



**HAL**  
open science

# Caractérisation ultrasonore et vibroacoustique de la santé mécanique des os humains

Erick Ogam

► **To cite this version:**

Erick Ogam. Caractérisation ultrasonore et vibroacoustique de la santé mécanique des os humains. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2007. Français. NNT: . tel-00349558

**HAL Id: tel-00349558**

**<https://theses.hal.science/tel-00349558>**

Submitted on 1 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE de DOCTORAT**  
**de l'UNIVERSITÉ de PROVENCE AIX-MARSEILLE I**

**Discipline : ACOUSTIQUE**

**CARACTÉRISATION ULTRASONORE ET VIBROACOUSTIQUE**  
**DE LA SANTÉ MÉCANIQUE DES OS HUMAINS**

Présentée et soutenue publiquement par

**Erick Ogam**

le 12 Juin 2007

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de PROVENCE AIX-MARSEILLE I**

**JURY**

R. Bouc	Directeur de Recherche Émérite, CNRS/LMA	Président
C. Brunet	Professeur, INRETS/ Fac. de Médecine	Examineur
M. Cocou	Professeur, Université de Provence	Examineur
P. Laugier	Directeur de Recherche CNRS, LIP/UMR7623	Rapporteur
P. Leclaire	Professeur, LRMA, I.S.A.T	Rapporteur
A. Wirgin	Directeur de Recherche CNRS/LMA	Directeur de thèse

CARACTÉRISATION ULTRASONORE ET VIBROACOUSTIQUE  
DE LA SANTÉ MÉCANIQUE DES OS HUMAINS

Thèse de Doctorat  
Erick OGAM

Directeur de thèse: Armand Wirgin

UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I

MARSEILLE, FRANCE

2 MAI 2007

*A mes parents, ma femme et mes enfants.*

# Table des Matières

<b>Table des Matières</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1 Introduction . . . . .	1
0.1.1 L'ostéoporose . . . . .	1
0.2 Structure de l'os . . . . .	3
0.3 Le matériau-os . . . . .	7
0.3.1 Composition . . . . .	7
0.3.2 Sous-structures . . . . .	7
0.4 Lien entre structure et fonction . . . . .	8
0.5 Le comportement mécanique quasi-statique de l'os spongieux . . . . .	9
0.5.1 Introduction . . . . .	9
0.5.2 La relation entre les modules relatives et la densité relative pour des matériaux cellulaires génériques chargés en compression . . . . .	12
0.5.3 La relation entre les contraintes critiques et la densité relative pour des matériaux cellulaires élastoplastiques chargés en compression . . . . .	13
0.5.4 La relation entre les contraintes critiques et la densité relative pour des matériaux cellulaires plastiques chargés en compression . . . . .	14
0.5.5 La relation entre les contraintes critiques et la densité relative pour des matériaux cellulaires fragiles chargés en compression . . . . .	14
0.5.6 Conclusions provisoires . . . . .	15
0.5.7 Particularités du comportement mécanique de l'os spongieux . . . . .	15
0.5.8 La relation entre les modules élastiques et la densité relative pour les os spongieux chargés en compression . . . . .	16
0.5.9 La relation entre les contraintes critiques et la densité relative pour les os spongieux chargés en compression . . . . .	17

<b>1</b>	<b>Problèmes inverses en général et ceux employant les rayons-X comme vecteur pour sonder la matière en particulier</b>	<b>19</b>
1.1	Introduction . . . . .	19
1.2	Définitions et écueils . . . . .	20
1.3	Un problème inverse relatif à l'absorptiométrie par rayons-X des os . . .	24
1.3.1	Remarques préliminaires . . . . .	24
1.3.2	Radiographie par rayons-X d'une structure quasi plane (2D) intérieure au corps humain . . . . .	25
1.3.3	Radiographie par rayons-X d'une structure (3D) intérieure au corps humain . . . . .	26
1.3.4	Absorptiométrie par rayons-X monochromatiques . . . . .	27
1.3.5	Absorptiométrie par rayons-X à deux énergies (DXA) . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Modèles de l'élastodynamique des os</b>	<b>35</b>
2.1	Ce qui a déjà été fait et les problèmes que cela soulève . . . . .	35
2.2	Nécessité d'un modèle de milieu continu . . . . .	36
2.3	Le modèle de fluide équivalent (i.e., homogène) ad hoc . . . . .	36
2.4	Exemple de l'emploi du modèle du fluide visqueux équivalent dans un problème (direct) de prédiction de la réponse acoustique d'un os long . . . . .	37
2.5	Emploi du modèle du fluide visqueux équivalent à mémoire dans un problème (direct) de prédiction de la réponse acoustique d'un objet macroscopiquement hétérogène et de forme quelconque . . . . .	40
2.6	Le modèle de fluide équivalent (i.e., homogène) UA-WT . . . . .	47
2.7	Le modèle de solide élastique équivalent (homogène) ad hoc . . . . .	52
2.8	Prédiction des champs acoustiques et vibratoires dans un os long au moyen du modèle de solide équivalent ad hoc du matériau-os . . . . .	54
2.9	Le modèle de solide équivalent (i.e., homogène) UA-WT . . . . .	59
2.10	Le modèle de fluide équivalent (i.e., homogène) de type UA-WT pour un milieu fluide avec des inclusions solides . . . . .	61
2.11	Bref résumé du modèle de Biot . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Inversions des données ultrasonores simulées avec des modèles simples</b>	<b>63</b>
3.1	L'incorporation des modèles de milieu continu pour résoudre le problème inverse de caractérisation matérielle de l'os par méthodes vibratoires et/ou acoustiques . . . . .	63
3.1.1	Remarques préliminaires . . . . .	63
3.2	Les méthodes inverses acoustiques basées sur l'hypothèse d'un os fluide . . . . .	64
3.3	La reconstruction, à partir de données acoustiques, de la compressibilité $\kappa^1$ et de la densité $\rho^1$ d'un os fluide cylindrique circulaire de rayon $a$ . . . . .	65
3.4	La reconstruction, à partir de données acoustiques, de la rigidité relative et de la densité $\rho^1$ d'un os solide cylindrique circulaire de rayon $a$ . . . . .	71

3.5	Reconstruction in vitro des paramètres viscoacoustiques des spécimens d'os spongieux morts ou de fantômes d'os, tous deux en forme de plaque . . . . .	74
3.5.1	Introduction . . . . .	74
3.6	Acquisition et traitement des données par la méthode de temps de vol . . . . .	77
3.7	Acquisition et traitement des données par la méthode spectrale avec un seul spécimen . . . . .	78
3.8	Acquisition et traitement des données par la méthode spectrale avec deux spécimens . . . . .	81
3.9	Que peut-on savoir de plus sur le matériau que la vitesse de phase et l'atténuation . . . . .	83
3.10	Faut-il qualifier le matériau dans la plaque de fluide, solide ou autre? . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Inversions des données ultrasonores réelles de fantômes d'os au moyen de modèles simples</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	87
4.2	Méthode expérimentale . . . . .	88
4.2.1	Les transducteurs (sources) . . . . .	90
4.2.2	Diminution du champ avec la distance $d$ de la source . . . . .	92
4.3	Modèles de réponse spatio- fréquentielle des cylindres fluide et solide pleins . . . . .	92
4.4	Modèles de réponse spatio- fréquentielle d'un tube dont la partie corticale est solide . . . . .	93
4.5	Diagrammes de diffraction expérimentaux . . . . .	94
4.6	Inversion des données expérimentales . . . . .	94
4.7	Conclusion . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Méthode de guide d'ondes ultrasonores pour caractériser l'os cortical</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Qu'est-ce qu'une onde de Lamb? . . . . .	104
5.3	Comment exciter les ondes de Lamb? . . . . .	104
5.4	Le rapport entre la plaque et le tuyau . . . . .	105
5.5	Aspects spectraux des modes de Lamb . . . . .	105
5.6	Application à la caractérisation de la santé de l'os . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Le modèle de Biot et ses avatars</b>	<b>109</b>
6.1	Introduction . . . . .	109
6.2	Pré-supposées de la théorie de Biot des milieux poreux multiphasiques . . . . .	110
6.2.1	Echelles . . . . .	110
6.2.2	Echelle microscopique . . . . .	110
6.2.3	Echelle macroscopique . . . . .	110
6.2.4	Introduction à la théorie de Biot . . . . .	111

6.3	Le bilan de quantité de mouvement dans la théorie de Biot . . . . .	112
6.3.1	Cohérence des relations de conservation du mouvement pour les cas $\phi = 0$ et $\phi = 1$ . . . . .	114
6.3.2	Les lois de comportement de Biot du milieu poreux . . . . .	116
6.3.3	Cohérence des lois de comportement de Biot dans les cas $\phi = 0$ and $\phi = 1$ . . . . .	117
6.3.4	Les équations de mouvement en termes de $\mathbf{u}$ and $\mathbf{w}$ . . . . .	119
6.3.5	Les équations de mouvement en termes de $\mathbf{u}$ and $\mathbf{U}$ . . . . .	120
6.4	Transformation des équations d'onde de Biot au domaine spatio-fréquentiel . . . . .	122
6.5	Mise en évidence des trois modes propres ondulatoires de Biot en espace libre . . . . .	122
6.6	Avatar viscoélastique du modèle de Biot . . . . .	125
6.7	Avatar acoustique du modèle de Biot . . . . .	126
6.7.1	Les équations de conservation de mouvement . . . . .	126
6.7.2	La loi de comportement . . . . .	127
6.7.3	Equation d'ondes . . . . .	128
6.8	L'avatar BJKD du modèle de Biot conçu par Johnson et al. . . . .	128
6.9	Les insuffisances du modèle de Biot . . . . .	130
6.9.1	Nature du fluide dans les pores . . . . .	130
6.9.2	Fluide dans les cellules fermées . . . . .	131
6.9.3	Comment s'effectue le passage micro $\rightarrow$ macro ? . . . . .	131
6.9.4	Que faut-il pour améliorer le modèle de Biot ? . . . . .	132
<b>7</b>	<b>Prédiction du champ transmis par un os à l'aide du modèle de Biot</b> . . . . .	<b>133</b>
7.1	Introduction . . . . .	133
7.2	Description de la configuration . . . . .	134
7.3	Description du problème . . . . .	136
7.3.1	Problème aux limites . . . . .	137
7.3.2	Re-écriture des équations des ondes spatio-fréquentielles . . . . .	138
7.4	Représentations des champs . . . . .	140
7.4.1	Coordonnées cylindriques . . . . .	140
7.4.2	Champs dans l'os poreux . . . . .	140
7.4.3	Champs dans la chair . . . . .	142
7.5	Application des conditions aux limites pour la résolution du problème direct . . . . .	144
7.6	Résultats . . . . .	145
<b>8</b>	<b>Génération in vitro de données réelles de réponse ultrasonore de plaques- os et comparaison de ces données avec les prédictions de la théorie BJKD</b> . . . . .	<b>149</b>
8.1	Introduction . . . . .	149
8.2	Description de l'expérience de Fella et al. . . . .	150
8.3	Allure des signaux transmis . . . . .	150
8.4	Comparaison avec les prédictions du modèle BJKD . . . . .	153



<b>9</b>	<b>Inversion de données ultrasonores réelles pour reconstruire quelques paramètres de Biot-JKD des os</b>	<b>159</b>
9.1	Introduction . . . . .	159
9.2	Description idéalisée de la configuration . . . . .	161
9.3	Acquisition données . . . . .	162
9.3.1	Dispositif d'acquisition de données . . . . .	162
9.3.2	Modus operandi d'acquisition . . . . .	164
9.4	Traitement des données . . . . .	164
9.4.1	Allure des signaux acquis . . . . .	164
9.4.2	Sensibilité de la vitesse vis-à-vis des paramètres . . . . .	164
9.4.3	Emploi des signaux (inversion) pour la reconstruction des paramètres .	167
9.5	Conclusion . . . . .	172
<b>10</b>	<b>Préliminaires concernant les méthodes vibroacoustiques</b>	<b>173</b>
10.1	Pourquoi employer des méthodes vibroacoustiques pour caractériser des os? . .	173
10.2	Caractérisation spectrale en général et vibroacoustique en particulier . . . .	175
10.3	Caractérisation des microfractures de l'os par une méth-ode de spectrométrie vibroacoustique non-linéaire . . . . .	177
<b>11</b>	<b>Mise au point de techniques et protocoles vibratoires expérimentaux</b>	<b>181</b>
11.1	Introduction . . . . .	181
11.2	Banc d'essai vibroacoustique . . . . .	182
11.3	La méthode spectrale . . . . .	184
11.3.1	Problèmes de taille . . . . .	185
11.3.2	Solutions générales . . . . .	185
11.3.3	Excitateurs et capteurs à base de pastilles piézoélectriques . . . . .	186
11.3.4	La Détection synchrone utilisée en mode <i>LOCK IN</i> . . . . .	186
11.4	Levée de voile sur la suite . . . . .	187
<b>12</b>	<b>La réponse impulsionnelle</b>	<b>189</b>
12.1	Introduction . . . . .	189
12.1.1	Méthode pour obtenir une réponse impulsionnelle . . . . .	190
12.1.2	Système amorti à un degré de liberté (1DDL) . . . . .	193
12.1.3	Le problème inverse de reconstruction des paramètres du modèle . . .	198
12.1.4	Méthode multi-DDL . . . . .	199
12.1.5	Le calcul des modes du système à 1DDL avec l'approximation dif- férences finies de 4ème ordre et la transformée en $z$ . . . . .	202
12.2	Reconstruction des coefficients du modèle paramétrique avec un réseau de neurones artificiel . . . . .	203
12.3	La Validation de l'algorithme RNA-ESM [293] . . . . .	206

<b>13 Sollicitation impulsive fournie par une bille impactant le spécimen : calcul de la force de contact par le modèle de Hertz</b>	<b>211</b>
13.1 Introduction . . . . .	211
13.2 Le modèle dynamique de deux corps entrant en contact . . . . .	212
13.3 Mesure de la réponse avec un capteur de pression . . . . .	214
13.4 Emploi du modèle de contact, vibrations et rayonnement pour valider l'algorithme RNA-ESM . . . . .	216
13.5 Influence du bruit sur la reconstruction RNA - ESM . . . . .	217
13.5.1 Prédiction de la réponse à une excitation . . . . .	220
13.6 Conclusion . . . . .	220
<b>14 Prise en compte de l'atténuation</b>	<b>223</b>
14.1 Introduction . . . . .	223
14.2 Les modèles mécaniques des fonctions de relaxation et de fluage des matériaux viscoélastiques . . . . .	223
14.2.1 Relations entre contrainte et déformation des trois modèles . . . . .	224
14.2.2 Système amorti à un degré de liberté . . . . .	225
14.3 Détermination de l'atténuation par des mesures sur le banc vibroacoustique . . . . .	227
14.4 Influence de la chair sur la réponse à un impact de l'os . . . . .	231
<b>15 Simulation de l'évolution de l'ostéoporose</b>	<b>235</b>
15.1 Introduction . . . . .	235
15.2 Modélisation par éléments finis des éprouvettes avec trous . . . . .	237
15.2.1 Modélisation des os courts . . . . .	237
15.3 Modélisation d'os longs . . . . .	239
15.3.1 Résultats . . . . .	239
15.4 Conclusion . . . . .	242
<b>16 Caractérisation d'un fantôme d'os fémoral</b>	<b>243</b>
16.1 Introduction . . . . .	243
16.2 Comment déterminer la réponse dans de bonnes conditions? . . . . .	247
16.2.1 La méthode impulsionnelle . . . . .	248
16.2.2 Séquence pseudo-aléatoire de longueur maximale (MLS) . . . . .	248
16.3 Matériel et logiciel pour le système de mesure basé sur la SPLM (MLS) . . . . .	251
16.4 Caractérisation vibratoire d'un fantôme de tranche de tête fémorale . . . . .	253
16.4.1 Comportement purement élastique et fréquences propres du spécimen	253
16.5 Résultats expérimentaux - la réponse temporelle mesurée . . . . .	253
16.5.1 Méthode de Prony . . . . .	254
16.5.2 Résultats des calculs . . . . .	254
16.6 Comportement vibratoire d'un disque avec un anneau externe . . . . .	257
16.7 Conclusion . . . . .	258

<b>17 Recovery of the mechanical parameters of cellular materials by inversion of vibrational data</b>	<b>259</b>
17.1 Authors and affiliations . . . . .	260
17.2 Abstract . . . . .	260
17.3 Introduction . . . . .	262
17.4 The experimental setup for data acquisition . . . . .	265
17.4.1 Nonlinear behavior of the specimens . . . . .	267
17.5 Ingredients of the method for the recovery of the elastic moduli and damping factors of the specimens . . . . .	267
17.5.1 Preliminary remarks . . . . .	267
17.5.2 Models for solving the direct problem . . . . .	268
17.5.3 Method of solution of the inverse problem . . . . .	272
17.6 Results and discussion . . . . .	273
17.6.1 Preliminaries . . . . .	273
17.6.2 Particular aspects of the cost function . . . . .	273
17.6.3 The outcome of the inversion scheme for samples PE1 and PE2 . . . . .	275
17.6.4 Comparison between experimental and model responses for samples PE1 and PE2 . . . . .	275
17.6.5 The outcome of the inversion scheme for sample PE3 . . . . .	275
17.6.6 Comparison between experimental and model responses for sample PE3 . . . . .	275
17.6.7 The outcome of the inversion scheme for sample PE4 . . . . .	276
17.6.8 Comparison between experimental and model responses for sample PE4 . . . . .	276
17.6.9 Quality and damping factors of melamine and polyurethane . . . . .	276
17.6.10 Possible sources of errors in the determination of the material properties	276
17.7 Conclusions . . . . .	277
17.8 Appendix A : The steady-state linear dynamic equation . . . . .	279
17.9 Appendix B : The modified Maxwell model . . . . .	279
17.10 Appendix C : Biot model . . . . .	280
17.11 Table captions . . . . .	281
17.12 Tables . . . . .	282
17.13 Figure captions . . . . .	283
17.14 Figures . . . . .	286
<b>18 Caractérisation de l'anisotropie des os</b>	<b>303</b>
18.1 Introduction . . . . .	303
18.2 La loi de comportement de Hooke . . . . .	304
18.3 Problème direct : le modèle d'éléments finis . . . . .	304
18.4 Obtention de la géométrie du spécimen d'os réel . . . . .	305
18.5 Expérience d'acquisition de données vibroacoustiques . . . . .	306

18.6	Reconstruction des modules . . . . .	306
18.7	Résultats . . . . .	308
18.8	Vérification . . . . .	308
18.9	Discussion et conclusion . . . . .	311
<b>19</b>	<b>La prise en compte de la moelle de l'os</b>	<b>315</b>
19.1	Introduction . . . . .	315
19.2	Modèles simples de vibration d'os longs - modèle de poutre de Timoshenko (MPT) . . . . .	317
19.3	La résolution numérique par différence finies du MPTF pour un fantôme d'os de longueur finie . . . . .	318
19.3.1	Poutre libre-libre . . . . .	319
19.3.2	Poutre encastree-libre . . . . .	320
19.3.3	Résolution de l'équation matricielle du MPTF-DF . . . . .	320
19.4	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux . . . . .	321
19.4.1	Première comparaison portant sur des modèles 1D numériques et un résultat expérimental pour un os réel . . . . .	321
19.4.2	Deuxième comparaison entre un modèle 1D, un modèle 3D et des résultats expérimentaux . . . . .	322
19.5	Interaction fluide-structure (IFS) . . . . .	323
19.5.1	Remarques préliminaires . . . . .	323
19.5.2	Le champ acoustique dans le sous domaine fluide . . . . .	325
19.5.3	Le champ élastodynamique dans le sous-domaine solide . . . . .	325
19.5.4	Conditions aux limites . . . . .	326
19.5.5	Résolution numérique . . . . .	326
19.6	Résultats des simulations numériques et comparaison avec les expériences . . . . .	327
19.6.1	Description des expériences . . . . .	327
19.6.2	Courbes de dispersion pour le tube C1 . . . . .	328
19.6.3	Influence de l'épaisseur du tube rempli d'air sur la dispersion . . . . .	328
19.6.4	Influence du type de fluide de remplissage sur la dispersion . . . . .	329
19.6.5	Formes modales et spectres de réponse . . . . .	329
19.7	Conclusion . . . . .	331
<b>20</b>	<b>Experimental and theoretical nonlinear dynamic response of intact and cracked bone-like specimens with various boundary conditions</b>	<b>333</b>
20.1	Authors and affiliations . . . . .	334
20.2	Abstract . . . . .	334
20.3	Introduction . . . . .	335
20.4	Experimental setup . . . . .	337
20.5	Theoretical models . . . . .	338
20.5.1	Nonlinear single degree of freedom oscillator . . . . .	338

20.5.2	Frequency domain response computed by a finite element method incorporating a model of contact friction between the glass and the support	340
20.5.3	Frequency domain response of the cracked glass using FES - mode splitting and shifting . . . . .	343
20.6	Results and discussion . . . . .	344
20.7	Conclusion . . . . .	347
20.8	Acknowledgement . . . . .	348
20.9	Table captions . . . . .	349
20.10	Figure captions . . . . .	351
20.11	Figures . . . . .	353
<b>21</b>	<b>Comparaison des résultats de caractérisation des méthodes ultrasonore et vibroacoustique</b>	<b>377</b>
21.1	Introduction . . . . .	377
21.2	Comparaison des modules reconstruits . . . . .	378
21.2.1	Rappel sur la manière d'obtenir les résultats par la méthode ultrasonore	378
21.2.2	Rappel sur la manière d'obtenir les résultats par la méthode vibroacoustique . . . . .	378
21.2.3	Comparaison des valeurs du module de Young . . . . .	379
<b>22</b>	<b>Vibrational spectroscopy and ultrasound propagation data as indicators of structural and mechanical degradation of human bones</b>	<b>381</b>
22.1	Authors and affiliations . . . . .	382
22.2	Abstract . . . . .	382
22.3	Introduction . . . . .	384
22.3.1	Bone types and factors that influence their strength . . . . .	384
22.3.2	Some diseases affecting bone . . . . .	384
22.3.3	Well-established methods for characterizing the health of bones . . . . .	386
22.3.4	New directions in the characterization of bone . . . . .	387
22.4	Bone specimens and the experimental means for their characterization . . . . .	389
22.4.1	Bone specimens . . . . .	389
22.4.2	Bone phantoms . . . . .	389
22.4.3	Measurement of the center of gravity of the human tibia as an indicator of mass imbalance in the bone . . . . .	389
22.4.4	The hammer-impulse experiment . . . . .	390
22.4.5	Experiment employing piezoelectric transducers . . . . .	392
22.4.6	Ultrasonic wave propagation measurements along the bone epiphysis . . . . .	396
22.5	Results . . . . .	398
22.5.1	Mass and density imbalance in the bones . . . . .	398
22.5.2	Dominant mode frequency and damping coefficient as determined by the hammer impact method . . . . .	398

22.5.3 Mode splitting as observed by piezoelectric transducer vibration spectroscopy . . . . .	399
22.6 Correlation between the various measured quantities on real bone . . . . .	401
22.7 Discussion . . . . .	402
22.8 Conclusions . . . . .	403
<b>23 Conclusion générale</b>	<b>417</b>
23.1 Ce qui a été fait dans cette thèse . . . . .	417
23.2 Tendances . . . . .	418
23.3 Perspectives . . . . .	419
<b>Bibliographie</b>	<b>425</b>

# Remerciements

J'ai bénéficié du soutien financier de l'Action CNRS/Etats-Unis N°3321

"Caractérisation vibroacoustique de l'os : aspects fondamentaux et applications au diagnostic et au suivi du traitement de l'ostéoporose"

au cours des années 2005-2007.

Marseille, France  
2 avril 2007

Erick Ogam

# Introduction

## 0.1 Introduction

### 0.1.1 L'ostéoporose

L'ostéoporose est une maladie osseuse causée par un changement biochimique et hormonal qui affecte l'équilibre entre la résorption et la déposition des nouveaux tissus osseux [235],[38]. Il en résulte une modification de la structure et, dans une moindre mesure, de la composition du tissu osseux (i.e., de la partie solide) [87], [148] (voir figs. 1 et 2) d'où une fragilisation du squelette aux conséquences souvent graves.

Environ dix millions d'américains (pour la plupart des femmes ménopausées, donc relativement âgées) sont actuellement affectés par l'ostéoporose (ce chiffre est de trois millions en France). Le diagnostic et le traitement de cette maladie constituent un enjeu sociale (les souffrances et la mortalité, suite aux fractures osseuses qu'occasionne cette maladie sont incommensurables) et économique (rappelons que le seul marché mondial annuelle de médicaments, toutes spécialités confondues, était de 427 milliards de dollars en 2002 et de 602 milliards de dollars en 2005 (une augmentation de près de 50% en 4 ans ! ; Le Monde, section Economie, 27/2/07, p. III), et qu'une partie non-négligeable de ces montants concerne les traitements hormonaux et autres liés à l'ostéoporose [38]) d'autant plus considérable que le nombre de personnes âgées ne cesse d'augmenter).

La détection clinique précoce de l'ostéoporose est nécessaire pour commencer au plus tôt un traitement médical, et celui-ci doit être suivi régulièrement pour éprouver son efficacité. Actuellement, les rayons X, utilisés pour estimer qualitativement (radiographie) et quantitativement (absorptiométrie) la densité osseuse (indicateur de la quantité d'os), ne permettent d'expliquer que 50% des accidents dus à la fragilité de l'os [235], [301]. Certains paramètres,



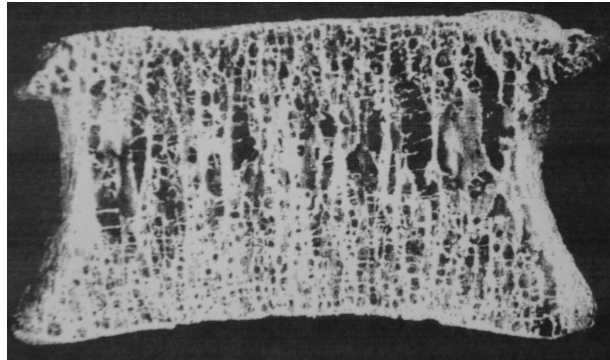


FIG. 1 – Os vertébral d'un sujet jeune normal

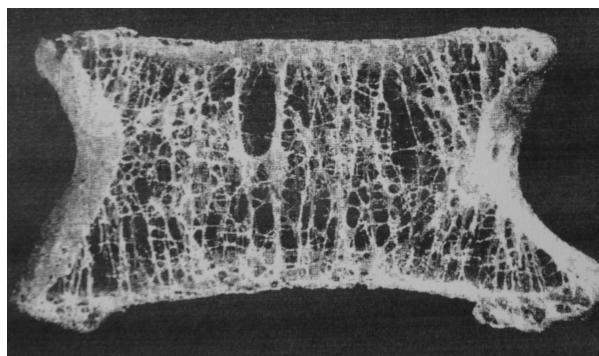


FIG. 2 – Os vertébral d'un sujet âgé atteint d'ostéoporose

liés à l'architecture interne du tissu osseux, et indicatifs de la fragilité de l'objet-os [301], ne peuvent pas être déterminés par absorptiométrie X [70], [142], [235], [177], [236].

Des images plus détaillées de la structure interne de l'os peuvent être obtenues par tomographie par rayons-X (QCT, en anglais : Quantitative Computerized Tomography [145] et IRM (Imagerie par Résonance Magnétique [257]), mais ces techniques sont, soit dangereuses pour le patient (doses relativement importantes de rayonnement ionisant dans le cas de QCT), soit très coûteuses (QCT et IRM) ; il n'est donc pas envisageable de les utiliser pour des examens routiniers que nécessite le diagnostic à grande échelle dans la population et le suivi de la maladie. De plus, les appareils de QCT et IRM sont lourds et chers et ne peuvent être implantés que dans des cliniques et hôpitaux, alors que les médecins voudraient que ce type d'examen se fasse dans leurs cabinets de consultation (comme pour l'échographie ultrasonore).

Les *vibrations* et *ondes sonores* (y comprises ultrasonores) constituent des alternatives possibles et/ou des compléments aux rayons X ; elles fournissent un outil puissant pour la caractérisation des tissus biologiques, en raison de leur capacité à pénétrer ces tissus en profondeur et à en révéler la santé mécanique [143], [235]. De plus, ces outils sont d'un *coût peu élevé*, et emploient des *vecteurs non-invasifs et non-ionisants*.

L'utilisation des phénomènes vibroacoustiques (y compris ultrasonores) pour caractériser les tissus osseux devrait donc permettre de diagnostiquer l'ostéoporose avec une meilleure fiabilité, et d'opérer un suivi de l'évolution de la maladie, notamment au cours de son traitement [235]. Avant que cela puisse se faire, *des recherches approfondies doivent être effectuées pour bien comprendre comment s'établissent les champs vibratoires et acoustiques au sein du tissu osseux, et comment extraire les paramètres caractéristiques de l'os à partir de ces champs*.

## 0.2 Structure de l'os

Superficiellement, les os apparaissent comme des objets assez solides, mais les apparences peuvent être trompeuses. La plupart des os sont des sandwichs très élaborés, composés d'une coque extérieure d'*os compact* (aussi appelé *os cortical*), enfermant un milieu poreux (i.e., cellulaire) appelé *os spongieux* ou *os trabéculaire*. Un exemple en est donné dans la fig. 3 pour

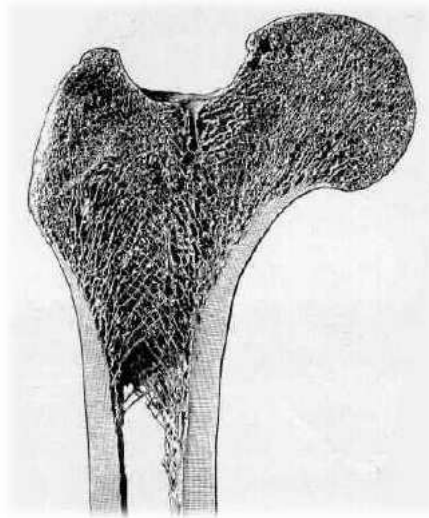


FIG. 3 – Vue en coupe de la structure interne du fémur humain ; on y distingue la partie corticale externe et la partie spongieuse interne, notamment près de la tête de l’os

le fémur humain. On obtient des images similaires pour d’autres os longs tels que le tibia, et même pour des os courts tels que les vertèbres dont la partie corticale est moins épaisse. Les extrémités des os longs et les parties jointives des os courts sont des configurations (d’os spongieux) répondant probablement à un souci de minimisation de poids tout en fournissant une grande aire de soutien, ce qui réduit les contraintes de soutien aux joints.

La structure cellulaire de l’os spongieux est montrée dans la fig. 4. Cet os est constitué d’un réseau interconnecté de tiges (appelées *trabécules*) et plaques (aussi appelées, par extension, ou faute de mieux, *trabécules*). Un réseau de tiges donne lieu à un ensemble peu dense de cellules (i.e., pores) ouvertes, tandis qu’une prédominance de plaques produit dans le réseau un ensemble dense de cellules presque ou entièrement fermées. La densité relative (rapport de la densité de l’os spongieux et de la densité de l’os totalement compact) d’os spongieux varie entre 0,05 et 0,7, de sorte que l’on qualifie l’os de ‘spongieux’ si la densité relative est inférieure à 0,7 [143] (voir figs. 4, 5, 6).

A une échelle plus petite que dans la fig. 4, cette structure se présente comme dans la fig. 5, et à une échelle encore plus petite (que l’on peut qualifier de supramicroscopique ;

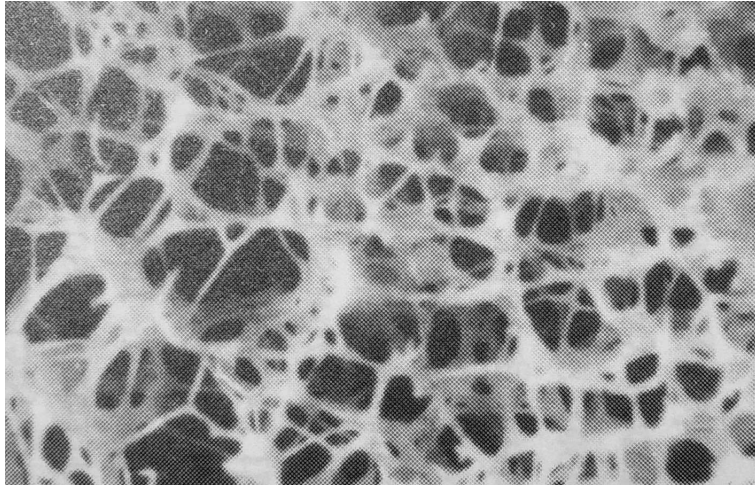


FIG. 4 – Vue macroscopique de l'os spongieux

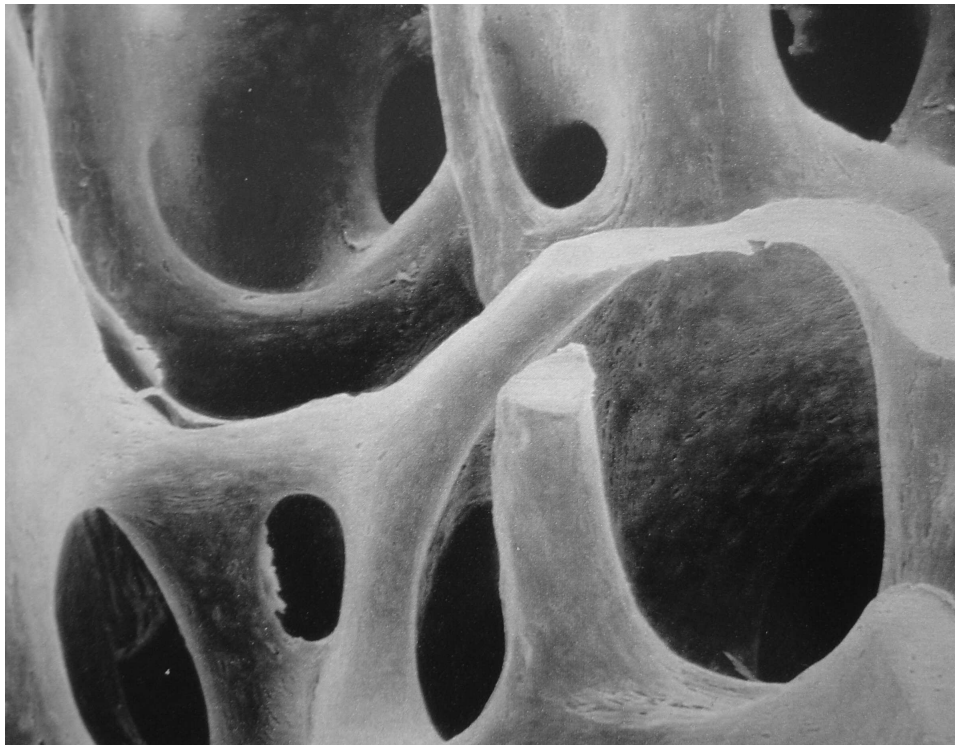


FIG. 5 – Vue mésoscopique de l'os spongieux



FIG. 6 – Vue supramicroscopique de la paroi d'une trabécule en forme de plaque de l'os spongieux

fig. 6) on discerne la structure de la paroi d'une trabécule (en l'occurrence, en forme de plaque, les autres étant plutôt en forme de tiges). Le choix d'échelle pour caractériser l'os est évidemment d'une grande importance.

## 0.3 Le matériau-os

### 0.3.1 Composition

Les trabécules (tiges et plaques) de l'os spongieux, ainsi que l'os cortical, sont des solides sous forme de fibres organiques de collagène (des protéines) servant d'hôte (matrice) à un matériau inorganique minéral, l'hydroxyapatite cristallin ( $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ ) et le calcium phosphate amorphe ( $CaPO_3$ ), qui donne la raideur à l'os. La matrice organique constitue  $\sim 35\%$  du poids mouillé de l'os, les composés de calcium  $\sim 45\%$ , et le reste de l'eau. Les trabécules et l'os cortical ont des densités  $\rho_s$  (le  $s$  signifiant 'solide') de l'ordre de  $1900 \text{ kg/m}^3$ .

Les propriétés mécaniques en rapport avec la composition de la partie corticale des os longs sont bien connues, mais celles des trabécules sont assez mal connues du fait qu'il n'est pas facile de varier la composition et de faire des essais mécaniques classiques (traction, compression, etc.) sur des spécimens aussi petits (de l'ordre du  $mm$  ou plus petit).

Les espaces entre les trabécules de l'os spongieux sont remplis d'un matériau visqueux mi fluide, mi solide, appelé *moelle jaune* et d'un matériau plutôt fluide appelé *moelle rouge* (du fait que le fluide est essentiellement du sang). Les propriétés mécaniques des moelles sont mal connues [343], [309].

### 0.3.2 Sous-structures

A l'échelle microscopique (dite échelle matérielle' (voir la fig. 7), on distingue une structure hiérarchisée constituée : de cylindres enroulés que sont les ostéons (un peu comme un tronc d'arbre) en lesquelles se trouvent les canaux haversiens, suivies à l'échelle submicroscopique des lamelles, lacunes et canicules, suivis à l'échelle subsubmicroscopique des fibres de collagène et de cristaux d'hydroxyapatite, et à l'échelle chimique on distingue les différentes molécules composant le collagène, l'hydroxyapatite, et les fluides.

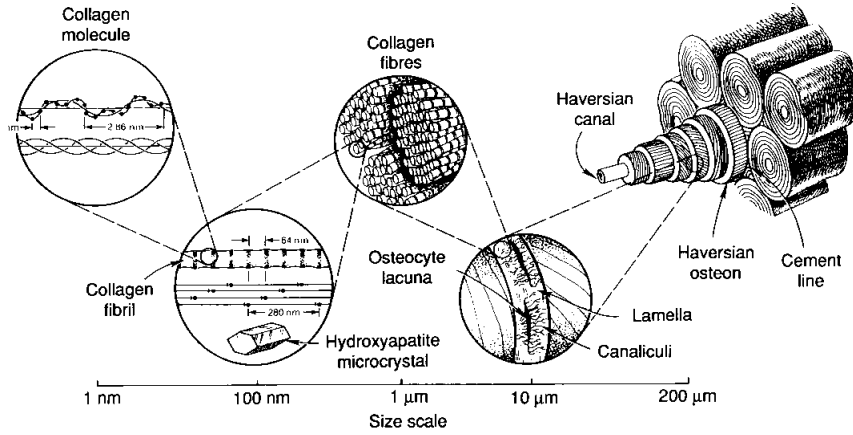


FIG. 7 – Vues, en partant de l'échelle microscopique, vers des échelles toujours plus petites (de droite à gauche sur la figure), de l'os, montrant son hiérarchie structurale

Pour les besoins de l'analyse qui suit [149], nous ferons abstraction des détails que nous venons d'évoquer, de sorte qu'à partir d'ici, l'os sera considéré comme un solide diphasique, dont les deux phases sont, d'une part les trabécules solides homogènes et isotropes, plus ou moins épaisses et ayant des séparations plus ou moins importantes (indicateur principale de porosité), et le fluide plus ou moins visqueux occupant les espaces (pores) entre les trabécules. Nous appellerons cette représentation *la microstructure de l'os*. Plus tard, nous ferons une opération mathématique (micro→macro) qui transformera, pour les besoins de la caractérisation de l'os, la microstructure en une macrostructure (en réalité, en un continuum sans dimension caractéristique apparente).

#### 0.4 Lien entre structure et fonction

On sait depuis les travaux de Wolff [391], [89] que le remodelage de l'os (i.e., formation et destruction du tissu osseux [87], [38]) se fait (durant toute la vie d'un individu) en réponse aux efforts. Le mécanisme de ce phénomène n'est pas bien compris (et ne fait pas l'objet de cette thèse). Néanmoins, il est utile de savoir que l'os est un matériau piézoélectrique et que cette propriété peut être en rapport avec le fait que la croissance de l'os est induite par les efforts.

Des comparaisons entre la disposition des trabécules dans l'os spongieux (particulièrement dans les extrémités des os longs ; voir la fig. 3) et les directions des contraintes principales dans les membres sous chargement, suggèrent que les trabécules se déploient suivant les trajectoires des contraintes principales [361]. De plus, il semble que *la densité de l'os spongieux dépend de l'amplitude du chargement*. En particulier, les structures (dominées par les tiges) en cellules ouvertes à faible densité, se développent là où la contrainte est faible, alors que les structures (dominées par les plaques) en cellules presque fermées, à forte densité, se trouvent dans les régions de plus forte contrainte. Ainsi, *la structure de l'objet-os (e.g., un os long) est hétérogène et anisotrope à l'échelle macroscopique*. Ce fait engendre d'importantes difficultés en ce qui concerne la caractérisation du matériau.

## 0.5 Le comportement mécanique quasi-statique de l'os spongieux

### 0.5.1 Introduction

Les propriétés de l'os spongieux, comme celles de tout matériau cellulaire (e.g., mousses) sont liées à sa structure et aux propriétés du matériel dont sont composées les parois des cellules (le squelette, non du corps, mais du matériau). Les descripteurs d'une telle structure cellulaire sont sa *densité relative*,  $\rho^*/\rho_s$  ('s' se rapportant au solide et '\*' au matériau cellulaire), le degré d'ouverture (ou fermeture) des pores, la dispersion de taille des pores, et des paramètres d'anisotropie de forme (dont nous ferons abstraction à présent) [149]. Les paramètres cruciaux des parois des cellules (i.e., trabécules) sont leur densité  $\rho_s$ , module de Young  $E_s$ , la résistance au flambement  $\sigma_{ys}$  ('y' pour yield (en anglais)), la résistance à la fracture  $\sigma_{fs}$  et des paramètres de viscoélasticité (que nous ne détaillons pas ici).

Le comportement du matériau (solide ou composite) est décrit sur les graphes (GCD) contrainte induite ou appliquée (i.e., effort) ( $\sigma$ )–déformation ( $\varepsilon$ ) dont un exemple est donné dans la fig. 8. Des facteurs tels que la vitesse de chargement, la température, l'anisotropie et le chargement multiaxial ont aussi une influence sur le comportement du matériau, mais ne font pas l'objet de la présente discussion.

Les GCD se divisent typiquement en trois régions : élastique, plastique, et fracture (ou région de densification). L'abscisse marquant le point de transition entre la région élastique



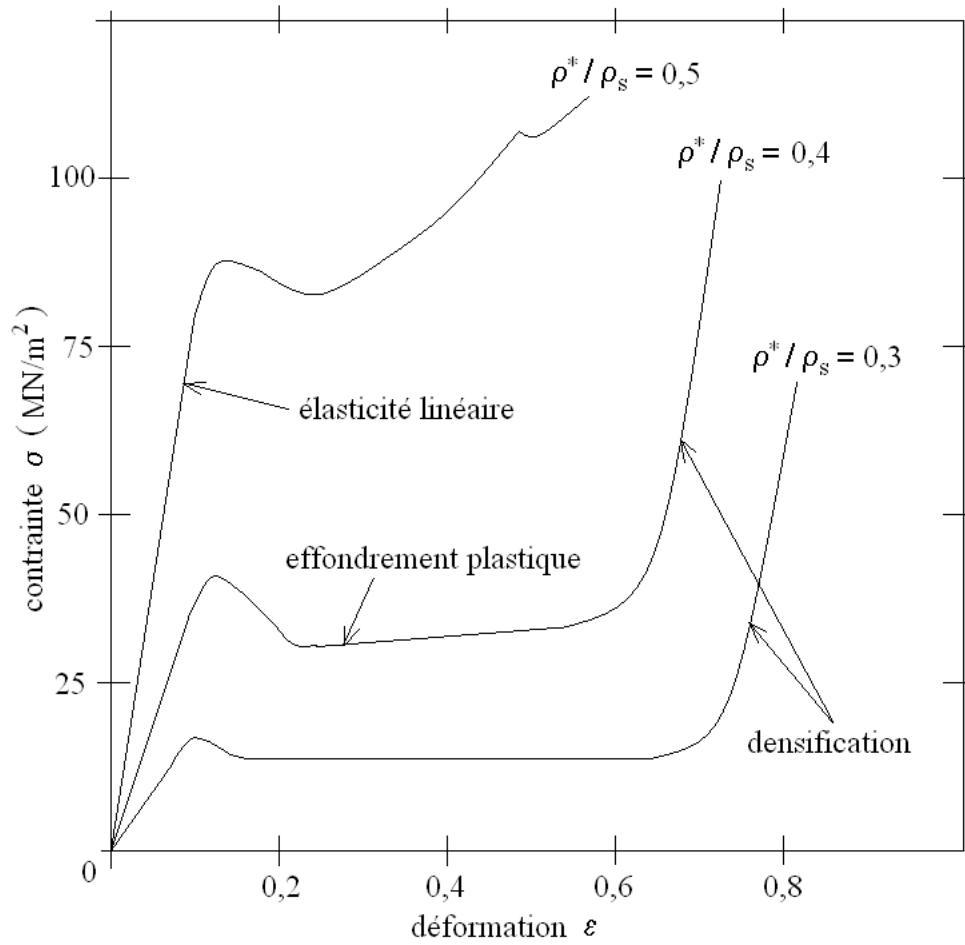


FIG. 8 – Courbes de contrainte-déformation en compression de l'os spongieux mouillé pour trois densités relatives [67]

et la région plastique est le point de flambement  $\varepsilon_{ys}$  et l'ordonnée correspondant est  $\sigma_{ys}$  (ce point n'est pas toujours facile à définir).

Dans la région élastique,  $\sigma$  varie linéairement avec  $\varepsilon$  (la pente de cette droite est un module, e.g., de Young), ce qui veut dire que les parois des cellules fléchissent, se tordent, ou se compriment axialement. Lorsque l'on relâche le chargement, le matériau revient à son état d'origine ; il y a donc réversibilité tant que l'on n'a pas atteint la contrainte de flambement lors du chargement. Au delà d'une certaine contrainte critique, les cellules d'un matériau cellulaire commencent à s'écraser, et si le matériau des parois est élastoplastique (ce qui n'est que partiellement le cas pour l'os), l'écrasement se fait par flambement élastique des parois et est réversible. Sinon, lorsque les parois sont composés d'un matériau fragile (ce qui est aussi partiellement le cas pour l'os), les parois se fracturent fragilement, processus qui est irréversible, et le comportement est celui de la région centrale (dite de flambement plastique) relativement plate de la fig. 8. Eventuellement, pour des déformations suffisamment grandes, la majorité des parois des cellules s'écrase au point que les parois opposées se touchent et une déformation supplémentaire comprime même le matériau des parois, ce qui donne la partie finale ascendante (dite de densification) des courbes dans la fig. 8.

Au niveau de l'os-objet, on peut dire, que dans la région plastique, l'os est déjà endommagé, mais peut encore subir des chargements substantiels avant de casser. La quantité de déformation post-flambement que peut subir un matériau avant cassure est une mesure de sa *ductilité*. Un matériau exhibant peu de déformation post-affaissement est appelé *fragile* ; le matériau des trabécules est de cette sorte, mais le comportement d'ensemble de l'os spongieux n'est pas fragile sauf pour de grandes valeurs de  $\rho^*/\rho_s$  (voir la fig. 8). La fracture fragile est le résultat de la propagation et de la fusion des microfissures. La résistance à la fracture  $\sigma_{fs}$  est le  $\sigma$  maximal que peut subir un matériau avant la ruine (point culminant sur la courbe la plus haute dans la fig. 8). Souvent, on parle de résistance à la fracture en se référant à  $\sigma_{fs}/E_s$ .

*Le point important à retenir est que ni la résistance au flambement, ni la résistance à la fracture (qui sont de bons indicateurs de la santé mécanique d'un matériau tel que l'os) ne sont en relation naturelle avec un module constitutif comme le module de Young, et ceci pour la raison que les modules ont trait au comportement linéaire alors que le flambement*

et la fracture sont des comportements essentiellement non-linéaires.

Toutefois, les modules de Young  $E^*$  et/ou  $E_s$  (comme d'autres paramètres d'ingénieur tel que le coefficient de Poisson  $\nu$ ) sont des descripteurs mécaniques toujours bons à mesurer/déterminer, faute de mieux (en tous cas, ils sont des descripteurs valables pour des petites déformations et petites contraintes). Nous disons 'faute de mieux', car *il n'est évidemment pas question de charger des os dans un corps humain vivant jusqu'à l'endommagement et la ruine afin de déterminer la résistance au flambement, ni la résistance à la fracture*, comme on peut le faire in vitro avec des os morts humains, ou comme on pourrait le faire in vivo sur des petits animaux. Donc, le plus souvent, nous associerons le terme 'état de santé mécanique', d'un matériau tel que l'os, à la grandeur de descripteurs tels que le module de Young, le coefficient de Poisson, etc. Notons, au passage, que ces descripteurs peuvent être complexes pour tenir compte de la viscoélasticité du matériau.

Il est probable que le comportement mécanique d'un matériau cellulaire tel que l'os spongieux vivant ne puisse pas être décrit correctement en ne tenant compte que du comportement mécanique de la partie solide et des paramètres structurels évoqués précédemment ; *il faut aussi se pencher sur les propriétés du fluide/solide (i.e., un genre de gel) visqueux (moelle) qui se trouve dans les pores*. Le caractère cellules ouverts ou cellules fermées joue un grand rôle dans l'analyse de l'influence des fluides sur le comportement de l'ensemble.

### 0.5.2 La relation entre les modules relatives et la densité relative pour des matériaux cellulaires génériques chargés en compression

On peut montrer [149] que pour un matériau composé de cellules équiaxiales (e.g., ensemble de tiges solides élastiques formant des cellules cubiques) identiques et *ouvertes*, baignant dans un gaz tel que l'air, et soumis à de faibles chargements statiques en compression (mode dominant de chargement des os spongieux), le module de Young relatif est

$$\frac{E^*}{E_s} \approx \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2, \quad (0.5.1)$$

alors que module de cisaillement et le coefficient de Poisson sont

$$\frac{G^*}{E_s} \approx \frac{3}{8} \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2, \quad (0.5.2)$$

$$\nu^* \approx \frac{1}{3}, \quad (0.5.3)$$

respectivement. Nous verrons plus loin que dans des matériaux réels tel que l'os spongieux, ces lois ne sont qu'approximativement vraies.

Si le matériau est composé de cellules équiaxiales identiques et *fermées*, baignant dans un gaz tel que l'air, et soumis à de faibles chargements, le coefficient de Poisson est comme avant et les modules de Young et de cisaillement relatifs deviennent

$$\frac{E^*}{E_s} \approx \Phi^2 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 + (1 - \Phi) \frac{\rho^*}{\rho_s} + \frac{p_0(1 - 2\nu^*)}{E_S \left( 1 - \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)}, \quad (0.5.4)$$

$$\frac{G^*}{E_s} \approx \frac{3}{8} \left[ \Phi^2 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 + (1 - \Phi) \frac{\rho^*}{\rho_s} \right], \quad (0.5.5)$$

formules dans lesquelles  $\Phi$  est la fraction volumique du solide contenue dans les armatures (tiges) d'une cellule et  $(1 - \Phi)$  la fraction du solide (supposée le même que celui des tiges) contenue dans les parois de la cellule fermée, alors que  $p_0$  est la pression initiale (avant chargement) du gaz (e.g., la pression de l'air). Ces formules sont, à peu de choses près, les mêmes lorsque un liquide remplace le gaz.

On voit à travers ces formules que la densité relative joue un grand rôle dans les modules élastiques des matériaux cellulaires génériques. On verra plus loin si cette loi se confirme pour l'os spongieux.

### 0.5.3 La relation entre les contraintes critiques et la densité relative pour des matériaux cellulaires élastoplastiques chargés en compression

Nous avons évoqué la possibilité qu'un matériau cellulaire, tel que l'os spongieux, puisse avoir un comportement, au delà du régime strictement linéaire, soit de type élastoplastique (i.e., "réversible"), soit de type plastique (irréversible). En fait, le type de comportement dépend sensiblement du *ratio de minceur* ( $l/d$ , où  $d$  est le diamètre et  $l$  la longueur) des tiges formant la partie solide du matériau ( $\rho^*/\rho_s$  est proportionnel à  $(d/l)^{-2}$ ).

Supposons que ces tiges soient telles que pour des grandes déformations on ait un comportement élasto-plastique. La contrainte correspondant au plateau dans la fig. 8 s'appelle alors la contrainte d'effondrement élastique  $\sigma_{el}^*$  et est donnée, pour des cellules ouvertes, par

la formule [149]

$$\frac{\sigma_{el}^*}{E_s} \approx 0,05 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2, \quad (0.5.6)$$

et, pour des cellules fermées, par

$$\frac{\sigma_{el}^*}{E_s} \approx 0,05 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 + \frac{(p_0 - p_{at})}{E_s}, \quad (0.5.7)$$

où  $p_{at}$  est la pression atmosphérique.

Une fois de plus, on voit qu'un indicateur de comportement, ici relatif au régime post-linéaire élastique (i.e., de flambement élastique), dépend de manière évidente de la densité relative.

#### 0.5.4 La relation entre les contraintes critiques et la densité relative pour des matériaux cellulaires plastiques chargés en compression

Les matériaux cellulaires qui manifestent un point de flambement plastique ( $\sigma_{ys}$ ) s'effondrent plastiquement lorsqu'ils sont chargés au delà du régime linéaire-élastique. L'effondrement plastique, tout comme le flambement élastique, donne lieu au plateau caractéristique sur le GCD, bien que le processus soit irréversible. L'équivalent de  $\sigma_{el}^*$  du régime de flambement élastique est  $\sigma_{pl}^*$  dans le régime de flambement plastique. On montre [149] que lorsque les cellules sont ouvertes,

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{ys}} \approx 0,3 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^{3/2}, \quad (0.5.8)$$

et, lorsque les cellules sont fermées,

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{ys}} \approx 0,3 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^{3/2} + (1 - \Phi) \frac{\rho^*}{\rho_s} + \frac{(p_0 - p_{at})}{\sigma_{ys}}. \quad (0.5.9)$$

Une fois de plus, on voit qu'un indicateur de comportement, ici relatif au régime plastique, dépend de manière évidente de la densité relative.

#### 0.5.5 La relation entre les contraintes critiques et la densité relative pour des matériaux cellulaires fragiles chargés en compression

Les matériaux cellulaires fragiles s'écrasent par le mécanisme d'écrasement fragile. La contrainte critique pour ce type de comportement s'appelle 'contrainte d'écrasement'  $\sigma_{cr}$  (le

'cr' désignant 'crushing' en anglais). On montre [149] que lorsque les cellules sont ouvertes,

$$\frac{\sigma_{cr}^*}{\sigma_{fs}} \approx 0,65 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^{3/2}, \quad (0.5.10)$$

et, lorsque les cellules sont fermées,

$$\frac{\sigma_{cr}^*}{\sigma_{ys}} \approx 0,65 \left( \Phi \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^{3/2} + (1 - \Phi) \frac{\rho^*}{\rho_s}. \quad (0.5.11)$$

Une fois de plus, on voit qu'un indicateur de comportement, ici de type fragile, dépend de manière évidente de la densité relative.

### 0.5.6 Conclusions provisoires

De manière générale, plus grande est la densité relative, plus grandes sont les modules élastiques du régime linéaire élastique, et plus grandes sont les contraintes critiques des régimes post-élastique linéaire. Etant donnée que celles-ci sont des indicateurs de la résistance des matériaux cellulaires génériques, on peut affirmer qu'*il est d'un grand intérêt de caractériser (mesurer directement si possible, ou de reconstruire à partir d'autres grandeurs) la densité relative d'un tel matériau.* Il reste à déterminer si l'os spongieux se comporte effectivement comme un matériau cellulaire générique.

### 0.5.7 Particularités du comportement mécanique de l'os spongieux

Nous avons déjà montré les GCD des os spongieux dans la fig. 8. La réponse linéairement élastique de l'os spongieux (presque) isotrope et à faible densité résulte du fléchissement des parois de ses cellules. Des contraintes axiales et de type membrane se manifestent aussi, mais sont petites devant celles du fléchissement. La situation est différente dans l'os spongieux qui s'est adapté à la contrainte (voir la fig. 9). Dans ce type d'os, certaines parois des cellules ayant la forme de tubes ou de plaques, sont alignées dans la direction de la plus grande contrainte principale, et les efforts appliqués dans cette direction distendent ou compriment ces parois, alors que des efforts transversaux donnent lieu à des fléchissements des tiges qui relient les plaques entre elles.

Le régime élastique linéaire cesse lorsque les cellules commencent à s'effondrer. Les plaques et les tiges de l'os spongieux faiblement dense ont un ratio de minceur (rapport

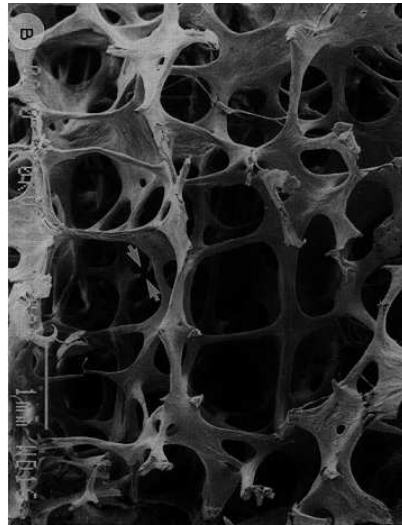


FIG. 9 – Os spongieux dont la structure est adaptée à la direction de la contrainte principale (ici verticale). Les structures verticales en plaques presque parallèles sont reliées par des tiges. En fait, il s’agit d’un os atteint d’ostéoporose comme témoigne le fait que les plaques sont passablement érodées et certaines tiges sont cassées (e.g., à l’endroit des deux flèches).

de leur longueur sur leur épaisseur) important et s’effondrent par flambement élastique, que ces os soient mouillés ou secs. Pour des densités plus importantes, le ratio de minceur est moindre, rendant ainsi le flambement plus difficile, de sorte que les spécimens mouillés cèdent plastiquement et les spécimens secs cèdent fragilement. L’écrasement compressif progressif donne lieu au long plateau horizontal dans la fig. 8 qui continue jusqu’à ce que les parois en vis-à-vis se touchent, ce qui produit le tournant brusque et pentu vers le haut dans la fig. 8. Tout ceci est relativement typique de ce qui se passe dans d’autres matériaux cellulaires (e.g., mousses dont le constituant solide est relativement rigide).

### 0.5.8 La relation entre les modules élastiques et la densité relative pour les os spongieux chargés en compression

Des résultats d’essais, sur des os mortes spongieux provenant d’humains et de boeufs [67], [149], montrent que le module de Young relatif  $E^*/E_s$  varie comme  $(\rho^*/\rho_s)^p$ , avec  $p$  prenant une valeur située entre 1,5 et 3, alors que la théorie pour les matériaux cellulaires génériques prévoit que  $p = 2$ . Cette indétermination concernant  $p$  provient probablement du fait que

les spécimens faisant l'objet des essais avaient des proportions variées de cellules ouvertes et fermées, des plaques et tiges d'orientations variées, et du fait que la théorie suppose l'identité de forme (quasi cubique) et de taille des cellules alors que la réalité est souvent autre. De plus, l'os spongieux réel est macroscopiquement hétérogène (i.e., sa structure varie spatialement sur une distance de l'ordre du  $mm$ ), de sorte que si l'on ne fait pas les essais chaque fois sur la même région d'observation on risque de mesurer la réponse de ce qui équivaut à un autre os.

Un résultat curieux de ces essais (voir la fig. 11.7 dans [149]) est que  $p$  est plus proche de 3 pour les faibles valeurs de  $\rho^*/\rho_s$  et plus proche de 1,5 pour les (relativement) grandes valeurs de  $\rho^*/\rho_s$ . Ce fait suggère que si l'on avait un moyen de mesurer  $E^*/E_s$  directement ou indirectement, de sa valeur plus ou moins grande pourrait se déduire la valeur plus ou moins grande de  $p$  et donc la plus ou moins grande densité relative (mais pas sa valeur absolue). *Ceci pourrait constituer un moyen d'effectuer un diagnostic différentiel de l'ostéoporose* puisque cette maladie se caractérise par une décroissance de la densité relative  $\rho^*/\rho_s$  de l'os spongieux. Nous verrons plus loin qu'un moyen (vibrationnel) non-invasif et non-destructif existe, du moins in vitro, pour déterminer le module de Young de l'os ; on dispose ainsi d'une piste qu'il serait certainement intéressante de suivre.

### 0.5.9 La relation entre les contraintes critiques et la densité relative pour les os spongieux chargés en compression

A notre connaissance, les seules essais relatifs aux contraintes critiques des os spongieux portent sur la résistance relative en compression  $\sigma^*/\sigma_{ys}$  [149]. En fait, il s'agit d'un grand nombre d'essais sur différents types d'objets-os (spongieux) humains morts et qui montrent tous que  $\sigma^*/\sigma_{ys}$  varie comme  $(\rho^*/\rho_s)^p$ , avec  $p \approx 2$ , ce qui semble en accord avec la théorie.

Ce bon accord, et surtout la constatation que  $p$  ne varie pas avec  $\rho^*/\rho_s$ , fait que si l'on disposait d'une façon de mesurer  $\rho^*/\rho_s$ , on pourrait suivre l'évolution de la résistance en compression de l'os. On verra plus loin qu'*il est effectivement possible de mesurer (par rayons-X) la densité relative de l'os spongieux et donc d'obtenir, par ce moyen, une indication de sa résistance en compression.*





# Chapitre 1

## Problèmes inverses en général et ceux employant les rayons-X comme vecteur pour sonder la matière en particulier

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de problème inverse et l'appliquons pour analyser les problèmes inverses que l'on rencontre dans les méthodes traditionnelles, faisant appel aux rayons-X, pour sonder les os.

### 1.1 Introduction

La finalité de cette thèse est bien de reconstruire certains paramètres de l'objet-os (fournissant, une indication de sa santé mécanique) à partir de mesures de son comportement mécanique en réponse à une sollicitation de type choc (sollicitation vibratoire) ou acoustique (sollicitation ondulatoire).

Il s'agit d'un *problème inverse* (PI) en ce sens que l'on cherche à déterminer ce qui constitue (en partie ou en totalité) la cause d'un phénomène à partir de ses effets palpables (e.g., ses modes de vibration). Le pendant plus familier du PI est le *problème direct* (PD), i.e., déterminer les effets à partir des causes, ce qui dans le contexte actuel, équivaut à prédire le comportement de l'objet-os en réponse à une sollicitation de type choc ou acoustique.

## 1.2 Définitions et écueils

Pour introduire la terminologie, aider à comprendre la suite, et découvrir certains des écueils propres aux problèmes inverses, considérons le problème abstrait suivant, dont un exemple concret pourrait être de trouver les modules mécaniques d'un échantillon de matériau, sous forme de plaque, à partir des coefficients de réflexion et transmission d'une onde acoustique incidente. Le problème (abstrait) consiste en la recherche d'un vecteur  $\mathbf{p}$  de  $N_p$  paramètres  $\{p_1, p_2, \dots, p_{N_p}\}$  (aussi appelés descripteurs), et requiert la comparaison d'un modèle théorique (appelé *estimateur*, paramétrisé par  $\varepsilon$  (un vecteur ayant des propriétés que l'on espère similaires à  $\mathbf{p}$ ), avec les observables (e.g., coefficients de réflexion et de transmission dans l'exemple), prenant la forme (*pseudo-image*) de mesures formant le vecteur de  $N_d$  données  $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_{N_d}\}$ .

*Remarque* : la pseudo-image, comme toute image, peut n'avoir qu'un lointain rapport avec l'objet ; autrement dit : l'information dans la pseudo-image est *codée*.

*Remarque* : en général, on ne possède pas le code qui permet de remonter aux descripteurs ( $\mathbf{p}$ ) de l'objet à partir de la pseudo-image.

Le code est nécessairement contenu dans l'estimateur, souvent de manière compliquée. On se doute que le choix de l'estimateur conditionne largement la qualité de la reconstruction des paramètres.

Souvent, les estimateurs sont évalués avec des *données synthétiques* (c'est-à-dire que celles-ci ne sont pas le résultat de mesures physiques, mais plutôt issues de calculs) qui requièrent, elles aussi, un modèle théorique (appelé *prédicteur*) pour leur fabrication.

*Remarque* : Le prédicteur peut être tel que ce qu'il prédit n'a qu'un rapport lointain avec la réalité du phénomène qu'on essaie de simuler. Il faut donc faire des expériences, au moins dans un cadre de laboratoire, pour vérifier que le prédicteur n'est pas outrageusement faux ou simpliste. Tant que l'on n'effectue pas cette confrontation avec "le réel" (en ce qui concerne

le problème de caractérisation des os, le "réel" pourrait être une expérience en laboratoire sur un fantôme d'os, sur un os d'animal mort, sur un os de cadavre humain, ou mieux, dans un laboratoire ou cadre clinique : sur un os d'animal vivant, un os d'humain vivant....) on peut dire un peu n'importe quoi. Donc, il faut être méfiant de tout ce qui se dit sur un tel problème tant qu'on n'a pas fait au moins une confrontation entre les données théoriques (issues du prédicteur) et les données issues d'une expérience réelle.

Dans [79] apparaît le terme "crime inverse" pour qualifier le fait d'employer le même modèle pour générer et pour inverser les données synthétiques. Bien qu'il y soit déconseillé de commettre le crime inverse (car cela conduit apparemment à des solutions dites "triviales" du problème inverse), nous pensons, au contraire que cette pratique peut être utile pour des raisons didactiques.

Examinons le plus simple des problèmes inverses : reconstruire un seul paramètre  $p \in \mathbb{R}$  à partir d'une seule donnée  $d \in \mathbb{C}$  (cas qui peut aussi fournir des indications sur ce qui se passe lorsque  $N_p$  et/ou  $N_d$  sont plus grands qu'un). Le prédicteur (ou "solveur direct") est noté  $\Phi(\varphi)$ , où  $\varphi$  est une variable dont une valeur particulière est  $d$ . L'estimateur (ou "solveur inverse") est noté  $E(\varepsilon)$ , où  $\varepsilon$  est une variable analogue à  $p$ . Ainsi, pour une seule expérience, nous fabriquons une seule donnée au moyen de  $d = \Phi(p)$  et cherchons à reconstruire  $p$  à l'aide de l'estimateur  $E(\varepsilon)$ , sachant que  $\varepsilon$  évolue dans un certain intervalle incluant  $p$ . Plus précisément, nous accomplissons cette tâche pour un continuum (ou ensemble discret) d'expériences correspondant à  $1 > \varphi > 0$ , impliquant chacune une seule donnée  $d = \Phi(\varphi)$ .

Nous développons le prédicteur et l'estimateur au moyen de

$$\Phi^{(N)}(\varphi) = \sum_{m=0}^N b_m f_m(\varphi) , \quad (1.2.1)$$

$$E^{(M)}(\varepsilon) = \sum_{m=0}^M a_m f_m(\varepsilon) , \quad (1.2.2)$$

respectivement, où les  $f_m(\zeta)$  sont des fonctions complexes et continues de la variable  $\zeta$  vérifiant  $1 > \zeta > 0$ . La manière la plus simple de commettre le crime inverse est de prendre  $b_m = a_m$  ;  $m = 0, 1, 2, \dots$ . "L'absence de lien entre le prédicteur et l'estimateur" (préconisé par les auteurs de [79]) est pris en compte par le choix  $M \neq N$ .

Nous traitons le problème inverse par la recherche de  $\varepsilon$  à partir de l'équation de comparaison

$$K^{(M,N)}(\varepsilon; \varphi) := E^{(M)}(\varepsilon) - \Phi^{(N)}(\varphi) = 0 , \quad (1.2.3)$$

où la fonction-coût  $K^{(M,N)}(\varepsilon; \varphi)$  traduit l'écart entre l'estimateur et le prédicteur. La reconstruction est parfaite lorsque  $\varepsilon$  prend la valeur  $\varphi$ .

Le crime inverse correspond au cas  $M = N$ , et donc à la précédente équation dans laquelle on remplace  $M$  par  $N$ . On note que lorsque  $M = 0$  et  $f_0$  est une constante (i.e., ne dépend pas de son argument), cette équation ne possède même pas la solution "triviale". *Ceci illustre le fait que le choix d'un estimateur trop simpliste peut rendre impossible l'inversion.*

Pour mieux mettre en relief les aspects essentiels du problème inverse nous faisons deux autres choix des fonctions  $f_m$ , l'un abstrait, et l'autre concret. Le premier choix (abstrait) se traduit par  $f_m(\zeta) = \zeta^m$  et donne lieu à l'équation de comparaison (généralement) non-linéaire

$$K^{(M,M)}(\varepsilon; \varphi) = \sum_{m=0}^M a_m(\varepsilon^m - \varphi^m) = 0 , \quad (1.2.4)$$

qui possède au moins une solution ("l'inverse triviale"  $\varepsilon = \varphi$ ) pourvu que  $M \geq 1$ . Cette solution n'est unique que lorsque  $M = 1$  (nous excluons le cas absurde  $a_1 = 0$ ). Sinon (i.e.,  $M \geq 2$ ) cette équation polynomiale possède  $M$  racines le plus souvent non-dégénérées. Par exemple, lorsque  $M = 2$ , les deux racines sont données par  $\varepsilon = \varphi$ ,  $\varepsilon = -\varphi - a_1/a_2$ , et la deuxième de celles-ci n'est pas généralement égale à "l'inverse triviale", de sorte que, dans ce cas, le crime inverse n'est pas trivial. Bien entendu, cet argument et la conclusion qui s'ensuit se transposent aux cas où l'on emploie des modèles d'ordres plus élevés.

Le second cas (concret) correspond à  $M = 0$ ,  $a_0 \neq 0$  et  $f_0(\zeta) = \exp(-2ik\zeta)$ ,  $k$  étant une constante réelle. Il s'agit d'un modèle exact de réflexion d'une onde plane  $\exp(-ikx_3)$  frappant en incidence normale le miroir plan  $x_3 = \varphi$ ;  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x_2 \in \mathbb{R}$ . Si, par exemple, la condition aux limites est de type Dirichlet, alors  $a_0 = -1$ . Avec ce choix, et l'observable étant la réflectivité, l'équation de comparaison prend la forme

$$K^{(0,0)}(\varepsilon; \varphi) = a_0[\exp(-2ik\varepsilon) - \exp(-2ik\varphi)] = 0 , \quad (1.2.5)$$

qui se réduit à  $\sin[k(\varepsilon - \varphi)] = 0$  dont les solutions sont

$$\varepsilon = \varphi + \frac{n\pi}{k} ; n \in \mathbb{Z} . \quad (1.2.6)$$

Une fois de plus, nous obtenons non seulement "l'inverse triviale"  $\varepsilon = \varphi$ , mais aussi un nombre (maintenant infini) d'autres solutions. Celles-ci trahissent le fait que, même dans le contexte du crime inverse, le problème inverse de localisation (en hauteur  $\varphi$ ) du miroir à l'aide d'une seule mesure de la réflectivité, est un problème mal-posé (du fait de la non-unicité des solutions).

Ce même exemple illustre aussi l'utilité du crime inverse, puisque (1.2.6) suggère que l'on peut obtenir la position du miroir de manière non-ambiguë à partir de deux ou plus d'expériences conduites pour deux ou plus de valeurs de  $k$  (i.e., pour  $\geq 2$  valeurs de la fréquence de l'onde incidente). La raison en est que la seule valeur de  $\varepsilon$  dans la formule (1.2.6) qui ne dépend pas de la fréquence est la valeur correcte  $\varepsilon = \varphi$ .

Un estimateur "sans lien" avec le prédicteur peut signifier  $M \neq N$  et correspond à l'équation de couplage

$$K^{(M,N)}(\varepsilon; \varphi) := \sum_{m=0}^M a_m f_m(\varepsilon) - \sum_{m=0}^N a_m f_m(\varphi) = 0 . \quad (1.2.7)$$

Les mêmes remarques (concernant la non-existence de solutions) que précédemment s'appliquent lorsque  $M = 0$ .

Le cas plus intéressant est celui d'un estimateur linéaire et d'un prédicteur quadratique et donne lieu à la solution (unique)

$$\varepsilon = \varphi + (a_2/a_1)\varphi^2 . \quad (1.2.8)$$

Cependant, l'erreur relative (=0 dans la situation de "l'inverse triviale") de la reconstruction  $\delta = |(\varepsilon - \varphi)/\varphi|$ , savoir  $\delta = |(a_2/a_1)\varphi|$  dans la situation présente, n'est petite que lorsque  $|(a_2/a_1)|$  et/ou  $|\varepsilon|$  sont  $\ll 1$ . *Ceci montre qu'il peut s'avérer impossible d'obtenir une solution, dont l'erreur soit située en dessous d'un seuil donné, lorsque l'on emploie un estimateur (linéaire dans cet exemple) qui est "sans lien" avec le prédicteur (quadratique dans cet exemple).*

Bien entendu, la même remarque s'applique pour d'autres paires de prédicteur/estimateur "non liées". Autrement dit, si l'on souhaite reconstruire le(s) paramètre(s) inconnu(s) de manière très précise, l'on ne doit pas suivre le conseil (donné dans ([79])) de choisir un estimateur n'ayant pas de lien avec le prédicteur. *En général, plus grande est la différence fonctionnelle entre l'estimateur et le prédicteur, plus importante est l'erreur relative de la reconstruction.*

Un corollaire de ce qui vient d'être écrit se formule ainsi : plus grande est la différence entre ce que prédit l'estimateur et ce que fournit une *expérience physique* pour un ensemble de données portant sur un paramètre évoluant sur un certain intervalle, plus difficile est la reconstruction de ce paramètre. Il est évident que l'on ne risque pas de commettre le crime inverse avec des données expérimentales car on ne peut pas connaître avec certitude le modèle le plus apte à reproduire ces données (du fait de notre ignorance en général, et de notre ignorance concernant le type et l'ampleur des erreurs expérimentales en particulier).

Bien entendu, ces problèmes existent, et s'amplifient, lorsque le nombre de paramètres à reconstruire est  $> 1$ . Pour de plus amples détails sur ces questions, on peut se référer à [384], [288], [289], [385], [386], [290], [292], et [388].

## 1.3 Un problème inverse relatif à l'absorptiométrie par rayons-X des os

### 1.3.1 Remarques préliminaires

D'un point de vue aussi historique que pratique, les méthodes employant les rayons-X (rayonnement électro-magnétique ionisant de fréquence extrêmement élevée) constituent de loin la première modalité pour caractériser le système osseux humain. Si l'on se contente d'une *image dite qualitative* de l'os, dont l'information qu'elle véhicule (notamment à l'égard de la santé mécanique de l'objet) est relativement faible en quantité et/ou en qualité (ce manque est souvent compensé par l'oeil et l'expertise du radiologue), alors la *radiographie X* (RX) est une modalité adéquate. Dès que l'on cherche une information plus quantitative,

ce qui est le cas lorsque l'on doit distinguer entre un os sain et un os atteint d'ostéoporose, la radiographie X cède la place à l'absorptiométrie X monochromatique (SXA), puis à l'absorptiométrie X à deux énergies (DXA), méthodes dites d'*imagerie quantitative*. Ces méthodes perdent en résolution latérale ce qu'elles gagnent en information quantitative sur un paramètre-clef (i.e., la densité minérale). Par contre, la méthode RX conserve une bonne résolution latérale. Toutes ces méthodes ont une résolution longitudinale (i.e., dans la direction des rayons incidents) nulle. Si l'on vise une image ayant des bonnes résolutions longitudinale et latérale, il faut avoir recours à la tomographie X (QCT) qui nécessite de faire tourner le faisceau incident autour de l'objet et donc d'acquérir une grande quantité d'information, tout en exposant le patient à des doses importantes de rayonnement ionisant.

Bien que cette thèse ne porte pas sur des méthodes de caractérisation faisant appel aux rayons-X, ces méthodes ont le mérite d'exister et d'avoir fait leurs preuves, outre le fait que l'étude de leur mode de fonctionnement permet de comprendre quelques concepts-clefs concernant les méthodes vibratoires et surtout les méthodes acoustiques.

### 1.3.2 Radiographie par rayons-X d'une structure quasi plane (2D) intérieure au corps humain

Une radiographie X (RX) conventionnelle est obtenue par le tir d'un faisceau de rayons-X à travers un spécimen (e.g., main) que l'on suppose, en première approximation, être composé d'une seule couche d'épaisseur constante ayant des variations de composition (et donc de structure) dans les directions transverses à la direction du faisceau incident (celui-ci frappant la couche en incidence normale). Le faisceau incident donne lieu à des taches sur un film photographique (ou sur un écran fluorescent) placé derrière et en contact avec le spécimen, dans les lieux du spécimen où il ne se produit pas d'absorption des rayons-X (ces derniers ayant traversé le spécimen sans être absorbés et pouvant ainsi produire un effet sur le film ou écran). Cet ensemble de taches, que l'on peut appeler "image" (dans notre langage : pseudo-image), fournit une indication de la présence, dans le spécimen, de structures composées de tissus relativement durs dans un fond de tissus relativement mous.

La méthode RX n'emploie pas d'objectif, élément-clef du microscope. Le faisceau des



rayons-X se propage en ligne droite à travers tout le spécimen (jusqu'au plan-image), et, du fait de sa très haute fréquence (i.e., sa longueur d'onde est très petite par rapport aux dimensions caractéristiques des hétérogénéités du spécimen), les effets de diffraction sont quasiment nuls.

Soient  $x, z$  les coordonnées (transversales) dans le plan du spécimen et l'axe de  $y$  l'axe (longitudinal) du faisceau incident,  $y = 0$  étant le plan de l'image.  $I(x, z)$  désigne la distribution spatiale d'intensité de l'image sur le film ou écran. Un estimateur très simple se construit *phénoménologiquement* en supposant que l'intensité au point  $(x, 0, z)$  soit proportionnelle au pouvoir d'absorption  $\alpha(x, z)$  locale que provoque le spécimen, i.e.,

$$I(x, z) = \beta\alpha(x, z) , \quad (1.3.1)$$

de sorte que l'on obtient la caractéristique recherchée de l'objet, i.e.,  $\alpha(x, z)$ , en divisant  $I(x, z)$  par  $\beta$ , à condition que  $\beta$  ne dépende pas de  $x, z$ . En fait, il n'est même pas nécessaire d'effectuer cette opération d'inversion (ici, une simple division), car la pseudo-image  $I(x, z)$  est une copie fidèle (à un facteur numérique non-important près) de la fonction-objet  $\alpha(x, z)$ .

Les choses se compliquent dès lors que l'on souhaite relier  $\alpha(x, z)$  à des paramètres physiques de l'objet, comme par exemple, la densité  $\rho$ . Pour cela, il faut que l'estimateur incorpore une *loi physique* reliant le pouvoir d'absorption à  $\rho$ . Nous reviendrons sur cette question deux sections plus loin, mais, en attendant, ce qu'il faut retenir est que : i) l'on peut parfois se contenter d'une pseudo-image et ne pas être dans l'obligation d'effectuer une inversion, ii) l'estimateur peut être d'une simplicité extrême à condition de ne pas demander trop d'informations concernant l'objet.

Autre remarque : le pouvoir de résolution latérale dans la méthode RX est très grand du fait de la très haute fréquence des rayons-X (ce qui permet d'avoir des faisceaux de rayons droits et parallèles).

### 1.3.3 Radiographie par rayons-X d'une structure (3D) intérieure au corps humain

Lorsque l'objet est épais et les rayons-X traversent une couche (située d'un côté, ou des deux côtés de l'objet) d'*épaisseur non-constante* et composé de matériaux sans intérêt pour

les besoins de l'identification de l'objet (cette couche est appelée "couche intermédiaire" ( $i$ )), l'atténuation du faisceau est modulée transversalement non seulement par le pouvoir d'absorption de la couche-cible ( $t$ ), mais aussi par celui de la couche intermédiaire et par l'épaisseur variable de celle-ci. Lorsque le pouvoir d'absorption et l'épaisseur de la  $i$  sont constants dans les directions  $x$  et  $z$ , l'existence de la  $i$  n'a pas d'effet sur l'image RX autre que de produire une atténuation uniforme (i.e., baisse de  $\beta$ ) que l'on peut compenser par une augmentation de l'intensité du faisceau incident. Si, par contre, le pouvoir d'absorption et/ou l'épaisseur de la  $i$  ne sont pas constants dans les directions  $x$  et  $z$  (ce qui équivaut au fait que  $\beta$  dépend maintenant de  $x$  et  $z$ , alors la pseudo-image RX ne constitue pas une représentation fidèle de la structure de l'objet; on dit que cette image est affectée d'*aberrations*. Celles-ci peuvent être corrigées à condition de faire des hypothèses plausibles sur  $\beta(x, z)$ . On verra plus loin qu'il existe d'autres moyens pour faire face à ce problème.

Le fait que la couche-objet soit d'épaisseur variable donne lieu à une difficulté supplémentaire, car, étant donné que l'observable  $I(x, z)$  n'est qu'à deux dimensions et le pouvoir d'absorption  $\alpha(x, y, z)$  est maintenant à trois dimensions, on ne peut pas déduire simplement  $\alpha(x, y, z)$  de  $I(x, z)$ . A ce stade, le mieux que l'on puisse faire (i.e., en absence d'aberrations), en supposant que l'objet soit situé entre  $y = 0$  et  $y = T$  (i.e., son épaisseur globale est constante et égale à  $T$ ) est de reconstruire la fonction

$$\bar{\alpha}(x, z) := \int_0^T \alpha(x, y, z) dy = \frac{I(x, z)}{\beta}, \quad (1.3.2)$$

ce qui montre que la radiographie X d'objets 3D produit une pseudo-image 2D de ces objets (i.e., on perd l'information sur la variation suivant  $y$  des propriétés absorbantes de l'objet).

#### 1.3.4 Absorptiométrie par rayons-X monochromatiques

Ici nous abordons une méthode (Single energy X-ray Absorptiometry (SXA)) qui se veut *quantitative*. En fait, c'est une moyenne, sur l'étendue latérale du spécimen, de la densité qui est quantifiée. Cette méthode a été souvent employée dans le passé pour distinguer les os ostéoporotiques des os sains. Cette méthode est à pouvoir de résolution nulle du fait qu'elle fait une moyenne sur toute l'information structurelle plutôt que de mettre en relief cette information.

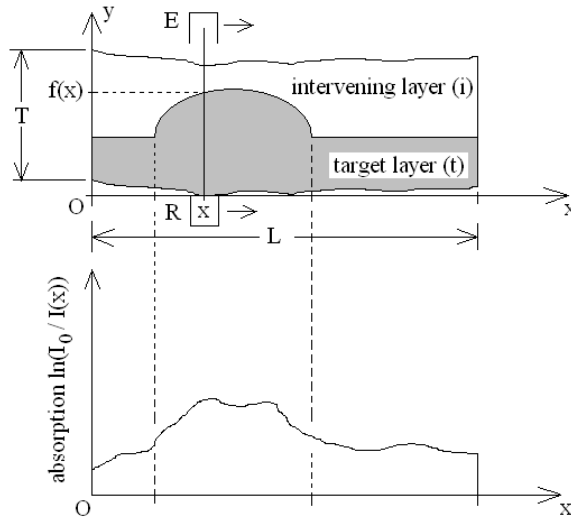


FIG. 1.1 – Examen SXA d’un spécimen (à symétrie cylindrique) comportant une couche-cible sous une couche intermédiaire. Haut : géométrie de l’expérience. Bas : fonction d’atténuation.

Considérons à nouveau, un spécimen ayant deux composants : la couche intermédiaire ( $i$ ) et la couche-cible ( $t$ ). Pour simplifier l’exposé, nous supposerons que le spécimen possède la symétrie cylindrique, i.e., sa géométrie et ses propriétés ne dépendent pas de la coordonnée  $z$ .

Les fonctions de profil des frontières du spécimen sont désignés par  $f_2(x)$  and  $f_1(x)$ , tandis que la fonction de profil de l’interface entre la  $i$  et la  $t$  est désignée par  $f(x)$  (voir la fig. 1.1). Le spécimen est supposé avoir une épaisseur constante  $T$  pour tout  $x \in ]O, L[$ .

Un pinceau monoénergétique de rayons-X est émis par la source  $E$  et est dirigé vers l’objet dans la direction  $-y$ . Après la traversée de l’objet, le pinceau est reçu sur le récepteur ( $R$ ).

La paire  $E$ - $R$  est déplacée continûment dans la direction transversale ( $x$ ) de  $x = 0$  à  $x = L$  à travers le spécimen (dont la largeur est  $L$ ). Soit  $I_0$  l’intensité connue du pinceau incident des rayons-X et supposons que cette intensité ne varie pas avec  $x$  (rappelons que nous avons supposé aussi que les matériaux dans les deux couches ne varient pas avec  $y$ ; supposons aussi qu’ils ne varient pas avec  $x$ , i.e., chaque composante est homogène, mais

le composite est globalement hétérogène à cause de sa structure). Du fait de la variation d'épaisseur des deux couches, l'intensité du pinceau transmis varie avec  $x$  (nous négligeons la diffraction) et est désignée par  $I(x)$ , une grandeur que nous supposons accessible par la mesure en R.

Soient :  $y_i(x) = f_2(x) - f(x)$  et  $y_t(x) = f(x) - f_1(x)$  les épaisseurs locales (en l'abscisse  $x$ ) des couches  $i$  et  $t$  respectivement. Sans entrer dans le détail de la physique de l'interaction des rayons-X avec la matière [209], on trouve que

$$I(x) = I_0 e^{-[\mu_i \rho_i y_i(x) + \mu_t \rho_t y_t(x)]} , \quad (1.3.3)$$

où le symbole  $\mu$  désigne le *coefficient d'atténuation linéaire massique* et  $\rho$  la densité massique.

L'éq. (1.3.3) est la traduction mathématique du problème direct de propagation puisqu'elle rend compte de la façon dont ce qui est mesuré (i.e., les données, incarnées dans  $I(x)$ ) est relié (on pourrait aussi dire "causé par") l'hétérogénéité  $\mu_t \rho_t y_t(x)$ .

L'hypothèse de  $T$  constant sur toute la largeur  $L$  du spécimen veut dire que  $T = f_2(x) - f_1(x) = cte.$  (comme on le voit dans la fig. 1.1). Ainsi

$$y_t(x) = \frac{-\mu_i \rho_i T + \ln\left(\frac{I_0}{I(x)}\right)}{\mu_t \rho_t - \mu_i \rho_i} . \quad (1.3.4)$$

Cette relation traduit mathématiquement le problème inverse de propagation puisqu'elle indique comment l'hétérogénéité, incarnée par  $\mu_t \rho_t y_t(x)$ , peut être extraite des données incarnées par  $I(x)$ . En termes mathématiques, (1.3.4) est l'inverse de (1.3.3). En général, il n'est pas possible de trouver un tel inverse explicite, ce qui veut dire que les paramètres que l'on cherche doivent être extraits des données par des moyens purement numériques.

Poursuivons l'analyse de ce problème en supposant que :

- i) il soit possible de mesurer l'intensité (constante)  $I_i$  transmise par une couche d'épaisseur constante  $T$  remplie du même matériau que celui de la couche intermédiaire (du spécimen bi-couche) éclairé par le même pinceau de rayons-X d'intensité  $I_0$ ,
- ii)  $\mu_i$  et  $\rho_i$ , ainsi que  $\mu_t$  et  $\rho_t$  peuvent être mesurés par des moyens indépendants.

Alors :

$$I_i = I_0 e^{-\mu_i \rho_i T} , \quad (1.3.5)$$

d'où nous pouvons déduire, via (1.3.4),

$$y_t(x) = \frac{\ln\left(\frac{I_i}{I(x)}\right)}{\mu_t \rho_t - \mu_i \rho_i}, \quad (1.3.6)$$

qui constitue la relation d'*absorptiométrie monoénergétique de rayons-X* (SXA) [2]. Cette relation permet de quantifier la distribution latérale d'épaisseur de la couche-cible. On dispose ainsi d'une sorte d'équivalent *quantitative* des radiographies évoquées précédemment.

A vrai dire, cette fonction n'est pas celle que l'on vise dans la méthode SXA [2], mais plutôt la *densité planaire matérielle de la cible* définie par

$$d_{SXA} := \rho_t \int_0^L y_t(x) dx = \frac{\rho_t}{\mu_t \rho_t - \mu_i \rho_i} \int_{x_1}^{x_2} \ln\left(\frac{I_i}{I(x)}\right) dx, \quad (1.3.7)$$

dont les unités sont  $g/cm^2$ . Ce paramètre (plutôt que fonction) constitue ce que l'on pense être un bon indicateur du rapport de la quantité de matériau-cible sur la quantité totale de matière dans le spécimen bi-couche (i.e., la densité planaire de la matière dure dans un composite matière dure-matière molle).

Cette analyse peut être prolongée au cas où la couche intermédiaire se trouve à la fois au-dessus et en-dessous de la couche-cible (voir la fig. 1.2). Supposons comme avant que l'épaisseur totale locale soit une constante  $T$ . Désignons les fonctions de profil de dessus et de dessous de la couche-cible par  $f_+(x)$  and  $f_-(x)$  respectivement. L'épaisseur locale de la couche-cible est maintenant  $y_t(x) = f_+(x) - f_-(x)$ , et l'épaisseur locale de la couche intermédiaire est maintenant  $y_i(x) = (f_2(x) - f_-(x)) + (f_-(x) - f_1(x)) = T - y_t(x)$ , de sorte que la totalité de l'analyse précédente s'applique au cas présent.

*Remarque* : le paramètre  $d_{SXA}$  est souvent appelé [235] :  $BMD_{SXA}$  (en anglais : Bone Mineral Density as determined by the SXA method).

### 1.3.5 Absorptiométrie par rayons-X à deux énergies (DXA)

L'hypothèse d'épaisseur constante du spécimen sur toute sa largeur fait que la méthode SXA de caractérisation d'organes n'est valable que dans des sites périphériques du corps humain, i.e., là où la couche intermédiaire est essentiellement de la peau. Pour des organes

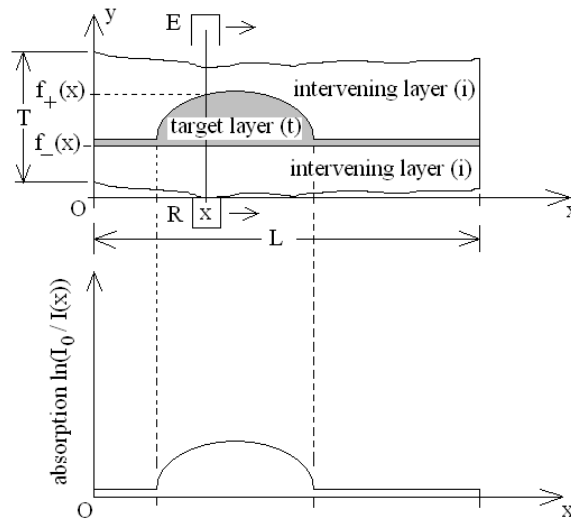


FIG. 1.2 – Examen SXA d’un spécimen comportant une couche intermédiaire au-dessus et en-dessous de la couche-cible. Haut : géométrie de la configuration. Bas : fonction d’atténuation.

implantés en profondeur, tels que les reins, la couche molle intermédiaire ne peut être considérée ni comme ayant une épaisseur constante, ni une composition constante.

Les techniques DXA (en anglais : Dual energy X-ray Absorptiometry) [2] ont été inventées pour se passer de la restriction d’épaisseur globale constante du spécimen, en faisant appel à des mesures simultanées des intensités transmises de *deux pincesaux de rayons-X*, l’un à *énergie (relativement) haute*, et l’autre à *énergie (relativement) basse*.

La configuration est illustrée dans la fig. 1.3 où les deux pincesaux de rayons-X sont désignés par : une ligne vertical noire pour le pinceau basse fréquence ( $\omega_2$ ), et une ligne verticale grise pour le pinceau haute-fréquence ( $\omega_1$ ). Comme dans la sect. 1.3.4, l’hypothèse est faite que la couche intermédiaire et la couche-cible sont homogènes.

Par définition, les densités massiques  $\rho_i$  et  $\rho_t$  sont indépendantes de la fréquence, mais les coefficients d’atténuation linéaire massique  $\mu_i$  and  $\mu_t$  dépendent, eux, de la fréquence. Nous les désignons par  $\mu_{ij}$  et  $\mu_{tj}$  à la  $j$ -ième fréquence. De même, nous désignons l’intensité transmise à la  $j$ -ième fréquence par  $I_j(x)$  lorsque la couche-cible est en place, et par  $I_{ij}(x)$

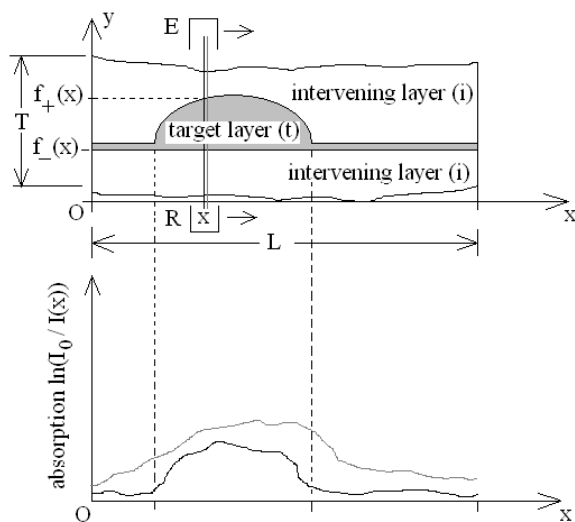


FIG. 1.3 – Méthode DXA d'examen d'un spécimen composite dans lequel la couche intermédiaire se trouve au-dessus et en-dessous de la couche-cible. Haut : géométrie de la configuration ; le pinceau de rayons-X basse fréquence est en noir et celui haute fréquence est en gris. Bas : les fonctions d'atténuation correspondantes, avec la même désignation de couleurs.

lorsque la couche-cible est absente.

Alors, comme avant, on obtient :

$$I_j(x) = I_{0j} e^{-[\mu_{ij}\rho_i y_i(x) + \mu_{tj}\rho_t y_t(x)]} \quad ; \quad j = 1, 2 , \quad (1.3.8)$$

$$I_{ij}(x) = I_{0j} e^{-\mu_{ij}\rho_i y_i(x)} \quad ; \quad j = 1, 2 , \quad (1.3.9)$$

où  $I_{0j}$  est l'intensité (supposée connue) du pinceau incident à la  $j$ -ième fréquence.

On peut inverser le système de relations (1.3.8) et trouver ainsi

$$y_t(x) = \frac{\left[ \begin{array}{c} \frac{\mu_{i2}}{\rho_{i2}} \\ \frac{\rho_{i2}}{\mu_{i1}} \\ \frac{\mu_{i1}}{\rho_{i1}} \end{array} \right] \ln \left( \frac{I_1(x)}{I_{01}} \right) - \ln \left( \frac{I_2(x)}{I_{02}} \right)}{\frac{\mu_{t2}}{\rho_{t2}} - \frac{\mu_{t1}}{\rho_{t1}} \left[ \begin{array}{c} \frac{\mu_{i2}}{\rho_{i2}} \\ \frac{\rho_{i2}}{\mu_{i1}} \\ \frac{\mu_{i1}}{\rho_{i1}} \end{array} \right]} . \quad (1.3.10)$$

*Cette relation DXA fournit la même information que celle ( 1.3.6) relative à la DXA, mais ne repose pas sur l'hypothèse que le spécimen soit d'épaisseur constante.*

Nous définissons le facteur

$$R_i = \frac{\frac{\mu_{i2}}{\rho_{i2}}}{\frac{\mu_{i1}}{\rho_{i1}}} , \quad (1.3.11)$$

de façon à pouvoir écrire (1.3.10) comme

$$y_t(x) = \frac{R_i \ln \left( \frac{I_1(x)}{I_{01}} \right) - \ln \left( \frac{I_2(x)}{I_{02}} \right)}{\frac{\mu_{t2}}{\rho_{t2}} - \frac{\mu_{t1}}{\rho_{t1}} R_i} . \quad (1.3.12)$$

Cette relation traduit le fait que la présence du tissu mou intermédiaire ne se manifeste que dans  $R_i$  ; tous les autres termes sont soit mesurés directement ou définis par le coefficient d'atténuation massique connu du tissu-cible dur. Donc, pour parfaire la solution du problème inverse, nous devons rappeler l'hypothèse que le tissu mou intermédiaire est homogène. Dans une région dépourvue de tissu dur nous pouvons mesurer  $R_i$  en employant (1.3.12) puisque dans cette région  $y_t = 0$  et  $I(x) = I_i(x)$ , de sorte que

$$R_i = \frac{\ln \left( \frac{I_{i2}(x)}{I_{02}} \right)}{\ln \left( \frac{I_{i1}(x)}{I_{01}} \right)} . \quad (1.3.13)$$

Evidemment, on obtient  $d_{DXA}$  de  $y_{tDXA}$  de la même manière que  $d_{SXA}$  de  $y_{tSXA}$ . Donc, les deux types d'examen livrent la même information, mais la méthode DXA est quantitativement plus sûre. C'est pourquoi les estimations de BMD sont maintenant faites exclusivement



avec la méthode DXA.

*Remarque* : Ceci démontre que le fait d'incorporer plus de réalité dans la formulation du problème inverse permet de corriger certaines erreurs d'estimation des paramètres ; en général, ceci nécessite une modification de la quantité et/ou la nature des données qu'il faut acquérir et ensuite traiter.

## Chapitre 2

# Modèles de l'élastodynamique des os

On décrit des modèles-candidats de la dynamique des milieux poroélastiques tels que l'os.

### 2.1 Ce qui a déjà été fait et les problèmes que cela soulève

L'utilisation des ultrasons et des vibrations est envisagée depuis longtemps pour caractériser les propriétés élastiques de l'os cortical et la densité relative de l'os trabéculaire [235], [10], [12], [40], [41], [56], [70], [71], [117], [118], [132], [177], [189], [192], [219], [235], [232], [236], [262], [297], [300], [317], [355], [376], [226], [377], [380].

Certains de ces travaux, ont été effectués dans l'urgence en vue d'une application clinique. De ce fait, ils ont parfois tendance à soulever plus de questions qu'ils ne résolvent. Il n'est pas exagéré de dire que beaucoup reste à faire en ce qui concerne le sondage acoustique et vibratoire des os (surtout trabéculaires).

*Le problème de fond est de trouver le modèle dynamique le plus apte à rendre compte du champ vibratoire ou acoustique dans le matériau. Ce modèle sera incorporé soit dans l'estimateur, soit dans le prédicteur, soit dans les deux lors de la prédiction de réponse acoustique et/ou vibratoire de l'os à une onde ou choc et de l'inversion des données constituées par cette réponse. Il importe que ce modèle traduise aussi fidèlement que possible la réalité physique afin de permettre une caractérisation plus sûre de l'os. Cette exigence peut se révéler être en contradiction avec l'exigence de simplicité et de rapidité des calculs inhérents au processus d'inversion.*

*Remarque* : Il faut s'attendre à ce que le modèle dynamique soit plus compliqué que les modèles quasi-statiques évoqués ci-haut.

## 2.2 Nécessité d'un modèle de milieu continu

L'os réagit à bien des égards, pour une sollicitation suffisamment basse fréquence, comme un *continuum*, c'est-à-dire, comme un milieu homogène à l'intérieur de ses frontières naturelles (i.e., séparant ce tissu du tissu cortical ou des tissus environnants). Evidemment, les caractéristiques mécaniques de ce continuum dépendent de la microstructure et c'est le rôle de la théorie d'en déterminer la connexion, sous une forme (le modèle) mathématique pour qu'il puisse être possible plus tard de reconstruire les paramètres du modèle et ainsi de réussir une caractérisation macroscopique de l'os trabéculaire (notons, que même l'os cortical est composite et se prête à une analyse consistant à le transmuier en milieu homogène, procédé appelé *homogénéisation*, i.e., le passage micro→macro évoqué plus haut.

## 2.3 Le modèle de fluide équivalent (i.e., homogène) ad hoc

Ceux qui sont spécialistes de l'acoustique ont tendance à modéliser un milieu divisé (e.g., le sable marin ou l'os spongieux) comme un fluide ("équivalent", bien que le sens donné à ce terme ne soit souvent pas précisé) ([205], p. 544), [365], (voir [57] pour de nombreuses autres références). Les raisons de ce choix tiennent essentiellement à la simplicité de la formulation et au fait que souvent les expériences correspondantes sont conduites dans un fluide (le plus souvent l'eau) dans lequel ne peut se manifester que les ondes de compression (P) (aussi bien celles sollicitant l'objet que celles constituant la réponse de l'objet à cette sollicitation). Ceci n'exclut pas que dans l'objet même se produisent des conversions de modes (i.e., conversions d'ondes P en ondes de cisaillement (S)), mais souvent on fait mine d'ignorer ce fait en considérant aussi l'objet (divisé ou non) comme un fluide homogène.

Le raffinement le plus simple de ce type de modèle consiste à y inclure une viscosité, souvent de type instantanée (i.e., sans effets de mémoire)([205], p. 544), [74], mais pouvant

aussi être de type non-instantané [166], [167]. Les modèles dits "viscoacoustiques équivalents" ont souvent été employés pour caractériser les tissus mous humains (e.g., [74]), [160], [176]), mais il est vraisemblable qu'ils ne soient pas bien adaptés aux tissus durs de type os.

*Remarque* : Le problème avec ce modèle est que la microstructure n'apparaît pas dans la compressibilité  $\kappa$  et la densité  $\rho$  équivalentes, de sorte que la mesure de la vitesse de phase  $v$  de l'onde traversant un composite modélisé par le milieu fluide équivalent ad hoc ne peut fournir aucune information (telle que la densité des inclusions dans un volume représentatif) sur la microstructure. De même, si l'on connaissait quelques attributs de la microstructure, on ne saurait choisir rationnellement  $\rho$  et  $\kappa$  (ou  $v$ ) .

## 2.4 Exemple de l'emploi du modèle du fluide visqueux équivalent dans un problème (direct) de prédiction de la réponse acoustique d'un os long

Nonobstant la remarque finale de la sect. 2.3 nous allons employer le modèle du fluide équivalent ad hoc pour illustrer un autre aspect du problème de prédiction du champ acoustique ou vibrationnelle dans les os. Ce problème survient du fait qu'un os comme le tibia est non seulement un matériau (certes, avec une microstructure, que nous ignorons ici), mais aussi une structure à l'échelle macroscopique. Cette macrostructure participe aussi de manière importante à la façon dont s'établit le champ dans l'os.

Notre attention porte ici sur l'os long (e.g., tibia) que nous allons approcher par un cylindre circulaire [333]. Nous savons que cet os est composé de tissu cortical, de tissu trabéculaire et de moelle, mais à présent, nous supposons que l'os est homogène et composé d'un matériau viscoacoustique (c'est-à-dire, que nous faisons l'approximation que le matériau de l'os ressemble à un fluide dissipatif homogène) dont nous essayerons plus loin d'identifier les paramètres par traitement des données relatives au *champ acoustique diffracté* par l'os, constituant la réponse de celui-ci à une sollicitation sous forme d'onde acoustique plane de fréquence déterminée.

L'os est supposé extrait de son milieu naturel et placé dans l'air (ou l'eau) ; il s'agira donc ultérieurement d'un examen *in vitro*, alors que maintenant nous voulons tout simplement prédire la réponse de cet os à la sollicitation acoustique.

Le même type d'analyse que celui qui suit peut être appliqué au cas d'un spécimen d'os en forme de plaque placée dans une cuve d'eau et soumis à un faisceau ultrasonore, à condition, toutefois, d'admettre, de nouveau, l'approximation viscoacoustique de ce spécimen d'os.

On voit ainsi que, dès le départ, au moins quatre approximations majeures ont été intégrées dans le modèle : i) le fait d'approcher l'os par un cylindre circulaire sur toute sa longueur (de plus, celle-ci sera supposée infinie alors qu'elle est finie dans la réalité), ii) le fait de supposer que l'os est homogène, iii) le fait de supposer que le matériau qui le remplit est un fluide dissipatif, et iv) le fait de supposer que l'os est extrait du corps et situé dans l'air (ou l'eau).

Ces approximations auraient forcément une incidence sur la qualité de la reconstruction des paramètres pertinents de l'os si les données étaient celles relatives à un os long réel *in vivo*. Prendre la mesure de cette incidence sera une des tâches de cette thèse, mais n'est pas l'objet de la présente discussion. Cependant, nous tiendrons compte de cet aspect du problème en adoptant un modèle relativement complexe pour simuler les données, et (plus loin) un autre modèle plus simple, pour l'estimateur (modèle employé pour inverser les (i.e., extraire les paramètres pertinents des) données).

Le cylindre  $C$  est de rayon  $a$  et est orienté suivant l'axe des  $z$  du système des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Dans le plan  $xOy$ , la frontière de  $C$  est  $\Gamma = \{r = a; 0 \leq \theta < 2\pi\}$  et les domaines extérieur et intérieur de  $C$  sont  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  respectivement. Ces domaines sont remplis de fluides  $M^0$  and  $M^1$ .  $M^0$  est l'air (ou l'eau) dont les propriétés acoustiques (densité  $\rho^0$  et compressibilité  $\kappa^0$ ) sont supposées connues.  $M^1$  est un milieu généralement dissipatif dont les propriétés acoustiques (densité  $\rho^1$  et compressibilité  $\kappa^1 = \Re\kappa^1 + i\Im\kappa^1$ ) sont connues puisque nous traitons ici le problème direct. *Donc, seulement trois paramètres  $\rho^1$ ,  $\Re\kappa^1$ , et  $\Im\kappa^1$ , caractérisent l'aspect matériel de cet os idéalisé.*

$C$  est soumis à une onde plane acoustique dont le vecteur de propagation est situé dans le plan  $xOy$ . Les champs de pression incident, diffracté, et total sont donc invariants par rapport à  $z$ . La fréquence angulaire est  $\omega$  et le facteur-temps  $\exp(-i\omega t)$  est implicite dans

la suite.

Soient  $p^i = \exp[-ik^0 r \cos(\theta - \theta^i)]$ ,  $p^{jd}$  et  $p^j = p^i \delta_{j0} + p^{jd}$  (avec  $\delta_{j0}$  le symbole de Kronecker) les champs de pression incident, diffracté et total dans  $\Omega_j$  (avec  $j = 0, 1$ , et  $k^j = \omega/c^j$ , sachant que  $c^j = (\rho_j \kappa^j)^{-1/2}$ ) est la célérité dans  $M^j$ ).

La tâche essentielle, dans les problèmes direct (et aussi inverse que nous aborderons plus loin), est de déterminer  $p^j(\mathbf{x}, \omega)$ ;  $j = 0, 1$ . Pour ce faire, on fait appel aux équations d'onde dans le fluide remplissant l'os et dans l'autre fluide extérieur à l'os, et à la condition de rayonnement à l'infini, ce qui donne, à l'aide de la méthode de séparation de variables :

$$p^{0d}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m H_m^{(1)}(k^0 r) \exp(im\theta) ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad (2.4.1)$$

(avec  $H_m^{(1)}(\cdot)$  la fonction de Hankel d'ordre  $m$  et de première espèce),

$$p^{1d}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m J_m(k^1 r) \exp(im\theta) ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 . \quad (2.4.2)$$

(avec  $J_m(\cdot)$  la fonction de Bessel d'ordre  $m$ ). L'application des conditions aux limites conduit aux *solutions explicites*

$$C_m = \gamma_m \frac{J_m(k^0 a) \dot{J}_m(k^1 a) - \beta \dot{J}_m(k^0 a) J_m(k^1 a)}{\beta \dot{H}_m^{(1)}(k^0 a) J_m(k^1 a) - H_m^{(1)}(k^0 a) \dot{J}_m(k^1 a)} , \quad (2.4.3)$$

$$D_m = \gamma_m \beta \frac{J_m(k^0 a) \dot{H}_m^{(1)}(k^0 a) - \dot{J}_m(k^0 a) H_m^{(1)}(k^0 a)}{\beta \dot{H}_m^{(1)}(k^0 a) J_m(k^1 a) - H_m^{(1)}(k^0 a) \dot{J}_m(k^1 a)} , \quad (2.4.4)$$

où  $\gamma_m = \exp(-im(\theta^i + \pi/2))$ ,  $\dot{Z}(\xi) := dZ(\xi)/d\xi$ ,  $\beta = k^0 \alpha^0 / k^1 \alpha^1$ , et  $\alpha_j = (\rho_j)^{-1}$ .

L'introduction de ces expressions des coefficients dans (2.4.1) permet d'obtenir une solution explicite et exacte pour le champ diffracté constituant la réponse de l'os-cylindre (dans l'air environnant) à la sollicitation acoustique. Ces données seront employées plus loin pour résoudre le problème inverse d'identification des descripteurs du cylindre-os.

*Remarque* : Normalement, l'os n'est ni homogène, ni proche d'un fluide quant à sa composition. La raison d'avoir invoqué l'approximation de fluide viscoacoustique équivalent est de montrer que le problème direct correspondant est simple et donne lieu à une solution

explicite et analytique. Il s'agit d'un *problème canonique* qui se laisse résoudre aussi complètement non seulement parce que nous avons fait l'approximation de fluide viscoacoustique, mais aussi parce que nous avons supposé que l'os avait une forme (cylindre circulaire) simple. On peut aussi obtenir des solutions complètes pour des os (ayant cette forme) viscoélastiques et même poroélastiques, à condition de retenir l'hypothèse d'homogénéité (macroscopique).

*Remarque* : L'opération qui consiste à remplacer l'os hétérogène par un objet homogène (fluide, élastique,...) équivalent s'appelle *homogénéisation*. Le fait de faire cette opération selon certaines règles mathématiques (e.g., principes variationnelles) est relativement récent [61], [327] ; avant, on la faisait de manière autoritaire, i.e., sans justification autre que d'aboutir à une formulation simple, conduisant éventuellement à une solution explicite du type que l'on vient de mettre en évidence. Nous verrons plus loin comment s'opère l'homogénéisation mathématique.

*Remarque* : La vraie justification de l'approximation du fluide viscoélastique équivalente s'obtient par la comparaison des prédictions qui s'en suivent avec ce que donne une expérience réelle.

## **2.5 Emploi du modèle du fluide visqueux équivalent à mémoire dans un problème (direct) de prédiction de la réponse acoustique d'un objet macroscopiquement hétérogène et de forme quelconque**

Ici, nous relaxons certaines hypothèses faites dans la section précédente en admettant que l'os, tout en étant cylindrique, ne soit plus nécessairement de forme circulaire (dans le plan de section droite), et soit macroscopiquement hétérogène, ce qui veut dire que l'on a lissé, comme avant, les hétérogénéités d'échelle microscopique (i.e., taille des trabécules et inférieur), mais qu'on admet l'existence d'hétérogénéités dont la taille avoisine la taille de

l'os. Ainsi, par exemple, on vise à modéliser un os long par une coque extérieure dans laquelle la vitesse de propagation est relativement rapide et les pertes visqueuses relativement faibles, et un canal médullaire central dans lequel la vitesse de propagation est relative lente et les pertes relativement élevées. On suppose que le milieu dans chacune de ces deux régions est fluide et viscoélastique. De plus, on veut modéliser la réponse de cet objet à une onde impulsive et suivre cette réponse dans le domaine temporel (l'analyse de la section précédente permettait, au contraire, de suivre la réponse en variant la fréquence). Enfin, pour traiter le cas le plus général, on suppose que la viscosité est telle que les milieux exhibent des effets de mémoire non-instantanée.

Le fait d'introduire ces raffinements, afin de rapprocher notre os d'un os long réel, rend la résolution du problème direct beaucoup plus compliqué; nous ne voyons pas d'autre stratagème que numérique. Voici comment on pourrait procéder [166], [167], [168], [164].

Qui dit milieux hétérogènes pense éléments finis (EF), car cet outil est extraordinairement puissant et souple d'emploi pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) décrivant des phénomènes physiques et mécaniques dans des milieux (macroscopiquement) hétérogènes. Encore faut-il pouvoir appliquer efficacement les EF aux problèmes caractérisés par des équations intégrodifférentielles qui apparaissent dans les problèmes de milieux à mémoire non-instantanée.

Les équations qui régissent la propagation dans le domaine spatial  $\Omega \subset \mathbb{R}^{d=1,2}$  et sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  ( $T$  beaucoup plus grand que la durée de la sollicitation impulsive) ont la forme [63], [124]

$$\rho(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ , \quad (2.5.1)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \mu(\mathbf{x}, t-s) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ , \quad (2.5.2)$$

avec  $p$  la pression,  $\mathbf{u}$  le déplacement des particules,  $\mathbf{f}$  la sollicitation,  $\rho$  la densité,  $\mu$  le module viscoacoustique,  $t$  le temps, et  $\mathbf{x}$  le vecteur de position. Il s'ajoutent à ces équations des conditions initiales que nous omettons dans la suite.

Soit  $g(\mathbf{x}, \omega)$  le spectre (transformée de Fourier) de  $g(\mathbf{x}, t)$ , et  $\omega$  la fréquence angulaire. Ainsi

$$p(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}, \omega) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) . \quad (2.5.3)$$



$\mu(\mathbf{x}, \omega)$  dépend généralement de  $\omega$ , ce qui veut dire que les milieux visco-élastiques sont dispersifs et dissipatifs. Du fait que la dispersion et l'atténuation sont liés par la relation de Kramers-Kronig [131],  $\mu(\mathbf{x}, \omega)$  est déterminé de manière unique par le facteur de qualité  $Q(\mathbf{x}, \omega)$ , défini par

$$Q(\mathbf{x}, \omega) := \frac{\Re(\mu(\mathbf{x}, \omega))}{\Im(\mu(\mathbf{x}, \omega))} . \quad (2.5.4)$$

Ce spectre est supposé connu par l'expérimentation.

Le point important à noter est que *l'équation (2.5.2) est difficile à manier dans un contexte numérique du fait qu'elle requiert la sauvegarde en mémoire de toute l'histoire de la solution en tous points du domaine  $\Omega$  de calcul.*

Pour surmonter cette difficulté, on approche  $\mu(\mathbf{x}, \omega)$  par une fonction rationnelle en fréquence [124]. Plus particulièrement, on introduit la fonction de relaxation  $R(\mathbf{x}, t)$

$$\mu(\mathbf{x}, t) := \partial_t R(\mathbf{x}, t) , \quad (2.5.5)$$

$$R(\mathbf{x}, t) = \left( \mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) \int_0^\infty r(\mathbf{x}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \right) H(t) , \quad (2.5.6)$$

où  $\mu_R(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(\mathbf{x}, t)$  est le module relaxé,  $\mu_U(\mathbf{x}) = m\mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} R(\mathbf{x}, t)$  le module non-relaxé,  $r(\mathbf{x}, \omega')$  le spectre de relaxation normalisé (i.e.,  $\int_0^\infty r(\mathbf{x}, \omega') d\omega' = 1$ ) et  $H(t)$  la fonction de Heaviside. Ainsi

$$p(\mathbf{x}, t) = \mu_U(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \delta\mu(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^t \int_0^\infty \omega' r(\mathbf{x}, \omega') e^{-i\omega'(t-\tau)} \mu(\mathbf{x}, t-s) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) d\omega' d\tau \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ . \quad (2.5.7)$$

On suppose à présent que le spectre de relaxation peut être approché par  $L$  pics d'amplitude  $\alpha_j$  aux fréquences de relaxation  $\omega_j$  :

$$r(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{j=1}^L \alpha_j(\mathbf{x}) \delta(\omega - \omega_j(\mathbf{x})) , \quad (2.5.8)$$

sachant que  $\delta(\cdot)$  est la mesure de Dirac et

$$\sum_{j=1}^L \alpha_j(\mathbf{x}) = 1 . \quad (2.5.9)$$

Ainsi

$$R(\mathbf{x}, t) = \mu_R(\mathbf{x}) \left[ 1 + \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_R(\mathbf{x})} \sum_{j=1}^L a_j(\mathbf{x}) \exp(-i\omega_j(\mathbf{x})t) \right] H(t) , \quad (2.5.10)$$

et

$$\mu(\mathbf{x}, \omega) \approx \mu_L(\mathbf{x}, \omega) = \mu_R(\mathbf{x}) \left[ 1 + \sum_{j=1}^L y_j(\mathbf{x}) \frac{i\omega}{i\omega + \omega_j(\mathbf{x})} \right] , \quad (2.5.11)$$

sachant que

$$y_j(\mathbf{x}) := \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_R(\mathbf{x})} a_j(\mathbf{x}) , \quad \sum_{j=1}^L y_j(\mathbf{x}) = \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_R(\mathbf{x})} . \quad (2.5.12)$$

On peut obtenir (2.5.11) aussi en supposant que  $\mu(\mathbf{x}, \omega)$  est approché par une fonction rationnelle de  $i\omega$  :

$$\mu(\mathbf{x}, \omega) \approx \mu_L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{P_L(\mathbf{x}, i\omega)}{Q_L(\mathbf{x}, i\omega)} . \quad (2.5.13)$$

où  $P_L$  et  $Q_L$  sont des polynômes de degré  $L$  en  $i\omega$ . Ainsi, (2.5.11) peut être interprété comme un développement de (2.5.13) en fractions partielles [124] et le fait d'approcher le module viscoacoustique par une fonction rationnelle est donc équivalent à l'approximation du spectre de relaxation par un spectre discret.

Pour les besoins du calcul, il est naturel de chercher des approximations rationnelles du module viscoacoustique avec le moins possible de termes. Si l'on suit la démarche de Emmerich et Korn [124], il faut choisir les  $\omega_j$  de manière équidistante sur une échelle logarithmique, et ensuite estimer les  $y_j$  par minimisation de l'écart entre le facteur de qualité approchée et le facteur de qualité exact (c'est-à-dire, celui mesuré par l'expérience). Etant donné que  $\mu$  est défini de manière unique en termes de  $Q$ , le fait de disposer d'une bonne approximation du facteur de qualité implique une bonne approximation du module viscoacoustique.

Jusqu'ici, on s'est penché sur la question de comment obtenir  $\mu$  qui apparaît dans les équations régissant les vibrations et la propagation d'ondes dans le milieu. Maintenant, on combine le tout en un système d'équations qui se prête bien au calcul [166], [167].

En vertu de (2.5.3) et (2.5.11) on a

$$p(\mathbf{x}, \omega) = p_R(\mathbf{x}, \omega) + \mu_R(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^L \frac{i\omega}{i\omega + \omega_j} y_j(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) =$$

$$\mu_R(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + \mu_R(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^L \frac{i\omega}{i\omega + \omega_j} y_j(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) . \quad (2.5.14)$$

On pose

$$\eta_j(\mathbf{x}, \omega) := \mu_R(\mathbf{x}) \frac{y_j(\mathbf{x})}{i\omega + \omega_j} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) , \quad (2.5.15)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse des particules

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) := \partial_t u(\mathbf{x}, t) , \quad (2.5.16)$$

de sorte que (par transformation de Fourier)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega u(\mathbf{x}, \omega) . \quad (2.5.17)$$

De même :  $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \nabla \cdot u(\mathbf{x}, \omega)$ ,  $\partial_t p(\mathbf{x}, t) = i\omega p(\mathbf{x}, \omega)$ , et  $\partial_t \eta_j(\mathbf{x}, t) = i\omega \eta_j(\mathbf{x}, \omega)$ , de sorte que

$$\partial_t p(\mathbf{x}, t) - \sum_{j=1}^L \partial_t \eta_j(\mathbf{x}, t) = \mu_R \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ . \quad (2.5.18)$$

Ceci est la première relation fondamentale. La seconde relation n'est autre que l'équation d'ondes, qui, compte tenu de (2.5.16), s'écrit

$$\rho \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ . \quad (2.5.19)$$

La troisième relation découle (par transformation de Fourier) de la définition de  $\eta_j$  et s'écrit

$$\partial_t \eta_j(\mathbf{x}, t) + \omega_j \eta_j(\mathbf{x}, t) = \mu_R y_j(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ . \quad (2.5.20)$$

Première remarque : on est parti d'un système d'une équation aux dérivées partielles de *second ordre en t* et d'une équation intégrodifférentielle pour aboutir à trois équations EDP de *premier ordre en t*.

Seconde remarque : on aurait pu éliminer la pression et obtenir une équation pour  $\mathbf{u}$  du second ordre en  $t$  (formulation usuelle), mais la formulation du premier ordre vitesse-pression a quelques avantages :

- elle peut être couplée avec la méthode des domaines fictifs [22], [364] pour prédire la propagation et les vibrations dans un milieu ayant des hétérogénéités compliquées,
- une couche PML (Perfectly Matched Layer) [27], [78], [364] peut être conçue pour ce système, ce qui permet de simuler efficacement la propagation et les vibrations dans un domaine partiellement ou totalement non-borné,
- le système au premier ordre en  $t$  est plus facile à implémenter numériquement dans des milieux hétérogènes du fait qu'il ne nécessite pas l'approximation des dérivées spatiales des paramètres (i.e., modules) mécaniques.

Ceci étant souligné, on donne maintenant les grandes lignes de la façon de résoudre ce système de trois EDP par la méthode d'éléments finis [364], [20], [166], [167].

Une formulation mixte des trois EDP prend la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{v}, p, H) : ]0, T[ \mapsto X \times M \times (M)^L \text{ tel que } \forall t \in ]0, T[ \\ \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}) ; \quad \forall \mathbf{w} \in X \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\mu_R y_j} \eta_j, q \right) + \left( \frac{\omega_j}{\mu_R y_j} \eta_j, q \right) - b(\mathbf{v}, q) = 0 ; \quad \forall q \in M \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\mu_R} p, q \right) - \sum_{j=1}^L \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\mu_R} \eta_j, q \right) - b(\mathbf{v}, q) = 0 ; \quad \forall q \in M \end{array} \right. , \quad (2.5.21)$$

sachant que  $H$  est le vecteur de dimension  $L$  dont les composantes sont  $\eta_j$ ,

$$b(\mathbf{w}, q) := \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} ; \quad \forall (\mathbf{w}, q) \in X \times M . \quad (2.5.22)$$

et  $X$  et  $M$  les espaces fonctionnels  $H(\text{div}; \Omega)$  et  $L^2(\Omega)$  respectivement.

On introduit maintenant les espaces d'éléments finis  $X_h \subset X$ ,  $M_h \subset M$  de dimensions  $N_1$  et  $N_2$  respectivement. La semi-discrétisation en espace du problème (2.5.21) conduit au

problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (V_h, P_h, H_h) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{N_1}) \times \\ L^2(0, T; \mathbb{R}^{N_2} \times L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_2})^L) \text{ tel que} \\ \\ M_v \frac{dV_h}{dt} + B_h P_h = F_h \\ \\ M_y \frac{d(H_h)_j}{dt} + M_\omega (H_h)_j B_h^T V_h = 0 ; \quad \forall j \\ \\ M_p \frac{dP_h}{dt} - \sum_{j=1}^L M_p \frac{d(H_h)_j}{dt} - B_h^T V_h = 0 \end{array} \right. , \quad (2.5.23)$$

où  $B_h^T$  désigne le transposé de  $B_h$ . Dans la pratique, on ne considère que des domaines réguliers dans  $\mathbb{R}^{d=1,2}$  que l'on peut discrétiser avec un maillage uniforme  $\mathcal{T}_h$  composé de segments ( $d = 1$ ) ou de carrés ( $d = 2$ ) de taille  $h$ .

Les espaces d'EF que l'on emploie sont décrits dans [21], [364]. De fait, on obtient des résultats très satisfaisantes avec les éléments d'ordre le plus bas :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_h = \{\mathbf{w}_h \text{ dans } X / \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{w}_h|_K \in (Q_1)^d\} \\ \\ M_h = \{q_h \text{ dans } M / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in Q_0\} \end{array} \right. . \quad (2.5.24)$$

Pour la discrétisation temporelle, on emploie des différences finies centrées au second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (V_h^{n+1}, P_h^{n+\frac{3}{2}}, H_h^{n+\frac{3}{2}}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times (\mathbb{R}^{N_2})^L \text{ tel que} \\ \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - B_h^T P_h^{n+\frac{1}{2}} = F_h^{n+\frac{1}{2}} \\ \\ M_y \frac{(H_h)_j^{n+\frac{3}{2}} - (H_h)_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + M_\omega \frac{(H_h)_j^{n+\frac{3}{2}} - (H_h)_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} B_h V_h^{n+1} = 0 ; \quad \forall j \\ \\ M_p \frac{P_h^{n+\frac{3}{2}} - P_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \sum_{j=1}^L M_p \frac{(H_h)_j^{n+\frac{3}{2}} - (H_h)_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + B_h^T V_h^{n+1} = 0 \end{array} \right. . \quad (2.5.25)$$

Ainsi formulé, le problème viscoacoustique trouve sa solution numérique dans de très bonnes conditions. Une analyse similaire conduit à une méthode efficace de résolution du problème viscoélastique [166],[168], [169].

La fig. 2.1 montre la solution spatio-temporelle obtenue par cette méthode EF pour un cylindre circulaire fluide immergé dans un autre fluide. Dans sa thèse, J.-P. Groby montre

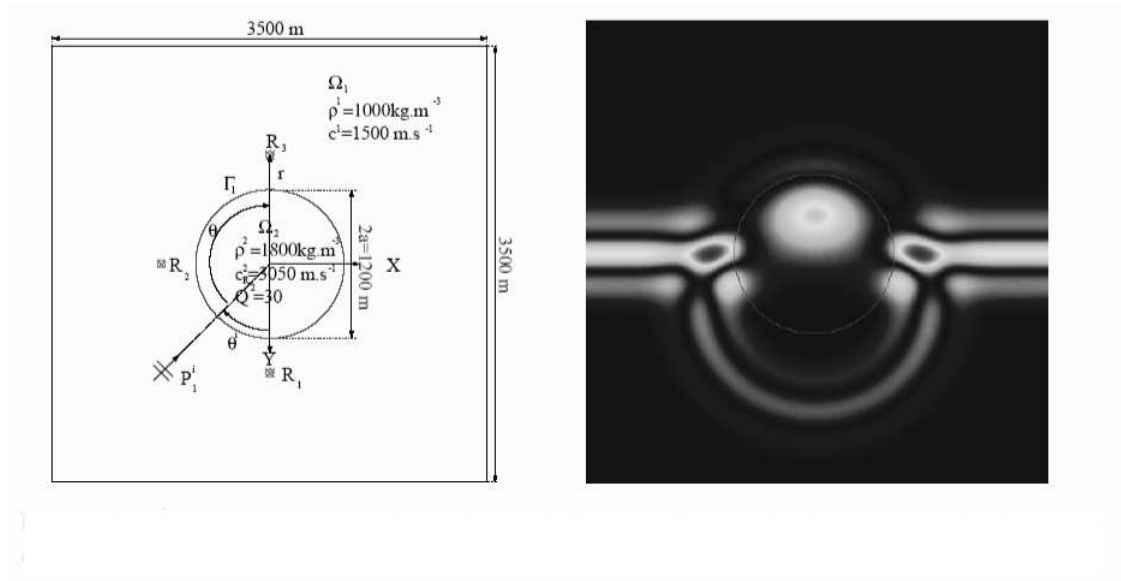


FIG. 2.1 – A gauche : géométrie du problème de la diffraction d’une onde plane par un cylindre viscoacoustique. A droite : instantané du champ de pression autour et dans l’objet pour  $\theta^i = 0$ .

(fig. 9.2) que les solutions EF sont sensiblement identiques aux solutions canoniques pour ce type "d’os".

Ceci nous autorise à penser que la même technique permettrait de résoudre le système d’équations de diverses formulations évoquées plus loin en rapport avec le problème de la poroviscoélasticité tel qu’il se présente dans le cadre de la caractérisation vibroacoustique et ultrasonore de l’os (surtout trabéculaire).

## 2.6 Le modèle de fluide équivalent (i.e., homogène) UA-WT

Nous revenons ici au problème de remplacement d’un milieu divisé (i.e., non-homogène) par un milieu fluide équivalent (homogène). Rappelons (voir la sect. 2.3) que le modèle de fluide équivalent ad hoc avait la propriété très fâcheuse de n’être rattaché d’aucune manière à la microstructure du matériau d’origine.

Urick et Ament (UA) [369] et Waterman et Truell (WT) [375] ont conçu un modèle de

fluide équivalent très simple qui, contrairement au modèle ad hoc, *intègre la microstructure comprenant des petites inclusions fluides dans un milieu-hôte fluide* d'une manière physique. Leurs modèles sont pratiquement identiques, quant aux expressions finales, mais non en ce qui concerne leur mise en oeuvre. Une, ou les deux composantes du milieu composite, peuvent être dissipatives ou non-dissipatives.

Les modèles UA-WT s'attachent uniquement à une description cinématique du milieu équivalent, ce qui veut dire que les seuls descripteurs du milieu sont la vitesse de phase et l'atténuation de l'onde propagée en son sein, et non la distribution spatiale de l'énergie diffusée, ni même la quantité d'énergie transmise ou réfléchie (i.e., diffusée vers l'avant ou vers l'arrière) par le composite.

L'idée de base est de comparer deux configurations, l'une composite, et l'autre homogène, quant à l'atténuation et la vitesse de phase de l'onde plane qui les traversent. L'atténuation dans un milieu homogène n'est due qu'à l'absorption intrinsèque dans l'unique composante du milieu, alors que l'atténuation dans un milieu non-homogène est due à la fois à la absorption intrinsèque de ses constituants et à la diffusion. En gros, lorsqu'une onde plane traverse un milieu hétérogène, son parcours est plus long que dans la même épaisseur de matériau homogène, du fait de devoir passer autour des, et être réfractée dans les, hétérogénéités, ce qui veut dire que cette onde apparaît comme étant "ralentie" (i.e., sa vitesse de phase  $v$  est moindre que dans le milieu-hôte sans inclusions). Aussi, ce qui est reçu par un capteur orienté perpendiculairement au rayon-vecteur de l'onde plane au début de son parcours, est moindre que ce que le capteur aurait reçu si l'onde traversait la même épaisseur de matériau homogène, étant donnée qu'une partie de l'énergie ne parvient pas au capteur du fait d'avoir été diffusée dans des directions obliques (donc, hors de portée du capteur). On appelle ce phénomène *atténuation par diffusion*,  $\alpha_d$ , de sorte que l'atténuation totale  $\alpha$  du composite est la somme de  $\alpha_d$  et de l'atténuation due à l'absorption intrinsèque  $\alpha_i$  des constituants. Il est intéressant de constater que  $\alpha$  peut être non-nul, même si le milieu-hôte et les inclusions sont non-dissipatifs.

La vitesse de phase  $v$  et l'atténuation  $\alpha$  de l'onde de compression reçue sur le capteur dépendent de la fréquence  $\omega$  du fait que ce qui se passe au niveau de chaque rencontre de l'onde avec les inclusions dépend de la fréquence. Ceci se voit, par exemple, dans les formules

de la section précédente, si l'on suppose que les inclusions sont de petits cylindres circulaires.

L'hypothèse de base est que les inclusions produisent individuellement une diffraction tellement faible que chaque inclusion ignore l'existence de son voisin et ne ressent que l'onde incidente. Il est ainsi implicite que les inclusions sont relativement distantes l'une de l'autre, car, à faible distance de séparation, une inclusion produit fatalement un effet sur son voisin, même si elle diffracte faiblement. Ainsi, il semblerait que le modèle UA-WT ne soit pas approprié pour décrire ce qui se passe dans un tissu osseux spongieux du fait que les trabécules (vues comme des inclusions fluides dans l'hôte-moelle) forment un réseau relativement dense au sein du milieu-hôte. Mais, en réalité, on ne connaît pas bien les limites du modèle UA-WT [328], de sorte que nous supposerons, pour l'instant, que ce modèle puisse s'appliquer pour décrire le champ acoustique dans un os spongieux.

Le point fondamental dans la théorie UA-WT est de connaître a priori la réponse diffractive d'une inclusion individuelle à l'onde incidente. Considérons, comme, dans la section précédente, un problème 2D (i.e., des inclusions cylindriques alignées dans la direction de l'axe des  $z$  ( $r, \theta$  étant les coordonnées polaires dans le plan de section droite  $x - y$ ). Soit  $f(\theta)$  ( $\theta = \pi$  étant la direction de rétrodiffusion et  $\theta = 0$  la direction de diffusion vers l'avant) la fonction angulaire de diffusion en zone lointaine de l'inclusion individuelle. Cette fonction est supposée connue. Soit  $N = \phi/A$  (avec  $\phi$  le facteur de remplissage des inclusions et  $A$  l'aire de la région représentative du milieu) le nombre d'inclusions par unité d'aire dans le plan  $x - y$ , et  $k^0$  le nombre d'onde dans le milieu-hôte. Le nombre d'onde  $k = \|\mathbf{k}\|$  ( $\mathbf{k}$  le vecteur) d'une onde plane compressive  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  se propageant dans le milieu fluide équivalent est

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v(\omega)} + i\alpha(\omega) . \quad (2.6.1)$$

Notons que  $v$  et  $\alpha$  dépendent de  $\omega$  (fait qui s'appelle *dispersion*) du fait que  $f(\theta)$  dépend de  $\omega$ .

Les concepteurs du modèle UA-WT supposent qu'au niveau de l'atténuation, tout se passe comme si les effets sont cumulatifs (i.e., on obtient l'effet de l'ensemble en ajoutant les effets de chacun des inclusions), et tout ce qui n'est pas diffusé vers l'avant ou l'arrière apparaît comme de l'absorption (apparente). Un raisonnement similaire concernant la vitesse



de phase conduit à

$$\left(\frac{k(\omega)}{k^0}\right)^2 = \left[1 + \frac{2iNf(0)}{(k^0)^2}\right]^2 - \left[\frac{2iNf(\pi)}{(k^0)^2}\right]^2. \quad (2.6.2)$$

Dans le régime de diffusion faible précité, qui se produit pour des  $\theta$  petits et/ou des contrastes relativement faibles entre les constantes matérielles du milieu hôte et du milieu occupant les inclusions, le terme portant sur  $f(\pi)$  est négligeable devant celui portant sur  $f(0)$  de sorte que l'on tombe sur

$$k(\omega) = k^0 \left[1 + i\frac{2Nf(0)}{(k^0)^2}\right]. \quad (2.6.3)$$

*Remarque* : On peut s'étonner de ne pas trouver dans ces formules une référence au nombre d'onde  $k^1$  relatif aux inclusions ; en réalité, cette absence n'est qu'apparente, puisque  $k^1$ , ainsi que les dimensions caractéristiques de l'inclusion-générique, figurent dans la fonction de diffusion  $f$ .

*Remarque* : La théorie UA-WT traduit qualitativement un fait observé très souvent dans les expériences : la dispersion est essentiellement gouvernée par la densité des inclusions produisant la diffusion. Autrement dit, en suivant des variations de  $v$  et de  $\alpha$  d'un spécimen à l'autre, on peut déterminer lequel a une plus grande densité d'inclusions. Ce constat est potentiellement intéressant pour distinguer un os sain d'un os ostéoporotique.

Dans un travail paru en 1985, Brauner et Beltzer [24] montrèrent que la paire de formules UA-WT (parties réelle et imaginaire de (2.6.3)) ne vérifient pas généralement les relations de Kramers-Kronig (KK) (particulièrement aux hautes fréquences) comme sont astreintes les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde (et/ou de l'indice de réfraction) pour tout milieu linéaire, passif et causal. Ils ont suggéré de ne retenir qu'une des relations de la paire de formules UA-WT, en particulier, celle relative à  $\alpha$ , grandeur qui par ailleurs semble plus facile à mesurer que la vitesse de phase  $v$ , et de calculer l'autre grandeur par les relations de Kramers-Kronig elles-mêmes. Cette idée (que l'on appelle "méthode causale") a l'avantage de restaurer la cohérence nécessaire entre  $\Re(k)$  et  $\Im(k)$ , mais au prix d'une complication non-négligeable liée à la nécessité de calculer une intégrale pour chaque

fréquence, dont le noyau comporte la fonction  $\Im[f(0)]$  qu'il faut déterminer préalablement pour toutes les fréquences. Enfin, il y a la difficulté de calculer l'intégrale au sens de valeur principale de Cauchy apparaissant dans les formules KK. Néanmoins, ces difficultés peuvent être surmontées [26].

On peut se poser la question, en dehors de toute considération concernant la causalité, de la validité des relations UA-WT pour la caractérisation de la réponse dynamique d'un milieu hétérogène. La question plus importante est de savoir si la formule UA-WT pour l'atténuation est juste, car il faut s'y fier, même avec la procédure préconisée par Brauner et Beltzer. Cette formule est, en fait, une conséquence assez générale des hypothèses inhérentes : a) à un milieu dans lequel les positions des inclusions sont complètement non-correlées (i.e., complètement aléatoire), et b) au fait que chaque inclusion répond à l'onde incidente comme si les autres inclusions étaient absentes. Ces hypothèses ont évidemment leurs limites : celles-ci interviennent pour des  $\phi$  importants et/ou des contrastes des constantes matérielles importantes. Il est probable aussi que la fréquence joue un rôle.

Afin d'examiner ces questions, et de ne pas être tributaire d'expériences (réelles) dans lesquelles il est difficile de contrôler  $\phi$  et le caractère aléatoire de la configuration, il est utile d'effectuer des expériences numériques de comparaison entre l'UA-WT et ce que donne un modèle plus rigoureux de réponse du milieu divisé (voir, e.g., [26],[256]).

Notons enfin, qu'une version plus rigoureuse de la théorie UA-WT, a été mise au point par Yang et Mal [397] et donne lieu à

$$1 = \left[ 1 + \frac{2iNf(0)}{(k)^2} \right]^2 - \left[ \frac{2iNf(\pi)}{(k)^2} \right]^2 . \quad (2.6.4)$$

Cette relation (non-linéaire) n'est plus explicite en termes de  $k$ , ce qui veut dire qu'il faut la résoudre numériquement pour obtenir  $k$ . On perd ainsi un des aspects attractifs du modèle UA-WT, tout en améliorant sa validité.

## 2.7 Le modèle de solide élastique équivalent (homogène) ad hoc

Le modèle de milieu continu qui vient tout naturellement à l'esprit, lorsque l'on fait vibrer ou passer une onde dans un os, est celui d'un milieu solide, élastique, homogène, isotrope ou anisotrope (on fait désormais abstraction de l'anisotropie, tout en étant conscient que ceci n'est pas réaliste en ce qui concerne les os [308]). Jusqu'à nouvel ordre, on suppose aussi que le solide est linéaire. Enfin, on n'essaie pas de rattacher les propriétés de solide homogène équivalent à des descripteurs du solide hétérogène de départ (comme dans la sect.2.3).

Ce qui distingue fondamentalement le solide du fluide (les deux étant non-visqueux) est la rigidité ( $=0$  pour un fluide), et donc de pouvoir propager des ondes de cisaillement dans le solide mais pas dans le fluide. Dans le solide, nous avons non seulement des déformations longitudinaux (i.e., de compression-dilatation), mais aussi des mouvements de torsion et de flexion, ce qui se traduit, en régime dynamique, par des vibrations longitudinaux, de torsion et de flexion, ou des ondes P (de compression), SH (de cisaillement horizontal) et SV (de cisaillement verticale), les ondes P ayant une vitesse de phase  $v_P$ , et les ondes SH et SV une autre vitesse de phase  $v_S$ . De plus, le champ de déplacement dans le solide élastique est de nature vectorielle, alors qu'il est scalaire dans le cas du fluide. Donc, la modélisation est plus complexe dans le cas du solide que dans le cas du fluide, et il faut trouver plus de constantes matérielles (e.g., en régime linéaire : 3 au lieu de 2) pour résoudre un problème inverse d'identification de matériau. Ces constantes sont, pour le fluide  $\rho$ ,  $\kappa$  (densité et compressibilité), et pour le solide  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  (densité et coefficients de Lamé) ou  $\rho$ ,  $E$ ,  $\nu$  (densité, module de Young et coefficient de Poisson).

Le comportement d'un solide linéairement élastique, isotrope est décrit par la loi de Hooke [127]

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{I} , \quad (2.7.1)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{I}$  sont les tenseurs de contrainte, de déformation et unitaire respectivement, et  $\mathbf{u}$  est le vecteur de déplacement relié au tenseur de déformation par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) , \quad (2.7.2)$$

le symbole  $T$  désignant ici l'opération de transposition. On remarque que le terme contenant  $\mu$  est absent dans un fluide car  $\mu = 0$  dans un tel milieu.

Le bilan de quantité de mouvement ou les lois fondamentales de la dynamique (loi de Cauchy) dans un milieu continu s'exprime par [127]

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{F} , \quad (2.7.3)$$

où  $t$  est la variable-temps et  $\mathbf{F}$  la force appliquée (i.e., sollicitation). En introduisant (2.7.1) et (2.7.2) dans (2.7.3), on obtient l'équation de Navier (ou équation d'ondes linéairement élastiques)

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{F} . \quad (2.7.4)$$

Nous avons montré dans la section précédente comment l'introduction d'une viscoélasticité à mémoire non-instantanée donne lieu à de considérables complications, notamment lors de la résolution numérique de l'équation d'ondes dans le domaine temporel. Il n'est pas toujours évident qu'il faille adopter une loi de viscoélasticité aussi élaborée qu'une loi de Boltzmann pour le matériau considéré. Par exemple, une loi de type Kelvin-Voigt (KV) [250] (viscoélasticité à mémoire instantanée) peut, peut-être, faire l'affaire. Ce type de comportement se caractérise par deux paramètres (de viscoélasticité) supplémentaires,  $\lambda_v$  et  $\mu_v$ , et donne lieu à l'équation d'ondes (atténuées)

$$\left[ (\lambda + 2\mu) + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \left[ \mu + \mu_v \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{F} . \quad (2.7.5)$$

On retrouve facilement (2.7.4) en posant  $\lambda_v = \mu_v = 0$ .

Afin de mettre en évidence bien des phénomènes intéressants, il est habituel de formuler l'équivalent de l'équation d'ondes (qui se situe dans le domaine spatio-temporel) dans le domaine spatio-fréquentiel. Soit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  un vecteur ( $\mathbf{x}$  le vecteur de position) que l'on représente par une intégrale de Fourier

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega , \quad (2.7.6)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire. En employant (2.7.6) pour  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{F}$ , et en identifiant  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{F}$  par  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega)$  on obtient

$$(\lambda + 2\mu)(1 - i\omega \xi_{Pv}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - i\omega \xi_{Sv}) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = -\mathbf{F} . \quad (2.7.7)$$

où  $\xi_{Sv} := \frac{\mu_v}{\mu}$  et  $\xi_{Pv} := \frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda + 2\mu}$ . En développant  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{F}$  [127] en potentiels de Helmholtz, on trouve que deux types d'ondes peuvent se propager dans le solide ayant les nombres d'onde complexes suivants :

$$k_{Pv} = \frac{\omega}{v_P} \sqrt{\frac{1}{1 - i\omega\xi_{Pv}}} , \quad k_{Sv} = \frac{\omega}{v_S} \sqrt{\frac{1}{1 - i\omega\xi_{Sv}}} , \quad (2.7.8)$$

avec

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} , \quad v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} . \quad (2.7.9)$$

Autrement dit : i) deux ondes de volume peuvent se propager dans le solide viscoélastique, ii) chacune de ces ondes s'associe à un nombre d'onde complexe, ce qui signifie que chacune de ces ondes est *dispersive* et hétérogène, même si  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\lambda_v$ ,  $\mu_v$ , ne dépendent pas de  $\omega$ . Notons, pour un besoin futur, que lorsque l'on est dans un régime très basses fréquences et/ou faibles dissipations P et S, i.e.,

$$\omega\xi_{Pv} \ll 1 , \quad \omega\xi_{Sv} \ll 1 , \quad (2.7.10)$$

alors

$$k_{Pv} \approx \frac{\omega}{v_P} \left( 1 + \frac{i}{2} \omega\xi_{Pv} \right) , \quad k_{Sv} \approx \frac{\omega}{v_S} \left( 1 + \frac{i}{2} \omega\xi_{Sv} \right) , \quad (2.7.11)$$

de sorte que si  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\lambda_v$ ,  $\mu_v$ , ne dépendent pas de  $\omega$ , alors la dispersion (en termes de *lenteur*  $1/v = k\omega$ ) est *linéaire*.

## 2.8 Prédiction des champs acoustiques et vibratoires dans un os long au moyen du modèle de solide équivalent ad hoc du matériau-os

Le modèle de milieu solide élastique ou viscoélastique équivalent permet de résoudre un grand nombre de problèmes directs de vibration et de propagation d'ondes dans des milieux comme le tissu osseux ou des objets-os. L'objet-os peut être soit de géométrie simple (problème canonique) [253], [180], [66], [147], [146] comme dans la formulation fluide équivalent (voir la sect. 2.4), soit de géométrie complexe, en quel cas des méthodes numériques de type éléments finis [168], [169], [291] sont de mise.

Evidemment, le modèle de milieu solide élastique ou viscoélastique équivalent a aussi servi pour construire des estimateurs à incorporer dans des techniques d'identification de paramètres matériels de tissus-os ou objets-os à partir de données vibratoires ([291]) ou acoustiques ([46], [286]). Nous reviendrons sur ces questions plus loin.

En attendant, examinons le problème canonique de la diffraction d'une onde acoustique par un cylindre circulaire solide immergé dans un fluide. Ce travail a fait l'objet d'une publication [106].

Le cylindre, que l'on suppose homogène, mais dissipatif au départ, est censé représenter un os long, et on essaie de déterminer sa réponse à une sollicitation prenant la forme d'une onde de compression se propageant initialement dans le fluide (homogène et non-dissipatif) entourant le cylindre (ce fluide pouvant modéliser la chair (graisse, muscles et peau) entourant un os).

Du fait de l'invariance du cylindre et du champ incident  $p^i$  par rapport à  $x_3$ , les champs diffractés et totaux sont également invariants par rapport à  $x_3$ . Désormais on raisonne donc dans le plan de section droite  $x_1 - x_2$  en lequel les coordonnées polaires sont  $r, \theta$ .

Soit  $p^0$  la pression totale dans le domaine  $\Omega_0$  extérieur à la frontière  $\Gamma$  du cylindre ; du fait de l'invariance précitée, on a  $p^0 = p^0(x, y, t) = p^i(x, y, t) + p^{0d}(x, y, t)$ , où  $p^{0d}$  est le champ de pression diffracté dans  $\Omega_0$  et  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et  $t$  le temps. Pour la même raison, le champ de déplacement total  $\mathbf{u}^1$  dans  $\Omega_1$  est de la forme  $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^1(x_1, x_2, t)$ . On effectue l'analyse dans le domaine spatio-fréquentiel au moyen de  $p^{0,i,d}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p^{0,i,d}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$  et  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$ . A partir d'ici,  $p^{0,i,d}$  (signifiant  $p^0, p^i$  or  $p^d$ ) et  $\mathbf{u}^1$  sont fonctions de  $(\mathbf{x}, \omega)$ .

L'onde plane incidente est

$$p^i = A^i(\omega) \exp(-ik_L^0 r \cos(\theta - \theta^i)) \quad (2.8.1)$$

(où  $A^i(\omega)$  is le spectre d'amplitude,  $\theta^i$  l'angle d'incidence dans le plan  $x_1 O x_2$ , et  $k_L^0 = \omega/c_L^0$ , avec  $c_L^0 = (\rho^0 \kappa^0)^{-1/2}$  la célérité des ondes longitudinales dans le fluide  $M^0$  remplissant  $\Omega^0$ ).

$p^{0,i,0d}$  sont gouvernés par l'équation de Helmholtz

$$(\nabla^2 + (k_L^0)^2) p^{0,i,0d} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (2.8.2)$$

et la condition de rayonnement (d'ondes sortantes) à l'infini

$$p_{,r}^{0d} - ik_L^0 p^{0d} = o(r^{-1/2}) ; r \rightarrow \infty , \forall \theta \in [0, 2\pi[ . \quad (2.8.3)$$

$\mathbf{u}^1$  obéit à l'équation d'ondes élastiques dans le domaine spatio-fréquentiel

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}^1 + (\lambda^1 + \mu^1) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^1 + \omega^2 \mathbf{u}^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 , \quad (2.8.4)$$

sachant que  $\mathbf{u}^1$  est borné dans  $\Omega_1$ , i.e.,

$$\|\mathbf{u}^1\| < \infty \quad \text{dans } \Omega_1 . \quad (2.8.5)$$

Soient  $\boldsymbol{\nu}$  le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$  dirigé vers  $\Omega_0$ , et  $\mathbf{T}^j = \boldsymbol{\sigma}^j \cdot \boldsymbol{\nu}$  la traction. Les conditions de transmission sont :

$$\mathbf{T}^0 - \mathbf{T}^1 = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{u}^0 \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{u}^1 \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma . \quad (2.8.6)$$

L'emploi de la décomposition de Helmholtz

$$\mathbf{u}^1 = \nabla \varphi^1 + \nabla \times \boldsymbol{\psi}^1 , \quad (2.8.7)$$

permet (2.8.4) de se transformer en deux (l'une scalaire, l'autre vectorielle) équations de Helmholtz

$$(\nabla^2 + (k_L^1)^2) \varphi^1 = 0 \quad , \quad (\nabla^2 + (k_T^1)^2) \boldsymbol{\psi}^1 = \mathbf{0} , \quad (2.8.8)$$

en lesquelles

$$k_L^1 = \frac{\omega}{c_L^1} = \omega \left( \frac{\lambda^1 + 2\mu^1}{\rho^1} \right)^{-1/2} , \quad k_T^1 = \frac{\omega}{c_T^1} = \omega \left( \frac{\mu^1}{\rho^1} \right)^{-1/2} . \quad (2.8.9)$$

sachant que les indices  $L$  et  $T$  se réfèrent aux ondes longitudinales (i.e., de pression P) et transverses (i.e., de cisaillement S).

Le fait de se rappeler que les champs  $p^0$  et  $\mathbf{u}^1$  ne dépendent pas de  $x_3$ , permet de réduire (2.8.2) et (2.8.8) à :

$$\begin{aligned} p_{,rr}^0 + r^{-1} p_{,r}^0 + r^{-2} p_{,\theta\theta}^0 + (k_L^0)^2 p^0 &= 0 \quad \text{dans } \Omega^0 , , \\ \varphi_{,rr}^1 + r^{-1} \varphi_{,r}^1 + r^{-2} \varphi_{,\theta\theta}^1 + (k_L^1)^2 \varphi^1 &= 0 \quad \text{dans } \Omega^1 , , \\ \boldsymbol{\psi}_{,rr}^1 + r^{-1} \boldsymbol{\psi}_{,r}^1 + r^{-2} \boldsymbol{\psi}_{,\theta\theta}^1 + (k_T^1)^2 \boldsymbol{\psi}^1 &= 0 \quad \text{dans } \Omega^1 . \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

La condition de jauge  $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}^1 = 0$  et l'absence de contraintes de cisaillement dans le fluide entraînent  $\psi_r^1 = \psi_\theta^1 = 0$ . En coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$ , les conditions de continuité de la traction et de la composante normale du déplacement deviennent :

$$\begin{aligned} -p^0 + \lambda^1(k_L^1)^2\varphi^1 - 2\mu^1 \left[ \varphi_{,rr}^1 - r^{-2}\psi_{z,\theta}^1 + r^{-1}\psi_{z,r\theta}^1 \right] &= 0 \text{ sur } \Gamma , \\ 2 \left[ -r^{-2}\varphi_{,\theta}^1 + r^{-1}\varphi_{,r\theta}^1 \right] + \left[ -\psi_{z,rr}^1 + r^{-1}\psi_{z,r}^1 + r^{-2}\psi_{z,\theta\theta}^1 \right] &= 0 \text{ sur } \Gamma , \\ \frac{1}{\lambda^0(k_L^0)^2}p_{,r}^0 - \phi_{,r}^1 - r^{-1}\psi_{z,\theta}^1 &= 0 \text{ sur } \Gamma . \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

Le champ de pression incident vérifie la condition de périodicité  $p^i(r, -\theta + 2\theta^i, \omega) = p^i(r, \theta, \omega)$  ainsi que la première des équations de Helmholtz dans (2.8.10), de sorte que (aussi, compte tenu de (2.8.1))

$$p^i = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \epsilon_m J_m(k_L^0 r) \cos m(\theta - \theta^i) \quad , \quad \text{avec } a_m = S(\omega) e^{-im\frac{\pi}{2}} \quad , \quad (2.8.12)$$

où  $J_m(\ )$  est la fonction de Bessel d'ordre  $m$  et  $\epsilon_0, \epsilon_{m>0} = 2$ . La périodicité de  $p^i$  entraîne  $p^{0d}(r, -\theta + 2\theta^i, \omega) = p^{0d}(r, \theta, \omega)$ , de sorte, que du fait de la première des équations de Helmholtz dans (2.8.10), et de la condition de rayonnement à l'infini,

$$p^{0d} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \epsilon_m H_m(k_L^0 r) \cos m(\theta - \theta^i) \quad , \quad (2.8.13)$$

où  $H_m(\ ) = H_m^{(1)}(\ )$  est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre  $m$ . La périodicité de  $p^i$  et de  $p^{0d}$  entraîne aussi  $\phi^1(r, -\theta + 2\theta^i, \omega) = \phi^1(r, \theta, \omega)$ , de sorte que du fait de la seconde des équations de Helmholtz dans (2.8.10), et du fait que le champ est borné dans  $\Omega_1$ ,

$$\phi^1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \epsilon_m J_m(k_L^1 r) \cos m(\theta - \theta^i) \quad . \quad (2.8.14)$$

Au moyen de n'importe laquelle des conditions de transmission (2.8.11), et compte tenu des conditions de périodicité auxquelles obéissent  $p^i, p^d$ , et  $\phi^1$ , on trouve que  $\psi_z^1$  obéit à la relation  $\psi_z^1(r, -\theta + 2\theta^i, \omega) = -\psi_z^1(r, \theta, \omega)$ , de sorte qu'en raison de la troisième des équations de Helmholtz dans (2.8.10) et du fait que le champ est borné dans  $\Omega_1$

$$\psi_z^1 = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \epsilon_m J_m(k_T^1 r) \sin m(\theta - \theta^i) \quad . \quad (2.8.15)$$



Nous abordons enfin la tâche de l'obtention des coefficients  $\{b_m\}$ ,  $\{c_m\}$ ,  $\{d_m\}$  à partir des conditions de transmission. Nous employons les relations d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \int_{\theta^i}^{\theta^i+\pi} \cos m(\theta - \theta^i) \cos n(\theta - \theta^i) \frac{d\theta}{\pi} &= \frac{\delta_{mn}}{\epsilon_m} , \\ \int_{\theta^i}^{\theta^i+\pi} \sin m(\theta - \theta^i) \sin n(\theta - \theta^i) \frac{d\theta}{\pi} &= \delta_{mn} \frac{(1-\delta_{m0})}{2} , \end{aligned} \quad (2.8.16)$$

où  $\delta_{mm} = 1$  ,  $\delta_{mn \neq m} = 0$ , pour trouver :

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{q}_0 = \mathbf{r}_0 , \quad (2.8.17)$$

où

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \chi_L^0 \dot{H}_0(\chi_L^0) & -v_L^0 \chi_L^1 \dot{J}_0(\chi_L^1) \\ -H_0(\chi_L^0) & v_L^1 J_0(\chi_L^1) - 2\mu^1 (k_L^1)^2 \ddot{J}_0(\chi_L^1) \end{pmatrix} \quad (2.8.18)$$

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} -a_0 \chi_L^0 \dot{J}_0(\chi_L^0) \\ a_0 J_0(\chi_L^0) \end{pmatrix} , \quad (2.8.19)$$

et

$$\mathbf{P}_n \mathbf{q}_n = \mathbf{r}_n ; \quad n = 1, 2, \dots , \quad (2.8.20)$$

où

$$\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} \chi_L^0 \dot{H}_n(\chi_L^0) & -v_L^0 \chi_L^1 \nu_2 \dot{J}_n(\chi_L^1) & -v_L^0 n J_n(\chi_T^1) \\ -a^2 H_n(\chi_L^0) & (\chi_L^1)^2 [\lambda^1 J_n(\chi_L^1) - 2\mu^1 \ddot{J}_n(\chi_L^1)] & 2\mu^1 n [J_n(\chi_T^1) - \chi_T^1 \dot{J}_n(\chi_T^1)] \\ 0 & 2n [J_n(\chi_L^1) - \chi_L^1 \dot{J}_n(\chi_L^1)] & -(\chi_T^1)^2 \ddot{J}_n(\chi_T^1) + \chi_T^1 \dot{J}_n(\chi_T^1) - n^2 J_n(\chi_T^1) \end{pmatrix} \quad (2.8.21)$$

$$\mathbf{q}_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} , \quad \mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} -a_n \chi_L^0 \dot{J}_n(\chi_L^0) \\ a_n a^2 J_n(\chi_L^0) \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.8.22)$$

avec :  $\chi_L^j = k_L^j a$ ,  $\chi_T^j = k_T^j a$ ,  $v_L^j = \lambda^j (k_L^j)^2$ ,  $\dot{g}(\varsigma) = dg/d\varsigma$ ,  $\ddot{g} = d^2g/d\varsigma^2$ , pour  $n = 1, 2, \dots$ .

En principe, les équations matricielles (2.8.17) et (2.8.20) permettent de déterminer les vecteurs des coefficients inconnus  $\mathbf{q}_0$  and  $\mathbf{q}_n$  ;  $n = 1, 2, \dots$ , et ainsi de résoudre le problème direct de diffraction, notamment pour prédire le champ de pression diffractée  $p_d$  dans le fluid hôte.

En procédant essentiellement de la même manière (on l'appelle la méthode des *ondes partielles*) , on résout le problème direct (également canonique) de diffraction d'une onde de pression, se propageant initialement dans le fluide hôte, par un tube solide viscoélastique dont la partie centrale (médullaire, si le tube représente un os long) est remplie d'un fluide visqueux.

Bien entendu, la méthode EF viscoacoustique, décrite précédemment, se généralise au cas d'objets solides (e.g., cylindres, tubes) viscoélastiques de forme arbitraires, contenant ou non des inclusions fluides visqueuses.

Le graphique de la fig. 2.2, tiré de [164], montre les prédictions de la réponse, calculée par la méthode EF, à une onde ultrasonore d'un os humain (radius) modélisé par un tube.

Dans le chap. 4 nous reprendrons, dans un cadre expérimental et de problème inverse, les problèmes de diffraction d'ultrasons par un cylindre et tube solide immergés dans l'eau.

## 2.9 Le modèle de solide équivalent (i.e., homogène) UA-WT

Nous traitons ici, encore une fois, le problème du remplacement d'un milieu divisé (i.e., non-homogène) par un milieu équivalent (homogène). Rappelons (voir la sect. 2.7) que le modèle de solide équivalent ad hoc avait la propriété très fâcheuse de n'être rattaché d'aucune manière à la microstructure du matériau d'origine.

Le modèle UA-WT, dans le contexte présent, part d'un milieu-hôte solide contenant des petites inclusions solides ou fluides. Le formalisme suit celui de UA-WT pour les fluides, et donne lieu à un solide équivalent (homogène) [328], [24], [25], [397]. Si l'onde incidente est de type SH (polarisation de cisaillement horizontal), l'onde qui frappe le récepteur après la traversée du milieu est aussi une onde SH. Si l'onde incidente est de type P (compressive, aussi noté L) ou SV (polarisation de cisaillement verticale), *deux ondes frappent le récepteur*

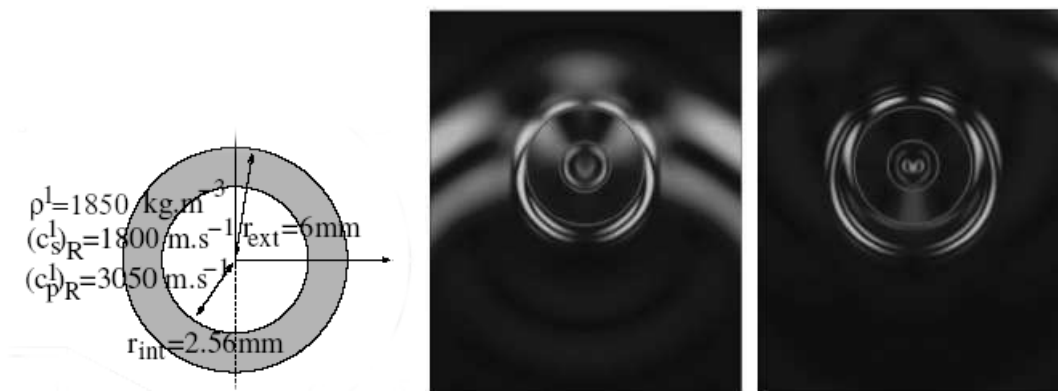


FIG. 2.2 – Vue en coupe du radius humain approché par un tube circulaire et sondé par une onde cylindrique impulsionnelle. Panneau de gauche : configuration adoptée dans le calcul, les caractéristiques de la chair entourant l'os étant :  $\rho^0 = 1030 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_S^0 = 200 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_P^0 = 1500 \text{ m s}^{-1}$ . Panneaux du milieu et droit : instantanés des modules de champs de vitesse particulaire totaux à deux instants.

après la traversée du milieu. Donc, en général, on a affaire, sur le plan cinématique, à deux nombres d'onde dans le milieu solide équivalent :

$$k_P(\omega) = \frac{\omega}{v_P} + i\alpha_P(\omega) \quad , \quad k_S(\omega) = \frac{\omega}{v_S} + i\alpha_S(\omega) \quad , \quad (2.9.1)$$

le S (aussi noté T) désignant "cisaillement" (en anglais : shear).

Nous ne donnons pas ici les expressions pour  $v_P$ ,  $v_S$ ,  $\alpha_P$ , et  $\alpha_S$  ; il suffit de mentionner le fait qu'elles sont rattachées, d'une manière explicite, aux fonctions de diffusion vers l'avant des ondes SH, P et SV et à la fraction volumique (en 3D, ou d'aire en 2D)  $\phi$  des inclusions. Donc, ce modèle de solide équivalent permet de remonter à la densité d'inclusions à partir de mesures des vitesses et atténuations des ondes P et S.

Le domaine de validité de ce modèle est encore largement inconnu pour ce qui concerne le matériau-os spongieux (voir cependant [256]).

## 2.10 Le modèle de fluide équivalent (i.e., homogène) de type UA-WT pour un milieu fluide avec des inclusions solides

Au niveau microstructurel, le milieu-hôte est un fluide (dissipatif ou non-dissipatif) et les inclusions sont des solides (dissipatifs ou non-dissipatifs). Au niveau de l'inclusion seule, le problème à résoudre est celui de la diffraction par un seul objet solide dans un milieu fluide. Si le fluide est léger et au repos, le problème est relativement simple, sinon il est compliqué, mais accessible au calcul presque analytique pour des objets solides de forme simple. A notre connaissance, le modèle de type UA-WT n'a pas été développé jusqu'ici pour des inclusions solides dans un fluide lourd en mouvement, mais il est probable que ce modèle aurait des ressemblances avec le modèle de Biot décrit brièvement dans la section suivante et plus en détail dans le chap. 6.

## 2.11 Bref résumé du modèle de Biot

La théorie des mouvements d'un milieu isotrope poroélastique (ici, signifiant un solide avec des cellules connectées dans lesquelles circule librement un fluide) a été mise au point, de manière quasi-heuristique, par Biot [31], [32], [34], [35]. Cette théorie tire son essence de la considération séparée du mouvement de la matrice solide (supposée linéairement élastique) et du mouvement du fluide. Toutefois, ces mouvements sont couplés par le fait du frottement du fluide au contact de la matrice solide.

Nous ferons un exposé complet du modèle de Biot, qui semble le plus apte à décrire la dynamique de milieux poreux tel que l'os trabéculaire, dans le chap. 6.



## Chapitre 3

# Inversions des données ultrasonores simulées avec des modèles simples

On décrit des inversions de données simulées au moyen de modèles relativement simples.

### 3.1 L'incorporation des modèles de milieu continu pour résoudre le problème inverse de caractérisation matérielle de l'os par méthodes vibratoires et/ou acoustiques

#### 3.1.1 Remarques préliminaires

Nous avons écrit plus haut que le problème de fond était de trouver le modèle dynamique le plus apte à rendre compte du champ vibratoire ou acoustique dans le matériau. Maintenant que ce chapitre a été abordé, il faut traiter les autres aspects importants de notre problème inverse.

Premièrement, il est indispensable de bien choisir le type et la quantité des grandeurs physiques mesurées pour que ces données soient des indicateurs suffisamment sensibles de la santé de l'os (notons qu'*il n'est possible d'effectuer les essais dynamiques classiques en traction-compression que sur des os morts* [36] et traditionnellement on détermine les constantes viscoélastiques sur ces mêmes os [229]).

Deuxièmement, il faut que ces grandeurs puissent être extraites sans ambiguïté, et de la

manière la plus simple possible, du modèle que l'on emploie pour rendre compte des mesures (voir [230], [231] pour les constantes viscoélastiques).

Troisièmement, l'os trabéculaire constitue la cible privilégiée pour diagnostiquer et suivre l'évolution de l'ostéoporose, car ce type d'os est le plus actif sur le plan métabolique. Ceci veut dire que les altérations de la structure de l'os trabéculaire, se traduisant par la diminution de l'épaisseur des travées, la transformation des plaques en tiges, et l'augmentation de la porosité, fait que l'altération de la solidité de l'os s'y produit plus rapidement qu'ailleurs (i.e., dans l'os cortical). Néanmoins, l'os cortical conserve un intérêt certain du fait que : i) la partie corticale des os longs (composés en grande partie de tissu compact) diminue d'épaisseur et est progressivement ponctuée de trous (le rendant poreux, bien que moins poreux que l'os trabéculaire) lorsque le sujet est atteint de l'ostéoporose, ii) la plus grande accessibilité des os longs [235] rend plus facile des mesures de leur réponse aux sollicitations vibratoires et acoustiques.

Quatrièmement, nous avons vu que les théories de réponse de matériaux, telles que l'os spongieux (il en va de même de structures incorporant ces matériaux (i.e., des objets-os)), à des sollicitations dynamiques, ne sont pas aussi simples que celles relatives aux sollicitations quasi-statiques ; donc, le problème direct consistant à prévoir cette réponse est en lui-même une source de difficultés et celles-ci sont décuplées lorsque l'on aborde *le problème inverse* qui consiste à extraire les descripteurs de santé de l'os de son comportement dynamique.

## 3.2 Les méthodes inverses acoustiques basées sur l'hypothèse d'un os fluide

Nous avons évoqué plus haut quelques problèmes qui surviennent lorsque l'on essaie de résoudre le problème inverse consistant à extraire les paramètres du modèle (lequel est supposé proche du réel) par traitement des données. Pour rendre plus concret ces dires, nous allons prendre un exemple tiré, une fois de plus, de la viscoacoustique. Ce problème illustre plusieurs thèmes essentiels concernant la caractérisation des os [51], [54], [52], [153], [94], [289], [290], [333], [384], [385], [386], [388] :

- La nécessité de résoudre des problèmes directs et inverses canoniques les plus proches possibles des problèmes correspondants des os
- La nécessité, d’extraire si possible, à partir des solutions exactes des problèmes canoniques directs, des solutions asymptotiques ou autres (en tous cas, explicites) du problème inverse correspondant,
- la nécessité de mettre en évidence, à partir de ces solutions, l’éventuelle non-unicité des solutions, et comment ces solutions dépendent de la nature et de la quantité des données,
- la nécessité de mettre en évidence, à partir de ces solutions, la sensibilité des paramètres reconstruits vis-à-vis de variations des paramètres implicites et vis-à-vis d’erreurs de mesure et du modèle.

### 3.3 La reconstruction, à partir de données acoustiques, de la compressibilité $\kappa^1$ et de la densité $\rho^1$ d’un os fluide cylindrique circulaire de rayon $a$

Le matériel ici fait référence à ce qui a été traité dans la sect. 2.4 dans le cadre du problème direct. Nous abordons maintenant le problème inverse correspondant.

Les données, portant sur le champ diffracté à l’extérieur de l’os-cylindre, sont simulées (par le calcul) et sont issues du prédicteur (2.4.1). Soit  $p^{0d}(r, \theta | \theta^i, \omega | a, \kappa^0, \rho^0, \kappa^1, \rho^1)$  une donnée du champ diffracté au point  $(r, \theta)$ , pour une onde incidente plane d’angle d’incidence  $\theta^i$  et de fréquence angulaire  $\omega$ . Nous supposons que  $a, \kappa^0, \rho^0$  sont connus a priori et voulons reconstruire les paramètres matériels  $\kappa^1, \rho^1$  de l’os (en forme de cylindre circulaire) à partir de  $p^{0d}(r, \theta | \theta^i, \omega | \kappa^0, \rho^0, \kappa^1, \rho^1)$  pour un ou plusieurs jeux de  $(r, \theta)$ , et/ou  $(r, \theta^i)$  et/ou  $(\theta, \omega)$  et/ou  $(\theta^i, \omega)$ . Pour illustrer notre propos, nous choisissons des données portant sur des variations de  $(\theta, \omega)$ ,  $r$  et  $\theta^i$  étant fixes.

Dans l’estimateur, nous incorporons des variables  $K^1, R^1$  de même nature que  $\kappa^1, \rho^1$ , et qui vont prendre des valeurs différentes au cours de l’inversion jusqu’à se rapprocher le plus près de  $\kappa^1, \rho^1$ . Donc, l’estimateur est désigné par  $\tilde{p}^{0d}(r, \theta | \theta^i, \omega | a, \kappa^0, \rho^0, K^1, R^1)$  et pourrait



avoir la forme (2.4.1) (cas du crime inverse) ou toute autre forme au choix.

On cherche le couple  $K^1, R^1$  qui minimise la fonction-coût

$$J(K^1, R^1) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\| p^{0d}(r, \theta_m | \theta^i, \omega_n | \kappa^0, \rho^0, \kappa^1, \rho^1) - \tilde{p}^{0d}(r, \theta_m | \theta^i, \omega_n | a, \kappa^0, \rho^0, K^1, R^1) \right\|^2, \quad (3.3.1)$$

en espérant que cela donnera  $K^1 \approx \kappa^1$  et  $R^1 \approx \rho^1$  au bout du compte.

La façon de minimiser  $J(K^1, R^1)$  est itérative. Très schématiquement, voici comment se déroule le processus itératif.

1. On pose  $j = 0$ , on se donne une valeur (petite) pour  $\varepsilon$ , et on se donne un couple de valeurs  $(K^1, R^1) = (K_0^1, R_0^1)$
2. on pose  $(K^1, R^1) = (K_j^1, R_j^1)$
3. on calcule  $J(K^1, R^1)$
4. si  $J(K^1, R^1) < \varepsilon$  on va en 6
5. sinon, on fait  $j \rightarrow j + 1$  et on va en 2.
6. on arrête le processus et on associe  $(K^1, R^1)$  à  $(\kappa^1, \rho^1)$

Généralement, l'étape 6 n'est atteinte qu'au bout de quelques dizaines (ou plus) d'itérations.

*Remarque* La clef de l'algorithme réside dans la façon plus ou moins intelligente de faire le passage dans l'étape 2 d'un jeu de  $(K^1, R^1)$  au suivant. Nous n'aborderons pas ce problème qui est classique en théorie d'optimisation [322].

*Remarque* A chaque étape du processus itératif, il faut calculer le champ associé à l'estimateur (et aussi celui associé au prédicteur au cas où les données sont simulées) pour tous les  $\theta_m$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$  et  $\omega_n$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ , ce qui peut se révéler fastidieux si le nombre d'itérations est important et/ou si l'estimateur est une fonction compliquée (cas dit de *l'estimateur explicite*) ou résulte d'un calcul de solution d'un système d'équations (cas dit de *l'estimateur implicite*). Ce dernier cas survient quand la solution du problème direct est

obtenue, e.g. par éléments finis.

*Remarque* L'expérience montre que les chances d'aboutir à une bonne solution sont d'autant plus grandes que le jeu de valeurs de départ  $K_0^1, R_0^1$  est plus proche de  $\kappa_0^1, \rho_0^1$ , ce qui suppose que l'on dispose d'une bonne connaissance a priori de la solution du problème inverse.

Voici une façon "intelligente" d'obtenir ce genre d'informations a priori.

Rappelons que nous avons choisi de sonder notre os avec une onde acoustique basse fréquence. D'ailleurs, cette condition était nécessaire afin de pouvoir remplacer le milieu hétérogène de l'os par un milieu homogène équivalent (ce milieu est fluide à présent). Donc, au lieu de choisir un estimateur  $\tilde{p}^d$  sous la forme de série (2.4.1), nous appliquons une méthode de perturbations à cette série pour obtenir une expression asymptotique basse fréquence du champ diffracté.

Donc, nous supposons que  $\delta_j := k_j a \ll 1$  ;  $j = 0, 1$ . La méthode de perturbations permet de trouver (avec  $\zeta = k^1/k^0$  et  $\beta = k^0 \rho^1/k^1 \rho^0$ ) :

$$C_0 \sim \tilde{C}_0 := -\gamma_0 \frac{i\pi\delta^2}{4\beta} (-\zeta + \beta) \quad ; \quad \delta \rightarrow 0 \quad , \quad (3.3.2)$$

$$C_{\pm 1} \sim \tilde{C}_{\pm 1} := -\gamma_1 \frac{i\pi\delta^2}{4} \frac{1 - \zeta\beta}{1 + \zeta\beta} \quad ; \quad \delta \rightarrow 0 \quad . \quad (3.3.3)$$

avec  $C_{|m|>1}$  disparaissant plus vite que  $\delta^2$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

Ainsi, au second ordre en  $\delta$ , on a

$$p^{0d}(\mathbf{x}, \omega) \sim \sum_{m=-1}^1 \tilde{C}_m H_m^{(1)}(k^0 r) \exp(im\theta) \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad ; \quad \delta \rightarrow 0 \quad . \quad (3.3.4)$$

Si les données sont acquises loin de l'os (i.e., en zone lointaine), on trouve

$$p^{0d}(\mathbf{x}, \omega) \sim \tilde{p}^{0d}(\theta, \theta^i, \omega) \sqrt{\frac{2}{\pi k^0 r}} \exp \left[ i \left( k^0 r - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad ; \quad k^0 r \rightarrow \infty \quad , \quad (3.3.5)$$

où, pour  $\delta \ll 1$ ,

$$\tilde{p}^{0d}(\theta, \theta^i, \omega) \sim \frac{i\pi\delta^2}{4} \left[ \frac{\zeta - \beta}{\beta} - 2 \left( \frac{\zeta\beta - 1}{\zeta\beta + 1} \right) \cos(\theta - \theta^i) \right] \quad ; \quad \delta \rightarrow 0 \quad . \quad (3.3.6)$$

Soit le problème général d'exprimer  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  en termes de  $\mathcal{C}(\theta)$  ;  $\forall \theta \in [0, 2\pi[$  lorsque

$$\mathcal{C}(\theta) = \mathcal{A} + \mathcal{B} \cos(\theta - \theta^i) ; \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[ . \quad (3.3.7)$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{C}(\theta) \cos n\theta d\theta = \mathcal{A} \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta + \mathcal{B} \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \theta^i) \cos n\theta d\theta ; \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (3.3.8)$$

qui livre :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{C}(\theta) d\theta , \quad \mathcal{B} = \frac{1}{\pi \cos \theta^i} \int_0^{2\pi} \mathcal{C}(\theta) \cos \theta d\theta . \quad (3.3.9)$$

Par conséquent

$$\frac{i\pi(k^0 a)^2}{4} \left( \frac{\kappa^1}{\kappa^0} - 1 \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{p}^{0d}(\theta, \theta^i, \omega) d\theta , \quad (3.3.10)$$

$$\frac{i\pi(k^0 a)^2}{4} 2 \left( \frac{\rho^1}{\rho^0} - 1 \right) = \frac{1}{\pi \cos \theta^i} \int_0^{2\pi} \check{p}^{0d}(\theta, \theta^i, \omega) \cos \theta d\theta , \quad (3.3.11)$$

d'où

$$\kappa^1 = \kappa^0 \left[ 1 + \frac{4}{i\pi(k^0 a)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{p}^{0d}(\theta, \theta^i, \omega) d\theta \right] , \quad (3.3.12)$$

$$\rho^1 = \rho^0 \left[ \frac{1 - \frac{2}{i\pi(k^0 a)^2} \frac{1}{\pi \cos \theta^i} \int_0^{2\pi} \check{p}^{0d}(\theta, \theta^i, \omega) \cos \theta d\theta}{1 + \frac{2}{i\pi(k^0 a)^2} \frac{1}{\pi \cos \theta^i} \int_0^{2\pi} \check{p}^{0d}(\theta, \theta^i, \omega) \cos \theta d\theta} \right] . \quad (3.3.13)$$

Ce résultat montre que  $\kappa^1$  est une fonction linéaire du champ diffusé mesuré (ou simulé) en zone lointaine, alors que  $\rho^1$  est une fonction nonlinéaire de ce champ ; ceci a des conséquences sur l'unicité de la solution du problème inverse.

Nous avons appliqué (3.3.12) et (3.3.13) pour reconstruire la densité et la compressibilité complexe à partir du champ acoustique diffusé en zone lointaine. En particulier, nous avons calculé les erreurs relatives (voir les figures 3.1 et 3.2) :

$$\delta_{\rho^1} := \left| \frac{\tilde{\rho}^1 - \rho^1}{\rho^1} \right| , \quad \delta_{\Re \kappa^1} := \left| \frac{\Re \tilde{\kappa}_1 - \Re \kappa^1}{\Re \kappa^1} \right| , \quad \delta_{\Im \kappa^1} := \left| \frac{\Im \tilde{\kappa}_1 - \Im \kappa^1}{\Im \kappa^1} \right| , \quad (3.3.14)$$

où  $\rho^1$ ,  $\kappa^1$ , sont les valeurs réelles de la densité et la compressibilité complexe (i.e., celles employées pour simuler les données), et  $\tilde{\rho}_1$  la valeur de la densité obtenue de (3.3.13), tandis que  $\Re \tilde{\kappa}_1$ ,  $\Im \tilde{\kappa}_1$  sont les valeurs des parties réelle et imaginaire de la compressibilité complexe obtenue de (3.3.12), sur une plage de fréquences correspondant à  $10^{-5} \leq k^0 a \leq 1.0$ .

Les données portant sur le champ diffusé en zone lointaine étaient simulées en employant (2.4.1), relation dans laquelle nous avons remplacé les limites inférieure et supérieure de la série par  $-5$  et  $+5$  respectivement. Les autres paramètres employés dans la production des données étaient :  $\theta^i = 0$ ,  $\rho^0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c^0 = 1500 \text{ m/s}$ ,  $\rho^1 = 1200 \text{ kg/m}^3$ , avec  $c^1 = 1600 + i160 \text{ m/s}$  pour le soi-disant cas de faible contraste et  $c^1 = 2500 + i250 \text{ m/s}$  pour le soi-disant cas de fort contraste.

Pour évaluer la sensibilité de la méthode de reconstruction aux erreurs de mesure du rayon de l'os-cylindre, nous avons fait la reconstruction de  $\tilde{\rho}_1$ ,  $\Re\tilde{\kappa}_1$ ,  $\Im\tilde{\kappa}_1$  dans deux cas : i) par emploi dans les estimateurs (3.3.12) et (3.3.13) de la valeur exacte (1 m) du rayon  $a$  (i.e., erreur de mesure nulle pour ce paramètre (qui est assurément grand pour un os, mais peut être réduit sans problème en réduisant la fréquence)), et ii) en employant dans les estimateurs (3.3.12) et (3.3.13) une fausse valeur (1.07 m) pour le rayon (i.e., 7% d'erreur pour  $a$ ). Notons que dans les deux cas, le calcul, via (2.4.1), des données portant sur le champ diffusé en champ lointain, a été mené avec la valeur exacte  $a = 1 \text{ m}$  du rayon.

On aperçoit dans la figure 3.1 (courbes pleines) que pour obtenir des erreurs relatives inférieures à 10% de tous les trois paramètres matériels mécaniques du cylindre à faible contraste, la fréquence de l'onde interrogatrice doit être telle que  $k^0 a$  ne soit pas supérieur à  $\sim 0.35$  pourvu que la mesure de  $a$  se fasse sans erreur. On observe dans la même figure (courbes discontinues) que lorsque *le rayon entaché d'erreur est introduit dans les estimateurs*, l'emploi de fréquences telles que  $k^0 a$  ne dépasse pas  $\sim 0.35$  donne lieu à des erreurs relatives des trois paramètres matériels mécaniques qui peuvent atteindre 23%.

Aucune fréquence, aussi petite soit-elle, ne permet d'obtenir des reconstructions avec une erreur inférieure à 10% lorsque l'on emploie le rayon entaché d'erreur dans les estimateurs.

Tous ces faits, résultant de calculs numériques, peuvent être décrits théoriquement puisque l'on dispose ici (cas rare et précieux) de relations explicites pour les estimateurs.

On note aussi que la méthode asymptotique que l'on vient de décrire ne repose pas sur l'hypothèse de faible contraste, comme c'est le cas dans les méthodes de reconstruction usuelles telles que la tomographie par diffraction [94], [170], [171], [384], [385], [235].

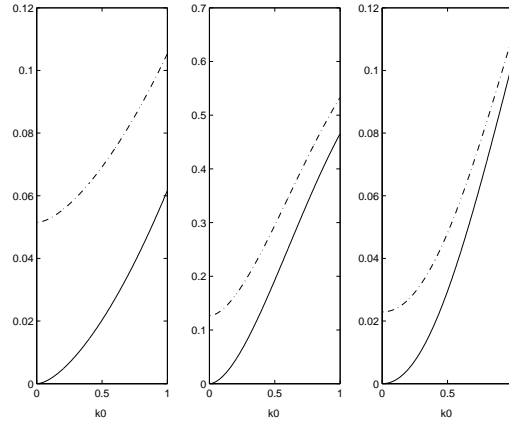


FIG. 3.1 – Erreur relative de  $\Re\kappa^1$  (panneau de gauche),  $\Im\kappa^1$  (panneau du milieu) et  $\rho^1$  (panneau de droite) en fonction du nombre d'onde  $k^0$  (notons que  $k^0$  augmente linéairement avec la fréquence) pour un os-cylindre de contraste relativement bas. Les courbes pleines s'appliquent au cas du rayon exact et les courbes discontinues au cas du rayon entaché d'erreur.

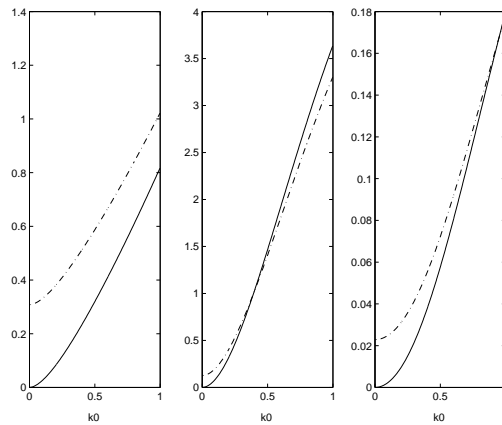


FIG. 3.2 – Erreur relative de  $\Re\kappa^1$  (panneau gauche),  $\Im\kappa^1$  (panneau du milieu) et  $\rho^1$  (panneau de droite) en fonction de  $k^0$  pour l'os-cylindre de contraste relativement haut. Mêmes notations que dans la fig. 3.1.

### 3.4 La reconstruction, à partir de données acoustiques, de la rigidité relative et de la densité $\rho^1$ d'un os solide cylindrique circulaire de rayon $a$

Le matériel ici fait référence à ce qui a été traité dans la sect. 2.8 dans le cadre du problème direct. Nous abordons maintenant le problème inverse correspondant. Ce travail a fait l'objet de la publication [106].

Rappelons, qu'en principe, les équations matricielles (2.8.17) et (2.8.20) permettent de déterminer les vecteurs des coefficients inconnus  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{q}_n$  ;  $n = 1, 2, \dots$ , et ainsi de résoudre le problème direct. Puisque nous sommes à présent concerné par le problème inverse de reconstruction de  $\lambda^1$ ,  $\mu^1$ ,  $\rho^1$ , nous adoptons une stratégie différente pour déterminer  $\mathbf{q}_0$  and  $\mathbf{q}_n$  ;  $n = 1, 2, \dots$ .

Nous notons d'abord que :

$$\chi_L^1 = \frac{k_L^1}{k_L^0} \chi_L^0 = \frac{c_L^0}{c_L^1} \chi \quad , \quad \chi_T^1 = \frac{k_T^1}{k_L^0} \chi_L^0 = \frac{c_L^0}{c_T^1} \chi \quad , \quad (3.4.1)$$

où  $\chi := \chi_L^0$ . Nous supposons que  $\chi$  est suffisamment petit (i.e.,  $0 < \chi \ll 1$ ) pour qu'il soit vrai que  $0 < \chi_L^1 \ll 1$  et  $0 < \chi_T^1 \ll 1$ . Ceci nous autorise à employer une méthode de perturbation, basée sur la petitesse de  $\chi$  (ce qui implique, pour le moins, des fréquences  $\omega$  basses de sondage et/ou un petit rayon  $a$  du cylindre-os).

Ainsi, les arguments de toutes les fonctions de Bessel et Hankel qui apparaissent dans l'expression pour  $\mathbf{P}_n$  sont petites, ce qui nous autorise à employer les formes asymptotiques pour de petits arguments

$$\begin{aligned} J_m(\xi) &\sim \frac{1}{m!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^m \quad , \\ H_0^{(1)}(\xi) &\sim \frac{2i}{\pi} \ln \xi \quad , \\ H_m^{(1)}(\xi) &\sim -\frac{i(m-1)!}{\pi} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-m} \quad ; \quad \xi \rightarrow 0 \quad , \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Afin de faire ceci de manière systématique, nous développons  $\mathbf{P}_m$ ,  $\mathbf{q}_m$ , et  $\mathbf{r}_m$  en séries de puissances de  $\chi$  :

$$\mathbf{P}_m(\chi) = \sum_{j=0}^{\infty} P_m^{(j)} \chi^j \quad ; \quad P_m^{(j)} := \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \chi^j} \mathbf{P}_m(\chi) \Big|_{\chi=0} \quad , \quad \mathbf{q}_m(\chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{q}_m^{(n)} \chi^n \quad , \quad (3.4.3)$$

$$\mathbf{r}_m(\chi) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{r}_m^{(l)} \chi^l \quad ; \quad \mathbf{r}_m^{(l)} := \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \chi^l} \mathbf{r}_m(\chi) \Big|_{\chi=0} , \quad (3.4.4)$$

lesquelles, suite à l'introduction dans l'équation matricielle  $\mathbf{P}_m \mathbf{q}_m = \mathbf{r}_m$ , conduisent (après comparaison des puissances de  $\chi$ ) à  $\sum_{n=0}^l \mathbf{P}_m^{(l-n)} \mathbf{q}_m^{(n)} = \mathbf{r}_m^{(l)}$  ;  $l = 0, 1, 2, \dots$ , ce qui donne lieu au schéma récursif pour la détermination de  $\mathbf{q}_m^l$  :

$$\mathbf{q}_m^{(0)} = \left( \mathbf{P}_m^{(0)} \right)^{-1} \mathbf{r}_m^{(0)} \quad , \quad \mathbf{q}_m^l = \left( \mathbf{P}_m^{(0)} \right)^{-1} \left[ \mathbf{r}_m^{(l)} - \sum_{n=0}^{l-1} \mathbf{P}_m^{(l-n)} \mathbf{q}_m^{(n)} \right] \quad ; \quad l = 1, 2, \dots . \quad (3.4.5)$$

Après de multiples manipulations algébriques, on trouve la forme asymptotique suivante de  $b_m$  :

$$b_0 = b_0^{(2)} \chi^2 + O(\chi^4) \quad , \quad b_1 = b_1^{(2)} \chi^2 + O(\chi^4) \quad , \quad b_{m>1} = O(\chi^4) \quad ; \quad \chi \rightarrow 0 . \quad (3.4.6)$$

où

$$b_0^{(2)} = a_0 \left( \frac{-i\pi}{4} \right) \left[ \frac{\lambda^1 + \mu^1 - \lambda^0}{\lambda_1 + \mu^1} \right] , \quad (3.4.7)$$

$$b_1^{(2)} = a_1 \left( \frac{-i\pi}{4} \right) \left[ \frac{\rho^0 - \rho^1}{\rho^0 + \rho^1} \right] ,$$

de sorte que le champ de pression diffracté dans le fluide-hôte prend la forme (au second ordre en  $\chi$ )

$$p^d(r, \theta, \omega) \approx b_0^{(2)} \chi^2 H_0^{(1)}(k_L^0 r) \chi^2 + 2b_1^{(2)} \chi^2 H_1^{(1)}(k_L^0 r) \cos(\theta - \theta^i) . \quad (3.4.8)$$

Par l'utilisation de (3.4.8), et de la première des relations d'orthogonalité (2.8.16), nous trouvons

$$B_m := \frac{4i b_m^{(2)}}{\pi a_m} = \frac{4i}{\pi a_m \chi^2} \frac{1}{H_m^{(1)}(k_L^0 b)} \int_{\theta^i}^{\theta^i + \pi} p^{0d}(b, \theta, \omega) \cos m(\theta - \theta^i) \frac{d\theta}{\pi} \quad ; \quad m = 0, 1 , \quad (3.4.9)$$

ce qui signifie que  $B_0$  and  $B_1$  peuvent être obtenus d'intégrales portant sur des données relatives au champ de pression diffracté (pour tous les angles  $\theta$ ) sur un cercle de rayon  $b > a$ .

Une fois que ces coefficients sont calculés, les paramètres matériels  $\lambda^1$ ,  $\mu^1$  and  $\rho^1$  peuvent, en principe, être obtenus de (3.4.7), i.e.,

$$B_0 = \left[ \frac{\lambda^1 + \mu^1 - \lambda^0}{\lambda_1 + \mu^1} \right] \quad , \quad B_1 = \left[ \frac{\rho^0 - \rho^1}{\rho^0 + \rho^1} \right] . \quad (3.4.10)$$

Ces expressions : i) montrent que le champ constitue une fonction fortement nonlinéaire des paramètres matériels , et ii) s'appliquent aussi bien au modèle fluide de l'objet (i.e.,  $\mu^1 = 0$  en ce cas).

De plus, puisque seuls deux données (i.e.,  $B_0$  et  $B_1$  exprimés dans (3.4.9)) sont disponibles, seuls deux des trois paramètres matériels peuvent être reconstruits via (3.4.10). Toutefois, s'il est vrai que  $\rho^1$  se déduit facilement de  $B_1$  (rappelons que  $\rho^0$  est supposé connu a priori), seul  $\lambda^1 + \mu^1$  (rappelons que  $\lambda^0$  est supposé connu a priori) peut être reconstruit de  $B_0$ .

Ceci montre qu'il est peut-être préférable de chercher, aux plus hautes fréquences, des combinaisons linéaires de  $\lambda^1$  et  $\mu^1$ , plutôt que  $\lambda^1$  et  $\mu^1$  individuellement.

*Remarque* Rappelons que la vitesse des ondes P (ou L) et des ondes S (T) de volume sont

$$\begin{aligned} c_L^1 &= \sqrt{\frac{\lambda^1 + 2\mu^1}{\rho^1}} = \sqrt{\frac{K^1 + \frac{4}{3}\mu^1}{\rho^1}} , \\ c_T^1 &= \sqrt{\frac{\mu^1}{\rho^1}} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

où

$$K^1 = \lambda^1 + \frac{2}{3}\mu^1 , \quad (3.4.12)$$

est l'incompressibilité et  $\lambda^1$ ,  $\mu^1$  les constants de Lamé. Donc, en identifiant  $\lambda^1 + \mu^1$ , on n'est pas loin d'identifier l'incompressibilité, et mieux encore, en identifiant  $\lambda^1 + \mu^1$  et  $\rho^1$ , on identifie exactement la différence des carrés de vitesses d'ondes L et T dans le matériau, car

$$(c_L^1)^2 - (c_T^1)^2 = \frac{\lambda^1 + \mu^1}{\rho^1} . \quad (3.4.13)$$



## 3.5 Reconstruction in vitro des paramètres viscoacoustiques des spécimens d'os spongieux morts ou de fantômes d'os, tous deux en forme de plaque

### 3.5.1 Introduction

On sait depuis longtemps que la plaque constitue la forme de contenant la plus appropriée pour la caractérisation acoustique du contenu. Donc, si l'objet, dont on veut caractériser la composition, n'est pas naturellement en forme de plaque, il vaut mieux le découper en tranches (i.e., plaques). Beaucoup d'efforts de caractérisation de tissus biologiques se font avec des spécimens en forme de plaque [159], [160]. Comme les tissus biologiques sont par définition vivants dans leur état de premier intérêt, il n'est pas toujours possible de les découper en tranches (sauf pour des petits spécimens prélevés par biopsie). S'agissant des os, il n'est quasiment pas possible de disposer de spécimens extraits du sujet vivant, de sorte que si l'on veut déterminer les propriétés mécaniques des os par moyens acoustiques, il faut travailler sur des os morts (i.e., extraits de cadavres) ou sur des fantômes d'os (on fabrique aujourd'hui de très bonnes copies en hydroxyapatite).

Le fémur est l'os le plus intéressant dans le contexte de l'ostéoporose car la tête et le col du fémur sont les sites les plus fragiles des patients atteints de cette maladie. Une tête de fémur ressemble plus à une sphère qu'à une plaque, de sorte qu'il faut couper cette tête en tranches afin d'obtenir la forme de spécimen voulue (voir la figure relative au découpage d'un os dans le chap. 8.).

La raison de préférer des spécimens en forme de plaque est liée à la physique de l'interaction d'une onde de volume avec ce type d'objet. Supposons que l'objet soit plongée dans un grand volume d'eau et que l'on l'insonifie avec l'onde monofréquentielle issue d'un transducteur ultrasonore (que l'on peut envisager comme une pastille). Supposons de plus que le plan de la pastille soit parallèle au plan de la plaque et que ces deux plans soit séparés par une distance suffisamment grande pour que l'on puisse considérer que l'onde incidente sur la plaque soit une onde plane de compression qui frappe la plaque en incidence normale (i.e., son vecteur d'onde est perpendiculaire au plan de la plaque). Si l'on suppose que le matériau

de celui-ci est homogène (c'est ce que nous avons supposé jusqu'ici en adoptant un modèle de milieu équivalent (homogène) du milieu originellement hétérogène), alors l'onde plane traverse cette plaque en subissant (généralement) une baisse d'amplitude et un déphasage proportionnel (pour le déphasage) à ce qui s'appelle le chemin optique égal au produit  $k\delta$ ,  $k$  étant le nombre d'onde dans le matériau de la plaque, et  $\delta$  son épaisseur. Enfin, on suppose qu'un autre transducteur, identique au premier, soit situé du côté émergeant (aussi dans l'eau, puisque l'eau se situe des deux côtés) de la plaque et assez loin de celui-ci pour que ce que reçoit ce transducteur apparaisse comme une onde plane de compression.

Cette image vaut si ce qui se passe dans la plaque, lorsque celle-ci est sollicitée par l'onde de compression, ne donne lieu qu'à une seule onde transmise de compression. Nous avons vu que selon le modèle de Biot, il est aussi possible que deux ondes de compression transmises sortent de la plaque et nous savons que le nombre d'onde de l'une est différente du nombre d'onde de l'autre de ces deux ondes. Ceci complique l'image de l'expérience que nous voulons mener, de sorte que nous préférons ne retenir que le premier scénario (une seule onde émergente) pour le moment. Notons au passage, que nier que le milieu puisse se comporter comme un milieu de Biot est la démarche habituelle en caractérisation acoustique de matériaux biologiques (en tous cas, un présupposé de la méthode BUA de caractérisation acoustique des os spongieux [235]).

Considérons maintenant le montage expérimental de la fig. 3.3. L'expérience, dont le but est de fournir les données nécessaires à la détermination de la vitesse de phase  $c^1$  dans le spécimen en forme de plaque [176], se fait par sondage via une onde (de compression) impulsionnelle plane, dont le spectre est très large de façon à ce que l'impulsion soit très étroite dans le domaine temporel ( $t$  le temps). L'hypothèse de base, bien confirmée par l'expérience est que si l'onde traverse un milieu de façon à ne donner qu'une seule onde de compression sur le récepteur, alors cette onde reçue se manifeste comme une impulsion décalée temporellement par rapport à l'instant d'émission, et dont l'amplitude est soit égale, soit diminuée par rapport à l'amplitude de l'impulsion émise. Le décalage est simplement la somme de la distance du parcours dans l'eau divisée par la vitesse de phase dans l'eau et de la distance du parcours dans le spécimen divisée par la vitesse de phase dans le spécimen. Notons qu'une idée sur l'atténuation dans le spécimen peut être obtenue en comparant la

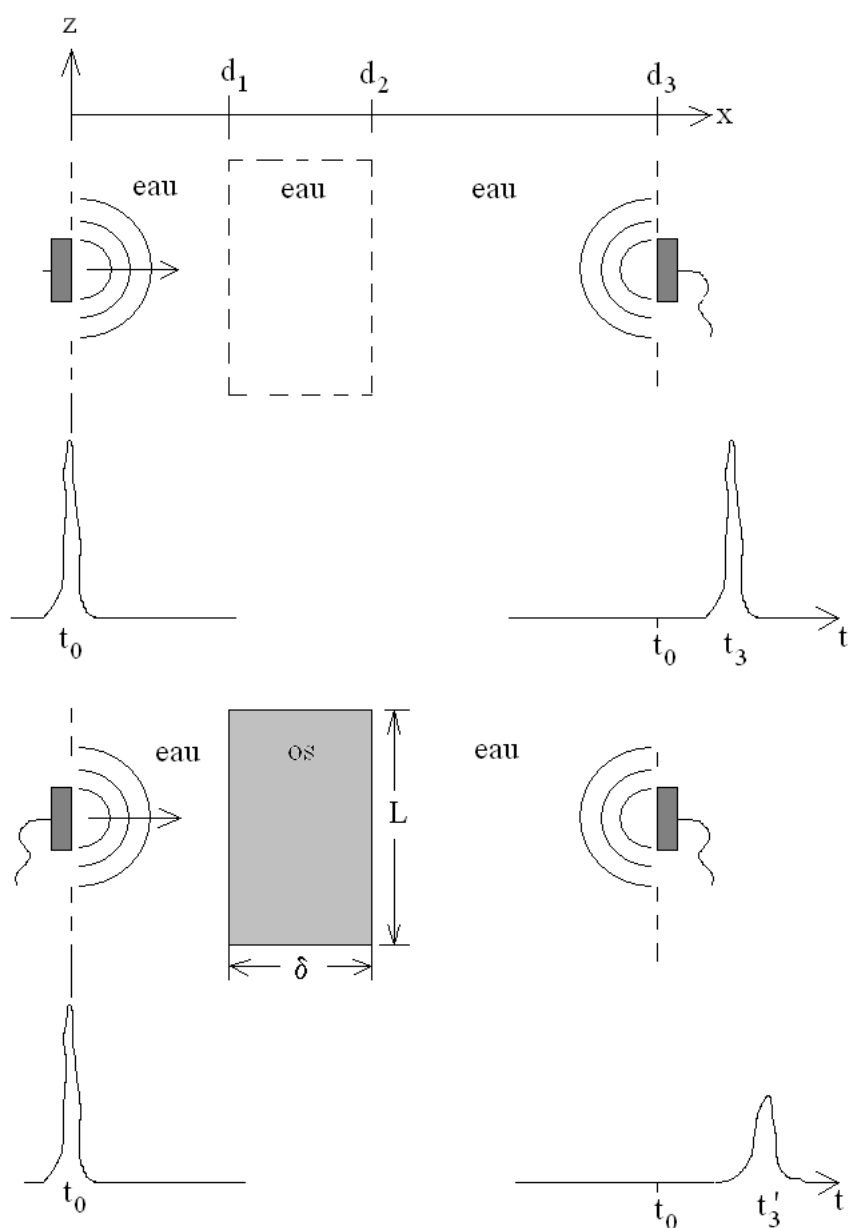


FIG. 3.3 – Montage de l'expérience dite de "temps de vol". Haut : sans spécimen en place. Bas : avec spécimen en place.  $t_0$  est l'instant d'émission de l'impulsion dans le transducteur de gauche (rectangle gauche).  $t_3$  est l'instant de réception de l'impulsion dans le transducteur de droite (rectangle droite) après la propagation de l'onde dans l'eau uniquement.  $t'_3$  est l'instant de réception de l'impulsion dans le transducteur de droite (rectangle droite) après la propagation de l'onde dans l'eau, suivie de la traversée du spécimen (rectangle central), suivie de la propagation dans l'eau.

hauteur des pics de l'impulsion reçue et de l'impulsion envoyée.

*Remarque* : Ces principes très simples, qui se fondent sur des arguments théoriques et empiriques relativement solides (sauf lorsqu'on constate l'existence de deux ondes de compression au niveau de récepteur), sont à la base de trois méthodes acoustiques de caractérisation de matériaux tels que l'os.

### 3.6 Acquisition et traitement des données par la méthode de temps de vol

Revenons à l'expérience dite de "temps de vol" dont le schéma est donné dans la fig. 3.3. L'expérience se passe en deux temps : sans et avec le spécimen en place dans l'eau. D'après les principes énoncés dans la section précédente, on a, en supposant  $t_0 = 0$  l'instant du maximum de l'impulsion initial, et  $t = t_3$  ou  $t = t'_3$  les instants du maximum des impulsions reçues, avec  $c^0$  et  $c^1$  les vitesses de phase (égales aux vitesses du signal du fait que l'on suppose que l'impulsion initiale est très étroite et que l'impulsion reçue constitue une déformation simple (se traduisant par un seul maximum, tout comme pour l'impulsion incidente)) de l'impulsion incidente :

$$t_3 = \frac{d_3}{c^0} , \quad (3.6.1)$$

en l'absence du spécimen, et

$$t'_3 = \frac{d_1}{c^0} + \frac{d_2 - d_1}{c^1} + \frac{d_3 - d_2}{c^0} . \quad (3.6.2)$$

en présence du spécimen.

*Remarque* :  $t_3$  et  $t'_3$  sont des *données*, obtenues par acquisition d'un signal sur l'émetteur et le récepteur, alors que  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  sont des variables dites externes que l'on peut varier à son gré, mais qu'il faut considérer comme connues a priori.

*Remarque* : Les relations (3.6.1) et (3.6.2) sont l'expression du problème direct ; le problème inverse est de reconstruire  $c^1$  à partir des données  $t_3$  et  $t'_3$ .

Dans le cas présent, nous avons la chance de pouvoir *inverser* les relations (3.6.1) et (3.6.2) et ainsi de résoudre le problème inverse :

$$c^0 = \frac{d_3}{t_3}, \quad (3.6.3)$$

de sorte que

$$c^1 = \frac{d_3}{t_3} \left[ \frac{d_2 - d_1}{t'_3 - \frac{t_3}{d_3}(d_1 - d_2 + d_3)} \right]. \quad (3.6.4)$$

*Remarque* : Il importe relativement peu de savoir si  $c^0$  et  $c^1$  sont des vitesses de signal ou des vitesses de phase, du moment que l'on explique, chaque fois qu'on propose des valeurs, comment on a obtenu celles-ci et que cette méthode soit celle qui fait l'objet d'un consensus scientifique. Il faut bien reconnaître que cela n'a pas toujours été le cas, notamment dans le domaine de caractérisation de tissus biologiques [74].

### 3.7 Acquisition et traitement des données par la méthode spectrale avec un seul spécimen

L'expérience (e.g., [355],[133]) est la même que dans la sect. 3.6, mais au lieu d'acquérir des temps de vol, on acquiert des signaux entiers. La partie traitement consiste à calculer les spectres de ces signaux afin d'en extraire la vitesse de phase et l'atténuation dans le spécimen [324].

On se réfère cette fois-ci à la fig. 3.4. Soit  $p^0(x, t)$  la pression (fonction réelle) acquise sur le récepteur et  $p^0(x, \omega)$  le spectre (fonction complexe) correspondant. Désormais, nous considérons  $p^0(d_3, \omega)$  en fonction de  $\omega \geq 0$  comme les *données* du problème. En fait, il s'agit de deux ensembles de données :  $\{P_j(\omega) ; \omega \geq 0\}$  ,  $j = 1, 2$  (avec  $P_j(\omega) := p^0(d_3, \omega)$ , sachant que  $j = 1$  en l'absence du spécimen, et  $j = 2$  en présence du spécimen). Droin et al. [117] appellent cette méthode : "la méthode de substitution".

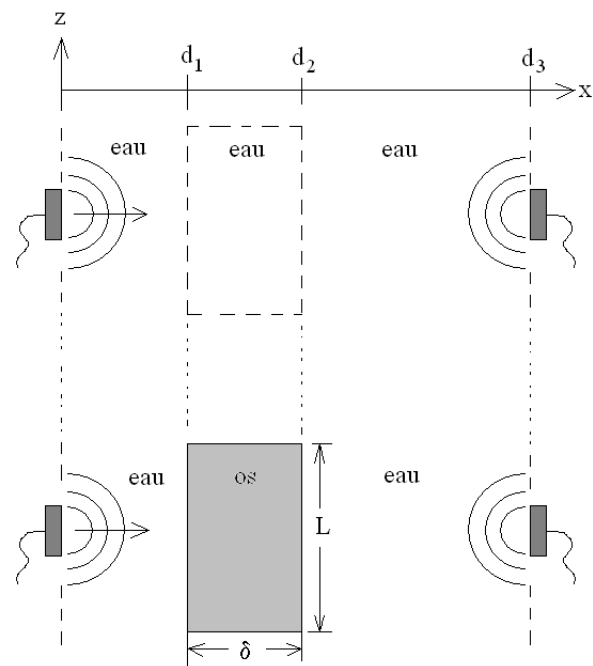


FIG. 3.4 – Montage de l'expérience de Fella et al. [133]. Le rectangle de gauche est le transducteur d'émission, celui de droite le transducteur de réception. Haut : première expérience sans os. Bas : deuxième expérience avec une tranche d'os (en forme de plaque, représentée par le rectangle du milieu) d'os de largeur  $L$  et d'épaisseur  $\delta$ .

Le *problème inverse* est de reconstruire le spectre de vitesses de phase  $\{c^1(\omega) ; \omega \geq 0\}$  et le spectre d'atténuation  $\{\alpha^1(\omega) ; \omega \geq 0\}$  qui constituent des descripteurs du matériau contenu dans le spécimen.

Pour résoudre ce problème inverse, nous nous servons bien entendu des données  $P_1(\omega)$ ,  $P_2(\omega)$ , et d'un *estimateur* constituant un modèle du phénomène qui se produit dans l'expérience. Nous nous référons à ce qui a déjà été écrit dans la sect. 3.5.1 pour obtenir l'estimateur

$$P_1(\omega) = A_1(\omega)e^{ik^0(\omega)d_3} , \quad (3.7.1)$$

(avec  $k^0 = \frac{\omega}{c^0(\omega)} + i\alpha^0(\omega)$  le nombre d'onde dans l'eau) lorsque le spécimen est absent. De même, l'estimateur pour la deuxième expérience (lorsque le spécimen est en place) s'exprime par

$$P_2(\omega) = A_2(\omega)e^{ik^0((d_1+d_3-d_2)+k^1(d_2-d_1))} , \quad (3.7.2)$$

(avec  $k^1 = \frac{\omega}{c^1(\omega)} + i\alpha^1(\omega)$  le nombre d'onde complexe dans le spécimen). On remarque, dans ces estimateurs, l'existence des variables externes  $k^0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  que nous supposons connues a priori (notons que  $\delta = d_2 - d_1$  est l'épaisseur de la plaque-spécimen). Les fonctions  $\{A_1(\omega) ; \omega \geq 0\}$  et  $\{A_2(\omega) ; \omega \geq 0\}$  constituent aussi des ensembles de variables réelles externes et nous les considérons comme étant connues (en réalité, cette affirmation est très discutable).

Une fois de plus, nous avons la chance de pouvoir inverser nos équations de base pour pouvoir reconstruire nos descripteurs  $\{c^1(\omega) ; \omega \geq 0\}$  et  $\{\alpha^1(\omega) ; \omega \geq 0\}$  du matériau du spécimen, puisque l'on trouve sans difficulté

$$c^1(\omega) = \frac{c^0(\omega)\delta}{\delta - \frac{\varphi c^0(\omega)}{\omega}} , \quad (3.7.3)$$

$$\alpha^1(\omega) = \frac{1}{\delta} \ln \left( \frac{P(\omega)}{A(\omega)} \right) , \quad (3.7.4)$$

où

$$\varphi := \text{Arctan} \left( \frac{\Im[P_1(\omega)/P_2(\omega)]}{\Re[P_1(\omega)/P_2(\omega)]} \right) , \quad P(\omega) := \left\| \frac{P_1(\omega)}{P_2(\omega)} \right\| , \quad A(\omega) := \frac{A_1(\omega)}{A_2(\omega)} . \quad (3.7.5)$$

La fonction complexe

$$T(\omega) := P(\omega)e^{i\varphi} , \quad (3.7.6)$$

est appelée *fonction de transfert*. Donc, le spectre de la vitesse de phase  $c^1(\omega)$  s'obtient de la phase, et l'atténuation de l'amplitude, de la fonction de transfert.

*Remarque* : La détermination de la phase de la fonction de transfert est un problème assez épineux du fait que la fonction Arctan donne une infinité de solutions. Il faut alors procéder à ce qui s'appelle le "déroulement de phase", procédé qui se fait automatiquement (quoique avec surveillance) par un programme MATLAB.

*Remarque* : Les hypothèses que nous avons faites sur  $A_1(\omega)$  et  $A_2(\omega)$  ne sont pas nécessairement réalistes, étant donnée que largeur  $L$  finie du spécimen engendre de la diffraction (dans la deuxième expérience). De plus, l'onde incidente n'est pas réellement plane en arrivant sur le spécimen (ni sur le récepteur) du fait, de la diffraction au niveau des transducteurs (qui eux, aussi, ont une ouverture finie). Ces questions sont abordées dans [198] et [117] et ne nous occuperont plus ici, sauf pour nous rappeler que cette expérience, et la méthode d'inversion associée, ne sont pas aussi simples qu'elles paraissent.

### 3.8 Acquisition et traitement des données par la méthode spectrale avec deux spécimens

L'expérience (e.g., [192], [218]) est la même que dans la sect. 3.7, mais au lieu d'acquérir des signaux entiers sans, puis avec, le spécimen, ici on acquière des signaux avec deux spécimens d'épaisseurs différentes, l'hypothèse de base étant, bien entendu, que le matériau dans les deux spécimens sont identiques. La partie traitement consiste à calculer les spectres de ces signaux afin d'en extraire la vitesse de phase et l'atténuation dans un des spécimens [324].

On se réfère cette fois-ci à la fig. 3.5. L'estimateur pour la première expérience s'exprime par

$$P_1(\omega) = A_1(\omega)e^{i[k^0(d_1+d_4-d_2)+k^1(d_2-d_1)]} , \quad (3.8.1)$$



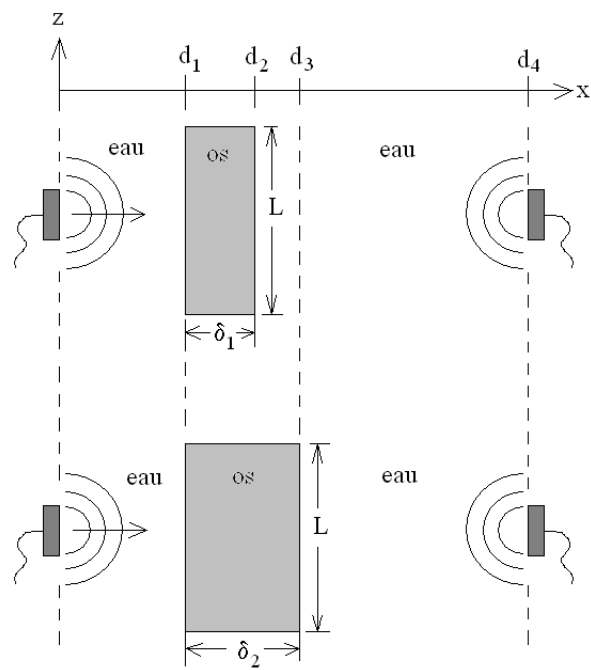


FIG. 3.5 – Montage de l'expérience d'Hosokawa et Otani [192]. Le rectangle gauche est le transducteur d'émission, celui de droite le transducteur de réception. Haut : première expérience avec une tranche d'os (en forme de plaque, représentée par le rectangle du milieu) d'os de largeur  $L$  et d'épaisseur  $\delta_1$ . Bas : deuxième expérience avec une autre tranche d'os (en forme de plaque, représentée par le rectangle du milieu) d'os de largeur  $L$  et d'épaisseur  $\delta_2$ .

et l'estimateur pour la deuxième expérience s'exprime par

$$P_2(\omega) = A_2(\omega)e^{i[k^0(d_1+d_4-d_3)+k^1(d_3-d_1)]} . \quad (3.8.2)$$

On remarque, dans ces estimateurs, l'existence des variables externes  $k^0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  que nous supposons connues a priori (notons que  $\delta_1 = d_2 - d_1$  et  $\delta_2 = d_3 - d_1$  sont les épaisseurs des deux plaques-spécimens). Les fonctions  $\{A_1(\omega) ; \omega \geq 0\}$  et  $\{A_2(\omega) ; \omega \geq 0\}$  constituent aussi des ensembles de variables réelles externes et nous les considérons comme étant connues (en réalité, cette affirmation est très discutable).

Comme avant, on trouve sans difficulté que la vitesse de phase et l'atténuation sont données par (3.7.3) et (3.7.4) respectivement dans laquelle  $\delta$  est simplement  $\delta_2$ .

*Remarque* : La raison de choisir cette méthode de caractérisation plutôt que la précédente est qu'on pense ainsi réduire la différence entre  $A_1$  et  $A_2$  (notons que les deux plaques ont la même largeur, et ne diffèrent que par leur épaisseur). Ceci n'est vrai que si les deux plaques ont des épaisseurs voisines car deux plaques d'épaisseurs voisines et de mêmes dimensions latérales diffractent de même manière; encore faut-il s'assurer que le matériau dans les plaques, et leur états de surface, soient rigoureusement identiques, ce qui est rarement le cas avec des matériaux comme l'os spongieux.

Pour une analyse plus fine des problèmes de diffraction dans ce type d'expérience, on peut se référer à la thèse de Chaix [72] (pp. 76-90).

### 3.9 Que peut-on savoir de plus sur le matériau que la vitesse de phase et l'atténuation

Jusqu'ici nous n'avons fait que deux hypothèses sur le matériau de la plaque-spécimen : i) le matériau se comporte comme un milieu (linéaire) homogène, et ii) il ne donne lieu qu'à une seule onde P en son sein.

On peut être plus spécifique : i) le matériau se comporte comme un *fluide* (linéaire) homogène, et ii) il ne donne lieu qu'à une seule onde P en son sein. En ce cas, en appliquant le principe d'Archimède on peut trouver la densité  $\rho^1$  du matériau. Il reste la compressibilité

$\kappa^1$ , que l'on peut déduire en inversant une formule du type  $c^1 = (\rho^1 \kappa^1)^{-1/2}$ . De même, on peut trouver les grandeurs (telle que le facteur de qualité  $Q^1$ ) viscoacoustiques en inversant la formule qui les relie à  $\alpha^1$ .

On peut supposer au contraire : i) que le matériau se comporte comme un *solide* (linéaire) homogène, et ii) il ne donne lieu qu'à une seule onde P en son sein. Comme avant, on trouve  $\rho^1$  par le principe d'Archimède et on applique des formules appropriées pour trouver  $\lambda^1 + 2\mu^1$ . Ce facteur peut être une grandeur mécanique (en dehors de la densité) suffisante pour caractériser le matériau. On opère de la même manière qu'avant pour trouver le(les) facteur(s) de qualité dans un matériau viscoélastique [324], [224].

Enfin, si l'on faisait le choix de qualifier le matériau de fluide ou solide équivalent au sens de UA-WT, on pourrait, avec des hypothèses raisonnables sur la nature des diffuseurs (i.e., cellules), déterminer leur taille caractéristique ainsi que leur fraction volumique en inversant les formules UA-WT pour  $v$  et  $\alpha$  [390]. Cette piste en particulier, mériterait d'être explorée plus en profondeur car elle donne la possibilité de trouver des paramètres de la microstructure de l'os spongieux.

### 3.10 Faut-il qualifier le matériau dans la plaque de fluide, solide ou autre ?

Il est évident que s'il existe un consensus sur le type et les conditions d'expérience que l'on doit mener pour acquérir les données jugées nécessaires pour identifier un matériau, alors une grandeur ou fonction telle que la fonction de transfert peut suffire pour cette identification. Ceci est particulièrement vraie si l'on s'intéresse uniquement à l'évolution d'un même matériau au cours du temps, ou au cours de sollicitations répétées, ou au cours d'un traitement thermique, etc., en quel cas ce qui importe est une comparaison entre les états successifs de ce matériau, ou entre l'état présent et un état étalon (ou de référence) du même matériau.

Il semble que ceci puisse correspondre, dans certaines situations, à ce que demandent les medecins pour distinguer un os spongieux malade d'un os spongieux sain [235], [236], [142].

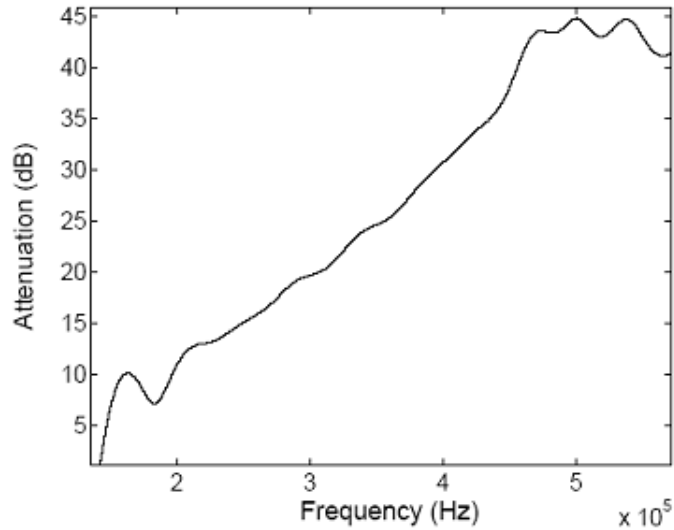


FIG. 3.6 – Atténuation  $20 \log T(\omega)$  en fonction de la fréquence  $\omega$  telle qu'elle ressort d'une expérience ultrasonore sur une tranche d'os bovin [236]. Dans la méthode BUA, on approche cette courbe par une droite entre  $\sim 0,2 \text{ MHz}$  et  $\sim 0,45 \text{ MHz}$  et la pente de cette droite est l'indice BUA. Cette pente semble se réduire lorsque l'os devient plus poreux.

On peut même aller plus loin dans cette démarche : remplacer la fonction de transfert par *un seul paramètre caractéristique* de cette fonction ; par exemple, si l'on constate que la fonction  $20 \log T(\omega)$  est linéaire dans une certaine gamme de fréquences (voir fig. 3.6), alors on peut adopter la pente de cette droite comme le paramètre caractéristique du matériau. *Ceci est le principe de la méthode BUA (en anglais : Broadband ultrasonic attenuation)* [235], [236], [117] (notons au passage, que certains auteurs (e.g., [355]) préfèrent approcher  $20 \log T(\omega)$  par une parabole, ce qui fait qu'au moins deux paramètres caractérisent cette fonction). La méthode BUA et ses avatars font l'objet d'une grande attention depuis vingt ans dans la communauté de ceux qui s'intéressent à l'ostéoporose, de par ses promesses de fournir un nouveau moyen (que l'on espère fiable) de diagnostic de l'ostéoporose.

L'idée derrière la méthode BUA, qui semble provenir de constations empiriques, est que lorsque l'os diminue de densité (i.e., devient plus poreux), la pente de la droite de la fonction  $20 \log T(\omega)$  diminue par rapport à une pente de référence (relative à l'os qualifié de

sain). A notre connaissance, personne n'a jusqu'ici réussi à donner les raisons physiques qui expliquent cette constatation.

Nous reviendrons sur cette question un peu plus loin.

## Chapitre 4

# Inversions des données ultrasonores réelles de fantômes d'os au moyen de modèles simples

On décrit des expériences employant des ultrasons pour générer des données, qui sont comparées aux prédictions d'un estimateur incorporant un modèle simple (canonique) d'interaction onde/objet, afin de reconstruire les dimensions et les constantes matérielles de cylindres pleins, et de tubes, fluides et solides.

### 4.1 Introduction

Nous traitons ici le problème inverse de la reconstruction des paramètres mécaniques d'un fantôme d'os à partir du champ que celui-ci diffracte en réponse à une impulsion ultrasonore portée par une onde quasi sphérique (rayonnée à partir d'une source quasi ponctuelle).

Les fantômes sont des cylindres fluides ou solides, pleins ou creux, et leur forme circulaire est choisie de façon à pouvoir inverser les données expérimentales de manière exacte et quasi explicite. *Donc, en principe, la qualité des reconstructions dépend ici uniquement de la nature, du nombre, et de la précision des mesures ainsi que du mode d'inversion.* Précision importante : les mesures sont faites en laboratoire, et non par simulation sur ordinateur.

Les travaux sur les objets fluides ont été réalisés en partenariat avec Kamal Belkebir de l'Institut Fresnel, UMR-CNRS 6133, Marseille.



FIG. 4.1 – Photo de l'expérience pour l'acquisition de données de champs diffractés par un fantôme en nylon d'os long immergé dans l'eau.

## 4.2 Méthode expérimentale

Les mesures ont été effectuées dans une des cuves des locaux de l'équipe d'Acoustique Sous-Marine du LMA. Le système des mesures du champ est composé essentiellement d'un générateur à impulsions haute tension (pulseur), d'un transducteur émetteur, d'un transducteur récepteur, d'un système de visualisation ou d'enregistrement (oscilloscope - chaîne d'acquisition), d'un système rotatif motorisée (Microcontrôle) et de la (grande) cuve.

Les photos des montages pour l'acquisition du champ diffracté dans l'eau par les fantômes d'os long, sont affichées dans les figs. 4.1 et 4.2.

La cible (cylindre plein ou tube) et les deux transducteurs sont immergés dans la cuve dont les dimensions sont grandes par comparaison à la longueur d'onde moyenne du signal émis dans l'eau. Des expériences sont effectuées avec deux capteurs ayant une fréquence

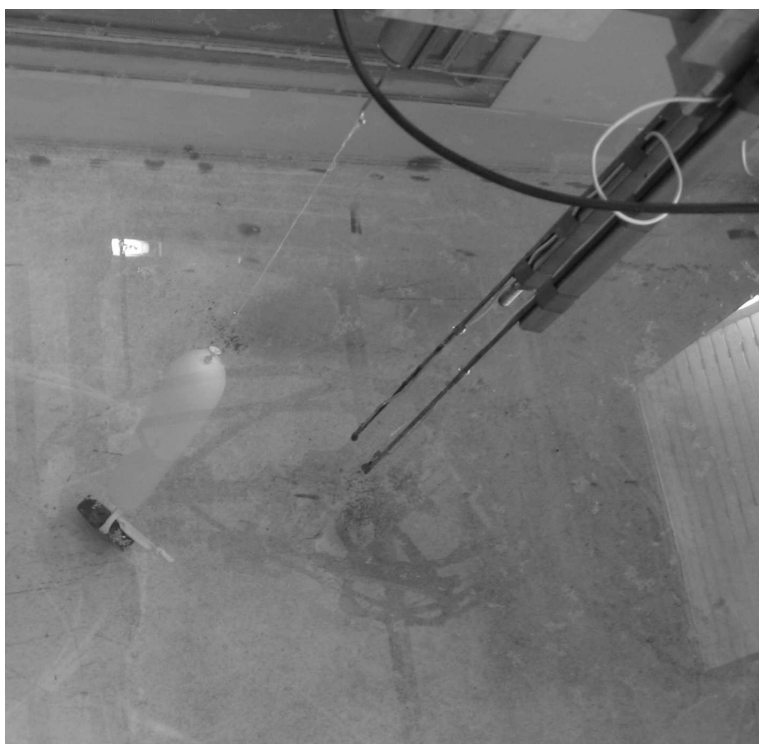


FIG. 4.2 – Photo de l'expérience pour l'acquisition de données de champs diffractés par un fantôme en eau savonnée (contenu dans un préservatif) d'os long immergé dans l'eau.



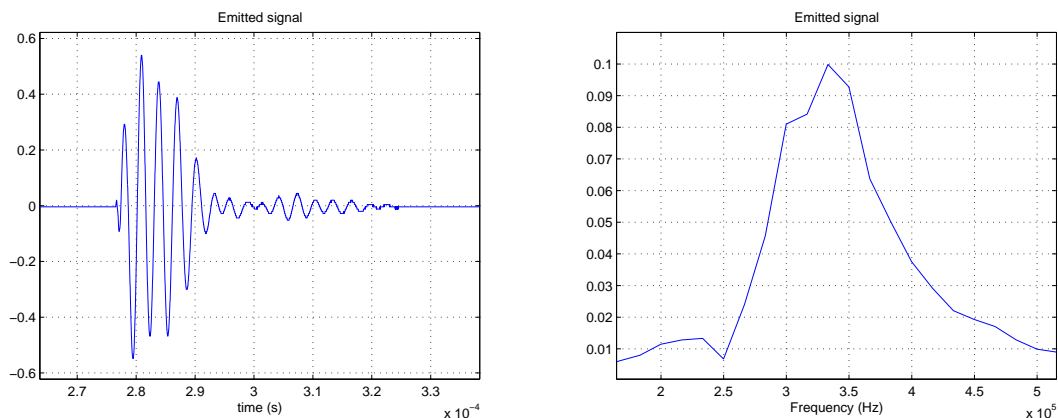


FIG. 4.3 – (a) Le signal temporel émis. (b) Le spectre du signal émis.

centrale de 320 kilohertz. Le pulseur/récepteur Sofranel 5058PR fournit des impulsions de 200V. Les signaux sont amplifiés jusqu'à 40dB avec un pre-amplificateur à faible bruit NF SA-200F3. Les acquisitions se font sur un oscilloscope Tektronix TDS3024B. Pour augmenter le rapport signal/bruit, une moyenne temporelle de 256 acquisitions est effectuée par l'oscilloscope.

#### 4.2.1 Les transducteurs (sources)

Le rendement des transducteurs par couplage aérien ou liquide a été considérablement amélioré ces dernières années. L'amélioration de la dynamique est due à la technologie du transducteur, mais aussi à l'électronique associée. Mais malgré ces progrès, il n'est toujours pas facile de savoir quel type d'onde est générée par ces sources. Ceci est d'importance pour la modélisation de l'expérience dans le cadre de l'inversion.

Il nous a semblé que la réponse à cette question était facilitée par le choix de petits transducteurs, qui, normalement, devraient émettre une onde quasi sphérique du fait que leur partie active se trouve à l'extrémité de son fil d'alimentation (le tout attaché à une tige porteuse).

L'allure du signal temporel émis, et de son spectre, sont tracés dans la fig. (4.3).

Pour acquérir le diagramme de rayonnement, l'émetteur  $A$  est immobile et le récepteur

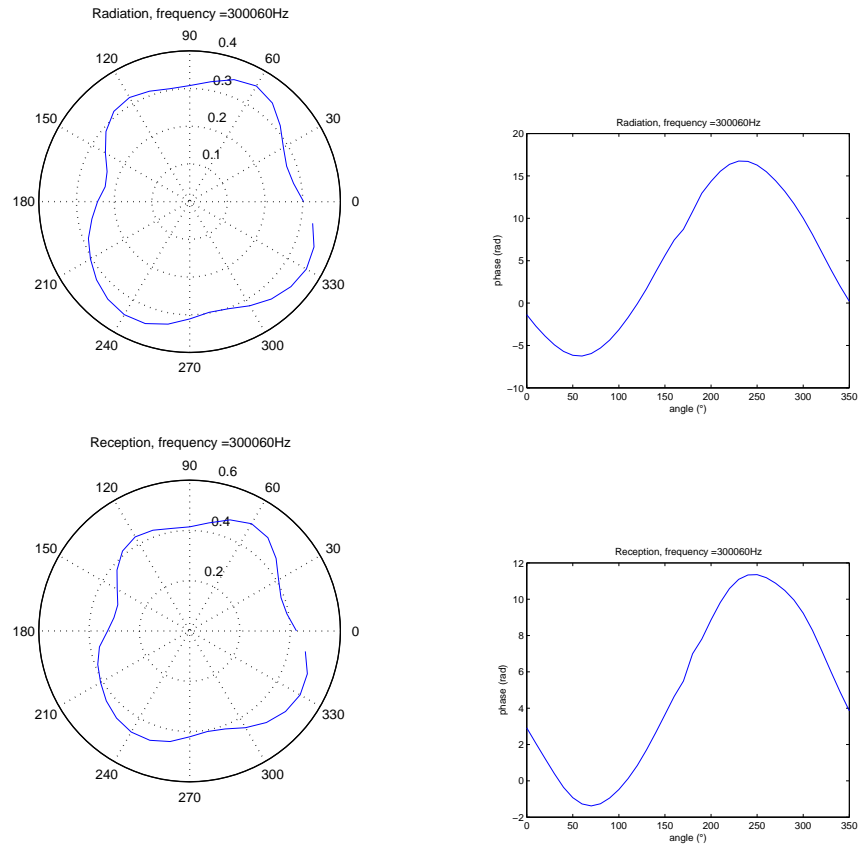


FIG. 4.4 – (a) Diagramme de rayonnement et (b) phase déroulée. (c) diagramme de réception et (d) phase déroulée à  $300060\text{Hz}$

$B$  tourne autour de  $A$ . L'émetteur est placé au centre du cercle décrit par le récepteur (c.-à-d., la distance entre les transducteurs demeure constante) et le signal émis est enregistré à différents angles ( fig. (4.4a)).

Pour établir le diagramme de réception, nous procédons de la même façon qu'avant, mais le capteur  $A$  devient le récepteur et  $B$ , l'émetteur. Le nouveau récepteur  $A$  est immobile tandis que le nouveau émetteur  $B$  tourne autour de celui-ci. Ainsi, nous pouvons caractériser le même capteur  $A$  en rayonnement (émission) et en réception (fig. (4.4b)). Ces courbes montrent, qu'en réalité, ces transducteurs ne se comportent pas tout à fait comme des sources ponctuelles isotropes.

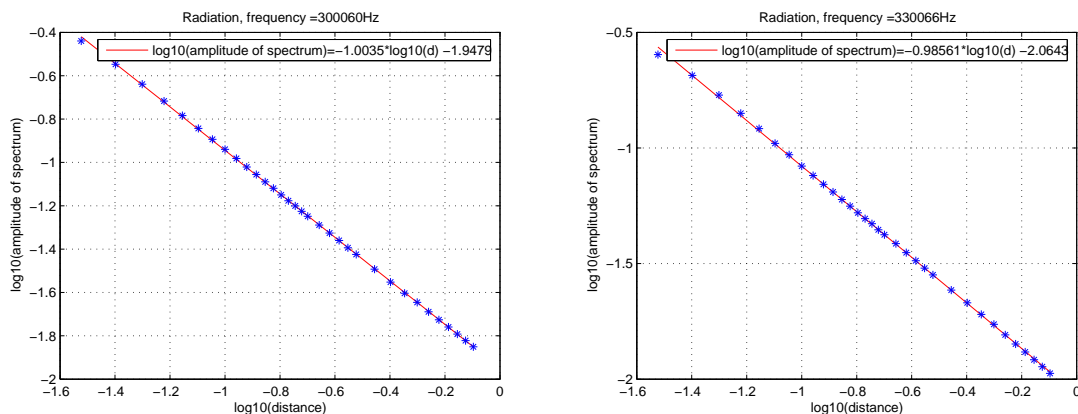


FIG. 4.5 – Diminution du champ avec la distance  $d$  (loi en  $1/d$ ) pour deux fréquences différentes.

#### 4.2.2 Diminution du champ avec la distance $d$ de la source

Dans une seconde expérience, le capteur  $A$  est l'émetteur et nous varions la distance  $d$  entre le récepteur et l'émetteur par pas successifs. Pour un champ sphérique l'amplitude du champ décroît avec la distance en  $1/d$ , qui en logarithmique donne une pente égale à -1 (fig. 4.5 et fig. 4.5b pour deux fréquences d'opération).

### 4.3 Modèles de réponse spatio- fréquentielle des cylindres fluide et solide pleins

La configuration du problème de diffraction est schématisée dans la fig. 4.6 où il faut remplacer le tube par un cylindre plein. On suppose que l'axe du cylindre diffractant est parallèle à l'axe  $x_3$ . La cible est excitée par une onde acoustique sphérique, qui arrive sur la cible presque comme une onde plane, lorsque la distance source-cible est suffisamment grande (en l'occurrence,  $r_e = 15,8$  cm), ayant un angle d'incidence  $\theta^i = 180^\circ$  (voir la fig. (4.6)).

Le champ diffracté est mesuré sur un cercle de rayon  $r = 26$  cm dans le plan  $x_1Ox_2$ . Le pas angulaire est de  $5^\circ$  pour  $20^\circ < \theta < 340^\circ$  et de  $1^\circ$  pour  $0^\circ < \theta < 20^\circ$  et  $340^\circ < \theta < 360^\circ$  (le pas est affiné pour capter les nombreuses oscillations dans ces deux zones).

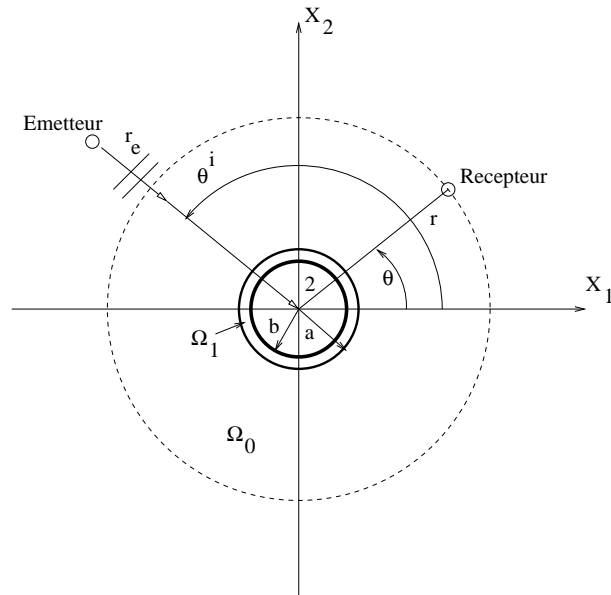


FIG. 4.6 – Configuration du problème de diffraction dans le plan  $x_1Ox_2$  pour le tube circulaire.

Le signal incident  $p^i(\theta, t)$  est mesuré en l'absence de l'objet diffractant. Ensuite, le signal total  $p^0(\theta, t)$  est mesuré en présence du corps diffractant. Les signaux temporels sont moyennés (256 moyens) pour augmenter le rapport signal/bruit. Pour chaque angle  $\theta$  le champ diffracté  $p^{0d}(\theta, t)$  est donné par

$$p^{0d}(\theta, t) = p^0(\theta, t) - p^i(\theta, t) . \quad (4.3.1)$$

Les théories qui modélisent cette expérience, et qui serviront par la suite d'estimateurs, ont été données dans le chap. 2, en la sect. 2.8 pour le cylindre solide, et dans la sect. 2.4 pour le cylindre fluide.

#### 4.4 Modèles de réponse spatio-fréquentielle d'un tube dont la partie corticale est solide

Le schéma de l'expérience qu'il s'agit de modéliser est donné dans la fig. 4.6. L'analyse conduisant à ce modèle (i.e., l'estimateur employé plus loin pour inverser les données) suit

celles de [147, 116], et constitue une généralisation presque triviale de celle exposée dans le chap. 2, sect. 2.8.

## 4.5 Diagrammes de diffraction expérimentaux

Les diagrammes de diffraction donnent souvent une indication utile sur la qualité des données (symétrie du champ, phase ...) . Dans la fig. 4.7 sont tracés les diagrammes de diffraction pour le cylindre en nylon. Les champs incident et total sont mesurés dans le domaine spatio-temporelle. Leurs spectres sont obtenus par transformée de Fourier (effectuée numériquement par FFT). Le spectre du champ diffracté est obtenu en retranchant le spectre du champ incident de celui du champ total.

Les résultats concernant les diagrammes indiquent une qualité de mesures satisfaisante.

## 4.6 Inversion des données expérimentales

Il est très difficile de reconstruire simultanément les quatre paramètres que sont le module de Young  $E^1$ , la densité  $\rho^1$ , les diamètres  $a$  et  $b$ . Quand on emploie un algorithme d'optimisation [322] (i.e., minimisation de la fonction-coût traduisant l'écart entre les données et le modèle portant sur le champ diffracté), on doit toujours l'initialiser avec des valeurs attendues ou raisonnables des paramètres qu'il s'agit d'identifier. Si l'on ne possède pas une bonne estimation a priori des paramètres à identifier, on risque de trouver une solution fautive lorsque la fonction-coût possède plusieurs minima locaux du fait que l'algorithme a tendance à chercher le minimum correspondant aux valeurs des paramètres les plus proches des valeurs initiales. Avant de résoudre un problème inverse avec un algorithme d'optimisation, il est utile d'examiner le comportement de la fonction coût vis-à-vis des paramètres à identifier.

La fonction-coût est calculée en balayant l'intervalle où l'on s'attend à trouver la solution relative à un paramètre recherché, et ceci est fait pour tous les paramètres les uns après les autres. Avec de la chance, on trouve une fonction-coût qui ne possède qu'un seul minimum pour tous les paramètres. Cette méthode de balayage implique beaucoup de calculs et les

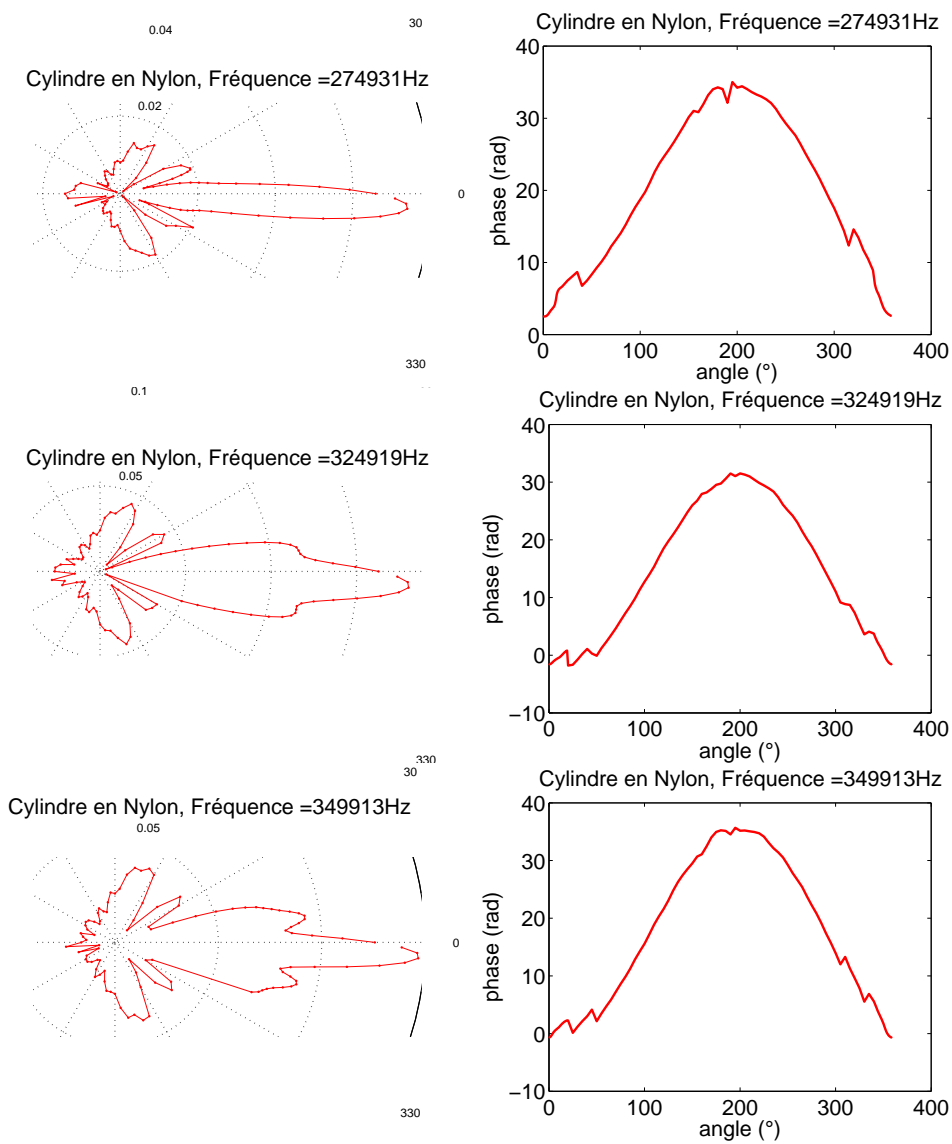


FIG. 4.7 – Champs diffractés expérimentaux pour le cylindre en nylon plein.

minima globaux ne donnent pas nécessairement les bons paramètres du fait d'une discordance entre la théorie et l'expérience (dans le cas présent, ceci pourrait provenir du fait que la théorie, bien qu'exacte, ne rend pas compte de certaines déficiences de l'expérience).

En étudiant les sensibilités des mesures (i.e., les signaux) vis-à-vis des paramètres, nous avons remarqué d'une part que les propriétés matérielles  $E^1$  et  $\rho^1$  influencent peu le premier signal diffracté dans la zone de diffraction arrière (backscattering ( $140^\circ < \theta < 180^\circ$ )), et d'autre part, que les propriétés géométriques  $a$  et  $b$  influencent de manière importante la première arrivée du signal. Ainsi, il est possible de séparer le problème inverse en deux étapes : dans un premier temps, nous récupérons  $a$  et  $b$  en utilisant les premières arrivées du signal pour  $140^\circ < \theta < 220^\circ$ . Dans le deuxième temps, nous récupérons  $E^1$  et  $\rho^1$  en utilisant le signal diffracté à d'autres angles ( $\theta = 50^\circ, 90^\circ$  en fonction des objets sondés). Ensuite, nous vérifions que nous trouvons les mêmes valeurs de  $a$  et  $b$  en utilisant les nouvelles valeurs de  $E^1$  et  $\rho^1$  (voir les figs. 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12).

Cette façon de faire pour le choix des angles, et de la partie du signal à utiliser pour trouver tel ou tel paramètre, est empirique et n'est pas systématiquement applicable pour les inversions de tous les objets.

Voici comment nous procédons pour les autres fantômes. En ce qui concerne le tube en acier, si nous agissons comme lors de la première étape relative au tube en aluminium, nous n'arrivons pas à trouver  $a$  et  $b$  simultanément. A ces angles, nous constatons que la fonction-coût est indépendante du rayon intérieur  $b$ . Pour  $140^\circ < \theta < 180^\circ$ , nous trouvons  $a = 6.7mm$  et employons la première partie du signal diffracté aux angles  $\theta = 40^\circ, 50^\circ, 310^\circ, 320^\circ$  pour trouver  $b = 4.1mm$ .

Afin de récupérer les propriétés mécaniques, nous utilisons la deuxième partie du signal diffracté à  $\theta = 40^\circ, 50^\circ$ . La fonction-coût tracée dans la fig. (4.13) montre que nous ne pouvons pas reconstruire la densité  $\rho^1$  et le module de Young  $E^1$  en même temps (il faut trouver  $\rho^1$  par d'autres moyens). De fait, il n'est possible d'identifier que le rapport  $\frac{E^1}{\rho^1}$  qui correspond à la célérité de l'onde longitudinale dans le solide. Nous trouvons que ce rapport vaut  $\frac{E^1}{\rho^1} = 2.54 \times 10^7 Pa/(kg/m^3)$ .

Le cylindre plein en nylon est modélisé en le considérant comme étant un cylindre plein fluide. Le module de Young du nylon a été récupéré en supposant que la célérité dans le

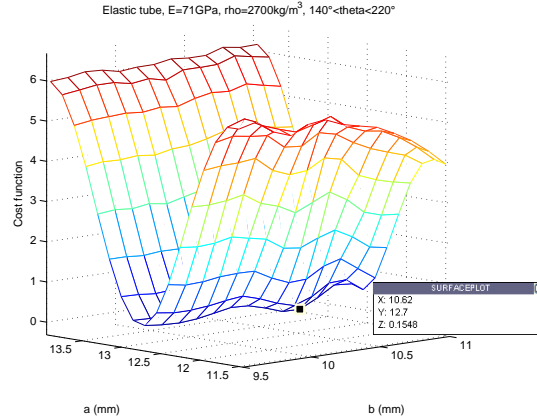


FIG. 4.8 – La fonction-coût pour le tube en aluminium (valeurs initiales :  $E^1 = 71GPa$ ,  $\rho^1 = 2700kg/m^3$ ). Les valeurs des paramètres géométriques lus à l'endroit du minimum de la fonction-coût sont :  $a = 12.7mm$ ,  $b = 10.6mm$  pour des données du champ diffracté pris entre  $140^\circ \leq \theta \leq 220^\circ$ . Le pas est de  $10^\circ$

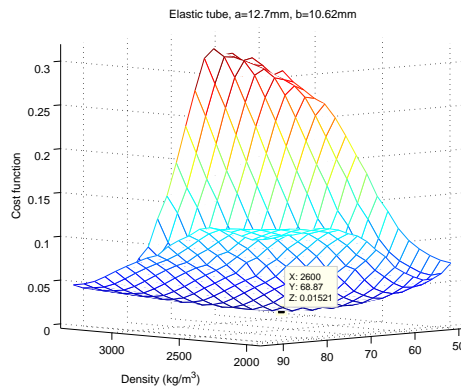


FIG. 4.9 – La fonction-coût pour le tube en aluminium (avec les valeurs géométriques reconstruites dans l'étape précédente, savoir  $a = 12.7mm$ ,  $b = 10.62mm$ ). Les valeurs correspondant au minimum de la fonction-coût sont :  $E = 68.9GPa$  et  $\rho = 2690kg/m^3$ , cette fonction ayant été obtenue en employant les champs mesurés aux angles  $\theta = 90^\circ$  et  $270^\circ$



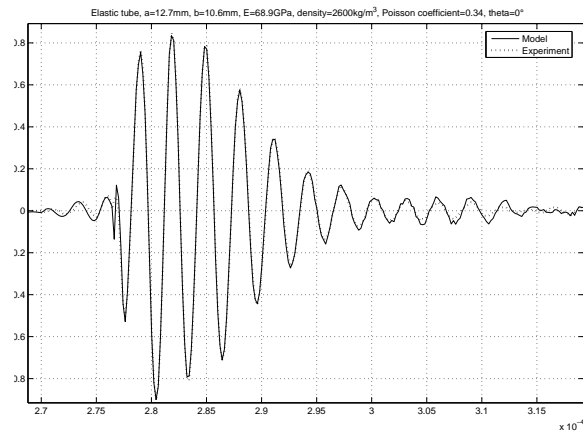


FIG. 4.10 – Comparaison entre le signal diffracté mesuré (courbe pointillée) et le signal simulé (courbe continue, obtenue avec les paramètres reconstruits) pour un tube en aluminium à  $\theta = 0^\circ$ .

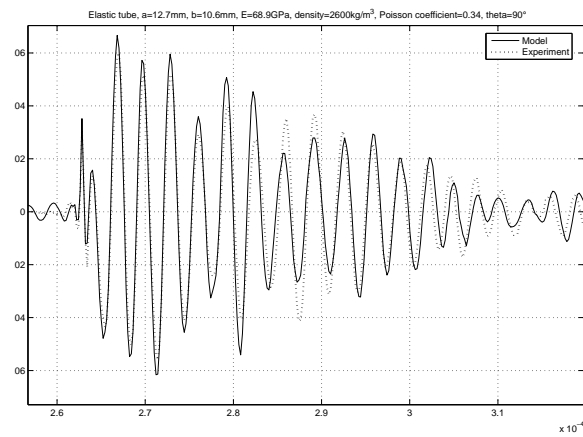


FIG. 4.11 – Comparaison entre le signal diffracté mesuré (courbe pointillé) et simulé (courbe continue, obtenue avec les paramètres reconstruits) pour un tube en aluminium à  $\theta = 90^\circ$ .

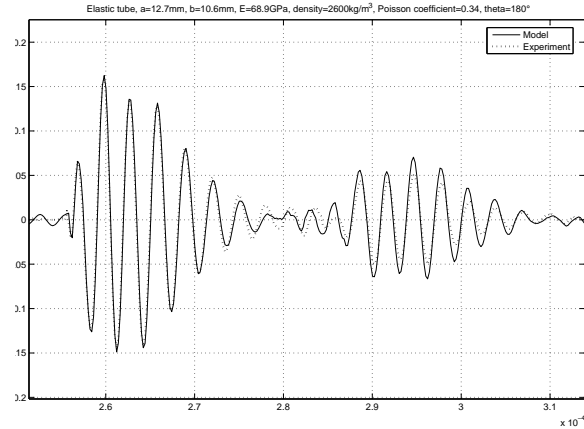


FIG. 4.12 – Comparaison entre le champ temporel diffracté mesuré (courbe pointillé) et simulé (courbe continue, obtenue avec les paramètres reconstruits) pour le tube en aluminium à  $\theta = 180^\circ$

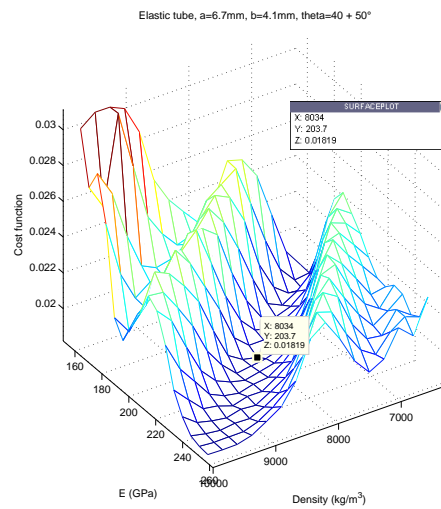


FIG. 4.13 – Fonction-coût pour le tube en acier (avec les paramètres géométriques reconstruits lors de la première étape :  $a = 6.7$  mm et  $b = 4.1$  mm ). Les minima se trouvent sur une droite correspondant à un rapport constant  $\frac{E^1}{\rho^1} = 2.54 * 10^7 Pa/(kg/m^3)$  obtenue par l'emploi de données à deux angles de diffraction  $\theta = 40^\circ$  et  $50^\circ$

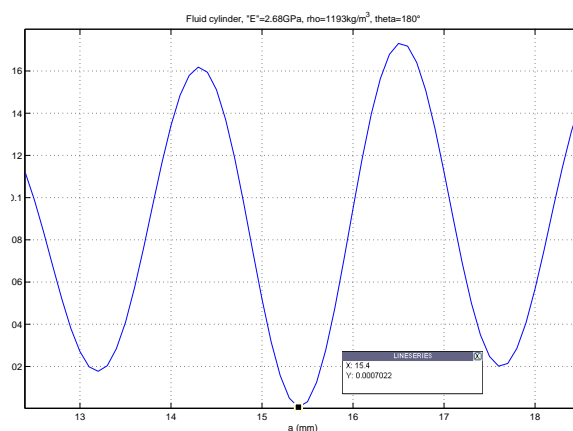


FIG. 4.14 – La fonction-coût pour le cylindre plein en nylon modelisé par un cylindre fluide (avec  $E^1 = 2.68$  GPa,  $\rho^1 = 1193$   $kg/m^3$  fixés au départ, le champ diffracté étant mesuré à  $\theta = 180^\circ$ ). Le minimum global s’affiche au rayon= 15.5 cm, le rayon réel étant 1.50 cm.

Objet	Diamètre externe $a$ (mm)			Diamètre intérieur $b$ (mm)		
	Mesuré	Reconstruit	Ecart	Mesuré	Reconstruit	Ecart
Tube aluminium	12.45	12.7	2.0%	10.45	10.6	1.4%
Tube acier	6.75	6.7	0.7%	4.35	4.1	5.7%
Cylindre laiton	6.5	6.4	1.5%	–	–	–
Cylindre nylon	15.5	15.4	0.6%	–	–	–

TAB. 4.1 – Comparaison entre les valeurs géométriques reconstruites et mesurées.

fluide  $c^1$  est égale à la célérité longitudinale de l’onde se propageant dans le cylindre  $c_L^1$ .

La première partie du signal diffracté en arrière (rétrodiffusion) est employée pour récupérer le rayon externe  $a$ . Nous trouvons  $a = 15.4mm$  (voir la fig. 4.14).

*Remarque* La différence entre deux minima de la fonction- coût, relatif au signal rétrodiffusé vis-à-vis du rayon intérieur  $a$ , est égale à la moitié de la longueur d’onde dans le milieu hôte.

Objet	Mass volumique $\rho$ ( $kg/m^3$ )			Young modulus $E$ (GPa)		
	Tabulées	Reconstruit	Ecart	Tabulées	Reconstruit	Ecart
Tube aluminium	2700	2600	3.7%	71	68.9	3.0%

TAB. 4.2 – Comparaison entre les valeurs des propriétés matérielles du tube en aluminium, reconstruites et tabulées dans la littérature.

Objet	$E/\rho$ ( $Pa/(kg/m^3)$ )		
	Mesuré	Reconstruit	Ecart
Tube acier	$2.69 \times 10^7$	$2.54 \times 10^7$	5.6%
Cylindre Laiton	$1.33 \times 10^7$	$1.21 \times 10^7$	9.0%
Cylindre nylon	$2.25 \times 10^6$	$2.25 \times 10^6$	0.03%

TAB. 4.3 – Comparaison entre les valeurs des propriétés matérielles reconstruites et tabulées

## 4.7 Conclusion

Cette étude montre qu'il est difficile de récupérer les quatre paramètres ( $E^1$ ,  $\rho^1$ ,  $a$ ,  $b$ ) simultanément, même avec des données qui semblent de bonne qualité.

Nous avons présenté une méthode pour reconstruire d'abord  $a$  et  $b$  (les rayons extérieur et intérieur respectivement du tube), ensuite  $E^1$  et  $\rho^1$ , mais elle n'est pas suffisamment fiable.

La solution de ces problèmes réside dans : i) une représentation plus réaliste de l'onde incidente, et ii) un meilleur choix de la fonction-coût, faisant appel aux données relatives à *la totalité du signal diffracté*, et ce pour plusieurs angles de diffraction. Aussi, il nous semble que les paramètres géométriques doivent être reconstruits avec des données issues d'un sondage haute fréquence et les paramètres matériels avec un sondage plutôt basse fréquence.

Nous verrons dans le chap. 9 qu'en suivant partiellement ces conseils, nous arrivons à reconstruire, dans de bonnes conditions, quatre paramètres de Biot d'un morceau d'os, et ce malgré le fait que le matériau soit poreux et le modèle qui décrit sa dynamique plus compliqué que dans le cas présent.



## Chapitre 5

# Méthode de guide d'ondes ultrasonores pour caractériser l'os cortical

On décrit brièvement une méthode d'emploi d'ondes guidées pour faire le diagnostic de l'ostéoporose à travers les indicateurs de santé que constituent l'épaisseur et les modules élastiques de l'os cortical.

### 5.1 Introduction

Les ondes de Lamb ont fait l'objet ces dernières années d'un grand intérêt [3, 40, 140, 245, 254, 273, 277, 316, 358] comme véhicule pour le diagnostic *in vivo* de l'ostéoporose et autres affections de l'os (essentiellement cortical) [310].

Bien que notre thèse n'ait guère portée sur cette thématique (voir le chap. 22), il nous a semblé utile et nécessaire d'expliquer brièvement en quoi elle consiste, d'autant plus qu'elle constitue une alternative à la méthode évoquée dans le chapitre précédent pour la caractérisation des aspects géométriques et matériels d'un objet (comme l'os long) ressemblant à un tuyau.

En fait, il s'agit d'une technique importée du domaine du contrôle non destructif, qui jusqu'alors visait essentiellement le contrôle de défauts (i.e., fissures) dans des objets (matériaux et structures) manufacturés (composites, tuyaux, cuves, ailes d'avion, etc.) [68, 110, 203, 314, 326].

## 5.2 Qu'est-ce qu'une onde de Lamb ?

Une onde de Lamb est, par définition, un mode vibratoire d'une plaque (horizontale pour fixer les idées) élastique située dans le vide (ou un fluide léger). Ce mode peut être représenté comme deux ondes élastiques stationnaires se propageant vers la droite ou la gauche dans la plaque, dont l'une a la polarisation P (onde compressive) et l'autre la polarisation SV (onde de cisaillement horizontale). Lorsque le milieu extérieur est un fluide (et non le vide), le mode de Lamb est un peu différent, prenant dans la plaque essentiellement la même forme d'ondes stationnaires, et à l'extérieur la forme d'une onde de volume de pression (P) dont l'amplitude décroît exponentiellement avec augmentation de la distance des deux faces de la plaque. En ce sens, le mode (ou l'onde) de Lamb est dit "guidé(e)" (i.e., reste collée aux faces) à l'extérieur de la plaque.

## 5.3 Comment exciter les ondes de Lamb ?

L'onde qui excite le mode doit avoir soit une polarisation P, soit une polarisation SV, soit une polarisation mixte. Lorsque le milieu extérieur à la plaque est le vide, l'onde qui excite le mode ne peut être rayonnée que par une source située à l'intérieur, ou sur une des deux faces, de la plaque (chargement volumique ou surfacique). Si la plaque est immergée dans un fluide, le mode peut être excitée par une onde ultrasonore (onde P) rayonnée par une source située dans ce fluide et cette source peut prendre la forme d'un transducteur ultrasonore classique (le milieu est l'eau ou un gel) ou un transducteur aérien (le milieu est l'air) [68].

L'analyse du processus d'excitation suit en gros celle pour les modes de plaque en polarisation SH (cisaillement horizontale) [165, 163].

## 5.4 Le rapport entre la plaque et le tuyau

Le concept d'ondes (ou modes) de Lamb se généralise à une plaque stratifiée, composée, par exemple, de deux sous-plaques solides séparées par le vide ou par un fluide.

On parle aussi d'ondes de Lamb en rapport avec un prolongement de cette géométrie : le tube à paroi solide rempli du vide ou d'un fluide, immergé dans le vide ou un fluide.

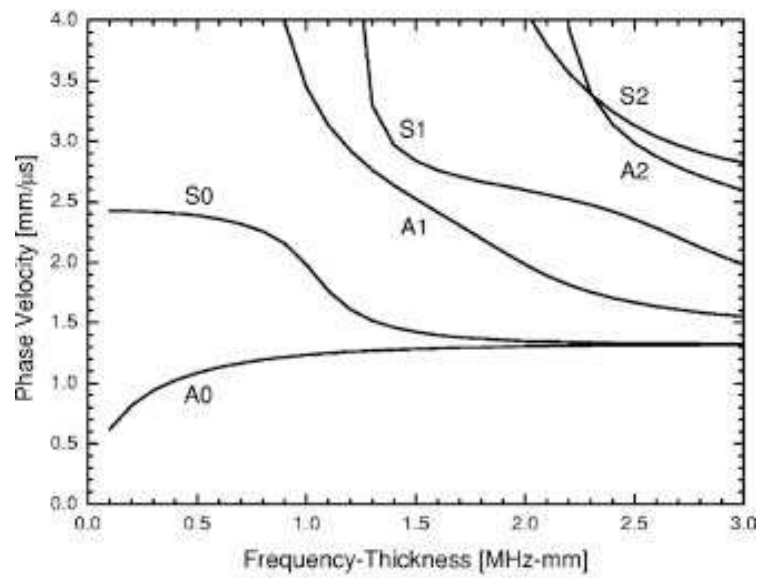
Evidemment, ce type de tube ressemble à un os long, d'où la connexion entre les os et les modes de Lamb.

## 5.5 Aspects spectraux des modes de Lamb

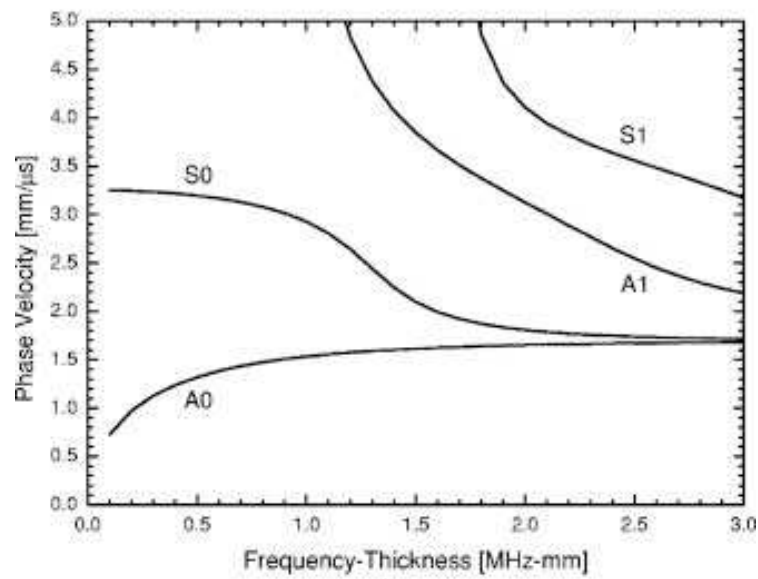
Revenons à la forme primaire des modes de Lamb (i.e., relative à une seule plaque solide homogène). On montre que deux ensembles *dénombrables* de modes de Lamb existent : les modes symétriques et les modes antisymétriques. Chaque mode se caractérise par deux vecteurs d'onde, l'une P et l'autre S, qui partagent la même composante horizontale. Celle-ci est fonction du nombre d'onde de Lamb et des angles que font les deux vecteurs d'onde P et S avec la normale aux faces horizontales de la plaque. Le nombre d'onde de Lamb est égal à la fréquence angulaire divisée par la vitesse de phase de ce mode de Lamb. Cette vitesse ne peut pas prendre n'importe quelle valeur, mais est déterminée par une relation de dispersion (voir la fig. 5.1) relativement compliquée (i.e., nonlinéaire). Cette relation montre que la vitesse de phase du mode dépend de l'épaisseur de la plaque, de la fréquence, et des modules élastiques ( $E$  de Young et  $\nu$  de Poisson) de la plaque (et aussi des caractéristiques du fluide ambiant lorsque celui-ci existe).

Donc, si l'on arrivait à mesurer la vitesse de phase ou de groupe d'un (ou de plusieurs) mode(s) de Lamb, et l'on disposait de la formule ou algorithme (de dispersion) reliant cette vitesse aux paramètres géométriques et matérielles, on pourrait reconstruire l'épaisseur de la plaque et/ou  $E$  et  $\nu$ .





(a)



(b)

FIG. 5.1 – La courbes de dispersion [245] -vitesse de phase en fonction du produit de fréquence×épaisseur (mégahertz millimètre) pour (a)(haut) une plaque libre de lucite et (b)(bas) une plaque corticale d'os libre.

## 5.6 Application à la caractérisation de la santé de l'os

Etant donné que l'ostéoporose se manifeste aussi par le rétrécissement de l'épaisseur des os longs, l'idée est venue d'utiliser les mesures des vitesses de groupe des ondes de Lamb pour diagnostiquer l'ostéoporose de la manière (spectrale) que nous venons d'évoquer. Cette maladie se manifeste aussi par un changement de  $E$  et/ou  $\nu$  via un changement de porosité, de sorte que les mesures des vitesses de groupe des ondes de Lamb pourraient aussi servir à diagnostiquer l'ostéoporose via les descripteurs  $E$  et/ou  $\nu$ .

La mesure des vitesses de groupe de ces ondes se fait avec un deuxième transducteur collé sur, ou au voisinage de, l'os à une certaine distance longitudinale du premier transducteur (ce qui ne pose pas de problèmes pour les os longs) et repose essentiellement sur une mesure du temps de vol (voir la fig. 5.2).

Pour finir, soulignons le fait que cette méthode est a priori idéale pour des examens in vivo [140]. Malheureusement, des problèmes surviennent qui sont discutés dans [276], de sorte que, comme pour la plupart des méthodes proposées pour le diagnostic de l'ostéoporose, beaucoup de recherches restent à faire avant que ces méthodes soient opérationnelles.

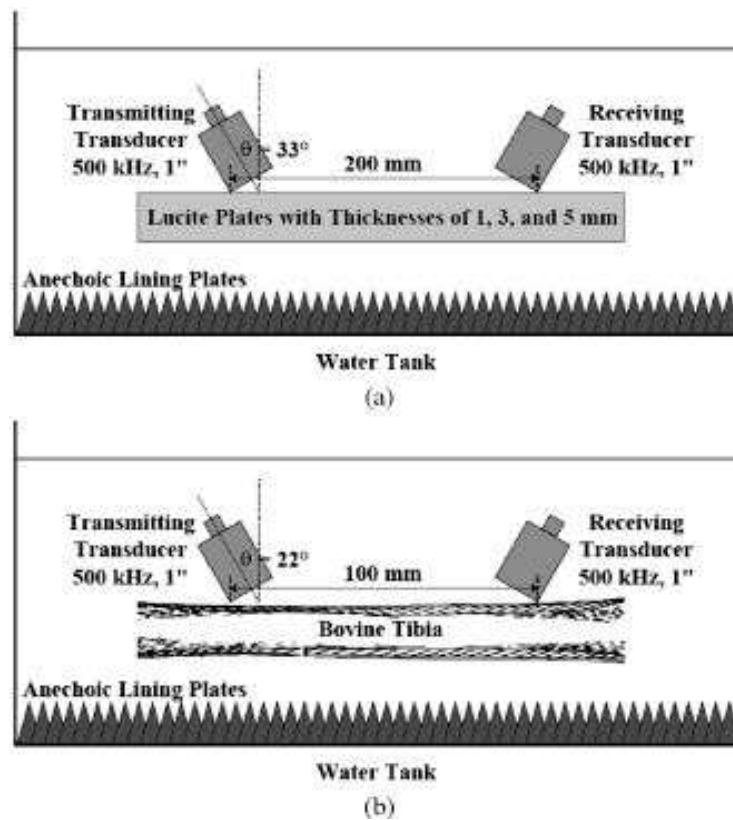


FIG. 5.2 – Les schémas de montage expérimentale de Lee et al [245] pour la caractérisation ultrasonore par ondes de Lamb (a)(haut) des plaques en lucite et (b)(bas) d'un tibia de bovin.

## Chapitre 6

# Le modèle de Biot et ses avatars

On décrit les ingrédients théoriques du modèle de Biot et de ses avatars.

### 6.1 Introduction

La théorie de Biot [31, 32, 34] de la mécanique des milieux poreux est un sujet fascinant et complexe. Cette théorie semble venir de nulle part et n'être donc que le fruit du génie de son concepteur. Cependant, elle est (avec ou sans ses avatars) encore aujourd'hui la théorie la plus apte à décrire la dynamique des milieux poreux, dont témoigne la multitude de publications qui s'y réfèrent (dont un certain nombre figure dans la bibliographie de cette thèse).

La présente contribution concerne essentiellement la présentation de la théorie de Biot (le bilan de quantité de mouvement, les lois de comportement, équations d'ondes) et les différentes formes qu'elle a prises au cours du temps.

La résolution de problèmes aux limites ne constitue pas l'objet de ce chapitre. Le lecteur intéressé par ce sujet peut consulter les articles dans la bibliographie et les chapitres suivants de cette thèse.

Bien entendu, l'accent est mis ici, en arrière plan, sur des applications concernant des milieux poreux comportant une composante fluide visqueuse (cas notamment de l'os trabéculaire).

## 6.2 Présupposées de la théorie de Biot des milieux poreux multiphasiques

### 6.2.1 Echelles

#### 6.2.2 Echelle microscopique

Questions essentielles : i) faut-il étudier le milieu poreux à une échelle du pore ou à une échelle plus grande (i.e., celle d'un sous-domaine supra-microscopique du spécimen) ? ii) comment rendre compte du caractère multiphasique du milieu si l'étude se situe à l'échelle supra-microscopique ?

Raisonnons désormais en termes d'un milieu constitué de deux phases, l'une solide et l'autre fluide, occupant des domaines géométriques distincts, ce qui veut dire entre autres que nous excluons la présence de fluide à l'intérieur des parties solides (un tel fluide ne pourrait pas circuler ailleurs qu'en ce domaine intérieur). Donc, à un instant  $t$ , un point se trouve dans l'une ou dans l'autre des deux phases : c'est l'échelle microscopique.

Nous associons le terme "porosité" au domaine occupé par le fluide et nous supposons que cet espace interstitiel est continu (i.e., connecté) de sorte que le fluide puisse y circuler librement.

L'autre partie du milieu, occupé par le solide, est appelée matrice.

La porosité est un terme qui désigne aussi le rapport du volume de la partie fluide au volume total d'un élément de volume représentatif (EVR). La porosité est représentée par le symbole  $\phi$ , sachant que c'est une grandeur sans dimensions.

L'hypothèse de deux milieux signifie qu'un seul fluide occupe toute la partie interstitielle, i.e., le milieu poreux est saturé.

#### 6.2.3 Echelle macroscopique

A l'échelle macroscopique, l'EVR est conçu (compte tenu des précédentes hypothèses) comme une superposition de deux particules matérielles occupant à l'instant  $t$  les mêmes points géométriques, mais avec des cinématiques différentes.

Le choix de l'EVR doit répondre à deux objectifs. Premièrement, comme son nom l'indique, il doit être représentatif du milieu poreux, i.e., être d'un ordre de grandeur spatial permettant une description pertinente des phénomènes essentiels qui s'y produisent. Deuxièmement, la dimension caractéristique  $R$  de l'EVR doit être plus petite que la dimension caractéristique  $S$  du spécimen, de façon à permettre une description de mécanique continue de l'ensemble des phénomènes physiques microscopiques qui se déroulent dans le milieu poreux. Si  $P$  est la dimension caractéristique des pores, alors il faut que

$$P \ll R \ll S . \quad (6.2.1)$$

A cette échelle, on parle de squelette, qui est la superposition de la partie solide (matrice) et de la partie fluide. Le squelette est donc un milieu continu, i.e., l'abstraction est faite de sa géométrie microscopique.

#### 6.2.4 Introduction à la théorie de Biot

La théorie de Biot constitue une approche macroscopique de la mécanique des milieux poreux, donnant lieu à des relations contrainte-déformation des parties solide et fluide, qui sont couplées pour tenir compte du frottement du fluide sur le solide au cours de son écoulement. Au départ, Biot suppose que l'écoulement du fluide est laminaire (loi de Poiseuille), ce qui semble raisonnable lorsque le milieu est sollicité aux basses fréquences. Aux plus hautes fréquences, Biot apporte un terme correctif qui intègre des effets de viscosité (supposée faible) du fluide et la forme des pores.

La théorie de Biot suppose que le comportement des deux phases est linéaire. Nous supposons aussi qu'ils sont isotropes.

Une grande confusion règne dans la littérature concernant la théorie de Biot (TB). Il existe une profusion de versions, chacune avec ses symboles propres et même ses choix de variables.

Nous allons exposer les équations de la TB en nous référant aux travaux (dits des "géophysiciens") [173, 408, 405, 267].

La classe d'exposés ([47, 49, 57, 395, 350, 354]) dite des "acousticiens du milieu marin", adopte encore d'autres choix de symboles et de variables.

Dans ce qui suit, un caractère gras désignera un vecteur, la convention de la sommation d'Einstein sera implicite, le symbole  $v_k$  désignera la  $k$ -ième composante cartésienne  $x_k$  du vecteur  $\mathbf{v}$ ,  $v_{,l}$  la dérivée partielle de  $v$  par rapport à  $x_k$ , et  $v_{l,k}$  la dérivée partielle de  $v_l$  par rapport à  $x_k$ . Par extension,  $v_{l,km}$  désignera  $\partial_{x_k} \partial_{x_m} v_l$  et  $v_{l,t}$  signifiera  $\partial_t v_l$ . Les composantes d'un tenseur, tel que celles de la contrainte et de la déformation, sont désignées par  $\sigma_{lk}$  et  $\varepsilon_{lk}$  respectivement.

### 6.3 Le bilan de quantité de mouvement dans la théorie de Biot

En l'absence de forces volumiques appliquées, la conservation du mouvement dans un continuum matériel mécanique prend la forme [1]

$$\sigma_{kl,k} - \rho u_{l,tt} = 0 \quad ; \quad l, k = 1, 2, 3 . \quad (6.3.1)$$

où  $u$  est le déplacement et  $\rho$  la densité. Dans cette relation et celles qui suivent, les variables d'état (déplacement, contrainte, etc.) dépendent de la position  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et du temps  $t$ .

Nous supposons (sauf cas contraire que nous précisons) que les paramètres matériels (densité,...) ne dépendent ni de  $\mathbf{x}$ , ni du temps  $t$ .

Du fait que le milieu poreux est divisé et diphasique, Biot remplace (6.3.1) par

$$\sigma_{kl,k} - \rho u_{l,tt} - \rho_f w_{l,tt} = 0 \quad ; \quad l, k = 1, 2, 3 . \quad (6.3.2)$$

où  $\rho_f$  est la densité de la partie fluide et  $\mathbf{w}$  le déplacement du fluide relatif à celui du solide

$$\mathbf{w} := \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u}) , \quad (6.3.3)$$

sachant que  $\mathbf{U}$  est le déplacement particulaire du fluide et  $\mathbf{u}$  celui du solide.

Soient  $\rho_s$  et  $\rho_f$  les densités des parties solide et fluide respectivement et soit  $\rho$  la densité du mélange ; alors

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f . \quad (6.3.4)$$

Du fait que le milieu poreux contient aussi la composante fluide, il faut aussi écrire une loi de conservation de mouvement dans ce continuum (fluide). En l'absence de forces

volumiques appliquées, la conservation du mouvement dans un fluide non-visqueux s'écrit [127]

$$-p_{,l} + \rho u_{l,tt} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3 \quad , \quad (6.3.5)$$

avec  $p$  la pression,  $\rho$  la densité et  $u$  le déplacement du fluide.

Du fait que Biot admet une (faible) viscosité dans le fluide, il existe un couplage du fluide au solide, de sorte qu'il faut remplacer (6.3.5) par

$$-p_{,l} - \rho_f u_{l,tt} - m w_{l,tt} - \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} w_{l,t} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3 \quad , \quad (6.3.6)$$

où à présent  $p$  et  $\eta$  sont la pression et la viscosité absolue dans la composante fluide du milieu poreux,  $\eta$  la viscosité du fluide,  $\kappa$  la perméabilité du fluide, et

$$m := \frac{\rho_f \alpha}{\phi} \quad , \quad (6.3.7)$$

sachant que  $\alpha$  est la *tortuosité* [398], qui constitue une mesure (grandeur sans dimensions) des circonvolutions du fluide lors de son cheminement dans l'espace des pores [75] prend  $\alpha = c$  et l'appelle le coefficient de masse virtuelle (ou ajoutée) ou facteur de structure).

Il est évident que  $\alpha$  dépend de la géométrie des pores et ainsi de la géométrie des particules composant la matrice solide. D'après [28], il convient de prendre

$$\alpha = 1 + r \left( \frac{1 - \phi}{\phi} \right) \quad , \quad (6.3.8)$$

(avec  $r$  une constante comprise entre 0 et 1) dans le cas d'une matrice composée de grains solides sphériques.

Dans (6.3.6),  $\hat{F}$  est un opérateur linéaire de convolution temporelle, qui, dans le domaine fréquentiel, devient un facteur multiplicateur  $F(\omega)$ , traduisant une perméabilité dépendant de la fréquence, i.e.,

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \frac{\kappa}{F(\omega)} \quad , \quad (6.3.9)$$

où  $\tilde{\kappa}(\omega)$  est la soi-disant perméabilité dynamique. L'opérateur  $\hat{F}$  est conçu de telle sorte que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = 1 \quad , \quad (6.3.10)$$

Aux fréquences plus hautes,  $F$  traduit l'écart de l'écoulement du régime laminaire dans les pores.



Plus particulièrement, Biot prend  $F = F(a\sqrt{\omega\rho_f/\eta})$ , avec  $F(\zeta)$  donné par

$$F(\zeta) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\zeta T(\zeta)}{1 - 2T(\zeta)/i\zeta} \right], \quad (6.3.11)$$

où  $a$  est la dimension caractéristique des pores, et  $T$  est défini en termes des fonctions de Kelvin

$$T(\zeta) = \frac{\text{ber}'(\zeta) + i\text{bei}'(\zeta)}{\text{ber}(\zeta) + i\text{bei}(\zeta)},$$

le prime signifiant une dérivée par rapport à l'argument.

### 6.3.1 Cohérence des relations de conservation du mouvement pour les cas $\phi = 0$ et $\phi = 1$ .

Essayons de voir si (6.3.2), (6.3.4) and (6.3.6) sont cohérents avec les expressions de conservation de mouvement dans les limites  $\phi = 0$  correspondant à un milieu entièrement solide, et  $\phi = 1$  correspondant à un milieu entièrement fluide.

Considérons d'abord le cas  $\phi = 0$ . L'éq. (6.3.4) donne

$$\rho = \rho_s, \quad (6.3.12)$$

qui est cohérent avec le fait que le milieu est maintenant entièrement solide. De plus, (6.3.3) nous indique que

$$\mathbf{w}_{,t} = 0, \quad (6.3.13)$$

de sorte que (6.3.2) and (6.3.6) deviennent

$$\sigma_{kl,k} - \rho u_{l,tt} = 0 \quad ; \quad l, k = 1, 2, 3, \quad (6.3.14)$$

$$p_{,k} = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \quad (6.3.15)$$

la dernière expression (eq. (6.3.15)) n'a pas lieu d'être car il n'y a pas de fluide, le milieu est solide. Elle a été obtenue en supposant que  $\rho_f = 0$ , ce qui semble raisonnable. L'éq. (6.3.15) conduit à la conclusion que la pression est partout constante, ce qui ne peut être le cas qu'en l'absence de fluide (on est bien dans ce cas). L'éq. (6.3.14) a la forme voulue pour un solide élastique, isotrope en l'absence de forces volumiques appliquées. Ainsi, les équations de Biot de conservation de mouvement sont cohérentes dans la limite  $\phi = 0$ .

Considérons ensuite le cas  $\phi = 1$ . L'éq. (6.3.4) donne

$$\rho = \rho_f , \quad (6.3.16)$$

qui est cohérent avec le fait que le milieu est maintenant entièrement fluide. De plus, (6.3.3) nous indique que

$$\mathbf{w} = \mathbf{U} - \mathbf{u} , \quad (6.3.17)$$

et (6.3.8) donne

$$\alpha = 1 , \quad (6.3.18)$$

de sorte qu'à partir de (6.3.7) nous obtenons

$$m = \rho_f . \quad (6.3.19)$$

Les conséquences, en ce qui concernent (6.3.2) et (6.3.6), sont :

$$\sigma_{kl,k} - \rho_f U_{l,tt} = 0 \quad ; \quad l, k = 1, 2, 3 . \quad (6.3.20)$$

$$-p_{,l} - \rho_f U_{l,tt} - \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} w_{l,t} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3 . \quad (6.3.21)$$

Nous pouvons y remplacer  $w_l$  by  $U_l$  du fait que l'absence de solide implique une vitesse particulaire solide nulle (i.e.,  $u_{l,t} = 0$ ), de sorte que (6.3.21) devient

$$-p_{,l} - \rho_f U_{l,tt} - \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} U_{l,t} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3 . \quad (6.3.22)$$

En combinant (6.3.20) et (6.3.22), on trouve

$$\sigma_{kl,k} + p_{,l} + \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} U_{l,t} = 0 \quad ; \quad l, k = 1, 2, 3 . \quad (6.3.23)$$

ou, pour un fluide non-visqueux (i.e.,  $\eta = 0$ ),

$$\sigma_{kl,k} + p_{,l} = 0 \quad ; \quad l, k = 1, 2, 3 . \quad (6.3.24)$$

qui est l'expression habituelle de conservation de mouvement dans un fluide non-visqueux.

Ainsi, les formules de Biot de conservation de mouvement sont cohérentes dans les limites  $\phi = 0$  et  $\phi = 1$ .

### 6.3.2 Les lois de comportement de Biot du milieu poreux

Biot relie la contrainte et la pression dans le milieu poreux homogénéisé aux déformations du solide et du fluide par :

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} = 2\mu\varepsilon_{lk} + \delta_{kl} [\lambda_c u_{m,m} + \beta M w_{m,m}] \quad ; \quad k, l, m = 1, 2, 3 . \quad (6.3.25)$$

$$-p = \beta M u_{m,m} + M w_{m,m} \quad ; \quad m = 1, 2, 3 , \quad (6.3.26)$$

où :

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) , \quad (6.3.27)$$

$M$  désigne le premier coefficient de Biot défini par :

$$\frac{1}{M} = \frac{\phi}{K_f} + \frac{\beta - \phi}{K_s} , \quad (6.3.28)$$

et  $\beta$  le second coefficient de Biot,

$$\beta := 1 - \frac{K_o}{K_s} , \quad (6.3.29)$$

sachant que [33] :

- $\lambda_c$  est le coefficient de Lamé du milieu non-drainé (i.e., fermé (d'où l'indice  $c$ , signifiant "closed" en anglais) et comportant donc du fluide (non le vide) dans les pores),
- $\lambda_o$  est le coefficient de Lamé du milieu drainé (i.e., fermé (d'où l'indice  $o$ , signifiant "open" en anglais) et comportant donc de le vide dans les pores),
- $\mu$  est le module de cisaillement du milieu poreux et de sa phase solide,
- $K_o, K_c, K_s, K_f$  sont les modules d'incompressibilité du milieu drainé, non-drainé, du grain solide et du grain fluide respectivement.

#### Lois de comportement incluant une viscoélasticité hystérétique de Rayleigh dans la phase solide

Mesgouez [267] propose de modifier la loi de comportement de Biot par l'introduction d'un mécanisme de perte dans la phase solide. En posant  $\lambda_c = \lambda_0 + M\beta^2$ , la première loi de comportement de Biot (sans viscoélasticité dans la phase solide) s'écrit (en se servant de (6.3.26))

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} = 2\mu\varepsilon_{lk} + \delta_{kl}(\lambda_o\varepsilon_{mm} - \beta p) \quad ; \quad k, l, m = 1, 2, 3 . \quad (6.3.30)$$

La modification apportée par Mesgouez à cette loi se traduit par

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} = 2(\mu + \mu' \partial_t) \varepsilon_{lk} + \delta_{kl} [(\lambda_o + \lambda'_o \partial_t) \varepsilon_{mm} - \beta p] \quad ; \quad k, l, m = 1, 2, 3 . \quad (6.3.31)$$

Ceci entraîne des modifications mineures dans la suite de ce qui concerne la théorie de Biot, de sorte que nous n'en tiendrons pas compte ci-après.

### 6.3.3 Cohérence des lois de comportement de Biot dans les cas $\phi = 0$ and $\phi = 1$

Voyons si (6.3.25) et (6.3.26) sont cohérents avec les lois de comportement d'un milieu entièrement solide et d'un milieu entièrement fluide correspondant aux cas  $\phi = 0$  et  $\phi = 1$  respectivement.

Considérons d'abord le cas  $\phi = 0$ . En l'absence de fluide on a  $K_o = K_s$ . Il semble raisonnable de supposer que  $\lim_{(K_s - K_o) \rightarrow 0} = \lim_{\phi \rightarrow 0}$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \lim_{(K_s - K_o) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K_o}{K_s}\right) M &= \lim_{(K_s - K_o) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \frac{1}{K_s} (K_s - K_o) M = \\ \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{K_s \phi}{\phi \frac{K_s}{K_f} (K_s - K_f) + \phi} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{K_s}{\frac{K_s}{K_f} (K_s - K_f) + 1} = \frac{K_s}{\frac{K_s}{K_f} (K_s - K_f) + 1} . \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

De même,

$$\lim_{(K_s - K_o) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \phi M = \frac{K_s}{\frac{K_s}{K_f} (K_s - K_f) + 1} . \quad (6.3.33)$$

d'où nous pouvons conclure que :

$$\lim_{(K_s - K_o) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K_o}{K_s}\right) M \phi = 0 , \quad (6.3.34)$$

$$\lim_{(K_s - K_o) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K_o}{K_s}\right) M - M \phi = 0 . \quad (6.3.35)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{(K_s - K_o) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \sigma_{kl} &= \\ \lim_{(K_s - K_o) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \left( \mu (u_{k,l} + u_{l,k}) + \delta_{kl} \left[ \lambda_c u_{m,m} + \left(1 - \frac{K_o}{K_s}\right) M \phi (U_{m,m} - u_{m,m}) \right] \right) &; \\ &k, l, m = 1, 2, 3 , \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

ou, compte tenu de (6.3.34)

$$\lim_{(K_s-K) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \sigma_{kl} = \mu(u_{k,l} + u_{l,k}) + \delta_{kl} \lambda_c u_{m,m} \ ; \ k, l, m = 1, 2, 3 \ , \quad (6.3.37)$$

qui n'est autre que la loi de comportement d'un milieu linéaire, isotrope entièrement solide ayant les paramètres de Lamé  $\lambda_c, \mu$ .

Nous obtenons de (6.3.26)

$$\lim_{(K_s-K) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} (-p) = \lim_{(K_s-K) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} \left[ \left( 1 - \frac{K_o}{K_s} \right) M u_{m,m} + M \phi (U_{m,m} - u_{m,m}) \right] \ ;$$

$$m = 1, 2, 3 \ . \quad (6.3.38)$$

ou, du fait de (6.3.33) et (6.3.35) :

$$\lim_{(K_s-K) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} (-p) = \frac{K_s}{\frac{K_s}{K_f}(K_s - K_f) + 1} U_{k,k} \ ; \ k = 1, 2, 3 \ . \quad (6.3.39)$$

Mais, l'absence de composante fluide signifie que  $U_k = 0$  ;  $k = 1, 2, 3$ , de sorte que

$$\lim_{(K_s-K) \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0} p = 0 \ ; \ k = 1, 2, 3 \ . \quad (6.3.40)$$

qui traduit le fait que la pression fluidique est nulle (cohérent avec l'absence de fluide).

Ainsi, dans le cas  $\phi = 0$ , les deux lois de comportement de Biot (6.3.25)-(6.3.26) sont cohérentes avec les lois de comportement connues de milieux non-poreux.

Passons au cas  $\phi = 1$ . En l'absence de composante solide nous avons  $\mu = 0$ ,  $K_o = 0$ ,  $u_k = 0$  ;  $k = 1, 2, 3$ , de sorte que

$$M = K_f \ ; \ k = 1, 2, 3 \ . \quad (6.3.41)$$

d'où (rappelons qu'un module d'incompressibilité générique  $K$  dans un continuum linéaire isotrope est relié aux coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  par  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ )

$$\lim_{(\mu=K_o) \rightarrow 0, \mathbf{u} \rightarrow 0} \sigma_{kl} =$$

$$\lim_{(\mu=K_o) \rightarrow 0, \mathbf{u} \rightarrow 0} \left( \mu(u_{k,l} + u_{l,k}) + \delta_{kl} \left[ \lambda_c u_{m,m} + \left( 1 - \frac{K_o}{K_s} \right) M \phi (U_{m,m} - u_{m,m}) \right] \right) =$$

$$K_f \delta_{kl} U_{k,k} \ ; \ k, l, m = 1, 2, 3 \ . \quad (6.3.42)$$

Mais,  $\mu = 0$  dans un fluide non-visqueux , de sorte que  $K_f = \lambda_f$ , suite de quoi (6.3.43) devient

$$\lim_{(\mu=K_o)\rightarrow 0, \mathbf{u}\rightarrow 0} \sigma_{kl} = \lambda_f \delta_{kl} U_{m,m} \ ; \ k, l, m = 1, 2, 3 \ , \quad (6.3.43)$$

qui constitue, comme il se doit, la loi de comportement d'un milieu fluide linéaire, non-visqueux.

De plus, (6.3.26) donne lieu à

$$\begin{aligned} \lim_{(\mu=K_o)\rightarrow 0, \mathbf{u}\rightarrow 0} (-p) &= \lim_{(\mu=K_o)\rightarrow 0, \mathbf{u}\rightarrow 0} \left( 1 - \frac{K_o}{K_s} \right) M u_{m,m} + M \phi (U_{m,m} - u_{m,m}) \\ &= K_f U_{m,m} = \lambda_f U_{m,m} \ ; \ m = 1, 2, 3 \ . \end{aligned} \quad (6.3.44)$$

En combinant (6.3.43) et (6.3.44), on trouve

$$\lim_{(\mu=K_o)\rightarrow 0, \mathbf{u}\rightarrow 0} \sigma_{kl} = -p \delta_{kl} \ ; \ k, l, m = 1, 2, 3 \ , \quad (6.3.45)$$

qui traduit (en des termes différents) la loi de comportement d'un milieu linéaire non-visqueux entièrement fluide.

En conclusion, les deux lois de comportement d'un milieu poroélastique de Biot sont cohérentes avec les lois connues d'un milieu linéaire entièrement solide dans le cas  $\phi = 0$ , et d'un milieu linéaire, non-visqueux entièrement fluide dans le cas  $\phi = 1$ .

### 6.3.4 Les équations de mouvement en termes de $\mathbf{u}$ and $\mathbf{w}$

Les relations précédentes ne nécessitent pas d'hypothèses sur l'homogénéité à l'échelle macroscopique. Désormais, nous supposons que tous les paramètres matériels sont constants par rapport à la position dans le milieu de Biot, i.e., ce milieu est macroscopiquement homogène.

Nous re-écrivons les relations de conservation de la quantité du mouvement et de comportement :

$$\sigma_{kl,k} - \rho \ddot{u}_{l,tt} - \rho_f w_{l,tt} = 0 \ , \quad (6.3.46)$$

$$-p_{,l} - \rho_f \ddot{u}_{l,tt} - m w_{l,tt} - \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} w_{l,t} = 0 \ , \quad (6.3.47)$$

$$\sigma_{kl} = \mu (u_{k,l} + u_{l,k}) + \delta_{kl} [\lambda_c u_{m,m} + C w_{m,m}] \ ; \ k, l, m = 1, 2, 3 \ . \quad (6.3.48)$$

$$-p = Cu_{m,m} + Mw_{m,m} \quad ; \quad m = 1, 2, 3 \quad , \quad (6.3.49)$$

où

$$C := \beta M \quad . \quad (6.3.50)$$

La première astuce est d'éliminer la pression par l'emploi de (6.3.47) et (6.3.49). Ainsi, (6.3.49) donne lieu (rappelons l'hypothèse d'homogénéité macroscopique) à

$$-p_{,l} = Cu_{m,ml} + Mw_{m,ml} \quad ; \quad m = 1, 2, 3 \quad , \quad (6.3.51)$$

et la soustraction de ce résultat de (6.3.47) conduit à

$$Cu_{m,ml} + Mw_{m,ml} = \rho_f u_{l,tt} + m w_{l,tt} + \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} w_{l,t} \quad ; \quad l = 1, 2, 3 \quad . \quad (6.3.52)$$

La deuxième astuce est d'éliminer  $\sigma_{kl,k}$  par l'emploi de (6.3.46) et (6.3.48). Ainsi, (6.3.48) donne lieu (en vertu de l'hypothèse d'homogénéité macroscopique) à

$$\sigma_{kl,k} = \mu(u_{k,lk} + u_{l,kk}) + \delta_{kl} [\lambda_c u_{m,mk} + C w_{m,mk}] \quad ; \quad k, l, m = 1, 2, 3 \quad , \quad (6.3.53)$$

et la soustraction de ce résultat de (6.3.46) conduit à

$$\mu u_{l,kk} + (\mu + \lambda_c) u_{k,lk} + C w_{k,kl} = \rho u_{l,tt} + \rho_f w_{l,tt} \quad ; \quad l, k = 1, 2, 3 \quad . \quad (6.3.54)$$

Les éqs. (6.3.52) and (6.3.54) constituent un système couplé de six équations aux dérivées partielles (EDP), d'ordre deux en  $t$ , en termes des trois composantes de  $\mathbf{u}$  et les trois composantes de  $\mathbf{w}$ . Nous appelons ce système, la *version géophysique* des équations de mouvement de Biot dans le milieu poreux.

### 6.3.5 Les équations de mouvement en termes de $\mathbf{u}$ and $\mathbf{U}$

Nous changeons légèrement de notation :

$$\lambda_o := \lambda_c - M\beta^2 \quad , \quad (6.3.55)$$

$$\mathcal{K} := \frac{\kappa}{\eta \hat{F}} = \frac{\kappa}{\tilde{\eta}} = \frac{\tilde{\kappa}}{\eta} \quad , \quad (6.3.56)$$

(où  $\mathcal{K}$  est la perméabilité absolue du milieu,  $\tilde{\eta}$  la viscosité dynamique, et  $\tilde{\kappa}$  la perméabilité dynamique) et écrivons nos équations de mouvement en notation vectorielle :

$$\mu \nabla^2 + (\lambda_o + M\beta^2 + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + M\beta \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} - \rho \mathbf{u}_{,tt} - \rho_f \mathbf{w}_{,tt} = 0 \quad , \quad (6.3.57)$$

$$M\beta\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + M\nabla\nabla\cdot\mathbf{w} - \rho_f\mathbf{u}_{,tt} - \frac{\rho_f\alpha}{\phi}\mathbf{w}_{,tt} - \frac{1}{\mathcal{K}}\mathbf{w}_{,t} = 0 . \quad (6.3.58)$$

Nous nous servons de  $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u})$  pour obtenir de ces deux équations :

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda_o + M\beta^2 + \mu - M\beta\phi)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + M\beta\phi\nabla\nabla\cdot\mathbf{U} - (\rho - \rho_f\phi)\mathbf{u}_{,tt} - \rho_f\phi\mathbf{U}_{,tt} = 0 , \quad (6.3.59)$$

$$M\beta\phi\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} = M\phi^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - M\phi^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{U},t + \phi\rho_f(1-\alpha)\mathbf{u}_{,tt} + \phi\rho_f\alpha\mathbf{U}_{,tt} - \frac{\phi^2}{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_{,t} - \mathbf{U}_{,t}) = 0 . \quad (6.3.60)$$

Nous introduisons (6.3.60) dans (6.3.59) pour trouver

$$\begin{aligned} \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda_o + \mu + M\beta^2 + M\phi^2)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + M\phi(\beta - \phi)\nabla\nabla\cdot\mathbf{U} - [(1-\phi)\rho_s - \phi\rho_f(1-\alpha)]\mathbf{u}_{,tt} - \\ \phi\rho_f(1-\alpha)\mathbf{U}_{,tt} - \frac{\phi^2}{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_{,t} - \mathbf{U}_{,t}) = 0 , \end{aligned} \quad (6.3.61)$$

et ré-écrivons (6.3.60) sous la forme

$$M\phi(\beta - \phi)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + M\phi^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{U} - \phi\rho_f(1-\alpha)\mathbf{u}_{,tt} - \phi\rho_f\alpha\mathbf{U}_{,tt} + \frac{\phi^2}{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_{,t} - \mathbf{U}_{,t}) = 0 . \quad (6.3.62)$$

Nous faisons les associations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda &:= \lambda_o + M(\beta^2 + \phi^2) \\ Q &:= M\phi(\beta - \phi) \\ \rho_{11} &:= (1-\phi)\rho_s - \phi\rho_f(1-\alpha) \\ \rho_{12} &:= \phi\rho_f(1-\alpha) \\ b &:= \frac{\phi^2}{\mathcal{K}} \\ R &= M\phi^2 \\ \rho_{22} &:= \rho_f\phi\alpha = m\phi^2 , \end{aligned} \quad (6.3.63)$$

et montrons ainsi que (6.3.61) et (6.3.62) prennent la forme :

$$\begin{aligned} \mu\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + (\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + Q\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}(\mathbf{x},t) - \rho_{11}\mathbf{u}_{,tt}(\mathbf{x},t) - \rho_{12}\mathbf{U}_{,tt}(\mathbf{x},t) - \\ b[\mathbf{u}_{,t}(\mathbf{x},t) - \mathbf{U}_{,t}(\mathbf{x},t)] = 0 , \end{aligned} \quad (6.3.64)$$

$$\begin{aligned} Q\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + R\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}(\mathbf{x},t) - \rho_{12}\mathbf{u}_{,tt}(\mathbf{x},t) - \rho_{22}\mathbf{U}_{,tt}(\mathbf{x},t) + \\ b[\mathbf{u}_{,t}(\mathbf{x},t) - \mathbf{U}_{,t}(\mathbf{x},t)] = 0 . \end{aligned} \quad (6.3.65)$$



Les deux relations (6.3.64) et (6.3.65) constituent ce qui s'appelle *la forme d'acoustique sous-marine* des équations de mouvement de Biot. On remarque qu'elles se situent dans le domaine spatio-temporel et sont donc des équations d'onde. Nous les transformons dans la section suivante dans le domaine spatio-fréquentiel.

## 6.4 Transformation des équations d'onde de Biot au domaine spatio-fréquentiel

Nous représentons  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  par les transformées de Fourier :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega ,\end{aligned}\quad (6.4.1)$$

( $\omega$  étant la fréquence angulaire), de façon à trouver :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + Q \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) + p_{11} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + p_{12} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = 0 , \quad (6.4.2)$$

$$Q \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + R \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) + p_{12} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + p_{22} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = 0 , \quad (6.4.3)$$

où

$$\begin{aligned}p_{11} &:= \omega^2 \rho_{11} + i\omega b \\ p_{12} &:= \omega^2 \rho_{12} - i\omega b \\ p_{22} &:= \omega^2 \rho_{22} + i\omega b .\end{aligned}\quad (6.4.4)$$

Nous appelons (7.3.2)-7.3.3) la forme spatio-fréquentielle des équations d'onde de Biot.

## 6.5 Mise en évidence des trois modes propres ondulatoires de Biot en espace libre

Le point de départ est la forme spatio-fréquentielle des équations d'onde de Biot, avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , i.e., l'espace libre rempli du milieu poreux.

Nous décomposons  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{U}$  en potentiels de Helmholtz :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \\ \mathbf{U} &= \nabla \Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} ,\end{aligned}\quad (6.5.1)$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot \nabla \varphi \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= \nabla \cdot \nabla \Phi \\ \nabla^2 \cdot \mathbf{u} &= \nabla \times \nabla^2 \psi + \nabla(\nabla \cdot \nabla \varphi),\end{aligned}\tag{6.5.2}$$

suite de quoi (7.3.3-(7.3.4) prennent la forme

$$\nabla[(\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \nabla \varphi + Q\nabla \cdot \nabla \Phi + p_{11}\varphi + p_{12}\Phi] + \nabla \times [\mu\nabla^2 \psi + p_{11}\psi + p_{12}\Psi] = \mathbf{0},\tag{6.5.3}$$

$$\nabla[Q\nabla \cdot \nabla \varphi + R\nabla \cdot \nabla \Phi + p_{12}\varphi + p_{22}\Phi] + \nabla \times [p_{12}\psi + p_{22}\Psi] = \mathbf{0}.\tag{6.5.4}$$

Soit une expression du type

$$\nabla A + \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.\tag{6.5.5}$$

Il existe deux possibilités :

$$\nabla A = -\nabla \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0},\tag{6.5.6}$$

ou

$$\nabla A = -\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0},\tag{6.5.7}$$

Comme, dans notre cas,  $A = A(\varphi, \Phi)$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\psi, \Psi)$  n'ont aucune raison d'être liés fonctionnellement, c'est la deuxième solution qui prévaut, de sorte que nous tirons de (6.5.3)-(6.5.4) :

$$(\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \nabla \varphi + Q\nabla \cdot \nabla \Phi + p_{11}\varphi + p_{12}\Phi = 0,\tag{6.5.8}$$

$$Q\nabla \cdot \nabla \varphi + R\nabla \cdot \nabla \Phi + p_{12}\varphi + p_{22}\Phi = 0,\tag{6.5.9}$$

$$\mu\nabla^2 \psi + p_{11}\psi + p_{12}\Psi = \mathbf{0},\tag{6.5.10}$$

$$p_{12}\psi + p_{22}\Psi = \mathbf{0}.\tag{6.5.11}$$

Considérons les deux premières de ces quatre équations. Une solution en espace libre peut s'écrire

$$\begin{aligned}\varphi &= C_1 \exp(ik_{Lr}x_1) + C_2 \exp(ik_{Ll}x_1) = \varphi_1 + \varphi_2 \\ \Phi &= C_3 \exp(ik_{Lr}x_1) + C_4 \exp(ik_{Ll}x_1) = \Phi_1 + \Phi_2,\end{aligned}\tag{6.5.12}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \varphi &= -k_{Lr}^2 \varphi_1 - k_{Ll}^2 \varphi_2 \\ \nabla \cdot \nabla \Phi &= -k_{Lr}^2 \Phi_1 - k_{Ll}^2 \Phi_2,\end{aligned}\tag{6.5.13}$$

ce qui entraîne

$$\begin{pmatrix} -P\kappa_r + p_{11} & -Q\kappa_r + p_{12} & -P\kappa_l + p_{11} & -Q\kappa_l + p_{12} \\ -Q\kappa_r + p_{12} & -R\kappa_r + p_{22} & -Q\kappa_l + p_{12} & -R\kappa_l + p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5.14)$$

où

$$P := \lambda + 2\mu, \quad \kappa_r := k_{Lr}^2, \quad \kappa_l := k_{Ll}^2. \quad (6.5.15)$$

Etant donné que les solutions  $(\varphi_1, \Phi_1)$  sont indépendantes de  $(\varphi_2, \Phi_2)$ , nous tirons de (6.5.14) les deux équations matricielles

$$\begin{pmatrix} -P\kappa_r + p_{11} & -Q\kappa_r + p_{12} \\ -Q\kappa_r + p_{12} & -R\kappa_r + p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5.16)$$

$$\begin{pmatrix} -P\kappa_l + p_{11} & -Q\kappa_l + p_{12} \\ -Q\kappa_l + p_{12} & -R\kappa_l + p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5.17)$$

qui ne possèdent une solution non-triviale que lorsque les déterminants respectifs s'annulent, i.e.,

$$\begin{aligned} (-P\kappa_r + p_{11})(-R\kappa_r + p_{22}) - (-Q\kappa_r + p_{12})^2 &= 0 \\ (-P\kappa_l + p_{11})(-R\kappa_l + p_{22}) - (-Q\kappa_l + p_{12})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

Ces deux équations sont non-couplées et quadratiques en termes de  $\kappa_r = \frac{\omega^2}{c_{Lr}^2}$  et  $\kappa_l = \frac{\omega^2}{c_{Ll}^2}$  de sorte que nous en déduisons :

$$\begin{aligned} c_{Lr} &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2 - 4AD}}{2A}}} \\ c_{Ll} &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2 - 4AD}}{2A}}}. \end{aligned} \quad (6.5.19)$$

où

$$\begin{aligned} A &:= PR - Q^2 \\ B &:= Pp_{22} + Rp_{11} - 2Qp_{12} \\ D &:= p_{11}p_{22} - p_{12}^2. \end{aligned} \quad (6.5.20)$$

Si nous admettons que les parties imaginaires de  $B$  et  $D$  sont petites, alors nous voyons que les équations d'ondes longitudinales de Biot (d'où l'indice  $L$ ) livrent deux solutions

modales correspondant à une onde quasi-volumique rapide (d'où l'indice  $r$ ) ayant la vitesse de phase  $c_{Lr}$  et à une autre onde quasi-volumique lente (d'où l'indice  $l$ ) ayant la vitesse de phase  $c_{Ll}$ . Ceci est un fait nouveau par rapport à ce qui se passe dans les milieux faiblement viscoélastiques non-divisés, dans lesquels une seule onde longitudinale quasi-volumique peut se propager (en plus de l'onde quasi-volumique S).

Considérons maintenant les deux dernières équations (6.5.10)-(6.5.11). La seconde des deux livre

$$\Psi = -\frac{p_{12}}{p_{22}}\psi, \quad (6.5.21)$$

de sorte que la première équation prenne la forme

$$\nabla^2\psi + \left(\frac{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}{\mu p_{22}}\right)\psi = \mathbf{0}. \quad (6.5.22)$$

Cette équation admet la solution (en espace libre)

$$\psi = \mathbf{C}_5 \exp(ik_T x_1), \quad (6.5.23)$$

de sorte qu'en opérant comme avant, nous trouvons

$$c_T = \frac{\omega}{k_T} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{D}{\mu p_{22}}}}. \quad (6.5.24)$$

Si nous admettons que la partie imaginaire de  $D$  est petite, alors nous voyons que l'équation d'onde transversale de Biot (d'où l'indice  $T$ ) livre une seule solution modale correspondant à une onde quasi-volumique ayant la vitesse de phase  $c_T$ . Ceci est similaire à ce qui se passe dans les milieux faiblement viscoélastiques non-divisés.

## 6.6 Avatar viscoélastique du modèle de Biot

Revenons à la première équation d'ondes en domaine spatio-fréquentielle de Biot

$$\mu\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) + p_{11}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + p_{12}\mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0}, \quad (6.6.1)$$

Nous avons déjà montré comment cette équation devient l'équation d'ondes élastiques lorsque  $\phi \rightarrow 0$ . Dans la même limite, la deuxième équation d'ondes de Biot n'apportait aucune information utile.

L'idée ici est de nouveau de ne retenir que la première équation, tout en gardant le mécanisme de pertes dans le modèle. Ceci est possible si l'on admet que  $\|\mathbf{U}\| \ll \|\mathbf{u}\|$ , dans quel cas (6.6.2) devient

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + p_{11} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (6.6.2)$$

qui constitue une seule EDP vectorielle pour la seule inconnue  $\mathbf{u}$  représentant le déplacement de la partie solide du poreux. Du fait que  $p_{11}$  est complexe, on est en présence d'une sorte d'équation d'ondes viscoélastiques. Notons que non seulement cette équation conserve le mécanisme de pertes de Biot, mais tient aussi compte de la porosité et de la tortuosité du milieu à travers le coefficient  $p_{11}$ .

Ainsi, le modèle de Biot peut être réduit à un modèle de solide viscoélastique équivalent (MSVE) moyennant l'hypothèse  $\|\mathbf{U}\| \ll \|\mathbf{u}\|$ . D'autres MSVE ont été conçues pour des milieux poreux dans [354, 17, 274].

## 6.7 Avatar acoustique du modèle de Biot

L'avatar du modèle de Biot, appelé communément Modèle du Fluide Equivalent (MFE), semble être approprié lorsque la composante fluide du poreux est léger (cas d'un e.g., gaz) et la matrice solide relativement immobile (i.e., rigide).

Il existe plusieurs versions de la MFE [410, 6, 135, 130] dont certaines sont décrites et comparées dans [98].

Nous allons maintenant déduire la forme la plus simple du MFE à partir des "équations de pression" de Biot.

### 6.7.1 Les équations de conservation de mouvement

Le point de départ est situé au niveau des équations de Biot de conservation de mouvement (6.3.2) et (6.3.6). L'éq. (6.3.2) n'est d'aucun intérêt à présent puisqu'elle concerne principalement les contraintes dans la matrice solide, alors que le MFE porte sur le mouvement dans le fluide (équivalent). Ainsi, portons notre attention sur (6.3.6)

$$-p_{,l} - \rho_f u_{l,tt} - m w_{l,tt} - \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} w_{l,t} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3, \quad (6.7.1)$$

où  $w_l := \phi(U_l - u_l)$ . Du fait de l'hypothèse de l'immobilité de la composante solide nous avons

$$u_l = 0 \quad , \quad u_{l,t} = 0 \quad , \quad u_{l,tt} = 0 \quad , \quad (6.7.2)$$

d'où il ressort

$$-p_{,l} - \rho_f u_{l,tt} - m\phi U_{l,tt} - \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} U_{l,t} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3 \quad , \quad (6.7.3)$$

ou, du fait que  $m\phi = \rho_f \alpha$ ,

$$-p_{,l} - \rho_f \alpha U_{l,tt} - \frac{\eta}{\kappa} \hat{F} \phi U_{l,t} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3 \quad . \quad (6.7.4)$$

Si nous supposons que la viscosité du fluide est nulle (i.e.,  $\eta = 0$ ), alors

$$-p_{,l} - \rho_f \alpha U_{l,tt} = 0 \quad ; \quad l = 1, 2, 3 \quad . \quad (6.7.5)$$

qui est la relation de conservation du mouvement d'un fluide de [130, 135], (on peut s'y référer à l'éq. (5a) en laquelle il faut prendre  $\eta = 0$  et associer  $\alpha_\infty$  à  $\alpha$ ).

## 6.7.2 La loi de comportement

Le point de départ se situe au niveau des lois de comportement de Biot (6.3.25)-(6.3.26). Pour les mêmes raisons qu'avant, (6.3.25) n'est d'aucun intérêt car il ne concerne essentiellement que la composante solide du milieu poreux. Portons donc notre attention sur (6.3.26)

$$-p = \beta M u_{m,m} + M w_{m,m} \quad ; \quad m = 1, 2, 3 \quad , \quad (6.7.6)$$

où

$$\frac{1}{M} := \frac{\phi}{K_f} + \frac{\left(1 - \phi - \frac{K_o}{K_s}\right)}{K_s} \quad , \quad \beta = 1 - \frac{K_o}{K_s} \quad . \quad (6.7.7)$$

Du fait de (6.7.2), on obtient

$$-p = M\phi U_{m,m} \quad ; \quad m = 1, 2, 3 \quad . \quad (6.7.8)$$

Mais, dans un solide rigide

$$K_s = \infty \quad , \quad (6.7.9)$$

de sorte que (6.7.7) livre

$$\frac{1}{M\phi} = \frac{1}{K_f} . \quad (6.7.10)$$

Ainsi, (6.7.9) prend la forme

$$-\frac{1}{K_f}p = U_{m,m} ; \quad m = 1, 2, 3 , \quad (6.7.11)$$

que l'on retrouve dans l'éq. (5c) de [135], pourvu que l'on y prenne  $\eta = 0$  et qu'on associe  $K_a$  à  $K_f$ .

### 6.7.3 Equation d'ondes

De (6.7.5) on déduit (en supposant toujours que le milieu est macroscopiquement homogène)

$$-p_{,ll} - \rho_f \alpha U_{l,ltt} = 0 ; \quad l = 1, 2, 3 , \quad (6.7.12)$$

et de (6.7.11) on déduit (en supposant toujours que les constantes matérielles du milieu ne dépendent pas de  $t$ )

$$p_{,tt} + K_f U_{l,ltt} = 0 ; \quad l = 1, 2, 3 , \quad (6.7.13)$$

d'où l'on obtient enfin

$$p_{,ll} - \frac{\rho_f \alpha}{K_f} p_{,tt} = 0 ; \quad l = 1, 2, 3 , \quad (6.7.14)$$

qui représente une équation d'ondes pour une onde de pression. Donc, le modèle du fluide équivalent aboutit à une équation d'ondes pour la pression dans la composante fluide.

Il est intéressant d'observer que la pression dans la composante fluide ne dépend pas, dans ce modèle, de la porosité. Seule la tortuosité nous rappelle qu'il s'agit bien au départ d'un milieu poreux.

## 6.8 L'avatar BJKD du modèle de Biot conçu par Johnson et al.

Bien que la théorie de Biot soit essentiellement un modèle basses-fréquences (BF) (comme tout modèle qui vise à homogénéiser un milieu), il convient de distinguer ce qui se passe

dans la partie "hautes-fréquences" de ce qui se passe dans la partie "basses-fréquences" de ce régime BF. En particulier, il semblerait que la conception de Biot sur l'aspect tortuosité de son modèle ne soit valable que dans la partie "hautes-fréquences" du régime BF.

Johnson et al. [210] ont proposé une théorie d'écoulement dynamique (ce qui veut dire qu'elle tient explicitement compte de la fréquence) dans des milieux poreux qui se veut plus réaliste que celle de Biot. L'aspect fondamental de cette théorie est l'introduction des concepts de *tortuosité dynamique* et compressibilité dynamique, auxquelles s'associent de nouveaux paramètres que sont les longueurs caractéristiques visqueuses et thermales.

Comme nous sommes concernés essentiellement par le cas (dans e.g., l'os) où la partie fluide contient un fluide relativement lourd, le seul changement éventuellement significatif à apporter à la théorie de Biot concerne la tortuosité qui s'appelle désormais la tortuosité dynamique  $\tilde{\alpha}(\omega)$  à laquelle s'associe la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$ , la limite très hautes fréquences (un concept abstrait, compte tenu de nos remarques précédentes) de  $\tilde{\alpha}(\omega)$  étant désignée par  $\alpha_\infty$ .

Johnson et al. [210] proposent donc de remplacer  $\alpha$  dans la théorie de Biot par  $\tilde{\alpha}(\omega)$  (comportement haute fréquence) avec

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha_\infty \left[ 1 + \frac{2}{\Lambda} \left( \frac{\eta}{i\omega\rho_f} \right)^{1/2} \right], \quad (6.8.1)$$

sachant que ce qui s'appelait  $\alpha$  dans la théorie de Biot s'appelle maintenant  $\alpha_\infty$ . Ce changement, qui doit améliorer la modélisation des pertes occasionées par l'interaction fluide/solid, s'accompagne par l'élimination du terme contenant le facteur  $b$  dans les équations de Biot (il suffit donc d'y prendre  $b = 0$ ).

Nous avons (dans le cadre de la théorie de Biot d'origine) :

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= (1 - \phi)\rho_s - \phi\rho_f(1 - \alpha_\infty) \\ \rho_{12} &= \phi\rho_f(1 - \alpha_\infty) \\ \rho_{22} &= \phi\rho_f\alpha_\infty \end{aligned} \quad (6.8.2)$$



qu'il faut remplacer dans le modèle BJKD par :

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{11} &= (1 - \phi)\rho_s - \phi\rho_f(1 - \tilde{\alpha}) = \rho_{11} + \phi\rho_f\alpha_\infty \frac{2}{\Lambda} \left( \frac{\eta}{i\omega\rho_f} \right)^{1/2} \\
\tilde{\rho}_{12} &= \phi\rho_f(1 - \tilde{\alpha}) = \rho_{12} - \phi\rho_f\alpha_\infty \frac{2}{\Lambda} \left( \frac{\eta}{i\omega\rho_f} \right)^{1/2} \\
\tilde{\rho}_{22} &= \phi\rho_f\tilde{\alpha} = \rho_{22} + \phi\rho_f\alpha_\infty \frac{2}{\Lambda} \left( \frac{\eta}{i\omega\rho_f} \right)^{1/2} .
\end{aligned} \tag{6.8.3}$$

Ceci se traduit, dans le domaine spatio-fréquentiel, par le remplacement de  $p_{11}$ ,  $p_{12}$  et  $p_{22}$  par (rappelons que l'on doit prendre  $b = 0$ ) :

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{11} &= \omega^2 \tilde{\rho}_{11} + i\omega b = \omega^2 \rho_{11} + \omega^2 \phi\rho_f\alpha_\infty \frac{2}{\Lambda} \left( \frac{\eta}{i\omega\rho_f} \right)^{1/2} \\
\tilde{p}_{12} &= \omega^2 \tilde{\rho}_{12} - i\omega b = \omega^2 \rho_{12} - \omega^2 \phi\rho_f\alpha_\infty \frac{2}{\Lambda} \left( \frac{\eta}{i\omega\rho_f} \right)^{1/2} \\
\tilde{p}_{22} &= \omega^2 \tilde{\rho}_{22} + i\omega b = \omega^2 \rho_{22} + \omega^2 \phi\rho_f\alpha_\infty \frac{2}{\Lambda} \left( \frac{\eta}{i\omega\rho_f} \right)^{1/2} .
\end{aligned} \tag{6.8.4}$$

Ces changements sont de peu de conséquences tant que la solution est recherchée dans le domaine spatio-fréquentiel, mais entraîne des changements très importantes dans le domaine spatio-temporelle (transformation des EDP en équations comportant des dérivées fractionnaires [63, 65, 134, 334]).

## 6.9 Les insuffisances du modèle de Biot

Les principaux griefs que l'on peut adresser au modèle de Biot (en ce qui concerne son emploi dans des milieux tel que l'os spongieux) concernent : la nature du fluide dans la partie interstitielle, et le fait qu'il puisse exister certaines cellules fluides fermées dans la partie interstitielle ou même à l'intérieur de la partie solide. De plus, le modèle de Biot n'est pas bien assis sur le plan mathématique [77]. Enfin, il n'est pas sûr que la forme originelle du modèle de Biot soit apte à décrire les mouvements d'un milieu poreux macroscopiquement hétérogène [107, 108].

### 6.9.1 Nature du fluide dans les pores

Dans la théorie originelle de Biot [31, 32], les équations constitutives sont conservatives, et le tenseur des contraintes est diagonal, ce qui est synonyme d'un fluide idéal [127], alors que la moelle et le sang ne sont évidemment pas des fluides idéaux. Les lois de comportement dans

la théorie de Biot ne rendent pas compte d'une dissipation visqueuse d'énergie acoustique ou vibrationnelle, hormis celle envisagée par Biot et prenant la forme d'une force de frottement due à la traînée  $b\partial_t(\mathbf{u} - \mathbf{U})$  proportionnelle à la vitesse *relative* de la phase fluide. Lorsque les vitesses du fluide et du solide sont égales, la dissipation disparaît des équations du mouvement. Même lorsque la force de frottement n'est pas nulle, la structure diagonale de la contrainte dans le fluide n'est pas modifiée. Donc, les équations de Biot sont conçues pour des fluides "presque non-visqueuses", ce qui ne correspond évidemment pas au cas des matériaux composites biologiques contenant du sang et de la moelle.

### 6.9.2 Fluide dans les cellules fermées

Les équations de Biot s'appliquent à des matériaux consolidés composés d'une matrice élastique poreuse saturée par un fluide idéal. Cette théorie n'est pas applicable à un matériau comprenant des cellules fermées (tel que l'os trabéculaire). Or il apparaît dans la publication originelle de Biot [31, 32] où il est écrit que la théorie proposée se focalise sur "...le mouvement d'ensemble du fluide relatif au solide...l'espace fermé des pores est considéré comme faisant partie du solide pour les besoins de notre analyse." Biot envisage donc la possibilité de l'existence de deux phases fluides dans le composite :

1. le fluide dans les pores *interconnectés*, et
2. le fluide piégé dans la partie solide.

Il est clair que cette matrice solide/fluide ne peut pas être considéré comme étant un solide homogène, à moins que le volume de fluide piégé soit négligeable, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans e.g., l'os trabéculaire.

Lorsque la majorité du fluide est piégée dans des pores fermés, la phase fluide mobile dans la théorie de Biot n'est pratiquement plus présente et on peut s'attendre à ce que cette théorie ne soit plus valable du tout.

### 6.9.3 Comment s'effectue le passage micro → macro ?

Le modèle de Biot est bien un modèle de milieu équivalent puisque, en fin de compte, ce qui est décrit, est le mouvement d'un fluide couplé à celui d'un continuum solide, alors

qu'au départ, le milieu était constitué d'une microstructure solide immergé dans un fluide. Or, il n'est pas du tout évident comment Biot effectue le passage micro→macro, ni quelle signification réelle s'attache à certains de ses coefficients dans ses EDP.

#### **6.9.4 Que faut-il pour améliorer le modèle de Biot ?**

Il est paru nécessaire à certains [61, 151, 152] de développer une théorie réaliste de petites déformations des milieux poreux (tels que l'os trabéculaire), s'appuyant sur la méthode d'homogénéisation, pour élaborer des modèles effectifs de réponse vibrationnelle et acoustique dans un tel milieu. Les équations effectives gardent l'aspect diphasique du milieu, tel que l'a imaginé Biot, tout en apportant une description plus flexible de la dissipation, notamment par l'inclusion de la mémoire, comme c'est implicite dans le modèle BJKD.

La question de comment aborder, dans le cadre général de la théorie de Biot, les milieux poreux macroscopiquement hétérogènes est traitée dans des articles récents de [107, 105, 108].

## Chapitre 7

# Prédiction du champ transmis par un os à l'aide du modèle de Biot

On simule une expérience d'acquisition du champ ultrasonore transmis par un os, traité comme un milieu poroélastique au sens de Biot.

### 7.1 Introduction

Les travaux de Buchanan et al. [52, 56, 53], et ceux d'un certain nombre de biomécaniciens [192, 262, 177, 380], s'appuyaient sur *la théorie de Biot* [31, 32, 34, 35] pour modéliser les champs sonores dans un matériau comme l'os trabéculaire.

Dans l'investigation [53] sur l'ostéoporose, Buchanan et al. ont fait une simulation spatio-fréquentielle, faisant appel au modèle de Biot, de mesures du champ acoustique transmis par un échantillon d'os, sous forme de plaque, sollicité par une onde plane ultrasonore. Ces simulations ont été faites avec le code commercial d'éléments finis FEMLAB (notamment dans le but de l'utiliser ultérieurement pour des géométries d'os plus variées). Buchanan et al. ont employé le même code en tant qu'estimateur implicite, et pour ne pas commettre le crime inverse, ils ont introduit des erreurs numériques dans les solutions fournies par l'estimateur au cours du processus itératif d'inversion (méthode simplexe de Nelder-Mead). Ainsi, ils ont pu reconstruire (difficilement), avec un succès raisonnable, jusqu'à cinq paramètres de Biot de l'os spongieux [53]. Toutefois, il faut insister sur le fait que ce résultat a été obtenu avec des *données simulées*. L'expérience sur d'autres problèmes inverses beaucoup plus simples

montre que ce qui marche avec des données simulées ne marche pas nécessairement avec des données réelles.

Dans un autre travail (purement théorique et numérique) s'appuyant sur le modèle de Biot dans le domaine spatio-fréquentiel [56], Buchanan et al. ont supposé que l'onde incidente était rayonnée par une source linéique et que le spécimen d'os se trouvait dans une cuve d'eau. Cette configuration ressemble un peu à celle d'un objet dans une mer peu profonde qu'ils ont beaucoup étudié au cours des dix dernières années [57]. La cuve a la particularité de constituer un domaine fermé en haut (condition aux limites de type Dirichlet pour les ondes P) et en bas (condition de Neumann pour les ondes P). Ce fait suggère l'emploi d'une représentation modale de la fonction de Green, laquelle tient aussi compte de l'existence d'une couche horizontale dans la cuve simulant la présence de l'os-plaque. Cette fonction de Green constitue un estimateur explicite qu'ils ont employé dans une fonction-coût pour résoudre le problème inverse de reconstruction d'un certain nombre de paramètres de Biot.

Ce travail, comme celui de [56], n'est pas concluant, tant que l'on n'a pas effectué l'inversion en employant des données expérimentales. Cependant, il est intéressant en ce sens que l'estimateur se prête facilement au calcul, rendant plus aisée le processus d'inversion.

En attendant de faire des inversions avec des données réelles pour caractériser l'os (voir le chaps. 8 et 9), nous pensons qu'il est utile de montrer comment l'on procède pour simuler l'expérience qui permet d'acquérir ces données. Ceci est fait dans la suite de ce chapitre, dont le contenu a été publié [154].

Il faut souligner qu'au lieu de simuler une expérience *in vitro* dans laquelle l'os est plongé dans l'eau, nous supposons ici que l'os (qui pourrait être le calcanéum (os de la cheville)) est dans son *environnement naturel*, à savoir un milieu élastique constitué par du muscle et de la graisse.

## 7.2 Description de la configuration

La configuration est décrite graphiquement dans la fig. 9.1. L'onde ultrasonore interrogatrice est émise par un transducteur (E) en contact avec la peau (non matérialisée, ou, ce qui est équivalent, ayant la même composition que la chair, supposée être un solide élastique),

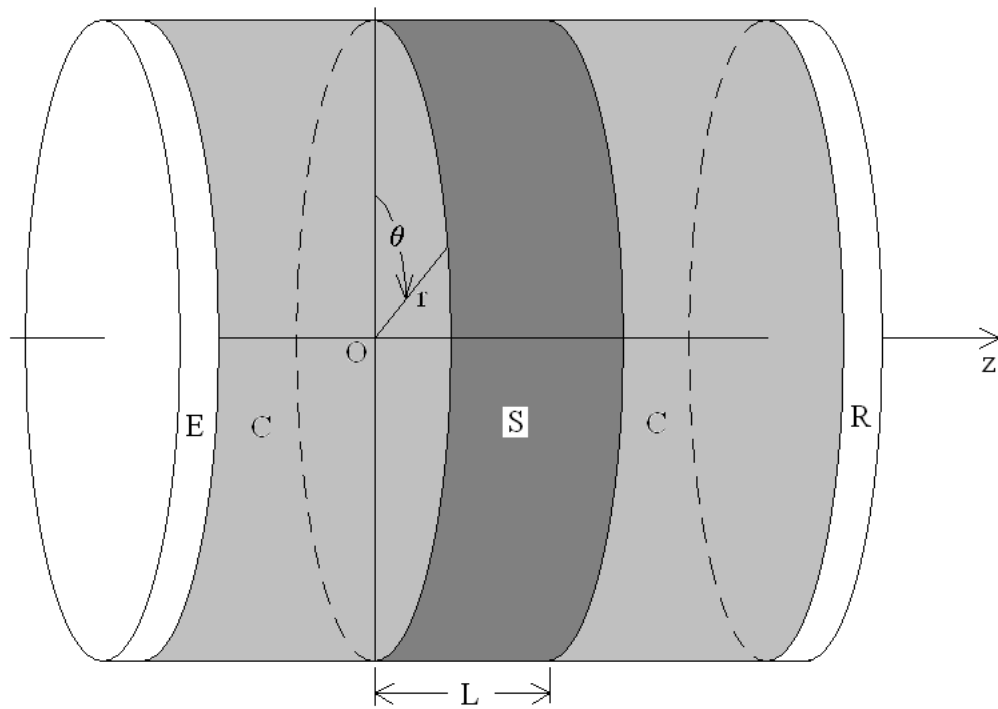


FIG. 7.1 – Vue d'un spécimen (S) en forme de disque épais d'os trabéculaire flanqué à gauche et à droite par un milieu élastique (simulant la chair entourant un os vivant). Une onde ultrasonore est émise par le transducteur gauche (E) en contact avec la peau, traverse la chair (C), l'os (S), et de nouveau la chair (C), pour être reçue par un deuxième transducteur (R) en contact avec la peau.

traverse la chair (C), est en partie réfléchi par le spécimen d'os (supposé être un milieu poroélastique au sens de Biot) en forme de plaque et re-traverse C pour être reçue sur E, et est en partie transmise par le spécimen d'os (d'épaisseur  $L$ ), traverse la chair C, pour enfin être reçue sur le transducteur R.

Pour simplifier le problème, nous supposons que l'os, la chair, et les transducteurs sont invariants par rapport à  $\theta$ , l'angle polaire dans le système cylindrique  $r, \theta, z$ , dont l'origine  $O$  est au centre de l'os sur sa face avant. Le champ incident ultrasonore est ainsi invariant avec  $\theta$ . Pour simplifier encore plus le problème, nous supposons que l'épaisseur de C est infinie des deux côtés de l'os S, ce qui a pour conséquence, entre autres, que l'onde incidente sur S soit plane en arrivant sur l'os.

Cependant, il faut remarquer que la formulation que nous allons présenter dans les lignes qui suivent a été conçue pour un problème (légèrement différent) en lequel la sollicitation ondulatoire provient d'une source en forme de disque de rayon *fini* à distance *finie* de la plaque-objet poreuse, celle-ci étant un disque de rayon *infini*. Il faut donc garder à l'esprit que la plaque aura un rayon *infini* dans la suite (ce qui vaut à négliger la diffraction engendrée par le caractère borné de l'obstacle posé sur le chemin de l'onde incidente).

### 7.3 Description du problème

Le but ultime de cette étude est de déterminer le paramètre  $\phi$ , représentant la porosité du spécimen d'os S, à partir du champ ultrasonore transmis reçu sur le transducteur R. Nous ne faisons pas d'expériences réelles ici, mais les simulons par la résolution d'un problème aux limites dans lequel interviennent les équations d'onde élastiques dans C et les équations d'onde poroélastique (i.e., de Biot) dans S, compte tenu de la sollicitation ondulatoire au niveau de E. Nous indiquerons seulement comment procéder pour obtenir  $\phi$  (sans le déterminer réellement), et montrerons la sensibilité des mesures vis-à-vis de  $\phi$ , compte tenu de la fréquence de l'onde interrogatrice.

Les domaines gauche et droite occupés par la chair sont  $\Omega_0^-$  et  $\Omega_0^+$  respectivement. Le domaine occupé par l'os est le domaine  $\Omega_1$ . Un point situé dans ces domaines est défini par ses coordonnées  $r, z$  du fait de l'invariance par rapport à  $\theta$  évoquée plus haut.

La chair est un milieu élastique linéaire, homogène et isotrope caractérisé par sa densité  $\rho^0$  et ses constantes de Lamé  $\lambda^0$  et  $\mu^0$ .

L'os est un milieu poroélastique, linéaire, macroscopiquement homogène et isotrope, caractérisée par ses paramètres de Biot :  $\rho_f^1, \rho_s^1, K_o^1, K_f^1, K_s^1, \phi, \eta^1, \kappa^1, \alpha^1, a^1$ . On pourrait remplacer le milieu occupant  $\Omega_0^\pm$  par un milieu poroélastique, dans quel cas tous les paramètres de Biot qui lui sont propres seraient affectés de l'indice supérieur 0.

L'analyse se situera dans le domaine spatio-fréquentiel, avec  $\exp(-i\omega t)$  le facteur-temps implicite.

Les champs incident et total de déplacement dans  $\Omega_0^\pm$  sont désignés par  $\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\mathbf{u}^{0\pm}(\mathbf{x}, \omega)$  respectivement, et les champs de déplacement des composantes solide et fluide du squelette dans  $\Omega^1$  par  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\mathbf{U}^1(\mathbf{x}, \omega)$  respectivement, où  $\mathbf{x}$  est un vecteur joignant l'origine  $O$  au point dont les coordonnées sont  $r, z$ . Désormais, on considère que  $\omega$  est implicite dans les expressions pour les variables des champs de déplacement.

### 7.3.1 Problème aux limites

Les champs de déplacement obéissent aux relations suivantes :

$$\mu^0 \nabla^2 \mathbf{u}^{0\pm}(\mathbf{x}) + (\lambda^0 + \mu^0) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^{0\pm}(\mathbf{x}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{x} \in \Omega_0^\pm, \quad (7.3.1)$$

$$\mu^1 \nabla^2 \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + Q^1 \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + p_{11}^1 \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + p_{12}^1 \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (7.3.2)$$

$$Q^1 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + R^1 \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + p_{12}^1 \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + p_{22}^1 \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (7.3.3)$$

où

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &:= (\omega)^2 \rho_{11}^1 + i\omega b^1 \\ p_{12}^1 &:= (\omega)^2 \rho_{12}^1 - i\omega b^1 \\ p_{22}^1 &:= (\omega)^2 \rho_{22}^1 + i\omega b^1, \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

$$\mathbf{u}^{0-}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^i(\mathbf{x}) \sim \text{ondes sortantes} \quad ; \quad z \rightarrow -\infty \quad (7.3.5)$$

$$\mathbf{u}^{0+}(\mathbf{x}) \sim \text{ondes sortantes} \quad ; \quad z \rightarrow \infty,$$

$$u_z^0(r, 0) = u_z^1(r, 0) \quad ; \quad \forall r \geq 0, \quad (7.3.6)$$

$$u_z^0(r, 0) = U_z^1(r, 0) \quad ; \quad \forall r \geq 0, \quad (7.3.7)$$

$$\sigma_{zz}^0(r, 0) = \sigma^1(r, 0) + \sigma_{zz}^1(r, 0) \quad ; \quad \forall r \geq 0, \quad (7.3.8)$$



$$\sigma_{rz}^0(r, 0) = \sigma_{rz}^1(r, 0) \ ; \ \forall r \geq 0 \ , \quad (7.3.9)$$

$$u_r^0(r, 0) = u_r^1(r, 0) \ ; \ \forall r \geq 0 \ , \quad (7.3.10)$$

$$u_z^0(r, L) = u_z^1(r, L) \ ; \ \forall r \geq 0 \ , \quad (7.3.11)$$

$$u_z^0(r, L) = U_z^1(r, L) \ ; \ \forall r \geq 0 \ , \quad (7.3.12)$$

$$\sigma_{zz}^0(r, L) = \sigma^1(r, L) + \sigma_{zz}^1(r, L) \ ; \ \forall r \geq 0 \ , \quad (7.3.13)$$

$$\sigma_{rz}^0(r, L) = \sigma_{rz}^1(r, L) \ ; \ \forall r \geq 0 \ , \quad (7.3.14)$$

$$u_r^0(r, L) = u_r^1(r, L) \ ; \ \forall r \geq 0 \ , \quad (7.3.15)$$

où  $\mathbf{u}^i$  est le champ incident sur l'os, provenant du transducteur gauche, et

$$\sigma^1(\mathbf{x}) := Q\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) + R\nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}) \ . \quad (7.3.16)$$

On définit aussi :

$$\tau^1(\mathbf{x}) := (\lambda^1 + 2\mu^1)e^1(\mathbf{x}) + Q^1\epsilon^1(\mathbf{x}) \ , \quad (7.3.17)$$

où

$$e^1(\mathbf{x}) := \nabla \cdot \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) \ , \quad \epsilon^1(\mathbf{x}) := \nabla \cdot \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) \ . \quad (7.3.18)$$

### 7.3.2 Re-écriture des équations des ondes spatio-fréquentielles

Les équations de Biot peuvent s'écrire en termes de  $e^1$  et  $\epsilon^1$  :

$$\mu^1 \nabla^2 \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + \nabla [(\lambda^1 + \mu^1)e^1(\mathbf{x}) + Q^1\epsilon(\mathbf{x})] + p_{11}^1 \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + p_{12}^1 \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) = 0 \ ; \ \mathbf{x} \in \Omega_1 \ , \quad (7.3.19)$$

$$\nabla [Q^1 e^1(\mathbf{x}) + R^1 \epsilon(\mathbf{x})] + p_{12}^1 \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + p_{22}^1 \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) = 0 \ ; \ \mathbf{x} \in \Omega_1 \ . \quad (7.3.20)$$

Dans ces relations, les coefficients sont définis ainsi :

$$\begin{aligned} \rho_{11}^1 &= (1 - \phi)\rho_s^1 - \phi(\rho_f^1 - m^1\phi) \\ \rho_{12}^1 &= \phi(\rho_f^1 - m^1\phi) \\ \rho_{22}^1 &= m^1(\phi)^2 \end{aligned} \quad (7.3.21)$$

Symbole	Paramètre
$\rho_f$	densité du fluide interstitiel
$\rho_s$	densité de la matrice solide
$K_o$	module d'incompressibilité (complexe) du milieu poreux drainé
$\mu$	module de cisaillement (complexe) des particules solides
$K_f$	module d'incompressibilité du fluide interstitiel
$K_s$	module d'incompressibilité des grains solides
$\phi$	porosité
$\eta$	viscosité absolue du fluide interstitiel
$\kappa$	perméabilité de Darcy
$\alpha$	tortuosité
$a$	dimension caractéristique des pores

TAB. 7.1 – Paramètres matériels du modèle de Biot

$$\begin{aligned}
m^1 &= \frac{\rho_f \alpha}{\phi} \\
b^1 &= \frac{\phi^2 \eta}{\kappa} F(a^1 \sqrt{\omega \rho_f^1 / \eta^1}) \\
F(\zeta) &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\zeta T(\zeta)}{1 - 2T(\zeta) / i\zeta} \right] \\
T(\zeta) &= \frac{\text{ber}'(\zeta) + i\text{bei}'(\zeta)}{\text{ber}(\zeta) + i\text{bei}(\zeta)} \\
R^1 &= M \phi^2 = \frac{K_s^2 \phi^2}{D - K_o} \\
M^1 &= \frac{(K_s^1)^2}{D - K_o^1} \\
D &= K_s^1 \left[ 1 + \phi \left( \frac{K_s^1}{K_f^1} - 1 \right) \right] \\
Q^1 &= M^1 \phi (\beta^1 \phi) = \frac{(K_s^1)^2 \phi (\beta^1 - \phi)}{D - K_o^1} \\
\beta^1 &= 1 - \frac{K_o^1}{K_s^1} \\
\lambda^1 &= \lambda_o^1 + M^1 ((\beta^1)^2 + (\phi)^2) = K_o^1 - \frac{2}{3} \mu^1 + M^1 [(\beta^1)^2 + (\phi)^2] .
\end{aligned} \tag{7.3.22}$$

et les paramètres matériels du milieu poroélastique sont donnés dans la table 7.1 :

## 7.4 Représentations des champs

### 7.4.1 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^0 &= \lambda^0 e^1 + 2\mu^0 e_{rr}^0 \\
\sigma_{rr}^1 &= \lambda^1 e^1 + 2\mu^1 e_{rr}^1 + Q^1 e^1 \\
\sigma_{zz}^0 &= \lambda^0 e^1 + 2\mu^0 e_{zz}^0 \\
\sigma_{zz}^1 &= \lambda^1 e^1 + 2\mu^1 e_{zz}^1 + Q^1 e^1 \\
\sigma_{rz}^0 &= 2\mu^0 e_{rz}^0 \\
\sigma_{rz}^1 &= 2\mu^1 e_{rz}^1 \\
\nabla^2 &= \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + \partial_z^2 \\
e &= (\partial_r + r^{-1})u_r + \partial_z u_z \\
\epsilon &= (\partial_r + r^{-1})U_r + \partial_z U_z .
\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

### 7.4.2 Champs dans l'os poreux

L'application de la méthode de séparation des variables (dans le système de coordonnées cylindriques ; voir [57], p. 177) aux équations de Biot entraîne

$$\begin{aligned}
\tau^1(r, z) &= \bar{\tau}^1(z) J_0(\sqrt{\xi} r) \quad , \quad \sigma(r, z) = \bar{\sigma}^1(z) J_0(\sqrt{\xi} r), \\
e^1(r, z) &= \bar{e}^1(z) J_0(\sqrt{\xi} r) \quad , \quad e^1(r, z) = \bar{e}^1(z) J_0(\sqrt{\xi} r), \\
u_z(r, z) &= \bar{u}_z(z) J_0(\sqrt{\xi} r) \quad , \quad U_z(r, z) = \bar{U}_z(z) J_0(\sqrt{\xi} r), \\
u_r^1(r, z) &= \bar{u}_r^1(z) J_1(\sqrt{\xi} r) \quad , \quad U_r^1(r, z) = \bar{U}_r^1(z) J_1(\sqrt{\xi} r) ,
\end{aligned} \tag{7.4.2}$$

(avec  $J_n(\cdot)$  la fonction de Bessel d'ordre  $n$ ), sachant que :

$$\begin{aligned}
d_z^2 \bar{\tau}^1(z) + (a_\tau)^2 \bar{\tau}^1(z) + B_{12} \bar{\sigma}^1(z) &= 0 \\
d_z^2 \bar{\sigma}^1(z) + B_{21} \bar{\tau}^1(z) + (a_\sigma)^2 \bar{\sigma}^1(z) &= 0
\end{aligned} \tag{7.4.3}$$

Les formules qui déterminent  $a_\tau$  et  $a_\sigma$  sont données dans [57]. La solution générale des équations différentielles (7.4.3) s'écrit : (avec  $J_n(\cdot)$  la fonction de Bessel d'ordre  $n$ ), sachant que :

$$\bar{\tau}^1(z) = c_1 e^{im_+(z)} + c_2 e^{-im_+(z)} + c_3 e^{im_-(z)} + c_4 e^{-im_-(z)} , \tag{7.4.4}$$

$$\bar{\sigma}^1(z) = c_1 A_+ e^{im_+(z)} + c_2 A_+ e^{-im_+(z)} + c_3 A_- e^{im_-(z)} + c_4 A_- e^{-im_-(z)} , \tag{7.4.5}$$

où

$$A_+ = \frac{(m_+)^2 - (a_\tau)^2}{B_{12}} \quad , \quad A_- = \frac{(m_-)^2 - (a_\tau)^2}{B_{12}} \quad , \quad (7.4.6)$$

$$m_\pm := \sqrt{\frac{(a_\tau)^2 + (a_\sigma)^2 \pm \sqrt{[(a_\tau)^2 - (a_\sigma)^2]^2 + 4B_{12}B_{21}}}{2}} \quad . \quad (7.4.7)$$

Une autre conséquence de l'application de la méthode de séparation de variables aux équations de Biot s'écrit :

$$d_z^2 \bar{u}_z^1(z) + A_{31} d_z \bar{\tau}^1(z) + A_{32} d_z \bar{\sigma}^1(z) + (a_u)^2 \bar{u}_z^1(z) = 0 \quad , \quad (7.4.8)$$

dont la solution générale est

$$\begin{aligned} \bar{u}_z^1(z) = & c_1 i m_+ B_+ e^{im_+(z)} - c_2 i m_+ B_+ e^{-im_+(z)} + c_3 i m_- B_- e^{im_-(z)} - \\ & c_4 i m_- B_- e^{-im_-(z)} + c_5 e^{ia_u(z)} + c_6 e^{-ia_u(z)} \quad , \quad (7.4.9) \end{aligned}$$

où

$$B_+ = \frac{A_{32}(m_+)^2 - A_{32}(a_\tau)^2 + A_{31}B_{12}}{B_{12}[(m_+)^2 - (a_u)^2]} \quad , \quad B_- = \frac{A_{32}(m_-)^2 - A_{32}(a_\tau)^2 + A_{31}B_{12}}{B_{12}[(m_-)^2 - (a_\tau)^2]} \quad . \quad (7.4.10)$$

Par ailleurs :

$$\bar{U}_z^1(z) = -\frac{1}{p_{22}^1} [p_{12}^1 \bar{u}_z^1(z) + d_z \bar{\sigma}^1(z)] \quad , \quad (7.4.11)$$

ou, explicitement

$$\begin{aligned} \bar{U}_z^1(z) = & c_1 i m_+ D_+ e^{im_+(z)} - c_2 i m_+ D_+ e^{-im_+(z)} + c_3 i m_- D_- e^{im_-(z)} - \\ & c_4 i m_- D_- e^{-im_-(z)} - c_5 \frac{p_{11}^1}{p_{22}^1} e^{ia_u(z)} - c_6 \frac{p_{11}^1}{p_{22}^1} e^{-ia_u(z)} \quad , \quad (7.4.12) \end{aligned}$$

où

$$D_+ = -\frac{1}{p_{22}^1} [p_{12}^1 B_+ + A_+] \quad , \quad D_- = -\frac{1}{p_{22}^1} [p_{12}^1 B_- + A_-] \quad . \quad (7.4.13)$$

Des définitions de  $e^1$  et  $\epsilon^1$  il vient

$$\bar{u}_r^1(z) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} [\bar{e}_z^1(z) - d_z \bar{u}^1(z)] \quad , \quad \bar{U}_r^1(z) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} [\bar{\epsilon}_z^1(z) - d_z \bar{U}^1(z)] \quad , \quad (7.4.14)$$

où

$$\bar{e}_z^1(z) = a_{11} \bar{\tau}^1(z) - a_{12} \bar{\sigma}^1 \quad , \quad \bar{\epsilon}_z^1(z) = -a_{12} \bar{\tau}_z^1(z) + a_{22} \bar{\sigma}^1(z) \quad , \quad (7.4.15)$$

ou, plus explicitement :

$$\begin{aligned} \bar{e}_z^1(z) = c_1(a_{11} - a_{12}A_+)e^{im_+(z)} + c_2(a_{11} - a_{12}A_+)e^{-im_+(z)} + \\ c_3(a_{11} - a_{12}A_-)e^{im_-(z)} + c_4(a_{11} - a_{12}A_-)e^{-im_-(z)} , \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_z^1(z) = c_1(-a_{12} - a_{22}A_+)e^{im_+(z)} + c_2(-a_{12} + a_{22}A_+)e^{-im_+(z)} + \\ c_3(-a_{12} + a_{22}A_-)e^{im_-(z)} + c_4(-a_{12} + a_{22}A_-)e^{-im_-(z)} , \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^1(z) = c_1E_1e^{im_+(z)} + c_2E_2e^{-im_+(z)} + \\ c_3E_3e^{im_-(z)} + c_4E_4e^{-im_-(z)} - c_5ia_u(z)e^{ia_u(z)} + c_6ia_u(z)e^{-ia_u(z)} , \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

où

$$\begin{aligned} E_1 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} [a_{11} - a_{12}A_+ + (m_+)^2B_+] , \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} [a_{11} - a_{12}A_+ - (m_+)^2B_+] , \\ E_3 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} [a_{11} - a_{12}A_- + (m_-)^2B_-] , \quad E_4 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} [a_{11} - a_{12}A_- - (m_-)^2B_-] . \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

### 7.4.3 Champs dans la chair

#### Décomposition de Helmholtz

La décomposition, en termes de potentiels de Helmholtz, de l'équation des ondes dans un milieu élastique, donne, compte tenu des symétries évoquées plus haut :

$$u_r^0(r, z) = \partial_r \varphi(r, z) - \partial_z \psi(r, z) , \quad u_z^1(r, z) = \left( \partial_r + \frac{1}{r} \right) \psi(r, z) + \partial_z f \varphi(r, z) , \quad (7.4.20)$$

$$\nabla^2 \varphi(r, z) + (k_L^0)^2 \varphi(r, z) = 0 , \quad \nabla^2 \psi(r, z) + (k_T^0)^2 \psi(r, z) = 0 ; \quad (r, z) \in \Omega^0 , \quad (7.4.21)$$

où

$$k_L^0 = \frac{\omega}{c_L^0} , \quad k_T^0 = \frac{\omega}{c_T^0} , \quad (7.4.22)$$

$c_L^0 = \sqrt{\frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{\rho^0}}$  et  $c_T^0 = \sqrt{\frac{\mu^0}{\rho^0}}$  étant les vitesses de phase d'ondes volumiques longitudinales et transverses respectivement dans la chair (milieu supposé linéaire, élastique et isotrope).

Une fois de plus, l'application de la méthode de séparation de variables donne :

$$\varphi(r, z) = \bar{\varphi}(z)J_0(\sqrt{\xi}r) \quad , \quad \psi(r, z) = \bar{\psi}(z)J_1(\sqrt{\xi}r) \quad , \quad (7.4.23)$$

sachant que :

$$d_z^2 \bar{\varphi}(z) + (a_L)^2 \bar{\varphi}(z) = 0 \quad , \quad d_z^2 \bar{\psi}(z) + (a_T)^2 \bar{\psi}(z) = 0 \quad , \quad (7.4.24)$$

où

$$(a_L)^2 := (k_L^0)^2 - \xi \quad , \quad (a_T)^2 := (k_T^0)^2 - \xi. \quad (7.4.25)$$

### Potentiels incidents

Une solution de (7.4.24) est de la forme  $\varphi = e^{\pm ia_L z}$ ,  $\psi = e^{\pm ia_T z}$ . Nous choisissons le champ incident correspondant à la solution particulière

$$\varphi^i = A_\varphi^i e^{ia_L^i z} \quad , \quad \psi^i = A_\psi^i e^{ia_T^i z} \quad , \quad (7.4.26)$$

qui représente une onde élastique plane se propageant dans la direction des  $z$  positifs. Il est à noter que les amplitudes  $A_\varphi^i$  et  $A_\psi^i$  dépendent de  $\omega$  et :

$$(a_L^i)^2 := (k_L^0)^2 - \xi^i \quad , \quad (a_T^i)^2 := (k_T^0)^2 - \xi^i. \quad (7.4.27)$$

### Potentiels réfléchis et transmis

Les champs réfléchis et transmis sont (compte tenu de la condition d'ondes sortantes (7.3.5) :

$$\bar{\varphi}^0(z) - \bar{\varphi}^i(z) = c_7 e^{-ia_L z} \quad , \quad \bar{\psi}^0(z) - \bar{\psi}^i(z) = c_8 e^{-ia_T z} \quad ; \quad z \leq 0 \quad , \quad (7.4.28)$$

$$\bar{\varphi}^0(z) = c_9 e^{ia_L z} \quad , \quad \bar{\psi}^0(z) = c_{10} e^{ia_T z} \quad ; \quad z \geq L \quad , \quad (7.4.29)$$

respectivement, sachant que  $\bar{\varphi}^0(z)$  et  $\bar{\psi}^0(z)$  sont les potentiels des champs totaux.

## Champs et contraintes incidents et totaux

De (7.4.20) on obtient :

$$\begin{aligned}
u_r^i(r, z, \xi^i) &= -[\sqrt{\xi}\bar{\varphi}^i(z) + d_z\bar{\psi}^i(z)]J_0(\sqrt{\xi^i r}) := \bar{u}_r^i(z)J_0(\sqrt{\xi^i r}) \\
u_z^i(r, z, \xi^i) &= [d_z\bar{\varphi}^i(z) + \bar{\psi}^i(z)]J_0(\sqrt{\xi^i r}) := \bar{u}_z^i(z)J_0(\sqrt{\xi^i r}) \\
u_r^0(r, z, \xi) &= -[\sqrt{\xi}\bar{\varphi}^0(z) + d_z\bar{\psi}^0(z)]J_0(\sqrt{\xi r}) := \bar{u}_r^0(z)J_0(\sqrt{\xi r}) \\
u_z^0(r, z, \xi) &= [d_z\bar{\varphi}^0(z) + \bar{\psi}^0(z)]J_0(\sqrt{\xi r}) := \bar{u}_z^0(z)J_0(\sqrt{\xi r}) .
\end{aligned} \tag{7.4.30}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^i(r, z, \xi^i) &= \bar{\sigma}_{zz}^i(z)J_0(\sqrt{\xi^i r}) \\
\sigma_{rz}^i(r, z, \xi^i) &= \bar{\sigma}_{rz}^i(z)J_1(\sqrt{\xi^i r}) \\
\sigma_{zz}^0(r, z, \xi) &= \bar{\sigma}_{zz}^0(z)J_0(\sqrt{\xi r}) \\
\sigma_{rz}^0(r, z, \xi) &= \bar{\sigma}_{rz}^0(z)J_1(\sqrt{\xi r}) .
\end{aligned} \tag{7.4.31}$$

## 7.5 Application des conditions aux limites pour la résolution du problème direct

Nous avons dix conditions aux limites, i.e., (7.3.6)-(7.3.15), et dix coefficients inconnus  $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ .

L'introduction des représentations des champs, de leurs dérivées et des contraintes dans ces conditions aux limites conduit à un système linéaire d'équations algébriques équivalent à l'équation matricielle

$$\mathbf{E}\mathbf{f} = \mathbf{g} , \tag{7.5.1}$$

dans laquelle les éléments de la matrice  $E$  (que nous détaillons pas ici) dépendent tous de la porosité  $\phi$  ainsi que des autres paramètres de Biot et de la fréquence  $\omega$ . Le vecteur  $\mathbf{f}$  contient les coefficients inconnus  $c_1, c_2, \dots, c_{10}$  et le vecteur  $\mathbf{g}$  est lié à l'onde incidente ultrasonore.

Ainsi, en résolvant cette équation matricielle, i.e.,

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{g} , \tag{7.5.2}$$

on trouve les coefficients  $c_1, c_2, \dots, c_{10}$  et ainsi le champ  $\mathbf{u}^0(r, z, \xi)$ . Celui-ci n'est qu'une solution pour une valeur particulière de  $\xi$ . La solution générale est obtenue par la transformée

de Hankel

$$\mathbf{u}^0(r, z) = \int_0^\infty \bar{\mathbf{u}}^0(z, \xi) J_0(\sqrt{\xi}r) \sqrt{\xi} d\sqrt{\xi} , \quad (7.5.3)$$

sachant que :

$$\mathbf{u}^i(r, z) = \bar{\mathbf{u}}^i(z, \xi) J_0(\sqrt{\xi}r) . \quad (7.5.4)$$

Ainsi, on résout le problème direct de prédiction du champ réfléchi et transmis par la plaque-os lorsque celle-ci est sollicitée par l'onde ultrasonore.

## 7.6 Résultats

Nous avons calculé, au moyen des formules précédentes la réponse, en transmission, de la plaque poreuse à une onde plane ultrasonore monochromatique, et ce pour deux fréquences d'interrogation : 30 kHz et 300 kHz. Dans les graphiques ci-dessous (figs. 7.2-9.5) nous avons représenté le coefficient  $\|c_{10}\|$  (qui constitue une mesure de l'amplitude de l'onde transmise par la plaque-os) en fonction de la porosité  $\phi$ , et ce afin de déterminer si l'on peut espérer, par une mesure de la transmission, déterminer la porosité. Ceci semble être le cas en basses fréquences (30 kHz) sauf pour des porosités très proches de 1, mais n'être pas le cas en hautes fréquences (300 kHz) car on obtient généralement plusieurs valeurs de la porosité pour une valeur mesurée de l'amplitude de l'onde transmise.

Autrement dit, l'inversion pour  $\phi$  n'est pas unique si l'on interroge le milieu avec une onde monochromatique haute fréquence.

Ceci montre qu'il est probablement nécessaire de disposer de davantage de données (e.g., des réponses pour plusieurs fréquences d'interrogation, ou des réponses temporelles pour une interrogation impulsive) pour pouvoir mener à bien une identification de la porosité (et peut-être d'autres paramètres de Biot) de l'os.

Ceci dit, les données que l'on mesure avec cette expérience ne peuvent pas être obtenues *in vivo*, ou du moins très imparfaitement, car hormis le calcaneum, il n'existe pas d'os majoritairement trabéculaire qui ressemble à une plaque à faces bien planes et parallèles.



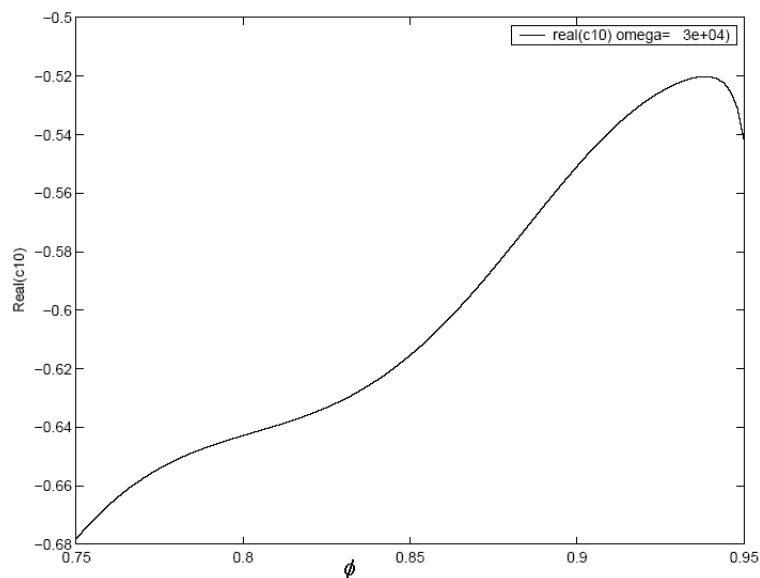


FIG. 7.2 – Courbe de sensibilité du champ transmis (plus particulièrement, du coefficient  $c_{10}$ ) par un spécimen d'os trabéculaire d'épaisseur  $L = 0,075m$  en fonction de la porosité  $\phi$  pour une onde interrogatrice de fréquence  $\nu = \omega/2\pi = 30KHz$ .

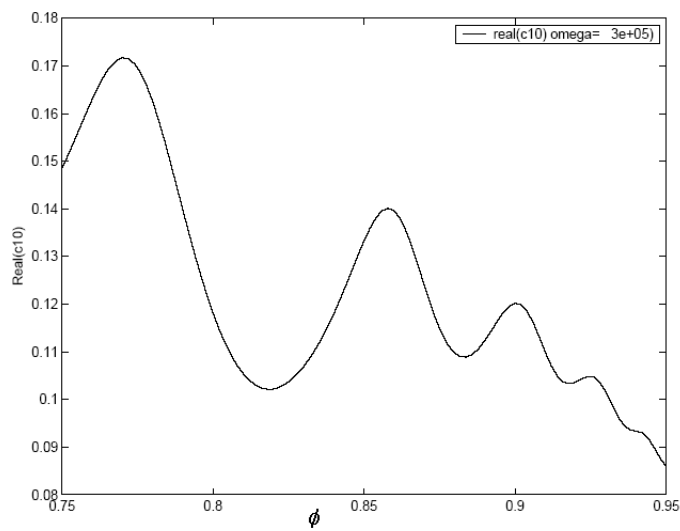


FIG. 7.3 – Courbe de sensibilité du champ transmis (plus particulièrement, du coefficient  $c_{10}$ ) par un spécimen d'os trabéculaire d'épaisseur  $L = 0,075m$  en fonction de la porosité  $\phi$  pour une onde interrogatrice de fréquence  $\nu = \omega/2\pi = 300KHz$ .

Symbole	Valeur	Paramètre
$\rho_f$	$950kg\ m^{-3}$	densité du fluide interstitiel
$\rho_s$	$1960kg\ m^{-3}$	densité du matériau solide de la matrice
$K_o$	$Re(K_o) = 1GPa$ $Im(K_o) = 0.1Re(K_o)/\pi$	module d'incompressibilité (complexe) du squelette drainé
$\mu$	$20GPa$	module de cisaillement des particules solides
$K_s$	$20GPa$	module d'incompressibilité de la partie solide du matériau poreux
$K_f$	$2GPa$	module d'incompressibilité du fluide interstitiel
$K_s$	$20GPa$	module d'incompressibilité de la partie solide du matériau poreux
$\phi$	variable	porosité
$\eta$	$1.5kg\ m\ s^{-1}$	viscosité absolue du fluide interstitiel
$\kappa$	$10^{-8}m\ s^{-1}$	perméabilité
$\alpha$	$1 - 0,25(1 - 1/\phi)$	tortuosité
$a$	$0,0015m$	dimension caractéristique des pores
$\rho_m$	1040	Densité de la chair
$\lambda^0$	$2.56GPa$	coefficient de Lamé de la chair
$\mu^0$	$4 \times 10^{-6}GPa$	module de cisaillement de la chair

TAB. 7.2 – Paramètres employés dans les calculs.



## Chapitre 8

# Génération *in vitro* de données réelles de réponse ultrasonore de plaques-os et comparaison de ces données avec les prédictions de la théorie BJKD

Les expériences *in vitro* de Fella et al. [132] fournissent les signaux ultrasonores réfléchis et transmis par des os saturés de fluide. Ces signaux sont comparés à ceux prédits par la théorie de Biot.

### 8.1 Introduction

Le tissu osseux trabéculaire est essentiellement une matrice de tiges et plaques solides connectées, immergée dans un milieu fluide (la moelle), et est donc accessible à une étude, quant à sa réponse à une sollicitation mécanique, par la théorie de Biot [87, 88, 177].

Les premiers travaux de caractérisation ultrasonore (e.g., de la porosité) des os trabéculaires sont ceux de McKelvie et Palmer, Williams, et Hosokawa et Otani [262, 380, 192]. Ces publications ont été suivies par celles de [218, 394, 52, 244, 272, 132, 150, 154, 59] concernant essentiellement la même thématique.

La présente contribution se situe entre ces derniers travaux et nos récentes publications [336, 337].

Les travaux de [262, 192], concernent l'utilisation de données expérimentales *in vitro*,

relatives aux ultrasons transmis par un échantillon d'os trabéculaire en forme de plaque immergé dans de l'eau, pour reconstruire certains paramètres de Biot du calcaneum humain normal et ostéoporétique. Ces auteurs montrent que la théorie de Biot rend mieux compte des résultats expérimentaux que les théories de diffraction multiple dans un milieu divisé. L'investigation de [192] est du même type, mais l'os-plaque est obtenu par découpage du fémur d'un boeuf. Ces auteurs montrent que la théorie de Biot fournit une meilleure prédiction de la vitesse de phase des ondes longitudinales transmises que de l'atténuation.

Dès le début de leurs recherches sur les os, Fella et al. [132] ont pris la partie de faire des expériences ultrasonores sur des *os humains* extraits de cadavres. Il est donc intéressant de comparer leurs résultats avec ceux de Hosokawa et Otani [192], ainsi qu'avec ceux de Kaczmarek et al. [218] relatifs aux os bovins. Notons qu'en dehors de cette différence de type d'os, Fella et al. n'emploient qu'un seul spécimen-plaque alors que Hosokawa et Otani, ainsi que Kaczmarek et al. emploient deux spécimens-plaques ayant des épaisseurs différentes.

## 8.2 Description de l'expérience de Fella et al.

La tête d'un fémur est coupé de façon à obtenir des tranches ayant la forme de plaques approximativement circulaires (fig. 8.1).

Une des ces plaques est immergée dans l'eau d'un bac et positionnée entre deux transducteurs comme dans les figs. 8.2 (vue de loin) et 8.3 (vue de près).

## 8.3 Allure des signaux transmis

Dans les figs. 8.4 et 8.5 sont montrées les courbes de réponse (signaux transmis) et les atténuations pour une sollicitation basse et haute fréquence. On note dans les deux cas l'existence marquée des deux ondes longitudinales (lente et rapide) de Biot. On remarque aussi que l'onde rapide est beaucoup plus atténuée pour une excitation basse fréquence que pour une excitation haute fréquence (ceci peut fournir une justification du passage du modèle de Biot au modèle solide viscoélastique évoqué dans la sect. 2.11). De longues plages quasi-linéaires dans les courbes de  $20 \log \alpha(\omega)$  (comme celles trouvées par Langton et al.

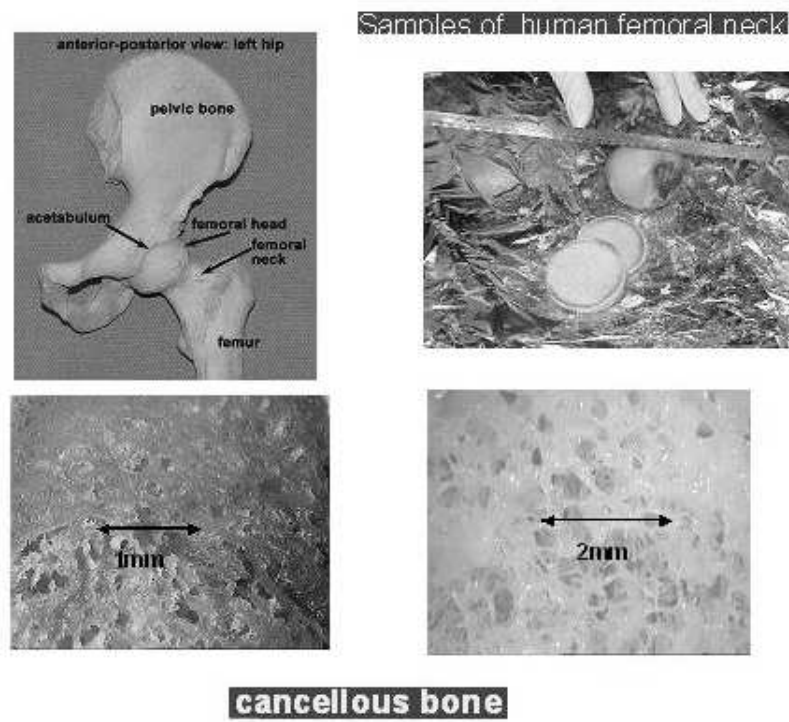


FIG. 8.1 – Découpage en tranches d'une tête de fémur humain

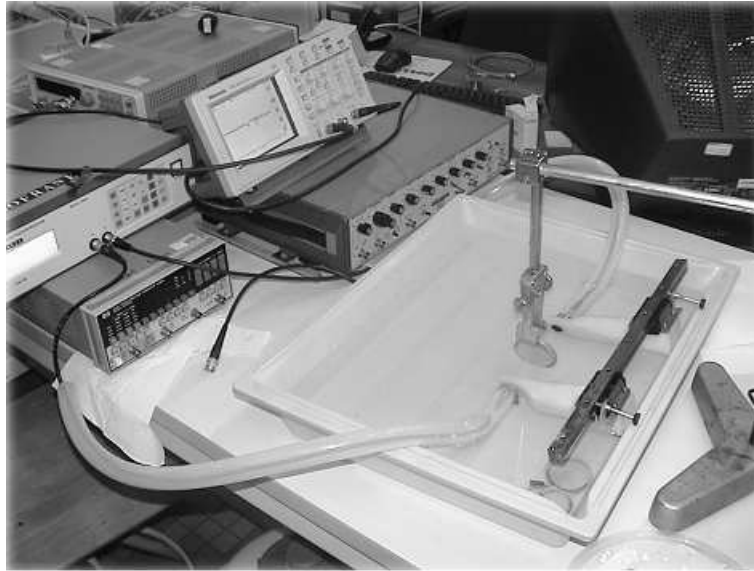


FIG. 8.2 – Photographie de loin de l'expérience de Fellah et al. [132]

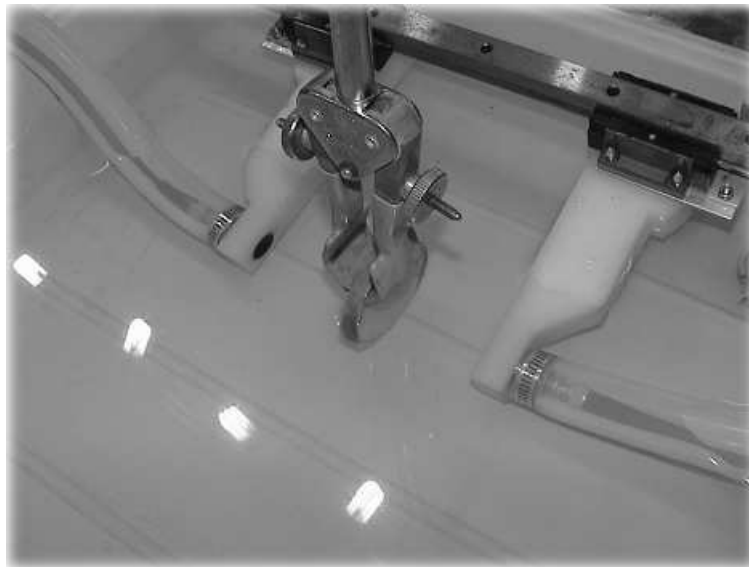


FIG. 8.3 – Photographie de près de l'expérience de Fellah et al. [132]

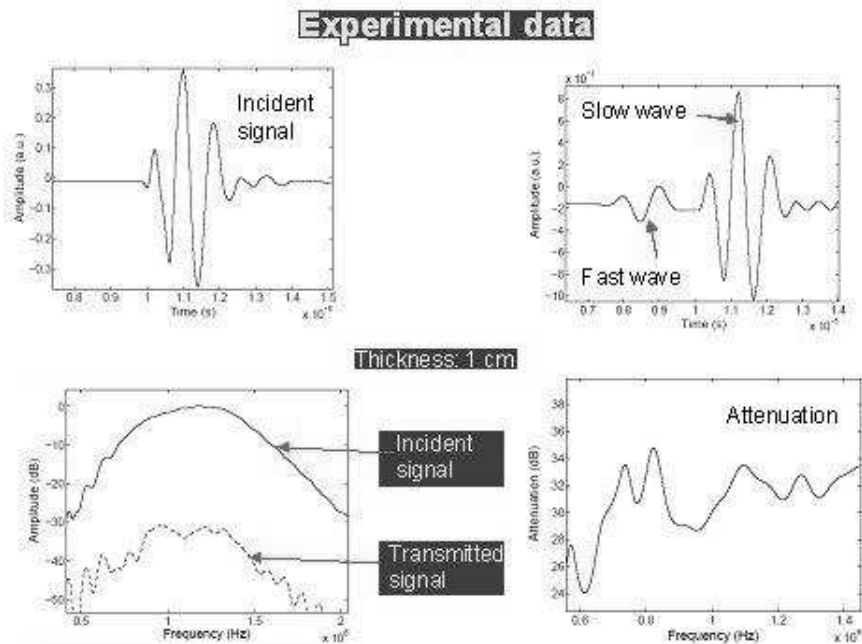


FIG. 8.4 – Expériences de Fella et al. sur la transmission d’une impulsion ultrasonore, dont le spectre est concentré dans les *basses fréquences*, à travers un spécimen d’os trabéculaire, en forme de plaque, extrait d’un cadavre humain, et qui est plongé dans l’eau. Panneau haut-gauche : tracé temporel de l’impulsion incidente. Panneau haut-droit : tracé temporel de l’impulsion au niveau du récepteur après traversée de l’os (on remarque la présence des ondes de Biot  $Ll$  et  $Lr$ ). Panneau bas-gauche : spectres des signaux incidents et transmis. Panneau bas-droite :  $20 \log \alpha(\omega)$ .

[236]) sont difficiles, sinon impossibles à discerner.

## 8.4 Comparaison avec les prédictions du modèle BJKD

Dès le début de leurs investigations [132], Fella et al. ont opté pour le modèle Biot-JKD comme description de base des mouvements du milieu poreux constitué par l’os. De plus, ils ont réussi à construire un modèle spatio-temporel des champs réfléchis et transmis en réponse à une onde plane compressive frappant la plaque-os conçu comme un milieu poroélastique au sens de BJKD.

Ils ont ensuite comparé ce modèle sur toute la durée significative avec le signal



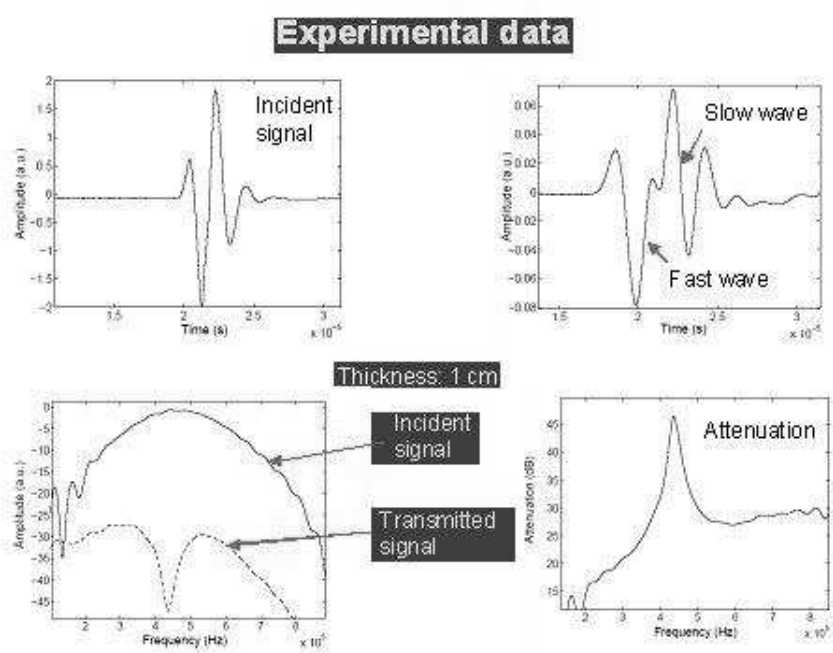


FIG. 8.5 – Expériences de Fella et al. sur la transmission d’une impulsion ultrasonore, dont le spectre est concentré dans les *hautes fréquences*, à travers un spécimen d’os trabéculaire, en forme de plaque, extrait d’un cadavre humain, et qui est plongé dans l’eau. Panneau haut-gauche : tracé temporelle de l’impulsion incidente. Panneau haut-droit : tracé temporelle de l’impulsion au niveau du récepteur après traversée de l’os (on remarque la présence des ondes de Biot  $Pl$  et  $Pr$ ). Panneau bas-gauche : spectres des signaux incidents et transmis. Panneau bas-droite :  $20 \log \alpha(\omega)$ .

expérimental et trouvé un *bon accord* pour des choix plausibles des paramètres BJKD comme témoignent les figs. 8.6 et 8.7. Enfin, ils ont varié ces paramètres pour établir les sensibilités, notamment à l'égard de la porosité et la tortuosité.

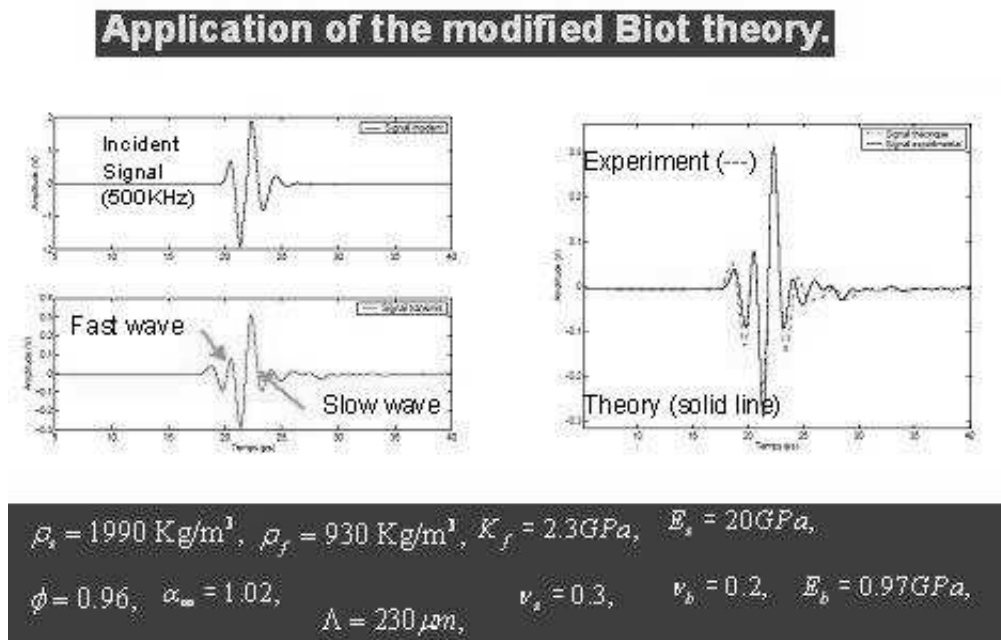


FIG. 8.6 – Expériences de Fellah sur la transmission d’une impulsion ultrasonore, dont le spectre est concentré dans les *basses fréquences*, à travers un spécimen d’os trabéculaire, en forme de plaque, extrait d’un cadavre humain, et qui est plongé dans l’eau. Panneau haut-gauche : tracé temporelle de l’impulsion incidente. Panneau bas-gauche : tracé temporelle de l’impulsion ultrasonore au niveau du récepteur. Panneau droite : la courbe pleine désigne ce que donne la simulation du signal transmis avec des paramètres BJKD plausibles ; la courbe en pointillées désigne la courbe expérimentale pour le signal transmis.

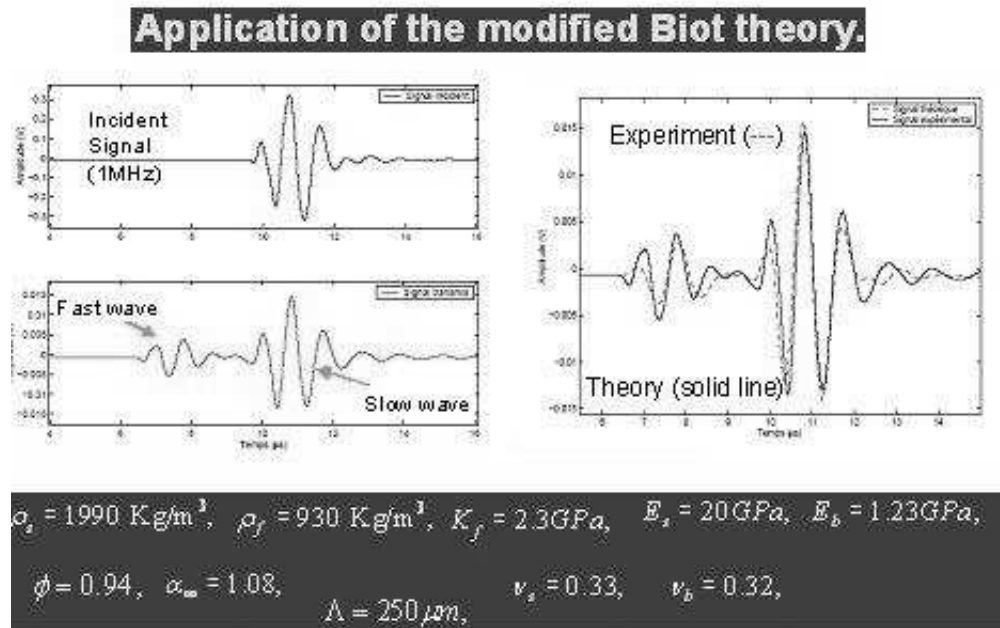


FIG. 8.7 – Expériences de Fellah sur la transmission d’une impulsion ultrasonore, dont le spectre est concentré dans les *hautes fréquences*, à travers un spécimen d’os trabéculaire, en forme de plaque, extrait d’un cadavre humain, et qui est plongé dans l’eau. Panneau haut-gauche : tracé temporelle de l’impulsion incidente. Panneau bas-gauche : tracé temporelle de l’impulsion ultrasonore au niveau du récepteur. Panneau droite : la courbe pleine désigne ce que donne la simulation du signal transmis avec des paramètres BJKD plausibles ; la courbe en pointillées désigne la courbe expérimentale pour le signal transmis.



## Chapitre 9

# Inversion de données ultrasonores réelles pour reconstruire quelques paramètres de Biot-JKD des os

Des expériences sont effectuées *in vitro* pour acquérir le champ ultrasonore transmis par des os saturés de fluide, et les données ainsi acquises sont employées pour reconstruire quelques paramètres de Biot-JKD d'échantillons d'os humains.

### 9.1 Introduction

Les travaux fondateurs de McKelvie et Palmer [262], Williams [380], Hosokawa et Otani [192], Kaczmarek et al. 2002 [218] faisaient appel à la théorie de Biot pour prédire la vitesse et l'atténuation des ondes se propageant dans des plaques d'os. Par ailleurs, ces auteurs comparaient leurs prédictions avec des mesures ultrasonores *in vitro* sur des os immergés dans de l'eau. Ces études portaient donc sur des *problèmes directs*.

La présente contribution, contrairement à celles que nous venons d'évoquer, met l'accent sur le *problème inverse* de reconstruction des paramètres de Biot (plus exactement, ceux du modèle BJKD). Elle partage avec les travaux fondateurs, le fait de s'appuyer sur des *données réelles* acquises expérimentalement. De plus, ces données sont recueillies sur des *os humains* *in vitro*, et traitées au cours d'une inversion faisant appel à un *estimateur BJKD*. Ce travail a fait l'objet de publications récentes [336, 337] dont nous résumons ici le contenu.

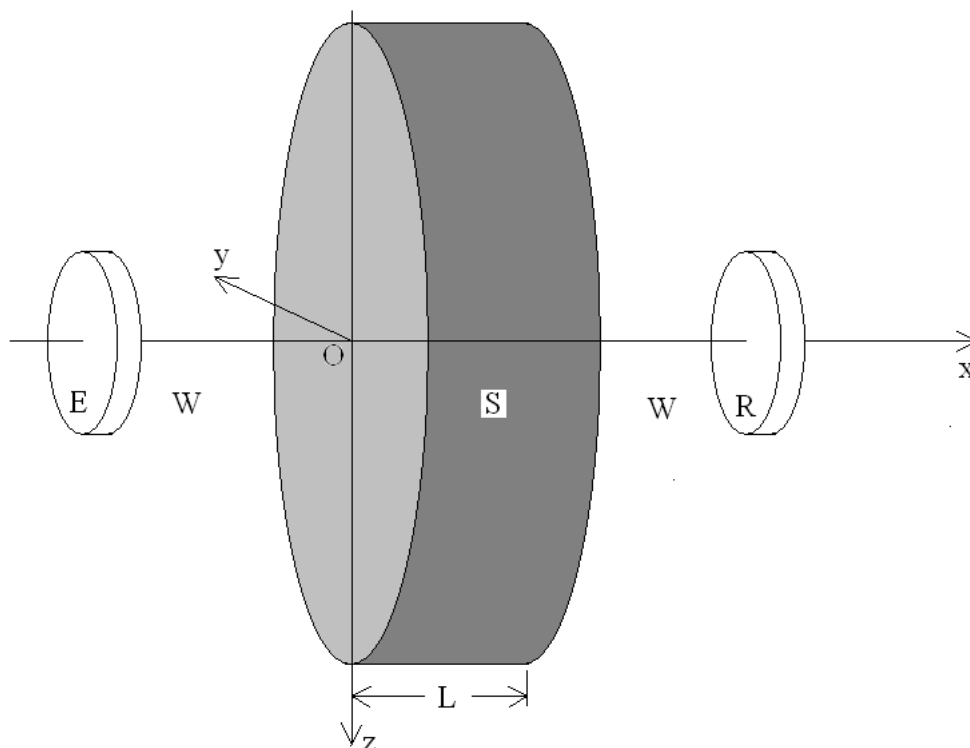


FIG. 9.1 – Vue d'un spécimen (S) en forme de disque épais d'os trabéculaire flanqué à gauche et à droite par un fluide ambiant (W) (en fait, S est plongé dans ce fluide). Une onde ultrasonore (E) est émise par le transducteur gauche, traverse (W), l'os (S), et de nouveau (W), pour être reçue par un deuxième transducteur (R).

A présent, il s'agit donc de faire une caractérisation assez fine de l'os, en identifiant quelques-uns de ses paramètres BJKD : la porosité  $\phi$ , la tortuosité  $\alpha_\infty$ , la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$ , le module de Young  $E_0^1$  et le coefficient de Poisson  $\nu_0^1$  du squelette. Cette identification se fait à partir de données constituées par des signaux ultrasonores transmis.

## 9.2 Description idéalisée de la configuration

La configuration des expériences est la même que dans le chap. 8. Elle est schématiquement décrite dans la fig. 9.1. L'onde ultrasonore interrogatrice est émise par un transducteur (E), traverse le fluide ambiant (l'eau W), est en partie réfléchi par le spécimen d'os (S supposé être un milieu poroélastique au sens de Biot-JKD) en forme de plaque et re-traverse W pour être reçue sur E, et est en partie transmise par le spécimen d'os (d'épaisseur  $L$ ), traverse W, pour enfin être reçue sur le transducteur R.

Pour simplifier le problème inverse, nous supposons que l'os, le fluide ambiant, et le champ émis par E sont invariants par rapport aux coordonnées  $y, z$ , du repère  $Oxyz$ , dont l'origine  $O$  est au centre de l'os sur sa face avant. Ceci veut dire que E est infiniment loin de  $O$ , i.e., l'onde incidente est supposée être plane en arrivant sur l'os.

De plus, pour les besoins de l'analyse lors de l'inversion, nous négligeons la diffraction par la plaque-os, en supposant celle-ci d'être infiniment large suivant  $y$  et  $z$ . De plus, nous supposons que l'onde incidente frappe la plaque en incidence normale. Ceci veut dire que le champ élastodynamique ne dépendra que de  $x$ , i.e., *le problème est unidimensionnel*.

Les domaines gauche et droite occupés par le fluide ambiant sont  $\Omega_0^-$  et  $\Omega_0^-$  respectivement. Le domaine occupé par l'os est le domaine  $\Omega_1$ . Un point situé dans ces domaines est défini par sa coordonnée  $x$  du fait de l'invariance par rapport à  $y, z$  évoquée plus haut.

Le fluide ambiant est linéaire, homogène et isotrope caractérisé par sa densité  $\rho^0$  et ses constantes de Lamé  $\lambda^0$  et  $\mu^0 = 0$ .

L'os est un milieu poroélastique, linéaire, macroscopiquement homogène et isotrope, caractérisée par ses paramètres de BJKD :  $\rho_f^1, \rho_s^1, K_o^1, K_f^1, K_s^1, \phi, \eta^1, \kappa^1, \alpha_\infty^1, \Lambda^1, a^1, E_o^1$  ((module de Young du squelette) et  $\nu_o^1$  (coefficient de Poisson du squelette) pouvant remplacer  $K_o^1$  et  $\mu^1$  du fait que  $K_o^1 = \frac{E_o^1}{3(1-2\nu_o^1)}$  et  $\mu^1 = \frac{E_o^1}{2(1+2\nu_o^1)}$ .

L'onde de pression incidente dans  $\Omega_0^+$  est désignée par  $p^i(x, t)$ . Elle donne lieu, après interaction avec la plaque-os, à un champ de pression réfléchi dans  $\Omega_0^+$  désignée par  $p^{0r}(x, t)$ , et à un champ de pression transmis dans  $\Omega_0^+$  désigné par  $p^{0t}(x, t)$ , sachant que c'est dans  $\Omega_0^+$  que s'effectuent les mesures. Les champs dans  $\Omega_0^-$  et  $\Omega_1$  ne sont pas mesurés.

Les ondes incidente, réfléchies et transmises sont toutes des ondes longitudinales (L),



puisque'il n'est pas possible de propager une onde de cisaillement dans l'eau. Après la traversée par la face avant de la plaque-os, l'onde incidente donne lieu dans la plaque à une onde longitudinale (L) rapide (Lr) et à une onde longitudinale lente (Ll), l'onde de cisaillement (qui normalement peut se propager dans un solide ou milieu poroélastique) disparaissant du fait de l'incidence normale et de la nature quasi-planaire de la sollicitation. Quand les deux ondes L, voyageant à différentes vitesses, rencontrent la deuxième face de la plaque, un effet semblable a lieu : une partie est transmise dans le fluide sous forme de deux ondes longitudinales Lr et Ll, et l'autre partie est réfléchiée comme ondes Lr et Ll. Donc, le champ  $p^t(x, t)$  se divise en deux ondes et le signal en un point  $x$  en deux signaux associés aux ondes Lr et Ll.

Le signal reçu sur  $R$  prend la forme

$$p^{0t}(x, t) = \int_0^\infty \mathcal{T}(\tau) p^i \left[ t - \tau - \frac{(x - L)}{c^0} \right] d\tau \quad ; \quad x > L \quad (9.2.1)$$

où  $\mathcal{T}(\tau)$  est l'opérateur de transmission dont le spectre est donné dans [336, 337]. Ce spectre est obtenu à partir des équations BJKD et des conditions aux limites et de rayonnement du problème. Il est important d'observer que son expression est explicite, de sorte que la seule réelle difficulté (toute relative du reste) est de calculer numériquement l'intégrale de (9.2.1) pour obtenir  $p^{0t}(x, t)$ .

*Remarque* Bien entendu,  $\mathcal{T}(\tau)$  est fonction de tous les paramètres BJKD de l'os, de sorte que l'on se servira de (9.2.1) comme estimateur pour reconstruire ces paramètres à partir du signal transmis acquis.

## 9.3 Acquisition données

### 9.3.1 Dispositif d'acquisition de données

Ce dispositif est décrit dans la fig. 9.2

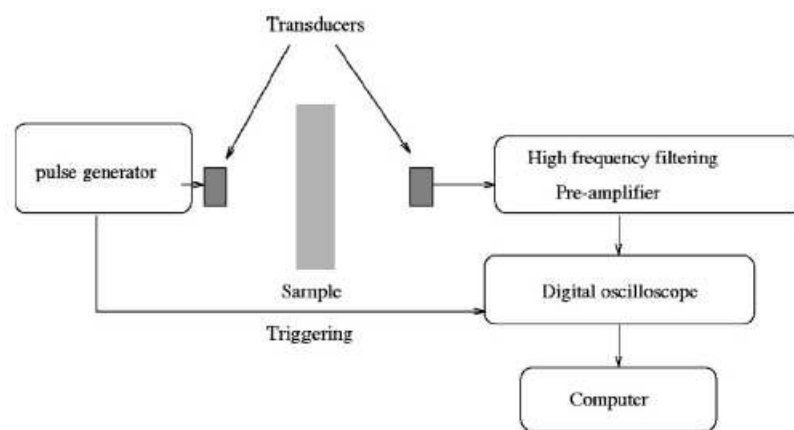


FIG. 9.2 – Vue du montage expérimental.

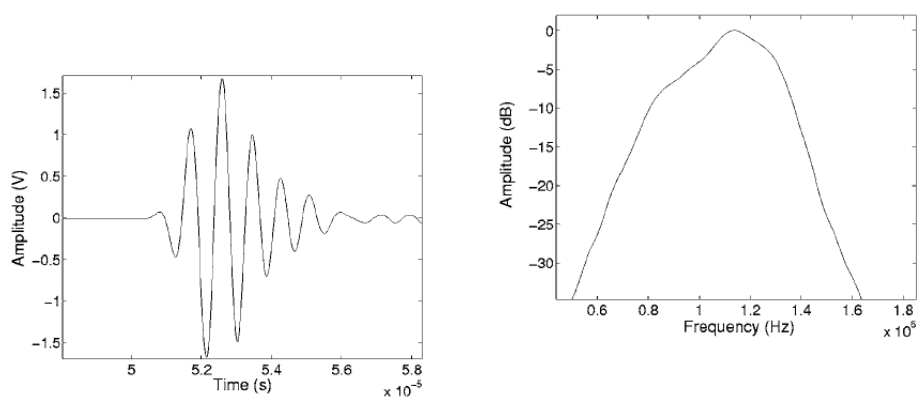


FIG. 9.3 – Allure du signal ultrasonore émis et de son spectre.

### 9.3.2 Modus operandi d'acquisition

L'expérience est réalisée *dans l'eau* à l'aide de deux transducteurs piézoélectriques plats à large bande, Panametrics A 303S avec une fréquence centrale d'environ 1 mégahertz, et un diamètre de 1 centimètre. La taille du faisceau ultrasonore rayonné par E est plus petite que le diamètre de la plaque-os en arrivant sur celle-ci. Les impulsions sont fournies par un pulser/récepteur Panametrics 5058PR. Le montage expérimental est présenté dans la fig. 9.2.

Les allures du signal émis et de son spectre se devinent dans la fig. 9.3. Ce signal est reproductible d'un tir à l'autre.

Le bruit de mesure est enlevé en faisant une moyenne sur 1000 acquisitions.

Trois échantillons ( $M_1$   $M_2$ ,  $M_3$ ) à faces quasi parallèles sont usinés à partir de tranches de têtes fémorales et de cous fémoraux d'os spongieux humains.

Le fluide dans les pores (sang et moelle) est enlevé des échantillons d'os avant que ceux-ci soient immergés dans la cuve. Après immersion, ils se saturent de l'eau de la cuve.

## 9.4 Traitement des données

### 9.4.1 Allure des signaux acquis

A titre d'exemple, comparons, dans la fig. 9.4 l'impulsion courte sollicitant l'os fémoral  $M_1$  et le signal reçu sur le transducteur  $R$ . On distingue dans le signal transmis reçu une phase qui arrive avant le début du signal émis. Il s'agit, à n'en pas douter, de la trace de l'onde Lr de Biot. La deuxième phase arrive sur  $R$  avec un léger retard et ne peut être autre chose que la trace de l'onde Ll de Biot. Ce type de réponse est observé expérimentalement sur les trois échantillons d'os de têtes fémorales humaines.

### 9.4.2 Sensibilité de la vitesse vis-à-vis des paramètres

Avant de traiter les signaux en vue de l'inversion, il est indispensable d'évaluer leur sensibilité vis-à-vis des différents paramètres à reconstruire. Une telle étude a déjà été entreprise dans [132] pour  $\phi$ ,  $\alpha_\infty$  et  $\Lambda$ . Ici, nous déterminons la sensibilité vis-à-vis de  $E_0^1$  et  $\nu_0^1$ .

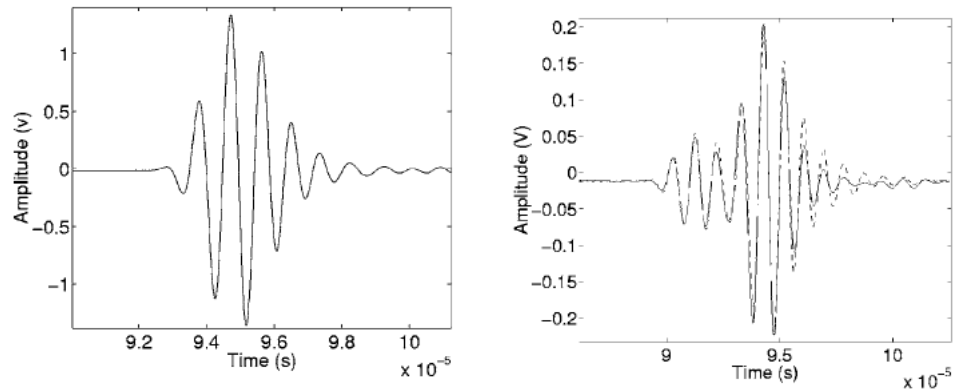


FIG. 9.4 – Expérience sur l'échantillon  $M_1$ . A gauche : le signal ultrasonore incident (gauche) et a droite : le signal transmis reçu sur le transducteur  $R$ , les courbes expérimentales étant continues, et les courbes simulées étant en tirets.

Les signaux qui vont être traités pour reconstruire ces paramètres en dépendent à des degrés divers. Plutôt que d'évaluer cette dépendance sur tout le signal, nous le faisons sur les spectres de vitesse des phases  $L_l$  et  $L_r$ , obtenus par fenêtrage temporel. De plus, nous faisons cette étude de sensibilité en nous servant de notre modèle BJKD.

Faisons les simulations avec le signal incident de la fig. 9.3 et une plaque-os ayant les caractéristiques suivantes :  $L = 12,5 \text{ mm}$ ,  $\phi = 0,9$ ,  $\alpha_\infty = 1,13$ ,  $\eta = 10^{-3} \text{ kg m s}^{-1}$ ,  $\rho_f^1 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\Lambda = 8 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\rho_s^1 = 1990 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $K_f^1 = 2,4 \text{ GPa}$ ,  $\nu_s^1 = 0,35$ ,  $E_s^1 = 10 \text{ GPa}$ ,  $\nu_0^1 = 0,25$  et  $E_0^1 = 4,16 \text{ GPa}$ .

Nous comparons dans la fig. 9.5 les spectres de vitesse pour deux choix de  $E_0^1$ . Nous y voyons que les vitesses des ondes  $L_r$  et  $L_l$  sont sensibles à  $E_0^1$ .

Nous comparons dans la fig. 9.6 les spectres de vitesse pour deux choix de  $\nu_0^1$  et y voyons que les vitesses des ondes  $L_r$  et  $L_l$  sont sensibles à  $\nu_0^1$ .

Ainsi, nous pouvons nous attendre à pouvoir reconstruire  $E_0^1$  et  $\nu_0^1$  avec une bonne précision.

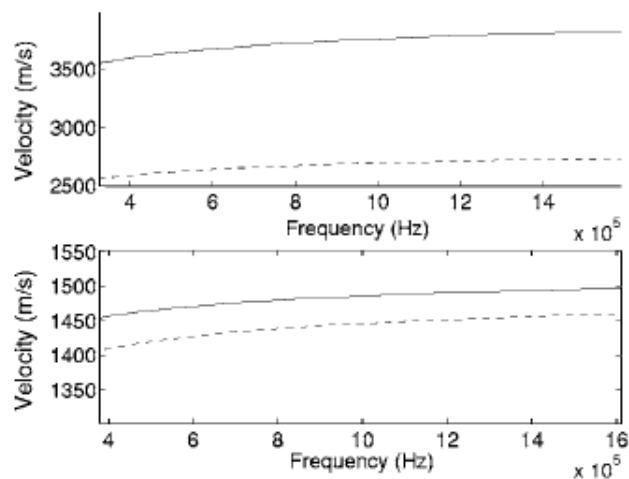


FIG. 9.5 – Spectres de vitesses de signaux transmis simulés. Les courbes continues correspondent à  $E_0^1 = 4,16 \text{ GPa}$  et les courbes discontinues à  $E_0^1 = 2,08 \text{ GPa}$ . Les courbes du haut sont relatives aux ondes Lr et celles du bas aux ondes Ll.

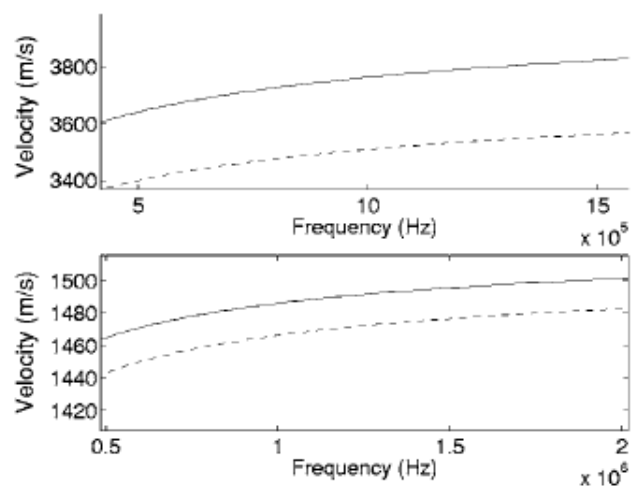


FIG. 9.6 – Spectres de vitesses de signaux transmis simulés. Les courbes continues correspondent à  $\nu_0^1 = 0,25$  et les courbes discontinues à  $\nu_0^1 = 0,125$ . Les courbes du haut sont relatives aux ondes Lr et celles du bas aux ondes Ll.

### 9.4.3 Emploi des signaux (inversion) pour la reconstruction des paramètres

Le problème inverse est de trouver les paramètres  $\phi$ ,  $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$ ,  $E_0^1$ ,  $\nu_0^1$  qui minimisent la fonction-coût

$$J(\phi, \alpha, \Lambda, E_0^1, \nu_0^1) = \sum_{j=1}^{j=n} [p_{exp}^{0t}(x, t_j) - p^{0t}(x, t_j)]^2 dt, \quad (9.4.1)$$

traduisant l'écart entre le signal transmis acquis et le modèle de ce signal (i.e., le prédicteur constitué par l'éq. (9.2.1)). Dans cette expression,  $p_{exp}^{0t}(x, t_j)$  est le signal transmis expérimentale à l'instant  $t_j$ ,  $p^t(x, t_j)$  son homologue calculé à partir de (9.2.1)), et  $n$  le nombre d'échantillons temporels pris sur la durée du signal.

Comme d'habitude, il est utile d'observer l'allure de la fonction-coût vis-à-vis de variations des paramètres à reconstruire, notamment pour voir si l'on est confronté à des problèmes d'unicité se traduisant par l'existence de plusieurs minimas. Ce type de démarche ne peut se faire graphiquement (puisque l'on ne dispose que de trois dimensions) qu'en variant deux paramètres à la fois. Donc, il faut donner des valeurs aux autres paramètres non-représentées sur ces courbes. Nous le faisons par l'emploi de valeurs raisonnables et/ou que l'on trouve dans la littérature [12].

S'agissant de l'os  $M_1$  d'épaisseur  $M = 11,2 \text{ mm}$  et de densité  $\rho_s = 1990 \text{ kg m}^{-3}$ , nous choisissons a priori  $E_s = 13 \text{ GPa}$  et  $\nu_s = 0,3$  et obtenons les fonctions-coût des figs. 9.7-9.11. Il est à noter que ces courbes ne s'appliquent que dans des intervalles des paramètres autour du minimum global, ce qui veut dire que d'autres minimas (locaux) existent en dehors de ces intervalles, d'où l'importance (déjà soulignée dans le chap. 4) de bien choisir les valeurs initiales dans l'algorithme de minimisation de  $J$  afin d'éviter les minimas locaux (évidemment, il faut que la qualité des mesures et de l'estimateur soit telle que le minimum globale de  $J$  indique la bonne solution du problème inverse).

En injectant les valeurs des paramètres trouvés par l'algorithme d'inversion dans le modèle BJKD du signal transmis (9.2.1) nous obtenons un signal qui est comparé, dans la fig. 9.12, au signal expérimental. Cette comparaison montre que les valeurs reconstruites des paramètres  $\phi$ ,  $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$ ,  $E_0^1$  et  $\nu_0^1$  sont probablement proches des vraies valeurs.

La même démarche pour les échantillons  $M_2$  et  $M_3$  conduit aux résultats des figs. 9.13

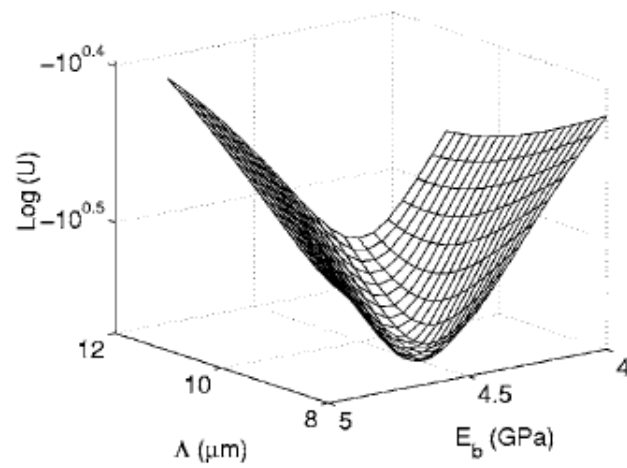


FIG. 9.7 – Variation de la fonction-coût pour l'os  $M_1$  vis-à-vis de  $\Lambda$  et  $E_0^1$ .

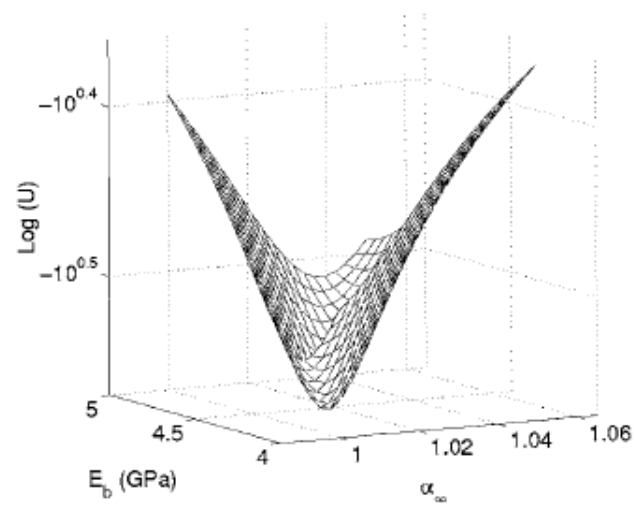


FIG. 9.8 – Variation de la fonction-coût pour l'os  $M_1$  vis-à-vis de  $\alpha_\infty$  et  $E_0^1$ .

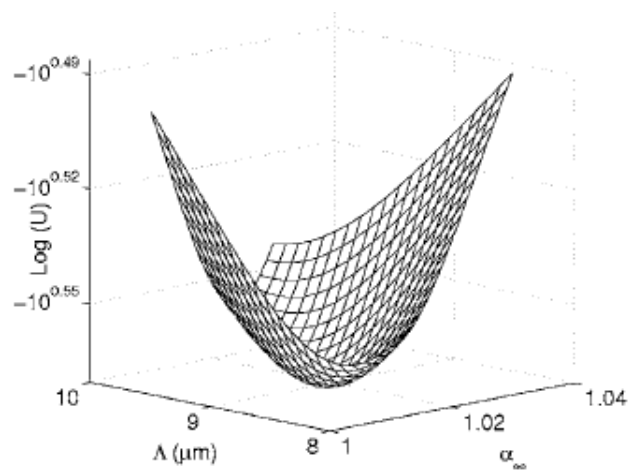


FIG. 9.9 – Variation de la fonction-coût pour l'os  $M_1$  vis-à-vis de  $\Lambda$  et  $\alpha_\infty$ .

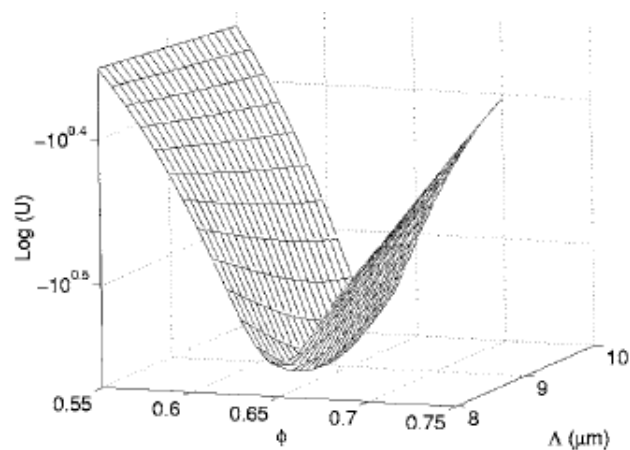


FIG. 9.10 – Variation de la fonction-coût pour l'os  $M_1$  vis-à-vis de  $\phi$  et  $\Lambda$ .



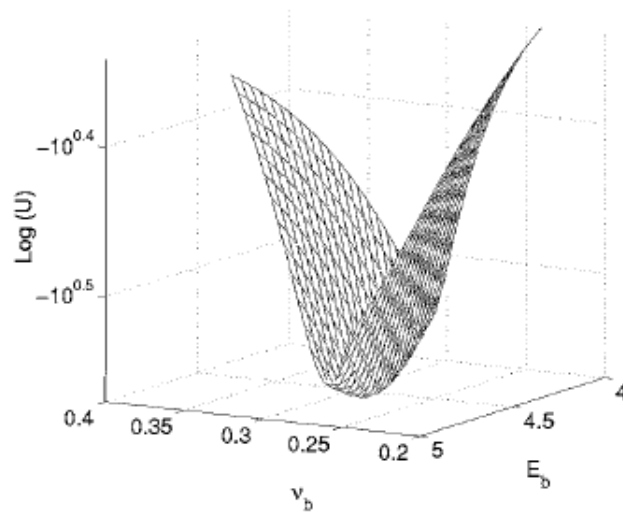


FIG. 9.11 – Variation de la fonction-coût pour l'os  $M_1$  vis-à-vis de  $\nu_0^1$  et  $E_0^1$ .

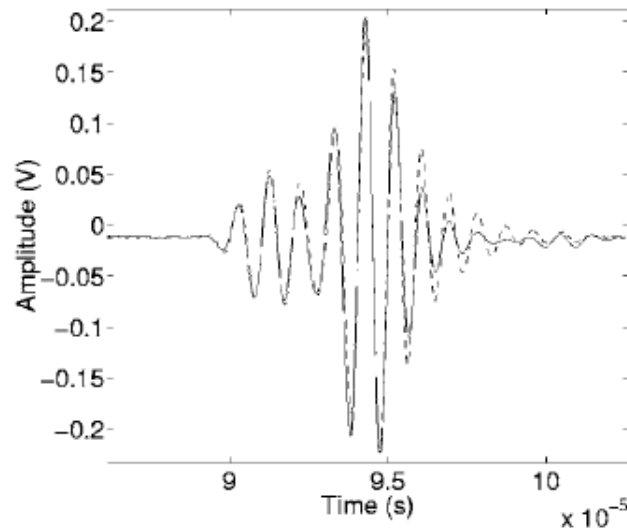


FIG. 9.12 – Echantillon  $M_1$ . Comparaison des signaux transmis reçu sur le transducteur  $R$ , les courbes expérimentales étant continues, et les courbes simulées discontinues, avec les paramètres reconstruits  $\phi$ ,  $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$ ,  $E_0^1$  et  $\nu_0^1$ .

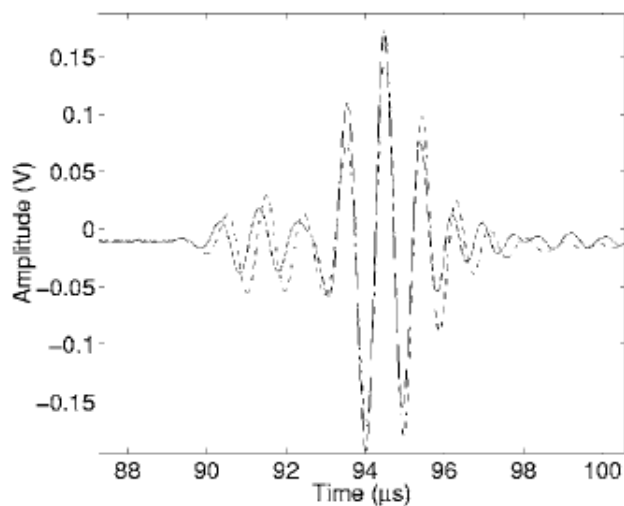


FIG. 9.13 – Echantillon  $M_2$ . Comparaison des signaux transmis reçu sur le transducteur  $R$ , les courbes expérimentales étant continues, et les courbes simulées, avec les paramètres reconstruits  $\phi$ ,  $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$ ,  $E_0^1$  et  $\nu_0^1$  étant en tirets.

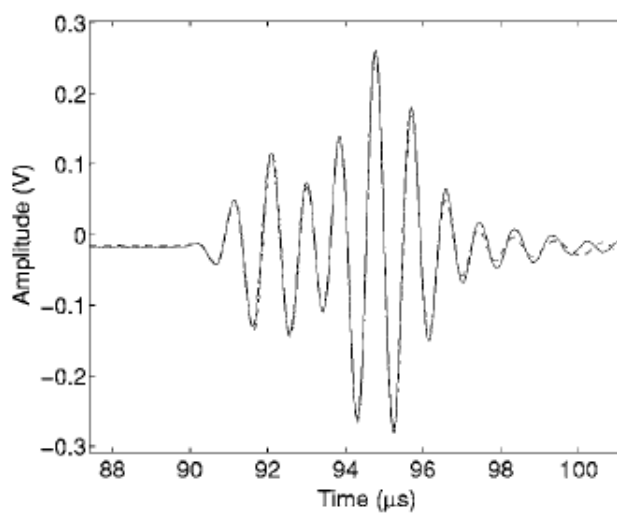


FIG. 9.14 – Echantillon  $M_3$ . Comparaison des signaux transmis reçu sur le transducteur  $R$ , les courbes expérimentales étant continues, et les courbes simulées, avec les paramètres reconstruits  $\phi$ ,  $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$ ,  $E_0^1$  et  $\nu_0^1$  étant en tirets.

et 9.14 respectivement.

## 9.5 Conclusion

En se servant de la *totalité du signal* transmis, et d'un estimateur qui rend très complètement et fidèlement compte de la dynamique du milieu poroélastique constitué par l'os trabéculaire, on arrive à résoudre le problème inverse à condition de disposer d'une bonne information a priori sur les valeurs des paramètres à reconstruire.

Toutefois, il n'est guère envisageable d'employer de telles techniques, s'appuyant sur l'emploi d'échantillons d'os en forme de plaque à faces bien parallèles, extraits de leur milieu naturel et évidés de leur moelle, pour des diagnostics de la santé des os dans un cadre clinique (*in vivo*). Tout au plus, à ce stade des recherches, nous n'avons réussi qu'à obtenir une meilleure idée des valeurs que prennent les différents paramètres mécaniques des os humains, valeurs qui pourront servir de référence pour d'autres techniques de diagnostic.

## Chapitre 10

# Préliminaires concernant les méthodes vibroacoustiques

On évoque la spectrométrie vibroacoustique linéaire et nonlinéaire comme méthodes potentielles de diagnostic *in vivo* de l'ostéoporose.

### 10.1 Pourquoi employer des méthodes vibracoustiques pour caractériser des os ?

Les expériences sur des tranches d'os sont intéressantes en ce qu'elles fournissent des données sur certains paramètres mécaniques des os et pour aider à décider, par exemple, si telle ou telle autre théorie permet de décrire correctement le champ acoustique (ou vibrationnel) dans un milieu osseux.

Toutefois, il est inconcevable de couper en tranches les os des sujets humains vivants dans un but de diagnostic clinique. Donc, il faut envisager d'autres configurations (plus proches, par exemple, des os longs qui sont assez faciles d'accès, et situés dans un environnement plus réaliste (i.e., certainement pas une cuve d'eau)), dans le but de se rapprocher de ce que l'on rencontrera lorsque l'on voudra appliquer une méthode de caractérisation des os dans le contexte *in vivo*.

Les concepteurs de la méthode BUA ([236], [117]) ont très tôt pris conscience de ce problème ; c'est pourquoi ils ont focalisé leur attention sur l'os (spongieux) du calcanéum (situé dans la partie arrière du pied), qui apparaît comme ayant vaguement la forme d'une plaque (toutefois, on ne peut pas dire que l'environnement naturel de cet os soit semblable à celui d'un spécimen-plaque dans une cuve d'eau).

Dès que l'on parle de la caractérisation relativement fine (i.e., détermination des descripteurs de la microstructure tels que la porosité et la tortuosité) d'os-objets (et non des tranches d'os) dans leur environnement naturel, se pose la question de *comment solliciter ces objets*. Le problème des ondes ultrasonores (employées dans toutes les expériences décrites jusqu'ici) est de deux ordres. D'abord, ces ondes doivent pénétrer : i) la peau, ii) les couches de graisse et de muscle, et iii) la partie corticale de l'os avant d'atteindre la partie spongieuse qui est la plus porteuse d'information sur l'état de santé de l'os ; chemin faisant (i.e., entre le transducteur d'émission et la cible), une bonne partie de l'énergie de ces ondes est absorbée et diffusée (notamment par les macro-hétérogénéités des muscles et de l'os), le même étant vrai pour le chemin de retour si, comme c'est le plus courant, on travaille en réflexion (i.e., rétrodiffusion). Ensuite, la diffusion sur les macro-hétérogénéités fait qu'une bonne partie de l'information sur la microstructure est perdue ou brouillée (notons que ceci n'est pas un problème en imagerie par ultrasons, puisque ce qui est visé dans cette méthode est une *caractérisation qualitative* de la macrostructure, et non une *caractérisation quantitative* de certains descripteurs de la microstructure).

La solution qui vient à l'esprit de ce problème est de travailler avec des *sollicitations basses fréquences* qui peuvent prendre, soit la forme d'une onde acoustique audible (fréquences de 1-10kHz), soit la forme d'un chargement mécanique oscillatoire ou impulsif (i.e., choc) dont le spectre comprend principalement des basses fréquences (les mêmes que pour les ondes audio ou plus élevées).

Cette pratique (que nous appelons *sondage vibroacoustique*) n'est pas nouvelle dans le contexte médical puisque tous les médecins-généralistes l'emploient pour sonder l'intérieur d'un corps (ils tapent avec leur doigt sur une côte et écoutent le bruit que cela provoque ; ce bruit change en fonction de l'état des poumons). Une pratique analogue est celle des cheminots, qui écoutent le bruit émis en réponse à un choc, pour évaluer l'état des rails.

## 10.2 Caractérisation spectrale en général et vibroacoustique en particulier

Ces faits nous ont conduit à étudier *la caractérisation spectrale vibroacoustique de l'os*.

L'idée de base est très ancienne et provient du domaine de la spectrométrie chimique, ce qui veut dire : identifier une substance par son spectre. En chimie, le spectre, qui se manifeste optiquement dans la région infrarouge, trahit l'existence des modes vibrationnelles des molécules dont est composée la substance. Comme chaque molécule présente un spectre spécifique et unique, le spectre chimique d'une substance permet d'identifier, de manière théoriquement unique, une substance donnée.

A présent, le sens que nous donnons au terme 'spectre' est quelque chose qui se manifeste mécaniquement par des déformations et trahit les modes de vibration d'un échantillon de la substance. Ce spectre comporte des pics (de déformation) à certaines fréquences, dites fréquences de résonance, qui marquent la coïncidence des fréquences de la sollicitation dynamique avec les fréquences propres des modes de l'échantillon.

Il serait souhaitable que le spectre mécanique, soit, comme le spectre chimique, unique pour un matériau donné. Ceci permettrait, par exemple, de distinguer un os normal d'un os atteint d'ostéoporose du fait que les substances de ces deux os sont différentes de par leur structure (et, dans une moindre mesure, de par leur composition interne).

Malheureusement, le spectre vibrationnelle dépend aussi de la forme et taille de l'objet servant de contenant au matériau et même de comment l'objet est sollicité et attaché (ou non) à son environnement (i.e., les conditions aux limites). De plus, s'agissant d'un objet comme un os, l'enrobage peut modifier quelque peu le spectre et amortir significativement les déformations en surface de l'enrobage (là où l'on mesure le signal dans la configuration classique), avec le risque de rencontrer un signal/bruit trop faible pour une caractérisation spectrale concluante.

Donc, la méthode spectrale vibroacoustique, tout en étant séduisante, n'est pas sans difficultés (ceci est vrai pour toutes les méthodes de caractérisation matérielle).

Nous disions que le spectre dépend de la sollicitation. La raison en est que l'objet possède des modes longitudinaux, torsionnels, et de flexion qui sont plus ou moins excités selon la

direction et le point d'application de la force. Ceci peut constituer un avantage en ce sens que l'on peut exciter préférentiellement tel type, ou tel autre type, de mode, rendant ainsi peut-être plus simple l'identification (surtout lorsque le spectre est marqué par une profusion de pics). Autre latitude concernant la sollicitation déjà évoqué ci-haut : celle-ci peut être de type choc (résultant de l'impact d'un corps (e.g., marteau ou bille) contre l'objet), vibrationnelle (contraintes provoquées par une un dispositif piézoélectrique, dont la tension est modulée, en contact avec l'objet) ou de type acoustique (i.e., l'air en mouvement associé à une onde acoustique frappant l'objet permet aussi d'induire des vibrations de l'objet).

De même, l'observable peut être constitué par les déformations, vitesses, accélérations, etc. mesurées en surface de l'objet ou la pression associée à l'onde acoustique (mouvement de l'air autour de l'objet) induite par les vibrations de l'objet. En général, ces deux classes d'observables donnent lieu à des spectres qui ont des liens évidents lorsque l'objet est situé dans un fluide léger.

*Remarque* : Soulignons que l'utilisation de la spectrométrie vibrationnelle pour distinguer les os sains des os atteints d'ostéoporose, a déjà fait l'objet de publications, dont certaines sont assez anciennes : [215], [312], [217], [216], [223], [91]. Quelques-unes de ces études portent même sur des sujets humains vivants, mais la plupart ne comportent que très peu d'éléments théoriques permettant de mettre en rapport les observations avec des modèles d'os. Souvent, une fréquence de résonance (celle du mode de vibration dominant pour le type d'expérience choisi) est employée en tant que descripteur brut de l'état de l'os. Ceci rappelle le descripteur BUA. On est donc loin, avec ce choix de descripteur, de considérer la caractérisation de l'os comme un problème inverse, s'appuyant sur le traitement des données au moyen d'un modèle théorique solide.

*Remarque* : Pour faire une étude scientifique sérieuse, concernant la relation entre d'une part la composition et la structure de l'os et d'autre part sa réponse vibrationnelle, on a intérêt à commencer avec des spécimens de forme simple (canonique) car c'est pour ces objets que l'on met le plus facilement en évidence la part de la forme et taille (i.e., descripteurs macro-structuraux), la part de la composition (i.e., descripteurs micro-structuraux),

et les conditions aux limites, sur le spectre, ce qui, dans la suite, sera essentiel pour la reconstruction des paramètres matérielles mécaniques. Cette remarque rejoint celles que l'on a faites précédemment à propos des méthodes de caractérisation ultrasonores.

### 10.3 Caractérisation des microfractures de l'os par une méthode de spectrométrie vibroacoustique non-linéaire

Etant donnée ce qui pourra paraître comme la faible sensibilité de l'indicateur de porosité déduite de la réponse vibroacoustique linéaire de l'os, il sera utile d'examiner la possibilité d'employer des méthodes *non-linéaires* de détection et de qualification de l'endommagement (ou autre forme d'altération de la microstructure).

Le but sera donc, dans un des chapitres suivants, de détecter, caractériser et localiser les microdéfauts (e.g., microfissures ou porosité au-dessus de la normale) de l'os par la méthode SIMONRAS (Single Mode Nonlinear Resonant Acoustic Spectroscopy) qui fait partie de l'ensemble des méthodes NEWS (Nonlinear elastic wave spectroscopy) [370], [211], [119].

Considérons un spécimen (e.g., en forme de poutre ou d'os long) de matériau d'apparence homogène et non-endommagé. Le protocole expérimental consiste à mettre la structure en vibration ou à la soumettre à une onde acoustique et à enregistrer sa réponse vibratoire et/ou acoustique. Lorsque l'on varie la fréquence de la sollicitation, un maximum de réponse permet de localiser la fréquence propre d'un mode (en général, un mode de flexion, pour une force appliquée transversale). Ensuite, on augmente l'amplitude et on effectue un balayage en fréquence de la sollicitation afin de re-localiser la fréquence propre du même mode. On répète l'expérience pour des amplitudes de plus en plus grandes et on trace les spectres de réponse au voisinage de la fréquence propre du mode que l'on a trouvé pour la plus petite amplitude de sollicitation. On constate (voir la fig. 10.1) que pour un spécimen non-fissuré, chaque courbe de réponse est une gaussienne centrée sur la même fréquence (ou bien, la fréquence de résonance diminue légèrement avec l'amplitude de la sollicitation). Ceci est caractéristique d'une réponse linéaire (ou quasi-linéaire). En revanche, lorsque le spécimen est fissuré, on constate que les fréquences de résonance ont tendance à décroître substantiellement lorsque



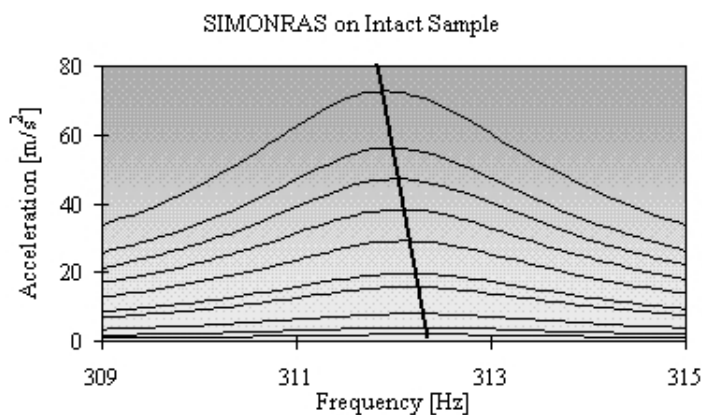


FIG. 10.1 – Déplacement fréquentiel des maxima des courbes de résonance lorsque l'on augmente la sollicitation pour un spécimen non-fissuré.

l'on augmente l'amplitude de la sollicitation (voir la fig. 10.2). Ceci est caractéristique d'une réponse nonlinéaire. La nonlinéarité semble être un effet local (i.e., se produisant à l'endroit de la fissure) du fait que la façon dont la fréquence de résonance varie dépend du type, taille, position et orientation de la fissure (et du nombre de fissures). *L'idée dans la méthode NEWS est de traduire ces changements spectraux très sensibles (voir la fig. 10.3) en un ensemble de données permettant de caractériser les défauts de la structure.*

Le succès de la méthode pour résoudre ce problème inverse de la caractérisation de la porosité et/ou des microfissures de l'os dépend de sa sensibilité à ces aspects de la microstructure et de la possibilité de modéliser correctement le phénomène.

Nous présenterons plus loin les modèles, et techniques expérimentales (instrumentation, acquisition de données et les méthodes de traitement du signal employées), ainsi que nos résultats ayant déjà fait l'objet de publications.

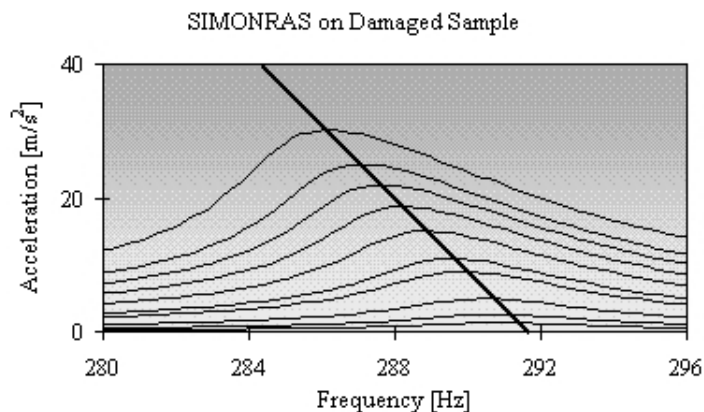


FIG. 10.2 – Déplacement fréquentiel des maxima des courbes de résonance lorsque l'on augmente la sollicitation pour un spécimen fissuré.

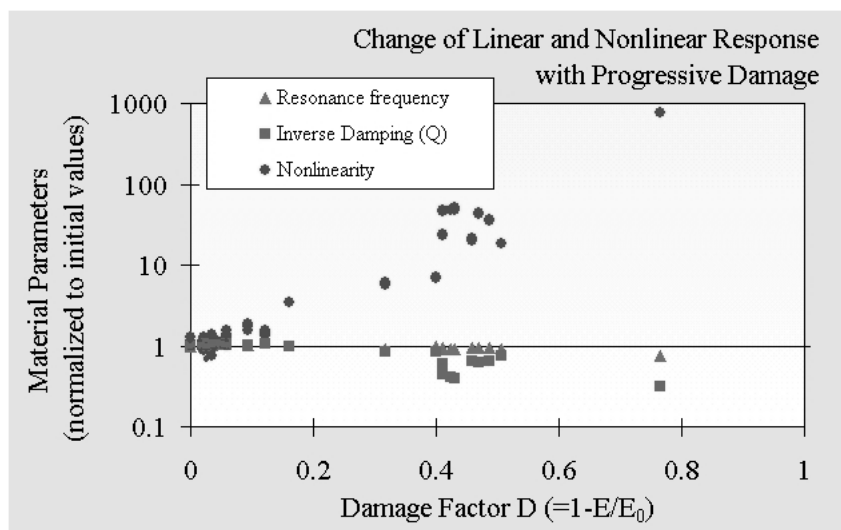


FIG. 10.3 – Comparaison des sensibilités des méthodes de détection de microfissures par la méthode d'atténuation induite (Inverse Q), de fréquences de résonance en régime linéaire (Resonance frequency) et la méthode SIMONRAS (Non-linear). On remarque que, pour de petits endommagements, les trois méthodes ont à peu près les mêmes sensibilités, mais que la méthode SIMONRAS devient rapidement beaucoup plus sensible (notez que l'axe verticale est logarithmique) que les deux autres lorsque l'endommagement augmente.



## Chapitre 11

# Mise au point de techniques et protocoles vibratoires expérimentaux

On décrit nos expériences employant les vibrations. Les données que nous en recueillons serviront à révéler l'état mécanique de spécimens d'os.

### 11.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'instrumentation et les techniques de traitement de signal pour l'acquisition, puis l'inversion de *données réelles vibroacoustiques*, permettant de caractériser mécaniquement les os humains, d'abord in vitro, puis in vivo.

L'objectif est de faire cette caractérisation dans les conditions de sollicitations dynamiques dites de petits déplacements (sans endommagement ni rupture). Le but final est de caractériser la santé mécanique des os sur des sujets vivants pour détecter, puis suivre, des maladies osseuses tel que l'ostéoporose.

Les expériences ont d'abord porté sur des fantômes d'os long en nylon sous forme de cylindres circulaires pleins, ou de tubes circulaires, avec leur canal central (médullaire) vide ou rempli de divers fluides.

Dans un premier temps, nous avons sollicité (par choc mécanique ou par onde acoustique) ces objets cylindriques à une de leurs extrémités afin de favoriser l'excitation des modes longitudinaux (voir fig. 11.1a), ou de flexion (fig. 11.1b, 11.2). Grâce à des capteurs (de déplacement et accéléromètres très légers) attachés au cylindre-os, on a pu recueillir la

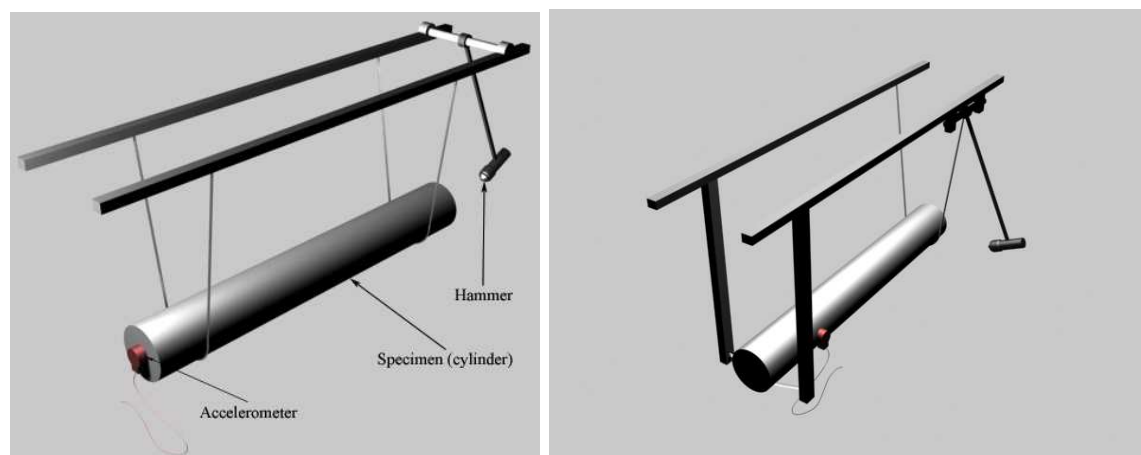


FIG. 11.1 – Vue schématique du montage expérimental pour mesurer la réponse vibratoire, d'un tube de nylon, constituant un fantôme d'os long, à l'aide d'un accéléromètre à un de ses bouts. La sollicitation impulsive, fournie par un marteau, favorise l'excitation des modes (a)(gauche) longitudinaux, (b)(droite) de flexion.

réponse temporelle de celui-ci à la sollicitation. La transformée de Fourier de cette réponse permet d'obtenir les fréquences de résonance des modes longitudinaux et de flexion.

La présence ou absence de certains modes dans la réponse temporelle dépend de l'endroit où l'excitation est appliquée et de l'endroit où l'on place le capteur pour mesurer la réponse.

## 11.2 Banc d'essai vibroacoustique

Le banc d'essai vibroacoustique est composée de barres en acier (fig. 11.1) à partir desquelles les structures à tester sont suspendues. Ceci est fait au moyen de fils de pêche en nylon (fig. 11.1) pour simuler approximativement une condition aux limites de contraintes nulles (i.e., la frontière extérieure de l'objet-os au contact de l'air est une surface libre (de contraintes)). Les fixations amovibles permettent d'ajouter ou d'enlever des barres selon la géométrie de l'objet à tester.

Le signal transitoire, traduisant les vibrations enregistrées par le capteur suite à une excitation impulsionnelle de la structure, est enregistré par un oscilloscope. La fig. (11.3) montre un capteur (accéléromètre) collé sur un cylindre suspendu. Dans ce cas, on a privilégié le premier mode en plaçant le capteur au centre du cylindre. Sur cette réponse, on peut



FIG. 11.2 – Photographie du montage expérimental pour mesurer la réponse vibratoire d'un fantôme d'os long contenant un canal médullaire dont on peut varier la contenance fluide. L'objectif des expériences avec ce type de montage est d'évaluer l'influence de la nature et de la viscosité du fluide médullaire sur les modes (notamment, leurs fréquences propres) de vibration du spécimen. Ici l'os est excité acoustiquement via une chambre de compression (tube vertical en bas et à gauche) ; ce type de sollicitation favorise l'excitation des modes de flexion du tube. La réponse est mesurée au moyen de deux accéléromètres (cubes noirs au contact de l'os).

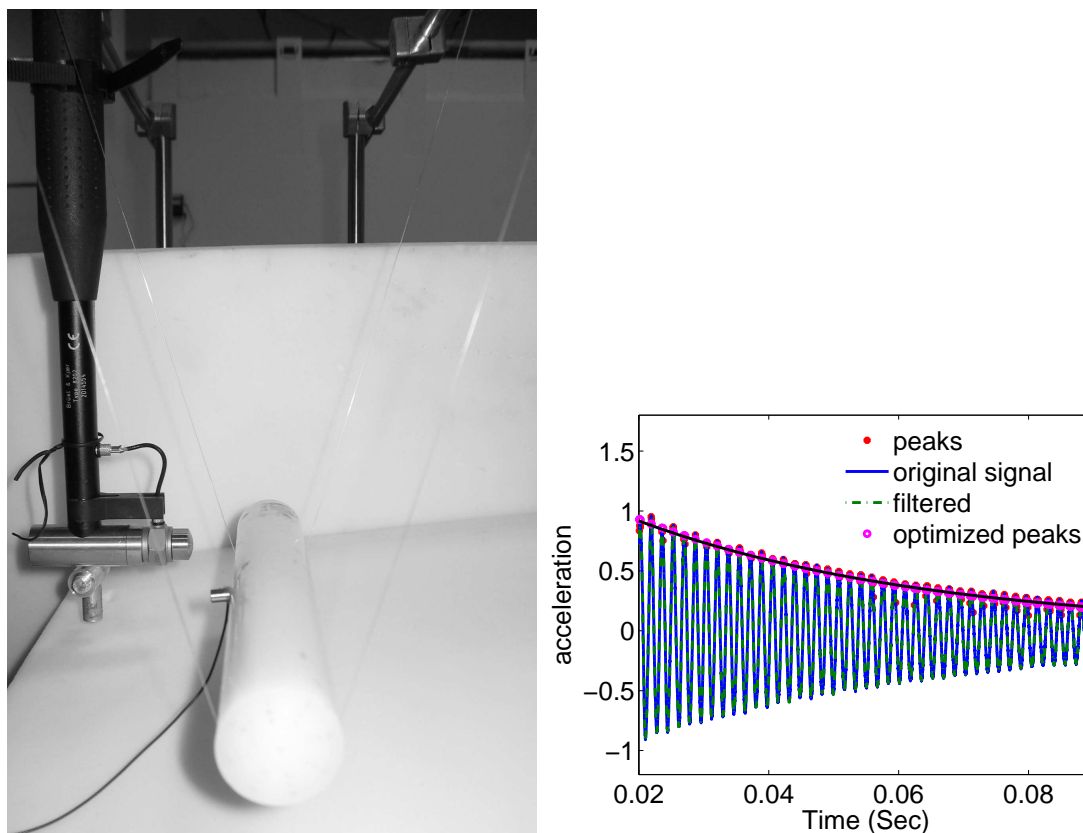


FIG. 11.3 – (a)(Gauche) Cylindre suspendu. La réponse (onde de flexion) est mesurée par un accéléromètre très léger (0,56g) Endevco 2222C. La sollicitation est fournie par (à gauche dans la figure) un marteau muni d'un capteur de force. (b)(Droite) signal d'accélération mesuré par le capteur.

constater que la réponse s'atténue avec le temps.

### 11.3 La méthode spectrale

La réponse d'un matériau à une sollicitation dynamique peut être étudiée dans le domaine fréquentiel. Le déplacement et l'accélération, mesurés sur l'objet (os ou fantôme d'os), traduisent les déformations engendrées par les forces externes qui lui sont appliquées. Ces réponses prennent la forme de signaux (temporels) dont on extrait le spectre. Celui-ci contient des pics qui correspondent aux fréquences de résonance du spécimen.

Les valeurs fréquentielles de ces pics sont fonction des caractéristiques mécaniques du

matériau, de la géométrie (forme, taille, etc.) du spécimen et des conditions aux limites par lesquelles celui-ci est attaché à l'environnement. Nous employons à dessin le terme "spécimen" (ou objet) à la place d' "éprouvette" car nous voulons nous réserver la possibilité de faire des mesures sur des os à l'état naturel, i.e., non-taillée en des formes spécifiques, (cas très répandu dans les essais mécaniques et acoustiques habituels).

### 11.3.1 Problèmes de taille

La bande passante et la puissance des excitateurs sont souvent limitées. Leur taille (qui influence le type d'onde/vibration générée et captée) et nombre souvent limités entraînent un sous-échantillonnage de l'espace. Leur taille et poids restreint leur nombre. Augmenter le nombre de capteurs et actionneurs chargerait le spécimen et fausserait sa réponse.

Il est alors important de développer des *actionneurs et capteurs légers* à haut rendement. L'accessibilité est aussi un frein dans le cas où l'on cherche à acquérir le signal à l'intérieur d'une structure (e.g., in vivo). La conséquence du manque de sensibilité des capteurs (résultant de leur miniaturisation) est de réduire le nombre de pics visibles dans le spectre de vibration et de diminuer le rapport du signal utile/ bruit.

Le problème s'aggrave si le nombre de bits utilisés pour numériser le signal est insuffisant. Une instrumentation performante faisant appel à la multiplication du nombre de voies de mesure devient très onéreux. Le multiplexage de signaux peut permettre de partager une seule voie de conditionnement, amplification, numérisation et acquisition des signaux.

### 11.3.2 Solutions générales

Certaines de ces limitations peuvent être surmontées en employant :

1. des pré-amplificateurs faible bruit pour l'amplification des signaux issus des capteurs,
2. une chaîne d'acquisition avec un nombre suffisant de bits,
3. des actionneurs (excitateurs) et des capteurs plus petits et plus légers. Cependant leur petite taille peut engendrer d'autres problèmes, par exemple, le manque de sensibilité et de puissance. Nous verrons plus loin comment régler le problème de manque de puissance. Pour le manque de sensibilité, la solution est dans 1.





FIG. 11.4 – Montage expérimental avec des transducteurs PZT pour mesurer la réponse vibratoire d'un fantôme d'os long contenant un canal médullaire dont on peut varier le contenu fluide.

### 11.3.3 Excitateurs et capteurs à base de pastilles piézoélectriques

Pour cette étude, une technique de transduction (actionneurs et capteurs) à base de *pastilles piézoélectriques (PZT)* a été développée. Les pastilles PZT sont composées d'un disque mince en céramique piézoélectrique collé à un diaphragme mince en métal [9]. Quand cette pastille est attachée à une surface qui vibre, une déformation mécanique est induite dans le cristal polarisé (résultant de la contrainte et du vrillage de la pastille) engendrant ainsi une charge électrique. De même, quand le cristal PZT est soumis à une sollicitation électrique modulée, il vibre (et induit une onde de contrainte).

Leur légèreté, petite taille et forme plate, facilitent la fixation mécanique des PZT sur des structures (fig. (19.4)), avec une influence négligeable sur les réponses vibratoires comparée, par exemple, aux accéléromètres.

### 11.3.4 La Détection synchrone utilisée en mode *LOCK IN*

La détection synchrone (DS) est l'un des piliers des méthodes d'acquisition de données spectrales développées dans cette thèse. Cette technique est comparable à la modulation

d'amplitude. La DS (lock in) est un moyen de minimiser l'influence du bruit sur le signal utile en effectuant une multiplication du signal d'excitation par le signal réponse mesuré.

Soient :

le signal d'entrée (issu de la réception) :  $A \cos(\omega_m t)$  ( $A$  : amplitude à détecter).

la porteuse restituée en sortie de PLL (boucle à verrouillage de phase) :  $E \cos(\omega_m t + \varphi)$  ( $E$  : amplitude fixe).

La multiplication de ces deux signaux pour la démodulation, puis le filtrage passe bas, donne comme signal de mesure :

$$v_m = \frac{EA}{2} \cos(\varphi), \quad (11.3.1)$$

avec  $\varphi$  le déphasage entre la porteuse émise et la porteuse restituée. La présence dans le signal de *mesure* de  $\varphi$  vient perturber la démodulation.

Si l'on souhaite effectuer une démodulation qui ne dépend pas de la phase existante entre la fréquence de modulation et de démodulation, on peut profiter de la possibilité d'utiliser un montage employant le principe de la double détection synchrone (fig. (11.5)). Il faut s'assurer que le déphasage entre la porteuse émise et restituée soit constant, d'où l'importance de la boucle à verrouillage de phase (phase-locked loop - PLL) qui assure cette fonction par asservissement de phase. Il faut que ce déphasage soit différent (éloigné) de  $\pi/2$ ; sinon le signal de mesure est nul ( $v_m = 0$ ). C'est ce que l'on appelle la démodulation synchrone (lock in), où il faut faire un contrôle de la phase précis. Utiliser un oscillateur local non asservi n'assurerait pas une démodulation correcte.

## 11.4 Levée de voile sur la suite

Il est relativement facile de caractériser les sources en acoustique à condition de disposer d'une salle anéchoïque : on enregistre les diagrammes de directivité et les courbes de réponse en fonction de la fréquence.

Toute autre est la situation en vibrations, du fait qu'il est difficile de connaître la force qui induit les vibrations sauf dans le cas d'utilisation d'un marteau à choc dont la tête à impédance est équipée d'un capteur de force piézoélectrique.

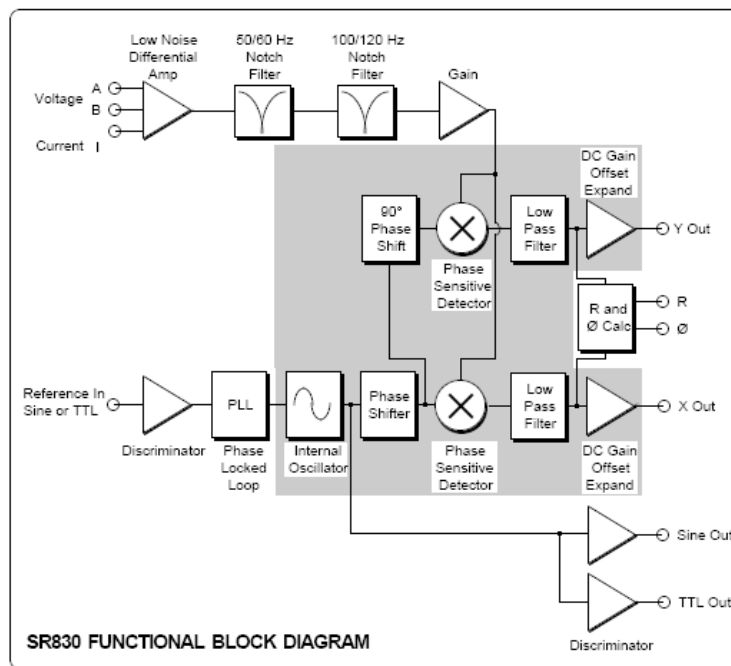


FIG. 11.5 – Schéma de principe du démodulateur synchrone SR830.

Dans le chapitre qui suit, on va s'intéresser à la notion de réponse impulsionnelle. L'objectif recherché sera encore d'améliorer le rapport signal sur bruit.

## Chapitre 12

# La réponse impulsionnelle

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de réponse impulsionnelle.

### 12.1 Introduction

L'idéal en dynamique est de disposer d'un dispositif de mesure ayant une bande passante infinie. Au niveau de l'entrée, il serait préférable d'employer une impulsion de type Dirac, ce qui, au niveau de la sortie, renvoie à la notion de *réponse impulsionnelle*.

Soit  $f(t)$  un signal d'entrée et  $h(t)$  la réponse impulsionnelle d'un système. La sortie  $u(t)$  est donnée par l'intégrale de convolution :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (12.1.1)$$

qui s'écrit aussi  $u(t) = f(t) \star h(t)$  avec le signe  $\star$  l'opérateur de convolution. On notera que si l'entrée  $f(t)$  est un Dirac,  $\delta(t)$ , alors  $u(t) = h(t)$ .

Ce type d'excitation est difficile à réaliser et même si l'on en disposait, il serait inutilisable pour l'application visée : la caractérisation in vivo d'un objet biologique.

Les excitateurs dont nous disposons sont :

1. un marteau à choc avec une tête à impédance intégrée pour mesurer la force,
2. un pot vibrant miniature avec une tête à impédance,
3. un haut parleur,
4. des transducteurs piezoélectriques [9] (on ne connaît pas les forces qu'ils livrent),

5. une bille métallique (acier/inox) pour impacter les spécimens.

Pour mesurer la réponse vibratoire de l'os, on dispose de capteurs accélérométriques piezo-électriques, des pastilles PZT, tous les deux attachés de manière réversible au spécimen, et des capsules microphoniques B & K pour mesurer la pression acoustique rayonnée.

Ce qui est original dans cette partie de la thèse, c'est l'introduction de la transformée en Z pour résoudre les équations de mouvement en dynamique de structures. Son emploi se justifie par le fait qu'il faut, lors de l'acquisition, discrétiser les signaux pour les stocker sous forme numérisée. La fréquence d'échantillonnage influe sur la précision de la mesure de la fréquence de résonance.

Nous discutons aussi du problème de sous-échantillonnage de l'espace du fait que nous ne disposons que de très peu d'excitateurs et de capteurs.

### 12.1.1 Méthode pour obtenir une réponse impulsionnelle

Les méthodes d'identification peuvent être classées en deux catégories ; paramétriques et non-paramétriques [252, 396].

Les méthodes paramétriques aussi appelées *boîte blanche* nécessitent une connaissance à priori du modèle de l'objet. Le processus d'identification vise à estimer les paramètres du modèle de réponse (qui requiert une connaissance de la sollicitation) en utilisant des algorithmes spécifiques qui cherchent à réduire l'erreur globale entre le modèle et les données concernant les entrées et les sorties.

Les méthodes non-paramétriques de type *boîte noire* identifient, en associant l'entrée à la sortie, par l'utilisation d'une fonctionnelle ou une série de fonctions orthogonales.

Dans les deux cas, on cherche des paramètres ou fonctions optimales (i.e., le processus d'inversion par lequel on minimise l'écart, entre les données expérimentales et le modèle, en variant ses paramètres). Les écarts sont globalisés dans une fonction coût, qui traduit la différence entre le modèle et les données d'entrée et sortie.

### Méthode d'identification paramétrique - le modèle

En dynamique des structures, le système vibrant est souvent modélisé par des masses, des ressorts et des amortisseurs. Si le système est linéaire et invariant dans le temps, l'équation du mouvement pour un système à  $n$  degrés de liberté est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (12.1.2)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  sont les matrices (d'ordre  $n$ ) de masse, amortissement et raideur respectivement. Les vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  et  $\mathbf{F}$  sont le déplacement, la vitesse, l'accélération et la force respectivement.

Ici on suppose que la force soit connue (obtenue avec le marteau à choc muni d'un capteur de force) et la réponse soit mesurée en un seul point. Il s'agit donc de résoudre le problème inverse suivant : trouver les paramètres des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ , à partir des données (mesurées) concernant le déplacement et/ou l'accélération sur l'objet.

Les systèmes linéaires sont caractérisés complètement par leur réponse à une impulsion de Dirac  $\delta(t)$ , i.e., la réponse impulsionnelle.

Si la réponse à l'excitation,  $e(t)$ , est  $f(t)$ , le système linéaire est dit invariant dans le temps si la réponse à  $e(t - t_0)$  est  $f(t - t_0)$ ,  $t_0 \in \mathcal{R}$ . L'invariance est donc liée au décalage.

On suppose que l'observable (déplacement, accélération ou pression acoustique mesurée) est un signal déterministe (comportement prévisible à chaque instant).

Pour un signal  $f(t)$ , la transformée de Fourier (TF) est donnée par

$$\mathfrak{F}[f(t)] = \tilde{F}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt . \quad (12.1.3)$$

La TF est d'une utilité limitée pour l'analyse et la synthèse des systèmes de traitement (par exemple, le filtrage numérique). Elle sera remplacée plus loin, dans des cas particuliers, par d'autres outils de transformation plus puissants.

**N.B** Un système mécanique est un filtre, dont les masses, dashpots et ressorts correspondent aux composants électriques : self, résistance, condensateur.

La transformée de Laplace (TL), notée  $\mathfrak{L}$ , d'un signal  $f(t)$ , est

$$\mathfrak{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \quad (12.1.4)$$

où  $s = \sigma - i\omega$  est une variable complexe. Pour une fonction causale, i.e.,  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ , la TL se réduit à la TF (avec  $s = -i\omega$ )

$$F(i\omega) = F(s) |_{s=i\omega} .$$

Pour  $n > 0$  où  $n \in \mathcal{N}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \exp(-st) = 0$ , alors pour  $t > 0$ , on a [162]

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) . \quad (12.1.5)$$

(avec  $f^{(n)}(t) := \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ ).

Le traitement numérique, par ordinateurs, de grandeurs physiques *analogiques* mesurées, a amené à associer à des équations d'évolution continues des équations *discrètes* (systèmes échantillonnés).

L'échantillonnage est le découpage temporel du signal (déplacement ou accélération),  $f(t)$  en multipliant celui-ci par la distribution de Dirac,  $\delta(t - nT)$ . Le résultat en est une modulation d'amplitude d'un train d'impulsions par le signal échantillonné. L'échantillon  $f(nT)$  est une impulsion prise à l'instant  $nT$ , périodique de période  $T$  :

$$f^*(t) = \{f(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) . \quad (12.1.6)$$

La TL de  $f^*(t)$  est

$$F^*(s) = \mathcal{L} [f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \exp(-nsT) . \quad (12.1.7)$$

L'outil adéquat d'analyse pour des systèmes échantillonnés discrets est la transformée en  $z$  (TZ). La TZ,  $F(z)$ , et son opérateur  $\mathcal{Z}$ , du signal discret  $f(nT)$  précédent est

$$F(z) = \mathcal{Z} [f(k)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) z^{-n} , \quad (12.1.8)$$

où  $z$  est une variable complexe.

Dorénavant on écrira  $f(nT)$  sous la forme plus compacte  $f(n)$ . Une des propriétés très importantes de la TZ, est la forme de  $f(n)$ , décalée ou retardée, d'un échantillon. Par exemple, la transformée de  $f(n-1)$  est donnée par

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-1) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) z^{-(m+1)} = z^{-1} F(z) \quad (12.1.9)$$

où  $m = n - 1$  et  $F(z)$  est la TZ de la séquence non-décalée. Il en découle l'opérateur d'avance/retard

$$d^k [f(n)] = f(n + k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (12.1.10)$$

Il est possible d'établir une relation entre les TZ et TL (d'un signal échantillonné) grâce à la TZ unilatérale  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$  donnée par Girling [157] :

$$\mathcal{Z} [f(t)^*] = \mathcal{L} [f^*(t)] , \quad (12.1.11)$$

avec  $z = \exp(sT) = \exp(\sigma T) \exp(i\omega T) = r \exp(i\omega T)$ , qui fait correspondre le plan  $s$  au cercle unité du plan  $z$ , car  $r = 1$  quand  $\sigma = 0$ .

Pour une décroissance temporelle exponentielle, comme souvent rencontrée dans les expériences vibratoires, l'observable peut se mettre sous la forme :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \tau \in \mathcal{R} ,$$

où  $t$  est le temps et  $\tau$  une constante. La TZ s'écrit alors

$$\begin{aligned} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nT}{\tau}\right) z^{-n} &= 1 + \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) z^{-1} + \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right) z^{-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) z^{-1}} = \frac{z}{z - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)} \end{aligned} \quad (12.1.12)$$

### 12.1.2 Système amorti à un degré de liberté (1DDL)

Dans certains cas (e.g., lorsque l'on n'excite et/ou ne mesure qu'un seul mode), on peut décrire la dynamique du système par une seule équation ( $n = 1$  dans (12.1.2)), dite équation de mouvement à 1DDL que l'on résout en l'échantillonnant à l'aide des différences finies centrées.

L'approximation de deuxième ordre ( $\Delta(T^2)$ ) est donnée par

$$\dot{u}(t) \simeq \frac{(d - d^{-1})}{2T} u(n) \quad \ddot{u}(t) \simeq \frac{(d^{-1} - 2 + d)}{T^2} u(n) ,$$

où  $d$  est l'opérateur de retard, de sorte que l'équation de mouvement livre

$$M \frac{(d^{-1} - 2 + d)}{T^2} u(n) + C \frac{(d - d^{-1})}{2T} u(n) + K u(n) = F(n) ,$$

où  $M$ ,  $C$ ,  $K$  sont la masse, l'amortissement et la raideur respectivement et  $F$  la force.



Pour calculer les fréquences propres, on annule la force,  $F(n) = 0$ , puis on fait une TZ de l'équation pour obtenir

$$M \frac{(z^{-1} - 2 + z)}{T^2} U(z) + C \frac{(z - z^{-1})}{2T} U(z) + K dU(z) = 0 .$$

En factorisant et regroupant les termes, il vient

$$\left[ \left( \frac{M}{T^2} + \frac{C}{2T} \right) z^2 + \left( k - \frac{2M}{T^2} \right) z + \left( \frac{M}{T^2} - \frac{C}{2T} \right) \right] z^{-1} U(z) = 0 , \quad (12.1.13)$$

que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$[a_2 z^2 + a_1 z + a_0] U(z) = 0 , \quad (12.1.14)$$

avec  $a_2 = \left( \frac{M}{T^2} + \frac{C}{2T} \right)$ ,  $a_1 = \left( k - \frac{2M}{T^2} \right)$  et  $a_0 = \frac{M}{T^2} - \frac{C}{2T}$ , dont les solutions sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2a_2} (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}) . \\ z_2 & \end{aligned} \quad (12.1.15)$$

Les solutions analytiques (exactes) des fréquences de résonance  $\omega_{nr}$ , fréquences propres  $\omega_n$  et l'amortissement  $\zeta$ , pour un système à 1DDL *faiblement amorti*, sont [266]

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} , \quad \zeta = \frac{C}{2M\omega_n} , \quad \omega_{nr} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} . \quad (12.1.16)$$

### Comparaison entre la solution théorique et celle obtenue par la méthode d'échantillonnage

Les valeurs trouvées via la solution échantillonnée dépendent de la période d'échantillonnage et du degré d'approximation. On peut le démontrer sur un exemple simple.

**Exemple** Soit un système masse, ressort et amortisseur avec :  $M = 2kg$ ,  $C = 2$  ,  $K = 600N/m$ . La fréquence naturelle du système est calculée à partir de la valeur de  $z_1$  en utilisant la relation de transformation (du plan  $z \rightarrow$  plan  $s$ ),  $z = \exp((\sigma - i\omega)T)$ . Ensuite la fréquence de résonance est obtenue par la relation  $F_{n_{FD}} = \frac{2\pi}{T} \Im [\ln(z_1)]$  et l'amortissement  $\zeta_{nr_{FD}} = \frac{1}{2\pi F_n T} \Re [\ln(z_1)]$ . Les opérateurs  $\Re [ ]$  et  $\Im [ ]$  sont les parties réelle et imaginaire respectivement. La courbe de fréquence naturelle en fonction de la période d'échantillonnage est donnée dans la fig. (12.1). Les valeurs calculées par la TZ et la solution analytique sont données dans le tableau (12.1).

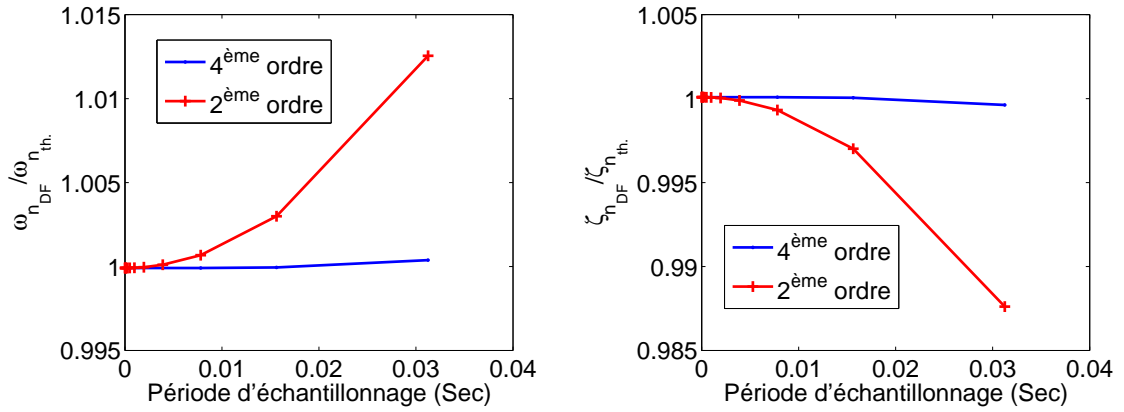


FIG. 12.1 – L'influence du degré d'approximation différences finies (DF) et de la période d'échantillonnage sur la précision des fréquences de résonance  $\omega_{n_{FD}}$  et l'amortissement  $\zeta_{n_{FD}}$ , calculées en employant la méthode de transformée en  $z$ . Les valeurs tracées sont normalisées par rapport aux valeurs théoriques,  $\omega_{n_{th}}$  et  $\zeta_{n_{th}}$ .

	Transformée en $z$ 2nd ordre	Transformée en $z$ 4ème ordre
$\frac{\omega_{nr_{DF}}}{\omega_{nr_{th}}}$	1,0	1,0
$\frac{\zeta_{nr_{DF}}}{\zeta_{nr_{th}}}$	1,0	1,0

TAB. 12.1 – Tableau des rapports entre valeurs approximées obtenues par la discrétisation du système à 1DDL par différences finies ( $DF$ ) puis résolution de l'équation polynomiale résultante après la transformation en  $z$ , avec des valeurs exactes théoriques ( $th$ ) des fréquences naturelles et amortissements ( pour  $T = 10^{-4}$  secondes).

### La réponse impulsionnelle du système à 1DDL

Le problème de la connaissance (de préférence à priori) de la force appliquée (i.e., la sollicitation) est capital dans le contexte du problème inverse de reconstruction des paramètres mécaniques du système (i.e.,  $M, C, K$  pour un système à 1DDL).

Nous avons déjà souligné le fait que la réponse impulsionnelle permet de prédire la réponse du système pour n'importe quel type de force appliquée. Il est donc intéressant de déterminer, par la méthode de transformée en  $Z$ , la réponse impulsionnelle (RI) du système dynamique composé d'une masse, ressort et amortisseur dans la configuration à 1DDL.

Le RI permet de reconstruire la force à partir de la réponse connue (mesurée) en utilisant la convolution (12.1.1). Dans le domaine fréquentiel cette relation peut s'écrire en prenant sa TF (opérateur  $\mathfrak{F}[\ ]$ )

$$\mathfrak{F}[u(t)] = \mathfrak{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau).h(t-\tau)d\tau\right] = U(\omega) = F(\omega).H(\omega) .$$

Si la force appliquée au système n'est pas un Dirac, alors on dit que  $H(\omega) = \frac{U(\omega)}{F(\omega)}$  est la *fonction de transfert*. Pour une entrée quelconque, la dynamique du système à 1DDL est décrite (après la TZ) par

$$\left[\left(\frac{M}{T^2} + \frac{C}{2T}\right)z^2 + \left(K - \frac{2M}{T^2}\right)z + \left(\frac{M}{T^2} - \frac{C}{2T}\right)\right]U(z) = zF(z) . \quad (12.1.17)$$

La fonction de transfert est donnée par

$$H(z) = \frac{U(z)}{F(z)} = \frac{z}{a_2z^2 + a_1z + a_0} . \quad (12.1.18)$$

Les paramètres  $a_0 \dots a_n$  sont les mêmes que précédemment. Pour trouver la réponse impulsionnelle, on prend  $f(t) = \delta(t)$ . Pour revenir dans le plan temporel il faut calculer la transformée inverse de (12.1.18). On décompose  $h(z)$  ( $F(z) = 1$  et  $h(z) = H(z)$ ) en pôles et zéros avec les numérateurs  $N_n(z)$  et dénominateurs  $D_n(z)$  :  $h(z) = \frac{N_1(z)}{D_1(z)} + \frac{N_2(z)}{D_2(z)} + \dots$

$$h(z) = \frac{1}{z_1 - z_2} \left[ \frac{z}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2} \right] , \quad (12.1.19)$$

où les  $z_1$  et  $z_2$  sont données dans (12.1.15).

Pour la TZ inverse, la relation  $\mathcal{Z}[u(n) = b^n] = \frac{z}{z-b_1}$  est utilisée :

$$h(n) = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}} \left\{ \left( \frac{-a_1 + \sqrt{(a_1^2 - 4a_0a_2)}}{2a_2} \right)^n - \left( \frac{-a_1 - \sqrt{(a_1^2 - 4a_0a_2)}}{2a_2} \right)^n \right\} .$$

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  est alors une fonction temporelle exponentiellement décroissante donnée par (12.1.12)

$$h(t) = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}} \left[ e^{(\sigma_1 + i\omega_1)t} - e^{(\sigma_1 - i\omega_1)t} \right] = \frac{ia_2 2\pi T}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}} e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t)$$

où  $\omega_1 = \frac{1}{T} \Im [\ln(z_1)]$  et  $\sigma_1 = \frac{1}{T} \Re [\ln(z_1)]$  sont donnés dans l'exemple de la section 12.1.2.

La valeur de  $z_1 - z_2$  est calculée à partir de (12.1.15) en remplaçant les expressions de  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  par leurs valeurs en fonction de  $T$ ,  $M$  et  $C$

$$z_1 - z_2 = T^2 \sqrt{K^2 - 4/T^2 * K * M + 4/T^2 * C^2} / (M + T * C) .$$

L'équation de mouvement avec le deuxième membre (impulsion de Dirac), devient, après TF, une équation dans le domaine fréquentiel, ayant la forme

$$(M\omega^2 + C\omega + K)U(\omega) = F(\omega) = 1 .$$

Les fréquences propres sont données par (après annulation du second membre)

$$\begin{aligned} \omega_1 \\ \omega_2 \end{aligned} = \frac{1}{2M} \left[ -iC \pm \sqrt{-C^2 + 4MK} \right] ,$$

$$2\pi u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{M\omega^2 + C\omega + K} d\omega ,$$

ou bien

$$2\pi u(t) = \frac{1}{M} \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega - \omega_1} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega - \omega_2} d\omega \right\} .$$

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ipx)}{x-a} dx = i\pi \exp(iap)$  [ $p > 0$ ] est tabulée dans la référence [162] page 358 - 3.352(7) :

$$\begin{aligned} 2\pi u(t) &= \frac{1}{M} \frac{i\pi}{\omega_1 - \omega_2} [\exp(-i\omega_1 t) - \exp(-i\omega_2 t)] , \\ u(t) &= \frac{2}{\sqrt{-C^2 + 4MK}} \exp\left(-\frac{C}{2M}t\right) \sin\left(\frac{t}{2M} \sqrt{-C^2 + 4MK}\right) . \end{aligned} \quad (12.1.20)$$

Ayant fait le lien entre la mécanique continue et les systèmes échantillonnés, dorénavant, on pourra profiter des outils puissants développés en traitement du signal pour l'analyse et la synthèse de filtres. Certains existent sous forme de boîte à outils dans Matlab.

La réponse impulsionnelle du système à 1DDL est tracée dans la fig. (12.3) en utilisant l'expression dans l'éq. (12.1.18) et l'outil Matlab, *impz*.

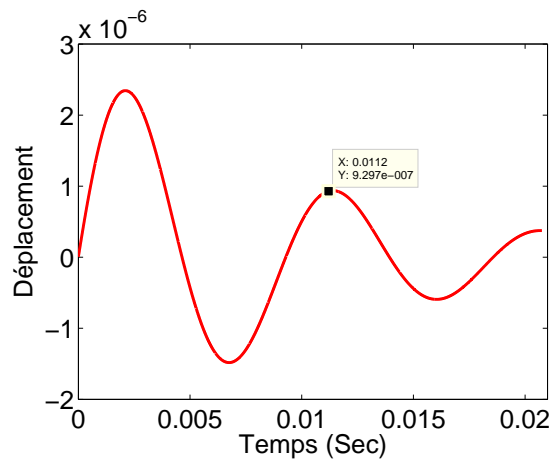


FIG. 12.2 – La réponse impulsionnelle du système amorti à 1DDL pour une valeur d’amortisseur  $C = 2$ .

### 12.1.3 Le problème inverse de reconstruction des paramètres du modèle

Le problème inverse est de trouver les coefficients  $a_0 \cdots a_n$  à partir d’un signal temporel. Ces coefficients portent les informations sur les fréquences propres, les paramètres d’amortissement, raideur et masse du système.

Nous disposons d’un seul capteur et d’un seul excitateur pour des raisons déjà invoquées. Or un système réel vibrant est composé de plusieurs degrés de liberté (multi-DDL). Deux méthodes existent pour résoudre le problème inverse vibratoire d’un tel système.

1. On considère un degré de liberté à la fois. Si l’on regarde la fonction de transfert, la fréquence propre est approximativement celle de la position du pic et l’amortissement est lié à l’acuité du pic. Ceci suppose que le mode étudié soit bien séparé des autres. Quand on a peu de modes, cette méthode est très attractive.
2. Dans l’approche multi-DDL, la fonction de transfert est celle d’un système à plusieurs DDL. Tout le spectre du signal est analysé, ou tout le signal est analysé.

Nous allons d’étudier un système multi-DDL, par extension de la méthode échantillonnée utilisée auparavant, pour analyser le système à 1DDL.

### 12.1.4 Méthode multi-DDL

Pour résoudre le problème inverse de reconstruction des matrices de masse,  $\mathbf{M}$ , d'amortissement,  $\mathbf{C}$ , et de raideur,  $\mathbf{K}$ , de (12.1.2), on procède de la même manière que pour le système à 1DDL. La seule différence réside dans la dimension du système. L'objectif est de tirer une expression qui permet de traiter le cas d'un seul capteur et un seul excitateur. Ceci revient à remplacer des mesures,  $u_1, u_2 \dots$  en différents points à l'instant  $t_1$ , par des mesures  $u_1$  en un point à une succession d'instants  $t_1, t_2, \dots$ .

Pour atteindre cet objectif, on prend la dérivée de (12.1.2)  $n$  fois par rapport au temps. Pour le cas homogène (sans force d'excitation), le système devient

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u} + \mathbf{C} \frac{d}{dt} \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{u} + \mathbf{C} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{d}{dt} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ \mathbf{M} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \mathbf{u} + \mathbf{C} \frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{d^{2n-2}}{dt^{2n-2}} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12.1.21)$$

Toutes les lignes de (12.1.21) sont sommées. Pour faciliter la manipulation, l'équation sommée est transformée en Laplace :

$$\mathbf{A}_{2n} s^{2n} + \mathbf{A}_{2n-1} s^{2n-1} + \dots + \mathbf{A}_0 = \mathbf{0} \quad (12.1.22)$$

Les coefficients  $\mathbf{A}_n$  sont composés de sommes de plusieurs matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$ .

**Exemple** Pour  $n = 2$ , on prend la dérivée de l'équation de mouvement deux fois

$$\begin{aligned} \{\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}\} \mathbf{U} &= \mathbf{0} \\ \{\mathbf{M}s^3 + \mathbf{C}s^2 + \mathbf{K}s\} \mathbf{U} &= \mathbf{0} \\ \underbrace{\{\mathbf{M}s^4 + \mathbf{C}s^3 + \mathbf{K}s^2\} \mathbf{U}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}s^4 + (\mathbf{M} + \mathbf{C})s^3 + (\mathbf{M} + \mathbf{C} + \mathbf{K})s^2 + (\mathbf{C} + \mathbf{K})s + \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2n=4} &= \mathbf{M} \\ \mathbf{A}_{2n-1=3} &= (\mathbf{M} + \mathbf{C}) \\ \mathbf{A}_{2n-2=2} &= (\mathbf{M} + \mathbf{C} + \mathbf{K}) \\ \mathbf{A}_{2n-3=1} &= (\mathbf{C} + \mathbf{K}) \\ \mathbf{A}_{2n-4=0} &= \mathbf{K} \end{aligned}$$

Ne disposer que d'un seul point d'excitation et de mesure revient à sous-échantillonner l'espace. Ceci ne permet pas de résoudre l'équation matricielle (12.1.2). L'éq. (12.1.22) peut être ramenée à une équation scalaire en réduisant l'ordre, ce qui, dans le domaine de Laplace, donne

$$\mathbf{a}_{2n}s^{2n} + \mathbf{a}_{2n-1}s^{2n-1} + \dots + \mathbf{a}_0 = 0 .$$

Le plus intéressant dans cette simplification est le fait que réduire l'ordre ne change pas les valeurs propres de l'équation par rapport à l'originale.

Pour illustrer notre propos, nous prenons l'exemple du système à 2DDL amorti dans [266] (p. 94).

L'équation du système s'écrit

$$\begin{aligned} M_1 \frac{d^2}{dt^2} u_1 + (C_1 + C_2) \frac{d}{dt} u_1 - C_2 \frac{d}{dt} u_2 + (K_1 + K_2) u_1 - K_2 u_2 &= f_1(t) \\ M_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2 - C_2 \frac{d}{dt} u_1 + (C_2 + C_3) \frac{d}{dt} u_2 - K_2 u_1 + (K_2 + K_3) u_2 &= f_2(t) \end{aligned} .$$

En annulant les forces appliquées, puis en transformant dans le domaine de Laplace et en factorisant, on obtient

$$\begin{aligned} [M_1 s^2 + (C_1 + C_2)s + (K_1 + K_2)] U_1(s) &= [C_2 s + K_2] U_2(s) \\ [C_2 s + K_2] U_1(s) &= [M_2 s^2 + (C_2 + C_3)s + (K_2 + K_3)] U_2(s) . \end{aligned} \quad (12.1.23)$$

En éliminant  $U_1(s)$  et  $U_2(s)$  de (12.1.23), l'équation des modes propres du système s'écrit sous la forme polynomiale

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 ,$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= M_1 M_2 \\ a_3 &= M_2(C_1 + C_2) + M_1(C_2 + C_3) \\ a_2 &= [-C_2^2 + M_2(K_1 + K_2) + (C_1 + C_2)(C_2 + C_3) + M_1(K_2 + K_3)] \\ a_1 &= [-2C_2 K_2 + (K_1 + K_2)(C_2 + C_3) + (C_1 + C_2)(K_2 + K_3)] \\ a_0 &= (K_1 + K_2)(K_2 + K_3) - K_2^2 . \end{aligned} \quad (12.1.24)$$

Les valeurs propres sont calculées en cherchant les racines de l'équation caractéristique. Leurs expressions en fonction des  $a_0 \dots a_n$  sont très longues.

En temporel, l'équation de mouvement à 2DDL est simplement transformée dans le domaine  $z$  après échantillonnage par différences finies

$$\begin{aligned}
M_1 \frac{z^{-1} - 2 + z}{(\Delta T)^2} U_1(z) + (C_1 + C_2) \frac{z - z^{-1}}{2\Delta T} U_1(z) - C_2 \frac{z - z^{-1}}{2\Delta T} U_2(z) + (K_1 + K_2) U_1(z) - \\
K_2 U_2(z) = 0 , \\
M_2 \frac{z^{-1} - 2 + z}{(\Delta T)^2} U_2(z) - C_2 \frac{z - z^{-1}}{2\Delta T} U_1(z) + (C_2 + C_3) \frac{z - z^{-1}}{2\Delta T} U_2(z) - K_2 U_1(z) + \\
(K_2 + K_3) U_2(z) = 0 . \quad (12.1.25)
\end{aligned}$$

Après des simplifications, on trouve

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 ,$$

avec :

$$a_4 = (\Delta T)^2 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) + 2\Delta T (M_1 C_2 + M_1 C_3 + C_1 M_2 + C_2 M_2) + 4M_1 M_2 ,$$

$$\begin{aligned}
a_3 = 2(\Delta T)^3 (C_1 K_2 + K_1 C_2 + C_1 K_3 + C_2 K_3 + K_2 C_3 + K_1 C_3) + \\
4(\Delta T)^2 (M_1 K_2 + M_1 K_3 + K_1 M_2 + K_2 M_2) - \\
4\Delta T (C_1 M_2 + C_2 M_2 + M_1 C_2 + M_1 C_3) - 16M_1 M_2 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = 4(\Delta T)^4 (K_2 K_3 + K_1 K_3 + K_1 K_2) - 2(\Delta T)^2 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) - \\
8(\Delta T)^2 (K_2 M_2 + M_1 K_2 + M_1 K_3 + K_1 M_2) + 24M_1 M_2 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 = -2(\Delta T)^3 (K_1 C_2 + K_1 C_3 + C_2 K_3 + C_1 K_2 + C_1 K_3 + K_2 C_3) + \\
4(\Delta T)^2 (K_2 M_2 + M_1 K_3 + K_1 M_2 + M_1 K_2) + \\
4\Delta T (C_1 M_2 + C_2 M_2 + M_1 C_2 + M_1 C_3) - 16M_1 M_2 ,
\end{aligned}$$

$$a_0 = (\Delta T)^2 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) - 2\Delta T (M_1 C_2 + M_1 C_3 + C_1 M_2 + C_2 M_2) + 4M_1 M_2 .$$

On peut maintenant généraliser cette procédure.



Transformée en $z$ 4ème ordre	
$\frac{\omega_{n_{DF}}}{\omega_{n_{th}}}$	1.0
$\frac{\zeta_{n_{DF}}}{\zeta_{n_{th}}}$	1.0

TAB. 12.2 – Rapports entre valeurs approximées obtenues par la discrétisation du système à 1DDL par différences finies ( $DF$ ) et transformation en  $z$  puis résolution avec des outils Matlab, et des valeurs exactes théoriques ( $th$ ) des fréquences résonances et amortissements ( pour  $T = 10^{-4}$  secondes).

### 12.1.5 Le calcul des modes du système à 1DDL avec l'approximation différences finies de 4ème ordre et la transformée en $z$

Au quatrième ordre, l'équation différentielle du système à 1DDL prend la forme :

$$M \frac{(-d^2 + 16d - 30 + 16d^{-1} - d^{-2})}{12T^2} u(n) + C \frac{(-d^2 + 8d - 8d^{-1} + d^{-2})}{12T} u(n) + K u(n) = 0 ,$$

ou, en regroupant les termes

$$\left\{ \left( -\frac{M}{12T^2} - \frac{C}{12T} \right) d^4 + \left( \frac{16M}{12T^2} + \frac{8C}{12T} \right) d^3 + \left( K - \frac{30M}{12T^2} \right) d^2 + \left( \frac{16M}{12T^2} - \frac{8C}{12T} \right) d + \left( -\frac{M}{12T^2} + \frac{C}{12T} \right) \right\} u(n) = 0 .$$

On pose :

$$a_4 = \left( -\frac{M}{12T^2} - \frac{C}{12T} \right) , \quad a_3 = \left( \frac{16M}{12T^2} + \frac{8C}{12T} \right) , \quad a_2 = \left( K - \frac{30M}{12T^2} \right) , \\ a_1 = \left( \frac{16M}{12T^2} - \frac{8C}{12T} \right) , \quad a_0 = \left( -\frac{M}{12T^2} + \frac{C}{12T} \right) .$$

Le système polynomial de 4ème ordre, qui s'obtient après une transformée en  $Z$  de la séquence discrète, s'écrit

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 ,$$

et est résolu facilement sous Matlab [258] à l'aide des fonctions *impz*, *residuez* (développement de la transformée en  $Z$  en fractions rationnelles) pour donner quatre solutions  $z_1 \cdots z_4$ .

La qualité de celles-ci peut se deviner dans l'exemple du tabl. 12.2.

## 12.2 Reconstruction des coefficients du modèle paramétrique avec un réseau de neurones artificiel

Pour résoudre l'équation de mouvement (Eqn. (12.1.2)) il faut avoir autant de capteurs que de degrés de liberté. Or, dans la réalité on n'a qu'un nombre limité de capteurs et d'actionneurs, le plus souvent, en ce qui nous concerne, une sollicitation appliquée en un seul point (entrée unique) et la réponse mesurée uniquement en un point. Ceci est équivalent à un sous-échantillonnage du domaine spatial.

L'équation de mouvement s'écrit alors

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) U(s) = \\ (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) F(s) + CI(s) . \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

où  $CI(s)$  sont les conditions initiales.

L'équation d'ordre  $(p, q)$  dans le domaine temporel s'écrit

$$u_k + a_1 u_{k-1} + \dots + a_q u_{k-q} = b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \dots + b_p f_{k-p} . \quad (12.2.2)$$

L'éq. (12.2.2) est une version échantillonnée de l'équation continue et correspond à une *impulsion unité échantillonnée*.

En réorganisant les termes indiquant la valeur mesurée actuelle et le terme de bruit blanc expérimental  $\varepsilon_k$ , on obtient

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} \dots - a_q u_{k-q} + b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \dots + b_p f_{k-p} + \varepsilon_k ,$$

qui est une relation similaire à celle du modèle ARMA (Modèle Auto-régressif, Moyenne Mobile) [291], mais que l'on appellera ici : équation scalaire de mouvement (ESM).

L'ESM d'ordre  $(p, q)$  peut être mis sous la forme

$$u_k = - \sum_{i=1}^q a_i u_{k-i} + \sum_{j=1}^p b_j f_{k-j} + \varepsilon_k . \quad (12.2.3)$$

Pour un modèle donné d'ESM, les paramètres  $a_I$  et  $b_I$  peuvent être calculés par un procédé de minimisation d'erreur au sens de moindres carrées :

$$\min \left( \sum_{i=1}^Q (u_i^{data} - u_i^{ESM})^2 \right) , \quad (12.2.4)$$

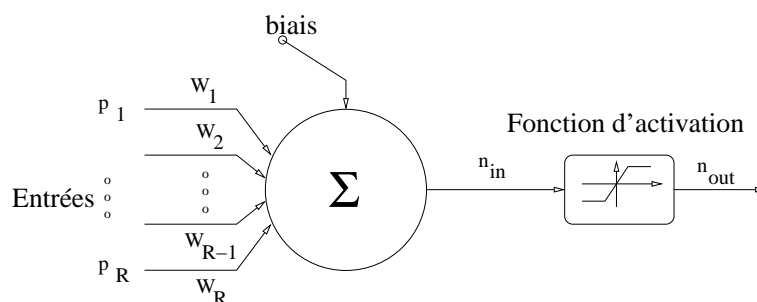


FIG. 12.3 – Le réseau de neurones artificiel.

où  $Q$  est le nombre d'époques.

Un réseau de neurones artificiel (RNA) composé d'un seul neurone (une couche) a été développé pour calculer les paramètres (poids) de l'ESM.

Le RNA est composé de trois parties principales : (1) les neurones, (2) les interconnexions avec des poids entre les neurones, et (3) des fonctions d'activation qui agissent sur l'ensemble des signaux en entrée des neurones pour produire les signaux de sortie.

Le RNA [291] avec un seul vecteur en entrée est constitué de  $R$  éléments,  $(p_1, p_2, p_R)$  avec un biais  $b$ , qui doit être sommé avec les entrées après leur multiplication avec les poids  $(w_1p_1, w_2p_2 \dots w_Rp_R)$  pour former l'entrée  $n_{in}$  du réseau.

$$n_{in} = w_1p_1 + w_2p_2 + \dots + w_Rp_R + b . \quad (12.2.5)$$

La fonction de transfert, également connue sous le nom de fonction d'activation  $f$ , lie l'entrée du réseau  $n_{in}$  aux sorties  $n_{out}$ , s'écrit :

$$n_{out} = f(n_{in}) \quad (12.2.6)$$

La fonction d'activation est linéaire. L'objectif principal de l'algorithme du RNA est de permettre la reconstruction des paramètres d'ordre élevé de l'ESM à partir desquels les fréquences de résonance, le frottement interne et la réponse impulsionnelle de vibration d'un spécimen sont calculés.

L'algorithme requiert la connaissance de la force impulsive appliquée à l'entrée du système et la réponse (accélération ou pression acoustique rayonnée). La première étape est de

réarranger les vecteurs d'entrée-sortie sous une forme propice à l'alimentation du réseau de neurones :

$$\begin{array}{c}
 \text{Objectif} \\
 \underbrace{\hspace{10em}} \\
 \left. \begin{array}{cccccccc}
 u(0) & f(-1) & u(-1) & f(-2) & \cdot & \cdot & \cdot & u(-q) & f(-p) \\
 u(1) & f(0) & u(0) & f(-1) & \cdot & \cdot & \cdot & u(1-q) & f(1-p) \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 u(k) & f(k-1) & u(k-1) & f(k-2) & \cdot & \cdot & \cdot & u(k-q) & f(k-p) \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 u(N-1) & f(N-2) & u(N-2) & f(N-3) & \cdot & \cdot & \cdot & u(N-1-q) & f(N-1-p)
 \end{array} \right\} \text{epochs} \\
 \leftarrow \text{Entrées} \quad \text{Réseau} \quad \rightarrow
 \end{array} \tag{12.2.7}$$

La fonction de transfert s'écrit, par transformée en  $Z$  :

$$H(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tag{12.2.8}$$

où

$$\begin{aligned}
 A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_q z^{-q} \\
 B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_p z^{-p} .
 \end{aligned}$$

Pour calculer les fréquences de résonances et les atténuations correspondantes, la fonction de transfert, composée de tous les poids récupérés par le RNA, est décomposée en pôles et zéros :

$$\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{r(1)}{1 - p_1 z^{-1}} \cdots \frac{r_q}{1 - p_q z^{-1}} + k_1 + k_2 z^{-1} \dots \tag{12.2.9}$$

Passant du domaine  $z$ , ou domaine discret, au domaine fréquentiel  $\omega$  revient à écrire  $z = e^{j\omega T}$ , avec  $T = 1/f_s$  la période d'échantillonnage et  $f_s$  la fréquence d'échantillonnage.

Pour un seul mode, le dénominateur est donné par  $1 - p_n z^{-1}$ , avec

$$\begin{aligned}
 p_n &= e^{\nu_p/f_s}, & \nu_p &= -\alpha_n + j\omega_n \\
 \omega_n &= \Im m(\ln(p_n))f_s, & \alpha_n &= -\Re e(\ln(p_n))f_s .
 \end{aligned} \tag{12.2.10}$$

Pour comparer cette façon de faire avec les algorithmes classiques de traitement du signal, on utilise la notion de fonction de transfert. Ici, la fonction de transfert  $T_{xy}$ , d'un système qui a pour entrée  $x$  et sortie  $y$ , est définie par

$$T_{xy}(\omega) = \frac{P_{xy}(\omega)}{P_{xx}(\omega)} \quad (12.2.11)$$

où  $P_{xx}(\omega)$  est l'autospectre de puissance et  $P_{xy}(\omega)$  la densité spectrale de puissance (DSP) croisée.

Le code Matlab *TFE* emploie un algorithme performant comme celui de Welch [351, 378] pour calculer les densités spectrales de puissance d'un processus stationnaire (i.e., la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation).

### 12.3 La Validation de l'algorithme RNA-ESM [293]

Les réponses (accélération) en flexion et longitudinales de cinq fantômes d'os (cylindres en nylon, 23cm long, diamètre 3.0 cm, avec des défauts artificiels induits) sont acquises dans les domaines temporel et fréquentiel. Les trous forés, dont la fonction est d'imiter la porosité des extrémités des os longs humains, ont un diamètre de 1.0 mm et une profondeur de 10.0 mm . La réponse est mesurée par un accéléromètre léger (Endevco 2222C), relié à un amplificateur de charge B&K 2692. La sollicitation est fournie par un mini-pot vibrant.

Dans un premier temps, on balaye le spectre, autour des modes de vibration des spécimens cylindriques, en appliquant un signal sinusoïdal, généré par un démodulateur synchrone (SR830 programmé par ordinateur à distance par l'intermédiaire d'une interface GPIB IEEE-488), au pot vibrant à travers un amplificateur de puissance B&K 2706.

Dans un deuxième temps, une impulsion électrique est appliquée au pot vibrant pour les besoins de l'algorithme RNA-ESM. Ceci est équivalent à appliquer un impact avec le marteau à choc sur le spécimen pour induire la propagation d'ondes élastiques. La force est mesurée avec une tête à impédance intercalée entre le pot et le spécimen. La forme du signal mesurée est tracée dans la fig. (12.5a). La forme du signal de la réponse obtenue avec l'accéléromètre est donnée dans la fig. (12.5b).

Les résultats, représentés dans les tableaux (12.4) et (12.3), sont obtenus en appliquant

les deux algorithmes d'inversion aux données réelles, c'est-à-dire, les données expérimentales mesurées sur le banc d'essai vibroacoustique (fig. (12.4)). Les paramètres sont reconstruits par la méthode inverse décrite ci-après, faisant emploi du modèle 1DDL issu de la résolution de l'équation de mouvement 12.1.2 [293], sachant que l'accélération est donnée par :

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{C}_1 \frac{\phi^2}{\phi + i\omega} \left( e^{\phi T} - 1 \right) + \frac{1}{2\pi} \mathcal{C}_2 \frac{\bar{\phi}^2}{\bar{\phi} + i\omega} \left( e^{\bar{\phi} T} - 1 \right) , \quad (12.3.1)$$

avec  $\phi = (-\zeta\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$  ,  $\bar{\phi} = (-\zeta\omega_n - i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$  et  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Le problème inverse est de reconstruire les quatre paramètres  $\omega_n$ , l'amortissement  $\zeta$ , et  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  à partir de la réponse (accélération) mesurée.

La fonction-coût (à minimiser au sens des moindres carrés) est la différence entre les données mesurées d'accélération (aux fréquences discrètes) et le modèle 1DDL de cette accélération.

$$\kappa(\omega_n, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \sum_{m=1}^p \left\{ \check{\alpha}_m(\omega) - \tilde{\alpha}_m(\omega) \right\}^2 \quad (12.3.2)$$

où  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ,  $T = \frac{\omega_n}{2\pi}$  ,  $\zeta = \frac{1}{2} \frac{c}{m\omega_n}$  , et  $\check{\alpha}(\omega)$  est l'accélération calculée par le modèle 1DDL. La fonction-coût est minimisée en utilisant l'algorithme de minimisation de Nelder-Mead [283].

La fonction de transfert (TF) reconstruite par l'algorithme RNA-ESM et celle calculée par la fonction Matlab *TFE* sont représentées dans la fig. (12.5c). Enfin, la réponse impulsionnelle reconstruite par l'algorithme RNA-ESM à partir de l'entrée impulsive et de la réponse à celle-ci, est tracée dans la Fig. (12.5d). La comparaison entre les résultats (ramenés à la même échelle), relatifs aux modes de flexion, utilisant les deux méthodes est bonne, puisque leur différence maximale est de l'ordre du pour cent.

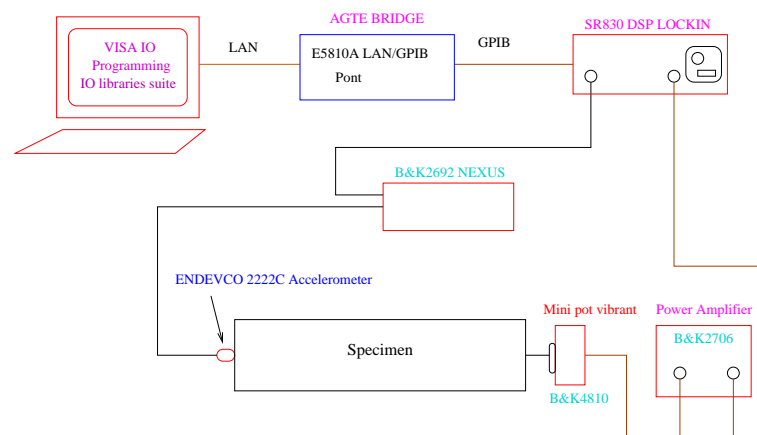


FIG. 12.4 – (a)(Haut) Photographie du montage expérimental avec le mini-pot vibrant dont la tête est équipée d'un capteur de force (tête à impédance). La réponse est mesurée avec un accéléromètre (Acc). (b)(Bas) Schéma de principe pour mesurer la réponse en fréquence avec un accéléromètre.

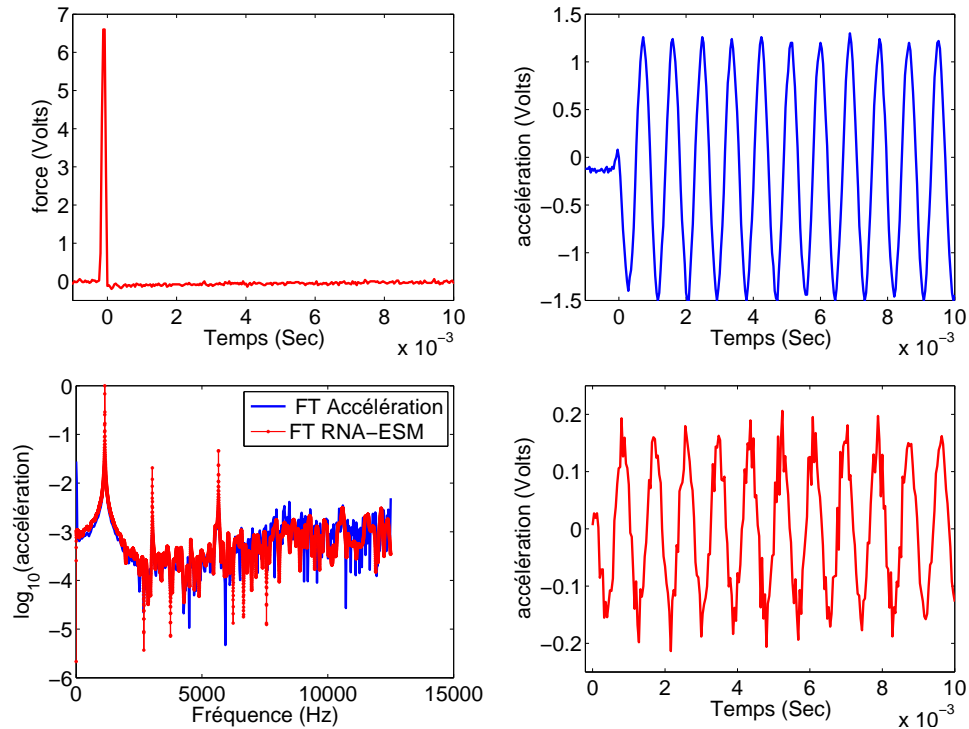


FIG. 12.5 – (a)(Haut gauche) Force appliquée par le pot en forme de choc (excitation impulsive) au cylindre en laiton, diamètre 2.0 cm, longueur 23.0 cm. (b)(Haut droite) Réponse (accélération). (c)(Bas gauche) La fonction de transfert (FT) reconstruite par l’algorithme RNA-ESM et celle calculée par la fonction Matlab *TFE*. (d) (Bas droite) Réponse impulsionnelle reconstruite par l’algorithme RNA-ESM.

(a) Trous → mode	Sain		12		24		36		48	
	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$
1	793	0.0288	783	0.0286	765	0.0328	780	0.0250	779	0.0267
2	2061	0.0214	2034	0.0215	2002	0.0318	2025	0.0219	2028	0.0238
3	3693	0.0240	3691	0.0193	3661	0.0284	3681	0.0204	3684	0.0205
(b) Holes → mode	Sound		12		24		36		48	
	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$
1	793	0.0244	780	0.0227	769	0.0388	781	0.0269	786	0.0248
2	2057	0.0227	2041	0.0215	2007	0.0314	2026	0.0254	2049	0.0238
3	3779	0.0190	3711	0.0342	-	-	3732	0.0113	3780	0.0374

TAB. 12.3 – Tableau des fréquences de résonance (en Hertz) et amortissements reconstruits pour les modes de flexion en utilisant : (a) le modèle 1DDL, (b) l’algorithme RNA-ESM avec le signal d’impact et l’ accélération mesurés [293].



Trous → mode	Sain		12		24		36		48	
	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$	$f_n$	$\varsigma$
1	3634	0.0166	3624	0.0171	3506	0.0273	3609	0.0171	3625	0.0182
2	7306	0.0146	7255	0.0215	6955	0.0271	7235	0.0186	7332	0.0159
3	10870	0.0159	10785	0.0188	10504	0.0260	10791	0.0186	10953	0.0175
4	14329	0.0165	14292	0.0192	13858	0.0307	14183	0.0174	14491	0.0183

TAB. 12.4 – Tableau des fréquences de résonances longitudinales (en Hz) et des amortissements reconstruits par l’emploi du modèle 1DDL dans l’algorithme d’inversion, pour cinq cylindres avec un nombre variable de trous creusés (tous de diamètre 1.0 mm et de longueur 1.0 cm). Le calcul éléments finis 3D d’analyse modale pour un cylindre viscoélastique avec 24 trous donne [293] : 3599, 7159, 10638, 14047 Hz.

## Chapitre 13

# Sollicitation impulsive fournie par une bille impactant le spécimen : calcul de la force de contact par le modèle de Hertz

Ici nous examinons en détail la dynamique de l'impact d'une bille sur un spécimen d'os afin de mieux modéliser la force appliquée dans le cas d'une sollicitation impulsive.

### 13.1 Introduction

Dans ce chapitre, est analysée en détail l'action d'un autre type d'excitateur (avec quelques similarités avec le marteau à choc) : une petite bille sphérique en acier.

Le problème de contact, entre une bille sphérique et un cylindre est résolu numériquement en employant le modèle de contact de Hertz pour modéliser la déformation locale près du point de contact.

La bille est plus souple d'utilisation que le marteau à choc. On peut choisir des billes de plus petite taille et leur donner des vitesses plus élevées que celles du marteau à choc.

Il est supposé que la vitesse d'impact est petite par rapport à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans les solides, et que l'aire de contact est plus petite que celle des surfaces solides impactées. Les vibrations intérieures de la bille sphérique et le frottement sont également négligés.

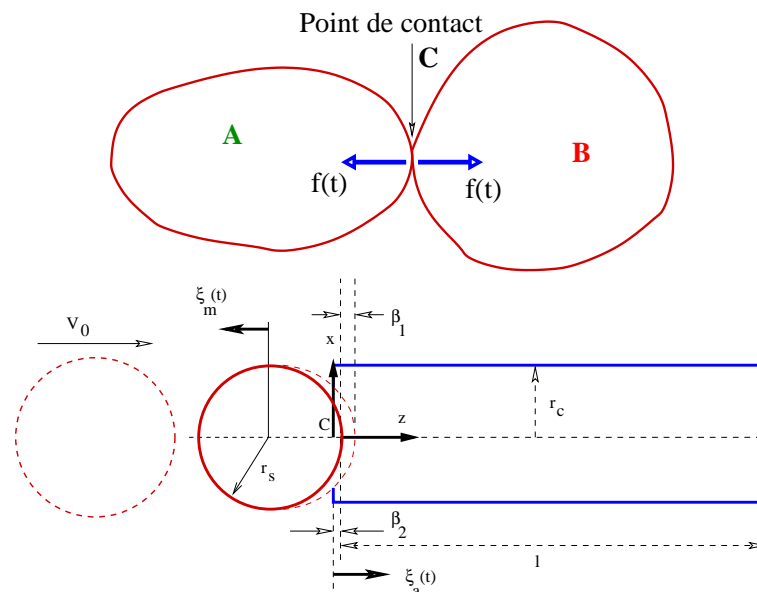


FIG. 13.1 – (a)(Haut) Modèle d'impact entre deux corps.  $f(t)$  sont les forces d'action et de réaction. (b)(Bas) Système de coordonnées et cinématique de déformation pendant l'impact longitudinal.

Le modèle que nous allons mettre en oeuvre permettra de reconstruire la force appliquée par la bille sphérique en acier impactant un cylindre de même composition. Ce modèle fournira des données synthétiques (force et réponse vibratoire) pour valider l'algorithme RNA-ESM. Pour finir, le même problème de dynamique de contact sera résolu par la méthode d'éléments finis 3D.

## 13.2 Le modèle dynamique de deux corps entrant en contact

Le modèle de l'impact d'un corps A sur corps B est représenté dans la fig. (13.1a). Les paramètres  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des mesures de la déformation locale de la bille et du cylindre respectivement.  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  est l'*approche* dans le sens de la théorie de contact de Hertz (TCH).

Le rapport entre la force de contact et la déformation locale est déterminé (fig. (13.1b)) à partir de la TCH [363, 138]

$$f(t) = -k\alpha t^{3/2}, \quad (13.2.1)$$

où  $k$  est le coefficient de restitution non linéaire, qui dépend des propriétés élastiques et géométriques des surfaces de contact.

Pour le cas d'une bille sphérique en contact avec une surface plane,

$$k = \left( \frac{4}{3\pi} \right) \left[ \frac{\sqrt{r_s}}{(k_1 + k_2)} \right], \quad (13.2.2)$$

où  $r_s$  est le rayon de la bille sphérique,

$$k_1 = \frac{(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2}, \quad (13.2.3)$$

$\nu_1$ ,  $E_1$  et  $\nu_2$ ,  $E_2$  étant les coefficients de Poisson et module de Young du cylindre et de la bille, respectivement.

La force de contact  $f(t)$  est calculée à partir des déplacements et de la vitesse initiale de la bille  $V_0$  [125]

$$f(t) = k[V_0 t - \xi_a(t) - \xi_m(t)], \quad (13.2.4)$$

sachant que les déplacements  $\xi_a$  et  $\xi_m$  sont définis à partir de

$$\xi_A(t) = \int_0^t f(\tau) h_A(t - \tau) d\tau, \quad \xi_B(t) = \int_0^t f(\tau) h_B(t - \tau) d\tau \quad (13.2.5)$$

où  $h_A$  et  $h_B$  dénotent les fonctions de réponse d'impulsion des solides A et B respectivement au point de contact C (fig. (13.1a)).

Puisque les vibrations internes de la bille sont négligées, on suppose que celle-ci est comme un corps rigide (la période du mode fondamental de vibration de la bille sphérique en acier est beaucoup plus faible que la durée de contact).

Le déplacement de la bille de masse  $m$  soumise à une force  $f(t)$ , est donné par

$$\xi_m = \frac{1}{m} \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau .$$

La réponse impulsionnelle d'un cylindre suspendu sans contraintes qui subit une force impulsive appliquée le long de son axe, est calculée selon le principe de Saint-Venant lequel stipule que l'effort et le déplacement sont uniformément répartis sur une section légèrement à l'intérieur de la surface à l'extrémité du cylindre. Cette réponse impulsionnelle, en un point situé à  $z = x$  sur l'axe du cylindre (fig. (13.1b)), est donnée par [125] :

$$H(x, t) = \frac{c_0}{AE} \left[ \frac{c_0}{l} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{n\pi c_0}{l} t\right) \right], \quad (13.2.6)$$

où  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  est la vitesse de l'onde longitudinale dans le cylindre, et  $\rho$ ,  $E$ ,  $A$  et  $l$  sont la masse volumique, le module de Young, la section et longueur du cylindre respectivement.

De 13.2.6 on trouve que le déplacement du bout de cylindre du côté impacté est :

$$\xi_a = \frac{1}{M} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)d\tau + \frac{2c_0}{\pi AE} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t f(\tau) \sin \left\{ \frac{n\pi c_0}{l}(t - \tau) \right\} d\tau, \quad (13.2.7)$$

où  $M$  est la masse du cylindre.

De (13.2.6), le déplacement  $\xi_l(t)$ , au bout du cylindre à  $z = l$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \xi_l(t) &= \frac{c_0}{AE} \int_0^t \left[ \frac{c_0}{l}(t - \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^n \sin \left\{ \frac{n\pi c_0}{l}(t - \tau) \right\} \right] f(\tau) d\tau \\ &= \frac{2c_0}{AE} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t - (l/c_0)(2n-1)} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (13.2.8)$$

L'accélération sur la surface du cylindre est donnée par :

$$\ddot{\xi}_l(t) = \frac{2c_0}{AE} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{f} \left\{ t - \frac{l}{c_0}(2n-1) \right\}, \quad (13.2.9)$$

où  $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ .

La force de contact  $f(t)$  est calculée par la résolution numérique de (13.2.6) munie de la condition initiale  $f(0) = 0$ . La variable temporelle  $t$  est échantillonnée avec une période  $\Delta t$  qui est la même que celle employée dans l'expérience. La force de contact  $f[(j+1)\Delta t]$  est calculée par induction à partir des valeurs connues de  $f(j\Delta t)$ , avec  $j = 0 \rightarrow m$ .

L'algorithme d'optimisation de Nelder-Mead [283] a été employé pour calculer  $f((j+1)\Delta t)$  à l'aide de la fonction coût :

$$\min \left\{ k[V_0(j+1)\Delta t - \xi_a((j+1)\Delta t) - \xi_m(t)]^{3/2} - f((j+1)\Delta t) \right\}^2. \quad (13.2.10)$$

Les variables  $\xi_a(t)$ ,  $\xi_l(t)$ ,  $\xi_m(t)$  et  $\ddot{\xi}_l(t)$  sont alors déterminées à partir de  $f(i\Delta t)$ ,  $i = 0 \rightarrow T/\Delta t$ .  $T$  est la durée de contact qui représente la durée des ondes générées par la contrainte.

### 13.3 Mesure de la réponse avec un capteur de pression

Les vibrations longitudinales de la surface du cylindre sont communiquées au fluide ambiant (l'air) en lequel prend naissance une onde acoustique. On adresse ici le problème du

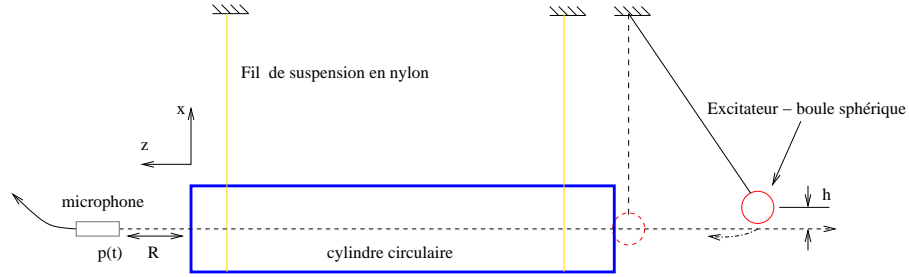


FIG. 13.2 – La géométrie du problème d'impact et du rayonnement.

calcul de la pression acoustique  $p(t)$  rayonnée par la surface opposée à celle qui est impactée, à une distance  $R$ , en supposant que : i) cette distance soit bien plus grande que le rayon du cylindre et ii) qu'il est licite de négliger l'interaction fluide-structure (ce qui est le cas du fait que la structure est lourde et l'air est léger). Le cas du rayonnement acoustique d'un cylindre vibrant en flexion n'a pas encore été traité.

Le problème du rayonnement acoustique induit par les vibrations du bout d'un cylindre circulaire peut être résolu en considérant ce bout comme un piston circulaire. La géométrie du problème de rayonnement est dessinée dans la fig. (13.2). Le rayonnement impulsif d'un piston circulaire dans un baffle rigide infini est exhaustivement traité dans la littérature [181, 269, 275, 305, 96, 346, 389] dont nous nous inspirons ici librement.

La pression est supposée mesurée (et sera donc calculée) le long de l'axe de symétrie ( $x = 0, y = 0$ ). Le champ de pression acoustique  $y$  est calculé par l'intégrale de Rayleigh [305]

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho}{2\pi} \iint \frac{\dot{v}_n(x_s, y_s, t - \mathbf{R}/c)}{\mathbf{R}} dx_s dy_s, \quad (13.3.1)$$

où  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{R}^2 = z^2 + (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2$  et  $v_n(x, y, t)$  est la vitesse normale du piston vibrant. Ceci est équivalent au champ produit par des sources monopolaires distribuées uniformément sur le plan  $z = 0$ . Le champ rayonné par ces sources en espace libre obéit à l'équation

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t^2} = -2\dot{v}_n(x, y, t)\delta(z). \quad (13.3.2)$$

Faisons le changement de variables de  $x_s$  et  $y_s$  en coordonnées cylindriques  $w_s$  et  $\psi_s$  :  $x_s = w_s \cos \psi_s$ ,  $y_s = w_s \sin \psi_s$ . La pression sur l'axe ( $x = y = 0$ ) prend alors la forme :

$$p(0, 0, z, t) = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\dot{v}_n(t - \mathbf{R}/c)}{\mathbf{R}} w_s dw_s d\psi_s, \quad (13.3.3)$$

où  $\mathbf{R}^2 = z^2 + w_s^2 \Rightarrow d\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}w_s dw_s$  et

$$\dot{v}_n(t - \mathbf{R}/c) = -c \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} (v_n(t - \mathbf{R}/c)) . \quad (13.3.4)$$

Ainsi

$$p(0, 0, z, t) = -\rho c \int_z^{(z^2+a^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} (v_n(t - \mathbf{R}/c)) d\mathbf{R} , \quad (13.3.5)$$

qui, après intégration, devient :

$$p(z, t) = \rho c \left[ v_n \left( t - \frac{z}{c} \right) - v_n \left( t - \frac{(z^2 + a^2)^{1/2}}{c} \right) \right] . \quad (13.3.6)$$

Pour un piston pulsant à la fréquence angulaire constante  $\omega$ , l'amplitude complexe est  $\tilde{v}_n(z, \omega) \exp(i\omega t)$ . Alors la pression acoustique rayonnée par un piston circulaire bafflé ( $v_n(x, y, t) = 0$  à l'extérieur de la surface du piston) s'écrit dans le domaine fréquentiel comme

$$\tilde{p}(z, \omega) = -2i\rho c \tilde{v}_n(z, \omega) \exp \left\{ \frac{ik(z + (z^2 + a^2)^{1/2})}{2} \right\} \sin \left( \frac{k(z^2 + a^2)^{1/2} - kz}{2} \right) \quad (13.3.7)$$

où  $k = \frac{\omega}{c}$  est le nombre d'onde,  $c$  la vitesse des ondes de pression dans l'air, et  $a$  le rayon du cylindre.

### 13.4 Emploi du modèle de contact, vibrations et rayonnement pour valider l'algorithme RNA-ESM

La force d'impact appliquée et la pression rayonnée ont été calculées avec le modèle d'impact de Hertz pour une sphère en acier impactant un cylindre en acier. Ces données ont été employées pour alimenter l'algorithme RNA-ESM pour en récupérer les paramètres.

Les résultats concernant la force et la fonction de transfert reconstruites sont donnés dans la fig. (13.3). Les résultats portant sur la pression acoustique et la réponse impulsionnelle reconstruite par l'algorithme RNA-ESM à partir des données expérimentales sont donnés dans la fig. 13.4.

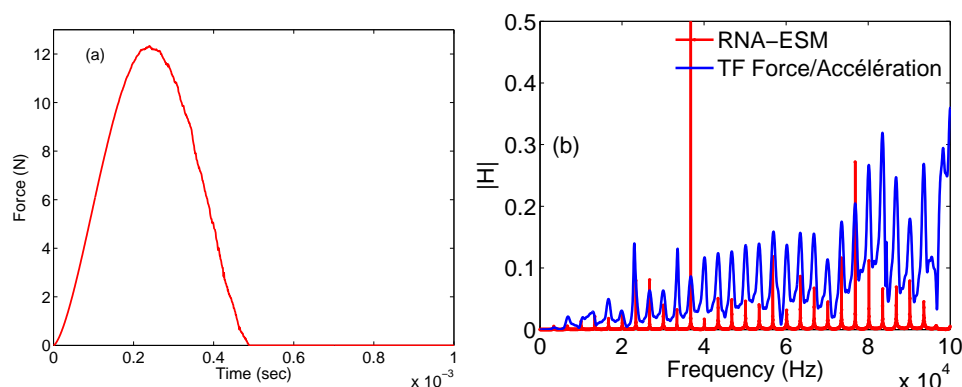


FIG. 13.3 – (a)(Gauche) Force de contact calculée pour une bille sphérique en acier, de diamètre 1.0 cm, impactant un cylindre circulaire en acier (de rayon 3.0 cm et longueur 22.93 cm). (b)(Droite) La fonction de transfert calculée par le code Matlab *TFE* et celle reconstruite par l'algorithme RNA-ESM. Les modes sont bien identifiés jusqu'à 150 kHz.

### 13.5 Influence du bruit sur la reconstruction RNA - ESM

Le but ici est de simuler l'environnement sonore au voisinage du microphone. En effet, celui-ci capte du bruit ambiant indésirable (par exemple le bruit provenant du ventilateur d'un équipement électronique). Le bruit peut également apparaître dans la pression mesurée si le microphone ou l'amplificateur ont des bruits internes élevés (causés par des problèmes de mauvais câblage de masses électriques, ou dans le cas où les signaux sont faibles et noyés dans le bruit ...).

Plusieurs types de signaux ont été simulés numériquement par l'emploi de notre modèle d'impact et de rayonnement. Un bruit blanc qui suit une loi de distribution normale d'amplitudes a été ajouté à la pression rayonnée.

Nous avons aussi pollué la force appliquée avec du bruit pour évaluer lequel des deux, l'entrée ou la sortie, a une plus grande influence sur l'algorithme RNA-ESM.

Nous avons observé que le bruit, ajouté à la réponse, influence la reconstruction de la réponse impulsionnelle en la rendant instable (fig. 13.5). Le bruit influence peu les valeurs des fréquences récupérées (Table 13.1) mais des modes fictifs apparaissent à côté de ces modes. Le bruit a pour effet de rendre instable la fin de la réponse impulsionnelle récupérée par l'algorithme RNA-ESM. C'est la partie où l'amplitude du signal est le plus faible.



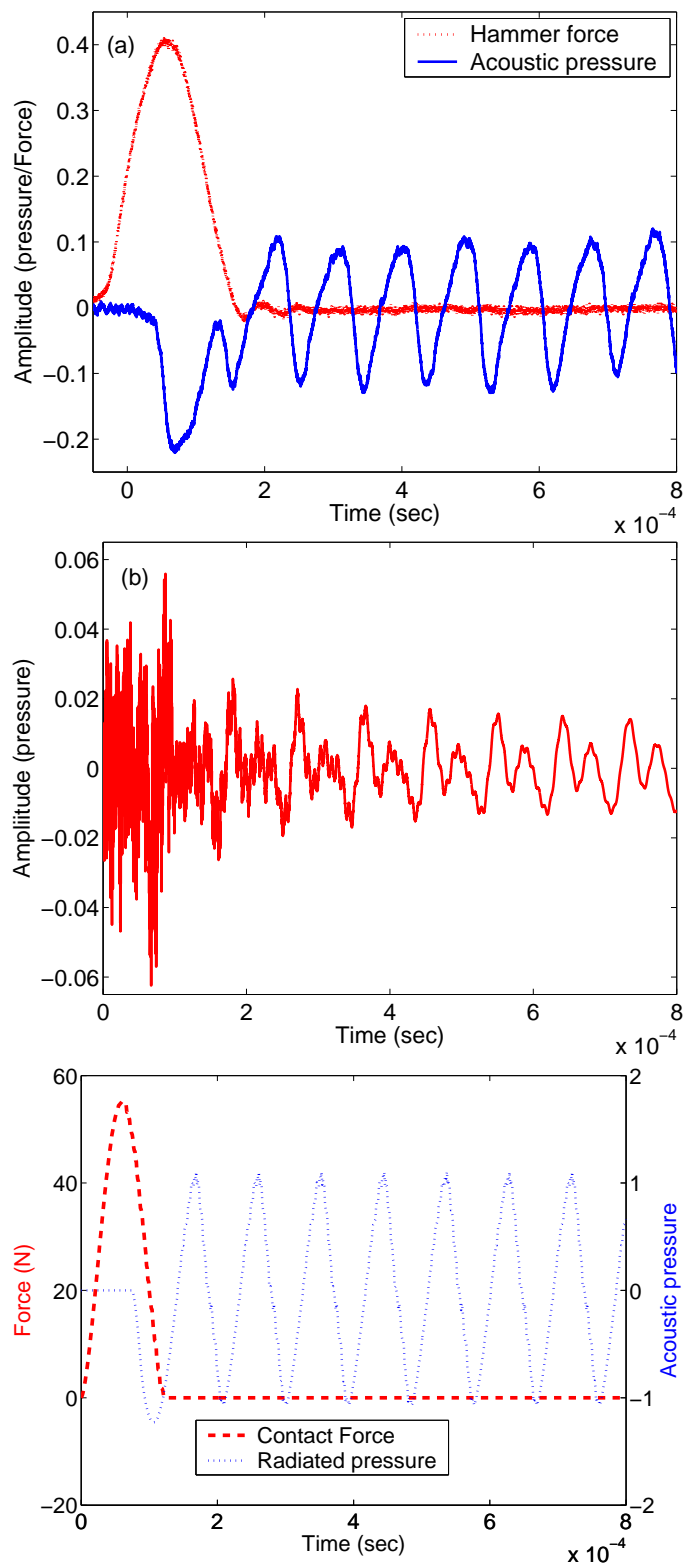


FIG. 13.4 – (a)(Haut) La force d'impact du marteau et la pression acoustique rayonnée mesurées. (b)(Milieu) La réponse impulsionnelle reconstruite en utilisant l'algorithme RNA-ESM à partir des données expérimentales. (c)(Bas) La réponse acoustique calculée en utilisant la théorie du contact de Hertz.

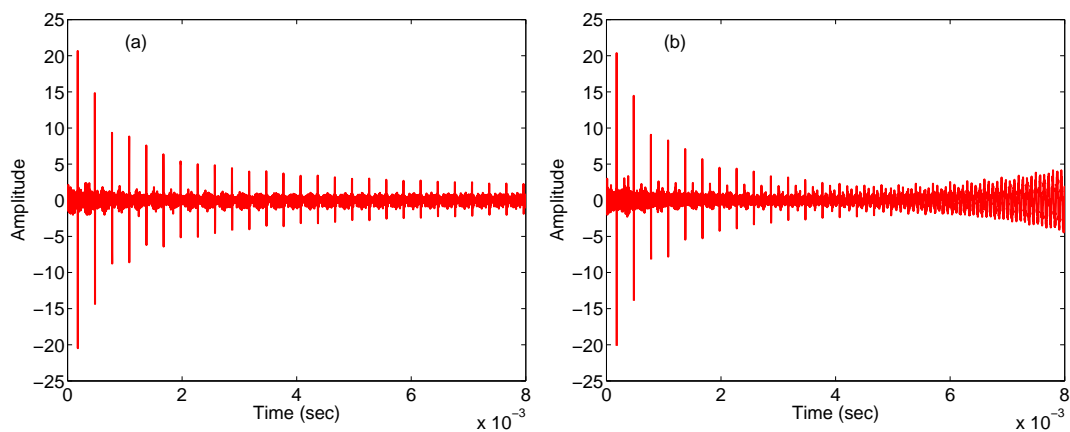


FIG. 13.5 – (a)(Gauche) Réponse impulsionnelle (RI) reconstruite sans bruit. (b)(Droite) RI avec deux pour cent de bruit ajouté à la pression rayonnée (2 % de l'amplitude maximum de la pression mesurée).

mode	No noise	2% noise-output
1	3341	3341
2	6682	6677
3	10025	10057/10109†
4	13351	13371
5	16700	16704
6	18890	-
7	20034	20027

TAB. 13.1 – Influence du bruit sur les modes récupérés. † Deux modes ont été récupérés, dont un est fictif.

### 13.5.1 Prédiction de la réponse à une excitation

A présent, nous voulons prédire la réponse à une excitation connue, en l'occurrence la réponse impulsionnelle, à partir de la réponse mesurée et de l'algorithme RNA-ESM. La prédiction de cette réponse est basée sur la convolution.

La réponse impulsionnelle est obtenue expérimentalement à partir de l'impact par un marteau sur le cylindre. Une autre force, pour laquelle on veut connaître la réponse, est obtenue par l'impact d'une sphère de diamètre 1 cm sur le même cylindre, et est calculée en utilisant la théorie d'impact de Hertz (sect. 13.4). Ceci est une donnée synthétique.

Cette force est convoluée avec la réponse impulsionnelle obtenue à partir des données expérimentales pour le même cylindre et sphère, en utilisant l'algorithme RNA-ESM (fig. 13.3). La réponse obtenue est alors comparée avec la pression rayonnée calculée pour le même cylindre avec le modèle numérique d'impact (la force synthétique et la réponse impulsionnelle sont représentées dans la fig. 13.6 et il en ressort qu'il y a un bon accord entre les deux.

## 13.6 Conclusion

Un type d'excitateur autre (petite bille sphérique en acier) qu'un marteau et un capteur (acoustique) sans contact avec le spécimen pour mesurer la réponse, ont été proposés.

La modélisation numérique du problème de contact entre la bille sphérique et une éprouvette d'os en forme de cylindre élastique a été développée.

La pression rayonnée par le bout du cylindre excité longitudinalement a été obtenue en employant l'intégrale de Rayleigh.

Ce modèle a ensuite été utilisé pour générer des données synthétiques pour valider l'algorithme RNA-ESM.

Mesurer la pression acoustique a un avantage par rapport à celle de l'accélération car c'est une mesure sans contact, donc ne rajoute pas de masse sur le spécimen. Son inconvénient est la pollution possible de cette réponse par le bruit ambiant, ce qui peut être résolu en effectuant les mesures en salle anéchoïque.

Dans l'étude du rayonnement, nous avons calculé la pression rayonnée au moyen de l'intégrale de Rayleigh, mais nous aurions pu améliorer le calcul de la pression rayonnée par

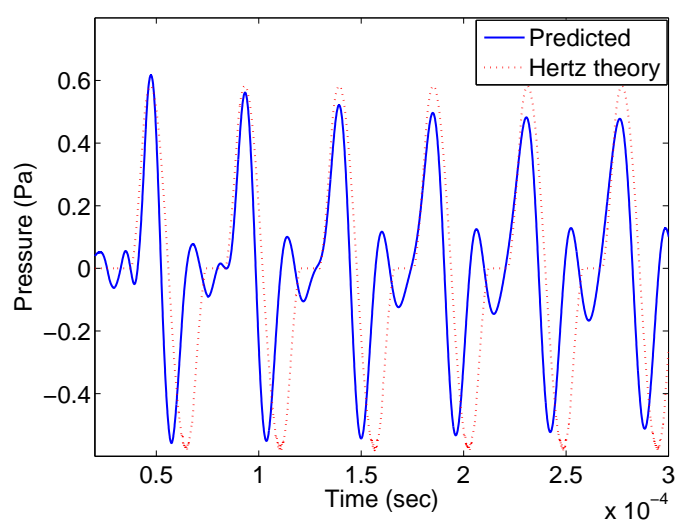


FIG. 13.6 – La pression rayonnée par un cylindre en acier, prédite par la convolution entre la force d'impact d'une sphère de diamètre 1.0 cm avec la réponse impulsionnelle (RI) du cylindre. La RI est obtenue expérimentalement (données de l'expérience) employant l'algorithme RNA-ESM. La pression synthétique est calculée en utilisant le modèle de contact de Hertz avec rayonnement développé auparavant.

un piston en nous appuyant sur la formulation de Langevin, implémentée par Beissner [23]. Cette méthode suppose que le piston est complètement entouré par l'air alors que dans la méthode de Rayleigh le piston est bafflé.

## Chapitre 14

# Prise en compte de l'atténuation

Dans ce chapitre nous adressons l'aspect viscoélastique des matériaux, notamment de l'os, et son influence sur la réponse vibroacoustique des spécimens.

### 14.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de prendre en compte les pertes d'énergie attribuées aux frottements internes et visqueux dans les matériaux. Ces pertes se manifestent de manière très explicite dans la réponse d'un corps soumis à des sollicitations dynamiques.

### 14.2 Les modèles mécaniques des fonctions de relaxation et de fluage des matériaux viscoélastiques

L'emploi d'analogies mécaniques permet de rendre commodément compte de l'anélasticité d'un corps soumis à des sollicitations. Elles conduisent à des modèles mécaniques composés de ressorts et d'amortisseurs (fig . 14.1). Il existe trois principaux modèles rhéologiques permettant la modélisation du comportement viscoélastique d'un matériau ([228]).

Le premier modèle est dit de Kelvin-Voigt, composé d'un amortisseur et d'un ressort montés en parallèle. Il est approprié pour simuler le comportement des solides du type caoutchouc. Pour une contrainte donnée, on obtient après transition une déformation constante.

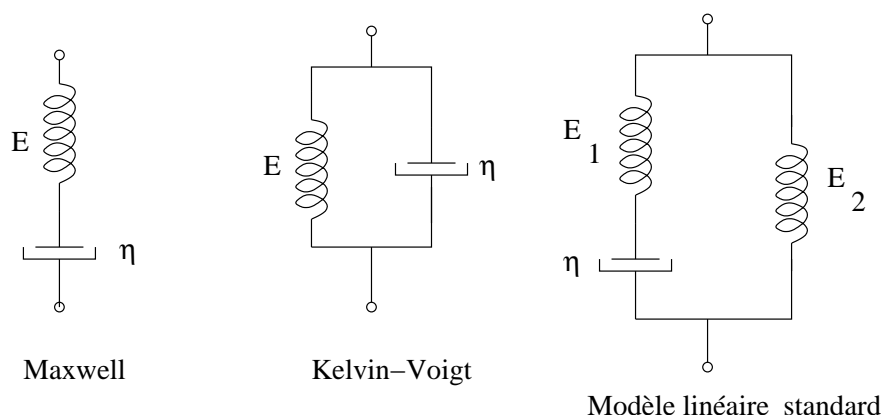


FIG. 14.1 – Les modèles rhéologiques analogiques sont des regroupements d'éléments mécaniques.

Le deuxième modèle est dit de Maxwell, composé d'un ressort et d'un amortisseur montés en série. Il permet de simuler le comportement des liquides type mélasse. Pour une contrainte donnée on obtient après transition une vitesse de déformation constante.

Le troisième modèle est le modèle standard, ou de Kelvin-Voigt amélioré, composé d'un ressort supplémentaire placé en série par rapport au modèle de Kelvin-Voigt. Il permet de rendre compte, de manière plus réaliste, de la déformation sous une contrainte de type palier.

Plus généralement (voir le chap. 2), la contrainte  $\sigma(t)$  à l'instant  $t$  dépend des déformations antérieures  $\varepsilon(t - \Delta t)$  au temps  $t - \Delta t$ , ce qui s'écrit

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(t - \Delta t) \Psi(\Delta t) d(\Delta t)$$

avec  $\Psi(\Delta t)$  fonction de relaxation.

### 14.2.1 Relations entre contrainte et déformation des trois modèles

La loi de comportement correspondant au modèle de Maxwell s'exprime par

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\vartheta_d} \sigma, \quad \text{ou} \quad E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma, \quad (14.2.1)$$

où  $\vartheta_d$  est la viscosité dynamique et  $\tau = \frac{\vartheta_d}{E}$  le temps de relaxation. Les réponses pour des sollicitations avec déformation ou contrainte imposées en forme de palier sont respectivement :

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-t/\tau}, \quad \chi(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\vartheta_d} .$$

La loi de comportement du modèle de Kelvin-Voigt s'exprime par

$$\sigma = E\varepsilon + \vartheta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma}{E} = \varepsilon + \tau_c \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (14.2.2)$$

où  $\tau_c = \frac{\vartheta}{E}$  est le temps de retardation . La réponse pour le fluage est donnée par

$$\chi(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-t/\tau_c}).$$

Le modèle linéaire standard correspond à la loi de comportement

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(E_1 + E_2) + \frac{\varepsilon E_2}{\tau} = \frac{\sigma}{\tau} + \frac{d\sigma}{dt}$$

La fonction de relaxation est obtenue avec l'aide de la transformation de Laplace de l'équation différentielle

$$\Psi(t) = E_2 + E_1 e^{-t/\tau_r},$$

et sa fonction de fluage est donnée par [228] :

$$\chi(t) = \frac{1}{E_2} - \frac{E_1}{E_2(E_1 + E_2)} e^{-t/\tau_c},$$

avec la constante de fluage (temps de retardation) donnée par

$$\tau_c = \tau_r \frac{(E_1 + E_2)}{E_2} .$$

### 14.2.2 Système amorti à un degré de liberté

On aborde maintenant le problème inverse de la détermination de l'amortissement d'un spécimen (d'os long) à partir de données expérimentales concernant sa réponse à une sollicitation de type impulsif.

Pour ce faire, nous avons besoin d'un modèle d'interaction sollicitation/spécimen. Plutôt que d'essayer de concevoir un modèle qui intègre tous les aspects de cette interaction, nous



optons pour un modèle quelque peu phénoménologique : celui de l'oscillateur à un degré de liberté (1DDL) avec amortissement, correspondant à une loi de comportement de type Kelvin-Voigt (i.e., ce dont rend compte le terme  $Ku + C\dot{u}$  dans l'équation différentielle décrivant la réponse).

Ceci est licite à condition de s'arranger de n'avoir à faire qu'avec un seul mode, ce qui est obtenu en choisissant judicieusement l'emplacement du capteur (e.g., au centre) et le point d'impact (i.e., en bout d'os).

La réponse à un choc (en fait, un Dirac dans le domaine temporel) d'un système linéaire à 1DDL ayant un amortissement  $C$  avec un coefficient d'amortissement  $\zeta$  ( $0 < \zeta < 1$ ) s'exprime par [90, 293, 228].

$$u(t) = \hat{u}e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (14.2.3)$$

où

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}},$$

$$\zeta = \frac{C}{2\sqrt{KM}},$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2},$$

$M$  est la masse et  $K$ , la raideur.

Cette relation montre que la réponse s'exprime comme un sinusoïde amorti. Donc, si la réponse expérimentale ressemble à cette réponse théorique, on pourra déterminer le coefficient d'amortissement  $\zeta$ .

### 14.3 Détermination de l'atténuation par des mesures sur le banc vibroacoustique

Pour mesurer l'atténuation de spécimens d'os longs (en fait, des fantômes en forme de cylindres ou tubes circulaires de différentes compositions) on les impacte sur le côté avec un marteau à choc pour générer des ondes de flexion. Leurs réponses (accélération) sont mesurées en leur centre dans la même direction que l'impact avec un petit accéléromètre B&K 4374 (0.65 g). On verra plus loin que le signal acquis par l'accéléromètre ressemble effectivement à un sinusöide amorti.

Le détermination de la période du sinusöide à partir du signal temporel peut être délicat. La méthode la plus répandue est basée sur la détection du passage par zéro et peut ne pas être fiable si les signaux sont bruités ou contiennent une composante continue (valeur moyenne non nulle - offset).

Ce problème est analogue à celui de la mesure des vitesses d'ondes par temps de vol. A présent, le temps de vol (qui va aussi donner la période du mode vibratoire) est calculé à partir de la différence des maxima entre deux pics consécutifs de réponse. Pour éviter les sauts en amplitude qui sont dus au nombre limité de bits pour l'échantillonnage du signal (9 bits pour une acquisition avec l'oscilloscope TDS3204B), une excitation intempestive des modes supérieurs et le mauvais rapport signal sur bruit, le signal est d'abord lissé avec un filtre non-causal.

Le filtrage non causal annule le déphasage entre l'entrée discrétisée  $x(n)$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ) et la sortie  $y(n)$  et double l'ordre du filtre; tout se passe comme si on filtrait le signal deux fois par le même filtre, une fois dans une direction et une fois dans l'autre direction [295]. Ce filtre est décrit par une équation aux différences :

$$y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + \dots + b(nb+1)*x(n-nb) - \quad (14.3.1) \\ a(2)*y(n-1) - \dots - a(na+1)*y(n-na)$$

où les  $b(n)$  sont des coefficients du filtre.

Le problème de l'élimination des bruits est souvent résolu en effectuant des moyennes temporelles des signaux sur l'oscilloscope. Ce procédé marche bien quand le déclenchement

des acquisitions est bien maîtrisé. Les chocs appliqués par le marteau doivent aussi être identiques d'une frappe à l'autre et le spécimen ne doit pas se déplacer/tourner sur les fils qui le tiennent suspendu.

Revenons à (14.2.3) qui modélise la réponse. Une fois que l'on a déterminé la période et donc la position temporelle des pics qui se trouvent sur l'enveloppe décroissante de réponse, le problème inverse se réduit à trouver un  $\alpha_{at} = \zeta\omega_n$  qui minimise la fonction coût  $J$  engendrée par la différence entre le modèle de la fonction-enveloppe et les données temporelles mesurées correspondant à cette enveloppe

$$J(\alpha_{at}) = \sum_{n=1}^{n=m} (\hat{u}_n e^{-\alpha_{at} t_n} - \ddot{u}_{mesure}^{n,pic})^2 . \quad (14.3.2)$$

La minimisation de la fonction objective (fonction coût) est réalisée avec la méthode de Nelder-Mead [227, 258, 283].

Le résultat de ces opérations est donné dans la fig. 14.2 montrant que la décroissance de la réponse décrite par le modèle à 1DDL dépend de la géométrie. Deux cylindres de même composition (aluminium) et de même longueur, de diamètres différents, ne dissipent pas l'énergie de la même façon. Il en va de même pour deux cylindres géométriquement identiques mais contenant des matériaux différents (nylon et aluminium). On voit ainsi que l'atténuation est bien un descripteur intéressant de la composition d'un objet comme un os long.

Les paramètres de décroissance  $\alpha_{at} = \omega_d \zeta$  et les fréquences de résonance obtenus par la méthode d'optimisation pour l'os dont le canal médullaire est rempli de différents fluides sont tabulés dans Tab. (14.1).

Les fluides ayant une faible viscosité, tels que l'air et l'eau, ont pour influence de changer l'inertie du fantôme d'os long - ce qui se manifeste par la changement de la fréquence de résonance et de l'amortissement (dû essentiellement au rayonnement dans le milieu quasi-illimité ambiant) [80, 129, 221, 259, 281].

Sinon, les fluides, que nous avons choisis pour remplir le canal (médullaire) central du tube, sont visqueux et produisent donc des effets supplémentaires et bien visibles d'atténuation.

Certaines des propriétés physiques des fluides étudiés figurent dans le tableau (14.2).

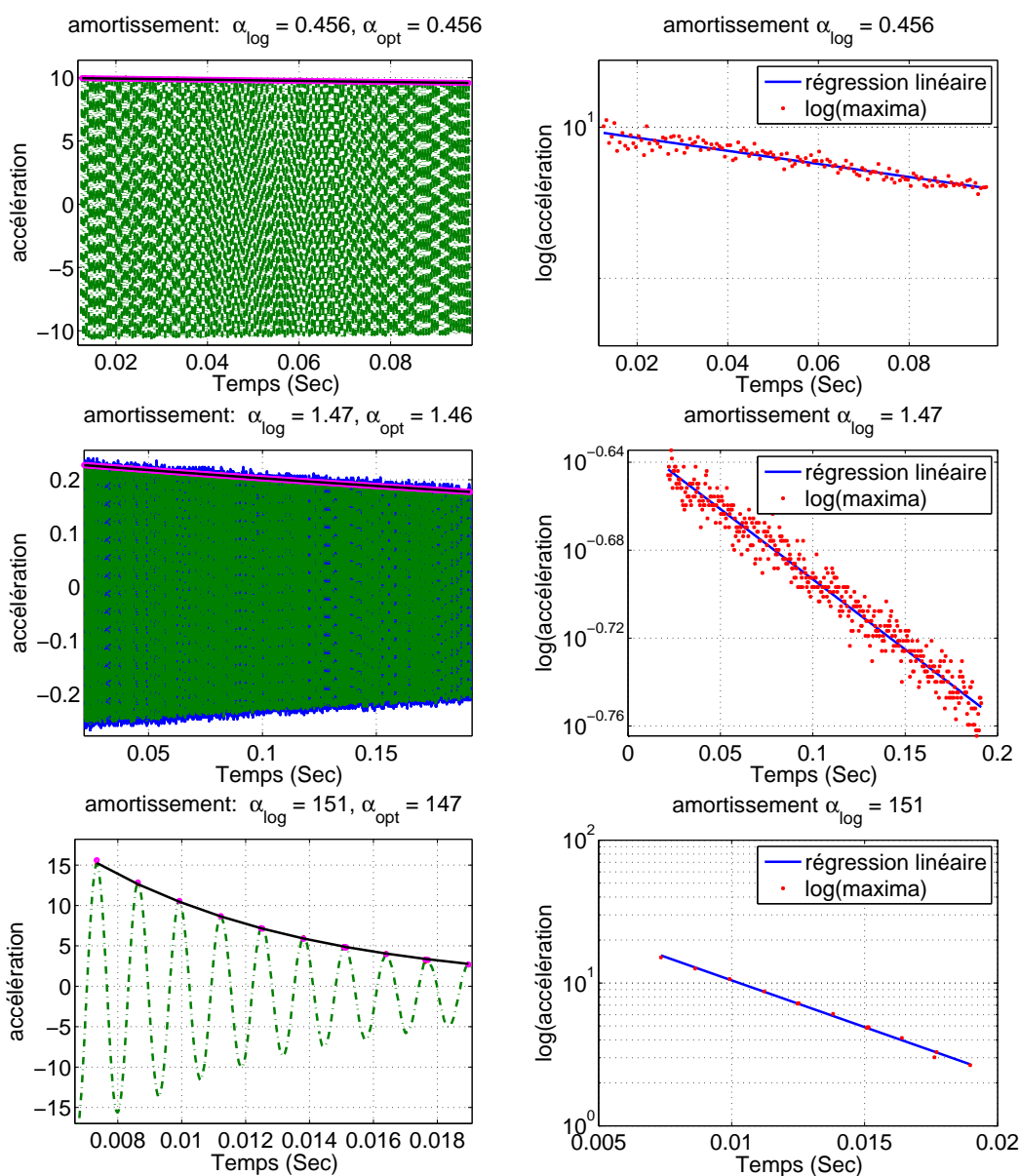


FIG. 14.2 – (a) (Haut gauche) Courbe de réponse (onde de flexion) pour un cylindre en aluminium (diamètre,  $D = 2.0$  cm, longueur 23.0 cm), mesurée, les pics des sinusoïdes, la décroissance et la réponse reconstruite après optimisation. La fréquence de résonance du premier mode, mesurée à partir de la distance entre les pics est 1685 Hz. (b) (Haut droite) Courbe de décroissance par régression linéaire sur le logarithme des points issus des pics des sinusoïdes. (c) (Milieu gauche) Même que dans (a) mais pour un cylindre en aluminium ( $D = 3.0$  cm, longueur 23.0 cm). La fréquence de résonance est 2500 Hz. (d) (Milieu droite) Mêmes mesures que dans (b) pour le gros cylindre, réponse plus amortie que celle du petit cylindre en raison de l'effet Poisson. (e) (Bas gauche) et (f) (Bas droite) sont des mesures pour un cylindre en nylon (diamètre 3.0 cm, longueur 23.0 cm). Sa fréquence de résonance est 773 Hz. Sa réponse est beaucoup plus amortie que les autres cylindres.

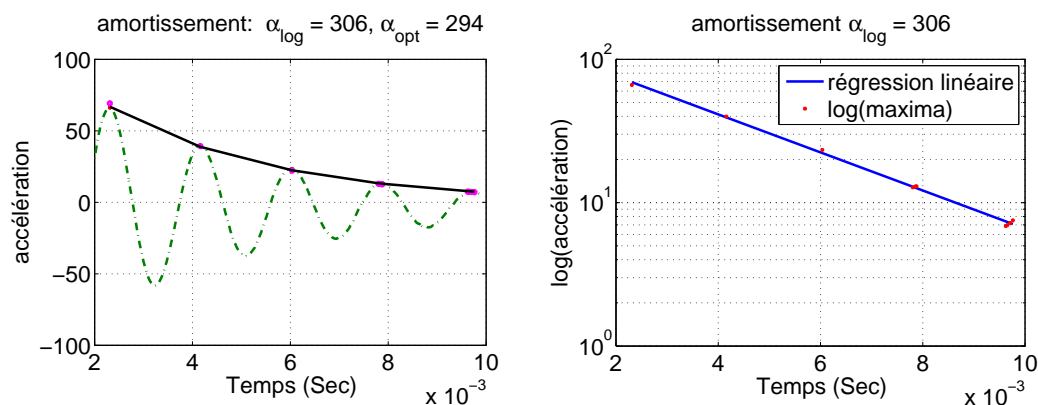


FIG. 14.3 – (a) (Gauche) La réponse vibratoire (onde de flexion) d'un fantôme d'os long contenant un canal médullaire dont le contenu fluide est l'huile d'assaisonnement pour salade. La fréquence de résonance est 540 Hz. (b) Droite. La décroissance par régression linéaire sur le logarithme des points issus des pics des sinusoïdes.

fluide	fréquence	$\alpha_{opt}$
air	570	470
eau	520	312
savon	540	379
huile salade	540	291
tomate	525	334

TAB. 14.1 – Les paramètres de décroissance  $\alpha_{at} = \omega_d \zeta$  et les fréquences de résonance obtenus par la méthode d'optimisation pour différents fluides dans le canal médullaire.

Fluid	Mv ( $kg/m^3$ )	MdC ( $N/m^2$ )	viscosité (Pa.s)
Eau	998	$2.15 \times 10^9$	$1.025 \times 10^{-3}$
Air	1.29	$1.1 \times 10^5$	$17.4 \times 10^{-6}$
glycol	1112	$1.97 \times 10^9$	$40.4 \times 10^{-3}$
Huile moteur 10W-40	873 @15 °C	$1.5 \times 10^9$	72.5 (86 cSt @ 40°C)

TAB. 14.2 – Tableau de quelques propriétés des fluides (1 poise = 100 centipoise = 1 g/cm<sup>2</sup>s = 0.1 Pa·s., CentiPoises (cp) = CentiStokes (cSt) x Mass volumique (Mv) ). Un grand module de compressibilité (MdC) indique que le fluide est compressible .

Cylindre	diamètre (cm)	$fréquence_{opt}$ (Hz)	$\alpha_{opt}$	$fréquence_{RNA}$ (Hz)	$\alpha_{RNA}$
Aluminium	2.0	1685	0.46	1683	0.46
Aluminium	3.0	2500	1.5	2491	1.5
Laiton	2.0	1135	0.43	1138	0.1
Nylon PA6	3.0	772	147	777	128

TAB. 14.3 – La comparaison entre l’algorithme d’optimisation pour la décroissance temporelle et l’algorithme RNA-ESM pour calculer l’atténuation et la fréquence de résonance de cylindres (longueur  $L = 23cm$ ).

Une comparaison entre l’algorithme d’optimisation pour la décroissance temporelle et l’algorithme RNA-ESM pour calculer l’atténuation et la fréquence de résonance de cylindre de longueur  $L = 23cm$ , est donnée dans le Tableau (14.3).

## 14.4 Influence de la chair sur la réponse à un impact de l’os

Un fantôme en forme de cylindre est enrobé par la chair, simulée par la mousse polyuréthane (fig. (14.4a)) comme celle utilisée pour isoler la tuyauterie.

On constate que la réponse (accélération) est très atténuée (comparée à l’os nu) fig. (14.4b). Il est même difficile de distinguer dans le signal temporel la présence de l’objet enfoui dans la chair.

La comparaison entre les fonctions de transfert calculées par l’algorithme RNA-ESM, et celle calculée par la routine Matlab *TFE* qui emploie un algorithme performant comme celui de Welch [351, 378] pour calculer les densités spectrales de puissance, est faite dans la fig. (14.4c) avec un zoom sur le premier mode de résonance de l’objet enfoui (le fantôme d’os constitué du cylindre en aluminium). L’algorithme RNA-ESM montre bien la résonance à cet endroit par rapport aux méthodes classiques basées sur le calcul de la densité spectrale de puissance. La première fréquence de résonance de l’os (fantôme) est trouvée par l’algorithme RNA-ESM à 1474 Hz et  $\alpha_{RNA} = 1.6$  (l’os nu a une fréquence de résonance de 1683 Hz et  $\alpha_{opt} = 0.46$  - Tableau (14.3)).

Donc, la chair a pour effet sur la réponse, d’abaisser la fréquence de résonance et d’augmenter l’amortissement. Tsuchikane et al [366] ont démontré expérimentalement qu’en enlevant successivement la peau, les muscles, le pied, le fémur, et finalement le péroné sur un

spécimen de jambe d'un cadavre, l'amortissement mesuré sur le tibia a aussi successivement diminué. Les auteurs ont identifié que le tibia a un mode de flexion primaire simple, et que sa forme n'a pas été influencée par les ligaments du genou, de la cheville et du péroné, dans le cas où la jambe serait suspendue sans contrainte. Ceci suggère qu'un changement de fréquence de résonance du tibia in vivo, représente un changement de l'état du tibia lui-même.

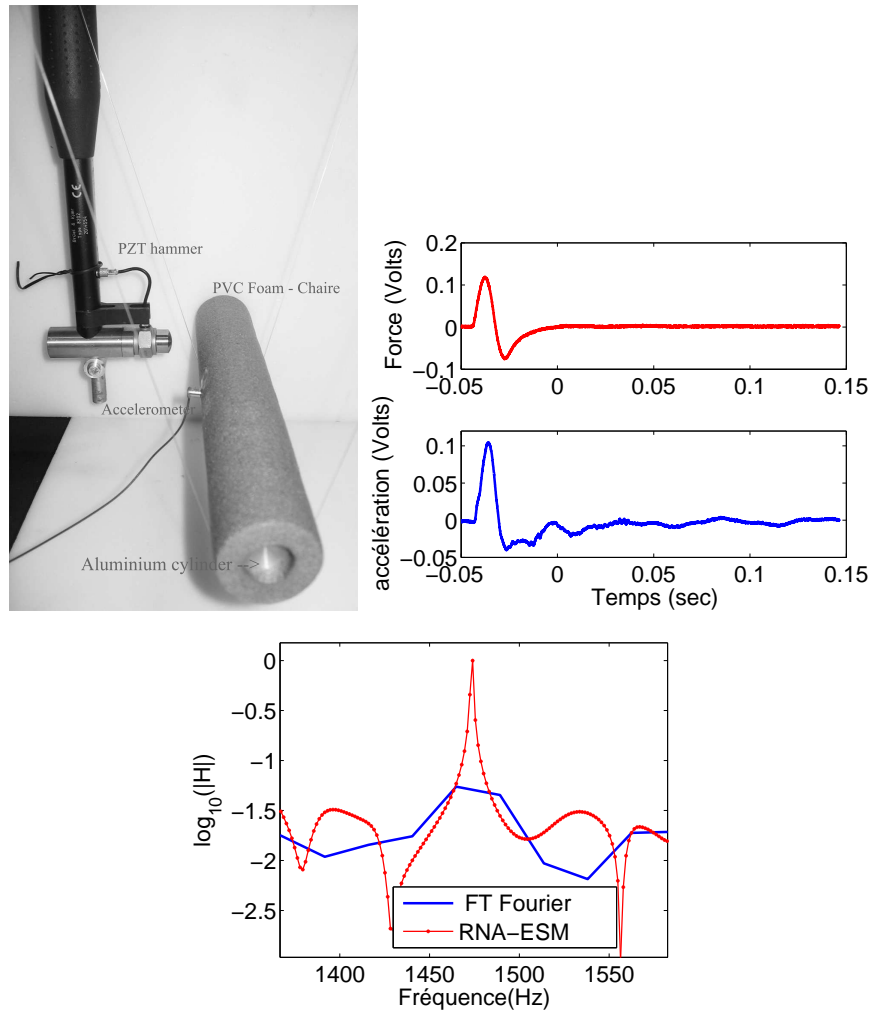


FIG. 14.4 – (a) Haut gauche. Le fantôme d'os long (cylindre en aluminium) entouré d'une mousse PVC pour simuler l'effet de la chair. (b) Haut droite. Impact et réponse mesurée par l'accéléromètre. (c) Bas. Le module ( $|H|$ ) de la fonction de transfert calculée par la routine Matlab *TFESTIMATE* qui emploie l'algorithme de Welch [351, 378] pour calculer les densités spectrales de puissance, comparé à celui calculé avec l'algorithme RNA-ESM





## Chapitre 15

# Simulation de l'évolution de l'ostéoporose

On décrit des expériences numériques, puis expérimentales, avec des fantômes d'os, permettant de déterminer la sensibilité de la méthode de spectrométrie vibroacoustique linéaire vis-à-vis de l'évolution de l'ostéoporose.

### 15.1 Introduction

Dans le chap. 9 les échantillons d'os (tête fémorale) ont été prélevés sur des cadavres humains puis découpés en tranches pour être caractérisés avec des ondes ultrasonores dans l'eau. Ce site de prélèvement est connu pour être favorable à l'éclosion de l'ostéoporose et où les effets de cette maladie sont les plus invalidants. De ce fait, ils (col et tête fémorale) sont souvent radiographiés par des médecins pour le diagnostic de l'ostéoporose.

L'avantage d'utiliser des échantillons émanant d'os humains est que l'on travaille sur des spécimens réels. L'inconvénient c'est que l'on ne contrôle pas a priori l'état de l'os, et comme les échantillons d'origine humaine sont rares, leur nombre, pour faire une étude exhaustive permettant de développer des méthodes de diagnostic, est limité. Enfin, les cadavres dont on disposait pour ces études étaient souvent des personnes âgées au moment de leur mort,

donc probablement déjà ostéoporotiques.

Ces raisons nous ont amenées à confectionner des éprouvettes calibrées et développer des fantômes numériques pour simuler des variations (augmentation) de la porosité des os longs et évaluer leur influence sur la réponse vibratoire.

Ici, un os sain sera un cylindre, court (qualifié de disque dans la suite) ou long, en nylon. Un os ostéoporotique sera le même cylindre endommagé, ce qui veut dire troué. Les endommagements réalisés, se traduisant par une sorte de porosité du matériau, sont malheureusement à une échelle plus grande que celles d'un os ostéoporotique réel. La raison en est la difficulté de réaliser de très petits pores et la quasi-impossibilité de simuler leur effet sur la réponse par un calcul éléments finis. Le choix a donc été fait de réaliser des pores cylindriques millimétriques. Le fait (en plus des questions de dimension) qu'il a été impossible de connecter ces pores à l'intérieur du matériau, explique que nos objets "poreux" sont très différents des os trabéculaires sains ou malades.

Les fréquences de résonances sont utilisées ici en tant qu'indicateurs des propriétés (notamment la porosité qui, on l'espère aura une incidence sur les modules) mécaniques de l'os.

Les équations utilisées jusqu'ici dans la partie vibroacoustique de cette thèse concernait des matériaux homogènes et linéairement élastiques ou viscoélastiques. Le modèle de matériau linéaire viscoélastique peut aussi s'appliquer si l'on homogénise la partie poreuse en quel cas les modules sont ceux d'un matériau homogène équivalent (i.e., homogénéisé). Une étude pour déterminer l'influence de la porosité sur les vitesses d'ondes de compression et de cisaillement par des échantillons d'alumine, a été réalisée par Asmani et al. [13]. Ces auteurs ont déterminé, à partir de ces vitesses, le module de Young et le coefficient de Poisson de pièces d'alumine contenant différentes fractions de pores, et ont observé une diminution linéaire du module de Young avec la diminution de la porosité, effet qui peut être expliqué par le modèle de Boccaccini [37] à condition que le changement de forme de la porosité soit pris en considération. Asmani et al. ont aussi observé plus de sensibilité de la vitesse longitudinale à la porosité, ce qui suggère une influence non négligeable de la porosité sur le coefficient de Poisson. Bien entendu, ces modules sont ceux du matériau homogénéisé.

L'étude de ce chapitre se déroulera comme suit :

- Simulation par la méthode des éléments finis des modes vibratoires d'un petit disque de cylindre (longueur, 1.0 cm) avec des trous le traversant de bout en bout (diamètre des trous=1.0 mm, tortuosité=1). Nous disposons de cinq échantillons ayant : 0 trous (os sain), 12, 24, 36 et 48 trous.
- Des trous de géométries identiques à celles adoptées pour le calcul, sont creusés dans une des extrémités de vrais cylindres en nylon (longueur 23cm).
- Un modèle éléments finis 3D d'un cylindre avec trous à un bout est confectionné et les fréquences de résonance de ces cylindres sont ensuite calculées et mesurées.

Il est à noter que bien que les mesures homogénéisent le matériau, les calculs le traitent comme un milieu macroscopiquement inhomogène, ce qui veut dire (pour les calculs), que les hétérogénéités ne sont pas lissées comme dans un calcul d'homogénéisation.

## 15.2 Modélisation par éléments finis des éprouvettes avec trous

### 15.2.1 Modélisation des os courts

Les éprouvettes étudiées sont en forme de disque circulaire représentant une tranche de tête tibiale ou fémorale.

L'échantillon dans lequel on "creuse" des trous pour augmenter la porosité est numérique. Les dessins CAO des disques circulaires troués sont réalisés avec le logiciel de CAO Catia de Dassault Systèmes. La géométrie du dessin est exportée sous format CAO (format iges) vers le logiciel d'éléments finis Abaqus où elle est maillée. La loi de comportement élastique est choisie. Ces éprouvettes numériques sont représentées dans la fig. 15.2.1.

#### Evolution des fréquences de résonance avec l'augmentation du nombre de trous

Les fréquences de résonance réduites  $\omega R \sqrt{\frac{\rho}{G}}$  ( $\rho$  la densité,  $G = \mu$  le module de cisaillement), pour un rapport  $\frac{H}{D}$  ( $H$  l'épaisseur,  $D$  le diamètre de l'éprouvette) et coefficient de Poisson  $\nu$  connus, ont été calculées avec la méthode de Rayleigh Ritz (So et Leissa [344]). Le tableau 15.2.1 permet la vérification rapide des calculs effectués par la méthode d'éléments finis pour le disque sain.

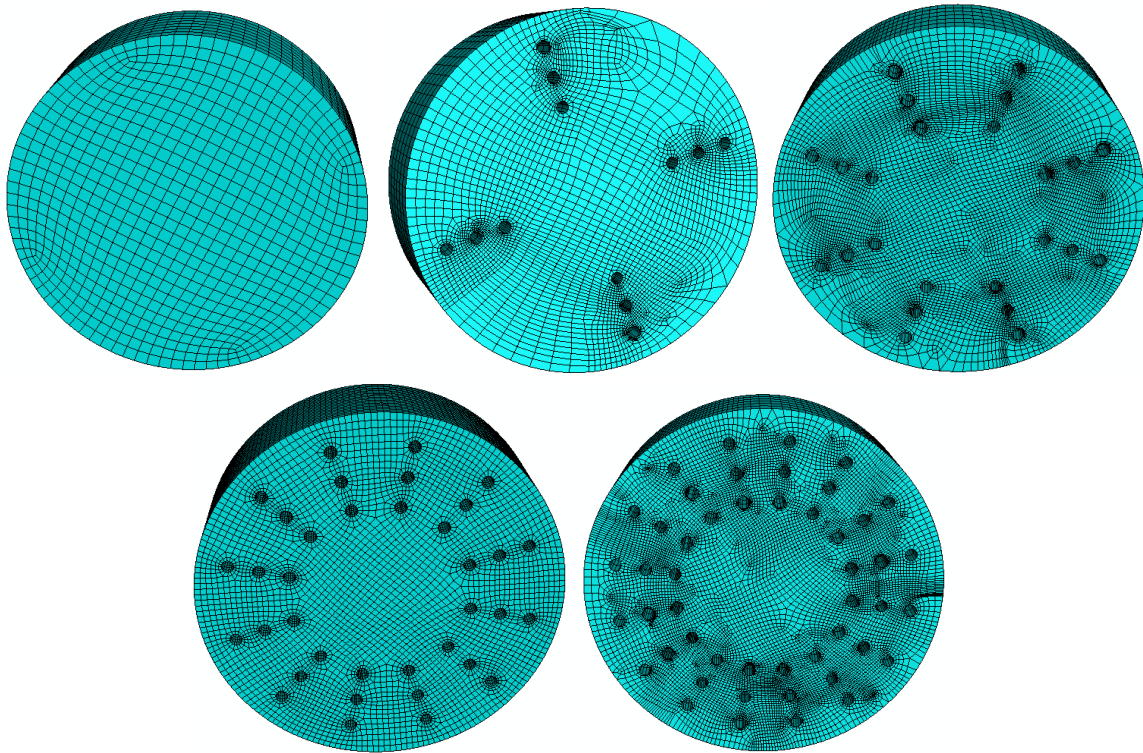


FIG. 15.1 – Les disques troués avec leurs maillages respectifs.

n	s	$\omega R \sqrt{\frac{\rho}{G}}$
2	1	1,222
0	1	2,235
3	1	2,347

TAB. 15.1 – Les fréquences de résonances réduites en  $\omega R \sqrt{\frac{\rho}{G}}$  pour les modes symétriques d'une plaque circulaire ( $\frac{H}{D} = 0.3$  et  $\nu = 0.499$ ) calculées par la méthode de Rayleigh Ritz (So et Leissa [344])

nombre trous	masse (g)	volume ( $mm^3$ )	nombre éléments	f1	f2	f3	f4	f5
0	8.43	7069	6732	12739	21323	23044	24010	27326
12	8.30	6974	18618	12665	21013	22789	23685	26901
24	8.19	6880	42426	12465	20719	22744	23376	26526
36	8.08	6786	77440	12322	20416	22599	23056	26193
48	7.96	6691	61542	12220	20161	22454	22817	25863

TAB. 15.2 – La masse, le volume et le nombre d’éléments pour la maillage EF en fonction du nombre de trous dans les éprouvettes. Les masses et volumes sont calculés dans Catia. Les fréquences de résonances calculées, f1-f5 en Hertz, sont données dans le tableau. Les formes modales pour ces fréquences sont données dans Fig. (15.2).

Le tableau 15.2 montre l’évolution des fréquences de résonance en fonction du nombre de trous. On y remarque que toutes les fréquences baissent de manière monotone avec le nombre de trous.

La fig. 15.2 montre quelques formes modales.

## 15.3 Modélisation d’os longs

Pour représenter un os long avec une partie corticale homogène, isotrope et élastique et une partie trabéculaire, des trous sont creusés (à la manière de ce qui a été fait pour le disque) au bout d’un cylindre en nylon long de 23cm. L’os long est donc inhomogène. Les calculs par EF sont conduits de la même manière que pour les disques poreux.

### 15.3.1 Résultats

La déformée modale pour le troisième mode de flexion d’un cylindre avec 48 trous est présentée dans la fig. (15.3)a).

Les courbes de comparaison entre les fréquences de résonance pour le premier mode calculées par la méthode d’éléments finis et celles obtenues expérimentalement en utilisant le mini pot vibrant et l’accéléromètre pour mesurer la réponse, sont données dans la fig. 15.3. On y remarque : i) un bonne concordance entre les deux courbes, et ii) le fait que la fonction reliant la fréquence de résonance au nombre de trous n’est plus monotone.

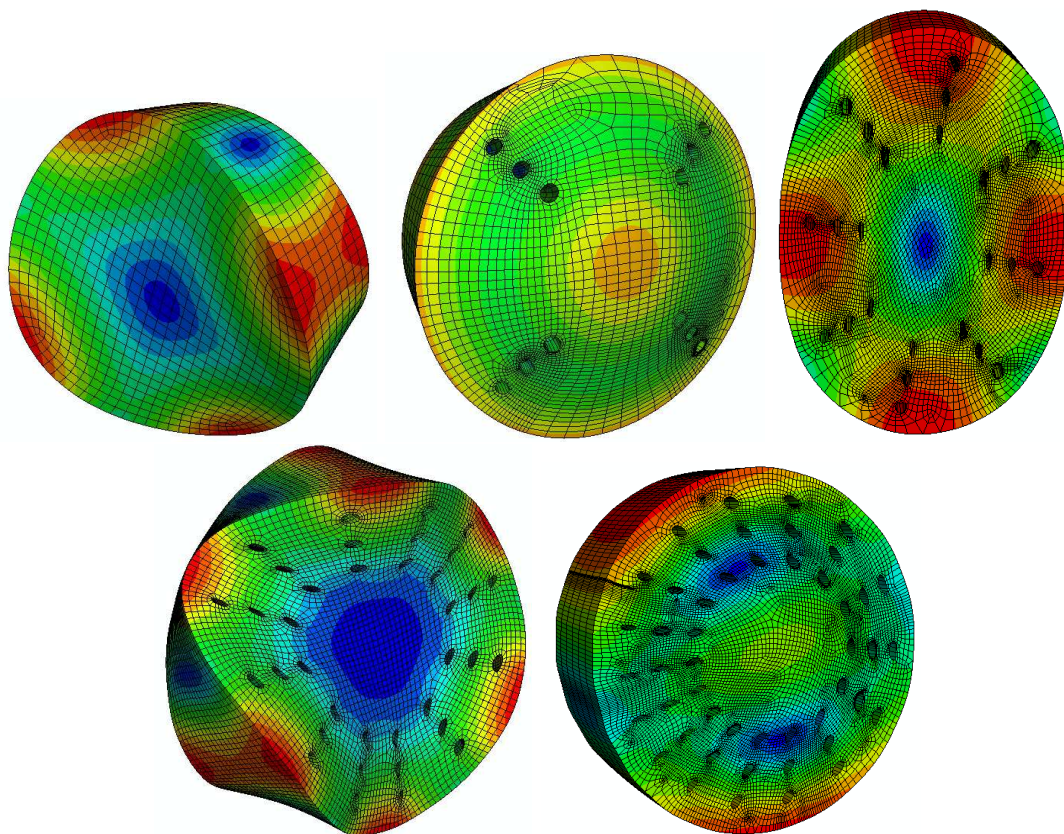


FIG. 15.2 – Les formes modales pour les fréquences indiquées dans le Tableau (15.2). De gauche à droite et vers le bas : (a)  $f_1$ . (b)  $f_2$ . (c)  $f_3$ . (d)  $f_4$ . (e)  $f_5$

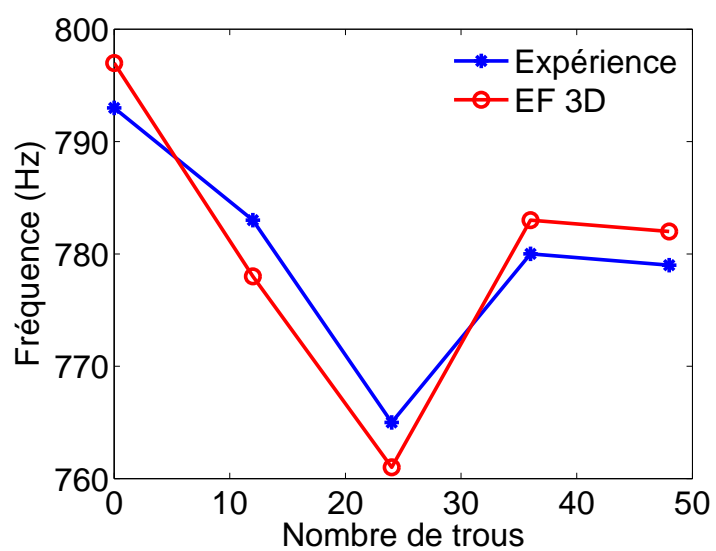
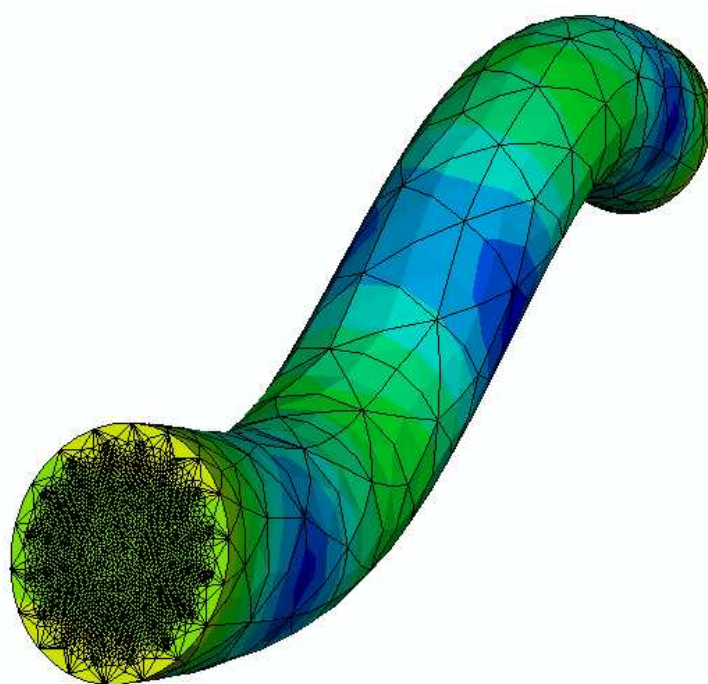


FIG. 15.3 – (a) La déformée modale pour le deuxième mode de flexion obtenue par une simulation éléments finis d'un os fantôme dont le diaphyse est en tissu cortical et l'épiphyse en tissu spongieux. L'os fantôme est un cylindre en nylon avec 48 trous. (b) Comparaison calcul éléments finis 3D et expérience, pour le premier mode de résonance



## 15.4 Conclusion

Nous avons pu constater que, pour l'os long composé d'une partie corticale intacte et d'une partie spongieuse "malade", la variation d'une fréquence de résonance avec l'augmentation de la porosité n'est pas monotone. Par contre, l'ensemble des fréquences de résonance diminue avec l'augmentation de la porosité pour l'éprouvette d'os-disque, cet objet étant similaire à ceux employés dans les tentatives de caractérisation ultrasonore de têtes fémorales [337]. Ceci laisse présager une différence importante entre la caractérisation *in vitro* d'un échantillon d'os entier et celle du même type d'os découpé en tranches.

Nous allons nous intéresser de plus près à la caractérisation vibratoire du spécimen découpé d'os fémoral dans le chapitre qui suit.

## Chapitre 16

# Caractérisation d'un fantôme d'os fémoral

On décrit des expériences, et le traitement des données nécessaires à la mise en oeuvre de la spectrométrie vibroacoustique d'un fantôme d'os en forme de disque, et ce dans le but d'en reconstruire les modules mécaniques.

### 16.1 Introduction

Un os humain est un objet complexe de par sa géométrie et sa composition. En admettant que l'on connaisse sa géométrie macroscopique, il reste à connaître sa composition, ce qui, dans le contexte du diagnostic de l'ostéoporose sur un os ou partie d'os essentiellement trabéculaire, revient à connaître, au minimum sa densité et/ou sa porosité (locales ou moyennes).

La mesure de la densité est surtout affaire des diagnostics aux rayons-X, mais la porosité pourrait être accessible à des méthodes de sondage acoustique et vibratoire.

Nous avons déjà examiné cette possibilité, relative au sondage acoustique, dans le chap. 9, où nous avons montré que le succès de la méthode repose essentiellement sur la possibilité de disposer de spécimens d'os en forme de plaque à faces planes et parallèles, ce qui limite

son domaine d'application à des essais de laboratoire (in vitro) sur des os prélevés sur des cadavres, et non dans un contexte clinique.

Nous avons aussi examiné la possibilité, dans les chaps. 10, 11, 12, 13,14, 15, d'effectuer le sondage vibratoire de l'os, sans y être très précis sur les limitations concernant la géométrie macroscopique et composition du spécimen, ni sur la question de savoir si la reconstruction de la porosité est réellement possible avec ces méthodes.

Par contre, ce que nous avons montré jusqu'ici, c'est que la géométrie macroscopique, la composition, et la porosité (simulée par une succession de trous pratiqués dans un matériau), affectent, d'une manière plus ou moins sensible, les fréquences naturelles et l'amortissement des modes vibratoires d'un objet tel que l'os.

Dorénavant nous allons tenter d'utiliser ces indications pour identifier certains paramètres pertinents de l'os à partir des fréquences de résonance mesurées (en réalité, celles-ci ne sont pas mesurées directement, mais sont obtenues à partir des signaux créés par le spécimen en réponse à des sollicitations bien choisies). Nous appelons cette procédure : spectrométrie vibroacoustique (SVA), ce qui veut dire que : i) la sollicitation est acoustique et ce qui est mesuré est de nature vibrationnelle, ou ii) la sollicitation est vibrationnelle et ce qui est mesuré est de nature acoustique, ou iii) la sollicitation est vibrationnelle et ce qui est mesuré est de nature vibrationnelle, le quatrième cas de figure (i.e., sollicitation et mesures acoustiques) est un terme que nous réservons à la spectrométrie acoustique (SA), et dont relève l'étude du chap. 9.

Toutefois, nous ne voulons pas être tributaire des limitations de forme géométrique de l'os propres à la SA. Cette méthode (la SA) impose aussi des restrictions, pour être facilement exploitable, sur le type de sollicitation (i.e., onde plane normalement incidente sur la plaque). S'agissant de la SVA, si l'os a une forme compliquée, il n'y a pas de raisons particulières de l'exciter en un point plutôt qu'en un autre, ce qui revient à dire qu'il faut admettre que la sollicitation puisse prendre une forme quelconque. Le corollaire de tout ceci est que la réponse vibroacoustique de l'os à une sollicitation large bande sera complexe, caractérisée par un grand nombre de pics trahissant l'excitation des nombreux modes de vibration de cet objet complexe.

Certains de ces pics auront une amplitude tellement petite que l'on ne pourrait guère les

distinguer du bruit. Ceci est un problème sérieux dans la SVA, car plus on a de fréquences de résonance, mieux ça vaut pour l'identification des paramètres pertinents de l'objet, et à contrario, en perdant de l'information sur les fréquences de résonance on diminue les chances de réussir l'identification.

Nous sommes concernés ici (et jusqu'à nouvel ordre) par la SVA *linéaire* (SVL) puisque nous partons du principe que nous ne voulons pas provoquer des effets éventuellement dommageables au sein de l'os du fait d'une trop forte sollicitation. La contrepartie en est que les sollicitations douces réduisent la hauteur des pics de résonance d'ordre élevé et que l'on perde davantage d'information spectrale, rendant ainsi encore plus périlleuse l'identification. Il faut donc concevoir une méthode pour ne pas perdre ces précieuses informations ; en d'autres termes, augmenter le rapport signal/bruit, de préférence sur tout le spectre de réponse.

Une dernière difficulté, et non des moindres, est le choix de l'estimateur à employer pour l'inversion. Il est bien évident qu'en raison du large éventail de possibilités concernant la forme macroscopique de l'objet-os et de la sollicitation, au minimum il faudra faire appel à un modèle d'éléments finis (EF) basé sur une loi de comportement isotrope, élastique ou viscoélastique. Il est à noter, que ce modèle ne sera pas de type 1DDL, ce qui était possible dans les chapitres précédents du fait que la réponse mesurée était dominée par un seul mode de par le choix de forme de l'objet, le type de sollicitation et le lieu de mesure. Etant donné que l'objet qui nous intéresse est un os, comportant une partie trabéculaire, la bonne façon d'agir serait plutôt d'adopter une loi de comportement poroélastique (conduisant au modèle de Biot) ou poroviscoélastique, mais ceci implique des codes EF très gourmands en temps de calcul (toutefois, nous ferons appel à ce genre de code dans le chap. 17 qui reproduit un de nos articles accepté dans le J.Sound Vibr.) ce qui pose un problème lors de l'inversion (la minimisation de la fonction-coût étant un processus itératif impliquant des dizaines, voire des centaines de résolutions du problème direct au moyen de l'estimateur).

A présent, nous allons employer un code EF, incorporant une loi de comportement isotrope et élastique, en tant qu'estimateur pour inverser les données de réponse d'un fantôme d'os soumis à une sollicitation provenant d'une pastille PZT. Nous montrerons comment faire face au problème du signal/bruit pour récupérer un grand nombre de fréquences de

résonance, et ferons l'inversion sur certaines d'entre elles afin de reconstruire le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  (*équivalents* au sens de l'homogénéisation lorsqu'il s'agira d'un objet composite) du spécimen.

La dernière question est : pourquoi identifier  $E$  et  $\nu$  (paramètres réels pour les matériaux ayant un comportement élastique, et complexes pour les matériaux ayant un comportement viscoélastique) ? Une première réponse est que ces grandeurs y figurent, et définissent totalement, la loi de comportement du matériau isotrope en régime linéaire. Toutefois, l'os est au mieux isotrope, élastique ou viscoélastique, mais n'est pas homogène (i.e., c'est un matériau poreux), ce qui veut dire que se pose forcément la question du lien entre les modules équivalents et les paramètres structurels (microscopiques), et plus loin, la question de la possibilité d'identifier un ou plusieurs de ces paramètres tel que la porosité à partir des modules.

A notre avis, cette possibilité est, pour le moment, virtuelle, car il n'existe pas de théorie (dans un cadre d'élasticité ou viscoélasticité linéaire) autre qu'empirique, ou ne s'appliquant qu'à des matériaux poreux très idéalisés, permettant de déduire une grandeur telle que la porosité  $\phi$  d'un ou des modules  $E$  et  $\nu$ . Néanmoins, il n'est pas inutile de rappeler les lois de Gibson et Ashby [149] mises en évidence dans l'Introduction de cette thèse pour des matériaux cellulaires, qui montrent nettement que les modules équivalents  $E$  et  $G$  (pour des chargements compressifs statiques) ont une dépendance fonctionnelle sur  $\phi$  qui prend une forme différente selon que  $\phi$  est proche de zéro ou proche de un. On retrouve un type de dépendance fonctionnelle similaire (i.e., double) dans la loi de Spriggs [345] et Duckworth-Knudsen [37, 271, 82, 298, 400] relative au comportement de céramiques poreux :

$$E = E_0 e^{-b\phi} \quad \phi \leq 0.5, \quad (16.1.1)$$

$$E = E_0 e^{-b(1-\phi)} \quad \phi \geq 0.5, \quad (16.1.2)$$

où  $E_0$  est le module de Young du matériau homogène sans pores, et  $b$  un facteur empirique ajustable. La difficulté avec ce type de loi, c'est que l'on ne sait pas bien sur quels autres paramètres matériels dépend le paramètre ajustable  $b$ . La loi de Gibson et Ashby montre que la densité équivalente intervient au même titre que la porosité pour déterminer  $E$  et  $G$ , ce qui veut dire qu'il n'est pas possible d'identifier  $\phi$  à partir de  $E$  ou  $\nu$  sans connaître la

densité équivalente. A contrario, on ne peut pas identifier  $\phi$  à partir de la densité équivalente si l'on ne connaît pas aussi  $E$ , ce qui explique le fait que le sondage aux rayons-X ne renseigne pas sur la porosité (du fait qu'il n'identifie pas  $E$ ). Même en connaissant  $E$  et la densité équivalente, on n'est pas sûr de pouvoir identifier  $\phi$  car on ne connaît pas bien la loi qui relie ces grandeurs. Ces observations relativisent les renseignements pratiques que l'on peut tirer d'un article comme celui de Dong et al. [115] qui ont trouvé que les modules élastiques de compression et de cisaillement (obtenus par des essais mécaniques statiques) de l'os cortical fémoral humain dans la direction longitudinale, diminuent sensiblement lorsque la porosité (évaluée au moyen d'histologie) augmente.

Nonobstant (et peut-être, à cause de) ces remarques un peu pessimistes, nous allons nous fixer comme objectif, dans les lignes qui suivent, d'identifier  $E$  et  $\nu$  (équivalents) d'un fantôme d'os linéaire, élastique, isotrope par la méthode de spectrométrie vibroacoustique linéaire.

Etant donné que nous voulons à terme comparer le  $E$  et  $\nu$  déterminés par la méthode SVAL avec ceux de la méthode SA, nous choisirons un fantôme d'os ayant la même forme et les mêmes dimensions que celles employées dans le chap. 9 et notre article [337]. Ce fantôme sera donc un disque circulaire épais. Dans un premier temps nous le supposerons homogène, et dans un second temps, pour nous rapprocher davantage de l'os employé dans [337], nous le supposerons composé d'une partie centrale (médullaire) élastique et homogène, entouré d'une couronne plus dure (corticale) également élastique et homogène.

## 16.2 Comment déterminer la réponse dans de bonnes conditions ?

Pour obtenir le maximum d'information sur la réponse  $y(t)$  d'un système, le signal d'excitation  $x(t)$  doit contenir de l'énergie à toutes les fréquences d'intérêt.  $y(t)$  est alors comparé à  $x(t)$  par une méthode à préciser.

### 16.2.1 La méthode impulsionnelle

Une réponse impulsionnelle  $h(t)$  (RI) est naturellement acquise en excitant le système avec un Dirac. Aucun traitement additionnel n'est exigé car la réponse en fréquence est disponible directement par la transformée de Fourier de la réponse mesurée. Rappelons que

$$y(t) = h(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau , \quad (16.2.1)$$

où  $\star$  est l'opérateur de convolution.

Les méthodes classiques calculent la réponse directement dans le domaine fréquentiel en transformant la relation de convolution (16.2.1) dans le domaine de fréquence

$$\mathcal{F}(y(t)) = Y(f) = X(f)H(f),$$

où  $\mathcal{F}$  dénote la transformée de Fourier et  $H(f)$  et  $X(f)$ , la réponse et l'entrée respectivement dans le domaine fréquentiel. Le schéma de ces opérations est indiqué dans (Fig. (16.1)).

Du fait qu'un Dirac est un être mathématique (et non physique) à largeur de bande spectrale infinie, en pratique il faut l'approcher par une fonction à largeur de bande spectrale limitée. Plus la bande est étroite (ce qui est souhaitable pour s'approcher de la réponse impulsionnelle), moins on arrive à injecter d'énergie dans l'impulsion [319].

Le stimulus impulsionnel est très bref tandis que le temps de mesure de la réponse est souvent beaucoup plus long pour fournir les informations basses fréquences, ce qui introduit du bruit dans la mesure. Ce bruit peut être éliminé en employant des impulsions répétitives et en effectuant des moyennes, dont le nombre peut être grand, allongeant ainsi sévèrement le temps de mesure.

La solution à ces problèmes réside dans l'utilisation du modèle de *pattern de nombres pseudo-aléatoire* (PNP) ou séquence pseudo-aléatoire de longueur maximale (SPLM) (connue en anglais comme ; maximum length sequence - MLS).

### 16.2.2 Séquence pseudo-aléatoire de longueur maximale (MLS)

Le stimulus est basé sur un ordre binaire pseudo-aléatoire périodique de longueur  $L = 2^n - 1$ , créé à l'aide d'un registre à décalage binaire avec  $n$  cases. Une SPLM (MLS) avec

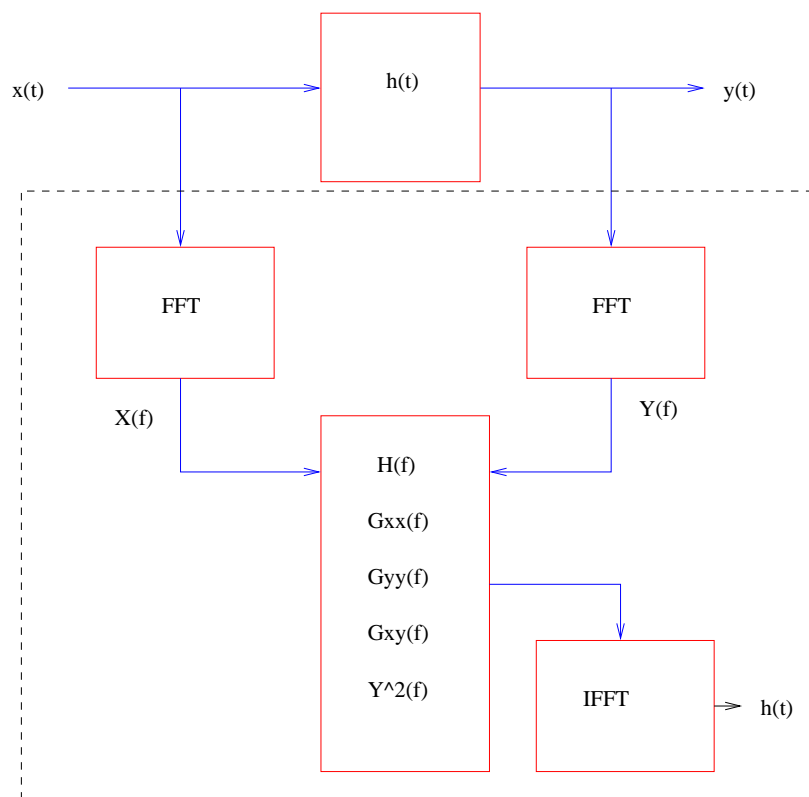


FIG. 16.1 – Les mesures classiques exécutées avec un analyseur de Fourier à deux voies. Deux canaux sont nécessaires pour mesurer les signaux d'entrée et de sortie qui sont analysés simultanément pour calculer la réponse complexe en fréquence.

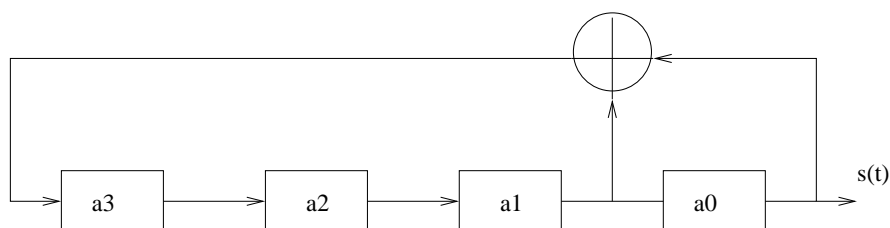


FIG. 16.2 – Le registre à décalage du générateur SPLM. La prochaine valeur du registre  $a_3$  d'un registre à décalage à rétroaction de longueur 4 est déterminée par la somme modulo-2 de  $a_0$  et  $a_1$ .



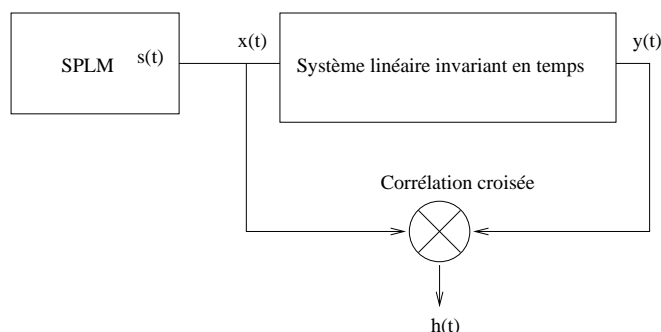


FIG. 16.3 – Vue schématique du système de mesure par SPLM.

quatre registres à décalage est montré dans la fig. (16.2). La corrélation croisée entre l'entrée  $x(t)$  et la réponse  $y(t)$  d'un système linéaire, est liée à la fonction d'autocorrélation de l'entrée par une convolution avec la réponse impulsionnelle  $h(t)$  :

$$R_{xy}(t) = R_{xx}(t) \star h(t). \quad (16.2.2)$$

L'autocorrélation de la SPLM est 1 pour un retard nul, et presque zéro ( $\frac{1}{N}$  où  $N$  est la longueur de la séquence) pour tous les autres retards. Autrement dit, l'autocorrélation de la SPLM approche une impulsion unité tant que la longueur de la séquence SPLM augmente :

$$R_{xx}(t) \approx \delta(t) ,$$

d'où

$$R_{xy}(t) \approx \delta(t) \star h(t) = h(t) . \quad (16.2.3)$$

La réponse est ensuite récupérée en utilisant une corrélation périodique. La réponse impulsionnelle (RI) est également périodique. Une erreur de repliement temporel peut en résulter, si la réaction du système est plus longue que la longueur  $L$  d'ordre. La RI peut être rapidement calculée en utilisant la transformée rapide de Hadamard (TRH). Le calcul est entièrement dans le domaine temporel où il implique seulement addition et soustraction. La déconvolution donne une réponse impulsionnelle périodique.

La SPLM est un signal déterministe, mais il a des propriétés spectrales semblables à celui d'un véritable bruit blanc aléatoire. Un grand avantage de la technique SPLM est que son

ordre est déterministe, il peut être répété avec précision. Il est donc possible d'augmenter le rapport signal/bruit en faisant une moyenne synchrone de la réponse  $y(t)$ , notamment pour indiquer les positions des fréquences d'anti-résonance dans la fonction de transfert

La théorie exige que le système soit linéaire afin d'être valide. L'effet des nonlinéarités a été discuté dans un nombre d'articles [120, 319]. Il en ressort que la méthode basée sur la SPLM a l'avantage de disperser les distortions et les nonlinéarités mesurées dans toute la réponse impulsionnelle calculée [120]. Si seulement une petite partie des données est fenêtrée pour exécuter la transformée de Fourier rapide (FFT), seulement une petite partie de la distortion apparaîtra dans les données dans le domaine fréquentiel.

Les techniques de corrélation promettent une plus haute résolution dynamique dans beaucoup de mesures acoustiques et vibrations, particulièrement quand on emploie les séquences SPLM comme signaux d'excitation [285].

### 16.3 Matériel et logiciel pour le système de mesure basé sur la SPLM (MLS)

Une séquence SPLM optimale d'une longueur de 15 bits obtenue du livre [342] est employée pour initialiser le registre à décalage mis en application dans un programme écrit en langage C. Ce morceau de logiciel charge également les données SPLM dans un générateur de signal arbitraire Agilent 33250B relié à l'ordinateur PC en utilisant le réseau ethernet (LAN) via un pont LAN/GPIB d'Agilent E2050A. Le signal du générateur est amplifié par l'amplificateur de puissance B&K2706 relié à l'actionneur piézoélectrique.

Les deux pastilles piézoélectriques sont collées sur le spécimen à caractériser à l'aide d'une bande de scotch double face 3M. La configuration de mesure, indiquant les points d'excitation et de captation sur le disque, sont montrés dans la fig. (16.4).

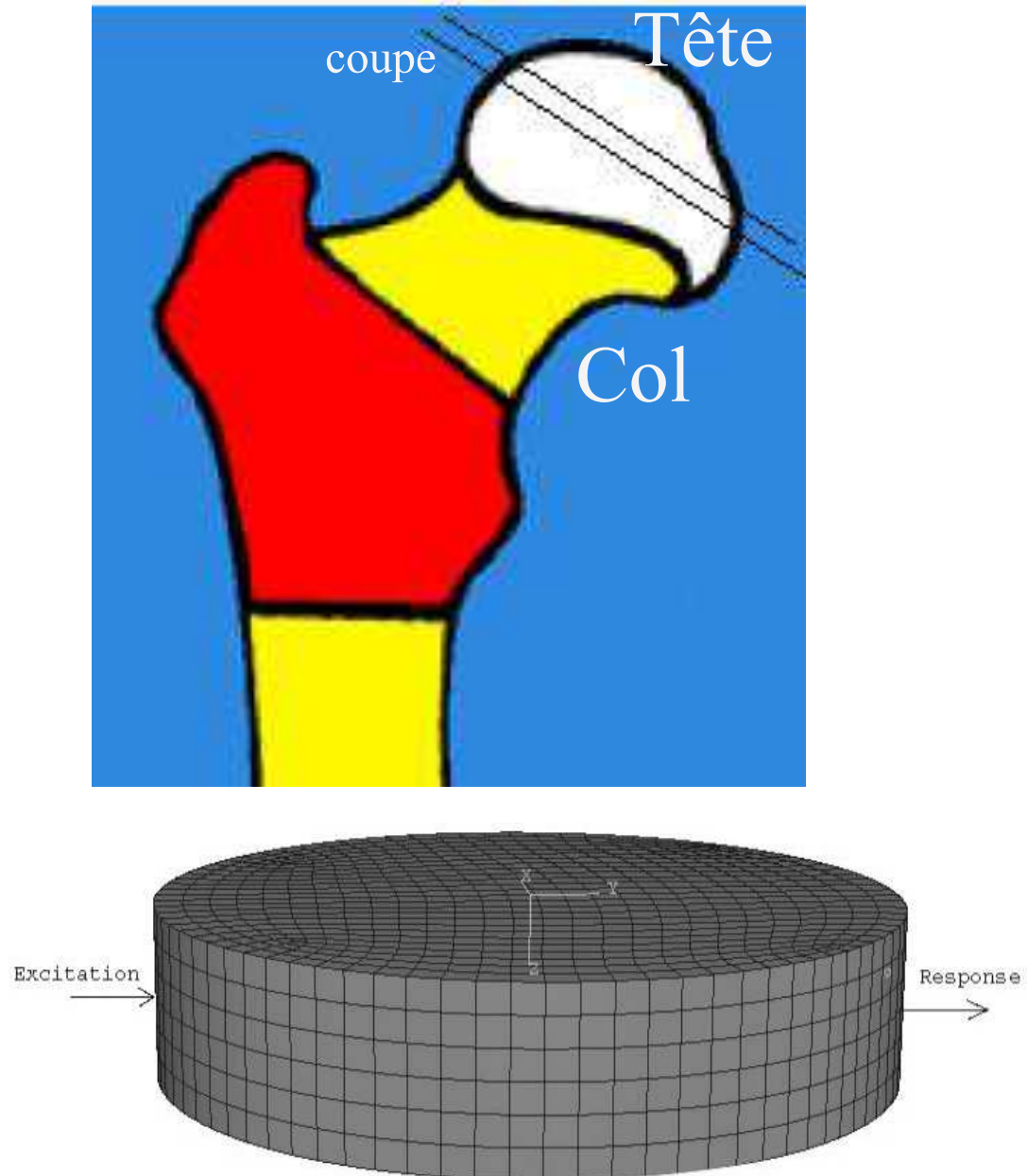


FIG. 16.4 – (a)(Haut) Fémur proximal indiquant l'endroit où l'échantillon, en forme de disque, est découpé sur la tête fémorale. (b)(Bas) Le fantôme d'os matérialisé par un disque élastique homogène. La figure montre les points d'excitation et de mesure de la réponse.

## 16.4 Caractérisation vibratoire d'un fantôme de tranche de tête fémorale

### 16.4.1 Comportement purement élastique et fréquences propres du spécimen

La vraie tranche d'os (tel que celle ayant fait l'objet de [337] et qui a inspiré la présente étude) est composée d'un noyau central de tissu trabéculaire saturé par la moelle et du sang. La couronne est composée de tissu cortical (en réalité une multicouche). Pour aborder l'étude vibratoire de cet os réel (tel que celle faisant l'objet de [337]) dont la composition et la loi de comportement est très complexe, nous étudions d'abord un spécimen de composition simple (fantôme) dont la loi de comportement est connue.

Celui-ci est un disque épais d'aluminium (Al), coupé avec les mêmes dimensions que les vrais spécimens fémoraux : diamètre  $D = 5.24\text{cm}$  et épaisseur  $H = 1.18\text{cm}$ . La loi de comportement de l'Al est élastique et isotrope.

Les fréquences propres des modes de vibration du disque en aluminium sont calculées au moyen de la formulation d'analyse modale par éléments finis 3D (AM-EF). Elles sont les solutions  $\omega$  de [185, 195] :

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\phi = 0 ,$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\phi$  le vecteur des fonctions propres, l'ordre des matrices étant égal au nombre de degrés de liberté (DDL).

## 16.5 Résultats expérimentaux - la réponse temporelle mesurée

Un oscilloscope Tektronix TDS3034B est utilisé pour acquérir la séquence d'excitation SPML (calculé avec Matlab) du générateur de signal.

Une fois que la réponse à l'impulsion est acquise, elle est transformée du domaine temporel en filtre de RII (Réponse impulsionnelle infinie) sous la forme

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{y_1 + y_2z^{-1} + \dots + y_{n+1}z^{-n}}{x_1 + x_2z^{-1} + \dots + x_{m+1}z^{-m}} , \quad (16.5.1)$$

où  $H(z)$  est la Z-transformée de  $h$ . Les coefficients (16.5.1) sont calculés par la méthode de Prony [258].

### 16.5.1 Méthode de Prony

La méthode de Prony est un algorithme pour trouver le gabarit d'un RII avec une réponse impulsionnelle prescrite dans le domaine temporel [302]. Elle a des applications dans la conception de filtres, la modélisation exponentielle des signaux, et l'identification de systèmes (modélisation paramétrique).

La fonction Prony calcule un filtre d'ordre  $n$  au numérateur et d'ordre  $m$  au dénominateur à partir de la *réponse impulsionnelle*  $h$  dans le domaine temporel.

Nous employons la fonction *prony* dans Matlab [249] pour calculer les coefficients inconnus.

### 16.5.2 Résultats des calculs

La réponse impulsionnelle, sa densité spectrale de puissance et la réponse reconstruite en employant la méthode de Prony, à partir du signal enregistré par le capteur PZT sur le disque d'Al, est donnée dans la fig. (16.5).

Les paramètres mécaniques (module de Young et coefficient de Poisson) sont identifiés par minimisation d'une fonction-coût traduisant l'écart entre les fréquences de résonance fournies par l'estimateur AM-EF et les fréquences de résonance expérimentales des quatre premiers modes. Ceci livre le module de Young=70 GPa, coefficient de Poisson=0.33, la masse volumique  $\rho = 2760 \text{ kg/m}^3$  ayant été mesurée par la méthode d'Archimède.

Les fréquences propres obtenues par injection des paramètres identifiés dans le code EF sont comparées aux fréquences de résonance mesurées dans le tableau (Table 16.1). Les formes modales sont montrées dans la fig. (16.6).

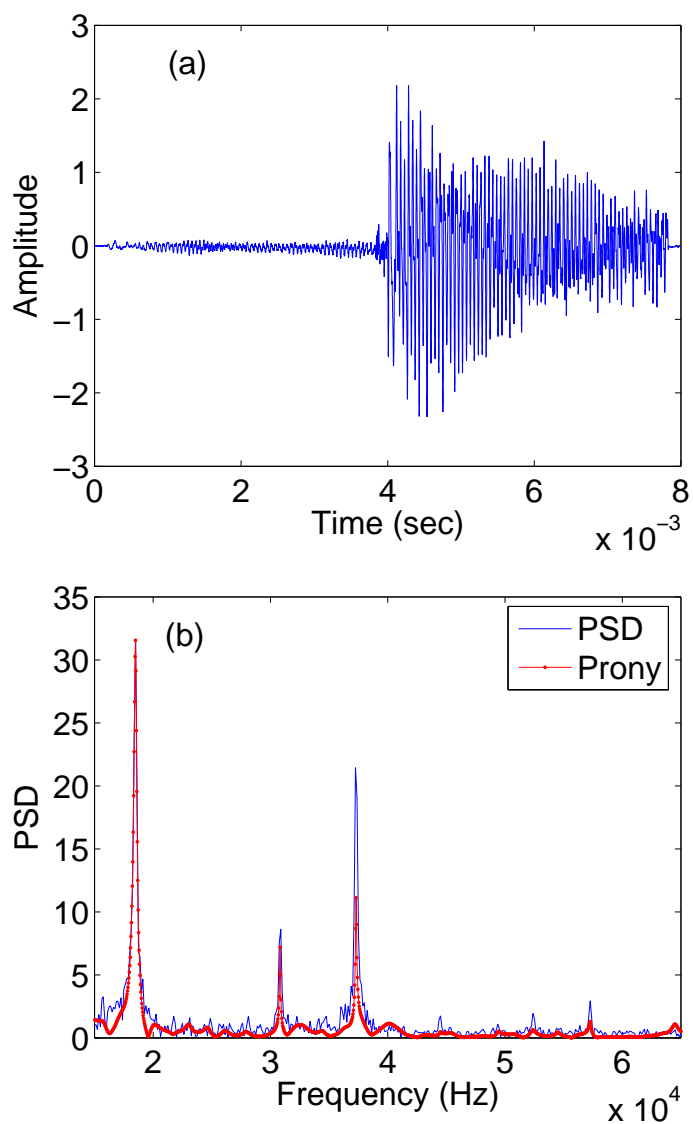


FIG. 16.5 – (a) La réponse impulsionnelle obtenue en utilisant la séquence SPLM et la pastille PZT. (b) La réponse en fréquence comportant la densité spectrale de puissance (DSP - power spectral density - PSD) et la réponse reconstruite en utilisant l'algorithme de Prony.

mode	Expérience	MEF	Erreur %	mode	expérience	MEF	Erreur %
1	18511	18877	1.9	8	68342	66857	0.8
2	30829	30909	0.3	9	68411	68331	-0.1
3	37294	37510	0.6	10	77535	78749	1.5
4	44479	44492	0.03	11	-	80738	-
5	52499	52149	0.8	12	81384	81729	0.4
6	56448	56744	0.5	13	87924	88401	0.5
7	57253	58213	1.6	14	-	88963	-

TAB. 16.1 – Comparaison entre les fréquences de résonance mesurées et celles résultant de l'injection dans le code EF des paramètres identifiés par le modèle AM-EF et des données expérimentales obtenues par la SPLM pour un disque en aluminium de diamètre  $D = 5.24 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $H = 1.18 \text{ cm}$

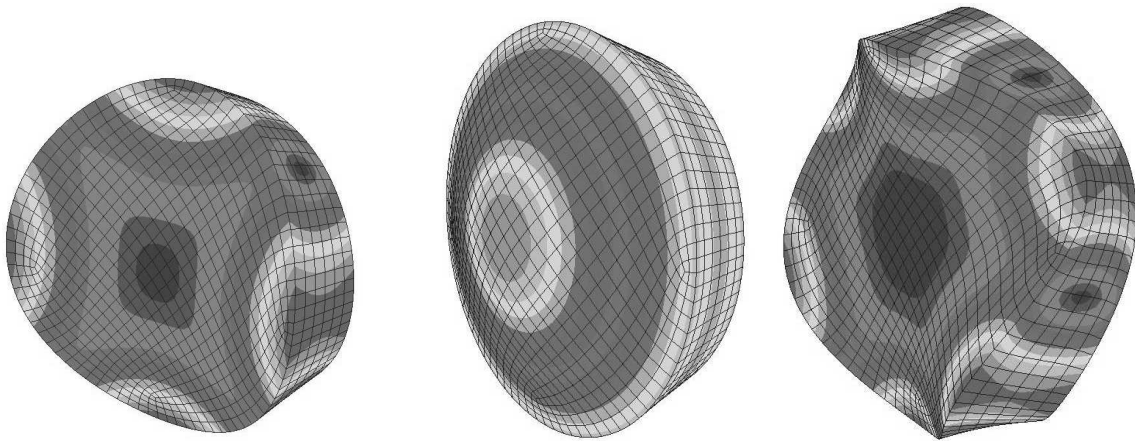


FIG. 16.6 – Les trois premiers modes de vibration du disque en aluminium (éléments quadratiques hexahedron, type C3D20R [185], maille 0.002m).

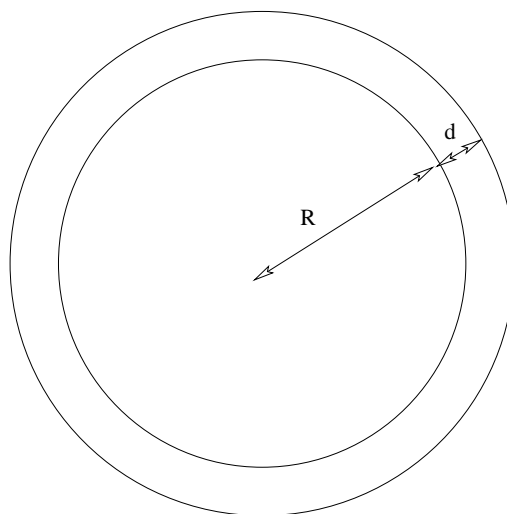


FIG. 16.7 – La géométrie de l'échantillon prélevé de la tête fémorale formé d'un disque et de son anneau.  $R$  est le rayon du noyau trabéculaire,  $d$  est l'épaisseur de l'anneau cortical.

## 16.6 Comportement vibratoire d'un disque avec un anneau externe

Un modèle plus réaliste, tout en restant relativement simple, est celui du disque élastique entouré d'un anneau élastique (simulant la coque corticale). Le même type d'analyse que précédemment est fait pour ce type de fantôme.

Les paramètres mécaniques de la partie centrale sont identiques à ceux choisis auparavant 16.4.1. Le module de Young de l'anneau cortical a pour valeur trois fois celle de la partie centrale, i.e., 210 GPa. Le rapport entre la densité et le coefficient de Poisson est inchangé.

Le diamètre de la partie centrale du disque est égal à celui d'un des échantillons d'os humains utilisés dans des essais de Sebaa et al [337], i.e., 4,4 cm. La partie corticale a une épaisseur de 0,44 cm.

La comparaison des fréquences de résonance relatives aux os sans et avec anneau est faite dans le tableau 16.2. On y voit que la présence de l'anneau cortical change considérablement les fréquences naturelles.



mode	Avec anneau	Sans anneau
1	21963	18877
2	34393	30909
3	41345	37510
4	47623	44492

TAB. 16.2 – Comparaison entre les fréquences de résonance calculées pour un disque homogène en aluminium de diamètre  $D = 2R = 5,28 \text{ cm}$  et épaisseur verticale  $H = 1,18 \text{ cm}$  et celui d'un disque avec un noyau  $D = 2R = 4,5 \text{ cm}$  et d'un anneau externe (couche corticale) d'épaisseur radiale  $d = 0,39 \text{ cm}$ . Les épaisseurs  $H$  sont identiques pour les deux objets.

## 16.7 Conclusion

Pour étudier les variations des paramètres microstructuraux, tels que la porosité, la tortuosité, etc., à travers celles des modules de l'os trabéculaire, il faut disposer (en attendant des lois fiables reliant ces paramètres) d'une méthode précise comme celle de la spectrométrie vibroacoustique linéaire que nous venons de décrire.

Dans le chapitre suivant, nous suivrons la même démarche pour identifier les modules élastiques de fantômes poreux, plus proches des vrais os ayant fait l'objet du travail de Sebban et al. [337].

## Chapitre 17

# Recovery of the mechanical parameters of cellular materials by inversion of vibrational data

Ceci est une copie de notre article accepté pour publication dans J.Sound Vibr.

## 17.1 Authors and affiliations

Erick Ogam, (ogam@lma.cnrs-mrs.fr), Armand Wirgin, Stefan Schneider, Zine E.A Fellah

CNRS Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique UPR7051, 31 chemin Joseph Aiguier,  
13402 Marseille cedex 20, France

Yongzhi Xu

Department of Mathematics University of Louisville, KY 40292, USA

Work done within the framework of Action CNRS/Etats-Unis 2005-2007 : Caractérisation vibroacoustique de l'os : aspects fondamentaux et applications au diagnostic et au suivi du traitement de l'ostéoporose

*Keywords* : vibration, cellular materials, osteoporosis, inverse problem, poroelastic, viscoelastic.

## 17.2 Abstract

This investigation addresses the inverse problem of the retrieval of the macroscopic Young's modulus and Poisson ratio of light fluid-saturated cellular materials from the measured resonance frequencies of their vibrational response. The latter is shown to be generally non-linear for all except very small solicitations. In order to remain in the linear regime, and thus avoid ambiguities in the characterization of the material, we employ light weight piezoelectric transducers and sensors and a low noise amplifier for the acquisition of dynamic response data. The cellular materials under investigation (polyurethane, melamime) are shown to behave as isotropic, (equivalent) homogeneous elastic solids with Rayleigh damping (equivalent to a rheological model having the same dependence of attenuation on frequency)

in the frequency band of interest. Our viscoelastic model is validated by comparing its predictions of the dynamic response of the specimens to the predictions of the more complete Biot interaction model. The computations with both of these models are carried out by means of 3D finite element (FE) codes for a variety of specimen shapes and sizes. Once the simpler viscoelastic model is validated, it is then employed to compute the trial resonance frequencies (which are the solutions of an eigenvalue problem associated with this model) during the inversion process. The cost function, which is a measure of the discrepancy between the the trial and measured resonance frequencies for a number of vibrational modes, is constructed and then minimized by the Levenberg-Marquardt optimization algorithm in order to recover the sought-for moduli. Finally, a discussion is given concerning the influence of the size and shape of the specimens, as well as the number of employed modes, on the uniqueness and quality of the inversion.

### 17.3 Introduction

The purpose of this work is to develop an experimental data-acquisition technique and inversion scheme for recovering the macroscopic elastic moduli and damping factors of specimens of arbitrary shape and size, composed of cellular materials.

To do this, we employ an inversion method, used in the past (e.g., [39, 141]) to characterize dense homogeneous (such as metals) or inhomogeneous (such as composites) solid specimens, whereby the processed data concerns the relatively-low resonance frequencies ( $< 3$  kHz) of various mechanical modes of the specimen. However, this method cannot be transposed to low-density cellular materials without precaution. In fact, the acquisition of data must be made in the linear response regime (which, for cellular materials, requires very small solicitations, giving rise to very weak responses) and an appropriate model (incorporating as much as necessary, but not more, of the physics of the vibratory phenomena) must be employed in the inversion scheme to describe the (linear) dynamic response of the porous specimen.

This study is undertaken in the framework of the vibroacoustic characterization of bone for the detection of osteoporosis. When osteoporosis (which is an imbalance between bone resorption (the part of remodeling consisting of breaking down and assimilating) exceeds bone formation) sets in, bone becomes more fragile, with fewer connected and thinner trabeculae (in the form of rods and plates), and more porous cortical components. It has been demonstrated that the elastic and shear moduli (obtained by static mechanical tensile and torsional testing) of human femoral cortical bone in the longitudinal direction, decreases significantly with the porosity (assessed by means of histology) [115]. Our ambition is ultimately to employ the tool developed herein (which applies to specimens in their natural size and shape, contrary to other tools [403, 337, 242, 374] which require the specimen to be cut into specific shapes in order to profit from the existence of simple interaction models for these shapes) to establish a quantitative correlation (if it exists) between the macroscopic elastic moduli of bones having various porosities and their resistance to fracture.

Cancellous (also called trabecular) bone is the principal component of short bones such as vertebrae and is also found at the extremities of long bones (proximal tibia and femur)

where it is surrounded by a shell of dense compact (cortical) bone. The mechanical behavior of cancellous bone is typically that of a cellular material. For instance, the compressive stress-strain curve is divided into three regimes characteristic of all cellular solids, and the moduli and strength, all vary with density in the way expected of a foam [149]. Cancellous bone supports large static and cyclic loads.

Foaming materials (e.g., metals and polymers) into cellular solids, made up of an interconnected network of solid struts (rods) or plates, extends their mechanical properties, making them attractive for energy absorbing applications. The techniques used for foaming are well documented in [149].

Cellular materials are poroelastic (or poroviscoelastic), so that their vibroacoustic behavior can be modeled by the Biot theory [31, 32]. This theory, which assumes the solid phase to be saturated by a fluid phase, takes into account the motions of both the solid frame and the pore fluid, as well as their relative motions (which is the cause of viscous losses). The poroelastic material is described by five geometrical parameters ( the porosity  $\phi$ , flow resistivity  $\sigma^{fr}$ , tortuosity  $\alpha_\infty$ , viscous characteristic length  $\Lambda$ , thermal characteristic length  $\Lambda'$ ) and by the mechanical parameters of the frame and fluid. Recovering all these parameters by inversion of the measured acoustic waves propagating through the fluid in the pores, and through the elastic stress waves carried through the solid frame of the material, is a possible, but necessarily difficult task. It can be done using the Biot theory, or, perhaps, with the somewhat simpler Attenborough [15] and Allard [7] models. Another approach is to consider several of the parameters to be known a priori, and to invert the data for the other parameters via the Biot [53, 55, 337] or equivalent fluid models [130]. But all of these models are very expensive in terms of computational cost and memory and the data is either not sensitive to variations of certain parameters, and/or it may not be necessary to search for many of these parameters as such if their effect on the strength (or other property) of the material is either negligible or is globalized in the effective elastic moduli (or wavespeeds and attenuation factors) of the specimen.

This may explain why simple, relaxational, models for the acoustical properties of porous media (these are phenomenological models for sound propagation) which involve just a few parameters have been so popular. An extreme example of these simple models, are the

empirical equations of Delany and Bazley [95, 382] with just one adjustable parameter, the flow resistivity  $\sigma^{fr}$ .

Fairly-comprehensive studies of the influence of the Biot parameters on ultrasonic wave propagation in plate-like specimens of human cancellous bone, as well as methods for solving the inverse problem, have been reported by several authors [337, 53, 132, 156]. It should be remarked, in connection with carrying out a similar study using vibrational data, that the resonance frequencies and damping (the observables) of vibrating cellular structures not only depend on their elastic moduli and Biot geometrical parameters, but also strongly on the size and shape of the specimen (also, unfortunately, on the boundary conditions).

In a study of the solid frame for relatively rigid materials, with account taken of the sole inertial interactions, an approximate calculation of the resonance frequencies of a *porous plate* has been proposed and the influences of porosity, tortuosity and permeability have been studied in [241]. It was found that the natural frequency of the dominant mode increases with increasing porosity and permeability, and decreases with increasing tortuosity, whereas the damping factor increases with increasing porosity and decreases with increasing tortuosity, while reaching a maximum value at a frequency determined by the three parameters.

Notwithstanding these facts, it is tempting (and certainly useful, in the inverse problem context) to bypass completely models employing geometrical parameters such as porosity and tortuosity, and to incorporate their effect, in a homogenized way, into the elastic moduli (considered to be complex, in order to take into account dissipation of energy). This amounts to replacing the rather complicated Biot-like models by an elastic or modified elastic model incorporating damping effects (which we term the viscoelastic model herein). But in order for this to be legitimate, in the sense that it does not entail large errors in the reconstructed parameters of interest, we must first show (in the direct problem context) that the (simpler) viscoelastic model gives rise to a vibrational response that is close to that of the (more comprehensive) Biot-like model.

Thus, this paper starts with a description, in sect. 20.4, of the experimental setup we use to acquire the vibration data (which constitutes the input to the inversion scheme). In sect. 17.5 we present, and compare, the Biot and viscoelastic models (and their 3D, FE implementation schemes). The Rayleigh damping device employed in the viscoelastic model

is related to a rheological model in this section. The good agreement between the Biot and viscoelastic models, authorizes us to employ the simpler viscoelastic model in the inversion scheme also described in sect. (17.5). The results and discussion are given in sect. 17.6. The conclusions are given in sect. 17.7.

## 17.4 The experimental setup for data acquisition

The experimental setup is designed for the acquisition of vibrational response data, in particular the resonance frequencies and spectra, that constitute the input to the inversion scheme for the recovery of the Young modulus, Poisson ratio and damping factors of the cellular material.

Most of the methods that have been employed until now for characterizing cellular (and other) materials have often employed electromechanical shakers, accelerometers and laser vibrometry [128, 234]. These devices are unwieldy, and/or expensive, and/or are not particularly well-adapted to specimens with uneven, porous boundaries such as foams.

For this reason we chose to excite, and measure the motion of, the surface of the cellular material, with a minimum mass-loading effect on the structure, by means of a small (1.0 cm diameter), light-weight axial piezoelectric transducer (PZT) and a similar sensor, both made of a thin disc of piezoelectric ceramic bonded to a thin metal diaphragm [9]. These devices are routinely incorporated in buzzers, telephone ringers (i.e small battery powered equipment) to deliver high audible sound output from a small (milliwatt) energy input.

When the PZT sensor is bonded to a deforming vibrating surface, a mechanical deformation is induced in the polarized crystal (resulting from tension and twisting of the sensor) leading to the generation of an electric charge. The PZT sensor measures a deformation (strain) [356]. Likewise, when the PZT crystal is submitted to a modulated electrical solicitation, it vibrates (and emits sound waves). The light weight, small size and flat structure form of the PZTs facilitate their mechanical fixation on cellular structures like foam, with negligible influence on their vibration responses as compared, for instance, to accelerometers. The apparent disadvantage of the PZT is that, as an exciter, it can deliver only small levels of vibrational inputs to the specimen, and as a sensor, it delivers only very small electrical



outputs. As we shall see later, the low level of vibrational input it delivers is another good reason for employing PZT actuators, and the low output level can be compensated for by the use of suitable amplification devices.

The samples are suspended on a test rig using nylon threads (corresponding to free-free boundary conditions). The exciter and sensor are bonded (using a thin double sided scotch tape) laterally onto the specimen, opposite each other, as depicted on Fig. 17.1.

The exciter is driven in discrete frequency and amplitude steps using a 7265DSP programmable signal recovery lock-in oscillator and a Brüel and Kjær (B&K2706) power amplifier (Fig. 17.1). The response signal captured by the sensor is amplified using a NF SA-200F3 low noise preamplifier connected to the input of a 7265DSP synchronous demodulator. The data from the amplifier is directly read by a PC via an GPIB (IEEE 488) bus.

The first two specimens (named PE1 and PE2 ) are disc-shaped (10cm diameter, 2cm thickness), cut from two different samples of melamine foam as is practiced for the characterization of the acoustic parameters of absorbing materials in an (e.g., B&K4002) impedance tube.

The third specimen (PE3) was cut into the form of a square (7cm  $\times$  7cm) thick plate (5cm thickness) from the same panel as PE1.

Melamine, a strong organic base with chemical formula  $C_3H_6N_6$  , is foamed into a micro-fibrous structure, resulting in an open cell material. It has become the standard synthetic vitreous fiber (SVF) material for sound absorption in anechoic chambers (such as the one at the Laboratoire de Mécanique d'Acoustique). Previously, the SVF were manufactured mostly from glass, natural rocks, slag, and kaolin clay. These materials are still employed as insulation wools.

The fourth specimen (PE4) is made of polyurethane and was precisely cut into a thick, short hollow cylinder (8cm exterior diameter , 6.5cm interior diameter , 4cm longitudinal dimension).

Other characteristics of the samples are given in Table 17.1.

The response spectra are measured from 100 Hz ( just below the first resonance frequency of the specimens) up to 3 kHz.

### 17.4.1 Nonlinear behavior of the specimens

Our experiments (and elsewhere ; see e.g.,[261, 383]) show that cellular specimens exhibit nonlinear behavior. This is put into evidence by plotting their vibratory response as a function of the amplitude of excitation.

Four spectral responses of sample PE1 were measured by employing variable excitation amplitude voltage levels (0.02, 0.04, 0.06V and 0.08V), applied to the transducer. The curves depicting the amplitudes and phases for the different levels of excitation are plotted on Fig. 17.2. The shift in the resonance frequencies with the increase in the level of excitation is more noticeable in the phase plot.

The inversions were done with data generated from the lowest amplitude of excitation, corresponding to linear response of the specimens. This data had sufficient signal to noise ratios due to the use of the high-sensitivity PZT sensors in association with a very low noise amplifier.

## 17.5 Ingredients of the method for the recovery of the elastic moduli and damping factors of the specimens

### 17.5.1 Preliminary remarks

Most schemes for solving inverse problems (such as that of the recovery of the constitutive parameters of a specimen) proceed by solving the associated direct problem for a succession of trial values of the parameters of the configuration. This process is iterative and designed so that the successive trial values converge to the hopefully-correct parameters of the configuration one wishes to characterize.

These schemes thus have three key ingredients : i) the data constituting the response of the specimen to a known solicitation, ii) the model used to solve the aforementioned successive direct problems, and iii) the scheme for adjusting the successive values of the trial parameters so as to minimize the cost function.

### 17.5.2 Models for solving the direct problem

From the previous remarks, it can easily be appreciated that the choice of model for solving the direct problem is a key issue in that the numerical code stemming from this model will be used many (e.g., hundreds of) times during the iterative process involved in the resolution of the inverse problem. This model must therefore be as simple as possible (to speed up each resolution of the direct problem), while incorporating as much as possible of the physics of the most noticeable phenomena provoked by the solicitation of the specimen. This contradiction can only be resolved by a compromise.

As mentioned in the introduction, we have identified two candidate models for solving the direct problem. The first one is less costly in computation time and is the one actually employed for solving the inverse problem. The second one incorporates more of the physics, but, of course, requires intensive computations and is used only for the validation of the first model.

#### The first (viscoelastic) model

The specimen is initially visualized as a linear, isotropic elastic solid 3D body of arbitrary shape, attached to its environment by some sort of (we choose the free-free) boundary condition, and submitted to some sort of time-varying solicitation. The microscopic irregularities and biphasic nature of the original porous medium are not explicitly taken into account; i.e., the medium is thought of as being homogenized on the scale of the micro-irregularities (but macro-irregularities can be accounted-for).

The body vibrates in response to the solicitation and this phenomenon is described by the classical equations of the elastodynamics of continuous elastic media. Dissipation in the body is then accounted-for by the introduction of Rayleigh damping.

The integral version of the governing partial differential equations (PDE's), which takes the form of the principle of virtual work expressed in Appendix (17.8), is discretized so as to lead to :

$$\delta \underline{u}^n \left\{ \mathbf{M}^{nm} \ddot{\underline{u}}^m + (\mathbf{C}_{(M)}^{nm} + \mathbf{C}_{(K)}^{nm}) \dot{\underline{u}}^m + \mathbf{K}^{nm} \underline{u}^m - \mathbf{P}^n \right\} = 0, \quad (17.5.1)$$

wherein  $\delta \underline{u}^n$  is the displacement variation,  $m = 1, 2 \dots$ ,  $n = 1, 2 \dots$ ,  $\mathbf{M}^{nm}$ ,  $\mathbf{K}^{nm}$  are the

mass and stiffness matrices respectively,  $\mathbf{C}_{(M)}^{nm}$  and  $\mathbf{C}_{(K)}^{nm}$  the mass and stiffness viscous damping matrices respectively, and  $\mathbf{P}^n$  the external load vector. The displacement, velocity and acceleration are given by  $\underline{u}^m$ ,  $\dot{\underline{u}}^m$  and  $\ddot{\underline{u}}^m$  respectively. Eq. (17.5.1) is the basis of the 3D finite element (FEM) implementation of the viscoelastic or elastic (for zero damping) models.

In order to compute the resonance frequencies, the damping matrices and the applied force are set to zero in (17.5.1). The eigenvalue problem for the natural modes is then to solve

$$(\lambda_{eig}^2 \mathbf{M}^{mn} + \mathbf{K}^{mn})\phi^n = 0, \quad (17.5.2)$$

with  $\lambda_{eig}$  the eigenvalue and  $\phi^n$  the eigenvector (i.e., the mode of vibration).

As will be explained in more detail further on, the necessity of solving the eigenvalue problem makes itself felt in the inversion process, during which a subset of the natural frequencies, arising from a computation involving trial values of the elastic moduli of the specimen, is compared to the measured resonance frequencies.

A simple (Rayleigh damping) method is employed to account for the dissipation in the specimen, and manifests itself by the equivalent damping  $\mathbf{C}_{eq}$  term appearing in (17.5.1). More specifically, Rayleigh damping is expressed by

$$\mathbf{C}_{eq} = \mathbf{C}_{(M)}^{nm} + \mathbf{C}_{(K)}^{nm} = \alpha \mathbf{M}^{nm} + \beta \mathbf{K}^{nm}, \quad (17.5.3)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are constants (characteristics of the material, which, like the elastic moduli, will also be identified).

It can be shown that the damping ratio  $\xi$  of system (17.5.1), with the assumption (22.4.5), is the following function of frequency :

$$\xi = \frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\beta\omega}{2}. \quad (17.5.4)$$

Rayleigh damping can be related to the standard linear solid equation having a similar dissipative behavior. The creep function and the dissipative behavior of materials are described by using the viscoelastic constitutive equations originating in models composed of weightless springs (no inertial effects are present) and dash-pots (consisting of loosely-fitting pistons in cylinders filled with a viscous fluid) [63].

The rheological interpretation of Rayleigh damping, using a particular generalized Maxwell (GM) model (Fig. 17.3), has been given in [339]. The equations relating  $\alpha$  and  $\beta$  to the mechanical parameters of the generalized Maxwell (GM) model are derived in the Appendix (17.9) and are given by

$$\alpha = E(\eta_1 + \eta_2)/\eta_1^2, \quad \beta = \frac{\eta_2}{E}. \quad (17.5.5)$$

Dissipation can be quantified by using the quality factor  $Q$ . Its inverse  $Q^{-1}$  is the dissipation factor. The dependence of  $Q_{GM}^{-1}$  on frequency is then

$$Q_{GM}^{-1} = \frac{E(\eta_1 + \eta_2)}{\eta_1^2 \omega} + \frac{\eta_2}{E} \omega. \quad (17.5.6)$$

The frequency response, for a point-like harmonic force applied to the specimen, is computed using (17.5.1) after the mechanical parameters have been recovered by inverting the measured resonant frequency data with the help of the model given by (22.4.4).

As explained more fully further on, this response is compared to the experimental spectral response to obtain the optimal values of  $\alpha$  and  $\beta$ .

The numerical code associated with the 3D FE (visco) elastic model(s) is constructed with the help of a commercial finite element software (Abaqus).

Accurate resonance frequency data for thick plates can also be generated by employing the 3D Ritz analysis [344] or by the differential quadrature (DQ) method [247] for moderately thick plates. Since the computation cost and precision of the 3D FE model depends on the number of elements chosen, the tables provided in [344] were used to make an optimal choice of the number of elements for the 3D FE (visco) elastic computations.

### The second (Biot) model

The Biot model differs from the previous one in that the porous nature of the material of the specimen is explicitly taken into account. In fact, the medium is considered to have two components : the (elastic) solid frame (replaced by a homogenized solid) and the saturating fluid. The motions of these two components are described by a coupled system of PDE's and are therefore coupled. This coupling shows up notably in what appears as a viscous damping term which vanishes for vanishing relative motion of the two components.

In the  $\{\underline{u}, p\}$  frequency domain formulation of the Biot theory formulated by Atalla [14], the displacement field  $\underline{u}$  of the frame and the sound pressure  $p$  in the fluid phase are the variables of interest. The variational formulation of the governing differential equations is given in Appendix (17.10). Eqs. (17.10.1) and (17.10.2) are the basis for the FE implementation of the Atalla-Biot model. Tilded variables therein are complex-valued, the imaginary parts of which represent dissipation effects in the material. Each of the nodes of the finite element mesh has four degrees of freedom. Eqs. (17.10.1) and (17.10.2) are discretized using piecewise hierarchic polynomials as basis functions. The resulting sparse symmetric system of linear equations is solved, for each frequency, using a sparse direct solver.

### Comparison of the two models

We employed the Biot model, implemented in our numerical code constructed from the formulation explained in sect. 17.5.2, to generate reference solutions, concerning the response at a point on the surface of a 2.5 cm thick, melamine disc specimen to an applied concentrated force of 1 N at a point opposite to the first one on the disc surface. 7200 finite elements were used, resulting in 133000 unknowns. Each frequency took 3.5 hours of computation time on the SGI Origin3800 computer of the Center of High Performance Computing of the Technische Universität in Dresden, Germany. This computation required previous knowledge of the Young's modulus and Poisson ratio which were taken to be  $E = 160 \text{ kPa}$ ,  $\nu = 0.4$ , as well as the Biot parameters ( $\phi=0.97$ ,  $\alpha_\infty = 1.015$ ,  $\Lambda = 99\mu\text{m}$ ), which were recovered from the inversion, with the help of the equivalent fluid model [130], of experimental acoustical reflection and transmission data [136] relative to the melamine disc solicited by the waves radiated by 50 , 100 and 200 kHz air-coupled ultrasonic transducers.

The 3D FEM (visco) elastic model, implemented by Abaqus software, was made to produce results, for the same specimen solicited in the same manner. The specimen was discretized using 272 (1483 nodes) 20-node quadratic hexahedron brick elements (type C3D20R [185]). The total cpu time for the calculation of 128 frequencies (200-3kHz) was 328 seconds on an Intel P4 3 Ghz personal computer. This much shorter computation time constitutes a strong motivation for choosing the viscoelastic model rather than the Biot model for the inversion, provided, of course, that the viscoelastic model gives similar results to those of

the Biot model.

The comparisons in Figs. 17.4 and 17.5 show that the viscoelastic model indeed gives rise to solutions quite close to those of the Biot model. This fact incited us to choose the viscoelastic (rather than the Biot) model for the purpose of the inversions.

### 17.5.3 Method of solution of the inverse problem

As briefly mentioned above, the inversion proceeds in two distinct steps (actually three steps, because the density of the sample is first obtained from measurements of its geometry and weight).

The (real) elastic moduli  $E$ ,  $\nu$  are first retrieved by use of : a) the data consisting of the experimentally observed resonance frequencies of the specimens vibrating with free-free boundary conditions, and b) the elastic 3D FEM model (i.e., the viscoelastic model with no damping) to solve the eigenvalue problem via (22.4.4) (see, e.g., [195], p. 570-600) for the model values of the resonance frequencies associated with the trial values of  $E$ ,  $\nu$  at each iteration step during the inversion (see Fig. 17.6).

A cost function  $\mathfrak{J}$ , constituting the measure of the discrepancy between the model resonance frequencies and the experimental resonance frequencies, is computed for each set of trial values of  $E$ ,  $\nu$  :

$$\mathfrak{J}(E, \nu) = \sum_{n=1}^m \mathfrak{w}_n^2 \{f_{experiment}^n - f_{model}^n(E, \nu)\}^2, \quad (17.5.7)$$

with  $\mathfrak{w}_n$  the weighting coefficient for the mode,  $f_{experiment}^n$  the target resonance frequency obtained by experiment,  $n$  the mode number,  $m$  the number of employed modes and  $f_{model}^n$  the natural frequency furnished by the model for the current trial values of  $E$  and  $\nu$ .

The search for the optimal set  $E$ ,  $\nu$  which minimizes  $J$  is achieved automatically, and in iterative manner, by the Levenberg-Marquardt optimization algorithm (i.e., the *lmdif* routine from *Minpack*, implemented in the Argonne National Laboratory).

The final step of the inversion procedure is to obtain the Rayleigh parameters  $\alpha$ ,  $\beta$  of the specimen by minimizing the discrepancy between the measured spectral responses and the responses computed by means of the viscoelastic model incorporating the previously-obtained optimal set  $E$ ,  $\nu$ .

## 17.6 Results and discussion

### 17.6.1 Preliminaries

The vibration spectral response amplitudes and phases are first plotted for each specimen and the resonance frequencies are obtained by correlating the amplitude peaks to sudden phase variations.

These measured resonance frequencies are displayed in Table (17.2) for the various specimens under examination.

The elastic moduli and damping parameters are then retrieved by the procedure outlined in the previous section.

### 17.6.2 Particular aspects of the cost function

#### Uniqueness as manifested by a single minimum

Good practice for solving inverse problems requires that the recovered solution be unique. An indication of uniqueness can be found by plotting the cost functions, given by (17.5.7), as a function of the parameters one wants to recover.

A cost function for PE1, computed with  $E$  in the range 140 - 200 kPa and the Poisson ratio in the range 0.1 - 0.5, when all the modes are attributed equal weights ( $\mathbf{w}_n = 1$ ), is depicted in Fig. 17.7.

The noteworthy feature of this figure, typical of what occurs for all the specimens under examination, is that the solution is unique (the minimum of the cost function occurs at  $E \sim 160 \text{ kPa}$  and  $\nu \sim 0.4$ ).

#### Choice of weights

The resonance frequency of a natural mode may not be precisely determined for several reasons : mode-coupling, difficulties in distinguishing between the different types (compression, torsion and flexural) of modes, and the presence of noise. In such cases it is best to assign weights and attribute the larger values to the more precisely-determined natural frequencies. It is thus preferable to choose, if possible, the geometry of the specimen that will



provide a vibration spectrum with well-separated resonance peaks.

### Choice of the number of resonance frequencies

Increasing the number (larger  $m$ ) of resonance frequencies in the cost function generally improves the rate of convergence of the inversion scheme.

In [55], the accuracy of the reconstruction of the depth of the sea by echolocation was shown to depend on the sharpness of the cost function in the neighborhood of one of its minima. The sharpness was determined from the calculation of its absolute curvature.

Herein the slope of the cost function around the minima is analyzed. This can be illustrated by calculating the slope of  $\mathfrak{J}$  with a fixed value of the Poisson ratio. In [344] the resonance frequencies ( $\omega_n$ ) obtained by solving an eigenvalue problem for thick elastic plates with varying diameter ( $R$ ) and thickness ( $h$ ) ratios are given in table form as function of the non-dimensional frequencies  $\lambda_n > 0$  with  $\omega_n = \frac{\lambda_n}{R} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ . This is similar to the resonance frequencies of the Euler-Bernoulli beam model. The slope of the cost function using this model is given by

$$\frac{d\mathfrak{J}(E)}{dE} = \sum_{n=1}^m \frac{\lambda_n}{R} \sqrt{\frac{1}{2\rho(1+\nu)E}} (\omega_n - \omega_n^{experiment}), \quad (17.6.1)$$

When  $(\omega_n - \omega_n^{experiment}) < 0$ , the point is situated on the left side of the minimum of  $\mathfrak{J}$  and the slope is negative, so that increasing the number of terms in the series increases the absolute value of the (negative) slope. A similar reasoning shows that when the point is on the right side of the minimum of  $\mathfrak{J}$ , increasing  $m$  increases the absolute value of the (positive) slope.

An illustration of this finding is given in Fig. (17.8) wherein the cost function is computed by varying Young's modulus with the Poisson ratio fixed at 0.4. This figure reveals that employing the largest (five) number of modes for the inversion provides the sharpest minimum, thus allowing a faster convergence and more precise solution of the inverse problem.

### 17.6.3 The outcome of the inversion scheme for samples PE1 and PE2

The recovered parameters, Young's modulus and Poisson ratio for the two melamine disc samples PE1, PE2 and the the hollow polyurethane cylinder PE4, are given in table 17.2.

### 17.6.4 Comparison between experimental and model responses for samples PE1 and PE2

Acceleration and strain were computed by the 3D viscoelastic FEM model employing the elastic moduli and damping factors obtained by the previously-described inversion procedure. The computed strain ( $\varepsilon_{22}$ ) is picked on a centroid of the element (this is an interpolation of integration point quantities to the centroid of an element). The position of the element corresponds to that of the measurement. The model and experimental responses are depicted in Fig. 17.9.

### 17.6.5 The outcome of the inversion scheme for sample PE3

The recovered parameters, Young's modulus and Poisson ratio for the square melamine (7cm  $\times$  7cm  $\times$  5cm) thick plate specimen (PE3) are given in table 17.2.

The elastic moduli and Rayleigh damping parameters for the thick plate specimen are found to be approximately the same as those of the disc samples. This is consistent with the fact that all of these samples are made of the same material (melamine) and that the elastic moduli and damping parameters are inherent to the material and should not depend on the sample size and shape.

### 17.6.6 Comparison between experimental and model responses for sample PE3

The recovered elastic constants and Biot parameters were employed to compute the vibrational response of the square melamine (7cm  $\times$  7cm  $\times$  5cm) thick plate specimen (PE3). This response is compared to the experimental response (actually, the average response of five such specimens) in Fig. 17.10.

### 17.6.7 The outcome of the inversion scheme for sample PE4

A different material (polyurethane) in the form of hollow cylinder (specimen PE4, Fig. (17.11)) was characterized in the same way as above.

The recovered parameters, Young's modulus and Poisson ratio, for this specimen are given in table 17.2.

### 17.6.8 Comparison between experimental and model responses for sample PE4

In Fig. 17.12, we compare the measured response of the hollow cylinder specimen PE4 to the computed 3D FEM viscoelastic response (for  $\alpha = 400$  and  $\beta = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ).

### 17.6.9 Quality and damping factors of melamine and polyurethane

Using the previously-mentioned inversion procedure of the measured response, we recovered the Rayleigh damping factors, and the variation of the attenuation factors with frequency, of the two cellular materials : melamine and polyurethane.

The recovered modified Maxwell model parameters for the two materials are resumed in table 17.2, whereas  $Q_{GM}^{-1}$  is plotted in Fig. 17.13.

The comparison in in Fig. 17.13 reveals that cellular melamine exhibits a larger attenuation than cellular polyurethane, particularly in the lower frequency range.

### 17.6.10 Possible sources of errors in the determination of the material properties

#### Geometric errors

The thick disc-like specimens employed herein were cut using a cylindrical cutter made from tin can (10 cm diameter). This simple tool can introduce some errors in the shape (supposed to be a thick circular plate or thick disc in the computations) and lead to a poor determination of the volume and thus of the density of the material.

The solution of this problem is to scan the specimen with a laser to retrieve the exact geometry. Although this can solve the problem in the context of our inversion method, it does not solve the problem when the (disc-shaped) sample is characterized within a standing wave tube (due to the circumferential edge constraints entailed by the mounting conditions [306, 307]). The solution to the mounting problem in the standing wave tube is to use thin samples, but this reduces the precision of the measurement of the elastic parameters, especially the Poisson ratio.

### **Anisotropy**

Natural cellular materials like bone and wood are anisotropic due to their weight-supporting nature.

Most foams are anisotropic to some extent due to the foaming process [149]. This is manifested in the resonance frequencies. The mechanical parameters used to compute these frequencies for the modes in the longitudinal direction will not give the correct values for the transverse and radial ones. The best way to uncover anisotropy in the material is to compute the frequencies using an isotropic elastic model (e.g., for specimen PE4, which has been precisely-cut by a machine), and then to compare the resonance frequencies for the breathing, radial, purely bending and longitudinal modes (here 820, 1091, 1387, 2100 Hz respectively). We have done this and found that these frequencies are very close if not equal to the measured ones (table 17.2).

What may appear as effects due to anisotropy can actually be caused by discrepancies between the actual specimen geometry and model geometry.

## **17.7 Conclusions**

An experimental technique, employing a bonded (to the specimen) PZT exciter and sensor (which was shown to actually measure the strain at point), was developed to generate real data concerning the linear response to small-amplitude sinusoidal solicitations of (e.g., cellular) materials that exhibit non-linear response even for moderate solicitations.

An inversion procedure was described whereby the experimental linear response is compared to a model response in order to recover the homogenized elastic moduli and damping parameters of two types (melamine and polyurethane) of cellular materials.

The choice of the theory for computing the model response was shown to be a very important issue in that the model response is computed hundreds of times during the inversion. Ideally, the theory should incorporate all the important physics of the phenomena related to the generation of vibrations in the porous specimen. Although the Biot theory largely fulfills this role, it is very computationally-intensive. We employed the Biot theory (implemented by our 3D FEM numerical code) to generate reference solutions whereby we evaluated another candidate theory. The latter is a classical one deriving from the elastodynamics of linear, isotropic, homogenized, elastic continua with the inclusion of Rayleigh damping (shown to be rheological equivalent to a modified Maxwell model) to account for anelastic effects. This (viscoelastic) model was also translated into a 3D FEM numerical code which is far less time-consuming than the Biot model-based code. The results deriving from the two models were compared and shown to be quite similar, thus justifying the further use of the viscoelastic model in the inversion procedure.

The inverse problem of the retrieval of the elastic moduli and damping factors was then solved and shown to give rise to a unique solution (i.e., the cost function is convex and exhibits a single global minimum). Arguments were given, and results were shown, that indicate why it is advantageous to employ resonance frequency data for more modes in order to improve the precision and rate of convergence of the inversion. The sources of error, i.e., geometrical uncertainty and anisotropy of the specimens, of the recovered parameters were identified and discussed.

The transduction, measurement, and inversion techniques developed herein for very low-amplitude solicitations have thus been shown to enable the avoidance of the problems (i.e., recovered parameters that depend on the level of the solicitation) encountered when the mechanical characteristics of materials, such as those of cellular nature, are identified using vibrational response data that is clearly nonlinear even for moderate levels of excitation.

## 17.8 Appendix A : The steady-state linear dynamic equation

In the formulation of the steady-state linear dynamic analysis it is assumed that the structure undergoes small harmonic vibrations about a deformed, stress state defined by a subscript 0.

The procedure is to appeal to the principle of virtual work

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^s : \underline{\underline{\sigma}}^s d\Omega + \int_{\Omega} \rho \delta \underline{u} \cdot \ddot{\underline{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho a \delta \underline{u} \cdot \dot{\underline{u}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta \underline{u} \cdot \underline{t} dS = 0, \quad (17.8.1)$$

where  $a$  is the mass proportional damping factor,  $\underline{t}$  the surface traction and  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^s$  the strain variation compatible with the displacement  $\underline{u}$ .

The discretized form of this equation is

$$\delta \underline{u}^n \left\{ \mathbf{M}^{nm} \ddot{\underline{u}}^m + (\mathbf{C}_{(M)}^{nm} + (\mathbf{C}_{(K)}^{nm})) \dot{\underline{u}}^m + \mathbf{K}^{nm} \underline{u}^m - \mathbf{P}^n \right\} = 0, \quad (17.8.2)$$

wherein :

- $\mathbf{M}^{nm} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^n \cdot \mathbf{N}^m d\Omega$  is the mass matrix,
- $\mathbf{C}_{(M)}^{nm} = \int_{\Omega} a \rho \mathbf{N}^n \cdot \mathbf{N}^m d\Omega$  is the mass damping matrix,
- $\mathbf{C}_{(K)}^{nm} = \int_{\Omega} b \mathbf{B}^n : \mathbf{D}^{el} : \mathbf{B}^m d\Omega$  is the stiffness damping matrix,
- $\mathbf{K}^{nm} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}^n}{\partial \underline{u}^m} : \underline{\sigma}_0 + \mathbf{B}^n : \mathbf{D}^{el} : \mathbf{B}^m \right] d\Omega$  is the stiffness matrix,
- $\mathbf{P}^n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^n \underline{t} dS$  is the external load vector,
- $\mathbf{D}^{el}$  is the elasticity (moduli) matrix for the material,
- $\mathbf{B}$  is the strain variation matrix,
- $b$  is the stiffness proportional damping factor,
- $\mathbf{N}^n$  and  $\mathbf{N}^m$  are referred to as shape, basis, or interpolating vector functions [195].

## 17.9 Appendix B : The modified Maxwell model

The stress-strain relationship for this model (Fig. 17.3) is given by :

$$\sigma + \frac{\eta_1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = (\eta_2 + \eta_1) \frac{\partial \epsilon^s}{\partial t} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \frac{\partial^2 \epsilon^s}{\partial t^2}. \quad (17.9.1)$$

where  $E$  is the elasticity constant of the spring and  $\eta_1$  and  $\eta_2$  are the viscosities in the dashpots.

Taking periodic variations for the stress and strain ( $\sigma(t) = \sigma_0 \exp(j\omega t)$ ,  $\epsilon^s(t) = \epsilon_0^s \exp(j\omega t)$ ), the complex modulus  $E_c$ , is given by

$$E_c = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0^s} = \frac{-\eta_1\eta_2\omega^2 + jE(\eta_2 + \eta_1)\omega}{(E + j\eta_1\omega)}. \quad (17.9.2)$$

For weak-to-moderate Rayleigh damping, the dissipation factor  $Q^{-1}$  and the damping ratio  $\xi$  are related by :

$$Q^{-1} \approx 2\xi. \quad (17.9.3)$$

For a linear, viscoelastic rheological model of complex modulus  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_R + j\mathbf{E}_I$ , the expression of the quality factor is  $Q = \frac{\mathbf{E}_R}{\mathbf{E}_I}$ , and, for this particular generalized Maxwell model :

$$Q_{GM}^{-1} = \frac{E(\eta_1 + \eta_2)}{\eta_1^2\omega} + \frac{\eta_2}{E}\omega. \quad (17.9.4)$$

The relationship between  $\alpha$  and  $\beta$  and the mechanical parameters of the generalized Maxwell model is then given by

$$\alpha = E(\eta_1 + \eta_2)/\eta_1^2, \quad \beta = \frac{\eta_2}{E}. \quad (17.9.5)$$

## 17.10 Appendix C : Biot model

The porous media is coupled to a fluid and the displacement field is computed using the Biot theory formulated in the variables  $\{\underline{u}, p\}$  ( $\underline{u}$  the displacement field of the frame, and  $p$  the sound pressure in the fluid phase) by Atalla [14].

A variational formulation of the governing differential equations leads to :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{\underline{\underline{\sigma}}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\epsilon}}^s(\delta\underline{u}) d\Omega - \omega^2 \tilde{\rho} \int_{\Omega} \underline{u} \cdot \delta\underline{u} d\Omega - \tilde{\gamma} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \delta\underline{u} d\Omega \\ - \int_{\partial\Omega} [\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^s \cdot \underline{n}] \cdot \delta\underline{u} d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (17.10.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\Omega - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} \int_{\Omega} p \delta p d\Omega - \tilde{\gamma} \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \underline{u} d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega} \left[ \tilde{\gamma} u_n - \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \frac{\partial p}{\partial n} \right] \delta p dS = 0, \end{aligned} \quad (17.10.2)$$

wherein :

- $\delta \underline{u}$  and  $\delta p$  denote admissible variations of  $\underline{u}$  and  $p$ ,
- $\underline{\underline{\varepsilon}}^s$  is the solid phase strain tensor,
- $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s$  is the stress tensor of the solid phase of the material in the vacuum,
- $\tilde{\rho}$  and  $\tilde{\rho}_{22}$  are the apparent densities of the solid and the fluid phases,
- $\tilde{\gamma}$  is a coupling factor between the two phases,
- $\tilde{Q}$  and  $\tilde{R}$  are poroelastic coefficients whose expressions can be found in Ref. [14],
- $\tilde{Q}$  and  $\tilde{R}$  are related to  $K_b$ , the bulk modulus of the frame *in vacuo*, to  $K_s$ , the bulk modulus of the elastic solid composing the frame, and to  $\bar{K}_f$ , the bulk modulus of the air in the pores,
- $\Omega$  stands for the porous material volume,  $\partial\Omega$  denotes its boundary, subscript  $n$  denotes the normal component of a vector and  $\underline{n}$  is the unit external normal vector of the boundary surface  $\partial\Omega$ .

## 17.11 Table captions

TAB. 17.1 – The density calculated from the measured weights (employing a Sartorius L2200S balance) and calculated volumes of the disc-shaped samples (diameter, 10.0 cm ). Note that PE1 and PE2 are cut from different samples. The hollow cylinder has an exterior diameter of 8.0 cm and height 4.0 cm.

TAB. 17.2 – Measured resonance frequencies (in Hz) and inversion results compared to some reported values for samples PE1 and PE2. The units of  $E$  are kPa and those of viscosity ( $\eta_1$  and  $\eta_2$ ) are  $\text{Nm}^{-2}\text{s}$  (also termed Pascal seconds (Pas)). In [204],  $E = 160 \text{ kPa}$ ,  $\nu = 0.44$  for PE1, PE2 and PE3.



## 17.12 Tables

TABLE 1

Specimen	form	thickness (cm)	density ( $\text{Kgm}^{-3}$ )
PE1	thick disc	2.9	8.34
PE2	thick disc	3.1	8.3
PE3	thick plate	n/a	8.3
PE4	Hollow cylinder	1.5	32

TABLE 2

Sample	$f_{exp}^1$	$f_{exp}^2$	$f_{exp}^3$	$f_{exp}^4$	$f_{exp}^5$	$f_{exp}^6$	E	$\nu$	$\eta_1$	$\eta_2$
PE1	290	542	612	633	726	-	160	0.40	133	0.16
PE2	292	515	-	-	-	870	163	0.40		
PE3	-	-	-	-	-	-	160	0.40	133	0.12
PE4		341	680	850			911	0.28	$2.3 \times 10^3$	13.7

### 17.13 Figure captions

FIG. 17.1 – The experimental setup.

FIG. 17.2 – The nonlinearities of the response (shift of resonance frequency with the variation of excitation amplitude) of specimen PE1. (a) The amplitude at different excitation voltages and (b) the phase.

FIG. 17.3 – The modified generalized Maxwell rheological model.

FIG. 17.4 – Computed acceleration responses, on a point of the surface of a 2.5cm thick melamine disc specimen to a harmonic point force applied at another point of the surface, obtained by : i) the viscoelastic FEM model incorporating Rayleigh damping parameters  $\alpha = 1200$  and  $\beta = 1 \times 10^{-6}$  and ii) the Biot FEM model ( $\phi=0.97$ ,  $\alpha_\infty = 1.015$ ,  $\Lambda = 99\mu\text{m}$ ).

FIG. 17.5 – Computed acceleration responses, on a point of the surface of a  $7\text{cm} \times 7\text{cm} \times 5\text{cm}$  thick plate-like specimen to a harmonic point force applied at another point of the surface, obtained by : i) the viscoelastic FEM model incorporating Rayleigh damping parameters  $\alpha = 1200$  and  $\beta = 5 \times 10^{-7}$  and ii) the Biot FEM model.

FIG. 17.6 – The first two mode shapes of the modes used in the inverse problem for the recovery of Young's modulus and Poisson ratio for the thick melamine disc ((a) and (b)) and the hollow polyurethane cylinder ((c) and (d)).

FIG. 17.7 – The cost function to be minimized for the recovery of two variables (Young's modulus and the Poisson ratio for the melamine sample PE1) as a function of these variables.

FIG. 17.8 – The influence of the number of modes employed in the inversion scheme on the sharpness of the cost function for sample PE1.

FIG. 17.9 – Response of the melamine 2.5cm thick disc. Comparison between the strain measured by the PZT sensor and the computed strain using the 3D viscoelastic FEM with Rayleigh damping. The Rayleigh damping parameters for this fit are  $\alpha = 1200$  and  $\beta = 1 \times 10^{-6}$ .

FIG. 17.10 – Comparison between measured, averaged response of five quasi-identical PE3 (melamine ( $7\text{cm} \times 7\text{cm} \times 5\text{cm}$  ) thick plate specimens with the computed viscoelastic FEM response (i.e., the strain  $\varepsilon_{22}$  on centroid of element at the measurement point). The computation is made with the Rayleigh damping parameters :  $\alpha = 1200$ ,  $\beta = 5 \times 10^{-7}$ . The response is measured by a PZT sensor situated opposite the exciter as depicted in Fig. (17.1).

FIG. 17.11 – Specimen PE4 (hollow polyurethane cylinder, exterior diameter 8 cm, longitudinal dimension 4.0 cm, thickness 1.5 cm) suspended by nylon threads. The PZT exciter (visible) and the sensor situated on opposite side (not visible in the photograph) are mounted using double-sided adhesive tape.

FIG. 17.12 – Vibrational response of specimen PE4 (hollow polyurethane cylinder) : comparison between the 3D viscoelastic FEM computed (with  $\alpha = 400$ ,  $\beta = 1.5 \times 10^{-5}$ ) results and the experimental results.

FIG. 17.13 – Attenuation factor  $Q_{GM}^{-1}$  for melamine and polyurethane foams, resulting from the modified Maxwell model and the Rayleigh damping parameters  $\alpha$  and  $\beta$  retrieved by inversion of experimental response.

### 17.14 Figures

Fig. 1

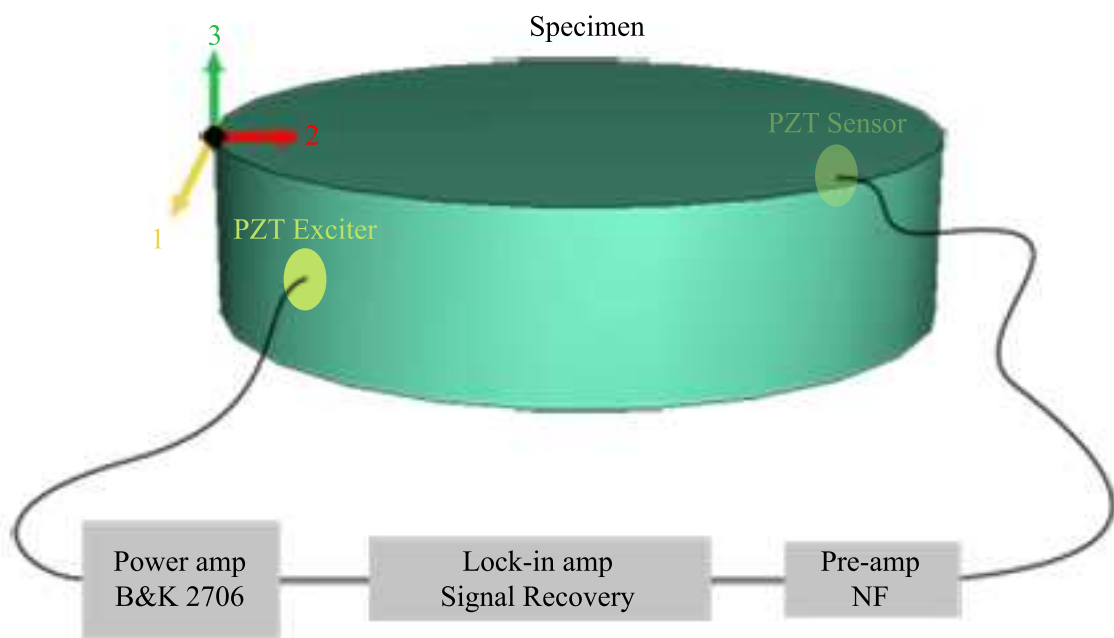


Fig. 1 -

Fig. 2a

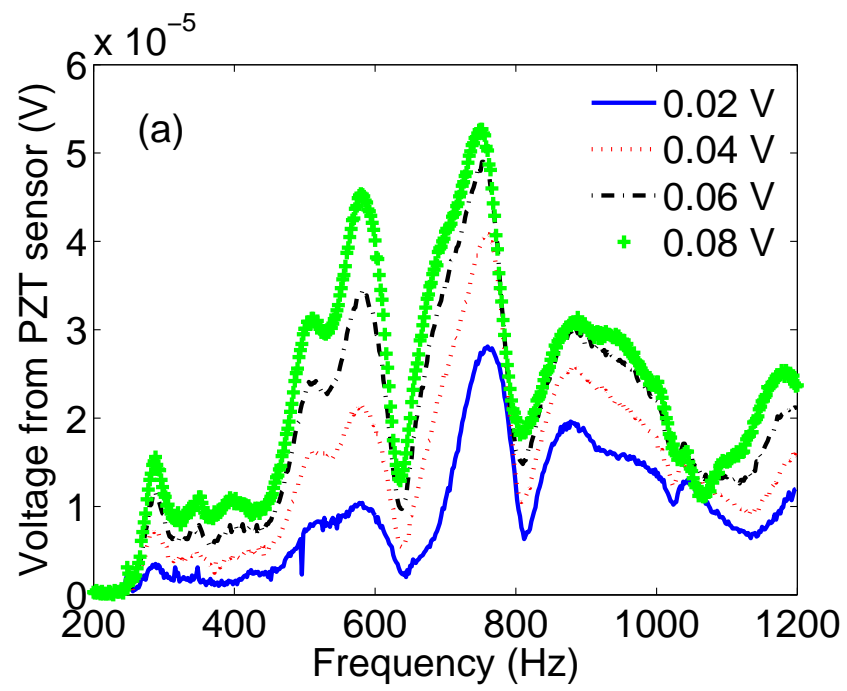


Fig. 2a -

Fig. 2b

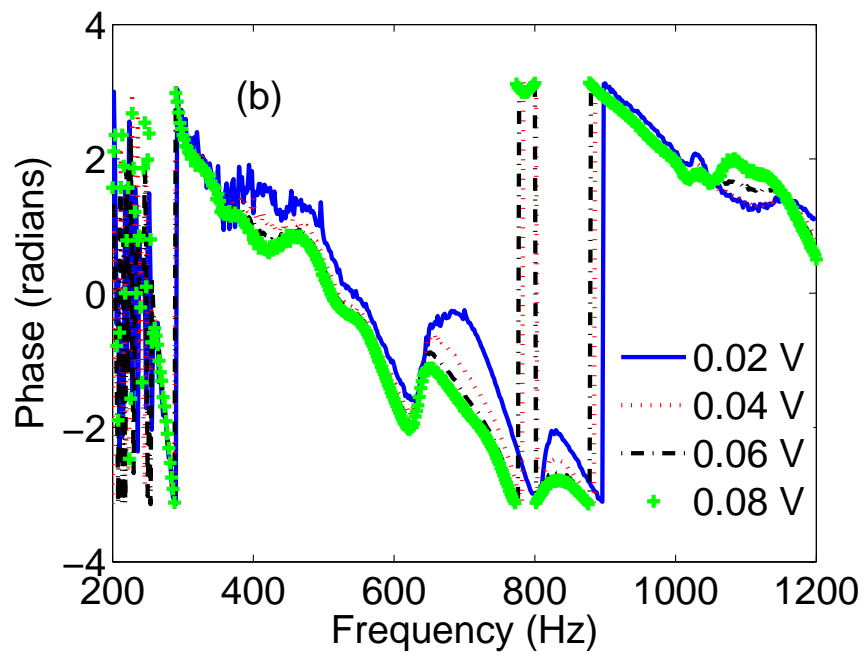


Fig. 2b -

Fig. 3

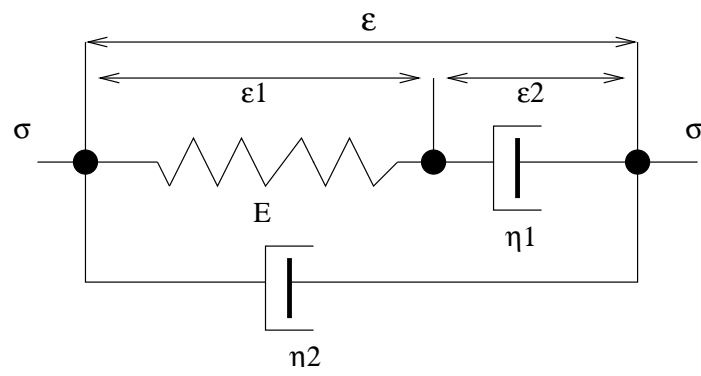


Fig. 3 -



Fig. 4

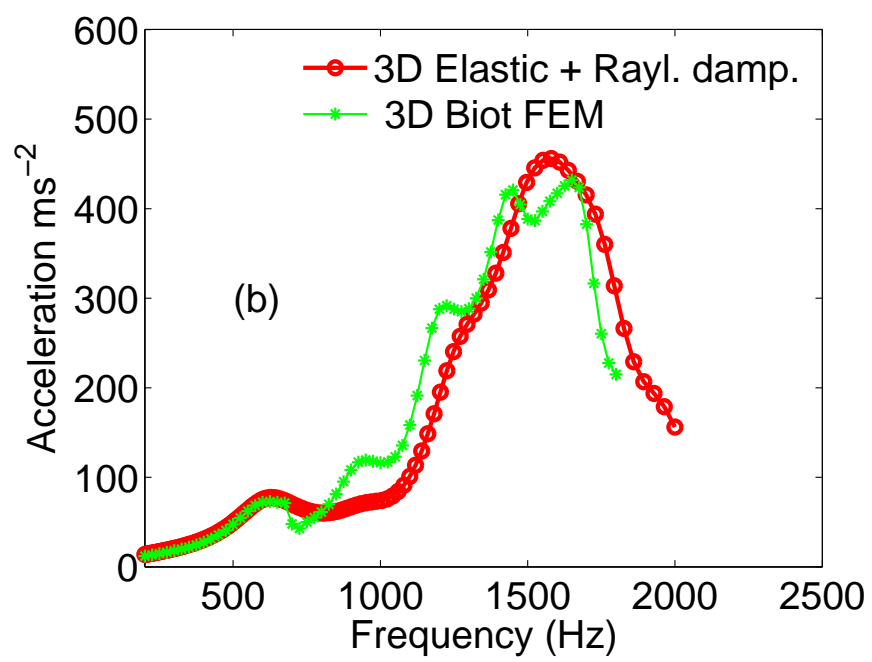


Fig. 4 -

Fig. 5

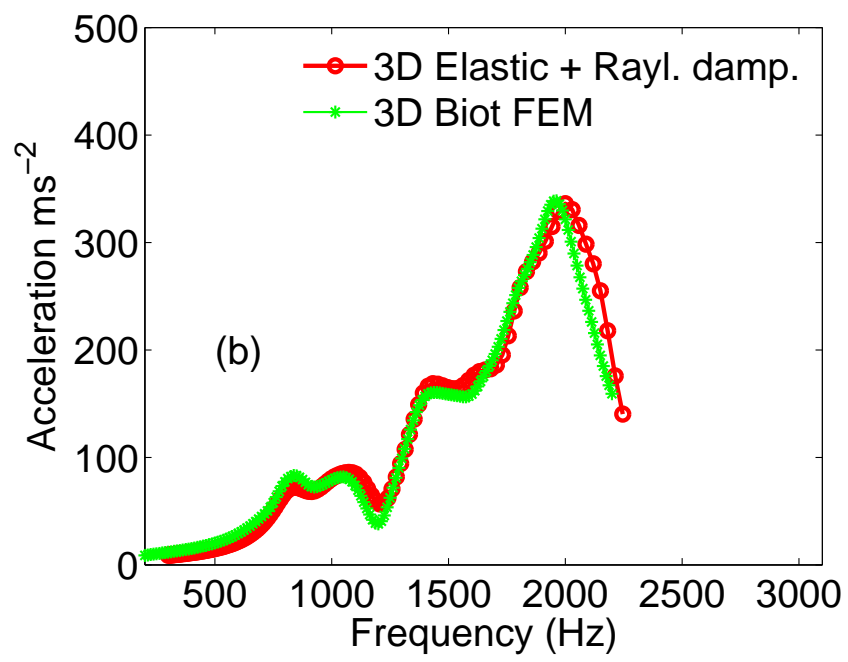


Fig. 5 -

Fig. 6a

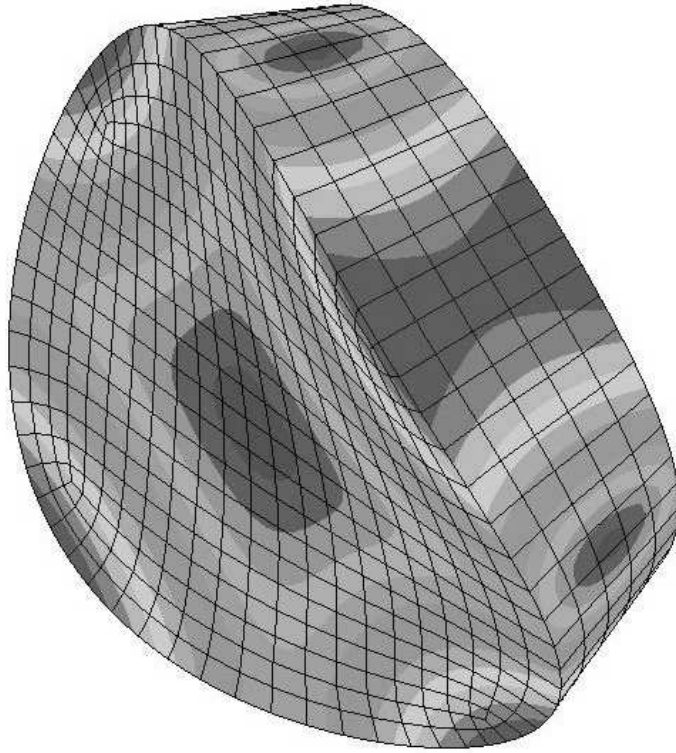


Fig. 6a -

Fig. 6b

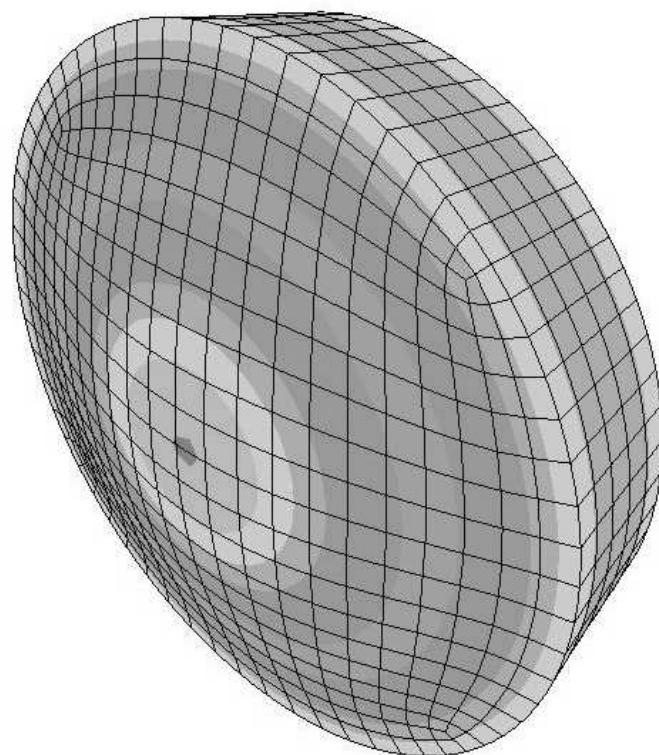


Fig. 6b -

Fig. 6c

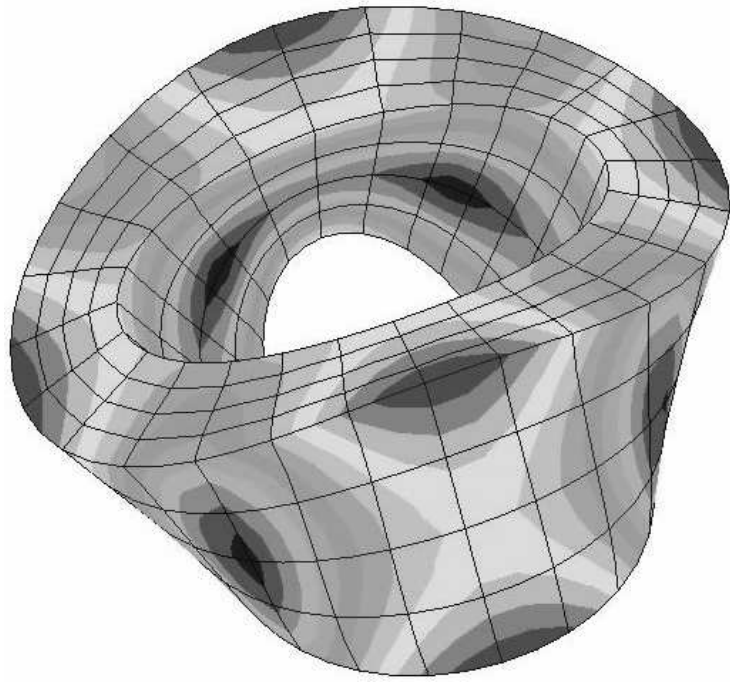


Fig. 6c -

Fig. 6d

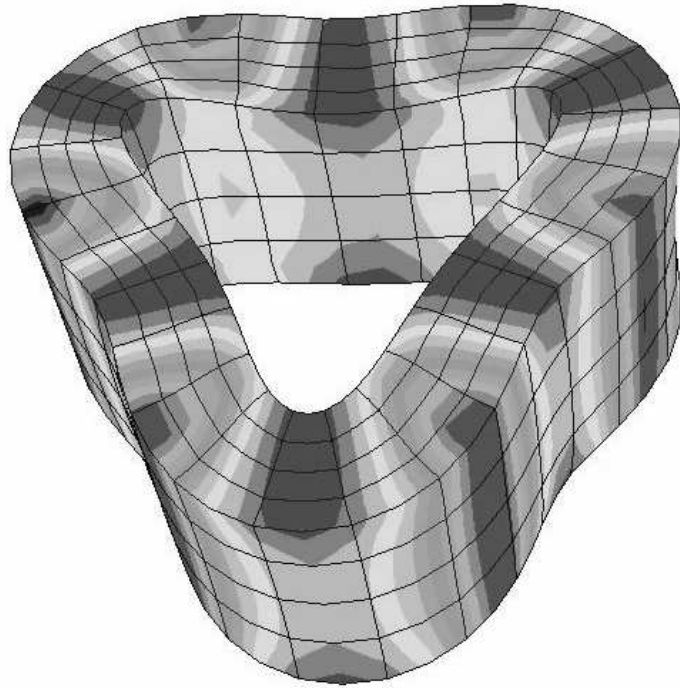


Fig. 6d -

Fig. 7

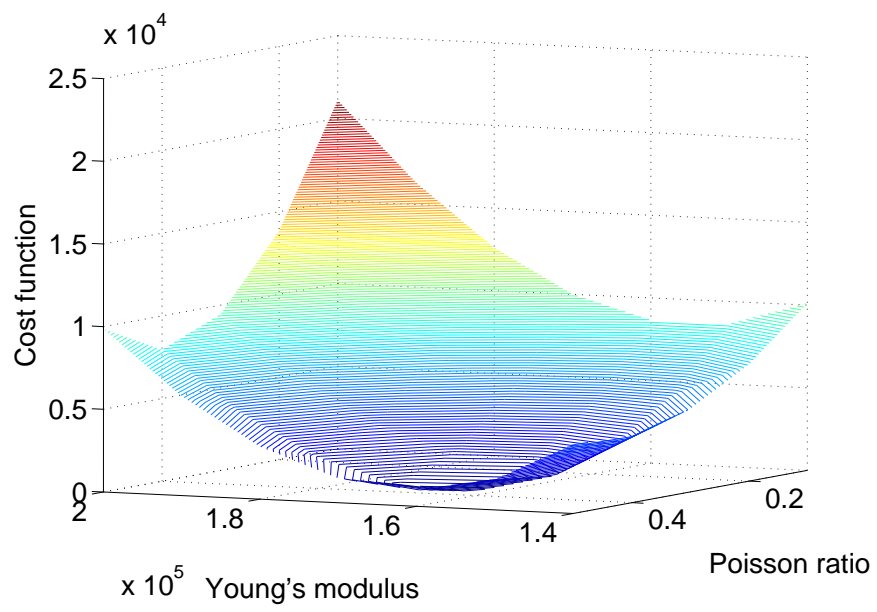


Fig. 7 -

Fig. 8

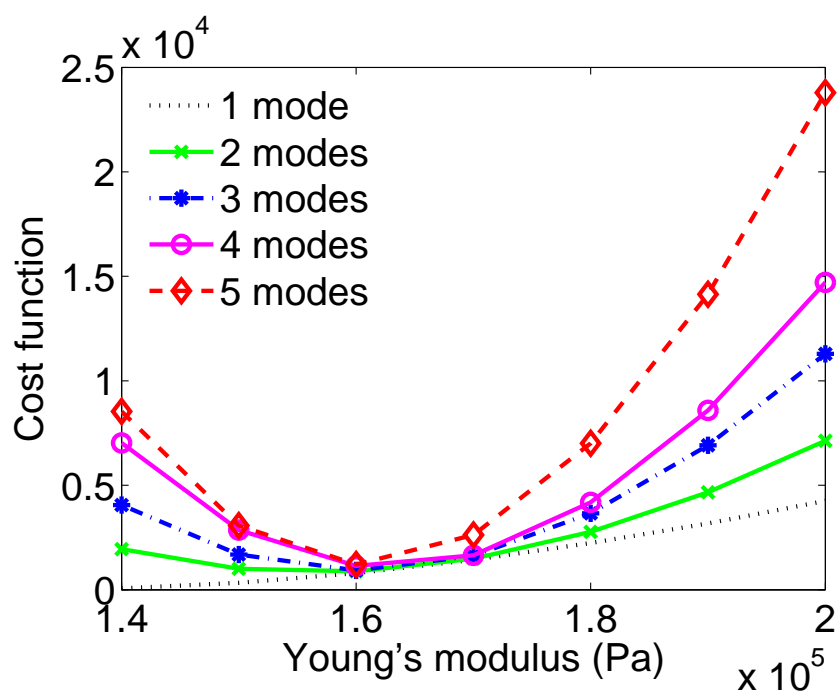


Fig. 8 -



Fig. 9

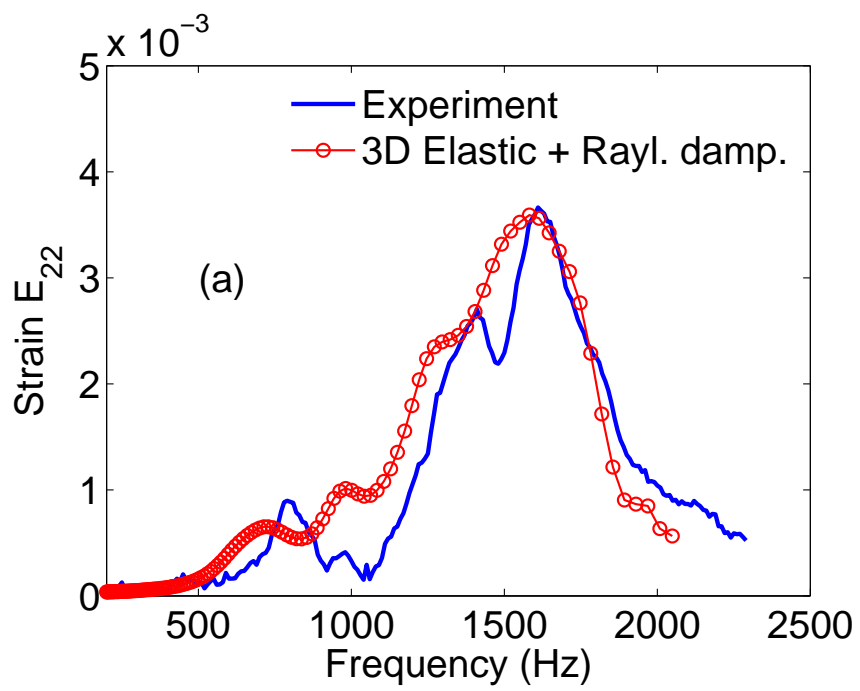


Fig. 9 -

Fig. 10

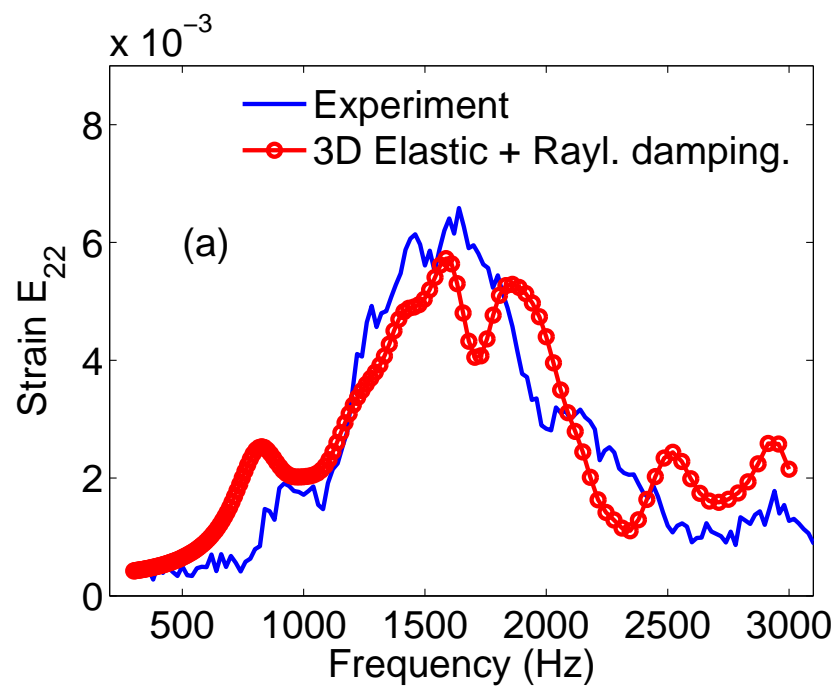


Fig. 10 -

Fig. 11

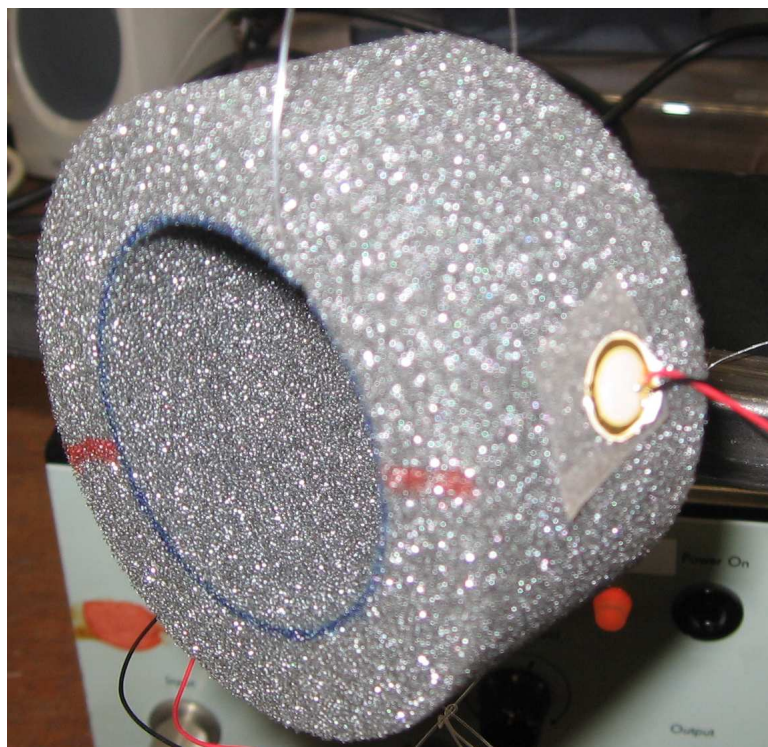


Fig. 11 -

Fig. 12

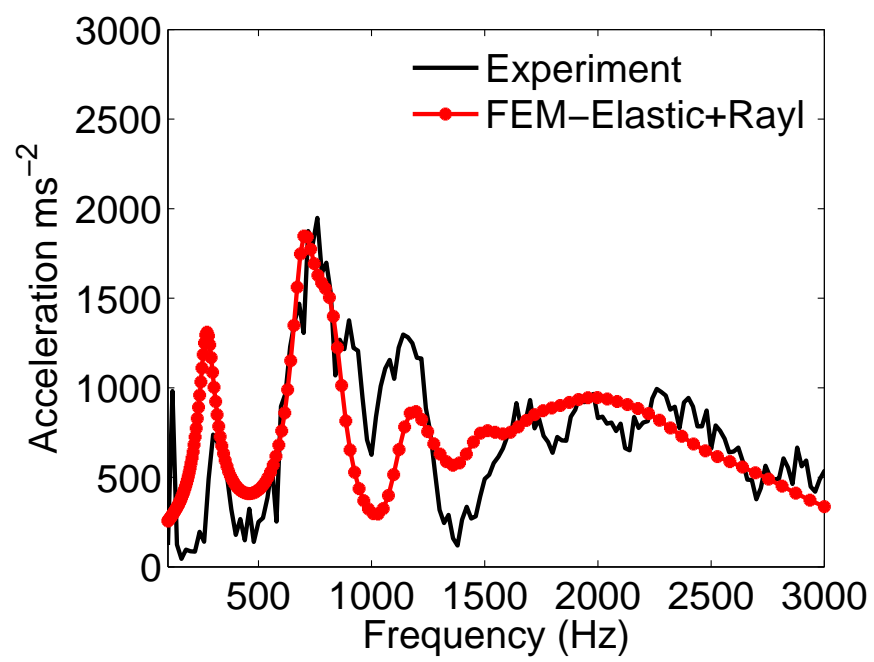


Fig. 12 -

Fig. 13

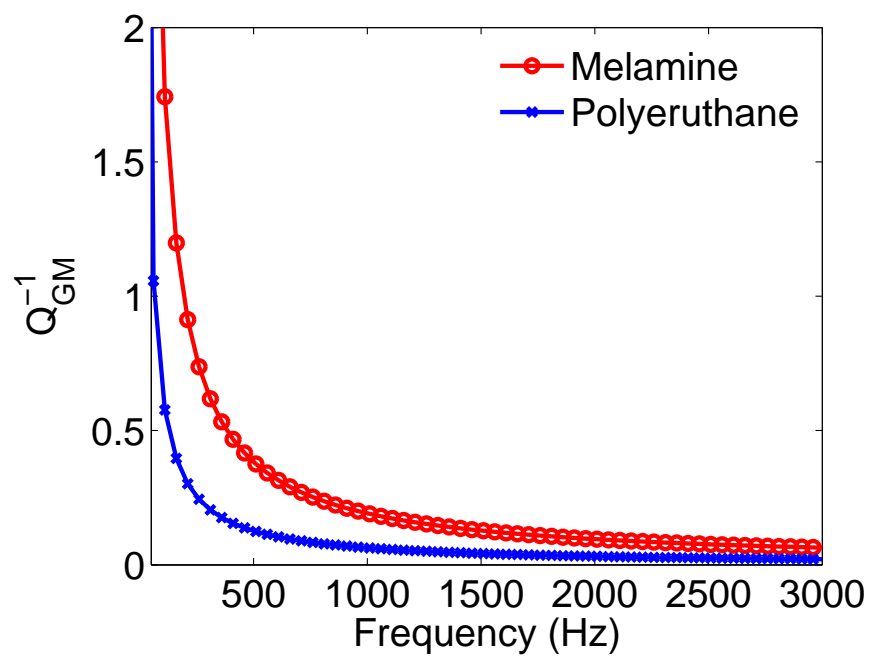


Fig. 13 -

## Chapitre 18

# Caractérisation de l'anisotropie des os

On traite de la caractérisation de l'anisotropie de l'os cortical par la méthode de spectrométrie vibroacoustique.

### 18.1 Introduction

Les os, comme les muscles et les arbres, sont des structures anisotropes. Un changement d'anisotropie peut constituer une indication d'atteinte ostéoporotique ou autre.

L'anisotropie des os a été étudiée par différentes méthodes [11, 114, 201, 401, 402]. Pithioux et al. [308] ont employé des ultrasons pour caractériser l'anisotropie d'éprouvettes soigneusement découpées d'os cortical. Taylor et al [359] ont établi la géométrie d'un fémur humain extrait d'un cadavre à partir d'imagerie à balayage CT. Ils ont maillé l'os en y introduisant une distribution de densité établie en comparant la masse du modèle d'os calculée par éléments finis (EF) avec celle de l'os cadavérique, et ils ont reconstruit les valeurs maximales des constantes élastiques orthotropes par comparaison des prévisions issues d'une analyse modale EF aux fréquences de résonance mesurées.

Notre démarche est similaire à celle de Taylor et al., sauf en ce qui concerne le type d'os et la méthode pour trouver sa forme (nous ne disposons pas de scanner aux rayons-X).

## 18.2 La loi de comportement de Hooke

Nous supposons ici que le matériau de l'os est élastique (plus loin généralisé en comportement anélastique), linéaire, et *anisotrope*. Son comportement mécanique relève donc d'une loi de Hooke.

Plus particulièrement, nous supposons que l'os est *orthotrope*, i.e., possède deux plans de symétrie, et trois axes d'orthotropie. Dans ce cas, *neuf* constantes mécaniques définissent la loi de comportement qui s'exprime par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} .$$

## 18.3 Problème direct : le modèle d'éléments finis

L'os vibre en réponse à une sollicitation. Ce phénomène est décrit par les équations classiques de l'élastodynamique des milieux continus.

Pour plus de réalisme, nous introduisons une dissipation dans l'os de type Rayleigh. La version intégrale des équations aux dérivées partielles (EDP) régissant le mouvement, qui prend la forme du principe du travaux virtuels, est discrétisée (voir le chap. 17) et conduit au système linéaire :

$$\delta u^n \left\{ M^{nm} \ddot{u}^m + [C_{(M)}^{nm} + C_{(K)}^{nm}] \dot{u}^m + K^{nm} u^m - F^n \right\} = 0, \quad ; \quad m, n = 1, 2 \dots, \quad (18.3.1)$$

où  $\delta u^n$  est la variation de déplacement,  $n = 1, 2 \dots$ ,  $M^{nm}$ ,  $K^{nm}$   $m, n = 1, 2 \dots$  les éléments des matrices de la masse et de rigidité respectivement,  $C_{(M)}^{nm}$  ;  $m, n = 1, 2 \dots$  et  $C_{(K)}^{nm}$  ;  $m, n = 1, 2 \dots$  les éléments des matrices d'amortissement de la masse et de rigidité respectivement et  $F^n$  les éléments du vecteur de l'excitation. Les éléments des vecteurs de déplacement, vitesse et accélération sont  $u^m$  ;  $m = 1, 2 \dots$ ,  $\dot{u}^m$  ;  $m = 1, 2 \dots$  et  $\ddot{u}^m$  ;  $m = 1, 2 \dots$  respectivement. L'éq. (18.3.1) est la base de la modélisation en éléments finis 3D (MEF) de nos modèles anélastiques (ou même élastiques).

Nous avons écrit plus haut que nous rendions compte de la dissipation dans le matériau par une loi de Rayleigh. Celle-ci apparaît comme un terme d'amortissement équivalent  $C_{eq}$  dans (18.3.1) sous la forme

$$C_{eq}^{nm} = C_{(M)}^{nm} + C_{(K)}^{nm} = \alpha M^{nm} + \beta K^{nm} , \quad (18.3.2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes (caractéristiques du matériau) qui doivent être identifiées en plus des modules élastiques.

## 18.4 Obtention de la géométrie du spécimen d'os réel

Nous voulons caractériser des os réels qui n'ont pas des géométries canoniques. Voici l'équipement et les logiciels dont nous disposons pour trouver leur géométrie.

- Une table tournante Microcontrôle
- Un capteur de déplacement microlaser NAIS ANR1215 LM10 de Matsushita (sortie tension volts/centimètre)
- Un pied à coulisse pour mesurer l'épaisseur
- Un multimètre numérique et programmable Agilent 34401A pour la lecture des distances mesurées
- Un programme de pilotage de table tournante Microcontrôle ESP3000/RV240CC et de multimètre (mesure de tension issue du capteur déplacement et transfert de données mesurées vers le calculateur - liaison GPIB)
- Un programme CAO pour la reconstruction de la géométrie

L'objet, en l'occurrence un morceau quasi-cylindrique d'os bovin évidé) est placé sur une table rotative et sa forme extérieure (définie par la fonction  $r_{ext} = r_{ext}(\theta, z)$ ) est mesurée tous les 30 degrés pour une série de coupes en  $z$ . Le vecteur de mesure de distance  $r$  est un faisceau laser. Le pied à coulisse est employé pour mesurer l'épaisseur  $d(\theta)$  et la forme intérieure de l'os est obtenue via la formule  $r_{int}(\theta, z) = r_{ext}(\theta, z) - d(\theta)$ .

Une fois la géométrie construite elle est sauvegardée sous format graphique CAO pour être exportée dans Abaqus où elle est maillée ( Fig. 18.1). Le volume est calculé, la masse est obtenue par pesage de l'échantillon puis la masse volumique est calculée (on suppose que



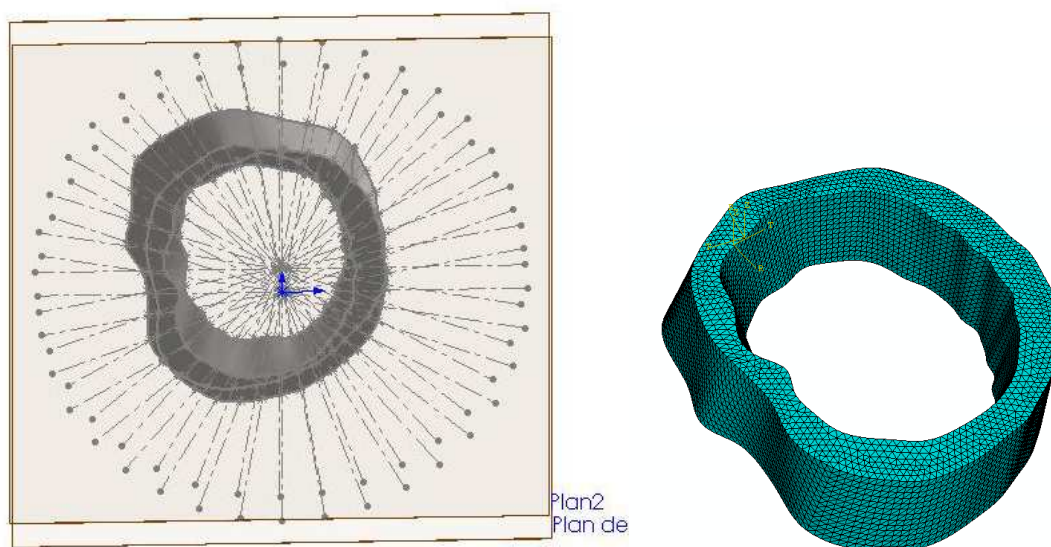


FIG. 18.1 – (a) La géométrie de l'échantillon os reconstruit par balayage à partir des mesures de distances radiales. (b) Le maillage (13998 éléments tétraèdre - 3228 noeuds ) de l'os bovin.

l'échantillon homogène). La densité, supposée une densité moyenne, est vérifiée par une autre expérience reposant sur le principe d'Archimède. La géométrie de la structure est ensuite exportée vers le code de calcul éléments finis (en l'occurrence, Abaqus).

## 18.5 Expérience d'acquisition de données vibroacoustiques

La réponse de l'os est acquise d'abord pour une sollicitation harmonique basse fréquence par la méthode de détection synchrone. Le spectre de réponse, comportant les pics de résonance, est numérisé par le démodulateur synchrone et stocké.

## 18.6 Reconstruction des modules

Les données à partir desquelles on cherche les 9 modules sont les fréquences de résonance de réponse. L'inversion est réalisée par minimisation d'une fonction coût  $\mathcal{J}$  traduisant l'erreur au sens des moindres carrés entre les données réelles (fréquences de résonance) et ce

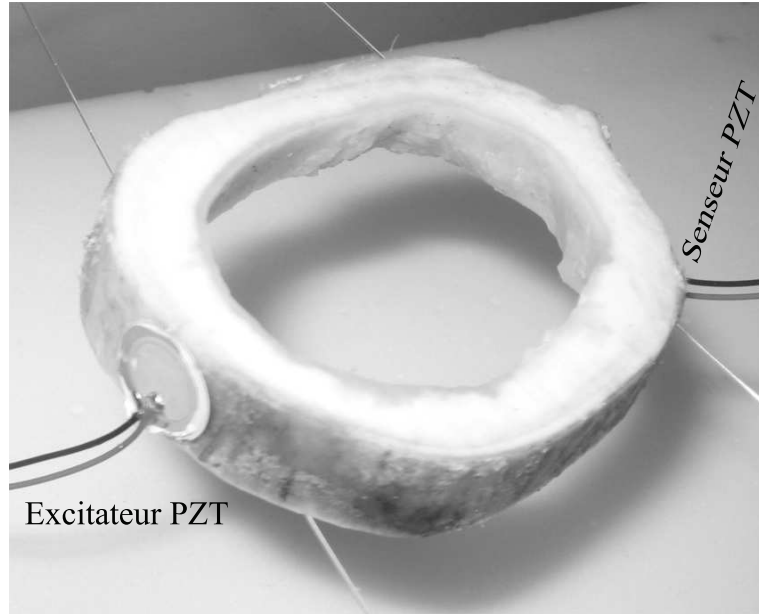


FIG. 18.2 – Photographie de la manip avec l'excitateur et senseur piezoélectrique. Le spécimen est libre de contrainte. Il est suspendu (supporté) par des fils en nylon.

que l'estimateur prédit pour ces fréquences pour un jeu de modules d'essai.

$$\mathcal{J}(E_i, \nu_{ij}, G_{ij}) = \sum_{k=1}^m [f_k^{mes} - f_k^{est}(E_i, \nu_{ij}, G_{ij})]^2 \quad i, j = 1, 2, 3$$

où  $E_i, \nu_{ij}, G_{ij}$  sont les modules élastiques,  $f_k^{mes}$  ;  $k = 1, 2, \dots, m$  les fréquences de résonances mesurées, et  $f_k^{est}$  les fréquences prédites par l'estimateur EF.

Afin de calculer les fréquences de résonance, les matrices d'atténuation et de forces appliquées sont annulées dans (17.5.1). Le problème de valeurs propres à résoudre pour les fréquences naturelles de l'os s'exprime par

$$(\omega_{eig}^2 M^{mn} + K^{mn}) \phi^n = 0 \quad ; \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (18.6.1)$$

où  $\omega_{eig}$  sont les fréquences propres et  $\phi^n$  les éléments des vecteurs propres.

La recherche de l'ensemble optimal  $\{E_i, \nu_{ij}, G_{ij} ; i, j = 1, 2, 3\}$  qui minimise  $\mathcal{J}$ , est réalisée automatiquement, et de façon itérative, par l'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt (de la routine *lmdif* de Minpack).

Le problème inverse est difficile à analyser pour vérifier qu'il est bien posé. La seule façon de vérifier que la solution est unique, pour une plage de valeurs raisonnables des modules, est

mode	1	3	4	5	9	10	12	13	15
Fréquences mesurées	4200	5560	6310	11240	15050	16340	18575	20190	21430
Fréquences calculées	4274	5051	5807	11240	15840	16377	18994	19923	21954

TAB. 18.1 – Les fréquences de résonances servant de données pour l'inversion et celles obtenues finalement après résolution du problème inverse avec l'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt.

Modules	Nous	Katz et al	Ashman et al	Yoon et al	Pithioux et al
$E_1$	12,9 GPa				
$E_2$	16,0 GPa				
$E_3$	20,0 GPa				
$\nu_{12}$	0,302				
$\nu_{13}$	0,109				
$\nu_{23}$	0,226				
$G_{12}$	6,0 GPa	6,3 GPa	6,23 GPa	8,71 GPa	9,20 GPa
$G_{13}$	7,0 GPa	6,3 GPa	5,61 GPa	6,9 GPa	6,0 GPa
$G_{23}$	6,9 GPa	5,4	4.52 GPa	7,17 GPa	6,05 GPa

TAB. 18.2 – Les modules élastiques d'un os bovin reconstruits à partir des modes de vibration comparés avec les modules obtenus par les méthodes employant des ultrasons.

de tracer les fonctions-coûts en fonction des modules (deux par deux). Ceci est un processus laborieux que nous avons évité. Nous avons préféré une autre méthode expliquée ci-après.

## 18.7 Résultats

Les fréquences de résonance mesurées et celles obtenues finalement après résolution du problème inverse avec l'algorithme d'optimisation, sont données dans le tableau (18.1), tandis que les valeurs reconstruites des modules sont portées dans le tableau (18.2).

## 18.8 Vérification

Pour la vérification de la validité des modules reconstruits à basse fréquence, on calcule la réponse en appliquant une force harmonique de 1.0 N (à l'endroit où l'excitateur est placé dans l'expérience) pour différentes fréquences. Dans l'expérience on suppose que les réponses

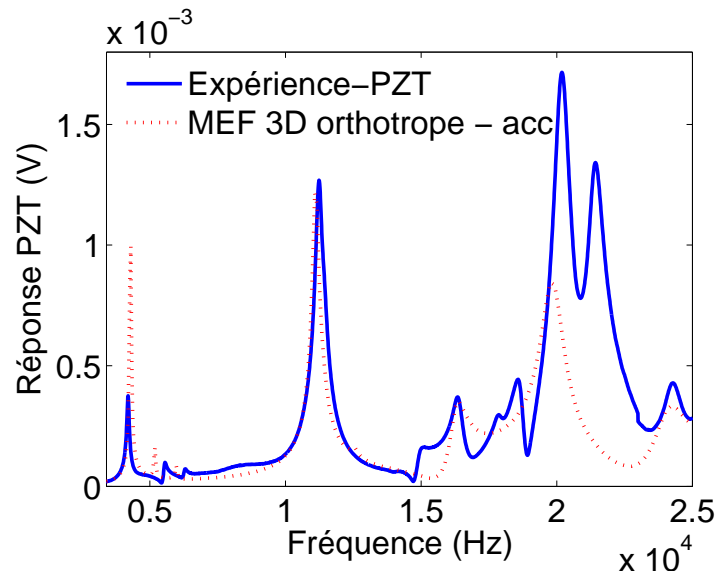


FIG. 18.3 – Comparaison entre la réponse (accélération) calculée ( modèle EF orthotrope avec amortissement viscoélastique de Rayleigh :  $\alpha = 0,3$  et  $\beta = 3 \times 10^{-7}$ ) et l'expérience - Réponse basse fréquence.

en fréquence de l'excitateur et celle du capteur sont plates sur la bande de mesure. Le calcul consiste à résoudre l'éq. (18.3.1) pour chaque fréquence. La réponse vibratoire de cet os à basse fréquence est bien reproduite mais certains petits pics se trouvent un peu décalés par rapport au calcul (fig. (18.3)). La raison possible est, qu'une partie de l'os en formation est restée accrochée dans la partie intérieure de l'échantillon. Cette petite couche d'os dur n'a pas le même module que le reste, rendant ainsi l'os inhomogène. Un autre problème est qu'à partir de 15 kHz, la densité modale (le nombre de modes) devient élevée; et donc il est difficile de les classer. Quelques déformées de modes sont traces dans fig. (18.4).

Pour une deuxième vérification, on applique une force harmonique pour différentes fréquences, s'étageant de 70 kHz à 150 kHz (plus hautes que celles de la bande du spectre dans la première expérience) avec l'excitateur et le capteur, cette fois, placées de même côté au-dessus de l'os (fig. (18.5a)). Ce choix est dicté par la volonté de vérification des modes que l'on n'aurait pas excité et mesuré en positionnant l'excitateur et le capteur comme dans la première expérience. Ces modes sont influencés par le module dans le sens vertical (fig.

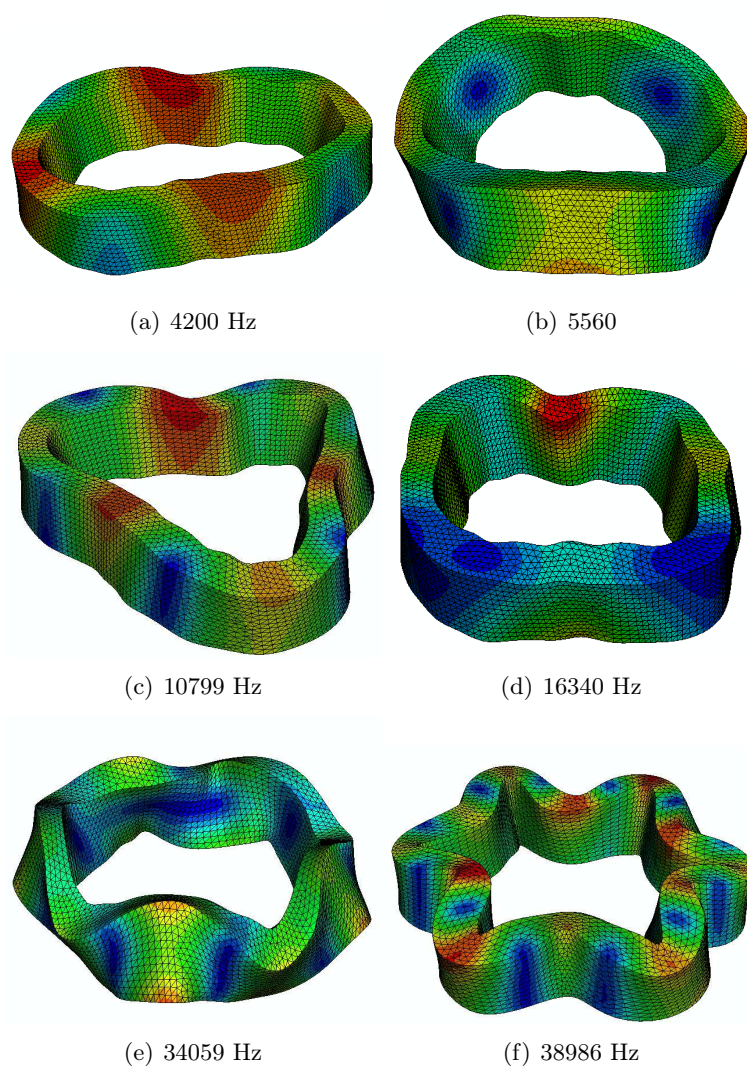


FIG. 18.4 – Les déformées modales du spécimen, calculées après résolution du problème inverse.

(18.5b)). La réponse est calculée avec les modules reconstruits constituant la solution du problème inverse. La comparaison de la réponse théorique (celle obtenue par le calcul que l'on vient de décrire, avec des valeurs raisonnables des constantes de Rayleigh  $\alpha$  et  $\beta$ ) et l'expérience (réponse expérimentale à la force harmonique) sont tracées dans la fig. (18.5c).

On y remarque que les fréquences de résonance théorie et expérience semblent assez bien coïncider, mais les facteurs de qualité des pics de résonance ne sont pas bien reproduits, ce qui peut être dû à un mauvais choix de  $\alpha$  et  $\beta$ . A haute fréquence, l'excitateur et le senseur n'ont peut-être pas non plus une réponse plate, ou bien, le modèle de Rayleigh est peut-être trop simple pour représenter les phénomènes de dissipation dans l'os. Cette vérification de la validité des modules reconstruits à haute fréquence débusque des problèmes insoupçonnés. La taille des capteurs (poids et dimension) ne sont pas non plus négligeables à ces fréquences. Il serait souhaitable de diminuer encore leur taille et augmenter leur nombre pour pouvoir identifier les déformées modales. La densité modale étant trop élevée à haute fréquence, il est aussi très difficile d'identifier les modes. Le nombre d'éléments dans le modèle MEF doit être augmenté ce qui rallonge considérablement le temps pour calculer la réponse spectrale.

## 18.9 Discussion et conclusion

Ce travail a permis d'aborder le problème de la caractérisation de l'anisotropie de l'os par spectroscopie vibratoire. Les modules reconstruits ont été comparés à ceux obtenus par plusieurs auteurs par des méthodes ultrasonores.

Cette étude a permis de rendre compte de la complexité de la reconstruction des nombreux modules élastiques. La solution du problème inverse requiert l'étude de la sensibilité de chaque module élastique par rapport aux données. Pour un calcul très précis de ces modules et modes vibratoires, il est indispensable d'avoir une géométrie la plus précise possible.

Les modules reconstruits à partir des fréquences de résonance avec un modèle d'analyse modale MEF orthotrope 3D (MEFO3D), ont été affirmés en comparant le spectre de la réponse mesurée à celle calculée par la MEFO3D harmonique (steady state) à basse fréquence. L'accord ici est bon. Nous avons ensuite voulu valider ces modules reconstruits en les employant pour calculer la réponse dans une autre bande de fréquence avec un changement

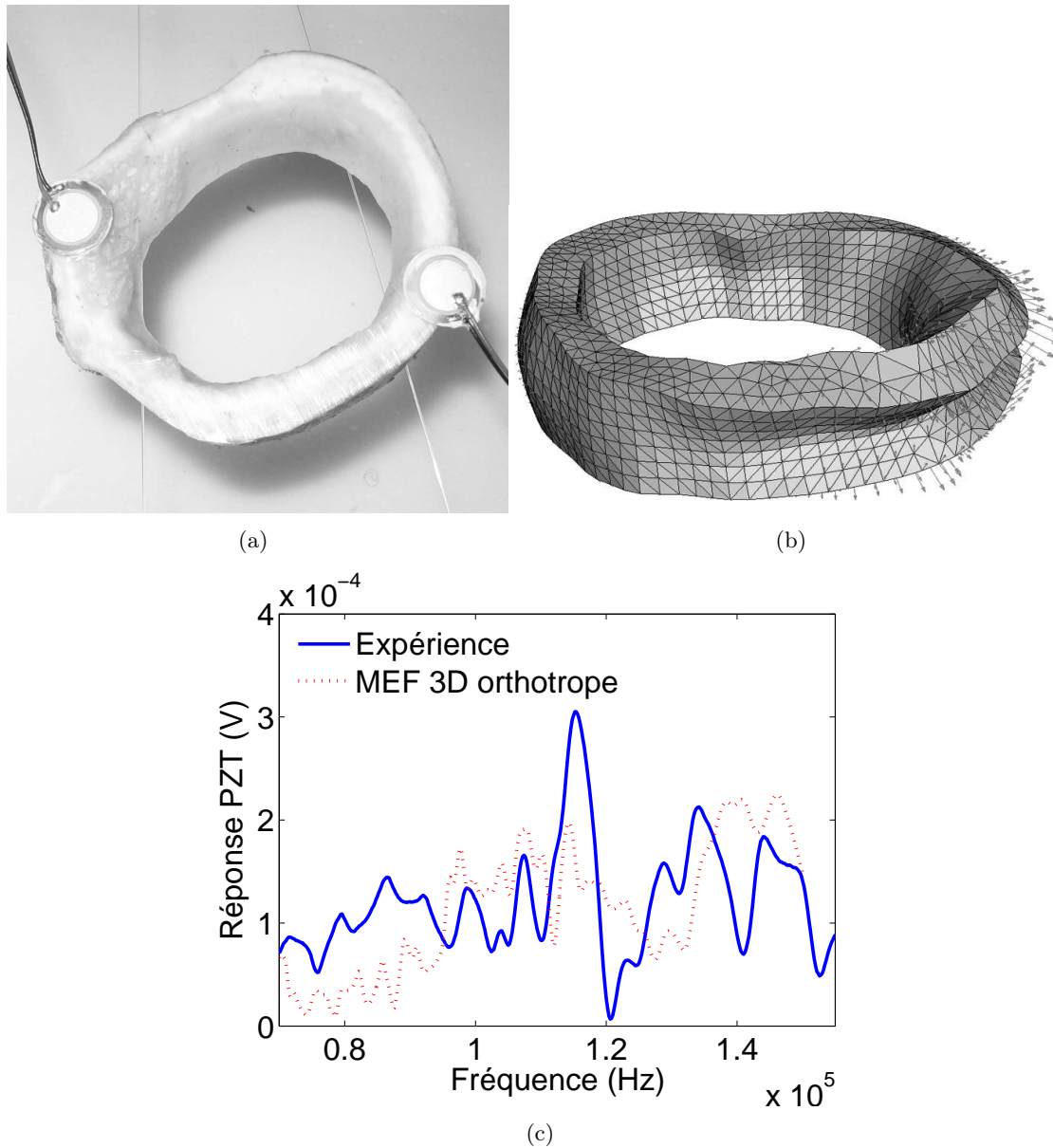


FIG. 18.5 – (a) Pour les mesures haute fréquence, ( $> 30$  kHz), l'excitateur et le capteur sont placés de même côté au-dessus de l'os comme dans la photo. (b) Mode longitudinal à 83 kHz. (c) Comparaison entre la réponse (accélération) calculée (modèle EF orthotrope avec amortissement viscoélastique de Rayleigh :  $\alpha = 0,3$  et  $\beta = 3 \times 10^{-7}$ ) et l'expérience. Les pics de résonance importants sont assez bien reproduits mais l'amortissement reste encore à améliorer.

de points d'excitation et de mesure, pour étudier d'autres types de modes (longitudinal, flexion) car les modes à basse fréquence sont, plutôt de type radial et de cisaillement (fig. (18.4)). L'épaisseur de l'échantillon étant faible, ces autres modes se trouvaient forcément à plus haute fréquence. Le couple transducteur/électronique développé dans cette thèse et pouvant travailler à très haute fréquence (en vibration) nous a permis de réaliser cette étude . Mais il en sort de ces essais de vibration haute fréquence (VHF) que les capteurs ne sont pas encore assez miniaturisés (pour pouvoir augmenter leurs nombre pour voir les déformées modales et être sûr ainsi, de la fréquence de résonance du mode observé). Il est possible que la dépendance fréquentielle des modules, limite la précision de la deuxième méthode de validation.





## Chapitre 19

# La prise en compte de la moelle de l'os

On traite théoriquement et expérimentalement, sur l'exemple d'un fantôme tubulaire rempli de divers fluides, l'impact de la présence de la moelle sur la caractérisation vibroacoustique de l'os.

### 19.1 Introduction

Le tissu occupant la partie médullaire des os longs, et les pores des parties trabéculaires des os, contiennent divers fluides tels que le sang, le fluide synovial et la moelle (Fig. (19.1)). L'importance potentielle du fluide occupant le canal médullaire (la moelle) sur le champ vibratoire (et même ondulatoire) de l'os a été généralement ignorée.

La composition en moelle est variable d'une région à l'autre d'un os donné. La distinction est généralement faite entre la moelle jaune, ou grasse, composée principalement d'adipocytes, et la moelle rouge, composée principalement de cellules fibroblastiques/réticulaires. La moelle rouge est active dans le hematopoiesis [321].

La composition en moelle change avec l'emplacement anatomique, l'âge, la race, et l'état de maladie [268, 330]. L'augmentation relative avec l'âge en quantité de moelle grasseuse

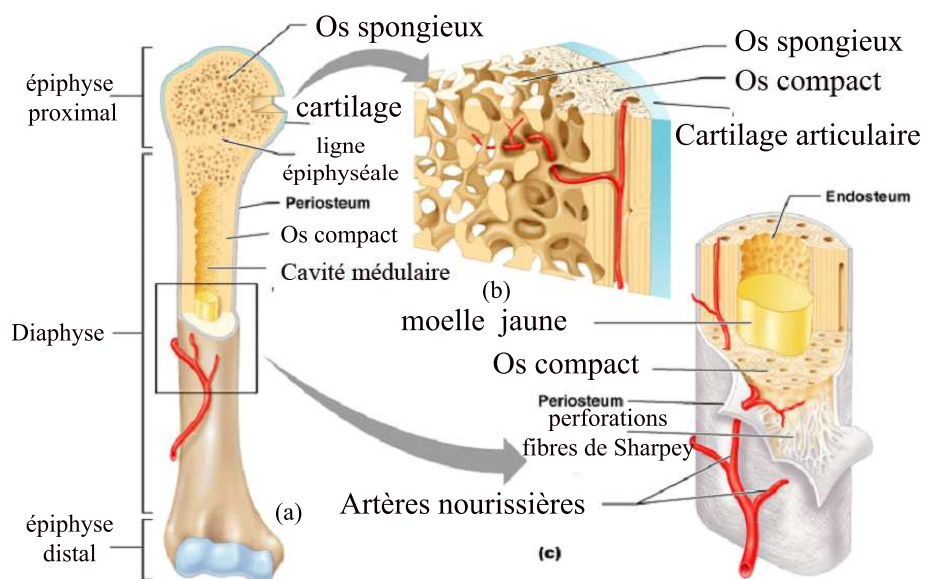


FIG. 19.1 – Composition de l'os.

est associée à la diminution du potentiel ostéogénique (pouvoir de fabriquer du tissu osseux), et a été reliée à la perte osseuse relative au vieillissement [321].

Ainsi, un changement de composition de la moelle pourrait fournir une indication supplémentaire d'une maladie de l'os telle que l'ostéoporose à condition de pouvoir le détecter.

Dans ce chapitre, nous étudions cette possibilité, en comparant la réponse vibratoire, à une excitation ponctuelle (harmonique et transitoire), d'un fantôme d'os long en forme de cylindre élastique creux (tube) représentant l'état sec (rempli d'air), avec un autre fantôme du même type dont la partie médullaire est remplie de divers liquides.

On suppose que les fluides sont non-visqueux et incompressibles, et leur mouvements, comme celui de l'os cortical, sont modélisés dans le cadre des petits déplacements. Les équations de mouvement de poutre de Timoshenko (théorie de deux modes de cisaillement) sont résolues en utilisant la méthode de différences finies (DF) de quatrième ordre pour obtenir les vitesses de phase qui sont comparées à celles obtenues expérimentalement (pour un os sec).

Une analyse des fréquences propres vibratoires du système couplé (solid/fluide) est alors développée en utilisant un modèle éléments finis 3D.

L'interaction fluide interne-structure (IFS) est matérialisée sur un banc d'essai vibroacoustique fournissant des données de réponse vibratoire (le problème direct) pour valider le modèle IFS.

Le mouvement couplé d'une structure élastique (e.g., os) et d'un fluide (e.g., moelle) est un problème qui se produit dans diverses applications technologiques [214, 347, 407]. Une étude théorique et expérimentale du problème d'interaction fluide externe/fluide interne/structure a été réalisée par Gorman et al. [158] pour une cavité cylindrique. Le fluide interne était enfermé d'un côté par une plaque vibrante. Les autres parois de la cavité étaient considérées comme rigides.

Dans notre étude, la réponse sera mesurée à l'interface (supposée être libre de contraintes, sauf indication contraire) de la partie solide avec l'air ambiant. C'est la grande différence avec les autres études traitant l'IFS dans lesquelles les réponses sont le plus souvent mesurées dans le fluide.

La question importante à laquelle nous tenterons de répondre concerne l'influence du fluide sur les fréquences propres de la structure. On montrera que la caractérisation par méthodes vibratoires ne peut réussir que si l'on tient compte des interactions entre l'os et le fluide qu'il contient (en supposant que l'interaction de l'os avec le fluide léger (air) ambiant puisse être négligée).

## 19.2 Modèles simples de vibration d'os longs - modèle de poutre de Timoshenko (MPT)

Le modèle de poutre de Timoshenko ajoute les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation au modèle d'Euler-Bernoulli, et donne lieu à des résultats pour les vibrations de la poutre en flexion qui sont en bon accord avec la théorie exacte [362].

Les deux modes de déformation d'une poutre uniforme de Timoshenko sont régies par

deux équations couplées [178, 349]

$$GA\kappa \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (19.2.1)$$

$$GA\kappa \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) + EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (19.2.2)$$

où  $v(x, t)$  est le déplacement latéral,  $\varphi(x, t)$  la courbure,  $\rho$  la densité,  $G$ , le module de cisaillement,  $\kappa$ , le facteur de correction de cisaillement, et  $q(x, t)$  la force appliquée.

L'élimination de  $\varphi$  donne la seule équation :

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} - \frac{I}{A} \left( 1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \frac{\partial^4 v(x)}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x)}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{GA\kappa} \frac{\partial^4 v(x)}{\partial t^4} = \frac{q}{\rho A} - \frac{EI}{G\kappa \rho A^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{I}{G\kappa A^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \quad (19.2.3)$$

Pour calculer les modes propres on annule la force d'excitation. Ensuite, la solution est cherchée sous la forme  $v(x, t) = v(x, \omega) \exp[i(\gamma x - \omega t)]$ , où  $\gamma$  est le nombre d'onde et  $\omega$ , la pulsation, ce qui mène à

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + \frac{\omega^2 I}{A} \left( 1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} - \omega^2 v(x) + \frac{\omega^4 \rho I}{GA\kappa} v(x) = 0. \quad (19.2.4)$$

Les valeurs de  $\kappa$  ont été calculées par plusieurs auteurs pour des sections géométriques simples [199, 85, 362].

L'éq. (19.2.4) est l'équation du Modèle de Poutre de Timoshenko en domaine Fréquentielle (MPTF).

### 19.3 La résolution numérique par différence finies du MPTF pour un fantôme d'os de longueur finie

La méthode DF développée ici donne lieu à une solution approchée au quatrième ordre de l'équation aux dérivées partielles du MPTF.

Le remplacement des dérivées par leurs approximations en différences finies centrées de quatrième-ordre se traduit par :

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{\rho A} \left( \frac{1}{6h^4} \right) (-v_{j-3} + 12v_{j-2} - 39v_{j-1} + 56v_j - 39v_{j+1} + \\ & 12v_{j+2} - v_{j+3}) + \frac{I\omega^2}{A} \left( 1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \left( \frac{1}{12h^2} \right) (-v_{j-2} + 16v_{j-1} - 30v_j + \\ & 16v_{j+1} - v_{j+2}) - \omega^2 v_j + \frac{\rho I \omega^4}{GA\kappa} v_j \approx 0. \end{aligned} \quad (19.3.1)$$

où  $j = 0, 1, \dots$

On pose  $\alpha = \frac{EI}{\rho A} \left(\frac{1}{6h^4}\right)$ ,  $\beta = \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{G\kappa}\right) \left(\frac{1}{12h^2}\right)$  et  $\gamma = \left(\frac{\rho I}{GA\kappa}\right)$ .

L'éq. (19.3.1) devient donc :

$$\begin{aligned} & (-\alpha v_{j-3} + 12\alpha v_{j-2} - 39\alpha v_{j-4} + 56\alpha v_j - 39\alpha v_{j+1} - \alpha v_{j+3}) + \\ & \omega^2 (-\beta v_{j-2} + 16\beta v_{j-1} - (30\beta + 1)v_j + 16\beta v_{j+1} - \beta v_{j+2}) + \omega^4 \gamma v_j \approx 0. \end{aligned} \quad (19.3.2)$$

### 19.3.1 Poutre libre-libre

Les conditions aux limites d'une poutre libre-libre sont :  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$  and  $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$  à  $x = 0$  et  $x = L$  ( $L$  la longueur de poutre).

Leur emploi pour ( $j = 0$  et  $j = n$  ( $n$  le nombre de segments sur la longueur de la poutre)) donne lieu aux points fictifs :

$$\begin{aligned} v_{-1} &= 2v_0 - v_1, & v_{-2} &= 4(v_0 - v_1) + v_2, & v_{-3} &= 6(v_0 - v_1) + v_3, \\ v_{n+1} &= 2v_n - v_{n-1}, & v_{n+2} &= 4(v_n - v_{n-1}) + v_{n-2}, & v_{n+3} &= 6(v_n - v_{n-1}) + v_{n-3}. \end{aligned} \quad (19.3.3)$$

$j$	Equation
0	$20\alpha v_0 - 42\alpha v_1 + 24\alpha v_2 - 2\alpha v_3 + \omega^2 (-(2\beta + 1)v_0 + 4\beta v_1 - 2\beta v_2) + \omega^4 \gamma v_0$
1	$-19\alpha v_0 + 48\alpha v_1 - 40\alpha v_2 + 12\alpha v_3 - \alpha v_4 + \omega^2 (14\beta v_0 - (29\beta + 1)v_1 + 16\beta v_2 - \beta v_3) + \omega^4 \gamma v_1$
2	$10\alpha v_0 - 38\alpha v_1 + 56\alpha v_2 - 39\alpha v_3 + 12\alpha v_4 - \alpha v_5 + \omega^2 (-\beta v_0 + 16\beta v_1 - (30\beta + 1)v_2 + 16\beta v_3 - \beta v_4) + \omega^4 \gamma v_2$
3 à n-3	$-\alpha v_{n-3} + 12\alpha v_{n-2} - 39\alpha v_{n-1} + 56\alpha v_n - 39\alpha v_{n+1} + 12\alpha v_{n+2} - \alpha v_{n+3} + \omega^2 (-\beta v_{n-2} + 16\beta v_{n-1} - (30\beta + 1)v_n + 16\beta v_{n+1} - \beta v_{n+2}) + \omega^4 \gamma v_n$
n-2	$-\alpha v_{n-5} + 12\alpha v_{n-4} - 39\alpha v_{n-3} + 56\alpha v_{n-2} - 38\alpha v_{n-1} + 10\alpha v_n + \omega^2 (-\beta v_{n-4} + 16\beta v_{n-3} - (30\beta + 1)v_{n-2} + 16\beta v_{n-1} - \beta v_n) + \omega^4 \gamma v_{n-2}$
n-1	$-\alpha v_{n-4} + 12\alpha v_{n-3} - 40\alpha v_{n-2} + 48\alpha v_{n-1} - 19\alpha v_n + \omega^2 (-\beta v_{n-3} + 16\beta v_{n-2} - (29\beta + 1)v_{n-1} + 14\beta v_n) + \omega^4 \gamma v_{n-1}$
n	$-2\alpha v_{n-3} + 24\alpha v_{n-2} - 42\alpha v_{n-1} + 20\alpha v_n + \omega^2 (-2\beta v_{n-2} + 4\beta v_{n-1} - (2\beta + 1)v_n) + \omega^4 \gamma v_n$

TAB. 19.1 – La matrice pour la poutre de Timoshenko libre-libre et les équations des points se trouvant sur les positions  $j$  le long de son axe.

### 19.3.2 Poutre encastree-libre

Les conditions aux limites d'une poutre encastree-libre sont :  $v = 0$  and  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  à  $x = 0$  et  $x = L$ .

L'analyse des points fictifs correspondant à  $x = 0$ , ( $j = 0$ ) donne :

$$\begin{aligned} v = 0 &\Rightarrow v_0 = 0 \\ v_j^{(1)} &= \left(\frac{1}{2h}\right) (v_{j+1} - v_{j-1}) \Rightarrow v_{-1} = v_1 \\ v_j^{(1)} &= \left(\frac{1}{12h}\right) (v_{j-2} - 8v_{j-1} + 8v_{j+1} - v_{j+2}) \Rightarrow v_{-2} = v_2, \end{aligned} \quad (19.3.4)$$

et celle pour  $x = L$ , ( $j = n$ ) est la même que pour le cas libre-libre.

Les équations qui résultent de l'introduction des conditions aux limites (19.3.2) sont présentées dans le tableau (19.2) pour différentes positions sur la poutre.

$j$	Equation
1	$-\alpha v_4 + 12\alpha v_3 - 40\alpha v_2 + 68\alpha v_1$ $\omega^2(-\beta v_3 + 16\beta v_2 - (31\beta + 1)v_1) + \omega^4\gamma v_1$
2	$-\alpha v_5 + 12\alpha v_4 - 39\alpha v_3 + 56\alpha v_2 - 40\alpha v_1$ $\omega^2(-\beta v_4 + 16\beta v_3 - (30\beta + 1)v_2 + 16\beta v_1) + \omega^4\gamma v_2$

TAB. 19.2 – La matrice pour la poutre de Timoshenko encastree-libre et les équations des points se trouvant sur les positions  $j$  le long de son axe. La deuxième partie du tableau est identique au cas libre-libre (tableau 19.1).

### 19.3.3 Résolution de l'équation matricielle du MPTF-DF

L'éq. (19.3.1) peut écrire sous la forme matricielle :

$$\mathbf{C}\mathbf{v} + \omega^2\mathbf{B}\mathbf{v} + \omega^4\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (19.3.5)$$

ou, avec  $\Omega = \omega^2$ ,  $\mathbf{0}$  la matrice nulle,  $\mathbf{I}$  la matrice unité,

$$\mathbf{C} + \Omega\mathbf{B} + \Omega^2\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (19.3.6)$$

dont les solutions sont :

$$\Omega\mathbf{I} = \frac{-\mathbf{B} \pm \sqrt{\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{C}}}{2} \mathbf{A}^{-1}. \quad (19.3.7)$$

Dans (19.3.7), il est nécessaire de calculer la matrice

$$\mathbf{X} = \sqrt{\mathbf{B}\mathbf{B} - 4\mathbf{A}\mathbf{C}} := \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}, \quad (19.3.8)$$

sachant que  $\mathbf{X}$  est la racine carrée principale de la matrice,  $\mathbf{M}$ , c'est-à-dire,  $\mathbf{X}\mathbf{X} = \mathbf{M}$ . Autrement dit,  $\mathbf{X}$  est la racine carrée unique pour laquelle chaque valeur propre a une partie réelle non-négative. Si  $\mathbf{M}$  a toutes ses valeurs propres négatives, alors on obtient une racine complexe. Si  $\mathbf{M}$  est singulière, alors la racine carrée n'existe pas.

Les solutions pour  $\Omega$  sont obtenues de

$$\det \left( \Omega \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1} \right) = 0 . \quad (19.3.9)$$

et les valeurs propres sont, dans ce cas-ci, complexes :

$$\omega_k = \varpi_k + j\nu_k . \quad (19.3.10)$$

$\nu_k$  s'appelle le facteur d'atténuation et  $\varpi_k$  la fréquence naturelle du mode ( $k$ ). D'autres termes utilisés généralement sont le taux d'amortissement et la fréquence de résonance. En présence de pertes, l'atténuation de l'amplitude de champ de déplacement est habituellement prise en compte par une fréquence complexe (19.3.10) dont la partie imaginaire fournit le taux de décroissance temporelle de l'amplitude.

Les deux solutions de (19.3.7) correspondent aux deux modes de propagation d'ondes de cisaillement ayant deux vitesses de phase différentes.

## 19.4 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

### 19.4.1 Première comparaison portant sur des modèles 1D numériques et un résultat expérimental pour un os réel

Le modèle MPTF-DF 1D implémenté dans Matlab (avec 700 noeuds) a d'abord été validé en le comparant à un modèle de Timoshenko numérisé par éléments finis (EF) 1D de poutre quadratique à 3 noeuds (B32) (515 éléments, 1031 noeuds). Ce dernier modèle a été implémenté dans le logiciel commercial Abaqus [185].

Les deux formulations sont comparées sur l'exemple d'une poutre à section transversale circulaire de rayon  $1.135\text{cm}$ . Ce rayon correspond au rayon moyen vers le milieu de la diaphyse du tibia dont nous possédons la géométrie. Le facteur de correction pour le cisaillement est donné dans [199]. Les autres paramètres mécaniques et géométriques ( $E = 22\text{ GPa}$ ,



$\nu = 0.28$  et  $L = 51.5$  cm) correspondent à ceux d'un fémur humain dont les fréquences de résonance ont été rapportées par Khalil [223].

Les résultats de cette comparaison figurent dans le tableau (19.3). On y remarque que

mode	MPTF-DF S1	MPTF-EF S1	Ref [223]
$f_{dp1}$	250	250	250
$f_{hp1}$	-	-	300
$f_{dp2}$	682	682	750
$f_{hp2}$	-	-	810
$f_{dp3}$	1317	1320	1450
$f_{hp3}$	-	-	1508
$f_{dp4}$	2136	2145	2150
$f_{hp4}$	-	-	2345
$f_{dp5}$	3123	3113	3050
$f_{hp5}$	-	-	3670

TAB. 19.3 – Les fréquences de résonance (Hz) des modes de flexion dans le plan (DP) et hors plan (HP) pour un fémur humain. Comparaison entre d'une part les résultats des calculs par le MPTF-DF (1D) et le MPTF-EF 3D et d'autre part les résultats expérimentaux rapportés dans [223]

les deux méthodes numériques donnent sensiblement les mêmes résultats, mais l'écart est plus important avec les résultats expérimentaux, ce qui n'est pas étonnant vu que dans un cas on a une poutre 1D, et dans l'autre un vrai os long à section non-circulaire et variable le long du spécimen.

#### 19.4.2 Deuxième comparaison entre un modèle 1D, un modèle 3D et des résultats expérimentaux

L'objectif maintenant est de savoir si les résultats publiés dans les quelques publications disponibles peuvent être décrits avec une précision acceptable par des modèles simples de comportement. Ceux-ci sont le MPTF-MD en 1D développé ici, et un autre modèle moins simple, et purement numérique, qui s'appuie sur une formulation EF 3D.

La seule précaution prise était de s'assurer que les longueurs des os, dont les géométries ont été obtenues par CT-scan (Computerized Tomography Scan, le rayonnement de sondage étant des rayons-X), étaient approximativement les mêmes que celles pour lesquelles des

résultats expérimentaux ont été rapportés.

Une fois de plus, les résultats portaient sur les fréquences de résonance des os longs vibrants en flexion. Les geometries du tibia et du fémur obtenues par CT scan sont représentés dans la fig. 19.2. Les sections transversales utilisées dans le calcul MPT-MDF et leurs axes d'inertie sont également dessinés dans cette figure.

La forme en coupe transversale de l'os fémoral humain est plus ou moins elliptique et celle du tibia triangulaire (fig. 19.2). Les paramètres mécaniques utilisés dans le calcul, pour le tibia homogène sont pris dans Hobatho et al [188].

Les fréquences calculées en utilisant nos modèles, (voir le tableau 19.4) confirment le fait qu'un comportement matériel homogène et isotrope, rend compte, avec une précision acceptable, des résultats expérimentaux relatifs aux modes de flexion du tibia [188].

Mode	MPTF-DF	EF 3D	Ref.[188]	Ref.[360]	Ref.[254]
$f_{dp1}$	423	423	416	431	403
$f_{hb1}$	580	554	504	520	519
$f_{dp2}$	1147	1316	1140	1220	1163
Torsion	-	1560	-	-	-
$f_{hp2}$	1552	1738	1260	1489	1376

TAB. 19.4 – Comparaisons des résultats de calcul par le MPTF-DF (avec 700 noeuds) avec des résultats expérimentaux rapportés concernant les modes de flexion d'un tibia humain. Les fréquences propres sont en Hz.

## 19.5 Interaction fluide-structure (IFS)

### 19.5.1 Remarques préliminaires

Nicholson [284] a signalé que la moelle dans le calcaneum (os du pied) est responsable : i) d'une réduction significative de la vitesse des ultrasons, ii) d'une atténuation accrue, et iii) d'un changement perceptible de la rétrodiffusion de l'onde de sondage, comparées à ce qui est observé lorsque le calcaneum est saturé de l'eau .

A présent, nous développons un modèle et des expérience simples pour étudier l'influence du fluide remplissant une structure vibrante sur ses modes de vibration.

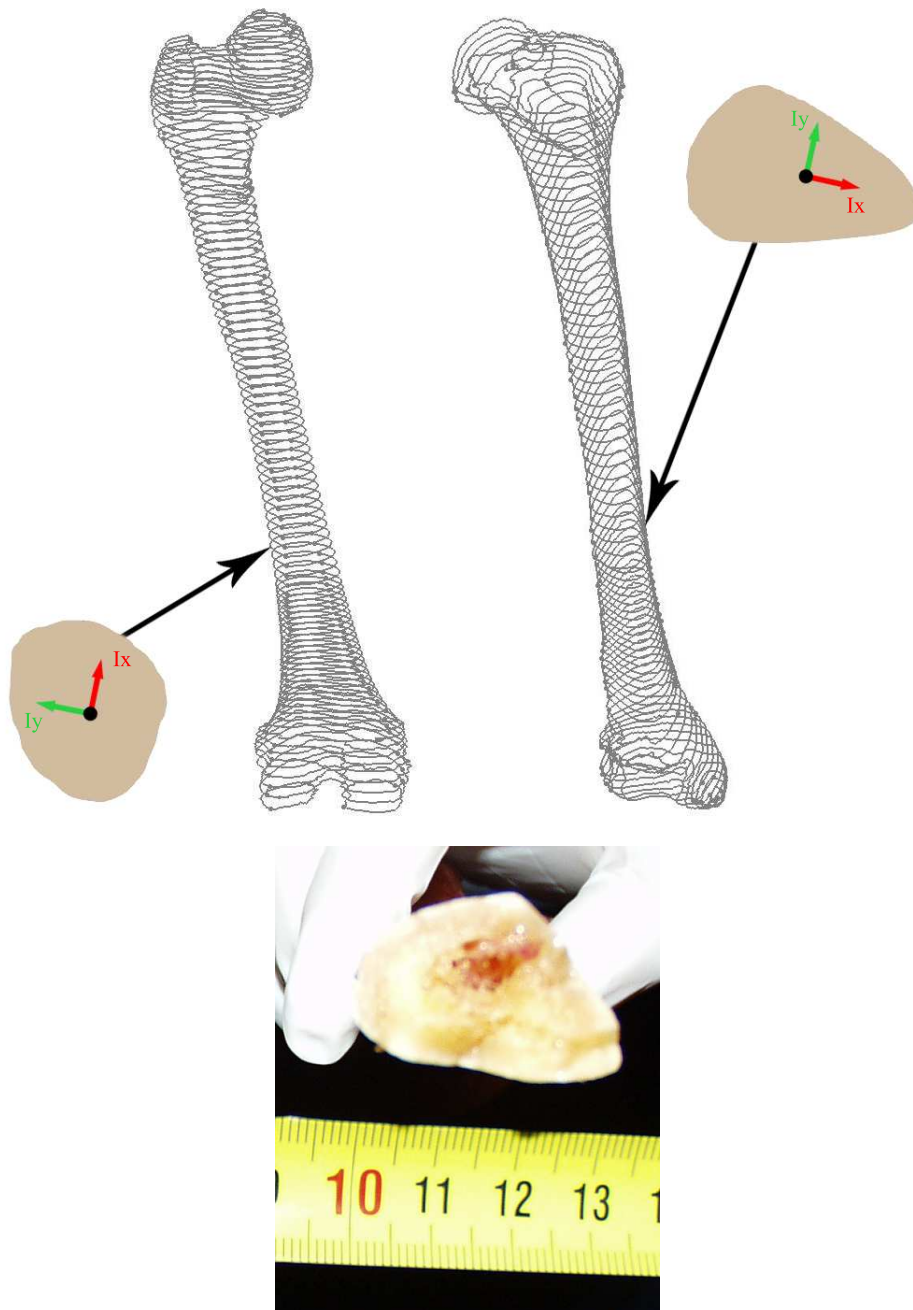


FIG. 19.2 – (a)(Haut) Geometries des os humains : fémur (à gauche) et tibia (à droite) obtenues par CT scan avec leurs sections transversales. (b)(Bas) Section d'un tibia humain rempli de moelle [287]

L'os long réel, rempli avec de la moelle, est remplacé dans notre étude par un fantôme ayant la forme d'un tube cylindrique, de section droite circulaire, en nylon (solide homogène, isotrope) rempli, dans sa partie centrale, de différents fluides (supposés non-visqueux au niveau de l'analyse).

Trois mécanismes de couplage déterminent l'IFS du cylindre creux rempli d'un fluide lourd non visqueux. Le couplage par frottement est dû aux efforts de cisaillement par la résistance au mouvement axial relatif, entre le fluide et les parois du cylindre. Le couplage de Poisson est dû aux efforts normaux agissant à cette même interface. Par exemple, une augmentation de pression du fluide crée une augmentation de contrainte de charge et par conséquent un changement de contrainte axiale sur les parois.

Rappelons que nous faisons l'hypothèse que le fluide est non visqueux et incompressible, et que le cadre est celui de petits déplacements. La simulation est effectuée en utilisant un modèle éléments finis 3D. Les équations pour chaque sous-domaine et les conditions aux limites aux interfaces sont données dans les sections suivantes.

### 19.5.2 Le champ acoustique dans le sous domaine fluide

La propagation de l'onde dans le sous-domaine fluide est décrite par les équation (scalaires) des ondes (versions spatio-temporelle et spatio-fréquentielle) donnée auparavant dans les chapitres de cette thèse traitant des modèles fluides et des méthodes de sondage acoustiques. Ces équations décrivent les champs de pression  $p(\mathbf{x}, t)$  et  $p(\mathbf{x}, \omega)$  en termes de  $c_f$  et  $\rho_f$  (la vitesse de l'onde et la densité du fluide respectivement), et  $q$  un terme source, sachant que  $\mathbf{x}$  est le vecteur-position,  $t$  le temps, et  $\omega$  la fréquence angulaire.

### 19.5.3 Le champ élastodynamique dans le sous-domaine solide

L'état vibratoire dans le sous-domaine solide (linéaire, homogène, isotrope) est décrite par les équations (vectorielles) (versions spatio-temporelle et spatio-fréquentielle) de Navier. Ces équations décrivent les déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$  en termes de la densité  $\rho_s$ , et des constantes de Lamé  $\mu_s$  et  $\lambda_s$  du solide.

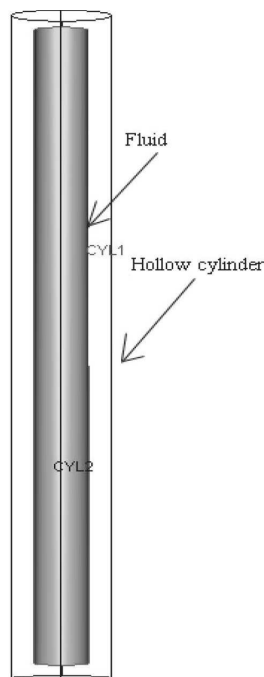


FIG. 19.3 – La géométrie : tube 3D rempli de fluide.

#### 19.5.4 Conditions aux limites

Sur l'interface tube/milieu ambiant (air, ramené au vide), nous avons une condition de traction nulle.

Sur l'interface ( $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à cette interface) entre le solide et le fluide interne, la condition est

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = -\rho_f \mathbf{n} \cdot \partial_t^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \quad (19.5.1)$$

#### 19.5.5 Résolution numérique

Les équations couplées de l'IFS sont discrétisées et résolues par éléments finis dans le progiciel FEMLAB (qui s'appelle maintenant COMSOL). Les fréquences propres des modes de vibration sont obtenues de la manière habituelle par annulation des sollicitations. La géométrie du problème est montrée dans la fig. 19.3 Les paramètres matériels du nylon et des fluides sont tirés de la littérature.

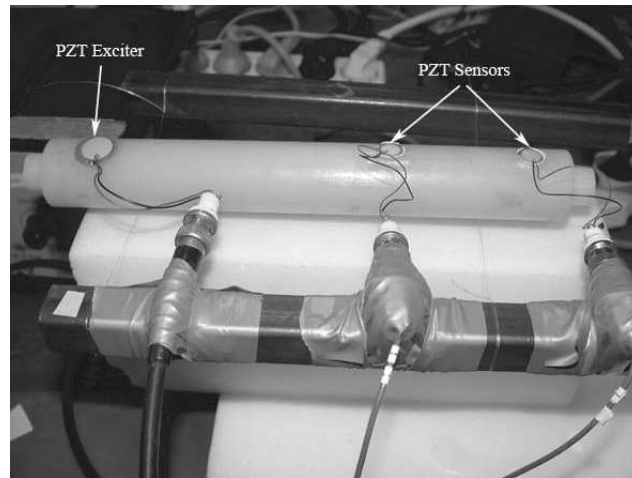


FIG. 19.4 – Photographie de l'expérience.

## 19.6 Résultats des simulations numériques et comparaison avec les expériences

### 19.6.1 Description des expériences

Trois tubes de longueur  $23\text{cm}$  et de diamètre extérieur  $3\text{cm}$  ont été employés dans cette étude pour imiter des spécimens d'os longs. Ils sont dénotés C1, C2 et C3 et ont des parois d'épaisseur  $5,5\text{mm}$ ,  $8,75\text{mm}$  et  $7\text{mm}$  respectivement.

Les capteurs piézoélectriques (PZT), collés sur la surface extérieure des tubes avec du scotch double face, ont été utilisés pour l'excitation ainsi que pour la captation (fig. (19.4)).

Afin d'obtenir les données fréquentielles de réponse vibratoire, le PZT est commandé par balayage à des fréquences discrètes à l'aide d'un générateur intégré dans le démodulateur "Lock-in", Stanford Research SR830. L'amplificateur "Lock-in" est connecté à l'excitateur PZT à travers l'amplificateur de puissance B&K 2706. La réponse du PZT en réception est préamplifiée par un amplificateur à très faible bruit de marque NF2023.

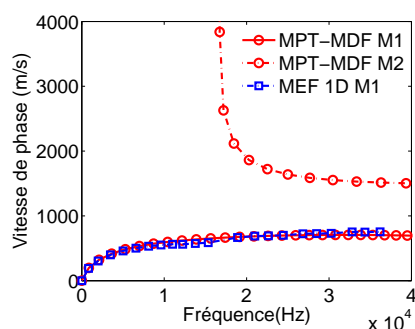


FIG. 19.5 – Comparaison entre les courbes de dispersion, obtenues par analyse modale avec le MPTF-DF (calculé avec 100 noeuds) et la méthode EF-1D, relatives à deux modes de flexion (M1 et M2) dans le tuyau creux C1.

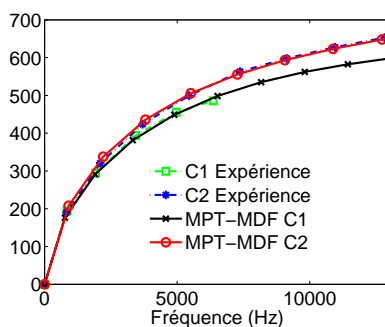


FIG. 19.6 – Courbes de dispersion théoriques et expérimentales montrant le changement de la vitesse de phase du mode M1 avec l'épaisseur du cylindre creux.

### 19.6.2 Courbes de dispersion pour le tube C1

Les courbes de dispersion montrant les deux modes de flexion (M1 et M2) correspondant aux deux solutions de l'équation de MPTF-DF (19.3.7) pour le tube C1, dont la partie médullaire est remplie d'air, sont données dans la fig. (19.5). Elles y sont comparées aux résultats d'une analyse modale éléments finis (employant des éléments de poutre B32 [185] quadratique à 3 noeuds dans l'espace).

### 19.6.3 Influence de l'épaisseur du tube rempli d'air sur la dispersion

L'influence de l'épaisseur des parois sur la dispersion est montrée dans la fig. 19.6 qui s'applique à deux tubes dont les parties médullaires sont remplies d'air. On y découvre que

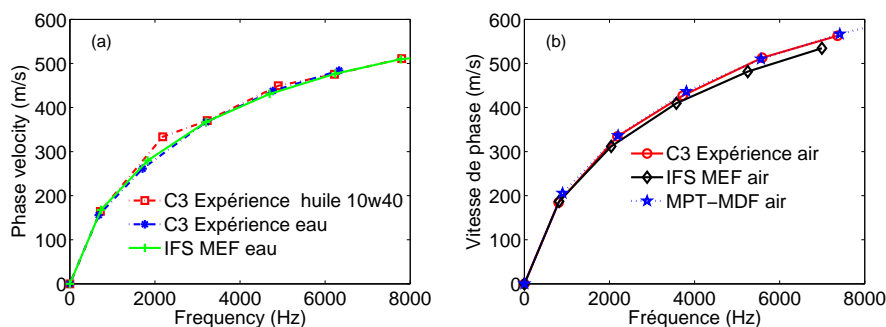


FIG. 19.7 – Courbes de dispersion de vitesse de phase, comparaison de la théorie (MEF IFS) contre l'expérience, la colonne est rempli (a) de l'eau et puis l'huile;(b) de l'air.

la vitesse de phase augmente avec l'augmentation de l'épaisseur des parois et que l'accord entre calculs et expériences est bon.

#### 19.6.4 Influence du type de fluide de remplissage sur la dispersion

L'influence de IFS sur la dispersion a été étudiée au moyen du tube C3 qui a été rempli avec différents fluides (air, eau, huile moteur SAE 10W40).

On observe dans la fig. 19.7 que la vitesse de phase du mode (M1) du tube rempli d'eau ou de l'huile est inférieure à celle du tube rempli d'air, et ce à toutes les fréquences. Aussi, la différence des vitesses entre les différents types de remplissage fluide augmente avec la fréquence, ce qui constitue un renseignement utile pour définir le protocole d'acquisition des données en vue d'un diagnostic de l'ostéoporose via des changements de composition de la moelle.

Enfin, on note dans la fig. 19.7 que la vitesse de phase calculée par le modèle MPTF-DF pour un tube non-rempli compare bien avec l'expérience pour le tube remplie d'air.

#### 19.6.5 Formes modales et spectres de réponse

Les spectres de réponse et les formes modales à la résonance sont montrées dans la fig. 19.8. La position relative des pics (de résonance) pour les trois fluides change selon le type



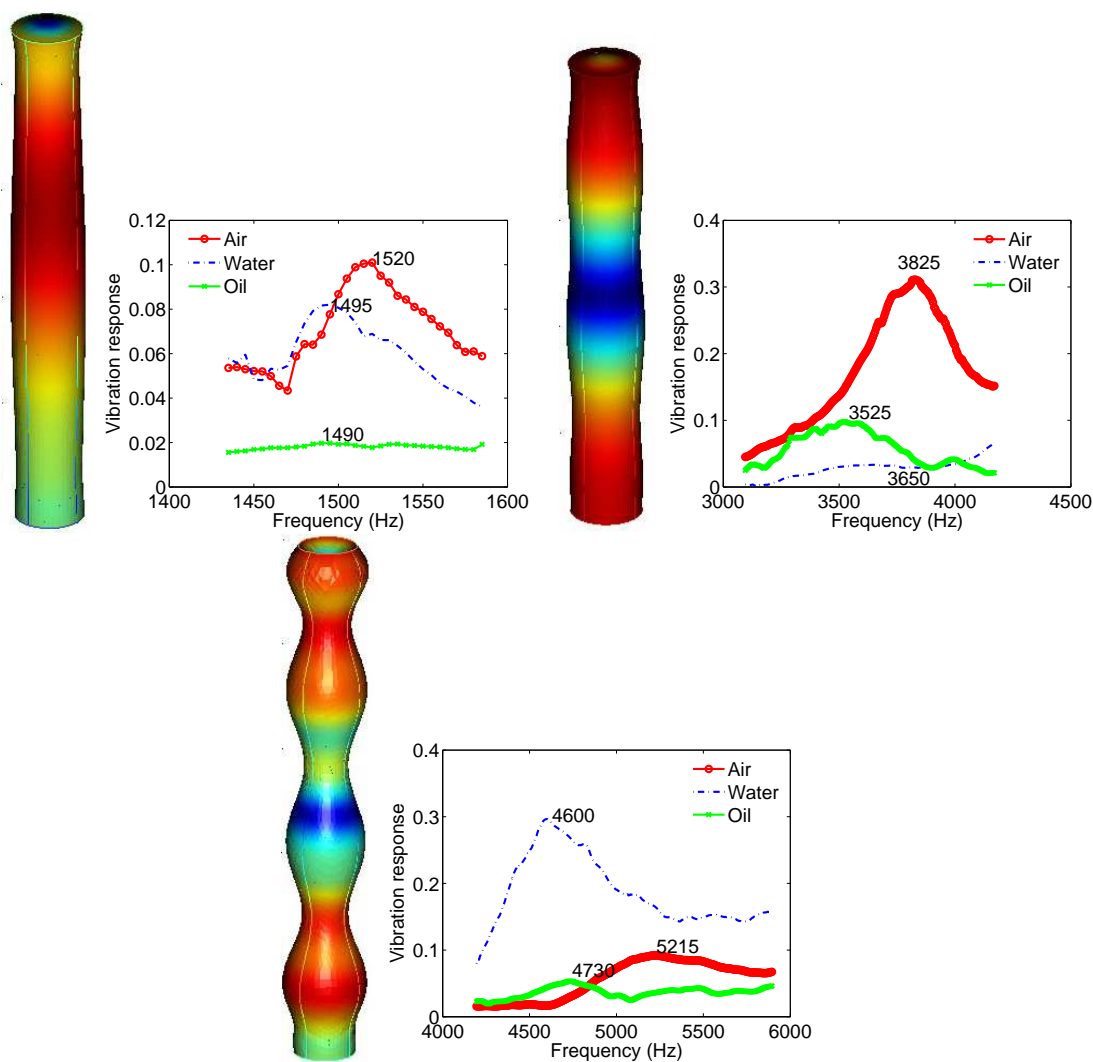


FIG. 19.8 – Spectres de réponse vibratoire au voisinage des fréquences de résonance de trois modes, et les formes modales aux fréquences de résonances calculées par Femlab EF 3D pour un modèle intégrant l'IFS. Ces fréquences sont : (a)(Haut gauche) Air : 1570 Hz, eau : 1511 Hz, huile : 1549 Hz (b)(Haut droite) Air : 3927 Hz, eau : 3490 Hz, huile : 3518 Hz. (c)(Bas) Air : 5499 Hz , eau : 4976 Hz, huile : 5050 Hz

de mode en jeu. Par contre, la réponse à la résonance est systématiquement plus faible pour un remplissage de l'huile que pour ceux de l'air et de l'eau.

## 19.7 Conclusion

Il a été montré expérimentalement et théoriquement, en employant le modèle IFS et son implémentation par EF 3D, que le chargement du canal intérieur du tube (servant de fantôme d'os long) par des fluides différents comme l'air, l'eau ou l'huile, a pour conséquence d'affecter sensiblement les fréquences de résonance et la vitesse de phase des modes de vibration du tube. Ceci laisse penser que la caractérisation d'os longs réels, à partir de données de fréquences de résonance, devrait tenir explicitement compte de la présence de la moelle dans le canal médullaire. A contrario, le fait de remplacer la moelle par de l'air ou de l'eau conduira à des erreurs considérables lors de la caractérisation vibroacoustique (on peut penser qu'il en sera de même pour la caractérisation ultrasonore) d'un os long.

De même, s'il l'on pouvait détecter, par la spectrométrie vibroacoustique, un changement de composition de la moelle on disposerait d'une indication supplémentaire sur la santé (ou maladie, telle que l'ostéoporose) de l'os.

Le modèle IFS-EF 3D est un bon candidat pour servir d'estimateur lors des inversions pour reconstruire l'épaisseur corticale et les modules élastiques, et le modèle MPTF-DF est un bon candidat pour fournir une solution initiale dans l'algorithme d'inversion.

Toutefois, dans la mesure où la moelle est un fluide visqueux, et ce facteur a été négligé jusqu'ici, nous pensons qu'il faudra l'intégrer dans une version améliorée de l'estimateur qui reste à être mise au point.



## Chapitre 20

# Experimental and theoretical nonlinear dynamic response of intact and cracked bone-like specimens with various boundary conditions

Ceci est un article accepté pour publication dans *J.Vibr.Acoust.* ASME.

## 20.1 Authors and affiliations

Erick Ogam, Armand Wirgin, Z.E.A Fellah

CNRS Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique UPR7051, 31 chemin Joseph Aiguier,  
13402 Marseille, France.

Yongzhi Xu

Department of Mathematics, University of Louisville, KY 40292, USA.

*Keywords* : Bone characterization, nonlinear vibration, boundary condition, dynamic contact friction, crack, mode splitting, Duffing oscillator, finite element modeling.

## 20.2 Abstract

The potentiality of employing nonlinear vibrations as a method for the detection of osteoporosis in human bones is assessed. We show that if the boundary conditions (BC), relative to the connection of the specimen to its surroundings, are not taken into account, the method is apparently unable to differentiate between defects (whose detection is the purpose of the method) and non-relevant features (related to the boundary conditions). A simple nonlinear vibration experiment is described which employs piezoelectric transducers (PZT) and two idealized long bones in the form of nominally-identical drinking glasses, one intact, but in friction contact with a support, and the second cracked, but freely-suspended in air. The nonlinear dynamics of these specimens is described by the Duffing oscillator model. The nonlinear parameters recovered from vibration data coupled to the linear phenomena of mode splitting and shifting of resonance frequencies, show that, despite the similar soft spring behavior of the two dynamic systems, a crack is distinguishable from a contact friction

BC. The frequency response of the intact glass with contact friction BC is modeled using a direct steady state finite element simulation with contact friction.

## 20.3 Introduction

Non-destructive testing for the detection of damage such as cracks in structures and materials can be carried out by vibrational spectroscopy. The defects are then detected by a change in the modal properties [194], such as resonance frequencies of the vibration spectrum, damping loss factors and modal shapes. The inspection of the integrity of structures is important to avoid failure and serious accidents. In human beings, hip bone and femoral neck fractures, due to bone osteoporosis in elderly persons, can have grave consequences. When osteoporosis (which is an imbalance between bone resorption (the part of remodeling consisting of breaking down and assimilating) exceeds bone formation) sets in, bone becomes thinner, with fewer connected and thinner trabeculae, and more porous cortical components. This weakens the structural properties of the bone and lowers its mass. With the imbalance in the remodeling process, damage accumulates in the form of micro-cracks. Osteoporotic bones are more micro-damaged than healthy bones.

Resonance-based techniques exploiting the significant nonlinear behavior of damaged materials have been investigated as a potential tool for damage assessment of bones [278] as well as of naturally microcracked material (e.g., Berea sandstone) [264]. Most engineering materials contain small crack-like defects, or they can spontaneously develop them during service under fluctuating loads (failure occurring from repeated fluctuating stresses or strains, i.e., fatigue). In bones, macrocracks can result from the accumulation of damage due to fatigue loading [399]. In the presence of damage, the response is not linear, i.e., the resonance frequencies vary with the level of excitation, so that the retrieval of the ordinary mechanical parameters [293] becomes ambiguous. Changes in the vibrational response of a damaged structure can result from the variation of the linear elastic modulus, but the measured change in nonlinear response, when it exists, can be greater than the alteration in the linear moduli. On the other hand, the assessment of bone damage using high-energy X-ray computed tomography imaging (this is not everyday clinical practice) is only useful

in identifying prominent cracks.

The complexity of bone geometry, of modeling the human bone in its natural environment or as a harvested and whole specimen, and the lack of availability of donors, have been three of the major obstacles to the development and adoption of vibrational methods as a fully-developed diagnostic technique. One of the objectives of the present study is to highlight some of the problems encountered when harvested bones are not in the form of small specimens with canonical geometry (slab-like, cubical,...) employed in classical compressive, tensile and bending testing procedures [235]. It is more meaningful, for research purposes, to employ whole bone specimens (even though they are not in their natural environment), but the model of vibrational response then requires a detailed description of their geometries and boundary conditions (which accounts for the way the specimen is attached (or not) to its surroundings). Section 20.4 is devoted to the description of a simple experiment employing drinking glasses (a shell-like solid structure, similar to a long bone, in which cracks can be produced easily by thermal shocks) to study the potentiality of nonlinear vibrations as a diagnostic tool for the detection of osteoporosis in human bones (as well as of damage in other natural and man-made materials and structures). The vibrational response of a normal bovine-bone femur shaft is first acquired experimentally using this layout. Subsequently, the bone is replaced by the previously-mentioned glasses which have responses similar to those of the bone.

Section 20.5 is devoted to the study of the nonlinear vibration responses using Duffing's equation which models a single degree of freedom nonlinear oscillator. The response of the intact glass with a contact friction (Coulomb friction) BC is simulated by a three dimensional (3D) finite element simulation (FES) model which takes into account contact friction. This turns out to be a suitable model of the system and also enables the study of the influence of the structure supporting the specimen. In the long term, this type of model could be employed to evaluate the influence of the femorotibial joint on the vibration of the two connected long bones (the tibia and the femur).

## 20.4 Experimental setup

For a detailed study of the nonlinear vibration phenomenon, the bone specimen is simplified by choosing an isotropic linear elastic material with simpler geometry : a (drinking) glass. The bovine-bone femoral shaft specimen and its idealization (i.e., the glass) are shown in Fig. 20.1a. The specimens are studied in air and a particular effort is also made to account for more realistic boundary conditions. The schematic depicted in Fig. 20.1b shows the specimen (here a glass) in the stress-free BC (SFBC) mode (suspended using nylon threads fixed to the support of a test rig). The glass turned upside down and in contact friction boundary condition with the table is shown in Fig. 20.1c. The final disposition for a specimen (the glass turned upside down) supported on a thick aluminium plate (dimensions  $22.5 \times 20.5 \times 1.5$  cm) is depicted in Fig. 20.1d. A contact friction boundary condition (CFBC) prevails at the interface between the glass specimen and the aluminium plate. The glass - plate system, is finally suspended on threads (the boundary condition on the exterior surface of the complete system is then of the stress-free variety).

The specimens (glasses and bovine-bone femoral shaft) are excited (in separate experiments) by means of a small (1.0 cm diameter), light-weight axial piezoelectric transducer (PZT) driven in discrete frequency and amplitude steps using a Signal Recovery 7265 DSP Lock-in amplifier through a Brüel and Kjær B&K2706 power amplifier. The response is measured by a second piezoelectric transducer (sensor) whose output is amplified using a low noise preamplifier NF SA-200F3 connected to the input of the synchronous demodulating amplifier 7265DSP (Fig. 20.2). Both the excitation and sensor transducers are made of a thin disc of piezoelectric ceramic bonded to a thin metal diaphragm [9]. When the PZT sensor is bonded to a deforming vibrating surface, a mechanical deformation is induced in the polarized crystal (resulting from tension and twisting of the sensor) leading to the generation of an electric charge. Likewise, when the PZT crystal is submitted to a modulated electrical solicitation, it vibrates (and induces a stress wave). The light weight, small size and flat structure form of the PZTs facilitate their mechanical fixation on structures, with negligible influence on the vibrational responses as compared, for instance, to accelerometers.

The typical experimental vibrational responses depicted as level curves, for the intact



bovine bone in the stress-free configuration, on the one hand, and in contact friction with a thick aluminium plate, on the other hand, are shown in Fig. 20.3a and 20.3b respectively. Each level curve corresponds to a fixed voltage amplitude, applied to the PZT, while the frequency is varied. For the bone placed on the aluminum support, the resonance frequencies shift downwards as the amplitude of the voltage applied to the PZT increases.

## 20.5 Theoretical models

### 20.5.1 Nonlinear single degree of freedom oscillator

The dynamic response of a vibrating structure, can be considered, to be composed of a sum of individual modal responses, each behaving as a single-degree-of-freedom (SDOF). A vibrational mode of the dynamic system can then be singled out and its behavior, modeled as that of a SDOF nonlinear oscillator.

The nonlinear dynamic behavior observed in the experiments herein are mainly due to contact friction boundary conditions [184, 183] and damage in form of closed cracks produced in the specimen. Crack deformation (crack sliding, crack opening and crack closing) and contact frictional resistance responsible for hysteresis loops observed in the stress-strain curves in a loading unloading-reloading cycles are the cause of the nonlinear dynamic behavior of the damaged specimen [5, 19]. For planar contacts in the CFBC case, an empirical expression relating the restoring force  $f_r$  at friction joint of two bodies in dynamic contact as a function of the contact deflection  $\delta_f$  was found to have comparable behavior with an analytical rough surface model description for simulating joint dynamics [183] :

$$f_r(\delta_f) = k_f \delta_f^{n_f} \quad (20.5.1)$$

where  $n_f$  and  $k_f$  are experimentally determined constants which depend on surface roughness, material and geometry of the joints and  $n_f$  ranges [183] from 1.6 to 3.3. It has been shown that for a dynamic system with a circular Hertzian contact, the SDOF equation of motion includes a non-linear restoring contact force [320] with a power law, where  $n_f = 3/2$  (Eqn. 20.5.1). Expanding the restoring force into a third order Taylor series results in an equation of motion with a cubic nonlinearity[323]. The nonlinear resonance of a cracked rotor

was analyzed using a power series function of displacement which modeled the open-close mechanism of the crack [200].

The consequence of damage and contact friction boundary conditions will be observed as a nonlinear dynamic vibrational behavior measured on the specimen; i.e shift of the resonance frequency and damping with the increase in excitation force amplitude. Most of the aforementioned experimentally observed vibration compartment can be captured by a nonlinear oscillator having cubic nonlinearity and linear viscous damping. The motion of the oscillator is described by Duffing's equation [30, 282]

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -2\epsilon\mu_m \dot{u} - \epsilon\alpha_s u^3 + \epsilon E(t) \quad (20.5.2)$$

wherein  $\ddot{u}$ ,  $\dot{u}$  and  $u$  are the acceleration, velocity and displacement respectively,  $\omega_0$  is the resonance frequency of the linear, undamped SDOF oscillator,  $\mu_m$  the damping coefficient,  $\epsilon$  a small parameter,  $E(t) = f \cos(\Omega t)$ , the excitation with driving frequency  $\Omega$ ,  $f$  the amplitude, and  $\alpha_s$  the nonlinearity parameter which can be either positive (hard spring) or negative (soft spring).

An approximate solution to this nonlinear differential equation (Eqn. 20.5.2) can be obtained by a number of perturbation techniques [213, 282], or harmonic balancing [251, 282, 373]. A detuning parameter  $\sigma$  is introduced to describe the proximity of  $\Omega$  to resonance so that  $\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$ . Using the method of multiple scales [179, 282], a sixth-order polynomial frequency response equation for steady-state motion is obtained

$$\left[ \mu_m^2 + \left( \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha_s}{\omega_0} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2} \quad (20.5.3)$$

with  $a$ , the amplitude of the response. This equation is then solved for  $a$  as a function of  $\sigma$  using the Matlab symbolic Math Tool-Box. It has three sets of double solutions. The jump phenomenon encountered when plotting the frequency response from the solutions of Eqn. (20.5.3), occur when the frequency passes through the bifurcation points and the amplitude switches between stable solutions, and is a consequence of the multivalued nature of the frequency response curves [206, 392, 282], which in turn is a consequence of the nonlinearity. Equation 20.5.3 is the translation of the phenomenological model whereby we reconstruct the nonlinear coefficients : hard/soft spring coefficient  $\alpha_s$ , force  $f$ , and damping coefficient

$\mu_m$ . More precisely, we obtain these coefficients by fitting the model to the experimental vibrational response data for the freely-suspended cracked glass and intact glass with contact friction boundary conditions.

A different approach for modeling the nonlinear behavior of damaged cortical bone revealed by nonlinear resonant spectroscopy has been reported by Muller *et al.* [278]. In their study, a phenomenological description of the nonlinear defects (presence of strain memory and hysteresis in the stress - strain relation [175]) is used to model and hence track progressively the development of cracks and damage, induced in a bone, by mechanical cycling. The bone is glued to a piezoelectric transducer mounted on a thick steel backload. The chosen damage indicator is a hysteretic nonlinear parameter,  $\alpha_k(\Delta\varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_k)$ , found in the expression for the elastic modulus  $K$  of the material [175, 260]

$$K = K_0(1 + \beta_k\varepsilon_k + \delta_k\varepsilon_k^2) - \alpha_k \quad (20.5.4)$$

with  $\varepsilon_k$  the strain,  $\dot{\varepsilon}_k$  the strain rate,  $K_0$  is the linear modulus,  $\beta_k$  and  $\delta_k$  describe the classical nonlinear terms due to standard anharmonicity. The relationship between the average strain over a wave cycle  $\Delta\varepsilon_k$ , with the linear resonance frequency,  $f_{lr}$ , and the resonance frequency, ( $f_0$ ), at the lowest (linear) drive level for a given resonance mode, is given as [278]

$$\frac{f_{lr} - f_0}{f_0} = \alpha_k \Delta\varepsilon_k . \quad (20.5.5)$$

This relation is derived from the wave equation, which expresses the driving force for the local displacement as a function of the strain, and is used [278] to fit the nonlinear resonant ultrasound spectroscopy mode data of a bone damaged by compressional fatigue cycling.

## 20.5.2 Frequency domain response computed by a finite element method incorporating a model of contact friction between the glass and the support

The objective here is to theoretically model the measured vibrational behavior of the intact glass on its support (aluminium plate). This will enable us to verify whether what is really measured is the outcome of contact friction BC and ultimately to evaluate the influence of the aluminium support.

The configuration, including the glass turned upside down, the aluminium plate on which it rests, and the friction at their interface, is modeled using finite elements, including contact friction.

The response of the intact glass resting on (i.e., in contact with) an aluminum plate (i.e., a Coulomb contact friction BC prevails at their interface) is measured experimentally. Two configurations are tested : one with the glass turned upside down and its support system resting on a table, and the second in which the whole system is suspended on threads as shown in Fig. 20.1d. The measured responses show that there are slight frequency shifts of the resonance peaks between the two configurations. In this study, we model the BC of the support as simply supported at the points in contact with the threads on which it is suspended.

The glass is modeled using 598 quadrilateral thick shell elements (S4R : A 4-node doubly curved shell [185]). The aluminium plate is also modeled using 187 thick shell quadrilateral elements. The mesh density is low (to reduce computational costs - cpu time, memory) except in the area of contact with the glass (Fig. 20.4d).

Once the model is assembled, the elastic properties of the glass and the aluminium plate, as well as the friction coefficient between the glass and the plate to be employed in the FES model are required. The mechanical parameters are retrieved using the resonance frequencies of the glass in a setup in which it is suspended by nylon threads, thus allowing the glass to vibrate with stress-free boundary conditions (Fig. 20.1b). In order to compute the resonance frequencies, the eigenvalue problem for the natural modes is solved employing the discretized form of the dynamic analysis equation obtained from the principle of virtual work [195]

$$(\lambda_{eig}^2 \mathbf{M}^{mn} + \mathbf{K}^{mn}) \Phi^n = 0, \quad (20.5.6)$$

with  $m = 1, 2 \dots, n = 1, 2 \dots$ ,  $\mathbf{M}^{mn}$ ,  $\mathbf{K}^{mn}$  are the mass and stiffness matrices respectively,  $\lambda_{eig}$  the eigenvalue and  $\Phi^n$  the eigenvector (i.e., the mode of vibration).

The density  $\rho = 2800 \text{ Kg m}^{-3}$  is obtained by weighing and measuring the volume of the glass. We are then faced with an inverse problem of finding the mechanical parameters : Young's modulus ( $E$ ) and Poisson ratio ( $\nu$ ), from three experimental resonance frequencies (1111, 2685, 4489 Hz whose mode deformations are depicted on Figs. 20.4a, b, c). The values

of these parameters that minimize the cost function  $\mathfrak{J}$  (which is a measure of the discrepancy between the model and experimental outputs) is retrieved using a complete 3D FES modal analysis model of the glass employing 22.4.4.

$$\mathfrak{J}(E, \rho, \nu) = \sum_{p=1}^m \left\{ f_{experiment}^p - f_{model}^p(E, \rho, \nu) \right\}^2 \quad (20.5.7)$$

with  $f_{experiment}^p$  the target resonance frequency obtained by experiment,  $p = 1, 2, \dots$  the mode number,  $m$  the number of modes here  $m = 3$  and  $f_{model}^p$  the natural frequency furnished by the model for the current trial value of  $E$  and  $\nu$ .

The minimization is carried out using the Levenberg-Marquardt algorithm (implemented in the *lmdif* routine from *Minpack*, conceived at the Argonne National Laboratory). The retrieved parameters for the glass are  $E = 80 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.22$ . In the experimental response, we observe damped modes ; consequently, Rayleigh damping [187, 195, (page 426)] is chosen for the glass material with the coefficients  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1.0 \times 10^{-8}$ . The elastic parameters used for the aluminium block are,  $E = 69 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2700 \text{ Kg m}^{-3}$  and are taken from tables. The Rayleigh damping parameters for the aluminium block are chosen to be  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 5.0 \times 10^{-5}$ .

In the 3D FES model (glass on plate), gravity is applied to the glass as a distributed load. A concentrated sinusoidal force (0.1 N) is applied to the lower part of the glass (Fig. 20.2) to simulate the harmonic sollicitation via the piezoelectric transducers. The four corners of the plate are taken to be simply-supported. The response of the system is then computed using a *perturbation steady state dynamic direct analysis* implemented by the Abaqus finite element software [185], that predicts the frequency response of a structure subjected to continuous harmonic excitation [187].

In the model, there is contact friction between the intact glass and the aluminium surface. The simulation uses a Coulomb friction law which assumes that slip occurs if the frictional stress [187]

$$\tau_{eq} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} \quad (20.5.8)$$

exceeds the critical stress,  $\tau_{crit} = \mu_f p_c$ , where  $\tau_1$  and  $\tau_2$  are the shear stresses along  $\mathbf{t}_{\alpha(\alpha=1,2)}$  (are two orthogonal unit vectors tangent to the contact surface so that the normal  $\mathbf{n} = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2$ )

,  $\mu_f$  is the friction coefficient, and  $p_c$  is the contact pressure. When  $\tau_{eq} < \tau_{crit}$ , no relative motion occurs.

The friction coefficient of  $\mu_f = 0.17$  used in the computation, is found by a simple experiment in which the glass is placed on the supporting aluminium plate and the latter is tilted. The angle of tilt of the plane is increased until the glass begins to slide. The tangent of the tilting angle  $\phi$  (also called *friction angle*) is related to the coefficient of friction  $\mu_f$  by  $\mu_f = \tan \phi$ .

The detailed mesh and typical deformations are shown on Fig 20.4d. The computed acceleration is chosen at a node of an element whose position corresponds to that of the measurement. The comparison between the experimental and theoretical resonance frequencies is made in Fig. 20.5. The frequency of the mode to be employed in the identification employing the Duffing oscillator model at 3320 Hz is well determined by the 3D FES model with contact friction BC. The discrepancies between the computed response (particularly the amplitude) and the experimental data around 6500 Hz are due to the lack of knowledge of all the damping mechanisms and parameters. The Rayleigh damping model applied for the materials seems to be appropriate in the frequency regions of interest in this study. In the experiment, the air within the upside down glass also plays a role in the damping of the overall response. The fluid-structure interaction (between the air, glass and aluminium) is not included in the finite element model.

### 20.5.3 Frequency domain response of the cracked glass using FES - mode splitting and shifting

The presence of a crack or local defect in a structure introduces local flexibility that affects its vibration response [29]. The crack introduced in the glass herein reduced its effective stiffness asymmetrically in two orthogonal directions. This resulted in a separation (splitting) and shifting of its in-plane and out-of-plane resonance frequencies. Splitting of modes is also observed in flexural vibration of long bones like tibia and femur. These bones have deformed triangular cross sections and as a consequence their bending moments of inertia are different in the two orthogonal directions whose effects are the separation of

the in-plane and out-of-plane free vibration resonance frequencies. Similar observations of splitting of natural frequencies due to coupled motion of beams (of circular cross section) in two orthogonal directions in the presence of open cracks have been made [109, 111]. The distance between the resonance peaks of split modes has been shown to be function of the geometry of the damage [340] (crack depth, location ...). Caputo [62] studied the rheology of vibrating plate samples and inferred their rheological properties from the observation of the splitting of their eigenfrequencies. The removal of symmetry in the geometry and observation of splitting of modes of the glass can be modeled as a linear phenomena using FES. Arbitrarily chosen open cracks in form of slits (height 25 mm, width 0.3 mm and 0.7 mm) are cut into the glass as shown in Fig. 20.6 of the FES model. The computed response around the third and fourth modes (second in-plane and out-of-plane modes) of the intact glass in SFBC are depicted in Fig. 20.6b. The shift in frequency and the distance between the split peaks are confirmed to be indeed function of the crack geometry.

In addition to the splitting and shifting of the resonance frequencies, it is observed in the experiments (involving the cracked glass) in SFBC, that one of the two peaks of the split modes behaves nonlinearly i.e., the resonance peaks shift as the amplitude of the solicitation is varied. This means that the open crack model only explains partly the aforementioned experimental observation. The crack in our experiments is of the closed kind. Sliding friction will occur at the crack ends and larger normal motion at the middle, leads to reduction stiffness and a local dissipation of energy. As mentioned earlier, the crack will open, close and slide in time depending on the vibration response level resulting in a nonlinear behavior.

## 20.6 Results and discussion

The vibratory responses of a cracked and intact glass, subject to a variety of BC's, are measured.

The glasses are subjected to :

1. stress-free boundary conditions corresponding to the situation in which the glass is suspended by nylon threads attached to a rigid frame (Fig. 20.1b); the response is measured for different excitation amplitudes.

2. contact friction boundary conditions ; the glass is turned upside down and placed on a fairly-smooth varnished pine laboratory table (Fig. 20.1c).
3. contact friction boundary conditions ; the glass is turned upside down and placed on a fairly-smooth aluminium plate (Fig. 20.1d) ; contact friction on the interface between the aluminium plate and the glass results in a nonlinear soft spring behavior.

The experimental wide band response spectrum of the intact and cracked glass with SFBC are depicted in Fig. 20.7a. The peaks in the vicinity of the third and fourth modes are first picked as depicted in Fig. 20.7b. The frequencies of the *peaks* of resonance of the sound glass with SFBC do not shift (linear regression passing through the points has zero slope) as the excitation amplitude is being increased. Those of the cracked one are split, shifted downwards in frequency and the peak amplitudes of the lower mode, shifts in frequency as the excitation level increases (nonlinear behavior)( Fig. 20.7c).

### **Behavior of the cracked glass with contact friction**

The intact glass on a plate (a contact friction boundary condition (CFBC) prevails at their interface), behaves in a nonlinear manner that is, the resonance frequency shifts downwards with the increase in the amplitude of the exciting force. The vibratory responses of the cracked glass was obtained in the same manner. The wide band vibration spectrums are depicted on Fig. 20.8a. The same experimental procedure is repeated for the glasses placed on a massive wooden pine table. The response curves are depicted on Fig. 20.8b. It is observed that the resonance frequencies of the cracked glass have all been shifted downwards. The presence of numerous peaks point out to modes splitting. The *peak* resonant responses in the vicinity of a prominent mode of the sound and cracked glass in CFBC with the plate are depicted on Fig. 20.8c. The ones for the glasses vibrating on a massive table with friction are shown on Fig. 20.8d.

To distinguishing between a cracked bone and a normal one, both in CFBC (herein with the plate or the wooden pine table), has only been demonstrated experimentally while working on the perfection of the FES model. The differences are observed clearly on the slopes (which are computed through linear regression) from the resonance peak points.



An alternate but more rigorous approach for distinguishing the nonlinear systems, is to retrieve their nonlinear parameters, by employing a model that describes their behavior. In this framework, the soft/hard spring coefficient  $\alpha_s$  and the damping coefficient  $\mu_m$ , are recovered by fitting the Duffing oscillator model to the measured vibration data. The parameters of the model  $f$  (the applied force),  $\alpha_s$  and  $\mu_m$  are first determined by fitting the model to the lowest level curve of the nonlinear mode of the experiment. The other level curves of that mode are then fitted by varying  $f$  proportionally to the PZT input voltage (i.e, doubling the input voltage will give the same Duffing response curve when  $f$  is also doubled). The parameters  $\alpha_s$  and  $\mu_m$  are unique for a chosen nonlinear mode. The retrieved nonlinear parameters for the intact glass are  $\alpha_s = 0.0001$  and  $\mu_m = 0.0012$  (linear behavior). For the cracked one with SFBC,  $\alpha_s = -150$  and  $\mu_m = 0.0048$  (Fig. 20.9a)). The ones for the sound glass in CFBC with the plate (situated around the well identified mode shown in Fig. 20.5), were  $\alpha_s = -600$  and  $\mu_m = 0.019$  (Fig. 20.9b). Those for the cracked glass in CFBC were  $\alpha_s = -1100$  and  $\mu_m = 0.0095$  (Fig. 20.9c). The sound glass in CFBC with the table had  $\alpha_s = -65$  and  $\mu_m = 0.0036$  (Fig. 20.9d) and the cracked one,  $\alpha_s = -100$  and  $\mu_m = 0.0057$  (Fig. 20.9e). The cracked glass in CFBC with the plate was found to be the most nonlinear and the sound glass in SFBC (suspended), linear. All the recovered, aforementioned nonlinear parameters are resumed in Table(20.1).

The nonlinear parameters, i.e the soft/hard spring coefficient  $\alpha_s$  and damping coefficient  $\mu_m$  clearly point to the fact that two systems (intact glass in CFBC and a cracked one in SFBC) with apparently identical nonlinear dynamic behavior are actually different. This seems to indicate that to detect crack nonlinearity, the contact friction nonlinearity must be eliminated as much as possible (e.g., by positioning correctly the bone, i.e., patient lying down or in a weightless situation such as in a satellite). The intact glass with contact friction appears to be more nonlinear than the cracked one suspended in air. The parameter  $\alpha_s$  turns out to be a simple indicator to differentiate between a system with contact friction and one with cracks.

The resonance frequencies of a damaged bone having a nonlinear contact joint, will shift in the same manner (upwards or downwards as compared to the intact bone tested in the same conditions) as the resonance frequencies of the same bones tested in the SFBC

configuration. For a follow up of the evolution of the state of health of the bone, it is only necessary to assure that the patient's bone is always solicited under the same boundary conditions (CFBC or SFBC). The nonlinear contact joint has also been found to amplify the nonlinear phenomena (incarnated in  $\alpha_s$  and  $\mu_m$ ).

In order to vary the friction boundary condition between the glass and the plate, different normal loads are applied to the intact glass turned upside down using two small mutually-repelling magnets (can also be done by adding small masses, but this changes the geometry of the system). One of the magnets is taped to the base of the glass (at the top in the upside down situation). The other magnet is fixed onto a support and lowered in several steps to increase the force applied to the glass (Fig. 20.2 ). The voltage applied to the excitation PZT *remains constant* during the frequency sweeps. The system exhibits a nonlinear *hard spring* behavior, i.e., the resonance frequency increases (Fig. 20.10a) with the approach of the magnet (increasing the applied force). This nonlinear behavior is explained by the increase of the rigidity of the friction interface  $k_r$  with the normal load  $F_n$  ( $k_r = k_{in}\sqrt{F_n}$ , and  $k_{in}$  is the rigidity of the interface) [139]. A 1D flexural beam model with Iwan's friction joint confirms this type of behavior [126]. The hard spring behavior can be encountered in the same experimental setup without the magnets (without normal loading) at very low amplitude excitations. This hardening effect observed for low strain amplitudes for the two types of nonlinearities, has been confirmed by the Microcontact-based theory for acoustics in microdamaged materials developed by Aleshin and Van Den Abeele [5].

Extra care must therefore be taken to avoid loading the bone in CFBC configuration. For example a patient whose tibia is being diagnosed for osteoporosis should be at rest and not standing upright to avoid static loading of the bone. Future experiments will involve varying the normal loading force of the *damaged bone* with a contact frictional joint.

## 20.7 Conclusion

The two nonlinear system behaviors observed experimentally are modeled using the Duffing oscillator equation with cubic nonlinearity. The polynomial frequency equation obtained from the multiple scales perturbation method is solved symbolically using a Matlab tool box.

This phenomenological model allows us to distinguish between a system with cracks, subjected to a stress-free boundary condition, and an intact one, subject to a contact friction boundary condition, both of which appear to behave dynamically in similar manner. The differences show up in the retrieved nonlinear coefficients (hard/soft spring coefficient  $\alpha_s$ , force  $f$ , and damping coefficient  $\mu_m$ ), of the Duffing oscillator frequency equation. This indicates that the nonlinearities of the two systems are of different nature. Moreover, the nonlinear vibration not only signals the presence of defects in the specimen, but also gives an indication of the degree of nonlinearity and damping in relation with the nonlinear material behavior.

It is shown herein, both experimentally and numerically (using a contact friction FES model), that nonlinear behavior of a dynamic system can result either from the presence of internal damage or from contact friction at the boundary of the specimen. If a bone (healthy or damaged) has a contact friction joint, it will exhibit a hard spring behavior if extra static loading forces are applied. This indicates the importance of taking into account the manner in which a specimen is connected to its environment and the possible static loading forces present when attempting to characterize it by nonlinear (as well as linear) vibrational spectroscopy.

Finally, the experimental and theoretical models developed herein have provided three clear indicators using experimental data from a unique measurement, enabling the detection and quantification of damage, and thus, presumably, the degree of damage due to microcracking (actually, the glass contains a large crack, not a series of microcracks; future experiments will be done with microcracked specimens). Two of the parameters are linear in nature (splitting of modes and frequency shifts) and the third is nonlinear (frequency shift with increase in excitation amplitude).

## 20.8 Acknowledgement

This research was supported by Action CNRS/Etats-Unis 2005  $N^{\circ}3321$ . We thank the reviewers for their useful comments and remarks.

## 20.9 Table captions

TAB. 20.1 – Recovered nonlinear Duffing model parameters,  $\alpha_s$  and  $\mu_m$  for the sound and cracked glasses under different boundary conditions.

TABLE 1

Boundary condition	Intact glass		Cracked glass	
	$\alpha_s$	$\mu_m$	$\alpha_s$	$\mu_m$
SFBC	0.001	0.0012	-150	0.0048
CFBC table	-65	0.0036	-100	0.0057
CFBC plate	-600	0.0190	-1100	0.0095

## 20.10 Figure captions

FIG. 20.1 – (a) A bovine-bone femoral shaft and its idealization, a drinking glass. (b) A glass vibrating with stress-free boundary conditions (suspended on nylon threads). The glass is then turned upside down and a contact friction boundary condition (CFBC) prevails at the interface between the glass specimen and (c) a fairly-smooth pine table. (d) a thick aluminium plate (dimensions  $22.5 \times 20.5 \times 1.5$  cm).

FIG. 20.2 – (1) Scheme of the experimental setup with one of the configurations; the glass placed on an aluminium plate. The excitation force and response are applied and measured respectively using piezoelectric (PZT) devices . (2) An extra input force is applied to the base (at the top in the figure) of the glass using two small mutually-repulsive magnets.

FIG. 20.3 – (a) The experimental response of the suspended (stress-free) bovine-bone. (b) The experimental response of the same bone with a contact friction boundary condition. The response is nonlinear.

FIG. 20.4 – The mode shapes and vector plots of their displacements for the modes used in the inversion algorithm to recover Young’s modulus and the Poisson ratio (a) 1111 Hz. (b) 2685 Hz. (c) 4489 Hz. (d) The mesh distribution, the deformed shape and the displacement vectors of the glass in CFBC with the support.

FIG. 20.5 – The computed acceleration (acc) (dotted lines), and the experimental (continuous line) response of the upside down glass. The contact friction coefficient on the interface between the glass and the supporting aluminium block is  $\mu_f = 0.17$ .

FIG. 20.6 – (a) The FES model (third mode) showing the arbitrarily chosen slit mimicking an open crack. (b) The computed response depicting the third and fourth resonance frequencies (second in-plane and out-of-plane modes) for the intact and the cracked (two sizes) case.

FIG. 20.7 – (a) The wide band experimental response spectrum of the intact and cracked glasses with SFBC. (b) The resonant responses in the vicinity of the third mode of the glasses and their peaks. (c) The resonant *peaks* after peak-picking. The peaks of the sound glass with SFBC do not change as the excitation amplitude is being increased (linear behavior). Those of the cracked glass are split (the in-plane and out-of-plane modes are different) and have shifted downwards. The lowest one shifts downwards as the excitation amplitude increases.

FIG. 20.8 – (a) The experimental spectra of intact and cracked glasses turned upside down on a plate (a contact friction boundary condition (CFBC) prevails at their interface). Note the multiplication of peaks (mode splitting) in the cracked case. (b) The glasses are on a massive pine table with CFBC. (c) The *peak* resonant responses in the vicinity of a nonlinear mode for the case in (a). (d) The *peak* resonant responses in the vicinity of a nonlinear mode for the case in (b). In (a) and (b) both glasses behave in a nonlinear manner that is, the resonance frequency shifts downwards with the increase in the amplitude of the exciting force.

FIG. 20.9 – The measured response (continuous line), the computed response (open circles) using Duffing’s equation. (a) The cracked glass with stress-free boundary conditions,  $\alpha_s = -150$  and  $\mu_m = 0.0048$ . (b) The intact glass on a plate with contact friction boundary conditions,  $\alpha_s = -600$  and  $\mu_m = 0.019$ . (c) The cracked glass in CFBC with a plate,  $\alpha_s = -1100$  and  $\mu_m = 0.0095$ . (d) The intact glass in CFBC with the table,  $\alpha_s = -65$  and  $\mu_m = 0.004$ . (e) The cracked glass in CFBC with the table,  $\alpha_s = -100$  and  $\mu_m = 0.0095$ .

FIG. 20.10 – Different normal loads (force variation by use of two repelling magnets, one fixed on the glass) are applied by approaching the second magnet while the excitation amplitude remains constant and the frequency is swept. The distances between the two magnets are indicated on the curves. The system exhibits a nonlinear *hard spring* behavior with an increase in the frequency and amplitude of the force.

## 20.11 Figures

Fig. 1a

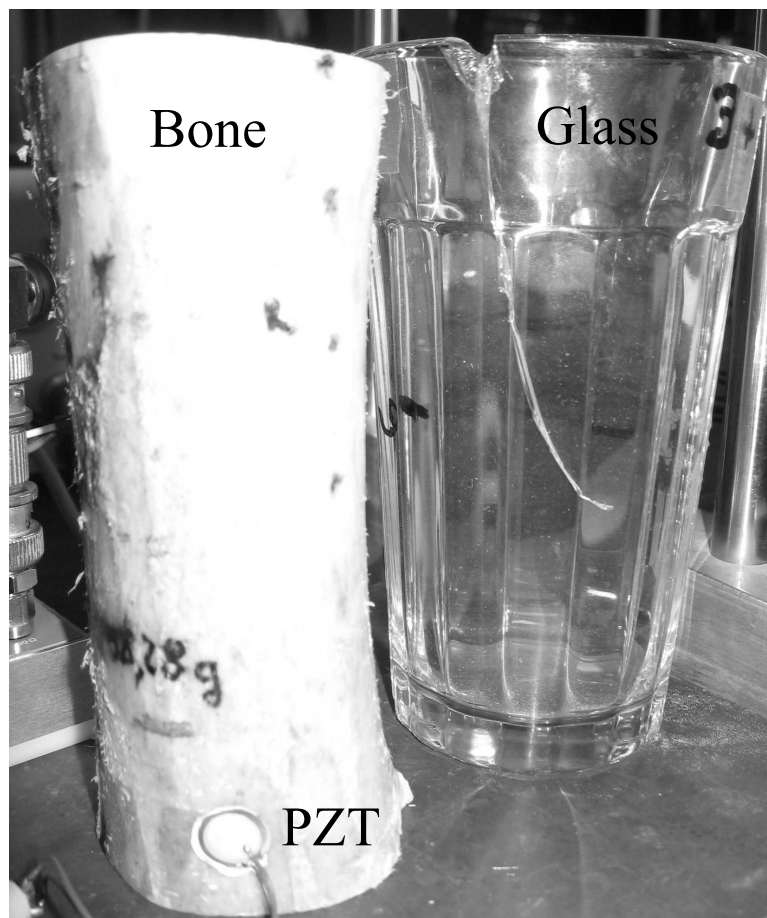


FIG. 1a-



Fig. 1b

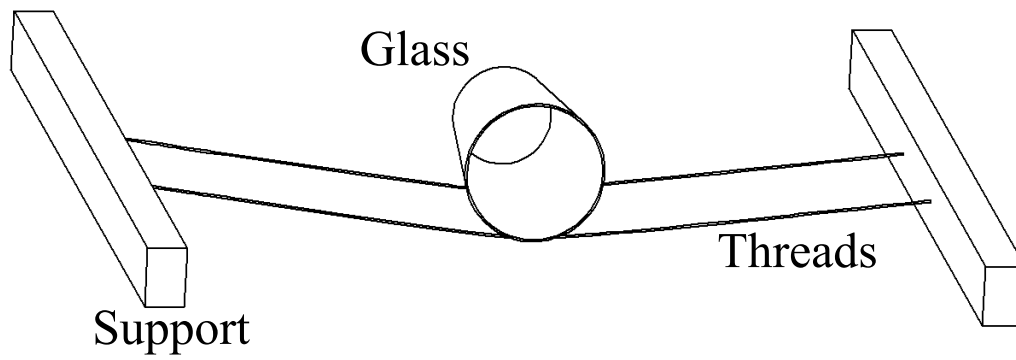


FIG. 1b -

Fig. 1c

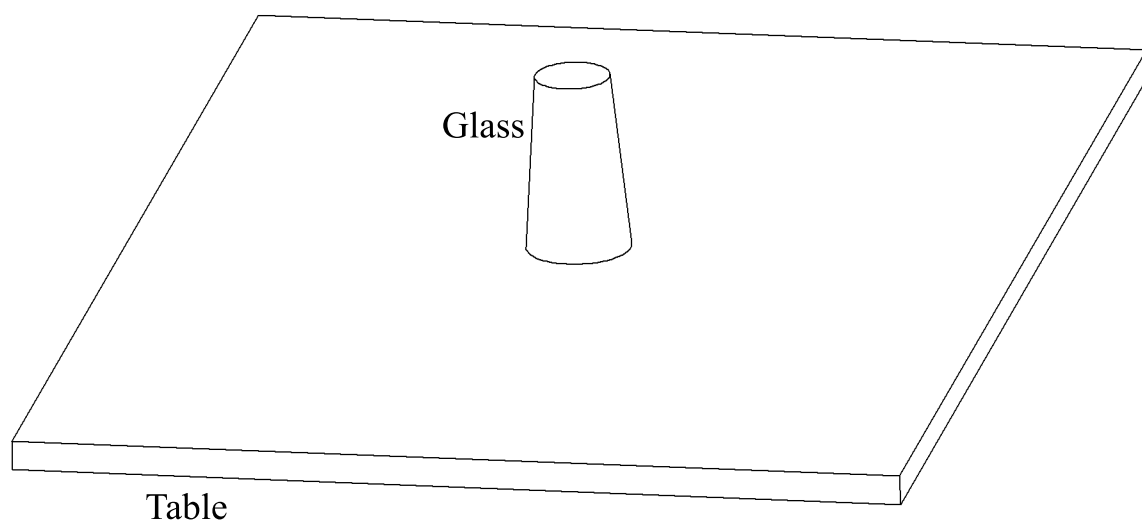


FIG. 1c -

Fig. 1d

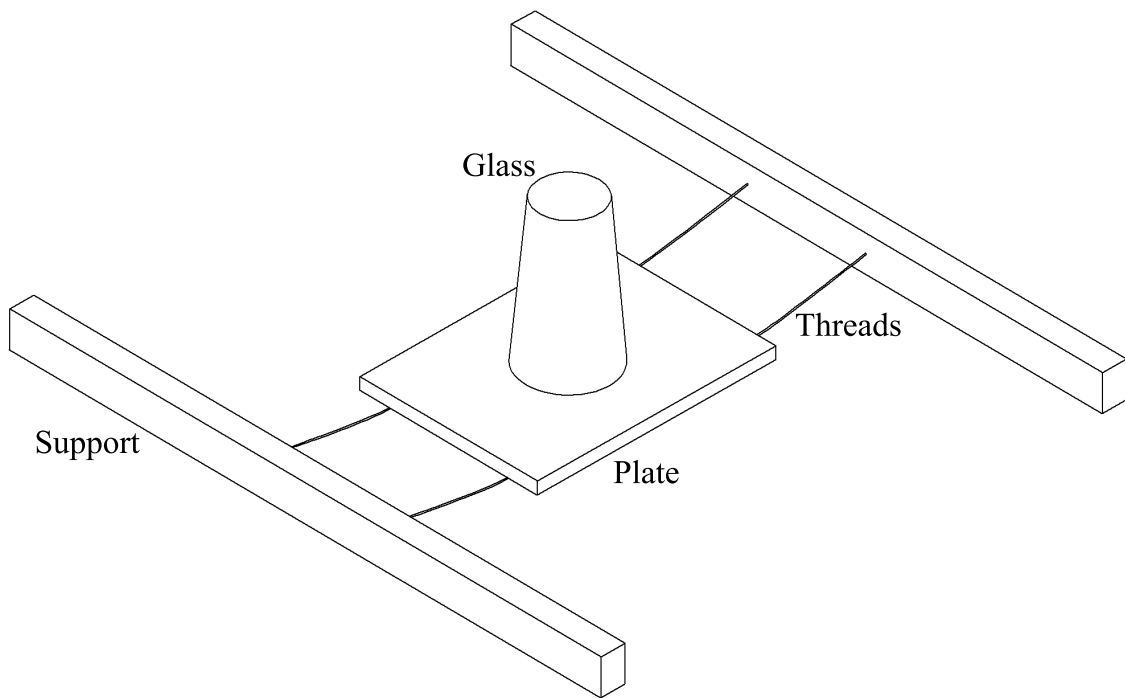


FIG. 1d -

Fig. 2

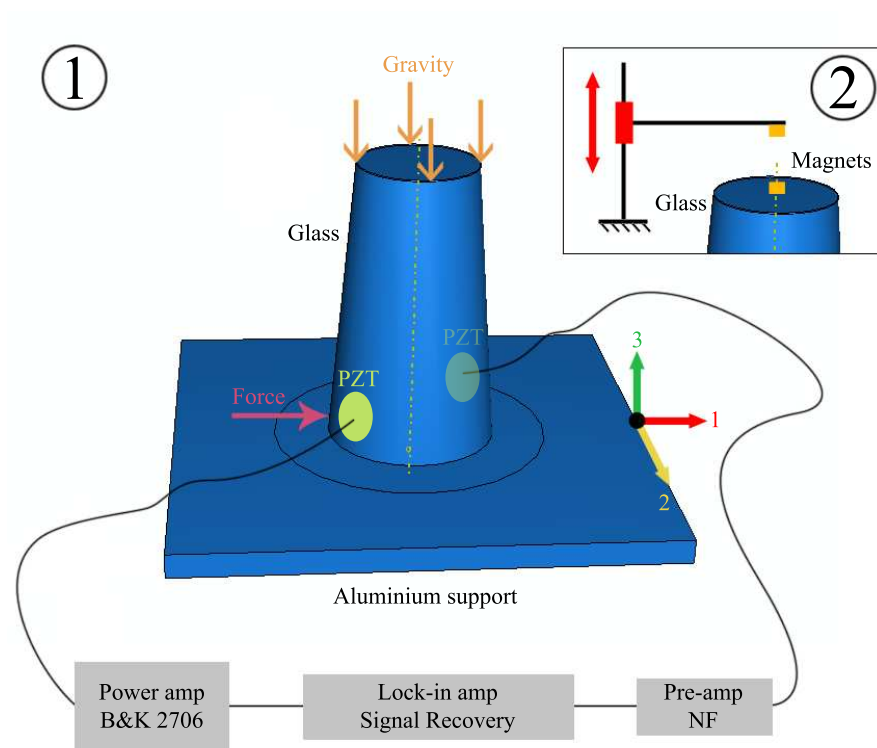


FIG. 2 -

Fig. 3a

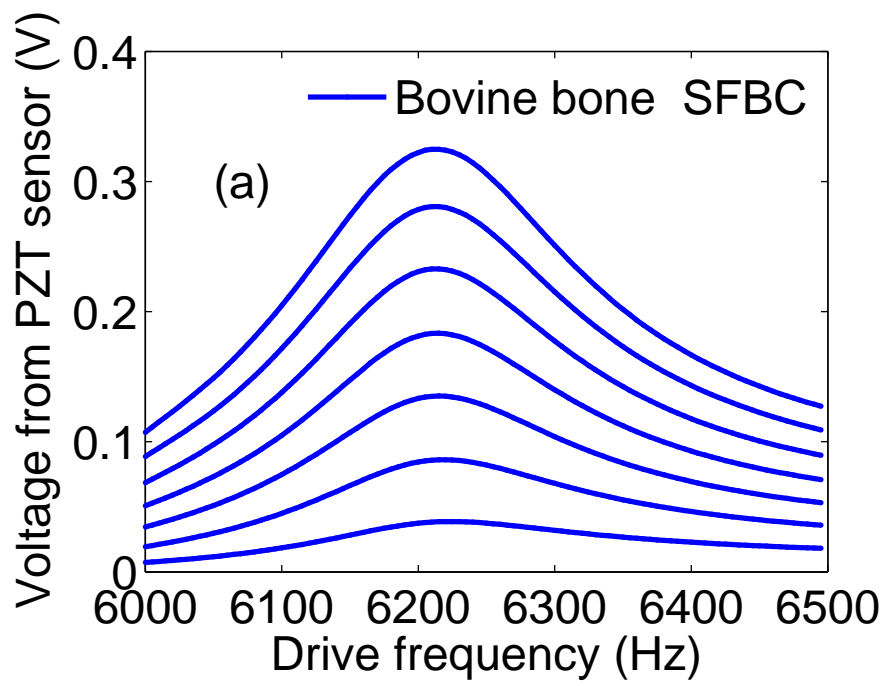


FIG. 3a -

Fig. 3b ù

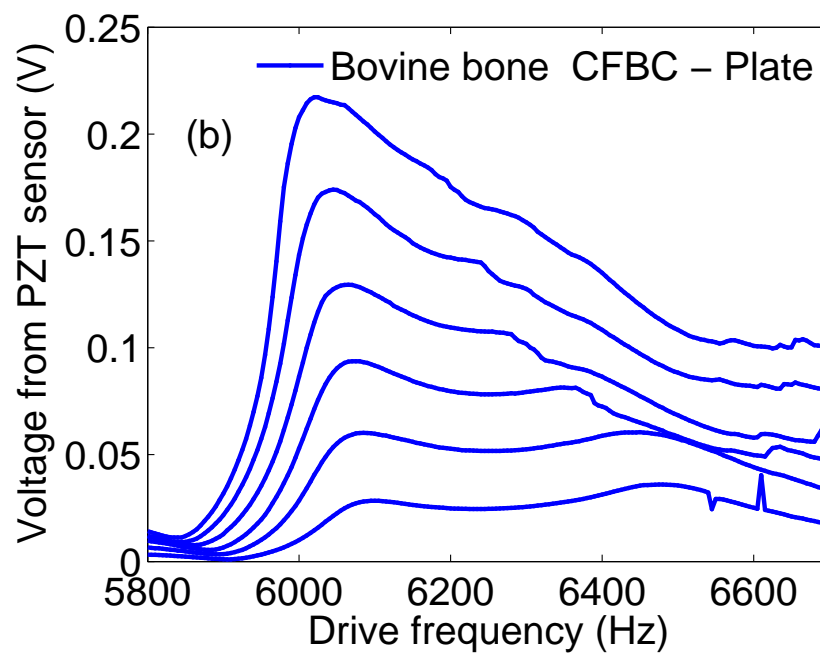


FIG. 3b -

Fig. 4

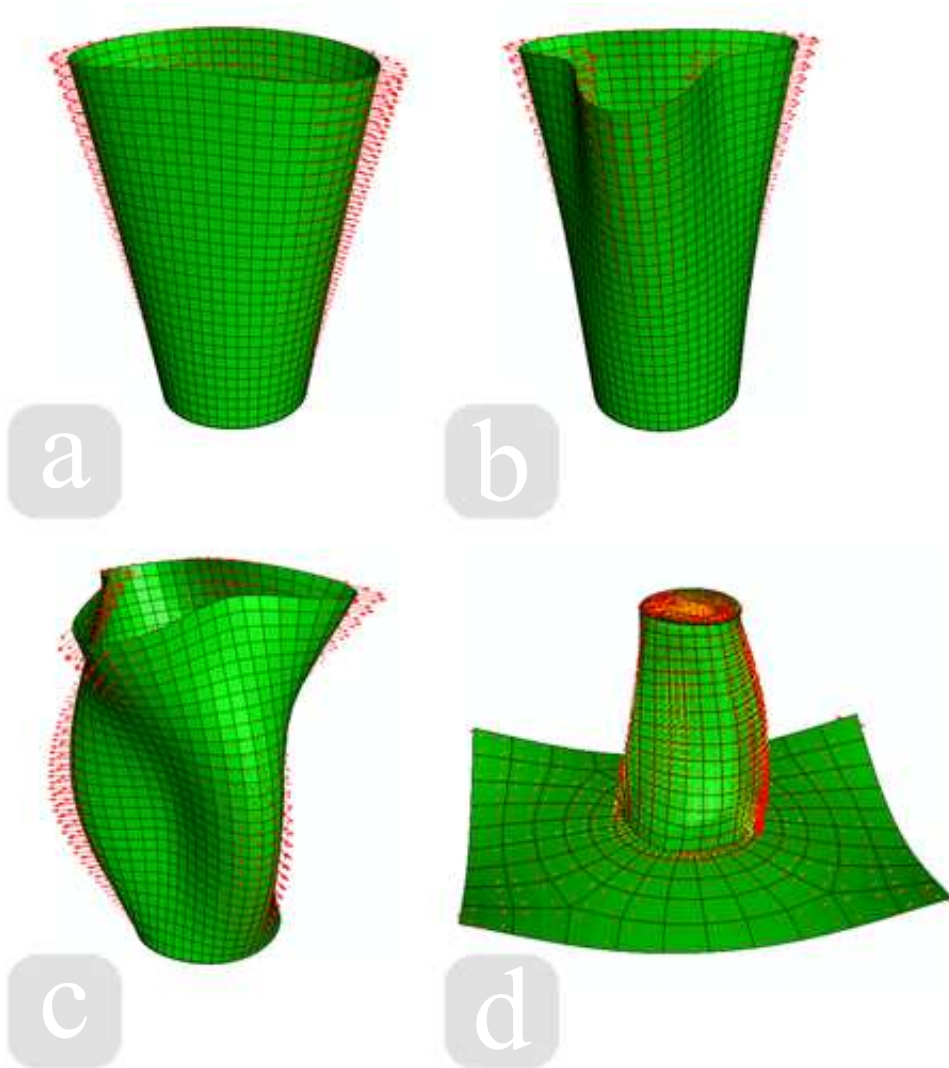


FIG. 4 -

Fig. 5

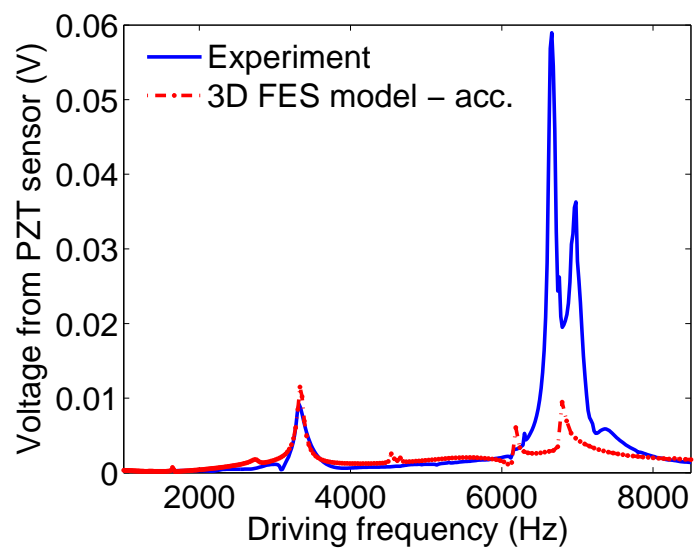


FIG. 5 -



Fig. 6a

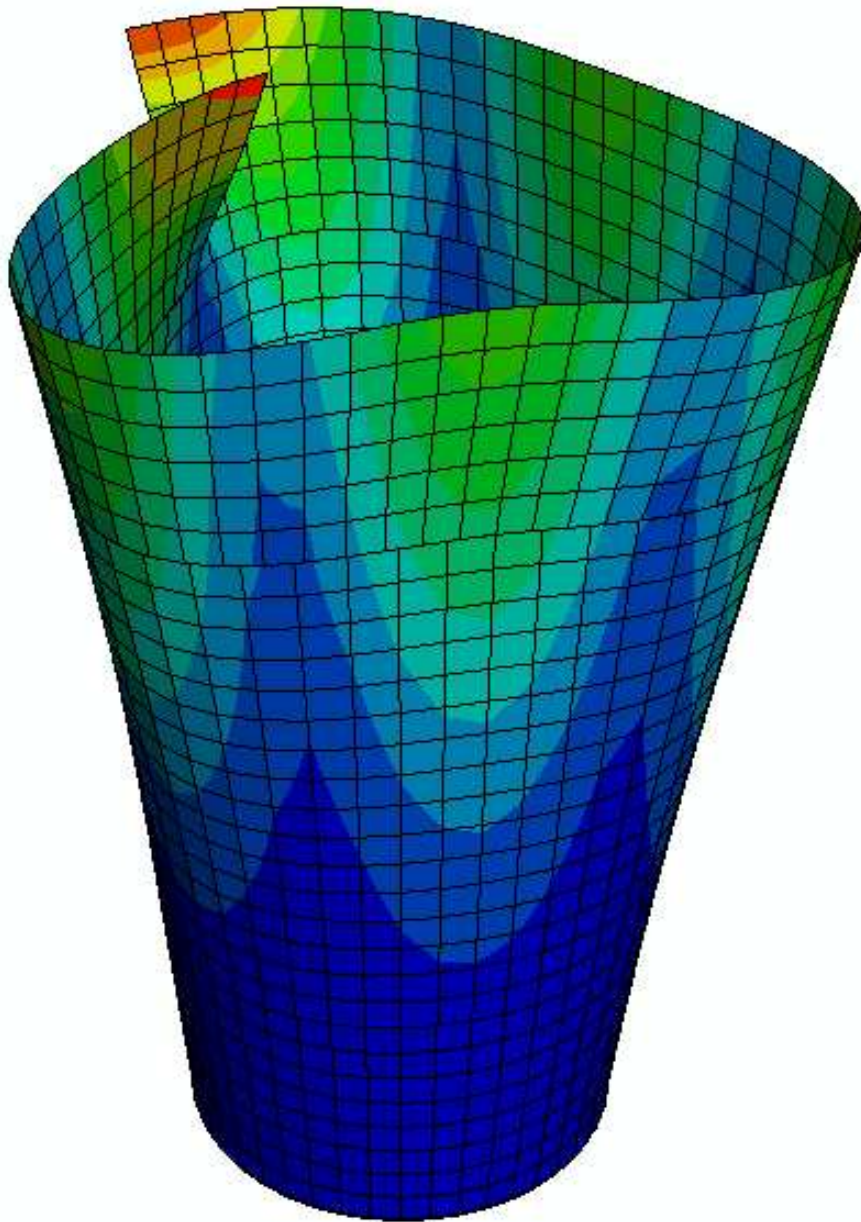


FIG. 6a -

Fig. 6b

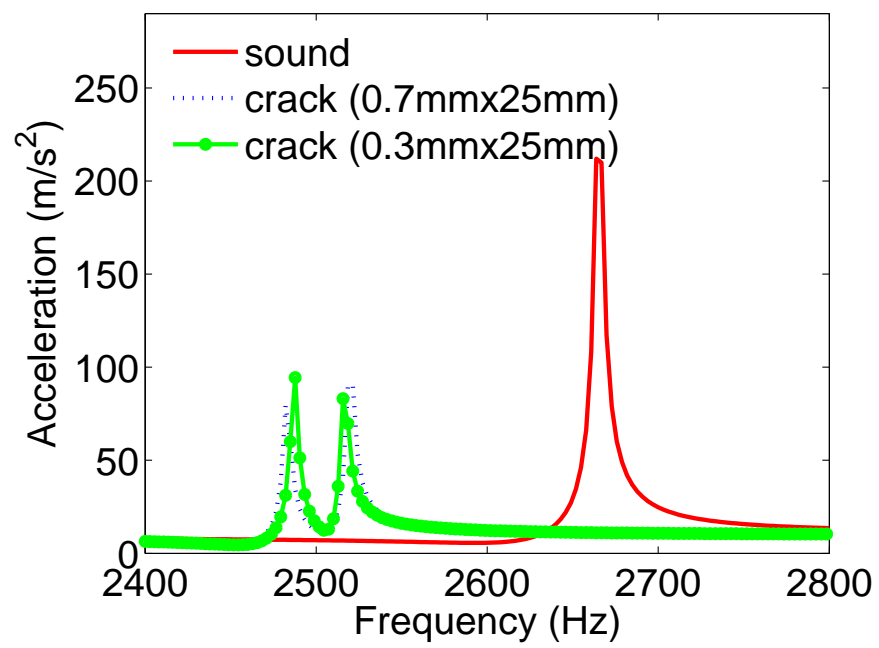


FIG. 6b-

Fig. 7a

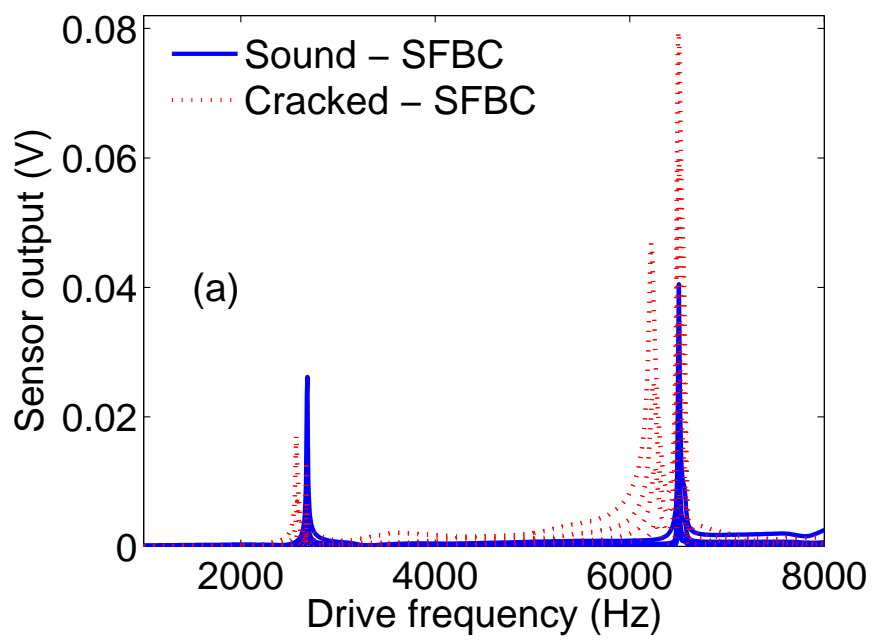


FIG. 7a -

Fig. 7b

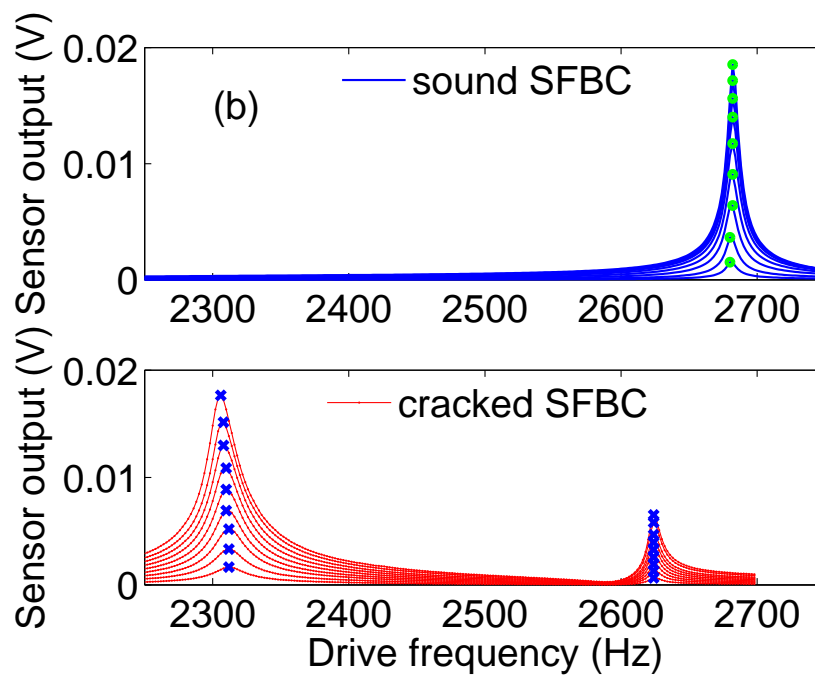


FIG. 7b -

Fig. 7c

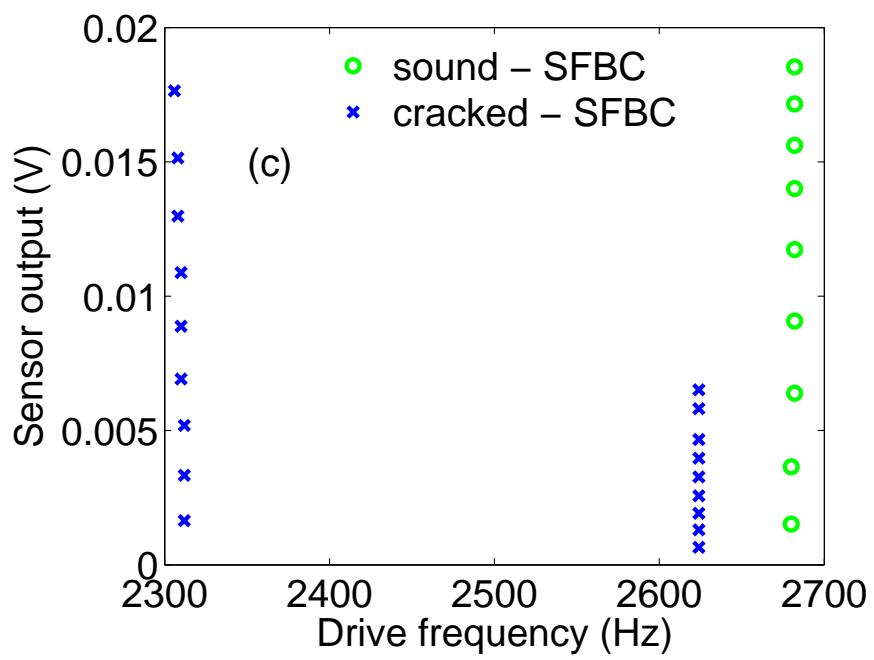


FIG. 7c -

Fig. 8a

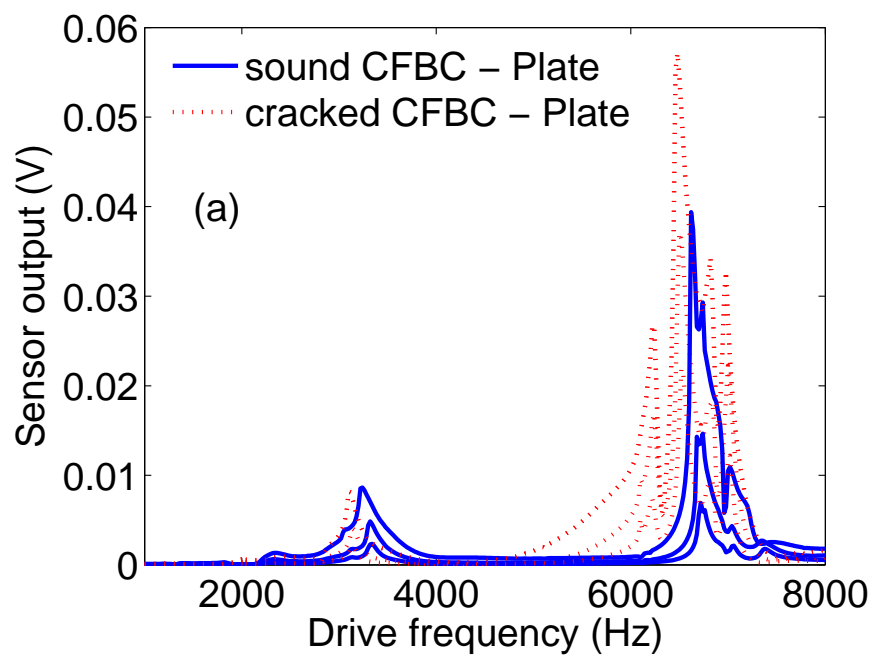


FIG. 8a -

Fig. 8b

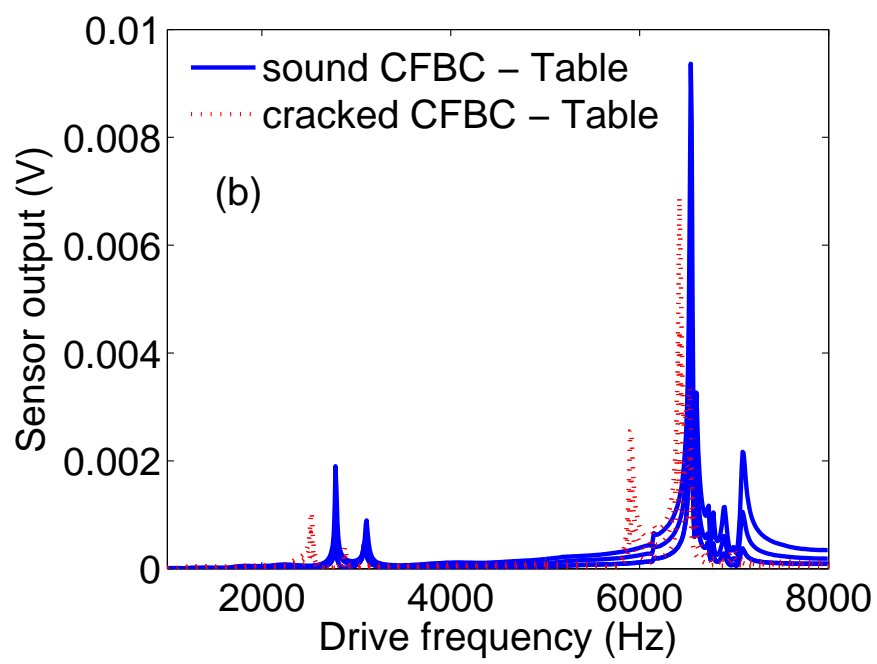


FIG. 8b -

Fig. 8c

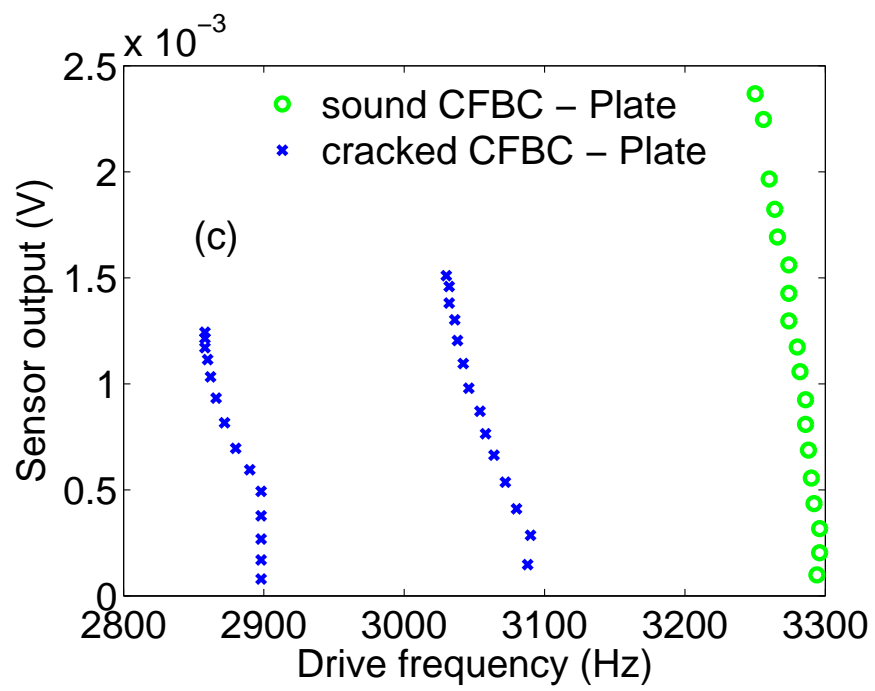


FIG. 8c -



Fig. 8d

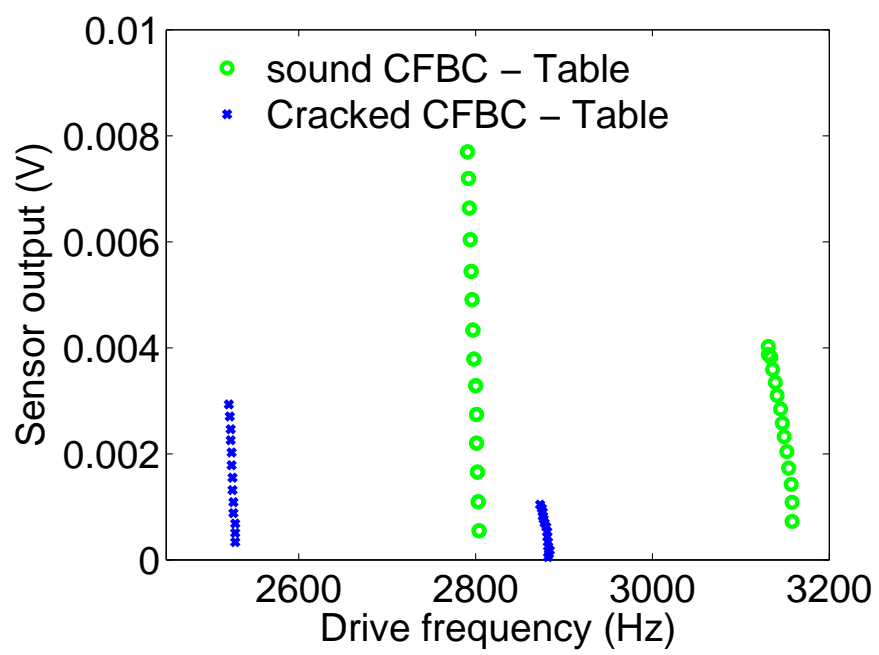


FIG. 8d -

Fig. 9a

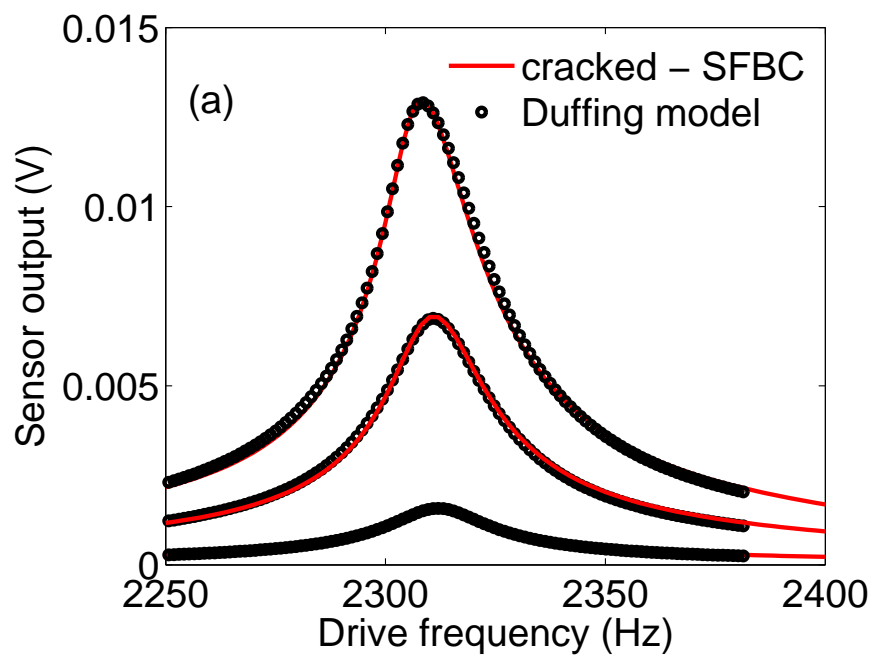


FIG. 9a -

Fig. 9b

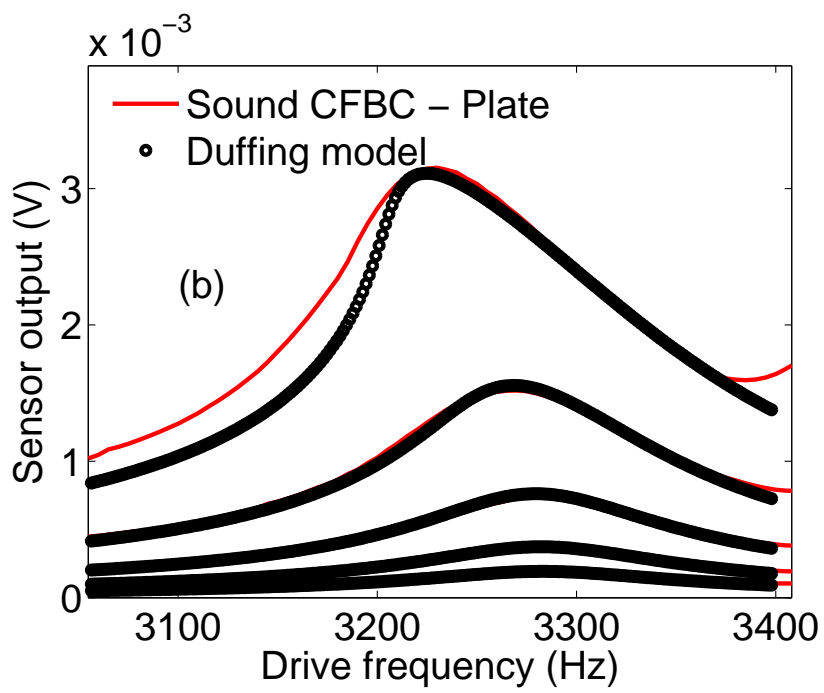


FIG. 9b -

Fig. 9c

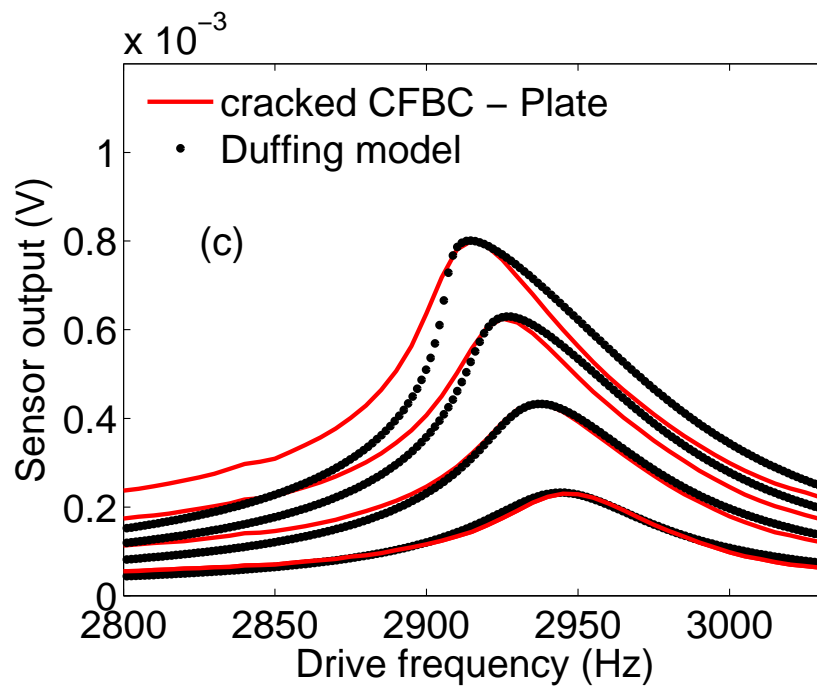


FIG. 9c -

Fig. 9d

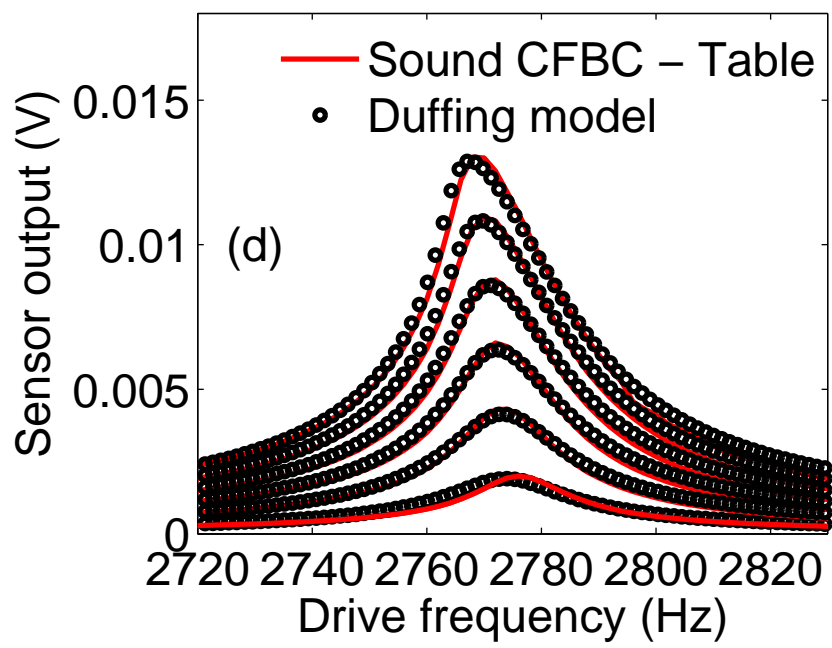


FIG. 9d -

Fig. 9e

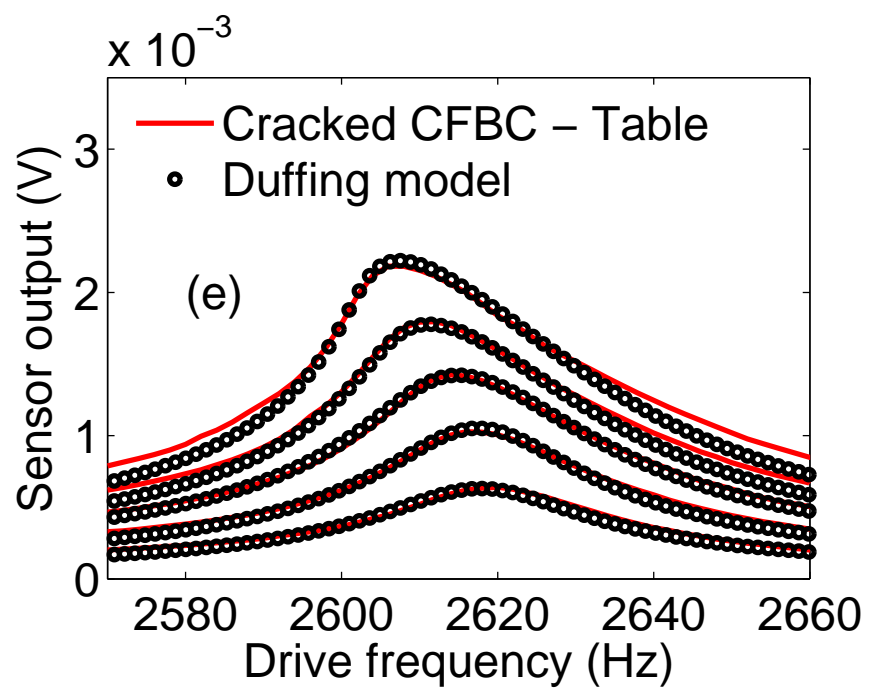


FIG. 9e -

Fig. 10

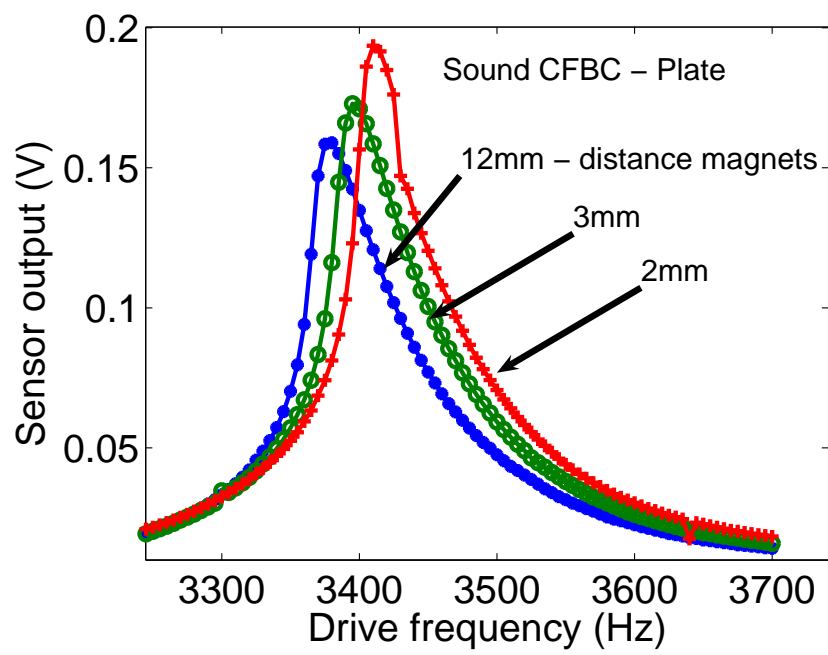


FIG. 10 -

## Chapitre 21

# Comparaison des résultats de caractérisation des méthodes ultrasonore et vibroacoustique

On compare les modules de Young et Poisson reconstruits à partir des fréquences de résonance vibrationnelles avec ceux obtenus par la méthode ultrasonore.

### 21.1 Introduction

Il est intéressant de comparer, dans la mesure du possible, les reconstructions de paramètres mécaniques que l'on obtient par les méthodes s'appuyant sur des données ultrasonores (voir le chap. 4) avec celles que l'on obtient par des méthodes de type vibroacoustique (voir les chaps. 11, 12).

Les objets (fantômes d'os) dont il s'était agi dans les deux types de méthodes étaient des cylindres circulaires pleins (homogènes et isotropes) de rayon  $a = 1,5\text{cm}$  et de longueur  $L = 23\text{cm}$ . Les matériaux dont ils étaient composés sont l'acier, l'aluminium et le nylon.



## 21.2 Comparaison des modules reconstruits

### 21.2.1 Rappel sur la manière d'obtenir les résultats par la méthode ultrasonore

Nous avons décrit l'expérience pour l'acquisition du champ ultrasonore diffracté dans le chap. 4. Ces données prenaient la forme de signaux temporels acquis à différents angles sur un cercle autour du cylindre. La densité du cylindre était mesurée en faisant appel au principe d'Archimède. Ensuite, le rayon  $a$  était déterminé essentiellement par temps de vol de la première arrivée du signal. La dernière étape reposait sur la minimisation de l'écart entre les signaux mesurés dans une certaine plage d'angles de observation, et les signaux correspondants fournis par l'estimateur. Celui-ci était le modèle exact spatio-fréquentiel (en termes d'harmoniques cylindriques) de la diffraction d'une onde plane monochromatique par un cylindre élastique (de longueur infinie) que l'on a soumis à une transformée de Fourier pour obtenir le signal aux points d'observation. Ce modèle a pour paramètres inconnus le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , la densité  $\rho$  et le rayon  $a$ . Comme au stade de la minimisation, on connaissait  $a$  et  $\rho$ , il restait les inconnus  $E$  et  $\nu$ . Nous avons supposé des valeurs de  $\nu = 0,333$  proches de beaucoup de solides homogènes, et avons donc cherché la seule valeur de  $E$  par le processus de minimisation. Celui-ci était basé sur l'algorithme de Nelder-Mead.

Les résultats obtenus ainsi sont donnés dans la deuxième colonne du tableau 21.1.

### 21.2.2 Rappel sur la manière d'obtenir les résultats par la méthode vibroacoustique

Les cylindres étaient suspendus (quasiment sans contraintes) dans l'air et excités par une chambre de compression orientée suivant l'axe du cylindre (excitation acoustique) dont on variait continûment la fréquence. La réponse vibrationnelle était captée par un accéléromètre ou pastille PZT collés sur la surface du cylindre. Les résonances des modes longitudinaux (direction  $x$ ) étaient représentées par le surgissement de maxima de réponse, et les fréquences

Spécimen	$E_x$ GPa vibration	E US GPa	Coefficient de Poisson vibration
Aluminium	73,4	71	0,34
Acier	209	204	0,308
Nylon PA6	2.78	2.68	0,392

TAB. 21.1 – Modules de Young et coefficient de Poisson reconstruits à partir des fréquences de résonance (étiquette "vibration") comparés à ceux obtenus par la méthode ultrasonore temporelle dans l'eau (étiquette "US"). Le coefficient de Poisson a été supposé égal à 0,333 pour l'inversion des données ultrasonores.

correspondantes  $f_n^{exp}$  notées. Ces fréquences, au nombre de ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) quatre, constituaient les données. De plus, nous avons mesuré le rayon  $a$  et la longueur  $L$  de chaque cylindre manuellement, et déterminé la densité  $\rho$  par le principe d'Archimède. L'estimateur faisait appel au modèle de Rayleigh [161] qui prévoit l'expression suivante pour les fréquences propres des modes longitudinaux  $f_n^{mod}$

$$f_n^{mod}(E_x, \nu) = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E_x}{\rho}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( n\pi\nu \frac{a}{L} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (21.2.1)$$

où  $E_x$  et  $\nu$  sont le module de Young et le coefficient de Poisson respectivement qu'il s'agissait de reconstruire. Ceci a été fait par minimisation de la fonction-coût

$$J(E_x, \nu) = \sum_{n=1}^{p=4} \left[ f_n - f_n^{mod}(E_x, \nu) \right]^2, \quad (21.2.2)$$

au moyen de l'algorithme de Nelder-Mead. Les résultats figurent dans la première et troisième colonnes du tableau 21.1.

### 21.2.3 Comparaison des valeurs du module de Young

Les valeurs reconstruites du module de Young des trois cylindres sont comparées dans le tableau 21.1.

On y observe une bonne concordance des modules de Young obtenus par les deux méthodes.

Bien entendu, il serait intéressant (mais nous l'avons pas fait) de faire ce type de comparaison sur d'autres formes de spécimens (extraits d'os réels, et non des fantômes), et des spécimens renfermant un milieu poreux saturé par différents fluides.



## Chapitre 22

# Vibrational spectroscopy and ultrasound propagation data as indicators of structural and mechanical degradation of human bones

Ceci est un article en cours de soumission pour publication.

## 22.1 Authors and affiliations

Erick Ogam, Armand Wirgin, Z.E.A Fellah

CNRS Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique UPR7051, 31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille, France.

Catherine Masson

INRETS - Laboratoire de Biomécanique Appliquée-UMRT 24 - Faculté de Médecine, (Secteur Nord) - Bd. Pierre Dramard, 13916 Marseille cedex 20, France.

*Keywords* : Bonne characterization, osteoporosis, human tibia bone, vibration spectroscopy, impulse, Inverse problem, mode splitting, ultrasound, shear wave velocity

## 22.2 Abstract

Vibration spectroscopy analysis of long bones is investigated as a tool to assess bone quality or integrity. Three different methods of vibroacoustic experiments are undertaken to determine the health of six dry human tibia bones.

In the experiment relative to the first method, the natural frequency and attenuation of the first flexural mode of vibration are obtained by inducing low frequency shear wave propagation in the bone from a hammer impact.

In the second method, the vibratory modes of the bone are excited and measured by piezoelectric transducers and sensors respectively.

The measured frequency response is validated using finite element simulation (FES), with the 3D geometry of bone obtained by laser scanning.

The principle of in-plane (IP) and out-of-plane (OP) mode splitting to determine the

degree of the damage, that we developed in an earlier study, is applied to classify the bones according to their degree of damage.

The third method involves measuring the ultrasonic shear wave velocity along the diaphysis of the tibias. In order to get an approximate mass distribution in the proximal and distal regions of a whole tibia bone in vitro without cutting it and weighing the parts, a simple method is developed, deriving from the principle of a seesaw and the determination of the center of gravity. A ratio of the measured length after balancing the bone on a pivot is shown to be approximately equivalent to that between the mass on the distal end and the total mass. This ratio is found to be highly correlated to the measured shear wave velocity acquired along the tibia shafts. The frequency difference between the peaks of the split modes are found to have an excellent correlation with the mass distribution ratio and the shear wave velocity - a measure for inferring bone material properties that is known to correlate well with bone strength.

## **22.3 Introduction**

### **22.3.1 Bone types and factors that influence their strength**

Human bone comes in two varieties : compact (or cortical) and cancellous (or trabecular, spongy). Compact bone is most abundant in the shaft of long bones and is hard and dense. Cancellous bone is porous (sponge-like) and is the principal ingredient of the vertebrae, hip bones and the extremities of long bones. Bone strength is largely related to bone density and bone mesoarchitecture and even microarchitecture. Health disorders in bone (such as osteoporosis) affect foremost the cancellous bone wherein they manifest themselves by noticeable changes in the bone density as well as the number, shape, thickness and connectivity of the trabecules [367].

The mechanical behavior of long bones is largely influenced by macroscopic geometric factors such as the mean diameter and cortical thickness. For example, the outer diameter of long bone can predict up to 55% of the variation in bone strength [8]. The same applies to the cortical thickness of trees whose trunks have been found to lose up to 34% of their strength when a decay or a hollow occupies the central portion of the trunk [220].

The strength of long bones depends not only on the properties of the cortical portion, but also on those of the extremities in which the cancellous variety is predominant. An imbalance between the densities and/or masses in these two extremities results in a deterioration of the strength of the long bone and can constitute an indication that the subject is suffering from a circulatory disorder.

### **22.3.2 Some diseases affecting bone**

#### **Osteoporosis**

The structure and composition of cancellous bone usually evolves favorably in the early stage (until puberty) of life, but unfavorably at the later stage due to reduction in bone mass with aging or disease. The considerable loss of bone strength in elderly persons results from changes in the geometry of the structure and, to a lesser extent, from changes in the material properties. Part of the density reduction is due to thinning of the cell walls, the

remainder to enlargement of circular perforations within the cell walls and to the collapse of part of the cell walls. From these observations studies have been undertaken to understand the material behavior of the cancellous bone by examining its mesoarchitecture (composed of a network of interconnected rods or plates) and methods developed to improve the understanding of the strength/structure relationship. Their mechanical behavior, which (in their dry state) is typical of cellular materials [148], has led to the adoption of methods used for the characterization of man-made plastic foams, fibrous or granular materials [136, 130] for the characterization of spongy bone slabs [132, 337]. Models of the tensile mechanical behavior of bone tissue to study the mechanical behavior of bones with lower mineral content (obtained experimentally by fluoride treatments of bone) have been refined to include microporosity (Volkmann's canals, osteocyte lacunae, canaliculi and blood vessels) that affect the mechanical properties of bone tissue and an organic phase whose mechanical properties are affected by mineral content [225].

When osteoporosis (which is an imbalance between bone resorption (the part of remodeling consisting of breaking down and assimilating) exceeds bone formation) sets in, usually consecutive to strong hormonal changes, cancellous bone becomes less dense, with fewer connected and thinner trabeculae, and more porous cortical components. This weakens the structural properties of the bone and lowers its mass.

### **Arteriopathy**

Hormonal disorders are not the sole reason for the prevalence of osteoporosis in menopausal and elderly women. Some other suspected risk factors like the reduction of the intraosseous vascular wall, and arteriosclerosis may be involved. It could be useful to systematically seek an obliterating arteriopathy of the lower limbs in osteoporotic men by measurements of the blood flow introsseous by means of a Positron emission tomography (PET) scan, correlated with densitometric studies, notably to establish the links between arteriosclerosis and the lower bone mass/osteoporosis of the distal tibia. To elucidate the molecular mechanism in relation to vascular supply and osteoporosis, Park et al [299] have investigated the effect of hypoxia on Runx2 expression in MG63 cells. They found that Runx2 expression in osteoblasts is reduced by hypoxia, and may be a mechanism of osteoporosis by decreased



vascular supply.

### 22.3.3 Well-established methods for characterizing the health of bones

#### X-rays

Bone mineral density (BMD) [81] alterations are the established indicators of increased fracture risk (especially of hip bones, wherein the consequences are the most serious) by the World health organization and are measured using X-rays. Although BMD is a good measure of bone strength, it has been reported that it explains only 20% of the variance in fracture number.

#### Ultrasound

A possible alternative to X-rays for diagnosis of disorders such as osteoporosis is ultrasound. The modeling of the wave propagation in cancellous bone is now based on the Biot theory [31, 32, 35] which describes the behavior of biphasic materials (in this case, a fluid filled porous solid) [192, 193, 337]. The basic idea is to employ ultrasonic waves transmitted and/or reflected from bone in the form of slabs or plates to infer their properties. This method, which is only applicable in an in vitro laboratory context, enables, although with difficulty [50], the recovery of some of the Biot parameters (e.g., porosity, tortuosity, viscous and thermal characteristic lengths). The use of tortuosity, rather than porosity and pore size, to characterize the cancellous structure has significant potential since it has been shown that tortuosity strongly influences the velocities of the fast and slow ultrasonic waves transmitted through the bone slab [132, 196, 337]. These studies are not yet at a stage mature enough to be applied in a clinical context, all the more so than they rely on the excision of piece of bone and cutting it into plate shape.

Lee et al [243] reported that the longitudinal ultrasound velocity (USV) assessed in situ using a commercial device on the human anteromedial tibia cadaveric specimens, correlated strongly with the tensile modulus and strength of tibia cortical bone removed from the ultrasound scan region. In Section (22.4.6) the method for measuring shear wave velocity on a dry human tibia bone shaft in vitro is presented.

## The impulsive vibroacoustic method

The hammer impact method to induce vibrations (essentially of the fundamental flexural mode) in the bone and an accelerometer to measure the vibratory bone response is the most widespread method [371, 188, 223, 280, 359, 360] for inferring the mechanical characteristics of bone. This method is presented in Section (22.4.4) wherein evidence will be given of the limits of its performance.

### 22.3.4 New directions in the characterization of bone

The complexity of the human bone geometry (which is rarely in the form of a plate, as is required in the ultrasound reflection/transmission technique) and of its natural environment inside the body, not to mention the relative difficulty of obtaining whole specimens from human cadavers, have been some of the major obstacles in the development of new, successful diagnostic tools.

Another factor that explains this relative failure is that the focus has been on small specimens of bone cut out of larger bones. This precludes any evaluation of the properties of one part of the whole bone relative to another part. This relation could be significant in the diagnosis of bone diseases that affect one region of the bone earlier or more strongly than another region. In fact, a study [172] has shown that postmenopausal women in nursing homes) who suffered symptomatic atherosclerotic vascular disease (AVD) also suffered osteoporosis or osteopenia to an extent that varied from one part of their long bones to another.

The imbalance in the remodeling process of bone results in damage accumulation in the form of micro-cracks. Osteoporotic bones are more micro-damaged than healthy bones. Macrocracks can result from the accumulation of damage due to fatigue loading. A study [294] of the influence of cracks on the vibrational response of a cracked shell-like solid structure, similar to a long bone, in which cracks were produced by thermal shocks, showed that their presence resulted in a nonlinear vibrational response i.e the resonance frequencies shifted with the increase in the excitation level.

In addition to the nonlinear effects, the natural frequencies of the in-plane (IP) and

out-of-plane (OP) vibrational modes of the bone phantom were found to be different. This difference was attributed to damage, that introduces a dissymmetry in the stiffness. It was found that the difference between these two natural frequencies increases with the amount of damage in the specimen. Recall that the separation of the IP and OP flexural mode natural frequencies of a *healthy* human tibia bone is also observed, but this is due to its geometry, i.e., to the triangular form of the cross-section which results in the IP and OP moments of inertia being different. For the glass phantom, the circular cross-section geometry implies that there should be no difference between the natural frequencies of the IP and OP modes provided the specimen is homogeneous, isotropic and healthy (not damaged).

In the present study, we apply the same principle to analyze the vibration modes of dry human tibia bones. The modes are computed using a finite element modal analysis on one of the bones whose exterior geometry is obtained by laser scanning.

For a more refined spectrometric analysis, the vibration response of the bone phantoms and real human tibia bones is developed in section (22.4.5) employing a piezoelectric disc exciter and a piezoelectric disc sensor. An optimization technique for recovering the mechanical parameters from the resonance frequencies of the specimens is also described in this section. The recovered mechanical parameters are used in the finite element simulation to compute the steady state vibrational responses of the specimens. This provides an analytical tool for determining whether the resonance peaks seen on the measured spectrum correspond to a single vibration mode or to a pair of (IP and OP) modes.

In section (22.4.3) we describe a method for computing the tibia bone mass distribution from a simple setup to determine the center of gravity of the specimen.

In section (22.6) the separation of vibration modes and the wave velocity along the principal bone axis are correlated to the measured mass distribution.

## 22.4 Bone specimens and the experimental means for their characterization

### 22.4.1 Bone specimens

Seven cadaveric dry human tibias, six from left limbs and one from the right limb, are employed for this study. No information (such as age, sex, life style etc.) is available for these specimens. An attempt will be made to classify four selected tibia specimens from the group according to their degree of "health" using multi-factorial characterization. The four specimens are :  $Tib_1, Tib_7, Tib_{19}, Tib_{40}$ . The reason for choosing these four is because they underwent all the tests and not the others owing to logistic problems. The three others are  $Tib_8, Tib_{18}, Tib_{39}$ .

### 22.4.2 Bone phantoms

For a detailed study of the splitting of modes due to the presence of damage (presence of cracks and/or microcracks), the bone specimens are replaced by objects with simpler, known geometry (shell-like) and (linear (at low excitation levels), homogeneous, isotropic, elastic) composition : (drinking) glasses (Fig. (22.1)).

### 22.4.3 Measurement of the center of gravity of the human tibia as an indicator of mass imbalance in the bone

The objective is to determine in a non-destructive manner, how approximately the mass is distributed between the proximal and distal portions of the tibia.

To do this, the tibia is placed horizontally on a small, upright, circular tube (diameter 2.5 cm, thickness 2 mm) acting as a pivot as shown in Fig. (22.2). The tibia can be visualized as a uniform beam with two masses attached at its extremities. The position of the tibia on the cylinder is adjusted until equilibrium is attained. The position of the cylinder then corresponds to the center of gravity (CG) of the bone. Let  $L_1$  be the distance from the proximal end (PE) to the CG on the tibial epiphysis,  $L_2$  the corresponding distance of the

distal end (DE). The measurements of these distances are given in Table (22.1). If the tibia were a uniform beam with two masses attached at both ends ( $m_1$  at the PE and  $m_2$  at the DE), then  $\frac{L_1}{L_1+L_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ . This ratio represents the relative mass of the distal portion, and, if the volumes of the two masses are approximately equal, the same ratio represents the relative density of the distal portion of the tibia. Thus any method that can detect in vitro (which is not possible by this CG technique, but may be possible by other methods, as will be shown hereafter) an imbalance of density (or mass) may be useful in the diagnosis of bone degradation (including osteoporosis) resulting from blood circulation disorders.

The seesaw (static balance method) is widely used for the helicopter rotor blade balancing maintenance where the critical parameter is the equalization of *mass distribution* i.e. control of the blade span CG. A mismatch of blade CG (Span moment arm) will produce a significant and undesirable lateral vibration and which might eventually result in a crash of the aircraft.

#### 22.4.4 The hammer-impulse experiment

We determine the vibrational response parameters (i.e., resonance frequency and attenuation) of a whole tibia bone outside its natural environment.

A piezoelectric hammer is employed to excite a flexural vibration mode in the tibia. The latter is suspended by nylon threads so as to simulate a stress-free boundary condition. The bone is impacted sideways as depicted in (Fig. 22.3a). The impact point is situated on the medial malleolus and the response is measured at the center of the medial surface using a featherweight accelerometer (Brüel and Kjaer B&K4374) (Fig. 22.3b).

The response to an impulsive excitation (in fact, a Dirac in the time domain) of a linear system modeled as a single degree of freedom (SDOF) system with viscous damping,  $C$  and damping coefficient  $\zeta$  ( $0 < \zeta < 1$ ) is given by [90]

$$u(t) = \hat{u}e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi) = \hat{u}e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (22.4.1)$$

wherein  $u$  is the displacement,  $\hat{u}$  is the amplitude,  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$ ,  $\zeta = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$ ,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $M$  the mass and  $K$  the stiffness.

The natural frequency of the mode is determined from the distance between the peaks of temporal acceleration response and the attenuation  $\alpha$  is obtained from the logarithmic decrement [90] of the decaying peaks of this response (Eqn. 22.4.1).

The interest of this method lies in its ability to detect changes in the material/structural properties (i.e., elastic moduli) of a specimen from changes in its vibrational response (notably, the resonance frequency) to an impulsive solicitation.

The theory underlying this assertion is quite simple. For a long bone (length ( $L$ )  $\gg$  diameter) vibrating in a bending mode, the flexural natural frequencies  $f_n$  of vibration, in the Euler-Bernoulli beam model, are given by [161]

$$f_n = \beta_n \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad (22.4.2)$$

wherein  $n$  is the mode number,  $A$  the cross-sectional area of the beam, and  $\beta_n$  a constant depending on the boundary conditions. The elastic modulus  $E$  is taken in the longitudinal direction of the bone. The area moment of inertia,  $I$  is a property of the shape and is related to the resistance to bending and deflection. The ratio  $\frac{EI}{\rho A}$  is the specific bending rigidity and indicates how effectively the beam material  $\rho A$  is distributed with respect to the bending rigidity (stiffness)  $EI$ .

Several clinical studies have suggested that if bone stiffness could be measured (indirectly via the above formula, from data concerning the resonance frequencies), it could enable to predict bone yield strength [112, 144, 246]. In [112] a strong correlation was also found between the measured stiffness and bone mineral content.

### Signal processing of the vibrational impulse response

A light hammer impact on the bone results in a decaying temporal response signal modulated by the first flexural resonance mode. The goal is to determine the resonance frequency and attenuation constant  $\alpha$  of the fundamental mode .

The signal is first smoothed using a zero-phase digital filter by processing it in both the forward and reverse directions[270]. After filtering in the forward direction, the filtered sequence is reversed and run back through the filter. The resulting sequence has precisely zero-phase distortion and the filter order is doubled. The peaks of this sequence of sinusoids

are picked and in the first case a linear regression is performed on the log of these points to give the attenuation. In the second case an optimal fitting of a non-linear function to a set of experimental data is undertaken. The Nelder-Mead simplex (direct search) algorithm is used to minimize the nonlinear cost function  $\mathfrak{J}$  of the discrepancy between the picked peak points on the sinusoids and the vibration decay model given in (22.4.1) :

$$\mathfrak{J}(\alpha) = \sum_{n=1}^{n=m} (u_0 e^{-\alpha t_n} - \ddot{u}_{\text{experiment}}^{n,\text{peak}})^2 \quad (22.4.3)$$

where  $\ddot{u}_{\text{experiment}}^{n,\text{peak}}$  are the peaks of the measured decaying acceleration signal and  $n = 1, 2, \dots$  the sample number,  $u_0$  an amplitude to be recovered.

The curves showing the decaying acceleration response measured by an accelerometer, the filtered sequence of the decaying sinusoids, the peaks of the sinusoids, and the ones obtained from the recovered attenuation coefficient  $\alpha$  obtained after optimization are depicted on Fig. (22.4).

## 22.4.5 Experiment employing piezoelectric transducers

### Experiments on bone phantoms

Three glass specimens, one sound (GS), and two (GC1 and GC2) with small cracks are employed as bone phantoms in this experiment. GC1 has a crack  $\sim 1.2$  cm long. GC2 has a crack of 1.4 cm long bordered by microcracks (Fig. 22.1).

The specimens, suspended by nylon threads to simulate stress-free boundary conditions, are excited by means of a small (1.0 cm diameter), light-weight axial piezoelectric (PZT) transducer driven in discrete frequency and amplitude steps using a Signal Recovery 7265 DSP Lock-in amplifier through a Brüel and Kjaer B&K2706 power amplifier. The response is measured by a second piezoelectric transducer (sensor) whose output is amplified using a low noise NF SA-200F3 preamplifier connected to the input of a 7265DSP synchronous demodulating amplifier (Fig. 22.5).

Both the excitation and sensor transducers are made of a thin disc of piezoelectric ceramic bonded to a thin metal diaphragm[9]. When the PZT sensor is bonded to a deforming vibrating surface, a mechanical deformation is induced in the polarized crystal (resulting

from tension and twisting of the sensor) leading to the generation of an electric charge. Likewise, when the PZT crystal is submitted to a modulated electrical solicitation, it vibrates (and induces a stress wave). The light weight (0.11 g), small size (1 cm diameter) and flat structure form of the PZTs facilitate their mechanical fixation on structures, with negligible influence on the vibrational response as compared, for instance, to accelerometers.

### **Experiments on bone**

The experiments on the tibias proceeds in the same manner (see fig. 22.5). The bones are suspended by two nylon threads so as to put the tibias in a horizontal position and simulate a stress-free boundary condition.

### **Finite element simulations to obtain the mode shapes and natural frequencies of bone phantoms and real bones**

The aim of this part of the study is to test the experimental procedure by comparing the measured response to that obtained from theoretical models. This is done for one of the glasses and one of the human tibias. In order to limit the error in the geometry of the tibia to be used for the 3D finite element simulation (FES), its exterior geometry was laser-scanned and digitized.

We employ a simplified material model based on the supposition that the glass and bone are homogeneous, isotropic, and linear elastic.

The volume of the glass was measured using Archimedes' principle. >From the weight (306 g) measured using a Denver Instrument SI-4002 balance, a density of  $3700 \text{ kgm}^{-3}$  was obtained. This density was then used to calculate the weight from the volume computed from the glass geometry, drafted on SolidWorks design software. The same weight as measured on the balance was obtained confirming the conformance of the drafted geometry with the real one. This geometry was then exported into a commercial finite element code Abaqus for the computations.

The same procedure was adopted for the bone and gave rise to a weight of 0.166 kg as compared to 0.165 kg by weighing with the Denver Instrument SI-4002 balance.



The bone and glass are meshed in different models. Once the models are assembled, the elastic properties of the glass and tibia to be employed in the two FES models for the computation of the vibration spectrum are required.

The mechanical parameters are retrieved using : i) the measured resonance frequencies data of the glass and the tibia bone (considered isotropic and homogenous). and ii) a model of the resonance frequencies resulting from the solution of the eigenvalue problem for the natural modes. The discretized form (for computation) of this model without the damping and forcing terms [195] takes the form

$$(\lambda_{eig}^2 M^{mn} + K^{mn})\Phi^n = 0, \quad (22.4.4)$$

with  $m = 1, 2 \dots, n = 1, 2 \dots, M^{nm}, K^{nm}$  the mass and stiffness matrices respectively,  $\lambda_{eig}$  the eigenvalue and  $\Phi^n$  the eigenvector (i.e., the mode of vibration).

A simple (Rayleigh damping) method is employed to account for the dissipation in the specimen, and manifests itself by the equivalent viscous damping  $C_{eq}$  in the steady-state linear dynamic equation [186, 195]. More specifically, Rayleigh damping is expressed by

$$C_{eq} = C_{(M)}^{nm} + C_{(K)}^{nm} = \alpha M^{nm} + \beta K^{nm}, \quad (22.4.5)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are constants (characteristics of the material, which, like the elastic moduli, will also be identified).

The homogenized dry human tibia density  $\rho = 601 \text{ kgm}^{-3}$  obtained in the previously-described manner was introduced into the commercial Abaqus FES software. This value of the density is approximate, in that the interior of the bone is not really homogeneous and isotropic as is supposed in the model.

The inverse problem for both the glass and bone then reduces to the recovery of the mechanical parameters of these objects, constituted by their Young's modulus ( $E$ ) and Poisson ratio ( $\nu$ ), using data concerning the experimental resonance frequencies and the FES to furnish model resonance frequencies.

### Inversion of vibroacoustic data (resonance frequencies) to recover the Young's modulus and Poisson ratio of bone

Three resonance frequencies, 1800, 3540, 5120 Hz, of the glass were employed in the inversion. The corresponding OP and IP mode deformation shapes are shown in Fig. (22.6).

Only the first two modes of the tibia were employed in the inversion for this specimen, as the others at higher frequencies are split so that attributing a mode number to a peak no longer makes sense. The corresponding mode deformation shapes are depicted in Fig. (22.7).

The sought-for  $E, \nu$  are solutions of the problem of the minimization of the cost function

$\mathfrak{J}$

$$\mathfrak{J}(E, \nu) = \sum_{p=1}^m \left\{ f_{experiment}^p - f_{model}^p(E, \nu) \right\}^2 \quad (22.4.6)$$

which expresses the discrepancy between the model (22.4.4) and experimental resonance frequencies, and in which :  $f_{experiment}^p$  is the target resonance frequency obtained by experiment,  $p = 1, 2 \dots$  the mode number,  $m$  the number of modes (here  $m = 2$  for the tibia and 3 for the glass) and  $f_{model}^p$  the natural frequency furnished by the model for the current trial value of  $E$  and  $\nu$ .

The minimization is carried out using the Levenberg-Marquardt algorithm (implemented in the *lmdif* routine from *Minpack*, conceived at the Argonne National Laboratory).

The retrieved parameters for the bone are  $E = 19.5 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.26$  and those for the glass are  $E = 30 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.22$ .

These parameters, together with Rayleigh damping ( $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 1.0e - 8$  - chosen to enable the fitting of the experimental response) were employed in the computation of the 3D FES steady state acceleration [186] response of the drinking glass (described by 14484 nodes, 8461 tetrahedral elements - of quadratic geometric order) and compared to the measured response of the sound glass (GS) in fig. 22.8. Although the amplitudes of the peaks of the two curves are quite different (probably because the theoretical model is too simple), the experimental and theoretical resonance frequencies are nearly the same, thus validating the experimental procedure.

Note that this experimental method is superior to the hammer-impact method in that it enables to excite more than one mode, thus providing more data for the inversion procedure

whereby the mechanical parameters of the specimen can be recovered.

#### **22.4.6 Ultrasonic wave propagation measurements along the bone epiphysis**

The ultrasonic wavespeed (UWS) method of the characterization of bone enables the recovery of some of the localized (in the portion of the bone between the emitter and receiver) bone parameters in contrast to the global parameters that are obtained by vibration analysis. A fairly-strong correlation has been observed between UWS and DXA-based BMD [18] which is a good reason to retain the UWS method (amongst others) for diagnostic purposes

#### **Measurements of the velocity of longitudinal and shear waves propagating along the long axis of bone**

Ultrasonic wave measurements were performed on the epiphysis of the human tibia bones using two Panametric videoscans V151 500KHz contact (and a water soluble high viscosity couplant) shear wave transducers. A Panametrics 5058PR pulser/receiver forms and delivers the pulse to the emitting transducer and subsequently receives the pulse from the second transducer. The pulse waveform on the receiver is captured using a TDS 3032B oscilloscope. The experimental setup is depicted in Fig. (22.9). To improve the signal-to-noise ratio of the measured pulses (Figs. 22.10a,b), 512 samples of the temporal signals are averaged.

The transit time from the transmitter to the receiver for the shear wave in the human tibia bone is depicted in (Fig. 22.10b) and is denoted by  $t_S$ . A first arrival that we attribute to the presence of a longitudinal wave occurs at time  $t_L$ .

Discrete values of the transducer distance (since the transducers are not small (diameter 3.0 cm), the distance is taken to be center-to-center) along the epiphysis and the corresponding time of flight (TOF) of the shear wave pulses are plotted in (Fig.22.11). These points are employed to obtain, by linear regression, lines whose slope gives the shear wave velocity. This is done for four tibia specimens in Fig.22.11.

At close distances between the transducers, the signal-to-noise ratio is high for both the shear and longitudinal waves, but the measured velocities are not precise because of signal

overlapping. The best distances for determining the velocities were found to be 8.0 cm-20.0 cm. For some of the tibia specimens, a smaller separation of 4.0 cm gave acceptable results, with this point being not far from the regression line ( $\sim \pm 5\%$  difference).

### **Measurements of the velocity of longitudinal (P) and shear (S) waves propagating along the long axis of a phantom**

To verify whether this experiment is giving acceptable results for the velocity, we used a simpler geometry of a known material: an aluminium tube. The received pulse for the aluminium tube is depicted in Fig. 22.10b relative to shear waves. The slope of the regression line for the aluminium tube yields a shear wave velocity of 3111 m/s, a value close to the one reported in the literature measured on an aluminium plate (3120 m/s) employing quasi-Stoneley waves[69].

The shear wave velocities measured here in the human cortical (because the wave travels predominantly in this layer) tibia are of the same order of magnitude as those published in the literature for bovine bone [113, 265, 308, 393]. We found no directly-measured data for the shear velocity in the human cortical bone. The shear wave velocity of  $1500 \pm 140$  m/s was measured ex vivo for three human calvaria (skulls) [379]. They also measured the longitudinal wave velocity for the same specimens and found a value of  $2820 \pm 40$  m/s).

If required, the longitudinal wavespeed is obtained in the same manner as the shear wavespeed via the early arrivals at  $t_L$ . The peaks that are seen earlier than  $t_L$  in the time histories of response for the aluminium tube correspond to propagation modes that are of no interest in this study.

### **A method for recovering the Poisson ratio from P and S wave velocities**

Whereas vibration analysis provides information on the mechanical properties and bending rigidity, of the whole bone, ultrasound wavespeed is related approximately (this formula is for an isotropic material, but real bone is not isotropic) to bone tissue properties by the basic formula

$$v_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad v_S = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (22.4.7)$$

wherein  $\nu$  is the Poisson ratio.

The resonance frequency and UWS both provide the ratio  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , so an independent measure of the density  $\rho$  is necessary in order to retrieve the elastic modulus and consequently the stiffness. CT-scan imaging can provide three dimensional geometries from which can be extracted bone densities using CT numbers [318, 359], but this is neither everyday clinical practice, nor was it done in our study. If both the P and S wavespeeds are measured, then the Poisson ratio can be determined by

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\left[ \left( \frac{v_L}{v_S} \right)^2 - 2 \right]}{\left[ \left( \frac{v_L}{v_S} \right)^2 - 1 \right]} . \quad (22.4.8)$$

which is a consequence of the previous two formulae. The list of Poisson's ratios for some of the dry human tibia are given in Table (22.1).

## 22.5 Results

### 22.5.1 Mass and density imbalance in the bones

As pointed out earlier, the center-of-gravity experiment gives an indication of how the mass/mineral density is distributed in the tibia. The lengths  $L_1$  and  $L_2$  from which the distribution is calculated are listed including the weights of the bones in Table (22.1)

### 22.5.2 Dominant mode frequency and damping coefficient as determined by the hammer impact method

The resonance frequencies and damping coefficients computed from the hammer impulse decay measurements are listed in Table (22.2).

Van der Perre and Lowet [371] found, for measurements of resonances in vitro on dry osteopaenic human tibia bones, that the average lowest OP frequency (OP1) was 492 Hz and the lowest IP frequency (IP1) was 670 Hz, values that are lower than those of a control group considered normal (OP1 frequency of 518 Hz and IP1 frequency of 694 Hz) . These authors considered a bone to be osteopaenic using a criteria of weight.

We, on the other hand, find that the total weight of the dry bone is poorly correlated to most of the health indicators enumerated above (such as the mass imbalance).

### **22.5.3 Mode splitting as observed by piezoelectric transducer vibration spectroscopy**

#### **Aspects of mode splitting that are pertinent to damage evaluation**

It was shown by Ogam et al. [294], both theoretically and experimentally, that the presence of damage in the form of cracks results in shifts of resonance frequencies, modifications of the heights of resonance peaks, and splitting of the out-of-plane and in-plane modes. These authors also showed that an increase in excitation amplitude can provoke nonlinear vibration behavior (i.e., a shift of the resonance frequency with increasing amplitude). This study was carried out on bone-like specimens that were crack-damaged by means of thermal shocks. Ogam et al. also demonstrated, via a finite element simulation, that the distance separating the split modes is a function of the degree of damage (size of the crack).

In the present study, only the mode splitting feature of piezoelectric transducer vibration spectroscopy measurements is employed to characterize the bone specimens. This means that only two indicators of damage are used as compared to the ones developed in [294]. These two are :

1. Shift of the resonance frequency peaks. The more the tibia bone is damaged, the more the resonance frequency peaks shift downwards,
2. The frequency separation (splitting) of the out-of-plane (bending in the sagittal plane) and the in-plane (bending in the frontal plane) modes; the more the damage, the further the modes shift apart.

#### **Results for bone phantoms taking the form of drinking glasses**

Some experimental results are given for both sound and cracked glasses (which are bone like shells) in Fig. (22.12a,b,c) wherein we depict the zoomed responses around 2000, 3500 and 5750 Hz for the three glasses (GS, GC1, GC2) with stress-free boundary conditions.

GC1 is less cracked than GC2 which explains why frequency shifts are greater for GC2. The resolution gets better at the upper end of the spectrum as displayed in Fig. (22.12c). The resonance frequency of GS at 6300 Hz is shifted downwards for GC1 and even more so for the more damaged glass GC2. The distance between the undamaged and damaged resonance peaks is a function of the degree of damage as depicted in Fig. (22.12c) ( $\Delta f_{GC1} = 80$  Hz,  $\Delta f_{GC2} = 555$ Hz). The distance between the IP and OP modes for the two damaged glasses are  $\Delta f_{ipopGC1} = 125$  Hz for GC1 and  $\Delta f_{ipopGC2} = 140$  Hz for GC2). The cracks in the two glasses are of the same size ( $\sim 4$  mm) but GC2 has supplementary microcracks (1 mm diameter).

### Results for real bone

The same type of measurements and analysis are made for the tibia specimens.

In addition, the experimental frequency response of one of the bones (*Tib*<sub>40</sub>) is compared to the 3D FES prediction (with Rayleigh damping [186, 195]  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 1.0e - 8$ ) of this response. This is done in Fig. 22.8. The geometrical (the inner structure is assumed to be uniform) and material (linear elastic, isotropic and homogeneous solid) characteristics of the numerical tibia are such that the latter is a gross idealization of the real bone (which is hollow, inhomogeneous, orthotropic ...). Nevertheless the two responses (of the numerical bone and the real bone) have many features in common, so that the numerical bone response simulation enables to point out to which type of mode (flexural, longitudinal and torsional) the various peaks correspond. It also provide a means of detecting split modes (in the case of the cracked glass) and simply the OP and IP modes (for the tibia).

To classify five dry human tibia bone specimens using the damage criteria relative to mode splitting, only the modes around 4000 Hz (Fig. 22.13c) were taken into account because this mode is well separated from the neighboring modes and the resolution is sufficient to distinguish all the specimens (this not being true for the mode near 2000 Hz (Fig. 22.13b).

It is of utmost importance to be able to reveal small differences between specimens with similar material and structural characteristics. The modes near 2000 Hz show that *Tib*<sub>19</sub> is really different from the others. The difference between *Tib*<sub>1</sub> and *Tib*<sub>7</sub> is not easy to unveil. The fact that they are different is well revealed at 4000 Hz but is less remarkable at 2000

Hz. This difference is also not well-revealed by the attenuation determined by the impact hammer experiment.

The resonance frequencies and damping coefficients obtained from the modal analysis [293] of the response spectrum are compared in Table (22.3) to the measured values (as concerns OP1 and IP1) obtained by the hammer impact method.

## 22.6 Correlation between the various measured quantities on real bone

The correlation of the shear wave velocity and the split frequencies, the mass ratios and attenuation (damping) coefficient measured on the same tibia, are calculated using the Pearson product-moment correlation coefficient (PMCC) [258, 296]. This is a measure of the tendency of the measured parameters to increase or decrease together. The Matlab [258] function *corr* is used to calculate this coefficient and the p value. The p value indicates the probability of getting the characteristics observed in a sample if the null hypothesis were true.

The correlation coefficients ( $r$ ) between the shear wave velocity (SWS) measured on the epiphysis and the ratio  $\frac{L_1}{L_1+L_2}$  are  $r = 0.93$ ,  $p = 0.006$ . The correlation coefficients for SWP and the inverse of the mode split frequency ( $\frac{1}{\Delta_f}$ ) are  $r = 0.99$  and  $p = 0.0011$ . The correlation coefficients between SWS and the attenuation ( $\alpha$ ) are  $r = 0.78$  and  $p = 0.11$ . The ratio  $\frac{L_1}{L_1+L_2}$  and  $\frac{1}{\Delta_f}$  ( $\Delta_f = f_{IP3} - f_{OP3}$ , is the difference between a pair of OP and IP mode frequencies) correlation coefficients are  $r = 0.99$  and  $p = 0.002$ .

The curves depicting all the aforementioned results are given in Figs. (22.14a,b,c,d). The three parameters, mode splitting, shear wavespeed and mass ratio, are strongly correlated and they all seem to agree in pointing out that *Tib*<sub>19</sub> is the least healthy of the five tibia specimens. The attenuation is fairly-well correlated to the shear wavespeed, but it does not show a clear difference between *Tib*<sub>1</sub> and *Tib*<sub>7</sub> like the other parameters. The Poisson ratio is very-well correlated to the mass ratio ( $r = 0.995$ ), the attenuation and SWS for three tibia bones (*Tib*<sub>7</sub>, *Tib*<sub>19</sub>, *Tib*<sub>40</sub>). *Tib*<sub>1</sub> was excluded from the calculation of the correlation



coefficient with Poisson's ratio as it appeared to present an anomalous case. Including  $Tib_1$  in the lot for the correlation test against the mass ratio gives a lower correlation coefficient ( $r = 0.73$ ,  $p = 0.27$ ) (Fig. (22.14e)). This suggests that the issue of the Poisson ratio deserves further study.

A final result of this study is that it enables to classify the state of health of the different bone specimens. We find :  $Tib_{40}, Tib_1, Tib_7, Tib_{19}$ , with the first being the healthiest, and the last the most degraded.

## 22.7 Discussion

A possible explanation for the difference in the mass distribution ratios in long bones can be attempted using observations made on the evolution of state of diseased plant leaves and stems. Take for example, one of the Black Cherry tomato leaf diseases. The problem begins with a brown irregular spot on the leaf. This spot spreads until the entire leaf is greenish, grayish brown and eventually spreads to other leaves on that branch. The leaves become leathery, then brittle and the entire branch eventually withers. Such a process may be equivalent in human beings to the case where the distal parts of the body are not well irrigated, for instance, poor blood circulation in the lower members (that elderly and some less elderly persons often complain about) and also due to the presence of other diseases that affect the nutrition of the distal regions of the bone.

A number of studies have shown the association between low bone density and poor blood circulation [44, 45, 237, 239, 238, 60, 368]. The observations from these studies give a possible explanation for the notable low mass distributions measured in the tibia under examination herein. It can be hypothesized that when the lower members are not well irrigated, the ratio  $\frac{L_1}{L_1+L_2}$  will be smaller than in the case of normal irrigation. Our correlation study also shows that such a circulatory affliction can be detected by measurements which reveal a lower shear wave velocity, a smaller damping and a larger mode splitting. The same tendencies are found for bone that is damaged for other reasons.

Bouxsein et al [43] found that the tibia longitudinal ultrasound wavespeed (UWS) was not strongly correlated to the strength of the proximal femur as is the same parameter

measured in the heel bone (calcaneum). Their conclusion was that the UWS of the tibia may be of limited use for assessing hip fracture risk. To confirm or infirm this finding, it would be interesting, in future studies, to apply the methods developed herein to several types of bone of the same person.

## 22.8 Conclusions

A simple method to determine the mass distribution in vitro of dry human tibia bones based on the search of their center of gravity was described and employed on several human tibia specimens. The mass distribution was found to be very well correlated to the ultrasonic shear wavespeed (an indicator of elastic bone properties and strength) but somewhat less-well correlated to the damping coefficient of the first mode of flexural vibration.

It was shown that the hammer impact experiment method can, at most, give the global damping of the first mode which indeed is able to reveal the bone with the worst health but is unable to discriminate bones that have close health states.

The ultrasonic shear wavespeed measurements are localized and difficult to implement on the extremities of long bones as well as on short bones and/or bones with irregular shapes. On the other hand, the vibrational spectroscopy method, with emphasis on mode splitting, gives a sort of picture of the mechanical state of the totality of a given bone (and, unfortunately of the boundary conditions that account for its connection to other tissues and organs in the body).

Preliminary results indicate that the Poisson ratio is another parameter whose determination (via measurements of the longitudinal and shear wavespeeds) is worth pursuing as it is well-correlated to the parameters that have been considered to be indicative of bone strength (mode splitting, mass ratio, ultrasonic shear wavespeed, and attenuation).

A vibrational spectroscopy method employing PZT transducers, and suitable for use in vivo, based on the principle that when bone becomes osteoporetic, its in-plane and out-of-plane flexural mode resonance frequencies will be further apart than when the bone is healthy, was also described and employed to characterize real and phantom bone specimens. The value of the frequency difference of the IP and OP peaks near 4000 Hz of several dry

human tibial shafts were found to be very-well correlated to the mass distribution and the ultrasound shear wavespeed measured along the tibial epiphysis. Future experiments will involve measurements of higher-order modes to improve further the discrimination capacity of the method. This is an important issue, because frequently, the first indication that a bone health problem exists is the occurrence of a fragility fracture, often followed by a high degree of morbidity and mortality [123], so that it would be useful to develop a method other than X-ray densitometry( which is proscribed for repeated use) to monitor lifetime changes in the mechanical state of the bones of a given patient which may signal the onset of diseases such as osteoporosis before large-scale fracture occurs [123, 222].

In the future, it would be useful to undertake large scale *in vivo* multifactorial testing, coupling the vibration spectroscopy mode splitting method with ultrasonic shear and longitudinal wavespeeds, as well as BMD measurements, on healthy and osteoporotic patients.

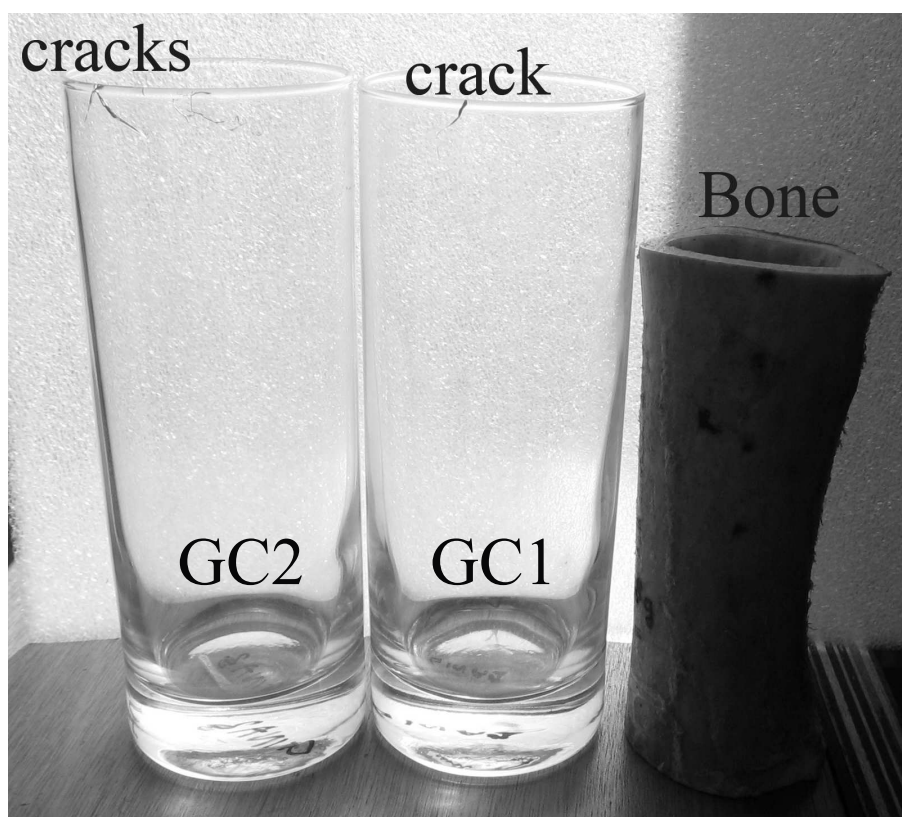


FIG. 22.1 – Two cracked GC1 and GC2 next to a bovine bone sample (in the photograph). The third glass is sound (GS)(but not in the photograph). They glasses have a geometry and material behavior (isotropic) that is simpler than that of real bovine bone (which is orthotropic). The glasses are used in experiments to illustrate the splitting of modes when cracks are induced in them by thermal shocks.

Tibia Parameters	$Tib_1$	$Tib_7$	$Tib_8$	$Tib_{18}$	$Tib_{19}$	$Tib_{39}$	$Tib_{40}$
$L_1$ (cm)	15.0	15.0	14.0	14.0	14.0	13.5	15.5
$L_2$ (cm)	20.0	20.5	18.0	19.0	20.0	18.5	20.0
weight (g)	159.1	152.2	112.4	122.4	187.0	153.7	165.4
Poisson's ratio	0.33	0.26	0.37	0.32	0.35	-	0.22

TAB. 22.1 – Distances  $L_1$  and  $L_2$ , the weight and Poisson's ratio computed from the measured shear and longitudinal wave velocities for the tibia specimens.

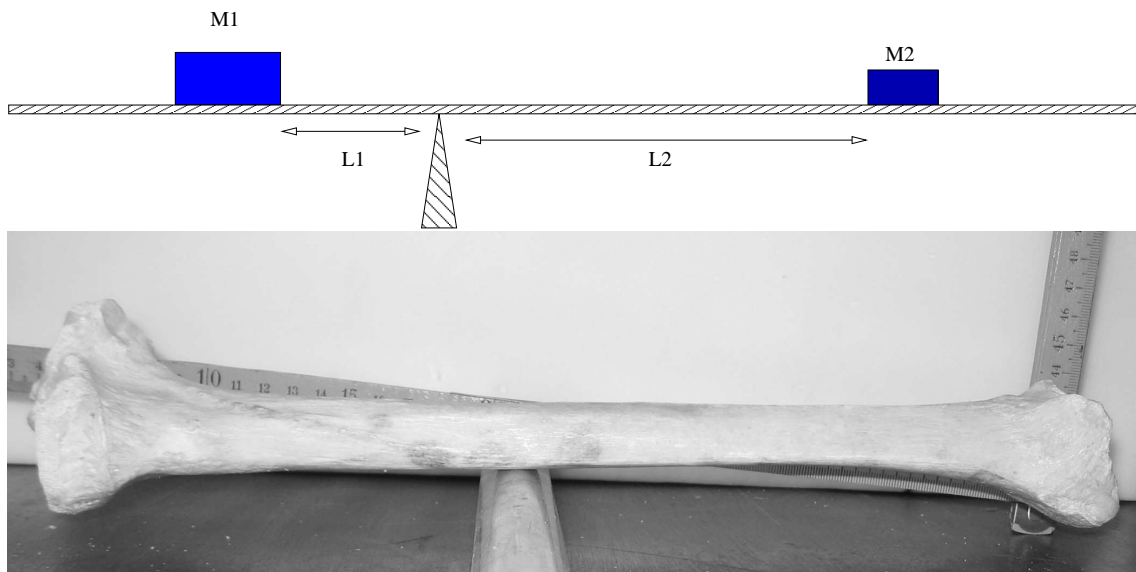


FIG. 22.2 – (a) Schematic of a seesaw. (b) Photograph of the actual experiment depicting how the center of gravity of the dry human tibia bone is determined. The distances  $L_1$  and  $L_2$ , determined at equilibrium, are used to compute a ratio indicating how the mass is distributed in the bone.



FIG. 22.3 – (a) The impact experiment. The hammer strikes the cylinder sideways and the response is measured using the accelerometer. (b) Photograph of the human tibia, hammer impact and vibration experiment. The bone is suspended on a test rig using nylon threads and the impact is applied sideways on the medial malleolus to generate flexural waves. The response is measured at the center of the bone using a featherweight (0.75 gram) accelerometer (Brüel and Kjaer B&K4374).

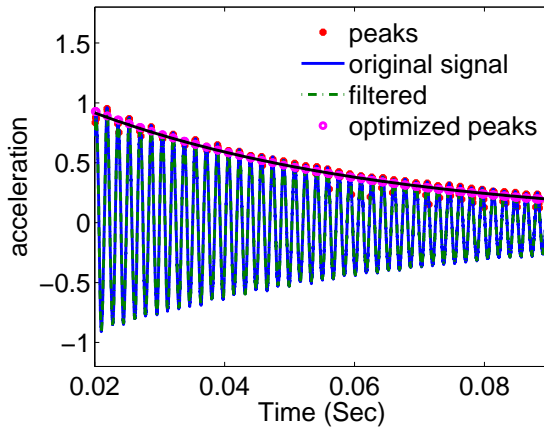


FIG. 22.4 – A typical decaying acceleration vibratory response curve measured by an accelerometer on the tibia. These curves show, the filtered sequence of the decaying sinusoids, the peaks of the sinusoids, and the ones obtained from the recovered attenuation coefficient  $\alpha$  obtained after optimization.

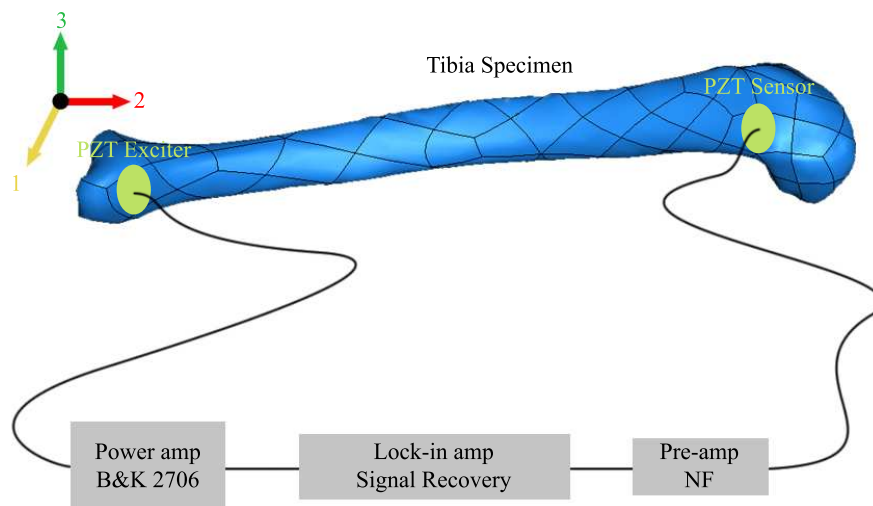


FIG. 22.5 – The experimental setup for obtaining the specimen's vibrational response using a disk piezoelectric exciter and sensor.

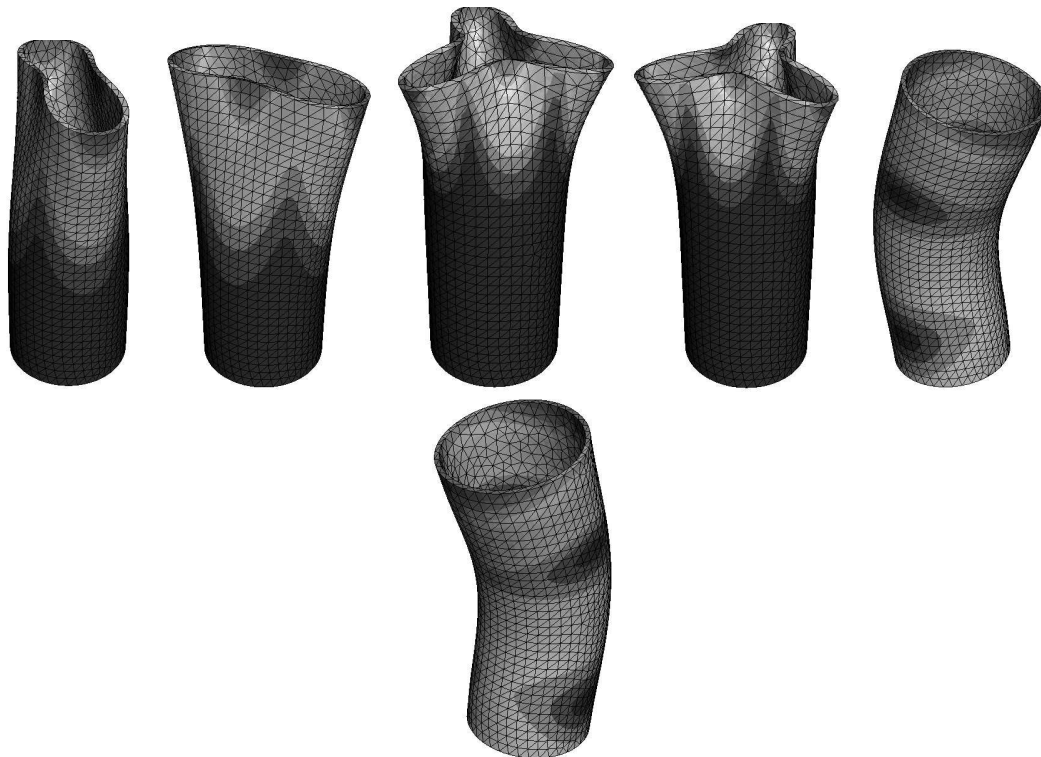


FIG. 22.6 – Mode shapes. (a) The first out-of-plane (OP) mode. (b) The first in-plane (IP) mode. (c) The second OP. (d) The second IP. (e) The first flexural IP mode of the glass (bending in the frontal plane). (e) The first flexural OP mode of the glass (bending in the sagittal plane).

	<i>Tib</i> <sub>40</sub>	<i>Tib</i> <sub>1</sub>	<i>Tib</i> <sub>7</sub>	<i>Tib</i> <sub>39</sub>	<i>Tib</i> <sub>19</sub>
OP1 (Hz) - impulse	587	562	540	514	573
IP1 (Hz) -PZT	806	685	674	-	790
Attenuation ( $\alpha$ ) OP1	21.2	19.8	20.6	20.2	17.7

TAB. 22.2 – The first out-of-plane mode (OP1) and in-plane (IP1) natural frequencies and IP1 attenuation for five dry human tibia bones. IP1 is measured in the hammer impact/acceleration experiment and OP1 by the spectroscopy experiment method using PZTs. The OP1 natural frequencies in both experiments are approximately identical ( maximum difference 2.0 percent) .

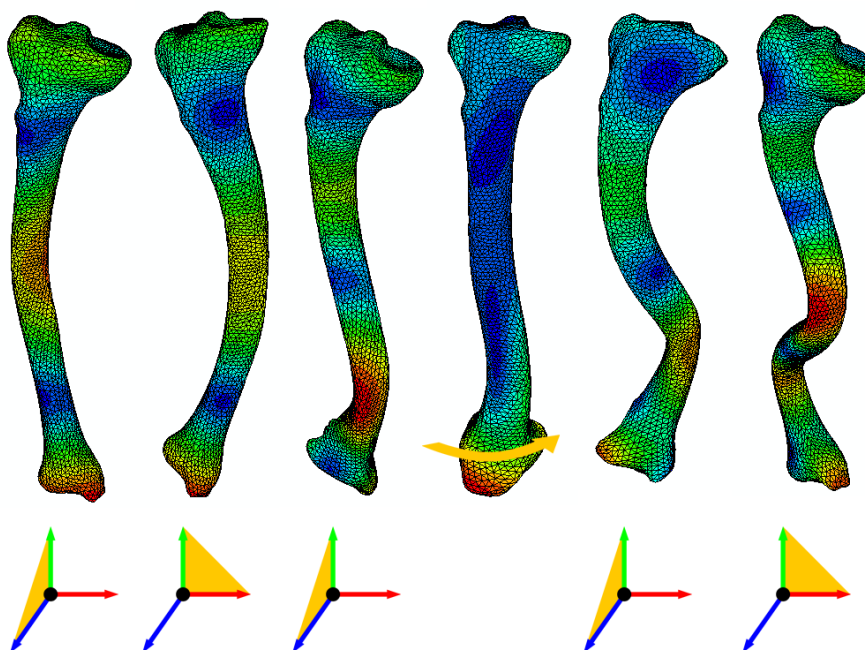


FIG. 22.7 – Out-of-plane (bending in the sagittal plane), in-plane (bending in the frontal plane) and torsional (with arrow) mode shapes.

	OP1	IP1	OP2	Torsion	IP2	OP3	IP3
Frequency (Hz)	595.0	805.0					
damping coefficient	0.0065	0.0057					
FES frequency (Hz)	589	806	1906	2124	2521	4020	5052

TAB. 22.3 – Measured and FES computed (OP and IP) resonance frequencies for the stress-free human tibia bone  $Tib_{40}$ . The attenuation coefficients computed from the measured decay response are also tabulated.



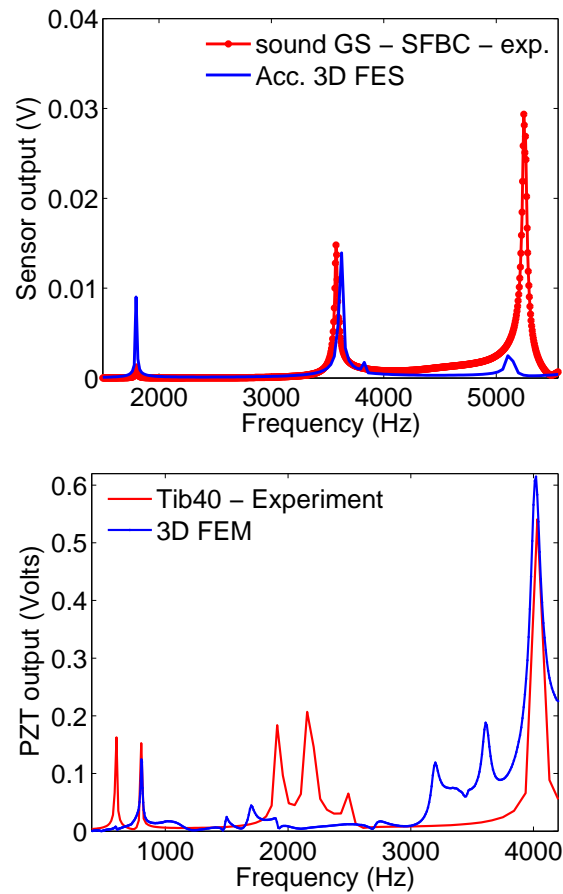


FIG. 22.8 – (a) The curve depicts the FES computed acceleration response (employing 14484 nodes, 8461 tetrahedral elements - of quadratic geometric order) of the glass compared against the measured response using a PZT actuator and sensor. (b) Comparison between the measured vibration response of a dry human tibia ( $Tib_{40}$ ) and the computed 3D FES steady state response with Rayleigh damping.



FIG. 22.9 – Photograph of the shear wave velocity measurement experiment. The transmitter (TR) remains at a fixed position while the receiver (RCV) is displaced in 2.0 cm steps.

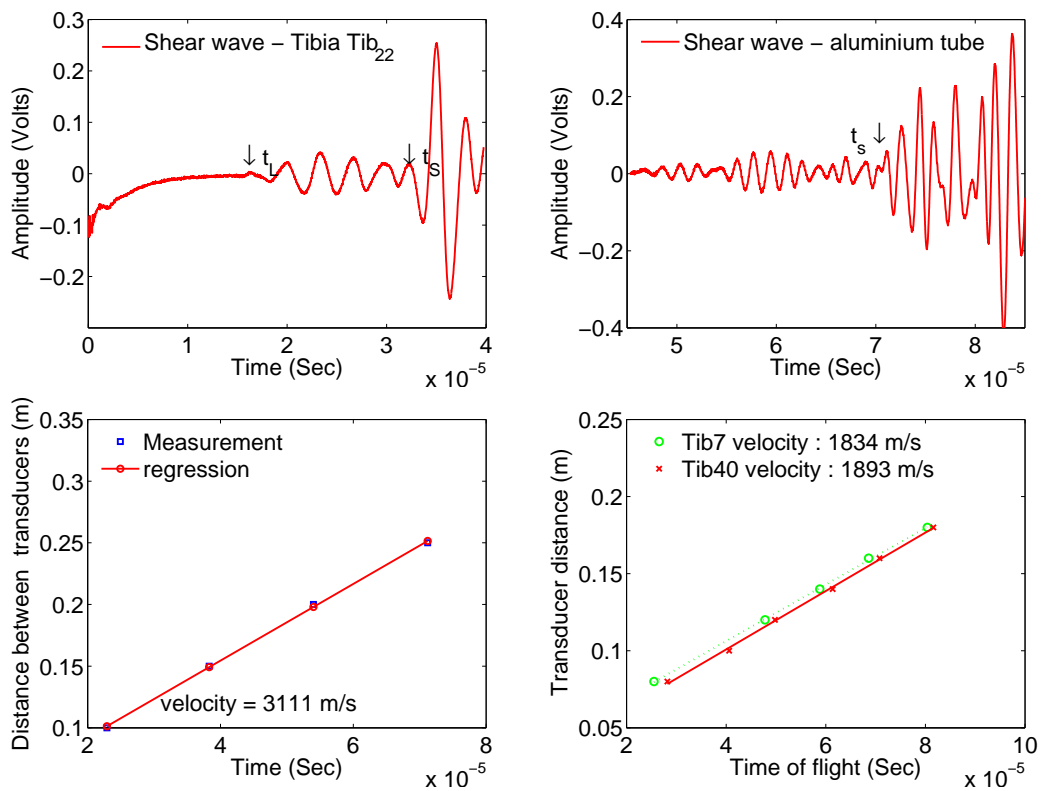


FIG. 22.10 – (a) The shear wave pulse emitted by the transducer on the proximal end and received by the second transducer situated at the distal side. The times  $t_L$  and  $t_S$ , coupled with the distance separating the two transducers, give the longitudinal and shear wave velocities. (b) Control measurement on an aluminium tube (diameter 3cm, thickness ). Some modes that are not studied herein are present in the received pulse. (c) Linear regression of the measured time of flight and distance points for the aluminium tube. The velocity is given by the slope of the regression curve. (d) Linear regression curve for two human tibia bones. The curves lie on a straight line indicating homogenous behavior of the bone.

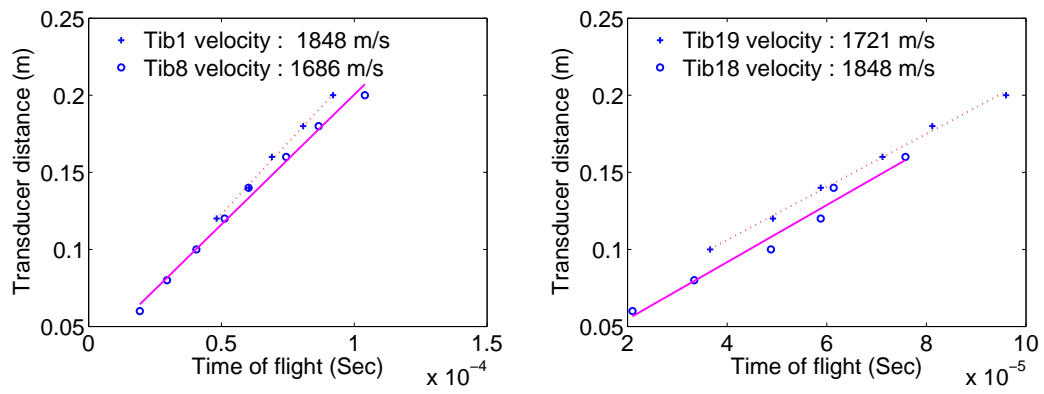


FIG. 22.11 – The regression curves for tibia bone specimens. Most of the points lie on the regression line evoking homogeneity.

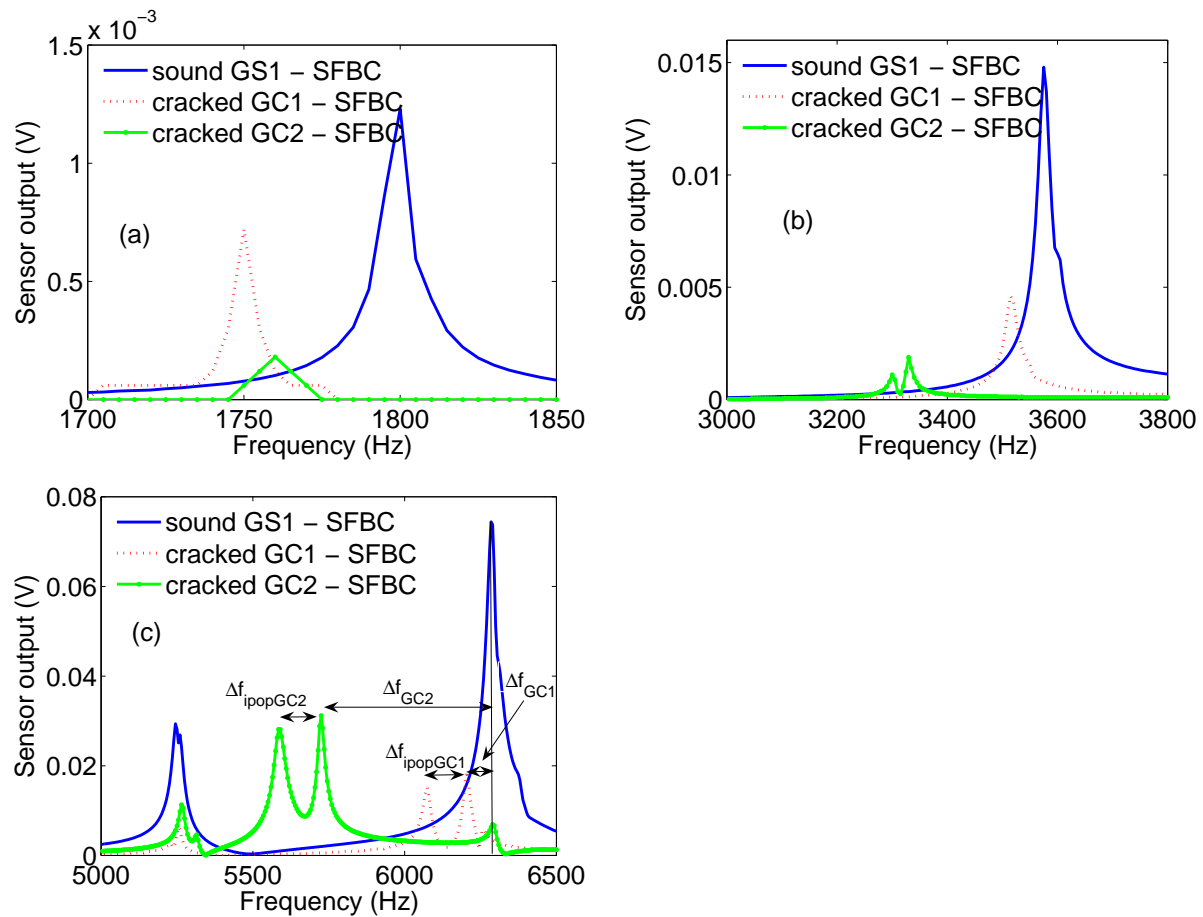


FIG. 22.12 – The specimens are in stress-free boundary condition situation. The spectrum is zoomed near the resonances of the vibration modes. (a) The first in-plane (IP) and out-of-plane (OP) modes (mode 1 and 2). The modes of the damaged glasses are only shifted as compared to the mode of the sound glass. (b) The second IP and OP modes. A significant difference occurs in the shift of the resonance frequencies of the two damaged specimens. The splitting of the mode is more remarkable for the more damaged glass and undergoes a greater shift downwards. (c) Mode 5 (the first flexural mode of the glass at  $\sim 5200$  Hz). Again, a shift in frequency for the damaged specimens is noticed and a small satellite mode is visible for the most damaged glass. For the third IP and OP ( $\sim 6200$  Hz) modes, the splittings and shifts in the resonance frequencies are clearly observed for the two cracked specimens.

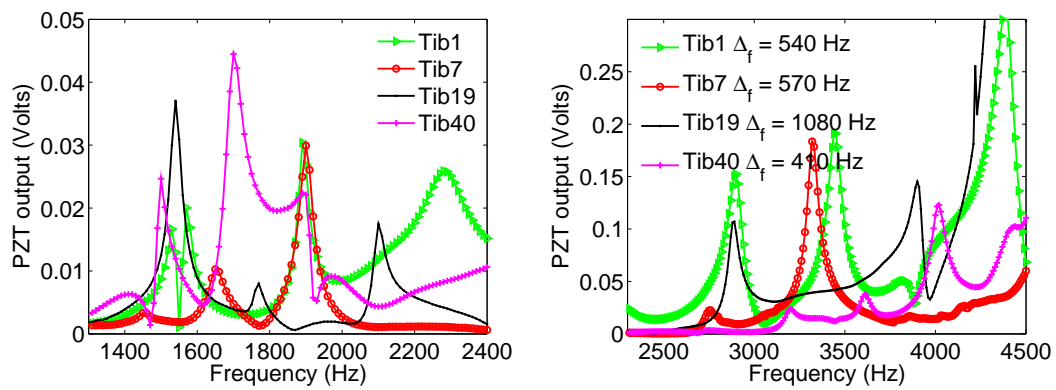


FIG. 22.13 – (a) The three modes around 2000 Hz. (b) The split modes near 4000Hz. The distances separating the first two peaks situated on the left (for example, at 2900 Hz and 3440 Hz for  $Tib_1$ ) are calculated for the four specimens.

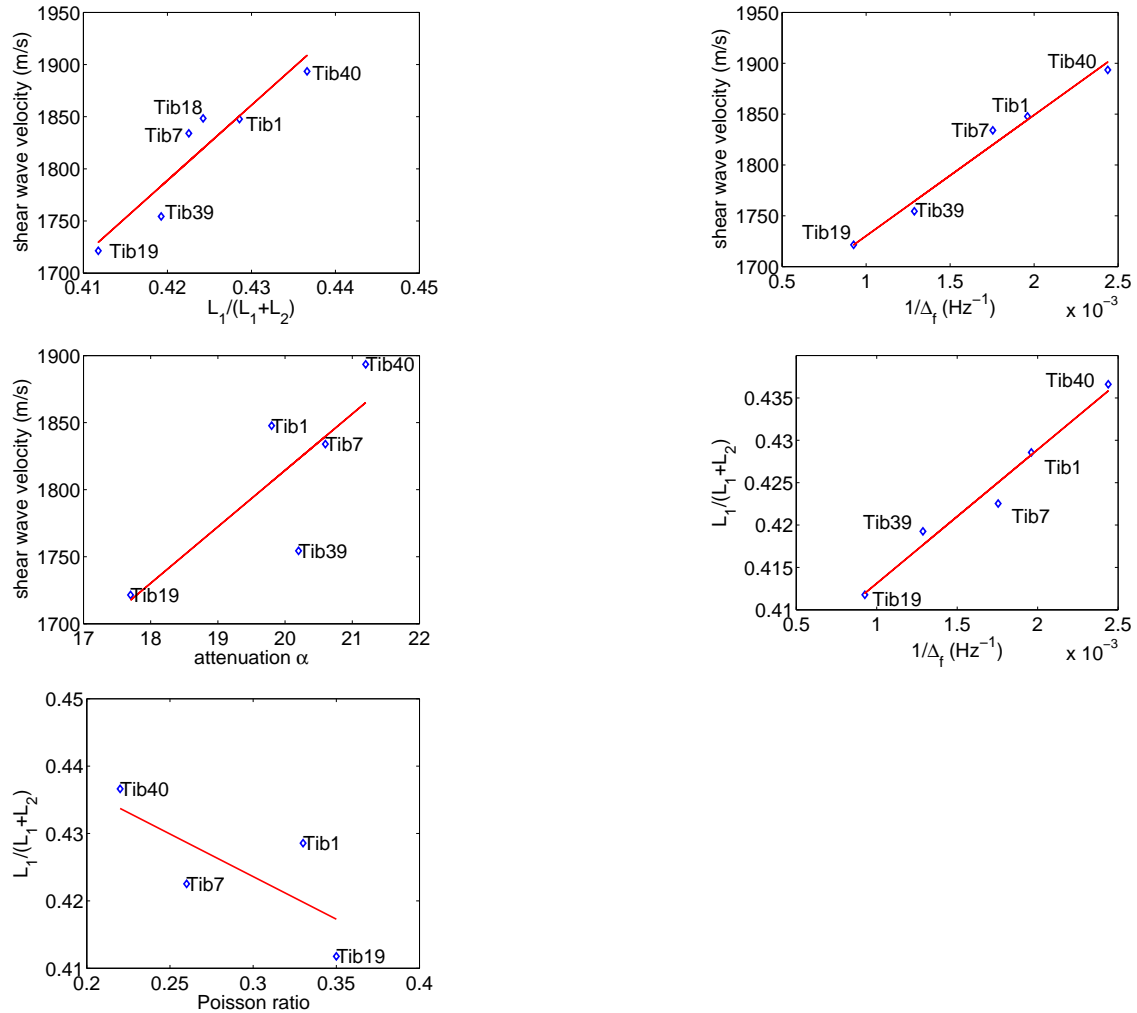


FIG. 22.14 – The correlation coefficients between the (a) shear wave velocity (SWV) measured on the epiphysis and the ratio  $\frac{L_1}{L_1+L_2}$  ( $r = 0.93$ ,  $p = 0.006$ ). (b) Correlation between the SWV and the inverse of the mode splitting frequency ( $\frac{1}{\Delta_f}$ ) ( $r = 0.99$ ,  $p = 0.0011$ ). (c) Correlation between the SWV and the attenuation ( $\alpha$ ) ( $r = 0.78$ ,  $p = 0.11$ ). (d) Correlation between the ratio  $\frac{L_1}{L_1+L_2}$  and  $\frac{1}{\Delta_f}$  ( $r = 0.99$ ,  $p = 0.002$ ). (e) Correlation between the Poisson ratio and the ratio  $\frac{L_1}{L_1+L_2}$  ( $r = 0.73$ ,  $p = 0.27$ ) or ( $r=0.995$ ) if *Tib*<sub>1</sub> is excluded.

## Chapitre 23

# Conclusion générale

Conclusion et perspectives.

### 23.1 Ce qui a été fait dans cette thèse

Le lecteur pourra se reporter à la fin des différents chapitres pour des résumés et conclusions assez détaillées concernant leur contenu.

Ce que l'on peut dire plus globalement, c'est que la thèse était consacrée à la résolution d'un problème inverse rendu très complexe par la nature de l'objet à caractériser : vivant, multiphasique, structuralement hétérogène à plusieurs échelles, anisotrope, pouvant vibrer non-linéairement même pour de sollicitations assez modestes,.... .

Ce problème, comme tout problème inverse, requiert : i) de définir les données et un protocole expérimental pour les obtenir, avec un contrôle d'erreurs et des indications de leur influence sur la qualité des mesures, ii) un modèle (estimateur) pour simuler les données expérimentales, iii) la recherche, au sein du modèle, des paramètres pouvant être révélés par les expériences et être pertinents pour le diagnostic, d'où la nécessité d'études de sensibilité, iv) un algorithme d'inversion faisant appel à une fonction-coût bien choisie et des informations a priori aussi nombreuses et précises que possible sur les paramètres que l'on ne choisit pas de reconstruire mais qui figurent tout de même dans le modèle.

Cette thèse a porté spécialement sur les points i) et ii) avec un accent particulier sur



le point i). Ceci est certainement dû à mon goût pour l'expérimentation, et probablement aussi au fait que les ondes ultrasonores et la vibroacoustique offre un champ d'investigation expérimental très vaste et relativement facile d'accès, notamment pour les problèmes comme celui que je viens de traiter. L'environnement expérimental, ainsi que l'indulgence de la Direction, du LMA m'ont aidé grandement à mener à bien ce travail.

## 23.2 Tendances

Deux tendances se dessinent dans l'activité des recherches concernant la détection et le suivi de l'ostéoporose par méthodes ultrasonores et vibroacoustiques.

La première tendance est la *simplification* des modèles et la focalisation sur la reconstruction d'un seul paramètre descripteur de la maladie, par exemple, la porosité, l'épaisseur ou le module de Young équivalent de l'os cortical, etc. Le modèle peut être aussi simple que linéaire, isotrope, élastique, poutre, coque, cylindre, tube, voire oscillateur à un degré de liberté avec un modèle d'amortissement de Kelvin-Voigt et à dimension 2D, voire 1D, le tout en domaine spatio-fréquentiel.

L'autre tendance est la *complexification* des modèles, qui délaissent l'oscillateur à 1DDL au profit de ceux à plusieurs, voire des milliers DDL, avec des lois de comportement d'amortissement de type Maxwell, Boltzman, à mémoire, nonlinéaire, etc., un modèle poroélastique de type Biot, BJKD, ou poroviscoélastique, sans/avec prise en compte de la diffusion sur des hétérogénéités macroscopiques [300] qui se manifestent aux hautes fréquences, le tout en dimensions 2, voire 3, et de préférence en domaine spatio-temporelle, en tenant compte de la géométrie externe et la structure interne la plus exacte possible de l'os, de l'enrobage viscoélastique de l'os [325] et des conditions aux limites compliquées traduisant les attaches des os dans le corps dans différentes postures de celui-ci.

Il est clair que la première tendance a la faveur des médecins généralistes pour des raisons de pragmatisme. Quand il résout un problème inverse du style de diagnostic clinique sur un patient (de préférence dans leur cabinet), ils veulent aller au plus simple : i) acquérir le moins de données possibles, avec un appareillage robuste et demandant le moins de réglages et interventions humaines possible, ii) faire leur diagnostic (i.e., inverser les données) avec un

modèle compréhensible et robuste qui porte sur le minimum de descripteurs de la maladie.

La deuxième tendance a peut-être la faveur des radiologues, et certainement la faveur de la plupart des chercheurs dont je suis, car c'est notre métier de comprendre, et de rendre aussi bien que possible compte de ce qui est à l'oeuvre dans le sondage mécanique d'un matériau/structure aussi complexe que l'os humain. Les chercheurs sont conscients que l'emploi des méthodes de diagnostic qui ont la faveur des médecins généralistes requièrent une bonne connaissance a priori des nombreux paramètres que les médecins ne veulent pas reconstruire. De plus, ils savent qu'il est nécessaire d'établir scientifiquement lequel de tous les paramètres est le plus informatif sur l'état de santé de l'os, et de s'assurer que ce paramètre peut être reconstruit avec succès et une précision suffisante en tenant compte des erreurs des mesures et des paramètres dont les valeurs sont assignées a priori.

### 23.3 Perspectives

Les questions toujours d'actualité sont : i) quel(s) descripteur(s) choisir de la maladie, ii) quoi mesurer, en quelle quantité et avec quelle précision, ii) quel modèle employer pour rendre compte du processus physique qui donne lieu aux observations.

Je pense, en ce qui concerne l'ostéoporose, que la notion de maladie doit être comprise dans un sens très restreint pour avoir des chances d'être diagnostiquée. Ainsi, la référence de santé ou de maladie ne doit pas être inter-individus, mais intra-individuelle, notamment du fait que la forme, taille, et composition des os varient trop d'un individu à un autre, alors que la forme et taille d'un os donné d'un individu donné ne varient guère après que celui-ci devient adulte. Ceci est un facteur indispensable pour déterminer ce qui varie effectivement et peut être signe de maladie.

Autrement dit, grâce à des examens faits tout au long de la vie d'un individu (ce qui est possible sans dommages avec les méthodes ultrasonores et vibroacoustiques en cabinet de médecin généraliste ou spécialiste), et toujours dans les mêmes conditions (position de l'individu, membre examiné), on peut avoir une chance de détecter des changements suspects d'un seul paramètre ne figurant pas nécessairement de manière explicite dans le modèle mécanique choisi, mais nécessairement *sensible* à des changements dans la composition et/ou

la structure de l'os ainsi qu'à ce que l'on mesure, indicatifs de la survenue et de la dégradation de la qualité osseuse [338].

Ceci est l'idée à l'oeuvre dans la méthode BUA ainsi que celle des modes de Lamb, mais ces méthodes ne sont pas nécessairement les meilleures pour le but que je pense devoir atteindre. Une méthode reposant sur la mise en vibration (linéaire ou nonlinéaire) d'un membre (celle des modes de Lamb en fait partie) et un examen spectrométrique (totale ou partielle du spectre) de la réponse vibratoire devrait, à mon sens, constituer la meilleure piste à suivre à l'avenir, car elle est pour l'instant la seule à pouvoir être appliquée *in vivo* (les méthodes acoustiques ou vibrationnelles sur des morceaux découpés d'os pour satisfaire aux contraintes du modèle ne me paraissant pas promises à un avenir clinique, mais sont certainement très utiles pour déterminer les valeurs des paramètres qu'il faut introduire, de manière *a priori*, dans les modèles servant d'estimateur).

En tous les cas, le problème du diagnostic de l'ostéoporose par des méthodes autres que celles faisant appel aux rayons-X, est encore largement ouvert et nécessitera des années de recherches supplémentaires avant de recevoir un début de solution.

Il me semble aussi que les recherches que je viens de décrire, et qui vont se poursuivre, pourraient avoir d'intéressantes applications au diagnostic d'autres maladies ou traumatismes des os et même d'autres tissus et organes biologiques, ainsi qu'à la caractérisation de matériaux/structures non vivants, naturels ou manufacturés.

## Liste des publications et communications

### Reuves à comité de lecture

E. Ogam, A. Wirgin, and Z.E.A. Fellah, C. Masson; Vibrational spectroscopy and ultrasound propagation data as indicators of structural and mechanical degradation of human bones, *Bone*, Soumis, 2007.

E. Ogam, A. Wirgin, S. Schneider, Z.E.A Fellah, Y. Xu, Recovery of the mechanical parameters of cellular materials by inversion of vibrational data, *Journal of Sound and Vibration*, 2007, Accepté.

E. Ogam, A. Wirgin, and Z.E.A Fellah, Y. Xu; Experimental and theoretical nonlinear dynamic response of intact and cracked bone-like specimens with various boundary conditions, *ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 2007, Sous Press.

Z.E.A. Fellah, M. Fellah, E. Ogam, N. Sebaa, W. Lauriks, and C. Depollier, Measuring permeability of porous materials at low frequency range via acoustic transmitted waves, *Review of Scientific Instruments*, soumis, 2007.

Z.E.A. Fellah, F.G. Mitri, M. Fellah, E. Ogam, A. Wirgin, W. Lauriks, C. Depollier; Ultrasonic characterization of porous absorbing materials : Inverse problem. *Journal of Sound and Vibration*, 302(4-5), 746-759, 2007.

N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, M. Fellah, E. Ogam, A. Wirgin, F. Mitri, C. Depollier, W. Lauriks; Ultrasonic characterization of human cancellous bone using the Biot theory : Inverse problem. *Journal of Acoustical Society of America*, 120(4), 1816-1824, 2006.

E. Ogam, A. Wirgin; Recovery of the location, size, orientation and shape of a rigid cylindrical body from simulated and experimental scattered acoustic field data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, volume 12(4), 433 - 469, 2004.

E. Ogam, T. Scotti et A. Wirgin; Non-ambiguous boundary identification of a cylindrical object by acoustic waves. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. II*, 329, 61–66, 2001.

P. Domenici, R. S Batty, T. Simila et E. Ogam ; Killer whales (*orcinus orca*) feeding on schooling herring (*clupeaharengus*) using underwater tail-slaps : kinematic analyses of field observations. *Journal of Experimental Biology*, 203, 283-294, 2000.

### **Congrès avec actes**

S. Erard, E. Ogam, A. Wirgin, Z.E.A. Fellah et Y. Xu ; Study of nonlinear effects of friction and cracks on the vibroacoustic response of a linear system. 8è CFA - Congrès Français d'Acoustique, Avril 2006, Tours.

E. Ogam, A. Wirgin, Z.E.A, Fellah, J.-P Groby, W. Lauriks, J.-Y Chapelon, C. Depollier, L. DeRyck and R. Gilbert and N. Sebaa and Y. Xu ; Recovery of the mechanical parameters of long bones from their vibroacoustic impulse response. SAPEM 2005, ENTPE-DGCB, Pages 181-188, Lyon, 2005.

Z.E.A. Fellah, E. Ogam, A. Wirgin, W. Lauriks, C. Depollier, M. Fellah ; Ultrasonic characterization of air-saturated porous materials. SAPEM 2005, ENTPE-DGCB, Pages 61-68, Lyon, 2005.

N. Sebaa, Z. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier, A. Wirgin, E. Ogam, R. Gilbert, Y. Xu, S. Boonen, J. D'hooge, G. Vanderperre ; Ultrasonic characterization of cancellous bone. SAPEM 2005, ENTPE-DGCB, Pages 101-108 , Lyon 2005.

L. Deryck, Z. Fellah, J.-P. Groby, E. Ogam, N. Sebaa, J.-Y. Chapelon, C. Depollier, R. Gilbert, T. Scotti, A. Wirgin, Y. Xu ; Acoustic identification of a poroelastic cylinder, SAPEM 2005, ENTPE-DGCB, Pages 211-218, Lyon, 2005.

J.-P. Groby, E. Ogam, A. Wirgin, Z. Fellah, W. Lauriks, J.-Y. Chapelon, C. Depollier, L. Deryck, R. Gilbert, N. Sebaa, Y. Xu ; 2D Mode Excitation in a Porous Slab Saturated with Air in the High Frequency Approximation. SAPEM 2005, ENTPE-DGCB, Pages 211-218, Lyon, 2005.

E. Ogam, Z. E. A Fellah, J.-P. Groby. et A. Wirgin; Eigenmode analysis of the cortical osseous tissue-marrow coupled system. In *5th international ISAAC Congress*, Catania, Italy, 2005.

R. Gilbert R., S. Zhang , E. Ogam et Xu Y. ; Determination of osteoporosis in a bone-muscle system. In *5th international ISAAC Congress*, Catania, Italy, 2005.

J.-P. Groby, C. Tsogka, A. Wirgin, E. Ogam et Z. E. A Fellah; A time domain method to model viscoelastic wave propagation in cortical bones. In *5th international ISAAC Congress*, Catania, Italy, 2005.

E. Ogam and A. Wirgin; Recovery of the ARMA model parameters from the vibration response of a finite length elastic cylinder using neural networks. In P. Sas and M. De Munck, editors, *Proceedings of ISMA2004*, pages 2437-2446, Leuven, Belgium, ISMA2004, Katholieke Universiteit.

E. Ogam et A. Wirgin : Recovery of the shape and location of a rigid cylindrical body from experimental scattered acoustic field data. In Arnold W. and Hirsekorn S. (ed.), *Actes du colloque Acoustical Imaging AI 27*, volume 27, pp 323-332. Kluwer Publishers/Plenum Publishers, Dordrecht and New-York, Saarbrücken, Germany, 2004.

E. Ogam., T. Scotti et A. Wirgin : Non-uniqueness in connection with methods for the reconstruction of the shape of cylindrical bodies from acoustic scattering data. In A. Wirgin (ed.), *Actes du colloque Acoustics mechanics and the related topics of mathematical analysis - AMRTMA*. 2002. Fréjus (France) - 18-22 juin 2002.

E. Ogam et A. Wirgin : Shape and size retrieval of obstacles by nonlinear inversion of measured scattered field data in response to audible acoustic probe radiation. In Tortoli et al (eds.) , *Acoustical Imaging*, volume 25, pp 122–130. Plenum, New-York, 19-23 march 2000. Bristol (UK).

E. Ogam et A. Wirgin : Caractérisation de forme et de taille d'objets par inversion nonlinéaire de données portant sur le son diffracté. In F. Lepoutre D. Placko et Y. Surrel (eds) (ed.), Actes du colloque C21 Systèmes et Microsystèmes pour la Caractérisation, volume 2, pp 447–454. Hermès, Paris, 31 janvier-1er février 2001. Paris (France).

### **Congrès sans acte**

E. Ogam, C. Masson, S. Erard, A. Wirgin, Z.E.A Fellah, J.-P Groby, Y. Xu; On the vibratory response of a human tibia : Comparison of 1D Timoshenko model, 3D FEM and experiment. 1st European Symposium on Ultrasonic Characterization of Bone, 7-8 March 2006, Paris.

L. Le Marrec, J.-P. Groby, C. Tsogka, W. Lauriks, E. Ogam, S. Erard and Z.E.A. Fellah ; Acoustical Identification of a Cortical Bone-like Cylindrical Tube. 1st European Symposium on Ultrasonic Characterization of Bone, 7-8 March 2006, Paris.

# Bibliographie

- [1] Achenbach J.D., *Wave propagation in elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [2] Adams J.E., Single and dual energy X-ray absorptiometry, *Eur.Radiol.* 7, suppl. 2, 1997, S20-S31.
- [3] D. Ahite, Contribution à la mise au point d'un dispositif de caractérisation ultrasonore du tissu osseux cortical par ondes de Lamb, *Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis*, Valenciennes, 2000.
- [4] Albers B. and Wilmanski K., On modeling acoustic waves in saturated poroelastic media, *Weierstrass-Institut preprint*, WIAS-874, Berlin, 2003.
- [5] V. Aleshin and K. Van Den Abeele. Microcontact-based theory for acoustics in micro-damaged materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55,2007,366-390.
- [6] Allard J.F., *Propagation of Sound in Porous Media. Modelling Sound absorbing Materials*, Elsevier, London, 2002.
- [7] J.-F. Allard, C. Depollier, J. Nicolas, W. Lauriks, A. Cops, Propriétés acoustiques des matériaux poreux saturés d'air et théorie de biot, *J. Acoust.* 3,1990,28-38.
- [8] P. Ammann and R. Rizzoli. Bone strength and its determinants. *Osteoporos. Int.*, 14,2003,3-8.
- [9] APCI, *Piezoelectric Ceramics : Principles and Applications*, American Piezo Ceramics, Inc., Mackeyville, 2004.
- [10] Ashman, J.D. Corin and C.H. Turner, Elastic properties of cancellous bone : measurement by an ultrasonic technique, *J.Biomech.*, 10, 1987, 979-989.



- [11] Ashman R.B., Cowin S.C., Van Buskirk W.C. and Rice J.C., A continuous wave technique for the measurement of the elastic properties of cortical bone, *J.Biomech.*, 17, 1984, 349-361.
- [12] Ashman R.B. and Rho J.Y. , Elastic modulus of trabecular bone material, *J. Biomech.*, 21, 1988, 177-181.
- [13] Asmani M., Kermel C., Leriche A. et Ourak M., Influence of porosity on Young's modulus and Poisson's ratio in alumina ceramics, *J.Europ.Ceramic Soc.*, 21, 2001, 1081-1086.
- [14] N. Atalla, R. Panneton, P. Deberge, A mixed pressure-displacement formulation for poroelastic materials, *Journal of the Acoustical Society of America* 104,1998,1444-1542.
- [15] K. Attenborough, Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials, *The Journal of the Acoustical Society of America* 73, 1983,785-799.
- [16] B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids* Vol. I, Wiley, New York, 1973.
- [17] Bardet J.P., A viscoelastic model for the dynamic behavior of saturated poroelastic soils, *J.Appl.Mech. ASME*, 59, 1992, 128-135.
- [18] R. Barkmann, P. Laugier, U. Moser, S. Dencks, F. Padilla, G. Haiat, M. Heller and C.-C. Glüer. A method for the estimation of femoral bone mineral density from variables of ultrasound transmission through the human femur. *Bone*, 40,2007,37-44.
- [19] M. Basista and D. Gross. The sliding crack model of brittle deformation : An internal variable approach. *Int. J. Solids Structures*, 35,1998,487-508.
- [20] Bécache E., Joly P. and Tsogka C. : Etude d'un nouvel élément fini mixte permettant la condensation de masse, *C.R.Acad.Sci.Paris Sér.I Math.*, 324, 1997, 1281-1286.
- [21] Bécache E., Joly P. and Tsogka C. : An analysis of new mixed finite elements for the approximation of wave propagation problems, *SIAM J.Numer.Anal.*, 37, 2000, 1053-1084.
- [22] Bécache E., Joly P. and Tsogka C. : Application of the fictitious domain method to 2D linear elastodynamic problems, *J.Comput.Acoust.*, 9, 2001, 1175-1202.
- [23] K. Beissner, Acoustic radiation pressure in the near field, *J.Sound Vibr.*, 93,1984,537-548.

- [24] Beltzer A.I. and Brauner N., SH waves of an arbitrary frequency in random fibrous composites via the K-K relations, *J.Mech.Phys.Solids*, 33, 1985, 471-487.
- [25] Beltzer A.I. and Brauner N., Wave propagation in random particulate composites : a modification of the Foldy-Lax theory, *Acustica*, 65, 1988, 156-162.
- [26] Beltzer A.I., Ghariani S. and Wirgin A., Electrodynamic response of materials with random distributions of macroscopic fibers, *J.Electromag.Waves Appl.*, 6, 1992, 1143-1157.
- [27] Bérenger J.P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J.Comput.Phys.*, 114, 1994, 185-200.
- [28] Berryman J.G., Scattering by a spherical inhomogeneity in a fluid-saturated porous medium, *J.Math.Phys.*, 26, 1985, 1408-1419.
- [29] S. R. Best, D.P. Hess, A. Belyaev, Z. Ostapenko, and J. P Kalejs. Audible vibration diagnostics of thermo-elastic residual stress in multi-crystalline silicon wafers. *Applied Acoustics*, 67,2006,541-549.
- [30] R.T. Beyer, *Nonlinear Acoustics*. ASA, 1997.
- [31] Biot M.A., The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range, *J.Acoust.Soc.Am.*, 28, 1956, 168-178.
- [32] Biot M.A., The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Higher frequency range, *J.Acoust.Soc.Am.*, 28, 1956, 179-191.
- [33] M. A. Biot and D. G. Willis, The elastic coefficients of the theory of consolidation, *J. Appl. Mech.* 24, 594-601 (1957).
- [34] Biot M. A., Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J.Appl.Phys.*, 33, 1962, 1482-1498.
- [35] Biot M.A., Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media solid, *J.Acoust.Soc.Am.*, 34, 1962, 1254-1264.
- [36] Black J. and Korostoff E., Dynamic mechanical properties of viable human cortical bone, *J.Biomech.*, 6, 1973, 435-436.

- [37] D.N. Boccaccini D.N. and Boccaccini A.R., Dependence of ultrasonic velocity on porosity and pore shape in sintered materials, *J.Nondestruct.Eval.*, 16,1997, 187-192.
- [38] Boonen S., Haentjens P., Vandemput L. and Vanderschueren D., Preventing osteoporotic fractures with antiresorptive therapy : implications of microarchitectural changes, *J.Intern.Med.*, 254, 2003, 1-12.
- [39] F. Bos, S. B. Casagrande, On-line non-destructive evaluation and control of wood-based panels by vibration analysis, *J.Sound Vibr.* 268,2003,403-412.
- [40] Bossy E., Talmant M. and Laugier P. : Effect of bone cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission : a 2D simulation study, *J.Acoust.Soc.Am.*, 112, 2002, 297-307.
- [41] Bossy E., Talmant M. and Laugier P. : 2D simulation of the axial transmission technique on a cortical bone plate, preprint *Journées Os*, Compiègne, 2002.
- [42] Boutin C., Royer P. and Auriault J.-L., Acoustic absorption of porous surfacing with dual porosity, *Int.J.Solids Struct.*, 35,1998, 4709-4737.
- [43] M.L. Bouxsein and B.S. Coan and S.C. Lee. Prediction of the strength of the elderly proximal femur by bone mineral density and quantitative ultrasound measurements of the heel and tibia. *Bone*, 25,1999,49-54.
- [44] W.S. Browner, A.R. Pressman, M.C. Nevitt, and J.A. Cauley S.R. Cummings. Association between low bone density and stroke in elderly women. *Stroke*, 24,1993,940-946.
- [45] W.S. Browner, D.G. Seeley, T.M. Vogt, and S.R. Cummings. Non trauma mortality in elderly women with low bone mineral density. *Lancet*, 338,1991,355-358.
- [46] Buchanan J.L., Numerical solution for the dynamic moduli of a viscoelastic bar, *J.Acoust.Soc.Am.*, 81, 1987, 1775-1786.
- [47] Buchanan J.L. and Gilbert R.P., Transmission loss in the far field over a seabed with rigid substrate assuming the Biot sediment model, *J.Comput.Acoust.*, 4, 1996, 29-54.
- [48] Buchanan J.L. and Gilbert R.P., Transmission loss in the far field over a one-layer seabed assuming the Biot sediment model, *ZAMM*, 77, 1997, 121-135.
- [49] Buchanan J.L. and Gilbert R.P., Transmission loss in a shallow ocean over a two-layer seabed, *Int.J.Solids Struct.*, 35, 1998, 4779-4801.

- [50] J.L. Buchanan and R.P. Gilbert. Determination of the parameters of cancellous bone using high frequency acoustic measurements. *Mathematical and Computer Modelling*, 45,2007,281-308.
- [51] Buchanan J., Gilbert R. et Wirgin A., Finding an inclusion in a shallow ocean using the ICBA method, *Applic.Anal.*, 71, 1999, 347-378.
- [52] Buchanan J.L., Gilbert R.P. and Khashanah K., Determination of the poroelastic parameters of cancellous bone using low frequency acoustic interrogation, in *Acoustics, Mechanics, and the Related Topics of Mathematical Analysis*, Wirgin A. (éd.), World Scientific, Singapore, 2002, 41-47.
- [53] Buchanan J.L., Gilbert R.P. and Khashanah K., Recovery of the parameters of cancellous bone using low frequency acoustic measurements, *J.Comput.Acoust.*, 12, 2004, 99-126.
- [54] Buchanan J., Gilbert R., Wirgin A. et Xu Y., The unidentified object problem in a shallow ocean with a fluid-like sediment layer overlying a rigid seabed , *Applicable Analysis*, 73, 1999, 5-17.
- [55] J. Buchanan, R. Gilbert, A. Wirgin, Y. Xu, Depth sounding : An illustration of some of the pitfalls of inverse scattering problems, *Math.Comput.Model.*, 35,2002, 1315-1354.
- [56] Buchanan J., Gilbert R., Wirgin A. et Xu Y., Transient reflection and transmission of ultrasonic waves in cancellous bone, *Appl.Math.Comput.*, 142, 2003, 561-573.
- [57] Buchanan J.L., Gilbert R.P., Wirgin A. and Xu Y., *Marine Acoustics, Direct and Inverse Problems*, SIAM, Philadelphia, 2004.
- [58] Buchanan J.L., Gilbert R.P. and Xu Y., Green's function representation for acoustic pressure over a poroelstic seabed, *Applic.Anal.* , 65, 1997, 57-68.
- [59] Buchanan J.L., Gilbert R.P. and Xu Y., Ultrasound as a diagnostic tool to determine osteoporosis, *Advances in Analysis*, Begehr H. (éd.), 2005, 345-354.
- [60] R. Burkhardt, R. Bartl , B. Frisch, K. Jäger, G. Mahl, W. Hill, and et al. *The structural relationship of bone forming and endothelial cells of bone marrow*. Baltimore : Williams and Wilkins, 1984.

- [61] Burridge R. and Keller J.B., Poroelasticity equations derived from microstructure, *J.Acoust.Soc.Am.*, 70, 1981, 1140-1146.
- [62] M. Caputo, The rheology of an anelastic medium studied by means of the observation of the splitting of its eigenfrequencies. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 86,1989,1984-1987.
- [63] Carcione J.M., *Wave Fields in Real Media : Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media*, Pergamon, London, 2001.
- [64] Carcione J.M., Cavallini F., Santos J.E., Ravzzoli C.L. and Gauzellino P.M., Wave propagation in partially saturated porous media : simulation of a second slow wave, *Wave Motion*, 39, 2004, 227-240.
- [65] Carcione J.M., Cavallini F., Mainardi F. and Hanyga A., Time-domain modeling of constant-Q seismic waves using fractional derivatives, *Pure Appl.Geophys.*, 159, 2002, 1719-1736.
- [66] Carcione J.M. and Seriani G., Torsional waves in lossy cylinders, *J.Acoust.Soc.Am.*, 103, 1998, 760-766.
- [67] Carter D.R. and Hayes W.C., The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure, *J.Bone Joint Surg.*, 59, 1977, 954-962.
- [68] M. Castaings et P. Cawley, The generation, propagation, and detection of Lamb waves in plates using air-coupled ultrasonic transducers, *J.Acoust.Soc.Am.*, 100, 1996, 3070-3077.
- [69] F.B. Cegla, P. Cawley, and M.J.S. Lowe. Material property measurement using the quasi-scholte mode—a waveguide sensor. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117,2005,1098-1107.
- [70] Chaffai S., Padilla F., Berger G. and Laugier P., In vitro measurement of the frequency-dependent attenuation in cancellous bone between 0.2 and 2 MHz, *J.Acoust.Soc.Am.*, 108, 2000, 1281-1289.
- [71] Chaffai S., Roberjot V., Peyrin F., Berger G. and Laugier P., Frequency dependence of ultrasonic backscattering in cancellous bone : autocorrelation model and experimental results, *J.Acoust.Soc.Am.*, 108, 2000, 2403-2411.

- [72] Chaix J.-F., Caractérisation non destructive de l'endommagement de betons. Apport de la multidiffusion ultrasonore, *Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée*, Aix-en-Provence, 2003.
- [73] Chandler-Wilde S.N. and Horoshenkov K.V., Padé approximants for the acoustical characteristics of rigid frame porous media, *J.Acoust.Soc.Am.*, 98,1995,1119-1129.
- [74] Chivers R.C. and Parry R.J., Ultrasonic velocity and attenuation in mammalian tissues, *J.Acoust.Soc.Am.*, 63, 1978, 940-953.
- [75] Chotiros N.P., Biot model of sound propagation in water-saturated sand, *J.Acoust.Soc.Am.*, 97, 1995,199-214, .
- [76] Chotiros N.P., An inversion for Biot parameters in water-saturated sand, *J.Acoust.Soc.Am.*, 112, 2002, 1853-1868.
- [77] Clopeau T. and Mickelic A., Homogenizing a flow of an incompressible inviscid fluid through an elastic porous media, in *Acoustics, Mechanics, and the Related Topics of Mathematical Analysis*, Wirgin A. (éd.), World Scientific, Singapore, 2002, 108-115.
- [78] Collino F. and Tsogka C., Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, *Geophys.*, 66,2001, 294-307.
- [79] Colton D. and Kress R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer, Berlin, 1992, 121, 289.
- [80] C. Conca, A. Osses and J. Planchard, Added mass and damping in fluid-structure interaction, *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg.*, 146,1997, 387-405.
- [81] B. Cortet and X. Marchandise, Bone microarchitecture and mechanical resistance. *Joint Bone Spine*, 68,2001,297-305.
- [82] F.A. Costa Oliveira, Elastic moduli of open-cell cordierite foams, *J.Non-Crystal.Solids*, 351,2005,1623-1629.
- [83] Coussy O., Dormieux L. and Detournay E., From mixture theory to Biot's approach for porous media, *Int.J.Solids Struct.*, 35,1998, 4619-4635.

- [84] Couteau B., Hobatho M.-C., Darmana R., Brignola J.-C. and Arlaud J.-Y., Finite element modelling of the vibrational behaviour of the human femur using CT-based individualized geometrical and material properties, *J.Biomech.*, 31, 1998, 383-386.
- [85] G.R. Cowper, The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J.Appl.Mech.*, 33,1966,335-340.
- [86] Crolet J.-M., Comprendre le comportement mécanique de l'os humain grâce au calcul scientifique, *CNRS Info*, mai, 2000, 39-40.
- [87] Cowin S.C., Bone poroelasticity, *J. Biomech.* 32 ,1999, 217-238.
- [88] Cowin S.C., *Bone Mechanics Handbook*, CRC, Baton Rouge, 2002.
- [89] Cowin S.C. and Hegedus D.H., Bone remodelling I : A theory of adaptive elasticity, *J.Elast.*, 6, 1976, 313-326.
- [90] L. Cremer and M. Heckl and B. A. T. Petersson, *Structure-Borne Sound*, Springer, Berlin, 2004.
- [91] Cunningham J.L., Vibration analysis, in *The Physical Measurement of Bone*, Langton C.M. and Njeh C.F. (eds.), IOP, Bristol, 2004, 511-547.
- [92] Dai N., Vafidis A. and Kanasewich E.R., Wave propagation in heterogeneous, porous media, a velocity-stress, finite-difference method, *Geophys.*, 60, 1995, 327-340.
- [93] Dazel O. and Sgard F. and Lamarque C.-H., Application of generalized complex modes to the calculation of the forced response of three-dimensional poroelastic materials, *J.Sound Vibr.*, 268, 2003, 555-580.
- [94] Delamare S., Lefebvre J. P. et Wirgin A., Ghosts in Born images of a layer probed by acoustic waves, *Ultrasonics*, 37, 2000, 633-643.
- [95] M.A. Delany, E.N. Bazley, Acoustic properties of fibrous absorbent materials, *Applied Acoustics* 3,1970,105-116.
- [96] O. de La Rochefoucauld, M. Melon and A. Garcia, Time domain holography : forward projection of simulated and measured sound pressure fields, *J.Acoust.Soc.Am.*, 116, 2004,142-153.

- [97] Degrande G., De Roeck G. and Van den Broeck P., Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media, *Int.J.Solids Struct.*, 35, 1998, 4753-4778.
- [98] Depollier C., Allard J.F. and Lauriks W., Biot theory and stress-strain equations in porous sound-absorbing materials, *J.Acoust.Soc.Am.*, 84, 1988, 2277-2279.
- [99] Deresiewicz H., The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid, VI. Love waves in a double surface layer, *Bull.Seism.Soc.Am.*, 54, 1964, 417-423
- [100] Deresiewicz H., The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid, VII. Surface waves in a half-space in the presence of a liquid layer, *Bull.Seism.Soc.Am.*, 54, 1964, 425-430
- [101] Deresiewicz H. and Rice J.T., The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid, III. Reflection of plane waves at a free plane boundary (general case), *Bull.Seism.Soc.Am.*, 52, 1962, 595-625.
- [102] Deresiewicz H. and Rice J.T., The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid, IV. Surface waves in a half-space, *Bull.Seism.Soc.Am.*, 52, 1962, 627-638.
- [103] Deresiewicz H. and Rice J.T., The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid, V. Transmission across a plane interface, *Bull.Seism.Soc.Am.*, 54, 1964, 409-416.
- [104] Deresiewicz H. and Skalak R., On uniqueness in dynamic poroelasticity, *Bull.Seism.Soc.Am.*, 53, 1960, 783-788.
- [105] De Ryck L. , Fellah Z.E.A., Groby J.-P., Leclaire P., Lauriks W., Wirgin A. et Depollier C., Acoustic wave propagation and internal fields in rigid frame macroscopically inhomogeneous porous materials, *J. Appl. Phys.*, soumis, 2007.
- [106] DeRyck L., Fellah Z., Groby J.-P. , Ogam E., Sebaa N., Chapelon J.-Y., Depollier C., Gilbert R. , Scotti T. , Wirgin A. et Xu Y., Acoustic identification of a poroelastic cylinder, *Proceedings of SAPEM 2005*, Bécot F.-X. et al. (éds.), Vaux-en-Velin, 2005, 211-218.



- [107] De Ryck L. , Groby J.-P., Leclaire P., Lauriks W., Wirgin A., Depollier C. et Fellah Z.E.A., Acoustic wave propagation in a macroscopically inhomogeneous porous medium saturated by a fluid, <https://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00077652>, <http://fr.arxiv.org/abs/physics/0605259>, 2006.
- [108] De Ryck L., Groby J.-P., Leclaire P., Lauriks W., Wirgin A., Depollier C. et Fellah Z.E.A., Acoustic wave propagation in macroscopically inhomogeneous porous media saturated by a fluid, *Appl. Phys. Lett.*, accepté, 2007.
- [109] N. Dharmaju, R. Tiwari, and S. Talukdar. Identification of an open crack model in a beam based on force - response measurements. *Computers and Structures*, 82,2004,167-179.
- [110] O. Diligent et M.J.S. Lowe, Reflection of the  $S_0$  Lamb mode from a flat bottom circular hole, *J.Acoust.Soc.Am.*, 118,2005,2869-2879.
- [111] A.D. Dimarogonas, Vibration of cracked structures : A state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55,1996,831-857.
- [112] C. Djokoto, G. Tomlinson, S. Waldman, M. Grynepas, and A.M. Cheung, Relationship Among MRTA, DXA, and QUS. *Journal of Clinical Densitometry*, 7,2004,448-456.
- [113] S.P. Dodd, J.L. Cunningham, A.W. Miles, S. Gheduzzi, and V.F. Humphrey. An in vitro study of ultrasound signal loss across simple fractures in cortical bone mimics and bovine cortical bone samples. *Bone*, 40,2007,656-661.
- [114] Dong X.N. and Guo X.E., The dependence of transverse isotropic elasticity of human femoral cortical bone on porosity, *J.Biomech.*, 37, 2004, 1281-1287.
- [115] Dong X.N. and Guo X.E., The dependence of transverse isotropic elasticity of human femoral cortical bone on porosity, *J.Biomech.*, 37, 2004, 1281-1287.
- [116] Doolittle R.D. et Uberall H., Sound scattering by elastic cylindrical shells, *J.Acoust.Soc.Am.*, 39, 1966, 272-275.
- [117] Droin P., Berger G. and Laugier P., Velocity dispersion of acoustic waves in cancellous bone, *IEEE Trans.Ultrason.Ferroelect.Freq.Control*, 45, 1998, 581-592.
- [118] Droin P., Laugier P. and Berger G., Ultrasonic attenuation and dispersion of cancellous bone in the frequency range 200 KHz-600 KHz., preprint *Acoustical Imaging*, 1997.

- [119] Dufourcq P., Groby J.-P., Lagier M., Témin P. and Vanderborck G., Détection vibro-acoustique non-linéaire d'endommagements dans une structure poutre, *Proc. 16-ième Congrès Français de Mécanique*, Nice, 2003.
- [120] C. Dunn and M.O. Hawksford. Distortion Immunity of MLS-Derived Impulse Response Measurements. *J.Audio Eng.Soc.*, 41, 1993,314-335.
- [121] Edelman I. Bulk and surface waves in porous media, asymptotic analysis in *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES 2003*, Cohen G.C. and Heikkola E. (eds.), Springer, Berlin, 2003, 163-168.
- [122] Edelman I., Wilmanski K. and Radkevich E., Surface waves at a free interface of a saturated porous medium, *Weierstrasse Institut preprint WIAS-513*, Berlin, 1999.
- [123] Editorial, Ultrasonic bone assessment : "The time has come". *Bone*, 40,2007,5-8.
- [124] Emmerich H. and Korn M., Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields, *Geophys.*, 52, 1987, 1252-1264.
- [125] M. Endo, S. Nishi, M. Nakagawa and M. Sakata, Sound radiation from a circular cylinder subjected to elastic collision by a sphere, *J.Sound Vibr.*, 75,1981,285-302.
- [126] S. Erard, E. Ogam, A. Wirgin, Z. E.A. Fellah, and Y. Xu. Study of nonlinear effects of friction and cracks on the vibroacoustic response of a linear system. In *8è CFA - Congrès Français d'Acoustique*, Tours France, 2006.
- [127] Eringen A.C., *Mechanics of Continua*, Wiley, New York, 1967.
- [128] M. Etchessahar, S. Sahraoui, L. Benyahia, J.F. Tassin, Frequency dependence of elastic properties of acoustic foams, *The Journal of the Acoustical Society of America* 117,2005,1114-1121.
- [129] G.C. Everstine, Finite element formulations of structural acoustics problems, *Computers Struct.*, 65, 1997, 307-321.
- [130] Fellah Z.E.A. and Berger S. and Lauriks W. and Depollier C. and Aristégui C. and Chapelon J.-Y. Measuring the porosity and the tortuosity of porous materials via reflected waves at oblique incidence *J.Acoust.Soc.Am.*, 113, 2003, 2424-2433.

- [131] Fellah Z.E.A., Berger S., Lauriks W. and Depollier C. Verification of Kramers-Kronig relationship in porous materials having a rigid frame, *J.Sound Vibr.*, 270, 2004, 865-885.
- [132] Fellah Z.E.A., Chapelon J.Y., Berger S., Lauriks W. and Depollier C., Ultrasonic wave propagation in human cancellous bone : application of Biot theory, *J.Acoust.Soc.Am.*, 116, 2004, 61-73.
- [133] Fellah Z.E.A., Depollier C. and Fellah M., Application of fractional calculus to the propagation in rigid porous materials : validation via ultrasonic measurements, *Acta Acust.Acustica*, 87, 2002,34-40.
- [134] Fellah M., Fellah Z.E.A. et Depollier C., Transient wave propagation in inhomogeneous porous materials : application of fractional calculus, *Signal Processing*, 86, 2006, 2658-2667.
- [135] Fellah Z.E.A. and Fellah M. and Lauriks W. and Depollier C., Direct and inverse scattering of transient acoustic waves by a slab of rigid porous material, *J.Acoust.Soc.Am.*, 113, 2003, 61-72.
- [136] Z.E.A. Fellah, F.G. Mitri, M. Fellah, E. Ogam, A. Wirgin, W. Lauriks, and C. Depollier, Ultrasonic characterization of porous absorbing materials : Inverse problem, *J. Sound Vibr.*, 2007 (sous press).
- [137] Fellah Z.E.A., Ogam E., Wirgin A., Lauriks W., Depollier C. and Fellah M., Ultrasonic characterization of air-saturated porous materials, in *Proceedings SAPEM2005*, ENTPE, Vaux-en-Velin, 2005, 61-68.
- [138] C.-C. Feng and K.F. Graff, Impact of a spherical tool against a sonic transmission line, *J.Acoust.Soc.Am.*, 52,1972,254-259.
- [139] J. F. Ferrero, E. Yettou, J.J. Barrau, and S. Rivallant. Analysis of a dry friction problem under small displacement : application to a bolted joint. *Wear*, 256,2004,1135-1143.
- [140] Foldes A.J., Rimon A., Keinan D.D. et Popovtzer M.M., Quantitative ultrasound of the tibia : a novel approach for assessment of bone status, *Bone*, 17, 1995, 363-367.

- [141] P. Frederiksen, Estimation of elastic moduli in thick composite plates by inversion of vibrational data, in : Inverse Problems in Engineering Mechanics, Balkema, Rotterdam, 1994, 111-118.
- [142] Frost H.M., Absorptiometry and osteoporosis : problems, *J.Bone Miner Metab.*,21, 2003, 255-260.
- [143] Fung Y.C, *Biomechanics : Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer, New York, 1981.
- [144] D.P. Fyhrie and D. Vashishth. Bone stiffness predicts strength similarly for human vertebral cancellous bone in compression and for cortical bone in tension. *Bone*, 26,2000,169-173.
- [145] Gasser J.A., Assessing bone quantity by PQCT, *Bone*, 17, 1995, 145S-154S.
- [146] Gaunaurd G.C. and Brill D., Acoustic spectrogram and complex-frequency poles of a resonantly excited elastic tube, *J.Acoust.Soc.Am.*, 75, 1984, 1680-1693.
- [147] Gazis D.C., Three-Dimensional investigation of the Propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical Foundation, *J.Acoust.Soc.Am.*, 31, 1959, 568-573.
- [148] Gibson L. J. , The mechanical behavior of cancellous bone, *J.Biomech.*, 18,1985, 317-328.
- [149] Gibson L. J. and Ashby M.F. , *Cellular Solids*, Pergamon, Oxford, 1988.
- [150] Gilbert R.P., Lin W. and Xu Y., Focused ultrasonic wave in submerged cancellous bone, *J.Comput.Acoust.*, 13, 2005, 585-601.
- [151] Gilbert R.P. and Panchenko A., Effective acoustic equations for a nonconsolidated medium with microstructure, in *Acoustics, Mechanics, and the Related Topics of Mathematical Analysis*, Wirgin A. (éd.), World Scientific, Singapore, 2002, 164-170.
- [152] Gilbert R.P. and Panchenko A., Effective acoustic equations for a two-phase medium with microstructure, *Math.Comput.Model.*, 39, 2004, 1431-1448.
- [153] Gilbert R.P., Scotti T., Wirgin A. and Xu Y.S., The unidentified object problem in a shallow ocean , *J.Acoust.Soc.Am.*, 103, 1998, 1320-1327.

- [154] Gilbert R.P., Wirgin A., Xu Y.S. et Zhang S., A mathematical model for evaluation of osteoporosis, in *Proceedings SAPEM2005*, ENTPE, Vaux-en-Velin, 2005, 203-210.
- [155] Gilbert R.P., Wirgin A., Xu Y.S. et Zhang S., A mathematical model for evaluation of osteoporosis, *Adv.Appl.Math.*, sous presse.
- [156] R.P. Gilbert, S. Zhang, E. Ogam, Y. Xu, Determination of osteoporosis in a bone-muscle system, in : 5th international ISAAC Congress, Catania Italy, 2005.
- [157] B. Girling, The Z transform, in *CRC Standard Mathematical Tables*, W.H. Beyer (ed.), CRC Press, Boca Raton, 1987, 424-428.
- [158] D.G Gorman, C.K. Lee, J.M Reese, and J.Horàucek, Vibration analysis of a thin circular plate influenced by liquide/gas interaction in a cylindrical cavity, *J.Sound Vibr.*, 279, 2005,601-618.
- [159] Goss S.A., Johnston R.L. and Dunn F., Compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues, *J.Acoust.Soc.Am.*, 64, 1978, 423-457.
- [160] Goss S.A., Johnston R.L. and Dunn F., Compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues II., *J.Acoust.Soc.Am.*, 68, 1980, 93-108.
- [161] K.F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover, New York, 1991.
- [162] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1965.
- [163] Groby J.-P., Modélisation de la propagation des ondes élastiques générées par un séisme proche ou éloigné à l'intérieur d'une ville, *Thèse de l'Université de la Méditerranée*, Marseille, 2005.
- [164] Groby J.-P. , Ogam E., Wirgin A. et Fellah Z.E.A., A time domain method to model viscoelastic wave propagation in long cortical bones, *ISAAC 2005 Conference Proceedings*, Begher H. (éd.), Catania, 2005, 235-240.
- [165] J.-P. Groby, E. Ogam, A. Wirgin, Z.E.A. Fellah, W. Lauriks, J.-Y. Chapelon, C. Depollier, L. DeRyck, R. Gilbert, N. Sebaa et Y. Xu, 2D mode excitation in a porous slab saturated with air in the high frequency approximation, *Proceedings SAPEM'2005*, Jaouen L. et al. (éds.) Vaux-en-Velin, 2005, 53-60.

- [166] Groby J.-P. and Tsogka C., A time domain method to model viscoacoustic and viscoelastic SH wave propagation, in *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES 2003*, Cohen G.C. and Heikkola E. (éds.), 2003, Springer, Berlin, 911-915.
- [167] Groby J.-P. and Tsogka C., A time domain method for modeling viscoacoustic wave propagation, *J.Comput.Acoust.*, 14,2006, 201-236.
- [168] Groby J.-P., Tsogka C. et Wirgin A., A time domain method for modeling viscoelastic SH wave propagation in a city-like environment, in Doolin D., Kammerer A., Nogami T., Seed R.B. and Towhata I. (eds.), *Proceedings of the 11th International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering (11th ICSDEE)*, University of California, Berkeley and Stallion Press, Berkeley, 2004.
- [169] Groby J.-P., Tsogka C. et Wirgin A., Simulation of seismic response in a city-like environment, *Soil Dynam.Earthquake Engrg.*, 25, 2005, 487-504.
- [170] Guillermin R., Lasaygues P., Sessarego J.P. et Wirgin A., Imaging an object buried in the sediment bottom of a deep sea by linearized inversion of synthetic and experimental scattered acoustic wavefields, *Inverse Probs.*, 16, 2000, 1777-1797.
- [171] Guillermin R., Lasaygues P., Sessarego J.P. et Wirgin A., Inversion of synthetic and experimental acoustical scattering data for the comparison of two reconstruction methods employing the Born approximation, *Ultrasonics*, 39, 2001, 121-131.
- [172] G. Gupta and W.S. Aronow, Atherosclerotic vascular disease may be associated with osteoporosis or osteopenia in postmenopausal women : A preliminary study. *Archives of Gerontology and Geriatrics*, 43,2006,285-288.
- [173] Gurevich B. and Schoenberg M., Interface conditions for Biot's equations of poroelasticity, *J.Acoust.Soc.Am.*, 105, 1999, 2585-2589.
- [174] Gurevich B. and Zyrianov V.B. and Lopatnikov S.L., Seismic attenuation in finely layered porous rocks, effects of fluid flow and scattering, *Geophys.*, 62, 1997, 319-324.
- [175] R.A. Guyer and K.R. McCall. Hysteresis, Discrete Memory, and Nonlinear wave propagation in Rock. *Phys. Rev. Lett.*, 74,1995,3491-3494.

- [176] Hachiya H., Ohtsuki S., Tanaka M. and Dunn F., Determination of sound speed in biological tissues based on frequency analysis of pulse response, *J.Acoust.Soc.Am.*, 92, 1992, 1564-1568.
- [177] Haire T.J. and Langton C.M., Biot theory : A review of its application to ultrasound propagation through cancellous bone, *Bone*, 24, 1999, 291-295.
- [178] S.M. Han, H. Benaroya, and T. Wei, Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories, *J.Sound Vibr.*, 225,1999,935-988.
- [179] A. Hassan. A second comparison of two higher order perturbation schemes. *Journal of Sound and Vibration*, 184(5) :907–928, 1995.
- [180] Harker A.H., *Elastic Waves in Solids*, British Gas, Bristol, 1988.
- [181] G.R. Harris, Review of transient field theory for a baffled planar piston, *J.Acoust.Soc.Am.*, 70,1981,10-20.
- [182] Hassanzadeh S., Acoustic modeling in fluid-saturated porous media, *Geophys.*, 56, 1991, 424-435.
- [183] D.P. Hess. *Dynamics with friction : modeling, analysis and experiment*, volume 7 of *Series on stability, vibration and control of systems*, Interaction of vibration and friction at dry sliding contacts, 1–27. World Scientific, Singapore, 2002.
- [184] D.P. Hess and N.J. Wagh. Evaluating surface roughness from contact vibrations. *Trans. ASME Journal of tribology*, 116,1995,60-64.
- [185] A. Hibbitt, *Abaqus Standard User's Manual vol. I v6.2*, Karlsson & Sorensen Inc. Pawtucket, 2001.
- [186] A. Hibbitt, *ABAQUS Theory Manual*. <http://www.abaqus.com>, v6.6 edition, 2006.
- [187] A. Hibbitt, *ABAQUS Theory Manual v6.5.1*, Karlsson & Sorensen Inc. Pawtucket , 2005.
- [188] M.C. Hobatho, R. Darmana, P. Pastor, J.-J. Barrau, S. Laroze and J.-P. Morucci, Development of a three-dimensional finite element model of a human tibia using experimental modal analysis. *J.Biomech.*, 24,1991,371-383.

- [189] Hobatho M.C., Rho J.Y. and Ashman R.B., Atlas of mechanical properties of human cortical and cancellous bone, in *In Vivo Assessment of Bone Quality by Vibration and Wave Propagation Techniques, Pt. II*, Van der Perre G., Lowet G. and Borgwardt-Christensen A. (eds.), Leuven, 1990, 7-38.
- [190] Horoshenkov K.V. and Sakagami K. and Morimoto M., On the dissipation of acoustic energy in a thin, infinite, poroelastic plate, *Acta Acust.-Acustica*, 88, 2002, 500-506.
- [191] Hosokawa A., Ultrasonic pulse waves in cancellous bone analyzed by finite-difference time-domain methods, *Ultrasonics*, 44, 2006, e227-e231.
- [192] Hosokawa A. and Otani T., Ultrasonic wave propagation in bovine cancellous bone, *J.Acoust. Soc.Am.*, 101, 1997, 558-563.
- [193] A. Hosokawa and T. Otani. Acoustic anisotropy in bovine cancellous bone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103,1998,2718-2722.
- [194] H. Hu, B.-T. Wang, C.-H. Lee, and J.-S. Su. Damage detection of surface cracks in composite laminates using modal analysis and strain energy method. *Composite Structures*, 74,2006,399-405.
- [195] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method- Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover, New York, 2000.
- [196] E.R. Hughes, T.G. Leighton, P.R. White, and G.W. Petley. Investigation of an anisotropic tortuosity in a biot model of ultrasonic propagation in cancellous bone. *J.Acoust.Soc.Am.*, 121,2007,568-574.
- [197] A. Hussain, H. Mahmood, E. Geddoa, M. Hamish, and A.H. Reda. Parathyroid adenoma and hypercalcemia in a patient presenting with multiple pathological fractures of the long bones. *International Journal of Surgery*, doi :10.1016/j.ijisu.2006.05.018, 2006.
- [198] Hutchins L. and Leeman S., Tissue parameter measurement, in *Acoustical Imaging Vol. 11*, Powers J.P (ed.), Plenum, New York, 1982, 127-137.
- [199] J.R Hutchinson, Shear Coefficient for Timoshenko Beam Theory, *J. Appl. Mech.*, 68, 2001,87-92.



- [200] Y. Ishida and T. Inoue. Detection of a rotor crack using a harmonic excitation and nonlinear vibration analysis. *Trans. ASME, J. Vib. Acoust.*, 128,2006,741-749.
- [201] Iyo T., Maki Y., Sasaki N. and Nakata M., Anisotropic viscoelastic properties of cortical bone, *J.Biomech.*, 37, 2004, 1433-1437.
- [202] Jacobs C.R. and Davis B.R. and Rieger C.J. and Francis J.J. and Saad M. and Fyhrie D.P., The impact of boundary conditions and mesh size on the accuracy of cancellous bone tissue modulus determination using large-scale finite-element modeling, *J.Biomech.*, 32, 1999, 1159-1164.
- [203] D.P. Jansen, D.A. Hutchins et J.T. Mottram, Lamb wave tomography of advanced composite laminates containing damage, *Ultrasonics*, 32,1994,83-89.
- [204] L. Jaouen, B. Brouard, N. Atalla, C. Langlois, A simplified numerical model for a plate backed by a thin foam layer in the low frequency range, *Journal of Sound and Vibration* 280 (3-5) (2005) 681–698.
- [205] Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B. and Schmidt H., *Computational Ocean Acoustics*, Springer, 2000.
- [206] W. Jia and T. Fang. Jump phenomenon coupled Duffing oscillators under random excitation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 81(4) :961–965, 1987.
- [207] Jianfeng Z., Triangle-quadrangle grid method for poroelastic, elastic, and acoustic wave equations, *J.Comput.Acoust.*, 9, 2001, 681-702.
- [208] Jin B. and Liu H., Horizontal vibrations of a disk on a poroelastic half-space, *Soil Dynam.Earthquake Engrg.*, 19, 2000, 269-275.
- [209] Johns H.E. and Cunningham J.R., *The Physics of Radiology*, Charles C. Thomas, Springfield, IL, 1983.
- [210] Johnson D.L., Koplik J. and Dashen R., Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *J.Fluid Mech.*, 176, 1987, 379-402.
- [211] Johnson P.A., Zinszner B. and Rasolofosaon P.N.J., Resonance and nonlinear elastic phenomena in rock, *J.Geophys.Res.* B5, 101, 1996, 11553-11564.
- [212] Jones J.P., Rayleigh waves in a porous, elastic, saturated solid, *J.Acoust.Soc.Am.*, 33, 1961, 959-962.

- [213] D.W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Clarendon Press, Oxford, third edition, 1999.
- [214] M.C. Junger, Acoustic fluid-elastic structure interactions : basic concepts, *Computers & Structures*, 65,1997,281-293.
- [215] Jurist J.M., In vivo determination of the elastic response of bone. II. Ulnar resonant frequency in osteoporotic, diabetic and normal subjects, *Phys.Med.Biol.*, 15, 1970, 427-434.
- [216] Jurist J.M. and Foltz A.S., Human ulnar bending stiffness, mineral content, geometry and strength, *J.Biomech.*, 10, 1977, 455-459.
- [217] Jurist J.M. and Kianian K., Three models of the vibrating ulna, *J.Biomech.*, 6, 1973, 331-342.
- [218] Kaczmarek M., Kubik J. and Pakula M., Short ultrasonic waves in cancellous bone, *Ultrasonics*, 40, 2002, 95-100.
- [219] Kaczmarek M., Pakula M. and Kubik J., Multiphase nature and structure of biomaterials studied by ultrasound, *Ultrasonics*, 38, 2000, 703-707.
- [220] B. Kane, D. Ryan, and D.V. Bloniarz. Comparing formulae that assess strength loss due to decay in trees. *Journal of Arboriculture*, 27(2) :78–87, 2001.
- [221] K.N. Karagiozis, M. Amabili, M.P. Païdoussis and A.K. Misra, Nonlinear vibrations of fluid-filled clamped circular cylindrical shells, *J.Fluids Struct.*, 21,2005, 579-595.
- [222] J.J Kaufman and R.S Siffert. *Non-invasive assessment of bone integrity*. Bone mechanics handbook. CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
- [223] T.B. Khalil, D.C. Viano, and L.A. Taber. Vibrational characteristics of the embalmed human femur, *J.Sound Vibr.*, 75,1981,417-436.
- [224] Kinra V.K. and Iyer V.R., Ultrasonic measurement of the thickness, phase velocity, density or attenuation of a thin-viscoelastic plate. Part I : the forward problem, *Ultrasonics*, 33, 1995, 95-109.
- [225] S.P. Kotha and N. Guzelsu. Tensile behavior of cortical bone : Dependence of organic matrix material properties on bone mineral content. *Journal of Biomechanics*, 40(1) :36–45, 2007.

- [226] Kundu T. (éd.), *Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [227] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright and P.E. Wright, Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions, *SIAM J.Optim.*, 9, 1998, 112-147.
- [228] R.S. Lakes, *Viscoelastic Solids*, CRC Press, 1999.
- [229] Lakes R.S., Katz J.L. and Sternstein S.S., Viscoelastic properties of wet cortical bone-I. Torsional and biaxial studies, *J.Biomech.*, 12, 1979, 657-675.
- [230] Lakes R.S., Katz J.L., Viscoelastic properties of wet cortical bone-II. Relaxation mechanisms, *J.Biomech.*, 12, 1979, 679-687.
- [231] Lakes R.S., Katz J.L., Viscoelastic properties of wet cortical bone-III. A non-linear constitutive equation, *J.Biomech.*, 12, 1979, 689-698.
- [232] Lakes R., Yoon H.S. and Katz J.L., Ultrasonic wave propagation and attenuation in wet bone, *J.Biomed.Engng.*, 8, 1986, 143-148.
- [233] Lam D.C.C., Lange F.F. and Evans A.G., Mechanical properties of alumina produced from powder compacts, *J.Am.Ceram.Soc.*, 77, 1994, 2113-2117.
- [234] C. Langlois, R. Panneton, N. Atalla, Polynomial relations for quasi-static mechanical characterization of isotropic poroelastic materials, *J.Acoust.Soc.Am.*, 110,2001,3032-3040.
- [235] Langton C.M. et Njeh C.F. (éds.), *The Physical Measurement of Bone*, IOP, Bristol, 2004.
- [236] Langton C.M., S. B. Palmer S. B. and Porter R. W. , The measurement of broadband ultrasonic attenuation in cancellous bone, *Eng. in Med.*, 13, 1984, 89-91.
- [237] M. Laroche, L. Moulinier, A. Cantagrel, and B. Mazières. Renal tubular disorders and arteriopathy of the lower limbs : risk factors for osteoporosis in men. *Osteoporos Int*, 4 :309-31, 1994.
- [238] M. Laroche, L. Moulinier, P. Leger, H. Boccalon, and B. Mazières, Ostéoporose et artériopathie. *Revue du Rhumatisme*, 68(8) :765-766, 2001.

- [239] M. Laroche, J.L. Puech, J.M Pouillès, J. Arlet, H. Boccalon, P. Puel et al. Artériopathie des membres inférieurs et ostéoporose masculine. *Rev Rhum Mal Ostéoartic*, 59 :95–101, 1992.
- [240] Leclaire P., Cohen-Ténoudji F. and Aguirre-Puente J., Extension of Biot's theory of wave propagation to frozen porous media, *J.Acoust.Soc.Am.*, 96, 1994, 3753-3768.
- [241] P. Leclaire, K.V. Horoshenkov, A. Cummings, Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid, *Journal of Sound and Vibration* 247 (1) (2001) 1–18.
- [242] Lee T. and Lakes R.S. and Lal A., Resonant ultrasound spectroscopy for measurement of mechanical damping : comparison with broadband viscoelastic spectroscopy, *Rev.Scient.Instrum.* 71,2000, 2855-2861.
- [243] S.C. Lee, B.S. Coan, and M.L . Bouxsein. Tibial ultrasound velocity measured In Situ predicts material properties of tibial cortical bone, *Bone*, 21 (1),1997, 119-125.
- [244] Lee K.L., Roh H.-S. and Yoon S.W., Acoustic wave propagation in bovine cancellous bone : application of the modified Biot-Attenborough model, *J.Acoust.Soc.Am.*, 114, 2003, 2284-2293.
- [245] K.I. Lee et S.W. Yoon, Feasibility of bone assessment with leaky Lamb waves in bone phantoms and a bovine tibia, *J.Acoust.Soc.Am.*,115,2004,3210-3217.
- [246] M.T.C. Liang, S.B. Arnaud, C.R. Steel, P. Hatch, and A. Moreno, Ulnar and tibial bending stiffness as an index of bone strength in synchronized swimmers and gymnasts. *Eur. J. Appl Physiol*, 94 :400–407, 2005.
- [247] K.M. Liew, J.B. Han, Z.M. Xiao, Vibration analysis of circular mindlin plates using the differential quadrature method, *Journal of Sound and Vibration* 205 (5) (1997) 617–630.
- [248] C.H. Lin, V.W. Lee and M.D. Trifunac, The reflection of plane waves in a poroelastic half-space saturated with inviscid fluid, *Soil Dynam.Earthqu.Engrg.*, 25, 2005, 205-223.
- [249] J. Little and L. Shure, *Signal Processing Toolbox for use with MATLAB : User's Guide*. MATHWORKS, 1988.

- [250] Liu K. and Liu Z., Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity, *Z. Angew. Math. Phys.*, 53, 2002, 265-280.
- [251] L. Liu, J.P. Thomas, E.H. Dowell, P. Attar, and K.C. Hall, A comparison of classical and high dimensional harmonic balance approaches for a duffing oscillator. *Journal of Computational Physics*, 215(1) :503–528, 2006.
- [252] L. Ljung, *System Identification - Theory For the User*, PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.
- [253] Love A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944.
- [254] G. Lowet and G. Van der Perre, Ultrasound velocity measurement in long bones : measurement method and simulation of ultrasound wave propagation, *J. Biomech.*, 29, 1996, 1255-1262.
- [255] Luppé F., Conoir J.-M. and Franklin H., Scattering by a fluid cylinder in a porous medium, application to trabecular bone, *J. Acoust. Soc. Am.*, 111, 2002, 2573-2582.
- [256] Luppé F., Conoir J.-M. and Franklin H., Multiple scattering in a trabecular bone : influence of the marrow viscosity on the effective properties, *J. Acoust. Soc. Am.*, 113, 2003, 2889-2893.
- [257] Majumdar S., Newitt D., Jergas M., Gies A., Chiu E., Osman D., Keltner J., Keyak J. and Genant H., Evaluation of technical factors affecting the quantification of trabecular bone structure using magnetic resonance imaging, *Bone*, 17, 1995, 417-430.
- [258] Mathworks, *Matlab V7.0*, Mathworks, Inc., Natick, 1999.
- [259] T. Mazuch, J. Horacek, J. Trnka and J. Vesely, Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water : FEM and measurement, *J. Sound Vibr.*, 193, 1996, 669-690.
- [260] K.R. McCall and R.A. Guyer. Equation of state and wave propagation in hysteretic nonlinear elastic materials. *J. Geophys. Res.*, 99 :23887–23897, 1994.
- [261] J.D. McIntosh, R.F. Lambert, Nonlinear wave propagation through rigid porous materials. I : Nonlinear parametrization and numerical solutions, *The Journal of the Acoustical Society of America* 88 (4) (1990) 1939–1949.

- [262] Mc Kelvie M.L. and Palmer S.B., The interaction of ultrasound with cancellous bone, *Phys. Med.Biol.*, 10, 1991, 1331-1340.
- [263] F. Mear, P. Yot, R. Viennois and M. Ribes, Mechanical behaviour and thermal and electrical properties of foam glass, *Ceramics Intl.*, 2006.
- [264] G.D. Meegan Jr., P.A. Johnson, R.A. Guyer, and K.R. McCall. Observations of non-linear elastic wave behavior in sandstone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 94(6) :3387–3391, 1993.
- [265] S. Mehta and P. Antich, Measurement of shear-wave velocity by ultrasound critical-angle reflectometry (ucr), *Ultrasound in Med. & Biol.*, 23(7) :1123–1126, 1997.
- [266] L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill Kogakusha Ltd, Tokyo, 1975.
- [267] Mesgouez A., Etude numérique de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux en régime impulsionnel, *Thèse de doctorat de l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse*, septembre 2005.
- [268] P. Meunier, J. Aron, C. Eduoard, and G. Vignon, Osteoporosis and the replacement of cell populations of the marrow by adipose tissue : a quantitative study of 84 iliac crest biopsies, *Clin Orthop*, 80,1971,147-154.
- [269] J.W. Miles, Transient loading of a baffled piston, *J.Acoust.Soc.Am.*, 25,1953,200-203.
- [270] S.K. Mitra. *Digital Signal Processing*. McGraw-Hill, 2nd edition, 2001.
- [271] F.G. Mitri, Z.E.A. Fellah, E. Closset, P. Trompette, and J.-Y. Chapelon, Determination of object resonances by vibro-acoustography and their associated modes, *Ultrasonics*, 42, 2004,537-543.
- [272] Mohamed M.M., Shaat L.T. and Mahmoud A.N., Propagation of ultrasonic waves through demineralized cancellous bone, *IEEE Trans.Ultrason.Ferroelect.Freq.Control*, 50, 2003, 279-288.
- [273] P. Moilanen, V. Kilappa, P.H.F. Nicholson, J. Timonen et S. Cheng, Thickness sensitivity of ultrasound velocity in long bone phantoms, *Ultrasound Med.Biol.*, 30,2004,1517-1521.

- [274] Morozhnik V. and Bardet J.P., Viscoelastic approximation of poroelastic media for wave scattering problems, *Soil Dynam.Earthqu.Engrg.*, 15, 1996, 337-346.
- [275] P.M. Morse and K.U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [276] M. Muller, Evaluation ultrasonore de l'os cortical par des méthodes d'acoustique linéaire et non linéaire. Application à l'évaluation du micro endommagement osseux, *Thèse de l'Université Paris 7*, Paris, 2006.
- [277] M. Muller, P. Moilanen, E. Bossy, P. Nicholson, V. Kilappa, J. Timonen, M. Talmant, S. Cheng et P. Laugier, Comparison of three ultrasonic axial transmission methods for bone assessment, *Ultrasound Med.Biol.*, 31,2005,633-642.
- [278] M. Muller, A. Sutin, R. Guyer, M. Talmant, P. Laugier, and P.A. Johnson. Nonlinear resonant ultrasound spectroscopy (nrus) applied to damage assessment in bone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(6) :3946–3952, 2005.
- [279] Nagarajan A., Ultrasonic study of elasticity porosity relationship in polycrystalline alumina, *J.Appl.Phys.*, 42, 1971, 3693-3696.
- [280] Y. Nakatsuchi, A. Tsuchikane, and A. Nomura, The vibrational mode of the tibia and assessment of bone union in experimental fracture healing using the impulse response method. *Medical Engineering & Physics*, 18(7) :575–583, 1996.
- [281] K. Namkoong, H.G. Choi and J.Y. Yoo, Computation of dynamic fluid-structure interaction in two-dimensional laminar flows using combined formulation, *J.Fluids Struct.*, 20, 2005, 51-69.
- [282] A.H. Nayfeh and D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*. Wiley - VCH, New York, 2004.
- [283] J.A. Nelder and R. Mead, A Simplex method for function minimization, *Comput.J.*, 7,1965, 308-313.
- [284] P.H.F. Nicholson et M.L. Bouxsein, Bone marrow influences quantitative ultrasound measurements in human cancellous bone. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 28(3) :369–375, 2002.
- [285] T. Niederdrank, Maximum length sequences in non-destructive material testing : application of piezoelectric transducers and effects of time variances, *Ultrasonics*, 35, 1997,195-203.

- [286] Nieves F.J, Gascon F. and Bayon A., Estimation of the elastic constants of a cylinder with a length equal to its diameter, *J.Acoust.Soc.Am.*, 104, 1998, 176-180.
- [287] E. Ogam, C. Masson, S. Erard, A. Wirgin, Z.E.A Fellah, J.-P Groby, and Y. Xu, On the vibratory response of a human tibia : Comparison of 1D Timoshenko model, 3d fEM and experiment, Proceedings SFA2006, Paris, 2006.
- [288] Ogam E., Scotti et Wirgin A., Non-ambiguous boundary identification of a cylindrical object by acoustic waves, *C.R.Acad.Sci.IIb* 329, 2001, 61-66.
- [289] Ogam E., Scotti et Wirgin A., Non-uniqueness in connection with methods for the reconstruction of the shape of cylindrical bodies from acoustic scattering data, in A. Wirgin (éd.) *Acoustics, Mechanics, and the Related Topics of Mathematical Analysis*, , World Scientific, Singapore, 2002, 222-228.
- [290] Ogam E. et Wirgin A., Recovery of the location, size, orientation and shape of a rigid cylindrical body from simulated and experimental scattered acoustic field data, *Inverse Probs.Sci.Engrg.*, 12,2004, 433-469.
- [291] Ogam E. et Wirgin A., Recovery of the ARMA model parameters from the vibration response of a finite length elastic cylinder using neural networks, in P. Sas, M. De Munck (eds.), *Proceedings of ISMA2004 - Noise and Vibration Engineering*, Leuven, 2004, 2437-2446.
- [292] Ogam E. et Wirgin A., Recovery of the shape and location of a rigid cylindrical body from experimental scattered acoustic field data, in W. Arnold and S. Hirsekorn (éds.), *Acoustical Imaging*, Vol. 27, Kluwer Academic/Plenum, Dordrecht and New York, 2004, pp. 323-332.
- [293] E. Ogam, A. Wirgin, Z.E.A Fellah, J.-P. Groby, W. Lauriks, J.-Y. Chapelon, C. Depollier, L. DeRyck, R. Gilbert, N. Sebaa and Y. Xu, Recovery of the mechanical parameters of long bones from their vibroacoustic impulse response, in *Proc.SAPEM2005*, ENTPE-DGCB, Vaux-en-Velin, 2005, 181-188.
- [294] E. Ogam, A. Wirgin, Z.E.A. Fellah, and Y. Xu. Experimental and theoretical nonlinear dynamic response of intact and cracked bone-like specimens with various boundary conditions. *Trans. ASME, J. Vib. Acoust.*, In press, 2007.



- [295] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, New Jersey, 1989.
- [296] S. J. Orfanidis. *Optimum Signal Processing. An Introduction*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2nd edition, 1996.
- [297] Othman R. and Gary G., Dispersion identification using the Fourier analysis of resonances in elastic and viscoelastic rods, in *Acoustics, Mechanics, and the Related Topics of Mathematical Analysis*, Wirgin A. (éd.), World Scientific, 2002, 265-272.
- [298] W. Pabst, E. Gregorova and G. Ticha, Elasticity of porous ceramics-a critical study of modulus-porosity relations, *Journal of the European Ceramic Society*, 26 (7), 2006, 1085-1097.
- [299] J.H. Park, B.H. Park, H.K. Kim, T.S. Park, H.S. Baek Hypoxia decreases Runx2/Cbfa1 expression in human osteoblast-like cells *Molecular and Cellular Endocrinology*, 192, 2002, 197-203.
- [300] Padilla F., Peyrin F. and Laugier P., Prediction of backscatter coefficient in trabecular bones using a numerical model of three-dimensional microstructure, *J.Acoust.Soc.Am.*, 113, 2003, 1122-1129.
- [301] Parfitt A. M. , Trabecular bone architecture in the pathogenesis and prevention of fracture, *Am. J. Med. 1B* 82, 1987,68-72.
- [302] Parks T.W. and Burrus C.S., *Digital Filter Design*, Wiley, New York, 1987.
- [303] Paul M.K., Propagation of Love waves in a fluid-saturated porous layer lying between two elastic half-spaces, *Bull.Seism.Soc.Am.*, 54, 1964, 1767-1770
- [304] Paul H.S. and Murali V.M., Wave propagation in a cylindrical poroelastic bone with cavity, *Int.J.Engng.Sci.*, 30, 1992, 1629-1635.
- [305] A.D. Pierce, *Acoustics : An Introduction to its Physical Principles and Applications*, ASA, New York, 1991.
- [306] D. Pilon, R. Panneton, F. Sgard, Behavioral criterion quantifying the edge-constrained effects on foams in the standing wave tube, *The Journal of the Acoustical Society of America* 114,2003,1980-1987.

- [307] D. Pilon, R. Panneton, F. Sgard, Behavioral criterion quantifying the effects of circumferential air gaps on porous materials in the standing wave tube, *The Journal of the Acoustical Society of America* 116,2004, 344–356.
- [308] Pithioux M., Lasaygues P. and Chabrand P., An alternative ultrasonic method for measuring the elastic properties of cortical bone, *J.Biomech.*, 35, 2002, 961-968.
- [309] Pond C. M., *The Fats of Life*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [310] V.C. Protopappas, D.I. Fotiadis et K.N. Malizos, Guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones, *Ultrasound Med.Biol.*, 32,2006,693-708.
- [311] Pugh J.W., Rose R.M., Paul I.L. and Radin E.L., Mechanical resonance spectra in human cancellous bone, *Science*, 181, 1973, 271-272.
- [312] Pugh J.W., Rose R.M. and Radin E.L., A structural model for the mechanical behavior of trabecular bone, *J.Biomech.*, 6, 1973, 657-670.
- [313] Radkevich E. and Wilmanski K., On dispersion in the mathematical model of poroelastic materials with the balance equation in porosity, *J.Math.Sci.*, 114, 2003, 1431-1449.
- [314] J. Rajagopalan, K. Balasubramaniam et C.V. Krishnamurthy, A phase reconstruction algorithm for Lamb wave based structural health monitoring of anisotropic multilayered composite plates, *J.Acoust.Soc.Am.*, 119,2006,872-878.
- [315] Rasolofosaon P.N.J., Importance of interface hydraulic condition on the generation of second bulk compressional wave in porous media, *Appl.Phys.Lett.*, 52, 1988, 780-782.
- [316] K. Raum, I.Leguerney, F. Chandelier, E.Bossy, M. Talmant, A. Saed, F. Peyrin et P. Laugier, Bone microstructure and elastic tissue properties are reflected in QUS axial transmission measurements, *Ultrasound Med.Biol.*, 31,2005,1225-1235.
- [317] Rho J.-Y., An ultrasonic method for measuring the elastic properties of human tibial cortical and cancellous bone, *Ultrasonics*, 34, 1996, 777-783.
- [318] J.-Y. Rho, M.C. Hobatho, and R.B. Ashman. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone. *Medical Engineering & Physics*, 17(5) :347–355, 1995.
- [319] D.D. Rife and J. Vanderkooy, Transfer-function measurement with maximum-length sequences, *J. Audio Eng. Soc.*, 37, 1989.

- [320] E. Rigaud and J. Perret-Liaudet. Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting hertzian contact. Part 1 : harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 265(2) :289–307, 2003.
- [321] P.G.Robey and P.Bianco, Cellular mechanisms of bone loss, in Rosen C.J, Glowacki J. et Bilezikian J.P. (éds.), *The Aging Skeleton*, volume 10, Academic Press, San Diego, 1999, 145-157.
- [322] Roger A. Survey of optimization algorithms applied to inverse problems, in *Electromagnetic and Acoustic Scattering : Detection and Inverse Problem*, Bourely C., Chiappetta P. and Torresani B. (eds), World Scientific, Singapore, 1989, 790-810.
- [323] J. Sabot, P. Krempf, and C. Janolin. Nonlinear vibrations of a sphere-plane contact excited by a normal load. *Journal of Sound and Vibration*, 214(2) :359–375, 1998.
- [324] Sachse W. and Pao Y.H., On the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids, *J.Appl.Phys.*, 49, 1978, 4320-4327.
- [325] Saha S. and Lakes R.S., The effect of soft tissue on wave-propagation and vibration tests for determining the in vivo properties of bone, *J.Biomech.*, 10, 1977, 393-401.
- [326] A. Safaeinili, O.I. Lobkis et D.E. Chimenti, Quantitative materials characterization using air-coupled leaky Lamb waves, *Ultrasonics*, 34, 1996,393-396.
- [327] Sanchez-Palencia E., *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin, 1980.
- [328] Sayers C.M. and Smith R.L., Ultrasonic velocity and attenuation in an epoxy matrix containing lead inclusions, *J.Phys. D : Appl.Phys.*, 16, 1983, 1189-1194.
- [329] Schanz M., *Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua : a boundary element approach*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [330] C.M. Schnitzler and J. Mesquita. Bone marrow composition and bone microarchitecture and turnover in blacks and whites, *J Bone Min Res*, 13,1998,1300-1307.
- [331] Schoenberg M., Transmissions and reflection of plane waves at an elastic-viscoelastic interface, *Geophys.J.R.Roy.Astron.Soc.*, 215, 1971, 35-47.
- [332] Scott R.A., A note on wave propagation in bone, *J.Sound Vibr.*, 73, 1980, 149-151.

- [333] Scotti T. et Wirgin A, Reconstruction of the three mechanical material constants of a lossy fluid-like cylinder from low-frequency scattered acoustic fields, *Comptes Rendus Mécanique*, 332, 2004, 717-724.
- [334] Sebaa N., Fellah Z.E.A., Depollier C. et Lauriks W., Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone, *Signal Processing*, 86, 2006, 2668-2677.
- [335] Sebaa N., Fellah Z.E.A., Depollier C. et Lauriks W. Théories poroélastiques pour la caractérisation des tissus osseux, dans *Matériaux et Acoustique*, Bruneau M. et Potel C. édts, Hermès, Paris, 2006.
- [336] Sebaa N., Fellah Z.E.A., Lauriks W., Depollier C., Wirgin A., Ogam E., Gilbert R.P., Xu Y., Boonen S., D'Hooge J. and Vanderperre G., Ultrasonic characterization of cancellous bone, in *Proceedings SAPEM2005*, ENTPE, Vaux-en-Velin, 2005, 101-108.
- [337] Sebaa N., Fellah Z.E.A., Ogam E., Wirgin A., Lauriks W. et Depollier C., Ultrasonic characterization of human cancellous bone using Biot theory : Inverse problem, *J.Acoust.Soc.Am.*, 120, 2006, 1816-1824.
- [338] Seeman E. et Delmas P.D., Bone quality—the material and structural basis of bone strength and fragility, *N.Engl.J.Med.*, 354,2006,2250-2261.
- [339] J.F. Semblat, Rheological interpretation of Rayleigh damping, *Journal of Sound and Vibration* 206 (5) (1997) 741–744.
- [340] I.Y. Shen and C.D. Mote, On the mode splitting of degenerate mechanical systems containing cracks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 60 :929–950, 1993.
- [341] Shoumian Y. and Tian Y., Scattering of acoustic waves in an unbounded porous elastic medium, *J.Acoust.Soc.Am.*, 88, 1523-1529, 1990.
- [342] Skolnik and Merrill I. (eds.), *Radar Handbook (2nd Edition)*, McGraw-Hill, New York, 1990.
- [343] Sobokova E., Hubra A., Kiefman J., and Sobotka Z., Rheological behavior of bone marrow, *Rheol. Acta*, 26, (Suppl.), 1988, 467-469.
- [344] So J.and Leissa A. W., Three-dimensional vibrations of thick circular and annular plates, *J.Sound Vibr.*, 209, 1998, 15-41.

- [345] R.M. Spriggs, Expression for effect of porosity on elastic modulus of polycrystalline refractory materials, particularly aluminium oxide. *J. Am. Ceram. Soc.*, 44 :628-629, 1961.
- [346] P.R. Stepanishen, Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle, *J. Acoust. Soc. Am.*, 49, 1971, 1629-1638.
- [347] P.R. Stepanishen, Transient vibratory response of fluid-loaded shells using convolution integral equations, *J. Acoust. Soc. Am.*, 101, 1997, 1877-1884.
- [348] Stephen R.A., Geo-acoustic scattering at interfaces between fluid and porous media, AGU2000 Biot web page.
- [349] N.G. Stephen, The second spectrum of Timoshenko beam theory - Further assessment, *J. Sound Vibr.*, 292, 2006, 372-389.
- [350] Stern M. and Bedford A. and Millwater H.R., Wave reflection from a sediment layer with depth-dependent properties, *J. Acoust. Soc. Am.*, 77, 1985, 1781-1787.
- [351] P. Stoica and R.L. Moses, *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1997.
- [352] Stoll R.D., Theoretical aspects of sound transmission in sediments, *J. Acoust. Soc. Am.*, 68, 1980, 1341-1350.
- [353] Stoll R.D., Marine sediment acoustics, *J. Acoust. Soc. Am.*, 77, 1985, 1789-1799.
- [354] Stoll R.D. and Kan T.-K., Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface, *J. Acoust. Soc. Am.*, 70, 1981, 149-156.
- [355] Strelitzki R. and Evans J.A., An investigation of the measurement of broadband ultrasonic attenuation in trabecular bone, *Ultrasonics*, 34, 1996, 785-791.
- [356] M. Swaminadham, A. Santhanam, K. Pureswaran, J. Rao, Identification of resonant frequencies of rotating beams with the use of pzt crystals, *Experimental Mechanics* 19 (2) (1979) 76-80.
- [357] R. Takahashi, S. Sato, T. Sodesawa, T. Goto, K. Matsutani and N. Mikami, Bending strength of silica gel with bimodal pores : II. effect of variations in morphology and porosity, *Mater. Res. Bull.*, 42, 2007, 523-531.

- [358] A. Tatarinov, N. Sarvazyan et A. Sarvazyan, Use of multiple acoustic wave modes for assessment of long bones : model study, *Ultrasonics*, 43,2005,672-680.
- [359] W.R. Taylor, E. Roland, H. Ploeg, D. Hertig, R. Klabunde, M.C. Hobatho, M.D. Warner, L. Rakotomanana, and S.E. Clift, Determination of orthotropic bone elastic constants using FEA and modal analysis, *J.Biomech.*, 35,2002,767-773.
- [360] J.J. Thomsen, Modeling human tibia structural vibrations. *Journal of Biomechanics*, 23(3) :215–228, 1990.
- [361] Thompson D.W., *On Growth and Form*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.
- [362] S. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philo.Mag.*, 41,1921,744-746.
- [363] S. Timoshenko and J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951, 372-377.
- [364] Tsogka C., Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés, *Thèse de Doctorat, Université Paris IX Dauphine*, Paris, 1999.
- [365] Tolstoy A., *Matched Field Processing for Underwater Acoustics*, World Scientific, 1993.
- [366] A Tsuchikane, Y Nakatsuchi, and A Nomura. The influence of joints and soft tissue on the natural frequency of the human tibia using the impulse response method. In *Proc Instn Mech Engrs*, volume 209, pages 149–155. Professional Engineering Publishing, 1995.
- [367] C.H. Turner, Biomechanics of bone : determinants of skeletal fragility and bone quality, *Osteoporos. Int.*, 13,2002,97-104.
- [368] O. Uyama, Y. Yoshimoto, Y. Yamamoto, and A. Kawai. Bone changes and carotid atherosclerosis in postmenopausal women. *Stroke*, 28,1997,1730-2.
- [369] Urick R.J. and Ament W.S., The propagation of sound in composite media, *J.Acoust.Soc.Am.*, 21, 1949, 115-119.

- [370] Van Den Abeele K.E.-A., Sutin A., Carmeliet J. and Johnson P.A., Micro-damage diagnostics using nonlinear elastic wave spectroscopy, *NDT&E Intl.*, 34, 2001, 239-248.
- [371] G. Van der Perre and G. Lowet. In vivo assessment of bone mechanical properties by vibration and ultrasonic wave propagation analysis. *Bone*, 18, 1996, 29-35.
- [372] Vigier G., GDR mousses solides, *SPI/CNRS*, 37, 2004, 9-10.
- [373] L.N. Virgin. *Introduction to Experimental Nonlinear Dynamics : A Case Study in Mechanical Vibration*. Cambridge University Press, 2000.
- [374] Wang Y.C. and Lakes R.S., Resonant ultrasound spectroscopy in shear mode, *Rev.Scient.Instrum.* 74,2003,1371-1373.
- [375] Waterman P.C. and Truell R., Multiple scattering of waves, *J.Math.Phys.*, 2, 1961, 512-537.
- [376] Wear K., Frequency dependence of ultrasonic backscatter from human trabecular bone : theory and experiment, *J.Acoust.Soc.Am.*, 106, 1999, 3659-3664.
- [377] Wear K., Fundamental precision limitations for measurements of frequency dependence of backscatter : applications in tissue-mimicking phantoms and trabecular bone, *J.Acoust.Soc.Am.*, 110, 2001, 3275-3282.
- [378] P. D. Welch, The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, AU-15, 1967, 70-73.
- [379] P.J. White, G.T. Clement, and K. Hynynen. Longitudinal and shear mode ultrasound propagation in human skull bone, *Ultrasound in Med. & Biol.*, 32,2006,1085-1096.
- [380] Williams J.L., Ultrasonic wave propagation in cancellous and cortical bone : prediction of some experimental results by Biot's theory, *J.Acoust.Soc.Am.*, 91, 1992, 1106-1112.
- [381] Williams K.L., Grochocinski J.M. and Jackson D.R., Interface scattering by poroelastic seafloors, first-order theory, *J.Acoust.Soc.Am.*, 110, 2001, 2956-2963.
- [382] D.K. Wilson, Simple, relaxational models for the acoustical properties of porous media, *Applied Acoustics* 50,1997,171-188.

- [383] D.K. Wilson, J.D. McIntosh, R.F. Lambert, Forchheimer-type nonlinearities for high-intensity propagation of pure tones in air-saturated porous media, *The Journal of the Acoustical Society of America* 84,1988,350-359.
- [384] Wirgin A., Some quasi-analytic and numerical methods for acoustical imaging of complex media, in *Wavefield Inversion*, Wirgin A. (ed.), 1999, Springer, Wien, 241-304.
- [385] Wirgin A., Acoustical imaging : classical and emerging methods for applications in macrophysics, in *Scattering*, Pike R. and Sabatier P. (eds.), Academic, San Diego, 2002, 95-120.
- [386] Wirgin A., Ill-posedness and accuracy in connection with the recovery of a single parameter from a single measurement, *Inverse Probs. Engrg.*, 10, 2002, 105-115.
- [387] Wirgin A. (éd.) *Acoustics, Mechanics and the Related Topics of Mathematical Analysis*, World Scientific, Singapore, 2002.
- [388] Wirgin A., The inverse crime, *ArXiv*, *math-ph/0401050*, 2004.
- [389] A. Wirgin, Synthesis of unilateral radiators, <https://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00079285>.
- [390] Wirgin A. and Ghariani S., Verification of the Urlick-Ament description of the effective dynamic response of random composite fibrous media, *J.Phys.IV*, Coll.C1, 2, 1992, 721-724.
- [391] Wolff J., *Des Gesetz der Transformation der Knochen*, Hirschwald, Berlin, 1892.
- [392] K. Worden, On jump frequencies in the response of the Duffing oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 198,1996,411-414.
- [393] J. Wu and F. Cubberley, Measurement of velocity and attenuation of shear waves in bovine compact bone using ultrasonic spectroscopy, *Ultrasound in Med. & Biol.*, 23,1997,129-134.
- [394] Xu Y., Transmission of ultrasonic waves in cancellous bone and evaluation of osteoporosis, in *Acoustics, Mechanics, and the Related Topics of Mathematical Analysis*, Wirgin A. (éd.), World Scientific, Singapore, 2002, 265-271.
- [395] Yamamoto T., Acoustic propagation in the ocean with a poro-elastic bottom, *J.Acoust.Soc.Am.*, 73, 1983, 1587-1596.



- [396] C. Yang, D.E. Adams and S. Ciray, System identification of nonlinear mechanical systems using embedded sensitivity Functions, *J.Vibr.Acoust.*,127, 2005,530-541.
- [397] Yang R.B. and Mal A.K., Multiple-scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite, *J.Mech.Phys.Solids*, 45, 1994, 1945-1968.
- [398] Yavari B. and Bedford A., Comparison of numerical calculations of two Biot coefficients with analytical solutions, *J.Acoust.Soc.Am.*, 90, 1991, 985-990.
- [399] Y.N. Yeni and D.P. Fyhrie. Fatigue damage-fracture mechanics interaction in cortical bone. *Bone*, 30(3) :509–514, 2002.
- [400] J.A. Yeomans R.A. Dorey and P.A. Smith, Effect of pore clustering on the mechanical properties of ceramics, *J. Europ.Ceramic Soc.*, 22, 2002,403-409.
- [401] Yoon H.S. and Katz J.L., Ultrasonic wave propagation in human cortical bone. II. Measurements of elastic properties and microhardness, *J.Biomech.*, 9,1976,459-464.
- [402] Yoon Y.J., Yang G. et Cowin S.C., Estimation of the effective transversely isotropic elastic constants of a material from known values of the material's orthotropic elastic constants, *Biomech.Model Mechanobiol.*, 1, 2002, 83-93.
- [403] Zadler B.J., Le Rousseau J.H.L., Scales J.A. and Smith M.L., Resonant ultrasound spectroscopy : theory and application, *Geophys.J.Int.*, 156, 2004, 154-169.
- [404] Zeng Y.Q. and Liu Q.H., A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations, *J.Acoust.Soc.Am.*, 109, 2001, 2571-2580.
- [405] Zeng Y. and Liu Q.H., A poroelastic model for acoustic landmine detection, preprint, *Liu's web page*, Duke University, 2002.
- [406] Zeng Y.Q. and Liu Q.H., The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media, *Geophys.*, 66, 2001, 1258-1266.
- [407] L. Zhang, A.S. Tijsseling et A.E. Vardy, FSI analysis of liquid-filled pipes, *J.Sound Vibr.*, 224,1999,69-99.
- [408] Zhu X. and McMechan G.A., Numerical simulation of seismic responses of poroelastic reservoirs using Biot theory, *Geophys.*, 56, 1991, 328-339.

- [409] Zimmerman C. and Stern M., Scattering of plane compressional waves by spherical inclusions in a poroelastic medium, *J.Acoust.Soc.Am.*, 94, 1993, 527-536
- [410] Zwikker C. and Kosten C.W., *Sound Absorbing Materials*, Elsevier, New York, 1949.

## Résumé

L'os humain est à la fois un matériau (tissu osseux) et une structure (e.g., le fémur). Les traumatismes engendrent des défaillances (fractures) structurelles évidentes de l'os, mais l'intégrité mécanique de celui-ci peut aussi être atteinte d'une manière insidieuse, et non moins dangereuse, par certaines maladies. Très schématiquement, on peut dire que les traumatismes sont la cause de macrofractures (à la structure-os), et les maladies la cause de microfractures (du matériau-os). Celles-ci se développent progressivement en macrofractures, et si des soins ne sont pas prodigués ou efficaces, l'os perd sa fonction de soutien.

Cette thèse concerne essentiellement une des maladies de l'os : l'ostéoporose. Pour traiter cette maladie, et/ou prévenir les macrofractures dont elle est à terme la cause, il faut d'abord en faire le diagnostic. Ce problème est compliqué du fait qu'il s'agit d'une caractérisation (essentiellement mécanique) de matériau vivant et qu'il est impératif que le sondage soit de type non-destructif, surtout si l'examen doit se répéter souvent (notamment pour suivre les progrès d'un traitement).

Le travail de cette thèse concerne donc le développement de nouvelles méthodes, et/ou l'amélioration de méthodes plus anciennes relatives à l'évaluation non-destructive (END) d'altérations mécaniques du tissu osseux en rapport avec l'ostéoporose.

Comme l'END est aussi un terme employé pour la caractérisation de matériaux inertes, le domaine d'application de ce travail dépasse celui des matériaux vivants.

*Mots clés* : Problèmes directs et inverses, Tissu biologiques, Ostéoporose, Matériaux cellulaires, vibroacoustique, spectroscopie, ondes ultrasonores, Interaction fluide/structure, Vibrations nonlinéaires, Méthodes des éléments finis, Données réelles, Transducteurs/senseurs, Acquisition de données, Traitement du signal.

## Abstract

The human bone is both a material (bone tissue) and a structure (e.g. the femur). Trauma often generates structural failure (fractures) of the bone, but its mechanical integrity can also be affected in an insidious manner, and not the less dangerous, by certain diseases. Very schematically, one can say that trauma is the cause of macrofractures (to the bone structure), and diseases cause of microfractures if no treatment (of the bone material) is undertaken. The microfractures develop gradually into macrofractures, or if the treatment is not effective, the bone loses its function of support. This thesis relates primarily to one of the diseases of bone : osteoporosis. To treat this disease, and/or to prevent the macrofractures of which it is in the long term the cause, it is initially necessary to make its diagnosis. This problem is complicated owing to the fact that it is about characterization (primarily mechanical) of living material (biological tissue) and that it is imperative that the probe be of nondestructive type, especially if the examination must be repeated often (in particular to follow the progress of a treatment). The work of this thesis thus relates to the development of new methods, and/or improvement of more older methods relating to the nondestructive evaluation (NDE) mechanical deteriorations of bone tissue in connection with osteoporosis. As the NDE is also a term employed for the characterization of inert material, the applicability of this work's framework exceeds that of living tissue.

*Keywords* : Direct and Inverse Problems, Biological tissues, Osteoporosis, Cellular materials, Vibroacoustics, spectroscopie, ultrasonic waves, Fluid structure interaction, nonlinear vibration, Finite element methods, real data, Transducers/sensors, Data acquisition, Signal processing.

**CNRS Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique UPR7051, 31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille, France.**