

Un résultat d'existence pour les ensembles minimaux

par optimisation sur des grilles polyédrales

Vincent Feuvrier

Université Paris-Sud XI

30 *Septembre* 2008

1 Introduction

- Mesure, dimension et distance de Hausdorff
- Ensembles minimaux, quasiminimaux et presque-minimaux
- Mise en œuvre

2 Fusion de complexes dyadiques

- Polyèdres
- Complexes
- Fusion

3 Approximation de d -ensembles par des complexes

- Rectifiabilité et densité
- Approximation polyédrale

4 Théorème d'existence

- Construction automatique d'une suite minimisante de compétiteurs quasiminimaux
- Théorème d'existence

Mesure de Hausdorff

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, un δ -recouvrement de A est une famille $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \quad \text{et} \quad \forall R \in \mathcal{R} : \text{Diam}(R) \leq \delta.$$

Mesure de Hausdorff

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, un δ -recouvrement de A est une famille $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \quad \text{et} \quad \forall R \in \mathcal{R} : \text{Diam}(R) \leq \delta.$$

On pose alors :

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = \inf_{\mathcal{R} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } A} c_\alpha \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{Diam}(R)^\alpha.$$

Mesure de Hausdorff

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, un δ -recouvrement de A est une famille $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \quad \text{et} \quad \forall R \in \mathcal{R} : \text{Diam}(R) \leq \delta.$$

On pose alors :

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = \inf_{\mathcal{R} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } A} c_\alpha \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{Diam}(R)^\alpha.$$

Définition

Pour $\alpha > 0$ la mesure de Hausdorff α -dimensionnelle de A est

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A)$$

Mesure de Hausdorff

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, un δ -recouvrement de A est une famille $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \quad \text{et} \quad \forall R \in \mathcal{R} : \text{Diam}(R) \leq \delta.$$

On pose alors :

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = \inf_{\mathcal{R} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } A} c_\alpha \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{Diam}(R)^\alpha.$$

Définition

Pour $\alpha > 0$ la mesure de Hausdorff α -dimensionnelle de A est

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A)$$

On pose généralement

$$c_\alpha = \frac{\pi^{\alpha/2}}{2^\alpha \Gamma(\alpha/2 + 1)}.$$

De cette façon, lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$c_\alpha = \frac{\lambda^\alpha(\mathbb{B}^\alpha)}{2^\alpha}.$$

Mesure de Hausdorff

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, un δ -recouvrement de A est une famille $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \quad \text{et} \quad \forall R \in \mathcal{R} : \text{Diam}(R) \leq \delta.$$

On pose alors :

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = \inf_{\mathcal{R} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } A} c_\alpha \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{Diam}(R)^\alpha.$$

Définition

Pour $\alpha > 0$ la mesure de Hausdorff α -dimensionnelle de A est

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A)$$

\mathcal{H}^α est borélienne, et coïncide avec la mesure de Lebesgue pour $\alpha \in \mathbb{N}$ lorsque A est inclus dans un α -plan affine et est λ^α -mesurable.

Mesure de Hausdorff

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, un δ -recouvrement de A est une famille $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \quad \text{et} \quad \forall R \in \mathcal{R} : \text{Diam}(R) \leq \delta.$$

On pose alors :

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = \inf_{\mathcal{R} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } A} c_\alpha \sum_{R \in \mathcal{R}} \text{Diam}(R)^\alpha.$$

Définition

Pour $\alpha > 0$ la mesure de Hausdorff α -dimensionnelle de A est

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A)$$

Définition

On dira que $A \subset \mathbb{R}^n$ est un α -ensemble si :

- A est \mathcal{H}^α -mesurable ($\forall B \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{H}^\alpha(B \cap A) + \mathcal{H}^\alpha(B \setminus A) = \mathcal{H}^\alpha(B)$);
- $\mathcal{H}^\alpha(A \cap K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

Dimension de Hausdorff

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ fixé la fonction $\alpha \mapsto \mathcal{H}^\alpha(A)$ est décroissante, et il existe $d \in [0, n]$ tel que :

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < d \\ 0 & \text{si } \alpha > d. \end{cases}$$

Dimension de Hausdorff

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ fixé la fonction $\alpha \mapsto \mathcal{H}^\alpha(A)$ est décroissante, et il existe $d \in [0, n]$ tel que :

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < d \\ 0 & \text{si } \alpha > d. \end{cases}$$

Définition

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) > 0\}$$

Dimension de Hausdorff

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ fixé la fonction $\alpha \mapsto \mathcal{H}^\alpha(A)$ est décroissante, et il existe $d \in [0, n]$ tel que :

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < d \\ 0 & \text{si } \alpha > d. \end{cases}$$

Définition

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) > 0\}$$

$\dim_{\mathcal{H}}$ coïncide avec la dimension d'espace vectorielle ou la dimension topologique des variétés régulières.

Distance de Hausdorff

Définition

Pour A et B deux parties non vides de \mathbb{R}^n on pose :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} \mathbf{d}(x, B), \sup_{x \in B} \mathbf{d}(x, A) \right).$$

Distance de Hausdorff

Définition

Pour A et B deux parties non vides de \mathbb{R}^n on pose :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} \mathbf{d}(x, B), \sup_{x \in B} \mathbf{d}(x, A) \right).$$

Avec les conventions :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A, \emptyset) = \mathbf{d}(\emptyset, B) = +\infty \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(\emptyset, \emptyset) = 0.$$

Distance de Hausdorff

Définition

Pour A et B deux parties non vides de \mathbb{R}^n on pose :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} \mathbf{d}(x, B), \sup_{x \in B} \mathbf{d}(x, A) \right).$$

Avec les conventions :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A, \emptyset) = \mathbf{d}(\emptyset, B) = +\infty \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(\emptyset, \emptyset) = 0.$$

Propriété

Si (K, \mathbf{d}) est compact alors l'ensemble des parties fermées de K muni de $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$ est compact.

Distance de Hausdorff

Définition

Pour A et B deux parties non vides de \mathbb{R}^n on pose :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} \mathbf{d}(x, B), \sup_{x \in B} \mathbf{d}(x, A) \right).$$

Avec les conventions :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A, \emptyset) = \mathbf{d}(\emptyset, B) = +\infty \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(\emptyset, \emptyset) = 0.$$

Lorsque $0 < \alpha \leq n$, \mathcal{H}^α n'est pas semi-continue inférieurement par rapport à $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$: prendre par exemple un fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{H}^\alpha(F) > 0$ et une suite (u_k) dense dans F , en posant $E_k = \{u_j : 0 \leq j \leq k\}$ on a :

$$\forall k : \mathcal{H}^\alpha(E_k) = 0 \quad \mathcal{H}^\alpha(F) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(E_k, F) = 0.$$

Distance de Hausdorff locale et convergence sur tout compact

Définition

Pour A et B deux parties non vides de \mathbb{R}^n et K compact on pose :

$$\mathbf{d}_K(A, B) = \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(K \cap A, K \cap B).$$

Distance de Hausdorff locale et convergence sur tout compact

Définition

Pour A et B deux parties non vides de \mathbb{R}^n et K compact on pose :

$$\mathbf{d}_K(A, B) = \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(K \cap A, K \cap B).$$

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, on dira que (E_k) tend vers E localement sur tout compact de U ($E_k \xrightarrow{U} E$) si E est relativement fermé dans U et si pour tout compact $K \subset U$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{d}_K(E_k, E) = 0.$$

Distance de Hausdorff locale et convergence sur tout compact

Définition

Pour A et B deux parties non vides de \mathbb{R}^n et K compact on pose :

$$\mathbf{d}_K(A, B) = \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(K \cap A, K \cap B).$$

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, on dira que (E_k) tend vers E localement sur tout compact de U ($E_k \xrightarrow{U} E$) si E est relativement fermé dans U et si pour tout compact $K \subset U$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{d}_K(E_k, E) = 0.$$

Cette convergence définit une limite unique.

Pour toute partie $U \subset \mathbb{R}^n$ et pour toute suite (E_k) de sous-parties relativement fermées il est possible d'extraire une sous-suite convergeant vers un fermé relatif.

Déformations acceptables

On se place dans un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$.

Définition

Pour $\delta \in]0, +\infty]$ une δ -déformation ϕ sur U est une famille $(\phi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ d'applications de U dans U telles que :

- $\phi_0 = Id_U$;
- ϕ_1 est lipschitzienne ;
- $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ est continue de $[0, 1] \times U$ dans U ;
- en notant

$$W_{\phi_t} = \{x \in U : \phi_t(x) \neq x\} \quad \text{et} \quad \widehat{W}_\phi = \bigcup_{t \in [0, 1]} W_{\phi_t} \cup \phi_t(W_{\phi_t})$$

alors \widehat{W}_ϕ est relativement compact dans $\overset{\circ}{U}$ et $\text{Diam}(\widehat{W}_\phi) \leq \delta$.

Ensembles minimaux

Soit $d \in \{1, \dots, n-1\}$ et h une application borélienne de U dans $[1, +\infty[$. Pour toute partie mesurable $E \subset U$ on pose :

$$J_h^d(E) = \int_E h(x) d\mathcal{H}^d(x).$$

Ensembles minimaux

Soit $d \in \{1, \dots, n-1\}$ et h une application borélienne de U dans $[1, +\infty[$. Pour toute partie mesurable $E \subset U$ on pose :

$$J_h^d(E) = \int_E h(x) d\mathcal{H}^d(x).$$

Définition

Soit E un d -ensemble relativement fermé dans U , on dira que E est minimal pour J_h^d si pour toute $\text{Diam}(U)$ -déformation (ϕ_t) sur U :

$$J_h^d(E \cap W_{\phi_1}) \leq J_h^d(\phi_1(E \cap W_{\phi_1})).$$

Ensembles quasiminimaux

Soit $d \in \{1, \dots, n-1\}$ et h une application borélienne de U dans $[1, +\infty[$. Pour toute partie mesurable $E \subset U$ on pose :

$$J_h^d(E) = \int_E h(x) d\mathcal{H}^d(x).$$

Définition

Soit E un d -ensemble relativement fermé dans U , $M > 0$ et $\delta > 0$ on dira que E est (M, δ) -quasiminimal sur U pour J_h^d si pour tout $\delta' < \delta$ et toute δ' -déformation (ϕ_t) sur U :

$$J_h^d(E \cap W_{\phi_1}) \leq MJ_h^d(\phi_1(E \cap W_{\phi_1})).$$

Par exemple l'intersection du graphe d'une fonction lipschitzienne de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^{n-d} avec U , ou encore une sphère d -dimensionnelle incluse dans U pourvu que δ soit strictement plus petit que son rayon.

Ensembles presque-minimaux

Soit $d \in \{1, \dots, n-1\}$ et h une application borélienne de U dans $[1, +\infty[$. Pour toute partie mesurable $E \subset U$ on pose :

$$J_h^d(E) = \int_E h(x) d\mathcal{H}^d(x).$$

Définition

Soit E un d -ensemble relativement fermé dans U , on dira que E est presque-minimal avec la fonction de jauge h si pour tout $\delta \in]0, \text{Diam}(U)]$ et pour toute δ -déformation (ϕ_t) sur U :

$$\mathcal{H}^d(E \cap W_{\phi_1}) \leq (1 + h(\delta)) \mathcal{H}^d(\phi_1(E \cap W_{\phi_1})) \quad \text{avec} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} h(\delta) = 0.$$

Plan

Trouver une suite minimisante convergente pour laquelle J_h^d est semi-continue inférieurement

On suppose que U est un ouvert borné ; que \mathfrak{F} est une famille de d -ensembles fermés dans U , stable par les déformations sur U ; que h est continue, à valeurs dans $[1, M]$.

Plan

Trouver une suite minimisante convergente pour laquelle J_h^d est semi-continue inférieurement

On suppose que U est un ouvert borné ; que \mathfrak{F} est une famille de d -ensembles fermés dans U , stable par les déformations sur U ; que h est continue, à valeurs dans $[1, M]$.

- 1 On considère une suite minimisante (E_k) d'éléments de \mathfrak{F} .
- 2 On construit à partir de (E_k) une suite minimisante (E_k'') qui converge vers un fermé E et pour laquelle

$$J_h^d(E) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J_h^d(E_k'').$$

Plan

Trouver une suite minimisante convergente en distance de Hausdorff locale pour laquelle J_h^d est semi-continue inférieurement

- 1 On considère une suite minimisante (E_k) d'éléments de \mathfrak{F} .
- 2 On pave U par des grilles finies de polyèdres S_k avec des bornes uniformes sur les angles des faces telles que

$$\inf_{F \in \mathfrak{F}: F \text{ porté par } S_k} J_h^d(F) \leq (1 + \varepsilon_k) J_h^d(E_k).$$

- 3 On prend $E_k'' \in \mathfrak{F}$ tel que

$$J_h^d(E_k'') = \inf_{F \in \mathfrak{F}: F \text{ porté par } S_k} J_h^d(F) \quad \text{et} \quad E_k'' \xrightarrow{U} E.$$

- 4 Grâce à une propriété de concentration uniforme on a que

$$J_h^d(E) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J_h^d(E_k'').$$

Plan

Trouver une suite minimisante convergente en distance de Hausdorff locale pour laquelle J_h^d est semi-continue inférieurement

- 1 On considère une suite minimisante (E_k) d'éléments de \mathfrak{F} .
- 2 Pour tout k on construit une grille polyédrale S_k dans U avec des bornes uniformes sur les angles des faces telle qu'une déformation E'_k de E_k portée par S_k vérifie :

$$J_h^d(E'_k) \leq (1 + \varepsilon_k) J_h^d(E_k).$$

- 3 On prend $E''_k \in \mathfrak{F}$ tel que

$$J_h^d(E''_k) = \inf_{F \in \mathfrak{F}: F \text{ porté par } S_k} J_h^d(F) \quad \text{et} \quad E''_k \xrightarrow{U} E.$$

- 4 Grâce à une propriété de concentration uniforme on a que

$$J_h^d(E) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J_h^d(E''_k) \quad \text{et} \quad E \text{ est presque-minimal.}$$

Plan

Trouver une suite minimisante convergente en distance de Hausdorff locale pour laquelle J_h^d est semi-continue inférieurement

- 1 On considère une suite minimisante (E_k) d'éléments de \mathfrak{F} .
- 2 Pour tout k on construit une grille polyédrale S_k dans U avec des bornes uniformes sur les angles des faces telle qu'une déformation E'_k de E_k portée par S_k vérifie :

$$J_h^d(E'_k) \leq (1 + \varepsilon_k) J_h^d(E_k).$$

- 3 On prend $E''_k \in \mathfrak{F}$ tel que

$$J_h^d(E''_k) = \inf_{F \in \mathfrak{F}: F \text{ porté par } S_k} J_h^d(F) \quad \text{et} \quad E''_k \xrightarrow{U} E.$$

- 4 Grâce à une propriété de concentration uniforme on a que

$$J_h^d(E) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J_h^d(E''_k) \quad \text{et} \quad E \text{ est presque-minimal.}$$

- 5 Lorsque $d = 2$, $n = 3$ et h Höldérienne d'exposant au plus $1/3$ on peut montrer que $E \in \widehat{\mathfrak{F}}$ grâce au théorème de Jean Taylor.

Théorème d'existence

Théorème

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné, $0 < d < n$, \mathfrak{F} une famille non vide de d -ensembles relativement fermés dans U stable par les déformations sur U et $h : U \rightarrow [1, M]$ une application continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in U^2 : h(y) \leq (1 + \tilde{h}(\|x - y\|))h(x)$$

où $\tilde{h} : [0, \text{Diam}(U)] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{h}(r) = 0.$$

Théorème d'existence

Théorème

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné, $0 < d < n$, \mathfrak{F} une famille non vide de d -ensembles relativement fermés dans U stable par les déformations sur U et $h : U \rightarrow [1, M]$ une application continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in U^2 : h(y) \leq (1 + \tilde{h}(\|x - y\|))h(x)$$

où $\tilde{h} : [0, \text{Diam}(U)] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{h}(r) = 0.$$

Il existe alors une suite (E_k) d'éléments de \mathfrak{F} et un d -ensemble $E \subset U$ tel que :

- $E_k \xrightarrow{U} E$;
- $J_h^d(E) \leq \inf_{F \in \mathfrak{F}} J_h^d(F)$;
- E est presque-minimal sur U avec la fonction de jauge \tilde{h} .

1 Introduction

- Mesure, dimension et distance de Hausdorff
- Ensembles minimaux, quasiminimaux et presque-minimaux
- Mise en œuvre

2 Fusion de complexes dyadiques

- Polyèdres
- Complexes
- Fusion

3 Approximation de d -ensembles par des complexes

- Rectifiabilité et densité
- Approximation polyédrale

4 Théorème d'existence

- Construction automatique d'une suite minimisante de compétiteurs quasiminimaux
- Théorème d'existence

Polyèdres euclidiens

Un demi-espace affine de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) est de la forme $H \oplus \mathbb{R}^+ u$ où H est un hyperplan affine et u est un vecteur normal à \vec{H} .

Polyèdres euclidiens

Un demi-espace affine de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) est de la forme $H \oplus \mathbb{R}^+ u$ où H est un hyperplan affine et u est un vecteur normal à \vec{H} .

Définition

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ une famille finie de demi-espaces affines. Lorsque $\delta = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ est compact et d'intérieur non vide on dira que δ est un polyèdre n -dimensionnel.

Polyèdres euclidiens

Un demi-espace affine de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) est de la forme $H \oplus \mathbb{R}^+ u$ où H est un hyperplan affine et u est un vecteur normal à \vec{H} .

Définition

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ une famille finie de demi-espaces affines. Lorsque $\delta = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

est compact et d'intérieur non vide on dira que δ est un polyèdre n -dimensionnel.

En se plaçant dans un sous-espace affine G de dimension k on considèrera aussi des polyèdres de dimension $k < n$. Dans ce cas, intérieur et frontière seront pris relativement à G .

Polyèdres euclidiens

Un demi-espace affine de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) est de la forme $H \oplus \mathbb{R}^+ u$ où H est un hyperplan affine et u est un vecteur normal à \vec{H} .

Définition

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ une famille finie de demi-espaces affines. Lorsque $\delta = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

est compact et d'intérieur non vide on dira que δ est un polyèdre n -dimensionnel.

En se plaçant dans un sous-espace affine G de dimension k on considèrera aussi des polyèdres de dimension $k < n$. Dans ce cas, intérieur et frontière seront pris relativement à G .

Par convention un singleton α est un polyèdre de dimension zéro, et on posera $\overset{\circ}{\alpha} = \alpha$ et $\partial\alpha = \emptyset$.

Polyèdres euclidiens

Un demi-espace affine de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) est de la forme $H \oplus \mathbb{R}^+ u$ où H est un hyperplan affine et u est un vecteur normal à \vec{H} .

Définition

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ une famille finie de demi-espaces affines. Lorsque $\delta = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

est compact et d'intérieur non vide on dira que δ est un polyèdre n -dimensionnel.

En se plaçant dans un sous-espace affine G de dimension k on considèrera aussi des polyèdres de dimension $k < n$. Dans ce cas, intérieur et frontière seront pris relativement à G .

Par convention un singleton α est un polyèdre de dimension zéro, et on posera $\overset{\circ}{\alpha} = \alpha$ et $\partial\alpha = \emptyset$.

Propriété

Parmi toutes les familles \mathcal{A} de demi-espaces affines pouvant convenir pour la définition d'un polyèdre n -dimensionnel δ il en existe une (notée $\mathcal{A}(\delta)$) minimale pour l'inclusion.

Faces, sous-faces et sommets

Pour un polyèdre n -dimensionnel δ donné il existe $2^{\#\mathcal{A}(\delta)}$ applications ε de $\mathcal{A}(\delta)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{A}(\delta) : \varepsilon(A) = A \text{ ou } \partial A.$$

On notera $\mathcal{E}(\delta)$ l'ensemble de ces applications.

Définition

Les sous-faces d'un polyèdre n -dimensionnel δ sont l'ensemble des polyèdres :

$$\mathcal{F}(\delta) = \left\{ \alpha = \bigcap_{A \in \mathcal{A}(\delta)} \varepsilon(A) : \varepsilon \in \mathcal{E}(\delta) \text{ et } \alpha \neq \emptyset \right\}.$$

Faces, sous-faces et sommets

Pour un polyèdre n -dimensionnel δ donné il existe $2^{\#\mathcal{A}(\delta)}$ applications ε de $\mathcal{A}(\delta)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{A}(\delta) : \varepsilon(A) = A \text{ ou } \partial A.$$

On notera $\mathcal{E}(\delta)$ l'ensemble de ces applications.

Définition

Les sous-faces d'un polyèdre n -dimensionnel δ sont l'ensemble des polyèdres :

$$\mathcal{F}(\delta) = \left\{ \alpha = \bigcap_{A \in \mathcal{A}(\delta)} \varepsilon(A) : \varepsilon \in \mathcal{E}(\delta) \text{ et } \alpha \neq \emptyset \right\}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$ on désignera l'ensemble des sous-faces k -dimensionnelles de δ par $\mathcal{F}_k(\delta)$.

Faces, sous-faces et sommets

Pour un polyèdre n -dimensionnel δ donné il existe $2^{\#\mathcal{A}(\delta)}$ applications ε de $\mathcal{A}(\delta)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{A}(\delta) : \varepsilon(A) = A \text{ ou } \partial A.$$

On notera $\mathcal{E}(\delta)$ l'ensemble de ces applications.

Définition

Les sous-faces d'un polyèdre n -dimensionnel δ sont l'ensemble des polyèdres :

$$\mathcal{F}(\delta) = \left\{ \alpha = \bigcap_{A \in \mathcal{A}(\delta)} \varepsilon(A) : \varepsilon \in \mathcal{E}(\delta) \text{ et } \alpha \neq \emptyset \right\}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$ on désignera l'ensemble des sous-faces k -dimensionnelles de δ par $\mathcal{F}_k(\delta)$.

Les sous-faces strictes de δ sont $\mathcal{F}(\delta) \setminus \{\delta\}$.

Faces, sous-faces et sommets

Pour un polyèdre n -dimensionnel δ donné il existe $2^{\#\mathcal{A}(\delta)}$ applications ε de $\mathcal{A}(\delta)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{A}(\delta) : \varepsilon(A) = A \text{ ou } \partial A.$$

On notera $\mathcal{E}(\delta)$ l'ensemble de ces applications.

Définition

Les sous-faces d'un polyèdre n -dimensionnel δ sont l'ensemble des polyèdres :

$$\mathcal{F}(\delta) = \left\{ \alpha = \bigcap_{A \in \mathcal{A}(\delta)} \varepsilon(A) : \varepsilon \in \mathcal{E}(\delta) \text{ et } \alpha \neq \emptyset \right\}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$ on désignera l'ensemble des sous-faces k -dimensionnelles de δ par $\mathcal{F}_k(\delta)$.

Les sous-faces strictes de δ sont $\mathcal{F}(\delta) \setminus \{\delta\}$.

Les faces de δ sont les sous-faces de dimension $n-1$: $\mathcal{F}_{n-1}(\delta)$.

Faces, sous-faces et sommets

Pour un polyèdre n -dimensionnel δ donné il existe $2^{\#\mathcal{A}(\delta)}$ applications ε de $\mathcal{A}(\delta)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{A}(\delta) : \varepsilon(A) = A \text{ ou } \partial A.$$

On notera $\mathcal{E}(\delta)$ l'ensemble de ces applications.

Définition

Les sous-faces d'un polyèdre n -dimensionnel δ sont l'ensemble des polyèdres :

$$\mathcal{F}(\delta) = \left\{ \alpha = \bigcap_{A \in \mathcal{A}(\delta)} \varepsilon(A) : \varepsilon \in \mathcal{E}(\delta) \text{ et } \alpha \neq \emptyset \right\}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$ on désignera l'ensemble des sous-faces k -dimensionnelles de δ par $\mathcal{F}_k(\delta)$.

Les sous-faces strictes de δ sont $\mathcal{F}(\delta) \setminus \{\delta\}$.

Les faces de δ sont les sous-faces de dimension $n-1$: $\mathcal{F}_{n-1}(\delta)$.

Les sommets de δ sont les sous-faces de dimension zéro : $\mathcal{F}_0(\delta)$.

Complexes

Soit S un ensemble fini de polyèdres k -dimensionnels. On notera :

$$\mathcal{U}(S) = \bigcup_{\delta \in S} \delta \quad \mathcal{F}(S) = \bigcup_{\delta \in S} \mathcal{F}(\delta) \quad \mathcal{F}_l(S) = \bigcup_{\delta \in S} \mathcal{F}_l(\delta)$$

$$\mathcal{F}_\partial(S) = \{\delta \in \mathcal{F}_{k-1}(S) : \forall (\alpha, \beta) \in S^2, \delta \neq \alpha \cap \beta\}$$

Complexes

Soit S un ensemble fini de polyèdres k -dimensionnels. On notera :

$$\mathcal{U}(S) = \bigcup_{\delta \in S} \delta \quad \mathcal{F}(S) = \bigcup_{\delta \in S} \mathcal{F}(\delta) \quad \mathcal{F}_l(S) = \bigcup_{\delta \in S} \mathcal{F}_l(\delta)$$

$$\mathcal{F}_0(S) = \{\delta \in \mathcal{F}_{k-1}(S) : \forall(\alpha, \beta) \in S^2, \delta \neq \alpha \cap \beta\}$$

Définition

On dira que S est un complexe k -dimensionnel si

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{F}(S)^2 : \alpha \neq \beta \Rightarrow \overset{\circ}{\alpha} \cap \overset{\circ}{\beta} = \emptyset.$$

Contrôle de la forme des polyèdres

Définition

Pour un polyèdre n -dimensionnel δ on pose :

$$\begin{aligned} \overline{R}(\delta) &= \inf\{r > 0 : \exists c \in \mathbb{R}^n, B(c, r) \supset \delta\} \\ \underline{R}(\delta) &= \sup\{r > 0 : \exists c \in \mathbb{R}^n, B(c, r) \subset \delta\} \end{aligned} \quad R(\delta) = \frac{\underline{R}(\delta)}{\overline{R}(\delta)} \in]0, 1].$$

Par convention, lorsque δ est de dimension zéro on pose $\overline{R}(\delta) = \underline{R}(\delta) = 0$ et $R(\delta) = 1$.

Contrôle de la forme des polyèdres

Définition

Pour un polyèdre n -dimensionnel δ on pose :

$$\begin{aligned}\overline{R}(\delta) &= \inf\{r > 0 : \exists c \in \mathbb{R}^n, B(c, r) \supset \delta\} \\ \underline{R}(\delta) &= \sup\{r > 0 : \exists c \in \mathbb{R}^n, B(c, r) \subset \delta\}\end{aligned} \quad R(\delta) = \frac{\underline{R}(\delta)}{\overline{R}(\delta)} \in]0, 1].$$

Par convention, lorsque δ est de dimension zéro on pose $\overline{R}(\delta) = \underline{R}(\delta) = 0$ et $R(\delta) = 1$.

Définition

Pour un complexe S on pose :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}(S) &= \max_{\delta \in \mathcal{F}(S)} \overline{R}(\delta) \\ \underline{\mathcal{R}}(S) &= \min_{\delta \in \mathcal{F}(S)} \underline{R}(\delta)\end{aligned} \quad \mathcal{R}(S) = \frac{\underline{\mathcal{R}}(S)}{\overline{\mathcal{R}}(S)} \in]0, 1].$$

Définition

Un graphe $G = (T, A)$ est la donnée :

- d'un ensemble T non vide de sommets, appelé support de G , composé de points de \mathbb{R}^n ;
- d'un ensemble d'arêtes $A \subset \mathcal{P}_2(T)$ qui contient des doublons de sommets distincts non ordonnés formant des segments d'intérieurs deux à deux disjoints.

Définition

Un graphe $G = (T, A)$ est la donnée :

- d'un ensemble T non vide de sommets, appelé support de G , composé de points de \mathbb{R}^n ;
- d'un ensemble d'arêtes $A \subset \mathcal{P}_2(T)$ qui contient des doublons de sommets distincts non ordonnés formant des segments d'intérieurs deux à deux disjoints.

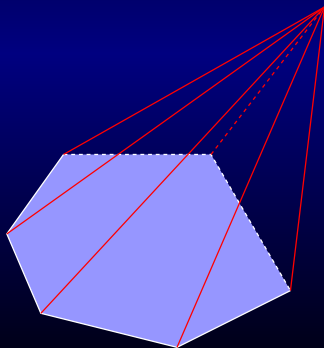
On dira que G est linéaire si chaque sommet a au plus deux voisins, s'il est connexe et s'il ne possède aucun 3-cycle.

Suspensions

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La suspension de A par rapport à x est définie par

$$\mathcal{S}(A, x) = \bigcup_{y \in A} [x, y].$$



Suspensions

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La suspension de A par rapport à x est définie par

$$\mathcal{S}(A, x) = \bigcup_{y \in A} [x, y].$$

Définition

Soit $G = (T, A)$ un graphe linéaire, S un complexe k -dimensionnel ($k < n$) et p une application de S dans T . La suspension de S par rapport au graphe G avec le choix p est définie par :

$$\mathcal{S}(S, G, p) = \left\{ \alpha = \mathcal{S}(\delta, p(\delta)) : \delta \in S \text{ et } \dim_{\mathcal{H}}(\alpha) = k + 1 \right\} \cup \left\{ \beta = \langle \delta_1 \cap \delta_2, p(\delta_1), p(\delta_2) \rangle : \{p(\delta_1), p(\delta_2)\} \in A \text{ et } \dim_{\mathcal{H}}(\beta) = k + 1 \right\}.$$

Complexe dyadique

Définition

Pour $r > 0$ un complexe dyadique n -dimensionnel de pas r est un ensemble de pavés de la forme

$$\{rz + [0, r]^n : z \in Z\}$$

dans une base orthonormale adaptée, avec Z une sous-partie finie de \mathbb{Z}^n .

Complexe dyadique

Définition

Pour $r > 0$ un complexe dyadique n -dimensionnel de pas r est un ensemble de pavés de la forme

$$\{rz + [0, r]^n : z \in Z\}$$

dans une base orthonormale adaptée, avec Z une sous-partie finie de \mathbb{Z}^n .

Soit $p \in \mathbb{N}$, on dira qu'un complexe dyadique S de pas r est $p \times p \times \dots p$ -groupé s'il existe un complexe dyadique T de pas pr tel que

$$\mathcal{U}(S) = \mathcal{U}(T).$$

Complexe dyadique

Définition

Pour $r > 0$ un complexe dyadique n -dimensionnel de pas r est un ensemble de pavés de la forme

$$\{rz + [0, r]^n : z \in Z\}$$

dans une base orthonormale adaptée, avec Z une sous-partie finie de \mathbb{Z}^n .

Soit $p \in \mathbb{N}$, on dira qu'un complexe dyadique S de pas r est $p \times p \times \dots p$ -groupé s'il existe un complexe dyadique T de pas pr tel que

$$\mathcal{U}(S) = \mathcal{U}(T).$$

On dira qu'un complexe S est dyadique en surface s'il existe un complexe dyadique T tel que

$$\mathcal{F}_\partial(S) = \mathcal{F}_\partial(T).$$

Théorème de fusion

Théorème

Il existe deux constantes strictement positives universelles (ne dépendant que de n) ρ et c telles que pour tous complexes connexes S_1 et S_2 , dyadiques unitaires en surface vérifiant :

- $d(\mathcal{U}(S_1), \mathcal{U}(S_2)) > \rho$;
- $\mathcal{U}(S_1)$ a deux composantes connexes, dont l'une forme la frontière d'un ouvert O tel que $O \cap \mathcal{U}(S_1) = \emptyset$ et $\mathcal{U}(S_2) \subset O$.

Théorème de fusion

Théorème

Il existe deux constantes strictement positives universelles (ne dépendant que de n) ρ et c telles que pour tous complexes connexes S_1 et S_2 , dyadiques unitaires en surface vérifiant :

- $\mathbf{d}(\mathcal{U}(S_1), \mathcal{U}(S_2)) > \rho$;
- $\mathcal{U}(S_1)$ a deux composantes connexes, dont l'une forme la frontière d'un ouvert O tel que $O \cap \mathcal{U}(S_1) = \emptyset$ et $\mathcal{U}(S_2) \subset O$.

Alors il existe un complexe n -dimensionnel S_3 vérifiant les propriétés suivantes :

- 1 $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ est un complexe dyadique unitaire en surface ;
- 2 $\mathcal{U}(S_2 \cup S_3) = \overline{O}$;
- 3 $\mathcal{R}(S_3) \geq c\mathcal{R}(S_1 \cup S_2)$.

1 Introduction

- Mesure, dimension et distance de Hausdorff
- Ensembles minimaux, quasiminimaux et presque-minimaux
- Mise en œuvre

2 Fusion de complexes dyadiques

- Polyèdres
- Complexes
- Fusion

3 Approximation de d -ensembles par des complexes

- **Rectifiabilité et densité**
- **Approximation polyédrale**

4 Théorème d'existence

- Construction automatique d'une suite minimisante de compétiteurs quasiminimaux
- Théorème d'existence

Rectifiabilité

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{N}$.

Définition

On dira que E est d -rectifiable si E est une union dénombrable de morceaux boréliens d'images par des applications lipschitziennes du pavé $[0, 1]^d$, à une éventuelle partie de mesure nulle près.

Rectifiabilité

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{N}$.

Définition

On dira que E est d -rectifiable si E est une union dénombrable de morceaux boréliens d'images par des applications lipschitziennes du pavé $[0, 1]^d$, à une éventuelle partie de mesure nulle près.

On dira que E est purement non d -rectifiable si son intersection avec toute partie d -rectifiable est de mesure nulle.

Rectifiabilité

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{N}$.

Définition

On dira que E est d -rectifiable si E est une union dénombrable de morceaux boréliens d'images par des applications lipschitziennes du pavé $[0, 1]^d$, à une éventuelle partie de mesure nulle près.

On dira que E est purement non d -rectifiable si son intersection avec toute partie d -rectifiable est de mesure nulle.

Propriété

Soit E un d -ensemble, alors il existe $(E_R, E_I) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $E = E_R \sqcup E_I$ avec E_R d -rectifiable et E_I purement non d -rectifiable.

Densités sphériques

Définition

Densités sphériques inférieure et supérieure de E en x pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\underline{d}_E^\alpha(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^\alpha(E \cap B(x, r))}{c_\alpha(2r)^\alpha} \quad \overline{d}_E^\alpha(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^\alpha(E \cap B(x, r))}{c_\alpha(2r)^\alpha}$$

Densités sphériques

Définition

Densités sphériques inférieure et supérieure de E en x pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\underline{d}_E^\alpha(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^\alpha(E \cap B(x, r))}{c_\alpha(2r)^\alpha} \quad \overline{d}_E^\alpha(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^\alpha(E \cap B(x, r))}{c_\alpha(2r)^\alpha}$$

Théorème

Soit E un d -ensemble, alors :

- E est d -rectifiable si et seulement si $\underline{d}_E^d = \mathbb{1}_E$ \mathcal{H}^d -presque partout ;
- E est purement non d -rectifiable si et seulement si $\underline{d}_E^d < 1$ \mathcal{H}^d -presque partout.

Plans tangents approximatifs

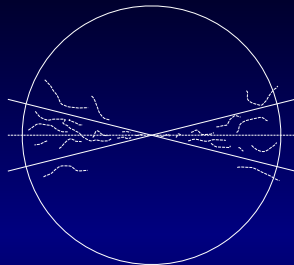
Soit H un d -plan affine, et $x \in H$, on notera alors :

$$C(x, r, u) = \{y \in B(x, r) : \mathbf{d}(y, H) < u\|x - y\|\}.$$

Définition

H est un d -plan tangent approximatif à E en x si :

- $x \in H$ et $\underline{d}_E^d(x) > 0$;
- $\forall u > 0 : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^d(E \cap B(x, r) \setminus C(x, r, u))}{r^d} = 0$.



Plans tangents approximatifs

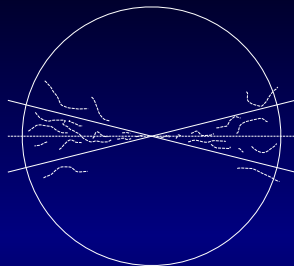
Soit H un d -plan affine, et $x \in H$, on notera alors :

$$C(x, r, u) = \{y \in B(x, r) : \mathbf{d}(y, H) < u\|x - y\|\}.$$

Définition

H est un d -plan tangent approximatif à E en x si :

- $x \in H$ et $\underline{d}_E^d(x) > 0$;
- $\forall u > 0 : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^d(E \cap B(x, r) \setminus C(x, r, u))}{r^d} = 0$.



Théorème

Soit E un d -ensemble :

- E est rectifiable si et seulement s'il admet un d -plan tangent approximatif \mathcal{H}^d -presque partout ;
- E est purement non rectifiable si et seulement s'il n'admet pas de d -plan tangent approximatif \mathcal{H}^d -presque partout.

Lemme de recouvrement

Lemme

Soit E un α -ensemble de \mathbb{R}^n et \mathcal{B} une collection de boules de \mathbb{R}^n telle qu'en tout point $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on puisse trouver une boule centrée en x de rayon au plus ε .

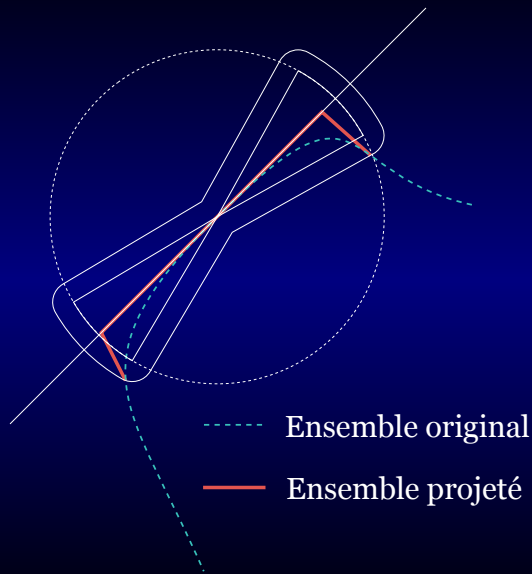
Lemme de recouvrement

Lemme

Soit E un α -ensemble de \mathbb{R}^n et \mathcal{B} une collection de boules de \mathbb{R}^n telle qu'en tout point $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on puisse trouver une boule centrée en x de rayon au plus ε . On peut alors extraire une sous-famille dénombrable $\hat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ de boules disjointes telle que :

$$\mathcal{H}^\alpha \left(E \setminus \bigsqcup_{B \in \hat{\mathcal{B}}} B \right) = 0.$$

Projection ρ -magnétique dans un cône



Projection ρ -magnétique dans un cône

Définition

Pour $r > 0$, $\rho \in]0, 1[$, H un d -affine et $x \in H$ on notera $\Pi_{H, \rho r, C(x, r, u)}$ un raccordement lipschitzien approprié du projecteur orthogonal sur H à l'intérieur de $C(x, r, u)$ avec l'identité à l'extérieur de $\mathcal{V}(C(x, r, u), \rho r)$.

Projection ρ -magnétique dans un cône

Définition

Pour $r > 0$, $\rho \in]0, 1[$, H un d -affine et $x \in H$ on notera $\Pi_{H,\rho r,C(x,r,u)}$ un raccordement lipschitzien approprié du projecteur orthogonal sur H à l'intérieur de $C(x,r,u)$ avec l'identité à l'extérieur de $\mathcal{V}(C(x,r,u), \rho r)$.

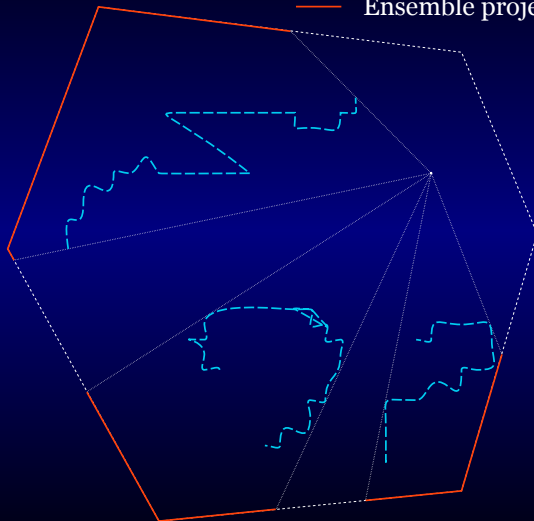
Lemme

Soit E un d -ensemble, en \mathcal{H}^d -presque tout point x de la partie rectifiable de E et pour tout $\varepsilon > 0$ il est possible de trouver un d -plan H contenant x , $r_{\max} > 0$, $\rho \in]0, 1[$ et $u > 0$ tels que, pour tout $r \in]0, r_{\max}[$:

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{H,\rho r,C(x,r,u)}(E \cap B(x, r + \rho r) \setminus C(x, r, u))) \leq \varepsilon \mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + \rho r)).$$

Projection radiale dans un polyèdre

- Ensemble original
- Ensemble projeté



Projection radiale dans un polyèdre

Définition

Soit δ un polyèdre k -dimensionnel ($2 \leq k \leq n$) et $x \in \overset{\circ}{\delta}$. On définit la projection radiale $\Pi_{\delta,x}$ de centre x sur les faces de δ par :

$$\Pi_{\delta,x} : \begin{cases} \delta \setminus \{x\} \rightarrow \partial\delta \\ y \mapsto z \in [x,y) \cap \partial\delta. \end{cases}$$

Projection radiale dans un polyèdre

Définition

Soit δ un polyèdre k -dimensionnel ($2 \leq k \leq n$) et $x \in \overset{\circ}{\delta}$. On définit la projection radiale $\Pi_{\delta,x}$ de centre x sur les faces de δ par :

$$\Pi_{\delta,x} : \begin{cases} \delta \setminus \{x\} \rightarrow \partial\delta \\ y \mapsto z \in [x,y) \cap \partial\delta. \end{cases}$$

Lemme

Soit E un d -ensemble fermé ($1 \leq d < k \leq n$).

Si E est rectifiable, il existe une constante universelle $K > 0$ (ne dépendant que de d et k) telle que pour tout polyèdre k -dimensionnel $\delta \supset E$ on peut trouver une partie $X \subset \overset{\circ}{\delta}$ de \mathcal{H}^k -mesure non nulle vérifiant :

$$\forall x \in X : \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E)) \leq KR(\delta)^{-2d} \mathcal{H}^d(E).$$

Projection radiale dans un polyèdre

Définition

Soit δ un polyèdre k -dimensionnel ($2 \leq k \leq n$) et $x \in \overset{\circ}{\delta}$. On définit la projection radiale $\Pi_{\delta,x}$ de centre x sur les faces de δ par :

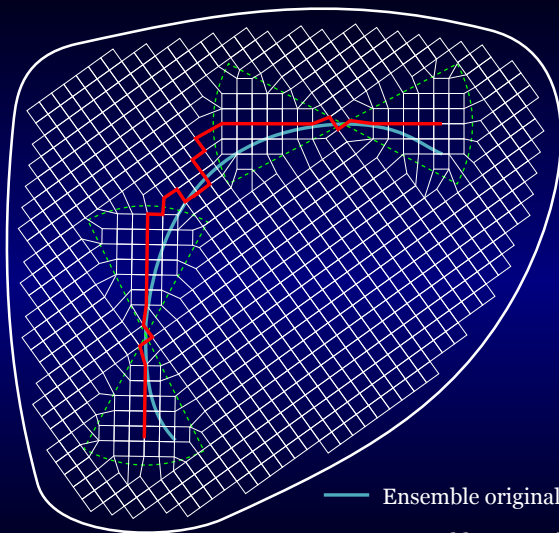
$$\Pi_{\delta,x} : \begin{cases} \delta \setminus \{x\} \rightarrow \partial\delta \\ y \mapsto z \in [x,y) \cap \partial\delta. \end{cases}$$

Lemme

Soit E un d -ensemble fermé ($1 \leq d < k \leq n$).

Si E est purement non rectifiable, pour tout polyèdre k -dimensionnel $\delta \supset E$ et pour \mathcal{H}^k -presque tout $x \in \overset{\circ}{\delta}$ la projection radiale $\Pi_{\delta,x}(E)$ est purement non d -rectifiable ou de \mathcal{H}^d -mesure nulle.

Approximation polyédrale



— Ensemble original

— Ensemble approximé

Approximation polyédrale

Théorème

Soit $d \in \{1, \dots, n-1\}$ et une application continue $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, +\infty[$.

Il existe une constante $M > 0$ (ne dépendant que de d et n) telle que pour tout ouvert borné U , pour tout d -ensemble fermé $E \subset U$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on peut construire un complexe S dyadique en surface et une application lipschitzienne ϕ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n vérifiant :

- $\phi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus U}$ et $\forall \delta \in \mathcal{F}_d(S) : \phi(\delta) = \delta$;
- $\mathcal{R}(S) \geq M$;
- $\phi(E) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S))$ et $\mathcal{U}(S) \subset U$;
- $J_h^d(\phi(E)) \leq (1 + \varepsilon)J_h^d(E)$.

Déformation polyédrale

Lemme

Soit U un ouvert borné, S un complexe n -dimensionnel dyadique en surface tel que $\mathcal{U}(S) \subset U$ et $d \in \{1, \dots, n-1\}$.

Il existe alors une constante $K > 0$ ne dépendant que de d , n et $\mathcal{R}(S)$ telle que pour tout d -ensemble fermé $E \subset \mathcal{U}(S)$ on puisse construire une application lipschitzienne ϕ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n vérifiant :

- $\phi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus U}$ et $\forall \delta \in \mathcal{F}(S) : \phi(\delta) = \delta$;
- $\phi(E) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S))$;
- $\mathcal{H}^d(\phi(E)) \leq K \mathcal{H}^d(E)$.

Érosion polyédrale

Lemme

Soit U un ouvert borné, S un complexe n -dimensionnel dyadique en surface tel que $\mathcal{U}(S) \subset U$ et $d \in \{1, \dots, n-1\}$.

Pour tout d -ensemble fermé $E \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S))$ on peut construire une application lipschitzienne ϕ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n vérifiant :

- $\phi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus U}$ et $\forall \delta \in \mathcal{F}(S) : \phi(\delta) = \delta$;
- $\phi(E) = \mathcal{U}(S')$ où $S' \subset \bigcup_{j \leq d} \mathcal{F}_j(S)$;
- $\mathcal{H}^d(\phi(E)) \leq \mathcal{H}^d(E)$.

1 Introduction

- Mesure, dimension et distance de Hausdorff
- Ensembles minimaux, quasiminimaux et presque-minimaux
- Mise en œuvre

2 Fusion de complexes dyadiques

- Polyèdres
- Complexes
- Fusion

3 Approximation de d -ensembles par des complexes

- **Rectifiabilité et densité**
- **Approximation polyédrale**

4 Théorème d'existence

- Construction automatique d'une suite minimisante de compétiteurs quasiminimaux
- Théorème d'existence

Limites d'ensembles quasiminimaux

Définition

Soit E un d -ensemble, son noyau E^* est défini comme le support de \mathcal{H}^d sur E :

$$E^* = \{x \in E : \forall r > 0, \mathcal{H}^d(B(x, r) \cap E) > 0\}.$$

Lorsque $E^* = E$ on dira que E est réduit.

Limites d'ensembles quasiminimaux

Définition

Soit E un d -ensemble, son noyau E^* est défini comme le support de \mathcal{H}^d sur E :

$$E^* = \{x \in E : \forall r > 0, \mathcal{H}^d(B(x, r) \cap E) > 0\}.$$

Lorsque $E^* = E$ on dira que E est réduit.

Théorème

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $M \geq 1$ et (E_k) une suite de d -ensembles relativement fermés dans U , (M, δ) -quasiminimaux sur U tels que :

$$E_k^* \xrightarrow{U} E.$$

Dans ces conditions :

- 1 E est (M, δ) -quasiminimal et réduit ;
- 2 pour tout ouvert $W \subset U$, $\mathcal{H}^d(E \cap W) \leq \liminf \mathcal{H}^d(E_k \cap W)$.

Optimisation polyédrale

Lemme

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $d \in \{1, \dots, n-1\}$. Il existe $M' > 0$ tel que :

- pour toute application continue $h : U \rightarrow [1, M]$;
- pour tout d -ensemble E relativement fermé dans U ;
- pour toute sous-partie V relativement compacte dans $\overset{\circ}{U}$ et pour tout $\varepsilon > 0$;

Optimisation polyédrale

Lemme

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $d \in \{1, \dots, n-1\}$. Il existe $M' > 0$ tel que :

- pour toute application continue $h : U \rightarrow [1, M]$;
- pour tout d -ensemble E relativement fermé dans U ;
- pour toute sous-partie V relativement compacte dans $\overset{\circ}{U}$ et pour tout $\varepsilon > 0$;

on puisse trouver un complexe n -dimensionnel S et une partie $E'' \subset U$ vérifiant :

- 1 E'' est une déformation de E et en notant $W = \overset{\circ}{\mathcal{U}}(S)$ on a $V \subset\subset W \subset\subset U$;
- 2 $E'' \cap \overline{W}$ est une union de sous-faces de dimension au plus d de S ;
- 3 $J_h^d(E'') \leq (1 + \varepsilon) J_h^d(E)$;
- 4 $E \cap W$ est $(MM', \text{Diam } W)$ -quasiminimal sur W .

Théorème d'existence

Théorème

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné, $0 < d < n$, \mathfrak{F} une famille non vide de d -ensembles relativement fermés dans U stable par les déformations sur U et $h : U \rightarrow [1, M]$ une application continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in U^2 : h(y) \leq (1 + \tilde{h}(\|x - y\|))h(x)$$

où $\tilde{h} : [0, \text{Diam}(U)] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

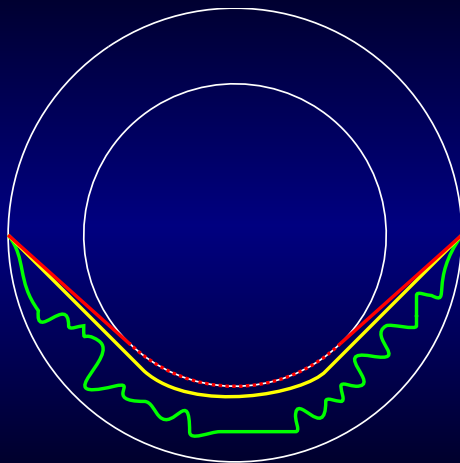
$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{h}(r) = 0.$$

Il existe alors une suite (E_k) d'éléments de \mathfrak{F} et un d -ensemble $E \subset U$ tel que :

- $E_k \xrightarrow{U} E$;
- $J_h^d(E) \leq \inf_{F \in \mathfrak{F}} J_h^d(F)$;
- E est presque-minimal sur U avec la fonction de jauge \tilde{h} .

Perspectives

- lorsque $d = 2$ et $n = 3$ on peut montrer que $E \in \widehat{\mathfrak{F}}$ grâce à Jean Taylor ;



Perspectives

- lorsque $d = 2$ et $n = 3$ on peut montrer que $E \in \widehat{\mathfrak{F}}$ grâce à Jean Taylor ;
- résultat analogue sur des variétés \mathcal{C}^2 de dimension 3 en généralisant le théorème de fusion ;

Perspectives

- lorsque $d = 2$ et $n = 3$ on peut montrer que $E \in \widehat{\mathfrak{F}}$ grâce à Jean Taylor ;
- résultat analogue sur des variétés \mathcal{C}^2 de dimension 3 en généralisant le théorème de fusion ;
- lorsque $d = 2$ et $n > 3$ si on autorise des déformations Hölderiennes on peut encore avoir $E \in \widehat{\mathfrak{F}}$;

Perspectives

- lorsque $d = 2$ et $n = 3$ on peut montrer que $E \in \widehat{\mathfrak{F}}$ grâce à Jean Taylor ;
- résultat analogue sur des variétés \mathcal{C}^2 de dimension 3 en généralisant le théorème de fusion ;
- lorsque $d = 2$ et $n > 3$ si on autorise des déformations Hölderiennes on peut encore avoir $E \in \mathfrak{F}$;
- généralisation à des domaines fermés lorsqu'on connaît une rétraction lipschitzienne d'un voisinage du bord sur le bord en généralisant le théorème d'approximation polyédrale au cas h semi-continue inférieurement.