



HAL
open science

L'ensemble de rotation autour d'un point fixe d'homéomorphisme de surface

Frédéric Le Roux

► **To cite this version:**

Frédéric Le Roux. L'ensemble de rotation autour d'un point fixe d'homéomorphisme de surface. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. tel-00349243

HAL Id: tel-00349243

<https://theses.hal.science/tel-00349243>

Submitted on 26 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Frédéric Le Roux

**L'ENSEMBLE DE ROTATION
AUTOUR D'UN POINT FIXE
D'HOMÉOMORPHISME DE
SURFACE**

Université Paris Sud, Laboratoire de mathématiques, Bat. 425,
91405 Orsay Cedex FRANCE.

E-mail : frederic.le-roux@math.u-psud.fr

Juillet 2008

**L'ENSEMBLE DE ROTATION AUTOUR
D'UN POINT FIXE D'HOMÉOMORPHISME
DE SURFACE**

Frédéric Le Roux

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----|
| Avant-propos | 1 |
| 1. Le nombre de rotation, du cercle aux surfaces | 5 |
| 1.1. Le nombre de rotation des homéomorphismes croissants du cercle | 5 |
| 1.2. Des modèles linéaires aux homéomorphismes du plan | 9 |
| 1.3. L'ensemble de rotation dans les anneaux | 11 |
| 1.4. Discussion | 13 |
| 2. L'ensemble de rotation autour d'un point fixe | 17 |
| 2.1. L'ensemble de rotation local | 18 |
| 2.2. Éclatements, différentiabilité | 23 |
| 2.3. L'intervalle de rotation | 30 |
| 2.4. Discussion | 37 |
| 3. Quand ça tourne... | 41 |
| 3.1. La version locale du théorème feuilleté équivariant | 41 |
| 3.2. Détection des orbites périodiques | 44 |
| 3.3. Ensemble et intervalle de rotation | 47 |
| 3.4. Le nombre de rotation de Le Calvez | 52 |
| 3.5. Le sens de rotation de Matsumoto | 56 |
| 3.6. Discussion | 60 |
| 4. ...Et quand ça ne tourne pas | 65 |
| 4.1. Bonnes isotopies | 67 |
| 4.2. Points fixes d'indice > 1 | 73 |
| 4.3. Points fixes d'indice < 1 | 73 |
| 4.4. Points fixes de type Selle | 78 |
| 4.5. Discussion | 79 |
| Épilogue : le théorème des trois-quatre points fixes | 87 |
| A. Extension des dynamiques locales | 93 |
| B. Dynamique des feuilletages | 97 |
| B.1. Classification locale | 97 |
| B.2. Densité des feuilletages lisses | 106 |

Bibliographie 107

Avant-propos

Ce texte traite de la dynamique topologique locale en dimension deux, autrement dit de l'itération d'un germe d'homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe. Nous avons choisi d'aborder le sujet avec le point de vue de *l'ensemble de rotation*, qui décrit avec quelles vitesses les points proches du point fixe lui tournent autour, et en privilégiant, parmi les outils techniques, les *feuilletages transverses* introduits récemment par Patrice Le Calvez.

Le concept de nombre de rotation a été précisé dans des cadres variés : Henri Poincaré l'a introduit pour les homéomorphismes du cercle, Sol Schwartzman a proposé de l'étendre aux champs de vecteurs sur une variété quelconque, Michal Misiurewicz et Krystyna Ziemian ont étudié le cas des homéomorphismes isotopes à l'identité sur le tore de dimension deux ; on peut encore citer l'invariant de Calabi, ou *flux* des difféomorphismes symplectiques, qui est un nombre de rotation moyen. Dans le cadre qui nous intéresse ici, Patrice Le Calvez, seul ou avec Jean-Christophe Yoccoz, a défini des nombres de rotation dans certaines situations particulières. Auparavant V. A. Naishul⁽¹⁾ avait démontré que parmi les points fixes des difféomorphismes du plan, holomorphes ou préservant les aires, lorsque la différentielle est une rotation, l'angle de la rotation est un invariant de nature topologique. Jean-Marc Gambaudo et Élisabeth Pécou ont donné une preuve simple de ce résultat, et on peut extraire de leur argument une définition topologique de ce nombre de rotation. Cependant, une définition générale d'un ensemble de rotation pour les germes d'homéomorphismes de surface n'avait jamais été explicitée ; nous proposons de le faire ici, et d'en commencer l'étude systématique.

Le premier chapitre est une longue introduction, qui rappelle la définition du nombre de rotation dans le cercle, puis dans les anneaux, le cas de l'anneau non compact étant très proche du cadre local.

Le chapitre deux propose une définition de l'ensemble de rotation local, et une variante qui produit un intervalle de rotation. Nous donnons une caractérisation des germes ayant un ensemble de rotation vide et nous expliquons pourquoi ceci ne concerne qu'un nombre dénombrable de classes de conjugaison. Nous explorons les liens avec la possibilité "d'éclater" le point fixe et de le remplacer par un cercle, ou, ce qui revient au même, de trouver des coordonnées dans lesquelles notre homéomorphisme est différentiable au point fixe.

Au chapitre trois nous étudions ce qui se passe lorsque "ça tourne", c'est-à-dire lorsque l'ensemble de rotation n'est pas vide ni réduit à $\{0\}$. On donne une version locale du célèbre théorème de Poincaré-Birkhoff : la présence de vitesses de rotation différentes force souvent l'existence d'orbites périodiques. Dans des cadres plus particuliers, nous faisons le lien avec certains résultats de Patrice Le Calvez sur l'existence d'un nombre de rotation, et avec un invariant introduit par Shigenori Matsumoto. Tous ces résultats utilisent de façon fondamentale le théorème feuilleté équivariant

⁽¹⁾Je n'ai malheureusement pas retrouvé le prénom de Monsieur Naishul.

de Patrice Le Calvez ; cet énoncé est aussi la clé des rapports entre l'ensemble et l'intervalle de rotation, que nous explicitons.

Au quatrième et dernier chapitre, nous abordons le cas sans rotation. C'est notamment la situation dans laquelle se trouvent les points fixes isolés dont l'indice de Poincaré-Lefschetz est différent de 1. Ce type de point fixe a déjà été étudié dans un travail précédent ; cependant, ici encore, le théorème feuilleté équivariant permet de simplifier les preuves et d'améliorer les énoncés. En particulier, lorsque l'indice est plus petit que 1, nous montrons l'existence de secteurs "transversalement hyperbolique", sur lesquels on peut définir une "jolie" fonction de Lyapounov ; ce résultat utilise un argument de stabilité des feuilletages transverses sous l'effet de perturbations petites pour la topologie de Whitney, argument qui permet de simplifier la topologie d'un feuilletage transverse.

Enfin, il nous a paru utile de donner en appendice un aperçu de la dynamique locale des feuilletages, auxiliaire indispensable du théorème feuilleté dans l'étude de la dynamique locale des homéomorphismes. Si l'on accepte de considérer les homéomorphismes comme des généralisations des feuilletages orientés, on pourra aussi lire cet appendice comme une introduction à notre étude.

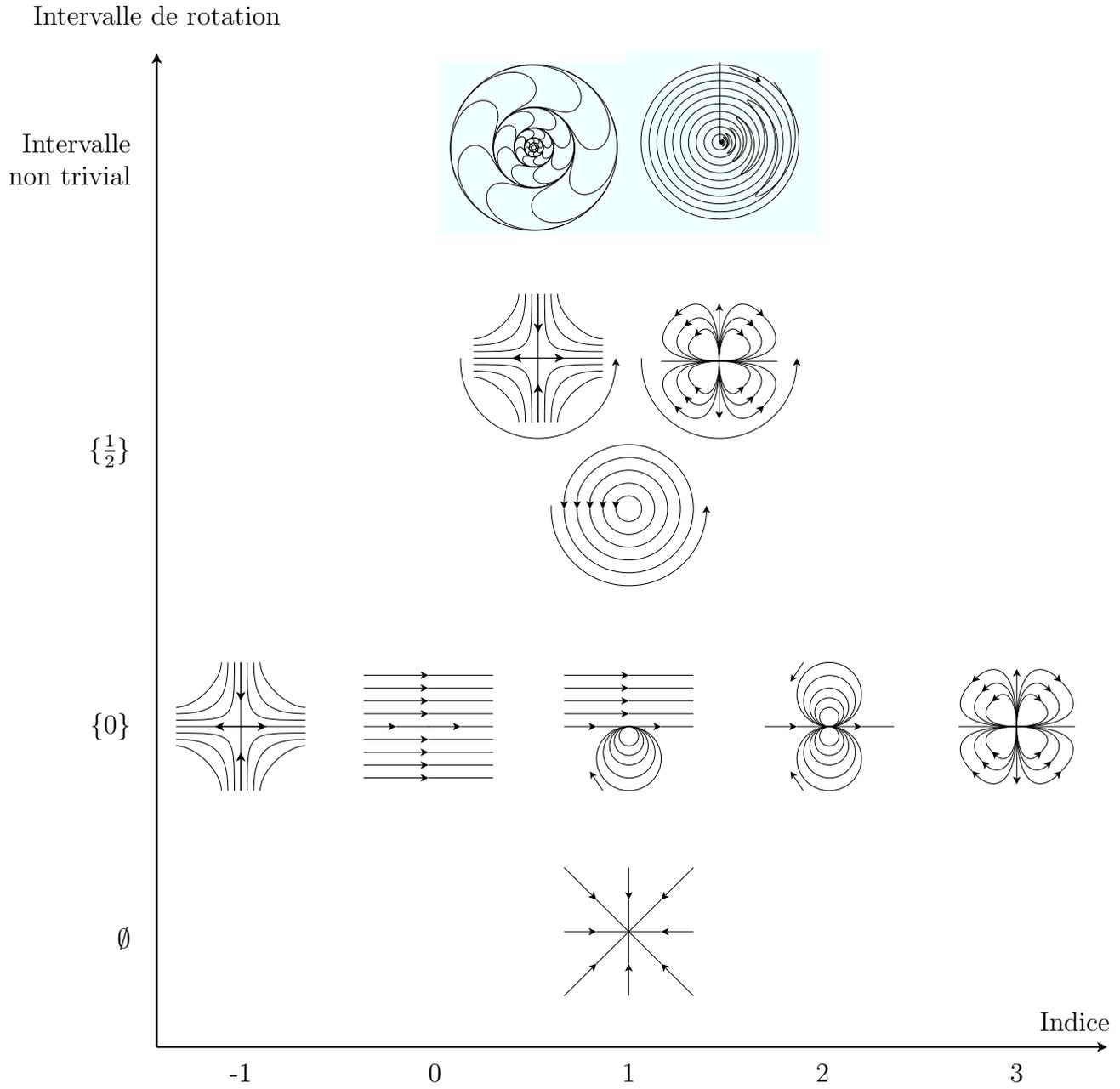


FIGURE 1. Quelques exemples illustrant les deux principaux invariants étudiés dans le texte, l'indice de Poincaré-Lefschetz et l'intervalle de rotation

CHAPITRE 1

LE NOMBRE DE ROTATION, DU CERCLE AUX SURFACES

1.1. Le nombre de rotation des homéomorphismes croissants du cercle

Partons d'un homéomorphisme croissant de l'intervalle : il s'agit d'une application continue, strictement croissante, fixant les extrémités de l'intervalle. Si l'on identifie ses deux extrémités, l'intervalle devient cercle, on obtient alors un homéomorphisme croissant du cercle avec un point fixe. En composant par une rotation du cercle on peut se débarrasser du point fixe, et fabriquer de cette façon n'importe quel homéomorphisme du cercle préservant l'orientation.

L'espace des homéomorphismes croissants de l'intervalle est convexe. Notre homéomorphisme peut donc être vu comme l'aboutissement d'une déformation continue du cercle, appelée *isotopie*. Précisément, une isotopie est une famille $(f_t)_{t \in [0,1]}$ d'homéomorphismes du cercle, commençant par l'identité f_0 , et dépendant continûment du paramètre t . La continuité s'entend ici au sens de la convergence uniforme, ce qui revient à demander que l'application $(t, x) \mapsto f_t(x)$ soit continue. On étend naturellement l'isotopie à toutes les valeurs réelles de t en posant $f_t = f_{t-n} \circ f_1^n$ pour tout t entre n et $n+1$; on obtient ainsi une famille continue $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ qui interpole la suite $(f_1^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des itérés de l'homéomorphisme f_1 .

Cherchons maintenant à définir la *vitesse de rotation asymptotique* de notre isotopie. Pour cela, nous imaginons notre cercle placé sur le cercle unité du plan : il est ainsi muni de la coordonnée angulaire θ , que nous mesurons en nombre de tours. Lorsque le temps s'écoule de l'instant 0 à l'instant 1, chaque point x du cercle décrit un chemin qui le mène au point $f_1(x)$, et nous pouvons mesurer la variation ℓ_0 de θ le long de cette trajectoire⁽¹⁾. Dans le cas le plus simple, $f_t(x)$ décrit simplement l'un des deux arcs de cercle joignant x à $f_1(x)$, et ℓ_0 est, au signe près, la longueur de cet arc ; mais la trajectoire peut aussi s'enrouler plusieurs fois autour du cercle avant d'atteindre le point $f_1(x)$.

⁽¹⁾Lorsque γ est un chemin de classe C^1 , la variation de θ le long de γ est définie comme l'intégrale de la 1-forme $d\theta$. Puisque la forme $d\theta$ est fermée, cette définition peut s'étendre aux chemins continus par approximation. Alternativement, on peut relever tout chemin continu γ en un chemin $\tilde{\gamma}$ dans \mathbb{R} , et définir la variation de θ comme $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$.

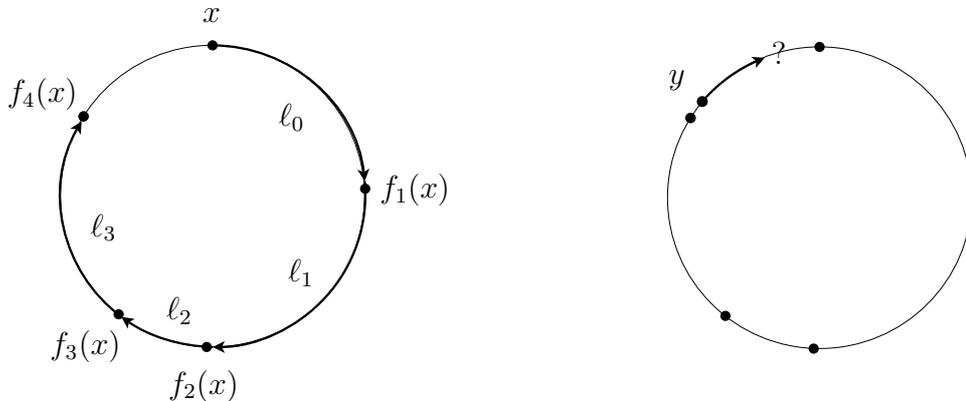


FIGURE 1. Le point x fait moins d'un tour en quatre coups ; que peut faire le point y ?...

Nous pouvons itérer l'opération, et mesurer la variation angulaire ℓ_n le long du chemin décrit par $f_t(x)$ lorsque t varie de n à $n+1$, chemin qui va du point $f_1^n(x)$ au point $f_1^{n+1}(x)$. La somme $\ell_0 + \dots + \ell_{n-1}$ représente la variation angulaire du point x en n itérations (figure 1). Imaginons maintenant que nous ayons ainsi suivi notre point x et mesuré cette variation angulaire entre l'instant 0 et un instant n_0 très grand, et demandons-nous si nous pouvons prédire les variations angulaires futures. À tout moment, la déformation subie par le cercle respecte l'ordre cyclique : puisque, lorsque t varie, le point $f_t(f_{n_0}(x))$ ne peut jamais dépasser ni se faire dépasser par le point $f_t(x)$, les variations angulaires de ces deux points ne diffèrent jamais de plus d'un tour. Autrement dit, la variation angulaire de x entre les instants n_0 et $2n_0$ diffère de celle mesurée entre les instants 0 et n_0 de moins d'une unité. Cette estimation est valide pour n'importe quel intervalle de temps de longueur n_0 ; on en déduit que la suite des vitesses angulaires moyennes

$$\left(\frac{\ell_0 + \dots + \ell_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 0}$$

prend toutes ses valeurs d'adhérence dans un intervalle de taille $\frac{2}{n_0}$. Comme ces considérations sont valables pour tout n_0 , on voit que cette suite converge. Nous venons de démontrer un résultat obtenu par Poincaré ([Poi1885]).

Théorème (Poincaré, 1885). — *La suite des vitesses angulaires moyennes converge vers un nombre réel ρ . De plus, cette limite ne dépend pas du choix du point x .*

Le nombre ρ est baptisé *nombre de rotation* de l'isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$. Tel qu'on l'a défini, le nombre de rotation dépend du choix de l'isotopie, et pas seulement de l'homéomorphisme $f = f_1$. On peut facilement y remédier. Considérons une autre

isotopie I' aboutissant au même homéomorphisme f . Pour chaque point x , selon que l'on mesure la variation de θ le long de la trajectoire de x sous l'isotopie I' ou sous l'isotopie I , on obtient deux nombres qui diffèrent d'un nombre entier $p(x)$. Ce nombre entier dépend continûment de x , c'est donc une constante p . Par conséquent les nombres de rotation de I et de I' diffèrent encore de cet entier p . Finalement, les nombres de rotation de toutes les isotopies aboutissant à un même homéomorphisme f sont égaux modulo 1, et le nombre de rotation $\rho(f)$ est bien défini comme un élément du cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Le nombre de rotation est un *invariant de conjugaison topologique*, ce qui veut dire que deux éléments du groupe des homéomorphismes croissants du cercle, conjugués dans ce groupe, ont le même nombre de rotation. Voici une autre façon de voir cette invariance. La définition a utilisé la mesure des variations angulaires à l'aide de la coordonnée θ , qui fournissait une identification entre notre cercle (variété topologique abstraite) et le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} ; n'importe quelle autre coordonnée θ' donnerait le même nombre de rotation, pour peu que le changement de coordonnées $\theta \circ \theta'^{-1}$ soit croissant.

Cet invariant a une autre propriété essentielle, il permet de détecter les orbites périodiques : f admet une orbite périodique si et seulement si son nombre de rotation $\rho(f)$ est rationnel. D'une façon générale, la dynamique d'un homéomorphisme f quelconque "ressemble" à celle de la rotation d'angle $\rho(f)$. Autrement dit, le comportement des homéomorphismes du cercle est suffisamment simple pour que cet invariant permette à lui seul une bonne compréhension de la dynamique.

Les nombres de rotation vus par Poincaré. — Dans son *mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, paru en quatre fois entre 1881 et 1886, Henri Poincaré inaugure l'étude qualitative des équations différentielles. Le mémoire est principalement consacré aux surfaces. Dans le chapitre XV, il étudie les champs de vecteurs sur le tore, ce qui le conduit à utiliser ce qu'on appelle aujourd'hui une *section de Poincaré*, puis à définir le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle. Sur la page suivante, nous proposons au lecteur un extrait du texte original. Poincaré voit le tore comme une surface de révolution dans \mathbb{R}^3 , paramétrée par les angles φ et ω . Après quelques exemples, il se place dans le cas où $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ sont strictement positives; si $t \mapsto (\varphi(t), \omega(t))$ est une courbe solution de l'équation différentielle, les coordonnées φ et ω sont donc des fonctions croissantes du temps t , comme sur la figure 2. Il considère alors le méridien $\varphi = 0$: c'est un "cycle sans contact", c'est-à-dire un cercle qui est transverse au champ de vecteurs. C'est à cet endroit que se situe l'extrait suivant.

Extrait du *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*

« Soit $M(0)$ un point de ce méridien où se trouve le point mobile à l'origine des temps. Ce point aura pour coordonnées

$$(\varphi = 0, \omega = \omega_0).$$

Si l'on fait croître le temps, ω et φ croîtront également, de sorte que φ finira par devenir égal à 2π ; le point mobile sera venu alors en un point $M(1)$ qui sera situé sur le cycle sans contact $\varphi = 0$ d'où nous sommes partis, qui sera le conséquent du point $M(0)$ et qui aura pour coordonnées

$$(\varphi = 2\pi, \omega = \omega_1).$$

Les deux quantités ω_0 et ω_1 seront liées par une relation qui n'est autre que la loi de conséquence du Chapitre V. J'écrirai cette loi sous la double forme

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \quad \omega_0 = \theta(\omega_1).$$

Les hypothèses faites permettent d'énoncer au sujet de cette loi de conséquence les principes suivants :

Premier principe. — La fonction ψ est continue.

Second principe. — La fonction ψ croît constamment avec ω_0 , de telle sorte que

$$\frac{d\omega_1}{d\omega_0} > 0,$$

et de plus, on a

$$\psi(\omega_0 + 2\pi) = \psi(\omega_0) + 2\pi.$$

Troisième principe. — La fonction ψ est holomorphe pour toutes les valeurs réelles de ω_0 .

D'ailleurs, il est clair que la fonction θ jouit des mêmes propriétés que la fonction ψ .

Soient maintenant $M(1), M(2), \dots, M(i)$ les conséquents successifs et $M(-1), M(-2), \dots, M(-i)$ les antécédents successifs de $M(0)$. Leurs coordonnées $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{-1}, \omega_{-2}, \dots$ nous seront données par les équations

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \omega_2 = \psi\psi(\omega_0), \omega_3 = \psi\psi\psi(\omega_0), \dots,$$

$$\omega_{-1} = \theta(\omega_0), \omega_{-2} = \theta\theta(\omega_0), \omega_{-3} = \theta\theta\theta(\omega_0), \dots$$

Les points M forment un ensemble de points que j'appellerai P , d'après la notation adoptée par M. Cantor. J'appellerai P' l'ensemble dérivé de P , c'est-à-dire l'ensemble des points dans le voisinage desquels il y a une infinité de points appartenant à l'ensemble P . (...)

Je puis alors me poser les questions suivantes :

1. Quelles sont les propriétés de l'ensemble P des points M et de ses dérivés ?
2. Dans quel ordre circulaire sont distribués les points M sur le cercle méridien $\varphi = 0$? (...)

Occupons-nous maintenant de déterminer l'ordre circulaire dans lequel sont disposés les points $M(i)$, en laissant de côté le cas où il y a un cycle limiteet où cet ordre se détermine aisément.

Soient α_0 la longueur de l'arc $M(0)M(1)$, α_1 celle de l'arc $M(1)M(2)$, ..., et, en général, α_i celle de l'arc $M(i)M(i+1)$. Je dis que le rapport

$$\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{i+n}}{n}$$

tendra, quand on fera croître n indéfiniment, vers une limite finie, déterminée, indépendante de i , mais incommensurable avec $2\pi r$. (...) »

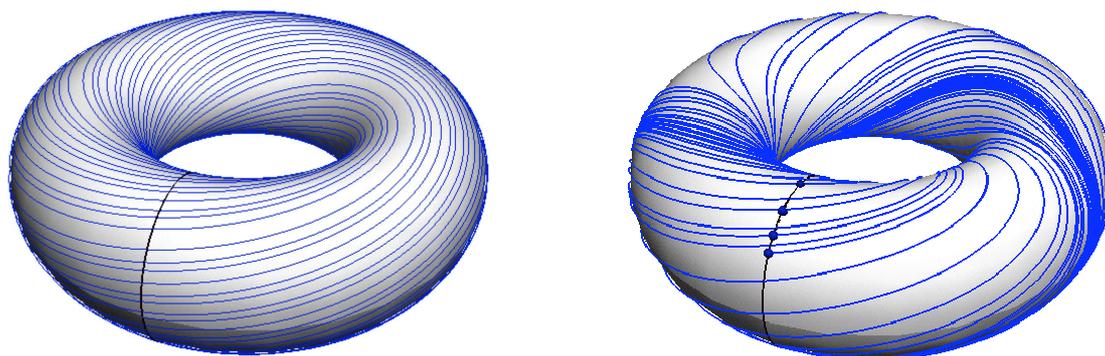


FIGURE 2. Trajectoires de deux champs de vecteurs sur le tore : linéaire et non linéaire

1.2. Des modèles linéaires aux homéomorphismes du plan

Le dessin de gauche de la figure 3 représente la dynamique de l'application linéaire Selle définie sur le plan par $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$. Bien qu'on soit passé en dimension deux, les homéomorphismes du cercle ne sont pas très loin. En effet, l'ensemble des demi-droites issues de l'origine s'identifie naturellement au cercle, et chaque application linéaire agit sur cet ensemble par homéomorphisme. De plus, on peut "éclater" le point fixe et le remplacer par le cercle des demi-droites, comme représenté sur la droite de la figure. Voici une façon de formaliser ceci. Les coordonnées polaires permettent d'identifier le plan troué à l'anneau ouvert :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{A} =]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto (r, \theta). \end{aligned}$$

Cette identification correspond à deux compactifications possibles pour le plan troué : à gauche en lui ajoutant l'origine, à droite en lui ajoutant le cercle-bord $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, qui s'identifie au cercle des demi-droites. L'action d'une application linéaire sur ce cercle étend alors son action sur le plan troué en un homéomorphisme de l'anneau semi-fermé $\overline{\mathbb{A}} = [0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$.

Ce procédé d'éclatement se généralise immédiatement à tout difféomorphisme Φ , l'action sur le cercle étant donnée par la différentielle de Φ à l'origine. Lorsque le difféomorphisme préserve l'orientation, il en est de même de l'homéomorphisme du cercle qu'il induit, et on peut considérer le nombre de rotation de cet homéomorphisme. On a ainsi associé un nombre de rotation à tout difféomorphisme du plan fixant l'origine, et plus généralement à tout point fixe d'un difféomorphisme de surface (préservant l'orientation).

Ce nombre de rotation semble indiquer la *vitesse de rotation asymptotique des orbites voisines de zéro autour de l'origine*. Si c'est bien le cas, il doit s'agir d'un invariant de nature topologique, et il devrait être possible de généraliser cette définition aux points fixes des homéomorphismes de surfaces. Cependant, pour les

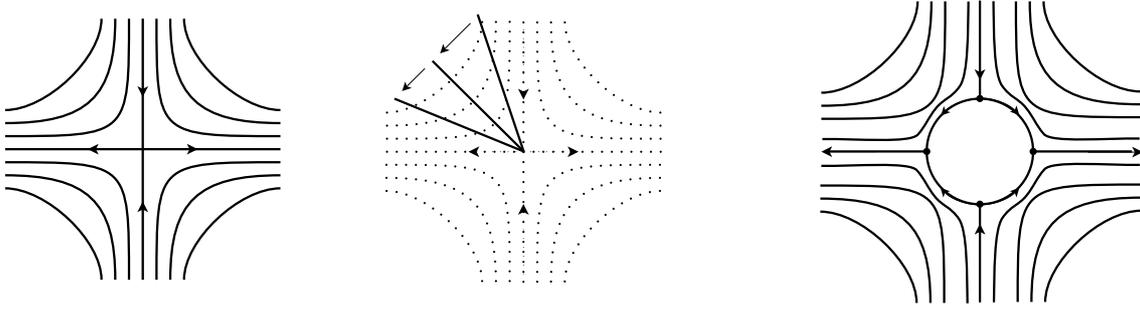


FIGURE 3. Éclatement de l'application Selle

homéomorphismes, les choses sont un peu plus compliquées. Considérons la famille des *rotations fibrées* : il s'agit des homéomorphismes du plan qui préservent chaque cercle euclidien centré en 0, et dont la restriction à chacun de ces cercles est une rotation. Autrement dit, une rotation fibrée est de la forme

$$h_\alpha : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha(r))$$

où $\alpha :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue (figure 4). Les vitesses de ro-

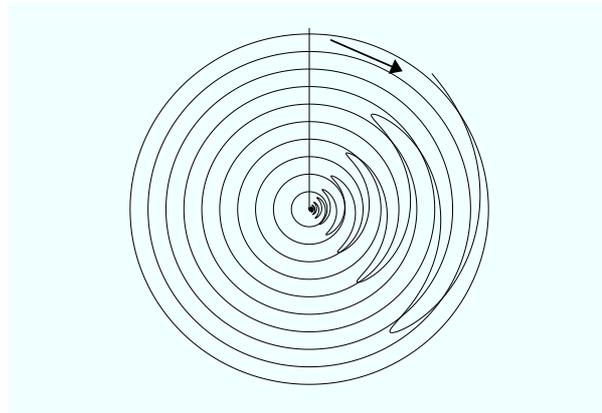


FIGURE 4. Une rotation fibrée

tation présentes dans chaque voisinage de l'origine correspondent ici aux valeurs d'adhérence de la fonction α en 0. On ne pourra donc pas espérer définir, en général, un nombre de rotation unique : on cherchera plutôt à définir un *ensemble* de rotation, qui ne sera pas toujours réduit à un singleton. Cet exemple indique aussi que la procédure d'éclatement ne marchera pas : plutôt que de se ramener aux homéomorphismes du cercle, on va tenter de mimer la définition existant dans le cercle en mesurant directement la variation angulaire autour de l'origine le long des orbites. Nous commençons par donner la définition dans un cadre plus simple, celui des anneaux.

1.3. L'ensemble de rotation dans les anneaux

La définition du nombre de rotation dans le cercle va s'étendre sans difficulté au cas de l'anneau compact, on va simplement perdre l'unicité et obtenir un *intervalle* plutôt qu'un *nombre* de rotation. Le passage à l'anneau ouvert comporte essentiellement un obstacle, que l'on va éviter en sélectionnant les "bonnes" orbites, celles dont le nombre de rotation a un sens dynamique. Au chapitre suivant, nous n'auront plus qu'à localiser la définition de l'anneau ouvert pour obtenir un ensemble de rotation pour les germes d'homéomorphismes au voisinage d'un point fixe.

a. L'anneau compact. — Nous allons définir l'ensemble de rotation dans l'anneau compact $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$ en nous inspirant du cercle. On se donne une isotopie, c'est-à-dire une famille continue $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$ d'homéomorphismes de l'anneau compact, issue de l'identité f_0 (dans la suite toutes les isotopies seront issues de l'identité, nous ne le préciserons plus). On l'étend en une famille $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ par la formule $f_t = f_{t-n} \circ f_1^n$. Étant donné un point x et un entier n , on suit la trajectoire de x entre les temps $t = 0$ et $t = n$, et on considère la variation moyenne $\rho_n(x)$ de la seconde coordonnée, $\theta : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, le long de cette trajectoire :

$$\rho_n(x) = \frac{\ell_0 + \cdots + \ell_{n-1}}{n}$$

où ℓ_i est la variation de θ le long de la portion de trajectoire entre les temps i et $i + 1$. Notons $\rho_n(I)$ l'ensemble des nombres $\rho_n(x)$ obtenus pour tous les points x de l'anneau, en un temps n fixé. On définit alors l'ensemble de rotation de l'isotopie I :

$$\rho(I) = \bigcap_{n_0 \geq 1} \text{Adhe} \left(\bigcup_{n \geq n_0} \rho_n(I) \right).$$

Autrement dit, un nombre ρ est un nombre de rotation de I si et seulement si il existe une suite de temps (n_k) qui tend vers $+\infty$, et une suite de points (x_k) , tels que la suite $(\rho_{n_k}(x_k))$ tend vers ρ .

On voit facilement que $\rho(I)$ est un intervalle compact de \mathbb{R} . Exactement comme dans le cercle, si I' est une autre isotopie aboutissant au même homéomorphisme f_1 , alors les ensembles $\rho(I)$ et $\rho(I')$ diffèrent d'une translation entière : pour tout homéomorphisme f_1 isotope à l'identité, l'ensemble $\rho(f_1)$ est défini comme un intervalle de \mathbb{R} à translation entière près.

Considérons maintenant n'importe quelle fonction $\theta' : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ qui est homotope à la fonction coordonnée θ , et examinons ce qui se passe si l'on cherche à mesurer les variations angulaires des chemins dans l'anneau en utilisant θ' à la place de θ . En utilisant la compacité de l'anneau, on montre que *la différence entre les variations de θ d'une part, et de θ' d'autre part, le long d'un même chemin de l'anneau est bornée par une quantité $M(\theta, \theta')$, indépendamment du chemin* (en considérant, pour chaque point x de l'anneau, le chemin $\gamma_x = (\theta_t(x))_{t \in [0,1]}$ parcouru dans le cercle lors d'une homotopie $(\theta_t)_{t \in [0,1]}$ reliant θ et θ' , cette différence est majorée par le double du supremum des nombres de tours effectués par ces chemins).

Revenons à l'ensemble de rotation de notre isotopie I . La variation moyenne $\rho'_n(x)$ de θ' le long de la trajectoire parcourue par un point x pendant un temps n diffère donc de $\rho_n(x)$ d'une quantité plus petite que $\frac{M(\theta, \theta')}{n}$. On en déduit que l'ensemble de rotation $\rho'(I)$, défini à l'aide de θ' , coïncide avec l'ensemble $\rho(I)$ défini à l'aide de θ . Il est maintenant clair que l'ensemble de rotation est un invariant de conjugaison. En effet, si Φ est un homéomorphisme de l'anneau compact, isotope à l'identité, l'ensemble de rotation de l'isotopie conjuguée $I' = \Phi I \Phi^{-1} = (\Phi f_t \Phi^{-1})_{t \in [0,1]}$ n'est rien d'autre que l'ensemble $\rho'(I)$ mesuré à l'aide de la fonction $\theta' = \theta \circ \Phi$.

b. L'anneau ouvert : un problème de sélection. — On se place maintenant dans l'anneau ouvert

$$\mathbb{A} =]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Il est tentant de recopier mot à mot, dans ce cadre, la définition donnée dans l'anneau compact. On est alors confronté au problème suivant, représenté sur la figure 5. L'homothétie contractante $h_1 : z \mapsto \frac{1}{2}z$ aurait bien sûr un ensemble de rotation réduit à $\{0\}$ (modulo 1). La similitude contractante $h_2 : z \mapsto \frac{1}{2}iz$, aurait pour ensemble de rotation le singleton $\{\frac{1}{4}\}$ (modulo 1). Cependant, il existe un homéomorphisme qui conjugue h_1 et h_2 : la définition obtenue ne serait pas invariante par conjugaison topologique.

Exercice. — Montrer que deux similitudes contractantes de même facteur contractant, mais d'angles différents, sont conjuguées *via* une rotation fibrée. Plus généralement, si l'orbite d'un point x pour un homéomorphisme h tend vers 0, montrer qu'avec la tentative de définition ci-dessus, on peut conjuguer h pour faire prendre au nombre de rotation de x n'importe quelle valeur donnée à l'avance.

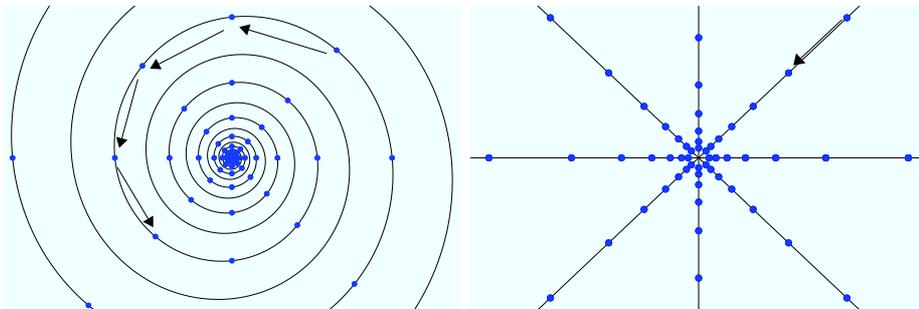


FIGURE 5. L'un tourne, l'autre pas, ils sont topologiquement conjugués...

Pour résoudre ce problème, il faut accepter de sélectionner soigneusement les segments d'orbites dont on mesure la variation angulaire, en évitant ceux dont les extrémités sont trop proches des bords de l'anneau, pour lesquels la variation angulaire n'a pas de sens en dynamique topologique. Soit I une isotopie aboutissant en un homéomorphisme h . Pour tout compact K de l'anneau ouvert \mathbb{A} , et pour tout entier n , on définit l'ensemble des points pertinents,

$$E(K, n) = \{x \mid x \in K, h^n(x) \in K\}.$$

Notons $\rho_{K,n}(I)$ l'ensemble des variations angulaires moyennes de tous les points pertinents en temps n . L'ensemble de rotation de K sous l'isotopie I est défini par

$$\rho_K(I) = \bigcap_{n_0 \geq 1} \text{Adhe} \left(\bigcup_{n \geq n_0} \rho_{K,n}(I) \right),$$

où l'adhérence est prise dans $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'ensemble de rotation de l'isotopie est

$$\rho(I) = \bigcup \{ \rho_K(I), K \text{ compact de } \mathbb{A} \}.$$

Cette fois-ci, ce n'est pas *a priori* un intervalle, et en général il n'est pas borné. Comme avant, il ne dépend que du temps un de l'isotopie, à translation entière près. Enfin, on peut vérifier que la sélection des points pertinents permet bien d'obtenir une notion invariante par conjugaison. L'argument est le même que dans l'anneau compact : on montre que si une fonction $\theta' : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{S}^1$ est homotope à la fonction θ , *la différence entre les variations de θ d'une part, et de θ' d'autre part, le long d'un même chemin de l'anneau dont les extrémités appartiennent à un compact K est bornée par une quantité $M(\theta, \theta', K)$, indépendamment du chemin.*

1.4. Discussion

Relevé. — On définit souvent le nombre de rotation en utilisant la notion de relevé plutôt que celle d'isotopie. Les deux points de vue sont essentiellement équivalents, et si la notion d'isotopie me semble plus visuelle, il faut reconnaître que la notion de relevé est extrêmement efficace pour fournir des arguments précis ; puisque nous ne pourrions pas éviter complètement son emploi en dimension deux au chapitre suivant, il peut être utile d'en rappeler la définition sur le cercle. Considérons un homéomorphisme croissant H de \mathbb{R} et supposons que $H = \text{Id} + \varphi$ où φ est une fonction périodique. En d'autres termes, H commute à la translation $\tilde{\theta} \mapsto \tilde{\theta} + 1$. Par conséquent H passe au quotient de la relation d'équivalence modulo 1 et induit un homéomorphisme croissant h du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} . On dira alors que H est un relevé de h . Les homéomorphismes de \mathbb{R} qui commutent à la translation forment un espace convexe, H est donc le temps un d'une isotopie d'homéomorphismes qui commutent à la translation ; cette isotopie induit une isotopie d'homéomorphismes du cercle, on dira ici encore que la première isotopie relève la deuxième. Cette construction admet une réciproque : toute isotopie I d'homéomorphismes du cercle se relève de façon unique en une isotopie sur \mathbb{R} , et le temps un de l'isotopie relevée fournit ainsi un homéomorphisme H qui relève le temps un h de I . Il n'était pas extrêmement commode de définir précisément, dans le cadre des isotopies, la variation angulaire de la coordonnée θ le long de la trajectoire d'un point x du cercle sous l'isotopie I entre les temps 0 et 1 (la note 1 révélait d'ailleurs notre embarras). Cette variation est en fait égale au nombre $H(\tilde{x}) - \tilde{x}$, où \tilde{x} est n'importe quel réel se projetant sur x . Nous pouvons maintenant prendre cette égalité pour une définition. L'exposé original de Poincaré utilise implicitement les relevés, puisqu'il insiste sur l'importance de

travailler avec des angles déterminés entièrement et non pas seulement modulo 2π , ce qui revient à considérer H au lieu de h .

Nombres de rotation des mesures invariantes. — Dans le cercle ou l’anneau compact, on peut définir le nombre de rotation $\rho(\mu)$ d’une mesure de probabilité μ invariante par h : il s’agit de la moyenne, relativement à μ , de la fonction qui associe à chaque point x la variation angulaire $\rho_1(x)$. Le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que μ -presque tout point x admet un nombre de rotation $\rho(x)$, au sens où la suite $(\frac{1}{n}\rho_n(x))$ converge, et que $\rho(\mu)$ est encore égal à la valeur moyenne de $\rho(x)$. Dans le cadre compact, il existe toujours des mesures invariantes, et ce détour par la théorie de la mesure nous montre qu’il existe toujours des points admettant un nombre de rotation. L’ensemble de ces nombres de rotation forme en général un sous-ensemble strict de l’ensemble de rotation, comme le montre l’exemple d’un homéomorphisme poussant les points le long d’un feuilletage de Reeb (représenté sur la figure 3 du chapitre 3), pour lequel tous les points ont pour nombre de rotation l’un des deux nombres α^+, α^- obtenus sur les cercles bordant l’anneau, tandis que l’ensemble de rotation est l’intervalle $[\alpha^+, \alpha^-]$. Par contre, les extrémités de l’ensemble de rotation sont toujours réalisées par des mesures ergodiques, et donc comme nombre de rotation des points typiques pour ces mesures ; ainsi, l’ensemble de rotation est égal à l’enveloppe convexe de l’ensemble des nombres de rotation des points.

Malheureusement, cette approche se généralise très mal au cadre non compact qui nous intéresse : il n’existe pas forcément de mesure invariante, et lorsqu’il en existe la fonction ρ_1 peut ne pas être intégrable. Je ne sais pas s’il y a quelque chose à tirer de cette approche, par exemple, dans le cadre de l’anneau ouvert. On peut caractériser l’existence de mesures invariantes à l’aide des fonctions temps de retours dans les parties compactes ; cependant je ne sais pas si tout homéomorphisme de l’anneau ayant des points récurrents admet une mesure invariante. Je ne sais pas non plus si l’ensemble des points récurrents contient toujours un point ayant un nombre de rotation.

D’autres définitions. — Lorsqu’on étudie les homéomorphismes conservatifs, c’est-à-dire préservant une mesure de probabilité, on définit souvent l’ensemble de rotation comme l’ensemble des nombres de rotation des points récurrents ([LeC01, BCL06]). En général, cet ensemble est strictement plus petit que celui que nous avons défini ici, c’est le cas par exemple pour l’homéomorphisme selle, ou plus généralement pour tout homéomorphisme non conjugué à une translation du cylindre mais dont tous les points sont errants. Il y a certainement encore d’autres définitions possibles, mais il est probable qu’aucune ne produit d’ensemble strictement plus gros.

Problème 1. — Écrire une définition de l’ensemble de rotation dans l’anneau ouvert à l’aide de pseudo-orbites. Cet ensemble coïncide-t-il avec l’ensemble de rotation que nous avons défini ?

Pour obtenir un invariant de conjugaison dans un cadre non-compact, il faut probablement considérer des “pseudo-orbites au sens de Whitney”, c’est-à-dire dont les sauts sont contrôlés non pas par une constante mais par une fonction continue strictement positive sur l’anneau.

D’autres cadres.— Les définitions données dans les anneaux se généralisent immédiatement à toute surface, compacte ou non ; l’ensemble de rotation apparaît alors comme un élément du premier groupe d’homologie à coefficients réels. Il pourrait être intéressant d’essayer de définir un ensemble plus précis en utilisant le groupe fondamental (et peut-être son bord à l’infini), c’est-à-dire en se souvenant non seulement de la façon dont les trajectoires s’enroulent en moyenne autour de la topologie de notre surface, mais aussi de l’ordre dans lequel sont visités les différents “trous”.

Ensemble de rotation vide.— Sur une surface compacte, l’ensemble de rotation n’est jamais vide. Sur l’anneau ouvert, toute application dont l’ensemble de rotation est vide est conjuguée à une application $(r, \theta) \mapsto (kr, \theta)$ (homothétie du plan en coordonnées polaires ou translation sur le cylindre). En effet, la définition montre que l’ensemble $E(K, n)$ des points pertinents doit être vide pour tout compact K et tout entier n assez grand ; l’action de \mathbb{Z} donnée par $n \mapsto h^n$ est alors proprement discontinue, le quotient de cette action est une surface de groupe fondamental \mathbb{Z}^2 , c’est-à-dire un tore, et h est conjugué à l’action d’un automorphisme du revêtement universel du tore sur un revêtement annulaire intermédiaire. Au chapitre suivant nous caractériserons les germes d’homéomorphismes ayant un ensemble de rotation vide (le résultat est un peu plus amusant). On peut probablement montrer aussi, en utilisant les chapitres suivants, qu’il n’existe pas d’homéomorphisme de l’anneau ouvert dont l’ensemble de rotation est le singleton $\{+\infty\}$.

Une définition locale.— Enfin, voici une façon de définir l’ensemble de rotation pour un germe h d’homéomorphisme de surface au voisinage d’un point fixe. On considère tous les homéomorphismes du plan dont le germe en 0 est conjugué à h ; chacun de ces homéomorphismes se restreint en un homéomorphisme de l’anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sur lequel nous avons défini un ensemble de rotation. On pourrait définir l’ensemble de rotation de h comme l’intersection de tous les ensembles de rotation annulaires ainsi obtenus. Cette définition ne semble pas très commode à manipuler. Je ne sais pas si elle est équivalente à celle donnée au chapitre suivant.

CHAPITRE 2

L'ENSEMBLE DE ROTATION AUTOUR D'UN POINT FIXE

On s'intéresse à la dynamique locale des homéomorphismes de surface au voisinage d'un point fixe. En généralisant la construction dans les anneaux, on aboutit à la définition d'un *ensemble de rotation*, invariant de conjugaison topologique locale qui décrit la "vitesse de rotation des points autour de l'origine" (section 2.1). Cet invariant donne une obstruction simple à la possibilité d'éclater le point fixe pour le remplacer par un cercle (section 2.2). La découverte d'un critère d'éclatement conduit à une deuxième façon de mesurer la vitesse de rotation locale, donnant naissance à un *intervalle de rotation* (section 2.3). En réalité, nous verrons au chapitre suivant que l'intervalle de rotation coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation.

Le décor. — Soit $\mathcal{H}^+(0)$ le groupe des homéomorphismes du plan, préservant l'orientation, fixant le point 0. Deux éléments h_1, h_2 de $\mathcal{H}^+(0)$ sont *localement conjugués* s'il existe un troisième élément g de $\mathcal{H}^+(0)$ tel que la relation de conjugaison $h_2 = gh_1g^{-1}$ a lieu sur un voisinage du point fixe 0. On s'intéresse à la dynamique topologique locale en dimension 2, ce qui revient à chercher à décrire les classes de conjugaison locale des éléments de $\mathcal{H}^+(0)$. Pour justifier cette approche, il faut remarquer que tout *homéomorphisme local* $h : U \rightarrow V$ fixant 0, où U et V sont deux ouverts contenant 0, coïncide au voisinage de 0 avec un élément de $\mathcal{H}^+(0)$ (voir l'appendice A). Ainsi, tout germe d'homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe est représenté par un élément de $\mathcal{H}^+(0)$, et deux éléments de $\mathcal{H}^+(0)$ sont localement conjugués si et seulement si leurs germes sont conjugués. Enfin, nous aurons besoin de quelques informations sur l'espace topologique obtenu en munissant $\mathcal{H}^+(0)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (voir [Ham74], ou l'appendice de [LeR97]). Cet espace est connexe par arcs : tout élément h de $\mathcal{H}^+(0)$ est le temps un d'une isotopie $I = (h_t)_{t \in [0,1]}$ qui fixe le point 0. Plus précisément, $\mathcal{H}^+(0)$ se *rétracte par déformation* sur les rotations. Nous allons utiliser cette propriété sous la forme suivante. Notons R_α la rotation d'angle α (mesuré en nombre de tours). Pour chaque entier p , on définit le lacet des rotations $J^p = (R_{pt})_{t \in [0,1]}$. Étant donné un lacet I dans $\mathcal{H}^+(0)$ basé en l'identité (autrement dit, I_0 est une isotopie dont le temps un est l'identité), il existe alors un unique entier

p tel que l'on puisse déformer continûment I , en se déplaçant parmi les lacets basés en l'identité, en le lacet J^p . Finissons ce paragraphe en rappelant comment l'astuce d'Alexander fournit une isotopie de l'identité à n'importe quel homéomorphisme $h \in \mathcal{H}^+(0)$ qui est différentiable en 0. On commence par dilater continûment la dynamique de h en la conjuguant par des homothéties, ce qui produit une famille continue $(h_t)_{t \in]0,1]}$ définie par

$$h_t(x) = \frac{1}{t}h(tx).$$

Lorsque h est différentiable en 0, cette famille converge uniformément sur les compacts vers l'application $h_0 : x \mapsto Df_0(x)$ donnée par la différentielle de h en 0. Pour terminer la construction de l'isotopie, il ne reste plus qu'à utiliser la connexité de l'espace des applications linéaires inversibles préservant l'orientation pour ramener h_0 en l'identité.

2.1. L'ensemble de rotation local

Nous définissons maintenant l'ensemble de rotation pour un élément h de $\mathcal{H}^+(0)$. Comme dans l'anneau ouvert, il faut sélectionner les segments d'orbites dont les extrémités ne sont pas trop près du point fixe : ce rôle est donné à un voisinage W . D'autre part, pour obtenir un invariant de conjugaison *locale*, il ne faut prendre en compte que les orbites suffisamment proches du point fixe : c'est le rôle du voisinage V .

On se donne une isotopie $I_0 = (h_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\mathcal{H}^+(0)$ aboutissant à $h_1 = h$. Fixons deux voisinages $W \subset V$ de 0, et un temps n . On définit l'ensemble des points pertinents (figure 1),

$$E(V, W, n) = \{x \mid x \notin W, h^n(x) \notin W, h^i(x) \in V \text{ pour } i = 0, \dots, n\}.$$

Pour un point $x \in E(V, W, n)$, on considère la variation moyenne $\rho_n(x)$ de la

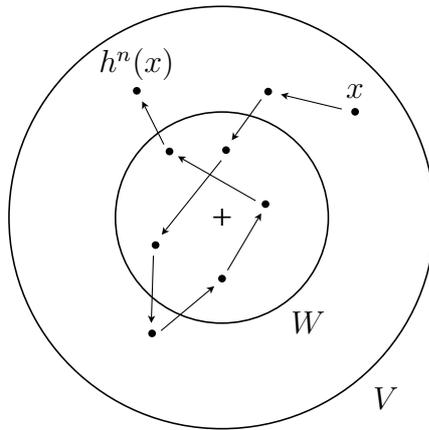


FIGURE 1. Sélection des points pertinents

coordonnée polaire θ le long de la trajectoire du point x entre les temps 0 et n . On définit alors un ensemble de rotation relativement à V et W ,

$$\rho_{V,W}(I_0) = \bigcap_{n_0 \geq 1} \text{Adhe} \left(\bigcup_{n \geq n_0} \{\rho_n(x), x \in E(V, W, n)\} \right)$$

où l'adhérence est prise dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Autrement dit, $\rho_{V,W}(I_0)$ est l'ensemble des nombres $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$ qui sont limites d'une suite $(\rho_{n_i}(x_i))_{i \geq 0}$ avec (n_i) tendant vers $+\infty$ et telle que, pour chaque i , le point x_i appartient à $E(V, W, n_i)$. On définit ensuite l'ensemble de rotation relativement à V ,

$$\rho_V(I_0) = \text{Adhe} \left(\bigcup_W \rho_{V,W}(I_0) \right)$$

où W décrit l'ensemble des voisinages de 0 inclus dans V , l'adhérence étant prise dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit enfin l'ensemble de rotation de l'isotopie I_0 ,

$$\rho(I_0) = \bigcap_V \rho_V(I_0)$$

où V décrit l'ensemble des voisinages de 0.

On dira qu'une isotopie $I' = (h'_t)$ est *localement conjuguée* à I_0 s'il existe un homéomorphisme $\Phi \in \mathcal{H}^+(0)$ et un voisinage de 0 sur lequel la relation $h'_t = \Phi h_t \Phi^{-1}$ a lieu pour tout t . On montre, comme on l'a fait dans les anneaux au chapitre précédent, que l'ensemble $\rho(I_0)$ est bien un invariant de conjugaison locale. On obtient même un résultat plus précis.

Lemme 2.1. — *Soit $\Phi \in \mathcal{H}^+(0)$. Pour tous couples de voisinages $W \subset V$ de 0,*

$$\rho_{V,W}(I_0) = \rho_{\Phi(V),\Phi(W)}(\Phi I_0 \Phi^{-1}).$$

Comme dans le cercle, les ensembles de rotation de deux isotopies aboutissant à un même homéomorphisme h diffèrent d'un entier. Ainsi, l'ensemble de rotation $\rho(h)$ est bien défini comme un compact de $\overline{\mathbb{R}}$, à translation entière près. La proposition suivante, où l'isotopie $(h_t^q)_{t \in [0,1]}$ est désignée par I_0^q , résume les propriétés élémentaires de cette construction. Sa démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 2.2. —

- Deux isotopies localement conjuguées ont le même ensemble de rotation.
- Pour tous entiers p, q , on a $\rho(J^p \circ I_0^q) = q \cdot \rho(I_0) + p$.

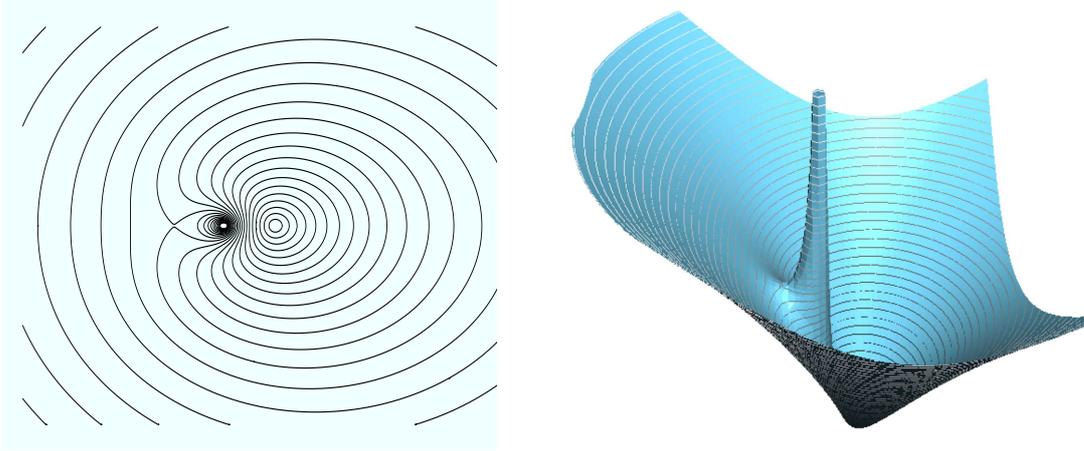


FIGURE 2. Les orbites du pendule; on a représenté les lignes de niveau et le graphe de la fonction énergie $E = \omega^2 - \cos(\theta)$ dans les coordonnées polaires ($r = e^\omega, \theta$)

Le pendule. — Illustrons notre définition sur l'exemple bien connu du pendule. Le pendule se déplace sur un cercle, son état mécanique est donc caractérisé par sa position θ et sa vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$; ainsi, la dynamique du pendule est modélisée par un flot lisse (φ^t) sur l'anneau $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, fibré tangent du cercle. Ce flot est un flot hamiltonien : la fonction énergie, E , est constante le long des orbites (cf. figure 2). Le flot (φ^t) possède deux points fixes. Le premier correspond à l'équilibre stable du pendule au repos, et au minimum de la fonction E ; les points proches de ce point fixe décrivent des courbes fermées correspondant aux petites oscillations du pendule; l'ensemble de rotation de ce point fixe pour l'isotopie $(\varphi^t)_{t \in [0,1]}$ est un singleton qui donne la fréquence des petites oscillations. Le second point fixe correspond à l'équilibre instable, il s'agit d'un point Selle, son ensemble de rotation est le singleton $\{0\}$. Compactifions maintenant l'anneau en lui ajoutant ses deux bouts, ce qui en fait une sphère topologique, et prolongeons chaque difféomorphisme φ^t en un homéomorphisme de la sphère qui fixe les deux bouts de l'anneau (figure 3). Chaque bout de l'anneau correspond aux mouvements circulaires dont la fréquence tend vers l'infini, dans un sens ou dans l'autre : en chacun des bouts fixes, l'ensemble de rotation de $(\varphi^t)_{t \in [0,1]}$ est le singleton $\{+\infty\}$.

Quand l'ensemble de rotation est-il vide ? — Le pendule est un système dynamique *conservatif* : la loi physique de conservation de l'énergie se traduit par l'invariance d'une forme volume. A l'opposé, considérons un point fixe *contractant*, c'est-à-dire une dynamique localement conjuguée à l'application $z \mapsto \frac{1}{2}z$. Fixons V et W comme dans la définition plus haut. Il est clair que pour tout n assez grand, l'ensemble $E(V, W, n)$ des “points pertinents” est vide. Par conséquent l'ensemble de rotation local d'un point fixe contractant est vide. Y a-t-il beaucoup d'éléments de $\mathcal{H}^+(0)$ dont l'ensemble de rotation est vide ? Un premier examen de la définition montre

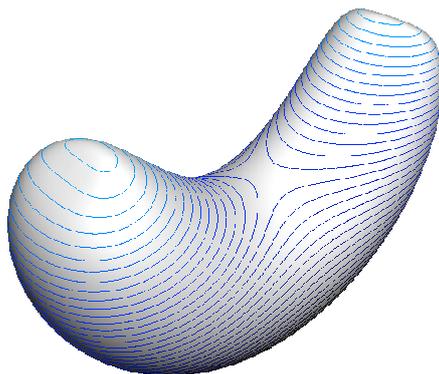


FIGURE 3. Compactification du pendule

que l'ensemble $\rho(h)$ est vide si et seulement si h vérifie la propriété suivante, mise en évidence par J.-M. Gambaudo et É. Pécou ([**GamPéc95**]).

Définition 2.3. — On dira que $h \in \mathcal{H}^+(0)$ vérifie la *propriété d'excursion courte* si il existe un voisinage V de 0, tel que pour tout voisinage W de 0, il existe une borne N_W telle que l'ensemble $E(V, W, n)$ est vide pour tout $n \geq N_W$: autrement dit, tout segment d'orbite inclus dans V , dont les premiers et derniers points sont hors de W , a une longueur plus petite que N_W .

On peut en fait caractériser complètement les éléments vérifiant cette propriété ; on s'aperçoit alors qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de classes de conjugaison de germes d'éléments de $\mathcal{H}^+(0)$ dont l'ensemble de rotation est vide. Ce résultat est démontré dans l'article [**LeR08**].

Théorème 2.4. — *Un élément h de $\mathcal{H}^+(0)$ a un ensemble de rotation vide (ou, de façon équivalente, possède la propriété d'excursion courte) si et seulement si il est localement conjugué*

- à la contraction $z \mapsto \frac{1}{2}z$,
- à la dilatation $z \mapsto 2z$
- ou à une application holomorphe dont 0 est un point fixe parabolique.

Rappelons que 0 est un point fixe *parabolique* d'une application holomorphe f si $f'(0)$ est une racine de l'unité, et si f n'est pas d'ordre fini (sans quoi f serait localement conjugué à une rotation rationnelle). D'après la version de Camacho du théorème de Leau-Fatou, l'application f est alors localement (topologiquement) conjuguée à une application $z \mapsto e^{2i\pi\frac{p}{q}}z(1 + z^{qr})$, ce qui explique pourquoi ces dynamiques correspondent à une famille dénombrable de classes de conjugaison (voir [**Mil06, Cam78**]). La dynamique locale peut se décrire, par exemple, en termes de *pétales périodiques* et de *secteurs attractifs et répulsifs*, comme sur la figure 4 ; on pourrait alternativement utiliser des *pétales attractifs et répulsifs* (voir la section 4.2).

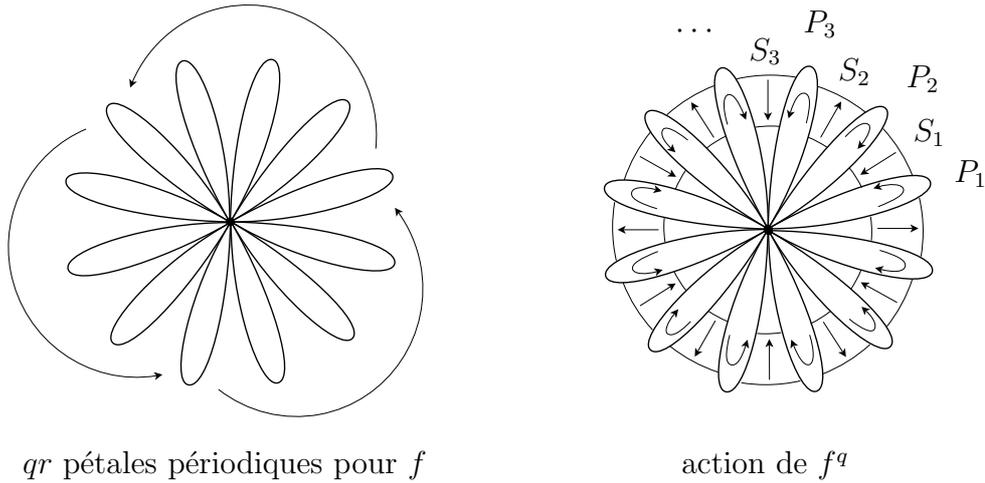


FIGURE 4. Dynamique de l'application $f : z \mapsto e^{2i\pi\frac{p}{q}}z(1 + z^{qr})$; ici $q = 3$, $p = 1$, $r = 2$, il y a deux orbites de pétales attractifs et deux orbites de pétales répulsifs

Ce théorème renforce un lemme dû à J.-M. Gambaudo, P. Le Calvez et É. Pécou, qui disait qu'un élément qui satisfait la propriété d'excursion courte, et qui n'est localement conjugué ni à la dilatation ni à la contraction, est *indifférent* : il admet des compacts connexes invariants, contenant le point fixe 0, et arbitrairement petits ([GLP96], voir aussi la section 3.4).

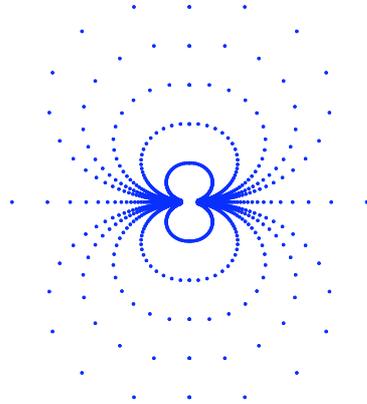


FIGURE 5. Dessin de quelques orbites de $z \mapsto z + z^2$

Idée de preuve. — La partie difficile du théorème consiste bien sûr à montrer qu'un élément qui satisfait la propriété d'excursion courte, et qui n'est pas une contraction ni une dilatation, est localement conjugué à un point fixe parabolique. Il s'agit alors essentiellement, sous ces hypothèses, de trouver les pétales apparaissant sur la figure 4.

Expliquons la construction des pétales. Pour cela, on considère les ensembles stables et instables du voisinage V de 0 donné par la propriété d'excursion courte,

$$W^s(V) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(V) \quad \text{et} \quad W^u(V) = \bigcap_{n \leq 0} f^{-n}(V).$$

On démontre d'abord assez facilement que la réunion de ces deux ensembles forme un voisinage de 0, mais que, dilatations et contractions étant exclues, ni l'un ni l'autre n'est un voisinage de 0. Considérons alors une courbe de Jordan J entourant 0 et bordant un disque inclus dans la réunion des ensembles stables et instables. On peut découper cette courbe, en des points x_i , pour l'écrire comme concaténée d'arcs alternativement inclus dans l'un ou l'autre de ces deux ensembles. Les points de coupure x_i appartiennent alors à l'intersection $W^s(V) \cap W^u(V)$. Soit P_i la composante connexe de $W^s(V) \cap W^u(V) \setminus \{0\}$ contenant le point x_i . Le point clé de la démonstration consiste à montrer que *si l'on a choisi la courbe J , parmi toutes les courbes de Jordan entourant 0, de façon à ce que le nombre des points de coupure soit le plus petit possible, alors P_i adhère à 0*. On montre enfin que l'ensemble P_i contient un pétale périodique pour h . \square

2.2. Éclatements, différentiabilité

Nous discutons ici de la notion d'éclatement et du théorème de Naishul; nous donnons un critère d'éclatement et une conjecture qui motive une définition alternative de l'ensemble de rotation, conduisant à un *intervalle de rotation*. Cette section est le fruit d'un travail en commun avec François Béguin et Sylvain Crovisier. Ce travail a commencé en essayant de montrer que les pseudo-rotations irrationnelles de l'anneau ouvert (voir [BCL06]) sont éclatables, ce qui m'a conduit à écrire une définition de l'ensemble de rotation local pour préciser la conjecture expliquée ici.

a. Éclatements et ensemble de rotation. — Le procédé d'éclatement des points fixes de difféomorphismes, décrit à la section 1.2, suggère une définition de dynamique topologique. Disons que Φ fournit des *coordonnées polaires topologiques* si c'est un homéomorphisme $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A} =]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$, préservant l'orientation, et qui est homotope aux coordonnées polaires usuelles : cette dernière condition se traduit simplement par le fait qu'une suite de points tend vers 0 dans le plan si et seulement si sa coordonnée polaire (usuelle) r tend vers 0. Suivant [GLP96], on dira qu'un élément h de $\mathcal{H}^+(0)$ est *topologiquement éclatable* s'il existe des coordonnées polaires topologiques fournies par un homéomorphisme Φ tel que $\Phi h \Phi^{-1}$ s'étend en un homéomorphisme \bar{h} de l'anneau semi-fermé $\bar{\mathbb{A}} = [0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$. Ceci revient à dire qu'il existe un homéomorphisme conjugué à h qui est éclatable dans les coordonnées polaires usuelles. On identifie alors $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ au cercle \mathbb{S}^1 ; la restriction de \bar{h} est un homéomorphisme du cercle, préservant l'orientation, qu'on appellera *compactification en cercle* de h . On notera $\rho(\bar{h}|_{\mathbb{S}^1})$ le nombre de rotation correspondant, et

on l'appellera *nombre de rotation de h en 0*. Considérons un homéomorphisme topologiquement éclatable h . Quitte à effectuer un changement de coordonnées, h est éclatable dans les coordonnées polaires usuelles. Supposons maintenant que h soit le temps un d'une isotopie $I = (h_t)_{t \in [0,1]}$. L'espace des homéomorphismes de l'anneau semi-fermé $\overline{\mathbb{A}}$ dont la restriction au bord est un homéomorphisme croissant du cercle est connexe par arcs ⁽¹⁾. Autrement dit, quitte à remplacer I par une isotopie qui lui est homotope, on peut supposer que chaque homéomorphisme h_t s'étend au cercle $\{0\} \times \mathbb{S}^1$. Nous noterons $\rho(I|_{\mathbb{S}^1})$ le nombre de rotation de l'isotopie $(\overline{h}_t|_{\mathbb{S}^1})_{t \in [0,1]}$, qui est un nombre réel. Le lien avec l'ensemble de rotation local est sans surprise.

Proposition 2.5. — *Soit $I = (h_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie dans $\mathcal{H}^+(0)$ dont le temps un h est topologiquement éclatable. Si l'ensemble de rotation $\rho(I)$ n'est pas vide, il est égal au singleton $\{\rho(I|_{\mathbb{S}^1})\}$.*

Illustrons cette proposition par l'exemple de la rotation fibrée $h_\alpha : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha(r))$ dessinée sur la figure 4 du premier chapitre. Le lecteur se convaincra sans peine que l'ensemble de rotation de h_α est égal à l'ensemble des valeurs d'adhérence de la fonction α en 0. En particulier, on fabrique ainsi des exemples d'ensemble de rotation contenant un intervalle, pour lesquels le point fixe n'est pas éclatable.

Preuve de la proposition. — Comme expliqué plus haut, on peut supposer que h_t est éclatable, pour tout t , dans les coordonnées polaires usuelles. Notons $\rho = \rho(I|_{\mathbb{S}^1})$. Supposons d'abord, pour simplifier, que $\overline{h}_t|_{\mathbb{S}^1}$ est une rotation, ρ est alors son angle. Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de l'éclatement \overline{h} , il existe un voisinage V de 0 dans lequel tout point x a une variation angulaire $\rho_1(x)$ égale à ρ , à ε près. Si x est un point dont les n premiers itérés sont dans V , la variation moyenne de la coordonnée polaire θ en n itérations vérifie encore

$$\rho_n(x) \in [\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon].$$

Par conséquent

$$\rho(I) \subset \rho_V(I) \subset [\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon].$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\rho(I) \subset \{\rho\}$, comme voulu.

Dans le cas général, $\overline{h}_t|_{\mathbb{S}^1}$ n'est pas une rotation ; cependant, la preuve de l'existence du nombre de rotation pour les homéomorphismes du cercle montre que la convergence des variations angulaires moyennes vers le nombre de rotation est uniforme (cf. chapitre 1) ; mieux, pour tout entier positif n_0 et tout $\overline{x} \in \mathbb{S}^1$, on a

$$\rho_{n_0}(\overline{x}) \in \left[\rho - \frac{1}{n_0}, \rho + \frac{1}{n_0} \right].$$

Comme dans le cas simple, cette estimée reste vraie, à ε près, pour tout x assez proche de 0, et en faisant tendre ε vers 0 on obtient $\rho(I^{n_0}) \subset [n_0\rho - 1, n_0\rho + 1]$. On

⁽¹⁾L'argument est analogue à la construction d'une isotopie lorsque h est différentiable en 0, expliquée au tout début de ce chapitre.

en déduit

$$\rho(I) = \frac{1}{n_0} \rho(I^{n_0}) \subset \left[\rho - \frac{1}{n_0}, \rho + \frac{1}{n_0} \right].$$

Comme ceci est vrai pour tout entier positif n_0 , on conclut encore que $\rho(I) = \{\rho\}$.

Une autre preuve du cas général consisterait à se ramener aux rotations en utilisant la proposition 2.7 ci-dessous. \square

Voici une conséquence intéressante de la proposition 2.5. Puisque l'ensemble de rotation est un invariant de conjugaison topologique locale, *le nombre de rotation en 0 des éléments éclatables est aussi un invariant de conjugaison topologique locale, sauf peut-être si l'ensemble de rotation est vide*. Que peut-il arriver dans ce dernier cas? Nous avons déjà vu que le nombre de rotation en 0 n'est pas un invariant pour les éléments conjugués à une contraction ou une dilatation (*cf.* figure 5 du chapitre 1). D'après le théorème 2.4, il ne reste plus qu'à considérer les points fixes paraboliques des applications holomorphes. Comme leur dynamique est très simple, on pourrait montrer par un argument spécifique que le nombre de rotation en 0 est bien un invariant. On retrouverait ainsi le théorème de Naishul, dans sa version générale proposée par J.-M. Gambaudo, P. Le Calvez et É. Pécou ([GLP96]).

Théorème (Gambaudo-Le Calvez-Pécou). — *Soit h un homéomorphisme éclatable de $\mathcal{H}^+(0)$ qui n'est pas localement conjugué à une contraction ou une dilatation. Alors le nombre $\rho(\bar{h}_{|\mathbb{S}^1})$ ne dépend que de h , et pas du choix des coordonnées polaires topologiques Φ dans lesquelles on lit l'extension \bar{h} .*

Nous définirons dans la section 2.3 un intervalle de rotation qui aura l'avantage de ne pas être vide pour les points fixes paraboliques, ce qui permet une preuve plus claire de ce résultat.

b. Un critère d'éclatement. — La conjecture qui suit était l'une des motivations pour l'étude de l'ensemble de rotation local.

Conjecture 2 (Béguin-Crovisier-Le Roux). — Si $\rho(h)$ est un singleton différent de $\{\pm\infty\}$, alors h est éclatable.

Nous expliquons maintenant un critère général pour qu'un homéomorphisme soit éclatable. Ce critère nous permettra par exemple de montrer, au chapitre 4, que les points fixes isolés d'indice différent de 1 sont éclatables; comme leur ensemble de rotation est $\{0\}$, on voit que la conjecture est satisfaite dans ce cas.

Supposons que h est éclatable, avec une compactification en cercle qui n'est pas conjuguée à une rotation rationnelle du cercle : autrement dit, $\bar{h}_{|\mathbb{S}^1}$ n'est pas d'ordre fini, il existe alors un angle $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$ tel que $\bar{h}^n(\theta_0) \neq \theta_0$ pour tout entier n non nul. Dans l'anneau $\bar{\mathbb{A}}$, la demi-droite verticale $\gamma = \{\theta = \theta_0\}$ possède alors une propriété très spéciale (*cf.* figure 6) : pour tout entier n non nul, il existe un voisinage V_n du cercle $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ tel que l'intersection $\gamma \cap h^n(\gamma) \cap V_n$ est vide, ce que nous noterons

$$\gamma \cap h^n(\gamma) \cap V_n = \emptyset.$$

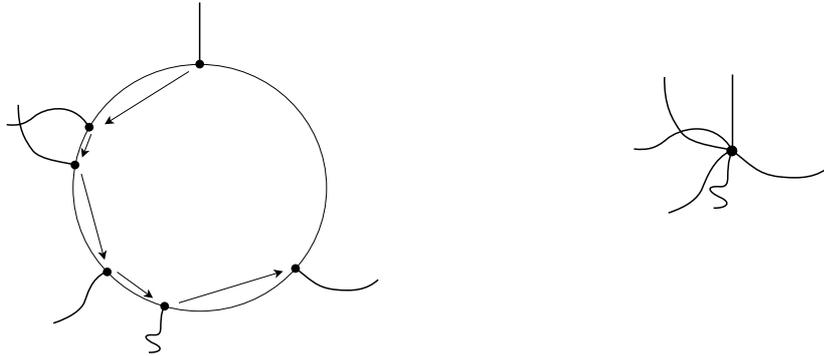


FIGURE 6. Une orbite infinie sur le cercle correspond à une courbe disjointe en germe de tous ses itérés

Cette vacuité est détectable dans le plan pour l'homéomorphisme initial h et fournit notre critère d'éclatement. Appelons *demi-droite topologique* toute courbe simple $\gamma : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ reliant le point $\gamma(0) = 0$ au point $\gamma(+\infty) = \infty$. Étant données deux demi-droites topologiques γ_1, γ_2 , on écrira $\gamma_1 \cap \gamma_2 =_0 \{0\}$, et on dira que ces deux courbes *ont des germes disjoints*, s'il existe un voisinage V de 0 dans le plan tel que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap V = \{0\}$.

Proposition 2.6 (B-C-LR). — Soit $h \in \mathcal{H}^+(0)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. h est topologiquement éclatable, et il existe une compactification en cercle $\bar{h}_{|\mathbb{S}^1 \times \{0\}}$ qui n'est pas conjuguée à une rotation rationnelle ;
2. il existe une demi-droite topologique γ dont le germe est disjoint des germes des itérés $h^n(\gamma)$ pour tout n non nul.

De plus, lorsque ces propriétés sont satisfaites, l'ordre cyclique de la suite $(h^n(\gamma))_{n \in \mathbb{Z}}$ autour de 0 coïncide avec l'ordre cyclique d'une orbite de $\bar{h}_{|\mathbb{S}^1 \times \{0\}}$ sur le cercle.

Idée de la démonstration. — La première propriété implique immédiatement la seconde, comme l'a montré la discussion précédente. On suppose maintenant que la seconde propriété est vérifiée. Puisque les germes des itérés de γ sont deux à deux disjoints, l'ensemble de ces germes hérite d'un ordre cyclique donné par la disposition autour de 0. L'action de h sur cet ensemble préserve l'ordre cyclique. Étudions d'abord le cas "irrationnel" : on suppose que pour tous entiers $k_1 \neq k_2$ il existe $k_3 \neq k_1, k_2$ tel que l'ordre cyclique du triplet $(h^{k_1}(\gamma), h^{k_2}(\gamma), h^{k_3}(\gamma))$ est positif.

On commence par effectuer une conjugaison Φ qui redresse, au voisinage de 0, les itérés $h^k(\gamma)$ sur des demi-droites vectorielles D_k . Cette conjugaison s'obtient comme limite d'une suite (Φ_k) , Φ_k redressant les k premiers itérés (positifs et négatifs) de γ ; étant donnée Φ_k , on construit Φ_{k+1} , qui ne touche pas aux k premiers itérés, qui redresse localement $h^{k+1}(\gamma)$, et qui diffère de Φ_k seulement dans un petit voisinage de 0. De plus, comme on est dans le cas irrationnel, on peut choisir les demi-droites D_k de

façon à ce qu'elles forment un ensemble dense de directions dans le cercle. On termine la preuve en montrant qu'un homéomorphisme de l'anneau ouvert $\mathbb{A} =]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$, qui laisse invariant un ensemble dense de germes de demi-droites vectorielles, s'étend en un homéomorphisme de l'anneau semi-ouvert $\overline{\mathbb{A}} = [0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$.

Dans le cas contraire, "rationnel", on peut procéder de façon similaire, avec la différence toutefois qu'on ne peut pas choisir l'ensemble $\mathcal{D} = \{D_k\}$ dense dans le cercle. Après avoir construit la conjugaison Φ comme avant, on cherche une deuxième conjugaison Ψ qui enrichisse l'ensemble des directions de demi-droites dont les germes sont envoyés sur un germe de demi-droite. Essentiellement, il faut traiter le cas d'un secteur S bordé par deux demi-droites de \mathcal{D} qui est *errant*, c'est-à-dire disjoint en germe de tous ses itérés. Une construction similaire à celle de Φ permet d'obtenir un homéomorphisme Ψ tel que $\Psi h \Psi^{-1}$ envoie, pour tout n , le germe de toute demi-droite du secteur $h^n(S)$ sur une demi-droite de $h^{n+1}(S)$. De plus, Ψ peut être choisi à support dans un voisinage arbitrairement petit de 0. En répétant cette construction pour chaque orbite de secteur errant, on obtient un ensemble \mathcal{D}' dense de germes de demi-droites qui est invariant par h . Ceci permet de conclure comme dans le cas irrationnel. \square

c. Éclatement et différentiabilité. — Une application différentiable en 0 est toujours éclatable. Réciproquement, nous allons montrer qu'un homéomorphisme éclatable est toujours différentiable en 0, quitte à effectuer un changement de coordonnées.

Proposition 2.7 (B-C-LR). — *Pour $h \in \mathcal{H}^+(0)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *h est topologiquement éclatable,*
- *h est topologiquement éclatable, avec une compactification en cercle qui est une rotation,*
- *il existe $\Phi \in \mathcal{H}^+(0)$ tel que $\Phi h \Phi^{-1}$ est différentiable au point 0, et dont la différentielle est une rotation.*

Démonstration. — La dernière propriété implique clairement la première. Supposons maintenant que h est éclatable, et expliquons comment construire un éclatement en rotation. Quitte à conjuguer, on peut toujours supposer que h est éclatable dans les coordonnées polaires usuelles. Examinons d'abord le cas où le nombre de rotation α de $\overline{h}|_{\mathbb{S}^1}$ est irrationnel. D'après Poincaré, il existe une application $p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continue, surjective, de degré 1, qui réalise une semi-conjugaison $p \overline{h}|_{\mathbb{S}^1} = R_\alpha p$ avec la rotation d'angle α . L'application p est monotone, autrement dit il existe une famille continue $(p_t)_{t \in [0,1]}$ d'applications du cercle issue de l'identité p_0 , aboutissant en $p_1 = p$, et qui sont des homéomorphismes pour tout $t < 1$. Soit Φ l'application fibrée de l'anneau $[0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$ qui est l'identité hors de l'anneau $\{r \leq 1\}$, et qui est définie sur cet anneau par

$$\Phi(r, \theta) = (r, p_{1-r}(\theta)).$$

Cette application est un homéomorphisme sur l'anneau ouvert $r > 0$, et réalise, sur l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty[$, une semi-conjugaison entre \bar{h} et un homéomorphisme \hat{h} vérifiant $\hat{h}|_{\mathbb{S}^1} = R_\alpha$. Autrement dit, dans les coordonnées polaires usuelles, l'élément $\Phi h \Phi^{-1}$ de $\mathcal{H}^+(0)$ est éclatable en rotation.

Traisons maintenant le cas où α est rationnel. Pour simplifier, nous supposons que $\alpha = 0$, le cas général étant similaire. Nous supposons que $\bar{h}|_{\mathbb{S}^1}$ n'est pas l'identité, sans quoi il n'y a rien à faire. Nous pouvons simplifier encore l'étude en supposant que cet homéomorphisme du cercle admet un unique point fixe : dans le cas contraire, il existe une application $p : \mathbb{S}^1 \times \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ qui "écrase" en un unique point toutes les composantes connexes du complémentaire des points fixes sauf une ; comme dans le cas irrationnel, cette application monotone s'étend en une application fibrée de l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty[$ dont la restriction à l'anneau ouvert est un homéomorphisme ; en conjuguant h par cet homéomorphisme, on est ramené au cas d'un point fixe unique sur le cercle. On suppose que ce point fixe correspond à $\theta = 0$.

Considérons le modèle m donné en coordonnées polaires par $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + r)$, qui est éclatable avec l'identité au bord. Nous construisons pour cette application un réseau de quadrilatères⁽²⁾ $(c'_{p,n})_{p \geq 0; -p \leq n \leq p}$ ayant les propriétés suivantes (figure 7). Les $c'_{p,n}$ sont inclus dans l'anneau ouvert $\{r > 0\}$, leurs intérieurs sont deux à deux disjoints, leur réunion forme un voisinage V' du cercle $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ privé du point $(r = 0, \theta = 0)$, qui est bordé par une courbe de Jordan J' passant par ce point. Dynamiquement, on a $m(c'_{p,n}) = c'_{p,n+1}$ pour tous $p \geq 0$ et $-p \leq n < p$. Pour toute valeur fixée de p , la réunion des $c'_{p,n}$ pour $-p \leq n \leq p$ forme un quadrilatère C'_p , et la suite $(C'_p)_{p \geq 0}$ tend vers le cercle $\{0\} \times \mathbb{S}^1$. Revenons maintenant à notre

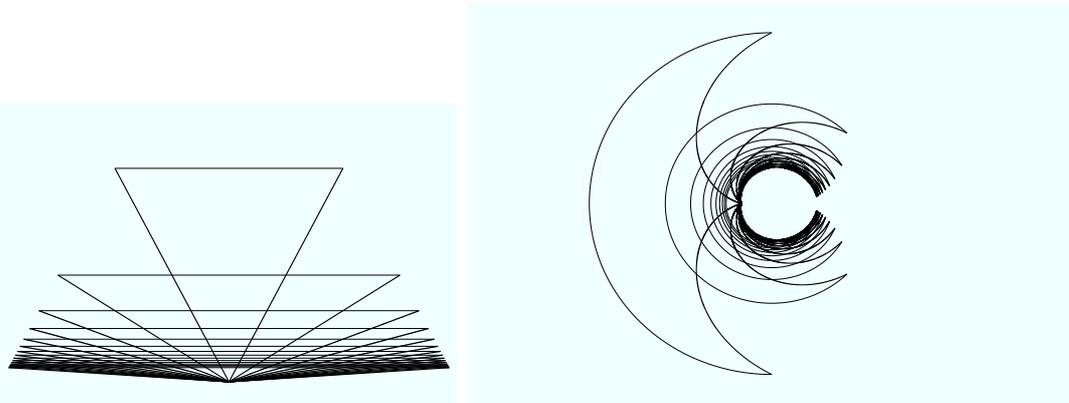


FIGURE 7. Le réseau $(c'_{p,n})$: à gauche, on a redressé les coordonnées polaires, θ est en abscisse et r en ordonnée ; l'application m pousse chaque case sur la case à sa droite

homéomorphisme h . On peut construire pour h un réseau analogue à celui de m . Pour cela, on choisit un arc α issu d'un point $\alpha(0)$ du cercle $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ qui n'est pas fixe, et suffisamment petit pour être disjoint de son image $h(\alpha)$. On choisit une suite

⁽²⁾Pour la métrique $dr^2 + d\theta^2$.

(t_p) tendant assez vite vers 0, et on relie chaque point $\alpha(t_p)$ à son image $h(\alpha(t_p))$ par un arc β_p , de façon à ce que tous ces arcs soient deux à deux disjoints et ne rencontrent α et son image qu'en leurs extrémités; on demande aussi que la suite (β_p) converge vers le segment du cercle $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ entre $\alpha(0)$ et son image. Si cette convergence est assez rapide, ce que l'on peut toujours supposer, pour tout entier positif n_0 , la suite des trajectoires $\Gamma_p = \cup_{-n_0 \leq n \leq n_0} h^{-n}(\beta_p)$ converge également vers le segment du cercle compris entre $h^{-n_0}(\alpha(0))$ et $h^{n_0+1}(\alpha(0))$. On définit les cases $(c_{p,0})_{p \geq 0}$ comme étant délimitées par les deux arcs β_p, β_{p+1} (ses bords haut et bas) et les morceaux d'arcs α et $h(\alpha)$ (ses bords gauche et droit), puis $c_{p,n} = h^n(c_{p,0})$ pour $-p \leq n \leq p$. Si la convergence de la famille (β_p) est assez rapide, la famille $(c_{p,n})$ ainsi définie a des propriétés topologiques analogues à celles des $c'_{p,n}$. En particulier, la réunion de tous les $c_{p,n}$ est un voisinage V du cercle $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ privé de $(r = 0, \theta = 0)$ bordé par une courbe de Jordan J .

Définissons maintenant un changement de coordonnées $\Phi \in \mathcal{H}^+(0)$, de la façon suivante. On envoie d'abord chaque bord haut, bas, gauche, droit de $c'_{p,0}$ sur le bord correspondant de $c_{p,0}$, en respectant la relation $\Phi h = m\Phi$ sur le bord gauche. On étend Φ à chaque case $c'_{p,0}$ en un homéomorphisme vers $c_{p,0}$. On définit ensuite Φ sur chaque case $c_{p,n}$, pour $-p \leq n \leq p$, en respectant la relation $\Phi h^n = m^n \Phi$ sur $c_{p,0}$. L'application Φ est ainsi définie sur la réunion des cases $c'_{p,n}$; vue dans le plan \mathbb{R}^2 (non éclaté), cette réunion est un disque topologique bordé par la courbe J' , privé du point 0. On décide que $\Phi(0) = 0$, puis on étend Φ en un homéomorphisme du plan. Bien sûr cet homéomorphisme, vu dans les coordonnées polaires, ne s'étend pas au cercle $r = 0$. Nous affirmons que l'homéomorphisme $h' = \Phi h \Phi^{-1}$, lui, s'étend continûment par l'identité sur le cercle $r = 0$. Notons \bar{h}' cette extension et montrons la continuité de \bar{h}' . Par construction h' coïncide avec notre modèle m sur l'ensemble $V' \cap h^{-1}(V')$, qui est encore un voisinage du cercle $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ privé du point $(r = 0, \theta = 0)$. Ceci montre que \bar{h}' est continu en tout point du cercle, sauf peut-être en $(0, 0)$. Considérons une suite de points $x_n = (r_n, \theta_n)$ tendant vers ce point, et notons $x'_n = (r'_n, \theta'_n)$ leurs images par \bar{h}' . Puisque $h' = \Phi h \Phi^{-1}$ est un homéomorphisme du plan, il est clair que (r'_n) tend vers 0. Si la suite θ'_n ne tend pas vers 0, quitte à extraire, la suite (x'_n) converge vers un point du cercle avec $\theta \neq 0$, à partir d'un certain rang elle rentre dans le voisinage $h'(V') \cap (V')$, dans ce voisinage $\bar{h}'^{-1} = m^{-1}$ et on voit que (x_n) converge vers la même limite que (x'_n) , ce qui contredit notre hypothèse. Ceci achève de montrer la continuité de l'extension \bar{h}' . Nous avons prouvé que le premier item de la proposition implique le deuxième.

Montrons enfin que le deuxième item implique le dernier. Notons

$$h(r, \theta) = (r', \theta') = (r + r\varepsilon_2(r, \theta), \theta + \alpha + \varepsilon_1(r, \theta)).$$

Le deuxième item nous fournit des coordonnées dans lesquelles la fonction $\varepsilon_1(r, \theta)$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0, il s'agit de trouver des nouvelles coordonnées dans lesquelles cette propriété est vérifiée pour les deux fonctions ε_1 et ε_2 . Plaçons-nous dans les coordonnées du deuxième item et choisissons par récurrence une suite de

rayons $(R_i)_{i \geq 0}$ qui décroît strictement vers 0, de façon à ce que pour chaque $i > 0$, l'image par h du cercle $r = R_i$ est disjointe des deux cercles $r = R_{i-1}$ et $r = R_{i+1}$ et les sépare. Soit φ un homéomorphisme croissant de $[0, +\infty[$ qui envoie la suite $(R_i)_{i \geq 0}$ sur une suite $(\hat{R}_i)_{i \geq 0}$ pour laquelle la suite des quotients $\frac{\hat{R}_{i+1}}{\hat{R}_i}$ tend vers 1. Les nouvelles coordonnées sont obtenues en conjuguant h par l'application fibrée $\Phi : (r, \theta) \mapsto (\varphi(r), \theta)$. En effet, on voit facilement que la nouvelle fonction ε_1 tend toujours vers 0 lorsque r tend vers 0 ; vérifions que c'est aussi le cas de la nouvelle fonction ε_2 . Notons maintenant $\Phi h \Phi^{-1}(r, \theta) = (r', \theta')$. Pour tout θ et tout r assez petit, il existe un (unique) entier i tel que $\hat{R}_{i+1} < r \leq \hat{R}_i$. Le choix des (R_i) implique alors l'encadrement $\hat{R}_{i+2} < r' \leq \hat{R}_{i-1}$, d'où

$$\frac{\hat{R}_{i+2}}{\hat{R}_i} < \frac{r'}{r} < \frac{\hat{R}_{i-1}}{\hat{R}_{i+1}},$$

ces quotients tendent vers 1 lorsque r tend vers 0, autrement dit $\varepsilon_2(\theta, r)$ tend vers 0. Ceci termine la preuve. \square

La proposition 2.7 s'applique, par exemple, pour l'homéomorphisme linéaire $Selle(x, y) \mapsto (2x, y/2)$, et nous fournit un homéomorphisme qui lui est conjugué, qui est différentiable en 0, avec une différentielle égale à l'identité. Nous voyons ainsi que la différentielle elle-même n'est pas un invariant de conjugaison topologique, bien que son nombre de rotation le soit.

2.3. L'intervalle de rotation

a. Définition. — Nous allons expliquer ici la définition d'un *intervalle de rotation local*, par des moyens assez différents de ceux utilisés dans la définition de l'ensemble de rotation. Nous venons de voir que lorsque h est éclatable et que son unique nombre de rotation α est irrationnel, celui-ci est caractérisé par l'existence d'une courbe dont les itérés ont des germes deux à deux disjoints et sont cycliquement ordonnés autour de 0 comme, sur le cercle, une orbite de la rotation d'angle α . Nous nous proposons de généraliser cette caractérisation en termes de combinatoire des germes de courbes.

Pour introduire notre deuxième définition, revenons un instant au cercle. On peut caractériser le nombre de rotation d'une isotopie $I = (f_t)$ de façon combinatoire. Lorsque le nombre de rotation α de f_1 est irrationnel, chaque orbite est infinie, et ses points sont disposés sur le cercle dans le même ordre cyclique que ceux de la rotation d'angle α : l'application, définie sur l'orbite de x , qui envoie le point $f_1^n(x)$ sur le point $R_\alpha^n(0)$, préserve l'ordre cyclique. Plus généralement, on peut déterminer le nombre de rotation $\rho(I)$ avec une précision $1/q$, comme suit. On choisit un point x , et on le suit sous l'action de l'isotopie, pendant un temps q , jusqu'au point $f_1^q(x)$. Si le point x a effectué plus de p tours mais moins de $p+1$, c'est-à-dire si la variation de la coordonnée θ est comprise entre p et $p+1$, alors $\rho(I)$ est compris entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$. On obtient ainsi une caractérisation combinatoire du nombre $\rho(I)$: *c'est l'unique*

réel α vérifiant $\frac{p}{q} \leq \alpha \leq \frac{p+1}{q}$ pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ et tout point x pour lequel la variation de θ en temps q est comprise entre p et $p+1$.

Nous allons obtenir notre intervalle de rotation en mimant cette caractérisation, les points du cercle étant remplacés par des arcs simples issus du point fixe. S'il existe un arc "dont tous les points font plus de p tours en temps q ", alors on exigera que l'intervalle de rotation soit inclus dans $[\frac{p}{q}, +\infty]$. L'intervalle de rotation sera le plus grand intervalle compatible avec la collection de toutes ces exigences et de leur symétriques.

Précisons ceci. Soit I une isotopie dans $\mathcal{H}^+(0)$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc simple vérifiant $\gamma(0) = 0$. D'après le théorème de Schoenflies, il existe un changement de coordonnées $\Phi \in \mathcal{H}^+(0)$ tel que $\Phi(\gamma)$ est inclus dans la demi-droite d'équation polaire $\theta = 0$. On dira que l'arc γ est *positif* pour l'isotopie I si pour tout s assez proche de 0, la variation de la coordonnée $\theta \circ \Phi$ le long de la trajectoire de $\gamma(s)$ sous l'isotopie I est strictement positive (figure 8). On peut montrer que cette définition ne dépend pas du choix de Φ . On dira que l'isotopie I est *positive*, et on notera $0 \leq I$, si elle admet un arc positif. On définit symétriquement les arcs négatifs et les isotopies négatives.

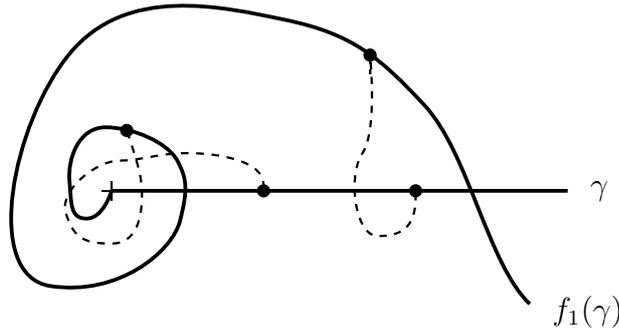


FIGURE 8. Un arc positif (ou localement transverse) à l'isotopie I

En notant $J = (R_t)_{t \in [0,1]}$ le lacet des rotations, et en écrivant les rationnels $\frac{p}{q}$ avec $q > 0$, on définit les ensembles

$$C^-(I) := \left\{ \frac{p}{q}, 0 \leq J^{-p} I^q \right\}$$

$$C^+(I) := \left\{ \frac{p}{q}, J^{-p} I^q \leq 0 \right\}.$$

Définition 2.8. — L'intervalle de rotation de l'isotopie I est l'intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ défini par

$$\rho_{\text{int}}(I) = [\sup(C^-(I)), \inf(C^+(I))],$$

avec la convention $\sup(\emptyset) = -\infty$ et $\inf(\emptyset) = +\infty$.

b. Exemple : l'intervalle de rotation des points fixes paraboliques. — Contrairement à l'ensemble de rotation, l'intervalle de rotation détecte le mouvement de rotation autour d'un point fixe parabolique.

Lemme 2.9. — Soit h un élément de $\mathcal{H}^+(0)$ qui est localement conjugué à une application parabolique $z \mapsto e^{2i\pi\frac{p}{q}}z(1+z^{qr})$ avec $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q, r \geq 1$. Pour toute isotopie I dont le temps un est h , on a

$$\rho_{\text{int}}(I) = \left\{ \frac{p}{q} \right\} \pmod{1}.$$

Démonstration. — Le lemme va découler de la description dynamique donnée par la figure 4. Nous montrerons plus loin la relation $\rho_{\text{int}}(I^q) = q\rho_{\text{int}}(I)$; cette relation permet de ramener la preuve du lemme au cas tangent à l'identité, $z \mapsto z(1+z^r)$. Pour simplifier l'exposé nous expliquons seulement le cas de $h(z) = z(1+z)$. Les pétales de la figure 9 sont invariants par h , chacun contient des germes de

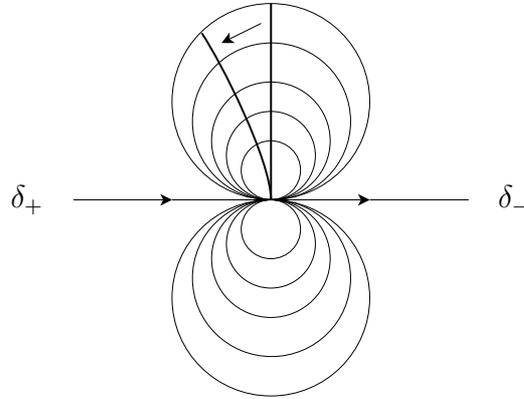


FIGURE 9. Dynamique de $z(1+z)$, avec une “variété stable” δ^+ , une “variété instable” δ^- , et un arc positif

demi-droites que h pousse dans un sens ou dans l'autre. Il suffit de montrer le lemme pour une isotopie particulière aboutissant en h , nous choisissons une isotopie I “naturelle”, qui pousse les points le long du feuilletage de la figure 9. Un arc inclus dans la demi-droite $\{\theta = \frac{\pi}{2}\}$ est positif, un arc symétrique est négatif. On en déduit que le nombre 0 appartient à la fois à $C^-(I)$ et à $C^+(I)$, puis que $\rho_{\text{int}}(I) \subset \{0\}$. Il faut encore s'assurer que l'intervalle de rotation n'est pas vide. Nous devons montrer que $\sup(C^-(I)) \leq 0$ et $0 \leq \inf(C^+(I))$; ces deux inégalités étant symétriques, nous traitons seulement la première. Il s'agit de voir que $C^-(I)$ ne contient pas de rationnel $\frac{p}{q}$ avec p et q strictement positifs, autrement dit qu'il n'existe pas d'arc γ qui soit positif pour l'isotopie $J^{-p}I^q$. Un arc positif pour cette isotopie l'est encore pour l'isotopie $J^{-1}I^q$, et par conséquent il suffit de traiter le cas $p = 1$. Soit δ_+ un arc aboutissant en 0 et inclus dans la demi-droite réelle négative : il vérifie $h(\delta_+) \subset \delta_+$. De même, on choisit un arc δ_- vérifiant $h^{-1}(\delta_-) \subset \delta_-$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc simple vérifiant $\gamma(0) = 0$, et Φ un changement de coordonnées qui redresse γ . Nous distinguons deux cas.

- S'il existe $s_0 > 0$ tel que $\gamma([0, s_0])$ est disjoint de δ_+ , alors la trajectoire sous I^q d'un point $\gamma(s)$ avec s assez petit est encore disjointe de δ_+ . La variation de $\theta \circ \Phi$ le long de cette trajectoire est donc comprise entre -1 et 1 , quitte à choisir s encore plus petit. L'arc γ ne peut pas être positif pour l'isotopie $J^{-1}I^q$, il est même négatif. Le même raisonnement conclut si $\gamma([0, s_0])$ est disjoint de δ_- .

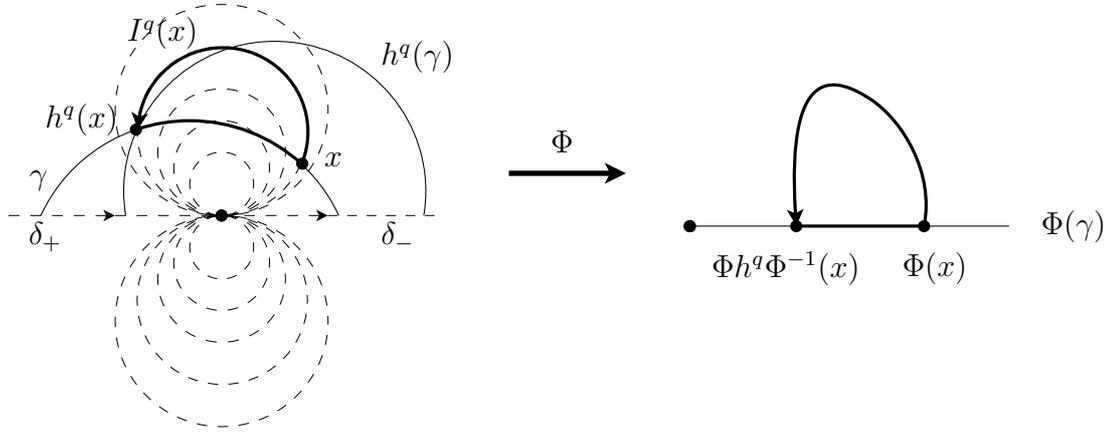


FIGURE 10. La variation de $\theta \circ \Phi$ est nulle le long de la trajectoire du point x

- Dans le cas contraire, la courbe γ rencontre δ_+ et δ_- dans tout voisinage de 0 : il existe $s_- < s_+$ arbitrairement proches de 0 tels que les points $\gamma(s_-)$ et $\gamma(s_+)$ sont respectivement sur δ_- et δ_+ , et le morceau de courbe $\gamma(]s_-, s_+[)$ est inclus dans le demi-plan $\{y > 0\}$ ou dans son symétrique $\{y < 0\}$ (figure 10). La dynamique sur δ_+ et δ_- impose que ce morceau de courbe rencontre son image par h^q , en un point $h^q(x)$. En concaténant la trajectoire de x sous l'isotopie I^q avec le morceau de γ entre $h^q(x)$ et x , on obtient une courbe fermée qui est disjointe de la droite $y = 0$. En particulier cette courbe a un degré nul par rapport au point fixe 0 . Ceci montre que la variation de la coordonnée $\theta \circ \Phi$ le long de la trajectoire de x sous I^q , qui est un nombre entier puisque Φ redresse l'arc γ , est nulle. La variation pour l'isotopie $J^{-1}I^q$, elle, est donc égale à -1 . Comme cette situation arrive pour des valeurs de s arbitrairement petites, on conclut ici encore que l'arc γ n'est pas positif pour l'isotopie $J^{-1}I^q$.

□

c. Propriétés. — Montrons maintenant que l'intervalle de rotation vérifie les propriétés attendues.

Proposition 2.10. —

- Deux isotopies localement conjuguées ont le même intervalle de rotation.
- Pour tous entiers p, q , on a $\rho_{\text{int}}(J^p I^q) = q \cdot \rho_{\text{int}}(I) + p$.
- L'intervalle de rotation de I est vide si et seulement si h est localement conjugué à une dilatation ou une contraction.

Pour montrer ces propriétés, il est plus commode de travailler dans le revêtement universel de l'anneau $\mathbb{A} =]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Introduisons le vocabulaire nécessaire. On considère

- le plan $\tilde{\mathbb{A}} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$,
- le revêtement universel $\pi : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A}$, $\pi(r, \tilde{\theta}) = (r, \theta)$ où $\theta = \tilde{\theta} \bmod 1$,
- l'automorphisme de revêtement $\tau : (r, \tilde{\theta}) \mapsto (r, \tilde{\theta} + 1)$.

Soit $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{A} \cup \{0, \infty\}$ une demi-droite topologique, c'est-à-dire une courbe simple allant de $\gamma(0) = 0$ à $\gamma(+\infty) = \infty$. Considérons un relevé Γ de γ , c'est-à-dire une courbe $]0, +\infty[\rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$ vérifiant $\pi \circ \Gamma = \gamma|_{]0, +\infty[}$. On oriente Γ dans le sens décroissant du paramétrage, de $+\infty$ vers 0. Rappelons qu'il existe un changement de coordonnées $\Phi \in \mathcal{H}^+(0)$ tel que $\Phi(\gamma)$ soit une demi-droite euclidienne issue de 0 (théorème de Schoenflies). Les relevés de $\Phi(\gamma)$ sont alors des droites verticales de $\tilde{\mathbb{A}}$. On peut ainsi différencier les deux composantes connexes du complémentaire de Γ dans le plan, l'une est *l'ouvert à gauche de Γ* et l'autre *l'ouvert à droite de Γ* , on les note $O_g(\Gamma)$ et $O_d(\Gamma)$; on peut remarquer que pour toute valeur de $r_0 > 0$, l'ouvert $O_g(\Gamma)$ contient une demi-droite $\{r = r_0, \tilde{\theta} \leq \tilde{\theta}_0\}$ tandis que l'ouvert $O_d(\Gamma)$ contient une demi-droite $\{r = r_0, \tilde{\theta} \geq \tilde{\theta}_1\}$. Considérons maintenant deux demi-droites topologiques γ_1, γ_2 , et deux relevés respectifs Γ_1, Γ_2 . On dira que Γ_1 est *à gauche* de Γ_2 , et on écrira $\Gamma_1 < \Gamma_2$, si $\Gamma_1 \subset O_g(\Gamma_2)$, ce qui équivaut à $\Gamma_2 \subset O_d(\Gamma_1)$ (figure 11). On dira que Γ_1 est *localement à gauche* de Γ_2 , et on écrira $\Gamma_1 <_0 \Gamma_2$, si pour tout t assez proche de 0, $\Gamma_2(t) \in O_d(\Gamma_1)$; ici encore, ceci équivaut à ce que $\Gamma_1(t) \in O_g(\Gamma_1)$ pour tout t assez proche de 0. Ces deux relations sont transitives, et elles sont préservées par l'action de τ .

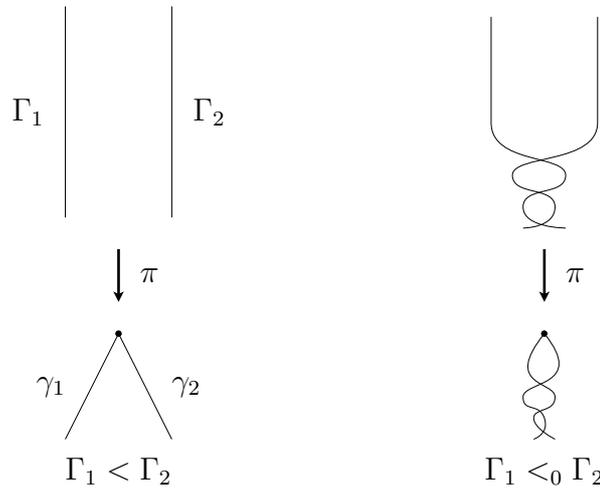


FIGURE 11. Être à gauche, être localement à gauche

On se donne maintenant une isotopie $I = (h_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\mathcal{H}^+(0)$ allant de l'identité à h_1 . D'après la théorie des revêtements, il existe une unique isotopie $\tilde{I} = (H_t)_{t \in [0,1]}$ du plan $\tilde{\mathbb{A}}$, issue de l'identité, qui relève I : la relation $\pi \circ H_t = h_t \circ \pi$ est vérifiée pour tout t . On dira que l'homéomorphisme $H = H_1$ est obtenu en relevant l'isotopie I .

L'homéomorphisme H est encore le temps un de tout relèvement d'une isotopie I' homotope à I . Ainsi, la donnée d'une classe d'homotopie d'isotopies dans $\mathcal{H}^+(0)$ équivaut à la donnée d'un homéomorphisme H du plan $\tilde{\mathbb{A}}$ qui commute avec l'automorphisme de revêtement τ ; on parlera indifféremment de l'ensemble de rotation de I ou de H . D'autre part, en notant $\tilde{\theta}$ la seconde coordonnée sur $\tilde{\mathbb{A}}$, on peut remarquer que la variation de la coordonnée θ le long de la trajectoire d'un point x sous l'isotopie I est égale à

$$\tilde{\theta} \circ H(\tilde{x}) - \tilde{\theta}(\tilde{x})$$

où \tilde{x} est n'importe quel relevé du point x . Notons que H agit sur l'ensemble des relevés de demi-droites topologiques en préservant les relations “ $<$ ” et “ $<_0$ ”. On dira que H est *positif*, et on écrira $0 \leq H$, s'il existe une demi-droite topologique relevée Γ telle que $\Gamma <_0 H(\Gamma)$. On dira aussi que la courbe Γ est *positive* pour H . De même, on dira que H est *négatif* et on écrira $H \leq 0$ s'il existe une demi-droite topologique relevée Γ *négative*, c'est-à-dire telle que $H(\Gamma) <_0 \Gamma$. On montre facilement que H est positif (resp. négatif) si et seulement si l'isotopie I est positive (resp. négative) pour la définition donnée au paragraphe a. Les ensembles $C^-(H), C^+(H)$, définis de façons analogue aux ensembles $C^-(I), C^+(I)$, coïncident avec ces derniers.

Lemme 2.11. —

1. Pour tout entier $q > 0$, on a $0 \leq H$ si et seulement si $0 \leq H^q$;
2. l'ensemble $C^-(H)$, s'il n'est pas vide, est un intervalle de \mathbb{Q} voisinage de $-\infty$.

Bien sûr, l'ensemble $C^+(H)$ vérifie des propriétés symétriques. Dans l'écriture des rationnels $\frac{p}{q}$ l'entier q sera toujours supposé strictement positif, par contre la fraction n'est pas nécessairement irréductible; mais le premier point du lemme montre que ce détail n'importe pas dans la définition de l'intervalle de rotation.

Démonstration du lemme. — Montrons le premier point. L'implication directe suit immédiatement de la transitivité de la relation “ $<_0$ ” et de sa compatibilité avec l'action de H . Montrons la réciproque. Soit $q > 0$, supposons $0 \leq H^q$ et considérons une demi-droite topologique relevée Γ qui est localement à gauche de son itérée $H^q(\Gamma)$. Nous appliquons un procédé classique pour construire une courbe Γ' qui sera localement à gauche de son image $H(\Gamma')$ (voir [LeCYoc, BCLP, BCL06]). Puisque Γ est localement à gauche de $H^q(\Gamma)$, on peut trouver des demi-droites topologiques relevées Γ_i vérifiant

$$\Gamma_0 = \Gamma <_0 \Gamma_1 <_0 \cdots <_0 \Gamma_{q-1} <_0 H^q(\Gamma).$$

On considère la famille de courbes

$$\mathcal{F} = \{\Gamma_{q-1}, H(\Gamma_{q-2}), \dots, H^{(q-1)}(\Gamma_0)\},$$

motivée par la remarque suivante : pour toute courbe $\Delta \in \mathcal{F}$, on peut trouver une autre courbe $\Delta' \in \mathcal{F}$ telle que $\Delta' <_0 H(\Delta)$. Posons alors

$$O = \bigcap_{\Delta \in \mathcal{F}} O_g(\Delta).$$

On voit facilement qu'il existe une unique composante connexe U de l'ouvert O qui contient, pour toute valeur de $r_0 > 0$, une demi-droite du type $\{r = r_0, \tilde{\theta} < \tilde{\theta}_0\}$. D'après un théorème de Kérékjártó (voir [Ker23] ou [LeCYoc, section 1]), le bord de U est une courbe simple Γ' . Il faut penser à cette courbe comme étant la borne inférieure des courbes de \mathcal{F} ; les propriétés caractéristiques de Γ' sont :

1. Γ' est incluse dans la réunion des éléments de \mathcal{F} ,
2. pour toute courbe $\Delta \in \mathcal{F}$, Γ' est incluse dans l'adhérence de $O_g(\Delta)$, ce que nous noterons $\Gamma' \leq \Delta$.

On en déduit trois propriétés :

- Γ' est à gauche de $\tau(\Gamma')$,
- Γ' est localement à gauche de $H(\Gamma')$,
- Γ' descend, par π , sur une demi-droite topologique γ' .

En effet, un point de $\tau(\Gamma')$ est sur $\tau(\Delta)$ pour l'une des courbes $\Delta \in \mathcal{F}$, et donc à droite de Γ' puisque $\Gamma' \leq \Delta < \tau(\Delta)$. La deuxième propriété se montre de la même façon, en utilisant la remarque qui motivait le choix de notre famille \mathcal{F} . La troisième est laissée au lecteur. On déduit de ces trois propriétés que H est positif, ce qui conclut la preuve du premier point du lemme.

Nous allons maintenant en déduire que $C^-(H)$, s'il n'est pas vide, est un intervalle de \mathbb{Q} voisinage de $-\infty$. Étant donnés deux rationnels $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ tels que $\frac{p'}{q'}$ est dans $C^-(H)$, il s'agit de montrer que $\frac{p}{q}$ est aussi dans $C^-(H)$. Par hypothèse on a $0 \leq \tau^{-p'}H^{q'}$ et donc aussi, d'après le premier point du lemme, $0 \leq \tau^{-p'q}H^{q'q}$. Il existe donc une droite Γ vérifiant $\tau^{p'q}(\Gamma) <_0 H^{q'q}(\Gamma)$. Puisque $pq' < p'q$, on a $\tau^{pq'}(\Gamma) <_0 \tau^{p'q}(\Gamma)$, et par transitivité $\tau^{pq'}(\Gamma) <_0 H^{q'q}(\Gamma)$: on a donc $0 \leq \tau^{-pq'}H^{q'q}$. Utilisant à nouveau le premier point, on en déduit $0 \leq \tau^{-p}H^q$, ce que l'on voulait. \square

Démonstration de la proposition 2.10. — L'invariance par conjugaison est évidente, la définition n'utilisant que des objets topologiques. Le deuxième point suit immédiatement du lemme (remarquons que le cas $q = -1$ suit directement de la définition de l'intervalle de rotation). Quant au dernier point, on peut le voir comme une conséquence de trois propriétés : la détermination de l'intervalle de rotation des éléments paraboliques donnée au paragraphe b, la caractérisation des éléments ayant un ensemble de rotation vide donnée par le théorème 2.4, et l'inclusion de l'ensemble de rotation dans l'intervalle de rotation, que nous expliquons maintenant.

Lemme 2.12. — *Pour toute isotopie I dans $\mathcal{H}^+(0)$, on a*

$$\rho(I) \subset \rho_{int}(I).$$

Démontrons ce lemme. Il suffit de montrer que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ strictement à gauche de l'intervalle de rotation, l'ensemble de rotation est inclus dans $[\frac{p}{q}, +\infty]$. En considérant l'isotopie $J^{-p}I^q$ on se ramène au cas où $p = 0$ et $q = 1$. Par hypothèse il existe alors une demi-droite topologique relevée Γ telle que $\Gamma <_0 H(\Gamma)$. Quitte à modifier h loin de 0, on peut supposer que $\Gamma < H(\Gamma)$: la courbe Γ est à gauche

de son image, et non plus seulement localement à gauche (pour cela on remplace H par $R_\alpha \circ H$, où α est une fonction bien choisie de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} s'annulant au voisinage de 0, et R_α est la translation fibrée définie par $R_\alpha(r, \tilde{\theta}) = (r, \tilde{\theta} + \alpha(r))$). Quitte à conjuguer, on suppose que Γ est la droite euclidienne $\tilde{\theta} = 0$. Le demi-plan $\tilde{\theta} \geq 0$ est alors positivement invariant par H : pour tout $\tilde{x} = (r, \tilde{\theta})$ avec $0 \leq \tilde{\theta} \leq 1$, pour tout entier $n \geq 0$, le point $H^n(r, \tilde{\theta})$ est à droite de Γ , d'où

$$-\frac{1}{n} < \frac{1}{n} \left(\tilde{\theta} \circ H^n(\tilde{x}) - \tilde{\theta}(\tilde{x}) \right).$$

On en déduit que la variation moyenne de θ le long de toute trajectoire de l'isotopie I pendant un temps n est minorée par $-\frac{1}{n}$, et par conséquent l'ensemble de rotation est inclus dans $[0, +\infty]$, comme annoncé. \square

Le même argument montre que lorsque l'isotopie I est positive, pour tout voisinage V de 0 assez petit, l'ensemble $\rho_V(I)$ est inclus dans $[0, +\infty]$.

d. Lien entre ensemble et intervalle de rotation. — Nous démontrerons au chapitre suivant une réciproque au lemme 2.12 : lorsque l'ensemble de rotation n'est pas vide, l'intervalle de rotation coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation (ce sera le contenu du théorème 3.10). Avant cela, il nous faudra énoncer le théorème feuilleté équivariant de P. Le Calvez, qui est l'ingrédient essentiel de la démonstration, et qui va nous donner l'existence d'un feuilletage "localement transverse à l'isotopie I ". Pour faire le lien avec cette notion, donnons une autre formulation de la définition d'un arc positif pour une isotopie I (le lecteur peut se reporter à la figure 8). Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc simple vérifiant $\gamma(0) = 0$, que nous orientons dans le sens décroissant du paramétrage. On dira que l'arc γ et l'isotopie I sont *localement transverses* si tout voisinage U de 0 contient un voisinage V , tel que pour tout point x de V , il existe une courbe α dans U , qui est homotope, à extrémités fixées, dans U , à la trajectoire de x sous l'isotopie I , et qui est *positivement transverse* à γ , au sens (informel) suivant : à chaque intersection des deux courbes, la courbe α franchit l'arc γ de la gauche vers la droite. On remarque alors que γ et I sont localement transverses si et seulement si γ est un arc positif pour I .

2.4. Discussion

Un bit d'information supplémentaire. — Soit I une isotopie dans $\mathcal{H}^+(0)$, et notons a la borne inférieure de l'ensemble de rotation de I ,

$$\rho(I) = [a, \dots].$$

L'ensemble $\rho(I)$ est défini comme l'intersection des ensembles $\rho_V(I)$ lorsque V parcourt une base de voisinages du point fixe, par conséquent nous pouvons distinguer deux situations. Il peut arriver qu'il existe un voisinage V tel que a soit encore la borne inférieure de $\rho_V(I)$; ou bien, au contraire, tous les ensembles $\rho_V(I)$ ont une borne inférieure strictement plus petite que a . Puisque les ensembles $\rho_V(I)$ sont aussi

des invariants de conjugaison (lemme 2.1), cette distinction a un sens en dynamique topologique, et nous obtenons un “bit d’information” supplémentaire par rapport à l’ensemble de rotation. Nous pourrions noter, par exemple, $\rho(I) = [a^+, \dots]$ dans le premier cas, et $\rho(I) = [a^-, \dots]$ dans le second. On obtient bien sûr un second bit d’information symétrique en observant la borne supérieure de l’ensemble.

De la même façon, si la borne inférieure de l’intervalle de rotation de l’isotopie est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, alors ou bien l’isotopie $J^{-p}I^q$ est positive (elle admet un arc positif), ou bien elle ne l’est pas, et nous pouvons là encore noter cette distinction $\rho_{\text{int}}(I) = [\frac{p}{q}^+, \dots]$ ou $\rho_{\text{int}}(I) = [\frac{p}{q}^-, \dots]$.

Voici quelques exemples. Si I est l’isotopie “naturelle” aboutissant en h qui est localement conjugué à $z \mapsto z(1+z)$, on a

$$\rho(I) = \rho_{\text{int}}(I) = [0^+, 0^-].$$

Si h est la rotation fibrée $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + r)$, et $I = (h_t)$ l’isotopie donnée par $(r, \theta + tr)$, on a

$$\rho(I) = \rho_{\text{int}}(I) = [0^+, 0^+].$$

Si I est positive (au sens de l’intervalle de rotation), alors pour tout V assez petit $\rho_V(I)$ ne contient pas de nombre négatifs (cf. preuve du lemme 2.12) : autrement dit si $\rho_{\text{int}}(I) = [0^+, \dots]$ alors $\rho_V(I) = [0^+, \dots]$. La réciproque est fautive en général : l’isotopie triviale vérifie $\rho(I) = [0^+, 0^-]$ mais $\rho_{\text{int}}(I) = [0^-, 0^+]$! Cependant je ne sais pas si l’existence de points fixes est la seule obstruction.

Problème 3. — Soit I une isotopie dans $\mathcal{H}^+(0)$, de temps un h . Supposons que 0 ne soit pas accumulé par des points fixes contractiles. Est-il vrai que si $\rho_V(I) \subset [0, +\infty]$ pour tout V assez petit, alors l’isotopie I admet un arc positif ?

Localisation d’autres invariants.— Pour aboutir à la définition de l’ensemble de rotation autour d’un point fixe, nous sommes partis du cadre de l’anneau compact que nous avons généralisé à l’anneau non compact en introduisant la notion de points pertinents, puis localisé au point fixe correspondant à l’une des extrémités de l’anneau. Ce procédé peut être utilisé pour localiser d’autres invariants classiques. Décrivons deux exemples. L’invariant de Calabi est défini sur le groupe G des difféomorphismes du disque \mathbb{D}^2 qui préservent l’aire et qui sont l’identité sur un voisinage du bord, de la façon suivante. On se donne une isotopie $I = (g_t)$ dans ce groupe, de l’identité à un élément g . Pour tout couple de points distincts (x, y) , on mesure la variation angulaire du vecteur joignant $g_t(x)$ à $g_t(y)$, lorsque t varie de 0 à 1, on la note $\text{Ang}_I(x, y)$. Un procédé d’éclatement, utilisant la différentiabilité, permet de montrer qu’il s’agit d’une fonction bornée. On en déduit d’une part, à l’aide du théorème ergodique de Birkhoff, que presque tout couple de points admet un enlacement asymptotique, au sens où la suite $(\rho_n(x, y))_{n \geq 0}$ converge, où

$$\rho_n(x, y) = \frac{1}{n} (\text{Ang}_I(x, y) + \text{Ang}_I(g(x), g(y)) + \dots + \text{Ang}_I(g^{n-1}(x), g^{n-1}(y))).$$

D'autre part on peut intégrer la fonction Ang_I sur l'ensemble $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \setminus \Delta$, où $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{D}^2\}$ est la diagonale. Le nombre réel obtenu est l'invariant de Calabi de g . On montre facilement qu'il ne dépend pas du choix de l'isotopie I . Il s'agit d'un invariant de conjugaison, non seulement dans le groupe G , mais aussi pour des conjugaisons par des homéomorphismes préservant l'aire (voir [Fat80, GamGhy97]).

Pour un homéomorphisme cette construction échoue, parce qu'en général la fonction $\text{Ang}_I(x, y)$ n'est pas intégrable. On peut par contre définir, sur le groupe $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ des homéomorphismes du plan isotopes à l'identité, un "ensemble de Calabi". Soit $I = (h_t)$ une isotopie dans $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$. Notons $I \times I$ l'isotopie définie sur l'espace $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par

$$(x, y) \mapsto (h_t(x), h_t(y)).$$

Cet espace est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, soit $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue dont la variation vaut 1 le long d'un lacet engendrant le groupe fondamental de \mathcal{C} : par exemple, on peut prendre pour θ la coordonnée polaire usuelle du vecteur allant de x à y . On définit maintenant l'ensemble de Calabi de l'isotopie I de façon tout-à-fait analogue à l'ensemble de rotation dans l'anneau ouvert : pour tout compact K de \mathcal{C} et tout entier n on considère l'ensemble des couples (x, y) pertinents, c'est-à-dire tels que les couples (x, y) et $(h^n(x), h^n(y))$ sont dans K ; on définit l'ensemble $\mathcal{C}\text{alabi}_K(I)$ de tous les nombres obtenus comme limites d'une suite $\rho_{n_k}(x_k, y_k)$ où chaque couple (x_k, y_k) est pertinent pour l'entier n_k , puis l'ensemble de Calabi

$$\mathcal{C}\text{alabi}(I) = \text{Adhe} \left(\bigcup \{ \mathcal{C}\text{alabi}_K(I), K \text{ compact de } \mathcal{C} \} \right).$$

Une variante consiste à spécifier l'un des deux points, on obtient ainsi l'ensemble de Ruelle d'un point x du plan,

$$\mathfrak{R}\text{uelle}(I, x) = \bigcap_{V \text{ voisinage de } x} \text{Adhe} \left(\bigcup \{ \mathcal{C}\text{alabi}_{\{x\} \times K}(I), K \text{ compact de } V \setminus \{x\} \} \right).$$

Lorsque le point x est fixe, on retrouve bien sûr l'ensemble de rotation local de x . Ici encore, si l'isotopie I est en fait à valeurs dans le groupe des difféomorphismes du disque \mathbb{D}^2 qui préservent l'aire et qui sont l'identité sur un voisinage du bord, alors l'ensemble $\mathfrak{R}\text{uelle}(I, x)$ est un singleton pour presque tout point x , et sa valeur moyenne nous donne l'invariant classique de Ruelle ([Rue85]).

Je ne connais pas d'applications de ces généralisations, et notamment je ne sais pas si ces invariants interagissent de façon intéressante avec d'autres invariants dynamiques.

Ensemble-Intervalle.— Je ne connais pas d'exemple pour lequel l'ensemble de rotation local n'est pas un intervalle. Il faut chercher cet exemple parmi les points *dissipatifs*, c'est-à-dire qui admettent une base de voisinages attractifs ou répulsifs. En effet, pour les points non dissipatifs, nous allons montrer au chapitre suivant que tous les nombres rationnels dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble de

rotation sont réalisés par des orbites périodiques; en particulier ces nombres font partie de l'ensemble de rotation, et par compacité il s'agit bien d'un intervalle.

Problème 4. — L'ensemble de rotation local est-il toujours un intervalle?

D'autre part, malgré mes efforts, je n'ai pas pu trouver une preuve élémentaire du lien entre l'ensemble et l'intervalle de rotation, qui ne fasse pas appel au théorème feuilleté équivariant introduit au chapitre suivant.

CHAPITRE 3

QUAND ÇA TOURNE...

Dans les deux derniers chapitres, nous allons relier l'ensemble de rotation à d'autres objets dynamiques. Ici nous nous intéressons plutôt à ce qui se passe lorsqu'il existe des points qui tournent autour du point fixe, c'est-à-dire essentiellement lorsque l'ensemble de rotation n'est pas réduit à $\{0\}$. Le résultat principal est un énoncé de réalisation d'orbites périodiques que l'on peut voir comme une version locale du célèbre théorème de Poincaré-Birkhoff sur l'anneau compact (section 3.2). On montre en particulier qu'en l'absence d'orbites périodiques, sous une hypothèse de récurrence très faible, les points proches du point fixe tournent tous à la même vitesse : l'ensemble de rotation est un singleton, autrement dit notre germe admet un *nombre* de rotation. On retrouve ainsi certains résultats de P. Le Calvez (section 3.4).

Notre étude repose fondamentalement sur le théorème feuilleté équivariant de P. Le Calvez que nous allons expliquer maintenant. Ce théorème nous permettra de retrouver et généraliser la définition par S. Matsumoto, sous certaines hypothèses, d'un signe qui indique un "sens de rotation" pour une isotopie, même lorsque l'ensemble de rotation est $\{0\}$ (section 3.5). Il joue aussi un rôle important dans la preuve du lien entre intervalle et ensemble de rotation (section 3.3). En liaison avec le théorème feuilleté équivariant nous utilisons des propriétés de dynamique locale des feuilletages expliquées dans l'appendice B. Les trois dernières sections sont largement indépendantes.

3.1. La version locale du théorème feuilleté équivariant

a. Énoncé global. — Considérons une isotopie $I = (h_t)_{t \in [0,1]}$ sur une surface orientable M , qui peut être compacte ou non ; le lecteur peut avoir en tête le cas de l'anneau ouvert $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, qui est le plus simple après le plan, et qui est le cas pertinent pour l'étude de la dynamique locale. Le théorème feuilleté équivariant annonce l'existence d'un feuilletage orienté \mathcal{G} *transverse* à l'isotopie I en l'absence d'une obstruction évidente, l'existence de point fixe *contractile* de I .

Définissons les notions en jeu. Un *point fixe contractile* de I est un point x de M dont la trajectoire sous l'isotopie I est homotope dans M au lacet constant. Un

feuilletage orienté \mathcal{G} sur M est un feuilletage dont les feuilles sont munies d'une orientation cohérente. Prenons comme feuilletage-modèle le feuilletage \mathcal{G}_0 du plan par les droites verticales orientées vers le haut. Une courbe dans le plan est dite *positivement transverse* à \mathcal{G}_0 si sa première coordonnée est strictement croissante (figure 1). Une carte du feuilletage orienté \mathcal{G} est une application $\Phi : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow M$ conti-

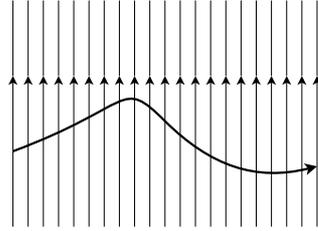


FIGURE 1. Une courbe positivement transverse au feuilletage-modèle \mathcal{G}_0

nue, injective, qui envoie chaque feuille orientée de \mathcal{G}_0 sur un morceau d'une feuille orientée de \mathcal{G} . On dira qu'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est *positivement transverse* à \mathcal{G} si pour tout intervalle $J \subset [0, 1]$ et toute carte Φ dont l'image contient $\gamma(J)$, la courbe $\Phi^{-1} \circ \gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ est positivement transverse au feuilletage-modèle \mathcal{G}_0 . On dira enfin que le feuilletage orienté \mathcal{G} et l'isotopie I sont *transverses* si tout point x peut être joint à son image $h_1(x)$ via une courbe qui est positivement transverse au feuilletage \mathcal{G} , et qui est homotope à extrémités fixées à la trajectoire du point sous l'isotopie.

Théorème 3.1 (Le Calvez, [LeC05]). — *Toute isotopie I sur une surface orientable M , sans point fixe contractile, admet un feuilletage orienté transverse.*

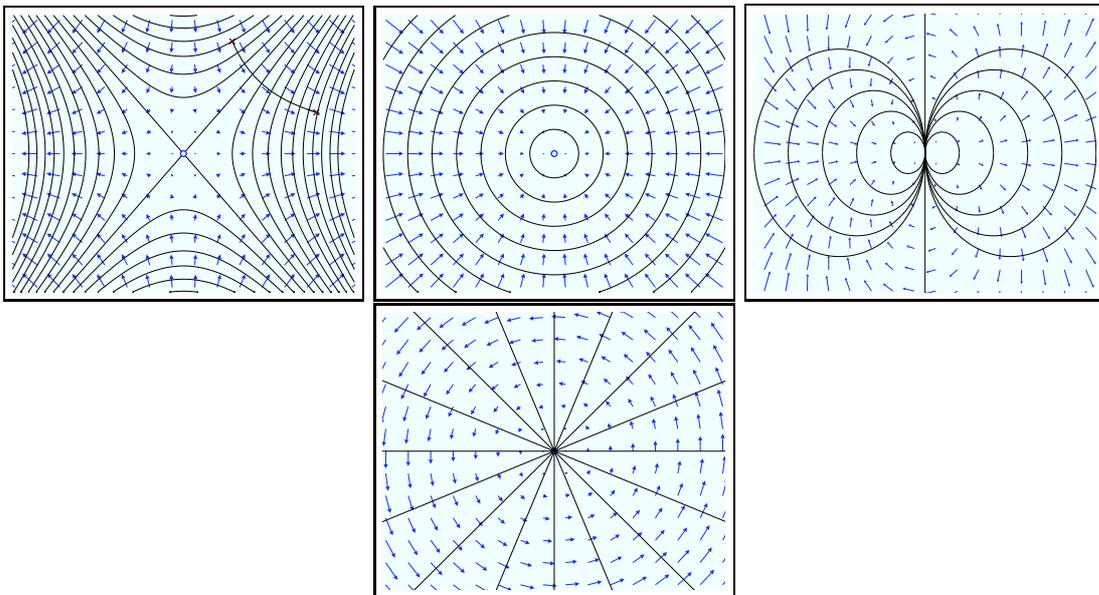


FIGURE 2. Champs de vecteurs et feuilletages transverses

b. Exemples. — La figure 2 montre quelques champs de vecteurs du plan s’annulant seulement en 0. Chacun de ces champs de vecteurs s’intègre en une isotopie autonome, sans point fixe, sur l’anneau ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il est très facile de trouver un feuilletage transverse, par exemple en prenant le feuilletage qui est orthogonal au champ de vecteurs. Bien sûr, ceci est beaucoup moins évident dans le cas d’une isotopie non autonome.

On peut interpréter le feuilletage transverse comme une “fonction de Lyapounov locale” (nous expliciterons ce point de vue, dans un cas particulier, à la section 4.3.a). Voici quelques exemples d’utilisation pour les isotopies du plan qui fixent 0. Si le feuilletage transverse admet une feuille-cercle, alors l’homéomorphisme a des points errants, comme c’est le cas pour l’homothétie du deuxième dessin. S’il existe une feuille aboutissant au point fixe 0, alors l’ensemble de rotation local est positif, comme pour la rotation du dernier dessin. Pour le premier et le troisième dessin, le feuilletage orienté admet des feuilles aboutissant au point fixe dans le futur, mais aussi dans le passé, l’ensemble de rotation sera réduit à $\{0\}$ (ou vide).

c. Une version locale. — Soit M' une surface, et x_0 un point de M' . On considère une isotopie I définie sur $M = M' \setminus \{x_0\}$, et un feuilletage orienté \mathcal{G} transverse à I . Si x est un point proche de x_0 , sa trajectoire sous l’isotopie reste proche de x_0 ; on aimerait pouvoir joindre x à $h_1(x)$ par une courbe transverse au feuilletage, homotope à sa trajectoire, *et proche de x_0* . Cette dernière propriété n’est pas donnée *a priori* par le théorème feuilleté équivariant, mais elle est presque toujours automatique. Précisons ceci. Suivant [LeC08], nous dirons que \mathcal{G} et I sont *localement transverses* au voisinage du point x_0 si tout voisinage U de x_0 contient un voisinage V de x_0 , tel que pour tout point x de V , il existe une courbe γ dans U , positivement transverse à \mathcal{G} et homotope dans U à la trajectoire de x sous l’isotopie I (le point important, ici, est l’exigence que l’homotopie ait lieu dans U). On a alors la propriété suivante.

Proposition 3.2 (Le Calvez, [LeC08]). — *Dans cette situation, si la surface M' n’est pas la sphère, le feuilletage et l’isotopie sont aussi localement transverses au voisinage de x_0 .*

On doit exclure la sphère pour que deux courbes proches de la singularité et qui sont homotopes dans $M' \setminus \{x_0\}$ soient aussi localement homotopes. Il est facile de voir que l’énoncé est faux sur la sphère (voir [LeC08]).

d. Une version lisse. — Le feuilletage fourni par le théorème n’est *a priori* qu’un feuilletage continu; cependant, un argument de perturbation permet de renforcer le théorème pour obtenir un feuilletage lisse. Reprenons les hypothèses et la conclusion du théorème feuilleté équivariant et de la proposition 3.2 : on considère donc une isotopie $I = (h_t)_{t \in [0,1]}$ sans point fixe contractile sur une surface orientable M qui n’est pas homéomorphe au plan, et un feuilletage \mathcal{G} transverse à I . Le lecteur peut avoir en tête le cas qui nous intéresse le plus, où $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Proposition 3.3. — *Tout feuilletage \mathcal{G}' suffisamment proche de \mathcal{G} pour la topologie de Whitney est encore transverse à l'isotopie (h_t) .*

La proposition sera démontrée au chapitre 4 (section 4.3.b). Rappelons ce qu'est la topologie de Whitney. Une carte du feuilletage \mathcal{G} sera ici une application continue injective $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow M$ qui envoie chaque segment vertical du carré, orienté vers le haut, sur un morceau de feuille orientée de \mathcal{G} . Considérons une famille (φ_i) de cartes, et supposons que leurs images forment une famille localement finie de M . Associons à chaque carte φ_i un nombre $\varepsilon_i > 0$. Par définition, ces données déterminent un voisinage ouvert $\mathcal{O}((\varphi_i), (\varepsilon_i))$ du feuilletage \mathcal{G} dans la topologie de Whitney : cet ouvert est l'ensemble des feuilletages \mathcal{G}' qui admettent des cartes (φ'_i) pour lesquelles la distance uniforme entre φ'_i et φ_i est plus petite que ε_i , pour chaque valeur de i .

Il est bien connu que les feuilletages lisses sont denses parmi les feuilletages continus (voir la fin de l'appendice B). Une petite perturbation permet donc de lisser un feuilletage transverse.

Corollaire 3.4. — *Si la surface M est munie d'une structure lisse, il existe un feuilletage lisse \mathcal{G}' qui vérifie l'énoncé du théorème 3.1.*

3.2. Détection des orbites périodiques

L'ensemble de rotation local permet de donner une version locale du célèbre théorème de Poincaré-Birkhoff : en bref, l'ensemble de rotation “détecte certaines orbites périodiques”.

a. L'anneau compact. — Considérons une isotopie $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$ sur le cercle ou l'anneau. Si x est un point périodique de f_1 de période q , la variation de la coordonnée θ le long de la trajectoire de x pendant un temps q est un certain entier p ; le point x admet donc un nombre de rotation $\frac{p}{q}$, on dit que le rationnel $\frac{p}{q}$ est réalisé par une orbite périodique. Sur le cercle, un nombre de rotation rationnel est toujours réalisé par une orbite périodique. On peut se demander si ce phénomène persiste en dimension 2. L'exemple de la figure 3 montre que ce n'est pas le cas. C'est cependant ce qui advient sous une hypothèse très générale appelée *propriété d'intersection*.

Définition 3.5. — Soit f un homéomorphisme de l'anneau isotope à l'identité. On dira que f a la *propriété d'intersection* si toute courbe de Jordan *essentielle*, c'est-à-dire qui fait le tour de l'anneau, rencontre son image par f .

Lorsque f ne possède pas la propriété d'intersection, une courbe de Jordan essentielle γ et son image $f(\gamma)$ qui en est disjointe bordent un anneau ouvert errant, c'est-à-dire disjoint de tous ses itérés. En particulier, les itérés f^p ne possèdent pas non plus la propriété d'intersection. Cette remarque admet une réciproque.

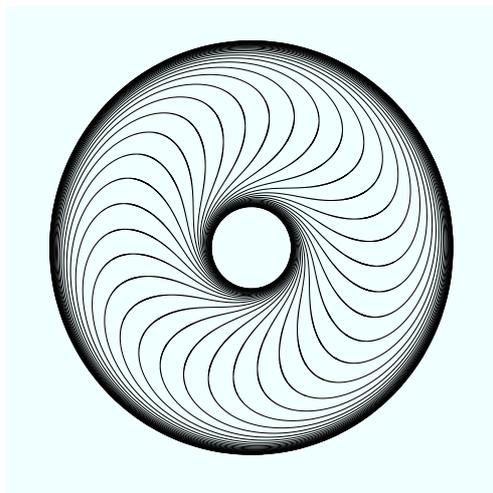


FIGURE 3. Pour une isotopie poussant les points le long des feuilles du feuilletage de Reeb de l'anneau, l'ensemble de rotation contient des nombres positifs et négatifs, mais le nombre 0 n'est pas réalisé par une orbite périodique

Lemme 3.6. — *Si f a la propriété d'intersection, alors toutes ses puissances f^p ($p \neq 0$) l'ont aussi.*

La preuve est analogue à la construction de la courbe Γ' dans la preuve du point 1 du lemme 2.11. La propriété d'intersection apparaît alors comme une propriété de récurrence : sur toute courbe de Jordan essentielle, pour tout entier p , il existe un point x qui revient sur la courbe en temps p . Voici maintenant la généralisation du théorème de Poincaré-Birkhoff due à J. Franks ([Fra88]).

Théorème (Franks). — *Soit f un homéomorphisme de l'anneau compact, isotope à l'identité, et I une isotopie de l'identité à f . Supposons que f possède la propriété d'intersection. Alors tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, écrit sous forme irréductible, appartenant à l'ensemble de rotation de I est réalisé par une orbite périodique de période q .*

Cet énoncé peut être démontré à l'aide du théorème feuilleté équivariant. Ce dernier sera également la clé de la version locale que nous énonçons maintenant.

b. Version locale du théorème de Poincaré-Birkhoff-Franks. — Soit h un homéomorphisme du plan fixant 0, on dira que h a la propriété d'intersection locale si il existe un voisinage de 0 ne contenant aucune courbe fermée simple essentielle (entourant 0) disjointe de son image. Dans le cas contraire, on dira que h est dissipatif.

Théorème 3.7. — *Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ dont le temps un est un homéomorphisme h qui a la propriété d'intersection locale. Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible et appartenant à l'intérieur de l'enveloppe convexe*

de $\rho(I)$. Alors tout voisinage de 0 contient un point $x \neq 0$ de période q et de nombre de rotation $\frac{p}{q}$, dans l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pour l'isotopie I .

Démonstration. — Comme toujours, nous commençons par réduire cet énoncé au cas $p = 0$ et $q = 1$. Cette réduction suit immédiatement de deux propriétés : d'une part le lien entre l'ensemble de rotation de I et celui de I^q (proposition 2.2), d'autre part la persistance de la propriété d'intersection lorsqu'on élève f à la puissance q (version locale du lemme 3.6). On est ainsi ramené à démontrer un théorème de point fixe, que nous énonçons sous forme contraposée, en remarquant que pour un point fixe de I , avoir un nombre de rotation nul équivaut à être contractile.

Théorème 3.8. — Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ dont le temps un est un homéomorphisme h qui a la propriété d'intersection locale. Supposons que 0 n'est pas accumulé par des points fixes contractiles, dans l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pour l'isotopie I . Alors l'ensemble de rotation de I est inclus dans $[-\infty, 0]$ ou dans $[0, +\infty]$.

On se place sous les hypothèses du théorème 3.8. D'après la proposition de l'appendice A, quitte à modifier h loin de 0, on peut supposer qu'il n'a aucun point fixe contractile pour l'isotopie I . On peut alors appliquer le théorème feuilleté équivariant et la proposition 3.2 et obtenir ainsi un feuilletage \mathcal{G} , défini sur le plan troué $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, localement transverse à l'isotopie I au voisinage de 0.

Soit F une feuille-cercle du feuilletage, c'est-à-dire une feuille qui est une courbe de Jordan (voir l'appendice B pour l'étude locale des feuilletages du plan). Cette feuille doit entourer une singularité, et ici la seule singularité est le point 0. D'autre part, la transversalité nous dit que F est disjointe de son image par h . Puisque h possède la propriété d'intersection locale, on voit qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel le feuilletage \mathcal{G} n'a aucune feuille-cercle. D'après la classification locale des feuilletages, il existe alors une feuille F de \mathcal{G} dont l'un des deux ensembles ω -limite ou α -limite est $\{0\}$ (voir le corollaire B.9).

Quitte à changer h en h^{-1} , et l'orientation du feuilletage \mathcal{G} en son opposée, on peut se restreindre au cas où $\omega(F) = \{0\}$. Montrons que dans ce cas, une demi-feuille positive γ incluse dans F est “poussée sur sa droite”, au sens où tout relevé Γ de γ vérifie $\Gamma <_0 H(\Gamma)$, l'homéomorphisme H étant obtenu en relevant l'isotopie I (cf section 2.3). Pour cela, le théorème de Schoenflies nous fournit un homéomorphisme Φ , fixant 0, qui redresse γ sur un segment vertical orienté vers le haut ; quitte à conjuguer la situation par Φ , on peut supposer que γ est ce segment vertical. Dans ces coordonnées, considérons un disque euclidien U centré en 0 et dont le bord rencontre γ . Soit $V \subset U$ donné par la transversalité locale : la trajectoire de tout point x de V est homotope à une courbe α_x positivement transverse à \mathcal{G} et incluse dans U . En particulier, les courbes α_x ne peuvent traverser γ que de la gauche vers la droite. Ceci entraîne que la variation de la coordonnée θ le long de α_x , pour les points x de $\gamma \cap V$, est (strictement) positive. On en déduit que $\Gamma <_0 H(\Gamma)$. Par définition, l'intervalle de rotation est alors inclus dans $[0, +\infty]$, et nous avons vu

que ceci entraîne la même inclusion pour l'ensemble de rotation (lemme 2.12). Ceci conclut. \square

Nous pouvons extraire de la preuve le critère suivant (voir la remarque suivant la preuve du lemme 2.12).

Lemme 3.9. — *Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ , et \mathcal{F} un feuilletage de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui est localement transverse à I . S'il existe une demi-feuille positive γ de \mathcal{F} dont l'ensemble ω -limite est $\{0\}$, alors γ est un arc positif pour l'isotopie I . L'intervalle de rotation de I est inclus dans $[0, +\infty]$, et pour tout voisinage V de 0 assez petit, l'ensemble $\rho_V(I)$ est inclus dans $[0, +\infty]$.*

3.3. Ensemble et intervalle de rotation

Nous allons maintenant déterminer complètement le lien entre l'intervalle de rotation et l'ensemble de rotation. Lorsque la propriété d'intersection locale, définie à la section précédente, est satisfaite, la preuve est assez facile; elle repose sur le théorème feuilleté équivariant et sur la classification locale des feuilletages discutée dans l'appendice B. Le cas contraire est bien plus difficile et fait appel à un argument de perturbation des feuilletages transverses, associé au résultat de stabilité (proposition 3.3).

En préambule, soulignons que le cas où l'ensemble de rotation de h est vide est complètement résolu : d'après le théorème 2.4, ou bien h est localement conjugué à une homothétie, ou bien h est localement conjugué à un point fixe parabolique; dans le premier cas on voit facilement que l'intervalle de rotation est tout aussi vide; dans le second, nous avons vu que l'intervalle de rotation est un singleton rationnel (lemme 2.9).

Théorème 3.10. — *Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ dont l'ensemble de rotation n'est pas vide. Alors l'intervalle de rotation de I est égal à l'enveloppe convexe de son ensemble de rotation.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu que l'intervalle de rotation contient l'ensemble de rotation (lemme 2.12), et donc aussi son enveloppe convexe. Montrons l'inclusion inverse. Rappelons qu'un feuilletage de type *Puits* est localement conjugué au feuilletage radial en demi-droites issues de 0. Soit $h \in \mathcal{H}^+$, H un relevé de h obtenu en relevant une isotopie I . Le théorème 3.10 va découler immédiatement de l'énoncé suivant.

Lemme 3.11. — *Supposons que l'ensemble de rotation $\rho(I)$ est non vide et inclus dans $]0, +\infty]$. Alors il existe un feuilletage \mathcal{G} de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, de type *Puits*, qui est localement transverse à I . En particulier, H est positif, et son intervalle de rotation est inclus dans $[0, +\infty]$.*

À l'aide des propriétés des ensemble et intervalle de rotation, on en déduit que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ strictement à gauche de l'ensemble de rotation, l'intervalle

de rotation est à droite de $\frac{p}{q}$, ce qui entraîne le théorème. Remarquons au passage qu'un feuilletage de type Puits localement transverse à l'isotopie I nous donne un changement de coordonnées Φ dans \mathcal{H}^+ dans lequel la variation de la coordonnée θ est strictement positive le long de toute trajectoire de l'isotopie qui est suffisamment proche du point fixe.

Démontrons maintenant le lemme. Nous pouvons obtenir la conclusion du lemme sous des hypothèses un peu plus faibles : nous supposons simplement que

- le point 0 n'est pas accumulé par des points fixes contractiles pour l'isotopie I ,
- pour tout voisinage V de 0 assez petit, l'ensemble $\rho_V(I)$ est inclus dans $[0, +\infty]$ sans être réduit à $\{0\}$.

Nous allons trouver notre feuilletage \mathcal{G} ou bien directement en appliquant le théorème feuilleté équivariant, ou bien en modifiant le feuilletage fourni par celui-ci. Sous nos hypothèses, H n'a pas de point fixe se projetant arbitrairement près de 0, on peut donc supposer que H n'a aucun point fixe (quitte à modifier h loin de 0, *cf.* appendice A). D'après le théorème feuilleté équivariant, il existe alors un feuilletage \mathcal{G} sur l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ transverse à I . Le feuilletage n'a aucune feuille dont l'ensemble α -limite est $\{0\}$: sans quoi, par transversalité, l'ensemble de rotation $\rho(I)$ ne contiendrait que des nombres négatifs ou nuls (lemme 3.9). Il n'est donc pas de type Source, ni Pétale, ni Selle, ni Mixte (*cf.* appendice B). S'il est de type Puits, le lemme est démontré. D'après la classification locale des feuilletages, il ne nous reste plus qu'à traiter le type Cycle, c'est-à-dire le cas où 0 est accumulé par des feuilles-cercles (*cf.* proposition B.1). Nous allons voir qu'on peut alors modifier \mathcal{G} en un feuilletage de type Puits qui sera encore transverse à l'isotopie.⁽¹⁾

Nous utilisons la description des feuilletages de type Cycle (section B.1.b). Quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que toutes les feuilles-cercles sont des cercles euclidiens centrés en 0. Il y a un cas très simple, celui où toutes les feuilles sont des cercles ; on peut alors facilement perturber le feuilletage \mathcal{G} , arbitrairement peu en topologie de Whitney, en un feuilletage dont toutes les feuilles sont des spirales ayant $\{0\}$ pour ensemble ω -limite. Le feuilletage perturbé est alors de type Puits. Si la perturbation est assez petite, la proposition 3.3 nous garantit que ce feuilletage est encore transverse à I ; le lemme est donc démontré dans ce cas.

S'il n'y a pas que des feuilles-cercles, on considère l'ensemble \mathcal{A} des anneaux A bordés par deux feuilles-cercles de \mathcal{G} (notées ∂^+A et ∂^-A où la seconde sépare la première de 0), et minimaux pour cette propriété : A ne contient aucune autre feuille-cercle. Les feuilles incluses dans A ont alors pour ensemble α -limite l'un des deux bords, et l'autre pour ensemble ω -limite ; on dira que le feuilletage “va de l'une à l'autre”. Le feuilletage sur l'anneau A est une composante de Reeb ou une spirale.

⁽¹⁾La démonstration est terminée si l'on suppose la propriété d'intersection locale, qui interdit les feuilles de type Cycle.

Un anneau $A \in \mathcal{A}$ sera qualifié de *bon* si le feuilletage va de $\partial^+ A$ vers $\partial^- A$, et de *mauvais* dans le cas contraire.

S'il existe un voisinage de 0 ne contenant pas de mauvais anneau, alors on peut encore trouver une petite perturbation qui “casse” toutes les feuilles cercles; le feuilletage perturbé est de type Puits, on conclut comme dans le cas où toutes les feuilles étaient des feuilles-cercles.

Supposons maintenant que les mauvais anneaux accumulent la singularité 0. Cette fois-ci, et contrairement aux cas précédents, le feuilletage n'est pas dans l'adhérence des feuilletage de type Puits, il va nous falloir effectuer une “grande” perturbation. Considérons la partie \mathcal{A}_0 de \mathcal{A} constituée des anneaux A qui rencontrent leur image par h . Cet ensemble est localement fini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: pour toute paire F_1, F_2 de feuilles-cercles, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments $A \in \mathcal{A}_0$ inclus dans l'anneau A_{F_1, F_2} bordé par ces deux cercles. En effet, l'espace des feuilles-cercles incluses dans A_{F_1, F_2} est compact; par transversalité de \mathcal{G} et I , toute feuille-cercle est disjointe de son image par h , il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ qui minore la distance d'une feuille-cercle de A_{F_1, F_2} à son image; tout anneau d'épaisseur plus petite que ε est disjoint de son image. Une première modification du feuilletage \mathcal{G} consiste alors à remplacer \mathcal{G} , sur chaque anneau $A \in \mathcal{A}$ qui est disjoint de son image par h , par le feuilletage en cercles euclidiens centré en 0. Il est clair que le feuilletage $\hat{\mathcal{G}}$ ainsi obtenu est encore transverse à l'isotopie I . On est ainsi ramené au cas où la famille des mauvais anneaux ne s'accumule qu'en 0. On se place dorénavant dans cette situation.

Le feuilletage sur un anneau $A \in \mathcal{A}$ est une composante de Reeb ou une spirale. Dans le premier cas, les deux feuilles-bords sont orientées dans des sens opposés et la transversalité nous donne les inclusions $h(A) \subset \text{Int}(A)$ ou $h^{-1}(A) \subset \text{Int}(A)$; on voit que l'ensemble *maximal invariant* de l'anneau, défini par

$$\text{Maxinv}(A) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} h^{-n}(A),$$

n'est pas vide. Dans le second cas les deux bords de A sont poussés dans le même sens et l'ensemble maximal invariant peut être ou ne pas être vide. Les affirmations suivantes explorent ces deux possibilités. On suppose maintenant que A est inclus dans un petit voisinage de 0.

Affirmation 3.12 (Le Calvez, [LeC91]). — *Supposons que l'ensemble maximal invariant de A n'est pas vide. Alors le feuilletage \mathcal{G} doit aller de $\partial^+ A$ vers $\partial^- A$. Autrement dit, l'ensemble maximal invariant d'un mauvais anneau est vide.*

Affirmation 3.13. — *Supposons que l'ensemble maximal invariant de A est vide. Alors il existe un anneau \hat{A} contenant A , bordé par $\partial^+ A$ et un itéré $h^n(\partial^- A)$ de $\partial^- A$, et un feuilletage orienté $\hat{\mathcal{G}}$ de \hat{A} dont toute feuille F est une courbe de Jordan disjointe de son image, $h(F)$ étant située à droite de la courbe orientée F .*

Admettons provisoirement les deux affirmations et poursuivons la démonstration du lemme. Nous allons construire un feuilletage intermédiaire \mathcal{G}' , toujours transverse à H , et ne contenant aucun mauvais anneau, ce qui permet de conclure comme précédemment. Le feuilletage intermédiaire \mathcal{G}' est construit comme limite d'une suite de feuilletages transverses $(\mathcal{G}_i)_{i \geq 0}$ qui est stationnaire sur tout compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, voici comment. Par hypothèse les mauvais anneaux accumulent 0 et seulement 0, on note $(A_i)_{i \geq 0}$ la liste de tous ceux qui sont inclus dans un voisinage de 0 où les deux affirmations sont vérifiées, ordonnée naturellement de façon à ce que chaque anneau sépare les précédents des suivants. D'après la première affirmation l'ensemble maximal invariant du mauvais anneau A_1 est vide, la seconde affirmation nous fournit un feuilletage en feuilles-cercles sur l'anneau \hat{A}_1 bordé par $\partial^+ A_1$ et $h^{n_1}(\partial^- A_1)$, ce feuilletage se recolle avec le feuilletage \mathcal{G} à l'extérieur de $\partial^+ A_1$ et avec le feuilletage $h^{n_1}(\mathcal{G})$ à l'intérieur de $h^{n_1}(\partial^- A_1)$, pour former le feuilletage \mathcal{G}_1 . De même, la seconde affirmation nous fournit un feuilletage en feuille-cercles de l'anneau \hat{A}_2 bordé par $\partial^+ A_2$ et $h^{n_2}(\partial^- A_2)$, on pousse ce feuilletage par h^{n_1} sur l'anneau $h^{n_1}(\hat{A}_2)$, on feuillète la zone au-delà de $h^{n_1}(\partial^+ A_2)$ par \mathcal{G}_1 et la zone en deçà de $h^{n_1+n_2}(\partial^- A_2)$ par $h^{n_1+n_2}(\mathcal{G}_1)$; on obtient ainsi le feuilletage \mathcal{G}_2 . En itérant le procédé on construit la suite (\mathcal{G}_i) recherchée. Pour conclure, il reste à vérifier que le feuilletage \mathcal{G}' obtenu est encore transverse à l'isotopie I . Par construction toute feuille orientée F' de \mathcal{G}' est une itérée $h^n(F)$ d'une feuille orientée F de \mathcal{G} , ou une itérée d'une feuille fournie par la seconde affirmation. Considérons le revêtement universel $\tilde{\mathbb{A}}$ de l'anneau $\mathbb{A} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et le feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}'$ qui relève \mathcal{G}' . D'après la théorie de Poincaré-Bendixson, les feuilles \tilde{F}' de ce feuilletage sont des droites topologiques orientées, chacune sépare le plan en deux ouverts $O_g(\tilde{F}')$ et $O_d(\tilde{F}')$ situés de part et d'autre de \tilde{F}' . La transversalité de \mathcal{G} avec l'isotopie I , ou bien, selon l'origine de la feuille F' , la seconde affirmation, nous disent que l'ouvert à droite est positivement invariant,

$$H(\text{Adhe}(O_d(\tilde{F}'))) \subset O_d(\tilde{F}').$$

Une droite topologique Δ vérifiant la propriété $H(\text{Adhe}(O_d(\Delta))) \subset O_d(\Delta)$ est appelée *droite de Brouwer orientée pour H* . La transversalité du feuilletage est maintenant donnée par une remarque de P. Le Calvez : le feuilletage \mathcal{G}' est transverse à l'isotopie I si et seulement si chaque feuille de $\tilde{\mathcal{G}}'$ est une droite de Brouwer orientée pour H (voir [LeC05], paragraphe suivant le théorème 1.1). L'argument-clé est de considérer, pour un point x donné dans le plan $\tilde{\mathbb{A}}$, l'ensemble des points que l'on peut joindre depuis x par une courbe positivement transverse au feuilletage. Cet ensemble est saturé par le feuilletage, et situé à droite de chacune des feuilles qui le borde. Ainsi, lorsque ces feuilles sont des droites de Brouwer orientées, cet ensemble est positivement invariant, il contient en particulier le point $H(x)$. Ceci achève la preuve de notre lemme, ou plutôt, le fait reposer entièrement sur nos deux affirmations. \square

Preuve de la première affirmation. — Par hypothèse il existe un voisinage V_0 de 0 tel que $\rho_{V_0}(I)$ est différent de $\{0\}$ et inclus dans $[0, +\infty]$. Rappelons que cet

ensemble est un invariant de conjugaison, au sens où $\rho_{\Phi(V_0)}(\Phi I \Phi^{-1}) = \rho_{V_0}(I)$ pour tout changement de coordonnées $\Phi \in \mathcal{H}^+$ (lemme 2.1). Supposons, par l'absurde, que l'ensemble maximal invariant d'un anneau $A \subset V_0$ n'est pas vide, et que le feuilletage orienté sur A forme une composante de Reeb ou une spirale et va de $\partial^- A$ vers $\partial^+ A$. Chacune des deux courbes bordant l'anneau est disjointe de son image, par conséquent l'ensemble maximal invariant de A est inclus dans l'intérieur de A . Soit A' un anneau inclus dans l'intérieur de A , bordé par deux courbes de Jordan transverses au feuilletage, et contenant $\text{Maxinv}(A)$. La trace du feuilletage sur A' est homéomorphe au feuilletage de $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$ par les segments $[0, 1] \times \{\theta\}$; quitte à effectuer un changement de coordonnées, ce qui ne modifie pas l'ensemble $\rho_{V_0}(I)$, on peut donc supposer que $A' = V \setminus \text{Int}(W)$ où V, W sont deux disques euclidiens centrés en 0, et que la trace du feuilletage y coïncide avec le feuilletage radial par les demi-droites issues de 0, orientées vers l'extérieur. Soit x un point de l'ensemble $\text{Maxinv}(A)$ et γ une courbe allant de x à son image, isotope à la trajectoire de x , et positivement transverse au feuilletage. Puisque les deux courbes bordant A sont des feuilles de \mathcal{G} , la courbe γ ne peut franchir qu'une seule fois le bord de A , mais puisque ses extrémités sont toutes deux dans A , c'est qu'elle n'en sort pas. Puisque l'espace des feuilles de l'intérieur de A est homéomorphe au cercle, on voit que dans les nouvelles coordonnées la variation de la coordonnée θ le long de cette courbe γ , et donc aussi le long de la trajectoire de x , est strictement négative (et même majorée par un nombre strictement négatif). Puisque l'ensemble $\text{Maxinv}(A)$ est un compact invariant, on en déduit que l'ensemble $\rho_{V,W}(I)$ n'est pas vide, et qu'il est inclus dans $[-\infty, 0]$ (et même dans $[-\infty, 0[)$. Mais ceci contredit le choix initial de V_0 . \square

Preuve de la seconde affirmation. — Lorsque α et β sont deux courbes de Jordan disjointes et que la première entoure la seconde, nous exprimons ce fait par la notation $\alpha < \beta$, et $[\alpha, \beta]$ représente alors l'anneau topologique délimité par ces deux courbes. Nous avons déjà remarqué que, sous l'hypothèse de l'affirmation, les deux feuilles bordant A sont orientées parallèlement; quitte à changer h en h^{-1} nous pouvons supposer que cette orientation est négative, ce qui revient à dire que $\partial^+ A < h(\partial^+ A)$ et $\partial^- A < h(\partial^- A)$. Pour tout entier positif n , soit K_n le compact obtenu comme l'intersection du disque topologique bordé par $h^n(\partial^+ A)$ et du complémentaire du disque ouvert bordé par $h^{-n}(\partial^- A)$. Par transversalité la suite $(K_n)_{n \geq 0}$ est emboîtée et son intersection coïncide avec l'ensemble maximal invariant de A ; si celui-ci est vide, l'un des compact K_n doit être vide. Il existe donc un entier n tel que $\partial^- A < h^n(\partial^+ A)$. Nous affirmons pouvoir alors choisir une famille continue $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ de courbes de Jordan interpolant $\alpha_0 = \partial^+ A$ et $\alpha_1 = \partial^- A$ et qui vérifient chacune $\alpha_t < h(\alpha_t)$. En effet, les courbes $\partial^+ A$ et $\partial^- A$, étant chacune disjointe de leur image, se projettent dans le tore quotient

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n([\partial^+ A, h(\partial^+ A)]) \right) / h$$

en deux courbes simples; ces courbes sont homotopes, on peut donc trouver une isotopie les reliant, et on obtient la famille (α_t) en relevant cette isotopie (la famille (α_t) aboutit bien en $\partial^- A$ et non pas en un autre itéré si l'on a pris soin de choisir dans la bonne classe d'homotopie l'isotopie dans le tore quotient).⁽²⁾ Pour chaque $t \in [0, 1]$ nous choisissons maintenant une courbe β_t vérifiant

$$\alpha_t < \beta_t < h(\alpha_t).$$

En particulier, l'anneau $[\alpha_t, \beta_t]$ est disjoint de son image par h . Par compacité on trouve alors une subdivision de l'intervalle $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ assez fine pour que pour tout $i = 0, \dots, n-1$ on ait

$$\alpha_{t_{i+1}} < \beta_{t_i} < h(\alpha_{t_{i+1}})$$

et en particulier l'anneau $[\beta_{t_i}, h(\alpha_{t_{i+1}})]$ est disjoint de son image. Nous définissons maintenant, pour $i = 0, \dots, n$, des courbes $\gamma_i = h^i(\alpha_{t_i})$ et $\delta_i = h^i(\beta_{t_i})$. Nous avons

$$\partial^+ A = \gamma_{t_0} < \delta_{t_0} < \gamma_{t_1} < \delta_{t_1} < \dots < \delta_{t_{n-1}} < \gamma_{t_n} = h^n(\partial^- A).$$

De plus deux courbes successives dans cette suite bordent un anneau disjoint de son image. On feuillette finalement chacun de ces anneaux par des courbes de Jordan, les feuilletages des différents anneaux se recollent en un feuilletage de l'anneau $\hat{A} = [\partial^+ A, h^n(\partial^- A)]$ qui satisfait l'énoncé de l'affirmation. \square

Bien que je ne sache pas le démontrer, il est plausible que dans la seconde affirmation on puisse toujours choisir $n = 1$, ce qui simplifierait un peu la preuve du lemme.

3.4. Le nombre de rotation de Le Calvez

Voici une conséquence du théorème 3.7. Soit h un homéomorphisme non dissipatif et dont l'ensemble de rotation contient au moins deux éléments. Alors le point fixe est accumulé à la fois par des orbites périodiques de période fixée, et par des orbites périodiques dont la période tend vers $+\infty$. Par contraposition, en l'absence de l'une ou l'autre de ces accumulations et si l'ensemble de rotation n'est pas vide, c'est un singleton. Nous allons voir que ce singleton ne peut pas être $\{\pm\infty\}$. Autrement dit, comme dans le cas du cercle, on peut attribuer à h un nombre de rotation.

Pour exclure la possibilité d'un nombre infini nous distinguons deux cas. Dans le premier cas, que nous allons traiter maintenant, P. Le Calvez a défini un nombre de rotation à l'aide du concept de *bouts premiers*, et il s'agit seulement de vérifier que ce nombre est bien celui que contient notre ensemble de rotation. Dans le second cas, P. Le Calvez et J. C. Yoccoz ont là encore défini un nombre de rotation, bien que par des moyens différents, et nous retrouverons ce nombre au dénouement du chapitre 4. Nous commençons par rappeler la classification de P. Le Calvez qui

⁽²⁾Si les courbes α_t sont deux à deux disjointes alors elles forment un feuilletage qui satisfait l'énoncé de la proposition, mais ce n'est pas nécessairement le cas.

permet notamment de distinguer ces deux cas. Tous les arguments qui suivent sont adaptés de l'article [LeC03] de P. Le Calvez, et nous ne donnerons pas de preuves complètes.

a. La classification de P. Le Calvez. — Dans son article, P. Le Calvez propose une classification des points fixes selon trois critères : *accumulé*, *dissipatif*, *indifférent*. Le premier critère correspond simplement à la présence d'orbites périodiques dans tout voisinage du point fixe ; on peut préciser le cas accumulé en disant que h est *dégénéré* si tout voisinage contient une orbite périodique de période fixée. Nous avons déjà rencontré le deuxième critère : un homéomorphisme h , fixant 0, est *dissipatif* s'il ne vérifie pas la propriété d'intersection locale. Le troisième critère concerne l'existence d'ensembles connexes, petits mais non réduits au point fixe, et invariants par l'homéomorphisme. Ainsi, le prototype de point indifférent sera $z \mapsto z + z^2$, les pétales invariants fournissant des ensembles connexes de toute taille (voir par exemple la figure introductive de l'avant-propos). A l'opposé, le point Selle $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ n'est pas indifférent puisqu'il n'existe aucun ensemble connexe invariant borné.

Définissons plus précisément la propriété d'indifférence. Pour tout ensemble E , l'ensemble *maximal invariant* de E est constitué des points qui ne s'échappe jamais de E ,

$$\text{Maxinv}(E) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} h^n(E).$$

Lorsque E contient 0, la composante connexe de 0 dans $\text{Maxinv}(E)$ est notée $\text{Maxinv}_0(E)$. Un voisinage V de 0 est dit *isolant* si l'ensemble $\text{Maxinv}(\text{Adhe}(V))$ ne rencontre pas la frontière de V ; il est dit *non indifférent* si l'ensemble $\text{Maxinv}_0(\text{Adhe}(V))$ ne la rencontre pas, et *indifférent* dans le cas contraire. Bien sûr, un voisinage indifférent n'est pas isolant. Réciproquement, *si tout voisinage assez petit est non isolant, alors tout voisinage assez petit est indifférent* ([LeC03], paragraphe 2.2) : en effet, si V est non indifférent, il existe une courbe de Jordan qui sépare la frontière de V de l'ensemble $\text{Maxinv}_0(\text{Adhe}(V))$, et cette courbe borde un disque isolant. On dira que h est *indifférent* si tout voisinage assez petit est non isolant.

Notons que cette propriété n'est pertinente que dans le cas non dissipatif (un point fixe indifférent n'est jamais dissipatif). Dans le cas indifférent, l'existence de compacts connexes non triviaux, arbitrairement petits, permet d'utiliser la notion de *bouts premiers* due à Carathéodory (voir [Mat82a] et plus bas). Dans le cas non indifférent, c'est-à-dire s'il existe une base de voisinages isolants, et si h n'est pas dissipatif, on dira que h est un point *Selle* ; on peut alors utiliser les techniques d'indice de Conley (voir [LeCYoc, FraRic00, RdpSal02]). Le principal intérêt de cette classification tient à l'existence de ces deux outils complémentaires.

Exercice. — Pour chacun des exemples de la figure 1 de l'avant-propos, déterminer s'il s'agit d'un point dissipatif, accumulé, indifférent.

b. L'ensemble de rotation des points indifférents. — Nous faisons le lien avec l'étude des points indifférents menée par P. Le Calvez. Considérons un élément h de \mathcal{H}^+ , et notons \mathcal{K}_h l'ensemble des *continus* du plan (c'est-à-dire des ensembles compacts connexes) qui sont *pleins* (c'est-à-dire dont le complémentaire est connexe), qui contiennent 0 sans être réduit à $\{0\}$, et qui sont invariants par h . Lorsque h est indifférent, \mathcal{K}_h contient des éléments arbitrairement petits : si (V_ℓ) est une base de voisinages de 0, on peut trouver pour chaque ℓ un élément K de \mathcal{K}_h inclus dans V_ℓ ; on dira que la suite (K_ℓ) tend vers $\{0\}$. Si l'on choisit $K_\ell = \text{Maxinv}(\text{Adhe}(V_\ell))$ alors la suite obtenue est décroissante.

Pour tout $K \in \mathcal{K}_h$, l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus K$ admet une compactification naturelle

$$(\mathbb{R}^2 \setminus K) \sqcup C$$

par ajout du *cercle des bouts premiers* C . L'homéomorphisme h induit un homéomorphisme \bar{h}_K de $(\mathbb{R}^2 \setminus K) \sqcup C$, et cette construction nous fournit notamment un homéomorphisme croissant du cercle, $\bar{h}_{K|C}$.⁽³⁾

Nous noterons $\rho_K(h)$ le nombre de rotation de cet homéomorphisme. Si l'on se donne une isotopie I aboutissant en h , on peut lui associer un nombre réel $\rho_K(I)$ qui relève $\rho_K(h)$: pour cela, on considère une isotopie I' dans $(\mathbb{R}^2 \setminus K) \sqcup C$, aboutissant en \bar{h} , et qui induit sur $\mathbb{R}^2 \setminus K$ une isotopie homotope à I (comparer avec le paragraphe précédent l'énoncé de la proposition 2.5).

Nous cherchons à comparer les nombres $\rho_K(I)$ avec l'ensemble de rotation local (et l'intervalle de rotation qui est son enveloppe convexe). Commençons par relever un lien élémentaire. On reprend les notations de la section 2.3. Soit H un relevé de $h|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ au revêtement universel, et supposons qu'on a un relevé Γ d'une demi-droite topologique γ qui est positive pour H , c'est-à-dire vérifiant $\Gamma <_0 H(\Gamma)$. Soit maintenant K un élément de \mathcal{K}_h suffisamment petit. En considérant le premier point sur K lorsqu'on parcourt γ de l'infini vers 0, on obtient ce que P. Le Calvez appelle un *arc d'accès strictement positif* de K . On en déduit facilement que le nombre de rotation $\rho_K(I)$ est positif ou nul (voir [LeC03], section 5.1). Résumons cette propriété, et donnons-en un corollaire immédiat.

Lemme 3.14. — *Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ aboutissant en h , et supposons que l'intervalle de rotation est inclus dans $]0, +\infty]$, ou plus généralement que H est positif. Alors pour tout $K \in \mathcal{K}_h$ assez petit, $\rho_K(I) \geq 0$.*

Corollaire 3.15. — *Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ aboutissant en h . Supposons que $\rho_{\text{int}}(I) = \{\alpha\}$. Soit $(K_\ell)_{\ell \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathcal{K}_h tendant vers $\{0\}$. Alors $\lim \rho_{K_\ell}(I) = \alpha$.*

⁽³⁾On peut remarquer que l'espace quotient obtenu en identifiant K à un point est encore homéomorphe au plan, et que pour l'homéomorphisme induit par h , le point fixe K est topologiquement éclatable, au sens du chapitre 2.

Preuve du corollaire. — Pour tout rationnel $\frac{p}{q} < \alpha < \frac{p'}{q'}$, on applique le lemme aux isotopies $J^{-p}I^q$ et $J^{-p'}I^{q'}$, où J est l'isotopie des rotations. On en déduit que pour tout ℓ assez grand, $\frac{p}{q} \leq \rho_{K_\ell}(I) \leq \frac{p'}{q'}$, ce qui conclut. \square

L'énoncé suivant est un résultat de points fixes pour les éléments indifférents. On peut le comparer à la version contraposée du théorème 3.8.

Proposition 3.16 (Le Calvez). — *Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ , aboutissant en un homéomorphisme h indifférent. Soit U un voisinage de 0 tel que tout voisinage plus petit est indifférent. Supposons qu'il existe $K, K' \in \mathcal{K}_h$, inclus dans U , avec $K' \subset K$, et vérifiant $\rho_K(I) < 0$ et $\rho_{K'}(I) > 0$. Alors U contient un point fixe $x_0 \neq 0$ contractile pour I .*

Corollaire 3.17. — *Si $h \in \mathcal{H}^+$ est indifférent, et si $\rho(I) = \{+\infty\}$ pour une isotopie I dans \mathcal{H}^+ aboutissant en h , alors il existe un entier k_0 et une suite de points $(x_k)_{k \geq k_0}$ tendant vers 0 dont chaque élément x_k est un point fixe de h , différent de 0, dont le nombre de rotation pour l'isotopie I est égal à k .*

Corollaire 3.18. — *Si $h \in \mathcal{H}^+$ est indifférent et non dégénéré, et si I est une isotopie dans \mathcal{H}^+ aboutissant en h , alors $\rho(I)$ est soit vide, soit réduit à un unique nombre réel.*

Preuve des deux corollaires. — Démontrons le premier corollaire. On considère un homéomorphisme h indifférent, une base (V_ℓ) de voisinages de 0 emboîtés indifférents, la suite décroissante (K_ℓ) d'éléments de \mathcal{K}_h définie par $K_\ell = \text{Maxinv}_0(\text{Adhe}(V_\ell))$. Fixons une isotopie I aboutissant en h . Supposons maintenant que $\rho(I) = \{+\infty\}$. D'après le corollaire 3.15, la suite des nombres de rotation $(\rho_{K_\ell}(I))$ tend vers $+\infty$. Soit k un entier plus grand que $\rho_{K_0}(I)$, ℓ_k le plus grand entier vérifiant $\rho_{K_{\ell_k}}(I) < k$, et un entier $\ell'_k > \ell_k$ vérifiant $k < \rho_{K_{\ell'_k}}(I)$. On applique la proposition 3.16 à l'isotopie $J^{-k}I$ et aux compacts emboîtés K_{ℓ_k} et $K_{\ell'_k}$ inclus dans l'ouvert V_{ℓ_k} : celui-ci contient un point fixe x_k de nombre de rotation k , ce que l'on cherchait.

Montrons maintenant le second corollaire. Soit $h \in \mathcal{H}^+$ indifférent, en particulier h a la propriété d'intersection locale. Si l'ensemble de rotation contient deux éléments $\alpha < \beta$, il existe un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ dans $]\alpha, \beta[$, et donc, d'après le théorème 3.7, une suite de points de période q accumulant le point fixe 0. Autrement dit, ceci ne peut arriver que si h est accumulé et dégénéré. De même, si $\rho(I) = \{+\infty\}$, le premier corollaire nous dit que 0 est accumulé par des points fixes ; par symétrie on a la même conclusion si $\rho(I) = \{-\infty\}$. Il en ressort que, dans le cas non dégénéré, ou bien $\rho(I)$ est vide, ou bien il contient un unique nombre réel. \square

Idée de preuve de la proposition 3.16. — Cet énoncé est contenu dans la preuve de la proposition 6.1 de [LeC03], rappelons les idées principales. En étudiant l'application $K \mapsto \rho_K(I)$, P. Le Calvez montre en particulier le résultat suivant.⁽⁴⁾ Un

⁽⁴⁾Cet énoncé ne se trouve pas explicitement dans [LeC03], mais apparaît au début de la preuve de la proposition 6.1.

homéomorphisme du cercle f , ayant un point fixe x_0 , est dit *semi-stable* si l'ordre cyclique du triplet $(x_0, x, f(x))$ est le même pour tous les point x qui ne sont pas fixes (de façon équivalente, f est limite d'une suite d'homéomorphismes dont le nombre de rotation est non nul). Plus généralement on dit que f , de nombre de rotation $\frac{p}{q}$, est semi-stable si f^q est semi-stable.

Lemme 3.19. — Soient I, h et U comme dans l'énoncé de la proposition, $K_1 \subset K_2$ deux éléments de \mathcal{K}_h inclus dans U , ρ_1 et ρ_2 les nombres de rotation associés. Alors il existe une famille totalement ordonnée pour l'inclusion

$$(K_\rho)_{\rho \in \mathbb{Q} \cap [\rho_1, \rho_2]}$$

d'éléments de \mathcal{K}_h telle que $K_{\rho_1} = K_1, K_{\rho_2} = K_2$, le nombre de rotation associé à chaque élément K_ρ est ρ , et l'homéomorphisme $\bar{h}_{K_\rho|C}$ induit sur le cercle des bouts premiers est semi-stable.

Sous les hypothèses de la proposition, le lemme permet de trouver deux compacts $K'_1 \subset K'_2 \in \mathcal{K}_h$, inclus dans U , tels que $\rho_{K'_2}(I) = 0$, l'homéomorphisme sur le cercle des bouts premiers de K'_2 est semi-stable, et $-1 < \rho_{K'_1}(I) < 0$. La semi-stabilité permet de trouver facilement un point fixe de h sur K'_2 ; comme il n'y a pas de point fixe aux bouts premiers de K'_1 , on peut même trouver un tel point fixe sur $K'_2 \setminus K'_1$. En particulier, ce point fixe est différent de 0. Enfin, il s'agit d'un point fixe contractile de I . \square

3.5. Le sens de rotation de Matsumoto

S. Matsumoto a associé un signe (positif ou négatif) à toute isotopie aboutissant à un élément de \mathcal{H}^+ préservant l'aire, dont 0 est un point fixe isolé, d'indice 1; ce signe est un invariant de conjugaison locale ([Mat01]). L'idée derrière cet invariant est que sous ces hypothèses, les points ont tous tendance à tourner autour de 0 dans le même sens (positif ou négatif). Dans cette section, nous généralisons ce signe en l'interprétant en termes de feuilletage transverse.⁽⁵⁾

a. La définition de S. Matsumoto. — On se fixe une isotopie I aboutissant en $h \in \mathcal{H}^+$. On considère une courbe de Jordan $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dont l'image entoure le point fixe 0, orientée positivement (de façon à ce que 0 soit à sa gauche). Soit x un point de γ dont l'image $h(x)$ est aussi sur γ . La trajectoire de x sous l'isotopie I est homotope, à extrémités fixées, à une courbe incluse dans γ , et qui parcourt γ de façon monotone, dans le sens positif ou négatif : on associe ainsi à tout point x de $\gamma \cap h^{-1}(\gamma)$ un signe (positif, négatif, ou éventuellement nul si x est un point fixe contractile de I). Remarquons que si γ est un cercle euclidien, ce que l'on peut toujours supposer quitte à changer de coordonnées, ceci n'est rien d'autre que le signe de la variation de la coordonnée polaire θ le long de la trajectoire de x . S. Matsumoto considère alors tous les points de $\gamma \cap h^{-1}(\gamma)$ qui appartiennent

⁽⁵⁾La définition de l'indice de Poincaré-Lefschetz est rappelée à la section 4.1.

à l'adhérence de la composante connexe de 0 dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\gamma \cup h^{-1}(\gamma))$. La courbe γ est dite *indifférente* si tous ces points ont le même signe (figure 4). Les courbes indifférentes sont donc celles auxquelles on peut également associer un signe. S.

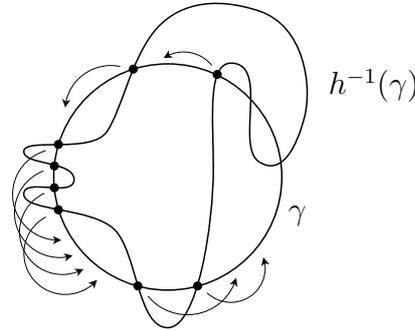


FIGURE 4. Une courbe indifférente positive

Matsumoto démontre alors les deux propriétés suivantes.

Théorème (Matsumoto). — *Supposons que l'isotopie I aboutisse à un élément $h \in \mathcal{H}^+$ préservant l'aire, pour lequel 0 est un point fixe isolé, d'indice 1. Alors :*

1. *tout voisinage de 0 contient des courbes de Jordan indifférentes ;*
2. *toutes les courbes indifférentes assez proches de 0 ont le même signe.*

Ce résultat permet d'associer à toute isotopie satisfaisant les hypothèses du théorème un signe, positif ou négatif. Ce signe est un invariant de conjugaison locale.

Voici l'idée de la preuve du deuxième point. Supposons qu'on puisse trouver deux courbes de Jordan γ_1, γ_2 entourant 0, arbitrairement proches de 0, indifférentes pour h , qui soient de signes opposés. On peut supposer que ces deux courbes sont suffisamment éloignées l'une de l'autre, ainsi $\gamma_2 \cup h^{-1}(\gamma_2)$ est disjointe de $\gamma_1 \cup h^{-1}(\gamma_1)$. En utilisant des idées remontant à B. Schmitt et E. Slaminka et mises en forme par M. Bonino ([Sch79, Sla93, Bon01]), S. Matsumoto montre comment perturber h en un nouvel homéomorphisme h' , sans introduire de point fixe supplémentaire, de façon à ce que h' fixe globalement les deux courbes γ_1 et γ_2 , ces deux courbes étant encore indifférentes pour h' et de signe opposés. On peut alors appliquer le théorème de Poincaré-Birkhoff (cas particulier du théorème de J. Franks cité à la section 3.2), qui affirme que l'anneau topologique délimité par les deux courbes contient un point fixe. Ainsi dans cette situation 0 n'est pas un point fixe isolé, ce qui nous donne la forme contraposée du deuxième point.

Nous proposons d'interpréter le signe de Matsumoto en termes de feuilletage transverse. Sous les hypothèses du théorème de Matsumoto, puisque 0 est un point fixe isolé de h , il existe un feuilletage \mathcal{G} localement transverse à l'isotopie I .

Lemme 3.20. —

- *Tout feuilletage \mathcal{G} , localement transverse à l'isotopie I , est localement homéomorphe au feuilletage radial,*

- le feuilletage \mathcal{G} est de type Puits si et seulement si l'isotopie I est de type positif au sens de Matsumoto, et de type Source si et seulement si l'isotopie I est de type négatif.

Démonstration. — Montrons la première affirmation à l'aide de la classification locale des feuilletages (proposition B.1). Puisque h préserve l'aire, il a la propriété d'intersection forte, c'est-à-dire qu'il n'admet ni pétale attractif ou répulsif ni disque attractif ou répulsif. En particulier, \mathcal{G} ne peut pas être de type "Cycle" ou de type Pétale. Il reste à exclure le type Selle. Mais dans ce cas, l'indice de \mathcal{G} serait négatif ou nul ; nous verrons au chapitre suivant que l'indice de h serait aussi négatif ou nul (propositions 4.7 et 4.8), contrairement aux hypothèses.

Montrons la seconde affirmation. D'après Matsumoto, les types positif et négatif sont exclusifs. Soit γ n'importe quelle courbe de Jordan transverse au feuilletage \mathcal{G} , et suffisamment proche de 0. Il est clair que γ est indifférente, de type positif si 0 est un Puits, de type négatif sinon. Ceci termine la preuve. \square

b. Généralisation. — On se fixe une isotopie I aboutissant en $h \in \mathcal{H}^+$. On dira que I a un sens de rotation positif s'il existe un feuilletage \mathcal{G} de type Puits localement transverse à I . Symétriquement, on dira que I a un sens de rotation négatif s'il existe un feuilletage \mathcal{G} de type Source localement transverse à I . De manière équivalente, I a un sens de rotation positif (resp. négatif) s'il existe un changement de coordonnées $\Phi \in \mathcal{H}^+$ dans lequel la variation de la coordonnée θ le long de toute trajectoire de l'isotopie assez proche de 0 est strictement positive (resp. négative). D'après le lemme qui précède, cette définition généralise celle de Matsumoto. Il reste à en comprendre la portée.

Examinons tout d'abord le lien entre ce signe et l'ensemble de rotation, supposé non vide. Pour simplifier, on suppose également que h est non-dissipatif : il possède la propriété d'intersection locale. Les sens de rotation positifs et négatifs sont bien sûr symétriques, on se contente d'énoncer ce qui concerne le premier.

Lemme 3.21. —

- Si I a un sens de rotation positif, alors $\rho(I) \subset [0, +\infty]$.
- Si $\rho(I) \subset]0, +\infty]$, alors I a un sens de rotation positif.
- Si $\rho(I) \subset [0, +\infty]$ sans être réduit à $\{0\}$, et si 0 n'est pas accumulé par des points fixes contractiles de I , alors I a un sens de rotation positif.

Démonstration. — Le premier point est clair : en effet, si I a un sens de rotation positif, quitte à changer de coordonnées, la variation de θ le long de toute trajectoire de I assez proche de 0 est strictement positive.

Sous l'hypothèse du second point, 0 n'est pas accumulé par des points fixes contractiles de I . Le principe d'extension nous permet, sans modifier le germe de h en 0, de nous ramener au cas où I n'a aucun point fixe contractile dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (cf. appendice A). Il existe alors un feuilletage \mathcal{G} défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et localement transverse à I (théorème 3.1). Examinons les différents cas de la classification locale des

feuilletages donnée par la proposition B.1 de l'appendice B. Puisque h est supposé non dissipatif, \mathcal{G} n'est pas de type "Cycle". Si \mathcal{G} est de type Pétales, Selle ou Mixte, l'ensemble de rotation est $\{0\}$ (lemme 3.9). De même, le type Source entraînerait $\rho(I) \subset [-\infty, 0]$. Ainsi, \mathcal{G} ne peut être que de type Puits; autrement dit l'isotopie I a un sens de rotation positif. Les mêmes arguments donnent le troisième point du lemme. \square

Voici un exemple. La rotation fibrée $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + r)$ a un ensemble de rotation réduit à $\{0\}$, mais est de signe positif (pour l'isotopie $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + tr)$). Dans ce cas le signe apporte bien une information non fournie par l'ensemble de rotation.

Fixons maintenant $h \in \mathcal{H}^+$ vérifiant la propriété d'intersection locale et admettant un voisinage dans lequel 0 est l'unique point fixe, et discutons du signe des isotopies aboutissant en h , selon la nature de son ensemble de rotation (supposé non vide). Dans cette situation on peut appliquer le théorème 3.7 de réalisation des orbites périodiques : l'intervalle de rotation ne contient pas d'entier dans son intérieur.

Le cas général est celui où $\rho(h)$ n'est ni $\{-\infty\}$, ni $\{+\infty\}$, ni un singleton entier. Ici tout est limpide. Il existe une isotopie I_0 , unique à homotopie près, vérifiant $\rho(I_0) \subset [0, 1]$. Le lemme précédent nous dit que les isotopies $I_p = J^p I_0$ (où $J = (R_t)$ est le lacet des rotations) ont un sens de rotation positif si et seulement si $p \geq 0$, et négatif si et seulement si $p < 0$.

Si $\rho(h) = \{+\infty\}$, alors toutes les isotopies ont un sens de rotation positif, de la même façon toutes ont un sens de rotation négatif si $\rho(h) = \{-\infty\}$; cependant je ne sais pas si ces cas peuvent arriver pour un point fixe isolé (ceci est discuté à la section 3.6).

Enfin, examinons le cas où $\rho(h)$ est un singleton entier. On choisit une isotopie I_0 dont l'ensemble de rotation est $\{0\}$. Il est clair que les isotopies I_p , pour $p < 0$, ont un sens de rotation positif et pas négatif, et que les isotopies I_p , pour $p > 0$, ont un sens de rotation négatif et pas positif. Que dire du sens de rotation de I_0 ? Sous les hypothèses plus restrictives choisies par S. Matsumoto, I_0 a ou bien un sens de rotation positif, ou bien un sens de rotation négatif. Mais ceci n'est pas toujours le cas en général : par exemple le point Selle $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ n'est ni l'un ni l'autre, et c'est ce qui arrive plus généralement si l'indice du point fixe est différent de 1 (voir le chapitre 4). Et, bien qu'on le conjecture, on ne sait pas montrer que h ne peut pas être à la fois des deux types.

Conjecture 5. — Soit $h \in \mathcal{H}^+$, et supposons qu'il existe une isotopie aboutissant en h , qui a à la fois un sens de rotation positif et négatif. Alors h est conjugué à une homothétie.

Une homothétie a bien un sens de rotation positif et un sens de rotation négatif : en effet, elle est à la fois conjuguée à une similitude de nombre de rotation positif et à une similitude de nombre de rotation négatif, la première est transverse au feuilletage radial Puits et la seconde au feuilletage radial Source.

3.6. Discussion

Le théorème feuilleté équivariant. — La preuve du théorème feuilleté équivariant est difficile. Cependant, la preuve est beaucoup plus simple lorsque le groupe fondamental de la surface M est abélien, autrement dit pour l’anneau ouvert ou le tore (voir [LeC05]). Dans ce texte nous utilisons presque exclusivement le cas de l’anneau, seul l’épilogue nécessite le cas général.

Il est naturel de chercher à renforcer la notion de transversalité du théorème, en demandant que toute trajectoire de l’isotopie soit elle-même positivement transverse au feuilletage, et non pas seulement isotope à une courbe positivement transverse. On construit facilement une isotopie I pour laquelle cette transversalité forte n’a lieu pour aucun feuilletage : c’est ce qui arrive s’il existe un point en lequel l’isotopie est trop loin d’être autonome, au sens où des trajectoires de l’isotopie passent en ce point avec des directions très différentes. On peut cependant espérer trouver un feuilletage “fortement” transverse après avoir remplacé l’isotopie I par une isotopie I' qui lui est homotope.

Problème 6. — Soit I une isotopie sans point fixe contractile. Existe-t-il un feuilletage orienté \mathcal{G} et une isotopie I' homotope à I à extrémités fixées, dont toutes les trajectoires sont positivement transverses à \mathcal{G} ?

Cette question est d’ordre “philosophique”, un tel énoncé serait satisfaisant mais n’aurait probablement aucune conséquence importante.

La propriété d’intersection forte. — Soit $h \in \mathcal{H}^+$ un homéomorphisme conservatif, c’est-à-dire préservant l’aire. Cet homéomorphisme vérifie bien sûr la propriété d’intersection, et on peut voir cette propriété comme une version topologique de la préservation de l’aire. Il semble utile d’introduire une propriété *d’intersection forte*, également vérifiée dans le cas conservatif, en demandant que h n’admette ni courbe essentielle disjointe de son image, ni pétale attractif ou répulsif (voir le début du chapitre 4 pour les définitions). Cette propriété d’intersection forte est particulièrement adaptée à l’utilisation du théorème feuilleté équivariant, puisqu’elle oblige tout feuilletage transverse à une isotopie aboutissant en h à être de type Puits ou Source ou de type Selle.

D’autres énoncés de réalisation d’orbites périodiques. — Dans le cadre de la dynamique locale, il est naturel d’essayer d’élucider totalement les liens entre ensemble de rotation, indice de Poincaré-Lefschetz et existence d’orbites périodiques. Dans cette direction il me semble qu’il reste essentiellement deux situations à éclaircir, qui correspondent aux conjectures de ce paragraphe et du suivant. Dans ces deux situations on recherche une suite d’orbites périodiques dont les nombres de rotation n’appartiennent pas à l’ensemble de rotation, celui-ci ne contenant que la limite de ces nombres.

Conjecture 7. — Soit $h \in \mathcal{H}^+$ préservant l’aire, ou plus généralement vérifiant la propriété d’intersection forte. Supposons que 0 est un point fixe isolé de h , d’indice

1, et dont l'ensemble de rotation est $\{0\}$. Alors tout voisinage de 0 contient une orbite périodique.

La propriété d'intersection ("faible") ne suffit pas, comme le montre l'exemple d'indice 1 et d'ensemble de rotation $\{0\}$ dessiné sur la figure de l'avant-propos.

Version topologique de l'indice de Conley-Zehnder. — L'indice de Conley-Zehnder est un invariant associé à un point fixe contractile pour une difféotopie préservant l'aire. On peut en donner une version topologique.

Soit $h \in \mathcal{H}^+$ dont 0 est un point fixe isolé, vérifiant la propriété d'intersection locale, et I une isotopie aboutissant en h . D'après le théorème 3.7 de réalisation des orbites périodiques, l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation ne contient pas de nombre entier dans son intérieur. Nous pouvons par conséquent distinguer trois cas.

1. $\rho(I) = \{p_0\}$ avec $p_0 = \pm\infty$,
2. $\rho(I) = \{p_0\}$ où p_0 est un nombre entier,
3. $\rho(I)$ est un singleton non entier et non infini, ou bien n'est pas un singleton ; dans ces deux cas il existe un unique entier p_0 tel que $\rho(I) \subset [p_0, p_{0+1}]$.

Dans chacun des trois cas on peut définir l'indice de Conley-Zehnder du point fixe 0 pour l'isotopie I , en posant $\mathbf{Conley} - \mathbf{Zehnder}(I, 0) = p_0$ dans les deux premiers cas, et $\mathbf{Conley} - \mathbf{Zehnder}(I, 0) = p_0 + \frac{1}{2}$ dans le dernier.

Il est probable que le premier de nos trois cas ne puisse pas arriver, autrement dit que cet indice ne prenne jamais de valeur infinie. Ceci serait une conséquence d'un deuxième énoncé conjecturel de réalisation d'orbites périodiques.

Conjecture 8. — Si h vérifie la propriété d'intersection locale, et si $\rho(I) = \{+\infty\}$, alors il existe un entier p_0 et une suite $(x_p)_{p \geq p_0}$ tendant vers 0, où chaque x_p est un point fixe de I de nombre de rotation p .

Dans le cas où le point fixe est indifférent (*cf.* section 3.4), cette conjecture est donnée par le corollaire 3.17. Il reste donc à étudier le cas Selle. Nous verrons que dans ce cas, sous les hypothèses de la conjecture, le point fixe est accumulé par des orbites périodiques (corollaire 4.13). L'article [LeC01] résout une version globale de ce problème dans le cas où l'aire est préservée.

Sur la sphère, on peut construire à partir de l'indice de Conley-Zehnder un invariant global, ne dépendant que du temps un de l'isotopie, qui mesure la torsion entre deux points fixes. Soit h un homéomorphisme de la sphère, isotope à l'identité, fixant deux points N et S , et supposons que les germes de h en ces deux points sont isolés et vérifient la propriété d'intersection locale. On peut toujours trouver une isotopie I de l'identité à h dont tous les temps fixent N et S . On définit alors le nombre de torsion entre N et S ,

$$\mathrm{Tor}(h, N, S) = \mathbf{Conley} - \mathbf{Zehnder}(I, N) + \mathbf{Conley} - \mathbf{Zehnder}(I, S).$$

On voit facilement que ce nombre ne dépend pas du choix de l'isotopie I .

Orbites périodiques dans l'anneau ouvert. — En utilisant les techniques de ce chapitre, on peut aussi montrer une version du théorème de Poincaré-Birkhoff-Franks dans l'anneau ouvert.

Théorème. — *Soit I une isotopie dans l'anneau ouvert, dont le temps h a la propriété d'intersection. Alors tout rationnel dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation de I est réalisé par une orbite périodique.*

En effet, comme d'habitude, on se ramène au cas des points fixes contractiles. Il s'agit alors de montrer que si I n'a pas de point fixe contractile, l'ensemble de rotation est ou bien positif, ou bien négatif. Soit \mathcal{F} un feuilletage transverse à l'isotopie. Puisque h a la propriété d'intersection, \mathcal{F} n'a pas de feuille fermée. S'il existe une feuille ayant un ensemble ω -limite non vide, alors on peut, par une petite perturbation à support compact, transformer \mathcal{F} en un feuilletage ayant une feuille fermée; par stabilité des feuilletages transverse, ceci contredirait encore la propriété d'intersection. Ainsi le feuilletage \mathcal{F} n'a pas de récurrence. Il existe alors une feuille traversant l'anneau (voir [LeR00]). On en déduit le résultat.

Sens de rotation de Matsumoto et ensembles de rotation. — Nous avons vu que le sens de rotation de Matsumoto apporte parfois une information qui n'est pas donnée par l'ensemble de rotation, c'est le cas par exemple pour certaines rotations fibrées dont l'ensemble de rotation est $\{0\}$. Je ne sais pas si le sens de rotation, généralisé en terme de feuilletage transverse, est indépendant du "bit d'information" donné par les ensembles $\rho_V(I)$ (cf. la discussion du chapitre 2). La conjecture suivante est un essai pour caractériser le sens de rotation en termes d'ensembles de rotation.

Conjecture 9. — *Soit I une isotopie aboutissant en $h \in \mathcal{H}^+$ et supposons que h vérifie la propriété d'intersection locale (ou même simplement qu'il n'est pas localement conjugué à une homothétie). Alors sont équivalents :*

1. l'isotopie I a un sens de rotation positif, *i.e.* elle admet un feuilletage transverse de type Source, ;
2. le point fixe 0 n'est pas accumulé par des points fixes contractiles, et pour tout voisinage V de 0 assez petit, l'ensemble $\rho_V(I)$ est inclus dans $[0, +\infty]$ sans être réduit à $\{0\}$.

Le fait que la deuxième propriété implique la première est donné par le lemme 3.11 (avec des hypothèses affaiblies, voir la preuve). Pour l'implication réciproque, le seul fait non trivial est l'existence d'un nombre de rotation strictement positif dans tout voisinage du point fixe. La conjecture se ramène ainsi au problème suivant.

Problème 10. — *Si le temps h de I n'est pas une homothétie, et s'il existe un feuilletage transverse de type Puits, est-il vrai que pour tout voisinage de 0 l'ensemble $\rho_V(I)$ contient des nombres strictement positifs ?*

Remarquons qu’une réponse positive permettrait de résoudre le problème 3 évoqué dans la discussion du chapitre 2. Rappelons qu’il s’agissait de montrer qu’en l’absence de points fixes contractiles, si $\rho_V(I) \subset [0, +\infty]$ pour tout V de 0 assez petit, alors l’isotopie I admet un arc positif. Sous cette hypothèse, on peut considérer un feuilletage \mathcal{F} transverse à I . Si la singularité de \mathcal{F} est de type Puits, Selle, Pétale ou Mixte, on trouve un arc positif parmi les feuilles de \mathcal{F} . S’il s’agit d’un Cycle, on peut raisonner comme dans la preuve du lemme 3.11 pour perturber \mathcal{F} en un feuilletage de type Puits. Il reste à étudier le cas Source, dans ce cas on aimerait montrer que $\rho_V(I)$ contient des nombres strictement négatifs, ce qui revient au problème 10.

Le problème 10 est aussi lié à la conjecture 7. En effet, les hypothèses de cette conjecture contiennent celles sous lesquelles S. Matsumoto a défini son sens de rotation. Nous avons vu que dans ce cas, l’isotopie admet un feuilletage transverse de type Puits ou Source. Ayant résolu le problème précédent par l’affirmative, nous obtiendrions que l’ensemble $\rho_V(I)$ n’est jamais égal à $\{0\}$. Pour conclure il faudrait résoudre un dernier problème qui, une fois de plus, concerne l’existence d’orbites périodiques.

Problème 11. — Soit h vérifiant la propriété d’intersection locale, et supposons que le point fixe 0 n’est pas accumulé par des orbites périodiques. Est-il vrai que pour tout voisinage V de 0 assez petit, l’ensemble $\rho_V(I)$ est un singleton? (Avec les notations de la discussion du chapitre 2, a-t-on $\rho(I) = [\alpha^+, \alpha^-]$ pour un certain nombre α ?).

Une réponse positive renforcerait l’énoncé du théorème 3.7. L’une des difficultés (mais pas la seule) consiste à savoir si, lorsqu’il existe un voisinage de 0 ne contenant aucune orbite périodique pour un homéomorphisme $h \in \mathcal{H}^+$, le germe de h en 0 coïncide avec le germe d’un homéomorphisme $h' \in \mathcal{H}^+$ n’ayant aucune orbite périodique dans l’anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On remarque que l’hypothèse n’interdit pas que 0 soit limite d’une suite de points périodiques de h dont les périodes tendent vers l’infini.

Sens de rotation et théorèmes de points fixes. — S. Matsumoto utilise son sens de rotation pour énoncer et démontrer des résultats d’existence de points fixes. Voici l’un d’entre eux ([Mat01], théorème 5).

Théorème (Matsumoto). — *Soit h un homéomorphisme de la sphère isotope à l’identité, préservant l’aire, et n’ayant qu’un nombre fini de points fixes. Soit N un point fixe d’indice 1. Alors il existe un autre point fixe S associé à N au sens suivant : pour toute isotopie I de l’identité à h et fixant N et S , le sens de rotation de I autour de N est positif si et seulement si le sens de rotation de I autour de S est négatif. (Autrement dit pour tout feuilletage orienté \mathcal{F} transverse à I , N est une singularité de type Puits si et seulement si S est une singularité de type Source.)*

On peut résumer en disant que tout point fixe d’indice 1 fait partie d’un “axe de rotation”. Remarquons que l’énoncé du théorème n’est jamais vide, puisqu’un

homéomorphisme conservatif de la sphère n'ayant qu'un nombre fini de points fixes en a toujours au moins un (et même deux) d'indice 1. Bien que je n'y sois pas parvenu, on devrait pouvoir démontrer ce théorème de Matsumoto à l'aide du théorème feuilleté équivariant, dans l'esprit de l'article [LeC08]. Dans l'épilogue nous démontrerons de cette façon le théorème 5.1 de [Mat01].

CHAPITRE 4

...ET QUAND ÇA NE TOURNE PAS

Dans ce chapitre, nous analysons la dynamique près d'un point fixe isolé d'indice différent de 1. Nous montrons l'existence de structures dynamiques communes à tous les points fixes d'indice donné : quand l'indice est > 1 , ces structures sont des *pétales attractifs et répulsifs* ; lorsque l'indice est < 1 , ces structures sont des *secteurs transversalement hyperboliques* contenant des *branches stables et instables*. Dans les deux cas le point fixe est éclatable et l'ensemble de rotation est $\{0\}$: il n'y a pas de mouvement de rotation autour d'un point fixe d'indice différent de 1. Les énoncés précis prennent la forme d'un théorème suivi de trois addenda.

Théorème 4.1. — *Soit h un homéomorphisme du plan isotope à l'identité, et supposons que 0 est un point fixe isolé dont l'indice de Poincaré-Lefschetz est différent de 1. Il existe alors une isotopie I dans \mathcal{H}^+ de l'identité à h dont l'ensemble de rotation est $\{0\}$. Pour tout feuilletage orienté \mathcal{G} qui est localement transverse à cette isotopie I au voisinage de 0 , le feuilletage \mathcal{G} et l'homéomorphisme h ont le même indice en 0 .*

Addendum 4.2. — *Lorsque $\text{Ind}(h, 0) = 1 + p$ avec $p > 0$, tout voisinage de 0 contient p pétales attractifs et p pétales répulsifs pour h , deux à deux d'intersection $\{0\}$ et cycliquement alternés autour de 0 . De plus, les bords des pétales peuvent être trouvés parmi les feuilles de tout feuilletage \mathcal{G} vérifiant l'énoncé du théorème.*

Addendum 4.3. — *Lorsque $\text{Ind}(h, 0) = 1 - p$ avec $p > 0$, tout voisinage de 0 contient une famille constituée de p secteurs transversalement hyperboliques attractifs et p secteurs transversalement hyperboliques répulsifs, deux à deux d'intersection $\{0\}$ et cycliquement alternés autour de 0 . Étant donné un voisinage U de 0 assez petit, on peut alors associer à chaque secteur attractif (resp. répulsif) S de notre famille un ensemble $k_{S,U}$ qui est une branche instable (resp. stable) U -locale incluse dans S . De plus, la famille de secteurs peut être trouvée parmi les secteurs hyperboliques purs de l'un des feuilletages \mathcal{G}' vérifiant l'énoncé du théorème.*

Addendum 4.4. — *Sous les hypothèses du théorème, le point fixe est éclatable.*

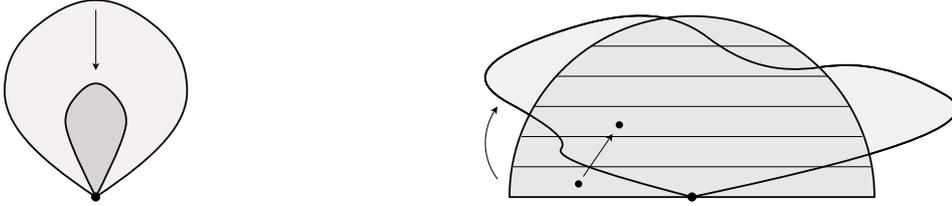


FIGURE 1. Pétale et secteur transversalement hyperbolique attractif

Rappelons les définitions des structures qui sont dessinées sur la figure 1. Un ensemble homéomorphe à un disque euclidien fermé est appelé disque topologique fermé. Nous notons p_y la fonction $(x, y) \mapsto y$ définie sur le plan.

Définition 4.5. — Un *pétale attractif* pour $h \in \mathcal{H}^+$ est un disque topologique fermé P dont la frontière contient 0, et qui vérifie

$$h(P) \subset \text{Int}(P) \cup \{0\}.$$

Définition 4.6. — Un *secteur transversalement hyperbolique attractif* pour $h \in \mathcal{H}^+$ est un disque topologique fermé S dont la frontière contient le point 0, tel qu'il existe un changement de coordonnées $\Phi \in \mathcal{H}^+$ pour lequel

- $\Phi(S)$ est le demi-disque unité $\{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$,
- la fonction $p_y \circ \Phi$ est une *fonction de Lyapounov* de h sur S : pour tout point $m \neq 0$ de S , on a

$$p_y \circ \Phi(h(m)) > p_y \circ \Phi(m).$$

Un *pétale répulsif* est un pétale attractif pour h^{-1} , un *secteur transversalement hyperbolique répulsif* est un secteur transversalement hyperbolique attractif pour h^{-1} . Les *branches stables* sont des généralisations des variétés stables des difféomorphismes hyperboliques, on donnera leurs propriétés à la section 4.3. Les *secteurs hyperboliques purs* des feuilletages sont définis dans l'appendice B, le lecteur est invité consulter la figure 2 de cet appendice. On peut se reporter à l'article [LeR04] pour une version antérieure, plus faible, de ces résultats assortie d'exemples et de commentaires plus fournis.

La stratégie de démonstration est la suivante. Considérons $h \in \mathcal{H}^+$ dont 0 est un point fixe isolé d'indice différent de 1. On commence par démontrer l'existence d'une "bonne" isotopie I aboutissant en h . Appliquant le théorème feuilleté équivariant à cette isotopie, on obtient un feuilletage orienté \mathcal{F} qui lui est transverse. Comme l'isotopie est "bonne", le feuilletage \mathcal{F} et l'homéomorphisme h ont le même indice au point 0. En étudiant le feuilletage on trouve alors, selon la valeur de l'indice, une famille de feuilles attachées à 0 dans le passé et le futur (bordant des pétales du feuilletage), ou bien une famille de secteurs hyperboliques du feuilletage. Dans le premier cas, la transversalité nous dit immédiatement que les pétales du feuilletage sont des pétales attractifs ou répulsifs pour l'homéomorphisme. Dans le second

cas, on construit les branches stables ou instables en itérant les secteurs hyperboliques ; ceci fonctionne bien si l'on a “épuré” les secteurs hyperboliques en perturbant légèrement le feuilletage. Dans les deux cas, le critère d'éclatement de la section 2.2 s'applique, qui permet de remplacer le point fixe par un cercle sur lequel h agit avec un point fixe. On en déduit que l'ensemble de rotation local de h est nul.

Dans la section 4.4 nous verrons, plus généralement, que l'on peut aussi construire un éclatement lorsque h admet un itéré d'indice différent de 1. Cette situation inclut le type Selle étudié par P. Le Calvez et J.-C. Yoccoz (*cf.* la classification donnée à section 3.4). Cette construction requiert l'existence des *composantes de Reeb* établie dans [LeR05, LeR] par une analyse plus fine de la dynamique.

4.1. Bonnes isotopies

Dans cette partie nous démontrons le théorème 4.1. La principale difficulté concerne le choix d'une bonne isotopie ; ce choix est effectué en définissant l'indice d'une isotopie. Ce n'est qu'*a posteriori* qu'on pourra démontrer que l'ensemble de rotation d'une bonne isotopie est $\{0\}$.

a. Exemple, définition. — Considérons l'homéomorphisme Selle défini par $m_{-1}(x, y) = (2x, y/2)$. On obtient une isotopie I_0 de l'identité à m_{-1} en suivant le flot (h_t) engendré par le champs de vecteurs dessiné sur la figure 2, à gauche. L'isotopie est transverse à un feuilletage de type Selle. Changeons maintenant d'isotopie, par exemple en composant I_0 par le lacet J des rotations ; quelques trajectoires de la nouvelle isotopie I_1 sont représentées sur la partie droite de la figure 2. La coordonnée θ varie maintenant le long des trajectoires de façon strictement monotone ; ceci signifie que la nouvelle isotopie est transverse au feuilletage radial représenté sur le même dessin. Ce second feuilletage ne nous dit pas grand'chose sur la dynamique de m_{-1} , et l'isotopie $I_1 = JI_0$ semble moins naturelle que I_0 . Nous allons essayer de formaliser ceci en définissant un indice pour les isotopies (voir aussi [LeR04, section 3.3] et [LeC08, sections 1 et 3]).

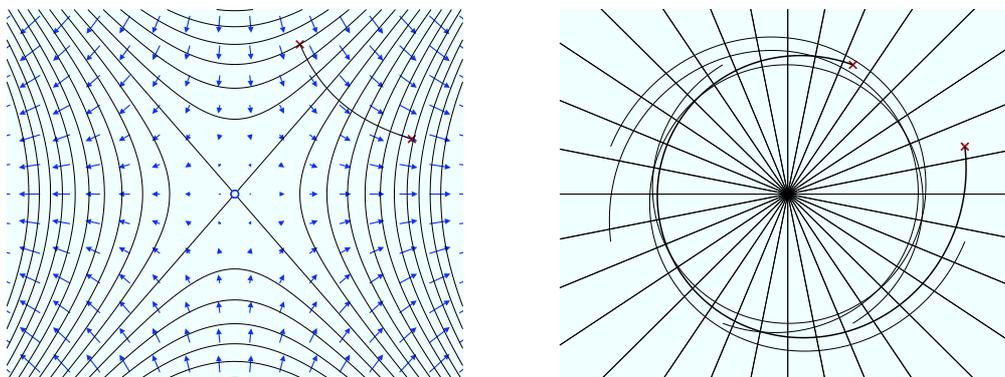


FIGURE 2. Une “bonne” et une “mauvaise” isotopie pour le modèle m_{-1}

Soit X un champ de vecteurs sur le plan dont 0 est une singularité isolée. Rappelons que *l'indice de Poincaré-Hopf* de 0 pour X est le nombre (algébrique) de tours que fait le vecteur $X(x)$ lorsque le point x parcourt une courbe entourant la singularité. L'indice de Poincaré-Hopf pour un feuilletage \mathcal{G} ayant 0 comme singularité isolée est le nombre $\text{Ind}(\mathcal{G}, 0)$ défini comme l'indice du champ de vecteurs unitaire X défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et tangent à \mathcal{G} .

De façon analogue, *l'indice de Poincaré-Lefschetz* pour un homéomorphisme $h \in \mathcal{H}^+$ ayant 0 comme point fixe isolé est le nombre $\text{Ind}(h, 0)$, indice de Poincaré-Hopf pour le champ de vecteurs X_h qui vaut $h(x) - x$ au point x . Dans tous les cas l'indice peut prendre toute valeur entière, comme le montrent les exemples de la figure 1 de l'avant-propos (la plupart des dessins peuvent être interprétés comme représentant, au choix, un feuilletage ou un homéomorphisme).

Rappelons que chacun de ces nombres est un invariant de conjugaison topologique locale (l'indice de Poincaré-Hopf a d'ailleurs un sens pour les feuilletages continus, voir par exemple [LeC08]), qui ne dépend que de la classe d'homotopie de l'objet considéré. Voici, rapidement, comment démontrer l'invariance topologique pour l'indice de Poincaré-Lefschetz. Soit U un voisinage ouvert, simplement connexe, de 0. Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow U \setminus \{0\}$ une courbe fermée simple évitant le point fixe. Si h n'a pas de point fixe sur $U \setminus \{0\}$, cette courbe induit une application

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow V := U \times U \setminus \Delta \\ t &\longmapsto (\gamma(t), h(\gamma(t))) \end{aligned}$$

où $\Delta = \{(x, x)\}$ est la diagonale de $U \times U$. L'espace V est homéomorphe à $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$, par conséquent il existe un entier k tel que la courbe Γ est (librement) homotope au lacet $t \mapsto (0, \gamma(t))$ parcouru k fois. Il est clair que le nombre k ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ; à vrai dire il n'en dépend même pas (si l'on remplace γ par $p.\gamma$, alors Γ est remplacée par $p.\Gamma$). L'indice de Poincaré-Lefschetz est égal à k , et cette description purement topologique montre qu'il s'agit d'un invariant de conjugaison (même pour une conjugaison renversant l'orientation).

Dans le cas d'un homéomorphisme, le champ X_h indique la direction de la géodésique allant de x à $h(x)$ pour la métrique euclidienne du plan. Ceci donne l'idée d'une façon de définir *l'indice du point fixe 0 pour une isotopie I* de l'identité à h , lorsque 0 n'est pas accumulé par des points fixes contractiles. On identifie le plan troué $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ à l'anneau $]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$, et on munit l'anneau de sa structure euclidienne produit $dr^2 + d\theta^2$ (géométriquement, il s'agit d'un cylindre et non pas d'un plan troué!). Pour tout point $x \neq 0$ assez proche de 0, il existe alors une unique géodésique de l'anneau, allant de x à $h(x)$, et homotope, à extrémités fixées, à la trajectoire de x sous l'isotopie I . Soit $X_I(x)$ le vecteur unitaire tangent à cette géodésique au point x . On a ainsi construit un champ de vecteurs X_I sur l'anneau, et

l'indice de 0 pour l'isotopie est défini comme l'indice de Poincaré-Hopf de ce champ. On le note $\text{Ind}(I, 0)$.⁽¹⁾

Reprenons les exemples ci-dessus (figure 2). L'homéomorphisme m_{-1} est notre modèle d'homéomorphisme d'indice -1 . Le champ de vecteurs \vec{X}_{I_0} , utilisé pour définir l'indice de l'isotopie I_0 , est très proche du champ $\vec{X}_{m_{-1}}$ utilisé pour définir l'indice de l'homéomorphisme, et on voit facilement que les indices coïncident. L'indice du feuilletage transverse vaut aussi -1 . Par contre les indices de 0 pour l'isotopie I_1 et son feuilletage transverse valent 1. Nous pouvons maintenant distinguer les bonnes isotopies des mauvaises.

Définition. — Soit $h \in \mathcal{H}^+$ fixant uniquement 0. On dira qu'une isotopie I aboutissant en h est une *bonne isotopie* si elle donne au point 0 le même indice que h .

b. Existence. — L'énoncé suivant décrit complètement le lien entre l'indice pour h et l'indice pour les isotopies aboutissant en h . En particulier, il donne l'existence d'une bonne isotopie, qui est tout ce dont nous allons avoir besoin ici.

Proposition 4.7 (Le Calvez-Le Roux). — Soit $h \in \mathcal{H}^+$, fixant seulement 0.

- Si $\text{Ind}(h, 0) \neq 1$, alors il existe une unique classe d'homotopie d'isotopies I aboutissant en h telles que $\text{Ind}(I, 0) = \text{Ind}(h, 0)$; les autres isotopies sont d'indice 1.
- Si $\text{Ind}(h, 0) = 1$, alors toutes les isotopies ont indice 1.

Démonstration. — La première étape consiste à traiter le cas des homéomorphismes “assez proches de l'identité”, au sens de la condition géométrique suivante :

(\star) pour tout point $x \neq 0$, le point 0 n'appartient pas au segment $[xh(x)]$.

On pourrait ensuite montrer que tout h d'indice différent de 1 est conjugué à un h' qui vérifie cette condition : c'est ce qui est fait [LeR05], mais la preuve utilise une bonne partie de cette référence. Ici nous allons plutôt utiliser un argument de connexité, qui marche également en indice 1; l'argument s'appuie sur un résultat difficile de B. Schmitt. Mais commençons par nous occuper de la condition (\star).

Affirmation. — La proposition 4.7 est vraie sous la condition (\star). De plus, pour chaque valeur de $k \in \mathbb{Z}$, il existe un homéomorphisme m_k , fixant uniquement 0 avec un indice égal à k , et satisfaisant la condition (\star).

Preuve de l'affirmation. — Pour montrer le second point nous considérons, pour chaque entier k , le champ de vecteurs donné par

$$X_{(x,y)} = R_{(k-1)\theta}(x, y)$$

⁽¹⁾Tel que nous le définissons ici, l'indice vaut 1 de plus que l'indice des isotopies défini dans [LeC08], ou que ce qui est appelé indice partiel dans [LeR04]. Ceci vient du choix de définir l'indice directement dans le plan troué, sans passer par le revêtement universel.

où θ est la coordonnée polaire usuelle et R_α désigne la rotation d'angle α . Ce champ s'intègre en une isotopie I fixant uniquement 0, notons m_k l'homéomorphisme temps un de I . Cet homéomorphisme satisfait clairement la condition (\star) . L'indice de Poincaré-Lefschetz de 0 pour m_k est égal à k .

Passons au premier point. Soit h satisfaisant cette condition, et I une isotopie quelconque aboutissant en h . Considérons la trajectoire d'un point x donné sous l'isotopie I . D'après la condition (\star) , la variation $\rho_1(x)$ de la coordonnée polaire θ le long de cette trajectoire n'est pas un demi-entier. Quitte à composer I par l'isotopie de rotations $J^p = (R_{pt})_{t \in [0,1]}$ pour la bonne valeur de p , on peut donc supposer que c'est un nombre dans $] -1/2, 1/2[$. Par continuité, ceci est alors vrai pour tout point $x \neq 0$. Dans cette situation, pour tout point x , la trajectoire de x est homotope, dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, au segment géodésique $[xh(x)]$, à la fois pour la métrique plane et pour la métrique cylindrique. On en déduit que l'indice de 0 pour l'isotopie I coïncide avec l'indice pour l'homéomorphisme h . Si $I' = J^p I$ est une isotopie aboutissant encore en h mais non homotope à I , la variation angulaire $\rho_1(x)$ le long d'une trajectoire de I' sera cette fois-ci incluse dans l'intervalle $]p - 1/2, p + 1/2[$; son signe ne dépend pas de x , le champ de vecteurs $\vec{X}_{I'}$ est transverse au champ radial d'indice 1, il a donc aussi un indice 1. Ceci prouve l'affirmation. \square

Pour en déduire le cas général, nous allons utiliser la description des composantes connexes par arcs de l'espace des homéomorphismes fixant uniquement 0, due à B. Schmitt ([Sch79], voir aussi [Sla93, Bon01]).

Théorème (Schmitt). — *L'ensemble des homéomorphismes de \mathcal{H}^+ qui fixent seulement 0, avec un indice donné k , est connexe par arcs.*

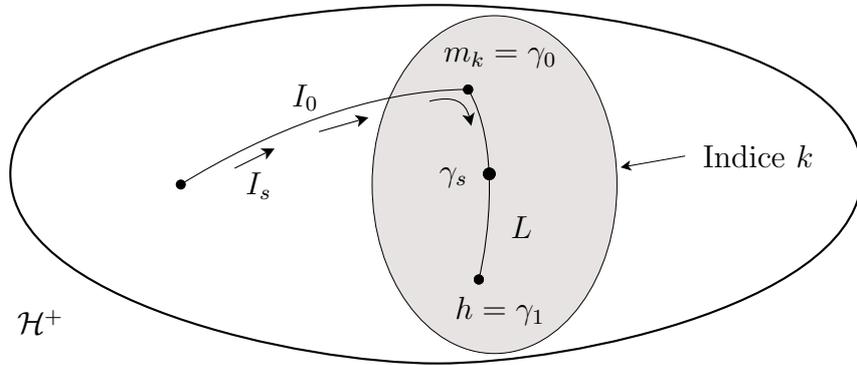


FIGURE 3. La famille d'isotopies $(I_s)_{s \in [0,1]}$

Considérons maintenant un homéomorphisme $h \in \mathcal{H}^+$ fixant uniquement 0, et notons k l'indice de 0 pour h . Soit I_0 une bonne isotopie pour l'homéomorphisme m_k , de même indice que h , donné par l'affirmation. D'après le théorème de Schmitt, il existe un chemin $L = (\gamma_s)$ de m_k à h , constitué d'homéomorphismes fixant uniquement 0. En concaténant l'isotopie I_0 avec le chemin L on obtient une isotopie I_1

de l'identité à h . Mieux, les isotopies I_0 et I_1 sont reliées par une famille continues d'isotopies $(I_s)_{s \in [0,1]}$ dont les temps un sont les homéomorphismes γ_s (cf. figure 3). Puisque chaque γ_s fixe uniquement le point 0, l'indice de I_s est bien défini pour tout s , c'est un entier dépendant continûment de s , on en déduit que les indices pour I_0 et I_1 sont égaux. En particulier, I_1 est une bonne isotopie pour h . Le même procédé montre que, pour tout entier p , les isotopies $J^p I_0$ et $J^p I_1$ donnent le même indice, ce qui conclut. \square

c. Indice d'un feuilletage transverse. — Le lien entre l'indice d'une isotopie et l'indice d'un feuilletage transverse est encore plus clair.

Proposition 4.8 (Le Calvez). — *Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ sans point fixe contractile dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si \mathcal{F} est un feuilletage de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, transverse à l'isotopie I , alors $\text{Ind}(I, 0) = \text{Ind}(\mathcal{F}, 0)$.*

Voici une conséquence immédiate, et intéressante, des propositions 4.7 et 4.8 : avec les mêmes notations, si l'indice du feuilletage est différent de 1, alors l'indice de l'homéomorphisme h , temps un de l'isotopie I , est égal à celui du feuilletage.

La preuve d'origine se trouve dans l'article [LeC08], section 3. Nous nous en inspirons, mais nous utilisons aussi la classification locale des feuilletages pour nous ramener à un cas facile où tout se passe comme si l'indice du feuilletage était différent de 1 (voir [LeC08], proposition 3.4). Nous renvoyons à cet article pour plus de détail.

Démonstration. — Supposons d'abord que le feuilletage \mathcal{F} est de type Cycle. L'indice de 0 pour \mathcal{F} vaut 1. Quitte à conjuguer, on peut supposer que le cercle $\{r = 1\}$ est une feuille de \mathcal{F} ; par transversalité, le disque unité est alors attractif pour h , temps un de l'isotopie I . Le champ de vecteurs X_I définissant l'indice de I est transverse au cercle unité, et l'indice de 0 pour I est aussi égal à 1.

Supposons ensuite que le feuilletage est de type Puits. Quitte à conjuguer nous pouvons supposer que \mathcal{F} coïncide, au voisinage de 0, avec le feuilletage en demi-droites issues de 0. Soit γ un petit cercle euclidien autour de 0. Par transversalité locale, la variation de la coordonnée θ le long de la trajectoire d'un point quelconque de γ est strictement positive, on voit que le champ de vecteurs X_I est transverse au feuilletage le long de γ , par suite feuilletage et isotopie ont le même indice, qui est d'ailleurs encore égal à 1. Le même raisonnement fonctionne bien sûr aussi pour le type Source.

Supposons maintenant que \mathcal{F} admette une feuille F^+ qui va de l'infini à 0, c'est-à-dire telle que $\alpha(F^+) = \emptyset$ et $\omega(F^+) = \{0\}$, ainsi qu'une feuille F^- allant de 0 à l'infini ; c'est le cas par exemple si \mathcal{F} est le feuilletage Selle. Par transversalité, les itérés de F^+ par h sont tous disjoints de F^- , et les droites topologiques $h^{-1}(F^+)$, F^+ , $h(F^+)$, F^- sont disposées dans cet ordre cyclique autour de 0. Quitte à conjuguer, nous pouvons donc supposer qu'il s'agit des quatre demi-droites $\{\theta = 0\}$, $\{\theta = \frac{1}{4}\}$, $\{\theta = \frac{1}{2}\}$, $\{\theta = \frac{3}{4}\}$. Dans cette situation, on voit facilement que la variation de la coordonnée θ le long de la trajectoire d'un point quelconque de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est comprise strictement entre $-\frac{1}{2}$

et $+\frac{1}{2}$. Comme dans la preuve de l'affirmation au paragraphe précédent, on en déduit que l'indice de I coïncide avec celui de son temps un h . Comme dans [LeC08], on considère maintenant, pour chaque point x de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, un arc δ_x joignant x à $h(x)$ et positivement transverse au feuilletage, et on définit l'ensemble O_x réunion des feuilles qui rencontrent δ_x . Cet ensemble est homéomorphe à $[0, 1] \times \mathbb{R}$ (cf. figure 4). Soit γ une courbe de Jordan. On considère alors l'ensemble

$$E = \{(x, y), x \in \gamma, y \in O_x \text{ et } y \neq x\}.$$

En utilisant l'hypothèse sur la topologie du feuilletage, on peut montrer que l'application $p : E \rightarrow \gamma$, qui à (x, y) associe le point x , est une fibration localement triviale. Remarquons que l'application $s_0 : x \mapsto (x, h(x))$ est une section de cette fibration. D'autre part, si $X_{\mathcal{F}^\perp}$ désigne un champ de vecteurs positivement transverse à \mathcal{F} en chaque point, et si ε est un nombre positif assez petit, alors l'application $s_1 : x \mapsto (x, x + \varepsilon X_{\mathcal{F}^\perp})$ est aussi une section de la fibration p . Puisque la fibre de p est contractile, l'espace des sections est connexe par arcs, et on peut interpoler s_0 et s_1 en une famille continue $(s_t)_{t \in [0, 1]}$ de sections de p . Ceci nous fournit une déformation continue du champ X_h définissant l'indice de h au champ $\varepsilon X_{\mathcal{F}^\perp}$, parmi les champs de vecteurs définis sur γ et ne s'y annulant pas. Par conséquent l'indice de ces deux champs le long de γ est le même, et le point 0 a même indice pour h et pour \mathcal{F} . La proposition est démontrée dans ce cas.

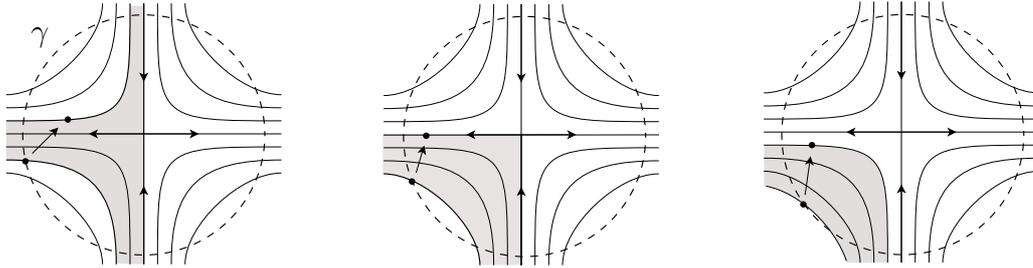


FIGURE 4. Quelques ensembles O_x , union des feuilles entre x et son image, lorsque \mathcal{F} est le feuilletage Selle

Lorsque \mathcal{F} n'est ni de type Cycle ni de type Puits ou Source, c'est-à-dire s'il est de type Pétale, Selle ou Mixte, il existe toujours une feuille F^+ dont l'ensemble ω -limite est $\{0\}$, et une feuille F^- dont l'ensemble α -limite est $\{0\}$ (corollaire B.9 de l'appendice B). On peut alors se ramener au cas précédent, voici comment. Soit V un voisinage simplement connexe de 0 qui ne contient pas entièrement F^+ ni F^- . En utilisant l'appendice A, on construit un homéomorphisme h' de V qui coïncide avec h au voisinage de 0 et qui n'a pas de point fixe contractile dans V . En conjuguant h' par un plongement $i : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est l'identité au voisinage de 0, on obtient un homéomorphisme $h'' \in \mathcal{H}^+$, qui coïncide encore avec h au voisinage de 0. Notons \mathcal{F}'' l'image par le plongement i de la trace de \mathcal{F} sur V . Soit I'' une isotopie aboutissant en h'' et homotope, au voisinage de 0, à l'isotopie I . Alors I'' est encore localement transverse à \mathcal{F}'' au voisinage de 0 (on a perdu la transversalité en dehors d'un

voisinage de 0, mais peu importe). D'autre part, le feuilletage \mathcal{F}'' possède maintenant une feuille allant de l'infini à 0 et une autre allant de 0 à l'infini. On peut désormais reprendre les arguments précédents (quitte à considérer une courbe de Jordan γ suffisamment proche de 0 pour que la transversalité locale s'applique). \square

d. Preuve du théorème 4.1 et de l'addendum 4.4. — Soit $h \in \mathcal{H}^+$ dont 0 est un point fixe isolé d'indice différent de 1. D'après l'appendice A, on peut supposer que 0 est le seul point fixe de h . D'après la proposition 4.7, il existe une bonne isotopie I de l'identité à h : l'indice de l'isotopie au point 0 est égal à l'indice de h . Le théorème feuilleté équivariant 3.1 nous fournit maintenant un feuilletage \mathcal{G} défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et transverse à I , et même localement transverse d'après la proposition 3.2. D'après la proposition 4.8 ce feuilletage a même indice en 0 que l'isotopie I , et donc aussi que l'homéomorphisme h . En particulier cet indice est différent de 1 : d'après l'étude locale des feuilletages menée dans l'appendice B, on peut trouver une demi-feuille positive F^+ de \mathcal{F} dont l'ensemble ω -limite est $\{0\}$, et une demi-feuille négative F^- dont l'ensemble α -limite est $\{0\}$. Puisque le feuilletage est transverse à l'isotopie I , on en déduit que l'ensemble de rotation local de I est $\{0\}$ (voir les lemmes 3.9 et 2.12). Ceci termine la preuve du théorème 4.1.

L'addendum 4.4 découle également de cette construction. En effet, soit U un secteur délimité par les demi-feuilles F^+ et F^- (dans les sections suivante, on verra qu'on peut choisir un tel secteur U comme étant un pétale si l'indice est > 1 , ou un secteur hyperbolique si l'indice est < 1). Par transversalité locale, pour tout voisinage V de 0, il existe un voisinage $W \subset V$ tel que

$$h(\text{Adhe}(U) \cap W) \subset (\text{Int}(U) \cap V) \cup \{0\}.$$

On en déduit que les germes en 0 des itérés $h^n(F^+)$ sont deux à deux disjoints. D'après le critère donné par la proposition 2.6, h est éclatable en 0.

4.2. Points fixes d'indice > 1

Nous démontrons ici l'addendum 4.2 concernant l'existence de pétales attractifs et répulsifs. Reprenons les objets intervenant dans le théorème 4.1, et supposons que l'indice de h en 0 est $1 + p$ avec $p > 0$. L'indice du feuilletage \mathcal{G} en 0 est égal à celui de h . Soit V un voisinage de 0. D'après l'étude locale des feuilletages, V contient une famille de p pétales directs et p pétales indirects du feuilletage, deux à deux d'intersection égale à $\{0\}$, les pétales directs et indirects étant alternés autour de 0. Par transversalité, tout pétale direct de \mathcal{G} est un pétale attractif de h , et tout pétale indirect de \mathcal{G} est un pétale répulsif de h . Ceci conclut.

4.3. Points fixes d'indice < 1

Nous démontrons ici l'addendum 4.3 concernant l'existence de secteurs hyperboliques transverses et de branches stables et instables.

a. Secteurs purement hyperboliques et branches stables. — Nous expliquons d’abord comment ramener le résultat à la recherche d’un feuilletage transverse ayant suffisamment de secteurs purement hyperboliques.

Considérons $h \in \mathcal{H}^+$ ayant 0 comme point fixe isolé, et un feuilletage \mathcal{G} défini sur un voisinage époiné de 0 et localement transverse à h . Soit S un secteur purement hyperbolique indirect de \mathcal{G} (voir l’appendice B) : à conjugaison près, on peut supposer que S est le demi-disque unité supérieur, et que la trace de \mathcal{G} sur S est le feuilletage en droites verticales orientées de la droite vers la gauche. La transversalité locale nous dit alors que pour tout disque euclidien D assez petit, l’ensemble $S \cap D$ est un secteur transversalement hyperbolique attractif pour h . D’autre part, une construction classique permet d’associer naturellement à tout secteur transversalement hyperbolique attractif une “branche instable” de h ; pour les détails de la proposition suivante, nous renvoyons le lecteur à la partie 5.2 de [LeR04].

Proposition 4.9. — *Soit $h \in \mathcal{H}^+$ dont 0 est un point fixe isolé, et S un secteur transversalement hyperbolique attractif pour h . Pour tout disque topologique U voisinage de 0, considérons l’ensemble*

$$\bigcap_{n \geq 0} h^n(\text{Adhe}(S \cap U))$$

et notons $k_{S,U}$ la composante connexe de 0. Supposons que U ne rencontre pas $h(S) \setminus S$. Alors

1. $k_{S,U}$ rencontre la frontière de U ;
2. $k_{S,U}$ est compact, connexe, plein, c’est-à-dire de complémentaire connexe ;
3. $h^{-1}(k_{S,U}) \subset k_{S,U}$;
4. l’ensemble $S \cap U$ est un voisinage de $k_{S,U} \setminus \{0\}$ dans U , et tout point de $S \cap U$ a un itéré positif hors de U .

Lorsque S est un secteur transversalement hyperbolique attractif pour h , on voit facilement que le point 0 n’est pas dans l’adhérence de l’ensemble $h(S) \setminus S$; ainsi, tout voisinage U assez petit est disjoint de cet ensemble. L’ensemble $k_{S,U}$ est appelé, dans [LeR04], une *branche instable U -locale*. Bien évidemment, on voit en appliquant cet énoncé à h^{-1} que tout secteur hyperbolique transversalement répulsif contient une branche stable. La recherche de branches stables et instables est ainsi ramenée à la recherche d’un feuilletage transverse contenant des secteurs hyperboliques purs.

Preuve de l’addendum 4.3. — Nous expliquons comment démontrer l’addendum à partir d’un résultat de perturbation des feuilletages transverses démontré plus bas. Considérons les objets intervenant dans le théorème 4.1, et supposons que l’indice de h en 0 est $1 - p$ avec $p > 0$. D’après l’étude locale de l’appendice, le feuilletage \mathcal{G} admet une famille de $2p$ secteurs hyperboliques, deux à deux d’intersection d’intérieur vide, qui sont alternativement directs et indirects (proposition B.8). Si,

par chance, ces secteurs sont hyperboliques *purs*, alors ce sont des secteurs transversalement hyperboliques pour h , et la proposition 4.9 nous fournit les branches stables et instables réclamées par l'addendum. Dans le cas général, il se peut que le feuilletage \mathcal{G} n'admette pas de secteur hyperbolique pur (c'est le cas lorsque chaque secteur hyperbolique de \mathcal{G} contient un "Cantor de pétales"). Nous utilisons alors les résultats de perturbation de la section suivante. En appliquant $2p$ fois la proposition 4.11, nous trouvons un nouveau feuilletage \mathcal{G}' qui est arbitrairement proche de \mathcal{G} en topologie de Whitney, et qui admet une famille de $2p$ secteurs hyperboliques purs, chacun inclus dans l'un des secteur de \mathcal{G} et ayant une orientation compatible. D'après la proposition 3.3, le nouveau feuilletage est encore transverse à l'isotopie I , et ses secteurs sont transversalement hyperboliques pour h , ce qui conclut le cas général. \square

b. Perturbation des feuilletages transverses. — Nous démontrons ici le résultat de stabilité des feuilletages transverses à une isotopie sous petite perturbation (proposition 3.3), énoncé à la section 3.1. La preuve va utiliser de façon essentielle la transversalité *locale* du feuilletage et de l'isotopie (proposition 3.2). En fait, la même construction permettrait de montrer que l'ensemble des couples (I, \mathcal{G}) pour lequel le feuilletage \mathcal{G} est transverse à l'isotopie I est ouvert pour le produit des topologies de Whitney.

Preuve de la proposition 3.3. — Commençons par la remarque suivante. Fixons deux compacts K_1, K_2 dans M , et une carte du feuilletage $\varphi : [0, 1]^2 \hookrightarrow M$ dont l'image contient K_1 et K_2 dans son intérieur, avec

$$p_1(\varphi^{-1}(K_1)) < p_1(\varphi^{-1}(K_2)) \quad (\star)$$

où p_1 est la fonction première coordonnée : cette inégalité signifie donc qu'on peut aller de n'importe quel point de K_1 à n'importe quel point de K_2 *via* un arc inclus dans l'image de φ et positivement transverse au feuilletage \mathcal{G} . Dans cette situation, il est clair que toute application continue injective $\varphi' : [0, 1]^2 \hookrightarrow M$ suffisamment proche de φ vérifie encore la propriété (\star) .

Soit maintenant \mathcal{G} un feuilletage de M , et γ une courbe positivement transverse à \mathcal{G} . On peut écrire γ comme la concaténation d'un nombre fini de courbes simples $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$, puis épaissir ces courbes simples pour obtenir pour chaque k une carte φ_k du feuilletage dont l'image contient γ_k dans son intérieur. En appliquant la remarque précédente à chacune des cartes φ_k (avec pour compacts les deux singletons $\{\gamma_k(0)\}$ et $\{\gamma_k(1)\}$), on voit que l'existence d'une courbe homotope à γ et positivement transverse au feuilletage est une propriété ouverte du feuilletage \mathcal{G} . On a même un peu mieux. Notons x et y les extrémités de γ et fixons deux compacts K_x, L_y , petits voisinages respectifs de x, y inclus dans les intérieurs des images de φ_0, φ_ℓ . À chaque couple de points x' dans K_x et y' dans L_y on peut associer continûment une courbe $\gamma_{x',y'}$ transverse au feuilletage de façon à ce que $\gamma_{x,y} = \gamma$ (voir la figure 5). On définit alors l'ensemble $\mathcal{O}(K_x, L_y, \gamma)$ des feuilletages \mathcal{G}' de M pour lesquels, pour chaque

couple x', y' comme ci-dessus, il existe une courbe γ' homotope à $\gamma_{x',y'}$ à extrémités fixées et positivement transverse à \mathcal{G}' . En utilisant cette construction on montre facilement le lemme suivant. Rappelons qu'étant donnée une famille localement finie de cartes (φ_j) et une famille de nombres strictement positifs (ε_j) , l'ouvert de Whitney $\mathcal{O}((\varphi_j), (\varepsilon_j))$ est défini comme l'ensemble des feuilletages qui admettent des cartes (φ'_j) pour lesquelles la distance uniforme entre φ'_j et φ_j est plus petite que ε_j , pour chaque valeur de j .

Lemme 4.10. — *L'ensemble $\mathcal{O}(K_x, L_y, \gamma)$ est un ouvert pour la topologie de Whitney. Pour tout voisinage V_γ de $K_x \cup \gamma \cup L_y$, il existe un voisinage $\mathcal{O}((\varphi_j), (\varepsilon_j))$ de \mathcal{G} inclus dans $\mathcal{O}(K_x, L_y, \gamma)$, défini par un nombre fini de cartes φ_j , dont les images sont incluses dans V_γ .*



FIGURE 5. La famille de courbes transverses $\gamma_{x',y'}$

On considère maintenant une isotopie $I = (h_t)$ sur M et un feuilletage \mathcal{G} positivement transverse : pour chaque point x de M il existe une courbe γ_x positivement transverse au feuilletage et homotope dans M à la trajectoire $(h_t(x))_{t \in [0,1]}$. Puisque le feuilletage est même localement transverse à l'isotopie (proposition 3.2), on peut choisir les courbes γ_x pour que, pour toute suite (x_i) localement finie dans M , la suite (γ_{x_i}) soit encore localement finie : les éléments de la suite ne rencontrent un compact donné que pour un ensemble fini d'indices i . On épaisit légèrement chaque courbe γ_x en un voisinage V_{γ_x} de façon à ce que la famille des voisinages associés à toute suite localement finie soit encore localement finie. Comme ci-dessus, on choisit pour chaque courbe γ_x une famille finie de cartes recouvrant γ_x et incluses dans V_{γ_x} , puis des voisinages compacts K_x de x et $L_{h_1(x)} = h_1(K_x)$ de $h_1(x)$ inclus dans V_{γ_x} . Puisque M est localement compact, on peut trouver une suite (x_i) localement finie pour laquelle la famille (K_{x_i}) forme un recouvrement de M . Pour chaque valeur de i , le lemme ci-dessus nous fournit alors un voisinage \mathcal{O}_i du feuilletage \mathcal{G} . Soit $\mathcal{O} = \mathcal{O}((\varphi_\ell), (\varepsilon_\ell))$ l'intersection de tous les voisinages \mathcal{O}_i . D'après le lemme, puisque la famille $(V_{\gamma_{x_i}})$ est localement finie, les images des cartes (φ_ℓ) forment une famille localement finie : ainsi, \mathcal{O} est encore un ouvert de la topologie de Whitney.

Soit \mathcal{G}' un feuilletage appartenant à \mathcal{O} , x' un point de M , i un indice tel que $x' \in K_{x_i}$. La définition de l'ensemble $\mathcal{O}(K_{x_i}, L_{h_1(x_i)}, \gamma_{x_i})$ nous fournit une courbe

positivement transverse à \mathcal{G}' et reliant x' à $h_1(x')$. Par continuité de la famille $\gamma_{x',y'}$ construite plus haut, cette courbe est homotope à la trajectoire de x' sous l'isotopie I . Le feuilletage \mathcal{G}' est encore positivement transverse à l'isotopie. Ceci achève la preuve. \square

Le résultat suivant permet de simplifier la topologie locale d'un feuilletage par une petite perturbation.

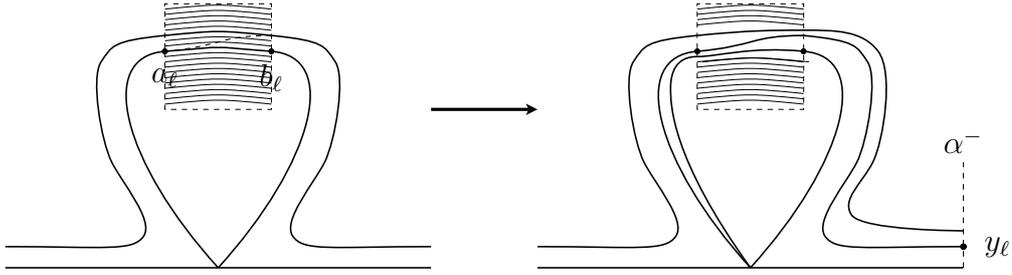
Proposition 4.11. — *Soit \mathcal{G} un feuilletage défini sur l'ensemble $U \setminus \{0\}$ où U est un voisinage de 0. Soit S un secteur hyperbolique de \mathcal{G} . Il existe alors un feuilletage \mathcal{G}' , arbitrairement proche de \mathcal{G} dans la topologie de Whitney et coïncidant avec \mathcal{G} en dehors de S , qui admet un secteur purement hyperbolique S' inclus dans S . De plus, l'orientation de S' est compatible avec celle de S : S' est direct si et seulement si S l'est.*

Démonstration. — Soient S_0 le demi-disque supérieur et $\Phi : S \rightarrow S_0$ l'application envoyant S sur le secteur hyperbolique modèle. Soient $\alpha^+, \alpha^-, F^+, F^-, K$ comme dans la définition des secteurs hyperboliques (voir la section B et la figure 2). Soit \mathcal{P} la famille des pétales inclus dans S qui sont maximaux pour l'inclusion ; les éléments de \mathcal{P} sont deux à deux d'intersection $\{0\}$ et leur réunion est égale à K .

Soit (x_k) une suite de points sur γ^+ convergeant vers $\gamma^+ \cap F^+$, et F_k le morceau de feuille de x_k entre γ^+ et γ^- (on peut choisir $F_k = \Phi^{-1}(\{xy = \frac{1}{k}\})$). Alors la suite (F_k) converge, pour la distance de Hausdorff sur l'ensemble des compacts de S , vers l'ensemble

$$F^+ \cup F^- \cup \partial K = F^+ \cup F^- \cup \bigcup_{\partial P \in \mathcal{P}} \partial P.$$

L'ensemble \mathcal{P} est au plus dénombrable, et naturellement muni d'un ordre total défini comme l'ordre dans lequel une feuille F_k pour k assez grand visite des petits voisinages disjoints de chaque pétale (cet ordre est compatible avec l'ordre cyclique ou l'ordre cyclique inverse autour de 0). Soit $(P_\ell)_{\ell \geq 0}$ une suite de pétales qui, pour cet ordre, est décroissante et non minorée : tout pétale de \mathcal{P} est après tous les P_ℓ sauf un nombre fini. De plus, la suite (P_ℓ) converge vers $\{0\}$ pour la distance de Hausdorff. On choisit pour chaque ℓ une carte φ_ℓ en un point du bord de P_ℓ , de sorte que les images de ces cartes sont disjointes de F_0 et deux à deux disjointes, et forment une suite convergeant vers 0. Soient a_ℓ, b_ℓ les premiers et derniers points du bord de P_ℓ qui sont dans l'image de φ_ℓ . On modifie alors \mathcal{G} arbitrairement peu, successivement sur chacune des cartes φ_ℓ , comme sur la figure 6 ; après la ℓ ième modification, la feuille de a_ℓ rencontre α^- en un point y_ℓ , tandis que la feuille de b_ℓ borde un pétale maximal pour le nouveau feuilletage. Soit \mathcal{G}' le feuilletage obtenu après toutes les modifications. Après la ℓ -ième modification la demi-feuille négative du point y_ℓ est incluse dans S , elle délimite avec F^+ un secteur hyperbolique qui ne contient aucun des pétales situés après P_ℓ . Cette feuille n'est pas affectée par les modifications ultérieures, c'est donc encore une feuille de \mathcal{G}' . La suite (y_ℓ) est monotone sur α^- , notons y sa limite. Alors la demi-feuille négative F'^- de y est

FIGURE 6. Modification de \mathcal{G}

incluse dans S , et délimite avec F^+ un secteur hyperbolique S' pour le feuilletage \mathcal{G}' , inclus dans S , et qui ne rencontre l'ensemble K qu'au point 0. Montrons que S' est purement hyperbolique pour \mathcal{G}' . Soit x un point de l'intérieur de S' . Ce point n'est pas dans K , sa demi- \mathcal{G} -feuille positive rencontre donc γ^- . On voit facilement que c'est encore le cas après chaque modification. D'autre part cette demi-feuille ne subit qu'un nombre fini de modifications (la suite des demi-feuilles pour les feuilletages successifs est stationnaire). On en déduit que la demi- \mathcal{G}' -feuille positive de x rencontre encore γ^- , et ne borde donc pas de pétale. Ceci termine la preuve. \square

Le secteur S' obtenu dans la preuve possède des propriétés non explicités dans l'énoncé : il a un bord en commun avec l'ancien secteur S , et il est arbitrairement proche, pour la distance de Hausdorff, de $(S \setminus K) \cup \{0\}$.

4.4. Points fixes de type Selle

P. Le Calvez et J.-C. Yoccoz ont étudié dans [LeCYoc97, LeCYoc] le cas d'un point fixe de type Selle (voir la classification à la section 3.4). Ils montrent en particulier qu'en l'absence d'orbite périodique, il existe un itéré de h qui donne au point fixe 0 un indice négatif. Leur technique leur permet aussi d'associer à un tel point un nombre de rotation rationnel, qui est défini par la combinatoire de l'action de h sur des courbes de Jordan entourant le point fixe, sans qu'il soit facile de donner une caractérisation simple de ce nombre.

Supposons, plus généralement, que $h \in \mathcal{H}^+$ a un itéré h^q pour lequel 0 est un point fixe isolé d'indice différent de 1 (il y a deux exemples pertinents, sur la figure 1 de l'avant-propos, parmi les trois dont l'ensemble de rotation est $\{\frac{1}{2}\}$). D'après le théorème 4.1, il existe une isotopie de l'identité à h^q dont l'ensemble de rotation est $\{0\}$. Étant donnée une isotopie I de l'identité à h , l'isotopie I^q a donc pour ensemble de rotation un singleton entier $\{p\}$. On en déduit que l'ensemble de rotation de I est le singleton rationnel $\{\frac{p}{q}\}$ (proposition 2.2). On retrouve ainsi le nombre de rotation de Le Calvez et Yoccoz. On sait aussi que h^q est éclatable (addendum 4.4). Il est moins immédiat, mais encore vrai, que h est éclatable. Cette dernière propriété

va découler d'une étude dynamique plus fine de h^q . Résumons ceci dans l'énoncé suivant.

Théorème 4.12. — *Soit $h \in \mathcal{H}^+$. Supposons qu'il existe un entier $q > 0$ tel que 0 est un point fixe isolé de h^q d'indice différent de 1. Alors l'ensemble de rotation de h est un singleton rationnel $\{\frac{p}{q}\}$, et h est éclatable. En particulier, ceci est le cas si h est un point de type Selle non accumulé.*

Démonstration. — On se place sous les hypothèses du théorème. Comme expliqué plus haut, il nous reste seulement à montrer que h est éclatable. Nous allons appliquer le critère donné par la proposition 2.6 : il s'agit donc de trouver une demi-droite topologique Δ qui est disjointe en germe de tous ses itérés sous h . D'après l'énoncé d'extension (appendice A), on peut supposer que h est un homéomorphisme du plan qui n'a pas d'autre point fixe que 0, ni d'autre orbite périodique de période inférieure ou égale à q . Soit $f = h^q$. On applique maintenant les résultats de [LeR05, LeR] à f : comme l'indice du point fixe de f est différent de 1, il existe un entier $k \geq 2$ tel que f admet exactement k composantes de Reeb, cycliquement ordonnées autour de 0, $(F_1, G_1), \dots, (F_k, G_k)$. Comme h commute avec f , il permute ces composantes de Reeb en respectant l'ordre cyclique, il s'agit donc d'une permutation cyclique. Notons q' l'ordre de cette permutation : $g = h^{q'}$ fixe chacune des composantes, et q' divise q . On voit facilement que les (F_i, G_i) sont encore des composantes de Reeb pour l'homéomorphisme g . On applique alors la proposition 8.1 de [LeR05] : pour chaque composante de Reeb (F_i, G_i) il existe une demi-droite topologique Δ_i qui est incluse dans l'ouvert $O(F_i, G_i)$ entre F_i et G_i (voir [LeR], section 2.2), et qui est disjointe de tous ses itérés par g . Il reste à montrer que $\Delta = \Delta_1$ est disjointe de toutes ses images par les puissances h^k . Lorsque k est multiple de q' , h^k est un itéré de g , et la propriété est vérifiée. Lorsque k n'est pas multiple de q' , h^k agit sur les composantes de Reeb de f par permutation sans point fixe ; en particulier l'ouvert $O(F, G)$ est disjoint de son image par h^k , et Δ également. Finalement la droite Δ est disjointe de tous ses itérés par h , ce que l'on voulait démontrer. \square

En corollaire, nous pouvons maintenant démontrer qu'un point fixe de nombre de rotation infini est accumulé par des orbites périodiques, comme annoncé au début de la section 3.4. Ce résultat répond à une question posée par J. Franks.

Corollaire 4.13. — *Soit $h \in \mathcal{H}^+$ vérifiant la propriété d'intersection. Supposons que l'ensemble de rotation de h contient $+\infty$ ou $-\infty$. Alors tout voisinage de 0 contient une orbite périodique.*

Démonstration. — Soit $h \in \mathcal{H}^+$ vérifiant la propriété d'intersection, et supposons que 0 n'est pas accumulé par des orbites périodiques. Si le point fixe est indifférent, son ensemble de rotation est ou bien vide, ou bien un singleton réel (corollaire 3.18). Si le point fixe n'est pas indifférent, c'est-à-dire s'il est de type Selle, le théorème précédent nous dit que $\rho(h)$ est un singleton rationnel. On en déduit le corollaire. \square

4.5. Discussion

L'indice de Seifert. — Donnons-nous une isotopie $I = (h_t)_{t \in [0,1]}$ d'homéomorphismes du plan, et considérons la famille $\gamma_I = (h_t h_1 h_t^{-1})_{t \in [0,1]}$. Il s'agit d'un lacet d'homéomorphismes, basé en h_1 . La trajectoire d'un point P sous ce lacet est une courbe fermée $\gamma_I(P)$. Si cette courbe passe par le point P , alors P est sur la trajectoire sous I d'un point fixe de h_1 . Dans le cas contraire, on peut considérer le nombre d'enlacement de la courbe fermée $\gamma_I(P)$ autour du point P ; c'est ainsi que H. Seifert définit son indice du point P pour l'isotopie I . Cet indice, dont je ne perçois pas la signification, est l'un des ingrédients qui lui permettent de démontrer la persistance d'une feuille fermée lorsqu'on perturbe légèrement le feuilletage de Hopf sur la sphère \mathbb{S}^3 ([Sei50]).

Supposons maintenant que le point 0 est un point fixe isolé de h_1 , et choisissons l'isotopie I dans \mathcal{H}^+ , c'est-à-dire de façon à ce que h_t fixe 0 pour tout t . L'indice de Seifert est alors bien défini pour tous les points assez proches de 0, et par connexité cet indice est constant au voisinage de 0. Nous obtenons donc un nombre entier associé au point fixe isolé 0 pour le temps un de l'isotopie I . Il s'agit d'un invariant de conjugaison que nous notons $\mathbf{Seifert}(I, 0)$. Comme le fait remarquer Seifert, cet indice est évidemment nul si l'isotopie (h_t) est obtenue en intégrant un champ de vecteurs indépendant du temps, puisqu'alors tous ses temps commutent avec h_1 . Rappelons que pour chaque valeur de k , nous avons défini un homéomorphisme m_k “modèle” d'indice k , qui peut s'obtenir en intégrant un champ de vecteurs autonome. L'isotopie I_k correspondante a donc un indice de Seifert nul. Si $J^p I_k$ est une autre isotopie aboutissant en m_k , où J est le lacet des rotations, on détermine facilement que

$$\mathbf{Seifert}(J^p I_k, 0) = p(1 - k).$$

On peut d'autre part remarquer que p n'est rien d'autre que l'indice de Conley-Zehnder de l'isotopie, la formule se lit donc “Seifert égale Conley-Zehnder fois un moins Poincaré-Lefschetz”. En utilisant le théorème de Schmitt comme dans la preuve de l'existence des bonnes isotopies, on voit que cette formule se généralise.

Proposition. — *Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ aboutissant à un homéomorphisme h fixant uniquement 0. Alors*

$$\mathbf{Seifert}(I, 0) = \mathbf{Conley} - \mathbf{Zehnder}(I, 0)(1 - \text{Ind}(h, 0)).$$

En particulier, I est une bonne isotopie si et seulement si son indice de Seifert est nul.

Je ne sais pas s'il est possible d'en tirer une preuve plus élémentaire (n'utilisant ni le théorème de B. Schmitt ni les décompositions en briques) de l'existence des bonnes isotopies.

Module local. — Dans l'appendice B nous définissons le module d'un feuilletage du plan ayant le point 0 comme unique singularité. Rappelons qu'il s'agit du nombre

minimal de points de tangence entre le feuilletage et une courbe de Jordan entourant la singularité. De façon équivalente, il s'agit du nombre minimal de cartes du feuilletage nécessaires pour entourer la singularité.

On peut définir un concept analogue pour les homéomorphismes (voir [LeR]). Considérons $h \in \mathcal{H}^+$, et supposons pour simplifier que 0 est l'unique point fixe de h ; tout ensemble loin de 0 et assez petit est alors *libre*, c'est-à-dire disjoint de son image. Soit γ une courbe de Jordan entourant le point fixe; on peut définir sa h -longueur comme le nombre minimal de sous-arcs libres de γ nécessaires pour recouvrir γ . Le *module* de h est alors défini comme le minimum des h -longueurs des courbes de Jordan entourant 0. Lorsque l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est différent de 1, la théorie de Brouwer explique qu'on peut recouvrir $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par des ouverts connexes et simplement connexes, invariants par h , sur chacun desquels h est conjugué à une translation du plan. Ces ouverts, appelés *domaines de translation*, sont les analogues des cartes des feuilletages, et le module de h coïncide avec le nombre minimal de domaines de translation nécessaires pour entourer le point fixe. Le module des homéomorphismes généralise vraiment celui des feuilletages : lorsque h agit en poussant les points le long des feuilles d'un feuilletage \mathcal{F} , le module de h est égal à celui de \mathcal{F} .

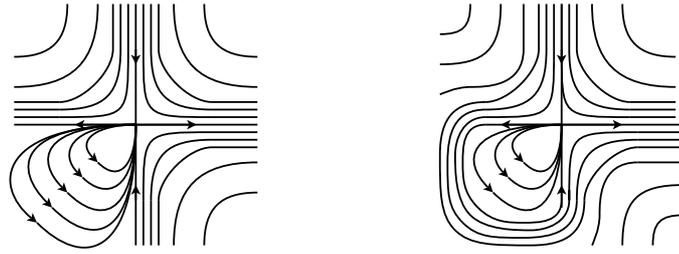


FIGURE 7. Un germe donné peut s'étendre de plusieurs manières, donnant différents modules : ici 4 et 2

Le module est un invariant de conjugaison global, mais non local, comme le montre la figure 7. Voici une façon de le "localiser". Nous supposons maintenant que 0 est seulement un point fixe isolé de h . Étant donné un voisinage de V de 0, nous pouvons définir le module de h relativement à V comme le minimum des h -longueurs des courbes de Jordan entourant 0 et incluses dans V ; le *module local* de h est alors la limite, lorsque V parcourt le filtre des voisinages de 0, des modules relativement à V . Je ne suis pas sûr qu'il s'agisse de la meilleure définition possible, en particulier je ne sais pas si elle résiste au test suivant.

Problème 12. — Le module local de h coïncide-t-il avec le supremum des modules de g , où $g \in \mathcal{H}^+$ fixe uniquement 0 et coïncide avec h au voisinage de 0?

La figure 7 montre un exemple où le module local est fini et égal à 4, et où le problème admet une réponse positive. Remarquons que la théorie de Slaminka-Schmitt-Bonino montre que l'infimum des modules des extensions est moins

intéressant puisqu'il est toujours égal au nombre $2(|1 - \text{Ind}(h, 0)|)$: il ne contient pas d'autre information que l'indice de Poincaré-Lefschetz.

Le module (global) n'est qu'un aspect d'un invariant plus riche, *l'indice par quart-de-tours*, associé à tout élément h de \mathcal{H}^+ dont 0 est un point fixe isolé d'indice de Poincaré-Lefschetz différent de 1 (ou, en indice 1, de module supérieur ou égal à 3). Cet invariant, décrit dans [LeR], affine l'indice de Poincaré-Lefschetz, et donne une façon naturelle de décomposer celui-ci en une somme dont les termes valent $+\frac{1}{4}$ ou $-\frac{1}{4}$. Il s'agit, là encore, d'un invariant global et non local : par exemple, les deux dessins de la figure 7 ont respectivement pour indice par quart-de-tours $(\uparrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow \rightarrow)$ et $(\uparrow \rightarrow \downarrow \leftarrow)$.

Problème 13. — Existe-t-il une version locale de l'indice par quart-de-tours ?

Ce problème est lié au problème de l'unicité de l'éclatement abordé plus bas. La solution est certainement plus facile pour les germes dont le module local est fini. Dans ce cas, l'indice local par quart-de-tours devrait être un invariant de même nature que dans le cadre global, c'est-à-dire un mot cyclique sur l'alphabet $\{\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow\}$ dont le nombre de lettres est le double du module local. On pourrait par exemple essayer de résoudre le problème suivant.

Problème 14. — Soient $h_0, h_1 \in \mathcal{H}^+$ deux homéomorphismes qui coïncident au voisinage de 0, et sans autre point fixe. On suppose que leur module est maximal parmi les homéomorphismes de \mathcal{H}^+ qui ont le même germe en 0. Est-ce que leurs indices par quarts-de-tours sont égaux ?

Lorsque le module local est infini, on devrait essayer de définir un indice par quart-de-tours comme une application d'un ensemble dénombrable cycliquement ordonné $N(h)$ vers l'ensemble $\{\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow\}$.

Branches stables. — L'article [LeR] contient une conjecture sur le nombre de branches stables et instables, dans un cadre global. Essayons d'en donner une version locale. Pour cela, on se restreint à un homéomorphisme h dont 0 est un point fixe isolé, et dont le module local est fini, notons-le d . Fixons un voisinage U de 0 suffisamment petit pour que le module relativement à U soit égal au module local, et supposons que la frontière de U soit une courbe de Jordan.

Problème 15. — Est-il vrai qu'il existe exactement d branches stables et instables U -locales, c'est-à-dire vérifiant les quatre propriétés énumérées dans la proposition 4.9, qui soient maximales pour l'inclusion ?

Branches stables et absence de rotation. — Soit $h \in \mathcal{H}^+$, et supposons qu'il existe une branche stable, disons un ensemble compact k contenant 0 sans être réduit à 0, connexe, de complémentaire connexe, vérifiant $h(k) \subset k$. Supposons aussi que cette branche n'entoure pas 0, au sens où il existe un autre compact connexe k' non réduit à $\{0\}$ et tel que $k \cap k' = \{0\}$. Sous ces hypothèses, on peut trouver une isotopie I aboutissant en h dont l'ensemble de rotation est $\{0\}$. On a même $\rho_V(I) = \{0\}$ pour

tout voisinage assez petit de 0. J'aimerais savoir si l'existence d'une telle branche stable caractérise l'absence de rotation.

Problème 16. — Soit I une isotopie dans \mathcal{H}^+ , et supposons que $\rho_V(I) = \{0\}$ pour tout voisinage V assez petit de 0. Existe-t-il toujours un ensemble k qui est une branche stable, au sens précédent, pour le temps un de l'isotopie ?

Eclatement canonique. — Pour compléter le critère d'existence et la construction d'éclatements topologiques pour les points fixes d'indice différent de 1, je voudrais aborder maintenant la question de l'unicité de l'éclatement, principalement en l'absence de rotation. Soit $h \in \mathcal{H}^+$, et supposons que h soit topologiquement éclatable avec un nombre de rotation nul. En général il n'y a pas unicité de l'éclatement. Prenons l'exemple du difféomorphisme selle $m : (x, y) \mapsto (2x, y/2)$. L'éclatement de la différentielle donne un homéomorphisme du cercle ayant quatre points fixes. À partir de cet éclatement, il y a essentiellement deux façons d'en construire d'autres. On peut d'abord simplifier l'éclatement en écrasant une, deux ou trois composantes connexes de l'ensemble complémentaire des points fixes sur le cercle : on obtient par exemple de cette façon un éclatement équivalent à celui construit lors de la preuve du critère d'éclatement (proposition 2.6), avec un seul point fixe. On peut au contraire rendre l'éclatement plus compliqué en créant d'autres points fixes par “ralentissement” ; c'est essentiellement la méthode utilisée dans la preuve de la proposition 2.7 pour construire une version de h qui est différentiable en 0. L'écrasement provoque une perte d'information, le ralentissement ajoute une information artificielle : ainsi, l'éclatement donné par la différentielle semble ici le plus naturel, avec ses quatre points fixes correspondant aux directions stables et instables et ses quatre intervalles complémentaires reflétant la présence des secteurs hyperboliques.

Il y a au moins une autre façon d'enrichir artificiellement un éclatement, lorsque h admet un *bon secteur attractif* S . Il s'agit d'un disque topologique sur lequel h est conjugué à la restriction de l'homothétie $z \mapsto z/2$ au demi-disque supérieur (voir [LeR08], section 2.1). On peut alors éclater h en un homéomorphisme \bar{h} de l'anneau semi-fermé $\bar{\mathbb{A}}$, de façon à ce que l'adhérence de S vu dans $\bar{\mathbb{A}}$ contienne un intervalle non trivial du cercle-bord. La dynamique sur cet intervalle peut être choisie à volonté, ce qui montre que l'information obtenue n'a pas de sens dynamique.

On voit qu'en général on est loin d'avoir unicité. On cherche alors à définir une notion de “bon” éclatement qui conduirait à l'unicité en intégrant les informations pertinentes et en rejetant celles qui sont inutiles. Je n'ai pas trouvé de façon limpide de le faire ; voici néanmoins ce qu'il reste de mes essais.

Soit $h \in \mathcal{H}^+$, pour simplifier on se place probablement dans le cas où 0 est un point fixe isolé, éventuellement on peut le supposer d'indice différent de 1. Considérons des coordonnées polaires topologiques fournies par un homéomorphisme $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{A}$ tel que $\bar{h} := \Phi h \Phi^{-1}$ s'étende au cercle-bord de l'anneau $\bar{\mathbb{A}}$ en un homéomorphisme de nombre de rotation nul. On identifie le cercle-bord de $\bar{\mathbb{A}}$ au cercle \mathbb{S}^1 . On dira que l'éclatement donné par Φ n'est pas artificiel si

1. l'ensemble des points fixes de $\bar{h}|_{\mathbb{S}^1}$ est totalement discontinu ;
2. pour tout point fixe x de $\bar{h}|_{\mathbb{S}^1}$, il existe au moins un point y de $\bar{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{S}^1$ dont l'ensemble α ou ω -limite est égal à $\{x\}$;
3. pour tout secteur attractif ou répulsif S de h , l'adhérence de $\Phi(S)$ rencontre le cercle-bord en un unique point.

Les deux premiers points ont pour but d'interdire les points fixes obtenus par "ralentissement", le dernier point interdit l'éclatement des secteurs attractifs. D'autre part, on dira que l'éclatement est *élémentaire* si le cercle-bord contient un unique point fixe. Soit $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{A}$ un autre homéomorphisme donnant un éclatement \bar{h}_1 . On dira que ce second éclatement est un *facteur* du premier s'il existe une application continue $p : \bar{\mathbb{A}} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$ qui se restreint en un homéomorphisme de l'anneau ouvert $\bar{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{S}^1$, et telle que $p\bar{h} = \bar{h}_1 p$. On dira aussi que le premier éclatement est une *extension* du second. Si l'application p est un homéomorphisme, on dira que les deux éclatements sont *conjugués*.

Problème 17. — Existe-t-il un éclatement Φ , non artificiel, qui est une extension de tout éclatement élémentaire non artificiel ?

Problème 18. — Deux éclatements solutions du problème précédent sont-ils nécessairement conjugués ?

Si ces deux problèmes admettent une réponse positive, on aura gagné le droit de dire que de tels éclatements sont *bons*. Une réponse partielle au second problème, disant que deux tels éclatements sont conjugués au moins *en restriction au cercle-bord*, serait déjà satisfaisante : l'homéomorphisme du cercle $\bar{h}|_{\mathbb{S}^1}$ fournirait en effet un invariant topologique associé à cette situation. Un dernier problème fait le lien avec l'indice par quart-de-tour.

Problème 19. — Soit Φ un éclatement solution du problème 17. Soit x un point fixe sur le cercle-bord. A-t-on la dichotomie suivante :

- ou bien il existe $y \in \bar{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{S}^1$ tel que $\alpha(y) = \{x\}$,
- ou bien il existe $y \in \bar{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{S}^1$ tel que $\omega(y) = \{x\}$?

Une réponse positive à ce problème permettrait d'enrichir l'invariant $\bar{h}|_{\mathbb{S}^1}$. En notant $N(h)$ l'ensemble constitué des points fixes de \bar{h} et des composantes connexes de son complémentaire dans le cercle-bord, muni de son ordre cyclique naturel, on pourrait associer

- à chaque point fixe, une flèche \downarrow si c'est un point α -limite et \uparrow s'il s'agit d'un point ω -limite ;
- à chaque composante connexe du complémentaire, une flèche \leftarrow ou \rightarrow selon le sens de la dynamique.

On obtiendrait ainsi un indice par quart-de-tours local répondant au problème 13. Bien sûr, la construction devra subir un certain nombre de tests. En voici un.

Problème 20. — Supposons que le module local de h est fini. Est-il égal au nombre de points fixes de tout bon éclatement \bar{h} ?

Bien sûr, il faut probablement ajuster toutes les définitions pour obtenir des réponses positives à tous ces problèmes...

John Mather a donné une construction d'une compactification naturelle en cercle pour les singularités de feuilletages (voir [Mat82b]).

Terminons en mentionnant le cas irrationnel. Lorsque h est éclatable avec un nombre de rotation irrationnel, il existe toujours un éclatement qui est une rotation sur le cercle. Deux tels éclatements ne sont pas nécessairement conjugués. Cependant, on peut montrer l'unicité de l'éclatement dans le cas des rotations.

Proposition 4.14. — Soit h un homéomorphisme de l'anneau semi-fermé $\bar{\mathbb{A}}$, et supposons que

- la restriction de h à $\bar{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{S}^1$ est conjuguée à une rotation euclidienne,
- la restriction de h au cercle-bord \mathbb{S}^1 est conjuguée à une rotation euclidienne.

Alors h est conjugué à une rotation euclidienne sur $\bar{\mathbb{A}}$.

ÉPILOGUE : LE THÉORÈME DES TROIS-QUATRE POINTS FIXES

Nous démontrons “à la Le Calvez” un énoncé qui renforce un résultat de S. Matsumoto et répond à l’une de ses questions en faisant passer le nombre de points fixes de trois à quatre (voir [Mat01], théorème 5.1 et remarque 5.2). Il s’agit d’un résultat de dynamique globale dont la preuve illustre les concepts et les résultats de dynamique locale présentés dans ce mémoire.

Théorème 4.15. — *Soit f un homéomorphisme de l’anneau compact, et I une isotopie de l’identité à f . Supposons que f préserve l’aire et que*

- *les nombres de rotation de I sur les deux bords de l’anneau sont strictement négatifs,*
- *le nombre de rotation moyen dans l’anneau est positif ou nul.*

Alors f admet au moins quatre points fixes dans l’anneau. De plus, si l’ensemble des points fixes est fini, il y a au moins deux points fixes d’indice 1 et deux points fixes d’indice strictement négatif.

Démonstration. — On écrase chaque cercle-bord en un point, et on voit f comme un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 fixant deux points N et S (les bords écrasés). Les ensembles de rotation autour des points N et S sont des singletons (proposition 2.5) ; la première hypothèse se traduit par le fait que le nombre de rotation local de I est strictement négatif au point N , et strictement positif au point S .⁽²⁾

Si f a une infinité de points fixes il n’y a rien à montrer, on peut donc exclure ce cas. On peut alors choisir une partie \mathcal{S} des points fixes de f , contenant N et S , qui soit *non enlacée maximale* : il existe une isotopie I' de l’identité à f qui fixe chaque point de \mathcal{S} , et la trajectoire sous I' de chaque point fixe qui n’est pas dans \mathcal{S} n’est pas homotope au lacet constant dans la surface ouverte $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{S}$. De plus cette isotopie est homotope à I , à extrémités fixées, en tant qu’isotopie dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, et en particulier elle donne à N et S les mêmes nombres de rotations que I , et elle a le même nombre de rotation moyen.

⁽²⁾Ceci peut sembler paradoxal puisque le nombre de rotation sur le bord inférieur de l’anneau était lui aussi négatif ; le paradoxe se lève si l’on pense que pour mesurer le nombre de rotation autour du point S il faut regarder la sphère par en-dessous...

Le théorème feuilleté équivariant nous fournit alors un feuilletage \mathcal{G} sur la surface ouverte $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{S}$, qui est transverse à l'isotopie I' . Nous dirons que les éléments de \mathcal{S} sont les *singularités* du feuilletage. Explicitons les propriétés dynamiques du feuilletage \mathcal{G} induites par les hypothèses dynamiques sur f .

La première hypothèse est que f préserve l'aire. On va en déduire que « la dynamique de \mathcal{G} est de type gradient » ; précisons cette idée. L'ensemble ω -limite de toute feuille F est réduit à une singularité. En effet, dans le cas contraire et d'après la théorie de Poincaré-Bendixson, l'ensemble ω -limite serait une réunion de feuilles qui borderait un attracteur pour f , contredisant la préservation de l'aire. De même, l'ensemble α -limite de F est un seul point de \mathcal{S} , et est distinct de l'ensemble ω -limite. Pour deux singularités s_1, s_2 , nous écrirons $s_1 < s_2$ s'il existe une *connection* de s_1 à s_2 , c'est-à-dire une suite finie de feuilles F_1, \dots, F_ℓ telle que

$$s_1 = \alpha(F_1), \omega(F_1) = \alpha(F_2), \dots, \omega(F_\ell) = s_2.$$

La préservation de l'aire pour f nous dit encore que cette relation est un ordre partiel sur l'ensemble \mathcal{S} (il n'y a pas de cycle de singularités). En l'absence de feuille-cercle et de pétale, la classification des dynamiques locales des feuilletages permet de voir que les singularités de \mathcal{G} sont nécessairement de type Selle ou de type Puits ou Source (appendice B).

Les singularités de type Sources ont un ensemble de rotation local négatif ou nul pour l'isotopie I' , les Puits un ensemble positif ou nul. D'après l'hypothèse de rotation sur les bords de l'anneau, la singularité N est donc une Source de \mathcal{G} , et S est un Puits.

Exploitions maintenant l'hypothèse sur le signe du nombre de rotation moyen de f . Supposons qu'il existe une feuille de \mathcal{G} allant de N à S . Par transversalité cette feuille est poussée vers sa droite par l'isotopie I' , et nous voyons que le nombre de rotation moyen est strictement négatif,⁽³⁾ contrairement à l'hypothèse. Le même argument montre qu'il n'existe pas de connection de N à S , autrement dit que $N \not< S$.

En utilisant les propriétés dynamiques du feuilletage \mathcal{G} que nous venons d'établir, nous allons montrer le lemme suivant.

Lemme 4.16. — *Il existe une singularité H_1 de type Selle, d'indice strictement négatif pour le feuilletage \mathcal{G} , telle que $N < H_1$.*

Expliquons comment le théorème en découle. Par symétrie des hypothèses, il existe également une singularité H_2 , de type Selle et d'indice strictement négatif, telle que $H_2 < S$. Puisque $N \not< S$ on a $H_1 \neq H_2$. Il est clair que les points H_1 et H_2 sont distincts des points N et S , qui ne sont pas de type Selle. On utilise maintenant le lien entre les indices (propositions 4.7 et 4.8). Aux points Selles de \mathcal{G} , les indices du feuilletage et de f coïncident : les points H_1 et H_2 ont un indice strictement négatif pour f . Rappelons que les points fixes d'indices plus grands que 1 admettent

⁽³⁾Le nombre de rotation moyen serait égal à l'opposé de l'aire comprise entre la feuille et son image.

des pétales attractifs (addendum 4.2) : par conséquent, les points fixes isolés d'un homéomorphisme préservant l'aire sont d'indices inférieurs ou égaux à 1. D'après la formule de Lefschetz, la somme des indices des points fixes de f dans la sphère est égale à 2, la présence de deux points fixes d'indice strictement négatifs force donc l'existence d'au moins quatre points fixes d'indice 1, on a ainsi trouvé au moins deux points fixes d'indice 1 qui sont distincts de N et S . Ceci termine la preuve du théorème.

Démontrons le lemme. Commençons par le cas facile où le feuilletage n'a pas de singularité d'indice 0. Soit W_0 l'ensemble des singularités directement connectées à N ,

$$W_0 = \{s \in \mathcal{S} \text{ telles qu'il existe une feuille } F \text{ avec } \alpha(F) = N \text{ et } \omega(F) = s\}.$$

Supposons, par l'absurde, que W_0 ne contient pas de singularité de type Selle. Il ne contient donc que des Puits. L'ensemble C des feuilles issues de N , muni de la topologie de l'espace des feuilles (topologie quotient), est homéomorphe au cercle. Chaque Puits attire un ouvert de feuilles dans C . Par connexité, on en déduit que W_0 se réduit à un seul élément P . On montre facilement que l'ensemble constitué par la réunion de N , de toutes les feuilles issues de N , et de ce Puits P , est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 . Cet ensemble est alors égal à \mathbb{S}^2 , les points N et P sont les seules singularités du feuilletage, on a en particulier une connection de N à $P = S$. Ceci contredit les propriétés de \mathcal{G} .

Traitons maintenant le cas général, en présence de singularités d'indice 0. Nous raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il n'existe pas de connection de N à une Selle d'indice strictement négatif. Pour toute courbe de Jordan C évitant les singularités de \mathcal{G} , les singularités *entourées par C* sont définies comme celles que C ne sépare pas de N . Soit C_0 une petite courbe de Jordan n'entourant pas d'autres singularités que la Source N , et transverse au feuilletage. Nous construisons par récurrence une suite $(C_i)_{i \geq 0}$ de courbes de Jordan en appliquant l'algorithme suivant.

- On considère l'ensemble W_i des singularités s , d'indice 0, telles que $s = \omega(F)$ pour une feuille F rencontrant la courbe de Jordan C_i . Si W_i est vide, l'algorithme s'arrête.
- Dans le cas contraire, on choisit un élément s de W_i qui est minimal pour l'ordre sur les singularités (il n'existe pas de singularité $s' \in W_i$ telle que $s' < s$), et on définit C_{i+1} à l'aide de l'Affirmation suivante.

Affirmation 4.17. — *Soit C une courbe de Jordan transverse au feuilletage, W l'ensemble des singularités d'indice nul qui sont l'omega-limite d'une feuille rencontrant C , et s un élément minimal de W . Alors il existe une courbe de Jordan C' qui est encore transverse au feuilletage, et qui entoure exactement s et les singularités entourées par C .*

Admettons provisoirement cette affirmation. Alors l'algorithme est bien défini. Il s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de

singularités. Soit n le nombre d'étapes, l'ensemble W_n est vide, par conséquent toutes les feuilles F rencontrant la courbe C_n ont comme ensemble omega-limite une singularité de type Puits. On conclut comme dans le cas facile : par connexité de C_n , ces feuilles ont toutes la même singularité comme ensemble ω -limite ; cette singularité est le seul Puits du feuilletage, par conséquent il s'agit du point S , ce qui contredit l'absence de connection de N à S .

Expliquons l'Affirmation. Soit x un point de C , F la feuille en x , et supposons que $\omega(F) = s$ soit une singularité d'indice 0. On considère l'ensemble des points de C dont la feuille a pour ensemble ω -limite la singularité s , et I la composante connexe de x dans cet ensemble. Puisque s est de type Selle et d'indice 0, l'espace des feuilles F dont l'omega-limite est s est homéomorphe à un intervalle fermé (éventuellement réduit à un point), on a une application continue injective de I dans cet espace, donc I ne peut pas être égal à C . Le Fait suivant nous dit que I est un interval fermé de C .

Fait 4.18. — *Si l'intervalle I n'est pas compact, alors la singularité s n'est pas minimale dans W .*

Admettant le Fait, on voit facilement que l'ensemble des feuilles aboutissant en s est exactement l'ensemble des feuilles passant par un point de I , et on conclut à l'existence de C' en utilisant le modèle local pour les singularités de type Selle et d'indice 0.

Vérifions le Fait. Soit x_+ une extrémité de I qui n'est pas dans I : la feuille en x_+ n'aboutit pas à s . Elle ne peut pas aboutir à un Puits, car un Puits attire un ouvert de feuille et x_+ est limite d'une suite de points (x_n) dont les feuilles aboutissent en s . Son omega-limite est donc une singularité s' de type Selle. Son indice est nul, puisque nous avons supposé l'absence de connection de N à une Selle d'indice strictement négatif : on a trouvé un élément s' de W . En utilisant la suite des feuilles passant par les points x_n , on voit facilement que $s' < s$. Ce qui conclut. \square

Voici une seconde stratégie possible pour démontrer le théorème. Le cas où il n'y a pas de Selle d'indice nul est facile. D'autre part, d'après la proposition B.6, chaque Selle d'indice nul a un voisinage sur lequel le feuilletage orienté est homéomorphe à l'un des quatre modèles suivants : le feuilletage horizontal sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ orienté de la gauche vers la droite, le même après épaississement de la séparatrice stable, le même après épaississement de la séparatrice instable, le même après épaississement des deux séparatrices.

Supposons d'abord que toutes les singularités d'indice 0 sont localement homéomorphes au premier ou au dernier modèle. On peut alors perturber le feuilletage localement pour supprimer les singularités d'indice 0, et ceci *sans changer les connections entre singularités*. Le nouveau feuilletage a les mêmes propriétés dynamiques que l'ancien, l'argument du cas facile du lemme s'applique pour donner une feuille allant de N à une Selle H d'indice strictement négatif, à cette feuille du

feuilletage perturbé correspond une connection de N à H pour le feuilletage initial, ce que l'on cherchait.

Que faire en présence de singularités homéomorphes au deuxième ou au troisième modèle? Il n'est pas difficile de montrer qu'on peut passer des trois premiers modèles au dernier modèle à l'aide d'une perturbation arbitrairement petite en topologie de Whitney. Nous utilisons maintenant la stabilité de la transversalité du feuilletage \mathcal{G} et de l'isotopie I (proposition 3.3) pour perturber le feuilletage \mathcal{G} en un feuilletage \mathcal{G}' , qui coïncide avec \mathcal{G} en dehors d'un petit voisinage des singularités d'indice 0, dont toutes les singularités d'indice 0 sont localement homéomorphes au quatrième modèle, et qui est toujours transverse à I . On est ainsi ramené au cas précédent.

ANNEXE A

EXTENSION DES DYNAMIQUES LOCALES

La dynamique locale est l'étude du comportement des orbites d'un homéomorphisme au voisinage d'un point fixe. L'objet central de la théorie devrait donc être un *homéomorphisme local*, c'est-à-dire un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ entre deux voisinages U et V de 0 dans le plan, fixant 0 . Cependant, étudier un homéomorphisme local n'est pas pratique, parce qu'on ne peut pas continuer à itérer les orbites qui sortent de U : on préfère travailler dans un cadre où $U = V$. Ceci ne pose pas de problème, puisque tout homéomorphisme local h coïncide au voisinage de 0 avec un homéomorphisme \bar{h} du plan. L'énoncé suivant est essentiellement dû à Hamilton ([**Ham54**]), il garantit également un certain contrôle des points fixes ou des orbites périodiques de l'extension.

Proposition (extension sans point fixe). — *Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local. Alors il existe un homéomorphisme \bar{h} du plan qui coïncide avec h sur un voisinage $U' \subset U$ de 0 . De plus,*

- si 0 est un point fixe isolé de h , on peut choisir \bar{h} dont 0 est le seul point fixe ;
- si 0 n'est pas accumulé par des orbites périodiques de période plus petite qu'un entier q fixé, on peut choisir \bar{h} qui n'a aucune orbite périodique de période plus petite que q ;
- si I est une isotopie dans \mathcal{H}^+ dont le temps un est h , et si 0 n'est pas accumulé par points fixes contractiles, dans l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pour l'isotopie I , alors on peut choisir \bar{h} qui n'a aucun point fixe contractile dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Démonstration. — Quitte à restreindre U , on peut supposer que le bord de U est une courbe de Jordan, et que h est définie sur $\text{Adhe}(U)$. On peut alors étendre $h|_{\text{Adhe}(U)}$ en un homéomorphisme du plan : ceci est essentiellement l'énoncé du théorème de Schoenflies, et donne la première partie de la proposition.

Expliquons maintenant comment obtenir les propriétés supplémentaires. D'après ce qui précède, on est ramené au cas où $h : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme avec $U = V = \mathbb{R}^2$. Nous traitons simultanément les trois situations envisagées par l'énoncé, en considérant l'ensemble F suivant dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

- dans le premier cas, F est l'ensemble des points fixes de h différents de 0 ;

- dans le deuxième cas, F est l'ensemble des points périodiques, différents de 0, de période plus petite que q ;
- dans le dernier cas, F est l'ensemble des points fixes contractiles de l'isotopie I dans l'anneau $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Dans chacun des cas, l'ensemble F est un fermé de \mathbb{R}^2 invariant par h . L'idée consiste maintenant à utiliser un revêtement p de $\mathbb{R}^2 \setminus F$ par l'anneau infini $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, qui s'étend en envoyant 0 sur 0. On donne ici une construction directe, inspirée de la construction des revêtements comme espaces de courbes modulo homotopie. Notons 0 la courbe constante $t \in [0, 1] \mapsto 0$. On considère l'ensemble E contenant la courbe 0 et toutes les courbes (continues) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telles que

1. $\gamma(0) = 0$;
2. $\gamma(]0, 1]) \cap F = \emptyset$.

Cet ensemble est muni de la topologie de la convergence uniforme. On considère la relation d'homotopie à extrémités fixées : autrement dit, $\gamma_0 \sim \gamma_1$ si il existe un chemin continu $(\gamma_s)_{s \in [0, 1]}$ dans E , allant de γ_0 à γ_1 , tel que $\gamma_s(1) = \gamma_0(1)$ pour tout s . On note E/\sim l'espace quotient, et on définit l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E/\sim &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma &\longmapsto \gamma(1). \end{aligned}$$

(La seule différence avec la construction du revêtement universel de la surface $\mathbb{R}^2 \setminus F$ tient au fait que le point base est choisi en dehors de cette surface. Attention, l'application Φ est un revêtement seulement en restriction à $(E/\sim) \setminus \{0\}$, le point 0 n'a pas de voisinage trivialisant pour Φ .)

Affirmation. — *L'espace E/\sim est homéomorphe au plan, et il possède une base de voisinages sur lesquels la restriction de l'application Φ est un homéomorphisme.*

L'homéomorphisme h agit naturellement sur E par $\gamma \mapsto h \circ \gamma$. Cette application passe au quotient, elle induit un homéomorphisme de l'espace E/\sim que l'on note \bar{h}_0 . Cet homéomorphisme fixe la courbe 0, et on a la relation de semi-conjugaison $\Phi \bar{h}_0 = h \Phi$. D'après cette relation, Φ transforme les points fixes, les points périodiques et les points fixes contractiles de \bar{h}_0 en points fixes, périodiques ou fixes contractiles de h ; comme l'image de Φ évite F , on voit que \bar{h}_0 n'a pas de point fixe différent de 0 dans la première situation envisagée dans l'énoncé, pas de point périodique dans la seconde, pas de point fixe contractile dans la troisième. On peut maintenant restreindre l'application Φ à un voisinage de la courbe 0 sur lequel elle est injective, puis utiliser le théorème de Schoenflies pour étendre cette restriction en un homéomorphisme entre E/\sim et le plan \mathbb{R}^2 . En conjuguant \bar{h}_0 par cet homéomorphisme, on obtient l'homéomorphisme \bar{h} recherché. \square

Preuve de l'affirmation. — Les arguments sont les mêmes que dans la construction du revêtement universel, certains détails sont laissés au lecteur. Montrons par exemple que Φ est injective sur un voisinage de 0. Soit D un disque dans le plan, centré en 0, et ne rencontrant pas F . Pour tout point x de D , soit γ_x le segment

allant de 0 à x . L'application $s : x \mapsto \gamma_x$, vue comme allant de D dans E/\sim , est une section locale de Φ , et $s(D)$ est un voisinage de 0 dans E/\sim sur lequel Φ est injective. Par le même type d'argument, on montre que Φ est un homéomorphisme au voisinage de tout point de E/\sim , et notamment que E/\sim est une surface. On peut ensuite montrer (comme pour le revêtement universel) que le groupe fondamental de E/\sim est trivial. D'après la classification des surfaces, cet espace est alors homéomorphe à la sphère ou bien au plan. Mais si c'était la sphère, alors l'image de Φ serait compacte, or il s'agit de $\mathbb{R}^2 \setminus F$ qui est un ouvert du plan. \square

Notons que la deuxième partie de la construction ne fait intervenir aucun choix. Cette remarque n'a pas d'intérêt dans ce texte, mais est essentielle pour l'indice par quart-de-tours décrit dans l'article [LeR].

ANNEXE B

DYNAMIQUE DES FEUILLETAGES

Nous décrivons ici les propriétés dynamiques d'un feuilletage orienté défini, sur une surface, au voisinage d'une singularité isolée. Appliquée aux feuilletages fournis par le théorème feuilleté équivariant, cette étude apporte en retour des informations sur la dynamique du temps un d'une isotopie, informations qui sont exploitées dans les chapitres 3 et 4. Les propriétés dynamiques sont décrites par un énoncé de classification suivi d'énoncés détaillant les différents cas. La plupart des arguments sont très classiques, et n'auraient pas surpris l'auteur de [Ben01].

Tous les énoncés sont valables pour des feuilletages continus ; cependant, pour simplifier, nous supposerons toujours que le feuilletage est de classe C^1 . Cette hypothèse est justifiée par un argument de perturbation : étant donné un feuilletage vérifiant l'énoncé du théorème feuilleté équivariant (*cf.* chapitre 3), on peut le rendre lisse par une petite perturbation, et le feuilletage obtenu vérifie encore l'énoncé (proposition 3.3). Ainsi, on peut supposer que tous les feuilletages fournis par le théorème de P. Le Calvez sont lisses. Alternativement, on pourrait faire marcher tous les arguments ci-dessous pour les feuilletages seulement continus.

Certaines définitions sont simplifiées par l'existence d'un flot dont les orbites sont les feuilles du feuilletage. Démontrer cette existence est facile pour un feuilletage lisse : on se donne une métrique riemannienne, on prend le champ de vecteurs unitaire tangent au feuilletage orienté, et on le multiplie par une fonction décroissant suffisamment vite pour obtenir un champ de vecteurs complet. Whitney a montré qu'on pouvait aussi construire assez facilement un tel flot pour un feuilletage continu, bien que de façon un peu mystérieuse (voir la remarque finale dans l'article [Whi33]). Nous utiliserons l'indice de Poincaré-Hopf (*cf.* section 4.1).

B.1. Classification locale

Soit \mathcal{F} un feuilletage orienté défini sur l'ouvert $U \setminus \{0\}$, où U est un voisinage simplement connexe de 0. Nous proposons de classifier le germe de \mathcal{F} selon l'existence de structures fondamentales appelées *feuille-cercle*, *pétale* et *secteur hyperbolique* ; nous détaillons les définitions plus bas.

Proposition B.1. — *De cinq choses l'une :*

1. (*Puits ou Source*) Il existe un voisinage de 0 ne contenant ni feuille-cercle, ni pétale, ni secteur hyperbolique.
2. (*Cycle*) Tout voisinage de 0 contient une feuille-cercle.
3. (*Pétale*) Tout voisinage de 0 contient un pétale, et pas de secteur hyperbolique.
4. (*Selle*) Tout voisinage de 0 contient un secteur hyperbolique, et pas de pétale.
5. (*Mixte*) Tout voisinage de 0 contient à la fois un secteur hyperbolique et un pétale.

De plus, l'indice de Poincaré-Hopf de la singularité est égal à 1 dans les cas Puits ou Source et Cycle, strictement plus grand que 1 dans le cas Pétale et strictement plus petit que 1 dans le cas Selle.

Si l'on omet ce qui concerne l'indice, la preuve de la proposition est très facile, il suffit de vérifier que le cas Cycle est bien disjoint des trois derniers cas, ce qui sera évident dès que nous aurons donné les définitions. Le calcul de l'indice suivra facilement de l'étude de chacun des types. L'appellation Puits ou Source sera justifiée plus bas par le fait que tout feuilletage de ce type est homéomorphe au feuilletage radial (*cf.* proposition B.6); c'est aussi ce fait qui rend la classification utile. Pour des exemples simples de chaque type, on peut se référer à la figure 1 de l'avant-propos : les feuilletages d'indice -1 et 0 sont de type Selle, ceux d'indice 2 et 3 sont de type Pétale, dans la colonne d'indice 1 on trouve des dessins des types Puits, Mixte et Cycle.

a. Définitions. — Définissons les trois structures fondamentales. Soit $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}} : U \rightarrow U$ un flot dont les orbites sont les feuilles orientées de \mathcal{F} . Pour tout point x de $U \setminus \{0\}$, la *demi-feuille positive* F_x^+ est définie comme l'orbite positive de x sous le flot (φ^t) , $F_x^+ = (\varphi^t(x))_{t \geq 0}$. L'ensemble ω -limite de x , ou de sa feuille, est l'ensemble des points d'accumulation de F_x^+ ,

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \text{Adhe} \left(F_{\varphi^t(x)}^+ \right).$$

On définit symétriquement les *demi-feuilles négatives* et l'ensemble α -limite d'un point ou d'une feuille.

Une *feuille-cercle* de \mathcal{F} est une feuille qui est une courbe de Jordan, c'est-à-dire homéomorphe au cercle. L'indice de Poincaré-Hopf le long d'une feuille-cercle est égal à 1. On en déduit que le disque topologique⁽¹⁾ qu'elle borde contient une singularité. Comme 0 est la seule singularité dans U , toute feuille-cercle de U doit entourer 0.

Un *pétale* est un disque topologique fermé dont la frontière est la réunion d'une feuille F et du point 0 (figure 1). Les ensembles ω -limites et α -limites de la feuille F sont alors réduits au singleton $\{0\}$. Réciproquement, toute feuille allant de 0 à 0, c'est-à-dire telle que $\omega(F) = \alpha(F) = \{0\}$, forme le bord d'un pétale.

⁽¹⁾Rappelons qu'il s'agit d'un ensemble homéomorphe à un disque euclidien fermé.

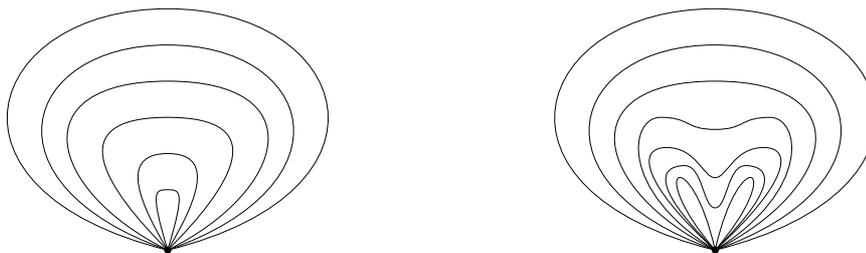


FIGURE 1. Deux pétales feuilletés ; dans les deux cas, chaque feuille borde un pétale, mais le second pétale contient aussi un secteur hyperbolique

Définissons maintenant la notion de *secteur hyperbolique*. Considérons d’abord le feuilletage orienté \mathcal{F}_0 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dont les feuilles sont les droites horizontales, sauf la droite d’ordonnée nulle qui est découpée en deux feuilles (figure 2). On appellera “secteur hyperbolique modèle” la restriction de \mathcal{F}_0 au demi-disque $S_0 = \{y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Revenons maintenant au feuilletage \mathcal{F} . Un disque topologique fermé S est appelé *secteur hyperbolique pur* s’il existe un changement de coordonnées $\Phi \in \mathcal{H}^+$ qui envoie S sur S_0 , et qui envoie la trace du feuilletage \mathcal{F} dans le disque S sur le feuilletage \mathcal{F}_0 (autrement dit, pour toute feuille F de \mathcal{F} , toute composante connexe de $F \cap S$ est envoyée dans une feuille de \mathcal{F}_0). Notons que cette définition ne tient pas compte de l’orientation du feuilletage. Plus généralement, on dira que S est un *secteur hyperbolique* s’il existe

- un ensemble compact $K \subset S$, vérifiant $K \cap \partial S = \{0\}$ et saturé pour le feuilletage \mathcal{F} (ce qui signifie que $K \setminus \{0\}$ est réunion de feuilles de \mathcal{F} incluses dans S),
- une application continue $\Phi : S \rightarrow S_0$ qui envoie K sur 0 , telle que $\Phi|_{S \setminus K}$ est injective et envoie la trace de \mathcal{F} sur le feuilletage \mathcal{F}_0 .

On appellera *secteur hyperbolique mixte* un secteur hyperbolique qui n’est pas pur, ce qui correspond au cas où le compact K n’est pas réduit à $\{0\}$.

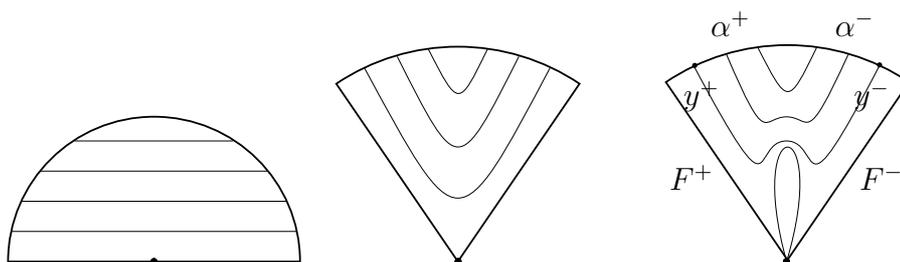


FIGURE 2. Le secteur hyperbolique modèle, un secteur hyperbolique pur, un secteur hyperbolique mixte ; dans le dernier cas, le compact K est un pétale

On montre facilement que les secteurs hyperboliques sont caractérisés de la façon suivante, qui ne fait pas référence au secteur modèle. Un secteur hyperbolique est un disque topologique fermé S dont la frontière est réunion des cinq objets suivants : une

demi-feuille positive F^+ dont l'ensemble ω -limite est $\{0\}$, une demi-feuille négative F^- dont l'ensemble α -limite est $\{0\}$, le point 0, et deux arcs α^+ , α^- , ces cinq éléments étant ordonnés cycliquement comme sur la figure 2 (ou dans l'ordre inverse) et vérifiant la propriété dynamique suivante : le feuilletage est transverse et rentrant en tout point y^+ dans l'intérieur de l'arc α^+ , la demi-feuille positive en y^+ ressort de S de façon transverse en un point y^- de α^- , et l'application $y^+ \mapsto y^-$ ainsi définie est un homéomorphisme entre les intérieurs des deux arcs.

Nous allons maintenant détailler les différents cas apparaissant dans la proposition.

b. Le type Cycle. — Bien que le type Cycle soit celui qui nous intéresse le moins, la description qui suit est utilisée une fois dans le texte (dans la preuve du théorème 3.10). Supposons que tout voisinage de 0 contient une feuille-cercle. Quitte à restreindre U , nous supposons que U est un disque topologique fermé dont le bord est une feuille-cercle de \mathcal{F} . Notons K la réunion des feuilles-cercles. Il s'agit d'un ensemble fermé dans $U \setminus \{0\}$ (ce fait est une conséquence de la théorie de Poincaré-Bendixson). Les feuilles-cercles sont totalement ordonnées par la relation d'inclusion entre les disques qu'elles bordent. On peut construire un homéomorphisme Φ qui envoie chaque feuille-cercle sur un cercle euclidien. Soit A une composante connexe du complémentaire de $K \cup \{0\}$. L'ensemble A est bordé par deux feuilles-cercles $\partial^+ A$ et $\partial^- A$. De deux choses l'une : ou bien toute feuille F incluse dans A vérifie $\omega(F) = \partial^+ A$ et $\alpha(F) = \partial^- A$, ou bien le contraire. À homéomorphisme près, il n'y a que deux feuilletages possibles sur A : il existe un homéomorphisme entre l'adhérence de A et l'anneau compact $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ qui envoie le feuilletage (non orienté) \mathcal{F} ou bien sur le feuilletage de Reeb, ou bien sur le feuilletage en spirale (figure 3).

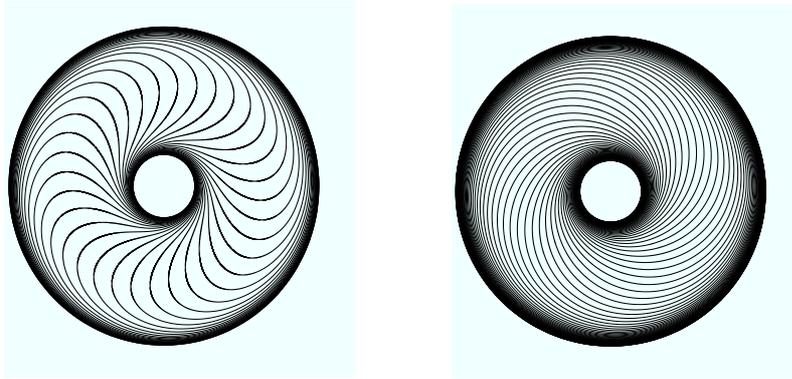


FIGURE 3. Feuilletage de Reeb et feuilletage en spirales, les deux topologies possibles sur un anneau feuilleté sans feuille-cercle

c. Absence de récurrence en l'absence de feuille-cercle. — Commençons par rappeler un argument-clé de la théorie de Poincaré-Bendixson. Soit x un point de U qui n'appartient pas à une feuille-cercle, et supposons que l'ensemble limite $\omega(x)$ contienne un point $y \neq 0$. On a alors le dessin suivant (figure 4.(1)). On voit que

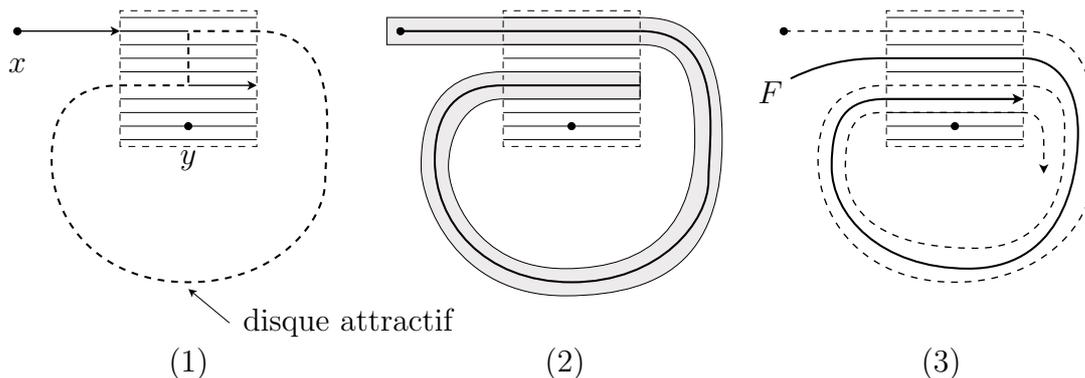


FIGURE 4. En cas de récurrence...

la demi-feuille positive de x pénètre dans un disque topologique fermé positivement invariant. On en déduit d'abord que x n'est pas récurrent : il n'appartient pas à son propre ensemble ω -limite. Mieux, toute feuille passant par un point assez proche de x rentre aussi dans le disque positivement invariant (figure 4.(2)) : le point x ne peut donc pas appartenir à l'ensemble ω -limite d'un point quelconque (c'est même un point errant). Remarquons au passage qu'une feuille F ne peut rentrer dans le disque positivement invariant qu'en passant dans la boîte à flot entre deux passages successifs de la feuille de x ; l'ensemble ω -limite d'une telle feuille est alors égal à celui de x , en particulier il contient le point y (figure 4.(3)).

Appliquons maintenant ce qui précède au point y : puisqu'il appartient à un ensemble ω -limite, si la feuille de y n'est pas une courbe de Jordan, alors l'ensemble $\omega(y)$ ne contient aucun point différent de 0. D'autre part, y appartient au disque positivement invariant, l'ensemble $\omega(y)$ ne peut pas être vide : on en conclut que $\omega(y) = \{0\}$. Nous allons déduire de ce raisonnement que l'absence de cycle entraîne l'existence d'un voisinage sans récurrence.

Corollaire B.2. — *Si le feuilletage \mathcal{F} n'admet pas de cycle dans U , alors il existe un voisinage V de 0 sans récurrence : pour toute demi-feuille positive F_x^+ incluse dans V , on a $\omega(x) = \{0\}$.*

En effet, ou bien il n'y a pas de récurrence dans U , et alors $V = U$ convient. Ou bien il y a de la récurrence dans U , dans ce cas le raisonnement précédent nous déniche un point y tel que $\omega(y) = \{0\}$. Soit V un voisinage simplement connexe qui ne contient pas entièrement la feuille du point y . Supposons qu'il y ait de la récurrence dans V : cet ensemble contient alors un disque topologique positivement invariant comme celui dessiné plus haut. Ce disque contient la singularité 0, la feuille de y doit donc y entrer, mais nous avons vu que toute feuille rentrant dans ce disque a son ensemble ω -limite non réduit à $\{0\}$ ((figure 4, (3))). Cette contradiction montre que le voisinage V vérifie la conclusion de l'énoncé.

d. Les types Puits ou Source, Pétale et Selle. — Nous nous plaçons maintenant et jusqu'à la fin de la section dans le cas où U ne contient aucune feuille-cercle.

Quitte à restreindre U , on peut alors supposer qu'il n'y a pas de récurrence dans U (corollaire B.2). On définit alors le U -module du feuilletage comme le nombre minimum de points de tangence du feuilletage avec une courbe de Jordan (de classe C^1) entourant 0. Comme le feuilletage est orienté, il s'agit d'un entier pair : par exemple, le feuilletage par les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction xy est de module 4. Soit γ une courbe de Jordan réalisant le U -module. De la minimalité de γ on déduit facilement la propriété suivante (voir la figure 5).

Lemme B.3. — *Une feuille passant par un point en lequel la courbe γ est tangente au feuilletage est ou bien entièrement incluse dans le disque bordé par γ , ou bien disjointe de l'intérieur de ce disque.*

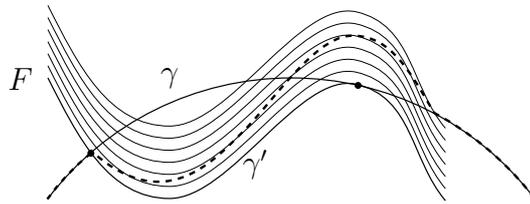


FIGURE 5. Lorsqu'une feuille F ayant un point de tangence avec γ recoupe γ en un autre point, on peut modifier γ pour supprimer une tangence, ce qui montre que γ ne réalise pas le module

D'après ce lemme, on peut distinguer deux types de tangences, *intérieures* ou *extérieures*. Étant donnée l'absence de récurrence dans U , il est clair que chaque feuille ayant un point de tangence intérieure avec \mathcal{F} a ses ensembles α et ω -limites égaux à $\{0\}$, autrement dit elle borde un pétale. Montrons maintenant qu'un point x de tangence extérieure donne naissance à un secteur hyperbolique. En considérant une boîte à flot au point x , on voit que les feuilles proches de la feuille de x qui rencontrent localement la courbe γ la rencontrent en deux points, situés de part et d'autre de x . Considérons l'ensemble O des points y^- de γ tels que la demi-feuille positive $F_{y^-}^+$ contient un point $y^+ \neq y^-$ de γ , le morceau de feuille entre y^- et y^+ étant à l'intérieur du disque bordé par γ . D'après le lemme B.3, au point y^+ le feuilletage n'est pas tangent à la courbe γ , aussi l'ensemble O est-il ouvert dans γ . Soit α_+ la composante connexe de O dont une extrémité est x . Soit F^+ la demi-feuille en l'autre extrémité de α^+ . On définit symétriquement α^- et F^- . Les demi-feuilles F^+, F^- sont incluses dans le disque bordé par γ , leur seul point d'accumulation est 0. Le disque délimité par $\alpha^+, \alpha^-, F^-, F^+$ et le point 0 vérifie la deuxième définition des secteurs hyperboliques (cf. figure 2 de cet appendice).

Ainsi, la courbe γ réalisant le U -module donne naissance à une famille de pétales et de secteurs hyperboliques rencontrant γ , en nombre égal aux points de tangence intérieurs et extérieurs. Nous allons maintenant utiliser la formule suivante (qui est en fait valable pour toute courbe γ n'ayant qu'un nombre fini de points de tangence).

Lemme B.4. — *L'indice de Poincaré-Hopf de la singularité 0 vérifie la formule*

$$\text{ind}(\mathcal{F}, 0) = \frac{1}{2} (\# \text{tangences int.} - \# \text{tangences ext.}) + 1.$$

Démonstration. — Entre deux points de tangence le feuilletage est transverse à la courbe. En découpant, on est ramené à la situation élémentaire suivante ; les détails sont laissés au lecteur.

Soit X un champ de vecteurs défini au voisinage d'un segment I horizontal dans le plan, supposons que

- X a un seul point de tangence sur I ,
- X est vertical vers le haut au début (à gauche) et vers le bas à la fin (à droite).

Alors l'indice de X le long de I est $+1/2$ si à la tangence le champ est dirigé vers la gauche, et $-1/2$ s'il est dirigé vers la droite. \square

Pour tout voisinage V de 0, simplement connexe, inclus dans U , on définit le V -module du feuilletage en se restreignant aux courbes de Jordan incluses dans V . En appliquant le lemme précédent à la trace du feuilletage dans V , nous allons obtenir le corollaire suivant.

Corollaire B.5. — *Tout pétale contient des pétales arbitrairement petits. Tout secteur hyperbolique contient des secteurs hyperboliques arbitrairement petits.*

Démonstration. — Soit P un pétale, et V un voisinage de 0. En doublant P , c'est-à-dire en recollant deux copies de P le long de leur bord, on obtient un feuilletage sur la sphère, avec une unique singularité. D'après Poincaré-Hopf, l'indice de cette singularité vaut 2. C'est donc aussi l'indice du feuilletage le long de toute courbe entourant la singularité et incluse dans W , le double de V . En particulier, une courbe réalisant le W -module est d'indice 2, mais elle vérifie la formule du lemme précédent : elle a donc au moins un point de tangence intérieure, et le pétale correspondant est inclus dans W . Il est nécessairement inclus dans l'une des deux copies de P . On a ainsi trouvé un pétale inclus dans $P \cap V$. Le deuxième point se montre de façon analogue, les détails sont laissés au lecteur. \square

Nous pouvons enfin décrire complètement les types Puits ou Source, Pétale et Selle. Pour cela, nous définissons des *feuilletage modèles* de la façon suivante (voir la figure de l'avant-propos). Le feuilletage modèle d'indice 0 est obtenu en partant du feuilletage en droites parallèles sur le plan, et en prenant sa trace sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Le feuilletage modèle d'indice 2 est le feuilletage invariant par l'application $z \mapsto z + z^2$, dessiné sur la figure 9 du chapitre 2 ; c'est aussi (à homéomorphisme près) le même que le précédent, mais considéré au voisinage du point à l'infini. Pour tout $p > 0$, le feuilletage modèle d'indice $1 - p$ est obtenu en tirant en arrière le feuilletage modèle d'indice 0 par le revêtement ramifié p fois au-dessus de 0, $z \mapsto z^p$. De même, le feuilletage modèle d'indice $1 + p$ est le tiré en arrière du feuilletage modèle d'indice 2 par l'application $z \mapsto z^p$. Alternativement et de façon équivalente, les feuilletages modèles sont ceux obtenus en intégrant un champ de vecteurs unitaires qui tourne à

vitesse constante le long du cercle unité, et qui est invariant par homothéties, donné en coordonnées polaires par

$$\vec{X}_{r,\theta} = \cos(p\theta)\vec{e}_\theta + \sin(p\theta)\vec{e}_r.$$

La proposition qui suit montre en particulier que les trois types Puits ou Source, Pétales et Selle ne concernent qu'un nombre dénombrable de classes de conjugaison, l'essentiel des feuilletages étant donc couvert par les deux types restants, Cycle et Mixte.

Proposition B.6. —

- Dans le cas Puits ou Source, le feuilletage est localement homéomorphe au feuilletage en demi-droites issues de 0, orienté vers 0 (puits) ou depuis 0 (Source).
- Dans le cas Pétales, le feuilletage est localement homéomorphe au feuilletage modèle de même indice.
- Dans le cas Selle, le feuilletage est localement homéomorphe au feuilletage modèle de même indice avec épaissement éventuel de certaines séparatrices.

L'épaississement d'une séparatrice consiste à remplacer l'une des demi-feuilles aboutissant en zéro, ou issue de zéro, par un secteur feuilleté par des feuilles aboutissant en (ou issues de) zéro.

Démonstration. — Supposons que le V -module soit non nul, pour un voisinage V de 0. D'après le lemme B.4, V contient au moins un pétale ou un secteur hyperbolique. D'après le corollaire B.5, il en est de même de tout voisinage de 0. Par définition, le feuilletage n'est pas de type Puits ou Source.

Lorsque \mathcal{F} est de type Puits ou Source, le V -module est donc nul pour tout voisinage de 0. On en déduit facilement que le feuilletage est homéomorphe au feuilletage en demi-droites issues de 0. Au passage, on a caractérisé ce type par le fait que le V -module est nul pour tout voisinage de 0 (en l'absence de feuille-cercle).

Plaçons-nous maintenant dans le cas Selle. Dans ce cas le U -module n'est pas nul, et U ne contient aucun pétale. Une courbe γ réalisant le U -module n'a donc que des tangences extérieures, et fournit une famille de secteurs hyperboliques. L'ensemble K intervenant dans la définition des secteurs hyperboliques est réunion de la singularité et de feuilles entièrement incluses dans le secteur; en l'absence de tout pétale, il ne peut contenir que la singularité : autrement dit, un secteur hyperbolique qui ne contient aucun pétale est un secteur hyperbolique pur. Si la réunion des secteurs forme un voisinage de 0, on obtient par recollement un homéomorphisme avec un feuilletage-modèle d'indice négatif; les épaisissements des séparatrices sont nécessaires dans le cas contraire. Le cas Pétale est laissé au lecteur. \square

e. Le type Mixte. — Pour finir, nous allons préciser le cas Mixte : les énoncés suivants généralisent les cas Pétales et Selle en affirmant que le feuilletage est au moins aussi riche que le feuilletage modèle de même indice. Disons qu'un pétale est

direct si il est situé à gauche de sa feuille-bord, *indirect* s'il est à sa droite. De même, un secteur hyperbolique sera dit *direct* s'il est situé à gauche de ses feuilles F^+ et F^- , *indirect* sinon.

Proposition B.7. — *Supposons que l'indice de Poincaré-Hopf de la singularité est strictement plus grand que 1, écrivons-le $1 + p$ avec $p > 0$. Alors dans tout voisinage de 0 on peut trouver une famille composée de p pétales directs et p pétales indirects, deux à deux d'intersection égale à $\{0\}$, les pétales directs et indirects étant cycliquement alternés autour de 0.*

Proposition B.8. — *Supposons que l'indice de Poincaré-Hopf de la singularité est strictement plus petit que 1, écrivons-le $1 - p$ avec $p > 0$. Alors dans tout voisinage de 0 on peut trouver une famille composée de p secteurs hyperboliques directs et p secteurs hyperboliques indirects, deux à deux d'intersection d'intérieur vide, les secteurs directs et indirects étant cycliquement alternés autour de 0.*

Démonstration des propositions. — Les deux démonstrations sont analogues, nous expliquons seulement la première. Sous les hypothèses de la proposition, U ne contient pas de feuille-cercle. On considère un voisinage V de 0, et une courbe de Jordan γ réalisant le V -module. Soit \mathcal{P} la famille des pétales et secteurs hyperboliques associée à γ .

1. Ou bien \mathcal{P} ne contient que des pétales; dans ce cas les types directs et indirects doivent nécessairement alterner, puisqu'entre deux tangences successives le feuilletage est alternativement rentrant et sortant. La formule d'indice (lemme B.4) nous dit que le nombre de pétale est égal à $2p$, comme voulu.
2. Ou bien \mathcal{P} contient des secteurs hyperboliques; d'après la formule d'indice, \mathcal{P} contient aussi des pétales. On choisit alors un secteur hyperbolique et un pétale correspondant à deux tangences adjacentes, et on les retire simultanément de la famille \mathcal{P} . On obtient ainsi une sous-famille \mathcal{P}_1 qui vérifie encore la formule du lemme B.4. On itère alors ce procédé d'extraction jusqu'à obtenir une sous-famille \mathcal{P}_k qui ne contient plus de secteur hyperbolique. Cette famille vérifie l'énoncé.

□

En particulier, le bord d'un pétale ou d'un secteur hyperbolique fournit des "séparatrices", c'est-à-dire des demi-feuilles aboutissants à la singularité.

Corollaire B.9. —

- *S'il existe un voisinage de 0 sans feuille-cercle, alors il existe une feuille F^+ dont l'ensemble ω -limite est $\{0\}$, ou une feuille F^- dont l'ensemble α -limite est $\{0\}$.*
- *Si l'indice de Poincaré-Hopf de la singularité est différent de 1, ou plus généralement si le feuilletage est de type Pétale, Selle ou Mixte, alors il existe une feuille F^+ dont l'ensemble ω -limite est $\{0\}$, et une feuille F^- dont l'ensemble α -limite est $\{0\}$.*

B.2. Densité des feuilletages lisses

L'énoncé suivant est bien connu, même si je n'en ai pas trouvé de trace dans la littérature.

Théorème B.10. — *Soit M une surface de classe C^1 (compacte ou non), et \mathcal{F} un feuilletage continu sur M . Alors tout voisinage de \mathcal{F} pour la topologie de Whitney contient un feuilletage de classe C^1 .*

La définition de la topologie de Whitney est rappelée à la section 3.1.d.

BIBLIOGRAPHIE

- [BCLP] Béguin, François; Crovisier, Sylvain; Le Roux, Frédéric; Patou, Alice. Pseudo-rotations of the closed annulus : variations on a theorem of J. Kwapisz. *Nonlinearity*, **17**, 1427–1453, 2004.
- [BCL06] Béguin, François; Crovisier, Sylvain; Le Roux, Frédéric. Pseudo-rotations of the open annulus, *Bull. Braz. Math. Soc.* **37** (2006), no. 2, 275–306.
- [Ben01] Bendixson, Ivar. Sur les courbes définies par des equations différentielles. *Acta Mathematica*, **24** (1901), 1–88.
- [Bon01] Bonino, Marc. A dynamical property for planar homeomorphisms. Application to the problem of canonical position around an isolated fixed point. *Topology*, 40 (2001), no. 6, 1241–1257.
- [Cam78] Camacho, César. On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields. *Astérisque* **59-60** (1978), 83–94.
- [Fat80] Fathi, Albert. *Transformations et homtorphismes prt servant la mesure. Systemes dynamiques minimaux*. Thèse Orsay (1980).
- [Fra88] Franks, John. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem. *Ann. of Mat.* **128** (1988), no 1, 139–151.
- [FraRic00] Franks, John; Richeson, David. Shift equivalence and the Conley index. *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), no. 7, 3305–3322.
- [GamGhy97] Gambaudo, Jean-Marc; Ghys, Étienne. Enlacements asymptotiques. *Topology* **36**, No. 6, 1355–1379.
- [GamPéc95] Gambaudo, Jean-Marc; Pécou, Élisabeth. A topological invariant for volume preserving diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **15** (1995), no. 3, 535–541.
- [GLP96] Gambaudo, Jean-Marc; Le Calvez, Patrice; Pécou, Élisabeth. Une généralisation d’un théorème de Naishul. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), no. 4, 397–402.
- [Ham54] Hamilton, O. H. A short proof of the Cartwright-Littlewood theorem. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 522–524.

- [Ham74] Hamström, Mary-Elizabeth. Homotopy in homeomorphism spaces, TOP and PL. *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), 207–230.
- [Ker23] Kerékjártó, Béla. *Vorlesungen über Topologie (I)*, Springer-Verlag, Berlin, 1923.
- [LeC91] Le Calvez, Patrice. *Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore*. *Astérisque* **204** (1991).
- [LeC01] Le Calvez, Patrice. Rotation numbers in the infinite annulus. *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 11, 3221–3230.
- [LeC03] Le Calvez, Patrice. Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 36(4) :139–171, 2003.
- [LeC05] Le Calvez, Patrice. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **102** (2005), 1–98.
- [LeC08] Le Calvez, Patrice. Pourquoi les points périodiques des homéomorphismes du plan tournent-ils autour de certains points fixes ? *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **41** (2008), 141–176.
- [LeCYoc97] Le Calvez, Patrice; Yoccoz, Jean-Christophe. Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. *Ann. of Math.* **146** (1997), no. 2, 241–293.
- [LeCYoc] Le Calvez, Patrice; Yoccoz, Jean-Christophe. Suite des indices de Lefschetz des itérés pour un domaine de Jordan qui est un bloc isolant. *Texte non publié*.
- [LeR97] Le Roux, Frédéric. *Étude topologique de l'espace des homéomorphismes de Brouwer*. Thèse, Institut Fourier, Grenoble, 1997.
- [LeR00] Le Roux, Frédéric. Migration des points errants d'un homéomorphisme de surface. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no. 3, 225–230.
- [LeR04] Le Roux, Frédéric. Homéomorphismes de surfaces : théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable. *Astérisque* **292** (2004).
- [LeR05] Le Roux, Frédéric. Structure des homéomorphismes de Brouwer. *Geom. Topol.* **9** (2005), 1689–1774.
- [LeR08] Le Roux, Frédéric. A topological characterization of holomorphic parabolic germs in the plane. *Fund. Math.* **198** (2008), no. 1, 77–94.
- [LeR] Le Roux, Frédéric. Un indice qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz pour les homéomorphismes de surfaces. *Annals of Math.*, à paraître.
- [Mat82a] Mather, John N. Topological proofs of some purely topological consequences of Carathéodory's theory of prime ends. *Selected studies : physics-astrophysics, mathematics, history of science*, 225–255, North-Holland, Amsterdam-New York, 1982.

- [Mat82b] Mather, John N. Foliations of surfaces. I. An ideal boundary. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **32** (1982), no. 1, viii, 235–261.
- [Mil06] Milnor, John. *Dynamics in one complex variable*. Annals of Mathematics Studies, 160. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [Mat01] Matsumoto, Shigenori. Types of fixed points of index one of surface homeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **21** (2001), no 4, 1181–1211.
- [Poi1885] Poincaré, Henri. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, Chapitre XV. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **4** (1885), 167–244; œuvres complètes, tome 1, 137–157.
- [Rue85] Ruelle, David. Rotation numbers for diffeomorphisms and flows, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique* **42** (1985), 109–115.
- [RdpSal02] Ruiz del Portal, Francisco R.; Salazar, José M. Fixed point index of iterations of local homeomorphisms of the plane : a Conley index approach. *Topology* **41** (2002), no. 6, 1199–1212.
- [Sch79] Schmitt, Bruno V. L'espace des homéomorphismes du plan qui admettent un seul point fixe d'indice donné est connexe par arcs. *Topology* **18** (1979), no. 3, 235–240.
- [Sei50] Seifert, Herbert. Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, (1950) 287–302.
- [Sla93] Slaminka, Edwards E. Removing index 0 fixed points for area preserving maps of two manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340** (1993), no. 1, 429–445.
- [Whi33] Whitney, Hassler. Regular families of curves. *Ann. of Math.* **34** (1933), 244–270.