),

$$\dot{x} = \dot{y} + Dh(y)\dot{y} = (I + Dh(y))\dot{y} \tag{2.4}$$

ensuite en substituant (2.1) et (2.3) dans (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} &Lx + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_k(x) + \ldots = \\ &(I + Dh(y))(Ly + g_2(y) + g_3(y) + \ldots + g_k(y) + \ldots) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Une substitution de (2.2) dans (2.5) donne

$$\begin{aligned}
&g_2(y) + g_3(y) + \ldots + g_k(y) + \ldots = \\
&Lh(y) - Dh(y)Ly - Dh(y)g_2(y) - Dh(y)g_3(y) - \ldots - Dh(y)g_k(y) - \ldots \\
&+ f_2(y + h(y)) + f_3(y + h(y)) + \ldots + f_k(y + h(y)) + \ldots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Un développement en série de Taylor donne

$$\begin{aligned}
&g_2(y) + g_3(y) + \ldots + g_k(y) + \ldots = \\
&+ f_2(y) + f_3(y) + \ldots + f_k(y) + \ldots + \sum_{i=2}^{\infty}(Lh_i(y) - Dh_i(y)Ly) \\
&+ \sum_{i=2}^{\infty} Dh(y)(f_i(y) - g_i(y)) + \sum_{i=2}^{\infty}(Df_i(y)h(y) - Dh(y)f_i(y)) \\
&+ \frac{1}{2!}(D^2 f_2(y)h^2(y) + D^2 f_3(y)h^2(y) + \ldots + D^2 f_k(y)h^2(y) + \ldots) \\
&+ \frac{1}{3!}(D^3 f_3(y)h^3(y) + D^3 f_4(y)h^3(y) + \ldots + D^3 f_k(y)h^3(y) + \ldots) + \ldots \\
&+ \frac{1}{k!}(D^k f_k(y)h^k(y) + D^k f_{k+1}(y)h^k(y) + \ldots) + \ldots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Voici un théorème, permettant d'implémenter un algorithme noté par la suite NF, pour construire la forme normale de (2.1).

Théorème 2.1.1 (Yu-2007)**.** *Une formule récurrente pour calculer les coefficients de la forme normale* (2.3) *ainsi que le changement de variable non linéaire* (2.2) *est donnée par :*

$$g_k = f_k + [h_k, Ly] + \sum_{i=2}^{k-1}(Df_i h_{k-i+1} - Dh_{k-i+1} g_i)$$

$$+ \sum_{i=2}^{[k/2]} \frac{1}{i!} \sum_{j=i}^{k-i} D^i f_j \sum_{l_1+l_2+\ldots+l_i=k-(j-i)\ 2\le l_1,l_2,\ldots,l_i\le k+2-(i+j)} h_{l_1} h_{l_2} \ldots h_{l_i}$$

Pour $k = 2, 3, \ldots$

Ce qui donne pour les premiers ordres :

$$\begin{aligned}
&g_2(y) = f_2(y) + [h_2(y), Ly] \\
&g_3(y) = f_3(y) + [h_3(y), Ly] + Dh_2(f_2(y) - g_2(y)) \\
&g_4(y) = f_4(y) + [h_4(y), Ly] + [h_3(y), f_2(y)] + [h_2(y), f_3(y)] \\
&+ Dh_2(f_3(y) - g_3(y)) + Dh_3(f_2(y) - g_2(y)) + \frac{1}{2} D^2 f_2(y) h_2^2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Yu, dans plusieurs de ses articles [23, 24, 25], a obtenu des algorithmes efficaces permettant de calculer les formes normales, le lecteur peut ainsi trouver les implémentation de ces algorithmes sur *Maple* dans les articles cités. On en fera un usage intensif.

Finalement, par le changement de variables $y_1 = rcos(\theta)$, $y_2 = rsin(\theta)$, la forme normale (2.3) du système (2.1) s'écrit en coordonnées polaires comme suit

$$\dot{r} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{2j+1} r^{2j+1} + O(r^{2N+3}),\ \dot{\theta} = 1 + \sum_{j=1}^{N} \beta_{2j+1} r^{2j} + O(r^{2N+2}) \tag{2.9}$$

où $\{\alpha_{2j+1}\}$ et $\{\beta_{2j+1}\}$ ne dépendent que du système (2.1) et ne dépendent pas de N. Pour que le point singulier à l'origine O soit un centre, il est nécessaires que tout les α_{2j+1}, appelés *coefficients de Lyapunov*, soient nuls. Les conditions nécessaires pour que le centre à l'origine O soit isochrone sont données par la nullité des β_{2j+1}, car si ce n'est pas le cas la période dépend de r, [1].

Dans le cas où dans le système (2.1) f dépend de manière polynômiale des paramètres $c_1, \ldots, c_k$, alors les $\{\alpha_{2j+1}\}$ et $\{\beta_{2j+1}\}$ dépendent aussi de manière polynômiale de ces paramètres. On cherche les valeurs de ces paramètres pour lesquels l'origine O est un centre isochrone. Cela conduit à la recherche des solutions simultanées des systèmes polynômiaux

$$\alpha_{2j+1}(c_1, \ldots, c_k) = 0, \quad 1 \leq j \leq N$$

$$\beta_{2j+1}(c_1, \ldots, c_k) = 0, \quad 1 \leq j \leq N$$

Cela équivaut à chercher dans l'anneau de polynômes $\mathbb{R}[c_1, \ldots, c_k]$ les zéros réels simultanés des idéaux $I(\alpha, N)$ et $I(\beta, N)$ qui sont engendrés par $\{\alpha_3, \ldots, \alpha_{2N+1}\}$ et $\{\beta_3, \ldots, \beta_{2N+1}\}$. Moyennant les bases de Gröbner nous cherchons tout d'abord les zéros de l'idéal $I(\alpha, N)$. En général ses zéros dépendent des paramètres. En substituant les résultats obtenus dans les polynômes $\beta_1, \ldots, \beta_{2N+1}$ on obtient des polynômes $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{2N+1}$ et on se ramène à un problème de recherche de zéros réels de l'idéal engendré par ces polynômes, où de nouveaux on utilise les bases de Gröbner.

Dans les paragraphes qui suivent on présente des applications de la méthode des formes normales dans l'investigation des conditions nécessaires pour l'existence des centres isochrones. Nous avons testé l'algorithme NF sur des systèmes pour lesquels les centres isochrones sont connus. Dans la Section 2, moyennant les formes normales on retrouve les centres isochrones décrits par Loud dans [17]. La Section 3 est consacré aux centres isochrones des systèmes cubiques. En premier lieu, nous retrouvons les centres isochrones

décrits dans [10] pour le système

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Rappelons que dans [11], tous les centres isochrones du système (2.10) perturbé par le monôme de coefficient $a_{1,1,1}$, ont été déterminés. Nous continuons ces investigations en décrivant tous les centres isochrones potentiels des huit perturbations cubiques monômiale restantes du système (2.10). Il s'avère que ce sont tous des centres isochrones, déjà connus dans la littérature.

A la fin du chapitre, nous présentons quelques systèmes dont l'origine O satisfait les conditions nécessaires pour être un centre isochrone. Il s'avère que ces résultats ne sont pas nouveaux. En effet, dans [7] il est démontré que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

Nous utilisons la version 10 de *Maple* dans nos calculs des formes normales des systèmes considérés, c'est aussi grâce à *Salsa Software*, en particulier grâce à l'implantation *FGb* que nous avons obtenu les bases de Gröbner associées aux systèmes polynomiaux obtenus à partir de l'algorithme NF.

Notons que notre approche est purement algorithmique. Nous avons essayé de simplifier le plus possible nos calculs par des techniques reposant surtout sur des changements de variables, afin de gagner en temps des calculs et en taille de mémoire. La résolution des systèmes d'équations algébriques, des polynomes réels dans notre cas, peut s'avérer une tâche difficile si l'on essaye de se traiter le problème directement. On peut trouver dans la page web [14], des conseils et des règles à suivre dans l'utilisation des différents algorithme de Salsa. En cela qui concerne l'usage des bases de Gröbner voir [2].

2.2 Les centres isochrones des systèmes quadratiques

Si un système d'équations différentielles quadratique plan admet O comme centre, alors à un changement linéaire de variable près, il est de la forme

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y + a_{1,2,0}x^2 + a_{1,1,1}xy + a_{1,0,2}y^2 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,1,1}xy + a_{2,0,2}y^2\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Théorème 2.2.1 (Loud, [17]). *Le système* (2.11) *admet un centre isochrone à l'origine O si et seulement si l'une des assertions suivantes est satifaite*

1. *Le système est linéaire :*

$$a_{1,2,0} = a_{1,1,1} = a_{1,0,2} = a_{2,2,0} = a_{2,1,1} = a_{2,0,2} = 0.$$

2. *Par une rotation des axes le système s'écrit*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + A_{1,1,1}xy \\ \dot{y} &= x + A_{2,2,0}x^2 + A_{2,0,2}y^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

avec $A_{1,1,1} \neq 0$ *tel que les rapports* $A_{2,2,0}/A_{1,1,1}$ *et* $A_{2,0,2}/A_{1,1,1}$ *admettent comme valeurs l'une des paires suivantes :*

$$(0,1) \qquad (0,\frac{1}{4}) \qquad (-\frac{1}{2},2) \qquad (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

Ajoutons que dans [10] grâce à la réduction du système (2.12) à un système du type Liénard

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y^2, \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

on retrouve les quatre centres isochrones de Loud. Les quatre cas de Loud on été étudiés dans [18] où on présente explicitement pour chacun de ces cas : intégrale première, changement de variables linéarisant et portrait de phase dans le disque de Poincaré. J.Chavarriga et M.Sabatini complètent cette description par la présentation explicite du commutateur transversal associé à chaque cas de Loud, ce qui prouve qu'il s'agit de centres isochrones [4].

Le résultat principal de cette section se formule ainsi :

Les conditions nécessaires pour que l'origine O soit un centre isochrone pour le système (2.11)*, sont obtenues par le calcul de la forme normale* (2.9) *à l'ordre* 7 *(*$N = 3$*). A un changement linéaire de variables près, ces conditions nécessaires identifient les quatre centres isochrones de Loud, mais cela ne démontre pas que pour les cas décélés O est un centre isochrone.*

Conditions nécessaires

Notons que nous cherchons uniquement les valeurs réelles des paramètres pour lesquelles le système (2.11) peut avoir un centre isochrone à l'origine O.

Nous exécutons le code *Maple* de l'algorithme NF établi par Yu dans [23, 24, 25]. On calcule explicitement l'ordre 7 ($N = 3$) la forme normale (2.9) du système (2.11). Il est très important de remarquer que les expressions des coefficients de la composante radiale ainsi que celles de la composante angulaire sont des polynômes homogènes en les coefficients du système initial (2.11).

On note par G la base de Gröbner associée à l'idéal engendré par

$$I =< \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \beta_3, \beta_5, \beta_7 >$$

La base G est générée par 36 polynômes de coefficients de (2.11). Son dernier élément est :

$$u_{36} = -a_{1,2,0}a_{1,1,1} + a_{2,1,1}a_{2,0,2} - a_{1,1,1}a_{1,0,2} + 2\,a_{1,2,0}a_{2,2,0} + a_{2,2,0}a_{2,1,1} - 2\,a_{2,0,2}a_{1,0,2}.$$

La résolution par *Maple* de l'équation $u_{36} = 0$ donne les trois solutions suivantes qu'on examinera séparément :

$$\{a_{1,2,0} = a_{1,2,0}, a_{2,2,0} = -a_{2,0,2}, a_{2,0,2} = a_{2,0,2}, a_{1,0,2} = -a_{1,2,0}, a_{2,1,1} = a_{2,1,1}, a_{1,1,1} = a_{1,1,1}\}$$
$$\{a_{1,2,0} = a_{1,2,0}, a_{2,2,0} = -a_{2,0,2}, a_{2,0,2} = a_{2,0,2}, a_{1,0,2} = a_{1,0,2}, a_{2,1,1} = a_{2,1,1}, a_{1,1,1} = -2\,a_{2,0,2}\}$$
$$\{a_{2,1,1} = \frac{a_{1,2,0}a_{1,1,1} + a_{1,1,1}a_{1,0,2} - 2\,a_{1,2,0}a_{2,2,0} + 2\,a_{2,0,2}a_{1,0,2}}{a_{2,0,2} + a_{2,2,0}}, \text{ such that } a_{2,2,0} + a_{2,0,2} \neq 0\}$$

En fait cette écriture n'est rien d'autre que la simple observation que si $a_{2,2,0} + a_{2,0,2} = 0$, alors $u_{36} = (-a_{1,1,1} + 2\,a_{2,2,0})(a_{1,0,2} + a_{1,2,0})$.

1. Premier cas :

$$\{a_{2,2,0} = -a_{2,0,2},\ a_{1,0,2} = -a_{1,2,0}\}$$

   Nous substituons ces conditions dans G, et nous calculons à nouveau la base de Gröbner associée que l'on note G_1.

   G_1 se réduit au polynôme suivant

$$G_1 = 4\,{a_{1,2,0}}^2 + 4\,{a_{2,0,2}}^2 - 4\,a_{2,1,1}a_{1,2,0} + {a_{2,1,1}}^2 - 4\,a_{2,0,2}a_{1,1,1} + {a_{1,1,1}}^2$$

   $G_1 = 0$ admet la solution réelle suivante

$$\{a_{2,2,0} = -a_{2,0,2},\ a_{1,0,2} = -a_{1,2,0},\ a_{2,1,1} = 2\,a_{1,2,0},\ a_{1,1,1} = 2\,a_{2,0,2}\}.$$

2. Deuxième cas :

$$\{a_{2,2,0} = -a_{2,0,2},\ a_{1,1,1} = -2\, a_{2,0,2}\}$$

De même que pour le cas précédent, on substitue les conditions dans G et nous calculons la base de Gröbner associée que l'on note G_2 qui est engendrée par 13 polynômes. La nullité de tous les éléments de G_2 donne les quatre solutions réelles suivantes, chacune d'elles va être discutée plus loin

(a) $\{a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = a_{1,1,1} = a_{1,0,2} = 0,\ a_{2,1,1} = 4\, a_{1,2,0}\}$

(b) $\{a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = a_{1,1,1} = 0,\ a_{1,0,2} = -1/2\, a_{2,1,1},\ a_{1,2,0} = 1/2\, a_{2,1,1}\}$

(c) $\{a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = a_{1,1,1} = 0, a_{1,0,2} = -1/2\, a_{2,1,1}, a_{1,2,0} = 2\, a_{2,1,1}\}$

(d) $\{a_{2,2,0} = a_{1,1,1} = a_{2,0,2} = a_{1,0,2} = 0,\ a_{2,1,1} = a_{1,2,0}\}$

3. Troisième cas :

$$a_{2,1,1} = \frac{a_{1,2,0}a_{1,1,1} + a_{1,1,1}a_{1,0,2} - 2\, a_{1,2,0}a_{2,2,0} + 2\, a_{2,0,2}a_{1,0,2}}{a_{2,0,2} + a_{2,2,0}}$$

avec $a_{2,2,0} + a_{2,0,2} \neq 0$.

Afin de simplifier les calculs on considère une nouvelle variable b tel que $b = a_{2,0,2} + a_{2,2,0}$. Nous substituons

$$a_{2,0,2} = b - a_{2,2,0},\ a_{2,1,1} = \frac{a_{1,2,0}a_{1,1,1} + a_{1,1,1}a_{1,0,2} - 2\, a_{1,2,0}a_{2,2,0} + 2\, a_{2,0,2}a_{1,0,2}}{b}$$

dans G, et nous obtenons une liste de fraction rationnelles dont les dénominateurs sont des puissances de b. Pour étudier l'annulation de ces fractions rationnelles nous considérons uniquement leurs numérateurs qui sont des polynômes homogènes en $a = (a_{2,2,0}, b, a_{1,1,1}, a_{1,0,2}, a_{2,1,1}, a_{1,2,0})$.

Grâce aux propriétés des polynômes homogènes, sans perte de généralité, nous pouvons supposer $b = a_{2,0,2} + a_{2,2,0} = 1$. En effet, soit $P(a)$ un polynôme homogène en $a = (a_{2,2,0}, b, a_{1,1,1}, a_{1,0,2}, a_{2,1,1}, a_{1,2,0})$, alors $P(\alpha a) = \alpha^{deg(P)} P(a)$.

Nous substituons les égalités suivantes dans G :

$a_{2,0,2} = 1 - a_{2,2,0}$

$a_{2,1,1} = a_{1,2,0}a_{1,1,1} + a_{1,1,1}a_{1,0,2} - 2\, a_{1,2,0}a_{2,2,0} + 2\ (1 - a_{2,2,0})\, a_{1,0,2}$

L'implantation FGb donne alors la base de Gröbner associée notée G_3. Cette base comporte 21 polynômes en les variables $(a_{2,1,1},\ a_{1,2,0},\ a_{2,2,0},\ a_{1,0,2},\ a_{1,1,1})$, ce qui donne les sept solutions suivantes :

(a) $\{a_{1,2,0} = -\pm 23/28\sqrt{5}, a_{2,2,0} = -5/7,\ a_{2,0,2} = 12/7,\ a_{1,0,2} = \pm 4/7\sqrt{5}, a_{2,1,1} = \pm\sqrt{5}/7,\ a_{1,1,1} = 18/7\}$

(b) $\{a_{1,2,0} = -\pm 18/7\sqrt{5}, a_{2,2,0} = 13/21,\ a_{2,0,2} = 8/21,\ a_{1,0,2} = \pm 4/7\sqrt{5}, a_{2,1,1} = -\pm 32/21\sqrt{5},\ a_{1,1,1} = 18/7\}$

(c) $\{a_{1,2,0} = -\pm 10/21\sqrt{14},\ a_{2,2,0} = -2/3,\ a_{2,0,2} = 5/3,\ a_{1,0,2} = \pm 1/3\sqrt{14},\ a_{2,1,1} = \pm 2/21\sqrt{14},\ a_{1,1,1} = 8/3\}$

(d) $\{a_{2,0,2} = a_{1,1,1} = 1,\ a_{1,2,0} = a_{1,2,0},\ a_{2,2,0} = a_{1,0,2} = 0,\ a_{2,1,1} = a_{1,2,0}\}$

(e) $\{a_{1,2,0} = \pm\sqrt(2),\ a_{2,2,0} = 1/3,\ a_{2,0,2} = 2/3,\ a_{1,0,2} = 0,\ a_{2,1,1} = \pm 4\sqrt(2)/3\,, a_{1,1,1} = 2\}$

(f) $\{a_{1,2,0} = -1/2\,\frac{(a_{1,1,1}+4)\gamma}{a_{1,1,1}+2},\ a_{2,2,0} = 1/2\,a_{1,1,1} - 2,\ a_{2,0,2} = 3 - 1/2\,a_{1,1,1},\ a_{1,0,2} = 1/2\,\gamma, a_{2,1,1} = \frac{\gamma(a_{1,1,1}-2)}{a_{1,1,1}+2},\ a_{1,1,1} \in]-2,4[,\ \gamma = \pm\sqrt{-{a_{1,1,1}}^2 + 2\,a_{1,1,1} + 8},\}$

(g) $\{a_{1,2,0} = -a_{1,1,1}\delta, a_{2,2,0} = -2/3 + 1/2\,a_{1,1,1}, a_{2,0,2} = 5/3 - 1/2\,a_{1,1,1}, a_{1,0,2} = \delta\,(a_{1,1,1} - 2)\,, a_{2,1,1} = 2/3\,\delta\,(3\,a_{1,1,1} - 10)\,,\ \delta = 1/2\sqrt{\frac{-3\,a_{1,1,1}+2}{-8+3\,a_{1,1,1}}},\quad a_{1,1,1} \in]-\infty, 2/3[\cup]8/3, \infty[\}$

Chacune des solutions comportant le symbole $\pm$ donne réellement un couple de solutions. Par exemple, la solution 3a) donne les solutions :

$\{a_{1,2,0} = -23/28\sqrt{5}, a_{2,2,0} = -5/7,\ a_{2,0,2} = 12/7,\ a_{1,0,2} = 4/7\sqrt{5}, a_{2,1,1} = \sqrt{5}/7,\ a_{1,1,1} = 18/7\}$

$\{a_{1,2,0} = 23/28\sqrt{5}, a_{2,2,0} = -5/7,\ a_{2,0,2} = 12/7,\ a_{1,0,2} = -4/7\sqrt{5}, a_{2,1,1} = -\sqrt{5}/7,\ a_{1,1,1} = 18/7\}$

Identifications des cas obtenus avec les cas de Loud

Pour chaque solution établie dans la première partie de la preuve, on présente un changement de variables qui permet de retrouver le cas de Loud associé.

1) Considérons le système

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,0}x^2 + 2\,a_{2,0,2}xy - a_{1,2,0}y^2 \\ \dot{y} &= -x - a_{2,0,2}x^2 + 2\,a_{1,2,0}xy + a_{2,0,2}y^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

si $a_{1,2,0} = 0$, le système (2.14) se réduit au cas $(-1/2, 1/2)$ du théorème de Loud. Sinon $a_{1,2,0} \neq 0$ et la rotation à l'angle $\zeta = -\arctan\left(\frac{a_{2,0,2}}{a_{1,2,0}}\right)$ transforme le système (2.14) en cas $(-1/2, 1/2)$ du théorème de Loud.

2a) Par le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, x)$, le système (2.11) se réduit au cas $(0, 1/4)$ du théorème de Loud.

2b) Par le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, x)$, le système (2.11) se réduit au cas $(-1/2, 1/2)$ du théorème de Loud.

2c) Par le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, x)$, le système (2.11) se réduit au cas $(-1/2, 2)$ du théorème de Loud.

2d) Par le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, x)$, le système (2.11) se réduit au cas $(0, 1)$ du théorème de Loud.

3a) Considérons le système

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{23}{28}\sqrt{5}x^2 + \frac{18}{7}xy - 4/7\sqrt{5}y^2 \\ \dot{y} &= -x - 5/7\,x^2 - 1/7\sqrt{5}yx + \frac{12}{7}y^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

La rotation à l'angle $\zeta = -\arctan\left(4/5\sqrt{5}\right)$ transforme le système (2.15) en cas $(0, 1/4)$ du théorème de Loud.

3b) Le système (2.11) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - \frac{18}{7}\sqrt{5}x^2 + \frac{18}{7}xy + 4/7\sqrt{5}y^2 \\ \dot{y} &= -x + \frac{13}{21}x^2 - \frac{32}{21}\sqrt{5}xy + \frac{8}{21}y^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

La rotation à l'angle $\zeta = \arctan\left(1/10\sqrt{5}\right)$ transforme le système (2.16) en cas $(-1/2, 2)$ du théorème de Loud.

3c) Dans ce cas (2.11) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - \frac{10}{21}\sqrt{14}x^2 + 8/3\,xy + 1/3\sqrt{14}y^2 \\ \dot{y} &= -x - 2/3\,x^2 + 2/21\sqrt{14}xy + 5/3\,y^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

La rotation à l'angle $\zeta = \arctan\left(1/2\sqrt{14}\right)$ transforme le système (2.17) en cas $(0, 1/4)$ du théorème de Loud.

3d) Le système (2.11) s'écrit dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,0}x^2 + xy \\ \dot{y} &= -x + a_{1,2,0}xy + y^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Il est clair que si $a_{1,2,0} = 0$, le système (2.18) se réduit au cas $(0,1)$ de Loud par le changement de variables $(x,y) \mapsto (-x,y)$. Si $a_{1,2,0} \neq 0$, la rotation à l'angle $\zeta = -\arctan\left(\frac{1}{a_{1,2,0}}\right)$ transforme le système (2.18) en cas $(0,1)$ du théorème de Loud.

3e) Considérons le système

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + \sqrt{2}x^2 + 2\,xy \\ \dot{y} &= -x + 1/3\,x^2 + 4/3\,\sqrt{2}xy + 2/3\,y^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

La rotation à l'angle $\zeta = \left(\arctan\left(1/2\,\sqrt{2}\right)\right)$ transforme le système (2.19) en cas $(-1/2,2)$ du théorème de Loud.

3f) De la même manière, la rotation à l'angle $\zeta = \arctan\left(\frac{a_{1,1,1}+2}{\sqrt{-a_{1,1,1}{}^2+2\,a_{1,1,1}+8}}\right)$ transforme le système (2.11) en cas $(0,1/4)$ du théorème de Loud.

3g) Dans ce cas (2.11) devient

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} =& y - 1/2\,a_{1,1,1}\alpha\,x^2 + a_{1,1,1}xy + 1/2\,\alpha\,(a_{1,1,1}-2)\,y^2 \\ \dot{y} =& -x + (-2/3 + 1/2\,a_{1,1,1})\,x^2 + 1/3\,\alpha\,(3\,a_{1,1,1} - 10)\,xy \\ & + (5/3 - 1/2\,a_{1,1,1})\,y^2, \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

où $\alpha = \sqrt{\frac{-3\,a_{1,1,1}+2}{-8+3\,a_{1,1,1}}}$. La rotation à l'angle $\zeta = \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ transforme le système (2.20) en cas $(-1/2,2)$ du théorème de Loud.

2.3 Perturbations cubiques du centre linéaire

Considèrons le système cubique plan

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,0}x^2 + a_{1,0,2}y^2 + a_{1,1,1}xy + a_{1,3,0}x^3 + a_{1,2,1}x^2y + a_{1,1,2}xy^2 + a_{1,0,3}y^3 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,1,1}xy + a_{2,30}x^3 + a_{2,2,1}x^2y + a_{2,1,2}xy^2 + a_{2,0,3}y^3 \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

La détermination des valeurs des paramètres pour lesquels l'origine O est un centre isochrone pour le système (2.21) est une tâche difficile. En effet, n'importe quelle méthode directe ramène le problème à chercher les solutions d'un système polynômial à 14 variables (les paramètres du système (2.21)).

Plusieurs auteurs, ont abordé la classification des centres isochrones des systèmes cubiques en se restreignant à des classe particulières du système cubique général, par exemple

les systèmes réversibles cubiques, les perturbations homogènes du centre linéaire, les systèmes cubiques de Liènard et bien d'autres que le lecteur peut trouver dans [4].

Moyennant le C-algorithme décrit dans le Chapitre 1 toutes les valeurs des paramètres pour lesquels l'origine O est un centre isochrone ont été décrites dans [10].

Théorème 2.3.1 (Chouikha,[10]). *Le système* (2.10) *admet un centre isochrone à l'origine O si et seulement si ses paramètres vérifient l'une des conditions suivantes*

1. $a_{2,3,0} = -(2/3)a_{1,2,1},\ a_{2,1,2} = 3a_{1,2,1},\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$
2. $a_{2,1,2} = a_{1,2,1},\ a_{2,2,0} = a_{2,3,0} = a_{2,0,2} = 0$
3. $a_{2,3,0} = (1/14)a_{2,0,2}^2,\ a_{2,1,2} = (3/7)a_{2,0,2}^2,\ a_{1,2,1} = (1/7)a_{2,0,2}^2,\ a_{2,2,0} = -(1/2)a_{2,0,2}$
4. $a_{2,1,2} = a_{2,0,2}^2, a_{2,3,0} = 0, a_{1,2,1} = (1/2)a_{2,0,2}^2, a_{2,2,0} = -(1/2)a_{2,0,2}$.

En étendant ce dernier résultat, on trouve dans [11] les conditions d'isochronie pour le système (2.10) perturbé par le monôme de coefficient $a_{1,1,1}$, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y + a_{1,1,1}xy \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Théorème 2.3.2 (Chouikha et al.[10]). *Le système* (2.22) *admet un centre isochrone à l'origine O si et seulement si*

$$a_{1,2,1} = \frac{-a_{1,1,1} + a_{1,1,1}a_{2,2,0} - 10a_{2,2,0}^2 + 5a_{1,1,1}a_{2,0,2} - 10a_{2,0,2}a_{2,0,2} - 4a_{2,0,2}^2 + 9a_{2,3,0} + 3a_{2,1,2}}{3}$$

et ses paramètres vérifient l'une des conditions suivantes

1. $a_{2,2,0} + 1/2a_{2,0,2} - 1/2a_{1,1,1} = a_{2,0,2}a_{2,3,0} - 1/6a_{2,0,2}a_{2,1,2} - 3a_{2,3,0}a_{1,1,1} + 1/6a_{2,1,2}a_{1,1,1} = a_{2,0,2}^2 - 3a_{2,0,2}a_{1,1,1} + 2a_{1,1,1}^2 - 6a_{2,3,0} - 4/3a_{2,1,2} = a_{2,1,2}a_{1,1,1}a_{2,0,2} + 6a_{2,3,0}a_{1,1,1}^2 - a_{2,1,2}a_{1,1,1}^2 - 18a_{2,3,0}^2 - a_{2,3,0}a_{2,1,2} + 2/3a_{2,1,2}^2 = a_{2,3,0}^2a_{1,1,1}^2 + 1/6a_{1,1,1}^2a_{2,3,0}a_{2,1,2} - 3a_{2,3,0}^2 + 1/3a_{2,3,0}^2a_{2,1,2} + 5/36a_{2,1,2}^2a_{2,3,0} - 1/5a_{2,1,2}^3 = 0$
2. $a_{2,1,2} = a_{2,3,0} = a_{2,0,2} - 1/4a_{1,1,1} = a_{2,2,0} = 0$
3. $a_{2,1,2} = 4a_{2,3,0} - 3a_{1,1,1} = a_{2,2,0} + a_{1,1,1} = a_{1,1,1}^2 - 3a_{2,3,0} = 0$
4. $a_{2,1,2} = a_{2,0,2} - 2a_{1,1,1} = a_{2,3,0} - a_{1,1,1}^2 = a_{2,2,0} + 2a_{1,1,1} = 0$
5. $a_{2,1,2} = a_{2,0,2} - 1/3a_{1,1,1} = a_{2,2,0} + 2/3a_{1,1,1} = 9/2a_{2,3,0} - a_{1,1,1}^2 = 0$
6. $a_{2,3,0} = a_{2,2,0} + 1/2a_{2,0,2} - 1/2a_{1,1,1} = a_{2,0,2}^2 - 3a_{2,0,2}a_{1,1,1} + 2a_{1,1,1}^2 - a_{2,1,2} = 0$

7. $a_{2,3,0} = 2a_{2,0,2} - a_{1,1,1} = 2a_{2,2,0} + a_{1,1,1} = 0$
8. $a_{2,3,0} = a_{2,0,2} - a_{1,1,1} = a_{2,2,0} = 0$
9. $a_{2,3,0} = a_{2,0,2} = a_{1,1,1}^2 - 9a_{2,1,2} = a_{2,2,0} = 0$

Nous allons maintenant étudier toutes les perturbations monômiales de degré deux ou trois du système (2.10). Ainsi 8 systèmes sont considérés. Pour chacun d'eux nous établissons la forme normale avec $N = 6$, grâce à laquelle nous obtenons les conditions nécessaires pour que l'origine O soit un centre isochrone. Ensuite par différentes méthodes nous démontrons que ces conditions sont aussi suffisantes.

Dans ce qui va suivre, chaque paragraphe concerne une perturbation monômiale du système (2.10) et $a_{i,j,k}$ indique le paramètre de la perturbation de la i^{eme} équation ($i \in \{1, 2\}$) du système (2.10) par le monôme $x^j y^k$.

2.3.1 Perturbation $a_{1,0,3}$

Dans ce paragraphe nous considérons le système suivant

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y + a_{1,0,3}y^3 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

Proposition 2.3.3. *Dans l'étude du système* (2.23) *il suffit de considérer les trois cas suivants*

1. $a_{1,0,3} = 0$
2. $a_{1,0,3} = 1$
3. $a_{1,0,3} = -1$

Démonstration. Si $a_{1,0,3} \neq 0$, deux cas se présentent : ou bien $a_{1,0,3} > 0$ ou bien $a_{1,0,3} < 0$.

Si $a_{1,0,3} > 0$, dans le système (2.23) on effectue le changement de variable

$$(x, y) \mapsto a_{1,0,3}^{1/2}(x, y). \tag{2.24}$$

On obtient

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{a_{1,2,1}}{a_{1,0,3}}x^2y + y^3 \\ \dot{y} &= -x + \frac{a_{2,2,0}}{a_{1,0,3}^{1/2}}x^2 + \frac{a_{2,0,2}}{a_{1,0,3}^{1/2}}y^2 + \frac{a_{2,3,0}}{a_{1,0,3}}x^2 + \frac{a_{2,1,2}}{a_{1,0,3}}xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Les valeurs des paramètres pour lesquelles l'origine O est un centre isochrone pour le système (2.23) peuvent maintenant être facilement obtenues à partir des conditions assurant que l'origine O est un centre isochrone pour le système (2.25).

Si $a_{1,0,3} < 0$ alors le système (2.23) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y - \tilde{a}_{1,0,3}y^3 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 \end{aligned}\right\}$$

avec $-a_{1,0,3} = \tilde{a}_{1,0,3} > 0$. Dans le système (2.23) on effectue le changement de variable

$$(x, y) \mapsto \tilde{a}_{1,0,3}^{1/2}(x, y). \tag{2.26}$$

On obtient

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{a_{1,2,1}}{\tilde{a}_{1,0,3}}x^2y - y^3 \\ \dot{y} &= -x + \frac{a_{2,2,0}}{\tilde{a}_{1,0,3}^{1/2}}x^2 + \frac{a_{2,0,2}}{\tilde{a}_{1,0,3}^{1/2}}y^2 + \frac{a_{2,3,0}}{\tilde{a}_{1,0,3}}x^2 + \frac{a_{2,1,2}}{\tilde{a}_{1,0,3}}xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

Les valeurs des paramètres pour lesquelles l'origine O est un centre isochrone pour le système (2.23) peuvent maintenant être facilement obtenues à partir des conditions assurant que l'origine O est un centre isochrone pour le système (2.27). □

Remarque 2.3.4. *Dans le cadre d'une perturbation monômiale quadratique du système* (2.10)*, il suffit de considérer les deux cas suivants*

1. $a_{i,j,2-j} = 0$
2. $a_{i,j,2-j} = 1$

En effet, pour $a_{i,j,2-j} \neq 0$ le changement de variables suivant

$$(x, y) \mapsto a_{i,j,2-j}(x, y)$$

ramène le problème à étudier exactement le cas $a_{i,j,2-j} = 1$.

Désormais nous supposons une fois pour toute que dans le système (2.23) $a_{1,0,3} \in \{0, 1, -1\}$.

Théorème 2.3.5. *Le système* (2.23) *où* $a_{1,0,3} \in \{0, 1, -1\}$ *admet un centre isochrone à l'origine* O *si et seulement si ses paramètres satisfont l'une des conditions suivantes*

1. $a_{1,0,3} = 0$

(a) $a_{1,2,1} = a_{2,1,2}, a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = a_{2,3,0} = a_{1,0,3} = 0$

(b) $a_{1,2,1} = -3/2\, a_{2,3,0},\ a_{2,1,2} = -9/2\, a_{2,3,0},\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = a_{1,0,3} = 0$

(c) $a_{1,2,1} = a_{2,2,0} = -1/2,\ a_{2,0,2} = 1,\ a_{2,1,2} = -1,\ a_{2,3,0} = a_{1,0,3} = 0$

(d) $a_{1,2,1} = -1/7,\ a_{2,2,0} = -1/2,\ a_{2,0,2} = 1,$
$a_{2,3,0} = -1/14,\ a_{2,1,2} = -3/7,\ a_{1,0,3} = 0$

2. $a_{1,0,3} = 1$

(a) $a_{1,0,3} = 1,\ a_{1,2,1} = -9/2,\ a_{2,1,2} = -3/2,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = a_{2,3,0} = 0$

(b) $a_{1,0,3} = a_{2,3,0} = 1,\ a_{1,2,1} = a_{2,1,2} = -3,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

(c) $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,0,2} = -3/2,\ a_{2,3,0} = 0,\ a_{2,1,2} = a_{1,2,1} = a_{2,2,0} = 0$

(d) $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,0,2} = 3/2,\ a_{2,3,0} = 0,\ a_{2,1,2} = a_{1,2,1} = a_{2,2,0} = 0$

(e) $a_{1,0,3} = 1, a_{1,2,1} = -1, a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, a_{2,1,2} = -2,\ a_{2,3,0} = 0,$

3. $a_{1,0,3} = -1$

(a) $a_{1,0,3} = a_{2,3,0} = -1,\ a_{1,2,1} = a_{2,1,2} = 3,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

(b) $a_{1,0,3} = -1, a_{1,2,1} = 9/2, a_{2,1,2} = 3/2, a_{2,3,0} = a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

Démonstration. Nous utilisons les résultats de la Proposition 2.3.3. Nous rappellons aussi que nous cherchons uniquement les valeurs réelles des paramètres pour lesquels le système (2.23) admet un centre isochrone à l'origine O.

1. Supposons $a_{1,0,3} = 0$. Nous effectuons le changement de variable $(x, y) \mapsto (-x, y)$, on obtient le système (2.10) dont les centres isochrones sont décrits dans le théorème 2.3.1.

   Grâce à l'algorithme NF, moyennant la Remarque 2.3.4, on obtient directement les quatre cas du théorème 2.3.1, comme des cas susceptibles d'ètre des centres isochrones.

2. $a_{1,0,3} = 1$. Une implémentation de l'algorithme NF établie par Yu dans [23, 24, 25], nous permet d'obtenir la forme normale du système (2.10) en coordonnées polaires pour $N = 6$

$$\dot{r} = \sum_{j=1}^{6} \alpha_{2j+1} r^{2j+1} + O(r^{15}),\ \dot{\theta} = 1 + \sum_{j=1}^{6} \beta_{2j+1} r^{2j} + O(r^{14}).$$

Ce calcul montre que $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{13} = 0$. Ainsi les six premières conditions nécessaire pour avoir un centre à l'origine O sont verifiées. Pour savoir s'il peut s'agir d'un centre isochrone on examine la composante angulaire en cherchant à identifier toutes les valeurs des paramètres du système (2.23) pour lesquels $\beta_3 = \beta_5 = \beta_7 = \beta_9 = \beta_{11} = \beta_{13} = 0$. Nous utilisons l'implantation FGb pour calculer la base de Gröbner associée aux six premières expressions des coefficients $\beta_3, \beta_5, \beta_7, \beta_9, \beta_{11}, \beta_{13}$ de la composante angulaire. Nous obtenons une base que l'on note G_1, composée de 27 polynômes, tel que son premier élément est

$$G_1[1] = -a_{2,3,0}\, a_{2,2,0}\, \left(-a_{2,1,2}^2 + 9\, a_{2,3,0}\right).$$

Notre analyse, va concerner trois cas, présentant chacun la nullité d'un des facteurs du polynôme $G_1[1]$.

(a) $a_{2,3,0} = 0$, en substituant cette condition dans la base G_1, ensuite en calculant à nouveau la base de Gröbner associée à ce cas, nous obtenons une liste de 14 polynômes donnant les solutions suivantes :

i. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,1,2} = -3/2,\ a_{1,2,1} = -9/2,\ a_{2,3,0} = a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

ii. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,0,2} = 3/2, a_{2,3,0} = a_{1,2,1} = a_{2,2,0} = a_{2,1,2} = 0$

iii. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,0,2} = -3/2,\ a_{2,3,0} = a_{1,2,1} = a_{2,2,0} = a_{2,1,2} = 0$

iv. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{1,2,1} = -1,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, a_{2,1,2} = -2$

(b) $a_{2,2,0} = 0$, en substituant cette condition dans la base G_1, nous calculons la base de Gröbner associée qui contient 7 polynômes donnant les solutions suivantes :

i. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,0,2} = 3/2,\ a_{2,2,0} = a_{1,2,1} = a_{2,3,0} = a_{2,1,2} = 0$

ii. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,0,2} = -3/2,\ a_{2,2,0} = a_{1,2,1} = a_{2,3,0} = a_{2,1,2} = 0$

iii. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,1,2} = -3/2,\ a_{1,2,1} = -9/2,\ a_{2,2,0} = a_{2,3,0} = a_{2,0,2} = 0$

iv. $a_{1,0,3} = a_{2,3,0} = 1,\ a_{2,1,2} = a_{1,2,1} = -3,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

(c) $a_{2,3,0} = (1/9)a_{2,1,2}^2$, en substituant cette condition dans la base G_1, ensuite en calculant à nouveau la base de Gröbner associée à ce cas, nous obtenons une liste de 12 polynômes donnant les solutions suivantes :

i. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,0,2} = -3/2,\ a_{2,2,0} = a_{1,2,1} = a_{2,3,0} = a_{2,1,2} = 0$

ii. $a_{1,0,3} = 1,\ a_{2,0,2} = 3/2,\ a_{2,2,0} = a_{1,2,1} = a_{2,3,0} = a_{2,1,2} = 0$

iii. $a_{1,0,3} = a_{2,3,0} = 1,\ a_{2,1,2} = a_{1,2,1} = -3,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

Il est à noter que parmi les solutions obtenues, certaines sont reproduites dans différents cas, par exemple les cas 2(a)ii $\equiv$ 2(b)i et 2(a)iii $\equiv$ 2(b)ii. Ce qui donne exactement les 5 cas possibles pour que l'origine O soit un centre isochrone pour $a_{1,0,3} = 1$ donnés dans le théorème.

Analyse des conditions nécessaires pour $a_{1,0,3} = 1$

2a- Dans ce cas le système (2.23) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - 9/2yx^2 + y^3 \\ \dot{y} &= -x - 3/2xy^2 \end{aligned}\right\}$$

La nonlinéarité est homogène de degré 3. Le changement de variables $(x, y) \mapsto (\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}})$ nous donne le système $\tilde{S^*}_3$ de [19] pour lequel O est un centre isochrone [19]. Voir aussi [4, 18], où on trouve une integrale première, le changement de variables linéarisant et le commutateur transversal pour ce système.

2b- Dans ce cas le système (2.23) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - 3\,x^2y + y^3 \\ \dot{y} &= -x + x^3 - 3\,xy^2 \end{aligned}\right\}$$

qui est aussi centre linéaire perturbé par un polynôme de degré 3, par le changement de variable $(x, y) \mapsto (y, x)$, on retrouve le système ${S^*}_1$ de [19], qui admet un centre isochrone en O [19].

2c- et 2d- le système se réduit au système de Liènard

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + y^3 \\ \dot{y} &= -x \pm 3/2\,y^2 \end{aligned}\right\}$$

avec

$$g(x) = g'(0)x + \frac{1}{x^3}\left(\int_0^x sf(s)ds\right)^2 \tag{2.28}$$

Une caractérisation des centres isochrones pour les systèmes de Liènard est établie dans [13, 9, 1, 20].

2e- En coordonnées polaires on obtient

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= -1/2\,\sin(\theta)\,r^2\sqrt{2} + 1/2\,r^3\sin(2\,\theta) \\ \dot{\theta} &= 1 + (-1/2\,\cos(2\,\theta) + 1/2)\,r^2 - 1/2\,r\cos(\theta)\,\sqrt{2} \end{aligned}\right\}$$

Ce système coincide avec la famille (ii) du théorème 8.11 dans la thèse de Garcia [15] avec $R_1 = r_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $R_1 = r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'origine O est un centre isochrone [15]. Voir aussi le système CR_4 de [4].

3. $a_{1,0,3} = -1$. De la même manière que dans le premier cas, l'algorithme NF implémenté en *Maple* permet d'obtenir la forme normale (2.9) à l'ordre 13 ($N = 6$) avec $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{13} = 0$. Ainsi les six premières conditions nécessaires pour avoir un centre à l'origine O sont satisfaites. Pour savoir s'il peut s'agir d'un centre isochrone on examine la composante angulaire en cherchant à identifier toutes les valeurs des paramètres du système (2.23) pour lesquels $\beta_3 = \beta_5 = \beta_7 = \beta_9 = \beta_{11} = \beta_{13} = 0$. Nous utilisons l'implantation *FGb* pour calculer la base de Gröbner associée aux six premières expressions des coefficients $\beta_3, \beta_5, \beta_7, \beta_9, \beta_{11}, \beta_{13}$ de la composante angulaire. Notons par G_{-1} la base de Gröbner des six premiers coefficients β_{2j+1} de la composante angulaire. G_{-1} est composé de 27 polynômes, avec pour premier élément

$$G_{-1}[1] = a_{2,2,0}a_{2,3,0}\left(a_{2,1,2}^2 + 9a_{2,3,0}\right)$$

La nullité de $G_{-1}[1]$ nous conduit à analyser la nullité de chacun de ses facteurs.

(a) $a_{2,3,0} = 0$, substituons cette condition dans G_{-1}, ensuite nous calculons a nouveau la base de Gröbner associée, nous obtenons l'unique solution réelle

i. $a_{1,0,3} = -1, a_{1,2,1} = 9/2, a_{2,1,2} = 3/2, a_{2,3,0} = a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

(b) $a_{2,2,0} = 0$ de même nous obtenons une base de Gröbner composée de 7 polynômes, dont les solutions communes sont

i. $a_{1,0,3} = a_{2,3,0} = -1,\ a_{1,2,1} = a_{2,1,2} = 3,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

ii. $a_{1,0,3} = -1, a_{1,2,1} = 9/2, a_{2,1,2} = 3/2, a_{2,3,0} = a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

(c) $a_{2,3,0} = -(1/9)a_{2,1,2}^2$ pour ce cas nous obtenons la solution

i. $a_{1,0,3} = a_{2,3,0} = -1,\ a_{1,2,1} = a_{2,1,2} = 3,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

Ainsi nous concluons que pour $a_{1,0,3} = -1$, nous avons exactement deux solutions 3a et 3c.

Analyse des conditions nécessaires pour $a_{1,0,3} = -1$

3a- Dans ce cas le système (2.23) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + 3\,x^2y - y^3 \\ \dot{y} &= -x - x^3 + 3\,xy^2 \end{aligned}\right\}$$

Nous effectuons le changement de variables $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, qui donne le système ${S^*}_1$ voir 2b.

3b- Dans ce cas le système (2.23) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + 9/2yx^2 - y^3 \\ \dot{y} &= -x + 3/2xy^2 \end{aligned}\right\}$$

Par le changement de variables $(x, y) \mapsto (\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}})$ on obtient ${S^*}_3$ pour lequel O est un centre isochrone [19, 18, 4].

Ainsi, les conditions nécessaires obtenues par l'algorithme NF sont aussi suffisantes.

□

2.3.2 Perturbation $a_{1,3,0}$

Il s'agit du système

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y + a_{1,3,0}x^3 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

Théorème 2.3.6. *Si $a_{1,3,0} \neq 0$ alors l'origine O est un foyer pour le système* (2.29).

Le système (2.29) *admet un centre isochrone en O si et seulement si ses paramètres vérifient $a_{1,3,0} = 0$ et l'une des quatre conditions du Théorème 2.3.1.*

Démonstration. Par analogie, nous utilisons la Proposition 2.3.3, ce qui réduit l'analyse aux cas $a_{1,0,3} = \pm 1$.

En exécutant le code *Maple* de l'algorithme NF, ensuite en reconstruisant la forme normale en coordonnées polaires

$$\dot{r} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{2j+1} r^{2j+1} + \mathcal{O}(r^{2N+3}),\ \dot{\theta} = 1 + \sum_{j=1}^{N} \beta_{2j+1} r^{2j} + \mathcal{O}(r^{2N+2})$$

on obtient les coefficients de la composante radiale dont $\alpha_3 = \pm\frac{3}{8}$. Ainsi le premier coefficient de Lyapunov ne peut être nul donc l'origine O ne peut être un centre pour le système (2.29). □

2.3.3 Perturbation $a_{2,0,3}$

Il s'agit du système

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 + a_{2,0,3}y^3\end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

Théorème 2.3.7. *Si $a_{2,0,3} \neq 0$ alors l'origine O est un foyer pour le système* (2.30).

Le système (2.30) *admet un centre isochrone en O si et seulement si ses paramètres vérifient $a_{2,0,3} = 0$ et l'une des quatre conditions du Théorème 2.3.1.*

Démonstration. De la même manière que dans la preuve du théorème précédent, on vérifie que le premier coefficient de Lyapunov associé au cas $a_{2,0,3} \neq 0$ ne peut être nul, en effet $\alpha_3 = \pm\frac{3}{8}$ pour $a_{2,0,3} = \pm 1$, ainsi pour $a_{2,0,3} \neq 0$ l'origine O est un foyer. □

2.3.4 Perturbation $a_{1,1,2}$

Il s'agit du système

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y + a_{1,1,2}xy^2 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2\end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

Théorème 2.3.8. *Si $a_{1,1,2} \neq 0$ alors l'origine O est un foyer pour le système* (2.31).

Le système (2.31) *admet un centre isochrone en O si et seulement si ses paramètres vérifient $a_{1,1,2} = 0$ et l'une des quatre conditions du Théorème 2.3.1.*

Démonstration. De la même manière que précédemment si $a_{1,1,2} \neq 0$, le premier coefficient de la composante radiale de la forme normale est non nul ; pour $a_{1,1,2} \pm 1$ on a $\alpha_3 = \pm\frac{1}{8}$.

□

2.3.5 Perturbation $a_{2,2,1}$

Il s'agit du système

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 + a_{2,2,1}x^2y\end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Théorème 2.3.9. *Si $a_{2,2,1} \neq 0$ alors l'origine O est un foyer pour le système* (2.32).

Le système (2.32) *admet un centre isochrone en O si et seulement si ses paramètres vérifient $a_{2,2,1} = 0$ et l'une des quatre conditions du Théorème 2.3.1.*

Démonstration. Toujours de la même manière, le premier coefficient de Lyapunov pour $a_{2,2,1} = \pm 1$ est égal à $\alpha_3 = \pm\frac{1}{8}$, ainsi O est un foyer pour (2.32). □

2.3.6 Perturbation $a_{1,0,2}$

Il s'agit du système

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y + a_{1,0,2}y^2 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

Théorème 2.3.10. *L'origine O est un centre isochrone pour le système* (2.33) *si et seulement si ses coefficients vérifient $a_{1,0,2} = 0$ et l'une des quatre conditions du théorème 2.3.1.*

Démonstration. D'après la remarque 2.3.4, il suffit de considérer uniquement les deux cas suivants

1. $a_{1,0,2} = 0$
2. $a_{1,0,2} = 1$

Le cas $a_{1,0,2} = 0$ a été déjà décrit dans le théorème 2.3.1. Soit maintenant $a_{1,0,2} = 1$. Nous calculons les coefficients de la composante radiale de la forme normale en coordonnées polaires à l'ordre 13 ($N = 6$). On obtient $\alpha_3 = -a_{2,0,2}/4$. Nous substituons la condition de nullité de α_3 qui se réduit à $a_{2,0,2} = 0$ dans les expressions des cinq autres coefficients de la composante radiale. Ensuite nous calculons la base de Gröbner associée à l'ideal engendré par les expressions obtenues. Nous obtenons une base dont les polynômes admettent un facteur commun qui n'est autre que le coefficient de Lyapunov $\alpha_5 = a_{2,2,0}\,(a_{2,1,2} + a_{1,2,1})$. Ainsi, la nullité de α_3 et α_5 assure les six premières conditions nécessaires pour avoir un centre à l'origine O.

Nous considérons les coefficients de la composante angulaire dans les deux cas suivants :

1. $a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$
2. $a_{2,0,2} = (a_{2,1,2} + a_{1,2,1}) = 0$

En calculant les bases de Gröbner de l'idéal engendré par les six premiers coefficients de la composante angulaire associées à chacun de ces cas, nous ne trouvons jamais des solutions réelles. Donc dans ce cas O ne peut pas être un centre isochrone.

□

2.3.7 Perturbation $a_{1,2,0}$

Il s'agit du système

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y + a_{1,2,0}x^2 \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

D'après la Remarque 2.3.4 on peut se limiter au cas $a_{1,2,0} = 1$.

Théorème 2.3.11. *Le système* (2.34) *où* $a_{1,2,0} = 1$ *admet un centre isochrone à l'origine* O *si et seulement si*

$$a_{2,3,0} = -4/9, a_{2,1,2} = 0, a_{1,2,1} = 0, a_{2,2,0} = 0, a_{2,0,2} = 0, a_{1,2,0} = 1$$

Démonstration. Soit $a_{1,2,0} = 1$. Le calcul de la composante radiale donne $\alpha_3 = a_{2,2,0}/4$. Si $\alpha_3 = 0$ alors $a_{2,2,0} = 0$. Nous substituons $a_{2,2,0} = 0$ dans $\alpha_5, \ldots, \alpha_{13}$ afin d'assurer la première condition nécessaire pour que l'origine O soit un centre. Le calcul montre que $a_{2,0,2}$ est un facteur commun de tous polynômes $\alpha_5, \ldots, \alpha_{13}$. Il reste à examiner deux cas :

1. $a_{1,2,0} = 1,\ a_{2,2,0} = 0,\ a_{2,0,2} \neq 0$
2. $a_{1,2,0} = 1,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$

Dans le premier cas où $a_{2,0,2} \neq 0$, nous divisons les cinq expressions des coefficients de la composante radiale $\alpha_5, \ldots, \alpha_{13}$ par $a_{2,0,2}$. Nous calculons la base de Gröbner associée constituée de 8 polynômes. Une résolution par *Maple* donne les 3 solutions suivantes

$$\{a_{2,1,2} = 0, a_{1,2,1} = 0, a_{2,2,0} = 0, a_{2,0,2} = 0, a_{1,2,0} = 1, a_{2,3,0} = -3/4\}$$

$$\{a_{2,2,0} = 0, a_{1,2,0} = 1, a_{2,3,0} = 0, a_{2,0,2} = -1, a_{2,1,2} = -a_{1,2,1}\}$$

$$\{a_{2,2,0} = 0, a_{1,2,0} = 1, a_{2,3,0} = 0, a_{2,1,2} = -a_{1,2,1}, a_{2,0,2} = 1\}$$

La première solution doit être rejetée car on a supposé $a_{2,0,2} \neq 0$. Dans les deux autres cas, une substitution des conditions dans les expressions des coefficients de la composante

angulaire donne comme base de Gröbner la base formée du polynôme constant 1, ce qui équivaut à dire que les six polynômes $\beta_3, \ldots, \beta_{13}$ n'ont pas de zéros communs.

On passe au deuxième cas : $a_{1,2,0} = 1,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$; c'est un cas qui assure la nullité des six premiers coefficients de Lyapunov. Nous substituons ces conditions dans les expressions des coefficients de la composante angulaire, ce qui donne comme unique solution possible des équations $\beta_{2j+1} = 0,\ 1 \leq j \leq 6$:

$$a_{2,3,0} = -4/9,\ a_{1,2,0} = 1,\ a_{2,1,2} = a_{1,2,1} = a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$$

Dans ce cas (2.34) se réduit à

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^2 \\ \dot{y} &= -x - 4/9\, x^3 \end{aligned}\right\}$$

C'est un système de Liénard avec $f(x) = -2\,x,\ g(x) = x + 4/9\, x^3$ vérifiant

$$g(x) = g'(0)x + \frac{1}{x^3}\left(\int_0^x sf(s)ds\right)^2 \tag{2.35}$$

D'après [20] l'origine O est un centre isochrone.

□

2.3.8 Perturbation $a_{2,1,1}$

Il s'agit du système

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{1,2,1}x^2y \\ \dot{y} &= -x + a_{2,2,0}x^2 + a_{2,0,2}y^2 + a_{2,1,1}xy + a_{2,3,0}x^3 + a_{2,1,2}xy^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

D'après la Remarque 2.3.4 on peut se limiter au cas $a_{2,1,1} = 1$

Théorème 2.3.12. *Le système* (2.36) *où* $a_{2,1,1} = 1$ *admet un centre isochrone à l'origine* O *si et seulement si l'une des conditions suivantes sont satisfaite :*

1. $a_{2,1,1} = 1,\ a_{2,3,0} = -1/9,\ a_{2,1,2} = a_{1,2,1}a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = 0$
2. $a_{2,1,1} = 1,\ a_{2,1,2} = -2/9,\ a_{1,2,1} = 1/9,\ a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = a_{2,3,0} = 0$

Démonstration. Soit $a_{2,1,1} = 1$. Nous calculons la forme normale d'ordre 13 ($N = 6$) du système (2.36) en coordonnées polaires. On obtient le premier coefficient de Lyapunov

$\alpha_3 = (a_{2,0,2} + a_{2,2,0})/8$.
La première condition nécessaire pour que l'origine O soit un centre est $a_{2,0,2} = -a_{2,2,0}$. On substitue cette condition dans α_5. On obtient

$$\alpha_5 = -1/48\, a_{2,0,2}\, (a_{1,2,1} - a_{2,1,2} + a_{2,3,0})$$

La seconde condition nécessaire $\alpha_5 = 0$ nous conduit à analyser les deux cas suivants :

1. $\{a_{2,0,2} = a_{2,2,0} = 0\}$
2. $\{a_{2,0,2} = -a_{2,2,0},\ a_{1,2,1} - a_{2,1,2} + a_{2,3,0} = 0\}$

1. $a_{2,0,2} = a_{2,2,0} = 0$ Nous substituons cette condition dans les quatre expressions des coefficients de la composante radiale et on obtient $\alpha_7 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{13} = 0$. Les six premières conditions nécessaires pour que O soit un centre sont donc satisfaites. Nous substituons ces conditions dans les expressions des coefficients de la composante angulaire. On calcule la base de Gröbner associée et on obtient deux solutions :

$$\{a_{2,1,1} = 1, a_{2,3,0} = -1/9, a_{2,1,2} = a_{2,2,0} = a_{2,0,2} = a_{1,2,1} = 0\}$$

$$\{a_{2,2,0} = 0, a_{2,0,2} = 0, a_{2,1,1} = 1, a_{2,3,0} = 0, a_{2,1,2} = -2/9, a_{1,2,1} = 1/9\}$$

Dans le cas de la première solution le système (2.36) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + xy - 1/9\, x^3 \end{aligned}\right\}$$

Nous avons un système de Liénard avec $f(x) = -x$ et $g(x) = x + 1/9\, x^3$ qui satisfont

$$g(x) = g'(0)x + \frac{1}{x^3}(\int_0^x sf(s)ds)^2$$

D'après [20] l'origine O est un centre isochrone.
Dans le cas de la seconde solution le système (2.33) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + 1/9x^2y \\ \dot{y} &= -x + xy - 2/9\, xy^2 \end{aligned}\right\}$$

Par le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, x)$ on obtient

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xy - 2/9\, x^2y \\ \dot{y} &= x + 1/9\, xy^2 \end{aligned}\right\}$$

qui est de type Liénard (2.13) avec $f(x) = -3\ (2\,x - 3)^{-1}$ et $g(x) = 1/9\, x\, (2\,x - 3)\, (x - 3)$.
D'après le cas 9 du Théorème 3 de [11] l'origine O est un centre isochrone.

2. $a_{2,0,2} = -a_{2,2,0}$ et $a_{1,2,1} - a_{2,1,2} + a_{2,3,0} = 0$. Dans ce deuxième cas, un calcul de la base de Gröbner ne nous donne aucune solution réelle.

□

Notons que tous les cas de centres isochrones trouvés dans ce chapitre sont bien connu dans la littérature, mais identifiés par leurs appartenance à d'autres familles tel que les systèmes de Liénard étudié dans [13, 4, 8], les systèmes de type Liénard étudié dans [10, 11, 3], les centres linéaires perturbés par une nonlinéarité homogène dans [19, 18, 4] et les systèmes cubiques réversibles par rapport au temps dans [4, 15].

En guise de conclusion ; nous pensons avoir montrer sur des exemples non triviaux la puissance de méthode des formes normales dans la recherche des centres isochrones.

2.4 Perturbation homogène quartique du centre linéaire

Dans ce paragraphe nous présentons deux systèmes dépendant de paramètres dont l'origine O est un candidat à être un centre isochrone. En effet, nous avons vérifié grâce à l'algorithme NF que ces systèmes satisfont des conditions nécessaires pour que l'origine O soit un centre isochrone.

2.4.1 Le système de Chavarriga, Giné et Garcia

Le système suivant

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{1}{135}\,(81 - 5\,a)\,(5\,a - 9)\,y^3 x - \frac{5}{27}\,(3 + a)^2\,y x^3 \\ \dot{y} &= -x - \frac{1}{540}\,(9 - 5\,a)^2\,y^4 + \frac{1}{54}\,(3 + a)\,(5\,a - 201)\,y^2 x^2 + \frac{5}{36}\,(3 + a)^2\,x^4 \end{aligned}\right\}$$

a été étudié par J. Chavarriga, J. Giné et I. Garcia dans [5]. L'algorithme NF montre que quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha_{2j+1} = \beta_{2j+1} = 0$, $1 \leq j \leq 14$. Cela suggère très fortement que l'origine O est un centre isochrone. Pour les valeurs du paramètre $a \in I = \{9/5,\ -39/5,\ -3,\ 81/5,\ -87/5,\ 41/5,\ -45/7\}$, c'est démontré dans [5]. Pour $a \in R - I$ le problème restait ouvert jusqu'à la publication de [7] où on montre que l'origine O est un centre isochrone pour toute valeur de $a \in R$.

2.4.2 Le système d'Abel à nonlinéarité homogène

Volokitin et Ivanov dans [22] ont démontré que parmi les systèmes de la forme

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y\\ \dot{y} &= x + a_{0,4}y^4 + a_{1,3}xy^3 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{3,1}x^3y + a_{4,0}x^4\end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

l'origine O est un centre isochrone si et seulement si on est dans le cas particulier

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y\\ \dot{y} &= x + \lambda x^3y + \lambda xy^3\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nous étudions le système suivant

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y + b_{4,0}x^4\\ \dot{y} &= x + a_{0,4}y^4 + a_{1,3}xy^3 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{3,1}x^3y + a_{4,0}x^4\end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

qui pour $b_{4,0} = 0$ coincide avec le système (2.37).

Théorème 2.4.1. *L'origine O est un centre isochrone du système* (2.39) *si et seulement s'il peut se réduire à l'un des quatre systèmes suivants*

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y\\ \dot{y} &= x + \lambda x^3y + \lambda xy^3\end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \lambda x^4\\ \dot{y} &= x - \lambda x^3y\end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \lambda x^4\\ \dot{y} &= x - 16\lambda x^3y\end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \lambda x^4\\ \dot{y} &= x + 5\lambda x^3y - 9\lambda xy^3\end{aligned}\right\}, \tag{2.43}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Deux cas se présentent $b_{4,0} = 0$ et $b_{4,0} \neq 0$.

1. $b_{4,0} = 0$. Le résultat annoncé n'est rien d'autre que le théorème de Volokitin et Ivanov formulé ci-dessus. D'ou l'assertion concernant le système (2.40).
2. $b_{4,0} \neq 0$. Par une homothetie $(x, y) \mapsto (\mu x, \mu y)$ avec $\mu = -\frac{1}{b_{4,0}^{1/3}}$ on se ramène au cas ou $b_{4,0} = -1$. La mise en forme normale (2.9) à l'ordre 19 ($N = 9$) et le calcul, moyennant les bases de Gröbner, des conditions assurant que $\alpha_{2j+1} = \beta_{2j+1} = 0$, $1 \leq j \leq 9$, nous déterminons les trois derniers cas (2.41) - (2.43) avec $\lambda = 1$.

   L'axe des y étant un axe de symétrie des orbites de ces trois systèmes, l'origine O est forcément un centre [12].

   En vertu du Théorème 1 de [5] l'origine O est un centre isochrone du système (2.41). Ce fait se trouve déjà explicitement formulé dans [5] page 86.

   Le système (2.42) admet un centre isochrone à l'origine O. En effet, grâce à un algorithme que nous présentons dans l'Annexe, nous avons réussi à construire un commutateur transversal à ce système :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x - 216\,x^9y - 12\,x^3y + 72\,x^5y^2 - 8\,xy^3 + 36\,x^7 + 216\,x^{13} \\ \dot{y} &= y + 9\,x^4 + 324\,x^{10} + 1944\,x^{16} - 72\,x^6y - 1728\,x^{12}y - 12\,x^2y^2 + 432\,x^8y^2 - 8\,y^4 \end{aligned}\right\}$$

   D'après le Théorème 5.1 de [4] l'existence de tel commutateur implique que l'origine O est un centre isochrone pour le système (2.42).

   Le système (2.43) satisfait les conditions de linéarisabilité établies dans le cas (1) du Théorème 5 de [7]. Ainsi l'origine O est un centre isochrone. Ce fait se trouve déjà explicitement formulé dans [7] page 1537.

□

Notons que le systeme (2.42) satisfait aussi les conditions de linéarisabilité établies dans le cas (3) du Théorème 5 de [7]. Ainsi on obtient une seconde démonstration du fait que l'origine O est un centre isochrone de ce système.

Remarque 2.4.2. Finalement, notons que la mise en forme normale (2.9) à l'ordre 19 ($N = 9$) du système (2.37) montre que $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{15} = \alpha_{17} = \beta_3 = \beta_5 = \beta_9 = \beta_{11} = \beta_{15} = \beta_{17} = 0$. Le calcul de la base de Gröbner de l'idéal engendré par $\{\alpha_7, \alpha_{13}, \alpha_{19}, \beta_7, \beta_{13}, \beta_{19}\}$ conduit à la conclusion que les conditions $\alpha_7 = \alpha_{13} = \alpha_{19} = \beta_7 = \beta_{13} = \beta_{19} = 0$ sont satisfaites uniquement dans le cas du système (2.40). Ajoutons que les calculs à l'ordre 17 ($N = 8$) ne suffisent pas pour conclure.

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Monsieur A. Raouf Chouikha (Université Paris 13, France) qui m'a introduit au sujet, m'a aidé à me familiariser avec les centres des systèmes polynômiaux et m'a proposé d'étudier les algorithmes permettant de tester l'existence de centres isochrones. Je le remercie aussi pour plusieurs discussions importantes.

Je remercie Monsieur Andrzej J. Maciejewski (University of Zielona Góra, Poland) pour m'avoir indiqué l'existence de la méthode des formes normales et pour l'idée de l'appliquer dans la recherche des centres isochrones.

Je remercie Madame Magali Bardet (Universite de Rouen) de m'avoir expliqué le maniement informatique des bases de Gröbner, en particulier de m'avoir appris a me servir du systeme *Salsa Sowtware*. Je la remercie aussi pour l'aide qu'elle m'a rendu en lisant l'Introduction et le Chapitre 2 de cette thèse et en corrigeant les fautes et les maladresses de francais.

Je remercie Monsieur Jean Marie Strelcyn (Université de Rouen, France) qui m'a suggéré l'étude des systèmes quadratiques et qui m'a apporté une aide plus que très substantielle dans la rédaction finale de ce chapitre.

Last but not least, je remercie beaucoup Monsieur Isaac A. Garcia (University of Lleida, Spain) pour ses précieuses et importantes remarques critiques.

Bibliographie

[1] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero, Isochronicity via normal form,
Qual. Theory Of Dyn. Systems. 1, p. 133-156, (2000).

[2] T. Becker, V. Weispfenning, Gröbner bases,
Springer-Verlag, (1993).

[3] I. Boussaada Isochronicity conditions for some real polynomial systems,
Preprint : Arxiv 0807.0131, submitted(2008).

[4] J. Chavarriga, M. Sabatini , A survey of isochronous centers,
Qual. Theory of Dyn. Systems vol 1 , (1999), 1-70.

[5] J. Chavarriga, J. Giné and I. A. García , Isochronous centers of a linear center perturbed by fourth degree homogeneous polynomial,
Bull. Sci. Math 123 , (1999), 77-99.

[6] J. Chavarriga, J. Giné and I. A. García , Isochronous centers of a linear center perturbed by fifth degree homogeneous polynomials,
J. of Comput. and Appl. Mathematics 126 , (2000), 351-368.

[7] X. Chen, V. G. Romanovski, W. Zhang, Linearizability conditions of time-reversible quartic systems having homogeneous nonlinearities,
Nonlinear Analysis 69, (2008), 1525-1539.

[8] A. R. Chouikha, Monotonicity of the period function for some planar differential systems. Part I : conservative and quadratic systems,
Applicationes Mathematicae, 32 no. 3 (2005), 305-325.

[9] A. R. Chouikha, Monotonicity of the period function for some planar differential systems. Part II : Liénard and related systems,
Applicationes Mathematicae, 32 no. 4 (2005), 405-424.

[10] A. R. Chouikha, Isochronous centers of Lienard type equations and applications,
J. Math. Anal. Appl. 331 (2007), 358-376 .

[11] A. R. Chouikha,V. G. Romanovski, X. Chen Isochronicity of analytic systems via Urabe's criterion,
J. Phys. A, 40 (2007) 10 , 2313-2327.

[12] C. Christopher, Around the Center-Focus Problem, 1-90 pp. In C. Christopher, C. Li Limit cycles of differential equations. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. *Birkhäuser Verlag, Basel*, 2007. viii+171 pp.

[13] C. Christopher and J. Devlin, On the classification of Lienard systems with amplitude-independent periods,
J. Diff. Eq. (2004), 1-17.

[14] J. C. Faugère, FGb Salsa Software, http ://fgbrs.lip6.fr

[15] I. Garcia, Contribution to the qualitative study of planar vector fields, PhD Thesis, Dept. de Matematica. University of Lleida (2000).

[16] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields *Springer*, 2002. xvi+459 pp.

[17] W. S. Loud The behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers,
Contributions to Diff. Eq, 3 (1964) , 21-36.

[18] P. Mardesić, C. Rousseau, B. Toni, Linearization of isochronous Centers,
J. Diff. Eq. 121, p.67-108 (1995).

[19] I. I. Pleshkan, A new method of investigating the isochronicity of a system of two differential equations,
*Diff. Eq.*5, p. 796-802 (1969).

[20] M. Sabatini, On the period function of Lienard systems,
J. Diff. Eq. 152, p. 467-487, 152 (1999).

[21] M. Sabatini, On the period function of $x'' + f(x)x'^2 + g(x) = 0$,
J. Diff. Eq. 196, no. 1, p. 151-168 (2004).

[22] E. P. Volokitin, V. V. Ivanov, Isochronicity and commutation of polynomial vector fields,
Siberian Math. Journal. 40, p. 23-38, (1999).

[23] P. Yu, Q. Bi Symbolic computation of normal forms for semi-simple case, *J. Comput. Appl. Math.* 102, (1999) p. 195-220.

[24] P. Yu, Computation of normal forms via a perturbation technique, *J. Sound Vibration.* p.19-38, 211(1998).

[25] P. Yu, A. Y. T. Leung Normal forms of vector field with perturbation parameters and their application, *Chaos Solitons Fractals.* p.564-579, 34 (2007).

Annexe A

A.1 Bases de Gröbner et calcul formel

Pour la résolution du problème des centres isochrones abordé dans cette thèse nous avons utilisé différentes méthodes algorithmiques. Ces algorithmes nous permettent d'obtenir les conditions nécessaires pour que le point O soit un centre isochrone, sous formes d'équations algébriques dont les variables sont les coefficients du système d'équations différentielles étudié. Ainsi, le problème revient à trouver toutes les solutions réelles d'un système d'équations polynômiale à plusieurs variable. Pour cette tâche il est commode d'utiliser les bases de Gröbner et l'algorithme de Buchberger qui permet de les calculer explicitement.

Soit I un idéal de $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. On définit deux ordres monomiaux comme suit.

Définition A.1.1. Un ordre monomial admissible sur $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ est une relation d'ordre total $<$ sur l'ensemble des monômes de $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, vérifiant :

1. si $m_1 < m_2$ et m_3 est un monôme alors $m_1 m_3 < m_2 m_3$,
2. tout sous ensemble non vide de monômes admet un plus petit élément pour $<$.

Nous citons les ordres admissibles que nous avons utilisé dans cette thèse :

1. *L'ordre du degré inverse lexicographique (grevlex)* avec $x_1 > x_2 > \ldots x_n$ est défini par $m_1 = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} <_{grevlex} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} = m_2$ si $deg(m_1) < deg(m_2)$ ou $deg(m_1) = deg(m_2)$ et le dernier terme non nul dans $(\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ est positif.
2. Soit $W = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ un n-uplet d'entiers, et $<$ un ordre monomial admissible. *L'ordre monomial $<_W$ pondéré par le poids W* est défini par $m_1 = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} <_W x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} = m_2$ si $x_1^{w_1\alpha_1} \ldots x_n^{w_n\alpha_n} < x_1^{w_1\beta_1} \ldots x_n^{w_n\beta_n}$

Considérons l'idéal $I \neq 0$ muni de l'ordre monomial admissible $<$.

Définition A.1.2. Les polynômes $g_1, g_2, \ldots, g_n \in I - \{0\}$ forment une base de Gröbner de l'idéal I si quelque soit le polynôme $f \in I - \{0\}$, le monôme supérieur de f (par rapport à l'ordre $<$) est divisible par le monôme supérieur de l'un des polynômes $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Des implantations de l'algorithme de Buchberger ont été réalisées sur la plus part des logiciels de calcul formel comme MAPLE et SINGULAR qu'on a utilisé dans cette thèse. Notons aussi qu'on a utilisé l'algorithme F4 dont l'implantation est FGb de SALSA Software. En effet cette implantation a permi de réduire d'une manière considérable le coût de calcul (en temps et en mémoire) dans le calcul des bases de Gröbner.

A.2 C-Algorithm

Un des systèmes étudiées dans le chapitre 1 de la partie II est le suivant :

```
dx:=-y+B11*x*y+B21^2*x^2*y+B31^3*x^3*y:
dy:=x+A20*x^2+A02*y^2+A30^2*x^3+A12^2*x*y^2+A22^3*x^2*y^2+A40^3*x^4:
```

Construction des fonctions f et g

```
prov:=collect(expand(subs(x(z)=x,y(z)=y,subs(diff(x(z),z)=dx,diff(y(z),z)=dy,subs(di
g:=-factor(subs(y=0,prov)):
f:=-normal((prov+g)/dx^2):
```

On définit la fonction d'Urabe (Il nous faut au moins 9 équations pour nos 9 variables, ainsi nous fixons m=9)

```
m:=9: h:=sum(cat(c,2*i-1)^(2*i-1)*xi^(2*i-1),i=1..m):
```

Développement de la première quantité de C-algorithme

```
P :=xi;for n from 1 by 1 to 2*m+1 do
P:=expand(series(diff(P,xi)*(1+h)-(2*n-1)*P*diff(h,xi), xi,2*m+2-n )):
cat(v,n):=expand(subs(xi=0,P)); print(n);  od:
```

Développement de la deuxième quantité de C-algorithme

```
 Den:=-denom(f):Num:=-numer(f): Q:=g:for i from 1 to 2*m+1 do
 Q:=expand(series(diff(Q,x)*Den+Q*((1-i)*diff(Den,x)+(2-i)*Num),x,2*m+2-i)):
cat(w,i):=expand(subs(x=0,Q));   print(i);od:
```

Le système d'équations algébriques à résoudre (pour obtenir les conditions nécessaires)

```
for i from 1 to 2*m+1 do
cat(s,i):=(w||i)-(v||i); od:
```

L'étape suivante consiste à éliminer les coefficients c_i de la fonction d'Urabe. Une fois le système polynômial obtenu, il est à noter qu'on a essayé plusieurs implantations pour calculer la base de Gröbner et il s'avère que FGb est la plus efficace.

A.3 Calcul des commutateurs

Cette procédure permet de calculer le champ commutant avec un champ donné.

```
CommutatingSystem:= proc(V1,V2,n)
  local A1,A2,W1,W2,COF1,COF2,Cond1,Cond2,i,j,k,l:
  global Ideal:
  W1:=(sum(sum(a[i,j]*U^i*V^j,i=0..n-j),j=0..n)):
  W2:=(sum(sum(b[i,j]*U^i*V^j,i=0..n-j),j=0..n)):
  A1:=collect(expand(V1*diff(W1,U)-W1*diff(V1,U)+V2*diff(W1,V)-W2*diff(V1,V)),V):
  A2:=collect(expand(V1*diff(W2,U)-W1*diff(V2,U)+V2*diff(W2,V)-W2*diff(V2,V)),V):
  for k from 0 to degree(A1,V) do
  COF1[k]:=coeff(A1,V,k);
  for l from 0 to degree(COF1 [k],U) do
  Cond1[k,l]:=coeff(COF1[k],U,l);
  od:
  od:
  for k from 0 to degree(A2,V) do
  COF2[k]:=coeff(A2,V,k);
  for l from 0 to degree(COF2[k],U) do
  Cond2[k,l]:=coeff(COF2[k],U,l);
  od:
```

```
od:
Ideal:=factor([seq(seq(Cond1[m,o],o=0..degree(COF1[m],U)),m=0..degree(A1,V)),
seq(seq(Cond2[m,o],o=0..degree(COF2[m],U)),m=0..degree(A2,V))]):
end:
```

Notons qu'au voisinage du point singulier O, à l'exception de O, il faut vérifier la transversalité du champ commutant obtenu avec le champ de départ. Cela implique que O est un centre isochrone.