



HAL
open science

Catégorification d'algèbres amassées antisymétrisables

Laurent Demonet

► **To cite this version:**

Laurent Demonet. Catégorification d'algèbres amassées antisymétrisables. Mathématiques [math]. Université de Caen, 2008. Français. NNT: . tel-00350137

HAL Id: tel-00350137

<https://theses.hal.science/tel-00350137>

Submitted on 6 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Caen / Basse-Normandie

U.F.R. Sciences

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme

École doctorale Sciences des Structures,
de l'Information, de la Matière Et des Matériaux



Thèse

présentée par

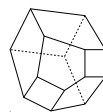
M. Laurent Demonet

et soutenue le **mardi 18 novembre 2008**

en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université de Caen
Spécialité : Mathématiques et leurs interactions
(arrêté du 7 août 2006)

Catégorification d'algèbres amassées antisymétrisables



Membres du jury

M. Philippe Caldero (MCF-HDR)	Université Lyon I	
M. Claude Cibils (PR)	Université Montpellier 2	
M. Patrick Dehornoy (PR)	Université de Caen	
M. Bernhard Keller (PR)	Université Paris 7	Rapporteur
M. Bernard Leclerc (PR)	Université de Caen	Directeur de thèse
M. Raphaël Rouquier (PR)	University of Oxford	Rapporteur
M. Leonid Vainerman (PR)	Université de Caen	

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Bernard Leclerc, qui m'a permis de passer des années de thèse très enrichissantes et très agréables grâce à sa très grande disponibilité. Il m'a guidé de manière très efficace en réussissant toujours à rendre limpides les concepts les plus abstraits, tout en me laissant la liberté d'explorer, parfois trop longuement, mes propres pistes.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance à Bernhard Keller et Raphaël Rouquier qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse. Le premier a toujours répondu avec beaucoup de patience à mes courriers électroniques, en me permettant ainsi d'éliminer nombre de contresens de mon esprit ; quant au second, il m'a fait découvrir la recherche lors de mon DEA. Je les remercie, ainsi que Claude Cibils, pour leurs remarques qui m'ont permis d'enlever, j'espère, une grande part des imprécisions de ce document. Je tiens aussi à remercier Philippe Caldero, Patrick Dehornoy et Leonid Vainerman d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Parmi les personnes qui m'ont aidé à clarifier un certain nombre de mes idées, j'aimerais citer Christof Geiß et Idun Reiten qui ont chacun accepté de passer du temps à discuter de mes recherches et à comprendre mon anglais approximatif. Je remercie aussi les nombreux orateurs qui, lors de conférences ou de groupes de travail, m'ont donné goût à aller fureter dans des domaines plus vastes des mathématiques.

J'exprime ma gratitude à l'ensemble des personnes travaillant au laboratoire Nicolas Oresme qui permettent, par l'intégration réelle des doctorants au laboratoire et l'ambiance, chaleureuse et studieuse, qu'ils y font régner, de rendre la vie de thésard particulièrement confortable. Je remercie aussi tous les doctorants que j'ai côtoyé durant cette période, toujours prêts à discuter de tous les sujets, du plus futile au plus sérieux.

Je ne peux pas terminer ces remerciements sans une pensée à toute ma famille et tous mes amis, qui m'ont apporté le soutien psychologique, parfois inconscient, nécessaire à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	7
1 Préliminaires	13
1.1 Algèbres amassées	13
1.2 Catégories	16
1.2.1 Catégories additives Hom-finies	16
1.2.2 Catégories abéliennes	21
1.2.3 Catégories exactes	22
1.2.4 Foncteurs Ext	36
1.2.5 Approximations	49
1.2.6 Modules basculants et équivalences dérivées	51
1.2.7 Catégories 2-Calabi-Yau	52
1.2.8 Catégorie monoïdale	53
1.2.9 Catégorie module sur une catégorie monoïdale	58
1.3 Représentations de carquois	60
1.4 Algèbre préprojective d'un carquois	61
1.4.1 Les catégories $\text{Sub } Q_J$	62
1.4.2 Les catégories \mathcal{C}_M	62
1.5 Système de racines et algèbre enveloppante	62
2 Catégories équivariantes	65
2.1 Catégorie équivariante	65
2.2 Groupes finis	78
2.2.1 Foncteurs $-[G]$ et F	78
2.2.2 Approximation	82
2.2.3 Action sur une catégorie exacte	85
2.2.4 Action sur une catégorie de Frobenius 2-Calabi-Yau	89
2.3 Calcul de $(kQ)G$ et de $(\Lambda_Q)G$	92
3 Algèbres amassées antisymétrisables	111
3.1 Mutation des sous-catégories rigides maximales	111
3.2 Quasi-approximations rigides	117
3.3 Endomorphismes	119
3.4 Matrices d'échange	126
3.5 Caractères d'amas	130
3.6 Indépendance linéaire des monômes d'amas	134

4 Applications	139
4.1 Sub Q_J et variétés de drapeaux partiels	139
4.2 Catégories \mathcal{C}_M et groupes unipotents	153
4.3 Exemple issu de la correspondance de McKay	159
Bibliographie	165

Introduction

Contexte

En 2001, Fomin et Zelevinsky ont défini une nouvelle classe d'algèbres, les algèbres amassées (*cluster algebras*) [22], [23]. Il s'agissait de donner un cadre combinatoire adéquat pour étudier les bases canoniques et la positivité totale, deux nouveaux sujets introduits par Lusztig en théorie de Lie algébrique [52], [54].

Par construction, une algèbre amassée est un anneau commutatif muni de générateurs privilégiés (les variables d'amas) regroupés en sous-ensembles de même cardinal n (les amas). Les amas ne sont pas disjoints. Au contraire, chaque amas A possède exactement n voisins obtenus en remplaçant chacune des n variables x_i de A par une nouvelle variable x'_i . Le nouvel amas $\mu_i(A) = A \setminus \{x_i\} \cup \{x'_i\}$ s'appelle la mutation de A dans la direction x_i . De plus les mutations se traduisent toujours par des relations d'échange de la forme

$$x_i x'_i = M_i + M'_i,$$

où M_i et M'_i sont des monômes en les variables de A autres que x_i . Les axiomes impliquent en outre de fortes relations de compatibilité entre les monômes apparaissant dans les relations d'échange, lesquelles entraînent que la structure d'algèbre amassée est entièrement déterminée par la donnée d'un unique amas et des relations d'échange avec ses n voisins. C'est ce qu'on appelle une graine initiale, et en pratique on définit souvent une algèbre amassée en donnant une telle graine. En itérant les relations d'échange on peut exprimer toute variable d'amas en fonction des variables de la graine initiale. Malheureusement, à cause de cette description inductive, il est difficile d'établir certaines propriétés apparemment élémentaires des variables d'amas. Par exemple :

Conjecture ([24, conjecture 7.2]). *Les monômes d'amas (c'est à dire les monômes dont toutes les variables appartiennent à un même amas) sont linéairement indépendants.*

Un exemple simple d'algèbre amassée est l'anneau de coordonnées homogènes de la Grassmannienne $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ des plans de \mathbb{C}^n . Les variables d'amas sont ici les coordonnées de Plücker

$$X_{ij} = \begin{vmatrix} x_{1i} & x_{1j} \\ x_{2i} & x_{2j} \end{vmatrix}, \quad (1 \leq i < j \leq n),$$

et les relations d'échange sont les relations classiques

$$X_{ik} X_{jl} = X_{ij} X_{kl} + X_{il} X_{jk}, \quad (i < j < k < l).$$

Dans ce cas les monômes d'amas forment une base de l'anneau de coordonnées de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ déjà connue en théorie des invariants des formes binaires (voir par exemple les travaux de Kung et Rota [49]).

Berenstein, Fomin et Zelevinsky ont montré que, plus généralement, les anneaux de coordonnées de nombreuses variétés algébriques attachées aux groupes de Lie semi-simples complexes étaient munis d'une structure d'algèbre amassée [4]. D'autres exemples ont été donnés par Geiß, Leclerc et Schröer [34], [35].

Depuis leur apparition, les algèbres amassées ont suscité beaucoup d'intérêt, notamment à cause de la découverte de liens avec de nombreux autres sujets : combinatoire (voir par exemple [14], [21]), géométrie de Poisson [37], [38], systèmes intégrables [25], espaces de Teichmüller [20], et surtout représentations des carquois et des algèbres de dimension finie. Dans des articles fondateurs, Marsh, Reineke, Zelevinsky [56], puis Buan, Marsh, Reineke, Reiten, Todorov [8] et Caldero, Chapoton [9] ont montré qu'une classe importante d'algèbres amassées pouvait être modélisée au moyen de catégories construites en termes de carquois. Cela fournit entre autres une compréhension globale (i.e. non inductive) de ces algèbres, et cela donne de nouveaux outils pour les étudier, qui ont conduit par exemple à une preuve par Fu et Keller [26] de la conjecture ci-dessus pour cette famille particulière d'algèbres amassées.

Parallèlement, Geiß, Leclerc et Schröer ont étudié des algèbres amassées associées à des groupes de Lie de type A , D , E , et les ont modélisées par des catégories de modules sur les algèbres préprojectives de Gelfand-Ponomarev du même type. Ils ont montré que les monômes d'amas forment un sous-ensemble de la base semi-canonique duale [31] introduite par Lusztig [51], prouvant ainsi la conjecture ci-dessus dans cet autre contexte.

Dans ces deux familles d'exemples, la graine initiale de l'algèbre amassée est codée par une matrice antisymétrique. Or la théorie de Fomin et Zelevinsky inclut des graines plus générales données par des matrices antisymétrisables (i.e. produits d'une matrice antisymétrique par une matrice diagonale). Par exemple, les algèbres amassées associées à des groupes de Lie de type B , C , F , G sont seulement antisymétrisables. Le but de cette thèse est d'étendre les résultats de Geiß, Leclerc, Schröer et Fu, Keller au cas antisymétrisable.

Notons que Yang [61] et Dupont [19] ont travaillé de manière indépendante sur des problèmes analogues. Yang utilise un foncteur construit à partir du morphisme de Frobenius sur un corps de caractéristique appropriée, et se limite aux catégories amassées de type fini. L'approche de Dupont est purement combinatoire.

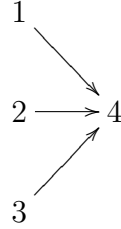
Actions de groupes sur des catégories

Il est commode de visualiser une matrice antisymétrique $\widetilde{M} = [\widetilde{m}_{ij}] \in M_n(\mathbb{Z})$ par un graphe orienté Q (i.e. un carquois) d'ensemble de sommets $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ avec \widetilde{m}_{ij} flèches de i vers j si $\widetilde{m}_{ij} > 0$ (resp. de j vers i si $\widetilde{m}_{ij} < 0$). Si un groupe G agit sur Q , on peut lui associer une nouvelle matrice M indexée par l'ensemble Q_0/G des orbites de G sur Q_0 , en définissant $m_{\bar{i}\bar{j}}$ comme le nombre de flèches de Q entre un sommet fixé j de l'orbite \bar{j} et un sommet quelconque de l'orbite \bar{i} (comptées positivement si les flèches vont de \bar{i} vers \bar{j} et négativement si elles vont de \bar{j} vers \bar{i}). Il est facile de voir que M est

antisymétrisable. Par exemple, si

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors le carquois Q est un carquois de type D_4



il y a une flèche allant de 1 vers l'orbite de 4 donc $m_{\overline{41}} = -1$ et il y a trois flèches arrivant dans 4 depuis l'orbite de 1 donc $m_{\overline{14}} = 3$. Finalement, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de type G_2

$$\overline{1} \rightleftharpoons \overline{4}.$$

Ainsi l'action d'un groupe G sur une matrice antisymétrique \widetilde{M} donne une matrice antisymétrisable M . Si \widetilde{M} est la graine initiale d'une algèbre amassée $\widetilde{\mathcal{A}}$ catégorifiée comme ci-dessus par une catégorie \mathcal{C} , il est naturel de chercher à catégorifier l'algèbre amassée \mathcal{A} de graine M à l'aide d'une catégorie \mathcal{C}' construite à partir de \mathcal{C} et du groupe G .

Ceci nous a conduit à étudier des catégories k -additives \mathcal{C} sur lesquelles un groupe G agit par auto-équivalences. Dans cette situation, on peut former une catégorie $\mathcal{C}G$ dont les objets $(X, (\psi_g)_{g \in G})$ sont les objets X de \mathcal{C} munis d'une famille d'isomorphismes ψ_g vers tous leurs transformés par des éléments g de G . On demande en outre que les ψ_g vérifient des conditions naturelles de compatibilité (voir section 2.1). En fait, dans le cas où G est fini, \mathcal{C} est une catégorie Hom-finie, Krull-Schmidt, et où la caractéristique du corps k ne divise pas le cardinal de G , notre catégorie $\mathcal{C}G$ est équivalente à la catégorie groupe tordue (*skew group category*) introduite par Riedtmann et Reiten en 1984 dans [59]. Nous appellerons $\mathcal{C}G$ la catégorie G -équivalente.

Nous montrons alors des résultats utiles de transfert. Par exemple :

- si \mathcal{C} est abélienne, $\mathcal{C}G$ est abélienne ;
- si \mathcal{C} est exacte et si pour tout $g \in G$ l'auto-équivalence de \mathcal{C} associée à g est exacte alors $\mathcal{C}G$ est exacte ;
- si H est un sous-groupe distingué de G alors G/H agit sur $\mathcal{C}H$ et on a une équivalence de catégories $(\mathcal{C}H)(G/H) \simeq \mathcal{C}G$.

Nous montrons aussi qu'on peut munir $\mathcal{C}G$ d'une action naturelle de la catégorie $\text{mod } k[G]$ des représentations de G sur k .

Les catégories \mathcal{C} utilisées par Geiß, Leclerc, Schröer et Fu, Keller pour modéliser des algèbres amassées ont toujours les propriétés essentielles suivantes. Ce sont des catégories

de Frobenius (i.e. des catégories exactes avec assez d'injectifs et de projectifs, et les injectifs et les projectifs coïncident), et elles vérifient

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)^*,$$

fonctoriellement en X et Y . Ceci revient à dire que leur catégorie stable est Calabi-Yau de dimension 2. On dira pour résumer qu'une telle catégorie \mathcal{C} est 2-Calabi-Yau. Dans ce cadre, une notion centrale est celle d'objet amas-basculant, introduite par Iyama [43]. L'objet X est amas-basculant s'il est rigide, c'est à dire $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, X) = 0$ et si tout objet Y vérifiant $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = 0$ est dans l'enveloppe additive de X . Si \mathcal{C} catégorifie une algèbre amassée $\tilde{\mathcal{A}}$ (antisymétrique), les objets amas-basculants modélisent les amas de $\tilde{\mathcal{A}}$, et leurs facteurs directs indécomposables correspondent aux variables d'amas.

Notre principal résultat de transfert montre que si \mathcal{C} est 2-Calabi-Yau, alors $\mathcal{C}G$ est 2-Calabi-Yau (proposition 2.2.27). De plus les deux foncteurs adjoints naturels reliant \mathcal{C} et $\mathcal{C}G$ induisent des bijections réciproques entre les classes d'isomorphisme d'objets amas-basculants G -stables de \mathcal{C} , et les classes d'isomorphisme d'objets amas-basculants mod $k[G]$ -stables de $\mathcal{C}G$ (proposition 2.2.32).

Afin de pouvoir appliquer ces résultats généraux dans les exemples étudiés par Geiß, Leclerc et Schröer, nous calculons explicitement la catégorie équivariante $\mathcal{C}G$ lorsque

1. \mathcal{C} est la catégorie des modules sur un carquois Q et l'action de G sur \mathcal{C} provient d'une action de G sur kQ permutant les idempotents primitifs ;
2. \mathcal{C} est la catégorie des modules sur l'algèbre préprojective Λ_Q associée à Q munie d'une action de G comme dans le cas précédent ;
3. \mathcal{C} est la catégorie des modules sur le carquois à un sommet et deux boucles α et α^* liées par la relation $\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha$, et G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}(\mathbb{C}^2)$, où \mathbb{C}^2 est identifié à $\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\alpha^*$.

Dans le premier cas, notre calcul généralise le résultat de Reiten et Riedtmann qui concernait le cas où G est commutatif [59, §2]. On obtient que $\mathcal{C}G \simeq \mathrm{mod} kQ_G$ où Q_G est un carquois que nous décrivons explicitement (les sommets de Q_G sont les couples (\mathcal{O}, ρ) formés d'une G -orbite \mathcal{O} de sommets de Q , et d'un caractère irréductible ρ du stabilisateur $G_{\mathcal{O}}$ d'un point de \mathcal{O}). Dans le deuxième cas nous montrons que $\mathcal{C}G$ est équivalente à la catégorie des modules sur l'algèbre préprojective du carquois Q_G . Enfin dans le troisième cas nous obtenons que $\mathcal{C}G$ est équivalente à la catégorie des modules sur l'algèbre préprojective du carquois affine $MK(G)$ associé à G dans la correspondance de McKay. Nous donnons ainsi une nouvelle preuve d'un résultat de Reiten et Van den Bergh [60, démonstration de la proposition 2.13] (voir aussi [16, theorem 0.1]).

Catégorification d'algèbres amassées antisymétrisables

Considérons une catégorie 2-Calabi-Yau \mathcal{C} sur laquelle agit un groupe fini G . Pour mener à bien notre programme de catégorification, il nous faut encore développer une théorie des mutations des objets amas-basculants mod $k[G]$ -stables de $\mathcal{C}G$, ou, ce qui revient au même comme on l'a vu, des objets amas-basculants G -stables de \mathcal{C} . Dans le cas antisymétrique (qu'on peut voir comme le cas où G est le groupe trivial), on sait qu'une telle théorie est possible dès qu'il existe un objet amas-basculant dont le carquois

associé n'admet ni boucle, ni 2-cycle. Nous introduisons dans le cas général des notions de mod $k[G]$ -boucle et de mod $k[G]$ -2-cycle pour un objet amas-basculant mod $k[G]$ -stable. Nous montrons alors que si \mathcal{CG} admet un objet amas-basculant mod $k[G]$ -stable n'ayant ni mod $k[G]$ -boucle ni mod $k[G]$ -2-cycle, tous les objets amas-basculants mod $k[G]$ -stables ont aussi ces propriétés. Sous cette hypothèse on peut définir une opération de mutation. Plus précisément, si T est amas-basculant mod $k[G]$ -stable et si \overline{X} est la mod $k[G]$ -orbite d'un facteur direct indécomposable non projectif X de T , on construit un autre objet amas-basculant mod $k[G]$ -stable T' obtenu en remplaçant \overline{X} par la mod $k[G]$ -orbite \overline{Y} d'un objet indécomposable Y . On note alors $\mu_{\overline{X}}(T) = T'$. On peut aussi associer à T une matrice antisymétrisable $B(T)$ dont les lignes sont indexées par les mod $k[G]$ -orbites \overline{X} de facteurs indécomposables de T et les colonnes par les mod $k[G]$ -orbites \overline{X} de facteurs indécomposables non projectifs de T . Les coefficients $b_{\overline{X}\overline{Y}}$ sont les nombres de flèches dans le carquois de Gabriel de $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ entre un objet indécomposable fixé Y de \overline{Y} et un objet indécomposable quelconque X de \overline{X} (les flèches de \overline{X} dans \overline{Y} étant comptées positivement et celles de \overline{Y} dans \overline{X} étant comptées négativement). On montre alors que

$$B(\mu_{\overline{X}}(T)) = \mu_{\overline{X}}(B(T)),$$

où dans le second membre, par abus de notation, $\mu_{\overline{X}}$ désigne la mutation combinatoire des matrices antisymétrisables définie par Fomin et Zelevinsky. À travers la bijection entre les objets amas-basculants mod $k[G]$ -stables de \mathcal{CG} et les objets amas-basculants G -stables de \mathcal{C} , on peut associer à chaque objet amas-basculant G -stable T de \mathcal{C} une matrice que l'on notera aussi par abus de notation $B(T)$.

Finalement, pour associer à \mathcal{C} et G une algèbre amassée, nous introduisons la notion de caractère d'amas G -équivariant. Dans le cas antisymétrique, d'après les travaux de Caldero, Chapoton [9], de Caldero, Keller [10], [11], de Palu [57], de Dehy, Keller [17] et de Fu, Keller [26] on peut associer à tout objet X de \mathcal{C} un polynôme de Laurent en les variables d'amas d'une graine initiale de l'algèbre amassée \mathcal{A} catégorifiée par \mathcal{C} . Si cette graine initiale est G -stable, on peut identifier les variables d'amas appartenant à une même G -orbite. La spécialisation ainsi obtenue du polynôme de Laurent associé à X ne dépend que de la G -orbite \overline{X} de X , et nous la notons $P_{\overline{X}}$. On déduit alors de tout ce qui précède que si T est amas-basculant G -stable dans \mathcal{C} , et si \mathcal{A} est l'algèbre amassée de graine initiale la matrice antisymétrisable $B(T)$, alors les variables d'amas de \mathcal{A} sont de la forme $P_{\overline{X}}$ où \overline{X} est l'orbite d'un facteur indécomposable d'un objet amas-basculant G -stable de \mathcal{C} . On peut alors généraliser le résultat de Fu, Keller et montrer que si la matrice $B(T)$ est de rang maximal, les monômes d'amas de \mathcal{A} sont linéairement indépendants.

Exemples

Nous donnons pour terminer de nouvelles familles d'exemples de catégorification d'algèbres amassées. Soit H un groupe de Lie simple de type simplement lacé A , D , E , et soit Λ l'algèbre préprojective associée. Geiß, Leclerc et Schröer ont montré que des sous-catégories appropriées de mod Λ induisaient des structures d'algèbres amassées sur les anneaux de coordonnées multi-homogènes des variétés de drapeaux partiels associées à H , ainsi que sur les anneaux de coordonnées de certains sous-groupes unipotents et cellules unipotentes [34], [35]. Notre travail nous permet d'étendre ces résultats aux groupes H de type non simplement lacé B , C , F , G . En particulier nous obtenons pour tous ces

exemples une preuve de la conjecture d'indépendance linéaire de Fomin et Zelevinsky, et nous complétons la classification des variétés de drapeaux dont la structure amassée de l'anneau de coordonnées est de type fini (i.e. admet un nombre fini d'amas).

Notons que les travaux de Geiß, Leclerc et Schröer s'appuient de manière cruciale sur l'existence de la base semi-canonique duale de Lusztig pour l'anneau de coordonnées d'un sous-groupe unipotent maximal de H . Or lorsque H n'est pas simplement lacé, on ne connaît pas de construction de cette base. Nos résultats peuvent être interprétés comme donnant une partie de la base semi-canonique duale dans le cas non simplement lacé, à savoir le sous-ensemble formé des monômes d'amas.

Finalement, on considère l'algèbre préprojective Λ_{Kr} du carquois de Kronecker. Dans l'esprit de la correspondance de McKay, nous indiquons comment, étant donné un sous-groupe fini G de $\text{SL}(\mathbb{C}^2)$ contenant $-\text{Id}$, on peut relever les objets amas-basculants de sous-catégories 2-Calabi-Yau de $\text{mod } \Lambda_{\text{Kr}}$ en des objets amas-basculants de sous-catégories 2-Calabi-Yau de $\text{mod } \Lambda_{\text{MK}(G)}$, et nous l'illustrons par un exemple.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Algèbres amassées

Pour plus de références sur les algèbres amassées et en particulier de nombreux exemples, voir les articles fondateurs de Fomin et Zelevinsky [22], [23].

Soient m et n deux entiers avec $m \geq n$. Soit \mathcal{F} le corps des fonctions rationnelles en m variables algébriquement indépendantes.

Définition 1.1.1. Une graine dans \mathcal{F} est un couple (\mathbf{x}, B) où $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ est une partie de \mathcal{F} algébriquement indépendante qui engendre \mathcal{F} et B est une matrice $m \times n$ à coefficients entiers dont la partie principale B° (les n premières lignes) est antisymétrisable (c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale inversible D telle que DB° soit antisymétrique). Les variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_m$ sont appelées coefficients de la graine.

Définissons maintenant les mutations des graines :

Définition 1.1.2. Si (\mathbf{x}, B) est une graine dans \mathcal{F} et si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la matrice $\mu_i(B)$ comme étant la matrice de coefficients $(b'_{j\ell})_{(j,\ell) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket}$ définis par

$$\begin{cases} b'_{j\ell} = -b_{j\ell} & \text{si } i \in \{j, \ell\} \\ b'_{j\ell} = b_{j\ell} + \frac{b_{ji}|b_{i\ell}| + |b_{ji}b_{i\ell}|}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où les $b_{j\ell}$ sont les coefficients de B . On définit $\mu_i(\mathbf{x}) = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m\}$ par

$$\begin{cases} x'_j = x_j & \text{si } j \neq i \\ x'_i x_i = \prod_{b_{\ell i} > 0} x_\ell^{b_{\ell i}} + \prod_{b_{\ell i} < 0} x_\ell^{-b_{\ell i}} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on note $\mu_i(\mathbf{x}, B) = (\mu_i(\mathbf{x}), \mu_i(B))$. On appelle cette opération une mutation.

Rappelons maintenant ce lemme facile :

Lemme 1.1.3. Si (\mathbf{x}, B) est une graine, alors $\mu_i(\mathbf{x}, B)$ est aussi une graine. De plus $\mu_i(\mu_i(\mathbf{x}, B)) = (\mathbf{x}, B)$.

Définition 1.1.4. Si (\mathbf{x}, B) et (\mathbf{x}', B') sont deux graines, elles sont dites mutation-équivalentes si il existe une suite finie de mutations permettant de passer de l'une à l'autre. On appelle classe de mutation de la graine (\mathbf{x}, B) l'ensemble des graines mutation-équivalentes à (\mathbf{x}, B) .

Définition 1.1.5. Si (\mathbf{x}, B) est une graine, on appelle algèbre amassée de graine (\mathbf{x}, B) la sous-algèbre de \mathcal{F} engendrée par toutes les variables de la classe de mutation de cette graine. On note cette algèbre $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ ou encore $\mathcal{A}(B)$ puisqu'à automorphisme près de \mathcal{F} , \mathbf{x} n'a pas d'influence sur $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$.

Définition 1.1.6. On appelle amas de $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ les ensembles de variables des graines mutation-équivalentes à (\mathbf{x}, B) . On appelle variables d'amas de $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ les variables appartenant aux amas de $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$. On appelle monômes d'amas de $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ les monômes formés de variables d'amas d'un même amas.

Citons maintenant quelques résultats importants de Fomin et Zelevinsky.

Théorème 1.1.7 (phénomène de Laurent, [22, theorem 3.1]). *Si \mathbf{x}' est un amas de $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ alors toutes les variables d'amas de $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ s'expriment comme des polynômes de Laurent en les variables de \mathbf{x}' .*

Théorème 1.1.8 ([23]). *L'algèbre $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ a un nombre fini d'amas si et seulement si il existe une graine (\mathbf{x}', B') mutation-équivalente à (\mathbf{x}, B) telle que la matrice carrée C définie par*

$$C_{ij} = \begin{cases} -|B_{ij}| & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j \end{cases}$$

pour $1 \leq i, j \leq n$ soit une matrice de Cartan de type de Dynkin.

Citons aussi cette conjecture :

Conjecture 1.1.9 ([24, conjecture 7.2]). *Les monômes d'amas d'une algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ sont linéairement indépendants.*

Fu et Keller [26] ont démontré cette conjecture dans une classe importante de cas antisymétriques. Nous la démontrerons dans une classe similaire de cas antisymétrisables.

Exemple 1.1.10. La grassmannienne $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^6)$ des plans dans \mathbb{C}^6 se plonge dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{\binom{6}{2}})$. Un système de coordonnées projectives (plongement de Plücker) du plan engendré par deux vecteurs lignes de \mathbb{C}^6 est donné par l'ensemble des mineurs $\{X_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 6}$ de la matrice 2×6 formée par ces deux vecteurs. Chacune des coordonnées de Plücker peut être codée par une diagonale ou un côté d'un hexagone dont les sommets sont numérotés de 1 à 6 dans le sens direct.

On a alors la formule classique, si $i < j < k < l$, $X_{ik}X_{il} = X_{ij}X_{kl} + X_{il}X_{jk}$, ce qui permet de mettre une structure amassée sur l'anneau de coordonnées homogènes de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^6)$. Chaque amas correspond à une triangulation d'un hexagone, les arêtes intérieures représentant les variables d'amas que l'on peut muter et les côtés de l'hexagone représentant les coefficients. On peut facilement calculer le graphe des mutations de cet exemple, appelé l'associaèdre (voir figure 1.1) : les mutations correspondent à des « flips », c'est-à-dire à

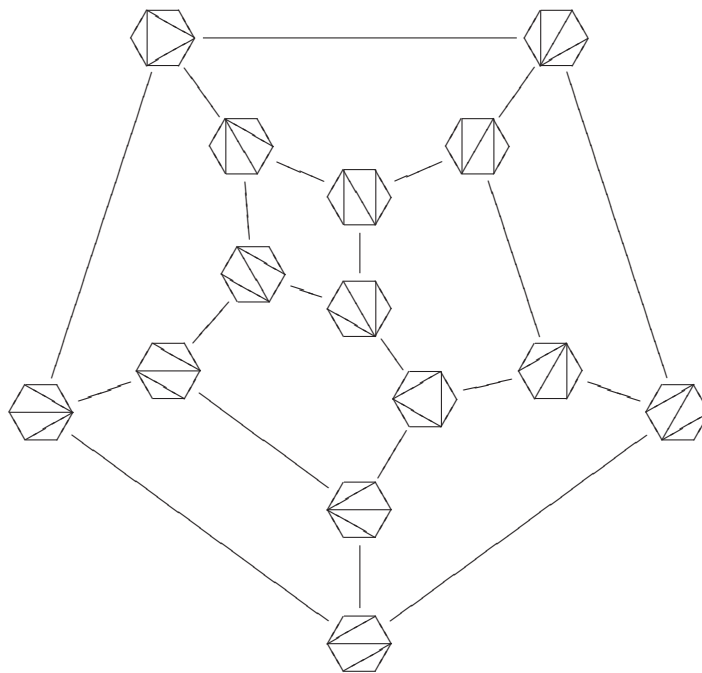
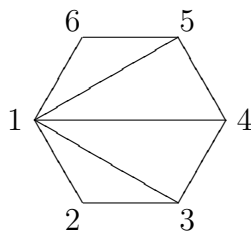


FIG. 1.1 – Associaèdre

changer exactement une arête intérieure de la triangulation. En prenant comme graine initiale



on obtient la matrice d'échange

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de type de Dynkin A_3 (les colonnes sont numérotées dans l'ordre 1-3, 1-4, 1-5 et les lignes 1-3, 1-4, 1-5, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 1-6).

1.2 Catégories

Le but de cette section est de donner des définitions et des résultats élémentaires et souvent bien connus de la théorie des catégories qui serviront dans la suite.

1.2.1 Catégories additives Hom-finies

Définition 1.2.1 (catégorie additive). Soit A un anneau. Une catégorie \mathcal{C} est dite A -additive (ou simplement additive si $A = \mathbb{Z}$) si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour $X, Y \in \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un A -module ;
2. la composition \circ est bilinéaire ;
3. il y a un objet nul dans \mathcal{C} (c'est-à-dire à la fois initial et final) ;
4. la catégorie \mathcal{C} admet des coproduits finis.

Remarque 1.2.2. Toute catégorie A -additive est additive. On appellera souvent une A -catégorie une catégorie A -additive.

Lemme 1.2.3. Soient A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ et $\iota_X : X \hookrightarrow X \amalg Y$, $\iota_Y : Y \hookrightarrow X \amalg Y$ les morphismes canoniques de X et de Y dans leur coproduit. Alors il existe de manière unique $\pi_X : X \amalg Y \rightarrow X$ et $\pi_Y : X \amalg Y \rightarrow Y$ tels que $\pi_X \iota_X = \text{Id}_X$, $\pi_X \iota_Y = 0$, $\pi_Y \iota_X = 0$ et $\pi_Y \iota_Y = \text{Id}_Y$. De plus, $\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y = \text{Id}_{X \amalg Y}$ et π_X et π_Y induisent une structure de produit de X et de Y sur $X \amalg Y$.

Démonstration. Le morphisme π_X doit faire commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 & \downarrow \iota_X & \searrow \text{Id}_X \\
 Y & \xrightarrow{\iota_Y} X \amalg Y & \\
 & \searrow 0 & \swarrow \pi_X \\
 & & X
 \end{array}$$

par définition du coproduit, π_X existe et est unique. De la même façon, π_Y existe et est unique.

Si $\psi = \text{Id}_{X \amalg Y}$ ou si $\psi = \iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 & \downarrow \iota_X & \searrow \iota_X \\
 Y & \xrightarrow{\iota_Y} X \amalg Y & \\
 & \searrow \iota_Y & \swarrow \psi \\
 & & X \amalg Y
 \end{array}$$

et comme par définition du coproduit un tel ψ est unique, $\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y = \text{Id}_{X \amalg Y}$.

Soient maintenant $Z \in \mathcal{C}$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$. Cherchons φ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 Z & & \\
 \searrow \varphi & \nearrow f & \\
 & X \amalg Y & \xrightarrow{\pi_X} X \\
 \searrow g & \downarrow \pi_Y & \\
 & Y &
 \end{array}$$

D'après ce qui précède, on doit avoir $\varphi = \text{Id}_X \amalg_Y \varphi = (\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) \varphi = \iota_X f + \iota_Y g$ et il est clair d'autre part que ce φ convient. On a donc montré l'existence et l'unicité de φ . \square

Notation 1.2.4. Comme dans une A -catégorie, le coproduit est aussi un produit, il sera noté \oplus et appelé somme directe.

Définition 1.2.5. Soit A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie. Un objet $X \in \mathcal{C}$ sera dit indécomposable si pour tout $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$, si $X \simeq X_1 \oplus X_2$, alors $X_1 = 0$ ou $X_2 = 0$ et si $X \neq 0$.

Définition 1.2.6. Soit A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie. La catégorie \mathcal{C} sera dite Hom-finie si quels que soient $X, Y \in \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un A -module finiment engendré.

Remarque 1.2.7. Si k est un corps, tout objet d'une k -catégorie Hom-finie est une somme directe finie d'indécomposables.

- Exemple 1.2.8.**
1. La catégorie des groupes abéliens est une catégorie additive.
 2. La catégorie des groupes abéliens finiment engendrés est une catégorie additive Hom-finie.
 3. Si A est un anneau commutatif, la catégorie $\text{Mod } A$ des A -modules est A -additive.
 4. Si A est un anneau commutatif, la catégorie $\text{mod } A$ des A -modules de type fini est A -additive Hom-finie.

Définition 1.2.9 (foncteur A -additif). Si A est un anneau et si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux A -catégories, un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sera dit A -additif si pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ est un morphisme de A -modules.

Remarque 1.2.10. Si le contraire n'est pas précisé, le mot foncteur entre deux A -catégories désignera un foncteur A -additif.

Définition 1.2.11. Soit A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie. Soit $X \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ un idempotent ($f^2 = \text{Id}_X$). Alors f sera dit scindé si il existe $Y \in \mathcal{C}$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ et $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tels que $gh = f$ et $hg = \text{Id}_Y$.

Définition 1.2.12 (catégorie Krull-Schmidt). Une A -catégorie \mathcal{C} sera dite Krull-Schmidt si tout objet est une somme finie d'indécomposables et si pour tout indécomposable $X \in \mathcal{C}$, $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est un anneau local.

Exemple 1.2.13. Soit k un corps et A une k -algèbre. Alors la catégorie $\text{mod } A$ des A -modules de dimension finie est une k -catégorie Krull-Schmidt.

Lemme 1.2.14. Soit A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie Krull-Schmidt. Soient des objets indécomposables X_1, X_2, \dots, X_m et Y_1, Y_2, \dots, Y_n de \mathcal{C} . Si $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m \simeq Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$, alors $m = n$ et il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \simeq Y_{\sigma(i)}$.

Démonstration. Soient $\varphi : X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m \rightarrow Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$ un isomorphisme et ψ son inverse. Raisonnons maintenant par récurrence sur m . Si $m = 0$, le résultat est immédiat. Si $m \neq 0$, on a, en utilisant des notations matricielles,

$$\sum_{i=1}^n \psi_{1i} \varphi_{i1} = \text{Id}_{X_1}$$

et par conséquent, comme $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_1)$ est un anneau local et Id_{X_1} n'est pas dans l'idéal maximal, l'un des $\psi_{1i} \varphi_{i1}$ est en dehors de l'idéal maximal et est par conséquent inversible. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $i = 1$. Finalement, φ_{11} est inversible et donc $X_1 \simeq Y_1$. Par ailleurs,

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{Y_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\varphi_{21} \varphi_{11}^{-1} & \text{Id}_{Y_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\varphi_{n1} \varphi_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 & \text{Id}_{Y_n} \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & * \\ 0 & \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$$

est inversible. Par conséquent, $\tilde{\varphi}$ est inversible ce qui induit immédiatement le résultat par récurrence. \square

Lemme 1.2.15. Soit k un corps et \mathcal{C} une k -catégorie Hom-finie.

1. Supposons que \mathcal{C} soit Krull-Schmidt. Si $X \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est un idempotent scindé alors il existe $Y, Z \in \mathcal{C}$ tels que $Y \oplus Z \simeq X$ et $f = \text{Id}_Y \oplus 0_Z$.
2. La catégorie \mathcal{C} est Krull-Schmidt si et seulement si tous les idempotents sont scindés.

Démonstration. 1. Soient $Y \in \mathcal{C}$, $\iota : Y \hookrightarrow X$ et $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ tels que $\pi \iota = \text{Id}_Y$ et $\iota \pi = f$. Supposons que $Y \neq 0$. Soient $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ et $Y = \bigoplus_{i=1}^k Y_i$ des décompositions de X et de Y en somme directes d'indécomposables. Soient $(\iota_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}$ et $(\pi_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}$ les coefficients matriciels de ι et π . Comme $\pi \iota = \text{Id}_Y$, $\text{Id}_{Y_1} = \sum_{i=1}^n \pi_{1i} \iota_{i1}$ et il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\pi_{1i} \iota_{i1}$ est inversible car $\text{End}_{\mathcal{C}}(Y_1)$ est un anneau local. À permutation près, on peut supposer que $i = 1$. Soient $Y'_1 = \bigoplus_{i=2}^k Y_i$ et $X'_1 = \bigoplus_{i=2}^n X_i$. Comme $\pi_{11} \iota_{11}$ n'est pas nilpotent, $\iota_{11} \pi_{11}$ ne l'est pas non plus et par conséquent, $\iota_{11} \pi_{11}$ est inversible puisque $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_1)$ est local. Soient

$$\alpha = \begin{pmatrix} \text{Id}_{X_1} & 0 \\ -\iota'_{11} \iota_{11}^{-1} & \text{Id}_{X'_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} \text{Id}_{Y_1} & -\iota_{11}^{-1} \iota'_{11} \\ 0 & \text{Id}_{Y'_1} \end{pmatrix}$$

Alors $\iota' = \alpha \iota \beta$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \iota_{11} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Soit $\pi' = \beta^{-1}\pi\alpha^{-1}$. Comme $\pi'\iota' = \text{Id}_Y$, π' est de la forme

$$\begin{pmatrix} \iota_{11}^{-1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

et par suite, $f' = \iota'\pi'$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{X_1} & * \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Comme $f'^2 = f'$, $b^2 = b$ et, par récurrence, il existe $B, C \in \mathcal{C}$ tels que $X'_1 = B \oplus C$ avec $b = \text{Id}_B \oplus 0_C$. Finalement,

$$f' = \begin{pmatrix} \text{Id}_{X_1} & 0 & c \\ 0 & \text{Id}_B & 0 \\ 0 & 0 & 0_C \end{pmatrix}$$

puisque $f'^2 = f'$. Donc f' est conjuguée à

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_B & 0 \\ 0 & 0 & 0_C \end{pmatrix}$$

d'où le résultat comme f' et f sont conjuguées. \square

2. Supposons que \mathcal{C} est Krull-Schmidt. Soient $X \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ tels que $f^2 = f$. Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ tels que $X = X_1 \oplus X_2$ et X_1 est indecomposable. Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $\iota_i : X_i \hookrightarrow X$ et $\pi_i : X \twoheadrightarrow X_i$ les injections et surjections canoniques. D'après le premier point, il revient au même de prouver que f est scindée ou que $\text{Id}_X - f$ est scindée. Comme $\text{Id}_{X_1} = \pi_1 f \iota_1 + \pi_1 (\text{Id}_X - f) \iota_1$ et $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_1)$ est un anneau local, l'un des deux termes est inversible. Quitte à remplacer f par $1 - f$, on peut supposer que $\pi_1 f \iota_1$ est inversible. Si $\iota'_1 = f \iota_1$ et $\pi'_1 = (\pi_1 f \iota_1)^{-1} \pi_1 f$ alors $\pi'_1 \iota'_1 = \text{Id}_{X_1}$ et ainsi $f' = \iota'_1 \pi'_1$ est scindée. En utilisant le point précédent, on peut écrire f' sous la forme $\text{Id}_{X_1} \oplus 0_{X_2}$. Comme $f f' = f' f$, X_1 et X_2 sont stables par f et par conséquent f est la somme directe d'un idempotent de $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_1)$ et d'un idempotent de $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_2)$. Comme f' vaut l'identité sur X_1 , f aussi. Une récurrence immédiate sur X_2 permet de conclure.

Réciproquement, supposons que tous les idempotents sont scindés. Soient $X \in \mathcal{C}$ un indécomposable et $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$. Soit P un polynôme minimal de f . Écrivons $P = X^\alpha Q$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et $Q(0) \neq 0$. Par le lemme chinois, il existe $R \in k[X]$ tel que $R \equiv 0 \pmod{X^\alpha}$ et $R \equiv 1 \pmod{Q}$. Par conséquent, P divise $R(R - 1)$ et alors $f' = R(f)$ est idempotent. Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ et $\iota_1 : X_1 \hookrightarrow X$, $\pi_1 : X \twoheadrightarrow X_1$, $\iota_2 : X_2 \hookrightarrow X$, $\pi_2 : X \twoheadrightarrow X_2$ tels que $\pi_1 \iota_1 = \text{Id}_{X_1}$, $\pi_2 \iota_2 = \text{Id}_{X_2}$, $\iota_1 \pi_1 = f'$ et $\iota_2 \pi_2 = \text{Id}_X - f'$. Alors $(\iota_1, \iota_2) : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X$ et $(\pi_1, \pi_2) : X \rightarrow X_1 \oplus X_2$ sont deux isomorphismes réciproques (comme $0 = (1 - f')f' = \iota_2 \pi_2 \iota_1 \pi_1$, $0 = \pi_2 \iota_2 \pi_2 \iota_1 \pi_1 = \pi_2 \iota_1$). Puisque X est indécomposable, soit $X_1 = 0$, soit $X_2 = 0$:

- Si $X_1 = 0$ alors $f' = 0$ et donc P divise R ; comme R et Q sont premiers entre eux et Q divise P , Q est constant et f est nilpotent.
- Si $X_2 = 0$ alors $f' = \text{Id}_X$ et P divise $R - 1$; comme $R - 1$ et X^α sont premiers entre eux et X^α divise P alors $\alpha = 0$ et donc f est inversible.

Finalemment, $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est local. \square

Définition 1.2.16. Soient A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Le morphisme f sera dit minimal à gauche si pour tout $g \in \text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$, si $gf = f$ alors g est inversible. Le morphisme f sera dit minimal à droite si pour tout $g \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$, si $fg = f$ alors g est inversible.

Lemme 1.2.17. Soit k un corps et \mathcal{C} une k -catégorie Hom-finie et Krull-Schmidt. Soient $X, Y, X', Y' \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$.

1. Le morphisme f est minimal à droite si et seulement si il n'y a pas de décomposition $X = X_0 \oplus X_1$ telle que $f|_{X_0} = 0$ et $X_0 \neq 0$.
2. Le morphisme f est minimal à gauche si et seulement si il n'y a pas de décomposition $Y = Y_0 \oplus Y_1$ telle que la corestriction de f à Y_0 s'annule et $Y_0 \neq 0$.
3. Les morphismes f et f' sont tous deux minimaux à droite (resp. à gauche) si et seulement si $f \oplus f'$ est minimal à droite (resp. à gauche).

Démonstration. 1. Si une telle décomposition existe, notons u la projection sur X_1 parallèlement à X_0 . Alors $fu = f$ et u n'est pas un isomorphisme car $X_0 \neq 0$. Réciproquement, supposons que f ne soit pas minimal à droite, autrement dit, il existe $u \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ non inversible tel que $fu = f$. Soit P un polynôme minimal de u . Posons $P(T) = (T-1)^\alpha Q$ avec $Q(1) \neq 0$ et posons $\tilde{P} = (Q/Q(1) - 1)^{2\alpha+1} + 1$. Soit $\tilde{u} = \tilde{P}(u)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = fu^n$ et par conséquent $f\tilde{u} = f\tilde{P}(u) = \tilde{P}(1)f = f$. De plus, il est immédiat que Q divise \tilde{P} ; il est aussi clair que $T-1$ divise $Q/Q(1) - 1$ ce qui implique que $(T-1)^\alpha$ divise $\tilde{P} - 1$. On en déduit que P divise $\tilde{P}(\tilde{P} - 1)$. Par suite, $\tilde{u}^2 = \tilde{u}$. Comme tous les idempotents sont scindés, X s'écrit $X = X_0 \oplus X_1$ avec $\tilde{u}|_{X_0} = 0$ et $\tilde{u}|_{X_1} = \text{Id}_{X_1}$. Alors $f|_{X_0} = 0$. Si $X_0 = 0$, $\tilde{u} = \text{Id}_X$ et par définition de \tilde{u} , $(Q/Q(1) - 1)^{2\alpha+1}(u) = 0$ et u est inversible (puisque $(Q/Q(1) - 1)^{2\alpha+1}$ et P ne s'annulent pas tous deux en 0). C'est une contradiction.

2. C'est le même raisonnement.

3. Supposons que f n'est pas minimal à droite. Alors il existe $u \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ tel que $fu = f$. Il est ainsi facile que $u \oplus \text{Id}_{X'}$ n'est pas inversible, que $(f \oplus f') \circ (u \oplus \text{Id}_{X'}) = f \oplus f'$ et par conséquent $f \oplus f'$ n'est pas minimal à droite.

Réciproquement, supposons que $f \oplus f'$ n'est pas minimal à droite. Il existe un facteur direct non nul Z de $X \oplus X'$ tel que $(f \oplus f')|_Z = 0$. On peut supposer que Z est indécomposable. Soit $\iota : Z \hookrightarrow X \oplus X'$ l'inclusion canonique et $\pi : X \oplus X' \rightarrow Z$ la projection. En particulier, $\pi\iota = \text{Id}_Z$. Soient $X = \bigoplus_{i=1}^m X_i$ et $X' = \bigoplus_{i=1}^n X'_i$ les décompositions de X et X' en sommes directes d'indécomposables. Soient $(\iota_i)_{1 \leq i \leq m}$, $(\iota'_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(\pi_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(\pi'_i)_{1 \leq i \leq n}$ leurs coefficients matriciels. Comme $\sum_{i=1}^m \pi_i \iota_i + \sum_{i=1}^n \pi'_i \iota'_i = \text{Id}_Z$, et comme $\text{End}_{\mathcal{C}}(Z)$ est un anneau local, il y a l'un des $\pi_i \iota_i$ ou $\pi'_i \iota'_i$ qui est inversible. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\pi_1 \iota_1$ est inversible. Posons $\tilde{\pi}_1 = (\pi_1 \iota_1)^{-1} \pi_1$. Alors $\tilde{\pi}_1 \iota_1 = \text{Id}_Z$ et par suite $\iota_1 \tilde{\pi}_1$ est un idempotent non nul de $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_1)$. Comme X_1 est indécomposable et tous les idempotents sont scindés, $\iota_1 \tilde{\pi}_1 = \text{Id}_{X_1}$. Soient $\tilde{\pi} : X \rightarrow Z$ défini par $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m 0_{X_i}$ et $\tilde{\iota}$ la corestriction de ι à X . Alors $\tilde{\pi}\tilde{\iota} = \text{Id}_Z$ et $f\tilde{\iota} = 0$ et donc f n'est pas minimal à droite. \square

Définition 1.2.18. Soit \mathcal{C} une k -catégorie, Hom-finie et Krull-Schmidt. On notera $[\mathcal{C}]$ la k -catégorie semi-simple dont les simples sont les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de \mathcal{C} . Pour $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n \in \mathcal{C}$ où X_1, X_2, \dots, X_n sont indécomposables, on notera

$$[X] = [X_1] \oplus [X_2] \oplus \cdots \oplus [X_n]$$

où $[X_i]$ est la classe d'isomorphisme de X_i (ceci est bien défini, puisque \mathcal{C} est Krull-Schmidt). Par ailleurs, si $X \in \mathcal{C}$ est indécomposable, on définit

$$\text{End}_{[\mathcal{C}]}([X]) = \text{End}_{\mathcal{C}}(X)/\mathfrak{m}$$

où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$.

Lemme 1.2.19. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{C}$ des indécomposables non isomorphes. Alors, pour $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathbb{N}$,

$$\dim_k(\text{Hom}_{[\mathcal{C}]}([X_1^{i_1} \oplus X_2^{i_2} \oplus \cdots \oplus X_n^{i_n}], [X_1^{j_1} \oplus X_2^{j_2} \oplus \cdots \oplus X_n^{j_n}])) = \sum_{\ell=1}^n i_{\ell} j_{\ell} c_{\ell}.$$

où pour tout ℓ , c_{ℓ} est le degré de l'extension

$$k \subset \text{End}_{\mathcal{C}}(X_{\ell})/\mathfrak{m}_{\ell}$$

avec \mathfrak{m}_{ℓ} l'idéal maximal de $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_{\ell})$.

Démonstration. C'est immédiat. □

1.2.2 Catégories abéliennes

Soit A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie ayant des noyaux et des conoyaux.

Définition 1.2.20. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. On appelle image de f le noyau du conoyau de f et on la note $\text{Im } f$. On appelle coimage de f le conoyau du noyau de f et on la note $\text{Coim } f$.

Lemme 1.2.21. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Il existe un unique morphisme $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Coim } f, Y)$ et un unique $v_f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Coim } f, \text{Im } f)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \text{Coker } f \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & \text{Coim } f & \xrightarrow{v_f} & \text{Im } f & & \end{array}$$

Démonstration. L'existence et l'unicité de u viennent immédiatement de la définition de $\text{Coim } f$ et l'existence et l'unicité de v_f viennent immédiatement de la définition de $\text{Im } f$. □

Définition 1.2.22. On dit que la catégorie \mathcal{C} est A -abélienne si elle est A -additive et pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, f possède un noyau et un conoyau et v_f définie dans le lemme précédent est un isomorphisme. On dit qu'elle est abélienne si elle est \mathbb{Z} -abélienne.

- Exemple 1.2.23.** 1. Les catégories $\text{mod } A$ et $\text{Mod } A$ sont toutes deux abéliennes ;
2. La catégorie \mathfrak{Ban} des espaces de Banach sur \mathbb{R} est \mathbb{R} -additive, admet des noyaux et des conoyaux mais n'est pas abélienne. En effet, si l'on note C^0 l'espace des fonctions continues et bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et C^1 l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivables bornées et de dérivées continues et bornées muni de la norme $\|\cdot\|'$ où $\|f\|' = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, alors l'inclusion ι de C^1 dans C^0 est une injection donc a 0 comme noyau. Par ailleurs, elle a aussi 0 comme conoyau. En effet, si $X \in \mathfrak{Ban}$ et $g \in \text{Hom}_{\mathfrak{Ban}}(C^0, X)$ vérifie $g\iota = 0$, alors, g étant nulle sur C^1 qui est dense, g est partout nulle. Finalement, $\text{Im } \iota = C^0$ et $\text{Coim } \iota = C^1$.

Lemme 1.2.24. Si k est un corps, toute k -catégorie abélienne Hom-finie est de Krull-Schmidt.

Démonstration. Il suffit de montrer que tout idempotent f est scindé et il est immédiat que c'est le cas à travers $\ker(\text{Id} - f)$. \square

Lemme 1.2.25. Si k est un corps, dans une k -catégorie abélienne, tout épimorphisme est le conoyau de son noyau et tout monomorphisme est le noyau de son conoyau

Démonstration. Soit f un épimorphisme. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \text{Coker } f = 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \\ & & \text{Coim } f & \xrightarrow{v_f} & \text{Im } f = Y & & \end{array}$$

où par définition d'une catégorie abélienne, v_f est un isomorphisme. Donc f est bien isomorphe au conoyau de son noyau (qui est par définition sa coimage). L'autre cas se traite de la même façon. \square

1.2.3 Catégories exactes

La définition donnée ici est celle de Keller [47, appendix A]. La première proposition relie cette définition à la définition originale de Quillen [58, §2].

Rappelons tout d'abord la définition suivante :

Définition 1.2.26. Dans une catégorie \mathcal{C} , un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ Y' & \xrightarrow{f_2} & Z \end{array}$$

est dit cartésien (resp. cocartésien), si pour tout α et β faisant commuter la partie pleine

du diagramme de gauche (resp. de droite) :

$$\begin{array}{ccc}
 X' & & \\
 \searrow h & \alpha & \\
 & X \xrightarrow{f_1} Y & \\
 \swarrow \beta & \downarrow g_1 & \downarrow g_2 \\
 & Y' \xrightarrow{f_2} Z &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f_1} & Y \\
 g_1 \downarrow & & g_2 \downarrow \\
 Y' & \xrightarrow{f_2} & Z \\
 & \searrow \beta & \swarrow h \\
 & & Z'
 \end{array}$$

(cartésien) (cocartésien)

il existe une unique flèche h faisant commuter le diagramme.

Définition 1.2.27. Soit A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie. Une suite exacte de \mathcal{C} est un couple (f, g) de morphismes composables de \mathcal{C} tel que f est un noyau de g et g un conoyau de f . Soit \mathcal{E} un ensemble de suites exactes de \mathcal{C} stable par isomorphisme. On dira qu'une suite exacte est admissible si elle appartient à \mathcal{E} . On dira qu'un morphisme f de \mathcal{C} est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) admissible si il existe un morphisme g de \mathcal{C} tel que (f, g) (resp. (g, f)) soit une suite exacte admissible. On dit que \mathcal{C} munie de \mathcal{E} est une A -catégorie exacte (ou exacte si $A = \mathbb{Z}$) si les axiomes suivants sont vérifiés :

1. Le morphisme Id_0 est un épimorphisme admissible.
2. La composition de deux épimorphismes admissibles est un épimorphisme admissible.
3. Pour tout épimorphisme admissible $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, et tout $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$, il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\
 h' \downarrow & & h \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

tel que g' soit un épimorphisme admissible.

4. Pour tout monomorphisme admissible $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, et tout $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$, il existe un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 h \downarrow & & h' \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y'
 \end{array}$$

tel que f' soit un monomorphisme admissible.

Notation 1.2.28. Si $(f, g) \in \mathcal{E}$, on notera cette suite exacte courte

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

où $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$.

Exemple 1.2.29. 1. Si A est un anneau et si \mathcal{C} est une A -catégorie abélienne, \mathcal{C} est naturellement exacte munie de l'ensemble de ses suites exactes courtes (voir plus loin la démonstration).

2. Si A est un anneau et si \mathcal{C} est une A -catégorie, elle peut être rendue exacte en prenant comme suites exactes courtes admissibles les suites exactes de la forme $0 \rightarrow X \rightarrow X \oplus Y \rightarrow Y \rightarrow 0$.

Remarque 1.2.30. La plupart du temps, \mathcal{E} sera implicite. Cela ne signifie pas que \mathcal{E} est unique quand il existe (par exemple, pour une catégorie abélienne, les deux exemples précédents ne coïncident que si la catégorie est semi-simple).

Définition 1.2.31. Soit A un anneau et soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux A -catégories exactes. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ sera dit A -exact si il est A -additif et si il envoie toute suite exacte courte admissible sur une suite exacte courte admissible.

Le lemme suivant est complètement élémentaire et sert surtout à comprendre les axiomes précédents :

Lemme 1.2.32. *Si A est un anneau et \mathcal{C} est une A -catégorie exacte,*

1. *Le morphisme Id_0 est un monomorphisme admissible.*
2. *Pour toute suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, si $Z' \in \mathcal{C}$ et $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$, alors il existe une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \rightarrow 0$ et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où le carré de droite est cartésien.

3. *Pour toute suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, si $X' \in \mathcal{C}$ et $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$, alors il existe une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z \rightarrow 0$ et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où le carré de gauche est cocartésien.

4. *Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *la suite $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0 \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible ;*
- (b) *la suite $0 \rightarrow 0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible ;*
- (c) *le morphisme f est un isomorphisme.*

5. *La somme directe de deux suites exactes courtes admissibles est une suite exacte courte admissible.*

Démonstration. 1. C'est le noyau de l'épimorphisme admissible Id_0 .

2. Le carré cartésien tel que g' est un épimorphisme admissible existe par définition. Par définition d'un carré cartésien, il existe un unique $f' : X \rightarrow Y'$ telle que $g'f' = 0$ et $h'f' = f$ puisque $gf = 0$. Il suffit maintenant de montrer que f' est un noyau de g' . Si $X' \in \mathcal{C}$ et $f'' : X' \rightarrow Y'$ vérifient $g'f'' = 0$, alors par commutativité du diagramme, $gh'f'' = 0$ donc, comme f est un noyau de g , il existe un unique $\tilde{f} : X' \rightarrow X$ tel que $h'f'' = f\tilde{f}$. On a alors $h'f'\tilde{f} = h'f''$ et $g'f'\tilde{f} = g'f''$ ce qui, par définition d'un carré cartésien, implique que $f'\tilde{f} = f''$ ce qui montre bien que f' est un noyau de g' puisqu'on vient de voir que \tilde{f} est unique.
3. Ce point se prouve de manière similaire au point précédent.
4. Tout d'abord, si f est un isomorphisme, le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ 0 \downarrow & & \downarrow 0 \\ 0 & \xrightarrow{\text{Id}_0} & 0 \end{array}$$

donc comme Id_0 est un épimorphisme admissible, f l'est aussi. Par ailleurs, le seul noyau de f est alors 0 donc le deuxième point est vérifié et par une preuve similaire, le premier point est aussi vérifié. Par ailleurs, si la première (resp. la deuxième) assertion est vérifiée, par unicité du noyau (resp. du conoyau) de $Y \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow X$), le morphisme f est forcément un isomorphisme.

5. Soient $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow 0$ deux suites exactes courtes admissibles. Formons le diagramme commutatif suivant où les flèches sont évidentes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \oplus Z' & \longrightarrow & Z \oplus Z' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme le carré de droite est cartésien, la première ligne est une suite exacte courte admissible. De la même façon, la première ligne de

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' \oplus Y & \longrightarrow & Z' \oplus Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est une suite exacte courte admissible. Donc comme la composition de deux épimorphismes admissibles est un épimorphisme admissible, $Y \oplus Y' \rightarrow Z \oplus Z'$ est un épimorphisme admissible et la somme directe des deux suites exactes courtes admissibles est bien une suite exacte courte admissible par unicité du noyau. \square

Définition 1.2.33. Une suite exacte courte admissible sera dite scindée si elle est isomorphe à la somme direct d'une suite exacte courte de la forme $0 \rightarrow X \xrightarrow{\text{Id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow 0$ et d'une suite exacte courte de la forme $0 \rightarrow 0 \rightarrow Y \xrightarrow{\text{Id}_Y} Y \rightarrow 0$.

Dans la proposition suivante, de Keller [47, appendix A], les assertions de 3, 4, 5 et 6 étaient incluses à l'origine par Quillen dans la définition d'une catégorie exacte.

Proposition 1.2.34 (Keller). *Sont A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie exacte. Alors :*

1. *Si $g : Y \rightarrow Z$ est un épimorphisme admissible et $h : Z' \rightarrow Z$ est un morphisme et si le carré suivant est cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

alors

$$0 \rightarrow Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g' \\ h' \end{pmatrix}} Z' \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & g \end{pmatrix}} Z \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte admissible.

2. *Si $f : X \rightarrow Y$ est un monomorphisme admissible et $h : X \rightarrow X'$ est un morphisme et si le carré suivant est cocartésien :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

alors

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h \\ f \end{pmatrix}} X' \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f' & h' \end{pmatrix}} Y' \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte admissible.

3. *Pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$,*

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{Id}_X \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_Y \end{pmatrix}} Y \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte admissible.

4. *Si un morphisme g admet un noyau et si il existe un morphisme \tilde{g} tel que $\tilde{g}\tilde{g}$ soit un épimorphisme admissible, alors g est un épimorphisme admissible.*
5. *Si un morphisme f admet un conoyau et si il existe un morphisme \tilde{f} tel que $\tilde{f}f$ soit un monomorphisme admissible, alors f est un monomorphisme admissible.*
6. *La composition de deux monomorphismes admissibles est un monomorphisme admissible.*

Démonstration. 1. Soit $f : X \rightarrow Y$ et $f' : X \rightarrow Y'$ des noyaux de g et g' . On peut

alors former le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f' & \nearrow h' & \downarrow \tilde{f}' & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E & \xrightarrow{\tilde{g}} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g' & & \downarrow \tilde{g}' & & \\
 & & Z' & \xlongequal{\quad} & Z' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

dont le carré en haut à gauche est cocartésien et les deux lignes et les deux colonnes sont des suites exactes courtes admissibles (tout commute sauf le triangle $Y'YE$). Comme $g'f' = 0$ et $h'f' = f$, et comme le carré est cocartésien il existe un unique $\varphi : E \rightarrow Z' \oplus Y$ tel que

$$\varphi \tilde{f}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id}_Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi \tilde{f} = \begin{pmatrix} -g' \\ h' \end{pmatrix}$$

et comme g' est un conoyau de f' il existe un unique $\psi : Z' \rightarrow E$ tel que $\psi g' = \tilde{f}'h' - \tilde{f}$. Les morphismes φ et $\begin{pmatrix} \psi & \tilde{f}' \end{pmatrix}$ sont alors des isomorphismes réciproques. En effet, $\begin{pmatrix} \psi & \tilde{f}' \end{pmatrix} \varphi \tilde{f}' = \tilde{f}'$ et $\begin{pmatrix} \psi & \tilde{f}' \end{pmatrix} \varphi \tilde{f} = \tilde{f}$ donc par définition d'un carré cocartésien, $\begin{pmatrix} \psi & \tilde{f}' \end{pmatrix} \varphi = \text{Id}_E$; par ailleurs, on obtient

$$\varphi \psi g' = \begin{pmatrix} g' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_{Z'} \\ 0 \end{pmatrix} g' \quad \text{donc} \quad \varphi \psi = \begin{pmatrix} \text{Id}_{Z'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque g' est un épimorphisme et on en déduit que $\varphi \begin{pmatrix} \psi & \tilde{f}' \end{pmatrix} = \text{Id}_{Z' \oplus Y}$. On obtient alors l'isomorphisme de suites exactes courtes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E & \xrightarrow{\tilde{g}} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \varphi & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{\varphi \tilde{f}} & Z' \oplus Y & \xrightarrow{\tilde{g} \varphi^{-1}} & Z \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Donc la deuxième ligne est admissible et c'est la suite décrite dans l'énoncé (car $\tilde{g} \psi g' = h g'$ donc $\tilde{g} \psi = h$ puisque g' est un épimorphisme).

2. Ce point est le dual du précédent.
3. C'est un cas particulier des point précédents.
4. Soit f un noyau de g . Comme $g\tilde{g}$ est un épimorphisme admissible, en utilisant le premier point, $\begin{pmatrix} g & g\tilde{g} \end{pmatrix}$ est aussi un épimorphisme admissible. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & g\tilde{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id}_Y & -\tilde{g} \\ 0 & \text{Id}_{Y'} \end{pmatrix}$$

est aussi un épimorphisme admissible (le second facteur est un isomorphisme). On a alors le diagramme commutatif suivant, avec $\pi_X = (\text{Id}_X \ 0)$ et $\pi_Y = (\text{Id}_Y \ 0)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X \oplus Y' & \xrightarrow{f \oplus \text{Id}_{Y'}} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \end{pmatrix}} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \pi_X \downarrow & & \pi_Y \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

où la première ligne est une suite exacte courte admissible et le carré de gauche est cocartésien ce qui donne le résultat d'après le lemme précédent.

5. Ce point est le dual du précédent.
6. Soient $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible et $f' : Y \rightarrow Y'$ un monomorphisme admissible. On peut alors former le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g \downarrow & & \downarrow \tilde{g} \\ Z & \xrightarrow{\tilde{f}'} & Z' \end{array}$$

donc par le deuxième point, $(\tilde{g} \ \tilde{f}')$ est un épimorphisme admissible. Par ailleurs, comme g et Id_Y sont des épimorphismes admissibles, $\text{Id}_Y \oplus g$ est un épimorphisme admissible. Du coup, leur composition

$$\begin{pmatrix} \tilde{g} & \tilde{f}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id}_{Y'} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} & \tilde{f}'g \end{pmatrix} = \tilde{g} (\text{Id}_{Y'} \ f')$$

est aussi un épimorphisme admissible. Soit maintenant $h : \tilde{X} \rightarrow Y'$ tel que $\tilde{g}h = 0$. Par définition d'un carré cocartésien, il existe un unique $h' : \tilde{X} \rightarrow Y$ tel que $f'h' = h$ et $gh' = 0$; ensuite, comme f est un noyau de g , il existe un unique $h'' : \tilde{X} \rightarrow X$ tel que $fh'' = h'$. Finalement, $f'fh'' = h$ et \tilde{g} admet comme noyau $f'f$, puis, par le quatrième point, \tilde{g} est un épimorphisme admissible et donc $f'f$ est un monomorphisme admissible. \square

Lemme 1.2.35. Soient k un corps et \mathcal{C} une k -catégorie exacte Hom-finie et Krull-Schmidt.

1. Soit $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible. Les points suivants sont équivalents :
- (a) Cette suite exacte courte admissible est scindée.
 - (b) Il existe $u : Y \rightarrow X$ tel que $uf = \text{Id}_X$.
 - (c) Il existe $v : Z \rightarrow Y$ tel que $gv = \text{Id}_Z$.

De plus, si u (resp. v) est fixé, on peut choisir v (resp. u) tel que $0 \rightarrow Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \rightarrow 0$ soit aussi une suite exacte courte admissible (scindée).

2. Supposons que dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

les deux lignes soient des suites exactes courtes admissibles et les deux morphismes u et w soient des isomorphismes. Alors v est un isomorphisme.

3. Supposons que dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

les deux lignes soient des suites exactes courtes admissibles et u (resp. v) soit un isomorphisme. Alors le carré de droite (resp. de gauche) est cartésien (resp. cocartésien).

Démonstration. 1. Il est immédiat que le premier point entraîne les deux suivants. Le fait que le deuxième (ou le troisième) implique le premier vient clairement du fait que tous les idempotents sont scindés. Par ailleurs, le scindage de vg entraîne facilement l'existence de u tel que $0 \rightarrow Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \rightarrow 0$ soit une suite exacte courte admissible.

2. Quitte à remplacer f' par $f'u$ et g par wg , on peut supposer que $X' = X$, $Z' = Z$, $u = \text{Id}_X$ et $w = \text{Id}_Z$. Le carré suivant est alors cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \oplus Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \tilde{g} \downarrow & & \downarrow g \\ Y' & \xrightarrow{g'} & Z \end{array}$$

avec

$$\tilde{g} = (f' \quad v).$$

Il est en effet clairement commutatif et si $\alpha : Y'' \rightarrow Y$ et $\beta : Y'' \rightarrow Y'$ vérifient $g\alpha = g'\beta$, on a alors $g'\beta = g\alpha = g'v\alpha$ donc $\beta - v\alpha = f'h$ de façon unique. Il est alors immédiat que si l'on pose

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} : Y'' \rightarrow X \oplus Y$$

alors $\alpha = \pi_Y \tilde{h}$ et $\beta = \tilde{g} \tilde{h}$, \tilde{h} étant unique ayant cette propriété. On peut alors former le diagramme commutatif suivant dont les deux lignes et les deux colonnes sont des

suites exactes courtes admissibles :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & X & \xlongequal{\quad} & X & & \\
 & & & & \tilde{f} \downarrow & & f \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\iota_X} & X \oplus Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \tilde{g} \downarrow & & g \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

avec

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} -\text{Id}_X \\ f \end{pmatrix}.$$

Par le point précédent, il existe alors $v' : Y' \rightarrow Y$ tel que $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{\iota_{Y'} v'} X \oplus Y \xrightarrow{\pi_X} X \rightarrow 0$ soit une suite exacte courte admissible et $\text{Id}_{Y'} = \tilde{g} \iota_{Y'} v' = v v'$. Comme les idempotents sont scindés, le diagramme commutatif de départ est isomorphe à :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y' \oplus \tilde{Y} & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \pi_{Y'} \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

puis, comme $g \iota_{\tilde{Y}} = 0$, il existe $\alpha : \tilde{Y} \rightarrow X$ tel que $\iota_{\tilde{Y}} = f \alpha$. Puis $f' \alpha = \pi_{Y'} f \alpha = \pi_{Y'} \iota_{\tilde{Y}} = 0$ donc, comme f' est un monomorphisme, $\alpha = 0$. Finalement, $\iota_{\tilde{Y}} = 0$ donc $\tilde{Y} = 0$.

3. Supposons que u est un isomorphisme. On peut alors former le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \swarrow u & & \swarrow \varphi & & \swarrow v & & \\
 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow w & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

dont le carré en avant à droite est cartésien (l'existence de φ vient de là). Par le point précédent, comme u est un isomorphisme, φ est aussi un isomorphisme et donc le carré

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y' & \longrightarrow & Z'
 \end{array}$$

est bien cartésien. □

Lemme 1.2.36. Soit k un corps et \mathcal{C} une k -catégorie exacte Krull-Schmidt et Hom-finie. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $f' : X' \rightarrow Y'$ deux morphismes de \mathcal{C} . Alors :

1. f et f' sont deux monomorphismes admissibles si et seulement si $f \oplus f'$ est un monomorphisme admissible.
2. f et f' sont deux épimorphismes admissibles si et seulement si $f \oplus f'$ est un épimorphisme admissible.

Démonstration. Les deux résultats sont duaux l'un de l'autre donc il suffit de montrer le premier. On a déjà vu que la somme directe de deux monomorphismes admissibles est toujours un monomorphisme admissible.

Supposons que $f \oplus f'$ est un monomorphisme admissible. Il est immédiat que f et f' sont deux monomorphismes. Formons le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

où h est un monomorphisme admissible. En particulier, il existe $g' : Z \rightarrow Y$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Z \end{array} \begin{array}{c} \searrow \pi_Y \\ \dashrightarrow g' \\ \searrow f \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow Y \end{array}$$

Ainsi, comme $g'(g\iota_Y) = \text{Id}_Y$, l'endomorphisme $(g\iota_Y)g'$ est un idempotent et il est donc scindé car \mathcal{C} est Krull-Schmidt et Hom-finie. Autrement dit, le carré cocartésien devient :

$$\begin{array}{ccc} X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \text{Id}_Y \oplus k' \\ X & \xrightarrow{\iota_Y f} & Y \oplus K' \end{array}$$

Montrons maintenant que k' est un conoyau de f' : tout d'abord $k'f' = 0$ car le carré commute. Soit maintenant $Z' \in \mathcal{C}$ et $u : Y' \rightarrow Z'$ tels que $uf' = 0$. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow u\pi_{Y'} \\ X & \xrightarrow{0} & Z' \end{array}$$

De plus, les deux diagrammes suivant commutent exactement pour les mêmes morphismes

$v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K', Z') :$

$$\begin{array}{ccc}
 X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' \\
 \pi_X \downarrow & \text{Id}_Y \oplus k' \downarrow & \downarrow u\pi_{Y'} \\
 X & \xrightarrow{\iota_Y f} & Y \oplus K' \\
 & \searrow 0 & \downarrow v\pi_{K'} \\
 & & Z'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{u} & Z' \\
 k' \downarrow & \swarrow v & \\
 K' & &
 \end{array}$$

Comme le carré est cocartésien, la flèche pointillée de gauche existe et est unique. Notons la v_0 . Il est alors aisé de voir que la flèche $v_0 \iota_{K'} \pi_{K'}$ convient encore donc $v_0 = v_0 \iota_{K'} \pi_{K'}$. Finalement v existe et est unique ($v = v_0 \iota_{K'}$) et donc k' est bien un conoyau de f' . De la même façon, f admet un conoyau $k : Y \rightarrow K$. Comme $\iota_Y f$ est un monomorphisme admissible et comme f admet un conoyau alors d'après le lemme 1.2.34, f est un monomorphisme admissible. La même chose est vraie pour f' . \square

Maintenant, voici un lemme très classique :

Lemme 1.2.37. *Soit A un anneau et \mathcal{C}_0 une A -catégorie abélienne. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de \mathcal{C}_0 stable par extensions. Alors, la catégorie \mathcal{C} munie des suites exactes courtes admissibles provenant de suites exactes courtes de \mathcal{C}_0 est une catégorie exacte.*

Démonstration. Commençons par montrer que \mathcal{C}_0 toute entière munie de toutes ses suites exactes courtes est une catégorie exacte ; pour ceci, regardons chaque axiome :

1. Cet axiome est clairement vérifié dans \mathcal{C}_0 .
2. Il est facile que la composition de deux épimorphismes est un épimorphisme.
3. Soient $g : Y \rightarrow Z$ un épimorphisme de \mathcal{C}_0 et $h : Z' \rightarrow Z$ un morphisme. Posons alors

$$\begin{pmatrix} h' \\ g' \end{pmatrix} : Y' \rightarrow Y \oplus Z' = \ker \begin{pmatrix} -g & h \end{pmatrix}$$

de telle manière que le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\
 h' \downarrow & & \downarrow h \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

On a vu qu'alors, puisque $\begin{pmatrix} -g & h \end{pmatrix}$ est un épimorphisme,

$$\begin{pmatrix} -g & h \end{pmatrix} = \text{coker} \begin{pmatrix} h' \\ g' \end{pmatrix}$$

donc le carré est aussi cocartésien. Du coup, si $g'' : Z' \rightarrow Z''$ est un morphisme tel que $g'' g' = 0$, il existe un unique $h'' : Z \rightarrow Z''$ tel que $h'' h = g''$ et $h'' g = 0$ et comme g est un épimorphisme, $h'' = 0$ donc $g'' = 0$ et finalement g' est un épimorphisme.

4. C'est le dual du précédent.

Vérifions maintenant les axiomes un par un dans \mathcal{C} :

1. Cet axiome est clairement vérifié dans \mathcal{C} .
2. Soient $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow Z' \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{j} Z'' \rightarrow 0$ deux suites exactes courtes admissibles de \mathcal{C} . Dans \mathcal{C}_0 , on peut alors former le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow h' & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow j \\
 & & & & & & Z'' \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

où le carré en haut à droite est cartésien et les deux suites horizontales et la suite verticale sont des suites exactes courtes de \mathcal{C}_0 . Comme \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine et stable par extensions de \mathcal{C}_0 , alors le diagramme entier est dans \mathcal{C} . Il est clair que $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{h'} Y \xrightarrow{jg} Z'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de \mathcal{C}_0 donc par définition une suite exacte courte admissible de \mathcal{C} et donc jg est un épimorphisme admissible.

3. Soit $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible de \mathcal{C} , $Z' \in \mathcal{C}$ et $h : Z' \rightarrow Z$. Formons le diagramme commutatif suivant dans \mathcal{C}_0 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow h' & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0
 \end{array}$$

dont le carré de droite est cartésien et la première ligne est exacte. Comme \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C}_0 stable par extension, ce diagramme est en fait dans \mathcal{C} et la première ligne est alors une suite exacte courte admissible de \mathcal{C} .

4. C'est le dual du point précédent. □

Une sorte de proposition réciproque du lemme précédent existe. On ne le démontrera pas ici car il ne sera pas crucial dans la suite (voir par exemple [47, appendix A]) :

Lemme 1.2.38. *Toute catégorie exacte équivalente à une petite catégorie (c'est-à-dire à une catégorie dont les objets forment un ensemble) est équivalente en tant que catégorie exacte à une sous-catégorie pleine et stable par extensions d'une catégorie abélienne telle que définie dans le lemme précédent.*

Définition 1.2.39. Soient A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie exacte. Soient $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow 0$ deux suites exactes courtes admissibles. Un morphisme f de suites exactes courtes admissibles de $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ dans

$0 \rightarrow X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow 0$ est un triplet de morphismes (f_1, f_2, f_3) faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Lemme 1.2.40. Soient A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie exacte.

1. Soient $\alpha : X \rightarrow Y$, $\beta : Y \rightarrow Z$ deux morphismes de \mathcal{C} et $g : Y' \rightarrow Y$ un épimorphisme admissible avec $\beta\alpha = 0$. Alors α est un noyau de β si et seulement si tout morphisme de la forme gh vérifiant $\beta gh = 0$ se factorise de façon unique à travers α .
2. Soient $\alpha : X \rightarrow Y$, $\beta : Y \rightarrow Z$ deux morphismes de \mathcal{C} et $g : Y \rightarrow Y'$ un monomorphisme admissible avec $\beta\alpha = 0$. Alors β est un conoyau de α si et seulement si tout morphisme de la forme hg vérifiant $hg\alpha = 0$ se factorise de façon unique à travers β .
3. Si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \longrightarrow & 0 \\ & & \beta_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \beta_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' & \xrightarrow{g''} & Z'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

et si les trois colonnes ainsi que les deux premières lignes (resp. les deux dernières lignes) sont des suites exactes courtes admissibles alors la troisième ligne (resp. la première ligne) est une suite exacte courte admissible.

Démonstration. 1. Tout d'abord, si α est un noyau de β , par définition, tout morphisme de la forme gh tel que $\beta gh = 0$ se factorise de façon unique à travers α . Réciproquement, supposons que tout morphisme de la forme gh tel que $\beta gh = 0$ se factorise de façon unique à travers α . Tout d'abord, α est un monomorphisme puisque $g \circ 0$ se factorise de manière unique à travers α . Soit alors un morphisme quelconque $k : Y'' \rightarrow Y$ tel que $\beta k = 0$. On peut former le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_0 & \xrightarrow{f'} & X' & \xrightarrow{g'} & Y'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & k' \downarrow & & k \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X_0 & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où le carré de droite est cartésien et dont les deux lignes sont des suites exactes courtes admissibles. On a alors $\beta g k' = 0$ donc par hypothèse, $g k'$ se factorise à

travers α . Soit $k'' : X' \rightarrow X$ tel que $gk' = \alpha k''$. On a alors $\alpha k'' f' = 0$ donc $k'' f' = 0$ puisque α est un monomorphisme. Et comme g' est un conoyau de f' , il existe $k''' : Y'' \rightarrow X$ tel que $k'' = k''' g'$. On en déduit que $kg' = gk' = \alpha k''' g'$ puis comme g' est un épimorphisme, $k = \alpha k'''$; comme α est un monomorphisme, on a l'unicité de k''' . Le morphisme α est donc bien un noyau de β .

2. C'est le dual du point précédent.

3. On suppose par exemple que les trois colonnes et les deux premières lignes sont des suites exactes courtes admissibles. Commençons par montrer, en utilisant le premier point, que f'' est un noyau de g'' . Supposons que $k : Y''' \rightarrow Y'$ soit tel que $g'' \beta_2 k = 0$. On a alors $\beta_3 g' k = 0$ et alors il existe $k' : Y''' \rightarrow Z$ tel que $\alpha_3 k' = g' k$. Formons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y''' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow k'' & & \downarrow k' & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont le carré de droite est cartésien et les deux lignes des suites exactes courtes admissibles. On a alors $g' k \tilde{g} = \alpha_3 k' \tilde{g} = \alpha_3 g k'' = g' \alpha_2 k''$. Comme f' est un noyau de g' il existe alors $h : \tilde{Y} \rightarrow X'$ tel que $k \tilde{g} - \alpha_2 k'' = f' h$. On en déduit que $\beta_2 k \tilde{g} = \beta_2 f' h = f'' \beta_1 h$. Par conséquent, $f'' \beta_1 h \tilde{f} = 0$ puis comme f'' est un monomorphisme, $\beta_1 h \tilde{f} = 0$. Comme \tilde{g} est un conoyau de \tilde{f} , il existe $h' : Y''' \rightarrow X''$ tel que $\beta_1 h = h' \tilde{g}$. Finalement, on a $\beta_2 k \tilde{g} = f'' h' \tilde{g}$ puis comme \tilde{g} est un épimorphisme, $\beta_2 k = f'' h'$ ce qui est ce qu'on voulait : f'' est bien un noyau de g'' . Puis, comme $g'' \beta_2 = \beta_3 g'$ est un épimorphisme admissible, la dernière ligne est une suite exacte courte admissible. \square

Proposition 1.2.41. *Si A est un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie exacte, la collection des suites exactes courtes admissibles de \mathcal{C} munie des morphismes définis plus haut et des monomorphismes (resp. épimorphismes) admissibles f tels que f_1, f_2 et f_3 soient des monomorphismes (resp. épimorphismes) admissibles est une A -catégorie exacte.*

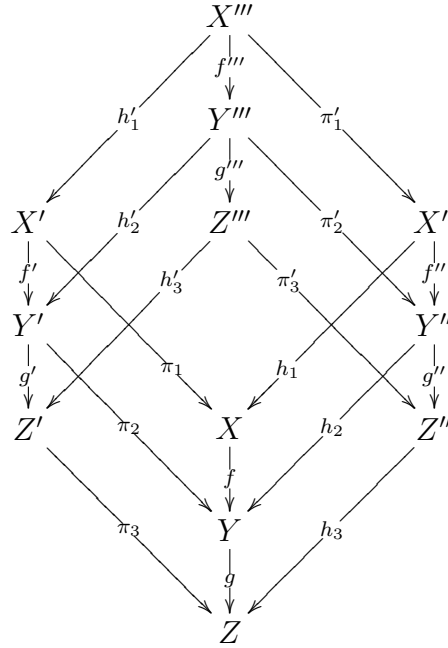
Démonstration. Tout d'abord, si f est un morphisme tel que f_1, f_2, f_3 soient des monomorphismes (resp. épimorphismes) admissibles, le lemme précédent montre qu'il a un conoyau (resp. noyau) qui reste admissible selon la même définition (les f'' et g'' du lemme sont faciles à construire de façon unique). Il reste à montrer que les axiomes d'une catégorie exacte sont vérifiés :

1. Le premier axiome est clairement vérifié.

2. Le deuxième aussi.

3. En ce qui concerne le troisième, si π est un épimorphisme admissible de $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \rightarrow 0$ dans $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ et si h est un morphisme de $0 \rightarrow X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z'' \rightarrow 0$ dans $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, on peut former le diagramme

commutatif suivant :



dont les quatre losanges sont cartésiens et tel que π'_1, π'_2 et π'_3 sont des épimorphismes admissibles, l'existence (et l'unicité) de f''' et g''' étant donnée justement par les carrés cocartésiens. Il est ensuite facile de montrer qu'en tant que diagramme de suites exactes courtes admissibles, ce diagramme est un carré cartésien.

4. Le quatrième axiome est le dual du troisième. \square

Notation 1.2.42. On notera $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ la catégorie exacte de la proposition précédente.

Lemme 1.2.43. Si \mathcal{C} est Hom-finie et Krull-Schmidt, alors $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ est Krull-Schmidt.

Démonstration. Soit $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0 \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$ et soit (f, g, h) un idempotent de cette suite exacte courte admissible. Comme \mathcal{C} est Krull-Schmidt, f, g et h sont scindées et la suite exacte courte admissible s'écrit

$$(0 \rightarrow X_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_1 \rightarrow 0) \oplus (0 \rightarrow X_2 \rightarrow Y_2 \rightarrow Z_2 \rightarrow 0)$$

avec

$$(f, g, h) = \text{Id}_{0 \rightarrow X_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_1 \rightarrow 0} \oplus 0_{0 \rightarrow X_2 \rightarrow Y_2 \rightarrow Z_2 \rightarrow 0}.$$

En utilisant le lemme 1.2.36, $0 \rightarrow X_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_1 \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow X_2 \rightarrow Y_2 \rightarrow Z_2 \rightarrow 0$ sont toute deux des suites exactes courtes admissibles. \square

1.2.4 Foncteurs Ext

Le but de cette partie est de rappeler la définition des foncteurs Ext dans le cadre des catégories exactes Hom-finies (ce qui simplifie un peu la situation) et leurs principales propriétés qui nous serviront par la suite.

Soit k un corps et \mathcal{C} une k -catégorie exacte et Hom-finie.

Notation 1.2.44. Le bifoncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ sera toujours considéré comme un bifoncteur de $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ dans la catégorie abélienne des espaces vectoriels sur k .

Complexes

Définition 1.2.45. Si I est un intervalle de \mathbb{Z} , on notera $I^\circ = I \setminus \{\max I\}$ si I admet un maximum et $I^\circ = I$ sinon.

Un complexe C de \mathcal{C} indexé par un intervalle I de \mathbb{Z} est une famille $(C_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{C} munie d'une famille $(d_i)_{i \in I^\circ}$ telle que pour tout $i \in I^\circ$, $d_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_i, C_{i+1})$ et pour tout $i \in I^\circ$, $d_{i+1}d_i = 0$.

Remarque 1.2.46. On s'autorisera à noter d_i pour tous les complexes, du moment qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition 1.2.47. Soient C et D deux complexes de \mathcal{C} indexés par un même intervalle I de \mathbb{Z} . Un morphisme f de C dans D sera par définition une famille de morphismes $(f_i)_{i \in I}$ telle que $f_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_i, D_i)$ et que le diagramme suivant commute pour tout $i \in I^\circ$:

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i+1} \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{i+1} \\ D_i & \xrightarrow{d_i} & D_{i+1} \end{array}$$

Définition 1.2.48. Soient C, D, E trois complexes de \mathcal{C} indexés par un même intervalle I de \mathbb{Z} . Par définition, une suite exacte courte $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ est admissible si toutes les suites exactes courtes $0 \rightarrow C_i \xrightarrow{f_i} D_i \xrightarrow{g_i} E_i \rightarrow 0$ sont admissibles dans \mathcal{C} .

Lemme 1.2.49. Soit I un intervalle de \mathbb{Z} . Les complexes de \mathcal{C} indexés par I munis des morphismes cités plus haut et des suites exactes courtes admissibles définies plus haut forment une k -catégorie exacte.

Démonstration. Il suffit de vérifier les quatre axiomes de définition d'une catégorie exacte, ce qui est facile. \square

Définition 1.2.50. Soit I un intervalle de \mathbb{Z} , C et D deux complexes de \mathcal{C} indexés par I et f un morphisme de C dans D . On dira que f est homotope à 0 si il existe une famille de morphismes $(h_i)_{i \in I^\circ}$ telle que $h_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}r}(C_{i+1}, D_i)$ et pour tout $i \in I$, $f_i = d_{i-1}h_{i-1} + h_i d_i$ (avec la convention que $h_i = 0$ si $i \notin I^\circ$).

Plus généralement, on dira que deux morphismes f et g sont homotopes si $f - g$ est homotope à 0.

Définition 1.2.51. Un complexe C de \mathcal{C} indexé par un intervalle I de \mathbb{Z} est dit exact si il existe une famille de suites exactes courtes admissibles de la forme :

$$\left(0 \rightarrow \tilde{C}_i \xrightarrow{d_i^1} C_i \xrightarrow{d_i^2} \tilde{C}_{i+1} \rightarrow 0 \right)_{i \in I}$$

avec pour tout $i \in I^\circ$, $d_i = d_{i+1}^1 d_i^2$, pour $i = \min I$, $d_i^1 = 0$, et pour $i = \max I$, $d_i^2 = 0$.

Parfois, on appellera aussi un complexe exact une suite exacte longue.

Remarque 1.2.52. Si un complexe C est exact, alors les \tilde{C}_i , d_i^1 , d_i^2 de la définition précédentes sont uniques à unique isomorphisme près faisant commuter les diagrammes. Du coup, on s'autorisera à utiliser ces objets sans plus de précautions.

Définition 1.2.53. Un complexe exact C de \mathcal{C} indexé par un intervalle I de \mathbb{Z} , sera dit scindé si toutes les suites exactes courtes admissibles $0 \rightarrow \tilde{C}_i \rightarrow C_i \rightarrow \tilde{C}_{i+1} \rightarrow 0$ sont scindées.

Homologie d'un complexe dans la catégorie des A -modules

Soit A une k -algèbre.

Notation 1.2.54. On notera $\text{Mod } A$ la catégorie des modules sur A .

Définition 1.2.55. Si I est un intervalle de \mathbb{Z} et C un complexe de $\text{Mod } A$ indexé par I , pour $i \in I$, on appellera homologie en degré i et on notera $H_i(C) = \text{Ker}_{d_{i+1}} / \text{Im}(d_i)$ (avec la convention que si $i \notin I^\circ$, $d_i = 0$). Si D est un autre complexe, un morphisme f de C dans D induit clairement un morphisme de $H_i(C)$ dans $H_i(D)$, morphisme que l'on notera $H_i(f)$. Ainsi, H_i est un foncteur k -additif de la catégorie des complexes de $\text{Mod } A$ indexés par I dans $\text{Mod } A$.

Remarque 1.2.56. Un complexe est exact si et seulement si son homologie est nulle.

Lemme 1.2.57. Si f et g sont deux morphismes homotopes d'un complexe C dans un complexe D indexés par un intervalle I de \mathbb{Z} , alors $H_i(f) = H_i(g)$ pour tout $i \in I$.

Démonstration. On peut considérer par linéarité que $g = 0$. Notons h l'homotopie. Soit $i \in I$ et $v \in C_i$ tel que $d_i(v) = 0$. On a alors $f_i(v) = d_{i-1}h_{i-1}(v) + h_i d_i(v) = d_{i-1}h_{i-1}(v) \in \text{Im } d_{i-1}$ donc si \tilde{v} est le projeté de v dans $H_i(C)$, $H_i(f)(\tilde{v}) = 0$ et donc $H_i(f) = 0$. \square

Le foncteur H_i n'est pas exact. La proposition suivant précise cela :

Proposition 1.2.58. Si $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de complexes de $\text{Mod } A$ indexés par I , il existe une famille canonique de morphismes $(\delta_i)_{i \in I^\circ}$ où $\delta_i \in \text{Hom}_k(H_i(E), H_{i+1}(C))$ telle que le complexe suivant, appelé suite exacte longue d'homologie est exact :

$$\dots \xrightarrow{H_{i-1}(g)} H_{i-1}(E) \xrightarrow{\delta_{i-1}} H_i(C) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(D) \xrightarrow{H_i(g)} H_i(E) \xrightarrow{\delta_i} H_{i+1}(C) \xrightarrow{H_{i+1}(f)} \dots$$

Démonstration. Dans le diagramme commutatif suivant, les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & D_{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & E_{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_{i-1} & & \downarrow d_{i-1} & & \downarrow d_{i-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_i & \xrightarrow{f_i} & D_i & \xrightarrow{g_i} & E_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_i & & \downarrow d_i & & \downarrow d_i & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & D_{i+1} & \xrightarrow{g_{i+1}} & E_{i+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_{i+1} & & \downarrow d_{i+1} & & \downarrow d_{i+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{i+2} & \xrightarrow{f_{i+2}} & D_{i+2} & \xrightarrow{g_{i+2}} & E_{i+2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Avant de construire δ_i , remarquons que le complexe est exact en $H_i(D)$: tout d'abord, $H_i(g)H_i(f) = H_i(gf) = 0$, puis si $\tilde{v} \in \text{Ker } H_i(g)$, notons v un représentant de \tilde{v} dans D_i .

On a alors que $g_i(v) \in \text{Im } d_{i-1}$ et comme g_{i-1} est surjective, il existe $w \in D_{i-1}$ tel que $g_i d_{i-1}(w) = d_{i-1} g_{i-1}(w) = g_i(v)$. Par conséquent, $v - d_{i-1}(w) \in \text{Ker } g_i = \text{Im } f_i$ et notons par x un antécédent de $v - d_{i-1}(w)$ par f_i . Par commutation du diagramme, $d_i(x) = 0$ et donc x se projette sur $\tilde{x} \in H_i(C)$. Puis on a clairement $\tilde{v} = H_i(f)(\tilde{x})$ d'où l'exactitude en $H_i(D)$.

Construisons maintenant $\delta_i : H_i(E) \rightarrow H_{i+1}(C)$. Pour ceci, prenons $v \in E_i$ tel que $d_i(v) = 0$. Par surjectivité de g_i , il existe $w \in D_i$ tel que $g_i(w) = v$. Par commutativité du diagramme, $d_i(w) \in \text{Ker } g_{i+1} = \text{Im } f_{i+1}$. Soit donc $x \in C_{i+1}$ tel que $f_{i+1}(x) = d_i(w)$. On a alors $f_{i+2} d_{i+1}(x) = d_{i+1} f_{i+1}(x) = d_{i+1} d_i(w) = 0$ comme D est un complexe puis comme f_{i+2} est injective, $d_{i+1}(x) = 0$ donc x se projette dans $H_{i+1}(C)$ en \tilde{x} . Pour montrer que \tilde{x} ne dépend que de l'image \tilde{v} de v dans $H_i(E)$, il suffit par linéarité de montrer que si \tilde{v} est nulle alors \tilde{x} l'est forcément aussi. Supposons donc que \tilde{v} est nul, autrement dit que $v \in \text{Im } d_{i-1}$. Soit v' un antécédent dans E_{i-1} de v par d_{i-1} et notons w' et x' les éléments de D_{i-1} et C_i construits de la même façon que w et x à partir de v' . On a alors $w - d_{i-1}(w') \in \text{Ker } g_i = \text{Im } f_i$ et notons z un antécédent de $w - d_{i-1}(w')$ par f_i . Par commutativité du diagramme, on a alors $f_{i+1} d_i(z) = d_i f_i(z) = d_i(w - d_{i-1}(w')) = d_i(w) = f_{i+1}(x)$ puis comme f_{i+1} est injective, $x = d_i(z)$ donc $\tilde{x} = 0$. Le morphisme δ_i défini par $\delta_i(\tilde{v}) = \tilde{x}$ est donc bien défini.

Montrons l'exactitude de la suite en $H_i(E)$: en gardant les notations précédentes, si $\tilde{v} \in \text{Im } H_i(g_i)$, alors on peut choisir w tel que $d_i(w) = 0$ puis par injectivité de f_{i+1} , $x = 0$. Réciproquement, si $\tilde{x} = 0$, il existe $y \in C_i$ tel que $d_i(y) = x$ puis par commutativité du diagramme, $d_i f_i(y) = f_{i+1}(x) = d_i(w)$ et ainsi $w - f_i(y)$ se projette dans $H_i(D)$ sur un \tilde{w} . Ensuite, $g_i(w - f_i(y)) = v$ donc $H_i(g)(\tilde{w}) = \tilde{v}$ ce qui finit de montrer l'exactitude en $H_i(E)$.

Il reste à montrer l'exactitude en $H_{i+1}(C)$. En gardant encore les mêmes notations qu'avant, si $\tilde{x} = \delta_i(\tilde{v})$, alors $f_{i+1}(x) = d_i(w)$ donc $H_i(f)(\tilde{x}) = 0$. Réciproquement, si $\tilde{x} \in \text{Ker } H_{i+1}(f)$ alors $f_{i+1}(x) \in \text{Im } d_i$ et si on note w un antécédent de $f_{i+1}(x)$ par d_i , $g_i(w) \in \text{Ker } d_i$ donc $g_i(w)$ se projette sur un certain \tilde{v} de $H_i(E)$ puis de manière immédiate, $\delta_i(\tilde{v}) = \tilde{x}$. \square

Résolutions et foncteurs Ext

Ici, k désigne un corps et \mathcal{C} une k -catégorie exacte, Hom-finie et Krull-Schmidt.

Définition 1.2.59. Un objet $P \in \mathcal{C}$ sera dit projectif si pour tout épimorphisme admissible $g : Y \rightarrow Z$ et tout morphisme $h : P \rightarrow Z$, il existe un morphisme $\tilde{h} : P \rightarrow Y$ tel que $h = g\tilde{h}$, autrement dit si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ est exact.

Un objet $I \in \mathcal{C}$ sera dit injectif si pour tout monomorphisme admissible $f : X \rightarrow Y$ et tout morphisme $h : X \rightarrow I$, il existe un morphisme $\tilde{h} : Y \rightarrow I$ tel que $h = \tilde{h}f$, autrement dit si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I)$ est exact.

Définition 1.2.60. On dira que \mathcal{C} a assez d'injectifs si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow Y \rightarrow 0$ où I est injectif.

On dira que \mathcal{C} a assez de projectifs si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow Y \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$ où P est projectif.

Définition 1.2.61. Soit $X \in \mathcal{C}$. Une résolution injective de X est par définition un complexe exact I indexé par \mathbb{N} tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, I_i est injectif et $\tilde{I}_0 \simeq X$.

Une résolution projective de X est par définition un complexe exact P indexé par $-\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, P_{-i} est projectif et $\tilde{P}_0 \simeq X$.

Remarque 1.2.62. Il est immédiat que tout objet de \mathcal{C} possède une résolution injective (resp. projective) si et seulement si \mathcal{C} a assez d'injectifs (resp. de projectifs).

Lemme 1.2.63. Si \mathcal{C} possède assez d'injectifs (resp. de projectifs), alors la catégorie $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ des suites exactes courtes admissibles de \mathcal{C} (voir proposition 1.2.41) possède aussi assez d'injectifs (resp. de projectifs).

Démonstration. On va le montrer dans le cas des injectifs. Soit $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible. Comme \mathcal{C} possède assez d'injectifs, il existe deux monomorphismes admissibles $X \xrightarrow{\alpha_1} I$ et $Z \xrightarrow{\alpha_3} I'$ où I et I' sont des injectifs. On peut alors former le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\
& & \alpha_1 \downarrow & & \alpha' \downarrow & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\iota_I} & I \oplus Z & \xrightarrow{\pi_Z} & Z & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \text{Id}_I \oplus \alpha_3 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\iota_I} & I \oplus I' & \xrightarrow{\pi_{I'}} & I' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

le carré en haut à gauche étant cocartésien et donc la seconde ligne une suite exacte courte admissible. Comme I est injectif, la seconde ligne est scindée. Par ailleurs, grâce au lemme 1.2.36, $\text{Id}_I \oplus \alpha_3$ est un monomorphisme admissible et comme le carré en haut à gauche est cocartésien, α' est un monomorphisme admissible. Finalement, la composé des deux morphismes verticaux du diagramme précédent est un monomorphisme admissible de la catégorie $\mathcal{E}(\mathcal{C})$. \square

Définition 1.2.64. On dira qu'une résolution injective (resp. projective) est minimale si tous les d_i sont minimaux à gauche (resp. à droite), ou de façon équivalente si tous les d_i^1 (resp. les d_i^2) sont minimaux à gauche (resp. à droite).

Lemme 1.2.65. Supposons que \mathcal{C} possède assez d'injectifs (resp. de projectifs). Soit $X \in \mathcal{C}$. Alors X possède une résolution injective (resp. projective) minimale unique à isomorphisme près et toute autre résolution injective (resp. projective) de X est isomorphe à la somme directe de cette résolution minimale et d'une résolution injective (resp. projective) scindée de 0.

Démonstration. Comme les deux résultats sont duaux l'un de l'autre, il suffit de le faire pour une résolution injective. Montrons tout d'abord qu' X possède une unique résolution injective minimale. Posons $\tilde{I}_0 = X$, puis supposons que la résolution est construite et unique jusqu'au rang $n - 1$. Comme \mathcal{C} a assez d'injectifs, il existe un monomorphisme admissible $\tilde{I}_n \xrightarrow{f} I$ avec I un injectif. En utilisant le lemme 1.2.17, il existe une décomposition $I = I_n \oplus I'$ telle que

$$f = \begin{pmatrix} d_n^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dans cette décomposition avec d_n^1 minimal. Comme $f = d_n^1 \oplus 0$ où $0 : 0 \rightarrow I'$, en utilisant le lemme 1.2.36, d_n^1 est un monomorphisme admissible. Il suffit maintenant de montrer que d_n^1 est unique à isomorphisme près. Supposons que I'_n soit un injectif et $e_n^1 : \tilde{I}_n \rightarrow I'_n$ un autre monomorphisme admissible minimal à gauche. Comme d_n^1 et e_n^1 sont des monomorphismes admissibles et I_n et I'_n sont des injectifs, il existe $\alpha : I_n \rightarrow I'_n$ et $\beta : I'_n \rightarrow I_n$ tels que $e_n^1 = \alpha d_n^1$ et $d_n^1 = \beta e_n^1$. On a alors $d_n^1 = \beta \alpha d_n^1$ et comme d_n^1 est minimal à gauche, $\beta \alpha$ est inversible. De même $\alpha \beta$ est inversible donc α et β sont deux isomorphismes d'où l'unicité.

Fixons maintenant une autre résolution I' et montrons par récurrence que c'est la somme directe de I et d'une résolution injective scindée I'' de 0. Supposons que la décomposition soit construite jusqu'à $n - 1$. On a donc la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{I}_n & \xrightarrow{d_n^1} & I_n & \xrightarrow{d_n^2} & \tilde{I}_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota_{\tilde{I}_n} & \uparrow \pi_{\tilde{I}_n} & & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{I}_n \oplus \tilde{I}_n'' & \xrightarrow{e_n^1} & I'_n & \xrightarrow{e_n^2} & \tilde{I}'_{n+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où \tilde{I}_n'' est injectif.

Comme e_n^1 est un monomorphisme admissible et I_n est injectif, il existe $\alpha_0 : I'_n \rightarrow I_n$ tel que $\alpha_0 e_n^1 = d_n^1 \pi_{\tilde{I}_n}$. Comme d_n^1 est un monomorphisme admissible et I'_n est injective, il existe $\beta : I_n \rightarrow I'_n$ tel que $\beta d_n^1 = e_n^1 \iota_{\tilde{I}_n}$. On a alors $\alpha_0 \beta d_n^1 = \alpha_0 e_n^1 \iota_{\tilde{I}_n} = d_n^1 \pi_{\tilde{I}_n} \iota_{\tilde{I}_n} = d_n^1$. Comme d_n^1 est minimal à gauche, cela implique que $\alpha_0 \beta$ est inversible. Posons $\alpha = (\alpha_0 \beta)^{-1} \alpha_0$ de telle façon que $\alpha \beta = \text{Id}_{I_n}$. On a alors $d_n^1 \pi_{\tilde{I}_n} = \alpha e_n^1$ donc comme les idempotents sont scindés, le diagramme commutatif précédent est alors isomorphe à :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{I}_n & \xrightarrow{d_n^1} & I_n & \xrightarrow{d_n^2} & \tilde{I}_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota_{\tilde{I}_n} & \uparrow \pi_{\tilde{I}_n} & \downarrow \iota_{I_n} & \uparrow \pi_{\tilde{I}_n} & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{I}_n \oplus \tilde{I}_n'' & \xrightarrow{d_n^1 \oplus f_n^1} & I_n \oplus I_n'' & \xrightarrow{e_n^2} & \tilde{I}'_{n+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

D'après le lemme 1.2.36, d_n^1 et f_n^1 sont deux monomorphismes admissibles et par unicité du conoyau, on obtient la décomposition cherchée $\tilde{I}'_{n+1} \simeq \tilde{I}_{n+1} \oplus \tilde{I}''_{n+1}$. Par ailleurs, comme \tilde{I}_n'' est injectif, la suite exacte courte admissible $0 \rightarrow \tilde{I}_n'' \rightarrow I_n'' \rightarrow \tilde{I}'_{n+1} \rightarrow 0$ est automatiquement scindée et donc \tilde{I}''_{n+1} est injectif. \square

Lemme 1.2.66. *Si X et Y admettent comme résolutions injectives I et I' (resp. résolutions projectives P et P') et si $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ alors il existe un morphisme $\tilde{f} : I \rightarrow I'$ (resp. $\tilde{f} : P \rightarrow P'$) tel que $\tilde{f}_0 d_0^1 = d_0^1 f$ (resp. $d_{-1}^2 \tilde{f}_{-1} = f d_{-1}^2$). De plus, deux tels morphismes sont homotopes ; plus précisément, \tilde{f} est homotope à 0 si et seulement si $f = 0$.*

Démonstration. Les deux résultats étant duaux l'un de l'autre, montrons celui concernant les résolutions injectives. Pour ceci, il suffit de construire en même temps des morphismes

$\tilde{f}'_i : \tilde{I}_i \rightarrow \tilde{I}'_i$ tels que le diagramme suivant commute pour tout $i \in I$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{I}_i & \xrightarrow{d_i^1} & I_i & \xrightarrow{d_i^2} & \tilde{I}_{i+1} \longrightarrow 0 \\ & & \tilde{f}'_i \downarrow & & \tilde{f}_i \downarrow & & \tilde{f}'_{i+1} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{I}'_i & \xrightarrow{d_i^1} & I'_i & \xrightarrow{d_i^2} & \tilde{I}'_{i+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

tels que $\tilde{f}'_0 = f$. On suppose donc que \tilde{f}'_i est déjà construit. Comme I'_i est injectif, \tilde{f}_i existe. Par commutativité du diagramme, $d_i^2 \tilde{f}_i d_i^1 = 0$ donc comme d_i^2 est un conoyau de d_i^1 , $d_i^2 \tilde{f}_i$ se factorise à travers d_i^2 donc \tilde{f}'_{i+1} existe.

Il est immédiat que si \tilde{f} est homotope à 0 on peut former le diagramme suivant pour tout $i \in \mathbb{N}$ où $h_i^1 = d_{i-1}^2 h_{i-1}$ et $h_i^2 = h_i d_{i+1}^1$ ($h_{-1} = 0$) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{I}_i & \xrightarrow{d_i^1} & I_i & \xrightarrow{d_i^2} & \tilde{I}_{i+1} \longrightarrow 0 \\ & & \tilde{f}'_i \downarrow & \swarrow h_i^1 & \downarrow \tilde{f}_i & \swarrow h_i^2 & \downarrow \tilde{f}'_{i+1} \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{I}'_i & \xrightarrow{d_i^1} & I'_i & \xrightarrow{d_i^2} & \tilde{I}'_{i+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

tel que les triangles de gauche et de droite commutent et $\tilde{f}_i = d_i^1 h_i^1 + h_i^2 d_i^2$, et par conséquent, $f = \tilde{f}_0 = 0$ car $h_0^1 = d_{-1}^2 h_{-1} = 0$.

Pour montrer la réciproque, comme $\tilde{f}'_i = f = 0$, on peut prendre $h_0^1 = 0$. Pour $i \leq 0$, on va construire par récurrence h_i^2 , h_i et h_{i+1}^1 dans cet ordre. On a $(\tilde{f}_i - d_i^1 h_i^1) d_i^1 = \tilde{f}_i d_i^1 - d_i^1 \tilde{f}'_i = 0$ donc $\tilde{f}_i - d_i^1 h_i^1$ se factorise par le conoyau d_i^2 de d_i^1 se qui donne l'existence de h_i^2 tel que $\tilde{f}_i = d_i^1 h_i^1 + h_i^2 d_i^2$. Montrons alors que le triangle de droite du diagramme précédent est commutatif. Pour ceci, il suffit de voir que $d_i^2 h_i^2 d_i^2 = d_i^2 \tilde{f}_i = \tilde{f}'_{i+1} d_i^2$ puis comme d_i^2 est un épimorphisme, $d_i^2 h_i^2 = \tilde{f}'_{i+1}$. Ensuite, regardons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} I_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}^2} & \tilde{I}_i & \xrightarrow{d_i^1} & I_i \\ \tilde{f}'_{i-1} \downarrow & \swarrow h_{i-1}^2 & \downarrow \tilde{f}'_i & \swarrow h_i^1 & \downarrow \tilde{f}_i \\ I'_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}^2} & \tilde{I}'_i & \xrightarrow{d_i^1} & I'_i \end{array}$$

Comme d_i^1 est un monomorphisme admissible et I'_{i-1} est injectif, il existe $h_i : I_i \rightarrow I'_{i-1}$ tel que $h_{i-1}^2 = h_i d_i^1$. Posons ensuite $h_i^1 = d_{i-1}^2 h_i$. On a alors $h_i^1 d_i^1 = d_{i-1}^2 h_i d_i^1 = d_{i-1}^2 h_{i-1}^2 = \tilde{f}'_i$. Ce qui montre que h_i^1 convient. \square

Définition 1.2.67. Supposons que \mathcal{C} possède assez d'injectifs. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ et I une résolution injective de Y . Alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I)$ est un complexe indexé par \mathbb{N} de $\text{Mod } k$. On notera alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\text{Ext}_I^i(X, Y) = H^i(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I))$.

Supposons que \mathcal{C} possède assez de projectifs. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ et P une résolution projective de X . Alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Y)$ est un complexe indexé par \mathbb{N} de $\text{Mod } k$. On notera alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, Y) = H^i(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Y))$.

Proposition 1.2.68. *Dans cette proposition, on supposera que \mathcal{C} possède assez d'injectifs ou de projectifs suivant les objets dont on parle.*

1. *Dans la définition précédente, $\text{Ext}_I^i(X, Y)$ (resp. $\text{Ext}_P^i(X, Y)$) ne dépend pas de I (resp. de P).*
2. *D'une manière canonique, $\text{Ext}_I^i(-, -)$ (resp. $\text{Ext}_P^i(-, -)$) est un bifoncteur, contra-variant à gauche et covariant à droite.*
3. *On a un isomorphisme canonique de bifoncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) \simeq \text{Ext}_I^0(-, -)$ (resp. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) \simeq \text{Ext}_P^0(-, -)$).*
4. *Si $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible et si $T \in \mathcal{C}$, il existe des suites exactes longues*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(T, X) &\xrightarrow{\text{Hom}(T, f)} \text{Hom}(T, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(T, g)} \text{Hom}(T, Z) \\ &\rightarrow \text{Ext}_I^1(T, X) \xrightarrow{\text{Ext}_I^1(T, f)} \text{Ext}_I^1(T, Y) \xrightarrow{\text{Ext}_I^1(T, g)} \text{Ext}_I^1(T, Z) \\ &\rightarrow \text{Ext}_I^2(T, X) \xrightarrow{\text{Ext}_I^2(T, f)} \text{Ext}_I^2(T, Y) \xrightarrow{\text{Ext}_I^2(T, g)} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(Z, T) &\xrightarrow{\text{Hom}(g, T)} \text{Hom}(Y, T) \xrightarrow{\text{Hom}(f, T)} \text{Hom}(X, T) \\ &\rightarrow \text{Ext}_I^1(Z, T) \xrightarrow{\text{Ext}_I^1(g, T)} \text{Ext}_I^1(Y, T) \xrightarrow{\text{Ext}_I^1(f, T)} \text{Ext}_I^1(X, T) \\ &\rightarrow \text{Ext}_I^2(Z, T) \xrightarrow{\text{Ext}_I^2(g, T)} \text{Ext}_I^2(Y, T) \xrightarrow{\text{Ext}_I^2(f, T)} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(T, X) &\xrightarrow{\text{Hom}(T, f)} \text{Hom}(T, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(T, g)} \text{Hom}(T, Z) \\ &\rightarrow \text{Ext}_P^1(T, X) \xrightarrow{\text{Ext}_P^1(T, f)} \text{Ext}_P^1(T, Y) \xrightarrow{\text{Ext}_P^1(T, g)} \text{Ext}_P^1(T, Z) \\ &\rightarrow \text{Ext}_P^2(T, X) \xrightarrow{\text{Ext}_P^2(T, f)} \text{Ext}_P^2(T, Y) \xrightarrow{\text{Ext}_P^2(T, g)} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(Z, T) &\xrightarrow{\text{Hom}(g, T)} \text{Hom}(Y, T) \xrightarrow{\text{Hom}(f, T)} \text{Hom}(X, T) \\ &\rightarrow \text{Ext}_P^1(Z, T) \xrightarrow{\text{Ext}_P^1(g, T)} \text{Ext}_P^1(Y, T) \xrightarrow{\text{Ext}_P^1(f, T)} \text{Ext}_P^1(X, T) \\ &\rightarrow \text{Ext}_P^2(Z, T) \xrightarrow{\text{Ext}_P^2(g, T)} \text{Ext}_P^2(Y, T) \xrightarrow{\text{Ext}_P^2(f, T)} \dots \end{aligned}$$

5. *Il existe un isomorphisme canonique de bifoncteurs $\text{Ext}_I^i \simeq \text{Ext}_P^i$.*

Démonstration. Les quatre premiers points ont à chaque fois des versions duales. On ne les montrera donc que dans le cas injectif.

1. On a vu plus haut que la résolution injective de Y est unique à un facteur direct scindé près. Or il est immédiat que si I est une résolution scindée, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I)$ est un complexe exact scindé d'où le résultat.

2. Tout d'abord, si $f : X \rightarrow X'$, il suffit de poser $\text{Ext}_I^i(f, Y) = H^i(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, I))$ qui fait clairement de Ext_I^i un foncteur contravariant à gauche. Par ailleurs, si $g : Y \rightarrow Y'$, et si I et I' sont des résolutions injectives de Y et Y' , on a vu plus haut que g s'étend en un morphisme $\tilde{g} : I \rightarrow I'$ unique à homotopie près. On peut alors poser $\text{Ext}_I^i(X, g) = H^i(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \tilde{g}))$ qui ne dépend pas de \tilde{g} puisque on a vu que si deux morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \tilde{g})$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \tilde{g}')$ sont homotopes alors $H^i(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \tilde{g})) = H^i(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \tilde{g}'))$. L'unicité de la construction donne alors immédiatement le fait qu'ainsi $\text{Ext}_I^i(X, -)$ est un foncteur covariant. Le fait que $\text{Ext}_I^i(X, g) \circ \text{Ext}_I^i(f, Y) = \text{Ext}_I^i(f, Y) \circ \text{Ext}_I^i(X, g)$ est immédiat.
3. On a deux suites exactes courtes admissibles

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{d_0^1} I_0 \xrightarrow{d_0^2} Y_1 \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow Y_1 \xrightarrow{d_1^1} I_1 \xrightarrow{d_1^2} Y_2 \rightarrow 0$$

Par exactitude de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ à gauche, on a deux suites exactes

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, d_0^1)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I_0) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, d_0^2)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_1)$$

et

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_1) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, d_1^1)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I_1) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, d_1^2)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_2)$$

Ainsi, de façon fonctorielle,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\simeq \text{Ker } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, d_0^2) = \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, d_1^1) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, d_0^1)) \\ &= \text{Ker } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, d_0) = \text{Ext}_I^0(X, Y). \end{aligned}$$

4. Montrons la première. On a montré que la catégorie $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ possède assez d'injectifs. On peut donc considérer une résolution injective de la suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ qui donne des résolutions injectives $I, I \oplus I'$ et I' de X, Y et Z . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & I_0 \oplus I'_0 & \longrightarrow & I'_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & I_1 \oplus I'_1 & \longrightarrow & I'_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I_2 & \longrightarrow & I_2 \oplus I'_2 & \longrightarrow & I'_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

et en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$, on trouve un diagramme dont les lignes horizontales sont bien sûr exactes puisque les suites exactes courtes admissibles horizontales sont scindées. La suite exacte longue d'homologie induite par cette suite exacte courte de complexes est celle recherchée.

Montrons maintenant l'existence de la seconde suite exacte longue. Soit I une résolution injective de T . En appliquant le bifoncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I)$ à la suite exacte courte admissible, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, I_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I_0) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, I_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I_1) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, I_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I_2) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes puisque les I_n sont injectifs. La suite longue d'homologie de cette suite exacte courte de complexes est celle recherchée.

Les deux dernières suites exactes longues sont analogues aux deux premières.

5. Montrons par récurrence ce résultat. C'est vrai pour $i = 0$ par le troisième point. Supposons que le résultat est montré pour n . Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ et $0 \rightarrow Y \rightarrow I \rightarrow Y' \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible où I est injectif. Les première et troisième suites exactes longues du point précédent avec $T = X$ contiennent :

$$\text{Ext}_I^n(X, I) = 0 \rightarrow \text{Ext}_I^n(X, Y') \rightarrow \text{Ext}_I^{n+1}(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_I^{n+1}(X, I) = 0$$

et

$$\text{Ext}_P^n(X, I) = 0 \rightarrow \text{Ext}_P^n(X, Y') \rightarrow \text{Ext}_P^{n+1}(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_P^{n+1}(X, I) = 0$$

Par hypothèse de récurrence, les foncteurs Ext_I^n et Ext_P^n sont isomorphes ce qui implique l'isomorphisme entre $\text{Ext}_I^{n+1}(X, Y)$ et $\text{Ext}_P^{n+1}(X, Y)$. Par ailleurs, on a vu plus haut que la suite exacte courte admissible $0 \rightarrow Y \rightarrow I \rightarrow Y' \rightarrow 0$ est définie de manière unique à un facteur de la forme $0 \rightarrow 0 \rightarrow I' \rightarrow I' \rightarrow 0$ près où I' est injectif donc l'isomorphisme entre $\text{Ext}_I^{n+1}(X, Y)$ et $\text{Ext}_P^{n+1}(X, Y)$ ne dépend pas de la suite exacte courte admissible choisie. Soit maintenant $Z \in \mathcal{C}$, $f : Y \rightarrow Z$ et $0 \rightarrow Z \rightarrow I' \rightarrow Z' \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible avec I' un injectif. Alors il est immédiat que l'on peut rendre le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & I & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \downarrow f' & & \\
0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ce qui donne le diagramme commutatif suivant à l'aide de la première suite exacte longue utilisée plus haut

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ext}_I^n(X, Y') & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_I^{n+1}(X, Y) \\
\downarrow \text{Ext}_I^n(X, f) & & \downarrow \text{Ext}_I^{n+1}(X, f) \\
\text{Ext}_I^n(X, Z') & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_I^{n+1}(X, Z)
\end{array}$$

ainsi que le même pour Ext_P . Regardons maintenant le cube suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Ext}_I^n(X, Z') & \longrightarrow & \text{Ext}_I^{n+1}(X, Z) \\
 & \nearrow \text{Ext}_I^n(X, f') & \downarrow & & \nearrow \text{Ext}_I^{n+1}(X, f) \\
 \text{Ext}_I^n(X, Y') & \longrightarrow & & \longrightarrow & \text{Ext}_I^{n+1}(X, Y) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \nearrow \text{Ext}_P^n(X, f') & \text{Ext}_P^n(X, Z') & \longrightarrow & \text{Ext}_P^{n+1}(X, Z) \\
 & & \downarrow & & \nearrow \text{Ext}_P^{n+1}(X, f) \\
 \text{Ext}_P^n(X, Y') & \longrightarrow & & \longrightarrow & \text{Ext}_P^{n+1}(X, Y)
 \end{array}$$

La face gauche est commutative car nous avons un isomorphisme de foncteur entre Ext_I^n et Ext_P^n par hypothèse de récurrence, la face du haut et la face du bas sont commutatives par la remarque ci-dessus, et la face avant et la face arrières sont commutatives par définition des flèches verticales. Il est alors immédiat, puisque toutes les flèches horizontales et verticales sont des isomorphismes que la face de droite est commutative. Le même résultat est vrai pour le cube suivant, où $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Ext}_I^n(X', Y') & \longrightarrow & \text{Ext}_I^{n+1}(X', Y) \\
 & \nearrow \text{Ext}_I^n(f, Y') & \downarrow & & \nearrow \text{Ext}_I^{n+1}(f, Y) \\
 \text{Ext}_I^n(X, Y') & \longrightarrow & & \longrightarrow & \text{Ext}_I^{n+1}(X, Y) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \nearrow \text{Ext}_P^n(f, Y') & \text{Ext}_P^n(X', Y') & \longrightarrow & \text{Ext}_P^{n+1}(X', Y) \\
 & & \downarrow & & \nearrow \text{Ext}_P^{n+1}(f, Y) \\
 \text{Ext}_P^n(X, Y') & \longrightarrow & & \longrightarrow & \text{Ext}_P^{n+1}(X, Y)
 \end{array}$$

Finalement l'isomorphisme construit est un isomorphisme de foncteur entre Ext_I^{n+1} et Ext_P^{n+1} . \square

Définition 1.2.69. En utilisant la proposition précédente, on notera $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i = \text{Ext}_I^i = \text{Ext}_P^i$ (l'égalité entre les deux derniers bifoncteurs étant un isomorphisme canonique).

Définition 1.2.70. Si $X, Y \in \mathcal{C}$, on appellera extension de Y par X une suite exacte courte admissible de la forme $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$. On dira que deux extensions $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow X \rightarrow Z' \rightarrow Y \rightarrow 0$ sont équivalentes si on peut rendre le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Remarque 1.2.71. C'est bien une équivalence car dans ce cas, on a montré que le morphisme de Z dans Z' est un isomorphisme.

Lemme 1.2.72. *Si \mathcal{C} possède assez d'injectifs ou assez de projectifs et si $X, Y \in \mathcal{C}$, il existe une bijection entre $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)$ et les classes d'équivalence d'extensions de Y par X .*

Démonstration. Supposons que \mathcal{C} ait assez d'injectifs (l'autre cas est dual).

Fixons une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} I \xrightarrow{g_0} Y' \rightarrow 0$ où I est injectif. On a alors la suite exacte longue suivante en y appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, I) = 0$$

Maintenant, si $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ est une extension de Y par X , on peut former le diagramme commutatif suivant puisque I est injectif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow u & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Associons à cette extension l'image du v dans $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)$ par la suite exacte longue précédente. Cette application de l'ensemble des extensions de Y par X dans $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)$ est bien définie : en effet, si on remplace u et v par u' et v' , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow u'-u & & \downarrow v'-v & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donc $u' - u$ se factorise à travers $Z \rightarrow Y$ qui est un conoyau de $X \rightarrow Z$ et par commutativité du diagramme, $v' - v$ se factorise à travers $I \rightarrow Y'$ donc provient dans la suite exacte longue précédente de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I)$ et donc v' et v ont la même image dans $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)$. Par ailleurs, si deux extensions $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow X \rightarrow Z' \rightarrow Y \rightarrow 0$ sont équivalentes, on peut former le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \parallel & & \downarrow u & & \downarrow v & & & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

donc on voit immédiatement que leur image dans $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)$ est la même. Montrons que l'application ainsi construite est surjective. Soit $v' \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)$ et v un représentant de v' dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$. On peut alors construire le diagramme commutatif suivant dont le carré de droite est cartésien et les lignes sont des suites exactes courtes admissibles :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow u & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ce qui montre le résultat.

Montrons maintenant que deux extensions qui ont la même image dans $\text{Ext}_C^1(Y, X)$ sont équivalentes. Reprenons les notations utilisées plus haut. Si les deux extensions $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow X \rightarrow Z' \rightarrow Y \rightarrow 0$ ont la même image dans $\text{Ext}_C^1(Y, X)$, la différence des v et v' induits par celles-ci diffère d'un élément qui se factorise à travers $I \rightarrow Y$. On peut alors former un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \downarrow v-v' & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et donc on peut remplacer v' par v . On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où le carré de droite est cartésien donc déterminé à unique isomorphisme près par v . \square

Lemme 1.2.73. *Si l'on note Φ la bijection de l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de Y par X dans $\text{Ext}_C^1(Y, X)$, alors*

1. $\Phi(0 \rightarrow X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Y \xrightarrow{\pi_Y} Y \rightarrow 0) = 0$;
2. si $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$ est une extension de Y par X , et si $\lambda \in k^*$, alors $\Phi(0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0) = \lambda \Phi(0 \rightarrow X \xrightarrow{\lambda f} Z \xrightarrow{\lambda g} Y \rightarrow 0) = \lambda \Phi(0 \rightarrow X \xrightarrow{\lambda f} Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0)$;
3. si $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow X \xrightarrow{f'} Z' \xrightarrow{g'} Y \rightarrow 0$ sont deux extensions de Y par X , on peut former le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X \oplus X & \xrightarrow{f \oplus f'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Y \oplus Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow \alpha & & \uparrow \Delta_Y & & \\ 0 & \longrightarrow & X \oplus X & \xrightarrow{f''} & Z'' & \xrightarrow{g''} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \Sigma_X & & \downarrow \beta & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'''} & Z''' & \xrightarrow{g'''} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \text{Id}_X & \text{Id}_X \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_Y = \begin{pmatrix} \text{Id}_Y \\ \text{Id}_Y \end{pmatrix}$$

et où le carré en bas à gauche est cocartésien et le carré en haut à droite est cartésien. On a alors $\Phi(0 \rightarrow X \xrightarrow{f'''} Z''' \xrightarrow{g'''} Y \rightarrow 0) = \Phi(0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0) + \Phi(0 \rightarrow X \xrightarrow{f'} Z' \xrightarrow{g'} Y \rightarrow 0)$.

Démonstration. Les deux premiers points sont immédiats par définition de Φ . Montrons le dernier. Soient les trois diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Z & \xrightarrow{g} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow u & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f_0} & I & \xrightarrow{g_0} & Y' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Z' & \xrightarrow{g'} & Y \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow u' & & \downarrow v' \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f_0} & I & \xrightarrow{g_0} & Y' \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'''} & Z''' & \xrightarrow{g'''} & Y \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow u''' & & \downarrow v''' \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f_0} & I & \xrightarrow{g_0} & Y' \longrightarrow 0
\end{array}$$

on a alors :

$$u''' \beta f'' = u''' f''' \Sigma_X = f_0 \Sigma_X = (u f \quad u' f') = (u \quad u') \alpha f''$$

donc il existe $h : Y \rightarrow I$ tel que

$$(u \quad u') \alpha = u''' \beta + h g''.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(v + v') g'' &= (v \quad v') \Delta_Y g'' = (v \quad v') (g \oplus g') \alpha = (v g \quad v' g') \alpha = (g_0 u \quad g_0 u') \alpha \\
&= g_0 (u \quad u') \alpha = g_0 u''' \beta + g_0 h g'' = v''' g'' \beta + g_0 h g'' = v''' g'' + g_0 h g''
\end{aligned}$$

puis comme g'' est un épimorphisme, $v + v' = v''' + g_0 h$ et finalement $v + v'$ et v''' ont la même image dans $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)$. \square

Remarque 1.2.74. Le lemme précédent montre en particulier que si $\dim_k \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X) = 1$ alors il y a une extension non scindée unique à isomorphisme de suites exactes courtes admissibles près (qui est plus faible que l'équivalence d'extensions).

1.2.5 Approximations

Dans cette partie, k sera un corps et \mathcal{C} une k -catégorie additive Hom-finie et Krull-Schmidt.

Définition 1.2.75. On note $\mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ la collection des sous- k -catégories additives pleines de \mathcal{C} stables par isomorphismes et par facteurs directs. Si E est une collection d'objets de \mathcal{C} , on note $\text{add}(E)$ la plus petite catégorie contenant E dans $\mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ pour l'inclusion. On dira que $\mathcal{D} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ est finiment engendrée si il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{D} = \text{add}(X)$.

Notation 1.2.76. Si F est un foncteur de \mathcal{C} dans une k -catégorie \mathcal{C}' , et $\mathcal{D} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$, on notera $F(\mathcal{D})$ la catégorie de $\mathfrak{Add}(\mathcal{C}')$ engendrée par les $F(X)$ où $X \in \mathcal{D}$.

Remarque 1.2.77. Si F et G sont deux foncteurs composables, $(F \circ G)(\mathcal{D}) = F(G(\mathcal{D}))$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$.

Définition 1.2.78. Soient $\mathcal{D} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ et $X \in \mathcal{C}$. Une \mathcal{D} -approximation à gauche (resp. à droite) de X est la donnée de $Y \in \mathcal{D}$ et de $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (resp. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$) telle que pour tout $Y' \in \mathcal{D}$ et $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$ (resp. $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X)$), il existe

$g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$ (resp. $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', Y)$) faisant commuter le diagramme de gauche (resp. de droite) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow f' & \exists & \swarrow g \\ Y' & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \swarrow g & \exists & \downarrow f' \\ Y' & & \end{array}$$

Lemme 1.2.79. *Soient $X, Y, X', Y' \in \mathcal{C}$, soit $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$, et soient deux morphismes $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$. Alors f et f' sont toutes deux des \mathcal{T} -approximations à gauche (resp. à droite) si et seulement si $f \oplus f'$ est une \mathcal{T} -approximation à gauche (resp. à droite).*

Démonstration. On va le faire pour les approximations à droite, l'autre cas se traitant de la même façon. Il est tout d'abord immédiat que $X, X' \in \mathcal{T}$ si et seulement si $X \oplus X' \in \mathcal{T}$. Supposons que f et f' sont toutes deux des \mathcal{T} -approximations à droite. Soit $T \in \mathcal{T}$ et $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}\mathcal{G}}(T, Y \oplus Y')$. Comme f et f' sont des approximations, il existe $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ et $g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X')$ telles que $\pi_Y h = fg$ et $\pi_{Y'} h = f'g'$. Il est alors clair que

$$h = (f \oplus f') \begin{pmatrix} \iota_X g \\ \iota_{X'} g' \end{pmatrix}$$

donc $f \oplus f'$ est une \mathcal{T} -approximation à droite.

Réciproquement, supposons que $f \oplus f'$ soit une \mathcal{T} -approximation à droite. Soit $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$. Comme $f \oplus f'$ est une approximation, il existe $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X \oplus X')$ tel que $\iota_Y h = (f \oplus f')g$ et du coup, $h = \pi_Y \iota_Y h = \pi_Y (f \oplus f')g = f \pi_X g$ donc f est une \mathcal{T} -approximation à droite, et de même pour f' . \square

Lemme 1.2.80. *Si $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ est finiment engendré et $X \in \mathcal{C}$, alors il existe une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche (resp. à droite) de X qui est unique à isomorphisme près. De plus, toute \mathcal{T} -approximation à gauche (resp. à droite) de X est isomorphe à la somme directe de cette approximation avec un morphisme de la forme $0 \rightarrow Y'$.*

Démonstration. Soit T un générateur de \mathcal{T} . Alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ est de dimension finie. Soit une base $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$. Alors

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : X \rightarrow T^n$$

est une \mathcal{T} -approximation à gauche de X . Soit $f : X \rightarrow T'$ une \mathcal{T} -approximation à gauche quelconque de X . D'après le lemme 1.2.17, il existe $f' : X \rightarrow T'_1$ minimale à gauche telle que $f = f' \oplus (0 \rightarrow Y')$. On a montré à la fois qu'une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche existe et la dernière partie du lemme. Montrons l'unicité de celle-ci. Soit pour ceci deux \mathcal{T} -approximations minimales à gauche de X $f : X \rightarrow T$ et $f' : X \rightarrow T'$. Par définition des approximations, il existe deux flèches g et g' faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow f' & \searrow g' & \swarrow g \\ Y' & & \end{array}$$

On a ainsi $f = g'gf$ donc par minimalité de f , $g'g$ est un isomorphisme. Quitte à remplacer g' par $(g'g)^{-1}g'$, $g'g = \text{Id}_Y$. De la même façon, gg' est un isomorphisme et $(gg')^2 = gg'$ donc $gg' = \text{Id}_{Y'}$. Cela finit la preuve. \square

Lemme 1.2.81. *Supposons que \mathcal{C} soit exacte. Soient $X \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ tels que \mathcal{T} contienne une enveloppe injective (resp. une couverture projective de X). Alors, toute \mathcal{T} -approximation à gauche (resp. à droite) de X est un monomorphisme (resp. épimorphisme) admissible.*

Démonstration. Les deux cas sont symétriques l'un de l'autre. De plus, en utilisant les lemmes 1.2.36, 1.2.17, 1.2.79 et l'unicité de la \mathcal{T} -approximation minimale à gauche de X , il suffit de trouver une \mathcal{T} -approximation à gauche qui est un monomorphisme admissible. Soit $f : X \rightarrow T$ une \mathcal{T} -approximation à gauche de X . Comme X admet une enveloppe injective dans \mathcal{T} , il existe une suite exacte courte admissible

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} Y \rightarrow 0$$

où $I \in \mathcal{T}$ est injective. On peut alors, par définition d'une catégorie exacte former le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & I & \xrightarrow{v} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{u'} & U & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont le carré de gauche est cocartésien et ligne du bas une suite exacte courte admissible. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} u \\ f \end{pmatrix} : X \rightarrow I \oplus T$$

admet comme conoyau

$$(f' \quad -u') : I \oplus T \rightarrow U.$$

De plus, comme

$$u = \pi_I \circ \begin{pmatrix} u \\ f \end{pmatrix}$$

est un monomorphisme admissible, ${}^t(u, f)$ est aussi un monomorphisme admissible. Par ailleurs, comme f est une \mathcal{T} -approximation à gauche,

$$\begin{pmatrix} u \\ f \end{pmatrix}$$

l'est aussi. \square

1.2.6 Modules basculants et équivalences dérivées

Soit A une k -algèbre de dimension finie. On ne parlera ici que des résultats qui seront utilisés plus tard. Pour plus de détails, voir par exemple à [39] et [40].

Définition 1.2.82. Un A -module X est dit basculant si

- $\text{proj. dim}(X) \leq 1$;
- $\text{Ext}_A^1(X, X) = 0$;
- Il existe une suite exacte courte de A -modules

$$0 \rightarrow A \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow 0$$

où $X_1, X_2 \in \text{add}(X)$.

Théorème 1.2.83 ([40, section 1.7]). *Si X est un A -module basculant alors $\text{mod } A$ et $\text{mod } \text{End}_A(X)^{\text{op}}$ sont dérivées-équivalentes.*

Théorème 1.2.84 ([40, section 1.4]). *Soient A et B deux k -algèbres. Si leurs catégories de modules sont dérivées-équivalentes, alors $\text{gl. dim}(A) < \infty$ si et seulement si $\text{gl. dim}(B) < \infty$.*

1.2.7 Catégories 2-Calabi-Yau

Soient k un corps et \mathcal{C} une k -catégorie exacte.

Définition 1.2.85. On dira que \mathcal{C} est une catégorie de Frobenius si elle a assez d'injectifs, assez de projectifs et si les injectifs et les projectifs sont les mêmes objets.

Définition 1.2.86. On dira que \mathcal{C} est une catégorie 2-Calabi-Yau si elle a assez d'injectifs et de projectifs et s'il y a un isomorphisme de bifoncteurs

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-_1, -_2) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-_2, -_1)^*$$

où $-^* = \text{Hom}_k(-, k)$.

Remarque 1.2.87. 1. Si \mathcal{C} est 2-Calabi-Yau, c'est une catégorie de Frobenius.

2. Cette définition de 2-Calabi-Yau correspond à ce que l'on appelle habituellement une catégorie stablement 2-Calabi-Yau, c'est-à-dire une catégorie dont la catégorie stable (naturellement triangulée) est 2-Calabi-Yau.

Définition 1.2.88. Un objet $X \in \mathcal{C}$ sera dit rigide si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, X) = 0$. Une catégorie $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ sera dite rigide si tous ses objets sont rigides et elle sera dite rigide maximale si pour toute catégorie \mathcal{T}' rigide contenant \mathcal{T} , $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Définition 1.2.89. Une catégorie $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ sera dite amas-basculante si elle est rigide et si tout $Y \in \mathcal{C}$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{T}, \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = 0$$

est dans \mathcal{T} .

Remarque 1.2.90. Toute catégorie amas-basculante est rigide maximale.

1.2.8 Catégorie monoïdale

Soient A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie.

Définition 1.2.91. La catégorie \mathcal{C} sera dite monoïdale si elle est munie de :

- un bifoncteur bi-additif $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$;
- un isomorphisme de trifoncteurs $\alpha : (- \otimes -) \otimes - \rightarrow - \otimes (- \otimes -)$;
- un objet $\mathbb{1}$ et deux isomorphismes de foncteurs $\lambda : \mathbb{1} \otimes - \rightarrow -$ et $\mu : - \otimes \mathbb{1} \rightarrow -$ tels que les deux diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 ((- \otimes -) \otimes -) \otimes - & \xrightarrow{\alpha \otimes \text{Id}} & (- \otimes (- \otimes -)) \otimes - & \xrightarrow{\alpha} & - \otimes ((- \otimes -) \otimes -) \\
 \alpha \downarrow & & & & \text{Id} \otimes \alpha \downarrow \\
 (- \otimes -) \otimes (- \otimes -) & \xrightarrow{\alpha} & - \otimes (- \otimes (- \otimes -)) & & \\
 & & & & \\
 & & (- \otimes \mathbb{1}) \otimes - & \xrightarrow{\alpha} & - \otimes (\mathbb{1} \otimes -) \\
 & & \searrow \mu \otimes \text{Id} & & \downarrow \text{Id} \otimes \lambda \\
 & & & & - \otimes -
 \end{array}$$

et tels que $\lambda_{\mathbb{1}} = \mu_{\mathbb{1}}$.

Définition 1.2.92. Si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux catégories monoïdales, un foncteur F additif de \mathcal{C} dans \mathcal{D} sera dit monoïdal s'il existe un isomorphisme de foncteurs $\varphi_F : F(- \otimes -) \rightarrow F(-) \otimes F(-)$ et un isomorphisme $\varphi'_F : F(\mathbb{1}) \rightarrow \mathbb{1}$ tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 F((- \otimes -) \otimes -) & \xrightarrow{\varphi_F} & F(- \otimes -) \otimes F(-) & \xrightarrow{\varphi_F \otimes \text{Id}} & (F(-) \otimes F(-)) \otimes F(-) \\
 F(\alpha) \downarrow & & & & \alpha \downarrow \\
 F(- \otimes (- \otimes -)) & \xrightarrow{\varphi_F} & F(-) \otimes F(- \otimes -) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \varphi_F} & F(-) \otimes (F(-) \otimes F(-)) \\
 \\
 F(\mathbb{1} \otimes -) & \xrightarrow{\varphi_F} & F(\mathbb{1}) \otimes F(-) & & F(- \otimes \mathbb{1}) & \xrightarrow{\varphi_F} & F(-) \otimes F(\mathbb{1}) \\
 F(\lambda) \downarrow & & \varphi'_F \otimes \text{Id} \downarrow & & F(\mu) \downarrow & & \text{Id} \otimes \varphi'_F \downarrow \\
 F(-) & \xleftarrow{\lambda} & \mathbb{1} \otimes F(-) & & F(-) & \xleftarrow{\mu} & F(-) \otimes \mathbb{1}
 \end{array}$$

Lemme 1.2.93. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Soient Φ et Ψ deux équivalences de catégories quasi-inverses de \mathcal{C} dans \mathcal{D} . Soit enfin $\zeta : \Psi\Phi \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ un isomorphisme de foncteurs. Alors il existe un isomorphisme de foncteurs $\eta : \Phi\Psi \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{C}$, $\Phi(\zeta_X) = \eta_{\Phi(X)}$ et pour tout $Y \in \mathcal{D}$, $\Psi(\eta_Y) = \zeta_{\Psi(Y)}$.

Démonstration. Il suffit de prendre pour tout $Y \in \mathcal{D}$, $\eta_Y = \Psi^{-1}(\zeta_{\Psi(Y)})$ qui est un isomorphisme de foncteurs et qui vérifie clairement la seconde identité pour $X \in \mathcal{C}$. Remarquons que le diagramme suivant commute puisque ζ est un isomorphisme de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc}
 \Psi\Phi\Psi\Phi(X) & \xrightarrow{\Psi\Phi(\zeta_X)} & \Psi\Phi(X) \\
 \zeta_{\Psi\Phi(X)} \downarrow & & \zeta_X \downarrow \\
 \Psi\Phi(X) & \xrightarrow{\zeta_X} & X
 \end{array}$$

et, comme ζ_X est un isomorphisme, $\Psi\Phi(\zeta_X) = \zeta_{\Psi\Phi(X)}$. On a donc $\eta_{\Phi(X)} = \Psi^{-1}(\zeta_{\Psi\Phi(X)}) = \Psi^{-1}(\Psi\Phi(\zeta_X)) = \Phi(\zeta_X)$ ce qui termine la preuve. \square

Lemme 1.2.94. *Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories monoïdales et Φ une équivalence de catégorie de \mathcal{C} dans \mathcal{D} qui est un foncteur monoïdal. Alors toute équivalence quasi-inverse de \mathcal{D} dans \mathcal{C} possède une structure de foncteur monoïdal.*

Démonstration. Soit Ψ une équivalence quasi-inverse de Φ , et soient $\zeta : \Psi\Phi \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ et $\eta : \Phi\Psi \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ deux isomorphismes de foncteurs vérifiant les conclusions du lemme précédent. Si l'on prend l'isomorphisme de foncteur φ_{Ψ} qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Psi(- \otimes -) & \xrightarrow{\varphi_{\Psi}} & \Psi \otimes \Psi \\ \Psi(\eta \otimes \eta) \uparrow & & \zeta \uparrow \\ \Psi(\Phi\Psi \otimes \Phi\Psi) & \xleftarrow{\Psi(\varphi_{\Phi})} & \Psi\Phi(\Psi \otimes \Psi) \end{array}$$

Le diagramme suivant commute alors :

$$\begin{array}{ccccc} \Phi(\Psi(- \otimes -) \otimes \Psi) & \xrightarrow{\varphi_{\Phi}} & \Phi\Psi(- \otimes -) \otimes \Phi\Psi & \xrightarrow{\eta} & (- \otimes -) \otimes - \\ \eta \uparrow & & \eta \uparrow & & \eta \uparrow \\ \Phi(\Psi(\Phi\Psi \otimes \Phi\Psi) \otimes \Psi) & \xrightarrow{\varphi_{\Phi}} & \Phi\Psi(\Phi\Psi \otimes \Phi\Psi) \otimes \Phi\Psi & \xrightarrow{\eta} & (\Phi\Psi \otimes \Phi\Psi) \otimes - \\ \varphi_{\Phi} \uparrow & & \varphi_{\Phi} \uparrow & & \varphi_{\Phi} \otimes \eta \uparrow \\ \Phi(\Psi\Phi(\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi) & \xrightarrow{\varphi_{\Phi}} & \Phi\Psi\Phi(\Psi \otimes \Psi) \otimes \Phi\Psi & \xrightarrow{\eta} & \Phi(\Psi \otimes \Psi) \otimes \Phi\Psi \\ \zeta \downarrow & & \zeta \downarrow & \nearrow & \varphi_{\Phi} \downarrow \\ \Phi((\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi) & \xrightarrow{\varphi_{\Phi}} & \Phi(\Psi \otimes \Psi) \otimes \Phi\Psi & \xrightarrow{\varphi_{\Phi}} & (\Phi\Psi \otimes \Phi\Psi) \otimes \Phi\Psi \end{array}$$

(on écrit η (resp. ζ , φ_{Φ}) pour tous les isomorphismes faisant intervenir η (resp. ζ , φ_{Φ})).
Le diagramme suivant commute aussi :

$$\begin{array}{ccc} \Psi(- \otimes -) \otimes \Psi & \xleftarrow{\zeta} & \Psi\Phi(\Psi(- \otimes -) \otimes \Psi) \\ \eta \uparrow & & \eta \uparrow \\ \Psi(\Phi\Psi \otimes \Phi\Psi) \otimes \Psi & \xleftarrow{\zeta} & \Psi\Phi(\Psi(\Phi\Psi \otimes \Phi\Psi) \otimes \Psi) \\ \varphi_{\Phi} \uparrow & & \varphi_{\Phi} \uparrow \\ \Psi\Phi(\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi & \xleftarrow{\zeta} & \Psi\Phi(\Psi\Phi(\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi) \\ \zeta \downarrow & & \zeta \downarrow \\ (\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi & \xleftarrow{\zeta} & \Psi\Phi((\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi) \end{array}$$

En combinant les deux précédents diagrammes, et en ne conservant que le bord, on voit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi & \xleftarrow{(\varphi_{\Psi} \otimes \text{Id}) \circ \varphi_{\Psi}} & \Psi((- \otimes -) \otimes -) \\ \zeta \uparrow & & \Psi((\zeta \otimes \zeta) \otimes \zeta) \uparrow \\ \Psi\Phi((\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi) & \xrightarrow{\Psi((\varphi_{\Phi} \otimes \text{Id}) \circ \varphi_{\Phi})} & \Psi((\Psi\Phi \otimes \Psi\Phi) \otimes \Psi\Phi) \end{array}$$

et finalement, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 (\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi & \xleftarrow{(\varphi_\Psi \otimes \text{Id}) \circ \varphi_\Psi} & \Psi((- \otimes -) \otimes -) \\
 \uparrow \zeta & & \uparrow \Psi((\zeta \otimes \zeta) \otimes \zeta) \\
 \Psi\Phi((\Psi \otimes \Psi) \otimes \Psi) & \xrightarrow{\Psi((\varphi_\Phi \otimes \text{Id}) \circ \varphi_\Phi)} & \Psi((\Psi\Phi \otimes \Psi\Phi) \otimes \Psi\Phi) \\
 \Psi\Phi(\alpha) \downarrow & & \Psi(\alpha) \downarrow \\
 \Psi\Phi(\Psi \otimes (\Psi \otimes \Psi)) & \xrightarrow{\Psi((\text{Id} \otimes \varphi_\Phi) \circ \varphi_\Phi)} & \Psi(\Psi\Phi \otimes (\Psi\Phi \otimes \Psi\Phi)) \\
 \downarrow \zeta & & \downarrow \Psi(\zeta \otimes (\zeta \otimes \zeta)) \\
 \Psi \otimes (\Psi \otimes \Psi) & \xleftarrow{(\text{Id} \otimes \varphi_\Psi) \circ \varphi_\Psi} & \Psi(- \otimes (- \otimes -))
 \end{array}$$

α (curved arrow from top-left to bottom-left) and $\Psi(\alpha)$ (curved arrow from top-right to bottom-right)

autrement dit, la première condition sur φ_Ψ est vérifiée. Soit maintenant φ'_Ψ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Psi(\mathbb{1}) & \xrightarrow{\varphi'_\Psi} & \mathbb{1} \\
 \Psi(\varphi'_\Phi) \uparrow & & \nearrow \zeta \\
 \Psi\Phi(\mathbb{1}) & &
 \end{array}$$

Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Psi & \xleftarrow{\Psi(\lambda)} & \Psi(\mathbb{1} \otimes -) & & \\
 \zeta = \Psi(\eta) \uparrow & & \uparrow \Psi(\text{Id} \otimes \eta) & & \\
 \Psi\Phi\Psi & \xleftarrow{\Psi(\lambda)} & \Psi(\mathbb{1} \otimes \Phi\Psi) & \xleftarrow{\Psi(\eta \otimes \text{Id})} & \Psi(\Phi\Psi(\mathbb{1}) \otimes \Phi\Psi) \\
 \Psi(\varphi'_\Phi \otimes \text{Id}) \nearrow & & \Psi(\eta \otimes \text{Id}) = \Psi(\Phi\Psi(\varphi'_\Phi) \otimes \text{Id}) \searrow & & \\
 \Psi(\Phi(\mathbb{1}) \otimes \Phi\Psi) & \xleftarrow{\Psi(\eta \otimes \text{Id})} & \Psi(\Phi\Psi(\mathbb{1}) \otimes \Phi\Psi) & \xrightarrow{\Psi(\Phi\Psi(\varphi'_\Phi) \otimes \text{Id})} & \Psi(\Phi\Psi(\mathbb{1}) \otimes \Phi\Psi) \\
 \Psi(\varphi_\Phi) \uparrow & & \Psi(\varphi_\Phi) \uparrow & & \Psi(\varphi_\Phi) \uparrow \\
 \Psi\Phi(\mathbb{1} \otimes \Psi) & \xleftarrow{\Psi\Phi(\zeta \otimes \text{Id})} & \Psi\Phi(\Psi\Phi(\mathbb{1}) \otimes \Psi) & \xrightarrow{\Psi\Phi(\Psi(\varphi'_\Phi) \otimes \text{Id})} & \Psi\Phi(\Psi(\mathbb{1}) \otimes \Psi) \\
 \zeta \downarrow & & \zeta \downarrow & & \zeta \downarrow \\
 \mathbb{1} \otimes \Psi & \xleftarrow{\zeta \otimes \text{Id}} & \Psi\Phi(\mathbb{1}) \otimes \Psi & \xrightarrow{\Psi(\varphi'_\Phi) \otimes \text{Id}} & \Psi(\mathbb{1}) \otimes \Psi
 \end{array}$$

λ (curved arrow from top-left to bottom-left)

et en ne conservant que le bord :

$$\begin{array}{ccc}
 \Psi & \xleftarrow{\Psi(\lambda)} & \Psi(\mathbb{1} \otimes -) \\
 \lambda \uparrow & & \downarrow \Phi_\Psi \\
 \mathbb{1} \otimes \Psi & \xleftarrow{\varphi'_\Psi} & \Psi(\mathbb{1}) \otimes \Psi
 \end{array}$$

ce qui donne la deuxième condition de définition d'un foncteur monoïdal. Le troisième se montre de la même façon. \square

Définition 1.2.95. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appellera n -associativité un foncteur de \mathcal{C}^n dans \mathcal{C} formé à partir du bifoncteur \otimes ainsi que de l'objet $\mathbb{1}$. Par exemple, $(- \otimes -) \otimes (\mathbb{1} \otimes -)$ et $- \otimes (- \otimes -)$ sont deux 3-associativités.

On appellera morphisme positif élémentaire de n -associativité un morphisme entre deux n -associativités de l'une des formes suivantes :

- $\text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id} \otimes \lambda \otimes \text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id}$;
- $\text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id} \otimes \mu \otimes \text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id}$;
- $\text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id} \otimes \alpha \otimes \text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id}$.

On appellera morphisme négatif élémentaire l'inverse d'un morphisme positif élémentaire. On appellera morphisme structurel de n -associativité n'importe quel composé de morphismes élémentaires (positifs ou négatifs). On dira qu'un morphisme structurel est positif s'il est composé de morphismes élémentaires positifs.

On va maintenant démontrer le théorème suivant qui sera important en pratique dans la suite. D'autres démonstrations existent, par exemple dans [55].

Théorème 1.2.96 (cohérence de MacLane). *Il existe un unique morphisme structurel d'une n -associativité dans une autre.*

L'existence d'un tel morphisme structurel est immédiat. On va montrer l'unicité. Pour ce faire, notons A_0 la n -associativité $-\otimes(-\otimes(\cdots\otimes(-\otimes-)\cdots))$.

Lemme 1.2.97. *Soit A une n -associativité.*

1. *La longueur de l'expression d'un morphisme structurel positif de A dans A_0 en terme de morphismes élémentaires positifs est majorée.*
2. *Il existe un morphisme structurel positif de A dans A_0 .*

Démonstration. 1. Comme le nombre de n -associativité ayant un nombre borné de fois l'objet $\mathbb{1}$ est fini, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de morphisme structurel positif non nul d'une associativité A dans elle-même. Tout d'abord, un tel morphisme structurel positif ne peut pas contenir de $\text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id} \otimes \lambda \otimes \text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id}$ ou de $\text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id} \otimes \mu \otimes \text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id}$ car ces morphismes élémentaires font strictement décroître le nombre de $\mathbb{1}$. Par ailleurs, si l'on définit récursivement l'application f qui à une associativité associe un entier par

- $f(-) = f(\mathbb{1}) = 3$;
- $f(\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2) = f(\tilde{A}_1)^{f(\tilde{A}_2)}$;

alors il est immédiat qu'un morphisme élémentaire positif de la forme $\text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id} \otimes \alpha \otimes \text{Id} \otimes \cdots \otimes \text{Id}$ fait croître strictement f .

2. Comme A_0 est la seule n -associativité à laquelle on ne peut pas appliquer de morphisme élémentaire positif, et par le point précédent, il suffit d'appliquer à A des morphismes élémentaires positifs jusqu'à ce qu'on ne puisse plus. \square

Définition 1.2.98. On appellera poids d'une n -associativité A le nombre maximum de morphismes élémentaires positifs qu'il faut pour aller de A à A_0 .

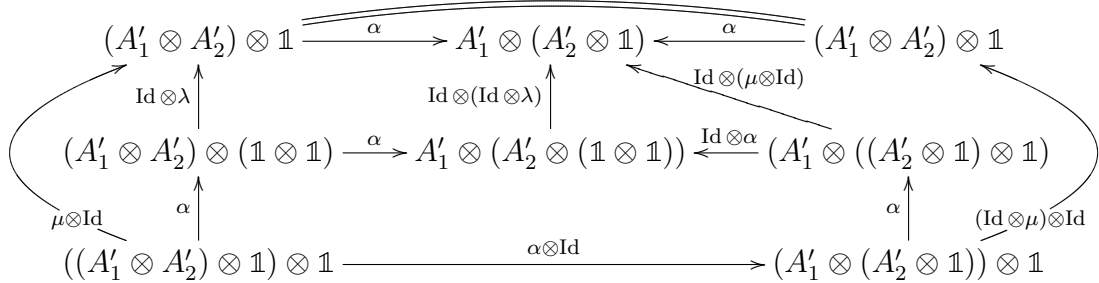
Lemme 1.2.99. 1. *Si δ et ε sont deux morphismes élémentaires positifs de A vers A_1 et A_2 , il existe une n -associativité A_3 et deux morphismes structurels positifs δ' et ε' de A_1 vers A_3 et de A_2 vers A_3 tels que $\delta'\delta = \varepsilon'\varepsilon$.*

2. *Il y a un unique morphisme structurel positif de A dans A_0 .*

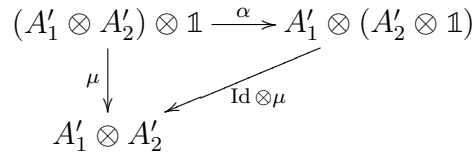
Démonstration. Soit $N = n + k$ où k est le nombre de $\mathbb{1}$ intervenant dans A .

1. Montrons le résultat par récurrence sur N . Comme δ existe, $A = A' \otimes A''$. Si $\delta = \text{Id}_{A'} \otimes \delta_0$ et $\varepsilon = \text{Id}_{A'} \otimes \varepsilon_0$ (resp. $\delta = \delta_0 \otimes \text{Id}_{A''}$ et $\varepsilon = \varepsilon_0 \otimes \text{Id}_{A''}$), le résultat est immédiat par récurrence; si δ et ε commutent, il suffit de prendre $\delta' = \varepsilon$ et $\varepsilon' = \delta$. Voici les autres cas, à inversion près de δ et ε :

– $\delta = \alpha$ et $\varepsilon = \mu$: on a le diagramme commutatif

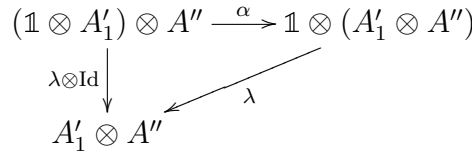


en utilisant les axiomes de définition d'une catégorie monoïdale. En appliquant l'isomorphisme de foncteurs μ au bord de ce diagramme, on obtient le diagramme commutatif



qui permet de conclure.

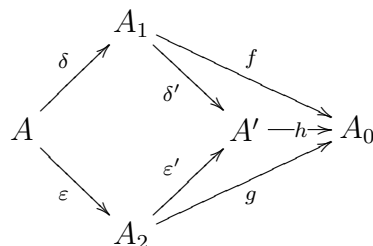
- $\delta = \alpha$ et $\varepsilon = \lambda \otimes \text{Id}$: le diagramme commutatif dual du précédent permet de conclure :



- $\delta = \alpha$ et $\varepsilon = \mu \otimes \text{Id}$: le second axiome de définition d'une catégorie monoïdale permet de conclure.
- $\delta = \alpha$ et $\varepsilon = \alpha \otimes \text{Id}$: ici, c'est le premier axiome (pentagonal) qui donne la conclusion.
- $\delta = \lambda$ et $\varepsilon = \mu$: l'axiome $\lambda_{\mathbb{1}} = \mu_{\mathbb{1}}$ donne immédiatement le résultat.

Il est facile de voir que l'on a épuisé tous les cas.

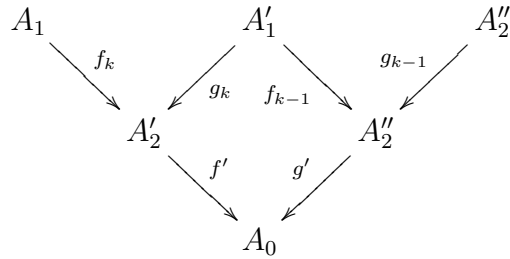
2. Faisons maintenant une récurrence sur le poids de A . Si ce poids est nul, alors $A = A_0$ et il n'y a pas de morphisme élémentaire positif applicable à A donc le résultat est clair. Supposons le résultat montré pour toutes les n -associativités de poids strictement inférieur à celui de A . Soient deux morphismes structurels positifs $f\delta$ et $g\varepsilon$ de A à A_0 avec δ et ε des morphismes positifs élémentaires. En utilisant le point précédent, on peut former le diagramme commutatif suivant :



h étant un morphisme structurel positif qui existe par ce que l'on a vu plus haut, et $f = h\delta'$ et $g = h\varepsilon'$ par hypothèse de récurrence (A_1 et A_2 ont par définition un poids plus petit que celui de A). Ceci conclut la récurrence. \square

Terminons maintenant la démonstration du théorème de cohérence de Mac Lane :

Démonstration (du théorème). Il suffit de démontrer que n'importe quel morphisme structurel h d'une n -associativité A_1 dans une autre A_2 s'écrit sous la forme $g^{-1}f$ où f est un morphisme structurel positif de A_1 dans A_0 et g un morphisme structurel positif de A_2 dans A_0 . Pour ce faire, écrivons $h = g_1^{-1}f_1g_2^{-1}f_2 \dots g_k^{-1}f_k$ où tous les f_i et les g_i sont des morphismes structuraux positifs. Si $k = 1$, quitte à remplacer f_1 par un certain f'_1f_1 et g_1 par f'_1g_1 , le résultat est évident. Supposons que $k > 1$ et complétons le diagramme suivant :



où les morphismes structuraux positifs f' et g' existent par le lemme précédent. Ce diagramme commute par le lemme précédent (les deux morphismes structuraux positifs $f'g_k$ et $g'f_{k-1}$ sont égaux par le lemme précédent). On a fait décroître strictement la valeur de k ce qui donne le résultat par récurrence. \square

Notation 1.2.100. Si A_1 et A_2 sont deux n -associativités, on notera α_{A_1, A_2} l'unique morphisme structurel de A_1 dans A_2 , ou α s'il n'y a pas d'ambiguïté (par exemple dans un diagramme).

Exemples 1.2.101. Deux exemples de catégories monoïdales importantes dans la suite :

1. Soit G un groupe. On peut former une catégorie \mathbf{G} dont les objets simples seront notés \mathbf{g} pour $g \in G$ et donc les morphismes sont engendrés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = k^{\delta_{gh}} \quad \text{où } g, h \in G.$$

Le produit tensoriel $\mathbf{g} \otimes \mathbf{h} = \mathbf{gh}$ pour tout $g, h \in G$ avec les morphismes structuraux évidents, en fait alors une catégorie monoïdale (on note \mathbf{gh} l'objet de \mathbf{G} correspondant à l'élément gh du groupe). On a alors bien sûr $\mathbf{1} = \mathbf{e}$ où e est l'élément neutre du groupe. Cette catégorie est semi-simple.

2. Soit G un groupe. Alors sa catégorie $\mathrm{mod} k[G]$ des représentations sur k muni de produit tensoriel usuel est une catégorie monoïdale. De plus, si G est fini et si k a n racines n -ièmes de l'unité distinctes où $n = \#G$ alors $\mathrm{mod} k[G]$ est semi-simple.

1.2.9 Catégorie module sur une catégorie monoïdale

Soit A un anneau et \mathcal{C} une A -catégorie monoïdale.

Définition 1.2.102. Une k -catégorie additive \mathcal{D} sera dite \mathcal{C} -module si elle est munie d'un bifoncteur bi-additif $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, d'un isomorphisme de trifoncteurs $\alpha : (- \otimes -) \otimes ? \rightarrow - \otimes (- \otimes ?)$ (les variables notées $-$ sont dans \mathcal{C} et celles notées $?$ sont dans \mathcal{D}) et d'un isomorphisme de foncteurs $\lambda : \mathbb{1} \otimes ? \rightarrow ?$ tels que les deux diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 ((- \otimes -) \otimes -) \otimes ? & \xrightarrow{\alpha \otimes \text{Id}} & (- \otimes (- \otimes -)) \otimes ? \xrightarrow{-\alpha} - \otimes ((- \otimes -) \otimes ?) \\
 \alpha \downarrow & & \text{Id} \otimes \alpha \downarrow \\
 (- \otimes -) \otimes (- \otimes ?) & \xrightarrow{\alpha} & - \otimes (- \otimes (- \otimes ?)) \\
 & & \\
 (- \otimes \mathbb{1}) \otimes ? & \xrightarrow{\alpha} & - \otimes (\mathbb{1} \otimes ?) \\
 \mu \otimes \text{Id} \searrow & & \text{Id} \otimes \lambda \downarrow \\
 & & - \otimes ?
 \end{array}$$

Remarque 1.2.103. On peut voir une catégorie monoïdale comme une catégorie module sur elle-même.

Théorème 1.2.104 (cohérence de Mac Lane). *L'analogie du théorème de cohérence de Mac Lane est valide pour les catégories modules.*

Démonstration. La même démonstration fonctionne.

Notation 1.2.105. Comme il n'y a pas d'ambiguïté, on s'autorisera à prendre les mêmes notations pour les morphismes structuraux que dans une catégorie monoïdale.

Lemme 1.2.106. *Si \mathcal{D} est une catégorie \mathcal{C} -module, alors il y a un isomorphisme canonique de trifoncteur de $- \otimes (?_1 \oplus ?_2)$ dans $- \otimes ?_1 \oplus - \otimes ?_2$.*

Démonstration. Soient $X \in \mathcal{D}$ et $Y, Z \in \mathcal{C}$. Par définition de la somme directe, il existe h et g uniques faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 X \otimes (Y \oplus Z) & & & & \\
 \swarrow \text{Id}_X \otimes \pi_Y & \searrow g & & & \\
 & X \otimes Y \oplus X \otimes Z & \xrightarrow{\pi_{X \otimes Y}} & X \otimes Y & \\
 \text{Id}_X \otimes \pi_Z \swarrow & \downarrow \pi_{X \otimes Z} & & & \\
 & X \otimes Z & & & \\
 & & & & \\
 & X \otimes Y & & & \\
 \downarrow \iota_{X \otimes Y} & & & & \\
 X \otimes Z \xrightarrow{\iota_{X \otimes Z}} & X \otimes Y \oplus X \otimes Z & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \iota_Y} & & \\
 \downarrow \text{Id}_X \otimes \iota_Z & \searrow h & & & \\
 & & X \otimes (Y \oplus Z) & &
 \end{array}$$

et on a alors :

$$hg = h(\iota_{X \otimes Y} \pi_{X \otimes Y} + \iota_{X \otimes Z} \pi_{X \otimes Z})g = \text{Id}_X \otimes (\iota_Y \pi_Y) + \text{Id}_X \otimes (\iota_Z \pi_Z) = \text{Id}_{X \otimes (Y \oplus Z)}$$

et

$$\begin{aligned}
gh &= (\iota_{X \otimes Y} \pi_{X \otimes Y} + \iota_{X \otimes Z} \pi_{X \otimes Z}) gh (\iota_{X \otimes Y} \pi_{X \otimes Y} + \iota_{X \otimes Z} \pi_{X \otimes Z}) \\
&= (\iota_{X \otimes Y} (\text{Id}_X \otimes \pi_Y) + \iota_{X \otimes Z} (\text{Id}_X \otimes \pi_Z)) \circ ((\text{Id}_X \otimes \iota_Y) \pi_{X \otimes Y} + (\text{Id}_X \otimes \iota_Z) \pi_{X \otimes Z}) \\
&= \iota_{X \otimes Y} \pi_{X \otimes Y} + \iota_{X \otimes Z} \pi_{X \otimes Z} = \text{Id}_{X \otimes Y \oplus X \otimes Z}
\end{aligned}$$

donc g et h sont deux isomorphismes réciproques. Le caractère fonctoriel de ces isomorphismes provient facilement de l'unicité de g et de h puisque toutes les autres flèches des deux diagrammes précédents sont fonctorielles. \square

Remarque 1.2.107. Grâce au lemme précédent, qui n'utilise pas les isomorphismes structuraux, on s'autorisera à identifier $X \otimes (Y \oplus Z)$ avec $X \otimes Y \oplus X \otimes Z$.

1.3 Représentations de carquois

On rappelle ici quelques définitions sur les carquois et sur leurs représentations. L'ouvrage de référence utilisé est [2]. Soit k un corps.

Définition 1.3.1. Un carquois Q est un graphe orienté. On notera l'ensemble de ses sommets Q_0 et l'ensemble de ses flèches Q_1 . Si $q \in Q_1$, on notera $s(q)$ la source de q et $t(q)$ son but.

Définition 1.3.2. Si Q est un carquois, une représentation de Q sur k sera la donnée pour chaque $i \in Q_0$ d'un k -espace vectoriel V_i et pour chaque $q \in Q_1$ d'un morphisme x_q de $V_{s(q)}$ dans $V_{t(q)}$. On notera cette représentation (V, x) . Si (V, x) et (W, y) sont deux représentations de Q , un morphisme f de (V, x) dans (W, y) sera la donnée pour tout $i \in Q_0$ d'un morphisme f_i de V_i dans W_i faisant commuter pour tout $q \in Q_1$ le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
V_{s(q)} & \xrightarrow{x_q} & V_{t(q)} \\
f_{s(q)} \downarrow & & \downarrow f_{t(q)} \\
W_{s(q)} & \xrightarrow{y_q} & V_{t(q)}
\end{array}$$

Les représentations de Q sur k forment une k -catégorie abélienne.

Définition 1.3.3. Si Q est un carquois, et $n \in \mathbb{N}$, un chemin de longueur n de Q est la donnée d'une suite $(q_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et d'un sommet i_0 tels que

- si $n > 0$, $i_0 = s(q_1)$;
- pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $t(q_i) = s(q_{i+1})$.

On notera un tel chemin $q_n q_{n-1} \dots q_2 q_1$ si $n > 0$ et e_{i_0} si $n = 0$.

Deux chemins $c = (q)$ et $c' = (q')$ seront dit composables si $t(q_n) = i'_0$ et on notera dans ce cas $c'c = q'_n q'_{n-1} \dots q'_2 q'_1 q_n q_{n-1} \dots q_2 q_1$. Si deux chemins c et c' ne sont pas composables, on notera $c'c = 0$. En étendant par linéarité cette définition, on obtient une k -algèbre notée kQ sur le k -espace vectoriel engendré par les chemins de Q .

Rappelons ce résultat classique :

Proposition 1.3.4 ([2, theorem III.1.5]). *Il y a une équivalence de catégorie entre $\text{mod } kQ$ et la catégorie des représentations de Q sur k .*

Définition 1.3.5. Un idéal de relations I sur Q sera par définition un idéal de kQ . Une représentation de Q sur k sera dite respecter les relations de I si par l'équivalence de la proposition précédente, elle est dans $\text{mod } kQ/I$. On dira que l'idéal I est admissible si il est inclus dans l'idéal de kQ engendré par l'ensemble des chemins de longueur au moins 2.

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 1.3.6. Une k -algèbre est dite de représentation finie si l'ensemble des classes d'isomorphisme de ses représentations indécomposables est fini.

Définition 1.3.7. Si A est une k -algèbre, un A -module X est dit basique si il n'a pas deux facteurs directs isomorphes. L'algèbre A est dite basique si elle est basique en tant que A -module à gauche.

Théorème 1.3.8 (Gabriel, [28]). *Si Q est un carquois connexe, kQ est de représentation fini si et seulement si le graphe non orienté sous-jacent est un diagramme de Dynkin de type A , D ou E . Dans ce cas, il y a une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations indécomposables de Q et les racines positives du diagramme de Dynkin. Cette bijection est donnée par la dimension Q_0 -graduée.*

Théorème 1.3.9 ([2, theorem 1.9]). *On suppose ici que k est algébriquement clos. Pour toute k -algèbre basique A de dimension finie, il existe un unique carquois Q et un idéal admissible de relations sur Q (pas forcément unique) tels que $A \simeq kQ/I$.*

1.4 Algèbre préprojective d'un carquois

Soit k un corps.

Notation 1.4.1. Soit Q un carquois. On note Q^* le carquois tel que $Q_0^* = Q_0$, $Q_1^* = \{q^* \mid q \in Q_1\}$ tel que pour tout $q \in Q_1$, $s(q^*) = t(q)$ et $t(q^*) = s(q)$. Par extension, on note $q^{**} = q$. On note \overline{Q} le carquois tel que $\overline{Q}_0 = Q_0$ et $\overline{Q}_1 = Q_1 \cup Q_1^*$.

Définition 1.4.2. Soit Q un carquois. On appelle algèbre préprojective de Q et on note Λ_Q l'algèbre $k\overline{Q}/I$ où I est l'idéal de $k\overline{Q}$ engendré par

$$\sum_{q \in Q_1} q^*q - qq^*.$$

Proposition 1.4.3. *Si Q est de Dynkin, la catégorie $\text{mod } \Lambda_Q$ est abélienne, Hom-finie, Krull-Schmidt, Frobenius, 2-Calabi-Yau.*

Démonstration. Les trois premiers points sont vrais dans n'importe quelle catégorie de modules de dimension finie, ainsi que le fait que la catégorie ait assez de projectifs et assez d'injectifs sur une k -algèbre de dimension finie. Le fait qu'elle soit 2-Calabi-Yau est montré dans [33, §8, theorem 3] (voir aussi [15, lemma 1]).

On va maintenant rappeler deux constructions de sous-catégories exactes, Frobenius et 2-Calabi-Yau de $\text{mod } \Lambda_Q$. Ces constructions seront importantes dans la quatrième partie.

1.4.1 Les catégories $\text{Sub } Q_J$

Soit Q un carquois tel que le graphe non orienté sous-jacent soit un diagramme de Dynkin. Soit $J \subset Q_0$ non vide.

Définition 1.4.4. Pour $j \in Q_0$, on notera Q_j le Λ_Q -module injectif de socle S_j . On notera

$$Q_J = \bigoplus_{j \in J} Q_j.$$

On notera finalement $\text{Sub } Q_J$ la sous-catégorie pleine de $\text{mod } \Lambda_Q$ dont les objets sont les sous-modules des objets de $\text{add}(Q_J)$.

Proposition 1.4.5 ([34, 3]). *La catégorie $\text{Sub } Q_J$ est une sous-catégorie exacte de $\text{mod } \Lambda_Q$, Hom-finie, Krull-Schmidt, Frobenius, 2-Calabi-Yau.*

1.4.2 Les catégories \mathcal{C}_M

On suit ici les idées de [35]. Soit Q un carquois sans boucle ni 2-cycle. L'algèbre kQ s'identifiant naturellement à une sous-algèbre de Λ_Q , on note

$$\pi_Q : \text{mod } \Lambda_Q \rightarrow \text{mod } kQ$$

le foncteur de restriction correspondant. Il est essentiellement surjectif.

Définition 1.4.6. On dira que $M \in \text{mod } kQ$ est terminal si

1. M est préinjectif;
2. Si $X \in \text{mod } kQ$ est indécomposable et $\text{Hom}_{kQ}(M, X) \neq 0$, alors $X \in \text{add}(M)$;
3. $\text{add}(M)$ contient tous les kQ -modules injectifs.

Remarque 1.4.7. Dans la définition précédente, la deuxième condition implique la première.

Définition 1.4.8. Soit $M \in \text{mod } kQ$ un module terminal. On notera

$$\mathcal{C}_M = \pi_Q^{-1}(\text{add}(M)).$$

Théorème 1.4.9. [35, theorem 2.1] *Soit $M \in \text{mod } kQ$ un module terminal. Alors la catégorie \mathcal{C}_M est une sous-catégorie exacte de $\text{mod } \Lambda_Q$, Hom-finie, Krull-Schmidt, Frobenius, 2-Calabi-Yau.*

1.5 Système de racines et algèbre enveloppante

Soit $\tilde{\Delta}$ un diagramme de Dynkin d'ensemble de sommets $\tilde{\Delta}_0$. Soit Γ un groupe agissant sur $\tilde{\Delta}$ de telle façon que $\tilde{\Delta}$ ne comporte pas d'arête entre deux sommets d'une même orbite sous l'action de Γ (on dira que l'action est admissible).

Définition 1.5.1. On notera Δ le diagramme (de Dynkin) dont l'ensemble des sommets est $\tilde{\Delta}_0/\Gamma$ et la matrice de Cartan est définie par

$$C_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{1}{\#\bar{j}} \sum_{(i,j) \in \bar{i} \times \bar{j}} \tilde{C}_{ij}$$

où \tilde{C} est la matrice de Cartan de $\tilde{\Delta}$.

Soient G et \tilde{G} des groupes de Lie connexes et simplement connexes de type Δ et $\tilde{\Delta}$. Soient B (resp. B_- , N , N_-) et \tilde{B} (resp. \tilde{B}_- , \tilde{N} , \tilde{N}_-) des sous-groupes de Borel (resp. le sous-groupe de Borel opposé, les sous-groupes unipotents maximaux correspondant) de G et \tilde{G} . Soient \mathfrak{g} , \mathfrak{b} , \mathfrak{b}_- , \mathfrak{n} , \mathfrak{n}_- , $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tilde{\mathfrak{b}}$, $\tilde{\mathfrak{b}}_-$, $\tilde{\mathfrak{n}}$ et $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ les algèbres de Lie de ces groupes. On note $(\tilde{e}_i)_{i \in Q_0}$ (resp. $(\tilde{f}_i)_{i \in Q_0}$) les générateurs de Chevalley de l'algèbre $\tilde{\mathfrak{n}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) et $(e_{\bar{i}})_{\bar{i} \in Q_0/G}$ (resp. $(f_{\bar{i}})_{\bar{i} \in Q_0/G}$) ceux de \mathfrak{n} (resp. \mathfrak{n}_-). On pose $h_i = [e_i, f_i]$ et $\tilde{h}_i = [\tilde{e}_i, \tilde{f}_i]$.

Comme Γ agit sur $\tilde{\Delta}$, il agit aussi sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ en prolongeant son action sur les générateurs de Chevalley.

Proposition 1.5.2 ([45, proposition 7.9]). *Il y a un isomorphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \simeq \tilde{\mathfrak{g}}^\Gamma$*

$$e_{\bar{i}} \mapsto \sum_{i \in \bar{i}} \tilde{e}_i \quad f_{\bar{i}} \mapsto \sum_{i \in \bar{i}} \tilde{f}_i \quad h_{\bar{i}} \mapsto \sum_{i \in \bar{i}} \tilde{h}_i$$

qui se restreint en un isomorphisme $\mathfrak{n} \simeq \tilde{\mathfrak{n}}^\Gamma$.

Corollaire 1.5.3. *Il y a un isomorphisme $\kappa : \mathbb{C}[\tilde{N}]/\Gamma \simeq \mathbb{C}[N]$, où par définition, $\mathbb{C}[\tilde{N}]/\Gamma = \mathbb{C}[\tilde{N}]/I$ si l'on note I l'idéal de $\mathbb{C}[\tilde{N}]$ engendré par les $gf - f$ avec $f \in \mathbb{C}[\tilde{N}]$ et $g \in G$.*

Démonstration. L'isomorphisme $\mathfrak{n} \simeq \tilde{\mathfrak{n}}^\Gamma$ induit un isomorphisme $N \simeq \tilde{N}^\Gamma$ à travers l'exponentielle puisque \mathfrak{n} et $\tilde{\mathfrak{n}}^\Gamma$ sont nilpotentes. On a alors $\mathbb{C}[N] \simeq \mathbb{C}[\tilde{N}^\Gamma] \simeq \mathbb{C}[\tilde{N}]/\Gamma$. \square

Remarque 1.5.4. Dans le corollaire précédent, si on note, pour chaque sommet $i \in \tilde{\Delta}_0$, x_i le sous-groupe à un paramètre de \tilde{N} défini par $x_i(t) = \exp(t\tilde{e}_i)$, alors pour tout mot (i_1, i_2, \dots, i_n) de $\tilde{\Delta}_0$, on obtient pour tout $\varphi \in \mathbb{C}[\tilde{N}]$ et $g \in \Gamma$,

$$(g\varphi)(x_{gi_1}(t_1)x_{gi_2}(t_2) \dots x_{gi_n}(t_n)) = \varphi(x_{i_1}(t_1)x_{i_2}(t_2) \dots x_{i_n}(t_n))$$

et cette propriété définit complètement l'action de Γ sur $\mathbb{C}[\tilde{N}]$. Pour plus de détails, voir les sections 4.1 et 4.2.

Lemme 1.5.5 ([41, proposition 4]). *Soit R un système de racines de type $\tilde{\Delta}$. Soit V le réseau engendré par R . Alors l'application linéaire*

$$\alpha : V \rightarrow V$$

$$r \mapsto \sum_{g \in \Gamma} gr$$

envoie R sur un système de racines de type Δ .

Chapitre 2

Catégories équivariantes

2.1 Catégorie équivariante

Soit G un groupe, k un corps et \mathcal{C} une k -catégorie. On notera \mathbf{G} la catégorie définie dans l'exemple 1.2.101.

Définition 2.1.1. Une action de G sur \mathcal{C} est par définition une structure de catégorie \mathbf{G} -module sur \mathcal{C} .

Remarque 2.1.2. Si on considère, comme par exemple dans [59, p. 254], un morphisme de groupes ρ de G dans le groupe des autofoncteurs de \mathcal{C} , on obtient une catégorie \mathbf{G} -module stricte (c'est-à-dire dont les isomorphismes structuraux sont des identités) en posant $\mathbf{g} \otimes - = \rho(g)$. Réciproquement, si \mathcal{C} est une catégorie \mathbf{G} -module, il est classique que l'on peut construire une catégorie stricte \mathcal{C}' équivalente à \mathcal{C} (voir par exemple [46]) et donc que l'on peut retrouver un morphisme de groupe de G dans le groupe des autofoncteurs de \mathcal{C}' . Il sera souvent plus pratique de ne pas s'imposer cette construction.

Le but de la définition suivante est de construire une catégorie des objets G -invariants de \mathcal{C} . L'idée naïve qui consisterait à prendre la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} constituée des objets invariants par l'action de G ne fonctionne pas dans la mesure où aucune des propriétés désirées (en particulier l'abélianité ou l'exactitude) ne se propage de \mathcal{C} à cette catégorie.

Définition 2.1.3. Si \mathcal{C} est munie d'une action de G , la catégorie G -équivariante de \mathcal{C} est la catégorie dont les objets sont constitués d'un objet X de \mathcal{C} ainsi que d'une famille d'isomorphismes $\psi_g : \mathbf{g} \otimes X \rightarrow X$ avec $g \in G$ tels que pour tout $g, h \in G$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} \otimes (\mathbf{h} \otimes X) & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{g}} \otimes \psi_h} & \mathbf{g} \otimes X \\ \alpha \uparrow & & \psi_g \downarrow \\ \mathbf{gh} \otimes X & \xrightarrow{\psi_{gh}} & X \end{array}$$

et $\psi_e = \lambda$ si e est l'élément neutre du groupe.

Les morphismes d'un objet (X, ψ) dans un objet (Y, χ) seront alors les morphismes f

de \mathcal{C} de X dans Y tels que pour tout $g \in G$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \otimes X & \xrightarrow{\psi_g} & X \\ \text{Id}_{\mathfrak{g}} \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathfrak{g} \otimes Y & \xrightarrow{\chi_g} & Y \end{array}$$

Notation 2.1.4. – Dans la suite, en particulier dans les diagrammes, on s’autorisera à noter ψ toute flèche de la forme $\text{Id} \otimes \psi_g$.
– On notera $\mathcal{C}G$ la catégorie G -équivariante de \mathcal{C} .
– On notera F le foncteur d’oubli de $\mathcal{C}G$ dans \mathcal{C} .

Remarque 2.1.5. Dans le cas où \mathcal{C} est Hom-finie et Krull-Schmidt et où G est un groupe fini dont l’ordre n’est pas divisible par la caractéristique de k , $\mathcal{C}G$ est équivalente à la « catégorie groupe tordue » construite par Reiten et Riedtmann dans [59, p. 254]. Voir la proposition 2.2.8.

Dans cette thèse, nous serons toujours dans la situation où le groupe G est fini. Néanmoins, la définition de $\mathcal{C}G$ et certaines de ses propriétés ne requièrent pas cette hypothèse et on les démontrera dans le cas général.

Exemples 2.1.6. 1. Si $\mathcal{C} = \text{mod } k$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur k , et si l’action de G sur \mathcal{C} est triviale, $\mathcal{C}G \simeq \text{mod } k[G]$.
2. Si A est une k -algèbre et G un groupe agissant sur A (c’est-à-dire muni d’un morphisme de G dans $\text{Aut}(A)$), le groupe G agit naturellement sur $\text{mod } A$ en posant pour $g \in G$ et $(V, r) \in \text{mod } A$, $\mathfrak{g} \otimes (V, r) = (V, r')$ où pour tout $a \in A$, $r'_a = r_{g^{-1}a}$. On a alors $(\text{mod } A)G \simeq \text{mod}(AG)$ où AG est l’algèbre définie dans [59]. Cet exemple sera développé plus largement dans la suite (voir la section 2.3).
3. Si G est un groupe cyclique, on retrouve la même définition que dans [53, chapitre 11].

La proposition suivante est une généralisation facile d’une proposition de Gabriel [27, p. 94–95] :

Proposition 2.1.7. *Si $G = \langle g_0 \rangle$ est cyclique d’ordre $n \in \mathbb{N}$, si la caractéristique de k ne divise pas n et si k possède des racines n -ièmes, alors tout $X \in \mathcal{C}$ tel que $X \simeq \mathfrak{g}_0 \otimes X$ admet un relèvement (X, ψ) dans $\mathcal{C}G$.*

Montrons tout d’abord ce lemme classique :

Lemme 2.1.8. *Si la caractéristique de k ne divise pas n et si k possède des racines n -ièmes alors pour tout polynôme $P(U)$ non divisible par U , $k[U]/(P)$ possède une racine n -ième de U .*

Démonstration. On cherche $Q \in k[U]$ tel que $Q^n \equiv U \pmod{P}$. Par le théorème des restes chinois, on peut supposer que $P = (U - x)^j$ avec $x \neq 0$. Soit x' une racine n -ième de x (qui existe par hypothèse). Cherchons Q sous la forme $Q = x' + (U - x)R$. On raisonne par récurrence sur j : si $j = 1$, $R = 0$ convient. Supposons que l’on ait

construit R tel que $(x' + (U - x)R)^n \equiv U \pmod{(U - x)^j}$. Alors, il existe $y \in k$ tel que $(x' + (U - x)R)^n \equiv U + y(U - x)^j \pmod{(U - x)^{j+1}}$. On a alors

$$\left(x' + (U - x)R - \frac{y}{nx'}(U - x)^j\right)^n \equiv U \pmod{(U - x)^{j+1}}$$

ce qui termine la récurrence. \square

Démonstration (de la proposition). Soit $\psi_0 : \mathfrak{g}_0 \otimes X \rightarrow X$ un isomorphisme. Soit χ l'endomorphisme de X faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X \\ \alpha \uparrow & & \parallel \\ \mathfrak{g}_0 \otimes (\cdots \otimes (\mathfrak{g}_0 \otimes X) \cdots) & \xrightarrow{\psi_0} \cdots \xrightarrow{\psi_0} & X \end{array}$$

(\mathfrak{g}_0 est répété n fois et on écrit ψ_0 pour $\mathfrak{g}_0 \otimes (\cdots \otimes (\mathfrak{g}_0 \otimes \psi_0) \cdots)$). L'algèbre $k[\chi]$ est alors de la forme prescrite dans le lemme puisque χ est inversible. On en déduit donc que χ possède une racine n -ième $\chi_0 \in k[\chi]$. Posons $\psi' = \chi_0^{-1}\psi_0$. Soit alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\psi_{g_0^j}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_0^j \otimes X & \xrightarrow{\psi_{g_0^j}} & X \\ \alpha \uparrow & & \parallel \\ \mathfrak{g}_0 \otimes (\cdots \otimes (\mathfrak{g}_0 \otimes X) \cdots) & \xrightarrow{\psi'} \cdots \xrightarrow{\psi'} & X \end{array}$$

Remarquons alors que $\chi\psi_0 = \psi_0(\mathfrak{g}_0 \otimes \chi)$ par définition de χ . Comme $\chi_0^{-1} \in k[\chi]$, on a aussi $\chi_0^{-1}\psi_0 = \psi_0(\mathfrak{g}_0 \otimes \chi_0^{-1})$. Par suite, on voit immédiatement que $\psi_{g_0^j}$ ne dépend que de g_0^j puis que $(X, \psi) \in \mathcal{CG}$. \square

Remarquons que la proposition précédente ne se généralise pas à un groupe quelconque :

Exemple 2.1.9. Soit A l'algèbre du carquois

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \downarrow \alpha & & \\ 4 & \xrightarrow{\beta} & 5 & \xleftarrow{\delta} & 2 \\ & & \uparrow \gamma & & \\ & & 3 & & \end{array}$$

et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont on note deux générateurs g et h . On fait agir G sur A de la façon suivante : g échange 1 et 3 d'une part et α et γ d'autre part, et il laisse le reste stable ; h échange 2 et 4 d'une part et β et δ d'autre part, et il laisse le reste stable. D'après l'exemple 2.1.6, G agit sur $\text{mod } A$. Regardons alors la représentation X suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \downarrow f_\alpha & & \\ k & \xrightarrow{f_\beta} & k^2 & \xleftarrow{f_\delta} & k \\ & & \uparrow f_\gamma & & \\ & & k & & \end{array}$$

avec $f_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f_\delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque alors qu'il y a deux isomorphismes d'ordre 2 de $\mathfrak{g} \otimes X$ dans X dont les restrictions au sommet 5 sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et deux isomorphismes d'ordre 2 de $\mathfrak{h} \otimes X$ dans X dont les restrictions au sommet 5 sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent, on a bien pour tout $g \in G$, $\mathfrak{g} \otimes X \simeq X$, mais on n'a pas de relevé $(X, \psi) \in \mathcal{C}G$ puisqu'il n'existe pas de choix d'isomorphismes de $\mathfrak{g} \otimes X$ dans X et de $\mathfrak{h} \otimes X$ dans X qui commutent alors que g et h commutent.

Lemme 2.1.10. 1. La catégorie $\mathcal{C}G$ est k -additive.

2. Si \mathcal{C} est abélienne, alors $\mathcal{C}G$ l'est aussi.

3. Si \mathcal{C} est exacte et si pour tout $g \in G$, le foncteur $\mathfrak{g} \otimes - : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est exact (on dira dans ce cas que l'action de G sur \mathcal{C} est exacte), alors $\mathcal{C}G$ est exacte en prenant comme suites exactes courtes admissibles les suites exactes courtes $0 \rightarrow (X, \psi) \xrightarrow{f} (X', \psi') \xrightarrow{g} (X'', \psi'') \rightarrow 0$ telles que $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g} X'' \rightarrow 0$ soit une suite exacte courte admissible dans \mathcal{C} .

4. Si \mathcal{C} est Hom-finie et Krull-Schmidt alors $\mathcal{C}G$ est Hom-finie et Krull-Schmidt.

Démonstration. 1. Il est tout d'abord immédiat que pour $(X, \psi), (Y, \chi) \in \mathcal{C}G$, l'espace $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi))$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. La bilinéarité de la composition ainsi que l'existence d'un objet nul sont tout aussi claires. En ce qui concerne l'existence de la somme directe, il suffit de prendre $X \oplus Y$ muni pour tout $g \in G$ de $(\psi \oplus \chi)_g = \psi_g \oplus \chi_g : (\mathfrak{g} \otimes X) \oplus (\mathfrak{g} \otimes Y) = \mathfrak{g} \otimes (X \oplus Y) \rightarrow X \oplus Y$, l'identification $(\mathfrak{g} \otimes X) \oplus (\mathfrak{g} \otimes Y) = \mathfrak{g} \otimes (X \oplus Y)$ étant canonique (lemme 1.2.106).

2. Soient $(X, \psi), (Y, \chi) \in \mathcal{C}G$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi))$ et soit $k : K \rightarrow X$ le noyau de Ff . Pour tout $g \in G$, on a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} \otimes K & \xrightarrow{\mathfrak{g} \otimes k} & \mathfrak{g} \otimes X & \xrightarrow{\mathfrak{g} \otimes f} & \mathfrak{g} \otimes Y \\ & & \psi_g \downarrow & & \chi_g \downarrow \\ K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et on a alors $f\psi_g(\mathfrak{g} \otimes k) = 0$ donc, comme k est un noyau de f , $\psi_g(\mathfrak{g} \otimes k)$ se factorise de façon unique à travers k ce qui permet de compléter le carré de gauche grâce à un morphisme ψ'_g . Le morphisme f a alors comme noyau $k : (K, \psi') \rightarrow (X, \psi)$ (l'unicité de chaque ψ'_g permet immédiatement de voir qu'il vérifie les axiomes demandés). Le cas du conoyau se traite de la même façon. Quant à l'isomorphisme entre l'image et la coimage, il suffit de voir que tout morphisme de $\mathcal{C}G$ qui est envoyé par F sur un isomorphisme de \mathcal{C} est un isomorphisme de $\mathcal{C}G$.

3. Les seuls axiomes qui ne sont pas immédiats sont l'existence des carrés cartésiens et cocartésiens. Elle se traite de la même façon que le cas du noyau ci-dessus.

4. Là encore, le principe de démonstration est proche : soit $(X, \psi) \in \mathcal{C}G$ et $f \in \text{End}_{\mathcal{C}G}(X, \psi)$ un idempotent. Comme \mathcal{C} est Krull-Schmidt, Ff est scindée : il existe $Y \in \mathcal{C}$, $\iota : Y \hookrightarrow X$ et $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ tels que $Ff = \iota\pi$ et $\text{Id}_Y = \pi\iota$. Il est alors aisé de voir que si l'on pose pour tout $g \in G$, $\chi_g = \pi\psi_g(\mathbf{g} \otimes \iota)$ alors $(Y, \chi) \in \mathcal{C}G$ et π et ι sont des morphismes de $\mathcal{C}G$. \square

Définition 2.1.11. Soit H un sous-groupe de G . Soit $(X, \psi) \in \mathcal{C}H$. Soient

$$g_1, g_2, \dots, g_n, g'_1, g'_2, \dots, g'_m \in G,$$

A_1 une $(n+1)$ -associativité et A_2 une $(m+1)$ -associativité. On appellera isomorphisme ψ -structurel de $A_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n, X)$ dans $A_2(\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \dots, \mathbf{g}'_m, X)$ tout isomorphisme composé de morphismes structuraux de la catégorie \mathbf{G} -module \mathcal{C} et de morphismes de la forme $\Phi(\psi_h)$ ou $h \in H$ et $\Phi(\psi_h^{-1})$ où Φ est un foncteur formé d'une associativité et d'objets de \mathbf{G} .

Lemme 2.1.12 (cohérence). *Soit H un sous-groupe de G . Soit $(X, \psi) \in \mathcal{C}H$. Soient $g_1, g_2, \dots, g_n, g'_1, g'_2, \dots, g'_m \in G$. Soient aussi A_1 une $(n+1)$ -associativité et A_2 une $(m+1)$ -associativité. Alors tous les isomorphismes ψ -structuraux de $A_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n, X)$ dans $A_2(\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \dots, \mathbf{g}'_m, X)$ sont égaux.*

Démonstration. Par inversibilité des isomorphismes ψ -structuraux, on peut supposer que $A_1 = A_2$ et que l'un des deux isomorphismes ψ -structuraux est l'identité. Soit f un isomorphisme ψ -structurel de $A_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n, X)$ dans lui-même. En utilisant les diagrammes commutatifs formés à partir de ceux de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\psi} & \mathbf{h} \otimes X \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ \mathbf{h} \otimes (\mathbf{h}^{-1} \otimes X) & \xleftarrow{\psi} & \mathbf{h} \otimes (\mathbf{h}^{-1} \otimes (\mathbf{h} \otimes X)) \\ \psi \downarrow & & \alpha \downarrow \\ \mathbf{h} \otimes X & \xleftarrow[\alpha]{} & \mathbf{h} \otimes (\mathbf{1} \otimes X) \end{array}$$

avec $h \in H$, on peut supposer que ψ n'intervient que positivement. En utilisant les diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_1(X) & \xrightarrow{\alpha} & \Phi_2(\mathbf{h} \otimes X) & \xrightarrow{\psi} & \Phi_2(X) \\ \psi \uparrow & & \psi \uparrow & & \psi \uparrow \\ \Phi_1(\mathbf{h}' \otimes X) & \xrightarrow{\alpha} & \Phi_2(\mathbf{h} \otimes (\mathbf{h}' \otimes X)) & \xrightarrow{\alpha} & \Phi_2(\mathbf{h}\mathbf{h}' \otimes X) \end{array}$$

où $h, h' \in H$ et Φ_1 et Φ_2 sont des foncteurs construits à partir d'une associativité et d'objets de \mathbf{G} , on peut supposer que f est de la forme $\alpha_1\Phi(\psi_h)\alpha_2$ où α_1 et α_2 sont des morphismes structuraux de \mathcal{C} et Φ est un foncteur formé à partir d'une associativité et d'objets de \mathbf{G} et $h \in H$. Ensuite, comme $\alpha_1\Phi(\psi_h)\alpha_2$ va de $A_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n, X)$ dans lui-même, h est l'élément neutre du groupe H et comme $\psi_e = \lambda_X$, f est un isomorphisme structurel de \mathcal{C} d'où le résultat. \square

Proposition 2.1.13. *Soit H un sous-groupe distingué de G . L'action de G sur \mathcal{C} induit immédiatement une action de H sur \mathcal{C} . On a alors :*

1. *L'action de G sur \mathcal{C} s'étend à une action de G sur $\mathcal{C}H$.*
2. *Pour tout $h \in H$, il y a un isomorphisme de foncteurs de $\mathbf{h} \otimes -$ dans $\text{Id}_{\mathcal{C}H}$.*
3. *L'action de G sur $\mathcal{C}H$ induit une action de G/H sur $\mathcal{C}H$.*
4. *Il y a une équivalence de catégories entre $(\mathcal{C}H)(G/H)$ et $\mathcal{C}G$.*

Démonstration. 1. Soit $(X, \psi) \in \mathcal{C}H$. Si $g \in G$ et $h \in H$, définissons $(\mathbf{g} \otimes \psi)_h$ de façon à faire commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} \otimes X & \xleftarrow{\psi} & \mathbf{g} \otimes (\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{g} \otimes X) \\ (\mathbf{g} \otimes \psi)_h \uparrow & & \swarrow \alpha \\ \mathbf{h} \otimes (\mathbf{g} \otimes X) & & \end{array}$$

Pour $g \in G$ et $h, h' \in H$, le diagramme suivant est commutatif par le lemme 2.1.12 puisque toutes ses flèches sont ψ -structurelles :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h} \otimes (\mathbf{h}' \otimes (\mathbf{g} \otimes X)) & \xrightarrow{\mathbf{h} \otimes (\mathbf{g} \otimes \psi)_{h'}} & \mathbf{h} \otimes (\mathbf{g} \otimes X) \\ \alpha \uparrow & & (\mathbf{g} \otimes \psi)_h \downarrow \\ \mathbf{h}\mathbf{h}' \otimes X & \xrightarrow{(\mathbf{g} \otimes \psi)_{hh'}} & \mathbf{g} \otimes X \end{array}$$

ce qui veut dire que $\mathbf{g} \otimes (X, \psi) = (\mathbf{g} \otimes X, \mathbf{g} \otimes \psi) \in \mathcal{C}H$ (il est immédiat que $(\mathbf{g} \otimes \psi)_e = \lambda$). De même, le diagramme suivant commute pour $g, g' \in G$ et $h \in H$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h} \otimes (\mathbf{g} \otimes (\mathbf{g}' \otimes X)) & \xrightarrow{(\mathbf{g} \otimes (\mathbf{g}' \otimes \psi))_h} & \mathbf{g} \otimes (\mathbf{g}' \otimes X) \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ \mathbf{h} \otimes (\mathbf{g}\mathbf{g}' \otimes X) & \xrightarrow{(\mathbf{g}\mathbf{g}' \otimes \psi)_h} & \mathbf{g}\mathbf{g}' \otimes X \end{array}$$

donc les morphismes structuraux de \mathcal{C} sont aussi des morphismes structuraux de $\mathcal{C}H$ ce qui permet de conclure.

2. Pour $h, h' \in H$, toujours pour les mêmes raisons, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}' \otimes (\mathbf{h} \otimes X) & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{h}' \otimes X \\ (\mathbf{h} \otimes \psi)_{h'} \downarrow & & \psi \downarrow \\ \mathbf{h} \otimes X & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

et ainsi ψ_h est un isomorphisme de $\mathbf{h} \otimes X$ dans X dans la catégorie $\mathcal{C}H$. Si on prend $(Y, \chi) \in \mathcal{C}H$ et $f : (X, \psi) \rightarrow (Y, \chi)$ un morphisme, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h} \otimes X & \xrightarrow{\psi} & X \\ \text{Id}_{\mathbf{h}} \otimes f \downarrow & & f \downarrow \\ \mathbf{h} \otimes Y & \xrightarrow{\chi} & Y \end{array}$$

Finalement, si l'on note

$$\varphi_{h;Y,\chi} = \chi h$$

pour tout $(Y, \chi) \in \mathcal{CH}$, alors φ_h est un isomorphisme du foncteur $\mathbf{h} \otimes -$ dans le foncteur $\text{Id}_{\mathcal{CH}}$.

3. Pour $g \in G$, on notera \bar{g} sa classe dans G/H . Soit $G_0 \subset G$ un ensemble de représentants des classes de G/H contenant l'élément neutre. Pour tout $g \in G_0$, posons $\bar{\mathbf{g}} \otimes - = \mathbf{g} \otimes -$. Soient maintenant $g, g' \in G_0$. Il existe une unique décomposition $gg' = g''h$ avec $g'' \in G_0$ et $h \in H$. L'isomorphisme de foncteurs $\bar{\alpha}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\mathbf{g}}\mathbf{g}' \otimes - & \xlongequal{\quad} & \mathbf{g}'' \otimes - & \xleftarrow{\varphi_h} & \mathbf{g}'' \otimes (\mathbf{h} \otimes -) \\ \bar{\alpha} \downarrow & & & & \uparrow \alpha \\ \bar{\mathbf{g}} \otimes (\mathbf{g}' \otimes -) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{g} \otimes (\mathbf{g}' \otimes -) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{g}'' \mathbf{h} \otimes - \end{array}$$

munit \mathcal{CH} d'une action de G/H . En effet, les axiomes d'une catégorie module sont vérifiés car tous les morphismes intervenant sont ψ -structuraux et donc les égalités demandées par les axiomes sont vérifiées.

4. Soit $(X, \psi', \psi'') \in (\mathcal{CH})(G/H)$. Pour $g \in G$, il existe $g_0 \in G_0$ et $h \in H$ tels que $g = g_0h$. Soit ψ_g qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{g} \otimes X & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{g}_0 \otimes (\mathbf{h} \otimes X) & \xrightarrow{\psi'} & \mathbf{g}_0 \otimes X \\ \psi_g \downarrow & & & & \parallel \\ X & \xleftarrow{\psi''} & \bar{\mathbf{g}} \otimes X & & \end{array}$$

Soient maintenant $g' \in G$, $g'_0 \in G_0$, $h' \in H$, $g''_0 \in G_0$ et $h'' \in H$ tels que $g' = g'_0h'$ et $gg' = g''_0h''$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{g} \otimes (\mathbf{g}'_0 \otimes (\mathbf{h}' \otimes X)) & \xrightarrow{\psi'} & \mathbf{g} \otimes (\mathbf{g}'_0 \otimes X) & \xrightarrow{\psi''} & \mathbf{g} \otimes X \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ \mathbf{g}_0 \otimes (\mathbf{h} \otimes (\mathbf{g}'_0 \otimes (\mathbf{h}' \otimes X))) & \xrightarrow{\psi'} & \mathbf{g}_0 \otimes (\mathbf{h} \otimes (\mathbf{g}'_0 \otimes X)) & \xrightarrow{\psi''} & \mathbf{g}_0 \otimes (\mathbf{h} \otimes X) \\ \alpha \uparrow & \nearrow \psi' & \mathbf{g}'_0 \otimes \psi' \downarrow & & \psi' \downarrow \\ \mathbf{g}_0 \otimes (\mathbf{h} \otimes (\mathbf{g}'_0 \otimes (\mathbf{h}' \otimes X))) & & \mathbf{g}_0 \otimes (\mathbf{g}'_0 \otimes X) & \xrightarrow{\psi''} & \mathbf{g}_0 \otimes X \\ \alpha \uparrow & & \bar{\alpha} \uparrow & & \psi'' \downarrow \\ \mathbf{g}''_0 \otimes (\mathbf{h}'' \otimes X) & \xrightarrow{\psi'} & \mathbf{g}''_0 \otimes X & \xrightarrow{\psi''} & X \end{array}$$

(les deux carrés du haut parce que α est fonctoriel, le carré du milieu à droite parce que ψ'' est un morphisme de $\mathbf{g}'_0 \otimes (X, \psi')$ dans (X, ψ') , le carré en bas à droite par définition de ψ'' et le pentagone en bas à gauche parce qu'il n'est composé que de morphismes ψ' -structuraux). En ne conservant que le bord et en composant avec

des morphismes structuraux à gauche, on trouve le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} \otimes (\mathbf{g}' \otimes X) & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{g} \otimes X \\ \alpha \downarrow & & \psi \downarrow \\ \mathbf{g}\mathbf{g}' \otimes X & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

donc $(X, \psi) \in \mathcal{CG}$. Posons $\Phi(X, \psi', \psi'') = (X, \psi)$. Soient $(Y, \chi', \chi'') \in (\mathcal{CH})(G/H)$ un autre objet et $(Y, \chi) = \Phi(Y, \chi', \chi'')$. Soit $f \in \text{Hom}_{(\mathcal{CH})(G/H)}(X, \psi', \psi''; Y, \chi', \chi'')$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \psi & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ \mathbf{g} \otimes X & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{g}_0 \otimes (\mathbf{h} \otimes X) & \xrightarrow{\psi'} & g_0 \otimes X & \xrightarrow{\psi''} & X \\ f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow \\ \mathbf{g} \otimes Y & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{g}_0 \otimes (\mathbf{h} \otimes Y) & \xrightarrow{\chi'} & \mathbf{g}_0 \otimes Y & \xrightarrow{\chi''} & Y \\ & & & \curvearrowleft & & & \\ & & & \chi & & & \end{array}$$

et par conséquent, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{CG}}((X, \psi), (Y, \chi))$ et en posant $\Phi(f) = f$, Φ est un foncteur. Maintenant, si $(X, \psi) \in \mathcal{CG}$, pour $h \in H$, posons $\psi'_h = \psi_h$ et pour $g \in G_0$, $\psi''_{g_0} = \psi_{g_0}$. Il est alors aisé de voir que $(X, \psi', \psi'') \in (\mathcal{CH})(G/H)$ (tous les morphismes intervenant sont ψ -structuraux) et que $\Phi(X, \psi', \psi'') = (X, \psi)$. Finalement, Φ est essentiellement surjectif. Par ailleurs, il est aisé de voir que Φ est pleinement fidèle (i.e. bijectif au niveau des espaces de morphismes) donc Φ est une équivalence de catégories. \square

Proposition 2.1.14. *Il existe une façon naturelle de faire de \mathcal{CG} une catégorie mod $k[G]$ -module.*

Démonstration. Soit $\text{mod}_0 k$ la sous-catégorie pleine de $\text{mod } k$ dont les objets sont ceux de la forme k^n . Soit Ψ le foncteur d'inclusion. Il est aisé de définir une structure monoïdale sur $\text{mod}_0 k$: on pose $k^m \otimes k^n = k^{mn}$ et si $f \in \text{Hom}_{\text{mod}_0 k}(k^m, k^{m'})$ et $g \in \text{Hom}_{\text{mod}_0 k}(k^n, k^{n'})$, $f \otimes g : k^{mn} \rightarrow k^{m'n'}$ est défini pour $1 \leq i_1 \leq m'$, $1 \leq i_2 \leq n'$, $1 \leq j_1 \leq m$ et $1 \leq j_2 \leq n$ par

$$(f \otimes g)_{ij} = f_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2}.$$

où $i = i_1 + m'(i_2 - 1)$ et $j = j_1 + m(j_2 - 1)$. Il est alors facile de constater que $\text{mod}_0 k$ est une catégorie monoïdale stricte (c'est-à-dire que les isomorphismes structuraux sont des égalités).

Par ailleurs, Ψ est un foncteur monoïdal. En effet, on peut définir un isomorphisme de foncteurs $\varphi_\Psi : \Psi(- \otimes -) \rightarrow \Psi(-) \otimes \Psi(-)$ de la façon suivante : pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi_{\Psi, k^m, k^n} : k^{mn} &\rightarrow k^m \otimes k^n \\ v_i &\mapsto v_{i_1} \otimes v_{i_2} \end{aligned}$$

où les v_i désignent les éléments des bases canoniques, $1 \leq i_1 \leq m$, $1 \leq i_2 \leq n$ et $i = i_1 + m(i_2 - 1)$. On définit aussi $\varphi'_\Psi = \text{Id}_k$. On vérifie facilement la définition d'un

foncteur monoïdal. Soit Φ un foncteur quasi-inverse de Ψ . Alors Φ est monoïdal d'après le lemme 1.2.94 et on a clairement $\Phi(V) = k^{\dim V}$ pour tout $V \in \text{mod } k$.

On fait de \mathcal{C} une catégorie mod k -module en posant pour tout $V \in \text{mod } k$ et $X \in \mathcal{C}$, $V \otimes X = X^{\dim(V)}$. Si $V, W \in \text{mod } k$, $X, Y \in \mathcal{C}$, $f \in \text{Hom}_k(V, W)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on définit $f \otimes g : V \otimes X = X^{\dim(V)} \rightarrow W \otimes Y = Y^{\dim(W)}$ par

$$f \otimes g = (\Phi(f)_{ij}g)_{1 \leq i \leq \dim(W), 1 \leq j \leq \dim(V)}.$$

Définissons les isomorphismes structuraux :

- $\lambda = \text{Id} : k \otimes - = - \rightarrow -$;
- Si $V, W \in \text{mod } k$ et $X \in \mathcal{C}$, $\alpha_{V,W,X} : (V \otimes W) \otimes X \rightarrow V \otimes (W \otimes X)$ est définie par

$$\alpha_{V,W,X;i,j,\ell} = \begin{cases} \text{Id}_X & \text{si } i = j + \dim(V)(\ell - 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $1 \leq i \leq \dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W)$, $1 \leq j \leq \dim(V)$ et $1 \leq \ell \leq \dim(W)$.

Il est alors facile de voir que \mathcal{C} est ainsi mod₀ k -module puis mod k -module puisque Φ est Ψ sont des foncteurs monoïdaux.

On en déduit alors une structure de mod $k[G]$ -module sur $\mathcal{C}G$. On remarque en effet que pour tout $g \in G$, $V \in \text{mod } k$ et $X \in \mathcal{C}$, on a $\mathbf{g} \otimes (V \otimes X) = \mathbf{g} \otimes X^{\dim V} = (\mathbf{g} \otimes X)^{\dim V} = V \otimes (\mathbf{g} \otimes X)$ (l'égalité du milieu étant l'isomorphisme fonctoriel canonique du lemme 1.2.106). Si $(V, r) \in \text{mod } k[G]$ et $(X, \psi) \in \mathcal{C}G$, on pose $(V, r) \otimes (X, \psi) = (V \otimes X, r \otimes \psi)$ où pour $g \in G$, $(r \otimes \psi)_g : \mathbf{g} \otimes (V \otimes X) = V \otimes (\mathbf{g} \otimes X) \rightarrow V \otimes X$ est défini par $(r \otimes \psi)_g = r_g \otimes \psi_g$. Si l'on prend maintenant aussi $h \in G$, on a les deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{r_h} & V \\ \parallel & & \downarrow r_g \\ V & \xrightarrow{r_{gh}} & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{g} \otimes (\mathbf{h} \otimes X) & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{g}} \otimes \psi_h} & \mathbf{g} \otimes X \\ \alpha \uparrow & & \downarrow \psi_g \\ \mathbf{gh} \otimes X & \xrightarrow{\psi_{gh}} & X \end{array}$$

et en leur appliquant le bifoncteur $\otimes : \text{mod } k \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, on trouve le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} \otimes (\mathbf{h} \otimes (V \otimes X)) & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{g}} \otimes (r \otimes \psi)_h} & \mathbf{g} \otimes (V \otimes X) \\ \alpha \uparrow & & \downarrow (r \otimes \psi)_g \\ \mathbf{gh} \otimes (V \otimes X) & \xrightarrow{(r \otimes \psi)_{gh}} & V \otimes X \end{array}$$

donc $(V \otimes X, r \otimes \psi) \in \mathcal{C}G$. Par ailleurs, si $(V', r') \in \text{mod } k[G]$, $(Y, \chi) \in \mathcal{C}G$, $f \in \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}((V, r), (V', r'))$ et $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi))$, les deux diagrammes suivants commutent pour tout $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{r_g} & V \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V' & \xrightarrow{r'_g} & V' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{g} \otimes X & \xrightarrow{\psi_g} & X \\ \text{Id}_{\mathbf{g}} \otimes f' \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathbf{g} \otimes Y & \xrightarrow{\chi_g} & Y \end{array}$$

ce qui montre en leur appliquant le bifoncteur $\otimes : \text{mod } k \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que $f \otimes f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}((V, r) \otimes (X, \psi), (V', r') \otimes (Y, \chi))$. Cela finit de prouver que $\mathcal{C}G$ est une catégorie mod $k[G]$ -module. \square

Remarque 2.1.15. La structure définie dans la proposition précédente ne dépend à isomorphisme près pas du choix de Φ .

Lemme 2.1.16. *Avec les notations de la proposition précédente, il y a un isomorphisme de quadrifoncteurs*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes -_2) \simeq ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-_1, -_2)$$

où les $-$ désignent des variables de \mathcal{C} et les $?$ des variables de $\mathrm{mod} k$.

Démonstration. Au niveau des objets, l'isomorphisme

$$\gamma : ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-_1, -_2) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes -_2)$$

est évident à travers l'équivalence de catégorie Φ définie dans la proposition précédente. Regardons ce qui se passe au niveau des morphismes. Soient $V, V', W, W' \in \mathrm{mod} k$ et $X, X', Y, Y' \in \mathcal{C}$. Soient $v : V' \rightarrow V$, $w : W \rightarrow W'$, $f : X' \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y'$ des morphismes. On veut montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes W \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V \otimes X, W \otimes Y) \\ \downarrow \mathrm{t}_{v \otimes w \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)} & & \downarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(v \otimes f, w \otimes g) \\ V'^* \otimes W' \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V' \otimes X', W' \otimes Y') \end{array}$$

En utilisant l'équivalence de catégorie Φ , cela revient à montrer que

$$\begin{array}{ccc} \Phi(V)^* \otimes \Phi(W) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{\dim(V)}, Y^{\dim(W)}) \\ \downarrow \mathrm{t}_{\Phi(v) \otimes \Phi(w) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)} & & \downarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi(v) \otimes f, \Phi(w) \otimes g) \\ \Phi(V')^* \otimes \Phi(W') \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X'^{\dim(V')}, Y'^{\dim(W')}) \end{array}$$

commute. Par linéarité de toutes les flèches, on peut supposer que $\Phi(v) = E_{ij}$ (dans la base des coefficients matriciels), $\Phi(w) = E_{i'j'}$. Soit e_k^* un élément de la base canonique de $\Phi(V)^*$, $e_{k'}$ un élément de la base canonique de $\Phi(W)$, et $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \gamma((\mathrm{t}_{\Phi(v) \otimes \Phi(w) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)})(e_k^* \otimes e_{k'} \otimes \theta)) &= \gamma(\delta_{ik} e_j^* \otimes \delta_{j'k'} e_{i'} \otimes g\theta f) \\ &= \delta_{ik} \delta_{j'k'} \iota_{i'} g\theta f \pi_j \end{aligned}$$

où $\pi_j : X'^{\dim(V')} \rightarrow X'$ est la projection sur la j -ième coordonnée et $\iota_{i'} : Y' \hookrightarrow Y'^{\dim(W')}$ est l'inclusion sur la i' -ième coordonnée. De même, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi(v) \otimes f, \Phi(w) \otimes g)(\gamma(e_k^* \otimes e_{k'} \otimes \theta)) &= (\Phi(w) \otimes g) \iota_{k'} \theta \pi_k (\Phi(v) \otimes f) \\ &= \iota_{i'} g \pi_{j'} \iota_{k'} \theta \pi_k \iota_{i'} f \pi_j = \delta_{j'k'} \delta_{ki} \iota_{i'} g\theta f \pi_j \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Rappelons la définition suivante :

Définition 2.1.17. Si r est une représentation de G , on note r^* et on appelle représentation contragrédiente de r la représentation sur l'espace dual de celui de r définie pour tout $g \in G$ par $r_g^* = \mathrm{t}_{r_{g^{-1}}}$.

Rappelons ce lemme classique :

Lemme 2.1.18. *Il y a un isomorphisme de trifoncteurs*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(? \otimes ?^*, ?) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(?, ? \otimes ?)$$

ces deux trifoncteurs allant de $(\mathrm{mod} k[G])^3$ dans $\mathrm{mod} k$.

Démonstration. Soient $(V_1, r_1), (V_2, r_2), (V_3, r_3) \in \mathrm{mod} k[G]$. Soient $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de V_2 et $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ sa base duale.

Pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}((V_1, r_1) \otimes (V_2^*, r_2^*), (V_3, r_3))$, posons

$$\begin{aligned} \varphi(f) : (V_1, r_1) &\rightarrow (V_2, r_2) \otimes (V_3, r_3) \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^n e_i \otimes f(v \otimes e_i^*) \end{aligned}$$

et pour $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}((V_1, r_1), (V_2, r_2) \otimes (V_3, r_3))$, posons

$$\begin{aligned} \varphi'(f') : (V_1, r_1) \otimes (V_2^*, r_2^*) &\rightarrow (V_3, r_3) \\ v \otimes \gamma &\mapsto (\gamma \otimes \mathrm{Id})(f'(v)) \end{aligned}$$

$\varphi'(f')$ est un morphisme de représentations. En effet, si $g \in G$ et $v \otimes \gamma \in V_1 \otimes V_2^*$,

$$\begin{aligned} \varphi'(f')(r_{1,g}(v) \otimes {}^t r_{2,g^{-1}}(\gamma)) &= (\gamma r_{2,g^{-1}} \otimes \mathrm{Id})(f'(r_{1,g}(v))) = (\gamma r_{2,g^{-1}} \otimes \mathrm{Id})(r_{2,g} \otimes r_{3,g})(f'(v)) \\ &= (\gamma \otimes r_{3,g})(f'(v)) = r_{3,g}(\gamma \otimes \mathrm{Id})(f'(v)) = r_{3,g} \varphi'(f')(v \otimes \gamma). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\varphi(\varphi'(f'))(v) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes \varphi'(f')(v \otimes e_i^*) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes (e_i^* \otimes \mathrm{Id})(f'(v)) = f'(v)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi'(\varphi(f))(v \otimes \gamma) &= (\gamma \otimes \mathrm{Id})(\varphi(f)(v)) = (\gamma \otimes \mathrm{Id}) \left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes f(v \otimes e_i^*) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma(e_i) f(v \otimes e_i^*) = f \left(v \otimes \sum_{i=1}^n \gamma(e_i) e_i^* \right) = f(v \otimes \gamma) \end{aligned}$$

donc φ et φ' sont inverse l'un de l'autre et l'on a automatiquement que $\varphi(f)$ est un morphisme de représentations. Montrons que φ' est fonctoriel. Soient $f : (V'_1, r'_1) \rightarrow (V_1, r_1)$, $f' : (V_2, r_2) \rightarrow (V'_2, r'_2)$, $f'' : (V_3, r_3) \rightarrow (V'_3, r'_3)$ des morphismes. Il suffit de montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}((V_1, r_1), (V_2, r_2) \otimes (V_3, r_3)) & \xrightarrow{\varphi'} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}((V_1, r_1) \otimes (V_2^*, r_2^*), (V_3, r_3)) \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(f, f' \otimes f'') \downarrow & & \downarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(f \otimes {}^t f', f'') \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}((V'_1, r'_1), (V'_2, r'_2) \otimes (V'_3, r'_3)) & \xrightarrow{\varphi'} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}((V'_1, r'_1) \otimes (V'_2, r'_2)^*, (V'_3, r'_3)) \end{array}$$

Soient $\tilde{f} \in \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}((V_1, r_1), (V_2, r_2) \otimes (V_3, r_3))$ et $v' \otimes \gamma' \in (V_1', r_1') \otimes (V_2'^*, r_2'^*)$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(f \otimes {}^t f', f'')(\varphi'(\tilde{f}))(v' \otimes \gamma') &= f'' \varphi'(\tilde{f})(f \otimes {}^t f')(v' \otimes \gamma) \\ &= f'' \varphi'(\tilde{f})(f(v') \otimes \gamma f') \\ &= f''(\gamma f' \otimes \text{Id})(\tilde{f}(f(v'))) = (\gamma f' \otimes f'')(\tilde{f}(f(v'))) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi'(\text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(f, f' \otimes f'')(\tilde{f}))(v' \otimes \gamma') &= \varphi'((f' \otimes f'')\tilde{f}f)(v' \otimes \gamma) \\ &= (\gamma \otimes \text{Id})((f' \otimes f'')\tilde{f}(f(v'))) \\ &= (\gamma f' \otimes f'')(\tilde{f}(f(v'))) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Notation 2.1.19. On rappelle que l'on note F le foncteur d'oubli de $\mathcal{C}G$ dans \mathcal{C} .

Soient $(X, \psi), (Y, \chi) \in \mathcal{C}G$. En tant qu'espace vectoriel sur k , posons

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Si $g \in G$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, définissons gf par la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{gf} & Y \\ \psi_g \uparrow & & \uparrow \chi_g \\ \mathbf{g} \otimes X & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{g}} \otimes f} & \mathbf{g} \otimes Y \end{array}$$

Si $\gamma : (X', \psi') \rightarrow (X, \psi)$, $\gamma' : (Y, \chi) \rightarrow (Y', \chi')$ sont des morphismes de $\mathcal{C}G$, posons

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(\gamma, \gamma') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F\gamma, F\gamma').$$

Proposition 2.1.20. *Ainsi défini, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}$ est un bifoncteur de $\mathcal{C}G \times \mathcal{C}G$ dans $\text{mod } k[G]$ contravariant en la première variable et covariant en la seconde qui vérifie :*

1. pour $X, Y, Z \in \mathcal{C}G$ la composition

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FZ) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FY) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FZ)$$

devient un morphisme de représentations

$$\circ : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, Z) \otimes \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, Y) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, Z);$$

2. il y a un isomorphisme de quadrifoncteurs

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes -_2) \simeq ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-_1, -_2)$$

où les $?$ sont des variables dans $\text{mod } k[G]$ et les $-$ sont des variables dans $\mathcal{C}G$;

3. il y a un isomorphisme de quadrifoncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes -_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(?_1 \otimes ?_2^*, \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-_1, -_2))$$

où les $?$ sont des variables dans $\mathrm{mod} k[G]$ et les $-$ sont des variables dans $\mathcal{C}G$.

Démonstration. Pour $g, h \in G$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \xrightarrow{g(hf)} & Y \\
 & \nearrow \psi & \uparrow \psi & & \uparrow \chi \\
 & & \mathbf{g} \otimes X & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbf{g}} \otimes hf} & \mathbf{g} \otimes Y \\
 & & \uparrow \psi & & \uparrow \chi \\
 \mathbf{gh} \otimes X & \xleftarrow{\alpha} & \mathbf{g} \otimes (\mathbf{h} \otimes X) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbf{g}} \otimes (\mathrm{Id}_{\mathbf{h}} \otimes f)} & \mathbf{g} \otimes (\mathbf{h} \otimes Y) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{gh} \otimes Y \\
 & & & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbf{gh}} \otimes f} &
 \end{array}$$

donc $g(hf) = (gh)f$ et on a bien une représentation de G .

Si $\gamma : (X', \psi') \rightarrow (X, \psi)$, $\gamma' : (Y, \chi) \rightarrow (Y', \chi')$ sont des morphismes de $\mathcal{C}G$, et si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, le diagramme suivant commute pour tout $g \in G$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X' & \xrightarrow{g \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\gamma, \gamma')(f)} & Y' \\
 & \nearrow \gamma & \uparrow \psi' & & \uparrow \chi' \\
 & & \mathbf{g} \otimes X' & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbf{g}} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\gamma, \gamma')(f)} & \mathbf{g} \otimes Y' \\
 & & \downarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{g}} \otimes \gamma & & \downarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{g}} \otimes \gamma' \\
 X & \xleftarrow{\psi} & \mathbf{g} \otimes X & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbf{g}} \otimes f} & \mathbf{g} \otimes Y \xrightarrow{\chi} Y \\
 & & & \xrightarrow{gf} &
 \end{array}$$

et finalement, $g \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\gamma, \gamma')(f) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\gamma, \gamma')(gf)$ donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\gamma, \gamma')$ est un morphisme de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi))$ dans $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}((X', \psi'), (Y', \chi'))$, morphisme que l'on notera $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(\gamma, \gamma')$ faisant ainsi de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}$ un bifoncteur.

La première condition demandée est immédiate. Regardons la seconde. Pour cela, il suffit de montrer que l'isomorphisme de quadrifoncteurs γ défini dans le lemme 2.1.16 reste ici un isomorphisme. Soient donc $g \in G$ et $(V, r), (V', r') \in \mathrm{mod} k[G]$. Par définition d'un isomorphisme de foncteurs, le carré du bas du diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 V^* \otimes V' \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V \otimes X, V' \otimes Y) \\
 \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes (\mathbf{g} \otimes -) \downarrow & & \downarrow \mathbf{g} \otimes - \\
 V^* \otimes V' \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{g} \otimes X, \mathbf{g} \otimes Y) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V \otimes (\mathbf{g} \otimes X), V' \otimes (\mathbf{g} \otimes Y)) \\
 {}^t r_g^{-1} \otimes r'_g \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\psi_g^{-1}, \chi_g) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r_g^{-1} \otimes \psi_g^{-1}, r'_g \otimes \chi_g) \\
 V^* \otimes V' \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V \otimes X, V' \otimes Y)
 \end{array}$$

et le carré du haut commute parce que $V \otimes (\mathbf{g} \otimes X) = \mathbf{g} \otimes (V \otimes X)$. Cela prouve que $\gamma_{V, V', X, Y}$ est un isomorphisme de représentation.

Regardons enfin le dernier point. D'après le lemme précédent et le point précédent, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(?_1 \otimes ?_2^*, \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-1, -2)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(\mathbb{1}, ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-1, -2)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(?_1 \otimes -1, ?_2 \otimes -2)) \end{aligned}$$

donc il suffit de voir que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-1, -2)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(-1, -2)$. Or ceci est clair. Il suffit, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi)))$ de lui associer

$$f(\mathbb{1}) \in \bigcap_{g \in G} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi))^g = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi))$$

la dernière égalité étant la définition de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (Y, \chi))$. \square

Corollaire 2.1.21. *On a un isomorphisme de trifoncteurs*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(?* \otimes -, -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, ? \otimes -)$$

où $?$ est une variable dans $\mathrm{mod} k[G]$ et les $-$ dans $\mathcal{C}G$. En particulier, si $r \in \mathrm{mod} k[G]$, les deux foncteurs de $\mathcal{C}G$ dans lui-même $r \otimes -$ et $r^* \otimes -$ sont adjoints.

Démonstration. En utilisant la proposition précédente :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(?* \otimes -, -) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(*, \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, -)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, ? \otimes -) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché. \square

2.2 Groupes finis

Soient k un corps, \mathcal{C} une k -catégorie. Soit G un groupe fini agissant sur \mathcal{C} .

2.2.1 Foncteurs $-[G]$ et F

Proposition 2.2.1. *Soit $X \in \mathcal{C}$. Posons*

$$\tilde{X} = \left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \right) \otimes X$$

et notons, pour $g \in G$, ψ_g l'unique isomorphisme structurel de $\mathfrak{g} \otimes \tilde{X}$ dans \tilde{X} . Alors $(\tilde{X}, \psi) \in \mathcal{C}G$.

Démonstration. Pour $g, h \in G$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \otimes (\mathfrak{h} \otimes \tilde{X}) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} \otimes \psi_h} & \mathfrak{g} \otimes \tilde{X} \\ \alpha \uparrow & & \psi_g \downarrow \\ \mathfrak{gh} \otimes \tilde{X} & \xrightarrow{\psi_{gh}} & \tilde{X} \end{array}$$

par unicité du morphisme structurel de $\mathfrak{g} \otimes (\mathfrak{h} \otimes \tilde{X})$ dans \tilde{X} . \square

Définition 2.2.2. Dans les conditions de la proposition précédente, on notera $X[G] = (\tilde{X}, \psi)$.

Lemme 2.2.3. On peut étendre $-[G]$ en un foncteur de \mathcal{C} dans \mathcal{CG} en posant

$$f[G] = \left(\bigoplus_{g \in G} \text{Id}_{\mathfrak{g}} \right) \otimes f$$

pour tout morphisme f de \mathcal{C} .

Démonstration. Tout d'abord,

$$\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \right) \otimes -$$

est un foncteur. Il suffit donc de montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de \mathcal{C} , alors

$$f[G] = \left(\bigoplus_{g \in G} \text{Id}_{\mathfrak{g}} \right) \otimes f$$

est un morphisme de $X[G]$ dans $Y[G]$. Soit $h \in G$. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h} \otimes \left(\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \right) \otimes X \right) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes (\text{Id} \otimes f)} & \mathbf{h} \otimes \left(\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \right) \otimes Y \right) \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ \left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \right) \otimes X & \xrightarrow{\text{Id} \otimes f} & \left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \right) \otimes Y \end{array}$$

puisque les isomorphismes structuraux sont fonctoriels. \square

Proposition 2.2.4. 1. Il y a un isomorphisme de foncteurs de \mathcal{CG} dans lui-même :

$$(F-)[G] \simeq k[G] \otimes -$$

où $F : \mathcal{CG} \rightarrow \mathcal{C}$ est le foncteur d'oubli et $k[G]$ la représentation régulière de G .

2. Les foncteurs $F : \mathcal{CG} \rightarrow \mathcal{C}$ et $-[G] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CG}$ sont adjoints.

Démonstration. 1. Soit $(X, \psi) \in \mathcal{C}$. Soit χ tel que

$$\left(\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \right) \otimes X, \chi \right) = X[G].$$

Pour $g, h \in G$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h} \otimes (\mathfrak{g} \otimes X) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{hg} \otimes X \\ \mathbf{h} \otimes \psi_g \downarrow & & \psi_{hg} \downarrow \\ \mathbf{h} \otimes X & \xrightarrow{\psi_h} & X \end{array}$$

et en sommant sur $g \in G$, en posant $g' = hg$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{h} \otimes \left(\left(\bigoplus_g \mathbf{g} \right) \otimes X \right) & \xrightarrow{\chi_h} & \left(\bigoplus_{g'} \mathbf{g}' \right) \otimes X \\
 \downarrow \parallel & & \downarrow \parallel \\
 \bigoplus_g (\mathbf{h} \otimes (\mathbf{g} \otimes X)) & \xrightarrow{\bigoplus \alpha} & \bigoplus_{g'} (\mathbf{g}' \otimes X) \\
 \downarrow \bigoplus \mathbf{h} \otimes \psi_g & & \downarrow \bigoplus \psi_{g'} \\
 \bigoplus_g (\mathbf{h} \otimes X) & \xrightarrow{\bigoplus \psi_h} & \bigoplus_{g'} X \\
 \downarrow \parallel & & \downarrow \parallel \\
 \mathbf{h} \otimes \left(\bigoplus_g X \right) & \xrightarrow{(k[G] \otimes \psi)_h} & \bigoplus_{g'} X
 \end{array}$$

$\mathbf{h} \otimes \bigoplus \psi_g$ (curved arrow from top-left to bottom-left)

les égalités étant celles du lemme 1.2.106, et par conséquent, $\bigoplus \psi_g$ est un isomorphisme de $X[G]$ dans $k[G] \otimes (X, \psi)$. Par ailleurs, si $f : (X, \psi) \rightarrow (Y, \psi')$ est un morphisme, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\bigoplus_g \mathbf{g} \right) \otimes X & \xrightarrow{(\bigoplus \mathbf{g}) \otimes f} & \left(\bigoplus_g \mathbf{g} \right) \otimes Y \\
 \downarrow \parallel & & \downarrow \parallel \\
 \bigoplus_g (\mathbf{g} \otimes X) & \xrightarrow{\bigoplus (\mathbf{g} \otimes f)} & \bigoplus_g (\mathbf{g} \otimes Y) \\
 \downarrow \bigoplus \psi_g & & \downarrow \bigoplus \psi'_g \\
 \bigoplus_g X & \xrightarrow{k[G] \otimes f = \bigoplus f} & \bigoplus_g Y
 \end{array}$$

la commutativité du diagramme du bas provenant du fait que f est un morphisme dans $\mathcal{C}G$. Finalement, $\bigoplus \psi_g$ est un isomorphisme fonctoriel.

2. Soient $X \in \mathcal{C}$ et $(Y, \psi) \in \mathcal{C}G$. Si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on définit

$$\xi(f) : \bigoplus_{g \in G} (\mathbf{g} \otimes X) = \left(\bigoplus_{g \in G} \mathbf{g} \right) \otimes X \rightarrow Y$$

par

$$(\xi(f))_g = \psi_g \circ (\mathbf{g} \otimes f).$$

Pour $g, h \in G$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{h} \otimes (\mathbf{g} \otimes X) & \xrightarrow{\mathbf{h} \otimes (\mathbf{g} \otimes f)} & \mathbf{h} \otimes (\mathbf{g} \otimes Y) & \xrightarrow{\mathbf{h} \otimes \psi_g} & \mathbf{h} \otimes Y \\
 \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \psi_h \downarrow \\
 \mathbf{hg} \otimes X & \xrightarrow{\mathbf{hg} \otimes f} & \mathbf{hg} \otimes Y & \xrightarrow{\psi_{hg}} & Y
 \end{array}$$

En le sommant sur $g \in G$, on trouve le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{h} \otimes \left(\left(\bigoplus \mathbf{g} \right) \otimes X \right) & \xrightarrow{\mathbf{h} \otimes \xi(f)} & \mathbf{h} \otimes Y \\
 \chi_h \downarrow & & \psi_h \downarrow \\
 \left(\bigoplus \mathbf{g} \right) \otimes X & \xrightarrow{\xi(f)} & Y
 \end{array}$$

qui montre que $\xi(f)$ est un morphisme de $X[G]$ dans (Y, ψ) . Vérifions maintenant que ξ est fonctoriel. Soient $X' \in \mathcal{C}$ et $(Y', \psi') \in \mathcal{C}G$. Soient $\eta : X' \rightarrow X$ un morphisme de \mathcal{C} et $\theta : (Y, \psi) \rightarrow (Y', \psi')$ un morphisme de $\mathcal{C}G$. Alors, pour $g \in G$, on a

$$\begin{aligned} (\theta \circ \xi(f) \circ \eta[G])_g &= \theta \circ \xi(f)_g \circ (\mathbf{g} \otimes \eta) = \theta \circ \psi_g \circ (\mathbf{g} \otimes f) \circ (\mathbf{g} \otimes \eta) \\ &= \psi'_g \circ (\mathbf{g} \otimes \theta) \circ (\mathbf{g} \otimes f\eta) = \psi'_g \circ (\mathbf{g} \otimes \theta f\eta) = \xi(\theta f\eta)_g \end{aligned}$$

et ainsi, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\eta, F\theta)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') \\ \xi \downarrow & & \xi \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(X[G], (Y, \psi)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(\eta[G], \theta)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(X'[G], (Y', \psi')) \end{array}$$

ce qui montre la functorialité de ξ . Si $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(X[G], (Y, \psi))$, posons $\zeta(f') = f'_1 \lambda^{-1}$. On a alors clairement $\zeta(\xi(f)) = f$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \xi(\zeta(f'))_g &= \psi_g \circ (\mathbf{g} \otimes (f'_1 \lambda^{-1})) = \psi_g \circ (\mathbf{g} \otimes f'_1) \circ (\mathbf{g} \otimes \lambda^{-1}) \\ &= f'_g \circ \chi_{g|_{\mathbb{1} \otimes X}} \circ (\mathbf{g} \otimes \lambda^{-1}) = f'_g \circ (\mathbf{g} \otimes \lambda) \circ (\mathbf{g} \otimes \lambda^{-1}) = f'_g \end{aligned}$$

donc ξ et ζ sont inverses l'un de l'autre. \square

Corollaire 2.2.5. *On suppose ici que la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de G . On suppose aussi que \mathcal{C} est Hom-finie et Krull-Schmidt.*

Soit $(X, \psi) \in \mathcal{C}G$. Alors

1. *L'objet (X, ψ) est un facteur direct de $X[G]$.*
2. *Si (X, ψ) est indécomposable, G agit transitivement sur les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de $\mathrm{add}(X)$.*

Démonstration. 1. D'après la proposition précédente, $X[G] \simeq k[G] \otimes (X, \psi)$ d'où le résultat puisque $\mathbb{1}$ est un facteur direct de $k[G]$.

2. On a vu que (X, ψ) est un facteur direct de $X[G]$. Supposons que $X = \bigoplus_{i=1}^{\ell} X_i$ dans \mathcal{C} , les X_i étant indécomposables. Alors $X[G] = \bigoplus_{i=1}^{\ell} X_i[G]$ et comme $\mathcal{C}G$ est Krull-Schmidt, (X, ψ) est facteur direct d'un des $X_i[G]$. Par conséquent, $\mathrm{add}(X) \subset \mathrm{add} F(X_i[G]) = \mathrm{add} \left(\bigoplus_{g \in G} (\mathbf{g} \otimes X_i) \right)$. Comme X_i est indécomposable et \mathcal{C} est Krull-Schmidt, G agit clairement transitivement sur cette sous-catégorie. \square

Rappelons maintenant une définition de Reiten et Riedtmann. Pour des raisons de conflits de notation, on notera $\mathcal{C} * G$ la catégorie qu'elles notent $\mathcal{C}G$.

Définition 2.2.6 ([59, p. 254]). Si G est fini et si G agit par autofoncteurs sur la catégorie \mathcal{C} , on note $\mathcal{C}\{G\}$ la catégorie dont les objets sont les G -uplets $\{X\} = \{g \cdot X \mid g \in G\}$ et dont les morphismes de $\{X\}$ dans $\{Y\}$ sont les matrices

$$(f_{g,g'})_{(g,g') \in G^2} \quad \text{avec} \quad f_{g,g'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g' \cdot X, g \cdot Y)$$

telles que pour tout $g, g', h \in G$, $f_{hg, hg'} = h(f_{g, g'})$. La composition se fait par multiplication des matrices. La catégorie $\mathcal{C} * G$ est alors l'enveloppe de Karoubi (appelée aussi complétion de Cauchy) de $\mathcal{C}\{G\}$ (voir par exemple [6, proposition 6.5.9]).

Remarque 2.2.7. La catégorie $\mathcal{C}\{G\}$ est souvent notée \mathcal{C}/G lorsque G agit librement sur \mathcal{C} (voir par exemple [12]). Un analogue de cette catégorie a été défini par Asashiba [1] qui fonctionne même lorsque le groupe est infini pour d'autres classes de catégories. Pour d'autres catégories intéressantes associées à l'action d'un groupe G sur une catégorie \mathcal{C} , voir les travaux de Cibils et Solotar [13].

Si la structure \mathbf{G} -module de \mathcal{C} est donnée par $\mathbf{g} \otimes - = g \cdot$ pour tout $g \in G$, alors on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.8. *Si G est un groupe fini et si \mathcal{C} est Hom-finie et Krull-Schmidt, si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de G , alors il y a une équivalence de catégories*

$$\mathcal{C} * G \simeq \mathcal{C}G.$$

Démonstration. Tout d'abord, il est immédiat qu'il y a un foncteur

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}\{G\} &\rightarrow \mathcal{C}G \\ \{X\} &\mapsto X[G] \end{aligned}$$

qui envoie chaque fonction $(f_{g,g'})_{(g,g') \in G^2} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}\{G\}}(\{X\}, \{Y\})$ sur la fonction correspondant naturellement dans les décompositions en somme directe

$$F(X[G]) = \bigoplus_{g \in G} \mathbf{g} \otimes X \quad \text{et} \quad F(Y[G]) = \bigoplus_{g \in G} \mathbf{g} \otimes Y.$$

Par ailleurs, comme \mathcal{C} est Krull-Schmidt et Hom-finie, $\mathcal{C}G$ est aussi Krull-Schmidt. Par conséquent, Φ se factorise à travers l'enveloppe de Karoubi $\mathcal{C}\{G\} \rightarrow \mathcal{C} * G$. De plus, tous les objets de $\mathcal{C}G$ sont facteurs d'objets de l'image de Φ par le corollaire 2.2.5 donc le foncteur de factorisation $\mathcal{C} * G \rightarrow \mathcal{C}G$ est essentiellement surjectif. D'autre part, il est facile de voir que ce foncteur est pleinement fidèle au niveau des objets de $\mathcal{C}\{G\}$ donc au niveau de tous les objets. Finalement, ce foncteur de factorisation est une équivalence de catégorie. \square

Remarque 2.2.9. Dans la proposition précédente, la condition qui dit que la caractéristique de k ne divise pas l'ordre du groupe est nécessaire. En effet, si $\mathcal{C} = \text{mod } k$ muni de l'action triviale d'un groupe fini G , la catégorie $\mathcal{C}\{G\}$ est équivalente à la sous-catégorie additive pleine de $\text{mod } k[G]$ engendrée par la représentation régulière de G . La catégorie $\mathcal{C} * G$ est donc équivalente à la sous-catégorie additive pleine de $\text{mod } k[G]$ engendrée par les facteurs directs de la représentation régulière. D'un autre côté, on a vu que $\mathcal{C}G$ est équivalente à $\text{mod } k[G]$. En particulier, si la caractéristique de k divise l'ordre de G , $\mathcal{C} * G$ ne contient pas à travers cette équivalence la représentation triviale de G .

2.2.2 Approximation

On reprend ici les notations introduites en 1.2.5.

Notation 2.2.10. Soit $X \in \mathcal{C}G$. Le nombre de facteurs directs indécomposables de FX sera noté $\ell(X)$. Le nombre de facteurs indécomposables deux à deux non isomorphes de FX sera noté $\#X$.

Lemme 2.2.11. *On suppose que \mathcal{C} est Krull-Schmidt et Hom-finie. Soit $X \in \mathcal{C}G$ indécomposable. Alors $\#X$ divise $\ell(X)$. Leur rapport est le nombre de copies de chaque indécomposable de $\text{add}(FX)$ dans FX .*

Démonstration. Soit X_1, X_2 deux facteurs indécomposables de FX . Par le corollaire 2.2.5, comme X est indécomposable, il existe $g \in G$ tel que $\mathbf{g} \otimes X_1 \simeq X_2$. De plus, $\mathbf{g} \otimes X \simeq X$ donc le nombre de copies de X_1 et de X_2 dans X est le même. Cela permet facilement de conclure. \square

Définition 2.2.12. Si \mathcal{D} est une catégorie \mathcal{C} -module et si $\mathcal{D}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{D})$, on dira que \mathcal{D} est \mathcal{C} -stable si pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{D}'$, $X \otimes Y \in \mathcal{D}'$ et on notera $\mathcal{D}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{D})^{\mathcal{C}}$.

Lemme 2.2.13. *On suppose ici que la caractéristique de k ne divise pas $\#G$. Soient $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$, $X, Y \in \mathcal{C}G$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, Y)$.*

1. *f est une \mathcal{T} -approximation à gauche (resp. à droite) si et seulement si Ff est une FT -approximation à gauche (resp. à droite).*
2. *f est une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche (resp. à droite) si et seulement si Ff est une FT -approximation minimale à gauche (resp. à droite).*

Démonstration. Par symétrie, on se contentera de le prouver pour les approximations à gauche.

1. Premièrement, comme \mathcal{T} est $\text{mod } k[G]$ -stable, si $FY \in FT$, alors $Y \in \mathcal{T}$ (et par définition, si $Y \in \mathcal{T}$, $FY \in FT$). Comme F et $-[G]$ sont adjoints, le diagramme suivant est commutatif pour tout $T \in \mathcal{T}$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FT) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Ff, FT)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FT) \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, (FT)[G]) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, (FT)[G])} & \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, (FT)[G]) \end{array}$$

La première ligne est surjective pour tout T si et seulement si Ff est une FT -approximation à gauche. Comme \mathcal{T} est $\text{mod } k[G]$ -stable, $(FT)[G] = k[G] \otimes T \in \mathcal{T}$ et donc la seconde ligne est surjective pour tout T si et seulement si f est une \mathcal{T} -approximation à gauche (car la caractéristique de k ne divise pas $\#G$ et donc T est un facteur direct de $(FT)[G]$).

2. Si Ff est minimale à gauche alors f est clairement minimale à gauche. Réciproquement, supposons que f est une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche. Soit $\tilde{f} : FX \rightarrow \tilde{Y}$ une FT -approximation minimale à gauche de FX . Posons $f' = \tilde{f}[G] : (FX)[G] \rightarrow \tilde{Y}[G]$. On a alors

$$Ff' = \bigoplus_{g \in G} \mathbf{g} \otimes \tilde{f}.$$

Pour tout $g \in G$, $\mathbf{g} \otimes \tilde{f}$ est une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche puisque FT est G -stable et par conséquent, en utilisant les lemmes 1.2.79 et 1.2.17, Ff' est aussi une FT -approximation minimale à gauche. Donc, avec ce qui a été prouvé avant,

f' est une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche. Par unicité d'une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche, et en utilisant les lemmes 1.2.79 et 1.2.17, $f' \simeq f \oplus g$ où g est une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche d'un supplémentaire de X dans $(FX)[G]$ (on utilise ici que la caractéristique de k ne divise pas $\#G$). Enfin, puisque $Ff' = Ff \oplus Fg$ est minimal à gauche, Ff l'est aussi par le lemme 1.2.17. \square

Lemme 2.2.14. *On suppose que la caractéristique de k ne divise pas $\#G$. Si \mathcal{C} est semi-simple alors $\mathcal{C}G$ est semi-simple.*

Démonstration. Soient X, Y deux indécomposables de $\mathcal{C}G$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, Y)$. Comme \mathcal{C} est semi-simple, \mathcal{C} et $\mathcal{C}G$ sont abéliennes. Soit $k : K \hookrightarrow X$ un noyau de f . Comme \mathcal{C} est semi-simple, Fk est scindée, par un $\tilde{h} : FX \rightarrow FK$. On a $\tilde{h} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, K)$. Posons

$$h = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g \cdot \tilde{h}$$

de sorte que h est un morphisme de X dans K et que

$$hk = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (g \cdot \tilde{h})k = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (g \cdot \tilde{h})(g \cdot k) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g \cdot (\tilde{h}k) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g \cdot \text{Id}_K = \text{Id}_K$$

et finalement, k est scindée. Comme $\mathcal{C}G$ est Krull-Schmidt, K est facteur direct de X . Finalement, comme X est indécomposable, $\ker f = 0$ ou $\ker f = X$. De même, $\text{coker } f = 0$ ou $\text{coker } f = Y$ et, par conséquent, $f = 0$ ou f est inversible ce qui montre que $\mathcal{C}G$ est semi-simple. \square

Lemme 2.2.15. *On suppose que la caractéristique de k ne divise pas $\#G$. En reprenant la définition 1.2.18,*

1. *l'action de G sur \mathcal{C} induit une action de G sur $[\mathcal{C}]$;*
2. *si k est algébriquement clos et si $[\mathcal{C}]$ n'a qu'un seul simple, $[\mathcal{C}]G \simeq [\mathcal{C}G]$ en tant que catégories modules sur $\text{mod } k[G]$.*

Démonstration. Tout d'abord, à équivalence de catégorie près, on peut supposer que chaque classe d'isomorphismes de \mathcal{C} contient exactement un objet.

1. Si $g \in G$ et $X \in \mathcal{C}$, posons $\mathbf{g} \otimes [X] = [g \otimes X]$. Si $f : [X] \rightarrow [X]$ est un morphisme, alors f provient d'un morphisme $f_0 : X \rightarrow X$. On note alors $\mathbf{g} \otimes f$ la classe de $\mathbf{g} \otimes f_0$ modulo \mathfrak{m} où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{g} \otimes X)$. Ceci est bien défini car si f_0 est nilpotent, il est immédiat que $\mathbf{g} \otimes f_0$ l'est aussi. De la même façon, on définit les morphismes structuraux de $[\mathcal{C}]$ en passant ceux de \mathcal{C} au quotient par les idéaux maximaux (ce qui est possible puisque \mathcal{C} ne contient qu'un objet par classe d'isomorphisme). Il est alors immédiat que $[\mathcal{C}]$ est ainsi \mathbf{G} -module.
2. Soit $X_0 \in \mathcal{C}$, le seul indécomposable à isomorphisme près. Comme $[\mathcal{C}]G$ et $[\mathcal{C}G]$ sont semi-simples et k est algébriquement clos, il suffit de voir que les simples de $[\mathcal{C}]G$ sont en bijection avec ceux de $[\mathcal{C}G]$. Si $[(X, \psi)] \in [\mathcal{C}G]$, on peut y faire correspondre $([X], \psi') \in [\mathcal{C}]G$ en réduisant les coefficients matriciels de ψ modulo l'idéal maximal de $\text{End}_{\mathcal{C}}(X_0)$. Réciproquement, si $([X], \psi') \in [\mathcal{C}]G$, on peut y faire correspondre $[(X, \psi)]$ où les coefficients matriciels de ψ sont ceux de ψ' multipliés par Id_{X_0} . C'est bien sûr une bijection. Le fait que ce soit une équivalence de catégories modules est évident. \square

Lemme 2.2.16. *On suppose que k est algébriquement clos et que sa caractéristique ne divise pas $\#G$. Soient $X \in \mathcal{C}$ indécomposable et $Y \in \text{add}(X[G])$ indécomposable. Alors $X[G]$ a exactement $\ell(Y)/\#(Y)$ facteurs directs indécomposables isomorphes à Y .*

Démonstration. On va prouver cela en trois étapes.

- Si $\#Y = 1$. Alors, quitte à se restreindre à $\text{add}(FY) = \text{add}(X)$, on peut utiliser le lemme précédent et

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{[\mathcal{C}G]}([Y], [k[G] \otimes Y]) &= \dim \text{Hom}_{[\mathcal{C}G]}([Y], k[G] \otimes [Y]) \\ &= \dim \text{Hom}_{[\mathcal{C}]}(F[Y], F[Y]) = \ell(Y)^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $X[G]^{\ell(Y)} = k[G] \otimes Y$ de façon immédiate d'où le résultat dans ce cas.

- Si $\#Y = \#G$. Dans ce cas, $X[G]$ est indécomposable et du coup $Y \simeq X[G]$ ce qui rend le résultat clair.
- Dans le cas général, soit \tilde{Y} l'ensemble des facteurs indécomposables de FY à isomorphisme près. L'action de G induit alors un morphisme $G \rightarrow \mathfrak{S}_{\tilde{Y}}$ dont le noyau H est distingué dans G . On peut alors appliquer la proposition 2.1.13. Soit Y' un facteur direct indécomposable de Y vu dans $\mathcal{C}H$. Comme $\#Y' = 1$, le premier cas s'applique à Y' . Par ailleurs, $X[G] \simeq X[H][G/H]$ et $\#Y = \#G/H$. Du coup, $Y \simeq Y'[G/H]$ apparaît dans $X[G]$ le nombre de fois où Y' apparaît dans $X[H]$, c'est-à-dire $\ell(Y') = \ell(Y)/\#(G/H) = \ell(Y)/\#Y$. \square

2.2.3 Action sur une catégorie exacte

Le groupe G est toujours supposé fini, de cardinal non divisible par la caractéristique du corps k . La k -catégorie \mathcal{C} est exacte, Hom-finie et Krull-Schmidt. L'action de G sur \mathcal{C} est exacte. D'après ce que l'on a vu plus haut, $\mathcal{C}G$ est alors naturellement k -additive exacte.

Remarque 2.2.17. Le foncteur $-[G]$ de \mathcal{C} dans $\mathcal{C}G$ est alors exact.

Lemme 2.2.18. *Si $X \in \mathcal{C}$ est injectif (resp. projectif), alors $X[G]$ est injectif (resp. projectif).*

Démonstration. Supposons que X est injectif. Soit $0 \rightarrow X[G] \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible de $\mathcal{C}G$. Par définition, $0 \rightarrow F(X[G]) \xrightarrow{f} FY \xrightarrow{g} FZ \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible de \mathcal{C} . En appliquant respectivement $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, X[G])$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$, on trouve les suites exactes longues

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Z, X[G]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, X[G]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X[G], X[G]) \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FZ, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X[G]), X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FZ, X) = 0.$$

L'isomorphisme de bifoncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, -[G]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F-, -)$ permet alors de conclure que $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, X[G]) : \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, X[G]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X[G], X[G])$ est surjective donc la suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X[G] \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ est scindée. Finalement, $X[G]$ est injectif. La démonstration se fait de la même façon pour le cas projectif. \square

Corollaire 2.2.19. *Si \mathcal{C} a assez d'injectifs (resp. de projectifs), alors $\mathcal{C}G$ aussi. De plus, pour $X \in \mathcal{C}G$, il existe une résolution injective I_\bullet (resp. projective P_\bullet) de X telle que FI_\bullet (resp. FP_\bullet) soit une résolution injective (resp. projective) de FX .*

Démonstration. Supposons que \mathcal{C} ait assez d'injectifs. Soit $X \in \mathcal{C}G$. Il existe une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow FX \rightarrow I \rightarrow Y \rightarrow 0$ dans \mathcal{C} avec I un injectif. Comme l'action de G est exacte, cela donne une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow (FX)[G] \rightarrow I[G] \rightarrow Y[G] \rightarrow 0$. Par ailleurs, on a vu que X est facteur direct de $(FX)[G]$ et comme la composée de deux monomorphismes admissibles est un monomorphisme admissible, on en déduit un monomorphisme admissible $X \rightarrow I[G]$. Pour la deuxième partie, il suffit d'appliquer par récurrence la première partie puisque $I[G]$ et $F(I[G])$ sont tous deux injectifs, respectivement dans $\mathcal{C}G$ et \mathcal{C} . \square

On supposera désormais que \mathcal{C} a assez d'injectifs ou assez de projectifs.

Définition 2.2.20. Pour $X \in \mathcal{C}G$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(X, -)$ le foncteur dérivé à droite de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, -)$ si \mathcal{C} a assez d'injectifs et $\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-, X)$ le foncteur dérivé à gauche de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, X)$ sinon.

Proposition 2.2.21. *Le bifoncteur $\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n$ vérifie*

1. *Pour $X, Y \in \mathcal{C}G$, l'espace vectoriel de $\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(X, Y)$ est $\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}}^n(FX, FY)$;*
2. *il y a un isomorphisme de quadrifoncteurs*

$$\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes -_2) \simeq ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-_1, -_2)$$

où les $?$ sont des variables dans $\text{mod } k[G]$ et les $-$ sont des variables dans $\mathcal{C}G$;

3. *il y a un isomorphisme de quadrifoncteurs*

$$\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes -_2) \simeq \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(?_1 \otimes ?_2^*, \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-_1, -_2))$$

où les $?$ sont des variables dans $\text{mod } k[G]$ et les $-$ sont des variables dans $\mathcal{C}G$;

4. *si $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible de $\mathcal{C}G$ et si $T \in \mathcal{C}G$, alors les deux suites exactes longues d'homologie dans $\text{mod } k[G]$*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, X) &\rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, Y) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, Z) \\ &\rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, X) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, Y) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, Z) \\ &\rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^2(T, X) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(Z, T) &\rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, T) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \\ &\rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Z, T) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, T) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, T) \\ &\rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^2(Z, T) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

se restreignent par le foncteur d'oubli (exact) de $\text{mod } k[G]$ dans $\text{mod } k$ en les suites exactes longues d'homologie usuelles

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FT, FX) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FT, FY) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FT, FZ) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FT, FX) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FT, FY) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FT, FZ) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(FT, FX) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FZ, FT) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, FT) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FT) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FZ, FT) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FY, FT) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FX, FT) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^2(FZ, FT) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

et si l'on applique le foncteur exact $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G]}(r_1 \otimes r_2^*, -)$ de $\mathrm{mod} k[G]$ dans $\mathrm{mod} k$ où r_1 et r_2 sont deux représentations de G , on trouve à travers l'isomorphisme de foncteurs du point précédent les suites exactes longues d'homologie dans $\mathcal{C}G$

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(r_1 \otimes T, r_2 \otimes X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(r_1 \otimes T, r_2 \otimes Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(r_1 \otimes T, r_2 \otimes Z) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(r_1 \otimes T, r_2 \otimes X) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(r_1 \otimes T, r_2 \otimes Y) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(r_1 \otimes T, r_2 \otimes Z) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}G}^2(r_1 \otimes T, r_2 \otimes X) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(r_1 \otimes Z, r_2 \otimes T) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(r_1 \otimes Y, r_2 \otimes T) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}G}(r_1 \otimes X, r_2 \otimes T) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(r_1 \otimes Z, r_2 \otimes T) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(r_1 \otimes Y, r_2 \otimes T) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(r_1 \otimes X, r_2 \otimes T) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}G}^2(r_1 \otimes Z, r_2 \otimes T) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Démonstration. On va supposer dans cette démonstration que \mathcal{C} , et par conséquent $\mathcal{C}G$, possèdent assez d'injectifs. Soient $(X, \psi), (Y, \chi) \in \mathcal{C}G$ et (I, ξ) une résolution injective de (Y, χ) telle que I soit une résolution injective de Y . Si l'on applique le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), -)$ à cette résolution, on trouve un complexe de représentations de G . L'homologie $\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n((X, \psi), (Y, \chi))$ en degré n de ce complexe est donc naturellement une représentation de G sur l'espace $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, Y)$. Pour $g \in G$, comme g agit sur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}((X, \psi), (I_n, \xi_n))$ par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\psi_g^{-1}, \xi_{ng}) \circ (\mathbf{g} \otimes -)$, il agit sur $\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n((X, \psi), (Y, \chi))$ par $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\psi_g^{-1}, \chi_g) \circ (\mathbf{g} \otimes -)$. Vérifions maintenant les quatre assertions :

1. La première est vraie par définition.
2. En gardant les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes (Y, \chi)) &= \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes (I_n, \xi_n)) \\ &\simeq ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-_1, (I_n, \xi_n)) \\ &= ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-_1, (Y, \chi)) \end{aligned}$$

Soit maintenant $f : (Y, \chi) \rightarrow (Y', \chi')$ un morphisme et (I', ξ') une résolution injective de (Y', χ) telle que I' soit une résolution injective de Y' . Soit alors \tilde{f} un prolongement de f à I et I' . Le diagramme suivant commute alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes (Y, \chi)) & \xrightarrow{\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes f)} & \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes (Y', \chi')) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes (I_n, \xi_n)) & \xrightarrow{\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes \tilde{f}_n)} & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}^n(?_1 \otimes -_1, ?_2 \otimes (I'_n, \xi'_n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-_1, (I_n, \xi_n)) & \xrightarrow{?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-_1, \tilde{f}_n)} & ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-_1, (I'_n, \xi'_n)) \\ \parallel & & \parallel \\ ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-_1, (Y, \chi)) & \xrightarrow{?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-_1, f)} & ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-_1, (Y', \chi')) \end{array}$$

le carré du milieu commutant grâce à la functorialité de l'isomorphisme

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(?_1 \otimes -, ?_2 \otimes (I_n, \xi_n)) \simeq ?_1^* \otimes ?_2 \otimes \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, (I_n, \xi_n))$$

et par conséquent, on a bien un isomorphisme fonctoriel en les quatre variables.

3. Ce point se démontre de la même façon que le précédent.
4. Il suffit de voir que tous les morphismes des suites exactes longues de \mathcal{C} sont en fait des morphismes de représentations de G ; en reprenant la démonstration de la proposition 1.2.58, on observe que toutes les flèches du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & D_{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & E_{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & d_{i-1} \downarrow & & d_{i-1} \downarrow & & d_{i-1} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_i & \xrightarrow{f_i} & D_i & \xrightarrow{g_i} & E_i & \longrightarrow & 0 \\ & & d_i \downarrow & & d_i \downarrow & & d_i \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & D_{i+1} & \xrightarrow{g_{i+1}} & E_{i+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & d_{i+1} \downarrow & & d_{i+1} \downarrow & & d_{i+1} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{i+2} & \xrightarrow{f_{i+2}} & D_{i+2} & \xrightarrow{g_{i+2}} & E_{i+2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sont ici des morphismes de représentations, ce qui permet aisément de conclure. Le reste de l'assertion est immédiat. \square

Remarque 2.2.22. Si il y a à la fois assez d'injectifs et assez de projectifs, les deux manières de construire les foncteurs $\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n$ donnent des foncteurs canoniquement isomorphes. Il est en effet aisé de voir que l'isomorphisme canonique de \mathbf{Ext}_I^n dans \mathbf{Ext}_P^n construit dans la proposition 1.2.68 reste un isomorphisme.

Corollaire 2.2.23. *Pour $n \in \mathbb{N}$, il y a un isomorphisme de trifoncteurs*

$$\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?^* \otimes -, -) \simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-, ? \otimes -)$$

où $?$ est une variable de $\text{mod } k[G]$ et les $-$ sont des variables de $\mathcal{C}G$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?^* \otimes -, -) &\simeq \mathbf{Hom}_{\text{mod } k[G]}(?_1, \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-, -)) \\ &\simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-, ? \otimes -) \end{aligned}$$

d'après la proposition précédente. \square

Proposition 2.2.24. *Pour $n \in \mathbb{N}$, il y a deux isomorphismes de bifoncteurs*

$$\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(?[G], -) \simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}}^n(? , F-)$$

$$\mathbf{Ext}_{\mathcal{C}G}^n(-, ?[G]) \simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}}^n(F-, ?)$$

où $?$ est une variable dans \mathcal{C} et $-$ dans $\mathcal{C}G$.

Démonstration. Là encore, c'est le même raisonnement que le deuxième point de la proposition précédente. \square

Corollaire 2.2.25. *Si $X \in \mathcal{CG}$, X est injectif (resp. projectif) si et seulement si FX est injectif (resp. projectif).*

Démonstration. Si X est injectif, pour tout $Y \in \mathcal{C}$,

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(Y, FX) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{CG}}^n(Y[G], X) = 0$$

donc FX est injectif. Si FX est injectif, pour tout $Y \in \mathcal{CG}$, comme Y est un facteur direct de $(FY)[G]$,

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{CG}}^n(Y, X) \subset \mathrm{Ext}_{\mathcal{CG}}^n((FY)[G], X) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(FY, FX) = 0$$

donc X est injectif. Le raisonnement est le même dans le cas projectif. \square

Lemme 2.2.26. *Pour toute représentation $r \in \mathrm{mod} k[G]$, le foncteur $r \otimes -$ de \mathcal{CG} dans \mathcal{C} est un foncteur exact.*

Démonstration. Soit une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ de \mathcal{CG} . Par définition, $0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible de \mathcal{C} . Comme $0 \rightarrow F(r \otimes X) \rightarrow F(r \otimes Y) \rightarrow F(r \otimes Z) \rightarrow 0$ est isomorphe à $0 \rightarrow (FX)^{\dim r} \rightarrow (FY)^{\dim r} \rightarrow (FZ)^{\dim r} \rightarrow 0$, c'est une suite exacte courte admissible de \mathcal{C} et donc, par définition, $0 \rightarrow r \otimes X \rightarrow r \otimes Y \rightarrow r \otimes Z \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible de \mathcal{CG} . \square

2.2.4 Action sur une catégorie de Frobenius 2-Calabi-Yau

Le groupe G est toujours supposé fini, de cardinal non divisible par la caractéristique du corps k . La k -catégorie \mathcal{C} est exacte, Hom-finie, Krull-Schmidt, de Frobenius et 2-Calabi-Yau. On note $c : \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-1, -2) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-2, -1)^*$ l'isomorphisme qui fait de \mathcal{C} une catégorie 2-Calabi-Yau.

Définition 2.2.27. On dira que l'action de G sur \mathcal{C} est 2-Calabi-Yau si elle est exacte et si pour tout $g \in G$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-1, -2) & \xrightarrow{\mathbf{g}^{\otimes -}} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathbf{g} \otimes -1, \mathbf{g} \otimes -2) \\ \downarrow c & & \downarrow c \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-2, -1)^* & \xleftarrow{(\mathbf{g}^{\otimes -})^*} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathbf{g} \otimes -2, \mathbf{g} \otimes -1)^* \end{array}$$

On supposera désormais que l'action de G sur \mathcal{C} est 2-Calabi-Yau.

Remarque 2.2.28. La catégorie \mathcal{CG} est une catégorie de Frobenius en utilisant le corollaire 2.2.25.

Proposition 2.2.29. 1. *L'isomorphisme c se prolonge en un isomorphisme*

$$\mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-1, -2) \simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-2, -1)^*.$$

2. La catégorie \mathcal{CG} est 2-Calabi-Yau.

Démonstration. Rappelons qu'il y a un isomorphisme de foncteurs de $\text{mod } k[G]$ dans lui-même :

$$\text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, -) \simeq \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(-, \mathbb{1})^*.$$

1. La seule chose à voir est que pour $(X, \psi), (Y, \chi) \in \mathcal{CG}$, $c_{X,Y}$ est en fait un morphisme de représentations de G de $\mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1((X, \psi), (Y, \chi))$ dans $\mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1((Y, \chi), (X, \psi))^*$. Pour $g \in G$, il faut donc vérifier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) & \xrightarrow{c_{X,Y}} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)^* \\ \mathbf{g} \otimes - \downarrow & & \uparrow (\mathbf{g} \otimes -)^* \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathbf{g} \otimes X, \mathbf{g} \otimes Y) & \xrightarrow{c_{\mathbf{g} \otimes X, \mathbf{g} \otimes Y}} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathbf{g} \otimes Y, \mathbf{g} \otimes X)^* \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\psi_g^{-1}, \chi_g) \downarrow & & \uparrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\psi_g^{-1}, \chi_g)^* \\ \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) & \xrightarrow{c_{X,Y}} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)^* \end{array}$$

(le bord gauche est l'action de g sur $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ et le bord droit est l'adjointe de l'action de g^{-1}) ; le carré du haut commute parce que l'action de G est 2-Calabi-Yau et celui du bas commute parce que l'isomorphisme c est fonctoriel.

2. Notons \mathbf{c} l'isomorphisme de foncteurs du point précédent. Si l'on pose

$$\tilde{\mathbf{c}} = \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{c})$$

alors $\tilde{\mathbf{c}}$ est un isomorphisme de foncteurs de $\text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-1, -2))$ dans $\text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-2, -1))^*$ d'inverse

$$\tilde{\mathbf{c}}^{-1} = \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{c}^{-1}).$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2.2.21,

$$\text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-1, -2)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-1, -2)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-2, -1))^* &\simeq \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-2, -1), \mathbb{1}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-2, -1))^* \\ &\simeq \text{Ext}_{\mathcal{CG}}^1(-2, -1)^* \end{aligned}$$

qui termine la preuve. □

Définition 2.2.30. Si $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$ est rigide, on dira que \mathcal{T} est rigide \mathbf{G} -stable maximale si pour tout $\mathcal{T}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$ rigide contenant \mathcal{T} , $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Si $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{CG})^{\text{mod } k[G]}$ est rigide, on dira que \mathcal{T} est rigide $\text{mod } k[G]$ -stable maximale si pour tout $\mathcal{T}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{CG})^{\text{mod } k[G]}$ rigide contenant \mathcal{T} , $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Remarque 2.2.31. La propriété d'être rigide \mathbf{G} -stable (resp. mod $k[G]$ -stable) maximale est plus faible que la propriété d'être rigide maximale et \mathbf{G} -stable (resp. mod $k[G]$ -stable). Par exemple, si l'on considère le carquois

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\alpha^*} \end{array} 2$$

muni des relations de l'algèbre préprojective de A_2 , et si l'on fait agir le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en échangeant les deux sommets, on voit immédiatement que les objets rigides maximaux ne sont pas \mathbf{G} -stables. Ainsi, le seul objet rigide \mathbf{G} -stable maximal sera la somme des deux projectifs.

Proposition 2.2.32. *Les foncteurs $-[G]$ et F induisent des bijections réciproques entre :*

1. $\mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$ et $\mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$;
2. les $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$ rigides et les $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ rigides ;
3. les $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$ rigides \mathbf{G} -stables maximales et les $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ rigides mod $k[G]$ -stables maximales ;
4. les $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$ amas-basculantes et les $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ amas-basculantes.

Démonstration. 1. Si $\mathcal{D} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$, il est immédiat que $\mathcal{D}[G] \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$. De même, si $\mathcal{D}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$, il est immédiat que $F\mathcal{D}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$. Supposons maintenant que $X \in F(\mathcal{D}[G])$. Cela veut dire que X est facteur direct d'un $F(Y[G])$ où $Y \in \mathcal{D}$. Or $F(Y[G])$ est la somme des $\mathfrak{g} \otimes Y$ pour $g \in G$ donc $F(Y[G]) \in \mathcal{D}$ et finalement, $X \in \mathcal{D}$. Si maintenant $X \in \mathcal{D}$, X est un facteur direct de $F(X[G])$ donc X est dans $F(\mathcal{D}[G])$. Finalement, $F(\mathcal{D}[G]) = \mathcal{D}$.

Supposons que $X \in F(\mathcal{D}')[G]$. Cela signifie que X est facteur direct d'un $F(Y)[G] \simeq k[G] \otimes Y$ où $Y \in \mathcal{D}'$ et comme \mathcal{D}' est mod $k[G]$ -stable, $F(Y)[G]$ puis X sont dans \mathcal{D}' . D'autre part, si $X \in \mathcal{D}'$, comme X est un facteur direct de $F(X)[G]$, X est dans $F(\mathcal{D}')[G]$. Finalement $F(\mathcal{D}')[G] = \mathcal{D}'$.

On a bien montré que F et $-[G]$ induisent des bijections réciproques.

2. Supposons que $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$ soit rigide. Soit $X \in \mathcal{T}[G]$. Par définition, il existe $Y \in \mathcal{T}$ et $X' \in \mathcal{T}[G]$ tels que $Y[G] \simeq X \oplus X'$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, X) &\subset \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y[G], Y[G]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, F(Y[G])) \\ &\subset \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(F(Y[G]), F(Y[G])) = 0 \end{aligned}$$

puisque, comme $Y \in \mathcal{T}$ et \mathcal{T} est \mathbf{G} -stable, $F(Y[G]) \in \mathcal{T}$. Par conséquent, X est rigide et donc $\mathcal{T}[G]$ est rigide.

Supposons maintenant que $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ soit rigide. Soit $X \in F\mathcal{T}$. Par définition, il existe $Y \in \mathcal{T}$ et $X' \in F\mathcal{T}$ tels que $FY = X \oplus X'$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, X) &\subset \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FY, FY) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, (FY)[G]) \\ &\subset \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1((FY)[G], (FY)[G]) = 0 \end{aligned}$$

puisque, comme $Y \in \mathcal{T}$ et \mathcal{T} est mod $k[G]$ -stable, $(FY)[G] \simeq k[G] \otimes Y \in \mathcal{T}$. Par conséquent, $F\mathcal{T}$ est rigide.

3. Comme les deux bijections considérées sont croissantes (pour l'inclusion) et d'après le points précédent, c'est immédiat.
4. Supposons que $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^G$ soit amas-basculante. Supposons que $X \in \mathcal{C}G$ vérifie que pour tout $Y \in \mathcal{T}[G]$, $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, Y) = 0$. En particulier, pour tout $Y \in \mathcal{T}$, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FX, Y) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, Y[G]) = 0$ donc, comme \mathcal{T} est amas-basculante, $FX \in \mathcal{T}$, puis $(FX)[G] \in \mathcal{T}[G]$ et enfin $X \in \mathcal{T}[G]$ puisque X est un facteur direct de $(FX)[G]$. Finalement, puisqu'on sait déjà que $\mathcal{T}[G]$ est rigide, $\mathcal{T}[G]$ est amas-basculante.

Supposons que $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ soit amas-basculante. Supposons que $X \in \mathcal{C}$ vérifie que pour tout $Y \in F\mathcal{T}$, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = 0$. En particulier, pour tout $Y \in \mathcal{T}$, $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X[G], Y) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, FY) = 0$ donc comme \mathcal{T} est amas-basculante, $X[G] \in \mathcal{T}$, puis $F(X[G]) \in F\mathcal{T}$ et enfin $X \in F\mathcal{T}$ puisque X est un facteur direct de $F(X[G])$. Finalement, puisqu'on sait déjà que $F\mathcal{T}$ est rigide, $F\mathcal{T}$ est amas-basculante. \square

2.3 Calcul de $(kQ)G$ et de $(\Lambda_Q)G$

Soit A une k -algèbre et G un groupe fini agissant sur A . On suppose de plus que la caractéristique de k ne divise pas le cardinal n de G et que $X^n - 1$ est scindé dans k ; par conséquent, $\text{mod } k[G]$ est semi-simple.

Notation 2.3.1. On notera $\text{rad } A$ le radical de Jacobson de A , c'est-à-dire l'intersection de ses idéaux maximaux à droite. On notera $\text{ind}(G)$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des représentations simples de G .

La définition suivante est introduite dans [59] :

Définition 2.3.2. On notera AG l'algèbre (unitaire) dont l'espace vectoriel sous-jacent est $k[G] \otimes_k A$ et dont la multiplication (associative) est engendrée par

$$(g \otimes a)(g' \otimes a') = gg' \otimes g'^{-1}(a)a'$$

où $g, g' \in G$ et $a, a' \in A$.

Proposition 2.3.3. *L'action de G sur A induit une action de G sur $\text{mod } A$. De plus, il y a une équivalence de catégorie canonique entre $\text{mod}(AG)$ et $\text{mod}(A)G$.*

Démonstration. Si $g \in G$ et $(V, r) \in \text{mod } A$, on note $\mathbf{g} \otimes (V, r)$ la représentation $(V, \mathbf{g} \otimes r)$ de A où, si $a \in A$, $(\mathbf{g} \otimes r)_a = r_{g^{-1}a}$. Si $f \in \text{Hom}_{\text{mod } A}((V, r), (V', r'))$, on note $\text{Id}_{\mathbf{g}} \otimes f = f$. En étendant cette définition par linéarité sur \mathbf{G} tout entier, $\text{mod } A$ est une catégorie \mathbf{G} -module, les isomorphismes structuraux étant les morphismes identités.

Soit maintenant $(V, r, \psi) \in \text{mod}(A)G$. Pour $g \in G$ et $a \in A$, on définit

$$r_{g \otimes a}^\psi = \psi_g r_a$$

et, comme pour $g, g' \in G$ et $a, a' \in A$ le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{r_{a'}} & V & \xrightarrow{\psi_{g'}} & V \\
 & \searrow^{r_{g'-1(a)a'}} & \downarrow^{r_{g'-1(a)} = (\mathbf{g}' \otimes r)_a} & & \downarrow^{r_a} \\
 & & V & \xrightarrow{\psi_{g'}} & V \\
 & & & \searrow^{\psi_{gg'}} & \downarrow^{\psi_g} \\
 & & & & V
 \end{array}$$

on a $r_{g \otimes a}^\psi r_{g' \otimes a'}^\psi = r_{(g \otimes a)(g' \otimes a')}^\psi$ donc (V, r^ψ) est une représentation de AG .

Si $f \in \text{Hom}_{\text{mod}(A)G}((V, r, \psi), (V', r', \psi'))$, il est immédiat que

$$f \in \text{Hom}_{\text{mod}(AG)}((V, r^\psi), (V', r'^{\psi'}))$$

ce qui fait de $(V, r, \psi) \mapsto (V, r^\psi)$ un foncteur de $\text{mod}(A)G$ dans $\text{mod}(AG)$.

Soit $(V, r^0) \in \text{mod}(AG)$. Si $a \in A$, posons $r_a = r_{1 \otimes a}^0$ ce qui fait immédiatement que $(V, r) \in \text{mod}(A)$. Posons aussi, si $g \in G$, $\psi_g = r_{g \otimes 1}^0$. Pour $g \in G$ et $a \in A$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\psi_g} & V \\
 r_{g^{-1}(a)} \downarrow & \searrow^{r_{g \otimes g^{-1}(a)}^0} & \downarrow^{r_a} \\
 V & \xrightarrow{\psi_g} & V
 \end{array}$$

donc ψ_g est un isomorphisme de $\mathbf{g} \otimes (V, r)$ dans (V, r) . Il est alors immédiat que $(V, r, \psi) \in \text{mod}(A)G$.

Si $f \in \text{Hom}_{\text{mod}(AG)}((V, r^0), (V', r'^0))$, il est clair que

$$f \in \text{Hom}_{\text{mod}(A)G}((V, r, \psi), (V', r', \psi')).$$

On voit alors que les deux foncteurs que l'on a construits sont inverses l'un de l'autre. \square

Soit Q un carquois et G un groupe fini agissant sur l'algèbre kQ . On suppose de plus que G agit en permutant les e_i , où $i \in Q_0$.

Notation 2.3.4. – Pour $i \in Q_0$, on note G_i le sous-groupe de G stabilisant e_i et O_i un ensemble de représentants des classes à gauches de G_i dans G .

– Pour $(i, j) \in Q_0^2$, G agit à gauche sur $O_i \times O_j$. On notera F_{ij} un ensemble de représentant des classes de cette action. Pour plus de simplicité, on supposera de plus que

$$F_{ij} = \{(g, h) \mid (h, g) \in F_{ji}\}.$$

– On notera X_0 un ensemble de représentants des orbites de Q_0 sous l'action de G .
 – Pour $i, j \in Q_0$, on notera $G_{ij} = G_i \cap G_j$, et

$$A_{ij} = e_j (\text{rad}(kQ) / \text{rad}(kQ)^2) e_i$$

muni de la structure de représentation de G_{ij} obtenue par restriction de celle de G .

Définition 2.3.5. On appellera Q_G le carquois tel que

$$Q_{G,0} = \bigcup_{i \in X_0} \{i\} \times \text{ind}(G_i).$$

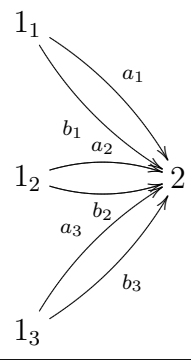
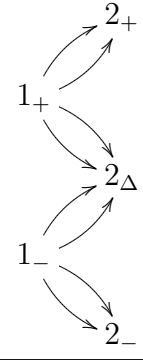
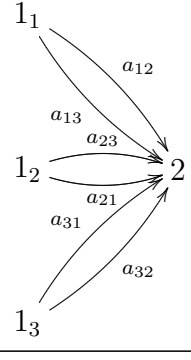
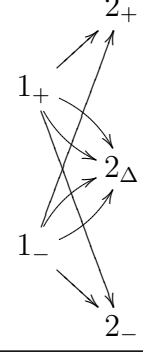
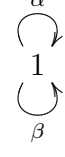
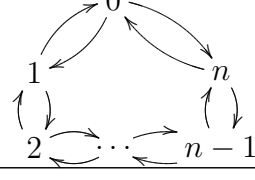
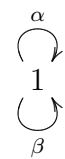
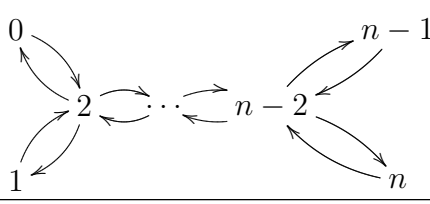
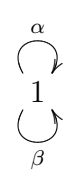
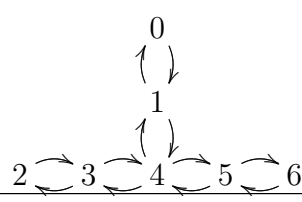
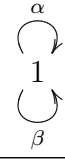
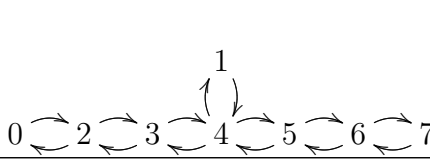
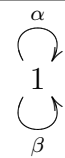
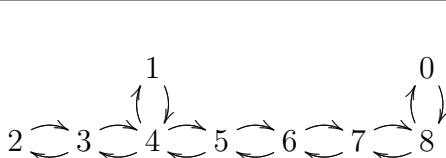
Les flèches de (i, r) vers (j, r') dans Q_G formeront une base de

$$\bigoplus_{(g,h) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{gi,hj}]}((g \cdot r)|_{G_{gi,hj}} \otimes A_{gi,hj}, (h \cdot r')|_{G_{gi,hj}})^*$$

où la représentation $g \cdot r$ de G_{gi} a pour espace vectoriel sous-jacent le même que celui de r et où, si $g' \in G_{gi} = gG_i g^{-1}$, $(g \cdot r)_{g'} = r_{g^{-1}g'g}$.

Exemples 2.3.6. Voici quelques exemples illustrant la définition précédente.

Q	G	Q_G
$ \begin{array}{c} 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \\ \searrow \\ n \\ \nearrow \\ 1' \rightarrow 2' \rightarrow \dots \rightarrow (n-1)' \end{array} $	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$ \begin{array}{c} n_+ \\ \nearrow \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \\ \searrow \\ n_- \end{array} $
$ \begin{array}{c} n \\ \nearrow \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \\ \searrow \\ n' \end{array} $	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$ \begin{array}{c} 1_+ \rightarrow 2_+ \rightarrow \dots \rightarrow (n-1)_+ \\ \searrow \\ n \\ \nearrow \\ 1_- \rightarrow 2_- \rightarrow \dots \rightarrow (n-1)_- \end{array} $
$ \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 1' \rightarrow 2 \\ \nearrow \\ 1'' \end{array} $	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$ \begin{array}{c} 2_1 \\ \nearrow \\ 1 \rightarrow 2_{e^{\frac{2i\pi}{3}}} \\ \searrow \\ 2_{e^{-\frac{2i\pi}{3}}} \end{array} $
$ \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \\ \searrow \\ 3 \rightarrow 4 \\ \nearrow \\ 2' \\ \nearrow \\ 1' \end{array} $	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$ \begin{array}{c} 4_+ \\ \nearrow \\ 3_+ \\ \nearrow \\ 1 \rightarrow 2 \\ \searrow \\ 3_- \\ \searrow \\ 4_- \end{array} $

Q	G	Q_G
	\mathfrak{S}_3 $\sigma(a_i) = a_{\sigma(i)}$ $\sigma(b_i) = b_{\sigma(i)}$	
	\mathfrak{S}_3 $\sigma(a_{ij}) = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$	
	$G \subset$ $SL(\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\beta)$ type A_n	
	$G \subset$ $SL(\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\beta)$ type D_n	
	$G \subset$ $SL(\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\beta)$ type E_6	
	$G \subset$ $SL(\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\beta)$ type E_7	
	$G \subset$ $SL(\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\beta)$ type E_8	

Théorème 2.3.7. *Les catégories $\text{mod}(k(Q_G))$ et $(\text{mod } kQ)G (\simeq \text{mod}((kQ)G))$ sont équivalentes.*

Remarque 2.3.8. Ce théorème est démontré dans [59] dans le cas des groupes cycliques en utilisant l'argument que $(kQ)G$ est héréditaire. On propose ici une preuve un peu plus calculatoire, mais qui permettra ensuite d'étudier plus facilement le cas des relations de l'algèbre préprojective.

Tout d'abord, voici un lemme classique dont nous aurons besoin dans la preuve du théorème :

Lemme 2.3.9. *Si H est un groupe tel que $\text{mod } k[H]$ est semi-simple et tel que $\text{ind}(H)$ est fini, alors le foncteur*

$$\bigoplus_{r \in \text{ind}(H)} \text{Hom}_{\text{mod } k[H]}(r, -) \otimes_k r$$

est isomorphe au foncteur identité.

Démonstration. On a clairement un morphisme de foncteurs f en sommant les morphismes de foncteurs

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{mod } k[H]}(r, -) \otimes_k r &\rightarrow - \\ \alpha \otimes v &\mapsto \alpha(v) \end{aligned}$$

Pour $r_0 \in \text{mod } k[H]$, f_{r_0} est isomorphe à la somme directe des f_r où r parcourt les facteurs directs simples de r_0 et il suffit donc de voir que f_r est un isomorphisme quand $r \in \text{ind}(H)$ ce qui est immédiat puisque $\text{End}_{\text{mod } k[G]}(r, r') = k^{\delta_{r,r'}}$ pour $r, r' \in \text{ind}(H)$. \square

Démonstration (du théorème). Soit $(V, x) \in \text{mod}(kQ_G)$. On pose

$$V' = \bigoplus_{i \in X_0} \bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} k[G] \otimes_{k[G_i]} (V_{i,r} \otimes_k r)$$

qui vient naturellement avec une action de G . Si $g \in G$, $i \in X_0$, $h \in O_i$ et $v \in V'$, on pose

$$(g \otimes h e_i)v = g \cdot \pi'_h(\pi_i(v))$$

où π_i est la projection canonique sur

$$\bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} k[G] \otimes_{k[G_i]} (V_{i,r} \otimes_k r)$$

et π'_h la projection canonique obtenue en utilisant la décomposition naturelle en somme directe

$$\bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} k[G] \otimes_{k[G_i]} (V_{i,r} \otimes_k r) \simeq \bigoplus_{h \in O_i} \bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} h \otimes (V_{i,r} \otimes_k r).$$

Si $i' \in X_0$ et $i' \neq i$, on a alors clairement

$$(g \otimes h e_i)(g' \otimes h' e_{i'})v = 0 = (gg' \otimes (g'^{-1} h e_i)(h' e_{i'}))v = [(g \otimes h e_i)(g' \otimes h' e_i)]v.$$

Si h_0 est le représentant de $g'^{-1}h$ dans O_i , on a alors

$$\begin{aligned}
(g \otimes he_i)(g' \otimes h'e_i)v &= g \cdot \pi'_h(\pi_i(g' \cdot \pi'_{h'}(\pi_i(v)))) = g \cdot \pi'_h(g' \cdot \pi_i(\pi'_{h'}(\pi_i(v)))) \\
&= gg' \cdot \pi'_{h_0}(\pi_i(\pi'_{h'}(\pi_i(v)))) = gg' \cdot \pi'_{h_0}(\pi'_{h'}(\pi_i(v))) \\
&= \begin{cases} gg' \cdot \pi'_{h'}(\pi_i(v)) & \text{si } h' = h_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= (gg' \otimes (h_0e_i)(h'e_i))v = (gg' \otimes (g'^{-1}he_i)(h'e_i))v \\
&= [(g \otimes he_i)(g' \otimes h'e_i)]v.
\end{aligned}$$

Soient $i, j \in X_0$, $r \in \text{ind}(G_i)$ et $r' \in \text{ind}(G_j)$. De la façon dont on a défini Q_G , il y a un isomorphisme

$$\begin{aligned}
&e_{j,r'} (\text{rad}(kQ_G)/\text{rad}(kQ_G)^2) e_{i,r} \\
&\simeq \bigoplus_{(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left((\tilde{g} \cdot r)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}, (\tilde{h} \cdot r')|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \right)^*
\end{aligned}$$

puis on a une suite d'isomorphismes bifonctoriels en $V_{i,r}$ et $V_{j,r'}$:

$$\begin{aligned}
&\text{Hom}_k \left(e_{j,r'} (\text{rad}(kQ_G)/\text{rad}(kQ_G)^2) e_{i,r}, \text{Hom}_k(V_{i,r}, V_{j,r'}) \right) \\
&\simeq \text{Hom}_k \left(\bigoplus_{(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left((\tilde{g} \cdot r)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}, (\tilde{h} \cdot r')|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \right)^*, \right. \\
&\quad \left. V_{i,r}^* \otimes V_{j,r'} \right) \\
&\simeq \bigoplus_{(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left((\tilde{g} \cdot r)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}, (\tilde{h} \cdot r')|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \right) \otimes V_{i,r}^* \otimes V_{j,r'} \\
&\simeq \bigoplus_{(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left((\tilde{g} \cdot r)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes V_{i,r} \otimes A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}, (\tilde{h} \cdot r')|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes V_{j,r'} \right) \\
&\simeq \bigoplus_{(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left(A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}, \right. \\
&\quad \left. \mathbf{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left((\tilde{g} \cdot r)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes V_{i,r}, (\tilde{h} \cdot r')|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes V_{j,r'} \right) \right)
\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme provenant de la proposition 2.1.20 dans la catégorie

$$\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}] \simeq (\text{mod } k)G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}.$$

En restreignant la représentation (V, x) , on a un élément de

$$\text{Hom}_k \left(e_{j,r'} (\text{rad}(kQ_G)/\text{rad}(kQ_G)^2) e_{i,r}, \text{Hom}_k(V_{i,r}, V_{j,r'}) \right)$$

donc par l'isomorphisme qui précède, on a un élément

$$f_{r',r} \in \bigoplus_{(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{i,j}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left(A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}, \right. \\ \left. \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left((\tilde{g} \cdot r)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes V_{i,r}, (\tilde{h} \cdot r')|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes V_{j,r'} \right) \right)$$

Posons

$$r_i = \bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} r \otimes V_{i,r} \quad \text{et} \quad r_j = \bigoplus_{r \in \text{ind}(G_j)} r \otimes V_{j,r}$$

puis

$$f = (f_{r',r})_{(r',r) \in \text{ind}(G_j) \times \text{ind}(G_i)} \in \bigoplus_{(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{i,j}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left(A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}, \right. \\ \left. \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left((\tilde{g} \cdot r_i)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}}, (\tilde{h} \cdot r_j)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \right) \right)$$

Soit alors, pour $(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{i,j}$, $f_{\tilde{g}, \tilde{h}}$ la projection de f sur la composante $f_{\tilde{g}, \tilde{h}}$ de telle sorte que, pour $g \in G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}$, $q \in A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}$ et $v \in \tilde{g} \cdot r_i$, on a

$$f_{\tilde{g}, \tilde{h}}(gq)(v) = g \cdot f_{\tilde{g}, \tilde{h}}(q)(g^{-1} \cdot v).$$

Soient alors $(\gamma, \delta) \in F_{i,j}$, $\varepsilon \in G$ et $q \in Q_1$ tels que $s(q) = \varepsilon\gamma i$ et $t(q) = \varepsilon\delta j$. Remarquons que pour $q \in Q_1$, les i, j, γ, δ vérifiant la propriété précédente sont uniques mais pas forcément ε .

Pour $v \in V'$, on a

$$(\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v \in \bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} \varepsilon^{-1}\varepsilon\gamma \otimes (V_{i,r} \otimes_k r) = \gamma \otimes \bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} V_{i,r} \otimes_k r = \gamma \cdot r_i.$$

Si $g' \in G$, on pose alors

$$(g' \otimes q)v = g'\varepsilon \cdot f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1}q) ((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v)$$

Cette définition ne dépend pas du choix de ε . En effet, pour tout ε' vérifiant les mêmes propriétés que ε vis à vis de q , on a $\varepsilon' = \varepsilon h'$ avec $h' \in G_{ij}$ et

$$g'\varepsilon' \cdot f_{\gamma, \delta}(\varepsilon'^{-1}q) ((\varepsilon'^{-1} \otimes \varepsilon'\gamma e_i)v) = g'\varepsilon h' \cdot f_{\gamma, \delta}(h'^{-1}\varepsilon^{-1}q) ((h'^{-1}\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v) \\ = g'\varepsilon h' \cdot h'^{-1} \cdot f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1}q) (h' \cdot (h'^{-1}\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v) \\ = g'\varepsilon \cdot f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1}q) ((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v) = (g' \otimes q)v.$$

En gardant les mêmes notations que plus haut, on a, en notant h' le représentant de $g'^{-1}h$ dans $O_{i'}$,

$$(g \otimes h e_{i'}) (g' \otimes q)v = g \cdot \pi'_h (\pi_{i'} (g'\varepsilon \cdot f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1}q) ((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v))) \\ = g \cdot \pi'_h (g'\varepsilon \cdot \pi_{i'} (f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1}q) ((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v))) \\ = gg' \cdot \pi'_{h'} (\varepsilon \cdot \pi_{i'} (f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1}q) ((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v))) \\ = \begin{cases} gg'\varepsilon \cdot f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1}q) ((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)v) & \text{si } i' = j \text{ et } g'^{-1}h \in \varepsilon\delta G_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ = (gg' \otimes (g'^{-1}h e_{i'}))q)v = [(g \otimes h e_{i'}) (g' \otimes q)]v.$$

Puis, en posant $\varepsilon' = g^{-1}\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
(g' \otimes q)(g \otimes he_{i'})v &= g'\varepsilon \cdot f_{\gamma,\delta}(\varepsilon^{-1}q) \left((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon\gamma e_i)(g \otimes he_{i'})v \right) \\
&= g'\varepsilon \cdot f_{\gamma,\delta}(\varepsilon^{-1}q) \left((\varepsilon^{-1}g \otimes (g^{-1}\varepsilon\gamma e_i))(he_{i'})v \right) \\
&= g'g\varepsilon' \cdot f_{\gamma,\delta}(\varepsilon'^{-1}g^{-1}q) \left((\varepsilon'^{-1} \otimes (\varepsilon'\gamma e_i))(he_{i'})v \right) \\
&= \begin{cases} g'g\varepsilon' \cdot f_{\gamma,\delta}(\varepsilon'^{-1}g^{-1}q) \left((\varepsilon'^{-1} \otimes (\varepsilon'\gamma e_i))v \right) & \text{si } i' = i \text{ et } h \in \varepsilon'\gamma G_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= (g'g \otimes (g^{-1}q))(he_{i'})v = [(g' \otimes q)(g \otimes he_{i'})]v
\end{aligned}$$

et finalement, les règles décrites engendrent une action de kQG sur V' . Appelons $\Phi(V, x)$ cette représentation. Si $(W, y) \in \text{mod } kQG$ est une autre représentation et $\alpha : (V, x) \rightarrow (W, y)$ un morphisme, alors

$$\alpha' = \bigoplus_{i \in X_0} \bigoplus_{r \in \text{ind } G_i} k[G] \otimes_{k[G_i]} (\alpha_{i,r} \otimes_k r)$$

est un morphisme de représentations de G de V' dans W' . C'est ensuite immédiat de voir que c'est un morphisme de représentations de kQG : $(g \otimes he_i)\alpha(v) = \alpha((g \otimes he_i)v)$ est immédiat et $(g' \otimes q)\alpha(v) = \alpha((g' \otimes q)v)$ provient du fait qu'avec les notations précédentes, $f_{\gamma,\delta}$ est fonctoriel. Ainsi, Φ est un foncteur.

Soit maintenant $(V', x') \in \text{mod } kQG$. Pour $i \in X_0$, $(1 \otimes e_i)V'$ est une représentation de G_i . Pour $r \in \text{ind } G_i$, posons donc

$$V_{i,r} = \text{Hom}_{\text{mod } k[G_i]}(r, (1 \otimes e_i)V')$$

et, pour $i, j \in X_0^2$, $r \in \text{ind}(G_i)$, $r' \in \text{ind}(G_j)$, $(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{ij}$, $q \in A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}$, $v \in r$ et $\beta \in V_{i,r} = \text{Hom}_{\text{mod } k[G_i]}(r, (1 \otimes e_i)V')$,

$$(\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}q)\beta(v) \in (\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}q)V' \subset (1 \otimes \tilde{h}e_j)V'$$

puisque $(1 \otimes \tilde{h}e_j)(\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}q) = \tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}q$. D'après le lemme on a un isomorphisme de représentations de G_j fonctoriel en V' :

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \tilde{h}e_j)V' &\simeq \bigoplus_{\tilde{r} \in \text{ind}(G_j)} \text{Hom}_{k[G_{\tilde{h}j}]}(\tilde{h} \cdot \tilde{r}, (1 \otimes \tilde{h}e_j)V') \otimes_k (\tilde{h} \cdot \tilde{r}) \\
&\simeq \bigoplus_{\tilde{r} \in \text{ind}(G_j)} \text{Hom}_{k[G_j]}(\tilde{r}, (1 \otimes \tilde{e}_j)V') \otimes_k (\tilde{h} \cdot \tilde{r}) = \bigoplus_{\tilde{r} \in \text{ind}(G_j)} V_{i, \tilde{r}} \otimes (\tilde{h} \cdot \tilde{r})
\end{aligned}$$

et ainsi, on peut noter

$$\tilde{f}_{\tilde{g}, \tilde{h}, r', r}(q)((\tilde{g} \cdot v) \otimes \beta) = \pi_{r'}((\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}q)\beta(v))$$

où $\pi_{r'}$ désigne la projection sur $V_{i,r'} \otimes (\tilde{h} \cdot r')$. Montrons maintenant que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\tilde{g}, \tilde{h}, r', r} &\in \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left(A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}, \right. \\
&\quad \left. \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}]} \left((\tilde{g} \cdot r)|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes V_{i,r}, (\tilde{h} \cdot r')|_{G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}} \otimes V_{j,r'} \right) \right).
\end{aligned}$$

Pour $g \in G_{\tilde{g}i, \tilde{h}j}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\tilde{g}, \tilde{h}, r', r}(gq)((\tilde{g} \cdot v) \otimes \beta) &= \pi_{r'}((\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}gq)\beta(v)) \\
&= \pi_{r'}((g \otimes 1)(\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}q)(\tilde{g}^{-1}g^{-1}\tilde{g} \otimes 1)\beta(v)) \\
&= g \cdot \pi_{r'}((\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}q)\beta(\tilde{g}^{-1}g^{-1}\tilde{g} \cdot v)) \\
&= g \cdot \tilde{f}_{\tilde{g}, \tilde{h}, r', r}(q)((\tilde{g} \cdot \tilde{g}^{-1}g^{-1}\tilde{g} \cdot v) \otimes \beta) \\
&= g \cdot \tilde{f}_{\tilde{g}, \tilde{h}, r', r}(q)((g^{-1}\tilde{g} \cdot v) \otimes \beta)
\end{aligned}$$

ce qui conclut. Notons alors

$$\tilde{f}_{r', r} = \bigoplus_{(\tilde{g}, \tilde{h}) \in F_{ij}} \tilde{f}_{\tilde{g}, \tilde{h}, r', r}.$$

À l'aide de l'isomorphisme décrit plus haut, on obtient un élément de

$$\mathrm{Hom}_k(e_{j, r'}(\mathrm{rad}(kQ_G)/\mathrm{rad}(kQ_G)^2)e_{i, r}, \mathrm{Hom}_k(V_{i, r}, V_{j, r'}))$$

et donc une représentation de kQ_G que nous noterons $\Psi(V', x')$. Soit $(W', y') \in \mathrm{mod} kQ_G$ et $f' : (V', x') \rightarrow (W', y')$ un morphisme. Notons

$$\Psi(f') = \bigoplus_{(i, r) \in Q_{G, 0}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G_i]}(r, f'|_{(1 \otimes e_i)V'})$$

qui est clairement un morphisme de $\Psi(V', x')$ dans $\Psi(W', y')$ par functorialité de la construction et ainsi, Ψ est un foncteur de $\mathrm{mod} kQ_G$ dans $\mathrm{mod} kQ_G$.

Il suffit maintenant de voir que les deux foncteurs Φ et Ψ sont quasi-inverses l'un de l'autre. Pour $(i, r) \in Q_{G, 0}$, on a une suite d'isomorphismes fonctoriels en $V_{i, r}$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G_i]} \left(r, (1 \otimes e_i) \bigoplus_{(i', r') \in Q_{G, 0}} k[G] \otimes_{k[G_{i'}]} (V_{i, r} \otimes_k r') \right) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} k[G_i]} \left(r, \bigoplus_{r' \in \mathrm{ind}(G_i)} V_{i, r'} \otimes_k r' \right) \simeq V_{i, r}.
\end{aligned}$$

En gardant les notations précédentes, avec $(V', x') = \Phi(V, x)$,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\tilde{g}, \tilde{h}, r', r}(q)((\tilde{g} \cdot v) \otimes \beta) &= \pi_{r'}((\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}q)\beta(v)) \\
&= \pi_{r'} \left(\tilde{g}(\tilde{g}^{-1}\varepsilon) \cdot f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1}q) \left((\varepsilon^{-1}\tilde{g} \otimes \tilde{g}^{-1}\varepsilon\gamma e_i)\beta(v) \right) \right) \\
&= \pi_{r'} \left(f_{\tilde{g}, \tilde{h}}(q) \left((\tilde{g} \otimes e_i)\beta(v) \right) \right) \quad \text{car } q \in A_{\tilde{g}i, \tilde{h}j} \\
&= \pi_{r'} \left(f_{\tilde{g}, \tilde{h}}(q) \left(\tilde{g} \cdot \beta(v) \right) \right) \quad \text{car } \beta(v) \subset (1 \otimes e_i)V' \\
&= \pi_{r'} \left(f_{\tilde{g}, \tilde{h}}(q) \left(\eta((\tilde{g} \cdot v) \otimes \beta) \right) \right)
\end{aligned}$$

où η est l'isomorphisme fonctoriel

$$\bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} r \otimes \text{Hom}_{\text{mod } k[G_i]}(r, (1 \otimes e_i)V') \simeq (1 \otimes e_i)V'$$

et donc $\tilde{f}_{r',r} = f_{r',r} \circ \eta$ ce qui montre immédiatement que $\Psi\Phi(V, x) \simeq (V, x)$, cet isomorphisme étant fonctoriel grâce à la functorialité dans $\text{mod } k$.

De la même façon, dans $\text{mod } k[G]$, on a un isomorphisme fonctoriel θ de $\Phi\Psi(V')$ dans V' :

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{(i,r) \in Q_{G,0}} k[G] \otimes_{k[G_i]} (\text{Hom}_{\text{mod } k[G_i]}(r, (1 \otimes e_i)V') \otimes_k r) \\ & \simeq \bigoplus_{i \in X_0} k[G] \otimes_{k[G_i]} \left(\bigoplus_{r \in \text{ind}(G_i)} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_i]}(r, (1 \otimes e_i)V') \otimes_k r \right) \\ & \simeq \bigoplus_{i \in X_0} k[G] \otimes_{k[G_i]} ((1 \otimes e_i)V') \simeq \bigoplus_{i \in X_0} \left((1 \otimes \sum_{g \in O_i} g e_i) V' \right) \\ & \simeq \bigoplus_{i \in Q_0} ((1 \otimes e_i)V') \simeq V' \end{aligned}$$

Soient $g \in G$, $i' \in X_0$, $h \in O_{i'}$, $(i, r) \in Q_{G,0}$, $\tilde{h} \in O_i$, $\beta \in \text{Hom}_{\text{mod } k[G_i]}(r, (1 \otimes e_i)V')$ et $v \in r$:

$$\begin{aligned} \theta((g \otimes h e_{i'}) (\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v))) &= \theta(g \cdot \pi'_h (\pi_{i'} (\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v)))) \\ &= \delta_{i i'} \delta_{\tilde{h} h} \theta(g \tilde{h} \otimes (\beta \otimes v)) \\ &= \delta_{i i'} \delta_{\tilde{h} h} (g \tilde{h} \otimes 1) \beta(v) \\ &= (g \otimes 1) (1 \otimes h e_{i'}) (\tilde{h} \otimes 1) \beta(v) \\ &= (g \otimes h e_{i'}) \theta(\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v)) \end{aligned}$$

et d'autre part, si $(i', r), (j', r') \in Q_{G,0}$, $(\gamma, \delta) \in F_{i' j'}$, $\varepsilon, g \in G$ et $q \in Q_1$ tels que $s(q) = \varepsilon \gamma i'$ et $t(q) = \varepsilon \delta j'$, et si γ' est le représentant de $\varepsilon \gamma$ dans $O_{i'}$ de tel façon que $\gamma^{-1} \varepsilon^{-1} \gamma' \in G_{i'}$,

$$\begin{aligned} \theta((g \otimes q) (\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v))) &= \theta \left(g \varepsilon \cdot f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1} q) \left((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon \gamma e_{i'}) (\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v)) \right) \right) \\ &= g \varepsilon \cdot \theta \left(f_{\gamma, \delta}(\varepsilon^{-1} q) \left((\varepsilon^{-1} \otimes \varepsilon \gamma e_{i'}) (\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v)) \right) \right) \\ &= g \varepsilon \cdot \theta \left(\sum_{r'' \in \text{ind}(G_{j'})} \tilde{f}_{\gamma, \delta, r'', r}(\varepsilon^{-1} q) \left(\varepsilon^{-1} \cdot \pi'_{\gamma'} (\pi_{i'} ((\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v)))) \right) \right) \\ &= \delta_{i' i} \delta_{\gamma' \tilde{h}} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{j'})} g \varepsilon \cdot \theta \left(\tilde{f}_{\gamma, \delta, r'', r}(\varepsilon^{-1} q) \left(\varepsilon^{-1} \tilde{h} \otimes (\beta \otimes v) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta((g \otimes q)(\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v))) &= \delta_{i'i} \delta_{\gamma' \tilde{h}} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{j'})} g\varepsilon \cdot \theta \left(\tilde{f}_{\gamma, \delta, r'', r}(\varepsilon^{-1}q) (\varepsilon^{-1}\gamma' \otimes (\beta \otimes v)) \right) \\
&= \delta_{i'i} \delta_{\gamma' \tilde{h}} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{j'})} g\varepsilon \cdot \theta \left(\tilde{f}_{\gamma, \delta, r'', r}(\varepsilon^{-1}q) (\gamma \otimes (\beta \otimes \gamma^{-1}\varepsilon^{-1}\gamma'v)) \right) \\
&= \delta_{i'i} \delta_{\gamma' \tilde{h}} g\varepsilon \cdot \theta \left(\sum_{r'' \in \text{ind}(G_{j'})} \pi_{r''}((\gamma \otimes \gamma^{-1}\varepsilon^{-1}q)\beta(\gamma^{-1}\varepsilon^{-1}\gamma'v)) \right) \\
&= \delta_{i'i} \delta_{\gamma' \tilde{h}} g\varepsilon \cdot (\gamma \otimes \gamma^{-1}\varepsilon^{-1}q)(\gamma^{-1}\varepsilon^{-1}\gamma' \otimes 1)\beta(v) \\
&= \delta_{i'i} \delta_{\gamma' \tilde{h}} (g\gamma' \otimes \gamma'^{-1}q)\beta(v) \\
&= \delta_{i'i} \delta_{\gamma' \tilde{h}} (g \otimes q)(\gamma' \otimes 1)\beta(v) \\
&= (g \otimes q)(1 \otimes \varepsilon\gamma e_{i'})(\tilde{h} \otimes 1)\beta(v) \\
&= (g \otimes q)\theta(\tilde{h} \otimes (\beta \otimes v))
\end{aligned}$$

donc θ est bien un isomorphisme de foncteur de $\Phi\Psi$ dans $\text{Id}_{\text{mod } kQ_G}$. Finalement, Φ et Ψ sont bien un couple d'équivalences de catégories quasi-inverses. \square

On reprendra ici les notations de la section 1.4 sur les algèbres préprojectives.

Dans la suite, on identifiera $\text{rad}(kQ^*)/\text{rad}(kQ^*)^2$ à $(\text{rad}(kQ)/\text{rad}(kQ)^2)^*$ en associant à chaque flèche q^* de Q^* l'élément correspondant de la base duale de la base Q_1 de $\text{rad}(kQ)/\text{rad}(kQ)^2$. On fera alors agir G sur $\text{rad}(kQ^*)/\text{rad}(kQ^*)^2 = (\text{rad}(kQ)/\text{rad}(kQ)^2)^*$ par l'action adjointe.

Lemme 2.3.10. *Avec la définition précédente, G agit sur $k\bar{Q}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour $q \in Q_1$, $i \in Q_0$ et $g \in G$,

$$g(q^*e_i) = (gq^*)(ge_i) \quad \text{et} \quad g(e_iq^*) = (ge_i)(gq^*).$$

Les deux étant analogues, regardons la première identité. Pour $q' \in Q_1$, on peut écrire

$$g^{-1}q' = \sum_{q'' \in Q_1 \mid s(q'')=g^{-1}s(q'), t(q'')=g^{-1}t(q')} \alpha_{q''}q''$$

et par conséquent

$$(gq^*|q') = (q^*|g^{-1}q') = \begin{cases} \alpha_q & \text{si } s(q) = g^{-1}s(q') \text{ et } t(q) = g^{-1}t(q') \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en particulier,

$$\begin{aligned}
gq^* &\subset \langle q' \in Q_1 \mid s(q') = gs(q) \text{ et } t(q') = gt(q) \rangle^* \\
&= \langle q'^* \in Q_1^* \mid t(q'^*) = gs(q) = gt(q^*) \text{ et } s(q'^*) = gt(q) = gs(q^*) \rangle
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(gq^*)(ge_i) &= \begin{cases} gq^* & \text{si } s(q^*) = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= g(q^*e_i)
\end{aligned}$$

ce qui conclut. \square

Proposition 2.3.11. 1. On peut identifier naturellement $(\overline{Q})_G$ et le carquois double formé sur le carquois Q_G .

2. Dans $k\overline{Q}$, on a pour tout $g \in G$ les égalités

$$g \cdot \sum_{q \in Q_1} q^* q = \sum_{q \in Q_1} q^* q \quad \text{et} \quad g \cdot \sum_{q \in Q_1} q q^* = \sum_{q \in Q_1} q q^*.$$

3. Il y a une équivalence de Morita entre l'algèbre préprojective Λ_{Q_G} et $(\Lambda_Q)G$.

Démonstration. 1. Dans la suite, pour $i, j \in Q_0$, $A_{i,j}$ est défini comme ci-dessus pour le carquois Q , et $A_{i,j}^{(*)}$ en est l'analogue pour Q^* . Remarquons qu'avec cette notation, $A_{i,j}^{(*)} = A_{j,i}^*$ où $A_{j,i}^*$ est la représentation contragrédiente de $A_{j,i}$.

Soient $(i, r), (j, r') \in \overline{Q}_{G,0}$. Par définition, les flèches de (i, r) à (j, r') dans \overline{Q}_G forment une base de

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{(g,h) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{gi,hj}]}((g \cdot r)|_{G_{gi,hj}} \otimes \overline{A}_{gi,hj}, (h \cdot r')|_{G_{gi,hj}})^* \\ \simeq & \bigoplus_{(g,h) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{gi,hj}]}((g \cdot r)|_{G_{gi,hj}} \otimes (A_{gi,hj} \oplus A_{gi,hj}^{(*)}), (h \cdot r')|_{G_{gi,hj}})^* \\ \simeq & \bigoplus_{(g,h) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{gi,hj}]}((g \cdot r)|_{G_{gi,hj}} \otimes A_{gi,hj}, (h \cdot r')|_{G_{gi,hj}})^* \\ & \oplus \bigoplus_{(h,g) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{hj,gi}]}((g \cdot r)|_{G_{hj,gi}} \otimes A_{hj,gi}^*, (h \cdot r')|_{G_{hj,gi}})^* \\ \simeq & \bigoplus_{(g,h) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{gi,hj}]}((g \cdot r)|_{G_{gi,hj}} \otimes A_{gi,hj}, (h \cdot r')|_{G_{gi,hj}})^* \\ & \oplus \bigoplus_{(h,g) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{hj,gi}]}((g \cdot r)|_{G_{hj,gi}}, (h \cdot r')|_{G_{hj,gi}} \otimes A_{hj,gi})^* \\ \simeq & \bigoplus_{(g,h) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{gi,hj}]}((g \cdot r)|_{G_{gi,hj}} \otimes A_{gi,hj}, (h \cdot r')|_{G_{gi,hj}})^* \\ & \oplus \bigoplus_{(h,g) \in F_{ij}} \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{hj,gi}]}((h \cdot r')|_{G_{hj,gi}} \otimes A_{hj,gi}, (g \cdot r)|_{G_{hj,gi}})^{**} \end{aligned}$$

puisque $F_{ji} = \{(h, g) \mid (g, h) \in F_{ij}\}$. Les isomorphismes étant canoniques, cela donne le résultat immédiatement.

2. Les deux égalités étant analogues, il suffit de montrer la première. Pour $g \in G$ et $q \in Q_1$, notons

$$g \cdot q = \sum_{q' \in Q_1} g_{qq'} q'.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
g \cdot \sum_{q \in Q_1} q^* q &= \sum_{q \in Q_1} (g \cdot q^*) (g \cdot q) \\
&= \sum_{q \in Q_1} \left(\sum_{q' \in Q_1} g_{q'q}^{-1} q'^* \right) \left(\sum_{q'' \in Q_1} g_{qq''} q'' \right) \\
&= \sum_{q', q'' \in Q_1} \left(\sum_{q \in Q_1} g_{q'q}^{-1} g_{qq''} \right) q'^* q'' \\
&= \sum_{q', q'' \in Q_1} \delta_{q'q''} q'^* q'' = \sum_{q \in Q_1} q^* q.
\end{aligned}$$

3. Gardons les mêmes notations que dans la démonstration du théorème. Soit $(V, x) \in \text{mod } k\overline{Q}_G$. Alors $\Phi(V, x) \in \text{mod } (\Lambda_Q)G$ si et seulement si pour tout $v \in V'$,

$$\sum_{q \in Q_1} ((1 \otimes q)(1 \otimes q^*) - (1 \otimes q^*)(1 \otimes q))v = 0$$

puisque dans la proposition 2.3.3, $r_a = r_{1 \otimes a}^0$ pour $a \in A$. Par définition de V' et par linéarité, on peut supposer que $v = g_0 \otimes (v_0 \otimes w_0) \in k[G] \otimes_{k[G_{i_0}]} (V_{i_0, r_0} \otimes_k r_0)$ avec $g \in O_{i_0}$, $v_0 \in V_{i_0, r_0}$ et $w_0 \in r_0$.

Pour $(i, r), (j, r') \in Q_{G,0}$ et $(\gamma, \delta) \in F_{ij}$, notons $\mathcal{B}_{\gamma, \delta, r', r}^{i, j}$ une base de

$$\text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma i, \delta j}]} ((\gamma \cdot r)|_{G_{\gamma i, \delta j}} \otimes A_{\gamma i, \delta j}, (\delta \cdot r')|_{G_{\gamma i, \delta j}})$$

et $\mathcal{B}_{\delta, \gamma, r, r'}^{j, i, *}$ un analogue pour Q^* . À $\beta \in \mathcal{B}_{\gamma, \delta, r', r}^{i, j}$ correspond par définition une flèche q_β de Q_G ; on note les analogues pour Q_G^* avec des asterisques.

Pour $q \in Q_1$, notons $i_q, j_q \in X_0^2$, $(\gamma_q, \delta_q) \in F_{ij}$, $\varepsilon_q \in G$ tels que $s(q) = \varepsilon_q \gamma_q i_q$ et $t(q) = \varepsilon_q \delta_q j_q$; on étend naturellement cette définition aux combinaison linéaires de flèches ayant la même source et le même but. On a alors :

$$\begin{aligned}
\#G \sum_{q \in Q_1} (1 \otimes q)(1 \otimes q^*)v &= \sum_{q \in Q_1} \sum_{g \in G} (1 \otimes gq)(1 \otimes gq^*)v \\
&= \sum_{q \in Q_1} \sum_{g \in G} \varepsilon_{gq} \cdot f_{\gamma_{gq}, \delta_{gq}}^{i_{gq}, j_{gq}} (\varepsilon_{gq}^{-1} gq) \\
&\quad \left((\varepsilon_{gq}^{-1} \otimes \varepsilon_{gq} \gamma_{gq} e_{i_{gq}}) \varepsilon_{gq} \cdot f_{\delta_{gq}, \gamma_{gq}}^{j_{gq}, i_{gq}} (\varepsilon_{gq}^{-1} gq^*) \left((\varepsilon_{gq}^{-1} \otimes \varepsilon_{gq} \delta_{gq} e_{j_{gq}}) v \right) \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1} \sum_{g \in G} g \varepsilon_q \cdot f_{\gamma_q, \delta_q}^{i_q, j_q} (\varepsilon_q^{-1} g^{-1} gq) \\
&\quad \left((\varepsilon_q^{-1} g^{-1} \otimes g \varepsilon_q \gamma_q e_{i_q}) (g \varepsilon_q \otimes 1) f_{\delta_q, \gamma_q}^{j_q, i_q} (\varepsilon_q^{-1} g^{-1} gq^*) \left((\varepsilon_q^{-1} g^{-1} \otimes g \varepsilon_q \delta_q e_{j_q}) v \right) \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1} \sum_{g \in G} g \varepsilon_q \cdot f_{\gamma_q, \delta_q}^{i_q, j_q} (\varepsilon_q^{-1} q) \left((1 \otimes \gamma_q e_{i_q}) f_{\delta_q, \gamma_q}^{j_q, i_q} (\varepsilon_q^{-1} q^*) \left((\varepsilon_q^{-1} \otimes \varepsilon_q \delta_q e_{j_q}) (g^{-1} \otimes 1) v \right) \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1} \sum_{g \in G} g \varepsilon_q \cdot f_{\gamma_q, \delta_q}^{i_q, j_q} (\varepsilon_q^{-1} q) f_{\delta_q, \gamma_q}^{j_q, i_q} (\varepsilon_q^{-1} q^*) \left((\varepsilon_q^{-1} g^{-1} \otimes g \varepsilon_q \delta_q e_{j_q}) v \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q \in Q_1} \sum_{g \in G} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} g \varepsilon_q \cdot f_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}(\varepsilon_q^{-1} q) f_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q}(\varepsilon_q^{-1} q^*) \\
&\quad \left((\varepsilon_q^{-1} \otimes \varepsilon_q \delta_q e_{j_q})(g^{-1} \otimes 1)v \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1} \sum_{g \in G} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} g \varepsilon_q \cdot f_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}(\varepsilon_q^{-1} q) f_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q}(\varepsilon_q^{-1} q^*) \\
&\quad \left((\varepsilon_q^{-1} g^{-1} \otimes g \varepsilon_q \delta_q e_{j_q})(g_0 \otimes (v_0 \otimes w_0)) \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1} \sum_{g \in G} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} g \varepsilon_q \cdot f_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}(\varepsilon_q^{-1} q) f_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q}(\varepsilon_q^{-1} q^*) \\
&\quad \left(\delta_{j_q i_0} \delta_{g_0 \tilde{\varepsilon}} \varepsilon_q^{-1} g^{-1} g_0 \otimes (v_0 \otimes w_0) \right)
\end{aligned}$$

où $\tilde{\varepsilon}$ est le représentant de $g \varepsilon_q \delta_q$ dans O_{i_0} .

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\#G \sum_{q \in Q_1} (1 \otimes q)(1 \otimes q^*)v \\
&= \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{g \in g_0 G_{i_0} \delta_q^{-1} \varepsilon_q^{-1}} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} g \varepsilon_q \cdot f_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}(\varepsilon_q^{-1} q) f_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q}(\varepsilon_q^{-1} q^*) \\
&\quad \left(\varepsilon_q^{-1} g^{-1} g_0 \otimes (v_0 \otimes w_0) \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{g \in G_{j_q}} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} g_0 g \delta_q^{-1} \cdot f_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}(\varepsilon_q^{-1} q) f_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q}(\varepsilon_q^{-1} q^*) \\
&\quad \left(\delta_q g^{-1} \otimes (v_0 \otimes w_0) \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{g \in G_{j_q}} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} g_0 g \delta_q^{-1} \cdot f_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}(\varepsilon_q^{-1} q) f_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q}(\varepsilon_q^{-1} q^*) \\
&\quad \left(\delta_q \otimes (v_0 \otimes g^{-1} w_0) \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{g \in G_{j_q}} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} g_0 g \delta_q^{-1} \cdot f_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}(\varepsilon_q^{-1} q) \\
&\quad \left(\gamma_q \otimes \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q, *}} x_{q\beta^*}(v_0) \otimes \beta(g^{-1} w_0 \otimes \varepsilon_q^{-1} q^*) \right) \\
&= \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{g \in G_{j_q}} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} g_0 g \delta_q^{-1} \cdot \\
&\quad \left(\delta_q \otimes \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q, *}} x_{q\beta'^*} x_{q\beta^*}(v_0) \otimes \beta'(\beta(g^{-1} w_0 \otimes \varepsilon_q^{-1} q^*) \otimes \varepsilon_q^{-1} q) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{g \in G_{j_q}} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} \\
&\quad \left(g_0 \otimes \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q, *}} x_{q_{\beta'}} x_{q_{\beta^*}}(v_0) \otimes g \beta' (\beta(g^{-1} w_0 \otimes \varepsilon_q^{-1} q^*) \otimes \varepsilon_q^{-1} q) \right) \\
&= g_0 \otimes \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q, *}} \\
&\quad x_{q_{\beta'}} x_{q_{\beta^*}}(v_0) \otimes \left(\sum_{g \in G_{j_q}} g \beta' (\beta(g^{-1} w_0 \otimes \varepsilon_q^{-1} q^*) \otimes \varepsilon_q^{-1} q) \right) \\
&= g_0 \otimes \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{r' \in \text{ind}(G_{j_q})} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_{\gamma_q, \delta_q, r', r''}^{i_q, j_q}} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q, *}} \\
&\quad x_{q_{\beta'}} x_{q_{\beta^*}}(v_0) \otimes \left(\sum_{g \in G_{j_q}} g \cdot \varphi_{q, \beta', \beta} \right) (w_0)
\end{aligned}$$

où $\varphi_{q, \beta', \beta} \in \mathbf{Hom}_{\text{mod } k[G_{j_q}]}(r_0, r')$ est défini par

$$\varphi_{q, \beta', \beta}(w_0) = \beta'(\beta(w_0 \otimes \varepsilon_q^{-1} q^*) \otimes \varepsilon_q^{-1} q).$$

Alors, l'élément $\sum_{g \in G_{j_q}} g \cdot \varphi_{q, \beta', \beta}$ est G_{j_q} -stable, donc c'est un morphisme de r_0 dans r' . En particulier, il s'annule si $r' \neq r_0$. Si $r' = r_0$, alors c'est un multiple de l'identité, que l'on notera $\lambda_q(\beta', \beta) \text{Id}_{r_0}$.

Si l'on note $\bar{\beta}_{q^*}(w_0) = \beta(w_0 \otimes \varepsilon_q^{-1} q^*)$ et $\bar{\beta}'_q(w_0) = \beta'(w_0 \otimes \varepsilon_q^{-1} q)$, on a, puisque G_{j_q} agit sur $\mathbf{Hom}_{\text{mod } k[G_{j_q}]}(r_0, r')$ par conjugaison,

$$\text{tr} \left(\sum_{g \in G_{j_q}} g \cdot \varphi_{q, \beta', \beta} \right) = \#G_{j_q} \text{tr}(\bar{\beta}'_q | \bar{\beta}_{q^*}) = \#G_{j_q} (\bar{\beta}'_q | \bar{\beta}_{q^*})$$

où $(\cdot | \cdot)$ est le couplage de

$$\begin{aligned}
&\text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}]} \left((\gamma_q \cdot r) |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}}, (\delta_q \cdot r') |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \right) \\
&\times \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}]} \left((\delta_q \cdot r') |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}}, (\gamma_q \cdot r) |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \right)
\end{aligned}$$

obtenu grâce à l'isomorphisme canonique ω_1

$$\begin{aligned}
&\text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}]} \left((\delta_q \cdot r') |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}}, (\gamma_q \cdot r) |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \right) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}]} \left((\gamma_q \cdot r) |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}}, (\delta_q \cdot r') |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \right)^*.
\end{aligned}$$

Montrons que $(\bar{\beta}'_q | \bar{\beta}_{q^*}) = \langle \beta', \beta \rangle$ si on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le couplage de

$$\begin{aligned}
&\text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}]} \left((\gamma_q \cdot r) |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \otimes A_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}, (\delta_q \cdot r') |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \right) \\
&\times \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}]} \left((\delta_q \cdot r') |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \otimes A_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}^*, (\gamma_q \cdot r) |_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \right)
\end{aligned}$$

obtenu grâce à l'isomorphisme canonique ω_2

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}]} \left((\delta_q \cdot r')|_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \otimes A_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}, (\gamma_q \cdot r)|_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \right) \\ & \simeq \text{Hom}_{\text{mod } k[G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}]} \left((\gamma_q \cdot r)|_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \otimes A_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}^*, (\delta_q \cdot r')|_{G_{\gamma_q i_q, \delta_q j_q}} \right)^*. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} (\bar{\beta}'_q | \bar{\beta}_{q^*}) &= \omega_1(\bar{\beta}_{q^*})(\bar{\beta}'_q) = \omega_1(\beta \circ (\text{Id} \otimes \varepsilon_q^{-1} q^*))(\beta' \circ (\text{Id} \otimes \varepsilon_q^{-1} q)) \\ &= \omega_2(\beta)(\beta') \times (\varepsilon_q^{-1} q^*)(\varepsilon_q^{-1} q) = \langle \beta', \beta \rangle. \end{aligned}$$

On a aussi,

$$\text{tr} \left(\sum_{g \in G_{j_q}} g \cdot \varphi_{q, \beta', \beta} \right) = \text{tr}(\lambda_q(\beta', \beta) \text{Id}_{r_0}) = \lambda_q(\beta', \beta) \dim_k r_0$$

donc

$$\lambda_q(\beta', \beta) = \frac{\#G_{j_q}}{\dim_k r_0} \langle \beta', \beta \rangle.$$

On peut, quitte à changer la base $\mathcal{B}_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q, *}$, supposer qu'à travers l'isomorphisme ω_2 , les deux bases sont duales l'une de l'autre. Notons $\beta \mapsto \tilde{\beta}$ la dualité.

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} & \#G \sum_{q \in Q_1} (1 \otimes q)(1 \otimes q^*)v \\ &= g_0 \otimes \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_{\gamma_q, \delta_q, r_0, r''}^{i_q, j_q}} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q, *}} x_{q_{\beta'^*}} x_{q_{\beta^*}}(v_0) \otimes \lambda_q(\beta', \beta) w_0 \\ &= g_0 \otimes \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_{\gamma_q, \delta_q, r_0, r''}^{i_q, j_q}} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\delta_q, \gamma_q, r'', r_0}^{j_q, i_q, *}} x_{q_{\beta'^*}} x_{q_{\beta^*}}(v_0) \otimes \frac{\#G_{j_q}}{\dim_k r_0} \langle \beta', \beta \rangle w_0 \\ &= \frac{\#G_{i_0}}{\dim_k r_0} g_0 \otimes \sum_{q \in Q_1, j_q = i_0} \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_q})} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\gamma_q, \delta_q, r_0, r''}^{i_q, j_q}} x_{q_{\beta^*}} x_{q_{\tilde{\beta}^*}}(v_0) \otimes w_0 \\ &= \frac{\#G_{i_0}}{\dim_k r_0} g_0 \otimes \sum_{i_1 \in X_0} \sum_{(\gamma, \delta) \in F_{i_1 i_0}} \#\{q \in Q_1 \mid t(q) = \delta i_0, s(q) = \gamma i_1\} \\ & \quad \sum_{r'' \in \text{ind}(G_{i_1})} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\gamma, \delta, r_0, r''}^{i_1, i_0}} x_{q_{\beta^*}} x_{q_{\tilde{\beta}^*}}(v_0) \otimes w_0 \\ &= \frac{\#G_{i_0}}{\dim_k r_0} g_0 \otimes \sum_{q \in Q_{G, 1, s(q) = (i_0, r_0)}} c_q x_q x_{q^*}(v_0) \otimes w_0 \end{aligned}$$

où par définition $c_{q_\beta} = \#\{q \in Q_1 \mid t(q) = \delta i_0, s(q) = \gamma i_1\} = \dim A_{\gamma i_1, \delta i_0}$ quand $\beta \in \mathcal{B}_{\gamma, \delta, r_0, r''}^{i_1, i_0}$; $c_{q_\beta} \neq 0$ puisque quand $A_{\gamma i_1, \delta i_0}$ est vide, $\mathcal{B}_{\gamma, \delta, r_0, r''}^{i_1, i_0}$ aussi. Remarquons que

$$c_{q_\beta^*} = c_{q_{\tilde{\beta}}} = \dim A_{\gamma i_1, \delta i_0}^* = \dim A_{\gamma i_1, \delta i_0} = c_{q_\beta}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}
& \#G \sum_{q \in Q_1} ((1 \otimes q)(1 \otimes q^*) - (1 \otimes q^*)(1 \otimes q))v \\
&= \frac{\#G_{i_0}}{\dim_k r_0} g_0 \otimes \sum_{q \in Q_{G,1}, s(q)=(i_0, r_0)} c_q x_q x_{q^*}(v_0) \otimes w_0 \\
&\quad - \frac{\#G_{i_0}}{\dim_k r_0} g_0 \otimes \sum_{q \in Q_{G,1}^*, s(q)=(i_0, r_0)} c_q x_q x_{q^*}(v_0) \otimes w_0 \\
&= \frac{\#G_{i_0}}{\dim_k r_0} g_0 \otimes \left(\sum_{q \in Q_{G,1}} c_q (x_q x_{q^*} - x_{q^*} x_q)(v_0) \right) \otimes w_0
\end{aligned}$$

qui s'annule pour tout $v = g_0 \otimes (v_0 \otimes w_0)$ si et seulement si

$$\sum_{q \in Q_{G,1}} c_q (x_q x_{q^*} - x_{q^*} x_q)(v_0)$$

s'annule pour tout $v_0 \in V$. Donc $\Phi(V, x) \in (\Lambda_Q)G$ si et seulement si $(V, x) \in \Lambda_{Q_G}$. \square

Rappelons ce résultat démontré par McKay :

Théorème 2.3.12 (Correspondance de McKay). *Les classes d'isomorphisme des sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sont indexées par les diagrammes de Dynkin affines de type \tilde{A} , \tilde{D} et \tilde{E} . Plus précisément, si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on construit son diagramme de Dynkin en prenant comme ensemble des sommets l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G et comme matrice d'adjacence*

$$\left(\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} \mathbb{C}[G]}(r_1, r_2 \otimes r_0) \right)_{r_1, r_2 \in \mathrm{ind}(G)}$$

où r_0 est la représentation canonique de G dans \mathbb{C}^2 .

Proposition 2.3.13. *Soit Q le carquois*

$$\begin{array}{c}
\alpha \\
\curvearrowright \\
1 \\
\curvearrowleft \\
\alpha^*
\end{array}$$

et $G \subset \mathrm{SL}(\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\alpha^*)$ fini. Alors Q_G s'identifie naturellement au carquois double construit sur le diagramme de Dynkin affine correspondant à G dans la correspondance de McKay. De plus, l'algèbre $(\mathbb{C}Q/(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha))G$ et l'algèbre préprojective construite sur Q_G sont Morita-équivalentes.

Remarque 2.3.14. Ce résultat est démontré par une méthode géométrique (étude des singularités de Klein) par Reiten et Van den Bergh [60, démonstration de la proposition 2.13] (voir aussi [16, theorem 0.1]).

Démonstration. Remarquons que l'action de G stabilise $\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha$.

Supposons que G ne soit pas d'ordre 2.

Ici $A = A_{1,1} = \langle \alpha, \alpha^* \rangle_{\mathbb{C}}$. Les sommets de Q_G sont paramétrés par les représentations simples de G . Les flèches de r à r' forment une base de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod} \mathbb{C}[G]}(r \otimes A, r')^*$$

qui est de dimension 1 si r et r' sont voisins dans le diagramme de Dynkin affine de G et 0 sinon. On choisit un élément $q_{r,r'}$ de cet espace si il est de dimension 1 et on note $q_{r,r'} = 0$ sinon.

Soit maintenant (V, x) une représentation de $\mathrm{mod} \mathbb{C}Q_G$. Gardons les notations de la démonstration du théorème. Alors $\Phi(V, x) \in \mathrm{mod} (\mathbb{C}Q/(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha))G$ si et seulement si pour tout $\tilde{v} \in V'$,

$$(1 \otimes \alpha)(1 \otimes \alpha^*)\tilde{v} - (1 \otimes \alpha^*)(1 \otimes \alpha)\tilde{v} = 0.$$

Par linéarité, on peut supposer que $\tilde{v} = v \otimes x$ avec $v \in V_r$ et $x \in r$ pour $r \in \mathrm{ind}(G)$. On a alors, en notant $f = f_{1,1}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{g \in G} (1 \otimes g\alpha)(1 \otimes g\alpha^*)(v \otimes x) \\ &= \sum_{g \in G} f(g\alpha)(f(g\alpha^*)(v \otimes x)) \\ &= \sum_{g \in G} gf(\alpha)(f(\alpha^*)(v \otimes g^{-1}x)) \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{r', r'' \in \mathrm{ind}(G)} gf_{r', r''}(\alpha)(f_{r'', r}(\alpha^*)(v \otimes g^{-1}x)) \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{r', r'' \in \mathrm{ind}(G)} gf_{r', r''}(\alpha)(x_{q_{r, r''}}(v) \otimes q_{r, r''}^*(g^{-1}x \otimes \alpha^*)) \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{r', r'' \in \mathrm{ind}(G)} g(x_{q_{r'', r'}}(x_{q_{r, r''}}(v)) \otimes q_{r'', r'}^*(q_{r, r''}^*(g^{-1}x \otimes \alpha^*) \otimes \alpha)) \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{r', r'' \in \mathrm{ind}(G)} x_{q_{r'', r'}}(x_{q_{r, r''}}(v)) \otimes gq_{r'', r'}^*(q_{r, r''}^*(g^{-1}x \otimes \alpha^*) \otimes \alpha) \\ &= \sum_{r', r'' \in \mathrm{ind}(G)} x_{q_{r'', r'}}(x_{q_{r, r''}}(v)) \otimes \sum_{g \in G} gq_{r'', r'}^*(q_{r, r''}^*(g^{-1}x \otimes \alpha^*) \otimes \alpha) \end{aligned}$$

Comme dans la proposition précédente,

$$\varphi : x \mapsto \sum_{g \in G} gq_{r'', r'}^*(q_{r, r''}^*(g^{-1}x \otimes \alpha^*) \otimes \alpha)$$

est un morphisme de représentation de r dans r' . Il est donc nul si $r \neq r'$. Sinon, $\varphi = \lambda \mathrm{Id}_r$. On a alors $\mathrm{tr}(\varphi) = \lambda \dim r = \#G \mathrm{tr}(q_{r'', r}^*(q_{r, r''}^* \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_r \otimes \alpha^* \otimes \alpha))$. Du coup, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{g \in G} (1 \otimes g\alpha)(1 \otimes g\alpha^*)(v \otimes x) \\ &= \frac{\#G}{\dim r} \sum_{r'' \in \mathrm{ind}(G)} \mathrm{tr}(q_{r'', r}^*(q_{r, r''}^* \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_r \otimes \alpha^* \otimes \alpha)) x_{q_{r'', r}}(x_{q_{r, r''}}(v)) \otimes x \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \#G((1 \otimes \alpha)(1 \otimes \alpha^*) - (1 \otimes \alpha^*)(1 \otimes \alpha))(v \otimes x) \\
&= \sum_{g \in G} ((1 \otimes g\alpha)(1 \otimes g\alpha^*) - (1 \otimes g\alpha^*)(1 \otimes g\alpha))(v \otimes x) \\
&= \frac{\#G}{\dim r} \sum_{q \in Q_{G,1}} c_q x_q x_{q^*}(v) \otimes x
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
c_q &= \text{tr}(q(q^* \otimes \text{Id}_A)(\text{Id} \otimes (\alpha^* \otimes \alpha - \alpha \otimes \alpha^*))) \\
&= \text{tr}(q(\text{Id} \otimes \alpha)q^*(\text{Id} \otimes \alpha^*)) - \text{tr}(q(\text{Id} \otimes \alpha^*)q^*(\text{Id} \otimes \alpha)) \\
&= \text{tr}(q^*(\text{Id} \otimes \alpha^*)q(\text{Id} \otimes \alpha)) - \text{tr}(q^*(\text{Id} \otimes \alpha)q(\text{Id} \otimes \alpha^*)) \\
&= -c_{q^*}
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que pour $q \in Q_{G,1}$, $c_q \neq 0$. Soient $r, r' \in \text{ind}(G)$ tels que $q = q_{r,r'}$. Comme $\alpha^* \otimes \alpha - \alpha \otimes \alpha^*$ est G -stable, $(\text{Id} \otimes (\alpha^* \otimes \alpha - \alpha \otimes \alpha^*))$ est un morphisme (non nul) de r' dans $r' \otimes A \otimes A$. Par ailleurs, $(q^* \otimes \text{Id}_A)$ est un morphisme (non nul) de $r' \otimes A \otimes A$ dans $r \otimes A$. Donc finalement, $q(q^* \otimes \text{Id}_A)(\text{Id} \otimes (\alpha^* \otimes \alpha - \alpha \otimes \alpha^*))$ est un morphisme de r' dans r , donc comme r' est simple, il suffit que ce morphisme soit non nul pour que sa trace soit non nulle. Comme q^* est non nul, il existe, $v \in r'$ tel que $q^*(v \otimes \alpha^*) \neq 0$ ou $q^*(v \otimes \alpha) \neq 0$. Par symétrie de la situation, on peut supposer que $q^*(v \otimes \alpha^*) \neq 0$. Dans $r' \otimes A \otimes A$, $r' \otimes A \otimes \alpha$ et $r' \otimes A \otimes \alpha^*$ sont supplémentaires, donc $q^*(v \otimes \alpha^*) \otimes \alpha - q^*(v \otimes \alpha) \otimes \alpha^*$ est non nul. Par conséquent, $(q^* \otimes \text{Id}_A)(\text{Id} \otimes (\alpha^* \otimes \alpha - \alpha \otimes \alpha^*))$ est un morphisme non nul de r' dans $r \otimes A$. Comme $r \otimes A$ ne contient qu'une copie de r' , il est immédiat que $q(q^* \otimes \text{Id}_A)(\text{Id} \otimes (\alpha^* \otimes \alpha - \alpha \otimes \alpha^*))$ est non nul d'où le résultat.

Il ne reste plus que le cas où $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à faire. Notons r_- la représentation indécomposable non triviale de G , de sorte que $A = r_- \oplus r_-$. Pour simplifier les notations, on identifie les espaces supportant $\mathbb{1}$ et r_- à \mathbb{C} . Soient q_α et q_{α^*} dans $\text{Hom}_{\text{mod } \mathbb{C}[G]}(\mathbb{1} \otimes A, r_-)$ définis par $q_\alpha(x \otimes \alpha) = x$, $q_\alpha(x \otimes \alpha^*) = 0$, $q_{\alpha^*}(x \otimes \alpha) = 0$ et $q_{\alpha^*}(x \otimes \alpha^*) = x$. De même, soient q_α^* et $q_{\alpha^*}^*$ dans $\text{Hom}_{\text{mod } \mathbb{C}[G]}(r_- \otimes A, \mathbb{1})$ définis par $q_\alpha^*(x \otimes \alpha) = x$, $q_\alpha^*(x \otimes \alpha^*) = 0$, $q_{\alpha^*}^*(x \otimes \alpha) = 0$ et $q_{\alpha^*}^*(x \otimes \alpha^*) = x$. On a alors, en reprenant les calculs précédents, si $v \otimes x \in V_{\mathbb{1}} \otimes \mathbb{1}$,

$$\begin{aligned}
& (1 \otimes \alpha)(1 \otimes \alpha^*)(v \otimes x) \\
&= x_{q_\alpha}(x_{q_{\alpha^*}}(v)) \otimes q_\alpha(q_{\alpha^*}^*(x \otimes \alpha^*) \otimes \alpha) + x_{q_{\alpha^*}}(x_{q_\alpha}(v)) \otimes q_{\alpha^*}(q_\alpha^*(x \otimes \alpha) \otimes \alpha) \\
&\quad + x_{q_{\alpha^*}}(x_{q_\alpha}(v)) \otimes q_{\alpha^*}(q_\alpha^*(x \otimes \alpha^*) \otimes \alpha) + x_{q_\alpha}(x_{q_{\alpha^*}}(v)) \otimes q_\alpha(q_{\alpha^*}^*(x \otimes \alpha^*) \otimes \alpha) \\
&= x_{q_\alpha}(x_{q_{\alpha^*}}(v)) \otimes x
\end{aligned}$$

Donc on a

$$((1 \otimes \alpha)(1 \otimes \alpha^*) - (1 \otimes \alpha^*)(1 \otimes \alpha))(v \otimes x) = (x_{q_\alpha} x_{q_{\alpha^*}} - x_{q_{\alpha^*}} x_{q_\alpha})(v) \otimes x$$

et la relation analogue pour $v \otimes x \in V_{r_-} \otimes r_-$. □

Chapitre 3

Algèbres amassées antisymétrisables

Soit k un corps algébriquement clos. On suppose que \mathcal{C} est une k -catégorie exacte de Frobenius, Hom-finie, 2-Calabi-Yau et Krull-Schmidt et que G est un groupe fini de cardinal non divisible par la caractéristique de k . On suppose de plus que G agit sur \mathcal{C} de manière exacte.

Les quatre premières sections sont en grande partie inspirées des travaux de Geiß, Leclerc et Schröer, en particulier de [31] et [35]. Les suivantes sont inspirées des travaux [17], [26], [57].

3.1 Mutation des sous-catégories rigides maximales

Lemme 3.1.1. *Soient $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ rigide et $X \in \mathcal{C}G$ tel que $k[G] \otimes X$ soit rigide. Si*

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte admissible et f une \mathcal{T} -approximation à gauche, alors la catégorie $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y)$ est rigide.

Démonstration. Si $T' \in \mathcal{T}$, en appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, k[G] \otimes T')$ à la suite exacte courte admissible, on obtient la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, k[G] \otimes T') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, k[G] \otimes T') &\xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, k[G] \otimes T')} \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, k[G] \otimes T') \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, k[G] \otimes T') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, k[G] \otimes T') &= 0. \end{aligned}$$

Puisque f est une \mathcal{T} -approximation à gauche, $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, k[G] \otimes T')$ est surjective, et par conséquent, $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, k[G] \otimes T') = \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(k[G] \otimes Y, T') = 0$. Par ailleurs, comme $k[G] \otimes -$ est un foncteur exact, $0 \rightarrow k[G] \otimes X \rightarrow k[G] \otimes T \xrightarrow{k[G] \otimes g} k[G] \otimes Y \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible. Par conséquent, appliquer le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, -)$ donne la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, k[G] \otimes X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, k[G] \otimes T) &\xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, k[G] \otimes g)} \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, k[G] \otimes Y) \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, k[G] \otimes X) &= 0 \end{aligned}$$

puisque $k[G] \otimes X$ est rigide. Par ailleurs, en appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, k[G] \otimes Y)$ à la suite exacte courte admissible d'origine, on trouve la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, k[G] \otimes Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, k[G] \otimes Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, k[G] \otimes Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, k[G] \otimes Y) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, k[G] \otimes Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, k[G] \otimes Y) = 0 \end{aligned}$$

Soit maintenant $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, k[G] \otimes Y)$. Par l'argument précédent, h se factorise à travers $k[G] \otimes g$. Soit $h' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, k[G] \otimes T)$ tel que $h = (k[G] \otimes g)h'$. Comme $k[G] \otimes T \in \mathcal{T}$, et comme f est une \mathcal{T} -approximation à gauche, il existe $t \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, k[G] \otimes T)$ tel que $h' = tf$. Ainsi, $h = (k[G] \otimes g)tf$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, k[G] \otimes Y)$ est surjective. Par conséquent, $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, k[G] \otimes Y) = 0$ et $T \oplus k[G] \otimes Y$ est rigide. Finalement, $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y)$ est rigide. \square

Proposition 3.1.2. *Soit $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ rigide, finiment engendrée et $X \in \mathcal{C}G$ indécomposable tel que $X \notin \mathcal{T}$, \mathcal{T} contient tous les projectifs de $\mathcal{C}G$, et $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)$ est rigide. Alors, il existe deux suites exactes courtes admissibles uniques à isomorphisme près*

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow Y' \xrightarrow{f'} T' \xrightarrow{g'} X \rightarrow 0$$

telles que

1. f et f' sont des \mathcal{T} -approximations minimales à gauche ;
2. g et g' sont des \mathcal{T} -approximations minimales à droite ;
3. $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y)$ et $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y')$ sont rigides ;
4. $Y \notin \mathcal{T}$ et $Y' \notin \mathcal{T}$;
5. Y et Y' sont indécomposables ;
6. $\text{add}(k[G] \otimes X) \cap \text{add}(k[G] \otimes Y) = 0$ et $\text{add}(k[G] \otimes X) \cap \text{add}(k[G] \otimes Y') = 0$.

Démonstration. Par analogie, on va se contenter de montrer l'existence de la première suite exacte courte admissible. D'après le lemme 1.2.81, une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche de X est un monomorphisme admissible ce qui donne l'existence (et l'unicité de la suite exacte courte admissible. Le premier point est vérifié par définition. Comme $X \notin \mathcal{T}$, la suite exacte courte admissible n'est pas scindée. Du coup, $Y \notin \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)$ qui est rigide ce qui montre les quatrième et sixième points. Par ailleurs, le lemme précédent montre que $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y)$ est rigide (le troisième point est prouvé). Pour $T' \in \mathcal{T}$, En appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', -)$ à la suite exacte courte admissible, on obtient la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', g)} \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', Z) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T', X) = 0 \end{aligned}$$

et par conséquent, $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', g)$ est surjective ce qui implique que le morphisme g est une \mathcal{T} -approximation à droite.

Soit un facteur direct T_0 de T sur lequel g s'annule. Soit π un projecteur sur T_0 . Comme $g\pi = 0$ et comme f est un noyau de g , il existe $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, X)$ tel que $\pi = ff'$. Donc $ff'(\text{Id}_T - \pi) = 0$ et comme f est un monomorphisme admissible, $f'(\text{Id}_T - \pi) = 0$ et du

coup $(f'f)^2 = f'\pi f = f'f$. Comme tout idempotent est scindé et X est indécomposable, $f'f = 0$ ou $f'f = \text{Id}_X$. Comme la suite exacte courte admissible n'est pas scindée, $f'f = 0$. Donc $\pi = ff' = (ff')^2 = 0$ donc $T_0 = 0$ et g est minimale. Le deuxième point est prouvé.

Supposons maintenant que $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Soient $g_1 : T_1 \rightarrow Y_1$ et $g_2 : T_2 \rightarrow Y_2$ des \mathcal{T} -approximations minimales à droite. Alors $g_1 \oplus g_2$ est une \mathcal{T} -approximation minimale à droite par les lemmes 1.2.17 et 1.2.79. Par unicité des approximations minimales, $g \simeq g_1 \oplus g_2$. Par le lemme 1.2.36, g_1 et g_2 sont tous deux des épimorphismes admissibles. Ils ont donc des noyaux $f_1 : X_1 \rightarrow T_1$ et $f_2 : X_2 \rightarrow T_2$ et par unicité du noyau, $f \simeq f_1 \oplus f_2$. Par conséquent, puisque $X \simeq X_1 \oplus X_2$ est indécomposable, $X_1 = 0$ ou $X_2 = 0$ puis par minimalité de f , $T_1 = 0$ ou $T_2 = 0$ et enfin, $Y_1 = 0$ ou $Y_2 = 0$. Finalement, Y est indécomposable. Le cinquième point est démontré. \square

Définition 3.1.3. Dans la proposition précédente, on notera $\mu_X^d(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)) = \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y)$ et $\mu_X^g(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)) = \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y')$. On appellera X -mutation à droite μ_X^d et X -mutation à gauche μ_X^g . On appellera (X, Y) (resp. (X, Y')) une paire d'échange à droite (resp. à gauche) associée à \mathcal{T} .

Remarque 3.1.4. Les notations de la définition précédente ne sont pas ambiguës. En effet, si $\mathcal{T}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ et $X \in \mathcal{T}'$ est indécomposable alors il existe un unique $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ tel que $\text{add}(k[G] \otimes X) \cap \mathcal{T} = 0$ et $\mathcal{T}' = \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)$: c'est exactement la catégorie des objets de \mathcal{T}' dont aucun facteur direct n'intervient dans $k[G] \otimes X$.

Lemme 3.1.5. Soit (X, Y) une paire d'échange (à gauche ou à droite). Alors,

1. $\#X = \#Y$ et $\ell(X) = \ell(Y)$;
2. si (X', Y') est une autre paire d'échange (dans la même direction que (X, Y)) et si $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$, alors $Y' \in \text{add}(k[G] \otimes Y)$.

Démonstration. Soit $0 \rightarrow X \rightarrow T \rightarrow Y \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible correspondant à la paire d'échange. En utilisant les lemmes 1.2.79, 1.2.36, 1.2.17 et 2.2.13, on voit que la suite exacte courte admissible $0 \rightarrow FX \rightarrow FT \rightarrow FY \rightarrow 0$ est somme directe de suites exactes courtes admissibles telles que décrites dans la proposition 3.1.2. Ainsi, on a immédiatement que $\ell(X) = \ell(Y)$. De plus, il est clair que pour deux facteurs directs indécomposables de FX isomorphes, les deux facteurs directs indécomposables de FY correspondant sont aussi isomorphes, et réciproquement. Par conséquent, $\#X = \#Y$. Soit $0 \rightarrow X' \rightarrow T' \rightarrow Y' \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible correspondant à la paire d'échange (X', Y') . Si X_0 est un facteur direct indécomposable de FX , alors, comme $\text{add}(k[G] \otimes X) = \text{add}(X_0[G]) = \text{add}(k[G] \otimes X')$, X_0 est aussi un facteur direct de FX' . La suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X_0 \xrightarrow{f} T_0 \rightarrow Y_0 \rightarrow 0$ où f est une $\text{add}(FT')$ -approximation minimale à gauche apparaît donc à la fois comme facteur direct de $0 \rightarrow FX \rightarrow FT \rightarrow FY \rightarrow 0$ et de $0 \rightarrow FX' \rightarrow FT' \rightarrow FY' \rightarrow 0$. Finalement FY et FY' ont comme facteur direct commun Y_0 ce qui prouve que $Y' \in \text{add}(Y_0[G]) = \text{add}(k[G] \otimes Y)$ puisque Y et Y' sont indécomposables. \square

Lemme 3.1.6. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ indécomposables, avec $\ell(X) = \ell(Y)$ et $\#X = \#Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$ indécomposable,

$$\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X', Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } X' \simeq X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Pour tout $Y' \in \text{add}(k[G] \otimes Y)$ indécomposable,

$$\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, Y') = \begin{cases} 1 & \text{si } Y' \simeq Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Soit \tilde{X} (resp. \tilde{Y}) l'ensemble des classes d'isomorphismes de facteurs directs indécomposables de $k[G] \otimes X$ (resp. $k[G] \otimes Y$). D'après le lemme 2.2.16,

$$\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FX, FY) = \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(k[G] \otimes X, Y) = \sum_{X' \in \tilde{X}} \frac{\ell(X)\ell(X')}{\#X'} \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X', Y) \quad (3.1)$$

$$= \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, k[G] \otimes Y) = \sum_{Y' \in \tilde{Y}} \frac{\ell(Y)\ell(Y')}{\#Y'} \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, Y') \quad (3.2)$$

Si la première assertion est vraie, alors (3.1) entraîne que

$$\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FX, FY) = \ell(X)^2 / \#X.$$

Comme $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, Y) = 1$, le terme correspondant de (3.2) est égal à $\ell(Y)^2 / \#Y = \ell(X)^2 / \#X$ et du coup, tous les autres termes s'annulent. La réciproque se traite de la même façon. \square

Définition 3.1.7. Avec les notations du lemme précédent, si les deux assertions équivalentes sont satisfaites, on dira que X et Y sont voisins.

Lemme 3.1.8. Si $X, Y \in \mathcal{C}G$, sont indécomposables avec $\ell(X) = \ell(Y)$ et $\#X = \#Y$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $X_0 \in \text{add}(FX)$ indécomposable, il existe $Y_0 \in \text{add}(FY)$ indécomposable tel que pour tout $Y'_0 \in \text{add}(FY)$ indécomposable,

$$\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_0, Y'_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y'_0 \simeq Y_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Pour tout $Y_0 \in \text{add}(FY)$ indécomposable, il existe $X_0 \in \text{add}(FX)$ indécomposable tel que pour tout $X'_0 \in \text{add}(FX)$ indécomposable,

$$\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X'_0, Y_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } X'_0 \simeq X_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FX, FY) = \ell(X)^2 / \#X$.

De plus, si X et Y sont voisins, alors les conditions ci-dessus sont satisfaites.

Démonstration. Par symétrie du lemme, il suffit de montrer que la première et la troisième sont équivalentes. Soit $X_0 \in \text{add}(FX)$. Soit $FX = \bigoplus_{k=1}^n X_i$ et $FY = \bigoplus_{k=1}^n Y_i$ où les X_i et les Y_i sont indécomposables dans \mathcal{C} . Soit \tilde{X} un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des facteurs indécomposables de FX et \tilde{Y} un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des facteurs indécomposables de FY .

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(FX, FY) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_i, Y_j) = \left(\frac{\ell(X)}{\#X} \right)^2 \sum_{X'_0 \in \tilde{X}} \sum_{Y'_0 \in \tilde{Y}} \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X'_0, Y'_0) \\ &= \frac{\ell(X)^2}{\#X} \sum_{Y'_0 \in \tilde{Y}} \dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_0, Y'_0) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

En regardant la démonstration du lemme précédent, on voit immédiatement que si X et Y sont voisins, alors la troisième condition est satisfaite. \square

Proposition 3.1.9. *Soient $X, Y \in \mathcal{C}G$ des voisins tels que $k[G] \otimes X$ et $k[G] \otimes Y$ soient rigides. Soit*

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$$

une suite exacte courte admissible non scindée (qui est unique à isomorphisme près puisque X et Y sont voisins).

Alors $\text{add}(k[G] \otimes (M \oplus X))$ et $\text{add}(k[G] \otimes (M \oplus Y))$ sont rigides et $X, Y \notin \text{add}(k[G] \otimes M)$.

De plus, s'il existe $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ telle que $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)$ et $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y)$ soient rigides mod $k[G]$ -stables maximales, alors f est une \mathcal{T} -approximation à gauche minimale et g est une \mathcal{T} -approximation à droite minimale.

Démonstration. Montrons que $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(k[G] \otimes M, k[G] \otimes X) = 0$. Il suffit pour cela de montrer que $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(M, X') = 0$ pour tout $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$ indécomposable. Soit $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$ indécomposable. En appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, X')$ à la suite exacte courte admissible, on trouve la suite exacte longue suivante :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, X') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(M, X') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, X')} \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, X') \\ \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(M, X') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, X') = 0 \end{aligned}$$

Si $X' \simeq X$ alors $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') = 1$ de telle façon qu'il suffit de prouver que $\delta \neq 0$, ce qui revient à dire que $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, X')$ n'est pas surjective. Si elle était surjective, il existerait $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(M, X')$ telle que gf soit un isomorphisme. Par conséquent, $[(gf)^{-1}g]f = \text{Id}_X$ et la suite exacte courte admissible serait scindée, ce qui n'est pas le cas.

Si X' et X ne sont pas isomorphes, comme X et Y sont voisins, $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') = 0$ et le résultat est clair. De la même façon, $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(k[G] \otimes M, k[G] \otimes Y) = 0$.

Montrons que $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(k[G] \otimes M, k[G] \otimes M) = 0$. Il suffit pour cela de montrer que $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(M, k[G] \otimes M) = 0$. L'application du foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(k[G] \otimes M, -)$ à la suite exacte courte admissible induit la suite exacte longue :

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(k[G] \otimes M, X) = 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(k[G] \otimes M, M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(k[G] \otimes M, Y) = 0$$

ce qui donne le résultat.

Montrons que $X \notin \text{add}(k[G] \otimes M)$. Si c'était le cas, il existerait $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$ indécomposable tel que $X' \in \text{add}(M)$. Posons $M = X' \oplus M'$. Si $X' \simeq X$, $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X) = 1$ et $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, M) = 0$ sont contradictoires. Supposons que X' et X ne sont pas isomorphes. Alors il existe $Y' \in \text{add}(k[G] \otimes Y)$ indécomposable tel que $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X', Y') \neq 0$ et, par définition des voisins, Y' et Y ne sont pas isomorphes. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y', -)$ à la suite exacte courte admissible, on trouve la suite exacte longue :

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y', X) = 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y', X' \oplus M') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y', Y) = 0$$

la première égalité provenant du fait que Y' et Y ne sont pas isomorphes et que X et Y sont voisins. Par conséquent, le terme central s'annule, ce qui contredit l'hypothèse.

Maintenant, supposons l'existence de \mathcal{T} . Pour $T \in \mathcal{T}$, en appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, -)$, on trouve la suite exacte longue

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, X) = 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, Y) = 0$$

et du coup, $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, M) = 0$. Donc $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes (M \oplus X))$ est rigide mod $k[G]$ -stable. Et par conséquent, comme $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)$ est rigide mod $k[G]$ -stable maximale, $M \in \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)$. Comme $\text{add}(k[G] \otimes X) \cap \text{add}(k[G] \otimes M) = 0$, $M \in \mathcal{T}$. En appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, T)$, on trouve la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(M, T) &\xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, T)} \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, T) = 0 \end{aligned}$$

et par conséquent, $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, T)$ est surjective pour tout $T \in \mathcal{T}$, et le morphisme f est une \mathcal{T} -approximation à gauche. Si f n'était pas minimale, il y aurait une décomposition $M \simeq M_0 \oplus M_1$ avec $M_0 \neq 0$ telle que $f = f_0 \oplus f_1$ où $f_1 = \pi_{M_1} f$ et $f_0 = 0$. Grâce au lemme 1.2.36, f_0 et f_1 sont des monomorphismes admissibles. Comme Y est indécomposable, l'un des conoyaux de f_0 et f_1 est nul. Comme $\text{coker } f_0 = M_0 \neq 0$, $\text{coker } f_1 = 0$, et par conséquent, la suite exacte courte admissible est scindée ce qui est une contradiction. De la même façon, g est une \mathcal{T} -approximation minimale à droite. \square

Corollaire 3.1.10. *Soient $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ et $X \in \mathcal{C}G$ indécomposable tels que $X \notin \mathcal{T}$ et $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)$ soit rigide mod $k[G]$ -stable maximale. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $Y \in \mathcal{C}G$ indécomposable tel que $\mu_X^g(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)) = \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y)$ et X et Y sont voisins.*
2. *Il existe $Y' \in \mathcal{C}G$ indécomposable tel que $\mu_X^d(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)) = \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y')$ et X et Y' sont voisins.*

Dans ce cas, $Y \simeq Y'$ et si on note

$$\mu_X(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)) = \mu_X^g(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)) = \mu_X^d(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)),$$

alors

$$\mu_Y(\mu_X(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X))) = \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X).$$

Démonstration. Si la première assertion est satisfaite, la proposition précédente induit une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X \rightarrow T' \rightarrow Y \rightarrow 0$ respectant les conditions de la proposition 3.1.2, ce qui donne la seconde assertion et le fait que $Y \simeq Y'$. Du coup $\mu_Y(\mu_X(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X))) = \mu_Y^g(\mu_X^d(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X))) = \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)$. Par un argument similaire, la seconde assertion implique la première. \square

Définition 3.1.11. Dans la situation du corollaire, notons $\mu_X(\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes X)) = \text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Y)$. On appellera $\{X, Y\}$ une paire d'échange associée à T .

3.2 Quasi-approximations rigides

Définition 3.2.1. Soit $X \in \mathcal{CG}$ (resp $\in \mathcal{C}$). Un épimorphisme $f : X \twoheadrightarrow Y$ sera appelé quasi-approximation rigide à gauche de X si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $k[G] \otimes Y$ (resp. $\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Y$) est rigide ;
- Y a une enveloppe injective dont aucun facteur non trivial n'est dans $\text{add}(k[G] \otimes X)$ (resp. $\text{add}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X\right)$) ;
- Si $k[G] \otimes Z$ (resp. $\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Z$) est rigide, alors tout morphisme de X dans Z dont aucun coefficient matriciel n'est un isomorphisme factorise à travers f .

Définition 3.2.2. Soit $X \in \mathcal{CG}$ (resp $\in \mathcal{C}$). Un monomorphisme $f : Y \hookrightarrow X$ sera appelé quasi-approximation rigide à droite si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $k[G] \otimes Y$ (resp. $\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Y$) est rigide ;
- Y a une couverture projective dont aucun facteur non trivial n'est dans $\text{add}(k[G] \otimes X)$ (resp. $\text{add}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X\right)$) ;
- Si $k[G] \otimes Z$ (resp. $\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Z$) est rigide, alors tout morphisme de Z dans X dont aucun coefficient matriciel n'est un isomorphisme factorise à travers f .

Remarque 3.2.3. De la même façon que pour les approximations, on montre que les quasi-approximations rigides minimales sont uniques à isomorphisme près.

Le lemme suivant donne un moyen pratique d'avoir des quasi-approximations :

Lemme 3.2.4. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie exacte pleine et \mathbf{G} -module d'une catégorie abélienne et \mathbf{G} -module \mathcal{D} (éventuellement $\mathcal{C} = \mathcal{D}$). Soit P un projectif-injectif indécomposable de \mathcal{C} . Si

- tout monomorphisme (resp. épimorphisme) de \mathcal{C} vers (resp. depuis) un projectif-injectif est admissible,
- tout monomorphisme (resp. épimorphisme) de \mathcal{C} de P dans un indécomposable (resp. d'un indécomposable dans P) est admissible,
- P a un socle (resp. une tête) simple S dans \mathcal{D} ,
- $\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S$ est rigide dans \mathcal{D} ,
- le conoyau (resp. le noyau) de $S \hookrightarrow P$ (resp. de $P \twoheadrightarrow S$) est dans \mathcal{C} ,

alors ce conoyau (resp. ce noyau) est une quasi-approximation rigide à gauche (resp. à droite) de P dans \mathcal{C} .

Démonstration. Les deux cas étant similaires, on va montrer le premier. Soit donc la suite exacte courte de \mathcal{D}

$$0 \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

En y appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, -\right)$, on trouve la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, S\right) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, P\right) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, Q\right) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^1\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, S\right) = 0 \end{aligned}$$

comme le socle de P est simple,

$$\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, P\right) = \#\{g \in G \mid \mathfrak{g} \otimes S \simeq S\} = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, S\right)$$

donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, Q\right) = 0$.

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(-, \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Q\right)$ à la suite exacte courte admissible, on trouve la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(Q, \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Q\right) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(P, \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Q\right) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(S, \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Q\right) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^1\left(Q, \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Q\right) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^1\left(P, \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Q\right) = 0 \end{aligned}$$

et comme, d'après ce qu'on vient de montrer, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(S, \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Q\right) = 0$, on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^1\left(Q, \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Q\right) = 0.$$

Soit maintenant S' le socle (non forcément simple) de Q . Comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes S, Q\right) = 0,$$

S' ne contient pas de facteur direct isomorphe à un $\mathfrak{g} \otimes S$. Du coup, si l'on note $\alpha : S' \rightarrow I$ l'enveloppe injective de S' , I n'a pas de facteur direct de la forme $\mathfrak{g} \otimes P$. Par ailleurs, comme I est injectif, on peut compléter le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\alpha} & I \\ \downarrow \iota & \nearrow \beta & \\ Q & & \end{array}$$

Ensuite, β est un monomorphisme admissible puisque I est injectif. On a donc bien montré la deuxième condition dans la définition d'une quasi-approximation à gauche.

Soient maintenant $Z \in \mathcal{C}$ indécomposable et $f : P \rightarrow Z$. Supposons que f n'est pas un monomorphisme. Soit $K \rightarrow P$ le noyau de f dans \mathcal{D} et soit S' le socle de K . En composant les deux, on a un morphisme non nul $g : S' \rightarrow P$ tel que $fg = 0$. Comme le socle de P est simple, $S' = S$ et finalement, f est nul sur S et donc se factorise à travers $P \rightarrow Q$ qui est le conoyau de $S \rightarrow P$. Si f est un monomorphisme, par hypothèse il est admissible et donc scindé et finalement $f = \text{Id}_P$ puisque Z est indécomposable. On a bien montré la troisième condition. \square

Lemme 3.2.5. *Si tous les projectifs indécomposables de \mathcal{C} ont des quasi-approximations rigides à gauche (resp. à droite), alors tous les projectifs indécomposables de \mathcal{CG} ont des quasi-approximations rigides à gauche (resp. à droite).*

Démonstration. Les deux cas se traitent de la même façon. Traitons le cas des quasi-approximations rigides à gauche. Soit $(P, \psi) \in \mathcal{CG}$ un projectif indécomposable. Grâce au lemme 2.2.25, $P \in \mathcal{C}$ est projectif. Soit $f : P \rightarrow X$ la somme directe des quasi-approximations rigides minimales à gauche de ses facteurs directs indécomposables. C'est aussi une quasi-approximation rigide minimale à gauche puisque

$$\text{add } X = \text{add} \left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X_0 \right)$$

où $P_0 \rightarrow X_0$ est l'une des quasi-approximations rigides minimales à gauche des facteurs directs indécomposables de P donc $\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X$ est rigide. Alors, pour tout $g \in G$, il existe un unique morphisme χ_g qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \otimes P & \xrightarrow{\mathfrak{g} \otimes f} & \mathfrak{g} \otimes X \\ \psi_g \downarrow & & \chi_g \downarrow \\ P & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

(L'existence vient de la définition d'une quasi-approximation rigide, l'unicité vient du fait que f est un épimorphisme). De manière immédiate, $(X, \chi) \in \mathcal{CG}$. Il est alors facile de voir que $f : (P, \psi) \rightarrow (X, \chi)$ est une quasi-approximation rigide à gauche. \square

3.3 Endomorphismes

On supposera ici que tous les objets projectifs indécomposables de \mathcal{C} ont des quasi-approximations rigides à gauche. Tous les résultats de cette partie restent vrais si l'on suppose à la place que tous les projectifs indécomposables de \mathcal{C} ont des quasi-approximations rigides à droite.

Soit $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{CG})^{\text{mod } k[G]}$ finiment engendré, $\text{mod } k[G]$ -stable rigide maximal. Soit $T \in \mathcal{CG}$ basique tel que $\mathcal{T} = \text{add}(T)$, et $\tilde{T} \in FT$ basique tel que $F\mathcal{T} = \text{add}(\tilde{T})$. On note $E = \text{End}_{\mathcal{CG}}(T)$ et $\tilde{E} = \text{End}_{\mathcal{C}}(\tilde{T})$. Si $X \in \mathcal{T}$ est indécomposable, S_X est la représentation simple de E correspondante, c'est-à-dire la tête du E -module projectif

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$. De même, si $X \in F\mathcal{T}$ est indécomposable, \tilde{S}_X est la représentation simple de \tilde{E} correspondante.

Définition 3.3.1. Soient $\mathcal{D} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ et $X \in \mathcal{D}$ indécomposable. Une $\text{mod } k[G]$ -boucle de \mathcal{D} en X est un morphisme irréductible $X \rightarrow X'$ de \mathcal{D} où $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$ est indécomposable. Un $\text{mod } k[G]$ -2-cycle de \mathcal{D} en X est la donnée de deux morphismes irréductibles $X \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow X'$ de \mathcal{D} où $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$ est indécomposable.

Définition 3.3.2. Soient $\mathcal{D} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^G$ et $X \in \mathcal{D}$ indécomposable. Une G -boucle de \mathcal{D} en X est un morphisme irréductible $X \rightarrow \mathfrak{g} \otimes X$ de \mathcal{D} avec $g \in G$. Un G -2-cycle de \mathcal{D} en X est la donnée de deux morphismes irréductibles $X \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow \mathfrak{g} \otimes X$ de \mathcal{D} où $g \in G$.

Lemme 3.3.3. Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$. Soit $X \in \mathcal{D}$ indécomposable et X' un facteur de FX . Alors \mathcal{D} n'a pas de $\text{mod } k[G]$ -boucle (resp. $\text{mod } k[G]$ -2-cycle) en X si et seulement si $F\mathcal{D}$ n'a pas de G -boucle (resp. G -2-cycle) en X' .

Démonstration. La preuve est la même pour les boucles et les 2-cycles. Montrons ce résultat pour les boucles. Supposons que \mathcal{D} n'ait pas de $\text{mod } k[G]$ -boucle en X . Soit $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(FX)$. Alors $f[G] \in \text{End}_{\mathcal{C}G}((FX)[G]) \simeq \text{End}_{\mathcal{C}G}(k[G] \otimes X)$. Comme \mathcal{D} n'a pas de $\text{mod } k[G]$ -boucle en X , $f[G]$ se factorise à travers $Y \in \mathcal{D}$ tel que $\text{add}(Y) \cap \text{add}(k[G] \otimes X) = 0$. Donc $F(f[G])$ se factorise à travers FY . Comme $\text{add}(k[G] \otimes X)$ est $\text{mod } k[G]$ -stable, $\text{add}(FY) \cap \text{add}(F(k[G] \otimes X)) = 0$. Comme f est un facteur direct de $F(f[G])$, f factorise aussi à travers FY et par conséquent, $F\mathcal{D}$ n'a pas de G -boucle en X' .

Réciproquement, supposons que $F\mathcal{D}$ n'ait pas de G -boucle en X' . Soit $f \in \text{End}_{\mathcal{C}G}(X)$. Comme $Ff \in \text{End}_{\mathcal{C}}(FX)$, Ff se factorise à travers un $Y \in \mathcal{D}$ tel que $\text{add}(Y) \cap \text{add}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X'\right) = 0$. Du coup, $(Ff)[G]$ se factorise à travers $Y[G]$ et f , en tant que facteur direct de $(Ff)[G]$, se factorise aussi à travers $Y[G]$ et enfin, puisque

$$\text{add}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X'\right) = \text{add } F(X'[G]) = \text{add } FX,$$

on a $\text{add}(Y[G]) \cap \text{add}(X) = 0$. Finalement, \mathcal{D} n'a pas de boucle en X . \square

Lemme 3.3.4. Soit $\mathcal{T}_0 \in \mathfrak{Add}(\mathcal{T})^{\text{mod } k[G]}$ et (X, Y) une paire d'échange associée à \mathcal{T}_0 à gauche (resp. à droite) telle que $\text{add}(\mathcal{T}_0, k[G] \otimes X) = \mathcal{T}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. \mathcal{T} n'a pas de $\text{mod } k[G]$ -boucle en X ;
2. Pour tout $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$ indécomposable, tout morphisme X de X' non inversible se factorise à travers \mathcal{T}_0 .
3. X et Y sont voisins.

Démonstration. Le fait que la paire d'échange soit à gauche ou à droite ne change pas la preuve. Elle sera donc considérée à gauche.

L'équivalence des deux premiers points est claire. Soit

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} T \rightarrow Y \rightarrow 0$$

la suite exacte courte admissible d'échange correspondant à (X, Y) . Soit $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$. En appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, X')$ à la suite exacte courte admissible, on trouve la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, X') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', X') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, X')} \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, X') \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T', X') = 0 \end{aligned}$$

Comme f est une \mathcal{T}_0 -approximation à gauche, pour un élément de $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, X')$, se factoriser à travers \mathcal{T}_0 équivaut à être dans l'image de $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(f, X')$. Il y a deux cas :

- si $X' \simeq X$ alors tout morphisme de X dans X' non inversible se factorise à travers \mathcal{T}_0 si et seulement si $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') \simeq k$ puisque, comme k est algébriquement clos, $\text{End}_{\mathcal{C}G}(X)/\mathfrak{m} \simeq k$ où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de $\text{End}_{\mathcal{C}G}(X)$;
- si X' et X ne sont pas isomorphes, alors tout morphisme de X dans X' se factorise à travers \mathcal{T}_0 si et seulement si $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') = 0$.

En combinant ces deux cas, l'équivalence entre la deuxième et la troisième assertion est prouvée. \square

Proposition 3.3.5. *Supposons que \mathcal{T} n'a pas de mod $k[G]$ -boucle. Alors*

$$\text{gl. dim}(E) = \text{gl. dim}(\tilde{E}) \begin{cases} \leq 2 & \text{si } T \text{ est projectif} \\ = 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. La preuve est la même pour E et pour \tilde{E} puisque $\tilde{\mathcal{T}}$ n'a pas de G -boucle et puisque T est projectif si et seulement si \tilde{T} est projectif. Il suffit donc de le faire pour E . Soit $X \in \mathcal{T}$ indécomposable et $\mathcal{T}_0 \in \mathfrak{Ad}\mathfrak{d}(\mathcal{T})^{\text{mod } k[G]}$ tel que $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T}_0, k[G] \otimes X)$ et $X \notin \mathcal{T}_0$. Supposons que X n'est pas projectif. Il existe deux suites exactes courtes admissibles d'échange

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} T' \rightarrow Y \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow Y \rightarrow T'' \rightarrow X \rightarrow 0$$

puisqu'après le lemme précédent, X et Y sont voisins et d'après le corollaire 3.1.10, on a $\mu_Y(\mu_X(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$. En appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, T)$ à ces deux suites, on trouve les suites exactes longues :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, T) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T', T) = 0 \end{aligned}$$

où X' est le plus grand facteur direct de T contenu dans $\text{add}(k[G] \otimes X)$ et

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T'', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, T) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(X, T) = 0$$

Comme T est basique, et puisque X' est mod $k[G]$ -stable, X' contient exactement un objet de chaque classe d'isomorphisme de $\text{add}(k[G] \otimes X)$. Comme X et Y sont voisins, $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') = 1$. Du coup, $\text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Y, X') \simeq S_X$ comme E -module. Ainsi, en combinant ces deux suites exactes longues, on trouve cette suite exacte longue de E -modules :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T'', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \rightarrow S_X \rightarrow 0$$

C'est une résolution projective de S_X . Par conséquent, $\text{proj. dim}(S_X) \leq 3$. Comme $X \notin \text{add}(T'')$, $\text{Hom}_E(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T'', T), S_X) = 0$ et du coup,

$$\text{Ext}^3(S_X, S_X) \simeq \text{Hom}_E(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T), S_X)$$

est de dimension 1. Finalement, $\text{proj. dim}(S_X) = 3$.

Supposons maintenant que X est projectif. Montrons que $\text{proj. dim}(S_X) \leq 2$. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ une quasi-approximation rigide à gauche. Par définition, une enveloppe injective de Y n'intersecte pas $\text{add}(X')$ et, en utilisant le lemme 1.2.81, il y a une suite exacte courte admissible

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{f} T' \rightarrow Z \rightarrow 0$$

où f est une $\text{add}(\mathcal{T}_0)$ -approximation à gauche. En utilisant le lemme 3.1.1 et parce que X est projectif, $\text{add}(\mathcal{T}, k[G] \otimes Z)$ est $\text{mod } k[G]$ -stable rigide, et, comme \mathcal{T} est $\text{mod } k[G]$ -stable rigide maximal, $Z \in \mathcal{T}$. En appliquant à cette suite exacte courte admissible $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, T)$ on trouve la suite exacte longue suivante :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Z, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, T) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(Z, T) = 0$$

De plus, $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(\pi, T) : \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Y, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T)$ est injective puisque π est un épimorphisme et son conoyau a dimension 1 par définition d'une quasi-approximation rigide à gauche : ce conoyau est S_X . On en déduit l'existence de la suite exacte longue suivante :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Z, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \rightarrow S_X \rightarrow 0$$

qui est une résolution projective de S_X . □

Proposition 3.3.6. *Supposons que $\mathcal{T}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ est, comme \mathcal{T} , rigide $\text{mod } k[G]$ -stable maximale. Alors \mathcal{T}' est finiment engendré. Soit $T' \in \mathcal{T}'$ basique tel que $\mathcal{T}' = \text{add}(T')$. Posons $E' = \text{End}_{\mathcal{C}G}(T')$. Soit $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T)$. Alors F est un module basculant sur E et*

$$\text{End}_E(F) \simeq E'^{\text{op}}.$$

En particulier, il y a une équivalence dérivée entre E et E' et \mathcal{T} et \mathcal{T}' contiennent le même nombre de facteurs indécomposables non isomorphes.

Le résultat est aussi vrai pour $\tilde{\mathcal{T}}'$ et \tilde{E}' .

Démonstration. En utilisant le lemme 1.2.81, il y a une suite exacte courte admissible

$$0 \rightarrow T'_2 \rightarrow T'_1 \xrightarrow{g} T \rightarrow 0 \tag{3.3}$$

où g est une \mathcal{T}' -approximation minimale à droite. En utilisant le lemme 3.1.1, $T'_2 \in \mathcal{T}'$. Soit alors $T' \in \text{add}(T')$ basique tel que $T'_1, T'_2 \in \text{add}(T')$. On va voir plus tard que $\text{add}(T') = \mathcal{T}'$.

Par le même raisonnement, il existe une suite exacte courte admissible

$$0 \rightarrow T' \xrightarrow{f} T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow 0 \tag{3.4}$$

où f est une \mathcal{T} -approximation minimale à gauche et $T_2 \in \mathcal{T}$. Appliquons le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, T)$ à (3.4) pour trouver la suite exacte longue :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T_2, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T_1, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T_2, T) = 0 \quad (3.5)$$

et par conséquent, $\text{proj. dim}_E F \leq 1$. Maintenant, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', -)$ à (3.4), on trouve la suite exacte longue suivante :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T_2) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T', T') = 0.$$

L'application du foncteur $\text{Hom}_E(-, F)$ à (3.5) induit la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_E(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T), F) \rightarrow \text{Hom}_E(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T_1, T), F) \rightarrow \text{Hom}_E(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T_2, T), F) \\ \rightarrow \text{Ext}_E^1(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T), F) \rightarrow \text{Ext}_E^1(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T_1, T), F) = 0 \end{aligned}$$

l'égalité de la fin provenant du fait que $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T_1, T)$ est projectif sur E .

Montrons que le morphisme de foncteurs de \mathcal{T} dans $\text{mod } E'^{\text{op}}$

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', -) \rightarrow \text{Hom}_E(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, T), \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T)) \\ \varphi \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(\varphi, T) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Par additivité et comme $\mathcal{T} = \text{add}(T)$, il suffit de regarder Φ_T . Soit $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T)$. Alors $\Phi_T(\varphi)(\text{Id}_T) = \varphi$. Finalement, Φ_T est injectif. Par ailleurs, si $\varphi' \in \text{Hom}_E(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, T), \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T))$ alors $\Phi_T(\varphi'(\text{Id}_T)) = \varphi'$ donc Φ_T est surjectif.

Par comparaison des deux suites exactes longues précédentes, on a une suite d'isomorphisme de E'^{op} -modules.

$$\text{End}_E(F) \simeq \text{Hom}_E(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T), F) \simeq \text{End}_{\mathcal{C}G}(T') = E'^{\text{op}}$$

et

$$\text{Ext}_E^1(F, F) = \text{Ext}_E^1(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T), F) = 0.$$

En appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(-, T)$ à (3.3), on trouve la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T'_1, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T'_2, T) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}G}^1(T, T) = 0$$

Et ainsi, F est un E -module basculant. Du théorème 1.2.83, on déduit que E et E' sont dérivés-équivalentes et que \mathcal{T} et $\text{add}(T')$ contiennent le même nombre d'indécomposables non isomorphes. Il est alors immédiat que $\text{add}(T') = \mathcal{T}'$ (sinon, on aurait pu prendre T' plus gros). \square

Pour le théorème suivant, nous auront besoin de ce résultat d'Igusa :

Théorème 3.3.7 ([42, 3.2, b]). *Soit A une k -algèbre de dimension finie et de dimension globale finie. Soit φ un automorphisme de A tel qu'il existe une famille d'idempotents primitifs de A sur laquelle φ agit comme une permutation. Alors, le carquois de A n'a pas de flèche entre deux sommets d'une même orbite de φ .*

Rappelons aussi le théorème suivant d'Iyama, dans le cas qui nous intéresse :

Théorème 3.3.8 ([44, 5.1 (3)]). *Soit $\tilde{\mathcal{T}}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})$ rigide contenant les objets projectifs-injectifs de \mathcal{C} , $\tilde{\mathcal{T}}' \in \tilde{\mathcal{T}}'$ basique tel que $\tilde{\mathcal{T}}' = \text{add}(\tilde{\mathcal{T}}')$, $\tilde{E}' = \text{End}_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{T}}')$. Si $\text{gl. dim}(\tilde{E}') \leq 3$, alors $\tilde{\mathcal{T}}'$ est amas-basculante.*

Citons cette proposition de Bongartz :

Proposition 3.3.9 ([5, p. 463]). *Soit Q un carquois et I un idéal admissible de kQ tel que kQ/I soit de dimension finie. Notons J l'idéal de kQ engendré par les flèches. Soient $i, j \in Q_0$. Alors*

$$\dim e_j(I/(IJ + JI))e_i = \dim \text{Ext}_{\text{mod } kQ/I}^2(S_i, S_j)$$

où S_i et S_j sont les représentations simples de kQ correspondant aux sommets i et j .

Rappelons enfin ce théorème de Lenzing :

Théorème 3.3.10 ([50, 5]). *Si A est une k -algèbre de dimension finie et de dimension globale finie, alors tout élément nilpotent de A est dans le sous-groupe additif $[A, A]$ engendré par les commutateurs.*

Théorème 3.3.11. *Supposons qu'il existe une catégorie $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(CG)$ rigide mod $k[G]$ -stable maximale qui n'a pas de mod $k[G]$ -boucle.*

Soit $\mathcal{T}' \in \mathfrak{Add}(CG)^{\text{mod } k[G]}$ rigide mod $k[G]$ -stable maximal, $\mathcal{T}' \in \mathcal{T}'$ basique tel que $\mathcal{T}' = \text{add}(\mathcal{T}')$, $E' = \text{End}_{CG}(\mathcal{T}')$, $\tilde{\mathcal{T}}' = F\mathcal{T}'$, $\tilde{\mathcal{T}}' \in \tilde{\mathcal{T}}'$ basique tel que $\tilde{\mathcal{T}}' = \text{add}(\tilde{\mathcal{T}}')$ et $\tilde{E}' = \text{End}_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{T}}')$. Alors :

1. \mathcal{T}' n'a pas de mod $k[G]$ -boucle ; $\tilde{\mathcal{T}}'$ n'a pas de G -boucle ;
2. $\text{gl. dim}(E') = \text{gl. dim}(\tilde{E}') \begin{cases} = 3 & \text{si } \mathcal{T}' \text{ n'est pas projectif} \\ \leq 2 & \text{sinon} \end{cases}$;
3. \mathcal{T}' et $\tilde{\mathcal{T}}'$ sont amas-basculantes ;
4. \mathcal{T}' et $\tilde{\mathcal{T}}'$ sont rigides maximales ;
5. pour tout E' -modules simples S et S' tels que $\text{add}(k[G] \otimes S) = \text{add}(k[G] \otimes S')$, on a $\text{Ext}_{E'}^1(S, S') = \text{Ext}_{E'}^2(S, S') = 0$; pour tout \tilde{E}' -modules simples S et S' tels que $\text{add}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathbf{g} \otimes S\right) = \text{add}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathbf{g} \otimes S'\right)$, on a $\text{Ext}_{\tilde{E}'}^1(S, S') = \text{Ext}_{\tilde{E}'}^2(S, S') = 0$;
6. \mathcal{T}' n'a pas de mod $k[G]$ -2-cycle ; $\tilde{\mathcal{T}}'$ n'a pas de G -2-cycle.

Démonstration. 1. Grâce au lemme 3.3.3, il suffit de prouver que $\tilde{\mathcal{T}}'$ n'a pas de G -boucle. Pour $g \in G$, montrons que $\tilde{\mathcal{T}}'$ n'a pas de $\langle g \rangle$ -boucle. Pour ce faire, on va montrer que \tilde{E}' vérifie les conditions du théorème 3.3.7. Par la proposition 3.3.6, \tilde{E}' est de dimension globale finie puisque \tilde{E} l'est. D'après la proposition 2.1.7, il existe $X \in \mathcal{C}\langle g \rangle$ tel que $FX \simeq \tilde{\mathcal{T}}'$. Cela induit une action de $\langle g \rangle$ sur $\tilde{E}' \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}\langle g \rangle}(X, X)$. En utilisant les proposition 2.1.7 et 2.1.13, on voit alors que l'on peut trouver une décomposition de FX en somme directe d'indécomposables telle que $\langle g \rangle$ agisse dessus en permutant ses facteurs. Si on prend la famille d'idempotents primitifs

correspondant à cette décomposition, $\langle g \rangle$ agit dessus par permutation et donc le théorème 3.3.7 s'applique. Il est clair que l'action de g sur le carquois de \tilde{E}' est la même que celle de g sur le carquois d'Auslander-Reiten de \tilde{T}' ce qui implique le résultat.

2. En utilisant le point précédent, c'est une conséquence directe de la proposition 3.3.5.
3. Avec le point précédent, c'est une conséquence du théorème 3.3.8.
4. C'est une conséquence immédiate du point précédent. Notons qu'être rigide maximal et $\text{mod } k[G]$ -stable est plus fort qu'être rigide $\text{mod } k[G]$ -stable maximal.
5. Comme \mathcal{T}' (resp. $\tilde{\mathcal{T}}'$) n'a pas de $\text{mod } k[G]$ -bouble (resp. G -boucle), $\text{Ext}_{E'}^1(S, S') = 0$ (resp. $\text{Ext}_{E'}^1(S, S') = 0$). Pour Ext^2 , si $X \in \mathcal{T}'$ n'est pas projectif, S_X a la résolution projective suivante construite dans la proposition 3.3.5 :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T'', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \rightarrow S_X \rightarrow 0$$

Comme $\text{add}(T'') \cap \text{add}(k[G] \otimes X) = 0$, $\text{Hom}_{E'}(\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T'', T), S_{X'}) = 0$ et du coup $\text{Ext}_{E'}^2(S_X, S_{X'}) = 0$ pour tout indécomposable $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$.

Si X est projectif, on avait la résolution projective

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(Z, T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(X, T) \rightarrow S_X \rightarrow 0$$

Comme $\text{add}(k[G] \otimes X) \cap \text{add}(T') = 0$, $\text{add}(k[G] \otimes X) \cap \text{add}(Z) = 0$ et par le même argument que ci-dessus, $\text{Ext}_{E'}^2(S_X, S_{X'}) = 0$ pour un indécomposable $X' \in \text{add}(k[G] \otimes X)$. Le même argument est valable pour \tilde{E}' .

6. Il suffit de le montrer pour \mathcal{T}' grâce au lemme 3.3.3. Supposons que \mathcal{T}' a un $\text{mod } k[G]$ -2-cycle. Comme $\text{End}_{\mathcal{C}G}(T') \simeq \text{Hom}_{\text{mod } k[G]}(\mathbb{1}, \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}G}(T', T'))$, il existe deux flèches \tilde{a} et \tilde{b} dans le carquois de \tilde{T}' telles que $\tilde{a}\tilde{b}$ soit un G -2-cycle de \tilde{T}' et ab est un $\text{mod } k[G]$ -2-cycle de \mathcal{T}' avec $a = \sum_{g \in G} g \cdot \tilde{a}$ et $b = \sum_{g \in G} g \cdot \tilde{b}$. Comme ab est nilpotent, le théorème 3.3.10 induit l'identité suivante dans E' :

$$ab = \sum_{i=1}^n \lambda_i [u_i, v_i]$$

où pour chaque i , $u_i = \sum_{g \in G} g \cdot \tilde{u}_i$ et $v_i = \sum_{g \in G} g \cdot \tilde{v}_i$ où \tilde{u}_i et \tilde{v}_i sont des chemins du carquois de \tilde{T}' . On peut supposer que $\tilde{u}_1 = \tilde{a}$ et $\tilde{v}_1 = \tilde{b}$ et sans perte de généralité que, $\tilde{a}\tilde{b}$ et $\tilde{b}\tilde{a}$ n'apparaissent pas comme terme des $[\tilde{u}_i, \tilde{v}_i]$ pour $i \geq 2$.

Si $\lambda_1 \neq 1$,

$$\tilde{a}\tilde{b} = e_{t(\tilde{a})} \tilde{a} \tilde{b} e_{s(\tilde{b})} = \frac{1}{1 - \lambda_1} \left(-\lambda_1 e_{t(\tilde{a})} \tilde{b} \tilde{a} e_{s(\tilde{b})} + \sum_{i=2}^n e_{t(\tilde{a})} \lambda_i [u_i, v_i] e_{s(\tilde{b})} \right)$$

est une identité non triviale dans $\text{End}_{\mathcal{C}}(FT')$ (c'est-à-dire une identité fautive dans le carquois). Elle contient $\tilde{a}\tilde{b}$ avec un coefficient non nul dans le membre de gauche.

Si $\lambda_1 = 1$, comme $\tilde{a}\tilde{b}$ est un G -2-cycle, il existe $h \in G$ tel que $t(\tilde{a}) = h \cdot s(\tilde{b})$ et

$$e_{h \cdot t(\tilde{b})}(h \cdot \tilde{b})\tilde{a}e_{s(\tilde{a})} = - \sum_{i=2}^n \lambda_i e_{h \cdot t(\tilde{b})}[u_i, v_i]e_{s(\tilde{a})}$$

est une identité non triviale dans $\text{End}_{\mathcal{C}}(FT')$. Elle contient $(g \cdot \tilde{b})a$ avec un coefficient non nul dans le terme de gauche.

Dans les deux cas, on a une relation non triviale et par conséquent, en utilisant la proposition 3.3.9, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(S_{s(\tilde{b})}, S_{t(\tilde{a})}) \neq 0$ ou $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(S_{s(\tilde{a})}, S_{t(h \cdot \tilde{b})}) \neq 0$ ce qui contredit le point précédent. \square

Définition 3.3.12. Soient $X, Y \in \mathcal{C}G$. On notera $X \sim Y$ si $\text{add}(k[G] \otimes X) = \text{add}(k[G] \otimes Y)$ et on dira que X et Y sont équivalents modulo $\text{mod } k[G]$.

Récapitulons les résultats concernant la mutation :

Théorème 3.3.13. *Supposons qu'il existe une catégorie $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)$ rigide $\text{mod } k[G]$ -stable maximale qui n'a pas de $\text{mod } k[G]$ -boucle. Soit $\mathcal{T}' \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)$ rigide $\text{mod } k[G]$ -stable maximale. Alors \mathcal{T}' est amas-basculante (donc rigide maximale).*

Soit $X \in \mathcal{T}'$ un indécomposable dans $\mathcal{C}G$, et $\mathcal{T}'_0 \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ vérifiant $X \notin \mathcal{T}'_0$ et $\text{add}(\mathcal{T}'_0, k[G] \otimes X) = \mathcal{T}'$. Si X est projectif, tout $Y \in \mathcal{C}G$ indécomposable tel que $\text{add}(\mathcal{T}'_0, k[G] \otimes Y)$ soit rigide maximale est équivalent à X modulo $\text{mod } k[G]$.

Si $X' \in \mathcal{T}'$ est équivalent modulo $\text{mod } k[G]$ à X et si $\{X, Y\}, \{X', Y'\}$ sont deux paires d'échange, alors Y et Y' sont équivalents modulo $\text{mod } k[G]$. Si \bar{X} et \bar{Y} désignent les classes d'équivalence de X et Y modulo $\text{mod } k[G]$, on notera alors

$$\mu_{\bar{X}}(\mathcal{T}') = \text{add}(\mathcal{T}'_0, k[G] \otimes Y).$$

On a ainsi $\mu_{\bar{X}}(\mu_{\bar{Y}}(\mathcal{T}')) = \mathcal{T}'$.

Démonstration. Tous ces résultats sont contenus dans la proposition 3.1.2, les lemmes 3.3.4 et 3.1.5, le corollaire 3.1.10 et le théorème 3.3.11. \square

3.4 Matrices d'échange

On supposera, comme dans la section précédente, que tous les projectifs indécomposables de \mathcal{C} ont des quasi-approximations rigides à gauche. Tous les résultats de cette partie restent vrais si l'on suppose à la place que tous les projectifs indécomposables de \mathcal{C} ont des quasi-approximations rigides à droite.

Comme dans la section précédente, soit $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ finiment engendré, $\text{mod } k[G]$ -stable rigide maximal. On suppose de plus que \mathcal{T} n'a pas de $\text{mod } k[G]$ -boucle. Soit $\tilde{\mathcal{T}} = F\mathcal{T}$. Grâce à la section précédente, \mathcal{T} et $\tilde{\mathcal{T}}$ sont amas-basculantes. Soient $T \in \mathcal{C}G$ et $\tilde{T} \in \mathcal{C}$ basiques tels que $\mathcal{T} = \text{add}(T)$ et $\tilde{\mathcal{T}} = \text{add}(\tilde{T})$.

On note Q le carquois de Gabriel de $\text{End}_{\mathcal{C}G}(T)$ et \tilde{Q} celui de $\text{End}_{\mathcal{C}}(\tilde{T})$. On a une bijection canonique entre les ensembles $Q_0 / \text{mod } k[G]$ (c'est-à-dire l'ensemble des classes

d'équivalence modulo $\text{mod } k[G]$ comme p. 126) et \tilde{Q}_0/G . Si $\bar{X} \in \tilde{Q}_0/G$, on notera $\bar{X}^\circ \in Q_0/\text{mod } k[G]$ l'image de \bar{X} par cette bijection. Notons $P \subset Q_0$ et $\tilde{P} \subset \tilde{Q}_0$ l'ensemble des sommets correspondant aux projectifs.

Définition 3.4.1. Si $\bar{X} \in (\tilde{Q}_0 \setminus \tilde{P})/G$ et $\bar{Z} \in \tilde{Q}_0/G$, notons

$$b_{\bar{Z}\bar{X}} = \frac{\#\{q \in \tilde{Q}_1 \mid s(q) \in \bar{Z}, t(q) \in \bar{X}\} - \#\{q \in \tilde{Q}_1 \mid s(q) \in \bar{X}, t(q) \in \bar{Z}\}}{\#\bar{X}}$$

Notons $B(\mathcal{T})$ la matrice ayant ces coefficients. On l'appellera matrice d'échange de \mathcal{T} .

Remarques 3.4.2. – Comme $\tilde{\mathcal{T}}$ n'a pas de G -2-cycles, $\#\{q \in \tilde{Q}_1 \mid s(q) \in \bar{X}, t(q) \in \bar{Z}\} = 0$ ou $\#\{q \in \tilde{Q}_1 \mid s(q) \in \bar{Z}, t(q) \in \bar{X}\} = 0$.

– Comme $\tilde{\mathcal{T}}$ n'a pas de G -boucle, $b_{\bar{X}\bar{X}} = 0$.

– On voit facilement que

$$\#\{q \in \tilde{Q}_1 \mid s(q) \in \bar{Z}, t(q) = X\} - b_{\bar{Z}\bar{X}} = \#\{q \in \tilde{Q}_1 \mid s(q) = X, t(q) \in \bar{Z}\}$$

pour tout $X \in \bar{X}$ et du coup $B(\mathcal{T})$ est une matrice à coefficients entiers.

Remarque 3.4.3. Si G est le groupe trivial, on retrouve les mêmes mutations et les mêmes matrices que dans [31] par exemple.

Fixons maintenant les trois mutations et les trois matrices suivantes :

- μ sur \mathcal{CG} est définie comme avant et $B(\mathcal{T})$ comme ci-dessus ;
- $\tilde{\mu}$ est la même mutation sur \mathcal{C} que dans [31] et $\tilde{B}(\mathcal{T})$ est la matrice d'échange correspondant ;
- μ° est la même mutation sur \mathcal{CG} que dans [31] et $B^\circ(\mathcal{T})$ est la matrice correspondante.

Proposition 3.4.4. Soient $\bar{X} \in (\tilde{Q}_0 \setminus \tilde{P})/G$ et $\bar{Z} \in \tilde{Q}_0/G$. Alors

$$1. F\mu_{\bar{X}}(\mathcal{T}) = \left(\prod_{X' \in \bar{X}} \tilde{\mu}_{X'} \right) (\tilde{\mathcal{T}}) \text{ où les } \tilde{\mu}_{X'} \text{ commutent.}$$

$$2. \text{ Pour tout } X \in \bar{X}, b_{\bar{Z}\bar{X}} = \sum_{Z \in \bar{Z}} \tilde{b}_{ZX}.$$

$$3. \mu_{\bar{X}}(\mathcal{T}) = \left(\prod_{X' \in \bar{X}^\circ} \mu_{X'}^\circ \right) (\mathcal{T}) \text{ où les } \mu_{X'}^\circ \text{ commutent.}$$

$$4. \text{ Pour tout } Z \in \bar{Z}^\circ, b_{\bar{Z}\bar{X}} = \frac{\#Z}{\ell(Z)} \sum_{X \in \bar{X}^\circ} \frac{\ell(X)}{\#X} b_{ZX}^\circ.$$

Démonstration. 1. Soit $0 \rightarrow X \rightarrow T \rightarrow Y \rightarrow 0$ la suite exacte courte admissible de \mathcal{CG} correspondant à la mutation μ_X dans \mathcal{T} . Alors X et Y sont voisins et par conséquent, on peut écrire $\bar{X} = \{X_i \mid i \in \llbracket 1, \#X \rrbracket\}$ et $\bar{Y} = \{Y_i \mid i \in \llbracket 1, \#Y \rrbracket\}$ de

telle façon que pour tout $i, j \in \llbracket 1, \ell(X) \rrbracket = \llbracket 1, \ell(Y) \rrbracket$, on ait $\dim \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ en utilisant le lemme 3.1.8. Du coup, pour $i \in \llbracket 1, \ell(X) \rrbracket$, il existe une suite exacte courte admissible $0 \rightarrow X_i \rightarrow T_i \rightarrow Y_i \rightarrow 0$ de \mathcal{C} . Comme $\tilde{\mathcal{T}}$ n'a pas de G -boucle, aucun des X_i et Y_i n'est dans $\text{add}(T_i)$ et finalement, le résultat est clair.

2. C'est une conséquence facile de la définition.
3. C'est la même preuve que le premier point.
4. Soient $X \in \bar{X}$ et $\mathcal{T}_0 \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\text{mod } k[G]}$ tels que $\text{add}(X[G]) \cap F\mathcal{T}_0 = 0$ et $\mathcal{T} = \text{add}(\mathcal{T}_0, X[G])$. Soit $0 \rightarrow X \rightarrow T \rightarrow Y \rightarrow 0$ une suite exacte courte admissible de \mathcal{C} correspondant à la mutation $\tilde{\mu}_X$. Comme $\tilde{\mathcal{T}}$ n'a pas de G -boucle, $T \in \text{add}(F\mathcal{T}_0)$. Par conséquent, en utilisant le lemme 2.2.13 et le corollaire 1.2.43,

$$0 \rightarrow X[G] \rightarrow T[G] \rightarrow Y[G] \rightarrow 0 \simeq \bigoplus_{X' \in \bar{X}^\circ} [0 \rightarrow X' \rightarrow T'_{X'} \rightarrow Y'_{X'} \rightarrow 0]^{\ell(X')/\#X'}$$

où, pour tout $X' \in \bar{X}^\circ$, $0 \rightarrow X' \rightarrow T'_{X'} \rightarrow Y'_{X'} \rightarrow 0$ est une suite exacte courte admissible correspondant à $\mu_{X'}^\circ$ en \mathcal{T} et les exposants $\ell(X')/\#X'$ proviennent du lemme 2.2.16. Soit maintenant $Z \in \bar{Z}^\circ$. Par définition de $B^\circ(T)$, le nombre de copie de Z dans le terme du milieu du membre de droite est

$$\sum_{X' \in \bar{X}^\circ} \frac{\ell(X')}{\#X'} \max(0, -b_{ZX'}^\circ) = \max \left(0, - \sum_{X' \in \bar{X}^\circ} \frac{\ell(X')}{\#X'} b_{ZX'}^\circ \right)$$

l'égalité provenant du fait que tous les b_{ZX}° sont de même signe puisque \mathcal{T} n'a pas de $\text{mod } k[G]$ -2-cycle.

De plus, le nombre de copies de Z dans le terme du milieu du membre de gauche est $\ell(Z)/\#Z$ fois le nombre de copie d'un élément de \bar{Z} dans T , soit

$$\frac{\ell(Z)}{\#Z} \sum_{Z' \in \bar{Z}} \max(0, -\tilde{b}_{Z'X}) = \max \left(0, - \frac{\ell(Z)}{\#Z} \sum_{Z' \in \bar{Z}} \tilde{b}_{Z'X} \right) = \max \left(0, - \frac{\ell(Z)}{\#Z} b_{\bar{Z}X} \right).$$

On en déduit l'égalité :

$$\max \left(0, - \sum_{X' \in \bar{X}^\circ} \frac{\ell(X')}{\#X'} b_{ZX'}^\circ \right) = \max \left(0, - \frac{\ell(Z)}{\#Z} b_{\bar{Z}X} \right)$$

et en utilisant le même argument pour la suite exacte courte admissible correspondant à la mutation de Y vers X , on en déduit que

$$\max \left(0, \sum_{X' \in \bar{X}^\circ} \frac{\ell(X')}{\#X'} b_{ZX'}^\circ \right) = \max \left(0, \frac{\ell(Z)}{\#Z} b_{\bar{Z}X} \right).$$

La combinaison de ces deux égalités donne le résultat. \square

Remarque 3.4.5. Le deuxième point de la proposition précédente est la formule proposée par Dupont dans [19]. Le quatrième point est une généralisation de la formule donnée par Yang dans [61] pour les algèbres amassées de type fini (pour un groupe cyclique).

Proposition 3.4.6. *Soit $X \in \mathcal{T}$ indécomposable non projectif dans \mathcal{CG} . Alors*

$$B(\mu_X(\mathcal{T})) = \mu_{\bar{X}}(B(\mathcal{T}))$$

où \bar{X} est l'orbite de X dans $Q_0/\text{mod } k[G]$ et $\mu_{\bar{X}}$ la mutation usuelle des matrices définie par Fomin et Zelevinsky.

Démonstration. Le résultat est connu pour $\tilde{B}(\mathcal{T})$ et $\tilde{\mu}$ (voir [31] par exemple). Posons $\bar{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons par ${}^i\tilde{b}_{ZY}$ les coefficients de la matrice

$$\tilde{B}\left(\tilde{\mu}_{X_i}\tilde{\mu}_{X_{i-1}}\cdots\tilde{\mu}_{X_1}(\tilde{\mathcal{T}})\right).$$

Alors, par une récurrence immédiate, en utilisant le fait que $\tilde{\mathcal{T}}$ n'a ni G -boucle ni G -2-cycle, on a

- ${}^i\tilde{b}_{ZY} = -\tilde{b}_{ZY}$ si $Z = X_j$ ou $Y = X_j$ avec $1 \leq j \leq i$;
- ${}^i\tilde{b}_{ZY} = \tilde{b}_{ZY}$ si $Z = X_j$ ou $Y = X_j$ avec $i < j \leq n$;
- ${}^i\tilde{b}_{ZY} = \tilde{b}_{ZY} + \sum_{j=1}^i \frac{|\tilde{b}_{ZX_j}\tilde{b}_{X_jY} + \tilde{b}_{ZX_j}\tilde{b}_{X_jY}|}{2}$ sinon.

En notant *b les coefficients de $B(\mu_X(\mathcal{T}))$, en utilisant la proposition précédente, pour $\bar{Y} \in (\tilde{Q}_0 \setminus \tilde{P})/G$ et $Z \in \tilde{Q}_0/G$, pour $Y \in \bar{Y}$,

- ${}^*b_{\bar{ZY}} = \sum_{Z \in \bar{Z}} n\tilde{b}_{ZY} = \sum_{Z \in \bar{Z}} (-\tilde{b}_{ZY}) = -b_{\bar{ZY}}$ si $\bar{Z} = \bar{X}$ ou $\bar{Y} = \bar{X}$;
- ${}^*b_{\bar{ZY}} = \sum_{Z \in \bar{Z}} n\tilde{b}_{ZY} = \sum_{Z \in \bar{Z}} \left[\tilde{b}_{ZY} + \sum_{j=1}^n \frac{|\tilde{b}_{ZX_j}\tilde{b}_{X_jY} + \tilde{b}_{ZX_j}\tilde{b}_{X_jY}|}{2} \right]$ sinon. Puis, en utili-

sant le fait que tous les \tilde{b}_{ZX_j} (resp. les \tilde{b}_{X_jY}) sont de même signe (puisque $\tilde{\mathcal{T}}$ n'a pas de G -2-cycle),

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in \bar{Z}} \sum_{j=1}^n \frac{|\tilde{b}_{ZX_j}\tilde{b}_{X_jY} + \tilde{b}_{ZX_j}\tilde{b}_{X_jY}|}{2} &= \sum_{j=1}^n \frac{\left| \sum_{Z \in \bar{Z}} \tilde{b}_{ZX_j} \tilde{b}_{X_jY} + \left(\sum_{Z \in \bar{Z}} \tilde{b}_{ZX_j} \right) |\tilde{b}_{X_jY}| \right|}{2} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{|b_{\bar{ZX}}\tilde{b}_{X_jY} + b_{\bar{ZX}}\tilde{b}_{X_jY}|}{2} \\ &= \frac{|b_{\bar{ZX}}| \left(\sum_{j=1}^n \tilde{b}_{X_jY} \right) + b_{\bar{ZX}} \left| \sum_{j=1}^n \tilde{b}_{X_jY} \right|}{2} \\ &= \frac{|b_{\bar{ZX}}|b_{\bar{XY}} + b_{\bar{ZX}}|b_{\bar{XY}}|}{2} \end{aligned}$$

et le résultat est démontré. □

3.5 Caractères d'amas

Les idées développées ici sont en grande partie inspirées de [26]. En particulier, on utilisera certains des résultats de cet article sans les redémontrer.

Soit k un corps algébriquement clos. Soit \mathcal{C} une k -catégorie exacte 2-Calabi-Yau, Hom-finie, Krull-Schmidt, munie d'une action d'un groupe fini G tel que la caractéristique de k ne divise pas $\#G$. On suppose que cette action est 2-Calabi-Yau au sens de la définition 2.2.27.

On supposera que tous les projectifs indécomposables de \mathcal{C} ont des quasi-approximations rigides à gauche. Tous les résultats de cette partie restent vrais si l'on suppose à la place que tous les objets projectifs indécomposables de \mathcal{C} ont des quasi-approximations rigides à droite. On supposera aussi qu'il existe $\mathcal{T} \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^G$ rigide G -stable maximale sans G -boucle. Soit $T \in \mathcal{C}$ basique tel que $\mathcal{T} = \text{add}(T)$. Ainsi, \mathcal{T} est amas-basculante d'après le théorème 3.3.13.

On note T_1, T_2, \dots, T_n les indécomposables de \mathcal{T} , les T_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ étant les projectifs. G permute alors $\llbracket 1, n \rrbracket$. Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \bar{i} sa classe d'équivalence modulo G . On note \bar{I} l'ensemble de ces classes d'équivalence.

Notons enfin $E = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note S_i le E -module simple correspondant à T_i (la tête de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i, T)$). On a toutes les hypothèses pour appliquer les résultats de [26].

Notation 3.5.1 ([26]). Pour $L, N \in \text{mod } E$, on notera

$$\langle L, N \rangle_{\tau} = \dim_k \text{Hom}_B(L, N) - \dim_k \text{Ext}_B^1(L, N) ;$$

$$\langle L, N \rangle_3 = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \dim_k \text{Ext}_B^i(L, N).$$

Remarque 3.5.2. On garde la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$ introduite dans [26], mais ici, comme la dimension globale de E est inférieure à 3, cette forme est la forme d'Euler (voir à ce propos [26, remark 2.4]).

Notation 3.5.3. Si $L \in \text{mod } E$, on notera $\mathbf{dim} L$ son image dans $K_0(E)$, c'est-à-dire sa dimension graduée selon les S_i .

Proposition 3.5.4 ([26, proposition 2.1]). *Si $L, N \in \text{mod } E$, alors $\langle L, N \rangle_3$ ne dépend que de $\mathbf{dim} L$ et de N .*

Notation 3.5.5. D'après la proposition précédente, si $L, N \in \text{mod } E$, on peut noter

$$\langle \mathbf{dim} L, N \rangle_3 = \langle L, N \rangle_3.$$

Définition 3.5.6. Pour $X \in \mathcal{C}$, définissons le polynôme de Laurent de $\mathbb{Q}(x_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \bar{I}}$

$$P_X = \left(\prod_{i=1}^n x_{\bar{i}}^{\langle \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X), S_i \rangle_{\tau}} \right) \sum_{e \in \mathbb{N}^{\llbracket 1, n \rrbracket}} \left(\chi(\text{Gr}_e(\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, X))) \prod_{i=1}^n x_{\bar{i}}^{-\langle e, S_i \rangle_3} \right)$$

où $\text{Gr}_e(\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, X))$ désigne la variété des sous- E -modules B de $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, X)$ tels que $\mathbf{dim} B = e$ et χ la caractéristique d'Euler-Poincaré par rapport à la cohomologie étale à support propre.

Autrement dit, si l'on note

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{Q}(x_i)_{i \in [1, n]} &\rightarrow \mathbb{Q}(x_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \bar{I}} \\ x_i &\mapsto x_{\bar{i}} \end{aligned}$$

la projection naturelle, $P_X = \pi(X'_X)$ où X'_X est le polynôme de Laurent de $\mathbb{Q}(x_i)_{i \in I}$ défini par Fu et Keller dans [26].

Lemme 3.5.7. *Le polynôme de Laurent P_X ne dépend que de la classe de X modulo \mathbf{G} .*

Démonstration. Comme T est invariant sous l'action de \mathbf{G} , pour tout $g \in G$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \mathfrak{g} \otimes X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{g} \otimes T, \mathfrak{g} \otimes X) = \mathfrak{g}^{-1} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$$

où $\mathrm{mod} E$ est naturellement munie de l'action de G induite par celle sur \mathcal{C} . Par conséquent,

$$\langle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \mathfrak{g} \otimes X), S_i \rangle_{\tau} = \langle \mathfrak{g}^{-1} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X), S_i \rangle_{\tau} = \langle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X), \mathfrak{g} \otimes S_i \rangle_{\tau}$$

ce qui permet de conclure en ce qui concerne le premier facteur. De la même façon, on a

$$\mathrm{Gr}_e(\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, \mathfrak{g} \otimes X)) \simeq \mathrm{Gr}_{g \cdot e}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, X))$$

et

$$\langle e, S_i \rangle_3 = \langle g \cdot e, \mathfrak{g} \otimes S_i \rangle_3$$

ce qui permet de conclure pour le second facteur. □

Notation 3.5.8. On notera

$$P_{\bar{X}} = P_X$$

où \bar{X} est la classe de X modulo \mathbf{G} .

Voici maintenant l'analogie de [26, theorem 2.2] :

Théorème 3.5.9. 1. *Pour $\bar{i} \in \bar{I}$, $P_{\bar{T}_i} = x_{\bar{i}}$.*

2. *Si $X, Y \in \mathcal{C}$, $P_{\bar{X} \oplus \bar{Y}} = P_{\bar{X}} P_{\bar{Y}}$.*

3. *Si $X, Y \in \mathcal{C}$ et $\dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = 1$, et si on prend deux suites exactes courtes admissibles non scindées*

$$0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow Y \rightarrow Z' \rightarrow X \rightarrow 0$$

$$\text{alors } P_{\bar{X}} P_{\bar{Y}} = P_{\bar{Z}} + P_{\bar{Z}'}.$$

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates de [26, theorem 2.2]. □

Corollaire 3.5.10. *Les $P_{\bar{X}}$ vérifient les formules de mutations usuelles de Fomin et Zelevinsky par rapport aux matrices d'échange définies dans la partie précédente. Autrement dit, si $\mathcal{T}'_0 \in \mathfrak{Add}(\mathcal{C}G)^{\mathrm{mod} k[G]}$ et $X, Y \in \mathcal{C}$ indécomposables sont tels que*

- $X, Y \notin \mathcal{T}'_0$,
- $\mathrm{add}(\mathcal{T}'_0, X[G])$ est rigide mod $k[G]$ -stable maximal,
- $\mu_{\bar{X}}(\mathcal{T}') = \mathrm{add}(\mathcal{T}'_0, Y[G])$ où $\mathcal{T}' = \mathrm{add}(\mathcal{T}'_0, X[G])$,

alors

$$P_{\bar{X}}P_{\bar{Y}} = \prod_{\bar{i} \in \bar{I} \mid B(\mathcal{T}')_{\bar{T}'_i \bar{X}} < 0} P_{\bar{T}'_i}^{-B(\mathcal{T}')_{\bar{T}'_i \bar{X}}} + \prod_{\bar{i} \in \bar{I} \mid B(\mathcal{T}')_{\bar{T}'_i \bar{X}} > 0} P_{\bar{T}'_i}^{B(\mathcal{T}')_{\bar{T}'_i \bar{X}}}.$$

Démonstration. Il existe $X_0 \in X[G]$ et $Y_0 \in Y[G]$ qui sont voisins. On peut donc supposer que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = 1$ quitte à changer Y en restant dans la même classe d'équivalence modulo \mathbf{G} . Soit

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$$

une suite exacte courte non scindée. On a vu que dans ce cas, f est une \mathcal{T}'_0 -approximation minimale à gauche et g est \mathcal{T}'_0 -approximation minimale à droite. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le nombre de T'_i apparaissant dans Z est donc

$$\#\{q \in Q'_1 \mid s(q) = X, t(q) = T'_i\}$$

où Q' est le carquois d'Auslander-Reiten de \mathcal{T}' . Du coup, pour $i \in \bar{I}$, le nombre de T'_i avec $i \in \bar{i}$ qui apparaissent dans Z est

$$\#\{q \in Q'_1 \mid s(q) = X, t(q) \in \bar{T}'_i\}$$

et, comme \mathcal{T}' n'a pas de G -boucle, si ce nombre est strictement positif, il est égal par définition à $-B(\mathcal{T}')_{\bar{T}'_i \bar{X}}$, ce qui permet de conclure. Le deuxième terme se traite de la même façon. \square

Notons $\mathcal{A}(\mathcal{C}, G, \mathcal{T})$ la sous-algèbre de $\mathbb{Q}(x_i)_{i \in \bar{I}}$ engendrée par les $P_{\bar{X}}$ où \bar{X} parcourt les classes modulo G d'objets (non forcément rigides) de \mathcal{C} telles que

$$\bigoplus_{X \in \bar{X}} X$$

soit rigide. Notons $\mathcal{A}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ la sous-algèbre de $\mathbb{Q}(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ engendrée par les P'_X (analogues des P_X dans le cas où le groupe est trivial) où X parcourt les objets rigides de \mathcal{C} .

Notons $\mathcal{A}_0(\mathcal{C}, G, \mathcal{T})$ la sous-algèbre de $\mathbb{Q}(x_i)_{i \in \bar{I}}$ engendrée par les $P_{\bar{X}}$ où \bar{X} parcourt les classes d'objets de \mathcal{C} modulo G . Notons $\mathcal{A}_0(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ la sous-algèbre de $\mathbb{Q}(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ engendrée par les P'_X où X parcourt \mathcal{C} .

Corollaire 3.5.11. *On a un diagramme commutatif d'inclusions*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(B(\mathcal{T})) \hookrightarrow & \mathcal{A}(\tilde{B}(\mathcal{T})) / (x_i - x_j)_{i \equiv j} \pmod{G} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{A}(\mathcal{C}, G, \mathcal{T}) \hookrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{C}, \mathcal{T}) / (x_i - x_j)_{i \equiv j} \pmod{G} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{A}_0(\mathcal{C}, G, \mathcal{T}) = & \mathcal{A}_0(\mathcal{C}, \mathcal{T}) / (x_i - x_j)_{i \equiv j} \pmod{G} & \end{array}$$

Démonstration. Tout d'abord, les deux inclusions $\mathcal{A}(B(\mathcal{T})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{C}, G, \mathcal{T})$ et $\mathcal{A}(\tilde{B}(\mathcal{T})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ proviennent du corollaire précédent. Le passage au quotient est immédiat. L'égalité du bas est immédiate. L'inclusion horizontale du milieu provient du fait que pour tout $P_{\bar{X}}$ avec

$$\bigoplus_{X \in \bar{X}} X$$

rigide, $X \in \bar{X}$ est rigide donc $P'_X \in \mathcal{A}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$. L'inclusion horizontale du haut provient du fait que si $P_{\bar{X}}$ et $P_{\bar{Y}}$ sont liés par une chaîne de mutations dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}, G, \mathcal{T})$, alors P'_X et P'_Y le sont aussi dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ d'après le lemme 3.4.4. \square

Remarque 3.5.12. C'est un problème en général difficile de savoir quelles inclusions du diagramme précédent sont des égalités.

Lemme 3.5.13. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. la sous-matrice carrée principale de $B(\mathcal{T})$ encode un diagramme de Dynkin ;
2. la sous-matrice carrée principale de $B^\circ(\mathcal{T})$ encode un diagramme de Dynkin ;
3. la sous-matrice carrée principale de $\tilde{B}(\mathcal{T})$ encode un diagramme de Dynkin.

Démonstration. On peut facilement supposer que tous les diagrammes concernés sont connexes.

On va montrer à l'aide de la proposition 3.4.4 que si la sous-matrice carrée principale de $B(\mathcal{T})$ encode un diagramme de Dynkin alors la sous-matrice carrée principale de $\tilde{B}(\mathcal{T})$ encode un diagramme de Dynkin. Le reste se fait en calculant un nombre fini de cas, ce que l'on fera plus loin (voir le tableau page 139). Notons Δ le diagramme encodé par la sous-matrice carrée principale de $B(\mathcal{T})$ et $\tilde{\Delta}$ le diagramme encodé par la sous-matrice carrée principale de $\tilde{B}(\mathcal{T})$. Supposons que Δ soit un diagramme de Dynkin. Appelons point critique de Δ ou $\tilde{\Delta}$ tout sommet de valuation au moins 3 ou toute arête entre deux sommets correspondant à des racines de longueurs différentes. On observe immédiatement que Δ a au plus un point critique. Si $\tilde{\Delta}$ a un cycle, alors il induit dans Δ soit un cycle soit au moins deux points critiques, donc $\tilde{\Delta}$ est un arbre. Par ailleurs, une orbite sous G de points critiques dans $\tilde{\Delta}$ donne un point critique dans Δ . Il y a donc au plus une telle orbite. Supposons qu'il y ait deux points A et B distincts dans cette orbite. Comme $\tilde{\Delta}$ est un arbre, il y a un unique plus court chemin entre ces deux points, qui est « replié » par l'élément de G qui envoie A sur B . Il est alors facile de voir que le milieu de ce chemin donne soit une boucle soit un deuxième point critique dans Δ , ce qui n'est pas possible. Finalement, $\tilde{\Delta}$ a au plus un point critique, ce qui permet, par disjonction de cas, de conclure. \square

Proposition 3.5.14. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$ a un nombre fini de variables d'amas ;
2. $\mathcal{A}(\tilde{B}(\mathcal{T}))$ a un nombre fini de variables d'amas ;
3. $\mathcal{A}(B^\circ(\mathcal{T}))$ a un nombre fini de variables d'amas ;
4. \mathcal{C} a un nombre fini de classes d'isomorphisme d'objets rigides indécomposables.

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que si la seconde ou la troisième assertion est vérifiée alors la première l'est en utilisant la proposition 3.4.4. Maintenant, si la première assertion est vérifiée, en utilisant les résultats de [23], on sait que $B(\mathcal{T})$ est mutation équivalente à une matrice dont la sous-matrice carrée principale encode un diagramme de Dynkin. Quitte à changer \mathcal{T} , on peut supposer que c'est $B(\mathcal{T})$. Par le lemme précédent,

les sous-matrices carrées principales de $\widetilde{B}(\mathcal{T})$ et de $B^\circ(\mathcal{T})$ encodent des diagrammes de Dynkin, ce qui permet immédiatement de conclure en utilisant à nouveau [23]. Il est clair que si le quatrième point implique les trois premiers. Si le second point est vérifié, on peut supposer par l'argument précédent que la sous-matrice carrée principale de $\widetilde{B}(\mathcal{T})$ encode un diagramme de Dynkin. Par conséquent, en utilisant un théorème de Keller et Reiten [48], la catégorie stable de \mathcal{C} est équivalente à une catégorie amassée, ce qui permet de conclure. \square

3.6 Indépendance linéaire des monômes d'amas

On garde ici les mêmes notations que dans la section précédente. Là encore, les idées sont principalement adaptées de [26].

Définition 3.6.1. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$. On dira que X et Y sont congrus modulo \mathbf{G} si il existe deux décompositions en sommes directes $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_m$ et $Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_m$ telles que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, X_i et Y_i sont équivalents modulo \mathbf{G} (c'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathbf{g} \otimes X_i = Y_i$). De façon équivalente, X et Y sont congrus modulo \mathbf{G} si

$$\bigoplus_{g \in G} \mathbf{g} \otimes X \simeq \bigoplus_{g \in G} \mathbf{g} \otimes Y.$$

Si $X \in \mathcal{C}$, il existe une suite exacte courte admissible

$$0 \rightarrow T_X^1 \rightarrow T_X^2 \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$$

où f est une \mathcal{T} -approximation à droite minimale. D'après le lemme 3.1.1 et par maximalité de \mathcal{T} , $T_X^1 \in \mathcal{T}$. On notera, en suivant [57] et [26],

$$\text{ind}_{\mathcal{T}}(X) = [T_X^0] - [T_X^1] \in K_0(\mathcal{T}).$$

Notons aussi $\text{ind}'_{\mathcal{T}}(X)$ l'image de $\text{ind}_{\mathcal{T}}(X)$ dans $K_0(\mathcal{T})/G$.

Le lemme suivant est inspiré de [17, lemma 2.1] :

Lemme 3.6.2. *Si X est rigide et*

$$0 \rightarrow T_X^1 \xrightarrow{h} T_X^2 \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$$

est la suite exacte courte admissible définie ci-dessus, alors l'orbite de h sous l'action de $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^1) \times \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^2)$ est un ouvert dense de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_X^1, T_X^2)$.

Démonstration. Soit $h' : T_X^1 \rightarrow T_X^2$ un morphisme. Appliquons le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ à notre suite exacte courte admissible pour trouver la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_X^2, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_X^1, X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, X) = 0$$

ce qui permet de voir qu'il existe $\alpha : T_X^2 \rightarrow X$ tel que $\alpha h = f h'$. Par ailleurs, comme f est une \mathcal{T} -approximation à droite, il existe $\beta : T_X^2 \rightarrow T_X^1$ tel que $\alpha = f \beta$. On a

alors $f(\beta h - h') = 0$ donc, comme h est un noyau de f , il existe $\gamma : T_X^1 \rightarrow T_X^1$ tel que $\beta h - h' = h\gamma$. Autrement dit, h' est dans l'image de

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathcal{C}}(T_X^1) \times \text{End}_{\mathcal{C}}(T_X^2) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_X^1, T_X^2) \\ (\gamma, \beta) &\mapsto \beta h - h\gamma \end{aligned}$$

qui n'est autre que la différentielle de l'application

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^1) \times \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^2) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_X^1, T_X^2) \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_2 h g_1^{-1} \end{aligned}$$

à travers les isomorphismes naturels

$$\text{Lie}(\text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^1) \times \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^2)) \simeq \text{End}_{\mathcal{C}}(T_X^1) \times \text{End}_{\mathcal{C}}(T_X^2)$$

et

$$\text{Lie}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_X^1, T_X^2)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_X^1, T_X^2)$$

ce qui permet de conclure. □

Le lemme suivant est inspiré de [17, lemma 2.2] :

Lemme 3.6.3. *Si X est rigide et*

$$0 \rightarrow T_X^1 \xrightarrow{h} T_X^2 \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$$

est la suite exacte courte admissible définie ci-dessus, alors T_X^1 et T_X^2 n'ont pas de facteur indécomposable commun.

Démonstration. Supposons que $T_X^1 \simeq T^0 \oplus \tilde{T}_X^1$ et $T_X^2 \simeq T^0 \oplus \tilde{T}_X^2$ avec $T_X^0 \neq 0$. D'après le lemme précédent, l'orbite de h sous l'action de $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^1) \times \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^2)$ est un ouvert dense de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_X^1, T_X^2)$. Par conséquent, quitte à faire agir $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^1) \times \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^2)$, on peut supposer que h s'écrit

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

où h_{11} est un automorphisme de T^0 . Puis en faisant agir

$$\left(\left(\begin{pmatrix} \text{Id}_{T^0} & -h_{11}^{-1}h_{12} \\ 0 & \text{Id}_{T_X^1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Id}_{T^0} & 0 \\ -h_{21}h_{11}^{-1} & \text{Id}_{T_X^2} \end{pmatrix} \right) \right) \in \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^1) \times \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T_X^2)$$

on voit que f n'est pas minimale. □

Le lemme suivant est directement inspiré de [26, lemma 3.2] et de [17, theorem 2.3] :

Lemme 3.6.4. *Si $X \in \mathcal{C}$ est rigide, alors la classe de congruence de X modulo \mathbf{G} est déterminée par $\text{ind}'_{\mathcal{T}}(X)$. Autrement dit, si $Y \in \mathcal{C}$ est rigide et si $\text{ind}'_{\mathcal{T}}(Y) = \text{ind}'_{\mathcal{T}}(X)$, alors X et Y sont congrus modulo \mathbf{G} .*

Démonstration. Soit

$$0 \rightarrow T_X^1 \rightarrow T_X^2 \xrightarrow{f} X \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow T_Y^1 \rightarrow T_Y^2 \xrightarrow{f'} Y \rightarrow 0$$

les suites exactes courtes admissibles de définition de $\text{ind}_{\mathcal{T}}(X)$ et de $\text{ind}_{\mathcal{T}}(Y)$.

D'après le lemme précédent, T_X^1 et T_X^2 d'une part et T_Y^1 et T_Y^2 d'autre part n'ont pas de facteur indécomposables communs. Par conséquent, $\text{ind}_{\mathcal{T}}(X)$ et $\text{ind}_{\mathcal{T}}(Y)$ les déterminent entièrement et $\text{ind}'_{\mathcal{T}}(X) = \text{ind}'_{\mathcal{T}}(Y)$ déterminent leur classe de congruence modulo \mathbf{G} . En résumé,

$$\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes T_X^1 \simeq \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes T_Y^1 \quad \text{et} \quad \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes T_X^2 \simeq \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes T_Y^2.$$

Si on note $T^1 = T_X^1$ et $T^2 = T_X^2$, on a alors deux suites exactes courtes admissibles

$$0 \rightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes T^1 \xrightarrow{h} \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes T^2 \rightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes T^1 \xrightarrow{h'} \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes T^2 \rightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Y \rightarrow 0.$$

Comme $\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X$ et $\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Y$ sont rigides, en utilisant le lemme 3.6.2, h et h' sont dans la même orbite sous l'action de $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(T^1) \times \text{Aut}_{\mathcal{C}}(T^2)$ et par conséquent,

$$\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes X \simeq \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{g} \otimes Y$$

ce qui montre que X et Y sont congrus modulo \mathbf{G} . □

Adaptons maintenant le [26, corollary 3.4] :

Proposition 3.6.5. *Si le rang de $\tilde{B}(\mathcal{T})$ est maximal alors*

1. $\bar{X} \mapsto P_{\bar{X}}$ induit une injection de l'ensemble des classes de \mathcal{C} modulo G indécomposables non projectives telles que

$$\bigoplus_{X \in \bar{X}} X$$

soit rigide, dans $\mathbb{Q}(x_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \bar{I}}$.

2. Supposons que $E \subset \mathfrak{Add}(\mathcal{C})^{\mathbf{G}}$ est un multienemble fini de catégories rigides \mathbf{G} -stables maximales, et que pour $\mathcal{T}' \in E$, $X_{\mathcal{T}'} \in \mathcal{T}'$ est un objet sans facteur direct projectif. Si de plus les $X_{\mathcal{T}'}$ sont deux à deux non congrus modulo \mathbf{G} , alors les $P_{\bar{X}_{\mathcal{T}'}}$ sont linéairement indépendants.

Démonstration. Le premier point est une conséquence directe du second. Montrons le second. Supposons qu'il y ait une relation de dépendance linéaire

$$\sum_{\mathcal{T}' \in E} c_{\mathcal{T}'} P_{\bar{X}_{\mathcal{T}'}} = 0.$$

En utilisant la preuve de [26, corollary 3.4], on en déduit la relation

$$\sum_{T' \in E} c_{T'} \prod_{i=1}^n x_{\bar{i}}^{[\text{ind}_{\mathcal{T}}(X_{T'}) : [T_i]]} = 0$$

où donc $[\text{ind}_{\mathcal{T}}(X_{T'}) : [T_i]]$ désigne le coefficient de $[T_i]$ dans la décomposition de $\text{ind}_{\mathcal{T}}(X_{T'})$ dans la base $\{[T_j]\}_{j \in [1, n]}$.

$$\sum_{T' \in E} c_{T'} \prod_{\bar{i} \in \bar{I}} x_{\bar{i}}^{[\text{ind}'_{\mathcal{T}}(X_{T'}) : [\bar{T}_i]]} = 0$$

où $[\bar{T}_i]$ est l'orbite de $[T_i]$ dans $K_0(\mathcal{T})/G$. D'après le lemme précédent, les $\text{ind}'_{\mathcal{T}}(X_{T'})$ sont distincts ce qui entraîne la nullité de tous les $c_{T'}$. \square

Corollaire 3.6.6. *Si le rang de $\tilde{B}(\mathcal{T})$ est maximal alors les $P_{\bar{X}}$, où \bar{X} parcourt les classes d'équivalence de \mathcal{C} modulo \mathbf{G} telles que*

$$\bigoplus_{X \in \bar{X}} X$$

soit rigide, sont linéairement indépendants dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}, G, \mathcal{T})$. Les monômes d'amas sont linéairement indépendants dans $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$.

Démonstration. La deuxième partie est une conséquence immédiate de la première puisque les monômes d'amas proviennent de tels \bar{X} à travers l'inclusion $\mathcal{A}(B(\mathcal{T})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{C}, G, \mathcal{T})$. Pour la seconde il suffit de remarquer que dans la décomposition

$$\mathbb{Q}(x_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \bar{I}} = \mathbb{Q}(x_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \bar{I} \mid i \leq r} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \bar{I} \mid i > r}$$

les monômes d'amas sont de la forme $P_{\bar{X}} \otimes M$ où M est un monôme classique de $\mathbb{Q}(x_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \bar{I} \mid i > r}$ et \bar{X} est une classe d'équivalence de \mathcal{C} modulo \mathbf{G} telle que

$$\bigoplus_{X \in \bar{X}} X$$

soit rigide ne contenant pas de facteur projectif, ce qui permet d'appliquer la proposition précédente. \square

Remarque 3.6.7. Bien entendu, dans les deux derniers résultats, on peut remplacer l'hypothèse de maximalité du rang de $\tilde{B}(\mathcal{T})$ par une hypothèse de maximalité sur le rang de $B(\mathcal{T})$ puisque cette dernière hypothèse implique la précédente.

Chapitre 4

Applications

4.1 Sub Q_J et variétés de drapeaux partiels

Cette application est inspirée de [34]. Soit Q un carquois tel que le graphe non orienté sous-jacent $\tilde{\Delta}$ soit un diagramme de Dynkin de type A , D ou E . Soit Γ un groupe agissant sur Q de telle façon que Q ne comporte pas de flèche entre deux sommets d'une même orbite sous l'action de Γ (on dira que l'action est admissible). Cela induit immédiatement une action sur $\tilde{\Delta}$. On notera Q' le carquois construit à la section 2.3. On notera $\tilde{\Delta}_\Gamma$ le diagramme sous-jacent.

On notera Δ le diagramme défini à la section 1.5.

Voici la liste de tous les cas possibles, lorsque Γ est non trivial et lorsque l'on interdit qu'un élément non trivial de Γ stabilise complètement Q .

$\tilde{\Delta}$	Γ	Δ	$\tilde{\Delta}_\Gamma$
$ \begin{array}{c} 1 - 2 - \dots - n - 1 \\ \qquad \qquad \qquad \searrow \\ \qquad \qquad \qquad \qquad n \\ \qquad \qquad \qquad \nearrow \\ 1' - 2' - \dots - (n-1)' \end{array} $	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$ 1 - 2 - \dots - n - 1 \rightleftharpoons n $	$ \begin{array}{c} \qquad \qquad \qquad n_+ \\ 1 - 2 - \dots - n - 1 \\ \qquad \qquad \qquad \searrow \\ \qquad \qquad \qquad \qquad n_- \end{array} $
$ \begin{array}{c} \qquad \qquad \qquad \qquad n \\ 1 - 2 - \dots - n - 1 \\ \qquad \qquad \qquad \searrow \\ \qquad \qquad \qquad \qquad n' \end{array} $	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$ 1 - 2 - \dots - n - 1 \Rightarrow n $	$ \begin{array}{c} 1_+ - 2_+ - \dots - (n-1)_+ \\ \qquad \qquad \qquad \searrow \\ \qquad \qquad \qquad \qquad n \\ \qquad \qquad \qquad \nearrow \\ 1_- - 2_- - \dots - (n-1)_- \end{array} $
$ \begin{array}{c} 1 \\ \qquad \qquad \qquad \searrow \\ \qquad \qquad \qquad \qquad 2 \\ \qquad \qquad \qquad \nearrow \\ 1' \\ \qquad \qquad \qquad \nearrow \\ 1'' \end{array} $	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$ 1 \rightleftharpoons 2 $	$ \begin{array}{c} \qquad \qquad \qquad 2_1 \\ 1 \qquad \qquad \qquad \searrow \\ \qquad \qquad \qquad \qquad 2 \quad e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \qquad \qquad \qquad \nearrow \\ \qquad \qquad \qquad 2 \quad e^{-\frac{2i\pi}{3}} \end{array} $

$\tilde{\Delta}$	Γ	Δ	$\tilde{\Delta}_\Gamma$
	\mathfrak{S}_3		
	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		

Remarque 4.1.1. On observe que tous les diagrammes de Dynkin non simplement lacés peuvent être réalisés comme Δ pour un $\tilde{\Delta}$ et un Γ appropriés.

Soient G et \tilde{G} des groupes de Lie connexes et simplement connexes de type Δ et $\tilde{\Delta}$. Soient B (resp. B_-, N, N_-) et \tilde{B} (resp. $\tilde{B}_-, \tilde{N}, \tilde{N}_-$) des sous-groupes de Borel (resp. le sous-groupe de Borel opposé, les sous-groupes unipotents maximaux correspondant) de G et \tilde{G} . Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_-, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}_-, \tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{b}}, \tilde{\mathfrak{b}}_-, \tilde{\mathfrak{n}}$ et $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ les algèbres de Lie de ces groupes. On note $(\tilde{e}_i)_{i \in Q_0}$ (resp. $(\tilde{f}_i)_{i \in Q_0}$) les générateurs de Serre de l'algèbre enveloppante $U(\tilde{\mathfrak{n}})$ (resp. $U(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$) et $(e_{\bar{i}})_{\bar{i} \in Q_0/\Gamma}$ (resp. $(f_{\bar{i}})_{\bar{i} \in Q_0/\Gamma}$) ceux de $U(\mathfrak{n})$ (resp. $U(\mathfrak{n}_-)$). On pose $h_i = [e_i, f_i]$ et $\tilde{h}_i = [\tilde{e}_i, \tilde{f}_i]$.

Comme Γ agit sur $\tilde{\Delta}$, il agit aussi sur $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ en prolongeant son action sur les générateurs de Chevalley.

Notation 4.1.2. Si $i \in Q_0$, on notera x_i le sous-groupe à un paramètre de \tilde{N} défini par

$$x_i(t) = \exp(te_i).$$

Soient $X \in \text{mod } \Lambda_Q$ et $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_n$ un mot sur Q_0 . On notera $\Phi_{X, \mathbf{i}}$ la sous-variété (fermée) de

$$\text{Gr}_0(X) \times \text{Gr}_1(X) \times \dots \times \text{Gr}_{n-2}(X) \times \text{Gr}_{n-1}(X)$$

formée des $(X_0, X_1, \dots, X_{n-2}, X_{n-1})$ tels que

- pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $X_{j-1} \subset X_j$;
- pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $X_j/X_{j-1} \simeq S_{i_j}$;
- $X/X_{n-1} \simeq S_{i_n}$.

Le résultat suivant est obtenu par dualité à partir de construction lagrangienne de $U(\mathfrak{n})$ par Lusztig [51], [52].

Théorème 4.1.3 ([31, §9]). *Pour tout $X \in \text{mod } \Lambda_Q$, il existe un unique $\varphi_X \in \mathbb{C}[N]$ tel que pour tout mot \mathbf{i} sur Q_0 , et tout $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^n$ (où n est la longueur de \mathbf{i}),*

$$\varphi_X(x_{i_1}(t_1)x_{i_2}(t_2)\dots x_{i_n}(t_n)) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \chi(\Phi_{X, \mathbf{i}^{\mathbf{a}}}) \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}!}$$

où

$$\begin{aligned} - \mathbf{i}^{\mathbf{a}} &= \underbrace{i_1 \dots i_1}_{a_1} \underbrace{i_2 \dots i_2}_{a_2} \dots \underbrace{i_n \dots i_n}_{a_n}; \\ - \mathbf{t}^{\mathbf{a}} &= t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_n^{a_n}; \\ - \mathbf{a}! &= a_1! a_2! \dots a_n!. \end{aligned}$$

Notation 4.1.4. Pour $X \in \text{mod } \Lambda_Q$, on note $\psi_X = \kappa(\varphi_X)$ où κ est défini au corollaire 1.5.3.

De l'action de Γ sur Q , on déduit une action de Γ sur kQ puis sur Λ_Q puis sur $\text{mod } \Lambda_Q$ (voir section 2.3). En suivant la preuve [33, theorem 3, §8], on voit facilement que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\Lambda_Q}^1(-1, -2) & \xrightarrow{\mathbf{g}^{\otimes -}} & \text{Ext}_{\Lambda_Q}^1(\mathbf{g} \otimes -1, \mathbf{g} \otimes -2) \\ \downarrow c & & \downarrow c \\ \text{Ext}_{\Lambda_Q}^1(-2, -1)^* & \xleftarrow{(\mathbf{g}^{\otimes -})^*} & \text{Ext}_{\Lambda_Q}^1(\mathbf{g} \otimes -2, \mathbf{g} \otimes -1)^* \end{array}$$

où c est l'isomorphisme de $\text{Ext}_{\Lambda_Q}^1(-1, -2)$ dans $\text{Ext}_{\Lambda_Q}^1(-2, -1)^*$, autrement dit que l'action de Γ sur $\text{mod } \Lambda_Q$ est 2-Calabi-Yau au sens de la définition 2.2.27.

Lemme 4.1.5. *Pour $X \in \text{mod } \Lambda_Q$ et $g \in \Gamma$,*

$$\psi_{\mathbf{g}^{\otimes X}} = \psi_X.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{g}^{\otimes X}}(x_{i_1}(t_1)x_{i_2}(t_2)\dots x_{i_n}(t_n)) &= \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \chi(\Phi_{\mathbf{g}^{\otimes X}, \mathbf{i}^{\mathbf{a}}}) \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}!} \\ &= \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \chi(\Phi_{X, g^{-1} \cdot \mathbf{i}^{\mathbf{a}}}) \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}!} \\ &= \varphi_X(x_{g^{-1} \cdot i_1}(t_1)x_{g^{-1} \cdot i_2}(t_2)\dots x_{g^{-1} \cdot i_n}(t_n)) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Notation 4.1.6. On notera

$$\psi_{\bar{X}} = \psi_X$$

où \bar{X} est la Γ -orbite de X .

Théorème 4.1.7 ([29, lemma 7.3] et [31, theorem 9.2]). 1. Si $X, Y \in \text{mod } \Lambda_Q$, $\varphi_{X \oplus Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

2. Si $X, Y \in \text{mod } \Lambda_Q$ et $\dim \text{Ext}_{\Lambda_Q}^1(X, Y) = 1$, et si on prend deux suites exactes courtes admissibles non scindées

$$0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow Y \rightarrow Z' \rightarrow X \rightarrow 0$$

alors $\varphi_X \varphi_Y = \varphi_Z + \varphi_{Z'}$.

Corollaire 4.1.8. 1. Si $X, Y \in \text{mod } \Lambda_Q$, $\psi_{\overline{X \oplus Y}} = \psi_{\overline{X}} \psi_{\overline{Y}}$.

2. Si $X, Y \in \text{mod } \Lambda_Q$ et $\dim \text{Ext}_{\Lambda_Q}^1(X, Y) = 1$, et si on prend deux suites exactes courtes admissibles non scindées

$$0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow Y \rightarrow Z' \rightarrow X \rightarrow 0$$

alors $\psi_{\overline{X}} \psi_{\overline{Y}} = \psi_{\overline{Z}} + \psi_{\overline{Z'}}$.

Soit maintenant $J \subset Q_0$ non vide, stable sous l'action de Γ et $K = Q_0 \setminus J$. La catégorie $\text{Sub } Q_J$ a été définie à la section 1.4.1.

Lemme 4.1.9. Tous les projectifs de $\text{Sub } Q_J$ possèdent des quasi-approximations rigides à droite.

Démonstration. Tout d'abord, pour tout Λ_Q -module simple S ,

$$\bigoplus_{g \in \Gamma} \mathfrak{g} \otimes S$$

est rigide puisque l'action de Γ sur Q est admissible. Par ailleurs, les injectifs L_i de $\text{Sub } Q_J$ construits explicitement dans [34, 3.3] ont une tête simple. Il est alors immédiat que l'on peut appliquer le lemme 3.2.4. \square

Notation 4.1.10. Si $i \in Q_0$, on note \mathcal{E}_i^\dagger le foncteur de $\text{mod } \Lambda_Q$ dans lui-même qui à un module X associe le quotient de X par la plus grande puissance possible de S_i .

Proposition 4.1.11 ([34, proposition 5.1]). Les \mathcal{E}_i^\dagger satisfont les relations suivantes

1. $\mathcal{E}_i^\dagger \mathcal{E}_i^\dagger = \mathcal{E}_i^\dagger$;
2. $\mathcal{E}_i^\dagger \mathcal{E}_j^\dagger = \mathcal{E}_j^\dagger \mathcal{E}_i^\dagger$ s'il n'y a pas d'arête entre i et j dans Δ ;
3. $\mathcal{E}_i^\dagger \mathcal{E}_j^\dagger \mathcal{E}_i^\dagger = \mathcal{E}_j^\dagger \mathcal{E}_i^\dagger \mathcal{E}_j^\dagger$ si il y a une arête entre i et j dans Δ .

Notation 4.1.12. Si $\bar{i} \in Q_0/\Gamma$, on note

$$\underline{\mathcal{E}}_{\bar{i}}^\dagger = \prod_{i \in \bar{i}} \mathcal{E}_i^\dagger$$

qui est bien défini puisque les \mathcal{E}_i^\dagger commutent. Ce foncteur envoie les objets Γ -stables de $\text{mod } \Lambda_Q$ sur des objets Γ -stables.

Notons $\widetilde{\Delta}_K$ (resp. Δ_K) la restriction du diagramme $\widetilde{\Delta}$ à K (resp. du diagramme Δ à K/Γ). Notons W le groupe de Weyl de Δ , \widetilde{W} celui de $\widetilde{\Delta}$, W_K celui de Δ_K et \widetilde{W}_K celui de $\widetilde{\Delta}_K$.

On note $(\sigma_i)_{i \in Q_0}$ (resp. $(\sigma_{\bar{i}})_{i \in Q_0/\Gamma}$) les générateurs de \widetilde{W} (resp. W). On a alors un morphisme injectif

$$\begin{aligned} W &\rightarrow \widetilde{W} \\ \sigma_{\bar{i}} &\mapsto \prod_{i \in \bar{i}} \sigma_i \end{aligned}$$

qui se restreint en un morphisme de W_K dans \widetilde{W}_K .

Proposition 4.1.13. *Soit \mathbf{i} une expression de l'élément de plus grande longueur ℓ de W dont un facteur (à gauche) est une expression de l'élément de plus grande longueur de W_K . Alors*

$$T_{\mathbf{i}} = \bigoplus_{m=1}^{\ell} \mathcal{E}_{\bar{i}_1}^{\dagger} \mathcal{E}_{\bar{i}_2}^{\dagger} \dots \mathcal{E}_{\bar{i}_m}^{\dagger} \left(\bigoplus_{i \in \bar{i}_m} Q_i \right) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} Q_i$$

à un facteur direct $T_{\mathbf{i},K}$ qui est rigide maximal et Γ -stable dans $\text{Sub } Q_J$.

Démonstration. La seule chose qui n'est pas dans [34, proposition 7.3] est que $T_{\mathbf{i},K}$ est Γ -stable. C'est immédiat par définition des foncteurs $\mathcal{E}_{\bar{i}}^{\dagger}$. \square

Exemple 4.1.14. On suppose ici que $\widetilde{\Delta} = A_5$ que l'on indexe de la façon suivante :

$$a \text{ --- } b \text{ --- } c \text{ --- } b' \text{ --- } a'$$

sur lequel on fait agir $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de la seule façon possible non triviale de telle sorte que $\Delta = C_3$ indexé de la façon suivante :

$$a \text{ --- } b \text{ } \Longleftarrow \text{ } c$$

On fixe $J/\Gamma = \{c\}$. On prend alors $\mathbf{i} = (a, b, a, c, b, a, c, b, c)$ qui convient. Il est alors facile

de calculer

$$T_{\mathbf{i}} =$$

et donc

$$T_{\mathbf{i},K} =$$

Fixons maintenant un $T = T_{\mathbf{i},K}$ comme dans la proposition. Posons $\mathcal{T} = \text{add}(T)$.

Lemme 4.1.15. *La catégorie \mathcal{T} n'a pas de Γ -boucle ni de Γ -2-cycle.*

Démonstration. Par [34], \mathcal{T} est amas-basculante et $\text{End}_{\text{Sub } Q_J}(T)$ est de dimension globale finie et elle n'a donc pas de Γ -boucle ni de Γ -2-cycle d'après le théorème 3.3.11. \square

Finalement, on a toutes les hypothèses pour utiliser les résultats de la partie 3.5 dont on reprendra ici les notations.

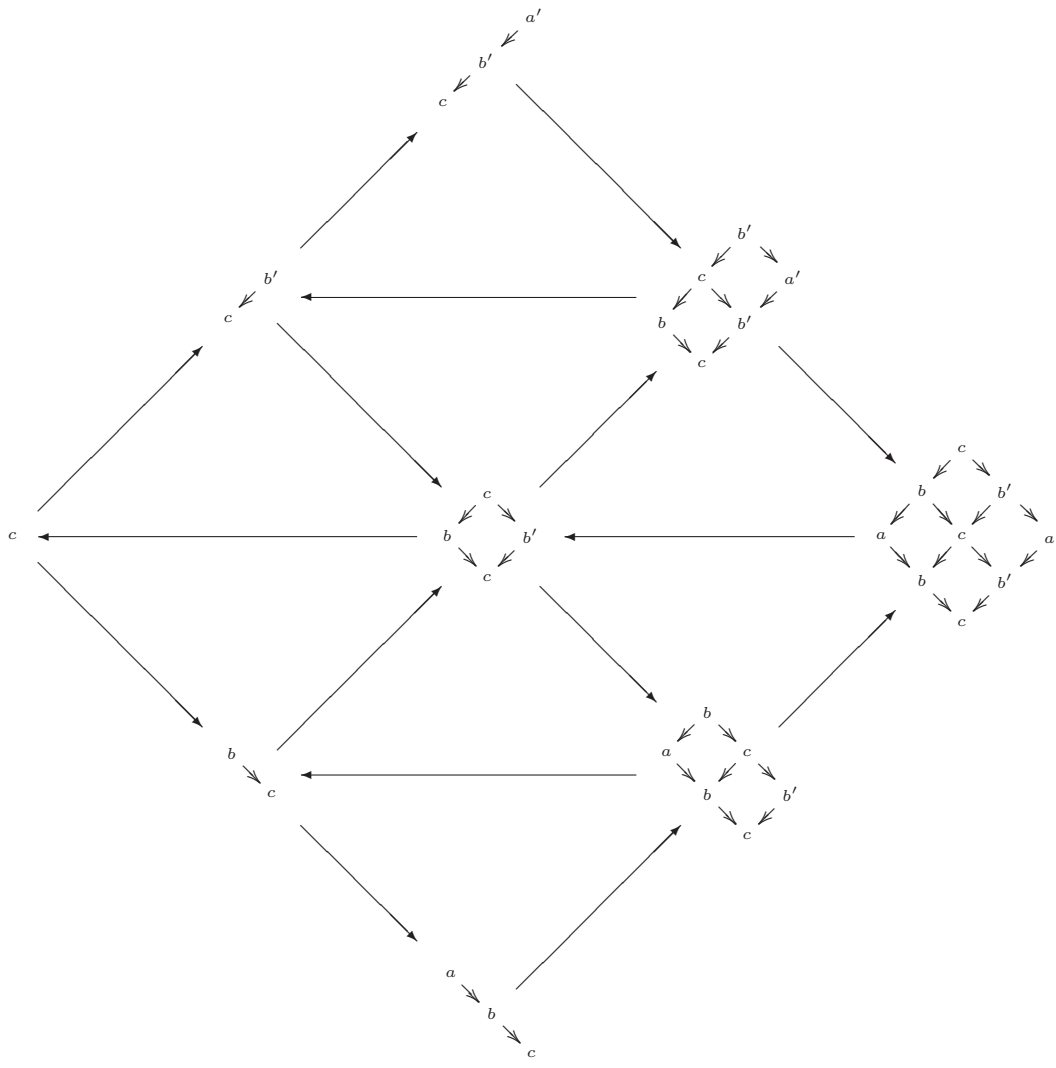
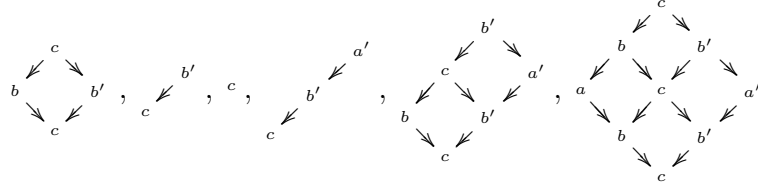


FIG. 4.1 – Carquois d'Auslander-Reiten de \mathcal{T}

Exemple 4.1.16. On continue l'exemple 4.1.14. Le carquois d'Auslander-Reiten de \mathcal{T} est à la figure 4.1, les projectifs-injectifs étant les cinq objets à droite. En prenant comme paramétrage des lignes les classes de



dans cet ordre, on a alors

$$B(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On va maintenant, en partant de [34, 9.3.2], calculer explicitement $B(\mathcal{T})$. On note r le nombre de racines positives de Δ et r_K le nombre de racines positives de $\Delta|_{K/\Gamma}$.

On prend \mathbf{i} et ℓ défini comme ci-dessus. Pour $\bar{j} \in Q_0/\Gamma$, on note par convention $\bar{i}_{\bar{j}} = \bar{j}$ et on note $\bar{j} < n$ pour tout $n \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$. On note $e(\mathbf{i}) = \{n \in \llbracket 1, \ell \rrbracket \mid \exists m \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, m > n \text{ et } \bar{i}_m = \bar{i}_n\}$. Si $n \in e(\mathbf{i}) \cup Q_0/\Gamma$, alors on note $n^+ = \min\{m \in \llbracket 1, \ell \rrbracket \mid m > n \text{ et } \bar{i}_m = \bar{i}_n\}$. Pour $\bar{j} \in K/\Gamma$, on note $t_{\bar{j}} = \max\{t \leq r_K \mid \bar{i}_t = \bar{j}\}$. Pour $\bar{j} \in J/\Gamma$, on note $t_{\bar{j}} = \bar{j}$. On construit alors une matrice $B(\mathbf{i}, K)$ dont les lignes sont indexées par $(\llbracket r_K, r \rrbracket \cap e(\mathbf{i})) \cup \{t_{\bar{j}} \mid \bar{j} \in Q_0/\Gamma\}$ et les colonnes par $\llbracket r_K, r \rrbracket \cap e(\mathbf{i})$ ainsi :

$$B(\mathbf{i}, K)_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m^+ = n \\ -1 & \text{si } n^+ = m \\ -C_{i_m i_n} & \text{si } n < m < n^+ < m^+ \\ C_{i_m i_n} & \text{si } m < n < m^+ < n^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où C est la matrice de Cartan de Δ .

Exemple 4.1.17. On continue l'exemple 4.1.14. On a alors $e(\mathbf{i}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. On a alors $a^+ = 1$, $b^+ = 2$, $c^+ = 4$, $1^+ = 3$, $2^+ = 5$, $3^+ = 6$, $4^+ = 7$, $5^+ = 8$ et $7^+ = 9$. On a aussi $t_a = 3$, $t_b = 2$ et $t_c = c$. On en déduit que la matrice $B(\mathbf{i}, K)$ a ses lignes indexées par $\{4, 5, 7, 3, 2, c\}$ et ses colonnes indexées par $\{4, 5, 7\}$. La matrice de Cartan de Δ est

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B(\mathbf{i}, K) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.1.18. *Il existe une indexation des Γ -orbites de facteurs indécomposables de $T = T_{\bar{i}, K}$ par $(\llbracket r_K, r \rrbracket \cap e(\mathbf{i})) \cup \{t_n \mid n \in Q_0/\Gamma\}$ telle qu'à travers cette identification*

$$B(\mathcal{T}) = B(\mathbf{i}, K).$$

Démonstration. On note $\tilde{\mathbf{i}}$ l'image de \mathbf{i} par la substitution

$$\bar{i} \in Q_0/\Gamma \mapsto \prod_{i \in \bar{i}} i$$

où l'ordre des lettres dans le produit n'importe pas. On obtient ainsi un représentant du mot le plus long de \tilde{W} .

Tout d'abord, d'après [34, 9.3.2], $\tilde{B}(\mathcal{T}) = \tilde{B}(\tilde{\mathbf{i}}, K)$ où $\tilde{B}(\tilde{\mathbf{i}}, K)$ est l'analogue de $B(\mathbf{i}, K)$ pour l'action du groupe trivial. À $n \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on associe l'ensemble $n' \subset \llbracket 1, \tilde{r} \rrbracket$ où \tilde{r} est le nombre de racines positives de $\tilde{\Delta}$ de telle façon que l'ensemble des lettres aux positions n' dans $\tilde{\mathbf{i}}$ proviennent de la lettre à la position n dans \mathbf{i} à travers la substitution ci-dessus. Pour $\bar{j} \in Q_0/\Gamma$, on note $\bar{j}' = \bar{j}$. Finalement, pour $n \in \llbracket 1, r \rrbracket \cup Q_0/\Gamma$, on choisit $n^\circ \in n'$. Ensuite, il suffit de faire le calcul suivant en utilisant la proposition 3.4.4, en notant \tilde{C} la

matrice de Cartan de $\tilde{\Delta}$:

$$\begin{aligned}
B(\mathcal{T})_{mm} &= \sum_{\tilde{m} \in m'} \tilde{B}(\mathcal{T})_{\tilde{m}n^\circ} = \sum_{\tilde{m} \in m'} \tilde{B}(\tilde{\mathbf{i}}, K)_{\tilde{m}n^\circ} \\
&= \sum_{\tilde{m} \in m'} \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{m}^+ = n^\circ \\ -1 & \text{si } n^{\circ+} = \tilde{m} \\ -\tilde{C}_{i_{\tilde{m}} i_{n^\circ}} & \text{si } n^\circ < \tilde{m} < n^{\circ+} < \tilde{m}^+ \\ \tilde{C}_{i_{\tilde{m}} i_{n^\circ}} & \text{si } \tilde{m} < n^\circ < \tilde{m}^+ < n^{\circ+} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } m^+ = n \\ -1 & \text{si } n^+ = m \\ \sum_{\tilde{m} \in m'} -\tilde{C}_{i_{\tilde{m}} i_{n^\circ}} & \text{si } n < m < n^+ < m^+ \\ \sum_{\tilde{m} \in m'} \tilde{C}_{i_{\tilde{m}} i_{n^\circ}} & \text{si } m < n < m^+ < n^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } m^+ = n \\ -1 & \text{si } n^+ = m \\ -C_{i_m i_n} & \text{si } n < m < n^+ < m^+ \\ C_{i_m i_n} & \text{si } m < n < m^+ < n^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché. \square

Corollaire 4.1.19. *La matrice $B(\mathcal{T})$ est de rang maximal.*

Démonstration. Il est immédiat que pour tout indice de colonne n de la matrice $B(\mathbf{i}, K)$, il existe un unique indice de ligne n^- tel que $(n^-)^+ = n$. On a alors, pour tout indice de colonne n , $B(\mathbf{i}, K)_{n^-n} = 1$ par définition de $B(\mathbf{i}, K)$. Par ailleurs, si $m < n$ sont deux indices de colonnes de la matrice, alors $B(\mathbf{i}, K)_{m^-n} = 0$ puisque $(m^-)^+ = m < n$. Cela revient à dire que la sous-matrice de $B(\mathbf{i}, K)$ dont les lignes sont les n^- dans le même ordre que les colonnes est triangulaire inférieure de diagonale 1. \square

Proposition 4.1.20. *Pour toute Γ -orbite \bar{X} de classes d'isomorphisme de $\text{Sub } Q_J$ telle que*

$$\bigoplus_{X \in \bar{X}} X$$

soit rigide et qui est dans un amas que l'on peut atteindre par mutations à partir de \mathcal{T} , on a

$$\psi_{\bar{X}} = P_{\bar{X}}(\psi_{\mathcal{T}_i})_{i \in Q_0/\Gamma}.$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 3.5.9 et du corollaire 4.1.8 par récurrence dans le graphe des mutations. \square

On reprend les notations de la section 3.4. Voici une réponse à une conjecture de Fomin et Zelevinsky dans ce cas :

Proposition 4.1.21. *Les monômes d'amas de $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. On le déduit du corollaire 3.6.6. □

Remarques 4.1.22. – On conjecture que pour toute Γ -orbite \bar{X} de classes d'isomorphisme de $\text{Sub } Q_J$, on a

$$\psi_{\bar{X}} = P_{\bar{X}}(\psi_{\bar{T}_i})_{i \in Q_0/\Gamma}.$$

- Si la conjecture précédente est valide, l'indépendance linéaire des $P_{\bar{X}}$ est équivalente à celle des $\psi_{\bar{X}}$ où \bar{X} parcourt les Γ -orbites de $\text{mod } \Lambda_Q$ telles que

$$\bigoplus_{X \in \bar{X}} X$$

soit rigide. Notons qu'on avait démontré par une autre méthode l'indépendance linéaire des $\psi_{\bar{X}}$ dans [18, théorème 6].

On note désormais \tilde{B}_K le sous-groupe parabolique de \tilde{G} engendré par \tilde{B} et les sous-groupes à un paramètre ${}^t x_i(t)$ pour $i \in K$ et $t \in \mathbb{C}$. On note de même B_K le sous-groupe parabolique de G engendré par B et les projetés dans G des sous-groupes à un paramètre ${}^t x_i(t)$ pour $i \in K$ et $t \in \mathbb{C}$. On note \tilde{N}_K le radical unipotent de \tilde{B}_K . On note N_K le radical unipotent de B_K .

Notons $\mathcal{A}'(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T})$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}[N]$ engendrée par les $\psi_{\bar{X}}$ où \bar{X} parcourt les Γ -orbites de classes d'isomorphisme de $\text{Sub } Q_J$ telles que

$$\bigoplus_{X \in \bar{X}} X$$

soit rigide.

Notons $\mathcal{A}'_0(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T})$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}[N]$ engendrée par les $\psi_{\bar{X}}$ où \bar{X} parcourt les Γ -orbites de $\text{Sub } Q_J$. Les algèbres $\mathcal{A}(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T})$ et $\mathcal{A}_0(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T})$ ont été définies dans la section 3.5.

Proposition 4.1.23. *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A}(B(\mathcal{T})) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \mathcal{A}(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}'(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_0(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}'_0(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T}) \end{array}$$

les deux isomorphismes horizontaux étant soumis à la conjecture de la remarque 4.1.22.

Démonstration. C'est immédiat puisque les $(\psi_{\bar{T}_i})_{i \in Q_0/\Gamma}$ sont algébriquement indépendants. □

Proposition 4.1.24. *On a $\mathbb{C}[N_K] \simeq \mathcal{A}'_0(\text{Sub } Q_J, \Gamma, \mathcal{T})$.*

Démonstration. C'est la traduction immédiate de la proposition analogue [34, proposition 9.1]. □

Conjecture 4.1.25. On a $\mathbb{C}[N_K] \simeq \mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$.

Lemme 4.1.26. Les amas de $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$ ont

1. $r - r_K$ variables d'amas ;
2. $\#Q_0/\Gamma$ coefficients.

Démonstration. Le deuxième point se montre en utilisant [34, proposition 3.2]. Pour montrer le premier, on reprend le plan de la preuve de [34, proposition 7.1]. Cette preuve part du résultat dans le cas particulier où $K = \emptyset$. Dans ce cas, la majoration par r se trouve en faisant la preuve analogue de celle de [36] en comptant les composantes Γ -stable de la variété de module, en utilisant la description des racines de Δ du lemme 1.5.5. Pour montrer que r est atteint, il suffit alors de voir, toujours en regardant leur preuve, que si ce n'était pas le cas, alors ce ne serait pas non plus le cas pour $\mathcal{A}(\tilde{B}(\mathcal{T}))$. Or il est prouvé que ce nombre est atteint par Geiß, Leclerc et Schröer ([34, proposition 7.3]). \square

On peut maintenant montrer le résultat suivant, dont une partie est prouvée en [34, 11.4] et la fin est conjecturée en [34, 14.2] :

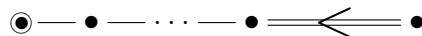
Proposition 4.1.27. L'algèbre $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$ a un nombre fini d'amas exactement dans les cas suivants (les sommets entourés sont ceux de J et n est le nombre de sommets) :

Type de G	Type de $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$
$\circledast - \bullet - \dots - \bullet$	A_0
$\bullet - \circledast - \bullet - \dots - \bullet$	A_{n-2}
$\circledast - \circledast - \bullet - \dots - \bullet$	A_{n-1}
$\circledast - \bullet - \dots - \bullet - \circledast$	$(A_1)^{n-1}$
$\circledast - \bullet - \dots - \bullet - \circledast - \bullet$	A_{2n-4}
$\circledast - \circledast - \bullet - \dots - \bullet - \circledast$	A_{2n-3}
$\circledast - \bullet - \dots - \bullet - \circledast - \bullet$	A_{2n-4}
$\bullet - \circledast - \circledast - \bullet$	D_4
$\circledast - \circledast - \circledast - \bullet$	D_5
$\circledast - \circledast - \circledast - \circledast$	D_6
$\bullet - \bullet - \circledast - \bullet - \bullet$	D_4
$\circledast - \bullet - \circledast - \bullet - \bullet$	E_6
$\bullet - \circledast - \circledast - \bullet - \bullet$	E_6
$\circledast - \circledast - \circledast - \bullet - \bullet$	E_7
$\bullet - \bullet - \circledast - \bullet - \bullet - \bullet$	E_6

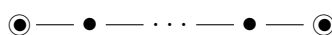
Type de G	Type de $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$
	E_8
	E_8
	$(A_1)^{n-2}$
	A_5
	A_5
	$(A_1)^{n-1}$
	$(A_1)^{n-1}$
	$B_2 = C_2$
	B_3
	C_3

Démonstration. Tous les cas simplement lacés sont prouvés dans [34, 11.4]. Les autres cas proviennent forcément d'un des cas simplement lacés cités muni d'une action de groupe d'après la proposition 3.5.14. Il faut donc regarder les groupes d'automorphismes de diagrammes stabilisant J . Cela donne immédiatement la liste des cinq cas non simplement lacés. Calculons leurs types :

– Le diagramme



à n sommets provient du diagramme



à $2n - 1$ sommets muni du seul automorphisme d'ordre 2 non trivial. Son type doit donc être obtenu à partir de $(A_1)^{2n-2}$. D'après le lemme 4.1.26, le nombre des variables d'amas dans un amas est $r - r_K = n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$ et si on enlève les n coefficients, on obtient que le type doit être de rang $n - 1$ d'où le résultat.

– Le diagramme

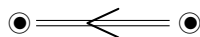


à n sommets provient du diagramme



à $n + 1$ sommets muni du seul automorphisme d'ordre 2 non trivial. Son type doit donc être obtenu à partir de $(A_1)^{n-1}$. D'après le lemme 4.1.26, le nombre des variables d'amas dans un amas est $r - r_K = n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$ et si on enlève les n coefficients, on obtient que le type doit être de rang $n - 1$ d'où le résultat.

– Le diagramme



provient du diagramme



muni du seul automorphisme d'ordre 2 non trivial. Son type doit donc être obtenu à partir de A_3 . D'après le lemme 4.1.26, le nombre des variables d'amas dans un amas est $r - r_K = 4$ et si on enlève les 2 coefficients, on obtient que le type doit être de rang 2 d'où le résultat.

– Le diagramme



provient du diagramme

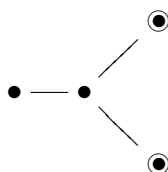


muni du seul automorphisme d'ordre 2 non trivial. Son type doit donc être obtenu à partir de D_4 . D'après le lemme 4.1.26, le nombre des variables d'amas dans un amas est $r - r_K = 9 - 3 = 6$ et si on enlève les 3 coefficients, on obtient que le type doit être de rang 3 d'où le résultat.

– Le diagramme



provient du diagramme



muni du seul automorphisme d'ordre 2 non trivial. Son type doit donc être obtenu à partir de A_5 . D'après le lemme 4.1.26, le nombre des variables d'amas dans un amas est $r - r_K = 9 - 3 = 6$ et si on enlève les 3 coefficients, on obtient que le type doit être de rang 3 d'où le résultat. □

4.2 Catégories \mathcal{C}_M et groupes unipotents

Cette application est inspirée de [35]. Soit Q un carquois sans cycle orienté. Soit Γ un groupe agissant sur Q de telle façon que Q ne comporte pas de flèche entre deux sommets d'une même orbite sous l'action de Γ (on dira que l'action est admissible). Soit M un $\text{mod } kQ$ -module terminal (voir la section 1.4.2) stable par Γ .

Citons le lemme suivant de Geiß, Leclerc et Schröer :

Lemme 4.2.1 ([35, lemma 5.6]). *La catégorie \mathcal{C}_M est une sous-catégorie de $\text{mod } \Lambda_Q$ stable par facteurs. Autrement dit, pour $X \in \mathcal{C}_M$ et Y un sous- Λ_Q -module de X , alors $X/Y \in \mathcal{C}_M$.*

Corollaire 4.2.2. *Tout les projectifs de \mathcal{C}_M ont des quasi-approximations rigides à gauche.*

Démonstration. Pour prouver ceci, il suffit de voir que les hypothèses du lemme 3.2.4 sont vérifiées. La série de lemmes débutant [35, §8] montre que les projectifs de \mathcal{C}_M ont des socles simples dans $\text{mod } \Lambda_Q$. Par ailleurs, comme l'action de Γ sur Q est admissible, $\bigoplus_{g \in \Gamma} \mathfrak{g} \otimes S$ est rigide pour tout Λ_Q -module simple S . Les autres hypothèses du lemme 3.2.4 sont des conséquences immédiates du lemme 4.2.1. \square

Les Λ_Q -modules T_M et T_M^\vee construits en [35, §7] sont amas-basculants et $\text{End}_{\mathcal{C}_M}(T_M)$ et $\text{End}_{\mathcal{C}_M}(T_M^\vee)$ sont de dimension globale finie. Il sont de plus stables par Γ puisque M l'est.

L'action de Γ est 2-Calabi-Yau au sens de la définition 2.2.27 pour les mêmes raisons que dans la section précédente. On peut alors appliquer les résultats de la section 3.5 dans \mathcal{C}_M en posant $\mathcal{T} = \text{add}(T_M)$ et $\mathcal{T}^\vee = \text{add}(T_M^\vee)$.

On note Θ le carquois de Gabriel de $\text{End}_{kQ}(M)$ auquel on ajoute une flèche $x \rightarrow \tau(x)$ pour tout sommet x tel que $\tau(x)$ correspond à un indécomposable de $\text{add}(M)$ (où τ est la translation d'Auslander-Reiten). On dira qu'un sommet de Θ est figé s'il est envoyé en dehors de Θ par la translation d'Auslander-Reiten.

Proposition 4.2.3 ([35, 3.5]). *Les matrices $\tilde{B}(\mathcal{T})$ et $\tilde{B}(\mathcal{T}^\vee)$ sont égales, avec une indexation appropriée, à la matrice d'adjacence de Θ à laquelle on enlève les colonnes correspondant aux sommets figés.*

Notation 4.2.4. Posons $\mathbb{N}Q_0^{\text{op}} = \mathbb{N} \times Q_0$ et $\mathbb{N}Q_1^{\text{op}} = \mathbb{N} \times Q_1^{\text{op}} \amalg \mathbb{N} \times Q_1$ munis des applications $s, t : \mathbb{N}Q_1^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{N}Q_0^{\text{op}}$ définies par

$$s(n, q) = \begin{cases} (n, s(q)) & \text{si } (n, q) \in \mathbb{N} \times Q_1^{\text{op}} \\ (n+1, s(q)) & \text{si } (n, q) \in \mathbb{N} \times Q_1 \end{cases}$$

$$t(n, q) = (n, t(q)).$$

On a ainsi défini un carquois $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$. Soit aussi $\tilde{\Theta}$ le carquois $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$ auquel on ajoute les flèches de la forme $(n, i) \rightarrow (n+1, i)$ pour $(n, i) \in \mathbb{N}Q_0^{\text{op}}$.

Comme Q n'a pas de cycle, on peut fixer un ordre sur Q_0 de telle façon que toutes les flèches de Q aient un but plus grand que leur source et de façon que Γ agisse sur Q_0 par applications croissantes. Ainsi, cet ordre induit un ordre sur Q_0/Γ . On muni alors $\mathbb{N}Q_0^{\text{op}} = \mathbb{N} \times Q^{\text{op}}$ de l'ordre lexicographique.

Il est classique que le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{add}(M)$ est un sous-carquois de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$ et que Θ est un sous-carquois de $\tilde{\Theta}$, la translation d'Auslander-Reiten τ de $\text{add}(M)$ étant représentée par l'ensemble des flèches de la forme $(n, i) \rightarrow (n + 1, i)$ dans $\tilde{\Theta}$.

Corollaire 4.2.5. *La matrice $B(\mathcal{T})$ est de rang maximal.*

Démonstration. On va utiliser la structure de $\tilde{\Theta}$. Pour toute Γ -orbite non figée \bar{X} de Θ , $\tau(\bar{X})$ est une Γ -orbite de Θ . On restreint l'ordre sur les sommets de $\tilde{\Theta}$ en un ordre sur les sommets de Θ . On a alors pour toute Γ -orbite non figée \bar{X} de Θ , $B(\mathcal{T})_{\tau(\bar{X}), \bar{X}} = -1$ et, si l'on prend une seconde Γ -orbite non figée $\bar{Y} < \bar{X}$ de Θ , $B(\mathcal{T})_{\tau(\bar{X}), \bar{Y}} = 0$ par construction de l'ordre sur $\tilde{\Theta}$. Ceci revient à dire que la sous-matrice de $B(\mathcal{T})$ dont les lignes sont les $\tau(\bar{X})$ est triangulaire supérieure de diagonale -1 . \square

Corollaire 4.2.6. *Les monômes d'amas de $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M, \Gamma, \mathcal{T})$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. C'est une application directe du corollaire 3.6.6. \square

Proposition 4.2.7. *Pour toute algèbre amassée de type fini sans coefficients \mathcal{A} , il existe un carquois Q , un groupe Γ agissant sur Q , un module terminal M de $\text{mod } kQ$ et un objet amas-basculant \mathcal{T} de \mathcal{C}_M tels que l'algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M, \Gamma, \mathcal{T})$ avec coefficients spécialisés à 1 soit isomorphe à \mathcal{A} .*

Démonstration. En utilisant la classification du début de la section 4.1, on détermine un diagramme de Dynkin simplement lacé Δ et une action d'un groupe Γ dessus. On choisit ensuite une orientation Q de Δ compatible avec l'action de Γ et telle que $\text{mod } kQ$ n'ait pas de projectif-injectif (c'est toujours possible : il suffit, dans le cas A_n , de ne pas orienter le carquois dans une seule direction). Ensuite, $M = kQ^{\text{op}} \oplus \tau(kQ^{\text{op}})$ convient. \square

Voici deux résultats qui sont des conséquences immédiates des résultats analogues de [35].

Proposition 4.2.8. *Il existe une suite de mutations dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M, \Gamma, \mathcal{T})$ passant de \mathcal{T} à \mathcal{T}^\vee .*

Démonstration. Geiß, Leclerc et Schröer ont décrit dans [35, §18] une suite de mutations permettant de passer de \mathcal{T} à \mathcal{T}^\vee dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M, \mathcal{T})$. Il est facile de voir en suivant leur algorithme que l'on peut réordonner ces mutations de telle sorte que les mutations suivant une même Γ -orbite de \mathcal{C} soient consécutives (il suffit de permuter des mutations qui commutent car elles sont éloignées dans Θ). Ensuite, grâce à la proposition 3.4.4, on voit immédiatement que cette suite de mutations provient d'une suite de mutations dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M, \Gamma, \mathcal{T})$. \square

Proposition 4.2.9. *L'algèbre $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$ est un anneau de polynômes. Plus précisément,*

$$\mathcal{A}(B(\mathcal{T})) = \mathbb{C}[P_{\bar{X}}]_{\bar{X} \in \tilde{M}}$$

où \tilde{M} est l'ensemble des Γ -orbites de classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de $\text{add}(M)$.

Démonstration. On sait déjà que $\mathcal{A}(B(\mathcal{T})) \subset \mathcal{A}(B^\circ(\mathcal{T}))/\Gamma$ donc en utilisant le théorème [35, theorem 3.4], on a déjà l'inclusion $\mathcal{A}(B(\mathcal{T})) \subset \mathbb{C}[P_{\bar{X}}]_{\bar{X} \in \tilde{M}}$. Pour l'inclusion réciproque, on utilise la même technique que dans [35] : tous les $\bar{X} \in \tilde{M}$ apparaissent dans la suite de mutation décrite dans la proposition précédente. \square

Soient $\tilde{\Delta}$ le diagramme associé à Q et Δ le diagramme construit à partir de $\tilde{\Delta}$ et Γ comme dans la section 4.1. On suppose que $\tilde{\Delta}$ est un diagramme de Dynkin. Soit G (resp. \tilde{G}) le groupe de Lie connexe et simplement connexe associé à Δ (resp. $\tilde{\Delta}$). On reprend pour $W, N, B, N_-, B_-, \mathfrak{g}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}_-, \mathfrak{b}$ et \mathfrak{b}_- les mêmes notations que dans la section 4.1.

On note $\tilde{\Delta}_M^+$ l'ensemble des vecteurs dimensions des facteurs indécomposables de M . Comme M est stable sous l'action de Γ , $\tilde{\Delta}_M^+$ aussi et donc on peut appeler Δ_M^+ l'image de $\tilde{\Delta}_M^+$ dans un système de racine de type Δ . Comme dans [35, 3.7], il existe un unique élément w dans le groupe de Weyl W de Δ tel que $\Delta_M^+ = \{\alpha \in \Delta^+ \mid w(\alpha) < 0\}$ où Δ^+ est le sous-ensemble des racines positives de Δ . Soit \tilde{w} l'image de w dans \tilde{W} .

Posons alors

$$N(w) = N \cap (w^{-1}N_-\tilde{w}) \quad \text{et} \quad N^w = N \cap (B_-\tilde{w}B_-);$$

$$\tilde{N}(\tilde{w}) = \tilde{N} \cap (\tilde{w}^{-1}\tilde{N}_-\tilde{w}) \quad \text{et} \quad \tilde{N}^{\tilde{w}} = \tilde{N} \cap (\tilde{B}_-\tilde{w}\tilde{B}_-).$$

Voici l'analogue du [35, theorem 3.5] :

Théorème 4.2.10. *L'algèbre amassée $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$ est une structure d'algèbre amassée sur $\mathbb{C}[N(w)]$. L'algèbre amassée $\tilde{\mathcal{A}}(B(\mathcal{T}))$ obtenue en inversant les coefficients est une structure d'algèbre amassée sur $\mathbb{C}[N^w]$.*

Démonstration. D'après [35, theorem 3.5], $\mathcal{A}(B(\mathcal{C}_M, \mathcal{T}))$ est une structure d'algèbre amassée sur $\mathbb{C}[\tilde{N}(\tilde{w})]$. En utilisant le morphisme κ (voir 1.5), on en déduit un plongement de $\mathcal{A}(B(\mathcal{T}))$ dans $\mathbb{C}[N(w)]$. En utilisant la proposition 4.2.9, on conclut, puisque par le même raisonnement que dans [35], $\mathbb{C}[P_{\bar{X}}]_{\bar{X} \in \tilde{M}}$ est $\mathbb{C}[N(w)]$ tout entier.

Le même raisonnement est valide pour $\mathbb{C}[N^w]$. \square

Exemple 4.2.11. Dans cet exemple, on va noter Q le carquois

$$a \longleftarrow b \longleftarrow c \longrightarrow b' \longrightarrow a'$$

que l'on munit de l'action non triviale évidente de $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{mod } \mathbb{C}Q$ est donné à la figure 4.2. Notons M_0 la somme directe de tous les $\mathbb{C}Q$ -modules indécomposables de telle façon que $\mathcal{C}_{M_0} = \text{mod } \Lambda_Q$. Notons M la somme directe des $\mathbb{C}Q$ -modules indécomposables situés à droite de la double ligne dans la figure 4.2.

D'après ce que l'on a vu, le groupe N , de type C_3 . Il peut être réalisé comme un sous-groupe de \tilde{N} , que l'on va réaliser comme le sous-groupe de $\text{GL}_6(\mathbb{C})$ constitué des

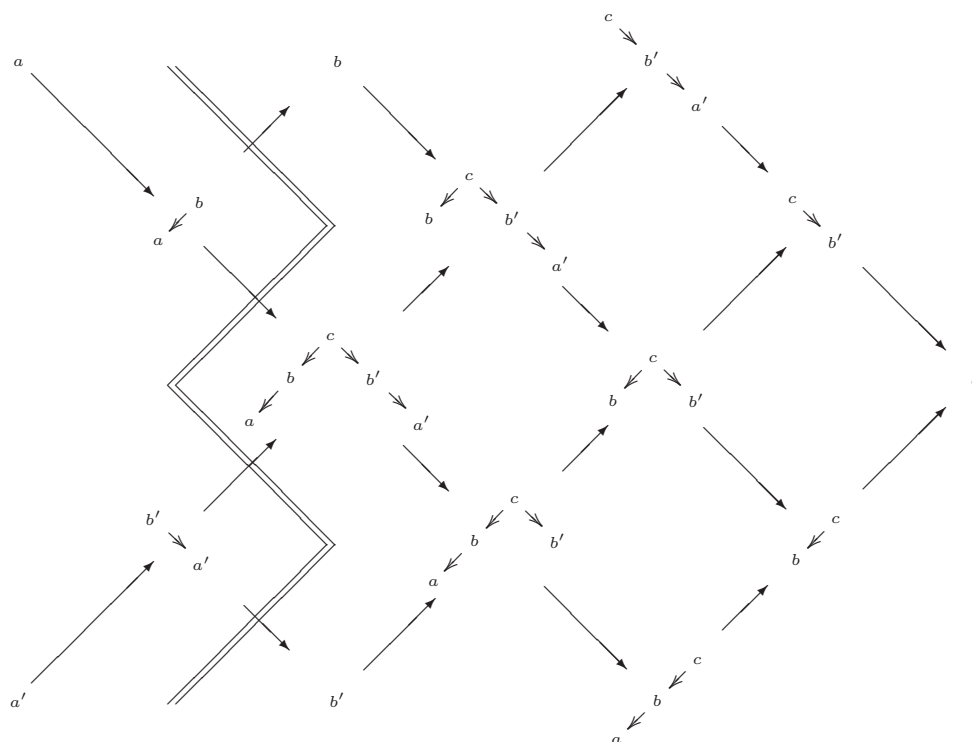


FIG. 4.2 – carquois d’Auslander-Reiten de Q

matrices triangulaires supérieures de diagonale 1. Plus précisément, N est le sous-groupe de $GL_6(\mathbb{C})$ engendré par les sous groupes à un paramètre

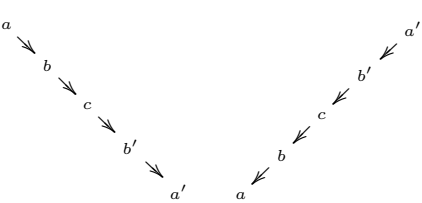
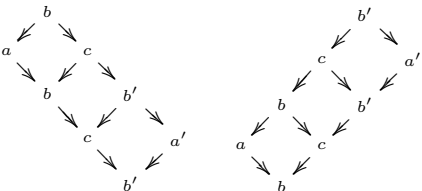
$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathbb{C}[N]$ est un quotient de $\mathbb{C}[\tilde{N}]$. Dans la suite, les notations de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot \\ & & 1 & \bullet & \bullet & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

désigneront les mineurs des sous-matrices formées par les points épais.

Voici la liste des Γ -orbites des classes d’isomorphismes de facteurs indécomposables X de $T_{M_0}^\vee$ ainsi que la réalisation de ψ_X (voir la notation 4.1.4) comme mineur :

Γ -orbite	ψ_X
c	$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \bullet & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\ & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ & 1 & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$

les deux dernières orbites étant celles qui n'apparaissent pas dans T_M^\vee . Un calcul simple montre que l'élément w correspondant à l'objet M est $w = \sigma_c \sigma_b \sigma_c \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_b$. Par conséquent, le groupe $N(w)$ est le sous-groupe de N formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & * & * & * \\ & 1 & * & * & * & * & * \\ & & 1 & * & * & * & * \\ & & & 1 & * & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et N^w est la sous-variété de N formée des matrices vérifiant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\ & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ & 1 & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = 0$$

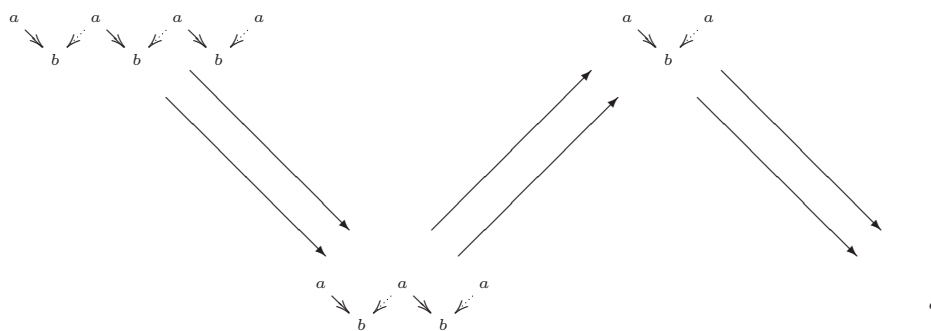


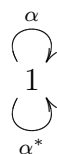
FIG. 4.3 – Partie terminale du Carquois d’Auslander-Reiten de Q_{Kr}

et

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot \\ & 1 & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 1 & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.3 Exemple issu de la correspondance de McKay

L’objet de cette section est de présenter un exemple où le groupe Γ agissant n’est pas commutatif en reprenant les notations de la section précédente. Pour ce faire, on va étudier le cas des sous-groupes finis de $SL_2(\mathbb{C})$. On note Q le carquois



et $\Gamma_0 = \langle -Id \rangle \subset SL(\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\alpha^*)$. D’après la proposition 2.3.13, $\Lambda_Q \Gamma_0$ est Morita-équivalente à l’algèbre préprojective du carquois de Kronecker Q_{Kr}

$$a \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\rightleftarrows}} b.$$

Une partie terminale du carquois d’Auslander-Reiten de kQ_{Kr} est donné à la figure 4.3. Notons M_0 le module terminal correspondant.

D’après la section précédente, \mathcal{C}_{M_0} a un objet amas basculant :

$$T_0 = a \oplus \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ b \end{array} \oplus \begin{array}{c} a \quad a \quad a \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ b \quad b \quad b \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a \end{array} \oplus \begin{array}{c} a \quad a \quad a \quad a \quad a \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ b \quad b \quad b \quad b \quad b \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a \quad a \quad a \quad a \quad a \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ b \end{array} .$$

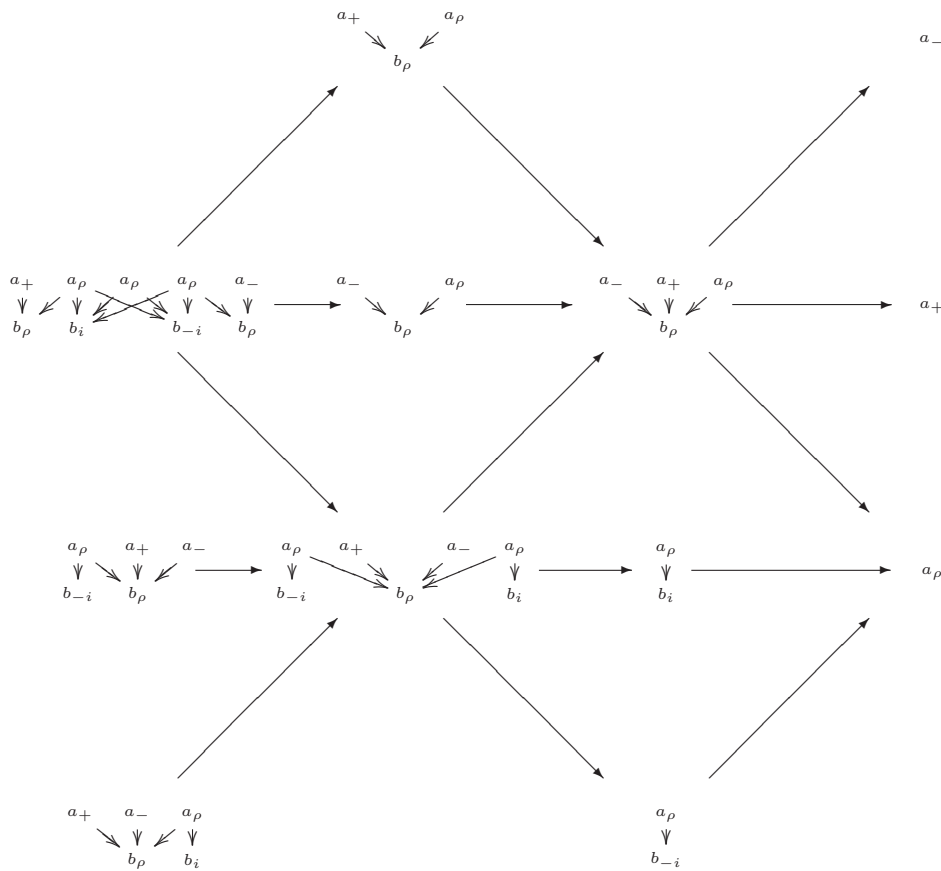
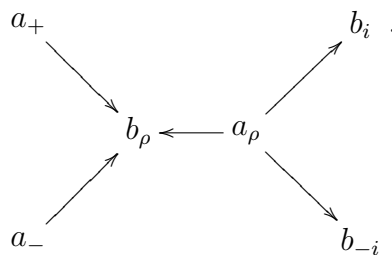


FIG. 4.4 – Partie terminale du carquois d’Auslander-Reiten de Q'

Soit maintenant

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\bar{j} \end{pmatrix} \right) \right\rangle \subset \text{SL}(\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\alpha^*)$$

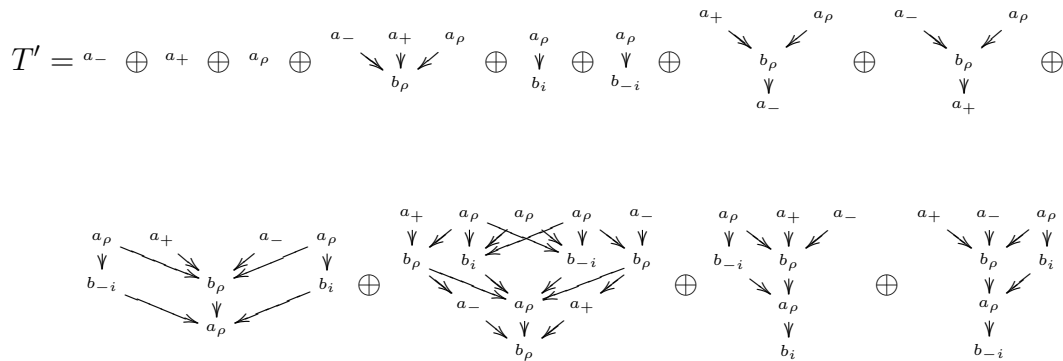
où $j = \exp(2i\pi/3)$. Toujours d’après la proposition 2.3.13, $\Lambda_Q \tilde{\Gamma}$ est Morita-équivalente à l’algèbre préprojective de carquois Q'



Une partie terminale du carquois d’Auslander-Reiten de kQ' est la figure 4.4.

Notons M' l’objet terminal correspondant. D’après la section précédente, $\mathcal{C}_{M'}$ admet

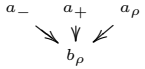
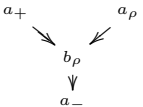
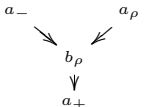
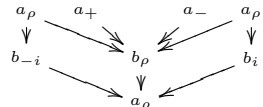
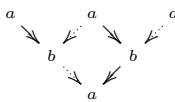
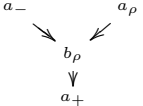
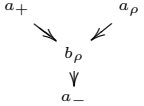
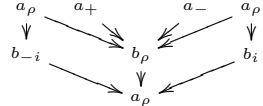
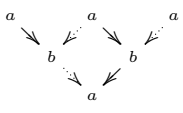
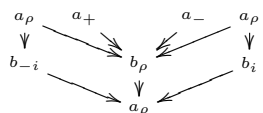
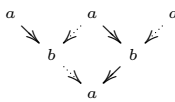
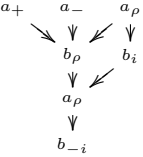
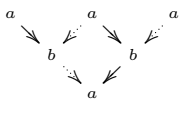
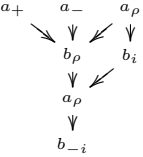
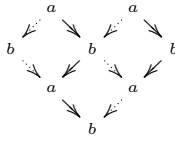
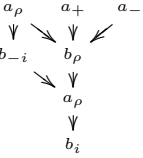
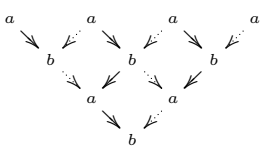
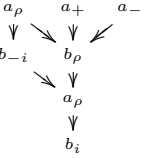
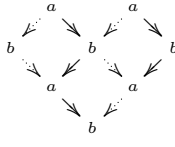
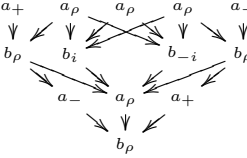
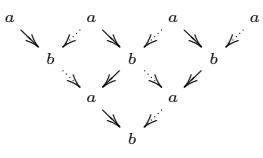
un objet amas-basculant

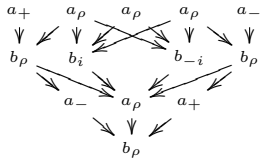
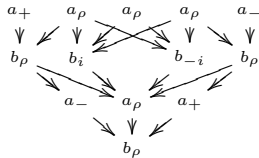
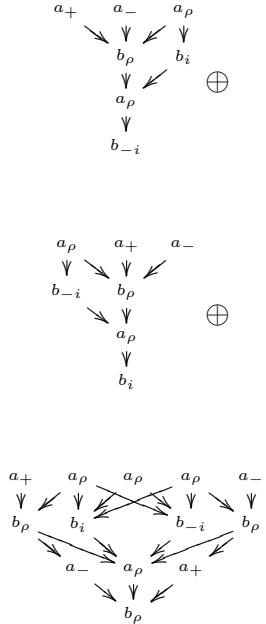
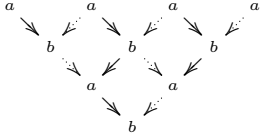


D'après la proposition 2.1.13, le groupe $\Gamma = \tilde{\Gamma}/\Gamma_0 \simeq \mathfrak{S}_3$ agit sur $\text{mod } \Lambda_{Q_{\text{Kr}}}$. Il est facile de voir que cette action stabilise \mathcal{C}_{M_0} . On observe par ailleurs que $\text{add}(T_0[\Gamma]) = \text{add}(T')$ ce qui est une illustration du fait que les foncteurs adjoints F et $-[\Gamma]$ induisent une bijection entre sous-catégories amas-basculantes Γ -stables de \mathcal{C}_{M_0} d'une part et sous-catégories amas basculantes $\text{mod } k[\Gamma]$ -stables de $\mathcal{C}_{M'}$ d'autre part.

Notons $+$ la représentation triviale de \mathfrak{S}_3 , $-$ sa représentation signature et ρ sa représentation de dimension 2. Pour terminer l'illustration présentée ici, voici un tableau récapitulatif l'action de $\text{mod } k[\mathfrak{S}_3]$ sur les facteurs de T' d'une part et le facteur de T_0 (stable sous l'action de \mathfrak{S}_3) correspondant à chaque $\text{mod } k[\mathfrak{S}_3]$ -orbite de $\mathcal{C}_{M'}$ d'autre part.

$+\otimes ?$	$-\otimes ?$	$\rho\otimes ?$	objet de \mathcal{C}_{M_0}
a_+	a_-	a_ρ	a
a_-	a_+	a_ρ	a
a_ρ	a_ρ	$a_- \oplus a_+ \oplus a_\rho$	a
$\begin{array}{c} a_\rho \\ \Downarrow \\ b_{-i} \end{array}$	$\begin{array}{c} a_\rho \\ \Downarrow \\ b_i \end{array}$	$\begin{array}{c} a_- \quad a_+ \quad a_\rho \\ \searrow \quad \Downarrow \quad \swarrow \\ b_\rho \end{array}$	$\begin{array}{c} a \quad a \\ \searrow \quad \swarrow \\ b \end{array}$
$\begin{array}{c} a_\rho \\ \Downarrow \\ b_i \end{array}$	$\begin{array}{c} a_\rho \\ \Downarrow \\ b_{-i} \end{array}$	$\begin{array}{c} a_- \quad a_+ \quad a_\rho \\ \searrow \quad \Downarrow \quad \swarrow \\ b_\rho \end{array}$	$\begin{array}{c} a \quad a \\ \searrow \quad \swarrow \\ b \end{array}$
$\begin{array}{c} a_- \quad a_+ \quad a_\rho \\ \searrow \quad \Downarrow \quad \swarrow \\ b_\rho \end{array}$	$\begin{array}{c} a_- \quad a_+ \quad a_\rho \\ \searrow \quad \Downarrow \quad \swarrow \\ b_\rho \end{array}$	$\begin{array}{c} a_\rho \quad a_\rho \\ \Downarrow \quad \Downarrow \\ b_{-i} \quad b_i \end{array}$	$\begin{array}{c} a \quad a \\ \searrow \quad \swarrow \\ b \end{array}$

$+\otimes?$	$-\otimes?$	$\rho\otimes?$	objet de \mathcal{C}_{M_0}
			
			
			
			
			
			

$+\otimes?$	$-\otimes?$	$\rho\otimes?$	objet de \mathcal{C}_{M_0}
			

Bibliographie

- [1] H. Asashiba, *Covering functors, skew group categories and derived equivalences*, arXiv : 0807.4706.
- [2] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [3] M. Auslander, S. O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, J. Algebra 69 (1981), no. 2, 426–454.
- [4] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras III : Upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. 126 (2005), no. 1, 1–52.
- [5] K. Bongartz, *Algebras and quadratic forms*, J. London Math. Soc. 28 (1983), 461–469.
- [6] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 1, Basic category theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [7] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. 204 (2006), no. 2, 572–618.
- [9] P. Caldero, F. Chapoton, *Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations*, Comment. Math. Helv. 81 (2006), no. 3, 595–616.
- [10] P. Caldero, B. Keller, *From triangulated categories to cluster algebras*, Invent. Math. 172 (2008), no. 1, 169–211.
- [11] P. Caldero, B. Keller, *From triangulated categories to cluster algebras II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 39 (2006), no. 6, 983–1009.
- [12] C. Cibils, E. Marcos, *Skew category, Galois covering and smash product of a k -category*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), no. 1, 39–50.
- [13] C. Cibils, A. Solotar, *Galois coverings, Morita equivalence and smash extensions of categories over a field*, Doc. Math. 11 (2006), 143–159.
- [14] F. Chapoton, S. Fomin, A. Zelevinsky, *Polytopal realizations of generalized associahedra*, Canad. Math. Bull. 45 (2002), no. 4, 537–566.
- [15] W. Crawley-Boevey, *On the exceptional fibres of Kleinian singularities*, Amer. J. Math. 122 (2000), no. 5, 1027–1037.
- [16] W. Crawley-Boevey, M. P. Holland, *Noncommutative deformations of Kleinian singularities*, Duke Math. J. 92 (1998), no. 3, 605–635.

- [17] R. Dehy, B. Keller, *On the combinatorics of rigid objects in 2-Calabi-Yau categories*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. 11, Art. ID rnn029.
- [18] L. Demonet, *Algèbres amassées et algèbres préprojectives : le cas non simplement lacé*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), no. 7-8, 379–384.
- [19] G. Dupont, *An approach to non simply laced cluster algebras*, J. Algebra 320 (2008), no. 4, 1626–1661.
- [20] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Cluster \mathcal{X} -varieties, amalgamation, and Poisson-Lie groups*, Algebraic geometry and number theory, Progr. Math., 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, 27–68.
- [21] S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I : Cluster complexes*, arXiv : math/0608367, à paraître dans Acta Mathematica.
- [22] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras I : Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 497–529.
- [23] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras II : Finite type classification*, Invent. Math. 154 (2003), no. 1, 63–121.
- [24] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras. IV : Coefficients*, Compos. Math. 143 (2007), no. 1, 112–164.
- [25] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Y-systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. (2) 158 (2003), no. 3, 977–1018.
- [26] C. Fu, B. Keller, *On cluster algebras with coefficients and 2-Calabi-Yau categories*, arXiv :0710.3152.
- [27] P. Gabriel, *The universal cover of a representation-finite algebra* in *Representations of algebras (Puebla, 1980)*, Lecture Notes in Math. 903, Springer, Berlin-New York, 1981, 68–105.
- [28] P. Gabriel, *Représentations indécomposables* in *Séminaire Bourbaki, 26e année (1973/1974)*, Lecture Notes in Math. 431, Springer, Berlin, 1975, 143–169.
- [29] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (2005), no. 2, 193–253.
- [30] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Verma modules and preprojective algebras*, Nagoya Math. J. 182 (2006), 241–258.
- [31] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Rigid modules over preprojective algebras*, Invent. Math. 165 (2006), no. 3, 589–632.
- [32] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Auslander algebras and initial seeds for cluster algebras*, J. London Math. Soc. 75 (2007), no. 3, 718–740.
- [33] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras II : A multiplication formula*, Compositio Math. 143 (2007), no. 5, 1313–1334.
- [34] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Partial flag varieties and preprojective algebras*, Ann. Inst. Fourier 53 (2008), no. 3, 825–876.
- [35] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Cluster algebra structures and semicanonical bases for unipotent groups*, arXiv : math/0703039.
- [36] C. Geiß, J. Schröer, *Extension-orthogonal components of preprojective varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 5, 1953–1962.

-
- [37] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Cluster algebras and Poisson geometry*, Mosc. Math. J. 3 (2003), no. 3, 899–934.
- [38] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Cluster algebras and Weil-Petersson forms*, Duke Math. J. 127 (2005), no. 2, 291–311.
- [39] D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), no. 2, 399–443.
- [40] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. 62 (1987), no. 3, 339–389.
- [41] A. Hubery, *Quiver representations respecting a quiver automorphism : a generalisation of a theorem of Kac*, J. London Math. Soc. (2) 69 (2004), no. 1, 79–96.
- [42] K. Igusa, *Notes on the no loops conjecture*, J. Pure Appl. Algebra 69 (1990), 161–176.
- [43] O. Iyama, *Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories*, Adv. Math. 210 (2007), no. 1, 22–50.
- [44] O. Iyama, *Auslander correspondence*, Adv. Math. 210 (2007), no. 1, 51–82.
- [45] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1994.
- [46] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics 155, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [47] B. Keller, *Chain complexes and stable categories*, Manuscripta Math. 67 (1990), 379–417.
- [48] B. Keller, I. Reiten, *Acyclic Calabi-Yau categories*, arXiv : math/0610594.
- [49] J. P. S. Kung, G.-C. Rota, *The invariant theory of binary forms*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 10 (1984), no. 1, 27–85.
- [50] H. Lenzing, *Nilpotente Elemente in Ringen von endlicher globaler Dimension*, Math. Z. 108 (1969), 313–324.
- [51] G. Lusztig, *Semicanonical bases arising from enveloping algebras*, Adv. Math. 151 (2000), no. 2, 129–139.
- [52] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no. 2, 365–421.
- [53] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics 110, Birkäuser, Boston, 1993.
- [54] G. Lusztig, *Total positivity and canonical bases in Algebraic groups and Lie groups*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., 9, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 281–295.
- [55] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [56] R. Marsh, M. Reineke, A. Zelevinsky, *Generalized associahedra via quiver representations*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 10, 4171–4186.
- [57] Y. Palu, *Cluster characters for triangulated 2-Calabi-Yau categories*, arXiv : math/0703540.
- [58] D. Quillen, *Higher Algebraic K-theory. I*, Lecture Notes in Mathematics 341 (1972), 85–147.

-
- [59] I. Reiten, C. Riedtmann, *Skew group algebras in the representation theory of artin algebras*, J. Algebra 92 (1985), no. 1, 224–282.
- [60] I. Reiten, M. Van den Bergh, *Two-dimensional tame and maximal orders of finite representation type*, Mem. Amer. Math. Soc. 80 (1989), no. 408.
- [61] D. Yang, *Non-simply-laced Clusters of Finite Type via Frobenius Morphism*, arXiv : math/0608114.