

Modélisation du comportement des matériaux granulaires par des approches discrètes et continues

Jamila Rahmoun

▶ **To cite this version:**

Jamila Rahmoun. Modélisation du comportement des matériaux granulaires par des approches discrètes et continues. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2006. Français. NNT : . tel-00348876

HAL Id: tel-00348876

https://theses.hal.science/tel-00348876

Submitted on 22 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3933

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES

THESE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1

Spécialité : **MÉCANIQUE**

présentée par

Jamila RAHMOUN

Titre de la thèse :

Modélisation du comportement des matériaux granulaires par des approches discrètes et continues

Direction de thèse : O. Millet et J. Fortin

Soutenue le 7 décembre 2006 devant le jury composé de :

B. Cambou	Professeur, École Centrale de Lyon	Rapporteur
E. Clément	Professeur, Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
J. Fortin	Maître de Conférences, UPJV INSSET	Examinateur
D. Kondo	Professeur, Université de Lille I	Examinateur
O. Millet	Professeur, Université de la Rochelle	Examinateur
F. Nicot	Professeur assistant, CEMAGREF Grenoble	Examinateur
G. de Saxcé	Professeur, Université de Lille I	Examinateur

« Marche avec des sandales jusqu'à ce que la sagesse te procure des souliers. »

Al Husayn Ibn Sina (Avicenne)

♡ ***À ma chère mère Chérifa*** ♡

Remerciements

La réalisation de cette thèse a exigé beaucoup d'efforts et de dévotion personnelle tout au long des trois années que j'ai passé au sein de l'équipe des milieux granulaires du Laboratoire de Mécanique de Lille. Cependant, ceci n'aurait pas pu être possible sans l'aide et le soutien de certaines personnes que je tiens à remercier du fond de mon coeur.

Tout d'abord, je ne pourrais pas commencer les remerciements sans parler de la personne qui a cru en moi, mon directeur de thèse, Olivier Millet. Je le remercie pour sa confiance, sa présence et ses critiques constructives. Je tiens aussi à remercier Jérôme fortin, mon co-directeur de thèse, pour sa grande disponibilité, son ouverture d'esprit et sa bonne humeur. Je le remercie ainsi que ses collègues pour leur accueil chaleureux durant mon passage au Laboratoire des Technologies Innovantes.

J'accorde une pensée particulière à Djimédo Kondo, qui a accepté d'assurer la présidence du jury de cette thèse. Je le remercie pour son soutien, ses remarques fructueuses et sa précieuse aide dans l'accomplissement de ce travail, ainsi que pour nos nombreuses discussions. J'exprime également ma gratitude à Géry de Saxcé pour ses conseils avisés qui m'ont aidé à ouvrir pas mal de voix dans le domaine des granulaires.

Je remercie tout particulièrement Bernard Cambou et Eric Clément pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, je leur suis très reconnaissante d'avoir bien voulu en être les rapporteurs. Je tiens également à remercier François Nicot d'avoir accepter de faire partie de mon jury de thèse.

Un grand merci à mes collègues du bureau pour leur patience, leur soutien et leurs qualités humaines. Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire de Mécanique de Lille dont la gentillesse et la bonne humeur ont su rendre ces trois années très agréables. Merci à tout ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ces travaux de recherche.

Je n'oublierais pas de remercier ma famille et mes amis qui m'ont soutenu pendant les moments difficiles et partagé mes joies et tristesses. Et pour finir, une dernière pensée à ma chère mère Chérifa, qui a toujours été pour moi la lumière qui guide mes pas et à qui, comme le veut la formule, je dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction générale **3**

1 Approche analytique de type continue pour les matériaux granulaires ensilés **9**
1.1 Introduction . . . 9
1.2 La théorie de Janssen et ses limitations . . . 10
1.3 L'approche analytique proposée . . . 12
1.3.1 Position du problème . . . 12
1.3.2 Équations d'équilibre interne . . . 14
Dépendance de σ_z en z seulement . . . 15
Critère de Mohr-Coulomb vérifié uniquement à l'intérieur du silo . . . 16
1.3.3 Calcul des contraintes aux parois . . . 17
1.3.4 Intégration de l'équation différentielle . . . 19
1.4 Résolution du problème pour $\phi = \phi_p$ . . . 25
1.4.1 Résolution analytique dans le cas $\phi = \phi_p$ . . . 25
1.4.2 Résolution numérique dans le cas $\phi = \phi_p$ . . . 27
1.5 Validation de l'approche pour des matériaux non cohésifs . . . 29
1.5.1 Influence de l'angle ϕ sur les contraintes . . . 31
1.5.2 Comparaison avec la théorie de Janssen . . . 33
1.6 Etude des matériaux cohésifs . . . 35
1.6.1 Influence de la cohésion sur les contraintes . . . 35
1.6.2 Influence de la cohésion sur le rapport des contraintes aux parois λ_p 37
1.7 Conclusion . . . 39

2 Extension de l'approche continue pour des angles de frottement différents **41**
2.1 Introduction . . . 41
2.2 Etude du cas $\phi > \phi_p$ . . . 41
2.2.1 Résolution analytique . . . 42
2.2.2 Résolution numérique . . . 44
2.2.3 Etude des paramètres physiques . . . 45
Influence des angles de frottement . . . 45
Influence de la cohésion sur les contraintes . . . 47
2.3 Etude du cas $\phi < \phi_p$ . . . 51
2.3.1 Résolution analytique . . . 51
Etude du cas $\Delta > 0$ . . . 52
Résolution numérique dans le cas $\Delta > 0$ . . . 55
Etude du cas $\Delta < 0$ . . . 56
2.3.2 Influence des paramètres physiques dans le cas $\Delta > 0$ . . . 57

Influence de la cohésion sur les contraintes . . . 58
Rapport des contraintes aux parois . . . 59
2.4 Conclusion . . . 60

3 Simulations numériques discrètes des milieux granulaires 61
3.1 Introduction . . . 61
3.2 Méthode des Eléments Discrets . . . 62
3.2.1 Détection des interactions de paires . . . 65
3.2.2 Solveur bipotentiel de contact . . . 67
3.2.3 Intégration du mouvement : dynamique non-régulière . . . 71
3.3 Pilotage des paramètres numériques . . . 73
3.3.1 Influence des coefficients de restitution . . . 74
3.3.2 Influence du frottement . . . 76
3.3.3 Influence de la cohésion . . . 78
3.4 Contraintes moyennes pour un milieu granulaire . . . 80
3.5 Calcul de la contrainte moyenne par une approche Eléments Discrets . . . 82
3.5.1 Méthodes de préparation . . . 83
3.5.2 Comparaison avec l'approche continue . . . 84
3.6 Mise en évidence de l'anisotropie des milieux granulaires . . . 86
3.7 Conclusion . . . 87

4 Modélisation de l'anisotropie par une approche micromécanique 3D 89
4.1 Introduction . . . 89
4.2 Description de la texture des milieux granulaires . . . 90
4.3 Hypothèse de Voigt . . . 93
4.3.1 Tenseur de texture d'ordre deux . . . 97
4.3.2 Cas du tenseur de texture d'ordre quatre . . . 98
4.3.3 Distribution isotrope . . . 99
4.4 Hypothèse de Reuss . . . 99
4.4.1 Expression à l'aide du tenseur de texture d'ordre deux . . . 101
4.4.2 Tenseur de texture d'ordre quatre . . . 102
4.4.3 Distribution isotrope . . . 102
4.5 Hypothèse cinématique générale . . . 103
4.5.1 Tenseur de texture d'ordre deux . . . 103
4.5.2 Schéma d'homogénéisation . . . 108
4.5.3 Tenseur de texture d'ordre quatre . . . 110
4.5.4 Distribution isotrope . . . 111
4.6 Analyse des résultats . . . 112
4.7 Conclusion . . . 113

Conclusion et perspectives 115

A Détermination de la cohésion limite H_Δ 117

B Calcul tensoriel 119
B.1 Notations tensorielles . . . 119
B.2 Paramètres du matériau . . . 120
B.3 Calcul des opérateurs . . . 120

B.4 Approximation à l'aide d'un tenseur d'ordre deux 121
B.4.1 Expression de la probabilité de contact 121
B.4.2 Calcul des intégrales 121
B.5 Approximation à l'aide d'un tenseur d'ordre quatre 123
B.5.1 Expression de la probabilité de contact 123
B.5.2 Calcul des intégrales 124

C Formalisme **127**

Bibliographie **129**

Introduction générale

Les milieux granulaires présentent des propriétés étranges et fascinantes que les chercheurs n'ont cessé d'explorer. Se trouvent regroupés sous cette dénomination une quantité considérable de matériaux qui pourraient sembler, au premier abord, très différents les uns des autres. Alors que la plupart des substances habituellement étudiées se classent commodément en états solide, liquide ou gazeux, les systèmes granulaires semblent échapper à toute classification, et sont même souvent considérés comme un état de la matière à part entière [52]. Ainsi, un milieu granulaire désignera un matériau composé de grains indépendants, de tailles et de formes diverses, pouvant avoir des propriétés de surface très différentes. Ces matériaux sont omniprésents dans notre vie quotidienne et présentent de très nombreuses applications, par exemple, dans les industries du bâtiment (sable, graviers, béton,..), de l'agro-alimentaire (céréales, café, farine,..) ainsi que dans les secteurs pharmaceutiques (comprimés) ou cosmétiques (poudres) [92][32][51]. Pourtant, nous ne disposons pas actuellement d'une théorie unifiée qui puisse rendre compte de toute la phénoménologie observée dans les milieux granulaires. Cette difficulté est liée à la manière dont ces systèmes réagissent aux sollicitations externes. Sous certaines conditions, les comportements observés peuvent s'apparenter à ceux d'un gaz, d'un solide visqueux ou d'un liquide [52].

Différentes approches sont donc a priori possibles pour décrire et tenter de modéliser les milieux granulaires. On peut favoriser une approche de type mécanique des milieux continus (état solide), mécanique des fluides (état liquide) ou encore théorie cinétique (état gazeux). Chacune de ces approches se révèle pertinente et bien adaptée à une situation donnée mais pas nécessairement à une autre, ce qui nous empêche de décrire de façon univoque le comportement d'un milieu granulaire [45][32][46]. En plus, cette ambiguïté de l'état granulaire confère à ces matériaux des propriétés particulières qui sont à l'origine de bon nombre de difficultés dans certains processus industriels (stockage, compaction, séparation, mixage, transport...). En effet, l'un des problèmes majeurs dans l'écoulement des matériaux granulaires ou de leur stockage dans des silos est la formation de voûtes ou de chaînes de forces dues aux contacts entre les grains [73]. Ces forces

bloquent l'écoulement et créent des pressions qui peuvent être importantes sur les parois. Le transport des matériaux granulaires est lui aussi sujet à des effets de blocage d'écoulement [118], d'intermittence [94] ou de ségrégation[1] [61]. Ainsi, pour décrire et modéliser le comportement des matériaux granulaires dans les silos de stockage, il est nécessaire de comprendre la façon dont se répartissent les contraintes à l'intérieur de l'empilement granulaire ainsi qu'au niveau des parois du silo. Ceci permet de choisir le plus efficacement possible la forme et le matériau de construction des silos.

Dans la littérature, on trouve essentiellement deux méthodes qui permettent de calculer les contraintes dans un matériau granulaire ensilé. La première et historiquement la plus ancienne est une approche de type milieux continus, qui consiste à identifier le matériau granulaire à un milieu continu. La plus connue de ces approches est la théorie de Janssen [53], basée sur le principe fondamental de la statique. Les autres approches possibles pour le calcul des contraintes, sont les approches numériques.

Les premières observations du comportement des systèmes granulaires ont été faites par Roberts en 1884 [101]. En effet, Roberts a remarqué que la pression mesurée à la base d'un silo rempli de grains n'augmente pas linéairement avec la hauteur de grains, mais tend à saturer pour des hauteurs de grains suffisamment importantes. Ce comportement est opposé à celui d'une colonne d'eau pour laquelle la pression est hydrostatique. Pour cette raison, un sablier s'écoule à débit constant alors que le débit dans une clepsydre[2] ralentit à mesure qu'elle se vide. En 1885, Janssen [53] propose alors un modèle de type mécanique des milieux continus pour tenter d'expliquer ce phénomène.

L'idée du modèle de Janssen [53] est que le milieu granulaire dans le silo a tendance à rediriger les contraintes verticales vers les parois. Ainsi, lorsque l'on remplit un silo avec des grains, la masse effectivement pesée sur le fond de celui-ci ne représente qu'une partie de la masse totale versée. L'autre partie est supporté ou écrantée par les parois latérales du silo [32]. Bien qu'extrêmement simple, le modèle de Janssen comme celui de Koenen [64] permet de décrire la façon dont se répartissent les contraintes à l'intérieur du silo. Cependant, le modèle de Janssen possède certaines limitations et ne permet pas de rendre compte de tous les comportements observés dans les empilements granulaires. En réalité, s'il permet de décrire le phénomène d'écrantage du poids mesuré à la base d'un silo, il se révèle incapable de décrire le cas du silo avec surpoids, c'est à dire, lorsque la surface supérieure de la colonne de grains n'est plus libre mais soumise à une contrainte verticale [93]. En outre, les mesures expérimentales des contraintes ont montré un écart significatif

[1] On parle aussi de l'effet "noix du Brésil" [32].

[2] Horloge à eau.

entre la théorie et l'expérience [10].

D'autre part, la théorie de Janssen comme la plupart des autres théories existantes en mécanique des sols, nécessite de savoir, a priori, si le matériau est dans un état actif ou passif[3]. Cependant, cette distinction actif/passif est seulement basée sur des hypothèses heuristiques et n'a aucun fondement mathématique. De plus, avec cette distinction a priori indispensable pour calculer les contraintes, le matériau granulaire est nécessairement dans le même état (actif ou passif) dans tout le silo. Des états mixtes de contraintes, où le matériau granulaire serait par exemple dans un état passif près du sommet du silo et dans un état actif près du fond, ou le contraire, ne sont pas prédictibles avec la théorie de Janssen. Pour toutes ces raisons, la théorie de Janssen sous-estime les contraintes aux parois dans l'état actif comme dans l'état passif [75].

D'autres modèles ont été alors proposés afin d'améliorer la théorie de Janssen. Une première estimation plus précise des forces exercées par le milieu granulaire aux parois a été proposé par Walker [121] en tenant compte de la variation de la contrainte verticale en fonction du diamètre du silo [85]. Cette théorie a été corrigée plus tard par Walters [122][123] et étendu au calcul des contraintes au cours de la phase de vidange du silo.
Enfin, Caquot [18] et par la suite Jenike [55][56][57] ont établi une théorie plus générale qui consiste à considérer deux états distincts de contrainte sur la paroi, l'un au remplissage et l'autre à la vidange. Néanmoins, malgré, sa simplicité et ses limitations, c'est la théorie de Janssen qui est considérée à ce jour, par les ingénieurs de construction, comme la référence pour la conception des silos [110][117].

La seconde approche permettant de calculer les contraintes dans un matériau granulaire ensilé est basée sur les méthodes numériques. Classiquement, pour simuler numériquement le comportement d'un système déformable soumis à certaines sollicitations, on utilise la Méthode des Eléments Finis, qui s'appuie sur la Mécanique des Milieux Continus (figure (1)). Elle permet de prévoir de façon relativement satisfaisante les phénomènes se produisant à l'intérieur d'un système déformable, supposé continu, soumis à certaines sollicitations. Même si les systèmes considérés ne sont pas continus à l'échelle microscopique (échelle des atomes et des molécules), l'hypothèse de continuité à l'échelle macroscopique du VER (Volume Elémentaire Représentatif) permet de simplifier considérablement le problème.

[3]Généralement on adopte la convention suivante : le matériau granulaire est considéré dans un état passif pendant la phase de vidange du silo, et dans un état actif pendant la phase de remplissage [67][116][131].

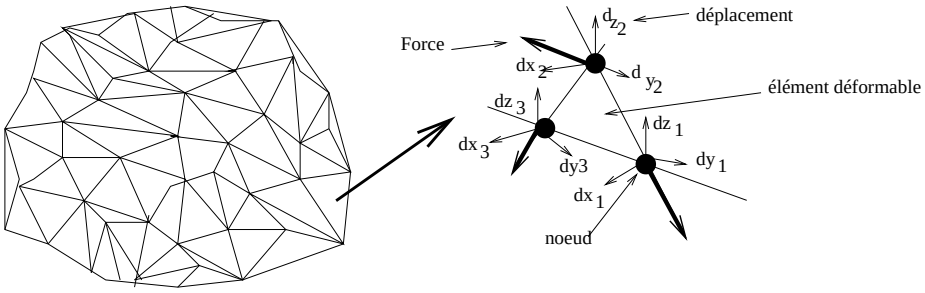


FIG. 1 – Modélisation par la Méthode des Éléments Finis

Ainsi, dans une grande majorité des cas, la méthode des Eléments Finis s'avère satisfaisante. Cependant l'hypothèse de continuité n'est plus acceptable à l'échelle macroscopique pour des systèmes particulaires. En effet, ces systèmes sont formés de particules discernables à l'oeil nu et parfois même de dimensions importantes (sables, graviers, enrochements). La granulométrie, la forme et l'arrangement des grains, l'indice des vides ou encore la présence de fluide intersticiel sont autant de paramètres susceptibles d'influencer le comportement mécanique des milieux granulaires. Ce comportement met en jeu certaines propriétés macroscopiques caractéristiques (à l'échelle de l'échantillon), comme la dilatance[4] [9][112], la localisation de la déformation[5], ou encore la ségrégation et l'effet de voûte[6] [1][32][46] dans des applications dynamiques. Ces propriétés particulières sont difficilement explicables par la Mécanique des Milieux Continus. Des essais de laboratoire sur des matériaux analogiques de type Schneebeli[7] ont mis en évidence l'existence de contacts privilégiés entre certaines particules par l'intermédiaire desquelles sont transmis les efforts [30][31][90][91][119]. C'est pourquoi, pour prendre en compte la transmission hétérogène des efforts de contact, les modèles rhéologiques utilisés dans les méthodes par Eléments Finis ne suffisent pas. Il faut alors développer d'autres modèles et d'autres méthodes numériques qui puissent tenir compte des phénomènes qui ont lieu au niveau microscopique, à l'échelle des particules.

Du point de vue numérique, s'est développée la Méthode des Eléments Discrets qui considère le milieu granulaire comme discontinu (figure (2)). Son fondement théorique repose sur la dynamique des systèmes multicorps, qui permet la formulation et la résolution des équations du mouvement des particules supposées rigides. L'avantage de ces méthodes

[4]Un milieu granulaire, pour se déformer, subit une variation de volume.

[5]Un milieu granulaire se cisaille le long de surfaces de rupture.

[6]On rappelle que le mouvement d'un milieu granulaire confiné ou ensilé peut se bloquer.

[7]Schneebeli [109] a montré la possibilité de réaliser un milieu granulaire, homogène, bidimensionnel et obéissant à la loi de Coulomb, par empilement de cylindres horizontaux, de différents diamètres et de même longueur.

est de prendre en compte les paramètres micromécaniques à l'échelle des grains.

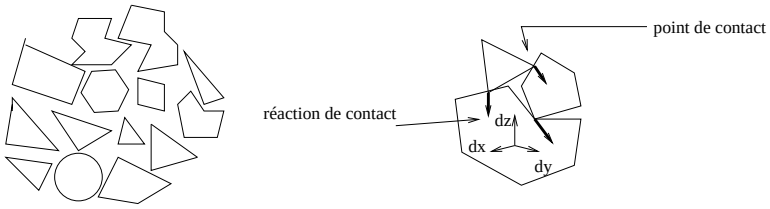


FIG. 2 – Modélisation par une Méthode des Eléments Discrets

D'autre part, les méthodes d'homogénéisation permettent de construire des modèles macroscopiques (continus) représentatifs du comportement global des milieux granulaires, mais prenant en compte les paramètres microscopiques à l'échelle des grains. On parle aussi d'approche micromécanique ou d'approche par changement d'échelle. Ces méthodes d'homogénéisation moyennent les informations microscopiques telles que la cinématique des grains et les efforts intergranulaires [12][13][14]. Il est donc nécessaire de développer des outils qui donnent accès à ces informations et de réduire le nombre de paramètres afin de mieux les contrôler. Dans les modèles les plus courants (modèle de Schneebeli [109]), les grains ont une forme circulaire ou sphérique et leurs contacts sont régis par les lois de Coulomb. Les conditions aux limites, ainsi que la manière de préparer l'échantillon du matériau modèle (anisotropie, compacité) [66] sont autant de paramètres qu'il convient de maîtriser pour permettre une approche micromécanique qui s'effectue généralement en deux étapes. La première consiste à récolter les informations microscopiques par des essais de laboratoire ou des méthodes numériques, et la seconde à mettre en oeuvre un schéma d'homogénéisation pour passer du comportement microscopique au comportement macroscopique.

Dans les deux premiers chapitres de cette thèse, nous proposons de développer une approche analytique de type milieu continu pour le calcul des contraintes dans un milieu granulaire ensilé qui améliore la théorie de Janssen et les approches existantes du même type. Cette approche est basée sur les équations d'équilibre bidimensionnelles des milieux continus couplées à un critère de Mohr-Coulomb et à une condition de glissement aux parois. Nous développons une résolution analytique basée sur un modèle linéaire pour la contrainte de cisaillement qui permet de calculer les contraintes dans tout le silo, pour des angles de frottement internes et aux parois égaux ou différents. Le cas des angles de frottements différents est traité séparément dans le deuxième chapitre. Il est important de noter que contrairement aux approches classiques, celle développée ici prend en compte la cohésion du matériau, la dépendance des contraintes suivant l'axe du silo. Elle permet de

calculer précisément l'état des contraintes dans tout le silo, quelques soient les paramètres physiques intervenant. De plus, à la différence des approches du même type, l'état interne du milieu granulaire (actif ou passif) n'est plus postulé a priori, mais est déduit après résolution du problème, en fonction des données (angle du frottement, cohésion...).

D'autre part, il nous a paru essentiel, pour bien appréhender qualitativement le comportement spécifique des matériaux granulaires, d'utiliser et de manipuler un logiciel d'Eléments Discrets (MULTICOR en l'occurrence). Ce sera l'objet de notre troisième chapitre. En premier lieu, nous ferons une présentation de la Méthode des Eléments Discrets (DEM) et mettrons en évidence les avantages de la modélisation utilisée : NSDC (Non Smooth Dynamic Contact) [54], détection des contacts pour la discrétisation en temps et solveur bipotentiel pour la résolution des contacts [43]. En second lieu, nous montrerons, à travers des simulations numériques, l'influence des paramètres physiques (frottement, cohésion...) mais aussi des paramètres numériques (sélection des contacts, coefficient de restitution...) sur les résultats obtenus. Nous comparerons ensuite l'approche continue développée dans les deux premiers chapitres avec des résultats issus de simulations numériques discrètes. Enfin, nous mettrons en évidence, par des simulations numériques discrètes, l'anisotropie de structure du réseau des contacts dans les milieux granulaires.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous proposons de mettre en oeuvre une approche micromécanique (par changement d'échelle) pour les milieux granulaires prenant en compte l'anisotropie par l'intermédiaire d'un tenseur de texture d'ordre quatre. L'objectif est de rendre compte des effets de l'anisotropie sur les propriétés élastiques macroscopiques. Dans un premier temps, la description de la texture du milieu granulaire, à partir d'un tenseur de texture d'ordre deux et d'ordre quatre, est incorporée dans un schéma d'homogénéisation basé sur les hypothèses de localisation simples de Voigt et de Reuss. Dans un second temps, Nous établissons une hypothèse de localisation cinématique qui généralise celle obtenue dans [14] au cas d'une distribution de contact anisotrope. Nous en déduisons ensuite un tenseur des raideurs élastique homogénéisé dont l'expression, obtenue à partir du tenseur de texture d'ordre quatre, permet de décrire une anisotropie élastique générale. Enfin, nous comparons dans le cas particulier isotrope, les propriétés élastiques macroscopiques déduites de l'hypothèse cinématique proposée, d'une part avec celles fournies par une hypothèse de localisation simple de Voigt ou de Reuss, et d'autre part à des résultats obtenus à partir de simulations numériques discrètes.

Chapitre 1

Approche analytique de type continue pour les matériaux granulaires ensilés

1.1 Introduction

Un des problèmes importants dans la conception des silos est la prédiction des contraintes s'exerçant sur les parois induites par le matériau granulaire stocké. Cette distribution de contraintes dépend des paramètres du matériau granulaire et de l'écoulement lors du processus de remplissage et de vidange. La modélisation du milieu granulaire ensilé comme un milieu continu permet d'obtenir des modèles relativement simples donnant accès aux contraintes aux parois.

Nous proposons, dans ce chapitre de développer une approche essentiellement analytique, de type milieux continus, pour le calcul des contraintes dans un matériau granulaire ensilé. Cette approche a pour objectif d'améliorer la théorie de Janssen et les autres théories existantes du même type [77]. Elle tient compte de la cohésion du matériau, et permet de calculer précisément les contraintes en tout point du silo, et ceci quels que soient les paramètres physiques intervenant (angles de frottement, cohésion, taille du silo...). Elle permet également de s'affranchir des hypothèses contradictoires de la théorie de Janssen.

Dans ce chapitre, on commence par rappeler les hypothèses de la théorie de Janssen ainsi que ses limitations. On présente ensuite l'approche analytique proposée, basée sur les équations d'équilibre bidimensionnelles des milieux continus couplées à un critère de Mohr-Coulomb et une condition de glissement aux parois. On développe enfin une résolution analytique basée sur un modèle linéaire en cisaillement qui permet de calculer précisément les contraintes dans tout le silo, pour des angles de frottement interne et aux parois égaux ou différents.

Dans le cas d'une cohésion nulle, les résultats obtenus à partir de cette approche sont comparés à ceux existant dans la littérature, ce qui permet de valider l'approche proposée. Les résultats sont ensuite comparés à la théorie de Janssen. Enfin, une étude générale de l'influence des paramètres physiques (cohésion, angles de frottement...) sur les contraintes est effectuée.

1.2 La théorie de Janssen et ses limitations

La simplicité du modèle de Janssen [53] vient du fait que le milieu granulaire est assimilé à un milieu continu dans un état quasi-statique, c'est à dire que les mouvements à l'intérieur du silo sont suffisamment petits pour que le déplacement global du matériau puisse être considéré comme nul. Les directions principales sont dans un plan vertical perpendiculaire aux deux parois du silo (voir figure (1.1)). La théorie de Janssen suppose aussi l'existence d'un rapport constant λ (appelé coefficient de Rankine) entre la composante horizontale du tenseur des contraintes et sa composante verticale. Ceci implique que $\lambda = \dfrac{\sigma_{xx}}{\sigma_{zz}}$ est constant dans tout le silo. D'autre part, la matière ensilée est supposée être dans un état de rupture décrit par le critère de Mohr-Coulomb[1] (voir figure (1.1)). Les coefficients de frottement interne et aux paroix sont supposés égaux et sont notés μ tels que :

$$\tau_{xz} = \mu\sigma_{xx} \text{ avec } \mu = \tan\phi,$$

où ϕ est l'angle de frottement interne et où σ_{xx} et σ_{zz} désignent les contraintes principales. Enfin, la théorie de Janssen est limitée aux matériaux non cohésifs, isotropes et homogènes.

Ainsi, Janssen s'est intéressé à la détermination du tenseur des contraintes supposé ne dépendre que de z. L'origine de l'axe $\vec{z}$ correspond à la surface libre du matériau granulaire dans le silo. Alors, sur une tranche de matière ensilée d'épaisseur dz, s'exercent les actions suivantes dans la direction z :

– action sur la surface supérieure : S.σ_{zz},
– action sur la surface inférieure : -S.(σ_{zz}+dσ_{zz}),
– action sur la surface périphérique : $-\tau_{xz}$.P.dz,
– action du poids propre : $\gamma.S.dz$.

où $\gamma = \rho g$ représente le poids volumique du milieu, S la surface du tronçon, P son périmètre et τ_{xz} la contrainte de cisaillement. Ainsi, l'application du principe fondamental

[1] L'hypothèse de Mohr-Coulomb définit la position du plan où a lieu l'écoulement, c'est à dire le plan de rupture, à l'aide de l'angle de frottement interne. Dans ce cas l'état de contrainte plan est entièrement décrit par les contraintes principales σ_{XX} et σ_{ZZ}.

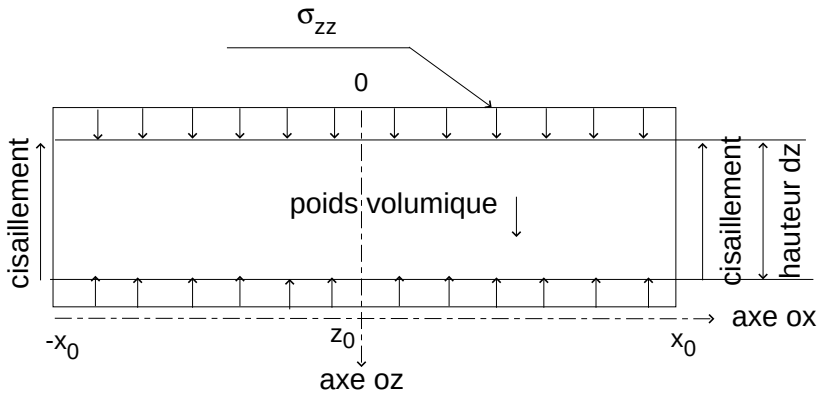


FIG. 1.1 – Représentation d'une coupe du matériau ensilé

de la statique suivant l'axe $\vec{z}$, implique que :

$$S\sigma_{zz} - S(\sigma_{zz} + d\sigma_{zz}) - \tau_{xz}Pdz + \gamma Sdz = 0$$

ce qui conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} + \frac{1}{R_h}\tau_{xz} = \gamma \tag{1.1}$$

où $R_h = \dfrac{S}{P}$ désigne le rayon hydraulique du silo et qui est égal à la surface du tronçon divisée par son périmètre. Cette équation est équivalente à :

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} + \frac{\mu\lambda}{R_h}\sigma_{zz} = \gamma \tag{1.2}$$

D'autre part, Janssen considère que la surface supérieure du matériau ensilé est sans contrainte ($\sigma_{zz} = 0$ en $z = 0$). Nous obtenons finalement l'expression des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} &= \dfrac{\gamma R_h}{\mu\lambda}\left(1 - \exp\big(-\dfrac{\mu\lambda}{R_h}z\big)\right) \\ \sigma_{xx} &= \lambda\sigma_{zz} \\ \tau_{xz} &= \mu\lambda\sigma_{zz} \end{cases}$$

où λ représente le coefficient de Rankine [2]. Celui-ci est différent selon l'état actif ou passif du milieu.

– Si $\sigma_{xx} > \sigma_{zz}$ (état passif selon la terminologie de Janssen), λ vaut :

$$\lambda = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}$$

[2] Afin de déterminer λ, les contraintes σ_{xx} et σ_{zz} sont supposées principales.

– Si $\sigma_{xx} < \sigma_{zz}$ (état actif selon la terminologie de Janssen), on a :

$$\lambda = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}$$

Cependant, la théorie de Janssen repose sur certaines hypothèses contradictoires et contient quelques limitations. En effet, la théorie de Janssen suppose que σ_{xx} et σ_{zz} sont les contraintes principales reliées par un coefficient constant (dit de Rankine) dans tout le silo. Or, elle introduit en même temps une contrainte de cisaillement τ_{xz} non nulle.

D'autre part, la théorie de Janssen ne prend pas en compte la cohésion du matériau qui est sa résistance aux contraintes tangentielles lorsque la contrainte normale qui le sollicite est nulle.
Enfin, Janssen n'a établi aucune distinction entre l'angle de frottement interne ϕ et l'angle de frottement aux parois ϕ_p, et n'a tenu compte ni de l'équation d'équilibre suivant $\vec{x}$, ni de la dépendance des contraintes en x.

Ces limitations de la théorie de Janssen expliquent les écarts significatifs existant entre les contraintes mesurées expérimentalement dans les milieux granulaires, et celles prédites par la théorie de Janssen.

1.3 L'approche analytique proposée

Nous proposons de développer une nouvelle approche essentiellement analytique, permettant de calculer avec précision les contraintes à l'intérieur du matériau granulaire ensilé et celles s'exerçant sur les parois du silo. Cette approche est basée sur les équations bidimensionnelles de la mécanique des milieux continus couplées à un critère de Mohr-Coulomb et à une condition de glissement aux parois. Elle constitue une généralisation de la théorie de Janssen.

1.3.1 Position du problème

Notre approche repose sur les hypothèses suivantes :

• Les coefficients de frottement interne ($\mu = \tan\phi$ avec $\phi\ \epsilon]0; \frac{\pi}{2}[$) et aux parois ($\mu_p = \tan\phi_p$ avec $\phi_p\ \epsilon]0; \frac{\pi}{2}[$), sont quelconques (égaux ou différents).

• On considère que le critère de Mohr Coulomb est atteint uniquement au niveau des

parois latérales du silo (figure (1.2)), c'est à dire que l'on a :

$$s^0 = (p^0 + H)\sin\phi \tag{1.3}$$

où s^0 et p^0 désignent respectivement les valeurs du rayon s et du centre p du cercle de Mohr au niveau des parois. On rappelle que les relations du cercle de Mohr s'écrivent :

$$\begin{cases} s = \dfrac{|\sigma_I - \sigma_{\text{II}}|}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} \\ p = \dfrac{\sigma_I + \sigma_{\text{II}}}{2} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \end{cases}$$

où σ_I et σ_{II} désignent les contraintes dans les directions principales $\vec{e_I}$ et $\vec{e_{\text{II}}}$ respectivement. On considère par défaut que $\sigma_I > \sigma_{\text{II}}$.

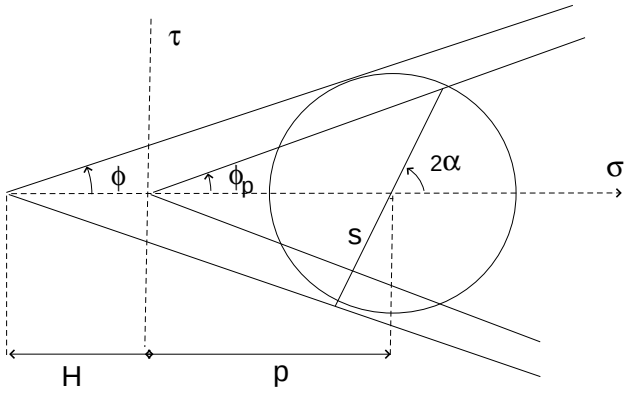


FIG. 1.2 – Cercle de Mohr

Soit $\alpha = (\vec{x}, \vec{e_I})$ l'angle entre l'axe $\vec{x}$ et la direction principale de contraintes $\vec{e_I}$. Alors, les contraintes s'écrivent sous la forme suivante suivant les relations classiques du cercle de Mohr :

$$\begin{cases} \sigma_x = p + s\cos 2\alpha \\ \sigma_z = p - s\cos 2\alpha \\ \tau_{xz} = s\sin 2\alpha \end{cases} \tag{1.4}$$

Deux cas sont possibles :

– Si $\alpha < \dfrac{\pi}{4}$, alors on adopte la notation classique $\sigma_I = \sigma_X$ et $\sigma_{\text{II}} = \sigma_Z$, où la direction principale $\vec{X}$ est la plus proche de $\vec{x}$. Dans ce cas on a $\sigma_X > \sigma_Z$ et $\sigma_x > \sigma_z$ suivant la relation (1.4), où σ_X et σ_Z sont les contraintes principales dans les directions $\vec{X}$ et $\vec{Z}$ respectivement. Ceci correspond à l'état passif de la théorie de Janssen.

– Si $\alpha > \frac{\pi}{4}$, alors on adopte la notation $\sigma_I = \sigma_Z$ et $\sigma_{II} = \sigma_X$. Dans ce cas on a $\sigma_X < \sigma_Z$ et $\sigma_x < \sigma_z$ suivant la relation (1.4). Ceci correspond à l'état actif de la théorie de Janssen.

On a défini deux états de contraintes possibles, appelés en mécanique des sols état actif et état passif. Classiquement, on affecte à l'état actif la phase de remplissage du silo. Dans ce cas la contrainte verticale dans la matière ensilée est plus importante que la composante horizontale puisque seul le poids propre intervient (c'est à dire que l'on a $\sigma_X < \sigma_Z$). A l'inverse, lors de la vidange, on suppose habituellement que la contrainte verticale diminue (on conçoit qu'elle est relativement faible dans la zone en mouvement par rapport à la contrainte horizontale). C'est ce qu'on appelle l'état passif où on a $\sigma_X > \sigma_Z$.

• Au niveau de la paroi, le milieu granulaire est dans un état de glissement.
Cette condition implique la relation suivante en $x = \pm x_0$:

$$\tau^0_{xz} = \mu_p \sigma^0_x \tag{1.5}$$

où $\mu_p = \tan \phi_p$. Cette relation constitue une hypothèse moins forte que celle de Janssen, celui-ci considérant un état de glissement dans tout le silo.

• Enfin, on limite notre analyse à un modèle linéaire en cisaillement suivant la terminologie de [98] :

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{x}{x_0} \tau^0_{xz}(z) \tag{1.6}$$

où τ^0_{xz} désigne la valeur de τ_{xz} aux parois. Cette hypothèse supplémentaire est nécessaire pour réduire le système d'équations aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles. Elle constitue une des hypothèses les plus simples compatible avec la symétrie du problème.

1.3.2 Équations d'équilibre interne

Le problème à résoudre est essentiellement basé sur la vérification de l'équilibre interne du matériau, apparenté ici à un milieu continu. Il s'écrit :

$$\overrightarrow{div}\bar{\bar{\sigma}} = \rho \vec{g}$$

où $\bar{\bar{\sigma}}$ désigne le tenseur des contraintes du milieu continu équivalent, ρ sa masse volumique, $\rho\vec{g}$ la force volumique associée au poids.

On considère de façon classique un modèle analogique de Schneebeli [109]. Compte tenu alors de la symétrie du problème, les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho g \tag{1.8}$$

où les contrainte $\sigma_x(x,z)$, $\sigma_z(x,z)$ et $\tau_{xz}(x,z)$ ne dépendent que de x et de z. En utilisant la relation (1.6), l'équation (1.7) s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{x}{x_0}\frac{\partial \tau^0_{xz}}{\partial z}$$

On en déduit, après intégration, l'expression de la contrainte horizontale :

$$\sigma_x = \sigma^0_x(z) + \frac{1}{2}(1 - \frac{x^2}{x_0^2})x_0\frac{\partial \tau^0_{xz}}{\partial z} \tag{1.9}$$

D'autre part, en utilisant à nouveau (1.6), l'équation (1.8) devient :

$$\frac{1}{x_0}\tau^0_{xz}(z) + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho g \tag{1.10}$$

Cette équation correspond à l'équation d'équilibre de Janssen (1.1) suivant z.

Dépendance de σ_z en z seulement

A priori, la contrainte σ_z dépend de x et de z. Démontrons qu'elle dépend uniquement de z. En effet, l'intégration par rapport à z de l'équation (1.10) donne :

$$\sigma_z(x,z) = \sigma^0_z(z) + \hat{\sigma}_z(x)$$

où $\sigma^0_z(z)$ désigne la valeur de σ_z à la paroi et où la constante d'intégration a été choisie de telle sorte que $\hat{\sigma}_z(x_0) = 0$. En utilisant alors la condition au limite $\sigma_z(x, z = 0) = 0 \ \forall \ x$ (condition de surface libre de charge), il vient :

$$\sigma^0_z(0) + \hat{\sigma}_z(x) = 0 \ \forall \ x$$

Or, en $x = x_0$, on a supposé que $\hat{\sigma}_z(x_0) = 0$. Ceci implique que $\sigma^0_z(0) = 0$ et donc que $\hat{\sigma}_z(x) = 0$ quel que soit x. Ainsi la contrainte σ_z ne dépend que de la variable z. On a :

$$\sigma_z(z) = \sigma^0_z(z) \tag{1.11}$$

Ainsi, $\sigma^0_z(z)$ représente la contrainte σ_z à la paroi et vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\sigma^0_z}{dz}(z) = \rho g - \frac{1}{x_0}\tau^0_{xz}(z) \tag{1.12}$$

On est donc ramené à un problème à trois inconnues σ_x^0, σ_z^0 et τ_{xz}^0, valeurs des contraintes au niveau de la paroi (en $x = x_0$), pour trois équations (1.5), (1.9) et (1.11).

Critère de Mohr-Coulomb vérifié uniquement à l'intérieur du silo

Dans ce qui suit, on va voir qu'avec nos hypothèses, l'état limite de Mohr-Coulomb ne peut être atteint dans tout le silo. On rappelle que le critère de Mohr Coulomb s'écrit :

$$s = (p + H)\sin\phi$$

Comme

$$s^2 = \frac{1}{4}[(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2]$$

et

$$(p + H)^2 \sin^2\phi = \frac{1}{4}[\sigma_x + \sigma_z + 2H]^2 \sin^2\phi$$

nous obtenons

$$\underbrace{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}_{A} = \underbrace{[\sigma_x + \sigma_z + 2H]^2 \sin^2\phi}_{B}. \tag{1.13}$$

On effectue le changement de variable suivant : $X = 1 - \dfrac{x^2}{x_0^2}$. En utilisant l'expression (1.9) de σ_x et (1.11) de σ_z, le terme A de l'équation (1.13) s'écrit :

$$[(\sigma_x^0 - \sigma_z^0) + \frac{1}{2}Xx_0\frac{\partial\tau_{xz}^0}{\partial z}]^2 + 4(1 - X)(\tau_{xz}^0)^2 \tag{1.14}$$

De même, le terme B de l'équation (1.13) s'écrit :

$$[(\sigma_x^0 + \sigma_z^0) + \frac{1}{2}Xx_0\frac{\partial\tau_{xz}^0}{\partial z} + 2H]^2 \sin^2\phi \tag{1.15}$$

Le critère de Mohr Coulomb (1.13) est équivalent à :

$$A(z) + B(z)X + C(z)X^2 = 0,\ \forall X \in [0, 1] \tag{1.16}$$

où les coefficients sont donnée par :

$$\begin{cases} A(z) = (\sigma_x^0 - \sigma_z^0)^2 + 4(\tau_{xz}^0)^2 - \sin^2\phi[(\sigma_x^0 + \sigma_z^0)^2 + 4H(\sigma_x^0 + \sigma_z^0) + 4H^2] \\ B(z) = x_0\dfrac{\partial\tau_{xz}^0}{\partial z}\sigma_x^0[1 - \sin^2\phi] - x_0\dfrac{\partial\tau_{xz}^0}{\partial z}\sigma_z^0[1 + \sin^2\phi] - 2H\sin^2\phi x_0\dfrac{\partial\tau_{xz}^0}{\partial z} - 4(\tau_{xz}^0)^2 \\ C(z) = \dfrac{1}{4}[x_0\dfrac{\partial\tau_{xz}^0}{\partial z}]^2(1 - \sin^2\phi) \end{cases}$$

La condition (1.16) devant être vérifier pour tout $X \in [0,1]$, on obtient $A(z) = B(z) = C(z) = 0$. Tout d'abord, $A(z) = 0$ permet de retrouver la relation de glissement sur les parois du silo, soit :

$$s^0 = (p^0 + H)\sin\phi$$

D'autre part, si $C(z) = 0$, on aura $\dfrac{\partial \tau^0_{xz}}{\partial z} = 0$ et par conséquent la contrainte $\tau^0_{xz}(z)$ sera constante. Enfin, $B(z) = 0$ implique que $\tau^0_{xz}(z) = 0$, ce qui conduit à $\tau_{xz} = 0$ dans tout le silo. L'intégration de l'équation d'équilibre (1.10) conduit alors à :

$$\sigma^0_z(z) = \rho g z + constante$$

On retrouve (au signe près sur z dont l'orientation a été prise vers le bas) l'équation de statique des fluides dans tout le silo. Physiquement, ce résultat signifie qu'un matériau en état de glissement en tout point a un comportement qui s'identifie à celui d'un fluide. Évidemment ici, ce cas de figure n'est pas envisagé. On ne peut donc imposer au critère de Mohr-Coulomb d'être vérifié dans tout le silo. On a supposé ici qu'il n'était vérifié qu'au niveau des parois du silo.

1.3.3 Calcul des contraintes aux parois

On considère ici de façon générale des coefficients de frottement interne et aux parois différents ($\mu \neq \mu_p$).

On rappelle la condition de glissement : $\tau^0_{xz} = \mu_p \sigma^0_x$ et les relations du cercle de Mohr aux parois :

$$\begin{cases} \sigma^0_x = p^0 + s^0\cos 2\alpha^0 \\ \sigma^0_z = p^0 - s^0\cos 2\alpha^0 \\ \tau^0_{xz} = s^0 \sin 2\alpha^0 \end{cases} \tag{1.17}$$

avec $\alpha^0 = \alpha^0(z)$.

En utilisant les relations (1.17), la condition (1.5) de glissement à la paroi s'écrit :

$$s^0 \sin 2\alpha^0 = \mu_p(p^0 + s^0\cos 2\alpha^0)$$

Alors, le critère de Mohr-Coulomb $s^0 = (p^0 + H)\sin\phi$ conduit à :

$$(\sin\phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin\phi\cos 2\alpha^0))p^0 = H\sin\phi(\mu_p \cos 2\alpha^0 - \sin 2\alpha^0) \tag{1.18}$$

Ainsi, dans le cas où H est non nul[3], on obtient l'expressions de p^0 :

$$p^0 = \frac{H \sin\phi(\mu_p \cos 2\alpha^0 - \sin 2\alpha^0)}{\sin\phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0)} \tag{1.19}$$

et celle de s^0 :

$$s^0 = -\frac{\mu_p H \sin\phi}{\sin\phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0)} \tag{1.20}$$

En remplaçant p^0 et s^0 par leurs expressions dans les relations (1.17), les expressions des contraintes à la paroi deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_x^0 = -\dfrac{H \sin\phi \sin 2\alpha^0}{\sin\phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0)} \\ \sigma_z^0 = \dfrac{H \sin\phi(2\mu_p \cos 2\alpha^0 - \sin 2\alpha^0)}{\sin\phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0)} \\ \tau_{xz}^0 = -\dfrac{\mu_p H \sin\phi \sin 2\alpha^0}{\sin\phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0)} \end{cases} \tag{1.21}$$

L'équation d'équilibre (1.12) devient alors, en tenant compte des résultats précédents, l'équation différentielle suivante :

$$(2\mu_p \sin 2\alpha^0 + \cos 2\alpha^0 - \sin\phi)\frac{d\alpha^0}{dz} = \frac{D}{2R_h}(D\frac{\xi}{2\mu_p \cos\phi} + \frac{\sin 2\alpha^0}{2}) \tag{1.22}$$

où $D = \sin\phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0)$ et où :

$$\xi = \frac{2\gamma R_h}{\mu H} \tag{1.23}$$

Ainsi, nous voyons apparaître le nombre adimensionnel ξ caractérisant l'effet de la gravité $(\gamma = \rho g)$ et de la cohésion. Ce nombre sans dimension dépend de la densité volumique des grains, de la cohésion du matériau, de l'angle de frottement interne du matériau ainsi que du rayon hydraulique du silo R_h[4].

D'autre part, le rapport des contraintes aux parois $\lambda_p = \dfrac{\sigma_x^0}{\sigma_z^0}$ s'écrit de façon générale, en utilisant les expressions (1.21) des contraintes aux parois :

$$\lambda_p = \frac{\sin 2\alpha^0}{(2\mu_p \cos 2\alpha^0 - \sin 2\alpha^0)}$$

[3] Le cas particulier d'une cohésion nulle $(H = 0)$ est traité un peu plus loin

[4] Le rayon hydraulique R_h est le rapport de l'aire de la section droite d'une cellule à son périmètre :

- $R_h = \dfrac{r}{2}$ pour une cellule circulaire de rayon r.
- $R_h = \dfrac{ab}{a+b}$ pour une cellule rectangulaire de longueur $2a$ et de largeur $2b$.

Il faut noter qu'en général, pour les matériaux cohésifs, λ_p n'est pas constant et dépend de z. Cependant, pour les matériaux non cohésifs, il se réduit à une forme plus simple. En effet, dans le cas particulier où $H = 0$, la relation (1.18) de Mohr-Coulomb nous donne :

$$\mu_p = \frac{\sin\phi \sin 2\alpha^0}{1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0}$$

ou $p^0 = 0$ qui est absurde.
En remplaçant cette expression de μ_p dans celle du paramètre λ_p, on obtient :

$$\lambda_p = \frac{1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0}{1 - \sin\phi \cos 2\alpha^0} \tag{1.24}$$

C'est le résultat classique obtenu dans la littérature pour les matériaux non cohésifs (voir [98] par exemple).

1.3.4 Intégration de l'équation différentielle

On va développer, dans ce qui suit, une résolution générale de l'équation différentielle (1.22), valable quels que soient les paramètres physiques intervenant (angles de frottement internes et aux parois, cohésion...). L'équation différentielle non linéaire d'inconnue $\alpha^0(z)$ que nous avons à résoudre est la suivante :

$$\frac{2\mu_p \sin 2\alpha^0 + \cos 2\alpha^0 - \sin\phi}{D(D\dfrac{\xi}{2\mu_p \cos\phi} + \dfrac{\sin 2\alpha^0}{2})} d\alpha^0 = \frac{dz}{2R_h} \tag{1.25}$$

Effectuons le changement de variable suivant : $u = \tan\alpha^0$. On a alors les relations suivantes :

$$du = (1 + u^2) d\alpha^0$$

$$\cos 2\alpha^0 = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

$$\sin 2\alpha^0 = \frac{2u}{1 + u^2}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} 2\mu_p \sin 2\alpha^0 + \cos 2\alpha^0 - \sin\phi &= 2\tan\phi_p \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} - \sin\phi \\ &= \frac{4u\tan\phi_p - u^2(1+\sin\phi) + (1-\sin\phi)}{1+u^2} \end{aligned}$$

Si on définit :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2\mu_p + \sqrt{4\mu_p^2 + \cos^2\phi}}{1+\sin\phi} \\ u_2 = \dfrac{2\mu_p - \sqrt{4\mu_p^2 + \cos^2\phi}}{1+\sin\phi} \end{cases} \tag{1.26}$$

on aura alors :

$$2\mu_p \sin 2\alpha^0 + \cos 2\alpha^0 - \sin\phi = -\frac{(u-u_1)(u-u_2)(1+\sin\phi)}{1+u^2}$$

De même, on peut développer le terme D sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} D &= \sin\phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1+\sin\phi\cos 2\alpha^0) \\ &= \frac{2u\sin\phi - \mu_p(1+\sin\phi) - \mu_p u^2(1-\sin\phi)}{1+u^2} \\ &= \frac{-\mu_p(1-\sin\phi)}{1+u^2}[-2u\frac{\tan\phi}{\mu_p\cos\phi}(1+\sin\phi) + \frac{(1+\sin\phi)}{(1-\sin\phi)} + u^2] \\ &= \frac{-\mu_p(1-\sin\phi)}{1+u^2}[(u - \frac{\tan\phi(1+\sin\phi)}{\mu_p\cos\phi})^2 - \frac{(1+\sin\phi)^2}{\cos^2\phi}[\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p} - 1]] \end{aligned} \tag{1.27}$$

Le coefficient D figurant au dénominateur de l'équation différentielle, nous sommes amenés à étudier son signe afin de déterminer les éventuelles singularités. Deux cas sont possibles avec ϕ et $\phi_p \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

– si $\tan^2\phi \geq \tan^2\phi_p \Rightarrow D$ est du type $[(u-a)^2 - b^2]$. L'équation $D = 0$ admet deux racines réelles.

– si $\tan^2\phi < \tan^2\phi_p \Rightarrow D$ est du type $[(u-a)^2 + b^2]$ et reste toujours positif.

Dans le cas où $\phi \geq \phi_p$, on a :

$$D = \frac{-\mu_p(1-\sin\phi)}{1+u^2}[(u - \frac{\tan\phi(1+\sin\phi)}{\mu_p\cos\phi}) - \beta\frac{(1+\sin\phi)}{\cos\phi}]$$

$$[(u - \frac{\tan\phi(1+\sin\phi)}{\mu_p\cos\phi}) + \beta\frac{(1+\sin\phi)}{\cos\phi}]$$

où l'on a posé $\beta = \sqrt{\left(\dfrac{\tan\phi}{\tan\phi_p}\right)^2 - 1}$.

Si on considère :

$$\begin{cases} u_3 = \dfrac{\tan\phi(1+\sin\phi)}{\mu_p\cos\phi} + \beta\dfrac{1+\sin\phi}{\cos\phi} \\ u_4 = \dfrac{\tan\phi(1+\sin\phi)}{\mu_p\cos\phi} - \beta\dfrac{1+\sin\phi}{\cos\phi} \end{cases} \tag{1.28}$$

alors il vient :

$$D = \frac{-\mu_p(1-\sin\phi)}{1+u^2}(u-u_3)(u-u_4)$$

L'équation différentielle (1.25) peut s'écrire sous la forme :

$$k\frac{(u-u_1)(u-u_2)}{(u-u_3)(u-u_4)(\dfrac{u}{2} - \dfrac{\xi(1-\sin\phi)}{4\cos\phi}(u-u_3)(u-u_4))}du = \frac{dz}{R_h} \tag{1.29}$$

avec $k = \dfrac{1+\sin\phi}{\mu_p(1-\sin\phi)}$.

D'autre part, le terme $E = \dfrac{u}{2} - \dfrac{\xi(1-\sin\phi)}{4\cos\phi}(u-u_3)(u-u_4)$ peut se mettre sous la forme :

$$E = \frac{u}{2} - \left(u^2 - 2\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}u\frac{1+\sin\phi}{\cos\phi} + \frac{(1+\sin\phi)^2}{\cos^2\phi}\right)\xi\frac{\cos\phi}{4(1+\sin\phi)} \tag{1.30}$$

Maintenant, si on pose $u_0 = \dfrac{\cos\phi}{1-\sin\phi}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\xi}{4u_0}[u^2 - 2u_0\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}u + u_0^2 - \frac{2uu_0}{\xi}] \\ &= -\frac{\xi}{4u_0}\left[[u-u_0(\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+\frac{1}{\xi})]^2 - u_0^2(\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+\frac{1}{\xi})^2 + u_0^2\right] \\ &= -\frac{\xi}{4u_0}\left[[u-u_0(\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+\frac{1}{\xi})]^2 - u_0^2[\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p} - 1 + \frac{2}{\xi}\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p} + \frac{1}{\xi^2}]\right] \\ &= -\frac{\xi}{4u_0}\left[[u-\frac{u_0}{\xi}(\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+1)]^2 - \frac{u_0^2}{\xi^2}[\xi^2\beta^2 + 2\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+1]\right] \\ &= -\frac{\xi}{4u_0}\left[\left[u-\frac{u_0}{\xi}[1+\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p} + \sqrt{\xi^2\beta^2 + 2\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+1}]\right]\left[u - \frac{u_0}{\xi}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.[1+\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p} - \sqrt{\xi^2\beta^2 + 2\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+1}]\right]\right] \end{aligned}$$

Le calcul précédent nous a permis de mettre en évidence deux autres singularités (que l'on va appeler u_5 et u_6) contenues dans le terme D et plus précisément dans E. En effet, on a :

$$E = -\frac{\xi}{4u_0}(u-u_5)(u-u_6)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} u_5 = u_0\left[\dfrac{1}{\xi} + \dfrac{\tan\phi}{\tan\phi_p} - \sqrt{\beta^2 + \dfrac{2\tan\phi}{\xi\tan\phi_p} + \dfrac{1}{\xi^2}}\right] \\ u_6 = u_0\left[\dfrac{1}{\xi} + \dfrac{\tan\phi}{\tan\phi_p} + \sqrt{\beta^2 + \dfrac{2\tan\phi}{\xi\tan\phi_p} + \dfrac{1}{\xi^2}}\right] \\ u_0 = \dfrac{\cos\phi}{1-\sin\phi} \end{cases} \tag{1.31}$$

Ainsi, l'équation différentielle (1.29) devient avec le changement de variable $u = \tan\alpha^0$:

$$\tilde{k}\frac{(u-u_1)(u-u_2)}{(u-u_3)(u-u_4)(u-u_5)(u-u_6)}du = dz \tag{1.32}$$

avec $\tilde{k} = -\dfrac{2u_0^3 H\tan\phi}{\gamma\mu_p}$ et où les expressions des singularités u_3, u_4, u_5, u_6 sont données par (1.26), (1.28) et (1.31).

La décomposition de l'équation différentielle (1.32) en éléments simples nous donne :

$$\begin{aligned} \tilde{k}[&\frac{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}{(u-u_3)(u_3-u_4)(u_3-u_5)(u_3-u_6)} + \frac{(u_4-u_1)(u_4-u_2)}{(u-u_4)(u_4-u_3)(u_4-u_5)(u_4-u_6)} \\ &+\frac{(u_5-u_1)(u_5-u_2)}{(u-u_5)(u_5-u_3)(u_5-u_4)(u_5-u_6)} + \frac{(u_6-u_1)(u_6-u_2)}{(u-u_6)(u_6-u_3)(u_6-u_4)(u_6-u_5)}]du = dz \end{aligned} \tag{1.33}$$

L'intégration de (1.33) conduit alors à une solution de la forme :

$$q(u) = z + \tilde{A} \tag{1.34}$$

où $q(u)$ est défini par :

$$q(u) = \tilde{k}[\frac{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}{(u_3-u_4)(u_3-u_5)(u_3-u_6)}\ln|u-u_3| + \frac{(u_4-u_1)(u_4-u_2)}{(u_4-u_3)(u_4-u_5)(u_4-u_6)}\ln|u-u_4|$$
$$+\frac{(u_5-u_1)(u_5-u_2)}{(u_5-u_3)(u_5-u_4)(u_5-u_6)}\ln|u-u_5| + \frac{(u_6-u_1)(u_6-u_2)}{(u_6-u_3)(u_6-s_4)(u_6-u_5)}\ln|u-u_6|] \tag{1.35}$$

Maintenant on va tenir compte des conditions limites du problème. En effet, on a supposé qu'en $z=0$, la surface est libre de contraintes. Cette condition s'exprime donc par : $\overline{\overline{\sigma}}.\overrightarrow{n} = 0$ où $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{e_3}$ compte tenu de l'orientation choisie.

Ainsi, deux conditions doivent être satisfaites simultanément :

1. $\sigma_z(z=0) = 0$
2. $\tau_{xz}(x, z=0) = 0 \; \forall \; x$

On rappelle que l'on a respectivement :

$$\begin{cases} \tau^0_{xz} = -\dfrac{\mu_p H \sin\phi \sin 2\alpha^0}{\sin\phi\sin 2\alpha^0 - \mu_p(1+\sin\phi\cos 2\alpha^0)} \\ \\ \sigma^0_z = \dfrac{H\sin\phi(2\mu_p\cos 2\alpha^0 - \sin 2\alpha^0)}{\sin\phi\sin 2\alpha^0 - \mu_p(1+\sin\phi\cos 2\alpha^0)} \end{cases} \tag{1.36}$$

La première condition aux limites permet de déterminer la valeur de la constante $\tilde{A}$ qui intervient dans l'équation (1.34). En effet, comme $\sigma_z(z) = \sigma^0_z(z)$, il vient :

$$2\mu_p\cos 2\alpha^0 = \sin 2\alpha^0, \; soit \; \tan 2\alpha^0 = 2\tan\phi_p$$

On obtient ainsi la valeur particulière de α^0 en $z=0$ que l'on va noter α^0_l définie par :

$$\alpha^0_l = \frac{1}{2}\arctan(2\tan\phi_p)$$

On en déduit la valeur de u_l, à savoir :

$$u_l = \tan(\frac{1}{2}\arctan(2\tan\phi_p)) \tag{1.37}$$

Ainsi, d'après (1.34), pour $z=0$ on aura :

$$q(u_l) = \tilde{A}$$

D'autre part, comme on a restreint notre analyse à un modèle linéaire en cisaillement où la contrainte de cisaillement aux parois varie linéairement en fonction du diamètre de silo suivant (1.6), la deuxième condition limite implique que $\tau^0_{xz}(z=0)=0$. Compte tenu de (1.36), on obtient :

$$\alpha^0(0)=0[\frac{\pi}{2}]$$

Ainsi, chacune des conditions aux limites fournit une valeur différente de α^0 incompatibles sauf dans le cas particulier où $\phi_p = 0$. Ceci s'explique de la façon suivante : au niveau des parois, on a des phénomènes de couches limites où toutes les conditions aux limites ne peuvent pas être vérifiées. Il convient donc d'en relaxer certaines de façon à ce que le problème soit bien posé, compte tenu du modèle linéaire en cisaillement choisi. Pour cela il convient de supposer que les conditions aux limites sont vérifiées seulement en moyenne sur le diamètre du silo, à savoir :

$$\int_{-x_0}^{x_0}\sigma_z dx=0 \quad \text{et} \quad \int_{-x_0}^{x_0}\tau_{xz}dx=0$$

Ainsi, la seconde condition aux limites est automatiquement vérifiée.

Étant donnée cette incompatibilité, le fait d'avoir vérifié la condition $\sigma^0_z(z=0)=0$ implique que $\tau^0_{xz}(z=0)\neq 0$; celle-ci entraînant de facto que $\sigma^0_x(z=0)\neq 0$ de par la relation de glissement. En fait, on remarque que pour des cohésions faibles voire modérées aux parois (jusqu'à quelques centaines de Pa), on trouve numériquement en résolvant les équations différentielles que $\sigma^0_x \simeq 0$ et $\tau^0_{xz}\simeq 0$. A partir de cohésions plus importantes ($H\simeq 1000N/m^2$), ce phénomène de couche limite apparaît de façon plus importante.

Ainsi de façon plus générale, l'équation différentielle non linéaire (1.25) se ramène au problème de point fixe suivant :
Pour une profondeur z donnée, trouver la valeur de u vérifiant :

$$r(u)-z=0$$

où $r(u)=q(u)-q(u_l)$ est donnée d'après (1.35) par :

$$r(u)=\tilde{k}[\frac{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}{(u_3-u_4)(u_3-u_5)(u_3-u_6)}\ln|\frac{u-u_3}{u-u_l}|+\frac{(u_4-u_1)(u_4-u_2)}{(u_4-u_3)(u_4-u_5)(u_4-u_6)}\ln|\frac{u-u_4}{u-u_l}|$$
$$+\frac{(u_5-u_1)(u_5-u_2)}{(u_5-u_3)(u_5-u_4)(u_5-u_6)}\ln|\frac{u-u_5}{u-u_l}|+\frac{(u_6-u_1)(u_6-u_2)}{(u_6-u_3)(u_6-u_4)(u_6-u_5)}\ln|\frac{u-u_6}{u-u_l}|]$$

Les coefficients u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 et u_l sont donnés par (1.26), (1.28), (1.31) et (1.37).

Notons que la résolution du problème a été effectuée ici dans le cas $\phi \geq \phi_p$. le cas $\phi < \phi_p$ sera traité en détail dans le chapitre suivant.

1.4 Résolution du problème pour $\phi = \phi_p$

Nous proposons maintenant de nous placer dans le cas particulier où les angles de frottement ϕ et ϕ_p sont égaux, ce qui permet de simplifier l'expression analytique de la fonction $r(u)$. La résolution analytique puis numérique permettant de calculer les contraintes dans tout le silo est alors effectuée, d'abord pour une cohésion nulle, ce qui permet de valider l'approche développée en comparant les résultats obtenus à ceux existant dans la littérature. Toujours dans le cas particulier $\phi = \phi_p$, les résultats obtenus sont ensuite comparés à ceux obtenus par la théorie de Janssen. Une étude des matériaux cohésifs est par la suite développée.

1.4.1 Résolution analytique dans le cas $\phi = \phi_p$

Dans ce cas particulier où $\phi = \phi_p$, on aura $\mu = \mu_p$ et $\beta = 0$. Compte tenu de (1.28) et (1.31), on a $u_3 = u_4 = u_0$. De même, on aura :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2\tan\phi + \sqrt{4\tan^2\phi + \cos^2\phi}}{1+\sin\phi} = \frac{2\sin\phi + \sqrt{4 - 4\cos^2\phi + \cos^4\phi}}{\cos\phi(1+\sin\phi)} \\ &= \frac{2\sin\phi + 2 - \cos^2\phi}{\cos\phi(1+\sin\phi)} = \frac{1+\sin\phi}{\cos\phi} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $u_1 = u_0$.
L'expression (1.35) de $q(u)$ devient alors :

$$q(u) = \tilde{k}\left(\frac{u_0 - u_2}{(u_0-u_5)(u_0-u_6)}\ln|u-u_0| + \frac{u_5-u_2}{(u_5-u_0)(u_5-u_6)}\ln|u-u_5| + \frac{u_6-u_1}{(u_6-u_0)(u_6-u_5)}\ln|u-u_6|\right)$$

où les coefficients intervenant s'expriment de façon simplifiée par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1+\sin\phi}{\cos\phi} \\ \tilde{k} = -\dfrac{2u_0^3 H}{\gamma} \\ u_2 = -\dfrac{1}{u_0^3} \\ u_5 = u_0\left[\dfrac{1}{\xi} + 1 - \sqrt{\dfrac{2}{\xi} + \dfrac{1}{\xi^2}}\right] \\ u_6 = u_0\left[\dfrac{1}{\xi} + 1 + \sqrt{\dfrac{2}{\xi} + \dfrac{1}{\xi^2}}\right] \end{cases} \tag{1.38}$$

Pour des raisons de commodité de calcul, on notera par la suite :

$$A = \frac{u_0 - u_2}{(u_0-u_5)(u_0-u_6)}, \quad B = \frac{u_5-u_2}{(u_5-u_0)(u_5-u_6)}, \quad C = \frac{u_6-u_1}{(u_6-u_0)(u_6-u_5)}$$

et l'expression de $q(u)$ s'écrit alors simplement :

$$q(u) = \tilde{k}(A \ln|u - u_0| + B \ln|u - u_5| + C \ln|u - u_6|)$$

Le nouveau problème de point fixe à résoudre est le suivant :
Pour z donné, trouver la valeur de u tel que :

$$r(u) = q(u) - q(u_l) = z \tag{1.39}$$

où $q(u)$ est donnée ci-dessus.

La résolution de (1.39) nécessite d'étudier les variations de $r(u)$ afin de déterminer ses limites aux singularités u_0, u_5 et u_6 données par (1.38). Nous devons tout d'abord classer les singularités, c'est à dire déterminer leur signe, ainsi que leur position l'une par rapport à l'autre. Cela nous permettra de trouver le signe des termes A, B et C intervenant dans la solution et enfin de connaître les limites de la fonction $q(u)$ aux points singuliers.

Comme u_0 et ξ sont positifs avec $u_0 > 1$, les expressions de (1.38) montrent que $u_6 > 0$ et $u_5 < u_6$. D'autre part, on remarque que $u_5 u_6 = u_0^2$ ce qui implique que la singularité u_5 est elle aussi positive. Ainsi, on aura :

$$u_5 < u_0 < u_6$$

On va maintenant déterminer les limites de la fonction $r(u)$ aux points singuliers. L'expression de $u_2 = -\dfrac{1}{u_0^3} < 0$ conduit à : $A < 0$, $B > 0$ et $C > 0$.

Sachant que $\tilde{k} < 0$, nous déterminons aisément les limites de la fonction $r(u)$ aux points singuliers u_5, u_0 et u_6 :

$$\lim_{u \to u_5} r(u) = +\infty \quad , \quad \lim_{u \to u_0} r(u) = -\infty \quad , \quad \lim_{u \to u_6} r(u) = +\infty.$$

La figure (1.3) représente les variations de la fonction $r(u)$ pour les valeurs numériques particulières suivantes : $\phi = 17^\circ$, $H = 1N/m^2$, $\rho = 980kg/m^3$, $R_h = 0.125m$. Cependant l'allure générale de la courbe est rigoureusement la même (au sens des variations), quelques soient les valeurs numériques choisies.

Ainsi, dans le cas $\phi = \phi_p$ quelles que soient les valeurs des paramètres physiques, la fonction $r(u)$ est monotone :

$$\begin{cases} \text{croissante sur }]-\infty; u_5[\\ \text{décroissante sur }]u_5; u_0[\\ \text{croissante sur }]u_0; u_6[\\ \text{décroissante sur }]u_6; +\infty[\end{cases}$$

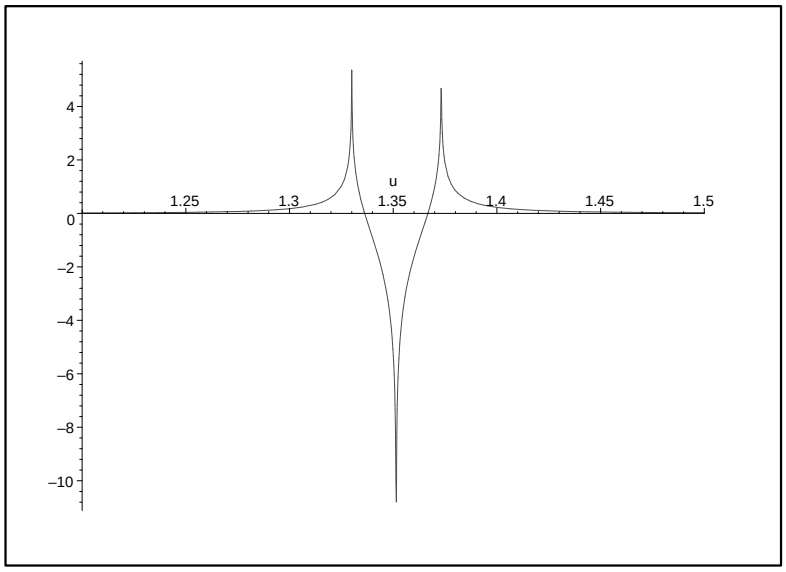


FIG. 1.3 – Variations de la fonction $r(u)$ avec les points singuliers $u_5 < u_0 < u_6$

1.4.2 Résolution numérique dans le cas $\phi = \phi_p$

Compte tenu des variations et des discontinuités de la fonction $r(u)$ donnée par (1.39), la résolution de l'équation $r(u) = z$, pour z donné, admet plusieurs solutions, suivant l'intervalle de résolution choisi. Compte tenu de la définition de $r(u)$, la résolution de (1.39) est effectuée numériquement. La difficulté essentielle réside dans le choix de l'intervalle de convergence (ou de résolution). Ce choix est plus ou moins complexe suivant les cas envisagés. La fonction $r(u)$ étant parfaitement monotone et régulière sur l'intervalle de résolution, une simple méthode de dichotomie suffit pour trouver la racine de l'équation $r(u) = z$. C'est cette méthode qui est utilisée.

Revenons maintenant sur le choix de l'intervalle de résolution afin d'être assuré de la convergence de la méthode utilisée. Cet intervalle de résolution doit satisfaire les conditions suivantes :

1. La fonction $r(u) = q(u) - q(u_l)$ doit être positive quel que soit u appartenant à l'intervalle de résolution.

2. Quelle que soit la valeur de $z \in [0, \infty[$, l'équation $r(u) = z$ doit avoir une solution dans l'intervalle de résolution. Ceci implique nécessairement que :

   • u_l qui correspond à la solution pour $z = 0$ appartient nécessairement à l'intervalle de résolution et en constitue une borne.

• l'autre borne de l'intervalle de résolution correspond à une singularité u_i de la fonction $r(u)$ tel que $\lim_{u\to u_i} r(u) = +\infty$. Ceci assure d'avoir une solution pour $z \to \infty$.

3. La fonction $r(u)$ ne doit pas avoir de discontinuités dans l'intervalle de résolution.

Remarque 1 *: Le choix de l'intervalle de convergence (ou de résolution) I_c permet de déterminer l'intervalle de variation I_α de l'angle α^0, angle d'orientation entre l'axe $\overrightarrow{x}$ et la direction principale de contraintes $\vec{e_I}$. Nous spécifierons pour chaque cas étudié cet intervalle I_α.* □

Compte tenu de l'existence de plusieurs singularités de la fonction $r(u)$, le point délicat est de déterminer l'intervalle de résolution de l'équation (1.39) à z fixé. On vient de voir que l'une des bornes de cet intervalle est nécessairement u_l (correspondant à $z = 0$), et l'autre borne correspond à une singularité où la fonction tend vers $+\infty$ avec $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le cas $\phi = \phi_p$ on a $u_l = \tan(\frac{1}{2}\arctan(2\tan\phi))$, ce qui implique que :

$$0 < u_l < 1 < u_0$$

D'autre part, nous avons vu que la fonction $r(u)$ tendait vers $-\infty$ lorsque u tendait vers u_0. Ainsi, la singularité u_0 ne peut constituer la seconde borne de l'intervalle de convergence. En revanche, nous avons $0 < u_5 < u_0$ avec :

$$\lim_{u\to u_5} q(u) = +\infty$$

Étant donné que u_6 est à rejeter d'après la condition 3, u_5 est la seconde borne de l'intervalle de résolution. Il reste à déterminer la position de cette singularité par rapport à u_l. On a :

$$u_5 = \frac{u_0}{\xi}[1 + \xi - \sqrt{2 + \xi}]$$

Le développement limité de u_5 au voisinage de 0 s'écrit :

$$u_5 = u_0(\xi + 0(\xi^3))$$

ce qui implique que $\lim_{\xi\to 0} u_5 = 0$. D'autre part, on voit facilement que :

$$\lim_{\xi\to+\infty} u_5 = u_0$$

A u_l fixé, la singularité u_5 peut donc se trouver de part et d'autre de ce point, suivant la valeur de $\xi = \frac{2\gamma R_h}{\mu H}$. Les paramètres physiques ρ, R_h et $\mu = \tan\phi$ étant fixés les calculs

précédents montrent que pour un milieu non cohésif, voire très peu cohésif ($\xi \to +\infty$), il faudra choisir $[u_l, u_5]$ comme intervalle de résolution. Au contraire, pour un milieu très cohésif (H grand voire $H \to +\infty$), il faudra choisir $[u_5, u_l]$ comme intervalle de résolution. L'intervalle de variation de l'angle α^0 sera $I_\alpha = [\arctan u_l, \arctan u_5]$, respectivement $I_\alpha = [\arctan u_5, \arctan u_l]$, selon que la cohésion H soit petite ou grande.

1.5 Validation de l'approche pour des matériaux non cohésifs

On propose de valider l'approche analytique développée ici pour de très faibles cohésions (quasiment nulles), en comparant les résultats obtenus avec ceux existant dans la littérature pour les matériaux non cohésifs.

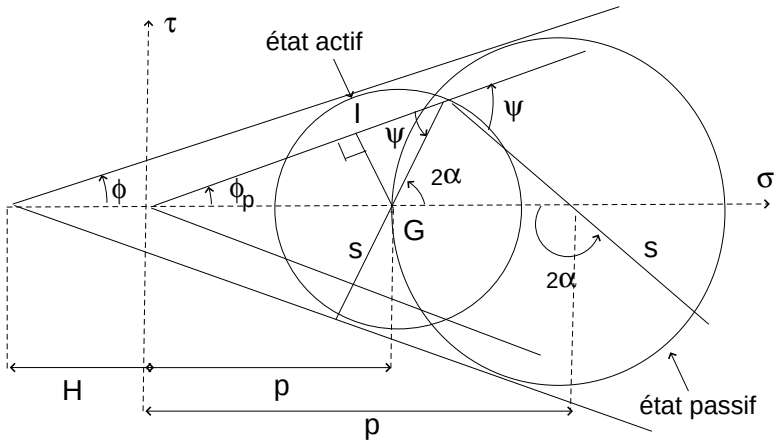


FIG. 1.4 – Cercles de Mohr représentant l'état limite des contraintes

Dans le cas des matériaux non cohésifs, le rapport des contraintes aux parois $\lambda_p = \dfrac{\sigma_x^0}{\sigma_z^0}$ peut être calculé analytiquement à partir de la figure (1.4). En effet, l'expression générale de l'angle α^0 est donnée manière classique par [98] :

$$2\alpha^0 = -(\varepsilon - 1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon\psi + \phi_p \tag{1.40}$$

où ψ est l'angle entre le vecteur contrainte à la paroi et le rayon du cercle de Mohr, et où $\varepsilon = 1$ pour l'état passif et $\varepsilon = -1$ pour l'état actif. Dans les triangles rectangles (voir la figure (1.4)), on a alors :

$$IG = p^0 \sin\phi_p = s^0 \sin\psi$$

Si on utilise le critère de Mohr-Coulomb $s^0 = (p^0 + H)\sin\phi$, on aura :

$$\sin\psi = \frac{p^0 \sin\phi_p}{(p^0 + H)\sin\phi} \tag{1.41}$$

La relation (1.41) se réduit à la formule simple suivante pour des matériaux non cohésifs $(H = 0)$:

$$\sin\psi = \frac{\sin\phi_p}{\sin\phi}$$

qui est équivalente à :

$$\psi = \arcsin(\frac{\sin\phi_p}{\sin\phi})$$

Dans le cas où $\phi = \phi_p$, on obtient $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ et l'équation (1.40) conduit alors à :

$$\alpha^0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \tag{1.42}$$

pour $\varepsilon = \pm 1$, c'est à dire, à la fois pour les états passif et actif.

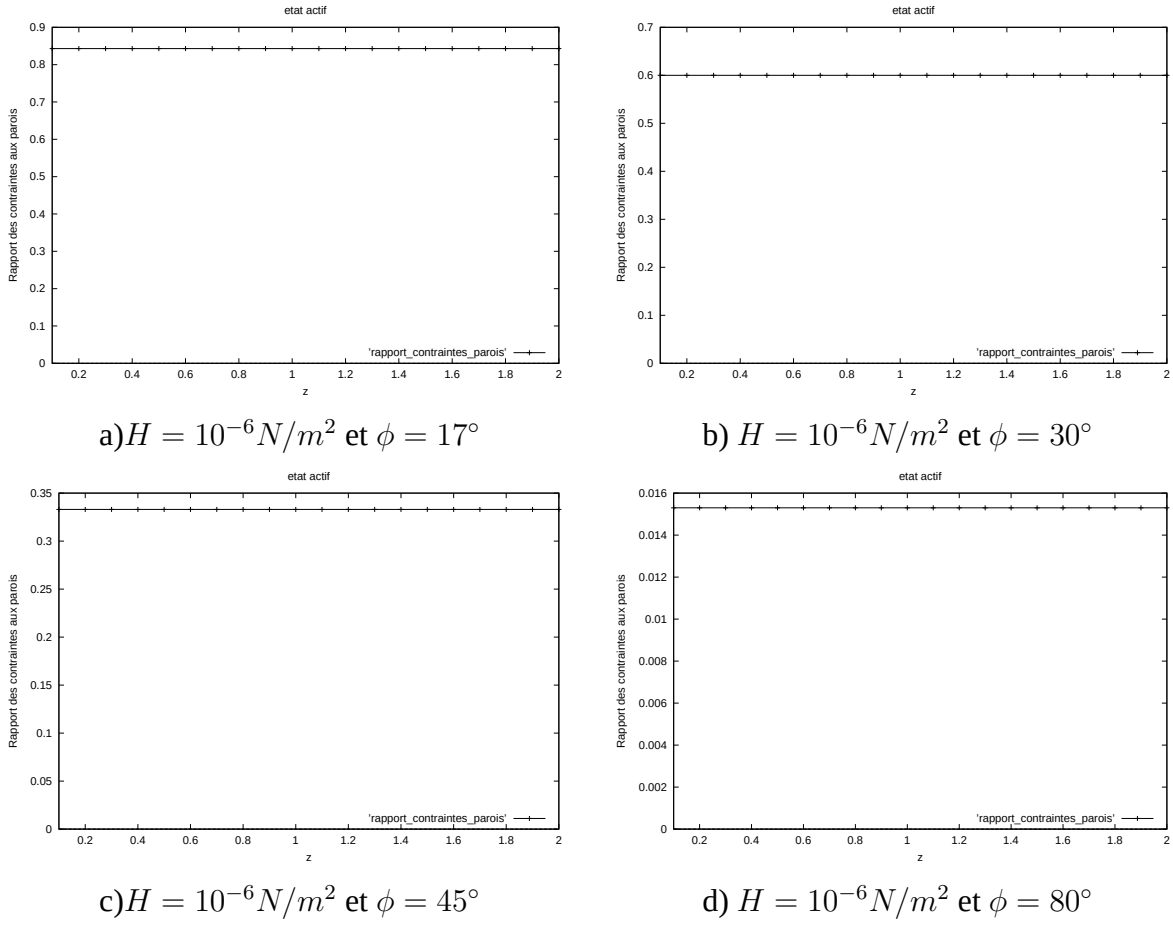
D'autre part, en utilisant l'expression (1.24) du paramètre λ_p obtenue pour une cohésion nulle, on obtient :

$$\lambda_p = \frac{1 - \sin^2\phi}{1 + \sin^2\phi} = \frac{1}{1 + 2\tan^2\phi} \tag{1.43}$$

On retrouve un résultat classique du rapport des contraintes aux parois pour les matériaux non cohésifs. De plus la valeur de α^0 donnée par (1.42) semble indiquer que le matériau granulaire est dans un état actif en tout point du silo, ceci quel que soit l'angle de frottement interne, pour les matériaux non cohésifs évidemment.

Afin de valider l'approche développée ici qui est valable dans le cas général des matériaux cohésifs, on va considérer le cas particulier d'une cohésion quasi-nulle $H = 10^{-6}N/m^2$. La solution $\alpha^0(z)$ calculée numériquement par résolution de l'équation différentielle (1.22) est introduite dans (1.21) afin de calculer les contraintes σ_x^0, σ_z^0 et enfin λ_p.

La figure (1.5) représente les variations de λ_p en fonction de la profondeur z du silo pour différentes valeurs de l'angle de frottement interne $\phi = 17°$, $\phi = 30°$, $\phi = 45°$ et $\phi = 80°$. On remarque que λ_p est constant quelque soit l'angle de frottement et quel que soit la profondeur z. En plus, pour $\phi = 17°$ et $H = 10^{-6}N/m^2$, on retrouve $\lambda_p = 0.843$. Cette valeur de λ_p coïncide exactement avec celle donnée par (1.43) pour le même angle $\phi = 17°$. Pour $\phi = 30°$, la résolution numérique conduit à $\lambda_p = 0.666$ qui coïncide aussi avec (1.43). Il en est de même pour les autres angles de frottement interne, ce qui permet



a)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 17°$ b) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 30°$

c)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 45°$ d) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 80°$

FIG. 1.5 – Variations du rapport des contraintes aux parois en fonction de z pour des matériaux non cohésifs.

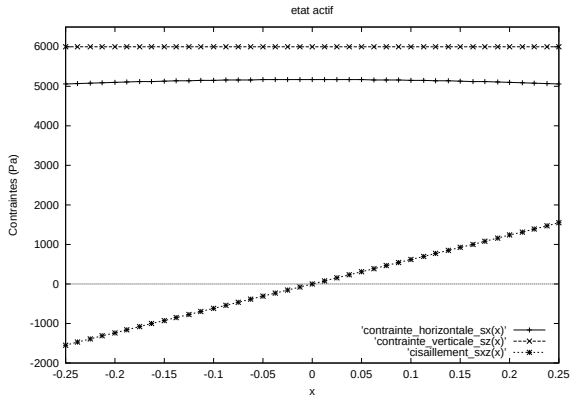
de valider l'approche analytique développée puis la résolution numérique effectuée.

Un résultat important qu'il convient de souligner est qu'un matériau granulaire non cohésif ou quasiment non cohésif semble toujours être dans un état actif (résultat prévu par l'expression analytique (1.42) de α^0).

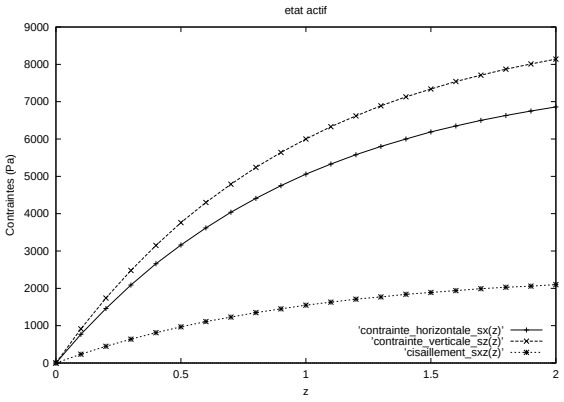
1.5.1 Influence de l'angle ϕ sur les contraintes

Pour la même cohésion ($H = 10^{-6}N/m^2$) fixée et pour les angles de frottement interne $\phi = 17°$, $\phi = 30°$ et $\phi = 45°$, on va étudier les variations des contraintes à la paroi σ^0 en fonction de z et des contraintes internes en fonction de x à une profondeur $z = 1m$ fixée (voir la figure (1.6)).

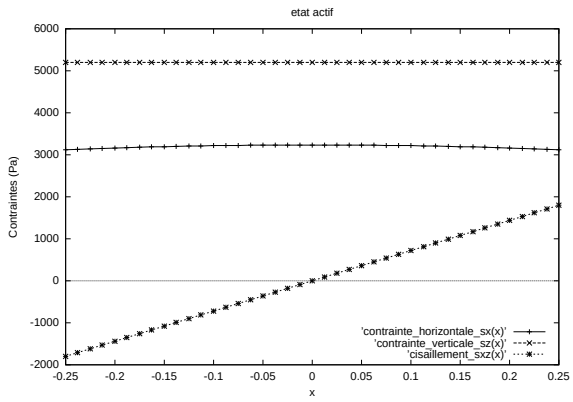
L'observation des figures (1.6a), (1.6c) et (1.6e) indique que l'écart entre les contraintes horizontale σ_x et verticale σ_z augmente considérablement lorsque l'angle de frottement



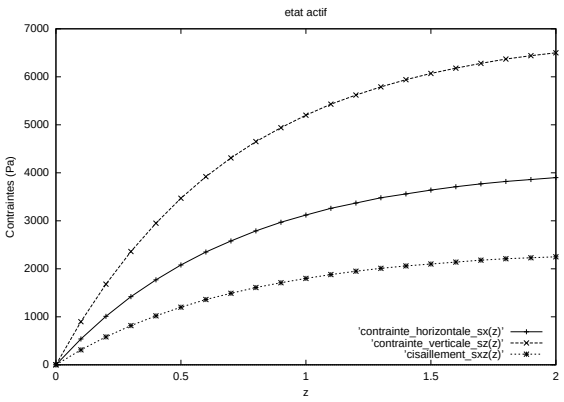
a)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 17°$



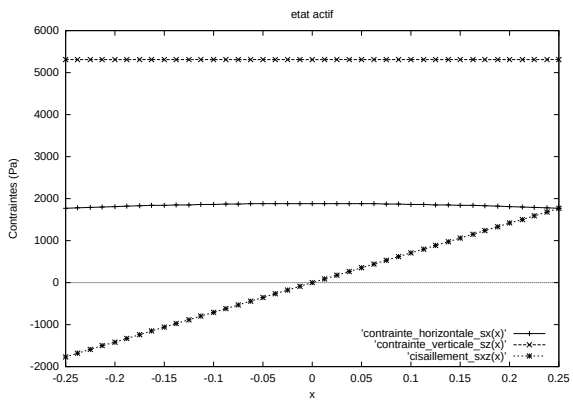
b) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 17°$



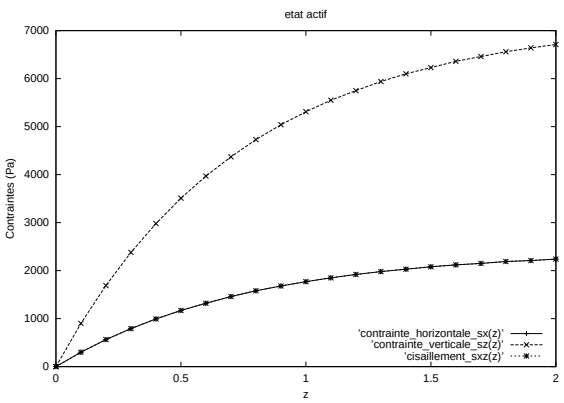
c)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 30°$



d) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 30°$



e)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 45°$



f) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 45°$

FIG. 1.6 – Variations des contraintes suivant x à $z = 1m$ (figs. a, c et e) et des contraintes suivant z (figs. b, d et f) pour des matériaux non cohésifs.

interne ϕ augmente. Par contre, on remarque que la contrainte τ_{xz} est peu influencée par une variation de l'angle de frottement interne.

On remarque aussi qu'une augmentation de l'angle de frottement interne ϕ entraîne une diminution de la valeur des contraintes suivant x et z. Ceci s'explique par le fait que plus ϕ augmente, plus les contraintes de frottement interne augmentent. Ainsi, une partie plus importante du poids propre du matériau est reprise par le frottement interne, ce qui implique que σ_z diminue et par conséquent σ_x diminue également. Par contre, la contrainte de cisaillement τ_{xz} est moins sensible à une variation de l'angle de frottement. Elle augmente quand l'angle de frottement interne augmente, mais de façon relativement lente.

D'autre part, sur les figures (1.6b), (1.6d) et (1.6f) où sont représentées les variations des contraintes aux parois en fonction de z, on constate que les contraintes tendent vers une valeur limite (asymptotique) constante dépendant de la valeur des paramètres physiques. De plus, il s'avère que plus l'angle de frottement interne ϕ augmente, plus cette valeur limite est atteinte rapidement.

De façon générale, les variations des contraintes en fonction de ϕ obtenues par l'approche analytique développée sont semblables à celles données par la théorie de Janssen pour des matériaux non cohésifs.

1.5.2 Comparaison avec la théorie de Janssen

La théorie de Janssen suppose que c'est la valeur du coefficient de Rankine λ (coefficient constant en tout point du silo) qui permet de déterminer l'état des contraintes susceptible de régner dans le silo (état passif ou actif). De plus, pour une profondeur suffisamment importante, les contraintes tendent vers des valeurs asymptotiques.

Nous proposons maintenant de comparer notre approche à la théorie de Janssen dans le cas d'une cohésion nulle ou quasiment nulle[5]. Pour cela, on calcule avec l'approche développée ici, les contraintes aux parois σ_z^0 et σ_x^O en fonction de z (variant entre 0 et $5m$), pour une cohésion fixée $H = 10^{-6}N/m^2$.

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures (1.7) et (1.8) ainsi que ceux obtenus par la théorie de Janssen dans les cas actifs et passifs. Il est important de rappeler qu'avec notre approche, pour des matériaux non cohésifs, le matériau granulaire est toujours dans un état actif ($\alpha^0 > \frac{\pi}{4}$ et $\sigma_z^0 > \sigma_x^0$). De plus, les variations de la contrainte verticale σ_z^0 en

[5]On rappelle que la théorie de Janssen est limitée aux matériaux non cohésifs.

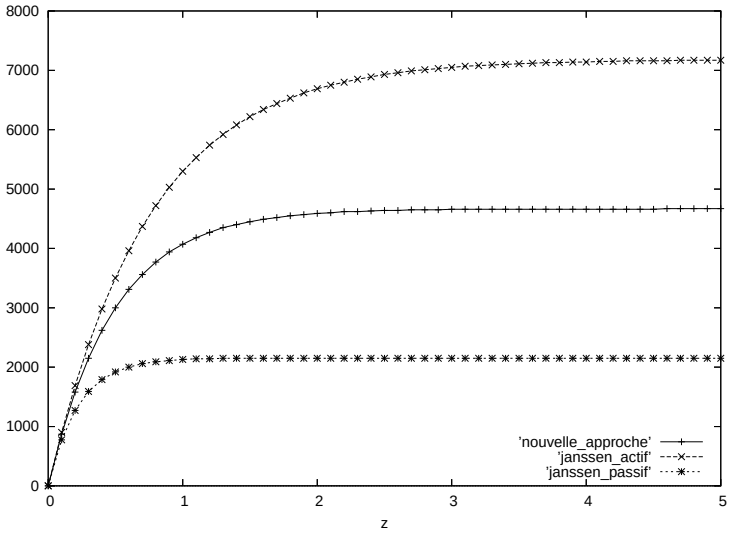


FIG. 1.7 – Variation de la contrainte verticale suivant z pour $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 17°$

fonction de z (figure (1.7)) montrent que les résultats obtenus avec notre approche, et qui correspondent à la configuration active (pas de configuration passive en faible cohésion), sont encadrés par les configurations passive et active de la théorie de Janssen qui constituent en quelque sorte des ”borne supérieure et inférieure”. Ceci est vrai quelle que soit la valeur de l'angle de frottement interne et quelle que soit la profondeur.

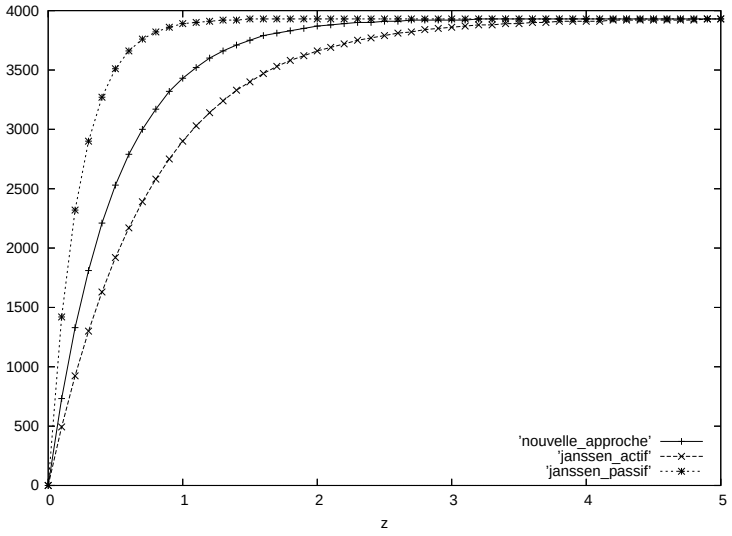


FIG. 1.8 – Variations de la contrainte horizontale aux parois suivant z pour $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\phi = 17°$

En ce qui concerne les variations de la contrainte horizontale σ_x^0 représenté en fonction

de z sur la figure (1.8), les résultats obtenus avec notre approche (qui correspondent à l'état actif) sont également encadrés par les états actif et passif de la théorie de Janssen. De plus, tous les résultats convergent vers une même valeur asymptotique qui dépend de l'angle de frottement interne.

D'autre part, dans la configuration active (correspondant aux matériaux non cohésifs avec notre approche), la valeur limite de la contrainte σ_x^0 est atteinte plus rapidement qu'avec la théorie de Janssen. De plus, avec notre approche, la contrainte σ_x^0 obtenue est plus grande d'environ 15% de celle obtenue par la théorie de Janssen. Ainsi, l'approche développé ici améliore la théorie de Janssen qui est connue pour sous-estimer les contraintes horizontales aux parois dans l'état actif (associé généralement à la phase de vidange du silo).

1.6 Etude des matériaux cohésifs

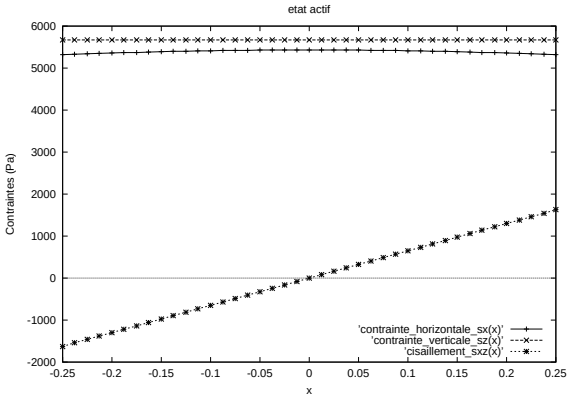
Maintenant que notre approche a été validée dans le cas des matériaux non cohésifs, on va étudier l'influence de la cohésion sur les contraintes.

1.6.1 Influence de la cohésion sur les contraintes

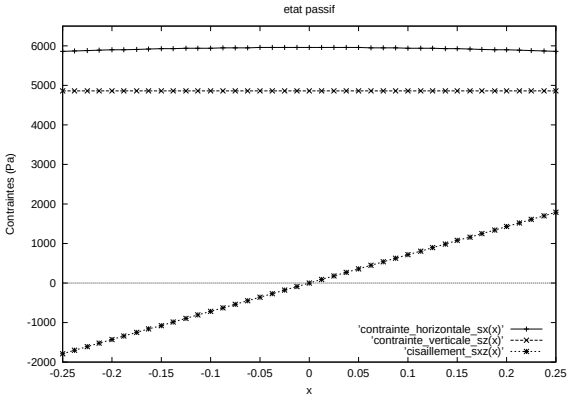
Tout d'abord, on rappelle que pour une cohésion nulle ou quasi-nulle ($H = 10^{-6} N/m^2$), le matériau semble toujours être dans un état actif en tout point du silo et quel que soit l'angle de frottement interne. On va voir que pour des cohésions suffisamment importantes, l'état passif peut être atteint.

Sur la figures (1.9) est représentée les variations des contraintes suivant x à $z = 1m$ fixé pour différentes angles de frottement interne et pour différentes valeurs de la cohésion. On remarque qu'une augmentation de la cohésion entraîne une diminution de la contrainte verticale σ_z et une augmentation de l'écart entre la contrainte verticale et horizontale. Par contre, la contrainte de cisaillement est peu influencé par une augmentation de la cohésion. Alors que pour des cohésions faibles ou modérées, le matériau est dans une configuration active en tout point du silo, pour des cohésions importantes, le matériau est dans une configuration passive quelle que soit la profondeur.

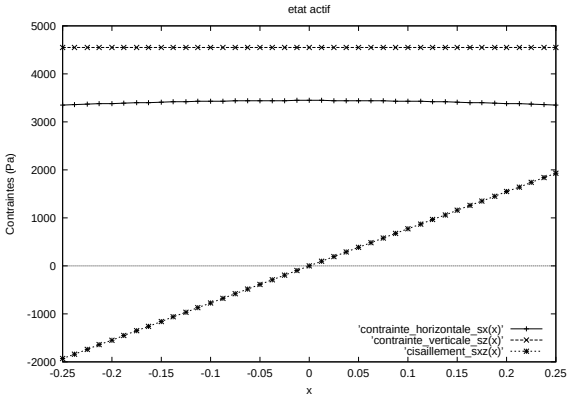
Pour des cohésions intermédiaires il existe une zone de transition où on passe de la configuration active à la configuration passive. Cette transition n'est pas brutale et il existe des états de contraintes mixtes où le matériau ne possède pas la même configuration dans tout le silo. En effet, sur la figure (1.10) où sont représentées les variations des contraintes en fonction de la profondeur du silo, on remarque que pour z petit, on a $\sigma_x > \sigma_z$ et le



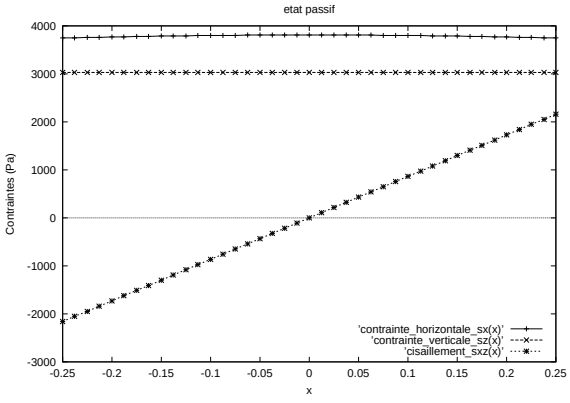
a)$H = 100N/m^2$ et $\phi = 17°$



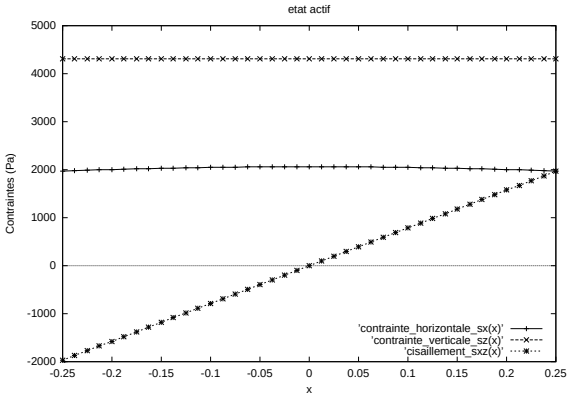
b) $H = 1000N/m^2$ et $\phi = 17°$



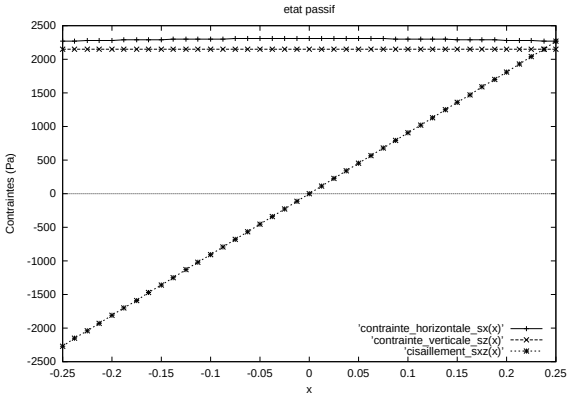
c)$H = 100N/m^2$ et $\phi = 30°$



d) $H = 1000N/m^2$ et $\phi = 30°$



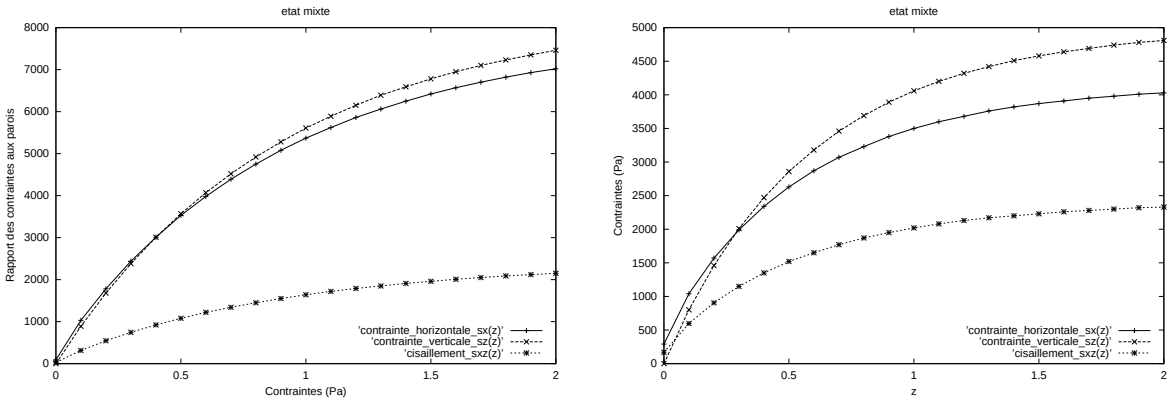
e)$H = 100N/m^2$ et $\phi = 45°$



f) $H = 1000N/m^2$ et $\phi = 45°$

FIG. 1.9 – Variations des contraintes suivant x à $z = 1m$ pour des matériaux cohésifs.

matériau est dans un état passif. Par contre, lorsque z augmente et que l'on se rapproche du fond du silo, σ_x devient inférieure à σ_z, et le matériau passe dans un état passif.
Si on augmente encore la cohésion, alors la transition s'est effectuée dans tout le silo et le matériau est dans un état passif en tout point. Ainsi, l'approche développée ici permet d'obtenir un nouvel état mixte de contraintes où le matériau change de configuration en fonction de la profondeur du silo. Cet état mixte de contraintes est atteint lorsque la cohésion du matériau augmente jusqu'à une valeur seuil H_0 qui dépend de l'angle de frottement interne ϕ. Au delà de cette valeur, le matériau reste dans un état passif dans tout le silo. Il est important de noter que ce résultat n'est pas prévisible par la théorie de Janssen où le matériau conserve la même configuration dans tout le silo.



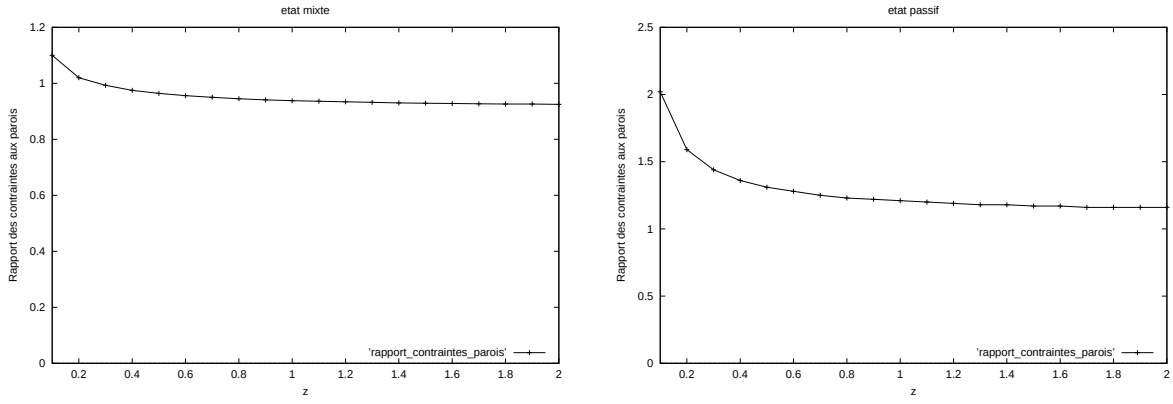
a)$H = 140N/m^2$ et $\phi = 17°$ b) $H = 300N/m^2$ et $\phi = 30°$

FIG. 1.10 – Variations des contraintes suivant z - Apparition des états mixtes pour les matériaux cohésifs.

1.6.2 Influence de la cohésion sur le rapport des contraintes aux parois λ_p

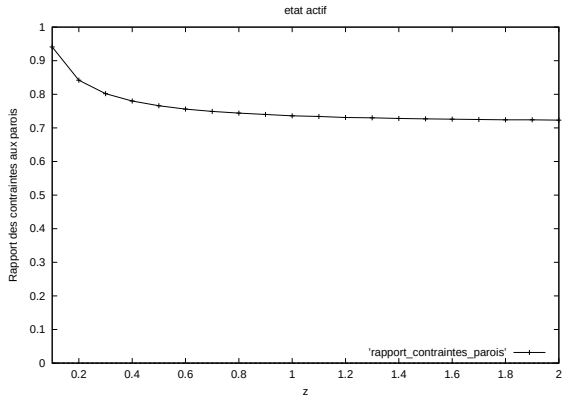
L'influence de la cohésion sur les contraintes est complexe car elle influe sur les composantes des trois contraintes σ_x, σ_z et τ_{xz}, mais de manière différente. Cependant une variable représentative des états de contraintes, en particulier près des parois du silo, est le rapport des contraintes aux parois $\lambda_p = \dfrac{\sigma_x^0}{\sigma_z^0}$. La figure (1.11) représente les variations de λ_p en fonction de la profondeur z du silo pour différentes valeurs de l'angle de frottement interne et de la cohésion. On remarque que la valeur de λ_p varie en fonction de z : elle augmente lorsque la cohésion augmente.

En l'absence de cohésion, on a vu que le paramètre λ_p est constant, et que sa valeur ne

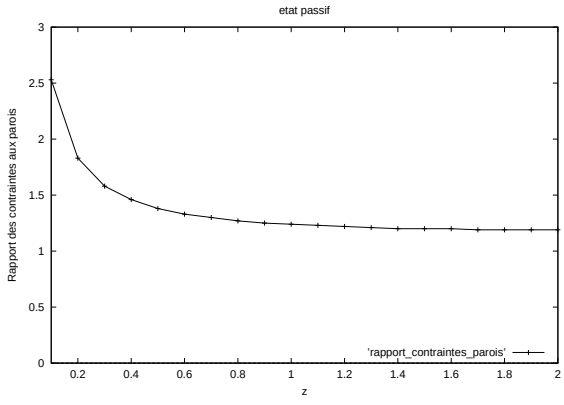


a)$H = 100N/m^2$ et $\phi = 17°$

b) $H = 1000N/m^2$ et $\phi = 17°$



c)$H = 100N/m^2$ et $\phi = 30°$



d) $H = 1000N/m^2$ et $\phi = 30°$

FIG. 1.11 – Variations du rapport des contraintes aux parois suivant z pour des matériaux cohésifs.

dépend que de l'angle de frottement interne. Une expression analytique exacte de λ_p dans le cas $\phi = \phi_p$ est donnée par (1.43).
Maintenant, si on prend en considération la cohésion du matériau granulaire, les expressions des contraintes obtenues par notre approche (voir (1.21)) nous donnent :

$$\lambda_p = \frac{\sin 2\alpha^0}{\sin 2\alpha^0 - 2\tan\phi\cos 2\alpha^0}$$

Ainsi, λ_p n'est plus contant a priori. Il dépend, en plus de l'angle de frottement interne, de la cohesion et de l'angle α^0, qui dépend lui même de z et qui est une inconnue du problème. Ainsi, une expression analytique complète de λ_p en fonction des données du problème (cohésion, angle de frottement,..) semble difficile à obtenir. Ainsi, le recours à une résolution numérique est nécessaire.

En conclusion, il est important de noter que pour les matériaux cohésifs, le rapport des contraintes aux parois λ_p n'est plus constant et varie en fonction de la profondeur z.

Néanmoins, il tend vers une valeur asymptotique différente dans le cas passif et dans le cas actif, dépendant sensiblement de la cohésion. Cette valeur limite de λ_p correspond au rapport des valeurs limites atteintes par les contraintes aux parois lorsque z augmente.

1.7 Conclusion

L'approche de type milieux continus proposée ici améliore les approches existences et en particulier la théorie de Janssen. Cette approche permet de calculer les contraintes en tout point du matériau granulaire ensilé, quels que soient les paramètres physiques intervenant (angle de frottement interne, cohesion...). Elle est basée sur une formulation générale des équations d'équilibre bidimensionnelles des milieux continus, couplée à un critère de Mohr-Coulomb et à une condition de glissement aux parois. Cette approche tient compte de la cohésion du matériau et de la dépendance des contraintes suivant le diamètre du silo, et s'affranchit des limitations de la théorie de Janssen.

Des comparaisons avec les solutions analytiques existantes dans la littérature pour les matériaux non cohésifs ont permis de valider l'approche développée ici. Des résultats intéressants ont été ensuite obtenus pour les matériaux non cohésifs et cohésifs. En particulier, en absence de cohésion, on montre que le matériau granulaire semble toujours être dans une configuration active. De plus, les contraintes aux parois sont encadrées par les états passif et actif de la théorie de Janssen. Pour les matériaux cohésifs, le rapport des contraintes aux parois λ_p n'est plus constant et dépend de la profondeur du silo. On voit aussi apparaître des états mixtes de contraintes (passif puis actif) à l'intérieur du silo, qui ne sont pas prévisibles par la théorie de Janssen.

Dans ce premier chapitre, nous avons limité notre étude au cas d'angles de frottement interne et aux parois égaux. Le cas général où les angles de frottement sont différents est traité dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Extension de l'approche continue pour des angles de frottement différents

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons développé une nouvelle approche analytique qui permet de calculer les contraintes dans un matériau granulaire ensilé. Et ceci quels que soient les paramètres physiques intervenant, à savoir les angles de frottement interne et aux parois, la cohésion du matériau, les dimensions du silo... Cette approche a été d'abord validée dans le cas d'une cohésion nulle et pour des angles de frottement interne et aux parois égaux, de façon à retrouver certains résultats classiques existant dans la littérature. Les résultats obtenus ont été comparés à la théorie de Janssen et ensuite étendus au cas d'une cohésion non nulle, toujours pour des angles de frottement égaux ($\phi = \phi_p$).

Dans ce chapitre, nous proposons de mettre en oeuvre l'approche précédente dans le cas d'angles de frottement internes et aux parois différents. Les calculs sont alors plus compliqués et conduisent à différencier les cas $\phi > \phi_p$ et $\phi < \phi_p$ où les résultats sont différents.

2.2 Etude du cas $\phi > \phi_p$

Suivant que l'angle de frottement interne est supérieur ou inférieur à l'angle de frottement aux parois, les solutions analytiques puis numériques obtenus par notre approche diffèrent. En premier lieu, on commence par étudier le cas $\phi > \phi_p$.

2.2.1 Résolution analytique

Dans ce chapitre, on reprend la résolution de l'équation différentielle (1.25) équivalente à la recherche d'une racine de l'équation

$$r(u) - z = 0 \tag{2.1}$$

où $r(u) = q(u) - q(u_l)$ est donnée par :

$$r(u) = \tilde{k}[\frac{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}{(u_3-u_4)(u_3-u_5)(u_3-u_6)} \ln|\frac{u-u_3}{u-u_l}| + \frac{(u_4-u_1)(u_4-u_2)}{(u_4-u_3)(u_4-u_5)(u_4-u_6)} \ln|\frac{u-u_4}{u-u_l}|$$
$$+ \frac{(u_5-u_1)(u_5-u_2)}{(u_5-u_3)(u_5-u_4)(u_5-u_6)} \ln|\frac{u-u_5}{u-u_l}| + \frac{(u_6-u_1)(u_6-u_2)}{(u_6-u_3)(u_6-u_4)(u_6-u_5)} \ln|\frac{u-u_6}{u-u_l}|]$$

avec $\beta = \sqrt{(\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p})^2 - 1}$.

On rappelle ici que les coefficients u_i intervenant dans le cas $\phi > \phi_p$ de $r(u)$ sont donnés par (1.26), (1.28), (1.31) et (1.37).

Comme au chapitre précédent, on va étudier les variations de la fonction $r(u)$ afin de déterminer son comportement aux points singuliers u_3, u_4, u_5 et u_6. La première étape consiste à classer les points singuliers dans le but de déterminer les signes respectifs des coefficients A, B , C et D définis par :

$$A = \frac{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}{(u_3-u_4)(u_3-u_5)(u_3-u_6)} \qquad B = \frac{(u_4-u_1)(u_4-u_2)}{(u_4-u_3)(u_4-u_5)(u_4-u_6)}$$

$$C = \frac{(u_5-u_1)(u_5-u_2)}{(u_5-u_3)(u_5-u_4)(u_5-u_6)} \qquad D = \frac{(u_6-u_1)(u_6-u_2)}{(u_6-u_3)(u_6-u_4)(u_6-u_5)}$$

La fonction $r(u)$ s'écrit alors de façon simplifiée :

$$r(u) = \tilde{k}[A \ln|\frac{u-u_3}{u-u_l}| + B \ln|\frac{u-u_4}{u-u_l}| + C \ln|\frac{u-u_5}{u-u_l}| + D \ln|\frac{u-u_6}{u-u_l}|]$$

Le classement des singularités u_3, u_4, u_5 et u_6 sur l'axe des réels est nécessaire pour determiner le signe des coefficients A, B, C et D. Les expressions (1.28) et (1.31) des singularités montrent qu'on a $u_3u_4 = u_5u_6 = u_0^2$. Or, puisque les singularités u_3 et u_6 sont positives, on en déduit que les singularités u_4 et u_5 sont elles aussi positives : on a $u_4 > 0$ et $u_5 > 0$. De plus, comme on a de façon évidente $u_4 < u_3$ et $u_5 < u_6$, alors $u_4 < u_0 < u_3$ et $u_5 < u_0 < u_6$.

D'autre part, comme $\xi > 0$, on a $u_6 > u_3$ et $u_4 > u_5$. Ainsi, le classement des singularités à ce stade est le suivant :

$$0 < u_5 < u_4 < u_0 < u_3 < u_6$$

Pour déterminer les limites de la fonction $r(u)$ aux points singuliers, il est nécessaire de connaître la position de u_1 et u_2 par rapport aux autres singularités, et par la suite déterminer le signe des coefficients A, B, C et D. Tout d'abord, l'expression analytique (1.26) de u_2 indique que cette singularité est negative. Or, comme toutes les autres singularités sont positives, on aura $u_2 < u_5$.

D'autre part, posons :

$$u_2^{'} = (-u_0^4)u_2 = \frac{(1+\sin\phi)^2}{(1-\sin\phi)^2}\frac{\sqrt{4\mu_p^2+\cos^2\phi}-2\mu_p}{1+\sin\phi}$$

Puisque $\phi_p < \phi$, on aura :

$$\begin{aligned} u_2^{'} &< \frac{(1+\sin\phi)}{(1-\sin\phi)^2}(\sqrt{4\tan^2\phi_p+\cos^2\phi_p}-2\tan\phi_p) \\ &< u_0\frac{\cos\phi(1-\sin\phi_p)^2}{\cos\phi_p(1-\sin\phi)^2} \\ &< u_0\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (1.28), on en déduit que $u_2^{'} < u_3$. En plus, comme $u_2^{'}u_1 = u_3u_4 = u_0^2$ (suivant les relations (1.26), (1.28) et (1.31), on aura $u_1 > u_4$.

Finalement, on peut monter facilement que $u_1 < u_0$. En effet, comme $\tan\phi_p < \tan\phi$, l'expression (1.26) de u_1 conduit à :

$$u_1 < \frac{2\tan\phi+\sqrt{4\tan^2\phi+\cos^2\phi}}{1+\sin\phi} = \frac{1+\sin\phi}{\cos\phi}$$

ce qui implique que $u_1 < u_0$ compte tenu de l'expression (1.31) de u_0.

Ainsi, on obtient finalement :

$$u_2 < u_5 < u_4 < u_1 < u_0 < u_3 < u_6$$

et donc :

$$A < 0,\ \ B < 0,\ \ C > 0,\ \ D > 0$$

Sachant que $\tilde{k} < 0$, on obtient les limites suivantes aux singularités :

$$\lim_{u\to u_5} r(u) = +\infty \quad , \quad \lim_{u\to u_4} r(u) = -\infty$$

$$\lim_{u\to u_3} r(u) = -\infty \quad , \quad \lim_{u\to u_6} r(u) = +\infty$$

L'existence de singularités de la fonction $r(u)$ nécessite de determiner précisément l'intervalle de résolution de l'equation (2.1) à une profondeur z fixée. On rappelle que l'une des bornes de cet interval est nécessairement u_l (correspondant à $z = 0$), et l'autre borne correspond à une singularité où la limite de $r(u)$ est $+\infty$. Une fois $u(z)$ et $\alpha^0(z) = \arctan(u(z))$ numériquement calculés à une profondeur z donnée, on calcule à nouveau les contraintes dans le matériau granulaire ensilé en utilisant les expressions (1.21).

La figure (2.1) représente les variations de la fonction $r(u)$ pour les valeurs particulières suivantes $(\phi, \phi_p) = (17°, 10°)$, $H = 200N/m^2$, $\rho = 980kg/m^3$ et $R_h = 0.125m$. Il est important de noter que l'allure générale de la courbe reste la même (même variations), quels que soient les paramètres physiques.

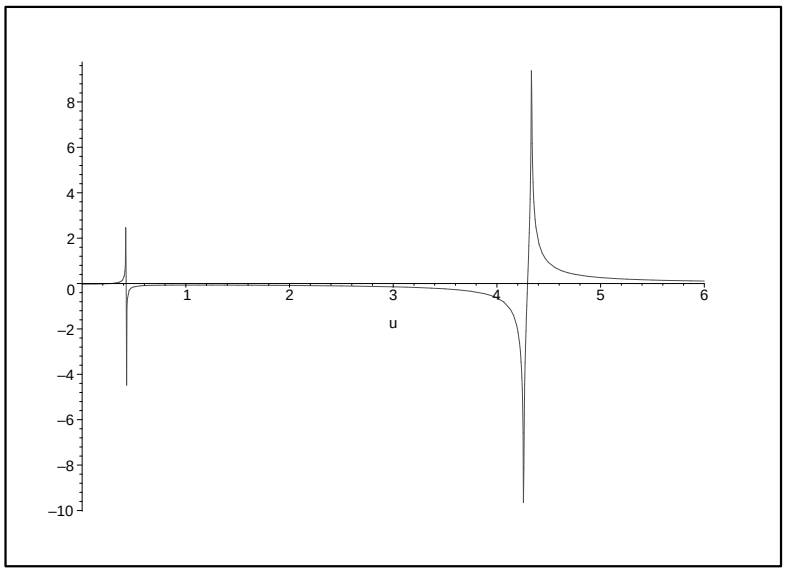


FIG. 2.1 – Variations de la fonction $r(u)$ avec les singularités $u_5 < u_4 < u_3 < u_6$

Ainsi de façon générale, dans le cas $\phi > \phi_p$, les variations de la fonction $r(u)$ sont respectivement :

$$\begin{cases} \text{croissante sur }]-\infty, u_5[\\ \text{décroissante sur }]u_5, u_4[\\ \text{croissante puis décroissante sur }]u_4, u_3[\\ \text{croissante sur }]u_3, u_6[\\ \text{décroissante sur }]u_6, +\infty[\end{cases}$$

2.2.2 Résolution numérique

Nous proposons maintenant de mettre en oeuvre la résolution numérique du problème dans le cas où $\phi > \phi_p$. Dans le cas $\phi = \phi_p$, quelle que soit la position de u_l, et donc par

conséquent quelle que soit la valeur de $\phi = \phi_p$, il existait au voisinage immédiat de u_l une singularité telle que la limite de la fonction $r(u)$ en ce même point tende vers $+\infty$.

Dans le cas $\phi > \phi_p$, étant donné que la fonction $r(u)$ tend vers $-\infty$ aux points de singularités u_3 et u_4, la conditions à satisfaire pour l'intervalle de résolution, à savoir que la profondeur puisse varier de 0 à $+\infty$, n'est plus vérifiée si la valeur de u_l est encadrée par celles des deux singularités u_3 et u_4. En effet, si u_l est effectivement compris entre ces deux singularités, nous ne pouvons pas calculer les contraintes à l'aide de la théorie développée ici. Physiquement, cela proviendrait du fait que compte tenu des hypothèses effectuées (limite du critère de Mohr-Coulomb, glissement au niveau des parois,...), toutes les valeurs possibles de $\phi > \phi_p$ ne sont pas autorisées. Même si une étude théorique approfondie de ce cas de figure reste à faire, dans la pratique, pour tous les cas traités dont les solutions figurent ci-après, ce cas n'a jamais été rencontré.

Étant donnée que le terme u_l est positif et inférieur à 1, les différents cas de figure possibles sont les suivants :

$$\begin{cases} \text{soit } u_l \quad \epsilon \,]0, u_5[\\ \text{soit } u_l \quad \epsilon \,]u_5, u_4[\\ \text{soit } u_l \quad \epsilon \,]u_4, u_3[\end{cases}$$

Les seuls intervalles de convergence I_c possibles sont ceux faisant intervenir la singularité u_5, puisque c'est la seule parmi celles figurant dans les intervalles énumérés ci-dessus pour laquelle nous ayons :

$$\lim_{u \to u_5} q(u) = +\infty$$

Alors :

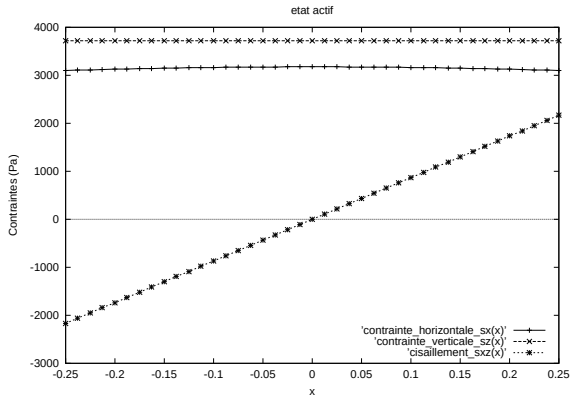
$$\begin{cases} \text{si } u_l < u_5, \text{ on prendra } I_c = [u_l, u_5[. \\ \text{si } u_l \quad \epsilon \,]u_5, u_4[\text{ on prendra } I_c =]u_5, u_l], \\ \text{si } u_l \quad \epsilon \,]u_4, u_3[\Rightarrow \text{on n'a pas de solution.} \end{cases}$$

2.2.3 Etude des paramètres physiques

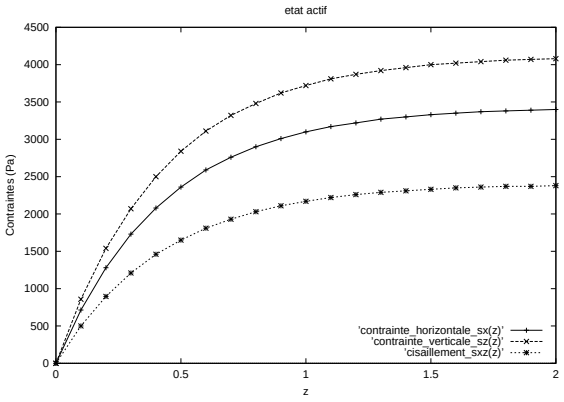
On propose d'étudier l'influence de la cohésion et des angles de frottement sur les valeurs des contraintes du milieu granulaire ensilé dans le cas $\phi > \phi_p$.

Influence des angles de frottement

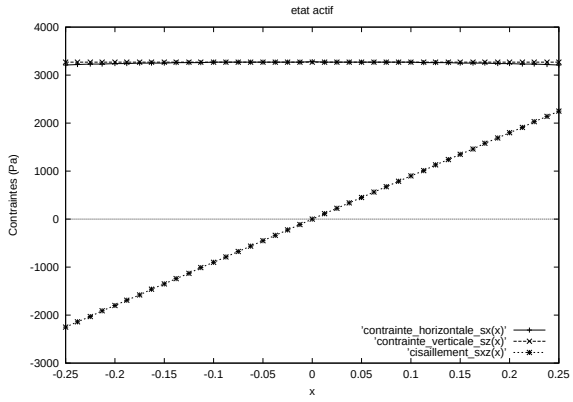
Afin de simplifier l'étude qui peut être fastidieuse compte tenu des nombreux cas de figure possibles, définissons le rapport $\chi = \dfrac{\phi}{\phi_p}$. Pour une cohésion fixée et un coefficient de frottement aux parois fixé (on prend ici $\phi_p = 35°$), on se propose d'étudier l'influence de ce rapport sur les contraintes, d'abord pour les matériaux non cohésifs (correspondant



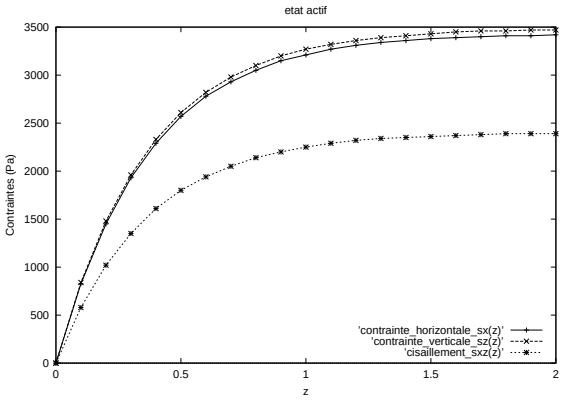
a)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.14$



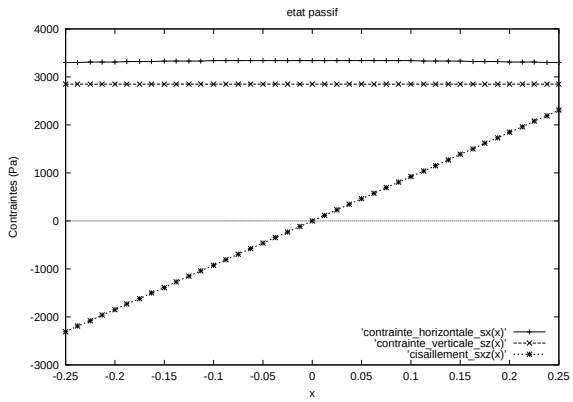
b) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.14$



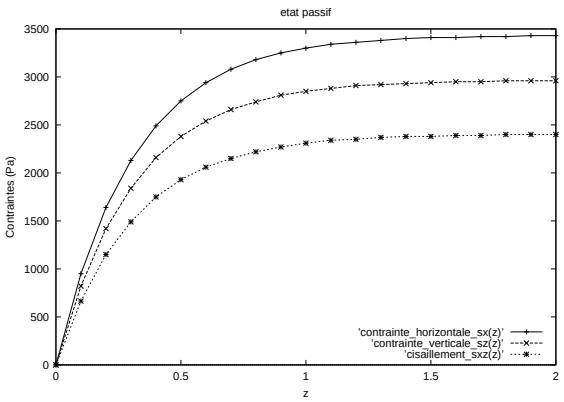
c)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.25$



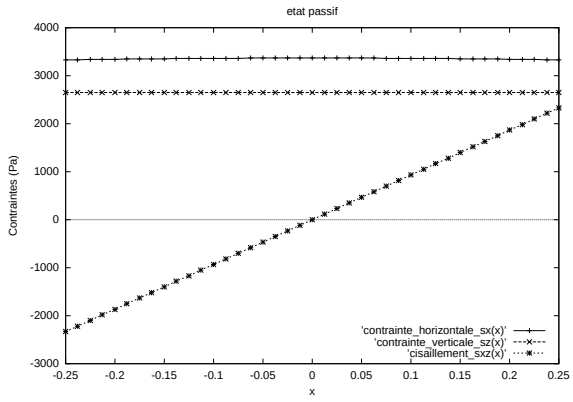
d) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.25$



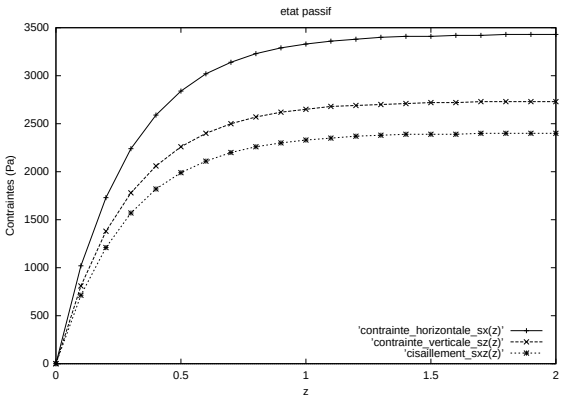
e)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.37$



f) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.37$



g)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.48$



h) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.48$

FIG. 2.2 – Variations des contraintes suivant x à $z = 1m$ (figs a, c, e et g) et des contraintes suivant z (figs b, d, f et h) pour $\phi_p = 35°$ fixée.

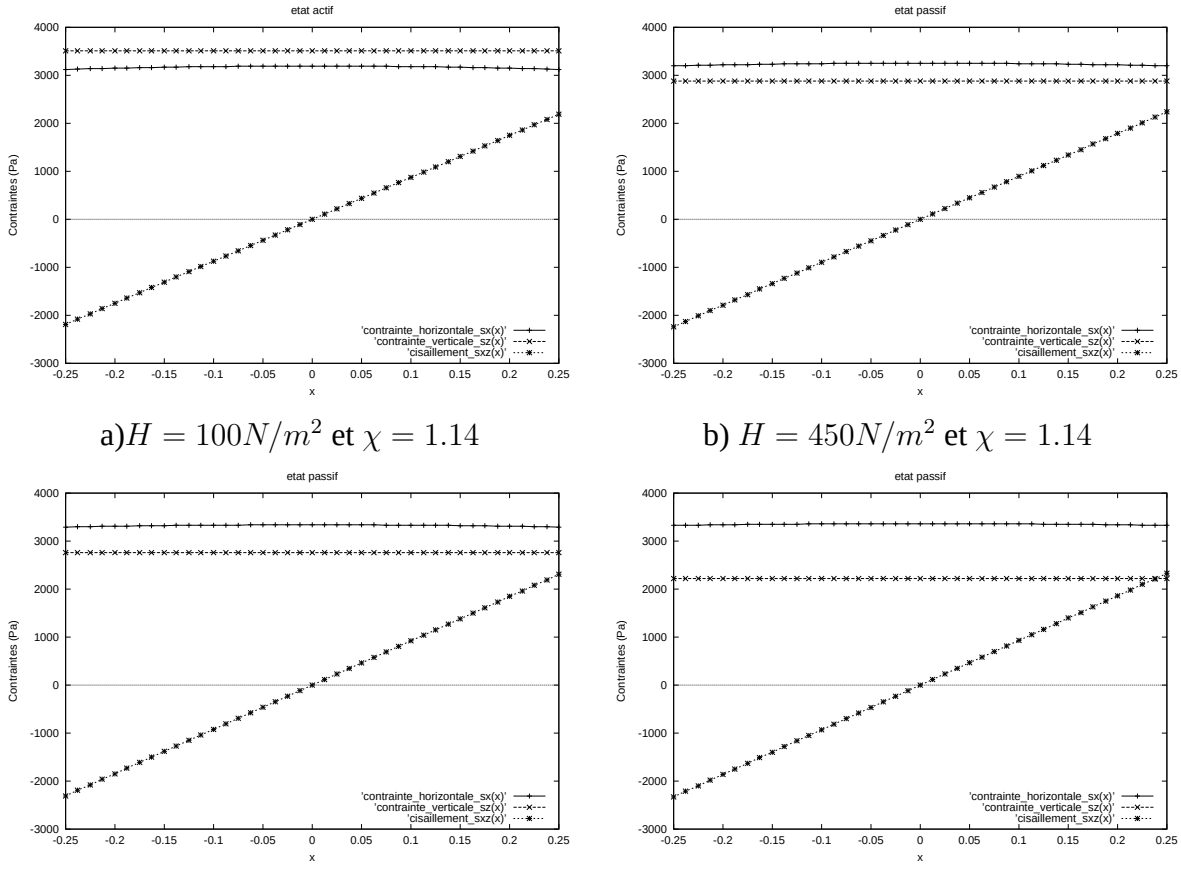
à $H = 10^{-6} N/m^2$). Pour cela, on considère les variations des contraintes pour différentes valeurs de ϕ et donc de χ (ϕ_p étant fixe), représentées sur la figure (2.2). On remarque qu'une augmentation de l'angle de frottement interne ϕ entraîne une diminution de la contrainte verticale σ_z. En effet, comme on l'a vu au chapitre précédent pour $\phi = \phi_p$, plus ϕ augmente, plus les contraintes de frottement augmentent, car une partie plus importante du poids propre du matériau sera reprise par le frottement interne. Par contre, la contrainte horizontale σ_x et la contrainte de cisaillement τ_{xz} sont peu influencées par la variation de l'angle de frottement interne.

D'autre part, il est important de noter que la variation de l'angle de frottement interne implique une variation de la configuration du matériau granulaire à ϕ_p fixé. En effet, on peut remarquer que lorsque χ croît, l'angle α^0 décroît et l'état du matériau passe de l'état actif à l'état passif[1]. De plus, il existe une valeur maximum χ_{max} du rapport χ où le matériau est dans un état actif pour tout $\chi < \chi_{max}$, et dans un état passif pour tout $\chi > \chi_{max}$. Cette valeur maximum χ_{max} dépend évidemment de l'angle de frottement interne et de la cohésion du matériau.

Influence de la cohésion sur les contraintes

On va maintenant étudier l'influence de la cohésion sur les contraintes. Sur la figure (2.3) sont représentées les variations des contraintes suivant x pour différentes valeurs de χ et de la cohésion. On remarque d'abord qu'à χ fixé, la valeur de la cohésion influence la configuration du matériau. Si le matériau est dans un état actif pour de faibles cohésions, il passe dans un état passif lorsque la cohésion augmente. Cependant, si le matériau est déjà dans un état passif pour de faibles cohésions, il reste dans cet état pour de fortes cohésions. Ce résultat, identique à celui obtenu dans le cas $\phi = \phi_p$ au chapitre précédent, est également visible sur les figures (2.3b) et (2.3d). La figure (2.4) met en évidence cette transition pour une valeur différente de χ où on observe clairement l'apparition d'un état mixte de contrainte à l'intérieur du silo. Le matériau granulaire est dans un état passif près du sommet et passe dans un état actif lorsque la profondeur augmente. Ce phénomène nouveau déjà obtenu au chapitre précédent pour des angles de frottement interne et aux parois égaux, est encore mise en évidence pour des angles de frottement différents. Enfin, comme précédemment, on remarque que la contrainte de cisaillement est très peu sensible à une variation de la cohésion.

[1] Ce résultat peut être déduit à partir des dernières observations : lorsque ϕ croît, σ_z décroît tandis que σ_x reste quasi-constant. Ainsi, si initialement on a $\sigma_z > \sigma_x$ qui correspond à l'état actif, lorsque ϕ croît, on obtient ensuite $\sigma_x > \sigma_z$ qui correspond à l'état passif.



a)$H = 100N/m^2$ et $\chi = 1.14$ b) $H = 450N/m^2$ et $\chi = 1.14$

c)$H = 100N/m^2$ et $\chi = 1.37$ d) $H = 450N/m^2$ et $\chi = 1.37$

FIG. 2.3 – Variations des contraintes suivant x à $z = 1m$ pour $\phi_p = 35°$ fixée.

D'autre part, puisque la cohésion a une grande influence sur les valeurs des contraintes, on peut s'attendre à ce qu'elle influence la valeur du paramètre λ_p, rapport des contraintes aux parois. En effet, on a vu que pour les matériaux non cohésifs (correspondant à $H = 0$), en utilisant (1.21), le rapport des contraintes aux parois $\lambda_p = \dfrac{\sigma_x^0}{\sigma_z^0}$ s'écrit :

$$\lambda_p = \frac{1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0}{1 - \sin\phi \cos 2\alpha^0} \tag{2.2}$$

On rappelle que dans le cas $\phi > \phi_p$, l'angle α est donnée par la formule (1.40) :

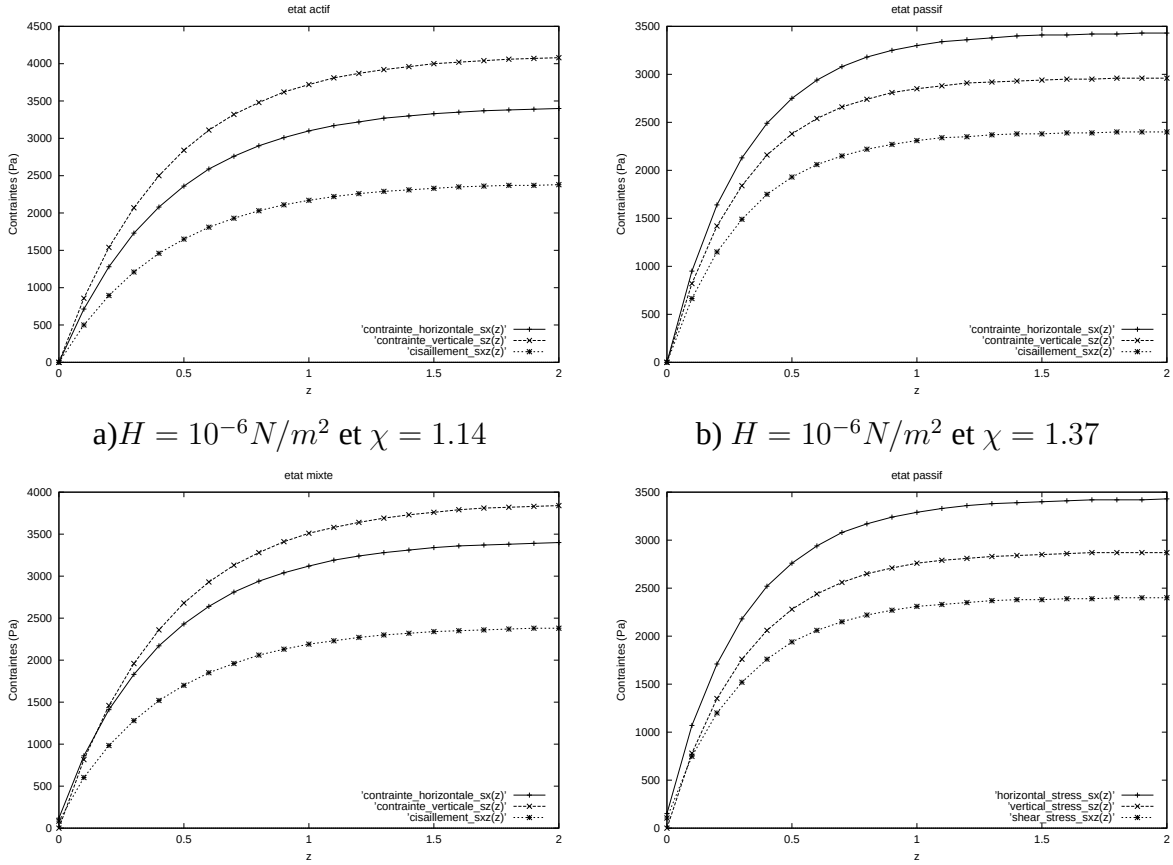
$$2\alpha^0 = -(\varepsilon - 1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon\psi + \phi_p \tag{2.3}$$

où $\varepsilon = 1$ pour l'état passif et $\varepsilon = -1$ pour l'état actif. L'angle ψ est quant à lui défini par :

$$\psi = \arcsin(\frac{\sin\phi_p}{\sin\phi}) \tag{2.4}$$

pour les matériaux non cohésifs. Ainsi, en l'absence de cohésion les expressions (2.2), (2.3) et (2.4) assurent que le rapport des contraintes aux parois est constant pour ϕ et

ϕ_p fixés. Pour valider à nouveau l'approche théorique développée ici et la résolution numérique correspondante dans le cas $\phi > \phi_p$, on propose de retrouver les résultats théoriques données par (2.2)-(2.4) pour $H = 10^{-6}N/m^2$ et différentes valeurs de ϕ et ϕ_p.



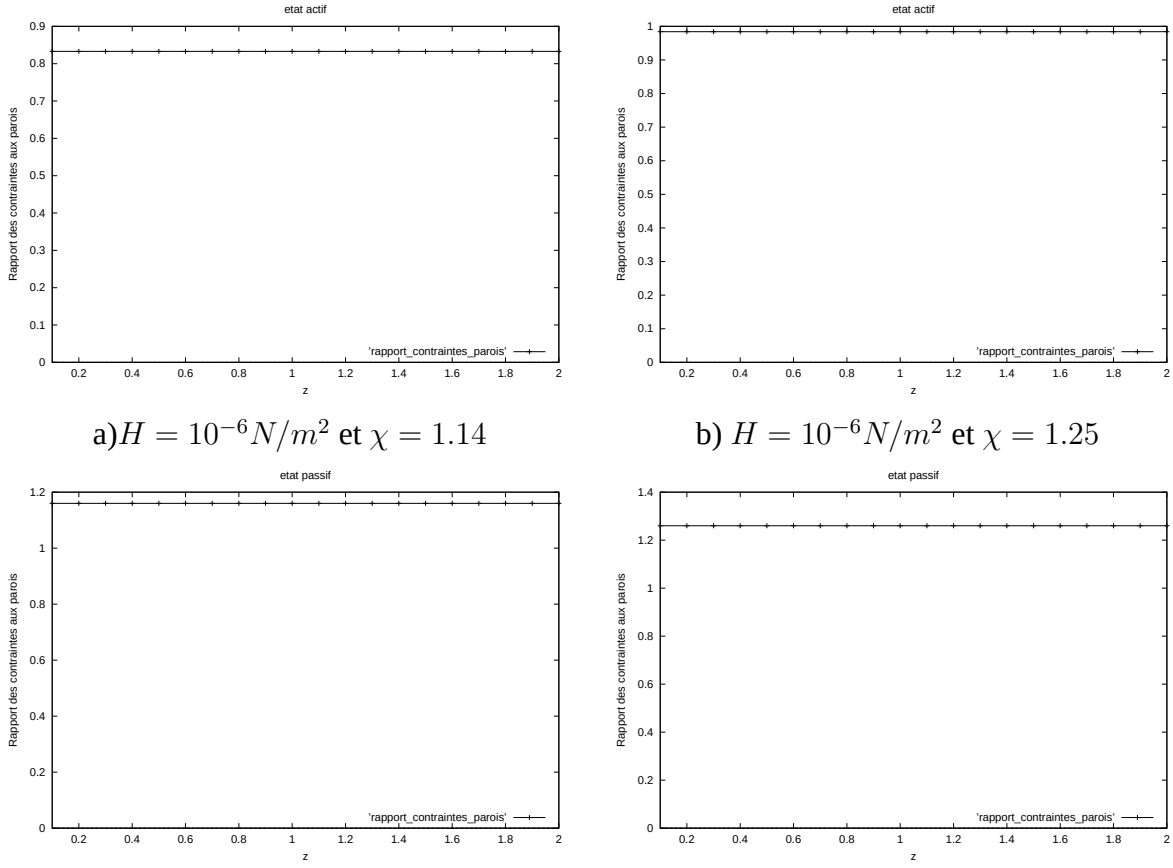
a)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.14$ b) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.37$

c)$H = 100N/m^2$ et $\chi = 1.14$ d) $H = 100N/m^2$ et $\chi = 1.37$

FIG. 2.4 – Variations des contraintes suivant z pour $\phi_p = 35°$ fixée.

Les figures (2.5a) et (2.5b) représentent les variations de λ_p pour une cohésion $H = 10^{-6}N/m^2$ fixée et pour deux valeurs de $\chi = 1.14$ et $\chi = 1.25$. Dans ce cas, le matériau est dans un état actif. De plus, on obtient bien comme résultat que le rapport des contraintes aux parois est constant, sa valeur numérique obtenue pour $(\phi, \phi_p) = (40°, 35°)$ est $\lambda_p = 0.833$. Cette valeur correspond exactement à celle donnée par les relations (2.2) à (2.4) pour $(\phi, \phi_p) = (40°, 35°)$ et $\varepsilon = -1$ correspondant à l'état actif. Le même résultat est obtenu aux figures (2.5c) et (2.5d) où le matériau est dans un état passif. La valeur numérique de λ_p obtenue pour $(\phi, \phi_p) = (48°, 35°)$ est $\lambda_p = 1.12$. Elle correspond exactement à celle obtenue à partir des expressions théoriques (2.2), (2.3) et (2.4) pour $(\phi, \phi_p) = (48°, 35°)$

et $\varepsilon = 1$ correspondant à l'état passif. Ce résultat valide à nouveau l'approche développée ici dans le cas $\phi > \phi_p$.

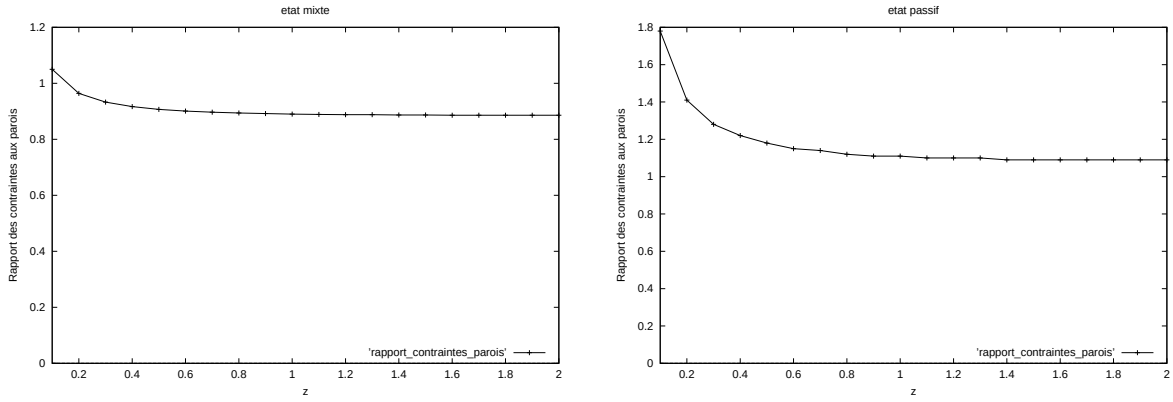


a)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.14$ b) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.25$

c)$H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.37$ d) $H = 10^{-6}N/m^2$ et $\chi = 1.48$

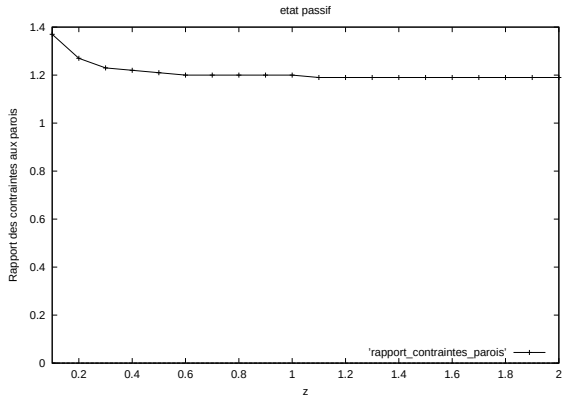
FIG. 2.5 – Variations du rapport des contraintes aux parois suivant z pour $\phi_p = 35°$ fixée.

Par contre, pour les matériaux cohésifs, le rapport des contraintes aux parois n'est plus constant et varie en fonction de la profondeur z. Sur la figure (2.6) sont représentée les variations de λ_p suivant z pour $H = 100N/m^2$ et $H = 450N/m^2$. On observe que le rapport des contraintes aux parois, pour (ϕ, ϕ_p) fixés, décroît quand la cohésion augmente. De plus, λ_p tend vers une valeur limite constante lorsque z augmente, atteinte d'autant plus vite que la cohésion est grande. Cette valeur limite correspond aux rapports des valeurs limites atteintes par les contraintes aux parois lorsque z augmente (voir figure (2.4) par exemple).

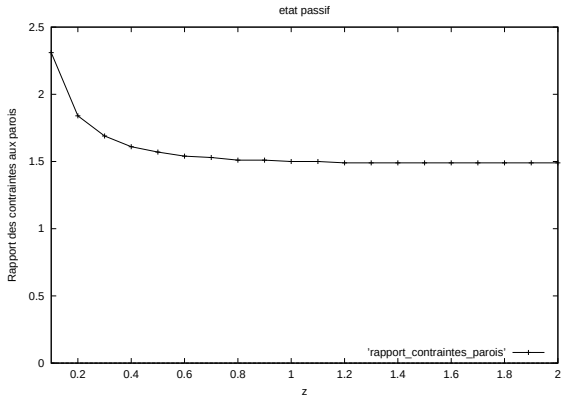


a)$H = 100N/m^2$ et $\chi = 1.14$

b) $H = 450N/m^2$ et $\chi = 1.14$



c)$H = 100N/m^2$ et $\chi = 1.37$



d) $H = 450N/m^2$ et $\chi = 1.37$

FIG. 2.6 – Variations du rapport des contraintes aux parois suivant z pour $\phi_p = 35°$ fixée..

2.3 Etude du cas $\phi < \phi_p$

Dans le cas où l'angle de frottement interne est strictement inférieur à l'angle de frottement aux parois, la solution du problème est plus complexe. Cette complexité vient de la condition de glissement aux parois qui doit être vérifiée.

2.3.1 Résolution analytique

On considère maintenant le dernier cas de figure possible où l'angle de frottement interne est inférieur à l'angle de frottement aux parois. Dans ce cas, en reprenant le calcul du chapitre précédent, l'expression (1.27) de D s'écrit :

$$D = \frac{-\mu_p(1-\sin\phi)}{1+u^2}[(u - \frac{\tan\phi(1+\sin\phi)}{\mu_p\cos\phi})^2 + \frac{(1+\sin\phi)^2}{\cos^2\phi}[1 - \frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p}]]$$

que l'on peut noter :

$$D = \frac{-\mu_p(1-\sin\phi)}{1+u^2}[(u-a)^2 + b^2]$$

avec :

$$\begin{cases} a = \dfrac{\tan\phi}{\mu_p} u_0 \\ b^2 = [1 - \dfrac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p}] u_0^2 \end{cases}$$

Par analogie avec le cas précédent $\phi > \phi_p$, l'équation différentielle (1.25) après changement de variable $u = \tan\alpha^0$ s'écrit :

$$\tilde{k} \frac{(u-u_1)(u-u_2)}{[(u-a)^2+b^2](\dfrac{u}{2} - \dfrac{\xi(1-\sin\phi)}{4\cos\phi}[(u-a)^2+b^2])} du = dz \tag{2.5}$$

avec :

$$\tilde{k} = \frac{-2u_0^3 H \tan\phi}{\gamma\mu_p}$$

De la même façon que précédemment, on étudie les singularités éventuelles que pourrait donner le terme :

$$E = \frac{u}{2} - \frac{\gamma R_h(1-\sin\phi)}{2H\sin\phi}[(u-a)^2+b^2]$$

Ce terme était équivalent à (voir le cas $\phi > \phi_p$) :

$$E = -\frac{\xi}{4u_0}[u^2 - 2u_0\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}u + u_0^2 - \frac{2u_0 u}{\xi}] \tag{2.6}$$

pour lequel on aura ici :

$$\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p} < 1$$

Ainsi, le signe de l'expression (2.6) de E dépend du signe de son discriminant Δ donné par :

$$\Delta = 4u_0^2(\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p} - 1 + \frac{2\tan\phi}{\xi\tan\phi_p} + \frac{1}{\xi^2})$$

Deux cas sont possibles :

– si $\Delta \geq 0$, l'équation $E = 0$ possède des solutions réelles[2].

– si $\Delta < 0$, l'équation $E = 0$ ne possède pas de solution réelles.

Etude du cas $\Delta > 0$

Puisque $\dfrac{\tan\phi}{\tan\phi_p} < 1$ et $\xi = \dfrac{2\gamma R_h}{\mu H} > 0$, la condition $\Delta > 0$ ne peut être satisfaite que si la cohésion du matériau est supérieure ou égale à une cohésion limite H_Δ les autres paramètres étant fixées. Cette cohésion limite qui dépend des données physiques du problème, peut être calculée analytiquement en fonction de ϕ, ϕ_p, γ,R_h (voir annexe A).

[2]Le cas $\Delta = 0$, où on obtient une solution double, est peu probable à obtenir physiquement.

Plaçons nous dans le cas où $\Delta \geq 0$ et $H \geq H_\Delta$. L'équation différentielle (2.5) devient alors :

$$\tilde{k}\frac{(u-u_1)(u-u_2)}{[(u-a)^2+b^2](u-u_7)(u-u_8)}du = dz \tag{2.7}$$

avec :

$$\begin{aligned} u_7 &= \frac{u_0}{\xi}\left[1+\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p} - \sqrt{\xi^2[\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p}-1]+2\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+1}\right] \\ u_8 &= \frac{u_0}{\xi}\left[1+\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p} + \sqrt{\xi^2[\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p}-1]+2\xi\frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}+1}\right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

La décomposition en éléments simples de l'équation (2.7) conduit à :

$$\tilde{k}\frac{cu+d}{[(u-a)^2+b^2]} + \frac{e}{(u-u_7)} + \frac{f}{(u-u_8)}du = dz \tag{2.9}$$

avec :

$$\begin{cases} e = \dfrac{(u_7-u_1)(u_7-u_2)}{[(u_7-a)^2+b^2](u_7-u_8)} \\ f = \dfrac{(u_8-u_1)(u_8-u_2)}{[(u_8-a)^2+b^2](u_8-u_7)} \\ c = -e-f \\ d = \dfrac{u_1u_2}{u_7u_8} + (\dfrac{e}{u_7}+\dfrac{f}{u_8})(a^2+b^2) \end{cases}$$

Ainsi, l'intégration de l'équation différentielle (2.5) revient à trouver les valeurs de u vérifiant :

$$r(u) = z$$

à z fixé, où $r(u) = q(u) - q(u_l)$ et où la fonction $q(u)$ est donnée par :

$$q(u) = \tilde{k}\left[\frac{1}{2}c\ln\{(u-a)^2+b^2\} + \frac{ca+d}{b}arctan(\frac{u-a}{b}) + e\ln|u-u_7| + f\ln|u-u_8|\right] \tag{2.10}$$

On rappelle que la valeur limite de $u_l = \tan(\frac{1}{2}\arctan(2\tan\phi_p))$ est donnée par la condition limite $\sigma_z^0 = 0$ en $z = 0$.

Maintenant, on doit classer les singularités afin de déterminer les limites de la fonction $r(u)$ en ces points singuliers. Les expressions des deux singularités u_7 et u_8 données par (2.8) nous montrent clairement que $u_7 < u_8$. Or, pour déterminer les limites de la fonction

$r(u)$ aux points singuliers, il faut connaître les positions respectives sur l'axe des réels des coefficients u_1, u_2, u_7 et u_8 intervenant dans l'expression de la fonction $q(u)$, ainsi que le signe des coefficients e et f.

On rappelle les expressions (1.26) de u_1 et u_2 :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2\mu_p + \sqrt{4\mu_p^2 + \cos^2\phi}}{1+\sin\phi} \\ u_2 = \dfrac{2\mu_p - \sqrt{4\mu_p^2 + \cos^2\phi}}{1+\sin\phi} \end{cases}$$

Tout d'abord, on remarque que u_2 est le seul terme négatif parmi des singularités positives. Ainsi on a de façon évidente :

$$u_2 < u_7 < u_8$$

D'autre part, on a $u_7 u_8 = u_0^2$. Comme $u_7 < u_8$ et $u_0 > 0$, on obtient $u_7 < u_0 < u_8$. De plus, pour $\phi_p > \phi$ on peut monter facilement comme précédemment que l'on a $u_1 > u_0$, ce qui implique que $u_7 < u_1$. Ce résultat reste vrai pour toute cohésion $H \geq H_\Delta$. Ainsi, on a :

$$e > 0 \quad \forall H \geq H_\Delta$$

Finalement, si on étudie la fonction $w(\phi, \phi_p) = u_1 - u_8$ pour $H \geq H_\Delta$, on remarque que le signe de cette fonction change en fonction de la cohésion. Elle devient strictement negative pour des cohésions fortes ($H \geq H_w$) où H_w est difficile à calculer analytiquement. Ainsi, il est difficile de classer u_1 par rapport à u_8 pour toute cohésion $H \geq H_\Delta$. Cependant, cette classification n'est pas indispensable pour la suite et n'est donc pas effectuée ici. En effet, comme $\tilde{k} < 0$, on a toujours de façon évidente :

$$\lim_{u \to u_7} r(u) = +\infty \quad \forall H \geq H_\Delta$$

En conclusion, pour tout $z \geq 0$, l'équation $r(u) = z$ admet toujours une solution dans l'intervalle $[u_l, u_7]$ si $u_l < u_7$ ou dans l'intervalle $[u_7, u_l]$ si $u_7 < u_l$.

Par exemple, la figure (2.7) présente les variations de la fonction $r(u)$ pour les valeurs particulières suivantes : $\phi = 10^\circ$, $\phi_p = 17^\circ$, $\rho = 980 kg/m^3$, $R_h = 0.125m$ et $H = 8000 N/m^2$. On a choisi ici volontairement une cohésion plus grande que la cohésion limite H_w pour pouvoir visualiser les deux singularités u_7 et u_8.

L'étude des variations de la fonction $r(u)$, dont un exemple est présenté (2.7), montre que

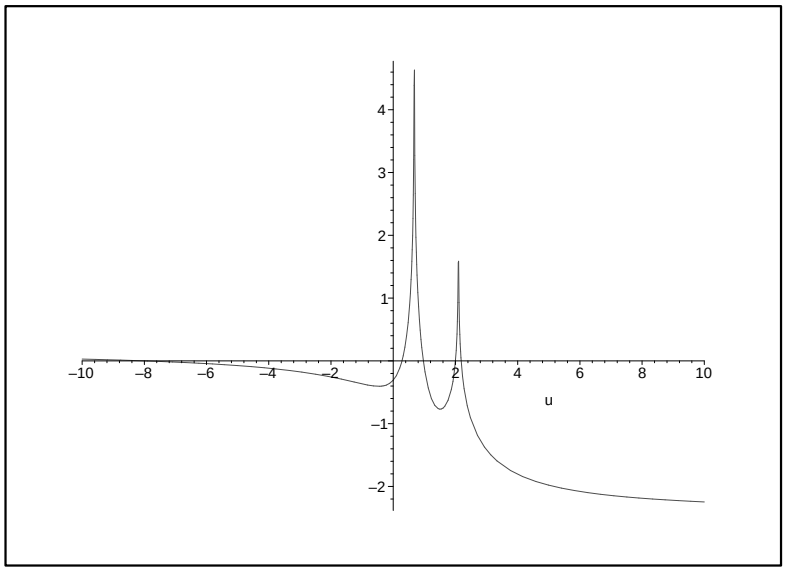


FIG. 2.7 – Variations de la fonction $r(u)$ dans le cas où $\Delta > 0$ avec les singularités $u_7 < u_8$

dans le cas où $H \geq H_w \geq H_\Delta$, cette fonction est respectivement :

$$\begin{cases} \text{croissante sur }]-\infty, u_7[, \\ \text{décroissante puis croissante sur }]u_7, u_8[, \\ \text{décroissante sur }]u_8, +\infty[, \end{cases}$$

Les autres cas possibles ne sont pas représentés graphiquement ici car ils ne présentent pas d'intérêt, étant donné que l'on est assuré d'avoir toujours une solution de l'équation $r(u) = z, \forall z \geq 0$ dès que $H \geq H_\Delta$.

Résolution numérique dans le cas $\Delta > 0$

On a vu auparavant que la condition $\Delta > 0$ n'est satisfaite que pour des cohésions élevées supérieures à une cohésion limite H_Δ. Dans ce cas, on a seulement deux singularités u_7 et u_8. On va maintenant déterminer les intervalles de résolution possibles pour ces deux singularités.

Dans le cas où $H \geq H_\Delta$, on a : $u_l < u_0 < u_8$. Alors, les positions possibles du terme u_l sont les suivantes :

$$\begin{cases} \text{soit } u_l \quad \epsilon \,]0, u_7[\\ \text{soit } u_l \quad \epsilon \,]u_7, u_8[\end{cases}$$

Or, on a vu que e est strictement positif quelle que soit la cohésion H avec $H \geq H_\Delta$ (c'est la condition nécessaire pour qu'il y ait une solution dans le cas $\phi < \phi_p$). Alors, il convient

de choisir u_7 comme la deuxième borne de l'intervalle pour avoir toujours une solution au problème. Ainsi :

$$\begin{cases} \text{si } u_l < u_7, \text{ on prendra } I_c = [u_l, u_7[. \\ \text{si } u_l \quad \epsilon\,]u_7, u_8[\Rightarrow I_c =]u_7, u_l] \end{cases}$$

Etude du cas $\Delta < 0$

Dans le cas où $\Delta < 0$, l'équation différentielle (2.5) se réduit à :

$$\tilde{k}\frac{(u-u_1)(u-u_2)}{[(u-a)^2+b^2][(u-u_{10})^2+u_{11}]}du = dz \tag{2.11}$$

avec

$$\begin{cases} u_{10} = u_0(\dfrac{\tan\phi}{\tan\phi_p} + \dfrac{1}{\xi}) \\ u_{11} = -u_0^2(\dfrac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p} - 1 + \dfrac{2}{\xi}\dfrac{\tan\phi}{\tan\phi_p} + \dfrac{1}{\xi^2}) > 0 \\ \tilde{k} = \dfrac{-2u_0^3 H\tan\phi}{\gamma\tan\phi_p} \end{cases}$$

Le dénominateur de l'équation (2.11) ne possède pas de racines réelles. En effet, comme $\Delta < 0$ et $\Delta = -4u_{11}$, on aura $u_{11} > 0$. Alors, la décomposition en éléments simples de l'équation (2.11) conduit à :

$$\tilde{k}\left[\frac{tu+v}{[(u-a)^2+b^2]} + \frac{mu+n}{[(u-u_{10})^2+u_{11}]}\right]du = dz \tag{2.12}$$

avec :

$$\begin{cases} v = \dfrac{u_1u_2[G-2(u_1-2a)(u_{10}-a)] - [G+2u_2(u_{10}-a)](a^2+b^2)}{(u_{10}^2+u_{11})[G-2(u_1-2a)(u_{10}-a)] - [G-2(u_1-2u_{10})(u_{10}-a)](a^2+b^2)} \\ n = \dfrac{u_1u_2 - v(u_{10}^2+u_{11})}{a^2+b^2} \\ m = \dfrac{1-v-n}{2(u_{10}-a)} = -t \end{cases}$$

et où on a posé $G = -[2(a-u_{10})u_1 + u_{10}^2 + u_{11} - a^2 - b^2]$.

L'intégration de (2.12) conduit à :

$$r(u) = z$$

où $r(u) = q(u) - q(u_l)$ et où $q(u)$ est définie par :

$$q(u) = \tilde{k}\Bigg[-\frac{1}{2}m\ln\{(u-a)^2+b^2\} + \frac{ta+v}{b}\arctan(\frac{u-a}{b}) + \frac{1}{2}m\ln\{(u-u_{10})^2+u_{11}\} + \frac{mu_{10}+b}{\sqrt{u_{11}}}\arctan(\frac{u-u_{10}}{\sqrt{u_{11}}})\Bigg]$$

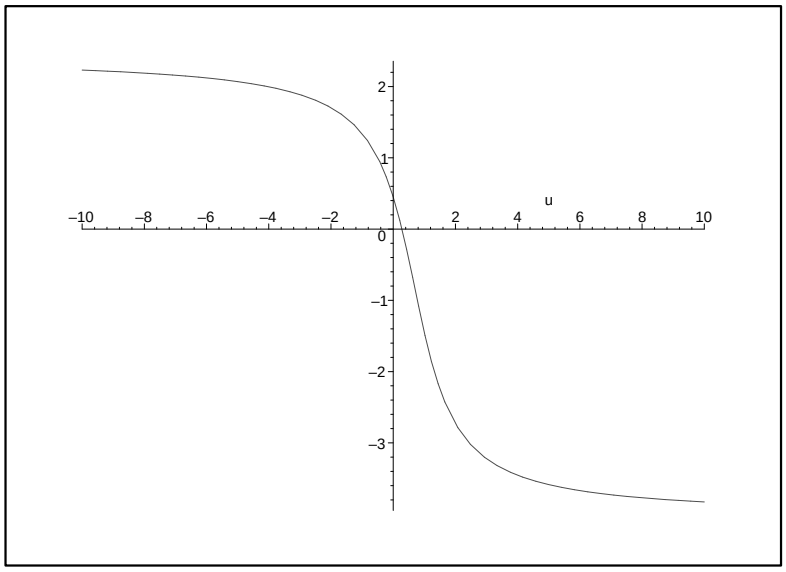


FIG. 2.8 – Variations de la fonction $r(u)$ dans le cas où $\Delta < 0$.

Les variations de la fonction $r(u)$ représentées sur la figure (2.8) pour les valeurs suivantes : $(\phi, \phi_p) = (10°, 17°)$, $H = 1N/m^2$, $\rho = 980kg/m^3$ et $R_h = 0.125m$, montrent que l'équation $r(u) = z$ n'admet pas de solution pour toutes les profondeurs z. En particulier, pour le cas considéré ici, et qui correspond à de faibles cohésions, l'équation $r(u) = z$ n'admet pas de solution pour $z \geq 1.5m$ (voir la figure (2.8)). Ce résultat peut être expliqué de la manière suivante : pour de faibles cohésions, $\phi < \phi_p$ est incompatible avec la condition de glissement aux parois. Par contre, lorsqu'on augmente la cohésion jusqu'à une valeur $H \geq H_\Delta$ (pour laquelle $\Delta \geq 0$), l'équation $r(u) = z$ admet des solution pour toute valeur de la profondeur z. Cela signifie que physiquement, dans le cas de fortes cohésions, le matériau a tendance à s'écouler en blocs et la condition de glissement aux parois du silo est alors satisfaite.

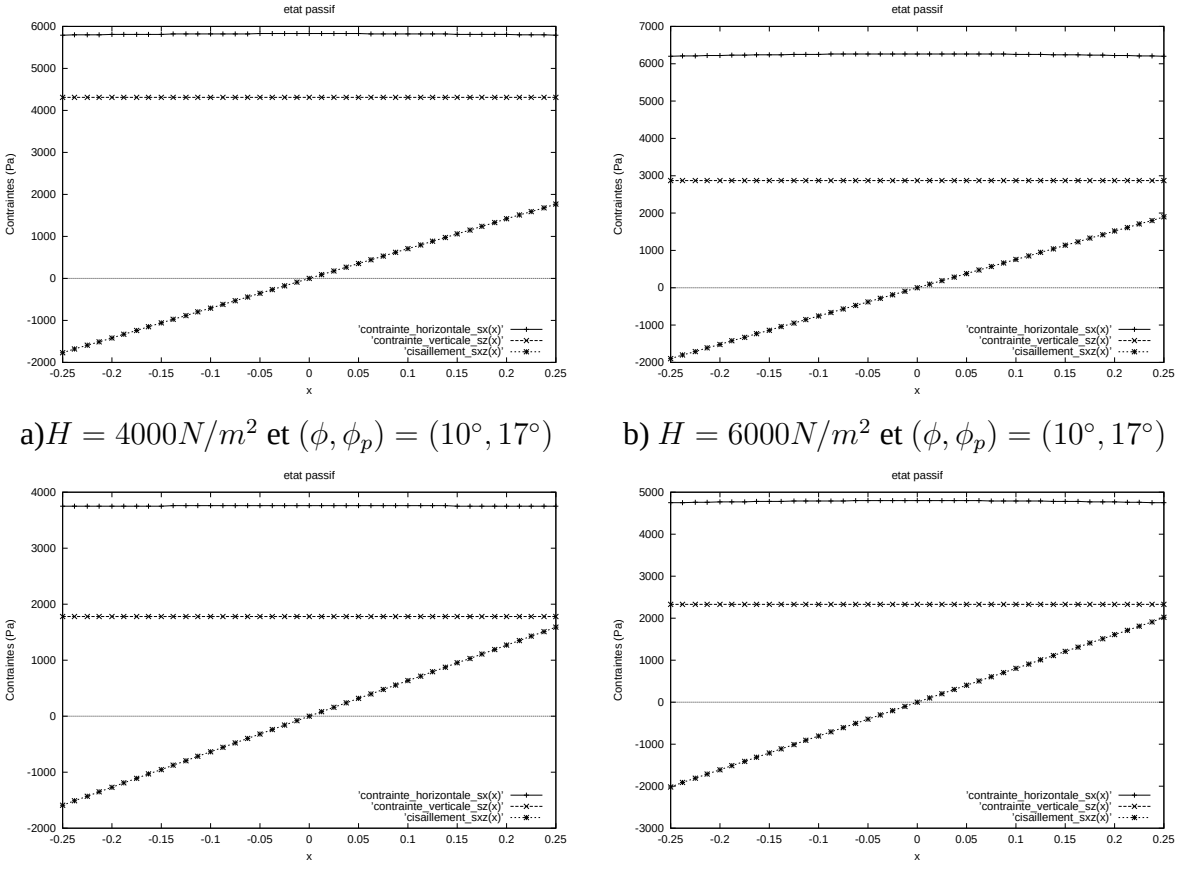
2.3.2 Influence des paramètres physiques dans le cas $\Delta > 0$

On va maintenant étudier l'influence de la cohésion et des angles de frottement dans le cas où[3] $\Delta > 0$.

[3]Étant donné que pour $\Delta < 0$, le problème n'a pas de solution

Influence de la cohésion sur les contraintes

On rappelle que dans le cas $\phi < \phi_p$, le problème n'admet de solution que pour de fortes cohésions $H \geq H_\Delta$. On va étudier l'influence de telles cohésions sur les contraintes. La figure (2.9) représente les variations des contraintes en fonction de x à $z = 1m$ pour différentes valeurs de la cohésion $H \geq H_\Delta$, (ϕ, ϕ_p) étant fixés. On remarque que lorsque la cohésion augmente, la contrainte horizontale σ_x augmente et la contrainte verticale σ_z diminue. Par contre la contrainte de cisaillement est peu influencée. Ces résultats sont comparables à ceux obtenus précédemment.



a)$H = 4000N/m^2$ et $(\phi, \phi_p) = (10°, 17°)$ b) $H = 6000N/m^2$ et $(\phi, \phi_p) = (10°, 17°)$

c)$H = 4000N/m^2$ et $(\phi, \phi_p) = (10°, 23°)$ d) $H = 6000N/m^2$ et $(\phi, \phi_p) = (10°, 23°)$

FIG. 2.9 – Variations des contraintes suivant x à $z = 1m$ pour des matériaux cohésifs.

Il est important de noter que dans le cas $\phi < \phi_p$ et pour de fortes cohésions, le matériau granulaire se trouve toujours dans un état passif dans tout le silo. Ce résultat est identique à celui retrouvé dans le cas où $\phi \geq \phi_p$ pour de fortes cohésions.

Finalement, on remarque que lorsque $\chi = \dfrac{\phi}{\phi_p}$ diminue, la contrainte horizontale et ver-

ticale augmentent de façon importante, tandis que la contrainte de cisaillement diminue, mais de façon très faible.

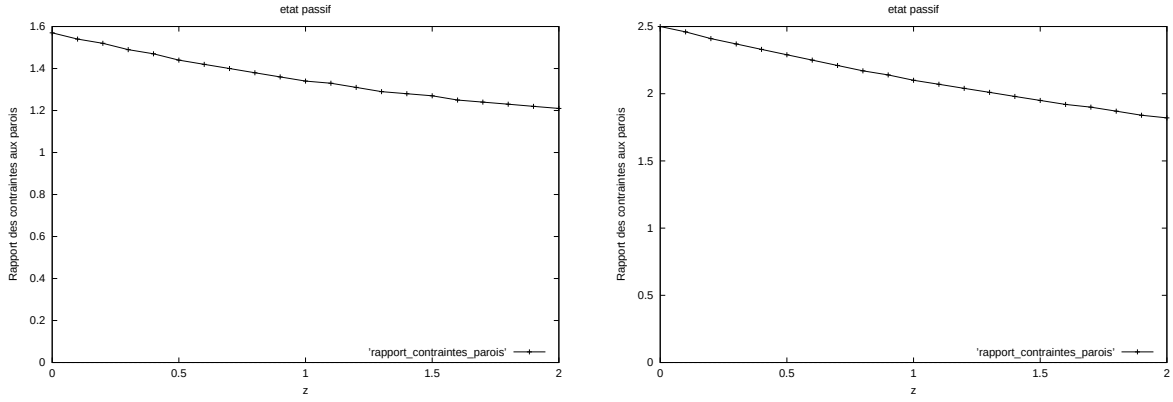
Rapport des contraintes aux parois

Le rapport des contraintes aux parois $\lambda_p = \dfrac{\sigma_x^0}{\sigma_z^0}$ est donné par :

$$\lambda_p = \frac{1 + \sin\phi \cos 2\alpha^0}{1 - \sin\phi \cos 2\alpha^0}$$

où l'angle α^0 depend de la profondeur z du silo. La figure (2.10) présente les variations du paramètre λ_p en fonction de z pour une forte cohésion $H \geq H_\Delta$ et pour différentes valeurs des angles de frottement. La décroissance de λ_p suivant z est importante à cause des fortes cohésions considérées. De plus, on remarque que λ_p augmente lorsque χ augmente. Ce dernier résultat peut être directement déduit des variations de contraintes en fonction de la cohésion représentées sur la figure (2.9).

Enfin, on peut noter sur la figure (2.10) que λ_p tend également vers une valeur limite, atteinte moins rapidement que dans le cas $\phi \geq \phi_p$ (voir la figure (2.4) par exemple). De plus, il est évident à la vue de la figure (2.10) que plus χ augmente, plus la valeur limite de λ_p est atteinte rapidement. Ce résultat est en adéquation avec les variations des contraintes aux parois σ_x^0 et σ_z^0 en fonction de z représentées sur la figure (2.9).



a)$H = 4000N/m^2$ et $(\phi, \phi_p) = (10°, 17°)$ b) $H = 4000N/m^2$ et $(\phi, \phi_p) = (10°, 23°)$

FIG. 2.10 – Variations du rapport des contraintes aux parois en fonction de z pour des matériaux cohésifs.

2.4 Conclusion

Nous avons développé, dans ces deux premiers chapitres, une approche analytique, basée sur les équations de la mécanique des milieux continus, qui s'affranchit des limitations de la théorie de Janssen et permet le calcul des contraintes dans un matériau granulaire ensilé quels que soient les paramètres physiques intervenant. Dans le premier chapitre nous avons étudié le cas des angles de frottement interne et aux parois égaux ce qui nous a permis de comparer notre approche avec la théorie de Janssen. Dans ce deuxième chapitre nous avons traité séparément les deux cas $\phi > \phi_p$ et $\phi < \phi_p$ où les résultats obtenus sont différents.

Dans le cas $\phi > \phi_p$, nous remarquons aussi l'existence d'états mixtes de contraintes où le matériau change de configuration en fonction de la profondeur du silo. Avec la présente approche, l'état du matériau est déterminé à partir des paramètres physiques intervenant (angle de frottement aux parois, angle de frottement interne, cohésion, dimension du silo...), comme une solution du problème. D'autre part, l'influence des autres paramètres sur les contraintes et le rapport des contraintes aux parois a été étudié en détail. Finalement, dans le cas $\phi < \phi_p$, on constate que le problème ne peut être résolu que pour des cohésions suffisamment grandes, afin de satisfaire la condition de glissement imposée aux parois du silo.

Chapitre 3

Simulations numériques discrètes des milieux granulaires

3.1 Introduction

Du point de vue expérimental, tous les essais de la mécanique des sols utilisant le modèle de Schneebeli [109] sont réalisables, comme l'essai œdométrique [119], l'essai triaxial [36], l'essai bidirectionnel [6] et l'essai de cisaillement direct [1]. L'avantage de ces essais de laboratoire est de fournir des valeurs en grandes quantités dans des cas bien déterminés de conditions limites et de chargements. De plus, par des techniques de visualisation appropriées, les essais sur le matériau modèle autorisent l'analyse de la microstructure. On peut distinguer la photo-élasticité qui met en évidence l'hétérogénéité des efforts de contact et la technique du traitement d'images qui rend compte de la cinématique des grains et de certains paramètres structuraux [44][62]. Cependant, par manque de répétabilité[1] [36], les essais de laboratoire ne permettent pas d'identifier et de classifier avec précision les variables locales.

La méthode des éléments finis (FEM) est basée sur une approche traditionnelle, celle de la mécanique des milieux continus, à l'instar de la mécanique des fluides et de la théorie de l'élasticité où il est impossible et inutile de raisonner sur les grains individuellement. Cette méthode considère que le milieu est continu et elle nécessite de définir les lois constitutives du matériau granulaire. Elle ne s'intéresse pas au comportement particulier de chaque grain, mais au comportement du milieu dans son ensemble.
Cependant, la méthode des éléments finis ne s'applique pas à tous les cas d'étude : difficile, en effet, d'observer des phénomènes comme la ségrégation, où les grains de petites

[1] Pour un même échantillon (mêmes conditions initiales, mêmes conditions limites), les résultats sont rarement identiques.

tailles se séparent de ceux de grandes tailles, puisque les grains ne sont pas représentés en tant que tels. En plus, elle ne tient pas compte précisément du comportement local du matériau (coefficient de frottement, nombre et orientation des contacts, les forces de contact...).

De ces différentes constatations, pour simuler numériquement le comportement complexe des systèmes granulaires (ou de matériaux granulaires), s'est développée la Méthode des Eléments Discrets (DEM) qui considère le milieu comme discontinu. Son fondement théorique repose sur la formulation et la résolution des équations du mouvement des corps supposés rigides (grains) qui constituent le milieu granulaire. L'utilisation d'outils, comme les théories d'homogénéisation, qui moyennent les informations microscopiques telles que la cinématique des grains et les efforts intergranulaires [12][13][14], permettent de faire le lien entre les phénomènes discrets se produisant dans le milieu et le comportement global du système.

Dans ce chapitre, nous présenterons le code de simulations numériques discrètes MULTICOR [39][43]. L'originalité de celui-ci consiste à utiliser comme solveur de contact le bipotentiel initié par G. de Saxcé [106] [107]. De plus, il utilise le concept NSCD développé par M. Jean [54] et J.-J Moreau [82], ce qui permet de modéliser correctement les effets dynamiques mais aussi de travailler avec un pas de discrétisation très grand ($\triangle t \approx 10^{-3}$) en comparaison avec les codes explicites de type dynamique moléculaire ($\triangle t \approx 10^{-7}$).
Dans un second temps, nous présenterons la méthode d'homogénéisation utilisée pour calculer les contraintes au sein du massif granulaire à partir de simulations numériques discrètes. Dans le cas d'un silo rempli de grains par égrainage (obtenu par simulations discrètes), nous allons comparer les contraintes moyennes données par MULTICOR à celles prédites par la théorie de Janssen d'une part, et par l'approche analytique développée dans les deux premiers chapitres d'autre part.
Enfin, nous mettrons en évidence l'anisotropie du réseau de contact des milieux granulaires.

3.2 Méthode des Eléments Discrets

Les méthodes des Eléments Discrets ont pour origine la dynamique moléculaire : à partir des particules élémentaires constituant le milieu granulaire et de la connaissance de leurs interactions réciproques, la méthode de modélisation doit être capable de prévoir le comportement de ce système granulaire. Il s'agit donc, de calculer le mouvement des

particules composant le système, c'est-à-dire de calculer la variation de la quantité de mouvement et du moment angulaire des particules à partir de la loi fondamentale de la dynamique. L'objectif est donc d'obtenir des équations qui représentent le comportement du système discret Σ constitué de p solides rigides[2] Ω_k, restreints par des liaisons (voir figure (3.1)).

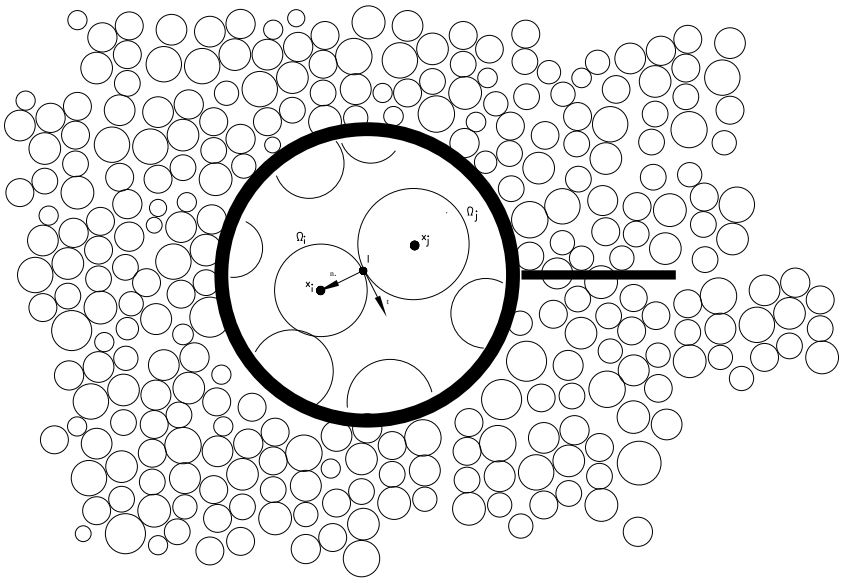


FIG. 3.1 – Système discret Σ de p solides rigides Ω_k, restreints par des liaisons.

Il est tout d'abord nécessaire de se donner un jeu de variables qui permet de décrire la configuration ou l'état du système : ce sont les coordonnées généralisées $\mathbf{q}$. Nous ferons le choix ici des coordonnées absolues[3] ($n = 3\times p$ ou $n = 6\times p$ suivant la nature du problème 2D ou 3D). On considère ici, le problème de dynamique direct[4] qui consiste à déterminer les accélérations généralisées $\ddot{\mathbf{q}}$ lorsque le système est soumis aux forces articulaires $\mathbf{Q}$ dans une configuration connue, en fonction des valeurs des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ et de leurs dérivées premières $\dot{\mathbf{q}}$. Les accélérations généralisées et les forces articulaires dépendent linéairement les unes des autres. Cette dépendance est exprimée par la relation suivante qui correspond aux équations du mouvement du système :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{3.1}$$

où $\mathbf{M}(\mathbf{q})(\in \mathbb{R}^{n\times n})$ représente la matrice de masse généralisée du système et $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ les

[2] Les solides rigides ne peuvent subir que des mouvements rigides (translations et rotations).

[3] Six coordonnées, trois pour les translations et trois pour les rotations.

[4] La dynamique directe concerne la simulation des systèmes multicorps dont on veut comprendre l'évolution.

termes gyroscopiques et centrifuges. Dans la plupart des cas, les équations du mouvement sont accompagnées d'un ensemble d'équations supplémentaires qui expriment les relations supplémentaires entre les coordonnées généralisées (notamment dues aux liaisons). Ce sont des équations de contraintes. Le nombre et la nature de ces équations dépendent essentiellement du choix des coordonnées, de la structure du système et des conditions auxquelles le système est soumis [96]. Ces équations de contraintes sont algébriques et généralement non-linéaires. On les écrit souvent sous la forme implicite suivante :

$$h(\mathbf{q}(t), t) = 0. \tag{3.2}$$

La méthode la plus générale des Eléments Discrets permet de modéliser des particules réellement déformables et de formes complexes (depuis l'ellipsoïde jusqu'au polygone) [105]. Nous nous limitons ici au cas "simple" de particules sphériques non-déformables et non-pénétrables. En choisissant comme paramètres de configuration les coordonnées du centre de gravité des grains et les rotations d'Euler, la matrice de masse de chaque particule est constante, la matrice $\mathbf{h}$ est nulle et la matrice $\mathbf{M}$ du système ne dépend pas de $\mathbf{q}$ et est diagonale par bloc. L'équation (3.1) s'écrit donc :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g) + \sum_{j,k=1}^{j,k=p} \mathbf{Q}(\Omega_j \leftrightarrow \Omega_k) = \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{R}, \tag{3.3}$$

où $\mathbf{F}_{ext}$ représentent les efforts extérieurs explicitement connus et $\mathbf{R}$ les efforts intérieurs associés aux réactions de contact à priori inconnues. L'avantage de cette méthode tient à la fois au nombre important de particules modélisables, mais aussi à l'extension du modèle à trois dimensions qui est assez facile à mettre en oeuvre. Le cycle de calcul est un algorithme de type "pas à pas" qui requiert la répétition d'un schéma de résolution (figure (3.2)).

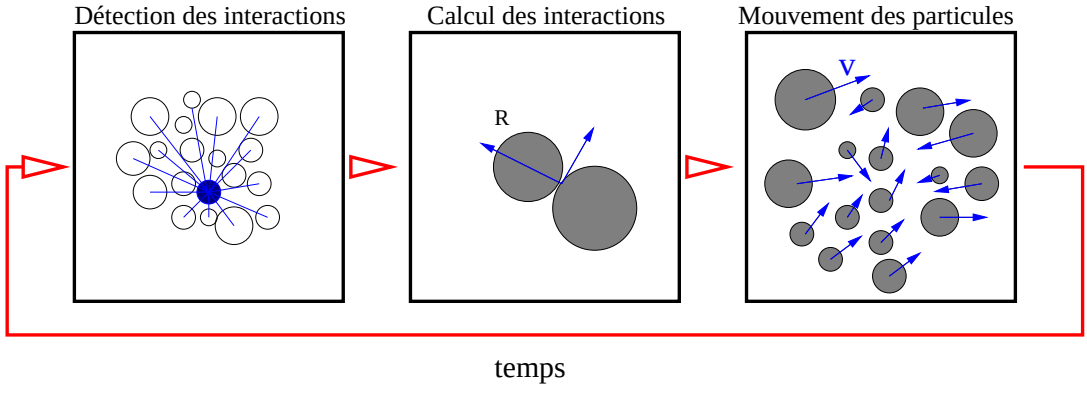


FIG. 3.2 – Processus de résolution dans un algorithme de type "Eléments Discrets".

L'équation (3.3) est discrétisée en temps via un schéma d'intégration temporelle. Au début de chaque cycle de calcul, les interactions entre particules sont déterminées à partir de la position des particules (étape 1). En effet, ces interactions se forment et disparaissent au cours de la simulation en fonction des positions relatives des particules, et de la portée des interactions. Une fois les interactions repérées, on applique une loi d'interaction entre les particules (étape 2). Pour un milieu particulaire, on applique à chaque contact entre deux particules une loi de type force-déplacement qui permet de calculer les intensités des forces de contact résultantes à partir du mouvement relatif des deux particules et du modèle constitutif utilisé. Lorsque toutes les forces de contact ont été évaluées, que la force et le moment résultant sur chaque particule ont été calculés, on résout l'équation du mouvement pour déterminer et mettre à jour la nouvelle position et la nouvelle vitesse des particules (étape 3).

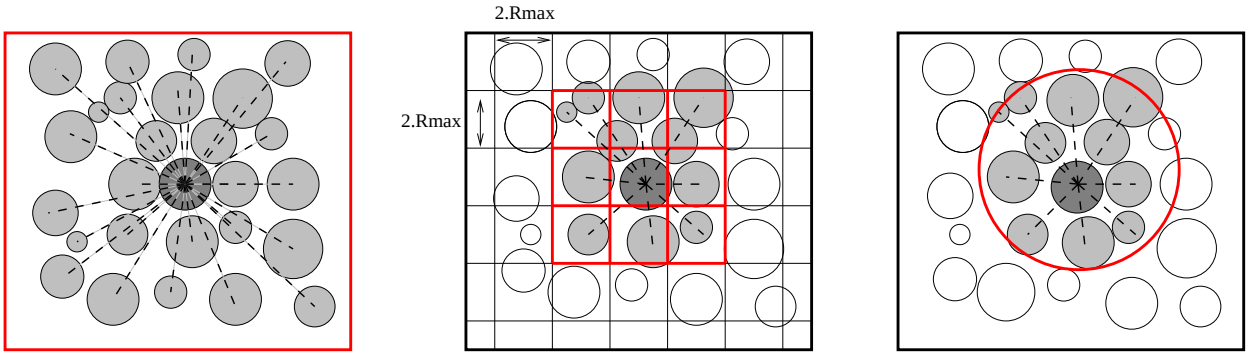
Dans ce qui suit, nous allons présenter brièvement les équations discrétisées constituant les solutions du code MULTICOR, ainsi que l'algorithme résultant.

3.2.1 Détection des interactions de paires

Dans un système composé de p particules, c'est la portée maximale des interactions qui constitue le paramètre critique pour le temps de modélisation. Plus la portée des interactions est importante, et plus il faudra tester d'interactions possibles entre les grains (pris deux à deux). Dans un système particulaire non cohésif, la portée des interactions est réduite. Si R_{max} est le rayon des plus grandes particules du système, la portée maximale des interactions sera $2R_{max}$. Intuitivement, la recherche des particules en contact avec un élément donné implique la notion de voisinage.

Classiquement, pour chaque candidat Ω_i et pour tous les antagonistes Ω_j avec $j > i$, on doit effectuer $\frac{p(p-1)}{2}$ vérifications, ce qui est très rapidement coûteux dès que p est élevé. Le temps de calcul avec une telle méthode croît comme $O(p^2)$ (figure (3.3)). Il faut donc se limiter à tester un nombre de particules que l'on considérera comme voisins. La manière de procéder la plus répandue est de quadriller l'espace (figure (3.3)). Après avoir déterminé dans quelle case se situe le grain considéré, il suffit de tester les éléments se situant dans les cases alentours [29]. En prenant des cases de longueur optimale $l = 2.R_{max}$, il suffit de tester la case centrale et les 8 autres adjacentes.

Une autre méthode possible est celle du halo (figure (3.3)). Elle consiste à maintenir pour chaque particule la liste de ses plus proches voisins. Chaque particule est ainsi entourée d'une bulle dont elle est le centre, et seuls les grains contenus dans ce halo sont pris en



(a) totalité des paires (b) grille de repérage (c) halo

FIG. 3.3 – Techniques de recherche des paires de p particules en interaction.

compte dans le test [49]. D'autres techniques comme celle du tri (les billes sont classées de droite à gauche et de bas en haut dans deux tableaux [84]), du maillage adaptatif [128], ou de la triangulation [37] sont également utilisées.

MULTICOR utilise la méthode de partitionnement couplé à une table de connectivité [103]. Cela permet d'avoir un algorithme performant de détection des contacts. Elle consiste à subdiviser l'espace du système $\sum$ au moyen d'une grille bidimensionnelle ou tridimensionnelle (figure (3.4)).

La dimension des cellules doit être plus grande que la portée maximale des interactions. La notion de voisinage est ici réduite aux mailles proches les unes des autres, c'est-à-dire, les mailles partageant un sommet, une arête ou bien encore une face en $3D$. Partant de cette condition, et en fonction de sa position, une maille peut avoir entre 1 et 14 voisines pour un système tridimensionnel, et entre 1 et 5 pour un système bidimensionnel. Ce calcul inclut la maille elle-même. On désigne par table de connectivité l'ensemble formé par une maille et ses voisines. Les particules sont assignées à ces tables de connectivités sur la base de leur positions respectives. On désigne alors par patch pour l'ensemble des particules appartenant à une même table de connectivité.

Pour chaque patch, les couples de particules sont considérés comme des interactions possibles et sont donc testés. Ce test est basé sur l'analyse des interstices u_n entre deux particules voisines :

$$u_n = ||\hat{\mathbf{X}}_i - \hat{\mathbf{X}}_j|| - (a_i + a_j) \leq \beta \tag{3.4}$$

où $\hat{\mathbf{X}}_i$, $\hat{\mathbf{X}}_j$, a_i, a_j sont respectivement les coordonnées des centres de gravité et les rayons moyens des corps Ω_i et Ω_j, β étant un petit paramètre. Si les particules sont suffisamment

proches pour interagir, la paire considérée est répertoriée comme une interaction potentielle.

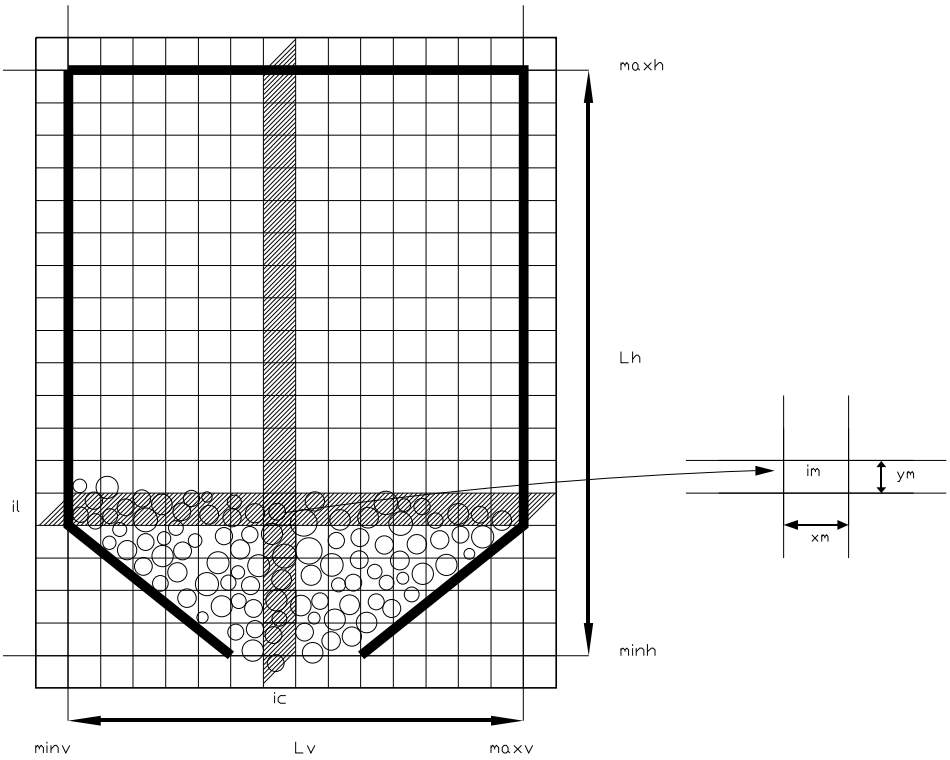


FIG. 3.4 – Partitionnement de l'espace en sous-domaines.

Cette technique permet de réduire considérablement le volume de calcul. Cette fois-ci, le nombre d'opération ne croît plus comme $O(p^2)$ mais seulement comme $O(p)$, ce qui est un gain considérable.

3.2.2 Solveur bipotentiel de contact

A chaque paire de particules Ω_i et Ω_j candidates au contact, est associé un référentiel local dont les axes sont orientés suivant les deux vecteurs unitaires $\underline{n}$ et $\underline{t}$, respectivement normal et tangent au plan de contact. La normale $\underline{n}$ est dirigée de Ω_j vers Ω_i. Les variables mises en dualité sont $\underline{\dot{u}}$, la vitesse relative locale de Ω_i par rapport à Ω_j, et la réaction de contact $\underline{r}$ de Ω_j sur Ω_i. Elles se décomposent dans la base locale par :

$$\underline{\dot{u}} = \underline{\dot{u}}_t + \dot{u}_n.\underline{n}\,, \qquad \underline{r} = \underline{r}_t + r_n.\underline{n}\,, \tag{3.5}$$

où $\dot{u}_n$ est la vitesse de séparation normale, $\underline{\dot{u}_t}$ la vitesse de glissement, r_n la pression de contact et $\underline{r_t}$ la force d'adhérence.

Dans les domaines où la collection de corps entre lesquels des liaisons unilatérales, usuellement affectées de frottement μ, sont susceptibles de s'établir ou de se rompre, les équations de contraintes (3.1) peuvent s'écrire sous la forme implicite suivante :

$$h(\mathbf{q}(t), t) \leq 0. \tag{3.6}$$

L'introduction du frottement de Coulomb, avec K_μ le cône de frottement isotrope de Coulomb défini par :

$$K_\mu = \{(r_n, \underline{r_t}) \; tels \; que \; f(r_n, \underline{r_t}) = ||\underline{r_t}|| - \mu r_n \leq 0\} \tag{3.7}$$

conduit à un problème de complémentarité non linéaire [26] qui ne peut être résolu par une méthode de programmation linéaire.

Dans la majorité des techniques numériques présentées dans la littérature, ces difficultés sont abordées au moyen d'approximations régularisantes [27][28]. Les conditions de non interpénétrabilité des corps sont remplacées par des lois de répulsion suffisamment raides qui entrent en jeu lorsque deux corps s'approchent. De même, la loi de frottement sec de Coulomb est usuellement régularisée.

L'approche classique consistant à régulariser la loi de contact utilise les théories de Hertz et de Midlin. La théorie de Hertz étudie le contact élastique entre deux grains sphériques analogues, comprimés sous l'action d'une force de contact normale r_n. Elle prédit un contact plan circulaire de rayon a et le rapprochement d_n de leur centre donné par :

$$a^3 = K r_n R, \qquad d_n^{3/2} = \frac{2K r_n}{\sqrt{R}}, \tag{3.8}$$

avec $K = \dfrac{3(1-\nu^2)}{4E}$ et où R, E et ν sont respectivement le rayon de la sphère, le module d'Young et le coefficient de Poisson. La théorie de Midlin quant à elle, tient compte, en plus, des déformations irréversibles dues aux glissements relatifs des points de contact engendrés par la composante tangentielle de la force de contact r_t. Au point de contact, la force de contact est supposée obéir aux lois de frottement solide qui utilisent comme critère de plasticité $r_t \leq r_n \tan\mu$, où μ est le coefficient de frottement. La force normale r_n est fixée, alors que la force tangentielle r_t est supposée agir dans le plan de contact avec une intensité croissant progressivement de zéro à une certaine valeur. Il se produit

un anneau de glissement sur les bords du cercle de contact, qui engendre un déplacement relatif tangentiel irréversible d_t donné par :

$$d_t^3 = a\left(1 - \left(\frac{r_t}{\mu r_n}\right)\right). \tag{3.9}$$

Du point de vue modélisation, la composante normale du contact est représentée classiquement par le modèle rhéologique de Kelvin-Voigt, qui associe en parallèle un ressort de rigidité k_n traduisant l'élasticité de contact, et un amortisseur de coefficient c_n traduisant l'absorption d'énergie (figure (3.5a)). Le même modèle rhéologique est employé pour la composante tangentielle du contact où le comportement plastique dû au frottement de Coulomb est ajouté sous la forme d'un patin de coefficient μ (figure (3.5b)).

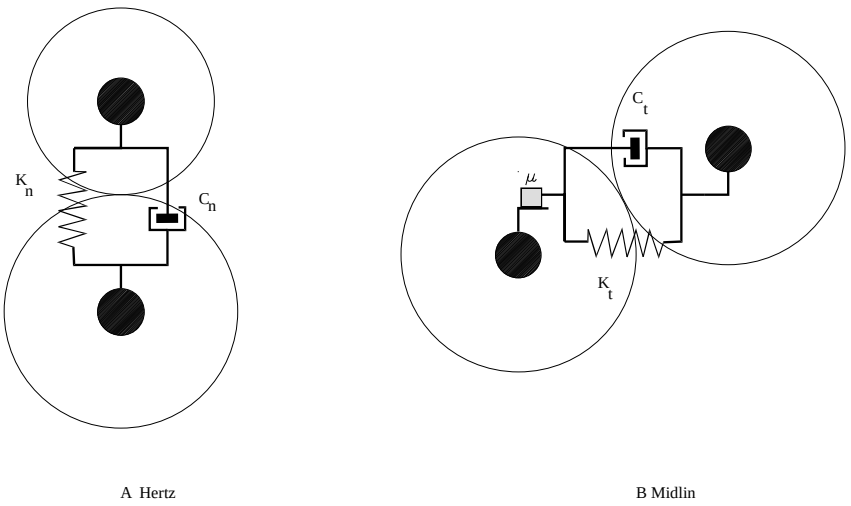


FIG. 3.5 – Modélisation du contact déformable : théorie de Hertz et de Midlin.

On est ainsi ramené à des équations différentielles traitées par les techniques numériques classiques. L'emploi de schémas d'intégration en temps explicites possède l'avantage d'estimer de manière simple les termes non linéaires présents dans les équations. Mais, dans chaque cas d'espèce, un compromis doit être trouvé entre l'exigence de précision et la raideur des équations approximantes. Cette raideur des équations impose souvent des pas de discrétisation très petits et souvent des inerties ou des viscosités artificielles sont introduites pour assurer la stabilité numérique. L'application d'une telle stratégie de calcul à des situations dynamiques demande beaucoup de précautions et de savoir-faire. Son application est moins problématique dans la recherche d'états d'équilibre. Les techniques numériques basées sur la régularisation des liaisons d'impénétrabilité sont souvent désignées par le sigle MD (pour Molecular Dynamics, en référence à leur usage dans les

simulations numériques de dynamique moléculaire [124][126]). Les logiciels PFC2 [50] et SDEC [120] sont basés sur cette formulation.

Une façon plus rigoureuse de modéliser une telle loi de contact multivoque est l'utilisation de la théorie moderne des fonctions convexes et du calcul sous-différentiel. A partir de ce formalisme mathématique, J.-J. Moreau [80] propose d'introduire le concept de pseudo-potentiel, qui est convexe et semi-défini positif [78][79]. La condition de Signorini et la loi de Coulomb s'expriment alors sous forme de loi de sous-normalité :

$$-\underline{\dot{u}}_t \in \partial\Psi_{K_{r_n}}(\underline{r}_t) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{r}_t \in \partial\varphi_{r_n}(-\underline{\dot{u}}_t). \tag{3.10}$$

Dans ce cas, la résolution numérique de ces problèmes de minimisation [33], par des techniques du lagrangien augmenté [38][48], utilise deux schémas de prédiction-correction [2][63]. G. de Saxcé [106][107] a proposé d'abandonner l'idée d'une séparation en deux pseudo-potentiels duaux et postulé l'existence d'une fonction unique des variables duales appelée bipotentiel. A partir de ce formalisme, G. de Saxcé et Z.-Q. Feng [108] ont proposé une modélisation du contact unilatéral avec frottement sec pour des corps déformables ou non, qui aboutit à un bipotentiel de contact :

$$b_c(-\underline{\dot{u}}, \underline{r}) = \Psi_{\mathbb{R}^-}(-\dot{u}_n) + \Psi_{K_\mu}(\underline{r}) + \mu t_n||-\underline{\dot{u}}_t||. \tag{3.11}$$

où $\psi_{\mathbb{R}^-}$ désigne la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$[5] et Ψ_{K_μ} est une fonction indicatrice qui prend la valeur zéro si $\mathbf{r}_t \in K_\mu$ et $+\infty$ sinon.

Elle doit être biconvexe et satisfaire une inégalité généralisant celle de Fenchel :

$$\forall -\underline{\dot{u}}, \underline{r} \in \mathbb{R}^3, \Psi_{\mathbb{R}^-}(-\dot{u}_n) + \Psi_{K_\mu}(\underline{r}) + \mu r_n||-\underline{\dot{u}}_t|| \geq -(\underline{\dot{u}}_t\underline{r}_t + \dot{u}_n r_n) \tag{3.12}$$

D'autre part, il faut que les couples extrémaux du bipotentiel vérifient la loi de contact avec frottement sec, c'est-à-dire que le bipotentiel vérifie l'égalité :

$$\mu r_n||-\underline{\dot{u}}_t|| = -(\underline{\dot{u}}_t\underline{r}_t + \dot{u}_n r_n). \tag{3.13}$$

Contrairement à l'approche usuelle, la méthode du bipotentiel conduit à un seul principe variationnel et une seule inégalité. A partir de l'algorithme d'Usawa, on aboutit à un algorithme de résolution de la loi constitutive basé sur le schéma prédicteur-correcteur suivant :

$$\begin{aligned} &\text{prédicteur :} \quad \underline{\tau}^{i+1} = \underline{r}^i - \rho^i[\underline{\dot{u}}_t^i + (\dot{u}_n^i + \mu||-\underline{\dot{u}}_t^i||).\underline{n}], \\ &\text{correcteur :} \qquad\qquad \underline{r}^{i+1} = proj(\underline{\tau}^{i+1}, K_\mu) \end{aligned} \tag{3.14}$$

[5]Cette fonction prend la valeur zéro si $-\dot{\mathbf{u}}_n \in \mathbb{R}^-$ et $+\infty$ autrement.

où la projection sur le cône de Coulomb conduit, suivant la valeur de $\underline{\tau}$, à l'un des trois statuts : non contact, contact avec adhérence ou contact avec glissement.

Travailler avec des méthodes itératives nous oblige à faire un choix de critère de convergence, tâche qui n'est pas facile. La plupart du temps, ce test s'appuie sur les propriétés de convergence de l'algorithme permettant de borner la distance des itérés à la solution généralement inconnue. Hélas dans le cas des systèmes particulaires, existence et unicité sont des propriétés se faisant désirer. Il nous faut alors faire un choix de critère, qui se doit d'être suffisamment précis pour que la solution en sortie ait un sens, mais qui ne doit pas être trop strict afin de garder des temps de calcul raisonnables. MULTICOR utilise un critère d'erreur basé sur le bipotentiel de contact qui s'apparente à une erreur en relation de comportement :

$$\epsilon = \frac{\sum b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}^{i+1}) + \dot{\mathbf{u}}.\mathbf{r}^{i+1}}{\sum b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}^{i+1})}. \tag{3.15}$$

3.2.3 Intégration du mouvement : dynamique non-régulière

Aucune flexibilité au contact n'étant prise en compte, l'apparition d'un nouveau contact, c'est-à-dire une collision, nous oblige à reconsidérer les équations. Il est préférable alors de réécrire l'équation (3.3) en terme de mesures, et ainsi prendre les dérivées au sens des distributions :

$$\mathbf{M}d\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt + \mathbf{R}dv \tag{3.16}$$

où *dt* est la mesure de Lebesgue, $d\dot{\mathbf{q}}$ une mesure différentielle (mesure accélération) et *dv* une mesure non négative pour laquelle $\dot{\mathbf{q}}$ possède une densité de mesure. $\mathbf{R}$ représente donc la densité d'impulsion de contact et $\mathbf{F}_{ext}$ les forces extérieures explicitement connues. En effet, on ne peut utiliser efficacement les techniques classiques de discrétisations en temps, puisqu'à tout moment la collision de deux particules peut provoquer dans le système des oscillations dont la fréquence temporelle peut être supérieure à celle de la discrétisation.

Pour résoudre ce problème, une première technique consiste à utiliser une méthode gérée par les événements, comme les méthodes collisionnelles : l'idée est de déterminer dans un système particulaire la date de la prochaine collision, de déplacer toutes les particules jusqu'à cette date et de calculer les vitesses des particules partenaires après le choc. L'une des difficultés dans ce type de modélisation est d'être très précis dans le calcul des temps de collisions et dans la gestion des événements. Ainsi, cette méthode semble être très efficace pour des simulations de milieux discrets lâches mais inapplicable dès qu'il s'agit de simuler des milieux denses. L'approche décrite ci-dessus est communément désignée

par le sigle ED (pour Event Driven).

Une deuxième technique permettant de gérer les contacts multiples, est d'utiliser le formalisme de la dynamique non-régulière [81]. La méthode est désignée par le sigle NSCD (pour Non Smooth Contact Dynamics)[54][82]. Le schéma d'intégration utilisé est une θ-méthode. Si nous nous plaçons sur l'intervalle $]t^n, t^{n+1}]$, l'équation (3.16) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}(n+1) - \dot{\mathbf{q}}(n)) &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, s)ds + \int_{]t^n, t^{n+1}]} \mathbf{R}dv \\ \mathbf{q}(n+1) &= \mathbf{q}(n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\mathbf{q}}(s)ds \end{aligned} \tag{3.17}$$

La seconde équation de ce système suppose que sur le petit intervalle de temps $]t^n, t^{n+1}]$, la vitesse est une fonction continue. En vue de traiter les chocs multiples et les sauts de vitesse, la discrétisation des intégrales se fait en utilisant le paramétrage et sa dérivée première[6]. L'impulsion moyenne de contact s'écrit alors :

$$\mathbf{R}(n+1) \approx \frac{1}{h} \int_{]t^n, t^{n+1}]} \mathbf{R}dv, \tag{3.18}$$

La θ-méthode s'apparente à une pondération en fonction des quantités obtenues en début et fin de pas. En appliquant ce principe aux deux intégrales du système (3.17), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt &= h\theta \mathbf{F}_{ext}(n+1) + h(1-\theta)\mathbf{F}_{ext}(n) \\ \mathbf{q}(n+1) &= \mathbf{q}(n) + h\theta\dot{\mathbf{q}}(n+1) + h(1-\theta)\dot{\mathbf{q}}(i) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Pour assurer la stabilité du schéma d'intégration, les valeurs de θ doivent être comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1. Le cas $\theta = 1$ équivaut au schéma d'Euler implicite et le cas $\theta = \frac{1}{2}$ correspond à la méthode du demi-pas employée par Moreau [82]. Effectuons une substitution avec (3.18) et (3.19) dans (3.17), nous obtenons :

$$\dot{\mathbf{q}}(n+1) = \dot{\mathbf{q}}(n)_{libre} + (\mathbf{M}^{-1})h\mathbf{R}(n+1), \tag{3.20}$$

où $\dot{\mathbf{q}}(n)_{libre} = \dot{\mathbf{q}}(n) + (\mathbf{M}^{-1})h(\theta\mathbf{F}_{ext}(n+1) + (1-\theta)\mathbf{F}_{ext}(n))$ est la vitesse en l'absence de contact et

$$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{q}(n) + h\theta\dot{\mathbf{q}}(n+1) + h(1-\theta)\dot{\mathbf{q}}(n) \tag{3.21}$$

[6]Les dérivations d'ordre supérieur ne sont pas importantes.

Classiquement, à chaque pas de temps, l'ensemble des forces de contact du système est déterminé itérativement par la méthode dite des équilibres successifs qui est basée sur un algorithme de type Gauss-Seidel pour la version 2D. Chaque force de contact est calculée en adoptant des valeurs provisoires des forces sur les autres contacts. La convergence est obtenue quand chaque force interparticulaire vérifie la loi de contact unilatéral avec frottement sec. Fortin dans [40] a utilisé le concept du bipotentiel en 2D dans une approche NSCD. C'est cette approche que nous utilisons dans cette thèse. En 3D, l'algorithme de Newton Généralisé est souvent utilisé [3][99]. D'autres algorithmes de type gradient (2D et 3D) ont été implantés par Renouf [99] dans le logiciel LMGC90. Sanni dans MULTICOR a étendu le concept du bipotentiel au 3D [103].

Pour la modélisation des chocs, MULTICOR utilise la notion de vitesse formelle [82], pour des particules circulaires ou sphériques,

$$\tilde{\underline{\dot{u}}} = \tilde{\dot{u}}_n + \tilde{\underline{\dot{u}}}_t \quad \text{où} \quad \tilde{\dot{u}}_n = \frac{\dot{u}_n^+ + e_n \dot{u}_n^-}{1+e_n} \qquad \tilde{\underline{\dot{u}}}_t = \frac{\underline{\dot{u}}_t^+ + e_t \underline{\dot{u}}_t^-}{1+e_t} \tag{3.22}$$

où e_n et e_t sont les coefficients de restitution normale et tangentielle, et où $\underline{\dot{u}}_t^+$ et $\underline{\dot{u}}_t^-$ représentent respectivement les vitesses après et avant le choc. Cette vitesse formelle correspond à la vitesse réelle lors d'une évolution régulière. Il reste à faire le lien entre les variables généralisées ($\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{R}$) et les variables duales ($\dot{\mathbf{u}}$, r),

$$\underline{\dot{u}} = \mathbf{P}^T \dot{\mathbf{q}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{P}\underline{r} \tag{3.23}$$

où $\mathbf{P}$ est une matrice de passage [40]. Nous obtenons alors l'algorithme utilisé dans MULTICOR, en mettant en évidence le solveur non linéaire, figure (3.6) :

3.3 Pilotage des paramètres numériques

Nous avons vu précédemment que le code de calcul MULTICOR utilise très peu de paramètres : le pas de temps $\triangle t$, les coefficients de restitution normal e_n et tangentiel e_t, le coefficient de frottement μ et dans une moindre mesure le paramètre de détection des interactions β. Nous allons à travers une série de petites expériences numériques montrer l'influence de ces différents paramètres sur les résultats numériques.

MULTICOR étant basé sur un schéma implicite, cela nous permet d'utiliser un pas de temps relativement grand ($\triangle t \approx 10^{-3}$). Il n'est pas raisonnable d'augmenter cette valeur sous peine d'engendrer des erreurs prépondérantes au bon déroulement des calculs.

$n = n + 1$ (pas de temps)
Evaluation de $\mathbf{q}_n$
Détection des contacts
Evaluation de $\dot{\mathbf{q}}_{n_{libre}}$
  $i = i + 1$ (itérations solveur bipotentiel)
    $\alpha = \alpha + 1$ (boucle des contacts)
    Evaluation de $\mathbf{q}_{n+1}^{i+1}$
    prédicteur : $\underline{\tau}^{i+1} = \underline{r}^i - \rho[\underline{\tilde{u}}_t^i + (\tilde{u}_n^i + \mu||\underline{\tilde{u}}_t^i||).\underline{n}]$
    correcteur : $\underline{s}^{i+1} = proj(\underline{\tau}^{i+1}, K_\mu)$.
  Indicateur d'erreur
Evaluation de $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$

FIG. 3.6 – Algorithme prédicteur-correcteur utilisé par MULTICOR

3.3.1 Influence des coefficients de restitution

Le coefficient de restitution normal e_n permet de modéliser la dissipation normale. Il intervient dans la formulation (3.22) de la vitesse formelle, et varie entre 0 et 1. L'expérience numérique consiste à lâcher une particule sans vitesse initiale sur un plan horizontal (figure (3.7)).

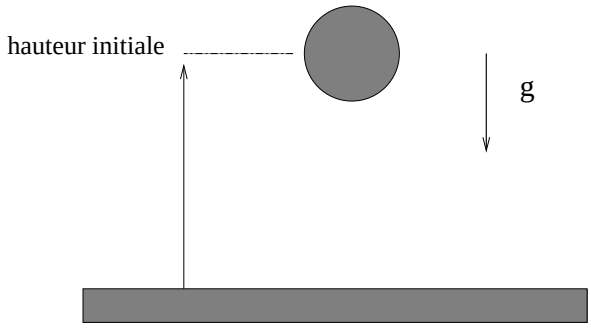


FIG. 3.7 – Modélisation de la dissipation normale

Dans le cas optimal, c'est-à-dire pour $e_n = 1$, la dissipation est nulle et la particule retrouve l'altitude initiale sans variation dans le temps.

Dans le cas où le coefficient de restitution normal e_n est inférieur à 1, on constate sur la figure (3.8) que l'altitude décroît avec le temps. C'est une donnée importante qui

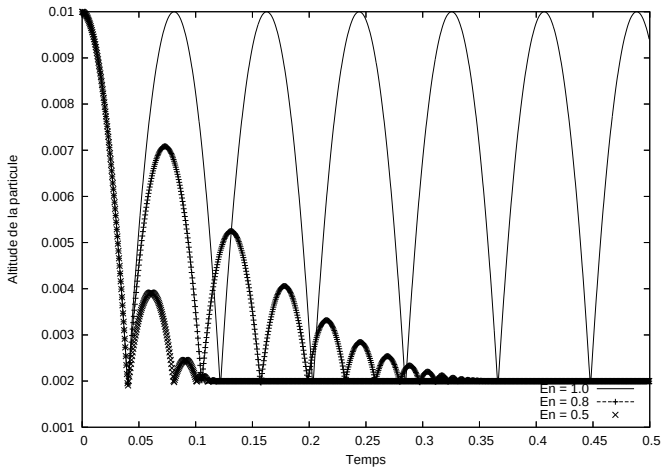


FIG. 3.8 – Evolution de l'altitude en fonction du coefficient de restitution : dissipation normale

doit être prise en compte dans le cadre d'une modélisation des matériaux granulaires. Expérimentalement, il a été constaté que sur des matériaux de Schneebeli, le coefficient de restitution est plus proche de zéro que de 1.

Le coefficient de restitution tangentielle e_t permet, quand à lui, de modéliser l'effet tangentiel sur la vitesse de glissement (voir équation (3.22)). Pour mesurer son effet nous considérons une particule lancée à une vitesse de $1ms^{-1}$ sur une paroi verticale (figure (3.9)).

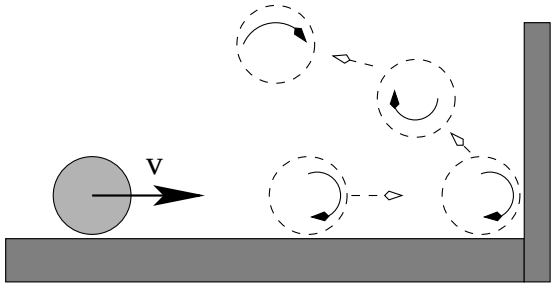


FIG. 3.9 – Modélisation de la dissipation tangentielle

Le frottement μ entre la particule et les parois est égale à 0.8. Celui-ci va provoquer le roulement de la particule. L'impact avec la paroi verticale va faire évoluer l'altitude de la particule positivement. La figure (3.10) met en évidence l'importance de e_t. On constate que l'altitude après impact est fonction du coefficient de restitution tangentielle.

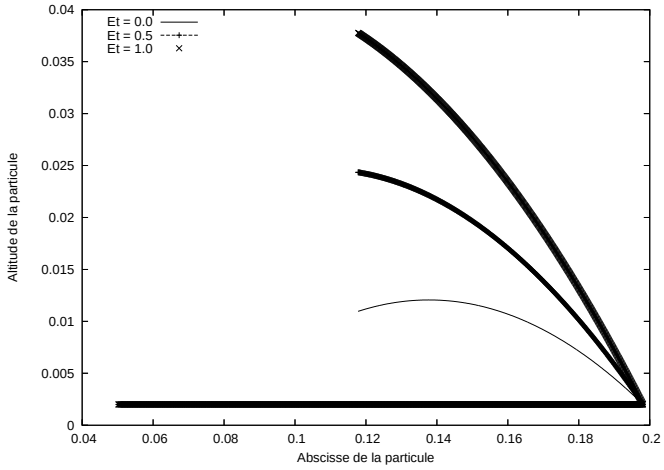


FIG. 3.10 – Influence du coefficient de restitution tangentiel sur l'impact : dissipation tangentielle

3.3.2 Influence du frottement

Afin de mettre en évidence l'influence du frottement, nous avons choisis d'effectuer l'expérience numérique suivante : on considère un système de particules hétérogènes dans un récipient.

L'échantillon a été préparé en déposant les particules. Elles sont soumises à la gravitation. Nous imposons à la paroi du fond une vitesse de $5.10^{-5} ms^{-1}$ vers le haut (voir figure (3.11)).

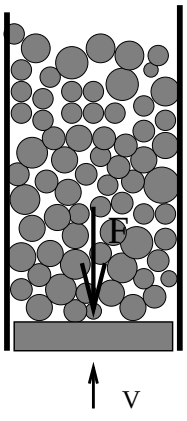


FIG. 3.11 – Modélisation du phénomène de stick-slip

Nous avons effectué une série de tests en modifiant le contact frottant particule-particule et particule-paroi. On constate pour des contacts non frottant que la force reste constante

tout au long de la simulation (figure (3.12)).

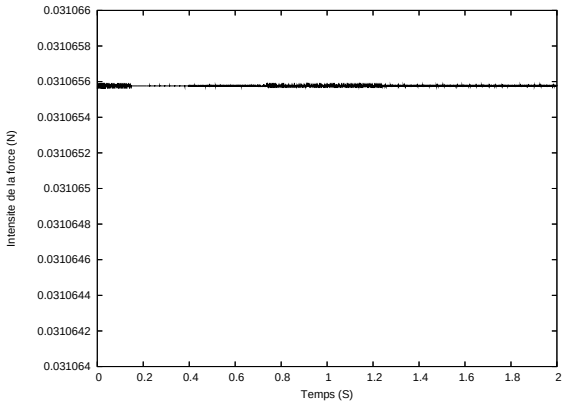


FIG. 3.12 – Evolution de la force en fonction du temps : contact non frottant

Par contre pour des contacts particules-parois frottant ($\mu = 0.8$), mais sans frottement entre particules, on constate que l'évolution de la force est très chaotique au début de la simulation et devient relativement régulière par la suite (figure (3.13)). Si maintenant on a des contacts particule-particule et particule-parois frottant ($\mu = 0.8$), on constate qu'il y a une montée en charge de l'intensité de la force suivi d'une décharge.

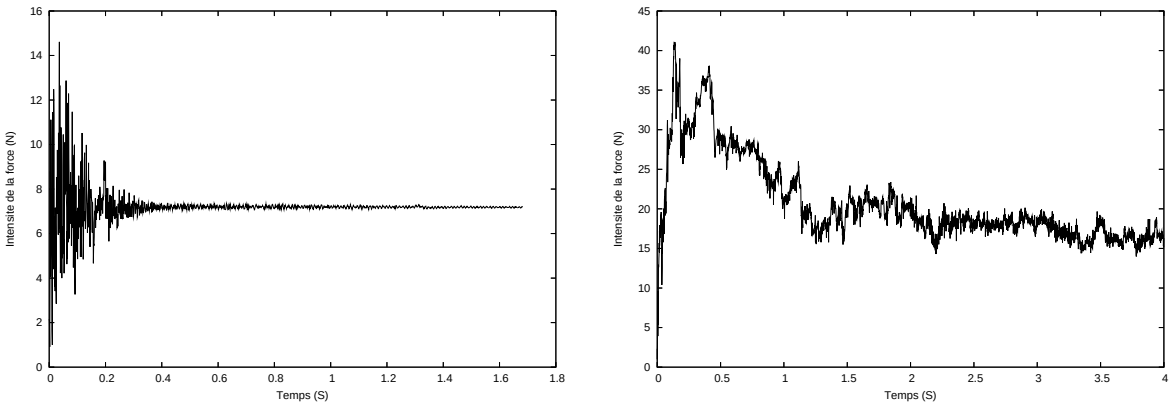


FIG. 3.13 – Evolution de la force en fonction du temps : (à gauche) contact particule-paroi frottant ($\mu = 0.8$), (à droite) contact particule-particule et particule-paroi frottant ($\mu = 0.8$)

3.3.3 Influence de la cohésion

La cohésion dans les milieux granulaires a des origines aussi bien physiques que chimiques. Elle peut résulter de la combinaison de facteurs provenant de ces deux origines ou de facteurs de même origine. Ces facteurs créent pour la plupart des phénomènes locaux ayant pour conséquences de lier les grains entre eux, provoquant ainsi une tenue mécanique du milieu granulaire dans son ensemble sans aucune pression extérieure. Ces forces, appelées forces de cohésion, sont souvent négligeables pour de grosses particules, mais peuvent jouer un rôle majeur dans le cas de particules de faibles tailles.

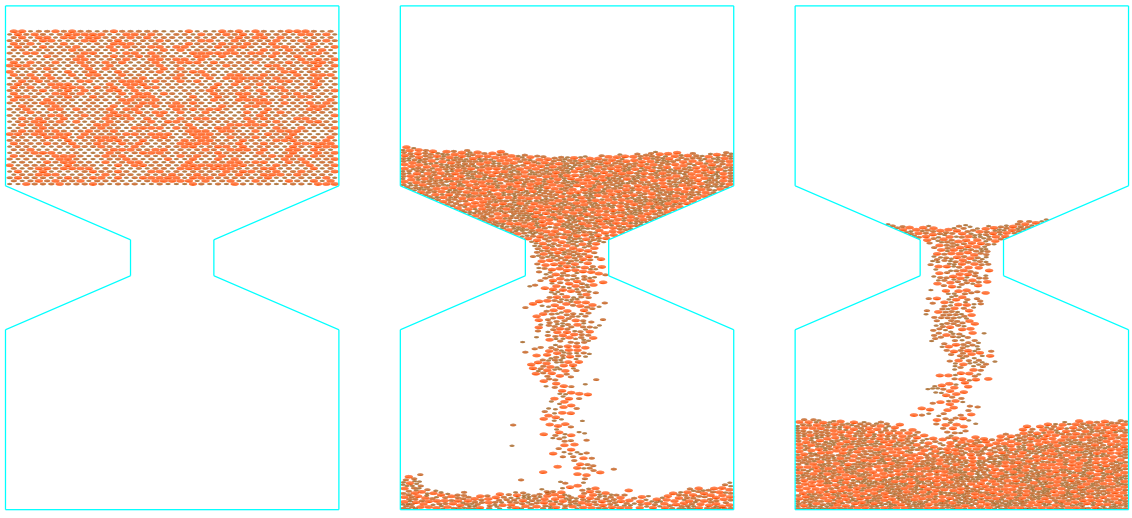
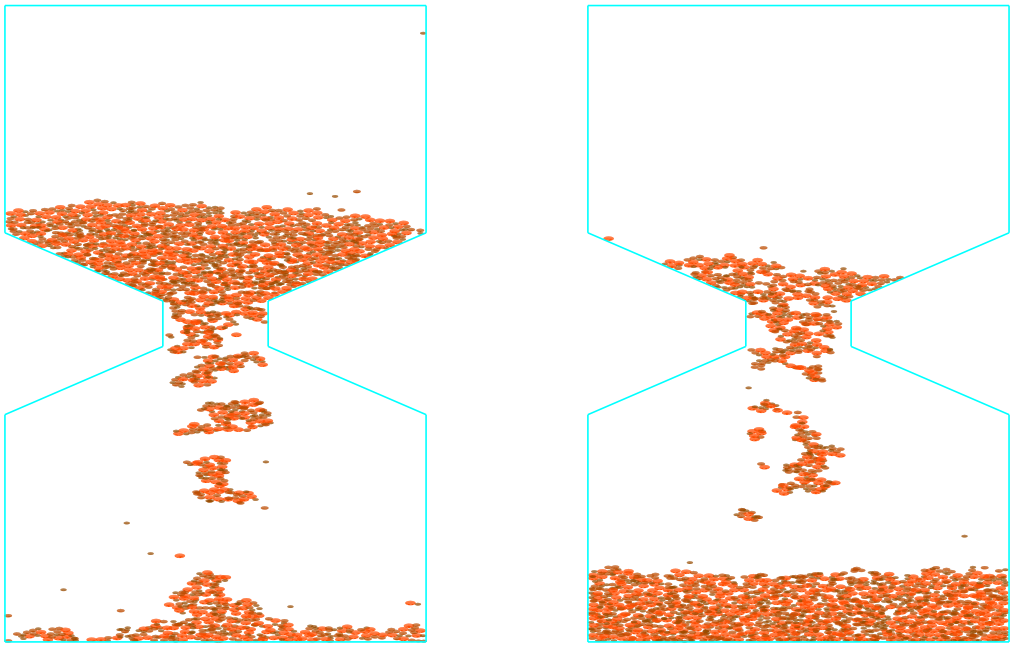


FIG. 3.14 – Simulation bidimensionnelle d'un écoulement granulaire : sans cohésion

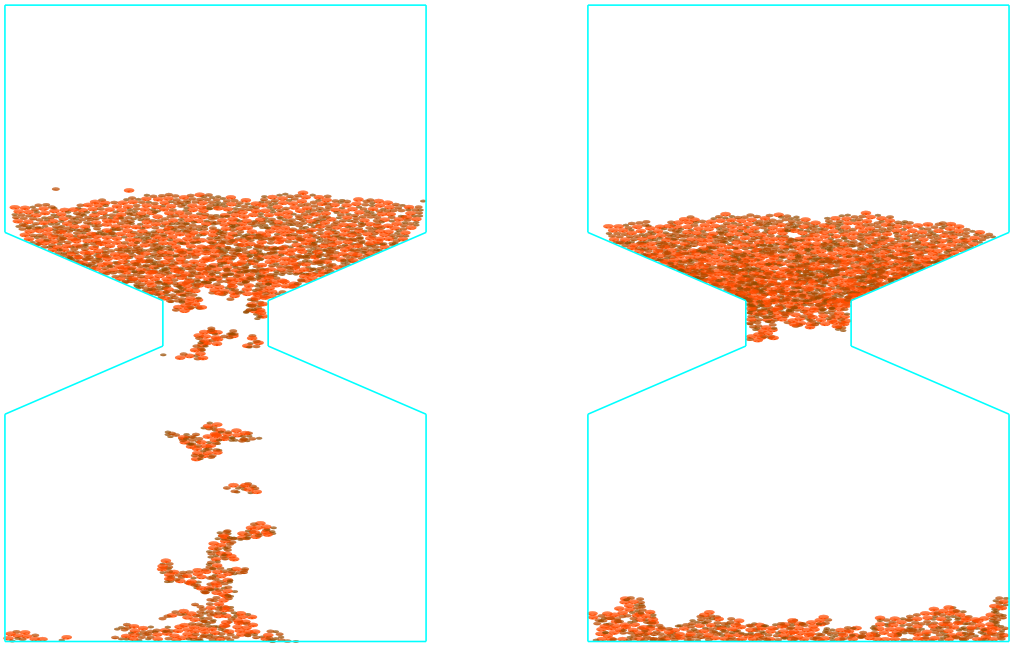
Ainsi, on trouvera des forces cohésives de type Van der Waals dépendant des matériaux en contact, de la constante de Hamaker et de la distance entre les particules. Les particules peuvent être aussi liées par des joints solides de natures très diverses : présence de liants (colle, résine, ...), ponts de neige, ponts de glace résultant du gel, phénomène de cimentation [113]. Dans MULTICOR, la cohésion est modélisée en modifiant la condition de Signorini suivante :

$$(r_n + r_c) \geq 0, \qquad u_n \geq 0, \qquad (r_n + r_c)u_n = 0$$

où r_c est la valeur de la résistance en traction maximale et u_n l'interstice entre les particules. On introduit alors dans le schéma prédicteur-correcteur le changement de variable $\tilde{r}_n = r_n + r_c$.



Cohésion modérée



Cohésion élevée

FIG. 3.15 – Influence de la cohésion sur la décharge d'un matériau granulaire

Pour se rendre compte de l'importance de la cohésion, on se propose ici de vidanger un matériau granulaire dans un sablier (figures (3.14) et (3.15)). Le système est composé de trois tailles de particules. Afin de mettre en évidence la cohésion dite "fragile", nous avons limité la valeur du frottement. On constate à la figure (3.14) que l'écoulement du système est fluide lorsque la cohésion est nulle.
On propose à la figure (3.15) deux types d'écoulements cohésifs : le premier s'effectue pour une valeur de r_c modérée. Les particules s'écoulent par amas. Le second utilise une valeur de r_c grande. Dans ce cas l'écoulement s'arrête. Les forces de gravité et de contacts ne sont plus assez importantes pour fragiliser le système qui ne peut plus s'écouler correctement.

3.4 Contraintes moyennes pour un milieu granulaire

En mécanique des milieux continus, il existe principalement deux façons d'introduire le tenseur des contraintes. Soit en modélisant les efforts exercés par une partie du milieu sur son complémentaire par une densité surfacique de forces localisées sur la surface séparant les deux parties, soit en utilisant le principe des puissances virtuelles.

Pour introduire le tenseur des contraintes dans un milieu granulaire considéré comme un milieu continu, les deux alternatives sont également possibles. En négligeant le poids propre de chaque grain et les effets dynamiques devant les forces de contact connues r_α qui lui sont appliquées, Weber [127] a calculé le tenseur des contraintes en un point par une moyenne des forces de contact sur un volume V entourant ce point :

$$\sigma = \frac{I}{2V} \sum_{\alpha} d \otimes r_\alpha \tag{3.24}$$

où la sommation porte sur les contacts α, d étant la distance entre les centres de gravité des deux corps Ω_i et Ω_j en contact et où $\otimes$ désigne le produit tensoriel. Une autre approche [11][13][14][25] consiste à postuler l'identité de la puissance virtuelle d'un milieu continu avec celle développée par tous les efforts de contact pour des vitesses virtuelles des grains déduites du champ des vitesses virtuelles du milieu continu. On aboutit à une expression semblable à (3.24). Dans les deux cas, le poids et les efforts dynamiques ont été négligés. Cependant, les expressions ainsi obtenues du tenseur des contraintes moyen ne sont pas symétriques exactement, même si leur partie antisymétrique est petite, voire négligeable lorsque la sommation porte sur un grand nombre de grains.

J.-J. Moreau [83], quant à lui, propose de ne pas négliger les efforts volumiques et aboutit, dans le cas particulier de grains circulaires, à un tenseur des contraintes symétriques. Ainsi, bien que pour un milieu continu le tenseur des contraintes soit depuis longtemps, bien défini pour un milieu discret le passage au continu, en définissant le tenseur des contraintes à partir des forces discrètes, n'est pas très clair.

Afin de rendre compte de ce comportement complexe, il a été proposé dans [41][42], à partir d'une identité d'algèbre linéaire, une expression originale du tenseur des contraintes moyen pour un ensemble de polyèdres qui tient compte à la fois des efforts de contact et des efforts volumiques (de gravité et d'inertie). Cette expression générale du tenseur des contraintes moyen est automatiquement symétrique et invariant par translation.

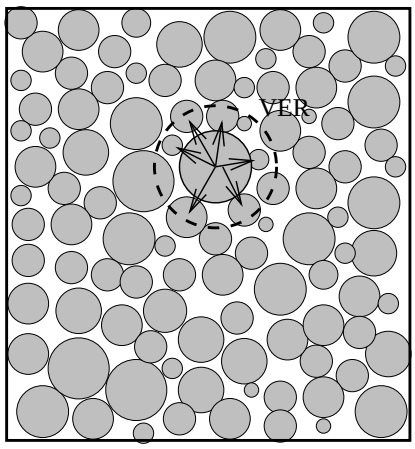


FIG. 3.16 – Détermination des contraintes dans un matériau granulaire

En modélisant les grains comme des solides rigides en contact ponctuel [40], pour chaque grain p occupant le volume V_p, cette expression du tenseur des contraintes moyen devient :

$$\sigma_p = \frac{1}{V_p}\left[\int_{V_p} \vec{x} \otimes \rho(\vec{g} - \ddot{\vec{x}})dV + \sum_{\alpha} \vec{x}_{c\alpha} \otimes \vec{r}_{\alpha}\right] \tag{3.25}$$

où $\vec{g}$ désigne la gravité, $\vec{x}$ le vecteur position, $\ddot{\vec{x}}$ son accélération, $\vec{r}_{\alpha}$ la réaction de contact au point de vecteur position $\vec{x}_{c\alpha}$. D'après l'additivité des moments internes au sens de J.-J. Moreau [83], le tenseur des contraintes moyen σ sur le VER s'obtient ensuite de la façon suivante :

$$\sigma = \frac{1}{V}\sum_{p\in V} V_p\sigma_p = \frac{1}{\sum_{V_p}(1+e)}\sum_{p\in V} v_p\sigma_p. \tag{3.26}$$

où e est l'indice des vides.

Ainsi, afin de calculer numériquement avec MULTICOR le tenseur des contraintes moyen, on procède comme suit. Le tenseur σ_p est d'abord moyenné sur chaque particule à partir des forces de contact r_n et r_t déterminées numériquement. Ensuite, on calcule un tenseur des contraintes moyen sur un ensemble de particules contenues dans le VER de volume V en utilisant la relation (3.26) (figure (3.16)).

3.5 Calcul de la contrainte moyenne par une approche Eléments Discrets

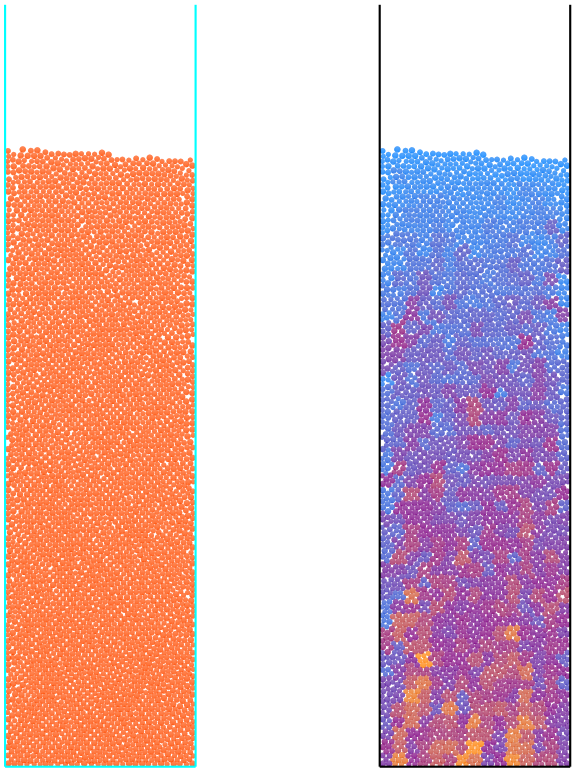


FIG. 3.17 – Silo rempli de particules soumises à la gravite (à gauche). Calcul des contraintes moyennes après la stabilisation de l'échantillon (à droite).

Afin de valider l'approche continue développée au deux premiers chapitres, nous proposons ici de simuler un système granulaire dans un silo 2D après remplissage (figure (3.17)). L'objectif est de voir dans quelle mesure les contraintes moyennes calculées par Eléments Discrets (avec MULTICOR) se rapprochent des contraintes calculées par l'approche continue.

3.5.1 Méthodes de préparation

L'échantillon est préparé en utilisant des particules de rayon compris entre 0.8 et $1cm$. La masse volumique est égale à $1190kg/m^3$. Expérimentalement, il a été constaté [93] que la préparation de l'échantillon était important. Le code de calcul MULTICOR permet d'utiliser différents modes de préparation de l'échantillon : soit par "versement en pluie", soit par "dépôt" ou encore en "réseau" (figure (3.18)).

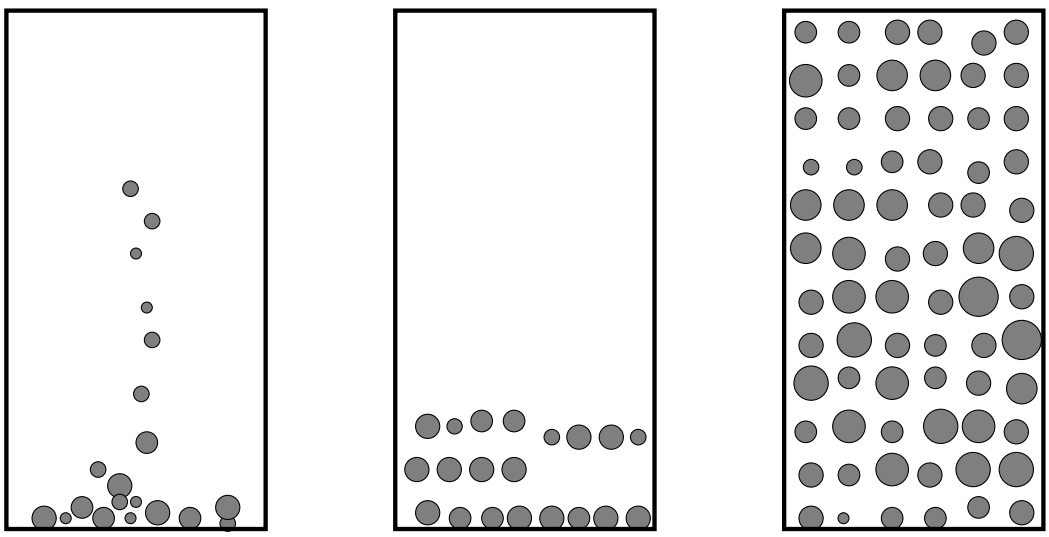


FIG. 3.18 – Méthode de préparation de l'échantillon : par "versement en pluie", par "dépôt" ou en "réseau".

Le code MULTICOR étant dynamique, la méthode par dépôt ou par réseau permet de limiter les interférences provoqués par les chocs entre les particules. L'inconvénient est que l'on obtient un échantillon relativement dense, ce qui va limiter le phénomène de dilatance. Dans notre cas, l'expérience numérique consiste à calculer les contraintes moyennes au sein d'un silo après remplissage mais avant la vidange. Le phénomène de dilatance dans ce cas étant très limité voire nul, nous optons alors pour la méthode par dépôt de

l'échantillon. Afin de valider cette méthodologie, nous avons représenté sur la figure (3.19) l'évolution de la masse pesée sur le fond du silo en fonction de la masse versée. La masse pesée et la masse versée ont été ramenées à des valeurs relatives en les divisant par une masse de référence constante, généralement appelé masse de saturation[7] et notée M_{sat}.

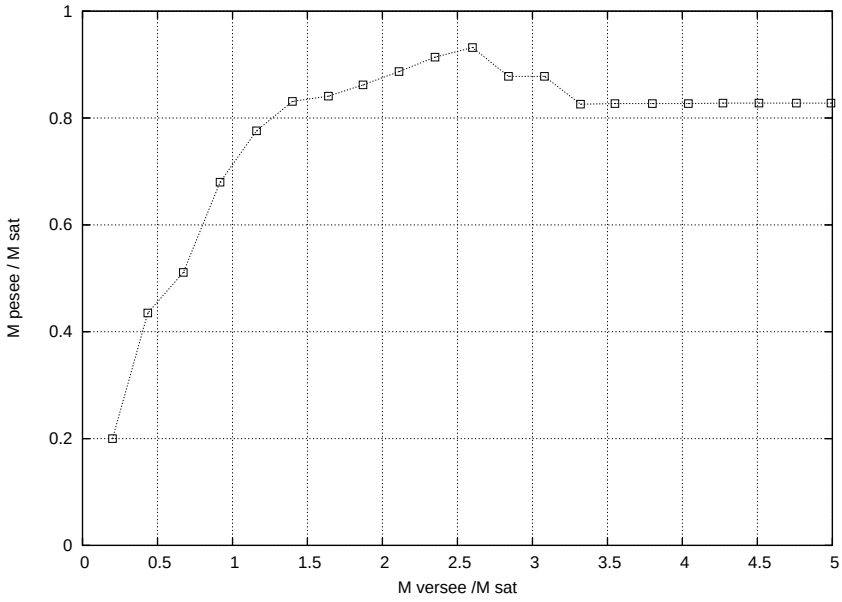


FIG. 3.19 – Evolution de la masse pesée en fonction de la masse versée.

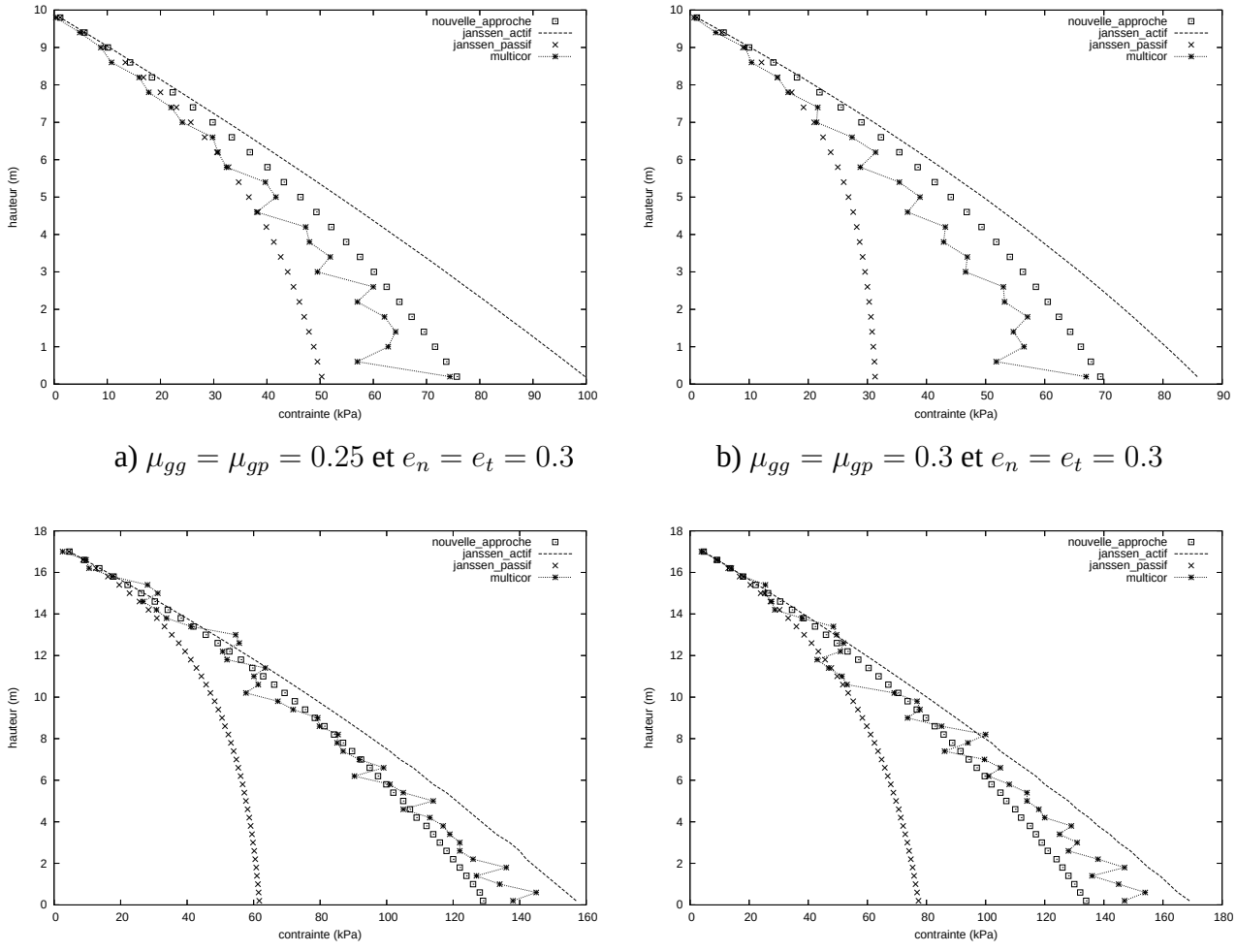
On constate que la masse pesée n'augmente pas indéfiniment mais finit par atteindre une valeur asymptotique limite. On retrouve ainsi les résultats classiques existant dans la littérature [53], ce qui permet de valider les simulations réalisées avec MULTICOR. Rappelons que ce phénomène a été modélisé par Janssen en 1895. Il met en évidence le rôle important joué par les forces de friction entre le milieu granulaire et les parois du récipient qui écrantent une partie du poids des grains. Si la masse au fond du récipient atteint une valeur limite, cela signifie qu'une partie importante du poids est encaissée directement par les parois latérales.

3.5.2 Comparaison avec l'approche continue

Reprenons maintenant la simulation numérique de la figure (3.18) où le silo a été rempli de particules par dépôt. A la fin du remplissage, on calcule les contraintes moyennes au

[7] On a pris ici $M_{sat} = \rho\lambda\pi\frac{a}{2}$ où a représente la largeur du silo, $\lambda = \frac{a}{2\mu K}$ et K le coefficient de Rankine dans le cas actif [93].

niveau des parois du silo suivant la procédure décrite dans la section (3.4). On compare ensuite les résultats obtenus à ceux donnés par l'approche continue développé dans le premier chapitre et la théorie de Janssen. Afin de mettre en évidence l'influence de la taille du système nous proposons d'effectuer le calcul sur deux échantillons : 1000 et 4000 particules. Nous avons à chaque fois utilisé comme taille de VER un ensemble d'une dizaine de particules. L'ensemble des résultats est représenté à la figure (3.20).



a) $\mu_{gg} = \mu_{gp} = 0.25$ et $e_n = e_t = 0.3$

b) $\mu_{gg} = \mu_{gp} = 0.3$ et $e_n = e_t = 0.3$

c)$\mu_{gg} = \mu_{gp} = 0.2$ avec $e_n = e_t = 0.3$

d) $\mu_{gg} = \mu_{gp} = 0.3$ avec $e_n = e_t = 0.3$

FIG. 3.20 – Calcul de la contrainte moyenne pour des échantillons de 1000 particules (figs. a et b) et 4000 particules (figs. c et d)

On constate que les résultats dépendent fortement des paramètres physiques intervenant, notamment des coefficients de frottement grain-grain et grain-paroi (μ_{gg} et μ_{gp} respectivement) qui sont des paramètres ajustables dans le code MULTICOR. Les résultats dépendent également du nombre de particules de la simulation. En effet, les systèmes de tailles finies et les systèmes infiniment grands peuvent se comporter très différemment. Si

l'on considère des frontières physiques (parois) dans un système de grande taille, seule une faible proportion des particules interagit avec ces parois. Ces particules ressentent les déviations induites par les parois du silo par rapport aux conditions qui dominent au centre du système. Les autres particules (la majorité) évoluent dans un environnement qui n'est pas affecté par l'existence des parois. Si maintenant on considère un système de taille réduite, la majorité des particules évoluent dans un environnement modifié par les parois.

Il semblerait ici que les simulations numériques discrètes effectuées avec MULTICOR sur des échantillons de 1000 et 4000 particules concordent assez bien avec les résultats obtenus à partir de l'approche analytique de type milieux continus développée au premier chapitre. Les résultats obtenus par la simulation discrète sont intermédiaires entre les états passif et actif de la théorie de Janssen. On constate également que, plus la taille de l'échantillon augmente, moins les résultats des simulations numériques oscillent, et plus ils se rapprochent des résultats obtenus par l'approche continue.

3.6 Mise en évidence de l'anisotropie des milieux granulaires

Afin de mettre en évidence l'anisotropie du réseau des contacts des matériaux granulaires, nous proposons de simuler le compactage d'un matériau granulaire sous l'effet de gravité.

La distribution des orientations de contact est représentée à la figure (3.21). On subdivise l'intervalle $[0, \pi]$ en 20 petits intervalles, soit

$$I_i = [i\frac{\pi}{20}, (i+1)\frac{\pi}{20}] \quad i = 0, 19.$$

Pour chaque contact, on détermine l'angle d'orientation de contact θ que fait le vecteur normal n à ce point de contact avec l'horizontale, et on calcule $N(i)$ le nombre de contacts. On obtient alors la distribution des orientations de contacts.

$$n(i) = \frac{N(i)}{k},$$

où k est le nombre total de contacts.

On remarque sur la figure (3.21), des directions privilégiées de contact. Ce qui met en évidence le comportement anisotrope du réseau de contact des milieux granulaires. Ce résultat sera à la base de l'approche micromécanique développée dans le dernier chapitre.

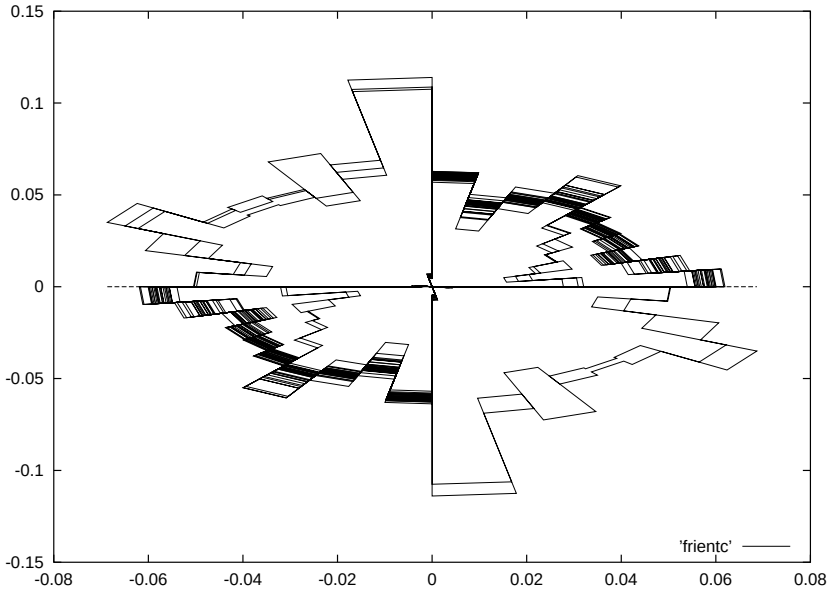


FIG. 3.21 – Mise en évidence de l'anisotropie des orientations de contact

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode de simulation numérique discrète utilisée. Il s'agit d'une méthode de type Non Smooth Contact Dynamic à partir de laquelle a été développé le code MULTICOR. Dans un premier temps, nous avons réalisé des simulations numériques discrètes du remplissage d'un silo. Ces simulations ont clairement mis en évidence la saturation de la masse versée qui tend vers une valeur limite et n'augmente pas indéfiniment. Ces résultats sont en parfaite concordance avec les expériences classiques existantes et soulignent la pertinence de MULTICOR à représenter le comportement réel d'un assemblage granulaire.

Dans un second temps, toujours à partir de simulations numériques discrètes similaires, nous avons calculé les contraintes moyennes s'exerçant sur les parois du silo après remplissage. On constate que les résultats obtenus sont intermédiaires entre ceux prédits par la théorie de Janssen dans les cas actif et passif. Ils sont, au contraire, très proches des résultats obtenus à partir de la nouvelle approche de type milieu continu développée dans les deux premiers chapitres. Ces résultats mettent encore une fois en évidence les limites de la théorie de Janssen et soulignent la pertinence de l'approche analytique de type milieu continu proposée.

Chapitre 4

Modélisation de l'anisotropie par une approche micromécanique 3D

4.1 Introduction

Il existe deux approches distinctes pour déterminer le comportement mécanique d'un matériau granulaire. Tout d'abord, l'approche phénoménologique basée sur les théories d'élasticité et de plasticité où le matériau granulaire est considéré comme un milieu continu, sans prendre en considération explicitement la microstructure du matériau. On applique alors à ce milieu continu les lois de la mécanique correspondantes à celles qui s'appliquent aux solides homogènes. Dans cette analyse, la détermination des modèles constitutifs peut s'avérer délicate et fait intervenir beaucoup de paramètres qui n'ont pas forcément de significations physiques claires.

L'approche structurale ou micromécanique en revanche, s'intéresse au comportement des grains en interaction [16][97][87][19]. L'idée de base de ces approches discrètes est de modéliser le comportement global du matériau à partir d'une description simplifiée de la microstructure [25][76] (Tableau (4.1)). La transition entre l'échelle des grains et l'échelle macroscopique peut se faire plus complètement et quantitativement que celui de la structure atomique ou moléculaire au niveau macroscopique. On présente ici la démarche d'homogénéisation qui consiste à réaliser un tel passage [86][129][130].

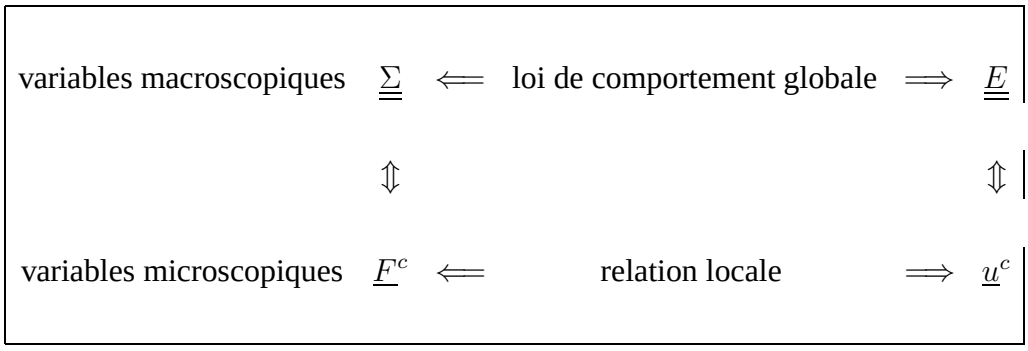


Schéma. 4.1- Procédure d'homogénéisation dans les milieux granulaires

Dans ce chapitre, on s'intéressera essentiellement à une analyse qui s'appuie sur les tenseurs de texture de divers ordres caractérisant la distribution des contacts entre les grains. Pour simplifier le problème, on suppose que la loi de contact est élastique linéaire. On construit ensuite la loi de comportement macroscopique en utilisant, en premier lieu, un changement de variable statique et l'hypothèse de Voigt pour déterminer le tenseur des raideurs homogénéisé. En second lieu, on utilisera un changement de variable cinématique et l'hypothèse de Reuss pour déterminer le tenseur de souplesse homogénéisé. Enfin on établit une hypothèse cinématique plus générale qui sera intégrée ensuite dans un schéma d'homogénéisation. Le cas particulier du milieu isotrope est considéré et nos résultats sont comparés macroscopiquement avec ceux des approches existant dans la littérature.

4.2 Description de la texture des milieux granulaires

Le comportement moyen d'un assemblage de grains est le résultat de l'interaction des particules entre elles par l'intermédiaire des contacts. Les variables microscopiques sont alors les forces de contact entre grains et le déplacement des grains. Quelle que soit la nature mécanique de ces contacts, le réseau géométrique qu'elles déterminent implique une structure particulière qui constitue une composante fondamentale de la description des milieux granulaires. Cette structure correspond à ce qu'on appelle la texture du milieu granulaire [60][111][65]. Elle peut être influencée par différents facteurs.

Le premier facteur est la forme des grains. En effet, si les grains ne sont pas sphériques mais de forme allongée, on peut avoir une orientation préférentielle des grains dans l'assemblage qui va engendrer des directions de contact privilégiées. Le mode de préparation de l'assemblage (dépôt des grains par un point source ou par pluviation, ...) et l'histoire des déformations (par exemple un cisaillement simple) donnent lieu ou non à des directions de contacts privilégiées [69][70][88][89].

Par conséquent, si des directions de contact sont privilégiées, l'assemblage est anisotrope du point de vue de la texture de son réseau de contact. Il est alors tentant de chercher à relier la texture et l'anisotropie des propriétés mécaniques macroscopiques. Ainsi, l'introduction de variables géométriques telles que la distribution de l'orientation des contacts permet d'expliciter les propriétés de la texture de l'assemblage et donc de décrire de façon réaliste le comportement du matériau [15][17][14][22]. Cette distribution peut être décrite à partir de grandeurs tensorielles telles que les tenseurs de la texture (appelé aussi tenseurs de fabrique) dont on retrouve plusieurs définitions dans la littérature [5][74][19].

En règle générale, c'est la probabilité de la normale au contact $P(\underline{n})$ qui est la plus utilisée [104]. On introduit classiquement le tenseur de texture d'ordre deux, dans le cas tridimensionnel, sous la forme suivante [72][95] :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n})ds \tag{4.1}$$

où N est le nombre total de contacts, $P(\underline{n})$ la distribution de l'orientation de la normale au contact $\underline{n}$ qui satisfait la condition :

$$\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})ds = 1 \tag{4.2}$$

pour un milieu anisotrope et la condition $P(\underline{n}) = 1$ pour un milieu isotrope.

L'introduction du tenseur de texture d'ordre deux $\underline{\underline{D}}$ (équation (4.1)), combinée à la relation (4.2) donne l'expression suivante de la distribution de contact (voir la section B.4.1 de l'annexe B) :

$$P(\underline{n}) = \frac{15}{2}\left[\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) - \frac{1}{5}\right] \tag{4.3}$$

A l'ordre quatre, le tenseur de texture dans le cas tridimensionnel s'écrit [72][95] :

$$\mathbb{D} = \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \tag{4.4}$$

On démontre, en combinant les relations (4.2) et (4.4) que l'on a (voir la section B.5.1 de l'annexe B) :

$$P(\underline{n}) = \frac{15}{4}\left[\frac{21}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) - 7\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) + \frac{1}{2}\right] \tag{4.5}$$

avec $tr(\mathbb{D}) = \underline{\underline{D}}$ ou encore $D_{ijkk} = D_{ij}$.

Cependant, il est généralement admis que la description de la distribution des contacts, à partir d'un tenseur de texture $\underline{\underline{D}}$ d'ordre deux, n'est pas suffisante pour un milieu soumis à un chargement plus ou moins complexe. Dans ce cas, il devient nécessaire de considérer un tenseur de texture susceptible de fournir une description plus précise de l'anisotropie. En effet, plusieurs études (par exemple [16]) ont montré que l'utilisation d'un tenseur de texture d'ordre quatre [22][59] permet d'approcher assez précisément, aussi bien qualitativement que quantitativement, l'histogramme des contacts issu de diverses expériences. En revanche, le tenseur de texture d'ordre deux ne rend que partiellement compte des effets d'anisotropie observés. Son utilisation se trouve donc limitée au plus à une symétrie matérielle de type orthotrope.

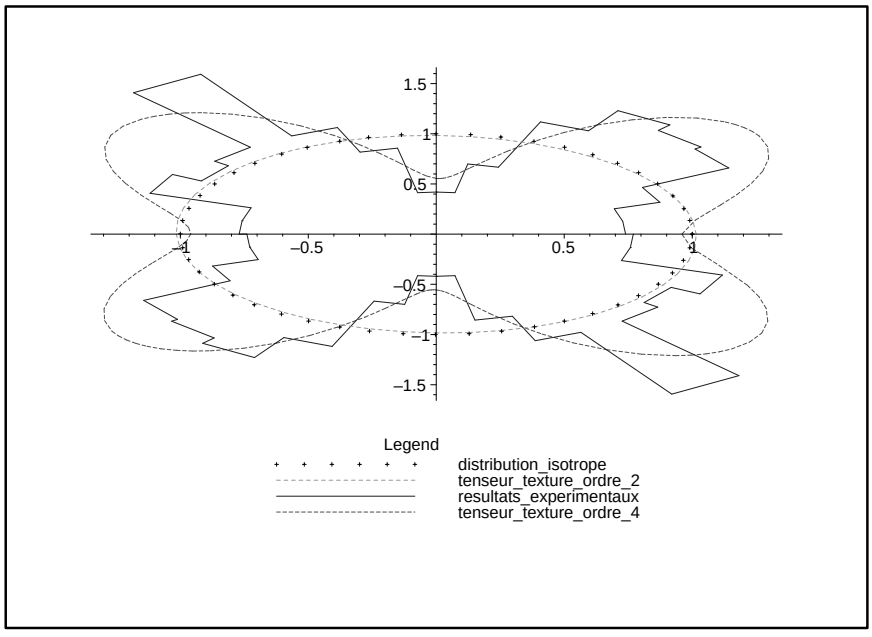


FIG. 4.1 – Histogramme de la distribution de la probabilité de contact

Afin de mettre en évidence ce résultat, on va comparer les probabilités des distributions des contacts, obtenues à l'aide d'un tenseur de texture d'ordre deux et d'ordre quatre respectivement, avec les résultats issus de l'expérience. Cette comparaison est faite avec les résultats expérimentaux décris dans le premier chapitre de [16] : dépôt de 722 disques de rayon 13, 18 et 28 mm sous l'effet de la gravité. La probabilité de distribution de la normale au contact $P(\underline{n})$ est représentée sur la figure (4.1). Il apparaît clairement une position prédominante de l'anisotropie induite par l'empilement vertical des grains. Ces résultats peuvent aussi être obtenus avec le logiciel MULTICOR présenté dans le chapitre précédent.

On représente aussi sur la même figure (4.1) les expressions (4.3) et (4.5) des distributions des contacts $P(\underline{n})$, calculées à partir des définitions (4.1) et (4.4) des tenseurs de textures d'ordre deux et d'ordre quatre respectivement. On remarque que les deux probabilités sont très différentes. La probabilité obtenue à partir d'un tenseur d'ordre quatre se rapproche des résultats expérimentaux de [16], alors que celle obtenue à partir d'un tenseur de texture d'ordre deux se limite à la description du cas isotrope.

Ainsi, une description tensorielle précise de la texture est nécessaire pour déterminer le comportement homogénéisé du matériau granulaire. En général, il s'agit de fournir un encadrement, ou au moins une estimation du comportement macroscopique recherché, étant donné que la loi de comportement d'un milieu granulaire fait appel à une description statistique incomplète de la microstructure. On se contentera ici de déterminer des encadrements tels que les bornes de Voigt et Reuss, ou des estimations s'appuyant par exemple sur une règle de localisation cinématique plus générale.

4.3 Hypothèse de Voigt

L'hypothèse cinématique de Voigt fournit une relation simple entre les déplacements relatifs entre les grains et les déformations macroscopiques supposées uniformes sur le bord du VER Cette hypothèse revient à supposer que les déformations sont uniformes à l'intérieur du VER [125][19][4]. A partir de cette hypothèse cinématique simple, en utilisant un schéma d'homogénéisation, on peut construire une loi de comportement macroscopique globale. On rappelle que l'hypothèse cinématique de Voigt s'écrit classiquement [35] :

$$u_i^c = E_{ij} L_j^c \tag{4.6}$$

où E_{ij} désigne les composantes du tenseur des déformations macroscopique supposé constant et L_i^c le vecteur branche joignant les centres de grains en contact au point c.

On se propose maintenant de construire, par homogénéisation, la loi de comportement élastique macroscopique du milieu granulaire rendant compte de l'anisotropie. Une loi de contact linéaire élastique est considérée. Si on néglige le poids propre de chaque grain et les effets dynamiques devant les force de contact F^c entre grains, on obtient de manière classique la définition suivante du tenseur des contraintes moyen [25][71][102][127] :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^{N} \underline{F^c} \otimes \underline{L^c} \tag{4.7}$$

où V désigne le volume du VER considéré, et où la sommation porte sur les N contacts intérieurs au VER. De manière évidente, la relation (4.7) permet de relier le tenseur des contraintes macroscopiques et la répartition des forces de contact locales. Cependant, $\underline{\underline{\Sigma}}$ ainsi défini n'étant pas symétrique exactement, on préfère utiliser une autre définition qui se déduit directement du principe des puissances virtuelles [16]. En effet, le principe des puissances virtuelles appliqué à un assemblage granulaire s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \Delta\underline{\underline{E}} = \frac{1}{V}\sum_{c=1}^{N}(\underline{F}^c.\Delta\underline{u}^c) \tag{4.8}$$

où $\Delta\underline{u}^c$ désignent les déplacements virtuels des grains engendrant une déformation virtuelle $\underline{\underline{E}}$ à l'échelle du VER, et où la sommation porte sur les contacts actifs $c = 1, \cdots N$. Compte tenu de l'hypothèse de Voigt (4.6), on obtient :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \Delta\underline{\underline{E}} = \frac{1}{V}\sum_{c=1}^{N}(\underline{F}^c \otimes \underline{L}^c) : \Delta\underline{\underline{E}} \tag{4.9}$$

Or, $\Delta\underline{\underline{E}}$ étant symétrique, seule la partie symétrique de $\frac{1}{V}\sum_{c=1}^{N}(\underline{F}^c \otimes \underline{L}^c)$ intervient. On obtient ainsi la définition suivante du tenseur des contraintes moyen :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{V}\Big[\sum_{c=1}^{N}\underline{F}^c \otimes \underline{L}^c\Big]^{sym} \tag{4.10}$$

où $(\underline{\underline{a}})^{sym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}}^T)$.

On rappelle que dans le cas d'un grand nombre de grains, la partie antisymétrique de l'expression (4.7) est négligeable [24], et les deux définitions (4.7) et (4.10) donnent des résultats assez proches. Il nous a donc semblé préférable de partir de la relation (4.10) de façon à rester dans le cadre des milieux de Cauchy où $\underline{\underline{\Sigma}}$ est symétrique exactement.

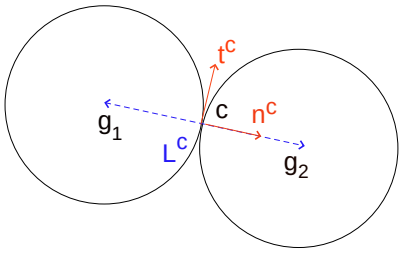


FIG. 4.2 – Schéma représentatif du contact entre deux grains

Dans ce qui suit, afin de simplifier le problème et les calculs, on suppose que l'assemblage granulaire est constitué de grains circulaires de même taille. On a donc : $\underline{L}^c = ||\underline{L}^c||\underline{n}^c = 2r\underline{n}^c$ où r désigne le rayon des grains (voir figure (4.2)). Ainsi, l'hypothèse cinématique de Voigt s'écrit :

$$u_i^c = E_{ij}L_j^c = 2rE_{ij}\underline{n}_j^c = 2r(\underline{\underline{E}}.\underline{n}^c)_i \tag{4.11}$$

Maintenant, décomposons le déplacement $\underline{u^c}$ dans la base locale au contact (t, n) suivant :

$$\underline{u^c} = u_n^c\underline{n}^c + \underline{u_t^c}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u_n^c &= \underline{u^c}.\underline{n}^c = 2r\underline{n}^c.\underline{\underline{E}}.\underline{n}^c = 2r(\underline{n}^c \otimes \underline{n}^c) : \underline{\underline{E}} \\ u_t^c &= u^c - u_n^c\underline{n}^c = 2r\underline{\underline{E}}.\underline{n}^c - u_n^c\underline{n}^c = 2r\underline{\underline{T}}^c : \underline{\underline{E}} \\ \text{avec} \quad \underline{\underline{T}}^c &= \underline{n}^c.\mathbb{I} - (\underline{n}^c \otimes \underline{n}^c \otimes \underline{n}^c) \end{aligned} \tag{4.12}$$

On rappelle que $\mathbb{I}$ désigne le tenseur identité symétrique d'ordre quatre, dont les composantes sont :

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Considérons à présent une loi de contact linéaire élastique entre les grains qui, au point de contact c, qui s'écrit :

$$\underline{F^c} = K_n u_n^c\underline{n}^c + K_t\underline{u_t^c} \tag{4.13}$$

ou encore la loi inverse qui se met sous la forme :

$$\underline{u^c} = H_n F_n^c\underline{n}^c + H_t\underline{F_t^c} \tag{4.14}$$

F^c et u^c désignent respectivement les forces de contact et les déplacements relatifs au contact, $\underline{n}^c$ étant la normale unitaire au contact. F_t^c et u_t^c d'une part, F_n^c et u_n^c d'autre part sont les composantes tangentielles (respectivement normales) du déplacement et des efforts au contact. Enfin K_t et H_t (respectivement K_n et H_n) désignent les rigidités et les flexibilités tangentielles (respectivement normales) au contact.

Essayons maintenant d'obtenir une expression du tenseur des raideurs élastiques homogénéisé $\mathbb{C}^{hom}$ en utilisant la définition du tenseur des contraintes macroscopique (4.10), la loi de contact (4.13) et l'hypothèse de Voigt (4.6). En décomposant la force de contact

dans la base locale au contact $(\underline{t},\underline{n})$, le tenseur des contraintes macroscopique (4.10) s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{V}\Big[\sum_{c=1}^{N}(\underline{F}^c \otimes \underline{L}^c)\Big]^{sym} = \frac{2r}{V}\left[\sum_{c=1}^{N}(F_n^c\underline{n}^c + \underline{F}_t^c)\otimes\underline{n}^c\right]^{sym} \tag{4.15}$$

où la sommation porte sur les contacts actifs $c = 1,\cdots,N$.

D'autre part, on peut montrer que :

$$(\underline{F}_t^c \otimes \underline{n}^c)^{sym} = \underline{\underline{T}}^{cT}.\underline{F}_t^c$$

En effet :

$$(\underline{\underline{T}}^{cT}.\underline{F}_t^c)_{ij} = \left[(\underline{n}^c.\mathbb{I} - \underline{n}^c\otimes\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c)^T.\underline{F}_t^c\right]_{ij} = \left[(\mathbb{I}.\underline{n}^c - \underline{n}^c\otimes\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c).\underline{F}_t^c\right]_{ij}$$

$$= \left[(\mathbb{I}.\underline{n}^c).\underline{F}_t^c\right]_{ij} = I_{ijkl}n_l^c(F_t)_k^c$$

$$= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})n_l^c(F_t)_k^c = \frac{1}{2}\left[n_j^c(F_t)_i^c + n_i^c(F_t)_j^c\right]$$

où on a utilisé le fait que $\underline{n}^c.\underline{F}_t^c = 0$. En remplaçant dans (4.15), on obtient :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{2r}{V}\sum_{c=1}^{N}\left[F_n^c\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c + \underline{\underline{T}}^{cT}.\underline{F}_t^c\right] \tag{4.16}$$

En utilisant pour finir la loi de contact (4.16), il vient :

$$\begin{aligned} F_n^c &= K_n u_n^c = 2rK_n(\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c) : \underline{\underline{E}} \\ F_t^c &= K_t u_t^c = 2rK_t\underline{\underline{T}}^c : \underline{\underline{E}} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Il s'en suit que les équations (4.16) et (4.17) conduisent à :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{4r^2}{V}\sum_{c=1}^{N}\left[K_n(\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c) + K_t(\underline{\underline{T}}^{cT}.\underline{\underline{T}}^c)\right] : \underline{\underline{E}} \tag{4.18}$$

On cherche maintenant à identifier la loi de comportement macroscopique élastique sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \tag{4.19}$$

où $\mathbb{C}^{hom}$ désigne le tenseur des raideurs élastique homogénéisé. Par identification avec (4.18), on obtient l'expression suivante de $\mathbb{C}^{hom}$:

$$\mathbb{C}^{hom} = \frac{4r^2}{V}\sum_{c=1}^{N}\left[K_n(\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c\otimes\underline{n}^c) + K_t(\underline{\underline{T}}^{cT}.\underline{\underline{T}}^c)\right] \tag{4.20}$$

Pour modéliser l'assemblage granulaire, la sommation discrète porte sur le nombre de contacts. Cependant, dans le cas d'une quantité importante de contacts, il est préférable de raisonner en terme de probabilité $P(\underline{n})$ de présence d'un contact dans la direction de la normale $\underline{n}$. Dans ce cas, l'expression (4.20) de $\mathbb{C}^{hom}$ devient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \frac{4Nr^2}{V}\left[K_n \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds + K_t \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{\underline{T}}^T.\underline{\underline{T}})ds\right] \tag{4.21}$$

4.3.1 Tenseur de texture d'ordre deux

Tenant compte du fait que la probabilité de distribution des contacts $P(\underline{n})$ peut être définie à partir d'un tenseur de texture d'ordre deux ou d'ordre quatre, on se propose d'expliciter l'expression générale (4.21) de $\mathbb{C}^{hom}$ en utilisant ici le tenseur de texture $\underline{\underline{D}}$ d'ordre deux. Pour cela, on remplace les intégrales

$$\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \; et \; \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{\underline{T}}^T.\underline{\underline{T}})ds$$

par leurs expressions respectives (B.6) et (B.7) calculées en annexe B à l'aide d'un tenseur de texture d'ordre 2. L'équation (4.21) devient :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{hom} = \frac{4Nr^2}{V}\Bigg\{&\frac{1}{7}K_n\left[-\frac{1}{5}(\underline{\delta}\otimes\underline{\delta}+2\underline{\delta}\overline{\otimes}\underline{\delta})+(\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\delta}+\underline{\delta}\otimes\underline{\underline{D}})+2(\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\delta}+\underline{\delta}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})\right]\\ &-\frac{1}{7}K_t\left[-\frac{1}{5}(\underline{\delta}\otimes\underline{\delta}+2\underline{\delta}\overline{\otimes}\underline{\delta})+(\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\delta}+\underline{\delta}\otimes\underline{\underline{D}})-\frac{3}{2}(\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\delta}+\underline{\delta}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.22}$$

qui satisfait aux symétries usuelles du tenseur d'élasticité. En adoptant pour $\mathbb{C}^{hom}$ la notation classique de Voigt qui permet de représenter $\mathbb{C}^{hom}$ par une matrice 6×6 symétrique

(voir le formalisme de l'annexe C), on obtient :

$$C_{11} = [6D_{11} - \frac{3}{5}]K_n + [D_{11} + \frac{3}{5}]K_t \qquad C_{12} = [D_{11} + D_{22} - \frac{1}{5}](K_n - K_t)$$

$$C_{13} = [D_{11} + D_{33} - \frac{1}{5}](K_n - K_t) \qquad C_{14} = D_{23}(K_n - K_t)$$

$$C_{15} = D_{13}(3K_n + \frac{1}{2}K_t) \qquad C_{16} = D_{12}(3K_n + \frac{1}{2}K_t)$$

$$C_{22} = [6D_{22} - \frac{3}{5}]K_n + [D_{22} + \frac{3}{5}]K_t \qquad C_{23} = [D_{22} + D_{33} - \frac{1}{5}](K_n - K_t)$$

$$C_{24} = D_{23}(3K_n + \frac{1}{2}K_t) \qquad C_{25} = D_{31}(K_n - K_t)$$

$$C_{26} = D_{12}(3K_n + \frac{1}{2}K_t) \qquad C_{33} = [6D_{33} - \frac{3}{5}]K_n + [D_{33} + \frac{3}{5}]K_t$$

$$C_{34} = D_{23}(3K_n + \frac{1}{2}K_t) \qquad C_{35} = D_{31}(3K_n + \frac{1}{2}K_t)$$

$$C_{44} = [D_{22} + D_{33} - \frac{1}{5}]K_n + [\frac{3}{4}D_{33} + \frac{3}{4}D_{22} + \frac{1}{5}]K_t \qquad C_{36} = D_{12}(K_n - K_t)$$

$$C_{45} = D_{12}(K_n + \frac{3}{4}K_t) \qquad C_{46} = D_{13}(K_n + \frac{3}{4}K_t)$$

$$C_{55} = [D_{11} + D_{33} - \frac{1}{5}]K_n + [\frac{3}{4}D_{11} + \frac{3}{4}D_{33} + \frac{1}{5}]K_t \qquad C_{56} = D_{32}(K_n + \frac{3}{4}K_t)$$

$$C_{66} = [D_{11} + D_{22} - \frac{1}{5}]K_n + [\frac{3}{4}D_{22} + \frac{3}{4}D_{11} + \frac{1}{5}]K_t$$

La matrice représentative de $\mathbb{C}^{hom}$ étant symétrique on a alots 21 coefficients indépendants déterminés par les composantes de $\underline{\underline{D}}$ et les coefficients de rigidités K_n et K_t au contact.

4.3.2 Cas du tenseur de texture d'ordre quatre

Maintenant, explicitons l'expression générale (4.21) de $\mathbb{C}^{hom}$ en utilisant une description de la probabilité de contact $P(\underline{n})$ faisant intervenir un tenseur de texture d'ordre quatre. Les calculs requièrent la détermination des intégrales suivantes :

$$\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \; et \; \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}^T.\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}})ds$$

En remplaçant ces intégrales par leur expressions (B.18) et (B.19) détaillées dans l'annexe B, il vient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \frac{4Nr^2}{V}K_n\mathbb{D} + \frac{4Nr^2}{V}K_t\left[\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}}) - \mathbb{D}\right] \tag{4.23}$$

Il est clair que, de par la présence du tenseur de texture $\mathbb{D}$ d'ordre 4, l'expression (4.23) de $\mathbb{C}^{hom}$ est plus pertinente que (4.22) pour décrire une anisotropie générale. On rappelle que (4.22) reste limitée à une symétrie matérielle de type orthotrope.

4.3.3 Distribution isotrope

On considère maintenant un milieu granulaire élastique isotrope défini par les coefficients de Lamé λ et μ, ou par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν. En utilisant une distribution isotrope pour l'orientation de la normale au contact, on a $P(\underline{n}) = 1$ et :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} \underline{n}\otimes\underline{n} ds = \frac{1}{3}\underline{\underline{\delta}} \\ \mathbb{D} &= \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} \underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n} ds = \frac{1}{15}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Pour $\mathbb{C}^{hom}$ les résultats obtenus à partir d'un tenseur de texture d'ordre 2 ou 4 coïncident et conduisent à un tenseur d'élasticité isotrope :

$$\mathbb{C}^{hom} = \frac{4Nr^2}{15V}\left\{ K_n\left(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}\right) - K_t\left(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 3\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}\right)\right\}$$

Sachant que la compressibilité k^{hom} et le module de cisaillement μ^{hom} sont tels que :

$$\mathbb{C}^{hom} = k^{hom}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}) + 2\mu^{hom}(\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})$$

on en déduit que :

$$\mu^{hom} = \frac{2}{15}\frac{Nr^2k_n}{V}(2+3\alpha) \qquad et \qquad k^{hom} = \frac{4}{9}\frac{Nr^2k_n}{V} \tag{4.25}$$

où l'on a posé $\alpha = \dfrac{K_t}{K_n}$. On retrouve les mêmes résultats que dans [21], où le calcul a été effectué dans le cas isotrope seulement [125][20][58]. Ceci permet de vérifier la cohérence de notre approche développée dans un cadre plus général.

4.4 Hypothèse de Reuss

En s'appuyant sur l'hypothèse de Voigt, on a facilement obtenu une loi de comportement homogénéisée globale. Or, cette hypothèse restreint le mouvement des particules et constitue seulement une borne de la solution du problème [22][23][68].

On se propose donc maintenant de mettre en oeuvre un autre schéma d'homogénéisation basé cette fois sur l'hypothèse de localisation statique de Reuss. Celle-ci permet d'exprimer les forces de contact intergranulaires directement à partir de la contrainte macroscopique de l'assemblage granulaire suivant [14][34] :

$$\underline{F^c} = \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{A}}.\underline{n^c} \tag{4.26}$$

où $\underline{\underline{A}}$ est un tenseur symétrique d'ordre deux dit de localisation, qui dépend de la structure du matériau.

En reportant (4.26) dans (4.10) et passant à une description en terme de probabilité de contact pour un grand nombre de grains, on obtient :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}} &= \frac{Nr}{2\pi V}\left[\int_{s^2} P(\underline{n})F^c \otimes \underline{n}^c ds\right]^{sym} \\ &= \frac{2rN}{V}\left[\underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{A}}.\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n})ds\right]^{sym} = \frac{2rN}{V}\left[\underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{D}}\right]^{sym}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation :

$$\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n})ds = \underline{\underline{D}}$$

valable pour un tenseur de texture du deuxième ou quatrième ordre. Il s'en suit que l'opérateur de localisation $\underline{\underline{A}}$ est relié au tenseur de texture du deuxième ordre par la relation :

$$\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{D}} = \frac{V}{2Nr}\underline{\underline{\delta}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \frac{V}{2Nr}\underline{\underline{D}}^{-1}$$

Considérons, maintenant à nouveau le principe des puissances virtuelles (4.8). En utilisant (4.26), on a :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} = \frac{1}{V}\sum_{c=1}^{N} F^c.u^c = \frac{1}{V}\sum_{c=1}^{N} \Sigma : (\underline{\underline{A}}.\underline{n}^c \otimes \underline{u}^c) \tag{4.27}$$

Comme précédemment, dans le cas d'un grand nombre de contacts, il est préférable d'utiliser la probabilité de contact $P(\underline{n})$. Ainsi, (4.27) devient :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} = \frac{N}{4\pi V}\int_{s^2} P(\underline{n})\underline{\underline{A}}.\underline{n}^c \otimes \underline{u}^c ds : \underline{\underline{\Sigma}} \tag{4.28}$$

Comme $\underline{\underline{\Sigma}}$ est symétrique[1], on obtient par identification :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{N}{4\pi V}\left[\int_{s^2} P(\underline{n})\underline{\underline{A}}.\underline{n}^c \otimes \underline{u}^c ds\right]^{sym} \tag{4.29}$$

Si on considère l'inverse de la loi de contact (4.14) qui s'écrit :

$$\underline{u}^c = \underline{\underline{H}}^c.\underline{F}^c = H_n^c F_n^c \underline{n}^c + H_t^c \underline{F}_t^c \tag{4.30}$$

[1]Seule la partie symétrique du premier terme du membre à droite intervient.

en utilisant l'hypothèse statique (4.26), on obtient :

$$\begin{aligned} F_n^c &= \underline{F}^c.\underline{n}^c = \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{A}} : (\underline{n}^c \otimes \underline{n}^c) \\ F_t^c &= \underline{F}^c - F_n^c \underline{n}^c = \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{A}}.\underline{n}^c - \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{A}} : (\underline{n}^c \otimes \underline{n}^c \otimes \underline{n}^c) \\ &= \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{A}} : (\underline{n}^c \otimes \underline{\underline{\delta}} - \underline{n}^c \otimes \underline{n}^c \otimes \underline{n}^c) \\ &= (\underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{A}}).\underline{n}^c.(\underline{\underline{\delta}} - \underline{n}^c \otimes \underline{n}^c) \end{aligned} \tag{4.31}$$

On cherche maintenant à identifier un tenseur des souplesses élastiques homogénéisé représentatif du comportement global du milieu granulaire, à partir de la définition (4.29) du tenseur des déformations moyen, de la loi de contact (4.30) et de l'hypothèse de Reuss (4.26).

En utilisant (4.30) et la relation (4.31), l'expression (4.29) peut s'écrire en composantes :

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} A_{kq} \left\{ A_{ir} \frac{N}{2\pi V} \int_s P(\underline{n}) \left[(H_n - H_t) n_q^c n_l^c n_j^c n_r^c + H_t n_q^c \delta_{lj} n_r^c \right] ds \right. \\ &+ \left. A_{jr} \frac{N}{2\pi V} \int_s P(\underline{n}) \left[(H_n - H_t) n_q^c n_l^c n_i^c n_r^c + H_t n_q^c \delta_{li} n_r^c \right] ds \right\} \Sigma_{kl} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Par identification avec la loi de comportement $\underline{\underline{E}} = \mathbb{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^{hom} &= \frac{N}{2V} A_{kq} \left\{ (H_n - H_t) \left[A_{ir} \frac{1}{2\pi} \int_s P(\underline{n}) n_q n_l n_j n_r ds + A_{jk} \frac{1}{2\pi} \int_s P(\underline{n}) n_q n_l n_i n_r ds \right] \right. \\ &+ \left. H_t \left[A_{ir} \frac{1}{2\pi} \int_s P(\underline{n}) (n_q \delta_{lj} n_r) ds + A_{jr} \frac{1}{2\pi} \int_s P(\underline{n}) (n_q \delta_{li} n_r) ds \right] \right\}_{(kl)} \end{aligned} \tag{4.33}$$

où la notation $_{(kl)}$ indique la symétrisation suivant les indices (k, l) à cause de la symétrie de Σ_{kl}.

4.4.1 Expression à l'aide du tenseur de texture d'ordre deux

On calcule d'abord les intégrales $\frac{1}{4\pi} \int_{s^2} P(\underline{n}) \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} ds$ et $\frac{1}{4\pi} \int_{s^2} P(\underline{n}) \underline{n} \otimes \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{n} ds$ intervenant dans (4.33) en utilisant une description de la probabilité de contact $P(\underline{n})$ basée sur un tenseur de texture d'ordre deux (cf. (B.6) et (B.8) de l'annexe B). En suivant une

démarche similaire au cas de l'hypothèse de Voigt, on démontre que :

$$\mathbb{S}^{hom} = \frac{N}{V}\left\{\frac{H_n - H_t}{7}\left[-\frac{1}{5}[\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}\overline{\otimes}\underline{\underline{A}} + \frac{1}{2}(\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{A}})\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}(\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{A}})] + \frac{V}{2Nr}[\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{\delta}} \right.\right.$$
$$\left.\left. +\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{A}} + \frac{3}{2}(\underline{\underline{A}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{A}})] + \frac{1}{2}[(\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{A}})\overline{\otimes}\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{A}})]\right] + H_t\frac{V}{4Nr}(\underline{\underline{A}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{A}})\right\} \tag{4.34}$$

4.4.2 Tenseur de texture d'ordre quatre

L'utilisation de l'expression (4.33) de la probabilité de contact $P(\underline{n})$ à partir d'un tenseur de texture d'ordre quatre, conduit, après évaluation de

$$\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds \quad et \quad \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})\underline{n}\otimes\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{n}ds$$

(cf. (B.18) et (B.20) de l'annexe B) au résultat suivant :

$$\mathbb{S}^{hom} = \frac{N}{V}\left[(H_n - H_t)(\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{A}}) : \mathbb{D} + H_t\frac{N}{4V}(\underline{\underline{A}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{A}})\right] \tag{4.35}$$

Notons que les résultats obtenus à partir de l'hypothèse de Reuss ne peuvent pas satisfaire la condition d'équilibre pour toutes les particules dans un volume élémentaire représentatif. On dispose ainsi d'un encadrement des propriétés élastiques homogénéisées fourni par les hypothèses cinématique de Voigt et statique de Reuss.

4.4.3 Distribution isotrope

En se plaçant à nouveau dans le cas particulier d'un milieu granulaire élastique isotrope, on obtient :

$$\mathbb{S}^{hom} = \frac{9V}{4Nr^2}\left[\frac{H_n}{15}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}) + \frac{H_t}{15}(3\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}})\right]$$

Les modules de cisaillement et de compressibilité homogénéisés sont donnés par :

$$\mu^{hom} = \frac{10}{3}\frac{Nr^2k_n}{V}\frac{\alpha}{3+2\alpha} \qquad et \qquad k^{hom} = \frac{4}{9}\frac{Nr^2k_n}{V} \tag{4.36}$$

où l'on rappelle que $\alpha = \dfrac{K_t}{K_n} = \dfrac{H_n}{H_t}$.

On retrouve à nouveau les résultats de [21] où le calcul a été effectué dans le cas isotrope seulement.

4.5 Hypothèse cinématique générale

Depuis les travaux de [100], la théorie de représentation des tenseurs polynômiaux a été largement développée (cf. par exemple [7][8][114][115]). L'utilisation de cette théorie nous donne la structure mathématique générale des fonctions scalaires, vectorielles ou tensorielles dépendant des tenseurs (dont l'ordre peut être quelconque).

Nous proposons, à partir des théorèmes de représentation [115], une hypothèse cinématique générale reliant les déplacements relatifs au contact $\underline{u}^c$ à la déformation uniforme $\underline{\underline{E}}$ imposée aux frontières du VER. Introduisons le vecteur $\underline{U}^c$ défini par :

$$\underline{U}^c = \frac{1}{2r} P(\underline{n}) \underline{u}^c \tag{4.37}$$

4.5.1 Tenseur de texture d'ordre deux

En utilisant le théorème de représentation [115], on obtient :

$$\begin{aligned}
\underline{U}^c = \Big[& \hat{A}_{00} + \hat{A}_0 tr(\underline{\underline{D}}) + \hat{A}_1 tr(\underline{\underline{E}}) + \hat{A}_2 tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) + \hat{A}_3 \underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + \hat{A}_4 (\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\
& + \hat{A}_5 tr(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + \hat{A}_6 \underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + \hat{A}_7 tr(\underline{\underline{E}}) tr(\underline{\underline{D}}) + \hat{A}_8 tr(\underline{\underline{D}}) (\underline{n}.\underline{\underline{E}}.\underline{n}) \\
& + \hat{A}_9 \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \Big] \underline{n} + \underline{\underline{E}}.\underline{n} \Big[\hat{B}_1 \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + \hat{B}_2 tr(\underline{\underline{D}}) + \hat{B}_3 \Big] + \underline{\underline{D}}.\underline{n} \Big[\hat{C}_1 \underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\
& + \hat{C}_2 tr \underline{\underline{E}} + \hat{C}_3 \Big] + \hat{D}_1 (\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}.\underline{n} - \underline{\underline{D}}.\underline{\underline{E}}.\underline{n})
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Puisque $tr(\underline{\underline{D}}) = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\underline{U}^c = \Big[& A_0 + A_1 tr(\underline{\underline{E}}) + A_2 tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) + A_3 \underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + A_4 (\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\
& + A_5 tr(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + A_6 \underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + A_7 \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \Big] \underline{n} \\
& + \underline{\underline{E}}.\underline{n} \Big[B_1 \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + B_2 \Big] + \underline{\underline{D}}.\underline{n} \Big[C_1 \underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + C_2 tr \underline{\underline{E}} + C_3 \Big] \\
& + D_1 (\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}.\underline{n} - \underline{\underline{D}}.\underline{\underline{E}}.\underline{n})
\end{aligned} \tag{4.39}$$

avec $A_0 = \hat{A}_0 + \hat{A}_{00}$, $A_1 = \hat{A}_1 + \hat{A}_7$, $A_3 = \hat{A}_3 + \hat{A}_8$ et $B_2 = \hat{B}_2 + \hat{B}_3$. Pour les autres termes, on a $A_i = \hat{A}_i$, $B_i = \hat{B}_i$, $C_i = \hat{C}_i$ et $D_i = \hat{D}_i$.

En considérant un matériau élastique linéaire sans contraintes ni déformations initiales (dans l'état d'équilibre naturel), en l'absence de sollicitations extérieures (chargement, déformations), sans mouvement de solide rigide possible, on a une relation linéaire entre le déplacement $\underline{u^c}$ et $\underline{\underline{E}}$. Ainsi, la forme générale (4.39) de U^C se simplifie et on aura $A_0 = A_7 = C_3 = 0$.

Maintenant, afin d'établir l'hypothèse cinématique générale recherchée, repartons de la définition (4.29) des déformations moyennes sur le V.E.R :

$$E_{ij} = \frac{1}{V}\Big[\sum_{c=1}^{N}(u_i^c A_{jk} n_k^c)\Big]^{sym} = \frac{N}{V}\Big[\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(u_i^c A_{jk} n_k^c)ds\Big]^{sym} \tag{4.40}$$

avec $\underline{\underline{A}} = \frac{V}{2rN}\underline{\underline{D}}^{-1}$. Compte tenu de (4.37), l'expression (4.40) devient :

$$E_{ij} = \frac{2rN}{V}\Big[\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} U_i^c A_{jk} n_k^c ds\Big]^{sym} \tag{4.41}$$

En reportant alors l'expression (4.39) de $\underline{U^c}$ dans (4.41), on obtient :

$$\begin{aligned}
E_{ij} = \frac{2Nr}{V}\Bigg\{ A_{kj}\Bigg[& A_0\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_i n_k ds + A_1 tr(\underline{\underline{E}})\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_i n_k ds + A_2 tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}})\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_i n_k ds \\
& + A_3 E_{pq}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_p n_q n_i n_k ds + A_4(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}})_{pq}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_p n_q n_i n_k ds \\
& + A_5 tr(\underline{\underline{E}}) D_{pq}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_p n_q n_i n_k ds + A_6 E_{pq}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_p n_q n_i n_k n_m n_n ds D_{nm} \\
& + A_7 D_{pq}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_p n_q n_i n_k ds + B_1 E_{in}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_n n_q n_p n_k ds D_{pq} + B_2 E_{ip}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_p n_k ds \\
& + C_1 D_{in}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_n n_q n_p n_k ds E_{pq} + C_2 tr(\underline{\underline{E}}) D_{ip}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_p n_k ds + C_3 D_{ip}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_p n_k ds \\
& + D_1(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}.\underline{\underline{E}})_{ip}\int_{s^2} n_p n_k ds\Bigg\}^{sym}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Sachant que $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{D}} = \frac{V}{2Nr}\underline{\underline{\delta}}$, et après avoir explicité les intégrales contenues dans (4.42)

(cf. annexe B), on obtient :

$$E_{ij} = \frac{2Nr}{3V}\Bigg\{ A_0 A_{ij} + A_1 tr(\underline{\underline{E}}) A_{ij} + A_2 tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) A_{ij} + \frac{1}{5} A_3 \Bigg[tr(\underline{\underline{E}}) A_{ij} + 2E_{ik} A_{kj} \Bigg] + \frac{1}{5} A_4 \Bigg[tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) A_{ij} + \frac{V}{2Nr} E_{ij} + E_{kl} D_{li} A_{kj} \Bigg] + \frac{1}{5} A_5 \Bigg[tr(\underline{\underline{E}}) A_{ij} + \frac{V}{Nr} tr(\underline{\underline{E}}) \delta_{ij} \Bigg] + \frac{1}{35} A_6 \Bigg[tr(\underline{\underline{E}}) A_{ij} + \frac{V}{Nr} tr(\underline{\underline{E}}) \delta_{ij} + 2tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) A_{ij} + 4E_{lk} A_{kj} D_{il} + 2\frac{V}{Nr} E_{ij} + 2E_{ik} A_{kj} \Bigg] + \frac{1}{5} A_7 \Bigg[A_{ij} + \frac{V}{Nr} \delta_{ij}) \Bigg] + \frac{1}{5} B_1 \Bigg[\frac{V}{Nr} E_{ij} + E_{ik} A_{kj} \Bigg] + B_2 E_{ik} A_{kj} + \frac{1}{5} C_1 \Bigg[2E_{kl} D_{li} A_{kj} + \frac{V}{2Nr} tr(\underline{\underline{E}}) \delta_{ij} \Bigg] + C_2 \frac{V}{2Nr} tr(\underline{\underline{E}}) \delta_{ij} + C_3 \frac{V}{2Nr} \delta_{ij} + D_1 \Bigg[\frac{V}{2Nr} E_{ij} - E_{lk} A_{kj} D_{il} \Bigg] \Bigg\}^{sym} \tag{4.43}$$

qui donne après symétrisation :

$$E_{ij} = \frac{2Nr}{3V}\Bigg\{ A_0 A_{ij} + A_1 tr(\underline{\underline{E}}) A_{ij} + A_2 tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) A_{ij} + \frac{1}{5} A_3 \Bigg[tr(\underline{\underline{E}}) A_{ij} + E_{ik} A_{kj} + E_{jk} A_{ki} \Bigg] + \frac{1}{5} A_4 \Bigg[tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) A_{ij} + \frac{V}{2Nr} E_{ij} + \frac{1}{2} E_{kl} D_{li} A_{kj} + \frac{1}{2} E_{kl} D_{lij} A_{ki} \Bigg] + \frac{1}{5} A_5 \Bigg[tr(\underline{\underline{E}}) A_{ij} + \frac{V}{Nr} tr(\underline{\underline{E}}) \delta_{ij}) \Bigg] + \frac{1}{35} A_6 \Bigg[\frac{V}{Nr} tr(\underline{\underline{E}}) \delta_{ij} + tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) A_{ij} + 2E_{lk} A_{kj} D_{il} + 2E_{lk} A_{ki} D_{jl} + \frac{V}{Nr} E_{ij} + E_{ik} A_{kj} + E_{jk} A_{ki} \Bigg] + \frac{1}{5} A_7 \Bigg[A_{ij} + \frac{V}{Nr} \delta_{ij}) \Bigg] + \frac{1}{5} B_1 \Bigg[\frac{V}{Nr} E_{ij} + \frac{1}{2} E_{ik} A_{kj} + \frac{1}{2} E_{jk} A_{ki} \Bigg] + \frac{1}{2} B_2 \Bigg[E_{ik} A_{kj} + E_{jk} A_{ki} \Bigg] + \frac{1}{5} C_1 \Bigg[E_{kl} D_{li} A_{kj} + E_{kl} D_{lj} A_{ki} + \frac{V}{2Nr} tr(\underline{\underline{E}}) \delta_{ij} \Bigg] + C_2 \frac{V}{2Nr} tr(\underline{\underline{E}}) \delta_{ij} + C_3 \frac{V}{2Nr} \delta_{ij} - \frac{1}{2} D_1 \Bigg[E_{lk} A_{kj} D_{il} + E_{lk} A_{ki} D_{jl} \Bigg] \Bigg\} \tag{4.44}$$

Cette dernière relation devant être satisfaite pour n'importe quelle valeur de $\underline{\underline{D}}$ et de $\underline{\underline{E}}$, on obtient le système suivant de 8 équations à 14 inconnues A_0 à A_7, B_1, B_2, C_1, C_2,C_3 et D_1 :

$$\begin{cases} A_0 + \frac{1}{5}A_7 = 0 \quad ; \quad \frac{1}{5}A_7 + \frac{1}{2}C_3 = 0 \\ A_1 + \frac{1}{5}A_3 + \frac{1}{5}A_5 + \frac{1}{35}A_6 = 0 \\ A_2 + \frac{1}{5}A_4 + \frac{2}{35}A_6 = 0 \\ \frac{1}{5}A_3 + \frac{1}{35}A_6 + \frac{1}{10}B_1 + \frac{1}{2}B_2 = 0 \\ \frac{1}{5}A_5 + \frac{1}{35}A_6 + \frac{1}{10}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 0 \\ \frac{1}{10}A_4 + \frac{2}{35}A_6 + \frac{1}{5}C_1 - \frac{1}{2}D_1 = 0 \\ \frac{1}{15}A_4 + \frac{4}{105}A_6 + \frac{2}{15}B_1 + \frac{1}{3}D_1 = 1 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, fixons 6 des 14 inconnues par exemple $A_6 = \lambda_1$, $A_5 = \lambda_2$, $D_1 = \lambda_3$, $C_2 = \lambda_4$, $A_0 = \beta$, $B_2 = \eta$ et exprimons les autres inconnues en fonction des λ_i, de β et de η. On obtient :

$$\begin{cases} A_0 = \beta \quad ; \quad B_2 = \eta \\ A_1 = \frac{3}{4} + \frac{\eta}{2} - \frac{1}{35}\lambda_1 - \frac{2}{5}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{2}\lambda_4 \\ A_2 = -(\frac{2}{35}\lambda_1 + \frac{4}{5}\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4) \\ A_3 = -\frac{15}{4} - \frac{5}{2}\eta + \lambda_2 + \frac{5}{2}\lambda_3 + \frac{5}{2}\lambda_4 \\ A_4 = 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 10\lambda_4 \\ A_5 = \lambda_2 \quad ; \quad A_6 = \lambda_1 \quad ; \quad A_7 = -5\beta \\ B_1 = \frac{15}{2} - \frac{2}{7}\lambda_1 - 2\lambda_2 - 5\lambda_3 - 5\lambda_4 \\ C_1 = -\frac{2}{7}\lambda_1 - 2\lambda_2 - 5\lambda_4 \\ C_2 = \lambda_4 \quad ; \quad C_3 = 2\beta \quad ; \quad D_1 = \lambda_3 \end{cases}$$

Les paramètres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, β et η sont des paramètres constants qui peuvent être considérés comme caractéristiques de l'état interne du milieu granulaire. Alors en introduisant les valeurs des A_i, B_i, C_i et D_i dans l'expression (4.39) de U^c, on obtient

l'hypothèse cinématique générale suivante :

$$\begin{aligned}
\underline{U^c} = \eta\underline{\underline{E}}.\underline{n} - (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})\Big[5\underline{n}.\underline{\underline{E}}.\underline{n} - tr(\underline{\underline{E}})\Big]\underline{n} + \frac{15}{2}(\underline{n}.\underline{\underline{D}}.\underline{n})\underline{\underline{E}}.\underline{n} + \beta\Big[\underline{n} - 5\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n} + 2\underline{\underline{D}}.\underline{n}\Big] \\
+\lambda_1\Big[-\frac{1}{35}tr(\underline{\underline{E}})\underline{n} - \frac{2}{35}tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}})\underline{n} + \underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n} - \frac{2}{7}\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}}.\underline{n} \\
-\frac{2}{7}\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{D}}.\underline{n}\Big] + \lambda_2\Big[-\frac{2}{5}tr(\underline{\underline{E}})\underline{n} - \frac{4}{5}tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}})\underline{n} + \underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n} - 2\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}}.\underline{n} \\
-2\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{D}}.\underline{n} + 4(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n} + tr(\underline{\underline{E}})\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n}\Big] + \lambda_3\Big[-\frac{1}{2}tr(\underline{\underline{E}})\underline{n} - tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}})\underline{n} \\
+\frac{5}{2}\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n} + 5(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n} - 5\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}}.\underline{n} + \underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}.\underline{n} - \underline{\underline{D}}.\underline{\underline{E}}.\underline{n}\Big] \\
+\lambda_4\Big[-\frac{1}{2}tr(\underline{\underline{E}})\underline{n} - 2tr(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}})\underline{n} + \frac{5}{2}\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n} + 10(\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{D}}) : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{n} - 5\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}}.\underline{n} \\
-5\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{D}}.\underline{n} + tr\underline{\underline{E}}\;\underline{\underline{D}}.\underline{n}\Big]
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Il faut noter que dans le cas particulier isotrope où $P(\underline{n}) = 1$ et $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3}\underline{\underline{\delta}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\underline{u}^c &= 2r\underline{U^c} \\
&= 2r\Bigg\{\Big[(A_0 + \frac{1}{3}A_7 + \frac{1}{3}C_3) + (A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_5 + \frac{1}{3}C_2)tr(\underline{\underline{E}}) + (A_3 + \frac{1}{3}A_4 \\
&\quad + \frac{1}{3}A_6 + \frac{1}{3}C_1)\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\Big]\underline{n} + \Big[\frac{1}{3}B_1 + B_2\Big]\underline{\underline{E}}.\underline{n}\Bigg\} \\
&= 2r\Bigg\{\Big[(\underbrace{\beta - \frac{5}{3}\beta + \frac{2}{3}\beta}_{0}) + (\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{21}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{5}{6}\lambda_3 - \frac{5}{6}\lambda_4)tr(\underline{\underline{E}}) + (-\frac{15}{4} \\
&\quad -\frac{5}{2}\eta - \frac{5}{21}\lambda_1 - \frac{5}{3}\lambda_2 - \frac{25}{6}\lambda_3 - \frac{25}{6}\lambda_4)\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\Big]\underline{n} + \Big[\eta + \frac{5}{2} - \frac{2}{21}\lambda_1 + \frac{5}{3}\lambda_2 \\
&\quad -\frac{5}{3}\lambda_3 - \frac{5}{3}\lambda_4\Big]\underline{\underline{E}}.\underline{n}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}\underline{u}^c &= 2r\Bigg\{(\eta+\frac{5}{2}-\frac{2}{21}\lambda_1-\frac{2}{3}\lambda_2-\frac{5}{3}\lambda_3-\frac{5}{3}\lambda_4)\underline{\underline{E}}.\underline{n}-(\frac{3}{4}+\frac{\eta}{2}-\frac{1}{21}\lambda_1-\frac{1}{3}\lambda_2-\frac{5}{6}\lambda_3\\ &\quad -\frac{5}{6}\lambda_4)\Big[5\underline{n}.\underline{\underline{E}}.\underline{n}-tr(\underline{\underline{E}})\Big]\underline{n}\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.47}$$

Ainsi, l'expression de $\underline{u}^c$ n'est pas affectée par β.
D'autre part, il est intéressant de remarquer que dans ce cas isotrope, pour la valeur particulière $\eta-\frac{2}{21}\lambda_1-\frac{2}{3}\lambda_2-\frac{5}{3}\lambda_3-\frac{5}{3}\lambda_4=-\frac{3}{2}$, on retrouve l'hypothèse cinématique de Voigt :

$$\underline{U}^c = 2r\underline{\underline{E}}.\underline{n}$$

4.5.2 Schéma d'homogénéisation

L'hypothèse cinématique proposée ici est de façon évidente plus générale que celle de Voigt. Elle dépend de cinq paramètres ajustables λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, β ainsi que de $\underline{D}$. On se limite ici au cas particulier d'un seul paramètre ajustable[2] η en considérant $\lambda_i=0$, $i=1$ à 4 et $\beta=0$. Ce choix permet de réduire le nombre des paramètres libres à un seul sans perdre toute la généralité de l'approche proposée ici et conduit à l'hypothèse cinématique suivante :

$$\underline{u}^c=\frac{2r}{P(\underline{n})}\Bigg\{\eta\underline{\underline{E}}.\underline{n}-(\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})\Big[5\underline{n}.\underline{\underline{E}}.\underline{n}-tr(\underline{\underline{E}})\Big]\underline{n}+\frac{15}{2}\underline{\underline{D}}:(\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}}.\underline{n}\Bigg\} \tag{4.48}$$

On se propose maintenant d'expliciter le schéma d'homogénéisation basé sur cette hypothèse cinématique (4.48). De la même façon que pour l'hypothèse de Voigt, on s'appuie sur l'expression du tenseur des contraintes moyen (4.10), sur la loi de contact (4.13) et sur l'hypothèse cinématique (4.48) pour déterminer les propriétés macroscopiques du milieu granulaire.

Pour cela, décomposons tout d'abord le déplacement dans la base locale associée au contact. On a :

$$\underline{u}^c_n=\underline{u}^c.\underline{n}=\frac{2r}{P(\underline{n})}\Bigg\{-(\frac{3\eta}{2}+\frac{15}{4})\underline{\underline{E}}:(\underline{n}\otimes\underline{n})+(\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})tr(\underline{\underline{E}})+\frac{15}{2}\underline{\underline{D}}:(\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}}:(\underline{n}\otimes\underline{n})\Bigg\}$$

$$\underline{u}^c_t=(\underline{u}^c-\underline{u}^c_n\underline{n})=\frac{2r}{P(\underline{n})}\Bigg\{\Big[\eta+\frac{15}{2}\underline{\underline{D}}:(\underline{n}\otimes\underline{n})\Big]\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{E}}\Bigg\}$$

[2] L'étude générale de l'hypothèse cinématique (4.45) est encore à faire afin de préciser la signification physique des paramètres λ_i. Cependant, cela ne constitue pas l'objet du travail présenté ici.

où $\underline{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{\underline{I}}}.\underline{n} - \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}$ et $\underline{\underline{\underline{T}}} : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}.\underline{n} - \underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n})$ car $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^T$.

D'autre part, avec la loi de contact linéaire élastique il vient :

$$\underline{F}_n^c = K_n \underline{u}_n^c = \frac{2r}{P(\underline{n})}\left\{K_n\left[-(\frac{3\eta}{2}+\frac{15}{4})\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})+(\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})tr(\underline{\underline{E}})+\frac{15}{2}\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\right\}$$

et

$$\underline{F}_t^c = K_t \underline{u}_t^c = \frac{2r}{P(\underline{n})}\left\{\left[\eta + \frac{15}{2}\underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n})\right] K_t \underline{\underline{\underline{T}}} : \underline{\underline{E}}\right]\right\}$$

Reportant maintenant les expressions précédentes dans (4.10), on obtient en terme de probabilité de contact :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{4Nr^2}{V}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\Bigg\{K_n\Bigg[-(\frac{3\eta}{2}+\frac{15}{4})\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) + \frac{15}{2}\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) : \underline{\underline{E}} \\ +(\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})tr(\underline{\underline{E}})\Bigg](\underline{n}\otimes\underline{n}) + \left[\eta + \frac{15}{2}\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n})\right] K_t \underline{\underline{\underline{T}}}^T.\underline{\underline{\underline{T}}} : \underline{\underline{E}}\Bigg\} ds\end{aligned}$$

avec $(\underline{F}_t^c \otimes \underline{n})^{sym} = \underline{\underline{\underline{T}}}^T.\underline{F}_t^c$.

Alors :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{4r^2N}{V}\Bigg\{K_n\Bigg[-(\frac{3\eta}{2}+\frac{15}{4})\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds + (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{\delta}ds \\ +\frac{15}{2}\underline{\underline{D}} : \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds\Bigg] + K_t\Bigg[\eta\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{\underline{\underline{T}}}^T.\underline{\underline{\underline{T}}}ds \\ +\frac{15}{2}\underline{\underline{D}} : \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n})\otimes\underline{\underline{\underline{T}}}^T.\underline{\underline{\underline{T}}}ds\Bigg]\Bigg\} : \underline{\underline{E}}\end{aligned} \tag{4.49}$$

Par identification avec $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}}$, on obtient l'expression suivante du tenseur des raideurs élastique homogénéisé (cf. (B.9), (B.10), (B.11), (B.12) et (B.13) de l'annexe B) :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{hom} = \frac{4r^2N}{V}K_n\Bigg\{-(\frac{\eta}{2}+\frac{5}{4})\left[\frac{1}{5}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}) + \frac{2}{5}(\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})\right] + (\frac{\eta}{6}+\frac{1}{4})\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + \Bigg[\frac{1}{14}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}) \\ +\frac{1}{7}(\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{D}} + 2\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})\Bigg]\Bigg\} + \frac{4r^2N}{V}K_t\Bigg\{-\frac{\eta}{3}\left[\frac{1}{5}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}) + \frac{2}{5}(\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})\right] \\ -\Bigg[\frac{1}{14}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} - 5\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}) + \frac{1}{7}(\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{D}} - \frac{3}{2}\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} - \frac{3}{2}\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})\Bigg] + \frac{\eta}{3}\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.50}$$

Notons que pour $\eta = -\frac{3}{2}$, on retrouve les résultats obtenus à partir de l'hypothèse de Voigt. Ainsi, même avec un seul paramètre ajustable η, l'hypothèse cinématique (4.48) est plus générale.

4.5.3 Tenseur de texture d'ordre quatre

On rappelle que pour le cas tridimensionnel, on a :

$$P(\underline{n}) = \frac{15}{4}\left[\frac{21}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) - 7\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) + \frac{1}{2}\right]$$

Par analogie avec l'équation (4.48) obtenue dans le cas d'un tenseur de texture d'ordre deux, l'hypothèse cinématique prend la forme :

$$\underline{U^c} = \eta\underline{\underline{E}}.\underline{n} - (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})\left[5\underline{n}.\underline{\underline{E}}.\underline{n} - tr(\underline{\underline{E}})\right]\underline{n} + a\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}}\underline{n} \tag{4.51}$$

Afin d'identifier la constante a, on va se placer dans le cas isotrope. En effet, on aura :

$$\mathbb{D} = \frac{1}{15}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})$$

L'équation (4.39) devient :

$$\underline{U^c} = \eta\underline{\underline{E}}.\underline{n} - (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})\left[5\underline{n}.\underline{\underline{E}}.\underline{n} - tr(\underline{\underline{E}})\right]\underline{n} + \frac{1}{5}a\underline{\underline{E}}.\underline{n}$$

Maintenant, si on compare avec l'équation (4.48), les résultats obtenus dans le cas isotrope doivent coïncider pour un tenseur d'ordre deux ou quatre. On en déduit :

$$a = \frac{25}{2}$$

L'hypothèse cinématique s'écrit alors, à l'aide du tenseur de texture d'ordre quatre :

$$\underline{u^c} = \frac{2r}{P(\underline{n})}\left\{\eta\underline{\underline{E}}.\underline{n} - (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})\left[5\underline{n}.\underline{\underline{E}}.\underline{n} - tr(\underline{\underline{E}})\right]\underline{n} + \frac{25}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{E}}.\underline{n}\right\} \tag{4.52}$$

Les composants normales et tangentielles du déplacement deviennent :

$$\underline{u^c_n} = \frac{2r}{P(\underline{n})}\left\{-(\frac{3\eta}{2}+\frac{15}{4})\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) + (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})tr(\underline{\underline{E}}) + \frac{25}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) : \underline{\underline{E}}\right\}$$

et

$$\underline{u^c_t}\frac{1}{2r} = \frac{1}{P(\underline{n})}\left\{\left[\eta + \frac{25}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})\right]\underline{\underline{\underline{T}}} : \underline{\underline{E}}\right\}$$

Les efforts normaux et tangentiaux de contacts se déduisent de la loi de contact locale :

$$\underline{F}_n^c \frac{1}{2r} = \frac{1}{P(\underline{n})}\left\{ K_n \left[-(\frac{3\eta}{2}+\frac{15}{4})\underline{\underline{E}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) + (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})tr(\underline{\underline{E}}) \right.\right.$$
$$\left.\left. +\frac{25}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) : \underline{\underline{E}} \right] \right\}$$

et

$$\underline{F}_t^c \frac{1}{2r} = \frac{1}{P(\underline{n})}\left\{ \left[\eta + \frac{25}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) \right] K_t \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{E}} \right\}$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{4r^2N}{V}\Bigg\{ & K_n \Bigg[-(\frac{3\eta}{2}+\frac{15}{4})\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} \underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds + (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}ds\otimes\underline{\delta} \\
& +\frac{25}{2}\mathbb{D} :: \frac{1}{2\pi}\int_s \underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds \Bigg] \\
& +K_t\frac{1}{2\pi}\int_s \left[\eta + \frac{25}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) \right] \underline{\underline{T}}^T.\underline{\underline{T}}ds \Bigg] \Bigg\} : \underline{\underline{E}}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{hom} = \frac{4r^2N}{V}\Bigg\{ & K_n \Bigg[-(\frac{3\eta}{2}+\frac{15}{4})\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} \underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds + (\frac{\eta}{2}+\frac{3}{4})\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}ds\otimes\underline{\delta} \\
& +\frac{25}{2}\mathbb{D} :: \frac{1}{2\pi}\int_s \underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds \Bigg] \\
& +K_t\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} \left[\eta + \frac{25}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) \right] \underline{\underline{T}}^T.\underline{\underline{T}}ds \Bigg] \Bigg\}^{sym}
\end{aligned}$$

En se référant à l'annexe B, on remplace les expressions analytiques des intégrales (cf. (B.9), (B.10), (B.21) et (B.22)) ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{hom} = \frac{4r^2N}{V}K_n\Bigg\{ & -(\frac{\eta}{10}+\frac{1}{4})(\underline{\delta}\otimes\underline{\delta} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}) + (\frac{\eta}{6}+\frac{1}{4})\underline{\delta}\otimes\underline{\delta} \\
& +\frac{5}{126}(\underline{\delta}\otimes\underline{\delta} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 8\mathbb{D} + 4\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\delta} + 4\underline{\delta}\otimes\underline{\underline{D}} + 8\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 8\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}}) \Bigg\} \\
& +K_t\frac{4r^2N}{V}\Bigg\{ -\frac{\eta}{15}(\underline{\delta}\otimes\underline{\delta} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}) + \frac{\eta}{3}\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} - \frac{5}{126}(\underline{\delta}\otimes\underline{\delta} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 8\mathbb{D} \\
& +4\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\delta} + 4\underline{\delta}\otimes\underline{\underline{D}} + 8\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 8\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}}) + \frac{5}{14}(\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}}) \Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

4.5.4 Distribution isotrope

Dans le cas isotrope, on peut comparer les résultats obtenus par l'hypothèse cinématique avec, d'une part ceux obtenus précédemment à partir de l'hypothèse de Voigt et de Reuss, et d'autre part avec les résultats existants dans la littérature. Dans le cas isotrope, l'équation (4.50) devient[3] :

$$\mathbb{C}^{hom} = \frac{4Nr^2}{V}\left\{K_n\left[(\frac{\eta}{15}+\frac{1}{6})\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}-(\frac{\eta}{5}+\frac{1}{6})\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}\right]+K_t\left[-(\frac{\eta}{15}+\frac{1}{6})\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+(\frac{\eta}{5}+\frac{1}{2})\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}\right]\right\}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \mu^{hom} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = \dfrac{1}{15}\dfrac{Nr^2k_n}{V}\Big(-(5+6\eta)+3\alpha(5+2\eta)\Big) \\ k^{hom} = \dfrac{E}{3(1-2\nu)} = \dfrac{4}{9}\dfrac{Nr^2k_n}{V} \end{cases} \tag{4.55}$$

On peut faire un certain nombre de remarques :

• pour $\eta = -\dfrac{3}{2}$: les résultats coïncident avec ceux obtenus à partir de l'hypothèse de Voigt.

• pour $\eta = -\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1+2\alpha}{3+2\alpha}\right)$: les résultats coïncident avec ceux obtenus à partir de l'hypothèse de Reuss.

4.6 Analyse des résultats

Les résultats obtenus à partir des trois hypothèses de localisation (Voigt, Reuss et cinématique) sont représentés dans le tableau ci-dessous dans le cas isotrope :

	hypothèse de Voigt	hypothèse de Reuss	hypothèse cinématique
K^{hom}	$\dfrac{4}{9}\dfrac{Nr^2K_n}{V}$	$\dfrac{4}{9}\dfrac{Nr^2K_n}{V}$	$\dfrac{4}{9}\dfrac{Nr^2K_n}{V}$
μ^{hom}	$\dfrac{2}{15}\dfrac{Nr^2K_n}{V}(2+3\alpha)$	$\dfrac{10}{3}\dfrac{Nr^2K_n}{V}\dfrac{\alpha}{3+2\alpha}$	$\dfrac{1}{15}\dfrac{Nr^2K_n}{V}\Big(-(5+6\eta)+3\alpha(5+2\eta)\Big)$

[3] On rappelle que dans le cas isotrope, l'utilisation d'un tenseur de texture d'ordre 2 ou 4 conduit au même résultat.

On constate, à partir de ces résultats, que la compressibilité macroscopique k^{hom} est indépendante de l'hypothèse de localisation utilisée. Elle est constante et dépend uniquement de façon linéaire de la rigidité normale au contact K_n.

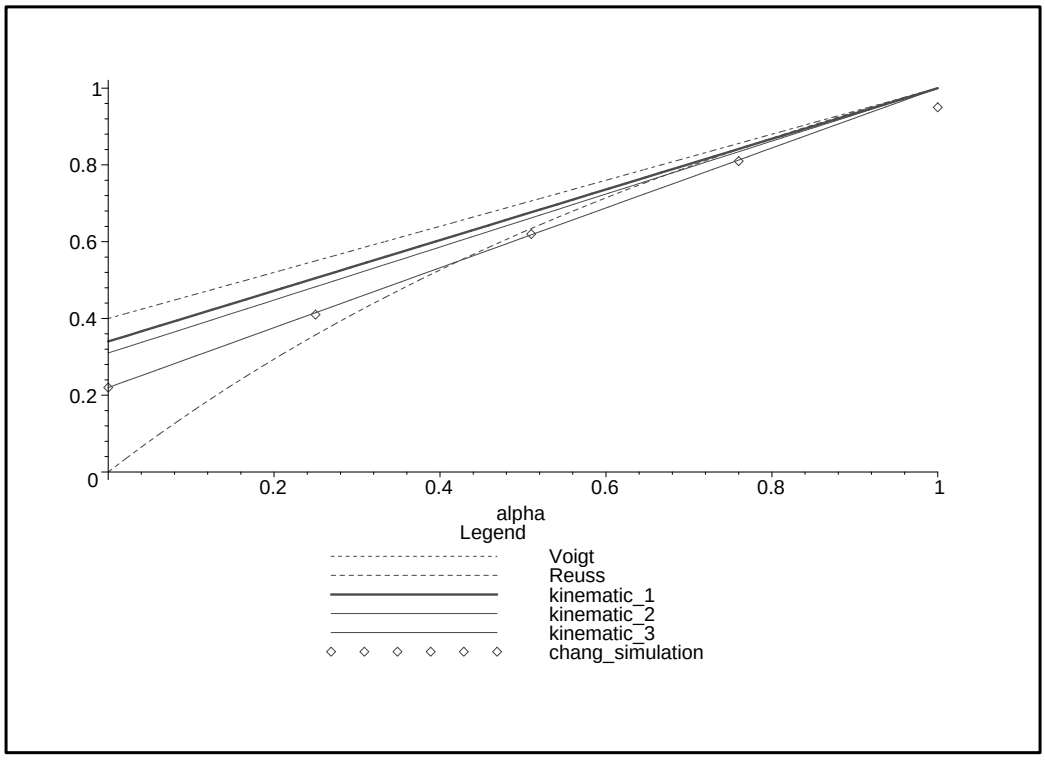


FIG. 4.3 – Variation de $\frac{3V}{2Nr^2k_n}\mu^{hom}$ en fonction de α en utilisant l'hypothèse de Voigt, Reuss, cinématique 1 ($\eta = -1,4$), cinématique 2 ($\eta = -1,35$) et cinématique 3 ($\eta = -1,2$)

On observe aussi (cf. figure (4.3)) que la variation de μ^{hom} obtenue à partir de l'hypothèse cinématique est linéaire par rapport à α. D'autre part, lorsque α devient négatif aux alentours de -1, la courbe de μ^{hom} a tendance à sortir de la limite donnée par l'hypothèse de Reuss qui, rappelons le, n'est pas une borne inférieure. Ce résultat est en accord avec les résultats numériques de [21], qui correspondent aux points rajoutés sur la figure (4.3). Cette résultats numériques sont obtenus à partir de la simulation de compactage aléatoire de 800 particules sphériques de rayon compris entre 4.9 et $5.1mm$. D'autre part, la figure (4.3) nous montre clairement que pour $\eta = -1,2$, les variations de μ^{hom} (linéaire en α) passent pratiquement par les points issus de la simulation. Il en est de même en ce qui concerne les variations de E^{hom} en fonction de α (voir figure (4.4)).

Ainsi, l'hypothèse cinématique générale proposée permet d'approcher assez précisément les résultats des simulations numériques qui sont intermédiaires entre les résultats donnés

par les hypothèses de Voigt et Reuss.

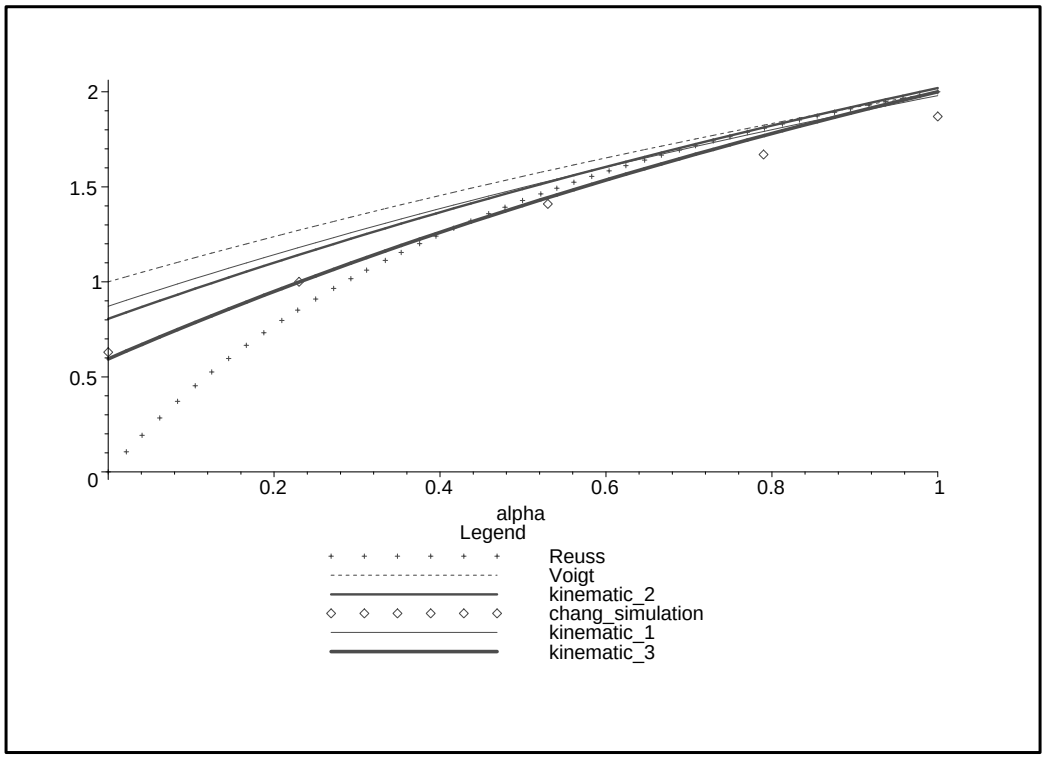


FIG. 4.4 – Variation de $\frac{3V}{2Nr^2k_n}E^{hom}$ en fonction de α en utilisant l'hypothèse de Voigt, Reuss, cinématique 1 ($\eta = -1,4$), cinématique 2 ($\eta = -1,35$) et cinématique 3 ($\eta = -1,2$)

4.7 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons développé une approche par changement d'échelle qui prend en compte l'anisotropie du matériau granulaire. Cette approche, basée sur l'utilisation de tenseurs de texture d'ordre deux et d'ordre quatre, permet de représenter l'anisotropie de tels matériaux.

Les résultats obtenus à partir des hypothèses de localisation simple, cinématique de Voigt et statique de Reuss, coincident dans le cas isotrope et pour chaque schéma, avec ceux obtenus dans [21]. Ceci permet de valider l'approche développée. Ce travail a été ensuite étendu dans le cas d'une hypothèse de localisation cinématique plus générale, dépendant d'un paramètre libre η. Pour η voisin de -1.2, les résultats obtenus concordent avec les simulations numériques discrètes réalisées par [21].

Conclusions et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à la modélisation des milieux granulaires à différentes échelles en utilisant des approches discrètes et continues.

Dans les deux premiers chapitres nous avons développé une approche analytique de type milieu continu qui améliore la théorie de Janssen et les autres approches du même type. Elle permet de calculer les contraintes en tout point du milieu granulaire ensilé quels que soient les paramètres physiques intervenant, et de représenter aussi bien qualitativement que quantitativement l'effet d'écrantage caractéristique des milieux granulaires ensilés.

Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous avons présenté la méthode de simulation numérique discrète de type NSCD sur laquelle est basé le code MULTICOR. Nous avons ensuite réalisé des simulations numériques discrètes du remplissage d'un silo par un milieu granulaire polydisperse. Nous avons calculé les contraintes moyennes s'exerçant au niveau des parois du silo. Nous avons pu constater que les simulations numériques discrètes reproduisent assez précisément le phénomène d'écrantage dans les milieux granulaires ensilés. On rappelle que ce phénomène d'écrantage, qui provient du contact et du frottement entre les grains, a été pris en compte très précisément dans MULTICOR. Un résultat particulièrement intéressent est que les résultats des simulations numériques discrètes concordent assez bien avec ceux de l'approche de type milieu continu développée dans le premier chapitre, où les résultats sont intermédiaires entre ceux prédits par la théorie de Janssen dans les cas actif et passif.
Il conviendrait maintenant de multiplier les comparaisons entre les résultats donnés par l'approche continue développée et ceux obtenus par MULTICOR dans la même configuration, dans le cas non cohésif, puis dans le cas cohésif. Ceci permettra de bien cerner les limites de l'approche continue où les informations microscopiques sur les contacts, le frottement et la cohésion entre les grains sont intégrées dans une loi de comportement globale de type Mohr-Coulomb.

Une autre conséquence de l'existence de contacts privilégiés entre les grains est l'aniso-

tropie caractéristique des matériaux granulaires. Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous avons développé une approche micro-mécanique par changement d'échelle qui permet de modéliser cette anisotropie par l'intermédiaire d'un tenseur de texture d'ordre quatre.
Nous avons, entre autres proposé une hypothèse cinématique générale qui a été incorporée dans un schéma d'homogénéisation des milieux granulaires. Nous avons obtenu ainsi une expression du tenseur de raideurs élastiques homogénéisé basée sur un tenseur de texture d'ordre quatre particulièrement intéressante pour les matériaux granulaires anisotropes. Cette expression a été comparée, dans le cas isotrope, à des simulations numériques discrètes existant dans la littérature. Les tendances qualitatives et quantitatives des résultats concordent.

Il conviendrait maintenant d'effectuer des comparaisons plus nombreuses, dans le cas anisotrope notamment, avec des simulations numériques discrètes utilisant une loi de contact linéaire élastique. Pour cela, il conviendrait, soit d'adapter MULTICOR, soit d'utiliser un code de simulation par éléments discrets où est implémentée une telle loi de contact (linéaire élastique) entre les grains.

Annexe A

Détermination de la cohésion limite $H_\triangle$

On va déterminer la cohésion limite H_Δ pour laquelle le problème a une solution dans le cas $\phi < \phi_p$ et $\Delta \geq 0$. Cette dernière condition satisfait :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p} - 1 + \frac{4\tan\phi}{\xi\tan\phi_p} + \frac{4}{\xi^2} \geq 0 \tag{A.1}$$

Pour des angles de frottement fixés, la condition se porte sur ξ (avec $\xi > 0$) en fonction de ϕ et ϕ_p. Alors la relation (A.1) sera de la forme :

$$a + \frac{b}{\xi} + \frac{c}{\xi^2} \geq 0 \Leftrightarrow a\xi^2 + b\xi + c \geq 0 \tag{A.2}$$

où $a = \dfrac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi_p} - 1 < 0$.

Il faut déterminer le signe de la fonction $f(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c$. En effet, le discriminant de la fonction $f(\xi) = 0$ est $\Delta = 16$ qui est strictement positif. Alors la fonction f admet deux solutions réelles ξ_1 et ξ_2 tels que :

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{-2\tan\phi_p}{\tan\phi + \tan\phi_p} \\ \\ \xi_2 = \dfrac{-2\tan\phi_p}{\tan\phi - \tan\phi_p} \end{cases} \tag{A.3}$$

Comme a est négatif, la fonction f est positive pour tout $\xi\epsilon[\xi_1, \xi_2]$ et négative ailleurs. Alors pour que f soit positif, il faut que $\xi < \xi_2$. Comme $\xi = \dfrac{2\gamma R_h}{\mu H}$, on aura d'après (A.3) :

$$\frac{2\gamma R_h}{\mu H} < \frac{-2\tan\phi_p}{\tan\phi - \tan\phi_p}$$

qui est équivalent à :

$$H > \frac{\gamma R_h}{\mu}(1 - \frac{\tan\phi}{\tan\phi_p})$$

Ainsi, la cohésion limite au delà de laquelle la condition $\Delta > 0$ est vérifiée est :

$$H_\Delta = \frac{\gamma R_h}{\mu}(1 - \frac{\tan\phi}{\tan\phi_p}) \tag{A.4}$$

Annexe B

Calcul tensoriel

B.1 Notations tensorielles

A	scalaire	.	contraction simple
$\underline{A}$	vecteur	:	double contraction
$\underline{\underline{A}}$	tenseur d'ordre deux	::	quatre fois contraction
$\mathbb{A}$	tenseur d'ordre quatre	$\otimes$	produit tensoriel
$\underline{\underline{\delta}}$	tenseur unité d'ordre deux	$\mathbb{I}$	tenseur unité d'ordre quatre

$(\underline{\underline{a}} \underline{\otimes} \underline{\underline{b}})_{ijkl} = a_{il} b_{jk}$ $\qquad$ $(\underline{\underline{a}} \overline{\otimes} \underline{\underline{b}})_{ijkl} = a_{ik} b_{jl}$ $\qquad$ $(\underline{\underline{a}} \overline{\underline{\otimes}} \underline{\underline{b}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{a}} \underline{\otimes} \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{a}} \overline{\otimes} \underline{\underline{b}})$

$\underline{a}.\mathbb{I} : \underline{\underline{b}} = \underline{a}.\underline{\underline{b}}$ avec $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}}^T$ $\qquad$ $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}}$

B.2 Paramètres du matériau

$\mathbb{C}$	tenseur des raideurs élastiques du matériau
$\mathbb{S}$	tenseur des souplesses élastiques du matériau
$\underline{\underline{K^c}}$	matrice de rigidité des contacts
K_t	composante tangentielle de la rigidité des contacts
K_n	composante normale de la rigidité des contacts
$\underline{\underline{H^c}}$	matrice de flexibilié des contacts
H_t	composante tangentielle de la flexibilié des contacts
H_n	composante normale de la flexibilié des contacts
E	module d'Young
ν	coefficient de Poisson
$\lambda,\quad \mu$	coefficients de Lamé
α	rapport des rigidités K_t et K_n

B.3 Calcul des opérateurs

On va utiliser dans ce qui suit les résultats de He [47] et Curnier [72] :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} ds = 1\\
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_i n_j ds = \frac{1}{3}\delta_{ij}\\
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_i n_j n_k n_l ds = \frac{1}{5}J_{ijkl}\\
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_i n_j n_k n_l n_m n_n ds = \frac{1}{7}J_{ijklmn}\\
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} n_i n_j n_k n_l n_m n_n n_p n_q ds = \frac{1}{9}J_{ijklmnpq}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

avec

$$J_{ijkl} = \frac{1}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$J_{ijklmn} = \frac{1}{5}(\delta_{ij}J_{klmn} + \delta_{ik}J_{jlmn} + \delta_{il}J_{jkmn} + \delta_{im}J_{jkln} + \delta_{in}J_{jklm})$$

$$\begin{aligned}
J_{ijklmnpq} = \frac{1}{7}(&\delta_{ij}J_{klmnpq} + \delta_{ik}J_{jlmnpq} + \delta_{il}J_{jkmnpq} + \delta_{im}J_{jklnpq}\\
&+\delta_{in}J_{jklmpq} + \delta_{ip}J_{jklmnq} + \delta_{iq}J_{jklmnp})
\end{aligned}$$

B.4 Approximation à l'aide d'un tenseur d'ordre deux

B.4.1 Expression de la probabilité de contact

Suivant les travaux Lubarda et Krajcinovic [72], on approxime la distribution de probabilité de contact $P(\underline{n})$ dans la direction de la normale $\underline{n}$ par un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{d}}$ tel que $P(\underline{n}) = \underline{\underline{d}} : (\underline{n} \otimes \underline{n})$. On montre qu'il est possible d'exprimer $P(\underline{n})$ en fonction de la variable macroscopique $\underline{\underline{D}}$. En effet, en $3D$, on a :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{4\pi} \int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n}) ds \quad et \quad tr\underline{\underline{D}} = 1 \tag{B.2}$$

On peut montrer que :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{15}{2}\left[\underline{\underline{D}} - \frac{1}{5}(tr\underline{\underline{D}})\underline{\underline{\delta}}\right] = \frac{15}{2}\left[\underline{\underline{D}} - \frac{1}{5}\underline{\underline{\delta}}\right] \tag{B.3}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{D}} &= \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n}) ds = \underline{\underline{d}} : \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} ds \\ &= \underline{\underline{d}} : \frac{1}{15}(\underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}} \overline{\otimes} \underline{\underline{\delta}}) = \frac{1}{15}\left[tr(\underline{\underline{d}})\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{d}}\right]\end{aligned}$$

On a donc $tr(\underline{\underline{D}}) = \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{d}}) = 1$, soit : $tr(\underline{\underline{d}}) = 3$. A partir de ces résultats, l'équation ci-dessus devient $\underline{\underline{d}} = \frac{15}{2}\left[\underline{\underline{D}} - \frac{1}{5}\underline{\underline{\delta}}\right]$.
Alors :

$$P(\underline{n}) = \frac{15}{2}\left[\underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{1}{5}\right] \tag{B.4}$$

B.4.2 Calcul des intégrales

On va utiliser l'expression (B.4) de $P(\underline{n})$ et les résultats (B.1) de He [47] et Curnier [72] pour calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n}) ds \\ &\quad = \frac{1}{4\pi}\int_{s^2} \frac{15}{2}\left[\underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{1}{5}\right](\underline{n} \otimes \underline{n}) ds \\ &\quad = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{15}{2}\underline{\underline{D}} : \int_{s^2} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} ds - \frac{3}{2}\int_{s^2} (\underline{n} \otimes \underline{n}) ds\right] \\ &\quad = \underline{\underline{D}}\end{aligned} \tag{B.5}$$

De même, on utilise les expressions (B.4) et (B.1) pour calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \\
&\quad=\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\frac{15}{2}\left[\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}:(\underline{n}\otimes\underline{n})-\frac{1}{5}\right](\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \\
&\quad=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{15}{2}\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}:\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds-\frac{3}{2}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds\right] \\
&\quad=\frac{1}{7}\left[-\frac{1}{5}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}})-\frac{2}{5}(\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})+(\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}})+2(\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}})\right]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Sachant que $\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}=\underline{n}.\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}^T=\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}.\underline{n}-\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}^T.\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}})ds \\
&\quad=\frac{15}{2}D:\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n})\otimes\left[\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}(\underline{n}\otimes\underline{n})+(\underline{n}\otimes\underline{n}\overline{\otimes})\underline{\underline{\delta}}\right]ds \\
&\quad-\frac{3}{4}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\left[\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}(\underline{n}\otimes\underline{n})+(\underline{n}\otimes\underline{n})\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}\right]ds \\
&\quad-\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}P(\underline{n})\otimes(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \\
&\quad=\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+\frac{2}{5}(\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})-(\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}})+\frac{3}{2}(\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}})\right]
\end{aligned} \tag{B.7}$$

De même, on calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}P(\underline{n})\underline{n}\otimes\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{n}ds \\
&=\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\left[\frac{15}{2}\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}:(\underline{n}\otimes\underline{n}-\frac{3}{2})\right]\underline{n}\otimes\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{n}ds \\
&=\frac{15}{2}\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}:\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{n}ds-\frac{3}{2}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{n}ds \\
&=\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}\otimes\underline{\underline{\delta}}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Maintenant on va calculer les quantités suivantes en utilisant les résultats (B.1). On obtient :

$$\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds=\frac{1}{15}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}) \tag{B.9}$$

et

$$\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}ds\otimes\underline{\underline{\delta}}=\frac{1}{3}\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} \tag{B.10}$$

De même, en utilisant (B.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{D}}:\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds=\frac{1}{105}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})+\frac{2}{105}(\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{D}}+2\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}\\ +2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})\end{aligned} \tag{B.11}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{\underline{\underline{T}}}^T.\underline{\underline{\underline{T}}}ds&=\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\left\{\frac{1}{2}\left[(\underline{n}\otimes\underline{n})\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}(\underline{n}\otimes\underline{n})\right]-\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\right\}ds\\&=\frac{1}{3}\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}-\frac{1}{15}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})\end{aligned} \tag{B.12}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}&\underline{\underline{D}}:\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n})\otimes\underline{\underline{\underline{T}}}^T.\underline{\underline{\underline{T}}}ds\\&=\underline{\underline{D}}:\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\left\{\frac{1}{2}\left[(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}+\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}(\underline{n}\otimes\underline{n})\right]-\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\right\}ds\\&=\frac{1}{15}(\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})-\left[\frac{1}{105}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}})+\frac{2}{105}(\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\underline{\delta}}+\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{D}}+2\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}}\right.\\&\left.+2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})\right]\end{aligned} \tag{B.13}$$

où on a utilisé la définition suivante :

$$(\underline{\underline{\mathbb{A}}}\overline{\otimes}\underline{\underline{B}})_{ijklmn}=\frac{1}{2}(A_{ijkn}B_{lm}+A_{ijknm}B_{ln})$$

B.5 Approximation à l'aide d'un tenseur d'ordre quatre

B.5.1 Expression de la probabilité de contact

On s'intéresse maintenant à la représentation de $P(\underline{n})$ à l'aide d'un tenseur d'ordre quatre $\mathbb{Q}$ tel quel : $P(\underline{n})=\mathbb{Q}::(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})$. De la même façon qu'au paragraphe précédent,

on cherche, dans un premier temps, à exprimer $P(\underline{n})$ en fonction de la variable macroscopique $\mathbb{D}$. En $3D$, on a :

$$\mathbb{D} = \frac{1}{4\pi}\int_s P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \quad et \quad tr(\mathbb{D}) = \underline{\underline{D}} \tag{B.14}$$

En effet, on a d'après Lubrada et Krajcinovic [72] :

$$\mathbb{Q} = \frac{15}{4}\left[\frac{21}{2}\mathbb{D} - 7\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}}\right] \tag{B.15}$$

On a donc :

$$P(\underline{n}) = \frac{15}{4}\left[\frac{21}{2}\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) - 7\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) + \frac{1}{2}\right] \tag{B.16}$$

B.5.2 Calcul des intégrales

On va utiliser l'expression (B.14) de $P(\underline{n})$ obtenue à l'aide d'un tenseur de texture d'ordre 4 et les expressions (B.1). On obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n})ds \\
&\quad = \frac{15}{8}\left[21\mathbb{D} :: \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds\right. \\
&\quad \left. -14\underline{\underline{D}} : \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds + \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n})ds\right] \\
&\quad = \underline{\underline{D}}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

De la même façon, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \\
&\quad = \frac{15}{8}\left[21\mathbb{D} :: \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds\right. \\
&\quad -14\underline{\underline{D}} : \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds \\
&\quad \left. +\frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds\right] \\
&\quad = \mathbb{D}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

et :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}^T.\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}})ds \\
&\quad = \frac{15}{8}\left[\frac{21}{2}\mathbb{D} :: \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})\otimes\left[(\underline{n}\otimes\underline{n})\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}(\underline{n}\otimes\underline{n})\right]ds\right. \\
&\quad -7\underline{\underline{D}} : \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n})\otimes\left[(\underline{n}\otimes\underline{n})\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}(\underline{n}\otimes\underline{n})\right]ds \\
&\quad +\frac{1}{8\pi}\int_{s^2}\left[\underline{n}\otimes\underline{n})\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}(\underline{n}\otimes\underline{n})\right]ds \\
&\quad \left.-\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})ds\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}}) - \mathbb{D}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{s^2} P(\underline{n})\underline{n}\otimes\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{n}ds \\
&\quad = \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\frac{15}{8}\left[21\mathbb{D} :: (\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}) - 14\underline{\underline{D}} : (\underline{n}\otimes\underline{n}) + 1\right]\underline{n}\otimes\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{n}ds \\
&\quad = \underline{\underline{D}}\otimes\underline{\underline{\delta}}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Maintenant, en utilisant les résultats (B.1), on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{25}{2}\mathbb{D} :: \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}ds \\
&\quad = \frac{5}{126}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 8\mathbb{D} + 4\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 4\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{D}} + 8\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 8\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})
\end{aligned} \tag{B.21}$$

et enfin :

$$\begin{aligned}
\frac{25}{2}\mathbb{D} :: \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}^T.\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}ds \\
= \frac{25}{2}\mathbb{D} :: \frac{1}{4\pi}\int_{s^2}\left\{\frac{1}{2}\left[(\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n})\overline{\otimes}\underline{\delta} + \underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{\delta}\overline{\otimes}(\underline{n}\otimes\underline{n})\right]\right. \\
\left.-\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\otimes\underline{n}\right\}ds \\
= \frac{5}{14}(\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}}) - \frac{5}{126}(\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 8\mathbb{D} + 4\underline{\underline{D}}\otimes\underline{\underline{\delta}} + 4\underline{\underline{\delta}}\otimes\underline{\underline{D}} \\
+8\underline{\underline{D}}\overline{\otimes}\underline{\underline{\delta}} + 8\underline{\underline{\delta}}\overline{\otimes}\underline{\underline{D}})
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Annexe C

Formalisme

La relation linéaire entre les contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$ et les déformations $\underline{\underline{E}}$ s'écrit :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \; ou \; E_{ij} = S_{ijkl} \Sigma_{kl}$$

Du fait de la symétrie des tenseurs $\underline{\underline{\Sigma}}$, $\underline{\underline{E}}$, notons que C_{jikl} doit satisfaire les relations de symétrie :

$$C_{jikl} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \; C_{ijkl} = C_{klij}$$

Ainsi, il est fréquent d'identifier les coefficients C_{jikl} à l'ensemble des composantes C_{IJ} d'une matrice 6×6 symétrique. La règle habituelle d'échange d'indices est la suivante :

$$(I) \rightleftharpoons ((i,j) = (j,i))$$

$$(1,2,3,4,5,6) \rightleftharpoons ((1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,1)(1,2))$$

Cette règle permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} \\ \Sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

De la même façon, on a :

$$\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ 2\Sigma_{23} \\ 2\Sigma_{31} \\ 2\Sigma_{12} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

Bibliographie

[1] Abriak N.E., *Ecoulement d'un matériau granulaire à travers un orifice, effet de paroi*, Thèse de Doctorat de l'Université de Lille 1, p. 273, 1991.

[2] Alart P. et Curnier A., *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*, Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 92, n^o 2, november 1991.

[3] Alart P., *Méthode de Newton généralisé en mécanique du contact*, J. Math. Pures Appl., n°76, pp. 83-108, 1997.

[4] Bathurst R.J. et Rothenberg L., *Micromechanical aspects of isotropic granular assemblies with linear contact interactions*, Journal of Applied Mechanics ASME, Vol.55, pp. 17-23, 1988.

[5] Bathurst R.J. et Rothenburg L., *Observations on stress force-fabric relationships in idealized granular materials*, Mech. Mater., n°9, pp. 65-80, 1990.

[6] Biarez J., Evesque P. et Meftah W., *De l'ordre au désordre*, rapport du G.R.E.C.O. géomatériaux, 1992.

[7] Boehler J.P., *On irreductible representations for isotropic scalar functions*, ZAMM, n°57, pp. 323-327, 1977.

[8] Boehler J.P., *Lois de comportement anisotrope des milieux continus*, J. Méc., n°17, pp. 153-190, 1978.

[9] Bolton M. D., *The strength and dilatancy of sands*, Géotechnique, vol. 36, n^o 1, pp. 65-78, 1986.

[10] Brown R.L. et Richard J.C., *Principles of Powder Mechanics*, Pergamon, New York, 1970.

[11] Caillerie D., *Tenseur des contraintes dans un milieu granulaire*, rapport du G.R.E.C.O. géomatériaux, 1991.

[12] Cambou B., *Analyse du comportement des milieux granulaires basée sur leur comportement discontinu*, Revue Française de Géotechnique, n^o 31, pp. 3-23, 1981.

[13] Cambou B. et Sidoroff F., *Descripton de l'état d'un matériau granulaire par variables internes statiques à partir d'une approche discrète*, Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 4, n°2, pp. 223-242, 1985.

[14] Cambou B., Dubujet Ph., Emeriault F. et Sidoroff F., *Homogenization for granular materials*, European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol. 14, n°2, pp. 225-276, 1995.

[15] Cambou B., Chaze M. et Dedecker F., *Change of scale in granular materials*, European Journal of Mechanics, A/Solids, n°19 , pp. 999-1014, 2000.

[16] Cambou B. et Jean M., *Micromécanique des materiaux granulaires*, Hermes Science, 2001.

[17] Cambou B., Dubujet Ph. et Nouguier-lehon C., *Anisotropy in granular materials at different scales*, Mechanics of materials, pp. 1-10, 2004.

[18] Caquot A. et Kerisel J., *Traité de Mécanique des Sols*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[19] Chang C.S., *Micromechanical modelling of constitutive equation for granular materials*, Micromechanics of granular materials, Elsevier Science Publishers, pp. 271-278, 1988.

[20] Chang C.S. et Liao C.L., *Constitutive Relations for Particulate Medium with the Effect of Particle Rotations*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 26, n°4, pp. 437-453, 1990.

[21] Chang C.S. et Liao C.L., *Estimates of elastic moduli for media of randomly packed granules*, Appl Mech Rev, Vol. 47, n°1, Part 2, pp. 197-207, 1994.

[22] Chang C.S., Chao S.J. et Chang Y., *Estimates of elastic moduli for granular material with anisotropic random packing structure*, International Journal of Solids and Structures, Vol.32, n°14, pp. 1989-2008, 1995.

[23] Chang C.S. et Gao J., *Kinematic and static Hypotheses for constitutive modelling of granulates considering particle rotation*, Acta Mech., n°115, pp. 213-229, 1996.

[24] Chapuis R.B., *De la structure des milieux granulaires en relation avec leur comportement mécanique*, thèse D.E., Montréal, Canada, 1976.

[25] Christoffersen J., Mehrabadi M.M. et Nemat-Nasser S., *A micromechanical description of granular material behavior*, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 48, n°2, pp. 339-344, 1981.

[26] Coulomb C., *Essai sur une application des règles de maximas et minimas à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, Mem. Acad. Royale des Sciences, vol. 973, pp.343-382, 1776.

[27] Cundall P.A., *A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems*, Proceedings of the Symposium of the international Society of Rock Mechanics, vol. 1, pp. 132-150, Nancy, France, 1971.

[28] Cundall P.A. et Strack O.D.L., *A discrete numerical model for granular assemblies*, Géotechnique, vol. 29, n°1, pp. 47–65, 1979.

[29] Cundall P.A., *Computer simulations of dense sphere assemblies*, Satake M. et jenkins J.T. (Eds.), Micromechanics of granular materials, Amsterdam, Elsevier Scince Publishers, pp. 113–123, 1988.

[30] Dantu P., *Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents*, Comptes Rendus du IVème Congrés de Mécanique des Sols et des Fondations, pp. 144-148, 1957.

[31] De Josselin de Jong G. et Verruijt A., *Etude photo-élastique d'un empilement de disques*, Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, n^o 2, pp. 73-85, 1969.

[32] Duran J., *Sables, poudres et grains. Introduction à la physique des milieux granulaires*, Eyrolles sciences, 1997.

[33] Duvaut G. et Lions J.L., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, 1972.

[34] Emeriault F., Cambou B. et Mahboubi A., *Homogenization for granular materials : non reversible behaviour*, Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, Vol. 1, pp. 199-218, 1996.

[35] Emeriault F. et Chang C.S., *Interparticle forces and displacement in granular materials*, Computer and Geotechnics, 20 (3/4), pp. 223-244, 1997.

[36] Evesque P., Meftah W. et Biarez J., *Mise en évidence de variations brutales et d'évolutions quasi discontinues dans les courbes contraintes-déformation d'un milieux granulaire bi-dimensionnel de rouleaux*, C. R. Acad. Sci. 316, série IIb, pp. 321-327, 1993.

[37] Ferrez, J.A., *Dynamic triangulations for efficient 3D simulation of granular materials*, Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne, 2001.

[38] Fortin M. et Glowinski R., *Méthodes de Lagrangien augmenté*, Dunod, 1982.

[39] Fortin J. et de Saxcé G., *Modélisation numérique des milieux granulaires par l'approche du bipotentiel*, C. R. Acad. Sci. 327, série IIb, pp. 721-724, 1999.

[40] Fortin J., *Simulation numérique de la dynamique des systèmes multicorps appliquée aux milieux granulaires*, Thèse de doctorat de l'Université de Lille 1, 2000.

[41] Fortin J., Millet O. et de Saxcé G., *Construction of an averaged stress tensor for a granular medium*, European Journal of Mechanics - A/solids, Vol. 22, Issue 4, July-August, pp. 567-582, 2003.

[42] Fortin J., Millet O. De Saxcé G., *Mean stress in a granular medium in dynamics*, Mechanics Research Comunications, Vol. 29, Issue 4, July-August, pp. 235-240, 2004.

[43] Fortin J., Millet O. et de Saxcé G., *Numerical Simulation of Granular Materials by an improved Discrete Element Method*, Int. J. for Num. Methods in Engineering, n°62, pp. 639-663, 2005.

[44] Ganiou F., *Etude de la localisation des déformations dans les matériaux granulaires par la technique de traitement d'images*, Thèse de doctorat de l'Université de Lille 1, 1994.

[45] de Gennes P.G., *Granular matter : a tentative view*, Rev. Mod. Phys., Vol. 71, n°2, pp. 374–382, 1999.

[46] Guyon E. et Troadec J.-P., *du sac de billes au tas de sable*, Odile Jacob, Paris, 1994.

[47] He Q.-C. et Curnier A., *A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations*, Int. J. Solids Structures, Vol. 32, n°10, pp. 1433-1457, 1995.

[48] Hiriart-Urruty J.-B., *Optimisation et analyse convexe*, Presses Universitaires de France, 1^{re} édition, 1998.

[49] Hoomans B.P.B., Kuipers J.A.M. et Swaaij W.P.M.v., *Granular dynamics simulation of segregation phenomena in bubbling gas-fluidised beds*, Powder Tech., n°109, pp. 41-48. 2000.

[50] Itasca 1995 PFC2D, Version 1.1, *User Manual*, ITASCA Consulting Group, Minneapolis, Minnesota, USA, 1995.

[51] Jaeger H.M. et Nagel S.R., *Physics of the granular state*, Science, n°255, pp. 1523–1531, 1992.

[52] Jaeger H.M., Nagel S.R. et Behringer R.P., *Granular solids, liquids, and gases*, Rev. Mod. Phys., Vol. 68, n°4, pp. 1259–1273, 1996.

[53] Janssen H.A., *Versuche übergetreichedruck in silozellen*, Zeifschrift verein deutscher ingenieur, Vol. 39, pp. 1045-1049, 1895.

[54] Jean M., *Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterial motions, Mechanics of Geomaterial Interfaces*, Elsevier Sciences Publishers B.V. ed A.P.S.. Selvadurai, M.J. Boulon, pp. 463-486, 1995.

[55] Jenike A.W., *Gravity flow of bulk solids*, Utah Univ. Eng. Exp. Stn., n°108, 1961.

[56] Jenike A.W., *Storage and flow of solids*, Utah Univ. Eng. Exp. Stn., n°123, 1964.

[57] Jenike A.W., Johanson J.R. et Carson J.W. , *Bin loads - part 2 : concepts*, Jnl of Engg for Industry, Trans. ASME , 95, Series B, n°1, pp. 1-5, 1973.

[58] Jenkins J.T., *Anisotropic elasticity for random arrays of identical spheres*, Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications, ed. J. Wu., SIAM, Philadelphia, 1991.

[59] Jenkins J.T., *Inelastic Behavior of random arrays of identical spheres*, Fleck N.A. et Cocks A.C.E. (Eds), IUTAM Symposium on Mechanics of Granular and Porous Materials, Kluwer Academic Publishers, pp. 11-22, 1997.

[60] Kanatani K., *Distribution of directional data and fabric tensors*, Int. J. Engng Sci., Vol. 22 , n°2, pp. 149-164, 1984.

[61] Kàrolyi A., Kertész J., Havlin S., Makse H.A. et Stanley H.E., *Filling a silo with a mixture of grains : Friction-induced segregation*, Europhys. Lett., Vol. 44, n°3, pp. 386-392, 1998.

[62] Khati S., *Comportement des matériaux granulaires : Etude micro-macro du frottement et de la dilatance*, Thèse de doctorat de l'Université de Lille 1, 1996.

[63] Klarbring A., *Mathematical programmming and augmented lagrangien methods for frictional contact problems*, Proc. contact mechanics int. Symp., Edt A. Curnier, PPUR, pp. 409-422, 1992.

[64] Koenen M., *Und Bodendrucks de DES Seiten- de Berechnung dans Silozellen*, der Bauverwaltung , n°16, pp. der Centralblatt, 1896.

[65] Krajcinovic D., *Damage mechanics*, North-Holland, The Netherlands, 1996.

[66] Lanier J., *L'anisotropie induite : un aspect essentiel du comportement des géomatériaux*, Rapport du G.R.E.C.O. géomatériaux, 1989.

[67] Lapko A., Gnatowski M. et Prusiel J.A, *Analysis of some effects caused by interactions between bulk solid and r.c. silo wall structure*, Powder Technology, n°133, pp. 44-53, 2003.

[68] Liao C.-L., Chang T.-C. et Young C.S., *Stress-strain relationship for granular materials based on the hypothesis of the best fit*, Int. J. Solids. Struct., Vol. 34, pp. 4087-4010, 1997.

[69] Louis L., David C., Metz V., Robion P., Menendz B. et Kissel C., *Microstructural control on the anisotropy and transport properties in undeformed sandstones*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, n°42, pp ; 911–923, 2005.

[70] Louis L., Robion P., David C., et Frizon de Lamotte D., *Multiscale anisotropy controlled by folding : the example of the Chaudrons fold (Corbieres, France)*, J. Struct. Geology, Vol. 28, n°4, pp. 549-560, 2006.

[71] Love A.E.H., *A treatise of mathematical theory of elasticity*, University press , Cambridge, 1927.

[72] Lubarda V.A., Krajcinovic D., *Damage tensors and the crack density distribution*, Int. J. Solids Structures, Vol. 30, n°20, pp. 2859-2877, 1993.

[73] Luong M.P., *Arching characterisation of particules solids*, The reliable flow of particulate solids II , Proceeding EFChE Publication serie n°96, Oslo, 23-25, August, pp. 61-74, 1993.

[74] Madadi M., Tsoungui O., Lätzel M. et Luding S., *On the fabric tensor of polydisperse granular materials in 2D*, International Journal of Solids and Structures, n°41, pp. 2563-2580, 2004.

[75] Marini Bettolo Marconi U., Petri A. et Vulpiani A., *Janssen's law and stress fluctuations in confined dry materials*, Physica A, n°280, pp. 279-288, 1999.

[76] Mehrabadi M.M., Loret B.et Nemat-Nasser S., *Incremental constitutive relations for granular materials based on micromechanics*, Proc. R. Soc. London A, n°441, pp. 433-463, 1993.

[77] Millet 0., Rahmoun J. et de Saxcé G., *Analytic calculation of the stresses in an ensiled granular medium*, Comptes Rendus Mécanique, n°334, pp. 137-142, 2006.

[78] Moreau J.-J., *La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastoplastique*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 16 Décembre 1968.

[79] Moreau J.-J., *Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, Série A, pp. 608-611, 1970.

[80] Moreau J.-J., *Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 12 Juillet 1971.

[81] Moreau J.-J. et Panagiotopoulos P.D., *Nonsmooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, Wien, New York, vol. 302, september, pp. 14-18, 1987.

[82] Moreau J.J., *Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials*, Eur.J. Mech, A/Solids, vol. 13, n°4 suppl., pp. 93-114, 1994.

[83] Moreau J.-J., *Numerical investigation of shear zones in granular materials*, Proc. HLRZ-Workshop on friction in Grassberger, P. et Wolf, Singapore, pp. 233-247, 1997.

[84] Müller D., *Techniques informatiques efficaces pour la simulation de milieux granulaires par des méthodes d'éléments distincts*, Ecole Polytechnique de Lausanne, Lausanne, pp. 187, 1996.

[85] Nedderman R.M., *Statics and kinematics of granular materials*, Cambridge University Press, 1992.

[86] Nemat-Nasser S. et Hori M., *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1993.

[87] Nicot F. et Darve F., *A multi-scale approach to granular materials*, Mechanics of Materials, n°37, pp. 980-1006, 2005.

[88] Nougier C., *Simulation des interactions outil-sol : application aux outils de traitement des sols*, Thèse de doctorat du Département de Modélisation Physique et Numérique de l'Institut de Physique du Globe de Paris, 1999.

[89] Nouguier-Lehon C., Dubujet P. et Cambou B., *Analysis of granular material behaviour from two kinds of numerical modelling*, 15th ASCE Engineering Mechanics Conference Columbia University, New York, NY, June 2002.

[90] Oda M., Konishi J. et Nemat-Nasser S., *Experimental micromechanical evaluation of strenght of granular materials : Effects of particle rolling*, Mechanics of Materials 1, pp. 269-283, 1982.

[91] Oger L., Charmet J.-C., Bideau D. et Troadec J.-P., *Propriétés mécaniques de milieux pulvérulents 2D*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 302, série II, n^o 6, 1986.

[92] Oger L., Troadec J.-P., Richard P., Gervois A. et Rivier N., *Powders and Grains*, Behringer R.P. et Jenkins J.T. (Eds) Balkerna, pp. 287-290, 1997.

[93] Ovarlez G., Fond C. et Clément E., *Overshoot effect in the Janssen granular Column : A crutial test for granular mechanics*, Physical Revue E, Vol. 67, 2003.

[94] Le Pennec T., Maloy K.J., Hansen A., Ammi M., Bideau D. et Wu X., *Ticking hour glasses : Experimental analysis of intermittent flow*, Phys. Rev., n°53, pp. 2257-2264, 1996.

[95] Pensée V., *Contribution de la micromécanique à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement par mésofissuration*, Thèse de Doctorat de l'Université de Lille 1, 2002.

[96] Postiau T., *Génération et Parallélisation des Equations du Mouvement de Systèmes Multicorps par l'Approche Symbolique*, thèse de Université Catholique de Louvain Faculté des Sciences Appliquées, septembre, 2004.

[97] Radjai F., Wolf D.E., , Jean M. et Moreau J.-J., *Bimodal Character of Stress Transmission in Granular Packings*, Physical revue Letters, Vol. 80, n°1, pp. 61-64, 1998.

[98] Ragneau E. et Aribert J.M., *Solutions analytiques à divers ordres d'approximation pour le calcul des actions dans les silos cylindriques en phase de remplissage*, Revue de construction métallique, n°1, 1992.

[99] Renouf M., *Optimisation numérique et calcul parallèle pour l'étude des milieux divisés bi- et tridimensionnels*, thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 14 Septembre, 2004.

[100] Rivlin R.S., *Further remarks on the stress-deformation relations for isotropic materials*, Ratl Mech Anal, n°4, pp. 681-702, 1955.

[101] Roberts I., *Determination of pressure of granular substances*, Proc. Royal Soc., n°36, pp. 225-240, 1884.

[102] Rothenburg L. et Selvadurai A.P.S., *Micromecanical definition of the Cauchy stress tensor for particulate media*, Mechanics of Structured Media, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, pp. 469-486, 1981.

[103] Sanni I., *Modélisation et simulation bi et tri-dimentionnelles de la dynamique unilatérale des systèmes multicorps de grandes tailles : application aux milieux granulaires*, Thèse de Doctorat de l'université de Picardie Jules Verne, 2006.

[104] Satake M., *Constitution of mechanics of granular materials through graph theory*, Cowin S.C. et Satake M. (Eds), Proc. US-Japan Seminar Continuum Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, pp. 47-62, 1978.

[105] Saussine G., *Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast*, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, Sciences et Technologie du Languedoc, 2004.

[106] de Saxcé G. et Feng Z.Q., *New inequation and functional for contact with friction*, J. Mech. of Struct and Mach., n°19, pp. 301–325, 1991.

[107] de Saxcé G., *Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 314, série II, pp. 125-129, 1992.

[108] de Saxcé G. et Feng Z.-Q., *The bipotentiel method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms*, Mathl. Comput. Modelling, vol. 28, n^o 4-8, pp. 225-245, 1998.

[109] Schneebeli G. *Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion*, C.R. Acad. Sc. Paris, Scéance du 9 Juillet, pp. 125-126, 1956.

[110] Schwab C.V, Ross I.J., White G.M. et Colliver D.G., *Wheat loads and vertical pressure distribution in a full-scale bis. Part I Filling*, Transactions of the ASAE, Vol. 35, n°5, pp. 1613-1619, 1994.

[111] Sidoroff F., Cambou B., Mahboubi A., *Contact force distribution in granular media*, Mechanics of Materials, n°16, pp. 83-89, 1993.

[112] Sirieys P., *Dilatance-Contractance des milieux pulvirulents : déformation d'un milieu analogique*, Revue Française de Géotechnique, n^o 67, 1994.

[113] Soulié F., *Cohésion par capillarité et comportement mécanique des milieux granulaires*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, juillet 2005.

[114] Spencer A.J.M., *Theory of invariants*, Continuum Physics, Vol. 1, Eringen A.C. (Ed), Academic Press, New York, pp. 239-353, 1971.

[115] Spencer, A.J.M., *Isotropic polynomial invariants and tensor functions*, J.P. Beohler, ed., Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, CISM Courses and Lectures n° 292, Spinger, Berlin, pp. 141-169, 1987.

[116] Tejchman J., *Numerical simulation of filling in silos with a polar hypoplastic constitutive model*, Powder Technology, n°96, pp. 227-239, 1997.

[117] Thompson S.A., Galili N. et Williams R.A., *Vertical floor pressure during filling of a full-scale grain bin*, Transactions of the ASAE, Vol. 39, n°3, pp. 1093-1100, 1996.

[118] To K., Lai P.-Y. et Pak H.K., *Jamming of Granular Flow in a Two-Dimensional Hopper*, Phys.. Rev. Lett., n°86, pp. 71-74, 2001.

[119] Travers T., Ammi M., Bideau D., Gervois A., Lemaitre J., *Messager J.C. et Troadec J.P., Compression de milieux granulaires modèles à deux dimensions*, Revue Française de Géotechnique, n^o 43, pp. 21-33, 1988.

[120] Villard P. et Le Hello B., *Développement d'un module spécifique géosynthétique dans le logiciel éléments discrets SDEC*, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherches Impliquant la Géologie et la Mécanique, 1996.

[121] Walker D.M., *An Approximate Theory for Pressures and Arching in Hoppers*, Chemical Engineering Science, n°21, pp. 975-997, 1966.

[122] Walters J.K., *A Theoretical Analysis of Stresses in Silos with Vertical Walls*, Chemical Engineering Science, n°28, pp. 13-21, 1973.

[123] Walters J.K., *A Theoretical Analysis of Stresses in Axially-symmetric Hoppers and Bunkers*, Chemical Engineering Science, n°28, pp. 779-786, 1973.

[124] Walton O. R., *Application of molecular dynamics to macroscopic particles*, Int. J. Engng. Sci., n^o 22, pp. 1097-1107, 1984.

[125] Walton K., *The effective elastic moduli of random packing of spheres*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol.35, n°3, pp. 213-226, 1987.

[126] Walton O. R., *Numerical simulation of inelastic, frictional particle-particle interactions. Particulate two-phase flow*, Butterworth-Heinemann, 1992.

[127] Weber J., *Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvirulents*, bul. liaison P. et Ch., n^o, juil.-août 1966.

[128] Wenzel O. et Bicanic N., *A quad tree based contact detection algorithm.*, In : J.R. Williams and G.G.W. Mustoe (Editors), Proceedings of the 2nd international conference on discrete element methods. I.E.S.L. publications, M.I.T., pp. 81-94, 1993.

[129] Zaoui A., *Structural morphology and constitutive behavior of microheterogeneous materials*, Continuum micromechanics, Ed. P. Suquet, Springer, New-York, pp. 291-347, 1997.

[130] Zaoui A., *Matériaux hétérogènes et composites*, Cours de l'école polytechnique, 2000.

[131] Zhong Z., Ooi J.Y. et Rotter J.M., *The sensitivity of silo flow and wall stresses to filling method*, Engineering Structures, n°23, pp. 756-767, 2000.

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX GRANULAIRES PAR DES APPROCHES DISCRÈTES ET CONTINUES

Les propriétés physiques des milieux granulaires trouvent leur origine à l'échelle locale des contacts entre les grains. Cette étude est consacrée à l'analyse de l'influence de ces contacts sur le comportement global du matériau à différentes échelles. Nous développons dans la première partie de ce mémoire, une approche continue qui s'affranchit des limitations de la théorie de Janssen et permet de calculer les contraintes dans un matériau granulaire ensilé. Cette approche permet également de représenter aussi bien qualitativement que quantitativement l'effet d'écrantage dans les silos. Dans une seconde partie, une modélisation du phénomène d'écrantage est effectuée à partir des simulations numériques discrètes réalisées avec le code MULTICOR. Nous calculons les contraintes moyennes s'exerçant au niveau des parois lors du remplissage d'un silo par un milieu granulaire polydisperse. Une bonne concordance est observée entre les résultats des simulations numériques discrètes et ceux de l'approche continue développée dans la première partie. Une autre conséquence de l'existence de contacts privilégiés entre les grains est l'anisotropie caractéristique des matériaux granulaires. Dans la dernière partie, nous développons une approche micromécanique qui permet de modéliser cette anisotropie par l'intermédiaire d'un tenseur de texture d'ordre quatre. Nous proposons une hypothèse cinématique générale qui est incorporée dans un schéma d'homogénéisation des milieux granulaires anisotropes et comparée, dans le cas isotrope, à des simulations numériques discrètes existant dans la littérature. Les tendances qualitatives et quantitatives des résultats sont tout à fait satisfaisantes.

MOTS-CLÉS : Milieux granulaires, Théorie de Janssen, Critère de Mohr Coulomb, Mécanique des milieux continus, Dynamique des Contacts, Méthode des Eléments Discrets, Anisotropie, Tenseur de texture, Homogénéisation.

MODELLING OF THE BEHAVIOR OF GRANULAR MATERIALS BY CONTINUOUS AND DISCRETE APPROACHES

The physical properties of granular media find their origin at the local scale of grains contacts. The present study is devoted to the analysis of the influence of these contacts on the global behavior of these class of materials at different scales. We develop, in the first part of the thesis, a continuous media approach which improves the Janssen theory and enables to calculate the stresses in an ensiled granular medium. This approach also allows to represent qualitatively as well as quantitatively the stresses saturation effect in granular silos. In the second part, a modelling of the saturation phenomenon is performed by means of the discrete numerical simulations achieved with the MULTICOR software. We calculate the average stresses which applied at the walls during the unloading of a silo by a granular medium polydisperse. We notice that the result provided by the discrete numerical simulation agree accurately with those of the continuum approach developed in the first part. Another consequence of the existence of privileged contacts between grains is the anisotropy of the granular materials. In the last part, we develop a micro-mechanical approach which permits to model this anisotropy by a fourth order fabric tensor. We propose a general kinematic hypothesis inserted in a homogenization scheme of anisotropic granular media and compared its predictions in isotropic case, to the discrete numerical simulations of the literature. The qualitative trends and the quantitative results are quite satisfactory.

KEYWORDS : Granular media, Janssen theory, Mohr-Coulomb criterion, Continuum mechanic, Contact Dynamics, Discrets Elements Method, Anisotropy, Fabric tensor, Homogenization.