



HAL
open science

Analyse de la stabilité et prévision de la transition laminaire / turbulent de l'écoulement proche paroi sur l'avant-corps d'un véhicule hypersonique

Marc Ferrier

► **To cite this version:**

Marc Ferrier. Analyse de la stabilité et prévision de la transition laminaire / turbulent de l'écoulement proche paroi sur l'avant-corps d'un véhicule hypersonique. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université d'Orléans, 2008. Français. NNT : . tel-00350263

HAL Id: tel-00350263

<https://theses.hal.science/tel-00350263>

Submitted on 6 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
LABORATOIRE CNRS - ICARE

THÈSE présentée par :

Marc FERRIER

soutenue le : **22 Mai 2008**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Mécanique des Fluides**

Analyse de la stabilité et prévision de la transition laminaire / turbulent de l'écoulement proche paroi sur l'avant-corps d'un véhicule hypersonique

THÈSE dirigée par :

M. Iskender Gökalp

Directeur, ICARE

RAPPORTEURS :

M. Daniel Arnal

Directeur de recherche, ONERA

M. Jean-Paul Dussauge

Directeur de recherche, CNRS

JURY

M. Stéphane Cordier

Professeur, MAPMO, Université d'Orléans Président du jury

M. Iskender Gökalp

Directeur, ICARE

M. Ivan Fedioun

Maître de conférence, Polytech'Orléans

M. François Falempin

Chef de projet, MBDA France

M. Benoît Pier

Maître de conférence, LMFA, École Centrale

M. Daniel Arnal

Directeur de recherche, ONERA

M. Jean-Paul Dussauge

Directeur de recherche, CNRS

Résumé

Analyse de la stabilité et prévision de la transition laminaire / turbulent de l'écoulement proche paroi sur l'avant-corps d'un véhicule hypersonique

L'objectif de cette étude est de prévoir la transition laminaire/turbulent de la couche limite sur l'avant-corps d'un véhicule hypersonique évoluant à des nombres de Mach compris entre 4 et 8 et à des altitudes variant de 20 à 30km. L'approche utilisée est celle de la croissance modale des perturbations (stabilité linéaire locale) couplée à la méthode du e^N . Un code de stabilité a été créé pour cette étude. Il utilise un modèle spécifique pour le calcul des coefficients de transport et de chaleur spécifique de l'air.

Un code Navier-Stokes (Fluent[®]) est utilisé pour le calcul des profils de base. Cette approche a été validée sur plaque plane par comparaison avec des résultats de stabilité obtenus à partir de profils Levy-Lees.

Les facteurs N sont calculés par la méthode enveloppe, en suivant des chemins d'intégration localement tangents à la vitesse de groupe. Une méthode originale du calcul, en approche spatiale, de la direction de cette vitesse est proposée.

Les résultats de stabilité montrent un effet déstabilisant de la couche entropique due à l'émoussement du nez du véhicule. Cependant, l'instabilité majoritaire mise en évidence est de type CrossFlow. Dans certains cas, le premier mode oblique est aussi important. La présence du second mode droit est anecdotique. Une étude paramétrique permet de comparer les facteurs N par rapport au critère NASP (R_{δ_2}/M^e) lorsque l'altitude puis l'incidence de vol varient. Dans le premier cas, les résultats concordent, dans le second, ils divergent. Ainsi, un nouveau critère basé sur la quantité d'écoulement transverse est développé. Ce dernier est en adéquation avec les résultats du calcul de stabilité pour tous les cas considérés.

mots clefs : transition laminaire / turbulent, stabilité, couche limite, hypersonique, couche entropique, vitesse de groupe, critère de transition, crossflow.

Abstract

Stability analysis and laminar / turbulent transition prediction of the near wall flow over a hypersonic vehicle fore-body

The objective of this study is to predict the boundary layer laminar/turbulent transition over a hypersonic vehicle fore-body flying at Mach numbers between 4 and 8, at altitudes located between 20 and 30 km. Modal growth calculations of perturbations (local linear stability theory) coupled to the e^N method is used to determine the transition location. A stability code was made for this study. It uses a specific model for the calculation of transport and specific heat coefficients of air.

A Navier-Stokes code (Fluent[®]) is used for mean flow calculations. This approach has been validated on flat plate by comparison with stability results obtained from Levy-Lees profiles.

N factors are calculated using the envelop method, following integration paths locally tangent to the group velocity. An original method of calculation, in spatial approach, of this velocity direction is proposed.

Stability results show a destabilizing effect of the entropy layer due to the bluntness of the vehicle nose-tip. However, the principal instability is of CrossFlow type. In some cases, the oblique first mode is important too. The occurrence of the 2D second mode is rare and associated N factors are weak. A parametric study allows a comparison between N factors and the NASP criterion (R_{θ}/M^e) when altitudes then angles of attack are varied. In the first case, results agree, but in the second one, they diverge. Thereby, a new criterion based on the transverse flow quantity is developed. The adequacy between this latter and stability results is good in all the cases taken into account.

keywords : laminar / turbulent transition, stability, boundary layer, hypersonic, entropy layer, group velocity, transition criterion, crossflow.

Remerciements

Ce mémoire est le résultat de trois ans de travail au laboratoire ICARE (Institut de Combustion, Aérodynamique, Réactivité et Environnement) du CNRS Orléans (UPR 3021). Je voudrais donc en remercier son directeur, M. Iskender Gökalp, qui a fait en sorte que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions possibles.

Mes remerciements vont aussi à MM. François Falempin et Éric Wendling qui ont assidûment et activement suivi le déroulement des travaux.

Je remercie vivement M. Stéphane Cordier qui a accepté de présider mon jury de thèse, ainsi que MM. Daniel Arnal et Jean-Paul Dussauge d'avoir consacré une partie de leur temps à l'étude critique de mon mémoire en tant que rapporteurs. Ma reconnaissance va également à M. Benoît Pier qui a bien voulu juger ce travail et participer au jury, ainsi qu'à M. Jean Perraud, membre invité, dont les conseils ont été très utiles pour la correction de ce mémoire.

Que M. Ivan Fedioun reçoive ici toute ma gratitude et mon amitié. Sa disponibilité sans faille et son aide ont grandement contribué à l'aboutissement de cette thèse. En outre, son enthousiasme communicatif pour la mécanique des fluides a favorisé l'instauration d'un contexte stimulant pour mon travail de recherche.

Il me faut aussi remercier tous les membres du laboratoire ICARE pour leur accueil et leur gentillesse. En particulier, je souhaiterais exprimer ma reconnaissance envers Murielle, Dmitry, Evgueniy, Sandra, Pascale, Emmanuel, Jean-Noël et d'une manière générale envers tous les membres du "groupe du midi" qui ont fait de ce séjour à Orléans un moment agréable.

Enfin, je remercie bien évidemment ma femme Gina pour son soutien, sa patience pendant ces trois ans passés loin d'elle, ainsi que pour beaucoup d'autres choses...

Table des matières

Table des figures	9
Liste des tableaux	15
Introduction générale	17
1 Choix de la méthodologie	21
1.1 Différents scénarios de transition	21
1.2 Croissance modale	23

I Théories de la stabilité linéaire locale et de la méthode du e^N

2 Historique	27
3 Mise en équations	31
3.1 Équations aux petites perturbations	31
3.2 Approche temporelle / Approche spatiale. Relation de Gaster.	35
3.3 Relation de dispersion, interprétation physique des modes propres	36
3.4 Cas bidimensionnel incompressible et non-visqueux	37
3.4.1 Cas incompressible visqueux	37
3.4.2 Cas incompressible non-visqueux	38

4	Théorèmes importants et caractérisation des instabilités	39
4.1	Théorèmes de Rayleigh.	39
4.2	Résultats importants de Lees & Lin	40
4.3	Modes multiples de Mack	40
4.4	Résumé des théorèmes importants.	41
4.5	Caractérisation des instabilités.	42
4.5.1	Couches limites incompressibles bidimensionnelles.	42
4.5.2	Couches limites compressibles bidimensionnelles.	42
4.5.3	Couches limites tridimensionnelles.	42
5	Méthode du e^N	45
5.1	Principe de la méthode.	45
5.2	Application au cas tridimensionnel compressible	46
5.2.1	Détermination de $\bar{\psi}$	47
5.2.2	Stratégies d'intégration	48
5.3	Limitations de la méthode e^N	50

II Développement et validation d'un code de stabilité et calcul du facteur N

6	Le code de stabilité	53
6.1	Principe de résolution, vue d'ensemble du code.	53
6.2	Le noyau du code : intégration de (6.1).	54
6.2.1	Résolution analytique du système à l'extérieur de la couche limite.	54
6.2.2	Intégration du système.	55
6.3	Pré-traitement des profils de base.	56
6.3.1	Changement de repère.	56
6.3.2	Coupe des profils.	57
6.3.3	Dérivation et interpolation.	59
6.3.4	Calcul des coefficients thermo-transport.	59
6.4	Paramétrage du calcul.	60
6.5	Initialisation d'un calcul.	61

7	Calcul des facteurs N	63
7.1	Calcul de la vitesse de groupe.	63
7.1.1	Méthode de calcul.	63
7.1.2	Validation de la méthode.	64
7.2	Évaluation des facteurs N.	66
7.2.1	Différentes approches possibles.	66
7.2.2	Méthode numérique.	68
8	Validation de la chaîne de calcul	71
8.1	Validation du code de stabilité ICARE.	71
8.1.1	Cône à Mach 6.	71
8.1.2	Plaque plane à Mach 10.	73
8.1.3	Conclusion.	78
8.2	Validation de l'approche Navier-Stokes pour le calcul de profils moyens.	79

III Calculs de stabilité et prévision de transition sous l'avant-corps du véhicule

9	Étude de l'écoulement moyen	85
9.1	Géométrie de l'avant-corps	85
9.2	Récapitulation des cas abordés.	86
9.3	Maillage et paramètres numériques.	86
9.4	Topologie, caractéristique de l'écoulement moyen.	88
10	Analyse de stabilité	93
10.1	Revue bibliographique sur la stabilité d'écoulements hypersoniques externes.	93
10.1.1	Avant-corps de véhicules existants.	93
10.1.2	Cônes pointus en incidence.	94
10.1.3	Cône elliptique pointu sans incidence.	94
10.1.4	Émoussement et couche entropique.	94
10.2	Résultats généraux.	95
10.2.1	Effet de la couche entropique (CE).	95
10.2.2	Chemin d'intégration.	102

10.2.3	Effet de la température pariétale.	103
10.2.4	Influence de la fréquence sur le facteur N_f	105
10.3	Étude paramétrique en vol. Comparaison au critère NASP.	107
10.3.1	Effet du nombre de Mach.	107
10.3.2	Variation de la pression dynamique.	110
10.3.3	Effet de l'incidence de vol.	111
10.3.4	Cas particulier des ondes stationnaires.	112
10.3.5	Validité du critère NASP.	114
10.4	Résultats de stabilité en soufflerie.	114
10.5	Conclusions sur la prévision de transition.	116
10.5.1	Ondes progressives / stationnaires.	116
10.5.2	Facteur de transition N_t	117
10.5.3	Transition sous l'avant-corps du véhicule.	119
11	Proposition d'un nouveau critère.	121
11.1	Définition du critère. Test de la variation d'angle d'incidence.	121
11.2	Test de la variation d'altitude.	125
11.3	Tentative d'adimensionnement.	126
	Conclusion et perspectives	131
	Bibliographie	135
	Annexes	139
	A Définition des repères de calculs	139
	B Définition du maillage	141
	C Mécanisme de l'instabilité non-visqueuse	143
	D Solutions de similitude de Levy-Lees	147
	E Coefficients de la matrice A	151
	F Valeurs et vecteurs propres de A à l'extérieur de la couche limite	153

Table des figures

1	Vue d'artiste du véhicule hypersonique.	18
1.1	Scenarii de transition pour les écoulements proches parois. D'après [1].	22
1.2	Illustration, à l'aide de considérations énergétiques, des différences entre les différents scénarios de transition.	23
1.3	Gauche : évolution de l'amplitude d'une perturbation dans le cas d'un opérateur normal. Droite : idem pour un opérateur non-normal.	23
2.1	Protocole expérimental de Reynolds.	28
2.2	Utilisation de rugosités pour le déclenchement de la transition sous l'avant-corps du X-43A. D'après [2].	29
3.1	Définition des paramètre d'une onde.	37
3.2	Courbe de stabilité neutre de plaque plane ($M^e = 0.1, T^e = 300K, P^e = 1bar$).	38
4.1	Effet de la compressibilité sur les diagrammes de stabilité de plaque plane adiabatique [3].	41
4.2	Profil de vitesse d'une couche limite tridimensionnelle.	43
4.3	Mécanismes de l'instabilité secondaire.	43
5.1	Méthode du e^N	46
5.2	α_i en fonction de ψ pour différentes positions sous l'avant-corps du véhicule. Distinction entre les stratégies méthode enveloppe (IG) et $\psi = cte$ (ID).	49
6.1	Organigramme simplifié du code.	54
6.2	Définition du repère de stabilité.	56
6.3	Invariance des calculs de stabilité par rotation autour de l'axe y	57
6.4	Écoulement proche paroi. Définition des critères C et H.	58
6.5	Exemple de profil d'enthalpie totale sur paroi adiabatique.	58
6.6	Chaleur spécifique de l'air.	60
6.7	Exemple de spectre de l'opérateur Navier-Stokes linéarisé.	61
7.1	α_r en fonction de $\bar{\psi}$. Plaque plane, $M^e = 6, T^e = 221.6K, P^e = 2512Pa$. Fréquence des ondes $f = 100kHz$	65
7.2	α_r en fonction de $\bar{\psi}$. Avant-corps du véhicule, $X = 4cm, Y = 0.3cm$. Fréquence des ondes $f = 0kHz$	65
7.3	Principe de la méthode numérique de calcul des facteurs N	68
8.1	Influence de l'épaisseur de couche limite sur le calcul de stabilité.	72
8.2	Influence du nombre de points dans la couche limite sur le calcul de stabilité.	73

8.3	Comparaison des α_r . Mode 1, ME.	74
8.4	idem fig. 8.3. Mode 2, $\psi = 0^\circ$	74
8.5	Comparaison des α_i . Mode 1, ME.	74
8.6	idem fig. 8.5. Mode 2, $\psi = 0^\circ$	74
8.7	Comparaison des facteurs N . Mode 1, ME.	74
8.8	idem fig. 8.7. Mode 2, $\psi = 0^\circ$	74
8.9	Comparaison des angles ψ . Mode 1, ME.	74
8.10	Comparaison de la vitesse de phase c_r . Mode 1, méthode enveloppe.	76
8.11	Comparaison des angles ψ_M . Mode 1, méthode enveloppe.	76
8.12	Comparaison des taux d'amplification α_i	77
8.13	Comparaison de la vitesse de phase c_r . Mode 2, $\psi = 0^\circ$	77
8.14	Facteurs N . Modes 1 et 2.	78
8.15	Position de la transition en fonction du facteur N	78
8.16	Maillage du calcul Navier-Stokes.	79
8.17	Plaque plane adiabatique $M^e = 2.68$. Épaisseur de déplacement.	80
8.18	idem Fig.8.17 : Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement.	80
8.19	Plaque plane adiabatique $M^e = 2.68$, $\bar{T}^e = 752K$, $\bar{p}^e = 4640Pa$. Profil de vitesse de l'écoulement moyen.	81
8.20	idem Fig.8.19 : profil de température.	81
8.21	idem Fig.8.19 : dérivée première de la vitesse.	81
8.22	idem Fig.8.19 : dérivée première de la température.	81
8.23	idem Fig.8.19 : dérivée seconde de la vitesse.	81
8.24	idem Fig.8.19 : dérivée seconde de la température.	81
8.25	Plaque plane adiabatique $M^e = 2.68$. Amplification, $f = 2400Hz$, $\psi = 69^\circ$	82
8.26	idem Fig.8.25 : facteurs N	82
9.1	vue isométrique de l'avant-corps du véhicule	85
9.2	Vue générale du maillage, véhicule "sur le dos".	87
9.3	Détail du maillage non-structuré dans la région du nez.	87
9.4	Iso-valeurs du nombre de Mach, $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$	88
9.5	Lignes de frottement sous l'avant-corps, $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$. Les axes sont gradués en mètres.	89
9.6	Iso-valeurs de la composante longitudinale de vitesse (m/s) à $X = 0.5$ m. Les lignes de courant illustrent les tourbillons longitudinaux.	89
9.7	Iso-valeurs de la pression totale (bar) mettant en évidence la couche entropique. Vue partielle de côté.	90
9.8	Profils de vitesse longitudinale dans le plan transversal $X = 0.6$ m.	90
9.9	Profils de vitesse transversale dans le plan transversal $X = 0.6$ m.	90
10.1	Définition des deux repères de stabilité.	93
10.2	Courbes iso- N ($N = 5$) calculées sur le cône elliptique pointu sans incidence de Kimmel <i>et al.</i> , d'après [4]. e représente le rapport du grand axe sur le petit axe.	95
10.3	Profils de vitesse suivant x : $X = 0.6$ m, $Y = 0.017$ m. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$	96
10.4	Points d'Inflexion Généralisés. Même condition que figure 10.3.	96
10.5	Spectre de l'opérateur NS linéarisé calculé à partir des profils de la figure 10.3, CL seule (coupure δ_c). Paroi adiabatique, $f = 10$ kHz, $\psi = 0^\circ$	97
10.6	idem figure 10.5 : CL + CE.	97
10.7	idem figure 10.5 : paroi radiative.	97
10.8	idem figure 10.6 : paroi radiative.	97

10.9	Vitesse de phase du mode 3. $X = 0.6m, Y = 0.017m$.	98
10.10	Fonctions propres de vitesse adimensionnées associées mode 3.	99
10.11	idem figure 10.10. Vitesse et température.	99
10.12	Opposé du taux d'amplification du mode 3 en fonction de ψ . $f = 10\text{kHz}$.	100
10.13	Opposé du taux d'amplification du mode 3 en fonction de la fréquence. $\psi = 0^\circ$.	100
10.14	Facteurs N_f du mode 3 ($\psi = 0^\circ$) et du mode 2 (méthode enveloppe).	101
10.15	Comparaison des taux d'amplification calculés le long de différentes lignes de maillage sous l'avant-corps, pour des profils coupés à l'aide des critères C et H. $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	102
10.16	idem figure 10.15 : facteurs N_f .	102
10.17	Comparaison de θ^e et de θ_g . Influence sur le calcul des facteurs N_f (méthode enveloppe). $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	103
10.18	Effet de la condition de paroi sur les taux d'amplification. $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	104
10.19	idem figure 10.18 : orientation de l'onde la plus instable.	104
10.20	idem figure 10.18 : facteurs N_f .	104
10.21	α_i calculés pour la ligne de maillage 50. $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}$.	105
10.22	idem figure 10.21 : facteurs N_f .	105
10.23	Iso-valeurs de $N_f = 4$ sous l'avant-corps (paroi radiative). $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}$.	105
10.24	Caractérisation des instabilités pour $f = 0\text{kHz}$. $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}$.	106
10.25	idem 10.24 : facteurs N_f .	106
10.26	Taux d'amplification calculés pour les lignes de maillage 58, 60 et 62 de l'avant-corps. $M_\infty = 4, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}$.	107
10.27	idem figure 10.26 : longueurs d'onde réduites λ/δ_1 .	107
10.28	Propriétés de stabilité à $M_\infty = 4, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	108
10.29	Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 4, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	108
10.30	idem Fig.10.28 : $M_\infty = 6$.	108
10.31	idem Fig.10.29 : $M_\infty = 6$.	108
10.32	idem Fig.10.28 : $M_\infty = 8$.	108
10.33	idem Fig.10.29 : $M_\infty = 8$.	108
10.34	Facteurs N du second mode de Mack. $M_\infty = 8$.	109
10.35	Propriétés de stabilité à $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	110
10.36	Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 4, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	110
10.37	idem Fig.10.35 : $P_{dyn} = 0.2 \text{ bar}$.	110
10.38	idem Fig.10.35 : $P_{dyn} = 0.2 \text{ bar}$.	110
10.39	Propriétés de stabilité à $M_\infty = 4, i = 2^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	111
10.40	Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 4, i = 2^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 10 \text{ kHz}$.	111
10.41	idem Fig.10.39 : $i = 4^\circ$.	111
10.42	idem Fig.10.40 : $i = 4^\circ$.	111
10.43	idem Fig.10.39 : $i = 6^\circ$.	112
10.44	idem Fig.10.40 : $i = 6^\circ$.	112
10.45	Propriétés de stabilité à $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 0 \text{ kHz}$.	113
10.46	Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}, f = 0 \text{ kHz}$.	113
10.47	idem Fig.10.45 : $i = 6^\circ$.	113

10.48idem Fig.10.46 : $i = 6^\circ$	113
10.49idem Fig.10.45 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.	113
10.50idem Fig.10.46 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.	113
10.51Propriétés de stabilité à $M_\infty = 6, i = 4^\circ, f = 30$ kHz. Soufflerie BD.	115
10.52Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 6, i = 4^\circ, f = 30$ kHz. Soufflerie BD.	115
10.53idem Fig.10.51 : $f = 15$ kHz, soufflerie HS.	115
10.54idem Fig.10.52 : $f = 15$ kHz, soufflerie HS.	115
10.55Taux d'amplification calculés pour les lignes de maillage 45 et 59 de l'avant-corps. $M_\infty =$ $6, i = 4^\circ$, soufflerie BD.	115
10.56idem figure 10.55 : longueurs d'onde réduites λ/δ_1	115
10.57Iso-valeurs de $N_t = 7$ et $N_t = 8$ localisant le début de la transition pour les cas vol $M_\infty = 4$ et $M_\infty = 6$. $f = 10$ kHz.	119
10.58Iso-valeurs de $N_t = 5$ localisant le début de la transition pour le cas soufflerie BD à $M_\infty = 6$. $f = 30$ kHz.	119
11.1 Définition de la quantité d'écoulement transverse (quantité CFF).	121
11.2 Définition de la quantité $\omega(y)$	122
11.3 Comparaison de la quantité de CF (CFF) avec les taux d'amplification (α_i). $M_\infty = 6,$ $i = 2^\circ$	123
11.4 idem figure 11.3. $M_\infty = 6, i = 4^\circ$	123
11.5 idem figure 11.3. $M_\infty = 6, i = 6^\circ$	123
11.6 Comparaison des N_{CFF} avec les facteurs N . $M_\infty = 6, i = 2^\circ$	124
11.7 idem figure 11.6. $M_\infty = 6, i = 4^\circ$	124
11.8 idem figure 11.6. $M_\infty = 6, i = 6^\circ$	124
11.9 Comparaison de la quantité de CF (CFF) avec les taux d'amplification. $M_\infty = 6, i = 4^\circ,$ $P_{dyn} = 0.6$ bar.	125
11.10Comparaison du critère N_{CFF} avec les facteurs N . $M_\infty = 6, i = 2^\circ, P_{dyn} = 0.6$ bar.	125
11.11idem Fig.11.9 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.	125
11.12idem Fig.11.10 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.	125
11.13Comparaison de la quantité de CF adimensionnée (CFF) avec les taux d'amplification. $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6$ bar.	127
11.14Comparaison du critère N_{CFF} adimensionné avec les facteurs N . $M_\infty = 6, i = 2^\circ, P_{dyn} =$ 0.6 bar.	127
11.15idem figure 11.13. $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.2$ bar.	127
11.16idem figure 11.14. $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.2$ bar.	127
11.17idem figure 11.13. $M_\infty = 8, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.5$ bar.	127
11.18idem figure 11.14. $M_\infty = 8, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.5$ bar.	127
11.19Comparaison de la quantité de CF adimensionnée (CFF) avec les taux d'amplification. $M_\infty = 6, i = 2^\circ$	128
11.20Comparaison du critère N_{CFF} adimensionné avec les facteurs N . $M_\infty = 6, i = 2^\circ$	128
11.21idem figure 11.19. $M_\infty = 6, i = 4^\circ$	128
11.22idem figure 11.20. $M_\infty = 6, i = 4^\circ$	128
11.23idem figure 11.19. $M_\infty = 6, i = 6^\circ$	128
11.24idem figure 11.20. $M_\infty = 6, i = 6^\circ$	128
11.25Comparaison de la quantité de CF adimensionnée (CFF) avec les taux d'amplification. $M_\infty = 4, i = 4^\circ$	129
11.26Comparaison du critère N_{CFF} adimensionné avec les facteurs N . $M_\infty = 4, i = 4^\circ$	129

A.1	Définition du repère de stabilité (vue isométrique de l'avant-corps du véhicule).	140
A.2	Définition du repère de stabilité (vue de dessous de l'avant-corps du véhicule).	140
B.1	Maillage de la zone étudiée sous l'avant-corps.	142
B.2	Maillage de la paroi sous l'avant-corps. Cas $M_\infty = 6, 8$, vol et soufflerie.	142
B.3	Maillage de la paroi sous l'avant-corps. Cas $M_\infty = 4$	142
C.1	Mécanisme de l'instabilité non-visqueuse.	143
C.2	Mécanisme de stabilisation dans un écoulement de couche limite.	144
C.3	Blasius : profil de vitesse.	145
C.4	Tangente hyperbolique.	145
C.5	Blasius : dérivée première.	145
C.6	Tangente hyperbolique : dérivée première.	145
C.7	Blasius : dérivée seconde.	145
C.8	Tangente hyperbolique : dérivée seconde.	145

Liste des tableaux

6.1	Composition de l'air (fractions molaires), A.Burcat et US Std. Atmosphere (1976). . .	59
8.1	Comparaison ONERA / ICARE des paramètres du calcul de stabilité.	72
8.2	Comparaison Malik / ICARE des paramètres de calcul des profils moyens.	75
8.3	Comparaison Malik / ICARE des paramètres du calcul de stabilité.	75
9.1	Tableau récapitulatif des différents cas de calculs.	86
9.2	Valeurs caractéristiques de la couche limite pour différents points de vol.	91
10.1	Altitude des PIG (en mm) et des maxima des modules des fonctions propres.	99

Introduction générale

On peut faire remonter les premières études intensives sur le vol hypersonique aux années 1950. Les applications considérées étaient alors militaires et concernaient essentiellement les missiles balistiques. Il faut dire que le contexte géo-politique de l'époque se prêtait bien à ce genre de considérations. Le premier avion hypersonique fut construit dans les années 60 par la société North American pour le compte de la NASA. Cet engin, qui devait servir à récolter des données expérimentales pour la préparation de futurs vols hypersoniques, atteint la vitesse de Mach 6.7 en 1967. Durant les années 70, l'intérêt pour le vol hypersonique retomba, surtout en raison des limitations imposées par la propulsion : les moteurs aérobies (turbo-réacteurs, statoréacteurs) ne permettent pas d'atteindre des vitesses hypersoniques, et les moteurs fusée présentent l'inconvénient de nécessiter l'emport de comburant.

La mise au point des statoréacteurs à combustion supersonique (super-statoréacteurs) a permis de lever cette limitation. Des projets ambitieux de conception de lanceurs réutilisables, permettant un accès à l'espace à coût réduit, ont alors vu le jour. Au début des années 80, le programme américain NASP (National AeroSpace Plane) avait pour but de réaliser un lanceur de plus de 30 m de long. En Europe, de telles études ont été initiées au début des années 90 avec les programmes PREPHA (Programme de Recherche sur la Propulsion Hypersonique Avancée) en France et Sänger en Allemagne. Toutes ces études ont finalement été abandonnées car elles se heurtaient à des problèmes technologiques rédhibitoires. En Europe, les efforts de recherche concernant le vol hypersonique ont néanmoins continué à travers le projet JAPHAR (Joint Airbreathing Propulsion for Hypersonic Application Research) co-dirigé par l'ONERA (France) et le DLR (Allemagne). Ces études, menées de 1997 à 2001, avaient pour objectif le développement d'une nouvelle configuration de "statomixte" (statoréacteur pouvant fonctionner en mode subsonique et supersonique) pour un véhicule expérimental destiné à la plage de nombres de Mach située entre 4 et 8. À la même époque, aux États-Unis, le programme Hyper-X avait pour ambition de faire voler à Mach 7 un engin de taille réduite (environ 4 mètres) et propulsé par un super-statoréacteur. Cet objectif a été atteint en Mars 2004 par le X-43A.

Toutes ces études ont permis, entre autres, de mettre en avant un certain nombre de problèmes techniques et théoriques cruciaux constituant autant de défis à surmonter afin de concevoir et de fabriquer un avion hypersonique. La prévision de la transition laminaire / turbulent de la couche limite constitue un de ces points clefs [5], [6] d'après [7]. En effet, la connaissance de la position de la transition est nécessaire afin de prévoir les charges thermiques sur la paroi, les performances du système de propulsion et la traînée de l'engin.

Dans la présente étude, on s'intéressera plus particulièrement à l'écoulement proche paroi se développant *sous* l'avant-corps d'un véhicule hypersonique (figure 1). Ce véhicule est un démonstrateur qui a pour objectif de valider en vol des méthodes de conception. Il est prévu pour opérer entre Mach 4 et Mach 8 à des altitudes comprises entre 20 et 30 km. De part l'agencement spécifique du moteur, le dessous de l'avant-corps sert de rampe de compression avant l'entrée d'air. Or, la conception de cette dernière dépend de la nature de la couche limite (laminaire / turbulent) entrant dans le moteur. L'objectif de l'étude est donc de prévoir la transition sous l'avant-corps pour différentes configurations de vol.

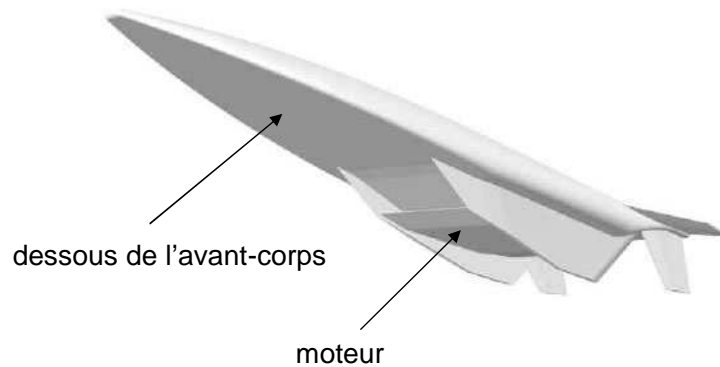


FIG. 1 – Vue d'artiste du véhicule hypersonique.

Un critère populaire de prévision de transition a été développé pendant le programme NASP. Il s'agit du critère Re_{δ_2}/M^e , où δ_2 représente l'épaisseur de déplacement et M^e le nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite. La transition intervient pour une valeur donnée du critère, laquelle varie généralement suivant la configuration étudiée. La principale critique qui est faite à ce critère [8] est qu'il ne tient pas compte des mécanismes menant à la transition. Au contraire, le critère semi-empirique du e^N prend en considération ces mécanismes.

La méthode du e^N a été développée à la fin des années 50 par Smith et Gamberoni [9] pour des plaques planes en écoulement incompressible. Elle a ensuite été étendue aux écoulements tridimensionnels et compressibles, et utilisée avec succès pour des géométries (et donc des écoulements) simples : plaques planes et cônes. Elle donne aussi de bons résultats pour les ailes en flèche d'envergure infinie.

Le critère du e^N se base sur la théorie de la stabilité linéaire des écoulements pour prévoir la transition. Afin d'appliquer numériquement cette théorie, il est nécessaire de calculer au préalable l'écoulement laminaire de base (ou écoulement moyen) dont on veut étudier la stabilité. L'étude d'écoulements se développant autour de géométries simples autorise l'emploi d'approches simples pour le calcul des profils (vitesse, température) de base : équation de similitude, couplage Euler / couche limite, PNS (Parabolized Navier-Stokes equations). Dans le cas présent, la géométrie de l'engin est plus complexe (forme tridimensionnelle, nez émoussé). Aussi, l'approche envisagée pour le calcul des profils de l'écoulement moyen est la résolution des équations de Navier-Stokes. Le code employé est le code commercial Fluent®6.3. La question est de connaître la validité d'une telle approche pour une géométrie dont les dimensions sont importante vis à vis de l'épaisseur de la couche limite (voir Annexe A). En d'autres termes, est-on capable, en utilisant ce code, de décrire assez précisément les profils de l'écoulement de manière à ce que ces derniers soient exploitables pour une étude de stabilité ? D'autre part, l'expérience de l'institut ICARE dans le domaine de la stabilité de couche limite était limitée. En particulier, il ne possédait pas de code de stabilité linéaire spatiale pour la couche limite tridimensionnelle compressible, d'où la nécessité d'en créer un.

Ce mémoire s'articule autour de trois parties. En préambule de ces trois parties, le premier chapitre replace la théorie de la stabilité linéaire dans le contexte général des connaissances actuelles sur la problématique de la transition. Dans ce cadre, nous expliquerons pourquoi la théorie linéaire locale est la plus appropriée pour le sujet qui nous occupe.

La partie I développe le modèle mathématique de la stabilité linéaire appliquée aux équations de Navier-Stokes compressibles ainsi que la méthode du e^N . En particulier, les équations des petites perturbations, qui servent ensuite de base au développement du code de stabilité, sont établies dans la section

3.1.

Le code est ensuite introduit dans la partie II. Outre les aspects techniques de résolution des équations aux petites perturbations, un point théorique précis de la méthode du e^N a fait l'objet d'une étude particulière : il s'agit du calcul de la vitesse de groupe pour lequel une approche originale est proposée. Une validation du code sur des cas tests est ensuite présentée, ainsi qu'une validation de l'utilisation du code Fluent® pour le calcul des profils moyens.

Enfin la partie III présente les résultats du calcul de stabilité sous l'avant-corps du véhicule et apporte des éléments de réponse quant à la prévision de transition de la couche limite. D'autre part, une étude numérique d'un aspect précis de la stabilité de cet écoulement est proposé dans la section 10.2.1 : il s'agit de l'influence (sur la stabilité) de la couche entropique due à l'émoussement du nez de l'appareil. Ensuite, dans le cadre d'une étude paramétrique (variation d'incidence, d'altitude de vol...), une comparaison du critère NASP avec les résultats du calcul de stabilité met en avant les limitations de ce critère. Le dernier chapitre propose, ainsi, un nouveau critère de transition mieux adapté à la présente géométrie.

Chapitre 1

Choix de la méthodologie

1.1 Différents scénarios de transition

Il est intéressant d'avoir une vue globale des mécanismes de transition avant d'adopter une stratégie adéquate pour répondre au problème considéré. Reshotko *et al.* [1] proposent une classification de ces mécanismes en fonction du taux de perturbation extérieur à la couche limite. En effet, la transition est la réponse de cet "oscillateur complexe [8]" qu'est l'écoulement à des perturbations environnementales. La trace de ces perturbations dans l'écoulement est déterminée par la réceptivité.

L'étude de réceptivité permet de savoir comment les modes instables de "l'oscillateur complexe" sont effectivement excités par l'environnement extérieur. La réceptivité décrit les moyens avec lesquels les perturbations entrent dans la couche limite. Elle permet de connaître quels types de perturbation seront plus susceptibles de déstabiliser un écoulement donné. Par exemple, une couche limite bidimensionnelle est sensible aux perturbations acoustiques alors que si elle est tridimensionnelle (cas d'une aile en flèche par exemple), l'état de surface de la paroi (près de la ligne de partage) constitue l'élément le plus important dans l'apparition des instabilités. La réceptivité permet aussi de déterminer l'amplitude initiale des perturbations dans l'écoulement à l'endroit où elles sont perçues par ce dernier. Une fois installées dans la couche limite, les perturbations vont soit s'amplifier, soit s'amortir en fonction de l'état de stabilité du système.

Les scénarios selon lesquels les perturbations sont amplifiées par les instabilités de la couche limite et vont effectivement créer des ondes instables sont présentés sur la figure 1.1. Seuls les chemins A, B et C sont pertinents pour les écoulements externes. Les chemins D et E correspondent à des niveaux de perturbation très élevés (pour des turbomachines, par exemple). La figure 1.2 propose une interprétation des scénarios A, B et C par ailleurs détaillés ci-dessous. Sur ce graphe, E représente l'énergie d'une perturbation et x_c , l'abscisse à laquelle les perturbations commencent à s'amplifier selon le scénario A. E_t correspond à la limite pour laquelle la transition intervient.

Scénario A. Historiquement, il s'agit du premier mécanisme de transition mis en évidence. Les perturbations vont exciter les modes propres de la couche limite. Si certains de ces modes sont instables, alors ils donneront naissance à des ondes qui vont s'amplifier spatialement, au cours de leur déplacement dans l'écoulement. Les équations qui régissent l'évolution des instabilités sont les équations de Navier-Stokes instationnaires. Toutefois, pour la plus grande partie de l'amplification (au sens de l'extension spatiale), les termes non-linéaires sont négligeables. Ainsi le cadre adéquat de l'étude de ces instabilités est constitué par les équations linéarisées de Navier-Stokes instationnaires (on parle parfois de croissance

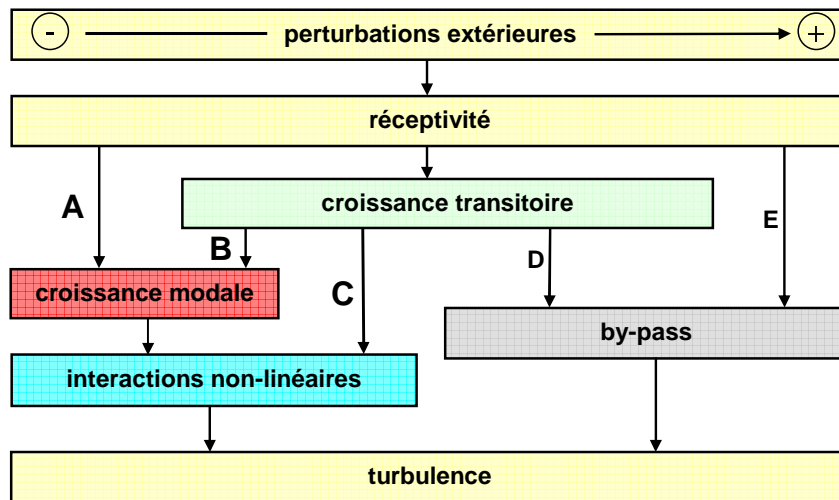


FIG. 1.1 – Scénarii de transition pour les écoulements proches parois. D’après [1].

linéaire des instabilités ; ici on préférera le terme de croissance modale par référence aux modes propres du problème linéarisé). Dans ce cadre, l’étude de stabilité s’intéresse à chaque mode séparément, et l’on considère que la couche limite est instable si un seul de ces modes est instable. Lorsque les instabilités ont atteint une certaine amplitude, les termes non-linéaires ne sont plus négligeables : les différents modes peuvent interagir et amener finalement à la turbulence.

Scénario B. Si le taux de perturbation extérieur est plus élevé, alors le mécanisme de croissance transitoire peut être amené à jouer un rôle dans la transition. Comme la croissance modale, la croissance transitoire entre dans le cadre des théories linéaires. Cependant, elle tient compte de la non-normalité de l’opérateur Navier-Stokes linéarisé. Du fait de cette non-normalité, une combinaison des certains modes du système, mêmes stables, peut conduire à une croissance rapide (en fait algébrique) mais transitoire d’une perturbation. La décroissance est ensuite exponentielle. Une illustration de ce phénomène est donnée par la figure 1.3 ; les évolutions, en espace, de l’amplitude φ d’une perturbation sont comparées dans les cas des opérateurs normaux et non-normaux. Dans les deux cas, l’analyse modale montre un écoulement stable, cependant, pour l’opérateur non-normal, la perturbation φ s’amplifie.

Pour le scénario B, la croissance transitoire précède la croissance modale et fournit à cette dernière une amplitude initiale plus importante au moment où l’écoulement devient instable. Il n’est en fait pas impossible que ce scénario soit une simple vue de l’esprit car aucun exemple évident n’est disponible dans la littérature.

Scénario C. et D. Au contraire, les mises en évidence des scénarios C et D sont plus nombreuses. Il s’agit du cas où la croissance transitoire engendre directement la transition. On peut par exemple citer les travaux de Schmid *et al.* concernant l’écoulement de Poiseuille plan [10] ou encore Reshotko et Tumin pour l’écoulement de Poiseuille cylindrique [11]. En ce qui concerne les couches limites fortement compressibles, Reshotko et Tumin [12] ont aussi mis en évidence le rôle de la croissance transitoire dans la transition provoquée par des rugosités macroscopiques (dont la hauteur est de l’ordre de grandeur de l’épaisseur de la couche limite).

Pour le problème de la transition de couche limite hypersonique en vol ou en soufflerie, aucune mise

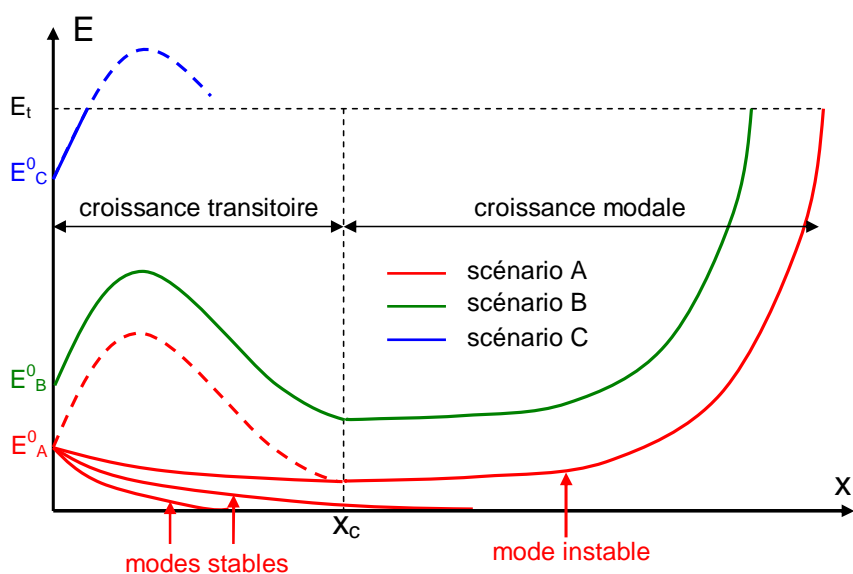


FIG. 1.2 – Illustration, à l'aide de considérations énergétiques, des différences entre les différents scénarios de transition.

en évidence de croissance transitoire n'a été faite pour des parois lisses. Aussi, dans ce mémoire, nous ne considérerons que le scénario A. Par contre, les scénarios C et D peuvent être intéressants si l'on envisage le contrôle de la transition à l'aide de rugosités.

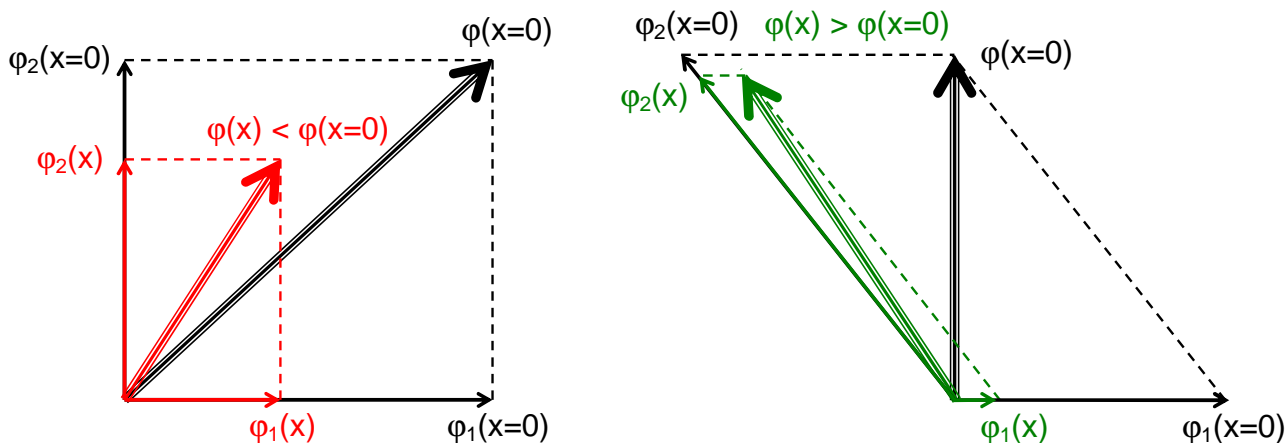


FIG. 1.3 – Gauche : évolution de l'amplitude d'une perturbation dans le cas d'un opérateur normal. Droite : idem pour un opérateur non-normal.

1.2 Croissance modale

Le scénario A met en avant le rôle prédominant joué par la croissance modale des instabilités. Le taux d'amplification (ou l'amortissement) des ondes dépend généralement de nombreux paramètres qui agissent, en outre, sur les caractéristiques de la couche limite. On peut citer par exemple : la pression statique à l'infini (ainsi que la température), le nombre de Mach, la température de paroi, le gradient

de pression longitudinal, l'aspiration ou le soufflage à la paroi, l'incidence de vol, l'émoussement de la pointe avant... Considérant ce nombre important de facteurs, la conclusion de Schneider [13] quant à la prévision de la position de la transition est la suivante :

“In view of the dozens of parameters influencing transition, classical attempts to correlate the general transition point with one or two parameters, such as Reynolds number and Mach number, can only work for cases that are similar to those previously tested. Transition-estimation methods that are reliable for a broad range of conditions will need to be based on an understanding of the physical mechanisms involved. (...) The simplest and best developed of the mechanism-based methods are the e^N methods, which attempt to correlate transition with the integrated growth of the linear instability waves.”

La méthode du e^N constitue en fait, à l'heure actuelle, l'unique critère prenant en compte les mécanismes de transition. Il s'agit d'un critère semi-empirique basé sur les résultats de l'analyse de la stabilité linéaire. Plus précisément, il considère les taux d'amplification locaux des instabilités pour prévoir la transition. Les chapitres 3 et 5 détaillent respectivement la théorie de la stabilité linéaire et la méthode du e^N .

Dans le cadre de la théorie de stabilité linéaire, différentes approches sont possibles. On distingue notamment la théorie locale et la théorie non-locale ou PSE (Parabolized Stability Equations). L'approche locale se base sur l'hypothèse d'écoulement parallèle : en chaque point de la paroi, on considère que la couche limite ne s'épaissit pas. La stabilité de l'écoulement peut donc être étudiée localement, indépendamment des autres points. En fait la stabilité en un point ne dépend pas de l'histoire de la couche limite. Au contraire, dans l'approche PSE, l'évolution de l'écoulement est pris en compte. Les techniques de résolution des équations de stabilité sont plus difficiles à mettre en œuvre car ces dernières ne peuvent plus être résolues localement. De plus, des études menées à l'ONERA par Louis [14] montrent que les résultats obtenus, avec la méthode PSE, sur un profil d'aile en flèche en écoulement supersonique ($M_\infty = 3$), sont proches de ceux obtenus avec l'approche locale. (Ces résultats sont une extension au cas compressible des travaux ALTTA [15] menés pour des écoulements incompressibles). Notamment, les longueurs d'ondes et les fréquences des instabilités sont pratiquement égales, ainsi que les facteurs N . Ainsi, pour l'étude qui nous concerne, l'hypothèse d'écoulement parallèle a été retenue, et vérifiée numériquement sur les composantes de vitesse du champ moyen à l'extérieur de la couche limite.

Première partie

Théories de la stabilité linéaire locale et de la méthode du e^N

Chapitre 2

Historique

C'est en 1883 qu'a été réalisée l'expérience fondatrice de l'étude des instabilités hydrodynamiques. Grâce au protocole dont une représentation est visible sur la figure 2.1, Reynolds démontra l'existence de deux régimes d'écoulement : laminaire et turbulent. En 1887, Lord Rayleigh émit l'hypothèse que l'origine de la transition à la turbulence était à rechercher dans le développement, au sein de l'écoulement, d'ondes instables. En partant de cette idée, il démontra qu'une condition nécessaire pour que ces ondes apparaissent et s'amplifient était qu'il existe un point d'inflexion dans le profil de vitesse. Les bases mathématiques de la théorie de la stabilité linéaire incompressible furent établies indépendamment par Orr et Sommerfeld en 1904. Dans le cadre des écoulements parallèles bidimensionnels, ils démontrèrent que le développement des instabilités pouvait être modélisé par une seule équation différentielle ordinaire du quatrième ordre et qui aujourd'hui porte leurs noms.

Un point gênant de la théorie de Rayleigh était que seuls les écoulements dont les profils exhibaient un point d'inflexion étaient susceptibles de transitionner. Pour arriver à cette conclusion, Rayleigh adopta une modélisation non-visqueuse des écoulements, considérant que la viscosité ne pouvait qu'amortir d'éventuelles perturbations. Mais force était de constater que la turbulence apparaissait même dans des écoulements dont les profils n'étaient pas inflexionnels. Cette lacune de la théorie a eu pour conséquence de discréditer l'idée des instabilités comme origine de la transition. Ce n'est qu'en 1921 que Prandtl a mis en évidence l'effet déstabilisateur de la viscosité dans les régions proche paroi, conduisant à l'amplification d'ondes hydrodynamiques. Par la suite, Heisenberg et Tollmien (1924 et 1929) établirent une théorie asymptotique pour résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld. Tollmien étudia aussi analytiquement la stabilité de l'écoulement de Blasius et Schlichting (1933) calcula l'amplification totale des ondes les plus instables. Finalement, en 1948, Skramstad et Schubauer [16] mirent expérimentalement en évidence le développement de telles ondes dans une couche limite bidimensionnelle et incompressible.

Deux ans auparavant, en 1946, Lees et Lin [17] développèrent une théorie asymptotique non-visqueuse pour les écoulements compressibles. Cette théorie leur permit de démontrer un certain nombre de résultats importants s'appuyant sur la notion de point d'inflexion généralisé. Cette notion constitue en fait une extension au cas compressible du point d'inflexion des profils de vitesse mis en avant par Rayleigh pour les écoulements incompressibles. Ce sont les expériences de Laufer-Vrebalovitch [18] et celles de Kendall [19] qui ont permis de mettre en évidence des ondes instables dans les couches limites supersoniques et hypersoniques. L'essor des calculateurs et des techniques numériques a ensuite permis le développement de codes résolvant les équations de stabilité linéaires en incompressible et en compressible. C'est à Mack que l'on doit la plus grande contribution dans ce domaine à partir de 1965 ([20], [21], [22], [23], [24] et [25]). Ce dernier a aussi mis en lumière des ondes d'instabilité possédant la même vitesse de phase mais des fréquences et des longueurs d'onde différentes : les modes d'ordre supérieur. En 1983,

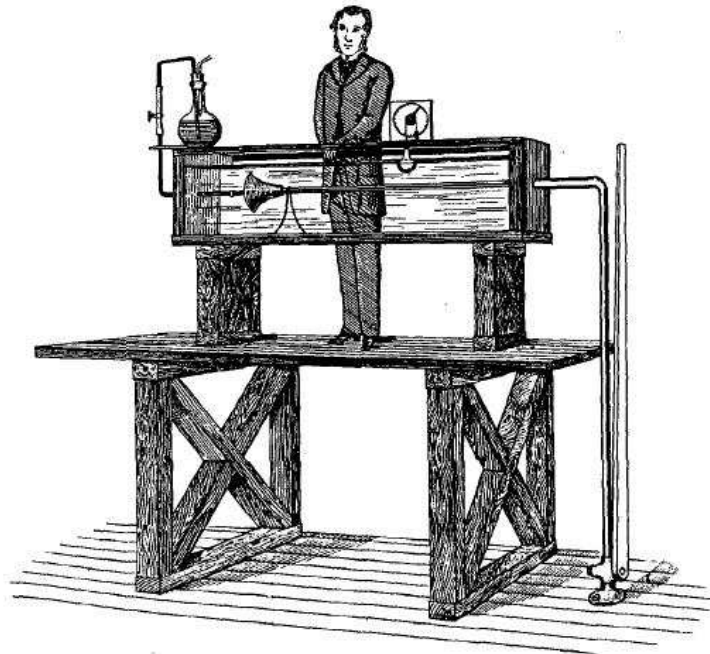


FIG. 2.1 – Protocole expérimental de Reynolds.

Stetson *et al.* [26] ont effectivement montré expérimentalement, sur un cône pointu à Mach 8, l'existence de multiples zones d'instabilité, la plus instable étant celle relative au second mode.

Mateer [27] fut l'un des premiers à émettre l'hypothèse que de faibles vitesses transversales (par rapport à la direction dominante de l'écoulement) pouvaient être à l'origine de fortes modifications de la position de la ligne de transition. Par la suite, de nombreuses expériences, dont celle de Stetson *et al.* (1985) [28] et King (1992) [29], ont montré que de faibles incidences sur des cônes en régime supersonique ou hypersonique pouvaient modifier considérablement la stabilité de l'écoulement. Plus récemment, les expériences de Séraudie [30] qui se sont déroulées à l'ONERA en 1994 sur un cône pointu en incidence, ont été comparées à des résultats numériques de stabilité obtenus par Dussillols [31]. La comparaison montre que si les instabilités du premier et second mode (relatives à l'écoulement longitudinal) sont dominantes sur les génératrices supérieures et inférieures du cône, dans la région équatoriale, les instabilités dues à l'écoulement transverse (encore appelées instabilités CrossFlow), sont majoritaires. D'autre part, Kimmel *et al.* ([4] - 1997, [32] - 1999, [33] - 2000) adoptent une méthode originale en étudiant la transition CrossFlow non plus sur un cône cylindrique en incidence mais sur un cône elliptique sans incidence pour lequel l'écoulement est plus représentatif de l'avant-corps d'un véhicule de croisière.

L'aspect le plus marquant de l'instabilité CrossFlow est qu'elle peut se matérialiser par des ondes stationnaires (à fréquence nulle). Ces ondes sont à l'origine d'une instabilité secondaire très virulente qui peut provoquer la transition [34]. Le mécanisme classique faisant intervenir la croissance modale n'est alors que partiellement adapté pour décrire le passage à la turbulence dans ce cas. La question de la prévision de transition est ici d'autant plus difficile à appréhender que ces ondes stationnaires coexistent avec des ondes progressives ayant la même origine (l'écoulement transversal) et qui sont généralement plus amplifiées que les ondes stationnaires. En 1996, Deylhe et Bippes [35] proposent un critère basé sur le taux de perturbation extérieur pour déterminer laquelle des deux types d'ondes provoque effectivement la transition. Ce critère est à présent remis en cause [34] car il semble trop simpliste pour tenir compte des

interactions multiples entre les différentes perturbations (bruit et rugosités par exemple) qui sont souvent mises en évidence par l'étude de la réceptivité des écoulements tridimensionnels.

Un autre aspect contraignant de ce type d'écoulement en hypersonique est le manque de données expérimentales en vol. Les seules dont nous ayons connaissance sont celles collectées par Malik *et al.* [36] en 2007 sur l'aile delta du lanceur américain Pegasus. On peut néanmoins se référer aux tests de Cattafesta [37] qui a étudié la transition sur une aile delta dans la soufflerie silencieuse de NASA Langley, pour laquelle les conditions expérimentales sont proches de celles du vol.

Malgré ce manque d'informations, en 2004 la NASA a testé avec succès à Mach 7 un prototype d'engin hypersonique à propulsion par super-statoréacteur : le X-43A. Le problème de la transition sous l'avant-corps du véhicule a été, semble-t-il, résolu en utilisant des rugosités placées en amont de l'entrée d'air du moteur (figure 2.2). La hauteur des rugosités employées était telle que l'on ne peut plus parler de croissance modale mais plutôt de croissance transitoire des instabilités. D'après les mesures de Berry [38], Schneider suggère néanmoins plusieurs modes d'instabilités sur la configuration lisse de l'avant-corps [6]. La géométrie de l'avant-corps du X-43A étant assez éloignée de celle qui nous intéresse, nous verrons que le type d'instabilité mis en évidence pour notre géométrie est sensiblement différent de celles trouvées pour le X-43A.

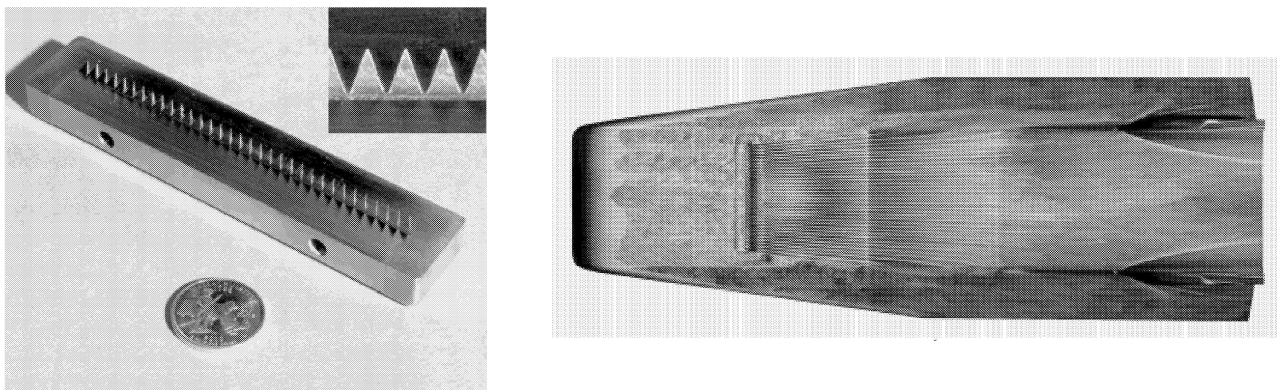


FIG. 2.2 – Utilisation de rugosités pour le déclenchement de la transition sous l'avant-corps du X-43A. D'après [2].

Chapitre 3

Mise en équations

3.1 Équations aux petites perturbations

Pour étudier la croissance modale de perturbations au sein d'un système représenté par un modèle non-linéaire, il est tout d'abord nécessaire de linéariser le modèle en question. Les perturbations sont toujours tridimensionnelles. D'autre part, le domaine de vol considéré fait apparaître des nombres de Mach élevés (entre 4 et 8). Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles et compressibles s'imposent donc comme étant le modèle d'écoulement adéquat. Ces équations sont, pour un gaz parfait Newtonien :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathcal{V} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\frac{\partial \mu S_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \lambda \mathcal{V}}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u_i u_i}{2} \right) = -\frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + 2\frac{\partial \mu S_{ij} u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \lambda \mathcal{V} u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

auxquelles il faut ajouter l'équation d'état :

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (r \text{ est la constante massique du gaz}) \quad (3.4)$$

Dans ces équations, S_{ij} représente le tenseur des taux de déformation :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

et \mathcal{V} , la trace de ce tenseur :

$$\mathcal{V} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

L'énergie interne e des particules de fluide est donnée par :

$$de = C_v dT \quad (3.5)$$

C_v , μ , λ et k sont respectivement la chaleur spécifique à volume constant, la viscosité dynamique, le second coefficient de viscosité et la conductivité thermique du fluide. Ces termes dépendent de la température T .

Afin de linéariser ces équations, toute variable q peut être décomposée en une grandeur moyenne \bar{q} et une petite perturbation q' de la manière suivante :

$$q(x, y, z, t) = \bar{q}(x, y, z, t) + q'(x, y, z, t) \quad (3.6)$$

Note sur le repère de stabilité : Les directions x et z sont localement tangentes à la paroi. La direction y est normale à la paroi. Les composantes de vitesse \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} ainsi que u' , v' , w' correspondent respectivement aux directions x , y , z . Pour le moment, aucun argument physique ne nous permet de privilégier une direction de l'écoulement. Ainsi, l'axe y étant fixé, les orientations des axes x et z restent arbitraires. Dans cette partie, la solution adoptée consiste à prendre l'axe x aligné avec la vitesse \bar{u}^e à l'extérieur de la couche limite. Le problème de l'importance de l'orientation des axes x et z sera abordé plus en détail dans la section 6.3.1. Tout au long de ce mémoire, on pourra se reporter à l'Annexe A qui présente les différents repères utilisés et les angles associés.

La décomposition (3.6), qui vaut aussi pour les termes "thermo-transport" C_v , μ , λ et k , est ensuite introduite dans le système (3.1-3.3). Le système résultant fait apparaître quatre types de termes :

- des termes ne faisant intervenir que des grandeurs moyennes \bar{q}
- des termes ne faisant intervenir que des perturbations q'
- des termes faisant intervenir des grandeurs \bar{q} et q'

Les termes moyens satisfont les équations de Navier-Stokes et peuvent donc être éliminés. Parmi les termes ne faisant intervenir que des perturbations, les termes quadratiques sont du second ordre par rapport aux termes linéaires et sont donc négligés. Restent donc les perturbations non-quadratiques et les termes "mixtes" qui satisfont à un système d'équations différentielles (aux dérivées partielles) *linéaire*. Nous l'appellerons "système d'équations aux petites perturbations".

Dans la majorité des cas (pour ne pas dire dans tous les cas), les problèmes de transition de couche limite sont traités pour des écoulements moyens stationnaires. Les coefficients des équations aux petites perturbations (les grandeurs \bar{q}) dépendent donc uniquement des trois directions de l'espace. L'hypothèse d'écoulement moyen parallèle (voir §1.2) permet d'homogénéiser le problème dans les directions localement tangentes à la paroi en posant :

$$\bar{v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

Les termes thermo-transport dépendent indirectement de l'espace par l'intermédiaire de la température T . Notons, de manière générique, χ un de ces termes. En tant que variable de l'écoulement, χ peut se décomposer, de la même manière que q , en grandeur moyenne (stationnaire) $\bar{\chi}$ et en perturbation χ' . On fait à présent l'hypothèse selon laquelle $\bar{\chi}$ ne dépend que de la valeur moyenne \bar{T} de la température T et χ' ne dépend que de la perturbation T' :

$$\chi(\bar{T} + T') = \bar{\chi}(\bar{T}) + \chi'(T') \quad (3.8)$$

avec

$$\frac{d\bar{\chi}}{dy} = \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (3.9)$$

Par identification de (3.8) avec les premiers termes d'un développement de Taylor

$$\chi(\bar{T} + T') = \bar{\chi}(\bar{T}) + \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}}T' + \dots \quad (3.10)$$

on peut noter :

$$\chi' = \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}}T' \quad (3.11)$$

Ainsi, les dérivées en espace de χ' présentes dans les équations aux petites perturbations peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi'}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}} T' \right) = T' \frac{d^2 \bar{\chi}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{\partial T'}{\partial y} \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}} \\ \frac{\partial \chi'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}} T' \right) = \frac{\partial T'}{\partial x} \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}} \\ \frac{\partial \chi'}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}} T' \right) = \frac{\partial T'}{\partial z} \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{T}} \end{aligned}$$

ce qui simplifie le système aux petites perturbations en limitant le nombre de dérivées partielles.

Le système d'équations aux petites perturbations peut être écrit sous une forme adimensionnée : les grandeurs de référence sont \bar{u}^e pour la vitesse, δ_1 (épaisseur de déplacement selon x) pour les longueurs, δ_1/\bar{u}^e pour le temps, \bar{T}^e pour la température, \bar{p}^e pour la pression, $\bar{\mu}^e$ pour les coefficients de viscosité, \bar{k}^e pour la conduction thermique, r pour le coefficient de chaleur spécifique et $\bar{p}^e/r\bar{T}^e$ pour la masse volumique. L'indice e dans les grandeurs précédentes indique que les valeurs sont prises à l'extérieur de la couche limite. Ces valeurs correspondent toutes à des grandeurs stationnaires. Les équations font alors apparaître les nombres sans dimension suivants :

- le nombre de Reynolds $Re_{\delta_1} = \rho^e \bar{u}^e \delta_1 / \bar{\mu}^e$
- le rapport des chaleurs spécifiques γ^e
- le nombre de Mach $M^e = \bar{u}^e / a^e$ avec $a^e = \sqrt{\gamma^e r \bar{T}^e}$
- le nombre de Prandtl Pr^e

Afin de ne pas alourdir les notations, les grandeurs adimensionnées seront, et ce jusqu'à la fin de cette partie, notées sans symbole particulier.

Finalement, le système étudié ne comporte que des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants suivant x , z et t , et variables suivant y . Il admet donc des solutions sous forme de modes normaux :

$$q'(x, y, z, t) = \hat{q}(y) \exp [i(\alpha x + \beta z - \omega t)] \quad (3.12)$$

où \hat{q} représente la fonction d'amplitude complexe de la perturbation, α et β sont respectivement les nombres d'onde suivant x et z , et où ω est la pulsation. Ces paramètres sont a priori complexes. En introduisant cette forme de modes normaux dans les équations (adimensionnées) aux petites perturbations, on obtient le système suivant :

- Équation de continuité

$$i(\alpha \bar{u} + \beta \bar{w} - \omega) \hat{p} + \hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} [v' + i(\alpha \hat{u} + \beta \hat{w})] = 0 \quad (3.13)$$

– Équation de quantité de mouvement suivant x

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left[i(\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega)\hat{u} + \hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} \right] &= -\frac{i\alpha\hat{p}}{\gamma^e M^{e^2}} \\ + \frac{1}{\text{Re}_{\delta_1}} \left\{ \bar{\mu} \left[\hat{u}'' - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{u} \right] + i\alpha(\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \left[\hat{v}' + i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) \right] \right. \\ + \left. \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} (\hat{u}' + i\alpha\hat{v}) + \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(\hat{T}' \frac{d\bar{u}}{dy} + \hat{T} \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) + \hat{T} \frac{d^2\bar{\mu}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \frac{d\bar{u}}{dy} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

– Équation de quantité de mouvement suivant y

$$\begin{aligned} i\bar{\rho}(\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega)\hat{v} &= -\frac{\hat{p}'}{\gamma^e M^{e^2}} \\ + \frac{1}{\text{Re}_{\delta_1}} \left\{ \bar{\mu} \left[\hat{v}'' - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{v} \right] + (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \left[\hat{v}'' + i(\alpha\hat{u}' + \beta\hat{w}') \right] \right. \\ + \left. \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left[2 \frac{d\bar{T}}{dy} \hat{v}' + i\hat{T} \left(\alpha \frac{d\bar{u}}{dy} + \beta \frac{d\bar{w}}{dy} \right) \right] + \frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} (\hat{v}' + i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w})) \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

– Équation de quantité de mouvement suivant z

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left[i(\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega)\hat{w} + \hat{v} \frac{d\bar{w}}{dy} \right] &= -\frac{i\beta\hat{p}}{\gamma^e M^{e^2}} \\ + \frac{1}{\text{Re}_{\delta_1}} \left\{ \bar{\mu} \left[\hat{w}'' - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{w} \right] + i\beta(\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \left[\hat{v}' + i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) \right] \right. \\ + \left. \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} (\hat{u}' + i\beta\hat{v}) + \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(\hat{T}' \frac{d\bar{w}}{dy} + \hat{T} \frac{d^2\bar{w}}{dy^2} \right) + \hat{T} \frac{d^2\bar{\mu}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \frac{d\bar{w}}{dy} \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

– Équation de l'énergie

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\bar{C}_v \left(i(\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega)\hat{T} + \hat{v} \frac{d\bar{T}}{dy} \right) &= -(\hat{v}' + i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w})) \\ + \frac{1}{\text{Re}_{\delta_1}} \gamma^e M^{e^2} \left[2i\bar{\mu}\hat{v} \left(\alpha \frac{d\bar{u}}{dy} + \beta \frac{d\bar{w}}{dy} \right) + \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \hat{T} \left(\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{w}}{dy} \right)^2 \right) + 2\bar{\mu} \left(\hat{u}' \frac{d\bar{u}}{dy} + \hat{w}' \frac{d\bar{w}}{dy} \right) \right] \\ + \frac{\gamma^e \bar{k}}{(\gamma^e - 1)\text{Re}_{\delta_1} \text{Pr}^e} \left[\hat{T}'' - \hat{T}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{\hat{T}}{\bar{k}} \left(\frac{d\bar{k}}{d\bar{T}} \frac{d^2\bar{T}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{k}}{d\bar{T}^2} \left(\frac{d\bar{T}}{dy} \right)^2 \right) + \frac{2}{\bar{k}} \frac{d\bar{k}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \hat{T}' \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

– Équation d'état

$$\hat{p} = \frac{\hat{T}}{\bar{T}} + \frac{r}{\bar{\rho}} \quad (3.18)$$

Notes :

– Dans les équations précédentes la notation ' désigne une dérivation totale par rapport à y

- Dans l'équation pour l'énergie (3.17), \bar{C}_v représente la composante stationnaire de la grandeur C_v . En effet, la chaleur spécifique, comme toute autre grandeur instationnaire, peut-être décomposée en grandeur moyenne et en perturbation. Néanmoins, la perturbation C'_v intervient uniquement devant un terme qui, d'après les hypothèses d'écoulement parallèle, s'annule. Ainsi, dans le reste de ce document, les notations C_v et \bar{C}_v seront confondues.

Les conditions aux limites du problème (3.13-3.18) sont :

- ondes évanescentes : $\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), \hat{T}(y), \hat{p}(y) \rightarrow 0$ pour $y \rightarrow +\infty$
- adhérence à la paroi : $\hat{u}(0) = \hat{v}(0) = \hat{w}(0) = 0$
- les perturbations de température s'annulent à la paroi : $\hat{T}(0) = 0$

Ce problème présente un avantage considérable par rapport au système des petites perturbations : l'absence de dérivées partielles. Il s'agit d'un système linéaire d'équations différentielles ordinaires à coefficients variables (dépendant de y) qui peut être intégré grâce à un algorithme Runge-Kutta (voir section 6.2).

3.2 Approche temporelle / Approche spatiale. Relation de Gaster.

Dans l'expression (3.12), les paramètres α, β et ω sont a priori complexes. Il est néanmoins possible de restreindre l'ensemble des solutions du problème (3.13-3.18) à deux sous-ensembles en optant pour l'une des deux approches suivantes :

- $\omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ce cas correspond à l'approche temporelle : on étudie l'évolution, au point fixe, d'une perturbation en fonction du temps.
- $\omega \in \mathbb{R}$ et $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i, \beta = \beta_r + i\beta_i \in \mathbb{C}$. Il s'agit alors de l'approche spatiale : on étudie la croissance (ou l'amortissement) en espace d'une perturbation.

Le choix entre l'approche temporelle et spatiale dépend en partie de la vitesse de groupe des perturbations (ondes instables). La vitesse de groupe représente la vitesse de l'enveloppe d'un paquet d'ondes provoquées par une perturbation localisée dans l'espace et dans le temps (impulsion Dirac). Si, pour un système donné, la vitesse de groupe est très faible, alors le taux de croissance des perturbations peut être tel que les instabilités s'amplifient "sur place" (on parle d'instabilité absolue) et, dans ce cas, l'approche temporelle s'avère intéressante. Au contraire, lorsque la vitesse de groupe est élevée, les ondes croissent au cours de leur déplacement (instabilité convective), et l'approche spatiale semble plus adéquate. La distinction entre instabilité convective et absolue a été formalisée par Huerre & Monkewitz [39].

Il est évident que les deux approches sont liées : on peut étudier temporellement une instabilité convective dans un repère se déplaçant à la même vitesse que la perturbation. Cette idée a été formalisée par Gaster [40] qui a mis en relation taux de croissance temporel et spatial :

$$-\alpha_i = \frac{\omega_i}{V_g} \quad (3.19)$$

Cette relation n'est rigoureusement valable que pour des taux de croissance tendant vers 0. V_g représente la partie réelle de la vitesse de groupe et est égale à $\partial\omega_r/\partial\alpha_r$. Pour des raisons de simplification la relation (3.19) est restreinte au cas d'une onde bidimensionnelle. Son extension au cas tridimensionnel fait intervenir la direction θ_g de la vitesse de groupe [41]. Hors décollement, les instabilités de couche limite sont toutes de nature convective (amplification spatiale). Il est néanmoins possible de les étudier

temporellement puis d'obtenir le taux d'amplification spatial α_i en utilisant la relation de Gaster. Cette démarche peut sembler absurde car nécessitant un calcul supplémentaire (calcul de V_g). Elle se justifie néanmoins parfois pour des raisons que nous évoquerons dans le paragraphe 5.2.1.

3.3 Relation de dispersion, interprétation physique des modes propres

Formellement, le système (3.13-3.18) peut s'écrire :

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, \omega; \text{Re}_{\delta_1}) \cdot \vec{q} = 0 \quad (3.20)$$

où \mathcal{L} est un opérateur linéaire incluant des dérivations d'ordre 1 et 2, et \vec{q} est tel que :

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{\rho} \\ \hat{T} \\ \hat{p} \end{pmatrix}$$

Si \mathcal{L} est inversible, l'équation (3.20) admet la solution triviale $\vec{q} = 0$ (absence de perturbations). Par contre, pour \mathcal{L} non-inversible, (3.20) admet des solutions non-nulles pour certaines combinaisons de $(\alpha, \beta, \omega; \text{Re}_{\delta_1})$. Ces combinaisons sont données par la relation $\det(\mathcal{L}) = 0$, que l'on appelle relation de dispersion et que l'on écrira :

$$\mathcal{D}(\alpha, \beta, \omega; \text{Re}_{\delta_1}) = 0 \quad (3.21)$$

Par analogie avec le problème de diagonalisation d'une matrice A ($\det(A - \lambda I) = 0$, où λ est une valeur propre de A et I la matrice identité), (3.20) est appelé problème aux valeurs propres (généralisé). Les combinaisons $(\alpha, \beta, \omega; \text{Re}_{\delta_1})$ satisfaisant la relation de dispersion sont les modes propres¹ du problème et les vecteurs \vec{q} , les fonctions propres.

Les modes propres $(\alpha, \beta, \omega; \text{Re}_{\delta_1})$ sont les paramètres des perturbations exprimées sous forme de modes normaux (voir (3.12)) pour une valeur fixée de x et z correspondant à Re_{δ_1} . Selon l'approche spatiale utilisée ici, ω est réel et α et β complexes. Ainsi, (3.12) peut s'écrire :

$$q'(x, y, z, t) = \hat{q}(y) \exp[-(\alpha_i x + \beta_i z)] \exp[i(\alpha_r x + \beta_r z - \omega t)] \quad (3.22)$$

Les paramètres $\alpha_r, \beta_r, \alpha_i, \beta_i$ sont explicités sur la figure 3.1. (Le repère de stabilité correspond à celui de l'Annexe A pour $\theta^e = 0$). L'onde de longueur d'onde λ se déplace suivant \vec{k} , son vecteur d'onde dont les projections sur x et z sont respectivement α_r et β_r . Rien n'oblige cette onde à s'amplifier dans sa direction de propagation. En fait, il est pour l'instant impossible de privilégier une direction d'amplification plutôt qu'une autre. On choisira donc arbitrairement de s'intéresser à l'amplification (ou l'amortissement) suivant $\vec{\sigma}$, vecteur d'amplification dont les coordonnées suivant x et z sont α_i et β_i . Souvent, on utilise les angles ψ et $\bar{\psi}$ définis de la manière suivante :

$$\psi = \arctan \frac{\beta_r}{\alpha_r} \quad (3.23)$$

$$\bar{\psi} = \arctan \frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad (3.24)$$

¹On préférera ici conserver le vocable "valeur propre" pour le problème de diagonalisation d'une matrice.

Ainsi, la relation de dispersion (3.21) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{D}}(\alpha_r, \alpha_i, \psi, \bar{\psi}, f; \text{Re}_{\delta_1}) = 0 \quad (3.25)$$

où f est la fréquence associée à la pulsation ω .

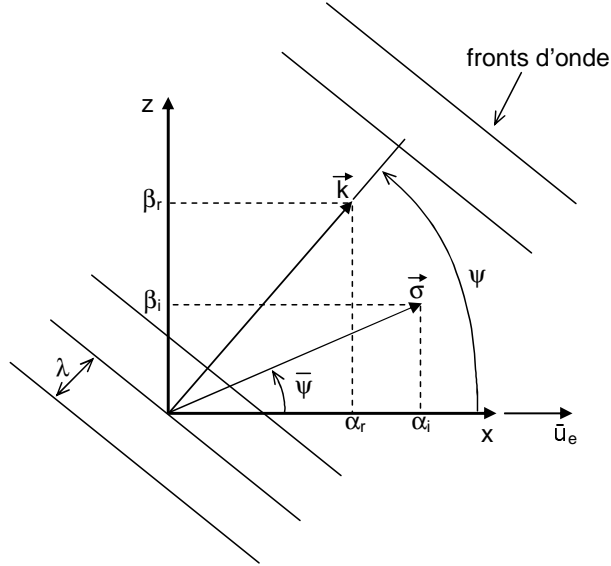


FIG. 3.1 – Définition des paramètres d'une onde.

3.4 Cas bidimensionnel incompressible et non-visqueux

3.4.1 Cas incompressible visqueux

Dans le cas bidimensionnel et incompressible, le système (3.13-3.18) peut se réduire à une seule équation différentielle appelée équation d'Orr-Sommerfeld :

$$(\alpha \bar{u} - \omega) \left(\frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{\Psi} \right) - \alpha \hat{\Psi} \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = \frac{-i}{\text{Re}_{\delta_1}} \left(\frac{d^4 \hat{\Psi}}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} + \alpha^4 \hat{\Psi} \right) \quad (3.26)$$

Les variables $\hat{\Psi}$ sont les amplitudes des perturbations de vitesse exprimées en fonction de courant Ψ' :

$$u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \quad \text{et} \quad v' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x} \quad (3.27)$$

(Cette expression n'est valable que dans le cas bidimensionnel et incompressible). Seul α apparaît dans l'équation (3.26). En effet, d'après le théorème de Squire,

Pour obtenir le nombre de Reynolds critique, il est suffisant de ne considérer que des ondes bidimensionnelles.

Cette assertion permet de ne considérer que des perturbations bidimensionnelles ($\beta = 0$).

Les triplets $(\alpha, \omega, Re_\delta)$ satisfaisant la relation de dispersion sont classiquement représentés comme sur la figure 3.2. Les lieux pour lesquels $\alpha_i = 0$ sont particulièrement intéressants pour délimiter les zones stables et instables. D'après cette figure, une onde de fréquence f_0 sera d'abord amortie jusqu'à rencontrer la branche inférieure de la courbe neutre, puis amplifiée "à l'intérieur" de la courbe et enfin de nouveau amortie après la branche supérieure. L'abscisse à laquelle la perturbation commence à croître est appelée abscisse critique. Pour un écoulement de type Blasius, l'abscisse critique minimale correspond à $Re_\delta = 520$.

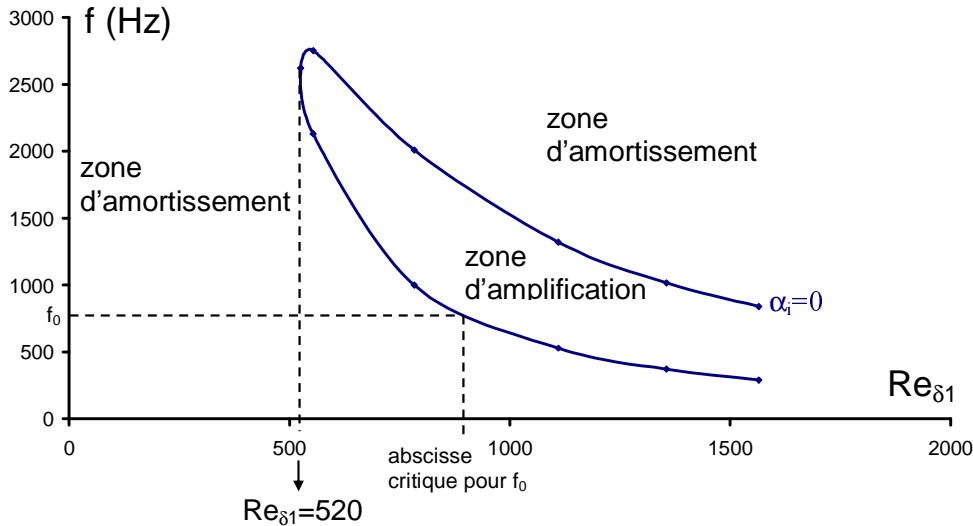


FIG. 3.2 – Courbe de stabilité neutre de plaque plane ($M^e = 0.1, T^e = 300K, P^e = 1bar$).

3.4.2 Cas incompressible non-visqueux

Le problème peut être encore simplifié dans le cas non-visqueux, ce qui correspond à $Re_\delta \rightarrow \infty$. On obtient alors l'équation de Rayleigh :

$$(\alpha \bar{u} - \omega) \left(\frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{\Psi} \right) - \alpha \hat{\Psi} \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = 0 \quad (3.28)$$

A partir de cette équation il est possible de démontrer un certain nombre de théorèmes intéressants, qui ne sont rigoureusement valables que pour des écoulements non-visqueux mais qui peuvent s'étendre au écoulements visqueux. Ces théorèmes sont présentés dans le chapitre suivant pour les cas incompressibles et compressibles.

Chapitre 4

Théorèmes importants et caractérisation des instabilités

4.1 Théorèmes de Rayleigh.

En s'appuyant sur (3.28), Rayleigh démontre, dans le cadre de l'approche temporelle, que la dérivée des tensions de Reynolds peut s'écrire :

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{\omega_i d^2\bar{u}/dy^2 \langle v'^2 \rangle}{|\alpha\bar{u} - \omega|^2} \quad (4.1)$$

où $\langle v'^2 \rangle$ représente la moyenne sur une longueur d'onde du carré de la fluctuation de vitesse v' , et est égale à $1/2 |\hat{v}|^2 \exp(2\omega_i t)$. Les tensions de Reynolds sont définies par :

$$\tau = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} Re(u')Re(v')dx$$

Après intégration de (4.1) entre la paroi et l'extérieur de la couche limite, et en tenant compte des conditions aux limites (τ s'annule à la paroi et à l'infini), on obtient :

$$\int_0^{+y_s} \omega_i \frac{d^2\bar{u}/dy^2 \langle v'^2 \rangle}{|\alpha\bar{u} - \omega|^2} = 0 \quad (4.2)$$

Si $\omega_i \neq 0$, alors $d^2\bar{u}/dy^2$ doit s'annuler quelque part dans la couche limite pour annuler l'intégrale. Il s'agit du premier résultat important de Rayleigh :

Pour qu'un écoulement parallèle non-visqueux admette des ondes instables, il est nécessaire qu'il présente un point d'inflexion sur son profil de vitesse.

Il s'agit donc d'une condition nécessaire d'instabilité. Le caractère suffisant de la condition a été démontré en 1935 par Tollmien.

Dans le cas où $\omega_i = 0$, l'équation conduit à une forme indéterminée pour $\alpha\bar{u}(y) = \omega_r$, c'est à dire pour $\bar{u}(y) = c_r$, où $c_r = \omega_r/\alpha$ est la vitesse de phase de l'onde. L'altitude y où se produit cette égalité est appelée couche critique. Elle correspond à l'altitude pour laquelle la vitesse de l'écoulement stationnaire est égale à la vitesse de phase de l'onde neutre. On peut lever cette indétermination en passant à la limite ($\omega_i \rightarrow 0$) et en étudiant l'intégrale (4.2) au voisinage du point critique. On obtient alors le même résultat

que pour une onde instable : un point d'inflexion du profil de vitesse est nécessaire pour observer une onde neutre. D'autre part, à l'altitude critique y_s , on a :

$$\bar{u}(y_s) = c_{r_0} \quad (4.3)$$

(l'indice 0 de c_{r_0} rappelle que ce résultat n'est valable que pour une onde neutre). Une interprétation physique de cette instabilité, développée par Lin [42], est proposée en Annexe C.

Ces résultats restent vrais pour des écoulements visqueux. Ainsi, une couche limite est déstabilisée par l'apparition d'un point d'inflexion provoquée par un gradient de pression longitudinal défavorable. Néanmoins, même en l'absence de point d'inflexion, une couche limite peut se déstabiliser, comme spécifié dans le paragraphe 3.4.1. L'effet de la viscosité dans la région proche paroi est à l'origine de cette déstabilisation.

4.2 Résultats importants de Lees & Lin

Les théorèmes de Rayleigh ont été étendus par Lees & Lin au compressible [17]. Pour ce type d'écoulement, la notion de point d'inflexion sur le profil de vitesse n'est plus primordiale. La quantité pertinente est cette fois $\bar{\rho} d\bar{u}/dy$. L'altitude à laquelle cette valeur passe par un extremum est appelée Point d'Inflexion Généralisé (PIG). Les propriétés de stabilité liées à la présence de ce point d'inflexion généralisé sont les suivantes :

- Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une onde neutre est qu'il existe dans la couche limite un point d'altitude y_s tel que :

$$\bar{u}(y_s) > 1 - \frac{1}{M^e} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dy} \left(\bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{y_s} = 0 \quad (4.4)$$

- La vitesse de phase c_{r_0} de cette onde est égale à $u(y_s)$
- Une condition suffisante pour l'existence d'une onde instable est la présence d'un point d'inflexion généralisé tel que :

$$\bar{u}(y_s) > 1 - \frac{1}{M^e}$$

Cette dernière propriété implique une différence notable par rapport au cas incompressible. Pour la couche limite de Blasius, la quantité $d^2\bar{u}/dy^2$ reste partout négative sauf à la paroi où elle s'annule. Ainsi, en l'absence de gradient de pression défavorable, les mécanismes non-visqueux jouent un rôle mineur dans la déstabilisation de la couche limite. Ce n'est plus vrai en écoulement compressible. Dans ce cas, sur paroi adiabatique et en écoulement uniforme, une couche limite présente toujours un PIG entre la paroi et l'extérieur, ce qui la rend instable pour des nombres de Reynolds infinis.

4.3 Modes multiples de Mack

Le nombre de Mach local constitue un second paramètre important dans l'étude non-visqueuse des couches limites compressibles. Ce nombre est défini par :

$$\tilde{M} = M - \frac{c_r}{a} \quad (4.5)$$

où M et a sont respectivement le nombre de Mach et la vitesse du son locaux. Les perturbations sont dites localement subsoniques si $\tilde{M}^2 < 1$, localement soniques si $\tilde{M}^2 = 1$ et localement supersoniques si $\tilde{M}^2 > 1$. Si une onde est localement supersonique, la nature mathématique des équations de stabilité change et le problème aux valeurs propres admet une infinité de solutions neutres. Ces solutions multiples furent découvertes par Mack [25] pour les couches limites. Dans le cas de la paroi adiabatique, elles apparaissent pour des nombres de Mach $M^e > 2.2$. Cependant, pour des nombres de Reynolds "industriels" (de l'ordre du million), ce nombre augmente jusqu'à environ 4.

4.4 Résumé des théorèmes importants.

La figure 4.1 montre l'effet de la compressibilité sur la stabilité d'une couche limite de plaque plane. Les calculs ont été effectués à $\psi = 0$ pour des nombres de Mach allant de 0 à 10 [3].

En subsonique et en transsonique, les courbes sont comparables à celle obtenue pour l'écoulement de Blasius (voir fig. 3.2) : pour des nombres de Reynolds élevés, les branches supérieures et inférieures ont tendance à se rejoindre. Cette particularité est caractéristique des instabilités d'origine visqueuse.

A partir de $M^e = 2.2$, l'instabilité d'origine non-visqueuse apparaît ce qui se manifeste par un écartement des deux branches des courbes de stabilité qui deviennent parallèles entre elles pour des nombres de Reynolds élevés. Pour $M^e = 3$, l'instabilité non-visqueuse devient prépondérante.

Le second mode dans la classification de Mack est visible à partir de $M^e = 4.5$. Totalement indépendants en supersonique, les deux modes se rapprochent lorsque le nombre de Mach augmente jusqu'à partager la même courbe neutre en hypersonique.

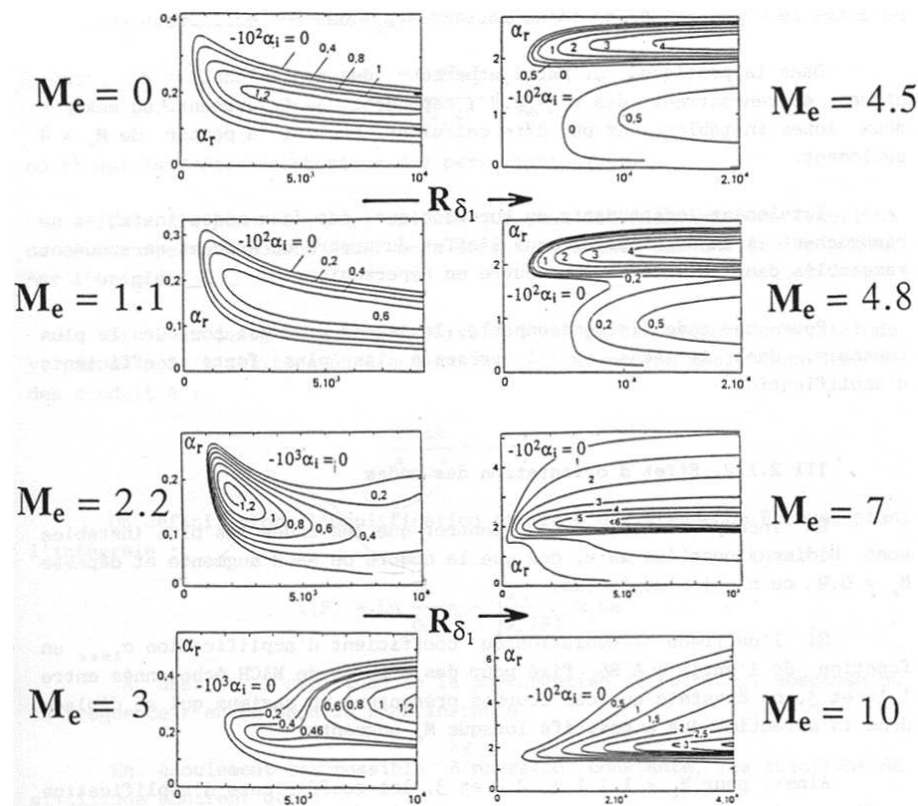


FIG. 4.1 – Effet de la compressibilité sur les diagrammes de stabilité de plaque plane adiabatique [3].

4.5 Caractérisation des instabilités.

4.5.1 Couches limites incompressibles bidimensionnelles.

Pour les écoulements incompressibles 2D, d'après le théorème de Squire, les ondes les plus instables sont bidimensionnelles (voir §3.4). On les appelle ondes de Tollmien-Schlichting (TS). Comme précisé au chapitre précédent, l'origine de ces ondes est la viscosité en proche paroi. Un gradient de pression défavorable ou un effet de soufflage à la paroi ont un effet déstabilisant sur ce type d'écoulement car ils induisent un point d'inflexion dans le profil de vitesse. Au contraire, un gradient de pression favorable ou l'aspiration de la couche limite à la paroi stabilisent l'écoulement.

4.5.2 Couches limites compressibles bidimensionnelles.

Contrairement aux écoulements incompressibles, l'origine de l'instabilité est essentiellement non-visqueuse pour des nombres de Mach assez élevés ($M^e > 3$). En ce qui concerne le premier mode, la caractéristique la plus notable est l'orientation des ondes les plus instables. Alors que dans le cas incompressible les ondes les plus amplifiées se propagent dans la direction de l'écoulement, en compressible ces ondes sont orientées d'un angle $\psi \approx 50 - 70^\circ$. On parle d'ondes ou de premier mode obliques. Pour le second mode, les taux d'amplification maximums sont quant à eux observés pour $\psi = 0^\circ$. Ainsi pour des nombres de Mach élevés, il devient difficile de déterminer une direction unique de propagation des ondes les plus instables. Dans l'optique de prévoir la position de la transition, il convient, en général, d'étudier chaque mode séparément.

Comme pour le cas incompressible, la stabilité dépend du gradient de pression longitudinal et de l'aspiration à la paroi. Ces paramètres agissent cette fois non pas par l'intermédiaire du profil de vitesse \bar{u} mais par l'intermédiaire du profil de $\bar{\rho}d\bar{u}/dy$ (voir §4.2). D'autre part, la température de paroi joue aussi un rôle important en agissant sur la masse volumique $\bar{\rho}$. Un refroidissement de paroi tend à diminuer l'altitude du PIG, ce qui stabilise le premier mode. A l'inverse, une paroi plus froide déstabilise le second mode. Cet effet de température de paroi a été étudié en détail par Vignau [3].

Enfin, on signalera que les fréquences mises en jeu sont de l'ordre de la dizaine de kHz en ce qui concerne le premier mode et de la centaine de kHz voire du MHz pour le second. Les longueurs d'ondes du premier mode valent environ 10 fois l'épaisseur de déplacement [43].

4.5.3 Couches limites tridimensionnelles.

Par nature, les écoulements tridimensionnels de couche limite possèdent deux composantes de vitesse (dans le repère de stabilité, en approche locale). Dans le repère aligné avec la vitesse \bar{u}^e à l'extérieur de la couche limite, on peut définir, comme sur le schéma 4.2, une composante longitudinale (alignée avec \bar{u}^e , suivant x) et une composante transversale (perpendiculaire à \bar{u}^e , suivant z). La composante transversale \bar{w} présente toujours un point d'inflexion (noté I sur le schéma), ce qui rend l'écoulement transverse très instable. Ces instabilités se matérialisent par des ondes orientées à $\psi \approx 80 - 90^\circ$ et dont les longueurs représentent environ 4 fois l'épaisseur de déplacement [43]. Elles sont appelées ondes "CrossFlow" (CF).

Les ondes CF présentent la particularité de pouvoir être amplifiées pour des fréquences nulles créant ainsi des ondes stationnaires dont les fronts d'onde sont quasiment colinéaires à la direction \bar{u}^e de l'écoulement. Ce type d'instabilité se matérialise par des tourbillons dont le diamètre est de l'ordre de l'épaisseur de la couche limite et dont l'axe est pratiquement aligné avec \bar{u}^e . Ces tourbillons sont à l'origine d'une instabilité secondaire [34] "explosive" qui fait transitionner l'écoulement très rapidement. Les mécanismes de formations des tourbillons et de l'instabilité secondaire se décomposent de la manière

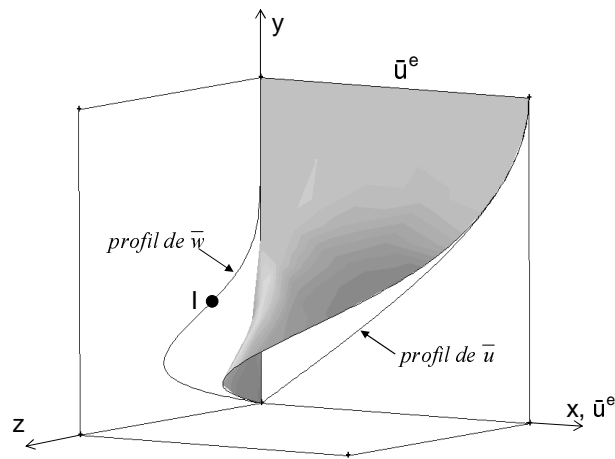


FIG. 4.2 – Profil de vitesse d'une couche limite tridimensionnelle.

suivante (voir aussi le schéma 4.3) :

- L'onde CF s'amplifie dans une direction proche de celles des lignes de courant à l'extérieur de la couche limite.
- Adoptons temporairement le point de vue de l'étude temporelle en nous déplaçant selon la vitesse de groupe. Dans le plan (y,z) , l'écoulement est alors similaire à une couche de mélange (en présence toutefois d'une paroi). D'ailleurs cet écoulement présente un point d'inflexion I. Ainsi, comme pour l'instabilité de couche de mélange (voir Annexe C), l'instabilité CF finit par former des tourbillons 2D, dans le plan transverse (y,z) .
- Revenons à présent au point de vue de l'étude spatiale. La trace des tourbillons dans un plan parallèle à la paroi est constituée de stries longitudinales matérialisant une alternance, suivant z , de vitesses basses et élevées.
- Ces stries longitudinales présentent des points d'inflexion (tout comme le profil transversal de vitesse) et sont donc, elles aussi, très instables. Elles sont à l'origine de l'instabilité secondaire qui, dans certains cas peut provoquer la transition.

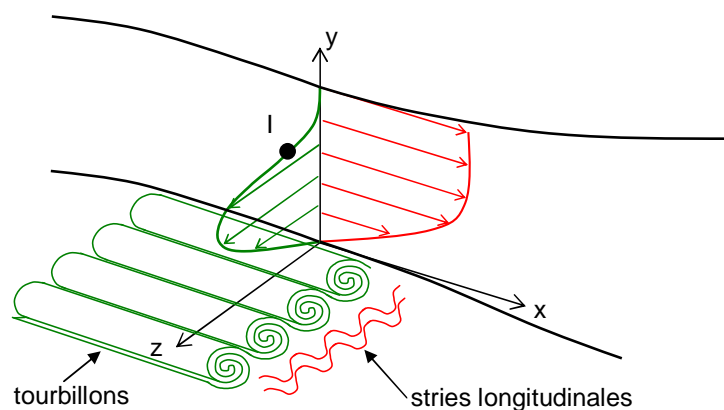


FIG. 4.3 – Mécanismes de l'instabilité secondaire.

Chapitre 5

Méthode du e^N

Dans les chapitres précédents, les équations régissant les instabilités dans les écoulements parallèles ont été rappelées. À partir de ces équations, un certain nombre de propriétés sur la stabilité de ces écoulements a été évoqué. Enfin, nous avons donné les caractéristiques des différents types d'instabilités susceptibles d'être rencontrés. Cependant, nous ne sommes toujours pas en mesure de pouvoir prévoir la transition. C'est l'objet du présent chapitre qui décrit la méthode du e^N . Il s'agit d'une méthode semi-empirique qui s'appuie sur les résultats de l'étude de stabilité pour déterminer une position de transition. En ce sens, il s'agit à l'heure actuelle du seul critère de transition, applicable dans des configurations industrielles, prenant en compte la physique et les mécanismes de la transition (au moins en partie, comme nous le verrons dans la section 5.3).

5.1 Principe de la méthode.

Plaçons nous, pour simplifier, dans le cas d'une instabilité et d'un écoulement bidimensionnels. Soit une perturbation écrite sous forme de mode normal :

$$q'(x, y, t) = \hat{q}(y) \exp[-\alpha_i x] \exp[i(\alpha_r x - \omega t)] \quad (5.1)$$

Pour une fréquence donnée et à une position x fixée, l'amplitude de cette perturbation est :

$$A = \hat{q}(y) \exp[-\alpha_i x]$$

Ainsi, le taux d'amplification est donné par :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = -\alpha_i \quad (5.2)$$

Soit A_0 l'amplitude de cette onde au point x_0 correspondant à l'intersection avec la branche inférieure de la courbe neutre, le rapport total d'amplification A/A_0 est :

$$\frac{A}{A_0} = \exp \left[\int_{x_0}^x -\alpha_i d\xi \right] \quad (5.3)$$

Ce rapport dépend en fait de x , et l'on peut tracer cette grandeur dans un graphe $(\ln(A/A_0) - x$ ou Re_δ) comme dans la figure 5.1. Ce calcul doit ensuite être répété pour différentes fréquences créant ainsi un réseau de courbes de rapport d'amplification, et finalement, le facteur N correspond à l'enveloppe de toutes ces courbes intégrales :

$$N = \max_f \ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \max_f \int_{x_0}^x -\alpha_i d\xi \quad (5.4)$$

Pour une fréquence donnée, cette dernière relation peut encore s'écrire :

$$\frac{A}{A_0} = e^{N_f} \quad (5.5)$$

d'où le nom de la méthode. On fera bien la distinction entre le facteur N_f correspondant au rapport d'amplification global d'une perturbation à fréquence donnée et le facteur N correspondant à l'enveloppe des courbes précédentes pour plusieurs fréquences.

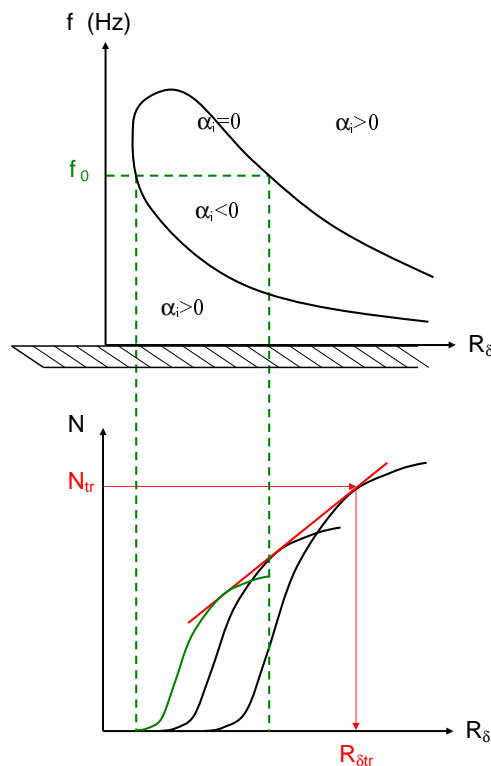


FIG. 5.1 – Méthode du e^N .

Reste maintenant à trouver une valeur du facteur N pour laquelle la couche limite transitionne. Il est communément admis que cette valeur se situe aux alentours de 10 pour un écoulement bidimensionnel et un environnement calme, c'est-à-dire, pour un environnement dans lequel le taux de perturbation extérieur est faible. Si ce taux de perturbation augmente alors le facteur N peut-être considérablement diminué. Ce point sera discuté au paragraphe 5.3.

5.2 Application au cas tridimensionnel compressible

Dans le cas bidimensionnel incompressible, les ondes les plus instables sont elles aussi bidimensionnelles, ce qui permet de ne considérer que les ondes pour lesquelles $\psi = 0^\circ$ lors du calcul des facteurs N . D'autre part, on admet que les ondes s'amplifient dans la direction de l'écoulement, ce qui permet de fixer $\bar{\psi} = 0^\circ$. Le problème se complique considérablement dans le cas tridimensionnel compressible.

Tout d'abord, les ondes les plus instables ne sont plus forcément 2D ($\psi \neq 0^\circ$). Ensuite, pour les cas d'un écoulement 3D, la direction d'amplification ($\bar{\psi}$) n'est pas connue a priori. Les deux inconnues supplémentaires dans le cas du calcul du facteur N pour un écoulement compressible et tridimensionnel sont donc ψ et $\bar{\psi}$. (En ce qui concerne le chemin d'intégration des taux d'amplification, on considère que l'on intègre dans une direction localement déterminée par $\bar{\psi}$). Arnal [44] présente une revue complète des différents choix possibles, lesquels sont résumés dans les deux sections suivantes.

5.2.1 Détermination de $\bar{\psi}$

Arnal [44] rapporte trois méthodes pour la détermination de $\bar{\psi}$:

- Méthode des paquets d'ondes (Nayfeh [45], Cebeci & Stewartson [46]). Cette méthode se base sur la théorie des paquets d'ondes et sur la méthode du point selle pour trouver une valeur de $\bar{\psi}$ telle que $\partial\alpha/\partial\beta$ soit réel pour une valeur de f fixée.
- $\bar{\psi} = \theta_g$, θ_g étant la direction de la vitesse de groupe de l'onde considérée. Ce raisonnement s'appuie sur le fait, que pour un milieu dispersif non-dissipatif, l'énergie des paquets d'ondes est transportée dans la direction de la vitesse de groupe.
- $\bar{\psi} = 0^\circ$. Cette hypothèse a été faite par Mack pour le cas d'ailes en flèche infinies de corde constante [47]. Il est important de noter que dans ce cas, l'axe z du repère de stabilité est aligné avec le bord d'attaque de l'aile.

Il est difficile de statuer sur la pertinence de l'une ou l'autre de ces méthodes. On peut néanmoins se référer à un certain nombre de travaux visant à comparer ces méthodes entre elles. Laburthe [41] a comparé des calculs de facteurs N avec les trois procédures suivantes pour le calcul de stabilité : théorie temporelle, $\bar{\psi} = \theta_g$ et $\bar{\psi} = 0^\circ$. Les trois solutions donnent des valeurs de facteurs N très proches. Ces calculs ayant été effectués à l'aide du même code de stabilité, ces résultats sont particulièrement intéressants car ils ne sont a priori pas entachés d'erreurs dues à l'aspect numérique du calcul. Les résultats sont plus discutables lorsque la méthode du point selle est employée [44] : on observe jusqu'à 20% de différence sur les facteurs N avec l'hypothèse $\bar{\psi} = 0^\circ$. Néanmoins, étant donné que, dans les deux cas, les calculs de stabilité ont été effectués avec des codes distincts, cette divergence peut ne pas être significative.

Puisque l'approche temporelle permet de s'affranchir du choix délicat de $\bar{\psi}$, il serait tentant d'effectuer les calculs de stabilité uniquement suivant cette théorie. Il ne faut toutefois pas oublier que les calculs de facteur N nécessitent de connaître les taux d'amplification spatiaux qui ne sont alors pas accessibles. Il est néanmoins possible d'utiliser cette approche en la couplant au théorème de Gaster qui relie les ω_i et α_i (ainsi que β_i) via la vitesse de groupe (voir §3.2). Laburthe [41] propose une méthode numérique pour le calcul de la vitesse de groupe en théorie temporelle. Cette méthode nécessite néanmoins deux calculs de stabilité supplémentaires.

Pour l'étude présente, le choix retenu est $\bar{\psi} = \theta_g$. Cependant, le calcul de θ_g est effectué en *théorie spatiale* et ne nécessite *qu'un seul calcul supplémentaire*. (Ceci n'est vrai que dans le cas présent où la stratégie d'intégration -voir §5.2.2- est basée sur une méthode enveloppe). Le calcul de θ_g sera détaillé dans le §7.1.1.

On notera enfin que l'on assimile souvent la direction de la vitesse de groupe avec celle de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite ($\theta_g = \theta^e$). Cette hypothèse a été utilisée par Mack [24] mais aussi par Laburthe [41]. On tentera de la vérifier dans la section 10.2.2.

5.2.2 Stratégies d'intégration

Nous avons jusqu'à présent passé en revue les méthodes qui permettent de prendre en compte les paramètres f et $\bar{\psi}$ dans le calcul du facteur N . Le dernier paramètre indéterminé est l'angle de propagation ψ . A ce sujet, Arnal fait état de trois grandes familles de stratégies de calcul de facteurs N [44]. Ces trois familles regroupent des stratégies selon qu'elles prennent ou non en compte les différentes natures des ondes dont on intègre les taux d'amplification. Considérons par exemple une configuration d'aile en flèche, on observe classiquement des instabilités CF près du bord d'attaque puis des instabilités de type TS sur le reste de l'extrados. La principale question est de savoir s'il est possible de sommer entre eux les taux d'amplification de ces deux types d'ondes. Les trois familles de stratégies sont les suivantes (pour ne pas alourdir le texte, on assimile ici ondes TS et premier mode oblique) :

- Intégration Globale (IG). L'unique représentante de cette catégorie est la méthode enveloppe. Cette méthode consiste à rechercher pour chaque station et pour chaque fréquence, la valeur de ψ qui maximise le taux d'amplification. L'intégration est ensuite menée sur les taux d'amplification ainsi déterminés. Il est clair que dans ce cas aucune distinction n'est faite entre les ondes TS et les ondes CF. Les deux "s'additionnent".
- Intégration Discriminante Implicite (IDi). La philosophie de ces méthodes consistent à "suivre" lors de l'intégration, une onde déterminée par sa fréquence et un autre paramètre. Cet autre paramètre est soit son nombre d'onde transversal β , soit sa longueur d'onde λ , soit sa direction de propagation ψ . Les facteurs N sont ensuite maximisés par rapport à ces deux paramètres et représentent donc une enveloppe de plusieurs courbes enveloppes. Il s'ensuit que le nombre de calculs de stabilité est beaucoup plus important que pour la méthode enveloppe. Cependant, le fait de s'intéresser à des ondes entièrement déterminées par deux paramètres permet implicitement de distinguer les ondes CF des ondes TS.
- Intégration Discriminante Explicite (IDe). Cette catégorie permet de distinguer les ondes CF des ondes TS en calculant un facteur N séparé pour chacune de ces ondes. La transition intervient pour une certaine combinaison de ces deux facteurs N .

La figure 5.2 donne un exemple de calcul à $M = 4$ de α_i en fonction de ψ pour différentes positions X croissantes en-dessous de l'avant-corps du véhicule et pour $Y \approx 0.8$ m (voir Annexe A pour la définition des axes). La courbe continue et la courbe en pointillés représentent les résultats de calculs effectués à la même abscisse ($X = 0.35$ m) mais dans le second cas, la composante \bar{w} de l'écoulement moyen est annulée de manière artificielle. La comparaison de ces deux courbes montre clairement l'influence de la composante transversale de vitesse sur les taux d'amplification :

- $\bar{w} = 0$: l'écoulement est 2D, l'instabilité observée ne peut être qu'un premier mode oblique.
- $\bar{w} \neq 0$: la prise en compte de la composante transversale de l'écoulement brise la symétrie observée pour $\bar{w} = 0$ et accroît considérablement les taux d'amplification pour $\psi < 0$.

Pour chaque abscisse, l'instabilité se compose donc d'une combinaison d'onde CF et d'un premier mode oblique. Lorsque X augmente, la symétrie des courbes redevient apparente car l'influence du CF diminue (la symétrie n'est toutefois jamais totalement recouverte).

La différence entre la stratégie IG d'une part et les stratégies ID d'autre part est illustrée sur la figure par comparaison de la méthode enveloppe (IG) avec la méthode à $\psi = cte$ (ID).

- La méthode enveloppe intègre les maxima de α_i sans distinction de la nature de l'onde (CF ou premier mode oblique).

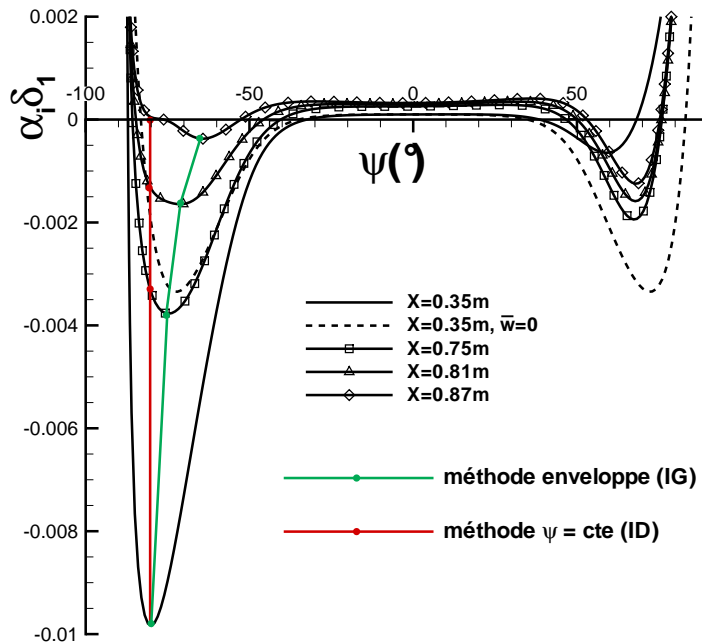


FIG. 5.2 – α_i en fonction de ψ pour différentes positions sous l'avant-corps du véhicule. Distinction entre les stratégies méthode enveloppe (IG) et $\psi = cte$ (ID).

- La méthode à $\psi = cte$ tente de discriminer les deux types d'onde en se focalisant ici sur l'onde CF pour lesquels ψ est plus élevé. Il en résulte que les taux d'amplification seront moins élevés.

Un certain nombre d'études [44], [48] ont permis de comparer entre elles ces différentes stratégies d'intégration. Toutes mettent en évidence des facteurs N plus élevés pour la famille IG que pour les familles ID. On signalera aussi le cas du profil ONERA D avec un bord d'attaque cambré étudié par Casalis [49]. Le graphe de l'évolution de l'angle ψ_M de l'onde la plus instable en fonction de la position sur la corde du profil est reporté dans [44]. Ce graphe montre une brusque diminution de ψ_M au moment où le gradient de pression longitudinal devient défavorable, indiquant ainsi le passage soudain de la prédominance d'onde CF aux ondes TS. Si la méthode enveloppe est utilisée, les facteurs N de ces deux types d'ondes seront sommés, ce qui sous-entend que l'énergie de perturbation peut se transmettre à des ondes dont les caractéristiques peuvent changer très brutalement (ce qui n'est pas forcément réaliste). Ce cas reste néanmoins assez particulier : la plupart du temps, le passage des ondes CF aux ondes TS se fait de manière plus progressive.

En ce qui concerne la présente étude, l'objectif est tout d'abord de caractériser les instabilités présentes sous l'avant-corps du véhicule (avant de calculer les facteurs N). En cela, la recherche de l'orientation ψ_M de l'onde la plus instable s'avère très utile et a donc été implémentée dans le code de stabilité. Il s'agit en quelque sorte d'une méthode enveloppe tronquée puisque N n'est pas calculé. Une fois les caractéristiques des instabilités connues, nous nous poserons alors la question du choix de la stratégie d'intégration.

5.3 Limitations de la méthode e^N .

Les deux principales limites de la méthode du e^N sont l'absence de prise en compte des interactions non-linéaires entre les modes instables et de la réceptivité. Si l'influence du premier phénomène semble, dans la plus grande partie des cas, marginal, l'influence du second est beaucoup plus importante.

La méthode du e^N ne donne pas l'amplitude des perturbations à la transition mais le rapport d'amplitude A/A_0 , où A_0 représente l'amplitude au niveau de l'abscisse critique. Si l'on considère que la transition intervient pour une valeur fixe de A quel que soit l'écoulement, alors la connaissance de A_0 devient primordiale. C'est l'objet de l'étude de réceptivité : quelles sont les perturbations susceptibles d'exciter les instabilités de couche limite et quelle est leur niveau d'amplitude lorsque ces instabilités commencent à s'amplifier ? L'étude simple de stabilité ne permet pas de répondre à ces questions et des études de réceptivité systématiques sont encore trop peu nombreuses. Néanmoins quelques éléments de réponse peuvent être avancés.

Tout d'abord, pour les écoulements 2D incompressibles, le paramètre important est le taux de turbulence extérieur. Mack propose en ce sens une formule de réceptivité basée sur cette grandeur [23] :

$$N = -8.43 - 2.4 \ln I_{turb} \quad (5.6)$$

avec

$$I_{turb} = \frac{\langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle^{1/2}}{U_\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}} Tu$$

en turbulence homogène et isotrope.

Cette formule n'est plus valable en écoulement compressible. Il existe notamment de fortes différences entre les facteurs N de transition observés en vol et en soufflerie supersonique. Cette différence provient du bruit acoustique de la soufflerie. En effet, plus le nombre de Mach augmente, plus le bruit rayonné par la couche limite turbulente se développant sur la tuyère devient prédominant. Pour des nombres de Mach assez élevés, ce phénomène devient le perturbateur principal de l'écoulement. Ainsi, les facteurs N observés dans des souffleries conventionnelles sont considérablement diminués par rapport à ceux observés en vol. S'il est communément admis qu'en vol ces derniers sont environ de 10, ils peuvent descendre jusqu'à 4, voire 2 pour les souffleries les plus bruyantes [43].

Enfin, en ce qui concerne les écoulements tridimensionnels, l'existence de l'instabilité secondaire complique singulièrement la prévision de transition. En effet, dans ce cas, deux mécanismes de déstabilisation entrent en jeu : la déstabilisation par ondes progressives ou la déstabilisation par ondes stationnaires. Dans le premier cas, les mécanismes de transition sont semblables à ceux des ondes TS (réceptivité - croissance modale - interactions non-linéaires - transition) ; dans le deuxième, l'instabilité secondaire modifie le mécanisme précédent (voir §4.5.3). Par ailleurs, les deux types d'ondes ne sont pas sensibles aux mêmes perturbations. Si les ondes progressives sont surtout sensibles au taux de turbulence extérieur, les instabilités stationnaires sont elles fortement influencées par la rugosité de paroi.

Deuxième partie

Développement et validation d'un code de stabilité et calcul du facteur N

Chapitre 6

Le code de stabilité

6.1 Principe de résolution, vue d'ensemble du code.

Le système (3.13-3.18) est un système linéaire d'équations différentielles ordinaires (EDO) d'ordre 2 à coefficients variables suivant y . Il peut être ramené à un système d'ordre 1 en posant :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \hat{u} & Z_2 &= \hat{u}' \\
 Z_3 &= \hat{v} \\
 Z_4 &= \frac{\hat{p}}{\gamma^e M^{e^2}} \\
 Z_5 &= \hat{T} & Z_6 &= \hat{T}' \\
 Z_7 &= \hat{w} & Z_8 &= \hat{w}'
 \end{aligned}$$

Ainsi, (3.13-3.18) peut s'écrire :

$$\frac{dZ}{dy} = Z'(y) = [A(\alpha, \beta, \omega, y)] Z(y) \quad \text{où } Z = (Z_1, \dots, Z_8)^T \quad (6.1)$$

Les conditions aux limites du problème précédent sont :

$$\begin{aligned}
 Z_1(0) &= Z_3(0) = Z_5(0) = Z_7(0) = 0 \\
 Z_1(y), Z_3(y), Z_4(y), Z_5(y), Z_7(y) &\text{ tendent vers 0 lorsque } y \text{ tend vers 0}
 \end{aligned}$$

Le système (6.1) peut être résolu comme un problème de Cauchy moyennant une méthode de tir . La matrice $[A]$ dépend de la coordonnée y par l'intermédiaire des coefficients de (3.13-3.18) qui représentent les grandeurs moyennes de l'écoulement laminaire. Ces grandeurs, ici calculées à l'aide d'un code Navier-Stokes, doivent être pré-traitées avant de pouvoir être utilisées comme données d'entrée du code.

La matrice $[A]$ dépend aussi des paramètres α , β et ω de l'onde (3.12). Suivant l'approche spatiale, et en utilisant les notations (3.23) et (3.24), ainsi que la relation $\omega = 2\pi f$, ces paramètres peuvent être remplacés par α_r , α_i , ψ , $\bar{\psi}$ et f . En pratique, l'utilisateur fixe f , ψ et $\bar{\psi}$, le code renvoyant alors les valeurs de α_r et α_i satisfaisant la relation de dispersion (3.25). Les coefficients α_i sont ensuite utilisés pour le calcul du facteur N .

Ces différentes opérations sont schématisées sur la figure 6.1. Les coefficients de $[A]$ sont donnés en Annexe E. La méthode numérique employée pour intégrer (6.1) est présentée dans le paragraphe 6.2. Les paragraphes 6.3 (pré-traitement des profils de base) et 6.4 (paramétrage des calculs) ont pour objectif de détailler les actions nécessaires à la détermination des coefficients de la matrice $[A]$. Le problème de l'initialisation de la méthode numérique est abordé dans la section 6.5. Enfin, le calcul des facteurs N est détaillé dans le chapitre 7.

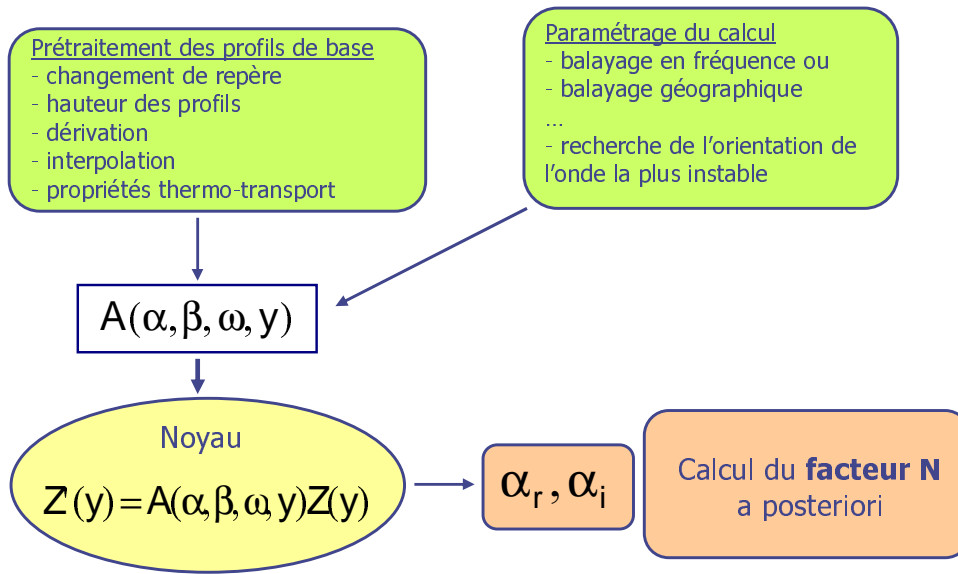


FIG. 6.1 – Organigramme simplifié du code.

6.2 Le noyau du code : intégration de (6.1).

Cette section présente succinctement la méthode numérique pour résoudre l'équation (6.1). Cette méthode est largement inspirée, à quelques détails près, de [50]. L'intégration numérique est conduite de l'extérieur de la couche limite vers la paroi. En effet, toutes les valeurs Z_i ($i = 1, \dots, 8$) ne sont pas connues pour $y = 0$ ce qui interdit de démarrer le calcul à partir de cette altitude. Par contre, à l'extérieur de la couche limite les gradients des profils de vitesse et de température s'annulent et (6.1) devient alors un système d'EDO à coefficients constants qui admet des solutions analytiques.

6.2.1 Résolution analytique du système à l'extérieur de la couche limite.

Il est possible de revenir temporairement à un système du deuxième ordre en utilisant le changement de variables suivant :

$$V_1 = Z_1 \quad V_2 = Z_4 \quad V_3 = Z_5 \quad V_4 = Z_7$$

On obtient alors un système de quatre équations que l'on notera :

$$V'' = [B]V \quad \text{où } V = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T \quad (6.2)$$

Ce système admet des solutions qui sont des combinaisons linéaires de solutions particulières $V_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) :

$$V_i = \sum_j k_j V_i^{(j)} \quad (6.3)$$

Le système étant homogène suivant y , ces solutions particulières sont de la forme :

$$V_i^{(j)} = \widehat{V}_i^{(j)} \exp(\lambda_j y) \quad (6.4)$$

d'où

$$V_i''^{(j)} = \lambda_j^2 V_i^{(j)} \quad (6.5)$$

Quel que soit j , l'équation (6.2) peut donc s'écrire :

$$\lambda_j^2 V^{(j)} = [B]V^{(j)}, \quad (6.6)$$

équation qui admet des solutions non nulles si la condition suivante est satisfaite :

$$\det([B] - \lambda_j^2[I]) = 0, \quad (6.7)$$

où $[I]$ représente la matrice identité. Cette dernière équation admet huit solutions possibles, deux à deux opposées, pour λ_j . Comme les amplitudes des perturbations doivent tendre vers 0 lorsque y tend vers l'infini, seules les quatre λ_j dont les parties réelles sont négatives sont pertinentes. Les amplitudes $\widehat{V}_i^{(j)}$ des solutions $V_i^{(j)}$ sont, quant à elles, données par la relation :

$$([B] - \lambda_j^2[I])\widehat{V}^{(j)} = 0 \quad (6.8)$$

Les solutions du problème réduit (6.2) étant à présent connues, on peut trouver les Z_i , solutions du problème (6.1) à l'extérieur de la couche limite, que l'on peut écrire sous une forme analogue à (6.3)-(6.4) :

$$Z_i = \sum_{j=1}^4 k_j \widehat{Z}_i^{(j)} \exp(\lambda_j y) \quad (6.9)$$

Les valeurs des λ_j et des $\widehat{Z}_i^{(j)}$ sont données en Annexe F.

6.2.2 Intégration du système.

A ce stade et après avoir initialisé α (voir §6.5), la matrice $[A]$ du système de départ (6.1) est entièrement déterminée à l'extérieur de la couche limite et les conditions initiales y sont connues. Le système (6.1) peut donc être intégré jusqu'à la paroi par un algorithme Runge-Kutta (RK) d'ordre 4.

Les conditions aux limites à la paroi sont :

$$\hat{u}(0) = \hat{v}(0) = \hat{w}(0) = \hat{T}(0) = 0$$

En ce qui concerne la pression, la valeur $\hat{p}(0)$ est arbitraire. On choisit $\hat{p}(0) = 1$. Toute autre valeur K donnerait les mêmes modes propres mais des fonctions propres $\hat{u}(y)$, $\hat{v}(y)$, $\hat{w}(y)$, $\hat{T}(y)$ et $\hat{p}(y)$ homothétiques dans un rapport K .

On impose quatre des cinq conditions à la paroi pour déterminer les coefficients k_j de (6.9). Ces conditions sont celles portant sur $\hat{u}(y)$, $\hat{w}(y)$, $\hat{T}(y)$ et $\hat{p}(y)$. En revenant aux variables $Z_i^{(j)}$, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 k_j Z_1^{(j)}(0) &= 0 & \sum_{j=1}^4 k_j Z_5^{(j)}(0) &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 k_j Z_4^{(j)}(0) &= 1 & \sum_{j=1}^4 k_j Z_7^{(j)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Les valeurs des $Z_i^{(j)}$ sont celles qui ont été calculées au dernier pas d'intégration RK.

Les k_j étant à présent connus, la valeur de l'amplitude de fluctuation verticale de la vitesse à la paroi est donnée par :

$$\hat{v}(0) = Z_3(0) = \sum_{j=1}^4 k_j Z_3^{(j)}(0) \quad (6.11)$$

Dans le cas général, cette valeur est différente de 0 et doit donc être annulée par une procédure itérative de tir qui consiste à :

- choisir une valeur initiale pour α
- intégrer (6.1) selon la procédure précédemment décrite
- calculer $\hat{v}(0)$
- modifier α (de manière à obtenir au final $\hat{v}(0) = 0$)

Pour modifier α , on utilise ici un algorithme de Newton. D'autre part, le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt a été utilisé afin de conserver les modules des Z_i dans le même ordre de grandeur.

6.3 Pré-traitement des profils de base.

6.3.1 Changement de repère.

Avant d'entreprendre le calcul de stabilité, il est nécessaire d'exprimer les composantes des vecteurs vitesse de l'écoulement moyen dans le repère adéquat pour le calcul de stabilité. En effet, les résultats du calcul Navier-Stokes sont exprimés dans un repère cartésien global qui, a priori, ne respecte pas les propriétés du repère dit de stabilité tel qu'il a été défini au §3.1. Rappelons que ce repère doit présenter un axe localement normal à la paroi, les deux autres étant orthogonaux entre eux, dans le plan localement tangent à la paroi. Dans le reste de ce document, la distinction sera faite entre le repère global dans lequel les coordonnées seront nommées (X, Y, Z) et le repère local de stabilité pour lequel les coordonnées seront (x, y, z) , y étant la normale à la paroi (voir fig.6.2 ou Annexe A).

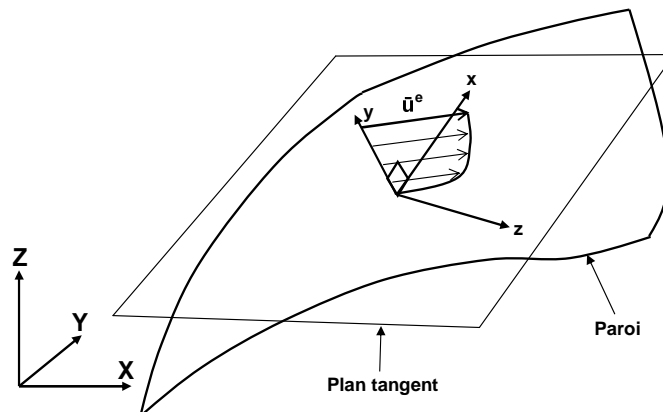


FIG. 6.2 – Définition du repère de stabilité.

L'axe y étant clairement défini, une question demeure concernant l'orientation des axes x et z : quelle doit être leur orientation respective dans le plan localement tangent à la paroi ? Plusieurs arguments sont à prendre en compte pour tenter de répondre à cette question.

Tout d'abord, l'amplitude du vecteur d'onde et du vecteur amplification de la perturbation sont invariants par rotation du repère de calcul autour de l'axe y . Plus précisément, considérons deux repères de stabilité (x_1, y, z_1) et (x_2, y, z_2) (voir fig. 6.3). Soit :

- θ l'angle entre les vecteurs x_1 et x_2 ,
- k le module de \vec{k} ,
- σ le module de $\vec{\sigma}$.

Pour une fréquence donnée, les valeurs de k et σ calculées dans le repère (x_1, y, z_1) , pour les angles $\psi = \psi_1$ et $\bar{\psi} = \bar{\psi}_1$, seront égales aux valeurs de k et σ calculées dans le repère (x_2, y, z_2) , pour les angles $\psi = \psi_1 - \theta$ et $\bar{\psi} = \bar{\psi}_1 - \theta$. En outre, lors de l'utilisation de la méthode enveloppe, les résultats (k et σ) seront identiques dans les deux repères. Seuls les angles de l'orientation de l'onde la plus instable différeront de θ . Ainsi, tout porte à croire que la question de l'orientation des axes x et z dans le plan localement tangent à la paroi n'est pas pertinente. Il faut néanmoins prendre en compte le fait que l'angle $\bar{\psi}$ doit être fixé au préalable, avant le calcul de stabilité.

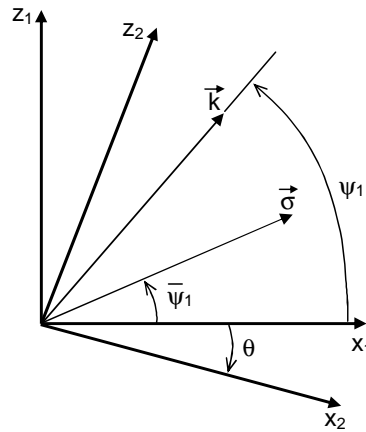


FIG. 6.3 – Invariance des calculs de stabilité par rotation autour de l'axe y .

Il existe en effet plusieurs stratégies pour valoriser $\bar{\psi}$ (voir §5.2.1). Selon celle choisie, l'orientation de x et z a, ou non, une importance :

- $\bar{\psi} = 0$: cette méthode est valable uniquement dans un repère précis appelé repère aile. Dans ce cas, les orientations de x et z ne sont pas quelconques.
- $\bar{\psi} = \theta_g$: l'angle $\bar{\psi}$ est alors calculé (indirectement). Les calculs ne dépendent pas du repère choisi, le choix des axes x et z est sans conséquence.

On notera aussi que, souvent, l'axe x (par exemple) est pris colinéaire au vecteur vitesse à l'extérieur de la couche limite ($\theta^e = 0$ dans l'annexe A). Dans le repère ainsi défini, on appelle vitesse longitudinale la composante de vitesse orientée suivant l'axe x et vitesse transversale la composante orientée suivant z .

6.3.2 Coupure des profils.

Les profils de vitesse et de température calculés par le code Navier-Stokes sont extraits le long des normales locales à la paroi, sur toute la hauteur du domaine de calcul. Pour le calcul de stabilité, seuls les profils proche paroi sont à prendre en compte, la principale difficulté étant de définir correctement la zone proche paroi.

Les profils entiers incluent la couche limite, éventuellement une couche entropique (voir §9.4) et la trace du choc oblique émanant du nez de l'engin. Le choc étant très éloigné de la paroi (sauf très près

du nez), il semble logique de considérer que son influence est quasi nulle sur la couche limite et donc de l'exclure du calcul de stabilité. Le problème est plus délicat en ce qui concerne l'influence de la couche entropique (quand elle existe). Il sera abordé en détail dans la section 10.2.1. Pour le moment, on se contentera d'indiquer que les résultats de stabilité sont impactés par la façon dont les profils sont coupés. Ainsi, deux critères de coupure ont été principalement employés, l'un coupant les profils en-dessous de la couche entropique, l'autre au-dessus (voir fig. 6.4).

- Coupure C (Choc) : ce critère a été conçu pour tenir compte explicitement de la couche entropique. Il est basé sur une comparaison relative δ_C de la valeur de la vitesse longitudinale entre deux points successifs en partant de la hauteur maximale du profil de vitesse longitudinale. Une fois le choc passé, le processus est arrêté lorsque δ_C dépasse une valeur prescrite, c'est-à-dire, lorsque l'on quitte l'asymptote.

$$\delta_C = \frac{|\bar{u}(y_i) - \bar{u}(y_{i-1})|}{|\bar{u}(y_i) + \bar{u}(y_{i-1})|} \quad (6.12)$$

- Coupure H (Enthalpie Totale) : ce critère a été employé par Kimmel et al [4] pour un cône elliptique dont nous verrons par la suite (§10.1.3) qu'il présente beaucoup de similitudes avec le présent avant-corps. Contrairement au critère précédent, il se base non plus sur la valeur de la vitesse mais sur l'enthalpie totale \bar{H} (voir fig. 6.5). L'avantage de l'enthalpie totale est qu'elle n'est pas affectée par la courbure du choc. Comme pour la coupure C, le principe est de calculer une variation relative δ_H mais en partant cette fois-ci de la paroi. Le processus est arrêté lorsque le curseur numérique atteint une asymptote.

$$\delta_H = \frac{|\bar{H}(y_i) - \bar{H}(y_{i-1})|}{|\bar{H}(y_i) + \bar{H}(y_{i-1})|} \quad (6.13)$$

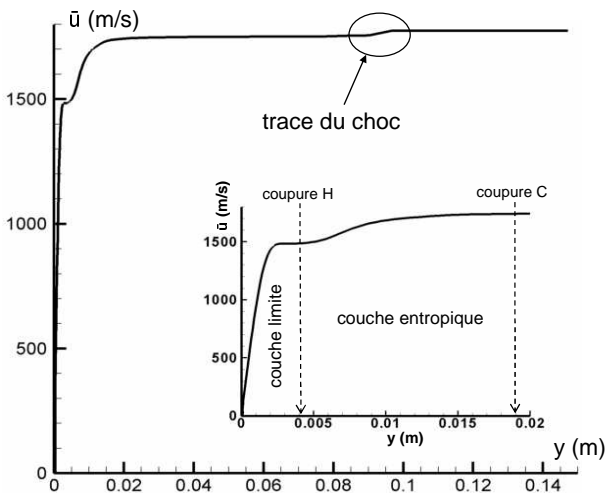


FIG. 6.4 – Écoulement proche paroi. Définition des critères C et H.

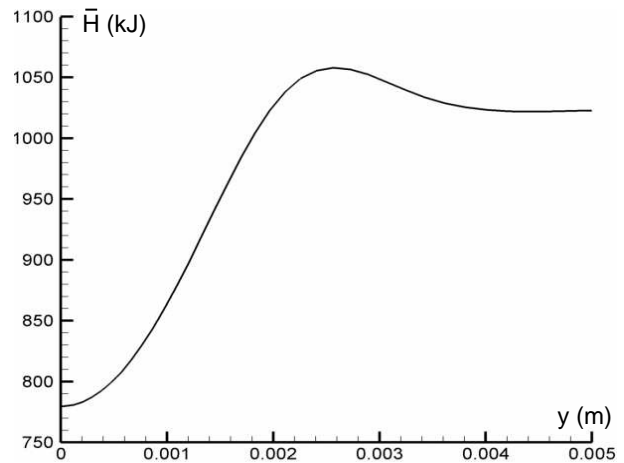


FIG. 6.5 – Exemple de profil d'enthalpie totale sur paroi adiabatique.

6.3.3 Dérivation et interpolation.

Le système (3.13-3.18) fait apparaître des dérivées premières et secondes des grandeurs moyennes. Ces dérivées sont calculées par des schémas aux différences finies centrés (excepté aux frontières du domaine où ils sont décentrés) du second ordre.

Finalement, toutes les grandeurs moyennes sont systématiquement interpolées sur 1000 points avant le calcul de stabilité, afin d'assurer la stabilité et la précision de l'intégration RK (voir §8.1.1).

6.3.4 Calcul des coefficients thermo-transport.

L'air est ici considéré comme un mélange de diazote N_2 , dioxygène O_2 , argon Ar et dioxyde de carbone CO_2 , dans les proportions définies par la base de données thermodynamiques d'Alexandre Burcat². Ces proportions diffèrent légèrement de celles fournies par la norme américaine de l'atmosphère standard de 1976 (voir tableau 6.1). D'après la base Burcat, la masse molaire de l'air est $M_{air} = 28.965178$ kg/kmol. Les chaleurs spécifiques à pression constante de chaque composant sont calculées grâce à deux polynômes d'ordre 4, chacun valable pour une plage de température différente : 200K-1000K et 1000K-6000K, et dont les coefficients sont contenus dans la base de données. Puisqu'à haute altitude les températures statiques correspondent à la limite basse de la plage inférieure, seule la plage concernant les hautes températures est retenue. Pour les basses températures, les données proviennent de Lemmon *et al.* [51]. Elles sont valables de 80K à 2000K pour N_2 et O_2 (Lemmon *et al.* ne fournissent pas de valeurs pour CO_2). Les deux plages sont raccordées numériquement pour $T = 1000K$.

Composant	A. Burcat (2006)	US Std. Atm. (1976)	Masse molaire (kg/kmol)
N_2	0.780 840	0.780 840	28.013 48
O_2	0.209 476	0.209 476	31.998 80
Ar	0.009 365	0.009 340	39.948 00
CO_2	0.000 319	0.000 314	44.009 80
	1.000 000	0.999 970	

TAB. 6.1 – Composition de l'air (fractions molaires), A.Burcat et US Std. Atmosphere (1976).

Finalement, la chaleur spécifique pour l'air est calculée par une moyenne pondérée par les fractions massiques des chaleurs spécifiques de chaque composant (voir figure 6.6) :

$$Cp_{air}(T) = \sum_{\alpha} Y_{\alpha} Cp_{\alpha}(T) \quad (6.14)$$

La viscosité $\mu(T)$ de l'air est calculée par la formule de mélange de Wilke [52]

$$\mu(T) = \sum_{\alpha=1}^{N_{sp}} \frac{X_{\alpha} \mu_{\alpha}(T)}{\sum_{\beta=1}^{N_{sp}} X_{\beta} \phi_{\alpha\beta}} \quad ; \quad \phi_{\alpha\beta} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_{\alpha}}{\mu_{\beta}} \left(\frac{W_{\beta}}{W_{\alpha}}\right)^{1/4}}\right)^2}{\sqrt{8 \left(1 + \frac{W_{\alpha}}{W_{\beta}}\right)}} \quad (6.15)$$

dans laquelle les valeurs des composants $\mu_{\alpha}(T)$ sont obtenues grâce à un polynôme interpolé sur des données calculées par le modèle de transport CHEMKIN II [53] basé sur la théorie cinétique des gaz. La même méthode est utilisée pour la conductivité thermique de l'air $k(T)$, en remplaçant $\mu_{\alpha}(T)$ par

²<http://garfield.chem.elte.hu/Burcat/burcat.html>

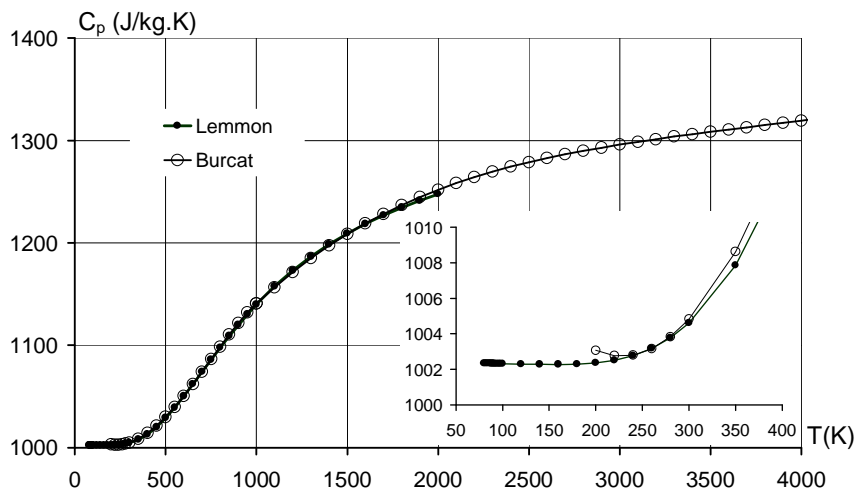


FIG. 6.6 – Chaleur spécifique de l'air.

$k_\alpha(T)$ dans (6.15). Les dérivées premières et secondes intervenant dans les équations (3.13-3.18) sont déterminées analytiquement par dérivation des polynômes d'interpolation et de la formule de Wilke.

6.4 Paramétrage du calcul.

Les paramètres f , ψ et $\bar{\psi}$ doivent être fixés avant de commencer le calcul. Différentes options sont proposées à l'utilisateur suivant l'objectif désiré :

- Pour obtenir des informations générales sur la stabilité d'un écoulement, il est possible d'effectuer des balayages en f , ψ ou $\bar{\psi}$ pour une station géographique donnée. Le pas des balayages est fixé par l'utilisateur mais s'adapte automatiquement en cours de calcul lorsqu'apparaissent des problèmes de convergence. Cette approche permet d'obtenir des renseignements sur la gamme de fréquences instables, ou le type d'ondes mis en jeu (1^{er} mode oblique, CF, ...).
- Afin d'appliquer la méthode enveloppe, le code balaye les différentes positions géographiques sur la paroi (dans l'ordre où elles apparaissent dans le fichier contenant les profils moyens) et recherche pour chacune le taux d'amplification α_{iM} et l'orientation ψ_M de l'onde la plus instable. Cette investigation se décompose en trois étapes. Pour chaque position géographique :
 1. balayage en ψ ($\psi \in [0, \pm 90^\circ]$, incrément déterminé par l'utilisateur) : détermination de l'ensemble \mathcal{E} contenant les valeurs de α_i correspondant aux valeurs de ψ balayées
 2. détermination, parmi \mathcal{E} , des trois valeurs $\psi_{1,2,3}$ donnant les trois plus importants α_i ($\alpha_{i1,2,3}$)
 3. interpolation des valeurs effectives de ψ_M et α_{iM} à partir de $\{ \psi_{1,2,3}, \alpha_{i1,2,3} \}$.

Si le balayage met en évidence que l'angle de l'onde la plus instable correspond à une borne du domaine balayé, alors l'étape d'interpolation est omise. Ce calcul est effectué pour f et $\bar{\psi}$ fixés. Le facteur N est calculé a posteriori, une fois les α_i connus sur toute la paroi.

6.5 Initialisation d'un calcul.

Le choix du α initial est important. Si sa valeur n'est pas assez précise, le code peut converger (s'il converge) vers une autre solution de la relation de dispersion proche de celle recherchée. Dans le cas des écoulements compressibles, on peut utiliser, pour approcher α , le résultat de Lees & Lin (voir §4.2) qui stipule que, pour une onde neutre :

$$1 - \frac{1}{M^e} = \frac{c_r 0}{\bar{u}^e}$$

D'autre part, la vitesse de phase doit être telle que $c_r/\bar{u}^e < 1$. D'après la définition de c_r , on aboutit à l'inégalité suivante pour α_r :

$$\frac{2\pi f \delta_1}{\bar{u}^e} \leq \alpha_r \delta_1 \leq \frac{2\pi f \delta_1}{\left(1 - \frac{1}{M^e}\right) \bar{u}^e} \quad (6.16)$$

Une plage de valeurs possibles pour α_r est ainsi définie (pour $\alpha_i = 0$). Afin de sélectionner une valeur pertinente pour initialiser le calcul, une option du code permet d'effectuer un balayage en α_r et α_i , sans mettre en œuvre l'algorithme de Newton. On relève alors pour chaque couple (α_r, α_i) l'amplitude de la perturbation de vitesse normale $\hat{v}(0)$. Les lieux pour lesquels $\hat{v}(0)$ est proche de zéro sont les solutions de la relation de dispersion et, en ce sens, le graphe obtenu constitue une représentation du spectre de l'opérateur Navier-Stokes linéarisé. La figure 6.7 donne un exemple de spectre.

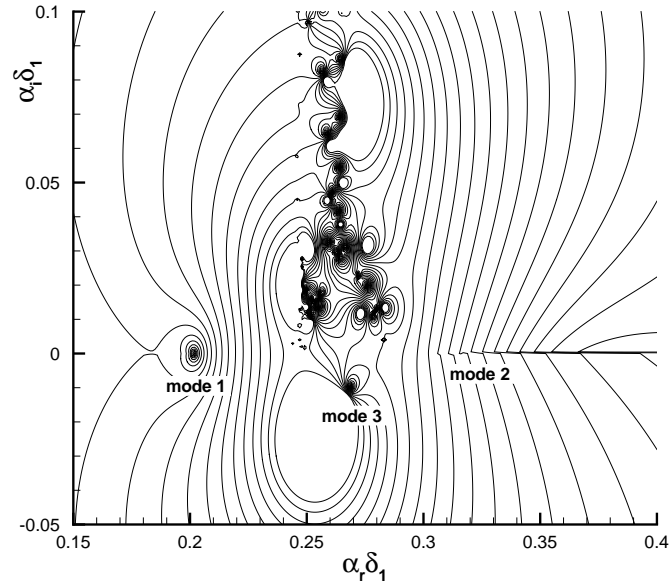


FIG. 6.7 – Exemple de spectre de l'opérateur Navier-Stokes linéarisé.

Chaque point correspond à une solution de la relation de dispersion et donc à une valeur potentielle d'initialisation du calcul de stabilité. Bien évidemment, les candidats les plus intéressants sont les solutions neutres ou instables (modes 1, 2 et 3 sur la figure).

Pour les calculs mettant en œuvre un balayage en f , ψ , $\bar{\psi}$ ou en espace, le calcul pour une itération est initialisé à partir du résultat de l'itération précédente.

Chapitre 7

Calcul des facteurs N

Dans le chapitre précédent nous avons présenté la méthode de résolution des équations de stabilité. Ce calcul nous permet d'obtenir les taux d'amplification des perturbations susceptibles de provoquer la transition. Nous allons à présent voir comment sont calculés numériquement les facteurs N de ces perturbations.

Le choix retenu pour $\bar{\psi}$ est $\bar{\psi} = \theta_g$, où θ_g est l'orientation de la vitesse de groupe d'une onde (voir §5.2). La plupart du temps, le calcul de la vitesse de groupe est effectué en théorie temporelle car, dans ce cas, α et β sont réels. Laburthe [41] propose ainsi une méthode nécessitant deux calculs de stabilité, l'un à fréquence fixée, l'autre à angle ψ fixé. La valeur de θ_g trouvée est ensuite utilisée comme donnée d'entrée d'un calcul de stabilité additionnel, cette fois-ci en approche spatiale.

Dans le paragraphe suivant, une méthode originale du calcul de θ_g en théorie spatiale est proposée. Cette méthode, outre le fait qu'elle s'effectue directement dans l'approche adéquate pour l'obtention des α_i , ne nécessite qu'un seul calcul de stabilité supplémentaire.

7.1 Calcul de la vitesse de groupe.

7.1.1 Méthode de calcul.

Dans le cas général, la vitesse de groupe est un vecteur complexe

$$\vec{V}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \vec{x} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \vec{z} \quad (7.1)$$

dont la partie réelle est :

$$\Re\{\vec{V}_g\} = \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_r} \vec{x} + \frac{\partial \omega_r}{\partial \beta_r} \vec{z} \quad (7.2)$$

La direction θ_g de $\Re\{\vec{V}_g\}$ est définie par :

$$\tan \theta_g = \frac{(\partial \omega_r / \partial \beta_r)_{\alpha_r}}{(\partial \omega_r / \partial \alpha_r)_{\beta_r}} = - \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \beta_r} \right)_{\omega_r} \quad (7.3)$$

La relation de dispersion (3.21) peut être écrite :

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i = \mathcal{D}(\beta_r, \beta_i, \omega) \quad (7.4)$$

De la même manière, l'alternative (3.25) à la relation de dispersion peut se mettre sous la forme :

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i = \bar{\mathcal{D}}(\psi, \bar{\psi}, \omega) \quad (7.5)$$

Suivant l'une ou l'autre de ces définitions, le taux de variation de α_r s'exprime d'une des deux manières suivantes :

$$d\alpha_r = \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \beta_r} \right)_{\beta_r, \omega} d\beta_r + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \beta_i} \right)_{\beta_r, \omega} d\beta_i + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \omega} \right)_{\beta_r, \beta_i} d\omega \quad (7.6)$$

ou

$$d\alpha_r = \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \psi} \right)_{\bar{\psi}, \omega} d\psi + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \bar{\psi}} \right)_{\psi, \omega} d\bar{\psi} + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \omega} \right)_{\psi, \bar{\psi}} d\omega \quad (7.7)$$

D'après la définition (3.23) de ψ , le taux de variation de $d\psi$ est :

$$d\psi = \left(\frac{\alpha_r}{\alpha_r^2 + \beta_r^2} \right)_{\alpha_r} d\beta_r - \left(\frac{\beta_r}{\alpha_r^2 + \beta_r^2} \right)_{\beta_r} d\alpha_r \quad (7.8)$$

En remplaçant $d\psi$ par cette valeur dans (7.7) on obtient :

$$d\alpha_r = \left(\frac{\left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \psi} \right)_{\bar{\psi}, \omega} \frac{\alpha_r}{\alpha_r^2 + \beta_r^2}}{1 + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \psi} \right)_{\bar{\psi}, \omega} \frac{\beta_r}{\alpha_r^2 + \beta_r^2}} \right) d\beta_r + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \bar{\psi}} \right)_{\psi, \omega} d\bar{\psi} + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \omega} \right)_{\psi, \bar{\psi}} d\omega \quad (7.9)$$

L'objectif est à présent de pouvoir identifier (7.6) avec (7.9). Cette identification n'est possible que dans la mesure où les deux expressions dépendent des mêmes paramètres. Or seule (7.6) dépend de $d\beta_i$ et seule (7.9) dépend de $d\bar{\psi}$.

Considérons à présent les graphes 7.1 et 7.2, décrivant la sensibilité de α_r par rapport à $\bar{\psi}$ (et donc à β_i). Le premier est relatif à une plaque plane en écoulement compressible ($M^e = 6$), pour laquelle les α_r présentés sont ceux d'une onde instable de type premier mode oblique. Le second graphe concerne un profil d'écoulement tridimensionnel relevé près du nez de l'avant-corps ($X = 4cm, Y = 0.3cm$ - voir Annexe A), à un endroit où la composante transverse de vitesse est importante. L'instabilité mise en jeu est du type CF, comme l'indique la fréquence de l'onde calculée ($f = 0Hz$). Dans le cas de la plaque plane, la variation de α_r en fonction de $\bar{\psi}$ est quasiment imperceptible sauf pour des angles très proches de 90° . En ce qui concerne la couche limite tridimensionnelle, la variation est plus marquée mais reste néanmoins minimale tant que $\bar{\psi} < 60^\circ$. Il est ainsi possible de considérer que $\partial \alpha_r / \partial \beta_i = \partial \alpha_r / \partial \bar{\psi} = 0$ dans (7.6) et (7.9).

Enfin il convient de signaler que les angles $\bar{\psi} = \theta_g$ calculés sont rarement supérieurs à 10° , ce qui valide l'hypothèse ci-dessus. Cette argumentation autorise donc une identification directe de (7.6) avec (7.9), ce qui permet d'obtenir une expression pour $(\partial \alpha_r / \partial \beta_r)_\omega$ que l'on peut remplacer dans (7.3) :

$$\theta_g = -\tan^{-1} \left(\frac{\left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \psi} \right)_{\bar{\psi}, \omega} \frac{\alpha_r}{\alpha_r^2 + \beta_r^2}}{1 + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \psi} \right)_{\bar{\psi}, \omega} \frac{\beta_r}{\alpha_r^2 + \beta_r^2}} \right) \quad (7.10)$$

7.1.2 Validation de la méthode.

La méthode décrite dans la section précédente a été validée sur un modèle dispersif pour lequel la vitesse de groupe des ondes peut être calculée analytiquement : le modèle de Korteweg de Vries linéaire bidimensionnel (KdV2D), dont l'équation s'écrit :

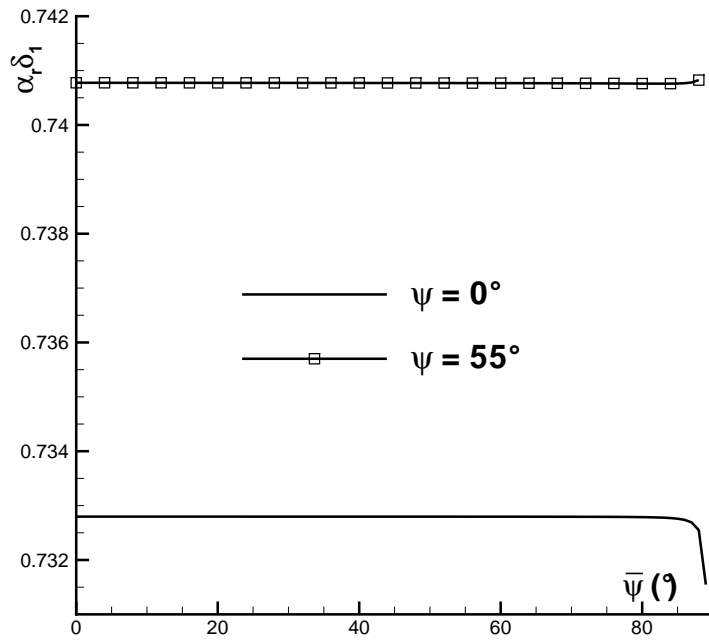


FIG. 7.1 – α_r en fonction de $\bar{\psi}$. Plaque plane, $M^e = 6$, $T^e = 221.6\text{K}$, $P^e = 2512\text{Pa}$. Fréquence des ondes $f = 100\text{kHz}$.

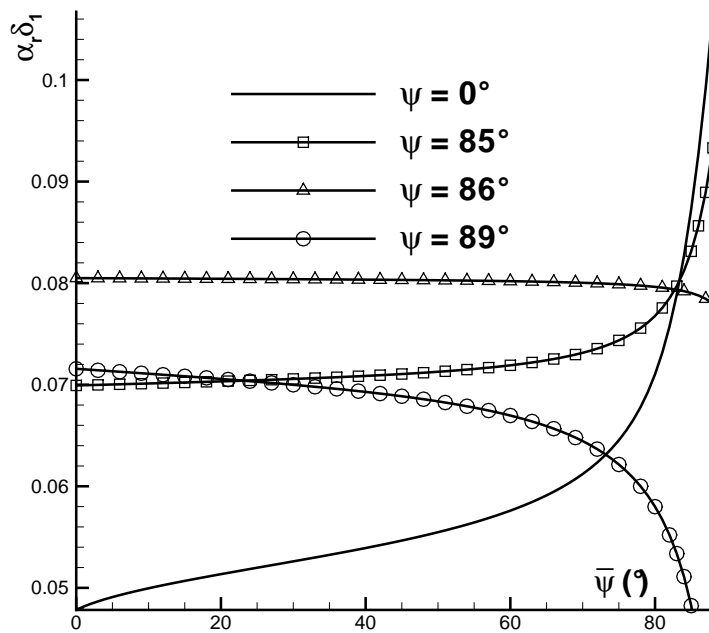


FIG. 7.2 – α_r en fonction de $\bar{\psi}$. Avant-corps du véhicule, $X = 4\text{cm}$, $Y = 0.3\text{cm}$. Fréquence des ondes $f = 0\text{kHz}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, z, t) + c_x \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) + c_z \frac{\partial u}{\partial z}(x, z, t) = a \left(\frac{\partial u^3}{\partial x^3}(x, z, t) + \frac{\partial u^3}{\partial z^3}(x, z, t) \right) \quad (7.11)$$

En considérant une onde

$$u(x, z, t) = \hat{u} \exp [i(\alpha x + \beta z - \omega t)] \quad (7.12)$$

l'équation de dispersion peut s'écrire :

$$\omega = \alpha c_x + \beta c_z + a(\alpha^3 + \beta^3) \quad (7.13)$$

ou encore (après avoir posé $\tan \psi = \beta/\alpha$) :

$$\omega = \alpha(c_x + \tan \psi c_z) + a\alpha^3(1 + \tan^3 \psi) \quad (7.14)$$

À partir de (7.13), la vitesse de groupe peut être calculée analytiquement :

$$\vec{V}_g = \begin{pmatrix} \partial\omega/\partial\alpha \\ \partial\omega/\partial\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x + 3a\alpha^2 \\ c_z + 3a\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x + 3a\alpha^2 \\ c_z + 3a\alpha^2 \tan^2 \psi \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

et l'angle θ_g^{ref} de référence est donc égal à :

$$\theta_g^{ref} = \tan^{-1} \left(\frac{c_z + 3a\alpha^2 \tan^2 \psi}{c_x + 3a\alpha^2} \right) \quad (7.16)$$

Il convient à présent de comparer cette valeur avec celle de θ_g déterminée par (7.10). D'après (7.14), ω ne dépend que de α et de ψ . Sa différentielle totale s'écrit donc :

$$d\omega = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} \right)_\psi d\alpha + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\psi} \right)_\alpha d\psi \quad (7.17)$$

Si $\omega = cte$, alors $d\omega = 0$. D'autre part, $(\partial\omega/\partial\alpha)_\psi$ et $(\partial\omega/\partial\psi)_\alpha$ sont calculés analytiquement grâce à (7.14). Ainsi,

$$\left(\frac{d\alpha}{d\psi} \right)_\omega = -(\alpha^2 + \beta^2) \frac{c_z + 3a\beta^2}{\alpha(c_x + 3a\alpha^2) + \beta(c_z + 3a\beta^2)} \quad (7.18)$$

Finalement, en reportant cette expression dans (7.10), on montre bien que $\theta_g = \theta_g^{ref}$.

7.2 Évaluation des facteurs N.

7.2.1 Différentes approches possibles.

Reprenons l'équation d'une onde selon l'approche spatiale :

$$q'(x, y, z, t) = \hat{q}(y) \exp [-(\alpha_i x + \beta_i z)] \exp [i(\alpha_r x + \beta_r z - \omega t)]$$

Posons $A(x, z) = \hat{q}(y) \exp [-(\alpha_i x + \beta_i z)]$ pour une altitude y fixée. On peut généraliser l'expression (5.2) au cas bidimensionnel :

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = -\alpha_i \quad (7.19)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_i \quad (7.20)$$

D'autre part, il paraît tentant d'écrire :

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial z} dz \quad (7.21)$$

Cette dernière égalité n'est néanmoins valable que dans la mesure où dA est une différentielle totale exacte (DTE). Si l'on admet cette hypothèse, alors, par dérivation de $A(x, z)$, on obtient :

$$\frac{dA}{A} = -(\alpha_i dx + \beta_i dz) \quad (7.22)$$

ce qui, après intégration, permet d'écrire :

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\left(\int_{x_0}^x \alpha_i d\xi + \int_{z_0}^z \beta_i d\zeta \right) \quad (7.23)$$

où A_0 est l'amplitude de l'onde à l'abscisse critique (x_0, z_0) . Cette dernière expression signifie que le chemin d'intégration importe peu pour calculer le taux d'amplification $\ln \frac{A}{A_0}$, ce qui ne correspond évidemment pas à la réalité. En effet, pour une répartition de α_i donnée sur une surface, il est toujours possible de trouver un chemin qui évite les zones les plus instables, ou au contraire un chemin qui ne traverse que les zones les plus instables. Dans les deux cas, les valeurs de $\ln \frac{A}{A_0}$ seront totalement différentes.

Il existe cependant au moins un cas, décrit par Laburthe [41], pour lequel (7.23) a un sens : celui de l'aile en flèche d'envergure infinie (dans ce cas, z est colinéaire au bord d'attaque de l'aile). Intégrons, en effet, l'équation (7.19) suivant x :

$$A(x, z) = \widehat{A}_0(z) \exp\left(\int_{x_0}^x -\alpha_i d\xi \right) \quad (7.24)$$

Dérivons à présent le résultat par rapport à z . Étant donné l'hypothèse d'aile d'envergure infinie, α_i est indépendant de z . Ainsi :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{d\widehat{A}_0}{dz} \exp\left(\int_{x_0}^x -\alpha_i d\xi \right) \quad (7.25)$$

En divisant (7.25) par (7.24), et d'après (7.20), on peut écrire :

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{\widehat{A}_0} \frac{d\widehat{A}_0}{dz} = -\beta_i \quad (7.26)$$

Après intégration de la seconde égalité dans l'équation précédente, et en remplaçant le résultat dans (7.24), on obtient finalement une expression identique à (7.23) :

$$A(x, z) = A_0 \exp\left(\int_{x_0}^x -\alpha_i d\xi + \int_{z_0}^z -\beta_i d\zeta \right) \quad (7.27)$$

D'autre part, en considérant que l'on suit un chemin d'intégration tangent en tout point au vecteur vitesse de groupe (voir figure 7.3), on a alors $d\zeta = \tan \theta_g d\xi$, d'où :

$$\ln \frac{A}{A_0} = \int_{x_0}^x (-\alpha_i - \beta_i \tan \theta_g) d\xi \quad (7.28)$$

Cette équation montre que l'intégration peut être conduite uniquement dans une direction de l'espace (suivant x). Cette approche permet de calculer le facteur N au fur et à mesure du calcul de stabilité le long de la corde du profil (par exemple). Autrement dit, les taux d'amplification α_i n'ont pas besoin d'être connus sur l'ensemble du domaine avant de pouvoir commencer l'intégration.

Le cas qui nous concerne ne présente malheureusement pas d'invariance géométrique suivant x ou z . Nous devons donc adopter une approche différente de celle décrite ci-dessus. On commence par poser :

$$\frac{dA}{A} = \sigma \text{ où } \sigma = \|\vec{\sigma}\| \text{ (voir fig. 3.1).} \quad (7.29)$$

Le rapport d'amplification totale s'écrit alors, pour une fréquence f fixée :

$$N_f = \ln \frac{A}{A_0} = \int_{M_0}^M \sigma dl = \int_{M_0}^M \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} dl \quad (7.30)$$

où M_0 et M ont pour coordonnées respectives (x_0, z_0) , (x, z) et dl correspond à un déplacement infinitésimal le long de la courbe d'intégration : $dl = \sqrt{d\xi^2 + d\zeta^2}$. Finalement, si la méthode enveloppe est utilisée, le facteur N est calculé par :

$$N(x, z) = \max_f \int_{M_0}^M \left(\max_{\psi} \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \right) dl \quad (7.31)$$

Selon cette méthode il est alors nécessaire de connaître l'ensemble des taux d'amplification maximums (par rapport à ψ) σ_M sur toute la surface avant de pouvoir démarrer le processus d'intégration.

7.2.2 Méthode numérique.

Le calcul des facteurs N_f est effectué par une méthode des trapèzes. Le calcul est conduit le long des courbes tangentes aux vecteurs locaux de vitesse de groupe. La méthode numérique, inspirée de [31], est illustrée sur le schéma 7.3.

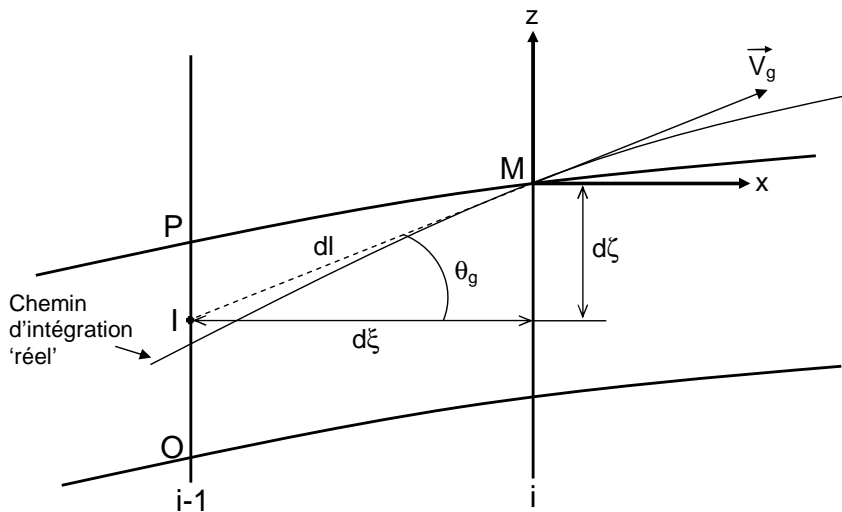


FIG. 7.3 – Principe de la méthode numérique de calcul des facteurs N .

Soit à calculer le facteur N_f au point M . Les étapes de la méthode sont :

- Trouver la position du point I , intersection de la ligne de maillage verticale $i - 1$ avec la droite colinéaire au vecteur \vec{V}_g au point M .
- Interpoler en I la valeur de N_f , ainsi que celle de σ , à partir des valeurs aux points P et O .
- Calculer $N_f(M) = N_f(I) + (\sigma(I) + \sigma(M)) dl/2$

La méthode est répétée pour pour chaque point d'une ligne i du maillage, $i \in [2, i_{max}]$.

Chapitre 8

Validation de la chaîne de calcul

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

- Valider la partie numérique du code de stabilité ICARE
- Valider l’approche retenue pour le calcul des coefficients thermo-transport
- Valider l’approche Navier-Stokes pour le calcul de l’écoulement moyen

Les deux premiers points ont été étudiés pour des écoulements bidimensionnels et par comparaison avec des travaux existants [31], [54]. Ils font l’objet de la première section de ce chapitre. L’approche Navier-Stokes a, quant à elle, été validée par comparaison de résultats de stabilité de profils moyens obtenus d’une part par résolution des équations de similitude de Levy-Lees et d’autre part au moyen du code commercial Fluent 6.2.16. Ce point est abordé dans la seconde section.

8.1 Validation du code de stabilité ICARE.

Les résultats de deux études différentes ont été utilisés pour valider le code de stabilité développé à ICARE :

- Stabilité d’écoulement sur un cône d’angle au sommet de 14° , à Mach 6 sans incidence (Dussillols [31], ONERA-DMAE)
- Stabilité d’un écoulement à Mach 10 sur plaque plane (Malik et al. [54])

8.1.1 Cône à Mach 6.

Cette étude numérique constitue le pendant d’une étude expérimentale en soufflerie supersonique pour laquelle les conditions génératrices sont : $T_i = 620\text{K}$ et $P_i = 60\text{bar}$, ce qui produit un écoulement à Mach 7 en sortie de tuyère. Le nombre de Reynolds unitaire est : $\text{Re}_u = 25 \times 10^6/\text{m}$. La température statique est approximativement 60K. La température T^e et le nombre de Mach M^e à l’extérieur de la couche limite sont pratiquement constants et respectivement égaux à 74K et 6.

Afin de réduire les sources d’incohérence, tous les calculs de stabilité (ceux de Dussillols et ceux faits à ICARE) ont été réalisés à partir des mêmes profils moyens de couche limite (fournis par ONERA-DMAE), obtenus à l’aide d’un code Navier-Stokes. Les calculs de stabilité de Dussillols ont été effectués grâce au code CASTET de l’ONERA. Les paramètres utilisés pour les calculs sont rassemblés dans le tableau 8.1.

	CASTET	ICARE
C_p	constant, adimensionné	constant, 1004.5J/kgK
μ	loi de Sutherland, $\bar{\mu} = \bar{T}^{1.5} \frac{1+110.4/T_e}{\bar{T}+110.4/T_e}$ où $\bar{\mu} = \mu/\mu_e$ et $\bar{T} = T/T_e$	loi de Sutherland, $\mu = \mu_o \sqrt{\frac{T}{T_o} \frac{1+110.4/T_o}{1+110.4/T}}$ où $\mu_o = 5.219 \times 10^{-6} \text{Pl}$ et $T_o = 74\text{K}$
Pr	0.725	0.725
γ	1.4	1.4
interpolation	sur 101 points dans l'épaisseur de la couche limite δ	sur 1001 points dans le profil entier

TAB. 8.1 – Comparaison ONERA / ICARE des paramètres du calcul de stabilité.

Chaque profil d'écoulement moyen contient à l'origine moins de 100 points. CASTET interpole les profils sur 101 points sur l'épaisseur de la couche limite. Plusieurs définitions de cette épaisseur ont été envisagées pour les calculs réalisés avec le code ICARE. Toutes sont basées sur le rapport \bar{u}/\bar{u}^e . L'épaisseur diffère selon les valeurs données à ce rapport. Les valeurs testées sont : 99%, 99,9%, 99,99% et 100%. Pour chaque cas, les profils sont aussi interpolés sur 101 points. Les résultats sont présentés sur la figure 8.1. La ligne en pointillés représente le résultat obtenu avec CASTET pour une valeur de \bar{u}/\bar{u}^e (qui n'est pas connue). Quelle que soit l'épaisseur considérée, la valeur obtenue à l'aide de CASTET reste inférieure à celles obtenues à l'aide du code ICARE. Étant donné que les paramètres thermo-transport sont pratiquement identiques dans les deux cas (voir tableau 8.1), les incohérences constatées sont vraisemblablement d'origine numérique :

- l'intégration des équations aux petites perturbations s'effectue de l'extérieur de la couche limite, où les gradients sont censés s'annuler, vers la paroi.
- les taux d'amplification sont donnés en valeurs adimensionnées par δ_1 .

Or les valeurs des gradients et de δ_1 dépendent de l'altitude à laquelle les profils sont coupés.

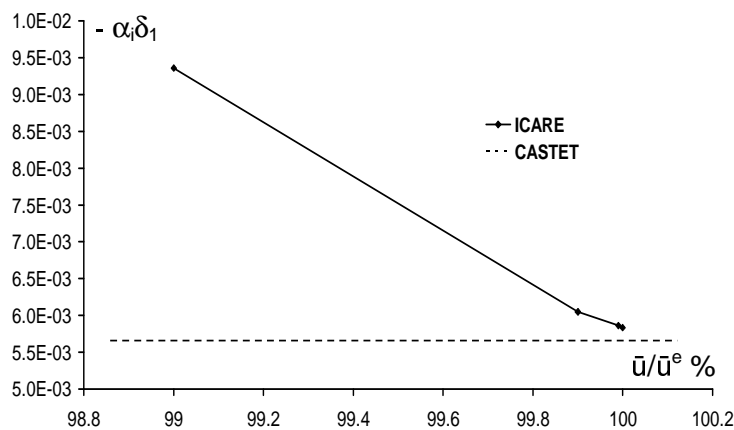


Fig. 8.1 – Influence de l'épaisseur de couche limite sur le calcul de stabilité.

Le nombre de points dans la couche limite a aussi une influence sur les calculs de stabilité. La figure 8.2 présente les résultats du calcul du taux d'amplification pour un maillage de plus en plus raffiné du même profil (épaisseur identique). À partir de 1000 points, le résultat du calcul ne varie pratiquement plus. C'est donc cette valeur qui a été retenue pour interpoler les profils.

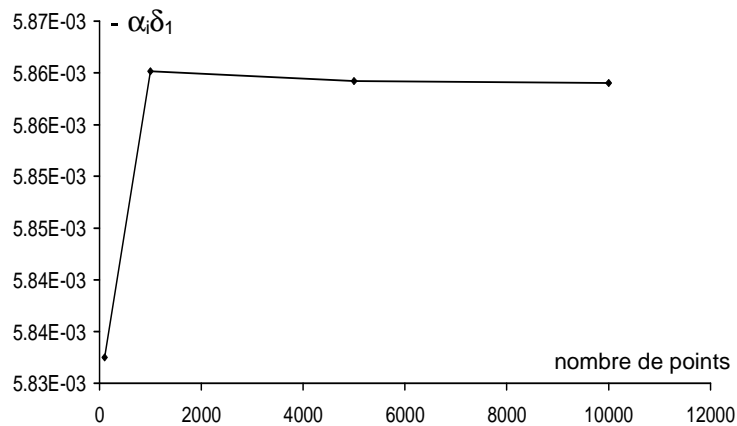


FIG. 8.2 – Influence du nombre de points dans la couche limite sur le calcul de stabilité.

Les résultats de Dussillols sont donnés pour :

- le premier mode oblique, calculé à l'aide de la méthode enveloppe
- le second mode, calculé pour $\psi = cte = 0^\circ$

Pour le premier mode, les α_r coïncident bien (fig. 8.3) tandis que les α_i et les angles ψ_M calculés avec le code ICARE sont légèrement plus importants que ceux calculés avec CASTET (fig. 8.5 & 8.9). L'écart sur les valeurs de facteur N engendré par la relative disparité des α_i ne devient visible qu'à partir de $x = 0.066m$.

En ce qui concerne le second mode, les nombres d'ondes α_r , ainsi que les facteurs N sont toujours comparables (fig. 8.4 & 8.8). La concordance des valeurs des taux d'amplification α_i est meilleure que pour le premier mode. Si nous prenons en compte les différences dans les paramètres des calculs (voir tableau 8.1), nous pouvons considérer que ces résultats sont un élément en faveur de la validité du code ICARE.

8.1.2 Plaque plane à Mach 10.

Malik *et al.* [54] ont étudié la stabilité d'un écoulement à haute enthalpie (Mach 10) sur plaque plane avec condition de paroi adiabatique. Ils ont examiné l'effet de dissociation des gaz en comparant les résultats de stabilité obtenus avec l'hypothèse de gaz idéal (GI) à ceux obtenus avec une hypothèse de gaz réactifs (GR) en équilibre chimique. Nous entendons, par gaz idéal, un gaz thermiquement et caloriquement parfait, c'est-à-dire un gaz qui obéit à la loi des gaz parfait et dont les coefficients de chaleur spécifique (C_p et C_v) sont constants. Ce cas a été abordé par plusieurs auteurs comme Hudson *et al.* [55] et Perraud *et al.* [56]. Ces derniers ont, de plus, envisagé le cas de gaz réactifs en déséquilibre chimique.

Dans cette section, seuls les cas gaz idéal (GI) et gaz parfait (GP) seront considérés. Un gaz parfait est un gaz idéal pour lequel C_p et C_v ne sont pas constants mais ne dépendent que de la température. Les profils moyens de l'écoulement sont obtenus grâce à un code qui résout les équations de couche limite sous l'hypothèse de similitude de Levy-Lees (voir Annexe D). Les conditions statiques à l'extérieur de la couche limite sont : $M^e = 10$ et $\bar{T}^e = 350K$ pour les deux approches (GI et GP). La pression \bar{p}^e est ajustée de manière à obtenir un nombre de Reynolds unitaire de $6.6 \times 10^6/m$. Le tableau 8.2 regroupe certaines informations importantes concernant le calcul de l'écoulement moyen. Lorsqu'elles sont connues,

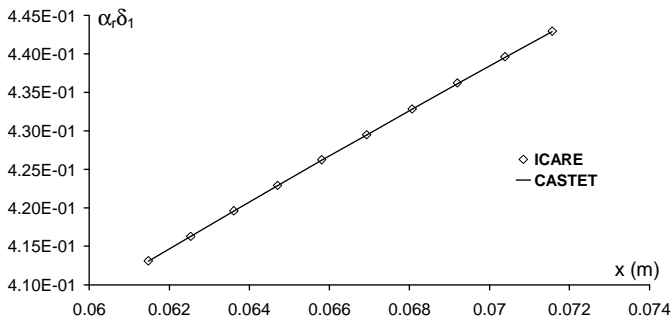


FIG. 8.3 – Comparaison des α_r . Mode 1, ME.

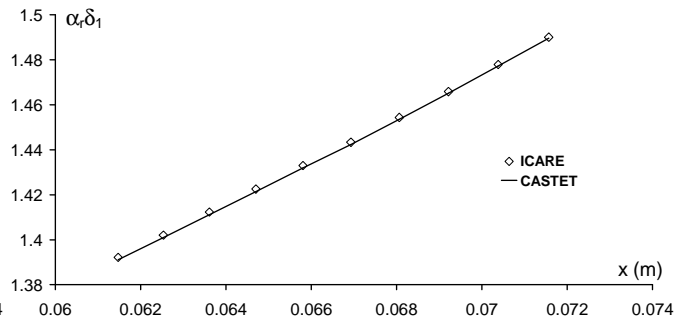


FIG. 8.4 – idem fig. 8.3. Mode 2, $\psi = 0^\circ$.

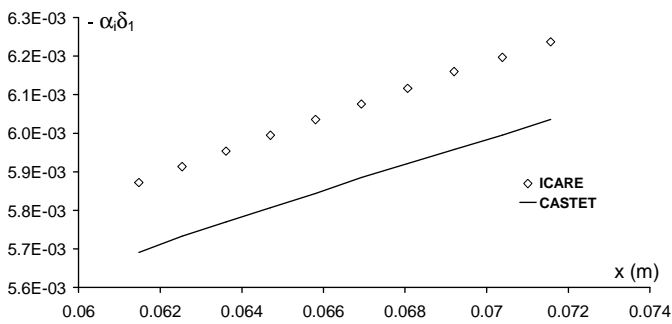


FIG. 8.5 – Comparaison des α_i . Mode 1, ME.

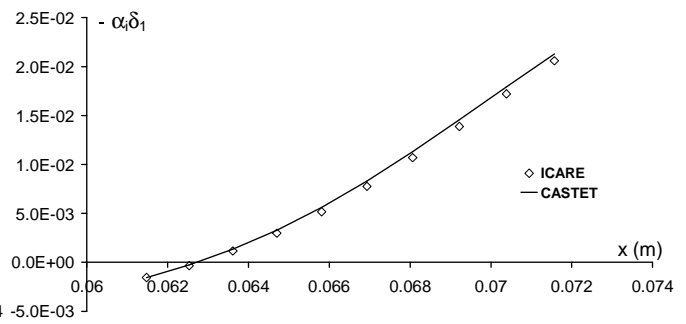


FIG. 8.6 – idem fig. 8.5. Mode 2, $\psi = 0^\circ$.

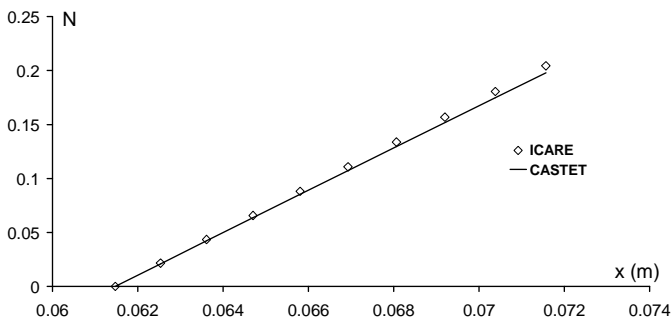


FIG. 8.7 – Comparaison des facteurs N . Mode 1, ME.

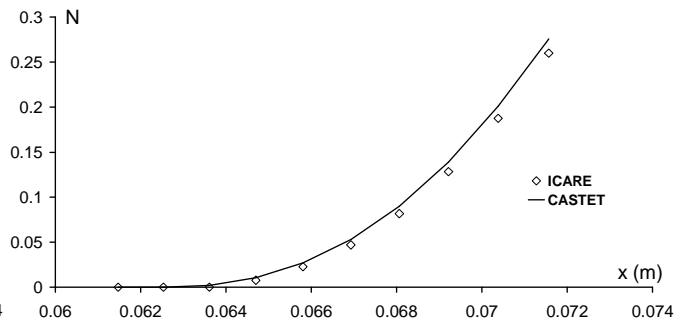


FIG. 8.8 – idem fig. 8.7. Mode 2, $\psi = 0^\circ$.

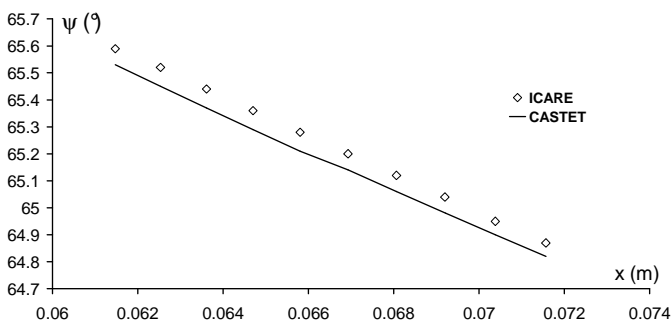
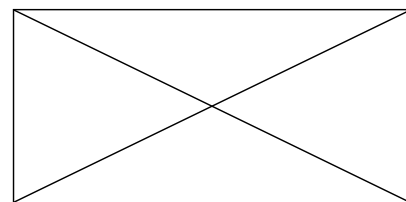


FIG. 8.9 – Comparaison des angles ψ . Mode 1, ME.



	MALIK (GI)	ICARE (GI)	ICARE (GP)
\bar{p}^e	?	2740Pa	3725Pa
R_u	$6.6 \times 10^6/\text{m}$	$6.61 \times 10^6/\text{m}$	$6.60 \times 10^6/\text{m}$
gaz	ideal	ideal	O ₂ ($\approx 78\%$), N ₂ ($\approx 21\%$), Ar ($\approx 1\%$)
r	?	287J/kgK	287.1 J/kgK
$\bar{\mu}$	loi de Sutherland, $\bar{\mu} = d_1[\sqrt{\bar{T}}/(1 + \frac{d_2}{\bar{T}})]$ où $d_1 = 1.0869 \times 10^{-6}\text{kg/ms}$ et $d_2 = 110\text{K}$	loi de Sutherland (voir Malik (IG))	interpolation sur des valeurs CHEMKIN
C_p	?	1004.5 J/kgK	base BURCAT-LEMMON
P_r	0.7	0.7	$\bar{\mu}C_p/k$
\bar{k}	?	$\bar{\mu}C_p/Pr$	interpolation sur des valeurs CHEMKIN
γ	?	1.4	$C_p/(C_p - r)$
θ_p	≈ 17.5	17.35	14.24
\bar{u}^e	?	3750m/s	3748m/s

TAB. 8.2 – Comparaison Malik / ICARE des paramètres de calcul des profils moyens.

les caractéristiques du calcul de Malik sont données en référence. Les profils moyens utilisés par Malik ont été obtenus par résolution des équations de couche limite. La température $\theta_p = \bar{T}_f/\bar{T}_e$ (où \bar{T}_f est la température de frottement à la paroi) et la vitesse \bar{u}^e données en fin de tableau sont des résultats du calcul de couche limite.

En ce qui concerne les calculs de stabilité, les propriétés thermo-transport sont identiques à celles utilisées pour la détermination des profils moyens. Les caractéristiques spécifiques aux calculs de stabilité sont regroupées dans le tableau 8.3. La stabilité de l'écoulement est étudiée à une distance $x = 0.61\text{m}$ par rapport au bord d'attaque, pour laquelle $\text{Re}_{stab} = \sqrt{\text{Re}_{xstab}} \approx 2000$ de manière à coïncider avec les conditions utilisées par Malik.

	MALIK GI	ICARE GI	ICARE GP
x_{stab}	?	0.61m	0.61m
Re_{xstab}	4×10^6	4033068	4027112
Re_{stab}	2000	2008.2	2006.8
interpolation	?	1001 points	1001 points

TAB. 8.3 – Comparaison Malik / ICARE des paramètres du calcul de stabilité.

Dans les graphes 8.10 à 8.13, α_i^* correspond au taux d'amplification α_i adimensionné par la longueur de référence $\sqrt{\bar{\nu}^e x/\bar{u}^e}$ où $\bar{\nu}^e$ est la viscosité cinématique de l'écoulement moyen. La vitesse de phase est, quant à elle, adimensionnée par \bar{u}^e . La fréquence réduite F est égale à $2\pi f\bar{\nu}^e/\bar{u}^{e2}$. La comparaison avec les résultats de Malik a été faite dans le cas GI. Les résultats de Malik ont été numérisés à partir des figures 5 & 6 de la référence [54]. Les graphes 8.10 à 8.13 montrent aussi les résultats obtenus à l'ONERA avec le code CASTET pour le cas GR en équilibre et avec le code CASTHY pour le cas GR

en déséquilibre [56]. Pour le cas en équilibre, la composition chimique de l'air ainsi que les propriétés thermo-transport sont interpolées à partir d'un diagramme de type Mollier dont les entrées sont la pression et l'enthalpie. Pour le cas en déséquilibre, un modèle cinétique est utilisé pour l'évolution du mélange dont les coefficients thermo-transport sont obtenus par une loi de mélange. Le modèle cinétique est implémenté dans le code de couche limite (REBECCA). Une fois le calcul de l'écoulement moyen effectué, tous les profils (y compris les profils des quantités thermo-transport) sont importés dans CASTHY.

En ce qui concerne le cas GI, l'accord entre les résultats de Malik et ceux obtenus grâce au code ICARE est tout à fait satisfaisant pour toutes les variables étudiées (α_i^* , c_r , ψ) et pour chaque mode (fig. 8.10, 8.11, 8.12, 8.13). En outre, on notera que les calculs GI ne permettent pas de détecter le troisième mode (fig. 8.12).

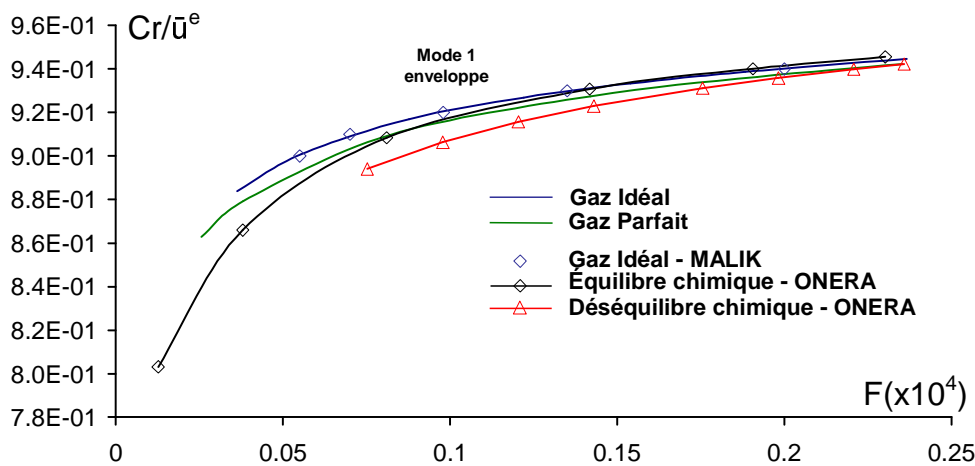


FIG. 8.10 – Comparaison de la vitesse de phase c_r . Mode 1, méthode enveloppe.

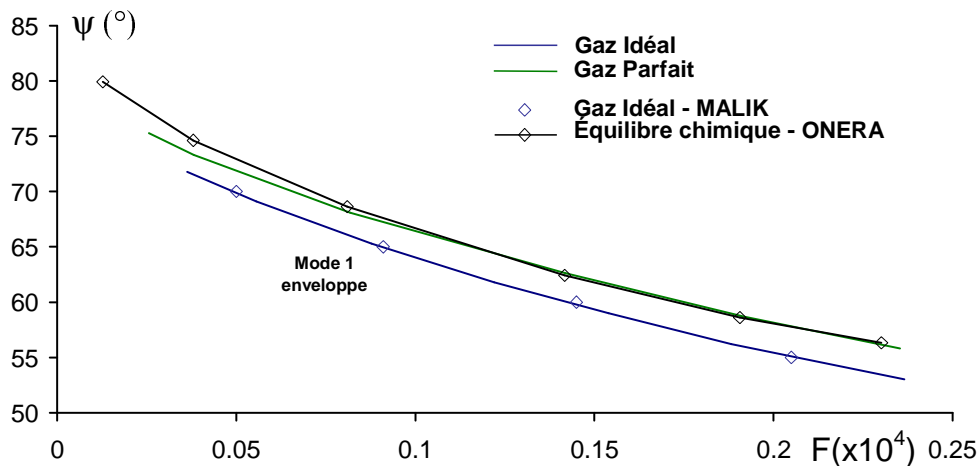
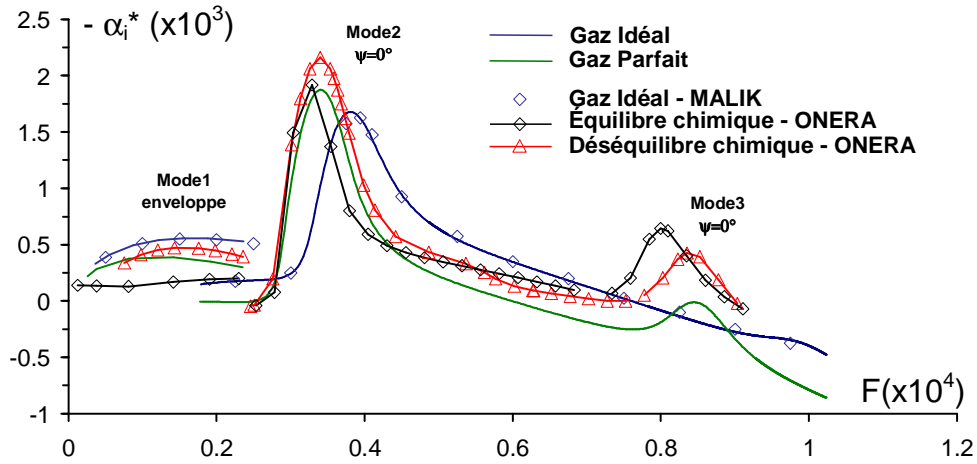
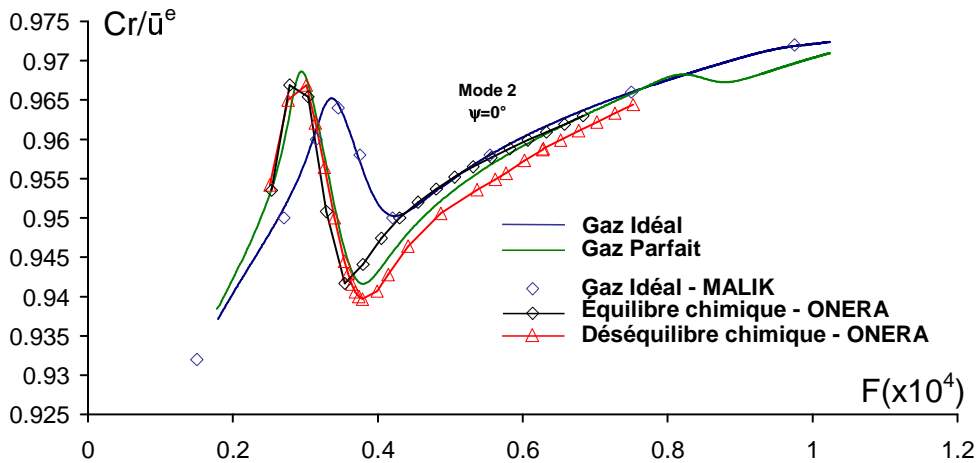


FIG. 8.11 – Comparaison des angles ψ_M . Mode 1, méthode enveloppe.

Dans le cas gaz non-idéal, l'approche GP paraît plus apte que l'approche GI à reproduire le comportement global (du point de vue de la stabilité) des gaz réactifs (fig. 8.12). Elle permet en effet de mettre

en évidence le déplacement du second mode, observé pour le modèle GR, vers les basses fréquences. La valeur maximale de α_i^* coïncide avec celle du modèle en équilibre, tandis que le modèle en déséquilibre donne une valeur plus élevée. Les courbes GP et GR coïncident assez bien avant le pic de α_i^* mais divergent ensuite. L'approche GP permet à peine de détecter le troisième mode alors que le modèle GR le révèle sans ambiguïté. En ce qui concerne le premier mode, l'approche GP est étonnamment en meilleur accord avec le cas en déséquilibre qu'avec le cas en équilibre. Elle reproduit néanmoins la tendance observée avec le modèle GR et qui consiste à diminuer les valeurs de α_i^* (par rapport au cas GI).

FIG. 8.12 – Comparaison des taux d'amplification α_i .FIG. 8.13 – Comparaison de la vitesse de phase c_r . Mode 2, $\psi = 0^\circ$.

Les courbes de facteurs N sont représentées sur la figure 8.14, pour les premier et second modes, et pour un GP. Les facteurs du premier mode ont été calculés à l'aide de la méthode enveloppe tandis que ceux du second l'ont été pour $\psi = 0^\circ$. Dans les conditions du calcul ($M^e = 10$), le second mode est plus amplifié que le premier, ce qui est classique pour ces valeurs de Mach élevées. A titre de comparaison, les courbes de facteur N sont données dans le cas GI, pour le premier mode, ainsi que pour le second mode à $f = 120\text{kHz}$. Le premier mode est plus amplifié dans le cas GP que dans le cas GI. Pour le second mode, l'exemple d'une perturbation à 120kHz montre que les courbes se croisent à deux reprises.

Tout d'abord, le cas GI est plus amplifié mais le cas GP croît plus rapidement à partir de $Re_x \approx 4 \times 10^6$. Cette brusque augmentation est retardée pour le cas GI mais intervient finalement de telle manière que ce dernier devient prépondérant après $Re_x \approx 10 \times 10^6$. Ceci implique que la position de la transition sera déterminée en premier par l'approche GI ou GP, suivant la valeur de N considérée. Cette déduction est validée par le graphe 8.15 qui donne l'abscisse de transition en fonction de la courbe de facteurs N pour le second mode (voir la position relative des courbes GI et GP données par le code ICARE). Malik ne donne pas dans [54] les courbes de facteurs N mais ces dernières ont été calculées par Perraud *et al.* pour les cas GI et GR en déséquilibre. On notera que le cas GI du code ICARE est en parfait accord avec le cas GI donné par Perraud *et al.* (courbe ONERA). Par contre l'approche GR en déséquilibre engendre des facteurs N plus élevés que les deux autres approches (GI et GP).

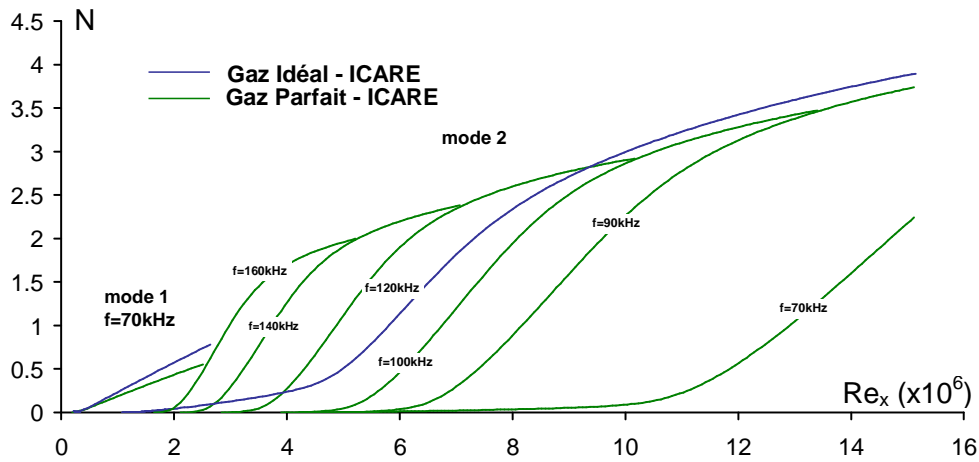


FIG. 8.14 – Facteurs N . Modes 1 et 2.

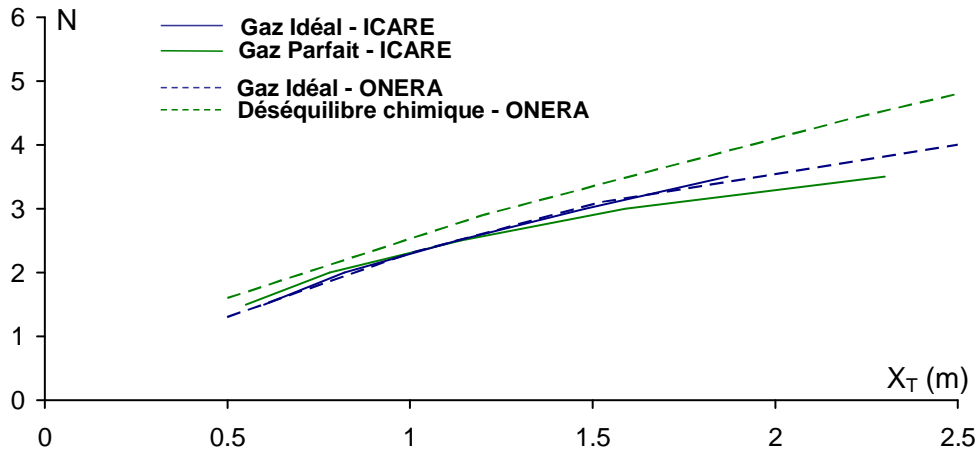


FIG. 8.15 – Position de la transition en fonction du facteur N .

8.1.3 Conclusion.

Que ce soit pour le cas du cône à Mach 6 ou pour celui de la plaque plane plane à Mach 10, la comparaison de la présente étude avec [56] & [54] montre une bonne concordance des résultats, dans

la mesure où les caractéristiques thermo-transport du gaz étudié sont quasi-identiques. À ce titre, le cas de la plaque plane à Mach 10 en approche GI est particulièrement éloquent. Ceci prouve que l'aspect numérique du code de stabilité ICARE est valide.

Concernant l'approche utilisée pour la détermination des coefficients thermo-transport, le fait d'utiliser un GP au lieu d'un GI permet de reproduire assez fidèlement les résultats de stabilité obtenus dans l'approche GR (en particulier GR en équilibre chimique). On notera toutefois que les valeurs de α_i sont légèrement sous-estimées par rapport au cas en déséquilibre chimique et que le troisième mode est à peine détecté. Étant donné la faible importance du troisième mode dans le déclenchement de la transition, cette lacune de l'approche GP est secondaire.

En ce qui concerne la sous-estimation de α_i par rapport au cas GR en déséquilibre, il faut garder à l'esprit que la région dans laquelle le déséquilibre intervient est très localisée près du choc. Dans le cas qui nous intéresse, le choc est proche de la paroi dans la région de la pointe avant du véhicule, puis s'en éloigne (voir fig.9.4). Ainsi la zone d'influence du choc se situe près du nez et le déséquilibre chimique n'influe donc pas sur la stabilité de la majeure partie de l'écoulement. Enfin, les conditions du cas étudié dans cette section sont relativement sévères ($M^e = 10$). Nous verrons par la suite que le nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite sur l'avant-corps du véhicule n'excède pas 5.

8.2 Validation de l'approche Navier-Stokes pour le calcul de profils moyens.

L'objectif de cette section est de valider l'approche Navier-Stokes (NS) pour l'obtention des profils moyens. On s'intéresse notamment au nombre de points nécessaires dans la couche limite pour obtenir des profils suffisamment résolus pour le calcul de stabilité. Le cas traité est celui d'une couche limite sur plaque plane longue de 6m, et dont les conditions à la frontière de l'écoulement sont : $M^e = 2.68$, $\bar{T}^e = 752K$ et $\bar{p}^e = 4640Pa$. Ces conditions sont représentatives de l'écoulement sous l'avant-corps du véhicule, loin du choc de nez et pour un vol à Mach 6. La validation est effectuée par comparaison des résultats de stabilité menés sur des profils moyens obtenus d'une part avec le code commercial Fluent 6.2.16, et d'autre part avec des profils calculés à l'aide d'un code résolvant les équations de Levy-Lees (LL) (voir Annexe D).

L'épaisseur de la couche limite calculée à l'aide du code LL est de 20mm à la fin de la plaque plane. Les calculs Navier-Stokes sont conduits sur le maillage suivant :

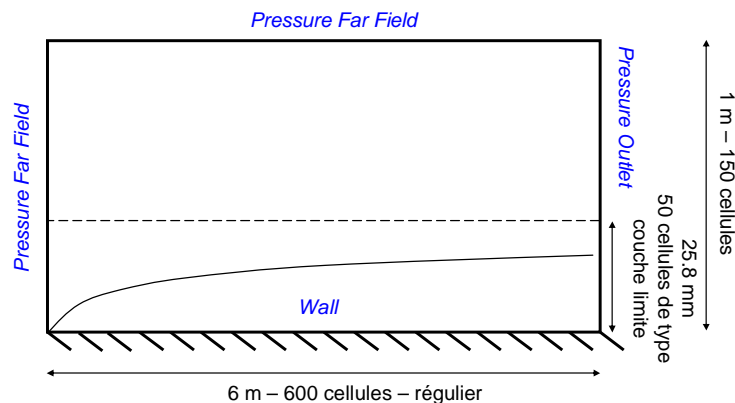


Fig. 8.16 – Maillage du calcul Navier-Stokes.

La largeur des cellules est identique tout le long de la plaque. Dans la région de type couche limite,

chaque cellule possède la même hauteur égale à 0.52mm. Par ailleurs, il convient de noter qu'il n'y a pas de test sur l'asymptote des profils pour déterminer l'épaisseur de la couche limite. La hauteur des profils est donnée par le calcul de l'écoulement moyen.

Les figures 8.19 à 8.24 comparent les profils de vitesse et de température, ainsi que de leurs dérivées premières et secondes, obtenus avec Fluent et avec le code LL. Les cas comparés sont les suivants :

- Levy-Lees 1000 pts : ces profils sont calculés sur 1000 points à l'aide du code LL. La hauteur des mailles augmente avec l'altitude, conformément à la transformation d'Illingworth suivant la direction normale à la paroi (voir Annexe D). Les profils des dérivées sont un résultat du calcul LL.
- Navier-Stokes : il s'agit des profils obtenus avec le code Navier-Stokes Fluent selon le maillage décrit sur la fig. 8.16. Les dérivées sont calculées grâce à un schéma aux différences finies (voir §6.3).
- Levy-Lees, interp 50 pts, h=cte : dans ce cas les profils LL (calculés avec 1000 points) sont interpolés sur 50 points régulièrement répartis dans la hauteur de la couche limite. Ce cas permet d'évaluer l'influence du traitement numérique (dérivation, interpolation) sur les calculs.

Les résultats de la comparaison montrent que les trois approches sont pratiquement équivalentes pour ce qui est du calcul des profils moyens, et ce alors que les profils NS ne contiennent qu'un nombre limité de points (un vingtaine environ). De même, la comparaison des épaisseurs de déplacement (fig. 8.17), ainsi que des nombres de Reynolds basés sur ces épaisseurs (fig. 8.18), met en évidence une bonne concordance entre les calculs LL et NS.

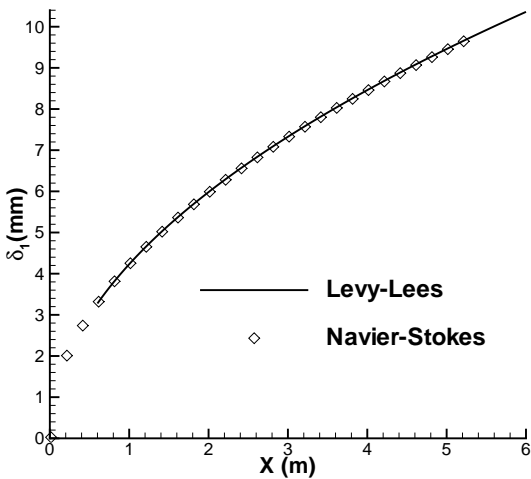


FIG. 8.17 – Plaque plane adiabatique $M^e = 2.68$. Épaisseur de déplacement.

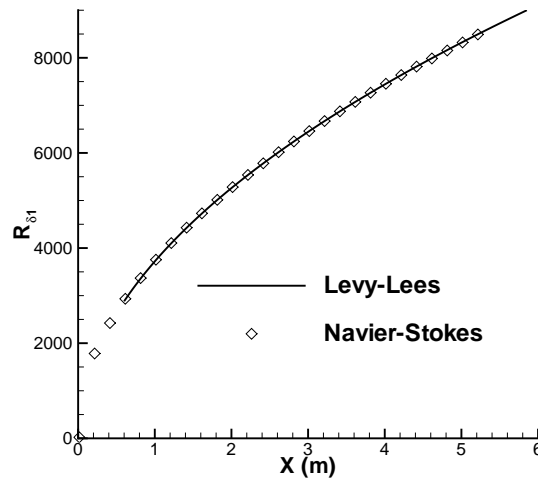


FIG. 8.18 – idem Fig.8.17 : Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement.

Enfin, l'impact du choix de la méthode de calcul des profils moyens sur le calcul de stabilité est étudié sur la figure 8.25, laquelle présente les taux d'amplification d'une perturbation de fréquence $f = 2400\text{Hz}$, orientée à $\psi = 69^\circ$. Les courbes de α_i du calcul LL et du calcul NS ont tendance à diverger dans le sens des x croissants. La courbe du cas LL interpolé sur 50 points montre un léger écart par rapport au cas LL non-interpolé, mais qui reste insuffisant pour expliquer les différences observées entre les cas NS et LL non-interpolé. Ces faibles disparités sur les taux d'amplification se répercutent sur le calcul du facteur N (fig. 8.26). Cependant, l'écart généré reste minime et, de toute façon, bien inférieur à l'incertitude sur

8.2. Validation de l'approche Navier-Stokes pour le calcul de profils moyens.

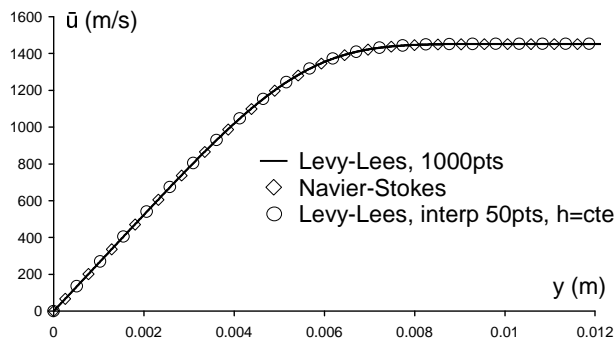


FIG. 8.19 – Plaque plane adiabatique $M^e = 2.68$, $\bar{T}^e = 752K$, $\bar{p}^e = 4640Pa$. Profil de vitesse de l'écoulement moyen.

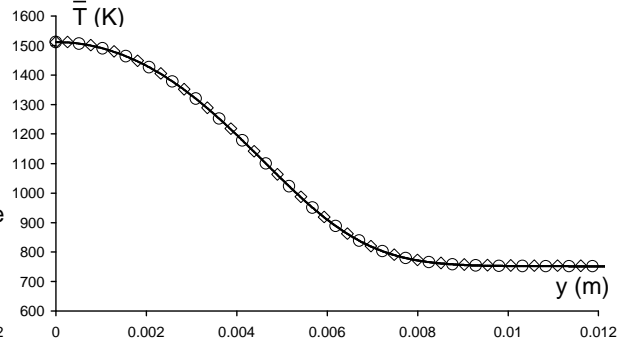


FIG. 8.20 – idem Fig.8.19 : profil de température.

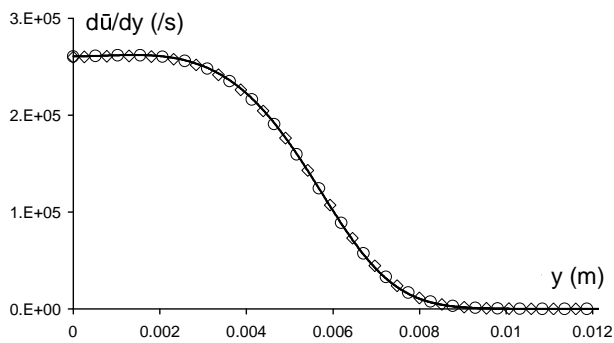


FIG. 8.21 – idem Fig.8.19 : dérivée première de la vitesse.

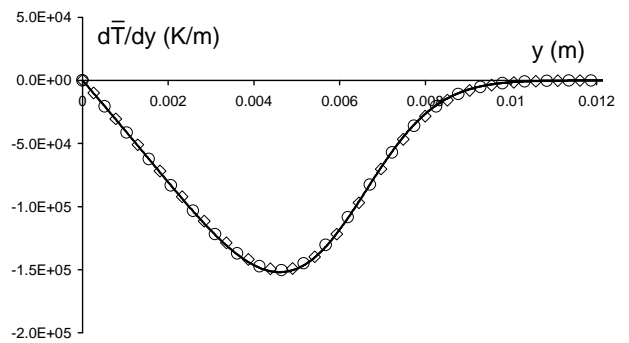


FIG. 8.22 – idem Fig.8.19 : dérivée première de la température.

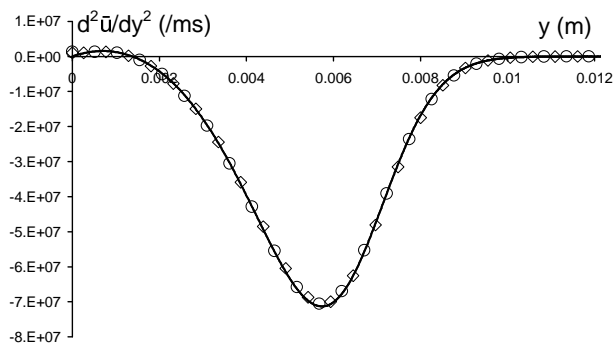


FIG. 8.23 – idem Fig.8.19 : dérivée seconde de la vitesse.

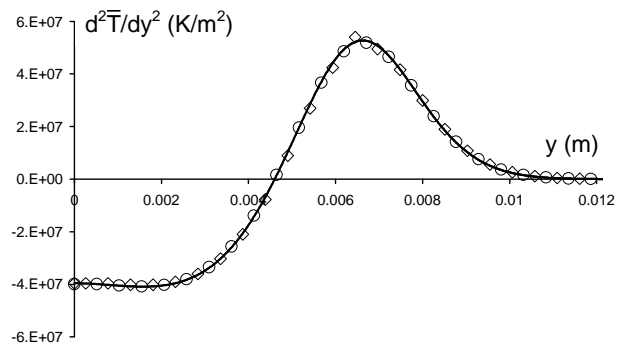


FIG. 8.24 – idem Fig.8.19 : dérivée seconde de la température.

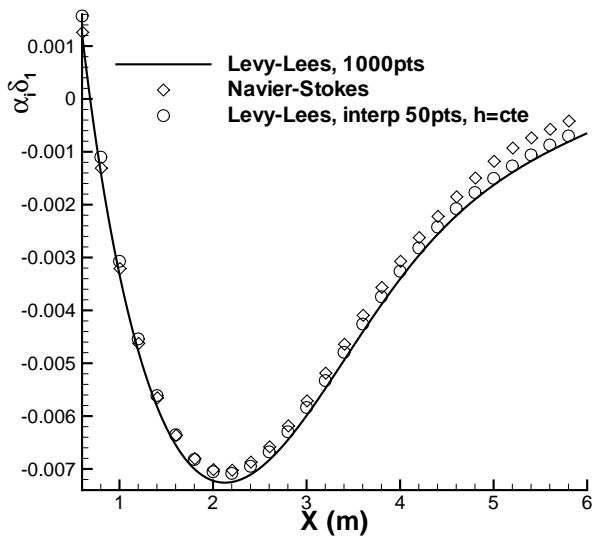


FIG. 8.25 – Plaque plane adiabatique $M^e = 2.68$. Amplification, $f = 2400\text{Hz}$, $\psi = 69^\circ$.

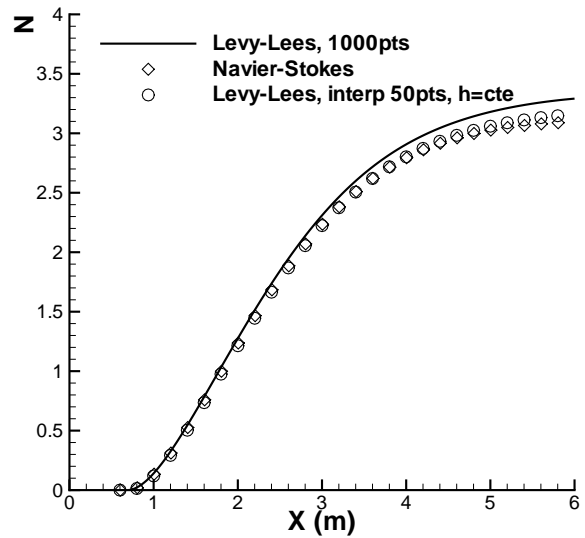


FIG. 8.26 – idem Fig.8.25 : facteurs N .

la valeur du facteur N à la transition. D'autre part, rien ne permet d'affirmer que l'approche LL est plus réaliste que l'approche NS. On se contentera donc de dire que la relative concordance des deux approches constitue un argument en faveur de la possibilité d'utiliser un code NS, avec des profils relativement peu résolus, pour le calcul de l'écoulement de base d'une plaque plane. On s'autorise à penser que tel est aussi le cas pour l'avant-corps du véhicule étudié.

Troisième partie

Calculs de stabilité et prévision de transition sous l'avant-corps du véhicule

Chapitre 9

Étude de l'écoulement moyen

9.1 Géométrie de l'avant-corps

La figure 9.1 (aussi présentée dans l'Annexe A) est une vue isométrique de l'avant-corps du véhicule. La face visible est celle du dessous. Le repère situé en O représente un repère global de la géométrie, tandis que celui situé en M constitue le repère local de stabilité tel qu'il a été discuté dans la section 6.3.1.

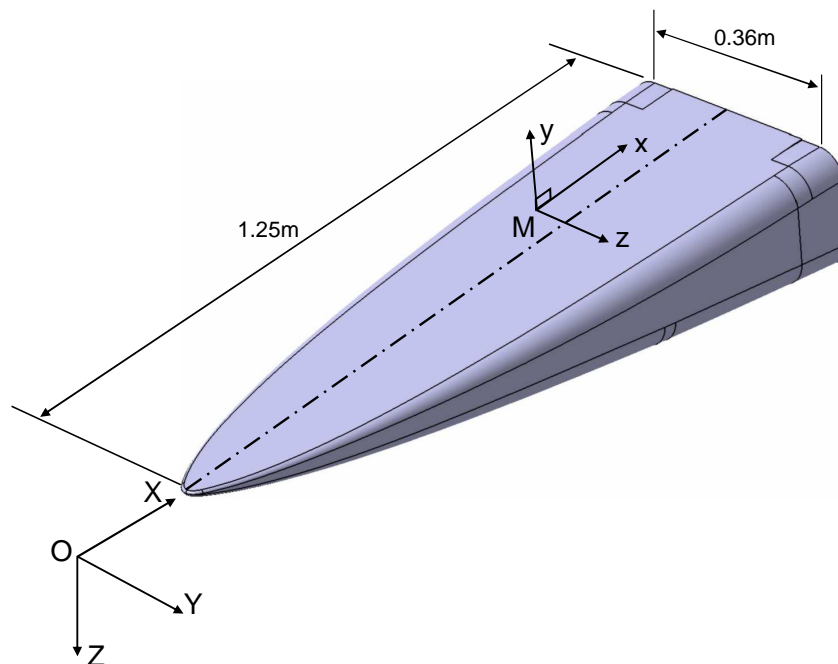


FIG. 9.1 – vue isométrique de l'avant-corps du véhicule

Le calcul de stabilité a été mené uniquement sur la partie plane (inférieure). En dehors de cette zone, la condition de perpendicularité des lignes de maillage par rapport à la paroi n'est pas rigoureusement respectée.

9.2 Récapitulation des cas abordés.

Le tableau 9.1 regroupe les paramètres des différents cas traités. Les conditions statiques des trois points de vol étudiés ($M_\infty = 4, 6, 8$) correspondent respectivement aux altitudes 20, 25 et 30 km. Concernant les conditions pariétales, l'équilibre radiatif avec une émissivité de $\sigma_e = 0.8$ est plus représentatif, que la paroi adiabatique, de la réalité en vol (le cas $M_\infty = 6$ compare l'influence des deux approches sur les résultats de stabilité). Par contre, pour la soufflerie Blow-Down (BD) on considère que l'équilibre radiatif n'est pas atteint du fait de la faible température génératrice. Dans ce cas, on préférera utiliser une condition de paroi adiabatique. Enfin, pour la soufflerie Hot-Shot (HS), la durée de la rafale est trop courte pour atteindre un quelconque équilibre et on utilisera donc l'hypothèse d'une paroi isotherme. En ce qui concerne les dimensions de l'avant-corps, elles sont à l'échelle 1 pour les cas vol et à l'échelle 1/3 pour les essais en soufflerie.

M_∞	Alt. (km)	P_∞ (Pa)	T_∞ (K)	angle d'incidence	conditions pariétales	P_{tot} (bar)	T_{tot} (K)	P_{dyn} (bar)	$Re_u \times 10^6$ (1/m)
Cas vol									
4	20	5475	216.6	4	équilibre radiatif $\sigma_e = 0.8$	8.6	883	0.6	7.15
6	25	2512	221.6	2,4,6	équilibre radiatif $\sigma_e = 0.8$, paroi adiabatique	47	1657	0.6	4.8
6	32	793.7	231.5	4	équilibre radiatif $\sigma_e = 0.8$	15.3	1724	0.2	1.44
8	30	1172	225.5	4	équilibre radiatif $\sigma_e = 0.8$	175	2690	0.5	2.91
Soufflerie "Blow-Down"									
6	×	490	48	4	paroi adiabatique	8.08	400	0.1	8.85
Soufflerie "Hot-Shot"									
6	×	3776	139.9	4	isotherme $T = 300K$	64	1094	0.9	13.8

TAB. 9.1 – Tableau récapitulatif des différents cas de calculs.

9.3 Maillage et paramètres numériques.

La figure 9.2 donne une vue globale du maillage sous l'avant-corps du véhicule. Un plan vertical, situé à 4 cm de la pointe avant, sépare la région du nez du reste de l'avant-corps. Dans la région du nez le maillage est hexahédral et non-structuré (fig. 9.3), alors qu'il est entièrement structuré dans le reste du domaine. De plus, sur la partie plane du dessous, les lignes de maillage sont perpendiculaires à la paroi. De manière à décrire correctement la couche limite, la hauteur de la première cellule est de 0.05 mm sur toute la longueur de l'avant-corps, et le nombre total de cellules entre la paroi et la frontière du domaine est de 101. Le nombre de cellules à l'intérieur de la couche limite varie suivant le cas étudié et suivant la position sur l'avant-corps; il est d'environ 10 près du nez et d'environ 50 vers la fin de la géométrie (avant l'entrée d'air du réacteur). Le nombre total de cellules est approximativement 2×10^6 . Le nombre de lignes de maillage longitudinales sous la partie plane de l'avant-corps est de 60, sauf pour le cas $M_\infty = 4$ où il est de 70. Le nombre de lignes réparties de part et d'autre du plan de symétrie est

identique (voir Annexe B).

Les calculs sont effectués grâce au "density-based solver"³ de Fluent 6.3.26 qui utilise un schéma décentré amont du second ordre pour les flux conservatifs. À la frontière extérieure du domaine de calcul, une condition de type "Pressure Far Field"⁴ est imposée. Cette condition n'est pas très précise dans la section de sortie du maillage, entre la paroi et la ligne sonique dans la couche limite, mais cette imprécision n'affecte que les deux dernières rangées de cellules (en partant de la section de sortie).

La convergence est atteinte après 15000 itérations, ce qui représente 50h de temps CPU sur quatre nœuds bi-processeurs (huit processeurs au total) Intel bi-Xeon cadencés à 3.2GHz. Les critères de convergence sont basés sur les résidus numériques, sur le bilan de flux masse à travers le domaine, et sur la température et le frottement pariétal dans le plan de symétrie du véhicule.

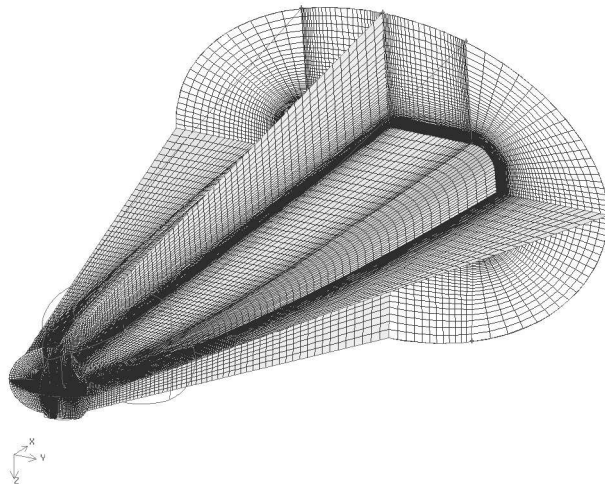


FIG. 9.2 – Vue générale du maillage, véhicule "sur le dos".

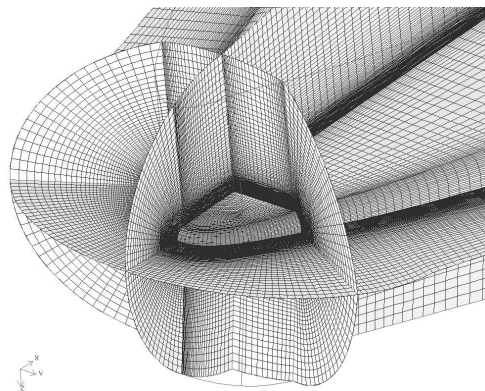


FIG. 9.3 – Détail du maillage non-structuré dans la région du nez.

³Solveur résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles écrites sous forme conservative.

⁴Conditions non-réfléctives. Les variables primitives sont calculées grâce aux invariants de Riemann.

9.4 Topologie, caractéristique de l'écoulement moyen.

La discussion est ici illustrée par le cas vol à Mach 6 avec un angle d'incidence $i = 4^\circ$. Les iso-valeurs du nombre de Mach sont présentées sur la figure 9.4. La distance séparant le choc de la pointe avant est de 2mm ce qui implique des charges thermiques très élevées sur le nez du véhicule. D'autre part, le choc est plus proche des parois latérales que des parois supérieure et inférieure, ce qui crée un gradient de pression qui, à son tour, dirige l'écoulement proche paroi depuis les côtés de l'avant-corps jusqu'à son plan de symétrie. La figure 9.5 montre les lignes de courant obtenues à partir des vitesses calculées au centre des cellules de la première rangée de mailles au-dessus de la paroi. Les lignes de courant convergent vers le plan de symétrie et "s'enroulent" en une paire de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs situés de chaque côté de ce plan. Ces tourbillons sont visibles sur la figure 9.6. Deux autres, plus petits sont aussi calculés très près de la paroi, dans le plan médian, mais ne sont pas visibles sur la figure. Le maillage est suffisamment fin pour capturer correctement ces structures tourbillonnaires.

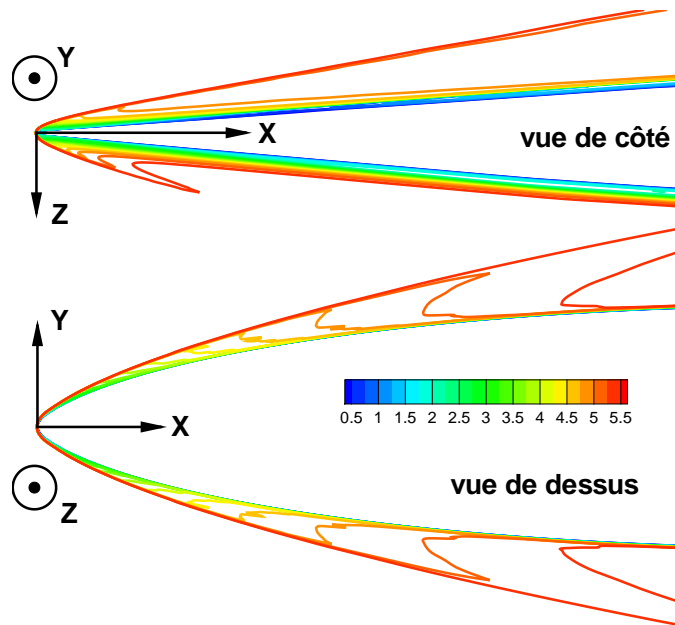


FIG. 9.4 – Iso-valeurs du nombre de Mach, $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$.

L'émoussement de la pointe avant courbe le choc dans la région du nez ce qui induit une couche entropique détectable à partir de la perte de pression totale visible sur la figure 9.7. La couche entropique se combine avec les tourbillons longitudinaux près du plan de symétrie pour produire des profils de vitesse aux formes complexes. Les figures 9.8 et 9.9 montrent respectivement les profils de vitesse longitudinale et transversale dans le plan $X = 0.6$ m. L'influence des tourbillons est clairement visible sur les deux profils les plus proches du plan médian ($Y = 0.01$ m, $Y = 0.013$ m) : dans cette région, l'écoulement de faible vitesse caractéristique de la zone proche paroi est propulsé vers des altitudes plus élevées (voir la forme "en champignon" sur la figure 9.6) ce qui induit des profils de vitesse non-monotones. À partir de $Y = 0.017$ m jusque $Y = 0.05$ m, les profils présentent une structure caractéristique d'un amalgame couche entropique - couche limite. À $Y = 0.07$ m, la couche entropique a presque complètement disparu laissant place à un profil "standard" de couche limite. L'influence de la couche entropique sur les résultats de stabilité sera analysée dans la section 10.2.1.

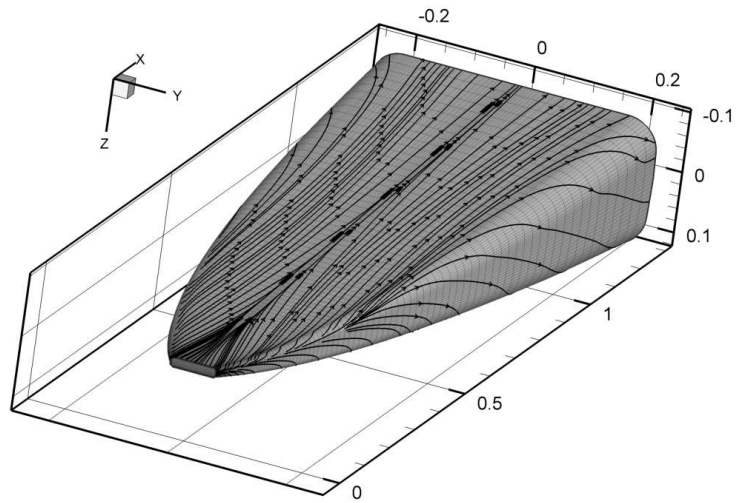


FIG. 9.5 – Lignes de frottement sous l'avant-corps, $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$. Les axes sont gradués en mètres.

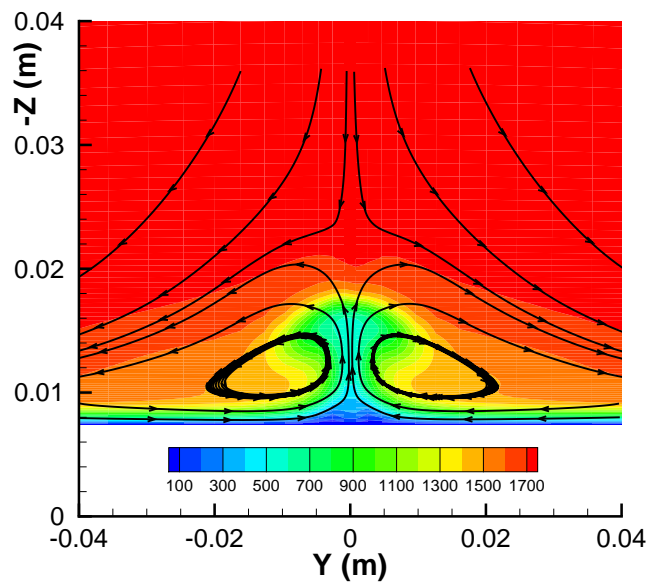


FIG. 9.6 – Iso-valeurs de la composante longitudinale de vitesse (m/s) à $X = 0.5$ m. Les lignes de courant illustrent les tourbillons longitudinaux.

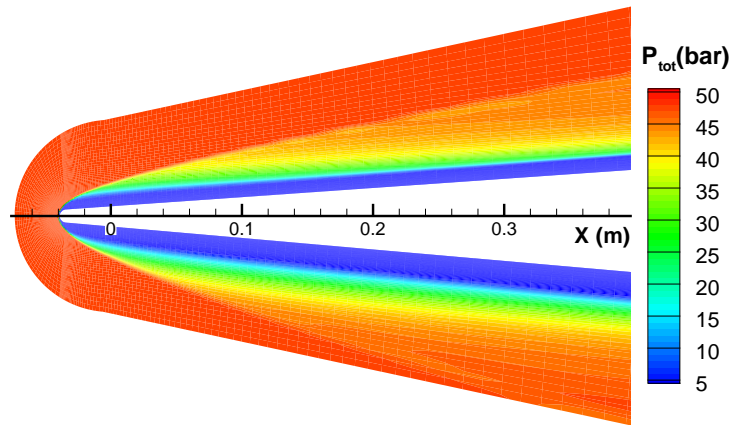


FIG. 9.7 – Iso-valeurs de la pression totale (bar) mettant en évidence la couche entropique. Vue partielle de côté.

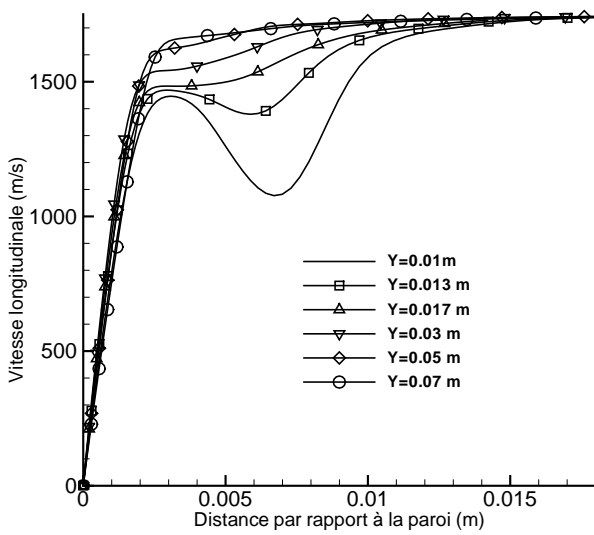


FIG. 9.8 – Profils de vitesse longitudinale dans le plan transversal $X = 0.6$ m.

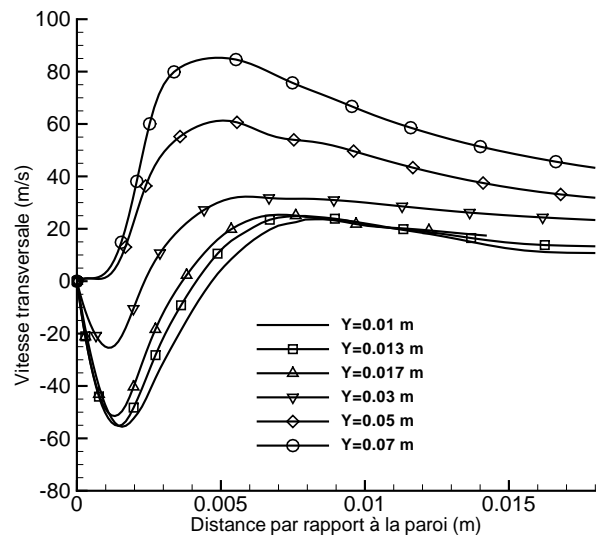


FIG. 9.9 – Profils de vitesse transversale dans le plan transversal $X = 0.6$ m.

Le tableau 9.2 regroupe les nombres de Mach relevés à l'extérieur de la couche limite, ainsi que les températures de paroi (T_p), pour les différents cas évoqués dans le tableau 9.1. Ces données sont des grandeurs moyennes. Elles donnent une idée de la plage des valeurs rencontrées sous l'avant-corps. Les températures génératrices sont aussi rappelées dans la dernière ligne du tableau. Elles permettent d'avoir une idée de la température de frottement (au coefficient de récupération près). La différence entre la température de paroi et la température de frottement joue un rôle important dans la stabilité de l'écoulement.

M_∞	Cas vol						Cas souffleries		
	4	6				8	6 (BD)	6 (HS)	
conditions pariétales	rad	rad			adiab	rad	adiab	iso	
P_{dyn} (bar)	0.6	0.6		0.2	0.6	0.5	0.1	0.9	
i (°)	4	2	4	6	4	4	4	4	
M^e	3.4 ~ 3.6	4.2 ~ 5.0	4.2 ~ 5.0	4.2 ~ 4.7	4.2 ~ 4.8	4.2 ~ 5.0	5.2 ~ 6.1	4.2 ~ 4.7	4.2 ~ 4.8
T_p (K)	600 ~ 700	750 ~ 1000	800 ~ 1000	810 ~ 1050	710 ~ 950	1500 ~ 1650	950 ~ 1300	350 ~ 360	300
T_{tot} (K)	883	1657	1657	1657	1724	1657	2690	400	1094

TAB. 9.2 – Valeurs caractéristiques de la couche limite pour différents points de vol.

Chapitre 10

Analyse de stabilité

Dans les calculs présentés par la suite, deux systèmes d'axes sont utilisés (voir fig. 10.1 et Annexe A). L'un correspond à $\theta^e = 0$, l'autre consiste à prendre l'axe x dans la direction allant du nez vers le bord de fuite en suivant le plan de symétrie de l'avant-corps. Comme expliqué au §6.3.1 ces choix n'influent ni sur σ ni sur la direction d'intégration (déterminée par $\bar{\psi}$). Il en résulte que les facteurs N calculés dans les deux cas pour une même configuration sont identiques. D'autre part, la faible inclinaison des lignes de courant à l'extérieur de la couche limite par rapport au plan de symétrie de l'avant-corps induit un faible écart entre les angles ψ et $\bar{\psi}$ calculés dans les deux repères.

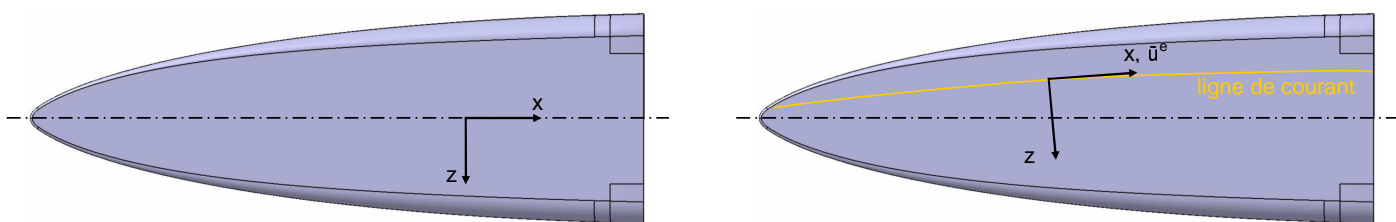


Fig. 10.1 – Définition des deux repères de stabilité.

10.1 Revue bibliographique sur la stabilité d'écoulements hypersoniques externes.

10.1.1 Avant-corps de véhicules existants.

Schneider [6] rapporte un nombre limité d'études de stabilité d'écoulements sous des avant-corps génériques du programme "Hyper X", incluant les géométries "Hyper 2000" et "X-43 A". Ces avant-corps sont essentiellement bidimensionnels et possèdent deux coins de compression (trois rampes de compression) en amont de l'entrée d'air. Les instabilités relevées par Schneider sur ce type de géométrie sont les suivantes :

- Premier et second modes sur la première rampe de compression.
- Instabilités de type Kelvin-Helmholtz dans l'écoulement décollé des coins de compression.
- Instabilités Crossflow après le recollement sur la seconde rampe.
- Instabilités centrifuges de Görtler près des coins.

La possibilité d'interactions entre des tourbillons émanant de la pointe avant, et les instabilités CF ou de Görtler a aussi été mise en évidence [57]. Les avant-corps précédemment évoqués diffèrent sensiblement de celui présentement étudié. En particulier, comme on peut le constater sur la figure 9.5, l'avant-corps est tridimensionnel avec une surface plane et ne présente pas de coin de compression. Ainsi, ni les instabilités de Görtler, ni celles de Kelvin-Helmholtz ne sont susceptibles de jouer un rôle dans les mécanismes de transition. En revanche, on peut présumer de l'importance des premier et/ou second modes, et des ondes CF.

10.1.2 Cônes pointus en incidence.

Des études numériques et expérimentales ont été conduites à l'ONERA [56] sur un cône pointu de 20 cm de long, de demi-angle au sommet de 7° , à une incidence de 2° et à Mach 7. La transition, détectée par imagerie infra-rouge, varie de $x/L = 0.40$ sur la génératrice sous le vent, à $x/L = 0.61$ sur la génératrice équatoriale, et à $x/L = 0.76$ pour la génératrice au vent. Les calculs montrent que la transition est due à une combinaison du premier mode oblique de Mack et de l'instabilité CF, le premier étant prédominant sur le plan vertical de symétrie et la seconde dans la région équatoriale. Schneider (figure 36 de [6]) rapporte des observations similaires sur des cônes circulaires pointus en incidence : la transition intervient en premier sur la génératrice sous le vent, où la couche limite est plus épaisse.

10.1.3 Cône elliptique pointu sans incidence.

D'une certaine manière, l'avant-corps dont il est question dans cette étude, n'est pas très différent du cône elliptique à incidence nulle de Kimmel *et al.* (étude numérique [4], étude expérimentale [32]). Pour ce cas, l'onde de choc est plus proche du grand axe que du petit axe. Il en résulte un gradient de pression qui est à l'origine d'un écoulement transverse dans la couche limite, depuis la ligne de séparation située le long du grand axe, vers le plan de symétrie vertical (figure 6 de [4]). La même topologie d'écoulement est observée dans la configuration présente. L'accumulation de fluide sur le plan de symétrie vertical conduit à un épaississement de la couche limite et éventuellement à un décollement tridimensionnel. Les essais montrent que la transition intervient en premier lieu sur le petit axe puis sur le reste du cône. L'analyse de stabilité pour les conditions $M_\infty = 7.95$ et $Re_u = 3.3 \times 10^6$ confirme la prédominance des instabilités CF sur toute la surface du cône excepté près des plans de symétrie où l'écoulement est bidimensionnel. La transition précoce observée le long du petit axe est due aux profils inflexionnels et décélérés de vitesse de la couche limite générés par l'afflux, depuis le grand axe, d'un écoulement à faible quantité de mouvement. La figure 10.2 montre un exemple de courbes iso- N déterminées pour deux fréquences et pour deux cônes différenciés par la valeur e du rapport de leurs axes. Deux zones d'instabilité sont nettement visibles : instabilité de l'écoulement longitudinal près de l'axe de symétrie, instabilités CF sur le reste du cône.

10.1.4 Émoussement et couche entropique.

Contrairement au cas précédent, le présent avant-corps possède un nez émoussé. L'émoussement du nez a un impact important sur la position de la transition [58] : un léger émoussement d'un nez initialement pointu déplace, dans un premier temps, la transition vers l'aval. Si le rayon de nez est encore accentué, la transition est alors avancée. Ce renversement de tendance peut être expliqué par des instabilités de couche entropique. Plusieurs mécanismes à travers lesquels les instabilités de couche entropique peuvent promouvoir la transition ont été proposés pour des plaques [59] et des cônes émoussés [60]. Tous ces scénarios supposent que de telles instabilités sont trop faibles pour provoquer seules la transition de couche limite. Cependant, Dietz *et al.* [61] ont identifié deux types d'instabilités de couche entropique :

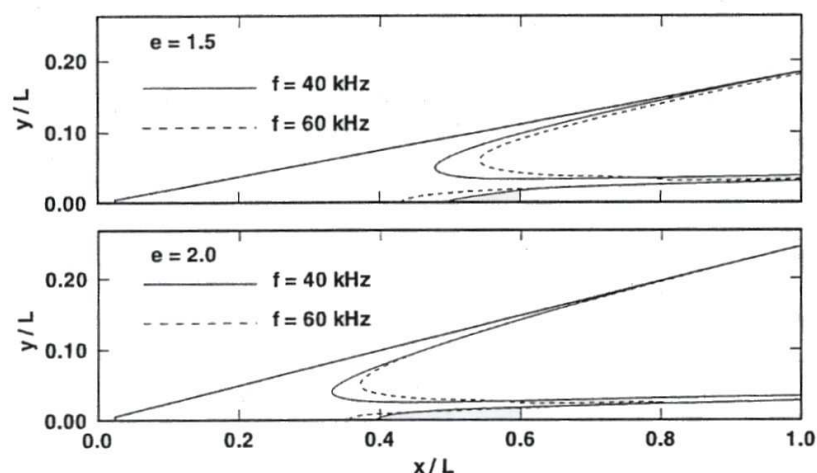


FIG. 10.2 – Courbes iso- N ($N = 5$) calculées sur le cône elliptique pointu sans incidence de Kimmel et al., d'après [4]. e représente le rapport du grand axe sur le petit axe.

le premier correspond à des ondes faiblement amplifiées avec des angles de propagation importants ; le second correspond à des ondes droites, en relation avec le PIG, et possédant un taux d'amplification plus important d'un ordre de grandeur que le premier. Cette instabilité correspond à des observations obtenues par Brinich [62] plus de quarante ans auparavant.

Schneider a aussi passé en revue l'effet d'émoussement sur des cônes en incidence [6]. Comme pour les cônes pointus, la transition intervient plus tôt sur la génératrice sous le vent que pour celle au vent, excepté pour les cônes possédant les plus grands rayons de nez (figure 37 de [6]). Schneider explique cette exception par la mise en oeuvre de mécanismes de transition liés à des rugosités situées sur la pointe avant et susceptibles de devenir prédominants pour des rayons de nez importants.

10.2 Résultats généraux.

10.2.1 Effet de la couche entropique (CE).

Température de paroi et Point d'Inflexion Généralisé (PIG)

Considérons le cas vol à Mach 6, incidence de 4° (voir tableau 9.1) avec paroi adiabatique (chaude) ou paroi radiative (froide). Plaçons nous à la position ($X = 0.6m$, $Y = 0.017m$), près du plan de symétrie. La composante longitudinale $\bar{u}(y)$ du profil de vitesse présente, dans les deux cas, un point d'inflexion dû à la couche entropique (CE - figures 9.8 & 10.3). Cette inflexion dans les profils de vitesse induit un Point d'Inflexion Généralisé (PIG - voir §4.2) dans les profils de $\rho\partial\bar{u}/\partial y$ (figure 10.4).

Rappelons que la présence d'un PIG à l'altitude y_s est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une onde neutre si

$$\frac{\bar{u}(y_s)}{\bar{u}^e} > 1 - \frac{1}{M^e} \quad (10.1)$$

Il s'agit de plus d'une condition suffisante pour l'existence d'une onde instable. Le nombre de PIG visibles sur la figure 10.4 est de deux dans le cas radiatif et trois dans le cas adiabatique. À la position considérée, le nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite $M^e = 4.92$, et l'altitude y_0 à laquelle

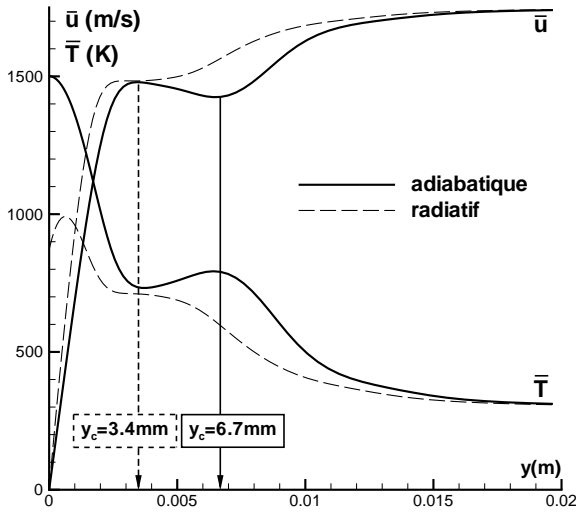


FIG. 10.3 – Profils de vitesse suivant x : $X = 0.6$ m, $Y = 0.017$ m. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$.

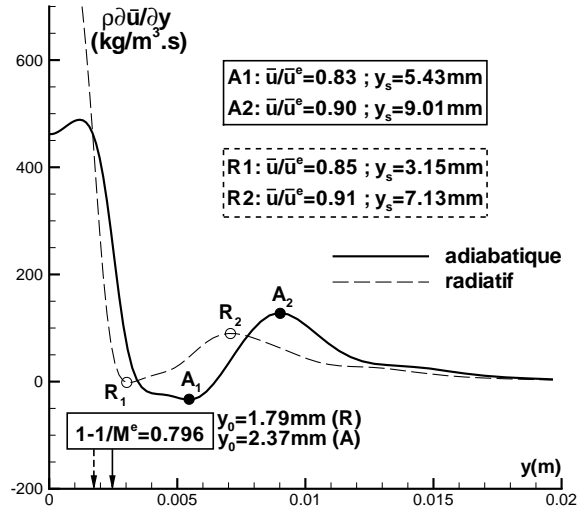


FIG. 10.4 – Points d'Inflexion Généralisés. Même condition que figure 10.3.

$$\frac{\bar{u}(y_0)}{\bar{u}^e} = 1 - \frac{1}{M^e} = 0.796 \quad (10.2)$$

est de 1.79 mm dans le cas radiatif et de 2.37mm dans le cas adiabatique. Ainsi la condition (10.1) est satisfaite par deux *PIG* pour les deux conditions de paroi (radiatives et adiabatiques). Pour le premier cas, $y_s = 3.15$ et 7.13 mm (R1, R2, radiatif), et pour le second, $y_s = 5.43$ et 9.01 mm (A1, A2, Adiabatique).

Si l'analyse de stabilité est réalisée pour des profils tronqués, c'est-à-dire coupés à l'altitude y_c de la couche limite (figure 10.3), les résultats peuvent être biaisés. Comme spécifié dans le §6.5, il est possible de se donner une représentation du spectre de l'opérateur Navier-Stokes linéarisé (noté $[A]$ dans (6.1)) en traçant, dans une carte (α_r, α_i) , les valeurs $\hat{v}(0)$ de la perturbation de vitesse normale à la paroi pour une combinaison $(\omega, \psi, \bar{\psi})$ donnée. Les spectres construits à partir des profils de la figure 10.3 sont représentés sur les figures 10.5 à 10.8 pour la couche limite (CL) seule et pour la combinaison CL + CE. Les points présents sur ces cartes constituent les solutions de la relation de dispersion (3.25) du milieu.

Le mode 1 n'a pas d'existence physique car sa vitesse de phase est supérieure à la vitesse de l'écoulement moyen à l'extérieur de la CL. Comme le mode 1, le mode 2 est pratiquement stable pour le jeu de paramètres $(\omega, \psi, \bar{\psi}; Re_{\delta 1})$ utilisés. Par contre il devient très instable lorsque $\psi \approx 85^\circ$. La suite de cette section (voir §10.2.3) montre que ce mode est associé à une combinaison d'instabilité CF et de premier mode oblique. Il est visible pour la position considérée ($X = 0.6$ m, $Y = 0.017$ m) et devient prépondérant loin du plan de symétrie. Il est étudié en détail dans les sections 10.3, 10.4 et 10.5.

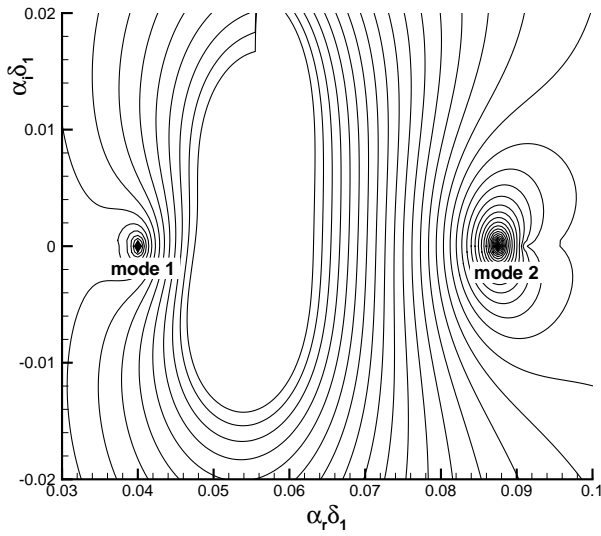


FIG. 10.5 – Spectre de l’opérateur NS linéarisé calculé à partir des profils de la figure 10.3, CL seule (coupure δ_c). Paroi adiabatique, $f = 10$ kHz, $\psi = 0^\circ$.

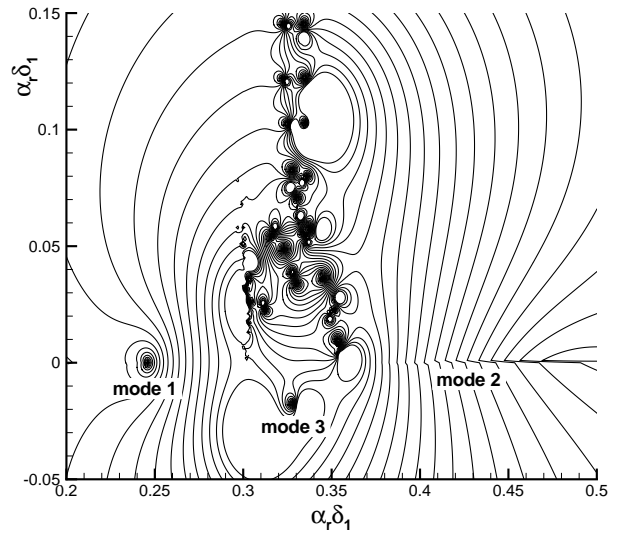


FIG. 10.6 – idem figure 10.5 : CL + CE.

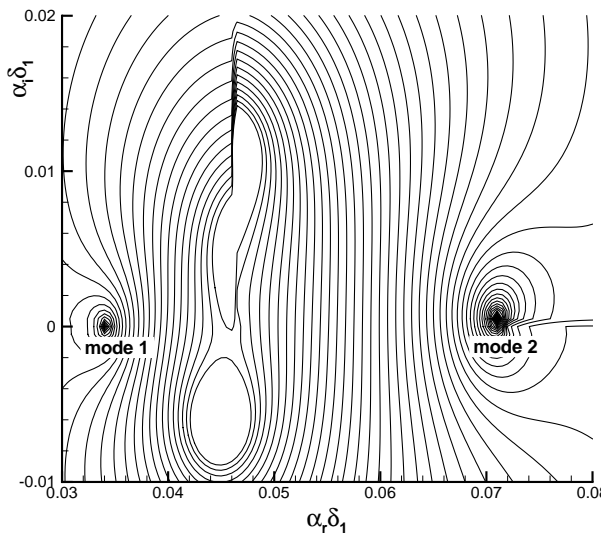


FIG. 10.7 – idem figure 10.5 : paroi radiative.

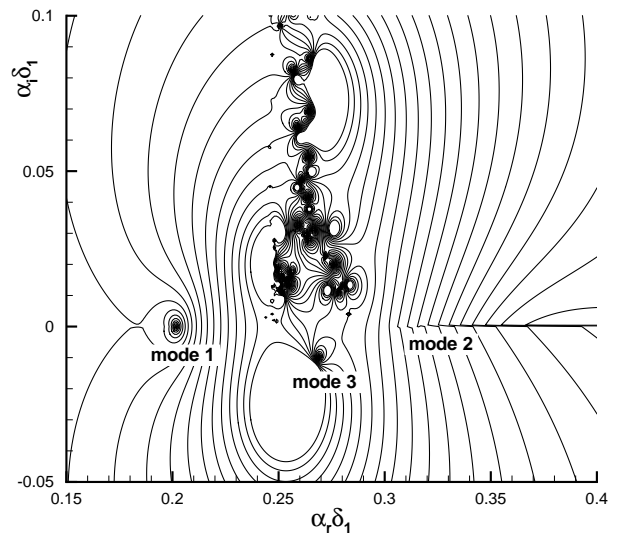


FIG. 10.8 – idem figure 10.6 : paroi radiative.

Le nombre important de solutions stables, présentes lorsque la CE est prise en compte mais qui n'existent pas lorsque seule la CL est considérée, constitue l'aspect le plus marquant des graphes 10.6 et 10.8. Parmi tous ces modes, le mode 3 est particulièrement intéressant car instable. La figure 10.9 montre la vitesse de phase adimensionnée c_r/\bar{u}^e du mode 3 en fonction de l'opposé du taux d'amplification adimensionné $-\alpha_i\delta_1$ calculé pour des fréquences variant entre 100Hz et 120kHz. Les épaisseurs de déplacement sont respectivement $\delta_1 = 8.13$ mm et 6.71 mm pour les cas radiatifs et adiabatiques. La courbe coupe deux fois l'axe neutre pour chaque condition de paroi, à $c_r/\bar{u}^e \approx 0.81$ et 0.90 pour la paroi adiabatique et à $c_r/\bar{u}^e \approx 0.84$ et 0.91 pour la paroi radiative. Ces valeurs sont en accord avec les prévisions théoriques de Lees & Lin (figure 10.4).

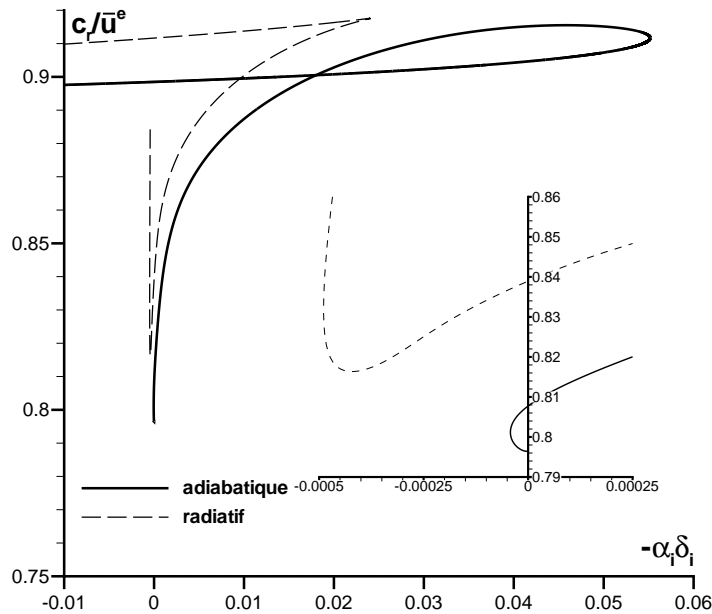


FIG. 10.9 – Vitesse de phase du mode 3. $X = 0.6m$, $Y = 0.017m$.

Les fonctions propres associées au mode 3 sont reportées sur les figures 10.10 et 10.11. Ces fonctions ont été calculées à l'ONERA-DMAE à l'aide du code CASTET à partir des profils entiers (CL + CE) de la figure 10.3. En effet, à l'heure d'écrire ces lignes, la dé-orthonormalisation des fonctions propres (voir §6.2.2) n'a pas été implémentée dans le code ICARE car elle est inutile pour le problème posé. On rappelle que les caractéristiques thermo-transport de CASTET sont différentes de celles utilisées pour le calcul des profils moyens (voir tableau 8.1 pour les caractéristiques de CASTET). La figure 10.10 représente le module de l'amplitude de fluctuation de vitesse $|\hat{u}|$ adimensionné par \bar{u}^e . On observe, pour chaque condition de paroi, deux pics situés respectivement à $y = 3.54$ mm et 7.08 mm pour le cas radiatif, et à $y = 5.12$ mm et 8.85 mm pour le cas adiabatique. Ces valeurs sont proches des altitudes relevées pour les PIG de la figure 10.4 (voir aussi tableau 10.1), ce qui confirme l'idée selon laquelle ces derniers sont impliqués dans la présence du mode 3.

La figure 10.11 montre les modules des amplitudes de fluctuation de vitesse $|\hat{u}|/\bar{u}^e = |\hat{u}|^*$ et de température $|\hat{T}|/\bar{T}^e = |\hat{T}|^*$, normés de la manière suivante :

- cas adiabatique : $|\hat{u}|^*$ et $|\hat{T}|^*$ sont normés par $|\hat{T}|_{adiabatique}^{*max}$
- cas radiatif : $|\hat{u}|^*$ et $|\hat{T}|^*$ sont normés par $|\hat{T}|_{radiatif}^{*max}$

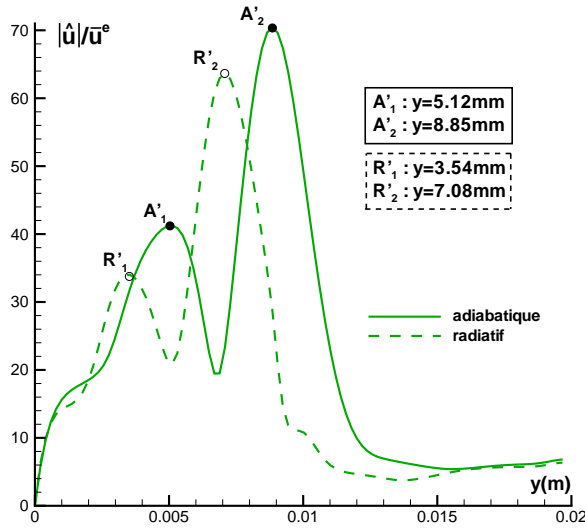


FIG. 10.10 – Fonctions propres de vitesse adimen-

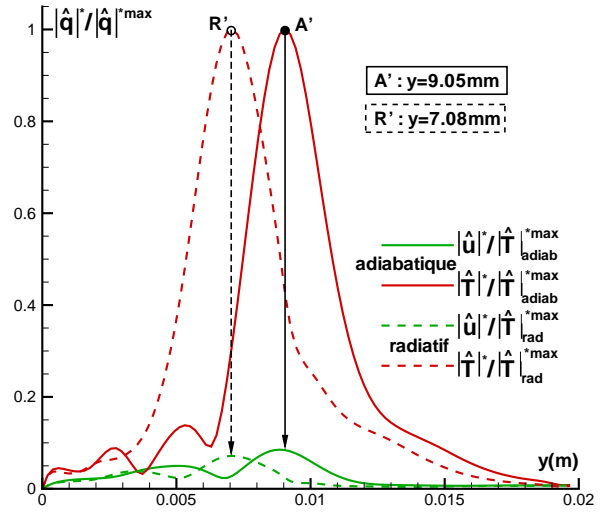


FIG. 10.11 – idem figure 10.10. Vitesse et température.

où $|\hat{T}|^{*max}$ représente la fluctuation maximale de température pour chaque cas (adiabatique et radiatif). Cette normalisation permet d'apprécier la faiblesse relative des fluctuations de vitesse par rapport aux fluctuations de température et d'affirmer que la nature de cette instabilité est essentiellement thermodynamique. Cette observation a aussi été faite par Dietz *et al.* [61], ce qui tend à confirmer l'analogie entre le mode entropique de ce dernier et le mode 3. Enfin, on notera que les deux pics principaux (A' et R') sont situés à des altitudes concordantes avec les altitudes des PIG de la figure 10.4.

pic	PIG		$ \hat{u} ^*$		$ \hat{T} ^* / \hat{T} ^{*max}$
	1	2	1(°)	2(°)	
adiabatique (A)	5.43	9.01	5.12	8.85	9.05
radiatif (R)	3.15	7.13	3.54	7.08	7.08

TAB. 10.1 – Altitude des PIG (en mm) et des maxima des modules des fonctions propres.

Propriétés locales du mode 3 (mode entropique)

L'écoulement moyen de la présente étude est tridimensionnel. L'évolution du taux d'amplification adimensionné $\alpha_i \delta_1$, à une position donnée, en fonction de l'angle de propagation ψ est montré sur la figure 10.12. Deux profils de vitesse sont considérés :

- i. le profil entier (3D),
- ii. un profil identique au précédent mais dont la composante transversale \bar{w} est forcée à 0.

Alors que Dietz *et al.* [61] trouvent des instabilités de CE droites (c'est-à-dire dont le taux d'amplification maximum est observé pour $\psi = 0^\circ$), on note ici que, dans le cas i., la direction d'amplification maximale est d'environ 45° . La variation de $\alpha_i \delta_1$ est néanmoins très faible. La comparaison des cas i. et ii. met aussi en évidence l'effet limité de la tridimensionnalité de l'écoulement sur le mode 3. La figure 10.13, quant à elle, montre que la gamme de fréquences concernées s'établit entre quelques kilo Hertz et environ 100kHz.

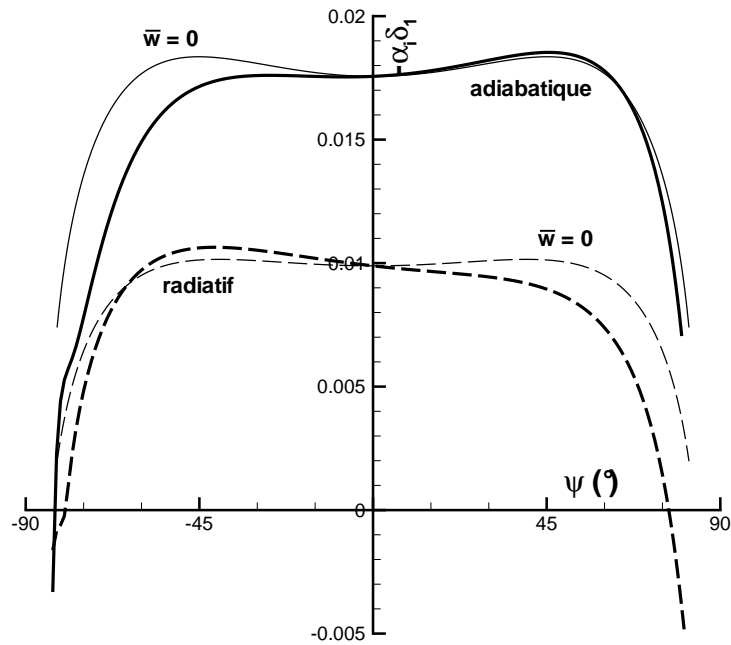


FIG. 10.12 – Opposé du taux d’amplification du mode 3 en fonction de ψ . $f = 10\text{kHz}$.

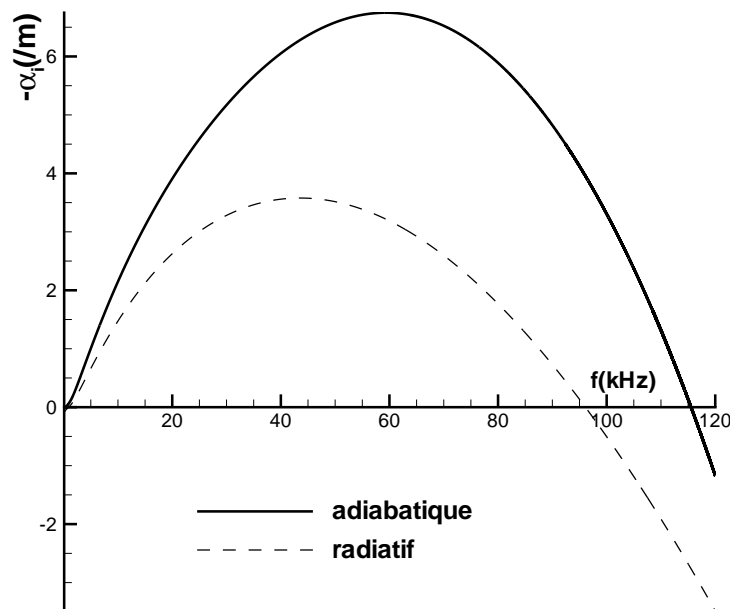


FIG. 10.13 – Opposé du taux d’amplification du mode 3 en fonction de la fréquence. $\psi = 0^\circ$.

Conclusion : où couper les profils proche paroi pour l'étude de stabilité ?

La prise en compte de la CE dans le calcul de stabilité pour un profil donné induit un mode instable supplémentaire dont le taux d'amplification n'est pas négligeable. La principale question est de savoir quel est l'effet de ce mode 3 sur la stabilité de l'écoulement global proche paroi et, *in fine*, sur la transition. La figure 10.14 montre des courbes de facteurs N calculées pour le cas radiatif et pour trois fréquences prises dans la gamme de fréquences instables de la figure 10.13. L'intégration des taux d'amplification a été menée dans ce cas le long d'une ligne de maillage longitudinale. La valeur maximale de N_f atteinte est de 4, ce qui est insuffisant pour provoquer la transition en vol, mais peut être assez élevé pour une soufflerie bruyante.

Cependant, l'étude de stabilité seule ne peut permettre d'apporter une réponse définitive et des efforts supplémentaires, incluant des simulations directes de la transition, doivent être entrepris pour éclaircir ce point. Ces dernières pourraient permettre de comprendre comment agit le mode 3 sur la transition et notamment s'il est capable de se coupler à un premier mode oblique, à un second mode droit ou même à un mode CF. Il faut néanmoins garder à l'esprit, pour l'étude présente, que ce mode 3 est lié à la couche entropique, qui n'est elle même présente que dans une région restreinte de l'avant-corps, près du plan de symétrie. Loin de ce plan, le mode 2 (associé à des ondes CF) domine. La figure 10.14 montre un exemple de facteurs N_f calculés à partir du mode 2 le long d'une ligne de maillage longitudinale située environ à équidistance du plan de symétrie et du bord latéral de l'avant-corps⁵ : ces valeurs de N_f sont bien supérieures à celles du mode 3. D'autre part, le mode 2, essentiellement associé à des instabilités CF, disparaît près du plan de symétrie, où l'écoulement devient 2D. Ainsi, dans le reste de ce document, et notamment pour l'étude paramétrique de la partie 10.3, les calculs de stabilité ne seront pas effectués dans la région proche du plan de symétrie.

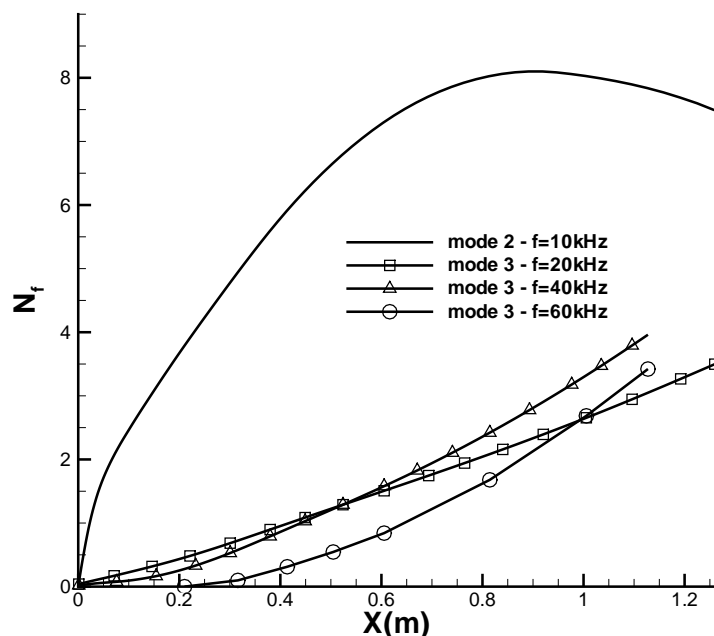


FIG. 10.14 – Facteurs N_f du mode 3 ($\psi = 0^\circ$) et du mode 2 (méthode enveloppe).

⁵Le calcul du facteur N le long d'une ligne de maillage ne correspond en rien à la méthode exposée au §7.2.2 mais il permet d'avoir un ordre de grandeur des valeurs mises en jeu.

La question pratique qui se pose à présent est de savoir quel critère de coupure des profils employer (C ou H - voir §6.3.2) pour mener à bien les calculs de stabilité concernant le mode 2. Rappelons que le critère C permet de conserver l'ensemble CL + CE alors que le critère H ne conserve que la CL. Notamment le critère C fait apparaître les modes 2 et 3, alors que le critère H ne fait apparaître que le mode 2. Les figures 10.15 et 10.16 comparent les résultats de stabilité (α_i et N_f) obtenus avec les deux critères, en "suivant" le mode 2. Les calculs ont été menés pour trois lignes de maillage longitudinales : près du plan de symétrie (ligne 36), près du bord latéral (ligne 58) et entre de ces deux lignes (ligne 51). Les résultats concordent bien pour les lignes 36 et 51. Pour la ligne 58, des divergences apparaissent près du nez. Ces divergences induisent des différences minimales dans les facteurs N_f et pourraient être imputées à une faible résolution des profils dans cette région de l'avant-corps. Pour conclure, on considérera que si seul le mode 2 est concerné, les deux critères C et H peuvent être indifféremment employés. On notera cependant que les calculs convergent plus facilement avec le critère H.

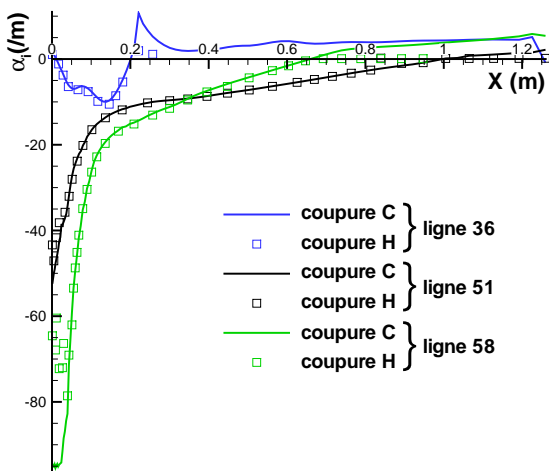


FIG. 10.15 – Comparaison des taux d'amplification calculés le long de différentes lignes de maillage sous l'avant-corps, pour des profils coupés à l'aide des critères C et H. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz.

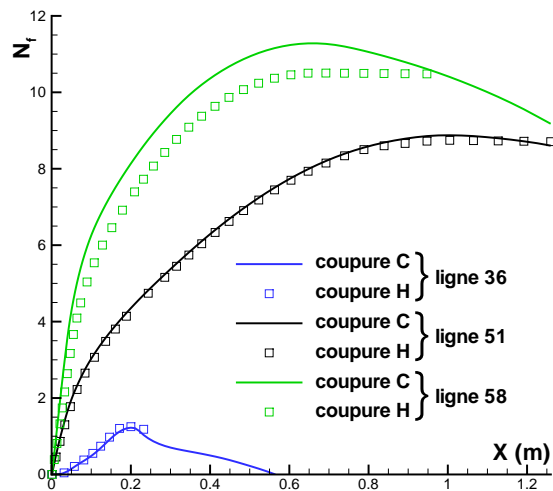


FIG. 10.16 – idem figure 10.15 : facteurs N_f .

10.2.2 Chemin d'intégration.

Les différentes stratégies d'intégration et de choix possibles pour $\bar{\psi}$ ont déjà été évoquées au §5.2. Rappelons que, pour ce qui est de la stratégie d'intégration, seule la méthode enveloppe est ici utilisée. En ce qui concerne $\bar{\psi}$, le choix retenu est $\bar{\psi} = \theta_g$, où θ_g représente la direction de la vitesse de groupe (voir §5.2.1 et 7.1). Dans la section 5.2.1, l'hypothèse selon laquelle $\theta_g = \theta^e$ ($\theta^e \equiv$ orientation de la vitesse à l'extérieur de la couche limite) a aussi été avancée dans le cas d'aile en flèche. Enfin, il paraît évident que la direction locale d'intégration des coefficients d'amplification doit être égale à $\bar{\psi}$ (et donc soit à θ_g , soit à θ^e). Les questions qui se posent alors sont :

- l'hypothèse $\theta_g = \theta^e$ est-elle vérifiée dans notre cas ?
- quelle est l'influence de l'option choisie sur le calcul des facteurs N ?

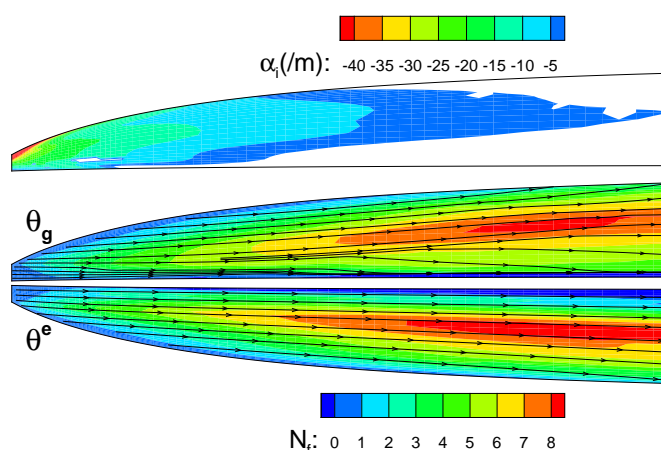


FIG. 10.17 – Comparaison de θ^e et de θ_g . Influence sur le calcul des facteurs N_f (méthode enveloppe). $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz.

La figure 10.17 présente des résultats de stabilité pour le cas vol à Mach 6, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar. La figure du haut montre les taux d'amplification α_i pour la fréquence $f = 10$ kHz. La zone blanche correspond à un écoulement stable. Les deux figures du dessous représentent les facteurs N_f calculés d'une part en suivant les lignes tangentes à la vitesse de groupe, et d'autre part, les lignes de courant à l'extérieur de la couche limite. Les lignes noires matérialisent ces deux chemins d'intégration. La concordance entre les deux types de lignes est très bonne dans la zone instable de l'écoulement ce qui valide l'hypothèse $\theta_g = \theta^e$. Il en résulte que la topologie et les valeurs des courbes iso- N_f sont aussi très proches. Ces résultats sont particulièrement intéressants car ils vont permettre d'envisager un critère simplifié de transition qui évite les calculs de stabilité et en particulier de la vitesse de groupe (voir chapitre 11).

10.2.3 Effet de la température pariétale.

L'effet de la température pariétale est étudié pour la même configuration de vol que précédemment ($M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar) et pour la fréquence $f = 10$ kHz. Les deux conditions de paroi étudiées sont la paroi adiabatique et l'équilibre radiatif avec l'écoulement. Le tableau 9.2 donne les ordres de grandeur des températures mises en jeu ($T_{p,adiab} = 1500 \sim 1650$ K, $T_{p,rad} = 800 \sim 1000$ K).

Dans le cas adiabatique, les taux d'amplification α_i (figure 10.18) ainsi que les angles ψ_M des orientations de l'onde la plus instable (figure 10.19) décroissent de l'amont vers l'aval. En particulier, les valeurs de ψ_M sont très élevées près du nez de l'avant-corps ($\approx 85^\circ$) et plus faibles vers la fin de l'avant-corps ($\approx 70^\circ$). Ces valeurs incitent à envisager des ondes CF ou un premier mode oblique comme mécanisme de déstabilisation de la couche limite, ou encore, ce qui est le plus probable, une combinaison des deux. L'observation du cas radiatif permet de fixer les idées. En effet, il est bien connu qu'un refroidissement de paroi permet de stabiliser le premier mode oblique [3]. Or, les figures 10.18 et 10.19 montrent que les ondes orientées à 70° sont entièrement stabilisées dans le cas radiatif alors que les ondes orientées à 85° sont toujours aussi amplifiées. On en déduit que :

- dans le cas adiabatique, les instabilités évoluent depuis des ondes essentiellement CF près du nez, vers des ondes essentiellement de type premier mode oblique au bord de fuite.
- dans le cas radiatif, les instabilités sont uniquement CF.

On note aussi que même si les deux types d'instabilité coexistent dans le cas adiabatique, les insta-

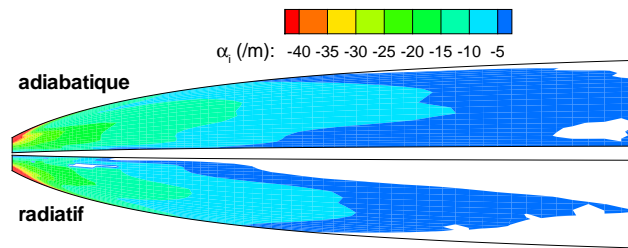


FIG. 10.18 – Effet de la condition de paroi sur les taux d’amplification. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz.

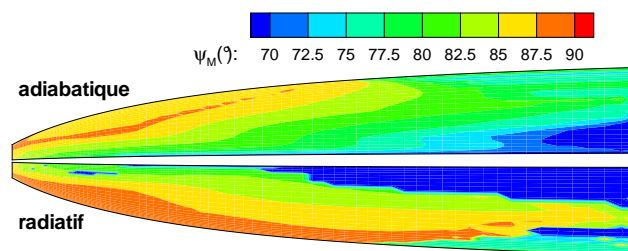


FIG. 10.19 – idem figure 10.18 : orientation de l’onde la plus instable.

bilités CF sont largement dominantes. Cette caractéristique se retrouve dans pratiquement tous les cas traités par la suite.

La figure 10.20 montre les courbes iso- N_f calculées dans les deux cas par la méthode enveloppe. Dans le cas radiatif la nature unique des instabilités a été clairement identifiée (ondes CF) et cette méthode paraît *a priori* appropriée. Dans le cas adiabatique, le problème, déjà soulevé au §5.2.2, est de savoir si l’on peut sommer des instabilités de différentes natures. Dans le cas présent, les angles ψ_M varient peu et lentement de l’amont vers l’aval contrairement au cas particulier du profil ONERA D énoncé au §5.2.2. Il ne semble donc pas inapproprié d’utiliser ici la méthode enveloppe. Bien évidemment, les facteurs N_f maximums obtenus dans le cas adiabatique (11) sont supérieurs à ceux obtenus dans le cas radiatif (8.4).

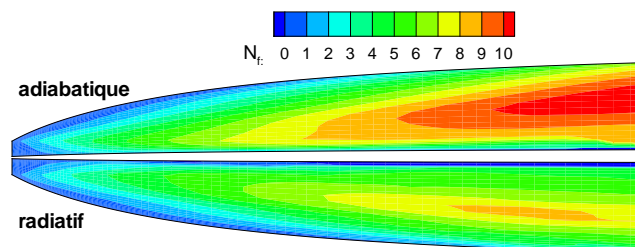


FIG. 10.20 – idem figure 10.18 : facteurs N_f .

10.2.4 Influence de la fréquence sur le facteur N_f .

Ondes progressives.

Les calculs de facteur N_f présentés jusqu'à présent ont été effectués pour une seule fréquence $f = 10\text{kHz}$. Pour être complète, la méthode du e^N nécessite que ces calculs soient réalisés pour plusieurs fréquences, le facteur N représentant alors la courbe enveloppe des courbes N_f . Dans la pratique, ces calculs répétés sur toute une surface représentent un temps de mise en œuvre considérable. Dans le cadre d'une étude paramétrique, cette approche se révèle difficile à mettre en œuvre. On peut cependant envisager que l'étude d'une seule fréquence choisie de manière adéquate soit suffisamment représentative des tendances observées pour l'ensemble des fréquences instables lorsque l'on fait varier les paramètres de calculs (M_∞, T_p, i, \dots).

Les figures 10.21 et 10.22 montrent l'effet de la fréquence sur les taux d'amplification des ondes considérées ainsi que sur les facteurs N_f associés pour une ligne de maillage (référéncée 50). Les ondes les plus amplifiées sont de l'ordre de la dizaine de kilo-Hertz. Les calculs menés sur la surface entière (figure 10.23) confirment que cette observation est valable pour la totalité de l'avant-corps.

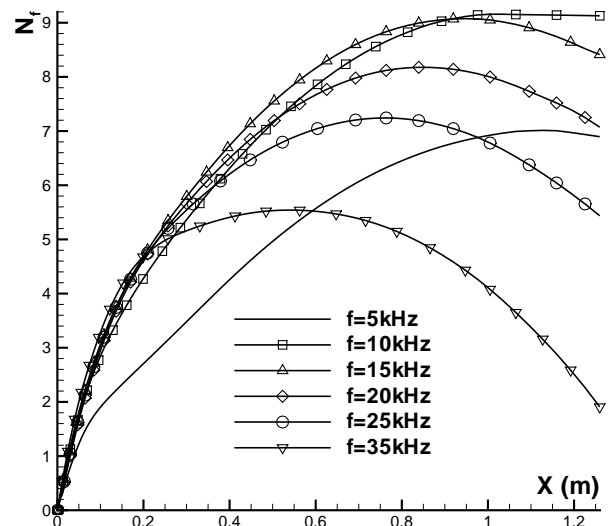
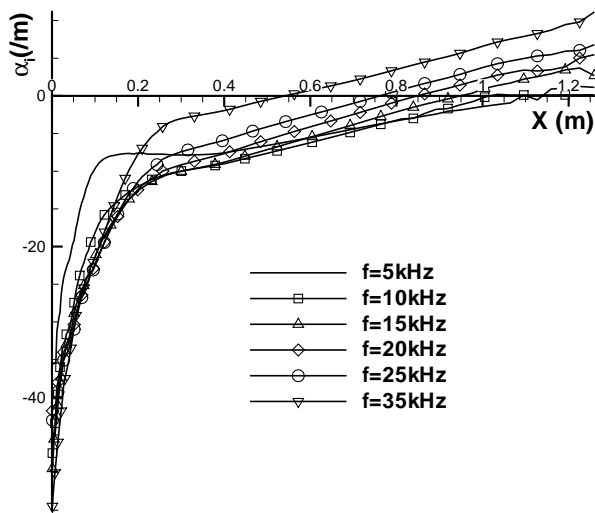


FIG. 10.21 – α_i calculés pour la ligne de maillage 50. $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}$.

FIG. 10.22 – idem figure 10.21 : facteurs N_f .

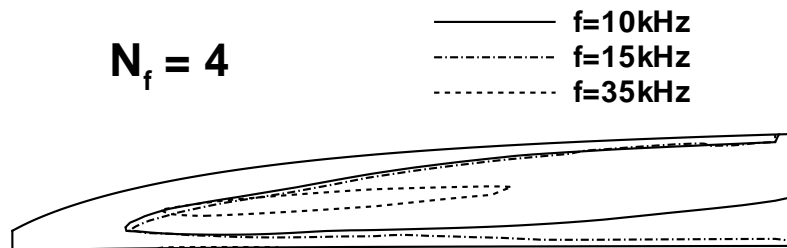


FIG. 10.23 – Iso-valeurs de $N_f = 4$ sous l'avant-corps (paroi radiative). $M_\infty = 6, i = 4^\circ, P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}$.

Ondes stationnaires.

Outre les ondes progressives, les instabilités CF ont aussi la particularité d'amplifier des ondes stationnaires ($f = 0kHz$ - voir §4.5.3). La figure 10.24 met en évidence les caractéristiques des ondes stationnaires sous l'avant-corps du véhicule (paroi radiative) : les taux d'amplification ne sont pas négligeables et les angles ψ_M très élevés dans la zone instable (on retrouve ici une caractéristique des ondes CF). Toutefois, les facteurs N maximums observés sur la figure 10.25 sont plus faibles que ceux calculés pour la fréquence $f = 10kHz$ (figure 10.20). Le rôle des ondes CF dans le déclenchement de la transition ne doit cependant pas être négligé car, comme précisé dans la section 4.5.3, elles peuvent être à l'origine d'une instabilité secondaire très puissante. D'une manière générale, il n'est pas évident de distinguer la part des ondes progressives et des ondes stationnaires dans le déclenchement de transition en présence d'instabilités CF. Quelques éléments de réponse seront apportés dans la section 10.5.

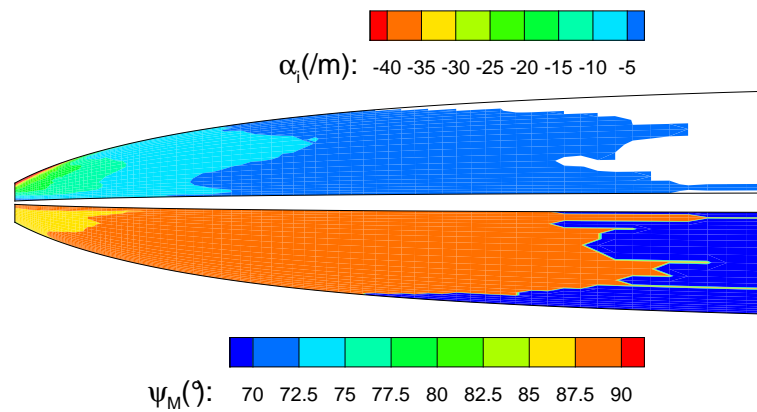


FIG. 10.24 – Caractérisation des instabilités pour $f = 0kHz$. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar.

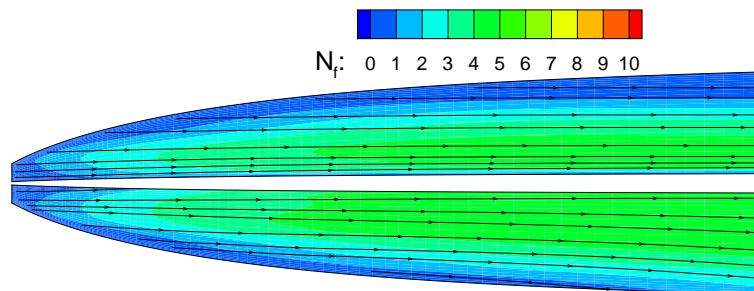


FIG. 10.25 – idem 10.24 : facteurs N_f .

10.3 Étude paramétrique en vol. Comparaison au critère NASP.

10.3.1 Effet du nombre de Mach.

Les figures 10.28 à 10.33 présentent les caractéristiques de stabilité de l'écoulement sous l'avant-corps du véhicule pour les différents points de vol nominaux ($M_\infty = 4, 6, 8$ - paroi radiative). La colonne de gauche montre les taux d'amplification et l'orientation de l'onde la plus instable pour $f = 10\text{kHz}$, alors que celle de droite expose les facteurs $N_{10\text{kHz}}$ et les iso-valeurs du critère Re_{δ_2}/M^e . Les lignes noires des cartes de facteurs $N_{10\text{kHz}}$ représentent les lignes d'intégration des α_i et correspondent aux lignes tangentes au vecteur vitesse de groupe. À titre de comparaison, les lignes de courant à l'extérieur de la couche limite sont montrées sur les cartes de Re_{δ_2}/M^e .

Les cas $M_\infty = 6$ et $M_\infty = 8$ présentent des répartitions de α_i et de ψ_M similaires. Les valeurs de ψ_m sont en l'occurrence élevées : elles sont supérieures à 85° dans toute la zone instable. Nous avons déjà indiqué, dans le paragraphe 10.2.3, que pour le cas $M_\infty = 6$, les ondes observées avaient pour origine des instabilités CF. Tout porte à croire que tel est aussi le cas pour $M_\infty = 8$, l'instabilité étant cependant moins prononcée.

Deux différences notables, par rapport aux deux points de vol précédents, sont remarquables pour le cas $M_\infty = 4$:

- des valeurs négatives de α_i sont observées près de l'axe de symétrie, pour des valeurs de X élevées, dans une région où, *a priori*, la tridimensionnalité de l'écoulement est moins marquée.
- les valeurs de ψ_M sont nettement moins élevées.

Ces deux éléments amènent à penser que le premier mode oblique est aussi présent pour ce cas. Afin de confirmer cette hypothèse, il est possible d'étudier l'évolution des longueurs d'onde réduites (λ/δ_1) en fonction de X (figure 10.27 - la figure 10.26 rappelle la distribution de α_i sur les lignes de maillage concernées). En effet, les longueurs d'onde réduites sont traditionnellement plus courtes dans le cas des ondes CF ($5 < \lambda/\delta_1 < 10$) que dans celui du premier mode oblique ($10 < \lambda/\delta_1 < 20$). Les lignes de maillage étudiées sur les figures 10.26 et 10.27 se situent près du bord latéral de l'avant-corps, et traversent la zone stable de faible extension visible près du nez.

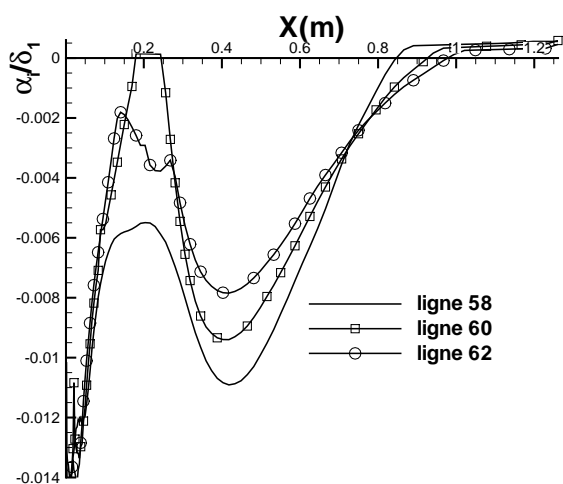


FIG. 10.26 – Taux d'amplification calculés pour les lignes de maillage 58, 60 et 62 de l'avant-corps. $M_\infty = 4$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar.

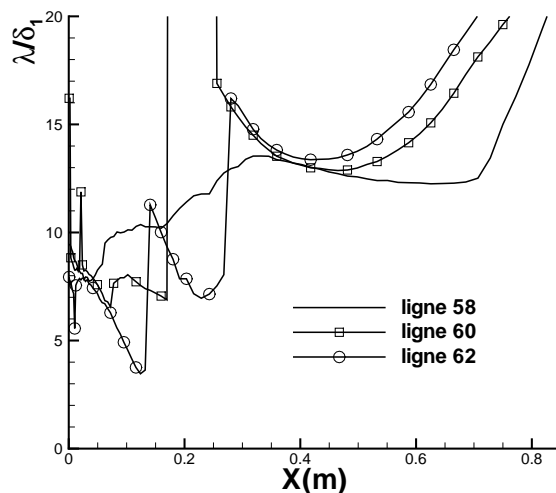


FIG. 10.27 – idem figure 10.26 : longueurs d'onde réduites λ/δ_1 .

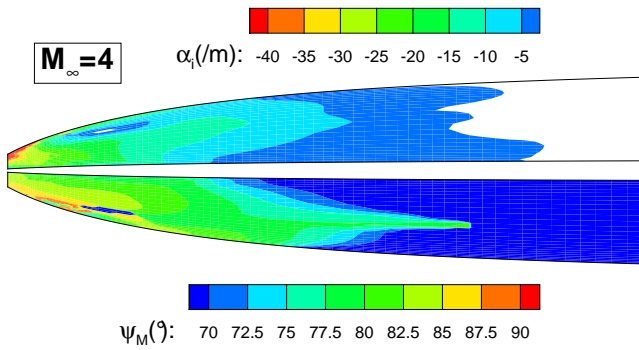


FIG. 10.28 – Propriétés de stabilité à $M_{\infty} = 4$, $i = 4^{\circ}$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz.

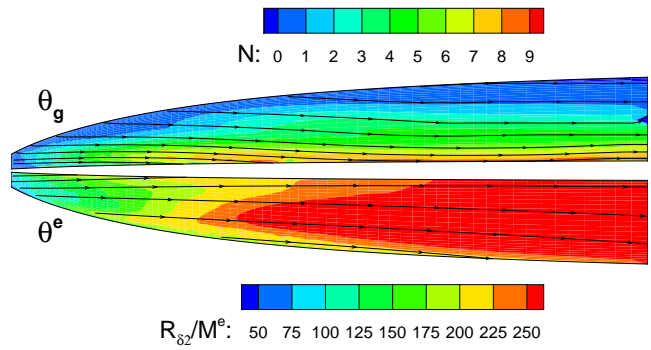


FIG. 10.29 – Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_{\infty} = 4$, $i = 4^{\circ}$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz.

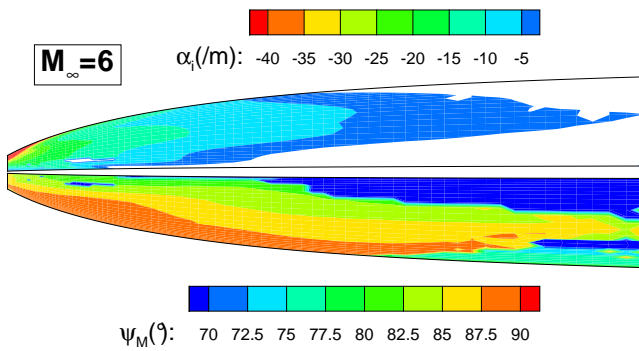


FIG. 10.30 – idem Fig.10.28 : $M_{\infty} = 6$.

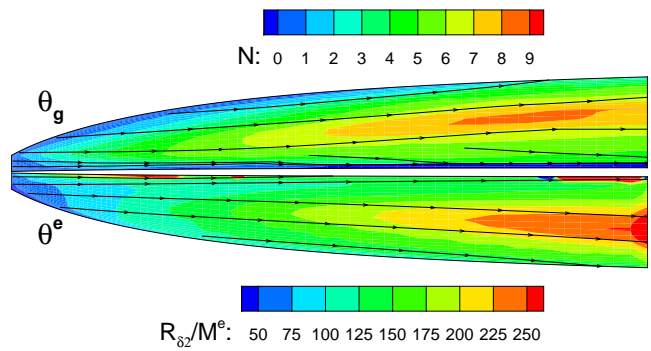


FIG. 10.31 – idem Fig.10.29 : $M_{\infty} = 6$.

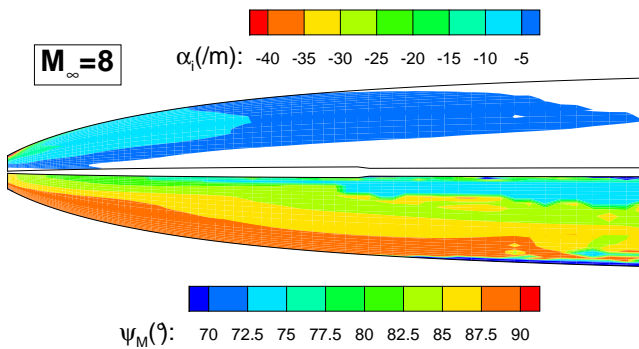


FIG. 10.32 – idem Fig.10.28 : $M_{\infty} = 8$.

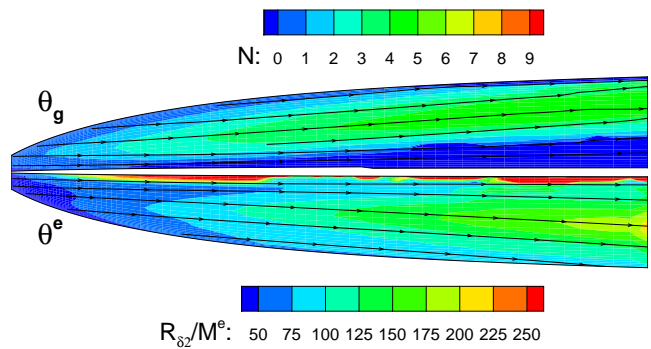


FIG. 10.33 – idem Fig.10.29 : $M_{\infty} = 8$.

Les courbes de α_i semblent effectivement indiquer un changement de nature des instabilités entre $X < 0.2m$ et $X > 0.2m$. Ceci est confirmé par l'évolution des λ/δ_1 dont les valeurs sont sensiblement plus élevées pour $X > 0.2m$ et indiquent donc le passage d'ondes CF à des ondes caractérisant le premier mode oblique.

Les similitudes des répartitions de α_i observées pour les cas $M_\infty = 6$ et 8 se retrouvent logiquement dans les cartographies de facteurs N (figures 10.31 et 10.33). Les valeurs maximales sont atteintes loin de l'axe de symétrie, ce qui n'est pas sans rappeler les courbes iso- N déterminées par Kimmel *et al.* [4] pour le cône elliptique sans incidence (voir figure 10.2 du §10.1.3). On notera toutefois que les facteurs N sont moins importants dans le cas $M_\infty = 8$ que dans le cas $M_\infty = 6$. Ceci s'explique par l'effet combiné de deux facteurs :

- l'augmentation, avec M_∞ , du nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite (voir tableau 9.2).
- la faible pression statique à l'altitude de vol envisagée à $M_\infty = 8$, ce qui engendre un nombre de Reynolds unitaire plus faible que pour le cas $M_\infty = 6$ (voir tableau 9.1).

En ce qui concerne le cas $M_\infty = 4$ la double nature des instabilités mises en jeu (CF + 1^{er} mode oblique) modifie considérablement la topologie des facteurs N : les valeurs maximales sont observées près du plan de symétrie. D'autre part, alors que dans les deux cas précédents, l'hypothèse $\theta_g = \theta^e$ semble acceptable, pour le cas $M_\infty = 4$, les lignes tangentes à la vitesse de groupe ont tendance à se rapprocher de l'axe de symétrie et les lignes de courant à l'extérieur de la couche limite ont tendance à s'en éloigner.

Du fait des valeurs élevées du nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite (supérieur à 5), un second mode droit ($\psi_M = 0^\circ$) acoustique existe, pour le cas $M_\infty = 8$, dans la gamme de fréquences 100 ~ 300 kHz. Les facteurs N ont été calculés pour plusieurs fréquences sur deux lignes de maillage longitudinales (44 et 50) situées respectivement à 1/3 et 2/3 de la distance entre l'axe de symétrie et le bord latéral. Ce mode donne des facteurs qui n'excèdent pas 3.5 (figure 10.34), et l'on peut considérer que son rôle est mineur dans le déclenchement de la transition.

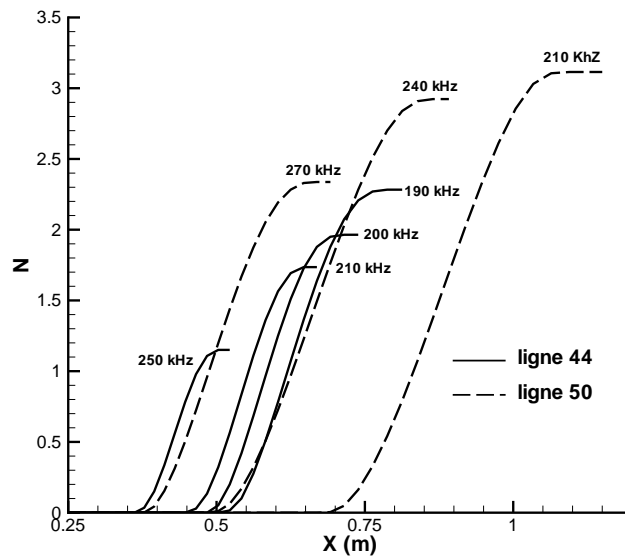


FIG. 10.34 – Facteurs N du second mode de Mack. $M_\infty = 8$.

Enfin, la distribution des valeurs du critère Re_{δ_2}/M^e coïncident bien avec les cartographies de facteurs N pour $M_\infty = 6$ et $M_\infty = 8$. De plus, la tendance observée (diminution du facteur N) entre ces deux cas est correctement reproduite. Par contre, lorsque la nature des instabilités est modifiée (cas $M_\infty = 4$) le critère n'est plus en adéquation avec les résultats de stabilité.

10.3.2 Variation de la pression dynamique.

Dans le paragraphe précédent, deux paramètres variaient simultanément : le nombre de Mach et l'altitude. À présent, seule l'altitude change, ce qui entraîne une variation de la pression statique. Le cas étudié est celui du vol à Mach 6 pour les deux altitudes 25 et 32 km. Les pressions statiques correspondantes sont 2512 et 793.7 Pa, ce qui correspond à des pressions dynamiques $P_{dyn} = 0.6$ et $P_{dyn} = 0.2$ bar ($P_{dyn} = 1/2\rho_\infty u_\infty^2 = 1/2\gamma M_\infty^2 P_\infty$).

On peut supposer que, dans les deux cas, la nature des instabilités est identique (CF). En effet, les ψ_M observés sont élevés (figures 10.35 et 10.37). De plus, nous savons que le cas $P_{dyn} = 0.6$ bar ne présente pas de premier mode oblique (pour une paroi radiative). Étant donné qu'une diminution de la pression statique, et donc du nombre de Reynolds unitaire, aura plutôt tendance à stabiliser la couche limite, nous pouvons en déduire que ce mode a peu de chance d'exister pour le cas $P_{dyn} = 0.2$ bar.

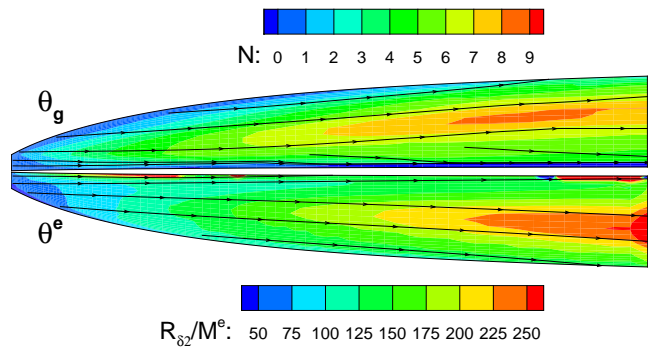
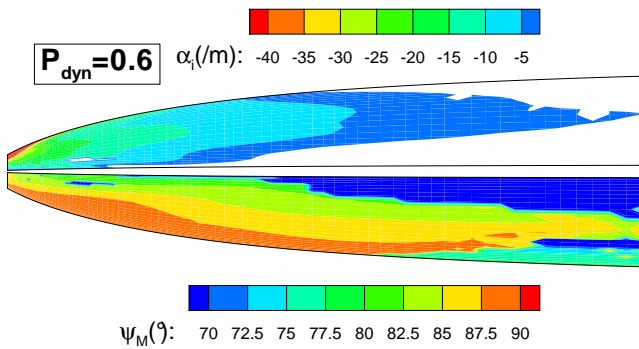


FIG. 10.35 – Propriétés de stabilité à $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz. FIG. 10.36 – Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 4$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz.

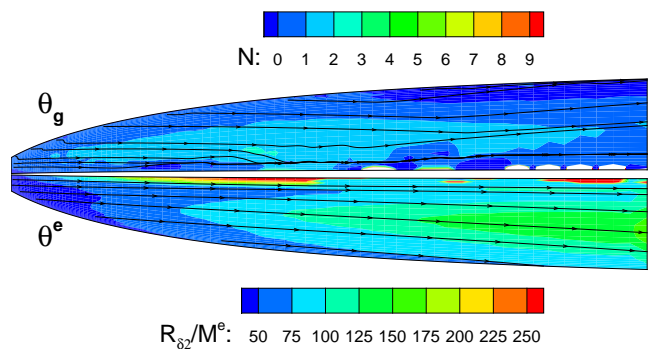
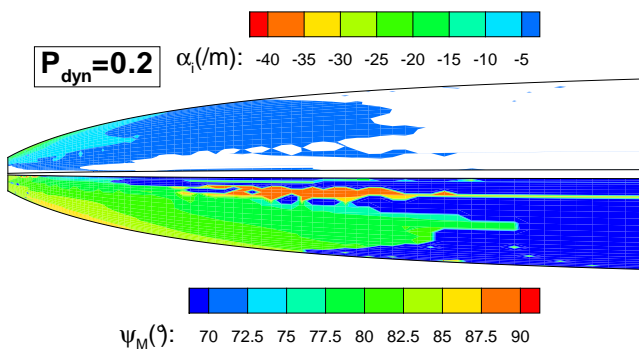


FIG. 10.37 – idem Fig.10.35 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.

FIG. 10.38 – idem Fig.10.35 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.

La diminution de la pression statique entraîne effectivement une stabilisation de la couche limite (figures 10.35 et 10.37). Par conséquent, les facteurs N du cas $P_{dyn} = 0.2$ bar sont nettement moins

élevés que pour le cas $P_{dyn} = 0.6$ bar (figures 10.36 et 10.38). Cette tendance est parfaitement reproduite par le critère Re_{δ_2}/M^e .

10.3.3 Effet de l'incidence de vol.

Les six figures suivantes présentent l'effet de l'incidence de vol pour le cas $M_\infty = 6$. Les incidences étudiées sont $i = 2, 4, 6^\circ$. Dans tous les cas, les instabilités ont la même nature (CF) comme le montrent les valeurs et les répartitions des angles ψ_M (figures 10.39, 10.41 et 10.43). L'extension des zones instables diminue cependant avec l'augmentation de l'incidence de vol. Il en résulte que les facteurs N maximums décroissent lorsque i augmente : ils passent d'une valeur de 9.1 pour $i = 2^\circ$, à 8.4 pour $i = 4^\circ$ et à 7.9 pour $i = 6^\circ$ (figures 10.40, 10.42 et 10.44).

Le fait que dans les trois cas, les instabilités sont de nature CF, implique que les distributions de Re_{δ_2}/M^e ont la même forme que les cartographies de facteurs N . Par contre les tendances sont opposées : une augmentation de l'incidence de vol induit une augmentation des valeurs du critère. Une discussion plus détaillée de la pertinence de ce critère est présentée dans le paragraphe 10.3.5.

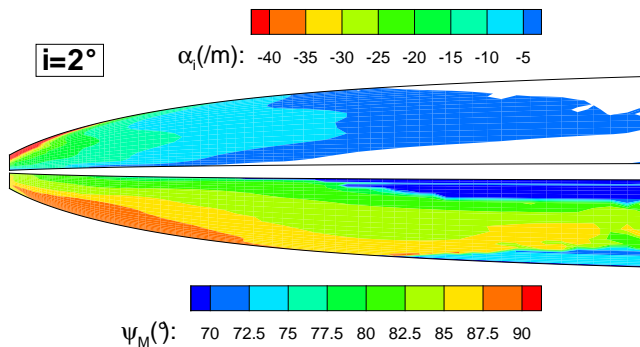


FIG. 10.39 – Propriétés de stabilité à $M_\infty = 4$, $i = 2^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz.

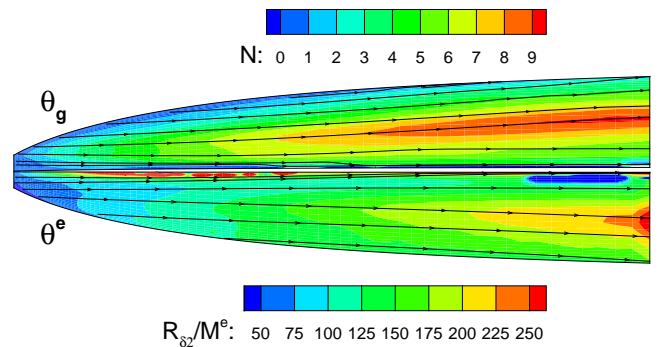


FIG. 10.40 – Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 4$, $i = 2^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 10$ kHz.

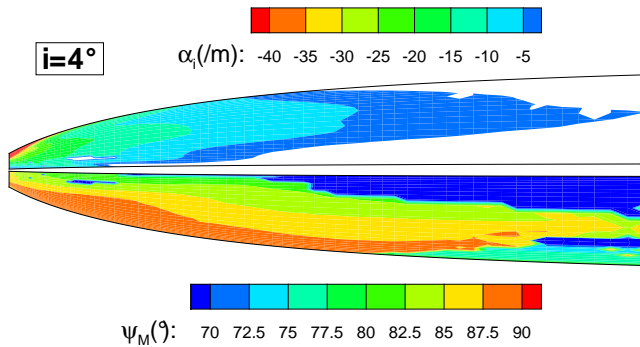


FIG. 10.41 – idem Fig.10.39 : $i = 4^\circ$.

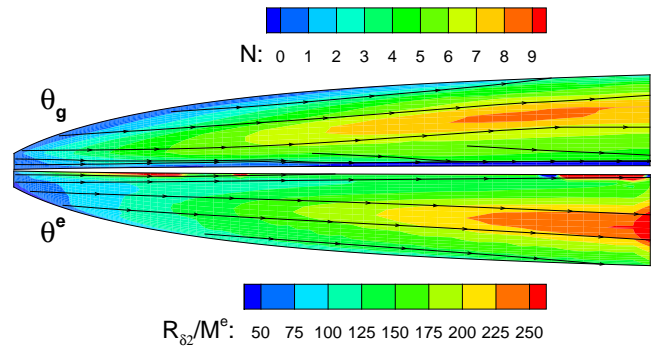


FIG. 10.42 – idem Fig.10.40 : $i = 4^\circ$.

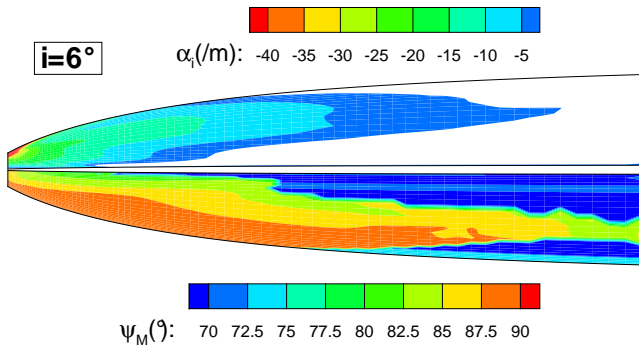


FIG. 10.43 – idem Fig.10.39 : $i = 6^\circ$.

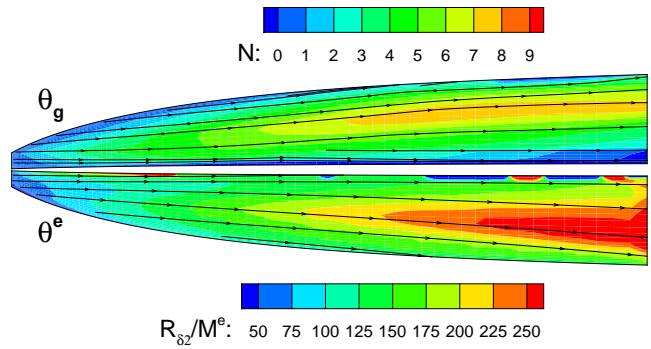


FIG. 10.44 – idem Fig.10.40 : $i = 6^\circ$.

10.3.4 Cas particulier des ondes stationnaires.

La question soulevée ici est de savoir comment réagissent les ondes stationnaires ($f = 0\text{kHz}$) aux changements de paramètres évoqués dans les paragraphes précédents. Plus précisément, il serait intéressant de savoir si les taux d'amplification de ce type d'ondes se comportent de la même manière que ceux des ondes progressives. L'étude se focalise en l'occurrence sur le changement d'angle d'incidence i (figures 10.47 et 10.48) et d'altitude (figures 10.49 et 10.50) par rapport au cas de référence ($M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}$ - figures 10.45 et 10.46).

Tout d'abord, le changement d'angle d'incidence semble avoir peu d'effet sur la stabilité des ondes stationnaires. Les cartographies de α_i et de facteurs N sont en effet très similaires. La valeur maximale du facteur N est toutefois légèrement plus élevée pour $i = 4^\circ$ ($N_{stat}^{max} = 4.8$) que pour $i = 6^\circ$ ($N_{stat}^{max} = 4.4$). La différence est néanmoins nettement moins marquée que dans le cas des ondes progressives.

Pour ce qui est de la dépendance en altitude, on constate cette fois des amplitudes de variation des facteurs N importantes entre les cas $P_{dyn} = 0.6 \text{ bar}$ et $P_{dyn} = 0.2 \text{ bar}$. Sans être toutefois aussi marquées, elles sont comparables à celles constatées pour les ondes progressives (voir figures 10.36 et 10.38).

Enfin, comme pour le cas des ondes progressives, le critère Re_{δ_2}/M^e est en adéquation avec les facteurs N dans le cas du changement d'altitude mais en totale contradiction avec ces derniers pour ce qui est de la variation de l'angle d'incidence.

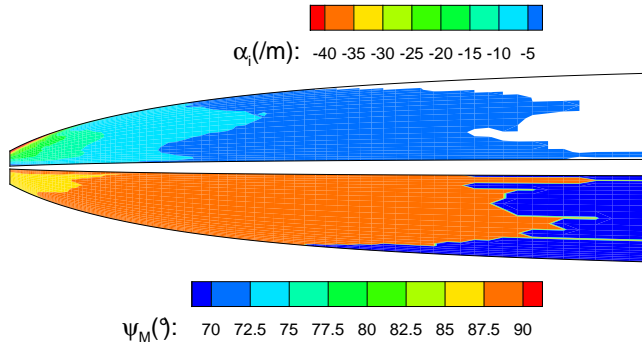


FIG. 10.45 – Propriétés de stabilité à $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 0$ kHz.

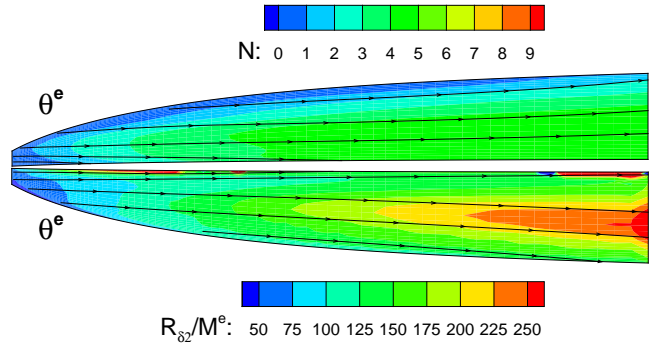


FIG. 10.46 – Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar, $f = 0$ kHz.

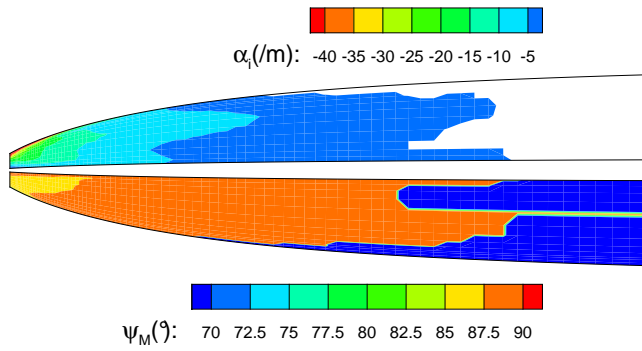


FIG. 10.47 – idem Fig.10.45 : $i = 6^\circ$.

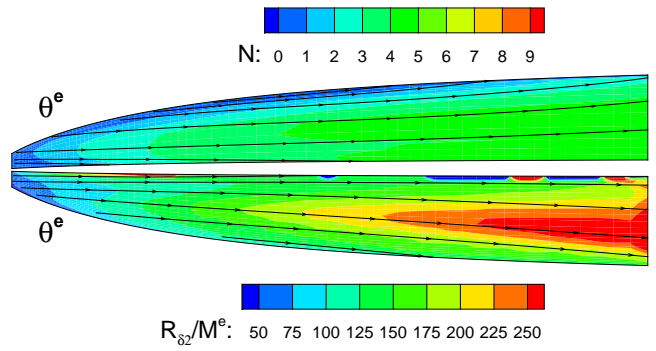


FIG. 10.48 – idem Fig.10.46 : $i = 6^\circ$.

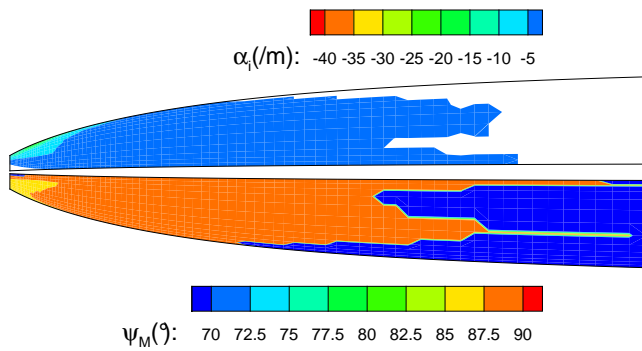


FIG. 10.49 – idem Fig.10.45 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.

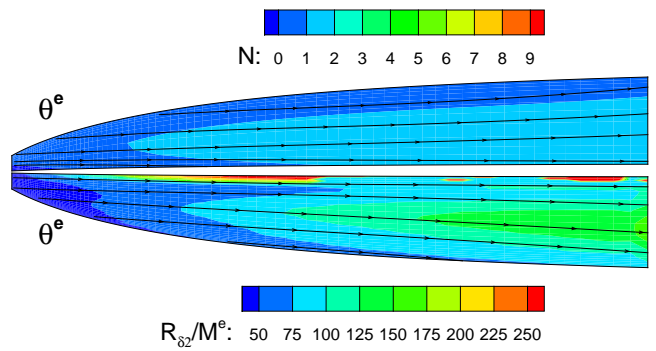


FIG. 10.50 – idem Fig.10.46 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.

10.3.5 Validité du critère NASP.

En résumé, le critère Re_{δ_2}/M^e reproduit les tendances observées à l'aide du calcul de stabilité pour les cas suivants :

- i. changement du point de vol entre $M_\infty = 6$ et $M_\infty = 8$.
- ii. changement de l'altitude de vol, et donc de la pression dynamique ($P_{dyn} = 0.6$ et $P_{dyn} = 0.2$ bar).

Au contraire, le critère Re_{δ_2}/M^e ne reproduit pas les tendances observées sur les courbes de facteurs N pour les cas suivants :

- iii. changement du point de vol entre $M_\infty = 4$ et $M_\infty = 6$.
- iv. variation de l'angle d'incidence à Mach constant.

Dans les deux premiers cas (i. & ii.), la nature des instabilités est unique (ondes CF). Les variations observées dans les cartographies de facteurs N sont dues aux variations de l'intensité de cette instabilité unique en fonction de paramètres contenus dans le critère Re_{δ_2}/M^e (ρ^e , M^e). Par contre pour le troisième cas (iii.), la nature des instabilités change : elles sont de type CF pour $M_\infty = 6$ et de type CF + 1^{er} mode oblique pour $M_\infty = 4$. Cet aspect ne peut être pris en compte par le critère NASP. Pour le quatrième cas (iv.), la variation des valeurs des taux d'amplification des ondes CF (en fonction de i) est intimement liée à la "quantité d'écoulement CF" dans la couche limite (voir chapitre 11). Or cette quantité n'est pas non plus prise en compte dans le critère.

Reshotko [8] résume la situation de la manière suivante. Explicitons tout d'abord le critère :

$$\frac{Re_{\delta_2}}{M^e} = \frac{\rho^e \bar{u}^e \delta_2}{\mu^e} \frac{a^e}{\bar{u}^e} = \rho^e \left(\frac{a^e \delta_2}{\mu^e} \right) \quad (10.3)$$

a^e et μ^e dépendent uniquement de la température, laquelle varie lentement avec l'altitude, alors que ρ^e dépend largement de la pression et donc de l'altitude. Il est donc normal d'observer une bonne adéquation entre le critère NASP et les cartes de facteurs N lorsque l'altitude varie (cas i. & ii.) Le critère est par contre inadéquat lorsque les mécanismes de déstabilisation interviennent explicitement dans les variations observées (cas iii. & iv.). Pour conclure, il est discutable pour des véhicules de croisière, mais est susceptible de donner de bons résultats pour des véhicules de rentrée atmosphérique.

10.4 Résultats de stabilité en soufflerie.

Les figures 10.51 à 10.54 montrent les résultats du calcul de stabilité menés pour $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$ dans les conditions de souffleries Blow-Down (BD) et Hot-Shot (HS). On rappelle que pour la soufflerie BD, on considère une paroi adiabatique alors que pour la soufflerie HS, une paroi isotherme est envisagée ($T_p = 300$ K - voir aussi tableaux 9.1 et 9.2).

Pour le cas adiabatique (figures 10.51 et 10.52), la plage d'angles ψ_M est importante ($65^\circ < \psi_M < 90^\circ$), ce qui laisse supposer la coexistence d'ondes CF et du premier mode oblique. La figure 10.56 présente les longueurs d'onde réduites λ/δ_1 pour les lignes de maillage longitudinales 45 et 59 qui se situent respectivement à mi-distance du plan de symétrie et du bord latéral, et près du bord latéral de l'avant-corps. Les valeurs de λ/δ_1 augmentent avec X ce qui va dans le sens de la présence simultanée des deux types d'instabilité. On notera cependant que les longueurs d'ondes réduites n'atteignent pas les valeurs traditionnellement observées pour un premier mode oblique (voir §10.3.1).

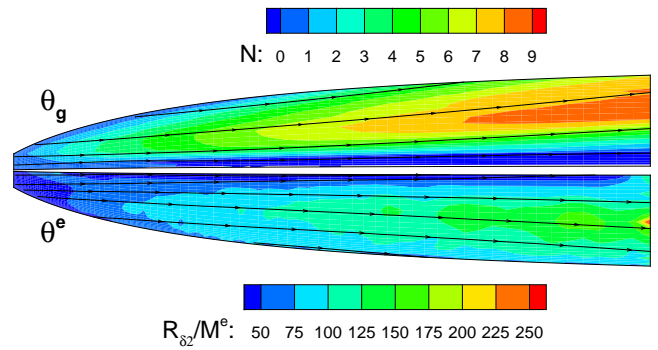
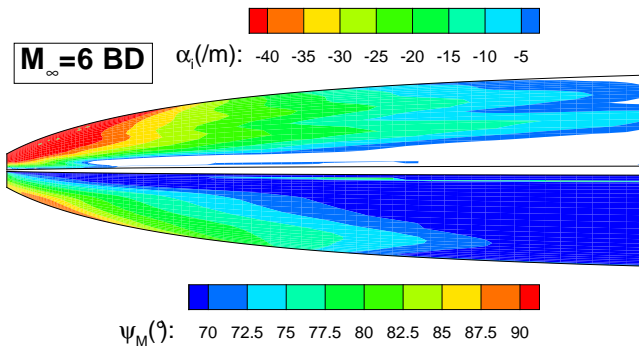


FIG. 10.51 – Propriétés de stabilité à $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $f = 30$ kHz. Soufflerie BD.

FIG. 10.52 – Comparaison des facteurs N et du critère Re_{δ_2}/M^e . $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $f = 30$ kHz. Soufflerie BD.

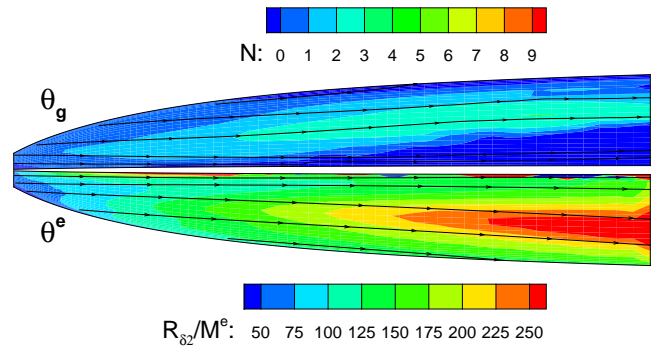
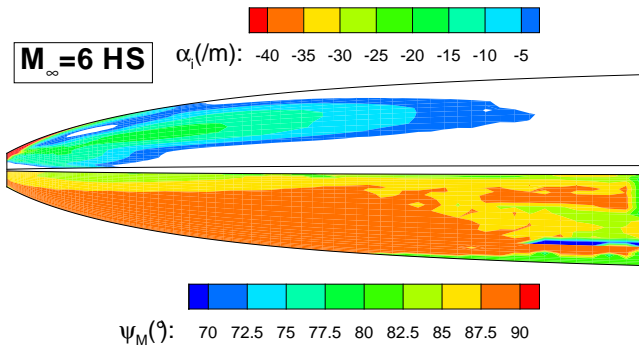


FIG. 10.53 – idem Fig.10.51 : $f = 15$ kHz, soufflerie HS.

FIG. 10.54 – idem Fig.10.52 : $f = 15$ kHz, soufflerie HS.

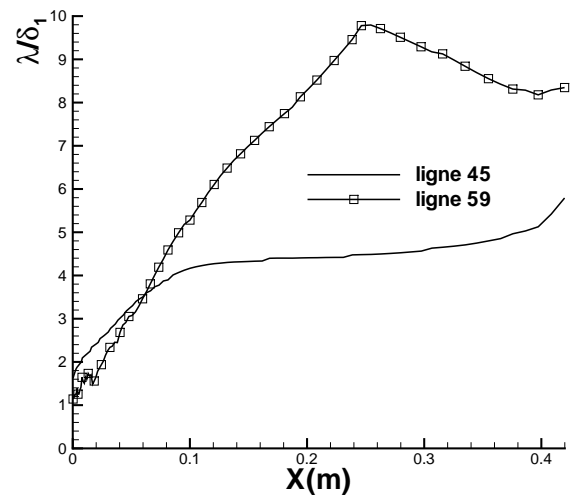
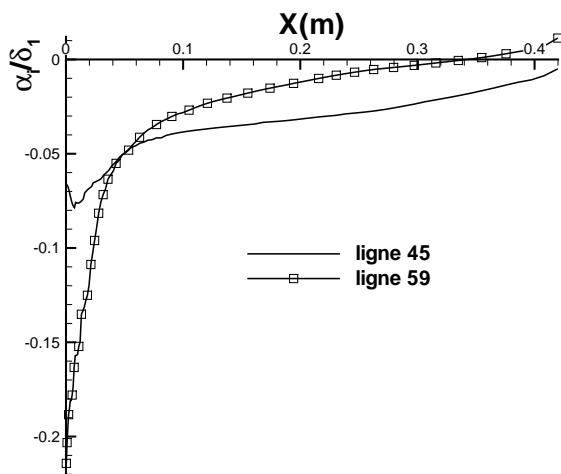


FIG. 10.55 – Taux d'amplification calculés pour les lignes de maillage 45 et 59 de l'avant-corps. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, soufflerie BD.

FIG. 10.56 – idem figure 10.55 : longueurs d'onde réduites λ/δ_1 .

En ce qui concerne l'intensité des instabilités, l'effet du refroidissement de paroi dans le cas HS stabilise très nettement l'écoulement (le premier mode disparaît) malgré un nombre de Reynolds unitaire plus élevé que dans la soufflerie BD. Les facteurs N sont par conséquent beaucoup plus faibles pour la soufflerie HS ($N^{max} = 3$) que pour la soufflerie BD ($N^{max} = 8.5$).

10.5 Conclusions sur la prévision de transition.

Les calculs commentés dans les paragraphes précédents ont permis d'obtenir des cartographies iso- N sous l'avant-corps du véhicule et d'étudier la sensibilité de la stabilité de l'écoulement aux variations d'un certain nombre de paramètres (pression statique, nombre de Mach, angle d'incidence). La question est à présent de prévoir, pour un jeu de paramètres donné, la position de la transition de la couche limite (si elle transitionne). Ce problème revient à fixer une valeur de facteur N de transition noté N_t . Dans la section 5.1, la valeur de 10 a été avancée pour le cas d'une plaque plane en écoulement incompressible. Dans le cas présent, l'écoulement est tridimensionnel, fortement compressible et l'instabilité est dominée par des ondes CF. L'originalité de cette instabilité réside dans le fait qu'elle est capable d'amplifier des ondes progressives ($f \neq 0\text{kHz}$) et des ondes stationnaires ($f = 0\text{kHz}$). Dans les deux cas, les ondes CF sont susceptibles de faire transitionner l'écoulement mais suivant des mécanismes différents :

- ondes progressives : croissance modale, interactions non-linéaires, turbulence
- ondes stationnaires : croissance modale, création de tourbillons longitudinaux, instabilité secondaire, turbulence (voir §4.5.3)

La question de la détermination de la position de la transition est donc double :

- Quel mécanisme de transition privilégier ?
- Quel facteur N_t accorder à l'un ou l'autre de ces mécanismes (ou aux deux) ?

10.5.1 Ondes progressives / stationnaires.

Dans leur revue très complète des études menées sur la stabilité et la transition des couches limites tridimensionnelles, Saric *et al.* [34] abordent la question de la prédominance des ondes stationnaires ou progressives dans la transition CF. L'idée générale consiste à dire qu'il s'agit d'un problème de réceptivité : la transition est provoquée par les ondes progressives dans un environnement à fort taux de turbulence (soufflerie) et sur une paroi lisse, tandis qu'elle est déclenchée par les ondes stationnaires dans un environnement calme (vol) mais sur paroi rugueuse. À cette proposition, il convient d'ajouter quelques précisions. (Les références des auteurs cités sont accessibles dans [34]).

Deylhe & Bippes (1996) ont réalisé des essais de transition sur des plaques planes en flèche dans plusieurs souffleries possédant des niveaux de turbulence (T_u) différents. Ces essais ont mis en évidence une valeur seuil ($T_u = 0.0015$) au-delà de laquelle la transition est dominée par les ondes progressives. D'autre part, Radetsky *et al.* (1999) ont mis en évidence que la transition sur des ailes en flèche est insensible au bruit acoustique, même pour des amplitudes supérieures à 100dB. Ainsi, les variations observées par Deylhe & Bippes (1996) sont principalement le fait de la composante de vortacité de T_u , et non de sa composante acoustique.

En ce qui concerne l'effet des rugosités, Radetsky *et al.* (1999) ont montré que des rugosités tridimensionnelles isolées (que l'on distinguera de la rugosité distribuée ou état de surface) peuvent avoir un effet important sur la position de la transition pour des valeurs de Re_k (où k est la hauteur de la rugosité) très en deçà de la valeur by-pass. L'état de surface joue aussi un rôle important : les mêmes auteurs ont trouvé que le nombre de Reynolds basé sur la position de la transition peut être augmenté de 70% en réduisant la rugosité de la paroi de $9.0 \mu\text{m}$ à $0.25 \mu\text{m}$. À ce sujet, on peut aussi citer les travaux de Louis [14] qui établit une relation de réceptivité analogue à celle évoquée dans le §5.3 pour la couche limite incompressible, et qui fait correspondre à un nombre de Reynolds Re_k , un facteur N_t de transition pour des ondes stationnaires.

En matière de transition CF, il faut cependant se garder d'adopter une vision trop simpliste des phénomènes mis en jeux. On peut par exemple citer les résultats suivants :

- Possibles interactions des rugosités et des perturbations acoustiques ou du taux de turbulence (White *et al.* 2001).
- Possibles interactions des ondes stationnaires et progressives (Wang *et al.* 1994).
- Phénomène de saturation non-linéaire des tourbillons longitudinaux (dans le cas des ondes stationnaires) qui limite l'effet déstabilisateur des rugosités (Reibert *et al.* 1996) et discrédite l'approche uniquement linéaire de la prévision de transition (Arnal 1994).
- Effet stabilisant de rugosités possédant des caractéristiques bien définies (Saric *et al.* 1998).
- ...

10.5.2 Facteur de transition N_t .

D'après le paragraphe précédent, il semblerait qu'il faille privilégier les ondes stationnaires pour la prévision de transition en vol (environnement calme) et les ondes progressives pour le transition en soufflerie (environnement perturbé). D'autre part, on sait que, même pour des instabilités de type premier ou second mode, le bruit de la soufflerie joue un rôle important dans la prévision de la transition. Il convient donc de déterminer deux facteurs N_t différents pour le vol et pour les essais en soufflerie.

Cas vol.

Très peu de résultats d'essais en vol concernant la transition CF sont disponibles, à notre connaissance, dans la littérature. on peut citer :

- King [29] : transition sur un cône en incidence à Mach 3.5.
- Cattafesta *et al.* [37] : transition sur une aile en flèche à Mach 3.5.
- Malik *et al.* [36] : transition sur l'aile delta du véhicule lanceur Pegasus.

En fait, les deux premiers tests ont été réalisés dans la soufflerie silencieuse de NASA Langley. Dans cette soufflerie, un effort particulier a été mené pour réduire le niveau de perturbation, y compris le niveau de bruit acoustique. On peut donc considérer qu'ils sont représentatifs du cas vol. Dans les essais de King, aucune corrélation avec le critère e^N n'a été réalisée. Ils ne sont donc pas d'une grande utilité pour le sujet qui nous intéresse. Au contraire, Cattafesta a effectué une telle comparaison.

Cattafesta a effectué une étude paramétrique de la transition sur une aile en flèche en fonction de l'incidence ($-2^\circ < i < 5^\circ$ avec un incrément de 1°) et du nombre de Reynolds unitaire ($5 < Re_u < 26 \times 10^6/m$).

La température génératrice de la soufflerie est de 333 K et le nombre de Mach de 3.5. La paroi est adiabatique. Les facteurs N à la transition ont été calculés avec l'hypothèse d'écoulement parallèle et grâce à la méthode enveloppe. Les fréquences mises en jeu varient de 0 à 70 kHz, les plus instables de situant entre 40 et 60 kHz (à titre de comparaison, les fréquences les plus instables trouvées dans le cas $M_\infty = 6$ BD se situent autour de 30 kHz). Cattafesta trouve qu'un facteur $N_t = 13$ reproduit correctement les tendances observées expérimentalement lorsque l'incidence ou le nombre de Reynolds varie.

Les essais menés sur le lanceur Pegasus permettent de comparer les résultats précédents avec des tests en vol. Les nombres de Mach pour lesquels des comparaisons aux résultats numériques ont été effectuées sont : $M_\infty = 4.13, 4.35, 4.56, 4.99$. Les plages d'altitude et de Reynolds unitaire correspondantes sont : $23744 < alt. < 29931$ m et $1.84 < Re_u < 4.1 \times 10^6$ /m. Seule une aile a été équipée de manière à recueillir des résultats. Sur cette aile, les instruments de mesure (thermocouples, capteurs de pression, film chaud, capteurs de pression dynamique) sont montés sur une plaque d'acier entourée de tuiles céramiques. Une rangée de thermocouples a aussi été installée d'un côté de la plaque d'acier, sur les tuiles céramiques. Les températures de paroi calculées sur l'acier sont plus basses que celles calculées sur la céramique. Les fréquences instables observées sur la partie chaude sont plus élevées (8 à 15 kHz) que celles observées sur la partie froide (1 à 4 kHz). Dans notre cas, les calculs réalisés en soufflerie BD (paroi adiabatique) montrent aussi des fréquences instables plus élevées que celles déterminées dans le cas soufflerie HS (paroi isotherme froide). Cependant, le nombre de Reynolds unitaire varie lui aussi (voir tableau 9.1).

Pour les test effectués sur Pegasus, la distinction a été faite entre les ondes stationnaires et progressives. Les résultats montrent une plage relativement large de facteurs N_t :

- ondes stationnaires : $7 < N_t < 12.4$
- ondes progressives : $7.6 < N_t < 14.1$

Cas soufflerie.

Les deux études expérimentales évoquées dans ce paragraphe ont déjà été abordées dans les sections 10.1.2 et 10.1.3. Il s'agit du cône pointu en incidence de Dussillols [31]-[56] et du cône elliptique de Kimmel [4]-[32]-[33].

Les conditions d'essai du cône en incidence sont : $T_t = 620$ K, $P_t = 60$ bar, $Re_u = 25 \times 10^6$ /m. Le nombre de Mach en sortie de tuyère est de 7. On rappelle que pour cette configuration, les instabilités mises en évidence sont le premier oblique et le second mode, surtout visibles sur les génératrices supérieures et inférieures, ainsi que le mode CF, responsable de la transition dans la partie équatoriale du cône. Les fréquences instables observées pour les ondes CF sont de l'ordre de la centaine de kilo Hertz. Dussillois trouve, en se basant uniquement sur les taux d'amplification des instabilités CF, qu'un facteur $N_t = 5.7$ corrèle bien les résultats expérimentaux dans la partie équatoriale.

L'étude expérimentale des ondes progressives pour le cône elliptique [33] met en évidence des fréquences comprises entre 10 et 20 kHz dans la région où la transition CF intervient. Ces fréquences sont en accord avec celles trouvées numériquement en cherchant à maximiser par rapport à f les facteurs N . Les facteurs N_t ne sont pas donnés dans l'article [33]. On peut cependant se référer à [4] qui constitue une étude numérique préliminaire aux expériences. Les facteurs N maximums calculés alors sont environ de 5 que ce soit pour les ondes stationnaires ou progressives.

10.5.3 Transition sous l'avant-corps du véhicule.

Finalement, d'après les facteurs N_t constatés sur Pegasus notamment, on peut espérer une transition naturelle près du plan de symétrie pour le cas $M_\infty = 4$ et entre le plan de symétrie et le bord latéral pour le cas $M_\infty = 6$, en se basant sur les facteurs N calculés à partir des ondes progressives (voir fig. 10.57). Les valeurs de N calculées à partir des ondes stationnaires sont *a priori* trop faibles pour déclencher la transition. En ce qui concerne, les cas $M_\infty = 8$ et $M_\infty = 6$, $P_{dyn} = 0.2$ bar, les facteurs N ne sont pas suffisamment élevés. C'est aussi probablement le cas pour la soufflerie HS. Par contre, en ce qui concerne la soufflerie BD, les valeurs de N élevées laisse supposer une probable transition naturelle (pour $N_t \approx 5$ - voir fig. 10.58).

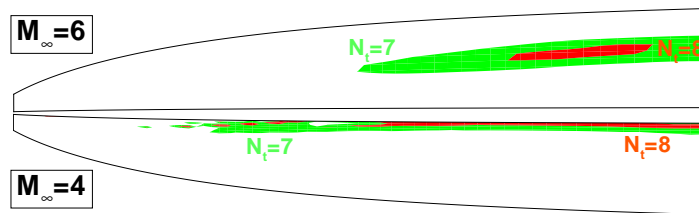


FIG. 10.57 – Iso-valeurs de $N_t = 7$ et $N_t = 8$ localisant le début de la transition pour les cas vol $M_\infty = 4$ et $M_\infty = 6$. $f = 10\text{kHz}$.

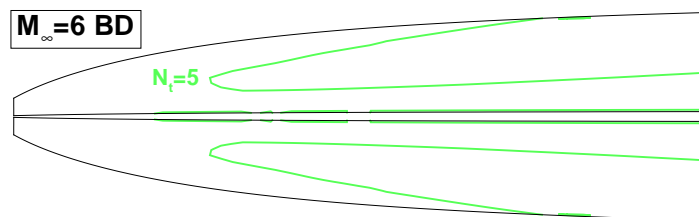


FIG. 10.58 – Iso-valeurs de $N_t = 5$ localisant le début de la transition pour le cas soufflerie BD à $M_\infty = 6$. $f = 30\text{kHz}$.

Chapitre 11

Proposition d'un nouveau critère.

11.1 Définition du critère. Test de la variation d'angle d'incidence.

Dans le cas présent, le critère Re_{δ_2}/M^e est en accord avec les résultats de stabilité lorsque l'altitude varie. Au contraire, les tendances observées sont opposées pour un changement d'angle d'incidence. Ce désaccord peut être expliqué de la manière suivante : l'intensité de l'instabilité CF dépend de l'intensité de l'écoulement transverse qui décroît avec l'incidence. D'autre part, si l'écoulement transverse diminue, alors la couche limite sous l'avant-corps aura tendance à s'épaissir, d'où une augmentation de Re_{δ_2}/M^e .

La solution envisagée pour remédier à ce problème est de baser la prévision de transition sur une quantification de l'écoulement transverse. La "quantité d'écoulement transverse" est ici définie par le volume engendré par le vecteur vitesse pour y variant de 0 à y^e (y^e étant déterminé par le critère de coupure des profils - voir §6.3.2). Ce volume correspond à la partie hachurée de la figure 11.1 et sera nommé *CFF*. On peut donc écrire :

$$CFF = \int_0^{y^e} \left(\int_0^{\bar{u}(y)} \omega(u) du \right) dy \quad (11.1)$$

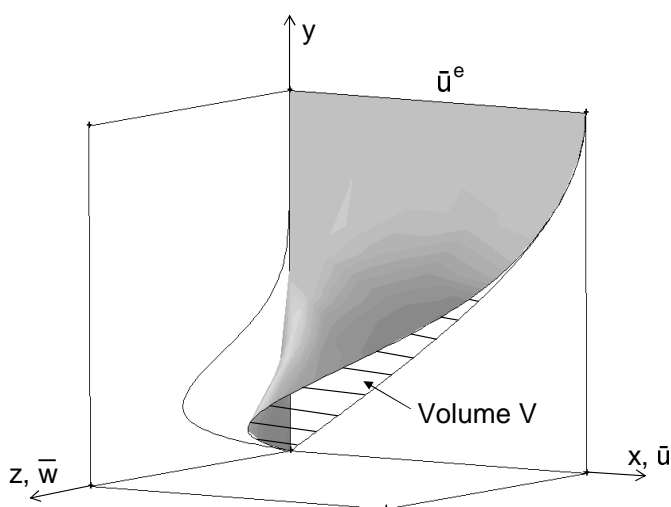


FIG. 11.1 – Définition de la quantité d'écoulement transverse (quantité CFF).

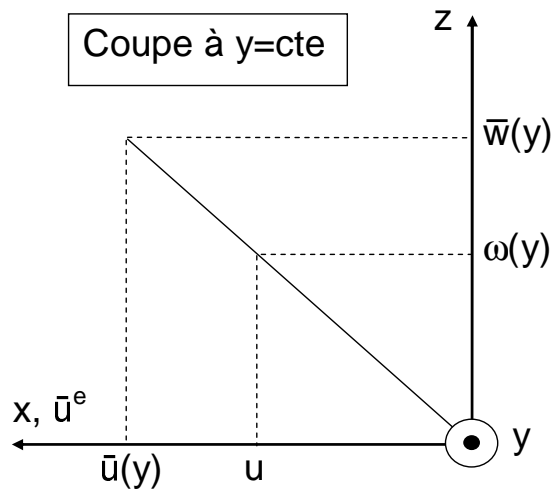


FIG. 11.2 – Définition de la quantité $\omega(y)$.

La quantité $\omega(y)$ est définie de la manière suivante (voir aussi figure 11.2) :

$$\omega(y) = \frac{\bar{w}(y)}{\bar{u}(y)} u \text{ pour } u \in [0, \bar{u}(y)] \quad (11.2)$$

Le repère utilisé est celui dont l'axe x est aligné avec u^e ($\theta^e = 0$ sur la figure A.2 de l'Annexe A). Ainsi pour un écoulement bidimensionnel, $CFF = 0$.

Les figures 11.3 à 11.5 présentent une comparaison qualitative de CFF et des taux d'amplification pour les trois incidences étudiées jusqu'à présent ($M_\infty = 6$, $P_{dyn} = 0.6$). L'accord entre les deux quantités est très satisfaisant et tend à confirmer le fait que l'intensité de l'instabilité CF dépend directement de l'intensité de l'écoulement transverse. Il existe néanmoins une zone près du nez et de l'axe de symétrie pour laquelle le CFF est très intense alors que rien de particulier n'est observé pour α_i . Il s'agit peut-être d'une manifestation des tourbillons longitudinaux présents dans cette zone.

La bonne adéquation des CFF et des α_i incite ensuite à traiter les premiers de la même manière que les seconds, c'est-à-dire, à les intégrer. Il n'est cependant pas possible de conduire l'intégration suivant les lignes tangentes à la vitesse de groupe car cela impliquerait d'effectuer des calculs de stabilité. On peut, par contre, utiliser l'hypothèse $\theta^e \approx \theta_g$ et intégrer suivant les lignes de courant à l'extérieur de la couche limite. Par analogie avec le facteur N , la quantité obtenue après intégration des CFF est appelée N_{CFF} .

Les résultats sont visibles sur les figures 11.6 à 11.8 qui montrent aussi les cartographies de facteurs N . L'adéquation entre les deux types de courbes est de nouveau satisfaisant, tant sur le plan quantitatif qu'au niveau de la distribution des iso-contours. On notera cependant les fortes valeurs de N_{CFF} près de l'axe de symétrie qui ne trouvent pas d'équivalent dans les cartographies de facteurs N . Ces valeurs élevées sont dues aux CFF importants constatés près du nez de l'avant-corps.

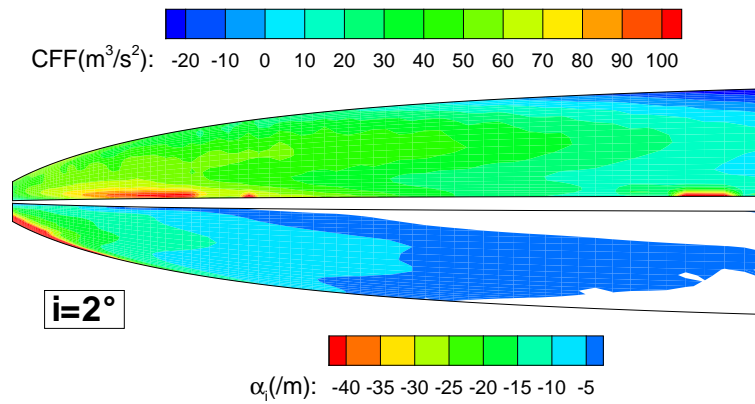


FIG. 11.3 – Comparaison de la quantité de CF (CFF) avec les taux d'amplification (α_i). $M_\infty = 6$, $i = 2^\circ$.

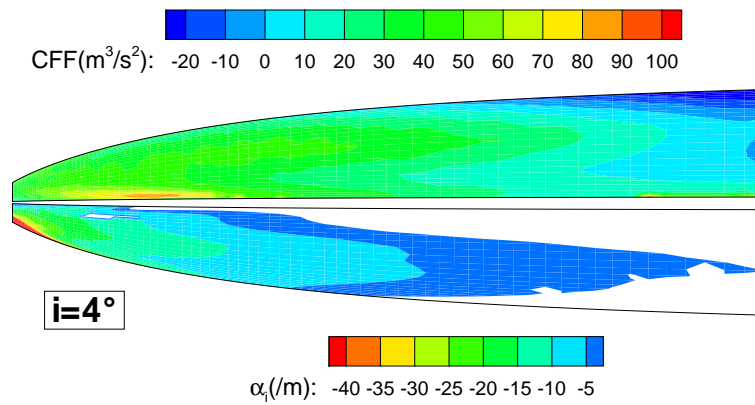


FIG. 11.4 – idem figure 11.3. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$.

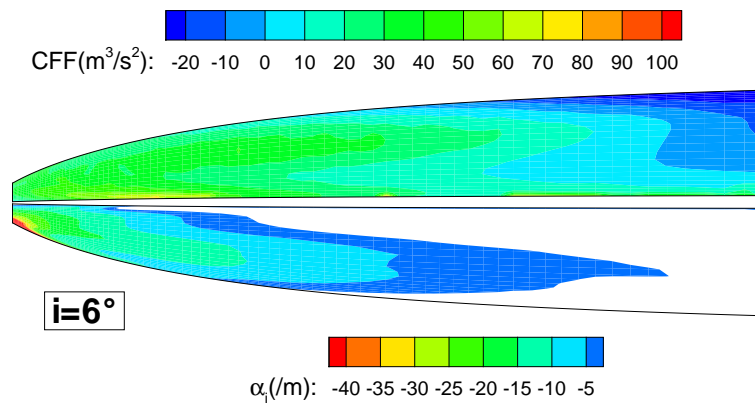


FIG. 11.5 – idem figure 11.3. $M_\infty = 6$, $i = 6^\circ$.

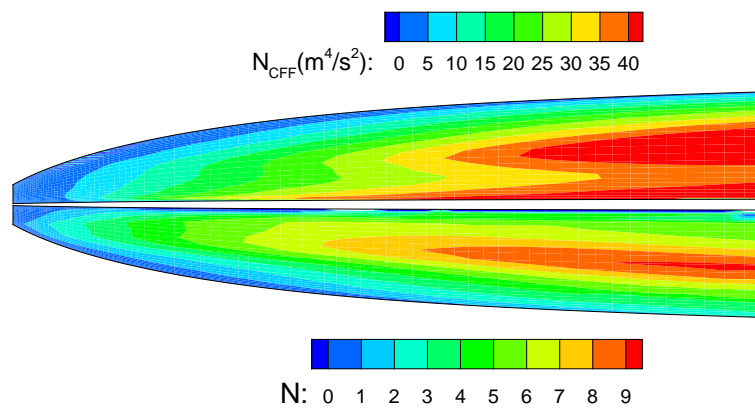


FIG. 11.6 – Comparaison des N_{CFF} avec les facteurs N . $M_\infty = 6$, $i = 2^\circ$.

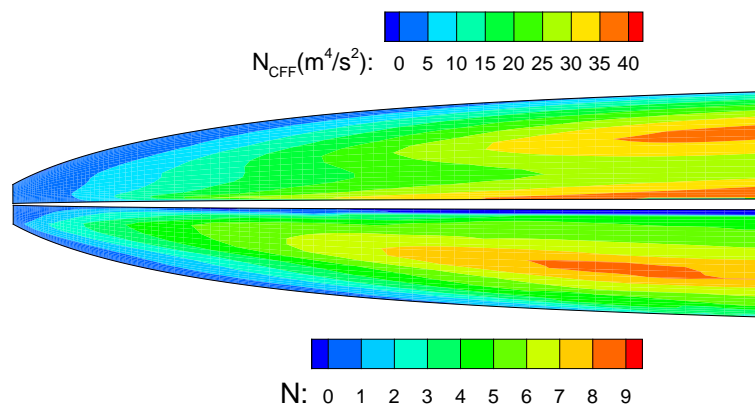


FIG. 11.7 – idem figure 11.6. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$.

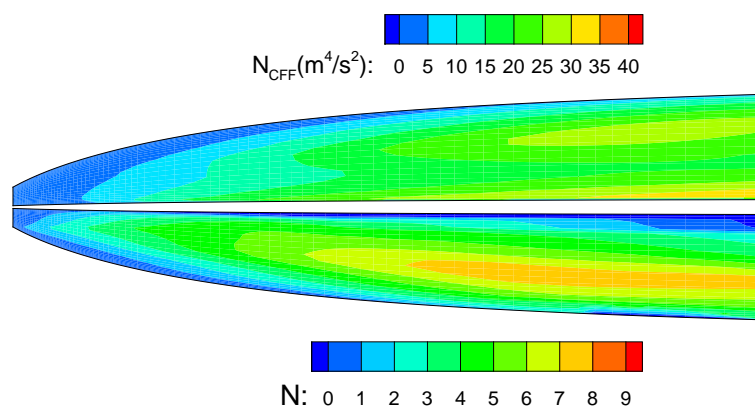


FIG. 11.8 – idem figure 11.6. $M_\infty = 6$, $i = 6^\circ$.

11.2 Test de la variation d'altitude.

Lorsque l'altitude varie à nombre de Mach et incidence constants, l'adéquation entre les évolutions respectives des facteurs N et des N_{CFF} est rompue : lorsque l'altitude augmente (et donc la pression dynamique diminue), les valeurs de N diminuent et celles de N_{CFF} augmentent (figures 11.10 et 11.12). Les valeurs élevées des N_{CFF} du cas $P_{dyn} = 0.2$ bar proviennent logiquement des CFF importants observés sur la figure 11.11. Cette augmentation des CFF entre les cas $P_{dyn} = 0.6$ et $P_{dyn} = 0.2$ bar ne provient vraisemblablement pas d'une forte variation de l'intensité de l'écoulement transverse ($i = cte$) mais plutôt d'une augmentation globale de l'épaisseur de la couche limite, ce qui se répercute logiquement sur le volume que représente le CFF .

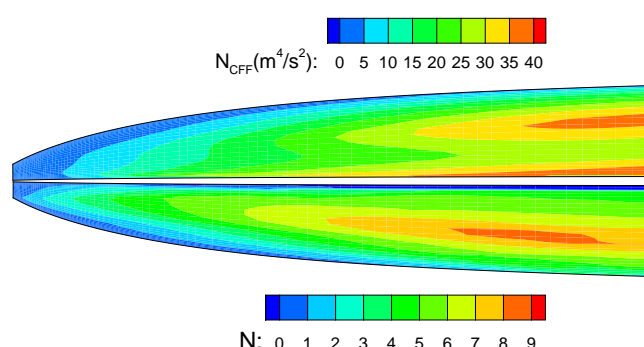
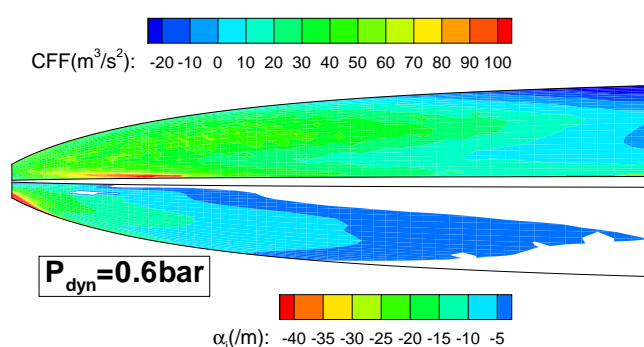


FIG. 11.9 – Comparaison de la quantité de CF (CFF) avec les taux d'amplification. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar.

FIG. 11.10 – Comparaison du critère N_{CFF} avec les facteurs N . $M_\infty = 6$, $i = 2^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar.

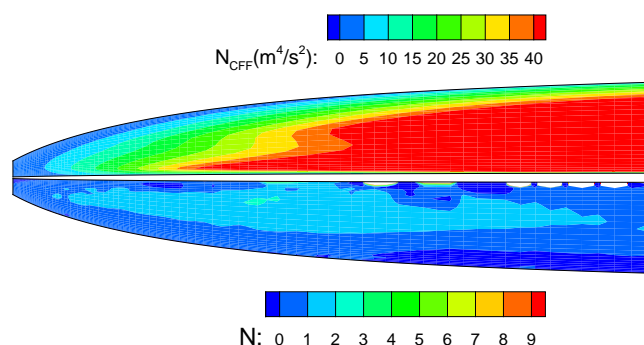
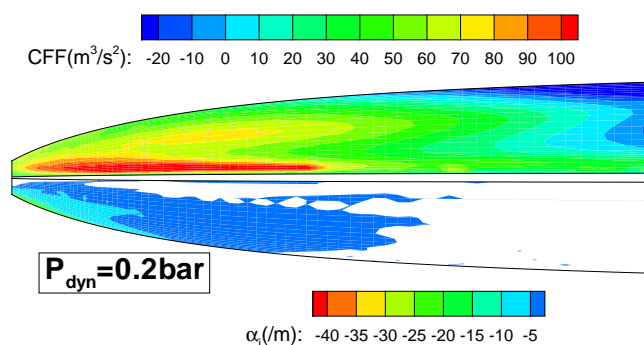


FIG. 11.11 – idem Fig.11.9 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.

FIG. 11.12 – idem Fig.11.10 : $P_{dyn} = 0.2$ bar.

11.3 Tentative d'adimensionnement.

Le critère NASP est en accord avec les facteurs N lorsque l'altitude varie mais pas le critère N_{CFF} . Le contraire est observé lorsque l'incidence varie. Est-il possible de combiner les avantages des deux critères en une seule formule ?

D'après l'analyse de Reshotko [8], le paramètre affectant le plus le critère NASP (lorsque l'altitude varie) est la masse volumique de l'air à l'infini ρ_∞ . L'idée est donc d'introduire ce paramètre dans CFF . D'autre part, afin de normaliser CFF par rapport à une grandeur relative à l'épaisseur de la couche limite, on décide de le diviser par δ_1 . On espère ainsi atténuer l'effet d'épaississement de la couche limite lorsque l'altitude diminue (voir §11.2). Enfin, les quantités μ_∞ et \bar{u}_∞ (respectivement viscosité et vitesse à l'infini) sont introduites de manière à ce que la quantité CFF ait la même unité que α_i (/m) :

$$CFF' = \frac{\rho_\infty}{\mu_\infty \delta_1 \bar{u}_\infty} CFF \quad (CFF : \text{m}^3/\text{s}^2, \quad CFF' : /\text{m}) \quad (11.3)$$

Ainsi, le critère N'_{CFF} est, comme le facteur N , sans dimension.

Note : Afin de ne pas alourdir les notations, nous considérons qu'à partir de maintenant nous ne travaillons qu'en grandeurs réduites (adimensionnées pour N_{CFF}). Les ' sont donc omis.

Les figures 11.13 à 11.16 présentent une comparaison des valeurs réduites du critère avec les résultats du calcul de stabilité (α_i, N) lorsque la pression dynamique diminue de 0.6 bar à 0.2 bar (augmentation de l'altitude de 25 à 32 km). Contrairement au paragraphe précédent, les deux approches sont en très bon accord. Le critère réduit a aussi été testé sur le cas $M_\infty = 8$, pour lequel l'altitude de vol est de 30 km. De nouveau, l'évolution des CFF et des N_{CFF} coïncide avec celle des α_i et N respectivement, par rapport aux deux cas précédents. Il n'est cependant pas possible de savoir si cette évolution est principalement due au changement de nombre de Mach ou au changement d'altitude. Un calcul à altitude identique (mais vitesse différente) nous permettrait de répondre à cette question. Il se pourrait que le résultat de ce calcul amène à reconsidérer l'adimensionnement, notamment en remplaçant \bar{u}_∞ par \bar{u}^e , vitesse à l'extérieur de la couche limite.

Le critère réduit donne donc de bons résultats lorsque l'altitude varie. Il faut à présent vérifier qu'il n'a pas perdu sa qualité première, à savoir rendre compte de la variation des facteurs N lorsque l'incidence de vol change. En comparant les valeurs du critère et celles du calcul de stabilité sur les figures 11.19 à 11.24, on peut constater que les valeurs de CFF et de N_{CFF} évoluent de la même manière que α_i et N lorsque l'incidence augmente de 2 à 6°.

Les résultats obtenus avec ce nouveau critère sont encourageants. Il conviendrait de multiplier les comparaisons avec les calculs de stabilité pour s'assurer de sa validité dans une large enveloppe de vol. Rappelons aussi qu'il n'est valable que dans la mesure où l'instabilité CF est dominante. À ce titre, les résultats obtenus pour le cas $M_\infty = 4$ sont assez troublants (voir figures 11.25 et 11.26).

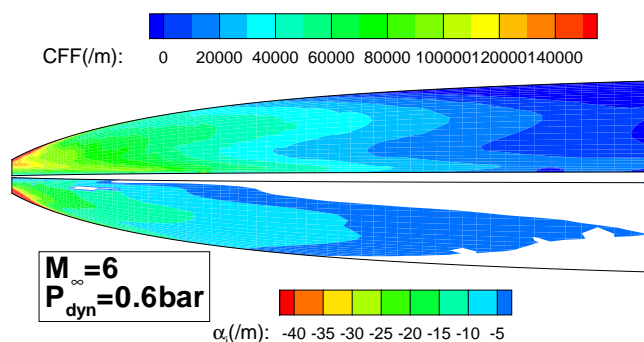


FIG. 11.13 – Comparaison de la quantité de CF adimensionnée (CFF) avec les taux d'amplification. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar.

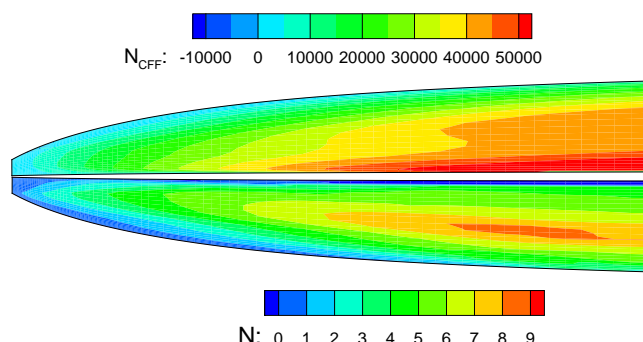


FIG. 11.14 – Comparaison du critère N_{CFF} adimensionné avec les facteurs N . $M_\infty = 6$, $i = 2^\circ$, $P_{dyn} = 0.6$ bar.

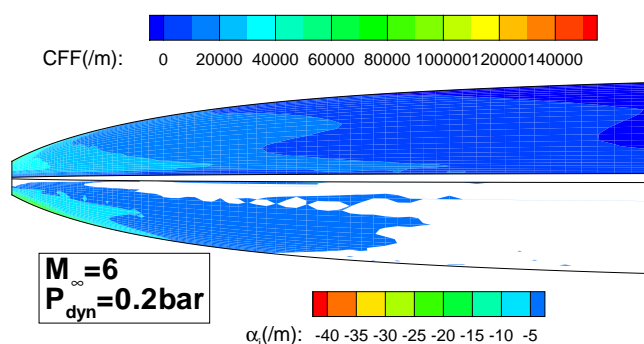


FIG. 11.15 – idem figure 11.13. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.2$ bar.

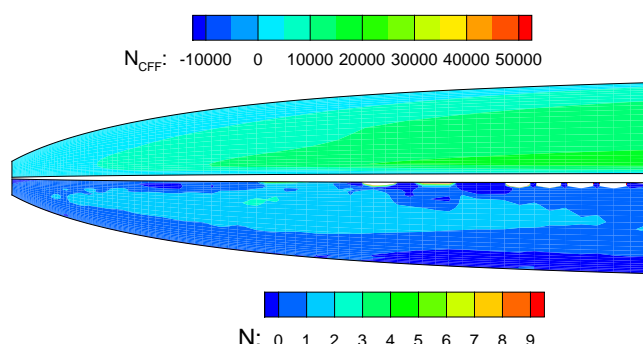


FIG. 11.16 – idem figure 11.14. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.2$ bar.

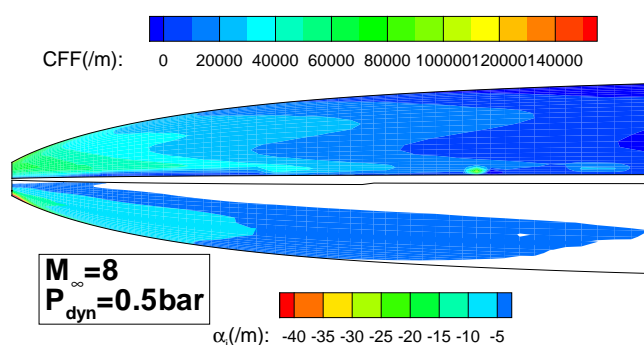


FIG. 11.17 – idem figure 11.13. $M_\infty = 8$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.5$ bar.

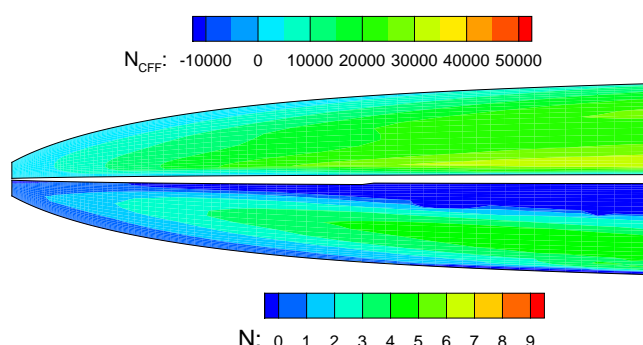


FIG. 11.18 – idem figure 11.14. $M_\infty = 8$, $i = 4^\circ$, $P_{dyn} = 0.5$ bar.

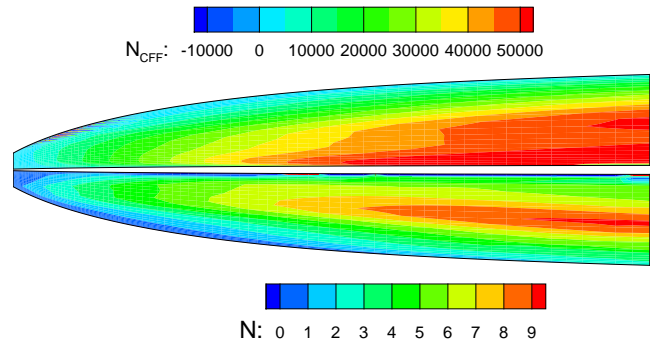
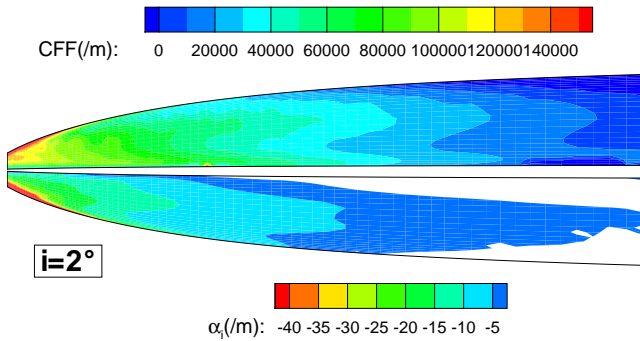


FIG. 11.19 – Comparaison de la quantité de CF adimensionnée (CFF) avec les taux d'amplification. $M_\infty = 6$, $i = 2^\circ$.

FIG. 11.20 – Comparaison du critère N_{CFF} adimensionné avec les facteurs N . $M_\infty = 6$, $i = 2^\circ$.

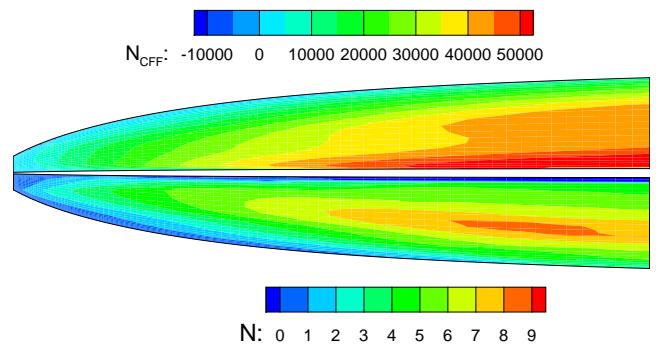
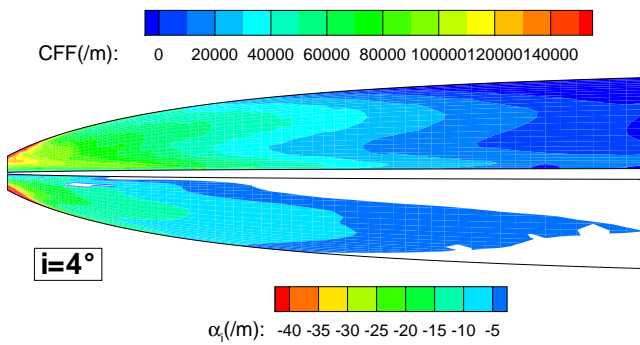


FIG. 11.21 – idem figure 11.19. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$.

FIG. 11.22 – idem figure 11.20. $M_\infty = 6$, $i = 4^\circ$.

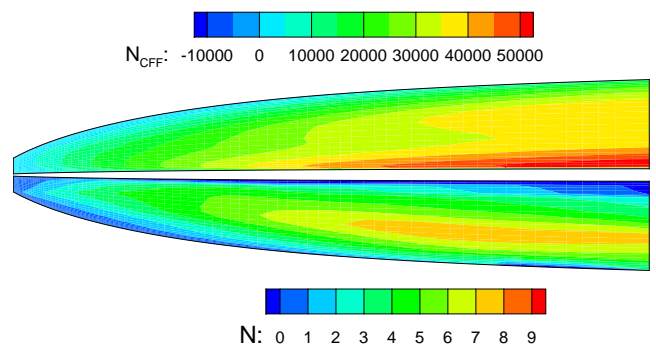
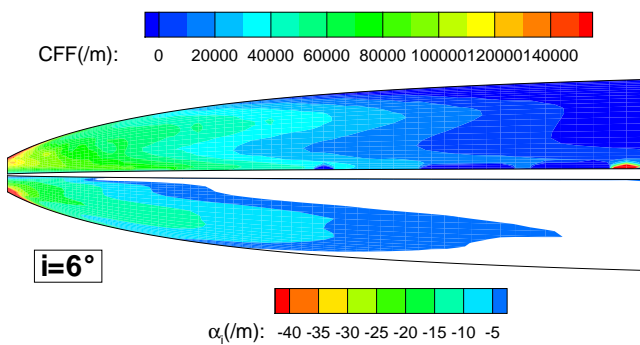


FIG. 11.23 – idem figure 11.19. $M_\infty = 6$, $i = 6^\circ$.

FIG. 11.24 – idem figure 11.20. $M_\infty = 6$, $i = 6^\circ$.

Rappelons tout d'abord que, dans ce cas, deux types d'instabilités coexistent (premier mode oblique + CF). À la zone stable visible près de la pointe avant dans la cartographie de α_i , correspond une zone pour laquelle l'écoulement est pratiquement 2D ($CFF \approx 0$). Ensuite, d'entièrement CF, l'instabilité se transforme en un amalgame CF + 1^{er} mode vers l'aval. Parallèlement, les CFF diminuent mais restent positifs dans la même région, ce qui dénote une présence de l'écoulement transversal. Or on sait que cet écoulement transverse a un effet très déstabilisant sur le premier oblique (voir figure 5.2). Il en résulte que l'intégration des CFF (pour le calcul des N_{CFF}) dans cette région d'instabilité mixte n'est pas totalement dénuée de sens et il se trouve que pour ce cas précis les résultats des deux approches (critère et calcul de stabilité) concordent. Il convient cependant d'être prudent dans l'utilisation du critère lorsque des mécanismes d'instabilité autres que le CF sont présents. Si l'on considérait par exemple un écoulement 2D instable, il est évident que le critère serait alors inutilisable.

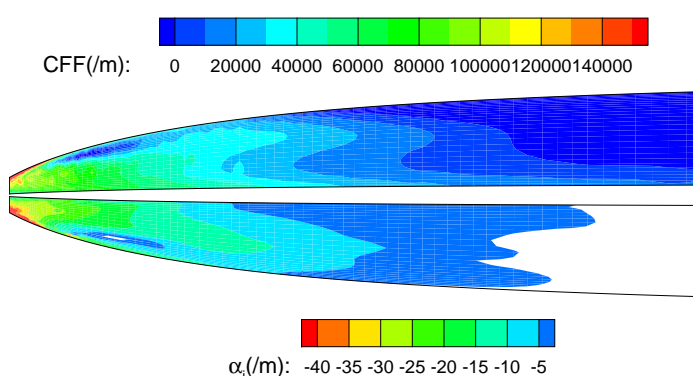


FIG. 11.25 – Comparaison de la quantité de CF adimensionnée (CFF) avec les taux d'amplification. $M_\infty = 4$, $i = 4^\circ$.

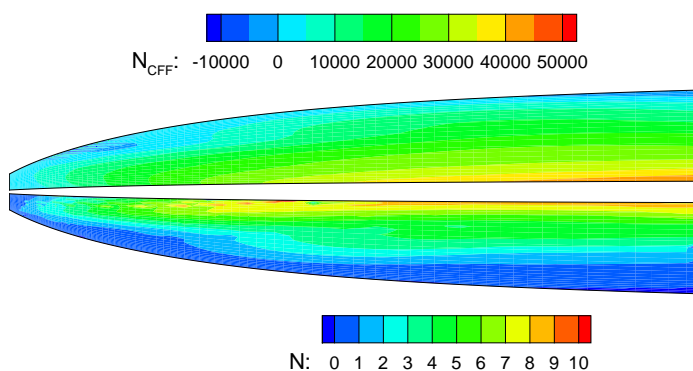


FIG. 11.26 – Comparaison du critère N_{CFF} adimensionné avec les facteurs N . $M_\infty = 4$, $i = 4^\circ$.

Conclusion et perspectives

Les travaux menés pendant cette thèse avaient pour but d'étudier la stabilité et de prévoir la transition laminaire / turbulent de la couche limite sous l'avant-corps d'un véhicule hypersonique. La méthode employée afin d'atteindre cet objectif, fut celle du e^N , appliquée à des résultats de calcul de stabilité en approche linéaire locale. Le code de stabilité utilisé a été développé pendant la thèse. Les profils de l'écoulement ont été calculés à l'aide du code Navier-Stokes commercial Fluent® 6.3. Les conclusions apportées par l'étude peuvent être classées dans deux catégories : la méthodologie et les résultats de stabilité.

La méthodologie.

Le code de stabilité linéaire s'appuie sur la résolution des équations aux petites perturbations écrites en approche locale. La méthode de résolution est constitué par une méthode de tir et un algorithme Runge-Kutta. Le code ainsi obtenu permet de calculer les taux d'amplification locaux des ondes instables. Une comparaison par rapport à des calculs obtenus à l'ONERA [56] et par rapport à des résultats obtenus par Malik *et al.* [54] ont permis de valider le code en approche gaz idéal.

Pour le reste de l'étude, l'air est considéré comme un gaz parfait à coefficients thermo-transport variables : les chaleurs spécifiques (C_p), la conductivité thermique (k) et la viscosité (μ) dépendent de la température. Les C_p sont déterminés grâce à la base Burcat pour les hautes températures, et d'après la base fournie par Lemmon *et al.* [51] pour les basses températures. Les coefficients k et μ sont déterminés grâce à un polynôme d'interpolation sur des valeurs calculées à l'aide de CHEMKIN II. Cette approche a été comparée à des calculs réalisés en gaz dissociés à l'équilibre chimique et en déséquilibre pour un cas que l'on peut qualifier de sévère ($M_\infty = 10$). Globalement, l'hypothèse de gaz parfait permet de reproduire les tendances observées en gaz dissocié avec toutefois de légères différences dans les valeurs des taux d'amplification. Néanmoins, les nombres de Mach rencontrés lors de notre étude sont nettement inférieurs à 10 et l'on considère l'approche gaz parfait non-dissocié comme étant raisonnable.

L'utilisation de Fluent® a été validée sur des plaques planes par comparaison avec des résultats obtenus en résolvant les équations de similitude de Levy-Lees. Les résultats montrent une très bonne concordance des profils de vitesse et de température, ainsi que de leurs dérivées premières et secondes pour une vingtaine de points dans la couche limite. Malgré cela, les calculs de stabilité montrent que les taux d'amplification ont tendance à diverger pour un balayage en espace, à fréquence constante. Pour une plaque plane de 6 m de long, ceci entraîne un écart de 0.2 dans les facteurs N calculés. Au vue de l'incertitude sur le facteur N de transition, on peut considérer que cet écart est sans conséquence.

L'approche utilisée, dans la présente étude, pour déterminer la direction d'amplification des ondes ($\bar{\psi}$) consiste à poser $\bar{\psi} = \theta_g$, où θ_g représente la direction de la vitesse de groupe. Une méthode originale du calcul de cette direction a été proposée. Cette méthode permet de calculer θ_g directement dans le cadre d'une étude spatiale alors que traditionnellement, ce calcul est effectué en approche temporelle. Or l'approche spatiale est mieux adaptée à l'étude des instabilités de couche limite qui sont convectives. Cette nouvelle technique du calcul de θ_g a été validée analytiquement sur le modèle dispersif non-dissipatif de

Korteweg de Vries.

Les résultats de stabilité

L'analyse de stabilité a permis de mettre en évidence plusieurs mécanismes susceptibles de faire transitionner l'écoulement proche paroi : effet de la couche entropique, instabilité CrossFlow (CF), premier mode oblique et second mode droit.

L'émoussement de la pointe avant du véhicule induit, le long du plan de symétrie, une couche entropique se développant de l'amont vers l'aval. La présence de cette couche entropique modifie les profils de vitesse et de température de l'écoulement proche paroi. En particulier, les profils de vitesse présentent un point d'inflexion, ce qui se traduit par un point d'inflexion généralisé (PIG) dans les profils de $\rho d\bar{u}/dy$. Or ce PIG constitue, d'après Lees et Lin, une condition suffisante d'existence d'ondes instables [17]. Numériquement, on vérifie la présence d'une instabilité dont les caractéristiques satisfont la théorie de Lees et Lin et dont les fonctions propres exhibent un pic situé à la même altitude que le PIG. Cette onde possède des taux d'amplification non-négligeables qui conduisent à un facteur N^{max} de 4. D'après les valeurs standards de facteur N à la transition, une telle onde ne peut faire transitionner l'écoulement par elle-même dans un environnement calme (vol). Par contre, est-il possible que cette onde puisse se coupler à des instabilités se développant dans la couche limite ? L'étude de stabilité seule ne peut répondre à cette question qui nécessiterait une approche DNS.

Si on s'éloigne du plan de symétrie du véhicule, la couche entropique disparaît rapidement, et avec elle, l'instabilité évoquée précédemment. Ainsi sur le reste de l'avant-corps, l'instabilité CF domine. Ceci s'explique par la présence d'une composante transversale de vitesse importante dans la couche limite. Cette composante provient d'un fort gradient de pression des bords latéraux de la géométrie vers le plan de symétrie, provoqué par l'onde de choc émanant du nez.

La plupart des calculs ont été réalisés pour des parois radiatives (froides). Lorsque la paroi est considérée comme étant adiabatique, un premier mode oblique apparaît. De même, ce premier mode a été détecté pour le cas vol à $M_\infty = 4$ et à l'altitude de 20 km. Dans les deux cas, on observe une combinaison des instabilités CF et du premier mode oblique.

Finalement, un second mode droit a été détecté pour le cas vol à Mach 8. Cependant, les facteurs N^{max} sont trop faibles pour pouvoir envisager une transition liée à ce mode.

Une étude paramétrique a été menée dans des conditions relatives au vol. Les résultats du calcul de stabilité ont été comparés au critère NASP. Les paramètres étudiés sont l'incidence i du vol, l'altitude et le nombre de Mach. Les résultats sont les suivants.

- L'augmentation de l'altitude se traduit par une diminution des facteurs N^{max} : accord avec le critère NASP.
- Pour les cas $M_\infty = 6$ et $M_\infty = 8$, l'augmentation du nombre de Mach et de l'altitude se traduit par une diminution des facteurs N^{max} : accord avec le critère NASP.
- L'augmentation de l'incidence se traduit par une diminution des facteurs N^{max} : contradiction avec le critère NASP.

En ce qui concerne le cas $M_\infty = 4$, la présence du premier mode oblique empêche une comparaison directe avec les cas $M_\infty = 6$ et $M_\infty = 8$ pour lesquels seule l'instabilité CF est observée. On peut néanmoins dire que le niveau maximal des facteurs N atteint équivaut à celui du cas $M_\infty = 6$ mais que la répartition des iso-valeurs de N est différente. La comparaison des résultats de stabilité avec le critère NASP aboutit à des résultats non-concordants.

Cette étude permet de mettre en évidence les limitations du critère NASP. Elle confirme ainsi l'ana-

lyse menée par Reshotko [8], qui aboutit à la conclusion suivante : le critère n'est adapté que lorsque l'altitude varie et que la nature de l'instabilité ne change pas.

Le problème de la prévision de transition est assez délicat à aborder dans la mesure où peu de corrélations entre des essais en vol et des calculs de stabilité existent pour des instabilités CF en régime hypersonique. La plage de facteurs N_t concernée s'étend environ de 7 à 14 pour le cas vol et se situe autour de 5 pour le cas d'une soufflerie conventionnelle. De plus, l'instabilité CF se traduit par des ondes stationnaires et progressives. Les deux sont susceptibles de provoquer la transition mais suivant des mécanismes différents et il est, à l'heure actuelle, difficile de privilégier l'un ou l'autre de ces mécanismes. Le choix semble dépendre d'un problème de réceptivité. Les ondes stationnaires sont plus sensibles aux rugosités tandis que les ondes progressives sont plus sensibles au taux de perturbation extérieur. Ainsi pour le cas vol, une transition due à la rugosité de paroi est à envisager tandis que dans le cas d'une soufflerie, une transition due au taux de perturbation est plus probable.

Dans notre cas, les facteurs N maximaux mis en évidence n'excèdent pas 8 dans le cas vol. De plus cette valeur ne concerne qu'une petite région sous l'avant-corps. Ainsi, même si la couche limite transitionne, il est peu probable qu'elle soit entièrement turbulente avant l'entrée d'air du réacteur. En ce qui concerne les calculs en soufflerie, les facteurs N^{max} obtenus en soufflerie Blow-Down s'élèvent à 8, ce qui est largement suffisant pour espérer une transition naturelle dans une soufflerie conventionnelle. Par contre, pour la soufflerie Hot-Shot les facteurs N^{max} sont limités à 2 ce qui semble peu pour faire transitionner l'écoulement.

La dernière partie de la thèse concerne la mise au point d'un nouveau critère de transition. Ce dernier tente d'établir une correspondance directe entre quantité d'écoulement transversal et taux d'amplification des ondes CF. Les premiers tests ont donné de bons résultats pour une variation de l'angle d'incidence mais pas pour une variation de l'altitude de vol, contrairement au critère NASP. L'idée suivante a donc été de tenter de combiner les deux approches. Les tests effectués avec ce nouveau critère montrent dans tous les cas une bonne adéquation avec les résultats de stabilité. Ces résultats encourageants incitent à poursuivre cet effort en multipliant les comparaisons pour d'autres valeurs des paramètres. Enfin, d'une manière générale, des comparaisons du critère et des résultats de stabilité avec des tests en soufflerie sont nécessaires.

Le travail présenté dans ce mémoire a donné lieu à trois communications dans des conférences internationales [63], [64], [65], ainsi qu'à un article soumis (et accepté) au journal *Spacecraft and Rockets*.

Bibliographie

- [1] M.V. MORKOVIN, E. RESHOTKO et T. HERBERT : Transition in Open Flow Systems - a Reassessment. *Bull. Am. Phys. Soc.*, (39):1882, 1994.
- [2] S.A. BERRY, M. DiFULVIO et M.K. KOWALKOWSKI : Forced Boundary-Layer Transition on X-43 (Hyper-X) in NASA LaRC 20-inch Mach 6 Air Tunnel. Nasa/tm-2000-210316, August 2000.
- [3] F. VIGNAU : *Étude Théorique et Expérimentale de la Transition en Écoulement Bidimensionnel Compressible*. Thèse de doctorat, ENSAE, 1989.
- [4] R.L. KIMMEL, M.A. KLEIN et S.N. SCHWOERKE : Three-dimensionnal Hypersonic Laminar Boundary-Layer computations for Transition Experiment Design. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 34(4), July-August 1997.
- [5] E.H. HIRSCHEL : Historical Perspective on Programs, Vehicles and Technology Issues. *In Critical Technologies for Hypersonic Vehicles Development*, RTO-AVT-VKI Lecture Series, May 2004.
- [6] S.P. SCHNEIDER : Hypersonic Laminar-Transition on Circular Cones and Scramjets Forebodies. *Progress in Aerospace Sciences*, 40:1–50, 2004.
- [7] Defense Science BOARD : Report of the Defense Science Board Task Force on National Aero-Space Plane Program. Rapport technique, November 1992. DTIC citation AD-A274530.
- [8] E. RESHOTKO : Is Re_θ/M^e a meaningful transition criterion ? *AIAA paper 2007-943*, Jan. 2007.
- [9] A.M.O. SMITH et N. GAMBERONI : *In Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech.*, volume 4, pages 234–244, 1957.
- [10] P.J. SCHMID, A. LUNDBLADH et D.S. HENNINGSON : Spatial Evolution of Disturbances in Plane Poiseuille Flow. *In Transition, Turbulence and Combustion Modeling*, volume 1, page 287. Éditeurs : Hussaini, M.Y., Gatski, T.B. et Jackson, T.L., Kluwer, Berlin, 1994.
- [11] E. RESHOTKO et A. TUMIN : Spatial Theory of Optimal Disturbances in a Circular Pipe Flow. *Phys. Fluids*, 13:991, 2001.
- [12] E. RESHOTKO et A. TUMIN : Roles of Transient Growth in Roughness-Induced Transition. *AIAA journal*, 42(4), April 2004.
- [13] S.P. SCHNEIDER : Flight Data for Boundary Layer Transition at Hypersonic and Supersonic Speeds. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol.36(1):8–20, 1999.
- [14] F. LOUIS : *Étude de la Transition Laminaire-Turbulent dans des Écoulements Bi- et Tridimensionnels Supersoniques*. Thèse de doctorat, ENSAE, 2004.
- [15] G. SCHRAUF : Evaluation of the F100 Flight Tests - Comparison of Local and Non-Local Stability Theory. Rapport technique, 20 January 2003. ALTTA Technical Report N°64.
- [16] H.K. SKRAMSTAD et G.B. SCHUBAUER : Laminar Boundary Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate. Naca report no. 909, 1948.

- [17] L.L. LEES et C.C. LIN : Investigation of the Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. Naca technical note no.1115, 1946.
- [18] J. LAUFER et T. VREBALOVITCH : Stability and Transition on a Supersonic Laminar Boundary Layer on an Insulated Flat Plate. *J. Fluid Mech.*, 9(2):257–294, 1960.
- [19] J.M. KENDALL : Investigation of the Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. *AIAA paper*, (74-133), 1974.
- [20] L.M. MACK : Stability of the Compressible Laminar Boundary Layer according to a Direct Numerical Solution. In *AGARDograp 97*, pages 329–362. 1965.
- [21] L.M. MACK : Boundary Layer Stability Theory. Rapport technique, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1969.
- [22] L.M. MACK : Linear Stability and the Problem of Supersonic Boundary Layer Transition. *AIAA journal*, 13(3):278–289, 1975.
- [23] L.M. MACK : Transition Prediction and Linear Stability Theory. In *AGARD Conference Proceedings*, volume 224, Paris, 1977.
- [24] L.M. MACK : Compressible Boundary Layer Stability Calculations for Sweptback Wings with Suction. *AIAA Journal*, 20:363–369, 1981.
- [25] L.M. MACK : Boundary Layer Linear Stability Theory. In *AGARD Report*, volume 709, pages 3.1–3.81. VKI, Brussels, 1984.
- [26] J.C. DONALDSON, L.C. SILER, K.F. STETSON et E.R. THOMPSON : Laminar Boundary Layer Stability Experiments on a Cone at Mach 8, Part 1 : Sharp Cone. *AIAA paper*, (83-1761), 1983.
- [27] G.G. MATEER : The effect of Angle of Attack on Boundary-Layer Transition on Cones. *AIAA journal*, 10(8):1127–1128, August 1972.
- [28] J.C. DONALDSON, L.C. SILER, K.F. STETSON et E.R. THOMPSON : Laminar Boundary Layer Stability Experiments on a Cone at Mach 8, Part 3 : Sharp Cone at Angle of Attack. *AIAA paper*, (85-0492), 1985.
- [29] R.A. KING : Three-Dimensionnal Boundary-Layer Transition on a Cone at Mach 3.5. *Experiments in Fluids*, 13:305–314, 1992.
- [30] D. ARNAL, M.J. PAVRY et A. SÉRAUDIE : A Study of Laminar-Turbulent Transition Criteria for Hypersonic Flow over Slender Lifting Configurations. Technical report, derat 108/5018.95, 1995.
- [31] L. DUSSILLOLS : *Calculs de Stabilité et Transition sur des Configurations Hypersoniques Complexes*. Thèse de doctorat, ENSAE, 1999.
- [32] R.L. KIMMEL, J. POGGIE et S.N. SCHWOERKE : Laminar-Turbulent Transition in a Mach 8 elliptic cone flow. *AIAA Journal*, 37(9), September 1999.
- [33] J. POGGIE, L. KIMMEL et S.N. SCHWOERKE : Traveling Instability Waves in a Mach 8 Flow over an Elliptic Cone. *AIAA journal*, 38(2), February 2000.
- [34] W.S. SARIC, H.L. REED et E.B. WHITE : Stability and Transition of Three-Dimensionnal Boundary Layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35:413–440, 2003.
- [35] H. DEYLHE et H. BIPPES : Disturbance Growth in an Unstable Three-dimensionnal Boundary Layer and its Dependence on Initial Conditions. *J. Fluid Mech.*, (316):73–113, 1996.
- [36] M.R. MALIK, F. LI et M. CHOUDHARI : Analysis of Crossflow Transition Flight Experiments aboard the Pegasus Launch Vehicle. Miami, FL, USA, 25 - 28 June 2007. 37th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit.

-
- [37] L.N. CATTAFESTA, V. IYER, J.A. MASAD, R.A. KING et J.R. DAGENHART : Three-Dimensionnal Boundary-Layer Transition on a Swept Wing at Mach 3.5. *AIAA journal*, 33(11), November 1995.
- [38] S. BERRY, A. AUSLENDER, A.D. DILLEY et J. CALLEJA : Hypersonic Boundary-Layer Trip Development for Hyper-X. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 38(6):853–64, 2001.
- [39] P. HUERRE et P.A. MONKEWITZ : Absolute and Convective Instabilities in Free Shear Layers. *J. Fluid Mech.*, 159:151–168, 1985.
- [40] M. GASTER : A Note on the Relation Between Temporally Increasing and Spatially Increasing Disturbances in Hydrodynamic Stability. *J. Fluid Mech.*, (14), 1962.
- [41] F. LABURTHE : *Problème de Stabilité et Prédiction de la Transition dans des Configurations Tridimensionnelles Incompressibles et Compressibles*. Thèse de doctorat, ENSAE, 1992.
- [42] C.C. LIN : *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge monographs on Mechanics and Applied Mathematics. Cambridge university press, 1955.
- [43] D. ARNAL : Transition Prediction in Industrial Application. *In Transition, Turbulence and Combustion Modeling*, ERCOFTAC series. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [44] D. ARNAL : Boundary Layer Transition : Predictions Based on Linear Theory. *In Progress in Transition Modeling*, AGARD Report No 793. 1993.
- [45] A.H. NAYFEH : Stability of Three-Dimensionnal Boundary Layers. *AIAA Journal*, 18(4):406–416, 1980.
- [46] T. CEBECI et K. STEWARTSON : On Stability and Transition of Three-Dimensionnal Flows. *AIAA Journal*, 18(4):398–405, 1980.
- [47] L.M. MACK : Stability of Three-Dimensionnal Boundary Layers on Swept Wings at Transonic Speeds. *In IUTAM Symp. Transsonicum III*, Göttingen, 1988. Eds. Zierep and Oertel, Springer Verlag.
- [48] R.A. ROZENDAAL : Variable-Sweep Transition Flight Experiment (VSTFE) - Stability Code Development and Clean-up Glove Analysis. *In Natural Laminar Flow and Laminar Flow Control Research*, Hampton, March 1987 - NASA CP 2487, Part 3. December 1987.
- [49] G. CASALIS : *Instabilités Primaire et Secondaire dans la Couche Limite Laminaire pour un Fluide Incompressible*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1990.
- [50] D. ARNAL : Établissement et Résolution des Équations de Stabilité en Écoulements Compressibles - Exemples de Résultats. Rapport technique, Novembre 1986. OA 35/5018 AYD (DERAT 35/5018 DY).
- [51] E.W. LEMMON *et al.* : Thermodynamic Properties of Air and Mixture of Nitrogen, Argon, and Oxygen from 60K to 2000K at Pressure to 2000Pa. *J. Phys. Ref. Data*, 29(3), 2000.
- [52] C.R. WILKE : A Viscosity Equation for Gas Mixture. *Chemical Physics*, 18:517–19, 1950.
- [53] R.J. KEE *et al.* : CHEMKIN collection, release 3.5. Rapport technique, Sandia National Laboratories, San Diego, CA, 1999.
- [54] M.R. MALIK et E.C. ANDERSON : Real Gas Effect on Hypersonic Boundary Layer Stability. *Physics of Fluids A*, 3(5), 1991.
- [55] M.L. HUDSON et N. CHOKANI : Linear Stability of Hypersonic Flow in Thermochemical Nonequilibrium. *AIAA Journal*, 35(6), June 1997.
- [56] J. PERRAUD, D. ARNAL, L. DUSSILLOLS et F. THIVET : Studies of Laminar-Turbulent Transition in Hypersonic Boundary-Layers at ONERA. Noordwijk, The Netherlands, November 1998. Third European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles.

- [57] S. MATSUMURA et S.P. SCHNEIDER : Streamwise Vortex Instability and Transition on the Hyper-2000 Scramjet Forebody. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 42(1), 2005.
- [58] K.F. STETSON et G.H. RUSHTON : Shock Tunnel Investigation of Boundary-Layer Transition at $M = 5.5$. *AIAA Journal*, 5(2):899–906, 1967.
- [59] A. FEDOROV, A. and Tumin : Evolution of Disturbances in Entropy Layer on Blunted Plate in Supersonic Flow. *AIAA Journal*, 42(1):89–94, 2004.
- [60] A.A. MASLOV, A.N. SHIPYUK, D.A. BOUTIN et A.A. SIDORENKO : Mach 6 Boundary-Layer Stability Experiments on Sharp and Blunted Cones. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 43(1):71–76, 2006.
- [61] G. DIETZ et S. HEIN : Entropy-Layer Instabilities over a Blunted Flat Plate in Supersonic Flow. *Physics of Fluids*, 11(1):7–9, 1999.
- [62] P.F. BRINICH : Effects of Leading-Edge Geometry on Boundary Layer Transition at Mach 3.1. Naca technical note no.3659, 1956.
- [63] M. FERRIER, I. FEDIOUN et D. DAVIDENKO : Boundary Layer Transition Prediction on a Hypersonic Vehicle Forebody. 6-9 November 2006. 14th AIAA/AHI Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference.
- [64] M. FERRIER, E ORLIK, D. DAVIDENKO et I. FEDIOUN : Three Dimensional Linear Stability Analysis of the Boundary and Entropy Layers on a Hypersonic Vehicle Forebody. July 2007. 2nd European Conference for Aerospace Sciences.
- [65] M. FERRIER, E ORLIK, I. FEDIOUN et D. DAVIDENKO : Transition Prediction of the Three-Dimensional Boundary Layer Developing Under a Hypersonic Vehicle Forebody. 28 April - 01 May 2008. 15th AIAA/AHI Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference.

Annexe A

Définition des repères de calculs

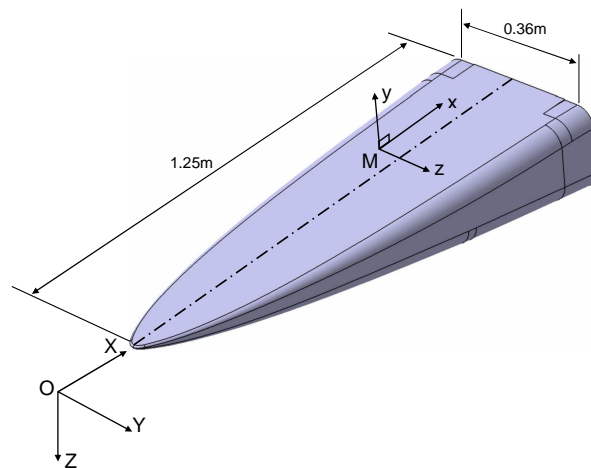


FIG. A.1 – Définition du repère de stabilité (vue isométrique de l'avant-corps du véhicule).

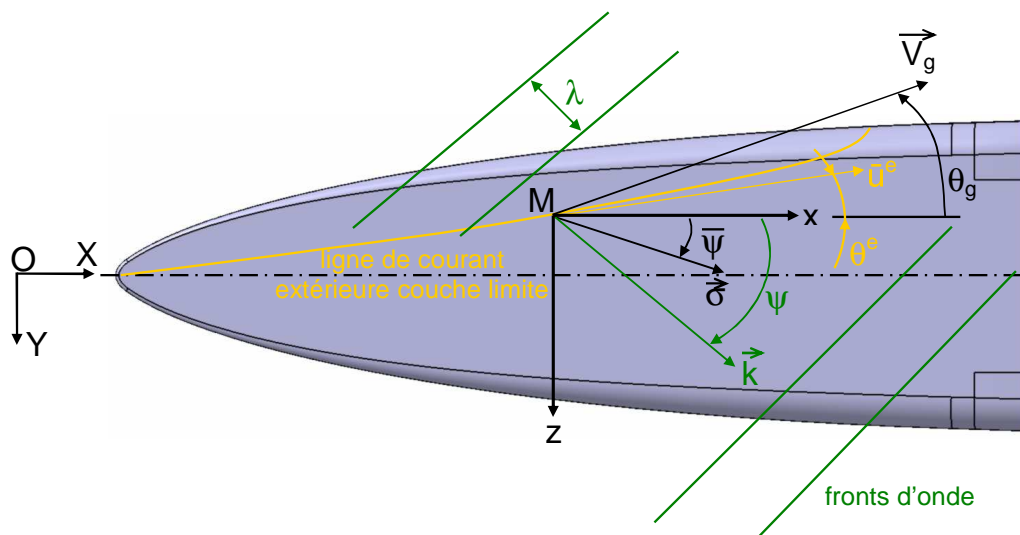


FIG. A.2 – Définition du repère de stabilité (vue de dessous de l'avant-corps du véhicule).

- Repère (O, X, Y, Z) : repère global de calcul de l'écoulement de base (Fluent)
- Repère (M, x, y, z) : repère local de stabilité (y normale à la paroi)

Dans le repère local de stabilité :

- u, v, w orientées respectivement suivant x, y et z .
- \bar{u}^e : vitesse moyenne à l'extérieur de la couche limite. Orientation : θ^e .
- \vec{k} : vecteur d'onde. Orientation : ψ .
- $\vec{\sigma}$: vecteur d'amplification de l'onde. Orientation : $\bar{\psi}$.
- \vec{V}_g : vecteur vitesse de groupe. Orientation : θ_g

Annexe B

Définition du maillage

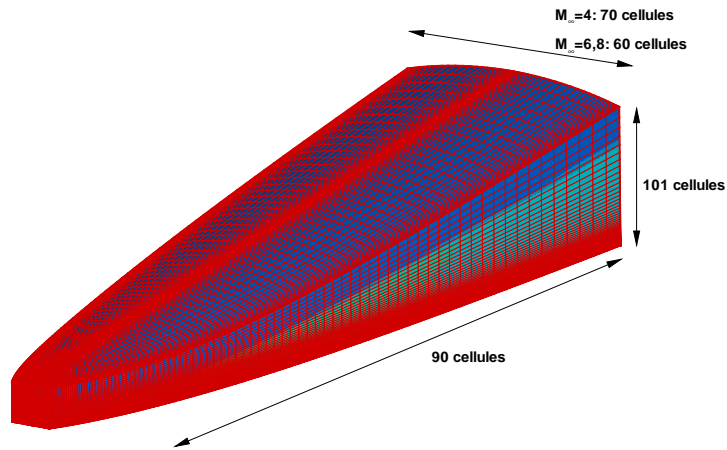


FIG. B.1 – Maillage de la zone étudiée sous l'avant-corps.

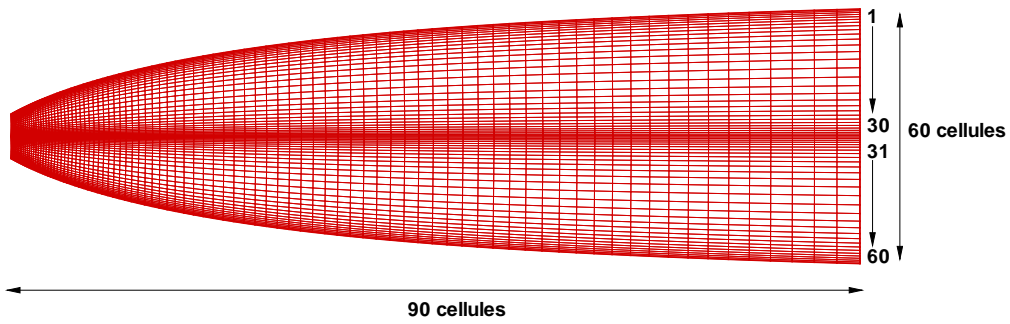


FIG. B.2 – Maillage de la paroi sous l'avant-corps. Cas $M_\infty = 6, 8$, vol et soufflerie.

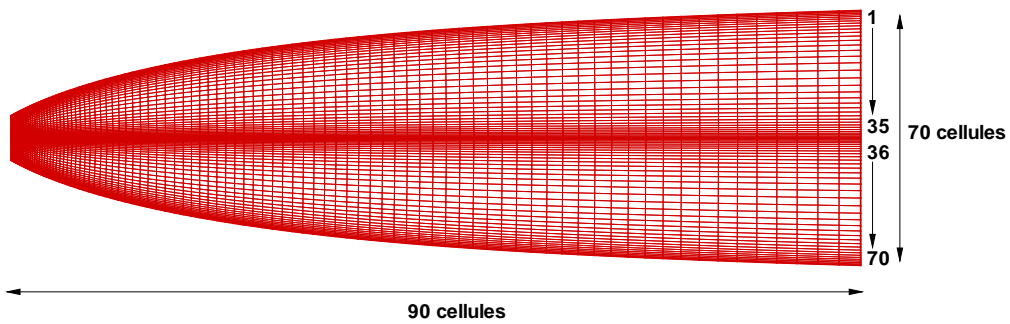


FIG. B.3 – Maillage de la paroi sous l'avant-corps. Cas $M_\infty = 4$.

Annexe C

Mécanisme de l'instabilité non-visqueuse

Comme indiqué au paragraphe 4.1, la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse conditionne, selon l'approche non-visqueuse, la présence d'ondes instables dans l'écoulement. Le mécanisme de déstabilisation classiquement invoqué (mécanisme A) est le suivant.

Considérons l'exemple d'une couche de mélange (figure C.1). Soit une perturbation sinusoïdale venant déformer l'interface en pointillé situé au niveau du point d'inflexion. Les "bosses" de la sinusoïde pointent vers un écoulement à haute vitesse. Il en résulte une zone dépressionnaire qui tend à amplifier le mouvement (symboles \ominus , \oplus). D'autre part, ces bosses sont convectées plus rapidement que les "creux". Les premiers ont donc tendance à rejoindre les seconds et à former un enroulement tourbillonnaire caractéristique de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Cette explication reste néanmoins problématique car le même mécanisme, purement non-visqueux, appliqué aux couches limites montrent que ces dernières sont instables pour n'importe quel mode de perturbation. En effet, si l'on considère une onde sinusoïdale venant perturber l'écoulement à une altitude de fort gradient de vitesse, alors, d'après le processus décrit ci-dessus, cette onde sera amplifiée, et ce, en l'absence même de point d'inflexion. Or, nous savons que le mécanisme de déstabilisation de la couche limite est purement visqueux. Il existe donc une limitation au mécanisme A qui le restreint aux écoulements présentant des profils inflexionnels. Cette limitation a été formalisée par Lin [42] qui propose un "contre-mécanisme" (mécanisme B) qui atténue voir annule les effets du mécanisme A dans le cas de la couche limite.

Lin considère la couche limite comme une couche de rotationnel : sur chaque plan parallèle à la paroi, la valeur du rotationnel est identique. Soumise à une perturbation, les particules fluides vont être amenées à changer de plan de rotationnel. Considérons, comme sur la figure C.2 une particule fluide

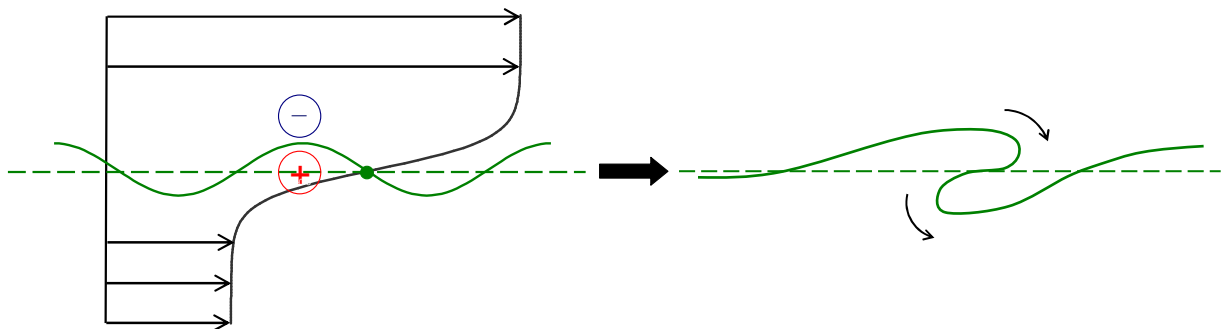


FIG. C.1 – Mécanisme de l'instabilité non-visqueuse.

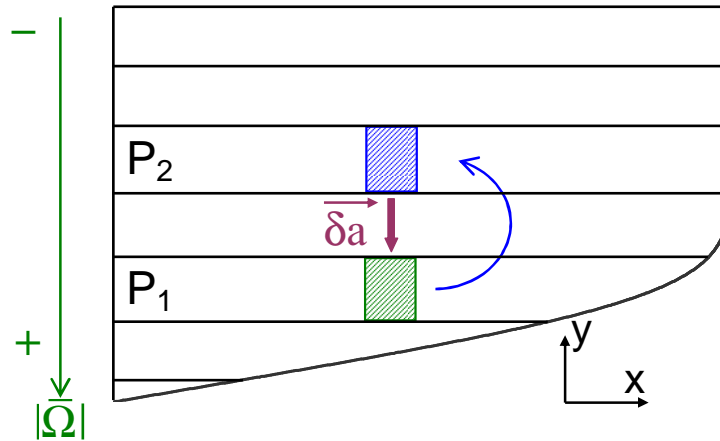


FIG. C.2 – Mécanisme de stabilisation dans un écoulement de couche limite.

passant du plan P_1 au plan P_2 . Dans le plan P_2 , la particule est plongée dans un champ de rotationnel dont la valeur est différente de celle de la particule elle-même. Il va ainsi se créer une dynamique, par interaction des différentes particules, qui va provoquer une accélération δa suivant la formule donnée par Lin :

$$\delta a = \bar{\Gamma}^{-1} \int \int K \frac{d\bar{\Omega}}{dy}(y) dx dy \quad (C.1)$$

avec

- $\bar{\Omega}$: valeur du rotationnel (négative dans le cas de la figure C.2)
- $\bar{\Gamma}$: intensité du rotationnel (négative dans le cas de la figure C.2)
- K : coefficient positif dont la valeur augmente avec l'écart de rotationnel entre P_1 et P_2 .

La dérivée $d\bar{\Omega}/dy$ étant positive (voir figure C.7), l'accélération δa a donc tendance à ramener la particule fluide à sa position d'origine. Le mécanisme B constitue donc un processus stabilisateur qui s'oppose bien au mécanisme A. Dans le cas de la couche limite, force est de constater que le mécanisme B est prépondérant (puisqu'elle est stable selon l'approche non-visqueuse). Voyons à présent pourquoi, dans le cas de la couche de mélange, il n'est pas capable de limiter le mécanisme A de déstabilisation.

Les figures C.3 à C.8 montrent les profils de vitesse, de rotationnel et de sa dérivée pour une écoulement de couche limite incompressible (Blasius) et pour une couche de mélange dont le profil de vitesse est modélisé par une tangente hyperbolique. Dans le cas de la couche de mélange, lorsqu'une particule fluide est écartée de sa position d'origine, tout en restant dans une zone localisée autour du point d'inflexion, alors elle est plongée dans un champ de rotationnel dont la valeur est proche la sienne. Ainsi, la valeur de K dans (C.1) est faible. D'autre part, près du point d'inflexion, $d\bar{\Omega}/dy$ est aussi proche de zero. La valeur de δa s'en trouve d'autant plus diminuée et le mécanisme B n'a plus "la force" de s'opposer au mécanisme A. Au contraire, partout dans la couche limite, les valeurs de K et de $d\bar{\Omega}/dy$ restent suffisamment importantes pour s'opposer à la déstabilisation de l'écoulement (sauf peut-être près de la paroi où l'on sait que la viscosité est à l'origine des ondes instables de Tollmien-Schlichting).

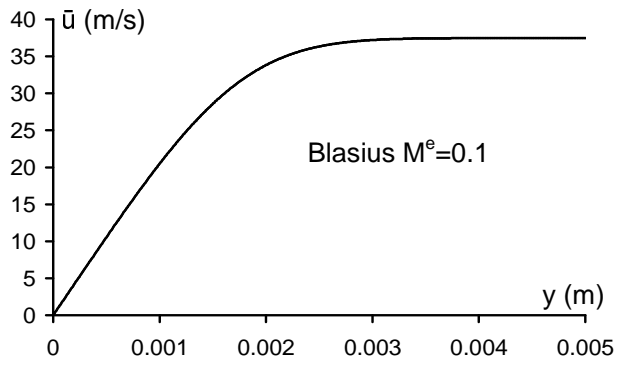


FIG. C.3 – Blasius : profil de vitesse.

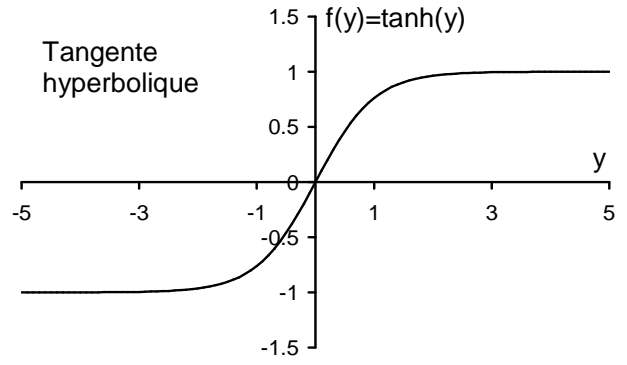


FIG. C.4 – Tangente hyperbolique.

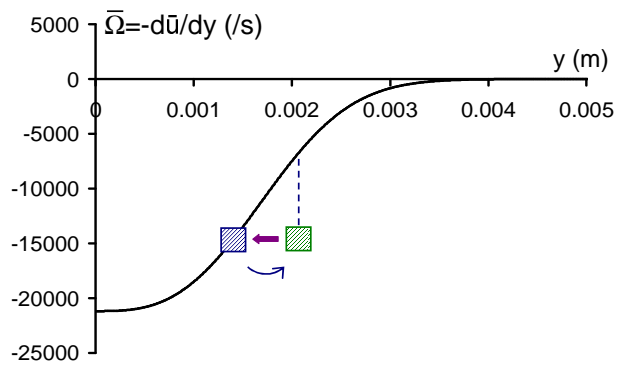


FIG. C.5 – Blasius : dérivée première.

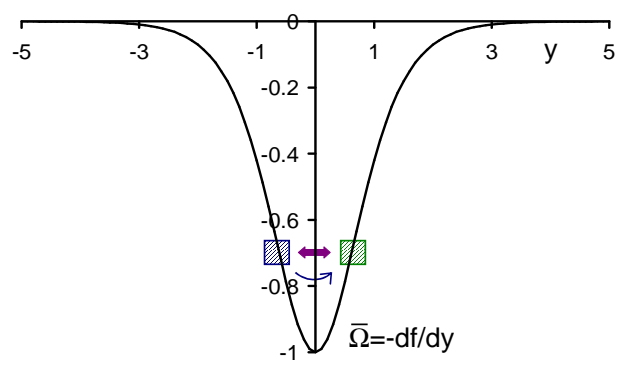


FIG. C.6 – Tangente hyperbolique : dérivée première.

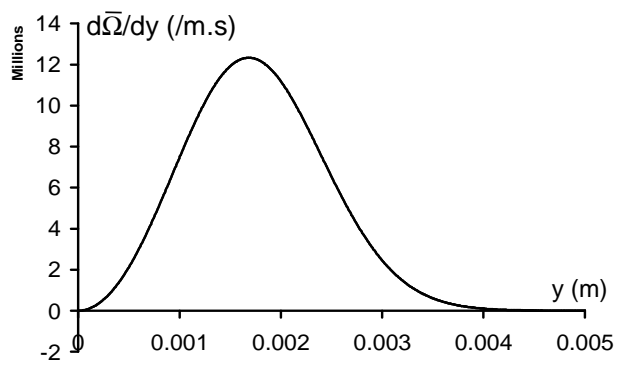


FIG. C.7 – Blasius : dérivée seconde.

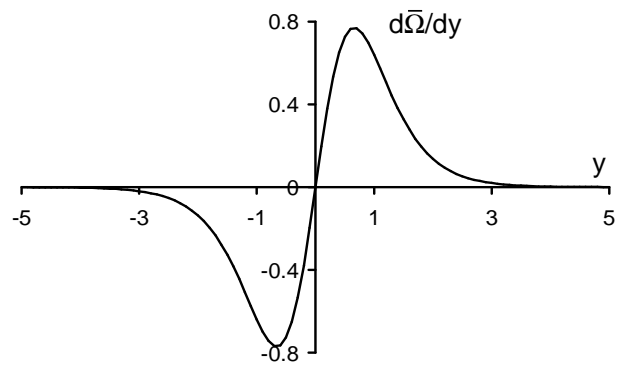


FIG. C.8 – Tangente hyperbolique : dérivée seconde.

Annexe D

Solutions de similitude de Levy-Lees

Cette annexe présente les solutions de similitude dites de Levy-Lees obtenues grâce à un changement de variables proposé par Illingworth.

Les équations de couche limite compressible bidimensionnelle sont :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{\rho}^e \frac{d\bar{u}^e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \bar{u} \frac{d\bar{p}^e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\mu}}{P_r} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right) + \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{D.3})$$

où \bar{h} représente l'enthalpie. Les conditions aux limites du problème sont :

– Paroi adiabatique

$$\text{pour } y = 0, \bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ et } \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = 0$$

$$\text{pour } y \rightarrow \infty, \bar{u} = \bar{u}^e, \bar{v} = \bar{v}^e \text{ et } \bar{h} = \bar{h}^e$$

– Température de paroi (\bar{T}_p) imposée

$$\text{pour } y = 0, \bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ et } \bar{h} = \bar{h}_p$$

$$\text{pour } y \rightarrow \infty, \bar{u} = \bar{u}^e, \bar{v} = \bar{v}^e \text{ et } \bar{h} = \bar{h}^e$$

D'après (D.1), il existe une fonction Ψ telle que :

$$\bar{\rho} \bar{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ et } \bar{\rho} \bar{v} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

À partir des équations (D.1-D.3), il est possible d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires grâce à un changement de variables adéquat :

$$x \rightarrow \xi = \int_0^x \bar{\rho}^e \bar{u}^e \bar{\mu}^e dx$$

$$y \rightarrow \eta = \frac{\bar{u}^e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \bar{\rho} dy$$

Ce changement de variables est appelé transformation d'Illingworth.

L'hypothèse d'affinité de Levy-Lees est, quant à elle :

$$\Psi = G(\xi)f(\eta), \quad \bar{u} = \bar{u}^e(\xi)f'(\eta) \quad \text{et} \quad \bar{h} = \bar{h}^e(\xi)g(\eta)$$

Ainsi, les équations (D.2) et (D.3) deviennent :

$$(Cf'')' + ff'' + \frac{2\xi}{\bar{u}^e} \frac{d\bar{u}^e}{d\xi} \left(\frac{\bar{\rho}^e}{\bar{\rho}} - f'^2 \right) = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\left(\frac{C}{P_r} g' \right)' + fg' = \left(\frac{\xi}{\bar{H}^e} \frac{d\bar{H}^e}{d\xi} \right) f' \left(2g + \frac{\bar{u}^{e2}}{\bar{h}^e} f'^2 \right) - \frac{\bar{u}^{e2}}{\bar{h}^e} C f'^2 \quad (\text{D.5})$$

où ' représente une dérivation totale par rapport à η .

Ces équations font apparaître le paramètre de Chapman-Rubesin C , le nombre de Prandtl P_r et l'enthalpie génératrice \bar{H}^e . Ces grandeurs sont définies de la manière suivante :

$$C = \frac{\bar{\rho}\bar{\mu}}{\bar{\rho}^e\bar{\mu}^e}, \quad P_r = \frac{\bar{\mu}C_p}{\bar{k}} \quad \text{et} \quad \bar{H}^e = \bar{h}^e + \frac{1}{2}\bar{u}^2$$

où \bar{k} est la conductivité thermique de l'air.

Les équations (D.4) et (D.5) sont des équations différentielles ordinaires à coefficients variables. L'approche plaque plane nous permet d'affirmer que toutes les grandeurs extérieures à la couche limite sont indépendantes de ξ . En particulier, si \bar{T}^e est indépendant de ξ alors, \bar{T} , température à l'intérieur de la couche limite, l'est aussi, ainsi que $\bar{\rho}$, $\bar{\mu}$ et C_p , et donc que C et P_r . De même, les dérivées par rapport à ξ s'annulent. Finalement, on obtient le système d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants suivant :

$$(Cf'')' + ff'' = 0 \quad (\text{D.6})$$

$$\left(\frac{C}{P_r} g' \right)' + fg' + \frac{\bar{u}^{e2}}{\bar{h}^e} C f'^2 = 0 \quad (\text{D.7})$$

Les conditions limites, quant à elles, deviennent :

– Paroi adiabatique

$$\text{pour } \eta = 0, f = f' = 0 \text{ et } g' = 0$$

$$\text{pour } \eta \rightarrow \infty, f' = 1 \text{ et } g = 1$$

– Température de paroi (T_p) imposée

$$\text{pour } \eta = 0, f = f' = 0 \text{ et } g = g_p$$

$$\text{pour } \eta \rightarrow \infty, f' = 1 \text{ et } g = 1$$

L'équation (D.7) est écrite en terme d'enthalpie. Par définition, on peut écrire $dh = C_p dT$, ou encore :

$$d\left(\frac{\bar{h}}{\bar{h}^e}\right) = \frac{C_p}{C_p^e} d\left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}^e}\right) \quad (\text{D.8})$$

On pose ensuite $\theta = \bar{T}/\bar{T}^e$ et (D.8) devient $dg = C_p/C_p^e d\theta$ ou encore $g' = C_p/C_p^e \theta'$, ce qui transforme (D.7) en :

$$\left(\frac{CC_p}{P_r} \theta'\right)' + f C_p \theta' + \frac{\bar{u}^e{}^2}{\bar{T}^e} C f''^2 = 0 \quad (\text{D.9})$$

Le système (D.6-D.9) est un système d'équations différentielles ordinaires. Il constitue par ailleurs un problème de condition aux limites. Il peut donc être intégré depuis la paroi jusqu'à l'extérieur de la couche limite par un algorithme Runge-Kutta auquel il faut adjoindre une méthode de tir.

Annexe E

Coefficients de la matrice A

Les coefficients a_{ij} non nuls de la matrice [A] de l'équation 6.1 sont :

$$a_{12} = 1 \tag{E.1}$$

$$a_{21} = \frac{i\text{Re}_{\delta_1}}{\bar{\mu}\bar{T}} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) + \alpha^2 + \beta^2 \tag{E.2}$$

$$a_{22} = -\frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{E.3}$$

$$a_{23} = \frac{\text{Re}_{\delta_1}}{\bar{\mu}\bar{T}} \frac{d\bar{u}}{dy} - i\alpha \frac{\bar{\mu} + \bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} - \frac{i\alpha}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{E.4}$$

$$a_{24} = \frac{i\text{Re}_{\delta_1}}{\bar{\mu}} \alpha - \alpha \frac{\bar{\mu} + \bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \gamma^e \mathbf{M}^{e^2} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \tag{E.5}$$

$$a_{25} = \alpha \frac{\bar{\mu} + \bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) - \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d^2\bar{\mu}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{E.6}$$

$$a_{26} = -\frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{E.7}$$

$$a_{31} = -i\alpha \tag{E.8}$$

$$a_{33} = \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{E.9}$$

$$a_{34} = -i\gamma^e \mathbf{M}^{e^2} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \tag{E.10}$$

$$a_{35} = \frac{i}{\bar{T}} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \tag{E.11}$$

$$a_{37} = -i\beta \tag{E.12}$$

$$a_{41} = -\frac{i\alpha}{E} \left(\frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{2}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \right) \tag{E.13}$$

$$a_{42} = -\frac{i\alpha}{E} \tag{E.14}$$

$$a_{43} = \frac{1}{E} \left[-\frac{i\text{Re}_{\delta_1}}{\bar{\mu}\bar{T}} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) + \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} \frac{d^2\bar{T}}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{d(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{d\bar{T}} \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} \left(\frac{d\bar{T}}{dy} \right)^2 \right] \tag{E.15}$$

$$\tag{E.16}$$

$$a_{44} = -\frac{i}{E} \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \gamma^e M^{e^2} \left[(\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} + \alpha \frac{d\bar{u}}{dy} + \beta \frac{d\bar{w}}{dy} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \frac{d(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{d\bar{T}} \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{T}}{dy} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \right] \quad (E.17)$$

$$a_{45} = \frac{i}{E} \left[\frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} \left(\alpha \frac{d\bar{u}}{dy} + \beta \frac{d\bar{w}}{dy} \right) + \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(\alpha \frac{d\bar{u}}{dy} + \beta \frac{d\bar{w}}{dy} \right) + \frac{d(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{d\bar{T}} \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \right] \quad (E.18)$$

$$a_{46} = \frac{i}{E} \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \quad (E.19)$$

$$a_{47} = -\frac{i\beta}{E} \left(\frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{2}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \right) \quad (E.20)$$

$$a_{48} = -\frac{i\beta}{E} \quad (E.21)$$

$$a_{56} = 1 \quad (E.22)$$

$$a_{62} = -2\text{Pr}^e (\gamma^e - 1) M^{e^2} \frac{\bar{\mu}}{\bar{k}} \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (E.23)$$

$$a_{63} = \frac{(\gamma^e - 1) \text{Re}_{\delta_1} \text{Pr}^e}{\gamma^e \bar{k}} (C_v + 1) \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} - 2i\text{Pr}^e (\gamma^e - 1) M^{e^2} \frac{\bar{\mu}}{\bar{k}} \left(\alpha \frac{d\bar{u}}{dy} + \beta \frac{d\bar{w}}{dy} \right) \quad (E.24)$$

$$a_{64} = -i \frac{\text{Re}_{\delta_1} \text{Pr}^e}{\bar{k}} (\gamma^e - 1) M^{e^2} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \quad (E.25)$$

$$a_{65} = \frac{i(\gamma^e - 1) \text{Re}_{\delta_1} \text{Pr}^e}{\gamma^e \bar{k} \bar{T}} (C_v + 1) (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) + \alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{\bar{k}} \left(\frac{d\bar{k}}{d\bar{T}} \frac{d^2\bar{T}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{k}}{d\bar{T}^2} \left(\frac{d\bar{T}}{dy} \right)^2 \right) - \frac{\text{Pr}^e (\gamma^e - 1)}{\bar{k}} M^{e^2} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{w}}{dy} \right)^2 \right) \quad (E.26)$$

$$a_{66} = -\frac{2}{\bar{k}} \frac{d\bar{k}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (E.27)$$

$$a_{68} = -2\text{Pr}^e (\gamma^e - 1) M^{e^2} \frac{\bar{\mu}}{\bar{k}} \frac{d\bar{w}}{dy} \quad (E.28)$$

$$a_{78} = 1 \quad (E.29)$$

$$a_{83} = \frac{\text{Re}_{\delta_1}}{\bar{\mu} \bar{T}} \frac{d\bar{w}}{dy} - i\beta \left(\frac{\bar{\mu} + \bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \right) \quad (E.30)$$

$$a_{84} = -\frac{\bar{\mu} + \bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \beta \gamma^e M^{e^2} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) + \frac{\text{Re}_{\delta_1} i\beta}{\bar{\mu}} \quad (E.31)$$

$$a_{85} = -\frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d^2\bar{w}}{dy^2} - \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d^2\bar{\mu}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \frac{d\bar{w}}{dy} + \frac{\bar{\mu} + \bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \frac{\beta}{\bar{T}} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \quad (E.32)$$

$$a_{86} = -\frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{w}}{dy} \quad (E.33)$$

$$a_{87} = \frac{i\text{Re}_{\delta_1}}{\bar{\mu} \bar{T}} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) + \alpha^2 + \beta^2 \quad (E.34)$$

$$a_{88} = -\frac{1}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (E.35)$$

Dans les coefficients a_{41} à a_{48} , E est égal à :

$$E = \frac{\text{Re}_{\delta_1}}{\bar{\mu}} + i\gamma^e M^{e^2} (\alpha\bar{u} + \beta\bar{w} - \omega) \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}}$$

Annexe F

Valeurs et vecteurs propres de A à l'extérieur de la couche limite

Les valeurs propres λ_j du problème (6.1) exprimé à l'extérieur de la couche limite sont identiques à celles du système (6.2). Ses vecteurs propres sont ici exprimés en fonctions de ceux du système (6.2). Les coefficients b_{ij} non-nul de la matrice [B] de ce système sont :

$$b_{11} = a_{21} \quad (\text{F.1})$$

$$b_{12} = a_{24} \quad (\text{F.2})$$

$$b_{13} = a_{25} \quad (\text{F.3})$$

$$b_{22} = a_{42}a_{24} + a_{43}a_{34} + a_{46}a_{64} + a_{48}a_{84} \quad (\text{F.4})$$

$$b_{23} = a_{42}a_{25} + a_{43}a_{35} + a_{46}a_{65} + a_{48}a_{85} \quad (\text{F.5})$$

$$b_{32} = a_{64} \quad (\text{F.6})$$

$$b_{33} = a_{65} \quad (\text{F.7})$$

$$b_{42} = a_{84} \quad (\text{F.8})$$

$$b_{43} = a_{85} \quad (\text{F.9})$$

$$b_{44} = b_{87} \quad (\text{F.10})$$

où a_{ij} sont les coefficients de la matrice [A] présentées dans l'Annexe E et calculés à l'extérieur de la couche limite.

Les vecteurs propres λ_j (dont les partie réelles sont négatives) du problème (6.2) sont :

$$\lambda_1 = -b_{11}^{1/2} \quad (\text{F.11})$$

$$\lambda_2 = -b_{44}^{1/2} \quad (\text{F.12})$$

$$\lambda_3 = - \left[\frac{1}{2} (b_{22} + b_{33}) + \left(\frac{1}{4} (b_{22} - b_{33})^2 + b_{32}b_{23} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{F.13})$$

$$\lambda_4 = - \left[\frac{1}{2} (b_{22} + b_{33}) - \left(\frac{1}{4} (b_{22} - b_{33})^2 + b_{32}b_{23} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{F.14})$$

Les coordonnées des vecteurs propres correspondants sont :

$$\begin{aligned}\widehat{V}_1^{(1)} &= 1 & \widehat{V}_1^{(2)} &= 1 & \widehat{V}_1^{(3)} &= F_1^{(3)} & \widehat{V}_1^{(4)} &= F_1^{(4)} \\ \widehat{V}_2^{(1)} &= 0 & \widehat{V}_2^{(2)} &= 0 & \widehat{V}_2^{(3)} &= F_2^{(3)} & \widehat{V}_2^{(4)} &= F_2^{(4)} \\ \widehat{V}_3^{(1)} &= 0 & \widehat{V}_3^{(2)} &= 0 & \widehat{V}_3^{(3)} &= -b_{32} & \widehat{V}_3^{(4)} &= -b_{32} \\ \widehat{V}_4^{(1)} &= 0 & \widehat{V}_4^{(2)} &= 0 & \widehat{V}_4^{(3)} &= F_3^{(3)} & \widehat{V}_4^{(4)} &= F_3^{(4)}\end{aligned}$$

où les grandeurs $F_i^{(j)}$ sont égales à (pour $j = 3, 4$) :

$$F_1^{(j)} = \frac{b_{12}(b_{33} - \lambda_j^2) - b_{13}b_{32}}{\lambda_j^2 - b_{11}} \quad (\text{F.15})$$

$$F_2^{(j)} = b_{33} - \lambda_j^2 \quad (\text{F.16})$$

$$F_3^{(j)} = \frac{b_{42}(b_{33} - \lambda_j^2) - b_{43}b_{32}}{\lambda_j^2 - b_{44}} \quad (\text{F.17})$$

Note : Le problème étant un problème aux valeurs propres homogènes, les vecteurs propres présentés ici ne sont pas uniques.

Finalement, les vecteurs propres $\widehat{Z}_i^{(j)}$ du problème (6.1) exprimés à l'extérieur de la couche limite sont calculés à partir du changement de variables exprimé dans la section 6.2.1 :

$$\widehat{Z}_1^{(j)} = \widehat{V}_1^{(j)} \quad (\text{F.18})$$

$$\widehat{Z}_2^{(j)} = \widehat{V}_2^{(j)} \lambda_j \quad (\text{F.19})$$

$$\widehat{Z}_3^{(j)} = \frac{a_{31}\widehat{V}_1^{(j)} + a_{34}\widehat{V}_2^{(j)} + a_{35}\widehat{V}_3^{(j)} + a_{37}\widehat{V}_4^{(j)}}{\lambda_j} \quad (\text{F.20})$$

$$\widehat{Z}_4^{(j)} = \widehat{V}_2^{(j)} \quad (\text{F.21})$$

$$\widehat{Z}_5^{(j)} = \widehat{V}_3^{(j)} \quad (\text{F.22})$$

$$\widehat{Z}_6^{(j)} = \widehat{V}_3^{(j)} \lambda_j \quad (\text{F.23})$$

$$\widehat{Z}_7^{(j)} = \widehat{V}_4^{(j)} \quad (\text{F.24})$$

$$\widehat{Z}_8^{(j)} = \widehat{V}_4^{(j)} \lambda_j \quad (\text{F.25})$$

Note : La coordonnée $\widehat{Z}_3^{(j)}$ est calculée par intégration de l'équation pour Z_3' donnée par le système (6.1) :

$$Z_3' = a_{31}Z_1 + a_{34}Z_4 + a_{35}Z_5 + a_{37}Z_7 \quad (\text{F.26})$$