

# Réduction de modèle par POD-Galerkin pour les problèmes d'Interaction Fluide Structure (IFS)

LIBERGE Erwan  
Directeur de thèse : Aziz Hamdouni

LEPTAB - Université de La Rochelle  
EIGSI

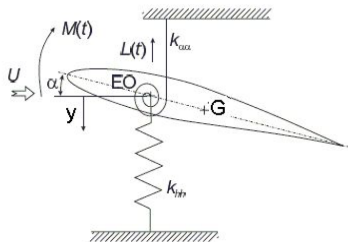
01 Février 2008

# Thèse financée par le conseil général de Charente maritime



# Contexte général

## Interaction fluide solide rigide



# Contexte général

## Domaine d'application



(a) éoliennes



(b) Faisceaux de tubes



# Interaction fluide solide rigide

## Problématique de la discrétisation du problème complet

- Temps de calcul
- Stockage des résultats
- Résolution des problèmes couplés n'ayant pas la même échelle de temps

## Limite

- Non adapté pour du contrôle actif (calcul en temps réel demandé)
- Etude paramétrique coûteuse en temps de calcul



# Interaction fluide solide rigide

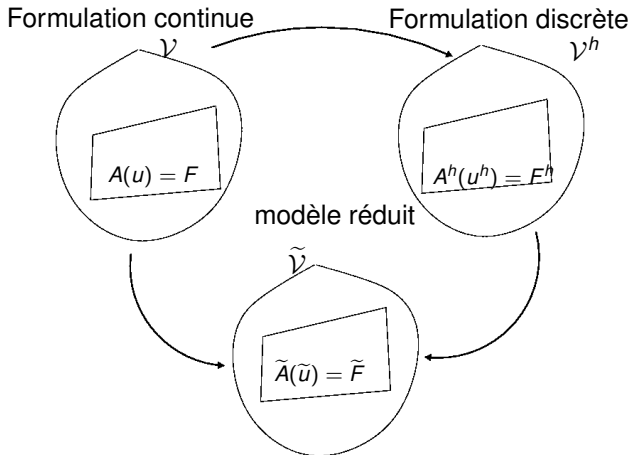
## Réduction de modèle par système dynamique d'ordre bas

Partant de résultats obtenus à partir d'un premier calcul, construire un modèle réduit.

Le coût de la phase de calcul est compensé si :

- le modèle réduit est conservé pour une gamme de paramètres différent de ceux ayant permis de le construire  
⇒ optimisation de forme
- Pour des problèmes couplés, la base réduite, pour le phénomène dont l'échelle de temps est la plus grande, est construite sur un temps long, le modèle réduit étant ensuite résolu selon l'échelle de temps la plus faible.
- modèle réduit construit sur un intervalle de temps  $\mathbf{T}$ , et utilisable sur une période  $n\mathbf{T}$ ,  $n \gg 1$

# Principe de la Réduction de modèle





# Sommaire

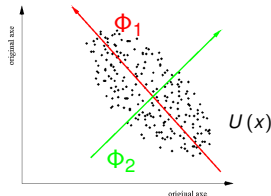
- 1 Introduction
- 2 La décomposition orthogonale aux valeurs propres
  - Définition
    - La Snapshot POD
    - Propriétés
  - Exemple en mécanique des fluides
  - Exemple en dynamique des structures
- 3 Extension de l'approche en interaction fluide structure
  - Problématique
  - Modèle réduit pour des problèmes d'interaction fluide solide rigide
  - Applications
    - Burgers monodimensionnelle
    - Exemples bidimensionnels
- 4 Perspective pour les solide déformables



# Historique

Donne une base qui est optimale au sens énergétique

Analogue à une méthode statistique appelée *Analyse en composantes principales*



## En mécanique des fluides

- Introduite en mécanique des fluides par *Lumley (1967)*  
→ identification des structures cohérentes
- Essor fin des années 80 , puis les années 90 pour les SD-POD  
nombreuses applications : canal, cavité entraînée, disque  
contra-rotatif, couche de mélange, jet, transfert de particules en  
écoulement turbulent, ...  
(*Sirovich et al.*, *Cazemier* , *Allery et al.*, ...)

# La décomposition orthogonale aux valeurs propres

## Définition

Soit  $v \in \mathbf{L}^2(\mathbf{T}, \mathbf{H})$ , soit  $\Phi \in \mathbf{H}$  qui approxime au mieux  $v$  en moyenne.

$\mathbf{H}$  un espace de Hilbert et  $\mathbf{T}$  un intervalle de temps

Il est classique que si on fait le choix de  $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Omega)$  alors le problème se ramène à :

## problème aux valeurs propres associé

Trouver  $\Phi \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}(x, y) \Phi(y) = \lambda \Phi(x)$$

$$\text{avec } \mathcal{R}(x, y) = \frac{1}{|\mathbf{T}|} \int_{\mathbf{T}} v(x, t) \otimes v(y, t) dt = \overline{v(x, t) \otimes v(y, t)}$$

# Snapshot POD (Sirovitch, 1987)

## Snapshot POD

$M$  : Nombre de clichés

$n$  nombre de noeuds

$d$  dimension de l'espace

si  $M \ll nd$  On recherche les  $A^k$  tels que :

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^M A^k v(x, t_k)$$

Ce qui conduit au problème aux valeurs propres suivant

$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{M} (v(t_i), v(t_k)) A^k = \lambda A^i \quad \text{pour } i = 1 \dots M$$

Avec  $(v(t_i), v(t_k)) = \int_{\Omega} v(x, t_i) \cdot v(x, t_k) dx$  produit scalaire de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$

# Propriétés de modes POD

## Propriétés essentielles

- $\lambda_n \in \mathbb{R}^+ \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \rightarrow 0$
- $(\Phi_n, \Phi_m) = \delta_{nm}$ ,  $\Phi_n$  respecte les conditions aux limites homogènes et  $\text{div}(\Phi_n) = 0$
- $v(x, t)$  peut s'écrire :

$$v(x, t) \simeq \sum_{k=1}^N a_k(t) \Phi_k(x) \quad \text{avec} \quad a_k(t) = (v(\bullet, t), \Phi_k)$$

- Energie :  $E_N = \sum_{n=1}^N \overline{a_n(t) a_n(t)} = \sum_{n=1}^N \lambda_n$
- Meilleure approximation au sens énergétique
- $N$  très faible, de l'ordre de la dizaine

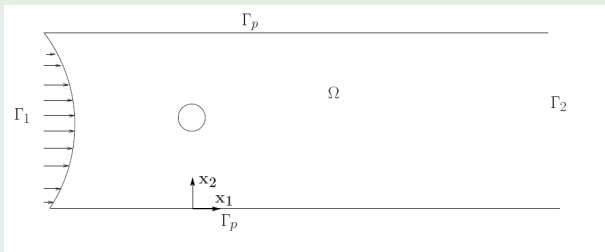


# Exemple

## Exemple d'application en mécanique des fluides

# Ecoulement autour d'un cylindre

## Ecoulement autour d'un cylindre à Reynolds 200



Vitesse max à l'entrée :  $V_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$        $D = 1 \text{ m}$   
 $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$        $\mu = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$   
 Nombre de Strouhal :  $S_t = 0.2$

# Ecoulement autour d'un cylindre

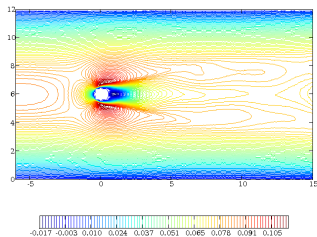
## Contribution énergétique des premières valeurs propres

99 clichés du champ de vitesses sur une période de détachement tourbillonnaire.

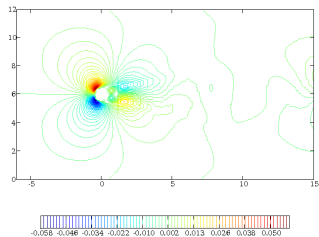
| i           | $\lambda_i$ | % d'énergie | i           | $\lambda_i$          | % d'énergie |
|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------------|-------------|
| $\lambda_1$ | 132.11      | 96.314      | $\lambda_4$ | $4.72 \cdot 10^{-2}$ | 99.93       |
| $\lambda_2$ | 2.53        | 98.163      | $\lambda_5$ | $4.61 \cdot 10^{-2}$ | 99.963      |
| $\lambda_3$ | 2.37        | 99.89       | $\lambda_6$ | $2.38 \cdot 10^{-2}$ | 99.981      |

Peu de modes suffisent à capturer l'essentiel de l'énergie

# Ecoulement autour d'un cylindre



(a) Première composante :  $\Phi_1 \cdot \mathbf{x}_1$

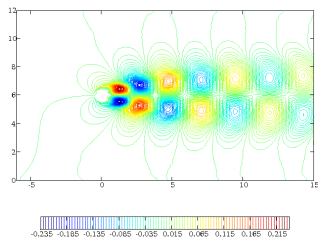


(b) deuxième composante :  $\Phi_1 \cdot \mathbf{x}_2$

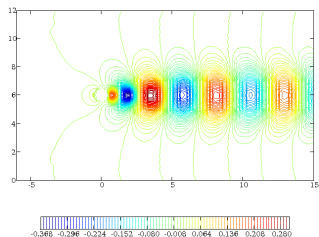
Premier mode POD



# Ecoulement autour d'un cylindre



(a) Première composante :  $\Phi_2 \cdot \mathbf{x}_1$



(b) deuxième composante :  $\Phi_2 \cdot \mathbf{x}_2$

## Deuxième mode POD



# Ecoulement autour d'un cylindre

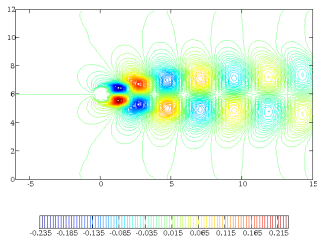
## Premier mode $\approx$ Champ moyen

on opère sur le champ fluctuant

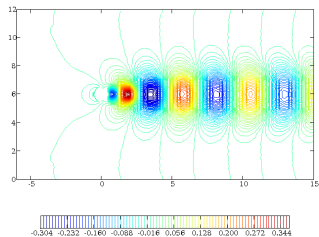
$$\mathbf{v}(x, t) = \overline{\mathbf{v}(x)} + \mathbf{v}'(x, t)$$

$$\mathbf{v}'(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha'_i(t) \Phi'_i(x)$$

# POD sur le champ fluctuant



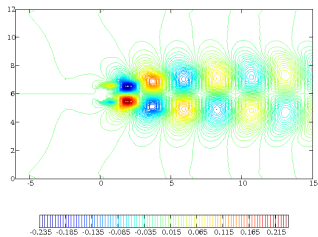
(a) Première composante :  $\Phi'_1 \cdot \mathbf{x}_1$



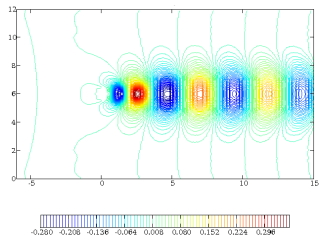
(b) deuxième composante :  $\Phi'_1 \cdot \mathbf{x}_2$

Premier mode POD sur le champ fluctuant  $\simeq$  Deuxième mode POD sur le champ instantané

# POD sur le champ fluctuant



(a) Première composante :  $\Phi'_2 \cdot \mathbf{x}_1$



(b) deuxième composante :  $\Phi'_2 \cdot \mathbf{x}_2$

Deuxième mode POD sur le champ fluctuant

# système dynamique sur le champ fluctuant

Equation de Navier-Stokes adimensionnelle sur le champ de vitesses fluctuant :

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + \frac{2}{Re} \mathbf{D}(\mathbf{v}) \quad \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + {}^T \nabla \mathbf{v})$$

Soit  $\Phi'_i$  un mode POD,  $i = 1, \dots, N$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \cdot \Phi'_i dx = - \int_{\Omega} (\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}') \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) \cdot \Phi'_i dx$$

$$- \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) \cdot \Phi'_i dx - \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \text{Tr}(\mathbf{D}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx + \int_{\partial \Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi'_i dx$$

# système dynamique sur le champ fluctuant

Pour  $i = 1, \dots, N$

$$\frac{d\mathbf{a}'_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{a}'_k \mathbf{a}'_l \mathbf{C}_{kli} + \sum_{k=1}^N \mathbf{a}'_k \mathbf{B}_{ki} + \mathbf{D}_i + \mathbf{E}_i$$

Où

$$\mathbf{C}_{kli} = - \int_{\Omega} (\Phi'_k \cdot \nabla \Phi'_l) \cdot \Phi'_i dx$$

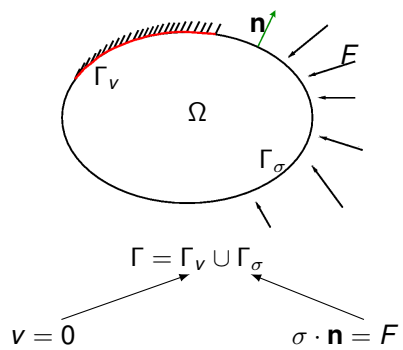
$$\mathbf{B}_{ki} = - \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\Phi'_k) \cdot \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx - \int_{\Omega} (\nabla \bar{\mathbf{v}} \cdot \Phi'_k + \nabla \Phi'_k \cdot \bar{\mathbf{v}}) \cdot \Phi'_i dx$$

$$\mathbf{D}_i = - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) \cdot \Phi'_i dx - \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx$$

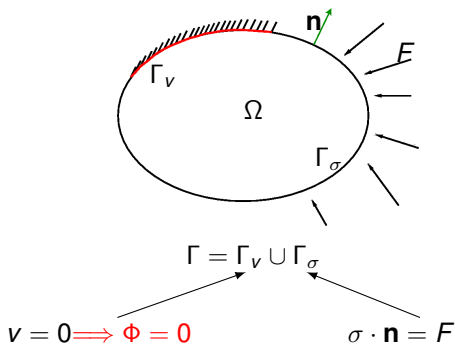
$$\mathbf{E}_i = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi'_i dx$$

On choisit de traiter le terme  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  par pénalisation.

# Traitement du terme de pression

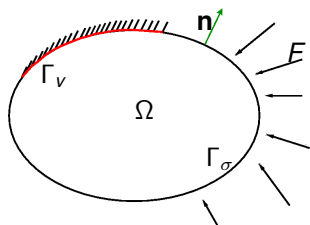


# Traitement du terme de pression





# Traitement du terme de pression



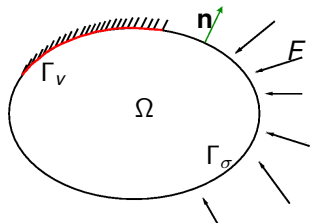
$$\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma$$

$$v = 0 \implies \Phi = 0 \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = F = G(v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl})$$

$v|_{\Gamma_\sigma}$  vitesse calculée sur  $\Gamma_\sigma$

$v^{cl}$  vitesse sur  $\Gamma_\sigma$

# Traitement du terme de pression



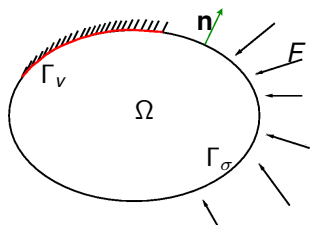
$$\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma$$

$$v = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = F = G(v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl})$$

$$\text{Si } G \gg \|F\|$$

$$v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl} = \frac{F}{G} \rightarrow 0$$

# Traitement du terme de pression



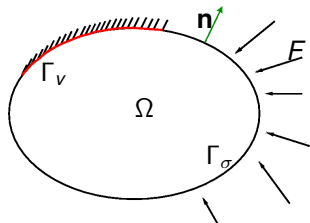
$$\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma$$

$$v = 0 \implies \Phi = 0 \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = F = G(v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl})$$

$$\forall i = 1, \dots, N$$

$$\int_{\Gamma} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi'_i dx = \int_{\Gamma_\sigma} G(v - v^{cl}) \cdot \Phi'_i dx$$

# Traitement du terme de pression



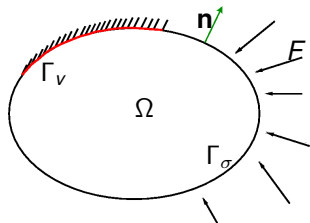
$$\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma$$

$$v = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = F = G(v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl})$$

$$\forall i = 1, \dots, N$$

$$\int_{\Gamma} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi'_i dx = \int_{\Gamma_\sigma} G \left( \bar{v} + \sum_{k=1}^N a'_k \Phi'_k - v^{cl} \right) \cdot \Phi'_i dx$$

# Traitement du terme de pression



$$\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma$$

$$v = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = F = G(v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl})$$

$$\forall i = 1, \dots, N$$

$$\int_{\Gamma} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi'_i dx = \int_{\Gamma_\sigma} G(\bar{v} - v^{cl}) \cdot \Phi'_i dx + \sum_{k=1}^N a'_k \int_{\Gamma_\sigma} G \Phi'_k \cdot \Phi'_i dx$$



# Stabilisation du Système dynamique

## Conséquence de la troncature de la base POD

On néglige les plus petites échelles énergétiques responsables de la dissipation énergétique

⇒ Instabilité du système dynamique réduit

## Modélisation du transfert de l'énergie des grandes échelles vers les plus petites

Utilisation d'une viscosité tourbillonnaire (Rempfer, 1996),  
(Cazemier, 1997)

Pour  $i = 1, \dots, N$

$$\mu(i) = \mu(1 + i \text{ constante})$$

# Système dynamique réduit

Pour  $i = 1, \dots, N$

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a'_k a'_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a'_k (B_{ki} + E_{ki}) + D_i + K_i$$

où

$$C_{kli} = -(\Phi'_k \cdot \nabla \Phi'_l, \Phi'_i)$$

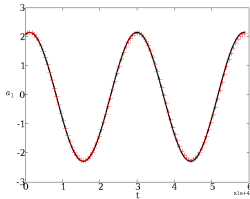
$$B_{ki} = -\frac{1}{Re} (\mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\Phi'_k)), \nabla \Phi'_i) - (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \Phi'_k + \Phi'_k \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}, \Phi'_i)$$

$$D_i = -\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \Phi'_i) dx - (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}, \Phi'_i)$$

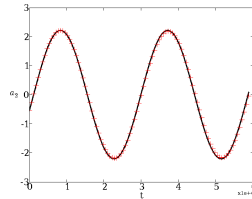
$$E_{ki} = G \int_{\Gamma_{\sigma}} \Phi'_k \cdot \Phi'_i dx$$

$$K_i = G \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^{cl}) \cdot \Phi'_i dx$$

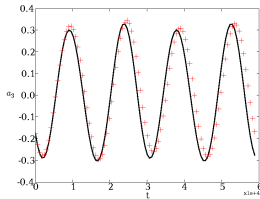
# Résultat



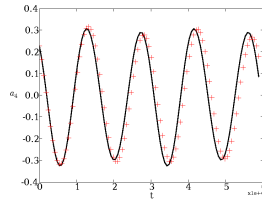
(a)  $a'_1$



(b)  $a'_2$



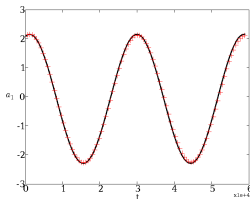
(c)  $a'_3$



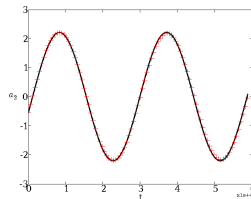
(d)  $a'_4$



# Résultat



(a)  $a'_1$



(b)  $a'_2$

- Avec 7 modes, bonne reconstruction des coefficients temporels
- Par ailleurs, le nombre de Strouhal est conservé



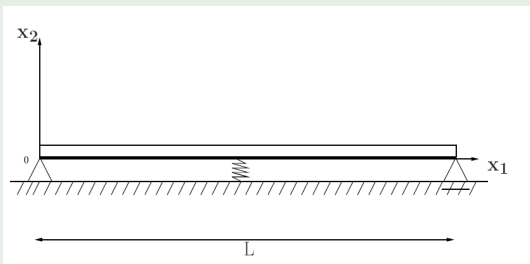
# La POD en dynamique des structures

## Utilisation de la POD en dynamique des structures

- Une dizaine de travaux sont dénombrés.
  - Réduction de modèle pour une coque cylindrique (Amabili, 2003)
  - Etude des cycles limites d'oscillation d'un tube (Sarkar et Païdoussis, 2003)
- Pour une structure linéaire, les modes POD sont similaires aux modes de vibrations (Feeny, 2002)

# Exemple pour une structure non linéaire

## Exemple pour un cas non linéaire



## Caractéristiques matériaux

$$L = 0.4 \text{ m}, E = 210 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ I = 0.49 \times 10^{-12} \text{ m}^{-4}, S = 0.012 \times 0.00079 \text{ m}^{-2}$$

# Exemple pour une structure non linéaire

## Mise en équation

$$\begin{cases} -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + k_r w^3(x, t) \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \\ w''(0, t) = w''(L, t) = 0 \end{cases}$$

# Exemple pour une structure non linéaire

## Mise en équation

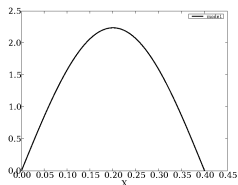
$$\begin{cases} -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + k_r w^3(x, t) \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \\ w''(0, t) = w''(L, t) = 0 \end{cases}$$

## Contribution des valeurs propres

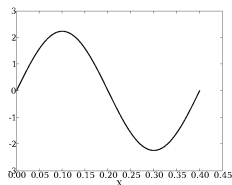
| i           | $\lambda_i$            | %      |
|-------------|------------------------|--------|
| $\lambda_1$ | $7.580 \cdot 10^{-9}$  | 96.158 |
| $\lambda_2$ | $2.958 \cdot 10^{-10}$ | 99.910 |
| $\lambda_3$ | $5.859 \cdot 10^{-12}$ | 99.985 |

# Comparaison des modes

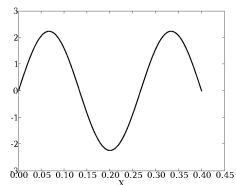
## Modes de vibrations de la structure linéarisé



(a) mode 1

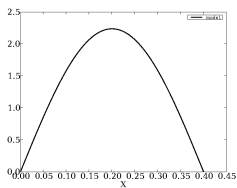


(b) mode 2

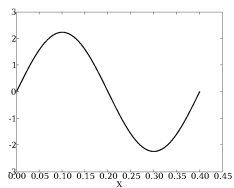


(c) mode 3

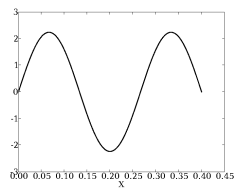
## Modes de vibrations de la structure linéarisé



(a) mode 1

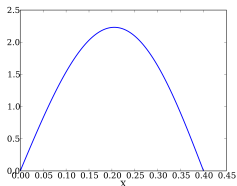
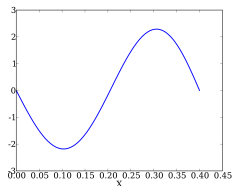
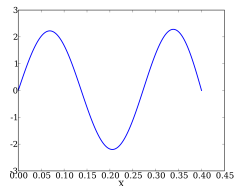


(b) mode 2

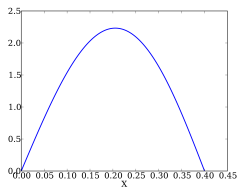
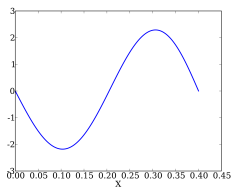
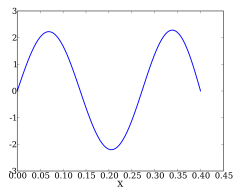


(c) mode 3

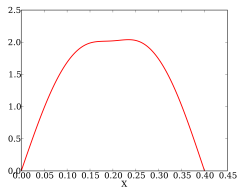
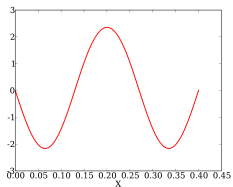
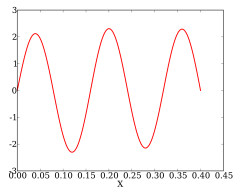
## Modes POD pour le problème linéaire

(a)  $\Phi_1$ (b)  $\Phi_2$ (c)  $\Phi_3$

## Modes POD pour le problème linéaire

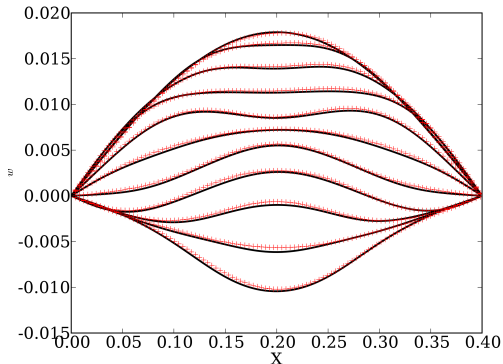
(a)  $\Phi_1$ (b)  $\Phi_2$ (c)  $\Phi_3$ 

## Modes POD pour le problème non linéaire

(a)  $\Phi_1$ (b)  $\Phi_2$ (c)  $\Phi_3$



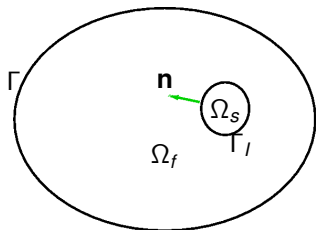
# Solution du système dynamique réduit



Comparaison du déplacement à différents instants : – solution initiale  
+ solution système dynamique réduit à 3 modes

## Extension de l'approche en interaction fluide structure

# Interaction Fluide Structure



- $\mathbf{v}_f|_{\Gamma_I} = \mathbf{v}_s|_{\Gamma_I}$
- $\boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_I} = \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_I}$

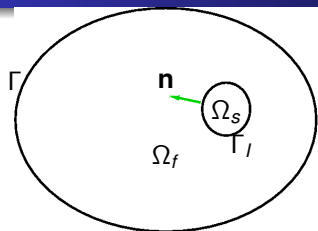
où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure  
au domaine solide

# La POD en Interaction Fluide Structure

## Utilisation de la POD en IFS

- Domaine récent d'investigation
- Sarkar et Païdoussis (Journal of Fluids and Structures, 2003) : étude par POD d'un tube convoyant du fluide
- Antonnen (2005) étudie la capacité des modes POD à reconstruire un champ sur un maillage mobile
  - Produit scalaire discret au lieu du produit scalaire continue
- Lieu, Farhat et Lesoinne (2006) : Construction d'un modèle réduit par POD pour modéliser l'écoulement autour d'un F16
  - Projection sur la base POD du système linéarisé

# Réduction de modèle sur le problème complet fluide et structure



- $v_f|_{\Gamma_I} = v_s|_{\Gamma_I}$
- $\sigma_f \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_I} = \sigma_s \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_I}$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au domaine solide

## Problème

- Caractéristiques spatiales des modes POD alors que les domaines sont mobiles
- Comment les calculer ?
- Comment obtenir un système dynamique réduit ?



# Réduction de modèle sur le problème complet fluide et structure

## Exemple

Calcul de la matrice Snapshot

$$\mathbf{C} = [c_{ij}]$$

$$c_{ij} = \frac{1}{M} (v(t_i, \bullet), v(t_j, \bullet)) = \frac{1}{M} \int_{\Omega_f} v(x, t_i) \cdot v(x, t_j) dx$$

Comment définir le produit scalaire  $(\bullet, \bullet)$  ?

Les domaine sont différents à l'instant  $t_i$  et  $t_j$

# Solution proposée

## Solution

- Utiliser un domaine de référence fixe au cours du temps contenant toutes les configurations mobiles
- A chaque snapshot : interpoler le champ de vitesses du maillage mobile vers le maillage fixe  
     $\implies$  Champ de vitesses globale (fluide + solide)
- Rechercher les modes POD pour ce champ de vitesses sur ce maillage
- Les domaines sont connus par des fonctions caractéristiques :

$$\mathbb{I}_{\Omega_j}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega_j(t) \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega_j(t) \end{cases}$$



# Objectif

## Comment construire un système dynamique réduit avec la base POD obtenue ?

### Formulation eulérienne pour les problèmes d'interaction fluide structure

- Méthode des frontières immergées (Peskin, 1972)
  - Rajout d'un terme de forçage dans les équations de Naviers-Stokes pour modéliser la frontière physique
  - Interpolation des efforts fluides sur l'interface
  - représentation non physique de l'interface
- Méthode des domaines fictifs / multiphasique
  - Formulation pour des solides rigides
  - L'interface n'est pas décrite explicitement



# Objectif

## Méthode des domaines fictifs

Principe : étendre les équations de Navier-Stokes au domaine solide rigide afin d'utiliser une formulation variationnelle globale sur

$$\Omega = \Omega_s(t) \cup \Omega_f(t) \cup \Gamma_I$$

**Contrainte solide rigide** :  $\forall x \in \Omega_s \quad \mathbf{D}(v) = 0$

- $\mu_s$  : facteur de pénalisation de la contrainte de solide rigide
- Multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  associé à cette contrainte dans la formulation variationnelle

(Glowinski et al.,1999), (Laure et al.,2005)

# Equations du problème

## Equations du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f & \text{dans } \Omega_f(t) \\
 \nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0 & \text{dans } \Omega_f(t) \\
 m \frac{dV_G}{dt} = \mathcal{F} & \\
 \mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathcal{T} & \\
 \mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_G(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}_g) & \text{dans } \Omega_s(t) \\
 \mathbf{D}(\mathbf{v}_s) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v}_s + \nabla^T \mathbf{v}_s) = 0 & \text{dans } \Omega_s(t)
 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{F} = \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \int_{\Gamma_I} (\mathbf{x} - \mathbf{X}_g) \times (\boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{x}$$

# Equations du problème

## Formulation variationnelle sur le domaine solide

$\Phi$  un mode POD

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{Dv_s}{Dt} \cdot \Phi dx = \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \sigma_s) \cdot \Phi dx$$

Avec

$$\int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \sigma_s) \cdot \Phi dx = \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi dx - \int_{\Omega_s} \mathbf{Tr}(\sigma_s \mathbf{D}(\Phi)) dx$$

Pour un champ rigidifiant  $\mathbf{D}(\Phi) = 0$  :

$$\implies \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \sigma_s) \cdot \Phi dx = \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi dx$$

# Equations du problème

## Egalité des contraintes normales sur l'interface

Or sur  $\Gamma_I$  on a  $\sigma_f \cdot \mathbf{n} = \sigma_s \cdot \mathbf{n}$  et  $v_f|_{\Gamma_I} = v_s|_{\Gamma_I}$

$$\int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi dx = \int_{\Gamma_I} (\sigma_f \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi dx$$

$$\int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \sigma_f) \cdot \Phi dx = - \int_{\Gamma_I} \sigma_f \mathbf{n} \cdot \Phi dx - 2\mu_f \int_{\Omega_f} \text{Tr}(\mathbf{D}(v_f) \mathbf{D}(\Phi)) dx + \int_{\Gamma} \sigma_f \mathbf{n}_f \cdot \Phi dx$$

Avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante du domaine solide.

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \Phi dx = - \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \mathbf{D}(\Phi)) dx + \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{n}_f \cdot \Phi dx$$

Avec  $\sigma = \mathbb{I}_{\Omega_f} \sigma_f + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_f}) \sigma_s$

# Equations du problème

## Remarque

$\forall x \in \Omega_s$ ,  $\Phi$  est rigidifiant  $\iff \exists V^* \in \mathbb{R}^2$  et  $K^* \in \mathbb{R}^2$  telle que

$$\forall x \in \Omega_s \quad \Phi(x) = V^* + K^* \times (X_G - x)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi dx &= \int_{\Gamma_I} (\sigma_f \cdot \mathbf{n}) \cdot V^* dx + \int_{\Gamma_I} (\sigma_f \cdot \mathbf{n}) \cdot K^* \times (X_G - x) dx \\ &= \mathcal{F} \cdot V^* + \mathcal{I} \cdot K^* \end{aligned}$$

# Formulation variationnelle

## Formulation faible globale

Trouver  $v, \lambda, \mathbb{I}_{\Omega_s}$

$$\int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) \cdot \Phi dx + \int_{\Omega} 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{D}(v) \mathbf{D}(\Phi)) dx -$$

$$+ \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{n}_f \cdot \Phi dx + \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s} \operatorname{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi)) dx = 0$$

$$\frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_s}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_s} = 0$$

$$\mathbf{D}(v) = \frac{1}{2} (\nabla v + {}^T \nabla v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s$$

$$\rho = \mathbb{I}_{\Omega_s} \rho_s + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_s}) \rho_f ; \quad \mu = \mathbb{I}_{\Omega_s} \mu_s + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_s}) \mu_f$$

La pression disparaît par  $\operatorname{div} \Phi = 0$  et le principe d'action-réaction entre le solide et le fluide,  $\int_{\Gamma} \sigma \mathbf{n}_f \cdot \Phi dx$  étant traité par pénalisation.

# Formulation variationnelle

## Formulation faible globale

Trouver  $v, \lambda, \mathbb{I}_{\Omega_s}$

$$\int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) \cdot \Phi dx + \int_{\Omega} 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{D}(v) \mathbf{D}(\Phi)) dx -$$

$$+ \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{n}_f \cdot \Phi dx + \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s} \operatorname{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi)) dx = 0$$

$$\frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_s}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_s} = 0 \quad \text{Peut on réduire cette équation par POD ?}$$

$$\mathbf{D}(v) = \frac{1}{2} (\nabla v + {}^T \nabla v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s$$

$$\rho = \mathbb{I}_{\Omega_s} \rho_s + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_s}) \rho_f ; \quad \mu = \mathbb{I}_{\Omega_s} \mu_s + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_s}) \mu_f$$

# La POD et le suivi de domaines ....

## Evolution des domaines

- La fonction caractéristique  $\frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_s}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_s} = 0$

$$\mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_s(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La fonction Level Set  $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi = 0$

$$\psi(x, t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in \Omega_s(t) \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_s(t) \\ < 0 & \text{si } x \notin \Omega_s(t) \end{cases}$$

$$\mathbb{I}_{\Omega_s} = H(\psi)$$



## Rappel des propriétés de la fonction Level-Set

La normale  $\mathbf{n}$  à l'interface :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$$

La courbure moyenne :

$$K(\psi) = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \right)$$

Dans le cas d'une structure élastique , l'étirement est mesuré par :

$$e = |\nabla\psi|$$



# La POD et le suivi de domaines ....

Disque dont on impose un mouvement oscillant

dont on prend 120 clichés sur une période d'oscillation  $T$

# Reconstruction de la fonction caractéristique par la POD

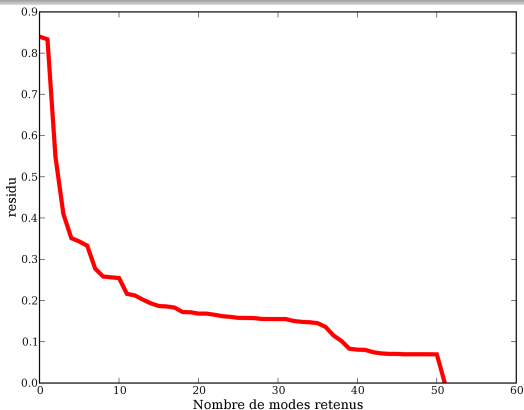
$$\forall k = 1, \dots, 120, t_k \in \mathbf{T}$$
$$i = 1, \dots, N$$

$$b_i(t_k) = \left( \mathbb{I}_{\Omega_s}(t), \Phi_i^{fc} \right)$$

Erreur de reconstruction :

$$\text{Residu}(N) = \frac{\left\| \sum_{k=1}^N b_k \Phi_k^{fc} - \mathbb{I}_{\Omega_s} \right\|_{L^\infty(O, \mathbf{T}, L^2(\Omega))}}{\left\| \mathbb{I}_{\Omega_s} \right\|_{L^\infty(O, \mathbf{T}, L^2(\Omega))}}$$

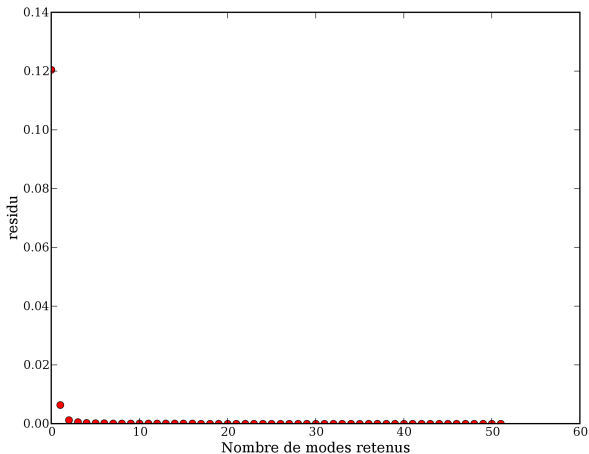
# Reconstruction de la fonction caractéristique par la POD



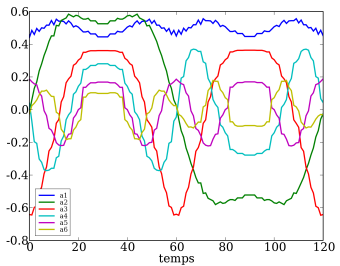
Il faut plus de 50 modes pour avoir une erreur inférieure à 1%

# Alors que pour la fonction Level Set ...

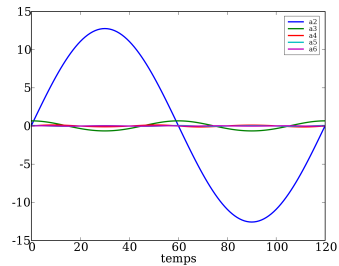
Il n'en faut que 2



# Comparaison des coefficients modaux



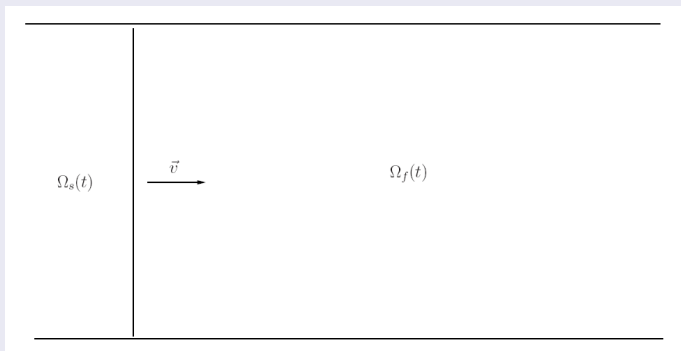
(a) Fonction caractéristique



(b) fonction Level-Set

# L'équation de transport de la Level-Set est elle réductible par POD ?

## Test



# L'équation de transport de la Level-Set est elle réductible par POD ?

## Réduction de l'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi = 0$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N b_k(t) \phi_k^{LS}(\mathbf{x})$$

Pour  $i = 1, \dots, N$

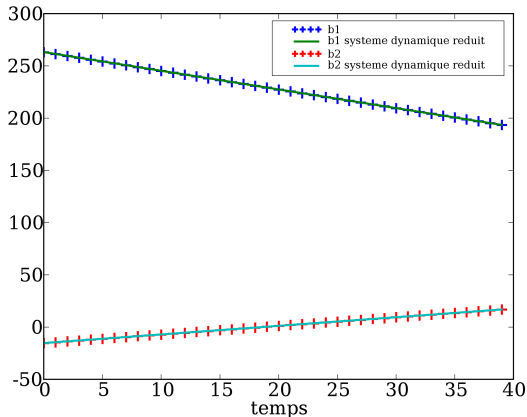
$$\frac{db_i}{dt} + \sum_{j=1}^N A_{ij} b_j = 0$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \phi_j^{LS}) \cdot \phi_i^{LS} dx$$



# L'équation de transport de la Level-Set est elle réductible par POD ?

## Résultat





# Système dynamique d'ordre bas

## Proposition

- Une base POD  $\Phi^v$  pour le champ de vitesses  $v$  :

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i^v(x)$$

- Une base POD  $\Phi^{LS}$  pour la fonction Level

$$\text{Set} : \psi(x, t) = \sum_{i=1}^{N_1} b_i(t) \Phi_i^{LS}(x)$$

- Ecriture d'un système dynamique couplé,  $\rho$  et  $\mu$  étant défini en fonction des coefficients de reconstruction de la Level-Set

# Système dynamique d'ordre bas

## Ecriture condensée

$\forall n = 1, \dots, N$  et  $l = 1, \dots, N_1$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{N_1} \frac{da_i}{dt} b_p \mathcal{A}_{ipn} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N_1} a_i a_j b_p \mathcal{B}_{ijpn} + \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{N_1} a_i b_p \mathcal{C}_{ipn} = \sum_{p=1}^{N_1} b_p \mathcal{F}_{pn}$$

$$\frac{db_l}{dt} + \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{N_1} a_i b_p \mathcal{D}_{ipl} = 0$$

## Avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ipn} &= f_1(\Phi_i^V, \Phi_p^{LS}, \Phi_n^V) & \mathcal{B}_{ijpn} &= g(\Phi_i^V, \Phi_j^V, \Phi_p^{LS}, \Phi_n^V) \\ \mathcal{C}_{ipn} &= f_2(\Phi_i^V, \Phi_p^{LS}, \Phi_n^V) & \mathcal{F}_{pn} &= h(\Phi_p^{LS}, \Phi_n^V) \\ \mathcal{D}_{ipl} &= l(\Phi_i^V, \Phi_p^{LS}, \Phi_l^{LS}) \end{aligned}$$

# Système dynamique POD simplifié

$$v = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i \geq 99.99\% \text{ de l'énergie totale}$$

Pour  $n = 1..N$  :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{da_i}{dt} A_{in} + \sum_{i=1}^N a_i B_{in} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j C_{ijn} = E_n + F_n \\ \frac{dX_G}{dt} = V_g \end{cases}$$

avec

$$A_{in} = \int_{\Omega} \rho \Phi_i \Phi_n dx$$

$$B_{in} = \int_{\Omega} 2\mu \text{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_i) \mathbf{D}(\Phi_n)) dx \quad F_n = \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{nf} \cdot \Phi_n dx$$

$$C_{ijn} = \int_{\Omega} \rho \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \Phi_n dx$$

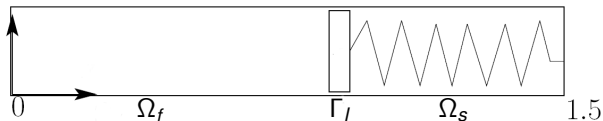
$$E_n = - \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s} \text{Tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi_n)) dx$$



# Applications

## Applications

# Application à un cas monodimensionnel



$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Le fluide est modélisé par l'équation de Burgers auquel est couplé une équation de masse-ressort.

## Paramètres et conditions initiales

$$\nu = 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

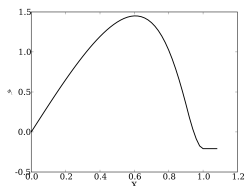
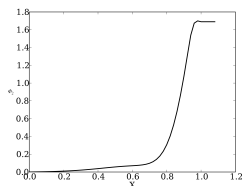
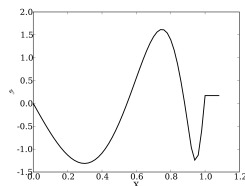
$$\Gamma_I(t = 0) = 1.0 \text{ et } v(x, 0) = \sin(\pi x)$$

# Analyse POD

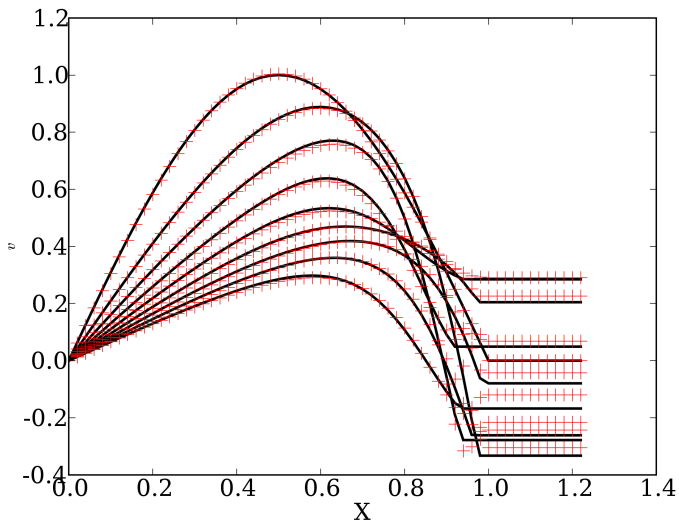
## Contribution en énergie cinétique des 6 premiers modes POD

| mode $i$ | $\lambda_i$           | % energie | mode $i$ | $\lambda_i$           | % energie |
|----------|-----------------------|-----------|----------|-----------------------|-----------|
| 1        | 18.255                | 91.648    | 4        | $6.079 \cdot 10^{-2}$ | 99.982    |
| 2        | 1.515                 | 99.256    | 5        | $2.347 \cdot 10^{-3}$ | 99.994    |
| 3        | $8.393 \cdot 10^{-2}$ | 99.677    | 6        | $7.804 \cdot 10^{-4}$ | 99.999    |

## Les 3 premiers modes POD

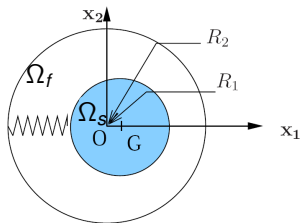
(a)  $\Phi_1$ (b)  $\Phi_2$ (c)  $\Phi_3$

# Solution du système dynamique POD





# oscillation dans une cavité annulaire



Description du domaine d'étude

## Paramètres

$R_1 = 0.1$  m et  $R_2 = 0.2$  m

•  $\rho_f = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>

$\mu_f = 0.001$  kg/m.s

•  $m = 1$  kg

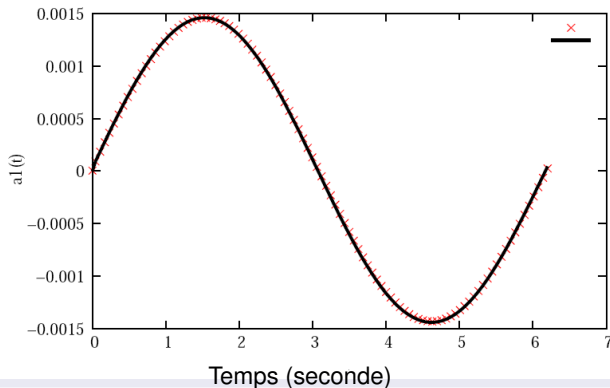
$k = 10^{-4}$  N . m<sup>-1</sup>

# Modèle réduit

## Base POD

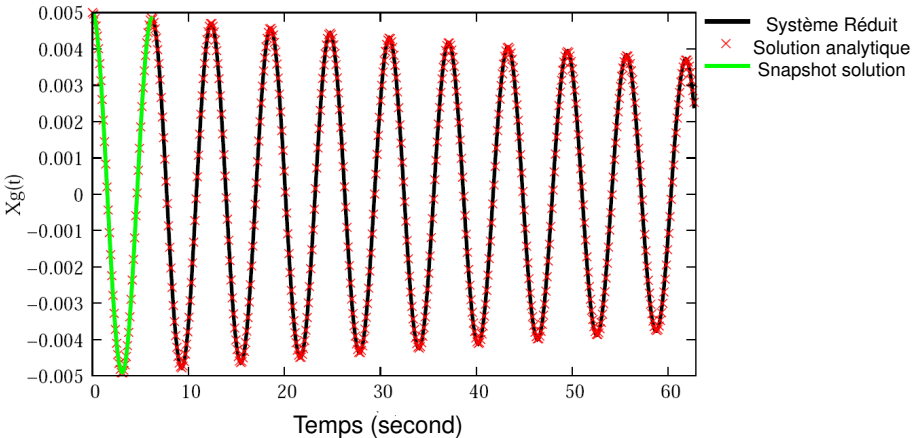
Avec 2 modes plus de 99,9% de l'énergie cinétique totale

## Résultat du système dynamique réduit avec 2 modes



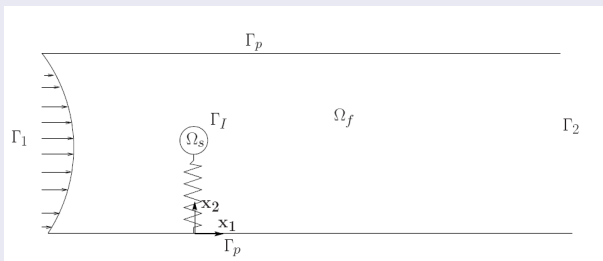
# oscillation dans une cavité annulaire

## Déplacement du centre de gravité du solide



# Cylindre en oscillation forcée

On considère le problème 2D d'un cylindre en oscillation forcée selon l'axe  $x_2$  dans un canal



Fluide incompressible de Reynolds 200. La simulation à été effectuée sous Castem

# Cylindre en oscillation forcée

## Caractéristiques

$$\rho_f = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_s = 1.23 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\mu_f = 0.001 \text{ kg/m.s}$$

Fréquence d'oscillation du cylindre en accord avec le Strouhal

$$S_{tr} = \frac{Df}{V_o} = 0.2$$

120 snapshot sont prises sur une période d'oscillation du cylindre. On garde 12 modes POD.

## Objectif

- La base POD étant spatiale, le système dynamique permet il de retrouver le nombre de Strouhal ?



# Solution du système dynamique réduit

## Solution de référence

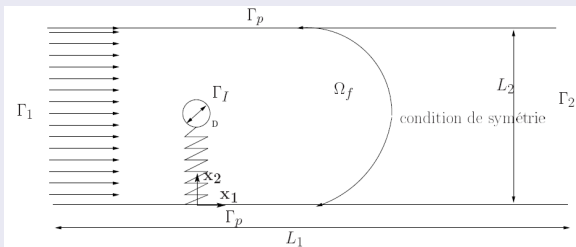


# Solution du système dynamique réduit

Solution obtenue par le système dynamique réduit

# Cylindre en oscillation libre dans un canal à reynolds = 1690

## Configuration



## Fluide incompressible à Reynolds = 1690

150 clichés ont été effectués sur une période d'oscillation

$$L_1 = 1.6 \text{ m} \quad L_2 = 1 \text{ m} \quad D = 0.05 \text{ m}$$

$$V_0 = 3.38 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

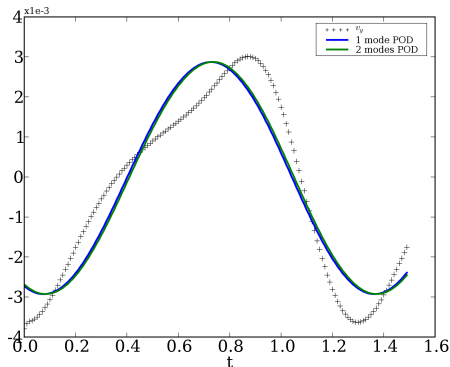


# Analyse POD

2 POD modes suffisent pour avoir une erreur de reconstruction inférieure à 2% en norme  $L^2$

Mais

6 modes sont nécessaires pour reconstruire la vitesse au centre de gravité du solide.

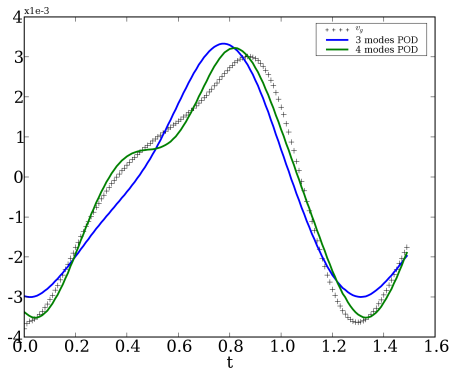


# Analyse POD

2 POD modes suffisent pour avoir une erreur de reconstruction inférieure à 2% en norme  $L^2$

Mais

6 modes sont nécessaires pour reconstruire la vitesse au centre de gravité du solide.

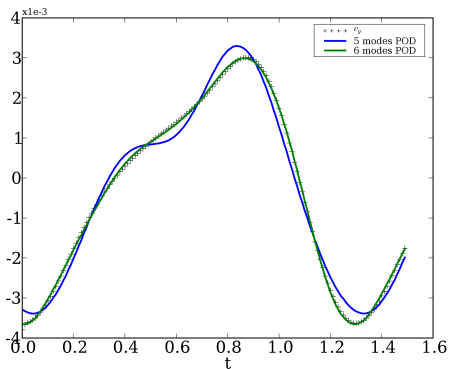


# Analyse POD

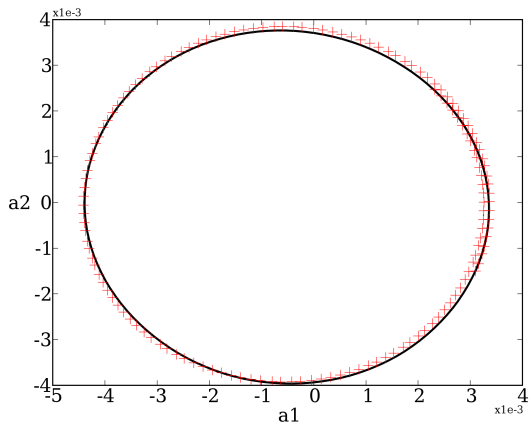
2 POD modes suffisent pour avoir une erreur de reconstruction inférieure à 2% en norme  $L^2$

Mais

6 modes sont nécessaires pour reconstruire la vitesse au centre de gravité du solide.

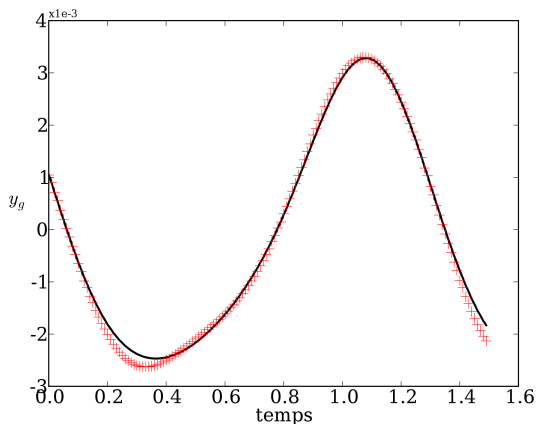


# Système réduit à 6 modes



Représentation de  $a_2$  en fonction de  $a_1$

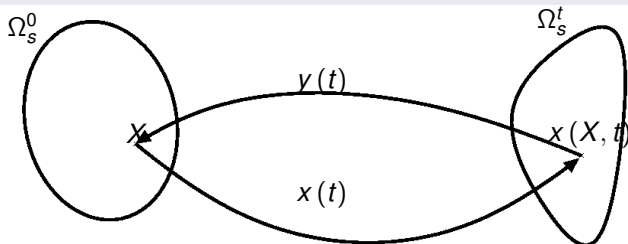
# Système réduit à 6 modes



Comparaison de l'expression de la deuxième composante de la position centre de gravité obtenu par + le système dynamique réduit et – initialement

# Perspective pour les solides déformables

Cottet et al. , *Eulerian Formulation and Level Set models for incompressible fluid-structure interaction*, preprint 2007



$y$  suit l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v \nabla y = 0 \\ y(0) = X \end{cases}$$

# Perspective pour les solide déformables

## modèle

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \rho(\psi) \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f = \nabla \cdot (H(\psi) (\boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}_f)) & \text{sur } \Omega \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \Omega \\
 \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{y} = 0 & \text{sur } \Omega_s \\
 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \psi = 0 & \text{sur } \Omega \\
 \psi(\mathbf{x}, t = 0) = \psi_0(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega \\
 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}(\mathbf{x}, 0) = Id & \text{sur } \Omega_s
 \end{array} \right.$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \rho &= H(\psi) \rho_s + (1 - H(\psi)) \rho_f \\
 \boldsymbol{\sigma}_f &= -p \mathbf{I} + \mu \mathbf{D}(\mathbf{v})
 \end{aligned}$$

# Système dynamique d'ordre bas

## Proposition

- Une base POD  $\Phi^v$  pour le champ de vitesses  $v$  :

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{N^v} a_i(t) \Phi_i^v(x)$$

- Une base POD  $\Phi^{LS}$  pour la fonction Level Set

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^{N^{LS}} b_i(t) \Phi_i^{LS}(x)$$

- Une base POD  $\Phi^y$  pour  $y$   $y(x, t) = \sum_{i=1}^{N^y} c_i(t) \Phi_i^y(x)$



# Système dynamique d'ordre bas

$\forall n = 1, \dots, N^V$

$$\sum_{i=1}^{N^V} \frac{da_i}{dt} A_{in} + \sum_{i=1}^{N^V} \sum_{j=1}^{N^V} a_i a_j B_{ijn} + \sum_{i=1}^{N^V} a_i C_{in} = D_{in}$$

Avec

$$A_{in} = \int_{\Omega} \rho(\psi) \Phi_i^V \cdot \Phi_n^V dx$$

$$B_{ijn} = \int_{\Omega} \rho(\psi) (\Phi_i^V \cdot \nabla \Phi_j^V) \cdot \Phi_n^V dx$$

$$C_{in} = \int_{\Omega} 2\mu \text{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_i^V) \mathbf{D}(\Phi_n^V)) dx$$

$$D_{in} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (H(\psi) (\sigma_s - \sigma_f)) \cdot \Phi_n^V dx$$

Pour  $i = 1, \dots, N^{LS}$

$$\frac{db_l}{dt} + \sum_{i=1}^{N^V} \sum_{p=1}^{N^{LS}} a_i b_p E_{ipl} = 0$$

$$E_{ipl} = \int_{\Omega} \Phi_i^V \nabla \Phi_j^{LS} \cdot \Phi_p^{LS} dx$$



# Proposition d'algorithme

## Pour chaque pas de temps

Tant que  $\|D_{in}^{k+1} - D_{in}^k\| > \varepsilon_1$  et  $\|v^{k+1} - v^k\| > \varepsilon_2$

- 1 Système dynamique réduit pour  $v$   
 $\implies v^{k+1}$
- 2 Système dynamique réduit pour  $Y$  et  $\psi$   
 $\implies \sigma_s^{k+1}$   
 $k = k + 1$



# Conclusion et perspectives

## Conclusion

- Une méthode de réduction de modèle par POD pour des problèmes d'Interaction fluide solide rigide
  - Formulation sur un domaine fixe
  - système dynamique d'ordre bas obtenu par une approche multiphasique des domaines fluides et structures
- Les tests sur des configurations à différents nombres de Reynolds sont concluants.
- Proposition pour les solides déformables.



# Conclusion et perspectives

## Perspectives

- Mise en oeuvre sur des configurations en grandes transformations
- Etude de la robustesse du modèle réduit en fonction des paramètres
  - Augmenter progressivement le Reynolds tout en gardant la même base POD pour le cylindre en oscillation libre.
- Adaptation APR (méthode réduction A Priori) (Ryckelynck, Verdon)
  - correction du système dynamique réduit sur des temps très long
- Application de la MAN (Méthode Asymptotique numérique) pour reconstruire des branches de solutions en fonction des paramètres
- Application aux problèmes en 3D

# Formulation eulérienne/ Level-Set

## formulation eulérienne du domaine solide

$$\begin{cases} \rho_s \left( \frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \nabla v_s \right) - \nabla \cdot \sigma_s = f & \text{sur } \Omega_s \\ \frac{\partial Y}{\partial t} + v_s \nabla Y = 0 & \text{sur } \Omega_s \\ v_s(x, t=0) = v_0(x) \quad \text{et} \quad Y(x, 0) = Id & \text{sur } \Omega_s \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\partial W}{\partial a} (\text{Tr}(B), \text{Tr}(B^{-1})) B - \frac{\partial W}{\partial b} (\text{Tr}(B), \text{Tr}(B^{-1})) B^{-1} \\ B &= \nabla y^{-1} \nabla y^{-T} = \nabla x \nabla x^T \\ E &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} W(\text{Tr}(B), \text{Tr}(B^{-1})) dx \end{aligned}$$