Un résultat d'existence pour les ensembles minimaux par optimisation sur des grilles polyédrales

Vincent Feuvrier

▶ **To cite this version:**

Vincent Feuvrier. Un résultat d'existence pour les ensembles minimaux par optimisation sur des grilles polyédrales. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. Français. NNT : . tel-00348735

HAL Id: tel-00348735

https://theses.hal.science/tel-00348735

Submitted on 21 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 9159

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Mathématiques

par

Vincent FEUVRIER

UN RÉSULTAT D'EXISTENCE POUR LES ENSEMBLES MINIMAUX PAR OPTIMISATION SUR DES GRILLES POLYÉDRALES

Soutenue le 30 septembre 2008 devant la Commission d'examen:

M.	Giovanni ALBERTI	(Rapporteur)
M.	Raphaël CERF	
M.	Guy DAVID	(Directeur de thèse)
M.	Thierry DE PAUW	(Rapporteur)
M.	Jean-Michel MOREL	(Président du jury)
M.	Pierre PANSU	

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est dite minimale si sa mesure de Hausdorff d-dimensionnelle ne peut être rendue plus petite par déformation dans une classe de compétiteurs adaptée. On peut citer comme exemple le problème de Plateau standard, pouvant se réécrire comme celui de trouver un ensemble minimal pour les déformations à support relativement compact dans un domaine, la frontière du domaine jouant alors le rôle d'une condition topologique de bord.

Un ensemble quasiminimal au sens d'Almgren n'est pas forcément minimal puisque sa mesure peut décroître après déformation, mais seulement de manière contrôlée relativement à la mesure des points qui ont été déformés. Par exemple le graphe d'une application lipschitzienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{n-d}$ est quasiminimal et de façon générale, on sait (voir [A]) que les ensembles quasiminimaux sont rectifiables. Lorsqu'on considère la réduction E^* d'un ensemble quasiminimal E, qui consiste à prendre le support de la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle restreinte à E — en gros en enlevant les points dont la contribution à la mesure de E est nulle — on sait en outre (voir [DS]) que E^* contient de *grandes images lipschistziennes* et est *uniformément rectifiable*.

Une autre propriété remarquable concerne les limites de Hausdorff de suites d'ensembles quasiminimaux réduits. Dans ce contexte, non seulement la limite est quasiminimale et réduite, mais en outre la mesure de Hausdorff est semi-continue inférieurement (voir par exemple [D1]), ce qui n'est généralement pas le cas. Cette propriété fait des limites de suites minimisantes d'ensembles quasiminimaux les candidates idéales à la résolution de problèmes d'existence sous contrainte topologique stable par déformation.

On propose ici, dans le cadre d'un problème sur un ouvert en dimension et codimension quelconques, un premier résultat d'existence utilisant une méthode systématique pour construire une suite minimisante d'ensembles quasiminimaux, par minimisation finie sur les sous-faces d-dimensionnelles de grilles polyédrales adaptées. La construction de telles grilles est assez délicate, puisqu'on s'impose à la fois de faire l'approximation polyédrale d'un ensemble rectifiable le long de certains plans tangents pour contrôler l'augmentation de mesure correspondante, tout en gardant un contrôle uniforme sur la régularité des polyèdres de façon à éviter qu'ils ne soient trop plats. Des bornes uniformes sur la forme des polyèdres sont en effet utilisées lors de la discrétisation polyédrale des compétiteurs du problème — mettant en jeu des projections radiales successives sur la frontière des sous-faces de dimension décroissante de n à d — et permettent d'obtenir automatiquement une constante de quasiminimalité ne dépendant que de n et d.

La suite d'ensembles quasiminimaux obtenue converge alors en distance de Hausdorff sur tout compact du domaine vers un ensemble *minimal* — ou *presque-minimal* dans le cas d'une fonctionnelle $J_h^d(E) = \int h d\mathcal{H}^d$ avec une fonction h continue à valeurs dans $[1, M]$. L'existence de rétractions lipschitziennes sur la limite obtenue (donnée par le théorème de Jean Taylor dans [T] pour le cas $d = 2$, $n = 3$) devrait alors permettre d'affirmer que la limite fait encore partie de la classe topologique initiale considérée. Le résultat d'existence pourrait encore se généraliser à certains problèmes sur des variétés sans bord, ou dans une certaine mesure à des domaines fermés pour lesquels on connait une rétraction lipschitzienne d'un voisinage sur le bord.

Mots-clefs : Ensembles minimaux, Ensembles quasiminimaux, Problème de Plateau, Films de savon, Complexes sympliciaux, Polyèdres euclidiens.

A result about existence for minimal sets using polyhedral optimization

Abstract

Let us recall that a subset of $\mathbb{R}^n$ is said to be minimal if its d-dimensional Hausdorff measure cannot be decreased by a deformation taken in a suitable class. One can give as an example the standard Plateau problem, which can be rewritten in terms of finding a minimal set under deformations that only move a relative compact subset of points of a given domain. In that case the boundary of the domain acts as a topological constrainst.

An Almgren quasiminimal set can have its measure decreased by deformations, but only in a controlled manner in regard of the measure of the points being affected. For instance, graphs of lipschitz functions from $\mathbb{R}^d$ into $\mathbb{R}^{n-d}$ are quasiminimal, and it is known (see [A]) that quasiminimal sets are rectifiable. Furthermore (see [DS]), cores of quasiminimal sets — which are obtained by removing the points whose contribution to the measure of the set is null, operation denoted as making the set reduced — contain *big pieces of lipschitz graphs* and are *uniformly rectifiable*.

Another interesting property shows up for Hausdorff limits of reduced quasiminimal sets. In fact, not only is the limit quasiminimal and reduced, but the Hausdorff measure is lower semicontinuous (see for instance [D1]), which is usually not true. This property makes limits of minimizing sequences of quasiminimal sets the ideal candidates for solving existence problems with topological constrainst stable under deformations.

We introduce a theorem of existence, in the case of an open domain of $\mathbb{R}^n$ and in arbitrary dimension and codimension, using an automatic method to build a minimizing sequence of quasiminimal sets, by minimizing over the d-dimensional faces of polyhedral grids. Such grids must be carefully designed, since we want to approximate a given d-rectifiable set by following the directions of some of its approximate tangent planes to keep control on the measure increase introduced by the approximation, while keeping uniform bounds on the shape of the polyhedrons to avoid making them too flat. These uniform bounds are used when approximating other competitors using successive radial projections on decreasing dimensional polyhedrons of the grid till dimension d, to obtain quasiminimality constants depending only on d and n.

The quasiminimal sequence we finally obtain converges on every compact subset of the domain to a *minimal* set — or *almost-minimal* when minimizing the functional defined as $J_h^d(E) = \int h d\mathcal{H}^d$ where h is continuous on the domain, with values in $[1, M]$. If we can find lipschitz retractions onto the limit (we can obtain them for instance when $n = 3$ and $d = 2$ using Jean Taylor's regularity theorem in [T]) we can claim that the limit is still in the topological class we used. Our result could also be generalized in some cases of boundaryless manifolds, or on closed domains when there exists a lipschitz retraction of a neighborhood onto the boundary.

Keywords : Minimal sets, Quasiminimal sets, Plateau problem, Soap films, Simplicial complexes, Euclidean polyhedrons.

Remerciements

Au moment où ce projet de thèse semble arriver à son terme, je crois qu'il est temps d'exprimer ma reconnaissance à ceux qui ont contribué à sa réalisation et à tous ceux qui m'ont accompagné au cours de ces années riches en enseignements.

Mes pensées vont en premier à Guy David, qui a encadré ce travail ; merci à lui pour ses conseils, sa gentillesse, et cette patience que malgré tous mes efforts je n'ai jamais réussi à épuiser.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Giovanni Alberti (Université de Pise) et Thierry de Pauw (Institut de Mathématiques de Jussieu), pour avoir accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteurs. Merci pour le soin que vous avez apporté à la lecture d'une prose pas toujours très adroite, pour vos conseils, et surtout merci à Thierry de m'avoir tiré de cette situation embarrassante impliquant un hôtel belge !

Mes remerciements vont également à ceux qui ont accepté de participer au jury de cette thèse : Raphaël Cerf (Université d'Orsay), Jean-Michel Morel (CMLA, ENS Cachan) qui a également dirigé mon projet de DEA dans un domaine très proche et Pierre Pansu (Université d'Orsay) qui a certainement reconnu dans ce travail quelques clins d'oeil au cours d'imagerie informatique que nous avons effectué ensemble.

Merci encore aux doctorants ou anciens doctorants du laboratoire qui, par leur intelligence et leur bonne humeur, ont suscité d'intéressants échanges, qu'ils soient scientifiques ou amicaux. S'il est impossible de les citer tous, je tiens à remercier Ramona Anton, Antoine Gournay, Antoine Lemenant, Bertrand Micaux et Ricardo Menares. Enfin la liste ne serait pas complète si je ne mentionnais pas Valérie Lavigne, et sa redoutable efficacité au secrétariat de l'École Doctorale.

Je remercie également Michelle Schatzman pour cette intéressante discussion sur les grilles de polyèdres et leur utilisation dans des logiciels de résolution numérique.

Enfin je tiens à remercier ceux qui, bien que peu familiers des mathématiques, m'ont apporté conseils et soutien. Ma famille, sans qui je n'écrirais certainement pas ces lignes, et mes amis ; je suis heureux de leur faire partager le plaisir d'en être arrivé là.

... et merci pour tout, Isabelle

Table des matières

Table des matières **8**

Introduction **11**

Prolégomènes **14**

I Construction et fusion de complexes dyadiques 17

1 Complexes de polyèdres **18**

1.1 Définitions et propriétés immédiates des suspensions et polyèdres 18

1.2 Complexes 34

1.3 Suspension de complexes 40

2 Fusion de complexes dyadiques **60**

2.1 Fusion en dimension 2 66

2.2 Fusion après rotation 80

2.3 Conclusion 92

II Approximation d'ensembles de dimension entière par des complexes 93

3 Ensembles rectifiables et leurs propriétés géométriques **94**

3.1 Rappels sur la mesure, dimension et distance de Hausdorff 94

3.2 Propriétés de densité 98

3.3 Rectifiabilité 100

4 Approximation polyédrale **103**

4.1 Lemmes de recouvrement 104

4.2 Raccordements lipschitziens 107

4.3 Projection radiale sur des polyèdres 116

III Ensembles presque-minimaux en codimension quelconque 128

5 Ensembles quasi-minimaux en codimension quelconque 129

5.1 Ensembles minimaux et quasiminimaux 129

5.2 Quasiminimalité et complexes 131

6 Résultat d'existence pour les ensembles presque-minimaux 138

6.1 Limites minimisantes d'ensembles quasiminimaux 138

6.2 Perspectives 148

IV Annexe 152

7 Preuve informatique du lemme du laboureur 153

7.1 Méthode algorithmique 153

7.2 Implémentation en C 156

7.3 Résultats donnés par le programme 161

7.4 Fin de la démonstration du lemme 161

Références 164

Introduction

Un ensemble minimal est tel que sa mesure de Hausdorff ne peut être rendue plus petite par une déformation prise dans une classe adaptée. En terme de courants, on cherche à minimiser la taille (mesure du support) et non la masse (intégrale de la multiplicité sur le support). Ces ensembles minimaux ressemblent alors à des films de savon, contrairement aux surfaces de masse minimale. On peut donner comme exemple le problème de Plateau classique, qui peut se reformuler en celui de trouver un ensemble minimal pour les déformations à support compact dans un domaine, la frontière du domaine jouant le rôle d'une condition topologique de bord.

Les surfaces minimales (en terme de masse) ont été abondamment étudiées. On peut citer les travaux de Federer, Flemming, de Giorgi et d'autres. Dans ce cadre il s'agit d'abord essentiellement de traduire le problème en terme de géométrie différentielle, et à minimiser parmi une classe donnée de courants. L'existence de solutions est alors donnée par les bonnes propriétés de compacité et des théorèmes de convergences sur les limites de courants intégraux. En comparaison il existe relativement peu de résultats pour les minimiseurs de taille, en particulier en dimension et codimension élevées. Citons toutefois les travaux de Reifenberg en 1960 dans [R], en particulier pour des surfaces bidimensionnelles dans $\mathbb{R}^3$ et les résultats partiels récents obtenus par T. de Pauw et R. Hardt dans [DH] en utilisant des outils propres aux courants.

Une idée des plus naturelles qui peut venir à l'esprit pour discuter de l'existence de solutions à un problème d'ensemble minimaux consiste à étudier une suite minimisante (E_k) de compétiteurs convergeant vers une partie fermée E pour la distance de Hausdorff $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$. En dimension 1, on sait d'après le théorème de Golab (voir par exemple [AT]) que la mesure de Hausdorff («longueur» dans ce cas) est semi-continue inférieurement pour la convergence en distance de Hausdorff lorsqu'on se restreint à des parties connexes de $\mathbb{R}^n$. En dimension $d = 2$ ou supérieure il est hélas bien connu que la mesure de Hausdorff d-dimensionnelle $\mathcal{H}^d$ n'est en général pas semi-continue inférieurement par rapport à $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$, or on voudrait s'assurer que

$$\mathcal{H}^d(E) \leq \liminf_{k \to +\infty} \mathcal{H}^d(E_k) \ .$$

Il existe une condition suffisante pour que cela se produise — qui est à peu de choses près la propriété de concentration uniforme de G. Dal Maso, J.-M. Morel et S. Solimini dans [DMS], introduite à l'origine pour l'étude de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Supposons que les ensembles E_k sont quasiminimaux (notion analogue aux «restricted sets» dans [A]) avec des constantes uniformes et qu'on les a *réduits* — opération consistant à prendre le support de la restriction de $\mathcal{H}^d$ à E_k — ce qui correspond à leur retirer un ensemble de mesure nulle. Dans ce cas (voir [D1]) non seulement E est lui aussi quasiminimal avec les mêmes constantes et réduit, mais l'inégalité précédente est vérifiée.

On va s'intéresser ici à l'obtention automatique de suites minimisantes d'ensembles quasiminimaux dans le cas d'un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ par une méthode inspirée de Reifenberg, faisant intervenir des pavages par des grilles quasi-dyadiques de plus en plus fines. Si l'on suppose qu'on a pavé le domaine par une grille de cubes dyadiques, il est facile de construire un quasiminimiseur à partir d'un compétiteur E_k : il suffit d'effectuer une minimisation finie sur les sous-faces de dimension au plus d de la grille parmi

les déformations de E_k sur celle-ci, le minimum trouvé E_k'' sera automatiquement quasi-minimal. Une telle déformation peut par exemple être obtenue en faisant la projection radiale de E_k dans chaque cube de la grille sur sa frontière par rapport à un centre situé à l'intérieur, puis dans chaque face de cube et ainsi de suite jusqu'aux sous-faces de dimension d. Si l'on continue les projections radiales dans toutes les sous-faces de la grille qui ne sont pas entièrement recouvertes — en «explosant» les trous sur la frontière de la sous-face — la déformation E_k' obtenue n'est plus composée que d'une union finie de sous-faces de dimension au plus d de la grille dyadique. Ainsi on sait automatiquement que

$$\mathcal{H}^d(E_k'') \leq \mathcal{H}^d(E_k') \ .$$

Avec une grille quelconque la suite (E_k'') n'est en général pas minimisante, or d'après l'inégalité précédente il nous suffirait pourtant de savoir que (E_k') l'est pour s'assurer qu'elle le soit. Il nous faut donc construire des grilles polyédrales plus générales, capables de suivre approximativement la direction des plans tangents de la partie rectifiable de E_k. En outre, la constante de quasiminimalité de E_k'' dépendant de la forme des polyèdres utilisés pour les projections radiales, il nous faut aussi nous assurer ceux-ci ne sont pas trop plats pour disposer de constantes uniformes.

Dans la première partie, une part importante de notre étude va consister à manipuler des polyèdres de $\mathbb{R}^n$, initialement définis en tant qu'intersection bornée de demi-espaces affines (définition 1.1.5*) ; cette définition est équivalente à celle, usuelle, des polytopes en tant qu'enveloppe convexe d'une famille finie de points. On se dotera de la terminologie et des définitions nécessaires à la description d'ensembles de polyèdres vérifiant des propriétés géométriques comparables aux grilles dyadiques : les complexes (définition 1.2.23*). Il est en effet important, pour des raisons de cohérence lors de l'utilisation de projections radiales, d'imposer que les faces des polyèdres de la grille se recollent exactement, ainsi que les sous-faces de toutes dimensions. En particulier on établit le
p. 20, 35 et* 61
théorème 2.3* de fusion de complexes, qui permet de relier entre elles deux grilles dyadiques de $\mathbb{R}^n$ d'orientations différentes en construisant une famille de polyèdres formant un complexe plus grand. L'intérêt de cette construction est qu'on donne des bornes uniformes (ne dépendant que de n) sur les tailles et les régularités de chaque polyèdre construit — c'est à dire le rapport entre le rayon d'une boule inscrite et celui d'une boule circonscrite — y compris les sous-faces.

La deuxième partie consiste à considérer une partie fermée E, $\mathcal{H}^d$-mesurable, bor-
page 121*
née et de mesure finie de $\mathbb{R}^n$. Le théorème 4.3.17* offre la possibilité de construire un complexe S et une déformation E' de E portée par des sous-faces de dimension au plus d de S, et dont la mesure peut être rendue arbitrairement proche de celle de E. Sa démonstration consiste essentiellement à presque-recouvrir la partie rectifiable de E par des boules disjointes, centrées sur des points de E où il y a un plan tangent, à construire une grille dyadique à l'intérieur d'un nombre fini suffisamment grand de ces boules, et à les relier entre elles grâce au théorème de fusion. En projetant préalablement E sur son plan tangent dans chacune de ces grilles — opération qui ne va pas faire augmenter sa mesure — et en effectuant des projections radiales successives dans les sous-faces de dimension n à d du complexe total — opération qui là encore n'augmente pas la mesure dans les grilles dyadiques, puisqu'on a préalablement projeté sur un plan tangent parallèle — on s'assure de pouvoir garder la mesure de E' arbitrairement proche de celle de E. En continuant les projections radiales dans les sous faces de dimension strictement

plus petite que d qui ne sont pas entièrement recouvertes, on explose les «trous» sur la frontière des sous-faces — ce qui là encore n'augmente pas la mesure — et on obtient un ensemble E' porté par une union de sous-faces complètes de S. Il est important de noter que cette construction peut être faite en dimension et codimension quelconques, et pourrait amener à généraliser un résultat établi par T. De Pauw dans [De], qui utilise un lemme d'approximation semblable avec des polyèdres bidimensionnels.

La troisième partie exploite ces résultats dans le cadre d'une suite minimisante (E_k) à un problème général d'ensemble minimal dans un ouvert U pour obtenir le théorème d'existence 6.1.7*. Le complexe S_k qu'on construit pour bâtir l'approximation polyédrale E'_k de E_k — dans un ouvert borné U_k de taille croissante qui tend vers U — peut être complété pour recouvrir U_k tout entier. Puisqu'il est composé d'un nombre fini de polyèdres n-dimensionnels on peut minimiser parmi les déformations de E_k portées par des sous-faces de dimension au plus d du complexe sur U_k, cette minimisation E''_k est quasiminimale dans U_k. En outre, du fait des bornes uniformes sur les régularités des polyèdres qu'on a construits, les constantes de quasiminimalité de E''_k ne dépendent que de d et de n. Puisqu'on peut aussi imposer par exemple que *page 143

$$\mathcal{H}^d(E'_k) \leq \mathcal{H}^d(E_k) + \epsilon_k$$

alors (E''_k) est une suite minimisante de quasiminimiseurs dans des ouverts croissants dont l'union est U. Aussi en extrayant une sous-suite convergente, la limite E'' de E''_k est elle-même quasiminimale sur U, réduite et minimisante. On en déduit que E'' est minimal, ou presque-minimal lorsqu'on a minimisé une fonctionnelle J^d_h définie par

$$J^d_h(E) = \int_{x\in E} h(x) d\mathcal{H}^d(x)$$

avec h continue, à valeurs dans $[1, M]$, avec une fonction de jauge de régularité comparable. L'existence de rétractions lipschitziennes sur la limite permet en outre d'établir que celle-ci est une déformation des termes de la suite à partir d'un certain rang, par exemple en dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ où l'on connait la structure des ensembles minimaux grâce au théorème de Jean Taylor dans [T]. Ce premier résultat d'existence peut encore être généralisé dans certaines variétés sans bord, ou dans une certaine mesure à des domaines fermés dont on connait une rétraction lipschitzienne d'un voisinage de la frontière sur elle-même.

On pourra aussi trouver en annexe des éléments de preuve informatique utilisés dans le cadre de la démonstration du théorème 2.3* de fusion de grilles dyadiques. *page 61

Prolégomènes

Commençons d'abord par expliciter certaines notations — standard ou non — utilisées au long du document.

Espace vectoriel euclidien

Dans ce qui suit on se placera généralement dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) muni de sa structure d'espace vectoriel euclidien usuelle. On notera par ailleurs :

$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$

$\mathbb{R}^{-*} =]-\infty, 0[$

Direction d'un sous-espace affine H (c'est à dire le sous-espace vectoriel parallèle) : $\overrightarrow{H}$

Demi-espace affine : $H + \mathbb{R}^+ u$ (avec H hyperplan affine et $u \notin \overrightarrow{H}$)

Produit scalaire euclidien : $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ (avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$)

Distance et norme euclidienne : $\mathbf{d}(x, y) = \|x - y\| = \sum_i (y_i - x_i)^2$

Distance du maximum : $\mathbf{d}_{\max}(x, y) = \|x - y\|_{\max} = \max_i |y_i - x_i|$

Segment fermé : $[x, y] = \{tx + (1-t)y : \ t \in [0, 1]\}$

Segment ouvert : $]x, y[= \{tx + (1-t)y : \ t \in]0, 1[\}$ (pour $x \neq y$)

Droite : $(x, y) = \{tx + (1-t)y : \ t \in \mathbb{R}\}$ (pour $x \neq y$)

Demi-droite : $[x, y) = \{x + t(y - x) : \ t \in \mathbb{R}^+\}$ (pour $x \neq y$)

Géométrie

Pour une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$ et un point $x \in \mathbb{R}^n$ on utilisera le vocabulaire suivant :

Partie **étoilée** par rapport à x : $\forall y \in A : \ [x, y] \subset A$

Partie **convexe** : $\forall (x, y) \in A^2 : \ [x, y] \subset A$

Enveloppe convexe : $\langle A \rangle = \bigcap_{B \supset A, B \text{ convexe}} B$

Cône de sommet x engendré par A : $\bigcup_{y \in A} (x, y)$

Réciproquement, on dira que A est un cône de sommet x si $\forall y \in A : \ (x, y) \subset A$

Demi-cône de sommet x engendré par A : $\bigcup_{y \in A} [x, y)$

Réciproquement, on dira que A est un demi-cône de sommet x si $\forall y \in A : \ [x, y) \subset A$

Topologie

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie usuelle — exception faite des polyèdres, pour lesquels on considèrera leur immersion dans le plus petit sous-espace affine les contenant avant ces opérations — on notera pour une partie A :

Adhérence : $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermée}} F$

Intérieur : $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \subset A, O \text{ ouverte}} O$

Frontière : $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

A est **relativement fermée** dans B s'il existe un fermé A' tel que $A = B \cap A'$

A est **relativement ouverte** dans B s'il existe un ouvert A' tel que $A = B \cap A'$

A est **relativement compact** dans B si $\overline{A}$ est compact et inclus dans B

$A \subset\subset B$ lorsque A est relativement compact dans $\overset{\circ}{B}$

Polyèdres et complexes

Les polyèdres sont d'abord introduits par la définition 1.1.5* en tant qu'intersection bornée de demi-espaces affines, puis l'équivalence est établie avec les polytopes dans le théorème 1.1.19*. Les complexes sont introduits à la définition 1.2.23*. Pour un polyèdre δ et un complexe S (ou éventuellement une famille de polyèdres quelconque) on notera : *p. 20, 29 et 35

$\overset{\circ}{\delta}$, $\overline{\delta}$ et $\partial\delta$: voir la définition 1.1.10* *page 23

Sous-faces de δ (dont δ lui-même) : $\mathcal{F}(\delta)$

Sous-faces strictes de δ : $\{\alpha \in \mathcal{F}(\delta) : \dim_{\mathcal{H}}(\alpha) < \dim_{\mathcal{H}}(\delta)\}$

Sous-faces k-dimensionnelles de δ : $\mathcal{F}_k(\delta) = \{\alpha \in \mathcal{F}(\delta) : \dim_{\mathcal{H}}(\alpha) = k\}$

Faces de δ : $\mathcal{F}_{\dim_{\mathcal{H}}(\delta)-1}(\delta)$

Union des polyèdres de S : $\mathcal{U}(S) = \bigcup_{\delta \in S} \delta$

Sous-faces de S : $\mathcal{F}(S) = \bigcup_{\delta \in S} \mathcal{F}(S)$

Sous-faces k-dimensionnelles de S : $\mathcal{F}_k(S) = \bigcup_{\delta \in S} \mathcal{F}_k(S)$

Faces de la frontière de S (si S est de dimension k) :

$$\mathcal{F}_\partial(S) = \left\{\delta \in \mathcal{F}_{k-1}(S) : \forall (\alpha, \beta) \in S^2,\ \delta \neq \alpha \cap \beta\right\}$$

Squelette k-dimensionnel S' de S : $S' \subset \mathcal{F}(S)$ et $\forall \alpha \in S' : \dim_{\mathcal{H}}(\alpha) \leq k$

Espaces métriques

Soient A et B deux parties non vides. Les notations suivantes sont utilisables dans tout espace métrique, même si on les utilisera dans la plupart des cas dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne.

page 95* **Mesure de Hausdorff** : $\mathcal{H}^k$, voir la définition 3.1.3*

page 96* **Dimension de Hausdorff** : $\dim_{\mathcal{H}}$, voir la définition 3.1.6*

page 96* **Distance de Hausdorff** : $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$, voir la définition 3.1.7*

Distance à un ensemble : $\mathbf{d}(x, A) = \inf_{y \in A} \mathbf{d}(x, y)$

Pseudo-distance inférieure : $\underline{\mathbf{d}}(A, B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} \min(\mathbf{d}(x, B), \mathbf{d}(y, A))$

Pseudo-distance supérieure : $\overline{\mathbf{d}}(A, B) = \sup_{(x,y) \in A \times B} \min(\mathbf{d}(x, B), \mathbf{d}(y, A))$

Boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$: $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}(x, y) \leq r\}$

Boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$: $\overset{\circ}{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}(x, y) \leq r\}$

ϵ-Voisinage ouvert : $\mathcal{V}(A, \epsilon) = \bigcup_{x \in A} \overset{\circ}{B}(x, \epsilon)$

Ensembles

Ensemble des parties : $\mathcal{P}(K)$

Cardinal : $\#K$

Ensemble des parties à p éléments : $\mathcal{P}_p(K) = \{X \in \mathcal{P}(K) : \#X = p\}$

Union disjointe : si $A \cap B = \emptyset$ on notera $A \cup B = A \sqcup B$

Première partie

Construction et fusion de complexes dyadiques

Sommaire

1 Complexes de polyèdres **18**
1.1 Définitions et propriétés immédiates des suspensions et polyèdres . . 18
1.2 Complexes 34
1.3 Suspension de complexes 40

2 Fusion de complexes dyadiques **60**
2.1 Fusion en dimension 2 66
2.2 Fusion après rotation 80
2.3 Conclusion 92

1 Complexes de polyèdres

Dans cette première partie on va donner une formalisation rigoureuse de la nature géométrique d'une grille de polyèdres qui se «raccordent bien» entre eux. Auparavant on va rappeler certains résultats simples plus ou moins connus sur les polyèdres, et se doter des outils nécessaires à une description efficace.

1.1 Définitions et propriétés immédiates des suspensions et polyèdres

Commençons par définir une notion qui va nous permettre de manipuler plus aisément des ensembles convexes : la suspension par rapport à un point.

▷ **DÉFINITION 1.1.1** (SUSPENSION D'UN ENSEMBLE)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide, et $x \in \mathbb{R}^n$. La suspension de A par rapport à x (voir la figure 1) est définie par :

$$\mathcal{S}(A,x) = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1] \text{ et } y \in A\} \ .$$

On peut déjà immédiatement remarquer que l'opération de suspension préserve le caractère convexe.

▷ **PROPRIÉTÉ 1.1.2** (SUSPENSION D'UN CONVEXE)

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, alors

$$\mathcal{S}(A,x) = \langle A \cup \{x\} \rangle \ .$$

DÉMONSTRATION

Remarquons que la suspension d'un segment $[y,z]$ par rapport à x est le triangle $\langle \{x,y,z\} \rangle$, qui est convexe.

Montrons d'abord que $\mathcal{S}(A,x)$ est convexe : soient $y, z \in \mathcal{S}(A,x)$. Déjà, on peut trouver $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$ et $(y',z') \in A^2$ tels que

$$y = t_1 y' + (1-t_1)x \qquad \text{et} \qquad z = t_2 z' + (1-t_2)x \ .$$

Donc $y \in \mathcal{S}(\{y',z'\},x) \subset \mathcal{S}([y',z'],x) = \langle \{x,y',z'\} \rangle$, de même $x \in \langle \{x,y',z'\} \rangle$ d'où on tire $[y,z] \subset \langle \{x,y',z'\} \rangle$. En outre, A étant convexe alors $[y',z'] \subset A$, dès lors $\mathcal{S}([y',z'],x) = \langle \{x,y',z'\} \rangle \subset \mathcal{S}(A,x)$ et finalement $[y,z] \subset \mathcal{S}(A,x)$.

Vérifions ensuite que $\mathcal{S}(A,x)$ est le plus petit convexe contenant A et x : soit $y \in \mathcal{S}(A,x)$. On peut trouver $t \in [0,1]$ et $y' \in A$ tels que $y = ty' + (1-t)x$: il vient que $y \in [y',x] = \langle \{y',x\} \rangle \subset \langle A \cup \{x\} \rangle$. Par conséquent : $\mathcal{S}(A,x) \subset \langle A \cup \{x\} \rangle$. □

Deux propriétés élémentaires sur la commutativité des opérations de suspensions et la compacité de l'enveloppe convexe d'une famille finie de points suivent immédiatement.

▷ **PROPRIÉTÉ 1.1.3** (COMMUTATIVITÉ DES SUSPENSIONS DE CONVEXES)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, convexe et $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\mathcal{S}(\mathcal{S}(A,x),y) = \mathcal{S}(\mathcal{S}(A,y),x) \ .$$

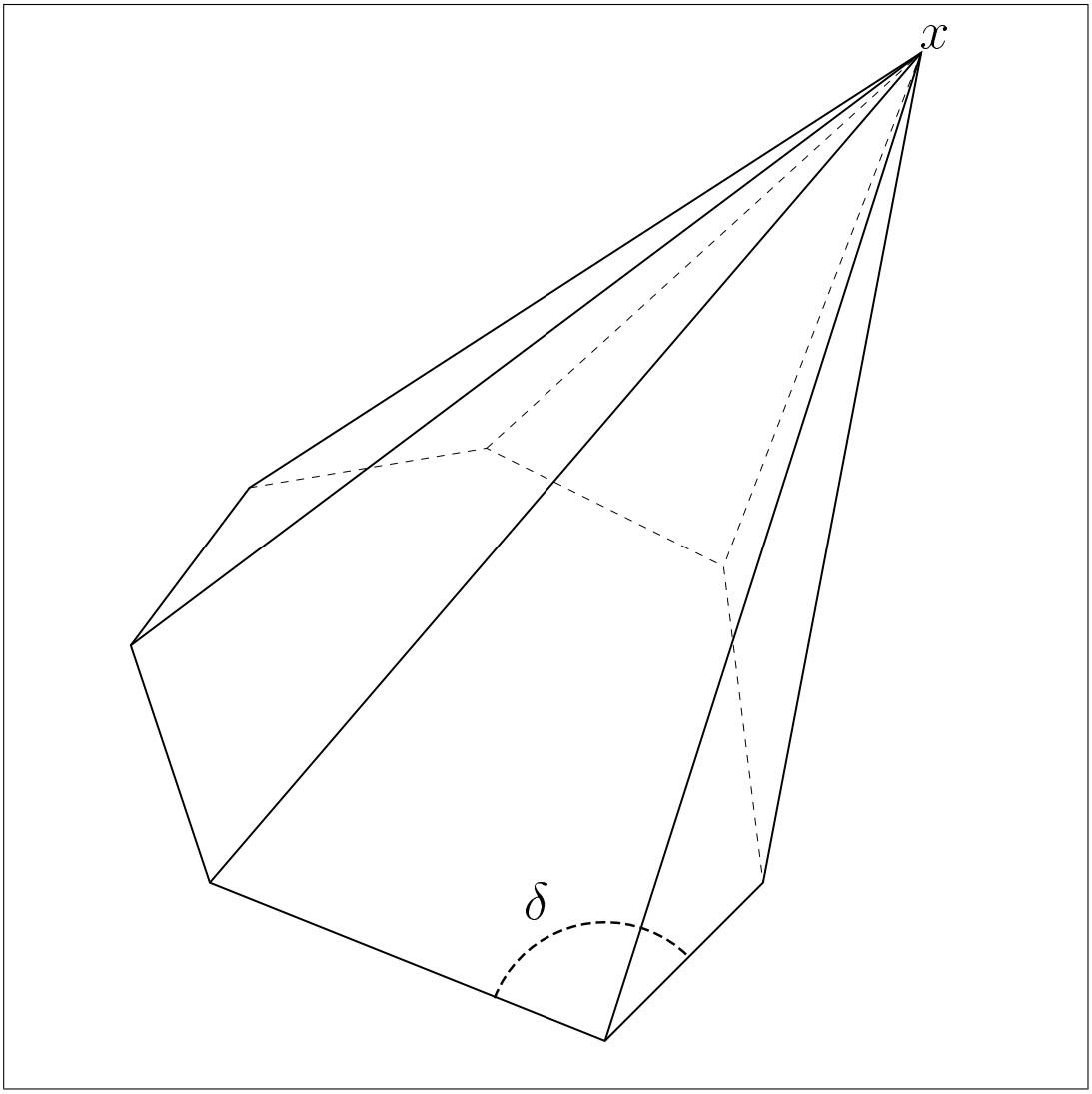


FIGURE 1 – Suspension d'un polyèdre δ par rapport à un point x non coplanaire.

▷ **PROPRIÉTÉ 1.1.4** (COMPACITÉ DES ENVELOPPES CONVEXES)

Soit $x_1, \ldots, x_m$ une famille finie de points, alors :

$$\langle\{x_1, \ldots, x_m\}\rangle = \left\{ \sum_{1\leq i\leq m} u_i x_i : \ u_i \geq 0 \ \textit{et} \ \sum_i u_i = 1 \right\}$$

et $\langle\{x_1, \ldots, x_m\}\rangle$ est compact.

Définissons à présent la notion de polyèdre convexe comme intersection bornée de demi-espaces affines. On verra juste après que tout polyèdre au sens de cette définition a une famille canonique de demi-espaces affines qui peut convenir, et on généralisera nos propriétés aux polyèdres de dimension inférieure à n à partir de la définition 1.1.10.

▷ **DÉFINITION 1.1.5** (POLYÈDRES)

On se place dans $\mathbb{R}^n$ ($n > 0$). Un polyèdre δ de dimension n est une partie $\delta \subset \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe $k > 0$ et une famille $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de demi-espaces affines vérifiant :

(1) $\delta = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$;

(2) *δ est borné, et contient une boule de rayon non nul.*

Lorsque δ est fixé, parmi toutes les familles $\mathcal{A}$ pouvant convenir pour cette définition il en existe une minimale pour l'inclusion.

▷ **PROPOSITION 1.1.6** (FAMILLE MINIMALE DE DEMI-ESPACES DÉFINISSANT UN POLYÈDRE)

Soit δ un polyèdre de dimension n, alors il existe une famille de demi-espaces affines $\{A_i\}_{1\leq i\leq m}$ vérifiant

$$\delta = \bigcap_i A_i$$

et telle que pour toute famille finie de demi-espaces affines $\{B_j\}_{1\leq j\leq p}$ vérifiant aussi

$$\delta = \bigcap_j B_j$$

alors $\{B_j\} \supset \{A_i\}$.

Nous allons devoir utiliser les deux lemmes topologiques suivants pour démontrer
page 96* cette proposition. On pourra se reporter à la définition 3.1.6* pour la dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}$, on utilise essentiellement sa correspondance avec la dimension d'espace affine et le fait qu'une partie contenant une boule k-dimensionnelle a une dimension de Hausdorff au moins égale à k.

▷ **LEMME 1.1.7**

Soit A une partie non vide convexe de $\mathbb{R}^n$, et H le plus petit espace affine

contenant A (celui obtenu par intersection des sous-espaces affines contenant A). Alors

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \dim(H)$$

et lorsque A n'est pas réduite à un point, A contient une boule $\dim(H)$-dimensionnelle.

▷ **LEMME 1.1.8**

Soit δ un convexe contenant une boule n-dimensionnelle, A un demi-espace affine, A^- l'autre demi-espace de même frontière que A (c'est à dire l'adhérence de son complémentaire) et H le plus petit sous-espace affine contenant $\partial A \cap \delta$ (lorsqu'il est non vide).

Dans ces conditions :

$$\partial A \cap \delta = \emptyset \text{ ou } \dim(H) < n-1 \quad \Longrightarrow \quad \delta \subset A \text{ ou } \delta \subset A^- \ .$$

DÉMONSTRATION

Démontrons d'abord le lemme 1.1.7 : déjà puisque $A \subset H$ on sait que $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(H) = \dim(H)$.

Vérifions à présent l'inégalité inverse : soit $x_0 \in A$, alors $x_0 \in H$. Quitte à placer l'origine en x_0 on peut supposer que H est un sous-espace vectoriel : $H = Vect(A)$. Soit $k = \dim(H)$, deux cas sont alors possibles :

- ◇ si $k = 0$, alors $A = \{x_0\}$ et l'inégalité est démontrée ;
- ◇ si $k > 0$, alors A contient une famille de points $x_1, \ldots, x_k$ qui engendre H : $H = Vect(x_1, \ldots, x_k)$. Notons $< . \ , \ . >$ le produit scalaire canonique associé à cette base, et $\| \ . \ \|$ la norme correspondante. A étant convexe il contient aussi l'enveloppe convexe des x_i :

$$\begin{aligned}\langle\{x_0, \ldots, x_k\}\rangle &= \left\{ \sum_{0\leq i\leq k} u_i x_i : \ (u_0, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \text{ et } \sum_{0\leq i\leq k} u_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{1\leq j\leq k} u_j x_j : \ (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^{k} \text{ et } \sum_{1\leq j\leq k} u_j \leq 1 \right\} .\end{aligned}$$

Soit maintenant y le barycentre des points $x_0, \ldots, x_k$ et z un point de H dans la boule de centre y et de rayon $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour la norme considérée :

$$z = \sum_{1\leq i\leq k} \alpha_i x_i$$

avec $\alpha_i =< z, x_i >=< z-y, x_i > + < y, x_i >=< z-y, x_i > + \frac{1}{k+1}$. Or par construction $| < z-y, x_i > | \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ donc il vient

$$\sum_{1\leq i\leq k} \alpha_i \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i : \ \alpha_i \geq 0$$

et par conséquent z est dans l'enveloppe convexe des points $x_0, \ldots, x_k$.

On a donc démontré que A contient une boule k-dimensionnelle, ce qui implique en particulier que $\dim_{\mathcal{H}}(A) \geq k = \dim(H)$.

Démontrons à présent le lemme 1.1.8 : supposons que $n > 1$ (le cas $n = 1$ étant trivial).

- ◇ Si $\delta \cap \partial A = \emptyset$, alors soit $A \cap \delta = \emptyset$, soit $A \cap \delta = \delta$. En effet, s'il existait $x \in \delta \cap A$ et $y \in \delta \setminus A$, notons $z = \partial A \cap [x, y]$, on aurait aussi que $z \in \delta$ par convexité, ce qui contredit l'hypothèse que $\delta \cap \partial A = \emptyset$.
- ◇ Si $\dim H < n-1$, raisonnons encore par l'absurde en supposant que $A \cap \delta \neq \delta$ et $A^- \cap \delta \neq \delta$: dans ce cas on pourrait trouver deux points x et y de δ respectivement dans A et A^- qui ne soient pas situés sur ∂A. Notons G le sous-espace affine $H + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{xy}$: G est donc de dimension au plus $n-1$. Or, pour tout point z de $\delta \cap A$, le point $[z, y] \cap \partial A$ appartient aussi à δ par convexité, donc à H et par conséquent $z \in G$. De même, pour tout point z de $\delta \cap A^-$, le point $[z, x] \cap \partial A$ appartient aussi à δ par convexité, donc à H et par conséquent $z \in G$. En résumé si l'on suppose que $A \cap \delta \neq \delta$ et $A^- \cap \delta \neq \delta$ alors δ serait inclus dans G (de dimension au plus $n-1$), ce qui contredit l'hypothèse que δ contient une boule n-dimensionnelle.

Par conséquent, pour tout demi-espace A tel que $\partial A \cap \delta$ est vide ou contenu dans un sous-espace affine de dimension strictement plus petite que $n-1$, alors $A \cap \delta = \delta$ ou $A^- \cap \delta = A$.

Revenons à la démonstration de la proposition 1.1.6 : le cas $n = 1$ étant là encore trivial, supposons que $n > 1$ et considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des familles finies de demi-espaces affines dont l'intersection est δ, qui est non vide par définition, et soit $\{A_i\}_{1 \leq i \leq m}$ une telle famille. Puisque c'est une intersection finie, la frontière de δ est donc composée de morceaux de la frontière des A_i, donc de morceaux $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ (éventuellement vides) des hyperplans $H_1, \ldots, H_m$ qui sont la frontière des demi-espaces $A_1, \ldots, A_m$, c'est à dire :

$$\gamma_i = H_i \cap \partial\delta \quad \text{et} \quad \partial\delta = \bigcup_i \gamma_i \ .$$

Considérons pour chacun des γ_i non vides la dimension du plus petit sous-espace affine le contenant (c'est à dire l'intersection de tous les sous-espaces affines qui le contiennent), et ne gardons que ceux pour lesquels elle est égale à $n-1$: on obtient alors la sous-famille des morceaux $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_{m'}}$.

Il est facile de vérifier que les γ_{i_j} sont convexes pour $1 \leq j \leq i_{m'}$: soient x et y deux points de γ_{i_j} et $z \in]x, y[$. On sait déjà que $z \in \delta$ par convexité, de plus $z \in H_{i_j}$. Dès lors z est dans l'adhérence du complémentaire de A_{i_j} (car elle contient H_{i_j}), qui est elle-même contenue dans l'adhérence du complémentaire de δ (car A_{i_j} contient δ). En d'autres termes, puisque z est aussi dans δ : $z \in \partial\delta \cap H_{i_j} = \gamma_{i_j}$.

D'après le premier lemme, chacun des morceaux γ_{i_j} contient une boule $n-1$-dimensionnelle, par conséquent toute famille de $\mathcal{E}$ contient des demi-espaces dont la frontière est $H_{i_1}, \ldots, H_{i_{m'}}$. En outre, puisque δ contient une boule n-dimensionnelle, un seul des côtés de ces hyperplans est possible, donc toute famille de $\mathcal{E}$ contient effectivement $\{A_{i_j}\}$.

Vérifions à présent que la famille $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{m'}}$ est dans $\mathcal{E}$: soit $\{A_i\}$ une famille de $\mathcal{E}$ et supposons qu'il existe $A_k \in \{A_i\} \setminus \{A_{i_j}\}$. Le convexe $\delta' = \bigcap_{i \neq k} A_i$ (qui contient δ, donc une boule n-dimensionnelle par définition) vérifie les hypothèses du second lemme avec le demi-espace A_k, donc on peut l'appliquer :

$$\delta' \cap A_k = \delta' \quad \text{ou} \quad \delta' \cap A_k^- = \delta' \ .$$

Puisque $\delta' \cap A_k = \delta$ et que δ contient une boule n-dimensionnelle, c'est donc le

premier cas qui se produit, par conséquent on obtient que

$$\delta = \bigcap_{i \neq k} A_i \ .$$

Ce raisonnement peut être fait successivement avec tous les demi-espaces de $\{A_i\}$ qui ne sont pas dans $\{A_{i_j}\}$, donc on a démontré que

$$\bigcap_{j} A_{i_j} = \delta$$

en d'autres termes que $\{A_{i_j}\} \in \mathcal{E}$.

Pour tout polyèdre, on peut donc trouver une famille de demi-espaces minimale pour l'inclusion dont il est l'intersection. □

▷ **Remarque 1.1.9**

À partir de maintenant, pour tout polyèdre δ considéré dans les définitions à venir, on désignera par $\mathcal{A}(\delta)$ la famille minimale de demi-espaces dont il est l'intersection.

Remarquons aussi que la définition d'un polyèdre δ implique que $0 < \mathcal{H}^n(\delta) < +\infty$. De plus, toute famille de vecteurs normaux aux hyperplans frontières des demi-espaces de $\mathcal{A}(\delta)$ doit engendrer l'espace tout entier, sinon le polyèdre ne serait pas borné.

La définition précédente a été donnée dans le cadre de polyèdres de dimension n dans $\mathbb{R}^n$, dans un souci de simplification. Rien n'empêche alors de considérer des polyèdres dans un sous-espace plongé dans un espace de dimension plus grande. On utilisera alors la définition suivante.

▷ **Définition 1.1.10** (Polyèdres de dimension $k < n$)

Soit H un sous-espace affine de dimension k ($0 < k < n$) de $\mathbb{R}^n$ (identifiable à $\mathbb{R}^k$, à une isométrie affine près), et δ un polyèdre de H.

On dira que δ est aussi un polyèdre de dimension k de $\mathbb{R}^n$, et on notera respectivement $\overset{\circ}{\delta}$ et $\partial\delta$ l'intérieur et la frontière de δ relativement à ce sous-espace affine, plutôt qu'à $\mathbb{R}^n$ tout entier.

On utilisera la convention qu'un singleton est un polyèdre de dimension 0, et dans ce cas qu'il est égal à son intérieur et que sa frontière est vide.

Un polyèdre ainsi défini est convexe en tant qu'intersection finie de convexes et possède ce qu'on va appeler des sous-faces. Soit δ un polyèdre donné, alors il existe $2^{\#\mathcal{A}(\delta)}$ applications $\epsilon : \mathcal{A}(\delta) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{A}(\delta) : \ \epsilon(A) = A \text{ ou } \partial A \ .$$

On notera $\mathcal{E}(\delta)$ l'ensemble de toutes ces applications, et avec ces notations on va définir les sous-faces de δ, qui sont obtenues en remplaçant certains demi-espaces par leur hyperplan frontière dans l'intersection qui définit δ.

▷ **DÉFINITION 1.1.11** (SOUS-FACES D'UN POLYÈDRE)

Les sous-faces d'un polyèdre δ sont les ensembles (lorsqu'ils sont non vides) :

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}(\delta)} \epsilon(A) :\ \epsilon \in \mathcal{E}(\delta)\ .$$

Lorsqu'il existe un unique $A \in \mathcal{A}(\delta)$ tel que $\epsilon(A) = \partial A$, et que $\epsilon(B) = B$ pour $B \in \mathcal{A}(\delta) \setminus \{A\}$, on dira que la sous-face obtenue est une face du polyèdre δ.

À partir de maintenant, on notera $\mathcal{F}(\delta)$ l'ensemble des sous-faces d'un polyèdre δ, et pour $1 \leq j \leq n$, on notera $\mathcal{F}_j(\delta)$ l'ensemble de ses sous-faces de
page 96* *dimension de Hausdorff égale à j (voir la définition 3.1.6* de la dimension de Hausdorff).*

Par convention, on notera $\mathcal{F}_0(\delta)$ l'ensemble des sous-faces de δ qui sont réduites à un point, qu'on appellera sommets de δ, et pour alléger les notations on confondra parfois ces singletons avec le point qu'ils contiennent. Les sous-faces de δ de dimension strictement inférieure à celle de δ seront appelées les sous-faces strictes de δ.

Comme on pouvait s'y attendre, les sous-faces d'un polyèdre ainsi définies sont elles-mêmes des polyèdres, comme le rappelle la proposition suivante.

▷ **PROPOSITION 1.1.12** (CARACTÉRISATION DES SOUS-FACES)

Les sous-faces d'un polyèdre de dimension donnée sont des polyèdres de dimension inférieure ou égale.

De plus, les sous-faces des sous-faces d'un polyèdre δ sont elles-mêmes des sous-faces de δ.

DÉMONSTRATION

Soit $\epsilon \in \mathcal{E}(\delta)$ qui définit une sous-face $\alpha = \bigcap_{B\in\mathcal{A}(\delta)} \epsilon(B)$ et $A = \{B \in \mathcal{A}(\delta) : \epsilon(B) = B\}$. Notons H le plus petit espace affine contenant α (qui est non vide par définition), $l = \dim(H)$ et $B' = B \cap H$ pour $B \in A$. Déjà, les B' sont soit H tout entier, soit des demi-espaces affines de H, car ils contiennent α et H est le sous-espace affine minimal contenant α. Notons A' le sous-ensemble des B' qui sont des demi-espaces de H : il vient alors $\alpha = \bigcap_{B'\in A'} B'$. De plus, α étant un convexe, d'après
page 20* le lemme 1.1.7*, cette sous-face contient une boule l-dimensionnelle, et de plus est bornée car δ l'est. Donc, α est bien un polyèdre l-dimensionnel, avec l qui est aussi sa dimension de Hausdorff.

Démontrons à présent le second point : plaçons-nous dans le sous-espace affine H et considérons le polyèdre α. Puisque l'on vient de voir que $\alpha = \bigcap_{B'\in A'} B'$ avec les
page 20* B' qui sont des demi-espaces affines de H, d'après la proposition 1.1.6* on sait que $\mathcal{A}(\alpha) \subset A'$. On a donc :

$$\mathcal{A}(\alpha) \subset A' \subset \{B \cap H :\ B \in \mathcal{A}(\delta)\}\ .$$

Soit alors β une sous-face de α : il existe par définition $\eta \in \mathcal{E}(\alpha)$ tel que

$$\beta = \bigcap_{C \in \mathcal{A}(\alpha)} \eta(C) \ .$$

Définissons alors $\epsilon' \in \mathcal{E}(\delta)$ de la façon suivante pour $B \in \mathcal{A}(\delta)$:

- ◇ si $B \cap H \in \mathcal{A}(\alpha)$ alors si $\eta(B \cap H) = B \cap H$ on pose $\epsilon'(B) = B$, sinon $\epsilon'(B) = \partial B$. Dans les deux cas on s'assure que $\eta(B \cap H) = \epsilon'(B) \cap H$;
- ◇ si $B \cap H \notin \mathcal{A}(\alpha)$ alors on pose $\epsilon'(B) = \epsilon(B)$.

Dans ces conditions, en remarquant que $\beta \subset \alpha$ et que

$$\bigcap_{B \in \mathcal{A}(\delta) :\ B \cap H \notin \mathcal{A}(\alpha)} \epsilon(B) \subset H$$

alors β peut encore s'écrire :

$$\beta = \left(\bigcap_{B \in \mathcal{A}(\delta) :\ B \cap H \notin \mathcal{A}(\alpha)} \epsilon(B) \right) \cap \left(\bigcap_{B \in \mathcal{A}(\delta) :\ B \cap H \in \mathcal{A}(\alpha)} \epsilon'(B) \cap H \right) = \bigcap_{B \in \mathcal{A}(\delta)} \epsilon'(B)$$

ce qui correspond exactement à la définition d'une sous-face de δ. □

On donne aussi le corollaire suivant, qui confirme l'intuition que l'on peut avoir pour la notion de *faces* d'un polyèdre. Ce corollaire reste vrai en dimension inférieure si on prend les conventions de la définition 1.1.10 pour la frontière.

▷ **Corollaire 1.1.13** (Faces et frontière)

Les faces d'un polyèdre de dimension n sont de dimension $n-1$, et leur union est la frontière du polyèdre.

Démonstration

D'abord constatons que la démonstration est évidente en dimension 1, donc supposons que $n > 1$. Maintenant, pour un polyèdre δ et une sous-face α définie par $\epsilon \in \mathcal{E}(\delta)$ tel qu'il existe un unique $B \in \mathcal{A}(\delta)$ vérifiant $\epsilon(B) = \partial B$, alors le plus petit espace affine contenant δ est de dimension au plus $n-1$ puisque $\delta \subset \partial B$ et $\dim_{\mathcal{H}}(\partial B) = n-1$.

Si l'on avait $\dim_{\mathcal{H}}(\alpha) < n-1$, alors :

$$\dim_{\mathcal{H}} \left((\partial B) \cap \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}(\delta), A \neq B} A \right) \right) < n-1 \ .$$

Or, on a vu dans la démonstration de la proposition 1.1.6* que si ça se produit, cela contredit la minimalité de la famille des demi-espaces affines définissant δ (voir la remarque 1.1.9). Donc, une face est de dimension $n-1$. *page 20

En outre, δ étant défini par une intersection finie de demi-espaces, sa frontière est l'union de morceaux des frontières de chacun de ces demi-espaces :

$$\partial\delta = \delta \setminus \overset{\circ}{\delta} = \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}(\delta)} A \right) \setminus \left(\overset{\circ}{\bigcap_{A \in \mathcal{A}(\delta)}} A \right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\delta)} \left(\partial A \cap \bigcap_{B \in \mathcal{A}(\delta) \setminus \{A\}} B \right) \ .$$

ce qui correspond exactement à dire que sa frontière est l'union de ses faces. □

▷ **PROPRIÉTÉ 1.1.14**

Soit δ un polyèdre k-dimensionnel ($k \leq n$) et H un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). Si l'on a :

$$\delta \cap H \neq \emptyset \quad et \quad \overset{\circ}{\delta} \cap H = \emptyset$$

alors $\delta \cap H$ est une sous-face de δ.

DÉMONSTRATION

Tout d'abord considérons le sous-espace affine minimal contenant δ : son intersection avec l'hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ est l'un de ses hyperplans relatifs, car ça ne peut pas être lui-même puisqu'il contient $\overset{\circ}{\delta}$ qui est disjoint de H, ni l'ensemble vide car H n'est pas disjoint de δ. Par conséquent, quitte à se placer dans ce sous-espace affine, on peut supposer que $k = n$ pour effectuer la démonstration.

Prouvons à présent la propriété par récurrence sur n :

- ◇ en dimension 1, un polyèdre est un segment et les seuls hyperplans affines vérifiant les propriétés du lemme sont ses extrémités, qui sont des sous-faces ;
- ◇ pour $n > 1$ donné, supposons la propriété vraie au un rang $n-1$ et considérons un polyèdre δ de dimension n et un hyperplan H vérifiant les hypothèses du lemme. Soit H' le sous-espace affine minimal qui contient $\delta \cap H$ (dès lors $H' \subset H$ et $H' \cap \delta = H \cap \delta$), et notons $H_1, \ldots, H_m$ les hyperplans frontière de la famille minimale des demi-espaces engendrant δ par intersection. On sait d'après le corollaire 1.1.13 que $\partial\delta = \bigcup_i H_i \cap \delta$, de plus par hypothèse $H \cap \overset{\circ}{\delta} = \emptyset$

page 20*

donc $H' \cap \delta = H' \cap \partial\delta$, en outre d'après le lemme 1.1.7* on sait que $H' \cap \delta$ contient une boule $\dim(H')$-dimensionnelle B donc finalement :

$$B \subset H' \cap \delta \subset \partial\delta \subset \bigcup_i H_i \ .$$

Puisqu'on a fait une union finie d'hyperplans affines alors par un argument simple de convexité on peut trouver i tel que $B \subset H_i$, mais puisque B est une boule $\dim(H')$-dimensionnelle contenue dans H' on obtient aussi l'inclusion $H' \subset H_i$, d'où on peut encore tirer :

$$H \cap \delta = H' \cap \delta \subset H_i \cap \delta \ .$$

Considérons alors les deux cas possibles :

- ⋆ si $H = H_i$ alors par définition $\delta \cap H$ est une face de δ et on a fini ;
- ⋆ si $H \neq H_i$, H et H_i sont deux hyperplans distincts de $\mathbb{R}^n$, d'intersection non vide alors $H \cap H_i$ est un hyperplan de H_i.
  Notons F la face $H_i \cap \delta$ de δ — qui est un polyèdre de dimension $n-1$ de H_i d'après le corollaire 1.1.13 — et vérifions que $\overset{\circ}{F} \cap H = \emptyset$ (l'intérieur étant pris ici relativement à H_i, comme indiqué dans la définition 1.1.10). Si ce n'est pas le cas alors on peut trouver une boule $n-1$-dimensionnelle B_1 de H_i centrée sur H et incluse dans F, et puisque H_i et H ne sont pas parallèles (car leur intersection est non vide et ils ne sont pas égaux) ont peut donc trouver deux points x et y de F situés de chaque côté de l'hyperplan H. Par définition δ contient une boule n-dimensionnelle B_2, si on note U l'enveloppe convexe des points x, y et de B_2 :

$$U = \langle \{x, y\} \cup B_2 \rangle \subset \delta$$

alors $\overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{\delta}$, or par construction $\overset{\circ}{U}$ contient un point de H, ce qui contredit l'hypothèse que $H \cap \overset{\circ}{\delta} = \emptyset$.
Utilisons pour finir notre hypothèse de récurrence : la face F est un polyèdre de dimension $n-1$ de H_i, et $G = H \cap H_i$ est un hyperplan de H_i tel que $\overset{\circ}{F} \cap G = \emptyset$ et $F \cap G \neq \emptyset$, donc $F \cap G$ est une sous-face de F. En remarquant que par construction $F \cap G = H \cap H_i \cap \delta = H \cap \delta$, il vient que $H \cap \delta$ est une sous-face d'une face de δ donc d'après la proposition 1.1.12 c'est aussi une sous-face de δ.

□

Définissons maintenant la notion de minimalité pour la convexité d'une famille de points. On verra plus tard que c'est une propriété vérifiée par la famille des sommets d'un polyèdre.

▷ **Définition 1.1.15** (Famille minimale pour la convexité)

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de points de $\mathbb{R}^n$, on dira que cette famille est minimale pour la convexité si :

$$\forall j \in \{1,\dots,m\} : \langle \{x_i : 1 \leq i \leq m \text{ et } i \neq j\} \rangle \neq \langle \{x_i : 1 \leq i \leq m\} \rangle \ .$$

Ce n'est qu'une autre façon de dire qu'aucun des x_i n'est dans l'enveloppe convexe des $m-1$ autres.

Le théorème de Krein-Milman permet d'extraire d'un convexe compact une famille de points dits *extrémaux* qui l'engendrent lorsqu'on en prend l'enveloppe convexe. On pourra en trouver une démonstration dans [KM].

▷ **Définition 1.1.16** (Points extrémaux)

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe, l'ensemble des points extrémaux de C est donné par

$$Extrem(C) = \{x \in C : x \notin \langle C \setminus \{x\} \rangle\} \ .$$

On va donner ici une conséquence simple lorsque les points extrémaux forment une famille minimale pour la convexité.

▷ **Lemme 1.1.17**

Soit U une famille finie de points minimale pour la convexité, dans ce cas :

$$U = Extrem(\langle U \rangle) \ .$$

Démonstration

Soit C un convexe fermé borné, donc compact. D'après le théorème de Krein-Milman il est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. À présent, soit U une famille minimale pour la convexité dont l'enveloppe convexe est C, et x un point de C. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in C \setminus Extrem(C) &\iff \exists (y,z) \in C^2 : x \in]y,z[\\ &\iff \exists (y,z) \in \langle U \rangle^2 : x \in]y,z[\\ &\iff x \in \langle U \setminus \{x\} \rangle \\ &\iff x \in C \setminus U \ . \end{aligned}$$

On a donc montré que $C \setminus Extrem(C) = C \setminus U$. Pour finir, puisque $Extrem(C) \subset C$ et $U \subset C$ il vient :

$$U = Extrem(C) = Extrem(\langle U \rangle) \ .$$

□

Le lemme suivant va nous être utile pour étudier la nature des faces d'un polyèdre, en tant qu'intersections du polyèdre avec un hyperplan.

▷ **LEMME 1.1.18**

Soient H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ ($n>1$) et A une partie non vide, convexe et compacte de $\mathbb{R}^n$ dont les points extrémaux sont en nombre fini tels que $H \cap A = H \cap \partial A \neq \emptyset$. Considérons les trois énoncés :

(1) *$H \cap \partial A$ contient une boule $n-1$-dimensionnelle ;*

(2) *H est la frontière d'un demi-espace B tel que $A \subset B$;*

(3) *$Extrem(A \cap H) = Extrem(A) \cap H$.*

Alors, (1) ⇒ (2) *et* (2) ⇒ (3).

DÉMONSTRATION

À un changement de repère près $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, et appelons B^+ et B^- les deux demi-espaces affines dont la frontière est H : $B^+ = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ et $B^- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Montrons par l'absurde que (1) ⇒ (2), c'est à dire que $A \subset B^+$ ou $A \subset B^-$: si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver $x \in \overset{\circ}{B^+} \cap A$ et $y \in \overset{\circ}{B^+} \cap A$, c'est à dire que la première coordonnée de x est strictement positive, celle de y strictement négative. Puisque $H \cap \partial A$ contient une boule $n-1$-dimensionnelle, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $\{0\} \times [-\epsilon, \epsilon]^{n-1} \subset \partial A \cap H$ (en plaçant l'origine sur le centre de la boule lors du changement de repère). Or l'union des suspension de $\{0\} \times [-\epsilon, \epsilon]^{n-1}$ par rapport à x et z est incluse dans A, et de plus contient une boule n-dimensionnelle centrée en 0. Ceci contredit l'hypothèse qu'un voisinage de 0 relatif à H est inclus dans la frontière de A. Pour simplifier, on supposera par exemple que $A \subset B^+$.

Montrons maintenant que (2) ⇒ (3) : déjà, $A \cap H$ est convexe compacte ; puisque par définition un point extrémal de A qui appartient à H est aussi un point extrémal de $A \cap H$ il vient aussi :

$$Extrem(A \cap H) \supset Extrem(A) \cap H \ .$$

Vérifions à présent l'inclusion inverse : notons $x_1, \ldots, x_m$ les points extrémaux de A et prenons $x \in Extrem(A \cap H)$, alors puisque $x \in A$, on peut trouver des coefficients $u_1, \ldots, u_m \in [0,1]^m$ tels que $x = \sum_i u_i x_i$ et $\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$. Puisque $\forall i : \ u_i \geq 0$, et que la première coordonnée de x est nulle, on en déduit que $u_i = 0$ lorsque $x_i \notin H$. Par conséquent, x peut aussi s'écrire : $x = \sum_{j=1}^{m'} u'_j x'_j$ où $\{x'_1, \ldots, x'_{m'}\} = H \cap Extrem(A)$ et $u'_j = u_i$ pour $x'_j = x_i$. Or $\sum_j u'_j = 1$, et puisque x est un point extrémal de $H \cap A$, on en déduit qu'il existe j_0 tel que $u'_j = \begin{cases} 1 \text{ si } j = j_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, donc finalement que $x \in H \cap Extrem(A)$. Par conséquent, l'inclusion inverse est

démontrée :

$$Extrem(A \cap H) \subset Extrem(A) \cap H \ .$$

□

On va pouvoir donner une description plus complète de ce qu'est un polyèdre, en énonçant trois caractérisations équivalentes.

▷ **Théorème 1.1.19** (Lien avec les polytopes)

Soit δ un convexe non vide et $x_1, \ldots, x_m$ $(m \geq 1)$ une famille de points. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

(1) *δ est l'enveloppe convexe des x_i, et les x_i forment une famille minimale pour la convexité ;*

(2) *δ est la suspension successive d'un des x_i par rapport à tous les autres, et les x_i forment une famille minimale pour la convexité ;*

(3) *δ est un polyèdre et ses sommets sont les x_i.*

DÉMONSTRATION

Déjà, on sait que (1) ⇔ (2). Démontrons que (3) ⇒ (1) : raisonnons par récurrence sur la dimension k du polyèdre.

- ◇ en dimension 0, la propriété est vraie ;
- ◇ en dimension 1, il est évident qu'un polyèdre est un segment et qu'il est bien égal à l'enveloppe convexe de ses sommets. De plus les deux extrémités du segment forment une famille minimale pour la convexité ;
- ◇ supposons maintenant que pour $k > 1$ donné, tout polyèdre de dimension $k-1$ est l'enveloppe convexe de ses sommets, et que ceux-ci forment une famille minimale pour la convexité. Soit δ un polyèdre de dimension k et U l'ensemble de ses sommets. On a déjà, puisque $U \subset \delta$ et que δ est convexe, que $\langle U \rangle \subset \delta$.

  Raisonnons par l'absurde et supposons que δ ne soit pas l'enveloppe convexe de ses sommets. Le polyèdre δ possédant par définition au moins un sommet $(U \neq \emptyset)$, on peut alors définir :

$$x \in \delta \setminus \langle U \rangle \ ;$$

$$y \in \delta \cap \langle U \rangle \ .$$

  Puisque $\langle U \rangle \subset \delta$ et que ces deux ensembles sont convexes, la droite (x, y) les intersecte respectivement en deux segments, le premier inclus dans le deuxième. Le point x appartient par conséquent au plus grand de ces deux segments mais pas au plus petit. Donc il existe un point z (l'extrémité du plus grand segment qui est du côté de x par rapport au petit segment) qui est dans $\delta \setminus \langle U \rangle \cap \partial\delta$ (voir la figure 2). Or d'après le corollaire 1.1.13*, la frontière de δ est constituée de l'union de ses faces. Donc z est sur une face δ' de δ. Par hypothèse de récurrence, cette face, en tant que polyèdre de dimension $k-1$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble U' de ses sommets. Par définition, les sous-faces de δ' sont des sous-faces de δ (car obtenues en remplaçant certains demi-espaces par leur hyperplan frontière dans l'intersection définissant δ', elle même obtenue selon le même procédé à partir de δ). Donc en particulier, les sommets de δ' (sous-faces réduites à un point) sont des sommets de δ, c'est à dire : $U' \subset U$, donc $\langle U' \rangle \subset \langle U \rangle$. Par conséquent on a que $z \in \langle U \rangle$, ce qui contredit donc l'hypothèse de départ.

*page 25

Il reste encore à vérifier que les sommets forment une famille minimale pour la convexité, là encore en raisonnant par l'absurde : si ce n'était pas le cas, alors il existerait un sommet x_0 qui est dans l'enveloppe convexe des autres sommets. Si on fait l'intersection de δ avec un seul des hyperplans qui a servi
page 23* à construire ce sommet (dans la définition 1.1.11*) on obtient une face F qui contient x_0, et qui est aussi un polyèdre de dimension $k-1$ dont on notera U' l'ensemble des sommets. Soit H l'hyperplan affine de dimension $k-1$ qui contient F, en supposant que $k = n$ (si ne n'est pas le cas, il suffit de se placer dans le sous-espace affine minimal qui contient δ) alors d'après la définition d'une face, H est la frontière d'un demi-espace affine A tel que $\delta \subset A$. Toujours d'après la définition 1.1.11, les sommets de F sont les sommets de δ qui sont dans H :

$$U' = H \cap U \ .$$

En remarquant que $U \subset \delta$ donc que $U \setminus \{x_0\} \subset A$, on peut appliquer le lemme 1.1.18 :

$$\langle U \setminus \{x_0\}\rangle \cap H = \langle (U \setminus \{x_0\}) \cap H\rangle \ .$$

Puisque $x_0 \in H$ alors $x_0 \in \langle U \setminus \{x_0\}\rangle \cap H =$, donc $x_0 \in \langle (U \setminus \{x_0\}) \cap H\rangle = \langle U' \setminus \{x_0\}\rangle$. Or $x_0 \in U'$, ce qui contredit la minimalité pour la convexité de U' qu'on avait par hypothèse de récurrence. Donc U est bien une famille minimale pour la convexité.

Pour conclure on a bien démontré qu'un polyèdre est l'enveloppe convexe de ses sommets, et que ses sommets forment une famille minimale pour la convexité.

Démontrons enfin que (2) $\Rightarrow$ (3), cette fois ci par récurrence sur le nombre m des x_i :

- $\diamond$ si $m = 1$, $\{x_1\}$ est bien par convention un polyèdre ;
- $\diamond$ si $m = 2$, $\mathcal{S}(\{x_1\}, x_2) = [x_1, x_2]$ est bien un polyèdre ;
- $\diamond$ supposons maintenant que $m > 2$, et que la suspension successive de x_1 par rapport aux points $x_2, \ldots, x_{m-1}$ soit un polyèdre δ. Soient $H_1^+, \ldots, H_k^+$ les demi-espaces affines définissant ce polyèdre à l'intérieur du plus petit espace affine H le contenant. Ces demi-espaces sont définis par un hyperplan affine H_i de H et un vecteur normal u_i : $H_i^+ = H_i \oplus \mathbb{R}^+ u_i$. On peut remarquer déjà que puisque la famille des x_i est minimale pour la convexité, alors $x_m \notin \delta$. On veut montrer que dans ces conditions la suspension de δ par rapport à x_m est une intersection de demi-espaces affines, relativement à un sous-espace affine à déterminer. Pour le montrer, considérons les deux cas :
  - $\star$ Si $x_m \in H$, alors $\mathcal{S}(\delta, x_m) \subset H$, donc on peut supposer pour simplifier que $H = \mathbb{R}^n$.

    Posons :

    $$A = \left\langle \bigcup_{i<m} [x_m, x_i) \right\rangle$$

    l'enveloppe convexe des demi-droites d'origine x_m contenant les sommets de δ. Puisque δ est fermé convexe, et $x_m \notin \delta$, on peut trouver un hyperplan G de $\mathbb{R}^n$ qui «sépare» δ de x_m. Dans ces conditions :

    $$A \cap G = \langle \{y_i\}\rangle$$

    où les y_i sont les intersections des demi-droites $[x_m, x_i)$ avec G. Ainsi, $A \cap G$ est l'enveloppe convexe de $m-1$ points (pas forcément minimaux pour la

convexité, dans ce cas on en extrait une famille minimale), donc par hypothèse de récurrence un polyèdre qui peut être représenté comme l'intersection de demi-espaces affines $G_i'^+$ de G. Si on définit les demi-espaces G_i de $\mathbb{R}^n$ comme étant les demi-espaces dont l'hyperplan-frontière est $\text{Affine}(x_m, G_i')$, et qui contiennent A, alors

$$A = \bigcap_i G_i \ .$$

Si on note $\left(H_i'^+\right)$ la sous-famille des demi-espaces définissant δ qui contiennent x_m, alors on va vérifier que :

$$B = A \cap \left(\bigcap_i H_i'^+\right) = \left(\bigcap_i G_i\right) \cap \left(\bigcap_i H_i'^+\right) = S(\delta, x_m) \ .$$

D'abord B est convexe, et contient δ et x_m, par conséquent :

$$S(\delta, x_m) \subset B \ .$$

Pour démontrer l'inclusion inverse, prenons $x \in B \subset A$. Donc, $\exists y \in \delta$ tel que $x \in [x_m, y)$, car A est un demi-cône engendré par δ de sommet x_m. Considérons $[x_m, y) \cap \delta$: c'est un segment fermé car δ est convexe, et disjoint de x_m. Notons z son extrémité la plus éloignée de x_m : par conséquent $z \in \partial\delta$, donc z est dans l'un des hyperplans H_i'. En outre, puisque l'on a choisi l'orientation du demi-espace correspondant de façon à ce qu'il contienne x_m, il vient : $[x_m, z) \cap H_i'^+ = [x_m, z]$. Puisque $x \in B$ alors $x \in H_i'^+$ et donc $x \in [x_m, z]$.
Finalement, on trouve bien que $x \in S(\delta, x_m)$:

$$B \subset S(\delta, x_m)$$

c'est à dire que la suspension de δ par rapport à x_m est une intersection de demi-espaces.

⋆ Si $x_m \notin H$, alors on peut supposer pour simplifier que $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ et $x_m \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*$. On peut refaire la même démonstration, on remarquera que dans ce cas, la suspension a une dimension de plus.

Pour finir la démonstration que $\mathcal{S}(\delta, x_m) = \delta'$ est un polyèdre, il nous reste à vérifier que δ' est borné. C'est évident car étant l'enveloppe convexe des x_i, il est contenu dans toute boule qui contient les x_i, par conséquent δ' est bien un polyèdre.

Il nous faut encore prouver que les sommets de δ' sont bien les points x_i. Soient $y_1, \ldots, y_l$ les sommets de δ. On a vu dans la démonstration de (3) $\Rightarrow$ (1), que les y_i forment une famille minimale pour la convexité, et que : $\langle\{y_1, \ldots, y_l\}\rangle = \langle\{x_1, \ldots, x_m\}\rangle$, avec les x_i qui sont eux aussi une famille minimale pour la convexité. Par conséquent d'après le lemme 1.1.17* : $m = l$ et $\{y_1, \ldots, y_l\} = \{x_1, \ldots, x_m\}$. □ *page 27

▷ **Lemme 1.1.20** (Faces et sommets)

Tout sommet d'un polyèdre est sommet d'au moins l'une de ses faces.

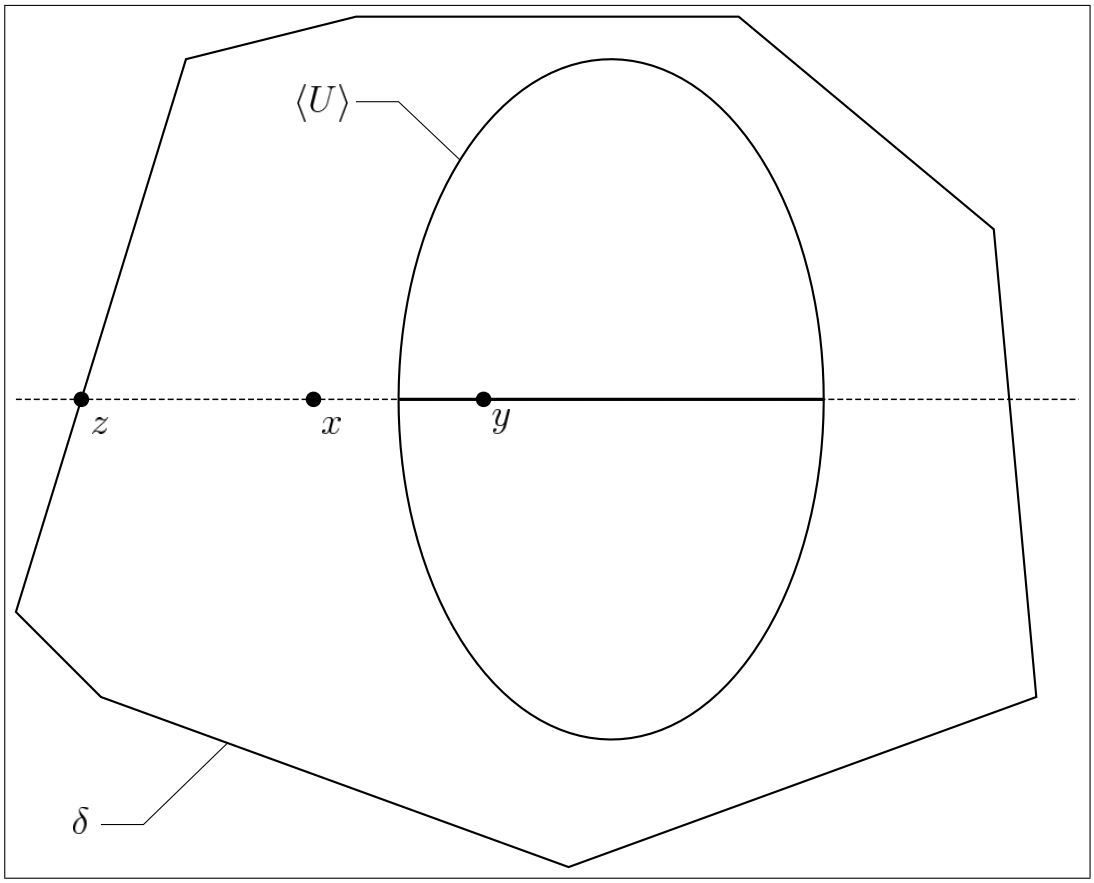


FIGURE 2 – Si l'on suppose que l'enveloppe convexe des sommets de δ est disjointe de δ, alors il existe un point z de la frontière de δ qui n'est pas dans l'enveloppe convexe $\langle U \rangle$ des sommets.

DÉMONSTRATION

Le lemme est évident si l'on se réfère à la définition d'une sous-face : un sommet est une sous-face de dimension 0 obtenue en remplaçant des demi-espaces par leur hyperplan frontière dans l'intersection définissant le polyèdre. Par conséquent, si l'on fait l'intersection du polyèdre avec un seul de ces hyperplans, on obtient une face pour laquelle le sommet initial est une sous-face de dimension 0 selon la définition, c'est à dire aussi un sommet. □

Ce lemme se généralise sans problème aux sous-faces, puisque celles-ci ne sont que des faces, faces de faces, etc...

▷ **Corollaire 1.1.21** (Sous-faces et sommets)

Soit δ un polyèdre k-dimensionnel et $l \leq k$, alors tout sommet de δ est sommet d'au moins une sous-face l-dimensionnelle.

DÉMONSTRATION

Raisonnons par récurrence décroissante sur l avec k fixé pour le démontrer :

- ◇ pour $l = k$, le corollaire est évident, puisque la seule sous-face k-dimensionnelle de δ est δ lui-même (par définition, les autres sont de dimension au plus $k-1$) ;
- ◇ pour $l = k-1$, la propriété a été démontrée dans le lemme 1.1.20 ;
- ◇ supposons alors le premier point du corollaire vrai pour $l > 0$ donné : soit x un sommet de δ. Par hypothèse de récurrence, x est aussi un sommet d'une sous-face l-dimensionnelle α. En appliquant le lemme 1.1.20 à α, on obtient que x est aussi un sommet d'une face β de α, qui est elle-même, d'après le corollaire 1.1.13*, un polyèdre de dimension $l-1$. Puisque d'après la proposition 1.1.12* β est aussi une sous-face de δ, le premier point est démontré. *p. 25 et 24

□

Le lemme suivant permet de caractériser les sous-faces de la suspension d'un polyèdre.

▷ **Lemme 1.1.22** (Sous-faces d'une suspension)

Les sous-faces de la suspension d'un polyèdre δ par rapport à un point x sont de trois sortes :

- ◇ *$\{x\}$;*
- ◇ *des sous-faces de δ ;*
- ◇ *des suspensions par rapport à x de sous-faces de δ.*

Il se peut évidemment qu'une des trois classes énoncées ci-dessus n'ait pas de représentant. Par exemple si $x \in \overset{\circ}{\delta}$, $\{x\}$ n'est pas une sous-face de $\langle \{x\} \cup \delta \rangle$.

DÉMONSTRATION

Commençons par considérer une face F de $\delta' = \mathcal{S}(\delta, x)$. Pour simplifier la démonstration, quitte à se placer dans un sous-espace affine on supposera que δ' est de dimension n.

Par définition $F = H \cap \delta'$, où H est un hyperplan affine tel que $H \cap \overset{\circ}{\delta'} = \emptyset$. D'après le théorème 1.1.19*, F est l'enveloppe convexe de ses sommets qui forment, d'après le corollaire 1.1.21, une sous-famille des sommets de δ' : *page 29

$$F = \langle \mathcal{F}_0(F) \rangle \ .$$

Considérons les deux cas possibles :

◇ si $x \in \mathcal{F}_0(F)$ alors $\mathcal{F}_0(F) = \{x\} \sqcup U$, où U est une sous-famille des sommets de δ. Si $U = \emptyset$ alors on a fini ($F = \{x\}$), sinon remarquons que $x \in H$, donc qu'il vient :

$$F = H \cap \delta' = H \cap \mathcal{S}(\delta, x) = \mathcal{S}(\delta \cap H, x) \ .$$

Par ailleurs, puisque $H \cap \overset{\circ}{\delta'} = \emptyset$ alors $H \cap \overset{\circ}{\delta} = \emptyset$ (sinon on pourrait trouver une boule $\dim_{\mathcal{H}}(\delta')$-dimensionnelle incluse dans $\overset{\circ}{\delta}$, centrée sur un point de $H \cap \overset{\circ}{\delta}$, et dont la suspension par rapport à x contiendrait une boule n-dimensionnelle incluse dans $\mathcal{S}(\delta, x)$ et centrée sur un point de H). D'après la propriété 1.1.14* on sait alors que $H \cap \delta$ est une sous-face de δ ;

page 25*

◇ si $x \notin \mathcal{F}_0(F)$, alors $H \cap \delta' = H \cap \delta$ car tous les sommets de F sont des sommets de δ, et là encore en appliquant la propriété 1.1.14 on trouve que F est une sous-face de δ.

Pour conclure on a donc démontré le lemme pour les faces de δ', reste à le démontrer pour les sous-faces de dimension inférieure. Pour cela notons $H_1, \ldots, H_M$ les hyperplans frontière de la famille minimale de demi-espaces engendrant δ' et considérons une sous-face F de δ' : par définition elle est obtenue en faisant l'intersection de δ' avec k hyperplans de cette famille ($0 \leq k \leq M$). On va raisonner par récurrence sur k :

◇ pour $k = 0$, on a $F = \delta' = \mathcal{S}(\delta, x)$;

◇ pour $k = 1$ on vient de démontrer que $F = \{x\}$, ou $F = G$ ou encore $F = \mathcal{S}(G, x)$ où G est une sous-face de δ ;

◇ supposons que pour $k \in \{2, \ldots, M\}$ donné, toute sous-face de δ' obtenue en faisant l'intersection de $k-1$ hyperplans de la famille est de l'une des trois sortes énoncées précédemment. Notons I l'ensemble des indices i utilisés pour définir F :

$$F = \delta' \cap \bigcap_{i \in I} H_i \ .$$

On a que $\#I = k \geq 2$, choisissons alors $i_0 \in I$ et définissons :

$$I' = I \setminus \{i_0\} \quad \text{et} \quad G = \delta' \cap \bigcap_{i \in I'} H_i \ .$$

G est une sous-face de δ', et $F = G \cap H_{i_0}$. Puisque $\#I' = k - 1$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G, ce qui nous amène à considérer les trois cas suivants :

⋆ si $G = \{x\}$ alors nécessairement $F = \{x\}$, puisque $F \neq \emptyset$ et $F \subset G$;

⋆ si G est une sous-face de δ alors puisque pour tout i, on a vu dans la première partie de la démonstration que $\overset{\circ}{\delta} \cap H_i = \emptyset$, alors d'après la propriété 1.1.14 on sait que F est une sous-face de δ ;

⋆ si G est la suspension d'une sous-face F' de δ par rapport à x alors en faisant de nouveau la première partie de la démonstration en remplaçant δ par F' et δ' par G, on trouve là encore que F est de l'une des trois sortes annoncées.

□

1.2 Complexes

On s'intéresse maintenant à des familles de polyèdres de même dimension $k \leq n$. Lorsqu'une telle famille est composée de polyèdres dont l'ensemble de toutes les sous-faces forme une famille de polyèdres d'intérieurs disjoints deux à deux, on parlera alors de complexe k-dimensionnel.

▷ **Définition 1.2.23** (Complexes)

Soit $F = \{\delta_1, \ldots, \delta_l\}$ une famille finie de polyèdres k-dimensionnels de $\mathbb{R}^n$, avec $k \leq n$. On définit respectivement l'union des polyèdres, *l'ensemble des* sous-faces *i-dimensionnelles, des* sous-faces *et des* faces de la frontière *de F :*

$$\mathcal{U}(F) = \bigcup_{\delta \in F} \delta \, ;$$

$$\mathcal{F}_i(F) = \bigcup_{\delta \in F} \mathcal{F}_i(\delta) \qquad \textit{pour } i \leq k \, ;$$

$$\mathcal{F}(F) = \bigcup_{\delta \in F} \mathcal{F}(\delta) \, ;$$

$$\mathcal{F}_\partial(F) = \left\{ \delta \in \mathcal{F}_{k-1}(F) : \ \forall (\alpha, \beta) \in F^2, \ \delta \neq \alpha \cap \beta \right\} \ .$$

On dira que la famille F est un complexe k-dimensionnel de $\mathbb{R}^n$ si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{F}(F) : \ \alpha \neq \beta \Rightarrow \overset{\circ}{\alpha} \cap \overset{\circ}{\beta} = \emptyset \ .$$

On rappelle que l'intérieur est pris ici relativement à la dimension de chacune des sous-faces considérées (voir la définition 1.1.10). On dira aussi que F est connexe si $\mathcal{U}(F)$ est connexe.*

* page 23

On remarquera que cette définition n'interdit pas aux polyèdres formant le complexe d'avoir des sous-faces communes : deux polyèdres distincts peuvent se rencontrer, à condition que leur intersection soit une sous-face commune aux deux (par exemple un sommet ou une face), mais ils ne peuvent pas se rencontrer uniquement sur une portion de face incomplète par exemple. En particulier, l'ensemble des sous-faces de même dimension des polyèdres d'un complexe vérifie cette propriété, comme l'établit la propriété suivante.

▷ **Propriété 1.2.24**

Soit S un complexe k-dimensionnel, alors pour $1 \leq l \leq k$, $\mathcal{F}_l(S)$ est un complexe (l-dimensionnel), ainsi que toute sous-famille de S. De plus, si $\alpha, \beta \in S$ alors $\alpha \cap \beta$ est une sous-face commune à α et β si elle n'est pas vide.

Démonstration

Le premier point est évident car pour $l \leq k$, $\mathcal{F}(\mathcal{F}_l(S)) \subset \mathcal{F}(S)$ (en effet on a vu que les sous-faces de sous-faces sont aussi des sous-faces dans la proposition 1.1.12*).

* page 24

Pour le second point, supposons que $\gamma = \alpha \cap \beta \neq \emptyset$ et remarquons qu'en tant qu'intersection non vide de polyèdres, γ est elle-même un polyèdre. Si $\alpha = \beta$ alors on a fini, supposons donc que $\alpha \neq \beta$. Notons H le sous-espace affine minimal qui contient γ (il est de dimension au plus $k-1$), ainsi que $\alpha' = \alpha \cap H$ et $\beta' = \beta \cap H$. On a donc aussi que $\gamma = \alpha' \cap \beta'$. De plus, $\alpha' = H \cap \partial\alpha$ puisque par hypothèse $\overset{\circ}{\alpha} \cap \overset{\circ}{\beta} = \emptyset$ et de même $\beta' = H \cap \partial\beta$. Par conséquent α' et β' sont inclus dans deux faces U et V respectivement de α et β (puisque les faces d'un polyèdre forment sa frontière et sont dans des hyperplans affines distincts). Si $U = V$ alors on a fini, sinon on peut recommencer le même raisonnement en remplaçant α par U, β par V (car U et V sont dans $\mathcal{F}_{k-1}(S)$ qui est un complexe de dimension $k-1$ d'après le premier point) et k par $k-1$ jusqu'à ce que l'on ait trouvé une sous-face F commune à α et β qui contienne γ. Puisque cette sous-face est commune l'inclusion inverse est automatiquement vérifiée et donc $\gamma = \alpha \cap \beta = F$. □

Dans la construction qui va suivre dans la partie suivante, on va utiliser un complexe pour y projeter un ensemble selon une projection radiale par rapport à un point de l'intérieur de chacun des polyèdres. Si ceux-ci sont trop «plats», la déformation de E introduite par la projection va être trop grande. Il nous faut donc introduire une quantité permettant d'évaluer la régularité d'un polyèdre ainsi que l'ampleur de cette déformation et par suite l'augmentation de mesure correspondante.

▷ **DÉFINITION 1.2.25** (RÉGULARITÉ D'UN POLYÈDRE)

Soit δ un polyèdre k-dimensionnel de $\mathbb{R}^n$, et H le plus petit sous-espace affine le contenant.

Si $k = 0$ on pose par convention :

$$\overline{R}(\delta) = \underline{R}(\delta) = 0 \qquad et \qquad R(\delta) = 1 \ .$$

Si $k > 0$, on définit :

◇ *l'infimum des rayons des boules contenant δ :*

$$\overline{R}(\delta) = \inf\{r \in \mathbb{R}^{+*} : \ \exists c \in \mathbb{R}^n, \ B(c,r) \supset \delta\} \ ;$$

◇ *le supremum des rayons des boules k-dimensionnelles incluses dans δ :*

$$\underline{R}(\delta) = \sup\{r \in \mathbb{R}^{+*} : \ \exists c \in \delta, \ B(c,r) \cap H \subset \delta\} \ ;$$

◇ *la régularité de δ qui est le rapport des deux :*

$$R = \frac{\underline{R}(\delta)}{\overline{R}(\delta)} \in]0,1] \ .$$

On dira que plus $R(\delta)$ est proche de 1, plus δ est régulier.

Pour un polyèdre non réduit à un singleton, le supremum du calcul de $\underline{R}(\delta)$ est atteint, ce qui nous permettra de trouver une boule de rayon $\underline{R}(\delta)$ dans tout polyèdre.

▷ **LEMME 1.2.26** (ORTHOCENTRE ET BOULE INSCRITE)

Soit δ un polyèdre k-dimensionnel avec $k > 0$ et H le plus petit sous-espace affine le contenant. Alors il existe un point $o \in \delta$ tel que $H \cap B(o, \underline{R}(\delta)) \subset \delta$.

On dira que o est un orthocentre de δ, et $H \cap B(o, \underline{R}(\delta))$ une boule inscrite dans δ.

DÉMONSTRATION

Considérons une suite $(c_m, r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall m : \ B(c_m, r_m) \subset \delta \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to\infty} r_m = \underline{R}(\delta) \ .$$

Puisque $\delta \times [0, \underline{R}(\delta)]$ est compact alors on peut extraire de (c_m, r_m) une sous-suite convergente (c'_m, r'_m). Notons o la limite de c'_m (on a toujours $\lim_{m\to\infty} r'_m = \underline{R}(\delta)$), on peut même imposer (quitte à ne garder que les termes à partir d'un certain rang) que

$$\forall m : \ \mathbf{d}(c'_m, o) < \underline{R}(\delta) \ .$$

Remarquons que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que $\mathbf{d}(x,y) < r$ et $\mathbf{d}(y,z) \leq r - \mathbf{d}(x,y)$ on a que $\mathbf{d}(x,z) \leq \mathbf{d}(x,y) + \mathbf{d}(y,z) \leq r$ donc

$$B(y, r - \mathbf{d}(x,y)) \subset B(x,r) \ .$$

Posons par ailleurs

$$\rho = \sup\{r : B(o,r) \subset \delta\} \leq \underline{R}(\delta)$$

et choisissons $x \in B(o,\rho)$: la suite $x_m = o + \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x - o)$ de points de δ converge vers x et puisque δ est fermé alors $x \in \delta$ donc par suite $B(o,\rho) \subset \delta$.

Notons maintenant $r''_m = \max(r'_m, \rho + \mathbf{d}(c'_m, o))$, il vient alors que

$$\forall m : \ B(o,\rho) \subset B(c'_m, r''_m) \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty} r''_m \leq \underline{R}(\delta) \ .$$

Ceci démontre que $\rho = \underline{R}(\delta)$ et termine la démonstration du lemme. □

La définition des régularités peut aussi s'étendre à un complexe tout entier. On notera ces extensions avec la lettre $\mathcal{R}$ ronde pour la différencier de la régularité d'un seul polyèdre, qu'on avait jusqu'ici notée avec la lettre droite R.

▷ **Définition 1.2.27** (Régularité d'un complexe)

Soit S un complexe de dimension k de $\mathbb{R}^n$. Soit $l \leq k$, on définit :

◇ *les régularités l-dimensionnelles de S, qui sont les extrema des régularités de ses sous-faces l-dimensionnelles :*

$$\overline{\mathcal{R}}_l(S) = \sup_{\delta \in \mathcal{S}_l(S)} \overline{R}(\delta) \ ;$$

$$\mathcal{R}_l(S) = \inf_{\delta \in \mathcal{S}_l(S)} R(\delta) \ ;$$

$$\underline{\mathcal{R}}_l(S) = \inf_{\delta \in \mathcal{S}_l(S)} \underline{R}(\delta) \ ;$$

◇ *les régularités totales de S, qui sont les extrema de ses régularités l-dimensionnelles :*

$$\overline{\mathcal{R}}(S) = \max_{0<l\leq k} \overline{\mathcal{R}}_l(S) \ ;$$

$$\mathcal{R}(S) = \min_{0\leq l\leq k} \mathcal{R}_l(S) \in]0,1] \ ;$$

$$\underline{\mathcal{R}}(S) = \min_{0<l\leq k} \underline{\mathcal{R}}_l(S) \ .$$

Remarquons qu'on a pris l'infimum pour la définition de $\mathcal{R}_l$ et $\mathcal{R}$, de façon à pouvoir minorer la régularité du «pire» polyèdre du complexe, puisque l'on va chercher par la suite à construire des complexes les plus réguliers possible.

Comme on va le voir, dans le cas de la suspension d'un polyèdre par rapport à un point qui n'est pas un orthocentre, on peut évaluer la régularité de la suspension.

▷ **LEMME 1.2.28** (RÉGULARITÉ D'UNE SUSPENSION DE POLYÈDRE)

Soit δ un polyèdre, o un orthocentre de δ, H le plus petit sous-espace affine contenant δ et x un point distinct de o. Alors il existe des constantes a, b et c strictement positives qui ne dépendent que de $\frac{\mathbf{d}(x,H)}{\mathbf{d}(x,o)}$ et $\frac{\mathbf{d}(x,o)}{\overline{R}(\delta)}$ telles que :

$$\overline{R}(\mathcal{S}(\delta,x)) \leq a\overline{R}(\delta)\,;$$

$$\underline{R}(\mathcal{S}(\delta,x)) \geq b\underline{R}(\delta)\,;$$

$$R(\mathcal{S}(\delta,x)) \geq cR(\delta)\ .$$

DÉMONSTRATION

Soit H le plus petit espace affine contenant δ alors notons :
- ◇ $\delta' = \mathcal{S}(\delta,x)$;
- ◇ o un orthocentre de δ ;
- ◇ $\underline{B}$ une boule inscrite dans δ de centre o ;
- ◇ $\overline{B}$ la boule de centre o et de rayon $2\overline{R}(\delta)$ (dès lors $\delta \subset \overline{B}$) ;
- ◇ o' un point de $[x,o]$.

Le problème peut se ramener à trouver une boule $B(o',\underline{r})$ incluse dans $\mathcal{S}(\underline{B},x)$, et une boule $B(o,\overline{r})$ contenant $\mathcal{S}(\overline{B},x)$. Considérons les deux cas possibles en fonction de la position de x par rapport à H :

- ◇ si $x \in H$ (c'est à dire si $\mathbf{d}(x,H)=0$) alors prenons $o'=o$, clairement $\underline{r} = \underline{R}(\delta)$ et $\overline{r} = \max(\mathbf{d}(x,o), 2\overline{R}(\delta))$ conviennent et il vient :

$$\underline{R}(\delta') \geq \underline{R}(\delta) \quad \text{et} \quad \overline{R}(\delta) \leq \max\left(2, \frac{\mathbf{d}(x,o)}{\overline{R}(\delta)}\right)\overline{R}(\delta)\,;$$

- ◇ si $x \notin H$, appelons $\mathcal{C}$ le cône de sommet x engendré par $\underline{B}$ (voir figure 3) ; soit $\underline{B}'$ la plus grande boule (n-dimensionnelle cette fois) de centre o et qui soit contenue dans $\mathcal{C}$. Son rayon $\underline{R}'$ vaut $\underline{R}(\delta)\cos\alpha$ où α est l'angle entre la normale à H et la droite (x,o). Or $\cos\alpha = \frac{\mathbf{d}(x,H)}{\mathbf{d}(x,o)}$, donc $\underline{R}' = \underline{R}(\delta)\frac{\mathbf{d}(x,H)}{\mathbf{d}(x,o)}$. Les boules images de $\underline{B}'$ par l'homothétie de centre x et de rapport $\gamma > 0$ sont donc toutes contenues dans le cône $\mathcal{C}$, en particulier la boule $\underline{B}''$ de centre c' obtenue avec $\gamma = \frac{1}{2}$ par exemple. Choisissons alors o' comme le milieu du segment $[x,o]$ et posons

$$\underline{r}_1 = \frac{1}{2}\cdot\underline{R'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{d}(x,H)}{\mathbf{d}(x,o)}\cdot\underline{R}(\delta) \quad \text{et} \quad \underline{r}_2 = \mathbf{d}(o',H) = \frac{\mathbf{d}(x,H)}{2}\ .$$

En constatant que $\underline{R}(\delta) \leq \overline{R}(\delta)$ on remarque par ailleurs que

$$\underline{r}_2 \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{d}(x,H)}{\mathbf{d}(xoc)}\cdot\frac{\mathbf{d}(x,o)}{\overline{R}(\delta)}\cdot\underline{R}(\delta)\ .$$

Par construction $B(o',\underline{r}_1) \subset \mathcal{C}$ et $B(o',\underline{r}_2) \subset \mathcal{S}(H,x)$, donc $B(o',\underline{r}_1) \cap B(o',\underline{r}_2) \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{S}(H,x) \subset \delta'$, donc $\underline{r} = \min(\underline{r}_1,\underline{r}_2)$ convient, et en vérifiant que la borne trouvée pour $\overline{R}$ dans le premier cas convient aussi on obtient :

$$\underline{R}(\delta') \geq \frac{1}{2}\min\left(\frac{\mathbf{d}(x,H)}{\mathbf{d}(x,o)}, \frac{\mathbf{d}(x,H)}{\mathbf{d}(x,o)}\cdot\frac{\mathbf{d}(x,o)}{\overline{R}(\delta)}\right)\underline{R}(\delta)$$

$$\overline{R}(\delta) \leq \max\left(2, \frac{\mathbf{d}(x,o)}{\overline{R}(\delta)}\right)\overline{R}(\delta)\ .$$

Dans les deux cas, il suffira de prendre $c = \frac{a}{b}$ pour avoir la 3ème inégalité du lemme. □

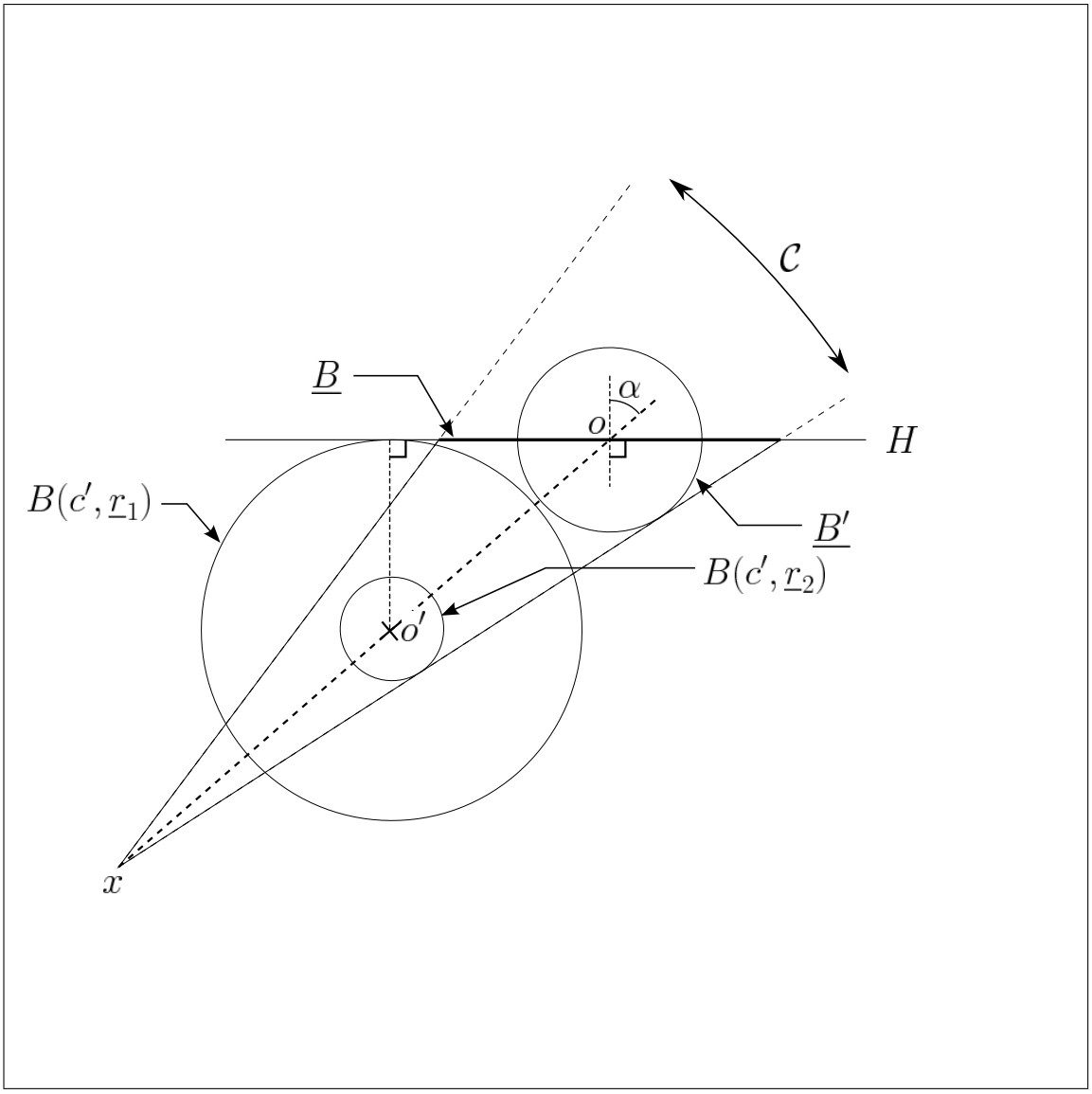


FIGURE 3 – Suspension d'un polyèdre par rapport à un point non coplanaire, et la boule contenue dans la suspension.

1.3 Suspension de complexes

On suppose maintenant que $n \geq 2$. On va utiliser un nouveau type d'objet pour réaliser la suspensions des polyèdres d'un complexe par rapport à un ensemble de points. Ces ensembles dits *graphes* seront munis d'une structure connective permettant des suspensions multiples de certaines sous-faces des complexes à suspendre. On limitera notre étude (et nos définitions) à celle des graphes finis non orientés, puisque l'approche générale de la théorie des graphes n'est pas notre objet ici. Il est à noter qu'on ne considèrera pas seulement des graphes abstraits, mais l'immersion des objets unidimensionnels correspondants dans $\mathbb{R}^n$.

▷ **Définition 1.3.29** (Graphe)

Un graphe $G = (T, A)$ est la donnée d'un couple formé de deux ensembles :

- ◇ *un ensemble fini et non vide T de sommets, appelé support de G, qui contient un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$;*
- ◇ *un ensemble d'arêtes $A \subset \mathcal{P}_2(T)$, qui contient des doublons de sommets distincts non ordonnés, formant des segments d'intérieurs disjoints.*

Si deux sommets x et y forment une arête telle que $\{x, y\} \in A$, alors on dira que x et y sont voisins. On notera aussi une arête $[x, y]$ pour dénoter le segment qui relie une paire de sommets voisins.

On remarquera que les arêtes d'un graphe ainsi défini forment un complexe de dimension 1 (puisqu'elles sont d'intérieurs disjoints par définition), on se réservera donc le droit d'utiliser parfois une terminologie identique pour les deux types d'objets.

Il est intéressant de considérer la structure connective d'un tel graphe, en évaluant localement et globalement le nombre de voisins d'un sommet.

▷ **Définition 1.3.30** (Ordre d'un graphe)

Soit $G = (T, A)$ un graphe, on définit alors l'ordre d'un point x de T par :

$$\mathcal{O}(x) = \#\{y : \ \{x, y\} \in A\}$$

c'est à dire, l'ordre de x est le nombre de ses voisins. On peut alors étendre cette définition au graphe tout entier :

$$\mathcal{O}(G) = \sup_{x \in T} \mathcal{O}(x) \ .$$

On définit aussi la notion de sous-graphe en considérant sa restriction à un sous-ensemble de sommets.

▷ **Définition 1.3.31** (Sous-graphe)

Soit $G = (T, A)$ un graphe et $T' \subset T$ une partie non vide de T. On définit la restriction A' de A sur T' par :

$$A' = \{\{x, y\} \in A : \ (x, y) \in T'^2\} = A \cap \mathcal{P}_2(T') \ .$$

On dira que le graphe $G' = (T', A')$ est le sous-graphe de G porté par T'. On notera $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des sous-graphes de G obtenus ainsi lorsque T' parcourt $\mathcal{P}(T) \setminus \emptyset$ et $\mathcal{P}_k(G)$ l'ensemble des sous-graphes de G à k sommets :

$$\mathcal{P}_k(G) = \{G' = (T', A') \in \mathcal{P}(G) : \ \#T' = k\} \ .$$

Pour manipuler plus aisément les suspensions de complexes on va se doter d'une terminologie supplémentaire pour décrire les graphes.

▷ **Définition 1.3.32** (Structure des graphes)

Soit $G = (T, A)$ un graphe.

- ◇ *pour $k > 1$ on dira qu'un chemin de longueur k est un $k+1$-uplet de sommets $(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in T^{k+1}$ tel que $\forall i \leq k, \{x_i, x_{i+1}\} \in A$;*
- ◇ *un k-cycle est un chemin de longueur k dont les deux extrémités sont égales et dont les $k-1$ autres sommets le composant sont distincts deux à deux. Par exemple, si $\{x, y\} \in A$, le triplet (x, y, x) est un 2-cycle ;*
- ◇ *on dira que G est connexe s'il existe un chemin qui parcourt T en entier ;*
- ◇ *on dira que G est linéaire si $\mathcal{O}(G) = 2$, s'il ne possède aucun 3-cycle et s'il est connexe ; en particulier cette définition implique que $\#T \geq 2$;*
- ◇ *on dira que G est cyclique s'il existe un cycle qui passe par tous ses sommets ;*
- ◇ *on dira que G est un graphe complet si*

$$\forall (x, y) \in T^2 : \ x \neq y \Rightarrow \{x, y\} \in A$$

(c'est à dire si tous ses sommets sont voisins deux à deux). Par exemple, un graphe réduit à un seul sommet est complet ;

- ◇ *on notera $\mathcal{P}^*(G)$ l'ensemble des sous-graphes complets de G et $\mathcal{P}^*_k(G)$ l'ensemble des sous-graphes complets à k sommets de G :*

$$\mathcal{P}^*_k(G) = \mathcal{P}^*(G) \cap \mathcal{P}_k(G) \ .$$

Par exemple si $\mathcal{O}(G) = 2$, $\mathcal{P}^*_k(G) = \emptyset$ si $k > 3$ (puisque dans ce cas tout sommet de G a au plus deux voisins).

La suspension telle qu'on l'a définie précédemment avait comme support un point. Le problème est que lorsque l'on suspend un complexe entier par rapport à un unique point, les polyèdres créés peuvent avoir une régularité très faible par exemple si le complexe est de grand diamètre par rapport à sa distance au point. On va d'abord définir la suspension d'un complexe par rapport aux sommets d'un graphe dans le cas général, toutefois on se contentera par la suite de l'utiliser dans le cas d'un graphe linéaire car elle est alors plus simple à appréhender.

▷ **Définition 1.3.33** (Suspension d'un complexe par rapport à un graphe)

Soit S un complexe k-dimensionnel, $G = (T, A)$ un graphe et p une application de S dans T. Pour tout sous-graphe complet $H = (U, B) \in \mathcal{P}^*(G)$ avec $U = \{x_1, \ldots, x_m\}$ $(1 \leq m \leq \#T)$ on définit :

$$p^*(H) = \left\{ \bigcap_{i=1}^{m} \delta_i : \ \delta_i \in S \text{ et } p(\delta_i) = x_i \right\} \ .$$

C'est à dire, $p^*(H)$ est l'ensemble des intersections qu'il est possible de former avec m polyèdres mis en correspondances respectivement avec les m sommets de H par p (ces intersections sont soit vides, soit des sous-faces du complexe d'après la propriété 1.2.24). À partir de là on définit ensuite :*

page 35*

$$\mathcal{S}^*(H) = \{\langle F \cup U\rangle : \ F \in p^*(H)\} \ .$$

$\mathcal{S}^*(H)$ est l'ensemble des enveloppes convexes (ou suspensions successives) des éléments de $p^*(H)$ avec les m sommets du sous-graphe H.

On dira alors que la suspension du complexe S de dimension k par rapport au graphe G selon le choix p est l'ensemble des polyèdres de $\mathcal{S}^*(H)$ qui sont de dimension $k+1$ lorsque H parcourt l'ensemble des sous-graphes complets de G :

$$\mathcal{S}(S, G, p) = \{\delta \in \mathcal{S}^*(H) : \ H \in \mathcal{P}^*(G) \text{ et } \dim_{\mathcal{H}}(\delta) = k+1\} \ .$$

On appellera p un choix de suspension*, et lorsque $\mathcal{S}(S, G, p)$ est un complexe on dira que p est un choix* adapté *à la suspension de S par rapport à G.*

Une suspension de complexe définie ainsi n'est pas forcément un complexe. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, on peut constater que la suspension du complexe composé des deux polyèdres $\{1\} \times [0,1]$ et $\{2\} \times [0,1]$ par rapport au point 0 n'est pas un complexe car dans ce cas les deux suspensions ne sont pas d'intérieurs disjoints. Il nous faut donc des conditions plus fortes sur la situation relative du complexe et du graphe pour qu'il existe un choix adapté.

▷ **Définition 1.3.34** (Occlusion simple d'un ensemble par rapport à un autre)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. On dira que A est en occlusion simple par rapport à B si :

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \ [x,y] \cap A = \{x\} \ .$$

Comme le formalise la propriété suivante, dans le cas d'un ouvert borné, la propriété d'occlusion simple de la frontière implique le caractère étoilé de l'ouvert.

▷ **Propriété 1.3.35**

Soient O un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ et B une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Si la frontière ∂O est en occlusion simple par rapport à B alors O est étoilé par rapport à tout point de B.

DÉMONSTRATION

Supposons que ∂O soit en occlusion simple par rapport à B et soient $a \in B$ et $b \in O$. Puisque O est un ouvert borné, la demi-droite d'origine b et de direction $\overrightarrow{ab}$ coupe ∂O en un point c. Par hypothèse d'occlusion simple, le segment $[a,c[$ ne coupe donc pas ∂O et puisque $[a,c[\cap O \neq \emptyset$ (car $b \in [a,c]$) alors $[a,c[\subset O$ et donc en particulier $[a,b] \subset O$. Par conséquent O est donc étoilé par rapport à tout point de B. □

La notion d'occlusion simple peut aussi se généraliser à un complexe par rapport à un graphe, elle nous donnera une condition nécessaire mais pas suffisante pour une suspension adaptée.

▷ **Définition 1.3.36** (Complexe en occlusion simple)

Soient S un complexe k-dimensionnel, $G = (T, A)$ un graphe et p un choix de suspension. On dira que S est en occlusion simple par rapport à G avec le choix p si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- ◇ *les polyèdres de S ne rencontrent pas les arêtes de G ;*
- ◇ *pour tout sommet $x \in T$ du graphe, $\mathcal{U}(p^{-1}(x)) = \bigcup_{\delta \in S\ ,\ p(\delta)=x} \delta$ est en occlusion simple par rapport à x (c'est à dire que l'union des polyèdres mis en correspondance avec x par p est en occlusion simple par rapport à x) ;*
- ◇ *pour toute arête $\{x, y\} \in A$ du graphe :*
  - ⋆ *$\mathcal{U}(p^{-1}(x)) \cap \mathcal{U}(p^{-1}(y))$ est en occlusion simple par rapport au segment $[x, y]$ (c'est à dire que l'union des sous-faces communes à deux polyèdres mis en correspondance avec deux sommets voisins est en occlusion simple par rapport à l'arête formée par ces deux sommets) ;*
  - ⋆ *$\mathcal{S}(\mathcal{U}(p^{-1}(x)) \cap \mathcal{U}(p^{-1}(y)), y) \cup \mathcal{U}(p^{-1}(x))$ est en occlusion simple par rapport au point x (c'est à dire que l'union de la suspension de ces sous-faces communes par rapport à y avec les polyèdres qui sont mis en correspondance avec x est en occlusion simple par rapport à x).*

On remarquera que le deuxième point de cette définition ne peut être vérifié que lorsque $k < n$.

On va maintenant être en mesure de donner des conditions suffisantes pour que la suspension d'un complexe en occlusion simple par rapport à un graphe linéaire soit un complexe.

▷ **Lemme 1.3.37** (Suspension adaptée par rapport à un graphe linéaire)

Soient $S = \{\delta_i\}_{1 \leq i \leq m}$ un complexe k-dimensionnel, $G = (T, A)$ un graphe linéaire et p un choix de suspension vérifiant les propriétés suivantes :

- ◇ *S est en occlusion simple par rapport à G avec le choix p ;*
- ◇ *il existe une famille $(\kappa_x)_{x \in T}$ d'ouverts deux à deux disjoints tels que :*
  - ⋆ *$\forall x \in T :\ x \in \kappa_x$ et κ_x est étoilé par rapport à x ;*
  - ⋆ *$\mathcal{U}(p^{-1}(x)) \subset \overline{\kappa_x}$ (c'est à dire que les polyèdres mis en correspondance avec x par p sont tous inclus dans $\overline{\kappa_x}$) ;*
  - ⋆ *si x et y sont deux points voisins, alors en notant $\kappa_{x,y} = \bigcup_{u \in \kappa_x, v \in \kappa_y} [u, v]$ on a : $\forall z \in T \setminus \{x, y\},\ \kappa_{x,y} \cap \kappa_z = \emptyset$;*
  - ⋆ *si $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ sont deux arêtes distinctes du graphe telles que*

$\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$ alors $\kappa_{a,b} \cap \kappa_{c,d} = \emptyset$ (cette condition implique la précédente lorsque le graphe est cyclique).

Alors, p est adapté à la suspension de S par rapport à G.

DÉMONSTRATION

Remarquons d'abord que les polyèdres qui composent $\mathcal{S}(S,T,p)$ sont de deux espèces :

- ◇ ceux qui sont obtenus par suspension d'un polyèdre de S par rapport à un sommet de T ;
- ◇ ceux qui sont obtenus par suspension d'une face de S par rapport à deux sommets voisins de T.

En effet, puisque G est d'ordre deux alors $\mathcal{P}^*_m(G) = \emptyset$ si $m > 3$ (en effet les sous-graphes complets de G ne peuvent avoir plus de trois éléments car un sommet de G ne peut avoir plus de deux voisins). De plus, puisque G est linéaire par définition il ne contient pas de 3-cycle, par conséquent $\mathcal{P}^*_3(G) = \emptyset$ car tout sous-graphe complet à trois sommets est le support d'un 3-cycle. Par définition de la suspension, tout polyèdre δ de $\mathcal{S}(S,G,p)$ est obtenu comme l'enveloppe convexe de $F \cup T'$ où F est une sous-face de S obtenue par intersection de m polyèdres et T' qui est le support d'un sous-graphe complet de G à m éléments. D'après ce qu'on vient de voir, forcément $\#T' \leq 2$ et de plus $\dim_{\mathcal{H}}(F) \leq k$. En remarquant que $\dim_{\mathcal{H}}(\delta) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F) + \#T'$ on constate donc que pour que δ soit un polyèdre $k+1$-dimensionnel il faut que $\dim_{\mathcal{H}}(F) + \#T' \geq k+1$ c'est à dire que F soit un polyèdre de S et $\#T' = 1$ ou que F soit une face de F et $\#T' = 2$, ce qui correspond aux deux espèces définies précédemment.

Il nous faut maintenant vérifier que l'ensemble des polyèdres nouvellement créés (de première et seconde espèce) par la suspension forme bien un complexe. Considérons F une sous-face d'un polyèdre δ créé après suspension, elle peut être obtenue de quatre manières différentes :

- ◇ δ est de première ou seconde espèce et F est une sous-face de S ;
- ◇ δ est de première ou seconde espèce et $F = \langle F' \cup \{x\} \rangle$ où F' est une sous-face de S et x un sommet de G ;
- ◇ δ est de seconde espèce et $F = \langle F' \cup \{x,y\} \rangle$ où F' est une sous-face de S et x et y deux sommets voisins de G ;
- ◇ δ est de seconde espèce et F est une arête de G.

Notons respectivement S_1, S_2, S_3 et S_4 les ensembles des sous-faces correspondant respectivement à ces quatre sortes (les ensembles S_i sont deux à deux disjoints, puisque par construction une sous-face ne peut être que d'une seule sorte à la fois) ainsi :

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(S,G,p)) = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 \sqcup S_4 \ .$$

On cherche à montrer que les polyèdres de $\mathcal{F}(\mathcal{S}(S,G,p))$ sont d'intérieurs disjoints deux à deux. Pour cela, considérons (lorsque cela est possible [1]) $F_i \neq G_i \in S_i$ et démontrons que

$$\forall i,\ \forall j,\ \overset{\circ}{F_i} \cap \overset{\circ}{G_j} = \emptyset \ .$$

1. En effet, il se peut que l'un des S_i soit vide ou réduit à un seul polyèdre ; ce n'est pas un problème puisque dans ce cas-là on obtient ce qu'on cherchait : que les polyèdres de $\bigcup_i S_i$ sont d'intérieurs disjoints deux à deux.

Pour étudier les différents cas on utilisera ces notations :

$$F_1 \text{ est une sous-face d'un polyèdre } \alpha_1 \text{ de } S$$

$$F_2 = \left\langle F_2' \cup \{x\} \right\rangle \text{ où } F_2' \text{ est une sous face de } \alpha_2 \in S\,;$$
$$G_2 = \left\langle G_2' \cup \{y\} \right\rangle \text{ où } G_2' \text{ est une sous face de } \beta_2 \in S\,;$$
$$F_3 = \left\langle F_3' \cup \{a,b\} \right\rangle \text{ où } F_3' \text{ est une sous face de } \alpha_3 \in S\,;$$
$$G_3 = \left\langle G_3' \cup \{c,d\} \right\rangle \text{ où } G_3' \text{ est une sous face de } \beta_3 \in S\,;$$
$$G_4 = [u,v]\ .$$

Il y a en tout seize cas à considérer (pour $(i,j) \in \{1,2,3,4\}^2$) mais à une permutation des notations près on se ramène à dix cas qu'on va considérer un par un dans le tableau suivant :

TABLE 1: dix cas d'intersections vides à vérifier.

Cas	Démonstration
$\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_1}$	F_1 et G_1 sont d'intérieurs disjoints par définition puisque S est un complexe.
$\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_2}$	Remarquons d'abord que si F_1 est une sous-face de G_2', F_1 est aussi une sous-face de G_2 (car y n'est pas coplanaire avec G_2' puisqu'en occlusion simple) et donc $\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_2} = \emptyset$. Supposons donc que F_1 ne soit pas une sous-face de G_2'. Posons $z = p(\alpha_1)$ et considérons alors les deux cas : ◇ si $z \neq y$ alors par hypothèse d'abord $F_1 \subset \alpha_1 \subset \overline{\kappa_z}$ et $G_2' \subset \beta_2 \subset \overline{\kappa_y}$ donc $G_2 \subset \overline{\kappa_y}$ car κ_y est étoilé par rapport à y. De plus puisque $y \notin \overline{\kappa_z}$ alors $G_2 \cap \partial\kappa_z \subset G_2'$. Dès lors puisque κ_y et κ_z sont disjoints il vient $F_1 \cap G_2 = F_1 \cap \overline{\kappa_z} \cap G_2 \cap \overline{\kappa_y} = F_1 \cap G_2 \cap \partial\kappa_y \cap \partial\kappa_z \subset F_1 \cap G_2 \cap \partial\kappa_y \subset F_1 \cap G_2'$; ◇ si $z = y$, puisque par hypothèse y est en occlusion simple par rapport à $\beta_2 \cup F_1$ donc aussi par rapport à $G_2' \cup F_1$ alors $F_1 \cap G_2 = F_1 \cap G_2'$. Dans les deux cas, G_2' est une sous-face stricte de G_2 et puisque l'on a supposé que F_1 n'est pas une sous face de G_2' alors $F_1 \cap G_2'$ est soit vide, soit une sous-face stricte de F_1. Pour conclure, $F_1 \cap G_2$ est donc soit vide, soit une sous-face stricte de F_1 et G_2 (donc incluse dans leur frontière) et par conséquent $\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_2} = \emptyset$.
Suite page suivante...	

Suite de la vérification de cas	
$\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_3}$	Remarquons d'abord que si F_1 est une sous-face de G'_3, F_1 est aussi une sous-face de G_3 (car aucun point de $[c,d]$ n'est dans le sous-espace affine engendré par G'_3 par hypothèse d'occlusion simple) et donc $\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_3} = \emptyset$. Supposons donc que F_1 ne soit pas une sous-face de G'_3 et posons $z = p(\alpha_1)$. Quitte à permuter les notations, il y a deux cas à envisager au total : ◇ si $z \neq c$ et $z \neq d$ alors de la même façon que pour le cas précédent on a que $G_3 \subset \overline{\kappa_{c,d}}$ et puisque $[c,d] \subset \kappa_{c,d}$ alors $G_3 \cap \partial\kappa_{c,d} \subset G'_3$. Puisque par hypothèse $\kappa_{c,d}$ et $\overline{\kappa_z}$ sont disjoints alors $F_1 \cap G_3 = F_1 \cap \overline{\kappa_z} \cap G_3 \cap \overline{\kappa_{c,d}} = F_1 \cap G_3 \cap \partial\kappa_z \cap \partial\kappa_{c,d} \subset F_1 \cap G_3 \cap \partial\kappa_{c,d} \subset F_1 \cap G'_3$; ◇ si $z = c$, puisque par hypothèse $[c,d]$ est en occlusion simple par rapport à $\beta_3 \cup \alpha_1$ donc aussi par rapport à $G'_3 \cup F_1$ alors $F_1 \cap G_3 = F_1 \cap G'_3$. Dans les deux cas, G'_3 est une sous-face stricte de G_3 et puisque l'on a supposé que F_1 n'est pas une sous-face de G'_3 alors $F_1 \cap G'_3$ est soit vide, soit une sous-face stricte de F_1. Pour conclure, $F_1 \cap G_3$ est donc soit vide, soit une sous-face stricte de F_1 et G_3 (donc incluse dans leur frontière) et par conséquent $\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_3} = \emptyset$.
$\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_4}$	Par hypothèse d'occlusion simple, les arêtes du graphe ne rencontrent pas les polyèdres du complexe donc a fortiori $\overset{\circ}{F_1} \cap \overset{\circ}{G_4} = \emptyset$.
$\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_2}$	Considérons les deux cas possibles : ◇ si $x \neq y$ alors comme vu dans le cas $(i,j) = (1,2)$, $F_2 \cap \partial\kappa_x \subset F'_2$ et $G_2 \cap \partial\kappa_y \subset G'_2$ avec par hypothèse $\kappa_x \cap \kappa_y = \emptyset$. Par conséquent, puisque $\kappa_x \cap \kappa_y = \emptyset$ alors $F_2 \cap G_2 = F_2 \cap \overline{\kappa_x} \cap G_2 \cap \overline{\kappa_y} = F_2 \cap \partial\kappa_x \cap G_2 \cap \partial\kappa_y \subset F'_2 \cap G'_2$. Or, puisque F'_2 et G'_2 sont deux sous-faces strictes de F_2 et G_2, alors $F_2 \cap G_2$ est soit vide, soit une sous-face stricte de F_2 et G_2 (donc incluse dans leurs frontières) et par conséquent $\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_2} = \emptyset$; ◇ si $x = y$ alors $F_2 \cap G_2 = \langle (F'_2 \cap G'_2) \cup \{x\} \rangle$. Remarquons ensuite que par hypothèse $F'_2 \neq G'_2$ (sinon $F_2 = G_2$), et si F'_2 (respectivement G'_2) est une sous face stricte de G'_2 (respectivement F'_2) alors F_2 (respectivement G_2) est une sous-face stricte de G_2 (respectivement F_2) et alors $\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_2} = \emptyset$. Supposons alors que F'_2 et G'_2 ne soient pas sous-face de respectivement G'_2 et F'_2, alors $F'_2 \cap G'_2$ est soit vide, soit une sous-face stricte de F'_2 et G'_2. Par conséquent, $F_2 \cap G_2$ est une sous-face stricte de F_2 et G_2, donc incluse dans leurs frontières et par conséquent $\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_2} = \emptyset$.
Suite page suivante...	

Suite de la vérification de cas	
$\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_3}$	Quitte à permuter les notations, il reste deux cas à étudier : ◇ si $x \neq c$ et $x \neq d$ alors comme vu dans les cas précédents, $F_2 \cap \partial\kappa_x \subset F'_2$ et $G_3 \cap \partial\kappa_{c,d} \subset G'_3$. De plus par hypothèse $\kappa_x \cap \kappa_{c,d} = \emptyset$ d'où $F_2 \cap G_3 = F_2 \cap \overline{\kappa_x} \cap G_3 \cap \overline{\kappa_{c,d}} = F_2 \cap \partial\kappa_x \cap G_3 \cap \partial\kappa_{c,d} \subset F'_2 \cap G'_3$. Or F'_2 et G'_3 sont des sous-faces strictes de respectivement F_2 et G_3, par conséquent $F_2 \cap G_3$ est soit vide, soit une sous-face stricte de F_2 et G_3 (donc incluse dans leurs frontières) et finalement $\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_3} = \emptyset$; ◇ si $x = c$ alors $F_2 \cap G_3 = \langle F'_2 \cup \{x\}\rangle \cap \langle G'_3 \cup \{x, y\}\rangle = \langle (F'_2 \cap \langle G'_3 \cup \{y\}\rangle) \cup \{x\}\rangle$, car d'après la dernière hypothèse de la définition de l'occlusion simple d'un complexe on sait que $F'_2 \cup \langle G'_3 \cup \{y\}\rangle$ est en occlusion simple par rapport à x. Par ailleurs, on sait aussi que $F'_2 \subset \overline{\kappa_x}$ et $G'_3 \subset \overline{\kappa_x} \cap \overline{\kappa_y}$, avec $\kappa_x \cap \kappa_y = \emptyset$ et κ_y qui est étoilé par rapport à y. Il vient donc : $F'_2 \cap \langle G'_3 \cup \{y\}\rangle = F'_2 \cap G'_3$ d'où on tire : $F_2 \cap G_3 = \langle (F'_2 \cap G'_3) \cup \{x\}\rangle$. Remarquons d'abord que si F'_2 est une sous-face de G'_3 alors F_2 est une sous-face de G_3 et donc $\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_3} = \emptyset$. Supposons alors que F'_2 ne soit pas une sous-face de G'_3, dans ce cas $F'_2 \cap G'_3$ est soit vide, soit une sous-face stricte de F'_2, donc $\langle (F'_2 \cap G'_3) \cap \{x\}\rangle$ est une sous-face stricte de F_2. Puisque c'est aussi une sous-face stricte de G_3 alors $F_2 \cap G_3$ est incluse dans la frontière de F_2 et G_3 et par conséquent $\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_3} = \emptyset$.
$\overset{\circ}{F_2} \cap \overset{\circ}{G_4}$	Remarquons que si u et v sont tous deux différents de x, puisque $F_2 \subset \overline{\kappa_x}$ et que $\kappa_{u,v} \cap \kappa_x = \emptyset$ alors $F_2 \cap [u, v] = \emptyset$ puisque $[u, v] \subset \kappa_{u,v}$. Supposons ensuite que $u = x$ par exemple, et raisonnons par l'absurde en supposant que $F_2 \cap [u, v] \neq \{u\}$. Dans ce cas F_2 est la suspension de F'_2 par rapport à u avec $F'_2 \subset \overline{\kappa_u}$. En outre κ_u étant étoilé par rapport à u et $v \notin \kappa_u$ on trouve que forcément $[u, v] \cap F'_2 \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse que les arêtes du graphe ne rencontrent pas les polyèdres de S.
Suite page suivante...	

Suite de la vérification de cas	
$\overset{\circ}{F_3} \cap \overset{\circ}{G_3}$	Puisque F_3 (respectivement G_3) est de seconde espèce, par définition de la suspension d'un complexe, F'_3 (respectivement G'_3) est incluse dans l'intersection de deux polyèdres δ_1 et δ_2 de S (respectivement δ_3 et δ_4) tels que $p(\delta_1) = a$ et $p(\delta_2) = b$ (respectivement $p(\delta_3) = c$ et $p(\delta_4) = d$). Remarquons alors que si F'_3 (respectivement G'_3) est une sous-face de G'_3 (respectivement F'_3) alors parmi tous les δ_i pouvant convenir on peut choisir $\delta_1 = \delta_3$ et $\delta_2 = \delta_4$ et donc $\{a, b\} = \{c, d\}$. Dès lors, F_3 (respectivement G_3) est une sous-face de G_3 (respectivement F_3) et donc par conséquent $\overset{\circ}{F_3} \cap \overset{\circ}{G_3} = \emptyset$ ou $F_3 = G_3$. On supposera donc que $F'_3 \cap G'_3$ est soit vide, soit une sous-face stricte de F'_3 et de G'_3. Quitte à permuter les notations il reste là encore trois cas à traiter séparément : ◇ si $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ alors par hypothèse $\kappa_{a,b} \cap \kappa_{c,d} = \emptyset$, de plus comme vu dans les cas précédents, puisque $F_3 \cap \partial\kappa_{a,b} \subset F'_3$ et $G_3 \cap \partial\kappa_{c,d} \subset G'_3$ alors $F_3 \cap G_3 = F_3 \cap \overline{\kappa_{a,b}} \cap G_3 \cap \overline{\kappa_{c,d}} = F_3 \cap \partial\kappa_{a,b} \cap G_3 \cap \partial\kappa_{c,d} \subset F'_3 \cap G'_3$; ◇ si $a = c$ et $b \neq d$, puisque par hypothèse $F'_3 \subset \overline{\kappa_b}$ et $G'_3 \subset \overline{\kappa_d}$ avec $\kappa_b \cap \kappa_d = \emptyset$, $b \in \kappa_b$ et $d \in \kappa_d$ alors déjà $\langle F'_3 \cup \{b\}\rangle \cap \langle G'_3 \cup \{d\}\rangle = F'_3 \cap G'_3$. De plus $\kappa_{a,b} \cap \kappa_d = \emptyset$ et $\kappa_{a,d} \cap \kappa_b = \emptyset$ avec $F_3 \subset \overline{\kappa_{a,b}}$ et $G_3 \subset \overline{\kappa_{a,d}}$ donc $F_3 \cap G_3 = \langle F'_3 \cup \{a, b\}\rangle \cap \langle G'_3 \cup \{a, d\}\rangle = \langle F'_3 \cup \{a\}\rangle \cap \langle G'_3 \cup \{a\}\rangle = \langle (F'_3 \cap G'_3) \cup \{a\}\rangle$. Or puisque $b \notin \kappa_a$ et $d \notin \kappa_a$ alors $\langle (F'_3 \cap G'_3) \cup \{a\}\rangle$ est une sous-face stricte de F_3 et G_3 ; ◇ si $a = c$ et $b = d$ alors puisque par hypothèse $[a, b]$ est en occlusion simple par rapport à $\alpha_3 \cup \beta_3$, $F_3 \cap G_3 = \langle (F'_3 \cap G'_3) \cup [a, b]\rangle$. Or $F'_3 \cap G'_3$ est soit vide, soit une sous-face stricte de F'_3 ou G'_3 donc $F_3 \cap G_3$ est une sous-face stricte de F_3 et G_3. Dans les trois cas, $F_3 \cap G_3$ est une sous-face stricte de F_3 et de G_3 et par conséquent $\overset{\circ}{F_3} \cap \overset{\circ}{G_3} = \emptyset$.
Suite page suivante...	

Suite de la vérification de cas	
$\overset{\circ}{F_3} \cap \overset{\circ}{G_4}$	Quitte à échanger les notations il y a trois cas à envisager : ◇ si $u = a$ et $v = b$ alors $[u, v]$ est une sous-face de F_3 et donc $\overset{\circ}{F_3} \cap \overset{\circ}{G_4} = \emptyset$; ◇ si $u = a$ et $v \neq b$, puisque $F_3 \subset \overline{\kappa_{u,b}}$ alors par hypothèse $v \notin F_3$. En écrivant que $F_3 = \langle F_3' \cup \{u, b\}\rangle = \langle\langle F_3' \cup \{b\}\rangle \cup \{u\}\rangle$, raisonnons par l'absurde et supposons que $]u, v[\cap F_3 \neq \emptyset$: puisque F_3 est la suspension de $\langle F_3' \cup \{b\}\rangle$ par rapport à u et que $v \notin F_3$, le segment $]u, v[$ intersecte alors $\langle F_3' \cup \{b\}\rangle$ en au moins un point. Par hypothèse, $\kappa_{u,v} \cap \kappa_b = \emptyset$ avec $\kappa_{u,v}$ et κ_b ouverts, donc on a aussi que $\kappa_{u,v} \cap \overline{\kappa_b} = \emptyset$, en outre $\langle F_3' \cup \{b\}\rangle \subset \overline{\kappa_b}$ car κ_b est étoilé par rapport à b. En résumé, en supposant que $]u, v[\cap F_3 \neq \emptyset$ on obtient quatre comparaisons ensemblistes contradictoires : $$]u, v[\subset \kappa_{u,v} \,;$$ $$\left\langle F_3' \cup \{b\}\right\rangle \subset \overline{\kappa_b} \,;$$ $$\kappa_{u,v} \cap \overline{\kappa_b} = \emptyset \,;$$ $$]u, v[\cap \left\langle F_3' \cup \{b\}\right\rangle \neq \emptyset \,.$$ Par conséquent, $]u, v[\cap F_3$ est nécessairement vide ; ◇ si $u \neq a$ et $v \neq b$ alors puisque $[u, v] \cap \overline{\kappa_{a,b}} = \emptyset$ (car $[u, v]$ est inclus dans l'ouvert $\kappa_{u,v}$ et $\kappa_{u,v} \cap \kappa_{a,b} = \emptyset$) et que $F_3 \subset \overline{\kappa_{a,b}}$ (car κ_a et κ_b étoilés par rapport respectivement à a et b) on obtient que $[u, v] \cap F_3 = \emptyset$. Dans les trois cas, on obtient bien que $\overset{\circ}{F_3} \cap \overset{\circ}{G_4} = \emptyset$.
$\overset{\circ}{F_4} \cap \overset{\circ}{G_4}$	Par définition d'un graphe, ses arêtes sont d'intérieurs disjoints donc $\overset{\circ}{F_4} \cap \overset{\circ}{G_4} = \emptyset$.

Par conséquent l'ensemble de polyèdres $\mathcal{S}(S, G, p)$ est un complexe $k+1$-dimensionnel, car ses sous-faces sont d'intérieurs disjoints deux à deux. □

On pourra voir sur la figure 4 un exemple de suspension par rapport à un graphe adapté. Dans ce qui suit, on va avoir besoin de suspendre un complexe qui forme la frontière d'un ouvert, de façon à remplir de polyèdres n-dimensionnel tout le volume de cet ouvert. La notion d'occlusion totale va permettre de caractériser une situation où le remplissage se fait automatiquement.

▷ **Définition 1.3.38** (Occlusion totale de complexes)

Soient S un complexe, $G = (T, A)$ un graphe linéaire ou réduit à un seul sommet et p un choix de suspension. On dira que G est en occlusion totale par rapport à S avec le choix p si p est surjectif et s'il existe un ouvert borné connexe O et une famille d'ouverts disjoints $(\kappa_x)_{x\in T}$ tels que :

(1) $\mathcal{U}(S) = \bigcup_{\delta\in S} \delta = \partial O$;

(2) $\forall x \in T,\ x \in \kappa_x$ *et* κ_x *est étoilé par rapport à* x ;

(3) $\forall x \in T,\ \mathcal{U}(p^{-1}(x)) \subset \overline{\kappa_x}$;

(4) $\overline{O} = \overline{\bigcup_{x\in T} \kappa_x}$;

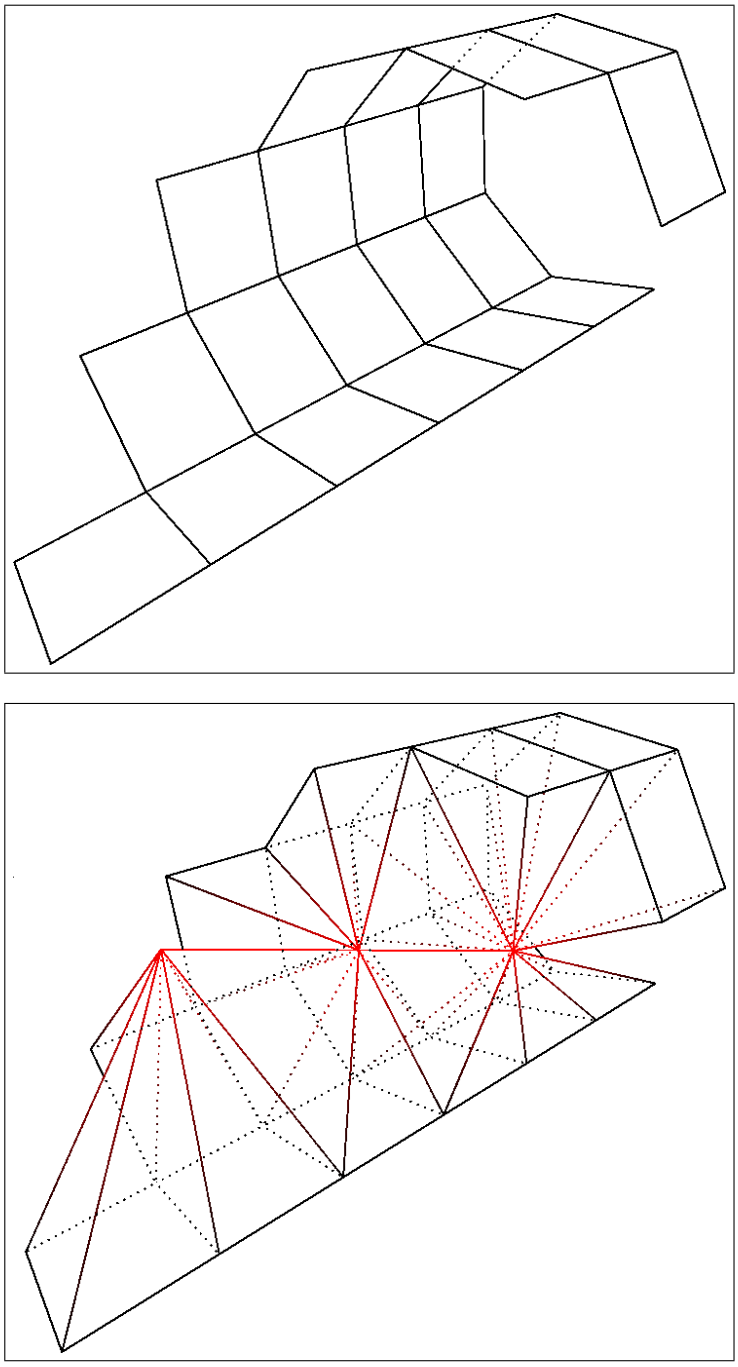


FIGURE 4 – En haut, le complexe à suspendre. En bas, sa suspension par rapport à un graphe adapté. On obtient alors bien un nouveau complexe.

(5) $\forall x, y \in T,\ \{x, y\} \notin A \Rightarrow \overline{\kappa_x} \cap \overline{\kappa_y} = \emptyset$.

Le lemme suivant justifie qu'en situation d'occlusion totale, la suspension va remplir tout l'espace vide à l'intérieur de l'ouvert O.

▷ **Lemme 1.3.39** (Suspension de complexe en occlusion totale adaptée)

Si le graphe G est en occlusion totale par rapport au complexe S avec le choix p, et si p est un choix adapté à la suspension (on parlera alors de situation d'occlusion totale adaptée) alors $\mathcal{S}(S, G, p)$ est un complexe S' qui vérifie :

$$\overline{O} \subset \mathcal{U}(S') \ .$$

Si S vérifie les hypothèses du lemme 1.3.37 avec les mêmes ouverts κ_x (qui, rappelons-le, établissent une condition nécessaire pour un choix adapté) l'inclusion inverse est elle aussi vérifiée :*

* page 43

$$\overline{O} = \mathcal{U}(S') \ .$$

Démonstration

D'abord on sait déjà que S' est un complexe, si de plus G est réduit à un seul sommet, le lemme est évident. Supposons donc à présent que ce n'est pas le cas.

Rappelons qu'un graphe linéaire est tel que chaque sommet a un ou deux voisins distincts. Par conséquent dans le second cas si x est un sommet de G avec y et z ses deux voisins, puisque les $(\kappa_u)_{u\in T}$ sont disjoints deux à deux alors $\partial\kappa_x = (\partial O \cap \overline{\kappa_x} \setminus (\overline{\kappa_y} \cup \overline{\kappa_z})) \cup (\partial\kappa_y \cap \overline{\kappa_x}) \cup (\partial\kappa_z \cap \overline{\kappa_x})$. De plus par hypothèse on a aussi que $\overline{\kappa_y} \cap \overline{\kappa_z} = \emptyset$ car y et z ne peuvent être voisins (sinon (y, x, z, y) formerait un 3-cycle) donc $\partial\kappa_y \cap \partial\kappa_z = \emptyset$. Cette union est par conséquent une union d'ensembles disjoints deux à deux :

$$\partial\kappa_x = (\partial O \cap \overline{\kappa_x} \setminus (\overline{\kappa_y} \cup \overline{\kappa_z})) \sqcup (\partial\kappa_y \cap \overline{\kappa_x}) \sqcup (\partial\kappa_z \cap \overline{\kappa_x}) \ .$$

De même si x a un seul voisin y alors :

$$\partial\kappa_x = (\partial O \cap \overline{\kappa_x} \setminus \overline{\kappa_y}) \sqcup (\partial\kappa_y \cap \overline{\kappa_x}) \ .$$

À présent, prenons $a \in \mathcal{O}$: on peut alors trouver $x \in T$ tel que $a \in \overline{\kappa_x}$ (en effet, $O \subset \overline{\bigcup_{x\in T} \kappa_x}$). Il nous faut considérer l'ordre du sommet x : supposons d'abord que $\mathcal{O}(x) = 2$ et notons y et z ses deux voisins distincts.

Si $x = a$ alors puisque p est surjectif on peut trouver $\delta \in S$ tel que $p(\delta) = x$, de plus par définition $\langle \delta \cup \{x\}\rangle \in \mathcal{S}(S, G, p)$ car la restriction de G à $\{x\}$ forme un sous-graphe complet donc $a \in \mathcal{U}(S')$.

Si $x \neq a$ alors puisque $x, a \in \overline{\kappa_x}$ et que κ_x est un ouvert borné, on peut donc trouver $b \in \partial\kappa_x$ tel que $a \in [b, x[$. Et puisque κ_x est étoilé par rapport à x alors on a aussi que $]b, x] \subset \kappa_x$. Il nous faut considérer trois cas possibles :

- ◇ si $b \in \partial O \cap \overline{\kappa_x} \setminus (\overline{\kappa_y} \cup \overline{\kappa_z})$ alors puisque $\mathcal{U}(S) = \partial O$ on peut trouver $\delta \in S$ tel que $b \in \delta$. Remarquons aussi que puisque $b \notin \overline{\kappa_y} \cup \overline{\kappa_z}$ alors nécessairement $p(\delta) = x$ (en effet si $p(\delta) = y$ par exemple alors par hypothèse on aurait que $\delta \subset \overline{\kappa_y}$ ce qui est impossible car $b \in \delta$). Donc $\langle \delta \cup \{x\}\rangle \in \mathcal{S}(S, G, p)$, or $[b, x] \subset \langle \delta \cup \{x\}\rangle$ par conséquent $a \in \langle \delta \cup \{x\}\rangle \in S'$;

◇ si $b \in \partial\kappa_y \cap \overline{\kappa_x}$ alors notons c l'intersection de la demi-droite d'origine x et de direction $\overrightarrow{yx}$ avec $\partial\kappa_x$. Cette intersection existe car κ_x est un ouvert borné et
page 42*
$x \in \kappa_x$, et est unique d'après la propriété 1.3.35* car κ_x est étoilé par rapport à x. Puisque κ_y est étoilé par rapport à y alors nécessairement $c \notin \partial\kappa_y$ (sinon on devrait avoir $]c, x[\subset \kappa_y$, ce qui n'est pas le cas car $]c, x[\subset \kappa_x$).
À présent si on note H un 2-plan affine contenant les trois points x, y et a, puisque $c \in H$ il vient :

$$H \cap \partial\kappa_x \neq H \cap \partial\kappa_y \cap \overline{\kappa_x} \ .$$

Or on a vu précédemment que :

$$\partial\kappa_x = (\partial O \cap \overline{\kappa_x} \setminus (\overline{\kappa_y} \cup \overline{\kappa_z})) \sqcup (\partial\kappa_y \cap \overline{\kappa_x}) \sqcup (\partial\kappa_z \cap \overline{\kappa_x}) \ .$$

Si l'on fait l'intersection des membres de cette égalité avec le 2-plan H, on obtient :

$$H \cap \partial\kappa_x = O' \sqcup F_1 \sqcup F_2$$

avec

$$O' = H \cap \partial O \cap \overline{\kappa_x} \setminus (\overline{\kappa_y} \cup \overline{\kappa_z}) \qquad F_1 = H \cap \partial\kappa_y \cap \overline{\kappa_x} \qquad F_2 = H \cap \partial\kappa_z \cap \overline{\kappa_x} \ .$$

En résumé, en se plaçant dans H on a montré que le fermé $H \cap \partial\kappa_x$ était l'union de O' et de deux fermés disjoints non vides F_1 et F_2, avec $F_1 \neq H \cap \partial\kappa_x$. Il est facile de constater en plus que $H \cap \partial\kappa_x$ est connexe, puisque c'est la frontière de l'ouvert $H \cap \kappa_x$ de H, qui est borné et étoilé par rapport à x. Par conséquent l'intersection de $\overline{O'}$ et de F_1 n'est pas vide, en d'autres termes :

$$D = H \cap \partial\kappa_x \cap \partial O \cap \partial\kappa_y \neq \emptyset \ .$$

Notons d un élément de D, et démontrons à présent qu'il est possible de trouver une face F de S telle que $d \in F$ et $F \subset \overline{\kappa_x} \cap \overline{\kappa_y}$.
Soient S_x et S_y les sous-complexes de S formés des polyèdres respectivement inclus dans $\overline{\kappa_x}$ et $\overline{\kappa_y}$:

$$S_x = \{\delta \in S : \delta \subset \overline{\kappa_x}\} \qquad S_y = \{\delta \in S : \delta \subset \overline{\kappa_y}\} \ .$$

Puisque par hypothèse $\partial O = \mathcal{U}(S)$ alors il vient :

$$\partial O \cap \overline{\kappa_x} \cap \overline{\kappa_y} = \bigcup_{\delta \in S_x, \delta' \in S_y} \delta \cap \delta' \ .$$

En outre, $S_x \cap S_y = \emptyset$ donc par définition d'un complexe, $\delta \cap \delta'$ est soit vide, soit une sous-face commune de δ et δ'. On remarque aussi que S_x et S_y ne sont pas vides, car ils contiennent chacun au moins un polyèdre qui contient d (puisque $d \in \partial O \cap \overline{\kappa_x} \cap \overline{\kappa_y}$).
Considérons par ailleurs pour $\epsilon > 0$, la boule ouverte B_ϵ de centre d et de rayon ϵ, et notons :

$$U_\epsilon = B_\epsilon \cap \partial O \ .$$

Par hypothèse $\overline{O} = \bigcup_t \overline{\kappa_t}$ donc $\partial O \subset \bigcup_t \overline{\kappa_t}$, en outre d n'appartient à aucun des fermés $\overline{\kappa_t}$ pour $t \notin \{x, y\}$, donc il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$:

$$U_\epsilon \subset \overline{\kappa_x} \cup \overline{\kappa_y} \ .$$

À présent considérons deux cas possibles :

⋆ si d n'est sommet d'aucun polyèdre de S alors il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que U_ϵ ne contient aucun sommet des polyèdres de S pour $\epsilon \leq \epsilon_1$. Dans ce cas, puisque d ne peut être que sur la frontière de tout polyèdre qui le contient (car il est dans $\overline{\kappa_x} \cap \overline{\kappa_y}$), U_ϵ est donc l'intersection de B_ϵ et de l'union d'une famille finie $H_1^+, \ldots, H_m^+$ de demi-hyperplans affines contenant d :

$$U_\epsilon = B_\epsilon \cap \bigcup_i H_i^+ \ .$$

Chacun des $H_i^+ \cap B_\epsilon$ est un morceau d'un polyèdre $n-1$-dimensionnel δ_i inclus dans $\overline{\kappa_x}$ ou $\overline{\kappa_y}$, et il est clair que pour tout i, $\partial\kappa_x \cap \partial\kappa_y \cap \partial O$ contient $H_i \cap B_\epsilon$ qui contient lui-même d, H_i désignant ici la frontière du demi-hyperplan H_i^+ prise relativement à l'hyperplan en entier. Si on considère par exemple le sous-espace affine H_1 (de dimension $n-2$), $F = \delta_1 \cap H_1$ est une face de δ_1, et puisque S est un complexe alors F est dans $\partial\kappa_x \cap \partial\kappa_y \cap \partial O$ (puisqu'on vient de voir qu'une boule $n-2$ dimensionnelle incluse dans F y est déjà, si la face entière n'y était pas cela impliquerait qu'un sommet d'un autre polyèdre de S serait dans F privé de ses propres sommets, ce qui contredirait le fait que S est un complexe) ;

⋆ si d est sommet d'un polyèdre de S alors il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que U_ϵ ne contient aucun autre sommet de S pour $\epsilon \leq \epsilon_2$. Par un raisonnement analogue sur un point $e \in \partial\kappa_x \cap \partial\kappa_y \cap \partial O \cap B_\epsilon$ distinct de d, il est possible de trouver une face incluse dans $\partial\kappa_x \cap \partial\kappa_y \cap \partial O$ qui contient d et e.

Dans les deux cas, on a donc trouvé une face F telle que :

$$d \in F \subset \overline{\kappa_x} \cap \overline{\kappa_y} \cap \partial O \ .$$

Il nous reste à vérifier que le polyèdre $\langle \{x, y\} \cup F \rangle$ est de dimension n : en effet puisque κ_x et κ_y sont respectivement étoilés par rapport à x et y, et $F \subset \overline{\kappa_x} \cap \overline{\kappa_y}$ alors le sous-espace affine minimal H' de dimension $n-2$ contenant F ne contient pas x et y, et sa direction n'est pas parallèle à celle de la droite (x, y), donc $\langle \{x\}, F \rangle$ est de dimension $n-1$ et le sous-espace affine minimal le contenant ne contient pas y. Puisque la restriction du graphe G à $\{x, y\}$ forme un sous-graphe complet (car x et y sont voisins), par définition de la suspension d'un complexe on trouve :

$$\langle \{x, y\} \cup (\delta_1 \cap \delta_2) \rangle \in \mathcal{S}(S, G, p)$$

avec, par construction, $a \in \langle x, y, d \rangle \subset \langle \{x, y\} \cup (\delta_1 \cap \delta_2) \rangle$, c'est à dire que $a \in \mathcal{U}(S')$.

◇ si $b \in \partial\kappa_z \cap \overline{\kappa_x}$ alors il suffit de refaire le raisonnement précédant en permutant y et z.

Si $\mathcal{O}(x) = 1$ alors en notant y le voisin de x il est possible de refaire un raisonnement semblable en remplaçant κ_z par $\emptyset$.

En conclusion, dans tous les cas on a bien démontré que $a \in \mathcal{U}(S')$, c'est à dire que $\overline{O} \subset \mathcal{U}(S')$. L'inclusion inverse est vérifiée si par exemple les hypothèses du lemme lemme 1.3.37* sont vérifiées, puisque dans ce cas il est clair tous les nouveaux polyèdres créés lors de la suspension restent inclus dans $\bigcup_{x \in T} \kappa_x$: *page 43

◇ les polyèdres de première espèce obtenus par suspension par rapport à un point x sont inclus dans κ_x ;

◇ ceux de seconde espèce obtenus par suspension par rapport à deux points voisins x et y sont inclus dans $\kappa_x \cup \kappa_y$.

□

À présent donnons une définition pour décrire la situation où un complexe combine les hypothèses des lemmes 1.3.37 et 1.3.39 par rapport à un ouvert en forme de «tube» placé autour d'un graphe linéaire, au prix d'un découpage par des hyperplans pouvant être placés à ϵ près.

▷ **Définition 1.3.40** (Complexe ϵ-tubulaire)

On se place dans $\mathbb{R}^n$ (pour $n \geq 2$). Soient :
- ◇ *S un complexe $n-1$-dimensionnel ;*
- ◇ *$G = (T, A)$ un graphe linéaire ou réduit à un seul sommet ;*
- ◇ *O un ouvert tel que $\partial O = \mathcal{U}(S)$ et $T \subset O$.*

Pour x et y deux sommets voisins du graphe et $r \in \left]-\frac{\mathbf{d}(x,y)}{2}, \frac{\mathbf{d}(x,y)}{2}\right[$ notons $H(x,y,r)$ l'hyperplan affine perpendiculaire à et passant par le segment $[x,y]$ à distance $r+\frac{\mathbf{d}(x,y)}{2}$ de x, et $H^+(x,y,r)$ le demi-plan affine de frontière $H(x,y,r)$ qui contient x, $H^-(x,y,r)$ l'autre demi-plan associé. Soit f une application anticommutative (c'est à dire telle que $f(x,y) = -f(y,x)$) de T^2 dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall \{x,y\} \in A$, $-\frac{\mathbf{d}(x,y)}{2} < f(x,y) < \frac{\mathbf{d}(x,y)}{2}$ et x un sommet de G.
- ◇ *si $\mathcal{O}(x) = 1$ alors notons y son voisin, et $\kappa_x(f)$ l'adhérence de la composante connexe de $H^+(x,y,f(x,y)) \cap O$ qui contient x ;*
- ◇ *si $\mathcal{O}(x) = 2$ alors notons y et z ses deux voisins distincts, et $\kappa_x(f)$ l'adhérence de la composante connexe de $H^+(x,y,f(x,y)) \cap H^+(x,z,f(x,z)) \cap O$ qui contient x.*

On définit alors l'ensemble de polyèdres $n-1$-dimensionnels $S(f)$ par :

$$\delta \in S(f) \Longleftrightarrow \dim_{\mathcal{H}}(\delta) = n-1 \quad et \quad \exists \delta' \in S, \exists x \in T : \ \delta = \delta' \cap \kappa_x(f) \ .$$

On dira que S est ϵ-tubulaire par rapport à G et O s'il existe $\epsilon > 0$ et deux applications f et $g \colon T^2 \to \mathbb{R}$ anticommutatives et vérifiant, pour toute application anticommutative h telle que $\min(f,g) \leq h \leq \max(f,g)$:

(1) *$\forall \{x,y\} \in A$, $(f(x,y), g(x,y)) \in \left]-\frac{\mathbf{d}(x,y)}{2}, \frac{\mathbf{d}(x,y)}{2}\right[^2$ et $|f(x,y) - g(x,y)| > \epsilon$;*

(2) *$S(h)$ est un complexe ;*

page 43* (3) *G, O et $S(h)$ vérifient les hypothèses des lemmes 1.3.37* et 1.3.39 en utilisant $\kappa_x = \kappa_x(h)$ et le choix p de suspension défini par $p(\delta) = x \Leftrightarrow \delta \subset \kappa_x$.*

Le lemme suivant permet, lorsque le graphe et l'ouvert sont fixés, de déterminer des constantes universelles bornant les régularités extrêmes de la suspension d'un complexe ϵ-tubulaire.

▷ **Lemme 1.3.41** (Régularités extrêmes d'une suspension tubulaire)

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\partial O) < \infty$ et ∂O admet un hyper-
page 95* *plan tangent $\mathcal{H}^{n-1}$-presque partout (voir la définition 3.1.3* de la mesure de Hausdorff), $G = (T, A)$ un graphe tel que $T \subset O$ et f et g deux applications anticommutatives de T^2 dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in T^2$: $(f(x,y), g(x,y)) \in$

$\left]-\frac{\mathbf{d}(x,y)}{2},\frac{\mathbf{d}(x,y)}{2}\right[^2$. *Notons alors* ∂^* *le sous-ensemble de* ∂O *où* ∂O *admet un hyperplan tangent et notons* $\overrightarrow{n}(z)$ *un vecteur unitaire normal à cet hyperplan lorsque* $z \in \partial^*$. *Notons encore* $\mathfrak{F}$ *l'ensemble des applications anticommutatives comprises entre* f *et* g :

$$\mathfrak{F} = \{h\colon T^2 \to \mathbb{R} :\ h \text{ anticommutative et } \min(f,g) \leq h \leq \max(f,g)\}\ .$$

Soient $\rho_+ > \rho_- > 0$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que* $|f-g| > \epsilon$ *et*

$$\forall \{x,y\} \in A :\ (f(x,y),g(x,y)) \in \left]-\tfrac{\mathbf{d}(x,y)}{2}+\rho_+, \tfrac{\mathbf{d}(x,y)}{2}-\rho_+\right[^2\ .$$

Il existe alors trois constantes c_1, c_2 *et* c_3 *strictement positives ne dépendant que de :*

- $\diamond$ n, $\frac{\rho_+}{\rho_-}$ *et* $\frac{\epsilon}{\rho_+}$;
- $\diamond$ $\alpha_- = \dfrac{\min\limits_{\{x,y\}\in A} \mathbf{d}(x,y)}{\rho_+}$ *et* $\alpha_+ = \dfrac{\max\limits_{\{x,y\}\in A} \mathbf{d}(x,y)}{\rho_+}$;
- $\diamond$ $\beta_- = \dfrac{\inf\limits_{h\in\mathfrak{F},\{x,y\}\in A, z\in[x,y]} \mathbf{d}(z,(\kappa_x(h)\cup\kappa_y(h))\cap\partial O)}{\rho_+}$;
- $\diamond$ $\beta_+ = \dfrac{\sup\limits_{h\in\mathfrak{F},\{x,y\}\in A, z\in[x,y]} \mathbf{d}(z,(\kappa_x(h)\cup\kappa_y(h))\cap\partial O)}{\rho_+}$;
- $\diamond$ $\gamma = \dfrac{\sup\limits_{h\in\mathfrak{F},x\in T} \mathcal{H}^{n-1}(\partial O\cap\kappa_x(h))}{\rho_-^{n-1}}$;
- $\diamond$ $\eta = \inf\limits_{h\in\mathfrak{F},\{x,y\}\in A, z\in[x,y], t\in\partial^*\cap(\kappa_x(h)\cup\kappa_y(h))} \dfrac{|<\overrightarrow{n}(t), t-z>|}{\|t-z\|}$;

et telles que pour tout complexe $n-1$*-dimensionnel* S *vérifiant :*

- $\diamond$ $\partial O = \mathcal{U}(S)$;
- $\diamond$ $\overline{\mathcal{R}}(S) < \rho_+$;
- $\diamond$ $\underline{\mathcal{R}}(S) > \rho_-$;
- $\diamond$ S *est* ϵ*-tubulaire par rapport à* G *et* O *avec les bornes* f *et* g ;

alors on peut trouver une application $h \in \mathfrak{F}$ *telle que :*

(1) $S' = \mathcal{S}(S(h),G,p)$ *est un complexe* n*-dimensionnel ;*

(2) $\mathcal{U}(S') = \overline{O}$;

(3) $\overline{\mathcal{R}}(S') \leq c_1\overline{\mathcal{R}}(S)$; $\mathcal{R}(S') \geq c_2\mathcal{R}(S)$ *et* $\underline{\mathcal{R}}(S') \geq c_3\underline{\mathcal{R}}(S)$.

DÉMONSTRATION

Commençons par nous placer dans $\mathbb{R}^k$ $(1 \leq k < n)$ et considérons une boule unitaire fermée B de centre $c \in \mathbb{R}^k$. Soient x et y deux points de sa frontière et notons θ l'angle non orienté (c'est à dire pris modulo $\frac{\pi}{2}$) formé par les deux droites (c,x) et (c,y) (lorsque $k=1$, on prendra $\theta = 0$ par convention). Soit A le demi-espace affine de frontière orthogonale à la droite (c,y) et qui contient x. Lorsque $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ il existe une boule fermée de rayon non nul, centrée en un point du segment $[x,c]$ et incluse dans $B\cap A$. On définit alors l'application ψ_k comme le rayon maximal d'une telle boule en fonction de l'angle θ :

$$\psi_k : \left\{ \begin{array}{ccl} \left[0,\frac{\pi}{4}\right[& \to &]0,1] \\ \theta & \mapsto & \psi_k(\theta) = \max\{r :\ z\in[c,x] \text{ et } B(z,r)\subset B\cap A\}\ . \end{array}\right.$$

On vérifiera que ψ_k est une fonction décroissante à valeurs strictement positives sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. Posons maintenant :

$$\psi = \min_{1 \leq k < n} \psi_k \ .$$

Comme chacune des ψ_k, ψ est une fonction décroissante à valeurs strictement positives sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Soient ensuite S un complexe vérifiant les hypothèses du lemme, et $\delta \in \mathcal{F}_k(S)$ une sous-face de dimension k d'un polyèdre de S :

- ◇ si $k = 1$ alors $\#\mathcal{F}_{k-1}(\delta) = 2$;
- ◇ si $k > 1$, par hypothèse δ est contenu dans une boule de centre c_δ et de rayon au plus ρ_+. Notons respectivement U_k et V_k la surface de la sphère unité et le volume de la boule unité en dimension k. En rappelant que δ est convexe et contenu dans une boule de rayon ρ_+ centrée sur δ il vient que

$$\mathcal{H}^{k-1}(\partial\delta) \leq U_k \rho_+^{k-1}.$$

puisque l'on a vu que les faces de δ sont disjointes et forment sa frontière, on a que :

$$\mathcal{H}^{k-1}(\partial\delta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_{k-1}(\delta)} \mathcal{H}^{k-1}(\alpha) \ .$$

Puisque toutes les faces de δ contiennent une boule $k-1$-dimensionnelle de rayon au moins ρ_- on obtient aussi :

$$\#\mathcal{F}_{k-1}(\delta) V_{k-1} \rho_-^{k-1} \leq \mathcal{H}^{k-1}(\partial\delta) \ .$$

Par conséquent il vient :

$$\#\mathcal{F}_{k-1}(\delta) \leq \frac{U_k}{V_{k-1}} \left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)^{k-1} \ .$$

Dans tous les cas, on peut donc trouver M ne dépendant que de n et $\frac{\rho_+}{\rho_-}$ tel que pour tout sous-complexe $S' \subset S$, $\#\mathcal{F}_k(S') \leq M \#\mathcal{F}_{n-1}(S')$.

Soient maintenant $x \in T$, y l'un de ses deux voisins et posons $u = \min(f(x,y), g(x,y))$ et $v = \max(f(x,y), g(x,y))$: par hypothèse, $v > u + \epsilon$. Considérons le sous-complexe $S_k(x,y)$ des sous-faces de dimension k de S non parallèles à et dont l'intérieur intersecte l'hyperplan affine $H(x,y,w)$ pour $w \in]u,v[$:

$$S_k(x,y) = \{\delta \in \mathcal{F}_k(S) : \ \exists w \in]u,v[, \ \overset{\circ}{\delta} \cap H(x,y,w) \neq \emptyset \text{ et } \delta \not\subset H(x,y,w)\} \ .$$

Puisque tous les polyèdres de S sont inclus dans une boule de rayon $\overline{\mathcal{R}}(S) < \rho_+$ et que $u > -\frac{\mathbf{d}(x,y)}{2} + \rho_+$ et $v < \frac{\mathbf{d}(x,y)}{2} - \rho_+$ alors d'abord les $S_k(x,y)$ pour $\{x,y\} \in A$ sont disjoints deux à deux et les polyèdres de $S_k(x,y)$ sont tous inclus dans $\bigcup_{u-\rho_+ \leq w \leq v+\rho_+} \partial O \cap H(x,y,w)$ donc aussi dans $(\kappa_x(f) \cup \kappa_x(g)) \cap \partial O$. En particulier lorsque $k = n-1$ on obtient par hypothèse :

$$\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{U}(S_{n-1}(x,y))) \leq \mathcal{H}^{n-1}((\kappa_x(f) \cup \kappa_x(g)) \cap \partial O) \leq 2\gamma\rho_-^{n-1} \ .$$

De plus on remarque que $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{U}(S_{n-1}(x,y))) \geq V_{n-1} \#S_{n-1}(x,y) \rho_-^{n-1}$, car tous les polyèdres de S sont d'intérieurs disjoints deux à deux et contiennent une boule $n-1$-dimensionnelle de rayon au moins $\underline{\mathcal{R}}(S) > \rho_-$. Par conséquent $\#S_{n-1}(x,y) \leq \frac{2\gamma}{V_{n-1}} = N_{n-1}$. En utilisant ce qu'on a vu précédemment, on montre l'existence d'une

constante $N = nN_{n-1}M$ ne dépendant que de γ, n et $\frac{\rho_+}{\rho_-}$ telle que pour tous sommets x et y voisins :

$$\sum_{k<n} \#S_k(x,y) \leq N \ .$$

Soit maintenant δ un polyèdre de $S_k(x,y)$, Δ le plus petit sous-espace affine qui le contient et B une boule $k-1$-dimensionnelle fermée de Δ centrée en c, de rayon $\underline{\mathcal{R}}(\delta)$ et contenue dans δ (par hypothèse, $\underline{\mathcal{R}}(\delta) > \rho_-$). À présent notons :

$$\begin{aligned} u' &= \inf\{w \in]u-\rho_+, v+\rho_+[:\ H(x,y,w) \cap \overset{\circ}{\delta} \neq \emptyset\} \\ v' &= \sup\{w \in]u-\rho_+, v+\rho_+[:\ H(x,y,w) \cap \overset{\circ}{\delta} \neq \emptyset\} \\ \delta^+(w) &= H^+(x,y,w) \cap \delta \\ \delta^-(w) &= H^-(x,y,w) \cap \delta \\ S(\delta,w) &= \{\delta^+(w), \delta^-(w)\} \ . \end{aligned}$$

Par construction $H(x,y,u') \cap \overset{\circ}{B} = H(x,y,v') \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$ car $B \subset \delta$, $\delta^+(w)$ et $\delta^-(w)$ sont deux polyèdres $n-1$-dimensionnels non vides pour $u' < w < v'$ et $S(\delta,w)$ est un complexe $n-1$-dimensionnel. De plus il existe $w_0 \in]u', v'[$ tel que $c \in H(x,y,w_0)$.

Plaçons-nous à présent dans le sous-espace affine Δ et considérons, pour $w \in [u-\rho_+, v+\rho_+]$, son sous-espace affine $H'(x,y,w) = H(x,y,w) \cap \Delta$: par construction H' est un hyperplan affine de Δ. Soient alors $x' \in \delta \cap H(x,y,u')$ et $y' \in \delta \cap H(x,y,v')$: on peut considérer les angles non orientés (modulo $\frac{\pi}{4}$) θ^+ et θ^- formés respectivement par les deux droites (c,x') et (c,y') avec la droite $H'^{\perp}$ (voir figure 5). On remarquera que puisque $\mathbf{d}(c,x') < 2\rho_+$ et $x' \in H'(x,y,u')$ avec $\mathbf{d}(H^+(x,y,u'),c) > \rho_-$ alors $\cos\theta^+ > \frac{\rho_-}{2\rho_+}$, donc il existe une constante $\theta_{\max} < \frac{\pi}{2}$ ne dépendant que de $\frac{\rho_-}{\rho_+}$ telle que $\theta^+ \in [0, \theta_{\max}]$, de même $\theta^- \in [0, \theta_{\max}]$ pour tout couple (x,y) de sommets voisins du graphe.

Envisageons les deux cas possibles :

- ◇ si $k = n-1$ alors dans ce cas ∂O admet un hyperplan tangent sur $\overset{\circ}{\delta}$: Δ lui-même ; par conséquent puisque $| < [x,y] >, \overrightarrow{n}(c)| > \eta$ il vient $v' - u' \geq \rho_-(1-\eta)$; il ne coûte rien de supposer que $\epsilon < 2N\rho_-(1-\eta)$, donc on a bien que $v' - u' > \frac{\epsilon}{2N}$;
- ◇ si $k < n-1$ alors notons I l'union des intervalles $[u', v']$ (lorsque δ parcourt les $S_k(x,y)$ pour $k < n-1$) tels que $v' - u' < \frac{\epsilon}{2N}$:

$$I = \bigcup_{k<n-1, \delta \in S_k(x,y), v'-u' < \frac{\epsilon}{2N}} [u', v'] \ .$$

Puisque $\sum_{k<n-1} \#S_k(x,y) < N$ alors il vient immédiatement :

$$\mathcal{H}^1(I) \leq \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Notons $B' = \mathcal{S}(B,x') \cup \mathcal{S}(B,y')$, alors $B' \subset \delta$ car δ est convexe. Si on pose de plus $B^+(w) = B' \cap H^+(x,y,w)$ et $B^-(w) = B' \cap H^-(x,y,w)$ alors pour tout $w \in]u', v'[$ on a que $B^+(w) \subset \delta^+(w)$ et $B^-(w) \subset \delta^-(w)$. Par construction lorsque $w \in]u', w_0] \setminus I$, $B^+(w)$ contient une boule $n-1$-dimensionnelle de rayon $\frac{w-u'}{w_0-u'}\psi(\theta)\underline{\mathcal{R}}(\delta) \geq \frac{w-u'}{w_0-u'}\psi(\theta_{\max})\underline{\mathcal{R}}(\delta)$ et de la même façon lorsque $w \in [w_0, v'[\setminus I$ alors $B^-(w)$ contient une boule $n-1$-dimensionnelle de rayon au moins $\frac{w-v'}{w_0-v'}\psi(\theta_{\max})\underline{\mathcal{R}}(\delta)$. Réciproquement, $B^+(w)$ et $B^-(w)$ contiennent une boule de rayon au moins $\psi(\theta_{\max})\underline{\mathcal{R}}(\delta)$ lorsque respectivement $w \in]w_0, v'[\setminus I$ et $w \in]u', w_0[\setminus I$.

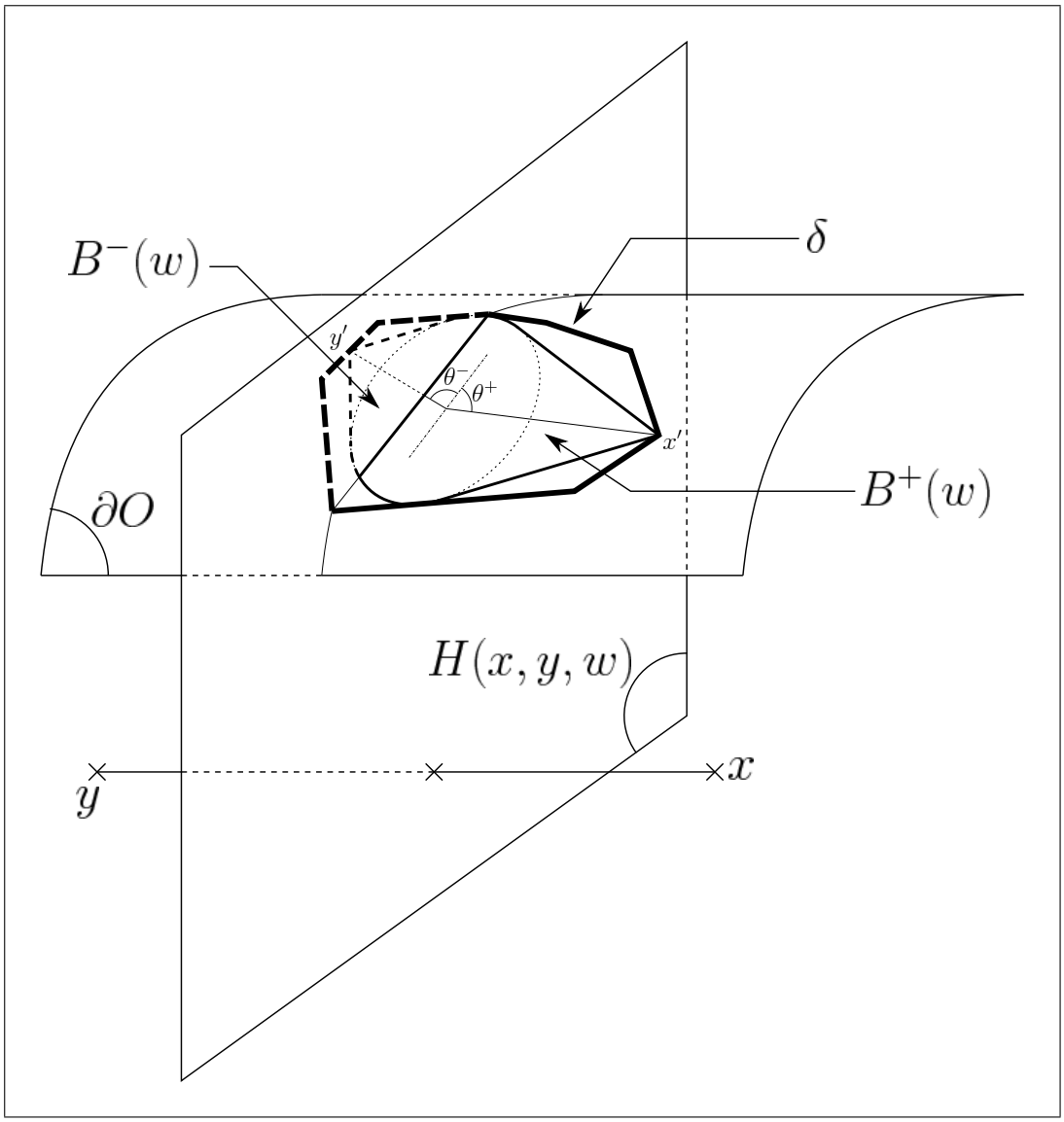


FIGURE 5 – Découpage d'un polyèdre δ avec $k = 2$ et $n = 3$ par le plan $H(x, y, w)$.

Supposons à présent que δ est tel que $v'-u' > \frac{\epsilon}{2N}$ ou $k = n-1$. On dispose des bornes uniformes suivantes :

$$\begin{aligned} v'-u' &\in \left[\tfrac{\epsilon(1-\eta)}{N}, 2\rho_+(1-\eta)\right] \\ w_0-u' &\in \left[\tfrac{\epsilon(1-\eta)}{2N}, \rho_+(1-\eta)\right] \\ v'-w_0 &\in \left[\tfrac{\epsilon(1-\eta)}{2N}, \rho_+(1-\eta)\right] . \end{aligned}$$

Posons alors, pour $w \in [u,v]$:

$$\psi_\delta(w) = \begin{cases} 1 \text{ si } w \leq u' \\ \dfrac{\epsilon}{4N\rho_+^2}\psi(\theta_{\max})\min(|w-u'|,|w-v'|) \text{ si } w \in]u',v'[\\ 1 \text{ si } w \geq v' . \end{cases}$$

On a que pour $w \in]u',v'[$, $\underline{\mathcal{R}}(S(\delta,w)) \geq \psi_\delta(w)\underline{R}(\delta)$. Si on appelle $S(x,y,w)$ le complexe obtenu à partir du découpage de $S_{n-1}(x,y)$ par l'hyperplan $H(x,y,w)$ alors pour tout $w \in [u,v] \setminus I$, puisque par construction seuls les polyèdres de dimension $k < n-1$ tels que $v'-u' > \frac{\epsilon}{2N}$ sont découpés :

$$\underline{\mathcal{R}}(S(x,y,w)) \geq \min_{0<k<n, \delta \in S_k(x,y)} \psi_\delta(w)\underline{R}(\delta) \geq \min_{0<k<n, \delta \in S_k(x,y)} \psi_\delta(w)\underline{\mathcal{R}}(S) .$$

Si l'on pose, pour $a,w \in \mathbb{R}$ et $b > 0$

$$\phi_{a,b}(w) = \begin{cases} 1 \text{ si } w \leq a \\ w-a \text{ si } w \in \left]a, \dfrac{a+b}{2}\right] \\ \\ b-w \text{ si } w \in \left]\dfrac{a+b}{2}, b\right[\\ 1 \text{ si } w \geq b \end{cases}$$

alors $\psi_\delta = \frac{\epsilon}{4N\rho_+^2}\phi_{\frac{u'}{v'-u'}, v'-u'}$. Considérons maintenant pour $\sigma > 0$ la quantité :

$$C(\sigma) = \inf_{\substack{(a_1,\ldots,a_N)\in\mathbb{R}^N \\ (b_1,\ldots,b_N)\in[\sigma,+\infty[) \\ J\subset\mathbb{R}, \mathcal{H}^1(J)\leq\sigma}} \sup_{w\in[-\alpha_-\rho_+,\alpha_-\rho_+]\setminus J} \min(\phi_{a_1,b_1}(w),\ldots,\phi_{a_N,b_N}(w)) .$$

En remarquant que pour tout $r > 0$ suffisamment petit et $b > \sigma$, a quelconque, $\mathcal{H}^1(\{w \in [-\sigma,\sigma] : \phi_{a,b}(w) \leq r\}) \leq 2r$ on montre facilement que si $\sigma < 2\alpha_-\rho_+$ alors il existe une constante $C' > 0$ ne dépendant que de α_- et $\frac{\rho_+}{\sigma}$ telle que :

$$C(\sigma) \geq C'\sigma .$$

En prenant $\sigma = \frac{\epsilon}{2}$ il vient que $v-u \geq \sigma$ et par conséquent

$$\sup_{w\in[u,v]} \underline{\mathcal{R}}(S(x,y,w)) \geq \frac{\epsilon^2 C'}{4N\rho_+^2}\underline{\mathcal{R}}(S(x,y)) .$$

On a donc enfin démontré qu'il était possible de trouver $A > 0$ ne dépendant que des constantes uniformes données et $w \in [u',v']$ tel que :

$$\underline{\mathcal{R}}(S(x,y,w)) \geq A\underline{\mathcal{R}}(S(x,y)) .$$

En posant $h(x,y) = w$ et en recommençant avec tous les couples de voisins du réseau, il est donc possible de trouver h anticommutative telle que $\min(f,g) \leq h \leq \max(f,g)$ et $\underline{\mathcal{R}}(S(h)) \geq A\underline{\mathcal{R}}(S)$. Par ailleurs remarquons que par construction $\overline{\mathcal{R}}(S(h)) \leq A\overline{\mathcal{R}}(S)$ et donc qu'il existe $C > 0$ vérifiant $\mathcal{R}(S(h)) \geq C\mathcal{R}(S)$ (par exemple $C = \frac{1}{A}$).

D'après les hypothèses du corollaire, puisque les hypothèses des lemmes 1.3.37* et 1.3.39* sont vérifiées pour $S(h)$, $S' = \mathcal{S}(S(h), G, p)$ est automatiquement un complexe tel que $\mathcal{U}(S') \supset \overline{O}$. Or en constatant que $\mathcal{U}(S') = \bigcup_{x \in T} \kappa_x(h)$ il vient l'inclusion inverse, et donc $\mathcal{U}(S') = \overline{O}$.

p. 43 et 51*

Il nous reste encore à établir des relations uniformes sur les régularités. Pour cela soit $\delta \in \mathcal{F}(S')$ une sous-face de S' et rappelons que comme vu dans la démonstration du lemme 1.3.37*, δ peut être de quatre sortes :

page 43*

- ◇ si $\delta \in \mathcal{F}(S(h))$ alors $\underline{R}(\delta) \geq \underline{\mathcal{R}}(S(h))$, $\overline{R}(\delta) \leq \overline{\mathcal{R}}(S(h))$ et $R(\delta) \geq \mathcal{R}(S(h))$;
- ◇ si $\delta = [u,v]$ où u et v sont deux sommets voisins du graphe, alors $\underline{R}(\delta) = \overline{R}(\delta) \in \left[\alpha_- \underline{\mathcal{R}}(S(h)), \alpha_+ \overline{\mathcal{R}}(S(f))\right]$ et $R(\delta) = 1 \geq \mathcal{R}(S)$;
- ◇ si $\delta = \mathcal{S}(F,u)$ où $F \in \mathcal{F}(S(h))$ est une sous-face de $S(h)$ et $u \in T$ un sommet du graphe, notons H le plus petit espace affine contenant F, et c le barycentre de F. D'abord $u \notin H$ et $F \subset \kappa_u(h)$ par conséquent $\frac{\mathbf{d}(u,H)}{\mathbf{d}(u,c)} \in \left[1, \frac{\beta_-}{\beta_+}\right]$ et $\frac{\mathbf{d}(u,c)}{\overline{R}(F)} \in [\beta_-, \beta_+]$ donc le lemme 1.2.28* nous donne les constantes voulues ;

page 37*

- ◇ si $\delta = \langle F, \{u,v\}\rangle = \mathcal{S}(\mathcal{S}(F,u), v)$ où F est une sous-face de $S(h)$ et $\{u,v\} \in A$ deux sommets voisins, notons $F' = \mathcal{S}(F,u)$, H' le plus petit espace affine qui contient F' et c' le barycentre de F'. Par construction $F \subset H(x,y,h(x,y))$, $F' \subset \kappa_u$, $\overset{\circ}{F'} \cap \kappa_v = \emptyset$ et $\dim_{\mathcal{H}} F \leq n-2$. Donc en notant $d = \inf_{z \in F'} \mathbf{d}(v,z)$ alors $\mathbf{d}(v,H')$ et $\mathbf{d}(v,c')$ sont tous deux compris entre d et $\rho_+\beta_+$. Remarquons alors que $d > \rho_+ \frac{\min(\alpha_-,\beta_-)}{2}$, dans ce cas on obtient que $\frac{\mathbf{d}(v,H)}{\mathbf{d}(v,c')} \in \left[1, 2\frac{\beta_+}{\min(\alpha_-,\beta_-)}\right]$. On a vu (dans le cas précédant) qu'il existait deux constantes uniformes C et C' telles que :
$$\overline{R}(F') \leq C\overline{R}(F) \leq C\rho_+$$
$$\overline{R}(F') \geq \underline{R}(F') \geq C'\underline{R}(F) \geq C'\rho_- \ .$$
On en déduit que $\frac{\mathbf{d}(v,c')}{\overline{R}(F')} \in \left[\frac{\min(\alpha_-,\beta_-)}{2C}, \frac{\beta_+\rho_+}{C'\rho_-}\right]$, et de nouveau le lemme 1.2.28 nous donne des constantes sur les régularités de δ par rapport à celles de F', donc en les multipliant avec celles du cas précédant on a les constantes voulues par rapport aux régularités du complexe $S(h)$ tout entier.

En se souvenant qu'on avait aussi trouvé des constantes uniformes pour comparer les régularités de $S(h)$ à celles de S, ceci achève la démonstration du lemme 1.3.41*. □

page 54*

2 Fusion de complexes dyadiques

On s'intéresse maintenant aux complexes composés de cubes dyadiques de $\mathbb{R}^n$. Un cube dyadique unitaire est un ensemble qui s'écrit, dans une base orthonormale adaptée, comme le produit $[0,1]^n$. Une famille de tels cubes disposés sur un pavage constitue de façon naturelle un complexe.

▷ **Définition 2.1** (Complexe dyadique)

Un complexe dyadique de pas $r > 0$ est, dans une base orthonormale adap-

tée et pour un sous-ensemble fini Z de $\mathbb{Z}^n$, la famille des cubes dyadiques

$$S = \left\{ \prod_{i=1}^{n} [rz_i, r(z_i+1)] : \ (z_1, \ldots, z_n) \in Z \right\} \ .$$

On appellera base canonique *de S toute base qui convient pour cette définition. Lorsqu'un complexe S est dyadique de pas 1, on dira que S est unitaire. De plus, comme pour les polyèdres, quitte à se placer dans un sous-espace affine de dimension k, on parlera de complexes dyadiques k-dimensionnels dans $\mathbb{R}^n$.*

On imposera en plus à partir de maintenant pour simplifier que les complexes qu'on considère sont connexes, ce qui se traduit par la condition suivante pour les complexes dyadiques :

$$\forall x, y \in Z, \ \exists z_0, \ldots, z_l \in Z : \ z_0 = x, z_l = y \qquad \text{et} \qquad \forall i : \ \mathbf{d}_{\max}(z_i, z_{i+1}) = 1 \ .$$

Pour la construction qui va suivre on va introduire la notion de complexe dyadique en surface.

▷ **Définition 2.2** (Complexe dyadique en surface)

Un complexe dyadique en surface est un complexe S tel qu'il existe un complexe dyadique T vérifiant :

$$\forall \delta \in S : \ \delta \cap \partial\mathcal{U}(S) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists \delta' \in T : \ \delta \cap \partial\mathcal{U}(S) = \delta' \cap \partial\mathcal{U}(T) \ .$$

Cela revient à dire que les sous-faces de la frontière de S et T (voir la définition 1.2.23) sont les mêmes :* * page 35

$$\mathcal{F}_\partial(S) = \mathcal{F}_\partial(T) \ .$$

En outre, puisque lorsqu'un tel complexe T existe il est forcément unique, à partir de maintenant on généralisera à S toutes les propriétés particulières aux complexes dyadiques vérifiées par T, par exemple on dira que S est dyadique unitaire en surface si T est dyadique unitaire.

On va à présent s'intéresser au problème de relier entre eux deux complexes dyadiques en surface de même pas, sans laisser de «trous» et en préservant leur régularité.

▷ **Théorème 2.3** (Fusion de complexes dyadiques)

On se place dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Il existe quatre constantes universelles strictement positives ρ, c_1, c_2 et c_3 ne dépendant que de n telles que pour tous complexes connexes n-dimensionnels S_1 et S_2, dyadiques en surface de pas r vérifiant :

- ◇ *$S_1 \cup S_2$ est un complexe ;*
- ◇ *$\dfrac{\mathbf{d}(\mathcal{U}(S_1), \mathcal{U}(S_2))}{r} > \rho$;*
- ◇ *$\partial\mathcal{U}(S_1)$ a deux composantes connexes, dont l'une forme la frontière d'un ouvert connexe O tel que $O \cap \mathcal{U}(S_1) = \emptyset$ et $\mathcal{U}(S_2) \subset O$.*

Alors il existe un complexe n-dimensionnel S_3 vérifiant les conditions suivantes :

(1) $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ *est un complexe ;*

(2) $\mathcal{U}(S_2 \cup S_3) = \overline{O}$ *;*

(3) $\overline{\mathcal{R}}(S_3) \leq c_1 \max\left(\overline{\mathcal{R}}(S_1), \overline{\mathcal{R}}(S_2)\right)$ *;*

(4) $\mathcal{R}(S_3) \geq c_2 \min\left(\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2)\right)$ *;*

(5) $\underline{\mathcal{R}}(S_3) \geq c_3 \min\left(\underline{\mathcal{R}}(S_1), \underline{\mathcal{R}}(S_2)\right)$.

On notera ϕ une isométrie affine qui fait passer d'une base canonique de S_1 à une base canonique de S_2. Pour démontrer le théorème, on va combler l'espace compris entre S_1 et S_2 par des polyèdres de façon à former un seul complexe plus grand. La démonstration va se faire par récurrence sur la dimension n, mais d'abord démontrons quelques lemmes préliminaires.

Définissons une propriété pour désigner les complexes dyadiques qui sont des subdivisions de complexes dyadiques plus grands.

▷ **DÉFINITION 2.4** (COMPLEXES DYADIQUES GROUPÉS)

Soit S un complexe dyadique k-dimensionnel de pas r, p un entier non nul et T un autre complexe dyadique de pas pr dans la même base. Si $\mathcal{U}(S) = \mathcal{U}(T)$ alors on dira que :

◇ *S est $\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{k \text{ fois}}$-groupé ;*

◇ *S est la $\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{k \text{ fois}}$-subdivision de T ;*

◇ *T est le $\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{k \text{ fois}}$-groupement de S.*

Cette propriété de groupement est relative à l'origine de la base considérée.

On se réservera aussi parfois le droit de parler de $p_1 \times p_2 \ldots \times p_k$-groupements par la suite (où les p_i sont des entiers pas forcément tous égaux) lorsque le complexe S s'y prête. Pour simplifier les notations, on remplacera aussi parfois $p \times p \times \ldots \times p$ par p^k.

Étant donné un complexe dyadique en surface, pour tout entier $m > 1$ il est possible de lui ajouter des polyèdres de façon à le rendre m^k-groupé en surface, tout en gardant un contrôle sur la régularité obtenue comme le prétend le lemme suivant.

▷ **LEMME 2.5** (SUBDIVISION)

Soit S un complexe de dimension n, dyadique en surface de pas r. Pour tout entier $m > 1$ (voir la figure 6), il est possible de construire un complexe S' tel que :

(1) *S' est dyadique de pas $\frac{r}{m}$ et m^n-groupé en surface dans la même base ;*

(2) *$S \subset S'$ (tous les polyèdres de S sont des polyèdres de S') ;*

(3) *tout point de la frontière de $\mathcal{U}(S')$ est situé à distance r de la frontière*

de $\mathcal{U}(S)$ pour $\mathbf{d}_{\max}$: $\forall x \in \partial\mathcal{U}(S')$, $\mathbf{d}_{\max}(x, \partial\mathcal{U}(S)) = r$;

(4) *il existe trois constantes strictement positives c'_1, c'_2 et c'_3 ne dépendant que de n et de m telles que*

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{R}}(S_3) \leq c'_1 \max\left(\overline{\mathcal{R}}(S_1), \overline{\mathcal{R}}(S_2)\right) \\ \mathcal{R}(S_3) \geq c'_2 \min\left(\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2)\right) \\ \underline{\mathcal{R}}(S_3) \geq c'_3 \min\left(\underline{\mathcal{R}}(S_1), \underline{\mathcal{R}}(S_2)\right) \end{cases} .$$

DÉMONSTRATION

Considérons l'ensemble $E = \{\delta_i\}$ des cubes dyadiques de pas r dans une base canonique de S et de barycentres x_i, qui ont au moins un point commun avec la frontière de S et qui sont d'intérieur disjoint avec tous les polyèdres de S. $E \cup S$ est un complexe dyadique en surface de pas r, qui vérifie la propriété (3) du lemme. De plus, la frontière de $\mathcal{U}(E \cup S)$ est disjointe de celle de $\mathcal{U}(S)$.

Pour chacun des cubes δ_i, on considère l'ensemble $\mathcal{F}_i$ de ses faces, et le sous-ensemble $\mathcal{G}_i$ de celles qui sont incluses dans la frontière de $E \cup S$. Chacun des éléments de $\mathcal{G}_i$ est un cube dyadique de dimension $n-1$ et de pas r, on peut le subdiviser de façon naturelle en m^{n-1} cubes de dimension $n-1$ et de pas $\frac{r}{m}$. On notera $\mathcal{F}_i^*$ l'ensemble composé des faces de $\mathcal{F}_i$ qui ne sont pas dans $\mathcal{G}_i$ (c'est à dire celles qui ne sont pas sur sur la frontière) et des $m^{n-1} \cdot \#\mathcal{G}_i$ faces obtenues après découpage des faces de $\mathcal{G}_i$ (celles qui sont sur la frontière).

On fait alors la suspension des cubes de $\mathcal{F}_i^*$ par rapport au point x_i : tous les polyèdres obtenus sont bien de dimension n. Notons s_i leur ensemble, il est facile de vérifier qu'ils forment un complexe qui est une partition de δ_i car les cubes de $\mathcal{F}_i^*$ sont tous inclus dans la frontière de δ_i, qui est en occlusion simple par rapport à x_i. De plus, $\bigcup_i s_i$ est aussi un complexe, car on n'a subdivisé que les faces des δ_i qui étaient sur la frontière de $E \cup S$, donc qui n'étaient pas communes à deux cubes. Si on considère maintenant $S' = S \cup \left(\bigcup_i s_i\right)$, cet ensemble de polyèdres est un complexe de dimension n, dyadique de pas $\frac{r}{m}$ et m^n-groupé en surface, qui vérifie les propriétés géométriques annoncées. Les constantes bornant les régularités sont quant à elles obtenues en utilisant le lemme 1.2.28*. □ *page 37

Définissons maintenant une notion de rotation dans un 2-plan généralisée en dimension n.

▷ **Définition 2.6** (Rotation d'angle θ)

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) et $\theta \in \mathbb{R}$. On dira que f est une rotation d'angle θ si sa matrice peut s'écrire, dans une base orthonormale adaptée :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} .$$

On dira alors que f est une rotation linéaire dans le 2-plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}^{n-2}$.

Si f est une application affine telle que $\overrightarrow{f}$ est une rotation linéaire dans un 2-plan D, et que $f(D) = D$ alors on dira que f est une rotation affine dans

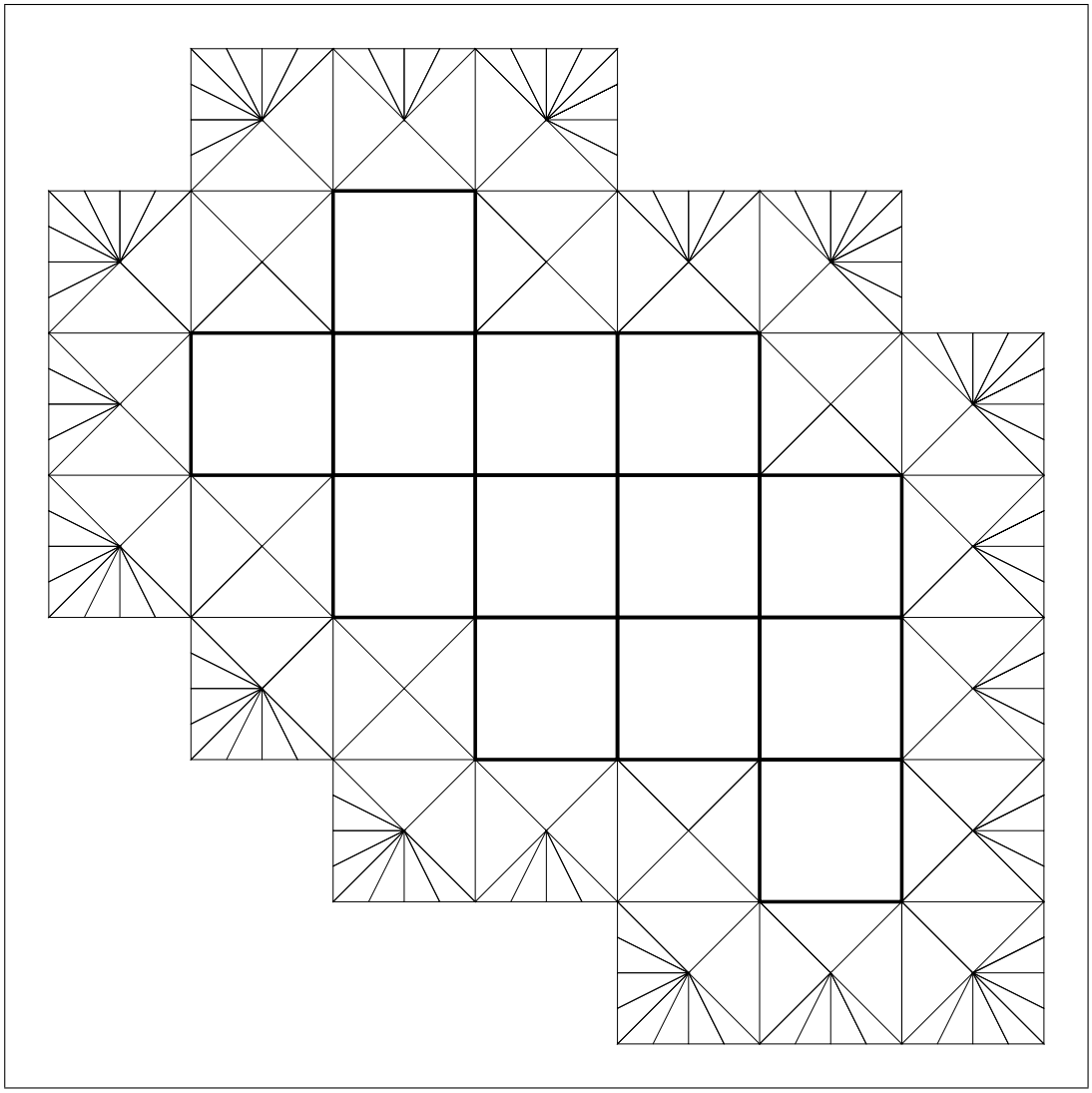


FIGURE 6 – Subdivision d'un complexe bidimensionnel avec $m = 4$.

le 2-plan D.

Le lemme suivant va être utile pour la démonstration du théorème de fusion en dimension $n > 2$. En effet, une application de changement de bases entre des bases canoniques de deux complexes dyadiques unitaires est une isométrie affine de $\mathbb{R}^n$. Sa partie linéaire peut alors être décomposée en un produit de rotations dans des 2-plans engendrés par des couples de vecteurs de la première base.

▷ **Lemme 2.7** (Décomposition d'une isométrie en rotations)

Notons de façon usuelle $\mathcal{O}(n)$ le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire le groupe des isométries linéaires. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ alors pour toute isométrie linéaire $f \in \mathcal{O}(n)$ il existe $N = \frac{n(n+1)}{2}$ rotations linéaires $s_1, \ldots, s_N$ et une application r telles que :

- ◇ *$r = Id$ ou il existe i tel que $r = q_i - 2p_i$ où p_i et q_i sont les projecteurs orthogonaux sur $Vect(u_i)$ et $Vect(u_i)^\perp$ (c'est à dire que r est une réflexion par rapport à $Vect(u_i)^\perp$) ;*
- ◇ *$\forall k$ il existe $i \neq j$ tels que s_k est une rotation dans le plan $Vect(u_i, u_j)$;*
- ◇ *$f = s_1 \circ \ldots \circ s_N \circ r$.*

Démonstration

Démontrons ce lemme par récurrence sur la dimension n. D'abord en dimension 1 le lemme est clairement vrai puisque toute isométrie est soit Id, soit $-Id$.

Supposons le lemme vrai en dimension n pour $n \geq 1$ fixé, et vérifions qu'il est alors vrai en dimension $n+1$: soit $f \in \mathcal{O}(n+1)$. Montrons déjà que pour toute isométrie $g \in \mathcal{O}(n+1)$ et pour tout $k \leq n$, il est possible de trouver une rotation linéaire s dans le plan $Vect(u_k, u_{n+1})$ telle que $s \circ g(u_{n+1}) \in Vect(u_k)^\perp$. Pour cela plaçons-nous dans le sous-espace $H = Vect(u_k, u_{n+1})$ de dimension deux et notons p et q respectivement les projecteurs orthogonaux sur H et $H^\perp$:

- ◇ si $p(g(u_{n+1})) = 0$ alors $g(u_{n+1}) \in H^\perp \subset Vect(u_{n+1})^\perp$ et on a fini, il suffit de prendre $s = Id$;
- ◇ si $p(g(u_{n+1})) \neq 0$ alors en choisissant une orientation du plan H on peut considérer l'angle θ formé par les deux directions $p(g(u_{n+1}))$ et u_{n+1}. Notons s la rotation linéaire d'angle $-\theta$ dans le plan H, on remarque que $s(p(g(u_{n+1}))) \in Vect(u_{n+1}) \subset Vect(u_k)^\perp$ donc puisque q et s commutent :

$$s(g(u_{n+1})) = s(p(g(u_{n+1}))) + q(s(g(u_{n+1}))) \in Vect(u_k)^\perp \ .$$

Constatons qu'en construisant s ainsi, si g vérifie pour $k' < k$ que $g(u_{n+1}) \in Vect(u_{k'})^\perp$ alors $s \circ g(u_{n+1}) \in Vect(u_{k'})^\perp$ puisque s laisse $Vect(u_{k'})^\perp$ invariant si $k' \neq k$.

En répétant ce raisonnement sur f, puis $r_n \circ f$, puis $r_{n-1} \circ r_n \circ f$, etc... successivement avec les n premiers vecteurs de la base (pour $1 \leq k \leq n$) on peut donc trouver n rotations linéaires $r_1, \ldots, r_n$ telles que :

$$\forall i \leq n,\ r_1 \circ \ldots r_n \circ f(u_{n+1}) \in Vect(u_i)^\perp$$

et de plus par construction toutes les r_k sont des rotations dans les plans $Vect(u_k, u_{n+1})$. Notons f' la composée $f' = r_1 \circ \ldots r_n \circ f$: f' est donc aussi une isométrie telle que

$$f'(u_{n+1}) \in \bigcap_{k \leq n} Vect(u_k)^\perp = Vect(u_{n+1}) \ .$$

Par conséquent, $f'(u_{n+1}) = \pm u_{n+1}$, mais en rajoutant éventuellement π à l'angle de la rotation r_1 on peut se ramener au cas où $f'(u_{n+1}) = u_{n+1}$. L'application f' admet donc $Vect(u_{n+1})$ comme stable ($f(\lambda u_{n+1}) = \lambda f(u_{n+1}) = \lambda u_{n+1}$) or puisqu'elle est orthogonale, elle admet aussi son orthogonal comme stable : par conséquent $f'|_{Vect(u_{n+1})^\perp}$ est une isométrie de $Vect(u_{n+1})^\perp$, avec $\dim Vect(u_{n+1})^\perp = n$. En lui appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient que $f' = s'_1 \circ \ldots \circ s'_N \circ r$ où $N = \frac{n(n+1)}{2}$, les s'_i sont des rotations linéaires dans des plans engendrés par des couples des n premiers vecteurs de la base et r une réflexion ou l'identité. On trouve alors :

$$f = r_n^{-1} \circ \ldots \circ r_1^{-1} \circ s'_1 \circ \ldots \circ s'_N \circ r \ .$$

En constatant que la réciproque d'une rotation est une rotation d'angle opposé dans le même plan, et que $N + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ le lemme est alors démontré en dimension $n + 1$. □

Ce lemme se généralise sans problème aux rotations affines.

▷ **COROLLAIRE 2.8**

Le lemme 2.7 reste vrai lorsque f est une isométrie affine et en prenant des rotations affines dans les plans $Vect(u_i, u_j)$ pour faire la décomposition.

DÉMONSTRATION

Ce corollaire est une conséquence directe de la façon dont on a démontré le lemme : lorsque l'on a construit les différentes rotations linéaires qui interviennent dans la décomposition on a pu remarquer que les $n - 1$ dernières étaient dans des plans $Vect(u_k, u_n)$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dès lors, on peut écrire $f = \overrightarrow{f} \circ t$ où t est une translation de vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{f} = g \circ r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n-1} \circ r$ où les r_i sont des rotations linéaires dans $Vect(u_i, u_n)$, g la composée des $N - n + 1$ premières rotations intervenant dans la décomposition de $\overrightarrow{f}$ donnée par le lemme, et r une éventuelle réflexion. Pour $1 \leq i \leq n$, notons t_i la translation de vecteur $r^{-1}(x_i u_i)$, puisque $r \circ t = t' \circ r$ où t' est une translation de vecteur $r^{-1}(x)$ il vient alors l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{f} \circ t = g \circ r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n-1} \circ r \circ t = g \circ r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n-1} \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n \circ r \ .$$

De plus, t_i commute avec r_j lorsque $i < n$ et $i \neq j$ donc on peut encore écrire :

$$f = g \circ (r_1 \circ t_1) \circ (r_2 \circ t_2) \circ \ldots \circ (r_{n-2} \circ t_{n-2}) \circ (r_{n-1} \circ t_{n-1} \circ t_n) \circ r \ .$$

En constatant que pour $i < n-1$, $r_i \circ t_i$ est une rotation affine ainsi que $r_{n-1} \circ t_{n-1} \circ t_n$ cela achève la démonstration du corollaire. □

2.1 Fusion en dimension 2

Traitons d'abord le cas de la fusion de deux complexes dyadiques bidimensionnels. On verra que la construction qu'on va expliciter va aussi être réutilisable dans la suite de la démonstration en dimension plus grande.

▷ **LEMME 2.1.9**

page 61* *Le théorème 2.3* est vrai lorsque $n = 2$.*

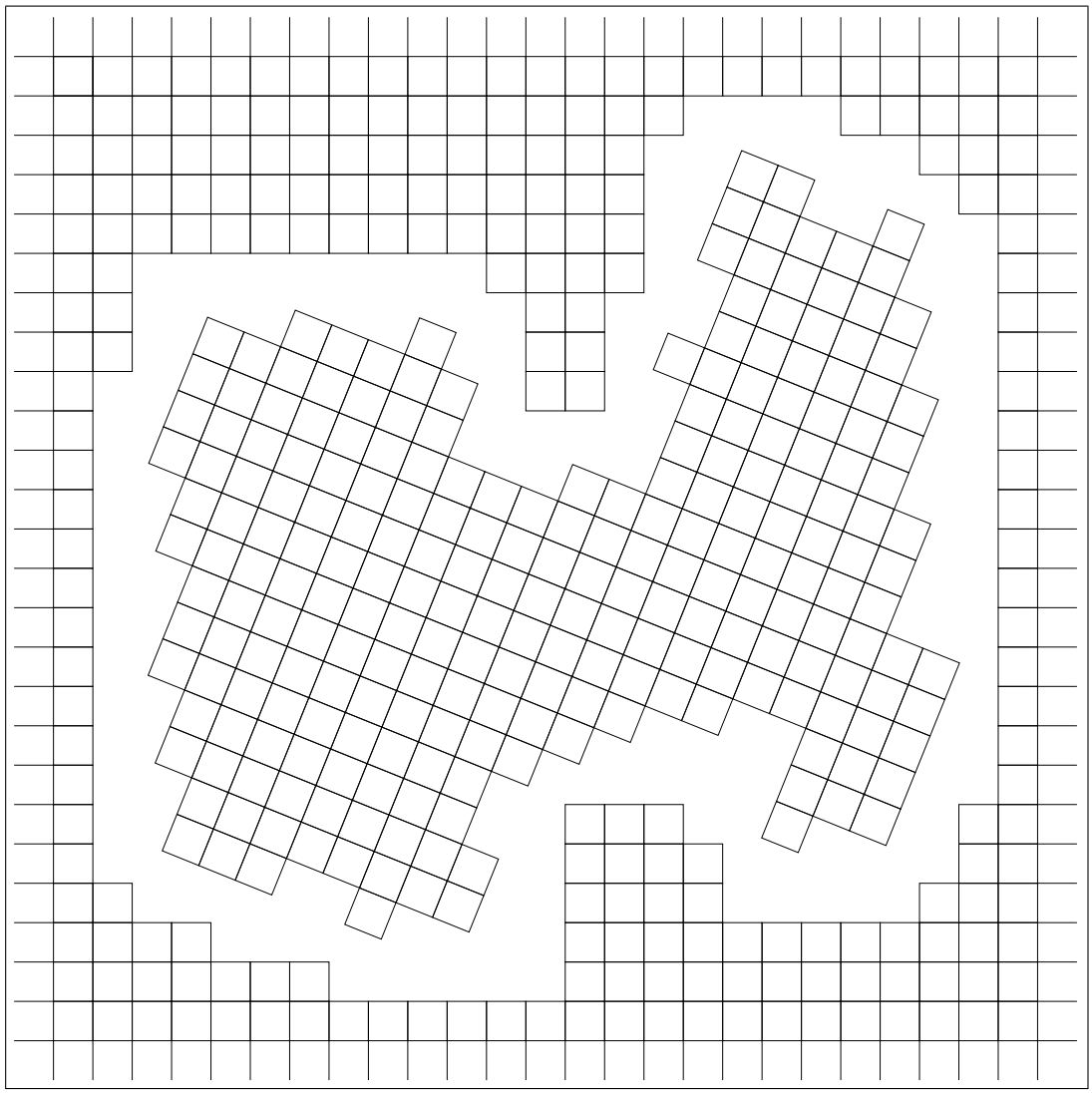


FIGURE 7 – Deux complexes à fusionner en dimension $n = 2$.

DÉMONSTRATION

Supposons que $n = 2$, que les hypothèses du théorème de fusion sont vérifiées, et pour simplifier que S_1 et S_2 sont unitaires. Dans ces conditions, les portions de S_1 et S_2 qui nous intéressent sont deux graphes de points, les arêtes étant les faces (ou segments) qui sont respectivement dans la frontière de O et de $\mathcal{U}(S_1)$ (voir figure 7). On va supposer qu'on dispose d'une distance assez grande entre les deux complexes ($\mathbf{d}(\mathcal{U}(S_1),\mathcal{U}(S_2)) > \rho$ avec ρ assez grand) pour faire toutes les constructions dont on va avoir besoin dans la démonstration qui suit, on verra à la fin que ρ peut être borné indépendamment des complexes considérés.

Pour commencer, considérons l'ensemble des composantes connexes de $\partial\mathcal{U}(S_2)$. Puisque $\mathcal{U}(S_2)$ est lui-même connexe, il existe une composante connexe de $\partial\mathcal{U}(S_2)$ qui est la frontière d'un ouvert connexe U tel que $\mathcal{U}(S_2) \subset \overline{U}$ et $\mathbf{d}(U,\mathcal{U}(S_1)) > \rho$. En rajoutant à S_2 tous les cubes possibles dans la même base canonique à l'intérieur de U on obtient un complexe dyadique en surface qui vérifie aussi les hypothèses de fusion, et dont la frontière est connexe. Par commodité, on notera aussi ce complexe S_2 (quitte à dire à la fin que ces cubes supplémentaires étaient dans le complexe S_3 qu'on va construire).

Remarquons ensuite que l'isométrie ϕ qui fait passer de la base canonique de S_1 à celle de S_2 peut être décomposée en une rotation linéaire r_θ d'angle θ suivie d'une

translation τ :

$$\phi = \tau \circ r_\theta \ .$$

En faisant éventuellement une permutation et / ou des inversions des vecteurs de la base canonique de l'un des complexes, on peut aussi supposer que l'angle θ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 modulo $\frac{\pi}{2}$. Pour tout entier $p > 0$, la rotation r_θ peut alors être décomposée en p rotations d'angle $\theta' = \frac{\theta}{p} \in \left[-\frac{\pi}{2p}, 0\right]$:

$$r_\theta = \left(r_{\theta/p}\right)^p = (r_{\theta'})^p \ .$$

Enfin en posant $\theta'' = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta'}{2}$ on constate que $\theta' = 2\theta''$ modulo $\frac{\pi}{2}$ et là encore à des permutations / inversions près des vecteurs des bases considérées, r_θ peut s'écrire aussi comme le produit de $2p$ rotations d'angle $\theta'' \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4p}, \frac{\pi}{4}\right]$. Si l'on construit successivement $2p-1$ complexes dyadiques en couronne autour de S_2 (en supposant ρ assez grand) dont la base canonique est l'image du complexe précédant par une rotation d'angle θ'', le problème de fusionner S_1 avec S_2 se ramène à faire fusionner successivement deux à deux ces complexes dont la base canonique est l'image de l'autre par une rotation d'angle θ'' éventuellement suivie d'une translation.

De la même façon en posant $\theta''' = \theta'' - \frac{\pi}{4p}$, la composée de $2p$ rotations d'angle θ''' est une rotation d'angle égal à θ modulo $\frac{\pi}{2}$, avec $\theta''' \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4p}\right]$. Puisque $\lim_{p\to\infty} \theta''' = \frac{\pi}{4}$, on supposera à partir de maintenant pour simplifier la démonstration que

$$\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$$

où $\theta_{\min} < \frac{\pi}{4}$ et peut être choisi arbitrairement proche de $\frac{\pi}{4}$ (au prix d'un nombre de transitions p assez grand qui ne dépend pas des complexes à faire fusionner) et $\theta_{\max} = \theta_{\min} + \frac{\pi}{4p} < \frac{\pi}{4}$.

page 62*

Commençons par subdiviser le complexe S_2 quatre fois en utilisant le lemme 2.5* (on appellera aussi S_2 le complexe obtenu, et on supposera qu'il est aussi unitaire pour ne pas surcharger les notations). Chaque couple de faces distinctes incluses dans la frontière de $\mathcal{U}(S_2)$ et ayant un point en commun peuvent former un angle plat, aigu ou obtus. Considérons l'ensemble des points de coordonnées $\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dans la base canonique de S_2 (les centres des cubes de S_2 en font par exemple partie), et notons T le sous-ensemble de ces points qui sont à l'extérieur de $\mathcal{U}(S_2)$ et à distance $\frac{1}{2}$ pour la distance $\mathbf{d}_{\max}$:

$$T = \left\{ z \in \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) : \ \mathbf{d}_{\max}(z, \mathcal{U}(S_2)) = \frac{1}{2} \right\} \ .$$

Cet ensemble de sommets peut être muni naturellement d'une structure de graphe, en posant que les voisins d'un point de T sont les points de T à distance minimale :

$$A = \{\{x, y\} \subset T : \ x \in T, \ y \neq x \text{ et } \forall z \in T \setminus \{x\}, \ \|z - x\| \geq \|y - x\|\} \ .$$

Notons G le graphe formé du couple (T, A) et vérifions rapidement que G est linéaire cyclique. D'abord tout point de T a au moins deux voisins car si $x \in T$ alors $\exists x' \in \mathcal{F}_0(S_2)$ tel que $x' \in \mathcal{U}(S_2)$ et $\mathbf{d}_{\max}(x', x) = \frac{1}{2}$. On a vu que x' était le sommet d'un angle plat, aigu ou obtus, et on peut trouver y' et z' distincts dans $\mathcal{F}_0(S_2) \cap \partial\mathcal{U}(S_2)$ tels que $\mathbf{d}(x', y') = \mathbf{d}(x', z') = 1$. puisque l'on a subdivisé quatre fois alors nécessairement seul l'un des trois sommets (x', y', z') de la frontière du complexe peut être le sommet d'un angle non plat. Par conséquent on peut alors trouver y et z distincts et distincts

de x dans $\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tels que $\mathbf{d}_{\max}(y', y) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{d}_{\max}(z', z) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}(x, z) = 1$. Par conséquent x a au moins deux voisins : y et z.

Raisonnons à présent par l'absurde et supposons que x a au moins trois voisins distincts a, b et c. Par construction a, b et c sont à distance 1 de x donc forment les sommets d'un triangle rectangle isocèle dont x est le milieu de l'hypoténuse et par exemple a est l'angle droit. Considérons alors l'union U des boules fermées de centres x, a, b et c et de rayon $\frac{1}{2}$ pour la distance $\mathbf{d}_{\max}$ (il s'agit en fait de quatre cubes dyadiques dans la base canonique de S_2). puisque l'on a subdivisé S_2 quatre fois alors $\mathcal{U}(S_2) \cap U$ est forcément compris d'un seul côté de la droite (b, c), ce qui implique soit que $\mathbf{d}_{\max}(a, \mathcal{U}(S_2)) = \frac{3}{2}$, soit que $\mathbf{d}_{\max}(a, \mathcal{U}(S_2)) = 0$. Dans tous les cas, on a une contradiction avec la définition des points de T.

On vient donc de montrer que tout sommet du graphe G a exactement deux voisins. De plus puisque l'on a supposé que $\partial\mathcal{U}(S_2)$ est connexe, G est cyclique. Et puisque G a au minimum huit sommets (ce serait le cas si S_2 n'était composé que d'un seul cube) alors il ne contient aucun 3-cycle. Par conséquent G est bien linéaire cyclique.

Soient u et v deux réels tels que $1 < u < v < \frac{3}{2}$. On définit une bande en forme de couronne autour de S_2 à distance comprise entre u et v :

$$\mathcal{K}_{u,v} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ u < \mathbf{d}(x, \mathcal{U}(S_2)) < v\} \ .$$

La frontière de cette bande a une composante connexe «extérieure» située à distance v de $\mathcal{U}(S_2)$:

$$\mathcal{K}_v = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{d}(x, \mathcal{U}(S_2)) = v\} \ .$$

Lorsque v est fixé, $\forall u < v$ on peut trouver un entier p tel que $\frac{\sqrt{2}}{p} < v - u$, donc en subdivisant p fois S_1, si $\delta \in S_1$ et $\delta \cap \mathcal{K}_v \neq \emptyset$ alors $\mathbf{d}(\delta, \mathcal{U}(S_2)) > u$. On va alors compléter S_1 en lui rajoutant tous les cubes inclus dans $\overline{O}$, de pas $\frac{1}{p}$ dans sa base canonique et qui contiennent un point à distance au moins v de $\mathcal{U}(S_2)$:

$$S_1' = S_1 \cup \left\{\delta : \ \delta \subset \overline{O} \text{ et } \sup_{x \in \delta} \mathbf{d}(x, \mathcal{U}(S_2)) \geq v\right\} \ .$$

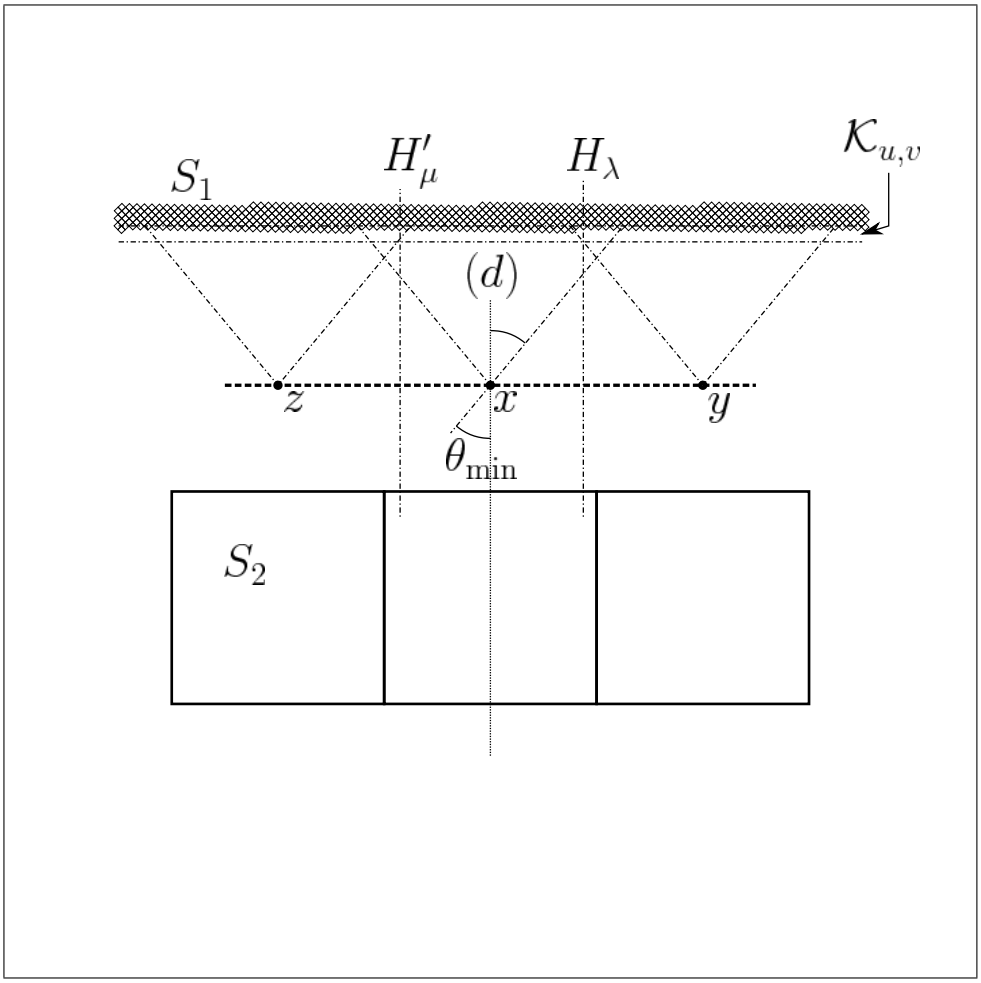
On remarquera que par construction, tous les polyèdres de S_1' sont à distance au moins u de $\mathcal{U}(S_2)$, donc que $\partial\mathcal{U}(S_1')$ a une composante connexe incluse dans $\mathcal{K}_{u,v}$. Là encore, pour simplifier les notations on notera encore S_1 à la place de S_1', puisque S_1 vérifie aussi les hypothèses du théorème avec une autre constante ρ.

Notons T' l'ensemble des sommets du graphe G qui sont alignés avec leurs deux voisins. Remarquons que pour tout couple de sommets voisins du graphe (x, y) alors $x \in T'$ ou $y \in T'$ car on avait subdivisé S_2 quatre fois. Pour tout sommet $x \in T'$ soit (d) la droite perpendiculaire à celle qu'il forme avec ses deux voisins, on notera $\mathcal{C}_x$ le cône de sommet x et dont les points forment un angle (non orienté) compris entre 0 et $\theta_{\min}$ avec la droite (d) :

$$\mathcal{C}_x = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \ \widehat{(x, y), (d)} \in [0, \theta_{\min}]\right\} \ .$$

Nous allons à présent discuter des différentes configurations possibles des sommets du graphe.

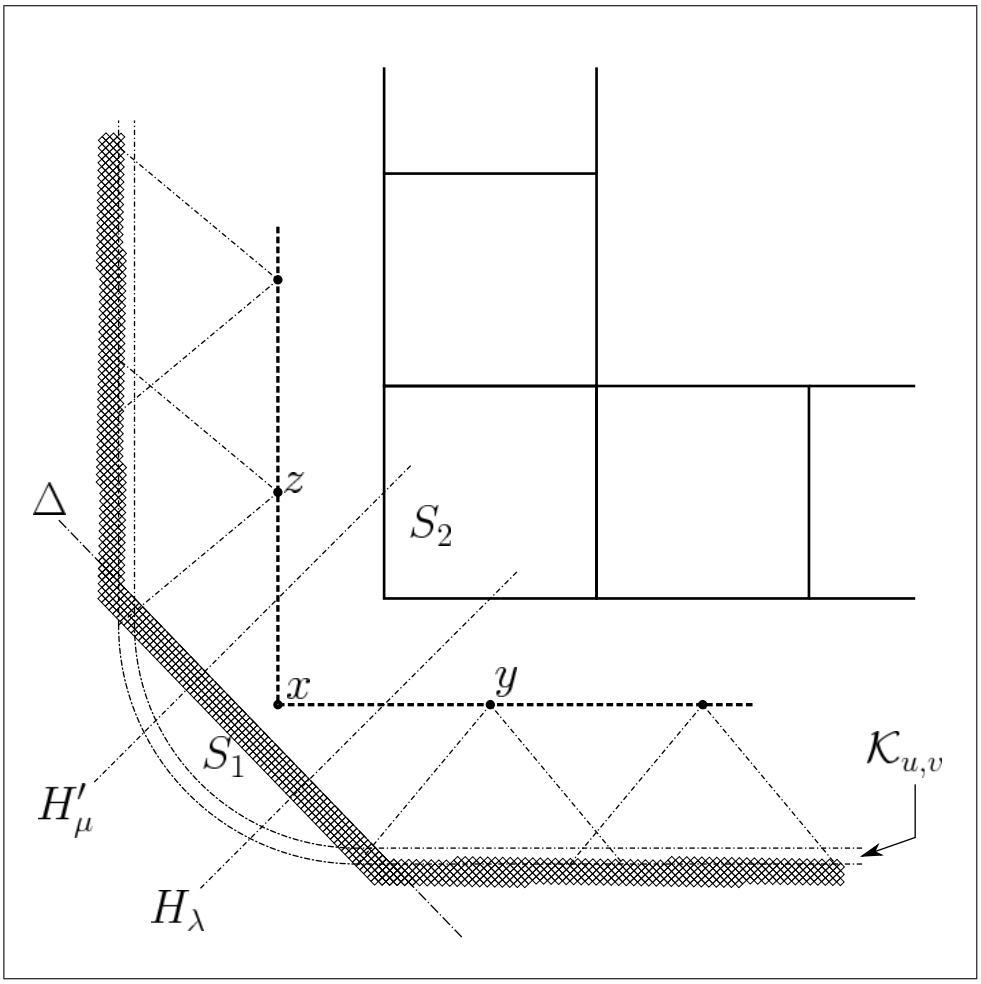
Cas d'un angle plat



Soient x et y deux sommets voisins du graphe tous deux alignés avec leurs voisins ($x, y \in T'$). Remarquons d'abord que puisque l'on a supposé que $\theta \in \left[\theta_{\min}, \frac{\pi}{4}\right]$ alors $\partial S_1 \cap \mathcal{K}_{u,v} \cap \mathcal{C}_x$ est en occlusion simple par rapport à x (respectivement $\partial S_1 \cap \mathcal{K}_{u,v} \cap \mathcal{C}_y$ par rapport à y). En outre, $\partial S_1 \cap \mathcal{K}_{u,v} \cap \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$ est en occlusion simple par rapport au segment $[x, y]$: en effet, remarquons que les faces de S_1 qui sont dans cet ensemble forment un angle compris entre $\theta_{\min}$ et $\frac{\pi}{4}$ avec la normale à la droite (x, y), donc coupent la droite (x, y) en un point extérieur au segment $[x, y]$ car $u > 1$.

En choisissant $\theta_{\min}$ assez proche de $\frac{\pi}{4}$ il est possible d'obtenir que $\tan \theta_{\min} > \frac{1}{2}$, et en choisissant $v > \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \tan \theta_{\min}}$ et $u < v$, on obtient que $\mathcal{K}_v \cap \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$ est un segment non vide parallèle à $[x, y]$, de longueur $\nu > 0$ qui ne dépend que de v et $\theta_{\min}$. On notera H_λ une droite perpendiculaire à ce segment, à distance λ d'une de ses extrémité (pour $\lambda \in [0, \nu]$).

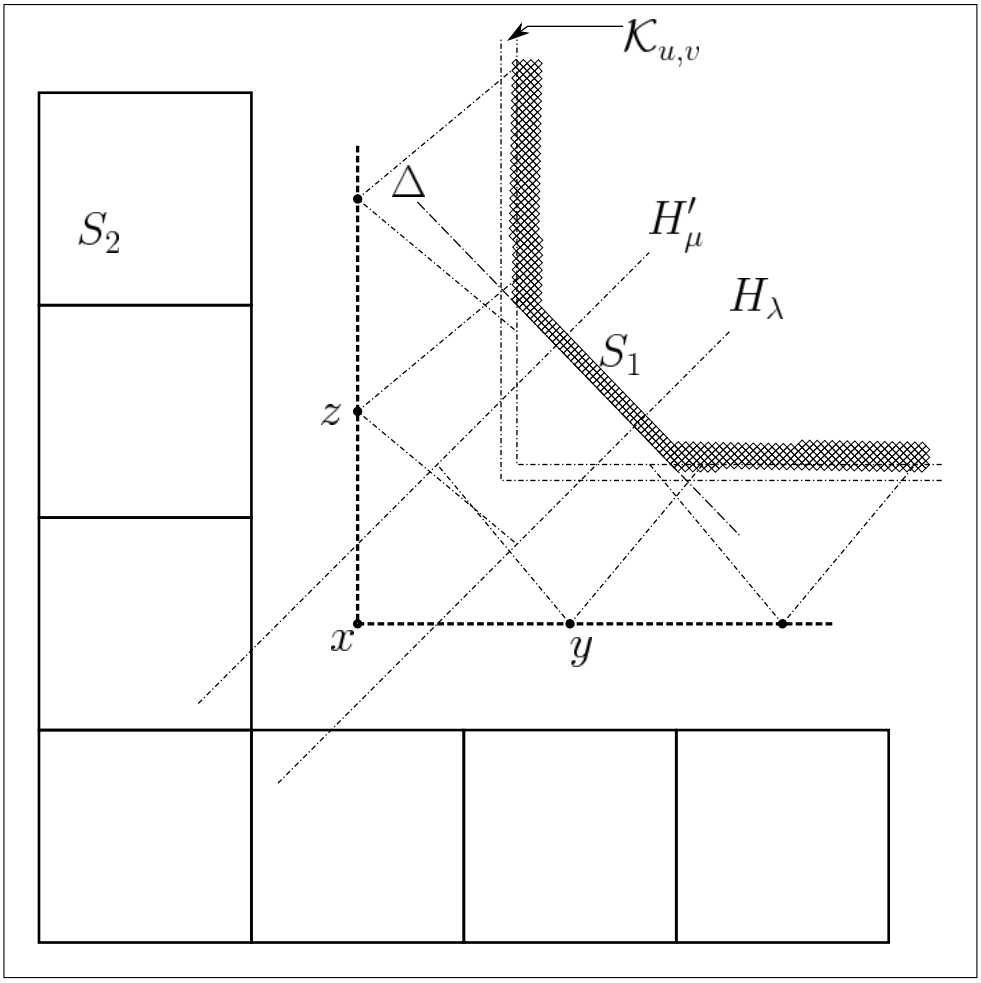
Cas d'un angle aigu



Traitons à présent le cas des angles aigus : soit x le sommet de l'angle, et y et z ses deux voisins. Si $\theta_{\min}$ est suffisamment proche de $\frac{\pi}{4}$, il est possible de trouver une droite Δ parallèle à l'un des vecteurs de la base canonique de S_1 et telle qu'elle passe par des sommets de la frontière de S_1, situés respectivement dans $\mathcal{K}_{u,v} \cap \mathcal{C}_y$ et $\mathcal{K}_{u,v} \cap \mathcal{C}_z$. Si on suppose qu'on a assez subdivisé S_1 (il suffit que son pas soit inférieur à $\frac{1}{100}$ par exemple) on peut aussi imposer que la droite Δ ne coupe pas les segments $[x, y]$ et $[x, z]$ et même, on peut trouver une constante $C > 0$ ne dépendant que du pas de subdivision et de $\theta_{\min}$ telle qu'on puisse imposer $\mathbf{d}(x, \Delta) > C$.

Notons Δ^+ le demi-plan délimité par Δ qui contient x, Δ^- l'autre demi-plan. On rajoute alors à S_1 tous les cubes qui sont dans $\Delta^- \cap \{t \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}(t, \mathcal{U}(S_2)) \leq v\}$. On prend cette fois-ci des droites H_λ et H'_μ qui sont perpendiculaires à Δ et à distance respective λ et μ de x, du côté respectivement de y et de z, avec par exemple $\lambda, \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

Cas d'un angle obtus



Traitons à présent le cas des angles obtus : soit x le sommet de l'angle, et y et z ses deux voisins. On va procéder quasiment de la même façon que pour les angles aigus. Notons y' le voisin de y qui n'est pas x, z' celui de z qui n'est pas x. Si $\theta_{\min}$ est suffisamment proche de $\frac{\pi}{4}$, il est possible de trouver une droite Δ parallèle à l'un des vecteurs de la base canonique de S_1 et telle qu'elle passe par des sommets de la frontière de S_1, situés respectivement dans $\mathcal{K}_{u,v} \cap \mathcal{C}_y \cap \mathcal{C}_{y'}$ et $\mathcal{K}_{u,v} \cap \mathcal{C}_z \cap \mathcal{C}_{z'}$. Si on suppose qu'on a assez subdivisé S_1 (il suffit que son pas soit inférieur à $\frac{1}{100}$ par exemple) on peut aussi imposer que la droite Δ ne coupe pas les segments $[x, y]$ et $[x, z]$ et même, on peut trouver une constante $C > 0$ ne dépendant que du pas de subdivision et de $\theta_{\min}$ telle qu'on puisse imposer $\mathbf{d}(x, \Delta) > C$.

Notons Δ^+ le demi-plan délimité par Δ qui contient x, Δ^- l'autre demi-plan. On retire alors à S_1 tous les cubes qui sont dans $\Delta^- \cap \{t \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}(t, \mathcal{U}(S_2)) \geq u\}$ (cette opération est possible sans modification des complexes initiaux si on avait supposé $\rho > 2$ par exemple, puisque dans ce cas on ne retire que ce qu'on avait surajouté). On prend des droites H_λ et H'_μ qui sont perpendiculaires à Δ et à distance respective λ et μ de x, du côté respectivement de y et de z, pour $\lambda, \mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ par exemple.

Conclusion

Notons $\epsilon = \min\left(\nu, \frac{1}{3}\right)$ et Σ le complexe composé des faces de S_1 et S_2 incluses dans leurs frontières en «vis-à-vis» :

$$\{\Sigma = F \in \mathcal{F}_1(S_1 \cup S_2) :\ F \subset \partial\mathcal{U}(S_1) \text{ ou } F \subset \partial\mathcal{U}(S_2) \cap \overline{O}\}\ .$$

Il est clair que Σ est ϵ-tubulaire par rapport à G et O en utilisant les droites H_λ et H_μ qu'on a construites pour le découpage. Considérons les hypothèses du lemme 1.3.41*, *page 54 par construction on obtient facilement les bornes suivantes :

$$\alpha_+ = \alpha_- = 1 \qquad \beta_- > \frac{u}{2} \qquad \beta_+ < v \qquad \gamma < 100 \qquad \eta \in [\sin\theta_{\min}, \sin\theta_{\max}]\ .$$

Donc, toutes les constantes qui interviennent dans ses hypothèses sont déterminées par $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$, u et v, eux-même pouvant être choisis indépendamment des complexes S_1 et S_2 considérés.

Ceci achève la démonstration du lemme 2.1.9*, donc celle du théorème de fusion en dimension 2. *page 66 □

Cette démonstration va aussi nous servir à prouver un corollaire utile dans la suite de la démonstration du théorème de fusion en dimension plus grande. Auparavant définissons la notion de complexe linéaire.

▷ **Définition 2.1.10** (Complexe linéaire)

Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$ *; pour* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *et* $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$ *on notera*

$$\Delta(x, y, r) = [x, x + r] \times [y, y + r]\ ;$$

$$\mathcal{V}(\Delta(x, y, r)) = \{\Delta(x + u, y + v, r) :\ (u, v) \in \{-r, 0, r\}^2\}\ ;$$

$$\mathcal{V}^*(\Delta(x, y, r)) = \{\Delta(x + u, y + v, r) :\ (u, v) \in \{-r, 0, r\}^2 \text{ et } |u + v| = r\}\ .$$

Pour un cube dyadique δ, $\mathcal{V}(\delta)$ *est l'ensemble des cubes dyadiques voisins de* δ, $\mathcal{V}^*(\delta)$ *est le sous-ensemble de ces cubes qui sont tangents à* δ. *Ces définitions peuvent de plus être données dans le cadre d'une base canonique quelconque.*

Soit S *un complexe, on dira que* S *est linéaire si* S *est bidimensionnel, dyadique, contient au moins deux cubes, et*

$$\forall \delta \in S :\ 1 \leq \#(\mathcal{V}^*(\delta) \cap S) \leq 2\ .$$

On dira que S *est cyclique si* S *vérifie de plus :*

$$\forall \delta \in S :\ \#(\mathcal{V}^*(\delta) \cap S) = 2\ .$$

Pour tout complexe bidimensionnel S, *on notera*

$$Extrem(S) = \{\delta \in S :\ \#(\mathcal{V}^*(\delta) \cap S) = 1\}$$

l'ensemble de ses extrémités. Le graphe $G = (T, A)$ *dont le support* T *est l'ensemble des centres des cubes de* S *et dont les arêtes sont définies par*

$$\{x, y\} \in A \iff \mathbf{d}(x, y) = 1$$

sera appelé le graphe canonique associé à S.

Le corollaire suivant vient immédiatement, et dans le cas d'un complexe connexe, vient confirmer l'intuition qu'on peut avoir pour les notions de linéarité, cyclicité et d'extrémités.

▷ **COROLLAIRE 2.1.11** (STRUCTURE D'UN GRAPHE CANONIQUE)

Soit S un complexe dyadique bidimensionnel et $G = (T, A)$ son graphe canonique associé. On a alors :

$$\begin{aligned} S \text{ connexe} &\iff G \text{ connexe ;} \\ S \text{ linéaire} &\iff G \text{ linéaire ;} \\ S \text{ linéaire cyclique} &\iff G \text{ linéaire cyclique ;} \\ S \text{ linéaire non cyclique} &\implies \#Extrem(S) = 2 \text{ ;} \\ S \text{ linéaire cyclique} &\implies Extrem(S) = \emptyset \text{ .} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION

Soient $(\alpha, \beta) \in S^2$ et $(x, y) \in T^2$ leurs deux centres. On constate immédiatement l'équivalence suivante :

$$\{x, y\} \in A \iff \alpha \in \mathcal{V}^*(\beta) \iff \beta \in \mathcal{V}^*(\alpha) \text{ .}$$

Ceci démontre effectivement les trois premiers points du corollaire (pour les implications gauches des 2ème et 3ème points, il suffit en plus de constater qu'il ne peut y avoir de 3-cycles dans le graphe canonique d'un complexe dyadique). Les deux derniers points sont quant à eux évidents puisque par définition un complexe linéaire étant connexe, il possède donc aucune ou deux extrémités. □

De façon à simplifier les énoncés par la suite, introduisons une notion pour désigner des complexes dyadiques bidimensionnels composés de sous-complexes linéaires en forme de sillons qui ne peuvent se rencontrer qu'en leurs extrémités.

▷ **DÉFINITION 2.1.12** (COMPLEXE SULCIFORME)

Soit S un complexe dyadique bidimensionnel. On dira que S est un complexe quasi-sulciforme s'il existe une partition $(S_i)_i$ de S en sous-complexes linéaires ou réduits à un cube, et n'ayant pas de faces communes sur leur frontière hors de leurs extrémités, autrement dit s'il existe une famille S_i vérifiant :

- ◇ $S = \bigsqcup_i S_i$;
- ◇ $\forall i$: S_i *est linéaire ou réduit à un seul cube ;*
- ◇ $\forall i, j : i \neq j \implies \mathcal{F}_\partial(S_i \setminus Extrem(S_i)) \cap \mathcal{F}_\partial(S_j \setminus Extrem(S_j)) = \emptyset$.

Dans ce cas, on dira que les complexes S_i sont des sillons *de S.*

Si de plus les S_i n'ont aucune face commune (extrémités comprises), autrement dit si

$$\forall i, j : \ i \neq j \implies \mathcal{F}_\partial(S_i) \cap \mathcal{F}_\partial(S_j) = \emptyset$$

alors on dira que S est sulciforme. Dans ce cas, le découpage de S en complexes linéaires est unique (car tout cube d'un complexe linéaire a au moins une face en commun avec un autre cube). Si tous les sillons de S sont cycliques, on dira que S est sulciforme en cycles.

Étant donné un complexe dyadique 4×4-groupé, le lemme suivant indique la possibilité d'y creuser des sillons (le complexe appelé T), de sorte que les cubes qui restent

dans le complémentaire et formant leur «talus» (les complexes appelés U_1 et U_2) composent eux aussi des sillons, éventuellement deux fois plus larges, mais qui ne peuvent se rencontrer qu'au niveau de l'une de leurs extrémités.

▷ **Lemme 2.1.13** (Lemme du laboureur)

Soit S un complexe dyadique bidimensionnel 4×4-groupé. On peut alors construire une partition de S par trois sous-complexes disjoints (voir la figure 8) T, U_1 et U_2 tels que :

- ◇ $S = T \sqcup U_1 \sqcup U_2$;
- ◇ *T est sulciforme en cycles et $\mathcal{F}_\partial(S) \subset \mathcal{F}_\partial(T)$, c'est à dire que les faces de la frontière de S sont des faces de la frontière de T ;*
- ◇ *U_1 est sulciforme ;*
- ◇ *U_2 est la 2×2-subdivision d'un complexe quasi-sulciforme U_2' ;*
- ◇ $\forall \delta_1 \in U_1, \forall \delta_2 \in U_2' \setminus Extrem(U_2') : \ \delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset$, *c'est à dire que seules les extrémités des sillons de U_2' peuvent toucher des cubes de U_1.*

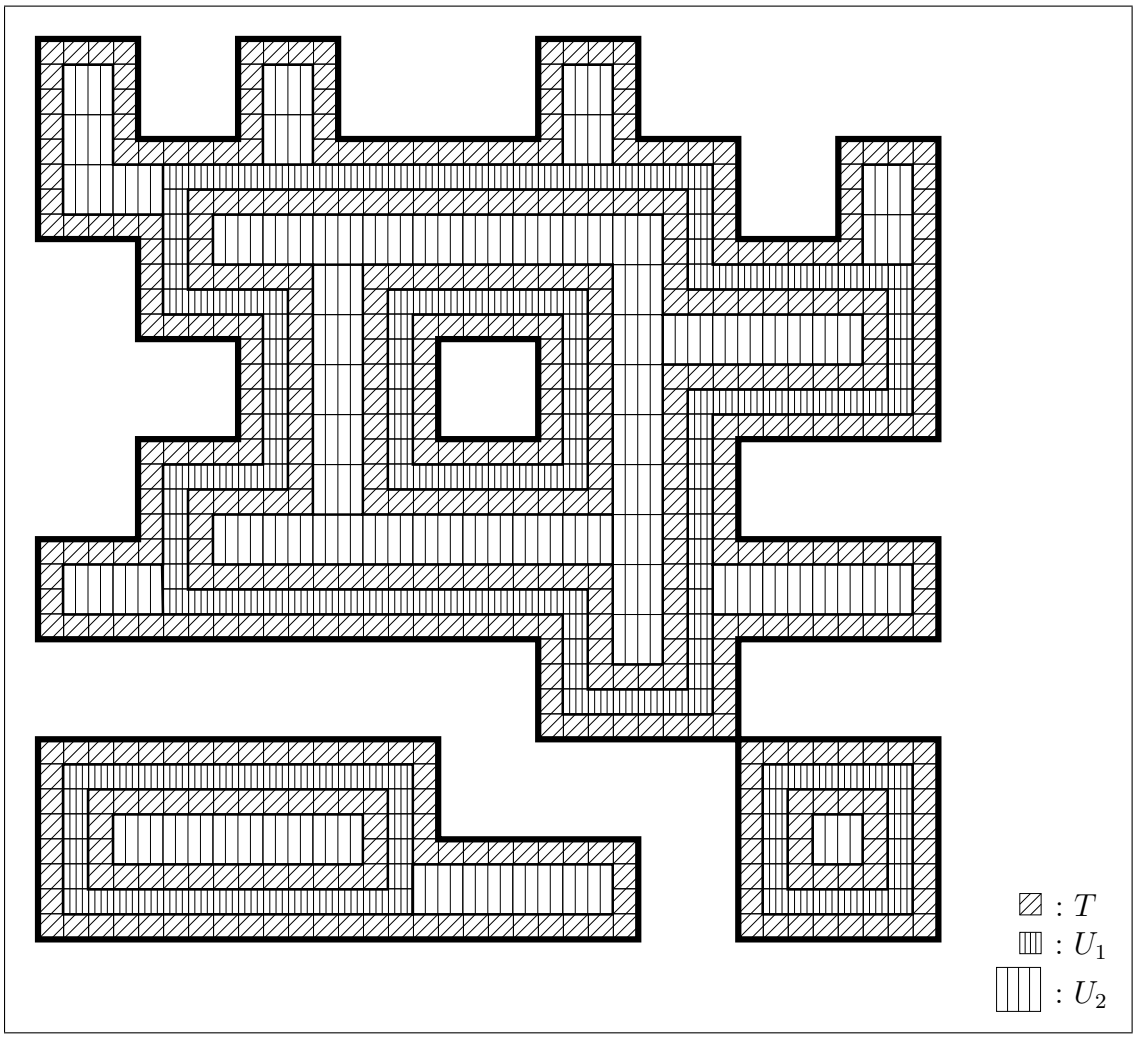


Figure 8 – Sillons bidimensionnels.

DÉMONSTRATION

On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on suppose que l'on dispose d'un complexe dyadique unitaire S 4×4-groupé.

Notons $\mathbb{D}^2$ l'ensemble des cubes dyadiques bidimensionnels unitaires (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$), les ensembles finis de $\mathcal{P}(\mathbb{D}^2)$ forment l'ensemble des complexes dyadiques unitaires par rapport à cette base. On notera $\mathfrak{D}$ l'application qui enlève à un complexe dyadique les cubes situés sur sa frontière :

$$\mathfrak{D} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\mathbb{D}^2) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{D}^2) \\ \qquad T \longmapsto \mathfrak{D}(T) = T \setminus \{\delta \in T :\ \#(\mathcal{V}(\delta) \cap T) < 9\} \ . \end{array} \right.$$

On définit alors la suite (S_n) de complexes :

$$\left\{ \begin{array}{c} S_0 = S \\ S_{n+1} = \mathfrak{D}(S_n) \ . \end{array} \right.$$

Notons que pour tout complexe T, $\#\mathfrak{D}(T) < \#T$, donc qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geq N :\ S_n = \emptyset$.

On va chercher dans un premier temps à montrer que

$$\forall T \in \mathcal{P}(\mathbb{D}^2) :\ T \text{ est un complexe } 4\times 4\text{-groupé} \Rightarrow \mathfrak{D}^2(T) \text{ est } 4\times 4\text{-groupé} \ .$$

Remarquons d'abord que puisque $\mathfrak{D}(T)$ est défini à partir du 1-voisinage de chacun des cubes de T, si $T \in \mathcal{P}(\mathbb{D}^2)$, alors pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, la restriction de $\mathfrak{D}(T)$ au carré $[p,q]^2$ (c'est à dire le sous-complexe $\mathfrak{D}(T)|_{[p,q]^2} = \{\delta \in \mathfrak{D}(T) :\ \overset{\circ}{\delta} \cap [p,q]^2 \neq \emptyset\}$,
page 81* voir la définition 2.2.16*) est connue à partir de la restriction de T à $[p-1, q+1]^2$:

$$\mathfrak{D}(T)|_{[p,q]^2} = \mathfrak{D}\left(T|_{[p-1,q+1]^2}\right) \ .$$

Par conséquent si l'on connaît $T|_{[0,12]^2}$ alors on peut calculer $\mathfrak{D}^2(T)|_{[2,10]^2}$. Dés lors, si l'on dispose d'une méthode pour calculer $\mathfrak{D}^2(T|_{[0,12]^2})$ pour tous les complexes T 4×4-groupés possibles (par rapport à l'origine $(0,0)$) tels que $\mathcal{U}(T) \subset [0,12]^2$, et vérifier que le sous-complexe obtenu restreint à $[2,10]^2$ est lui-même 4×4-groupé (par rapport à l'origine $(2,2)$), ceci suffira à prouver que $\mathfrak{D}^2$ conserve la propriété de 4×4-groupement.

Dans un second temps, définissons pour $n \geq 0$:

$$T_n = S_n \setminus S_{n+1} \, ; \qquad , \qquad T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_{2n} \qquad \text{et} \qquad U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_{2n+1} \ .$$

Si l'on prouve que pour tout complexe S 4×4-groupé par rapport à l'origine $(0,0)$, les cubes de la différence ensembliste $S \setminus \mathfrak{D}(S)$ ont chacun deux voisins tangents — ceci peut se faire autour du carré central $[4,8]^2$, puisque S est 4×4-groupé — autrement dit si :

$$\forall \delta \in (S \setminus \mathfrak{D}(S))|_{[4,8]^2} :\ \#(\mathcal{V}^*(\delta \cap (S \setminus \mathfrak{D}(S))|_{[3,9]^2}) = 2$$

alors on aura aussi démontré que T est sulciforme en cycles.

Il suffira pour conclure d'extraire de U deux sous-complexes U_1 et U_2 qui justifient le lemme. Pour cela, on donnera aussi un algorithme qui permet de dresser la liste de toutes les configurations possibles de $(\mathfrak{D}(S) \setminus \mathfrak{D}^2(S))|_{[3,9]^2}$ à une isométrie laissant le carré $[3,9]^2$ invariant. On discutera ensuite des différents cas trouvés, et de la façon d'extraire des sous-complexes U_1 et U_2 vérifiant les propriétés annoncées, ce découpage pouvant être déterminé localement par pavage.

Les algorithmes et le programme en C, ainsi que la fin de la preuve sont donnés en annexe. □

Pour alléger les énoncés à venir, on va généraliser la notion de sillons à des complexes non dyadiques en définissant la notion de *canalisation*.

▷ **Définition 2.1.14** (Canalisation)

Soient O un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, S un complexe $n-1$-dimensionnel, $\mathcal{G}$ une famille de graphes linéaires ou réduits à un seul sommet et $\epsilon > 0$. On dira que le couple $(S, \mathcal{G})$ est une ϵ-canalisation de O si $\partial O = \mathcal{U}(S)$ et si pour toute composante connexe Ω de O on peut trouver un sous-complexe Σ de S et un graphe $G = (T, A)$ de $\mathcal{G}$ vérifiant :

- ◇ *$T \subset \Omega$;*
- ◇ *$\partial\Omega = \mathcal{U}(\Sigma)$;*
- ◇ *Σ est ϵ-tubulaire par rapport à Ω et G.*

On peut par exemple vérifier sans problème que les faces de la frontière d'un complexe sulciforme et les graphes canoniques de ses sillons forment une canalisation.

On va encore établir un dernier corollaire qui va clore notre étude des complexes dyadiques bidimensionnels. Il sera utilisé dans le cadre de la démonstration du théorème de fusion en dimension $n > 2$.

▷ **Corollaire 2.1.15** (Canalisations complémentaires bidimensionnelles)

Soient S_1 et S_2 deux complexes bidimensionnels dyadiques unitaires, tels que S_2 soit 28×28-groupé, et qu'une base canonique de S_1 soit l'image de celle de S_2 par une rotation affine d'angle θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

Il existe deux constantes $\theta_{\min} < \theta_{\max}$ de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, indépendantes de S_1 et S_2 telles que si $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, et S_2 est situé à distance au moins 8 de S_1 :

$$\mathbf{d}_{\max}(\mathcal{U}(S_1), \mathcal{U}(S_2)) > 8\,;$$

alors il est alors possible de construire :

- ◇ *un ouvert O tel que $\mathcal{U}(S_2) \subset O$ et $\mathbf{d}_{\max}(\mathcal{U}(S_1), O) \geq 1$;*
- ◇ *un entier $p > 1$ ne dépendant pas de S_1 et S_2 et un complexe T_1 dyadique de pas $\frac{1}{p}$ dans la même base que S_1 (on notera $O_1 = \overset{\circ}{\mathcal{U}}(T_1)$) ;*
- ◇ *un sous-complexe T_2 7×7-groupé de S_2 tel que $\mathcal{F}_\partial(S_2) \subset \mathcal{F}_\partial(T_2)$ (on notera $O_2 = \overset{\circ}{\mathcal{U}}(T_2)$) ;*
- ◇ *un complexe unidimensionnel Σ «placé à ϵ-près» (voir plus bas) ;*
- ◇ *trois familles $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_3$ de graphes linéaires ou réduits à un sommet ;*

vérifiant les conditions suivantes (voir la figure 9) :

(1) *$\overline{O_1} \cap \overline{O_2} = \emptyset$ et $O_1 \cup O_2 \subset O$;*

(2) *$\mathcal{G}_1$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(T_1)$ forment une canalisation de $O \backslash \overline{O_1}$;*

(3) *$\mathcal{G}_2$ et un sous-complexe de $\Sigma \cup \mathcal{F}_\partial(T_2)$ forment une canalisation de $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(S_2) \setminus (\overline{O_2} \cup \mathcal{U}(\Sigma))$;*

(4) *$\mathcal{G}_3$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(T_1 \cup T_2)$ forment une canalisation de $O \setminus \overline{(O_1 \cup O_2)}$;*

(5) *il existe des constantes universelles (ne dépendant pas de S_1 et S_2) telles que les régularités extrêmes de toutes les suspension tubulaires des canalisations mentionnées ci-dessus soient comparables aux régularités de S_1 et de S_2.*

Par «placé à ϵ près» on entend qu'il existe une constante $\epsilon > 0$ ne dépendant pas de S_1 et S_2, telle que pour tout segment $[x, y] \in \Sigma$, l'une de ses extrémités peut être déplacée à l'intérieur d'une boule de rayon ϵ sans que cela change quoi que ce soit aux cinq points exprimés plus haut.

DÉMONSTRATION

Appliquons d'abord le lemme 2.1.13 au 7×7-groupement de S_2 (qui est lui-même 4×4-groupé car S_2 est 28×28-groupé par hypothèse) : on obtient les trois sous-complexes T, U_1 et U_2 annoncés dans ce lemme. On notera $\mathcal{G}$ la famille des graphes canoniques associés aux sillons de T (ce sont des graphes linéaires cycliques, car T est sulciforme en cycles), et on définit T_2 comme la 7×7-subdivision de T (T_2 est bien un sous-complexe de S_2 car T est un sous-complexe du 7×7-groupement de S_2), et l'ouvert O_2 par $\overline{O_2} = \mathcal{U}(T_2)$.

Considérons, pour $r \in]0, 1[$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $r < \frac{7}{3}$ et $\frac{1}{p} < \frac{7}{6\sqrt{2}}$ le complexe $T_1(r, p)$ de cubes dyadiques de pas $\frac{7}{p}$ dans la même base que S_1 et les ouverts O et O_1 définis par :

$$T_1(r,p) = \{\delta :\ \mathbf{d}(\delta,\mathcal{U}(T_2)) < 7 \text{ et } \mathbf{d}(\delta,\mathcal{U}(T_2)) > r\}\,;$$

$$\overline{O} = \mathcal{U}(\{\delta :\ \mathbf{d}(\delta,\mathcal{U}(S_2)) < 7\})\,;$$

$$\overline{O_1} = \mathcal{U}(T_1(r,p))\ .$$

Soit Ω une composante connexe de $O \setminus \overline{(O_1(r,p) \cup O_2)}$: d'après les conditions sur r et p, sa frontière a exactement deux composantes connexes, l'une portée par des faces de la frontière de $T_1(r, p)$, l'autre par des faces de la frontière de T (on rappelle que T est le 7×7-groupement de T_2). Notons respectivement t_1 et t_2 les complexes composés de ces faces : $t_1 \subset \mathcal{F}_\partial(T_1(r, p))$ et $t_2 \subset \mathcal{F}_\partial(T)$.

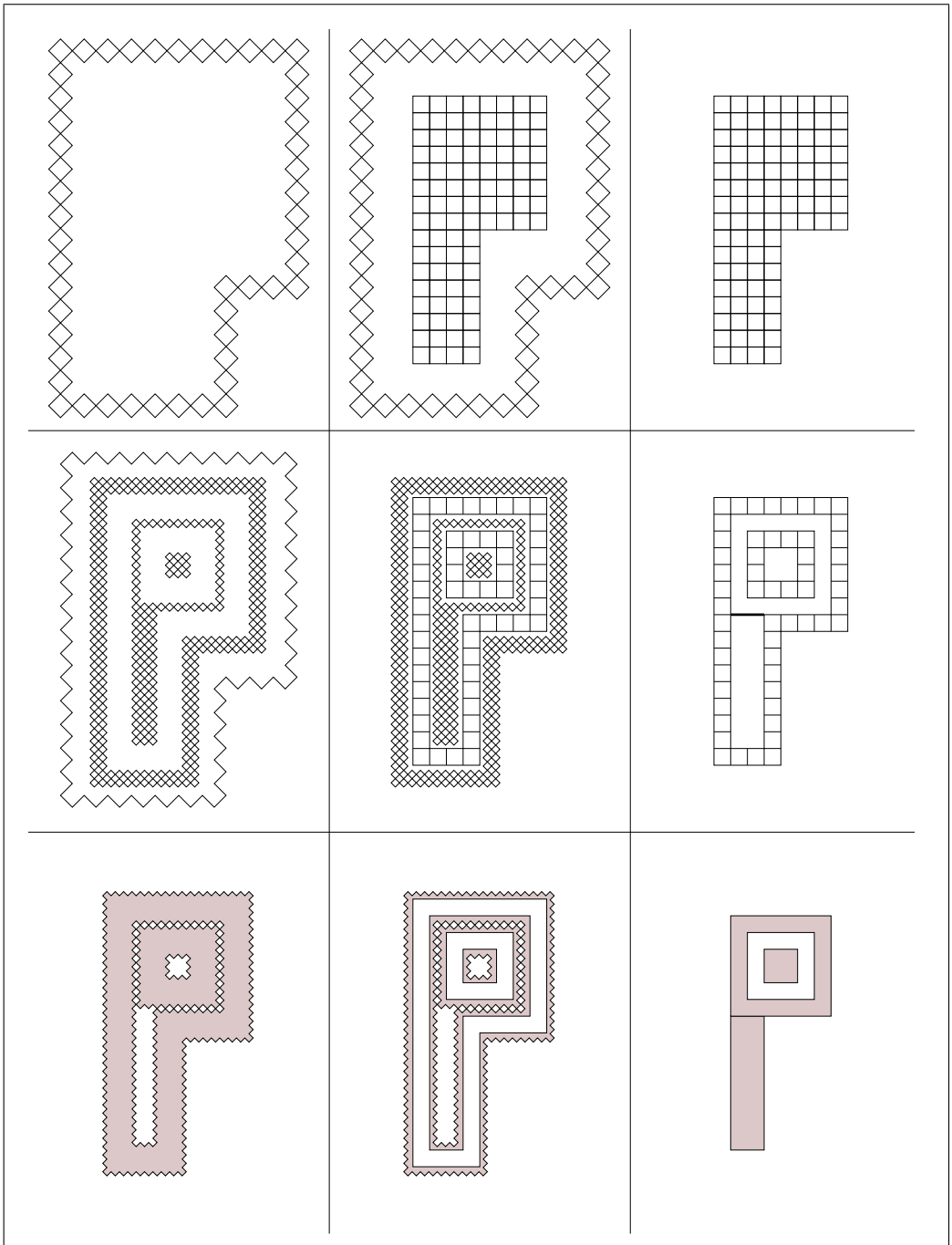
Utilisons à présent ce qu'on a vu dans la démonstration du théorème de fusion en dimension 2 : il est possible de choisir $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ de façon à ce qu'il soit possible de prendre $v > \frac{1}{2} + \frac{1}{2\tan\theta_{\min}} \in]1, 2[$ pour que tout complexe à distance au moins $7v$ et de même base que S_1, suffisamment subdivisé, puisse être complété pour former avec t_2 et les faces de sa frontière en «vis-à-vis» une suspension tubulaire par rapport au graphe utilisé dans la démonstration. On peut prendre $r = \frac{13}{6}$, ce qui nous assure :

$$r > 2 > 7v \qquad \text{et} \qquad r < \frac{7}{3}\ .$$

On choisira par ailleurs p tel que ce nombre de subdivision soit suffisant (à la fois pour que $\frac{1}{p} < \frac{7}{6\sqrt{2}}$, et pour pouvoir faire la même construction que dans la démonstration du lemme 2.1.9*), et on notera T_1 le complexe obtenu à partir de $T_1(p, r)$ pour les valeurs correspondantes, auquel on a éventuellement ajouté les cubes supplémentaires nécessaires à la construction du tube. Ceci termine donc la démonstration du 4ème point du corollaire (en notant $\mathcal{G}_3$ la famille des graphes utilisés pour les différentes composantes connexes Ω possibles).

page 66*

Considérons maintenant les graphes de $\mathcal{G}$ et subdivisons-les naturellement sept fois (en rajoutant cinq sommets uniformément répartis sur chaque arête). Les graphes obtenus sont toujours linéaires cycliques, notons $\mathcal{G}_2$ la famille qu'ils composent. Soit



De gauche à droite, de bas en haut :
◇ S_1, $S_1 \cup S_2$ et S_2 ;
◇ $T_1 \cup \mathcal{F}_\partial(S_1)$, $T_1 \cup T_2$ et $T_2 \cup \Sigma$;
◇ en grisé les canalisations de $O \setminus \overline{O_1}$, $O \setminus (\overline{O_1} \cup \overline{O_2})$ et $\mathcal{U}(\overset{\circ}{S_2}) \setminus O_2$.
Pour améliorer la lisibilité du dessin, on n'a pas respecté les échelles (en particulier S_2 n'est pas 28×28-groupé).

FIGURE 9 – Exemple de canalisations complémentaires bidimensionnelles.

Ω une composante connexe de $O \setminus \overline{O_1}$: par construction sa frontière est portée par un sous-complexe s de $\mathcal{F}_\partial(T_1)$, et il existe un graphe $g \in \mathcal{G}_1$ dont les sommets sont dans Ω. En fait, ce sous-complexe est formé par l'union des sous-complexes qui interviennent dans les suspensions tubulaires des composantes connexes de $O \setminus \overline{(O_2 \cup O_1(r,p))}$ (ceux qu'on a appelés t_1 dans le cas précédant), et les arêtes du graphe g sont situés à distance 7 d'une arête parallèle des graphes du cas précédant, à l'intérieur de $\mathcal{U}(S_1)$. Il est alors facile de constater que puisque l'on a pu réaliser une suspension tubulaire avec t_1 dans le cas précédant, on peut aussi le faire avec s avec des constantes uniformes bornant la régularité optimale. Ceci termine alors la démonstration du 2ème point du corollaire.

Revenons à présent à la construction qui intervient dans la démonstration du lemme du laboureur (qui figure en annexe) : on a découpé le complexe $T \setminus \bigcup_{t \in \mathcal{T}_1} t$ avec des segments de longueur 2 longeant un 2×2 cube δ de U_2', extrémal ou isolé ($\#\mathcal{V}^*(\delta) \leq 1$) pour séparer les sillons de U_1 et U_2. On notera Σ le complexe de dimension 1 qui contient tous ces segments : puisque de façon évidente, le complexe formé des faces de la frontière d'un complexe dyadique linéaire est en situation de suspension tubulaire par rapport à son graphe canonique, le 3ème point du corollaire est démontré en prenant pour $\mathcal{G}_2$ la famille des graphes canoniques de U_1 et U_2'. Il est de plus tout à fait possible de découper les segments formant Σ (par exemple en leur milieu), et il est clair qu'on peut donner $\epsilon > 0$ ne dépendant pas de S_1 et S_2 tel qu'on puisse déplacer ces points à l'intérieur de boules de rayon ϵ sans que cela ne change l'existence de ces suspensions tubulaires.

Tous les autres points du corollaire sont alors vérifiés par construction (l'existence de constantes sur les régularités extrêmes des suspensions tubulaires ayant été démontrées avec le théorème de fusion en dimension 2 pour Σ fixé). De plus, en prenant ϵ assez petit, on peut trouver des constantes uniformes ne dépendant pas du choix de Σ à ϵ près. □

2.2 Fusion après rotation

Notre objectif est de démontrer le théorème de fusion de complexes dyadiques par récurrence sur la dimension n dans le cas d'une rotation planaire : en découpant les deux complexes à faire fusionner en «tranches» d'épaisseur 1 et parallèles au plan de la rotation, on fera la fusion sur les portions planaires des frontières de la tranche en utilisant l'hypothèse de récurrence pour construire des «couvercles», puis d'exhiber des graphes linéaires (en dimension 2) à l'intérieur des tranches pour faire une suspension tubulaire remplissant les «boîtes» ainsi formée, et ainsi remplir tout l'espace entre les deux complexes. Le problème est qu'en dimension n, contrairement à la dimension 2, les faces de la frontière des deux complexes en «vis-à-vis» peuvent être très éloignées les unes des autres (en particulier si le complexe central a de larges morceaux de frontière formés de cubes alignés parallèlement au plan de la rotation). On n'aurait alors plus de borne sur les régularités de ces suspensions tubulaires, car la distance des points et des arêtes du graphe au tube ne serait plus majorée indépendamment des complexes à faire fusionner.

Pour contourner le problème on se propose de généraliser le corollaire des sillons alternés bidimensionnels pour montrer qu'il est possible de creuser des canalisations complémentaires dans les deux complexes, de façon à ce qu'en les «encastrant» l'une

dans l'autre, on dispose d'une borne supérieure à la distance séparant les faces en vis-à-vis et perpendiculaires au plan de rotation des deux complexes.

Définissons à présent la notion de restriction d'un complexe à un sous-espace affine, qui va nous être commode pour énoncer les lemmes à venir.

▷ **Définition 2.2.16** (Restriction d'un complexe à une sous-partie)

Soit S un complexe n-dimensionnel et A une partie de $\mathbb{R}^n$, on définit alors la restriction de S à A comme l'ensemble des intersections avec A des polyèdres de S dont l'intérieur est non disjoint de A :

$$S|_A = \{\delta \cap A : \ \delta \in S \text{ et } \overset{\circ}{\delta} \cap A \neq \emptyset\} \ .$$

On peut démontrer que lorsque A est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces affines, cette restriction est aussi un complexe lorsqu'elle est non vide. On ne le fera pas car on se contentera d'utiliser cette propriété dans des cas où elle est évidente.

Réciproquement, nous allons utiliser des suspensions tubulaires bidimensionnelles pour exhiber des suspensions n-dimensionnelles par rapport à un produit cartésien du tube bidimensionnel, flanqué de «couvercles» orthogonaux. Le lemme suivant permet d'évaluer les régularités extrêmes obtenues lors de cette opération.

▷ **Lemme 2.2.17** (Suspension tubulaire bidimensionnelle et produit cartésien)

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en situation de suspension ϵ-tubulaire par rapport à un complexe unidimensionnel S et un graphe G. Pour $r \in \mathbb{R}^{+*}$ on notera S' le complexe obtenu par produit cartésien des cubes de S par $[-r,r]^{n-2}$, et O' le produit cartésien de O par $]-r,r[^{n-2}$:

$$S' = \{\delta \times [-r,r]^{n-2} : \ \delta \in S\} \, ;$$

$$O' = O \times]-r,r[^{n-2} \ .$$

On suppose qu'il existe une famille de $2(n-2)$ complexes $n-1$-dimensionnels $T_1, \ldots, T_{2(n-2)}$ de $\mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que :

- ◇ $\forall k \in \{0, \ldots, n-3\} : \mathcal{U}(T_{2k+1}) = \overline{O} \times [-r,r]^k \times \{-r\} \times [-r,r]^{n-3-k}$;
- ◇ $\forall k \in \{0, \ldots, n-3\} : \mathcal{U}(T_{2k+2}) = \overline{O} \times [-r,r]^k \times \{r\} \times [-r,r]^{n-3-k}$.

Alors $T' = S' \cup \bigcup_k T_k$ est un complexe en situation de suspension ϵ-tubulaire par rapport à O' et G. De plus, les constantes $\alpha_\pm$, $\beta_\pm$, $\gamma_\pm$ et η intervenant dans le lemme 1.3.41 ne dépendent que des constantes associées à la suspension tubulaire bidimensionnelle, et des rapports $\dfrac{\underline{\mathcal{R}}(T)}{r}$ et $\dfrac{\overline{\mathcal{R}}(T)}{r}$.*

* page 54

DÉMONSTRATION

Ce lemme est évident lorsque l'on considère que les cubes qui sont dans les T_k sont tous dans des hyperplans parallèles aux arêtes du graphe. Dès lors les hypothèses de suspension tubulaire sont automatiquement vérifiées puisque les hyperplans de découpage tubulaire n-dimensionnel sont le produit cartésien de ceux de la suspension bidimensionnelle par $\mathbb{R}^{n-2}$: ils sont perpendiculaires aux hyperplans contenant les cubes des T_k.

page 54* Les bornes sur les constantes intervenant dans les hypothèses du lemme 1.3.41* s'obtiennent aussi immédiatement en fonction des rapports mentionnés. □

Poursuivons à présent notre construction de complexes «imbriqués» en généralisant le corollaire des canalisations complémentaires en dimension $n \geq 3$. L'idée ici est de considérer des complexes dyadiques dans des bases ayant subi une rotation planaire l'une par rapport à l'autre, parallèlement à 2 vecteurs de ces bases. Dans ce cas, le lemme suivant indique qu'il est possible de construire des canalisations à chaque «étage» parallèlement au 2-plan de la rotation, tout en restant suffisamment loin du complexe «extérieur» pour se laisser la place de construire des raccordements.

▷ **LEMME 2.2.18** (CANALISATIONS COMPLÉMENTAIRES GÉNÉRALISÉES EN DIMENSION n)

Soient S_1 et S_2 deux complexes dyadiques n-dimensionnels ($n > 2$) unitaires, tels qu'une base canonique de S_1 soit l'image de celle de S_2 par une rotation affine d'angle $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ dans le 2-plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}^{n-2}$, et que S_2 soit 28^n-groupé. Pour simplifier on supposera qu'une base canonique de S_2 est celle de $\mathbb{R}^n$, et pour $z = (z_3, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^{n-2}$ on définit le 2-plan $H_z = z + \mathbb{R}^2 \times \left\{\frac{1}{2}\right\}^{n-2}$.

Il existe deux constante $\theta_{\min} < \theta_{\max}$ de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, indépendantes de S_1 et S_2 telles que si $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, et S_2 est situé à distance au moins 8 de S_1 :

$$\mathbf{d}(\mathcal{U}(S_1), \mathcal{U}(S_2)) > 8\,;$$

alors il est possible de construire :

- ◇ *un ouvert O tel que $\mathcal{U}(S_2) \subset O$ et $\mathbf{d}_{\max}(\mathcal{U}(S_1), O) \geq 1$;*
- ◇ *un entier $p > 1$ ne dépendant que de n et un complexe T_1 dyadique de pas $\frac{1}{p}$ dans la même base que S_1 (on notera $O_1 = \overset{\circ}{\mathcal{U}}(T_1)$) ;*
- ◇ *un sous-complexe T_2 de S_2 (on notera $O_2 = \overset{\circ}{\mathcal{U}}(T_2)$) ;*
- ◇ *un complexe unidimensionnel Σ_1 «placé à ϵ-près» (voir plus bas) ;*
- ◇ *une famille $\mathcal{G}$ de graphes linéaires ou réduits à un seul sommet ;*

vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\overline{O_1} \cap \overline{O_2} = \emptyset$ *et* $O_1 \cup O_2 \subset O$;

(2) T_1 *est* $1 \times 1 \times p^{n-2}$*-groupé ;*

(3) *pour tout $z \in \mathbb{Z}^{n-2}$ tel que $O \cap H_z \neq \emptyset$, il existe un sous-complexe de $(\mathcal{F}_\partial(T_1 \cup T_2) \cup \Sigma)|_{H_z}$ et une sous-famille de graphes de $\mathcal{G}$ formant une canalisation de $(O \cap H_z) \setminus (O_1 \cup O_2 \cup \mathcal{U}(\Sigma))$;*

(4) *il existe des constantes universelles (ne dépendant que de n) telles que les régularités extrêmes de toutes les suspension tubulaires mentionnées ci-dessus soient comparables aux régularités de S_1 et de S_2 ;*

Par «placé à ϵ près» on entend qu'il existe une constante $\epsilon > 0$ ne dé-

pendant pas de S_1 et S_2, telle que pour tout segment $[x, y] \in \Sigma$, l'une de ses extrémités peut être déplacée à l'intérieur d'une boule 2-dimensionnelle parallèle à H_z et de rayon ϵ sans que cela change quoi que ce soit aux quatre points exprimés plus haut.

DÉMONSTRATION

Posons $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ égales aux constantes du corollaire 2.1.15* et soient S_1 et S_2 deux complexes dyadiques vérifiant les hypothèses du lemme 2.2.18. On va construire T_1 et T_2 étage par étage, en découpant S_1 et S_2 par des tranches I_z (pour $z \in (28\mathbb{Z})^{n-2}$) d'épaisseur 28 autour de H_z :

*page 77

$$I_z = \mathbb{R}^2 \times (z + [0, 28]^{n-2}) \ .$$

Fixons $z \in (28\mathbb{Z})^{n-2}$ tel que $S_2|_{H_z} \neq \emptyset$ et notons $U_1, \ldots, U_{2(n-2)}$ les morceaux de frontière plane de I_z de la forme (pour $k \in \{1, \ldots, n-2\}$) :

$$U_{2k-1} = \mathbb{R}^2 \times [0, 28]^k \times \{0\} \times [0, 28]^{n-3-k} ;$$

$$U_{2k} = \mathbb{R}^2 \times [0, 28]^k \times \{28\} \times [0, 28]^{n-3-k} \ .$$

Notons aussi $U_1^*, \ldots, U_{2(n-2)}^*$ les «milieux» de ces morceaux (il s'agit de deux 2-plans parallèles an plan de la rotation) :

$$U_{2k-1}^* = \mathbb{R}^2 \times \{14\}^k \times \{0\} \times \{14\}^{n-3-k} ;$$

$$U_{2k}^* = \mathbb{R}^2 \times \{14\}^k \times \{28\} \times \{14\}^{n-3-k} \ .$$

Considérons (pour $1 \leq j \leq 2(n-2)$) les restrictions $(\mathcal{F}_\partial(S_1))|_{U_j^*}$ et $(\mathcal{F}_\partial(S_2))|_{U_j^*}$: ce sont deux complexes dyadiques bidimensionnels unitaires, on les notera respectivement $S_1(j)$ et $S_2(j)$:

$$S_1(j) = (\mathcal{F}_\partial(S_1))|_{U_j^*} \quad \text{et} \quad S_2(j) = (\mathcal{F}_\partial(S_2))|_{U_j^*} \ .$$

En observant que les U_j^* sont des 2-plan affines parallèles, on considérera les projection respectives $S_1^*(j)$ et $S_2^*(j)$ de $S_1(j)$ et $S_2(j)$ sur le 2-plan vectoriel parallèle aux U_j^*, qu'on identifiera à $\mathbb{R}^2$ pour ne pas alourdir les notations. Considérons la famille de complexes bidimensionnels de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathfrak{S}_2 = \left\{ t = \bigcap_{l \in K} S_2^*(l) \setminus \bigcup_{l \notin K} S_2^*(l) : \ K \subsetneqq \{1, \ldots, 2n-4\} \quad \text{et} \quad t \neq \emptyset \right\} \ .$$

Par construction les complexes de $\mathfrak{S}_2$ sont dyadiques unitaires, bidimensionnels dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, 28×28-groupés, disjoints deux à deux et pour tout $j \in \{1, \ldots, 2(n-2)\}$, $S_2^*(j)$ est un complexe formé par une union disjointe de certains complexes de $\mathfrak{S}_2$:

$$\forall j \in \{1, \ldots, 2(n-2)\} : \ \exists \mathfrak{S}_2(j) \subset \mathfrak{S}_2, \ S_2^*(j) = \bigsqcup_{t \in \mathfrak{S}_2(j)} t \ .$$

Pour j fixé, soit $\Sigma_2 \in \mathfrak{S}_2(j)$ et posons $\Sigma_1 = S_1^*(j)$; appliquons alors le corollaire 2.1.15 des canalisations alternées bidimensionnelles à Σ_1 et Σ_2 (respectivement notés S_1 et S_2 dans l'énoncé du corollaire) : on obtient les trois complexes $\Theta_1(j, \Sigma_2)$, $\Theta_2(j, \Sigma_2)$ et $\Sigma(j, \Sigma_2)$ (respectivement notés T_1, T_2 et Σ dans l'énoncé du corollaire), et les trois familles de graphes $\mathcal{G}_1(j, \Sigma_2)$, $\mathcal{G}_2(j, \Sigma_2)$ et $\mathcal{G}(j, \Sigma_2)$. On va ôter de $\Theta_1(j, \Sigma_2)$ les cubes qui, dans la démonstration du corollaire 2.1.15 forment une couronne autour

de Σ_2, c'est à dire ne garder que ceux qui sont inclus dans l'union des cubes du complexe original Σ_2 (en d'autres termes, on ne garde que ceux qui peuvent «s'insérer» dans les trous qu'on a creusés dans Σ_2 dans la démonstration du corollaire) :

$$\Theta'_1(j,\Sigma_2) = \{\delta \in \Theta_1 :\ \delta \subset \mathcal{U}(\Sigma_2)\}\ .$$

D'après le corollaire, on sait que $\Theta_2(j,\Sigma_2)$ est sulciforme en cycles, et que la construction effectuée préserve les cubes qui touchent la frontière de Θ_2 ($\mathcal{F}_\partial(\Sigma_2) \subset \mathcal{F}_\partial(\Theta_2(j,\Sigma_2))$). Si on considère un sillon cyclique de $\Theta_2(j,\Sigma_2)$ alors d'après le $4^{\text{ème}}$ point du corollaire, il existe un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(\Theta_1(j,\Sigma_2))$ qui est située en «vis-à-vis», à l'intérieur de Σ_2, et dont l'union des polyèdres (ici de dimension 1) forme une courbe fermée de $\mathbb{R}^2$ qui est la frontière d'un ouvert borné. Si on note $\Omega(j,\Sigma_2)$ l'union de tous ces ouverts, alors $\Theta'_1(j,\Sigma_2) \subset \overline{\Omega(j,\Sigma_2)} \subset \mathcal{U}(\Sigma_2)$.

Dans ces conditions, nos complexes vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\Theta_2(j,\Sigma_2)$ est 7×7-groupé (d'après le corollaire en dimension 2) ;

(2) $\mathcal{G}_1(j,\Sigma_2)$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(\Theta_1(j,\Sigma_2))$ forment une canalisation de $\Omega(j,\Sigma_2) \setminus \mathcal{U}(\Theta'_1(j,\Sigma_2))$;

(3) $\mathcal{G}_2(j,\Sigma_2)$ et un sous-complexe de $\Sigma(j,\Sigma_2) \cup \mathcal{F}_\partial(\Theta_2(j,\Sigma_2))$ forment une canalisation de $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(\Sigma_2) \setminus \mathcal{U}(\Theta_2(j,\Sigma_2) \cup \Sigma(j,\Sigma_2))$;

(4) $\mathcal{G}_3(j,\Sigma_2)$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(\Theta'_1(j,\Sigma_2) \cup \Theta_2(j,\Sigma_2))$ forment une canalisation de $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(\Sigma_2) \setminus \mathcal{U}(\Theta'_1(j,\Sigma_2) \cup \Theta_2(j,\Sigma_2))$.

En se rappelant que $\mathfrak{S}_2$ est composée de complexes disjoints, on peut alors définir :

$$\Theta_1(j) = \bigsqcup_{\Sigma_2\in\mathfrak{S}_2(j)} \Theta'_1(j,\Sigma_2) \qquad \Theta_2(j) = \bigsqcup_{\Sigma_2\in\mathfrak{S}_2(j)} \Theta_2(j,\Sigma_2) \qquad \Sigma(j) = \bigsqcup_{\Sigma_2\in\mathfrak{S}_2(j)} \Sigma(j,\Sigma_2)$$

$$\mathcal{G}_1(j) = \bigcup_{\Sigma_2\in\mathfrak{S}_2(j)} \mathcal{G}_1(j,\Sigma_2) \qquad \mathcal{G}_2(j) = \bigcup_{\Sigma_2\in\mathfrak{S}_2(j)} \mathcal{G}_2(j,\Sigma_2) \qquad \mathcal{G}_3(j) = \bigcup_{\Sigma_2\in\mathfrak{S}_2(j)} \mathcal{G}_3(j,\Sigma_2)$$

$$\Omega(j) = \bigcup_{\Sigma_2\in\mathfrak{S}_2(j)} \Omega(j,\Sigma_2)\ .$$

Les trois familles $\Theta_1(j)$, $\Theta_2(j)$ et $\Sigma(j)$ forment bien des complexes car chacun des éléments qui intervient dans les unions qui les définissent est inclus dans un unique $\mathcal{U}(\Sigma_2) \in \mathfrak{S}_2$. Ces ensembles vérifient en plus les propriétés suivantes :

(1) $\Theta_2(j)$ est 7×7-groupé, $\Theta_2(j) \subset S_2^*(j)$, $\mathcal{F}_\partial(S_2^*(j)) \subset \mathcal{F}_\partial(\Theta_2(j))$ et $\Omega(j) \subset \mathcal{U}(S_2^*(j))$;

(2) $\mathcal{G}_1(j)$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(\Theta_1(j))$ forment une canalisation de $\Omega(j) \setminus \mathcal{U}(\Theta_1(j))$;

(3) $\mathcal{G}_2(j)$ et un sous-complexe de $\Sigma(j) \cup \mathcal{F}_\partial(\Theta_2(j))$ forment une canalisation de $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(S_2^*(j)) \setminus \mathcal{U}(\Theta_2(j) \cup \Sigma(j))$;

(4) $\mathcal{G}_3(j)$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(\Theta_1(j) \cup \Theta_2(j))$ forment une canalisation de $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(S_2^*(j)) \setminus \mathcal{U}(\Theta_1(j) \cup \Theta_2(j))$.

Considérons à présent l'ensemble $K(j)$ des frontières communes des sillons des $\Theta_2(j,\Sigma_2)$, lorsque Σ_2 parcourt $\mathfrak{S}_2(j)$:

$$K = \{s = \mathcal{U}(s_1) \cap \mathcal{U}(s_2) :\ \Sigma_2 \in \mathfrak{S}_2(j),\ s \neq \emptyset \text{ et } s_1 \text{ et } s_2 \text{ sillons de } \Theta_2(j,\Sigma_2)\}\ .$$

K est composé de courbes formées de segments parallèles aux vecteurs de la base de S_2^*. Soient p et r les constantes qui interviennent dans la démonstration du corollaire 2.1.15* en dimension 2, et éventuellement en ajoutant 1 à p on s'assurera qu'il est impair ; définissons alors le complexe composé de cubes dyadiques de pas $\frac{1}{p}$ dans la même base que $S_1^*(j)$, situés à distance comprise entre r et 7 de $\mathcal{U}(S_2^*(j))$: *page 77

$$\Theta_1'(j) = \{\delta :\ r < \mathbf{d}_{\max}(\delta, \mathcal{U}(S_2^*(j)) < 7\}\ .$$

Puisque les courbes de K sont incluses dans $\mathcal{U}(S_2^*(j))$, elles ne rencontrent pas $\mathcal{U}(\Theta_1'(j))$. Considérons l'ensemble des extrémités de ces courbes (parmi celles qui ne sont pas fermées) qui ne font partie d'aucune autre courbe de K, et construisons à partir de ces points l'ensemble des segments dont l'autre extrémité est le sommet le plus proche de $\mathcal{U}(S_2^*(j))$: appelons ce nouvel ensemble de segments K'. Ces segments sont d'intérieurs disjoints deux à deux et des courbes de K (car les extrémités des segments formant les courbes de K sont au moins à distance 7 les unes des autres, et situées à distance au plus $r+1<3$ d'un sommet de $S_2^*(j)$), dès lors l'ensemble des segments de K' et ceux formant les courbes de K (éventuellement en les découpant aux endroits où ils se rencontrent) forme un complexe unidimensionnel.

Notons $O(j)$ l'ouvert dont l'adhérence est l'union des cubes dyadiques de pas $\frac{1}{p}$ et à distance au plus 7 de $\mathcal{U}(S_2^*(j))$:

$$\overline{O(j)} = \mathcal{U}(\{\delta :\ \mathbf{d}_{\max}(\delta, \mathcal{U}(S_2^*(j))) < 7\})\ .$$

Par un argument similaire à celui utilisé dans la démonstration du corollaire 2.1.15*, quitte à rajouter/enlever quelques cubes à $\Theta_1'(j)$, on peut trouver une famille $\mathcal{G}$ de graphes linéaires tel qu'elle forme avec le complexe unidimensionnel $K' \cup \mathcal{F}_\partial(\Theta_1'(j)) \cup \mathcal{F}_\partial(S_2^*(j))$ une canalisation de $O(z) \setminus \mathcal{U}(S_2^*(j))$. De plus, si l'on suppose que l'on a subdivisé de façon naturelle les segments de K en morceaux de longueur 1 (on notera K'' ce nouveau complexe) alors par le même argument, il est aussi possible de trouver une famille G' de graphes formant avec un sous-complexe de $K' \cup K'' \cup \mathcal{F}_\partial(\Theta_1'(j))$ une canalisation de $O(j) \setminus (\mathcal{U}(\Theta_1'(j)) \cup \mathcal{U}(K' \cup K''))$. De plus, comme dans la démonstration du corollaire 2.1.15 il est possible de déplacer l'une des extrémités des segments de K' et K'' à l'intérieur d'une boule de rayon ϵ suffisamment petit pour que les régularités extrêmes des suspensions tubulaires restent comparables à celles de S_1^* et S_2^*, avec des constantes uniformes. *page 77

Définissons encore :

$$\Theta_1''(j) = \Theta_1(j) \cup \Theta_1'(j) \qquad \Sigma'(j) = \Sigma(j) \cup K' \cup K''$$
$$\mathcal{G}_1'(j) = \mathcal{G}_1(j) \cup \mathcal{G}' \qquad \mathcal{G}_3'(j) = \mathcal{G}_3(j) \cup \mathcal{G}\ .$$

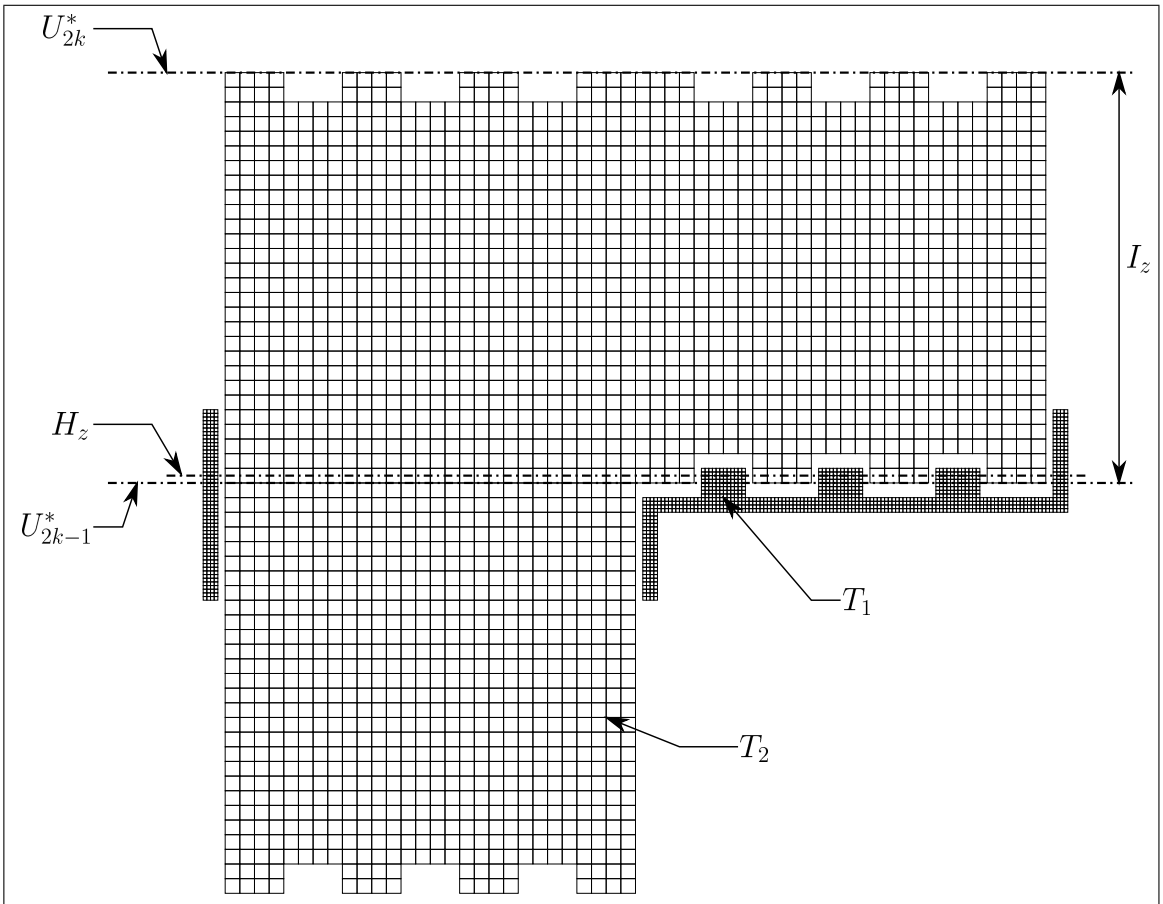
Alors on dispose de deux complexes qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\mathcal{G}_1'(j)$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(\Theta_1''(j)) \cup \Sigma'(j)$ forment une canalisation de $O(j) \setminus (\mathcal{U}(\Theta_1(j)) \cup \mathcal{U}(\Sigma'(j)))$;

(2) $\mathcal{G}_3'(j)$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial(\Theta_1''(j) \cup \Theta_2(j))$ forment une canalisation de $\mathcal{U}(\overset{\circ}{S_2^*}(j)) \setminus \mathcal{U}(\Theta_1''(j) \cup \Theta_2(j))$.

Il est temps à présent d'utiliser toutes ces canalisations bidimensionnelles pour construire T_1 et T_2. On notera cette fois, pour $r_1 < r_2$, $z \in (28\mathbb{Z})^{n-2}$ et $j \in \{1, \dots, 4n-4\}$:

$$V(r_1, r_2, z, j) = \begin{cases} z + [0,28]^k \times [r_1, r_2] \times [0,28]^{n-3-k} & \text{lorsque } j = 2k-1 \\ z + [0,28]^k \times [28-r_2, 28-r_1] \times [0,28]^{n-3-k} & \text{lorsque } j = 2k \end{cases}$$



On a simplifié le dessin en prenant un espace de dimension 1 pour représenter le 2-plan de la rotation (le dessin en dimension 3 n'aurait pas été lisible, puisque les canalisations auraient été cachées par les portions de complexes imbriquées).

FIGURE 10 – Canalisations complémentaires généralisées en dimension n.

c'est à dire, les $\mathbb{R}^2 \times V(r_1, r_2, z, j)$ sont des «tranches» de I_z à distance comprise entre r_1 et r_2 des portions planaires de sa frontière. Commençons par ôter de S_2 l'ensemble des cubes de sa frontière qui ne sont pas dans $\mathcal{U}(\Theta_2(j)) \times V(0, 2, z, j)$ (cela revient à enlever sur une épaisseur de deux cubes, parallèlement à la frontière de I_z, les cubes dont la projection sur $\mathbb{R}^2$ a été enlevée dans le corollaire des canalisations alternées) en posant :

$$t_2(z,j) = \{\delta \in S_2|_{\mathbb{R}^2 \times V(0,2,z,j)} : \ \delta \subset \mathcal{U}(\Theta_2(j)) \times V(0,2,j,z) \text{ ou } \delta \not\subset \mathcal{U}(S_2^*) \times V(0,2,z,j)\} \ .$$

On définira aussi l'ouvert $O(z)$ par :

$$\overline{O(z)} = \bigcup_j \overline{O(j)} \times V(0,1,z,j) \ .$$

Soient $z' \in (28\mathbb{Z})^{n-2}$, et $j' \in \{1, \ldots, 4n-4\}$ et notons S et S' le sous-complexe formé des cubes de S_2 ayant au moins un sommet commun avec ceux de $\mathcal{F}_\partial(S_2)$, restreint respectivement à $V(0,1,z,j)$ et $V(0,1,z',j')$. Dans ces conditions :

$$S|_{V(0,1,z',j')} = S'|_{V(0,1,z,j)} \ .$$

Considérons alors les restrictions de $t_2(z,j)$ à $V(0,1,z',j')$ et $t_2(z',j')$ à $V(0,1,z,j)$: puisque seules les restrictions des cubes ayant un sommet commun avec la frontière de S_2 qui n'avaient pas de sommet commun avec la frontière des S_2^* ont été enlevés à S_2 pour former les $t_2(z,j)$ (d'après le corollaire corollaire 2.1.15*), alors il vient : *page 77

$$S \subset t_2(z,j) \quad \text{et} \quad S' \subset t_2(z',j')$$

et donc

$$t_2(z,j)|_{V(0,1,j',z') \cap V(0,1,j,z)} = t_2(z',j')|_{V(0,1,j',z') \cap V(0,1,j,z)} \ .$$

Puisque $t_2(z,j)$ et $t_2(z',j')$ sont $7 \times 7 \times 2^{n-2}$-groupés, cette relation est aussi vraie avec des couches d'épaisseur 2, et puisque $t_2(z,j)|_{V(0,2,j,z)} = t_2(z,j)$ et $t_2(z',j')|_{V(0,2,j',z')} = t_2(z',j')$ on trouve finalement :

$$t_2(z,j)|_{V(0,2,j',z')} = t_2(z',j')|_{V(0,2,j,z)} \ .$$

On posera alors :

$$T_2(z) = \left(\bigcup_{1 \le j \le 2(n-2)} t_2(z,j) \right) \sqcup S_2|_{\mathbb{R}^2 \times [2,25]^{n-2}}$$

et d'après notre remarque, $T_2(z)$ est un sous-complexe de S_2 tel que $T_2(z)|_{U_j^*}$ est identique à $\Theta_2(j)$ si on identifie U_j^* avec $\mathbb{R}^2$.

Définissons par ailleurs $t_1(z,j)$ comme l'ensemble des cubes dyadiques de pas $\frac{1}{p}$ dans la même base que S_1 et qui sont inclus dans $\mathcal{U}(\Theta_1''(j)) \times V(-1,1,j,z)$:

$$t_1(z,j) = \{\delta : \ \delta \subset \mathcal{U}(\Theta_1''(j)) \times V(-1,1,j,z)\} \ .$$

Soient z' et j' tels que $V(-1,1,j,z) = V(-1,1,j',z')$ et $I_z \neq I_{z'}$ (c'est à dire que I_z et $I_{z'}$ ont pour frontière commune l'un des U_j^* qui est égal à l'un des $U_{j'}^*$). On remarquera alors que déjà, $t_1(s,j)$ est $1 \times 1 \times p^{n-2}$-groupé et que

$$t_1(z,j)|_{V(-1,0,j,z)} = t_1(z',j')|_{V(-1,0,j',z')}$$

puisque l'on a utilisé pour construire ces deux complexes respectivement les restrictions de S_1 et S_2 à U_j^* et $U_{j'}^*$, qui sont égales.

Construisons maintenant $t_1'(z)$ comme l'ensemble des cubes dyadiques de pas $\frac{1}{p}$ dans la même base que S_1, inclus dans $\mathbb{R}^2 \times [1,27]^{n-2}$ et à distance comprise entre r et 7 de S_2 :

$$t_1'(z) = \{\delta \subset \mathbb{R}^2 \times [1,27]^{n-2} :\ r < \mathbf{d}_{\max}(\delta, \mathcal{U}(S_2|_{I_z})) < 7\} \ .$$

De même on définit l'ouvert $O'(z)$ dont l'adhérence est composée des cubes situés à distance au plus 7 :

$$\overline{O'(z)} = \mathcal{U}(\{\delta \subset \mathbb{R}^2 \times [1,27]^{n-2} :\ \mathbf{d}_{\max}(\delta, \mathcal{U}(S_2|_{I_z})) < 7\}) \ .$$

page 77* Par un argument identique à celui utilisé dans la démonstration du corollaire 2.1.15*, on peut montrer qu'il est possible, en ajoutant/supprimant quelques cubes à $t_1'(z)$, de faire des suspensions tubulaires [2] avec les faces en vis-à-vis de $t_1'(z)|_{H_{z'}}$ et $S_2|_{H_{z'}}$ pour tout $z' \in z + \{1,\dots,26\}^{n-2}$; en outre, il est possible de le faire de façon à ce que $t_1'(z)$ soit $1 \times 1 \times p^{n-2}$-groupé (en ajoutant/supprimant des paquets de cubes $1 \times 1 \times p^{n-2}$-groupés). On notera $\mathcal{G}(z)$ l'ensemble des graphes utilisés pour réaliser ces suspensions tubulaires. Pour finir on pose :

$$T_1(z) = \left(\bigsqcup_{1 \le j \le 2(n-2)} t_1(z,j) \right) \cup t_1'(z) \ .$$

Démontrons à présent que $T_1(z)$ et $T_2(z)$ vérifient les propriétés annoncées dans le lemme à l'intérieur de I_z : soit $z' \in [0,27]^{n-2}$, et notons $\nu = \left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^{n-2}$. Deux cas sont possibles :

- ◇ si $z' + \nu \in [2,26]^{n-2}$ alors $T_2(z)|_{H_{z+z'}}$ est égal à $S_2(z)|_{H_{z'}}$, et $T_1(z)|_{H_{z+z'}}$ est égal à $T_1'(z)$ donc on peut utiliser la famille des graphes de $\mathcal{G}(z)$ mentionnée plus haut pour faire une canalisation de $O'(z) \cap H_{z+z'} \setminus \mathcal{U}(T_1(z) \cup T_2(z))$;
- ◇ si $z + z' + \nu \notin [2,26]^{n-2}$ alors notons $z_{\min}$ et $z_{\max}$ respectivement les coordonnées minimale et maximale de z'. Là encore, considérons deux cas possibles :
  - ⋆ si $z_{\min} > 1$ et $z_{\max} < 26$ alors soit j tel que $z + z' + \nu \in V(1,2,j,z)$: on a démontré que $\mathcal{G}_2(j)$ et un sous-complexe de $\Sigma(j) \cup \mathcal{F}_\partial(\Theta_2(j))$ forment une canalisation de $\mathcal{U}(\overset{\circ}{S_2^*}(j)) \setminus \mathcal{U}(\Theta_2(j) \cup \Sigma(j))$. Dès lors en considérant que les graphes de $\mathcal{G}_2(j)$ sont des graphes du 2-plan $H_{s+z'}$, et que le complexe unidimensionnel $\Sigma(j)$ est un complexe du 2-plan $H_{z+z'}$ alors il vient que $\mathcal{G}_2(j)$ et un sous-complexe de $\Sigma(j) \cup \mathcal{F}_\partial(T_2(z)|_{H_{z+z'}})$ forment une canalisation de $\mathcal{U}(\overset{\circ}{S_2}) \cap H_{z+z'} \setminus \mathcal{U}(T_2(z) \cup \Sigma(j))$.
    De plus, par le même argument que dans le cas précédant, $\mathcal{G}(z)$ et un sous-complexe de $\mathcal{F}_\partial((T_1(z) \cup S_2)|_{H_{z+z'}})$ forment une canalisation de $O'(z) \cap H_{z+z'} \setminus \mathcal{U}(T_1(z) \cup S_2)$. Rappelons que $\mathcal{F}_\partial(S_2|_{H_{z+z'}}) \subset \mathcal{F}_\partial(T_2(z)|_{H_{z+z'}})$ et on aura démontré que $\mathcal{G}(z) \cup \mathcal{G}_2(j)$ et un sous-complexe de $\Sigma(j) \cup \mathcal{F}_\partial((T_1(z) \cup T_2(z))|_{H_{z+z'}})$ forment une canalisation de $O'(z) \cap H_{z+z'} \setminus \mathcal{U}(T_1(z) \cup T_2(z))$.
    On notera respectivement $\mathcal{G}'(z)$ et $\Sigma(z)$ l'ensemble de tous les graphes et l'ensemble de tous les complexes unidimensionnels $\Sigma(j)$ utilisés dans ce cas pour faire les canalisations ;

2. Ici intervient le fait qu'on ait supposé p impair, pour que H_z coupe les cubes de $t_1'(z)$ en passant par leur centre, et pas le long de leur frontière.

⋆ si $z_{\min} = 0$ ou si $z_{\max} = 26$ alors soit j tel que $z + z' + \nu \in V(0, 1, j, z)$: on peut refaire une démonstration analogue (cette fois ci en utilisant les graphes $\mathcal{G}'_1(j)$ et $\mathcal{G}'_3(j)$) pour exhiber des canalisations de $O(z) \cap H_{z+z'} \setminus \mathcal{U}(T_1(z) \cup T_2(z))$. Cette fois-ci on notera respectivement $\mathcal{G}''(z)$ et $\Sigma'(z)$ l'ensemble de tous les graphes et l'ensemble de tous les complexes unidimensionnels $\Sigma(j)$ utilisés pour faire ces canalisations.

Il est temps de conclure en posant :

$$\overline{O} = \bigcup_{z \in (28\mathbb{Z})^{n-2}} \overline{O(z)} \cup \overline{O'(z)} \qquad \Sigma = \bigcup_{z \in (28\mathbb{Z})^{n-2}} \Sigma(z) \cup \Sigma'(z)$$

$$\mathcal{G} = \bigcup_{z \in (28\mathbb{Z})^{n-2}} \mathcal{G}(z) \cup \mathcal{G}'(z) \cup \mathcal{G}''(z) \qquad T_1 = \bigcup_{z \in (28\mathbb{Z})^{n-2}} T_1(z) \qquad T_2 = \bigcup_{z \in (28\mathbb{Z})^{n-2}} T_2(z) \ .$$

On vient de démontrer les points (1), (2) et (3) du lemme, l'existence des constantes mentionnées dans le point (4) a quant à elle été obtenue en appliquant le corollaire 2.1.15⋆. □ ⋆page 77

À présent, on dispose de tous les lemmes nécessaires pour démontrer que le théorème 2.3⋆ de fusion est une propriété inductive sur n pour $n \geq 2$. ⋆page 61

▷ **Lemme 2.2.19**

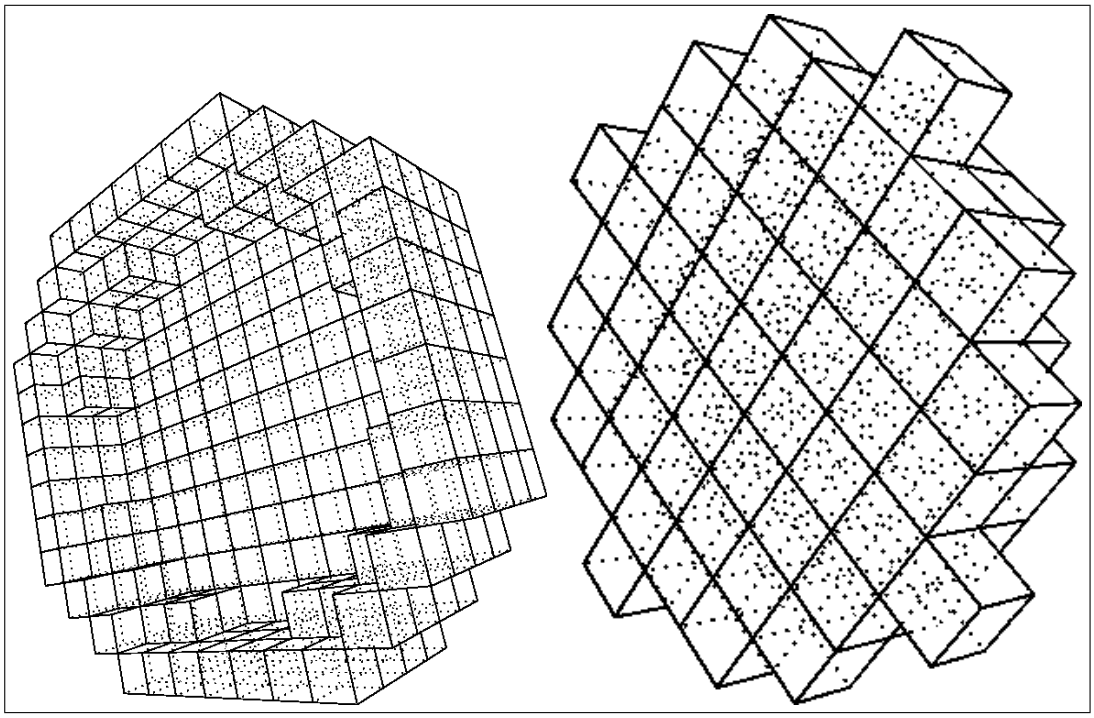
Soit $n \geq 3$. Si le théorème 2.3 est vrai en dimension $n-1$, alors il est vrai en dimension n.

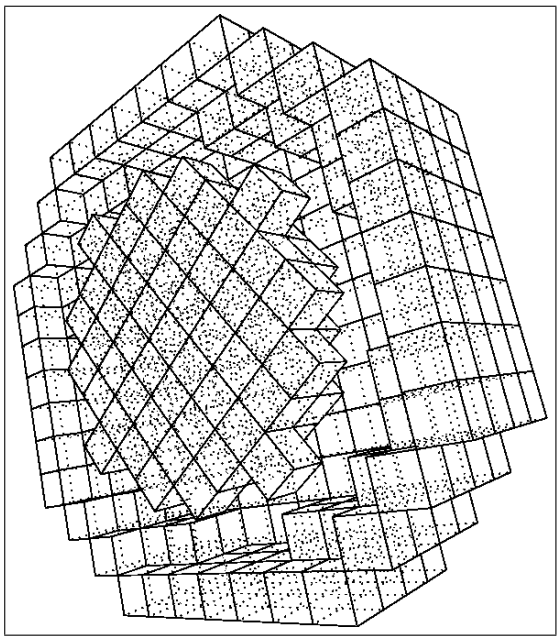
DÉMONSTRATION

On suppose que $n > 2$, que le théorème de fusion est vrai en dimension $n-1$ et que S_1 et S_2 vérifient les hypothèses du théorème de fusion en dimension n. D'après le corollaire 2.8⋆, l'isométrie affine ϕ de changement de base entre les deux complexes peut être décomposée en $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ rotations affines successives dans des plans engendrés par des couples de vecteurs de la base canonique de S_2 par exemple, et il n'est pas nécessaire de prendre en compte une éventuelle réflexion supplémentaire puisque l'on peut s'en dispenser en remplaçant l'un des vecteurs d'une base par son opposé, ce qui n'a aucune importance pour les complexes dyadiques. ⋆page 66

Il est donc possible, en ajoutant des couches de polyèdres successives autour de S_2 et en supposant ρ suffisamment grand, de se ramener au cas où ϕ est un rotation d'angle θ dans le plan engendré par deux vecteurs de la base canonique de S_2 (voir figure 11). Il suffira de réaliser la fusion en faisant N transitions pour démontrer le théorème. Et comme dans le cas de la dimension 2 il est même possible, en insérant encore les étapes intermédiaires nécessaires, de supposer que $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ avec $\theta_{\min} < \theta_{\max}$ deux constantes arbitraires prises dans $\left]0\frac{\pi}{4}\right[$. Bien évidemment, le nombre de transitions à effectuer ne dépendra que de n, et des constantes $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ choisies. Pour simplifier l'écriture de la démonstration, en notant $(u_1, \ldots, u_n)$ une base canonique de S_2 on supposera aussi, quitte à permuter ses vecteurs, que ϕ est une rotation dans le plan $Vect(u_1, u_2)$.

À présent supposons qu'on ait simplement subdivisé S_2 vingt-huit fois grâce au lemme 2.5⋆ puis qu'on lui rajoute tous les cubes possibles (en supposant ρ assez grand) qui sont à distance $\mathbf{d}_{\max}$ au plus 28 du complexe S_2 initial : il est possible d'appliquer le lemme 2.2.18⋆ à S_1 et à un complexe dyadique S'_2 (celui noté S_2 dans l'énoncé du lemme 2.2.18), de même frontière que S_2. On obtient alors les trois complexes T_1, T_2 et Σ annoncés dans le lemme. Considérons le lemme 2.2.18 : on a pu remarquer ⋆p. 62 et 82





En haut, les deux complexes à faire fusionner tracés séparément (à gauche S_1, à droite S_2), en bas, leurs situations relatives. Pour la lisibilité du dessin, on n'a dessiné que la moitié de chacun des deux complexes.

FIGURE 11 – Un exemple de situation de fusion en dimension 3

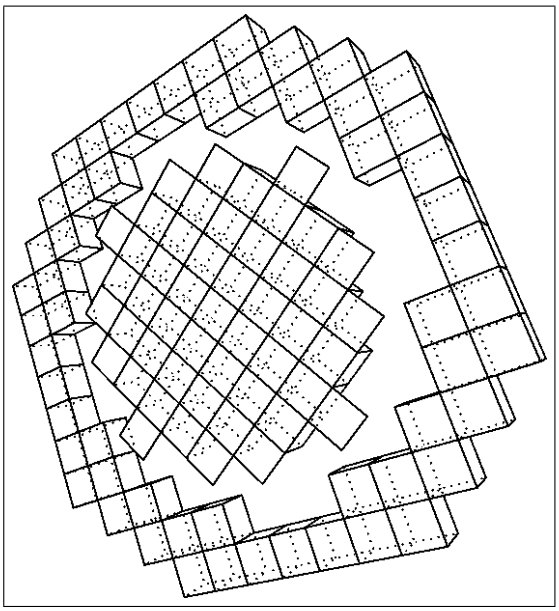


FIGURE 12 – Un exemple de coupe dans la situation précédente. Ici, on a coupé selon la 2ème tranche de profondeur (il y en avait trois sur le dessin précédent).

dans sa démonstration que seuls les cubes qui étaient à distance au plus 2 pour $\mathbf{d}_{\max}$ de la frontière de S_2 n'apparaissent pas dans T_2, donc si l'on suppose que ρ est suffisamment grand pour qu'on ait rajouté une couche d'épaisseur 2 de cubes autour de S_2 après subdivision, alors on peut supposer que cette construction s'est faite avec S_2 au lieu de S_2' (donc que $T_2 \subset S_2$) et que les complexes T_1, T_2 et Σ vérifient toujours les propriétés annoncées. Pour simplifier encore, on notera toujours S_2 le complexe obtenu après y avoir découpé les canalisations du lemme. Maintenant considérons le complexe T_1 : il est de pas $\frac{1}{p}$ donc il suffit de subdiviser p fois S_1 pour le raccorder à T_1. Par commodité là encore on notera toujours S_1 le complexe obtenu après raccordement.

Il est temps d'utiliser notre hypothèse de récurrence. Considérons la famille des hyperplans affines (pour $1 \leq k \leq 2(n-2)$ et $z \in \mathbb{Z}^{n-2}$) :

$$H_{k,z} = z + \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-3-k} \ .$$

Considérons les restrictions $\mathcal{F}_{n-1}(S_1)|_{H_{k,z}}$ et $\mathcal{F}_{n-1}(S_2)|_{H_{k,z}}$ (voir la figure 12) : lorsqu'elles sont non vides, ce sont deux complexes $n-1$-dimensionnels qui vérifient les hypothèses du théorème de fusion à ceci près qu'ils ne sont pas forcément à distance suffisante l'un de l'autre. Cependant on peut tout à fait supposer que l'on avait subdivisé préalablement S_1 et S_2 suffisamment pour que ce soit le cas (d'un nombre de fois q qui ne dépend pas des complexes considérés) et qu'on a jusqu'ici travaillé sur des q^n-groupements, de façon à ce que $\frac{q}{2p} > \rho'$ où ρ' est cette distance minimale imposée par le théorème en dimension $n-1$ et p la constante donnée par le lemme 2.2.18*. En appliquant le théorème de fusion en dimension $n-1$ on peut donc remplir toutes les composantes connexes de $O \cap H_{k,z} \setminus \mathcal{U}(S_2)$ de complexes $n-1$-dimensionnels, dont on notera Θ l'union.

*page 82

Considérons maintenant le complexe unidimensionnel Σ, et notons Σ' l'ensemble des produits cartésiens de ses segments par $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{n-2}$: par une démonstration analogue à celle du lemme 1.3.41* on peut montrer que parmi les positions à ϵ près des sommets de Σ qui peuvent être déplacés, il est possible d'en trouver telles que les régularités extrêmes des découpages des faces de Θ par les polyèdres de Σ' dans les

*page 54

couches $H_{k,z}$ peuvent être bornées par des constantes multiplicatives ne dépendant pas de S_1 et S_2 par rapport aux régularités de S_1 et S_2.

À présent il ne reste plus qu'à utiliser les graphes de la famille $\mathcal{G}$ fournis par
p. 82 et 81* les lemmes 2.2.18* et 2.2.17* pour conclure : on peut faire des suspensions tubulaires dans toutes les composantes connexes de $O \setminus \mathcal{U}(\Theta \cup S_1 \cup S_2 \cup \Sigma')$ et de ce fait, remplir toute l'adhérence de O de polyèdres, de façon à obtenir un complexe n-dimensionnel vérifiant toutes les conditions voulues, ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.19. □

2.3 Conclusion

page 66* La démonstration des deux lemmes 2.1.9* et 2.2.19 achève donc la démonstration de notre théorème de fusion par récurrence.

Deuxième partie

Approximation d'ensembles de dimension entière par des complexes

Sommaire

3 Ensembles rectifiables et leurs propriétés géométriques **94**
3.1 Rappels sur la mesure, dimension et distance de Hausdorff 94
3.2 Propriétés de densité 98
3.3 Rectifiabilité 100

4 Approximation polyédrale **103**
4.1 Lemmes de recouvrement 104
4.2 Raccordements lipschitziens 107
4.3 Projection radiale sur des polyèdres 116

On se place toujours dans $\mathbb{R}^n$ et on va considérer une partie fermée $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimension de Hausdorff k ($k < n$), $\mathcal{H}^k$-mesurable et de mesure — au moins localement, finie.

L'objectif ici est de donner dans le cas où k est un entier, une construction d'un complexe S de dimension n et d'une approximation E' proche de E — dans un sens qui reste à préciser — portée par des sous-faces k-dimensionnelles de ce complexe, de façon à ce que sa mesure puisse être rendue inférieure à celle de E plus une quantité positive arbitrairement proche de zéro, tout en s'imposant de respecter certaines contraintes topologiques.

3 Ensembles rectifiables et leurs propriétés géométriques

On va tout d'abord devoir énoncer rapidement quelques rappels et définitions sur les mesure, dimension et distance de Hausdorff. En particulier on aura besoin du théo-
page 101* rème 3.3.18* d'existence presque partout de plans tangents approximatifs à la partie rectifiable de E pour réaliser notre approximation polyédrale.

3.1 Rappels sur la mesure, dimension et distance de Hausdorff

Les définitions suivantes sont valables dans tout espace Ω muni d'une métrique $\mathbf{d}$, même si l'on supposera en général par la suite que $\Omega = \mathbb{R}^n$. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur la théorie géométrique de la mesure pourra consulter les références [Fa], [Fe], [Ma] ou encore [MS]. Les démonstrations du lemme 3.2.11* et des théorèmes 3.3.15*,
p. 100, 101* et 103 3.3.18 et 3.3.21* qu'on va énoncer pourront être trouvées par exemple dans [Ma].

▷ **Définition 3.1.1** (Diamètre d'une partie)
Soit $A \subset \Omega$ une partie non vide. On définit le diamètre de A par :

$$\mathrm{Diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \mathbf{d}(x,y) \ .$$

Par convention, on dira que $\mathrm{Diam}(\emptyset) = 0$.

Un recouvrement $\mathcal{A}$ d'une partie $E \subset \Omega$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $E \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Dans ce qui suit, l'ensemble des recouvrements de E sera noté $\mathcal{R}(E)$.

Commençons par définir deux quantités naturelles associées aux recouvrements, ou plus généralement à toute famille de sous-parties de Ω.

▷ **Définition 3.1.2** (Taille et masse α-dimensionnel d'un recouvrement)
Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement. On définit respectivement, pour $\alpha > 0$, la taille

et la masse α-dimensionnels de $\mathcal{A}$:

$$\rho(\mathcal{A}) = \sup_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{Diam}(A)\ ;$$

$$|\mathcal{A}|_\alpha = \sum_{A\in\mathcal{A}} (\mathrm{Diam}(A))^\alpha\ .$$

Pour une partie A de Ω, sa mesure de Hausdorff α-dimensionnelle est, à une constante de renormalisation près, la limite inférieure des masses α-dimensionnelle de ses recouvrements quand leur taille tend vers zéro.

▷ **Définition 3.1.3** (Mesure de Hausdorff α-dimensionnelle)
La mesure de Hausdorff α-dimensionnelle d'une partie non vide $E \subset \Omega$ est donnée par :

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = c_\alpha \liminf_{\substack{\mathcal{A}\in\mathcal{R}(E)\\ \rho(\mathcal{A})\to 0}} \left(\sum_{A\in\mathcal{A}} (DiamA)^\alpha \right) = c_\alpha \liminf_{\substack{\mathcal{A}\in\mathcal{R}(E)\\ \rho(\mathcal{A})\to 0}} |\mathcal{A}|_\alpha\ .$$

Ici, c_α est une constante de renormalisation [3] *telle que :*

$$c_\alpha = \frac{\lambda^\alpha(\mathbb{B}^\alpha)}{2^\alpha} \qquad \textit{lorsque } \alpha \in \mathbb{N}$$

où $\mathbb{B}^\alpha$ désigne la boule unité α-dimensionnelle, et λ^α la mesure de Lebesgue usuelle en dimension $\alpha \in \mathbb{N}$.

On peut vérifier que l'application $\mathcal{H}^\alpha : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ définit une mesure extérieure sur Ω, et plus précisément une mesure sur la tribu des parties A dites $\mathcal{H}^\alpha$-mesurables, qui vérifient la formule de Carathéodory :

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega) :\ \mathcal{H}^\alpha(B\cap A) + \mathcal{H}^\alpha(B\setminus A) = \mathcal{H}^\alpha(B)\ .$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ on peut aussi montrer par exemple grâce au critère de Carathéodory que $\mathcal{H}^\alpha$ est borélienne, et coïncide avec la mesure de Lebesgue λ^α lorsque α est entier et E inclus dans un α-plan affine et est λ^α-mesurable.

Pour simplifier les énoncés à venir, on parlera d'α-ensembles pour désigner des ensembles mesurables à une partie négligeable près, et de mesure (au moins localement) finie.

▷ **Définition 3.1.4** (α-ensembles)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, on dira que E est un α-ensemble si :
◇ *E est $\mathcal{H}^\alpha$-mesurable ;*

3. Certains auteurs (par exemple [Fa]) définissent explicitement : $c_\alpha = \dfrac{\pi^{\alpha/2}}{2^\alpha \Gamma(\alpha/2+1)}$ ce qui correspond bien à $\dfrac{\lambda^\alpha(\mathbb{B}^\alpha)}{2^\alpha}$ lorsque α est entier.

◇ *E est de mesure localement finie (c'est à dire pour toute boule B : $\mathcal{H}^\alpha(E \cap B) < +\infty$).*

Soit f une application borélienne de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on notera par la suite $\mathcal{H}^\alpha_f$ la fonctionnelle définie par :

$$X \text{ partie } \mathcal{H}^\alpha\text{-mesurable de } \mathbb{R}^n \quad \longmapsto \quad \mathcal{H}^\alpha_f(X) = \int_{x\in X} f(x) d\mathcal{H}^\alpha(x) \geq 0 \ .$$

Cette fonctionnelle définit elle aussi une mesure sur la tribu des ensembles $\mathcal{H}^\alpha$-mesurables. $\mathcal{H}^\alpha$ vérifie par ailleurs quelques propriétés classiques immédiates.

▷ **PROPRIÉTÉ 3.1.5**

$\mathcal{H}^\alpha$ vérifie les propriétés suivantes :
◇ *Si $f : \Omega \to \Omega$ est k-lipschitzienne, $\mathcal{H}^\alpha(f(E)) \leq k^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E)$;*
◇ *si E est un α-ensemble alors $\mathcal{H}^\alpha(E) = \sup_{\substack{C\subset E \\ C \text{ fermé}}} \mathcal{H}^\alpha(C)$.*

Lorsque E est fixé, on constate que la fonction $\alpha \mapsto H^\alpha(E)$ est décroissante, et vérifie (pour $E \subset \mathbb{R}^n$) :

$$\exists d \in [0,n] : \ \mathcal{H}^\alpha(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > d \\ +\infty & \text{si } \alpha < d \ . \end{cases}$$

▷ **DÉFINITION 3.1.6** (DIMENSION DE HAUSDORFF)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ on pose alors :

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \ \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha > 0 : \ \mathcal{H}^\alpha(E) = +\infty\} \ .$$

Dans le cas où E est un sous-espace vectoriel ou affine de $\mathbb{R}^n$ et la métrique $\mathbf{d}$ la distance euclidienne, cette définition coïncide avec la dimension d'espace vectoriel [4], ou la dimension topologique des variétés régulières.

Dans ce qui suit on notera $\underline{\mathbf{d}}(x, A)$ — ou encore $\mathbf{d}(x, A)$ selon nos conventions — la distance usuelle d'un point x à un ensemble A non vide associée à la métrique $\mathbf{d}$ de Ω, et $\overline{\mathbf{d}}(x, A)$ le supremum des distances de x aux points de A :

$$\mathbf{d}(x, A) = \inf_{y\in A} \mathbf{d}(x, y) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbf{d}}(x, A) = \sup_{y\in A} \mathbf{d}(x, y) \ .$$

La semi-distance de Hausdorff entre deux ensembles est définie de façon naturelle comme le supremum de la distance d'un point de l'un par rapport à l'autre.

▷ **DÉFINITION 3.1.7** (DISTANCE DE HAUSDORFF)

Soient A et B deux ensembles non vides, on définit :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\left(\sup_{x\in A} \mathbf{d}(x, B), \sup_{x\in B} \mathbf{d}(x, A)\right) \ .$$

page 20* 4. Voir le lemme 1.1.7* de la première partie.

On posera aussi par convention :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(A,\emptyset) = \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(\emptyset,A) = +\infty \qquad et \qquad \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(\emptyset,\emptyset) = 0 \ .$$

$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$ est une semi-distance, mais définit une limite unique lorsqu'on la restreint à des parties fermées. Cette définition amène aussi la propriété classique suivante.

▷ **Propriété 3.1.8** (Compacité pour $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$)

Si $(K,\mathbf{d})$ est compact, en notant $\mathcal{K}(K)$ l'ensemble des fermés de K, alors $(\mathcal{K}(K),\mathbf{d}_{\mathcal{H}})$ est compact.

Démonstration

Pour démontrer cette propriété, il nous suffit de démontrer que toute suite (E_n) de compacts de K admet une sous-suite convergente pour $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$. Soit (E_n) une telle suite, fixons $\epsilon > 0$. On a :

$$K \subset \bigcup_{x\in K} B(x,\epsilon) \ .$$

De ce recouvrement par des ouverts de K on peut extraire un recouvrement fini $\{B(x_1,\epsilon),\dots,B(x_m,\epsilon)\}$ puisque par hypothèse K est compact. Posons $U_\epsilon = \mathcal{P}(\{x_1,\dots,x_m\})$, alors clairement l'ensemble des boules de rayon ϵ pour $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$ centrées sur un point de U_ϵ recouvrent $\mathcal{K}(K)$. Ce recouvrement étant fini, par un argument simple de diagonalisation on trouve que (E_n) admet une sous-suite de Cauchy (F_n), c'est à dire que $(\mathcal{K}(K),\mathbf{d}_{\mathcal{H}})$ est précompact.

Il nous reste à montrer que cette sous-suite converge, c'est à dire que $(\mathcal{K}(K),\mathbf{d}_{\mathcal{H}})$ est complet. Posons :

$$G_n = \overline{\bigcup_{k\geq n} F_k}\,;$$

$$F = \bigcap_n G_n \ .$$

Soit $\epsilon > 0$, puisque F_n est de Cauchy, on peut trouver n tel que F_k soit contenu dans l'ϵ-voisinage de F_n pour $k \geq n$. Donc par définition G_n est lui aussi contenu dans l'ϵ-voisinage de F_n fermé, de plus $F_n \subset G_n$, d'où :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(F_n,G_n) \leq \epsilon \ .$$

Par conséquent :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(F_n,G_n) \to 0 \ .$$

On remarque aussi que $\forall n, F \subset G_n$, et K étant compact, les G_n le sont aussi. Choisissons O un voisinage ouvert de F, alors $(G_n \setminus O)_n$ est une suite de compacts décroissante pour l'inclusion, et d'intersection vide. Donc O contient G_n à partir d'un certain rang. Par conséquent :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(G_n,F) \to 0$$

et puisque $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(F_n,G_n) \to 0$, alors finalement

$$\mathbf{d}_{\mathcal{H}}(F_n,F) \to 0$$

ce qui démontre notre propriété 3.1.8. □

La mesure de Hausdorff n'a clairement pas de propriétés de semi-continuité inférieure dans le cas général par rapport à la métrique de Hausdorff. En effet, étant donnés une partie fermée quelconque $F \subset \mathbb{R}^n$ et une suite $(x_k)_{k\geq 0}$ dense dans F (par exemple en numérotant les éléments de $\mathbb{Q}^n \cap F$) on peut déjà donner l'exemple de la suite $(E_k)_{k\geq 0}$ de parties de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$E_k = \{x_l :\ 0 \leq l \leq k\}\ .$$

Dans ces conditions on a à la fois

$$\forall d > 0 :\ \mathcal{H}^d(E_k) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(E_k, F) = 0\ .$$

Lorsque F est tel que $\mathcal{H}^d(F) > 0$ pour $d > 0$ donné, ce contre-exemple illustre la non semi-continuité inférieure de $\mathcal{H}^d$.

Donnons encore un contre-exemple pour $\mathcal{H}^n$ dans lequel la mesure des termes de la suite tend vers une limite non nulle, mais strictement inférieure à celle de l'ensemble limite. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > 2$, prenons par exemple le cas d'ensembles composés de cubes dyadiques dans $\mathbb{R}^n$, que l'on subdivise en k^n morceaux, et dont on ne garde que les subdivisions dont les n numéros ne sont pas des multiples de p (voir figure 13) :

$$K = [0,1]^n\ ;$$

$$E_k = \bigcup_{\substack{i_1,\ldots,i_n\in\{0,\ldots,k-1\}\\ i_j \not\equiv 0 \pmod p}} \left[0, \frac{1}{k}\right]^n + \left(\frac{i_1}{k}, \ldots, \frac{i_n}{k}\right)\ .$$

Alors, on a clairement que :

$$E_k \to [0,1]^n \text{ pour } \mathbf{d}_{\mathcal{H}}$$

mais

$$\mathcal{H}^n(E_k) \to \left(\frac{p-1}{p}\right)^n < \mathcal{H}^n([0,1]^n) = 1\ .$$

Dans cet exemple toutefois, on constate que plus p est grand (c'est à dire plus la «densité» de E_k va être proche de 1 dans un sens qui reste à préciser), plus la limite de la mesure de E_k va être proche de 1.

3.2 Propriétés de densité

Les propositions qui vont être énoncés ici ne sont plus valables dans le cas général, mais pour $E \subset \Omega = \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{d}$ qui est la distance euclidienne.

▷ **DÉFINITION 3.2.9** (DENSITÉ α-DIMENSIONNELLE MOYENNE DE E SUR A)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie qui contient au moins deux points. On définit la densité α-dimensionnelle moyenne de E sur A par :

$$\mathcal{D}^\alpha_E(A) = \frac{\mathcal{H}^\alpha(E \cap A)}{c_\alpha(\mathrm{Diam} A)^\alpha}\ .$$

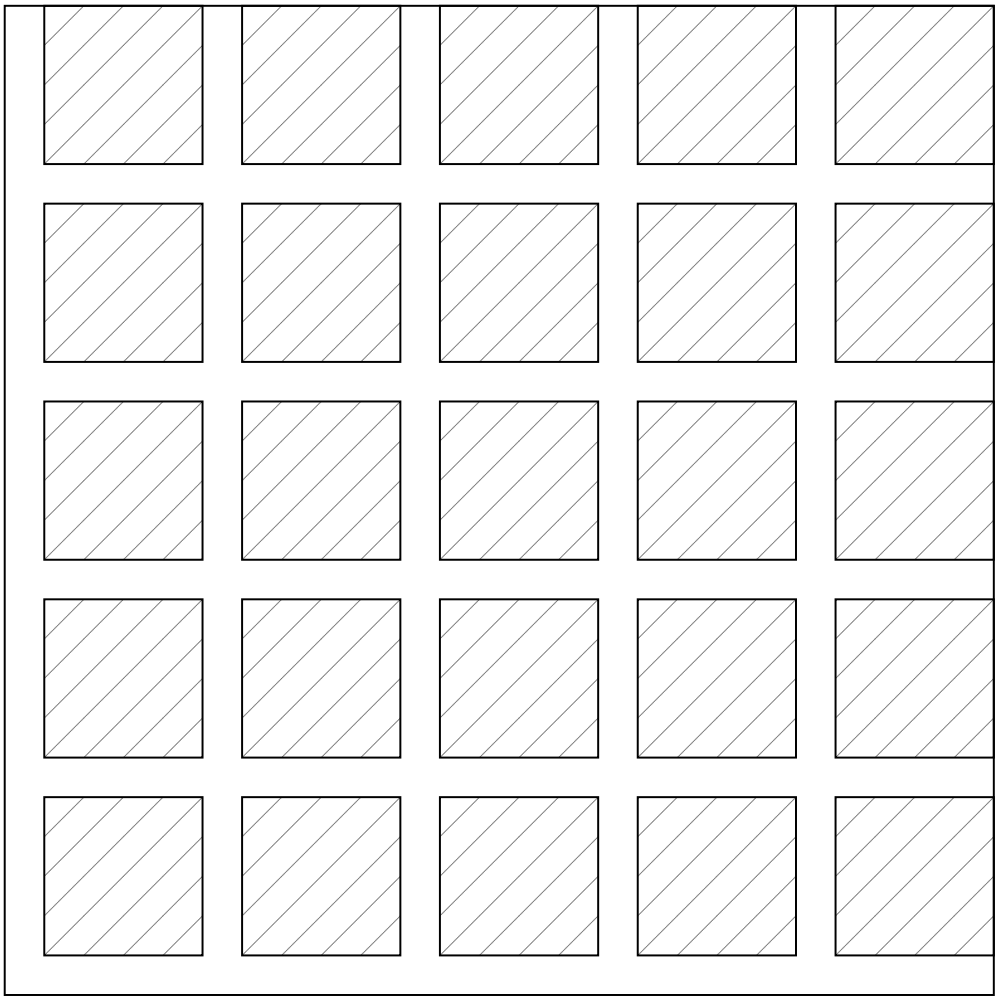


FIGURE 13 – Un exemple de suite d'ensembles en dimension 2 qui converge vers le pavé $[0,1]^2$ pour la distance de Hausdorff, mais dont la mesure converge vers $\frac{16}{25} < 1$ (les parties hachurées correspondent à l'intérieur de l'un des termes de la suite).

Pour $r > 0$, notons $B(x, r)$ la boule fermée centrée en x de rayon r. Dans le cas où l'on choisit pour A un voisinage d'un point x dont la taille tend vers 0 on peut donner deux caractérisations locales de E au voisinage de x.

▷ **Définition 3.2.10** (Densités sphériques supérieures et inférieures)

On définit les densités sphériques supérieures et inférieures de E au point $x \in \mathbb{R}^n$ comme les limites supérieures et inférieures des densités moyennes de E dans une boule de centre x dont le rayon tend vers zéro :

$$\overline{d}_E^{\alpha}(x) = \limsup_{r \to 0} \mathcal{D}_E^{\alpha}(B(x, r)) \, ;$$

$$\underline{d}_E^{\alpha}(x) = \liminf_{r \to 0} \mathcal{D}_E^{\alpha}(B(x, r)) \ .$$

Dans le cas d'un α-ensemble, ces densités peuvent être bornées presque partout en fonction de l'appartenance ou non à cet ensemble.

▷ **Lemme 3.2.11** (Bornes sur les densités)

Soit E un α-ensemble, alors :
- ◇ *pour presque tout $x \in E$, $2^{-\alpha} \leq \underline{d}_E^{\alpha}(x) \leq \overline{d}_E^{\alpha}(x) \leq 1$;*
- ◇ *pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $\underline{d}_E^{\alpha}(x) = \overline{d}_E^{\alpha}(x) = 0$.*

3.3 Rectifiabilité

On se place de nouveau dans $\mathbb{R}^n$, les parties considérées sont des d-ensembles avec $d \in \mathbb{N}$. Les définitions suivantes formalisent la notion intuitive d'ensembles «lisses».

▷ **Définition 3.3.12** (Image lipschitzienne)

Une image d-lipschitzienne est l'image d'une application lipschitzienne de $[0, 1]^d$ dans $\mathbb{R}^n$.

De tels ensembles admettent un plan tangent au sens usuel presque partout. La notion de rectifiabilité dans le cas général se définit dans $\mathbb{R}^n$ relativement à un entier d.

▷ **Définition 3.3.13** (Rectifiabilité)

On dira que E est d-rectifiable si E est un ensemble d-mesurable composé d'une union finie ou dénombrable de morceaux boréliens d'images d-lipschitziennes et d'un (éventuel) ensemble $\mathcal{H}^d$-négligeable.

A contrario, on parlera d'ensembles qui ne sont «lisses» nulle part.

▷ **Définition 3.3.14** (Pure non rectifiabilité)

On dira que E est purement non d-rectifiable si E est un d-ensemble dont l'intersection avec tout ensemble d-rectifiable est $\mathcal{H}^d$-négligeable.

La notion de non-rectifiabilité est équivalente à une propriété de majoration globale de la densité sphérique inférieure, ce qui donne une interprétation géométrique de celle-ci. On pourra trouver la démonstration des trois théorèmes à venir dans [Ma] par exemple.

▷ **Théorème 3.3.15** (Rectifiabilité et densité sphérique inférieure)

Soit E un d-ensemble, alors :

- ◇ *E est d-rectifiable si et seulement si $\underline{d}_E^\alpha(x) = \mathbb{1}_E \quad \mathcal{H}^d$-presque partout ;*
- ◇ *E est purement non d-rectifiable si et seulement si $\underline{d}_E^\alpha(x) < 1 \quad \mathcal{H}^d$-presque partout.*

En outre, tout d-ensemble de mesure finie peut être décomposé de façon unique (à une partie $\mathcal{H}^d$-négligeable près) en sa partie rectifiable et sa partie purement non rectifiable.

▷ **Propriété 3.3.16** (Décomposition des d-ensembles)

Soit E un d-ensemble de mesure finie, alors il existe $(E_R, E_I) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que :

$$E = E_R \sqcup E_I$$

avec E_R d-rectifiable et E_I purement non d-rectifiable.

En outre, de telles partitions ne peuvent différer entre elles que d'une partie $\mathcal{H}^d$-négligeable.

Un plan tangent approximatif est une notion plus générale et plus adaptée à notre étude qu'un plan tangent usuel. Son existence est basée sur l'étude de la densité sphérique de l'ensemble à l'intérieur d'un cône d'angle arbitrairement petit (voir la figure 14).

▷ **Définition 3.3.17** (Plan tangent approximatif)

H est un d-plan tangent approximatif à E en x si :

- ◇ *$x \in H$;*
- ◇ *$\underline{d}_E^\alpha(x) > 0$;*
- ◇ *$\forall s > 0$:*

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^d(\{y \in E \cap B(x,r) : \mathbf{d}(y,H) > s|x-y|\})}{r^d} = 0 \ .$$

On vérifiera qu'un plan tangent au sens usuel est aussi un plan tangent approximatif. Une autre caractérisation géométrique de la rectifiabilité est l'existence d'un plan tangent approximatif presque partout.

▷ **Théorème 3.3.18** (Rectifiabilité et existence de plans tangents)

Soit E un d-ensemble.

- ◇ *E est rectifiable si et seulement s'il admet un d-plan tangent approximatif $\mathcal{H}^d$ presque-partout sur E ;*

◇ *E est purement non rectifiable si et seulement s'il n'admet pas de d-plan tangent approximatif $\mathcal{H}^d$ presque-partout sur E.*

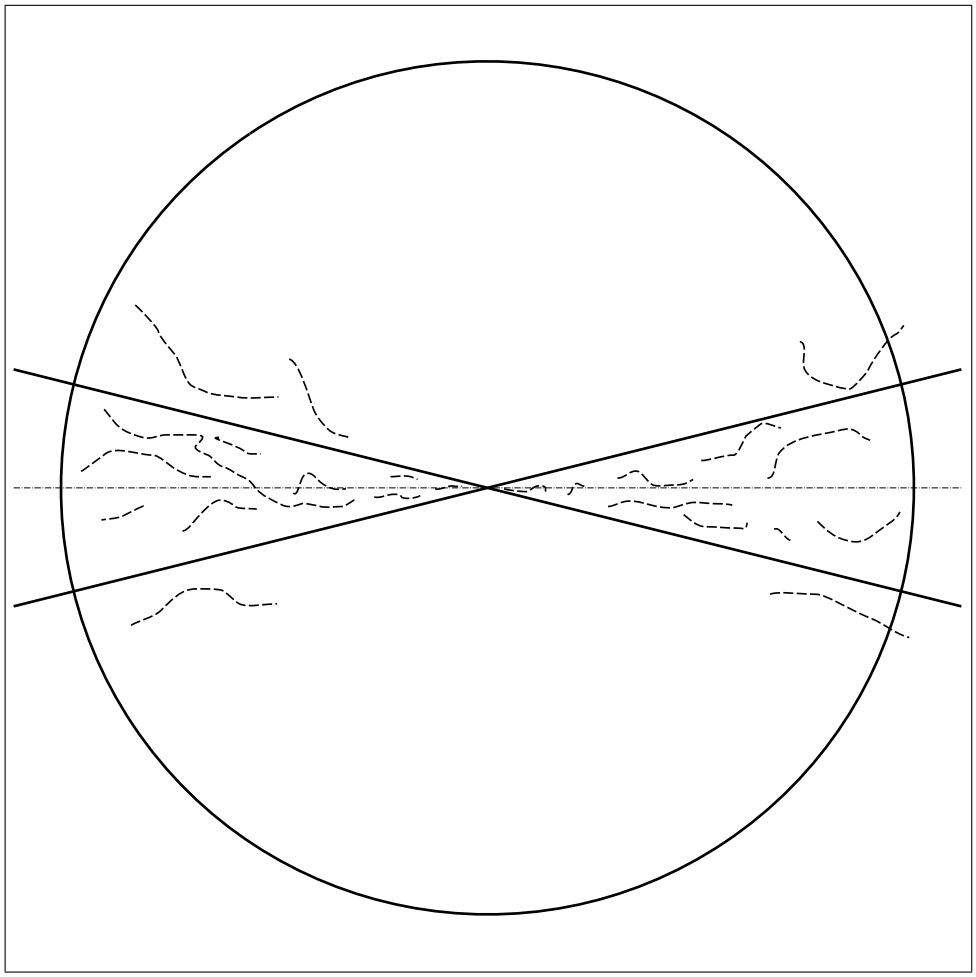


FIGURE 14 – Un plan tangent approximatif : on étudie la densité de l'ensemble E à l'intérieur de l'intersection d'une boule dont le rayon tend vers 0 et d'un cône d'angle arbitrairement petit.

À présent, sur $\mathbb{R}^n$ privé de 0 et pour un sous-groupe multiplicatif $A \subset \mathbb{R}$ considérons la relation d'équivalence :

$$x \equiv y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in A : x = \lambda y$$

dont on notera $\mathbb{R}^n/A$ l'espace quotient. Par exemple, dans ces conditions $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^{+*}$ muni de la distance euclidienne sur les représentants unitaires est isométriquement isomorphe à la sphère unité $\mathcal{S}^n$ munie de la distance euclidienne.

▷ **<u>DÉFINITION 3.3.19</u>** (COSINUS GÉNÉRALISÉ)

En notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on définit par récurrence le cosinus généralisé Θ_n :

$$\Theta_1 : \left\{ \begin{array}{l} [0,1[\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ \theta_1 \longmapsto \sin(\pi\theta_1)e_1 + \cos(\pi\theta_1)e_2 \end{array} \right.$$

$$\Theta_{n+1} : \left\{ \begin{array}{l} [0,1[^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \\ (\theta_1, \ldots, \theta_n) \longmapsto \sin(\pi\theta_n)\Theta_n(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) + \cos(\pi\theta_n)e_{n+1}. \end{array} \right.$$

L'intérêt du cosinus généralisé est qu'il permet une paramétrisation lipschitzienne (et même bilipschitzienne sur les compacts qui ne contiennent pas les pôles de la sphère) des directions de $\mathbb{R}^n$. Il faut pour cela considérer par exemple la distance $\mathbf{d}'$ sur le pavé $[0,1[^{n-1}$ définie par :

$$\mathbf{d}'(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \max(|x_i - y_i|, 1 - |x_i - y_i|)^2} \ .$$

Sur l'ensemble l'ensemble $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^*$ des directions de $\mathbb{R}^n$ on définit la distance $\mathbf{d}''$ comme la distance euclidienne minimale sur les représentants unitaires :

$$\mathbf{d}''(X,Y) = \min_{\substack{x\in X, y\in Y \\ \|x\|=\|y\|=1}} \|x-y\| \ .$$

▷ **Propriété 3.3.20**

Le cosinus généralisé réalise une paramétrisation lipschitzienne de la demi-sphère $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^*$ des directions de $\mathbb{R}^n$ munie de la distance d'' par le pavé $[0,1]^{n-1}$ muni de la distance d'. En outre, sa restriction à tout compact inclus dans l'ouvert $]0,1[^{n-1}$ est injective, et de réciproque lipschitzienne.

Une dernière propriété géométrique de la rectifiabilité caractérise les annulations de la mesure de la projection P_θ sur un hyperplan H_θ, normal à une direction $\theta \in \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^*$. On utilisera l'expression «pour presque toute direction» pour désigner un sous-ensemble de directions de $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^*$ dont le complémentaire est de mesure nulle pour la mesure de Hausdorff $n-1$-dimensionnelle définie à partir de la métrique $\mathbf{d}''$, ce qui revient à considérer l'image par Θ d'un sous-ensemble de $\mathcal{H}^{n-1}$-mesure nulle du pavé $[0,1[^{n-1}$.

▷ **Théorème 3.3.21** (Rectifiabilité et projections orthogonales)

Soit E un d-ensemble.

- ◇ *E est rectifiable si et seulement si $\mathcal{H}^d(P_\theta(E)) > 0$ pour presque toute direction θ ;*
- ◇ *E est purement non rectifiable si et seulement si $\mathcal{H}^d(P_\theta(E))$ est purement non d-rectifiable ou de mesure nulle pour presque toute direction θ. En particulier si $d = n-1$, c'est le second cas ($\mathcal{H}^d(P_\theta(E)) = 0$) qui se produit pour presque toute direction.*

4 Approximation polyédrale

On va à présent se doter des outils nécessaires à la construction d'approximations d'ensembles de dimension entière par des complexes. Il nous faudra entre autres établir le lemme 4.1.4 de recouvrement, ainsi que quelques lemmes de raccordement d'applications lipschitziennes qui vont nous permettre de projeter des parties rectifiables sur des faces de cubes parallèles.

4.1 Lemmes de recouvrement

Pour simplifier les notations, lorsque B est une boule de rayon $r > 0$, on notera uB, pour $u > 0$, la boule de même centre et de rayon ur. On va donner un premier lemme de recouvrement dans le cas de boules fermées.

▷ **LEMME 4.1.1** (PETIT LEMME DE RECOUVREMENT)

Soit $\mathcal{B}$ une famille de boules ouvertes de rayons non nuls et bornés de[5] *$\mathbb{R}^n$. Alors on peut extraire de $\mathcal{B}$ une famille $\widehat{\mathcal{B}}$ dénombrable de boules disjointes telles que :*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}} 4B \ .$$

Pour démontrer ce lemme de façon classique, on va utiliser les deux propriétés suivantes des boules de $\mathbb{R}^n$.

▷ **PROPRIÉTÉ 4.1.2**

Soient B et B' deux boules de rayons respectifs r et r' telles que :

$$B' \cap B \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad r' \geq \frac{2}{3} r \ .$$

Alors, $B \subset 4B'$.

Si $\mathcal{C}$ est une famille quelconque de boules, alors on peut en extraire une sous-famille disjointe maximale, au sens où toute sous-famille plus grande dans $\mathcal{C}$ ne peut être disjointe.

DÉMONSTRATION

Démontrons d'abord le premier point de la propriété : posons $B = B(x, r)$ et $B' = B(x', r')$. Par hypothèse, $\exists z \in B \cap B'$. Alors, $\forall y \in B$, $d(y, z) \leq 2r \leq 3r'$ et $d(z, x) \leq r'$ d'où on trouve que $d(y, x) \leq 4r'$.

Pour le second point, choisissons $(z_k)_k$ une suite dense dans $\mathbb{R}^n$. On va construire par induction la sous-famille de boules $(B_k)_k$ de $\mathcal{C}$ de la façon suivante :

- ◇ si z_1 appartient à l'union des boules $B \in \mathcal{C}$, on choisit B_1 parmi celles-ci telle que $z_1 \in B_1$, sinon on pose $B_1 = \emptyset$;
- ◇ si z_k appartient à l'union des boules $B \in \mathcal{C}$ telles que $B \cap B_{k'} = \emptyset$ pour $k' < k$, on choisit pour B_k l'une de ces boules qui contient z_k, sinon on pose $B_k = \emptyset$.

On extrait alors la sous-famille $(B_{i_k})_k$ de $(B_k)_k$ constituée de ses éléments non vides. Ainsi, $z_{i_k} \in B_{i_k}$, et si i n'appartient pas à la famille des i_k, alors c'est que z_i n'appartient pas à l'union des boules de $\mathcal{C}$ qui n'intersectent pas les boules B_{i_k} pour $i_k < i$.

Vérifions maintenant que $(B_{i_k})_k$ est maximale : soit B une boule de $\mathcal{C}$ qui n'intersecte pas les B_{i_k}. Comme (z_n) est dense, alors on peut trouver $z_m \in B$, et deux cas peuvent se produire :

- ◇ si z_m appartient déjà à une boule B_{i_k} alors B n'est pas disjointe des B_{i_k} ;
- ◇ sinon, c'est qu'à l'étape m on a choisi $B_m = \emptyset$, et donc B intersecte l'union des boules B_{i_k} pour $i_k < m$.

5. En fait, le lemme reste vrai avec des hypothèses plus faibles : il suffit que l'espace dans lequel on se place soit séparable.

Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction, donc notre famille est bien maximale.

Revenons maintenant à la démonstration du lemme de recouvrement : on désigne le rayon de la boule B par $r(B)$. Par hypothèse, les rayons des boules de $\mathcal{C}$ sont majorés par une constante $C > 0$. Pour tout $j \geq 1$ on définit :

$$\mathcal{B}_j = \left\{ B \in \mathcal{C} : \ \left(\frac{2}{3}\right)^j C < 2r(B) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} C \right\} .$$

Le second point de la propriété 4.1.2 nous permet d'extraire une famille disjointe maximale $\widehat{\mathcal{B}}_1$ dans $\mathcal{B}_1$. Par récurrence, on choisit $\widehat{\mathcal{B}}_k$ une famille dénombrable disjointe maximale dans :

$$\left\{ B \in \mathcal{B}_k : \ \forall B' \in \bigcup_{j \leq k-1} \widehat{\mathcal{B}}_j, \ B' \cap B = \emptyset \right\} .$$

Et pour finir, on pose :

$$\widehat{\mathcal{B}} = \bigcup_k \widehat{\mathcal{B}}_k \ .$$

Montrons que cette famille convient : soit $B \in \mathcal{B}$, il faut prouver qu'il existe $B' \in \widehat{\mathcal{B}}$ tel que $B \subset 4B'$.

- ◇ Si $B \in \widehat{\mathcal{B}}$, le résultat est évident ;
- ◇ sinon, choisissons k tel que $B \in \mathcal{B}_k$. Puisque $\widehat{\mathcal{B}}_k$ est une famille disjointe maximale dans l'ensemble

$$\left\{ B \in \mathcal{B}_k : \ \forall B' \in \bigcup_{j \leq k-1} \widehat{\mathcal{B}}_j, B' \cap B = \emptyset \right\}$$

il y a de nouveau deux possibilités :

- ⋆ soit B n'appartient pas à ce dernier ensemble, ce qui veut dire que B intersecte un élément de l'un des $\widehat{\mathcal{B}}_j$ pour $j < k$;
- ⋆ soit B lui appartient, mais la famille obtenue en ajoutant B à $\widehat{\mathcal{B}}_k$ n'est pas maximale disjointe, ce qui veut dire que B intersecte un élément de $\widehat{\mathcal{B}}_k$.

Dans tous les cas, B intersecte un élément B' de $\bigcup_{j \leq k} \widehat{\mathcal{B}}_j$. Par définition des $\widehat{\mathcal{B}}_j$, on en déduit que le rayon de B' est au moins égal à $\frac{2}{3} r(B)$, ce qui nous permet de conclure d'après le premier point de la propriété 4.1.2.

□

▷ **<u>Définition 4.1.3</u>** (Recouvrement «fort» de Vitali par des boules)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ une collection de boules de $\mathbb{R}^n$. On dira que $\mathcal{B}$ est un recouvrement de Vitali de E si pour tout $x \in E$ et $\epsilon > 0$, on peut trouver une boule $B \in \mathcal{B}$ centrée en x de rayon au plus ϵ.

Le lemme suivant permet, dans le cas d'un α-ensemble de mesure finie, de le recouvrir à un ensemble de mesure négligeable près par une famille dénombrable de boules disjointes.

▷ **LEMME 4.1.4** (LEMME DE RECOUVREMENT DE VITALI)

Soient E un α-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de mesure finie et $\mathcal{B}$ un recouvrement de Vitali de E par des boules fermées centrées dans E.

Alors il existe une sous-famille dénombrable $\widehat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ de boules disjointes telle que :

$$\mathcal{H}^\alpha\left(E \setminus \bigsqcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}} B\right) = 0 \ .$$

DÉMONSTRATION

Notons E^* l'ensemble des points de E où la densité est comprise entre $2^{-\alpha}$ et 1 :

$$E^* = \{x \in E :\ 2^{-\alpha} \le \underline{d}_E^\alpha(x) \le \overline{d}_E^\alpha(x) \le 1\} \ .$$

page 100* Pour commencer, on sait d'après le lemme 3.2.11* que $\mathcal{H}^\alpha(E \setminus E^*) = 0$. En outre, pour tout $x \in E^*$, il existe $\rho(x) > 0$ tel que pour tout $r < \rho$ on ait par exemple :

$$2^{-\alpha-1} \le \frac{\mathcal{H}^\alpha(E^* \cap B(x,r))}{(2r)^\alpha c_\alpha} \le 2 \ .$$

Notons alors $\mathcal{B}'$ la sous-famille des boules $B(x,r)$ de $\mathcal{B}$ centrées en un point $x \in E^*$ qui vérifient $4r < \rho(x)$: il est clair que $\mathcal{B}'$ est un recouvrement de Vitali de E^*, et on peut aussi supposer que les rayons des boules de $\mathcal{B}'$ sont bornés.

Posons alors

$$U_0 = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \gamma = 1 - \frac{1}{2^{3(\alpha+1)}} < 1$$

et raisonnons par récurrence en supposant que pour $j > 0$ donné, on a défini un fermé $U_{j-1} \subset \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathcal{H}^\alpha(E^* \setminus U_{j-1}) \le \gamma^{j-1}\mathcal{H}^\alpha(E^*) \ .$$

Notons $\mathcal{B}_j$ la sous-famille de $\mathcal{B}'$ composée des boules B telles que $4B \cap U_{j-1} = \emptyset$: il est clair que c'est encore un recouvrement de Vitali de $E^* \setminus U_{j-1}$. En appliquant le lemme 4.1.1 à $\mathcal{B}_j$, on peut trouver une sous-famille dénombrable $\widehat{\mathcal{B}}_j$ de boules deux à deux disjointes de $\mathcal{B}_j$ telles que :

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}_j} B \subset \bigcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}_j} 4B \ .$$

Remarquons que par construction, pour toute boule $B \in \mathcal{B}'$ — et en particulier pour les boules de $\widehat{\mathcal{B}}_j$ — notre condition sur les rayons implique les inégalités suivantes :

$$\mathcal{H}^\alpha(E^* \cap B) \ge 2^{-\alpha-1}c_\alpha(\mathrm{Diam}(B))^\alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^\alpha(E^* \cap 4B) \le 2c_\alpha 4^\alpha(\mathrm{Diam}(B))^\alpha \ .$$

On en tire :

$$\mathcal{H}^\alpha(E^* \cap B) \ge 2^{-3\alpha-2}\mathcal{H}^\alpha(E^* \cap 4B) \ .$$

Puisque les boules de $\widehat{\mathcal{B}}_j$ sont deux à deux disjointes il vient donc :

$$\mathcal{H}^\alpha\left(E^* \cap \bigcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}_j} B\right) \ge 2^{-3\alpha-2}\mathcal{H}^\alpha\left(E^* \cap \bigcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}_j} 4B\right) \ .$$

On peut donc trouver une sous-famille finie $\widehat{B}_j^* \subset \widehat{B}_j$ telle que par exemple :

$$\mathcal{H}^\alpha\left(E^* \cap \bigcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}_j^*} B\right) \geq 2^{-3\alpha-3}\mathcal{H}^\alpha\left(E^* \cap \bigcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}_j^*} 4B\right) .$$

Posons alors

$$V_j = \bigsqcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}_j^*} B \quad \text{et} \quad V_j' = \bigcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}_j^*} 4B .$$

Par construction, $V_j' \cap U_{j-1} = \emptyset$ donc en posant $U_j = U_{j-1} \sqcup V_j$ on obtient, en prenant le complémentaire dans $E^* \setminus U_{j-1}$:

$$\mathcal{H}^\alpha(E^* \setminus U_j) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{3(\alpha+1)}}\right)\mathcal{H}^\alpha(E^* \setminus U_{j-1}) \leq \gamma^j \mathcal{H}^\alpha(E^*) .$$

Pour conclure, posons finalement

$$\widehat{\mathcal{B}} = \bigcup_{i\geq 1} \widehat{\mathcal{B}}_i^*$$

alors $\widehat{\mathcal{B}}$ est une sous-famille dénombrable de $\mathcal{B}$ composée de boules deux à deux disjointes, et de plus :

$$U_j = \bigsqcup_{\substack{i\leq j \\ B\in\widehat{\mathcal{B}}_i^*}} B \qquad \text{et} \qquad \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^d(E^* \setminus U_j) = 0 .$$

Dès lors la famille $\widehat{\mathcal{B}}$ vérifie

$$\mathcal{H}^\alpha\left(E^* \setminus \bigsqcup_{B\in\widehat{\mathcal{B}}} B\right) = 0$$

ce qui achève la démonstration du lemme, puisqu'on a vu que $\mathcal{H}^\alpha(E \setminus E^*) = 0$. □

4.2 Raccordements lipschitziens

On va par la suite construire des applications lipschitziennes à l'intérieur de compacts de $\mathbb{R}^n$, qu'on va devoir prolonger dans des ensembles plus grands tout en prenant garde à préserver leur caractère lipschitzien. L'idée ici est de d'abord faire un prolongement sur une couronne autour du compact, de façon à raccorder avec l'application identité sur la frontière extérieure de la couronne. Le principe est similaire à celui du théorème de prolongement de Kirszbraun, à ceci près qu'on souhaitera parfois avoir un contrôle plus grand sur l'endroit où vont se retrouver les points de l'intérieur de la couronne.

Les quelques propositions suivantes permettent de construire de tels prolongements dans différents cas particuliers, d'abord définissons la notion de support d'une application lipschitzienne.

▷ **DÉFINITION 4.2.5** (SUPPORT D'UNE APPLICATION LIPSCHITZIENNE)

Soit f une application lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On considère les ensembles fermés F vérifiant :

$$f(F) \subset F \qquad et \qquad f|_{\mathbb{R}^n \setminus F} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus F} \ .$$

Remarquons que $\mathbb{R}^n$ lui-même convient.

Le plus petit fermé vérifiant ces deux propriétés — obtenu par intersection de tous ceux qui les vérifient — sera appelé le support de f.

Remarquons en particulier qu'une application lipschitzienne est égale à l'identité sur la frontière de son support. Les deux propositions suivantes sont évidentes et découlent directement de la définition.

▷ **PROPRIÉTÉ 4.2.6** (PROLONGEMENT AVEC L'IDENTITÉ)

Soit $f : F \to F$ une application k-lipschitzienne où F est un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, telle que :

$$f|_{\partial F} = Id_{\partial F} \ .$$

Alors l'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in F \\ x & si\ x \notin F \end{cases}$$

est $\max(k, 1)$-lipschitzienne, de support inclus dans F.

▷ **PROPRIÉTÉ 4.2.7** (COMPOSITION D'APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES À SUPPORTS DISJOINTS)

Soient f et g deux applications respectivement u et v-lipschitziennes de $\mathbb{R}^n$ à supports d'intérieurs disjoints. Alors $f \circ g = g \circ f$ et cette composée est une application $\max(u, v, 1)$-lipschitzienne dont le support est l'union des supports de f et g.

DÉMONSTRATION

Pour démontrer la première proposition, considérons x et y deux points de $\mathbb{R}^n$, et étudions les trois cas :

- ◇ si $(x, y) \in F^2$ alors $\|g(x) - g(y)\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$;
- ◇ si $(x, y) \in (\mathbb{R}^n \setminus F)^2$ alors $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\| \leq k\|x - y\|$;
- ◇ si par exemple $x \in F$ et $y \notin F$ alors $[x, y] \cap \partial F \neq \emptyset$. Soit donc $z \in [x, y] \cap \partial F$, il vient $\|g(x) - g(y)\| \leq \|f(x) - f(z)\| + \|g(z) - g(y)\| \leq k\|x - z\| + \|z - y\| \leq \max(k, 1)\,(\|x - z\| + \|z - y\|) = \max(k, 1)\|x - y\|$.

Démontrons à présent la seconde proposition : notons K et K' les supports respectifs de f et g. Il est clair que si $\overset{\circ}{K} \cap \overset{\circ}{K'} = \emptyset$ les deux applications commutent — puisqu'elles sont égales à l'identité sur le complémentaire de l'intérieur de leurs supports respectifs — on appellera alors leur composée h. Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^n$, il y a trois cas à étudier :

- ◇ si $x \notin \overset{\circ}{K} \cup \overset{\circ}{K'}$ et $y \notin \overset{\circ}{K} \cup \overset{\circ}{K'}$ alors $\|h(x) - h(y)\| = \|x - y\|$;
- ◇ si par exemple $x \in \overset{\circ}{K}$ et $y \in \overset{\circ}{K'}$ alors puisque $\overset{\circ}{K} \cap \overset{\circ}{K'} = \emptyset$ il existe $x' \in \partial\overset{\circ}{K} \cap [x, y]$ et $y' \in \partial\overset{\circ}{K'} \cap [x', y]$. Il vient alors $\|h(x) - h(y)\| \leq \|h(x) - h(x')\| + \|h(x') - h(y')\| + \|h(y') - h(y) \leq u\|x - x'\| + \|x' - y'\| + v\|y' - y\| \leq \max(u, v, 1)\|x - y\|$;

◇ si $x \in \overset{\circ}{K} \cup \overset{\circ}{K'}$ et $y \notin \overset{\circ}{K} \cup \overset{\circ}{K'}$ alors il existe $z \in [x,y] \cap \partial(\overset{\circ}{K} \cup \overset{\circ}{K'})$ et donc $\|h(x)-h(y)\| \leq \|h(x)-h(z)\|+\|h(z)-h(y)\| \leq \max(u,v)\|x-z\|+\|z-y\| \leq \max(u,v,1)\|x-y\|$.

□

À présent donnons une manière explicite de construire un prolongement d'une application lipschitzienne sur un compact, à l'intérieur d'un anneau d'épaisseur ρ autour de ce compact. L'application Π utilisée peut par exemple être le projecteur convexe sur le compact, si celui-ci est convexe.

▷ **Propriété 4.2.8** (Prolongement lipschitzien en couronne autour d'un compact)

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : K \to K$ une application k-lipschitzienne avec $k \geq 1$ et $\Pi : \mathbb{R}^n \to K$ une application telle que $\Pi|_{f(K)} = Id_{f(K)}$ et $f \circ \Pi$ est k-lipschitzienne. Si on note, pour $\rho > 0$

$$K_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{d}(x,K) \leq \rho\}$$

alors pour tout $\rho > 0$ on peut trouver une application $g : K_\rho \to K_\rho$ telle que :

(1) $g|_K = f$;

(2) $g|_{\partial(K_\rho)} = Id_{\partial(K_\rho)}$;

(3) *g est k'-lipschitzienne avec $k' = k + 1 + \frac{\overline{\mathbf{d}}(f(K),K)}{\rho}$.*

Démonstration

Pour $\rho > 0$ définissons l'application g sur K_ρ par :

$$g(x) = \left(1 - \frac{\mathbf{d}(x,K)}{\rho}\right) f \circ \Pi(x) + \frac{\mathbf{d}(x,K)}{\rho} x \ .$$

On peut remarquer tout de suite que g est continue, et vérifie les deux premiers points de la proposition. Soient x et y deux points de K_ρ, montrons que g est lipschitzienne en étudiant les trois cas possibles :

◇ si $(x,y) \in K^2$ alors puisque par hypothèse f est k-lipschitzienne il vient

$$\|g(x) - g(y)\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\| \, ;$$

◇ si $(x,y) \in (K_\rho \setminus K)^2$ alors en posant $x' = \Pi(x)$ et $y' = \Pi(y)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\| &= \frac{\|\rho f(x') - \rho f(y') + \mathbf{d}(x,K)(x - f(x')) - \mathbf{d}(y,K)(y - f(y'))\|}{\rho} \\
&\leq \frac{\|\rho f(x') - \rho f(y') + \mathbf{d}(x,K)((x - f(x')) - (y - f(y')))\|}{\rho} \\
&\qquad + \frac{\|(\mathbf{d}(x,K) - \mathbf{d}(y,K))(y - f(y'))\|}{\rho} \\
&\leq \frac{\rho - \mathbf{d}(x,K)}{\rho}\|f(x') - f(y')\| + \frac{\mathbf{d}(x,K)}{\rho}\|x-y\| \\
&\qquad + \left|\frac{\mathbf{d}(x,K) - \mathbf{d}(y,K)}{\rho}\right| \|y - f(y')\| \ .
\end{aligned}$$

Puisqu'on sait que $k \geq 1$, $\mathbf{d}(x,K) \leq \rho$, $\|f(x') - f(y')\| \leq k\|x-y\|$ et $\|y - f(y')\| \leq \rho + \overline{\mathbf{d}}(f(K),K)$ il vient :

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(y)\| &\leq \left(\frac{k\rho - (k-1)\mathbf{d}(x,K)}{\rho} + \frac{\rho + \overline{\mathbf{d}}(f(K),K)}{\rho}\right)\|x-y\| \\ &\leq \left(k+1+\frac{\overline{\mathbf{d}}(f(K),K)}{\rho}\right)\|x-y\|\,;\end{aligned}$$

◇ si $x \in K$ et $y \in K_\rho \setminus K$ alors en notant $y' = \Pi(y)$ on a :

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(y)\| &= \frac{\|\rho f(x) - \mathbf{d}(y,K)y - (\rho - \mathbf{d}(y,K))f(y')\|}{\rho} \\ &= \frac{\|\mathbf{d}(y,K)(f(x)-y) - (\rho - \mathbf{d}(y,K))(f(x) - f(y'))\|}{\rho} \\ &\leq \frac{\mathbf{d}(y,K)}{\rho}\|f(x)-y\| + \frac{\rho - \mathbf{d}(y,K)}{\rho}\|f\circ\Pi(x) - f\circ\Pi(y)\| \\ &\leq \frac{\|x-y\|}{\rho}(\rho + \overline{\mathbf{d}}(f(K),K)) + k\|x-y\| \\ &\leq \left(k+1+\frac{\overline{\mathbf{d}}(f(K),K)}{\rho}\right)\|x-y\|\,.\end{aligned}$$

Dans tous les cas la constante $k' = k+1+\frac{\overline{\mathbf{d}}(f(K),K)}{\rho}$ convient. □

Inversement, la propriété suivante permet de construire un prolongement d'une application lipschitzienne d'un compact auquel on a retiré une boule en une application lipschitzienne sur le compact tout entier.

▷ **PROPRIÉTÉ 4.2.9** (PROLONGEMENT LIPSCHITZIEN À L'INTÉRIEUR D'UNE BOULE)

Soit K un compact étoilé par rapport à un point x et B une boule ouverte de centre x et de rayon r incluse dans K, et notons $K' = K \setminus B$. Pour toute application k-lipschitzienne $f : K' \to K'$ et $\rho \in]0,1[$ il est possible de construire une application $g : K \to K$ vérifiant :

(1) $g|_{K'} = f|_{K'}$;

(2) $g|_{\rho B} = Id_{\rho B}$;

(3) *g est k'-lipschitzienne avec k' qui dépend de ρ,* $\mathrm{Diam}(K)$ *et r.*

DÉMONSTRATION

Pour tout point $y \in B \setminus \rho B$, il existe un unique $z \in [x,y) \cap \partial B$: notons-le $\Pi(y)$, et remarquons déjà que Π est $\frac{1}{\rho}$-lipschitzienne. Lorsque $y \in B \setminus \rho B$ on notera :

$$u(y) = \frac{\|\Pi(y) - y\|}{r(1-\rho)} \in [0,1[\,.$$

On définit alors l'application $h : K \setminus \rho B \to K \setminus \rho B$:

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x \in K \setminus B \\ u(y)y + (1-u(y))f\circ\Pi(y) & \text{si } y \in B \setminus \rho B. \end{cases}$$

On vérifie sans problème que h est continue, et que $h|_{\partial\rho B} = Id_{\partial\rho B}$. Soient y et z deux points de $K \setminus \rho B$, et considérons les trois cas possibles :

◇ si $(y,z) \in (K \setminus B)^2$ alors

$$\|h(y) - h(z)\| = \|f(y) - f(z)\| \leq k\|y - z\| \ .$$

◇ si $(y,z) \in B^2$ alors il vient :

$$\begin{aligned}
\|h(y) - h(z)\| &= \|f \circ \Pi(y) - f(z) + u(y)(y - f \circ \Pi(y)) - u(z)(z - f \circ \Pi(z))\| \\
&\leq \|f \circ \Pi(y) - f \circ \Pi(z)\| + \|u(y)(y - f \circ \Pi(y) - z + f \circ \Pi(z))\| \\
&\quad + \|(u(y) - u(z))(z - f \circ \Pi(z))\| \\
&\leq \frac{2k}{\rho}\|y - z\| + \|y - z\| + \frac{k}{\rho}\|y - z\| + \mathrm{Diam}(K)|u(y) - u(z)| \\
&= \left(2\frac{k}{\rho} + 1\right)\|y - z\| + \mathrm{Diam}(K)\left|\frac{\|y - \Pi(y)\| - \|z - \Pi(z)\|}{r(1-\rho)}\right| \\
&\leq \left(\frac{2k}{\rho} + 1\right)\|y - z\| + \mathrm{Diam}(K)\frac{\|y - z - \Pi(y) + \Pi(z)\|}{r(1-\rho)} \\
&\leq \left(\frac{2k}{\rho} + 1\right)\|y - z\| + \mathrm{Diam}(K)\frac{\|y - z\| + \|\Pi(y) - \Pi(z)\|}{r(1-\rho)} \\
&\leq \left(\frac{2k}{\rho} + 1\right)\|y - z\| + \mathrm{Diam}(K)\frac{\|y - z\| + \rho^{-1}\|y - z\|}{r(1-\rho)} \\
&= \left(1 + \frac{2k}{\rho} + \frac{2\mathrm{Diam}(K)}{\rho(1-\rho)r}\right)\|y - z\| \, ;
\end{aligned}$$

◇ si $y \in K \setminus B$ et $z \in B$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\|h(y) - h(z)\| &= \|f(y) - u(z)z - (1 - u(z))f \circ \Pi(z)\| \\
&\leq u(z)\|y - z\Pi(z)\| + (1 - u(z))\|f(y) - f \circ \Pi(z)\| \\
&\leq \|y - z\| + k\|y - \Pi(z)\| \\
&\leq \left(1 + \frac{k}{\rho}\right)\|y - z\| \ .
\end{aligned}$$

On a donc montré que h est lipschitzienne, il nous suffit d'utiliser la propriété 4.2.6 pour compléter dans ρB, et en notant g l'application obtenue la propriété est démontrée. □

À présent, énonçons une version simplifiée du théorème de prolongement de Kirszbraun pour les applications lipschitziennes. Cet énoncé nous sera pratique pour prolonger les projections radiales sur les faces d'un complexe (voir la définition 4.3.14*) en une application lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ tout entier. On pourra en trouver la démonstration dans [Ki] pour le cas euclidien.

*page 116

▷ **Théorème 4.2.10** (Prolongement lipschitzien)

Soit F une sous-partie de $\mathbb{R}^n$, et f une application lipschitzienne de F dans $\mathbb{R}^n$. Alors on peut construire une application lipschitzienne g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $g|_F = f$.

Un corollaire vient immédiatement, lorsque l'on dispose d'une famille d'applications lipschitziennes, chacune définie sur un polyèdre et constante sur sa frontière.

▷ **COROLLAIRE 4.2.11** (PROLONGEMENT LIPSCHITZIEN AUTOUR D'UN COMPLEXE)

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et S un complexe k-dimensionnel de $\mathbb{R}^n$ dont les polyèdres sont inclus dans un ouvert U et tels que, pour tout $\delta \in S$, on dispose d'une application lipschitzienne $\phi_\delta : \delta \to \delta$ vérifiant[6] *$\phi_\delta|_{\partial\delta} = Id_{\partial\delta}$.*

Alors il existe une application lipschitzienne $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall \delta \in S : \ \phi|_\delta = \phi_\delta \quad \text{et} \quad \phi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus U} \ .$$

DÉMONSTRATION

La démonstration du corollaire va essentiellement consister à prouver que l'application ψ_S définie sur le fermé $F = \mathcal{U}(S) \cup (\mathbb{R}^n \setminus U)$ par :

$$\psi_S(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin U \\ \phi_\delta(x) & \text{si } x \in \delta \in S \end{cases}$$

est lipschitzienne, et à lui appliquer le théorème.

D'abord constatons que la définition de ψ_S est consistante, puisque chaque polyèdre de S est disjoint du complémentaire de U, et que s'il existe un point $x \in \delta_1 \cap \delta_2$ où δ_1 et δ_2 sont deux polyèdres disjoints de S alors par définition d'un complexe $\delta_1 \cap \delta_2 \subset \partial\delta_1 \cup \partial\delta_2$ donc $\phi_{\delta_1}(x) = \phi_{\delta_2}(x) = x$.

Supposons ensuite que pour tout polyèdre $\delta \in S$ l'application ϕ_δ est k_δ-lipschitzienne et raisonnons par récurrence sur le nombre de polyèdres de S :

◇ si S est réduit à un seul polyèdre δ, notons

$$a = \min_{x \in \delta} (\mathbf{d}(x, \mathbb{R}^n \setminus U)) > 0 \quad \text{et} \quad b = \max_{x \in \delta} (\mathbf{d}(x, \mathbb{R}^n \setminus U)) < +\infty \ .$$

Déjà ψ_S est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}^n \setminus U$ et k_δ sur δ. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$ et $y \in \delta$, remarquons que puisque $\psi_S(y) = \phi_\delta(y) \in \delta$ alors :

$$\|\psi_S(x) - \psi_S(y)\| = \|x - \psi_S(y)\| \leq b \leq \frac{b}{a}\|x - y\| \ .$$

Donc ψ_S est bien $\max(1, k_\delta, b/a)$-lipschitzienne sur F.

◇ à présent supposons que $S = S' \sqcup \{\delta\}$ où S' est un complexe non vide, et que $\psi_{S'}$ est k-lipschitzienne. Soit alors $x \in \mathcal{U}(S')$ et $y \in \delta$, considérons le segment $[\psi_{S'}(x), \phi_\delta(y)]$: puisque $\phi_\delta(y) \in \delta$ et $\psi_{S'}(x) \notin \overset{\circ}{\delta}$ alors ce segment coupe $\partial\delta$ en au moins un point y', situé sur la frontière de δ.

Vérifions qu'on peut trouver une sous-face F de δ telle que $y' \in \overset{\circ}{F}$: déjà d'après le corollaire 1.1.13* on peut trouver une face G_1 de δ qui contient y'. Si $y' \in \overset{\circ}{G_1}$ alors on pose $F = G_1$ on a fini. Sinon, $y' \in \partial G$ et donc il existe une face G_2 de G_1 (qui est aussi une sous-face $k-2$-dimensionnelle de δ d'après la proposition 1.1.12*) telle que $y' \in G_2$... et ainsi de suite par récurrence, on va trouver un rang $i \leq k$ et une sous-face $k-i$-dimensionnelle G_i de δ telle que $y' \in \overset{\circ}{G_i}$ ou $y' \in \partial G_i$. Puisque les sous-faces de dimension zéro de δ sont par définition ses sommets, le processus va s'arrêter au plus au rang $i = k$ — auquel cas y' est un sommet de δ — donc dans tous les cas on peut trouver une sous-face F telle que $y' \in \overset{\circ}{F}$.

p. 25 et 24*

À présent notons S'' le sous-complexe de S' des polyèdres qui n'intersectent pas F, δ' un polyèdre de S' qui contient $\psi_{S'}(x)$ et considérons les trois cas possibles :

6. Ici les notions d'intérieur et d'adhérence sont prises relativement au sous-espace affine minimal contenant le polyèdre, voir la définition 1.1.10*.

page 23*

⋆ si F est une sous-face commune à δ et à au moins un polyèdre de S' alors $\psi_S(y') = \psi_{S'}(y') = \phi_\delta(y') = y'$ et donc :

$$\begin{aligned}\|\psi_S(x) - \psi_S(y)\| &= \|\psi_{S'}(x) - \phi_\delta(y)\| \\ &= \|\psi_{S'}(x) - \psi_{S'}(y')\| + \|\phi_\delta(y') - \phi_\delta(y)\| \\ &\leq (k + k_\delta)(\|x - y'\| + \|y' - y\|) \\ &= (k + k_\delta)\|x - y\| \,;\end{aligned}$$

⋆ si $\delta' \in S''$ alors en posant

$$a(F) = \min_{x \in \mathcal{U}(S'')} \mathbf{d}(x, F) > 0 \quad \text{et} \quad b(F) = \max_{x \in \mathcal{U}(S'')} \mathbf{d}(x, F) \in]0, 1]$$

il vient :

$$\begin{aligned}\|\psi_S(x) - \psi_S(y)\| &= \|\psi_{S'}(x) - \phi_\delta(y)\| \\ &= \|\psi_{S'}(x) - y'\| + \|\phi_\delta(y') - \phi_\delta(y)\| \\ &\leq b(F) + k_\delta\|y' - y\| \\ &\leq \left(\frac{b(F)}{a(F)} + k_\delta\right)\|x - y\| \;.\end{aligned}$$

⋆ si $\delta' \notin S''$ alors notons H le sous-espace affine minimal qui contient F, et G l'ensemble des sommets communs à F et δ'. Calculons le rapport minimal entre la distance à H et la distance à G des sommets de δ' qui ne sont pas dans G :

$$a(F) = \min\left\{\frac{\mathbf{d}(c, H)}{\mathbf{d}(c, G)} \,:\; c \in \mathcal{F}_0(\delta') \text{ et } c \notin G\right\} > 0 \;.$$

Il est facile de vérifier par un argument de convexité que pour tout $t \in \delta'$ — et en particulier pour $t = \psi_{S'}(x)$:

$$\mathbf{d}(t, H) \geq a(F)\mathbf{d}(t, G) \;.$$

Dès lors, en notant c un sommet commun à F et δ' à distance minimale de $\psi_{S'}(x)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\|\psi_S(x) - \psi_S(y)\| &= \|\psi_{S'}(x) - \phi_\delta(y)\| \\ &= \|\psi_{S'}(x) - \psi_{S'}(c)\| + \|\phi_\delta(c) - \phi_\delta(y)\| \\ &\leq (k + k_\delta)\,(\|x - c\| + \|c - y\|) \;.\end{aligned}$$

Dans le triangle xcy, en notant respectivement $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{c}$ les angles non orientés des sommets x, y et c, un résultat simple de géométrie planaire nous donne les relations suivantes :

$$\frac{\|x - y\|}{\sin\hat{c}} = \frac{\|x - c\|}{\sin\hat{y}} = \frac{\|c - y\|}{\sin\hat{x}} \;.$$

Il suffit alors de constater que le sinus de l'angle formé par les droites (x, c) et (y, c) est compris entre $a(F)$ et 1, dès lors :

$$\begin{aligned}\|x - c\| + \|c - y\| &= \frac{\sin\hat{y}}{\sin\hat{c}}\|x - y\| + \frac{\sin\hat{x}}{\sin\hat{c}}\|x - y\| \\ &\leq \frac{2}{a(F)}\|x - y\|\end{aligned}$$

d'où on tire :

$$\|\psi_S(x) - \psi_S(y)\| \leq \frac{2(k+k_\delta)}{a(F)}\|x-y\| \ .$$

Dans les trois cas, on a pu trouver une constante $c(F,\delta')$ telle que $\|\psi_S(x) - \psi_S(y)\| \leq c(F,\delta')\|x-y\|$. En prenant le maximum des $c(F,\delta')$ pour toutes les sous-faces F de δ et tous les polyèdres δ' de S' possibles (qui sont tous deux en nombres finis) on obtient une constante c uniforme.

Dans tous les cas on a donc démontré que $\psi|_{\mathcal{U}(S)}$ est lipschitzienne. Pour avoir le résultat sur F tout entier il suffit de reprendre le même argument qu'au début de la récurrence avec un seul polyèdre.

Par récurrence, on vient donc de démontrer que ψ est lipschitzienne sur F. Pour terminer, il suffit simplement d'appliquer le théorème 4.2.10 à ψ_S et on obtient le corollaire. □

La proposition suivante introduit la notion de projection ρ-magnétique sur un sous-espace affine, qui n'est autre que le raccordement du projecteur orthogonal sur ce sous-espace à l'application identité à l'extérieur d'une couronne d'épaisseur ρ autour d'un compact contenant sa propre projection. La seule condition sur le compact est que ses intersections par les sous-espaces affines orthogonaux à celui du projecteur doivent être vides ou convexes, pour pouvoir définir l'application Π utilisée pour le prolongement.

▷ **PROPOSITION 4.2.12** (PROJECTION ρ-MAGNÉTIQUE)

Soient K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et H un sous-espace affine strict de $\mathbb{R}^n$ tels que, en notant p le projecteur orthogonal sur H :

- ◇ *$p(K) \subset K$;*
- ◇ *$H \cap K$ est convexe ;*
- ◇ *pour tout $x \in H \cap K$, le compact $K(x) = K \cap (x + \overrightarrow{H}^{\perp})$ est convexe.*

Alors pour tout $\rho > 0$ il existe une application $\Pi_{H,\rho,K}$ de $\mathbb{R}^n$ dans H qu'on appellera projection ρ-magnétique sur H à l'intérieur de K vérifiant :

(1) $\Pi_{H,\rho,K}|_K = p|_K$;

(2) $\Pi_{H,\rho,K}(K_\rho) \subset K_\rho$ *(ici* $K_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}(x,K) \leq \rho\}$*)* ;

(3) $\Pi_{H,\rho,K}|_{\mathbb{R}^n \setminus K_\rho} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus K_\rho}$;

(4) $\Pi_{H,\rho,K}$ *est k'-lipschitzienne avec* $k' = 2 + \dfrac{\overline{\mathbf{d}}(H \cap K, K)}{\rho}$.

DÉMONSTRATION

Soit A un convexe compact non vide. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $y \in A$ tel que $\mathbf{d}(x,y) = \mathbf{d}(x,A)$. Par un argument de convexité on montre qu'un tel point y est unique, on l'appellera le projeté de x sur le convexe A et on le notera $\pi_A(x)$.

Montrons rapidement que π_A est 1-lipschitzien :

- ◇ d'abord c'est le cas si A est réduit à un point ;
- ◇ si A est le segment $[u,v]$ (avec $u \neq v$) alors notons q le projecteur orthogonal sur la droite (u,v). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\pi_A(x)$ vaut $q(x)$ si $q(x) \in [u,v]$, sinon $\pi_A(x)$ est égal au point u ou v le plus proche de $q(x)$. Considérons deux points x et y de $\mathbb{R}^n$, il y a quatre cas possibles à des permutations de notations près :
  - ⋆ si $q(x) \in [u,v]$ et $q(y) \in [u,v]$ alors $\|\pi_A(x) - \pi_A(y)\| = \|q(x) - q(y)\|$;
  - ⋆ si par exemple $q(x) \in [u,v]$ et $\pi_A(y) = v$ alors les vecteurs $q(x) - v$ et $q(x) - q(y)$ sont parallèles et de même sens donc $\|\pi_A(x) - \pi_A(y)\| = \|q(x) -$

$v\| = \|q(x) - q(y)\| - \|q(y) - v\| \leq \|q(x) - q(y)\|$;

⋆ si par exemple $\pi_A(x) = u$ et $\pi_A(y) = v$ alors de la même façon $\|\pi_A(x) - \pi_A(y)\| = \|q(x) - q(y)\| - \|q(y) - v\| - \|q(x) - u\| \leq \|q(x) - q(y)\|$;

⋆ si par exemple $\pi_A(x) = u$ et $\pi_A(y) = u$ alors $\|\pi_A(x) - \pi_A(y)\| = 0 \leq \|q(x) - q(y)\|$.

Dans tous les cas, lorsque A est un segment on a montré que π_A est 1-lipschitzien ;

◇ dans le cas général, considérons deux points x et y de $\mathbb{R}^n$ et posons $u = \pi_A(x)$ et $v = \pi_A(y)$. Par convexité $[u, v] \subset A$ donc $\|\pi_A(x) - \pi_A(y)\| \leq \|\pi_{[u,v]}(x) - \pi_{[u,v]}(y)\|$. Puisqu'on vient de montrer que $\pi_{[u,v]}$ est 1-lipschitzien, c'est donc aussi le cas de π_A.

À présent fixons $\rho > 0$ et pour $x \in \mathbb{R}^n$ considérons son projeté $\pi_{H\cap K}(x)$ sur le convexe compact non vide $H \cap K$. Par hypothèse, le compact $K(\pi_{H\cap K}(x)) = K \cap (\pi_{H\cap K}(x) + H^\perp)$ est convexe (puisque $\pi_{H\cap K}(x) \in K$) et non vide (puisque $\pi_{H\cap K}(x)$ lui appartient), on peut donc faire de nouveau la projection de x sur ce nouveau compact, qu'on notera $\Pi(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \ \Pi(x) = \pi_{K(\pi_{H\cap K}(x))}(x) \ .$$

$\Pi(x)$ appartient par construction à $K(\pi_{H\cap K}(x))$, par conséquent :

$$p \circ \Pi(x) \in p(K(\pi_{H\cap K}(x))) \subset H \cap (\pi_{H\cap K}(x) + \overrightarrow{H}^\perp) = \{\pi_{H\cap K}(x)\} \ .$$

Donc $p \circ \Pi = \pi_{H\cap K}$ qui est 1-lipschitzienne, de plus on vérifie sans problème que $\Pi|_K = Id_K$.

En utilisant successivement les extensions données dans les propriétés 4.2.8* et 4.2.6* avec p (qui est lui-même 1-lipschitzien) la proposition est démontrée. □ *p. 109 et 108

Étant donné un d-ensemble, le lemme suivant va nous donner le moyen de construire en presque tout point de sa partie rectifiable un cône et une boule à l'intérieur desquels il est possible de faire une projection magnétique sur un plan tangent, ϵ-proche en mesure de Hausdorff.

▷ **Lemme 4.2.13** (Projection magnétique dans un cône)

Soit E un d-ensemble de $\mathcal{H}^d$-mesure finie. Alors en $\mathcal{H}^d$-presque tout point x de la partie rectifiable de E, pour tout $\epsilon > 0$ il est possible de trouver $r_{\max} > 0$, $\rho \in]0, 1[$ et $u > 0$ tels qu'en notant

$$\mathcal{C}(x, r, u) = \{y \in \overline{B}(x, r) : \ \mathbf{d}(y, H) \leq u\|x - y\|\}$$

où H est un d-plan tangent approximatif en x on ait, pour tout $r \in]0, r_{\max}[$:

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{H,\rho r,\mathcal{C}(x,r,u)}(E \cap B(x, r + r\rho) \setminus \mathcal{C}(x, r, u))) \leq \epsilon\mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + r\rho)) \ .$$

DÉMONSTRATION

Remarquons pour commencer que $\mathcal{C}(x, r, u)$ peut convenir pour le compact noté K dans la proposition 4.2.12, et fixons $\epsilon' > 0$, $u > 0$ et $\rho \in]0, 1[$.

Supposons d'abord que $\underline{d}^d_E(x) = 1$, alors il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $t < r_1$:

$$c_d(2t)^d(1 + \epsilon')^{-1} \leq \mathcal{H}^d(E \cap B(x, t)) \leq c_d(2t)^d(1 + \epsilon') \ .$$

En prenant $t = r$ et $t = r + r\rho$ dans les inégalités précédentes, pour tout $r < \frac{r_1}{2}$ il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + r\rho) \setminus B(x, r)) &\leq 2^d c_d (1 + \epsilon')(r + r\rho)^d - 2^d c_d (1 + \epsilon')^{-1} r^d \\ &\leq 2^d c_d (r + r\rho)^d (1 + \epsilon')^{-1} \left((1 + \epsilon')^2 - \frac{r^d}{(r + r\rho)^d} \right) \\ &\leq \left((1 + \epsilon')^2 - \frac{1}{(1 + \rho)^d} \right) \mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + r\rho)) \ .\end{aligned}$$

En prenant ρ suffisamment petit pour que $(1 + \rho)^d < \frac{1}{(1-\epsilon')^2}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + r\rho) \setminus B(x, r)) &\leq ((1 + \epsilon')^2 - (1 - \epsilon')^2) \mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + r\rho)) \\ &= 2\epsilon' \mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + r\rho)) \ .\end{aligned}$$

Supposons en plus que H est un plan tangent approximatif en x, alors il existe $r_2 > 0$ tel que pour tout $r < r_2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d(E \cap B(x, r) \setminus \mathcal{C}(x, r, u)) &\leq \epsilon' r^d c_d \\ &\leq \epsilon'(1 + \epsilon') \mathcal{H}^d(E \cap B(x, r)) \\ &\leq \epsilon'(1 + \epsilon') \mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + r\rho)) \ .\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$E \cap B(x, r+r\rho) \setminus \mathcal{C}(x, r, u) = (E \cap B(x, r + r\rho) \setminus B(x, r)) \cup (E \cap B(x, r) \setminus \mathcal{C}(x, r, u)) \ .$$

Puisque $\Pi_{H,\rho r,\mathcal{C}(x,r,u)}$ est $2 + \frac{u}{\rho}$-lipschitzienne, il vient :

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^d(\Pi_{H,\rho r,\mathcal{C}(x,r,u)}(E \cap B(x, r + r\rho) \setminus \mathcal{C}(x, r, u))) \\ &\qquad \leq \left(2 + \frac{u}{\rho} \right)^d (2\epsilon' + \epsilon'(1 + \epsilon')) \mathcal{H}^d(E \cap B(x, r + r\rho)) \ .\end{aligned}$$

À présent, choisissons $u > 0$ assez petit pour que $\left(2 + \frac{u}{\rho}\right)^d < 2^d + \epsilon'$, on obtient alors :

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{H,\rho r,\mathcal{C}(x,r,u)}(E \cap B(x, r+r\rho) \setminus \mathcal{C}(x, r, u))) \leq \epsilon'(2^d + \epsilon')(3 + \epsilon') \mathcal{H}^d(E \cap B(x, r+r\rho)) \ .$$

En posant $r_{\max} = \min\left(\frac{r_1}{2}, r_2\right)$, et en rappelant que sur la partie rectifiable de E, en $\mathcal{H}^d$-presque tout point de E la densité sphérique inférieure vaut 1 et E admet un plan tangent, cela achève la démonstration du lemme en prenant, pour ϵ donné, une valeur de ϵ' suffisamment petite pour que $\epsilon'(2^d + \epsilon')(3 + \epsilon') < \epsilon$. □

4.3 Projection radiale sur des polyèdres

Par définition un polyèdre est convexe, donc étoilé par rapport à tout point lui appartenant. Toute demi-droite d'origine l'un des points de l'intérieur du polyèdre coupe sa frontière en un unique point, ce qui légitime l'existence et l'unicité de z dans la définition suivante (la notion de frontière est prise ici relativement au plus petit espace affine contenant δ).

▷ **Définition 4.3.14** (Projection radiale)

Soit δ un polyèdre k-dimensionnel ($k \leq n$) et x un point de $\overset{\circ}{\delta}$. On définit la projection radiale $\Pi_{\delta,x}$ sur les faces de δ par :

$$\Pi_{\delta,x} : \begin{cases} \delta \setminus \{x\} \to \partial\delta \\ y \mapsto z \in [x,y) \cap \partial\delta \ . \end{cases}$$

Cette projection radiale est égale à l'identité sur $\partial\delta$. De plus, comme l'indique le lemme suivant, il est possible de trouver des centres dans $\overset{\circ}{\delta}$ tels qu'on puisse majorer en fonction de la régularité de δ l'augmentation de mesure de la projection radiale d'un ensemble donné qui y est contenu.

▷ **Lemme 4.3.15** (Projection radiale optimale)

Pour tous entiers d et k tels que $1 \leq d < k \leq n$, il existe une constante universelle $K > 0$ ne dépendant que de d et k, telle que pour tout polyèdre k-dimensionnel δ et d-ensemble E tels que $E \subset \delta$, on peut trouver une partie X de $\mathcal{H}^k$-mesure non nulle vérifiant :

$$\forall x \in X : \ \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E)) \leq K R(\delta)^{-2d} \mathcal{H}^d(E) \ .$$

Ici la quantité $R(\delta)$ mesure la régularité du polyèdre δ et de ses sous-faces (voir la définition 1.2.25), elle est dans l'intervalle $]0,1]$ et d'autant plus proche de 1 que le polyèdre est «proche d'une boule».*

* page 36

Démonstration

Soit B une boule k-dimensionnelle inscrite dans δ, B' une boule de rayon moitié et même centre, et H le sous-espace affine k-dimensionnel contenant δ. Pour $z \in \partial\delta$, notons $n(z)$ un vecteur unitaire $\mathcal{H}^{k-1}$-presque partout normal à $\partial\delta$ en z dans H, et définissons alors, pour $x \in B'$ et $z \in \partial\delta$:

$$\tau_x(z) = \frac{\|z-x\|}{|<n(z), z-x>|} \qquad \text{et} \qquad A = \sup_{x \in B', z \in \partial\delta} \tau_x(z) \ .$$

Pour tout $z \in \partial\delta$, d'après le corollaire 1.1.13* il existe une face F telle que $z \in F$. Notons H' le sous-espace affine de dimension $k-1$ qui contient F. Puisque $x \in B'$ et que δ est inclus dans une boule de même centre que B' et de rayon $2\overline{R}(\delta)$ on a :

* page 25

$$\mathbf{d}(x,H) \geq \frac{\underline{R}(\delta)}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{d}(x,z) \leq 2\overline{R}(\delta) \ .$$

Dès lors, si $n(z)$ est un vecteur normal à H' (pris relativement au sous-espace vectoriel $\overrightarrow{H}$) on a :

$$\tau_x(z) = \frac{\|z-x\|}{\mathbf{d}(x,H')} \ .$$

On en tire :

$$A \leq 4\frac{\overline{R}(\delta)}{\underline{R}(\delta)} = \frac{4}{R(\delta)} \ .$$

Fixons un entier $p > 0$ et un point $x \in B'$, et considérons l'ensemble $\{F_1, \ldots, F_m\} = \mathcal{F}_{k-1}(\delta)$ des face de δ et $H_1, \ldots, H_k$ les sous-espaces affines de dimension $k-1$ qui les contiennent : Pour $r > 0$ notons h_r l'homothétie affine de centre

x et de rapport r et posons (pour $0 \leq l < p$ et $1 \leq i \leq m$) :

$$\mathcal{C}_l^i(x) = \bigcup_{\frac{l}{p} < r \leq \frac{l+1}{p}} h_r(F_i) \ ,$$

$$\mathcal{C}^i(x) = \bigcup_{0 \leq r \leq 1} h_r(F_i) = \bigcup_l \mathcal{C}_l^i(x) \quad \text{et} \quad \delta_l = \bigcup_{\frac{l}{p} < r \leq \frac{l+1}{p}} h_r(\delta) = \bigcup_i \mathcal{C}_l^i(x) \ .$$

Puisque $x \in B' \subset \overset{\circ}{\delta}$ avec δ convexe, on a les égalités

$$\delta \setminus \{x\} = \bigcup_{i,l} \mathcal{C}_l^i(x) = \bigcup_i \mathcal{C}^i(x) = \bigcup_l \delta_l(x)$$

de plus les $\delta_l(x)$ sont deux à deux disjoints.

Supposons $l > 0$, et remarquons déjà que la restriction de $\Pi_{\delta,x}$ à $\mathcal{C}^i(x)$ est la projection radiale de centre x sur H_i. Par conséquent, on a déjà que $\Pi_{\delta,x}$ est lipschitzienne sur chacun des $\mathcal{C}_l^i(x)$, de constante au plus

$$\frac{p}{l} \max_{z \in F_i} \tau_x(z) \leq \frac{pA}{l} \ .$$

Remarquons alors que la mesure de la projection radiale de E peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E)) &= \sum_{0 \leq l < p} \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E \cap \delta_l)) \\ &= \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E \cap \delta_0)) + \sum_{1 < l < p} \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E \cap \delta_l)) \ . \end{aligned}$$

Lorsque $x \in B' \setminus E$, puisque E est supposé fermé alors il existe un rang p à partir duquel $E \cap \delta_0 = \emptyset$, et donc :

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E)) = \sum_{1 < l < p} \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E \cap \delta_l)) \leq A^d \sum_{1 < l < p} \left(\frac{p}{l}\right)^d \mathcal{H}^d(E \cap \delta_l) \ .$$

Par ailleurs lorsque $y \in \delta_l$, $\|y - x\| < \frac{l+1}{p} \overline{R}(\delta) < \frac{2l}{p} \overline{R}(\delta)$ donc on a :

$$\mathcal{H}^d(E \cap \delta_l) = \int_{y \in E \cap \delta_l} d\mathcal{H}^d(y) \leq \left(\frac{2l}{p} \overline{R}(\delta)\right)^d \int_{y \in E \cap \delta_l} \frac{d\mathcal{H}^d(y)}{\|y - x\|^d} \ .$$

En remplaçant dans la somme précédente on trouve alors :

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E)) \leq (2A\overline{R}(\delta))^d \sum_{1 < l < p} \int_{y \in E \cap \delta_l} \frac{d\mathcal{H}^d(y)}{\|y - x\|^d} = (2A\overline{R}(\delta))^d \int_{y \in E} \frac{d\mathcal{H}^d(y)}{\|y - x\|^d} \ .$$

Si l'on intègre maintenant $\mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E))$ par rapport à $x \in B' \setminus E$ on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_{x \in B' \setminus E} \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E)) d\mathcal{H}^k(x) \leq (2A\overline{R}(\delta))^d \int_{x \in B' \setminus E} \int_{y \in E} \frac{d\mathcal{H}^d(y) d\mathcal{H}^k(x)}{\|y - x\|^d} \ .$$

Puisque B' est une boule k-dimensionnelle de rayon $\frac{\underline{R}(\delta)}{2}$ avec $1 \leq d < k$ on a aussi :

$$\int_{x \in B' \setminus E} \frac{d\mathcal{H}^k(x)}{\|y - x\|^d} = \int_{x \in B'} \frac{d\mathcal{H}^k(x)}{\|y - x\|^d} = C\underline{R}(\delta)^{k-d} < +\infty$$

où $C > 0$ ne dépend que de d et k. Puisque $\displaystyle\int_{y\in E} C\underline{R}(\delta)^{k-d}d\mathcal{H}^d(y) = C\underline{R}(\delta)^{k-d}\mathcal{H}^d(E) < +\infty$ (car E est par hypothèse un d-ensemble inclus dans δ, donc borné, donc de mesure finie) on peut alors appliquer le théorème de Fubini et en remplaçant dans l'inégalité plus haut il vient :

$$\int_{x\in B'\setminus E} \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E))d\mathcal{H}^k(x) \leq (2A)^d C\underline{R}(\delta)^{k-d}\overline{R}(\delta)^d\mathcal{H}^d(E) \ .$$

De plus il existe une constante $D > 0$ ne dépendant que de k telle que :

$$\mathcal{H}^k(B' \setminus E) = \int_{x\in B'} d\mathcal{H}^k(x) = D\underline{R}(\delta)^k \ .$$

Par conséquent, il est donc possible de trouver une partie $X \subset B' \setminus E$ de $\mathcal{H}^d$-mesure non nulle telle que, pour tout $x \in X$ on ait par exemple :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E)) &\leq 2\frac{\displaystyle\int_{x\in B'} \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x}(E))d\mathcal{H}^k(x)}{\mathcal{H}^k(B')} \\ &\leq \frac{2(2A)^d C\underline{R}(\delta)^{k-d}\overline{R}(\delta)^d}{D\underline{R}(\delta)^k}\mathcal{H}^d(E) \\ &\leq \frac{8^{d+1}C}{DR(\delta)^{2d}}\mathcal{H}^d(E) \ .\end{aligned}$$

Les constantes C et D ne dépendent que de d et k, ce qui achève la démonstration de notre lemme. □

Dans le cas où E est purement non rectifiable, le lemme suivant affirme en outre qu'on peut préserver le caractère purement non rectifiable (ou même annuler la mesure) de sa projection radiale pour presque tout centre.

▷ **Lemme 4.3.16** (Projection radiale et pure non rectifiabilité)

Soit d un entier tels que $1 \leq d < k \leq n$, δ un polyèdre k-dimensionnel et E un d-ensemble purement non rectifiable tel que $E \subset \delta$. Dans ces conditions :

- ◇ *si $d = n-1$ alors pour $\mathcal{H}^k$-presque tout centre $x \in \overset{\circ}{\delta}$ la projection radiale $\Pi_{\delta,x}(E)$ est de $\mathcal{H}^d$-mesure nulle ;*
- ◇ *si $d < n-1$ alors pour $\mathcal{H}^k$-presque tout centre $x \in \overset{\circ}{\delta}$ la projection radiale $\Pi_{\delta,x}(E)$ est purement non d-rectifiable ou de $\mathcal{H}^d$-mesure nulle.*

Démonstration

Pour alléger les notations qui vont suivre, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ on notera (x, y) le point de $\mathbb{R}^n$ dont la première coordonnée est x et les suivantes celles de y dans le même ordre. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^n$ et considérons :

- ◇ $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ et deux réels α et β (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$) ;
- ◇ P l'hyperplan affine $\{1\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et p le projecteur orthogonal sur P ;
- ◇ Π_a la projection radiale sur P à travers le point de coordonnées $(0, a)$;
- ◇ F un d-ensemble purement non rectifiable ($d < 2$) tel que F soit inclus dans le pavé

$$D = [\alpha, 1] \times [-\beta, \beta]^{n-1} \ .$$

On va montrer que pour presque tout a, $\Pi_a(F)$ est purement non rectifiable ou de mesure nulle. Pour cela définissons encore l'application ϕ_a :

$$\phi_a : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{x}, a + \frac{y-a}{x}\right) \end{cases} .$$

Il est clair que $\Pi_a = p \circ \phi_a$, de plus en posant $(x',y') = \phi_0(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$ il vient :

$$\phi_a(x,y) = \left(\frac{1}{x}, a + \frac{y}{x} - \frac{a}{x}\right) = (x', a + y' - x'a) .$$

Par ailleurs posons $b = (1,a)$ et définissons les deux applications linéaires p_a et f_a :

$$p_a : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ z = (x,y) \longmapsto z - \frac{\langle z,b\rangle}{\|b\|^2} b = \left(x - \frac{x + \langle y,a\rangle}{1+\|a\|^2}, y - \frac{x+\langle y,a\rangle}{1+\|a\|^2} a\right) \end{cases}$$

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ z = (x,y) \longmapsto (x, y - xa) \end{cases} .$$

On remarque alors que :

$$f_a \circ p_a(x',y') = \left(x' - \frac{x' + \langle y', a\rangle}{1+\|a\|^2}, y' - x'a\right) .$$

Dès lors, en notant τ_a la translation de vecteur $b = (1,a)$ il vient :

$$p \circ \tau_a \circ f_a \circ p_a \circ \phi_0(x,y) = p \circ \phi_a(x,y) = \Pi_a(x,y) .$$

Il est clair que f_a est lipschitzienne de constante au plus $1 + \|a\|$, on en tire :

$$\mathcal{H}^d(\Pi_a(F)) = \mathcal{H}^d(p\circ\tau_a\circ f_a\circ p_a\circ\phi_0(F)) \leq \mathcal{H}^d(f_a\circ p_a\circ\phi_0(F)) \leq (1+\|a\|)^d \mathcal{H}^d(p_a\circ\phi_0(F)) .$$

Il nous reste encore à remarquer que sur le pavé D, l'application ϕ_0 est bi-lipschitzienne (c'est à dire lipschitzienne, injective et de réciproque lipschitzienne), donc que $F' = \phi_0(F)$ est lui aussi purement non rectifiable. Revenons à la définition de p_a : c'est l'application qui à $z \in \mathbb{R}^n$ associe $z - \frac{\langle z,b\rangle}{\|b\|^2} b$, c'est à dire le projecteur orthogonal sur l'hyperplan normal au vecteur $b = (1,a)$.

Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$, l'application $a \mapsto \overline{a}$ qui à a associe la direction de $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^*$ parallèle au vecteur $b = (1,a)$ est bi-lipschitzienne sur K (voir la définition 3.3.19* pour les distances utilisées). Par conséquent il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 3.3.21* : pour presque tout $a \in K$, $\phi_a(F)$ est purement non d-rectifiable ou de $\mathcal{H}^d$-mesure nulle. Cette propriété étant vérifiée sur tout compact $K \subset \mathbb{R}$, elle reste vraie pour $a \in \mathbb{R}^{n-1}$. Il est clair en outre que cette démonstration peut être refaite pour des centres de projection radiale de coordonnées (x,a) avec $x < 0$. Par conséquent, pour $\mathcal{H}^n$-presque tout centre (x,a) tel que $x \leq 0$, la projection radiale de F sur P est purement non rectifiable ou de mesure nulle (et forcément de mesure nulle si $d = n-1$).

p. 102 et 103*

Revenons à présent à la démonstration du lemme. Puisqu'on travaille dans le k-plan qui contient δ on peut supposer pour simplifier que $k = n$. Puisque E est supposé fermé, en tout point $x \in \overset{\circ}{\delta} \setminus E$ on peut trouver une boule B de centre x telle que $B \subset \overset{\circ}{\delta} \setminus E$. En reprenant les notations de la démonstration du lemme 4.3.15, si on considère une face F_i de δ_i, incluse dans l'hyperplan affine H_i alors $\mathcal{C}^i(x) \cap E$ est

situé à une distance strictement positive de l'hyperplan parallèle à H_i passant par x. D'après ce qu'on vient de voir, on peut donc trouver une boule $B_i \subset B$ de centre x telle que pour $\mathcal{H}^k$-presque tout $y \in B_i$ on ait :

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,y}(E \cap \mathcal{C}^i(y))) = 0 \ .$$

En répétant cette opération pour toutes les faces de δ, on peut trouver une boule $B' = \bigcap_i B_i$, centrée en x telle que pour $\mathcal{H}^k$-presque tout $y \in B'$ on ait :

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,y}(E)) = 0 \ .$$

Puisque E est $\mathcal{H}^k$-négligeable (car $d < k$), en répétant cet argument pour tout $x \in \overset{\circ}{\delta} \setminus E$ on obtient le résultat. □

On dispose à présent de tous les éléments nécessaires pour établir un premier théorème d'approximation polyédrale.

L'idée ici est de construire un complexe dans un ouvert borné contenant un d-ensemble E de mesure finie, et une application lipschitzienne qui déforme E en un ensemble E' porté par des sous-faces d-dimensionnelles de S, tout en gardant la mesure de E' arbitrairement proche de celle de E.

▷ **Théorème 4.3.17** (Approximation polyédrale)

On se place dans dans $\mathbb{R}^n$ et on considère un entier d tel que $0 < d < n$ et une application continue $h : \mathbb{R}^n \to [1, +\infty[$.

Dans ces conditions il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout ouvert borné U, pour tout d-ensemble E fermé inclus dans U et pour tout $\epsilon > 0$, $R > 0$ on puisse construire un complexe n-dimensionnel S dyadique en surface de pas au plus R et une application lipschitzienne ϕ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

(1) $\phi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus U}$ *et* $\forall \delta \in S : \ \phi(\delta) \subset \delta$;

(2) $\mathcal{R}(S) \geq M$ *(voir la définition 1.2.27* de la régularité totale d'un complexe)* ; * page 37

(3) $\phi(E) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S))$ *et* $\mathcal{U}(S) \subset U$;

(4) $\mathcal{H}^d_f(\phi(E)) \leq (1+\epsilon)\mathcal{H}^d_f(E)$.

DÉMONSTRATION

Pour commencer, supposons que E est d-rectifiable et h constante et égale à 1. Fixons $\epsilon' > 0$, $R > 0$ et considérons le lemme 4.2.13* : en $\mathcal{H}^d$ presque tout point de E, on peut trouver $r_{\max}(x) > 0$ et $\rho > 0$ tels que pour $r < r_{\max}(x)$, l'inégalité indiquée est vérifiée. Notons $\mathcal{B}$ la collection des boules fermées centrées en un point x de E où le lemme 4.2.13 s'applique, incluses dans U, et de rayon plus petit que $\frac{r_{\max}(x)}{1+\rho}$: c'est un recouvrement de Vitali de E à une partie de $\mathcal{H}^d$-mesure près, on peut d'après le lemme 4.1.4* extraire de ce recouvrement une sous-famille dénombrable de boules disjointes $\widehat{\mathcal{B}} = (B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que : * p. 115 et 105

$$\mathcal{H}^d\left(E \setminus \bigcup_i B_i\right) = 0 \ .$$

Pour une boule $B_i \in \widehat{\mathcal{B}}$ de rayon r, en notant ρ_i et u_i les constantes données par le lemme 4.2.13 en x_i, et en posant $r_i = \frac{r}{\rho_i+1}$ considérons le compact

$$K_i = \mathcal{C}(x_i, r_i, u_i) \ .$$

En notant H_i le d-plan tangent approximatif en x_i, notre condition sur les rayons des boules implique que :

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{H_i,\rho_i r_i,K_i}(E \cap B(x_i, r_i + r_i\rho_i) \setminus K_i)) \leq \epsilon \mathcal{H}^d(E \cap B(x_i, r_i + r_i\rho_i)) \ .$$

Considérons maintenant une sous-famille finie $\overline{\mathcal{B}}$ de $\widehat{\mathcal{B}}$ telle que

$$\mathcal{H}^d\left(E \setminus \bigcup_{B\in\overline{\mathcal{B}}} B\right) \leq \epsilon' \mathcal{H}^d(E)$$

et posons :

$$\phi_0 = \prod_{B_i\in\overline{\mathcal{B}}} \Pi_{H_i,r_i\rho,K_i} \ .$$

Par construction, les $(K_i)_{r_i\rho}$ sont disjoints deux à deux car inclus dans les B_i, donc les projections magnétiques intervenant dans le produit sont de supports deux à deux disjoints. Par conséquent, l'inégalité obtenue grâce au lemme 4.2.13* reste vraie en rem-
p. 115 et 108* plaçant $\Pi_{H_i,r_i\rho,K_i}$ par ϕ_0, de plus ϕ_0 est γ-lipschitzienne d'après la propriété 4.2.7*, où γ est le plus grand des $2 + \frac{u_i}{\rho_i}$.

Soit $\alpha > 0$, et plaçons-nous dans l'une des boules B_i de $\overline{\mathcal{B}}$: à condition d'avoir $\alpha\sqrt{n} < r_i$ il est possible de construire un complexe dyadique n-dimensionnel, parallèle au d-plan H_i (c'est à dire dans une base orthonormée dont d vecteurs forment une base de H_i, et dont l'origine est dans H_i) et non vide de pas α dans B_i. Il existe aussi une constante $A > 0$ telle qu'à condition que $\alpha < Au_ir_i(1-\rho)$ on puisse même le faire à l'intérieur de K_i. De plus, en prenant tous les cubes possibles dans K_i, il est possible de trouver $\alpha_i > 0$ tel que si $\alpha < \alpha_i$ alors on puisse construire un complexe dyadique S_i de pas α, parallèle à H_i, dont tous les cubes sont dans K_i et tel que :

$$\mathcal{H}^d(\phi_0(E) \cap K_i \setminus \mathcal{U}(S_i)) \leq \epsilon' \mathcal{H}^d(\phi_0(E) \cap K_i) \leq \epsilon' \mathcal{H}^d(E \cap B_i) \ .$$

En posant $\alpha_{\max} = \min_{B_i\in\overline{B}} \alpha_i$ alors on garantit en construisant nos complexes de pas $\alpha < \alpha_{\max}$, que $\Sigma_2 = \bigcup_{B_i\in\overline{B}} S_i$ est un complexe n-dimensionnel composé d'une union de sous-complexes dyadiques vérifiant l'inégalité ci-dessus. Posons alors :

$$E_1 = E \setminus \bigcup_{B\in\overline{\mathcal{B}}} B \quad , \quad E_3 = \{x \in E \cap \bigcup_{B_i\in\overline{\mathcal{B}}} K_i : \ \phi_0(x) \notin \mathcal{U}(S_i)\}$$
$$E_2 = E \cap \bigcup_{B_i\in\overline{\mathcal{B}}} B_i \setminus K_i \quad \text{et} \quad E_4 = \{x \in E \cap \bigcup_{B_i\in\overline{\mathcal{B}}} K_i : \ \phi_0(x) \in \mathcal{U}(S_i)\} \ .$$

Par construction $E = E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3 \sqcup E_4$ et $\mathcal{H}^d(\phi_0(E_4)) \leq \mathcal{H}^d(E_4)$, de plus on a aussi les inégalités suivantes :

$$\mathcal{H}^d(\phi_0(E_1)) \leq k_1^d \mathcal{H}^d(E_1) \leq \epsilon' k_1^d \mathcal{H}^d(E) \, ;$$
$$\mathcal{H}^d(\phi_0(E_2)) \leq k_1^d \mathcal{H}^d(E_2) \leq \epsilon' k_1^d \mathcal{H}^d(E) \, ;$$
$$\mathcal{H}^d(\phi_0(E_3)) \leq \ \mathcal{H}^d(E_3) \ \leq \epsilon' \mathcal{H}^d(E) \ .$$

En sommant et en posant $\epsilon'' = \epsilon'(1 + 2k_1^d)$ on trouve :

$$\mathcal{H}^d(\phi_0(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3)) \leq \epsilon'' \mathcal{H}^d(E) \ .$$

On pourra aussi remarquer que $\phi_0(E_4) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S))$.

Puisque E est compact, ainsi que ∂U, avec $E \cap \partial U = \emptyset$ alors $\mathbf{d}(E, \partial U) > 0$, donc on peut aussi supposer qu'on a choisi α tel que $\alpha \leq \alpha_{\max}$, $4\alpha\sqrt{n} \leq \mathbf{d}(E, \partial U)$ et $\alpha < R$. Ainsi étant donnée une base orthonormale quelconque on peut donc construire un complexe dyadique de pas α dans cette base, à l'intérieur de U et qui recouvre E_1. Et par exemple en supposant que $4\alpha\sqrt{n} < \min_i \frac{\rho_i}{4}$, il est possible de construire un tel complexe à l'extérieur des $(K_i)_{r_i\rho_i/2}$ et de façon à ce qu'il recouvre les $(K_i)_{r_i\rho_i} \setminus (K_i)_{7r_i\rho_i/8}$: on notera Σ_1 le complexe ainsi obtenu.

Il est temps d'utiliser le théorème 2.3* : là encore en supposant qu'on a choisi α suffisamment petit pour que les $\frac{\rho_i}{2\alpha}$ soient tous au moins aussi grands que la distance spécifiée dans le théorème pour faire la fusion de deux complexes unitaires, il est possible de faire fusionner les sous-complexes S_i composant Σ_2 avec Σ_1 en construisant des polyèdres qui achèvent de recouvrir les K_i. En notant S le complexe ainsi obtenu, on a que $E \subset \mathcal{U}(S) \subset U$, de plus sa régularité totale $\mathcal{R}(S)$ est minorée par une constante universelles M ne dépendant que de n. *page 61

Posons $F_0 = \phi_0(E)$ — on vient de voir que $\mathcal{H}^d(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3) \leq \epsilon'' \mathcal{H}^d(E)$ et $F_0 \subset \mathcal{U}(S) = \mathcal{U}(\mathcal{F}_n(S))$ — raisonnons par récurrence et supposons que pour $k \in \{1, \ldots, n-d\}$ donné on a trouvé une application lipschitzienne ϕ_{k-1} telle que, en posant $F_{k-1} = \phi_{k-1}(E)$:

- $\diamond$ $\phi_{k-1}|_{E_4} = \phi_0|_{E_4}$;
- $\diamond$ il existe une constance universelle $C > 0$ ne dépendant que de d et n telle que $\mathcal{H}^d(\phi_{k-1}(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3)) \leq C^{k-1}\epsilon'' \mathcal{H}^d(E)$;
- $\diamond$ $F_{k-1} \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_{n-k+1}(S))$.

Pour tous les polyèdres $\delta \in \mathcal{F}_{n-k+1}(S)$ on peut appliquer le lemme 4.3.15* à $F_{k-1} \cap \delta$, donc il existe un centre $x_\delta \in \overset{\circ}{\delta} \setminus F_{k-1}$ tel que : *page 117

$$\mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,x_\delta}(F_{k-1} \cap \delta)) \leq K_{d,k}\mathcal{R}(S)^{-2d}\mathcal{H}^d(F_{k-1} \cap \delta)$$

où K_k est une constante ne dépendant que de d et k. Par ailleurs, par hypothèse de récurrence $\phi_{k-1}|_{E_4} = \phi_0|_{E_4}$, or $\phi_0|_{E_4}$ est défini comme le projecteur orthogonal sur H_i à l'intérieur de chacun des K_i, donc $\phi_{k-1}(E_4) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S)) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_{n-k}(S))$. Dès lors, pour toute sous-face $\delta \in \mathcal{F}_{n-k+1}(\Sigma_2)$, $\phi_{k-1}(E_4) \cap \delta \subset \partial\delta$ et donc $\Pi_{\delta,x_\delta}|_{\phi_0(E_4)\cap\delta} = Id_{\phi_0(E_4)\cap\delta}$. En outre, puisque $E_4 \subset \mathcal{U}(\Sigma_2)$:

$$\forall \delta \in \mathcal{F}_{n-k+1}(S) : \ \Pi_{\delta,x_\delta}|_{\phi_0(E_4)\cap\delta} = Id_{\phi_0(E_4)\cap\delta} \ .$$

Remarquons aussi que puisque les centres c_δ ne sont pas dans E, il est possible de trouver une boule $n-k$-dimensionnelle fermée B_δ de centre x_δ et incluse dans $\overset{\circ}{\delta}$ telle que $B_\delta \cap F_{k-1} = \emptyset$. En restreignant Π_{δ,x_δ} à $\delta \setminus B_\delta$ on a une application lipschitzienne de $\delta \setminus B_\delta$ dans $\partial\delta$, qu'on peut prolonger grâce à la propriété 4.2.9* en une application ϕ_δ sur δ tout entier. Puisque pour tout $\delta \in \mathcal{F}_{n-k}(S)$, on a que $\phi_\delta|_{\partial\delta} = Id_{\partial\delta}$ on peut appliquer le corollaire 4.2.11* à la famille $\mathcal{F}_{n-k}(S)$ de polyèdres d'intérieurs disjoints deux à deux, et on notera ϕ l'application lipschitzienne ainsi obtenue. *p. 110 et 111

Posons alors $\phi_k = \phi \circ \phi_{k-1}$, et montrons que ϕ_k vérifie l'hypothèse de récurrence au rang k :

- $\diamond$ $\phi_k|_{E_4} = \phi \circ \phi_{k-1}|_{E_4} = \phi \circ \phi_0|_{E_4}$ or comme on vient de le voir, les Π_{δ,x_δ} sont égaux à l'identité sur $\phi_0(E_4) \cap \delta$, donc $\phi_k|_{E_4} = \phi_0|_{E_4}$;

◇ on a vu que $\mathcal{H}^d(\phi_k(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3)) \leq K_{d,k}\mathcal{R}(S)^{-2d}\mathcal{H}^d(\phi_{k-1}(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3))$. Puisque $\mathcal{R}(S)$ est minoré par une constante universelle D ne dépendant que de n, en posant $K = \max_k K_{d,k}$ et $C = KD^{-2d}$ on trouve :

$$\mathcal{H}^d(\phi_k(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3)) \leq C^k\epsilon''\mathcal{H}^d(E)\,;$$

◇ pour finir, puisque les projections radiales qu'on a faites sont à images dans les faces des $\delta \in \mathcal{F}_{n-k+1}$, qui sont elles-mêmes des sous-faces $n-k$-dimensionnelles de S, on a bien $F_k = \phi_k(E) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_{n-k}(S))$.

En faisant cette construction par récurrence jusqu'à $k = n - d$, et en notant $\psi = \phi_{n-d}$ on a déjà :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d(\psi(E)) &\leq \mathcal{H}^d(\psi(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3)) + \mathcal{H}^d(\psi(E_4))\\ &\leq C^{n-d}\epsilon''\mathcal{H}^d(E) + \mathcal{H}^d(\phi_0(E))\\ &\leq (1 + C^{n-d}\epsilon'')\mathcal{H}^d(E)\ .\end{aligned}$$

De plus, on a bien que

$$\psi(E) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S)) \subset U$$

et par construction, le support de ψ est inclus dans U. En prenant une constante ϵ' suffisamment petite pour que $1 + C^{n-d}\epsilon'' \leq 1 + \epsilon$, ceci conclut la démonstration du théorème lorsque E est rectifiable et $h = 1$.

Lorsque E n'est pas rectifiable, il suffit d'utiliser un recouvrement de la partie rectifiable E_R. D'après les lemmes 4.3.15* et 4.3.16* il est possible de choisir des centres de projections radiales qui conservent le caractère purement non rectifiable ou annulent la mesure de E_I (et qui finalement l'annulent lorsqu'on arrive aux projections radiales sur les sous-faces de dimension d) tout en conservant les inégalités sur la mesure de la partie rectifiable. Là encore en supposant ϵ' suffisamment petit on retrouve l'inégalité recherchée.

p. 117 et 119*

Lorsque h n'est pas constante remarquons déjà que puisqu'elle est supposée continue et U borné, il existe $M' \geq 1$ tel que pour tout $x \in U$: $h(x) \in [1, M']$. En outre si on fixe $\epsilon''' > 0$, pour tout $x \in U$ on peut trouver $\rho'(x) > 0$ tel que sur toute boule B de centre $x \in U$ et de rayon plus petit que $\rho'(x)$ incluse dans U :

$$\forall y \in B :\ \frac{1}{1+\epsilon'''}f(x) \leq f(y) \leq (1+\epsilon''')f(x)\ .$$

En particulier on peut supposer que les boules utilisées dans la famille $\mathcal{B}$ vérifient cette condition. En posant, pour toute partie mesurable $X \subset U$:

$$J(X) = \int_{x\in X} h(x)d\mathcal{H}^d(x)$$

toutes les inégalités obtenues précédemment peuvent facilement être adaptées :

$$\begin{aligned}J(\phi_0(E_1)) &\leq \epsilon' M' k_1^d J(E)\,;\\ J(\phi_0(E_2)) &\leq \epsilon' M' k_1^d J(E)\,;\\ J(\phi_0(E_3)) &\leq\ \epsilon' M' J(E)\ .\end{aligned}$$

Donc en posant cette fois $\epsilon'' = \epsilon' M'(1 + 2k_1^d)$ on trouve là encore :

$$J(\phi_0(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3)) \leq \epsilon'' J(E)\ .$$

En outre, notre majoration supplémentaire sur le rayon des boules du recouvrement initial $\mathcal{B}$ nous donne aussi, individuellement dans chaque boule $B_i = B(x_i, r_i) \in \overline{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} J(\Pi_{H_i,\rho_i r_i,K_i}(E_4 \cap K_i)) &\leq (1+\epsilon''')^2 h(x_i)\mathcal{H}^d(\Pi_{H_i,\rho_i r_i,K_i}(E_4 \cap K_i)) \\ &\leq (1+\epsilon''')^2 h(x_i)\mathcal{H}^d(E_4 \cap K_i) \\ &\leq (1+\epsilon''')^4 J(E_4 \cap K_i)\ . \end{aligned}$$

En ce qui concerne les projections radiales, on peut écrire :

$$J(\Pi_{\delta,x_\delta}(F_{k-1} \cap \delta)) \leq K_{d,k} M' \mathcal{R}(S)^{-2d} J(F_{k-1} \cap \delta)$$

ce qui nous donne la nouvelle hypothèse de récurrence :

$$J(\phi_k(E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3)) \leq C^k \epsilon'' M'^k J(E)$$

d'où on tire une fois le raisonnement mené jusqu'à $k = n - d$:

$$J(\psi(E)) \leq ((1+\epsilon''')^4 + C^{n-d}\epsilon'' M'^{n-d}) J(E)\ .$$

En choisissant ϵ' et ϵ''' suffisamment petits pour que $(1+\epsilon''')^4 + C^{n-d}\epsilon'' M'^{n-d} \leq 1+\epsilon$ on a terminé la démonstration du théorème dans le cas où h n'est pas constante. □

Le lemme suivant utilise une construction semblable avec des projections radiales successives pour majorer l'augmentation de mesure de E lorsque le complexe est fixé. En particulier, il nous sera utile pour établir la quasi-minimalité d'ensembles portés par les sous-faces d'un complexe.

▷ **Lemme 4.3.18** (Déformation polyédrale)

Soit U un ouvert borné, S un complexe n-dimensionnel de $\mathbb{R}^n$ dyadique en surface tel que $\mathcal{U}(S) \subset U$ et d un entier compris entre 1 et $n-1$.

Il existe alors une constante $K > 0$ ne dépendant que de d, n et $\mathcal{R}(S)$ telle que pour tout d-ensemble fermé $E \subset \mathcal{U}(S)$ de $\mathcal{H}^d$-mesure finie on puisse construire une application lipschitzienne $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

(1) $\phi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus U}$ *et pour toute sous-face* $\alpha \in \mathcal{F}(S)$: $\phi(\alpha) = \alpha$ *et* $\phi|_\alpha = Id_\alpha$ *si* $\dim(\alpha) \leq d$;

(2) $\phi(E) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S))$;

(3) $\mathcal{H}^d(\phi(E)) \leq K\mathcal{H}^d(E)$ *et même pour toute sous-face* $\alpha \in \mathcal{F}(S)$: $\mathcal{H}^d(\phi(E \cap \mathring{\alpha})) \leq K\mathcal{H}^d(E \cap \mathring{\alpha})$.

DÉMONSTRATION

Il suffit de faire la même construction que dans la démonstration du théorème 4.3.17* qui consistait à faire des projections radiales de E successivement dans les sous-faces de dimension n, $n-1$, …, $d+1$: en construisant de la même façon des prolongements lipschitziens de ces projections sur $\mathbb{R}^n$ tout entier on trouve alors une application lipschitzienne ϕ qui vérifie les contraintes topologiques requises, et une constante K ne dépendant que de d, n et $\mathcal{R}(S)$ telle que :

*page 121

$$\phi(E) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S)) \qquad \text{et} \qquad \forall \alpha \in \mathcal{F}(S) :\ \mathcal{H}^d(\phi(E \cap \mathring{\alpha})) \leq K\mathcal{H}^d(E \cap \mathring{\alpha})\ .$$

□

Dans les deux énoncés précédents, on a arrêté nos projections radiales à la dimension d, et on a obtenu des ensembles portés par des sous-faces d-dimensionnelles d'un complexe. Le lemme suivant va plus loin en faisant de nouvelles projections radiales sur toutes les sous-faces dont l'intérieur n'est pas entièrement recouvert par E, de façon à agrandir les «trous» et à projeter le reste sur la frontière des sous-faces. Ainsi, l'ensemble obtenu est une union de sous-faces complètes, de mesure inférieure ou égale.

▷ **LEMME 4.3.19** (ÉROSION POLYÉDRALE)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, S un complexe n-dimensionnel tel que $\mathcal{U}(S) \subset U$ et E un d-ensemble ($d < n$) de $\mathcal{H}^d$-mesure finie tel que $E \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S))$.

Il existe alors une application lipschitzienne $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

(1) *$\phi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = Id_{\mathbb{R}^n \setminus U}$ et pour toute sous-face $\alpha \in \mathcal{F}(S)$: $\phi(\alpha) = \alpha$, et $\phi|_\alpha = Id_\alpha$ ou $\phi(\alpha \cap E) \subset \partial\alpha$;*

(2) *il existe une famille $S' \subset \mathcal{F}(S)$ de sous-faces de S de dimension au plus d — on appellera une telle famille un squelette d-dimensionnel de S — telle que $\phi(E) = \bigcup_{\delta \in S'} \delta$;*

(3) *$\mathcal{H}^d(\phi(E)) \leq \mathcal{H}^d(E)$.*

DÉMONSTRATION

Pour $1 \leq j \leq d$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ définissons les deux applications ensemblistes :

$$S_j(F) = \bigcup_{\substack{\delta \in \mathcal{F}_j(S) \\ F \cap \delta = \delta}} \delta \qquad \text{et} \qquad S'_j(F) = \bigcup_{\substack{\delta \in \mathcal{F}_d(S) \\ F \cap \mathring{\delta} \neq \mathring{\delta}}} F \cap \delta \ .$$

$S_j(F)$ est le sous-ensemble de E porté par des sous-faces j-dimensionnelles entières, $S'_j(F)$ est le sous-ensemble de E porté par des sous-faces j-dimensionnelles où il y a un «trou». Lorsque $F \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_j(S))$ on vérifie que $F = S_j(F) \cup S'_j(F) \cup F'$ où F' est porté par des sous-faces $j-1$-dimensionnelles de S et que $S_j(F) \cap S'_j(F) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_{j-1}(S))$.

On va utiliser, à quelques détails près, la même construction utilisant des pro- page 121* jections radiales successives que dans la démonstration du théorème 4.3.17*. D'abord posons $\phi_d = Id$ et $E_d = E$, on peut déjà remarquer que puisque S est un complexe, pour toutes sous-faces α et β de dimensions respectives $j > d$ et d de S, alors $\mathring{\alpha} \cap \beta = \emptyset$, donc $S'_j(E_d) = \emptyset$ pour $j > d$. Raisonnons par récurrence décroissante sur j en supposant que pour $j \leq d$ donné il existe une application lipschitzienne ϕ_j telle que, en notant $E_j = \phi_j(E)$, $\mathcal{H}^d(E_j) \leq \mathcal{H}^d(E)$ et pour tout $k \in \{j+1, \ldots, n\}$ on a que $S'_k(E_j) = \emptyset$.

Soit α une sous-face de dimension j de S telle que $E_j \cap \mathring{\alpha} \neq \emptyset$ et $E_j \cap \mathring{\alpha} \neq \mathring{\alpha}$ (s'il n'en existe pas alors on a fini) alors puisque E_j est fermé, on peut trouver une boule d-dimensionnelle B de centre $x \in \mathring{\alpha}$ contenue dans $\mathring{\alpha}$ telle que $B \cap E_j = \emptyset$. Il est alors possible de donner un prolongement lipschitzien ϕ_α de la restriction $\Pi_{\alpha,x}|_{\alpha \setminus B}$ page 110* sur α d'après la propriété 4.2.9*, qui vérifie $\phi_\alpha(E_j \cap \alpha) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_{j-1}(S))$. De plus, $\mathcal{H}^d(\phi_\alpha(E_j \cap \alpha)) = 0 \leq \mathcal{H}^d(E_j \cap \alpha)$.

Considérons à présent une sous-face β de S de dimension $k > j$ telle que $\mathring{\alpha} \cap \beta \neq \emptyset$: puisque S est un complexe alors nécessairement $\alpha \subset \partial\beta \subset \beta$. Par hypothèse de récurrence, $E_j \cap \beta = \beta$ ou $E_j \cap \mathring{\beta} = \emptyset$, or $E_j \cap \mathring{\alpha} \neq \mathring{\alpha}$ donc c'est le second cas qui se page 111* produit. Par conséquent, comme dans le corollaire 4.2.11* il est possible de prolonger

les ϕ_α sur $\mathbb{R}^n$ en des extensions lipschitziennes dont les supports sont disjoints deux à deux, et disjoints du fermé $F_j \setminus S'_j(F_j)$.

Notons ϕ la composée de ces extensions pour toutes les sous-faces j-dimensionnelles α possibles telles que $E_j \cap \overset{\circ}{\alpha} \neq \emptyset$ et $E_j \cap \overset{\circ}{\alpha} \neq \overset{\circ}{\alpha}$, et posons $\phi_{j-1} = \phi \circ \phi_j$ et $E_{j-1} = \phi_{j-1}(E)$. Par construction, puisque $\phi|_{F_j \setminus S'_j(F_j)} = Id_{F_j \setminus S'_j(F_j)}$, et $\phi|_{S'_j(F_j)}$ est égale à une composée de projections radiales dans des sous-faces j-dimensionnelles alors pour tout $k > j-1$, $S'_k(S_j(E_{j-1})) = \emptyset$ et $S'_k(S'_j(E_{j-1})) = \emptyset$. Puisque par ailleurs on sait que $E_{j-1} = S_j(E_{j-1}) \cup S'_j(E_{j-1}) \cup E'$ où $E' \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_{j-1}(S))$ alors $S'_k(E') = \emptyset$ et finalement on obtient :

$$S'_k(E_{j-1}) = S'_k(S_j(E_{j-1})) \cup S'_k(S'_j(E_{j-1})) \cup S'_k(E') = \emptyset \ .$$

Par ailleurs, on a vu que les projections radiales qu'on a faites avaient diminué la mesure de $S'_j(E_j)$, donc $\mathcal{H}^d(E_{j-1}) \leq \mathcal{H}^d(E)$.

La récurrence peut se faire jusqu'à $j = 0$, en notant $\psi = \phi_0$ alors ψ est lipschitzienne, et pour tout $k > 0$, $S'_k(\psi(E)) = \emptyset$, par conséquent $\psi(E)$ est composé d'une union de sous-faces de dimension au plus d de S. Comme on l'a vu on a que $\mathcal{H}^d(\psi(E)) \leq \mathcal{H}^d(E)$ et il est clair aussi que le support de ψ est inclus dans U. □

Troisième partie

Ensembles presque-minimaux en codimension quelconque

Sommaire

5 Ensembles quasi-minimaux en codimension quelconque 129
5.1 Ensembles minimaux et quasiminimaux 129
5.2 Quasiminimalité et complexes 131

6 Résultat d'existence pour les ensembles presque-minimaux 138
6.1 Limites minimisantes d'ensembles quasiminimaux 138
6.2 Perspectives 148

5 Ensembles quasi-minimaux en codimension quelconque

Dans ce qui suit on suppose qu'on dispose d'un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$, d'un entier non nul $d < n$ et d'une application borélienne bornée h, définie sur U et à valeurs dans $[1, +\infty[$. Pour toute sous-partie mesurable $E \subset U$ on définit la fonctionnelle J_h^d par :

$$J_h^d(E) = \int_E h(x) d\mathcal{H}^d(x) \ .$$

Pour commencer, on se contentera essentiellement de considérer les cas où h est constante égale à 1.

5.1 Ensembles minimaux et quasiminimaux

On va supposer qu'on dispose d'une collection $\mathfrak{F}$ de d-ensembles (voir la définition 3.1.4*) relativement fermés dans U. On va aussi supposer que $\mathfrak{F}$ est stable par déformation — c'est à dire que pour tout $E \in \mathfrak{F}$ alors $\phi_1(E) \in \mathfrak{F}$ dès que (ϕ_t) est une Diam(U)-déformation «acceptable» sur U, au sens de la définition suivante. *page 95

▷ **Définition 5.1.1** (δ-déformation)
Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ une collection d'applications de U dans U, et $\delta > 0$. On dira que (ϕ_t) est une δ-déformation sur U si :

(1) *$\phi_0 = Id_U$ et ϕ_1 est lipschitzienne ;*

(2) *l'application $(t, x) \longmapsto \phi_t(x)$ est continue de $[0, 1] \times U$ dans U ;*

(3) *en notant*

$$W_{\phi_t} = \{x \in U : \ \phi_t(x) \neq x\} \qquad et \qquad \widehat{W}_\phi = \bigcup_{t\in[0,1]} W_{\phi_t} \cup \phi_t(W_{\phi_t})$$

alors $\widehat{W}_\phi$ est relativement compact dans $\overset{\circ}{U}$;

(4) Diam$(\widehat{W}_\phi) \leq \delta$.

Étant données deux Diam(U)-déformations (ϕ_t) et (ϕ'_t) sur U il est possible de les composer de façon naturelle en posant pour $0 \leq t \leq 1$:

$$\psi_t = \begin{cases} \phi_{2t} & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \phi'_{2t-1} \circ \phi_1 & \text{si } t > \frac{1}{2} \ . \end{cases}$$

La famille (ψ_t) est alors aussi une Diam(U)-déformation sur U telle que $\psi_1 = \phi'_1 \circ \phi_1$. En fait on pourrait même écrire que le quotient de l'ensemble des Diam(U)-déformations sur U par la relation d'équivalence $(\psi_t) \equiv (\phi_t) \Leftrightarrow \psi_1 = \phi_1$ est un monoïde avec cette loi de composition compatible, l'associativité étant héritée de celle de la composition des applications finales pour $t = 1$ et l'élément neutre étant la déformation (ψ_t) telle que $\forall t : \ \psi_t = Id_U$.

Avec ces définitions on s'intéresse à la recherche d'ensembles minimaux dans $\mathfrak{F}$. Remarquons déjà que lorsque U est supposé borné, puisque les éléments de $\mathfrak{F}$ sont des d-ensembles alors par définition leur mesure d-dimensionnelle est finie. La notion de minimalité est définie ici par stationnarité en comparant une partie E avec ses images obtenues par déformation. Lorsque U est ouvert, la condition (3) de la définition 5.1.1 joue le rôle d'une contrainte de bord sur ∂U pour les déformations considérées : on ne s'autorise alors pas à modifier E sur ∂U.

▷ **Définition 5.1.2** (Compétiteurs et ensembles minimaux)

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et E un d-ensemble relativement fermé dans U.

On dira que F est un compétiteur de E s'il existe une $\mathrm{Diam}(U)$*-déformation (ϕ_t) sur U telle que $F = \phi_1(E)$.*

On dira que E est minimal pour J_h^d si pour toute $\mathrm{Diam}(U)$*-déformation (ϕ_t) sur U :*

$$J_h^d(E \cap W_{\phi_1}) \leq J_h^d(\phi_1(E \cap W_{\phi_1})) \ .$$

Une notion intermédiaire, moins forte que la minimalité est la quasi-minimalité, similaire aux *restricted sets* d'Almgren. On autorise cette fois que la mesure de E puisse augmenter après déformation, mais de manière contrôlée. La minimalité est le cas particulier obtenu en prenant $M = 1$ et $\delta = \mathrm{Diam}(U)$.

▷ **Définition 5.1.3** (Quasiminimalité)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, pour $M > 0$ et $\delta > 0$ on dira que E est (M, δ)-quasiminimal sur U pour J_h^d ($E \in QM(U, J_h^d, M, \delta)$ en abrégé) si E est un d-ensemble relativement fermé dans U tel que pour tout $\delta > 0$ et pour toute $\mathrm{Diam}(U)$*-déformation (ϕ_t) sur U on a :*

$$J_h^d(E \cap W_{\phi_1}) \leq M J_h^d(\phi_1(E \cap W_{\phi_1})) \ .$$

On peut donner comme exemples d'ensembles quasiminimaux l'intersection de U avec le graphe d'une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{n-d}$, ou encore une sphère d-dimensionnelle incluse dans U pourvu que δ soit strictement plus petit que son rayon par exemple.

Donnons aussi un contre-exemple simple : on se place dans $\mathbb{R}^2$ avec $d = 1$ et on considère la fonction

$$f : \begin{cases} [-1, 1] \to [0, 1] \\ x \mapsto \sqrt{|x|} \ . \end{cases}$$

Son graphe E n'est alors pas quasiminimal sur tout ouvert qui contient l'origine. Pour le vérifier considérons une boule fermée B de rayon r suffisamment petit, centrée en 0 et incluse dans U, telle que $2B \subset U$. La frontière de B intersecte E en exactement deux points I et J de coordonnées respectives $(-x, y)$ et (x, y), avec $x > 0$, $y = \sqrt{x}$ et $x^2 + y^2 = r^2$. Notons P le demi-plan $\mathbb{R} \times]-\infty, y]$ et ϕ l'application égale au projecteur orthogonal sur la droite (I, J) sur $U \cap P \cap B$, et égale à l'identité sur $U \setminus (P \cap 2B)$: ϕ est 1-lipschitzienne sur $U \setminus (P \cap (2B \setminus B))$ et on peut la prolonger en une application
page 111* lipschitzienne $\widehat{\phi}$ sur U tout entier (voir par exemple le théorème 4.2.10* de Kirszbraun) telle que $\widehat{\phi}(2B \cap P) \subset 2B \cap P$ et $\widehat{\phi}|_{U \setminus (2B \cap P)} = Id_{U \setminus (2B \cap P)}$. À présent posons $\phi_t(x) =$

$t\widehat{\phi}(x)+(1-t)x$ pour $x \in U$ et $t \in [0,1]$: la famille (ϕ_t) est une $2r$-déformation sur U, et envoie $E \cap B$ sur le segment $[I,J]$ tout en laissant invariant $E \setminus B$, donc en particulier $E \cap W_{\phi_1} = E \cap B$ et $\mathcal{H}^1(\phi_1(E \cap B)) = IJ = 2x$. Par ailleurs, $\mathcal{H}^1(E \cap B) \geq IO + OJ = 2r \geq 2y = 2\sqrt{x}$. On a donc l'inégalité :

$$\mathcal{H}^1(E \cap W_{\phi_1}) \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \mathcal{H}^1(\phi_1(E \cap W_{\phi_1})) \ .$$

Puisque $0 < x \leq r$, en faisant tendre r vers 0 on a prouvé que E n'est pas quasiminimal.

De façon plus générale il serait encore possible de refaire le même type de calculs avec toute fonction continue et bornée de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et pour laquelle il existe un point où la dérivée a des limites infinies de signes opposés à gauche et à droite, ou même en dimension plus grande en prenant le graphe d'une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{n-d}$ vérifiant des propriétés similaires sur ses dérivées partielles.

Donnons encore rapidement sans démonstration quelques propriétés simples du caractère quasiminimal qui découlent directement de la définition.

▷ **Propriété 5.1.4** (Propriétés immédiates de la quasiminimalité)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et E un d-ensemble relativement fermé dans U. Dans ces conditions :

(1) *si E est (M,δ)-quasiminimal sur U alors pour toute sous-partie $U' \subset U$ et pour tous $M' \geq M$ et $\delta' \leq \delta$, $E \cap U'$ est (M',δ')-quasiminimal sur U' ;*

(2) *si E est minimal pour $J^d_{\mathbb{1}}$ (c'est à dire $\mathcal{H}^d$) sur U et h est à valeurs dans $[1,M]$ alors E est $(M,\mathrm{Diam}(U))$-quasiminimal pour J^d_h.*

Les ensembles quasiminimaux exposent aussi de nombreuses propriétés de régularité intéressantes. Citons en particulier l'Ahlfors-régularité et la rectifiabilité uniforme (voir [A] ou encore [D1]) pour les ensembles quasiminimaux réduits (voir la définition 6.1.1*). *page 138 Les différentes constantes qui interviennent dans ces définitions sont liées à la constante de quasiminimalité notée M dans la définition. Dès lors, il serait pratique de disposer d'une méthode permettant de construire des ensembles quasiminimaux avec une constante uniforme.

5.2 Quasiminimalité et complexes

Dans ce qui va suivre, on va utiliser de manière intensive nos trois énoncés 4.3.17*, 4.3.18* et 4.3.19* pour construire, à partir d'un compétiteur donné, une application lipschitzienne qui l'envoie sur un réseau polyédral. La proposition suivante permettra en plus d'affirmer que l'image obtenue est encore un compétiteur, en construisant une déformation adaptée de même image finale. *p. 121, 125 et 126

▷ **Propriété 5.2.5** (Construction automatique de déformation)

Soit U un domaine, V une sous-partie relativement compacte, ψ une application lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ et (ϕ_t) une $\mathrm{Diam}(U)$-déformation sur U. Dans

ces conditions, s'il existe $\rho > 0$ *tel que*

$$\|\psi - \phi_1\|_\infty < \rho \qquad et \qquad \mathcal{V}\left(W_\psi \cup W_{\phi_1}, \rho\right) \subset\subset U$$

alors la famille (ϕ_t) *définie sur* U *pour* $0 \leq t \leq 1$ *par*

$$\psi_t(x) = \begin{cases} \phi_{2t}(x) & si > t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)\phi_1(x) + (2t-1)\psi(x) & si > t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

est aussi une $\mathrm{Diam}(U)$*-déformation sur* U *telle que* $\psi_1 = \psi$.

DÉMONSTRATION

Il nous suffit seulement de vérifier que $\overline{\widehat{W_\psi}}$ est compact et inclus dans U. Pour cela considérons $x \in U$, trois cas sont possibles :

- ◇ si $x \notin W_\psi \cup W_{\phi_1}$ alors on a :

$$\{\phi_t(x) :\ t \in [0,1]\} = \{\psi_t(x) :\ t \in [0,1]\} \ .$$

- ◇ si $x \in W_{\phi_1}$ alors déjà pour $t \in [0, 1/2]$ on a :

$$\psi_t(x) = \phi_{2t}(x) \in \widehat{W_\phi}$$

Pour $t \geq 1/2$, $\psi_t(x)$ parcourt le segment $[\phi_1(x), \psi(x)]$, lui-même inclus dans la boule $B(\phi_1(x), \|\phi_1(x) - \psi(x)\|)$. Par ailleurs on sait par hypothèse que $\|\phi_1(x) - \psi(x)\| < \rho$ donc finalement pour $t \in [0,1]$:

$$\psi_t(x) \in \overset{\circ}{B}(\phi_1(x), \rho) \subset \mathcal{V}(W_{\phi_1}, \rho) \ .$$

- ◇ si $x \in W_\psi \setminus W_{\phi_1}$ on sait déjà que $\psi_t(x) = x$ pour $t \leq 1/2$. De la même façon que pour le cas précédent, lorsque $t \geq 1/2$ on a :

$$\psi_t(x) \in \overset{\circ}{B}(\psi(x), \rho) \subset \mathcal{V}(W_\psi, \rho) \ .$$

Par construction on savait aussi que :

$$\bigcup_{t \in [0,1]} \{x :\ \psi_t(x) \neq x\} \subset \widehat{W_\phi} \cup W_\psi \ .$$

Comme on l'a vu pour les trois cas précédent on a en plus :

$$\bigcup_{t \in [0,1]} \psi_t\left(W_{\psi_t}\right) \subset \widehat{W_\phi} \cup \mathcal{V}\left(W_\psi \cup W_{\phi_1}, \rho\right) \ .$$

On en déduit immédiatement :

$$\overline{\widehat{W_\psi}} \subset \overline{\widehat{W_\phi}} \cup \overline{\mathcal{V}\left(W_\psi \cup W_{\phi_1}, \rho\right)} \subset U$$

ce qui termine la démonstration. □

Le lemme suivant permet, à partir d'un d-ensemble E relativement fermé dans U, de construire automatiquement un compétiteur E'' quasiminimal sur un ouvert W borné plus petit que U tout en imposant a priori des bornes sur l'augmentation éventuelle de mesure introduite par la construction. La restriction du compétiteur obtenu à W est alors portée par le squelette d-dimensionnel d'un complexe S, et décomposable en une suite d'unions de polyèdres de dimension d, $d-1$, ..., 0, chacune quasiminimale pour la dimension considérée. En outre, la constante de quasiminimalité M' qui intervient ne dépend que de d et n.

▷ **Lemme 5.2.6** (Optimisation polyédrale)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $d < n$ un entier non nul. Il existe une constante uniforme $M' > 0$ (ne dépendant que de d et n) telle que,

- ◇ *pour toute application continue $h : U \to [1, M]$ ($M \geq 1$) ;*
- ◇ *pour tout d-ensemble E relativement fermé dans U ;*
- ◇ *pour toute sous-partie V relativement compacte dans $\overset{\circ}{U}$ et pour tout $\epsilon > 0$;*

on puisse trouver un complexe n-dimensionnel S et une partie $E'' \subset U$ vérifiant :

(1) *E'' est un compétiteur de E et en notant $W = \overset{\circ}{\mathcal{U}}(S)$ on a $V \subset\subset W \subset\subset U$ et $E'' \cap \overline{W}$ est l'union des polyèdres d'un squelette d-dimensionnel de S ;*

(2) *$J_h^d(E'') \leq (1+\epsilon) J_h^d(E)$;*

(3) *il existe $d+1$ complexes $S^d, \ldots, S^0$ avec $S^l \subset \mathcal{F}_l(S)$ et tels que, en définissant pour $d \geq l \geq 0$:*

$$\begin{cases} E^d = \mathcal{U}(S^d) \cap W \\ E^l = \mathcal{U}(S^l) \cap W^l \end{cases} \qquad \begin{cases} W^d = W \\ W^{l-1} = W^l \setminus E^l \end{cases}$$

alors $E'' \cap W = E^d \sqcup E^{d-1} \ldots \sqcup E^0$ et pour tout $l \in [0, d]$, $E^l \in QM\left(W^l, \mathcal{H}^d, MM', \mathrm{Diam}(W)\right)$. En outre les E^l sont optimaux au sens où lorsque S est fixé, ainsi que les $E^{l'}$ pour $l' > l$, tous les autres compétiteurs de E vérifiant les mêmes propriétés ne peuvent rendre $J_h^d(E^l)$ plus petite.

DÉMONSTRATION

Supposons les hypothèses du lemme vérifiées. Quitte à travailler dans un voisinage ouvert de V on peut en plus supposer pour simplifier l'écriture que U est ouvert et borné (en prenant une sous-partie ouverte et bornée $U' \subset U$ telle que $V \subset\subset U'$, il suffirait de remplacer U par U' et E par $E \cap U'$), dès lors on peut écrire que $\mathcal{H}^d(E) < +\infty$. Dans ces conditions puisque V est borné et vérifie $\overline{V} \subset \overset{\circ}{U}$, alors il existe un réel $R > 0$ tel que pour une base quelconque et pour tout $r < R$ on puisse construire un complexe dyadique T de pas r dans cette base vérifiant $V \subset\subset \mathcal{U}(T) \subset\subset U$: il suffit par exemple de prendre $R = \frac{\mathbf{d}(\partial U, \partial V)}{8\sqrt{n}} > 0$.

Fixons $\epsilon > 0$ et appliquons le théorème 4.3.17* au d-ensemble fermé $E \cap \overline{V}$ dans l'ouvert U, avec la constante R trouvée : on construit un complexe S dyadique en surface de pas au plus R et une application lipschitzienne ψ_1 tels que $\psi_1(E \cap \overline{V}) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S)), \mathcal{U}(S) \subset U$ (donc $\mathcal{U}(S) \subset\subset U$ car on a supposé U ouvert) et $J_h^d(\psi_1(E \cap \overline{V})) \leq (1+\epsilon) J_h^d(E \cap \overline{V})$. En appliquant cette fois le lemme 4.3.19* à $\psi_1(E \cap \overline{V})$ et S dans U on construit une application lipschitzienne ψ_2 telle que $\psi_2 \circ \psi_1(E \cap \overline{V}) = \mathcal{U}(S')$ où $S' \subset \mathcal{F}(S)$ est un squelette d-dimensionnel de S, c'est à dire une famille de sous-faces de dimension au plus d de S. En outre on a encore : *p. 121 et 126

$$J_h^d(\psi_2 \circ \psi_1(E \cap \overline{V})) \leq (1+\epsilon) J_h^d(E \cap \overline{V}) \ .$$

Remarquons encore qu'en ayant mis une couche de polyèdres supplémentaire en couronne autour de S, et en supposant qu'on a arrêté les projections radiales à la dimension $n-1$ dans les faces de la frontière avant de construire les raccordements ψ_1 et ψ_2 on a encore

$$J_h^d(\psi_2 \circ \psi_1(E)) \leq (1+\epsilon) J_h^d(E)$$

car dans ce cas ψ_1 et ψ_2 sont égales à l'identité en dehors de S et de sa couronne, et le fait de remplacer des projections radiales par l'identité dans certaines sous-faces ne va pas faire augmenter la mesure de l'image de E. Dans ce qui va suivre on supposera implicitement qu'on a utilisé la même construction lorsqu'on appliquera les lemmes
page 125* 4.3.19 et 4.3.18*.

D'après notre condition initiale sur R, il est possible de rajouter naturellement au complexe dyadique en surface S des cubes dyadiques de même pas dans la même base autour de sa frontière, jusqu'à ce qu'on ait :

$$V \subset\subset \mathcal{U}(S) \subset\subset U \ .$$

On définit alors W comme l'intérieur de $\mathcal{U}(S)$ et $E' = \psi_2 \circ \psi_1(E)$. On sait aussi
p. 121 et 126* d'après 4.3.17* et 4.3.19* que pour tout polyèdre $\delta \in S$:

$$\psi_1(\delta) \subset \delta \qquad \text{et} \qquad \psi_2(\delta) \subset \delta \ .$$

page 61* Remarquons encore que d'après le théorème 2.3* de fusion de complexes dyadiques en surface on sait qu'il existe une constante C uniforme (ne dépendant que de n) telle que $\overline{\mathcal{R}}(S) \leq CR$. En outre, en supposant là encore qu'on a choisi R suffisamment petit, il est possible de rajouter une couche de cubes dyadiques tout autour de S en restant dans U. Si on appelle S' le complexe obtenu on a :

$$S \subset S' \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U}(S) \subset\subset \mathcal{U}(S') \subset\subset U \ .$$

Dès lors, en effectuant le prolongement lipschitzien des projections radiales individuelles qui ont servi à construire ψ_2 de façon à ce que $\psi_2(\delta) = \delta$ pour tout $\delta \in S'$ et en prolongeant avec l'identité sur les sous-faces de S' qui ne sont pas des sous-faces de S on peut supposer que :

$$\|\psi_2 \circ \psi_1 - Id_{\mathbb{R}^n}\|_\infty \leq \overline{\mathcal{R}}(S') \leq CR \ .$$

Ainsi, là encore en supposant R suffisamment petit on peut appliquer la propriété 5.2.5 à l'application lipschitzienne $\psi_2 \circ \psi_1$, en la comparant avec la déformation identité sur U : on trouve alors une déformation (ϕ_t) telle que $\phi_1 = \psi_2 \circ \psi_1$, et donc E' est un compétiteur de E tel que $E' \setminus W = E \setminus W$.

À présent considérons l'ensemble $\mathfrak{S}$ des sous-parties de U portées par des squelettes d-dimensionnels de S auxquels on a ajouté $E \setminus W$:

$$\mathfrak{S} = \{\mathcal{U}(T) \cup (E \setminus W) : \ T \subset \mathcal{F}_d(S) \cup \ldots \cup \mathcal{F}_0(S)\}$$

et l'ensemble $\mathfrak{C}$ des compétiteurs de E obtenus par une déformation à support dans W :

$$\mathfrak{C} = \{\phi_1(E) : \ (\phi_t) \text{ Diam}(W)\text{-déformation sur } U \text{ et } \widehat{W}_\phi \subset W\} \ .$$

D'abord $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{C}$ est fini car $\mathfrak{S}$ l'est, il est de plus non vide car comme on vient de le voir, $E' \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{C}$. Il est donc possible de trouver $E'' \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{C}$ tel que :

$$\mathcal{H}^d(E'') = \min\{J_h^d(F), \ F \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{C}\} \ .$$

Par construction, E'' vérifie déjà les points (1) et (2) du lemme. Puisqu'en outre

$$J_h^d(E'') \leq J_h^d(E') \leq (1+\epsilon) J_h^d(E)$$

le point (4) est aussi vérifié.

Vérifions encore que E'' est aussi quasiminimal sur W : pour cela considérons un compétiteur F de E'' obtenu par une Diam(W)-déformation (ϕ_t) sur W. On sait déjà par composition de déformations sur W que F est aussi un compétiteur de E, donc $F \in \mathfrak{C}$. En appliquant les lemmes 4.3.18* et 4.3.19 à F dans le complexe S et l'ouvert U, de la même façon que précédemment on peut construire un compétiteur $F' \in \mathfrak{S}$ de F obtenu par une déformation (ψ_t) sur U tel que, pour toute sous-face $\alpha \in \mathcal{F}(S)$: *page 125

$$\mathcal{H}^d(\psi_1(F \cap \overset{\circ}{\alpha})) \leq K\mathcal{H}^d(F \cap \overset{\circ}{\alpha}) \ .$$

Par ailleurs $\overline{W_{\phi_1}} \subset \mathcal{U}(S) = \overline{W}$ par définition, et puisque $E'' \in \mathfrak{S}$ est porté par un squelette d-dimensionnel de S alors pour toute sous-face $\alpha \in S$ de dimension strictement plus grande que d, $F \cap E'' \cap \overset{\circ}{\alpha} = \emptyset$. Dès lors :

$$F \setminus E'' = \left(\bigsqcup_{\substack{\alpha \in \mathcal{F}(S) \\ \dim(\alpha) > d}} F \cap \overset{\circ}{\alpha} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{\substack{\alpha \in \mathcal{F}(S) \\ \dim(\alpha) \leq d}} (F \setminus E'') \cap \overset{\circ}{\alpha} \right) \ .$$

En constatant en outre que pour toute sous-face α de S de dimension au plus d, les propriétés des applications lipschitziennes données par les lemmes 4.3.18* et 4.3.19* entrainent que $\psi_1|_\alpha = Id_\alpha$ ou $\psi_1(\alpha \cap F) \subset \partial\alpha$ on peut encore écrire : *p. 125 et 126

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^d(\psi_1(F \setminus E'')) &= \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{F}(S) \\ \dim(\alpha) > d}} \mathcal{H}^d(\psi_1(F \cap \overset{\circ}{\alpha})) \right) + \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{F}(S) \\ \dim(\alpha) \leq d}} \mathcal{H}^d(\psi_1((F \setminus E'') \cap \overset{\circ}{\alpha})) \right) \\
&\leq \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{F}(S) \\ \dim(\alpha) > d}} K\mathcal{H}^d(F \cap \overset{\circ}{\alpha}) \right) + \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{F}(S) \\ \dim(\alpha) \leq d}} \mathcal{H}^d((F \setminus E'') \cap \overset{\circ}{\alpha}) \right) \\
&\leq \max(K, 1) \sum_{\alpha \in \mathcal{F}(S)} \mathcal{H}^d((F \setminus E'') \cap \overset{\circ}{\alpha}) \\
&= K\mathcal{H}^d(F \setminus E'') \ .
\end{aligned}$$

En outre puisque là encore $F' \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{C}$ on sait aussi que $J_h^d(F') \geq J_h^d(E'')$ et plus précisément en retirant les sous-faces communes à F et E'' :

$$J_h^d(E'' \setminus F') \leq J_h^d(F' \setminus E'') \ .$$

En outre $F' \setminus E'' = \psi_1(F) \setminus E'' \subset \psi_1(F \setminus E'')$ car par construction $\psi_1(E'') = E''$ (en effet E'' est une union de sous-faces de S, et pour toute sous-face α, $\psi_1(\alpha) = \alpha$ d'après 4.3.18 et 4.3.19) donc $J_h^d(E'' \setminus F') \leq J_h^d(\psi_1(F \setminus E''))$ d'où on tire, en utilisant les bornes sur h :

$$\mathcal{H}^d(E'' \setminus F') \leq M\mathcal{H}^d(\psi_1(F \setminus E''))$$

et par conséquent en utilisant les inégalités précédentes :

$$\mathcal{H}^d(E'' \setminus F') \leq KM\mathcal{H}^d(F \setminus E'') \ .$$

À présent considérons une sous-face $\delta \in S$ de dimension au moins $d+1$: d'abord $\psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta})$ est inclus dans l'union des sous-faces d-dimensionnelles de δ. En outre l'inégalité locale du lemme 4.3.18 entraine que $\mathcal{H}^d(\psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta})) \leq K\mathcal{H}^d(F \cap \overset{\circ}{\delta})$. Réciproquement considérons une sous-face d-dimensionnelle $\alpha \in \mathcal{F}_d(S)$: ou bien $\alpha \subset E'' \cap F'$, ou alors $\overset{\circ}{\alpha} \cap E'' \cap F' = \emptyset$ puisque $E'' \cap \overline{W}$ et $F' \cap \overline{W}$ sont tous deux des unions de sous-faces de S. Dans le premier cas, les conditions topologiques sur les projections radiales des lemmes 4.3.18 et 4.3.19 entrainent que

$$\alpha \setminus F \subset \psi_1 \left(\bigcup_{\delta \in S(\alpha)} \overset{\circ}{\delta} \right)$$

où $S(\alpha)$ est l'ensemble des sous-faces de S dont α est une sous-face stricte. Par conséquent pour toute sous-face d-dimensionnelle $\alpha \subset E'' \cap F'$:

$$\mathcal{H}^d(\alpha \setminus F) \leq \mathcal{H}^d \left(\alpha \cap \bigcup_{\delta \in S(\alpha)} \psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta}) \right) .$$

En faisant l'union sur toutes les sous-faces d-dimensionnelles qui composent $E'' \cap F' \cap \overline{W}$ il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^d((E'' \cap F') \setminus F) &= \sum_{\alpha \subset E'' \cap F'} \mathcal{H}^d(\alpha \setminus F) \\
&\leq \sum_{\alpha \subset E'' \cap F'} \mathcal{H}^d \left(\alpha \cap \bigcup_{\delta \in S(\alpha)} \psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta}) \right) \\
&= \mathcal{H}^d \left(\bigcup_{\alpha \subset E'' \cap F'} \bigcup_{\delta \in S(\alpha)} \alpha \cap \psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta}) \right) \\
&\leq \mathcal{H}^d \left(\bigcup_{\alpha \subset F'} \bigcup_{\delta \in \mathcal{F}(S), \dim(\delta) > d} \alpha \cap \psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta}) \right) \\
&\leq \mathcal{H}^d \left(\left(\bigcup_{\alpha \subset F'} \alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\delta \in \mathcal{F}(S), \dim(\delta) > d} \psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta}) \right) \right) \\
&= \mathcal{H}^d \left(F' \cap \bigcup_{\delta \in \mathcal{F}(S), \dim(\delta) > d} \psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta}) \right) \\
&= \mathcal{H}^d \left(\bigcup_{\delta \in \mathcal{F}(S), \dim(\delta) > d} \psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta}) \right) \\
&\leq \sum_{\delta \in \mathcal{F}(S), \dim(\delta) > d} \mathcal{H}^d \left(\psi_1(F \cap \overset{\circ}{\delta}) \right) \\
&\leq \sum_{\delta \in \mathcal{F}(S), \dim(\delta) > d} K\mathcal{H}^d \left(F \cap \overset{\circ}{\delta} \right) \\
&= K\mathcal{H}^d \left(\bigcup_{\delta \in \mathcal{F}(S), \dim(\delta) > d} F \cap \overset{\circ}{\delta} \right) = K\mathcal{H}^d(F \setminus \mathcal{U}(\mathcal{F}_d(S))) \\
&\leq K\mathcal{H}^d(F \setminus E'') \leq MK\mathcal{H}^d(F \setminus E'') .
\end{aligned}$$

Pour achever de prouver la quasiminimalité de E'' il faut encore faire une partition de $E'' \setminus F$ par intersection avec F' et avec son complémentaire :

$$E'' \setminus F = (E'' \setminus (F' \cup F)) \sqcup ((E'' \cap F') \setminus F) \subset (E'' \setminus F') \cup ((E'' \cap F') \setminus F) \ .$$

En reportant les inégalités qu'on a établies précédemment, on obtient alors :

$$\mathcal{H}^d(E'' \setminus F) \leq \mathcal{H}^d(E'' \setminus F') + \mathcal{H}^d((E'' \cap F') \setminus F) \leq 2MK\mathcal{H}^d(F \setminus E'') \ .$$

La constante K dépend de la régularité $\mathcal{R}(S)$, or d'après le théorème 4.3.17* il est possible de donner un minorant uniforme (c'est à dire ne dépendant que de d et n) sur cette dernière. En d'autres termes on peut donc trouver une constante $M' \geq 1$ ne dépendant que de d et n telle que :

*page 121

$$\mathcal{H}^d(E'' \setminus F) \leq MM'\mathcal{H}^d(F \setminus E'') \ .$$

On peut encore écrire les relations ensemblistes suivantes, qui proviennent directement de la définition de W_{ϕ_1} et du fait que $E'' \setminus F \subset W_{\phi_1}$ et $F \setminus E'' \subset \phi_1(W_{\phi_1})$:

$$\begin{aligned} E'' \cap W_{\phi_1} &= ((E'' \setminus F) \cap W_{\phi_1}) \sqcup (E'' \cap F \cap W_{\phi_1}) \\ &= (E'' \setminus F) \sqcup (E'' \cap F \cap W_{\phi_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1(E'' \cap W_{\phi_1}) &= \phi_1(E'') \cap \big((\phi_1(W_{\phi_1}) \setminus E'') \sqcup (W_{\phi_1} \cap E'')\big) \\ &= F \cap \big((\phi_1(W_{\phi_1}) \setminus E'') \sqcup (E'' \cap W_{\phi_1})\big) \\ &= ((F \setminus E'') \cap \phi_1(W_{\phi_1})) \sqcup (F \cap E'' \cap W_{\phi_1}) \\ &= (F \setminus E'') \sqcup (F \cap E'' \cap W_{\phi_1}) \ . \end{aligned}$$

Dans ces conditions il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^d(E'' \cap W_{\phi_1}) &= \mathcal{H}^d(E'' \setminus F) + \mathcal{H}^d(E'' \cap F \cap W_{\phi_1}) \\ &\leq MM'\mathcal{H}^d(F \setminus E'') + \mathcal{H}^d(E'' \cap F \cap W_{\phi_1}) \\ &\leq \max(MM', 1)\left(\mathcal{H}^d(F \setminus E'') + \mathcal{H}^d(F \cap E'' \cap W_{\phi_1})\right) \\ &= MM'\mathcal{H}^d(\phi_1(E'' \cap W_{\phi_1})) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve que E'' est $(MM', \mathrm{Diam}(W))$-quasiminimal sur W pour $\mathcal{H}^d$.

À présent considérons un squelette d-dimensionnel $S' \subset \mathcal{F}(S)$. Définissons par récurrence $\mathcal{F}^*_l(S')$, pour $0 \leq l \leq d$:

$$\begin{cases} \mathcal{F}^*_d(S') = \mathcal{F}_d(S) \cap S' \\ \mathcal{F}^*_{l-1}(S') = \left\{\alpha \in \mathcal{F}_{l-1}(S) \cap S' : \ \forall l' \geq l, \forall \beta \in \mathcal{F}^*_{l'}(S'), \alpha \not\subset \beta\right\} \ . \end{cases}$$

Les complexes $\mathcal{F}^*_l(S')$ sont en fait l'ensemble des polyèdres l-dimensionnels de S' qui ne sont pas des sous-faces d'un autre polyèdre de S' de dimension plus grande. Définissons encore par récurrence :

$$\begin{cases} \mathcal{S}^d = \left\{T \subset \mathcal{F}(S) : \ (E \setminus \overline{W}) \cup \mathcal{U}(T) \in \mathfrak{C} \text{ et } J^d_h(\mathcal{U}(T)) = \min\limits_{G \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{S}} J^d_h(G \cap \overline{W})\right\} \\ \mathcal{S}^{l-1} = \left\{T \in \mathcal{S}^l : \ J^{l-1}_h(\mathcal{U}(\mathcal{F}^*_{l-1}(T))) = \min\limits_{T' \in \mathcal{S}^l} J^{l-1}_h(\mathcal{U}(\mathcal{F}^*_{l-1}(T')))\right\} \ . \end{cases}$$

D'abord $\mathcal{S}^d$ n'est pas vide puisque le squelette qui porte E'' est dans $\mathcal{S}^d$, et donc par récurrence $\mathcal{S}^0$ n'est pas vide. Sans changer ce qui a été écrit jusque-là on peut supposer qu'on a pris $E'' = (E \setminus \overline{W}) \cup (\mathcal{U}(S''))$ où $S'' \in \mathcal{S}^0$. Dans ces conditions, en posant pour $0 \leq l \leq d$:

$$S^l = \mathcal{F}^*_{l'}(S'')$$

et en reprenant les notations du point (3) du lemme, on peut refaire la démonstration précédente de la quasiminimalité de E'' en dimension d sur W pour démontrer la quasiminimalité de chacun des E^l en dimension l sur W^l pour $\mathcal{H}^l$, puisqu'à chaque fois on a minimisé sur l'ensemble des sous-faces l-dimensionnelles sur W^l. Ceci conclut alors la démonstration du lemme. □

6 Résultat d'existence pour les ensembles presque-minimaux

Jusqu'ici notre étude s'est limitée au cas de quasi-minimiseurs avec une constante M uniforme. On va à présent utiliser notre lemme d'optimisation polyédrale pour construire, à partir d'une suite minimisante pour J^d_h d'éléments de $\mathfrak{F}$, un ensemble $(M(\delta), \delta)$-quasiminimal pour δ suffisamment petit, tel que $\lim_{\delta \to 0} M(\delta) = 1$.

6.1 Limites minimisantes d'ensembles quasiminimaux

La notion de quasiminimalité étant définie à une partie de mesure nulle près (c'est à dire qu'on peut ajouter ou soustraire une partie de mesure nulle à un quasiminimiseur sans que cela change quelque chose dans la définition) on va donner une notion supplémentaire de «minimalité» qui consiste en gros à ne garder que les points dont la contribution à la masse de l'ensemble est non nulle.

Les bonnes propriétés de passage à la limite pour les ensembles quasiminimaux imposent en effet de considérer leur noyau, c'est à dire le support de la mesure de Hausdorff. La raison en est simple : la convergence en distance de Hausdorff pour les ensembles qu'on va utiliser est une notion assez faible, on peut par exemple imaginer une suite d'ensembles finis dont la limite est de mesure pleine en prenant les termes d'une suite dense. Il est même possible, en choisissant convenablement des éléments d'une suite dense dans $\mathbb{R}^n$, de trouver une suite d'ensembles finis qui tendent vers une partie fermée quelconque imposée a priori.

La notation standard du noyau d'un quasiminimiseur E est E^*, mais puisqu'on va par la suite extraire récursivement des noyaux relativement à des dimensions décroissantes on va utiliser les notation suivantes $\ker^d$ et $\ker^l_d$ pour lever les ambiguïtés sur les dimensions considérées.

▷ **Définition 6.1.1** (Noyau d'un ensemble)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $0 \leq d \leq n$. On définit le noyau d-dimensionnel $\ker^d(E)$ *de E comme le support de $\mathcal{H}^d$ sur E :*

$$\ker^d(E) = \left\{ x \in E : \ \forall r > 0, \ \mathcal{H}^d(B(x,r) \cap E) > 0 \right\} \ .$$

Dans ces conditions, si $\ker^d(E) = E$ *on dira que* E *est réduit.*

Pour $d > l \geq 0$ *on définit aussi par récurrence :*

$$\begin{cases} \ker_d^d(E) = \ker^d(E) \\ \ker_d^l(E) = \ker^l\left(E \setminus \bigsqcup_{d \geq l' > l} \ker_d^{l'}(E)\right) \end{cases}$$

Avec cette définition on peut vérifier que les $\ker_d^l(E)$ sont disjoints, et forment une partition de E :

$$E = \bigsqcup_{0 \leq l \leq d} \ker_d^l(E) \ .$$

On a aussi que $\mathcal{H}^d(E \setminus \ker^d(E)) = 0$, et $\ker^l(E)$ est fermé relativement dans E. En outre, si E est quasiminimal pour $\mathcal{H}^d$, il est facile de vérifier que $\ker^d(E)$ est toujours quasiminimal avec les mêmes constantes.

Comme on l'a vu dans la propriété 3.1.8*, la distance de Hausdorff $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$ définit une topologie compacte sur les parties fermées d'un domaine compact. Ce n'est en général pas le cas sur un domaine non borné : on peut donner comme exemple simple une suite de singletons dont les points divergent dans $\mathbb{R}^n$. Puisqu'on va devoir par la suite prendre des limites dans un ouvert non borné, on va définir une convergence légèrement plus faible, en considérant la convergence des intersections avec les compacts du domaine.

*page 97

▷ **Définition 6.1.2** (Distance de Hausdorff locale)

Pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *et* K *compact on définit la distance de Hausdorff locale sur* K *par :*

$$\mathbf{d}_K(A, B) = \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(K \cap A, K \cap B) \ .$$

Si $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *est une suite de sous-parties de* $\mathbb{R}^n$*, on dira que* E_k *tend vers* E *localement sur tout compact de* U *si* E *est relativement fermé dans* U *et si pour tout compact* $K \subset U$ *:*

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{d}_K(E_k, E) = 0 \ .$$

On le notera alors : $E_k \xrightarrow{U} E$.

Dans ces conditions, tout domaine de $\mathbb{R}^n$ est compact pour la convergence locale sur tout compact au sens où on peut toujours extraire une sous-suite convergente.

▷ **Propriété 6.1.3** (Compacité pour la convergence locale sur tout compact)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ *et* $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite de sous-parties telles que* $E_k \cap U$ *soit relativement fermé dans* U*. Dans ces conditions :*

- ◇ *si* $E_k \xrightarrow{U} E$ *et* $E_k \xrightarrow{U} F$ *alors* $E = F$ *;*
- ◇ *on peut trouver une sous-suite* (E'_k) *de* (E_k) *et une sous-partie* E *relativement fermée dans* U *telles que* $E'_k \xrightarrow{U} E$.

DÉMONSTRATION

Pour le premier point remarquons déjà que si $\max(\#E, \#F) \leq 1$ le résultat est évident. Supposons alors que E et F ne soient pas tous deux vides ou réduits à un singleton. Dans ces conditions E ne peut être vide sinon on pourrait trouver un compact $K \subset U$ qui contient deux points distincts x et y de F et on aurait alors $\mathbf{d}_K(E,F) = \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(\emptyset, F \cap K) = \mathrm{Diam}(F \cap K) \geq \mathbf{d}(x,y) > 0$, ce qui contredit la convergence locale de E_k vers E et F sur K. Donc ni E ni F n'étant vide, s'ils n'étaient pas égaux alors puisqu'ils sont tous deux par définition relativement fermés dans U on pourrait trouver par exemple $x \in E$ tel que $\mathbf{d}(x,F) > 0$, et donc là encore en prenant un compact $K \subset U$ tel que $x \in K$ on trouve que $\mathbf{d}_K(E,F) = \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(E \cap K, F \cap K) \geq \mathbf{d}(x,F) > 0$. Par conséquent lorsque $\min(\#E, \#F) > 1$ on a forcément $E = F$.

Pour le second point considérons une exhaustion $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de U par des compacts inclus dans U, ordonnés de manière croissante pour l'inclusion. En notant $U' = U \cap \partial U$ on peut par exemple prendre :

$$K_k = \left\{ x \in \overline{\overset{\circ}{B}(0,2^k)} \cap U : \ \mathbf{d}(x,\partial U) \geq 2^{-k}\mathbf{d}(x,U') \right\} .$$

Dans ces conditions les K_k sont bien croissants pour l'inclusion, fermés, bornés et vérifient :

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_k .$$

Pour l fixé posons $F_{k,l} = E_k \cap K_l$ et vérifions rapidement que $F_{k,l}$ est fermé : d'abord par hypothèse E_k est relativement fermé dans U, donc il existe un fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que $E_k = F \cap U$. Puisque par construction $K_l \subset U$ alors $F_{k,l} = E_k \cap K_l = F \cap K_l$. K_l étant fermé, $F_{k,l}$ est donc bien fermé.

page 97* Pour $l = 0$, en appliquant la propriété 3.1.8* à la suite de fermés $(F_{k,0})_{k\in\mathbb{N}}$ inclus dans le compact K_0 on peut trouver une application croissante $\phi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et un fermé G_0 inclus dans K_0 tels que :

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(F_{\phi_0(k),0}, G_0) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{K_0}(F_{\phi_0(k),0}, G_0) = 0 .$$

Raisonnons par récurrence et supposons qu'à un rang l donné on a pu trouver une application croissante $\phi_l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une famille de fermés $G_0, \ldots, G_l$ inclus respectivement dans $K_0, \ldots, K_l$ tels que, pour tout $l' \leq l$:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{\mathcal{H}}(F_{\phi_l(k),l'}, G_{l'}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}_{K_{l'}}(F_{\phi_l(k),l'}, G_{l'}) = 0 \qquad \text{et} \qquad G_l \cap K_{l'} = G_{l'} .$$

Dans ces conditions, en appliquant la propriété 3.1.8 à la suite de fermés $(F_{\phi_l(k),l+1})_{k\in\mathbb{N}}$ inclus dans le compact K_{l+1} on peut trouver une application croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(F_{\phi\circ\phi_l(k),l+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un fermé $G_{l+1} \subset K_{l+1}$ pour $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$ et donc pour $\mathbf{d}_{K_{l+1}}$. Posons $\phi_{l+1} = \phi \circ \phi_l$: $F_{\phi_{l+1}(k),l}$ converge toujours vers G_l pour $\mathbf{d}_{\mathcal{H}}$, et puisque $K_l \subset K_{l+1}$ alors $F_{\phi_{l+1}(k),l+1} \cap K_l = F_{\phi_{l+1}(k),l} \cap K_l$ et donc $G_{l+1} \cap K_l = G_l$. Finalement considérons $l' < l$: par hypothèse de récurrence, $F_{\phi_{l+1}(k),l'}$ converge toujours vers $G_{l'}$ et $G_{l'} = G_l \cap K_{l'} = G_{l+1} \cap K_l \cap K_{l'} = G_{l+1} \cap K_{l'}$, ce qui termine notre récurrence.

À présent considérons les parties E et E' et la suite $(E'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$E = \overline{\bigcup_k G_l} \qquad , \qquad E' = E \cap U \qquad \text{et} \qquad E'_k = E_{\phi_k(k)} .$$

Par construction $E'_k \subset K_k$, $E \subset \overline{U}$ et pour $l \geq 0$ fixé $E'_k \cap K_l$ tend vers G_l pour $\mathbf{d}_{K_l}$. Pour terminer considérons un compact $H \subset U$ et montrons que E'_k converge vers E'

sur H. En posant

$$A = \limsup_{k\to\infty} \mathbf{d}_H(E'_k, E')$$

raisonnons par l'absurde et supposons que $A > 0$. On peut alors trouver une suite (x_k, y_k) de points de $(H \cap E'_l) \times (H \cap E')$ telle que par exemple :

$$\forall k \geq 0 : \ \max\big(\mathbf{d}(x_k, E'), \mathbf{d}(y_k, E_k)\big) \geq \frac{\mathbf{d}(x_k, y_k)}{2} \qquad \text{et} \qquad \limsup_{k\to\infty} \mathbf{d}(x_k, y_k) = B \geq \frac{A}{2} \ .$$

Puisque H est compact inclus dans U, $E' \cap H = E \cap H$ est compact, et donc aussi $H \times (H \cap E')$. Dès lors on peut extraire une sous-suite (x'_k, y'_k) convergeant vers $(x, y) \in H \times (H \cap E')$ tel que :

$$\mathbf{d}(x, y) = B \ .$$

Puisqu'à partir d'un certain rang on a $x, y \in K_k$, ceci contredirait que E'_k tend vers E' localement sur K_k. Par conséquent $A = B = 0$ et donc E'_k converge vers E' localement sur H. □

Le théorème suivant est une combinaison de trois énoncés de [D1] (appelés respectivement *Theorem 3.4*, *Theorem 2.13* et *Remark 3.10*). L'idée est qu'une suite d'ensembles réduits, quasiminimaux avec les mêmes constantes vérifie uniformément une propriété de concentration semblable à la propriété de concentration uniforme initialement introduite par Dal Maso, Morel et Solimini (voir [DMS]).

▷ **Théorème 6.1.4** (Semi-continuité inférieure de la mesure de Hausdorff et quasiminimalité de la limite)

Étant donnés un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq d < n$, $\delta > 0$ et $M \geq 1$, on suppose qu'on dispose d'une suite (E_k) de d-ensembles relativement fermés dans U tels que :

$$\ker^d(E_k) \xrightarrow{U} E \ .$$

Dans ces conditions, si pour tout $k \geq 0$: $E_k \in QM(U, \mathcal{H}^d, M, \delta)$ alors :

(1) *$E \in QM(U, \mathcal{H}^d, M, \delta)$ et E est réduit ;*

(2) *pour tout ouvert $W \subset U$*

$$\mathcal{H}^d(E \cap W) \leq \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{H}^d(E_k \cap W) \ ;$$

(3) *il existe une constante $C > 0$ dépendant de M telle que pour tout ouvert $W \subset\subset U$ on a :*

$$\mathcal{H}^d(E \cap \overline{W}) \geq C^{-1} \limsup_{k\to+\infty} \mathcal{H}^d(E_k \cap \overline{W}) \ .$$

À présent donnons une définition pour qualifier les ensembles quasiminimaux dont la constante M tend vers 1 lorsque δ tend vers zéro. En quelque sorte, ces ensembles ressemblent de plus en plus à des ensembles minimaux à mesure qu'on les observe à de petites échelles.

▷ **DÉFINITION 6.1.5** (PRESQUE-MINIMALITÉ)

Soit U un domaine de $\mathbb{R}^n$ et E une sous-partie relativement fermée dans U. On dira que E est presque-minimal avec la fonction de jauge h si pour tout $\delta > 0$ et pour toute δ-déformation (ϕ_t) sur U on a :

$$\mathcal{H}^d(E \cap W_{\phi_1}) \leq (1 + h(\delta))\mathcal{H}^d(\phi_1(E \cap W_{\phi_1})) \quad \textit{avec} \quad \lim_{\delta \to 0} h(\delta) = 0 \ .$$

Avant d'énoncer le théorème 6.1.7 d'existence donnons une propriété classique de semi-continuité inférieure de J_h^d par rapport à $\mathcal{H}^d$ lorsque h est elle-même bornée et semi-continue inférieurement.

▷ **LEMME 6.1.6** (SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE DE J_h^d PAR RAPPORT À $\mathcal{H}^d$)

Soit U un domaine ouvert, $0 \leq d \leq n$, $h : U \to [1, M]$ et (E_k) une suite de parties de U telles que, sur tout ouvert $V \subset\subset U$:

$$\mathcal{H}^d(E \cap V) \leq \liminf_{k \to +\infty} \mathcal{H}^d(E_k \cap V) \ .$$

Dans ces conditions, si h est semi-continue inférieurement alors de même sur tout ouvert $V \subset\subset U$:

$$J_h^d(E \cap V) \leq \liminf_{k \to +\infty} J_h^d(E_k \cap V) \ .$$

DÉMONSTRATION

Fixons un entier $m > 0$ et posons pour $l \geq 0$:

$$X_l = \{x \in U : \ h(x) > 2^{-m} l\} \ .$$

Puisque h est supposée semi-continue inférieurement sur l'ouvert U alors E_k est ouvert, définissons encore pour $x \in U$:

$$h_m(x) = 2^{-m} \sum_{l \geq 0} \mathbb{1}_{X_l}(x) \ .$$

Cette somme étant finie car h est bornée, on a donc sur tout ouvert $V \subset\subset U$:

$$\begin{aligned} J_{h_m}^d(E \cap V) &= 2^{-m} \sum_{l \geq 0} l \mathcal{H}^d(E \cap X_l \cap V) \\ &\leq 2^{-m} \sum_{l \geq 0} l \limsup_{k \to +\infty} \mathcal{H}^d(E_k \cap X_l \cap V) \\ &= \limsup_{k \to +\infty} J_{h_m}^d(E_k \cap V) \ . \end{aligned}$$

Par ailleurs on a aussi sur U :

$$h \leq h_m \leq h + 2^{-m}$$

d'où on tire :

$$J_h^d(E) \leq J_{h_m}^d(E) \leq \liminf_{k \to +\infty} J_{h_m}^d(E_k) \leq \liminf_{k \to +\infty} J_h^d(E_k) + 2^{-m} H$$

où $H = \sup_k \mathcal{H}^d(E_k)$. Deux cas peuvent alors se produire :

◇ si $H < \infty$ alors en prenant la limite quand $k \to +\infty$ on a fini ;
◇ si $H = \infty$ alors là encore on a deux cas à considérer :
⋆ si $\liminf_{k\to+\infty} \mathcal{H}^d(E_k \cap V) = +\infty$ alors là encore on a fini ;
⋆ sinon, on peut extraire une sous-suite (E'_k) de (E_k) telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{H}^d(E'_k \cap V) = \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{H}^d(E_k \cap V) \quad \text{et} \quad \sup_k \mathcal{H}^d(E'_k) < +\infty \ .$$

On est alors ramené au premier cas.
Dans tous les cas on a bien démontré le lemme. □

À présent on dispose de tous les éléments pour établir un théorème de construction automatique d'une suite d'ensembles quasiminimaux tendant vers un ensemble minimal, ou presque-minimal selon la fonctionnelle utilisée. En particulier en minimisant successivement les noyaux en dimension décroissante on s'assure que les parties dont la contribution à la mesure d-dimensionnelle est nulle ne vont pas converger vers une partie de mesure non nulle. L'intérêt est qu'on peut choisir les éléments de la suite dans une classe de contrainte topologique $\mathfrak{F}$ stable par déformation : en effet on peut trouver facilement des exemples où le noyau d'un compétiteur n'est pas une déformation de ce compétiteur (par exemple en rajoutant un point isolé dans une composante connexe distincte du domaine considéré).

▷ **Théorème 6.1.7** (Existence d'ensembles presque-minimaux)

Soient U un domaine ouvert, $0 < d < n$, $\mathfrak{F}$ une famille non vide de d-ensembles relativement fermés dans U, stable par les $\mathrm{Diam}(U)$*-déformations sur U et $h : U \to [1, M]$ une application continue telle que :*

$$\forall x, y \in U : h(y) \leq (1 + \widetilde{h}(\|x - y\|))h(x)$$

où $\widetilde{h} : [0, \mathrm{Diam}(U)] \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$\lim_{r\to 0} \widetilde{h}(r) = 0 \ .$$

Il existe alors $M' > 0$ (ne dépendant que de d et n), une suite (E_k) d'éléments de $\mathfrak{F}$ et un d-ensemble E relativement fermé dans U vérifiant :

(1) $E_k \xrightarrow{U} E$

(2) *pour tout ouvert V relativement compact dans U, à partir d'un certain rang :*

$$E_k \in QM(V, \mathcal{H}^d, MM', \mathrm{Diam}(U)) \ ;$$

(3) *E est $(MM', \mathrm{Diam}(U))$-quasiminimal sur U pour $\mathcal{H}^d$;*

(4) $J_h^d(E) \leq \inf_{F\in\mathfrak{F}} J_h^d(F)$;

(5) *E est presque-minimal avec la fonction de jauge $\widetilde{h}$ sur U.*

Plus précisément, pour tout $0 \leq l \leq d$, en notant

$$E^l = \ker_d^l(E) \qquad \text{et} \qquad U^l = U \setminus \bigsqcup_{d\geq l'>l} E^{l'}$$

on a les propriétés suivantes :

(1) $\ker_d^l(E_k) \xrightarrow{U^l} E^l$;

(2) *pour tout ouvert V relativement compact dans U, à partir d'un certain rang :*
$$\ker_d^l(E_k) \in QM(V, \mathcal{H}^l, MM', \mathrm{Diam}(V)) ;$$

(3) $E^l \in QM(U^l, \mathcal{H}^l, MM', \mathrm{Diam}(U))$;

(4) $J_h^l(E^l) \leq \inf_{\substack{F\in\mathfrak{F} \\ F\setminus U^l = E\setminus U^l}} J_h^l(\ker_d^l(F))$;

(5) E^l *est presque-minimal avec la fonction de jauge $\widetilde{h}$ sur U^l.*

DÉMONSTRATION

Supposons les hypothèses du théorème vérifiées et considérons $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante pour l'inclusion d'ouverts bornés relativement compacts dans U tels que :
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = U \ .$$
On peut par exemple prendre :
$$U_k = \left\{ x \in \overset{\circ}{B}(0, 2^k) : \ B(x, 2^{-k}) \subset U \right\} \ .$$
Posons par exemple $\epsilon_k = 2^{-k}$. Pour tout $k \geq 0$ on choisit un compétiteur $E_k \in \mathfrak{F}$ tel que :
$$J_h^d(E_k \cap U_k) \leq \epsilon_k + \inf_{F\in\mathfrak{F}} J_h^d(F \cap U_k) \ .$$

page 132* Fixons $k \geq 0$ et appliquons le lemme 5.2.6* à $E_k \cap U_k$ dans U_k : pour tout $\eta > 0$ on peut construire un ouvert W_k tel que $U_k \subset\subset W_k \subset\subset U$ et un compétiteur
$$E'_k = (E_k \setminus U_k) \sqcup \bigsqcup_{0\leq l\leq d} E_k^l \in \mathfrak{F}$$
tel que $J_h^d(E'_k \cap U_k) \leq (1+\eta) J_h^d(E_k \cap U_k)$ et les E_k^l sont respectivement les unions des polyèdres des complexes l-dimensionnels $S_k^l \subset \mathcal{F}_l(S_k)$, et $(MM', \mathrm{Diam}(U_k))$-quasiminimaux sur W_k^l relativement à leurs dimensions respectives. En prenant $\eta = \frac{\epsilon_k}{J_h^d(E_k\cap U_k)} > 0$ — en effet $J_h^d(E_k \cap U_k) \leq M\mathcal{H}^d(E_k \cap U_k) < +\infty$ car U_k est borné et par hypothèse E_k est un d-ensemble — il vient :
$$J_h^d(E'_k \cap U_k) \leq \epsilon_k + J_h^d(E \cap U_k) \leq 2\epsilon_k + \inf_{F\in\mathfrak{F}} J_h^d(F \cap U_k) \ .$$

page 139* D'après la propriété 6.1.3* il est facile d'extraire une sous-suite de (E'_k) convergeant vers un fermé $E \subset U$ localement sur tout compact inclus dans U. En fait, en définissant pour $l \leq d$
$$U^l = U \setminus \bigcup_{d\geq l'>l} E^{l'}$$
on peut même supposer que $E_k^l \cap U^l$ tend vers une sous-partie E^l relativement fermée dans U^l, localement sur tout compact inclus dans U^l. Il suffirait pour le vérifier — ce qu'on ne fera pas ici — de raisonner par récurrence et d'extraire à chaque fois une sous-suite de (E_k^l) grâce à la propriété 6.1.3. Pour résumer, une fois toutes les sous-suites extraites on a obtenu :
$$\forall l \leq d : \ E_k^l \xrightarrow{U^l} E^l \quad , \quad E'_k = \bigsqcup_{0\leq l\leq d} E_k^l \quad , \quad E'_k \xrightarrow{U} E \quad \text{et} \quad E = \bigsqcup_{0\leq l\leq d} E^l \ .$$

À présent fixons $l \leq d$, considérons un ouvert $V \subset\subset U^l$ et notons pour $\epsilon > 0$ donné :

$$W_\epsilon = \bigcup_{x \in E^d \cup E^{d-1} \ldots \cup E^{l+1}} B(x, \epsilon) \ .$$

Puisque pour tout $l' > l$ on a $E_k^{l'} \xrightarrow{U^{l'}} E^{l'}$ on peut trouver k_0 tel que

$$\forall k \geq k_0 : \bigcup_{d \geq l' > l} E_k^{l'} \subset W_\epsilon \ .$$

Par ailleurs puisque $V \subset\subset U^l$ et $U^l \cap E^{l'} = \emptyset$ pour $l' > l$ alors on peut prendre ϵ suffisamment petit pour que $V \cap W_\epsilon = \emptyset$, et donc

$$\forall k \geq k_0, \ \forall l' > l : \ E_k^{l'} \cap V = \emptyset \ .$$

D'après le lemme 5.2.6* on sait que E_k^l est $(MM', \mathrm{Diam}(W_k))$-quasiminimal sur W_k^l pour $\mathcal{H}^l$, il est en particulier $(MM', \mathrm{Diam}(U))$-quasiminimal sur $V \cap W_k^l$ lorsque $k \geq k_0$. En outre, $\overline{V}$ étant compact et inclus dans U il est recouvert par les ouverts U_k, donc en prenant un recouvrement fini on peut encore prendre k_0 suffisamment grand pour que $\overline{V} \subset U_k$ pour $k \geq k_0$. *page 132

On peut aussi supposer qu'on a imposé a priori que le diamètre maximal des polyèdres de S_k soit plus petit que ϵ_k : on sait d'après le théorème 2.3* qu'il existe une constante C uniforme (ne dépendant que de k et n) telle que, en notant p_k le pas du complexe dyadique en surface S_k, on ait *page 61

$$\overline{\mathcal{R}}(S_k) \leq C p_k \leq C R_k$$

où R_k est la constante qu'on a appelée R dans la démonstration du lemme 4.3.18*, et qu'on pouvait choisir aussi petite qu'on le désirait. En particulier en prenant $R_k \leq \frac{\epsilon_k}{C}$ il vient : *page 125

$$\lim_{k \to +\infty} \overline{\mathcal{R}}(S_k) = 0$$

donc là encore en prenant k_0 assez grand, on peut supposer que pour tout $k \geq k_0$ on peut extraire un sous-complexe S'_k de S_k vérifiant à la fois :

$$U \subset\subset \mathcal{U}(S'_k) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U}(S'_k) \subset\subset W_k^l \ .$$

Et même, quitte à extraire une fois de plus une sous-suite on peut supposer par exemple que $\underline{\mathcal{R}}(S_{k+1}) \geq 100 \overline{\mathcal{R}}(S_k)$, donc en extrayant des sous-complexes S'_k maximaux vérifiant les propriétés demandées, on peut en plus s'arranger pour que pour tout $k \geq k_0$:

$$\mathcal{U}(S'_k) \subset \mathcal{U}(S'_{k+1}) \ .$$

Supposons donc qu'on ait choisi k_0 suffisamment grand pour vérifier les propriétés énoncées jusque là, posons

$$D = \mathcal{H}^l(\mathcal{U}(\mathcal{F}_l(S_{k_0}))) \qquad \text{et} \qquad D' = \min_{\alpha \in \mathcal{F}_l\left(S'_{k_0}\right)} \mathcal{H}^l(\alpha)$$

et considérons $k \geq k_0$. On veut montrer que $\mathcal{H}^l(E_k^l \cap V) \leq MM'D$ et que $\mathcal{H}^l(E_k^l \cap \overline{V}) \in \{0\} \cup [\frac{D'}{M'}, +\infty[$. Déjà si on note $W'_k = \mathcal{U}(S'_k)$, en appliquant le lemme 4.3.18 au l-ensemble fermé $W'_{k_0} \cap E_k^l$ dans le complexe S'_{k_0}, on trouve un nouveau l-ensemble $E_k'^l$ obtenu par une déformation (ψ_t) de $W'_{k_0} \cap E_k^l$ telle que $W_{\psi_1} \subset W'_{k_0} \subset W'_k$, inclus dans l'union des sous-faces l-dimensionnelles de S'_{k_0} et vérifiant :

$$\mathcal{H}^l(E_k'^l) \leq D \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}^l(E_k'^l) \leq M' \mathcal{H}^l(E_k^l \cap W'_{k_0}) \ .$$

La quasiminimalité de E_k^l sur W'_k nous donne alors directement :

$$\mathcal{H}^l(E_k^l \cap W'_{k_0}) \leq MM'\mathcal{H}^l(E_k'^l) \leq MM'D \ .$$

Puisque par ailleurs on s'est assuré de prendre k_0 assez grand pour que $V \subset W'_{k_0}$ on obtient la première inégalité recherchée, à savoir :

$$\mathcal{H}^l(E_k^l \cap V) \leq MM'D \ .$$

À présent si l'on suppose que $\mathcal{H}^l(E_k^l \cap W'_{k_0}) < \frac{D'}{M'}$ il vient :

$$\mathcal{H}^l(E_k'^l) < D' = \min_{\alpha \in \mathcal{F}_l(S'_{k_0})} \mathcal{H}^l(\alpha) \ .$$

Par ailleurs $E_k'^l$ étant par construction inclus dans l'union des sous-faces l-dimensionnelles de S'_{k_0}, il est clair que pour toute sous-face $\alpha \in \mathcal{F}_l(S'_{k_0})$, $\alpha \cap E_k'^l \neq \alpha$.

page 126* Dès lors comme pour le lemme 4.3.19*, en faisant des projections radiales centrées sur $\alpha \setminus E_k'^l$ lorsque $\alpha \not\subset \partial W'_{k_0}$ on peut encore trouver une déformation (ψ'_t) de $E_k'^l$ telle que $W_{\psi'_1} \subset W'_{k_0} \subset W'_k$ et :

$$E_k''^l = \psi'_1(E_k'^l) \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}_{l-1}(S'_{k_0})) \ .$$

page 132* Or d'après le lemme 5.2.6*, l'optimalité de E_k^l nous donne :

$$J_h^d(E_k^l \cap \overset{\circ}{W}{}'_{k_0}) \leq J_h^d(E_k''^l \cap \overset{\circ}{W}{}'_{k_0}) \ .$$

On en tire :

$$\mathcal{H}^d(E_k^l \cap \overset{\circ}{W}{}'_{k_0}) \leq M\mathcal{H}^d(E_k''^l \cap \overset{\circ}{W}{}'_{k_0}) = 0 \ .$$

Puisque $\overline{V} \subset \overset{\circ}{W}{}'_{k_0}$ on obtient la seconde propriété recherchée, à savoir :

$$\mathcal{H}^l(E_k^l \cap \overline{V}) \in \{0\} \cup \left[\frac{D'}{M'}, +\infty\right[\ .$$

page 141* En appliquant le théorème 6.1.4* à V et à la suite $(E_k^l \cap V)_{k \geq k_0}$ qui converge vers $E^l \cap V$ on sait en plus que :

- ◇ $E^l \cap V$ est $(MM', \mathrm{Diam}(U))$-quasiminimal sur U et $\ker^l(E^l \cap V) = E^l \cap V$;
- ◇ $\mathcal{H}^l(E^l \cap V) \leq \liminf_{k \to +\infty} \mathcal{H}^l(E_k^l \cap V) \leq MM'D < +\infty$ donc $E^l \cap V$ est un l-ensemble localement fermé dans V ;
- ◇ $\mathcal{H}^l(E^l \cap \overline{V}) \geq C \limsup_{k \to +\infty} \mathcal{H}^l(E_k^l \cap \overline{V}) \in \{0\} \cup [\frac{CD'}{M'}, +\infty[$ donc deux cas sont possibles :
  - ⋆ si $\mathcal{H}^l(E^l \cap V) = 0$ alors $\ker^l(E^l \cap V) = \emptyset$ et $\limsup_{k \to +\infty} \mathcal{H}^l(E_k^l \cap V) = 0$, donc à partir d'un certain rang $E_k^l \cap V = \emptyset$ et donc $E^l \cap V = \emptyset = \ker^l(E^l \cap V)$ (puisque $E_k^l \cap V \xrightarrow{V} E^l \cap V$) ;
  - ⋆ si $\mathcal{H}^l(E^l \cap V) > 0$ alors à partir d'un certain rang $\mathcal{H}^l(E_k^l \cap V) \geq \frac{D'}{M'} > 0$ donc $E_k^l \cap V \neq \emptyset$.

Du deuxième point on tire que $\ker^{l'}(E^l) = \emptyset$ pour $l' > l$ et que $\mathcal{H}^d(E^{l'}) = 0$ pour $l' > l$. Du troisième on tire que $E_k^l \xrightarrow{U^l} \ker^l(E^l)$ (et donc que $\ker^l(E^l) = E^l$) en prenant pour V des boules centrées sur E^l et relativement compactes dans U^l dont le rayon tend vers zéro. Dès lors :

$$\ker_d^l(E'_k) \xrightarrow{U^l} \ker_d^l(E) \ .$$

En faisant l'union sur tous les ouverts V relativement compacts dans U^l on déduit du premier point que E^l est $(MM', \mathrm{Diam}(U))$-quasiminimal sur U^l. On déduit encore d'après le lemme 6.1.6* : *page 142

$$J_h^d(E) = J_h^d(E^d) \leq \liminf_{k\to+\infty} J_h^d(E_k^d \cap U_k) = \liminf_{k\to+\infty} \inf_{F\in\mathfrak{F}} J_h^d(F \cap U_k) \leq \inf_{F\in\mathfrak{F}} J_h^d(F) \ .$$

Remarquons qu'on pourrait recommencer la même démonstration avec une suite initiale (E'_k) qui vérifie toutes les propriétés qu'on a requises jusque-là, et telle que, par exemple :

$$J_h^l(E'_k \cap V_{\epsilon_k}^l) \leq 2\epsilon_k + \inf_{F\in\mathfrak{F}, F\setminus V_{\epsilon_k}^l = E'_k \setminus V_{\epsilon_k}^l} J_h^l(F \cap V_{\epsilon_k}^l)$$

où $V_{\epsilon_k}^l$ est obtenu en retirant l'ϵ_k-voisinage de $E^d \cup E^{d-1} \ldots E^{l+1}$ à U_k. On s'assurerait ainsi que :

$$J_h^l(\ker_d^l(E)) \leq \inf_{\substack{F\in\mathfrak{F} \\ F\setminus U^l = E\setminus U^l}} J_h^l(\ker_d^l(F)) \ .$$

À chaque fois on aurait des nouvelles limites $E^{l'}$ pour $l' \leq l$, en raisonnant par récurrence et en les réutilisant à chaque étape pour définir un nouveau $V_{\epsilon_k}^l$ on obtient le point (4) du théorème.

Vérifions à présent la presque-minimalité des E^d : considérons une δ-déformation (f_t) sur U, avec $\mathrm{Diam}(W_{\phi_1}) = \delta$. À quelques détails près on va utiliser la démonstration de Guy David du point (2) du théorème 6.1.4* (*Theorem 4.1* dans [D1]). Pour améliorer la lisibilité on notera en gras les références tirées de [D1]. *page 141

À partir de f_1 (notée f dans [D1]) on construit une nouvelle application g (notée h dans [D1]) telle que $W_g \subset W_{f_1}$ et à laquelle on va appliquer les inégalités obtenues pour E'_k. La raison de cette construction est qu'on ne peut appliquer directement l'argument à f, puisque celle-ci pourrait être injective sur E'_k et dans le même temps envoyer des morceaux distincts de E sur la même image. On construit donc une petite perturbation g de f_1 qui suit en gros son comportement et envoie des morceaux distincts de E'_k sur la même image lorsque f_1 fait de même avec E. La constante δ_2 qui intervient dans **[4.25]** pouvant être choisie arbitrairement petite, puisque W_{f_1} est relativement compact dans U on peut imposer en plus que :

$$\delta_2 < \frac{\underline{\mathbf{d}}(W_{f_1}, \partial U)}{2} \ .$$

Les propriétés **[4.29]** et **[4.30]**, respectivement

$$\|f_1 - g\|_\infty < \delta_2 \qquad \text{et} \qquad W_g = W_{f_1}$$

sont effectivement obtenues à partir de **[4.93]**. Dès lors d'après la propriété 5.2.5* on peut déjà construire une déformation (g_t) sur U telle que $g_1 = g$. Notons g' l'application notée h_1 qui est introduite en **[4.94]** : *page 131

$$g'(z) = \phi(z)g(z) + (1 - \phi(z))z \ .$$

Cette nouvelle application peut être construite de façon à rendre $\|g' - g\|_\infty$ arbitrairement petit, tout en vérifiant $W_{g'} \subset\subset W_g$. Donc là encore d'après la propriété 5.2.5 on peut encore construire une déformation (g'_t) sur U telle que $g'_1 = g'$.

Suivons ensuite la démonstration de [D1] sans rien y changer à partir de **[4.94]** jusqu'aux inégalités **[4.108]** et **[4.109]**, desquelles on tire, pour k suffisamment grand :

$$\mathcal{H}^d(g(E'_k \cap W_{g'})) \leq \mathcal{H}^d(f_1(E'_k \cap W_{f_1})) + 2\eta_1 \ .$$

En outre, on a aussi pu obtenir pour k assez grand, comme indiqué juste après **[4.109]** :

$$\mathcal{H}^d(E \cap W_{f_1}) \leq \mathcal{H}^d(E'_k \cap W_{g'}) + 2\eta \ .$$

Par ailleurs, comme on l'a vu :

$$J_h^d(E'_k \cap U_k) \leq 2\epsilon_k + \inf_{F \in \mathfrak{F}} J_h^d(F \cap U_k) \ .$$

Lorsque $M = 1$, pour k assez grand on a $W_{f_1} \cup W_{g'} = W_{f_1} \subset U_k$ et même $\widehat{W}_{g'} \subset\subset U_k$. En outre $g'(U_k) \in \mathfrak{F}$ puisque $\mathcal{F}$ est supposé stable par déformation, d'où on tire que

$$\mathcal{H}^d(g'(E'_k \cap W_{g'})) \geq \mathcal{H}^d(E'_k \cap W_{g'}) - 2\epsilon_k$$

et finalement que

$$\mathcal{H}^d(f_1(E \cap W_{f_1})) \geq \mathcal{H}^d(E \cap W_{f_1}) - 2\epsilon_k - 2\eta - 2\eta_1 \ .$$

Puisque cette inégalité est valable pour tous choix de η et η_1 avec k suffisamment grand on a donc

$$\mathcal{H}^d(f_1(E \cap W_{f_1})) \geq \mathcal{H}^d(E \cap W_{f_1})$$

ce qui conclut la démonstration de la minimalité de E lorsque $M = 1$.

Lorsque $M > 1$ on a $W_{g'} \subset W_{f_1} \subset B$ où B est une boule de rayon δ. On a alors de la même façon, pour k assez grand

$$J_h^d(g'(E'_k \cap W_{g'})) \geq J_h^d(E'_k \cap W_{g'}) - 2\epsilon_k$$

d'où on tire encore que

$$\mathcal{H}^d(g'(E'_k \cap W_{g'})) \geq (1 + \widetilde{h}(\delta))\mathcal{H}^d(E'_k \cap W_{g'}) - 2\epsilon_k$$

et finalement que

$$\mathcal{H}^d(f_1(E \cap W_{f_1})) \geq (1 + \widetilde{h}(\delta))(\mathcal{H}^d(E \cap W_{f_1}) - 2\epsilon_k - 2\eta - 2\eta_1) - 2\epsilon_k \ .$$

Là encore, puisque cette inégalité est valable pour tous choix de η et η_1 avec k suffisamment grand il vient :

$$\mathcal{H}^d(f_1(E \cap W_{f_1})) \geq (1 + \widetilde{h}(\delta))\mathcal{H}^d(E \cap W_{f_1}) \ .$$

Le raisonnement qu'on vient de faire pour prouver la presque-minimalité de E peut être refait de la même façon en dimensions inférieures pour E^l dans U^l, ce qui conclut la démonstration du théorème. □

6.2 Perspectives

Comme promis, on a donc établi un premier théorème d'existence d'ensembles minimaux en dimension et codimension quelconques, dans un domaine ouvert U. En particulier, le résultat peut sans problème se généraliser sur des domaines correspondant à des variétés de dimension n sans bord formées d'une union de cubes qui se recollent (penser par exemple aux sous-faces de dimension n d'un complexe dyadique de dimension $n' > n$). Dans ce cadre, le résultat d'existence paraissait difficile à obtenir par des arguments standard utilisant des méthodes classiques telles que la théorie des courants et BV dès qu'on est en codimension plus grande que 1.

Notre résultat ne répond toutefois pas à plusieurs questions importantes, pour lesquelles on espère toutefois pouvoir apporter quelques éléments de réponse, du moins partiels.

Peut-on généraliser à des variétés sans bord quelconques ?

La principale difficulté résiderait alors dans la réécriture du théorème 4.3.17* d'approximation polyédrale. En effet, l'un des arguments utilisés — à savoir le théorème 2.3* *p. 121 et 61 de fusion de complexes dyadiques avec régularités uniformes — fait un usage intensif de propriétés géométriques euclidiennes qui ne sont plus vraies sur une variété, par exemple celles faisant intervenir les angles entre deux complexes dyadiques en dimension 2. Sans compter qu'il faudrait généraliser la notion de cube dyadique, en perdant le bénéfice des recollements automatiques qu'on avait en géométrie euclidienne.

Toutefois on pourrait déjà considérer une variété topologique U de dimension n plongée dans $\mathbb{R}^{n'}$ ($n' \geq n$), c'est à dire telle qu'en tout point $x \in U$ on puisse trouver un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons en plus que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $\rho > 0$ on peut trouver un atlas fini $\mathcal{A}_\epsilon$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) pour toute carte U de l'atlas $\mathcal{A}_\epsilon$, l'homéomorphisme associé ϕ est tel qu'on puisse trouver une application affine f telle que $\|f - \phi\|_\infty < \epsilon$ sur U ;

(2) pour toute carte de $\mathcal{A}_\epsilon$, il existe un majorant N uniforme (ne dépendant pas de ϵ) sur le nombre de cartes qu'elle intersecte.

Dans ces conditions, pour $\epsilon > 0$ fixé on pourrait considérer les intersections maximales de cartes de $\mathcal{A}_\epsilon$ entre elles, c'est à dire les familles $U_1, \ldots, U_k$ de cartes dont l'intersection V est non vide, et telles que $V \cap W = \emptyset$ pour toute autre carte W. Dans ces conditions, en construisant un complexe dyadique dans V de pas suffisamment grand par rapport à ϵ, on pourrait en utilisant les applications de changement de cartes et en rajoutant des couches de cubes de moins en moins déformées, se ramener à un complexe dyadique en surface dans $\bigcap_{i \neq 1} U_i$. Puis, de la même façon, se ramener à un complexe dyadique en surface dans $\bigcap_{i \neq 2} U_i$, etc... jusqu'à ce qu'on l'ait fait pour tout j dans $\bigcap_{i \neq j} U_i$, puis finalement dans toutes les sous-familles de $U_1, \ldots, U_k$ (en utilisant le théorème 2.3* *page 61 lorsqu'on rencontre des cubes déjà construits).

À la fin on aurait donc recouvert chaque carte de l'atlas de cubes dyadiques, ou de déformations de cubes dyadiques. Il resterait encore à vérifier s'il est possible que les pseudo-cubes qu'on a construits puisse être modifiés pour y inclure les raccordements avec des cubes dyadiques parallèles à la partie rectifiable d'un ensemble donné, comme on l'a fait pour le théorème 4.3.17*. Pour l'instant cette construction n'a pas encore été *page 121 réalisée, et pourrait nécessiter des conditions plus fortes sur la variété considérée que celles évoquées plus haut.

Peut-on généraliser à un domaine fermé ?

La généralisation à un domaine fermé U sans hypothèses supplémentaires parait difficile à obtenir par la méthode utilisée jusqu'ici. En effet, à moins de disposer de grilles polyédrales incluses dans U qui le recouvrent complètement (ce qui revient à supposer que le domaine est une union de polyèdres) l'optimisation polyédrale introduite dans le lemme 5.2.6* ne permet pas d'avoir un contrôle sur la portion éventuelle incluse dans la *page 132 frontière ∂U.

On pourrait toutefois supposer qu'il existe une application M-lipschitzienne ϕ définie sur un voisinage ouvert V de la frontière ∂U et à valeurs dans ∂U telle que $\phi|_{\partial U} = Id_{\partial U}$. Dans ce cas, on pourrait se placer dans l'ouvert $V \cup U$ et y définir l'application h semi-continue inférieurement ainsi :

$$h(x) = \begin{cases} 1 + M^d & \text{si } x \in V \setminus U \\ 1 & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Il est clair alors qu'un ensemble E réduit et minimal pour J_h^d sur V serait inclus et minimal dans U pour $\mathcal{H}^d$, puisqu'il suffirait de lui appliquer une déformation construite à partir de ϕ transformant $E \cap (V \setminus U)$ en une partie incluse dans ∂U, dont la mesure serait multipliée par M^d. Par minimalité de E pour J_h^d, puisque sur $V \setminus U$ on a $h > M^d$ on en déduirait automatiquement que $\mathcal{H}^d(E \cap (V \setminus U)) = 0$, et donc en supposant que E est réduit, que $E \subset U$ et est minimal pour $\mathcal{H}^d$.

Toutefois le théorème 6.1.7* fait en plus l'hypothèse que h est continue, pas seulement semi-continue inférieurement. La nécessité de l'hypothèse de semi-continuité supérieure provient de l'utilisation de la proposition 4.2.12* sur les projections magnétiques et du lemme 4.3.15* de projection radiale optimale, tous deux utilisés dans le théorème 4.3.17*. Ces deux énoncés nécessitent des bornes supérieures et inférieures sur le poids associé à chaque point à l'intérieur d'une boule dont le rayon peut être choisi arbitrairement petit. Il semblerait toutefois que des hypothèses supplémentaires sur la régularité de l'ensemble des discontinuités de h pourrait permettre de généraliser, et de retrouver des majorations équivalentes sur l'augmentation de mesure introduite par les projections magnétiques et les projections radiales. Par exemple si h est continue sauf sur un hyperplan affine il ne devrait pas être trop difficile d'adapter les énoncés, et éventuellement de généraliser lorsque l'ensemble des discontinuités est par exemple une surface de classe $\mathcal{C}^1$.

p. 143, 114,* 117 et 121

L'ensemble minimal limite est-il dans la classe topologique $\mathfrak{F}$?

Pour l'instant on sait seulement que l'ensemble minimal E dont on a prouvé l'existence est obtenu comme une limite en distance de Hausdorff sur tout compact d'une suite de compétiteurs de $\mathfrak{F}$. Toutefois, dans le cas $d = 2$, $n = 3$ et U borné il est possible de conclure en utilisant le théorème de Jean Taylor, dont on peut trouver la démonstration dans [T]. Rappelons que d'après celui-ci, un ensemble réduit et minimal — ou presque-minimal avec une fonction de jauge Höldérienne d'exposant au plus $1/3$ — est $\mathcal{C}^1$-équivalent au voisinage de chacun de ses points à l'un des trois cônes minimaux globaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. Pour tout point $x \in E$ il est alors facile de construire une déformation lipschitzienne sur un voisinage V de x qui envoie V sur $E \cap V$: d'abord en rétractant sur le cône minimal correspondant, puis en composant avec l'application de classe $\mathcal{C}^1$ qui envoie le cône minimal sur $V \cap E$. Donc pour k assez grand on peut trouver une déformation lipschitzienne qui envoie E_k sur E, et par conséquent $E \in \mathfrak{F}$.

Des résultats récents de Guy David établissent encore dans le cas $d = 2$ et $n > 3$ une équivalence bi-Höldérienne entre les ensembles presque-minimaux avec une condition de Dini sur la fonction de jauge et les cônes minimaux de dimension 2. On peut naturellement se poser la question du bien-fondé de la condition de lipschitziannité donnée dans la définition 5.1.1*, initialement introduite par Almgren, et de savoir si le théorème d'existence est toujours vérifié si l'on impose seulement à nos déformations d'être Höldériennes. Dans tout ce qu'on a écrit jusqu'au théorème 6.1.4* rien ne devrait changer,

p. 129 et 141*

il resterait encore à vérifier que les trois énoncés correspondants dans [D1] restent vrais avec cette nouvelle définition des compétiteurs, ainsi que le morceau de démonstration qu'on a adapté pour la presque-minimalité de la limite. Si c'était le cas, alors de la même façon dans le cas d'un domaine borné on devrait pouvoir établir que $E \in \mathfrak{F}$.

Quatrième partie

Annexe

Sommaire

7 Preuve informatique du lemme du laboureur **153**
7.1 Méthode algorithmique 153
7.1.1 $\mathfrak{D}^2$ et le 4×4-groupement 153
7.1.2 Découpage en complexes linéaires 154
7.2 Implémentation en C 156
7.3 Résultats donnés par le programme 161
7.4 Fin de la démonstration du lemme 161

7 Preuve informatique du lemme du laboureur

On va à présent donner les algorithmes d'énumération de cas annoncés dans le début de la démonstration du lemme 2.1.13*. *page 75

7.1 Méthode algorithmique

Dans les algorithmes à venir, pour tout complexe S dyadique unitaire, on va représenter $S|_{[0,12]^2}$ par une matrice d'entiers $M = (m_{i,j})$ de taille 12×12, vérifiant l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} m_{i,j} = 1 \iff \Delta(i-1, j-1, 1) \in S|_{[0,12]^2} \\ m_{i,j} = 0 \iff \Delta(i-1, j-1, 1) \notin S|_{[0,12]^2} \end{cases}.$$

7.1.1 $\mathfrak{D}^2$ et le 4×4-groupement

Donnons d'abord un algorithme pour calculer $\#(\mathcal{V}(\Delta(x-1, y-1, 1)) \cap S)$:

Entrée : $M \in \mathcal{M}_{12}(\{0,1\})$ et $(x, y) \in \{2, \dots, 11\}^2$
Sortie : $s = \#(\mathcal{V}(\Delta(x-1, y-1, 1)) \cap S)$

```
s ⇐ 0
pour tout (u, v) ∈ {−1, 0, 1}² faire
    si m_{x+u,y+v} = 1 alors
        s ⇐ s + 1
    fin si
fin pour
```

On peut alors calculer la représentation de $\mathfrak{D}(S)$:

Entrée : $M \in \mathcal{M}_{12}(\{0,1\})$
Sortie : $M' \in \mathcal{M}_{12}(\{0,1\})$ telle que M' représente $\mathfrak{D}(S)|_{[1,11]^2}$

```
pour tout (x, y) ∈ {1, ..., 12}² faire
    m'_{x,y} ⇐ 0
fin pour
pour tout (x, y) ∈ {2, ..., 11}² faire
    si #(V(Δ(x − 1, y − 1, 1)) ∩ S) = 9 alors
        m'_{x,y} ⇐ 0
    fin si
fin pour
```

À présent donnons un algorithme pour vérifier si $S'|_{[2,10]^2}$ est 4×4-groupé par rapport à l'origine $(2, 2)$:

Entrée : $M' \in \mathcal{M}_{12}(\{0,1\})$
Sortie : **vrai** si $S'|_{[2,10]^2}$ est 4×4-groupé, **faux** sinon

```
pour tout (u, v) ∈ {2, 6}² faire
    pour tout (x, y) ∈ {0, ..., 3}² faire
        si m_{x+u,y+v} ≠ m_{u,v} alors
            renvoyer faux
        fin si
    fin pour
fin pour
renvoyer vrai
```

Considérons l'ensemble des restrictions possibles au carré $[0,12]^2$ de complexes unitaires 4×4-groupés par rapport à l'origine $(0,0)$. Il est clair qu'il y en a 2^9 et en les notant G_i pour $0 \leq i \leq 2^9$ on peut les paramétrer par :

$$\forall (x,y) \in \{0,\dots,3\}^2,\ \forall (u,v) \in \{0,1,2\}^2 :\ \Delta(3u+x, 3v+x) \in G_i \Leftrightarrow 2^{3u+v} \leq i \bmod 2^{3u+v+1}\ .$$

On donne alors un algorithme pour générer la représentation de G_i :

Entrée : $i \in \{0,\dots,2^9\}$
Sortie : $M = G_i$

```
pour tout (u, v) ∈ {0, 1, 2}² faire
    pour tout (x, y) ∈ {0, ..., 3}² faire
        si 2^{3u+v} ≤ i mod 2^{3u+v+1} alors
            m_{3u+x,3v+y} ⇐ 1
        sinon
            m_{3u+x,3v+y} ⇐ 0
        fin si
    fin pour
fin pour
```

Il ne nous reste plus qu'à donner un algorithme pour vérifier si $\mathfrak{D}^2$ préserve la propriété de 4×4-groupement par rapport à l'origine $(2,2)$:

Sortie : **vrai** si $\mathfrak{D}^2$ préserve la propriété de 4×4-groupement, **faux** sinon

```
pour tout i ∈ {0, ..., 2^9} faire
    M ⇐ G_i
    M ⇐ 𝔇(M)
    M ⇐ 𝔇(M)
    si M est 4 × 4-groupé par rapport à l'origine (2, 2) alors
        renvoyer vrai
    sinon
        renvoyer faux
    fin si
fin pour
```

7.1.2 Découpage en complexes linéaires

Donnons à présent un algorithme pour calculer $\#(\mathcal{V}^*(\Delta(x-1,y-1,1)) \cap S)$:

Entrée : $M \in \mathcal{M}_{12}(\{0,1\})$ et $(x,y) \in \{4,\dots,9\}^2$
Sortie : $s = \#(\mathcal{V}^*(\Delta(x-1,y-1,1)) \cap S)$

$s \Leftarrow 0$
pour tout $(u,v) \in \{-1,0,1\}^2$ tel que $|u+v| = 1$ **faire**
  si $m_{x+u,y+v} = 1$ **alors**
    $s \Leftarrow s+1$
  fin si
fin pour

Il existe en tout 8 isométries laissant le carré $[3,9]^2$ invariant (l'identité et la symétrie par rapport au centre, les 2 symétries par rapport aux diagonales, les 2 symétries par rapport aux médianes, 2 rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$). On les notera ϕ_i pour $1 \leq i \leq 8$. On donne un algorithme pour vérifier que 2 grilles restreintes à $[3,9]^2$ sont équivalentes à une isométrie près :

Entrée : $M, M' \in \mathcal{M}_{12}(\{0,1\})$
Sortie : **vrai** si les 2 grilles restreintes à $[3,9]^2$ sont égales à une isométrie près, **faux** sinon

pour tout $i \in \{1,\dots,8\}$ **faire**
  $s \Leftarrow$**vrai**
  pour tout $(x,y) \in \{3,9\}^2$ **faire**
    si $m_{x,y} \neq m_{\phi_i(x,y)}$ **alors**
      $s \Leftarrow$**faux**
    fin si
  fin pour
  si s **alors**
    renvoyer vrai
  fin si
fin pour
renvoyer faux

On donne finalement un algorithme qui vérifie que pour tout complexe S 4×4-groupé, $(S \setminus \mathfrak{D}(S))|_{[3,9]^2}$ ne contient que des cubes à 2 voisins tangents, et qui dans le même temps peut dresser la liste des configurations possibles de $(\mathfrak{D}(S) \setminus \mathfrak{D}^2(S))|_{[3,9]^2}$:

Sortie : $s =$ **vrai** si pour tout complexe S 4×4-groupé et $\forall \delta \in (T \setminus \mathfrak{D}(S))|_{[4,8]^2}$: $\#(\mathcal{V}^*(\delta \cap (S \setminus \mathfrak{D}(S))|_{[3,9]^2}) = 2$, **faux** sinon
Sortie : L contient la liste des configurations possibles à une isométrie près de $(\mathfrak{D}(S) \setminus \mathfrak{D}^2(S))|_{[3,9]^2}$ pour S 4×4-groupé

$L \Leftarrow \emptyset$
$s \Leftarrow$ **vrai**
pour tout $i \in \{0,\dots,2^9\}$ **faire**
  $M \Leftarrow G_i$
  $M' \Leftarrow M \setminus \mathfrak{D}(M)$
  si $\exists \delta \in S'|_{[4,8]^2}$: $\#(\mathcal{V}^*(\Delta(x-1,y-1,1)) \cap S') \neq 2$ **alors**
    $s \Leftarrow$ **faux**
  fin si
  $M'' \Leftarrow \mathfrak{D}(M) \setminus \mathfrak{D}^2(M)$
  si $M'' \notin L$ à une restriction à $[3,9]^2$ et une isométrie près **alors**
    $L \Leftarrow L \cup \{M''\}$
  fin si
fin pour

7.2 Implémentation en C

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <assert.h>

/* Taille des groupements considérés (ici 4×4) */
#define N 4

/* Nombre de groupements dans une grille (ici 3×3) */
#define M 3

/* Une grille de taille 12×12 */
typedef int GRID[3*N][3*N];

/* Un masque pour remplir les grilles 4×4-groupées */
typedef int MASK[M*M];

/* Le tableau des 2^9 masques possibles */
MASK masks[1<<(M*M)];

/* La liste des grilles trouvées, et le nombre d'éléments qu'elle contient
   */
#define TAB_GRID_MAX 100
GRID tab_grid[TAB_GRID_MAX];
int tab_grid_count=0;

/* Affiche une grille restreinte à [2,10]^2 */
void print_big_GRID(GRID g){
  int x,y;
  for (x=N/2;x<N*(M-1)+N/2;x++){
    for (y=N/2;y<N*(M-1)+N/2;y++)
      if (g[x][y])
        printf("X");
      else
        printf(".");
    printf("\n");
  }
}

/* Affiche une grille restreinte à [3,9]^2 */
void print_small_GRID(GRID g){
  int x,y;
  for (x=N-1;x<N*(M-1)+1;x++){
    for (y=N-1;y<N*(M-1)+1;y++)
      if (g[x][y])
        printf("X");
      else
        printf(".");
    printf("\n");
  }
}

/* Copie la grille src dans dest */
void copy_GRID(GRID src,GRID dest){
  int x,y;
  for (x=0;x<3*N;x++)
    for (y=0;y<3*N;y++)
```

```
56          dest[x][y]=src[x][y];
}

/* Remplit le tableau de masques */
void fill_masks(void){
61   int i,j;
   for (i=0;i<<(M*M);i++)
     for (j=0;j<M*M;j++)
       masks[i][j]=(i & (1<<j))!=0;
}
66
/* Remplit une grille selon un masque */
void fill_GRID(MASK m,GRID g){
   int X[9]={0,N,2*N,0,N,2*N,0,N,2*N};
   int Y[9]={0,0,0,N,N,N,2*N,2*N,2*N};
71   int i,x,y,u,v;
   for (i=0;i<M*M;i++){
     x=X[i];
     y=Y[i];
     for (u=0;u<N;u++)
76       for (v=0;v<N;v++)
         g[x+u][y+v]=m[i];
   }
}

81 /* Calcul de l'image de (x,y) ∈ [0,12]² par l'homothétie φ_index */
void isometric_transform(int *x, int *y,int index){
   int z;
   switch(index){
     case (1):
86       *x=N*M-1-*x;
       break;
     case (2):
       *y=N*M-1-*y;
       break;
91   case (3):
       *x=N*M-1-*x;
       *y=N*M-1-*y;
       break;
     case (4):
96       z=*x;
       *x=*y;
       *y=z;
       break;
     case (5):
101      z=*x;
       *x=N*M-1-*y;
       *y=z;
       break;
     case (6):
106      z=*x;
       *x=*y;
       *y=N*M-1-z;
       break;
     case (7):
111      z=*x;
       *x=N*M-1-*y;
       *y=N*M-1-z;
```

```
  }
}

/* Copie l'image de la grille src par l'homothétie φ_index dans dest */
void copy_isometric_transform_GRID(GRID src,GRID dest,int index){
  int x,y,u,v;
  for (x=0;x<3*N;x++)
    for (y=0;y<3*N;y++){
      u=x;
      v=y;
      isometric_transform(&u,&v,index);
      dest[u][v]=src[x][y];
    }
}

/* Détermine si 2 grilles restreintes à [2,9]^2 sont égales à une isométrie
   près */
int compare_isometric_transformed_GRID(GRID g1,GRID g2){
  int s,i,x,y;
  GRID g;
  for (i=0;i<8;i++){
    s=1;
    copy_isometric_transform_GRID(g1,g,i);
    for (x=N-1;x<N*(M-1)+1;x++)
      for (y=N-1;y<N*(M-1)+1;y++)
        s=s && (g[x][y]==g2[x][y]);
    if (s)
      return 1;
  }
  return 0;
}

/* Ajoute une grille à la liste si elle n'y est pas déjà à une isométrie
   près */
void insert_GRID(GRID g){
  int i;
  for (i=0;i<tab_grid_count;i++)
    if ( compare_isometric_transformed_GRID(g,tab_grid[i]))
      return;
  assert(tab_grid_count<TAB_GRID_MAX);
  copy_GRID(g,tab_grid[tab_grid_count]);
  tab_grid_count++;
}

/* Calcule #(V(Δ(x,y,1))∩T) */
int neighbor_count(int x,int y,GRID g){
  int r=0,u,v;
  for (u=-1;u<=1;u++)
    for (v=-1;v<=1;v++)
      if (g[x+u][y+v])
        r++;
  return r;
}

/* Calcule #(V*(Δ(x,y,1))∩T) */
int star_neighbor_count(int x,int y,GRID g){
  int r=0,u,v;
  for (u=-1;u<=1;u++)
```

```
    for (v=-1;v<=1;v++)
171   if (((u==0)^(v==0)) && (g[x+u][y+v]))
        r++;
  return r;
}

176 /* Calcule 𝔇(T) */
void dig_GRID(GRID g){
  int x,y;
  GRID h;
  copy_GRID(g,h);
181 for (x=1;x<M*N-1;x++)
    for (y=1;y<M*N-1;y++)
      if (neighbor_count(x,y,g)!=9)
        h[x][y]=0;
  copy_GRID(h,g);
186 }

/* Vérifie si une grille est bien 4×4-groupée par rapport à l'origine
   (2,2) */
void check_GRID_is_4_4_group(GRID g){
  int u,v,x,y;
191 for (x=N;x<N*(M-1);x++)
    for (y=N;y<N*(M-1);y++)
      for (u=-N/2;u<=N/2;u+=N)
        for (v=-N/2;v<=N/2;v+=N)
          if (g[x+u][y+v] ^ g[N+u][N+v]){
196         printf("Cette grille n'est pas 4-groupée:\n");
            print_big_GRID(g);
            abort();
          }
}
201
/* Vérifie si une grille ne contient que des points d'ordre 2 */
void check_GRID_is_cyclic(GRID g){
  int k,x,y;
  for (x=N;x<N*(M-1);x++)
206   for (y=N;y<N*(M-1);y++){
      k=star_neighbor_count(x,y,g);
      if ((k<1) && g[x][y]){
        printf("Ce squelette n'est pas une restriction d'un squelette
            cyclique:\n");
        print_small_GRID(g);
211     abort();
      }
    }
}

216 /* Différence ensembliste entre 2 grilles */
void substract_GRID(GRID g1,GRID g2){
  int x,y;
  for (x=0;x<N*M;x++)
    for (y=0;y<N*M;y++)
221   g2[x][y]=g2[x][y] && !g1[x][y];
}

/* Fonction principale */
void main(){
```

```
226   GRID g,h;
      int i;
      fill_masks();
      for (i=0;i<1<<(M*M);i++){
        fill_GRID(masks[i],g);
231
        copy_GRID(g,h);
        dig_GRID(g);
        substract_GRID(g,h);
        check_GRID_is_cyclic(h);
236
        copy_GRID(g,h);
        dig_GRID(g);
        check_GRID_is_4_4_group(g);

241     substract_GRID(g,h);
        insert_GRID(h);
      }
      printf("Les 2 propriétés testées sont vérifiées.\n");
      printf("Il y a %i grilles dans la liste.\n\n",tab_grid_count);
246   for (i=0;i<tab_grid_count;i++){
        printf("Grille no %i:\n------\n",i);
        print_small_GRID(tab_grid[i]);
        printf("------\n\n");
      }
251 }
```

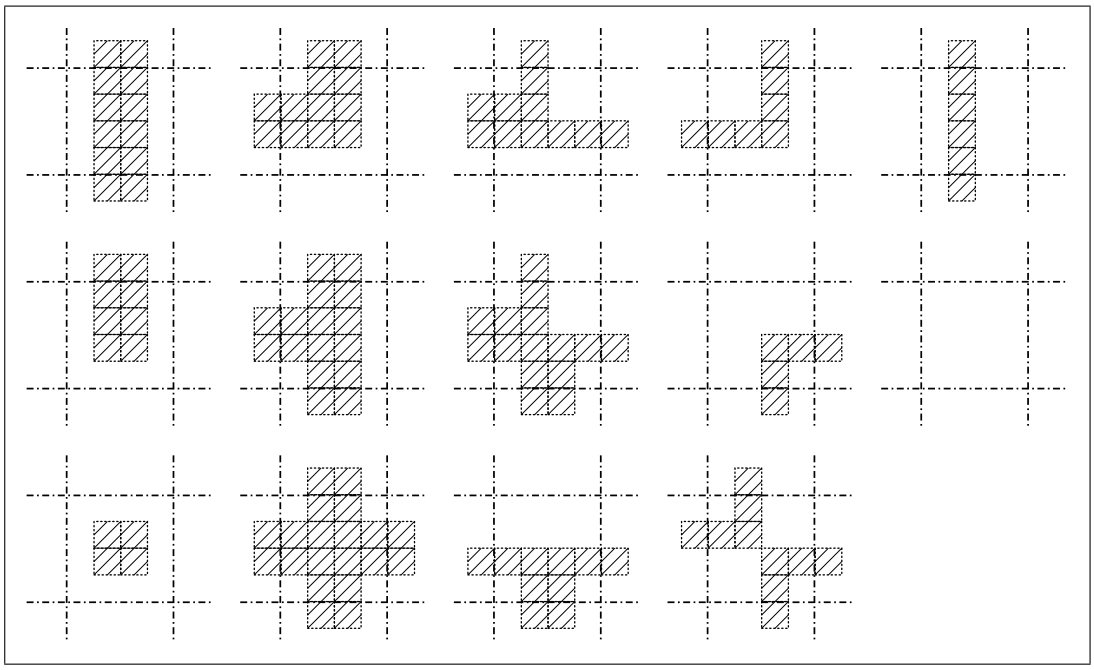
7.3 Résultats donnés par le programme

Notre programme se compile sans message d'erreur ni d'avertissement avec une version récente de `gcc`. Il s'exécute en moins d'une seconde et imprime les résultats suivants :

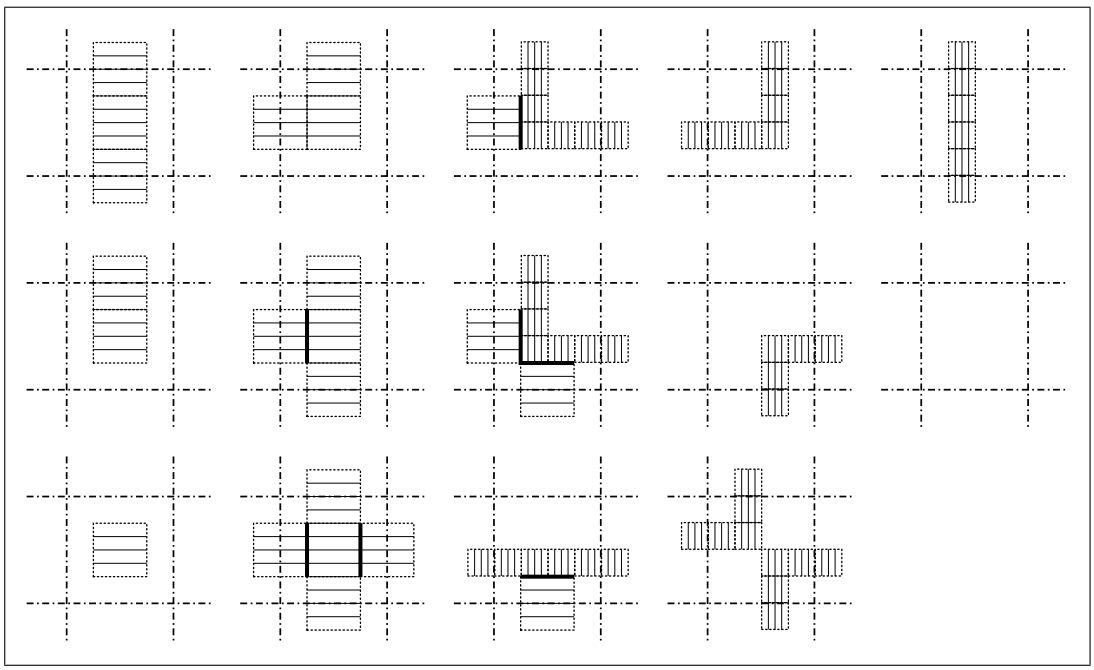
```
Les 2 propriétés testées sont vérifiées.
Il y a 14 grilles dans la liste.

Grille no 0:
------
......
......
......
......
......
......
------

Grille no 1:
------
......
......
..XX..
..XX..
......
......
------

Grille no 2:
------
......
......
XXXX..
XXXX..
......
......
------

Grille no 3:
------
..XX..
..XX..
XXXX..
XXXX..
......
......
------

Grille no 4:
------
...X..
...X..
...X..
XXXX..
......
......
------

Grille no 5:
------
..XX..
..XX..
..XX..
..XX..
..XX..
..XX..
------

Grille no 6:
------
..XX..
..XX..
XXXX..
XXXX..
..XX..
..XX..
------

Grille no 7:
------
...X..
...X..
...X..
XXXX..
..XX..
..XX..
------

Grille no 8:
------
...X..
...X..
...X..
...X..
...X..
...X..
------

Grille no 9:
------
..XX..
..XX..
XXXXXX
XXXXXX
..XX..
..XX..
------

Grille no 10:
------
...X..
...X..
...XXX
XXXXXX
..XX..
..XX..
------

Grille no 11:
------
...X..
...X..
...XXX
...XXX
...X..
...X..
------

Grille no 12:
------
..X...
..X...
XXX...
...XXX
...X..
...X..
------

Grille no 13:
------
......
......
......
...XXX
...X..
...X..
------
```

7.4 Fin de la démonstration du lemme

On a regroupé dans le tableau suivant les quatorze différentes configurations possibles à une isométrie près des cubes de U sur un voisinage de taille 6×6. Les traits en pointillés délimitent un voisinage de taille 4×4 qui constitue les bords du motif de pavage recouvrant S_2 (puisqu'on a vu que $\mathcal{D}^2$ préserve le 4×4-groupement). C'est à dire que quel que soit le complexe original S 4×4-groupé, toute restriction de U à $z + [-1, 5]^2$ pour $z \in (4\mathbb{Z})^2$ est égale — à une isométrie près — à l'un des motifs du tableau, et toute restriction de U à $z + [0, 4]^2$ est égale à l'un des motifs du tableau délimité par les traits en pointillés. La couche d'épaisseur 1 autour du carré en pointillés va être utilisée pour calculer le nombre de voisins des cubes dyadiques à l'intérieur des pointillés.



Il nous reste encore à extraire de U les deux complexes U_1 et U_2 annoncés. Considérons le découpage présenté dans le tableau suivant : les hachures verticales représentent U_1 les hachures verticales U_2. Les traits en gras définissent une partition de U_2 en sillons, ou les endroits où des cubes de U_2 touchent des cubes de U_1.



Si l'on observe les restrictions de U_1 au carré de pavage de taille 4×4 matérialisé par les traits en pointillé, on constate que U_1 est bien sulciforme (c'est à dire que tout cube de U_1 a deux voisins tangents, éventuellement à l'extérieur du carré). En outre U_2 est bien 2×2-groupé (par rapport à une origine placée au centre du carré du motif) et si on observe les partitions de son 2×2-groupement U_2' délimitées par les traits en gras, on constate bien que chacun des cubes des sous-complexes a au plus deux voisins

tangents, donc que U_2' est quasi-sulciforme. De plus, les seuls cubes de U_2' qui touchent des cubes de U_1 sont des extrémités de U_2' (c'est à dire qui ont au plus un voisin tangent dans U_2').

Une écriture formelle des explications qu'on vient de donner serait vraisemblablement fastidieuse et guère plus convaincante, on en restera là et on considèrera que les trois complexes T, U_1 et U_2 qu'on a extraits de S vérifient bien toutes les propriétés annoncées dans le lemme 2.1.13*. *page 75

Références

[A] F. Almgren — *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Memoirs of the American Mathematical Society, numéro 165, 1976.

[AT] L. Ambrosio et P. Tilli — *Topics on Analysis in Metric Spaces*, Oxford University Press, 2004.

[BKOS] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars et O. Schwarzkopf — *Computational Geometry*, Algorithms and Applications, seconde Édition, Springer 2000.

[BY] J.-D. Boissonnat et M. Yvinec — *Géométrie Algorithmique*, Edisciences 1995.

[D1] G. David — *Limits of Almgren quasiminimal sets*, Contemporary Mathematics v. 320, 2003.

[D2] G. David — *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*, Progress in Mathematics 233, Birkhäuser 2005.

[D3] G. David — *Epiperimetry and $C^{1+\alpha}$-regularity for almost-minimal sets in $\mathbb{R}^3$*, preprint, Université de Paris-Sud 2006.

[De] T. De Pauw — *Approximating compact rectifiable surfaces in Hausdorff measure and in Hausdorff distance by locally acyclic surfaces having the same boundary*, Preprint, 2007.

[DH] T. De Pauw et R. Hardt — *Size minimization and approximating problems*, Calculus of Variations and P.D.E, 2002.

[DMS] G. Dal Maso, J.-M. Morel et S. Solimini — *A variational method in image segmentation : Existence and approximation results*, Acta Mathematica 168, no. 1-2, 89–151, 1992.

[DS] G. David et S. Semmes — *Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension*, Memoirs of the A.M.S. Number 687, volume 144, 2000.

[Fa] K.J. Falconer — *Geometry of fractal sets*, Cambridge University Press 1984.

[Fe] H. Federer — *Geometric measure theory*, Springer Verlag 1969.

[Ki] M.D. Kirszbraun — *Über die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen*, Fundamenta Mathematicae 22, 1934.

[KM] M. Krein, D. Milman, *On the extreme points of regularly convex sets* — Studia Mathematica 9, 133-138, 1940.

[KP] S.G. Krantz, H.R. Parks, *The geometry of domains in space* — Birkhäuser 1999.

[Ma] P. MATTILA — *Geometry of sets and measures in Euclidean space*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, Cambridge University Press l995.

[MS] J.-M. MOREL et S. SOLIMINI — *Variational methods in image segmentation*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser 1995.

[OR] J. O'ROURKE — *Computational geometry in C*, seconde Édition, Cambridge University Press 1998.

[R] E.R. REIFENBERG — *Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type*, Bulletin of the A.M.S. 66, 1960.

[T] J. TAYLOR — *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, Annals of Mathematics 103, 489-539, 1976.

[W] H. WHITNEY — *Continuous functions and potential theory*, Arkiv för Matematik 5, 1963.

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse concernent l'étude de l'existence de solutions à des problèmes d'ensemble minimaux sous contrainte topologique stable pour les déformations à support compact dans un domaine ouvert, en particulier dans le cas du problème de Plateau dans $\mathbb{R}^n$ en dimension et codimension quelconques.

Dans la première partie on étudie des raccordements de grilles dyadiques sous contrainte de régularité uniforme. La construction de telles grilles est assez délicate, puisqu'on s'impose de relier deux grilles dyadiques entre elles tout en gardant un contrôle uniforme (ne dépendant que de la dimension n considérée) sur la forme des polyèdres construits de façon à éviter qu'ils ne soient trop plats. On prouve le théorème de fusion qui permet de réaliser la liaison entre deux grilles dyadiques en surface d'orientation quelconque en remplissant tout l'espace les séparant, à condition que la distance les séparant soit suffisamment grande devant la taille des cubes initiaux.

Dans la deuxième partie on étudie des approximations d'ensembles de dimension $d \leq n$ par des unions de polyèdres tout en gardant un contrôle sur l'augmentation de mesure éventuelle causée par l'approximation. On commence par construire des grilles dyadiques disjointes qui suivent un ensemble rectifiable le long de ses plans tangents. Ces grilles sont alors reliées entre elles grâce au théorème de fusion, et permettent de faire l'approximation polyédrale d'un d-ensemble fermé par projections radiales successives sur la frontière des sous-faces de dimension décroissante de n à d des polyèdres de la grille. Puis, les éventuels trous restant sont encore projetés sur la frontière des sous-faces en dimension inférieure, jusqu'à ce que l'approximation obtenue ne soit plus composée que d'une union finie de polyèdres de dimension au plus d. Il est en outre possible d'imposer a priori une borne arbitraire sur l'augmentation de mesure de l'approximation obtenue, en choisissant judicieusement les grilles dyadiques initiales.

Dans la troisième partie on construit une suite minimisante d'ensembles quasiminimaux de dimension d qui converge localement en distance de Hausdorff sur tout compact du domaine considéré vers un ensemble minimal. En faisant une approximation polyédrale minimisante d'une suite minimisante de compétiteurs du problème on obtient une suite de grilles polyédrales finies sur lesquelles il est possible de minimiser parmi les compétiteurs portés par des polyèdres. La suite optimale obtenue est elle aussi minimisante, puisqu'on s'est assuré que l'approximation polyédrale l'est, en outre il est facile d'extraire une sous-suite convergente en distance de Hausdorff et de vérifier que ses termes sont quasiminimaux avec une constante dépendant de la forme des polyèdres utilisés. Les bornes uniformes sur la régularité des polyèdres construits grâce au théorème de fusion permettent alors d'obtenir des constantes de quasiminimalité uniformes (ne dépendant que de d et n). Dans ce cas, la suite polyédrique optimale converge vers un ensemble minimal, c'est notre théorème d'existence. L'existence de rétraction lipschitziennes sur la limite (par exemple dans le cas $d = 2$ et $n = 3$) permet d'affirmer dans certains cas que la limite est encore dans la classe topologique initiale.

La quatrième partie est une annexe consistant en un morceau de preuve informatique utilisé dans la démonstration du théorème de fusion de grilles dyadiques.

Mots-clefs : Ensembles minimaux, Ensembles quasiminimaux, Problème de Plateau, Films de savon, Complexes sympliciaux, Polyèdres euclidiens.