HAL
open science

Etude des concepts de filtrage robuste aux méconnaissances de modèle et aux pertes de mesures. Application aux systèmes de navigation

Vincent Sircoulomb

To cite this version:

Vincent Sircoulomb. Etude des concepts de filtrage robuste aux méconnaissances de modèle et aux pertes de mesures. Application aux systèmes de navigation. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2008. Français. NNT : . tel-00350451

HAL Id: tel-00350451

https://theses.hal.science/tel-00350451v1

Submitted on 6 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nancy-Université
INPL

École doctorale IAEM Lorraine
DFD Automatique et Production Automatisée
Institut National Polytechnique de Lorraine

Etude des concepts de filtrage robuste aux méconnaissances de modèle et aux pertes de mesures.

Application aux systèmes de navigation

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 décembre 2008

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité Automatique et Traitement du signal

par

Vincent SIRCOULOMB

Composition du jury

Président :	D. Sauter	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy I
Rapporteurs :	V. Cocquempot	Professeur à l'Université de Lille I
	F. Mora-Camino	Professeur à l'ENAC, Toulouse
Examinateurs :	J. Ragot	Professeur à l'INPL, Nancy, Directeur de thèse
	H. Chafouk	Enseignant-Chercheur, HDR, à l'ESIGELEC, Rouen, co-Directeur de thèse
	G. Hoblos	Enseignant-Chercheur à l'ESIGELEC, Rouen
Membres invités :	X. Bissuel	Ingénieur expert en techniques inertielles de SAGEM Défense Sécurité, Eragny-sur-Oise
	J.P. Israël	Ingénieur expert en navigation du LRBA, Vernon

CRAN

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Nancy-Université – CNRS
2, Avenue de la Forêt de Haye 54516 Vandœuvre-Lès-Nancy
Tél.+33 (0)3 83 59 59 59 Fax +33 (0)3 83 59 56 44

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je remercie en premier lieu la DGA (Délégation générale pour l'Armement) et le CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) pour avoir financé cette thèse ainsi que Messieurs les Professeurs Belahcène Mazari et Alain Richard, les directeurs respectifs de l'IRSEEM (Institut de Recherche en Systèmes Électroniques EMbarqués - EA 4353) et du CRAN (Centre de Recherche en Automatique de Nancy - UMR CNRS 7039) pour m'avoir accueilli dans leur laboratoire et fourni d'excellentes conditions de travail.

Je tiens ensuite à témoigner ma sincère reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur José Ragot, ainsi qu'à mes deux autres encadrants, Messieurs les Docteurs Houcine Chafouk et Ghaleb Hoblos, pour leur accueil, leurs compétences, leurs conseils avisés et leur disponibilité sans faille malgré des emplois du temps très chargés. Qu'ils trouvent en ce témoignage la reconnaissance qu'ils méritent.

J'exprime ma gratitude à Messieurs les Professeurs Vincent Cocquempot et Felix Mora-Camino pour avoir accepté de rapporter sur ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail. Leur lecture approfondie du mémoire et leurs remarques judicieuses m'ont été très précieuses.

Je remercie également Monsieur le Professeur Dominique Sauter d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'assurer la présidence du jury, ainsi que Messieurs Xavier Bissuel, ingénieur expert en techniques inertielles chez SAGEM Défense Sécurité, et Jean-Paul Israël, ingénieur expert en navigation du LRBA (Laboratoire de Recherche en Balistique et Aérodynamique), d'avoir participé au jury.

Je tiens aussi à vivement témoigner ma reconnaissance envers Messieurs Jean-Michel Caron, Thierry Perrot et David Roberfroid de SAGEM Défense-Sécurité ainsi qu'à Monsieur Georges Guy du LRBA pour m'avoir fait partager leurs connaissances extrêmement pointues dans le domaine de la navigation inertielle et pour m'avoir accordé un peu de leur temps, pourtant si précieux.

Mes pensées se tournent également vers mes collègues et amis de l'ESIGELEC et de l'IRSEEM, en particulier ceux du pôle Automatique et Systèmes, que je ne nommerai pas faute de place. Leur présence et l'ambiance qu'ils ont su (et savent toujours) entretenir ont contribué à rendre ce travail de recherche plus facile.

Enfin, rien au monde ne pourrait me faire oublier de remercier chaleureusement tous mes proches, notamment ma famille, pour leurs encouragements et leur soutient permanent, que ce soit dans les bons ou mauvais moments. Sans eux, ce travail n'aurait vraisemblablement jamais abouti. Qu'ils retrouvent en ce témoignage toute l'affection que je leur porte.

Je dédie cette thèse à tous ceux qui ont cru en mes capacités n'ont jamais cessé de me soutenir.

Table des matières

Table des figures **xi**

Liste des tableaux **xv**

Liste des algorithmes **xvii**

Introduction générale **xix**

Chapitre 1
L'estimation d'état : techniques optimales et robustes

1.1 Introduction 1
1.2 Estimation optimale d'un vecteur aléatoire statique 2
1.2.1 Méthode des moindres carrés simples 3
1.2.2 Méthode des moindres carrés récursifs 4
1.2.3 Quelques résultats supplémentaires sur les moindres carrés 7
1.3 Estimation optimale d'un vecteur aléatoire dynamique 8
1.3.1 Cas d'un vecteur de dynamique linéaire : le filtre de Kalman 9
1.3.2 Quelques extensions du filtre de Kalman 12
1.3.3 Filtrage de Kalman pour vecteurs de dynamique non linéaire 13
1.4 Approche bayésienne de l'estimation d'état optimale 19
1.4.1 Le filtrage particulaire 20
1.4.2 Rééchantillonnage des particules 21
1.4.3 Une généralisation du filtre particulaire : l'échantillonnage d'importance séquentiel 27
1.5 Estimation d'état optimale sous contraintes 28
1.5.1 L'approche par projection pour des contraintes égalité linéaires 30
1.5.2 L'approche par projection pour des contraintes inégalité linéaires 31
1.6 Estimation d'état robuste 33
1.6.1 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes de modèle 34
1.6.2 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur l'entrée du système 36
1.6.3 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur le bruit d'état 42

1.7 Conclusion 47

Chapitre 2
Éléments pour la synthèse d'un dispositif d'estimation non linéaire en cas de perte de capteurs

2.1 Introduction 49
2.2 Outils d'évaluation de la qualité d'estimation 50
2.2.1 Évaluation d'un estimateur d'état dans une configuration donnée 50
2.2.2 Évaluation à l'aide du grammien d'observabilité en cas de perte(s) de capteur(s) 53
2.2.3 Synthèse d'un critère d'évaluation de la dégradation de la qualité d'estimation provoquée par une perte de capteur(s) 55
2.3 Proposition d'une méthode de réglage pour différents filtres non linéaires 56
2.4 Synthèse d'un dispositif d'estimation d'état pour systèmes non linéaires 61
2.5 Applications 64
2.5.1 Application sur le système de Lorenz 64
2.5.2 Application sur un modèle non linéaire d'ordre 2 74
2.6 Conclusion 81

Chapitre 3
La navigation

3.1 Introduction 85
3.2 L'unité de mesures inertielles 86
3.2.1 Les accéléromètres 86
3.2.2 Les gyromètres/gyroscopes 87
3.2.3 Correction des erreurs des senseurs inertiels 87
3.3 Modélisation de la terre 89
3.4 Les différents repères utilisés [Bout 06] 89
3.5 Les équations de navigation inertielle 94
3.5.1 Équation de la vitesse du porteur 94
3.5.2 Les matrices de passage 95
3.5.3 Équation de la vitesse de rotation de la plate-forme 96
3.6 Synthèse d'une navigation inertielle 98
3.7 Les erreurs de navigation par inertie 101
3.7.1 Équations vectorielles des erreurs de navigation 104
3.7.2 Modèle analytique des erreurs de navigation 107
3.7.3 Équations d'erreurs d'orientation de repères 108

3.7.4 Modèle complet des erreurs de navigation 109
3.7.5 Analyse des erreurs de navigation par inertie 112
3.8 La navigation hybridée 112
3.8.1 Le couplage lâche 112
3.8.2 Le couplage serré 116
3.8.3 Les pertes d'hybridation 117
3.9 Conclusion 118

Chapitre 4
Synthèse d'une navigation intégrée à partir de données GRH et hybridée en position

4.1 Introduction 120
4.2 Le GRH (Gyroscope Résonnant Hémisphérique) 120
4.2.1 Introduction 120
4.2.2 Principe de fonctionnement 121
4.2.3 Erreurs engendrées par le GRH 122
4.2.4 Modèle global des erreurs du GRH 125
4.2.5 Mise en équation des erreurs du GRH 126
4.2.6 Modèle global d'erreurs de navigation et d'erreurs GRH 127
4.3 Contexte de l'application et analyse du problème 128
4.4 Approches de résolution du problème envisagées 130
4.4.1 Approches n'utilisant pas de décomposition en série de Fourier 131
4.4.2 Utilisation de la théorie des jeux (filtre minimax, cf. p. 44) 131
4.4.3 Utilisation de l'estimation d'entrées récursive (RIE, cf. p. 39) 132
4.5 Approche de résolution du problème retenue 133
4.5.1 Conception d'une variance d'Allan plate pour le résidu de modélisation . . 134
4.5.2 Modèle global d'erreurs de navigation et d'erreurs GRH 138
4.5.3 Discrétisation du modèle considéré 139
4.5.4 Synthèse du filtre de navigation 139
4.6 Etude expérimentale 143
4.6.1 Architecture du simulateur développé 143
4.6.2 Conception du "monde vrai" et conditions de simulation 146
4.6.3 Initialisation et réglage du filtre de navigation 148
4.7 Résultats de simulation 149
4.7.1 Cas d'une hybridation permanente 149
4.7.2 Cas d'une hybridation coupée 156
4.7.3 Comparaison avec d'autres configurations 165

4.7.4 Utilisation du filtrage de Kalman sous contraintes 169
4.8 Conclusion 170

Conclusion générale **171**

Annexe A
Acronymes, abréviations et notations

A.1 Acronymes 175
A.2 Abréviations 176
A.3 Notations 176

Annexe B
Calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire passée à travers une fonction non linéaire

B.1 Définitions préliminaires 179
B.2 Utilisation de développements de Taylor 181
B.3 Utilisation de l'interpolation de Stirling 183
B.4 Utilisation de la transformation sans saveur (unscented) 185
B.5 Utilisation de simulation de Monte Carlo 187

Annexe C
Éléments de probabilités

C.1 Théorème de Bayes 191
C.2 Équations des moindres carrés récursifs [Rhod 71] 192
C.3 Principe d'orthogonalité [Rhod 71] 193
C.4 Équations du filtrage bayésien optimal [Van 04a] 194
C.5 Loi des grands nombres, théorème de la limite centrale 196
C.6 Algorithme d'échantillonnage d'importance séquentiel [Douc 97] 196

Annexe D
Éléments de mécanique pour la navigation

D.1 Matrice de passage d'une base à une autre 201
D.2 Loi générale de dérivation d'un vecteur par rapport à un repère relatif 202
D.3 Vitesse et accélération 202
D.4 Projection de grandeurs vectorielles dans une base 203
D.5 Loi générale de dynamique d'une matrice de passage 204
D.6 Micro-rotateur [Isra 99] 204
D.7 Matrice de couplage de Schüler [Isra 07] 207

Annexe E
Extraction d'angles à partir d'une matrice de passage

E.1 Extraction de la latitude, la longitude et l'angle de mécanisation à partir de $\boldsymbol{T}_{wt}$. 209
E.2 Extraction de l'attitude (cap, roulis, tangage) à partir de $\boldsymbol{T}_{g'b}$ 210

Annexe F
Evolution de l'erreur de position en fonction de différentes sources d'erreur

Annexe G
Quelques types de bruits

G.1 Bruit blanc 219
G.2 Cheminement aléatoire 220
G.3 Processus markovien à l'ordre 1 221

Annexe H
La variance d'Allan

H.1 Définition de la variance d'Allan [Isra 95] 225
H.2 Variance d'Allan de quelques types de bruits 226

Annexe I
Modèle de poursuite de cible

Bibliographie **233**

Table des figures

1.1 Illustration du théorème de projection 6
1.2 Illustration du principe des moindres carrés récursifs 6
1.3 Filtre de Kalman linéarisé ou en boucle ouverte 15
1.4 Filtre de Kalman étendu ou en boucle fermée 15
1.5 Obtention des grandeurs prédites 18
1.6 Estimées au sens des moindres carrés et du maximum *a posteriori* dans le cas d'une densité multimodale 20
1.7 Principe de l'approche par projection pour une contrainte égalité linéaire 30
1.8 Couplages en boucle ouverte et en boucle fermée 32
1.9 Estimation d'état sous contraintes inégalité linéaires par l'approche par projection 33
1.10 Couplages en boucle semi-fermée 33
1.11 Principe de l'approche multi-modèles 35
1.12 Approche duale de l'estimation simultanée état/paramètres 36
1.13 Obtention de la relation de régression linéaire entre $\widetilde{\boldsymbol{Y}}^0_{k|k-1}$ et $\boldsymbol{\Theta}$ 40
1.14 Structure de l'estimation d'entrée récursive 42

2.1 Evaluation de la qualité d'estimation d'un filtre dans une configuration donnée . 51
2.2 Mode opératoire du choix du nombre de particules d'un EnKF 59
2.3 Exemple de tracés des variances expérimentales en fonction de la fréquence de rééchantillonnage pour chacun des deux indicateurs 61
2.4 Insertion d'un dispositif d'estimation d'état dans une boucle de commande 62
2.5 Les trois phases de la conception d'un dispositif d'estimation d'état 64
2.6 Structure de l'algorithme de synthèse d'un dispositif d'estimation d'état 65
2.7 Trajectoire de l'état du système de Lorenz discrétisé 67
2.8 Graphe orienté du système de Lorenz 69
2.9 Illustration de la sensibilité au chaos d'un CDKF avec $h = \sqrt{3}$ 70
2.10 États vrai et estimé par un EKF pour une simulation (tirage) de Monte Carlo donnée 71
2.11 Chevelu des erreurs d'estimation de l'EKF 71
2.12 Variance expérimentale de l'EnKF en fonction de son nombre de particules 72
2.13 Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_1, C_2, C_3\}$ 74
2.14 Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_1, C_2\}$ 75
2.15 Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_1, C_3\}$ 75
2.16 Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_2, C_3\}$ 76
2.17 Illustration du mauvais comportement d'un CDKF avec $h = 1,9$ 77
2.18 Illustration du mauvais comportement d'un UKF avec $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\kappa = 0$ . . . 77
2.19 Illustration du bon comportement d'un EnKF avec $N = 20$ particules 78
2.20 Tracé de la variance expérimentale en fonction de la fréquence moyenne de rééchantillonnage pour les deux indicateurs de rééchantillonnage 79

2.21 Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_1, C_2\}$ 81
2.22 Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant C_1 81
2.23 Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant C_2 82

3.1 Grandeur mesurée par un accéléromètre 87
3.2 Grandeur mesurée par un gyro 87
3.3 Définition du vecteur de rotation instantanée de $[m]$ par rapport à $[i]$ 88
3.4 Positionnement des senseurs inertiels dans le repère de mesures 88
3.5 Schéma d'une UMI 89
3.6 Passage du repère inertiel $[i]$ vers le repère terrestre $[t]$ 91
3.7 Passage du repère terrestre $[t]$ vers le trièdre géographique local $[g]$ 92
3.8 Passage de $[g']$ vers $[b]$ à partir des angles de cap, roulis et tangage 92
3.9 Passage de $[g]$ vers $[w]$ 93
3.10 Mouvement du point M par rapport à la terre 96
3.11 Architecture générique d'un système de navigation hybridé 104
3.12 Obtention des composantes de la force spécifique dans $[i]$ 105
3.13 Erreur d'orientation du vecteur de force spécifique 105
3.14 Détermination des plates-formes vraies $[v]$ et calculée $[w]$ à partir du repère $[m]$. 110
3.15 Erreur d'orientation de $[w]$ par rapport à $[v]$, engendrée par les erreurs gyroscopiques et d'alignement (micro-rotateur Ψ) et l'erreur de position (micro-rotateur η) 110
3.16 Conversion des erreurs de latitude, longitude et altitude en erreurs de position nord, ouest et zénithale 113
3.17 Couplage lâche en boucle ouverte 116
3.18 Couplage lâche en boucle fermée 117
3.19 Couplage lâche à partir de filtrage non linéaire 117
3.20 Couplage serré 118

4.1 Constitution d'un GRH 121
4.2 Rotation d'un GRH 122
4.3 Rotation du plan d'onde relativement à la coupole du GRH 122
4.4 Détection de la position angulaire du plan d'onde par des codeurs 123
4.5 Origine de la dérive sur un GRH 123
4.6 Erreur de dérive sur un GRH 124
4.7 Phénomène de dérive du GRH 124
4.8 Erreur de codage angulaire sur un GRH 125
4.9 Schéma-bloc d'un GRH 126
4.10 Schéma-bloc simplifié d'un GRH 126
4.11 Erreur de position avec un filtre de navigation de type minimax 133
4.12 Erreur de position et écarts-types correspondants calculés par le RIE et par un filtre de Kalman employant le même modèle 134
4.13 Allure d'une VA plate sur un intervalle de temps donné 135
4.14 Tracé en échelle semi-logarithmique de la VA de deux processus markoviens à l'ordre 1 d'écart-type unitaire et de périodes d'auto-corrélation 10^3s et 23×10^3s 136
4.15 Tracés de la VA des 4 bruits markoviens (pointillés) dont les auto-corrélations sont régies par une suite géométrique de raison 23 et de la somme des bruits (trait plein) 137
4.16 Tracés de la VA des 4 bruits markoviens (pointillés) dont les auto-corrélations sont régies par une suite géométrique de raison 15 et de la somme des bruits (trait plein) 137

4.17 VA du résidu tel que modélisé et exemple de VA potentielle pour le résidu vrai . 138
4.18 Position, vitesse et attitude du porteur sur la trajectoire A 144
4.19 Trajectoire A en 2 et 3 dimensions 144
4.20 Position, vitesse et attitude du porteur sur la trajectoire B 145
4.21 Trajectoire B en 2 et 3 dimensions 145
4.22 Architecture du simulateur 146
4.23 Grandeurs à calculer pour juger de la bonne compensation de la dérive par le filtre de navigation 148
4.24 Erreur de vitesse et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente 150
4.25 Erreur d'attitude (micro-rotateur $\mathbf{\Phi}_g$) et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente 151
4.26 Erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2 et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente 151
4.27 Erreur de reconstruction de dérive et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente 152
4.28 Erreur de reconstruction de la dérive globale et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente 152
4.29 Erreur de vitesse et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente 153
4.30 Erreur d'attitude (micro-rotateur $\mathbf{\Phi}_g$) et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente 153
4.31 Erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2 et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente 154
4.32 Erreur de reconstruction de dérive et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente 154
4.33 Erreur de reconstruction de la dérive globale et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente 155
4.34 Angles électriques sur la trajectoire A, correspondant à une simulation de Monte Carlo particulière 157
4.35 Angles électriques sur la trajectoire B, correspondant à une simulation de Monte Carlo particulière 157
4.36 Rotations mesurées par les gyroscopes lors de rotations du porteur 158
4.37 Erreur de position et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la $60^{\text{ème}}$ et la $100^{\text{ème}}$ minute 159
4.38 Erreur de vitesse et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la $60^{\text{ème}}$ et la $100^{\text{ème}}$ minute 159
4.39 Erreur d'attitude (micro-rotateur $\mathbf{\Phi}_g$) et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la $60^{\text{ème}}$ et la $100^{\text{ème}}$ minute 160
4.40 Erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2 et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la $60^{\text{ème}}$ et la $100^{\text{ème}}$ minute 160
4.41 Erreur de reconstruction de dérive et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la $60^{\text{ème}}$ et la $100^{\text{ème}}$ minute 161
4.42 Erreur de reconstruction de la dérive globale et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la $60^{\text{ème}}$ et la $100^{\text{ème}}$ minute 161

4.43 Erreur de position et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute . . . 162
4.44 Erreur de vitesse et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute . . . 162
4.45 Erreur d'attitude (micro-rotateur $\mathbf{\Phi}_g$) et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute . . . 163
4.46 Erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2 et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute . . . 163
4.47 Erreur de reconstruction de dérive et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute . . . 164
4.48 Erreur de reconstruction de la dérive globale et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute . . . 164
4.49 Notre solution . . . 166
4.50 Configuration n°2 . . . 166
4.51 Configuration n°4 . . . 166
4.52 Configuration n°1 . . . 166
4.53 Configuration n°3 . . . 166
4.54 Configuration n°5 . . . 166
4.55 Notre solution . . . 167
4.56 Configuration n°2 . . . 167
4.57 Configuration n°4 . . . 167
4.58 Configuration n°1 . . . 167
4.59 Configuration n°3 . . . 167
4.60 Configuration n°5 . . . 167

B.1 Principe de la transformation sans saveur pour une fonction mono-variable, comparée à la linéarisation à l'ordre 1 . . . 185
B.2 Répartition des points pour la transformation sans saveur . . . 186

D.1 Micro-rotateur β . . . 205
D.2 Colinéarité des vecteurs de position et de pesanteur . . . 207
D.3 Variation de pesanteur causée par un déplacement du point M . . . 207

G.1 Exemple de bruit blanc . . . 220
G.2 Exemple de cheminement aléatoire . . . 222
G.3 Exemple de processus markoviens à l'ordre 1 faiblement et fortement auto-corrélés 224

H.1 Principe du calcul de la variance d'Allan . . . 226
H.2 Variance d'Allan d'un bruit blanc en échelle logarithmique, avec $\sigma = 1$ . . . 227
H.3 Variance d'Allan d'un cheminement aléatoire en échelle logarithmique, avec $\sigma = 1$ 227
H.4 Variance d'Allan d'un processus markovien à l'ordre 1 en échelle logarithmique, avec $\sigma = 1$ et $\tau = 10$s . . . 228
H.5 Caractéristiques de la variance d'Allan d'un processus markovien à l'ordre 1 . . . 229

Liste des tableaux

2.1 Variance expérimentale V de l'IEKF en fonction du nombre de corrections N supplémentaires . . . 72
2.2 Variance expérimentale V de l'EnKF en fonction du nombre de particules N . . . 72
2.3 Résultats des simulations avec un EKF . . . 73
2.4 Résultats des simulations avec un EnKF . . . 73
2.5 Variance expérimentale V de l'EnKF en fonction du nombre de particules N . . . 78
2.6 Variance expérimentale et fréquence moyenne de rééchantillonnage pour un filtre de $N = 500$ particules avec l'indicateur de rééchantillonnage basé sur l'entropie du nuage de particules . . . 78
2.7 Variance expérimentale et fréquence moyenne de rééchantillonnage pour un filtre de $N = 500$ particules avec l'indicateur du nombre effectif de particules . . . 79
2.8 Variance expérimentale V du PF en fonction du nombre N de particules . . . 79
2.9 Résultats des simulations avec un EnKF . . . 80
2.10 Résultats des simulations avec un PF . . . 80

4.1 Erreurs RMS de position et écarts-types correspondants à la $100^{\text{ème}}$ minute de la trajectoire A . . . 165
4.2 Erreurs RMS de position et écarts-types correspondants à la $100^{\text{ème}}$ minute de la trajectoire B . . . 168
4.3 Erreurs RMS de position et écarts-types correspondants à la $150^{\text{ème}}$ minute de la trajectoire B . . . 168
4.4 Erreurs RMS de position à la $100^{\text{ème}}$ minute de la trajectoire A en fonction de la borne imposée au résidu estimé . . . 169
4.5 Erreurs RMS de position à la $100^{\text{ème}}$ minute de la trajectoire B en fonction de la borne imposée au résidu estimé . . . 169
4.6 Erreurs RMS de position à la $150^{\text{ème}}$ minute de la trajectoire B en fonction de la borne imposée au résidu estimé . . . 170

Liste des algorithmes

1 Les moindres carrés (avec facteur d'oubli) 7
2 Le filtre de Kalman 11
3 Le filtre de Kalman étendu (EKF) 17
4 Le filtre de Kalman étendu itéré (IEKF) 18
5 Le filtre particulaire basique 22
6 Le rééchantillonnage classique ou multinomial 23
7 Le rééchantillonnage résiduel 24
8 Le filtre particulaire généralisé 29
9 L'estimation d'état sous contraintes égalité linéaires utilisant l'approche par projection 31
10 L'estimation d'entrée récursive (RIE) 41
11 Le filtre de Kalman avec identification des caractéristiques du bruit d'état 44
12 Le filtre minimax 46
13 Méthode de réglage d'un filtre particulaire 62
14 Synthèse du dispositif d'estimation d'état 66
15 L'intégration de navigation 103
16 Le recalage de navigation 116
17 Discrétisation du modèle d'erreurs de navigation 140
18 L'estimation d'état sous contraintes inégalité non linéaires utilisant l'approche par projection 142
19 L'estimation d'état sous contraintes de type norme euclidienne par projection orthogonale. 143
20 Le filtre de Kalman étendu à l'ordre 2 (2OEKF) 182
21 Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) 184
22 La transformation sans saveur (unscented transform) originale 187
23 La transformation sans saveur mise à l'échelle (scaled unscented transform) . . . 188
24 Le filtre de Kalman sans saveur (UKF) 189
25 Le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF) 190
26 L'échantillonnage d'importance séquentiel pour le filtrage de trajectoire 200

Introduction générale

Depuis les travaux pionniers de Karl Friedrich Gauss vers la fin du XVIIIème siècle, l'estimation d'état représente une thématique occupant une place particulière dans le domaine des sciences physiques, notamment celui des sciences de l'ingénieur. La généralité de sa théorie la rend apte à aborder bon nombre de problèmes tels que ceux du filtrage (réception et discrimination de signaux radiophoniques, transmission de données numériques, analyse sismologique, traitement d'images numérisées, examen de signaux issus d'électrocardiogrammes ou électroencéphalogrammes, hybridation d'une navigation inertielle avec des mesures provenant d'un récepteur GPS, etc.), de la prédiction (des conditions météorologiques, de la démographie, du nombre de représentants d'une espèce animale, de la consommation d'énergie électrique d'un pays, de la valeur d'un titre boursier, de l'orbite d'un corps céleste, etc.) et du lissage (traitement *a posteriori* de données numériques, augmentation de la résolution d'une image par prises de photographie multiples, amélioration de la qualité d'un signal radiophonique par introduction d'un léger délai entre la réception du signal et son envoi vers l'étage d'amplification, etc.).

Les travaux de Gauss, lesquels visaient à déterminer l'orbite de la planète Cérès [Grew 01b, chap. 1], furent publiés en 1809[1], donnant ainsi naissance à la méthode dite *des moindres carrés*. L'outil ainsi introduit permet d'estimer des grandeurs constantes, qualifiées d'*état statique*, à partir de mesures entachées d'erreurs. Il faudra attendre les années 1940 pour assister à une évolution notable du concept de moindres carrés. Dans un contexte lié à la seconde guerre mondiale, un ingénieur du MIT, Norbert Wiener, développa en 1942 un outil mathématique visant à prédire la position d'une escadrille adverse, dans le but de mettre en œuvre une riposte efficace. Celui-ci se base sur une minimisation de l'erreur de prédiction en termes d'auto-corrélations entre le signal et les erreurs des mesures. L'apport majeur du filtre de Wiener (publié en 1949 dans son livre [Wien 49][2]) par rapport à la méthode des moindres carrés est qu'il n'exige pas que la constance de l'état à estimer (l'état est alors dit *dynamique*), ce qui représentait à l'époque une avancée théorique considérable. Une autre évolution de taille fut l'introduction vers la fin des années 1950 du concept de la représentation d'état dans la théorie formulée par Wiener. L'instigateur de cette révolution fut Rudolph Emil Kalman, lequel introduisit en 1960[3] le filtre portant désormais son nom [Kalm 60] et constituant l'une des pièces maîtresses de la théorie de l'estimation d'état.

La théorie de l'estimation de l'état d'un système repose donc sur la notion de représentation d'état. La résolution d'un tel problème nécessite en premier lieu de disposer d'un ensemble d'équations régissant l'évolution des variables d'état. Ce premier point est particulièrement délicat pour

[1] A noter que trois ans auparavant, le physicien français Adrien-Marie Legendre publia dans son livre : *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* un outil comparable, de sorte que la paternité des moindres carrés lui est en général attribuée au même titre qu'à Gauss. [Sore 70]

[2] A noter qu'un outil similaire à celui de Wiener fut parallèlement proposé à la même période par Andreï Kolmogorov [Kolm 41].

[3] De même que pour la méthode des moindres carrés, la paternité du filtre de Kalman est également sujette à controverse [Sore 70]. En effet, Peter Swerling proposa dès 1958 dans [Swer 58] puis [Swer 59] un outil similaire en de nombreux points à celui de Kalman.

l'automaticien : il s'agit de décrire de manière suffisamment représentative le comportement du système considéré sans toutefois que les équations développées ne soient trop complexes. Le modèle résultant de ce compromis n'est généralement qu'une approximation de la réalité : on dit alors qu'il présente des incertitudes, voire des méconnaissances. L'estimation d'état dite *robuste* vise à traiter ces méconnaissances soit en s'en affranchissant, soit en mettant en œuvre une manière de s'en accommoder tout en quantifiant de manière fiable leur impact sur l'estimée d'état fournie.

Un second point indispensable à l'estimation de l'état d'un système est la mesure de manière directe ou indirecte de l'ensemble ou une partie des variables d'état. Cet aspect est essentiel puisque l'information ainsi apportée permet de compenser au moins partiellement les incertitudes propres au modèle régissant l'évolution des variables d'état. Toutefois, il arrive parfois que certaines de ces mesures ne parviennent pas jusqu'à l'estimateur, soit en raison d'une indisponibilité de capteur (coupure de signaux en provenance de satellites par exemple), soit parce qu'un module annexe a détecté la défaillance d'un capteur et par conséquent décidé d'empêcher le reconstructeur d'état d'exploiter les informations en provenance de l'élément défaillant. Le nombre d'observations utilisées par l'estimateur s'en trouve donc réduit et par conséquent, la part de l'estimation liée au modèle de dynamique des variables d'état s'en trouve accentuée. Cela s'avère complexe en présence de méconnaissances de modèle. Le travail exposé dans le présent mémoire est en rapport avec cette problématique.

Le premier chapitre de ce document présente une synthèse de diverses méthodes d'estimation d'état. Les techniques linéaires optimales (vis-à-vis d'un critère de performances donné), parmi lesquelles on recense le filtre de Kalman, sont tout d'abord étudiées. Les approches non linéaires sont ensuite présentées, ces dernières se répartissant en deux catégories : les méthodes analytiques, regroupant plusieurs extensions du filtrage de Kalman et les méthodes numériques de type simulation de Monte Carlo, aboutissant au filtrage particulaire. La dernière partie de ce chapitre traite le problème de robustesse vis-à-vis de diverses méconnaissances relatives à l'équation d'état (structure du modèle, valeurs de paramètres, entrées inconnues), en présentant un certain nombre de méthodes adaptées aux incertitudes considérées.

Le but du deuxième chapitre est, dans un premier temps, de proposer une méthode expérimentale d'évaluation de l'impact d'une perte de capteur(s) sur la qualité d'estimation. Cette opération s'effectue dans un cadre très général puisque la technique proposée est destinée à tout système modélisable sous forme de représentation d'état non linéaire, les méconnaissances de modèle considérées se restreignant à des incertitudes de dynamique assimilables à des bruits blancs potentiellement multiplicatifs. Ensuite, cet outil est exploité afin de régler, analyser et comparer entre eux les estimateurs d'état en adéquation avec le problème considéré, puis de synthétiser une redondance matérielle de certains capteurs du dispositif d'instrumentation initial.

Le troisième chapitre de ce mémoire rassemble les éléments de la théorie de la navigation nécessaires à la compréhension du quatrième et dernier chapitre, lequel traite le cas d'une navigation inertielle hybridée avec des mesures provenant d'un récepteur GPS. Dans cette application particulière, des méconnaissances de modèle apparaissent, celles-ci étant dues à la technologie de gyroscopes employée (Gyroscopes Résonnants Hémisphériques). Les mesures exploitées par l'estimateur d'état proviennent du GPS et peuvent être coupées à n'importe quel instant. Après avoir étudié un certain nombre d'estimateurs d'état robustes (ceux présentés dans le premier chapitre), nous avons finalement opté pour une approche différente, consistant à décrire la méconnaissance à partir de l'outil qu'est la variance d'Allan. Cette solution est testée suivant différents aspects sur deux trajectoires d'avions.

1

L'estimation d'état : techniques optimales et robustes

Sommaire

1.1 Introduction **1**
1.2 Estimation optimale d'un vecteur aléatoire statique **2**
1.2.1 Méthode des moindres carrés simples 3
1.2.2 Méthode des moindres carrés récursifs 4
1.2.3 Quelques résultats supplémentaires sur les moindres carrés 7
1.3 Estimation optimale d'un vecteur aléatoire dynamique **8**
1.3.1 Cas d'un vecteur de dynamique linéaire : le filtre de Kalman 9
1.3.2 Quelques extensions du filtre de Kalman 12
1.3.3 Filtrage de Kalman pour vecteurs de dynamique non linéaire 13
1.4 Approche bayésienne de l'estimation d'état optimale **19**
1.4.1 Le filtrage particulaire 20
1.4.2 Rééchantillonnage des particules 21
1.4.3 Une généralisation du filtre particulaire : l'échantillonnage d'importance séquentiel 27
1.5 Estimation d'état optimale sous contraintes **28**
1.5.1 L'approche par projection pour des contraintes égalité linéaires 30
1.5.2 L'approche par projection pour des contraintes inégalité linéaires 31
1.6 Estimation d'état robuste **33**
1.6.1 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes de modèle 34
1.6.2 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur l'entrée du système 36
1.6.3 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur le bruit d'état 42
1.7 Conclusion **47**

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous présentons le problème d'estimation d'état optimale, l'optimalité en question étant relative à un critère pré-défini. Le cas d'un vecteur d'état statique

puis celui d'un vecteur d'état de dynamique linéaire ou non linéaire sont étudiés, et diverses solutions exactes ou approchées du problème sont exposées. Une méthode générale d'estimation sous contraintes sur les variables d'état est ensuite présentée, une telle démarche permettant de prendre en compte certaines connaissances *a priori* de l'état à estimer, ces connaissances étant la plupart du temps ignorées car difficiles à intégrer dans un estimateur. Enfin, quelques extensions des méthodes optimales développées sont étudiées, ces extensions dites *robustes* ayant pour but de s'affranchir ou de s'accommoder de diverses sources d'incertitudes relatives à la modélisation mathématique du processus étudié.

1.2 Estimation optimale d'un vecteur aléatoire statique

Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur dont les n_x composantes sont des constantes décrivant l'état d'un système statique. Le but recherché est d'estimer ces n_x grandeurs inconnues. Pour ce faire, un nombre n_y de mesures (également appelées observations) directes ou indirectes des n_x composantes de $\boldsymbol{X}$ sont effectuées, cette procédure étant réitérée un certain nombre de fois. Les n_y mesures obtenues lors de la $k^{\text{ième}}$ campagne d'observation sont regroupées dans le vecteur de mesure $\boldsymbol{Y}_k^*$, lequel est relié au vecteur d'état $\boldsymbol{X}$ au travers d'une équation dite de *régression linéaire* :

$$\boldsymbol{Y}_k^* = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{X}, \tag{1.1}$$

où $\boldsymbol{H}_k$ est une matrice connue dont les coefficients peuvent varier avec le temps. Généralement, l'observation $\boldsymbol{Y}_k^*$ est imparfaite car entachée d'une erreur additive $\boldsymbol{V}_k$. Ainsi, la grandeur effectivement mesurée n'est pas $\boldsymbol{Y}_k^*$ mais $\boldsymbol{Y}_k$, définie comme suit :

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{Y}_k^* + \boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{X} + \boldsymbol{V}_k. \tag{1.2}$$

L'application de cette relation pour $k = 1, \ldots, N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) conduit au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{Y}_1 & = & \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{X} + \boldsymbol{V}_1 \\ & \vdots & \\ \boldsymbol{Y}_k & = & \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{X} + \boldsymbol{V}_k \\ & \vdots & \\ \boldsymbol{Y}_N & = & \boldsymbol{H}_N \boldsymbol{X} + \boldsymbol{V}_N \end{array} \right. . \tag{1.3}$$

En règle générale, $n_y < n_x$ et les erreurs de mesures ne sont pas connues. Il s'avère donc impossible de calculer de manière exacte l'état $\boldsymbol{X}$ à partir des observations $\boldsymbol{Y}_{1\to N} = \{\boldsymbol{Y}_k\}_{1\leq k\leq N}$, du fait que (1.3) présente plus d'inconnues ($\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{V}_{1\to N} = \{\boldsymbol{V}_k\}_{1\leq k\leq N}$, ce qui représente $Nn_y + n_x$ variables) que d'équations (Nn_y relations) : le système (1.3) est sous-déterminé. Afin d'obtenir une solution explicite du problème formulé, il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires ou de formuler des hypothèses, par exemple en se plaçant dans un cadre stochastique. Pour ce faire, les erreurs de mesures $\boldsymbol{V}_k$ sont caractérisées de manière statistique. Typiquement, elles sont supposées être des réalisations d'un tirage aléatoire opéré selon une loi normale centrée (c'est-à-dire de moyenne nulle quel que soit k) et de covariance[4] $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$. Cette hypothèse n'est pas

[4]Le terme "covariance" constitue un abus de langage dans ce sens où les termes diagonaux de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$ représentent en réalité des variances et les autres termes des covariances. L'appellation adéquate devrait être "variance-covariance". Cependant, pour des raisons de simplicité, nous conserverons dans la suite de ce mémoire le nom de "covariance" pour de telles matrices.

absurde dans ce sens où le théorème de la limite centrale montre que de nombreux phénomènes aléatoires naturels sont modélisables par des variables gaussiennes [Born 90, ann. C]. De même que $\boldsymbol{V}_k$, $\boldsymbol{X}$ est lui aussi supposé être un vecteur aléatoire décrit par une loi normale de moyenne $\overline{\boldsymbol{x}}$ et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}^{xx}$. La gaussianité de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{V}_k$ ainsi que la linéarité de (1.2) entraînent la gaussianité de $\boldsymbol{Y}_k$ quel que soit k.

A partir de l'optimisation d'un critère donné, on fournit une *estimée* ponctuelle $\widehat{\boldsymbol{x}}$ de $\boldsymbol{X}$ dont la densité de probabilité est entièrement définie sur l'espace d'état $\mathbb{R}^{n_x}$ par $\overline{\boldsymbol{x}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}^{xx}$. Pour ce faire, les informations exploitées proviennent de l'ensemble de mesures $\boldsymbol{y}_{1\to N} = \{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k, \ldots, \boldsymbol{y}_N\}$, lesquelles sont considérées comme étant les réalisations respectives des variables aléatoires[5] $\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_k, \ldots, \boldsymbol{Y}_N$. Par conséquent, l'estimée de $\boldsymbol{X}$ obtenue à partir de $\boldsymbol{y}_{1\to N}$ sera désormais notée $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ afin de marquer sa dépendance vis-à-vis du nombre N de mesures effectuées.

Le critère d'optimalité choisi définit la nature de l'estimation. On en distingue deux principales :

- l'estimation au sens du maximum *a posteriori* : $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ est alors la valeur qui maximise la densité de probabilité $p\left(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{y}_{1\to N}\right)$ de $\boldsymbol{X}$, laquelle est reconstruite à partir de $\boldsymbol{y}_{1\to N}$ et des covariances $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$ $(k = 1 \ldots, N)$ du bruit de mesure,
- l'estimation au sens des moindres carrés : $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ est alors calculé de sorte à minimiser le critère suivant :

$$\mathbb{E}\left(\|\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{x}}_N\|^2 \middle| \boldsymbol{Y}_{1\to N} = \boldsymbol{y}_{1\to N}\right) = \mathbb{E}\left(\left(\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{x}}_N\right)^T \left(\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{x}}_N\right) \middle| \boldsymbol{Y}_{1\to N} = \boldsymbol{y}_{1\to N}\right). \quad (1.4)$$

  On montre alors que $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ est égal à l'espérance de $\boldsymbol{X}$, conditionnée par les informations disponibles, à savoir les N mesures réalisées [Rhod 71] :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_N = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}_{1\to N} = \boldsymbol{y}_{1\to N}\right). \quad (1.5)$$

Une des conséquence de la gaussianité de $\boldsymbol{X}$ est que les deux estimateurs précités donnent le même résultat, du fait que la moyenne (autre nom de l'espérance) d'une variable gaussienne est également la valeur correspondant au maximum de sa densité de probabilité. Par la suite, nous nous intéresserons à l'obtention de $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ via l'optimalité au sens des moindres carrés. $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ est alors dit comme étant obtenu par la *méthode des moindres carrés*. Selon le type de problème considéré, deux formulations de la méthode des moindres carrés existent : il s'agit de la forme simple et de la forme récursive.

1.2.1 Méthode des moindres carrés simples

La méthode des moindres carrés simples calcule directement $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ à partir d'un ensemble de N mesures $\boldsymbol{y}_{1\to N}$, N étant fixé. Une telle formulation est en général utilisée dans des applications de traitement *a posteriori* des informations. Typiquement, il s'agit d'effectuer une campagne de mesures sur le procédé étudié et de relever et enregistrer un nombre N d'observations $\boldsymbol{y}_k$ $(k = 1, \ldots, N)$. Ensuite, $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ est calculé hors ligne à partir de l'ensemble $\boldsymbol{y}_{1\to N}$ des mesures collectées. Du fait de l'équivalence dans un cadre gaussien entre les estimées au sens des moindres carrés et celles au sens du maximum *a posteriori*, il est possible de montrer que l'obtention de $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ via la minimisation du critère (1.5) est équivalent au calcul suivant [Ande 79, p. 135] :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_N = \arg\left\{\min_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n_x}} \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}\right)^T \left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}\right)\right)\right\}. \quad (1.6)$$

[5] D'une manière générale, nous distinguerons les variables aléatoires, notées en majuscule, de leurs réalisations, notées en minuscule.

En développant les calculs, il vient le résultat suivant [Simo 06c, chap. 3], sous réserve que $\boldsymbol{\mathcal{H}}_N$ soit de plein rang colonne (voir après) :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_N = \left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{S}}_N^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_N\right)^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{S}}_N^{-1} \boldsymbol{y}_{1\to N}, \tag{1.7}$$

où :

$$\boldsymbol{y}_{1\to N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}}_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1^{vv} & \dots & \boldsymbol{0}_{n_y \times n_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0}_{n_y \times n_y} & \dots & \boldsymbol{\Sigma}_N^{vv} \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Quelques remarques quant à ce résultat :

- d'après (1.7), en remarquant que $\boldsymbol{y}_{1\to N}$ est la réalisation de $\boldsymbol{Y}_{1\to N}$, il est possible de considérer que $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ est la réalisation de la variable aléatoire $\widehat{\boldsymbol{X}}_N$ où :

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_N = \left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{S}}_N^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_N\right)^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{S}}_N^{-1} \boldsymbol{Y}_{1\to N}; \tag{1.9}$$

- l'équation (1.9) montre de manière évidente que l'estimateur des moindres carrés est linéaire, du fait que $\widehat{\boldsymbol{X}}_N$ dépend linéairement de chaque mesure $\boldsymbol{Y}_k$, $k = 1, \dots, N$;
- en insérant les équations du système (1.3) dans (1.9) à l'aide de (1.8), il vient :

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_N = \boldsymbol{X} + \left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{S}}_N^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_N\right)^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{S}}_N^{-1} \boldsymbol{V}_{1\to N}. \tag{1.10}$$

  Par conséquent, le fait que $\{\boldsymbol{V}_k\}_{1\le k\le N}$ soit une séquence centrée implique que $\mathbb{E}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}_N\right) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}\right)$: l'estimateur des moindres carrés est non biaisé[6] ;
- l'équation (1.10) permet de montrer de manière triviale que la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_N^{xx}$ d'erreur d'estimation de $\boldsymbol{X}$ par $\widehat{\boldsymbol{x}}_N$ est : $\boldsymbol{\Sigma}_N^{xx} = \left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{S}}_N^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_N\right)^{-1}$; cette grandeur permet de quantifier de manière statistique l'erreur commise en estimant $\boldsymbol{X}$ par $\widehat{\boldsymbol{X}}_N$;
- il va de soit que l'estimée de $\boldsymbol{X}$ au sens des moindres carrés n'existe que si la matrice $\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{S}}_N^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}}_N\right)$ dans (1.7) est régulière. Pour cela, il faut tout d'abord que $\boldsymbol{\mathcal{S}}_N$ soit régulière, ce qui signifie que toutes les mesures $\boldsymbol{Y}_k$ ($k = 1, \dots, N$) doivent être bruitées (c'est-à-dire entachées d'erreur [Simo 06c, p. 83]). Par ailleurs, si $\boldsymbol{\mathcal{S}}_N$ est de la forme : $\boldsymbol{\mathcal{S}}_N = \sigma^2 \boldsymbol{I}_{Nn_y}$ (avec $\sigma \in \mathbb{R}^+$ connu), ce qui signifie que les bruits entachant les mesures sont stationnaires, d'écarts-types identiques et mutuellement indépendants, la condition d'existence de l'estimateur des moindres carrés se résume à la régularité de la matrice suivante, appelée matrice de Gram [Grew 01b, chap. 1] :

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_N^T \boldsymbol{\mathcal{H}}_N = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{H}_k^T \boldsymbol{H}_k. \tag{1.11}$$

1.2.2 Méthode des moindres carrés récursifs

Les moindres carrés récursifs ne se servent pas de manière directe d'un ensemble de k mesures $\boldsymbol{y}_{1\to k}$ pour calculer $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$, mais procèdent de manière récursive (d'où la terminologie) : $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ est obtenu à l'aide de la dernière observation $\boldsymbol{y}_k$ et de l'estimée $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$, laquelle contient de manière implicite

[6] Cette remarque n'est vraie que si les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{H}}_N$ sont indépendants des mesures $\boldsymbol{Y}_{1\to N}$. Ce n'est par exemple pas le cas dans les problèmes d'identification paramétrique, où la blancheur de $\{\boldsymbol{V}_k\}_{1\le k\le N}$ est également requise pour obtenir un estimateur non biaisé [Born 92].

l'apport de l'ensemble des anciennes mesures $\boldsymbol{y}_{1\to k-1}$. Une telle formulation est en général adoptée pour des problèmes d'estimation en ligne, lorsque les mesures $\boldsymbol{y}_k$ parviennent une par une et à intervalle régulier.

Le but des moindres carrés récursifs est donc de calculer l'estimée $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ de $\boldsymbol{X}$ ainsi que sa covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ en fonction de $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}$ (moyennant une initialisation de ces grandeurs), de l'observation $\boldsymbol{y}_k$ et de la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$ de son bruit de mesure. Pour obtenir les équations désirées, une méthode classique réside en le développement du résultat (1.7) ; l'approche que nous allons utiliser (cf. ann. C) est différente, mais tout aussi connue. Son avantage sur la première méthode est de mettre en évidence certaines propriétés de l'estimateur des moindres carrés, telles que le principe d'orthogonalité. En adoptant les notations suivantes pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1} & = & \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1} = \boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right), \\
\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1} & = & \mathbb{E}\left(\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1} = \boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right), \\
\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} & = & \left(\left(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)\left(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)^T \middle| \boldsymbol{Y}_{1\to k-1} = \boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right), \\
\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy} & = & \left(\left(\boldsymbol{Y}_k - \overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)\left(\boldsymbol{Y}_k - \overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)^T \middle| \boldsymbol{Y}_{1\to k-1} = \boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right), \\
\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy} & = & \left(\left(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)\left(\boldsymbol{Y}_k - \overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)^T \middle| \boldsymbol{Y}_{1\to k-1} = \boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right) \;=\; \left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}\right)^T,
\end{array} \tag{1.12}$$

les équations des moindres carrés récursifs sont :

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{\boldsymbol{x}}_k & = & \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{y}_k - \overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right), \\
\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} & = & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}.
\end{array} \tag{1.13}$$

Cet algorithme doit être initialisé avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$, lesquels sont en général déterminés à l'aide d'une connaissance *a priori* sur l'état $\boldsymbol{X}$ à estimer ainsi que la fiabilité de cette connaissance. De toute évidence, de même que pour sa version simple, l'estimateur des moindres carrés récursifs est lui aussi linéaire (ou plus exactement affine car $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ n'est pas nécessairement nul) et non biaisé [Rhod 71], [Born 90, ann. C]. Par ailleurs, les équations de (1.13) permettent d'aboutir facilement au résultat suivant (cf. ann. C) :

$$\mathbb{E}\left(\left(\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{x}}_k\right)\left(\boldsymbol{Y}_{1\to k}\right)^T\right) = \boldsymbol{0}_{n_x \times k n_y}. \tag{1.14}$$

Cette égalité constitue le *principe d'orthogonalité*[7], lequel traduit le fait que l'erreur d'estimation de $\boldsymbol{X}$ par $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ est décorrélée des mesures $\boldsymbol{Y}_{1\to k}$ [Born 90, ann. C]. Ce résultat est également appelé *théorème de projection* [Kail 68], [Ande 79, p. 96] car il stipule que l'état estimé est la projection de $\boldsymbol{X}$ sur le sous-espace de $\mathbb{R}^{n_x}$ engendré par l'ensemble des mesures $\boldsymbol{Y}_{1\to k}$ et la constante $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$. Ce théorème, illustré par la figure 1.1, autorise une interprétation géométrique simple du principe des moindres carrés.

Posons $\widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = \boldsymbol{y}_k - \overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}$ comme étant la réalisation de la variable aléatoire $\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1} = \boldsymbol{Y}_k - \overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}$, appelée *innovation*. Concrètement, cette grandeur représente les informations supplémentaires apportées par la mesure $\boldsymbol{y}_k$ et qui n'étaient pas incluses dans les observations $\boldsymbol{y}_{1\to k-1}$ [Kail 68]. De toute évidence, $\left\{\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}\right\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une séquence gaussienne, centrée et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}$. En effectuant les hypothèses suivantes :

[7] Deux vecteurs aléatoires $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont orthogonaux si $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\right) = \boldsymbol{0}$. Ce résultat est géométriquement interprétable en considérant un espace euclidien dont le produit scalaire entre deux vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\right)$. Le terme "orthogonaux" prend alors tout son sens.

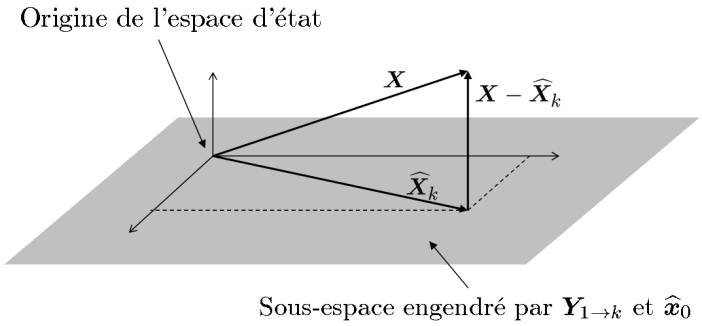


FIG. 1.1 – Illustration du théorème de projection

- le bruit d'observation $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est blanc[8]
- les mesures[9] $\boldsymbol{Y}_k$ et $\boldsymbol{Y}_n$ sont indépendantes[10] pour $n \neq k$,
- l'état $\boldsymbol{X}$ à estimer et le bruit de mesures sont orthogonaux (ou plus simplement indépendants[11]),

le principe d'orthogonalité (1.14) permet de prouver que l'innovation est une séquence blanche. Par conséquent, $\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}$ est orthogonale à $\boldsymbol{Y}_{1\to k-1}$, ce qui autorise là encore une interprétation graphique simple (figure 1.2) de l'évolution de $\widehat{\boldsymbol{x}}$ provoquée par l'obtention d'une mesure [Lemo 03], avec :

$$\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}\,\middle|\,\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1} = \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right) = \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}. \tag{1.15}$$

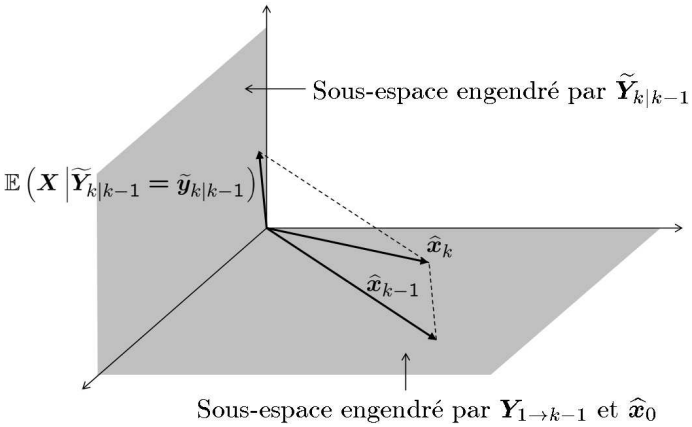


FIG. 1.2 – Illustration du principe des moindres carrés récursifs

Enfin, grâce à la linéarité de (1.2) et à l'indépendance entre $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\boldsymbol{X}$, il est facile de montrer que :

$$\begin{array}{rcl} \overline{\boldsymbol{y}}_{k-1} & = & \boldsymbol{H}_k\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}_k\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy} & = & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}\boldsymbol{H}_k^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy} & = & \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}\boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}. \end{array} \tag{1.16}$$

[8]Une séquence aléatoire $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est dite blanche lorsque : $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_n^T\right) = \boldsymbol{0}$ pour $n \neq k$. Cela revient à dire que le processus décrit par $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est purement aléatoire.

[9]Remarque : la blancheur du bruit d'observation est une condition nécessaire à l'indépendance des mesures.

[10]Deux vecteurs aléatoires $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont indépendants si $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\right) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}\right)\mathbb{E}\left(\boldsymbol{B}^T\right)$.

[11]Du fait que $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est centré, l'indépendance entre $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\boldsymbol{X}$ implique l'orthogonalité de ces deux grandeurs. En effet, $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{X}^T\right) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{V}_k\right)\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}^T\right) = \boldsymbol{0}_{n_y\times 1} \times \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}^T\right) = \boldsymbol{0}_{n_y\times n_x}$.

1.2.3 Quelques résultats supplémentaires sur les moindres carrés

Cas non gaussien :

Jusqu'ici, les variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}_k$ on été considérées gaussiennes. Cette hypothèse a permis de démontrer que l'estimateur optimal de $\boldsymbol{X}$ au sens de moindres carrés est linéaire. Une question vient naturellement à l'esprit : qu'en est-il si l'hypothèse de gaussianité n'est plus respectée ? Dans ce cas, l'estimateur des moindres carrés tel que présenté demeure le meilleur estimateur linéaire, mais ne peut plus être considéré comme optimal (au sens des moindres carrés) dans l'absolu. En effet, il se peut qu'il existe un estimateur non-linéaire donnant de meilleurs résultats [Ande 79, p. 46].

Traitement séquentiel des mesures :

L'algorithme des moindres carrés récursif (1.13) constitue un outil efficace pour l'estimation en ligne lorsque les mesures parviennent à intervalle régulier. Toutefois, un inconvénient apparaît : il s'agit de l'inversion de la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}$ de l'innovation, cette opération pouvant s'avérer relativement coûteuse en temps de calcul. Une manière de s'affranchir de ce problème consiste à traiter de manière séquentielle les n_y composantes de la mesure $\boldsymbol{y}_k$. Cette démarche n'est exécutable que si toutes les observations sont indépendantes entre elles, c'est-à-dire si $\boldsymbol{\Sigma}_k^{yy}$ est une matrice diagonale. Si tel est le cas, alors à l'algorithme (1.13) se substituent n_y étapes analogues, chacune traitant une mesure scalaire. Ainsi, l'inversion de $\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}$ se trouve remplacée par n_y divisions. L'algorithme d'une telle approche peut par exemple être trouvé dans [Simo 06c, p. 150].

Moindres carrés à facteur d'oubli :

La méthode des moindres carrés constitue une technique d'estimation d'un vecteur $\boldsymbol{X}$ constant. Cependant, en pratique, il est possible d'être confronté au cas où certaines composantes de $\boldsymbol{X}$ varient dans le temps. Si les observations $\{\boldsymbol{Y}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ parviennent à intervalle régulier et que la fréquence de disponibilité de ces mesures est nettement supérieure à la vitesse de variation de $\boldsymbol{X}$, alors l'algorithme des moindres carrés récursifs peut être adapté à un tel problème. Concrètement, il s'agit d'introduire un *facteur d'oubli* $\lambda \in]0\ ;\ 1]$, lequel a pour effet d'atténuer l'effet des mesures anciennes relativement aux mesures récentes, sachant que ces dernières sont celles qui reflètent de la manière la plus vraisemblable l'état $\boldsymbol{X}$ à l'instant courant [Good 84, p. 64]. En tenant compte des résultats (1.16), les équations des moindres carrés sont synthétisées (1.13) sur l'algorithme 1 [Ben 01, chap. 2].

- `Pour` $k = 0$, `initialiser avec` $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ `et` $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$.
- `Pour` $k \geq 1$, `calculer :`

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{k-1}^{xx} &= \lambda^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}, \\
\boldsymbol{K}_k &= \boldsymbol{H}_k\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{k-1}^{xx}\left(\boldsymbol{H}_k\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{k-1}^{xx}\boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{vv}\right)^{-1}, \\
\widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}_k\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right), \\
\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k\right)\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{k-1}^{xx}.
\end{aligned}$$

Algorithme 1: Les moindres carrés (avec facteur d'oubli)

En général, λ est choisi entre 0.95 et 1 [Land 93], [Ben 01, chap. 2]. Dans ce dernier cas,

l'algorithme 1 n'est ni plus ni moins que celui des moindres carrés dans sa forme originale. Il est à noter qu'il existe une solution alternative à l'insertion d'un facteur d'oubli : il s'agit des moindres carrés à fenêtre glissante [Naji 88], [Born 92, p. 257], dont le principe est de n'utiliser que les n dernières observations $\boldsymbol{y}_{k-n+1\to k}$ afin d'estimer $\boldsymbol{X}$, et d'ignorer complètement les mesures $\boldsymbol{y}_{1\to k-n}$.

1.3 Estimation optimale d'un vecteur aléatoire dynamique

Dans la partie précédente, une méthode optimale d'estimation d'un vecteur aléatoire statique gaussien, appelée méthode des moindres carrés, a été présentée. Une manière d'adapter cet outil au problème d'estimation d'un vecteur dont les composantes peuvent lentement varier dans le temps a également été évoquée. Cependant, dans le domaine des sciences de l'ingénieur, le problème d'estimation d'un vecteur de dynamique rapide est fréquemment rencontré. L'algorithme des moindres carrés tel que présenté ne constitue alors en aucun cas une solution convenable. Un autre outil, pouvant être considéré comme une extension directe des moindres carrés, est alors utilisé : il s'agit du *filtre de Kalman*, du nom de son concepteur, Rudolph Emil Kalman [Kalm 60], [Kalm 61]. Cet estimateur est dénommé "filtre" car son principe de fonctionnement contribue à atténuer l'effet des différentes sources de bruit.

Considérons que les mesures $\{\boldsymbol{Y}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ parviennent de manière régulière, l'intervalle de temps entre deux mesures consécutives quelconques étant constant. L'état (dynamique) à l'instant, appelé *instant* k, où $\boldsymbol{Y}_k$ est disponible est dorénavant représenté par le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}_k$. Le problème d'estimation d'un état dynamique consiste à trouver un estimateur ponctuel $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ de $\boldsymbol{X}_k$ en fonction de l'ensemble de mesures $\boldsymbol{Y}_{1\to n}$. Trois cas de figure sont alors à distinguer :

- si $k > n$, il s'agit d'un problème de *prédiction*,
- si $k = n$, il s'agit d'un problème de *filtrage*,
- si $k < n$, il s'agit d'un problème de *lissage*.

Par la suite, à quelques exceptions près, nous ne considérerons que le problème du filtrage. En ce qui concerne la prédiction et le lissage, le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages de Jazwinki [Jazw 70], d'Anderson et Moore [Ande 79], Goodwin et Sin [Good 84] ou de Simon [Simo 06c].

Nous considérons toujours l'estimateur des moindres carrés sous forme récursive, lequel calcule $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_k|\boldsymbol{Y}_{1\to k} = \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$. Les hypothèses de blancheur du bruit de mesures $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ et d'indépendance des observations $\{\boldsymbol{Y}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont à nouveau utilisées.

Le vecteur d'état évolue selon un *processus de Gauss- Markov* forcé :

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{W}_k), \tag{1.17}$$

où $\boldsymbol{f}_k$ est une fonction connue pouvant être linéaire ou non linéaire, $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente un vecteur déterministe commandant l'évolution de $\boldsymbol{X}_k$ et $\boldsymbol{W}_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le *bruit d'état* (également appelé *bruit de dynamique*), supposé blanc, gaussien, centré et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$. La séquence $\{\boldsymbol{W}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est supposée indépendante du bruit de mesures $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$. L'état initial $\boldsymbol{X}_0$ est quant-à-lui supposé gaussien et indépendant de $\{\boldsymbol{W}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$. Compte tenu des hypothèses précédemment formulées, cette dernière condition est suffisante pour assurer que $\boldsymbol{X}_k$ est décorrélé de $\boldsymbol{V}_k$ et $\boldsymbol{W}_k$ quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$.

De manière analogue à celle utilisée lors de la présentation des moindres carrés, les notations

générales suivantes pour deux vecteurs aléatoires quelconques $\boldsymbol{A}_n$, $\boldsymbol{B}_n$ et $m \in \mathbb{N}^*$ sont adoptées :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\boldsymbol{a}}_{n|m} & = & \mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}_n | \boldsymbol{Y}_{1\to m} = \boldsymbol{y}_{1\to m}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}^{ab}_{n|m} & = & \left(\left(\boldsymbol{A}_n - \widehat{\boldsymbol{a}}_{n|m}\right) \left(\boldsymbol{B}_n - \widehat{\boldsymbol{b}}_{n|m}\right)^T \middle| \boldsymbol{Y}_{1\to m} = \boldsymbol{y}_{1\to m} \right), \\ \widehat{\boldsymbol{a}}_n & = & \widehat{\boldsymbol{a}}_{n|n}, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{ab}_n & = & \boldsymbol{\Sigma}^{ab}_{n|n}. \end{array} \tag{1.18}$$

Les équations (1.13) deviennent alors :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} & = & \boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}, \\ \boldsymbol{K}_k & = & \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k|k-1} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k|k-1}\right)^{-1}, \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_k & = & \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_k & = & \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k|k-1} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k|k-1} \boldsymbol{K}_k^T. \end{array} \tag{1.19}$$

Ces équations constituent les relations générales du filtre de Kalman, telles que présentées dans [Juli 94], [Juli 97], $\boldsymbol{K}_k$ étant le gain associé au filtre de Kalman, parfois appelé *gain de Kalman*. Sous une telle forme, ces équations ne sont pas exploitables. Toutefois, dans le cas où la fonction $\boldsymbol{f}_k$ du modèle d'état (1.17) est linéaire, ces relations peuvent être exprimées de manière simple comme rappelé dans la section à venir, ainsi que quelques modifications et extensions de cet algorithme de base. La section suivante est quant-à-elle dévouée à la recherche d'une solution approchée de (1.19) dans le cas où $\boldsymbol{f}_k$ est non linéaire et continue.

1.3.1 Cas d'un vecteur de dynamique linéaire : le filtre de Kalman

Considérons le modèle d'état (1.17) sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{W}_k, \tag{1.20}$$

où $\boldsymbol{F}_k$ et $\boldsymbol{G}_k$ sont des matrices connues de dimensions appropriées dont les paramètres peuvent varier avec le temps. La relation entre l'état et les mesures à l'instant k est la même que celle décrite dans (1.2) à cette différence près que $\boldsymbol{X}_k$ varie dans le temps :

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{V}_k. \tag{1.21}$$

Condition d'observabilité :

Considérons la représentation d'état décrite par les équations d'état (1.20) et de mesure (1.21), en faisant abstraction des bruits d'état et d'observation.

Définition [Zhou 96, chap. 3] : L'état $\boldsymbol{X}$ est dit *observable* entre les instants m et n s'il est possible, à l'aide des équations d'état et de mesure, de reconstruire de manière unique $\boldsymbol{X}_m$ à partir de l'ensemble des mesures $\boldsymbol{Y}_{m\to n}$, les séquences de commande $\{\boldsymbol{u}_k\}_{m\leq k\leq n}$ étant connues. ■

A partir de cette définition, il est possible de dériver un critère simple pour les représentations d'état linéaires à temps variant : le *grammien d'observabilité*. Pour ce faire, il suffit de chercher à exprimer la mesure $\boldsymbol{Y}_{m+h}$ (pour $m \leq h \leq n$) en fonction de $\boldsymbol{X}_m$, en ignorant les termes de commande qui sont connus et donc n'affectent en rien la possibilité de reconstruire $\boldsymbol{X}_m$. En posant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{\Phi}(k+h,k) & = & \boldsymbol{F}_{k+h-1}\boldsymbol{F}_{k+h-2}\ldots\boldsymbol{F}_{k+1}\boldsymbol{F}_k \\ \boldsymbol{\Phi}(k,k) & = & \boldsymbol{I}_{n_x} \end{array} \right. , \tag{1.22}$$

il vient :

$$\boldsymbol{Y}_{m+h} = \boldsymbol{H}_{m+h}\boldsymbol{\Phi}(m+h,m)\boldsymbol{X}_m, \tag{1.23}$$

dont la structure est semblable à celle de (1.2). Cette équation étant appliquée pour $h = 0, \ldots, m$, le critère d'observabilité se résume donc à la régularité de la matrice de Gram, notée $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{m\to n}$ et définie par :

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{m\to n} = \sum_{k=m}^{n} \boldsymbol{\Phi}^T(k,m)\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\Phi}(k,m). \tag{1.24}$$

Le critère du grammien assure que l'observabilité de $\boldsymbol{X}$ est assurée entre les instants m et n si et seulement si le rang de $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{m\to n}$ est plein (c'est-à-dire égal à n_x) [Zhou 96, chap. 3]. Dans le cas particulier où $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{H}$ sont des matrices constantes, l'observabilité devient une notion indépendante du temps. $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{m\to n}$ (dont la notation est simplifiée en $\boldsymbol{\mathcal{W}}$) est alors solution de l'équation de Lyapunov discrète suivante [Azou 97] :

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{\mathcal{W}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\mathcal{W}}. \tag{1.25}$$

Par ailleurs, une forme plus simple du grammien, appelé *critère de Kalman*, assure que le système est observable si et seulement si le rang de la matrice $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ définie ci-dessous est plein (c'est-à-dire égal à n_x) [Zhou 96, chap. 3] :

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^T & (\boldsymbol{H}\boldsymbol{F})^T & \ldots & \left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^{n_x-1}\right)^T \end{bmatrix}^T. \tag{1.26}$$

Le filtre de Kalman :

A l'aide des propriétés du bruit d'état $\boldsymbol{W}_k$ (moyenne nulle et orthogonalité avec $\boldsymbol{X}_k$), l'équation (1.20) permet d'aboutir facilement aux résultats suivants :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} & = & \boldsymbol{F}_{k-1}\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{G}_{k-1}\boldsymbol{u}_{k-1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k|k-1} & = & \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1}\boldsymbol{F}^T_{k-1} + \boldsymbol{\Sigma}^{ww}_{k-1}, \end{array} \tag{1.27}$$

ce qui, en s'appuyant sur les formules de (1.16), permet de modifier les équations (1.19) en l'algorithme du filtre de Kalman pour les systèmes linéaires (algorithme 2) [Kalm 60].

Comme le montre l'algorithme 2, le filtre de Kalman présente une structure en deux étages : *prédiction* (parfois appelée *estimation a priori*) et *correction* (également nommée *estimation a posteriori* ou *mise à jour*). De surcroît, cet outil conserve les propriétés des moindres carrés (principe d'orthogonalité, caractéristiques de l'innovation, etc. [Ande 79]). Il constitue également l'estimateur optimal au sens absolu du terme lorsque $\boldsymbol{X}_k$ et $\boldsymbol{Y}_k$ sont gaussiens. Dans ce cas, l'estimée optimale au sens des moindres carrés coïncide là encore avec celle issue du maximum *a posteriori* [Atha 67].

Par ailleurs, de par sa définition (1.18), la covariance $\boldsymbol{\Sigma}^{xx}_k$ est conditionnée par l'ensemble de mesures $\boldsymbol{y}_{1\to k}$. Toutefois, le lecteur aura remarqué que le calcul de cette grandeur dans l'algorithme 2 ne dépend en aucun cas des observations réalisées (ni même des commandes $\{\boldsymbol{u}_n\}_{0\leq n\leq k}$) : la covariance propagée par le filtre de Kalman est en pratique *inconditionnelle*. Dans le cas où toutes les hypothèses, notamment celle de gaussianité sont respectées, alors les covariances conditionnelle et inconditionnelle sont égales entre elles. Dans le cas contraire, cette égalité n'est plus vérifiée. Le filtre de Kalman minimise alors le critère suivant : $\mathbb{E}\left(\|\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k\|^2\right)$, qui est en réalité

- A l'instant $k = 0$, initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$.
- Aux instants $k \geq 1$:

  1. Réaliser l'étape de prédiction :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{F}_{k-1}\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{G}_{k-1}\boldsymbol{u}_{k-1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} &= \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}\boldsymbol{F}_{k-1}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{ww}. \end{aligned}$$

  2. Réaliser l'étape de correction :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} &= \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}\boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}, \\ \boldsymbol{K}_k &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}\right)^{-1}, \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}_k\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}\boldsymbol{K}_k^T. \end{aligned}$$

Algorithme 2: Le filtre de Kalman

la trace de la covariance inconditionnelle $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} = \mathbb{E}\left((\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k)^T\right)$ effectivement propagée. De ce fait, le filtre de Kalman est considéré comme étant l'estimateur de *variance minimale* [Ande 79, chap. 3].

Une autre conséquence de l'indépendance de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ vis-à-vis de $\{\boldsymbol{u}_n\}_{0\leq n\leq k}$ et $\{\boldsymbol{y}_n\}_{0\leq n\leq k}$ est que le gain de Kalman $\boldsymbol{K}_k$ est lui aussi indépendant de ces grandeurs. Par ailleurs, d'autres formes de mise à jour de la covariance d'erreur d'estimation (équation passant de $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}$ à $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$) existent [Simo 06c, p. 127] :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= (\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\,\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} \\ &= (\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\,\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}\,(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)^T + \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\boldsymbol{K}_k^T \\ &= \left(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\right)^{-1}\boldsymbol{H}_k + \boldsymbol{I}_{n_x}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

La première de ces équations est souvent utilisée en pratique [Grew 01b] du fait de sa simplicité de mise en œuvre. La seconde constitue la *forme stabilisée de Joseph*, laquelle a pour avantage d'être appropriée aux considérations pratiques, du fait qu'elle est moins sensible que les autres formes à une erreur de calcul (arrondi par exemple) du gain de Kalman. De surcroît, elle conserve la positivité et la symétrie de la covariance d'erreur d'estimation, du fait qu'elle effectue la somme de deux matrices symétriques définies positives [Born 90]. La troisième de ces équations est, quant-à-elle, obtenue via l'application du lemme d'inversion matricielle. Son utilisation permet d'aboutir a une autre expression du gain de Kalman, fréquemment utilisée dans les problèmes d'estimation en régime permanent :

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\right)^{-1}. \tag{1.29}$$

Cette forme conduit également au filtre *information*, lequel calcule de manière récursive non plus la covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ mais son inverse, appelée *matrice d'information* [Ande 79, chap. 6], [Born 90, chap. 4].

Filtre de Kalman en une étape :

Les équations de l'algorithme 2 expriment les grandeurs *a priori* en fonction de celles *a posteriori* et réciproquement. Il est possible de condenser ces deux étapes en une seule, conduisant ainsi aux formes *prédicteur* et *correcteur* du filtre de Kalman :

– filtre sous forme prédicteur :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} &= \boldsymbol{F}_k \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{K}_k \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} \\ &= \boldsymbol{F}_k \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{y}_k, \end{aligned} \tag{1.30}$$

– filtre sous forme correcteur :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \boldsymbol{F}_{k-1} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{G}_{k-1} \boldsymbol{u}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} \\ &= \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \boldsymbol{F}_{k-1} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \boldsymbol{G}_{k-1} \boldsymbol{u}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{y}_k. \end{aligned} \tag{1.31}$$

1.3.2 Quelques extensions du filtre de Kalman

Depuis son développement au début des années soixante, le filtre de Kalman a connu de nombreuses extensions visant à s'affranchir de certaines hypothèses relatives à sa mise en œuvre (filtrage de Kalman pour bruits colorés et/ou corrélés) ou à améliorer sa capacité d'implémentation, soit par une réduction des erreurs de calculs (factorisation UD [Bier 76], [Bier 77] par exemple), soit par l'utilisation d'algorithmes sous-optimaux mais d'exécution plus rapide (filtre de Kalman-Schmidt, etc.). Parmi ces extensions, nous allons brièvement présenter deux des plus utilisées dans le domaine de l'aéronautique, notamment la navigation inertielle et la poursuite de trajectoire : l'adaptation au cas de bruits colorés et le filtre de Kalman-Schmidt.

Cas de bruits colorés :

Afin d'implémenter un filtre de Kalman sur un procédé donné, il est nécessaire que le modèle utilisé par le filtre respecte un certain nombre d'hypothèses, parmi lesquelles la blancheur des bruits d'état et d'observation. En pratique, cette condition n'est pas toujours vérifiée. Toutefois, dans bon nombre de cas, il est possible grâce à certains maniements mathématiques d'obtenir un nouveau modèle d'état perturbés par des bruits blancs, moyennant une augmentation du nombre de variables d'état. La procédure à adopter consiste alors à modéliser tout bruit η_k coloré (c'est-à-dire non blanc) sous une forme du type [Grew 01a, p. 201] :

$$\eta_{k+1} = a_k \eta_k + b_k \nu_k, \tag{1.32}$$

où a_k, b_k sont connus et ν_k un bruit blanc, gaussien, centré d'écart-type connu. Il suffit alors de dériver le nouveau modèle d'état associé au vecteur d'état augmenté $\left[\boldsymbol{x}_k^T \;\; \boldsymbol{\eta}_k^T\right]^T$ ($\boldsymbol{\eta}_k$ incluant l'ensemble des bruits non blancs). Ce modèle est alors perturbé par uniquement des bruits blancs et de ce fait exploitable par un filtre de Kalman [Born 90, chap. 4]. Par ailleurs, la manière de concevoir des bruits de type markovien à l'ordre 1 ou cheminement aléatoire à partir de bruits blancs est exposée dans l'annexe G.

Filtre de Kalman-Schmidt :

En vertu du principe de minimum de variance, le gain de Kalman est calculé de sorte à minimiser la trace de la de la matrice de covariance *a posteriori* $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$, ce qui revient à minimiser la variance associée à l'ensemble des variables d'état. Dans certains cas, il peut être souhaitable de minimiser non pas la variance globale de toutes les variables d'état, mais celle de certaines variables particulières, appelées *grandeurs d'intérêt*. Un exemple de ce genre de situation est la présence de bruits colorés, lesquels augmentent le nombre de variables d'état (paragraphe précédent). Dans ce cas, il peut s'avérer préférable de ne pas considérer les variables d'état associées à ces bruits en tant que grandeurs d'intérêt [Schm 66]. Le gain $\boldsymbol{K}_k^s$ (appelé *gain de*

Kalman-Schmidt) sera alors calculé de sorte à minimiser la somme des termes diagonaux de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ correspondant uniquement aux grandeurs d'intérêt. En développant ces calculs, on constate alors qu'aucune expression analytique n'est associée aux lignes de $\boldsymbol{K}_k^s$ correspondant aux variables d'état n'étant pas des grandeurs d'intérêt. Le gain de Kalman-Schmidt remplit alors ces lignes avec des 0 [Schm 66], [Grew 01b, chap. 7], ce qui permet de réorganiser le vecteur d'état de sorte à ce qu'il regroupe les grandeurs d'intérêt en développant les équations sous forme de blocs. En ce qui concerne la mise à jour des covariances d'erreur d'estimation, du fait que le gain utilisé est celui de Kalman-Schmidt et non plus le gain optimal original, l'emploi d'une forme symétrique type forme de Joseph est nécessaire afin de conserver la symétrie de ces matrices. L'algorithme résultant est détaillé dans [Grew 01b, p. 317]. L'intérêt du filtre de Kalman-Schmidt, initialement développé au milieu des années soixante pour des problèmes de navigation [Schm 66], est qu'il autorise une diminution du temps de calcul, ce qui le rend plus attractif pour des applications temps réel à bas coût.

1.3.3 Filtrage de Kalman pour vecteurs de dynamique non linéaire

Le filtrage de Kalman non linéaire consiste à appliquer les équations générales (1.19) alors que la fonction $\boldsymbol{f}_k$ du modèle d'état (1.17) est non linéaire. De surcroît, l'équation de mesure peut elle aussi être non linéaire (elle le sera supposée dans cette section). Dans ce cas, elle s'exprime sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{V}_k, \tag{1.33}$$

où $\boldsymbol{h}_k$ est une fonction continue non linéaire connue.

Contrairement aux systèmes dynamiques linéaires, l'obtention d'un critère générique d'observabilité de l'état d'un système dynamique non linéaire est nettement plus délicate. Très souvent, il est nécessaire d'effectuer une analyse au cas par cas, ou encore une étude de l'observabilité autour d'un point de fonctionnement donné, notamment à l'aide des crochets de Lie [Isid 95].

La principale difficulté inhérente au filtrage non linéaire est la prédiction. Concrètement, il s'agit de pouvoir calculer les grandeurs $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$, $\widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}$ en tenant compte du fait que $\boldsymbol{f}_k$ et $\boldsymbol{h}_k$ sont non linéaires. Afin de mettre en évidence le problème, considérons par exemple le calcul de $\widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} &= \mathbb{E}\left(\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1} = \boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{V}_k|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1} = \boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right) \\
&= \boldsymbol{h}_k\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right) \quad \text{si } \boldsymbol{h}_k \text{ est linéaire,} \\
&\neq \boldsymbol{h}_k\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right) \quad \text{si } \boldsymbol{h}_k \text{ est non linéaire.}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Deux approches du filtrage de Kalman pour systèmes dynamiques non linéaires peuvent être distinguées : la première consiste en une linéarisation des équations d'état et de mesure à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 de ces dernières autour d'une trajectoire donnée ; la seconde se base sur des méthodes équivalentes à des développements d'ordre supérieur.

Approche de linéarisation des équations du modèle d'état :

Les techniques basées sur une telle approche nécessitent la continuité des fonctions $\boldsymbol{f}_k$ et $\boldsymbol{h}_k$. Soit $\boldsymbol{x}^r \in \mathbb{R}^{n_x}$ une variable dont l'évolution dans le temps est régie par :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_{k+1}^r = \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_k^r, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}\right) \\ \boldsymbol{x}_0^r = \widehat{\boldsymbol{x}}_0 \end{array}\right. . \tag{1.35}$$

L'objectif de cette variable est de simuler la trajectoire $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ décrite par l'état réel, dont l'évolution est régie par l'équation (1.17). Toutefois, cette simulation est en général imparfaite, d'une part parce que les réalisations $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ du bruit de dynamique sont négligées (car bien évidemment inconnues), d'autre part à cause de l'erreur commise en initialisant $\boldsymbol{x}_0^r$ à $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$, cette valeur étant *a priori* différente de l'état réel initial $\boldsymbol{x}_0$. La trajectoire $\{\boldsymbol{x}_k^r\}_{k\in\mathbb{N}}$ est toutefois supposée suivre $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ suffisamment bien, de sorte que la norme euclidienne de la différence $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_k^r$ demeure très faible devant $\|\boldsymbol{x}_k^r\|$ quel que soit k. Ce fait autorise l'approximation des fonctions non linéaires continues $\boldsymbol{f}_k$ et $\boldsymbol{h}_k$ par des développements de Taylor (cf. ann. B) à l'ordre 1 autour de $\boldsymbol{x}_k^r$. Calculons la variable aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{k+1}$ dont la réalisation est $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{E}}_{k+1} &= \boldsymbol{X}_{k+1} - \boldsymbol{x}_{k+1}^r \\
&= \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{W}_k\right) - \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_k^r, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}\right) \\
&= \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_k^r + \boldsymbol{\mathcal{E}}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{W}_k\right) - \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_k^r, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}\right) \\
&= \left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{W}_k}\right|_{\substack{\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k^r \\ \boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}}}\right] \boldsymbol{W}_k + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{w,k} + \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_k^r + \boldsymbol{\mathcal{E}}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}\right) - \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_k^r, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}\right) \\
&= \left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{W}_k}\right|_{\substack{\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k^r \\ \boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}}}\right] \boldsymbol{W}_k + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{w,k} + \left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{X}_k}\right|_{\substack{\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k^r \\ \boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}}}\right] \boldsymbol{\mathcal{E}}_k + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{x,k},
\end{aligned} \tag{1.36}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{x,k}$ et $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{w,k}$ sont des vecteurs aléatoires matérialisant les termes liés aux développements de Taylor d'ordres supérieurs à 1. En supposant ces variables négligeables devant les autres termes, l'équation obtenue se simplifie comme suit :

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{\mathcal{E}}_k + \widetilde{\boldsymbol{W}}_k, \tag{1.37}$$

où $\boldsymbol{F}_k$ est le jacobien suivant :

$$\boldsymbol{F}_k = \left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{X}_k}\right|_{\substack{\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k^r \\ \boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}}}\right] \tag{1.38}$$

et $\widetilde{\boldsymbol{W}}_k$ un bruit blanc, gaussien, centré et de covariance :

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{\widetilde{w}\widetilde{w}} = \left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{W}_k}\right|_{\substack{\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k^r \\ \boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}}}\right] \boldsymbol{\Sigma}_k^{ww} \left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{W}_k}\right|_{\substack{\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k^r \\ \boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{0}_{n_w\times 1}}}\right]^T. \tag{1.39}$$

En procédant de même avec l'équation de mesure, il vient :

$$\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{x}_k^r\right) = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{\mathcal{E}}_k + \boldsymbol{V}_k, \tag{1.40}$$

avec :

$$\boldsymbol{H}_k = \left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{\partial \boldsymbol{X}_k}\right|_{\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k^r}\right]. \tag{1.41}$$

La structure des équations (1.37) et (1.40) ainsi que les propriétés des bruits $\left\{\widetilde{\boldsymbol{W}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ autorisent l'utilisation d'un filtre de Kalman. Le principe du filtrage de Kalman linéarisé est alors de calculer à chaque instant k une estimée $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ de $\boldsymbol{\mathcal{E}}_k$ et de l'ajouter à $\boldsymbol{x}_k^r$ afin d'obtenir une estimée de $\boldsymbol{X}_k$ [Grew 01b, chap. 5]. La covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ d'erreur d'estimation de $\boldsymbol{X}_k$ par $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{x}_k^r + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ est alors égale à celle relative à l'erreur d'évaluation de $\boldsymbol{\mathcal{E}}_k$ par $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$, notée $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\varepsilon\varepsilon}$. Le principe du filtre de Kalman linéarisé est résumé sur la figure 1.3[12].

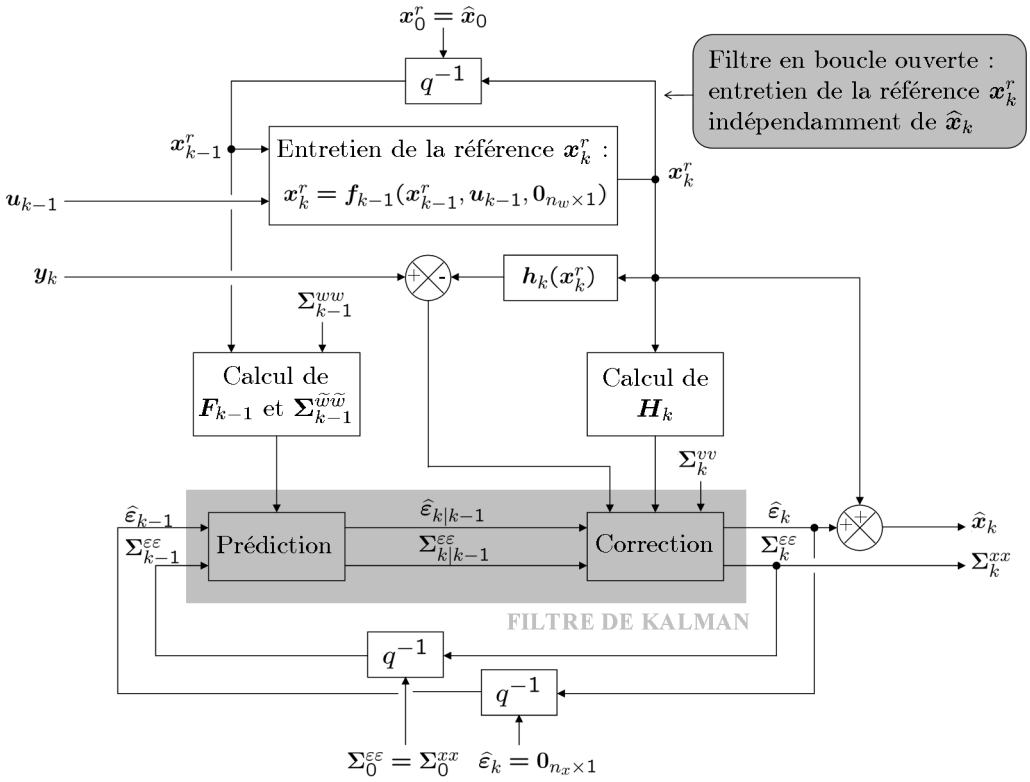


FIG. 1.3 – Filtre de Kalman linéarisé ou en boucle ouverte

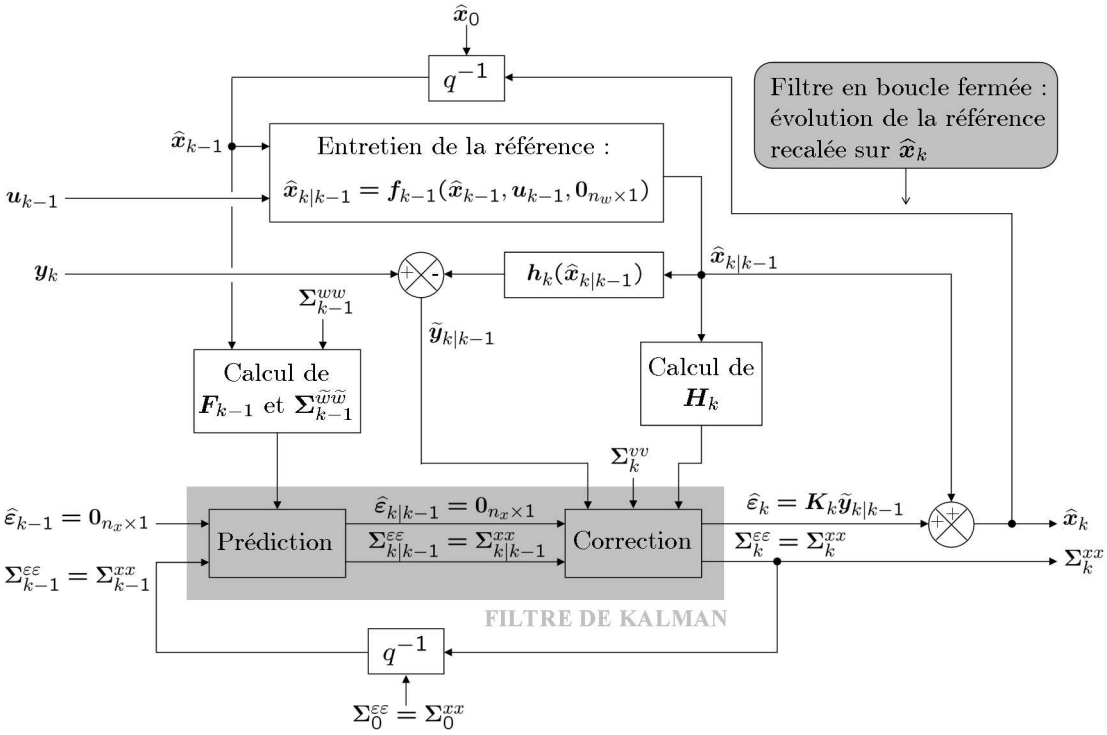


FIG. 1.4 – Filtre de Kalman étendu ou en boucle fermée

Une solution particulière du filtre de Kalman linéarisé consiste à prendre comme référence $\boldsymbol{x}_k^r$ l'état estimé *a posteriori* $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$. Cela revient à poser $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{0}_{n_x \times 1}$ à chaque instant k. Les fonctions $\boldsymbol{f}_{k-1}$ et $\boldsymbol{h}_k$ sont alors respectivement linéarisées autour des états estimés *a posteriori* $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$ et *a priori* $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$. Cette solution constitue le *filtrage de Kalman étendu* (Extended Kalman Filter - EKF- en anglais). Son principe est illustré sur la figure 1.4 et synthétisé par l'algorithme 3. L'EKF est parfois appelé *filtre en boucle fermée* car, contrairement au filtre linéarisé, l'évolution de la référence $\boldsymbol{x}_k^r$ est perpétuellement recalée sur l'état estimé *a posteriori* $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ [Alaz 00]. L'avantage de la boucle fermée sur la boucle ouverte réside justement en ce recalage, qui évite théoriquement que la trajectoire $\{\boldsymbol{x}_k^r\}_{k\in\mathbb{N}}$ ne s'éloigne trop de la trajectoire vraie $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (puisque l'état estimé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ est sensé avoisiner l'état vrai $\boldsymbol{x}_k$ à chaque instant k), cet éloignement pouvant notamment être causé par l'omission du bruit de dynamique dans (1.35) [Grew 01b, chap. 5]. De ce fait, l'EKF, historiquement découvert par Stanley Schmidt[13] au début des années 1960 [Grew 01b, p. 15], est en pratique plus souvent utilisé que le filtre linéarisé, excepté dans quelques cas particuliers, lesquels sont :

- lorsque $\boldsymbol{x}_k^r$ est statique, c'est-à-dire lorsqu'il est souhaité estimer les variations de l'état autour d'un point de fonctionnement donné,
- lorsque l'écart entre l'état vrai $\boldsymbol{x}_k$ et l'état simulé en boucle ouverte $\boldsymbol{x}_k^r$ demeure en permanence inférieur à une certaine valeur considérée comme négligeable devant $\boldsymbol{x}_k$ et $\boldsymbol{x}_k^r$,
- lorsqu'il est souhaité que $\{\boldsymbol{x}_k^r\}_{k\in\mathbb{N}}$ reste indépendante des mesures, ce qui peut être le cas si l'amplitude du bruit entachant ces dernières est élevée.

Par ailleurs, il est à noter que, contrairement au filtre de Kalman linéarisé, le filtre de Kalman étendu ne peut plus être considéré comme un estimateur linéaire. Certes, comme l'atteste l'algorithme 3, l'état estimé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ est une fonction linéaire de $\boldsymbol{y}_k$, mais il dépend de manière non linéaire de $\boldsymbol{y}_{1\to k-1}$ du fait que cette estimée repose sur les jacobiens $\boldsymbol{F}_{k-1}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}$, et $\boldsymbol{H}_k$, lesquels sont calculés à partir de $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$ et $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$, et donc de $\boldsymbol{y}_{1\to k-1}$.

Enfin, en constatant que le jacobien $\boldsymbol{H}_k$ est calculé autour de l'état prédit $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$, il est naturel de penser que les résultats obtenus par un EKF seraient meilleurs si cette linéarisation s'effectuait autour de l'état corrigé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$. Ainsi, en applicant de nouveau l'étape de correction de l'EKF à partir du jacobien calculé autour de $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$, on peut s'attendre à obtenir une meilleure estimée. En outre cette procédure peut être réitérée N fois : c'est le principe du filtre de Kalman étendu itéré (IEKF) [Simo 06c, pp. 410-412], résumé par l'algorithme 4. Cette technique est bien évidemment plus coûteuse en terme de temps de calcul que l'EKF, du fait qu'elle nécessite N étapes supplémentaires de correction. Toutefois, son utilisation peut apporter une réelle amélioration de la qualité d'estimation, notamment lorsque la fonction $\boldsymbol{h}_k$ présente des non linéarités sévères [Gelb 74, p. 191]. Dans bon nombre de cas, $N = 1$ linéarisation supplémentaire constitue le meilleur rapport entre amélioration de la qualité d'estimation et complexité [Simo 06c, p. 410].

Approches d'ordre supérieur :

En rapprochant l'algorithme de l'EKF (algorithme 3) des équations générales du filtre de Kalman (1.19), on constate que certaines grandeurs telles que les estimées *a posteriori* $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$, $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ ou le gain de Kalman $\boldsymbol{K}_k$ sont obtenues à l'aide de formules exactes, tandis que les prédictions

[12] Sur cette figure, ainsi que sur toutes celles à suivre, les flèches verticales entrant sur les blocs de retard unitaire q^{-1} représentent les valeurs avec lesquelles les variables correspondantes sont initialisées

[13] Il s'agit de la même personne que celle ayant proposé le filtre de Kalman-Schmidt précédemment évoqué. La contribution de Stanley Schmidt dans le développement de la théorie et de la pratique du filtrage de Kalman est notoire.

- A l'instant $k = 0$, initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$.
- Aux instants $k \geq 1$:
  1. Calculer les jacobiens pour l'étape de prédiction :

$$\boldsymbol{F}_{k-1} = \left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{f}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{X}_{k-1}} \right|_{\substack{\boldsymbol{X}_{k-1} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{W}_{k-1} = \boldsymbol{0}_{n_w \times 1}}} \right], \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} = \left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{f}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{W}_{k-1}} \right|_{\substack{\boldsymbol{X}_{k-1} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{W}_{k-1} = \boldsymbol{0}_{n_w \times 1}}} \right].$$

  2. Réaliser l'étape de prédiction :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{0}_{n_w \times 1}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{\widetilde{w}\widetilde{w}} &= \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{ww} \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} &= \boldsymbol{F}_{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} \boldsymbol{F}_{k-1}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{\widetilde{w}\widetilde{w}}. \end{aligned}$$

  3. Calculer le jacobien pour l'étape de correction :

$$\boldsymbol{H}_k = \left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{\partial \boldsymbol{X}_k} \right|_{\boldsymbol{X}_k = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}} \right].$$

  4. Réaliser l'étape de correction :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{h}_k\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right), \\ \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} &= \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} \boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy} &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} \boldsymbol{H}_k^T, \\ \boldsymbol{K}_k &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}\right)^{-1}, \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} \boldsymbol{K}_k^T = \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}. \end{aligned}$$

Algorithme 3: Le filtre de Kalman étendu (EKF)

$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$, $\widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy}$ sont issues d'approximations (linéarisation des équations d'état et de mesure en l'occurrence). L'obtention de ces grandeurs prédites est synthétisée par la figure 1.5. Cette figure met en évidence la problématique du filtrage de Kalman pour les systèmes non linéaires. En effet, en réécrivant l'équation d'état comme suit[14] :

$$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{f}_{k-1}^a \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k-1} \\ \boldsymbol{W}_{k-1} \end{bmatrix} \right), \tag{1.42}$$

le filtrage de Kalman non linéaire se résume à la résolution du problème suivant :

> *Soient $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^m$ deux vecteurs aléatoires mutuellement corrélés, liés entre eux par la relation $\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ où $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est une fonction non linéaire. Connaissant la moyenne $\overline{\boldsymbol{x}}$ et la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$ de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, comment calculer la moyenne $\overline{\boldsymbol{y}}$ et la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$ de $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$, ainsi que l'inter-covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$?*

Diverses méthodes de résolution de ce problème ont été mises au point : il s'agit de :

- l'utilisation de développements de Taylor à l'ordre 2 des fonctions d'état et de mesure : cela conduit au filtre de Kalman étendu à l'ordre 2 (2OEKF),

[14] Le vecteur de commande $\boldsymbol{u}_{k-1}$ étant déterministe, ce dernier est volontairement omis dans la reformulation de l'équation d'état. Sa prise en compte est implicite en remarquant que $\boldsymbol{f}_{k-1}^a$ est une fonction dont les paramètres varient avec le temps.

- A l'instant $k = 0$, initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$.
- Aux instants $k \geq 1$:

  1. Calculer $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}$ suivant l'étape de prédiction de l'EKF (algorithme 3).
  2. Calculer $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(0)} = \widehat{\boldsymbol{x}}_k$ suivant l'étape de correction de l'EKF (algorithme 3).
  3. Pour $i = 1, \ldots, N$, réaliser les corrections suivantes :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_k^{(i)} &= \left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{\partial \boldsymbol{X}_k} \right|_{\boldsymbol{X}_k = \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i-1)}} \right], \\
\boldsymbol{K}_k^{(i)} &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} \left(\boldsymbol{H}_k^{(i)} \right)^T \left(\boldsymbol{H}_k^{(i)} \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} \left(\boldsymbol{H}_k^{(i)} \right)^T + \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv} \right)^{-1}, \\
\boldsymbol{y}_k^{(i)} &= \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{h}_k \left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i-1)} \right) + \boldsymbol{H}_k^{(i)} \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i-1)}, \\
\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} &= \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k^{(i)} \left(\boldsymbol{y}_k^{(i)} - \boldsymbol{H}_k^{(i)} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} \right).
\end{aligned}$$

  4. Calculer les estimées *a posteriori* finales ($i = N$) :

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(N)}, \\
\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k^{(N)} \boldsymbol{H}_k^{(N)} \right) \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}.
\end{aligned}$$

Algorithme 4: Le filtre de Kalman étendu itéré (IEKF)

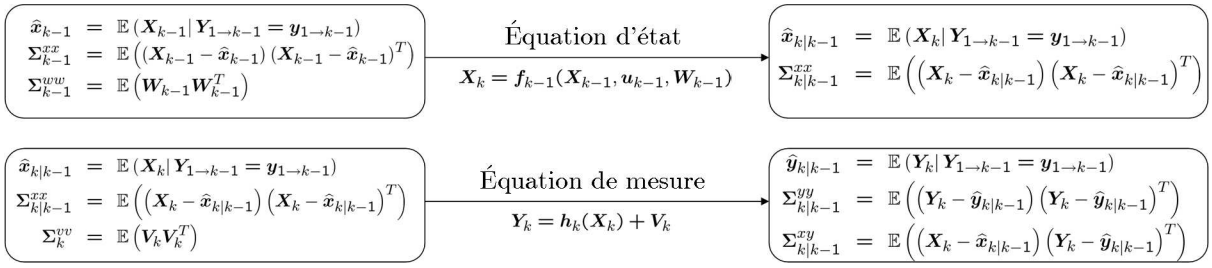


FIG. 1.5 – Obtention des grandeurs prédites

- l'emploi de l'interpolation de Stirling, aboutissant au filtre de Kalman à différence centrale (CDKF),
- l'usage de la transformation dite *sans saveur* (unscented en anglais), laquelle est à la base du filtre de Kalman de même nom (Unscented Kalman Filter - UKF),
- l'utilisation de simulation de type Monte Carlo, conduisant au filtre de Kalman d'ensemble (EnKF).

Pour des raisons de commodité, les calculs relatifs à ces diverses techniques ainsi que les algorithmes résultants sont détaillés dans l'annexe B. Nous nous contenterons simplement de mentionner la ressemblance frappante entre les algorithmes du CDKF et de l'UKF, notamment vis-à-vis de la répartition des σ points dans l'espace d'état. Le rapprochement entre ces deux théories, pourtant très différentes de par leurs principes, a été effectué dans [Van 04a]. De ce fait, ces deux filtres sont souvent regroupés dans la catégorie des Sigma-Point Kalman Filter (SPKF) [Van 04b]. Par ailleurs, certaines améliorations ont été apportées à ces algorithmes. La plus importante est sans doute l'utilisation de formulations de type racine carrée [Wan 01b] [Van 04a], [Even 04]. Concrètement, il s'agit non plus de propager la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ mais sa

racine carrée $\boldsymbol{S}_k^{xx}$ (qui est triangulaire inférieure car obtenue via une décomposition de Cholesky - cf. ann. B). Contrairement au filtre de Kalman original où une telle technique vise à empêcher la propagation de matrices de covariance définies non négatives [Ande 79, p. 147], l'intérêt de cette approche est ici purement calculatoire [Van 04a, p. 111]. En effet, elle évite d'effectuer à chaque instant k une décomposition de Cholesky de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$, cette opération se révélant assez coûteuse. De surcroît, le fait que $\boldsymbol{S}_k^{xx}$ soit triangulaire permet de calculer de gain $\boldsymbol{K}_k$ à partir de la méthode du pivot de Gauss, ce qui évite d'avoir à inverser la matrice $\boldsymbol{\Sigma}_k^{yy}$. Les détails de ces algorithmes ainsi que les fonctions Matlab® à utiliser afin de disposer d'algorithmes optimisés sont disponibles dans [Van 04a, chap. 3]. En outre, des travaux visant à réduire le nombre de σ points à utiliser dans les algorithmes de l'UKF ont également été menés. Le premier consiste en la mise en œuvre d'une transformation sans saveur simplex [Juli 02b], laquelle permet de diminuer de $n_a = n_x + n_w$ le nombre de σ points à utiliser, ce qui se traduit par une réduction significative du temps de calcul. Malheureusement, cette technique s'avère numériquement instable, en particulier pour les systèmes d'ordre élevé [Simo 06c, p. 454]. Afin de pallier cet inconvénient, la transformation sans saveur sphérique [Juli 03], [Juli 04] a été développée, son but étant de réorganiser la répartition dans l'espace d'état des σ points placés par la transformation simplex.

1.4 Approche bayésienne de l'estimation d'état optimale

Le filtre de Kalman et ses diverses extensions constituent des estimateurs d'état optimaux au sens des moindres carrés (ou plus exactement du minimum de variance). L'optimalité au sens du maximum *a posteriori* n'a jusque-là pas encore été étudiée, bien que l'on ait vu que lorsque $\boldsymbol{X}_k$ et $\boldsymbol{Y}_k$ sont gaussiens, ce critère conduit aux mêmes résultats que les moindres carrés. Et pour cause, l'exploitation d'un tel critère d'optimalité nécessite le calcul à chaque instant k de la densité de probabilité $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k})$, laquelle couvre l'ensemble de l'espace d'état à partir des mesures $\boldsymbol{y}_{1\to k}$. Le but de l'approche bayésienne de l'estimation d'état est de calculer récursivement cette densité, à partir d'une initialisation $p(\boldsymbol{x}_0)$. En formulant les mêmes hypothèses que celles émises lors du filtrage de Kalman, à savoir :

- la blancheur du bruit d'état $\{\boldsymbol{W}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de sorte que l'état $\{\boldsymbol{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ soit un processus markovien (c'est à dire que $\boldsymbol{X}_k$ dépend de $\boldsymbol{X}_{k-1}$ mais pas de $\boldsymbol{X}_n$ pour $n < k-1$),
- la blancheur du bruit de mesure $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de sorte que les observations $\boldsymbol{Y}_k$ et $\boldsymbol{Y}_n$ soient mutuellement indépendantes pour $n \neq k$,
- l'indépendance entre les bruits d'état, de mesure et l'état initial $\boldsymbol{X}_0$,

les équations du filtrage bayésien optimal sont (cf. ann. C pour une démonstration) :

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}) &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})p(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}, \\ p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}) &= \frac{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

De manière générale, ces équations sont analytiquement non solvables, excepté dans le cas où $\boldsymbol{X}_k$ et $\boldsymbol{Y}_k$ sont gaussiens. Si les équations de la représentation d'état (desquelles sont issus le *noyau de transition* $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ et la *vraisemblance* $p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)$) sont linéaires, alors cela aboutit au filtre de Kalman (voir par exemple [Dahi 05, ann. B]). Pour ce faire, il est nécessaire de supposer que l'équation de mise à jour de l'état estimé est de la forme :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right). \tag{1.44}$$

Par conséquent, contrairement à la méthode des moindres carrés, l'obtention des équations du filtre de Kalman par l'approche bayésienne ne donne aucun résultat quant à son optimalité

[Simo 06c, p. 466]. Dans le même état d'esprit, si les équations de la représentation d'état sont non linéaires mais que $\boldsymbol{X}_k$ et $\boldsymbol{Y}_k$ demeurent gaussiens, il est alors possible d'obtenir les algorithmes de différents filtres de Kalman non linéaires (CDKF, UKF) à partir de (1.43) [Ito 00]. Cette approche aboutit également à un autre estimateur appelé *filtre de Gauss-Hermite*, car basé sur la règle de quadrature de Gauss-Hermite.

Cependant, d'une manière générale, le passage d'une densité de probabilité gaussienne par une fonction non linéaire ne donne pas en sortie une densité gaussienne. De ce fait, l'hypothèse de gaussianité des variables aléatoires $\boldsymbol{X}_k$ et $\boldsymbol{Y}_k$ pour $k \geq 1$ paraît abusive, et l'emploi de (1.44) pour la mise à jour de l'état estimé n'est plus justifié. Toutefois, conformément au résultat relatif à l'estimation par les moindres carrés dans le cas non gaussien (cf. section 1.2.3), cette démarche semble admissible et donne satisfaction dans bon nombre d'applications [Wan 01b], [Van 04a]. Néanmoins, l'emploi d'estimateurs optimaux au sens des moindres carrés s'avère risqué, notamment lorsque la densité de probabilité $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k})$ décrivant $\boldsymbol{X}_k$ est multimodale[15] [Orde 05], comme l'atteste la figure 1.6 pour un état de dimension $n_x = 1$. Afin d'éviter ce genre de problème, l'utilisation du maximum *a posteriori* comme critère d'optimalité est alors conseillée. Pour ce faire, il est alors nécessaire de mettre au point une technique numérique de résolution des équations du filtrage bayésien optimal (1.43) : c'est le principe du *filtrage particulaire*.

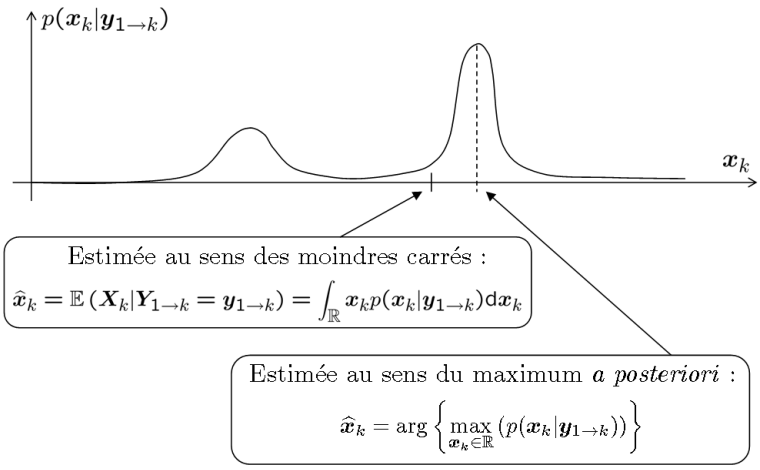


FIG. 1.6 – Estimées au sens des moindres carrés et du maximum *a posteriori* dans le cas d'une densité multimodale

1.4.1 Le filtrage particulaire

Soit à résoudre numériquement les équations (1.43) étant donné le modèle d'état non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{W}_k) \\ \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{V}_k \end{cases} . \tag{1.45}$$

La première approche de résolution numérique des équations du filtrage bayésien optimal (1.43) a été l'utilisation de techniques de maillage fixe ou déterministe [Kita 87]. Cela consiste tout simplement à prendre de manière homogène N points fixes $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ de l'espace d'état (chaque point matérialisant l'intersection entre des axes virtuels décrivant un maillage de l'espace d'état),

[15] Une densité de probabilité multimodale est une densité présentant plusieurs *maxima*.

et pour chacun de ces échantillons, calculer de manière récursive les poids $\mu_k^{(i)}$ définis comme suit :

$$\begin{cases} \mu_k^{(i)} = p\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{y}_{1\to k}\right) \\ \sum_{i=1}^{N} \mu_k^{(i)} = 1 \end{cases} . \tag{1.46}$$

Ces N points munis de leur poids respectifs permettent alors d'approximer la densité continue $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k})$ par la fonction discrète suivante :

$$\overline{p}\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{y}_{1\to k}\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu_k^{(i)} \delta\left(\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right), \tag{1.47}$$

où δ représente l'impulsion de Dirac centrée en zéro. Cependant, l'inconvénient de cette première approche est flagrant : en effet, le nombre de mailles nécessaires pour couvrir l'espace d'état (qui est inclus dans $\mathbb{R}^{n_x}$) est considérable, ce qui rend cette approche inappropriée pour des problèmes d'estimation en temps réel. De surcroît, la complexité d'un tel algorithme augmente exponentiellement avec n_x [Dahi 05, p. 14]. Certaines améliorations à cette méthode ont été apportées, telles que l'instauration d'un maillage à pas variable [Cai 95] qui consiste à adopter un maillage très large et à raffiner ce dernier dans les zones de l'espace d'état où la densité de probabilité $p\left(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$ est sensiblement différente de zéro.

En partant du constat qu'à chaque instant k, un bon nombre de points de l'espace d'état présente un poids proche de zéro (puisqu'à un instant donné, l'état réel $\boldsymbol{x}_k$ ne peut être qu'à un seul endroit), l'idée vient naturellement à l'esprit de n'utiliser qu'un nombre restreint N de points mobiles $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ et de faire en sorte que ces derniers suivent les zones de l'espace d'état où la densité $p\left(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$ est relativement importante. En faisant l'analogie avec la physique quantique, ces points $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ sont assimilables à des *particules*, et sont donc affublés de ce nom[16]. Le principe des filtres particulaires (également appelés *filtres bayésiens* car ils résolvent de manière numérique les équations du filtrage bayésien optimal, ou encore *filtres de Monte Carlo* puisque la démarche adoptée s'apparente à de la simulation de Monte Carlo) est [Arul 02] :

- de déplacer les particules $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ dans l'espace d'état à l'aide de l'équation d'état,
- de mettre à jour les poids $\mu_k^{(i)}$ des particules à l'aide de l'équation de mesure.

Cela est synthétisé par l'algorithme 5.

1.4.2 Rééchantillonnage des particules

Tel que présenté dans l'algorithme 5, le filtre particulaire n'est malheureusement pas utilisable car divergent. En effet, le noyau de transition $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ n'est en général jamais parfaitement connu, ce qui a pour conséquence d'éloigner les trajectoires $\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}$ des particules de la trajectoire vraie $\boldsymbol{x}_{0\to k}$. De ce fait, au bout d'un temps plus ou moins long, toutes les particules se retrouvent avec un poids proche de 0, à l'exception d'une particule présentant un poids voisin de 1 [Dahi 05, chap. 2]. Pour éviter ce phénomène de dégénérescence des particules, deux types de solution existent : l'insertion d'un facteur d'oubli et la mise en œuvre d'une interaction entre les particules [Oudj 00, chap. 3].

Le principe des filtres particulaires à oubli est le même que celui des moindres carrés avec facteur d'oubli ou à fenêtre glissante (section 1.2.3), à savoir favoriser les mesures récentes dans la procédure d'estimation d'état relativement aux observations plus anciennes. On distingue :

[16] La dénomination *filtre particulaire* a été introduite pour la première fois par Carpenter et al. [Carp 97].

- A l'instant $k = 0$ ($\boldsymbol{x}_0$ et sa densité de probabilité $p(\boldsymbol{x}_0)$ sont connus) :
  1. Générer N particules $\boldsymbol{x}_0^{(i)}$ $(1 \leq i \leq N)$ selon $p(\boldsymbol{x}_0)$.
  2. Pour $i = 1, \ldots, N$, poser : $\mu_0^{(i)} = 1/N$.
- Aux instants $k \geq 1$:
  1. Générer N vecteurs $\boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}$ $(1 \leq i \leq N)$ selon $p(\boldsymbol{w}_{k-1})$.
  2. Pour $i = 1, \ldots, N$, déplacer les particules dans l'espace d'état :
  $$\boldsymbol{x}_k^{(i)} = \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\right).$$
  3. Pour $i = 1, \ldots, N$, calculer la vraisemblance des particules :
  $$L_k^{(i)} = p\left(\boldsymbol{v}_k^{(i)}\right) = p\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)}\right)\right).$$
  4. Pour $i = 1, \ldots, N$, mettre à jour les poids : $\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \mu_{k-1}^{(i)} L_k^{(i)}$.
  5. Pour $i = 1, \ldots, N$, normaliser les poids : $\mu_k^{(i)} = \widetilde{\mu}_k^{(i)} \Big/ \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\mu}_k^{(j)}$.
  6. Calculer l'état estimé, en utilisant l'un des 2 critères d'optimalité au choix :
     - Optimalité au sens des moindres carrés : $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{m}_k = \sum_{i=1}^{N} \mu_k^{(i)} \boldsymbol{x}_k^{(i)}$.
     - Optimalité au sens du maximum *a posteriori* : $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{x}_k^{(i)}$ tel que : $\mu_k^{(i)} \geq \mu_k^{(j)}$, $\forall j \in \{1, \ldots, N\}, j \neq i$.
  7. Calculer la covariance d'erreur d'estimation :
  $$\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} = \sum_{i=1}^{N} \mu_k^{(i)} \left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} - \boldsymbol{m}_k\right)\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} - \boldsymbol{m}_k\right)^T.$$

Algorithme 5: Le filtre particulaire basique

- le filtre particulaire à mémoire limitée, dont le but est de calculer [Del 98] :
$$\begin{cases} p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}) & \text{si } k \leq h \\ p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{k-h\to k}) & \text{sinon} \end{cases}, \tag{1.48}$$
  où h est une largeur de fenêtre,
- le filtre particulaire à oubli exponentiel, qui remplace l'étape de mise à jour des poids (étape 4 de l'algorithme 5) par le calcul suivant [Del 98] :
$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \left(\mu_{k-1}^{(i)}\right)^{\lambda} L_k^{(i)}, \tag{1.49}$$
  où $\lambda \in]0\ ;\ 1]$ est un facteur d'oubli.

D'une manière générale, les filtres particulaires à oubli présentent un résultat de convergence intéressant, mais pour un nombre de particules très élevé. Une procédure plus efficace est donc à envisager : il s'agit de l'*interaction* entre particules. L'idée de l'interaction est d'effectuer un *ré-échantillonnage* des particules, à savoir éliminer les points de poids faible (ces points "meurent")

et de dupliquer ceux de poids fort. On dit alors que la $i^{\text{ème}}$ particule engendre $N_k^{(i)} \in \mathbb{N}$ descendants. Cette approche fut introduite sur les filtres de Monte Carlo dès 1987 [Rubi 87], avant d'être reprise avec succès par Gordon *et al.* [Smit 92] [Gord 93]. Les quatre principales techniques de rééchantillonnage, toutes issues d'algorithmes stochastiques, sont [Douc 05], [Le G 03] : le rééchantillonnage classique, le rééchantillonnage résiduel, le rééchantillonnage à variance minimale et la méthode de branchement de Bernoulli.

Le rééchantillonnage classique ou multinomial [Gord 93], [Gord 97] :

Le but recherché est que : $\mathbb{E}\left(N_k^{(i)}\right) = N\mu_k^{(i)}$, ce qui signifie que plus le poids d'une particule est élevé, plus son nombre de descendants espéré est grand. Ceci peut être réalisé grâce à un tirage multinomial[17]. Le mode opératoire du rééchantillonnage classique est synthétisé sur l'algorithme 6.

- Calculer l'indicateur de rééchantillonnage des particules (cf. paragraphe "les indicateurs de rééchantillonnage", à venir) afin d'évaluer si un rééchantillonnage est nécessaire.
- Si un rééchantillonnage est à opérer :
  1. Pour $i = 1, \ldots, N$, former les intervalles $\Theta_k^{(i)}$ comme suit, avec $\mu_k^{(0)} = 0$:
  $$\Theta_k^{(i)} = \left[\sum_{j=0}^{i-1} \mu_k^{(j)} \ ; \ \sum_{j=0}^{i} \mu_k^{(j)}\right[.$$
  2. Générer N variables aléatoires $a_k^{(i)}$ $(1 \leq i \leq N)$ selon une loi uniforme sur $[0 \ ; \ 1]$.
  3. Pour $i = 1, \ldots, N$, calculer le nombre de descendants $N_k^{(i)}$ de la particule $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$. Ce nombre est égal au nombre de variables aléatoires $a_k^{(j)}$ $(1 \leq j \leq N)$ incluses dans l'intervalle $\Theta_k^{(i)}$.
  4. Pour $i = 1, \ldots, N$, dupliquer $N_k^{(i)}$ fois la particule $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$, et remettre son poids à $\mu_k^{(i)} = 1/N$.

Algorithme 6: Le rééchantillonnage classique ou multinomial

Le rééchantillonnage résiduel [Liu 95] :

L'un des inconvénients du rééchantillonnage classique est qu'il présente une variance importante, c'est-à-dire qu'en exécutant plusieurs fois cet algorithme à partir d'une même situation initiale, le nombre de descendants $N_k^{(i)}$ obtenu pour la $i^{\text{ème}}$ particule peut fortement varier d'une réalisation à l'autre. L'objectif du rééchantillonnage résiduel est de diminuer ces variations, en attribuant d'office et de manière déterministe un certain nombre de descendants $\overline{N}_k^{(i)}$ par particule. Du fait que l'objectif du rééchantillonnage est de calculer $N_k^{(i)}$ de sorte que $\mathbb{E}\left(N_k^{(i)}\right) = N\mu_k^{(i)}$, et que le nombre de descendants ne peut être qu'entier, alors il est naturel de poser :

$$\overline{N}_k^{(i)} = \left\lfloor N\mu_k^{(i)} \right\rfloor , \tag{1.50}$$

[17] Un tirage multinomial revient à ce que le nombre de descendants d'une particule suive une loi uniforme sur $[0 \ ; \ N]$.

où $\lfloor\ \rfloor$ est la fonction qui à une variable réelle associe sa partie entière. Il reste alors un nombre R résiduel de descendants à attribuer, ce nombre valant :

$$R = N - \sum_{i=1}^{N} \overline{N}_k^{(i)}. \tag{1.51}$$

Ces R descendants sont alors affectés via la méthode du rééchantillonnage classique, où les poids $\mu_k^{(i)}$ sont remplacés par les poids résiduels normalisés suivants :

$$\overline{\mu}_k^{(i)} = \frac{N\mu_k^{(i)} - \left\lfloor N\mu_k^{(i)} \right\rfloor}{\sum_{j=1}^{N} \left(N\mu_k^{(j)} - \left\lfloor N\mu_k^{(j)} \right\rfloor \right)} = \frac{N\mu_k^{(i)} - \overline{N}_k^{(i)}}{N - \sum_{j=1}^{N} \overline{N}_k^{(j)}} = \frac{N\mu_k^{(i)} - \overline{N}_k^{(i)}}{R}. \tag{1.52}$$

Le rééchantillonnage résiduel est synthétisé par l'algorithme 7. En théorie la variance var $\left(N_k^{(i)}\right)$ du nombre de descendants d'une particule est réduite par rapport à celle exhibée par l'algorithme de rééchantillonnage classique, puisque l'on a [Le G 03] :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{var}\left(N_k^{(i)}\right) & = & N\mu_k^{(i)}\left(1-\mu_k^{(i)}\right) \leq 0.25N & \text{Pour le rééchantillonnage classique,} \\ \mathrm{var}\left(N_k^{(i)}\right) & = & R\overline{\mu}_k^{(i)}\left(1-\overline{\mu}_k^{(i)}\right) \leq 0.25R & \text{Pour le rééchantillonnage résiduel.} \end{array} \tag{1.53}$$

- Calculer l'indicateur de rééchantillonnage des particules (cf. paragraphe "les indicateurs de rééchantillonnage", à venir) afin d'évaluer si un rééchantillonnage est nécessaire.
- Si un rééchantillonnage est à opérer :
  1. Pour $i = 1, \ldots, N$, attribuer à chaque particule un nombre déterministe $\overline{N}_k^{(i)}$ de descendant selon : $\overline{N}_k^{(i)} = \left\lfloor N\mu_k^{(i)} \right\rfloor$.
  2. Calculer le nombre résiduel de descendants :
  $$R = N - \sum_{i=1}^{N} \overline{N}_k^{(i)}.$$
  3. Pour $i = 1, \ldots, N$, calculer les poids résiduels normalisés : $\overline{\mu}_k^{(i)} = (N\mu_k^{(i)} - \overline{N}_k^{(i)})/R$.
  4. Déterminer les descendants supplémentaires $\widetilde{N}_k^{(i)}$ $(1 \leq i \leq N)$ à attribuer à chaque particule (avec $\sum_{i=1}^{N} \widetilde{N}_k^{(i)} = R$) en utilisant l'algorithme de rééchantillonnage classique (cf. algorithme 6) exécuté à partir des poids résiduels $\overline{\mu}_k^{(i)}$ $(1 \leq i \leq N)$, le nombre de variables aléatoires $a_k^{(i)}$ tirées étant égales à R.
  5. Pour $i = 1, \ldots, N$, dupliquer $N_k^{(i)}$ fois la particule $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ avec $N_k^{(i)} = \overline{N}_k^{(i)} + \widetilde{N}_k^{(i)}$, et remettre son poids à $\mu_k^{(i)} = 1/N$.

Algorithme 7: Le rééchantillonnage résiduel

Le rééchantillonnage à variance minimale ou systématique [Kita 96] :

L'idée sous-jacente est la même que pour le rééchantillonnage résiduel. L'algorithme est le même que celui du rééchantillonnage classique (algorithme 6), à la différence près que lors de l'étape 2, seule $a_k^{(1)}$ est tirée de manière uniforme sur $[1; 1/N]$, les autres réalisations $\left\{a_k^{(i)}\right\}_{2\leq i\leq N}$ étant obtenues de la manière déterministe suivante :

$$a_k^{(i)} = a_k^{(i-1)} + \frac{1}{N}. \tag{1.54}$$

On a alors $\mathbb{E}\left(N_k^{(i)}\right) \neq N\mu_k^{(i)}$, mais du fait que le nombre de tirages aléatoires est réduit au strict minimum, la variance de l'algorithme est minimale ($\mathrm{var}(N_k^{(i)}) \leq 0.25$ [Le G 03]).

La méthode de branchement de Bernoulli [Cris 99b], [Cris 99a] :

Elle a pour avantage de présenter une variance similaire à la version précédente, mais permet de plus de vérifier la propriété $\mathbb{E}\left(N_k^{(i)}\right) = N\mu_k^{(i)}$. Une partie des nouvelles particules est distribuée de manière déterministe, de la même méthode que pour le rééchantillonnage résiduel (étape 1 de l'algorithme 7). Chaque particule $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ aura en plus $\varepsilon_k^{(i)}$ descendant supplémentaire, avec $\varepsilon_k^{(i)} = 0$ ou 1 et :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{P}\left(\varepsilon_k^{(i)} = 1\right) & = & N_k\mu_k^{(i)} - \left\lfloor N_k\mu_k^{(i)}\right\rfloor \\ \mathbb{P}\left(\varepsilon_k^{(i)} = 0\right) & = & 1 - \mathbb{P}\left(\varepsilon_k^{(i)} = 1\right) \end{array}\right. , \tag{1.55}$$

où N_k est le nombre de particules à l'instant k. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne maintient pas un nombre de particules constant dans le temps.

Les indicateurs de rééchantillonnage :

Le rééchantillonnage des particules, qui vient se greffer après l'étape 7. dans l'algorithme du filtre particulaire (algorithme 5), permet d'éviter de manière efficace les phénomènes de divergence. Toutefois, cette technique est à utiliser avec modération, puisqu'elle met en défaut une des hypothèses liée à la simulation de Monte Carlo, à savoir l'indépendance entre les particules. Ainsi, il est conseillé de n'opérer une redistribution des particules que lorsqu'un indicateur le signale. Il existe deux indicateurs :

– le premier critère calcule le nombre effectif N_k^{eff} de particules, obtenu comme suit [Kong 94] :

$$N_k^{\mathrm{eff}} = \frac{N}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N_k}\left(\mu_k^{(i)}\right)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_k}\left(\mu_k^{(i)}\right)^2}. \tag{1.56}$$

  Lorsque toutes les particules sont efficaces, alors leur poids avoisine $1/N_k$, ce qui donne $N_k^{\mathrm{eff}} \approx N_k$. A l'inverse, si le nuage de particules n'est pas efficace, alors une particule a un poids approchant 1 et toutes les autres présentent une masse nulle. La formule (1.56) donne alors $N_k^{\mathrm{eff}} \approx 1$. Ces deux résultats, obtenus aux situations extrêmes, donnent tout son sens au nom d'indicateur du nombre effectif. Il suffit alors de fixer pour N_k^{eff} un seuil (fonction du nombre total de particules N_k à l'instant k) en dessous duquel une procédure de rééchantillonnage est à envisager.

– Le second critère calcule l'entropie S_k (au sens de Boltzmann et Shannon) du nuage de particules. L'emploi de cet indicateur, introduit par Pham [Pham 01], se justifie par le fait qu'une analogie est possible entre les particules d'un filtre de Monte Carlo et celle d'un gaz. L'entropie S_k s'obtient comme suit :

$$S_k = -\sum_{i=1}^{N_k} \mu_k^{(i)} \ln\left(\mu_k^{(i)}\right). \tag{1.57}$$

Lorsque le nuage de particules est efficace, alors $S_k = \ln(N_k)$ et dans le cas contraire, $S_k = 0$. Ainsi, de même que pour l'indicateur du nombre effectif, il suffit de fixer pour S_k un seuil en dessous duquel un rééchantillonnage devra être opéré.

Exemple : Considérons à l'instant k un système de $N = 5$ particules, lesquelles doivent être redistribuées. Les poids de ces particules sont :

$$\begin{bmatrix} \mu_k^{(1)} & \mu_k^{(2)} & \mu_k^{(3)} & \mu_k^{(4)} & \mu_k^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,105 & 0,26 & 0,085 & 0,43 & 0,12 \end{bmatrix}. \tag{1.58}$$

Les intervalles $\Theta_k^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 5$ sont alors :

$$\begin{array}{lll} \Theta_k^{(1)} = [0\ ;\ 0,105[\,, & \Theta_k^{(2)} = [0,105\ ;\ 0,365[\,, & \Theta_k^{(3)} = [0,365\ ;\ 0,45[\,, \\ \Theta_k^{(4)} = [0,45\ ;\ 0,88[\,, & \Theta_k^{(5)} = [0,88\ ;\ 1[\,. & \end{array} \tag{1.59}$$

– Rééchantillonnage classique : il faut tirer $N = 5$ variables aléatoires $a_k^{(i)}$ selon une loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$. Supposons que les valeurs tirées sont :

$$\begin{bmatrix} a_k^{(1)} & a_k^{(2)} & a_k^{(3)} & a_k^{(4)} & a_k^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,88 & 0,07 & 0,68 & 0,32 \end{bmatrix}. \tag{1.60}$$

On a alors :

$$a_k^{(3)} \in \Theta_k^{(1)}, \quad \left(a_k^{(1)}, a_k^{(5)}\right) \in \left(\Theta_k^{(2)}\right)^2, \quad a_k^{(4)} \in \Theta_k^{(4)}, \quad a_k^{(2)} \in \Theta_k^{(5)}. \tag{1.61}$$

Ainsi : $N_k^{(1)} = 1$, $N_k^{(2)} = 2$, $N_k^{(3)} = 1$, $N_k^{(4)} = 1$, $N_k^{(5)} = 1$: les particules $\boldsymbol{x}_k^{(1)}$, $\boldsymbol{x}_k^{(4)}$ et $\boldsymbol{x}_k^{(5)}$ sont conservées, $\boldsymbol{x}_k^{(2)}$ est doublée et $\boldsymbol{x}_k^{(3)}$ éliminée.

– Rééchantillonnage résiduel :

$$\begin{bmatrix} N\mu_k^{(1)} & N\mu_k^{(2)} & N\mu_k^{(3)} & N\mu_k^{(4)} & N\mu_k^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,525 & 1,3 & 0,425 & 2,15 & 0,6 \end{bmatrix}, \tag{1.62}$$

ce qui donne, en rappelant que $\overline{N}_k^{(i)} = \left\lfloor N\mu_k^{(i)} \right\rfloor$:

$$\begin{bmatrix} \overline{N}_k^{(1)} & \overline{N}_k^{(2)} & \overline{N}_k^{(3)} & \overline{N}_k^{(4)} & \overline{N}_k^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.63}$$

D'emblée, la particule $\boldsymbol{x}_k^{(2)}$ est conservée et $\boldsymbol{x}_k^{(4)}$ est doublée. Il reste donc $R = 2$ descendants à attribuer selon les poids résiduels :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{\mu}_k^{(1)} & \ldots & \overline{\mu}_k^{(5)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dfrac{0,525}{2} & \dfrac{1,3-1}{2} & \dfrac{0,425}{2} & \dfrac{2,15-2}{2} & \dfrac{0,6}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,2625 & 0,15 & 0,2125 & 0,075 & 0,3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1.64}$$

ce qui donne les intervalles $\Theta_k^{(i)}$ suivants :

$$\begin{array}{lll} \Theta_k^{(1)} = [0\ ;\ 0,2625[\,, & \Theta_k^{(2)} = [0,2625\ ;\ 0,4215[\,, & \Theta_k^{(3)} = [0,4215\ ;\ 0,625[\,, \\ \Theta_k^{(4)} = [0,625\ ;\ 0,7[\,, & \Theta_k^{(5)} = [0,7\ ;\ 1[\,. & \end{array} \tag{1.65}$$

Admettons que les deux variables aléatoires tirées selon une loi uniforme sur $[0;1]$ sont : $a_k^{(1)} = 0,27$ et $a_k^{(2)} = 0,62$. Alors $a_k^{(1)} \in \Theta_k^{(2)}$ et $a_k^{(2)} \in \Theta_k^{(3)}$. Les particules $\boldsymbol{x}_k^{(2)}$ et $\boldsymbol{x}_k^{(3)}$ sont alors celles disposant d'un descendant supplémentaire, ce qui donne au final 2 descendants pour les particules $\boldsymbol{x}_k^{(2)}$ et $\boldsymbol{x}_k^{(4)}$, un seul pour $\boldsymbol{x}_k^{(3)}$ et aucun pour $\boldsymbol{x}_k^{(1)}$ et $\boldsymbol{x}_k^{(5)}$.

– Rééchantillonnage à variance minimale : il n'y a qu'une seule variable aléatoire à tirer selon une loi uniforme sur $[0\ ;\ 1/N] = [0\ ;\ 0,2]$. Admettons que la valeur obtenue soit $a_k^{(1)} = 0,13$. Alors : $a_k^{(2)} = 0,33$, $a_k^{(3)} = 0,53$, $a_k^{(4)} = 0,73$ et $a_k^{(5)} = 0,93$. En reprenant la technique de sélection des descendants de la méthode classique, on trouve que les particules $\boldsymbol{x}_k^{(2)}$ et $\boldsymbol{x}_k^{(4)}$ ont deux descendants, la particule $\boldsymbol{x}_k^{(5)}$ un seul et les particules $\boldsymbol{x}_k^{(1)}$ et $\boldsymbol{x}_k^{(3)}$ aucun. ■

1.4.3 Une généralisation du filtre particulaire : l'échantillonnage d'importance séquentiel

Une autre manière de dériver l'algorithme d'un filtre particulaire est d'utiliser l'échantillonnage d'importance séquentiel (cf. ann. C). Cela aboutit l'algorithme 8, plus général que l'algorithme 5. En effet, les particules ne sont plus déplacées à l'aide du noyau de transition[18] $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ mais suivant la fonction connue $q\left(\boldsymbol{x}_k \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$ appelée densité d'importance. On remarque alors que si l'on choisi $q\left(\boldsymbol{x}_k \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right) = p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$, on retrouve l'algorithme de filtre particulaire basique (algorithme 5). L'intérêt de l'échantillonnage d'importance séquentiel réside dans le fait qu'il est possible de déplacer les particules dans l'espace d'état selon une procédure de type boucle fermée, c'est-à-dire tenant compte des mesures $\boldsymbol{y}_{1\to k}$ (ce n'est pas le cas lorsque $q\left(\boldsymbol{x}_k \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right) = p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$), ce qui permet de diminuer de manière significative l'utilisation du rééchantillonnage, notamment lorsque l'équation d'état n'est pas très bien connue. Toutefois, une question se pose : quel choix, autre que le noyau de transition $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$, adopter pour la densité d'importance ? Diverses possibilités existent :

– la première approche, proposée par Zaritskii *et al.* [Zari 75] consiste à prendre comme densité d'importance $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{y}_k)$. En pratique, la seule modification apportée par rapport à la génération selon $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ est que les particules $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ ainsi obtenues sont rejetées jusqu'à ce que leur vraisemblance $L_k^{(i)}$ soit acceptable. L'inconvénient d'un tel algorithme est que son temps de calcul est aléatoire du fait qu'il utilise une procédure d'acceptation/rejet.
– La seconde, introduite par Pitt et Shephard [Pitt 99], constitue le filtre particulaire auxiliaire. Elle consiste à prendre au hasard les N_k particules parmi un ensemble de M_k variables auxiliaires ($M_k > N_k$), ces dernières étant générées selon le noyau de transition $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)})$ où $\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}$ représente une des N_k particules du nuage avant déplacement. Plus la particule $\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}$ est vraisemblable, plus elle a de chance d'être choisie. Cependant, cet algorithme est très compliqué à mettre en œuvre.

[18] On rappelle le lien entre $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ et $\boldsymbol{f}_{k-1}$ qui est :

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_w}} \delta\left(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{w}_{k-1}\right)\right) p(\boldsymbol{w}_{k-1}) \mathrm{d}\boldsymbol{w}_{k-1}.$$

– La troisième approche est la plus fréquemment rencontrée. Elle consiste à déplacer la particule $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ selon une gaussienne de moyenne $\boldsymbol{m}_k^{(i)}$ et de covariance $\boldsymbol{P}_k^{(i)}$, ces deux grandeurs étant respectivement l'état et la covariance calculés par un filtre de Kalman non linéaire (étendu [Arul 02] ou sans saveur [Van 00a], [Van 00b]) initialisé avec $\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx(i)} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)\left(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)^T$ et ne prenant en compte qu'une seule observation qui est $\boldsymbol{y}_k$ (le filtre n'effectue une estimation que pour un seul instant qui est k). La solution obtenue est très efficace mais bien évidemment gourmande en temps de calcul puisqu'elle requiert autant de filtres de Kalman que de particules. D'une manière générale, de tels estimateurs ne sont pas utilisés pour des applications temps réel mais plutôt dans des domaines tels que la finance [Kita 87], [Wan 01b], autorisant un traitement hors ligne des informations mais exigeant une précision accrue.

Pour être complet, précisons qu'il existe d'autres extensions du filtre particulaire, que nous ne détaillerons cependant pas afin de ne pas trop alourdir l'exposé. Parmi ces extensions, mentionnons la *régularisation* [Oudj 00], [Le G 98], [Muss 98] , dont le but est d'éviter la divergence du filtre particulaire en cas de faible bruit d'état et/ou de mesure (il s'agit d'une situation paradoxale, mais cet estimateur s'accommode mal des perturbations de faible amplitude). Dans un autre état d'esprit, la *Rao-Blackwellisation* [Le G 03], [Douc 00] vise à décomposer le vecteur d'état en deux sous-vecteurs, l'un étant estimable via une méthode analytique type filtre de Kalman et l'autre reconstructible par un filtre particulaire. Lorsqu'elle est applicable, cette méthode permet de réduire la taille de l'espace dans lequel se déplacent les particules et par la même diminuer la complexité du filtre mis en œuvre.

1.5 Estimation d'état optimale sous contraintes

Dans certaines applications, lors de l'implémentation d'un filtre de Kalman ou d'un filtre particulaire sur calculateur numérique, des connaissances relatives au processus en question sont souvent ignorées car elles s'intègrent mal dans la structure de ces estimateurs. Par exemple, s'il est souhaité estimer l'altitude d'un avion, nous savons que cette grandeur doit être positive ; pour un quaternion, la norme euclidienne de ce dernier doit être égale à 1 [Chou 03]. Ces types d'informations peuvent être interprétés comme des contraintes sur les variables d'état. Considérons tout d'abord que ces dernières sont soumises à des contraintes de type égalité linéaires, c'est-à-dire de la forme :

$$\boldsymbol{D}_k \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{d}_k, \tag{1.66}$$

où $\boldsymbol{d}_k \in \mathbb{R}^{n_d}$ est un vecteur connu et $\boldsymbol{D}_k$ une matrice connue de dimension appropriée, ces deux grandeurs pouvant potentiellement varier dans le temps. Par ailleurs, $\boldsymbol{D}_k$ est supposée de rang plein (si ce n'est pas le cas, cela signifie qu'il existe des contraintes redondantes, qui peuvent être éliminées). En outre, on considère que $n_d < n_x$ (si l'on avait $n_d = n_x$, alors l'équation de contrainte (1.66) résolverait à elle seule le problème d'estimation puisqu'elle conduirait à écrire $\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{D}_k^{-1}\boldsymbol{d}_k$).

La problématique du filtrage de Kalman sous contraintes égalité linéaires consiste à estimer l'état $\boldsymbol{X}_k$ d'un système tout en faisant en sorte que cet état estimé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ satisfasse à chaque instant k la contrainte (1.66) en $\boldsymbol{X}_k = \widehat{\boldsymbol{x}}_k$. Il existe différentes manières de traiter un tel problème. Par exemple, il est possible de mettre en œuvre un changement de base au vecteur d'état $\boldsymbol{X}_k$ permettant à (1.66) d'être en permanence vérifiée [Wen 92]. Cela a pour avantage de réduire l'ordre du modèle ainsi obtenu, mais en revanche, les nouvelles variables d'état issues de ce changement de base sont généralement dépourvues de sens physique [Simo 02]. Dans un autre état d'esprit, les

- A l'instant $k = 0$ ($\boldsymbol{x}_0$ et $p(\boldsymbol{x}_0)$ sont connus) :
  1. Générer N_0 particules $\boldsymbol{x}_0^{(i)}$ $(1 \leq i \leq N_0)$ selon $q(\boldsymbol{x}_0)$.
  2. Pour $i = 1, \ldots, N_0$, poser : $\mu_0^{(i)} = p\left(\boldsymbol{x}_0^{(i)}\right) \Big/ q\left(\boldsymbol{x}_0^{(i)}\right)$.
- Aux instants $k \geq 1$:
  1. Déplacer les particules dans l'espace d'état en générant N_k nouvelles particules $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ selon $q\left(\boldsymbol{x}_k \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$ et en supprimant les anciennes.
  2. Pour $i = 1, \ldots, N_k$, calculer la vraisemblance des particules :
  $$L_k^{(i)} = p\left(\boldsymbol{v}_k^{(i)}\right) = p\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)}\right)\right).$$
  3. Pour $i = 1, \ldots, N_k$, mettre à jour les poids :
  $$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \mu_{k-1}^{(i)} L_k^{(i)} \frac{p\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)}.$$
  4. Pour $i = 1, \ldots, N_k$, normaliser les poids : $\mu_k^{(i)} = \widetilde{\mu}_k^{(i)} \Big/ \sum_{j=1}^{N_k} \widetilde{\mu}_k^{(j)}$.
  5. Calculer l'état estimé, en utilisant l'un des 2 critères d'optimalité au choix :
     - Optimalité au sens des moindres carrés : $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{m}_k = \sum_{i=1}^{N_k} \mu_k^{(i)} \boldsymbol{x}_k^{(i)}$.
     - Optimalité au sens du maximum *a posteriori* : $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{x}_k^{(i)}$ tel que : $\mu_k^{(i)} \geq \mu_k^{(j)}$, $\forall j \in \{1, \ldots, N_k\}, j \neq i$.
  6. Calculer la covariance d'erreur d'estimation :
  $$\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} = \sum_{i=1}^{N_k} \mu_k^{(i)} \left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} - \boldsymbol{m}_k\right)\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} - \boldsymbol{m}_k\right)^T.$$
  7. Procéder à un rééchantillonnage des particules par la méthode classique (algorithme 6), résiduelle (algorithme 7), à variance minimale ou de branchement de Bernoulli si la valeur donnée par l'indicateur de redistribution (nombre effectif de particules ou entropie du nuage de particules) est en dessous du seuil critique.

Algorithme 8: Le filtre particulaire généralisé

contraintes peuvent être considérées comme des mesures parfaites [Porr 88], [Hayw 98]. Malheureusement, cela conduit à une matrice de covariance de bruit de mesure singulière, ce qui risque d'engendrer des problèmes numériques lors du calcul du gain de Kalman [Simo 02]. Une troisième approche consiste à utiliser la technique des multiplicateurs de Lagrange afin de prendre en compte les contraintes lors du calcul du gain de Kalman. Les résultats obtenus sont alors différents, selon le critère d'optimalité choisi (moindres carrés ou maximum *a posteriori*). Toutefois, ils s'avèrent être des cas particuliers de l'approche dite *par projection* [Simo 02], [Simo 06c, chap. 7]. Cette théorie unificatrice présente des avantages indéniables :

– elle peut être traduite sous forme géométrique, ce qui la rend facile à comprendre ;
– elle est généralisable à n'importe quel type d'estimateur d'état linéaire ou non ;
– elle est facilement extensible au cas de contraintes inégalité linéaires [Simo 06d] grâce à la méthode d'*activation de limite de contrainte*[19] [Flet 81].

Dans cette section, la théorie de l'approche par projection pour des contraintes égalité linéaires est tout d'abord présentée, avant de discuter de l'extension de cette technique vis-à-vis de contraintes de type inégalité.

1.5.1 L'approche par projection pour des contraintes égalité linéaires

Le principe de l'approche par projection est illustré sur la figure 1.7. Il consiste à résoudre le problème d'optimisation sous contrainte suivant [Simo 02] :

$$\begin{aligned} &\min_{\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}} \in \mathbb{R}^{n_x}} \left((\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}} - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}})^T \boldsymbol{\Pi}_k^{-1} (\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}} - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}) \right) \\ &\text{tel que : } \boldsymbol{D}_k \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{d}_k, \end{aligned} \tag{1.67}$$

où $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ est l'état estimé par un filtre non contraint (filtre de Kalman, filtre particulaire, etc.), c'est-à-dire ignorant la relation (1.66), $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ est l'état contraint (c'est-à-dire tenant compte de (1.66)) et $\boldsymbol{\Pi}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ une matrice de pondération symétrique et définie positive. La solution à un tel problème peut être obtenue via la technique des multiplicateurs de Lagrange [Simo 06c, p. 337]. Cela aboutit finalement à l'algorithme 9, où $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}}$ (respectivement $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$) est la covariance[20] d'erreur d'estimation de $\boldsymbol{X}_k$ par $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ (respectivement $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$).

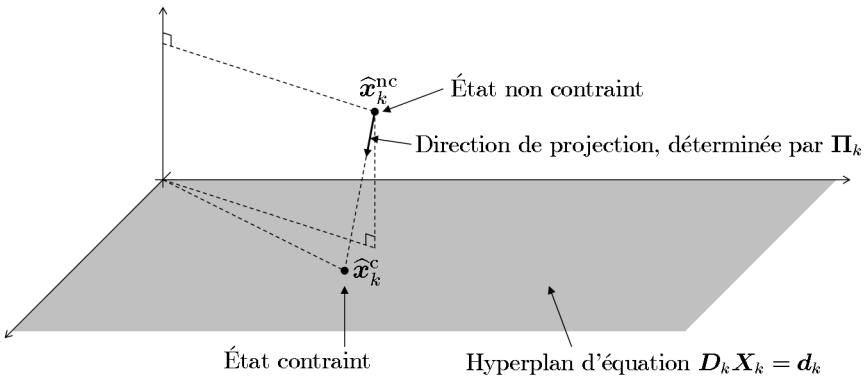


Fig. 1.7 – Principe de l'approche par projection pour une contrainte égalité linéaire

L'estimée contrainte présente les propriétés suivantes [Simo 02] :
– elle est non biaisée :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_k^{\mathrm{c}} \right) = \boldsymbol{0}_{n_x \times 1},$$

– si $\boldsymbol{\Pi}_k = (\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}})^{-1}$, alors le filtre contraint est à variance minimale :

$$\forall \boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathbb{E}\left(\left(\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_k^{\mathrm{c}} \right) \left(\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_k^{\mathrm{c}} \right)^T \right) \leq \mathbb{E}\left((\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{Z}) (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{Z})^T \right),$$

[19] La dénomination anglo-saxone de cette technique est "active set method", soit "méthode d'ensemble (d'équations) actif", selon une traduction littérale.

[20] Dans cette section, nous posons : $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{xx}$ afin d'alléger les notations. Il n'y a aucune ambiguïté possible puisque la covariance d'erreur d'estimation de l'état est la seule considérée.

1. Calculer l'état estimé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ et la covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$ par un filtre non contraint.
2. Calculer $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}}$ grâce à l'approche par projection :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_k &= \boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\boldsymbol{D}_k^T\left(\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\boldsymbol{D}_k^T\right)^{-1}, \\
\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}} &= \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}} + \boldsymbol{L}_k\left(\boldsymbol{d}_k - \boldsymbol{D}_k\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right), \\
\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}} &= (\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{D}_k)\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{D}_k)^T.
\end{aligned}$$

Algorithme 9: L'estimation d'état sous contraintes égalité linéaires utilisant l'approche par projection

– si $\boldsymbol{\Pi}_k = \boldsymbol{I}_{n_x}$, alors l'estimée contrainte est plus proche de l'état réel que l'estimée non contrainte :

$$\left\|\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_k^{\mathrm{c}}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_k^{\mathrm{nc}}\right\|.$$

Ainsi, si $\boldsymbol{\Pi}_k = \boldsymbol{I}_{n_x}$, le filtre contraint est sous-optimal au sens du minimum de variance. Cependant, il est aisé de voir, à partir de (1.67), que cette configuration constitue une projection orthogonale sur l'hyperplan de contrainte (d'une manière générale, $\boldsymbol{\Pi}_k$ détermine la direction de projection). On en déduit que contraindre un état en le projetant orthogonalement à l'hyperplan de contrainte conduit à une estimée contrainte non optimale au sens du minimum de variance.

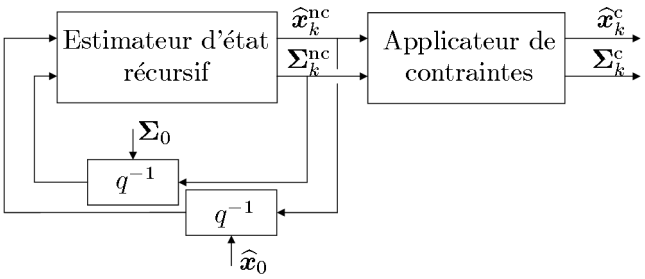
Par ailleurs, la ressemblance entre les équations de l'approche par projection (algorithme 9) et celles de correction d'un filtre de Kalman mérite d'être soulignée. Ceci s'explique par le fait que l'approche par projection peut être interprétée comme une mise à jour réalisée à partir d'une mesure parfaite (c'est-à-dire non bruitée), décrite par (1.66). Cela montre que considérer des équations de contraintes comme des mesures parfaites est en réalité un cas particulier de l'approche par projection. Cela implique également que la prise en compte de contraintes améliore l'observabilité de l'état à estimer, du fait que cette démarche fait entrer en ligne de compte une équation de mesure supplémentaire, à savoir (1.66).

Enfin, l'un des grands avantages de l'approche par projection est de séparer l'opérateur appliquant les contraintes (que l'on appellera désormais *applicateur de contraintes*) de l'estimateur d'état. C'est d'ailleurs ce découplage qui autorise la généralisation de cette méthode aux reconstructeurs d'état autres que le filtre de Kalman. En raison de cette séparation, deux schémas de couplage peuvent être envisagés [Teix 07] : il s'agit des couplages en *boucle ouverte* et en *boucle fermée*, illustrés par la figure 1.8. Une petite précision à ce sujet : avant l'instauration de la théorie de projection, les méthodes de filtrage de Kalman sous contraintes (qui utilisaient notamment la technique des multiplicateurs de Lagrange afin d'intégrer les contraintes dans le calcul du gain de Kalman) étaient équivalentes à un couplage en boucle fermée. Toutefois, rien n'interdit de coupler l'estimateur récursif et l'applicateur de contraintes en boucle ouverte, comme le firent Simon et Chia [Simo 02]. Cette dernière configuration s'avère particulièrement bien adaptée pour les estimateurs ne calculant pas de manière récursive l'état reconstruit et sa covariance d'erreur, comme par exemple les filtres particulaires, où ce sont les particules et leur poids qui sont entretenus de manière récursive.

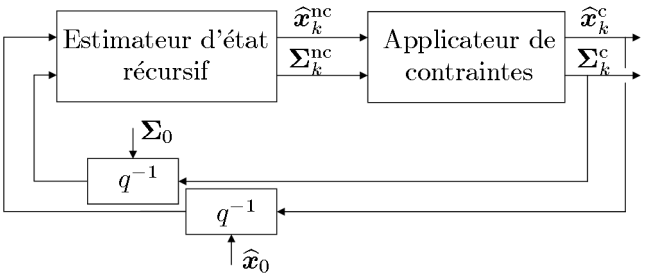
1.5.2 L'approche par projection pour des contraintes inégalité linéaires

Supposons qu'à chaque instant k, $\boldsymbol{X}_k$ soit soumis à la contrainte inégalité linéaire suivante :

$$\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{X}_k \leq \boldsymbol{d}_k, \tag{1.68}$$



Couplage en boucle ouverte



Couplage en boucle fermée

FIG. 1.8 – Couplages en boucle ouverte et en boucle fermée

où $\boldsymbol{d}_k \in \mathbb{R}^{n_d}$ ($n_d < n_x$) est un vecteur à temps variant connu et $\boldsymbol{D}_k$ une matrice à temps variant connue, de rang plein et de dimension appropriée. Le but recherché est d'estimer l'état $\boldsymbol{X}_k$ d'un système tout en faisant en sorte que cet état estimé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ satisfasse à chaque instant k la contrainte (1.69) en $\boldsymbol{X}_k = \widehat{\boldsymbol{x}}_k$. Une manière de résoudre ce problème est d'utiliser la technique d'*activation de limite de contrainte* [Flet 81]. Cela consiste à tester à chaque instant k les n_d inégalités scalaires de (1.69). Pour la $i^{\text{ème}}$ inégalité, deux *scenarii* sont alors envisageables :

- l'inégalité est vérifiée : elle est alors ignorée,
- l'inégalité n'est pas vérifiée (c'est-à-dire $[\boldsymbol{D}_k]^i \boldsymbol{X}_k > [\boldsymbol{d}_k]^i$). On applique alors une contrainte égalité à la borne : $[\boldsymbol{D}_k]^i \boldsymbol{X}_k = [\boldsymbol{d}_k]^i$.

Par conséquent, traiter des inégalités linéaires revient à appliquer à chaque instant k un nombre N_k de contraintes égalité linéaires, ce nombre variant avec k et étant toujours compris entre 0 et n_d [Simo 06d]. La solution à un tel problème a été traitée dans la partie précédente. Ces N_k contraintes sont regroupées dans l'égalité vectorielle linéaire suivante, où $\boldsymbol{\delta}_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, $0 \leq N_k \leq n_d$:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_k \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{\delta}_k. \tag{1.69}$$

Enfin, il est à noter que, comme précisé dans [Sirc 08d], [Sirc 08b], le schéma de couplage en boucle fermée n'est plus viable dans le cas de contraintes inégalité. En effet, dans ce cas de figure, la zone de contraintes n'est plus un hyperplan mais un hypervolume (de taille potentiellement infinie). La méthode d'activation de limite de contrainte, associée au critère (1.67), fait que $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ réside en une projection de $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ sur la surface de l'hypervolume de contrainte, selon une direction déterminée par $\boldsymbol{\Pi}_k$ (figure 1.9). Mathématiquement, $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ est obtenu par la mise à jour issue de la mesure fictive et non bruitée $\boldsymbol{\mathcal{D}}_k \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{\delta}_k$ (cf. paragraphe précédent). Or l'état réel $\boldsymbol{x}_k$ est dans l'hypervolume de contraintes et non nécessairement à sa surface. Dès lors, la mesure fictive permettant de contraindre l'état ne peut plus être considérée comme parfaite. De ce fait, corriger la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$ d'erreur d'estimation à partir de l'algorithme 9 constitue une opération illicite, donnant une valeur sous-estimée pour $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}}$: il est ainsi vivement déconseillé

de prendre $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}}$ comme entrée de l'estimateur récursif, c'est-à-dire que le couplage recommandé entre le reconstructeur d'état et l'applicateur de contraintes est celui en boucle ouverte, ou encore celui en boucle *semi-fermée* [Sirc 08d], [Sirc 08b], proposé sur la figure 1.10.

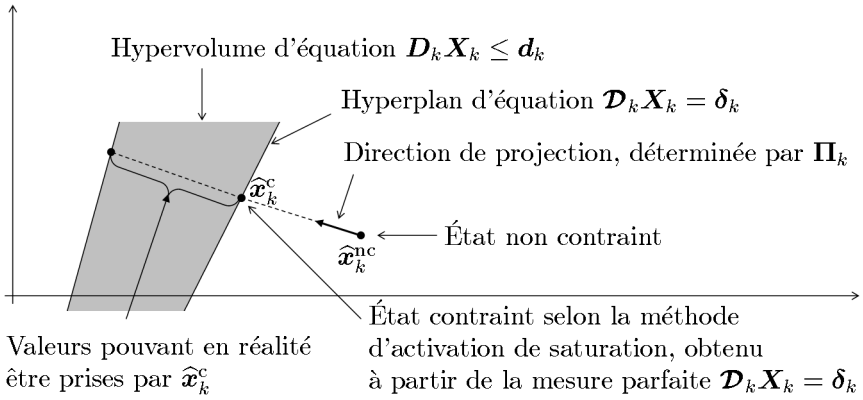


FIG. 1.9 – Estimation d'état sous contraintes inégalité linéaires par l'approche par projection

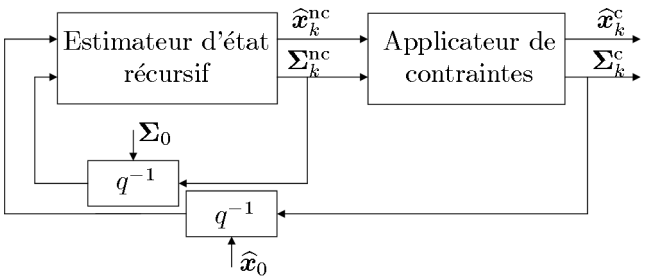


FIG. 1.10 – Couplages en boucle semi-fermée

L'approche par projection constitue, de par son principe, une approche intéressante en ce qui concerne l'estimation d'état sous contraintes. Toutefois, il ne s'agit pas de la seule et unique méthode possible pour traiter ce genre de problème. En réalité, l'estimation d'état sous contraintes est une thématique encore sujette à l'heure actuelle à de nombreux travaux de recherches, parmi lesquels nous mentionnerons ceux de Shimada *et al.* [Shim 98], de Rao *et al.* [Rao 03], de Goodwin *et al.* [Good 05a], [Good 05b], de Ko et Bitmead [Ko 07] et de Gupta et Hauser [Gupt 07].

1.6 Estimation d'état robuste

Jusqu'à présent, les techniques d'estimation d'état étudiées exigeaient une connaissance quasi-parfaite du processus dont il est souhaité estimer l'état, ce qui est en pratique rarement le cas. Deux sources de méconnaissances sont à considérer : celles relatives à la mise en équation de la dynamique du procédé étudié et celles correspondant au processus de mesure. Nous ne considérons ici que le premier type d'incertitude, ce qui signifie que la fonction d'observation $\boldsymbol{h}_k$ est bien connue, le bruit de mesure $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bien caractérisé et que les observations réalisées $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne sont entachées d'aucune erreur (biais, etc.) autre que celles décrites par $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$. A noter que cette dernière hypothèse peut toutefois être relaxée puisqu'il existe un test assez simple, appelé *test d'innovation* [Alaz 00], permettant de juger si une mesure $y_{i,k}$ $(1 \leq i \leq n_y)$

est valide ou non : il s'agit de comparer la réalisation correspondante $\widetilde{y}_{i,k|k-1}$ de l'innovation avec $\sigma_{i,k} = \sqrt{\left[\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k|k-1}\right]^i_i}$. Deux cas de figures sont alors envisageables :

- $\widetilde{y}_{i,k} \leq 3\sigma_{i,k}$ auquel cas cette observation est prise en compte.
- $\widetilde{y}_{i,k} > 3\sigma_{i,k}$: la mesure $y_{i,k}$ est alors ignorée car jugée non valide, ce qui signifie que l'étape de mise à jour ne s'effectue qu'avec une partie des observations, à savoir celles qui sont jugées valides. Par la suite, une telle situation sera assimilée à une *perte de capteur*.

Concernant les méconnaissances relatives au modèle de dynamique, trois causes sont possibles :

- des incertitudes liées au modèle d'état en lui même, c'est-à-dire que soit les paramètres de $\boldsymbol{f}_k$, soit la structure de fonction $\boldsymbol{f}_k$ en elle-même sont mal connus,
- des erreurs se superposant à la séquence de commande $\{\boldsymbol{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$,
- une mauvaise caractérisation du bruit d'état $\{\boldsymbol{W}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Le but de l'estimation d'état dite *robuste* est double : il s'agit de trouver une méthode d'estimation d'état minimisant l'influence des sources d'erreur précitées tout en maintenant une bonne quantification de l'erreur d'estimation (covariance). Dans cette section, des techniques d'estimation robuste à chacune de ces sources d'erreurs vont être étudiées.

1.6.1 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes de modèle

Robustesse vis-à-vis d'incertitudes d'ordre structurel :

L'estimation d'état à partir d'un modèle de structure mal connue est un problème assez délicat. Pour contourner ce genre de difficulté, une approche envisageable consiste à employer une formulation de type *multi-modèles*[21]. Son principe consiste à supposer N modèles d'état $\mathcal{M}_i$ $(1 \leq i \leq N)$ envisageables et différents les uns des autres, chaque modèle étant défini par une structure et des paramètres constants lui étant propres. Ensuite, un banc de N estimateurs (filtres de Kalman par exemple) indépendants entre eux est mis en œuvre, le $i^{\text{ème}}$ estimateur utilisant le modèle $\mathcal{M}_i$. La problématique de l'approche multi-modèle est alors de déterminer à chaque instant k le modèle le plus vraisemblable, en l'occurrence celui embarqué dans le reconstructeur d'état donnant la meilleure estimée. Posons :

$$\begin{cases} \mu_k^{(i)} = \mathbb{P}\left(\mathcal{M}_i | \boldsymbol{Y}_{1\to k} = \boldsymbol{y}_{1\to k}\right) \\ \sum_{i=1}^N \mu_k^{(i)} = 1 \\ \mu_0^{(i)} = 1/N \end{cases} . \tag{1.70}$$

A l'aide des formules de Bayes (cf. ann. C), on montre facilement que $\mu_k^{(i)}$ se calcule récursivement [Sims 69], [Lain 71] :

$$\mu_k^{(i)} = \frac{p\left(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{y}_{1\to k-1}, \mathcal{M}_i\right) \mu_{k-1}^{(i)}}{\sum_{j=1}^N p\left(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{y}_{1\to k-1}, \mathcal{M}_j\right) \mu_{k-1}^{(j)}}, \tag{1.71}$$

où $p\left(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{y}_{1\to k-1}, \mathcal{M}_i\right) = p\left(\left(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right) | \mathcal{M}_i\right)$ représente la vraisemblance de l'innovation de l'estimateur d'état employant le modèle $\mathcal{M}_i$. Pour un filtre de Kalman, du fait de l'hypothèse

[21] A noter qu'initialement, cette approche était dédiée à la résolution du problème d'estimation d'état à partir d'un modèle de structure connue mais présentant des paramètres inconnus [Magi 65]. Toutefois, son principe autorise naturellement l'extension de cette technique au cas de modèles de structure inconnue.

sous-jacente de gaussianité de l'innovation, il vient [Sims 69] :

$$p\left(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1},\mathcal{M}_i\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y}\det\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy(i)}\right)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{(i)}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy(i)}\right)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{(i)}\right), \quad (1.72)$$

où $\widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{(i)}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy(i)}$ sont respectivement l'innovation et sa covariance calculées par le filtre de Kalman basé sur le modèle $\mathcal{M}_i$. Le modèle $\mathcal{M}_i$ considéré comme étant le plus représentatif à l'instant k est celui présentant le poids $\mu_k^{(i)}$ le plus fort. L'état estimé ainsi que sa covariance d'erreur d'estimation sont alors ceux donnés par le filtre basé sur ce modèle. Le principe de l'approche multi-modèles est résumé par la figure 1.11.

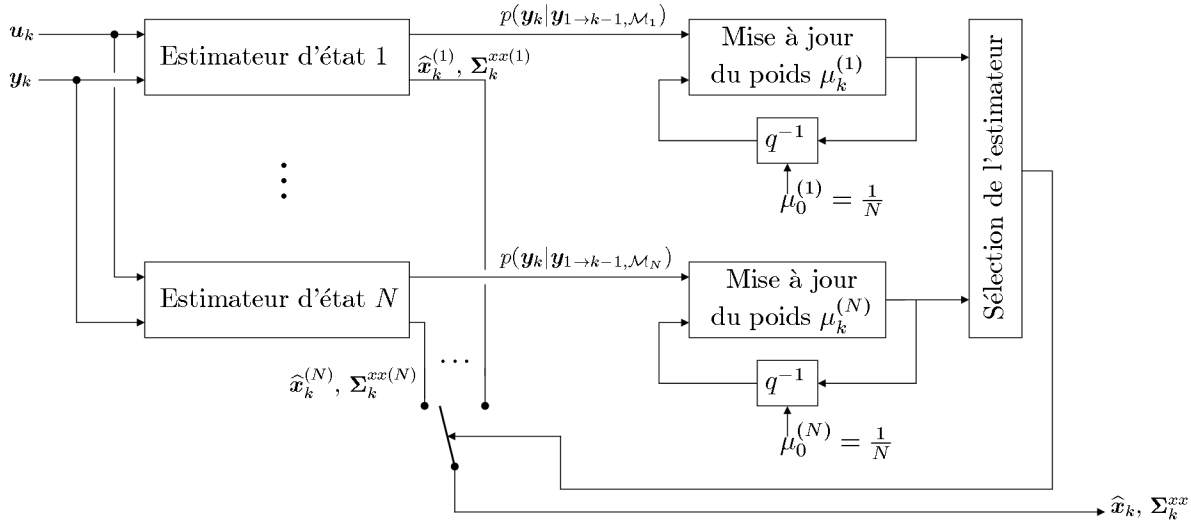


Fig. 1.11 – Principe de l'approche multi-modèles

Parmi les inconvénients de cette approche, mentionnons tout d'abord la complexité des algorithmes : en effet, il n'y a plus 1 mais N filtres mis en œuvre. Toutefois, ces estimateurs étant indépendants les uns des autres, leurs calculs sont facilement parallélisables. Par ailleurs, dans certains cas de figure, il est possible que le système étudié évolue naturellement du modèle $\mathcal{M}_i$ vers le modèle $\mathcal{M}_j, j\neq i$ (par exemple lors du passage d'un mode de fonctionnement nominal vers un mode dégradé). Il est alors souhaitable d'intégrer cette connaissance dans l'approche multi-modèle présentée, puisque son principe de fonctionnement interdit un tel changement de modèle. Ceci constitue les modèles multiples à interaction (IMM pour Interacting Multiple Models en anglais) [Blom 88], [Mazo 98], [Bar 01], [Hoci 06], lesquels considèrent des probabilités de passage d'un modèle vers un autre.

Robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques :

Lorsque la structure de l'équation d'état est connue mais que certains de ses paramètres sont mal connus, il existe des techniques autres que l'approche multi-modèle. Parmi ces méthodes, nous pouvons tout d'abord citer le filtrage de Kalman à facteur d'oubli [Hu 03], dont le principe est le même que celui des moindre carrés à facteur d'oubli (algorithme 1). Dans un autre état d'esprit, les incertitudes paramétriques peuvent être englobées dans des matrices $\Delta\times$, donnant une équation de dynamique sous la forme suivante [Xie 94], [Jean 95], [Theo 96], [Xie 04] :

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=(\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F}_k)\boldsymbol{X}_k+(\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{G}_k)\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{W}_k, \quad (1.73)$$

mais cette approche, qui décrit les incertitudes paramétriques $\Delta\times$ sous une certaine forme (polytopique par exemple) est réservée aux systèmes à temps invariant. Enfin, une solution simple consiste à estimer en plus de l'état $\boldsymbol{X}_k$ les paramètres incertains, regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{\Theta}_k$, ces derniers étant généralement modélisés sous forme d'un cheminement aléatoire (cf. ann. G) :

$$\boldsymbol{\Theta}_{k+1} = \boldsymbol{\Theta}_k + \boldsymbol{N}_k, \tag{1.74}$$

où $\{\boldsymbol{N}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc, centré, dont la covariance constante $\boldsymbol{\Sigma}^{nn}$ est à paramétrer en fonction de la stabilité temporelle des paramètres. Deux possibilités s'offrent alors à nous [Wan 01a] :

- utiliser une stratégie à *ordre augmenté*, qui consiste à appliquer un estimateur non linéaire au modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k+1} \\ \boldsymbol{\Theta}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{\Theta}_k) \\ \boldsymbol{\Theta}_k + \boldsymbol{N}_k \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{V}_k \end{cases}. \tag{1.75}$$

  Cette approche à l'avantage d'être simple et toujours applicable, mais du fait de l'augmentation du nombre de variables à reconstruire, le degré d'observabilité du modèle (1.75) peut se trouver diminué, ce qui peut affecter la convergence de certaines grandeurs estimées, voire même causer des problèmes de divergence [Wan 01a].
- Adopter une approche *duale* [Wan 97], [Dewa 03], [Mora 05], laquelle consiste à séparer l'estimation de l'état $\boldsymbol{X}_k$ et des paramètres $\boldsymbol{\Theta}_k$, comme illustré sur la figure 1.12. Cette approche évite les phénomènes de divergence précités mais n'est applicable que pour les paramètres figurant dans la fonction de mesure $\boldsymbol{h}_k$.

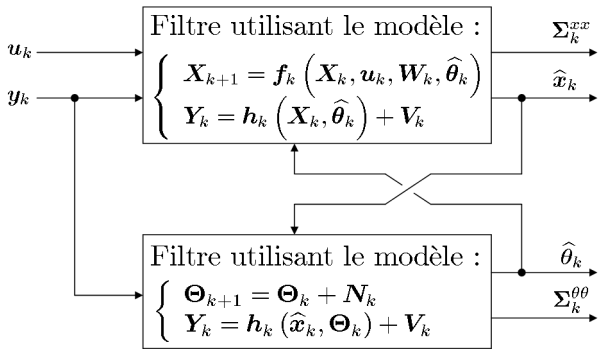


FIG. 1.12 – Approche duale de l'estimation simultanée état/paramètres

1.6.2 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur l'entrée du système

Dans cette section, nous considérons un modèle dynamique linéaire à temps variant du type :

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{E}_k + \boldsymbol{W}_k \\ \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{V}_k \end{cases}, \tag{1.76}$$

où $\{\boldsymbol{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ représente une séquence de commande déterministe et connue et $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une entrée inconnue. $\boldsymbol{E}_k \in \mathbb{R}_{n_e}$ est alors considérée comme une variable aléatoire, la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_k$ étant quant-à-elle connue quel que soit l'instant k. Enfin, $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\boldsymbol{W}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ constituent des bruits blancs, gaussiens, centrés, décorrélés et de covariances (connues) respectives $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$. Le but est

d'établir une technique permettant d'estimer à chaque instant k l'état $\boldsymbol{X}_k$, soit en s'affranchissant de l'effet de la séquence $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, soit en s'en accommodant (en l'estimant par exemple). Il existe différentes manière de traiter ce problème.

Approche par inversion de modèle :

Cette méthode, dédiée aux systèmes à temps invariant (matrices $\boldsymbol{F}_k$, $\boldsymbol{G}_k$, $\boldsymbol{\Gamma}_k$ et $\boldsymbol{H}_k$ constantes), consiste à exprimer à l'aide de (1.76) la fonction de transfert liant $\boldsymbol{E}_k$ à $\boldsymbol{Y}_k$, dans un cadre déterministe (c'est-à-dire en ignorant les bruits $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\boldsymbol{W}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$). Ensuite, cette fonction de transfert est inversée [Silv 69], [Szig 02], [Liu 02], ce qui permet d'obtenir directement $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ à partir des observations $\{\boldsymbol{Y}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Il est alors possible de reconstruire l'état $\boldsymbol{X}_k$ à partir de l'entrée reconstruite et des mesures. Cette approche présente cependant certaines limites :

- il est possible de trouver plusieurs valeurs d'entrée donnant une même mesure (un effet observé peut avoir différentes causes) : le problème est alors dit *mal posé*, et il est nécessaire de régulariser la procédure d'estimation (c'est-à-dire définir un critère permettant d'obtenir une solution unique) [Mham 01], [Mham 02],
- une fonction de transfert inverse stable n'existe pas toujours [Moyl 77], [Hou 98a],
- du fait que, pour des raisons de causalité, un processus physique peut se comporter comme un intégrateur, alors le modèle inverse de ce système sera nécessairement du type dérivateur, ce qui a pour conséquence d'instaurer un retard dans l'estimation de $\boldsymbol{E}_k$ ainsi que d'amplifier le bruit de mesure $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, (ignoré dans la fonction de transfert mais tout de même présent). Il est toutefois possible de minimiser l'influence de cette perturbation via la synthèse d'un observateur avec un gain convenablement ajusté [Liu 02].

Approche d'isolation de $\boldsymbol{E}_k$: filtres à entrées inconnues :

Cet outil a tout d'abord été développé dans un cadre déterministe et à temps invariant, constituant ainsi l'*observateur à entrées inconnues* [Bhat 78], [Daro 94], [Valc 99]. Son principe est d'empêcher les entrées inconnues d'affecter la procédure d'estimation d'état en trouvant une matrice $\boldsymbol{N}$ orthogonale[22] à $\boldsymbol{\Gamma}$, de sorte que l'erreur d'estimation $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ soit régie par une équation du type :

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k+1} = \boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{X}}_k + \boldsymbol{N}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{X}}_k + \boldsymbol{0}_{n_x\times n_e}\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{X}}_k, \tag{1.77}$$

où $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ est une matrice choisie de manière à assurer la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro tout en limitant l'effet du bruit de mesure. Une telle matrice $\boldsymbol{N}$ existe si et seulement si le critère suivant est vérifié :

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Gamma}) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{\Gamma}). \tag{1.78}$$

D'un point de vue pratique, ce critère peut s'interpréter comme un nombre minimum de mesures indépendantes nécessaire à la compensation des entrées inconnues : en effet, plus le nombre de lignes linéairement indépendantes de $\boldsymbol{H}$ (c'est-à-dire le nombre de mesures non redondantes) est grand, plus la probabilité d'avoir le rang de $\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Gamma}$ égal à celui de $\boldsymbol{\Gamma}$ est élevée. En outre, il a été montré dans [Hou 94] que la synthèse d'un observateur à entrée inconnue est équivalente à celle d'un observateur classique [Luen 66], [Luen 71] sur un modèle équivalent à (1.76), obtenu à l'aide d'une transformation adéquate (opérable sous réserve que le critère (1.78) soit vérifié) et sur lequel l'entrée inconnue $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ n'apparaît plus. Ce changement de base a permis à Hou et Patton de développer le filtre de Kalman à entrées inconnues [Hou 98b].

[22] Deux matrices $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ sont orthogonales si et seulement si : $\boldsymbol{M}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}_{n\times p}$.

Insertion d'un effet intégral :

Cette extension du filtre de Kalman a pour but d'atténuer l'erreur d'estimation de $\boldsymbol{X}_k$ causée par l'entrée inconnue $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Le concept d'action intégrale est bien connu dans la théorie de la commande des systèmes dynamiques, son utilisation ayant pour effet de réduire l'erreur statique entre la sortie mesurée d'un processus et la valeur désirée. Grâce à la dualité entre observateur et contrôleur [Kwak 72, chap. 4], ce concept a été introduit dans la théorie des observateurs par Beale et Shafai [Beal 89], dans le but d'estimer et de compenser de manière effective l'effet d'une entrée inconnue sur la procédure d'estimation. Ce travail a ensuite été étendu au filtrage de Kalman dans [Bas 99]. Le principe du filtrage de Kalman Proportionnel-Integral (PIKF) consiste à ajouter à l'équation de mise à jour de l'état estimé (1.19) une variable $\boldsymbol{z}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{n_x}$ représentant l'effet de l'intégrale de l'innovation $\widetilde{\boldsymbol{y}}_{n|n-1}$ entre les instants $n = 1$ et $n = k$ sur l'état reconstruit, de sorte que :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} + \boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{z}_{k|k-1}, \\ \boldsymbol{z}_{k|k-1} &= \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{z}_{k-1}, \\ \boldsymbol{z}_k &= \boldsymbol{z}_{k|k-1} + \boldsymbol{L}_k\widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}, \end{aligned} \tag{1.79}$$

où $\boldsymbol{A}_k \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ est une matrice introduisant un effet d'oubli des innovations les plus anciennes et $\boldsymbol{B}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ une matrice déterminant la répartition de l'effet intégral sur la procédure d'estimation. Ces deux matrices sont à paramétrer, et très souvent, le choix simple : $\boldsymbol{A}_k = \lambda\boldsymbol{I}_{n_x}$, $\boldsymbol{B}_k = \alpha\boldsymbol{I}_{n_x}$ est effectué, où $0 < \lambda \leq 1$ est un facteur d'oubli (de l'effet intégral) et $\alpha \in \mathbb{R}$. A noter que si $\alpha = 0$, alors l'action intégrale n'a aucun effet sur la procédure d'estimation d'état. L'estimateur alors obtenu est un filtre de Kalman classique (filtre proportionnel). $\boldsymbol{L}_k \in \mathbb{R}^{n_x\times n_y}$ est quant-à-lui un gain à calculer. En regroupant (1.79) avec les équations du filtre de Kalman (algorithme 2), il vient :

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}}_k \\ \boldsymbol{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{k-1} & \boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{A}_{k-1} \\ \boldsymbol{0}_{n_x\times n_x} & \boldsymbol{A}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{z}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{k-1} \\ \boldsymbol{0}_{n_x\times n_u} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k-1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_k \\ \boldsymbol{L}_k \end{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}. \tag{1.80}$$

Un parallèle est facilement réalisable entre cette relation et celle d'un filtre de Kalman sous forme correcteur (1.31). En identifiant terme à terme ces deux équations, on constate que le PIKF consiste simplement en l'application d'un filtre de Kalman classique sur le modèle à ordre augmenté suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k+1} \\ \boldsymbol{Z}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_k & \boldsymbol{B}_k\boldsymbol{A}_k \\ \boldsymbol{0}_{n_x\times n_x} & \boldsymbol{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_k \\ \boldsymbol{Z}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_k \\ \boldsymbol{0}_{n_x\times n_u} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_k + \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_k \\ \boldsymbol{0}_{n_x\times n_w} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{Y}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_k & \boldsymbol{0}_{n_x\times n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_k \\ \boldsymbol{Z}_k \end{bmatrix} + \boldsymbol{V}_k \end{cases}. \tag{1.81}$$

L'augmentation du nombre de variables d'état peut engendrer d'une part une diminution du degré d'observabilité de ces termes, d'autre part un accroissement de la charge de calcul. Il est toutefois possible de développer analytiquement les équations du filtre alors obtenues afin d'obtenir des relations matricielles de dimension réduite, et ainsi diminuer la complexité de l'algorithme. Par ailleurs, dans le même état d'esprit, il est envisageable de ne pas considérer un mais plusieurs effets intégraux (cumulés), l'objectif étant d'accroître la précision de l'estimateur d'état (et donc de diminuer l'impact de l'entrée inconnue sur l'erreur d'estimation). Toutefois, des précautions sont à prendre puisque l'augmentation de la précision se fait alors au détriment de la stabilité du filtre.

Approche par modélisation de l'entrée inconnue :

Il s'agit de développer un modèle de $\boldsymbol{E}_k$ de la forme suivante :

$$\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{\Theta}_k\right), \tag{1.82}$$

où $\boldsymbol{g}_k$ est une fonction connue et $\boldsymbol{\Theta}_k \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ un vecteur de paramètres à estimer, dont l'évolution est régie par une équation dynamique du type :

$$\boldsymbol{\Theta}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_k\left(\boldsymbol{\Theta}_k, \boldsymbol{N}_k\right), \tag{1.83}$$

où $\boldsymbol{\varphi}_k$ est une fonction connue et $\boldsymbol{N}_k$ un bruit blanc, gaussien, centré, de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{nn}$. Une première approche consiste à adopter la méthode de vecteur d'état augmenté présentée dans la section 1.6.1, ce qui revient à appliquer un estimateur non linéaire au modèle suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k+1} \\ \boldsymbol{\Theta}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{\Theta}_k\right) + \boldsymbol{W}_k \\ \boldsymbol{\varphi}_k\left(\boldsymbol{\Theta}_k, \boldsymbol{N}_k\right) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{Y}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_k & \boldsymbol{0}_{n_y\times n_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_k \\ \boldsymbol{\Theta}_k \end{bmatrix} + \boldsymbol{V}_k \end{array}\right. . \tag{1.84}$$

Dans le cas particulier où $\boldsymbol{g}_k$ est une fonction linéaire et les paramètres $\boldsymbol{\Theta}$ sont constants, c'est-à-dire que :

$$\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{\Theta}_k\right) = \boldsymbol{D}_k\boldsymbol{\Theta}, \quad \boldsymbol{D}_k \in \mathbb{R}^{n_e\times n_\theta}, \tag{1.85}$$

alors il existe une solution simple au problème, appelée *estimation d'entrée récursive* (RIE pour Recursive Input Estimation en anglais). Elle consiste à implémenter un filtre de Kalman basé sur le modèle d'état (1.76) mais sans entrée inconnue (c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{N} : \boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{0}_{n_e\times 1}$), et à lui greffer en parallèle un outil permettant de compenser en sortie les erreurs entachant ses estimées, erreurs commises par la non prise en compte de $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. La problématique du RIE est alors de trouver un lien entre ces erreurs d'estimation et $\boldsymbol{E}_k$ (ou plus simplement $\boldsymbol{\Theta}$, puisque ce vecteur constant décrit entièrement $\boldsymbol{E}_k$). L'idée est que $\boldsymbol{\Theta}$ est un biais constant, et que si ce dernier engendre une erreur d'estimation d'état, il aura également un effet sur l'innovation. Afin de trouver ce lien, nous allons considérer deux filtres deux Kalman identiques en tous points (même initialisation, utilisation du même modèle, des mêmes observations, etc.) excepté un, qui est la valeur de $\boldsymbol{\Theta}$:

- le premier utilise la valeur vraie de $\boldsymbol{\Theta}$, supposée connue,
- le second remplace cette valeur par $\boldsymbol{0}_{n_\theta\times 1}$, ce qui constitue alors le filtre de Kalman en pratique implémenté, celui dont ont cherche à corriger les estimées.

Les grandeurs calculées par le second filtre sont affectées d'un exposant (0) afin de distinguer ces valeurs biaisées des vraies (qui sont celles calculées par le premier filtre). A noter que les différentes covariances et le gain de ces deux estimateurs sont identiques, du fait que seul le biais $\boldsymbol{\Theta}$ change (cf. section 1.3.1). Par conséquent, en adoptant la démarche exposée sur la figure 1.13 et en précisant que :

- l'utilisation récursive entre les instants 0 et k de la forme prédicateur (1.30) du filtre de Kalman aboutit à[23] :

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} - \widehat{\boldsymbol{X}}^{(0)}_{k|k-1} = \boldsymbol{N}_k\boldsymbol{\Theta}, \tag{1.86}$$

[23] Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la relation (1.30) mais en remplaçant les différentes réalisations ($\boldsymbol{y}_k$, $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ et $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$) par les variables aléatoires les ayant généré (notées en majuscule). Tout d'abord, il faut calculer $\widehat{\boldsymbol{X}}^0_{k|k-1}$ en fonction de $\widehat{\boldsymbol{X}}^0_{1|0}$, puis opérer de même avec $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}$, mais en rajoutant cette fois le biais $\boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{\Theta}$ à l'équation (1.30). Comme les gains $\boldsymbol{K}_k$ et $\boldsymbol{K}_k^{(0)}$ sont identiques, en calculant la différence $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} - \widehat{\boldsymbol{X}}^{(0)}_{k|k-1}$, bon nombre de termes disparaissent et il reste le résultat souhaité.

où $\boldsymbol{N}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\theta}$ vérifie la récurrence suivante pour $k \geq 1$ [Wang 93] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{N}_k = \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{M}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{D}_{k-1} \\ \boldsymbol{M}_k = \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k^{(0)}\boldsymbol{H}_k\right)\boldsymbol{N}_k \\ \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{0}_{n_x \times n_\theta} \end{cases}, \tag{1.87}$$

– le lien entre innovation et état prédit conduit à écrire :

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}^{(0)} - \widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1} = \boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{H}_k\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}^{(0)} - \left(\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{H}_k\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\right) = \boldsymbol{H}_k\left(\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}^{(0)}\right), \tag{1.88}$$

on aboutit facilement à la régression linéaire suivante [Wang 93] :

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}^{(0)} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{N}_k\boldsymbol{\Theta} + \widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}, \tag{1.89}$$

où $\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}$ est une séquence blanche, gaussienne, centrée (il s'agit de l'innovation du filtre non biaisé) et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} = \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy(0)}$ (cf. section 1.3.1), ce qui autorise l'emploi de la méthode des moindres carrés.

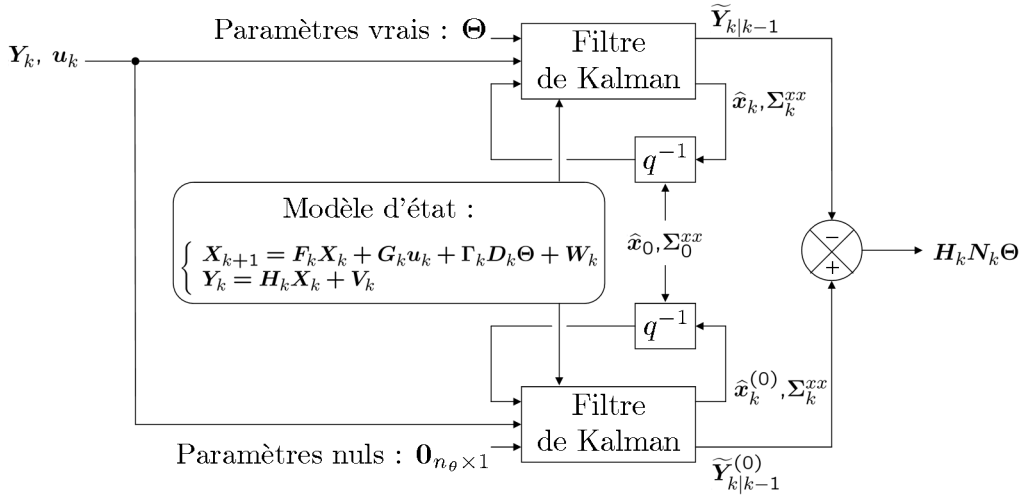


FIG. 1.13 – Obtention de la relation de régression linéaire entre $\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}^{0}$ et $\boldsymbol{\Theta}$

Une fois l'estimée $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k$ de $\boldsymbol{\Theta}$ calculée à partir d'un algorithme de moindres carrés utilisant les innovations $\left\{\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{n|n-1}^{(0)}\right\}_{1 \leq n \leq k}$ du filtre de Kalman implémenté, il ne reste plus qu'à déterminer comment se servir de cette estimée (et de sa covariance d'erreur de reconstruction $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\theta\theta}$) afin de compenser l'état $\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{(0)}$ et la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx(0)}$ calculés par le filtre. En procédant de même que pour l'obtention de (1.86), mais en se basant sur la forme correcteur (1.31) du filtre de Kalman, on trouve facilement que :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(0)} + \boldsymbol{M}_k\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}, \tag{1.90}$$

où $\boldsymbol{M}_k$ est défini en (1.87). Par ailleurs, du fait que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$ est obtenu à partir des innovations du filtre de Kalman, le principe d'orthogonalité (cf. section 1.2.3) affirme que l'erreur de reconstruction $\widetilde{\boldsymbol{X}}_k^{(0)} = \boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k$ du filtre de Kalman est décorrélée de l'erreur d'estimation de $\boldsymbol{\Theta}$. Par conséquent :

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} = \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx(0)} + \boldsymbol{M}_k\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{\theta\theta}\boldsymbol{M}_k^T. \tag{1.91}$$

- A l'instant $k = 0$:
  1. Initialiser le filtre de Kalman avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0^{(0)}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx(0)}$.
  2. Initialiser l'algorithme de moindres carrés avec $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(0)}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{\theta\theta(0)}$.
  3. Initialiser la matrice $\boldsymbol{M}_0$: $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{0}_{n_x \times n_\theta}$.
- Aux instants $k \geq 1$:
  1. Mettre à jour $\boldsymbol{N}_k$: $\boldsymbol{N}_k = \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{M}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{D}_{k-1}$.
  2. Calculer $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(0)}$, $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx(0)}$, $\widetilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{(0)}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy(0)}$ et $\boldsymbol{K}_k^{(0)}$ à partir d'un filtre de Kalman (algorithme 2) basé sur le modèle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{D}_k \underbrace{\boldsymbol{\Theta}}_{} + \boldsymbol{W}_k \\ \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{V}_k \qquad\qquad = \boldsymbol{0}_{n_\theta \times 1} \end{cases}.$$

  3. Mettre à jour $\boldsymbol{M}_k$: $\boldsymbol{M}_k = \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k^{(0)}\boldsymbol{H}_k\right)\boldsymbol{N}_k$.
  4. Corriger l'état et la covariance calculés par le filtre de Kalman :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(0)} + \boldsymbol{M}_k\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx(0)} + \boldsymbol{M}_k\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{\theta\theta}\boldsymbol{M}_k^T. \end{aligned}$$

  5. Mettre à jour $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k$ et sa covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\theta\theta}$ à partir d'un algorithme de moindres carrés récursifs (algorithme 1) basé sur la régression linéaire : $\widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}^{(0)} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{N}_k\boldsymbol{\Theta} + \widetilde{\boldsymbol{Y}}_{k|k-1}$ où : $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} = \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy(0)}$.

Algorithme 10: L'estimation d'entrée récursive (RIE)

Les équations (1.87), (1.89), (1.90) et (1.91) constituent les relations de base du RIE, synthétisé sur l'algorithme 10 et la figure 1.14.

A noter que le RIE peut traiter le cas où l'entrée inconnue $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un bais constant en posant simplement $\boldsymbol{D}_k = \boldsymbol{I}_{n_e}$ de sorte que $\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{\Theta}$. C'est d'ailleurs dans ce contexte que le RIE a tout d'abord été développé [Chan 79], sur une application de poursuite de trajectoire (le biais à estimer étant l'accélération d'une cible de forte inertie). L'algorithme des moindres carrés y est alors sous sa configuration simple, la formulation récursive ayant quant-à-elle été utilisée dans [Wang 93] et [Kech 97]. Le fait de poser $\boldsymbol{D}_k \neq \boldsymbol{I}_{n_e}$ constitue l'estimation d'entrée dite *généralisée* [Lee 99], [Jilk 02]. Par ailleurs, il est possible d'établir un parallèle entre le RIE (figure 1.14) et l'approche duale de l'estimation (figure 1.12), du fait que l'estimation entre état et paramètres est découplée. Il y a toutefois une différence majeure puisque dans l'approche duale, les deux estimateurs collaborent entre eux alors que dans le RIE, l'algorithme de moindres carrés se sert du filtre de Kalman afin de corriger les estimées de ce dernier en sortie, tandis le filtre de Kalman demeure indépendant des résultats issus des moindres carrés. Enfin, notons que dans le cas où le modèle de l'entrée inconnue, qui est $\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{D}_k\boldsymbol{\Theta}$, est incertain, l'approche multi-modèle de la section 1.6.1 est applicable [Bogl 87] : l'algorithme alors obtenu est constitué d'un filtre de Kalman et d'un banc de N estimateurs de moindres carrés mis en parallèles.

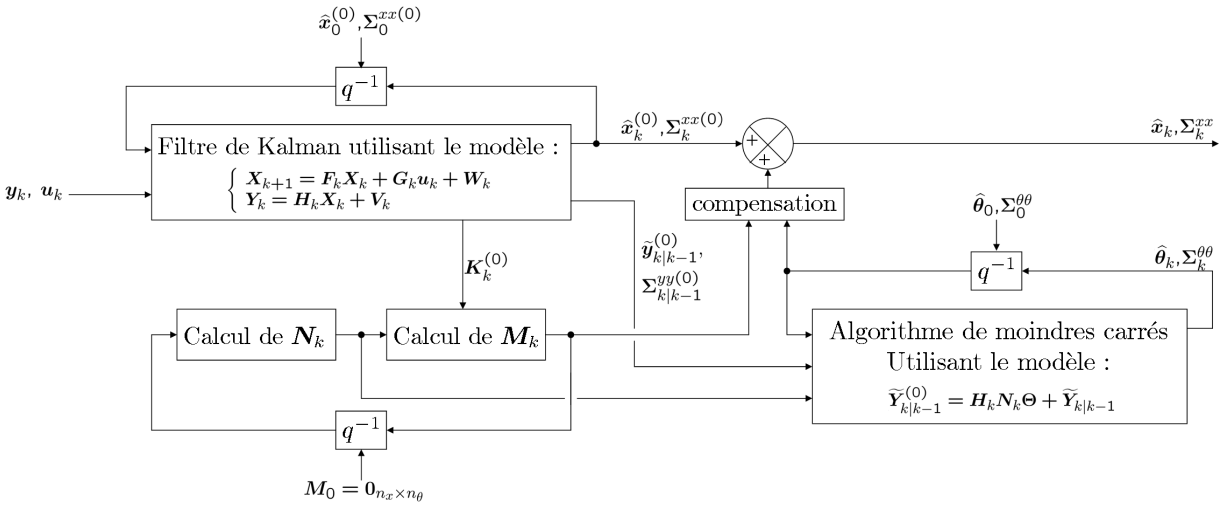


FIG. 1.14 – Structure de l'estimation d'entrée récursive

1.6.3 Robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur le bruit d'état

Dans la section précédente, les incertitudes considérées portaient sur l'entrée du système, laquelle était entachée d'une erreur additive inconnue. Dans ce paragraphe, nous considérons toujours le modèle (1.76) mais, à la différence de la section précédente, $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est supposé avoir un comportement fortement aléatoire[24]. Ainsi, en considérant le nouveau bruit de dynamique : $\overline{\boldsymbol{W}}_k = \boldsymbol{W}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{E}_k$, le problème considéré peut se rapporter à celui d'un bruit d'état dont les caractéristiques sont inconnues. Trois manières d'aborder cet obstacle sont envisageables :

- développer un modèle stochastique pour $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et éventuellement réadapter en ligne les paramètres de ce modèle,
- identifier en ligne les caractéristiques statistiques du bruit d'état global $\left\{\overline{\boldsymbol{W}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$,
- traiter $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ au sens de la théorie des jeux.

Modélisation de $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sous forme stochastique :

Cette approche consiste tout simplement à développer $\boldsymbol{E}_k$ suivant un modèle de la forme :

$$\boldsymbol{E}_k = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{A}_{i,k} \boldsymbol{E}_{k-i} + \boldsymbol{N}_k, \tag{1.92}$$

où les matrices $\boldsymbol{A}_{i,k}$ $(1 \leq i \leq N)$ sont à déterminer et $\{\boldsymbol{N}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un bruit blanc, dont les caractéristiques statistiques (nature de la densité de probabilité, moments, etc.) sont également à régler. La difficulté est alors de paramétrer un tel modèle de sorte qu'il soit représentatif de $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, les modèles considérés se restreignent la plupart du temps à des bruit blanc, cheminement aléatoire ou processus markoviens à l'ordre 1 [Sing 70], voire à l'ordre 2 (cf. ann.G), $\{\boldsymbol{W}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ étant alors supposé gaussien ou distribué selon une loi uniforme [Serv 81]. En

[24] Il est clair que dans la section précédente, $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ était bel et bien une variable aléatoire, mais dont l'évolution faisait part à un certain déterminisme. En réalité, on peut parler de "degré de déterminisme" dans une variable aléatoire : par exemple, un processus markovien à l'ordre 1 (cf. ann. G) très fortement auto-corrélé sera quasi-déterministe (biais) tandis qu'un même processus mais faiblement auto-corrélé aura une composante déterministe quasi-nulle (bruit blanc). La frontière entre "l'aléatoire faible" et "l'aléatoire fort" est alors relative, et la distinction entre les méthodes de la section précédente et celles de la partie à venir est entièrement subjective.

outre, si $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est supposé blanc, gaussien et centré, alors $\left\{\overline{\boldsymbol{W}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\boldsymbol{W}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Si la covariance $\boldsymbol{\Sigma}^{\overline{ww}}$ de ce bruit est mal connue mais constante, il est alors possible d'utiliser une technique de *filtrage adaptatif*, qui consiste à estimer simultanément l'état du système et $\boldsymbol{\Sigma}^{\overline{ww}}$ (le concept est le même que dans la section précédente, $\boldsymbol{\Sigma}^{\overline{ww}}$ représentant en l'occurrence n_x^2 paramètres scalaires constants à évaluer). Dans ce domaine, on peut citer les travaux pionniers de Mehra [Mehr 70] [Mehr 72] ou ceux plus récents de Kosanam [Kosa 04a] [Kosa 04b] ou Liang [Lian 04]. Malheureusement, un bruit blanc est un processus purement aléatoire qui, s'il est considéré sur des intervalles de temps même courts, a tendance à présenter une moyenne nulle (cf. ann. H). De ce fait, modéliser $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ par un bruit blanc peut ne pas s'avérer du tout réaliste, et l'extension des techniques adaptatives à des bruits plus élaborés conduirait à des estimateurs encore plus compliqués à mettre en œuvre.

Identification des caractéristiques du bruit d'état global $\left\{\overline{\boldsymbol{W}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ [Kwon 03] :

A l'opposé de ce qui a été présenté dans le paragraphe précédent, la seule hypothèse émise à propos de $\left\{\overline{\boldsymbol{W}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ est que ce bruit est gaussien de moyenne $\widehat{\boldsymbol{w}}_k$ et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\overline{ww}}$. Aucun modèle dynamique n'est supposé, ce qui revient à dire que $\left\{\overline{\boldsymbol{W}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un mélange de bruits blancs et de processus auto-corrélés. L'idée de base est qu'en reprenant l'équation d'état de (1.76) et en s'appuyant sur la définition de $\overline{\boldsymbol{W}}_k$, il vient :

$$\overline{\boldsymbol{W}}_k = \boldsymbol{X}_{k+1} - \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{u}_k. \tag{1.93}$$

Par conséquent, en supposant que l'on connaisse $\boldsymbol{X}_k$ et $\boldsymbol{X}_{k+1}$, il est alors aisé de reconstruire $\overline{\boldsymbol{W}}_k$ et d'en déduire ses caractéristiques. Chaque composante $\overline{W}_{i,k}$ $(1 \leq i \leq n_x)$ du signal $\overline{\boldsymbol{W}}_k$ est ensuite passée à travers un filtre passe-bas, de sorte que la grandeur en sortie de ce filtre, notée $\mathcal{W}_{i,k}$, constitue la partie de $\overline{W}_{i,k}$ variant de manière lente ou modérée. La partie non filtrée $\widetilde{W}_{i,k} = \overline{W}_{i,k} - \mathcal{W}_{i,k}$ est alors considérée comme un bruit blanc[25] centré, du fait que ce signal est de fréquence élevée et présente par la même une moyenne avoisinant 0 sur des laps de temps relativement courts. Par conséquent, $\widehat{\boldsymbol{w}}_k$ est donc la moyenne du signal en sortie des n_x filtres passe-bas mis en parallèle. De manière à ne pas trop compliquer l'algorithme final, ces derniers sont considérés comme étant des filtres récursifs du premier ordre, c'est-à-dire que :

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mathcal{W}}_{k-1} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{W}}_{k-1}, \tag{1.94}$$

où $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ et $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ sont des matrices diagonales dont les $i^{\text{èmes}}$ termes constituent les paramètres de la cellule filtrant $\overline{W}_{i,k}$. Ainsi :

$$\widehat{\boldsymbol{w}}_k = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{w}}_{k-1} + \boldsymbol{B}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{F}_{k-1}\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} - \boldsymbol{G}_{k-1}\boldsymbol{u}_{k-1}\right). \tag{1.95}$$

Le filtre de Kalman modifié en conséquence est présenté sur l'algorithme 11. La difficulté inhérente à cette approche réside en le paramétrage des filtres passe-bas, c'est-à-dire des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, lesquelles ne doivent pas menacer la stabilité du filtre de Kalman modifié. Par ailleurs, il est à noter que la covariance de la perturbation filtrée $\left\{\widetilde{\boldsymbol{W}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, considérée comme une séquence blanche, est supposée connue.

[25] L'hypothèse de blancheur est en l'occurrence quelque peu abusive dans ce sens où le signal considéré est censé n'être constitué que d'harmoniques de fréquence élevée, alors qu'un bruit blanc présente par définition une densité spectrale de puissance identique quel que soit la fréquence considérée, haute ou basse.

- A l'instant $k = 0$, initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$, $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$ et $\widehat{\boldsymbol{w}}_0$.
- Aux instants $k \geq 1$:

  1. Réaliser l'étape de prédiction :

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{F}_{k-1}\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{G}_{k-1}\boldsymbol{u}_{k-1} + \widehat{\boldsymbol{w}}_{k-1}, \\
\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} &= \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}\boldsymbol{F}_{k-1}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{\widetilde{w}\widetilde{w}}, \\
\widehat{\boldsymbol{w}}_k &= \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{w}}_{k-1} + \boldsymbol{B}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{F}_{k-1}\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} - \boldsymbol{G}_{k-1}\boldsymbol{u}_{k-1}\right).
\end{aligned}$$

  2. Réaliser l'étape de correction, identique à celle du filtre de Kalman original (algorithme 2).

Algorithme 11: Le filtre de Kalman avec identification des caractéristiques du bruit d'état

Traitement de $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ au sens de la théorie des jeux :

Ici, pour simplifier, la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_k$ dans (1.76) est supposée égale à la matrice identité de dimension n_x, ce qui revient à dire que chaque composante du vecteur d'état $\boldsymbol{X}_k$ est perturbée de manière additive par la composante correspondante de $\boldsymbol{E}_k$. Le principe de la *théorie des jeux* consiste à considérer deux adversaires :

- nous, concepteurs de l'estimateur d'état, qui cherchons à minimiser à chaque instant k l'erreur d'estimation $\widetilde{\boldsymbol{X}}_k = \boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_k$,
- notre opposant $\{\boldsymbol{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, qui a pour but de trouver les réalisations $\{\boldsymbol{e}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ maximisant cette erreur d'estimation.

Pour atteindre son objectif, notre adversaire espionne nos performances, c'est-à-dire qu'il mesure à chaque instant k l'erreur d'estimation *a priori* $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} = \boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}$, cette erreur étant censée être plus représentative de notre méconnaissance du modèle de dynamique que l'erreur *a posteriori* $\widetilde{\boldsymbol{X}}_k$. Ensuite, il va se servir de cette observation afin de contrer notre objectif. Toutefois, et fort heureusement pour nous, cet opposant fictif mesure de manière imparfaite l'erreur d'estimation. Ainsi, il est courant de considérer l'expression suivante pour $\boldsymbol{E}_k$ [Yaes 92], [Simo 06a], [Simo 06b] :

$$\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{L}_k\left(\boldsymbol{D}_k\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} + \boldsymbol{N}_k\right), \tag{1.96}$$

où $\{\boldsymbol{N}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une séquence blanche, gaussienne, centrée, indépendante de l'état initial et des autres bruits, et de covariance égale à la matrice identité de dimension n_x. $\boldsymbol{L}_k \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ est un gain à calculer (il s'agit de la grandeur sur laquelle l'adversaire va jouer dans le but de contrecarrer nos plans) et $\boldsymbol{D}_k \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ est une matrice à paramétrer par l'utilisateur. Cette dernière permet de répercuter une connaissance *a priori* de l'impact de $\boldsymbol{E}_k$ sur $\boldsymbol{X}_k$ [Simo 06a], [Simo 06b] (par exemple, si l'on sait que la première composante du vecteur d'état n'est pas affectée par l'entrée inconnue, que la seconde composante est deux fois plus exposée que la troisième, etc.). A noter qu'aucune particularité (symétrie, positivité, etc.) n'est requise pour $\boldsymbol{D}_k$. Par ailleurs, l'estimateur recherché est conçu de manière à être linéaire, c'est-à-dire que :

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_k = \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{H}_k\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\right). \tag{1.97}$$

où $\boldsymbol{K}_k$ est un gain à calculer dans le but de minimiser l'erreur d'estimation. En utilisant le modèle (1.76) ainsi que les équations (1.96) et (1.97), on montre facilement que l'erreur d'estimation *a priori* $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}$ obéit à la récurrence suivante pour $k \geq 1$:

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k+1|k} = (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{D}_k - \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} + \boldsymbol{W}_k + \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{N}_k - \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{V}_k. \tag{1.98}$$

Toutefois, cette expression est inappropriée pour un problème de théorie des jeux car l'adversaire peut délibérément adopter un gain $\boldsymbol{L}_k$ infiniment grand pour maximiser l'erreur d'estimation. De ce fait, (1.98) est décomposé en deux équations récurrentes, comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\boldsymbol{X}}^{(1)}_{k+1|k} & = & (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{D}_k - \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\widetilde{\boldsymbol{X}}^{(1)}_{k|k-1} + \boldsymbol{W}_k + \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{V}_k, \\ \widetilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}_{k+1|k} & = & (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{D}_k - \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\widetilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}_{k|k-1} + \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{N}_k. \end{array} \tag{1.99}$$

On retrouve bien quel que soit k : $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k+1|k} = \widetilde{\boldsymbol{X}}^{(1)}_{k+1|k} + \widetilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}_{k+1|k}$. La fonction coût J_k à minimiser est alors la suivante [Yaes 92], [Simo 06a], [Simo 06b] :

$$J_k(\boldsymbol{K}_k, \boldsymbol{L}_k) \quad = \quad \text{trace}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}^{(1)}_{i|i-1}\widetilde{\boldsymbol{X}}^{(1)\,T}_{i|i-1} - \widetilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}_{i|i-1}\widetilde{\boldsymbol{X}}^{(2)\,T}_{i|i-1}\right)\right). \tag{1.100}$$

Notre but est de trouver le gain $\boldsymbol{K}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ minimisant J_k et pour notre adversaire, le gain $\boldsymbol{L}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ maximisant J_k. Un tel problème est alors appelé *minimax*, et l'estimateur ainsi obtenu *filtre minimax*. A noter qu'une telle fonction de coût dissuade l'ennemi d'utiliser la force pure (gain $\boldsymbol{L}_k$ infini) pour maximiser J_k, car cela conduit à $J_k \to -\infty$. Ainsi, s'il veut atteindre son but, notre adversaire va devoir se montrer intelligent (tout comme nous d'ailleurs). La forme de la fonction de coût (1.100) constitue un jeux *différentiel*. Ainsi, viennent les inégalités suivantes, vérifiées $\forall \boldsymbol{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ et $\forall \boldsymbol{\mathcal{L}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$:

$$J_k(\boldsymbol{K}_k, \boldsymbol{\mathcal{L}}) \leq J_k(\boldsymbol{K}_k, \boldsymbol{L}_k) \leq J_k(\boldsymbol{\mathcal{K}}, \boldsymbol{L}_k). \tag{1.101}$$

Le point de la courbe représentative de J_k correspondant aux gains $\boldsymbol{K}_k$ et $\boldsymbol{L}_k$ est un col [Simo 06a], [Simo 06b]. Ce point constitue la solution du filtrage minimax. Les expressions de $\boldsymbol{K}_k$ et $\boldsymbol{L}_k$ relatives à ce col sont :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}_k & = & \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\right)^{-1}, \\ \boldsymbol{L}_k & = & \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{D}_k^T, \end{array} \tag{1.102}$$

où $\boldsymbol{P}_k$ est la solution non-singulière (si elle existe) de l'équation récurrente suivante :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{Q}_k & = & \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{ww}, \\ \boldsymbol{P}_k & = & \left(\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\right)^{-1}\boldsymbol{H}_k - \boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{D}_k^T\boldsymbol{D}_k + \boldsymbol{I}_{n_x}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_k, \end{array} \tag{1.103}$$

initialisée avec : $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$. L'existence de la solution recherchée est garantie si la positivité matricielle suivante est vérifiée :

$$\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{D}_k^T\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{D}_k \geq \boldsymbol{0}_{n_x \times n_x}. \tag{1.104}$$

Ainsi, lorsque l'utilisateur paramètre la matrice $\boldsymbol{D}_k$, il doit si possible veiller à ce que cette condition soit toujours vérifiée. Si ce n'est pas le cas, alors le filtre minimax n'existe pas (en pratique, dans un tel cas de figure, l'estimateur conçu maximise l'erreur d'estimation, ce qui se traduit par une divergence accélérée de la matrice $\boldsymbol{P}_k$). Les équations (1.97), (1.102), (1.103) et (1.104) constituent la base du filtre minimax, synthétisé sur l'algorithme 12.

En observant cet algorithme, on constate que si $\boldsymbol{D}_k = \boldsymbol{0}_{n_x \times n_x}$, le filtre minimax ne constitue rien d'autre que le filtre de Kalman, où le gain est calculé par la relation (1.28) et la covariance d'erreur d'estimation mise à jour via la troisième forme de (1.29). Ainsi, bien qu'obtenu d'une manière très différente que le filtre de Kalman, le filtre minimax peut être considéré comme

- A l'instant $k = 0$, initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$.
- Aux instants $k \geq 1$:

  1. Réaliser l'étape de prédiction :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{F}_{k-1}\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{G}_{k-1}\boldsymbol{u}_{k-1}, \\ \boldsymbol{Q}_k &= \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{ww}. \end{aligned}$$

  2. Calculer la matrice suivante : $\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{D}_k^T\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{D}_k$:
     - si cette matrice est semi- définie positive, alors passer à l'étape suivante,
     - sinon, adapter $\boldsymbol{D}_k$ jusqu'à ce que $\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{D}_k^T\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{D}_k$ soit semi-définie positive puis passer à l'étape suivante.
  3. Réaliser l'étape de correction :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_k &= \left(\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\right)^{-1}\boldsymbol{H}_k - \boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{D}_k^T\boldsymbol{D}_k + \boldsymbol{I}_{n_x}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_k, \\ \boldsymbol{K}_k &= \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\right)^{-1}, \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}_k\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right). \end{aligned}$$

Algorithme 12: Le filtre minimax

une généralisation de ce dernier. L'insertion d'une matrice $\boldsymbol{D}_k$ non nulle dans le calcul de $\boldsymbol{P}_k$ (qui représente en l'occurrence la covariance d'erreur d'estimation *a posteriori*) a pour effet d'augmenter sa valeur, ce qui revient approximativement au même que l'insertion d'un facteur d'oubli mentionné dans la section 1.6.1 [Simo 06c, p. 354]. A noter que cet algorithme nécessite d'inverser à chaque pas de calcul une matrice de dimension $n_x \times n_x$, tandis que le filtre de Kalman sous sa forme originale inverse une matrice de taille $n_y \times n_y$. Du fait que généralement, le nombre de variable d'état est supérieur au nombre d'observations ($n_x > n_y$), cela représente un accroissement de la charge de calcul. En outre, la principale difficulté du filtre minimax est le paramétrage de la matrice $\boldsymbol{D}_k$. Un choix généralement adopté est le suivant :

$$\boldsymbol{D}_k = \gamma_k\boldsymbol{I}_{n_x},\ \gamma_k \in \mathbb{R}\ . \tag{1.105}$$

La condition (1.104) devient alors :

$$\gamma_k^2\boldsymbol{Q}_k \leq \boldsymbol{I}_{n_x}\ . \tag{1.106}$$

Dans le cas particulier où le système (1.76) est à temps invariant, les coefficients des matrices $\boldsymbol{P}_k$ et $\boldsymbol{Q}_k$ tendent vers des valeurs constantes (sous réserve que toutes les mesures soient systématiquement prises en compte à chaque étape de mise à jour). En pré-calculant ces grandeurs, il est alors facile de trouver une valeur constante pour γ satisfaisant toujours (1.104). Des méthodes de résolution d'un tel problème peuvent être trouvées dans [Yaes 91], [Nagp 91].

Enfin, précisons que l'algorithme du filtre minimax (algorithme 12) correspond également à celui d'un filtre similaire mais obtenu dans un cadre déterministe, c'est-à-dire que les bruits de dynamique $\left\{\overline{\boldsymbol{W}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ et de mesure $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne sont plus caractérisés sous forme statistique (moyenne, covariance, etc.), mais en terme d'amplitude maximale atteignable[26]. La manière d'obtenir cet algorithme est différente (il s'agit de la résolution d'un problème LQ modifié [Bana 92],

[26] Cette approche s'apparente en réalité aux méthodes ensemblistes [Cher 03] [Jaul 01], lesquelles n'estiment pas l'état sous forme d'une valeur ponctuelle et d'un indicateur d'incertitude d'ordre statistique (covariance, etc.) mais sous forme d'un hyper-rectangle ou un hyper-ellipsoïde. L'inconvénient d'une telle approche est qu'elle suppose

[Shen 97], [Simo 06c, chap. 11]), mais elle permet de mettre en évidence le fait que, dans un cadre stationnaire, la norme infinie de la fonction de transfert des grandeurs perturbatrices (bruits de mesure et de dynamique, erreur d'initialisation du filtre) vers l'erreur d'estimation est bornée [Simo 06c, p. 383] :

$$\sup_{\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^{n_x},\overline{\boldsymbol{W}}_i\in\mathbb{R}^{n_x},\boldsymbol{V}_i\in\mathbb{R}^{n_y}} \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \widetilde{\boldsymbol{X}}_i^T \widetilde{\boldsymbol{X}}_i}{\left\|\widetilde{\boldsymbol{X}}_0\right\|^2_{(\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx})^{-1}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left\{ \left\|\overline{\boldsymbol{W}}_i\right\|^2_{(\boldsymbol{\Sigma}^{\overline{ww}})^{-1}} + \left\|\boldsymbol{V}_i\right\|^2_{(\boldsymbol{\Sigma}^{vv})^{-1}} \right\}} \right) \leq \frac{1}{\gamma}\ , \quad (1.107)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$, $\boldsymbol{\Sigma}^{\overline{ww}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}^{vv}$ sont des matrices de pondération jouant un rôle analogue à celui d'une covariance. De ce fait, les filtres minimax dans un cadre stationnaire sont souvent appelés *filtres* H_∞ ou encore *filtres pire cas* car ils correspondent à la minimisation du transfert d'énergie des grandeurs perturbatrices dans leur configuration la plus défavorable vers l'erreur d'estimation. A l'opposé, le filtre de Kalman est nommé *filtre* H_2 [Simo 96] car il minimisent la norme 2 de cette fonction de transfert, à savoir l'énergie moyenne des perturbations sur toute la gamme de fréquences. Enfin, précisons que le filtrage minimax peut être généralisé au cas d'incertitudes paramétriques affectant la matrice d'état, en intégrant cette méconnaissance dans le vecteur de perturbations [Rago 01].

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, diverses méthodes d'estimation d'état ont été présentées. Les approches optimales vis-à-vis d'un critère de performances donné ont tout d'abord été étudiées. Parmi les principaux critères d'optimalité, nous pouvons mentionner les moindres carrés, lesquels conduisent à la méthode du même nom pour les états statiques et le filtre de Kalman pour les états de dynamique linéaire. Ces outils constituent des méthodes analytiques optimales en ce sens où ils représentent la solution exacte d'un problème analytique donné. En ce qui concerne les états de dynamique non linéaire, d'une manière générale, la solution exacte d'un tel problème n'existe pas. Diverses techniques sous-optimales ont de ce fait été mises au point, lesquelles peuvent être classées en deux catégories : les méthodes analytiques, regroupant les diverses extensions du filtrage de Kalman (EKF, UKF, etc.) et les méthodes numériques de type simulation de Monte Carlo, aboutissant au filtrage particulaire. La prise en compte de contraintes sur les variables d'état dans le problème d'estimation a ensuite été évoquée, une telle démarche constituant un apport supplémentaire d'information. Les approches robustes d'estimation ont enfin été présentées, lesquelles permettent de pallier un manque d'information relatif au modèle d'état, les sources de méconnaissance pouvant être diverses (structure du modèle, valeurs de paramètres, entrées inconnues, etc.). Selon la manière dont elles traitent le problème, les approches d'estimation robuste peuvent être classées en deux catégories : celles s'affranchissant entièrement de la méconnaissance considérée (filtre à entrées inconnues par exemple) et celles s'en accommodant, soit en compensant "grossièrement" l'incertitude du modèle d'état (filtre de Kalman proportionnel-intégral, à facteur d'oubli, etc.), soit en modélisant sous une certaine forme les grandeurs inconnues (construction d'un modèle dynamique déterministe, stochastique, approches multi-modèles, représentation au

toutes les perturbations comme étant bornées, ce qui n'est pas toujours chose aisée, notamment lorsque les bruits sont caractérisés de manière statistique. Par exemple, la réalisation d'une variable aléatoire décrite par une densité gaussienne peut prendre une valeur tendant vers l'infini, bien que la probabilité d'un tel événement soit infime. D'une manière générale, les méthodes ensemblistes s'accordent assez mal avec les approches purement statistiques.

sens de la théorie des jeux, etc.). La première approche traite idéalement le problème mais n'est malheureusement pas toujours applicable. Ce n'est pas le cas de la seconde qui est en général utilisable sur une très grande classe de systèmes (sous réserve que les grandeurs inconnues soient modélisables), voire même toujours employable (modèle à ordre augmenté par exemple). En outre, ce type d'approche met en évidence l'importance des observations puisque ces dernières jouent un rôle prépondérant dans la compensation des méconnaissances, que ce soit pour la sélection du modèle le plus vraisemblable dans une approche multi-modèles ou pour l'observabilité des paramètres dans une approche à ordre augmenté. De ce fait, une perte de capteur(s) (rejet des mesures jugées non fiables par le test d'innovation) peut s'avérer dommageable pour la qualité d'estimation et la robustesse du filtre implémenté. Afin de pallier un tel problème, une méthode générale permettant d'évaluer l'impact d'une perte de capteur(s) sur la qualité d'estimation va être développée dans le chapitre suivant, où une démarche de synthèse de redondance matérielle de ces capteurs sera également envisagée.

2

Éléments pour la synthèse d'un dispositif d'estimation non linéaire en cas de perte de capteurs

Sommaire

2.1 Introduction **49**
2.2 Outils d'évaluation de la qualité d'estimation **50**
2.2.1 Évaluation d'un estimateur d'état dans une configuration donnée 50
2.2.2 Évaluation à l'aide du grammien d'observabilité en cas de perte(s) de capteur(s) 53
2.2.3 Synthèse d'un critère d'évaluation de la dégradation de la qualité d'estimation provoquée par une perte de capteur(s) 55
2.3 Proposition d'une méthode de réglage pour différents filtres non linéaires **56**
2.4 Synthèse d'un dispositif d'estimation d'état pour systèmes non linéaires **61**
2.5 Applications **64**
2.5.1 Application sur le système de Lorenz 64
2.5.2 Application sur un modèle non linéaire d'ordre 2 74
2.6 Conclusion **81**

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, diverses techniques d'estimation d'état ont été présentées, chaque approche se distinguant des autres soit par la démarche adoptée, soit par l'objectif visé (compensation d'une méconnaissance de paramètres, de structure de modèle, etc.). En outre, il a été souligné le rôle fondamental joué par le processus de mesures sur la reconstruction d'état. Par conséquent, en cas de perte de capteur(s), pour cause de défaillance par exemple, le nombre d'observations disponibles se trouve réduit, ce qui affecte la qualité d'estimation, voire même la possibilité d'estimer. De surcroît, une difficulté supplémentaire intervient lorsque le processus dont il est souhaité estimer l'état présente un comportement non linéaire : en effet, d'une part, il

n'existe en général pas de solution analytique exacte au problème du filtrage non linéaire ; d'autre part, l'analyse de l'observabilité d'un système non linéaire est un problème très complexe. Le but de ce chapitre est, dans un premier temps, de proposer dans un cadre non linéaire une méthode expérimentale d'évaluation de la dégradation de la qualité d'estimation provoquée par une perte de capteur(s). Ensuite, cet outil est exploité afin de synthétiser un *dispositif d'estimation d'état*, c'est-à-dire un ensemble formé de : (i) un reconstructeur d'état en adéquation avec le problème considéré ; (ii) un réseau de capteurs avec redondance matérielle. L'intérêt de ce travail est qu'il apporte une solution générique à un problème vis-à-vis duquel les outils théoriques existants (degrés de redondance [Hobl 00], temps moyen avant non-recouverabilité [Star 99], [Hobl 01], etc.) sont généralement inappropriés. En effet, si ces derniers s'étendent souvent de manière acceptable aux systèmes faiblement non linéaires, ils s'avèrent généralement inadaptés aux processus exhibant de sévères non linéarités. Dans ce chapitre, la première section effectue un rapide tour d'horizon de diverses méthodes d'évaluation de la qualité d'estimation, puis propose un nouveau critère issu d'une synthèse de ces outils. Ensuite, la deuxième section s'intéresse au réglage des reconstructeurs d'état utilisés. La partie suivante présente alors l'algorithme de synthèse d'un dispositif d'estimation d'état. La technique ainsi développée est expérimentée sur deux applications particulières dans la dernière section.

2.2 Outils d'évaluation de la qualité d'estimation

2.2.1 Évaluation d'un estimateur d'état dans une configuration donnée

Les outils présentés dans ce paragraphe sont destinés à fournir une quantification de la qualité d'estimation d'un reconstructeur d'état donné, dans une configuration (ensemble de capteurs utilisés par le filtre, etc.) donnée. Ils sont destinés à être employés dans un cadre purement expérimental. A partir de cette considération, deux situations sont envisageables :

- les tests s'effectuent sur le processus réel,
- les tests se font sur un dispositif simulant le processus via un modèle de comportement de ce dernier, qualifié de *modèle du monde vrai*, lequel doit être le plus précis possible afin de refléter au mieux la réalité. L'expérience se résume alors à de la *simulation*.

Ces deux situations présentent des différences notoires, chacune ayant ses avantages et inconvénients : le côté positif des essais sur systèmes réels est de confronter directement les outils développés à la réalité, ce qui a pour conséquence de supprimer le fossé qui existe toujours entre théorie et pratique. En revanche, certaines variables d'état ne sont pas toujours accessibles, parfois tout simplement parce que la technologie permettant de mesurer ces grandeurs n'existe pas : il est ainsi impossible d'évaluer la capacité de l'estimateur à convenablement reconstruire ces variables. Le seul moyen de juger est de comparer les mesures estimées par le filtre avec celles réellement obtenues. En outre, il n'est pas toujours possible d'effectuer des expériences sur des processus réels, soit parce que cela s'avère dangereux (complexes pétro-chimiques, systèmes d'arme), soit parce que cela est tout bonnement impossible, comme c'est la cas dans le monde de la finance (évolution de taux d'intérêts, de la volatilité d'un titre boursier, etc.). Ce n'est bien évidemment pas le cas lors de l'emploi de la simulation, puisqu'il est possible d'exercer en toute sécurité n'importe quelle expérience. De plus, toutes les grandeurs caractéristiques (états, réalisations de perturbations aléatoires) sont en permanence disponibles ce qui permet d'évaluer précisément les performances de l'estimateur d'état. En revanche, l'écueil de cette approche réside en l'élaboration d'un modèle de monde vrai suffisamment réaliste, ce qui n'est en général pas chose aisée. Les modes opératoires pour évaluer la qualité d'estimation d'un filtre sont résumés

sur la figure 2.1.

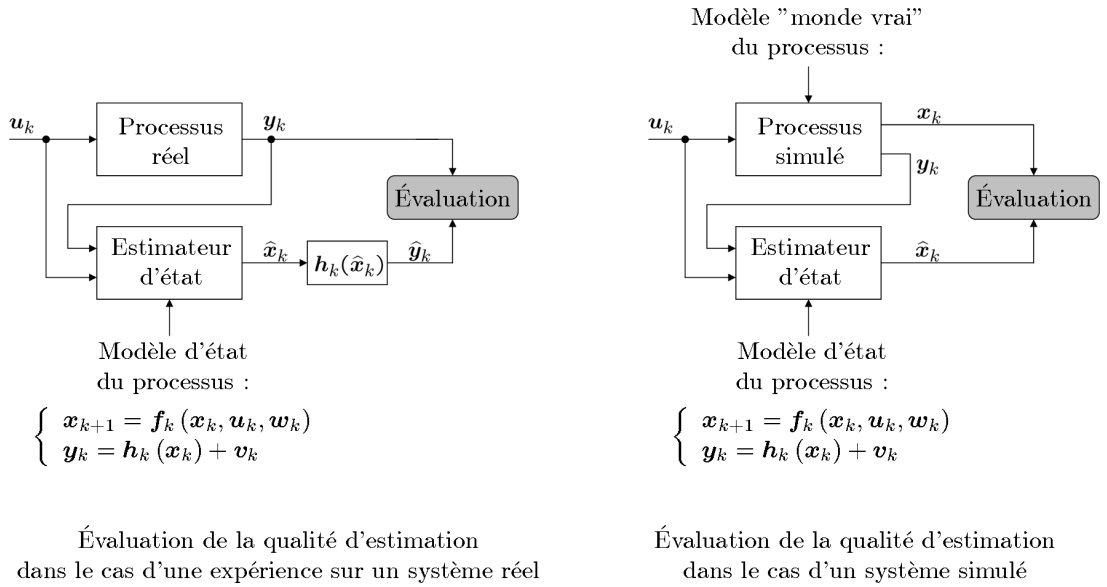


FIG. 2.1 – Evaluation de la qualité d'estimation d'un filtre dans une configuration donnée

Variance expérimentale, erreur RMS :

Concrètement, nous souhaitons disposer d'un indicateur numérique permettant, à partir de grandeurs (états ou mesures) issues du processus réel ou simulé et des états/mesures calculés par l'estimateur d'état, d'évaluer la qualité de ce dernier en estimant la proximité entre les grandeurs reconstruites et les vraies. L'indicateur le plus souvent employé est alors la *variance expérimentale* V_k, parfois qualifiée de *variance empirique* :

$$V_k = \begin{cases} \|\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k\|^2 = (\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k)^T (\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k) & \text{si le système est simulé (état } \boldsymbol{x}_k \text{ connu)} \\ \|\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_k\|^2 = (\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_k)^T (\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_k) & \text{si le système est réel (état } \boldsymbol{x}_k \text{ inconnu)} \end{cases} . \quad (2.1)$$

Ce critère évalue à l'instant k la distance entre les grandeurs vraies et reconstruites. Il est alors possible de considérer la variance moyenne V, à savoir la moyenne des V_k sur la simulation entière (d'un nombre de pas d'échantillonnage L) :

$$V = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} V_k. \quad (2.2)$$

Enfin, il arrive très souvent que l'indicateur employé soit la racine carrée de V, notée Σ : il s'agit de l'*écart-type expérimental*, également qualifié d'*erreur RMS* (Root Mean Square) car il calcule la racine carrée de la moyenne de la norme euclidienne des erreurs élevée au carré :

$$\Sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \|\boldsymbol{z}_k - \widehat{\boldsymbol{z}}_k\|^2}, \quad (2.3)$$

où $\boldsymbol{z}$ représente soit l'état $\boldsymbol{x}$, soit les observations $\boldsymbol{y}$. D'une manière générale, plus V ou Σ sont faibles, meilleure est la qualité d'estimation.

Variantes de l'erreur RMS :

Les indicateurs présentés dans le paragraphe précédent sont employés dans un cadre pouvant être qualifié de nominal. En réalité, de nombreuses extensions sont envisageables. Nous allons en mentionner quelques unes :

– la variance pondérée. Il s'agit de modifier (2.1) en y insérant une matrice de pondération $\mathbf{\Pi}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ comme suit :

$$V_k = (\boldsymbol{z}_k - \widehat{\boldsymbol{z}}_k)^T \mathbf{\Pi}_k (\boldsymbol{z}_k - \widehat{\boldsymbol{z}}_k). \tag{2.4}$$

En pratique, $\mathbf{\Pi}_k$ peut être diagonale, ses éléments diagonaux étant proportionnels à l'importance attribuée à chaque variable d'état. Si par exemple l'utilisateur accorde deux fois plus d'importance à la qualité d'estimation de la première variable d'état qu'à la seconde, que l'estimation de la troisième variable ne l'intéresse pas..., alors :

$$\mathbf{\Pi}_k = \mathrm{diag}(2, 1, 0, \ldots). \tag{2.5}$$

– le RMS de Σ sur plusieurs simulations :

$$\Sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}\left(\Sigma^{(i)}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S} V^{(i)}}, \tag{2.6}$$

où S est le nombre d'expériences réalisées et $\Sigma^{(i)}$ et $V^{(i)}$ $(1 \leq i \leq S)$ les valeurs des écarts-types et variance expérimentaux lors de la $i^{\text{ème}}$ simulation. Deux configurations sont alors à considérer :

- le processus considéré est réel auquel cas les expériences menées doivent explorer un éventail de situations le plus large possible afin d'entériner les résultats ainsi obtenus. Par exemple, pour un système multi-cuves tel que celui de l'AS 193 du GRD-MACS, on considérera les phases de remplissage d'une seule cuve, de plusieurs cuves en simultané, de vidage, de transfert de fluide d'un réservoir à un autre, etc.
- Le processus considéré est simulé. La démarche à adopter s'apparente alors à de la simulation de Monte Carlo, qui consiste à réaliser S expériences sur lesquelles chaque grandeur aléatoire (bruits de dynamique, de mesure, etc.) sera tirée selon une loi prédéfinie. Plus S est grand, plus l'éventail de réalisations possible sera conséquent. A noter qu'il est possible de forcer la simulation de certains cas de figure en imposant de manière déterministe les réalisations de variables aléatoires.

Les durées de chacune des S expériences étant *a priori* différentes, une forme générale de (2.6) est :

$$\Sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{1}{L_i}\sum_{k=1}^{L_i}\left\|\boldsymbol{z}_k^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}\right\|^2\right)}, \tag{2.7}$$

où $\boldsymbol{z}_k^{(i)}$ et $\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}$ représentent la grandeur $\boldsymbol{z}$ (état ou mesure) et son estimée à l'instant k lors de la $i^{\text{ème}}$ expérience, de durée L_i.

Enfin, nous préciserons que, dans le cas particulier où les S simulations réalisées sont de même durée $L_1 = \ldots = L_S = L$ (ce qui est par exemple le cas lors d'une simulation de Monte

Carlo), on peut définir une erreur RMS (ou une variance expérimentale) temporelle en calculant à chaque instant k la grandeur suivante :

$$\Sigma_k = \sqrt{V_k} = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}\left\|\boldsymbol{z}_k^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}\right\|^2}. \tag{2.8}$$

Il est alors facile de montrer que la relation (2.7) devient :

$$\Sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\Sigma_k^2} = \sqrt{\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}V_k}. \tag{2.9}$$

Il va de soit que cette dernière équation peut être généralisée en n'opérant la moyenne quadratique des Σ_k que sur un ou des intervalle(s) de temps inclus dans $[1\ ;\ L]$.

2.2.2 Évaluation à l'aide du grammien d'observabilité en cas de perte(s) de capteur(s)

Le grammien d'observabilité a été présenté dans le premier chapitre comme étant un outil permettant de juger de l'observabilité des variables d'état d'un système donné. Son avantage par rapport au critère de Kalman est, premièrement, d'être adapté aux modèles linéaires à temps variant et, deuxièmement, de quantifier l'observabilité d'un modèle donné. En effet, l'observabilité se résume à la régularité du grammien, cette condition étant mesurable à partir d'une analyse par valeurs singulières [Moor 81]. Par conséquent, cet outil a trouvé d'autres champs d'application tels que le placement de capteurs (ou d'actionneurs via le grammien de commandabilité) [Van 01], [Hobl 01], [Marx 03] ou l'analyse de la recouverabilité/reconfigurabilité d'un système donné [Frei 99], [Wu 00], [Star 02].

Considérons un système linéaire stationnaire à temps discret dont le grammien d'observabilité $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ est solution de l'équation de Lyapunov (1.25). $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ peut s'interpréter en termes d'énergie transmise d'un état d'énergie unitaire (c'est-à-dire de norme euclidienne égale à 1) vers ses mesures. En particulier, la plus petite des valeurs propres du grammien d'observabilité, notée ρ et calculée comme suit :

$$\rho = \lambda_{\min}\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}\right), \tag{2.10}$$

représente l'énergie minimale transmise de l'état vers les observations. Comme par définition, $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ est semi-définie positive, alors toutes les valeurs propres de $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ et par conséquent ρ sont positives ou nulles : physiquement, ce résultat s'interprète comme un transfert d'énergie des états vers les mesures, ce qui est tout à fait logique. Afin d'avoir une estimation de bonne qualité, il est souhaité que cette transmission d'énergie soit la plus importante possible, ne serait-ce que pour accroître la proportion de signal utile par rapport au bruit de mesure. Ainsi, en adoptant un point de vue de type "minimisation du pire cas", une analyse quantitative de l'observabilité se résume au calcul de ρ : plus cette valeur est élevée, meilleure est la qualité d'estimation. A noter que, comme le souligne Georges dans [Geor 95], la maximisation de ρ est équivalente à la minimisation de r où :

$$r = \lambda_{\max}\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1}\right). \tag{2.11}$$

Ce critère est le dual de celui d'une analyse quantitative de la commandabilité d'un système [Geor 95], [Star 02]. Cette formulation n'est toutefois utilisable que si $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ est de rang plein, c'est-à-dire que l'intégralité des variables d'état est observable. Par la suite, dans le but de disposer

d'un critère ayant une orientation d'échelle identique à celle de la variance expérimentale (faible valeur = bonne qualité), celui-ci se basera sur le calcul de r que l'on défini comme étant l'inverse du ρ introduit dans (2.10) :

$$r = \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\mathcal{W}})}. \tag{2.12}$$

Cette formulation évite les problèmes d'inversion du grammien, notamment dans le cas d'une mauvaise observabilité. Toutefois, il faut être précautionneux dans le calcul de r lorsque $\lambda_{\min}(\boldsymbol{\mathcal{W}})$ avoisine 0. Par extension directe, il est possible d'évaluer la grandeur r pour un sous-ensemble de capteurs donné, en calculant $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ à partir d'une matrice $\boldsymbol{H}$ ne prenant en compte que les lignes correspondant aux mesures associées au sous-ensemble considéré. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de capteurs virtuellement éliminés du dispositif d'instrumentation de mesure nominalement placé sur le système. Un moyen simple de quantifier la dégradation de la qualité d'estimation provoquée par la non prise en compte des informations issues de $\mathcal{P}$ est de calculer le ratio $r(\mathcal{P})/r(\phi)$, où :

- $r(\mathcal{P})$ est la valeur de r obtenue via l'utilisation de l'ensemble des capteurs disponibles exceptés ceux inclus dans $\mathcal{P}$,
- $r(\phi)$ est la valeur de r obtenue via l'utilisation de l'intégralité des capteurs disponibles (ϕ décrit l'ensemble vide, ce qui signifie que l'ensemble des capteurs virtuellement éliminés est vide).

Plus ce ratio est important, plus la dégradation de la qualité d'estimation associée à la perte de $\mathcal{P}$ est sévère.

L'emploi du grammien d'observabilité s'avère donc être une approche judicieuse pour évaluer la dégradation de la qualité d'estimation provoquée par une perte de capteur(s). Toutefois, le lecteur aura conservé à l'esprit que cet outil n'est théoriquement utilisable que dans un cadre linéaire à temps invariant. Du fait qu'*a priori*, les systèmes considérés sont de type non linéaire, nous proposons de remplacer r par la moyenne de cette grandeur évaluée sur un nombre S de simulations, chacune de ces expériences étant d'une durée L_i :

$$r = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{1}{L_i}\sum_{k=1}^{L_i} r_k^{(i)}\right), \tag{2.13}$$

où $r_k^{(i)}$ est l'inverse de la plus petite des valeurs propres du grammien d'observabilité $\boldsymbol{\mathcal{W}}_k^{(i)}$, calculé à l'instant k ($1 \leq k \leq L_i$) lors de la $i^{\text{ème}}$ simulation ($1 \leq i \leq S$). $r_k^{(i)}$ est obtenue en résolvant l'équation de Lyapunov suivante :

$$\left(\boldsymbol{F}_k^{(i)}\right)^T \boldsymbol{\mathcal{W}}_k^{(i)} \boldsymbol{F}_k^{(i)} + \left(\boldsymbol{H}_k^{(i)}\right)^T \boldsymbol{H}_k^{(i)} = \boldsymbol{\mathcal{W}}_k^{(i)}, \tag{2.14}$$

où $\boldsymbol{F}_k^{(i)}$ et $\boldsymbol{H}_k^{(i)}$ sont les jacobiens des fonctions d'état $\boldsymbol{f}_k$ et de mesure $\boldsymbol{h}_k$ calculés autour de l'état $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}$ estimé par le filtre utilisé aux instant et numéro de simulation correspondants :

$$\boldsymbol{F}_k^{(i)} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{X}_k}\right|_{\boldsymbol{X}_k=\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}}, \quad \boldsymbol{H}_k^{(i)} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{\partial \boldsymbol{X}_k}\right|_{\boldsymbol{X}_k=\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}}. \tag{2.15}$$

Pour résumer, le calcul de r proposé dans (2.13) constitue une synthèse sur l'ensemble des instants de chaque simulation de l'observabilité du modèle linéarisé autour de l'état estimé correspondant. Ce critère peut sembler être une extension quelque peu curieuse de la notion de grammien mais, en rappelant que la plupart des estimateurs non linéaires se basent sur une

linéarisation (ou une démarche équivalente type transformation sans saveur) autour de ce même état, cela justifie l'intérêt d'une analyse de l'observabilité du modèle linéarisé en ce point. Une des conséquences de la formulation adoptée pour ce critère est qu'il dépend d'un état estimé (pour le calcul des jacobiens), autrement dit du filtre utilisé. Ceci constitue une des limites de l'approche proposée, en ce sens où le concept d'analyse via le grammien d'observabilité de la qualité d'estimation à partir d'un ensemble de capteurs donné ne repose théoriquement que sur les propriétés de l'ensemble {système + dispositif d'instrumentation} et non sur celles de l'estimateur d'état adopté. Toutefois, cet indicateur, initialement proposé dans [Sirc 07b], donne en pratique des résultats satisfaisants [Sirc 07b], [Sirc 08c], [Sirc 07a].

Par ailleurs, mentionnons que pour la génération de l'indicateur r, d'autres utilisations du grammien d'observabilité sont possibles : tout d'abord, Georges propose dans [Geor 95] une utilisation du grammien transitoire et une extension du critère (2.10) dans le cas de systèmes non linéaires, basée sur la notion de *programmation entière* [Fish 81]. Malheureusement, la méthode développée est de mise en œuvre relativement complexe. Müller et Weber ont quant-à-eux proposé dans [Mull 72] d'exploiter différemment le grammien d'observabilité, en ne calculant pas sa plus petite valeur propre mais son déterminant, dans le but de "mesurer" le degré d'observabilité (un déterminant nul signifie que le grammien est singulier, ce qui traduit l'inobservabilité de certaines variables d'état). Il s'agit d'un autre critère lui aussi tout-à-fait valable.

2.2.3 Synthèse d'un critère d'évaluation de la dégradation de la qualité d'estimation provoquée par une perte de capteur(s)

Le critère proposé, originellement introduit dans [Sirc 07a], est issu d'une synthèse des deux critères précédents. Il se base sur le calcul suivant :

$$\mu(\mathcal{P}) = p(\mathcal{P})\frac{V(\mathcal{P})}{V(\phi)} + (1 - p(\mathcal{P}))\frac{r(\mathcal{P})}{r(\phi)}, \tag{2.16}$$

où :
- $r(\phi)$ et $r(\mathcal{P})$ sont les grandeurs évoquées dans le paragraphe précédent,
- $V(\phi)$ et $V(\mathcal{P})$ sont les variances expérimentales (cf. équation (2.7) pour le calcul) issues d'expériences réalisées en utilisant respectivement l'intégralité du dispositif d'instrumentation et l'intégralité des capteurs exceptés ceux figurant dans $\mathcal{P}$,
- $0 \leq p(\mathcal{P}) \leq 1$ est un paramètre à régler, potentiellement fonction des capteurs perdus $\mathcal{P}$. Ce poids permet de donner plus ou moins d'importance aux évaluations de la qualité d'estimation à partir de la variance expérimentale et du grammien d'observabilité.

Le critère proposé est le suivant : *plus $\mu(\mathcal{P})$ est grand, plus la dégradation de la qualité d'estimation provoquée par la perte de $\mathcal{P}$ est sévère.*

Cette proposition s'avère logique puisque l'on a vu dans les paragraphes précédents qu'une perte de capteur dommageable entraînait une élévation de la variance expérimentale et de l'inverse de la plus petite des valeurs propres du grammien d'observabilité.

Afin d'exploiter le critère proposé, il est nécessaire de régler les poids $p(\mathcal{P})$. L'utilisateur peut fixer ces derniers à 1 pour s'affranchir du côté empirique lié à l'extension du grammien par rapport à sa définition originale. Toutefois, il semble raisonnable de ne pas évaluer $\mu(\mathcal{P})$ à partir des variances $V(\mathcal{P})$ et $V(\phi)$ seules, notamment lorsque les états vrais ne sont pas accessibles (expérience sur processus réel) puisque $V(\bullet)$ ne peut alors se calculer qu'à partir des observations

réelles et estimées (la variance expérimentale ne permet pas alors de juger dans l'absolu la qualité d'estimation). Nous proposons par conséquent un autre réglage, basé sur les écarts-types relatifs aux expériences réalisées. En effet, en rappelant que les variances expérimentales $V(\mathcal{P})$ et racines carrées d'inverse de valeur propre minimale $r(\mathcal{P})$ sont issus du calcul des moyennes suivantes (cf. définitions (2.6) et (2.13)) :

$$\begin{aligned} V(\mathcal{P}) &= \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S} V^{(i)}(\mathcal{P}), \quad \text{où :} \quad V^{(i)}(\mathcal{P}) = \frac{1}{L_i}\sum_{k=1}^{L_i} V_k^{(i)}(\mathcal{P}), \\ r(\mathcal{P}) &= \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S} r^{(i)}(\mathcal{P}), \quad \text{où :} \quad r^{(i)}(\mathcal{P}) = \frac{1}{L_i}\sum_{k=1}^{L_i} r_k^{(i)}(\mathcal{P}), \end{aligned} \tag{2.17}$$

le réglage proposé pour le paramètre $p(\mathcal{P})$ est le suivant :

$$p(\mathcal{P}) = \frac{\sigma_r(\mathcal{P})/\sigma_r(\phi)}{\sigma_r(\mathcal{P})/\sigma_r(\phi) + \sigma_V(\mathcal{P})/\sigma_V(\phi)}, \tag{2.18}$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma_V(\mathcal{P}) &= \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}\left(V^{(i)}(\mathcal{P}) - V(\mathcal{P})\right)^2}, \qquad \sigma_V(\phi) = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}\left(V^{(i)}(\phi) - V(\phi)\right)^2}, \\ \sigma_r(\mathcal{P}) &= \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}\left(r^{(i)}(\mathcal{P}) - r(\mathcal{P})\right)^2}, \qquad \sigma_r(\phi) = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}\left(r^{(i)}(\phi) - r(\phi)\right)^2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.3 Proposition d'une méthode de réglage pour différents filtres non linéaires

De nombreux filtres dédiés aux systèmes non linéaires ont été présentés dans le premier chapitre ainsi que l'annexe B. Toutefois, le problème du réglage de ces estimateurs n'a pas encore été abordé, bien que cet aspect soit capital. Par réglage, on entend ajustement de paramètre(s) propre(s) aux filtres considérés (largeur de fenêtre h du CDKF, nombre de particules N du PF par exemple) et choix d'algorithmes spécifiques (schéma de rééchantillonnage du PF, etc.). Par conséquent, le réglage n'inclut pas en l'occurrence la détermination :

- de l'état initial $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et de sa covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$,
- des covariances $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$ des bruits d'état et de mesure,

car ces grandeurs sont à prendre en compte quel que soit le filtre utilisé. De surcroît, elles sont généralement ajustables à partir d'une caractérisation avancée du processus considéré et des bruits des capteurs.

Parmi les filtres non linéaires présentés dans le chapitre précédent, certains ne font donc pas l'objet de ce paragraphe puisqu'ils ne présentent pas de grandeur spécifique à régler : c'est le cas de l'EKF et du 2OEKF. Pour les autres estimateurs évoqués, que nous rappelons ci-dessous par commodité pour le lecteur :

- l'IEKF (filtre de Kalman étendu itéré, algorithme 4),
- le CDKF (filtre de Kalman à différence centrale, algorithme 21),
- l'UKF (filtre de Kalman sans saveur, algorithme 24),
- l'EnKF (filtre de Kalman d'ensemble, algorithme 25),

– le PF (filtre particulaire, algorithme 8),

la situation est différente et il va falloir envisager un réglage. Pour ce faire, on considère que les covariances $\mathbf{\Sigma}_k^{vv}$ et $\mathbf{\Sigma}_k^{ww}$ des bruits d'état et de mesure sont connues, de même que les grandeurs relatives à l'initialisation du filtre ($\widehat{\boldsymbol{x}}_0$, $\mathbf{\Sigma}_0^{xx}$). L'intérêt de ce travail réside dans le fait que dans la littérature, ces réglages spécifiques sont en général soit réalisés de manière empirique [LaVi 03], [Bros 04], [Dahi 05], soit basés sur des valeurs *a priori* optimales [Wan 01b], [Van 04a]. L'essentiel des travaux de réglage existants portent sur différentes méthodes de détermination des covariances (algorithme du simplex [Powe 02], logique floue [Loeb 04], moindres carrés [Akes 07], recuit simulé [Buya 07], algorithmes génétiques [Aven 07], etc.). Les méthodes présentées ci-dessous sont essentiellement les mêmes que celles présentées dans [Sirc 06], [Sirc 07c].

Réglage du paramètre de l'IEKF :

Ce filtre ne présente qu'un seul paramètre spécifique à régler qui est le nombre N d'étapes de correction supplémentaires (si $N = 0$, alors l'IEKF se résume à un simple EKF). Intuitivement, on peut s'attendre à ce que plus N est grand, meilleures sont les performances du filtre, mais il faut conserver à l'esprit que ce sentiment ne constitue en aucun cas une généralité puisqu'aucune preuve de convergence de cet algorithme n'est disponible : il se peut tout-à-fait que l'on obtienne de moins bons résultats avec $N > 0$ qu'avec $N = 0$. On se propose de trouver expérimentalement la valeur de N "optimale" en se servant du concept de variance expérimentale d'un estimateur, présenté dans la section 2.2.1. Concrètement, il s'agit d'effectuer S simulations de l'ensemble {système + filtre} avec N fixé à une valeur donnée, ces S expériences couvrant dans l'idéal l'ensemble des comportements possibles du processus considéré. Il en résulte une variance $V(N)$. Ensuite, il faut recommencer ces S expériences avec d'autres valeurs de N. Au final, la valeur de N retenue est celle correspondant à la variance expérimentale $V(N)$ la plus faible. En pratique, deux cas de figure peuvent être rencontrés :

– l'algorithme de corrections successives de l'IEKF ne converge pas, auquel cas $N = 0$ représente le meilleur choix possible,
– l'algorithme de corrections successives de l'IEKF converge. Deux configurations sont à considérer :
  - l'algorithme converge rapidement : il existe alors un entier N_1 tel que $V(N_2) \approx V(N_1)$ pour $N_2 > N_1$; la valeur de N à retenir est alors $N = N_1$,
  - l'algorithme converge lentement, auquel cas $V(N_2) > V(N_1)$ pour $N_2 > N_1$: la valeur de N à retenir est théoriquement la plus grande testée. Toutefois, une valeur élevée de N accroît considérablement la complexité du filtre ainsi mis en œuvre sans forcément apporter une amélioration substantielle de la qualité d'estimation. Une solution possible est alors d'adopter parmi les valeurs de N testées celle minimisant le ratio variance/complexité (la complexité étant proportionnelle au nombre N d'étapes de correction supplémentaire).

Enfin, nous soulignerons l'un des avantages d'une telle approche, qui est de valider (ou non) en pratique la convergence de l'IEKF.

Réglage du paramètre de l'EnKF :

L'EnKF utilise une simulation de Monte Carlo pour prédire les différentes moyennes et covariances et par conséquent, il propage un certain nombre de particules dans les espaces d'état et de mesure. Il ne présente qu'un seul paramètre qui est ce nombre N de particules. En théorie, l'approximation faite en utilisant de la simulation de Monte Carlo est vérifiée par la loi forte des

grands nombres, et le théorème de la limite centrale montre que l'erreur commise est proportionnelle à $1/\sqrt{N}$ (cf. ann. C) et tend donc vers 0 pour N allant à infini. Ainsi, plus N est grand, meilleure est la qualité d'estimation : en d'autres termes, la variance expérimentale V (que l'on calcule selon une démarche identique à celle employée pour l'IEKF, pour différentes valeurs de N) doit être une fonction décroissante de N dont la courbe représentative doit ressembler à celle de la fonction qui à N associe $1/\sqrt{N}$. Cette tendance se vérifie généralement assez bien en pratique. Comme il est bien entendu impossible d'adopter la valeur optimale de N (celle qui minimise $V(N)$) qui est infiniment grande, il faut se limiter à un certain niveau. Deux choix notables s'offrent alors à nous. Il s'agit de :

- choisir N afin d'obtenir le meilleur compromis qualité d'estimation/complexité (la complexité étant proportionnelle à N [Even 03]), ce qui se résume à adopter la valeur N_o de N minimisant la distance $d(N)$ définie comme suit :

$$d(N) = \sqrt{V^2(N) + \mu N^2}, \tag{2.20}$$

  où $0 \leq \mu \leq 1$ est un paramètre de pondération, que l'on prendra égal à 1 par la suite. Ce critère est relativement intuitif puisque le $d(N_o)$ ainsi obtenu correspond à la distance minimale entre l'origine du système de coordonnées $V-N$ et la courbe représentative $V(N)$. Cette distance traduit le compromis optimal entre qualité d'estimation (V) et complexité (N).
- choisir N en fonction d'une qualité d'estimation minimale imposée, caractérisée par une variance $V_{\max}$.

Les modes opératoires relatifs à ces deux choix (parmi d'autres envisageables) sont illustrés sur la figure 2.2. Sur ce schéma sont également représentées certaines zones hachurées dont les limites décrivent des valeurs maximales/minimales à ne pas franchir :

- la zone de droite correspond aux valeurs de N trop élevées et conduisant à un filtre trop complexe pour les moyens de calcul standard,
- la zone supérieure matérialise les niveaux de variance pour lesquels la qualité d'estimation est jugée médiocre. Ce gabarit renseigne indirectement sur le nombre de particules minimum à adopter pour avoir une qualité d'estimation acceptable.
- la zone de gauche correspond à la valeur de N en dessous de laquelle il se peut que le filtre conduise à des matrices de covariance négatives. En effet, le lecteur aura remarqué que la mise à jour de la covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ s'effectue selon la formule suivante (cf. algorithme 25) :

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} = \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} \boldsymbol{K}_k^T, \tag{2.21}$$

  ce qui représente une différence entre deux matrices symétriques définies positives et ne garantie en rien la positivité de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$. Typiquement, cette situation dommageable n'arrive que lorsque les covariances sont mal évaluées, c'est-à-dire lorsque N est trop faible. La borne inférieure de N en question n'est évaluable qu'à partir d'expériences.

Ces trois contraintes d'ordre divers donnent des bornes minimale et maximale pour le nombre de particules, à ne pas dépasser.

Réglage du paramètre du CDKF :

Le CDKF présente un paramètre spécifique qui est la largeur h de fenêtre servant à réaliser l'interpolation de Stirling. Cette grandeur est réelle et doit être supérieure à 1. Dans le cas où

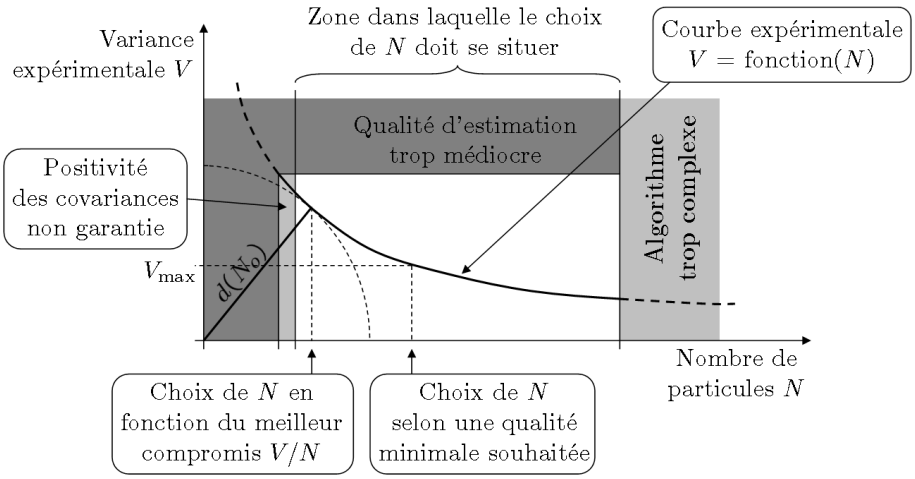


FIG. 2.2 – Mode opératoire du choix du nombre de particules d'un EnKF

la densité de probabilité $p\left(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$ est gaussienne quel que soit k, alors la valeur optimale est $h = \sqrt{3}$ (cf. ann. B). Malheureusement, cette hypothèse de gaussianité est parfois abusive et il est nécessaire de vérifier en pratique si ce choix correspond effectivement au réglage optimal. Un moyen simple de procéder est d'utiliser là encore le critère de la variance expérimentale, pour différentes valeurs de h.

Réglage des paramètres de l'UKF :

En ce qui concerne l'UKF, la situation est similaire à celle du CDKF, du fait que le réglage théorique optimal de ses trois paramètres n'est connu que dans un cadre gaussien. Pour mémoire, rappelons quels sont ces paramètres et leur valeur "pseudo-optimale" :

- le facteur d'échelle secondaire κ, lequel fut introduit dans la version originale de l'UKF [Juli 97] dans le but d'agir sur la répartition des σ points dans l'espace d'état. Dans le cas gaussien, le réglage optimal est $\kappa = 3 - n_x$ (n_x étant le nombre de variables d'état).
- Le facteur d'échelle principal $\alpha \in]0\ ;\ 1]$, instauré dans la version de l'UKF mise à l'échelle [Juli 00], qui est la plus connue et celle présentée sur l'algorithme 24. Les paramètres α et κ jouent un rôle analogue et sont par conséquent redondants.
- Le facteur de pondération β, lui aussi introduit par la transformation sans saveur mise à l'échelle. Dans le cas gaussien, la valeur optimale de ce paramètre est $\beta = 2$.

Ces trois paramètres ne pouvant être réglés simultanément, nous proposons d'adopter une démarche hiérarchisée : il s'agit d'ajuster en premier la répartition des σ points dans l'espace d'état, en figeant β à sa valeur optimale supposée ($\beta = 2$) et en jouant sur les facteurs d'échelle α et κ. Une fois ces deux grandeurs réglées, β est alors ajusté. Le choix de cette approche se justifie en considérant qu'un bon réglage des facteurs d'échelle est primordial, afin d'éviter des phénomènes de non-localité ou sur-localité (σ points trop éloignés ou trop proche les uns des autres). Comme α et κ ont un rôle redondant, nous choisissons de poser $\kappa = 0$ et d'agir uniquement sur α. Le réglage optimal de ce paramètre s'effectue là encore à l'aide de la variance expérimentale. Une fois α déterminé, il ne reste plus qu'à ajuster β en prospectant quelques valeurs avoisinant 2. A noter qu'en pratique, α présente une borne inférieure à ne pas dépasser :

en effet, si α est trop faible, alors les σ points se retrouvent trop proches les uns des autres (effet de "sur-localité"), ce qui résulte en une mauvaise évaluation des différentes covariances. Comme $\mathbf{\Sigma}_k^{xx}$ est elle aussi mise à jour via la formule (2.21), il se peut alors que cette matrice deviennent non-définie positive [Orde 05]. Ce phénomène est analogue à celui constaté sur l'EnKF avec un nombre de particules trop faible. La borne inférieure en question n'est là encore qu'expérimentalement évaluable.

Réglage d'un filtre particulaire :

Il s'agit de l'estimateur d'état le plus compliqué à synthétiser du fait de ses nombreuses variantes existantes. Les différents leviers sur lesquels agir sont :
- le choix de la densité d'importance,
- le nombre de particules N,
- le type de rééchantillonnage des particules,
- l'indicateur de rééchantillonnage et son seuil,
- le critère d'estimation d'état.

Pour le premier point, le problème se règle aisément si l'on souhaite une solution peu gourmande en temps de calcul : la seule possibilité est d'utiliser le noyau de transition, ce qui signifie que le filtre utilisé est un filtre bayésien, dont on rappelle que son mode opératoire est décrit par l'algorithme 5.

En ce qui concerne le critère d'estimation d'état, on se propose d'opérer le choix entre les deux solutions possibles (moindres carrés et maximum *a posteriori*) en évaluant à l'aide de la variance expérimentale la qualité d'estimation obtenue via ces deux schémas, le filtre étant par défaut dans la configuration suivante[27] :
- $N = 500$ particules,
- schéma de rééchantillonnage classique,
- indicateur de rééchantillonnage basé sur le nombre efficace de particules avec un seuil de $N/10 = 50$ particules efficaces.

Cette approche constitue une méthodologie de choix de critère d'estimation mais il est évident que l'utilisateur peut arbitrairement opter pour l'un de ces deux critères (ou éventuellement un autre). Afin d'argumenter en faveur d'un éventuel choix dans un sens ou l'autre, nous rappellerons que :
- le critère du maximum *a posteriori* est non biaisé lorsque $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k})$ est multimodale, ce qui n'est *a priori* pas le cas avec celui des moindres carrés,
- le critère des moindres carrés exploite l'ensemble du nuage de particules contrairement au maximum *a posteriori* qui n'utilise à chaque instant qu'une seule particule.

Concernant le type de rééchantillonnage des particules, les résultats en terme de qualité d'estimation, obtenus sur une configuration donnée, montrent généralement des performances équivalentes pour chaque schéma [Douc 05]. Par conséquent, il est assez intuitif d'opter pour la solution de mise en œuvre la plus aisée, qui est le rééchantillonnage à variance minimale. Mais là

[27] Ce réglage par défaut n'est pas optimal mais autorise un fonctionnement satisfaisant. De plus, le seuil de rééchantillonnage n'a pas été choisi trop élevé (une particule efficace sur 10) afin d'évaluer l'impact sur l'estimation via le critère des moindres carrés d'une répartition relativement disparate des particules dans l'espace d'état.

encore, il s'agit d'un choix arbitraire et l'utilisateur est tout à fait libre d'implémenter un autre schéma.

Le réglage suivant concerne l'indicateur de rééchantillonnage des particules. Deux choix sont possibles : le calcul du nombre effectif des particules et l'entropie du nuage de particules. En outre, il faut ajuster le seuil de ces indicateurs. La démarche que nous proposons est d'utiliser un filtre avec un nombre de particules fixé par défaut à $N = 500$ et de tester chacune de ces deux configurations avec différents seuils. Pour chaque expérience, deux grandeurs se révèlent intéressantes à relever :

- la variance expérimentale obtenue,
- la fréquence moyenne de rééchantillonnage (moyenne sur le nombre de simulations du nombre de redistributions opérées divisé par la longueur de la simulation).

Les relevés de ces deux grandeurs doivent normalement permettre d'effectuer un choix. Il s'agit de trouver un réglage réalisant un bon compromis entre qualité d'estimation (il faut une variance pas trop élevée) et fréquence de rééchantillonnage (il ne faut pas redistribuer les particules trop fréquemment). En cas de décision difficile, une aide possible consiste à tracer pour chacun des deux critères la courbe variance expérimentale / fréquence de rééchantillonnage, comme illustré sur la figure 2.3.

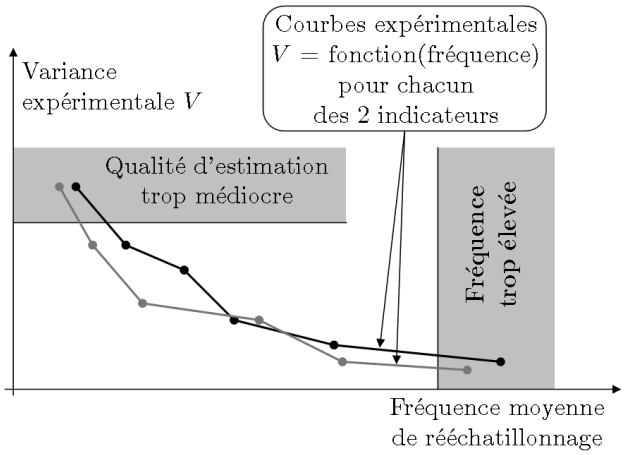


Fig. 2.3 – Exemple de tracés des variances expérimentales en fonction de la fréquence de rééchantillonnage pour chacun des deux indicateurs

L'ultime grandeur à ajuster est le nombre N de particules, fixé jusque-là par défaut à $N = 500$. Une manière simple d'obtenir la valeur optimale de N est de procéder comme pour l'EnKF. Le mode opératoire proposé pour synthétiser et régler un filtre particulaire est résumé par l'algorithme 13.

2.4 Synthèse d'un dispositif d'estimation d'état pour systèmes non linéaires

Considérons un processus dont un modèle sous forme de représentation d'état non linéaire à temps discret est disponible. Ce système est instrumenté par des actionneurs et des capteurs selon un schéma déjà établi (autrement dit, nous n'avons pas à nous préoccuper du placement des capteurs et actionneurs). L'objectif visé est de mettre en œuvre un *dispositif d'estimation d'état*, c'est-à-dire un ensemble constitué :

1. Choisir par défaut comme densité d'importance le noyau de transition et comme procédure de rééchantillonnage celui à variance minimale.
2. Régler par défaut le filtre comme suit :
   - $N = 500$ particules,
   - indicateur du nombre effectif de particules pour le rééchantillonnage, avec un seuil de $N/10 = 50$ particules effectives.
3. Choisir comme critère d'optimalité pour l'estimation d'état (moindres carrés ou maximum *a posteriori*) celui donnant la variance expérimentale la plus faible.
4. Choisir l'indicateur de redistribution des particules et son seuil en s'appuyant sur les variances expérimentales et fréquences moyennes de rééchantillonnage (pas de méthode systématique de réglage).
5. Régler le nombre N de particules à l'aide de la variance expérimentale et de la démarche illustrée sur la figure 2.2.

Algorithme 13: Méthode de réglage d'un filtre particulaire

– d'un estimateur d'état adapté au processus non linéaire considéré et convenablement réglé,
– d'un *réseau de capteurs* comprenant :
  - l'ensemble du dispositif de mesure initialement disponible,
  - un certain nombre de capteurs redondants (à déterminer),
  - un mécanisme de sélection des capteurs utilisés par le filtre, dont le fonctionnement est régi par une liste de capteurs défaillants fournis par un algorithme de détection et d'isolation des défauts (FDI).

Un dispositif d'estimation d'état est donc un système se comportant dans l'idéal comme un filtre tolérant aux défauts de capteurs pour processus non linéaire. Son insertion dans une boucle de commande est illustré sur la figure 2.4.

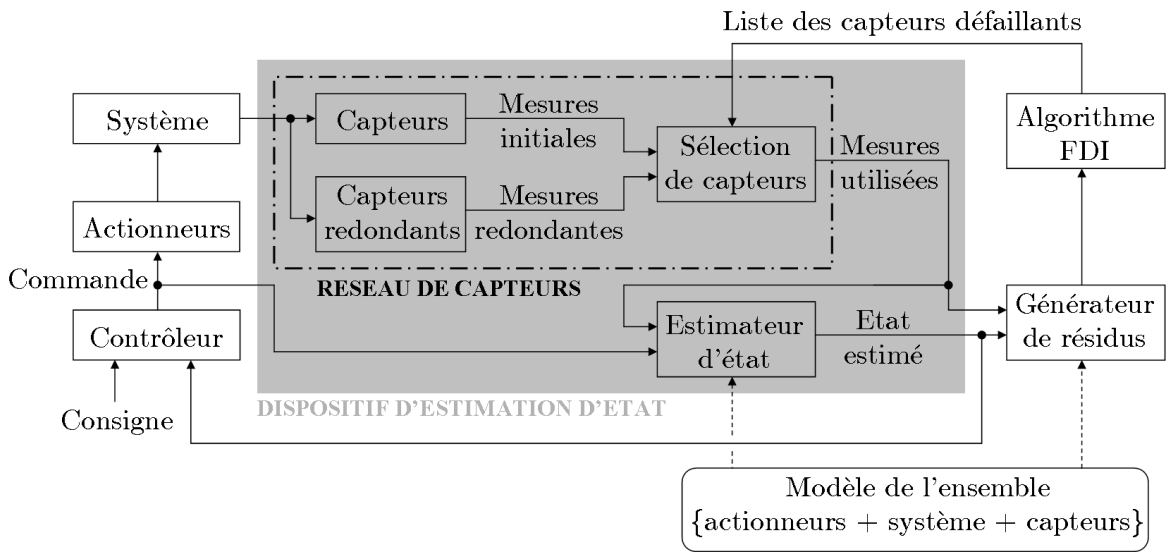


Fig. 2.4 – Insertion d'un dispositif d'estimation d'état dans une boucle de commande

Dans ce travail, nous ne nous intéressons ni à la détection ni à la localisation de défaut(s) : nous supposons en effet qu'un ensemble constitué d'un générateur de résidus et d'un algorithme FDI accomplit ce travail en fournissant une liste des capteurs défaillants. Ainsi, la synthèse d'un dispositif d'estimation d'état consiste à réaliser les deux tâches suivantes :

- choisir et régler le filtre non linéaire le plus adapté au processus considéré,
- déterminer quels sont les capteurs à rendre redondant, en s'attachant à rendre redondant les capteurs dont la perte s'avérerait des plus dommageable vis-à-vis du processus d'estimation d'état.

Chacun des capteurs du dispositif initial d'instrumentation $\mathcal{C}_I$ ne peut subir au maximum qu'une seule redondance matérielle. En outre, nous considérons que cette opération de doublement de capteurs est soumise à des contraintes :

- d'ordre physique, ce qui est le cas lorsque certains capteurs ne peuvent être rendus redondants (manque de place, etc.),
- d'ordre économique (coût ne devant être trop élevé).

Ainsi, l'ensemble de capteurs rendus redondants sera un sous-ensemble $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{C}_I$ tel que :

- les capteurs ne pouvant être doublés pour des raisons d'ordre physique n'apparaissent pas dans $\mathcal{S}_i$,
- le coût de la mise en œuvre de la redondance, lequel inclue le prix des capteurs de $\mathcal{S}_i$ et celui lié à leur intégration (main d'œuvre, etc.) rentre dans un budget déterminé.

La conception du dispositif d'estimation d'état sous les contraintes évoquées se décompose en trois phases principales (figure 2.5) :

1. la détermination et le réglage des estimateurs non linéaires envisageables. Étant donné le système considéré et son instrumentation, il s'agit :
   - d'établir une liste des filtres *a priori* en adéquation avec le problème considéré. Un éventail (non exhaustif) de techniques a été résumé dans la section 2.3 : il est constitué du 2OEKF, de l'IEKF (dont l'EKF est un cas particulier), du CDKF, de l'UKF, de l'EnKF et du PF ;
   - de régler ces estimateurs envisagés selon les méthodes proposées dans la section 2.3 ;
2. la réalisation de la campagne de mesures. Il s'agit, pour chaque estimateur envisagé et chaque scenario de perte de capteurs $\mathcal{P}$ (y compris $\mathcal{P} = \phi$), de réaliser S expériences sur l'ensemble {processus + estimateur + capteurs utilisés} et de relever :
   - les grandeurs $r^F(\mathcal{P})$ et $V^F(\mathcal{P})$ correspondantes (définies par l'équation (2.17)),
   - les écarts-types $\sigma_r^F(\mathcal{P})$ et $\sigma_V^F(\mathcal{P})$ associés (définis par l'équation (2.19)),

   où l'exposant F caractérise l'estimateur employé : $F \in$ {2OEKF, IEKF, CDKF, UKF, EnKF, PF}. Si l'on considère par exemple cet éventail de 6 estimateurs et que l'on note N le nombre de scenarii de pertes de capteurs, alors $6 \times N \times S$ expériences sont réalisées lors de la campagne de mesures, lesquels conduisent à $6 \times N$ quadruplets $\left\{r^F(\mathcal{P}), V^F(\mathcal{P}), \sigma_r^F(\mathcal{P}), \sigma_V^F(\mathcal{P})\right\}$;
3. la synthèse du dispositif d'estimation d'état, dont le mode opératoire est décrit par l'algorithme 14 et synthétisé sur l'organigramme de la figure 2.6. Cet algorithme, initialement proposé dans [Sirc 07a] puis généralisé dans [Sirc 07c], n'est valable que pour la perte d'un seul capteur, c'est-à-dire que, si l'on note C_i le capteur associé à la mesure y_i ($1 \leq i \leq n_y$, n_y désignant la dimension du vecteur d'observations), l'ensemble $\mathcal{P}$ des capteurs perdus, introduit dans la section 2.2.2, ne peut être que $\mathcal{P} = C_i$, $1 \leq i \leq n_y$, $\mathcal{P} = \phi$ décrivant la configuration nominale (tous les capteurs disponibles). Ainsi, dans le but d'alléger les

notations, nous posons :

$$\begin{array}{rclrcl} V_i^F & = & V^F(C_i), & V_0^F & = & V^F(\phi), \\ \sigma_{V_i}^F & = & \sigma_V^F(C_i), & \sigma_{V_0}^F & = & \sigma_V^F(\phi), \\ r_i^F & = & r^F(C_i), & r_0^F & = & r^F(\phi), \\ \sigma_{r_i}^F & = & \sigma_r^F(C_i), & \sigma_{r_0}^F & = & \sigma_r^F(\phi), \\ p_i & = & p(C_i), & \mu_i & = & \mu(C_i). \end{array} \tag{2.22}$$

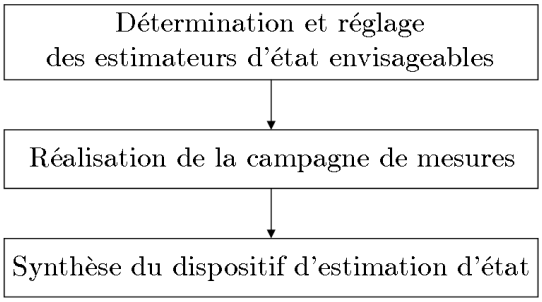


FIG. 2.5 – Les trois phases de la conception d'un dispositif d'estimation d'état

Définition 1 : Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de capteurs candidats à une redondance matérielle et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$. Le sous-ensemble $\mathcal{C}$ est dit maximal si le coût de la mise en œuvre de la redondance associée à $\mathcal{C}$ rentre dans le budget alloué à la redondance et $\forall C_i \in \mathcal{E} - \mathcal{C}$, le coût de la mise en œuvre de la redondance associée à $\{\mathcal{C}, C_i\}$ excède le budget alloué. ■

2.5 Applications

Afin d'illustrer l'algorithme développé, nous allons l'appliquer sur deux exemples non linéaires particulièrement complexes : un système chaotique (le système de Lorenz) et un modèle d'ordre 2 mettant généralement en défaut les outils de la théorie linéaire. Dans ces deux applications, les systèmes sont simulés via une approche de type Monte Carlo, avec un nombre de $S = 200$ simulations, chacune étant effectuée sur $L = 100$ pas de temps. Les réalisations des tirages de Monte Carlo associés à chacune des S simulations demeurent identiques d'une expérience à une autre. En outre, nous opérons comme si seules les mesures étaient disponibles (autrement dit, nous supposons les états inaccessibles), de sorte que la variance V est calculée comme suit, conformément à (2.7) :

$$V = \frac{1}{SL} \sum_{i=1}^{S} \sum_{k=1}^{L} \left\| \boldsymbol{y}_k^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{y}}_k^{(i)} \right\|^2 . \tag{2.23}$$

2.5.1 Application sur le système de Lorenz

Description et discrétisation du système de Lorenz :

Le système de Lorenz fut introduit en 1963 par le météorologue du même nom (Edward de son prénom, à ne pas confondre avec le physicien Hendrik Loren**t**z) [Lore 63], lequel fut le premier à mettre en évidence le caractère chaotique de certains phénomènes climatiques. Ce système résulte d'une simplification du modèle du couplage entre l'atmosphère et un océan,

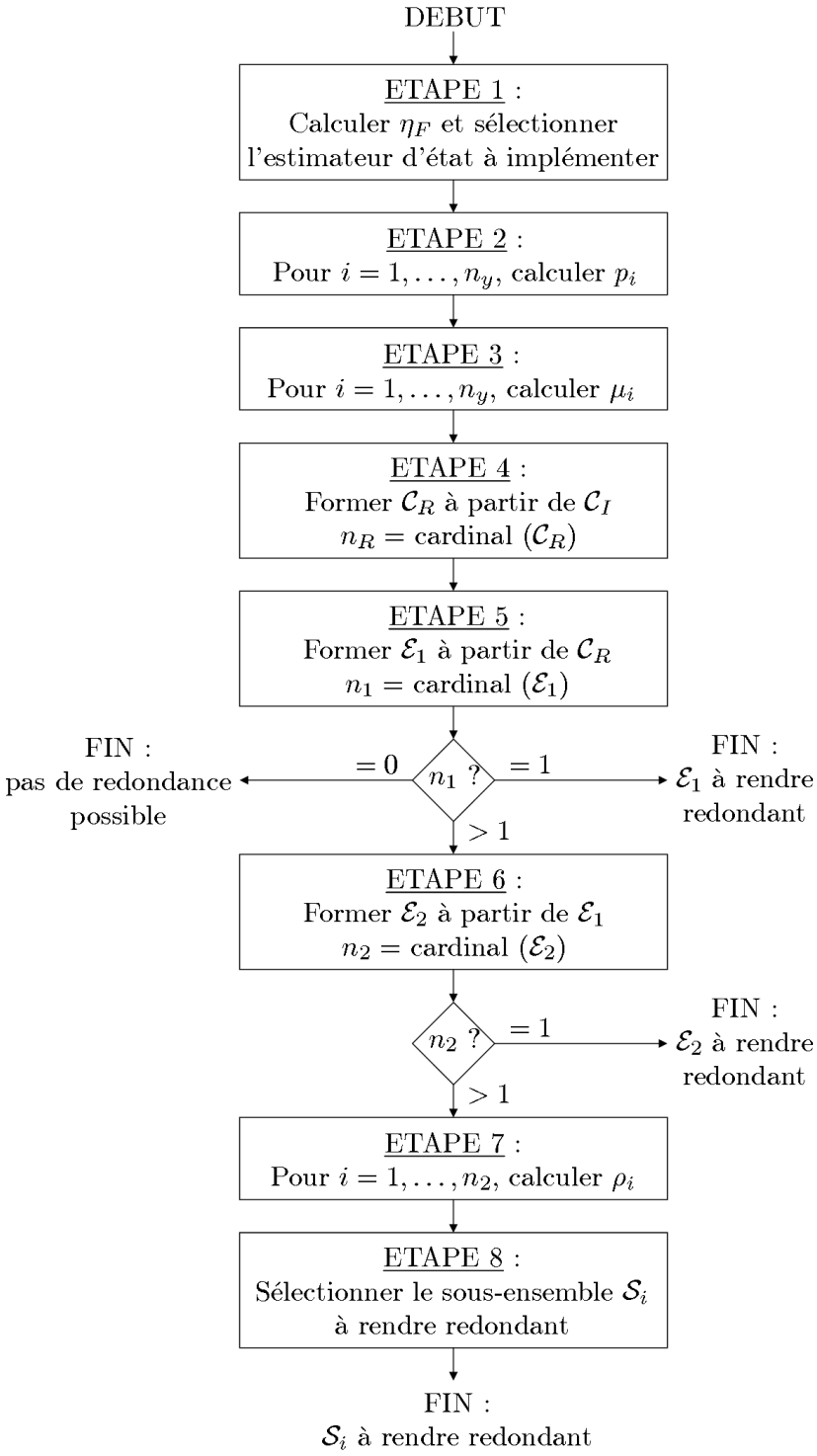


FIG. 2.6 – Structure de l'algorithme de synthèse d'un dispositif d'estimation d'état

1. Sélectionner l'estimateur d'état à implémenter. Ce choix s'opère via les trois étapes suivantes :
   - pour chacun des estimateurs envisagés, calculer η_F :
   $$\eta_F = \frac{1}{n_y+1}\sum_{i=0}^{n_y} V_i^F.$$
   η_F représente la variance moyenne du filtre F sur l'ensemble des scenarii de capteurs disponibles ;
   - choisir l'estimateur d'état à utiliser : il s'agit de celui dont la valeur η_F est la plus faible. Si plusieurs filtres présentent ce même résultat, l'estimateur à retenir est celui d'implémentation la plus aisée ;
   - pour $i = 0,\ldots,n_y$, respectivement attribuer à r_i, V_i, σ_{r_i} et σ_{V_i} les valeurs r_i^F, V_i^F, $\sigma_{r_i}^F$ et $\sigma_{V_i}^F$ relatives au filtre F retenu.
2. Pour $i = 1,\ldots,n_y$, calculer les poids p_i à partir de σ_{r_i}, σ_{r_0}, σ_{V_i} et σ_{V_0}, conformément à la relation (2.18).
3. Pour $i = 1,\ldots,n_y$, calculer les indicateurs μ_i à partir de p_i, V_i, V_0 r_i et r_0, conformément à la relation (2.16).
4. Éliminer de l'ensemble $\mathcal{C}_I = \{C_1,\ldots,C_{n_y}\}$ de capteurs candidats à une redondance matérielle ceux ne pouvant être doublés pour des raisons d'ordre physique. L'ensemble des capteurs restant après cette étape est noté $\mathcal{C}_R$ ($\mathcal{C}_R \subseteq \mathcal{C}_I$) et son cardinal n_R ($n_R \leq n_y$).
5. Former à partir des n_R capteurs de $\mathcal{C}_R$ toutes les combinaisons possibles de $1,2,\ldots,n_R$ capteurs pour lesquels le coût lié à la mise en œuvre de la redondance n'excède pas le budget alloué. L'ensemble des combinaisons satisfaisant cette contrainte est noté $\mathcal{E}_1$ et son cardinal n_1.
6. Éliminer de $\mathcal{E}_1$ tous les sous-ensembles de capteurs non maximaux[a] (cf. définition 1). L'ensemble des sous-ensembles de capteurs restants après cette étape est noté $\mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1$) et son cardinal n_2 ($n_2 \leq n_1$). Par ailleurs, on pose : $\mathcal{E}_2 = \{\mathcal{S}_1,\ldots,\mathcal{S}_i,\ldots,\mathcal{S}_{n_2}\}$.
7. Pour chaque sous-ensemble $\mathcal{S}_i$ de $\mathcal{E}_2$ ($1 \leq i \leq n_2$), calculer ρ_i à partir des $\{\mu_j\}_{1\leq j\leq n_y}$ préalablement déterminés :
   $$\rho_i = \sum_{j=1}^{n_y} \varepsilon_j \mu_j, \quad \text{où : } \varepsilon_j = \begin{cases} 1 \text{ si } C_j \in \mathcal{S}_i, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
8. Déterminer le sous-ensemble $\mathcal{S}_i$ de $\mathcal{E}_2$ dont les éléments seront rendus redondants : il s'agit de celui présentant la valeur ρ_i la plus élevée. Si plusieurs sous-ensembles présentent ce même résultat, sélectionner le sous-ensemble dont le coût de mise en œuvre de la redondance est effectivement minimal.

[a] Cela revient à exploiter au maximum le budget disponible.

Algorithme 14: Synthèse du dispositif d'estimation d'état

obtenu via les équations de Navier-Stockes, bien connues en mécanique des fluides. Il est de la

forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -ax_1(t) + ax_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = bx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x_3}(t) = x_1(t)x_2(t) - c\ x_3(t) \end{cases}, \tag{2.24}$$

où x_1, x_2 et x_3 sont trois variables d'état[28] et a, b et c trois paramètres réglés dans le but d'obtenir un comportement chaotique de (2.24) [Ito 00] :

$$a = 10, \quad b = 28, \quad c = 8/3. \tag{2.25}$$

Pour être utilisable par les estimateurs non-linéaires, le modèle (2.24) est discrétisé à une fréquence de 100Hz via un schéma d'Euler, conduisant au système suivant :

$$\begin{cases} x_1(t+\Delta t) = (1 - a\ \Delta t)x_1(t) + a\ \Delta t\ x_2(t) + w_1(t) \\ x_2(t+\Delta t) = b\ \Delta t\ x_1(t) + (1 - \Delta t)x_2(t) - \Delta t\ x_1(t)\ x_3(t) + w_2(t) \\ x_3(t+\Delta t) = \Delta t\ x_1(t)\ x_2(t) + (1 - c\ \Delta t)x_3(t) + w_3(t) \end{cases}, \tag{2.26}$$

où $\Delta t = 10$ ms représente la période d'échantillonnage et $\{w_1(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{w_2(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{w_3(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont trois bruits blancs, gaussiens, centrés, mutuellement indépendants et d'écarts-types valant chacun 0,01 unité. Ces perturbations ont délibérément été ajoutées dans le but de tenir compte de l'erreur causée par l'opération de discrétisation. A noter que le système (2.24) ainsi discrétisé présente toujours un comportement chaotique, comme l'atteste la figure 2.7 où l'on reconnaît l'attracteur étrange de Lorenz.

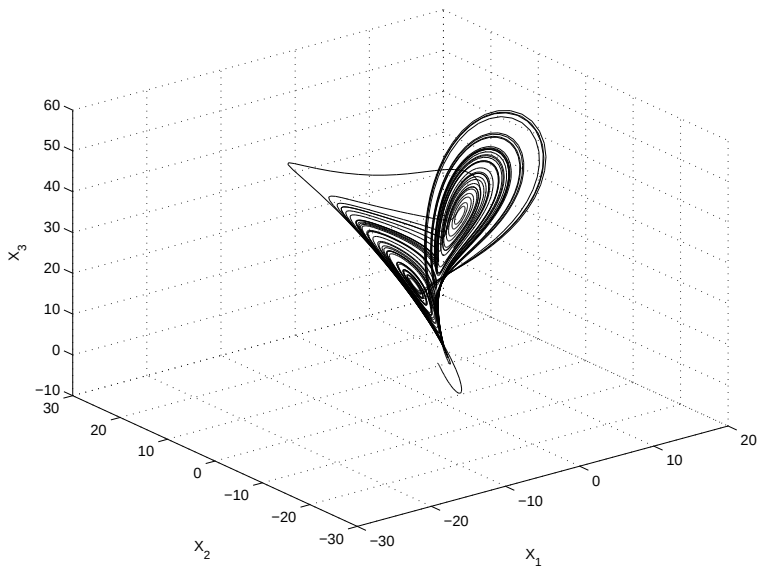


FIG. 2.7 – Trajectoire de l'état du système de Lorenz discrétisé

[28]Dorénavant, dans le but d'alléger les notations, nous ne distinguerons plus les variables aléatoires de leurs réalisations et décrirons ces deux grandeurs par des lettres minuscules.

Chacun des trois états du modèle (2.26) est mesuré au travers des relations suivantes[29] :

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) + v_1(t) \\ y_2(t) = 25 + 13,16 \ \exp\left(\dfrac{5,2.10^{-3}}{x_2(t)+50}\right) + v_2(t) \\ y_3(t) = 0,015 \ x_3^2(t) + v_3(t) \end{cases}, \tag{2.27}$$

où $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $y_3(t)$ sont des observations réalisées à chaque instant t multiple de Δt et $\{v_1(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{v_2(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{v_3(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ les bruits de mesures associés, lesquels sont blancs, gaussiens, centrés, mutuellement indépendants et d'écarts-types respectifs 1/2, 1 et 2 unités. Ces caractéristiques, de même que celles du bruit d'état, sont supposées connues de l'utilisateur, de sorte qu'il est possible de régler les matrices de covariance des filtres comme suit (en regroupant de manière ordonnée les différentes variables sous forme de vecteur) :

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww} = (0,01)^2\boldsymbol{I}_3 = 10^{-4}\boldsymbol{I}_3, \quad \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv} = \mathrm{diag}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2, 1^2, 2^2\right) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{4}, 1, 4\right), \quad \boldsymbol{\Sigma}_k^{wv} = \mathbf{0}_{3\times 3}. \tag{2.28}$$

Par ailleurs, l'état initial de (2.26) est $\boldsymbol{x}(0) = [-0,2 \ \ -0,3 \ \ -0,5]^T$, mais n'est supposé connu par l'utilisateur qu'à la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx} = 0,35\boldsymbol{I}_3$ près. Par conséquent, l'initialisation $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ des filtres se fera aléatoirement suivant un tirage selon une loi normale centrée en $\boldsymbol{x}(0)$ et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$: cela permettra de déceler une éventuelle sensibilité de certains filtres vis-à-vis de leur initialisation, cette sensibilité pouvant se révéler néfaste compte tenu du caractère chaotique du système considéré.

Analyse de l'observabilité du système de Lorenz :

Dans ce paragraphe, nous analysons l'observabilité du système de Lorenz, dans le but de juger de la pertinence des résultats présentés : en effet, en toute logique, une perte de capteur entraînant une perte d'observabilité doit être nettement plus dommageable qu'une défaillance n'impactant pas l'observabilité.

Appelons C_i le capteur mesurant y_i ($1 \leq i \leq 3$). Compte tenu des équations d'observations (2.27), il est clair que lorsque C_1 et C_2 sont disponibles, x_1 et x_2 sont observables du fait qu'ils sont directement mesurés au travers de fonctions bijectives. En ce qui concerne x_3, la situation est un peu plus compliquée car le lien entre cet état et y_3 est quadratique. Autrement dit, il n'est possible de reconstruire que la valeur absolue de x_3 à partir des informations issues de C_3. Afin de prouver que l'état x_3 est effectivement observable, nous allons montrer que les informations issues de $\{C_1, C_2\}$ suffisent à observer x_3. Réécrivons la seconde équation de (2.26) comme suit :

$$x_{3,k} = \frac{1}{\Delta t \ x_{1,k}} \left(-x_{2,k+1} + (1-\Delta t)x_{2,k} + b \ \Delta t \ x_{1,k}\right), \tag{2.29}$$

où, dans un but simplificateur, les indices k et $k+1$ sont associés aux instants t et $t+\Delta t$ et où le bruit d'état $w_{2,k}$ a volontairement été omis (une analyse d'observabilité s'effectue généralement sur un modèle non bruité). Cette équation montre que x_3 est reconstructible de manière unique

[29] Ces mesures n'ont rien de physique et ont été instaurées dans un but purement académique, pour illustrer la technique proposée. Il nous semble par ailleurs utile de préciser que des trois variables d'état du système de Lorenz, seule x_2 présente un sens physique puisqu'il s'agit d'une température (le lien entre x_2 et y_2 représente la fonction de transfert d'un thermo-couple). Les deux autres états sont issus de transformations de modèle et par conséquent dénués de tout sens physique.

à partir de la connaissance de x_1 et x_2 (c'est-à-dire des informations issues de $\{C_1, C_2\}$) excepté lorsque $x_1 = 0$. Par la suite, nous supposerons que cette valeur particulière n'est atteinte que très ponctuellement, conduisant à de très courtes pertes d'observabilité. Ainsi, $\boldsymbol{x}$ est observable à partir de $\{C_1, C_2\}$ et donc $\{C_1, C_2, C_3\}$.

En outre, en adoptant un raisonnement similaire, la première équation de (2.26) permet de montrer que la connaissance de x_1 autorise une reconstruction unique de x_2. Autrement dit, C_1 suffit à lui seul à observer $\boldsymbol{x}$. Par voie de conséquence, ce vecteur d'état est reconstructible via l'utilisation de $\{C_1, C_3\}$.

Concernant l'observabilité du système de Lorenz via les informations issues de $\{C_2, C_3\}$, la situation est plus compliquée : en suivant le même raisonnement que précédemment, on peut montrer que x_1 est reconstructible de manière unique à partir de la connaissance de x_2 et x_3 sous réserve que $x_2 \neq 0$ et $x_3 \neq b$. Il est évident que x_2 est observable (via C_2) mais la relation non bijective entre x_3 et y_3 peut causer certains problèmes : il est ainsi délicat de conclure quant à l'observabilité dans ce cas de figure. Enfin, il est évident que l'utilisation de C_2 ou C_3 seuls ne suffit pas rendre les variables d'état observables.

L'ensemble de cette analyse est synthétisé sur un *graphe orienté* [Star 99] (figure 2.8) où chaque nœud correspond à un ensemble de capteurs donné :

- un nœud "gris" signifie que le système est observable par le sous-ensemble de capteurs correspondant,
- un nœud "blanc" signifie que le système n'est pas observable par le sous-ensemble de capteurs correspondant,
- un nœud "hachuré" signifie que l'analyse de l'observabilité du système par le sous-ensemble de capteurs correspondant est trop complexe pour se prononcer[30],
- un arc entre deux nœuds représente une perte de capteur, en l'occurrence celui indiqué à hauteur de la transition associée.

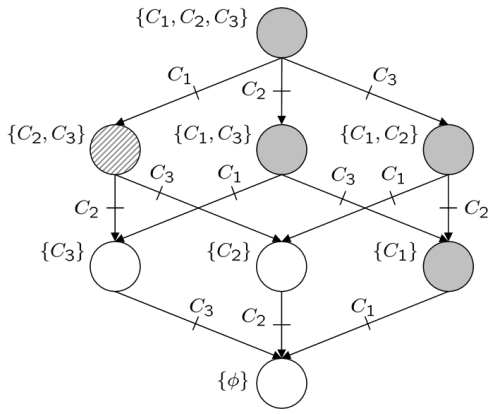


Fig. 2.8 – Graphe orienté du système de Lorenz

[30] Ce genre de situation n'apparaît que dans les problèmes d'observabilité de systèmes non linéaires. Le concept de nœud hachuré est un élément introduit par nos soins.

Détermination et réglage des estimateurs non linéaires considérés :

Nous choisissons comme filtres envisageables l'IEKF, l'EnKF, le CDKF et l'UKF. En tentant de régler les paramètres de ces estimateurs, nous constatons rapidement que les deux derniers de ces filtres sont sensibles au comportement chaotique du modèle de Lorenz (on rappelle que l'état initial $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ du filtre est tiré aléatoirement, dans le but justement de mettre en évidence la sensibilité des reconstructeurs d'état vis-à-vis du chaos). En effet, la figure 2.9 montre clairement que, pour une simulation de Monte Carlo donnée, l'état estimé par un CDKF avec $h = \sqrt{3}$ ne suit pas l'état vrai, cette situation se répétant y compris pour d'autres valeurs de h. Il en est de même pour l'UKF. La raison de cette situation vient très probablement du principe même de ces filtres, à savoir que faire passer des σ points par une fonction d'état à caractère chaotique donne en sortie des points pouvant être relativement éloignés les uns des autres, ce qui affecte les résultats donnés par ces estimateurs. Pour cette même simulation de Monte Carlo, l'état estimé par l'EKF (IEKF avec $N = 0$ étape de correction supplémentaire) suit quant-à-lui parfaitement l'état vrai, comme l'atteste la figure 2.10. Afin de confirmer que cette situation n'est pas propre à cette seule simulation, le chevelu[31] des erreurs d'estimation est tracé sur la figure 2.11 : on peut clairement vérifier, en comparant avec les courbes de la figure 2.10, que l'enveloppe des erreurs d'estimation est faible devant l'amplitude de l'état vrai. Les résultats obtenus via un EnKF utilisant $N = 20$ particules sont similaires à ceux de l'EKF. Par conséquent, lors de l'application de l'algorithme 14, nous n'envisagerons que deux filtres, à savoir l'IEKF et l'EnKF.

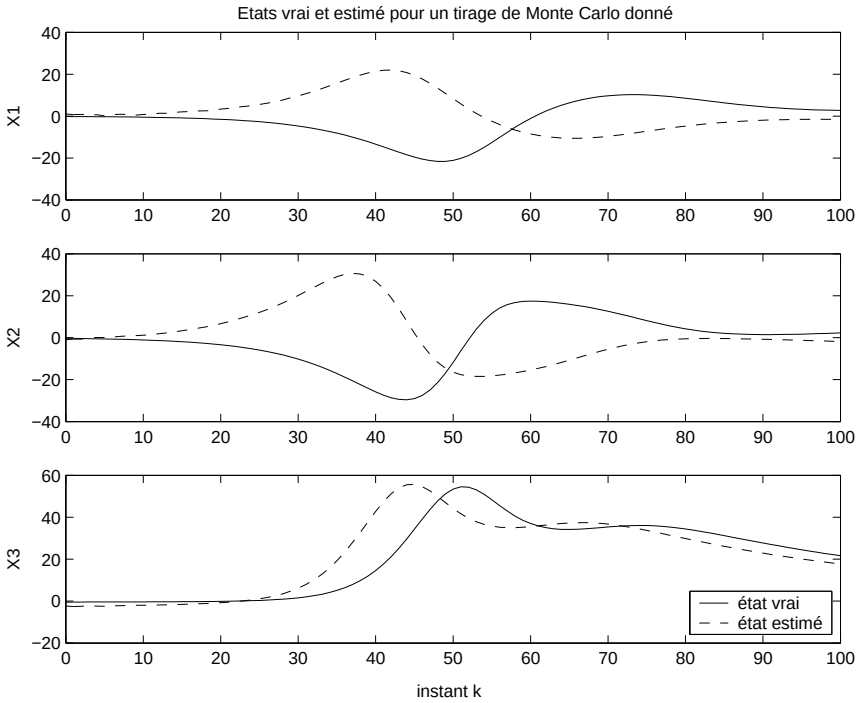


FIG. 2.9 – Illustration de la sensibilité au chaos d'un CDKF avec $h = \sqrt{3}$

Réglons maintenant ces deux estimateurs envisagés. Les résultats de variance expérimentale de l'IEKF en fonction du nombre d'étapes de correction supplémentaires par rapport à l'EKF sont donnés dans le tableau 2.1. On peut y constater qu'il n'y a aucune amélioration pour

[31] On appelle *chevelu* la superposition des S courbes de résultat d'une expérience donnée, S étant le nombre de simulation de type Monte Carlo effectuées sur cette expérience.

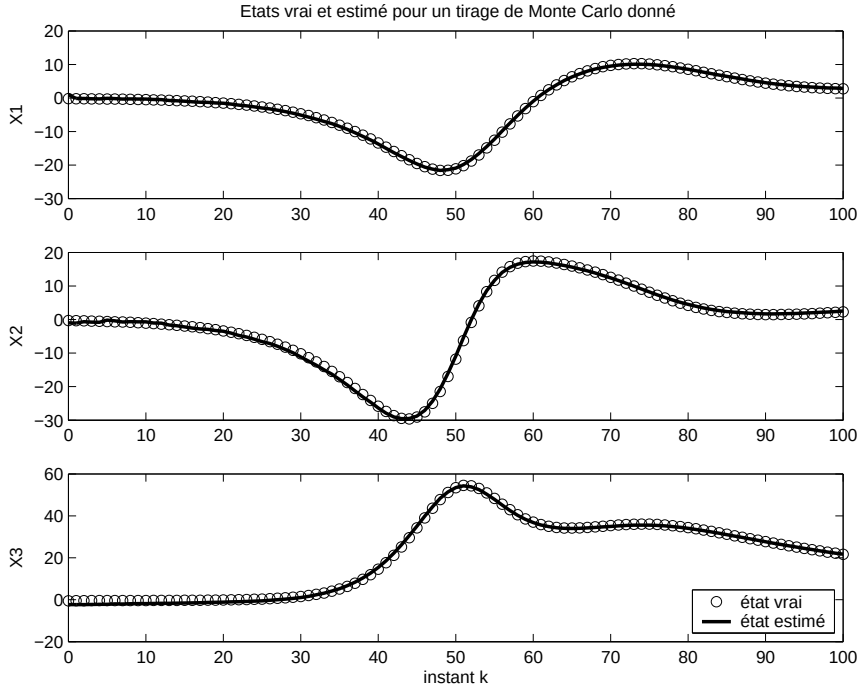


FIG. 2.10 – États vrai et estimé par un EKF pour une simulation (tirage) de Monte Carlo donnée

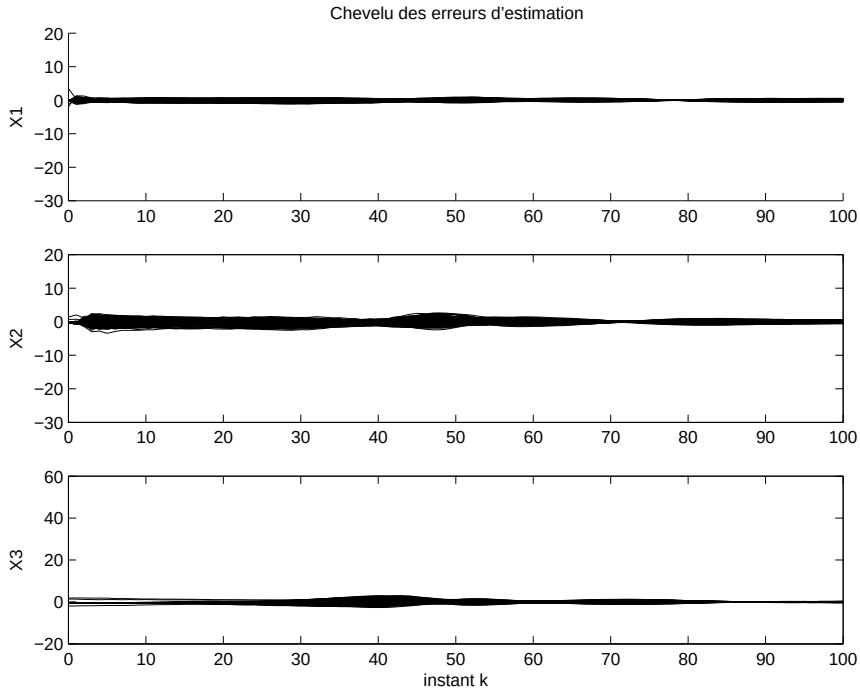


FIG. 2.11 – Chevelu des erreurs d'estimation de l'EKF

$N \geq 1$, ce qui signifie que l'algorithme a convergé au bout de $N = 1$ étape de correction supplémentaire. Toutefois, en comparant les résultats obtenus avec $N = 1$ et $N = 0$, on se rend compte que la correction supplémentaire apporte peu en terme de qualité d'estimation.

Par conséquent, nous adopterons par la suite le réglage $N = 0$, lequel représente le meilleur compromis complexité/qualité d'estimation (l'IEKF se réduit à un EKF).

N	0	1	2	3	4
V	5,34	5,13	5,13	5,13	5,13

TAB. 2.1 – Variance expérimentale V de l'IEKF en fonction du nombre de corrections N supplémentaires

Concernant l'EnKF, la variance expérimentale en fonction du nombre de particules est donnée dans le tableau 2.2 puis tracée sur la figure 2.12. On constate que le meilleur compromis complexité/qualité d'estimation semble être atteint pour $N = 20$ particules. Ce réglage est donc retenu, compte tenu du fait qu'il présente de surcroît une certaine marge par rapport au nombre critique ($N = 10$) de particules garantissant la positivité des covariances.

N	100	50	30	20	10
V	5,21	5,26	5,36	5,57	7,18

TAB. 2.2 – Variance expérimentale V de l'EnKF en fonction du nombre de particules N

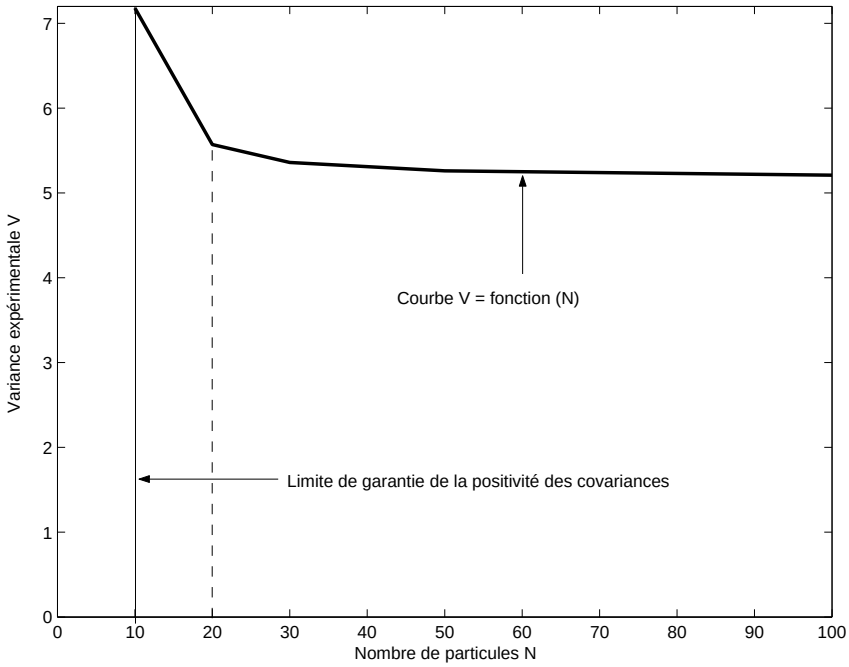


FIG. 2.12 – Variance expérimentale de l'EnKF en fonction de son nombre de particules

Réalisation de la campagne de mesures :

Les résultats obtenus par l'EKF et l'EnKF sont regroupés dans les tableaux 2.3 et 2.4.

Capteurs utilisés		V_i^{EKF}	$\sigma_{V_i}^{\text{EKF}}$	r_i^{EKF}	$\sigma_{r_i}^{\text{EKF}}$
$\{C_1, C_2, C_3\}$	$i = 0$	5,34	0,53	152,1	25,6
$\{C_2, C_3\}$	$i = 1$	37,52	31,24	884	41,7
$\{C_1, C_3\}$	$i = 2$	5,34	0,53	152,1	28,6
$\{C_1, C_2\}$	$i = 3$	5,43	0,56	152,2	28,6

TAB. 2.3 – Résultats des simulations avec un EKF

Capteurs utilisés		V_i^{EnKF}	$\sigma_{V_i}^{\text{EnKF}}$	r_i^{EnKF}	$\sigma_{r_i}^{\text{EnKF}}$
$\{C_1, C_2, C_3\}$	$i = 0$	6,02	1,83	152,9	27,4
$\{C_2, C_3\}$	$i = 1$	39,44	31,61	886,5	57,7
$\{C_1, C_3\}$	$i = 2$	6,24	1,49	153	27,6
$\{C_1, C_2\}$	$i = 3$	6,32	1,02	153	35,03

TAB. 2.4 – Résultats des simulations avec un EnKF

Synthèse du dispositif d'estimation d'état :

Nous considérons que chacun des trois capteurs C_1, C_2, C_3 peut subir une redondance matérielle. Les prix respectifs de la redondance de ces capteurs (prix des capteurs et de leur mise en œuvre) sont 400€, 150€ et 250€, pour un budget global de 500€. Appliquons l'algorithme 14 :

Étape 1 : à partir des données des tableaux 2.3 et 2.4, on trouve :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{EKF}} &= (5,34 + 37,52 + 5,34 + 5,43)/(3+1) = 13,4, \\ \eta_{\text{EnKF}} &= (6,02 + 39,44 + 6,24 + 6,32)/(3+1) = 14,5. \end{aligned} \tag{2.30}$$

L'estimateur d'état à utiliser est donc l'EKF. Ce choix peut de prime abord paraître étrange en ce sens où l'EnKF est théoriquement plus efficace que l'EKF pour les problèmes d'estimation non linéaire. Toutefois, les seules non linéarités mises en jeux dans le système de Lorenz sont des produits de variables d'état, ce qui est similaire à l'équation d'évolution d'un quaternion. Il a été montré dans ce dernier cas qu'un EKF était tout à fait convenable [LaVi 03]. En réalité, il aurait été possible d'avoir un EnKF plus performant mais pour un nombre de particules beaucoup trop élevé.

Étape 2 : l'application de l'équation (2.18) à partir des données du tableau 2.3 donne directement :

$$p_1 = 0,02, \quad p_2 = 0,5, \quad p_3 = 0,49. \tag{2.31}$$

Étape 3 : l'application de l'équation (2.16) à partir des données du tableau 2.3 et du résultat (2.31) donne directement :

$$\mu_1 = 5,84, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 1,01. \tag{2.32}$$

Étape 4 : comme tous les capteurs peuvent être rendus redondants, il vient immédiatement :

$$\mathcal{C}_R = \{C_1, C_2, C_3\}, \quad n_R = 3. \tag{2.33}$$

Étape 5 : la prise en compte des coûts de redondance et du budget conduit au résultat suivant :

$$\mathcal{E}_1 = \{C_1, C_2, C_3, \{C_2, C_3\}\}, \quad n_1 = 4. \tag{2.34}$$

Étape 6 : du fait que C_1 et C_2 ne constituent pas des sous-ensembles de capteurs maximaux (ils sont inclus dans $\{C_2, C_3\}$), ils doivent être éliminés de $\mathcal{E}_1$. Il vient ainsi :

$$\mathcal{E}_2 = \{C_1, \{C_2, C_3\}\}, \quad \mathcal{S}_1 = C_1, \quad \mathcal{S}_2 = \{C_2, C_3\}, \quad n_2 = 2. \tag{2.35}$$

Étape 7 : le calcul de ρ_1 et ρ_2, respectivement associés aux sous-ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, donne :

$$\rho_1 = \mu_1 = 5,584, \quad \rho_2 = \mu_2 + \mu_3 = 1 + 1,01 = 2,01. \tag{2.36}$$

Étape 8 : Comme $\rho_1 > \rho_2$, le sous-ensemble de capteurs à rendre redondant est $\mathcal{S}_1$, c'est-à-dire que seul C_1 sera doublé. *A posteriori*, ce résultat est tout à fait logique si l'on s'en réfère au graphe orienté de la figure 2.8, puisque C_1 assure à lui seul l'observabilité du système de Lorenz tandis que la perte de ce capteur aboutissait à un risque de perte d'observabilité. Ceci est confirmé en pratique par les figures 2.13 à 2.16, où l'on constate que l'erreur RMS d'estimation est dans un ordre de grandeur équivalent en utilisant $\{C_1, C_2, C_3\}$, $\{C_1, C_2\}$ ou $\{C_1, C_3\}$ et est sévèrement dégradée en utilisant $\{C_2, C_3\}$.

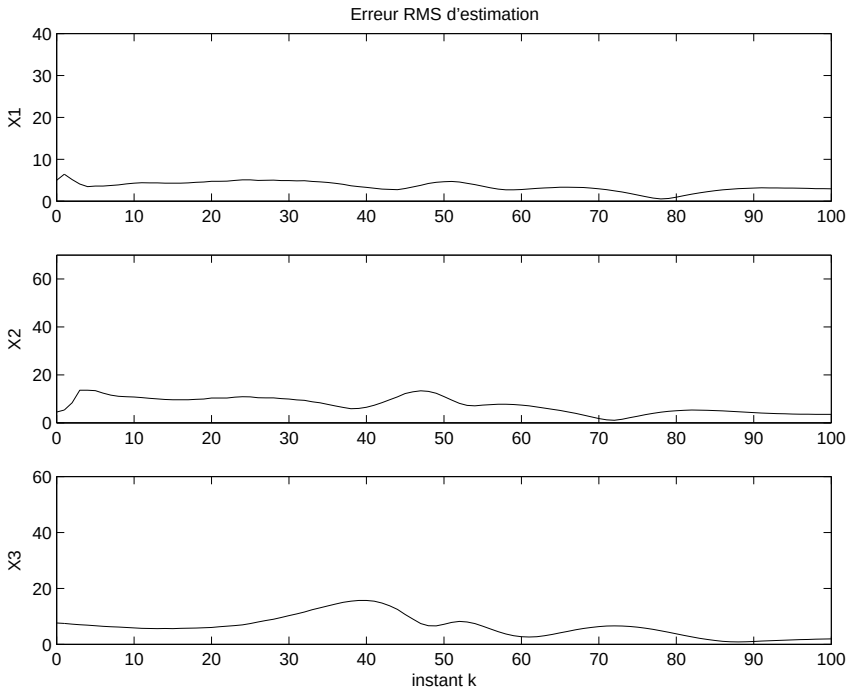


FIG. 2.13 – Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_1, C_2, C_3\}$

Cela confirme que la perte de C_1 engendre à elle seule une perte d'observabilité. Ainsi, le choix réalisé en appliquant l'algorithme 14 est le bon. Cela met en évidence qu'une analyse préalable de l'observabilité est inutile, puisqu'une diminution du degré d'observabilité causée par une perte d'un capteur C_i conduit à une forte valeur de μ_i, ce qui impacte au final la valeur des $\rho_\bullet$ et donc le choix de la redondance.

2.5.2 Application sur un modèle non linéaire d'ordre 2

Description du modèle considéré :

Soit le modèle non linéaire à temps discret d'ordre 2 suivant :

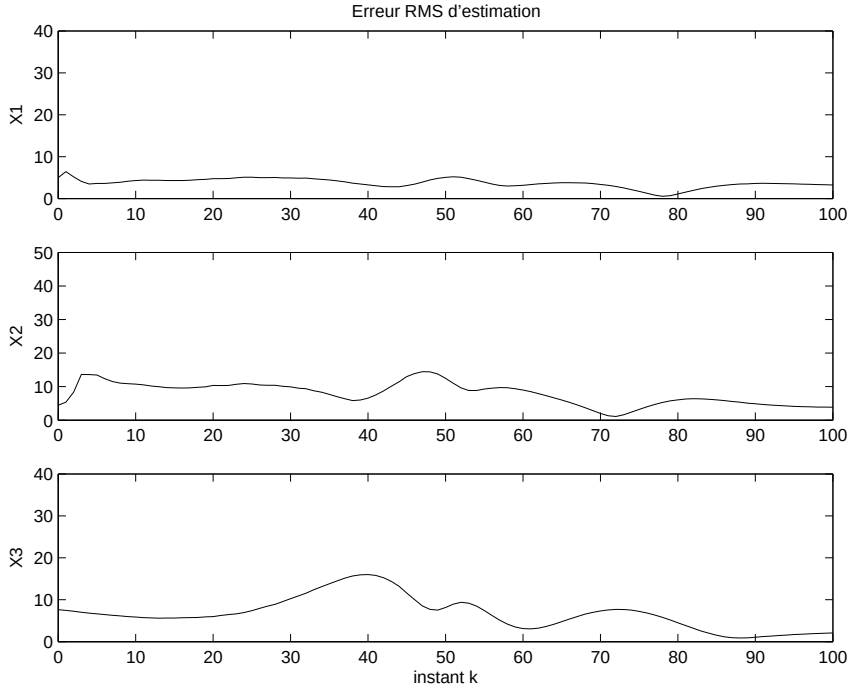


FIG. 2.14 – Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_1, C_2\}$

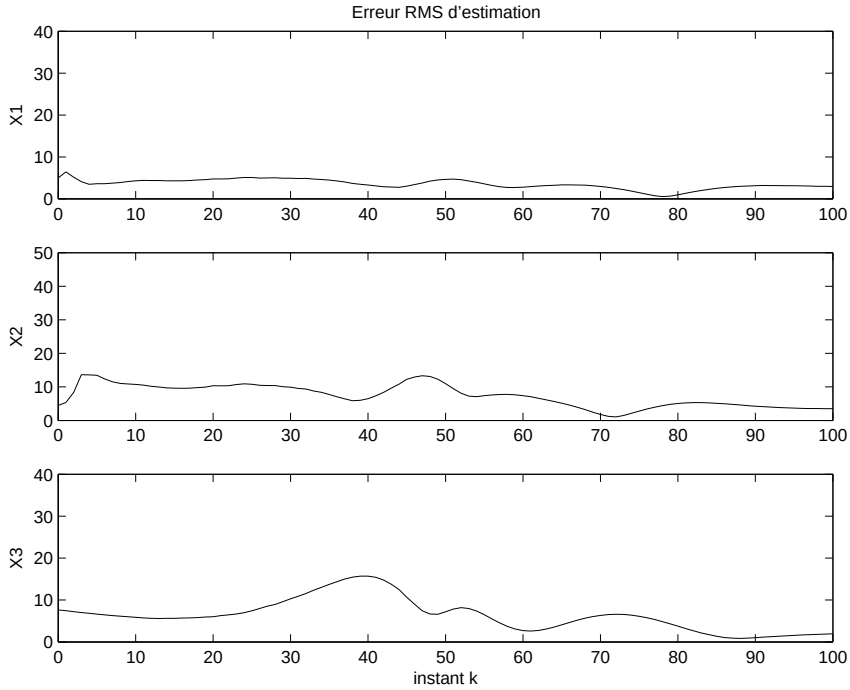


FIG. 2.15 – Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_1, C_3\}$

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \dfrac{x_{1,k}}{2} + \dfrac{25\ x_{1,k}}{1 + x_{1,k}^2} + 8\cos(1,2k) + x_{2,k} + w_{1,k} \\ x_{2,k+1} = 8\sin\left(x_{1,k}\right) + 8\sin\left(1,2\ x_{2,k}\right) + w_{2,k} \end{cases},$$
$$\begin{cases} y_{1,k} = \dfrac{x_{1,k}^2}{20} + v_{1,k} \\ y_{2,k} = x_{2,k} + v_{2,k} \end{cases}, \tag{2.37}$$

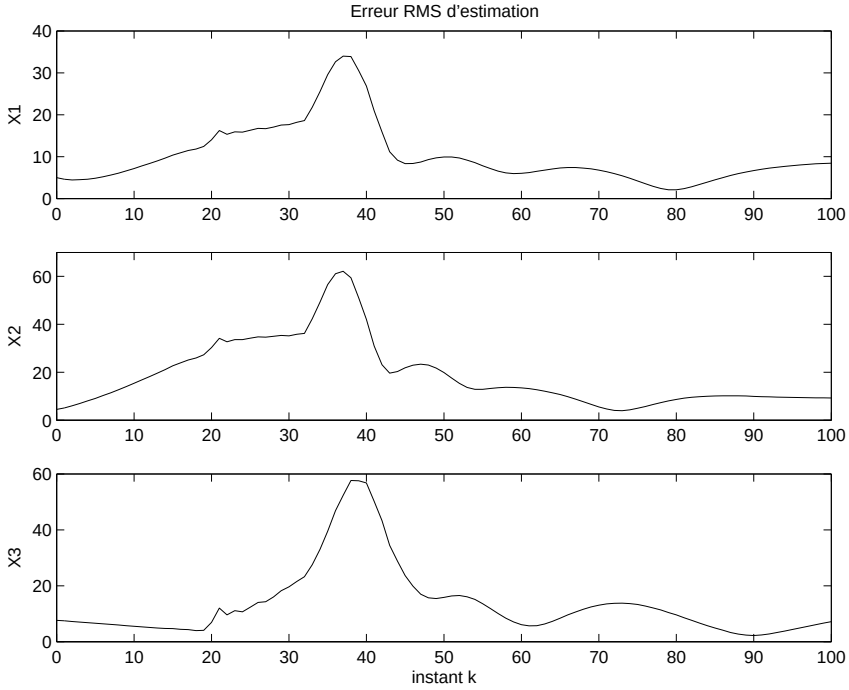


FIG. 2.16 – Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_2, C_3\}$

où $\{x_{1,k}, x_{2,k}\}$ (respectivement $\{y_{1,k}, y_{2,k}\}$, $\{w_{1,k}, w_{2,k}\}$, $\{v_{1,k}, v_{2,k}\}$) sont les deux composantes du vecteur d'état $\boldsymbol{x}_k$ (respectivement d'observations $\boldsymbol{y}_k$, de bruit d'état $\boldsymbol{w}_k$, bruit de mesure $\boldsymbol{v}_k$) à l'instant k. $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\boldsymbol{v}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont tous deux des bruits blancs, gaussiens, centrés, dont les composantes sont toutes mutuellement indépendantes et d'écart-type unitaire. Ces caractéristiques sont là encore supposées connues de l'utilisateur de sorte que l'on peut d'emblée poser :

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww} = \boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv} = \boldsymbol{I}_2, \quad \boldsymbol{\Sigma}_k^{wv} = \boldsymbol{0}_{2\times 2}. \tag{2.38}$$

Par ailleurs, l'état initial vrai est $\boldsymbol{x}_0 = [5\ ;\ 3]$ mais n'est pas connu de l'utilisateur. Par conséquent, les filtres utilisés sont initialisés avec un état nul ($\widehat{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{0}_{2\times 1}$), la covariance initiale d'erreur d'estimation étant fixée à : $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx} = 100\boldsymbol{I}_2$. Le modèle (2.37), introduit dans [Sirc 07b] et [Sirc 08c], représente une extension à l'ordre 2 d'un modèle servant de benchmark à la communauté du filtrage particulaire (voir par exemple [Kita 87], [Gord 93], [Arul 02]).

Détermination et réglage des estimateurs non linéaires considérés :

Nous choisissons comme éventail de filtres envisageables le PF, l'EnKF, le CDKF et l'UKF. Parmi ces quatre estimateurs, seuls les deux premiers sont en réalité utilisables. En effet, quel que soit leur réglage de leur(s) paramètre(s) spécifique(s), le CDKF et l'UKF ne parviennent pas à convenablement estimer la première des deux composantes du vecteur d'état, comme illustré par les figures 2.17 et 2.18 pour une simulation de Monte Carlo donnée. Cela s'explique par le fait que l'état associé au modèle (2.37) n'est pas gaussien, ce qui rend inefficace ces filtres de Kalman non linéaires. L'EnKF agit quant-à-lui convenablement, comme le montre la figure 2.19 pour la même simulation de Monte carlo.

La variance expérimentale de l'EnKF en fonction de son nombre de particules est donnée dans le tableau 2.5. Par la suite, nous retiendrons le choix $N = 20$ particules.

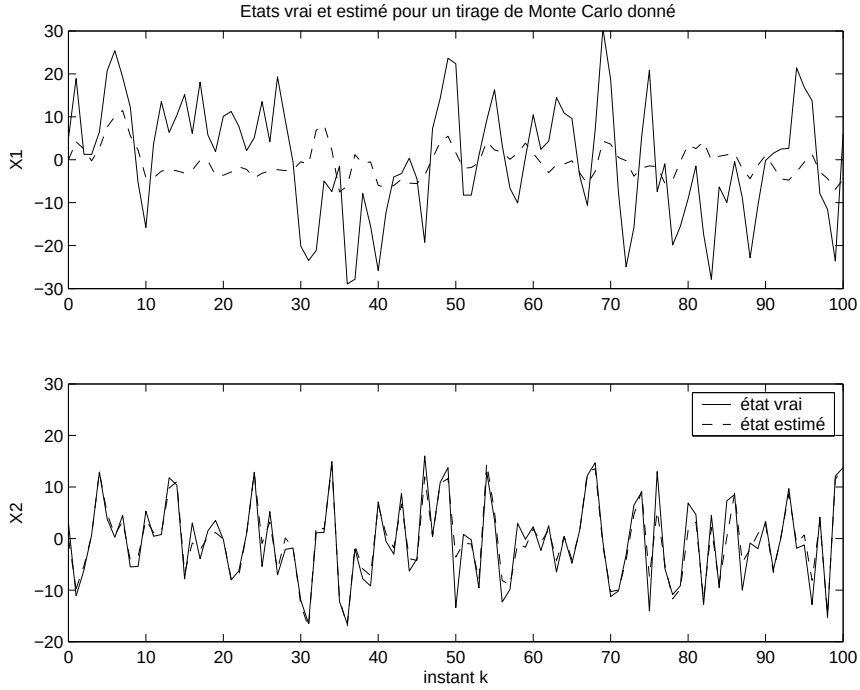


FIG. 2.17 – Illustration du mauvais comportement d'un CDKF avec $h = 1,9$

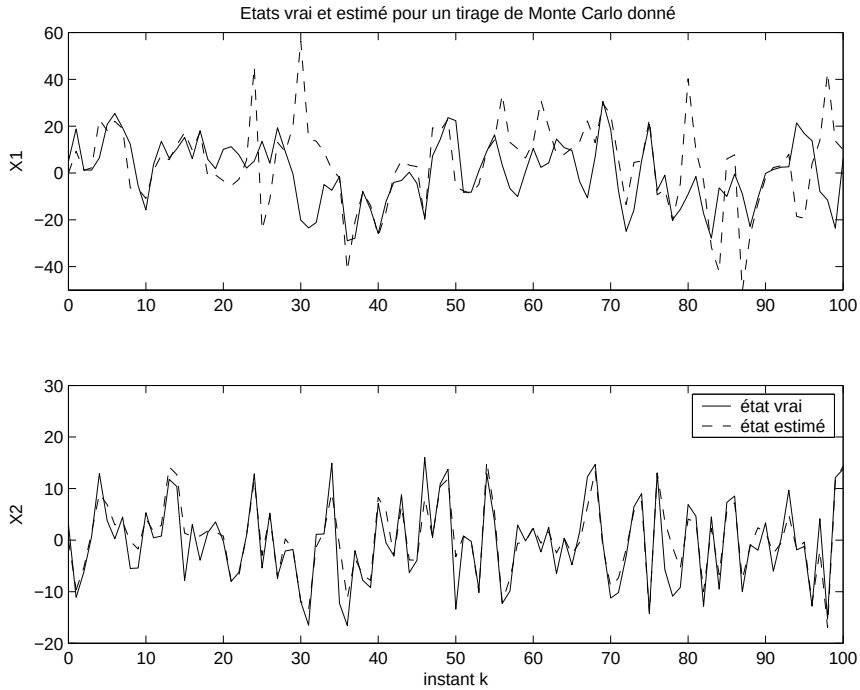


FIG. 2.18 – Illustration du mauvais comportement d'un UKF avec $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\kappa = 0$

Concernant le PF, conformément à l'algorithme 13, nous commençons par régler par défaut le filtre avec $N = 500$ particules, un indicateur de rééchantillonnage basé sur le nombre effectif de particules et un seuil de rééchantillonnage de 50 particules effectives. Le critère d'optimalité re-

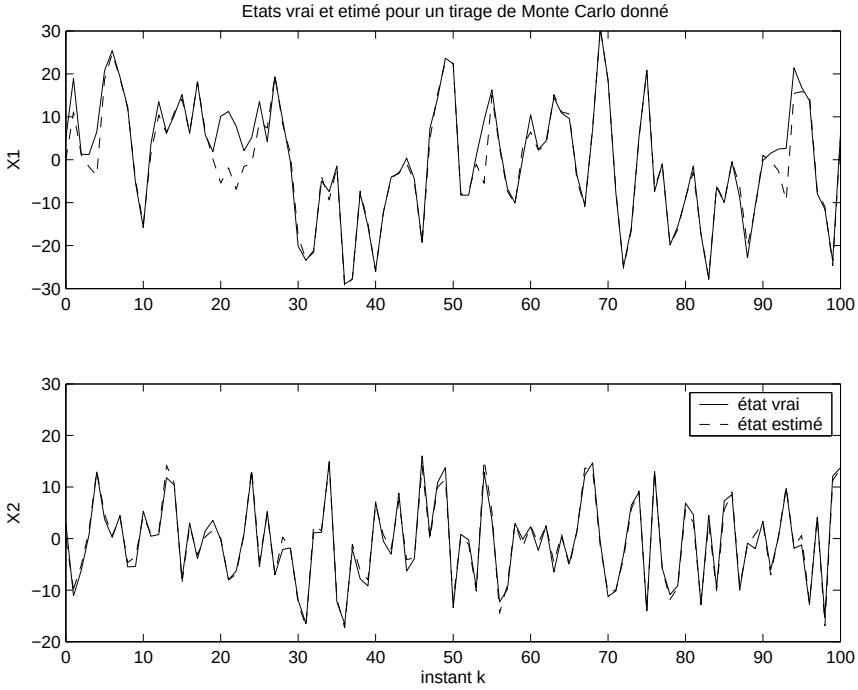


FIG. 2.19 – Illustration du bon comportement d'un EnKF avec $N = 20$ particules

N	100	50	30	20	10
V	4,18	4,35	4,91	5,71	10,04

TAB. 2.5 – Variance expérimentale V de l'EnKF en fonction du nombre de particules N

tenu pour l'estimation d'état est le maximum *a posteriori* puisque ce dernier donne les meilleurs résultats sur une moyenne de $S = 200$ simulations de Monte Carlo. Concernant le choix de l'indicateur de rééchantillonnage, la variance expérimentale et la fréquence moyenne de rééchantillonnage pour différentes valeurs de seuils sont données dans les tableaux 2.6 et 2.7 puis tracées sur la figure 2.20. Nous retenons l'indicateur d'entropie du nuage de particules car pour une variance donnée, il présente systématiquement une fréquence de rééchantillonnage plus faible que l'indicateur du nombre effectif de particules. Le seuil que nous retenons est $\ln(N/50) = \ln(10)$, ce choix représentant le meilleur compromis variance / fréquence de rééchantillonnage.

Seuil	$\ln\left(\frac{N}{10}\right)$	$\ln\left(\frac{N}{30}\right)$	$\ln\left(\frac{N}{50}\right)$	$\ln\left(\frac{N}{75}\right)$	$\ln\left(\frac{N}{100}\right)$
Variance expérimentale V	4,92	5,49	5,70	5,79	6,77
Fréq. moy. de rééchantillonnage	0,69	0,56	0,50	0,49	0,46

TAB. 2.6 – Variance expérimentale et fréquence moyenne de rééchantillonnage pour un filtre de $N = 500$ particules avec l'indicateur de rééchantillonnage basé sur l'entropie du nuage de particules

Enfin, il ne reste plus qu'à régler le nombre N de particules du PF. Avec la structure de filtre, les résultats de variance expérimentale en fonction de N sont donnés dans le tableau

Seuil	$N/10$	$N/30$	$N/50$	$N/75$	$N/100$
Variance expérimentale V	5,08	5,69	5,87	5,96	6,67
Fréq. moy. de rééchantillonnage	0,7	0,6	0,56	0,5	0,48

TAB. 2.7 – Variance expérimentale et fréquence moyenne de rééchantillonnage pour un filtre de $N = 500$ particules avec l'indicateur du nombre effectif de particules

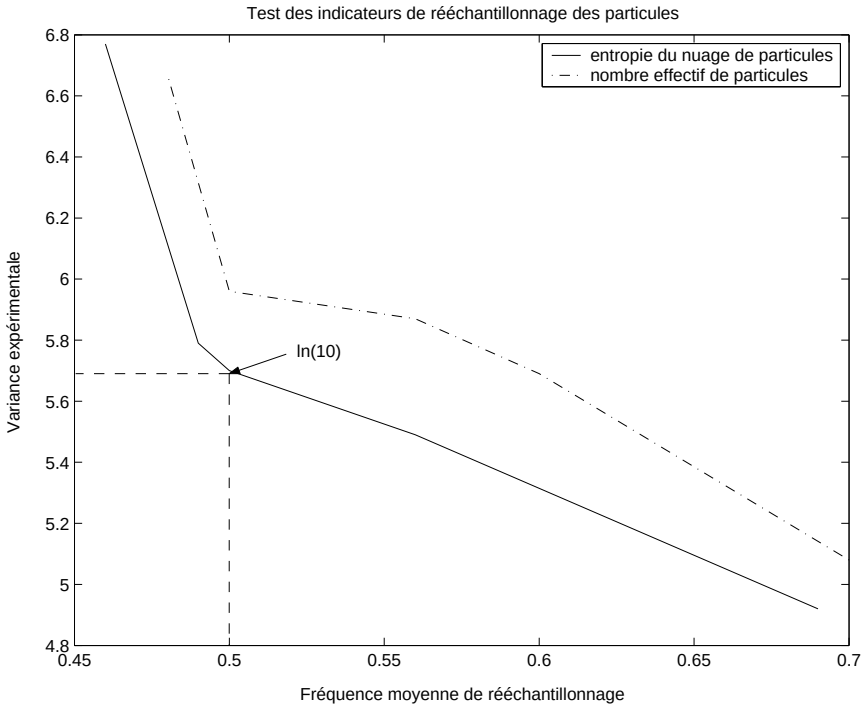


FIG. 2.20 – Tracé de la variance expérimentale en fonction de la fréquence moyenne de rééchantillonnage pour les deux indicateurs de rééchantillonnage

2.8. Nous retenons la valeur $N = 200$ particules, laquelle représente le meilleur compromis complexité/qualité d'estimation.

N	50	100	200	500	1000
V	11,05	9,35	8,37	5,7	5,34

TAB. 2.8 – Variance expérimentale V du PF en fonction du nombre N de particules

Réalisation de la campagne de mesures :

Les résultats obtenus par l'EKF et l'EnKF sont regroupés dans les tableaux 2.9 et 2.10.

Synthèse du dispositif d'estimation d'état :

Nous considérons que chacun des deux capteurs C_1, C_2 peut être l'objet d'une redondance matérielle. Les prix respectifs de la redondance de ces capteurs sont 150€ et 300€, pour un

Capteurs utilisés		V_i^{EnKF}	$\sigma_{V_i}^{\text{EnKF}}$	r_i^{EnKF}	$\sigma_{r_i}^{\text{EnKF}}$
$\{C_1, C_2\}$	$i = 0$	5,71	0,63	265	13,95
$\{C_2\}$	$i = 1$	38,76	1,76	379	17,55
$\{C_1\}$	$i = 2$	113,6	14,19	1640	33,68

TAB. 2.9 – Résultats des simulations avec un EnKF

Capteurs utilisés		V_i^{PF}	$\sigma_{V_i}^{\text{PF}}$	r_i^{PF}	$\sigma_{r_i}^{\text{PF}}$
$\{C_1, C_2\}$	$i = 0$	7,37	0,82	266	14,01
$\{C_2\}$	$i = 1$	31,42	1,73	392	17,87
$\{C_1\}$	$i = 2$	123,9	16,82	1670	34,16

TAB. 2.10 – Résultats des simulations avec un PF

budget global de 400€. Appliquons l'algorithme 14 :

Étape 1 : à partir des données des tableaux 2.9 et 2.4, on trouve :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{EnKF}} &= (5,71 + 38,76 + 113,6)/(2+1) &= 52,7, \\ \eta_{\text{PF}} &= (7,37 + 31,42 + 123,9)/(2+1) &= 54,2. \end{aligned} \tag{2.39}$$

L'estimateur d'état à utiliser est donc l'EnKF, ce filtre étant de surcroît moins complexe que le PF car utilisant un nombre de particules significativement plus faible.

Étape 2 : l'application de l'équation (2.18) à partir des données du tableau 2.9 donne directement :

$$p_1 = 0,31, \quad p_2 = 0,10. \tag{2.40}$$

Étape 3 : l'application de l'équation (2.16) à partir des données du tableau 2.3 et du résultat (2.40) donne directement :

$$\mu_1 = 3,09, \quad \mu_2 = 7,55. \tag{2.41}$$

Étape 4 : comme tous les capteurs peuvent être rendus redondants, il vient immédiatement :

$$\mathcal{C}_R = \{C_1, C_2\}, \quad n_R = 2. \tag{2.42}$$

Étape 5 : la prise en compte des coûts de redondance et du budget conduit au résultat suivant :

$$\mathcal{E}_1 = \{C_1, C_2\}, \quad n_1 = 2. \tag{2.43}$$

Étape 6 : du fait que C_1 et C_2 constituent des sous-ensembles de capteurs maximaux, alors $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$:

$$\mathcal{E}_2 = \{C_1, C_2\}, \quad \mathcal{S}_1 = C_1, \quad \mathcal{S}_2 = C_2, \quad n_2 = 2. \tag{2.44}$$

Étape 7 : le calcul de ρ_1 et ρ_2, respectivement associés aux sous-ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, donne :

$$\rho_1 = \mu_1 = 3,09, \quad \rho_2 = \mu_2 = 7,55. \tag{2.45}$$

Étape 8 : Comme $\rho_2 > \rho_1$, le sous-ensemble de capteurs à rendre redondant est $\mathcal{S}_2 = C_2$. Ce résultat est confirmé en pratique si l'on considère les erreurs RMS d'estimation, tracées au cours du temps sur les figures 2.21 à 2.23. En effet, on peut constater que la qualité d'estimation est légèrement dégradée si seul C_2 est utilisé et fortement détériorée si seul C_1 est disponible. Ainsi, la perte de C_2 s'avère effectivement la plus dommageable.

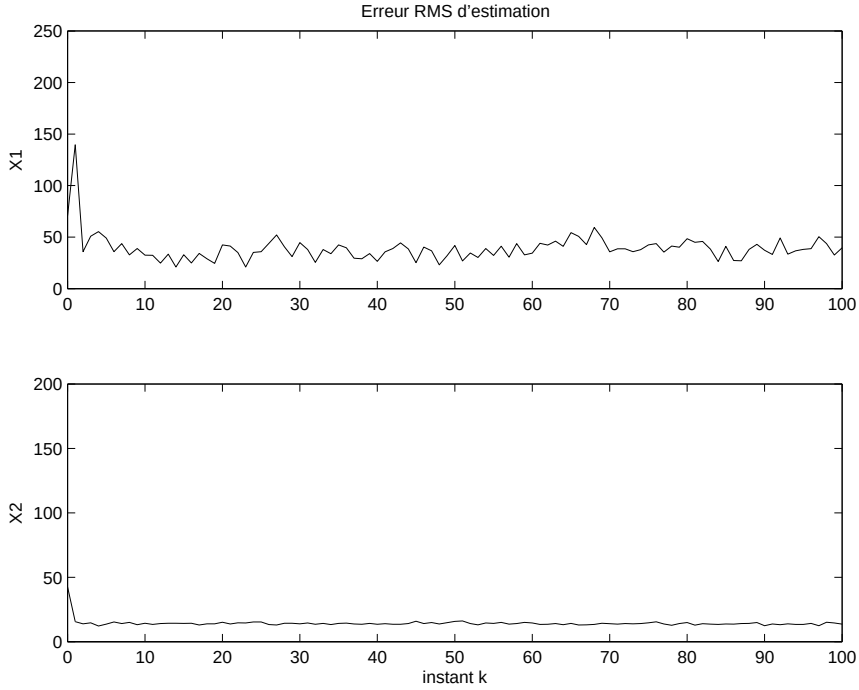


FIG. 2.21 – Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant $\{C_1, C_2\}$

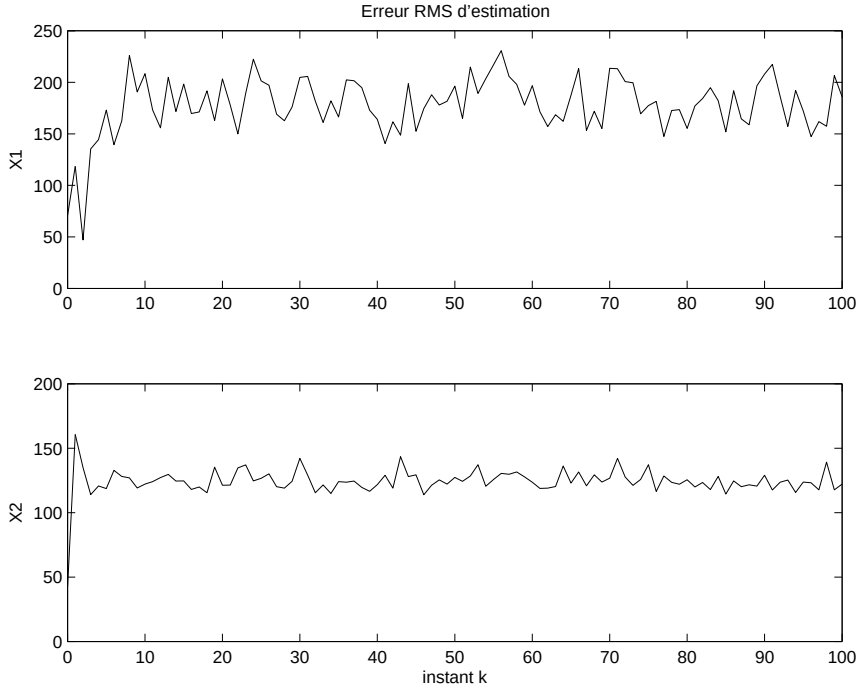


FIG. 2.22 – Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant C_1

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de synthèse d'un dispositif d'estimation d'état pour systèmes non linéaires a été présentée. Cette tâche consiste en : (i) le choix et le réglage d'un filtre recons-

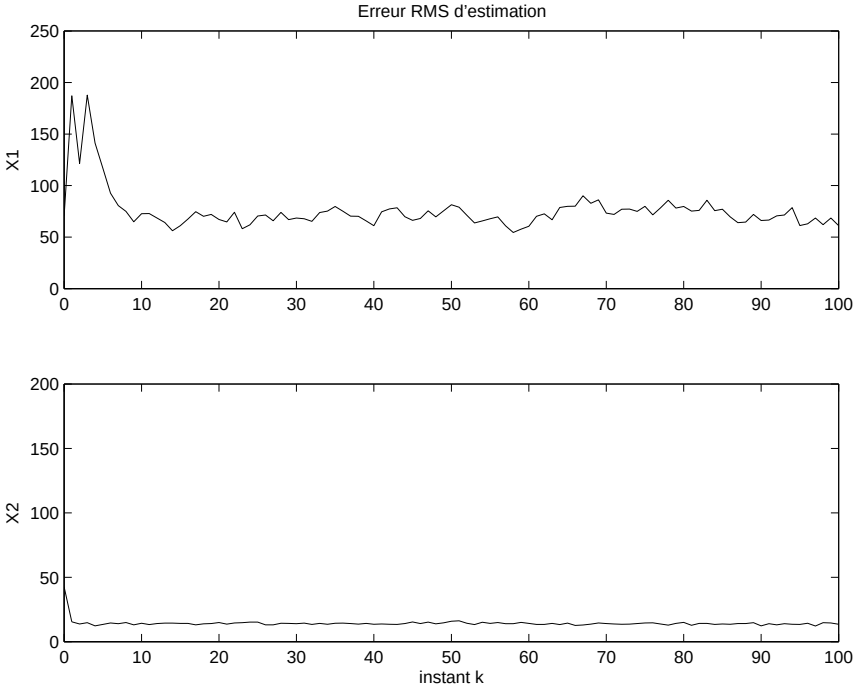


FIG. 2.23 – Erreur RMS d'estimation de l'état en utilisant C_2

truisant l'état du système sur lequel ce dispositif est implémenté ; (ii) la synthèse d'un schéma de redondance matérielle de certains capteurs. Pour chacune de ces deux tâches, des méthodes ont été suggérées et deux exemples non linéaires particuliers illustrent l'intérêt de la technique proposée. Du fait que cette dernière adopte une démarche essentiellement expérimentale, la phase d'analyse d'observabilité peut en outre être ignorée, la simulation mettant en évidence les pertes d'observabilité engendrées par des défaillances de capteurs.

Toutefois, de nombreuses améliorations peuvent être apportées à cette méthode. Tout d'abord, le panel des estimateurs d'état peut être étendu en y intégrant la théorie des observateurs non linéaires. De plus, la synthèse de l'architecture de la redondance de capteurs peut prendre en compte d'autres notions telles que le taux de fiabilité et le degré de redondance des capteurs (en vue de réaliser une redondance multiple) [Rago 96] [Maqu 97] ou encore l'entropie de l'information issue du réseau de capteurs [Yan 04]. En outre, une démarche visant à garantir la redondance d'un capteur dont une défaillance entraînerait une perte d'observabilité est envisageable. Par ailleurs, une minimisation du coût de la redondance matérielle est concevable, cette situation pouvant se résumer à la résolution d'un problème d'optimisation multi-critères, comme suggéré par [Mazz 03]. Enfin, il est bien évidemment possible d'étendre cette technique à la perte (éventuellement simultanée) de plusieurs capteurs puisque le critère sur lequel se base la redondance autorise une telle situation. Cela implique cependant la réalisation de nombreuses simulations supplémentaires, ce qui peut entraîner une mise en œuvre assez lourde.

Le nombre d'expériences à mener est justement le principal défaut de cette approche. Si les essais sont effectués sur un processus réel, alors la durée d'immobilisation du système risque d'être inacceptable. De surcroît, plus l'expérimentation est longue, plus le risque d'une défaillance d'un ou plusieurs éléments du dispositif d'instrumentation est élevé, ce qui fausserait le cas échéant l'analyse réalisée et affecterait par conséquent la synthèse de la redondance de capteurs. Ces considérations montrent l'intérêt d'une approche basée sur la simulation, puisque d'une part,

une telle opération est généralement réalisable au préalable, d'autre part, aucune défaillance physique ne peut intervenir. La principale difficulté réside alors en la conception d'un modèle du processus réel (modèle de "monde vrai"), ce problème restant très ouvert du fait que chaque application présente ses spécificités.

Par ailleurs, une hypothèse implicite a été émise dans ce chapitre, à savoir que la redondance de certains capteurs est possible. En pratique, ce n'est pas toujours le cas. La situation se complexifie encore lorsqu'une perte simultanée de tout le dispositif de mesures intervient, ce qui est par exemple le cas dans le problème de navigation inertielle lors des phases où le dispositif externe de mesure (GPS par exemple) est indisponible. La méthode proposée n'est alors d'aucune utilité, le seul moyen d'estimer l'état étant d'exploiter le modèle de dynamique et éventuellement certaines contraintes sur les variables d'état, ce qui s'avère compliqué lorsque figurent des incertitudes sur ce modèle. Par conséquent, nous avons choisi de nous intéresser à cette problématique complexe et de ne pas explorer davantage la voie ouverte dans ce chapitre. Dans le chapitre 4, deux aspects seront abordés : (i) la modélisation d'incertitudes de modèle, liée à l'emploi d'une technologie de gyroscopes appelée GRH ; (ii) l'adaptation d'un estimateur d'état (filtre de Kalman) vis-à-vis du modèle développé, ce reconstructeur devant présenter des propriétés de robustesse lors des pertes de mesure. Le chapitre qui suit présente les éléments de navigation inertielle nécessaires à l'appréhension du chapitre 4.

3
La navigation

Sommaire

3.1 Introduction **85**
3.2 L'unité de mesures inertielles **86**
3.2.1 Les accéléromètres 86
3.2.2 Les gyromètres/gyroscopes 87
3.2.3 Correction des erreurs des senseurs inertiels 87
3.3 Modélisation de la terre **89**
3.4 Les différents repères utilisés [Bout 06] **89**
3.5 Les équations de navigation inertielle **94**
3.5.1 Équation de la vitesse du porteur 94
3.5.2 Les matrices de passage 95
3.5.3 Équation de la vitesse de rotation de la plate-forme 96
3.6 Synthèse d'une navigation inertielle **98**
3.7 Les erreurs de navigation par inertie **101**
3.7.1 Équations vectorielles des erreurs de navigation 104
3.7.2 Modèle analytique des erreurs de navigation 107
3.7.3 Équations d'erreurs d'orientation de repères 108
3.7.4 Modèle complet des erreurs de navigation 109
3.7.5 Analyse des erreurs de navigation par inertie 112
3.8 La navigation hybridée **112**
3.8.1 Le couplage lâche 112
3.8.2 Le couplage serré 116
3.8.3 Les pertes d'hybridation 117
3.9 Conclusion **118**

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement les éléments nécessaires à la compréhension de la navigation. Ce chapitre est fondamental en ce sens où il introduit le modèle des erreurs

d'une navigation inertielle qui sera exploité dans le chapitre suivant. Le but d'une navigation est de fournir de manière autonome à un utilisateur (pilote d'avion par exemple) ou un opérateur (système de pilotage autonome, etc.) des informations relatives à la localisation d'un véhicule, c'est-à-dire sa position, sa vitesse et son attitude. Généralement, ces informations sont utilisées dans le but de guider le porteur[32] (c'est-à-dire le mener d'un point de départ vers un point d'arrivée selon une trajectoire plus ou moins prédéterminée) et de le piloter (assurer son guidage, ce qui revient à faire en sorte que le porteur soit stable le long de sa trajectoire). Le dispositif permettant de réaliser une navigation est une *centrale inertielle*, laquelle est constituée d'une *unité de mesures inertielles* et d'un calculateur. Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord l'unité de mesures inertielles. Ensuite, la modélisation de la terre et les différents repères utilisés sont présentés, dans le but d'obtenir dans un premier temps les équations permettant de réaliser une navigation, puis, dans un deuxième temps, un modèle des erreurs de navigation par inertie. Toutes ces relations sont enfin exploitées par le calculateur, lequel hybride de manière optimale les informations issues de l'unité de mesures inertielles et des observations provenant d'un dispositif de mesure externe de type GPS. L'hybridation ainsi réalisée fournit la solution de navigation optimale.

3.2 L'unité de mesures inertielles

Une *Unité de Mesures Inertielles* (UMI), également appelée *centrale inertielle* [Abuh 05, p. 45], est un dispositif chargé de mesurer les grandeurs caractérisant la dynamique du porteur. Elle est constituée de 3 accéléromètres, de 3 gyromètres ou gyroscopes, d'un calculateur dont le but est de corriger les grandeurs mesurées et d'une horloge interne.

3.2.1 Les accéléromètres

Un accéléromètre est un senseur[33] utilisant le principe d'inertie de la matière. Contrairement à ce que son nom laisse entendre, il ne mesure pas une accélération mais une *force spécifique*[34], à savoir la différence entre l'accélération absolue subie par le boîtier de l'accéléromètre et la gravité locale [Radi 99a] :

$$\overrightarrow{f}(O_m, t) = \overrightarrow{\gamma}^i(O_m, t) - \overrightarrow{g}(O_m), \tag{3.1}$$

où :

- $\overrightarrow{\gamma}^i(O_m, t)$ représente l'accélération absolue (c'est-à-dire par rapport à un repère $[i]$ immobile relativement aux étoiles, un tel repère étant qualifié d'*inertiel*) à l'instant t du point O_m matérialisant l'accéléromètre,
- $\overrightarrow{g}(O_m)$ est la valeur du champ de gravité au point O_m,
- $\overrightarrow{f}(O_m, t)$ est le vecteur de force spécifique au point O_m à l'instant t.

Pour être précis, la grandeur (scalaire) mesurée par un accéléromètre est la projection de $\overrightarrow{f}(O_m, t)$ sur l'axe de ce senseur, comme illustré par la figure 3.1. Par conséquent, pour reconstituer l'intégralité du vecteur $\overrightarrow{f}(O_m, t)$ dans l'espace, il est nécessaire de disposer d'au minimum

[32] Le mot *porteur* est ici un synonyme de véhicule.
[33] Le terme *senseur* est un synonyme de capteur.
[34] Une force spécifique représente une force divisée par une masse et est par conséquent homogène à une accélération.

trois accéléromètres dont les axes ne soient pas coplanaires : cela permet de mesurer les composantes de $\overrightarrow{f}(O_m, t)$ dans une base de l'espace. Enfin, notons que pour obtenir l'accélération absolue, il est nécessaire de compenser l'effet de la gravité à partir d'un modèle.

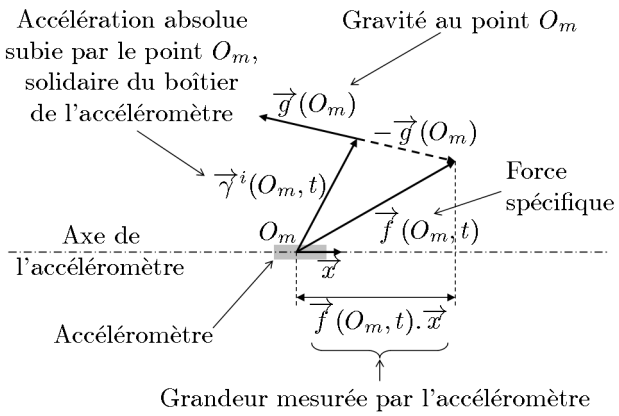


FIG. 3.1 – Grandeur mesurée par un accéléromètre

3.2.2 Les gyromètres/gyroscopes

Définition [Radi 99c] : Un gyromètre est un senseur mesurant la vitesse de rotation instantanée de son boîtier par rapport à un espace inertiel. Un gyroscope est un capteur mesurant l'angle instantané entre un repère solidaire de son boîtier et un repère inertiel. ■

En considérant la figure 3.2 sur laquelle la rotation de $[m]$ s'effectue dans la plan, un gyromètre mesure $\Omega^{m/i}(t)$ tandis qu'un gyroscope donne en sortie $\theta^{m/i}(t)$. Par la suite, le terme *gyro* désignera soit un gyromètre, soit un gyroscope. A noter que certains gyros peuvent au choix fonctionner en mode gyrométrique ou en mode gyroscopique [Lege 99]. Dans le cas d'une rotation de $[m]$ dans l'espace, un gyromètre (respectivement gyroscope) mesure la projection de $\overrightarrow{\Omega}^{m/i}(t)$ (respectivement $\overrightarrow{\theta}^{m/i}(t)$) sur l'axe du senseur, le vecteur $\overrightarrow{\theta}^{m/i}(t)$ étant défini par la figure 3.3 (définition analogue pour $\overrightarrow{\Omega}^{m/i}(t)$). Ainsi, de même que pour la mesure d'une force spécifique, il est nécessaire de disposer d'au moins trois gyros d'axes non coplanaires pour mesurer toutes les composantes de $\overrightarrow{\Omega}^{m/i}(t)$ ou $\overrightarrow{\theta}^{m/i}(t)$.

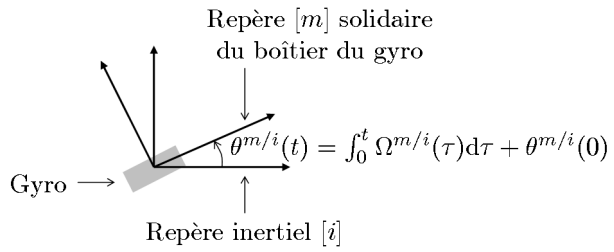


FIG. 3.2 – Grandeur mesurée par un gyro

3.2.3 Correction des erreurs des senseurs inertiels

Idéalement, pour reconstruire les grandeurs vectorielles $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(O_m, t)$ et $\overrightarrow{\Omega}^{m/i}(t)$ (ou $\overrightarrow{\theta}^{m/i}(t)$), les senseurs inertiels utilisés devraient tous se situer au cœur de la centrale, maté-

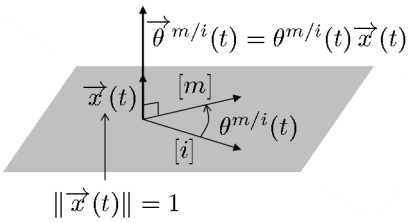


FIG. 3.3 – Définition du vecteur de rotation instantanée de $[m]$ par rapport à $[i]$

rialisé par le point O_m, ce qui physiquement est bien évidemment impossible. Typiquement, la disposition des accéléromètres et gyros est telle qu'illustrée sur la figure 3.4, où O_m et $\overrightarrow{x_m}$, $\overrightarrow{y_m}$ et $\overrightarrow{z_m}$ sont respectivement l'origine et les trois vecteurs définissant le repère (orthonormé direct) de *mesure* $[m]$.

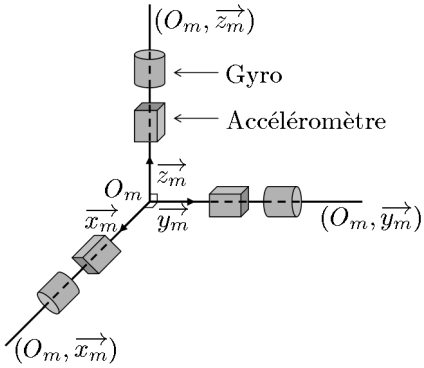


FIG. 3.4 – Positionnement des senseurs inertiels dans le repère de mesures

L'UMI fournit en sortie (figure 3.5), à la fréquence $f_n = 100$ Hz, des incréments accélérométriques $\Delta \boldsymbol{V}_m^{\text{acc}}(n)$ et gyroscopiques $\Delta \boldsymbol{\Theta}_n^{\text{gyro}}$ définis par :

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{V}_m^{\text{acc}}(n) &= \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{f}_m(t)\mathrm{d}t, \\ \Delta \boldsymbol{\Theta}_m^{\text{gyro}}(n) &= \boldsymbol{\Theta}_m^{m/i}(nT_n) - \boldsymbol{\Theta}_m^{m/i}((n-1)T_n) = \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{\Omega}_m^{m/i}(t)\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où n et T_n sont respectivement le temps discret et la période associés à la fréquence f_n et, pour une grandeur vectorielle $\overrightarrow{X}(t)$ quelconque, $\boldsymbol{X}_m(t) = \left[\overrightarrow{X}(t)\right]_{[m]}$ est la projection dans la base $[m]$ de $\overrightarrow{X}(t)$.

L'opération d'intégration est réalisée par le calculateur à partir de mesures issues des senseurs inertiels (figure 3.5) et opérées à haute fréquence (quelques kiloHertz). Toutefois, cette démarche nécessite de considérer que les directions des vecteurs $\overrightarrow{f}(t)$ et $\overrightarrow{\Omega}^{m/i}(t)$ (ou $\overrightarrow{\theta}^{m/i}(t)$) sont fixes entre deux mesures consécutives, ce qui n'est qu'une approximation. Cela engendre certaines erreurs qui sont :

- un mouvement conique des gyros autour de leur axe,
- un mouvement de godille des accéléromètres.

Ces erreurs sont compensées à haute fréquence par le calculateur à l'aide d'algorithmes appropriés. De même, le bras de levier induit par le fait que les accéléromètres ne soient pas centrés

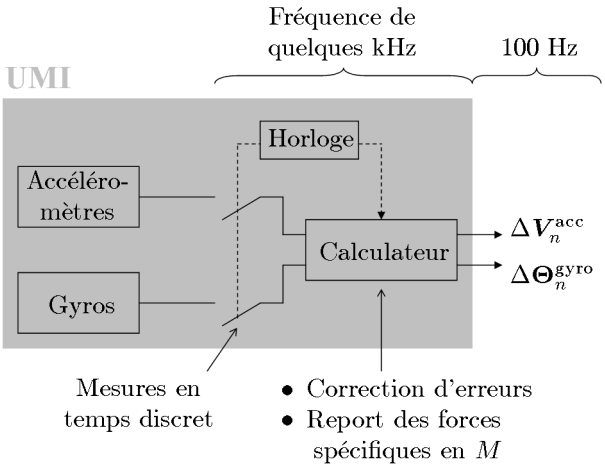


FIG. 3.5 – Schéma d'une UMI

sur O_m est également corrigé par le calculateur. Enfin, ce dernier pallie également de manière déterministe certaines autres erreurs telles que des biais sur les mesures accélérométriques, des dérives gyroscopiques ou des variations paramétriques liées à un changement de température. Les incréments $\Delta \boldsymbol{V}_m^{\mathrm{acc}}(n)$ et $\Delta \boldsymbol{\Theta}_m^{\mathrm{gyro}}(n)$ ainsi issus de l'UMI sont dans l'idéal affranchis d'erreurs. En réalité, les diverses corrections réalisées par le calculateur sont imparfaites car il est impossible de modéliser avec exactitude les phénomènes physiques à l'origine de ces erreurs. Ainsi, les incréments en sortie de l'UMI sont toujours entachés d'une erreur résiduelle.

3.3 Modélisation de la terre

Selon le modèle WGS84 (Système géodésique international de 1984) [Mula 00], la terre est un ellipsoïde de révolution dont l'axe de symétrie est la droite passant par les pôles nord et sud. Elle est définie par :

- son demi grand axe (distance entre le centre de la terre et l'équateur) : $a = 6\ 378\ 137,0$ m,
- son aplatissement : $f_{\mathrm{ap}} = 1/298,257\ 223\ 563 = 0,003\ 352\ 811$,
- son demi petit axe (distance entre le centre de la terre et le pôle nord/sud) : $b = a(1-f_{\mathrm{ap}}) = 6\ 356\ 752,3$ m,
- son excentricité : $e = \sqrt{1-(b/a)^2} = 0,081\ 819\ 218$.

La vitesse de rotation de la terre sur elle même est : $\Omega = 7,292\ 115 \times 10^{-5}$ rad/s. Cela donne un jour sidéral de $2\pi/\Omega = 86\ 164,101$ s $\approx$ 23 h 56 mn 04 s.

Enfin, si l'on considère la terre sphérique (ce que l'on fera par la suite), alors $f_{\mathrm{ap}} = 0$, ce qui donne un rayon terrestre $R = a = b = 6\ 378\ 137$ m.

3.4 Les différents repères utilisés [Bout 06]

Le repère inertiel :

Définition [Bros 99] : Un repère *inertiel* ou *galiléen* est un trièdre dans lequel une particule isolée (c'est-à-dire ne subissant aucune force extérieure, y compris celles induites par des champs tels que la gravité) et de masse non nulle présente une trajectoire rectiligne uniforme (vitesse de

déplacement constante). ■

Une des conséquences de cette définition est que tout trièdre en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère inertiel est lui aussi inertiel. Dans l'absolu, le meilleur trièdre inertiel connu est le *repère de Copernic* (également appelé *repère héliocentrique*) dont l'origine est le centre d'inertie du système solaire et dont les trois axes pointent vers des étoiles fixes [Bros 99]. Toutefois, il arrive très souvent de considérer tout repère *géocentrique* (d'origine le centre de la terre et se déplaçant selon une translation circulaire par rapport au trièdre de Copernic) comme inertiel. Cette approximation est notamment valable lorsque la durée de l'étude est faible devant le temps mis par la terre pour effectuer un tour autour du soleil (un an). En effet, la trajectoire du repère géocentrique par rapport au trièdre de Copernic s'apparente alors à une translation rectiligne uniforme, ce qui valide l'approximation réalisée. Ceci est notamment le cas pour les problèmes de navigation par inertie [Bros 99] où les missions réalisées ne durent généralement que un à quelques jours.

Par conséquent, nous qualifierons par la suite tout repère géocentrique de repère inertiel. Par commodité, le trièdre inertiel que nous adoptons et appelons $[i]$ est défini comme suit :

- $[i]$ est orthonormé direct,
- l'origine O_i de $[i]$ est le centre de la terre,
- les vecteurs $\overrightarrow{x_i}$, $\overrightarrow{y_i}$ et $\overrightarrow{z_i}$ sont tels que $[i]$ soit confondu avec le repère terrestre $[t]$ à l'instant $t = 0$ (figure 3.6).

Le repère terrestre :

Le *repère terrestre* $[t]$ est un trièdre solidaire de la terre et défini comme suit (figure 3.6) :

- l'origine O_t de $[t]$ est le centre de la terre et par conséquent, $O_t = O_i$,
- le vecteur $\overrightarrow{z_t}$ est tel que l'axe $(O_t, \overrightarrow{z_t})$ passe par les pôles nord et sud,
- le vecteur $\overrightarrow{x_t}$ est tel que l'intersection entre l'axe $(O_t, \overrightarrow{x_t})$ et l'ellipsoïde terrestre se fasse au niveau du méridien de Greenwich,
- le vecteur $\overrightarrow{y_t}$ est tel que la base $(O_t, \overrightarrow{x_t}, \overrightarrow{y_t}, \overrightarrow{z_t}) = [t]$ soit orthonormée directe.

Par conséquent, $[t]$ tourne autour de l'axe $(O_i, \overrightarrow{z_i})$ par rapport à $[i]$ à la vitesse constante Ω. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}^{t/i}$ de rotation instantanée de $[t]$ par rapport à $[i]$ et la matrice $\boldsymbol{T}_{it}$ de passage (cf. ann. D) de $[t]$ vers $[i]$ valent respectivement :

$$\overrightarrow{\Omega}^{t/i} = \overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{z_i} = \Omega\overrightarrow{z_t} \tag{3.3}$$

et :

$$\boldsymbol{T}_{it} = \boldsymbol{T}_{ti}^T = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Le repère géographique local :

Le *trièdre géographique local* $[g]$ est un repère orthonormé direct dont l'origine O_g est au cœur de la centrale inertielle ($O_g = O_m$) et dont les trois vecteurs sont orientés dans l'ordre vers le

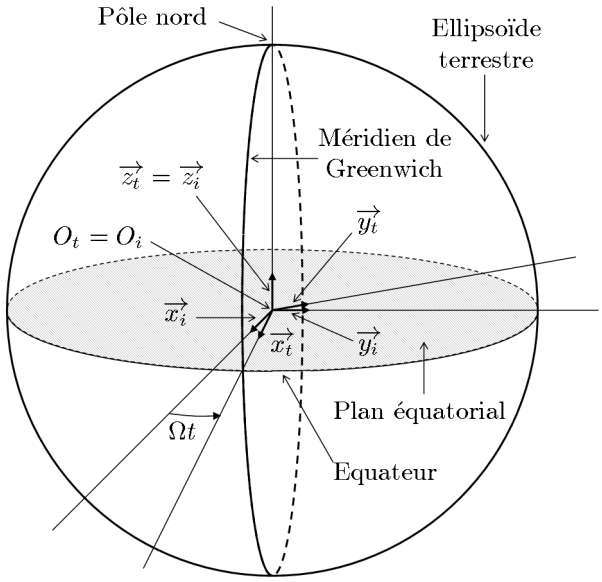


FIG. 3.6 – Passage du repère inertiel $[i]$ vers le repère terrestre $[t]$

pôle nord, l'ouest et le zénith (cf. figure 3.7). La connaissance de la latitude L et la longitude G du porteur sont alors suffisantes pour définir le passage de $[t]$ vers $[g]$:

$$\boldsymbol{T}_{tg} = \boldsymbol{T}_{gt}^T = \begin{bmatrix} -\sin(L)\ \cos(G) & \sin(G) & \cos(L)\ \cos(G) \\ -\sin(L)\ \sin(G) & -\cos(G) & \cos(L)\ \sin(G) \\ \cos(L) & 0 & \sin(L) \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

En outre, on définit également de trièdre géographique local secondaire [g'] dont les vecteurs sont orientés dans l'ordre vers le nord, l'est et la terre. La matrice de passage de $[g]$ vers $[g']$ s'obtient alors trivialement :

$$\boldsymbol{T}_{gg'} = \boldsymbol{T}_{g'g} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Le repère body :

Le *repère body* $[b]$ est un trièdre orthonormé direct solidaire du porteur et définit comme suit :

- l'origine O_b de $[b]$ est au cœur de la centrale inertielle et par conséquent, $O_b = O_g$,
- le vecteur $\overrightarrow{x_b}$ est orienté vers l'avant du véhicule,
- le vecteur $\overrightarrow{y_b}$ est orienté vers la droite du véhicule lorsque ce dernier est vu de dessus,
- le vecteur $\overrightarrow{z_b}$ est orienté vers le bas du véhicule.

Le lien entre $[b]$ et $[g']$ est entièrement défini à partir des trois angles que sont le cap, le roulis et le tangage (figure 3.8), respectivement notés ψ, φ et θ. Ces angles définissent l'*attitude* du porteur et sont parfois appelés *angles d'Euler* (bien qu'il s'agisse en réalité d'angles de Cardan). En utilisant ces angles, la matrice de passage de $[g']$ vers $[b]$ s'obtient facilement :

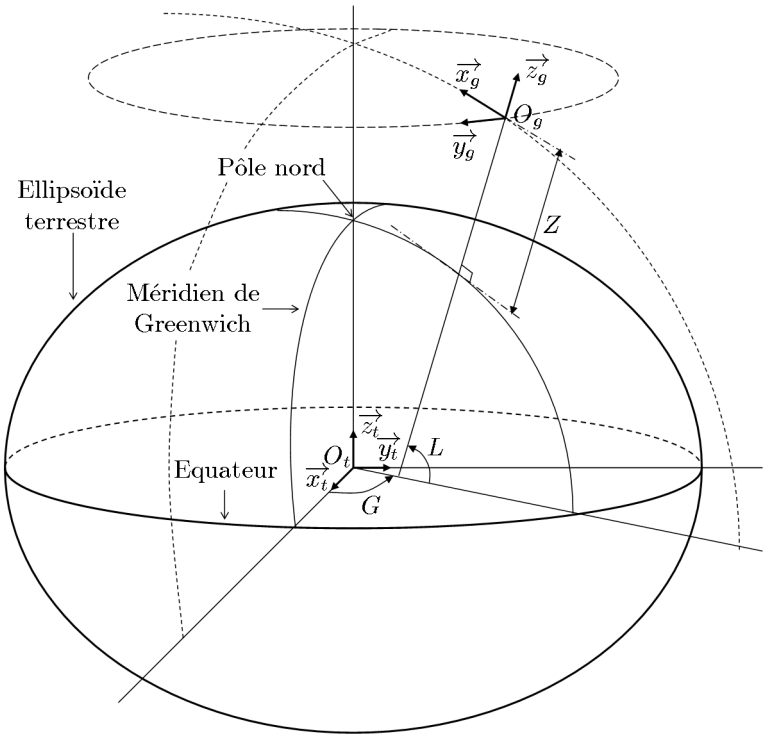


FIG. 3.7 – Passage du repère terrestre $[t]$ vers le trièdre géographique local $[g]$

$$\boldsymbol{T}_{g'b} = \boldsymbol{T}_{bg'}^{T} = \left[\begin{array}{c:c:c} \cos(\psi)\ \cos(\theta) & \begin{array}{c}-\sin(\psi)\ \cos(\varphi)\\ +\cos(\psi)\ \sin(\theta)\ \sin(\varphi)\end{array} & \begin{array}{c}\sin(\psi)\ \sin(\varphi)\\ +\cos(\psi)\ \sin(\theta)\ \cos(\varphi)\end{array} \\ \hdashline \sin(\psi)\ \cos(\theta) & \begin{array}{c}\cos(\psi)\ \cos(\varphi)\\ +\sin(\psi)\ \sin(\theta)\ \sin(\varphi)\end{array} & \begin{array}{c}-\cos(\psi)\ \sin(\varphi)\\ +\sin(\psi)\ \sin(\theta)\ \cos(\varphi)\end{array} \\ \hdashline -\sin(\theta) & \cos(\theta)\ \sin(\varphi) & \cos(\theta)\ \cos(\varphi) \end{array}\right]. \tag{3.7}$$

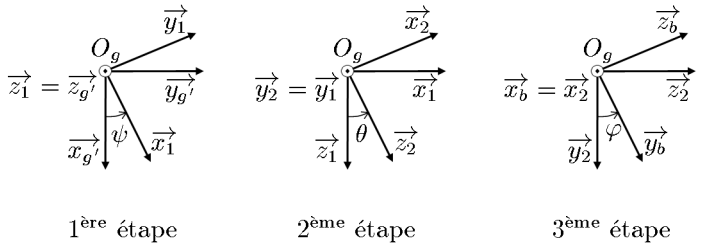


FIG. 3.8 – Passage de $[g']$ vers $[b]$ à partir des angles de cap, roulis et tangage

Le repère de mesure :

Le *repère de mesure* $[m]$ a été défini dans la section 3.2. Pour ce qui est du mouvement de ce trièdre, deux cas de figures sont à considérer :

– la centrale inertielle est à *plate-forme gyro-stabilisée* (gimbaled en anglais). $[m]$ est alors solidaire d'une plate-forme isolée des mouvements angulaires du porteur à l'aide d'une

suspension à cardans. Un système de commande permet alors d'agir sur l'orientation de cette plate-forme, de sorte que $[m]$ soit asservi sur un trièdre de référence (généralement $[i]$) ;
- la centrale inertielle est à *composants liés* (strapdown en anglais). $[m]$ est alors solidaire du porteur (les composants inertiels sont physiquement liés au véhicule), ce qui veut dire que $\boldsymbol{T}_{bm}$ est une matrice de passage constante dont les coefficients peuvent être obtenus à partir de l'architecture du porteur.

Les centrales à plate-forme gyro-stabilisée furent les premières développées, mais cette technologie souffre de la comparaison avec les systèmes récents à composants liés, notamment sur les aspects de coût et de complexité (les suspensions à cardans représentent des systèmes mécaniques de précision). Elles sont toutefois toujours employées dans les applications nécessitant une grande précision, telles que la navigation sous-marine. Par la suite, nous ne considérerons que le cas de centrales à composants-liés.

Le repère de travail :

Le *repère de travail* $[w]$, parfois appelé plate-forme par analogie avec les systèmes inertiels à plate-forme gyro-stabilisée, est un trièdre virtuel dans lequel sont projetés les différents vecteurs considérés. Le choix de $[w]$ définit la *mécanisation*[35] :
- si $[w] = [i]$, la mécanisation est dite *inertielle*,
- si $[w] = [t]$, la mécanisation est dite *terrestre*,
- si $[w]$ est tel que $O_w = O_g$ et $\overrightarrow{z_w} = \overrightarrow{z_g}$, la mécanisation est telle que les calculs de navigation s'opèrent dans une *plate-forme horizontale* (cette-plate forme étant le plan passant par O_g et lequel les vecteurs $\overrightarrow{x_w}$ et $\overrightarrow{y_w}$ sont inclus et fixes, ce qui, par la définition de $\overrightarrow{z_w}$, représente effectivement un plan horizontal au point O_g). Le passage de $[g]$ vers $[w]$ est alors défini par l'*angle de mécanisation* α à déterminer (cf. figure 3.9), ce qui donne la matrice de passage suivante :

$$\boldsymbol{T}_{gw} = \boldsymbol{T}_{wg}^T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

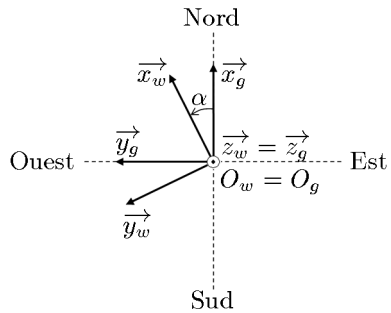


FIG. 3.9 – Passage de $[g]$ vers $[w]$

Notons que si $\alpha = 0$, alors $[w] = [g]$. Par la suite, nous ne considérerons que le cas d'une navigation dans une plate-forme horizontale. En outre, les propriétés des matrices de passage

[35] Le terme *mécanisation* est hérité des centrales inertielles à plate-forme gyro-stabilisée où $[w] = [m]$ est lié à la plate-forme en question. L'acte d'orientation de cette dernière par action sur les suspensions à cardans s'appelle *mécanisation*.

permettent d'écrire :

$$\boldsymbol{T}_{tw} = \boldsymbol{T}_{tg}\boldsymbol{T}_{gw}, \tag{3.9}$$

ce qui, en utilisant les relations (3.5) et (3.8), conduit à l'expression suivante pour $\boldsymbol{T}_{tw}$:

$$\boldsymbol{T}_{tw} = \boldsymbol{T}_{wt}^T = \left[\begin{array}{c:c:c} -\sin(L)\ \cos(G)\ \cos(\alpha) & \sin(L)\ \cos(G)\ \sin(\alpha) & \cos(L)\ \cos(G) \\ +\sin(G)\ \sin(\alpha) & +\sin(G)\ \cos(\alpha) & \\ \hdashline -\sin(L)\ \sin(G)\ \cos(\alpha) & +\sin(L)\ \sin(G)\ \sin(\alpha) & \cos(L)\ \sin(G) \\ -\cos(G)\ \sin(\alpha) & -\cos(G)\ \cos(\alpha) & \\ \hdashline \cos(L)\ \cos(\alpha) & -\cos(L)\ \sin(\alpha) & \sin(L) \end{array}\right]. \tag{3.10}$$

3.5 Les équations de navigation inertielle

Dans cette section, nous établissons les équations de la navigation par inertie, exprimées dans la plate-forme horizontale matérialisée par $[w]$. Ces relations se basent sur les grandeurs $\boldsymbol{f}_m$ et $\boldsymbol{\omega}_m$, lesquelles sont les projetions respectives dans $[m]$ des vecteurs de force spécifique $\overrightarrow{f}$ au point O_m et de vitesse de rotation $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\Omega}^{m/i}$. Les relations ainsi obtenues seront ensuite discrétisées via une procédure adéquate dans la section suivante, de sorte à être embarquées dans un calculateur. Les projections $\boldsymbol{f}_m$ et $\boldsymbol{\omega}_m$ se trouvent alors remplacées par les incréments $\Delta\boldsymbol{V}_m^{\mathrm{acc}}(n)$ et $\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\mathrm{gyro}}(n)$ issus de l'UMI (section 3.2).

3.5.1 Équation de la vitesse du porteur

Équation vectorielle :

Soit $\overrightarrow{r}$ le vecteur allant de l'origine $O_t = O_i$ de la terre à l'origine O_m du repère de mesure $[m]$. La vitesse $\overrightarrow{V}^i(O_m)$ et l'accélération $\overrightarrow{\gamma}^i(O_m)$ de O_m par rapport à $[i]$ sont définies par (cf. ann. D) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}^i(O_m) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]}, \\ \overrightarrow{\gamma}^i(O_m) &= \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[i]} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^i(O_m)}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

En outre, la force spécifique $\overrightarrow{f}$ au point O_m est la différence entre $\overrightarrow{\gamma}^i(O_m)$ et le champ de gravité $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r})$ au point O_m (cf. section 3.2). Ainsi :

$$\overrightarrow{\gamma}^i(O_m) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^i(O_m)}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}). \tag{3.12}$$

Exprimons maintenant l'accélération de O_m par rapport à $[t]$ au lieu de $[i]$. En utilisant la loi de composition des accélérations (cf. ann. D), la relation (3.12) se trouve transformée comme suit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^t(O_m)}{\mathrm{d}t}\right|_{[t]} + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}^t(O_m) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{r}\right) = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}), \tag{3.13}$$

soit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^t(O_m)}{\mathrm{d}t}\right|_{[t]} = \overrightarrow{f} - 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}^t(O_m) + \overrightarrow{g_p}(\overrightarrow{r}), \tag{3.14}$$

où $\overrightarrow{g_p}(\overrightarrow{r})$ est le champ de pesanteur au point O_m, défini comme étant la différence entre la gravité et l'accélération d'entraînement provoquée par la rotation de la terre sur elle-même :

$$\overrightarrow{g_p}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}) - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{r}\right). \tag{3.15}$$

Calculons maintenant la dérivée de $\overrightarrow{V}^t(O_m)$ non plus par rapport à $[t]$ mais par rapport à $[w]$, dans le but futur de projeter aisément la relation vectorielle (3.14) dans $[w]$. La loi générale de dérivation par rapport à un repère relatif (ann. D) conduit directement à :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^t(O_m)}{\mathrm{d}t}\right|_{[t]} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^t(O_m)}{\mathrm{d}t}\right|_{[w]} + \overrightarrow{\Omega}^{w/t} \wedge \overrightarrow{V}^t(O_m), \tag{3.16}$$

ce qui, inséré dans la relation (3.14), donne :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^t(O_m)}{\mathrm{d}t}\right|_{[w]} = \overrightarrow{g_p}(\overrightarrow{r}) - \left(\overrightarrow{\Omega}^{w/t} + 2\overrightarrow{\Omega}\right) \wedge \overrightarrow{V}^t(O_m) + \overrightarrow{f}. \tag{3.17}$$

Par la suite, afin de simplifier les notations, nous poserons : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^t(O_m)$ et $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\Omega}^{w/t}$.

Équation projetée dans la plate-forme horizontale :

En utilisant les résultats relatifs aux projections d'un produit vectoriel et de la dérivée d'un vecteur (cf. ann. D), la projection de l'équation (3.17) dans la base $[w]$ s'exprime comme suit :

$$\dot{\boldsymbol{V}}_w = \boldsymbol{g}_{p,w}(\overrightarrow{r}) - \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{\Omega}_w)\boldsymbol{V}_w + \boldsymbol{f}_w, \tag{3.18}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est la matrice antisymétrique associée au produit vectoriel à gauche (cf. ann. D). Afin d'exprimer la force spécifique dans $[m]$ et la rotation terrestre dans $[t]$, on introduit les matrices de passage $\boldsymbol{T}_{wm}$ et $\boldsymbol{T}_{wt}$, lesquelles sont définies dans le paragraphe à suivre. La relation (3.18) devient alors :

$$\dot{\boldsymbol{V}}_w = \boldsymbol{g}_{p,w}(\overrightarrow{r}) - \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t)\boldsymbol{V}_w + \boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{f}_m. \tag{3.19}$$

3.5.2 Les matrices de passage

La loi de dynamique d'une matrice de passage conduit directement à écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{T}}_{wt} &= -\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_w^{w/t}\right)\boldsymbol{T}_{wt}, \\ \dot{\boldsymbol{T}}_{im} &= \boldsymbol{T}_{im}\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_m^{m/i}\right), \end{aligned} \tag{3.20}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{T}}_{wt} &= -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w)\boldsymbol{T}_{wt}, \\ \dot{\boldsymbol{T}}_{im} &= \boldsymbol{T}_{im}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\omega}_m). \end{aligned} \tag{3.21}$$

En outre, on a les relations suivantes (cf. ann. D) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{wm} &= \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{T}_{ti}\boldsymbol{T}_{im}, \\ \boldsymbol{T}_{g'b} &= \boldsymbol{T}_{g'g}\boldsymbol{T}_{gw}\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{T}_{mb}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

où $\boldsymbol{T}_{wt}$ et $\boldsymbol{T}_{im}$ sont déterminées par les équations différentielles matricielles (3.21) et $\boldsymbol{T}_{ti}$, $\boldsymbol{T}_{g'g}$ et $\boldsymbol{T}_{gw}$ sont respectivement définies par les relations (3.4), (3.6) et (3.8).

3.5.3 Équation de la vitesse de rotation de la plate-forme

Dans cette section, une équation de la vitesse de rotation $\boldsymbol{\rho}_w$ de la plate-forme par rapport à la terre est établie. Dans un premier lieu, $\boldsymbol{\Omega}_g^{g/t}$ est exprimé en fonction de la vitesse $\boldsymbol{V}_g$ du porteur. Ensuite, l'expression de $\boldsymbol{\rho}_w$ en fonction des différents choix de mécanisation est discutée. Pour simplifier la démarche, nous supposons la terre sphérique.

Calcul de $\boldsymbol{\Omega}_g^{g/t}$ en fonction de $\boldsymbol{V}_g$:

La figure 3.10 permet d'aboutir rapidement à une expression des composantes $V_{g,x}$, $V_{g,y}$ et $V_{g,z}$ de la vitesse de O_m dans $[g]$ en fonction des variations de latitude et de longitude. En effet, en rappelant que la vitesse linéaire d'un point fixe sur un cercle de rayon r tournant sur lui-même à la vitesse ω vaut $r \times \omega$, il vient :

$$\begin{array}{rcl} V_{g,x} & = & (R+Z)\dot{L}, \\ V_{g,y} & = & -D\dot{G} \;=\; -(R+Z)\cos(L)\dot{G}, \\ V_{g,z} & = & \dot{Z}, \end{array} \tag{3.23}$$

Les deux premières de ces équations conduisent directement à :

$$\begin{array}{rcl} \dot{L} & = & \dfrac{V_{g,x}}{R+Z}, \\ \dot{G} & = & \dfrac{-V_{g,y}}{(R+Z)\cos(L)}. \end{array} \tag{3.24}$$

En ce qui concerne la troisième équation, en remarquant que, de par la définition de $[w]$, $V_{g,z} = V_{w,z}$, alors :

$$\dot{Z} = V_{w,z}. \tag{3.25}$$

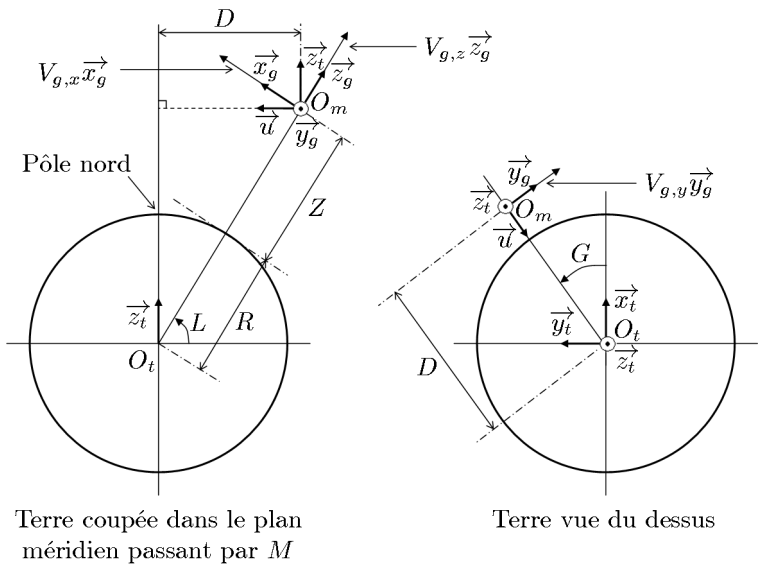


FIG. 3.10 – Mouvement du point M par rapport à la terre

Par ailleurs, la figure 3.10 met évidence le fait que la vitesse instantanée de rotation de $[g]$ par rapport à $[t]$ vaut :

$$\overrightarrow{\Omega}^{g/t} = \dot{L}\overrightarrow{y_g} + \dot{G}\overrightarrow{z_t} = \dot{L}\overrightarrow{y_g} + \dot{G}\left(\cos(L)\overrightarrow{x_g} + \sin(L)\overrightarrow{z_g}\right), \tag{3.26}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Omega_{g,x}^{g/t} &= \dot{G}\cos(L), \\ \Omega_{g,y}^{g/t} &= \dot{L}, \\ \Omega_{g,z}^{g/t} &= \dot{G}\sin(L). \end{aligned} \tag{3.27}$$

En tenant compte du résultat (3.24), (3.27) devient :

$$\begin{aligned} \Omega_{g,x}^{g/t} &= \frac{-V_{g,y}}{(R+Z)}, \\ \Omega_{g,y}^{g/t} &= \frac{V_{g,x}}{R+Z}, \\ \Omega_{g,z}^{g/t} &= \frac{-V_{g,y}}{(R+Z)}\mathrm{tg}(L), \end{aligned} \tag{3.28}$$

soit, sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\Omega}_g^{g/t} = \frac{1}{R+Z}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{tg}(L) & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{V}_g. \tag{3.29}$$

Expression $\boldsymbol{\rho}_w$ en fonction de la mécanisation :

Les calculs de navigation s'opérant dans une plate-forme horizontale, le seul degré de liberté possible pour la mécanisation est l'angle α régissant l'orientation de $[w]$ par rapport à $[g]$ (figure 3.9). Le choix le plus simple est de poser $\alpha = 0$ de sorte que $[w] = [g]$, ce qui constitue une *mécanisation asservie au nord*. Le vecteur $\overrightarrow{x_w}$ est alors en permanence orienté vers le pôle nord (d'ou la terminologie de cette mécanisation) et $\overrightarrow{y_w}$ vers l'ouest. L'équation (3.29) devient alors :

$$\boldsymbol{\Omega}_w^{w/t} = \boldsymbol{\rho}_w = \frac{1}{R+Z}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{tg}(L) & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{V}_w. \tag{3.30}$$

Ce choix présente toutefois un inconvénient puisqu'il devient impossible de naviguer aux pôles. En effet, en ces points géographiques particuliers, la notion de directions nord et ouest n'a plus aucun sens. De surcroît, ces points correspondent à des latitudes L de plus ou moins 90 degrés et par conséquent, la troisième composante $\rho_{w,z}$ de $\boldsymbol{\rho}_w$ diverge car $\mathrm{tg}(L) \to \pm\infty$. Par conséquent, les systèmes de navigation adoptant une mécanisation asservie au nord sont à proscrire pour les latitudes extrêmes (en pratique, supérieures en valeur absolue à 80 degrés). Pour pallier cet inconvénient, la *mécanisation en azimuth libre* a été instaurée. Elle consiste à aligner initialement $[w]$ sur $[g]$ (autrement dit, $\alpha(0) = 0$), puis à laisser évoluer α de sorte que $\rho_{w,z}$ ($= \rho_{g,z}$ car $\overrightarrow{z_w} = \overrightarrow{z_g}$ par définition) soit en permanence nulle (d'où la terminologie d'azimuth libre, α étant l'angle d'azimuth). De ce fait :

$$\rho_{w,z} = \rho_{g,z} = \Omega_{g,z}^{w/t} = \Omega_{g,z}^{w/g} + \Omega_{g,z}^{g/t}, \tag{3.31}$$

ce qui donne, en remarquant que $\Omega_{g,z}^{w/g} = \dot{\alpha}$, en utilisant la relation (3.27) et en imposant $\rho_{w,z} = 0$:

$$\dot{\alpha}(t) = -\dot{G}\sin(L), \quad \alpha(0) = 0. \tag{3.32}$$

La prise en compte de la contrainte $\rho_{w,z} = \rho_{g,z} = 0$ adjointe à l'équation (3.29) conduit à écrire :

$$\boldsymbol{\Omega}_g^{w/t} = \frac{1}{R+Z}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{V}_g, \tag{3.33}$$

soit :

$$\boldsymbol{\Omega}_w^{w/t} = \frac{1}{R+Z}\boldsymbol{T}_{wg}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{T}_{gw}\boldsymbol{V}_w. \tag{3.34}$$

En développant ce calcul à partir de la définition (3.8) de $\boldsymbol{T}_{gw}$, on aboutit à :

$$\boldsymbol{\Omega}_w^{w/t} = \frac{1}{R+Z}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{V}_w. \tag{3.35}$$

On constate alors que ce résultat est le même que (3.30) à une modification près, liée au coefficient à la troisième ligne et deuxième colonne de la matrice. Cela nous incite à introduire à formulation générique suivante pour définir $\boldsymbol{\rho}_w$:

$$\boldsymbol{\rho}_w = \boldsymbol{\mathcal{C}}(L,Z)\boldsymbol{V}_w, \tag{3.36}$$

où :

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}(L,Z) = \frac{1}{R+Z}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

est la matrice de commande de la plate-forme, le terme m régissant son orientation :

- $m = -\mathrm{tg}(L)$ pour une mécanisation asservie au nord,
- $m = 0$ pour une mécanisation en azimuth libre.

3.6 Synthèse d'une navigation inertielle

Les équations (3.19), (3.21), (3.22), (3.25) et (3.36) permettent de synthétiser une navigation inertielle dans une plate-forme horizontale. Par commodité pour le lecteur, nous les rappelons ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{V}}_w &= \boldsymbol{g}_{p,w}(\overrightarrow{r}) - \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t)\boldsymbol{V}_w + \boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{f}_m, && (3.38)\\
\dot{Z} &= V_{w,z}, && (3.39)\\
\dot{\boldsymbol{T}}_{wt} &= -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w)\boldsymbol{T}_{wt}, && (3.40)\\
\dot{\boldsymbol{T}}_{im} &= \boldsymbol{T}_{im}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\omega}_m), && (3.41)\\
\boldsymbol{T}_{wm} &= \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{T}_{ti}\boldsymbol{T}_{im}, && (3.42)\\
\boldsymbol{T}_{g'b} &= \boldsymbol{T}_{g'g}\boldsymbol{T}_{gw}\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{T}_{mb}, && (3.43)\\
\boldsymbol{\rho}_w &= \boldsymbol{\mathcal{C}}(L,Z)\boldsymbol{V}_w. && (3.44)
\end{aligned}$$

Ces équations suffisent à elles seules à réaliser une navigation puisqu'en effet, les angles de position L, G et de mécanisation α, ainsi que les angles d'attitude ψ, θ, φ peuvent respectivement être extraits des matrices $\boldsymbol{T}_{wt}$ et $\boldsymbol{T}_{g'b}$, conformément à la démarche présentée dans l'annexe E. Les informations de vitesse et d'altitude sont quant-à-elles fournies par $\boldsymbol{V}_w$ et Z. Afin d'être embarquées dans un calculateur, ces relations doivent bien évidemment être discrétisées à la fréquence f_n. Or, comme certaines de ces équations différentielles ((3.38), (3.40) et (3.44) par exemple) sont couplées de manière non linéaire entre elles, il est impossible de résoudre avec exactitude le problème. Les approximations à réaliser sont alors fonction du degré de précision

souhaité : typiquement, pour une navigation sous-marine, il sera exigé une précision nettement supérieure à une navigation aérienne.

L'approximation que nous faisons ici est que, compte tenu de la vitesse maximale du porteur et du rayon terrestre, L et G évoluent lentement dans le temps. Par conséquent, en vertu de la relation (3.32), α varie lui aussi de manière lente. Ainsi, du fait que $\boldsymbol{T}_{wt}$ dépend uniquement de ces trois angles (équation 3.10), les coefficients de cette matrice évoluent également de manière lente. Ces considérations nous autorisent à poser :

$$\begin{array}{rcl} L(nT_n) & \approx & L((n-1)T_n), \\ G(nT_n) & \approx & G((n-1)T_n), \\ \alpha(nT_n) & \approx & \alpha((n-1)T_n), \\ \boldsymbol{T}_{wt}(nT_n) & \approx & \boldsymbol{T}_{wt}((n-1)T_n). \end{array} \tag{3.45}$$

Par la suite, afin d'alléger les notations, on notera $L(n)$ au lieu de $L(nT_n)$, cette convention s'étendant aux variables autres que L. Ce raccourci ne devrait en principe pas prêter à confusion entre les variables continues et celles considérées de manière discrète dans le temps, la grandeur mentionnée entre parenthèse renseignant implicitement sur la nature du temps[36].

En rappelant que les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sont nuls, la relation (3.38) peut être intégrée comme suit :

$$\int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \dot{\boldsymbol{V}}_w(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{V}_w(n) - \boldsymbol{V}_w(n-1) = \Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{pes}}(n) + \Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{acc}}(n) + \Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{cor}}(n), \tag{3.46}$$

où :

- le terme $\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{pes}}(n)$ est l'incrément de vitesse associé à la pesanteur :

$$\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{pes}}(n) = \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{g}_{p,w}(\overrightarrow{r}(t))\mathrm{d}t. \tag{3.47}$$

  Comme en théorie, la pesanteur est normale à l'ellipsoïde terrestre, de même que $\overrightarrow{z_w}$, alors seule la troisième composante de $\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{pes}}$ est non nulle. En outre, pour la calculer, il est nécessaire de disposer d'un modèle de $g_p(\overrightarrow{r}(\tau)) = g_{p,w,z}(\overrightarrow{r}(\tau))$ en fonction de la position. Nous pouvons par exemple adopter celui utilisé par Dahia [Dahi 05, p. 62] :

$$g_p(\overrightarrow{r}(t)) = g_p(L(t), Z(t)) = 9,7803 + 0,0519\sin^2(L(t)) - 3,08.10^{-6}Z(t). \tag{3.48}$$

  Compte-tenu de l'approximation réalisée pour L et du faible impact de Z sur $g_{p,w,z}$, il vient :

$$\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{pes}}(n) = T_n \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & g_p(L(n-1), Z(n-1)) \end{array}\right]^T. \tag{3.49}$$

- $\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{acc}}(n)$ est l'incrément accélérométrique exprimé dans $[w]$:

$$\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{acc}}(n) = \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{T}_{wm}(t)\boldsymbol{f}_m(t)\mathrm{d}t, \tag{3.50}$$

  $\boldsymbol{T}_{wm}(t)$ étant obtenu via la relation (3.42). Compte-tenu de la dynamique des matrices de passage (faible pour $\boldsymbol{T}_{wt}$ et $\boldsymbol{T}_{ti}$, relativement élevée pour $\boldsymbol{T}_{im}$), ce calcul est approximé par :

$$\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{acc}}(n) = \boldsymbol{T}_{wt}(n-1)\boldsymbol{T}_{ti}(n)\left(\frac{\boldsymbol{T}_{im}(n) + \boldsymbol{T}_{im}(n-1)}{2}\right)\int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{f}_m(t)\mathrm{d}t, \tag{3.51}$$

[36] En fait, nous avons l'habitude de noter le temps discret en indice et non entre parenthèse, mais nous dérogeons à la règle dans cette section afin de ne pas mélanger le temps et les indices correspondants aux repères dans lesquels les vecteurs sont projetés.

où l'on reconnaît l'incrément accélérométrique en sortie de l'UMI :

$$\int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{f}_m(t)\mathrm{d}t = \Delta \boldsymbol{V}_m^{\mathrm{acc}}(n). \tag{3.52}$$

La matrice de passage $\boldsymbol{T}_{ti}$ est calculée à partir de la relation (3.4), tandis que $\boldsymbol{T}_{im}$ est déterminé à partir de (3.41). Cette équation différentielle étant complètement décorrélée des autres, elle peut être résolue de manière exacte en utilisant la méthode de Bortz [Bort 70] [Bort 71] :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_{im}(n) &= \boldsymbol{T}_{im}(n-1)\mathrm{d}\boldsymbol{T}_{im}, \\
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_{\mathrm{im}} &= \boldsymbol{I}_3 + \frac{\sin(\Delta\boldsymbol{\Theta})}{\Delta\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\mathrm{gyro}}(n)) + \frac{1-\cos(\Delta\boldsymbol{\Theta})}{(\Delta\boldsymbol{\Theta})^2}\left\{\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\mathrm{gyro}}(n))\right\}^2, \\
\Delta\boldsymbol{\Theta} &= \|\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\mathrm{gyro}}(n)\|, \\
\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\mathrm{gyro}}(n) &= \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{\omega}_m(t)\mathrm{d}t : \text{Incrément gyroscopique en sortie de l'UMI.}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

La méthode de Bortz est une méthode analytique exacte (sous réserve que l'axe de rotation soit fixe entre les instants $n-1$ et n) et par conséquent, elle conserve le caractère orthogonal de la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{im}$. A noter que dans le cas de faibles rotations du porteur, alors $\Delta\boldsymbol{\Theta} << 1$, ce qui simplifie la relation (3.53) comme suit :

$$\boldsymbol{T}_{im}(n) = \boldsymbol{T}_{im}(n-1)\left\{\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\mathrm{gyro}}(n))\right\}, \tag{3.54}$$

ou encore, après quelques manipulations :

$$\boldsymbol{T}_{im}(n) = \left\{\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta\boldsymbol{\Theta}_i^{\mathrm{gyro}}(n))\right\}\boldsymbol{T}_{im}(n-1). \tag{3.55}$$

Cette approximation, communément appelée *intégration à l'ordre 1*, ne garantit cependant plus la symétrie de $\boldsymbol{T}_{im}$, notamment en présence d'incréments $\boldsymbol{\Theta}_m^{\mathrm{gyro}}$ d'amplitude importante.

- le terme $\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{cor}}(n)$ est l'incrément de vitesse induit par l'accélération de Coriolis :

$$\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{cor}}(n) = -\int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w(t) + 2\boldsymbol{T}_{wt}(t)\boldsymbol{\Omega}_t)\boldsymbol{V}_w(t)\mathrm{d}t. \tag{3.56}$$

Ce calcul est approximé par :

$$\Delta\boldsymbol{V}_w^{\mathrm{cor}}(n) = -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta\boldsymbol{\theta}_m^{\mathrm{meca}}(n) + 2T_n\boldsymbol{T}_{wt}(n-1)\boldsymbol{\Omega}_t)\boldsymbol{V}_w(n-1), \tag{3.57}$$

où $\Delta\boldsymbol{\theta}_w^{\mathrm{meca}}(n)$ est l'angle définissant la rotation opérée par la plate-forme entre les instants $n-1$ et n :

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_w^{\mathrm{meca}}(n) = \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{\rho}_w(t)\mathrm{d}t. \tag{3.58}$$

Cet angle est obtenu à partir de l'équation (3.44), laquelle, compte tenu de l'approximation réalisée pour L et de la faible influence de Z, conduit à écrire :

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_w^{\mathrm{meca}}(n) = \boldsymbol{\mathcal{C}}(L(n-1), Z(n-1))\Delta\boldsymbol{r}_w(n), \tag{3.59}$$

où $\Delta \boldsymbol{r}_w(n)$ est l'intégrale de $\boldsymbol{V}_w$ entre les instants $n-1$ et n, calculée par la méthode des trapèzes :

$$\Delta \boldsymbol{r}_w(n) = \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{V}_w(t)\mathrm{d}t = \frac{T_n}{2}\left(\boldsymbol{V}_w(n) + \boldsymbol{V}_w(n-1)\right). \tag{3.60}$$

A noter que pour la mise en œuvre de l'algorithme d'intégration de navigation, il sera nécessaire de remplacer $\Delta \boldsymbol{\theta}_w^{\mathrm{meca}}(n)$ dans l'équation (3.57) par $\Delta \boldsymbol{\theta}_w^{\mathrm{meca}}(n-1)$, cette approximation se justifiant en considérant que $\boldsymbol{\rho}_w$ évolue plus lentement que $\boldsymbol{V}_w$.

En outre, la relation (3.60) permet de calculer directement $Z(n)$ puisqu'en effet, en vertu de la relation (3.39), la troisième composante de $\Delta \boldsymbol{r}_w(n)$ représente la variation d'altitude entre les instants $n-1$ et n :

$$Z(n) = Z(n-1) + \left[\Delta \boldsymbol{r}_w(n)\right]^3. \tag{3.61}$$

Une fois $\Delta \boldsymbol{\theta}_w^{\mathrm{meca}}(n)$ calculé, la relation (3.40) permet de mettre à jour la matrice $\boldsymbol{T}_{wt}$ à partir d'un intégration à l'ordre 1, analogue à (3.55) :

$$\boldsymbol{T}_{wt}(n) = \left\{\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\Delta \boldsymbol{\theta}_w^{\mathrm{meca}}(n)\right)\right\} \boldsymbol{T}_{wt}(n-1). \tag{3.62}$$

Les angles de position $L(n)$, $G(n)$ et l'angle de mécanisation $\alpha(n)$ peuvent alors être calculés à partir de $\boldsymbol{T}_{wt}(n)$ (cf. ann. E). La dernière étape à réaliser est d'extraire des angles d'attitude $\psi(n)$, $\theta(n)$ et $\varphi(n)$ de la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{g'b}(n)$. Cette dernière s'obtient en utilisant les équations (3.42) et (3.43), lesquelles conduisent à écrire :

$$\boldsymbol{T}_{g'b}(n) = \boldsymbol{T}_{g'g}\boldsymbol{T}_{gw}(n)\boldsymbol{T}_{wt}(n)\boldsymbol{T}_{ti}(n)\boldsymbol{T}_{im}(n)\boldsymbol{T}_{mb}. \tag{3.63}$$

Parmi toutes ces matrices de passage, $\boldsymbol{T}_{wt}(n)$, $\boldsymbol{T}_{ti}(n)$ et $\boldsymbol{T}_{im}(n)$ ont déjà été calculée à partir de (3.62), (3.4) et (3.53). $\boldsymbol{T}_{gw}(n)$ s'obtient à partir de $\alpha(n)$, en utilisant la relation (3.8). Enfin, $\boldsymbol{T}_{g'g}$ et $\boldsymbol{T}_{mb}$ sont des matrices constantes, respectivement définies par (3.6) et l'architecture du porteur.

Les équations (3.46), (3.49) à (3.53) et (3.57) à (3.63) permettent de synthétiser une intégration de navigation en temps discret, dont la démarche est décrite par l'algorithme 15. Les grandeurs de navigation, à savoir le position, la vitesse et l'attitude du véhicule, sont respectivement décrites par le triplet $\{L(n), G(n), Z(n)\}$, le vecteur projeté $\boldsymbol{V}_g(n)$ et le triplet $\{\psi(n), \theta(n), \varphi(n)\}$. L'ensemble {UMI + module d'intégration de navigation} est généralement appelé *système de navigation par inertie* (INS en anglais pour Inertial Navigation System). A noter que le calcul de $\boldsymbol{T}_{gm}(0)$ dans l'algorithme 15 correspond à l'*alignement* de la centrale inertielle. Cette procédure particulièrement délicate est cruciale pour le bon fonctionnement du module de navigation puisque qu'un mauvais calcul de $\boldsymbol{T}_{gm}(0) = \boldsymbol{T}_{wm}(0)$ revient à mal orienter $[w]$ relativement à $[m]$. Une telle erreur aura pour conséquence de projeter les grandeurs de navigation dans un repère $[w]$ incorrectement orienté, ce qui se répercutera sur les performances de navigation.

3.7 Les erreurs de navigation par inertie

L'INS présenté dans la section précédente permet d'obtenir à chaque instant n des informations concernant la position du porteur, sa vitesse par rapport à la terre et son attitude, à partir de mesures inertielles. Malheureusement, les grandeurs en sortie de ce module sont généralement entachées d'erreurs. Hormis les approximations liées à la discrétisation des relations de l'algorithme 15 (dont l'impact est négligeable), les différentes sources d'erreurs sont :

- A l'instant $n = 0$, initialiser l'algorithme d'intégration :

  1. Initialiser la navigation, c'est-à-dire régler :
     - la position initiale décrite par $L(0)$, $G(0)$ et $Z(0)$,
     - la vitesse initiale $\boldsymbol{V}_g(0)$ du porteur par rapport à la terre suivant les directions nord, ouest et zénithale,
     - l'orientation du repère de mesure $[m]$ par rapport au trièdre géographique local $[g]$, c'est-à-dire la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{gm}(0)$.
  2. Calculer $\boldsymbol{T}_{gt}(0)$ à partir des angles $L(0)$ et $G(0)$:

$$\boldsymbol{T}_{gt}(0) = \begin{bmatrix} -\sin(L(0))\ \cos(G(0)) & -\sin(L(0))\ \sin(G(0)) & \cos(L(0)) \\ \sin(G(0)) & -\cos(G(0)) & 0 \\ \cos(L(0))\ \cos(G(0)) & \cos(L(0))\ \sin(G(0)) & \sin(L(0)) \end{bmatrix}.$$

  3. Du fait qu'à l'instant $t = 0$, $[w] = [g]$ et $[t] = [i]$, opérer les affectations suivantes :

$$\boldsymbol{V}_w(0) = \boldsymbol{V}_g(0), \quad \boldsymbol{T}_{wt}(0) = \boldsymbol{T}_{gt}(0), \quad \boldsymbol{T}_{wm}(0) = \boldsymbol{T}_{gm}(0).$$

  4. Calculer $\boldsymbol{T}_{im}(0)$: $\boldsymbol{T}_{im}(0) = \boldsymbol{T}_{tm}(0) = \boldsymbol{T}_{wt}^T(0)\boldsymbol{T}_{wm}(0)$.
  5. Poser : $\Delta\boldsymbol{\Theta}_w^{\text{meca}}(0) = \boldsymbol{0}_{3\times 1}$.

- Aux instants $n \geq 1$:

  1. Mettre à jour par la méthode de Bortz la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{im}$, à partir de l'incrément gyroscopique $\boldsymbol{\Theta}_m^{\text{gyro}}(n)$ issu de l'UMI :

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\Theta} &= \|\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\text{gyro}}(n)\|, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{T}_{\text{im}} &= \boldsymbol{I}_3 + \frac{\sin(\Delta\boldsymbol{\Theta})}{\Delta\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\text{gyro}}(n)) + \frac{1-\cos(\Delta\boldsymbol{\Theta})}{(\Delta\boldsymbol{\Theta})^2}\left\{\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta\boldsymbol{\Theta}_m^{\text{gyro}}(n))\right\}^2, \\ \boldsymbol{T}_{im}(n) &= \boldsymbol{T}_{im}(n-1)\mathrm{d}\boldsymbol{T}_{im}. \end{aligned}$$

  2. Calculer la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{ti}(n)$:

$$\boldsymbol{T}_{ti}(n) = \begin{bmatrix} \cos(n\Omega T_n) & \sin(n\Omega T_n) & 0 \\ -\sin(n\Omega T_n) & \cos(n\Omega T_n) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{où :} \quad \begin{aligned} \Omega &= 7,292\ 115.10^{-5}\ \text{rad/s}, \\ T_n &= 10\ \text{s}. \end{aligned}$$

  3. Calculer l'incrément de vitesse induit par la pesanteur :

$$\begin{aligned} g_p(L(n-1), Z(n-1)) &= 9,7803 + 0,0519\sin^2(L(n-1)) - 3,08.10^{-6}Z(n-1), \\ \Delta\boldsymbol{V}_w^{\text{pes}}(n) &= T_n\left[0\ \ 0\ \ g_p(L(n-1), Z(n-1))\right]^T. \end{aligned}$$

  4. Projeter dans $[w]$ l'incrément accélérométrique $\Delta\boldsymbol{V}_w^{\text{acc}}(n)$ issu de l'UMI :

$$\Delta\boldsymbol{V}_w^{\text{acc}}(n) = 0,5\boldsymbol{T}_{wt}(n-1)\boldsymbol{T}_{ti}(n)\left\{\boldsymbol{T}_{im}(n) + \boldsymbol{T}_{im}(n-1)\right\}\Delta\boldsymbol{V}_m^{\text{acc}}(n).$$

  5. Calculer l'incrément de vitesse induit par l'accélération de Coriolis :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_t &= \left[0\ \ 0\ \ \Omega\right]^T, \\ \Delta\boldsymbol{V}_w^{\text{cor}}(n) &= -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta\boldsymbol{\theta}_m^{\text{meca}}(n-1) + 2T_n\boldsymbol{T}_{wt}(n-1)\boldsymbol{\Omega}_t)\boldsymbol{V}_w(n-1). \end{aligned}$$

  6. Mettre à jour la vitesse $\boldsymbol{V}_w$ du porteur :

$$\boldsymbol{V}_w(n) = \boldsymbol{V}_w(n-1) + \Delta\boldsymbol{V}_w^{\text{pes}}(n) + \Delta\boldsymbol{V}_w^{\text{acc}}(n) + \Delta\boldsymbol{V}_w^{\text{cor}}(n).$$

Voir la suite de l'algorithme page suivante...

Suite le l'algorithme d'intégration de navigation :

7. Calculer l'incrément de position entre les instant $n-1$ et n :

$$\Delta \boldsymbol{r}_w(n) = 0,5T_n\left(\boldsymbol{V}_w(n) + \boldsymbol{V}_w(n-1)\right).$$

8. Mettre à jour l'altitude : $Z(n) = Z(n-1) + [\Delta \boldsymbol{r}_w(n)]^3$.
9. Calculer l'incrément d'angle entre $[w]$ et $[t]$ entre les instants $n-1$ et n, selon la mécanisation adoptée :

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_w^{\text{meca}}(n) = \frac{1}{R+Z(n)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{r}_w(n),$$

où $R = 6378137$ m et m dépend de la mécanisation adoptée :

$$m = \begin{cases} -\text{tg}(L(n-1)) & \text{si la mécanisation est asservie au nord,} \\ 0 & \text{si la mécanisation est en azimuth libre.} \end{cases}$$

10. Mettre à jour $\boldsymbol{T}_{wt}$ par une intégration à l'ordre 1 :

$$\boldsymbol{T}_{wt}(n) = \left\{\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta \boldsymbol{\theta}_w^{\text{meca}}(n))\right\} \boldsymbol{T}_{wt}(n-1).$$

11. Extraire de $\boldsymbol{T}_{wt}(n)$ les angles $L(n)$ et $G(n)$ (cf. ann. E).
12. Calculer la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{gw}(n)$ en fonction de la mécanisation adoptée :
    - poser : $\boldsymbol{T}_{gw}(n) = \boldsymbol{I}_3$ si la mécanisation est asservie au nord,
    - extraire l'angle $\alpha(n)$ de $\boldsymbol{T}_{wt}(n)$ (cf. ann. E) puis calculer $\boldsymbol{T}_{gw}(n)$ si la mécanisation est en azimuth libre :

$$\boldsymbol{T}_{gw}(n) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha(n)) & -\sin(\alpha(n)) & 0 \\ \sin(\alpha(n)) & \cos(\alpha(n)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Projeter la vitesse dans le trièdre géographique local :

$$\boldsymbol{V}_g(n) = \boldsymbol{T}_{gw}(n)\boldsymbol{V}_w(n).$$

14. Calculer la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{g'b}(n)$:

$$\boldsymbol{T}_{g'b}(n) = \boldsymbol{T}_{g'g}\boldsymbol{T}_{gw}(n)\boldsymbol{T}_{wt}(n)\boldsymbol{T}_{ti}(n)\boldsymbol{T}_{im}(n)\boldsymbol{T}_{mb},$$

où : $\boldsymbol{T}_{g'g} = \text{diag}(1,-1,-1)$ et $\boldsymbol{T}_{mb}$ est une matrice constante dépendant de l'architecture du porteur.

15. Extraire de $\boldsymbol{T}_{g'b}(n)$ les angles $\psi(n)$, $\theta(n)$ et $\varphi(n)$ (cf. ann. E).

Algorithme 15: L'intégration de navigation

- des valeurs d'incréments accélérométrique $\boldsymbol{V}_m^{\text{acc}}$ et gyroscopique $\boldsymbol{\Theta}_m^{\text{gyro}}$ légèrement erronées, en raison d'une pré-compensation imparfaite des erreurs internes à l'UMI (cf. section 3.2)
- un modèle de pesanteur imprécis,
- une mauvaise initialisation de la position et/ou de la vitesse,
- un mauvais alignement.

Ces diverses sources d'erreur, cumulées dans le temps, font que les informations issues de l'INS s'écartent des valeurs vraies. Afin de conserver un niveau de performances acceptable, il s'avère alors nécessaire de corriger ces grandeurs en estimant les erreurs les entachant, grâce à un estimateur d'état appelé *filtre de navigation* (figure 3.11). Cela nécessite de :

- modéliser la dynamique des erreurs de navigation,
- disposer d'un *dispositif externe de mesures* tel que le GPS, un radar, un loch, etc. observant de manière échantillonnée dans le temps la position et/ou la vitesse du porteur. L'exploitation de ces informations constitue l'*hybridation*.

Le premier point fait l'objet de cette section, le second point étant quant-à-lui abordé dans la partie suivante.

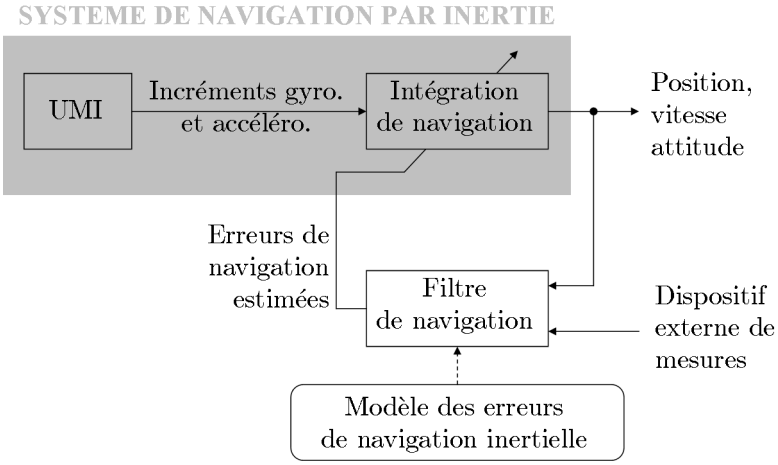


Fig. 3.11 – Architecture générique d'un système de navigation hybridé

3.7.1 Équations vectorielles des erreurs de navigation

Principe d'invariance à la loi de mécanisation [Isra 99] :

Toutes les mécanisations fournissent des résultats de navigation équivalents, pourvu que celles-ci n'influencent pas physiquement sur la cinématique du cœur de la centrale, ce qui est le cas pour les centrales à composants liés. En d'autres termes, quelle que soit la mécanisation adoptée, la cinématique calculée du porteur relativement à l'espace inertiel demeure identique. Ce résultat coule de source en ce sens où les informations issues de l'UMI demeurent les mêmes, le choix du repère de projection des équations de navigation ne constituant qu'une opération mathématique. A noter qu'en pratique, le choix de la mécanisation a toutefois une légère influence liée aux erreurs de calculs des algorithmes associés.

Nous allons exploiter cette propriété afin d'obtenir le modèle vectoriel dynamique des erreurs de navigation dans le cas d'une mécanisation inertielle (autrement dit, $[w] = [i]$). Ce modèle sera alors généralisé au cas d'une navigation dans une plate-forme horizontale, ce résultat constituant au final celui recherché, puisque la navigation présentée dans l'algorithme 15 s'effectue dans une telle plate-forme. L'avantage de cette démarche est qu'elle permet d'obtenir de manière plus compréhensible le modèle des erreurs de navigation, en ce sens où les phénomènes physiques mis en jeux apparaissent plus clairement.

Équations des erreurs de position et de vitesse dans le cas d'une mécanisation inertielle :

Reprenons l'équation vectorielle (3.12) régissant l'évolution de la position du porteur et de sa vitesse par rapport à l'espace inertiel :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[i]} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}). \tag{3.64}$$

Cette équation est sujette à l'apparition d'erreurs, lesquelles peuvent provenir de trois sources potentielles. On distingue :

- les erreurs de projection de la force spécifique. En effet, les accéléromètres mesurent la projection $\boldsymbol{f}_m$ dans le repère $[m]$ de la force spécifique $\overrightarrow{f}$. Cette grandeur est alors exprimée dans le repère de travail $[w] = [i]$ à partir de $\boldsymbol{T}_{wm}$ (cf. figure 3.12). Or, les coefficients de cette matrice de passage sont généralement entachés de petites erreurs, dont les causes seront évoquées plus loin. Par conséquent, la grandeur $\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{f}_m$ représente bel et bien les composantes de $\overrightarrow{f}$ dans $[w]$, mais ce repère ne coïncide pas exactement avec $[i]$. En réalité, $[w] = [i_e]$, où $[i_e]$ est le trièdre inertiel *estimé*, lequel coïnciderait parfaitement avec $[i]$ en l'absence d'erreur sur $\boldsymbol{T}_{wm} = \boldsymbol{T}_{i_e m}$. L'écart angulaire entre les axes respectifs de $[i]$ et $[i_e]$ est cependant faible, de sorte que l'on peut légitimement considérer que $[i_e]$ est issu d'une *micro-rotation* $\overrightarrow{\Psi}$ de $[i]$ (cf. ann. D). Du fait que la procédure d'intégration de navigation ignore cette différence entre $[i_e]$ et $[i]$, le vecteur de force spécifique qu'elle utilise subit une erreur d'orientation $-\overrightarrow{\Psi}$ (cf. figure 3.13), ce qui correspond à une erreur de force spécifique valant $-\overrightarrow{\Psi} \wedge \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{\Psi}$ (cf. ann. E).

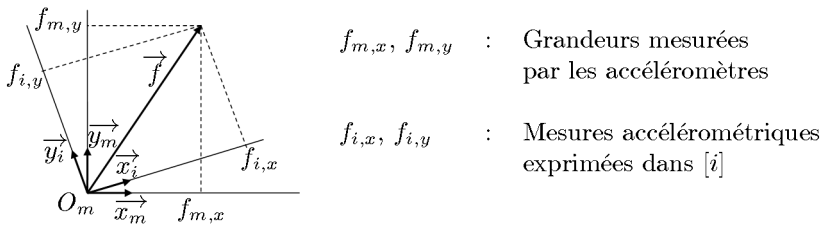


Fig. 3.12 – Obtention des composantes de la force spécifique dans $[i]$

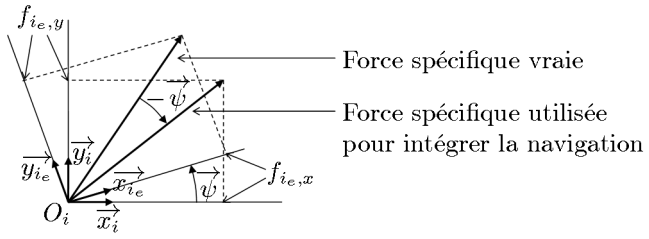


Fig. 3.13 – Erreur d'orientation du vecteur de force spécifique

- Les erreurs accélérométriques. En effet, la grandeur mesurée par les accéléromètres est en réalité la projection dans $[m]$ de $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f^*} + \overrightarrow{\varepsilon_a}$ où $\overrightarrow{f^*}$ est la force spécifique vraie et $\overrightarrow{\varepsilon_a}$ est un vecteur décrivant les erreurs accélérométriques.
- Les erreurs de compensation de la gravité, lesquelles proviennent de deux sources différentes :

- une erreur dans le modèle de gravité, ce phénomène étant appelé *anomalie de gravité*.
- une mauvaise compensation de $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r})$, provoquée par une erreur sur le vecteur $\overrightarrow{r}$.

L'erreur de gravité vaut :

$$\overrightarrow{g}\,(\overrightarrow{r}+\delta\overrightarrow{r})-\overrightarrow{g}\,(\overrightarrow{r})=\left(\frac{\partial\overrightarrow{g}}{\partial\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r}+\delta\overrightarrow{g}, \tag{3.65}$$

où $\delta\overrightarrow{r}$ est l'erreur sur le vecteur $\overrightarrow{r}$ et $\delta\overrightarrow{g}$ l'anomalie de gravité.

En tenant compte de ces diverses erreurs, la relation (3.64) devient :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[i]}=\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r^*}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[i]}+\left.\frac{\mathrm{d}^2\delta\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[i]}=\overrightarrow{f^*}+\overrightarrow{\varepsilon_a}+\overrightarrow{f}\wedge\overrightarrow{\Psi}+\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r^*})+\left(\frac{\partial\overrightarrow{g}}{\partial\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r}+\delta\overrightarrow{g}, \tag{3.66}$$

où $\overrightarrow{r^*}=\overrightarrow{r}-\delta\overrightarrow{r}$ est le vecteur de position vraie. Comme les grandeurs vraies $\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r^*}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[i]}$, $\overrightarrow{f^*}$ et $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r^*})$ vérifient par définition la relation (3.64), (3.66) se simplifie comme suit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\delta\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[i]}=\overrightarrow{\varepsilon_a}+\overrightarrow{f}\wedge\overrightarrow{\Psi}+\left(\frac{\partial\overrightarrow{g}}{\partial\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r}+\delta\overrightarrow{g}. \tag{3.67}$$

Dans l'hypothèse d'une absence d'anomalies de gravité, cette équation donne finalement :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\delta\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[i]}=\overrightarrow{\varepsilon_a}+\overrightarrow{f}\wedge\overrightarrow{\Psi}+\left(\frac{\partial\overrightarrow{g}}{\partial\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r}. \tag{3.68}$$

Équation d'erreur d'orientation de $[i_e]$ par rapport à $[i]$:

La non-coïncidence des repères $[i]$ et $[i_e]$ évoquée dans le paragraphe précédent est due, outre un mauvais calage initial de $[i_e]$ sur $[i]$, aux erreurs gyroscopiques. En effet, la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{i_em}$ effectivement utilisée est entretenue par une relation analogue à (3.41), en l'occurrence :

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{i_em}=\boldsymbol{T}_{i_em}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\omega}_m) \tag{3.69}$$

où $\boldsymbol{\omega}_m$ est la mesure gyrométrique réalisée, à savoir la projection dans $[m]$ du vecteur $\overrightarrow{\omega}=\overrightarrow{\Omega}^{m/i_e}$. De manière analogue aux mesures accélérométriques considérées, on pose :

$$\overrightarrow{\omega}=\overrightarrow{\omega^*}+\overrightarrow{\varepsilon_g}, \tag{3.70}$$

où $\overrightarrow{\omega^*}$ est la vitesse de rotation vraie, c'est-à-dire $\overrightarrow{\Omega}^{m/i}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_g}$ le vecteur des erreurs gyroscopiques. En vertu de la loi de composition des vitesses angulaires, on trouve donc :

$$\overrightarrow{\varepsilon_g}=\overrightarrow{\Omega}^{m/i_e}-\overrightarrow{\Omega}^{m/i}=\overrightarrow{\Omega}^{i/i_e}. \tag{3.71}$$

Comme par définition, $\overrightarrow{\Psi}$ est l'angle vectoriel permettant de passer de $[i]$ à $[i_e]$ (autrement dit, $\overrightarrow{\Psi}=\overrightarrow{\Theta}^{i_e/i}$), alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Psi}}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]}=\overrightarrow{\Omega}^{i_e/i}, \tag{3.72}$$

ce qui, en utilisant la relation (3.71), donne :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Psi}}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]}=-\overrightarrow{\varepsilon_g}. \tag{3.73}$$

Équations vectorielles pour une navigation calculée dans une plate-forme horizontale :

Soit $\delta\overrightarrow{V}$ l'erreur de vitesse du point caractéristique M du porteur par rapport à la terre :

$$\delta\overrightarrow{V} = \left.\frac{\mathrm{d}\delta\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[t]}. \tag{3.74}$$

Considérons de nouveau de cas d'une navigation dont les calculs s'opèrent dans une plate-forme horizontale virtuelle, matérialisée par le repère de travail $[w]$. En utilisant la loi de dérivation d'un vecteur par rapport à un repère relatif (cf. ann. E), il vient :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\delta\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[w]} = \left.\frac{\mathrm{d}\delta\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[t]} + \overrightarrow{\Omega}^{t/w} \wedge \overrightarrow{r} = \delta\overrightarrow{V} - \overrightarrow{\rho} \wedge \overrightarrow{r}. \tag{3.75}$$

En procédant de même pour le micro-rotateur $\overrightarrow{\Psi}$ (équation (3.73)), on trouve facilement :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\delta\overrightarrow{\Psi}}{\mathrm{d}t}\right|_{[w]} = \left.\frac{\mathrm{d}\delta\overrightarrow{\Psi}}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]} + \overrightarrow{\Omega}^{i/w} \wedge \overrightarrow{\Psi} = -\overrightarrow{\varepsilon_g} - \left(\overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{\rho}\right) \wedge \overrightarrow{\Psi}. \tag{3.76}$$

Par ailleurs, modifions la relation (3.68) de sorte qu'elle fasse intervenir la dérivée de $\delta\overrightarrow{V}$ par rapport au temps dans $[w]$. En appliquant la loi de composition des accélérations de manière analogue à celle présentée dans la section 3.5.1, il vient :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\delta\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{[w]} = \left(\frac{\partial\overrightarrow{g}}{\partial\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} + \delta\overrightarrow{r}\right) - \left(2\overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{\rho}\right) \wedge \delta\overrightarrow{V} + \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{\Psi} + \overrightarrow{\varepsilon_a}. \tag{3.77}$$

Comme la pesanteur $\overrightarrow{g_p}(\overrightarrow{r})$ est définie par : $\overrightarrow{g_p}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}) - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{r}\right)$ et que $\overrightarrow{\Omega}$ est un vecteur fixe dans l'espace inertiel, alors :

$$\left(\frac{\partial\overrightarrow{g_p}}{\partial\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r} = \left(\frac{\partial\overrightarrow{g}}{\partial\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} + \delta\overrightarrow{r}\right). \tag{3.78}$$

La prise en compte de ce résultat simplifie la relation (3.76) comme suit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\delta\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{[w]} = \left(\frac{\partial\overrightarrow{g_p}}{\partial\overrightarrow{r}}\right)\delta\overrightarrow{r} - \left(2\overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{\rho}\right) \wedge \delta\overrightarrow{V} + \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{\Psi} + \overrightarrow{\varepsilon_a}. \tag{3.79}$$

On remarquera par ailleurs la forte ressemblance entre les équations (3.79) et (3.17).

3.7.2 Modèle analytique des erreurs de navigation

En projetant les relations (3.75), (3.76) et (3.79) dans la plate-forme horizontale matérialisée par $[w]$, il vient le modèle dynamique suivant :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\boldsymbol{r}}_w \\ \delta\dot{\boldsymbol{V}}_w \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w) & \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z) & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{f}_w) \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{r}_w \\ \delta\boldsymbol{V}_w \\ \boldsymbol{\Psi}_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{a,w} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_{r,w} \end{bmatrix}, \tag{3.80}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z)$ constitue la matrice de couplage de Schüler. Du fait que $[w]$ matérialise une plate-forme horizontale (à une légère erreur d'orientation près), alors $\boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z)$ se voit définie comme suit (cf. ann. E) :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z) = \frac{g_p(L, Z)}{R + Z} \operatorname{diag}(-1, -1, +2). \tag{3.81}$$

Le système dynamique (3.80) est conventionnellement appelé *modèle d'erreurs en* Ψ. Il fournit une indication sur l'erreur de position du porteur par rapport à la terre grâce à $\delta \boldsymbol{r}_w$. Il fournit également l'erreur de vitesse relativement à la terre, matérialisée par $\delta \boldsymbol{V}_w$. Le micro-rotateur $\boldsymbol{\Psi}_w$ donne quant-à-lui une information de l'erreur d'orientation du repère inertiel $[i_e]$ estimé via les mesures gyroscopiques par rapport au trièdre inertiel vrai $[i]$.

3.7.3 Équations d'erreurs d'orientation de repères

Les grandeurs calculées par le modèle en Ψ, prises telles quelles, ne sont en soit pas suffisantes pour caractériser les erreurs d'un INS. En effet, il est également important de connaître l'erreur d'orientation du trièdre $[w]$ entretenu par l'INS par rapport à l'orientation qu'il devrait réellement avoir, en l'absence d'erreur. On introduit alors le repère *vrai* $[v]$, sur lequel $[w]$ devrait dans l'idéal s'aligner. Soit $\overrightarrow{\Theta}^{v/i}(t)$ la rotation transformant à l'instant t le repère inertiel $[i]$ en la plate-forme vraie $[v]$ ($= [w]$ en l'absence d'erreur). Compte-tenu des définitions des matrices de passage $\boldsymbol{T}_{it}$ et $\boldsymbol{T}_{tw}$ (équations (3.4) et (3.10)), nous constatons que la rotation $\overrightarrow{\Theta}^{v/i}(t)$ dépend :

- de la vitesse de rotation terrestre Ω et de l'instant t, lesquels représentent des grandeurs parfaitement connues,
- des grandeurs de navigation que sont la latitude L et la longitude G,
- de l'angle de mécanisation α qui :
  - vaut 0 si la mécanisation est asservie au nord,
  - est entièrement défini par L et G (équation (3.32)) si la mécanisation est en azimuth libre.

Ainsi, la rotation définissant la plate-forme à partir de l'espace inertiel dépend des deux grandeurs de navigation que sont la latitude et la longitude. Considérons alors deux cas de figure :

- les angles de latitude et de longitude prennent leur vraie valeur L^* et G^* (c'est-à-dire celle obtenue en l'absence d'erreur de navigation) : la rotation $\overrightarrow{\Theta}^{v/i}$ appliquée à partir de L^* et G^* transforme alors $[i]$ en la vraie plate-forme $[v]$;
- les angles de latitude L et de longitude G sont ceux calculés par l'INS et sont donc entachés d'erreurs δL et δG :

$$\begin{aligned} L &= L^* + \delta L, \\ G &= G^* + \delta G. \end{aligned} \tag{3.82}$$

  La rotation $\overrightarrow{\Theta}^{v_c/i}$ appliquée à partir de L et G transforme alors $[i]$ en une plate-forme $[v_c]$ ne coïncidant pas avec $[v]$ en raison de l'erreur de position caractérisée par δL et δG.

En fait $[v]$ est le repère vrai au point vrai (c'est-à-dire le point de l'espace en lequel se trouve réellement le cœur de la centrale inertielle) et $[v_c]$ le repère vrai au point calculé (c'est-à-dire le point de l'espace correspondant aux coordonnées de position calculées par l'INS)[37]. En vertu

[37] Dans le cas d'une mécanisation asservie au nord, $[v]$ est alors le trièdre géographique local au point vrai (de latitude L^* et de longitude G^*) et $[v_c]$ le trièdre géographique local au point calculé (de latitude $L^* + \delta L$ et de longitude $G^* + \delta G$).

de la loi de composition des vitesses angulaires, $\overrightarrow{\Theta}^{v_c/i} = \overrightarrow{\Theta}^{v/i} + \overrightarrow{\eta}$, où $\overrightarrow{\eta} = \overrightarrow{\Theta}^{v_c/v}$ est une micro-rotation engendrée par δL et δG. Calculons ce vecteur :

$$\overrightarrow{\eta} = \overrightarrow{\Theta}^{v_c/v} = \overrightarrow{\Theta}^{v_c/t} - \overrightarrow{\Theta}^{v/t} = \delta\overrightarrow{\Theta}^{v/t}. \tag{3.83}$$

La micro-rotation $\overrightarrow{\eta}$ est donc égale à l'erreur $\delta\overrightarrow{\Theta}^{v/t}$ commise en orientant la plate-forme à partir du repère terrestre $[t]$, cette mauvaise orientation étant provoquée par une erreur de position. En reprenant sous forme différentielle l'équation (3.36) définissant l'orientation de la plate-forme par rapport à $[t]$, il vient :

$$\delta\boldsymbol{\Theta}_w^{v/t} = \boldsymbol{\mathcal{C}}(L, Z)\delta\boldsymbol{r}_w, \tag{3.84}$$

ce qui, en tenant compte du résultat (3.83) projeté dans $[w]$, donne :

$$\boldsymbol{\eta}_w = \boldsymbol{\mathcal{C}}(L, Z)\delta\boldsymbol{r}_w, \tag{3.85}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{C}}(L, Z)$ est la matrice de commande de la plate-forme, définie par (3.37) en fonction de la mécanisation adoptée. On remarquera par ailleurs que $\boldsymbol{\eta}_w$ dépend effectivement de l'erreur de position horizontale, exprimée non pas en fonction des erreurs de la latitude δL et de longitude δG, mais selon la composante horizontale de $\delta\overrightarrow{r}$ exprimées dans $[w]$.

A ce stade de l'exposé, nous avons déterminé la manière dont une erreur de position commise par l'INS affecte l'orientation de la plate-forme par rapport à l'espace inertiel $[i]$: le trièdre $[v_c]$ est issu d'une micro-rotation $\overrightarrow{\eta}$ du repère vrai $[v]$, $\overrightarrow{\eta}$ étant fonction de l'erreur de position. Le trièdre $[v_c]$ ne correspond toutefois pas au repère de travail $[w]$ entretenu par l'INS. En effet, si $[v_c]$ tient bel et bien compte des erreurs de navigation, son orientation est quant-à-elle définie à partir du repère inertiel vrai $[i]$ via la rotation $\overrightarrow{\Theta}^{v_c/i} = \overrightarrow{\Theta}^{v/i} + \overrightarrow{\eta}$. Or, $[i]$ n'est en pratique pas connu avec précision puisque l'INS n'estime pas $[i]$ mais $[i_e]$, lequel est issu de la micro-rotation $\overrightarrow{\Psi}$ de $[i]$. Ainsi, pour obtenir $[w]$, il est nécessaire d'appliquer la micro-rotation $\overrightarrow{\Psi}$ à $[v_c]$[38] (cf. figures 3.14 et 3.15). Par conséquent, le repère de travail $[w]$ entretenu par l'INS est donc l'image du trièdre $[v_c]$ par la micro-rotation $\overrightarrow{\Psi}$, c'est-à-dire l'image du repère vrai $[v]$ par les deux micro-rotations $\overrightarrow{\eta}$ et $\overrightarrow{\Psi}$ appliquées consécutivement. Comme la composition de deux micro-rotations est égale à la somme des deux micro-rotateurs associés (cf. ann. E), en notant $\overrightarrow{\Phi}$ le micro-rotateur transformant $[v]$ en $[w]$ (autrement dit, $\overrightarrow{\Phi} = \overrightarrow{\Theta}^{w/v}$), il vient alors :

$$\overrightarrow{\Phi} = \overrightarrow{\Psi} + \overrightarrow{\eta}, \tag{3.86}$$

ou encore, projeté dans $[w]$:

$$\boldsymbol{\Phi}_w = \boldsymbol{\Psi}_w + \boldsymbol{\eta}_w. \tag{3.87}$$

3.7.4 Modèle complet des erreurs de navigation

Le modèle en Ψ (3.80) régit l'évolution de grandeurs relatives aux erreurs de navigation inertielle en fonction des erreurs accélérométriques $\boldsymbol{\varepsilon}_{a,w} = \boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\varepsilon}_{a,m}$ et gyroscopiques $\boldsymbol{\varepsilon}_{g,w} = \boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\varepsilon}_{g,m}$. Ces dernières sont les équivalents à temps continu des erreurs entachant les incréments

[38] Appliquer la micro-rotation $\overrightarrow{\Psi}$ à $[i]$ transforme ce trièdre en le repère inertiel estimé $[i_e]$. Comme à l'instant t, $[v_c]$ et $[i]$ sont rigidement liés entre eux, appliquer la micro-rotation $\overrightarrow{\Psi}$ à $[i]$ revient à appliquer la micro-rotation $\overrightarrow{\Psi}$ à $[v_c]$.

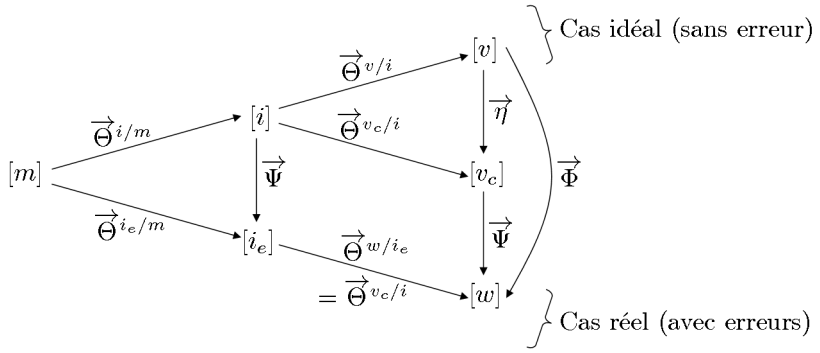


FIG. 3.14 – Détermination des plates-formes vraies $[v]$ et calculée $[w]$ à partir du repère $[m]$

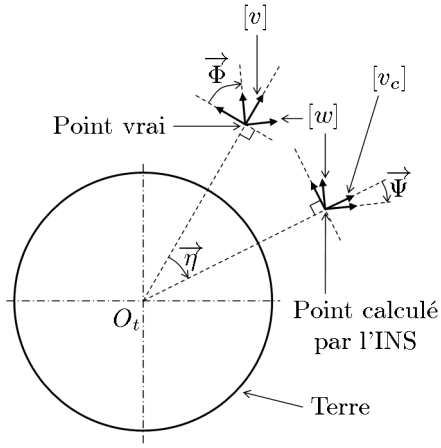


FIG. 3.15 – Erreur d'orientation de $[w]$ par rapport à $[v]$, engendrée par les erreurs gyroscopiques et d'alignement (micro-rotateur Ψ) et l'erreur de position (micro-rotateur η)

en sortie de l'UMI. Autrement dit, si l'on note respectivement par $\boldsymbol{E}_m^{\text{acc}}(n)$ et $\boldsymbol{E}_m^{\text{gyro}}(n)$ les erreurs affectant $\boldsymbol{V}_m^{\text{acc}}(n)$ et $\boldsymbol{\Theta}_m^{\text{gyro}}(n)$, alors :

$$\boldsymbol{E}_m^{\text{acc}}(n) = \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{\varepsilon}_{a,m}(t)\mathrm{d}t, \qquad \boldsymbol{E}_m^{\text{gyro}}(n) = \int_{(n-1)T_n}^{nT_n} \boldsymbol{\varepsilon}_{g,m}(t)\mathrm{d}t. \tag{3.88}$$

Cependant, la prise en compte de $\boldsymbol{\varepsilon}_{a,m}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{g,m}$ telle qu'opérée dans le modèle en Ψ ne s'avère pas satisfaisante car ces grandeurs sont inconnues : il est donc nécessaire de les modéliser. Typiquement, les modèles (de connaissance) utilisés sont de la forme [Abuh 05, chap. 2], [Isra 07] :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{a,m} &= \boldsymbol{\mathcal{B}}_m + \boldsymbol{\mathcal{K}}_a \boldsymbol{f}_m + \boldsymbol{\upsilon}_m, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{g,m} &= \boldsymbol{\mathcal{D}}_m + \boldsymbol{\mathcal{K}}_g \boldsymbol{\omega}_m + \boldsymbol{\nu}_m, \end{aligned} \tag{3.89}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{B}}_m$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_m$ sont des biais accélérométrique et dérive gyroscopique et $\{\boldsymbol{\upsilon}_m\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{\boldsymbol{\nu}_m\}_{t\in\mathbb{R}}$ sont des bruits blancs. Ces grandeurs sont intrinsèques aux senseurs inertiels. $\boldsymbol{\mathcal{K}}_a$ et $\boldsymbol{\mathcal{K}}_g$ sont quant-à-elles des matrices dites de *facteur d'échelle*, dont les caractéristiques sont liées aux erreurs internes à l'UMI. Les termes diagonaux de $\boldsymbol{\mathcal{K}}_a$ et $\boldsymbol{\mathcal{K}}_g$ représentent des erreurs de mise à l'échelle des mesures et les termes non diagonaux[39] décrivent un mauvais calage des senseurs sur les axes de

[39] A noter que ces termes, qui sont les angles correspondant aux erreurs de calage, sont faibles, ce qui autorise une telle formulation (il s'agit de micro-rotations).

$[m]$. A noter que le modèle (3.89) fait intervenir $\boldsymbol{f}_m$ et $\boldsymbol{\omega}_m$ de manière uniquement linéaire, ce qui n'est en pratique pas toujours le cas (erreurs de non-linéarités). L'insertion de (3.89) dans la représentation en Ψ (3.80) aboutit à :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \delta\dot{\boldsymbol{r}}_w \\ \delta\dot{\boldsymbol{V}}_w \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}}_w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w) & \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z) & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{f}_w) \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{r}_w \\ \delta\boldsymbol{V}_w \\ \boldsymbol{\Psi}_w \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{T}_{wm} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{T}_{wm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}_m + \boldsymbol{\mathcal{K}}_a \boldsymbol{f}_m + \boldsymbol{\upsilon}_m \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_m + \boldsymbol{\mathcal{K}}_g \boldsymbol{\omega}_m + \boldsymbol{\nu}_m \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.90}$$

Les grandeurs $\boldsymbol{\mathcal{B}}_m$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_m$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}_a$ et $\boldsymbol{\mathcal{K}}_g$ ne sont pas connues : il est donc nécessaire de les estimer. Pour ce faire, celles-ci sont condensées dans la projection de vecteur $\boldsymbol{x}_m^{\text{umi}}$, constituant les états liés à l'UMI :

$$\boldsymbol{x}_m^{\text{umi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}_m^T & ([\boldsymbol{\mathcal{K}}_a]_1)^T & ([\boldsymbol{\mathcal{K}}_a]_2)^T & ([\boldsymbol{\mathcal{K}}_a]_3)^T & \boldsymbol{\mathcal{D}}_m^T & ([\boldsymbol{\mathcal{K}}_g]_1)^T & ([\boldsymbol{\mathcal{K}}_g]_2)^T & ([\boldsymbol{\mathcal{K}}_g]_3)^T \end{bmatrix}^T. \tag{3.91}$$

La dynamique des états liés à l'UMI est alors modélisée sous la forme générale suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}}_m^{\text{umi}}(t) = \boldsymbol{f}_{mm}^{\text{umi}}\left(\boldsymbol{x}_m^{\text{umi}}(t)\right) + \boldsymbol{w}_m^{\text{umi}}(t), \tag{3.92}$$

où $\boldsymbol{f}_{mm}^{\text{umi}}$ est une fonction éventuellement non linéaire et $\left\{\boldsymbol{w}_m^{\text{umi}}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un bruit blanc. La structure et les paramètres de la fonction $\boldsymbol{f}_{mm}^{\text{umi}}$, ainsi que la matrice de covariance de $\left\{\boldsymbol{w}_m^{\text{umi}}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ sont déterminés en fonction des caractéristiques de l'UMI. Ce point constitue l'une des tâches les plus délicates dans la synthèse d'un système de navigation hybridée, compte tenu de la difficulté que représente la conception d'un modèle représentatif des erreurs d'un senseur inertiel. Cet aspect sera approfondi dans le chapitre suivant. En outre, en posant :

$$\boldsymbol{x}_w^{\text{nav}} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{r}_w^T & \delta\boldsymbol{V}_w^T & \boldsymbol{\Psi}_w^T \end{bmatrix}^T, \qquad \boldsymbol{w}_w^{\text{nav}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\upsilon}_m^T & -\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\nu}_m^T \end{bmatrix}^T, \tag{3.93}$$

le modèle en Ψ s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_w^{\text{nav}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_m^{\text{umi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{ww}^{\text{nav}}(t) & \boldsymbol{B}_{wm}^{\text{umi}}(t) \\ \boldsymbol{0}_{24\times9} & \boldsymbol{0}_{24\times24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_w^{\text{nav}}(t) \\ \boldsymbol{x}_m^{\text{umi}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{9\times1} \\ \boldsymbol{f}_{mm}^{\text{umi}}\left(\boldsymbol{x}_m^{\text{umi}}(t)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_w^{\text{nav}}(t) \\ \boldsymbol{w}_m^{\text{umi}}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.94}$$

où :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{ww}^{\text{nav}}(t) &= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w) & \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z) & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{f}_w) \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{B}_{wm}^{\text{umi}}(t) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{T}_{wm} & f_{m,x}\boldsymbol{T}_{wm} & f_{m,y}\boldsymbol{T}_{wm} & f_{m,z}\boldsymbol{T}_{wm} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{T}_{wm} & -\omega_{m,x}\boldsymbol{T}_{wm} & -\omega_{m,y}\boldsymbol{T}_{wm} & -\omega_{m,z}\boldsymbol{T}_{wm} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.95}$$

La relation (3.94) constituent un système d'équations différentielles mutuellement couplées et dont les paramètres varient avec le temps. Elles forment le *modèle complet* des erreurs de navigation par inertie. On y distingue des états liés à la navigation ($\boldsymbol{x}_w^{\text{nav}}$) et d'autres liés aux erreurs de l'UMI ($\boldsymbol{x}_m^{\text{umi}}$).

3.7.5 Analyse des erreurs de navigation par inertie

En considérant le modèle en Ψ (3.80), on constate que les erreurs de navigation proviennent de cinq origines distinctes :

- une erreur de position initiale $\delta \boldsymbol{r}_w(0)$ non nulle, engendrée par une mauvaise initialisation de $L(0)$, $G(0)$ et $Z(0)$ dans l'algorithme 15,
- une erreur de vitesse initiale $\delta \boldsymbol{V}_w(0)$ non nulle, engendrée par une mauvaise initialisation de $\boldsymbol{V}_g(0)$ dans l'algorithme 15,
- une erreur d'alignement $\boldsymbol{\Psi}_w(0)$ non nulle, engendrée par une mauvaise initialisation de $\boldsymbol{T}_{gm}(0)$ dans l'algorithme 15,
- une erreur accélérométrique $\boldsymbol{\varepsilon}_{a,m}$ entachant les incréments de vitesse $\boldsymbol{V}_m^{\text{acc}}$ dans l'algorithme 15,
- une erreur gyroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}_{g,m}$ entachant les incréments d'angle $\boldsymbol{\Theta}_m^{\text{gyro}}$ dans l'algorithme 15.

Ces différentes erreurs affectent de manière plus ou moins rapide les performances de navigation. L'annexe F montre en particulier que la composante horizontale de l'erreur sur la position calculée par le module de navigation subit des phénomènes oscillatoires. On distingue notamment :

- les oscillations de Schüler, dont la période est d'environ 84 mn, induites par la matrice de couplage de Schüler,
- les oscillations 24 heures, provoquées par la rotation de la terre sur elle-même.

L'altitude est quant-à-elle une grandeur exponentiellement (et donc rapidement) divergente, la vitesse zénithale l'étant par conséquent aussi. Ainsi, la navigation en Inertie Pure (IP), c'est-à-dire n'utilisant que les informations issues de l'UMI pour calculer les grandeurs de navigation, est relativement stable à court-terme, notamment lorsque les senseurs inertiels sont de bonne qualité et que l'alignement a été convenablement opéré. Toutefois, ses performances se voient sévèrement dégradées à moyen terme et par conséquent, il s'avère nécessaire d'utiliser des sources d'informations externes (c'est-à-dire non inertielles) telles que des mesures GPS pour corriger les erreurs de navigation : il s'agit de l'hybridation.

3.8 La navigation hybridée

Dans cette section, le modèle complet des erreurs de navigation (3.94) précédemment développé se trouve exploité afin de synthétiser une navigation hybridée. Le dispositif externe de mesures considéré est un GPS observant la position du porteur. Nous présentons alors comment corriger les informations issues de l'INS selon les deux manières d'exploiter les informations issues du GPS [Gued 97], [Abuh 05, chap. 2] que sont le couplage lâche et le couplage serré.

3.8.1 Le couplage lâche

Soit la position vraie du porteur, exprimée sous forme du triplet latitude-longitude-altitude (L^*, G^*, Z^*), et la position calculée par l'INS, représentée par $(L^{\text{nav}}, G^{\text{nav}}, Z^{\text{nav}})$. Sous réserve que les erreurs de latitude et de longitude soient faibles (ce qui est généralement le cas compte tenu du rayon terrestre), l'erreur de position $\delta \boldsymbol{r}_g$ en coordonnées nord-ouest-zénith se calcule par

(cf. figure 3.16) :

$$\delta \boldsymbol{r}_g = \begin{bmatrix} \delta r_{g,x} \\ \delta r_{g,y} \\ \delta r_{g,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R+Z^*)\,(L^{\text{nav}} - L^*) \\ (R+Z^*)\cos(L^*)\,(G^{\text{nav}} - G^*) \\ Z^{\text{nav}} - Z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R+Z^{\text{nav}})\,(L^{\text{nav}} - L^*) \\ (R+Z^{\text{nav}})\cos(L^{\text{nav}})\,(G^{\text{nav}} - G^*) \\ Z^{\text{nav}} - Z^* \end{bmatrix}. \tag{3.96}$$

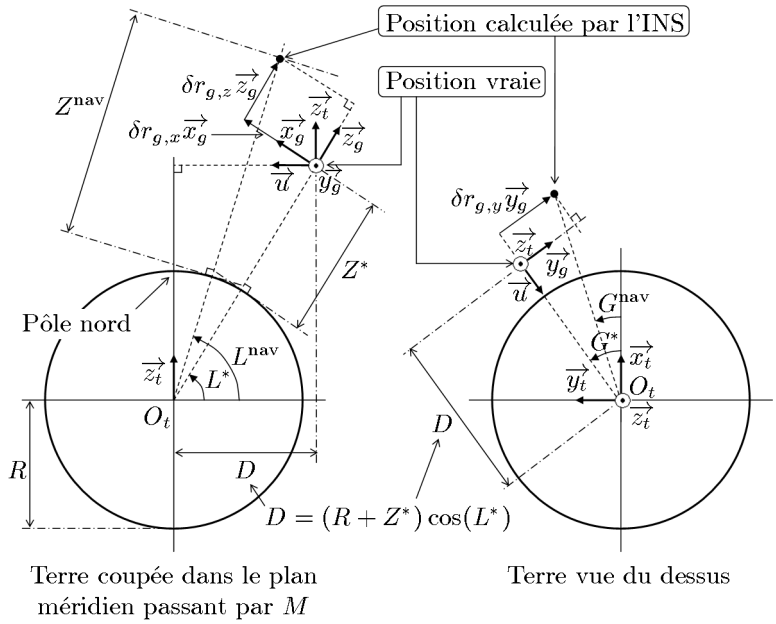


FIG. 3.16 – Conversion des erreurs de latitude, longitude et altitude en erreurs de position nord, ouest et zénithale

Le principe du couplage lâche est d'obtenir directement du GPS une mesure $\left(L^{\text{GPS}}, G^{\text{GPS}}, Z^{\text{GPS}}\right)$ de la position vraie (L^*, G^*, Z^*) du porteur. Cette observation est alors convertie en une mesure $\boldsymbol{y}$ de l'erreur de position $\delta \boldsymbol{r}_g$ en coordonnées nord-ouest-zénith, $\boldsymbol{y}$ étant parfois appelée *innovation de position*. Conformément à la relation (3.96), cela donne :

$$\boldsymbol{y} = \delta \boldsymbol{r}_g + \boldsymbol{w}^{\text{GPS}} = \begin{bmatrix} R+Z^{\text{nav}} & 0 & 0 \\ 0 & -(R+Z^{\text{nav}})\cos(L^{\text{nav}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{\text{nav}} - L^{\text{GPS}} \\ G^{\text{nav}} - G^{\text{GPS}} \\ Z^{\text{nav}} - Z^{\text{GPS}} \end{bmatrix}, \tag{3.97}$$

où $\boldsymbol{w}^{\text{GPS}}$ est le bruit de mesure du GPS. Cela conduit à l'équation de mesure suivante :

$$\boldsymbol{y} = \left[\begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{T}_{gw} & \boldsymbol{0}_{3\times 6} & \boldsymbol{0}_{3\times 24} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_w^{\text{nav}}(t) \\ \hdashline \boldsymbol{x}_m^{\text{umi}}(t) \end{array}\right] + \boldsymbol{w}^{\text{GPS}}. \tag{3.98}$$

L'équation de mesure (3.96) associée à l'équation d'état (3.94) constitue la représentation d'état exploitée par le filtre de navigation. Ce modèle dépend de nombreux paramètres issus de l'INS (matrices de passage $\boldsymbol{T}_{wt}$, $\boldsymbol{T}_{wm}$, force spécifique $\boldsymbol{f}_m$, etc.). A noter qu'en pratique, du fait que le module d'intégration de navigation travaille en temps discret, certains de ces paramètres ne sont disponibles que sous forme d'incréments (c'est le cas par exemple de la force spécifique, où $\Delta \boldsymbol{V}_m^{\text{acc}}$ se substitue à $\boldsymbol{f}_m$). Cela nécessite de discrétiser l'équation d'état (3.94) à partir d'une procédure adéquate, de sorte qu'elle dépende des paramètres effectivement calculés par l'INS. Ce point sera abordé plus en détail dans le chapitre suivant.

Les grandeurs d'intérêt estimées par le filtre de navigation sont les états de navigation $\boldsymbol{x}_w^{\text{nav}}$, à savoir les erreurs de position $\delta\boldsymbol{r}_w$, de vitesse $\delta\boldsymbol{V}_w$ et d'orientation $\boldsymbol{\Psi}_w$. Ces grandeurs servent à *recaler la navigation*, c'est-à-dire corriger les grandeurs calculées par le module d'intégration de navigation (algorithme 15), à savoir :

- l'altitude Z,
- la vitesse $\boldsymbol{V}_g$ exprimée en coordonnées nord-ouest-zénith,
- les matrices de passage $\boldsymbol{T}_{wt}$ et $\boldsymbol{T}_{g'b}$ d'où sont extraits la latitude L, la longitude G, le cap ψ, le roulis φ et le tangage θ.

Le recalage de navigation s'opère en *boucle ouverte* si son application n'a pas d'impact sur l'algorithme récursif d'intégration de navigation (figure 3.17). Dans le cas contraire, il s'agit d'un recalage en *boucle fermée* (figure 3.18). La procédure d'un recalage de navigation est détaillée sur l'algorithme 16. Quelques remarques concernant le recalage :

- il s'applique en sortie du module d'intégration de navigation (algorithme 15),
- il prend en entrée les grandeurs estimées par le filtre de navigation ($\delta\boldsymbol{r}_w$, $\delta\boldsymbol{V}_w$, $\boldsymbol{\Psi}_w$) et celles en sortie du module d'intégration de navigation (L, Z, $\boldsymbol{V}_w$, $\boldsymbol{T}_{wt}$, $\boldsymbol{T}_{wm}$, $\boldsymbol{T}_{im}$),
- il donne en sortie des grandeurs de navigation recalées qui sont :
  - la position du porteur par rapport à la terre, exprimée selon le triplet latitude-longitude-altitude ($L^{\text{rec}}, G^{\text{rec}}, Z^{\text{rec}}$),
  - la vitesse du porteur $\boldsymbol{V}_g^{\text{rec}}$ par rapport à la terre, exprimée suivant les axes nord, ouest et zénithal,
  - l'attitude du porteur, décrite par les angles de cap ψ^{rec}, de roulis φ^{rec} et de tangage θ^{rec} ;
- lorsqu'il s'effectue en boucle ouverte, il s'applique en permanence,
- lorsqu'il s'effectue en boucle fermée, il s'applique uniquement lorsqu'une mesure GPS jugée valide (par exemple grâce à un test d'innovation, cf. section 1.6) est disponible. A noter que dans ce dernier cas de figure, il est possible de ne pas recaler la totalité des grandeurs. Si par exemple, seuls les états $\delta\boldsymbol{r}_w$ et $\delta\boldsymbol{V}_w$ issus du filtre de navigation sont exploités (ce qui signifie que $\boldsymbol{\Psi}_w$ est ignoré), l'algorithme 16 s'applique en posant $\boldsymbol{\Psi}_w = \boldsymbol{0}_{3\times1}$ et en ne remettant pas à zéro les trois dernières composantes de $\boldsymbol{x}^{\text{nav}}$ (c'est-à-dire celles correspondant à $\boldsymbol{\Psi}_w$) ;
- la correction des matrices de passage correspond à un réalignement des repères considérés. Par exemple, la matrice $\boldsymbol{T}_{im}$ issue du module d'intégration de navigation est en réalité $\boldsymbol{T}_{i_em}$, $[i_e]$ étant le trièdre inertiel estimé, issu d'une micro-rotation $\overrightarrow{\Psi}$ du repère inertiel vrai $[i]$. La matrice $\boldsymbol{T}_{iie}$ de passage de $[i]$ vers $[i_e]$ vaut alors (cf. ann. D) : $\boldsymbol{T}_{ii_e} = \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\Psi}_w)$, et comme par définition : $\boldsymbol{T}_{im} = \boldsymbol{T}_{ii_e}\boldsymbol{T}_{i_em}$, cela conduit au résultat exposé.
- si le filtre de navigation est optimal (selon un critère donné), les grandeurs de navigation recalées constituent la solution de navigation dite *optimale*.

Par ailleurs, les équations des erreurs de navigation s'apparentent[40] à une linéarisation des équations de la navigation autour de la solution de navigation calculée. Ce constat émis, les architectures de navigation recalées en boucle ouverte et en boucle fermée (figures 3.17 et 3.18) ne sont alors pas sans rappeler les techniques de filtrage de Kalman en boucle ouverte et en boucle fermée évoquées dans le premier chapitre. De ce fait, certains auteurs (voir par exemple

[40]Le terme "apparentent" est volontairement employé puisqu'il ne s'agit en effet pas d'une linéarisation à proprement parler. Si l'évolution des états $\delta\boldsymbol{r}_w$ et $\delta\boldsymbol{V}_w$ est régie par des équations correspondant effectivement à une linéarisation des équations de $\boldsymbol{r}_w$ et $\boldsymbol{V}_w$, il n'en est pas de même pour Ψ_w : cet état caractérise une micro-rotation (de dynamique linéaire), ce qui n'est pas la même chose que l'attitude décrite pas les angles de cap, roulis et tangage (dont la dynamique est fortement non linéaire).

1. A l'instant courant n (à la fréquence $f_n = 100$ Hz), utiliser les grandeurs $\boldsymbol{T}_{im}(n)$, $\boldsymbol{T}_{wt}(n)$, $L(n)$, $Z(n)$ et $\boldsymbol{V}_w(n)$ calculées par l'algorithme 15 d'intégration de navigation et les états $\delta\boldsymbol{r}_w(n)$, $\delta\boldsymbol{V}_w(n)$ et $\boldsymbol{\Psi}_w(n)$ estimés par le filtre de navigation.
2. Corriger la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{wt}(n)$ du repère terrestre vers la plate-forme :

$$\boldsymbol{\eta}_w(n) = \frac{1}{R+Z(n)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{r}_w(n), \qquad \boldsymbol{T}_{vt}^{\text{rec}}(n) = \{\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\eta}_w(n))\}\, \boldsymbol{T}_{wt}(n),$$

   où $R = 6378137$ m et m dépend de la mécanisation adoptée :

$$m = \begin{cases} -\text{tg}(L(n)) & \text{si la mécanisation est asservie au nord,} \\ 0 & \text{si la mécanisation est en azimuth libre.} \end{cases}$$

3. Extraire les latitude $L^{\text{rec}}(n)$ et longitude $G^{\text{rec}}(n)$ recalées à partir de la matrice de passage corrigée $\boldsymbol{T}_{vt}^{\text{rec}}(n)$ (cf. ann. E).
4. Calculer la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{vw}(n)$ de la plate-forme calculée $[w]$ vers la plate-forme vraie $[v]$:

$$\boldsymbol{\Phi}_w(n) = \boldsymbol{\eta}_w(n) + \boldsymbol{\Psi}_w(n), \qquad \boldsymbol{T}_{vw}(n) = \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\Phi}_w(n)).$$

5. Corriger la vitesse $\boldsymbol{V}_w(n)$ du porteur dans la plate-forme :

$$\boldsymbol{V}_v^{\text{rec}}(n) = \boldsymbol{T}_{vw}(n)\left(\boldsymbol{V}_w(n) - \delta\boldsymbol{V}_w(n)\right).$$

6. Corriger l'altitude du porteur :

$$Z^{\text{rec}}(n) = \left[\boldsymbol{T}_{vw}(n)\left(\boldsymbol{r}_w(n) - \delta\boldsymbol{r}_w(n)\right)\right]^3 \qquad \text{où : } \boldsymbol{r}_w(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R+Z(n) \end{bmatrix}^T.$$

7. Calculer la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{gv}(n)$ de la plate-forme vraie vers le trièdre géographique local en fonction de la mécanisation adoptée :
   - poser : $\boldsymbol{T}_{gv}(n) = \boldsymbol{I}_3$ si la mécanisation est asservie au nord,
   - extraire l'angle $\alpha^{\text{rec}}(n)$ de $\boldsymbol{T}_{vt}^{\text{rec}}(n)$ (cf. ann. E) puis calculer $\boldsymbol{T}_{gv}(n)$ si la mécanisation est en azimuth libre :

$$\boldsymbol{T}_{gv}(n) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha^{\text{rec}}(n)) & -\sin(\alpha^{\text{rec}}(n)) & 0 \\ \sin(\alpha^{\text{rec}}(n)) & \cos(\alpha^{\text{rec}}(n)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Calculer la vitesse corrigée $\boldsymbol{V}_g^{\text{rec}}(n)$ du porteur dans le trièdre géographique local : $\boldsymbol{V}_g^{\text{rec}}(n) = \boldsymbol{T}_{gv}(n)\boldsymbol{V}_v^{\text{rec}}(n)$.
9. Calculer la nouvelle matrice de passage $\boldsymbol{T}_{g'b}^{\text{rec}}(n)$ du repère body vers le trièdre géographique local secondaire :

$$\boldsymbol{T}_{g'b}^{\text{rec}}(n) = \boldsymbol{T}_{g'g}\boldsymbol{T}_{gv}(n)\boldsymbol{T}_{vw}(n)\boldsymbol{T}_{wm}(n)\boldsymbol{T}_{mb}.$$

   où : $\boldsymbol{T}_{g'g} = \text{diag}(1, -1, -1)$ et $\boldsymbol{T}_{mb}$ est une matrice constante dépendant de l'architecture du porteur.
10. Extraire les angles de cap $\psi^{\text{rec}}(n)$, roulis $\varphi^{\text{rec}}(n)$ et tangage $\theta^{\text{rec}}(n)$ recalés à partir de la matrice de passage corrigée $\boldsymbol{T}_{g'b}^{\text{rec}}(n)$ (cf. ann. E).

Voir suite de l'algorithme page suivante...

Suite de l'algorithme de recalage de navigation :

11. Si le recalage s'effectue en boucle fermée :
    - corriger la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{im}(n)$ du repère inertiel vers le repère de mesures : $\boldsymbol{T}_{im}^{\text{rec}}(n) = \{\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\Psi}_w(n))\}\,\boldsymbol{T}_{im}(n)$,
    - à la prochaine application de l'algorithme récursif 15) d'intégration de navigation, remplacer les grandeurs d'entrée $\boldsymbol{T}_{im}(n-1)$, $\boldsymbol{T}_{wt}(n-1)$, $L(n-1)$, $Z(n-1)$ et $\boldsymbol{V}_w(n-1)$, par les grandeurs recalées $\boldsymbol{T}_{im}^{\text{rec}}(n)$, $\boldsymbol{T}_{vt}^{\text{rec}}(n)$, $L^{\text{rec}}(n)$, $Z^{\text{rec}}(n)$ et $\boldsymbol{V}_v^{\text{rec}}(n)$,
    - remettre à zéro les états de navigation dans le filtre récursif de navigation : $\boldsymbol{x}^{\text{nav}}(n) = \begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{r}_w^T(n) & \delta\boldsymbol{V}_w^T(n) & \boldsymbol{\Psi}_w^T(n)\end{bmatrix}^T = \boldsymbol{0}_{9\times 1}$.

Algorithme 16: Le recalage de navigation

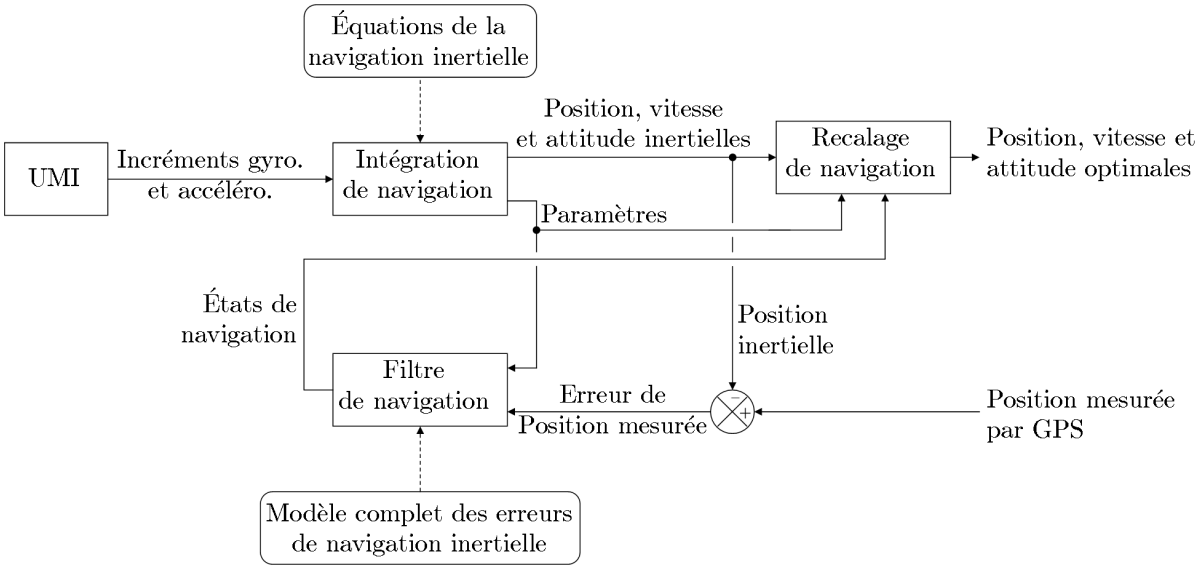


FIG. 3.17 – Couplage lâche en boucle ouverte

[Bonn 03], [Van 04b], [Van 04c]) abordent le problème de navigation hybridée tel qu'illustré sur la figure 3.19. L'équation (non linéaire) d'état décrit alors l'évolution :

- de la position du porteur par rapport à la terre, généralement décrite par la projection $\boldsymbol{r}_t$ du vecteur position $\overrightarrow{r}$ dans le repère terrestre $[t]$
- de la vitesse du porteur par rapport à la terre selon les coordonnées nord-ouest-zénith,
- de l'attitude du porteur, représentée sous forme de quaternions [Radi 99d], [Chou 03],
- des états propres à l'UMI (biais accélérométriques, dérives gyroscopiques, facteurs d'échelle, etc.).

L'équation de mesure effectue quant-à-elle le lien entre l'état $\boldsymbol{r}_t$ et la position mesurée par le GPS. Pour traiter un tel problème, il est alors nécessaire d'employer un filtre non linéaire tel qu'un SPKF [Van 04b].

3.8.2 Le couplage serré

L'architecture d'une navigation hybridée couplée de manière serrée est analogue à celle de la figure 3.19. La différence avec le couplage lâche intervient au niveau de la prise en compte des

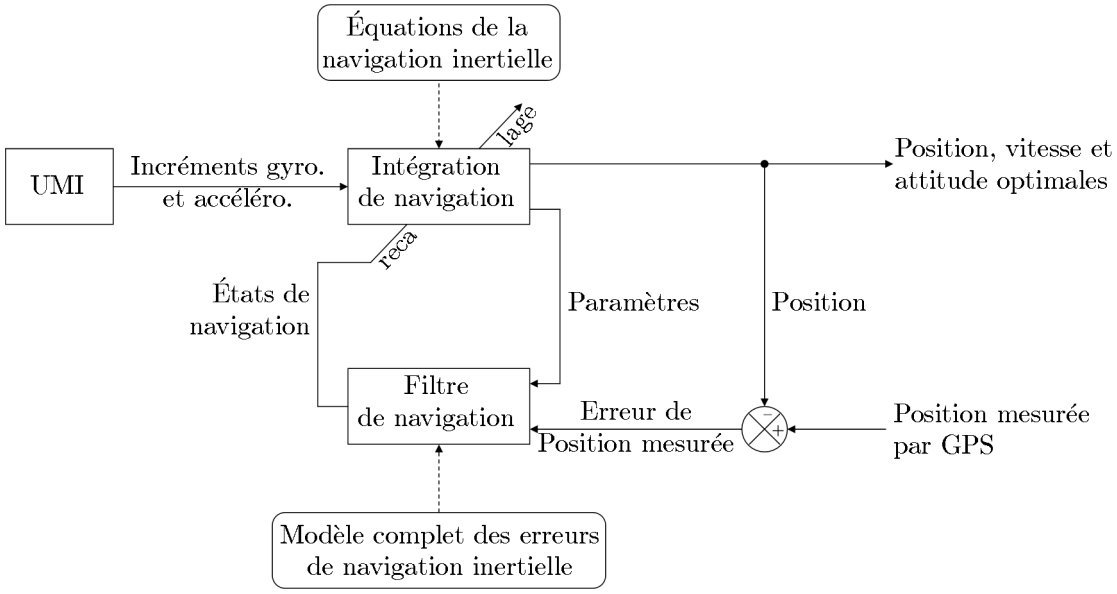


FIG. 3.18 – Couplage lâche en boucle fermée

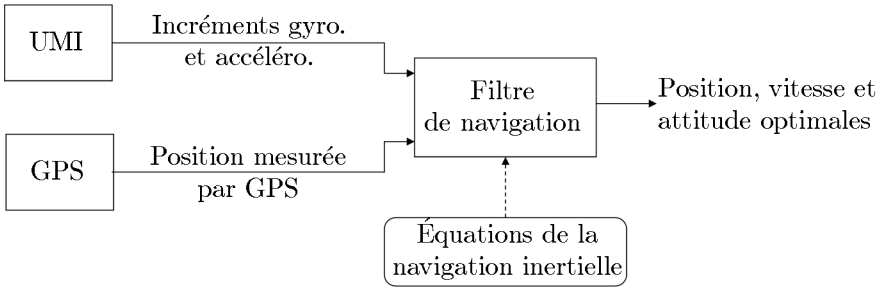


FIG. 3.19 – Couplage lâche à partir de filtrage non linéaire

informations provenant du dispositif externe de mesures. En effet, l'information exploité n'est plus la position fournie par un récepteur GPS mais la distance brute, appelée *pseudo-distance*[41], entre le porteur et chaque satellite du dispositif GPS. L'architecture du couplage serré est illustré sur la figure 3.20. L'avantage du couplage serré sur le couplage lâche est qu'il permet de modéliser les erreurs physiques de chaque signal satellite, les modèles ainsi développés étant adjoint au modèle de navigation et d'UMI exploité par le filtre de navigation. En outre, la détection d'une éventuelle défaillance d'un ou plusieurs satellite(s) s'en trouve plus aisée [Gued 97].

3.8.3 Les pertes d'hybridation

Il arrive parfois que les informations issues du dispositif externe de mesures soient temporairement indisponibles : on dit alors qu'il y a une *perte d'hybridation*. Pour un GPS, ce genre de phénomène apparaît lorsque :

[41]Le préfixe "pseudo" a été ajouté car la grandeur mesurée en pratique est le temps de parcours d'une onde émise (dans le vide) d'un satellite vers le porteur. Or, cette mesure est faussée entre autres par la propagation non rectiligne de l'onde dans l'atmosphère ainsi que par les erreurs de synchronisation entre les horloges du satellite et du récepteur embarqué dans le porteur. A titre indicatif, une erreur de 10^{-3} s représente une erreur de distance de 300 km [Abuh 05, p. 35].

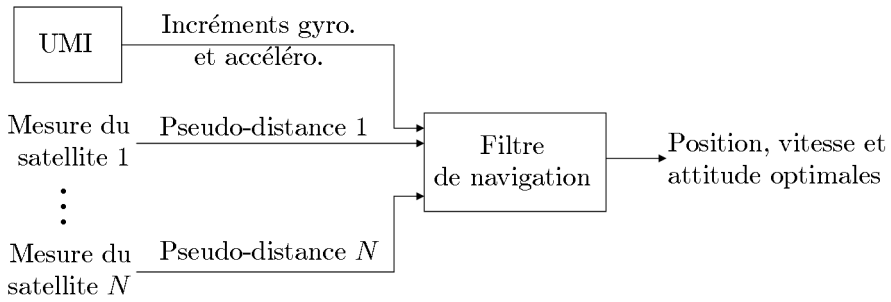


Fig. 3.20 – Couplage serré

- les signaux en provenance de certains satellites ne parviennent pas jusqu'au véhicule, ce qui est notamment le cas lorsque ce dernier se trouve dans un tunnel, une forêt dense ou un environnement urbain. Les satellites concernés sont alors dits *masqués* ou non *visibles*. Du fait qu'il est nécessaire de disposer d'au moins 4 satellites visibles pour calculer une position valide [Gued 97], il devient donc impossible au GPS de fournir une information de position si ce nombre n'est pas atteint ;
- les mesures GPS sont ignorées car jugées non valides (grâce au test d'innovation par exemple, cf. section 1.6). Typiquement, cela arrive lorsque les signaux en provenance des satellites sont brouillés (malgré de nombreuses techniques anti-brouillage existantes, le GPS, même exploité dans son mode militaire, peut être brouillé par des adversaires [Gued 97]).

Dans une telle situation, le filtre de navigation ne dispose en principe d'aucune mesure pour estimer les états de navigation. Du fait que les erreurs d'altitude et de vitesse zénithale sont des grandeurs exponentiellement divergentes (cf. ann. F), on adjoint généralement au GPS un autre dispositif externe de mesure, à savoir un baro-altimètre. Le rôle de ce capteur est de mesurer en permanence l'altitude du porteur dans l'unique but d'éviter la divergence du filtre de navigation.

Ainsi, lors d'une perte d'hybridation, l'unique observation exploitée par le filtre de navigation est une mesure de l'altitude, issue du baro-altimètre et généralement entachée d'un fort bruit. Ainsi, le nombre et la précision des mesures disponibles lors des phases de perte d'hybridation se trouvent diminués. Par conséquent, le rôle joué par l'équation d'état (3.94) dans la procédure d'estimation des états de navigation se trouve accentué. Or, ce modèle d'état présente généralement des incertitudes, voire même des méconnaissances, liées à la difficulté de modéliser les erreurs propres à l'UMI. Le filtre de navigation doit alors présenter des propriétés de robustesse vis-à-vis de ces méconnaissances, notamment lors des phases de perte d'hybridation.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, le mode opératoire pour réaliser une navigation hybridée a été présenté. Cette démarche consiste à corriger les informations d'une navigation purement inertielle à l'aide d'un filtre de navigation, lequel utilise des mesures provenant d'un dispositif externe. La principale difficulté d'une telle approche réside en la conception des modèles d'erreurs exploités par le filtre, notamment ceux décrivant les imperfections des senseurs inertiels. Cela a notamment pour conséquence de rendre le problème de navigation très délicat lors des phases de perte d'hybridation. Cet aspect est abordé plus en détails dans le chapitre qui suit, où la composante inertielle de la navigation repose en partie sur des mesures provenant de gyroscopes résonnants hémisphériques, de tels senseurs présentant des erreurs difficilement modélisables.

4

Synthèse d'une navigation intégrée à partir de données GRH et hybridée en position

Sommaire

4.1 Introduction 120
4.2 Le GRH (Gyroscope Résonnant Hémisphérique) 120
4.2.1 Introduction 120
4.2.2 Principe de fonctionnement 121
4.2.3 Erreurs engendrées par le GRH 122
4.2.4 Modèle global des erreurs du GRH 125
4.2.5 Mise en équation des erreurs du GRH 126
4.2.6 Modèle global d'erreurs de navigation et d'erreurs GRH 127
4.3 Contexte de l'application et analyse du problème 128
4.4 Approches de résolution du problème envisagées 130
4.4.1 Approches n'utilisant pas de décomposition en série de Fourier 131
4.4.2 Utilisation de la théorie des jeux (filtre minimax, cf. p. 44) 131
4.4.3 Utilisation de l'estimation d'entrées récursive (RIE, cf. p. 39) 132
4.5 Approche de résolution du problème retenue 133
4.5.1 Conception d'une variance d'Allan plate pour le résidu de modélisation 134
4.5.2 Modèle global d'erreurs de navigation et d'erreurs GRH 138
4.5.3 Discrétisation du modèle considéré 139
4.5.4 Synthèse du filtre de navigation 139
4.6 Etude expérimentale 143
4.6.1 Architecture du simulateur développé 143
4.6.2 Conception du "monde vrai" et conditions de simulation 146
4.6.3 Initialisation et réglage du filtre de navigation 148
4.7 Résultats de simulation 149
4.7.1 Cas d'une hybridation permanente 149
4.7.2 Cas d'une hybridation coupée 156
4.7.3 Comparaison avec d'autres configurations 165

4.7.4 Utilisation du filtrage de Kalman sous contraintes 169
4.8 Conclusion 170

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons développer une stratégie de filtrage robuste dédiée aux systèmes de navigation hybridée en position et dont la composante inertielle repose en partie sur des Gyroscopes Résonnants Hémisphériques (GRH). Dans le chapitre 1, nous avons présenté un certain nombre de techniques d'estimation d'état visant à être robuste vis-à-vis de méconnaissances données et mis en évidence le fait que l'utilisation de mesures dans un processus de filtrage robuste était primordiale. Le chapitre 2 proposait alors une méthode de synthèse de dispositif d'estimation d'état, à savoir le choix et réglage d'un filtre reconstructeur d'état et le développement d'un schéma de réseau de capteurs avec éléments redondants. L'avantage de cette méthode réside en sa généralité puisqu'elle s'applique sur n'importe quel type de système sous forme de représentation d'état, y compris les modèles fortement non linéaires ou chaotiques. Toutefois, cette approche suggère implicitement que la redondance matérielle de certains capteurs soit possible, ce qui n'est pas toujours réaliste : par exemple, lors d'une perte d'hybridation dans un système de navigation, toutes les mesures (position et éventuellement vitesse dans chaque direction) deviennent simultanément indisponibles, et aucun dispositif de substitution n'est à disposition (mis à part le baro-altimètre, dont l'apport est limité et dont le seul but est d'éviter la divergence des erreurs relatives à l'axe vertical). Par conséquent, la méthode du chapitre 2 n'a que peu d'intérêt dans une telle situation : la seule solution est alors, en se basant sur des connaissances relatives au système de navigation considéré, de décrire d'une certaine manière les méconnaissances de son modèle et de mettre en œuvre une technique d'estimation d'état en adéquation avec la représentation adoptée. Dans la première section, le GRH est tout d'abord présenté, avant de définir dans la partie suivante l'application considérée dans un contexte plus général. Ensuite, différentes approches de résolution du problème envisagées mais non retenues sont brièvement décrites dans la section 3, puis la méthode retenue est présentée dans la quatrième partie. Enfin, cette solution est testée et comparée suivant différents aspects dans la section finale de ce chapitre.

4.2 Le GRH (Gyroscope Résonnant Hémisphérique)

4.2.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons brièvement le principe de fonctionnement du Gyroscope Résonnant Hémisphérique (GRH). Selon les phénomènes physiques qu'ils mettent en jeux, les gyromètres (qui, on le rappelle, mesurent une vitesse absolue de rotation instantanée) et gyroscopes (qui mesurent un angle entre le boîtier du gyroscope et un repère inertiel à un instant donné) sont classés en deux grandes catégories [Radi 99c] :

- les gyros optiques, lesquels se basent sur la théorie de la propagation de la lumière, notamment les phénomènes d'interférences [Radi 99b],
- les gyros mécaniques, exploitant la propriété d'inertie de la matière. Ces derniers se décomposent en deux sous-catégories, à savoir les gyros avec élément rotatif et les gyros vibrants [Lege 99].

Le GRH appartient à cette dernière sous-catégorie de gyros. L'avantage des technologies vibrantes est de présenter de bonnes performances pour un coût de fabrication significativement plus faible. En effet, il est possible de disposer de gyros avec élément rotatif de grande précision

(on dit alors qu'ils sont de classe inertielle [Lege 99]), mais le prix de tels senseurs est souvent dissuasif (c'est de la mécanique de précision). Ce n'est pas le cas des gyros optiques puisque leur constitution est simple (deux lasers en rotation inverse et un miroir pour interférométrie). Toutefois, ces senseurs sont généralement peu précis pour des valeurs proches de zéro : il est alors nécessaire d'utiliser des mécanismes de dither pour pallier ce problème, ce qui a pour conséquence de générer un phénomène de marche au hasard angulaire. Ce n'est pas le cas des gyros vibrants, lesquels réunissent les avantages des deux autres technologies. Dans cette section, le principe de fonctionnement du GRH est tout d'abord présenté, puis les différentes sources d'erreurs inhérentes à cette technologie sont exposées. Ces dernières sont ensuite mises en équations afin d'obtenir un modèle général des erreurs de navigation.

4.2.2 Principe de fonctionnement

L'origine de cette technologie est liée aux travaux de Bryan [Brya 90]. Son principe de fonctionnement repose sur la propriété suivante :

Propriété : Tout plan d'oscillation non rigidement lié à la terre présente un caractère inertiel. ■

Ce phénomène physique fut mis en évidence avec le pendule de Foucault, en 1851 au Panthéon [Fouc 51] : lorsque la terre tourne sur elle même, le plan d'oscillation du pendule reste parallèle par rapport aux étoiles, et donc mobile sur terre.

Un Gyroscope Résonnant Hémisphérique (GRH) est une coupole ressemblant quelque peu à une moitié supérieure de verre à vin. Celle-ci est mise en vibration mécanique, créant ainsi un plan d'onde dans la coupole, comme l'atteste la figure 4.1. La coupole est rigidement liée au porteur, notamment au repère de mesures $[m]$. De ce fait, lorsque celui-ci tourne par rapport au référentiel inertiel $[i]$, le plan d'onde doit théoriquement, en raison de son caractère inertiel, conserver un axe immobile par rapport à $[i]$. En réalité, le plan d'onde est partiellement entraîné, comme l'illustre la figure 4.2, où A est un point lié à la coupole. Lorsque cette dernière effectue par rapport à $[i]$ une rotation d'un angle $\Theta^{m/i}$ autour de son axe de symétrie, qualifié d'*angle mécanique*, le plan d'onde tourne d'un angle $\Theta^{e/i}$, $[e]$ étant un repère fictif lié au plan d'onde. Ces deux valeurs sont reliées par l'équation suivante, où β est un *coefficient d'entraînement*, compris entre 0 et 1 :

$$\Theta^{e/i} = \beta\Theta^{m/i}. \tag{4.1}$$

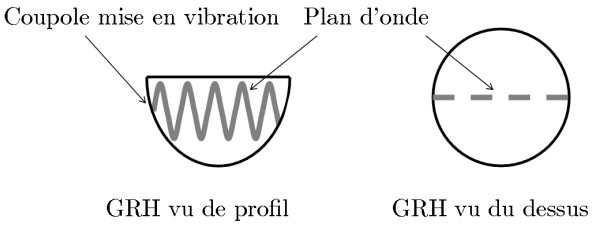


Fig. 4.1 – Constitution d'un GRH

De ce fait, relativement au référentiel $[m]$ lié au porteur (et donc à la coupole du GRH), tout se passe comme si le plan d'onde avait tourné d'un angle $\Theta^{e/m}$, appelé *angle électrique*, défini

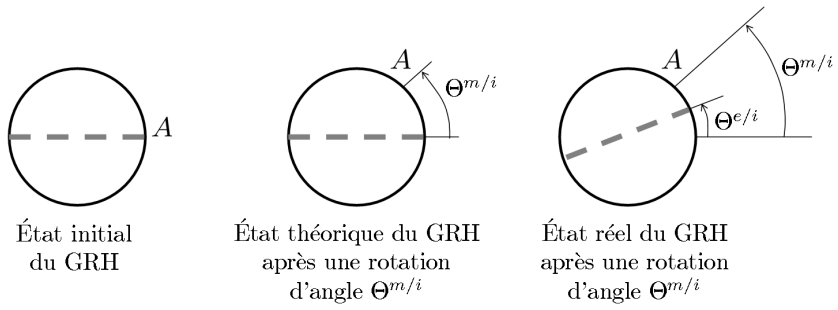


FIG. 4.2 – Rotation d'un GRH

par l'équation suivante (voir figure 4.3) :

$$\begin{aligned} \Theta^{e/m} &= \Theta^{e/i} + \Theta^{i/m} \\ &= \beta\Theta^{m/i} + \Theta^{i/m} \\ &= -\underbrace{(1-\beta)}_{=\alpha_B}\Theta^{m/i}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

où α_B est le *coefficient de Bryan*. Sa valeur dépend de la géométrie de la coupole. Dans le cas du GRH, $\alpha_B = 0,56$. Par la suite, afin d'alléger les notations, on notera respectivement θ_e et θ_m les angles électrique et mécanique :

$$\begin{aligned} \theta_e &= \Theta^{e/m}, \\ \theta_m &= \Theta^{m/i}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

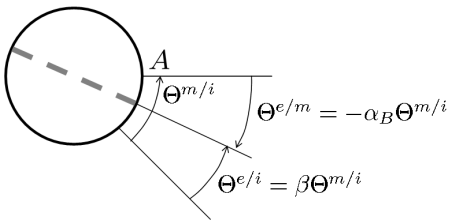


FIG. 4.3 – Rotation du plan d'onde relativement à la coupole du GRH

La position du plan d'onde à l'intérieur du GRH est détectée par des codeurs, comme illustré sur la figure 4.4. Ainsi, connaissant l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan d'onde, et sachant que celui-ci passe théoriquement par l'origine, il est facile de retrouver l'angle θ_e, et donc θ_m via l'équation (4.2). Un GRH est ainsi capable de fournir avec une très bonne précision l'attitude d'un véhicule sous forme d'angles, et ce à partir d'une constitution physique relativement simple [Matt 92], ce qui se traduit par un coût de fabrication inférieur à ceux des autres technologies.

4.2.3 Erreurs engendrées par le GRH

Malheureusement, si la constitution du GRH est relativement simple, elle engendre certaines erreurs qu'il est nécessaire de corriger si l'on souhaite une estimation de l'attitude de bonne qualité. Les erreurs inhérentes au GRH sont principalement de trois types : *erreur de dérive*, *erreur d'angle* et bruit. Ces dernières sont compensées au sein de l'UMI mais de manière imparfaite, de sorte que les valeurs en sortie de l'UMI sont toujours entachées d'erreurs résiduelles.

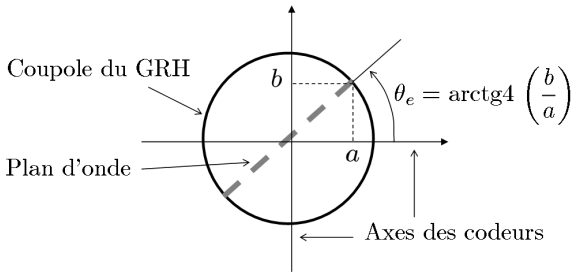


FIG. 4.4 – Détection de la position angulaire du plan d'onde par des codeurs

Erreur de dérive :

L'erreur de dérive est une erreur impactant la vitesse angulaire, et donc homogène à des degrés par heure. Son effet cumulé dans le temps engendre donc une dérive de l'angle mesuré par le GRH, d'où le nom de dérive gyroscopique. Le phénomène de dérive est dû à un mauvais entretien du plan d'onde. En effet, il est nécessaire d'apporter de manière continue de l'énergie à l'onde, de sorte que les pertes électromagnétiques soient compensées et que son amplitude reste constante dans le temps. Seulement, si l'apport ne se fait pas exactement dans l'axe du plan, cela crée une dérive de l'onde : sa trajectoire vue de dessus devient alors elliptique (figure 4.5). On peut faire l'analogie avec une balançoire : si l'on pousse dans l'axe, la trajectoire sera rectiligne vu de dessus. En revanche, si l'on pousse un peu de côté, la balançoire aura tendance à partir de travers, ce qui résulte en une trajectoire elliptique vu de dessus.

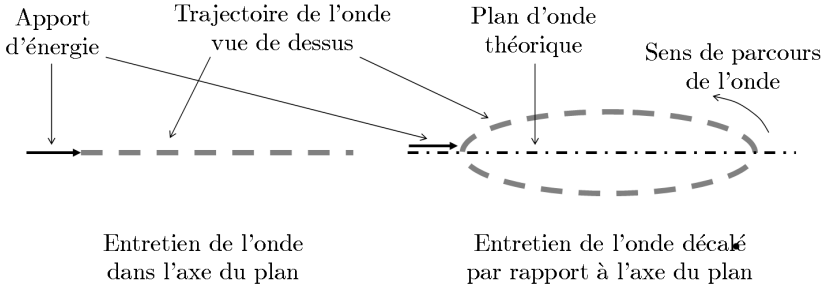


FIG. 4.5 – Origine de la dérive sur un GRH

Ce mauvais entretien a pour origine l'une des deux causes suivantes :
- une mauvaise détection de la position du plan d'onde,
- une imprécision au niveau de l'électronique interne du GRH.

Qu'elle soit provoquée par l'une des deux raisons précédentes (ou les deux conjuguées), la dérive conduit à une erreur de mesure : la grandeur relevée n'est pas θ_e mais $\theta_e^* = \theta_e + d_e$, où d_e est l'erreur angulaire de dérive exprimée en angle électrique (figure 4.6). Cette erreur de mesure se répercute alors sur le processus d'entretien du plan d'onde, qui se trouve décalé de l'angle d_e, ce qui aura pour conséquence d'accentuer encore plus l'erreur angulaire d_e et créer ainsi le phénomène de dérive (cf. figure 4.7). d_e étant alors dans l'absolu une fonction croissante du temps, il est plus naturel d'exprimer cette erreur sur la vitesse angulaire :

$$\Omega_e^* = \Omega_e + \mathcal{D}_e, \tag{4.4}$$

où :

$$\Omega_e^* = \frac{\mathrm{d}\theta_e^*}{\mathrm{d}t}, \qquad \Omega_e = \frac{\mathrm{d}\theta_e}{\mathrm{d}t}, \qquad \mathcal{D}_e = \frac{\mathrm{d}d_e}{\mathrm{d}t}. \tag{4.5}$$

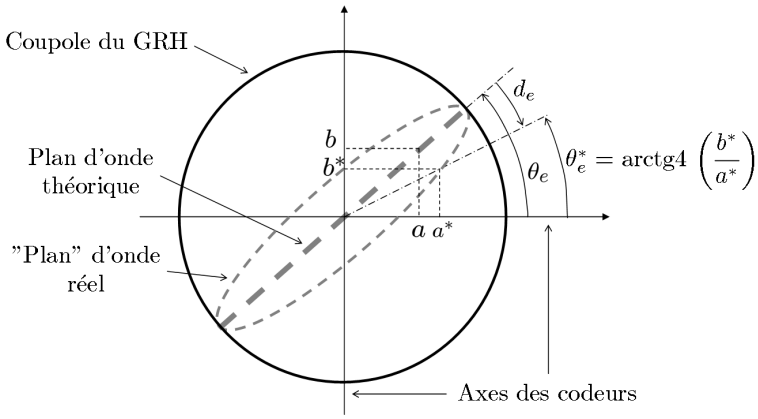


FIG. 4.6 – Erreur de dérive sur un GRH

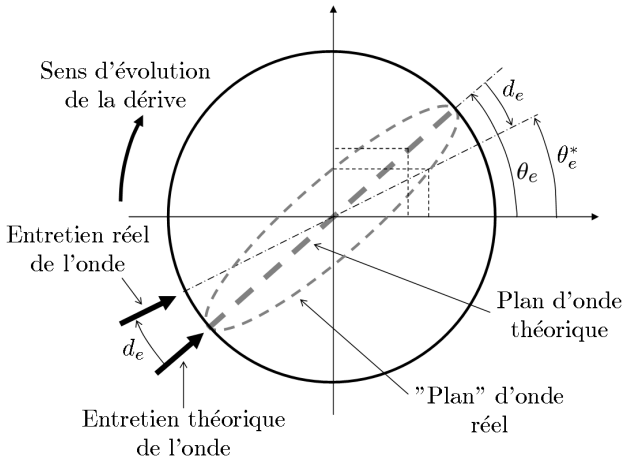


FIG. 4.7 – Phénomène de dérive du GRH

Erreur d'angle :

L'erreur d'angle d'un GRH résulte d'une erreur de *codage angulaire*, dû à la résolution non infinie des codeurs. Cela engendre un écart $\varepsilon_{ca}^{(e)}$ entre l'angle électrique théorique affecté d'une dérive (θ_e^*) et la valeur réellement mesurée (θ_e'), comme l'atteste la figure 4.8.

Bruit gyroscopique :

Deux types de bruits entachent les données mesurées par un GRH : un bruit blanc et un cheminement aléatoire (cf. ann. G). Ces deux perturbations aléatoires sont de nature gaussienne et centrée. Le bruit blanc $\nu_a^{(e)}$ est caractérisé par son écart-type en deg/$\sqrt{\text{Hz}}$ et le cheminement aléatoire par l'écart-type de son bruit blanc générateur $\nu_d^{(e)}$, en deg/$\sqrt{\text{h}}$. Dorénavant, on regroupera l'ensemble des erreurs affectant respectivement la vitesse angulaire et l'angle d'un GRH dans les perturbations globales $\varepsilon_d^{(e)}$ et $\varepsilon_a^{(e)}$, définies comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d^{(e)} &= \mathcal{D}_e + \nu_d^{(e)}, \\ \varepsilon_a^{(e)} &= \varepsilon_{ca}^{(e)} + \nu_a^{(e)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

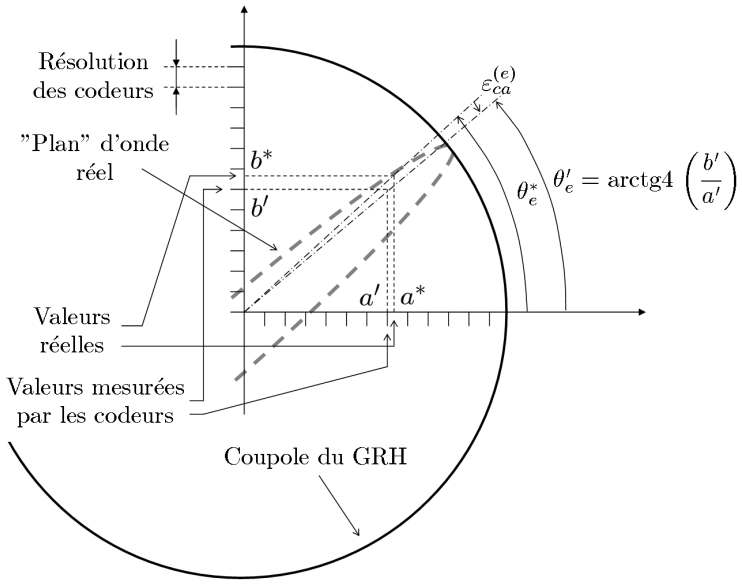


FIG. 4.8 – Erreur de codage angulaire sur un GRH

4.2.4 Modèle global des erreurs du GRH

La grandeur en sortie d'un GRH à l'instant t est un angle électrique $\theta_e(t)$, idéalement lié à la vitesse de rotation vraie Ω^{v} par la relation suivante :

$$\theta_e(t) = \theta_e(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Omega^{\mathrm{v}}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.7}$$

Cet angle est ensuite reconverti en angle mécanique puis différencié à la fréquence de navigation f_n au sein de l'UMI, afin d'avoir en sortie l'incrément d'angle $\Delta\theta_{m,n}$ durant la période d'échantillonnage (de durée T_n) correspondante :

$$\Delta\theta_{m,n} = \frac{-1}{\widehat{\alpha}_B}\left(\theta_e(nT_n) - \theta_e((n-1)T_n)\right), \tag{4.8}$$

où $\widehat{\alpha}_B$ est l'estimée du coefficient de Bryan α_B, dans l'hypothèse où la vraie valeur de ce dernier ne serait pas parfaitement connue. En utilisant les relations (4.7) et (4.8) et les erreurs globales $\varepsilon_d^{(e)}$ et $\varepsilon_a^{(e)}$, le schéma-bloc synthétique du GRH s'obtient aisément (cf. figure 4.9).

Le coefficient de Bryan est en général bien connu, de sorte que l'on peut légitimement émettre l'hypothèse que $\widehat{\alpha}_B = \alpha_B$. Il est alors possible de simplifier le schéma-bloc de la figure 4.9 en considérant toutes les erreurs (dérive, angle, etc.) sous forme mécanique. Il vient alors le schéma-bloc présenté sur la figure 4.10. Une telle représentation est plus commode d'utilisation puisqu'il n'y a plus à raisonner en angle électrique/angle mécanique mais uniquement en angle mécanique. En outre, les caractéristiques du bruit blanc et du cheminement aléatoire angulaire sont généralement exprimées en angle mécanique. Sur cette figure, les nomenclatures sont comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d &= -\frac{1}{\alpha_B}\varepsilon_d^{(e)}, \\ \varepsilon_a &= -\frac{1}{\alpha_B}\varepsilon_a^{(e)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

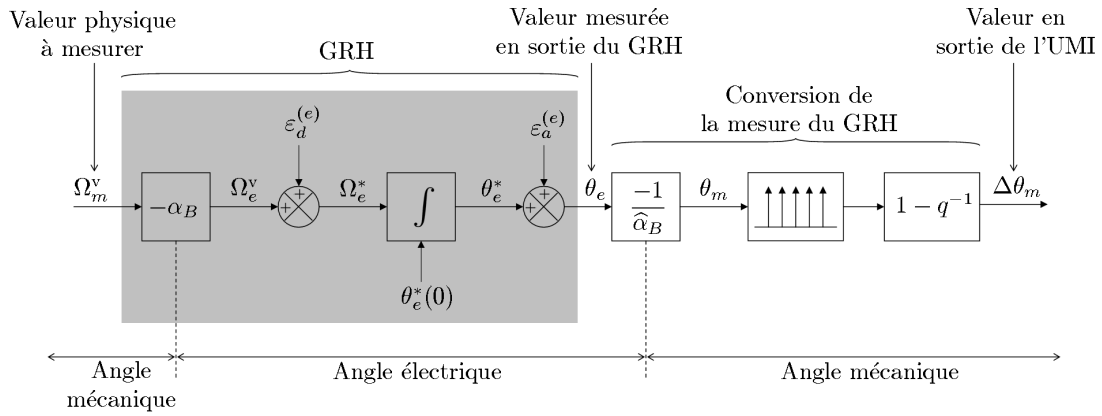


FIG. 4.9 – Schéma-bloc d'un GRH

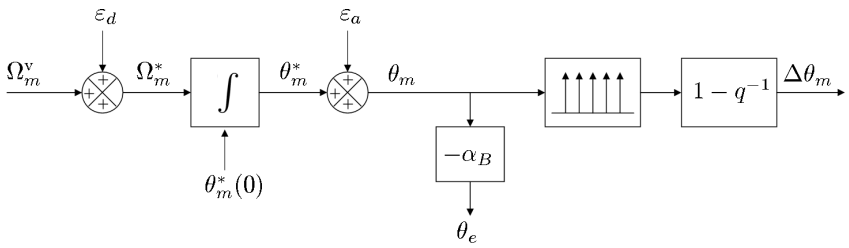


FIG. 4.10 – Schéma-bloc simplifié d'un GRH

4.2.5 Mise en équation des erreurs du GRH

Nous cherchons à mettre en équation l'erreur ε_d sur la vitesse angulaire du GRH, et plus particulièrement la dérive gyroscopique $\mathcal{D} = -\mathcal{D}_e/\alpha_B$. Les erreurs d'angle ε_a ne sont pas considérées ici, du fait que ces dernières ne s'intègrent pas de manière naturelle dans le modèle d'erreurs de navigation, ce dernier étant obtenu à partir d'équations différentielles ne faisant intervenir que des erreurs sur les vitesses angulaires.

La constitution et le principe de fonctionnement du GRH autorisent le constat suivant : si l'on remplace θ_e^* par ce même angle mais modulo π, alors l'erreur de dérive aura la même valeur (cf. figure 4.6). En d'autres termes $\mathcal{D}$ est une fonction π-périodique de θ_e^*. Cette périodicité autorise une décomposition en série de Fourier spatiale de ε_d :

$$\mathcal{D}(\theta_e^*) = a_0(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\cos(i\theta_e^*) + b_i(t)\sin(i\theta_e^*) + \varepsilon_r(N,t), \tag{4.10}$$

où N est l'ordre de développement (théoriquement infini) et $\varepsilon_r(N)$ le résidu lié à la non-prise en compte des harmoniques d'ordre supérieur à N. En pratique, l'angle θ_e^* n'est pas connu. La grandeur disponible est $\theta_e = \theta_e^* + \varepsilon_a$. On émet alors l'hypothèse que ε_a est négligeable devant θ_e^*, de sorte que (4.10) devient :

$$\mathcal{D}(\theta_e) = a_0(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\cos(i\theta_e) + b_i(t)\sin(i\theta_e) + \varepsilon_r(t). \tag{4.11}$$

En plus de l'omission des harmoniques de rang supérieur à N, le résidu $\varepsilon_r(t)$ inclut alors l'erreur commise en remplaçant θ_e^* par θ_e. Dans l'équation (4.11), les paramètres inconnus sont

les amplitudes d'harmoniques $\{a_i(t)\}_{0\leq i\leq N}$ et $\{b_i(t)\}_{1\leq i\leq N}$, ainsi que la valeur du résidu ε_r. En outre, ce modèle d'erreurs présente certaines propriétés :

- les amplitudes $\{a_i(t)\}_{0\leq i\leq N}$ et $\{b_i(t)\}_{1\leq i\leq N}$ sont relativement stables et par conséquent modélisables sous forme d'un cheminement aléatoire :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} & = & \eta_i(t) & 0 \leq i \leq N, \\ \dfrac{\mathrm{d}b_i}{\mathrm{d}t} & = & \eta_i(t) & 1 \leq i \leq N, \end{array} \tag{4.12}$$

  où les $\{\eta_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont des bruits blancs, gaussiens, centrés et d'écart-type relativement bien connu,
- les ordres de grandeur des harmoniques sont connus,
- certaines harmoniques jouent un rôle prépondérant dans le modèle (4.11),
- le résidu $\{\varepsilon_r(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est borné,
- $\{\varepsilon_r(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ ne peut varier infiniment rapidement (en d'autres termes, si ce résidu est décrit par un processus markovien à l'ordre 1, alors la période d'autocorrélation de ce dernier ne peut descendre en dessous d'une certaine valeur).

0

Ces propriétés ont été obtenues grâce à une caractérisation poussée des GRH, préalablement réalisée par les concepteurs de cette technologie.

4.2.6 Modèle global d'erreurs de navigation et d'erreurs GRH

Considérons maintenant non plus 1 mais 3 GRH, placés sur les 3 axes $(O_m, \overrightarrow{x_m})$, $(O_m, \overrightarrow{y_m})$ et $(O_m, \overrightarrow{z_m})$ du repère de mesures $[m]$. En affectant les indices x, y et z à chacun de ces gyroscopes suivant qu'ils sont positionnés sur les axes $(O_m, \overrightarrow{x_m})$, $(O_m, \overrightarrow{y_m})$ ou $(O_m, \overrightarrow{z_m})$, l'erreur gyroscopique globale $\boldsymbol{\varepsilon}_{d,m}$ exprimée dans le repère de mesures $[m]$ devient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{d,m} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{d,x} \\ \varepsilon_{d,y} \\ \varepsilon_{d,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_x \\ \mathcal{D}_y \\ \mathcal{D}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{d,x} \\ \nu_{d,y} \\ \nu_{d,z} \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

ce qui, en reprenant le modèle (4.11), se met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\varepsilon}_{d,m} & = & \left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc} 1 & \cos(\theta_{e,x}) & \dots & \sin(N\theta_{e,x}) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \sin(N\theta_{e,y}) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \sin(N\theta_{e,z}) \end{array}\right] \\ & & \times \left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc} a_{0,x} & a_{1,x} & \dots & b_{N,x} & a_{0,y} & \dots & b_{N,y} & a_{0,z} & \dots & b_{N,z} \end{array}\right]^T \\ & & + \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,x} \\ \varepsilon_{r,y} \\ \varepsilon_{r,z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{d,x} \\ \nu_{d,y} \\ \nu_{d,z} \end{bmatrix}, \end{array} \tag{4.14}$$

que l'on peut condenser sous la forme synthétique suivante :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\varepsilon}_{d,m}(t) & = & \boldsymbol{\mathcal{D}}_m(t) + \boldsymbol{\nu}_m(t), \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_m(t) & = & \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_{r,m}(t), \end{array} \tag{4.15}$$

où $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3(2N+1)}$ est un vecteur comprenant les diverses amplitudes des harmoniques (inconnues et donc à estimer) et $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{3\times 3(2N+1)}$ est une matrice regroupant les cosinus et sinus des angles électriques, avec : $\boldsymbol{\theta}_e = [\theta_{e,x} \;\; \theta_{e,y} \;\; \theta_{e,z}]^T$. Par conséquent, les coefficients de cette matrice sont connus. En outre, cette forme de modèle peut être généralisée :

– en adoptant des ordres de développement différents pour chaque gyroscope,
– en omettant certaines harmoniques jugées peu représentatives (si par exemple, les harmoniques notoires sont celles de rang 2 et 6, alors $N = 6$ les harmoniques de rang 0, 1, 3, 4 et 5, considérées comme négligeables, peuvent être supprimées du modèle (4.15)).

Par ailleurs, les relations de (4.12) conduisent à écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\eta}(t), \tag{4.16}$$

où $\{\boldsymbol{\eta}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un bruit blanc vectoriel, gaussien, centré et de covariance (diagonale) connue. Enfin, conformément au modèle d'erreurs gyroscopique (3.89) introduit dans le chapitre précédent, et compte tenu de l'équation (4.15), l'erreur gyroscopique globale $\boldsymbol{\varepsilon}_{g,m}(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{g,m}(t) &= \boldsymbol{\mathcal{D}}_m(t) + \boldsymbol{\mathcal{K}}_g(t)\boldsymbol{\omega}_m(t) + \boldsymbol{\nu}_m(t) \\ &= \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_{r,m}(t) + \boldsymbol{\nu}_m(t) + \boldsymbol{\mathcal{K}}_g(t)\boldsymbol{\omega}_m(t). \end{aligned} \tag{4.17}$$

En insérant les relations (4.16) et (4.17) dans le modèle des erreurs de navigation en Ψ (3.90), il vient le modèle de dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\dot{\boldsymbol{r}}_w \\ \delta\dot{\boldsymbol{V}}_w \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}}_w \\ \hdashline \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{ccc:c} -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w) & \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} \\ \boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z) & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{f}_w) & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & -\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \hdashline \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times n_\xi} \end{array}\right] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{r}_w \\ \delta\boldsymbol{V}_w \\ \boldsymbol{\Psi}_w \\ \hdashline \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{T}_{wm} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{T}_{wm} \\ \hdashline \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}_m + \boldsymbol{\mathcal{K}}_a\boldsymbol{f}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{r,m} + \boldsymbol{\mathcal{K}}_g\boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times1} \\ \boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\upsilon}_m \\ -\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\nu}_m \\ \hdashline \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.18}$$

où $n_\xi = 3(2N-1)$. A noter qu'un tel modèle met en évidence un compromis précision/complexité : en effet, plus l'ordre de développement N du modèle harmonique est élevé, plus l'amplitude maximale du résidu $\boldsymbol{\varepsilon}_{r,m}$ est faible, mais plus le nombre de variables d'état est important : le modèle est alors précis mais complexe, ce qui peut engendrer certains problèmes d'observabilité. A l'inverse, si N est choisi faible, le modèle est simple mais peu précis. Par la suite, un ordre de développement $N = -1$ signifiera que $\boldsymbol{\varepsilon}_{g,m}$ n'est pas décrit sous forme harmonique, et qu'en l'occurrence, $\boldsymbol{\varepsilon}_{g,m} = \boldsymbol{\varepsilon}_{r,m}$.

4.3 Contexte de l'application et analyse du problème

Dans l'application considérée, il a été décidé de se focaliser sur l'impact de l'utilisation de GRH sur un système de navigation, notamment les conséquences de la méconnaissance de modèle d'erreurs de GRH sur le filtrage de navigation. Par conséquent, afin de ne pas trop complexifier le problème, certaines hypothèses simplificatrices ont été émises :

– les accéléromètres sont parfaits, ce qui revient à poser $\boldsymbol{\varepsilon}_{a,m} = \boldsymbol{0}_{3\times1}$ dans le modèle d'erreurs de navigation,
– il n'y a pas d'erreurs de facteurs d'échelle et les senseurs inertiels sont parfaitement positionnés sur les axes du repère de mesures $[m]$ (pas d'erreur de calage d'axes) : $\boldsymbol{\mathcal{K}}_a = \boldsymbol{0}_{3\times3}$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}_g = \boldsymbol{0}_{3\times3}$.

Ces hypothèses se justifient par l'absence des erreurs correspondantes dans les simulations qui seront réalisées. En outre, afin d'avoir des modèles plus simples, nous avons choisi les configurations suivantes pour le système de navigation :

– repère de mesures $[m]$ confondu avec le repère body $[b]$ (autrement dit, $\boldsymbol{T}_{bm} = \boldsymbol{I}_3$),
– recalage de navigation s'effectuant en boucle ouverte,
– mécanisation de la plate-forme asservie au nord ($[w]$ doit suivre $[v] = [g]$).

Enfin, le dispositif externe permettant d'hybrider la navigation est un GPS. Celui-ci ne mesure que la position du porteur dans l'espace et n'est affecté d'aucune erreur de type biais d'horloge, etc. Le bruit entachant chacune des observations GPS est constitué d'un bruit blanc et d'un markovien à l'ordre 1, tous deux gaussiens et centrés. Le bruit relatif à un axe donné (nord, ouest ou zénithal) est décorrélé de celui des autres axes, et la période d'auto-corrélation des bruits markoviens est identique pour chaque axe, de sorte que le bruit de mesure global $\boldsymbol{w}^{\mathrm{GPS}}$ du GPS s'exprime comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{w}^{\mathrm{GPS}}(t) & = & \boldsymbol{v}^{\mathrm{GPS}}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{GPS}}(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{GPS}}}{\mathrm{d}t} & = & -\dfrac{1}{\tau_{\mathrm{GPS}}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{GPS}}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{GPS}}(t), \end{array} \tag{4.19}$$

où $\left\{\boldsymbol{u}^{\mathrm{GPS}}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $\left\{\boldsymbol{v}^{\mathrm{GPS}}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont deux séquences blanches indépendantes. En effectuant la différence entre la position observée par le GPS et celle calculée par le module d'intégration de navigation, on obtient une mesure $\boldsymbol{y}$ de l'erreur de position $\delta\boldsymbol{r}_w$ commise par le dispositif inertiel. En tenant compte du système d'équations différentiel (4.18) et de l'ensemble des considérations émises dans cette section, on aboutit alors au modèle d'état à temps continu suivant pour les erreurs de navigation :

$$\begin{array}{rcl} \left[\begin{array}{c} \delta\dot{\boldsymbol{r}}_w \\ \delta\dot{\boldsymbol{V}}_w \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}}_w \\ \hline \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \hline \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{GPS}} \end{array}\right] & = & \left[\begin{array}{ccc|c|c} -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w) & \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z) & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{f}_w) & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & -\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}_e) & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \hline \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times n_\xi} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} \\ \hline \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & -\frac{1}{\tau_{\mathrm{GPS}}}\boldsymbol{I}_3 \end{array}\right] \\ & & \times \left[\begin{array}{c} \delta\boldsymbol{r}_w \\ \delta\boldsymbol{V}_w \\ \boldsymbol{\Psi}_w \\ \hline \boldsymbol{\xi} \\ \hline \boldsymbol{x}^{\mathrm{GPS}} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ -\boldsymbol{T}_{wm} \\ \hline \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} \\ \hline \boldsymbol{0}_{3\times3} \end{array}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{r,m} + \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_{3\times1} \\ \boldsymbol{0}_{3\times1} \\ -\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\nu}_{d,m} \\ \hline \boldsymbol{\eta} \\ \hline \boldsymbol{u}^{\mathrm{GPS}} \end{array}\right], \\ \boldsymbol{y} & = & \left[\begin{array}{ccc|c|c} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & \boldsymbol{I}_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c|c} \delta\boldsymbol{r}_w^T & \delta\boldsymbol{V}_w^T & \boldsymbol{\Psi}_w^T & \boldsymbol{\xi}^T & (\boldsymbol{x}^{\mathrm{GPS}})^T \end{array}\right]^T + \boldsymbol{v}^{\mathrm{GPS}}, \end{array} \tag{4.20}$$

modèle que l'on condense sous la forme synthétique suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) = \boldsymbol{A}_1(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{\Gamma}_1(t)\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{w}_1(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{v}(t) \end{array}\right. , \tag{4.21}$$

où les vecteurs d'état $\boldsymbol{x}_1$, d'entrée inconnue $\boldsymbol{e}$, de bruit de dynamique $\boldsymbol{w}_1$ et de bruit de mesure $\boldsymbol{v}$ sont définis comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}_1(t) & = & \left[\begin{array}{ccc|c|c} \delta\boldsymbol{r}_w^T & \delta\boldsymbol{V}_w^T & \boldsymbol{\Psi}_w^T & \boldsymbol{\xi}^T & (\boldsymbol{x}^{\mathrm{GPS}})^T \end{array}\right]^T, \\ \boldsymbol{w}_1(t) & = & \left[\begin{array}{ccc|c|c} \boldsymbol{0}_{1\times3} & \boldsymbol{0}_{1\times3} & (-\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\nu}_{d,m})^T & \boldsymbol{\eta}^T & (\boldsymbol{u}^{\mathrm{GPS}})^T \end{array}\right]^T, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \boldsymbol{e}(t) & = & \boldsymbol{\varepsilon}_{r,m}(t), \\ \boldsymbol{v}(t) & = & \boldsymbol{v}^{\mathrm{GPS}}(t) \end{array} \tag{4.22}$$

et les matrices d'état $\boldsymbol{A}_1$, de "commande" $\boldsymbol{\Gamma}_1$ et d'observations $\boldsymbol{H}_1$ valent :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}_1(t) & = & \left[\begin{array}{ccc|c|c} -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w) & \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z) & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{f}_w) & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & -\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}_e) & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \hline \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times n_\xi} & \boldsymbol{0}_{n_\xi\times3} \\ \hline \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & -\frac{1}{\tau_{\mathrm{GPS}}}\boldsymbol{I}_3 \end{array}\right], \\ \boldsymbol{\Gamma}_1(t) & = & \left[\begin{array}{ccc|c|c} \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{T}_{wm}^T & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \end{array}\right]^T, \quad \boldsymbol{H}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c|c} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} & \boldsymbol{I}_3 \end{array}\right]. \end{array} \tag{4.23}$$

La dépendance de $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{\Gamma}_1$ vis-à-vis du temps est due au fait que certains des paramètres de ces matrices sont fonction de grandeurs issues du module d'intégration de navigation. Ces dernières ne sont généralement pas constantes mais sont connues à chaque instant. Le problème considéré se résume ainsi à celui d'estimation d'état sur un système linéaire à temps variant en présence d'une entrée inconnue de dimension 3. Diverses solutions à ce problème ont été présentées dans le premier chapitre et notamment sa dernière section. A noter que du fait que $\{\boldsymbol{\xi}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ varie lentement, il peut être approximé par un vecteur constant. Par conséquent, une autre forme de représentation d'état synthétique est possible pour (4.20). Il s'agit de :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) = \boldsymbol{A}_2(t)\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{B}_2(t)\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Gamma}_2(t)\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{w}_2(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{v}(t) \end{array}\right. , \tag{4.24}$$

où :

$$\boldsymbol{x}_2(t) = \left[\begin{array}{ccc|c} \delta\boldsymbol{r}_w^T & \delta\boldsymbol{V}_w^T & \boldsymbol{\Psi}_w^T & (\boldsymbol{x}^{\mathrm{GPS}})^T \end{array}\right]^T, \ \boldsymbol{w}_2(t) = \left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{0}_{1\times3} & \boldsymbol{0}_{1\times3} & -(\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\nu}_{d,m})^T & (\boldsymbol{u}^{\mathrm{GPS}})^T \end{array}\right]^T \tag{4.25}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}_2(t) & = & \left[\begin{array}{ccc|c} -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w) & \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z) & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + 2\boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{f}_w) & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\rho}_w + \boldsymbol{T}_{wt}\boldsymbol{\Omega}_t) & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \hline \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\frac{1}{\tau_{\mathrm{GPS}}}\boldsymbol{I}_3 \end{array}\right], \\ \boldsymbol{B}_2(t) & = & \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} \\ \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} \\ -\boldsymbol{T}_{wm}\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \hline \boldsymbol{0}_{3\times n_\xi} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{\Gamma}_2(t) = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ -\boldsymbol{T}_{wm} \\ \hline \boldsymbol{0}_{3\times3} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{H}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3 \end{array}\right]. \end{array} \tag{4.26}$$

Les modèles (4.21) et (4.24) sont formellement équivalents lorsque $n_\xi = 0$, c'est-à-dire qu'aucune harmonique n'est modélisée. L'analyse de l'observabilité de ces modèles s'avère complexe du fait que la dérive gyroscopique n'est pas constante. La démarche présentée dans le chapitre 3 n'a alors que peu d'intérêt. D'un point de vue pratique, l'utilisation du grammien d'observabilité est envisageable, du fait que le modèle (4.21) (ou (4.24) qui est équivalent) est du type linéaire à temps variant. Toutefois, un problème se pose : la matrice d'état dépend de données issues du module d'intégration de navigation, lesquelles sont fonction de la trajectoire du porteur, inconnue à l'avance. Il est ainsi impossible d'obtenir des résultats génériques quant à l'observabilité des diverses variables d'état. Cependant, nous pouvons tout de même émettre le constat intuitif suivant : plus le nombre de variables d'état (notamment les amplitudes d'harmoniques modélisant la dérive gyroscopique) est important, plus le degré d'observabilité de ces dernières sera faible car il faudra un nombre de mesures plus élevé pour décorréler ces grandeurs. Or, plus le nombre d'harmoniques modélisées est grand, plus le résidu de dérive sera faible : cela constitue un compromis représentativité/observabilité. En effet, plus le modèle harmonique est développé, plus celui-ci sera représentatif de la dérive vraie (amplitude du résidu minimisée) mais il en sera d'autant moins observable. Ce compromis représentativité/observabilité constitue un aspect important du problème considéré (estimation en présence d'entrée inconnue, l'entrée inconnue étant le résidu de dérive).

4.4 Approches de résolution du problème envisagées

Parmi les techniques envisagées pour résoudre ce problème d'estimation en présence d'entrée inconnue, certaines n'ont pas été retenues : nous allons brièvement les évoquer ainsi que les

raisons de leur non utilisation.

4.4.1 Approches n'utilisant pas de décomposition en série de Fourier

Dans ce type d'approche, le nombre n_ξ d'amplitudes d'harmoniques à estimer est nul, ce qui revient à utiliser le modèle d'état (4.24) mais en supprimant le terme de commande $\boldsymbol{B}_2(t)\boldsymbol{\xi}$. L'ensemble de la dérive gyroscopique est alors décrit par l'entrée inconnue $\boldsymbol{e}(t)$. Parmi les techniques adaptées au problème considéré, mentionnons tout d'abord le filtre à entrées inconnues (cf. p. 37) : cet outil n'est tout simplement pas applicable puisqu'il nécessite que le critère suivant soit respecté quel que soit t :

$$\operatorname{rang}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Gamma}_2(t)\right) = \operatorname{rang}\left(\boldsymbol{\Gamma}_2(t)\right), \tag{4.27}$$

ce qui n'est de toute évidence pas le cas puisque le produit $\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Gamma}_2(t)$ est égal à $\mathbf{0}_{3\times3}$. En outre, le principe des filtres à entrées inconnues n'est plus valable lors d'une perte des mesures.

Dans un autre état d'esprit, il aurait été intéressant de considérer chacune des trois composante de $\boldsymbol{e}(t)$ comme une fonction π-périodique de la composante correspondant de l'angle électrique $\boldsymbol{\theta}_e(t)$. Ainsi, en imaginant que, lors des phases où le GPS est disponible, il soit possible de reconstruire à chaque instant $\boldsymbol{e}(t)$, on pourrait imaginer mettre en œuvre une sorte de "tabulation" liant $\boldsymbol{e}(t)$ à $\boldsymbol{\theta}_e(t)$: cette tabulation serait mise à jour de manière adaptative dans les phases d'hybridation et servirait à prédire l'évolution de la dérive gyroscopique lors des pertes de GPS. Toutefois, un problème se pose : il faut pouvoir reconstruire $\boldsymbol{e}(t)$ à chaque instant t : la seule solution envisageable est alors l'inversion de modèle (cf. p. 37), laquelle n'est pas applicable en raison de l'instabilité engendrée par les équations du modèle d'erreur de navigation régissant la voie verticale (vitesse zénithale et altitude).

Parmi les autres approches non retenues figurent le filtrage de Kalman proportionnel-integral (cf. p. 38) et le filtrage de Kalman avec identification des caractéristiques du bruit d'état (en supposant que l'entrée inconnue soit assimilable à un bruit, cf. p. 43), car si leur principe de fonctionnement est séduisant, il est remis en question en cas de perte de mesures.

4.4.2 Utilisation de la théorie des jeux (filtre minimax, cf. p. 44)

Considérons le modèle (4.21) où certaines harmoniques, jugées notoires, ont été modélisées et dont les amplitudes correspondantes sont incluses dans le vecteur d'état. Considérons en outre que ce modèle est discrétisé par une procédure adéquate (par exemple celle décrite plus loin sur l'algorithme 17). Le filtre minimax s'avère tout-à-fait adapté au problème d'estimation d'état basée sur un tel modèle, mais malheureusement, plusieurs obstacles se dressent : tout d'abord, sa théorie suggère que l'entrée inconnue soit fonction de l'erreur d'estimation du filtre, ce qui peut paraître étrange d'un point de vue physique : en effet, il est difficilement concevable qu'une dérive gyroscopique soit fonction de l'erreur d'estimation d'un filtre de navigation (la logique voudrait que ce soit l'inverse). Par ailleurs, le modèle d'état considéré étant à temps variant, il est difficile de paramétrer la matrice $\boldsymbol{D}_k$ régissant l'effet de l'erreur d'estimation sur l'entrée inconnue (cf. section 1.6.3). En choisissant $\boldsymbol{D}_k = \gamma_k \boldsymbol{I}_{n_x}$, il faut respecter :

$$\gamma_k^2 \boldsymbol{Q}_k \leq \boldsymbol{I}_{n_x}, \tag{4.28}$$

où $\boldsymbol{Q}_k$ est l'équivalent dans la théorie minimax de la covariance d'erreur d'estimation *a priori* du filtrage de Kalman. Cette matrice étant symétrique et semi-définie positive, elle est diagonalisable, c'est-à-dire qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{M}_k \boldsymbol{\Delta}_k \boldsymbol{M}_k^{-1}, \tag{4.29}$$

où $\boldsymbol{\Delta}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de $\boldsymbol{Q}_k$, lesquelles sont toutes positives ou nulles. En tenant compte du résultat (4.29), la relation (4.28) devient :

$$\gamma_k^2 \boldsymbol{\Delta}_k \leq \boldsymbol{I}_{n_x}. \tag{4.30}$$

Pour que cette condition soit vérifiée, il suffit que γ_k vérifie :

$$\gamma_k^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_k)}, \tag{4.31}$$

où $\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_k)$ représente la plus grande des valeurs propres de $\boldsymbol{Q}_k$, c'est-à-dire le plus grand coefficient diagonal de $\boldsymbol{\Delta}_k$. Comme toutes les valeurs propres de $\boldsymbol{Q}_k$ sont positives ou nulles, alors : $\text{trace}(\boldsymbol{Q}_k) \geq \lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_k)$. La condition (4.28) est donc vérifiée en adoptant le réglage suivant :

$$\gamma_k = \frac{1}{\beta\sqrt{\text{trace}\,(\boldsymbol{Q}_k)}}, \tag{4.32}$$

où $\beta \in [1\ ;\ +\infty]$ est un coefficient à régler. En pratique, en simulant une trajectoire donnée (la trajectoire A, décrite plus loin), il s'avère qu'un choix trop faible pour β conduit à des instabilités du filtre localisées dans le temps, comme l'attestent les courbes de la figure 4.11, lesquelles illustrent l'erreur entre la position vraie du porteur et celle calculée par la navigation hybridée avec un filtre minimax et des mesures GPS présentes en permanence. Ces élévations des écart-types (racine carrée des termes diagonaux correspondant de la matrice $\boldsymbol{P}_k$) traduisent ni plus ni moins le fait que la condition (4.28) n'est à ces moments pas respectée. Pour faire disparaître ces "bosses", il est alors nécessaire d'amplifier fortement la valeur de β, mais le comportement du filtre minimax est alors équivalent à celui d'un filtre de Kalman : son apport n'est donc d'aucune utilité. De surcroît, cette théorie ne suppose pas que l'entrée inconnue est bornée, ce qui induit une perte de performance de la part de cet outil. Toutes ces considérations font que nous n'avons pas souhaité explorer davantage la voie du filtrage minimax.

4.4.3 Utilisation de l'estimation d'entrées récursive (RIE, cf. p. 39)

L'emploi de la théorie du RIE a lui aussi été envisagé, en se basant sur le modèle d'état (4.24) sur lequel on fait abstraction de l'entrée inconnue $\boldsymbol{e}(t)$ et en discrétisant l'équation d'état par une méthode appropriée. L'intérêt de cette technique réside en son découplage de l'estimation des amplitudes et des erreurs de navigation. Du fait qu'*a priori*, on ne sait pas quel ordre de développement harmonique adopter (c'est le compromis représentativité/observabilité), on peut alors supposer différents ordres de développement et utiliser une approche multi-modèles sur les entrées, de manière analogue à celle proposée par Bogler [Bogl 87], ce qui conduit à une architecture faisant intervenir un seul filtre de Kalman et un banc d'algorithmes de moindres carrés en parallèle. Cette idée est très séduisante mais l'utilisation du RIE entraîne deux problèmes : tout d'abord, il est nécessaire de négliger le résidu $\boldsymbol{e}(t)$, ce qui est quelque peu contradictoire avec la volonté de robustesse. Ensuite, la théorie du RIE s'inscrit dans le cadre d'une entrée à estimer rigoureusement constante. S'il est possible d'adapter cet algorithme au cas d'une entrée lentement variable dans le temps grâce à l'insertion d'un facteur d'oubli ou d'un effet intégral [Sirc 08a], cette configuration devient inacceptable dans le cas d'une perte d'hybridation : en effet, il est possible de démontrer mathématiquement que dans un telle situation, les covariances calculées par un RIE et par un filtre de Kalman employant le même modèle sont différentes. Ce

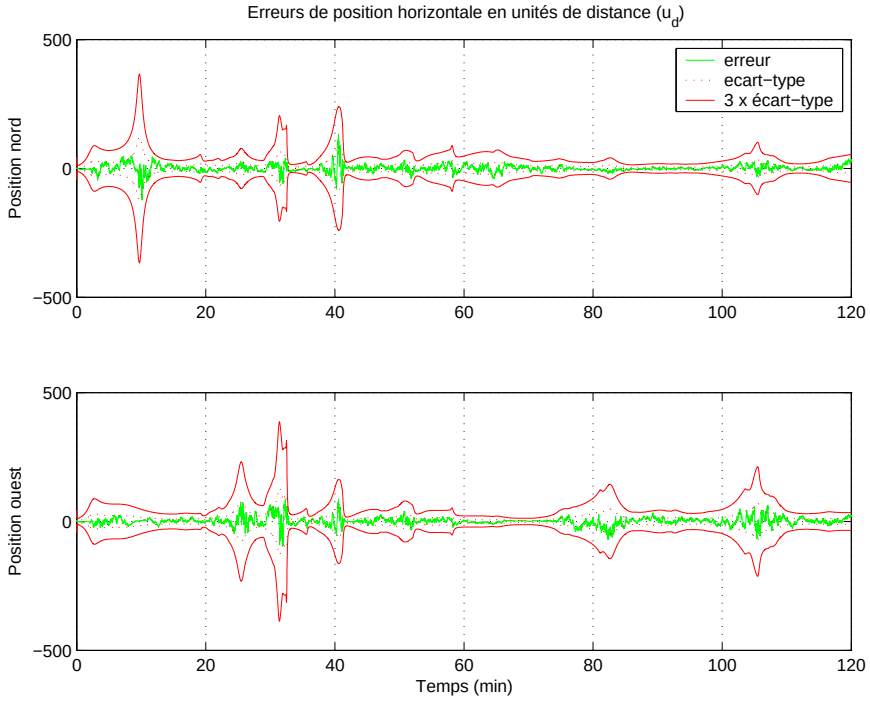


FIG. 4.11 – Erreur de position avec un filtre de navigation de type minimax

phénomène est illustré sur la figure 4.12 à l'aide de la trajectoire A, en considérant une coupure d'hybridation entre la 40ème et la 80ème minute.

Il est possible de contourner les problèmes propres au RIE en incluant les amplitudes d'harmoniques à l'intérieur du vecteur d'état, ce qui conduit à une simple configuration de banc de filtres de Kalman. Cependant, un obstacle demeure, à savoir la mise au point du critère de sélection du filtre (et donc du modèle) le plus approprié. Si l'on utilise la méthode classique basée sur l'innovation des filtres (cf. section 1.6.1), cela conduit à des résultats insatisfaisants : typiquement, le poids d'un modèle donné prend la valeur 1 à partir d'un instant donné et tous les autres deviennent par conséquent nuls. Ce phénomène pourrait en soit ne pas être dérangeant, mais le modèle ainsi choisi n'est pas celui donnant les meilleurs résultats en pratique. Par conséquent, il est nécessaire de mettre au point une technique de sélection plus élaborée, en utilisant par exemple des modèles multiples à interaction. Cependant, la mise en œuvre d'un tel outil s'avère en l'occurrence compliquée, du fait qu'il est nécessaire d'exprimer les probabilités de transition d'un modèle à un autre, ce qui est difficile à formaliser. Nous n'avons donc pas exploré davantage cette piste.

4.5 Approche de résolution du problème retenue

L'approche que nous avons retenu pour résoudre le problème se base sur le modèle d'état (4.21). Elle consiste à adopter un ordre de développement harmonique le plus faible possible (c'est-à-dire ne prendre en compte que les harmoniques notoires) afin de minimiser les problèmes d'observabilité et à modéliser le résidu à l'aide d'un certain nombre de processus markoviens :

– seule l'harmonique de rang 2 est modélisée ; les amplitudes de cette harmonique sont donc

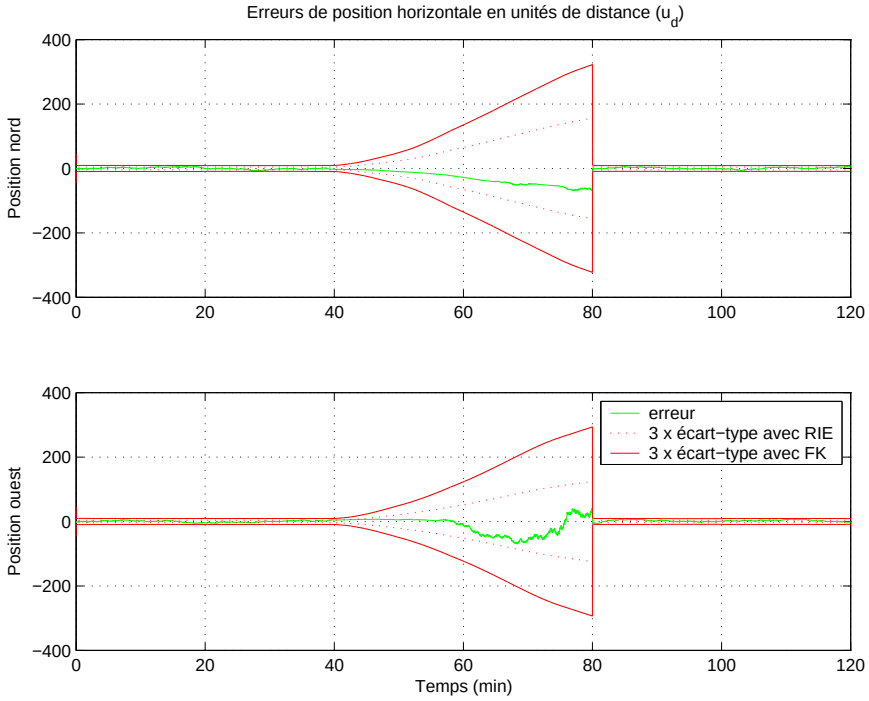


FIG. 4.12 – Erreur de position et écarts-types correspondants calculés par le RIE et par un filtre de Kalman employant le même modèle

incluses dans le vecteur d'état, ce qui porte à $n_x = 18$ le nombre de variables d'état[42] ;
- les différents bruits markoviens sont paramétrés de sorte que chacune des $n_e = 3$ composantes du résidu de modélisation $\boldsymbol{e}(t)$ (qui inclut l'effet de toutes les harmoniques excepté celle de rang 2, et qui constitue en l'occurrence l'entrée inconnue de la représentation d'état (4.21)), présente une variance d'Allan (cf. ann. H) plate sur une durée de mission donnée.

4.5.1 Conception d'une variance d'Allan plate pour le résidu de modélisation

La Variance d'Allan (VA) est un outil permettant de caractériser la stabilité d'un signal donné dans le temps (c'est-à-dire sa vitesse de variation). Une VA élevée pour un instant θ donné signifie en termes statistiques que la ressemblance entre les valeurs prises par le signal X considéré aux instants t (t étant quelconque) et $t+\theta$ est grande. Le but recherché est de concevoir une VA constante (également qualifiée de *plate*) entre deux instants t_1 et t_2, comme illustré sur la figure 4.13. Cela signifie que pour θ_1, θ_2 quelconques dans $[t_1\ ;\ t_2]$, $X(t_1)$ a autant de chance de ressembler à $X(t_1+\theta_1)$ qu'à $X(t_1+\theta_2)$. En d'autres termes, sur la plage de temps $[t_1\ ;\ t_2]$, le signal aléatoire $\{X(t)\}_{t_1\leq t\leq t_2}$ peut aussi bien varier lentement que rapidement. Si par exemple, X représente une dérive de 1 deg/h, cela veut dire que $X(t+1\text{h}) = X(t)+1\text{deg}$, mais on suppose que cette évolution de 1 degré en 1 heure peut aussi bien se faire de manière très régulière (rampe) qu'irrégulière (intégrale d'un processus aléatoire s'approchant du bruit blanc). Cela représente en quelques sortes une hypothèse pire-cas concernant la stabilité de $\{X(t)\}_{t_1\leq t\leq t_2}$, ainsi qu'un moyen de compenser un manque de connaissance relative à ce signal.

[42] Il y a dans l'ordre les 9 états de navigation (erreurs de position $\delta\boldsymbol{r}_w$, de vitesse $\delta\boldsymbol{V}_w$, d'attitude $\boldsymbol{\Psi}_w$), les 3 états $\boldsymbol{x}^{\text{GPS}}$ liés au bruit GPS non blanc et les $n_\xi = 6$ amplitudes d'harmoniques $\boldsymbol{\xi}$ modélisées, à savoir celles correspondant aux termes en sinus et cosinus pour chacun des 3 gyroscopes.

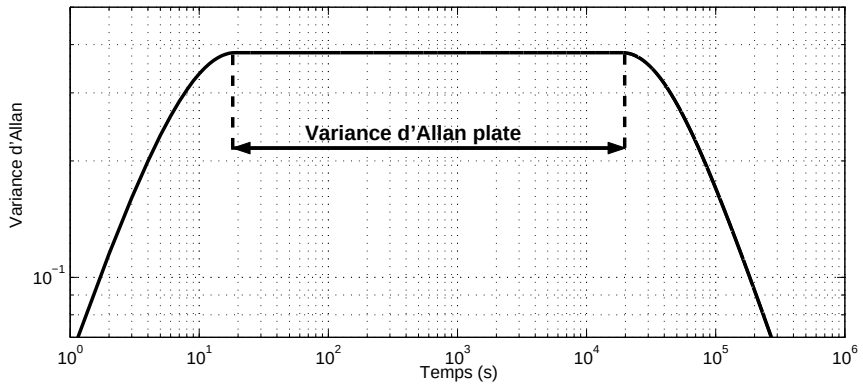


FIG. 4.13 – Allure d'une VA plate sur un intervalle de temps donné

Ainsi, notre but est de concevoir un modèle de $\boldsymbol{e}(t)$ sous forme d'équations différentielles d'ordre 1, de manière à ce que chacune de ses composantes présente une VA plate sur un intervalle de temps donné. Pour ce faire, nous partons du constat qu'en échelle logarithmique, la VA d'un processus markovien à l'ordre 1 est sous forme d'une cloche (cf. ann. H). Considérons alors la somme de deux bruits markoviens de même écart-type (de sorte que le maximum de leur VA respectives soit au même niveau) et de périodes d'auto-corrélation τ_1 et τ_2. En postulant que ces deux bruits sont décorrélés, la VA de la somme de ces bruits s'exprime comme la somme des VA respectives [Peti 96]. On va alors chercher à régler τ_1 et τ_2 de manière à ce que les courbes représentatives de ces deux processus aléatoires se croisent à un niveau approximativement égal à celui de l'amplitude maximale divisée par 2. La relation que τ_1 et τ_2 doivent vérifier afin que cette condition soit remplie est (cf. figure 4.14) :

$$\tau_2 \approx 23\tau_1. \tag{4.33}$$

Ainsi, si l'on souhaite construire une VA plate, il suffit simplement d'additionner un nombre donné de bruits markoviens à l'ordre 1 d'écarts-types identiques et de faire en sorte que leur période d'auto-corrélation soit régies par une suite géométrique de raison 23. Ceci est illustré sur la figure 4.15 où quatre bruits markoviens d'écarts-types unitaires et d'auto-corrélations 10s, 3mn50s, 1h28mn10s et 33h47mn50s (raison de 23) sont considérés. On constate alors que la VA obtenue n'est pas totalement plate, mais ce résultat est convenable[43]. En pratique, trois paramètres sont à considérer :

- l'écart-type σ de chacun des bruits markoviens, ce paramètre réglant la position verticale des courbes de la figure 4.15,
- la période d'auto-corrélation la plus petite,
- le temps à partir duquel la VA peut décroître (cet instant correspond à la durée d'une mission).

Dans un premier temps, intéressons-nous au réglage des deux derniers de ces trois paramètres. Pour des raisons liées à l'opération de discrétisation du modèle d'erreurs de navigation (4.20), la période minimale ne doit pas être trop faible afin de respecter le théorème de Shannon. Cette valeur est alors prise égale à 10 secondes. La durée d'une mission est quant-à-elle d'une vingtaine d'heures (il s'agit d'une hypothèse liée à la durée maximale de navigation d'un porteur). Toutefois, du fait que le maximum de la VA d'un bruit markovien est obtenu pour 1,89 fois sa

[43] On rappelle que d'une manière générale, on ne connaît pas de modèle simple dépendant de la variable temps permettant de construire une VA rigoureusement plate (cf. ann. H).

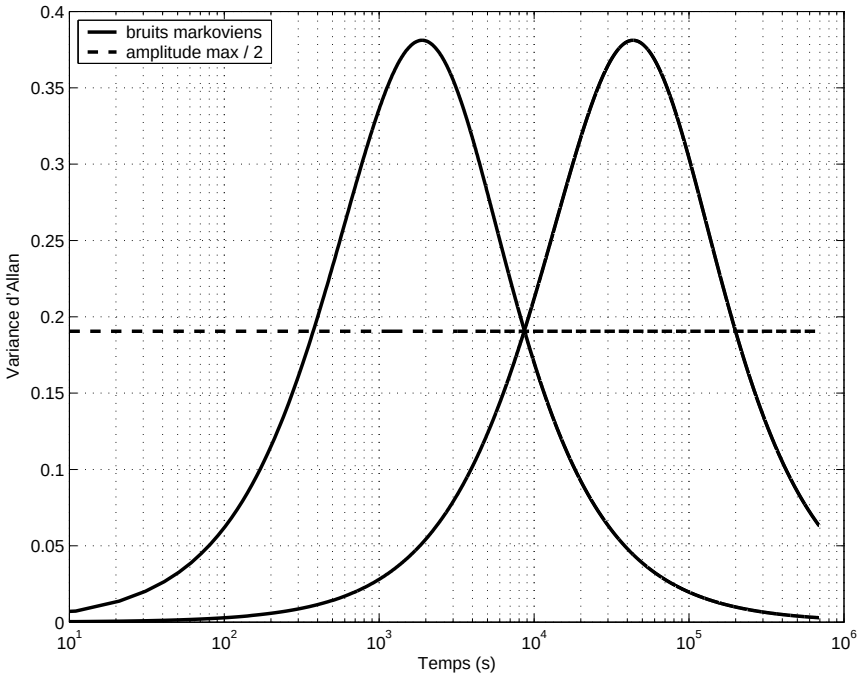


FIG. 4.14 – Tracé en échelle semi-logarithmique de la VA de deux processus markoviens à l'ordre 1 d'écart-type unitaire et de périodes d'auto-corrélation 10^3s et 23×10^3s

période d'autocorrélation (cf. ann. H), cela conduit à une valeur de 20/1,89 ≈ 10h35mn. Ainsi, il faut trouver la raison r qui permet de passer de 10s à 10h35mn = 38100s en N étapes. Cela revient trouver le couple (r, N) solution de :

$$10r^{N-1} = 38100, \tag{4.34}$$

où r avoisine 23. La solution "ronde" la plus convenable est $r = 15$ et $N = 4$, ce qui donne $N = 4$ bruits markoviens de périodes d'auto-corrélations 10s, 2mn30s, 37mn30s et 9h22mn30s. Le résultat de cette configuration est présenté sur la figure 4.16, où l'on constate que la VA n'oscille plus autour d'une valeur constante mais autour d'une courbe décrivant une sorte de dôme relativement aplati. Cette configuration s'avère là encore convenable, d'autant plus qu'elle contribue à atténuer les ondulations.

Le dernier paramètre relatif à notre modélisation du résidu est l'écart-type σ de chaque processus markovien décrivant la dérive. La question venant naturellement à l'esprit est la suivante : à quelle valeur régler cette grandeur ? Pour répondre à cette interrogation, nous exploitons une des propriétés du résidu de dérive gyroscopique $\boldsymbol{e}(t)$, à savoir que chacune des 3 composantes de ce dernier est bornée en amplitude (cf. première section de ce chapitre) et que par conséquent, l'écart-type de cette variable aléatoire est lui aussi majoré. Ainsi, il suffit simplement d'ajuster σ à la valeur estimée de ce majorant[44], notée $\widehat{\sigma}$. De cette manière, la VA du résidu ainsi modélisé sera toujours supérieure à la vraie VA du résidu (voir un exemple sur la figure 4.17), ce qui assure que σ n'est pas sous-estimé. Cependant, ce réglage présente un inconvénient : du fait que le résidu est décrit par 4 processus markoviens décorrélés et d'écart-type $\sigma = \widehat{\sigma}$, alors l'écart-type

[44]Cette grandeur mathématique caractérisant un processus physique n'est pas mesurable et ne peut par conséquent être qu'estimée à l'aide d'une technique adéquate.

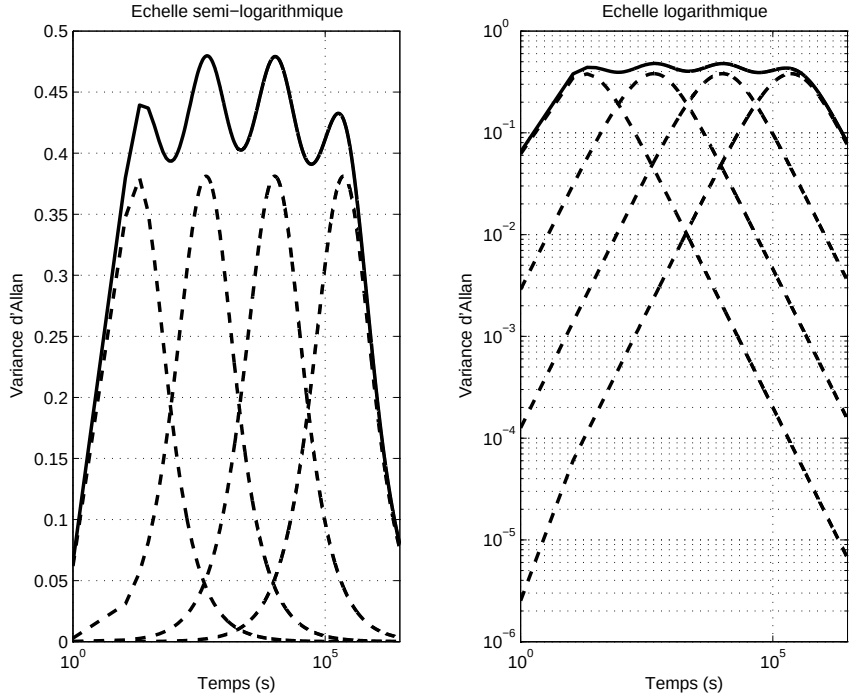


FIG. 4.15 – Tracés de la VA des 4 bruits markoviens (pointillés) dont les auto-corrélations sont régies par une suite géométrique de raison 23 et de la somme des bruits (trait plein)

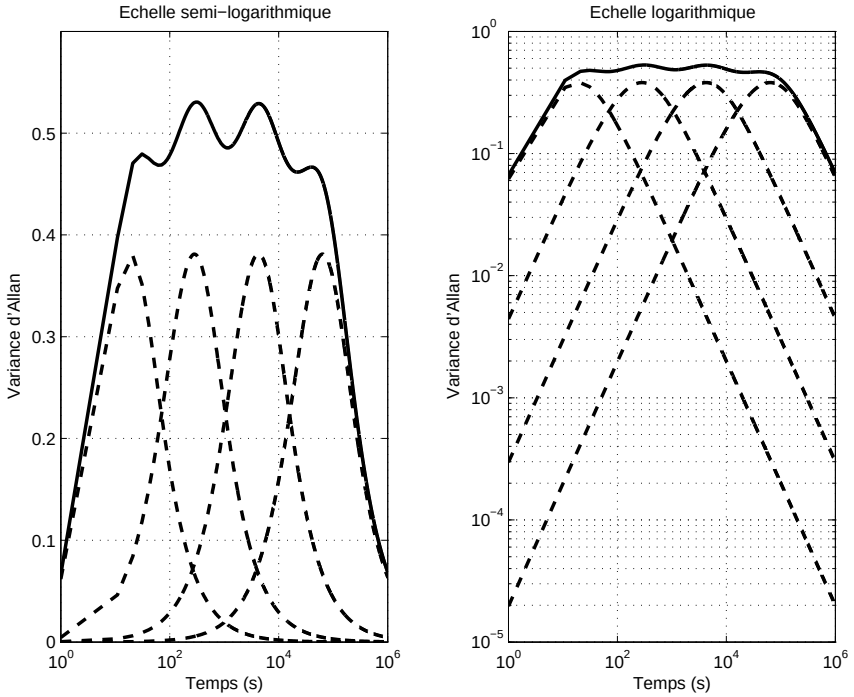


FIG. 4.16 – Tracés de la VA des 4 bruits markoviens (pointillés) dont les auto-corrélations sont régies par une suite géométrique de raison 15 et de la somme des bruits (trait plein)

de chaque composante de $\boldsymbol{e}(t)$ sera de $\sqrt{4\sigma^2} = 2\sigma = 2\widehat{\sigma}$, ce qui s'avère globalement pessimiste[45] : il s'agit du "prix à payer" pour atteindre l'objectif de robustesse désiré.

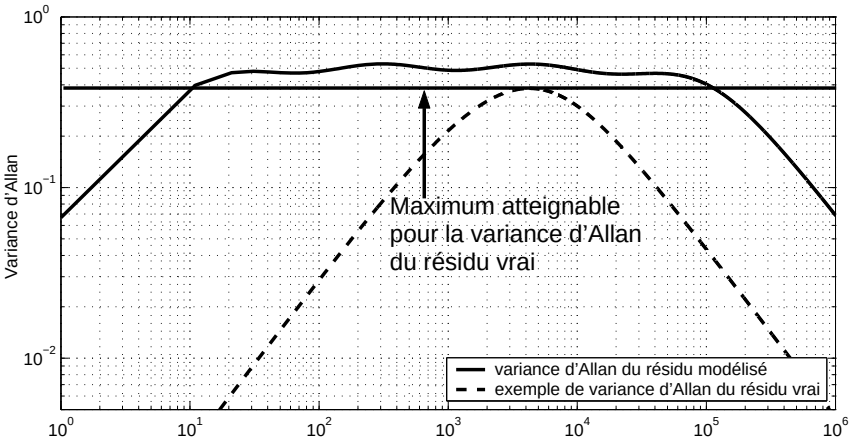


FIG. 4.17 – VA du résidu tel que modélisé et exemple de VA potentielle pour le résidu vrai

4.5.2 Modèle global d'erreurs de navigation et d'erreurs GRH

Les considérations exprimées dans la partie précédente autorisent à formuler l'entrée inconnue comme suit :

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{m}(t), \tag{4.35}$$

où :

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{4.36}$$

et $\{\boldsymbol{m}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est régi par l'équation différentielle vectorielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t), \tag{4.37}$$

où $\{\boldsymbol{\zeta}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un bruit blanc, gaussien, centré, dont la covariance s'obtient à partir de l'écart-type σ de chacun des processus markoviens (cf. ann. G pour les calculs) et :

$$\begin{gathered}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}\left(-\frac{1}{\tau_1}, -\frac{1}{\tau_2}, -\frac{1}{\tau_3}, -\frac{1}{\tau_4}, -\frac{1}{\tau_1}, -\frac{1}{\tau_2}, -\frac{1}{\tau_3}, -\frac{1}{\tau_4}, -\frac{1}{\tau_1}, -\frac{1}{\tau_2}, -\frac{1}{\tau_3}, -\frac{1}{\tau_4}\right), \\ \tau_1 = 10\mathrm{s}, \quad \tau_2 = 2\mathrm{mn}30\mathrm{s}, \quad \tau_3 = 37\mathrm{mn}30\mathrm{s}, \quad \tau_4 = 9\mathrm{h}22\mathrm{mn}30\mathrm{s}.\end{gathered} \tag{4.38}$$

En tenant compte des relations (4.35) et (4.37), le modèle (4.21) devient :

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{m}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1(t) & \boldsymbol{\Gamma}_1(t)\boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{0}_{12\times 18} & \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1(t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{0}_{3\times 12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^T(t) & \boldsymbol{m}^T(t) \end{bmatrix}^T + \boldsymbol{v}(t) \end{array}\right. . \tag{4.39}$$

[45] On emploie en l'occurrence le terme *pessimiste* pour caractériser des variables aléatoires dont les écarts-types calculés sont plus larges que les valeurs réelles. *A contrario*, le mot *optimiste* sera affecté aux variables aléatoires dont les écarts-types sont sous-estimés.

C'est sur ce modèle que l'on va, une fois une discrétisation opérée, appliquer un filtre de navigation. Ce modèle est dorénavant noté sous la forme synthétique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \overline{\boldsymbol{w}}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \end{array} \right. , \tag{4.40}$$

où :

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{m}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1(t) & \boldsymbol{\Gamma}_1(t)\boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{0}_{12\times 18} & \boldsymbol{T} \end{bmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{w}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1(t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1^T \\ \boldsymbol{0}_{12\times 3} \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

Précisons que comme $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^{18}$ et $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^{12}$, alors $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{30}$.

4.5.3 Discrétisation du modèle considéré

Soit le modèle d'état linéaire à temps variant (4.40). Nous cherchons à le discrétiser à la fréquence f_h correspondant à la fréquence de réception des mesures GPS (lorsqu'elles sont disponibles), ce qui représente une période d'échantillonnage $T_h = 1/f_h$ de quelques secondes. Le modèle obtenu après l'opération de discrétisation est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \end{array} \right. . \tag{4.42}$$

Le but recherché est donc de calculer la matrice $\boldsymbol{F}_k$ ainsi que les caractéristiques de $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $\{\overline{\boldsymbol{w}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Pour ce faire, la procédure adoptée est inspirée de [Abuh 05, pp. 91-95] et résumée par l'algorithme 17.

4.5.4 Synthèse du filtre de navigation

Le modèle (4.42) autorise l'emploi d'un filtre de Kalman en tant que filtre de navigation, les différentes méconnaissances y étant prises en compte.

Rappel sur les notations : L'état estimé par un filtre de Kalman à l'instant k est noté $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ et sa covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$. Les covariances des bruits d'état $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et de mesure $\{\boldsymbol{v}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont quant-à-elles respectivement notées $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$. ■

Utilisation de techniques d'estimation sous contraintes :

Comme évoqué dans la section précédente, l'entrée inconnue que représente le résidu de dérive $\boldsymbol{e}$ est bornée. L'idée qui nous est alors naturellement venue à l'esprit est d'exploiter cette propriété supplémentaire au travers de techniques de filtrage de Kalman sous contraintes inégalités. Compte tenu de la forme du modèle (4.42) et notamment de l'organisation des variables dans le vecteur d'état, les contraintes portent sur les 12 dernières variables de ce vecteur. Nous pouvons envisager :

– soit des contraintes sur la valeur absolue du résidu $\boldsymbol{e}_k$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : |\boldsymbol{e}_k| \leq B_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -B_1 & \leq & x_{19,k} + x_{20,k} + x_{21,k} + x_{22,k} \leq B_1 \\ -B_1 & \leq & x_{23,k} + x_{24,k} + x_{25,k} + x_{26,k} \leq B_1 \\ -B_1 & \leq & x_{27,k} + x_{28,k} + x_{29,k} + x_{30,k} \leq B_1 \end{array} \right. , \tag{4.43}$$

1. Découper la période d'échantillonnage T_h en N subdivisions de durées identiques $[t_{i-1}\ ;\ t_i[$, où i = 1,...,N et t_0, t_N correspondent respectivement aux instants discrets k et $k+1$. Chaque subdivision présente ainsi une durée $\Delta t = T_h/N$.
2. Pour $i = 1, \ldots, N$:
   - Calculer la matrice $\overline{\boldsymbol{A}}_i$ issue de la moyenne de $\boldsymbol{A}(t)$ pour $t \in [t_{i-1}\ ;\ t_i[$. Les paramètres dont dépend cette matrice étant issus du module d'intégration de navigation, dont la période de fonctionnement est T_n = 10ms, cela représente une moyenne de $\Delta t/T_n$ valeurs.
   - Calculer la matrice de transition $\boldsymbol{\Phi}(t_i, t_{i-1})$ entre les instants t_i et t_{i-1} :

$$\boldsymbol{\Phi}(t_i, t_{i-1}) = \exp\left(\overline{\boldsymbol{A}}_i \Delta t\right),$$

   où l'exponentielle matricielle est obtenue via un développement de Taylor tronqué à un certain ordre.
3. Calculer la matrice $\boldsymbol{F}_k$ en effectuant le produit des N matrices de transition $\boldsymbol{\Phi}(t_i, t_{i-1})$ (1 $\leq i \leq N$) :

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{\Phi}(t_N, t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_N, t_{N-1})\boldsymbol{\Phi}(t_{N-1}, t_{N-2}) \ldots \boldsymbol{\Phi}(t_i, t_{i-1}) \ldots \boldsymbol{\Phi}(t_2, t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0).$$

4. Calculer la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$ de $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ à l'aide de celle de $\{\overline{\boldsymbol{w}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ et des formules sur le bruit blanc intégré (cheminement aléatoire) et sur les processus markoviens à l'ordre 1. Le mode opératoire est illustré dans la section relative au paramétrage du filtre de navigation, à venir.

Algorithme 17: Discrétisation du modèle d'erreurs de navigation

- soit des contraintes de type quadratique, lesquelles contraignent la norme euclidienne du résidu $\boldsymbol{e}_k$ à demeurer bornée :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \|\boldsymbol{e}_k\| \leq B_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_{19,k}^2 + x_{20,k}^2 + x_{21,k}^2 + x_{22,k}^2 & \leq & B_2^2 \\ x_{23,k}^2 + x_{24,k}^2 + x_{25,k}^2 + x_{26,k}^2 & \leq & B_2^2 \\ x_{27,k}^2 + x_{28,k}^2 + x_{29,k}^2 + x_{30,k}^2 & \leq & B_2^2 \end{array} \right. , \tag{4.44}$$

où B_1 et B_2 sont des bornes approximativement connues en pratique. La première sorte de contraintes est de type inégalité linéaire : une manière de traiter un tel problème est d'exploiter l'approche par projection en boucle semi-fermée, présentée dans la section 1.5. La seconde sorte de contraintes est de type inégalité non linéaires. Dans [Sirc 08d], nous avons proposé une méthode générale de résolution d'un tel problème, inspirée du filtrage de Kalman étendu itéré. En utilisant la méthode d'activation de limite de contrainte [Flet 81] (qui consiste à ignorer les inégalités vérifiées à l'instant k et transformer les inégalités non vérifiées en égalités aux bornes - cf. section 1.5), les contraintes linéaires à considérer à l'instant k sont de la forme générale suivante :

$$\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{d}_k, \tag{4.45}$$

où $\boldsymbol{g}_k$ est une fonction non linéaire connue et $\boldsymbol{d}_k \in \mathbb{R}^{n_d}$ est un vecteur connu. Dans le cas de la contrainte (4.44), $n_d = 0$ si les trois inégalités sont vérifiées à l'instant k et $n_d = 3$ si aucune

inégalité n'est vérifiée et que l'on cherche par conséquent à imposer :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{19,k}^2 + x_{20,k}^2 + x_{21,k}^2 + x_{22,k}^2 \\ x_{23,k}^2 + x_{24,k}^2 + x_{25,k}^2 + x_{26,k}^2 \\ x_{27,k}^2 + x_{28,k}^2 + x_{29,k}^2 + x_{30,k}^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_2^2 \\ B_2^2 \\ B_2^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{d}_k}. \tag{4.46}$$

La technique de filtrage de Kalman que nous avons proposé consiste à :

1. estimer par un filtre de Kalman non contraint l'état décrit par le modèle (4.42), l'état et la covariance fournis par ce filtre étant respectivement notés $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$.
2. modifier l'approche par projection de la section 1.5 de manière à ce qu'elle s'adapte à la contrainte non linéaire (4.45). L'état et la covariance issues de cette opération de projection sont respectivement notés $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}}$.

Comme $\boldsymbol{g}_k$ est une fonction non linéaire, il n'est pas possible d'appliquer directement l'approche par projection du chapitre 1, car la technique des multiplicateurs de Lagrange requiert la linéarité de l'équation de contraintes. Une solution possible est de linéariser $\boldsymbol{g}_k$ autour de l'état contraint $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$, via un développement de Taylor à l'ordre 1 [Simo 02]. Malheureusement, pour effectuer cette linéarisation, il est nécessaire de connaître $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{c}$, lequel n'est accessible qu'une fois le jacobien de $\boldsymbol{g}_k$ calculé. Nous sommes ici dans une situation délicate et nous proposons d'utiliser une approche itérée pour s'en sortir. L'idée est la même que celle d'un filtre de Kalman étendu itéré (algorithme 4), où la linéarisation de l'équation de mesures s'effectue plusieurs fois, autour d'un état qui chaque fois est en principe plus proche de l'état estimé *a posteriori*. Cette démarche est inspirée par le parallèle entre les équations de mise à jour d'un filtre de Kalman et celles d'application de contraintes (cf. section 1.5). Le principe de cette méthode de prise en compte des contraintes est synthétisé par l'algorithme 18. A noter qu'indépendamment de nos travaux, Gupta et Hauser ont formulés la même idée dans [Gupt 07]. Enfin, l'approche itérative de linéarisation s'apparente à celle proposée par De Geeter *et al.* dans [De G 97], lesquels ont en outre considéré les erreurs causées par la linéarisation de l'équation de contraintes en utilisant le concept de *contraintes faibles*, c'est à dire du type :

$$\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{\delta}_k = \boldsymbol{d}_k, \tag{4.47}$$

où $\{\boldsymbol{\delta}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée.

Du fait que les contraintes considérées dans ce travail sont de type inégalité, il est préférable de coupler en boucle semi-fermée (figure 1.8) l'applicateur de contraintes développé (algorithme 18) avec le filtre de Kalman. En outre, pour obtenir une estimée contrainte $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ optimale au sens du minimum de variance, il est nécessaire de poser $\boldsymbol{\Pi}_k = (\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}})^{-1}$, ce qui résulte généralement en une projection non orthogonale de $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ sur l'hyper-volume de contraintes. Inversement, une projection orthogonale de $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ sur l'hyper-volume de contraintes conduit à un état contraint $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ non optimal au sens du minimum de variance. Toutefois, compte-tenu du fait que l'hyper-volume décrit par l'équation de contraintes (4.44) est une hyper-sphère, l'opération de projection orthogonale, synthétisée par l'algorithme 19, est alors nettement plus aisée à appliquer que l'algorithme 18. Cela autorise entre autres un gain de temps de calcul substantiel, comme montré dans [Sirc 08b] sur une application de poursuite de cible (cf. ann. I). Quelques remarques à propos de l'algorithme 19 :

– pour les contraintes représentées par (4.44), la borne B est alors $B = B_2$. L'algorithme

1. Calculer l'état estimé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ et la covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$ par un filtre non contraint.
2. Ne pas tenir compte des contraintes inégalité vérifiées par $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ et convertir via la méthode d'activation de limite de contrainte les contraintes inégalité non vérifiées par $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ en contraintes égalité. Ces dernières sont regroupées dans l'équation de contraintes : $\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{d}_k$.
3. Prendre en compte l'équation de contraintes en la linéarisant autour de $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_k^{(0)} &= \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right|_{\boldsymbol{x}_k=\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}}, \\
\boldsymbol{d}_k^{(0)} &= \boldsymbol{d}_k - \boldsymbol{g}_k\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right) + \boldsymbol{D}_k^{(0)}\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}, \\
\boldsymbol{L}_k^{(0)} &= \boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\left(\boldsymbol{D}_k^{(0)}\right)^T\left(\boldsymbol{D}_k^{(0)}\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\left(\boldsymbol{D}_k^{(0)}\right)^T\right)^{-1}, \\
\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(0)} &= \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}} + \boldsymbol{L}_k^{(0)}\left(\boldsymbol{d}_k^{(0)} - \boldsymbol{D}_k^{(0)}\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right),
\end{aligned}$$

   où $\boldsymbol{\Pi}_k$ est une matrice de pondération, à régler à $\left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}\right)^{-1}$ pour que l'état contraint estimé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ soit optimal au sens du minimum de variance.
4. Pour $i = 1, \ldots, N$, où $N \in \mathbb{N}$ est le nombre (à régler) de linéarisations supplémentaires de l'équation de contraintes, calculer :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_k^{(i)} &= \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right|_{\boldsymbol{x}_k=\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i-1)}}, \\
\boldsymbol{d}_k^{(i)} &= \boldsymbol{d}_k - \boldsymbol{g}_k\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i-1)}\right) + \boldsymbol{D}_k^{(i)}\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i-1)}, \\
\boldsymbol{L}_k^{(i)} &= \boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\left(\boldsymbol{D}_k^{(i)}\right)^T\left(\boldsymbol{D}_k^{(i)}\boldsymbol{\Pi}_k^{-1}\left(\boldsymbol{D}_k^{(i)}\right)^T\right)^{-1}, \\
\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} &= \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}} + \boldsymbol{L}_k^{(i)}\left(\boldsymbol{d}_k^{(i)} - \boldsymbol{D}_k^{(i)}\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right).
\end{aligned}$$

5. Calculer l'état contraint $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ et sa covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}}$:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}} = \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{(N)}, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}} = \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{L}_k^{(N)}\boldsymbol{D}_k^{(N)}\right)\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}\left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{L}_k^{(N)}\boldsymbol{D}_k^{(N)}\right)^T$$

Algorithme 18: L'estimation d'état sous contraintes inégalité non linéaires utilisant l'approche par projection

doit en outre être appliqué 3 fois consécutives. Les sous-vecteurs $\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}}$ de $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ sont alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}} &= \begin{bmatrix} \widehat{x}_{19,k}^{\mathrm{nc}} & \ldots & \widehat{x}_{22,k}^{\mathrm{nc}} \end{bmatrix}^T, \\
\text{puis : } \widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}} &= \begin{bmatrix} \widehat{x}_{23,k}^{\mathrm{nc}} & \ldots & \widehat{x}_{26,k}^{\mathrm{nc}} \end{bmatrix}^T, \\
\text{puis : } \widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}} &= \begin{bmatrix} \widehat{x}_{27,k}^{\mathrm{nc}} & \ldots & \widehat{x}_{30,k}^{\mathrm{nc}} \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

– L'équation servant à calculer la covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}}$ en fonction de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$ se démontre de manière assez simple. En effet, par définition :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}} &= \mathbb{E}\left(\left(\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}\right)\left(\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}\right)^T\right) &&= \mathbb{E}\left(\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^T\right) - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}\right)^T, \\
\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}} &= \mathbb{E}\left(\left(\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right)\left(\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right)^T\right) &&= \mathbb{E}\left(\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^T\right) - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right)^T.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

En soustrayant l'expression de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$ à celle de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}}$, il vient :

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}} - \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}} = -\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}\right)^T + \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right)^T, \tag{4.50}$$

ce qui conduit directement à l'expression utilisée.

1. Calculer l'état estimé $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ et la covariance d'erreur d'estimation $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$ par un filtre non contraint.
2. Calculer la norme euclidienne $\|\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}}\|$ du sous-vecteur $\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}}$ de $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ concerné par les contraintes.
3. Si $\|\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}}\| > B$ où B est la borne à ne pas dépasser :
   - calculer le sous vecteur contraint $\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{c}}$: $\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{c}} = (B/\|\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}}\|)\,\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}}$,
   - calculer l'état contraint $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ en posant $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}} = \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ puis en remplaçant par $\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{c}}$ la partie de $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}$ correspondant à $\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}}$,
   - calculer la covariance d'erreur d'estimation de l'état par $\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{c}}$:

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}} - \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}}\right)^T + \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}\right)^T.$$

4. Si $\|\widehat{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{nc}}\| \leq B$, alors : $\widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{c}} = \widehat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{nc}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathrm{nc}}$.

Algorithme 19: L'estimation d'état sous contraintes de type norme euclidienne par projection orthogonale.

4.6 Etude expérimentale

Afin de juger l'apport de notre méthode et de paramétrer les estimateurs sous contraintes, nous allons effectuer un certain nombre d'expériences. Ces dernières se font sur deux trajectoires d'avion :

- la *trajectoire A*, de type avion de chasse et d'une durée de 2 heures.
- la *trajectoire B*, moins "mouvementée" que la précédente et légèrement plus longue (2h40mn).

Les caractéristiques de ces trajectoires (position, vitesse, attitude et trajectoires en 2 et 3 dimensions du porteur) sont disponibles sur les figures 4.18 à 4.21.

4.6.1 Architecture du simulateur développé

Le simulateur est conçu selon le schéma présenté sur la figure 4.22. On peut clairement y constater la présence de deux blocs d'intégration de navigation (réalisés par l'algorithme 15), chacun d'entre eux étant parfaitement initialisé :

- le premier reçoit en entrée des incréments accélérométriques et gyroscopiques (qui sont fonction de la trajectoire considérée) non entachés d'erreur : par conséquent, les grandeurs de navigation calculées par ce module sont parfaites et qualifiées de *grandeurs de navigation vraies*,
- le second est attaqué par des incréments accélérométriques parfaits mais des mesures gyroscopiques affectées d'une dérive ainsi que d'un phénomène de cheminement aléatoire. La navigation calculée sera alors entachée d'erreurs, compensées en boucle ouverte par le filtre de navigation mis en œuvre. Les grandeurs obtenues sont alors qualifiées de *navigation calculée*. Cette configuration correspond à la simulation d'un dispositif de navigation embarqué dans un porteur (à quelques simplifications près telles que l'absence d'erreurs accélérométriques).

La comparaison entre les navigations vraie et calculée permet d'évaluer suivant différents aspects la technique développée. De même, la comparaison entre les dérives gyroscopiques vraie et estimée par le filtre de navigation apporte des éléments indicatifs supplémentaires (les modalités

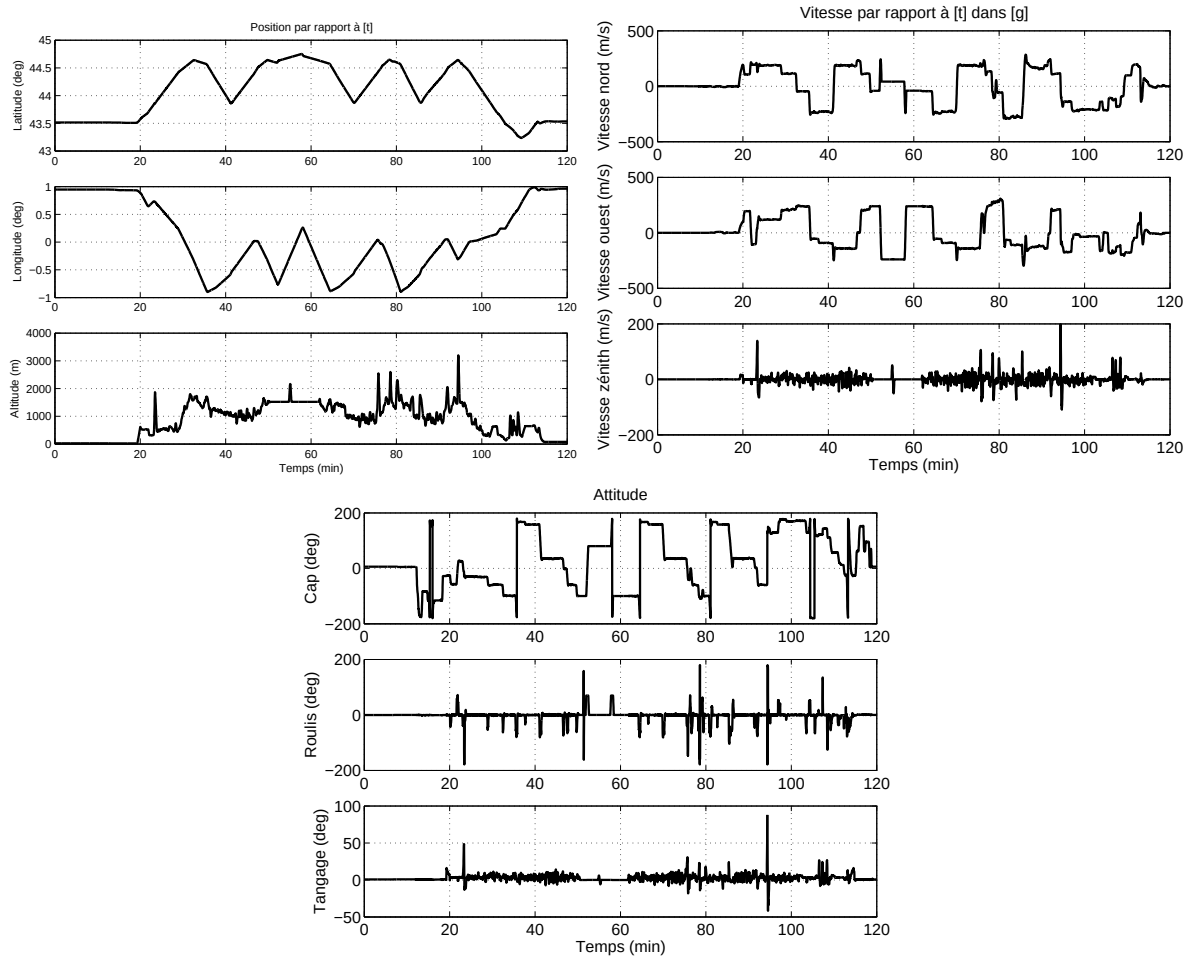


FIG. 4.18 – Position, vitesse et attitude du porteur sur la trajectoire A

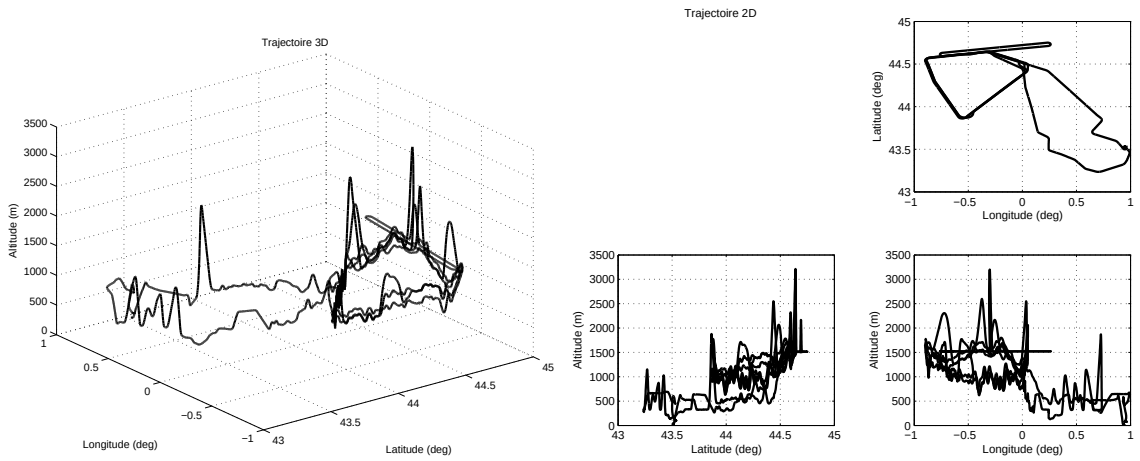


FIG. 4.19 – Trajectoire A en 2 et 3 dimensions

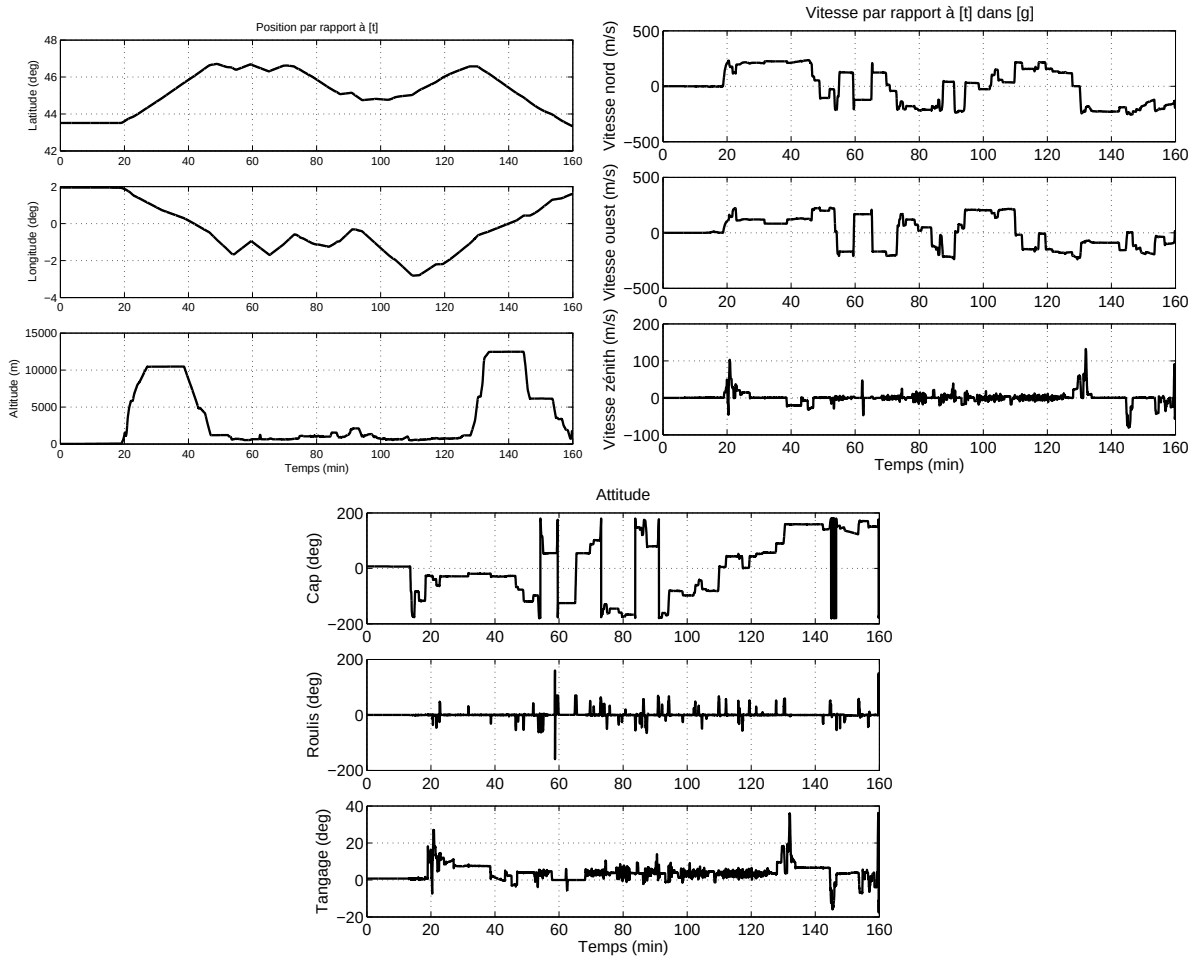


FIG. 4.20 – Position, vitesse et attitude du porteur sur la trajectoire B

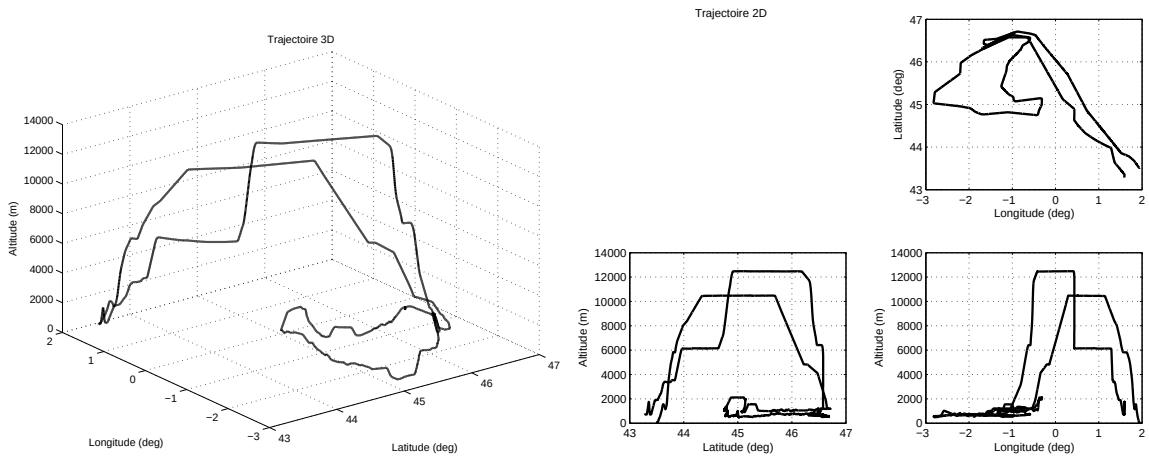


FIG. 4.21 – Trajectoire B en 2 et 3 dimensions

relatives à cette évaluation sont détaillées dans le paragraphe suivant). Enfin, les observations issues du GPS étant parfaites (au bruit près), elles sont conçues à partir de la position obtenue via la navigation vraie.

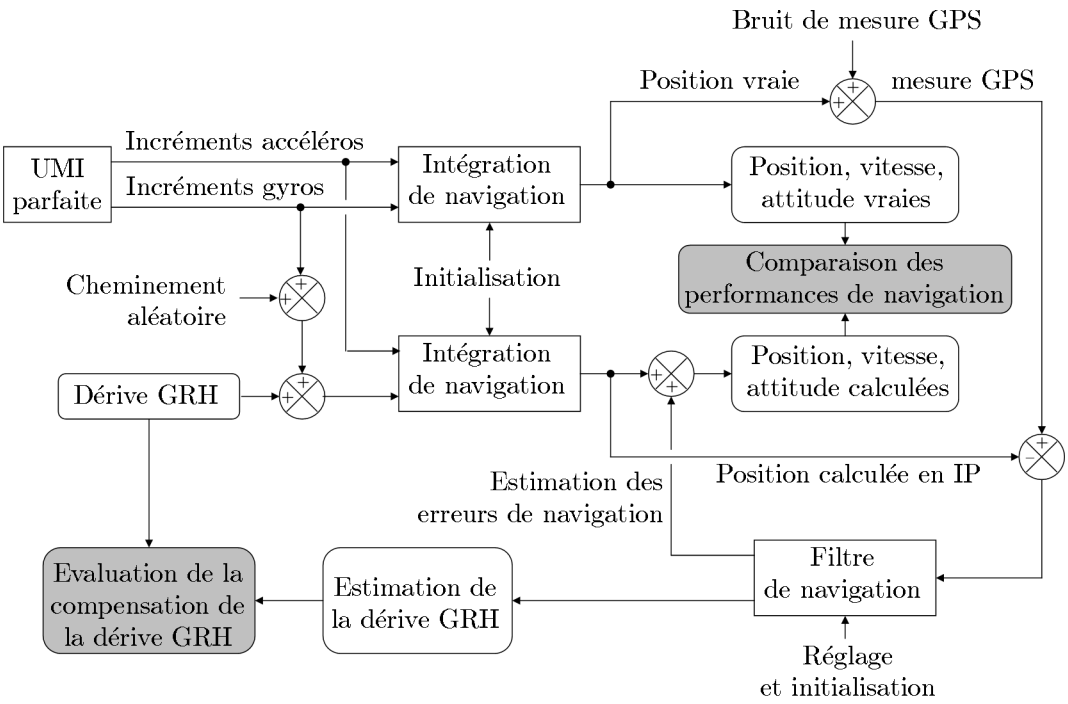


FIG. 4.22 – Architecture du simulateur

4.6.2 Conception du "monde vrai" et conditions de simulation

On appelle "monde vrai" le système réel considéré et ses caractéristiques. La conception du "monde vrai" est l'élaboration de modèles permettant de recréer dans un simulateur (en l'occurrence celui de la figure 4.22) les différents signaux du "monde vrai". La difficulté de cette opération réside en la mise au point de modèles reflétant de manière réaliste le comportement du système réel. Concernant le simulateur de la figure 4.22, on peut constater qu'il y a 3 signaux relatifs au "monde vrai" :

- le bruit de mesure du GPS, dont chacune des 3 composantes est constituée de la somme :
  - d'un bruit blanc, gaussien, centré et d'écart-type σ_{GPS} correspondant à la valeur typique de performances du GPS,
  - d'un processus markovien à l'ordre 1, gaussien, centré, de période d'auto-corrélation $\tau_{\text{GPS}} = 300$ s et d'écart-type σ_{GPS}.

  Les caractéristiques de ce bruit sont supposées connues, de sorte que le modèle (4.19) puisse être ajusté aux valeurs correspondantes.
- Le cheminement aléatoire affectant les incréments d'angles fournis par les GRH : il est généré par un bruit blanc, gaussien, centré et d'écart-type[46] de $\sigma_{\text{ca}}^{\text{masq}}$ deg/h. Ce processus

[46]Pour des raisons de confidentialité, la valeur numérique de cet écart-type a dû être masquée. Il en sera de même pour toutes les grandeurs relatives au GRH. Les symboles se substituant aux grandeurs masquées seront affectées d'un exposant "masq".

correspond à variable ν_d de la section 4.2. Ses caractéristiques sont elles aussi supposées connues.

– La dérive gyroscopique, dont chacune des 3 composantes (indifféremment notées $\mathcal{D}$, comme dans la section 4.2) est construite à partir de l'équation suivante :

$$\mathcal{D}(t) = a_0(t) + \sum_{i=1}^{N^{\text{masq}}} a_i(t)\cos(i\theta_e(t)) + b_i(t)\sin(i\theta_e(t)) + \mathcal{R}(\theta_e(t)), \tag{4.51}$$

où :

- $\theta_e(t)$ est l'angle électrique correspondant au gyroscope considéré (dont l'évolution dépend de la trajectoire considérée), $\theta_e(0)$ étant tiré selon une loi uniforme sur $[0\ ;\ 2\pi]$,
- N^{masq} est l'ordre jusqu'auquel la dérive $\mathcal{D}$ a été modélisée sous forme harmonique,
- $a_0(0)$ est tiré selon une loi normale centrée et d'écart-type $\sigma^{\text{masq}}_{\text{h0(0)}}$ deg/h,
- $a_2(0)$ et $b_2(0)$ sont indépendamment tirés selon une loi normale centrée et d'écart-type $\sigma^{\text{masq}}_{\text{h2(0)}}$ deg/h. Les réalisations de ce tirage ne sont conservées que si $\sqrt{a_2^2(0) + b_2^2(0)} \leq 2\sigma^{\text{masq}}_{\text{h2(0)}}$ deg/h. Dans le cas contraire, ces valeurs sont rejetées et un nouveau tirage est réalisé, et ce jusqu'à ce qu'un couple ($a_2(0)$, $b_2(0)$) convenable soit obtenu (cette démarche constitue un algorithme dit *d'acceptation/rejet*).
- Les amplitudes d'harmoniques d'ordre i, avec $i \in \{1, 3, 4, \ldots, N^{\text{masq}}\}$, sont indépendamment tirées selon une loi normale centrée et d'écart-type $\sigma^{\text{masq}}_{\text{hsup(0)}}$ deg/h et ne sont conservées (algorithme d'acceptation/rejet) que si la norme euclidienne de l'ensemble de ces amplitudes n'excède pas la valeur $B^{\text{masq}}_{\text{hsup(0)}}$ deg/h.
- les amplitudes $\{a_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $\{b_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ évoluent selon un cheminement aléatoire généré par un bruit blanc, gaussien, centré et d'écart-type valant $X^{\text{masq}}_{\text{pour}}$ %/$\sqrt{\text{h}}$ de la valeur initialement tirée,
- $\mathcal{R}(\theta_e(t))$ représente une fonction modélisant l'impact des harmoniques d'ordre supérieur à N^{masq} sur la dérive gyroscopique $\mathcal{D}$. Ce module se présente sous la forme d'une tabulation associant une valeur de $\mathcal{R}(\theta_e(t))$ en fonction d'un angle électrique $\theta_e(t)$ donné en entrée. Ce module est paramétré de sorte que la valeur RMS de $\{\mathcal{R}(\theta_e)\}_{0\leq\theta_e\leq 2\pi}$ vaille $X^{\text{masq}}_{\text{res}}$ deg/h.

Afin de balayer l'ensemble des possibilités offertes par les différentes lois régissant le "monde vrai", il est nécessaire de ne pas se restreindre à une réalisation donnée, mais d'effectuer de la simulation de type Monte Carlo. Compte tenu de la complexité du simulateur conçu, le nombre de simulations opérées a volontairement été limité à 50. Il est important de préciser que, pour une trajectoire donnée, les 50 réalisations ainsi générées sont identiques d'une expérience à une autre : cela permet de comparer entre eux les résultats obtenus.

En outre, compte tenu de la modélisation de la dérive gyroscopique adoptée, trois grandeurs sont à considérer pour juger de la bonne prise en compte de cette dernière par le filtre de navigation :

– l'erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2, qui est la différence entre les amplitudes vraies (les $a_2(t)$ et $b_2(t)$ de l'équation (4.51)) et celles estimées par le filtre de navigation (en l'occurrence notées $\widehat{a}_2(t)$ et $\widehat{b}_2(t)$, qui sont les variables d'état {13,14}, {15,16} ou {17,18} selon le gyroscope considéré),
– l'erreur de reconstruction du résidu de modélisation de la dérive, qui résulte de la différence entre la dérive vraie à laquelle l'impact de l'harmonique de rang 2 a été déduit (il s'agit de

$\mathcal{D}(t) - a_2(t)\cos(2\theta_e(t)) - b_2(t)\sin(2\theta_e(t)))$ et le résidu tel que modélisé par les processus markoviens dans le filtre de navigation (somme des estimées des variables d'état numéro 19 à 22, 23 à 26 ou 27 à 30 selon le gyroscope considéré),
- l'erreur de reconstruction globale de la dérive, qui est définie par la différence entre $\mathcal{D}(t)$ et la dérive reconstruite à partir des amplitudes et des états des bruits markoviens estimés par le filtre de navigation, notée $\widehat{\mathcal{D}}(t)$.

Le calcul de ces grandeurs est résumé sur la figure 4.23.

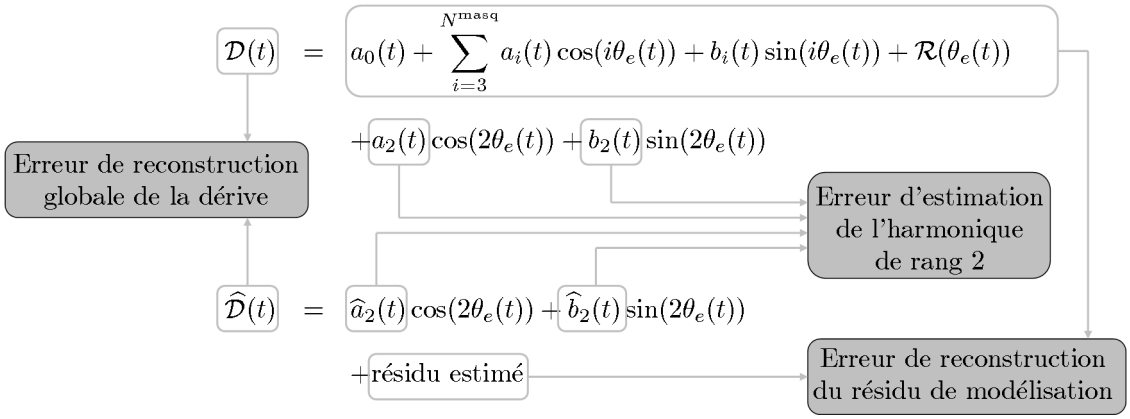


FIG. 4.23 – Grandeurs à calculer pour juger de la bonne compensation de la dérive par le filtre de navigation

4.6.3 Initialisation et réglage du filtre de navigation

En ce qui concerne le réglage du filtre de navigation, en dehors des aspects liés à la prise en compte des contraintes, deux types de grandeur sont à prendre en compte :
- celles relatives à l'initialisation du filtre (état et covariance d'erreur d'estimation),
- celles caractérisant les bruits d'état et de dynamique, qui constituent des grandeurs de réglage.

Initialisation du filtre :

Parmi les variables d'état du modèle considéré (4.42) figurent :
- les états de navigation (9 premières composantes),
- les états relatifs au bruit GPS markovien à l'ordre 1 (composantes 10 à 12),
- les amplitudes d'harmoniques (composantes 13 à 18),
- les états décrivant le résidu de dérive, associés aux différents processus markoviens insérés (composantes 19 à 30).

Tous ces états sont initialisés à une valeur nulle, ce qui donne : $\widehat{\boldsymbol{x}}_0 = \mathbf{0}_{30\times 1}$. Les écarts-types initiaux associés à ces variables sont quant-à-eux réglés en fonction des caractéristiques des erreurs de mesure du GPS et de la dérive gyroscopique, conduisant à une matrice de covariance d'erreur initiale $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$ diagonale remplie dans l'ordre avec les écarts-types correspondants élevés au carré. A noter que nous avons volontairement augmenté l'écart-type du bruit de mesure de l'altitude par le GPS afin de limiter l'apport d'information lors des pertes d'hybridation (les raisons de ce réglage sont évoquées plus loin dans cet exposé).

Réglage du filtre :

Les bruits d'état et de mesure sont entièrement caractérisés par leur écart-type (ils sont gaussiens, centrés et décorrélés entre eux), ce qui revient à dire que $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$ sont des matrices diagonales remplies dans l'ordre par les écarts-types correspondants élevés au carré. La matrice $\boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}$ se règle très facilement à partir de l'écart-type du bruit de mesure du GPS (ne pas oublier d'augmenter l'écart-type associé à la mesure de l'altitude). En ce qui concerne le réglage de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$, le bruit d'état $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, est composé :

- de 6 premières composantes nulles (erreurs de position et de vitesse non bruitées),
- de bruits blancs générant les cheminements aléatoires sur les mesures gyroscopiques (composantes 6 à 9), dont l' écart-type (en degrés) vaut $\sigma_{\text{ca}}^{\text{masq}}\sqrt{T_h}$,
- de bruits blancs excitant le bruit GPS markovien à l'ordre 1 (composantes 10 à 12), dont les écart-types se règlent à partir des formules relatives aux processus markoviens à l'ordre 1 (cf. ann. G), en fonction de la précision des mesures GPS et du temps d'auto-corrélation τ_{GPS} de ce bruit,
- de bruits blancs générant les cheminements aléatoires sur les amplitudes d'harmoniques (composantes 13 à 18), dont l'écart-type (en degrés par heure) vaut $\left(\sigma_{\text{h2(0)}}^{\text{masq}} \times X_{\text{pour}}^{\text{masq}} \Big/ 100\right)\sqrt{T_h}$,
- de bruits blancs (composantes 19 à 30) excitant les processus markoviens à l'ordre 1 servant à modéliser le résidu de dérive. Ils se règlent à partir des formules relatives aux processus markoviens à l'ordre 1 (cf. ann. G), en fonction de l'écart-type associé à ce résidu (1,25 deg/h) et des différents temps d'auto-corrélation (qui sont $\tau_1 = 10$s, $\tau_2 = 2$mn30s, $\tau_3 = 37$mn30s et $\tau_4 = 9$h22mn30s).

Mentionnons enfin que tel que nous venons de le définir, le réglage de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$ est légèrement inexact. En effet, il est nécessaire de tenir compte de l'influence de la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{wm}(t)$ sur le cheminement aléatoire gyroscopique. Pour obtenir la définition exacte de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$, il faut remplacer le bloc compris entre les 7ème et 9ème lignes et 7ème et 9ème colonnes de $\boldsymbol{\Sigma}_k^{ww}$ par la matrice de dimension 3×3 suivante :

$$\overline{\boldsymbol{T}}_{wm}\left(\left(\sigma_{\text{ca}}^{\text{masq}}\sqrt{T_h}\right)^2 \boldsymbol{I}_3\right)\overline{\boldsymbol{T}}_{wm}^T = T_h\,(\sigma_{\text{ca}}^{\text{masq}})^2\,\overline{\boldsymbol{T}}_{wm}\overline{\boldsymbol{T}}_{wm}^T, \tag{4.52}$$

où $\overline{\boldsymbol{T}}_{wm}$ est la moyenne de $\boldsymbol{T}_{wm}(t)$ sur la période d'échantillonnage T_h.

4.7 Résultats de simulation

4.7.1 Cas d'une hybridation permanente

Tout d'abord, présentons les résultats obtenus lorsque les observations issues du GPS sont en permanence disponibles. Les différents tracés sont disponibles sur les figures 4.24 à 4.28 pour la trajectoire A et sur les figures 4.29 à 4.33 pour la trajectoire B. Y sont tracés[47] :

- en vert, le RMS (racine de la moyenne quadratique sur les 50 simulations) des erreurs entre les grandeurs considérées vraies et calculées,
- en rouge, le RMS des écarts-types (racine carrée du terme diagonal correspondant de la matrice de covariance *a posteriori* calculée par le filtre de navigation).

A noter que sur l'ensemble des simulations réalisées, nous ne présenterons pas les résultats relatifs à l'axe vertical (altitude et vitesse zénithale). En effet, l'étude de ces grandeurs n'est d'aucun intérêt, les mesures d'altitude étant par ailleurs systématiquement disponibles. En outre,

[47] Les légendes correspondant aux différentes courbes ne sont pas toujours affichées pour des raisons de lisibilité.

lors des essais avec hybridation permanente considérés dans cette section, nous ne présenterons pas non plus les erreurs de position horizontale du fait que ces grandeurs sont en permanence mesurées via le GPS. Enfin, les distances seront, là encore pour des raisons de confidentialité, non pas exprimées en mètres mais en u_d (unité de distance), ce qui revient à effectuer une multiplication par un certain coefficient de proportionnalité.

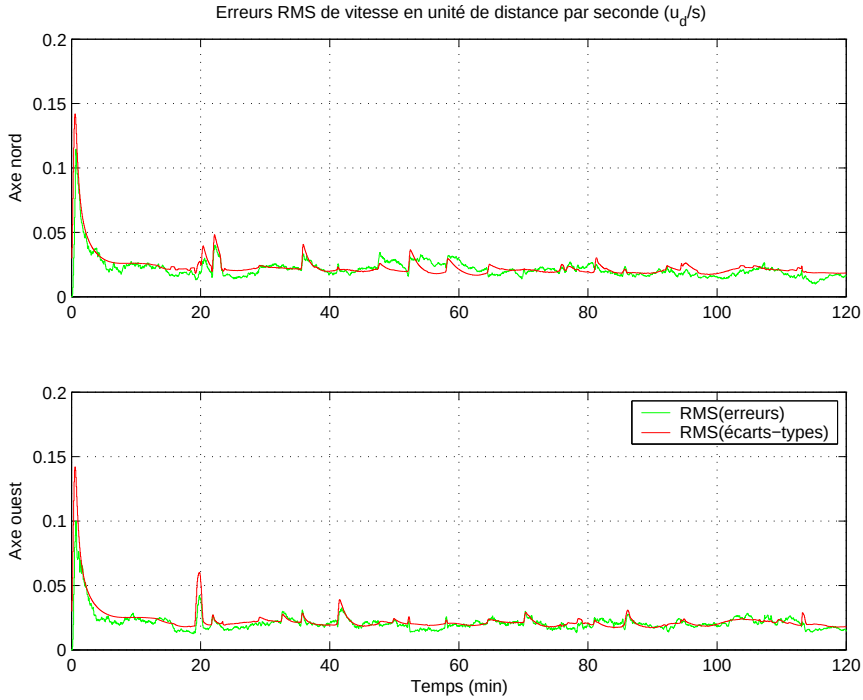


FIG. 4.24 – Erreur de vitesse et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente

Analyse des résultats obtenus :

Note préliminaire : L'analyse des résultats se fait en comparant entre eux le RMS des erreurs (courbe verte) et le RMS des écarts-types (courbe rouge) :

- si la courbe verte se trouve au dessus de la rouge, alors la solution proposée est jugée non robuste, car il est statistiquement possible de trouver une configuration donnant des valeurs dépassant 3 fois l'écart-type correspondant,
- si la courbe verte chevauche la rouge, alors, suivant la configuration, deux significations sont possibles :
  - s'il y a hybridation et que la variable considérée est observable, alors cela signifie qu'il y a correspondance entre les caractéristiques du bruit de mesures et le modèle qu'il en est fait,
  - s'il n'y a pas d'hybridation, ou que la variable considérée n'est pas observable, alors cela correspond à un cas critique vis-à-vis de la robustesse,
- si la courbe verte est en dessous de la rouge, alors cela signifie que la modélisation adoptée conduit à une certaine robustesse. Attention toutefois à ce qu'elle ne se trouve pas trop en dessous, auquel cas la solution testée est trop pessimiste. ■

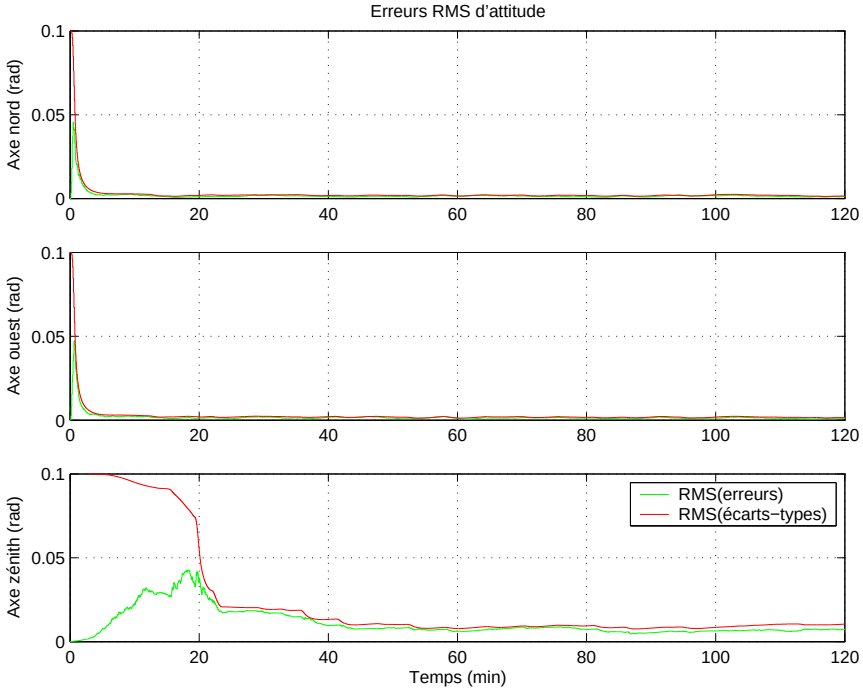


FIG. 4.25 – Erreur d'attitude (micro-rotateur $\mathbf{\Phi}_g$) et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente

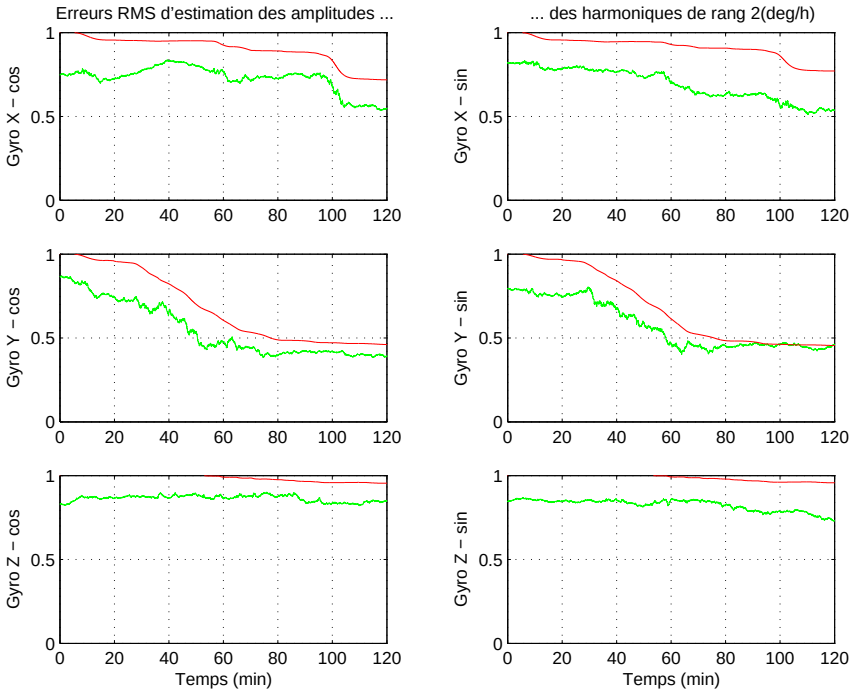


FIG. 4.26 – Erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2 et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente

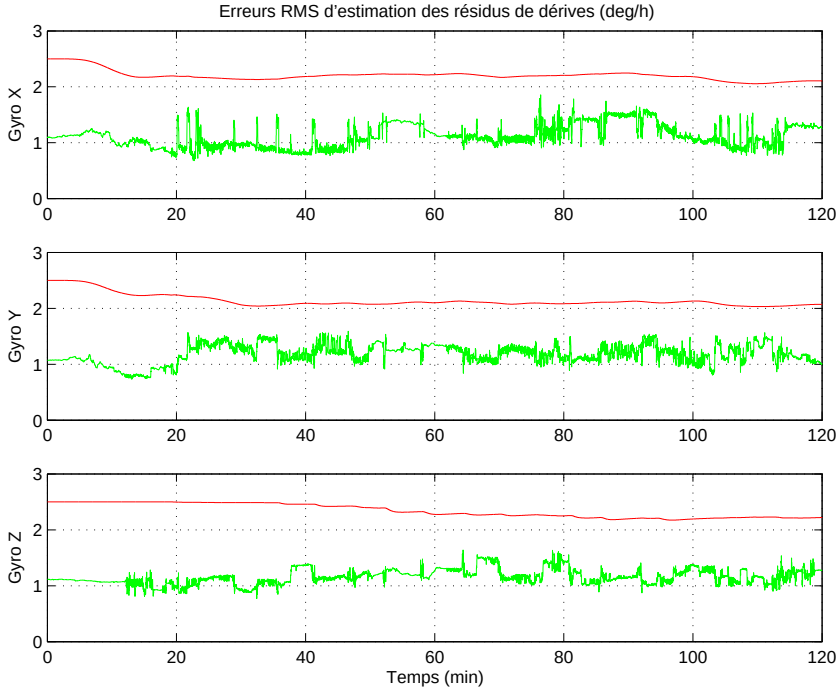


FIG. 4.27 – Erreur de reconstruction de dérive et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente

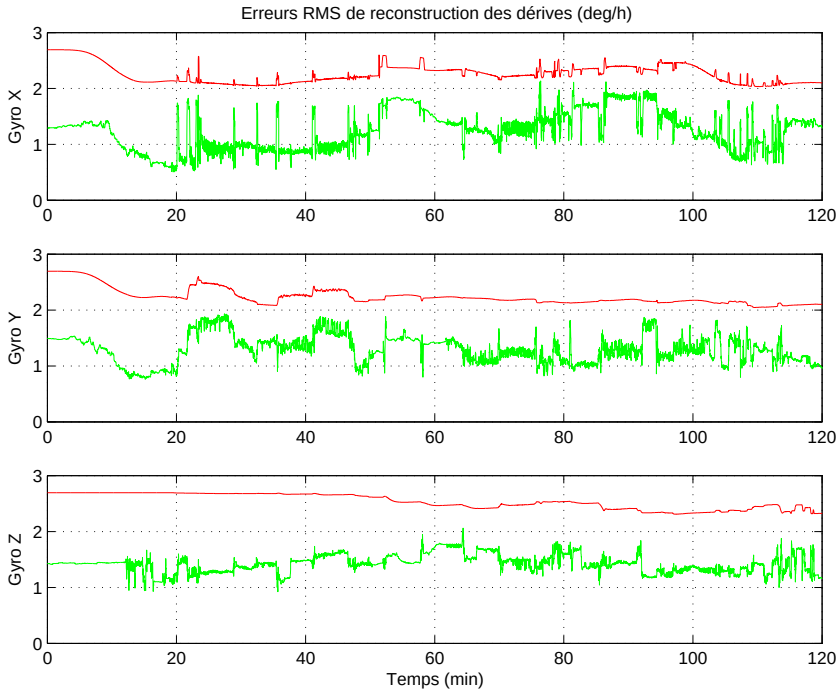


FIG. 4.28 – Erreur de reconstruction de la dérive globale et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation permanente

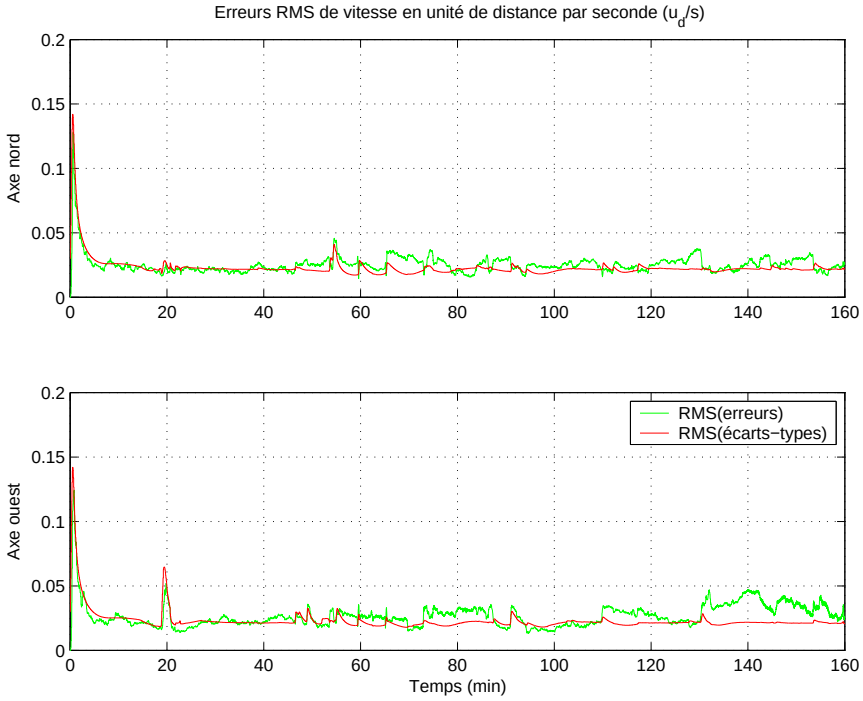


FIG. 4.29 – Erreur de vitesse et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente

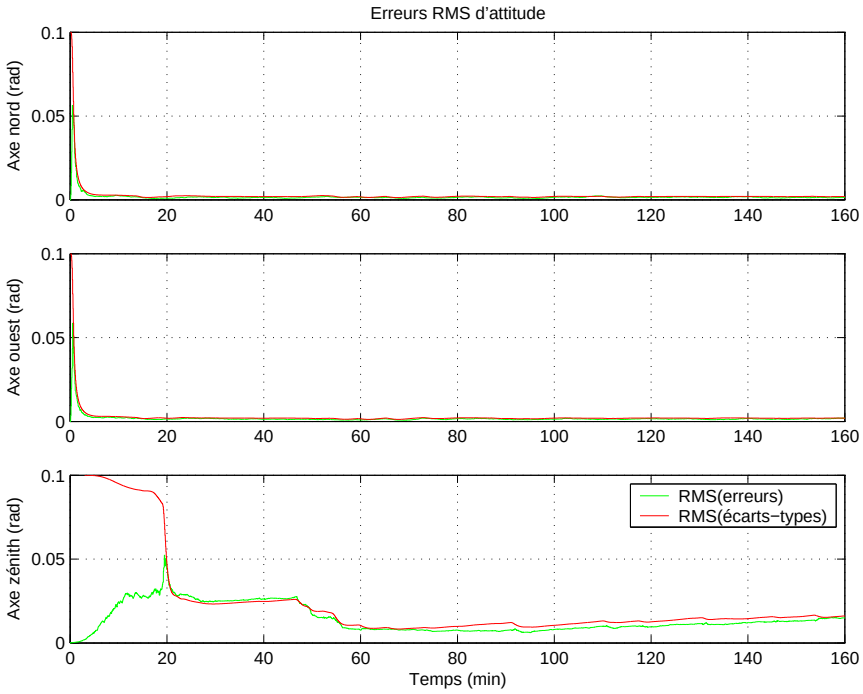


FIG. 4.30 – Erreur d'attitude (micro-rotateur $\mathbf{\Phi}_g$) et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente

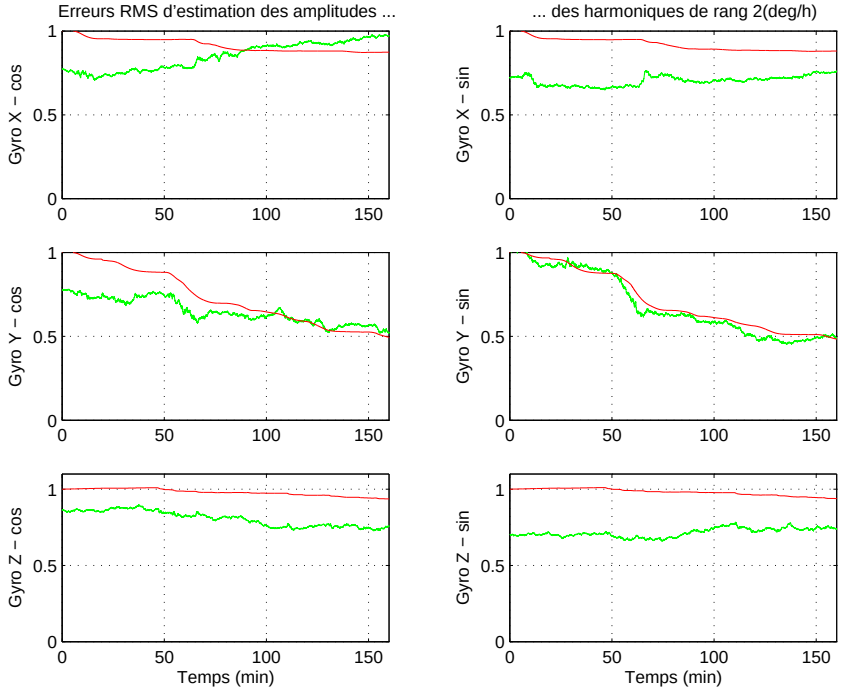


FIG. 4.31 – Erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2 et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente

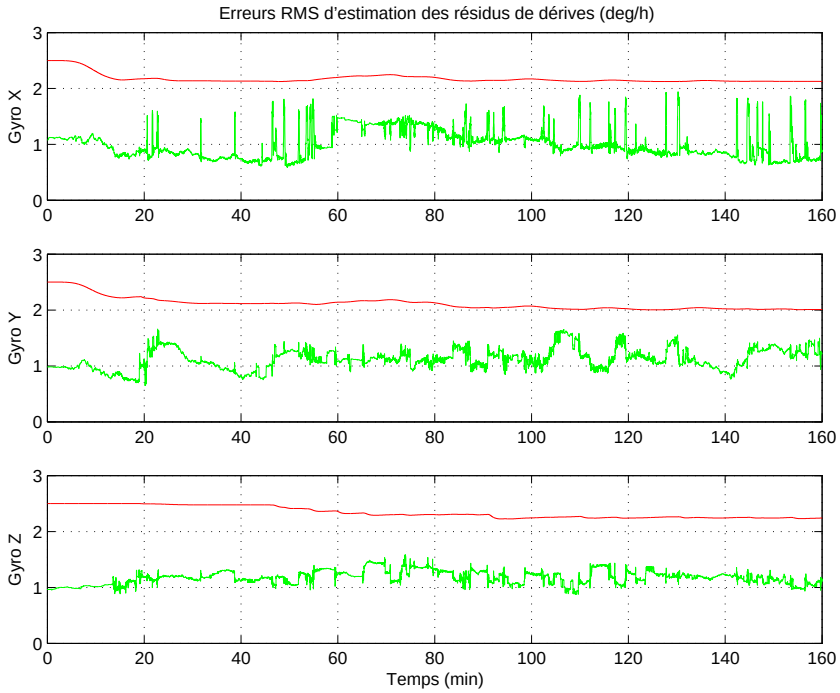


FIG. 4.32 – Erreur de reconstruction de dérive et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente

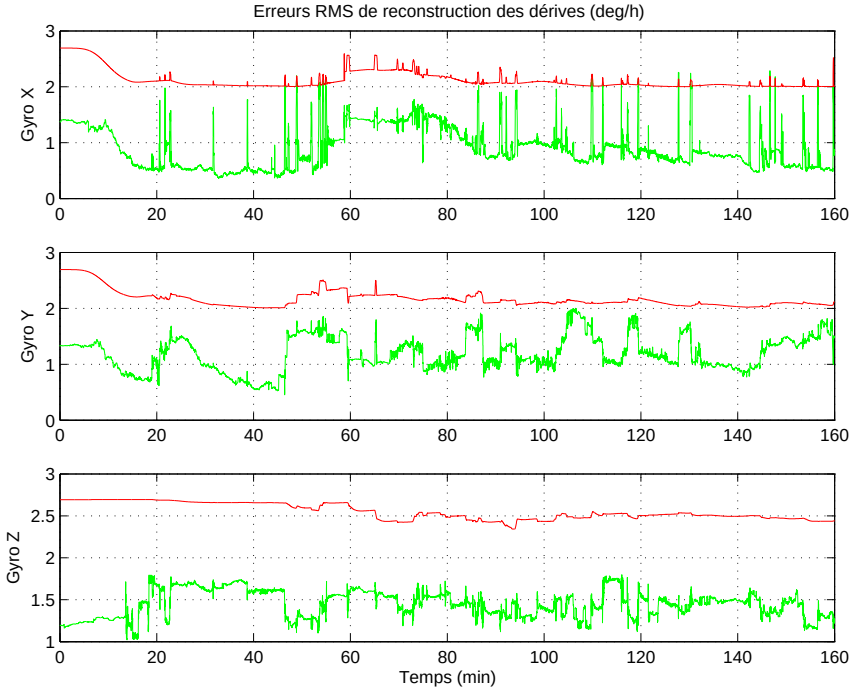


FIG. 4.33 – Erreur de reconstruction de la dérive globale et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation permanente

Tout d'abord, on constate que sur l'ensemble des tracés :

- les courbes vertes et rouges se chevauchent approximativement sur les erreurs de vitesse horizontales ainsi que sur les deux premières composantes de l'erreur d'attitude (qui correspondent aux erreurs de roulis et tangage) : ces résultats sont logiques car ces variables sont bien observables et le modèle de bruit GPS correspondant aux mesures de position horizontale est réglé identiquement aux caractéristiques réelles de cette perturbation,
- la troisième composante de l'erreur d'attitude (il s'agit de l'erreur de cap) est légèrement en dessous de l'écart-type correspondant car le degré d'observabilité de cette variable est assez faible,
- de même, les grandeurs relatives à la dérive harmonique sont généralement en dessous de l'écart-type correspondant[48] car les degrés d'observabilité de ces grandeurs considérées indépendamment sont relativement faibles.

Par conséquent, le fait que l'on retrouve les erreurs d'estimation des variables relatives au modèle de dérive en dessous des écarts-types correspondant tend à montrer que la modélisation adoptée est robuste, et laisse à penser que le comportement affiché lors d'une perte d'hybridation sera sain.

On peut par ailleurs constater que parmi les variables d'état relatives à la dérive, toutes ne sont pas pareillement observables : par exemple, les écarts-types associés aux amplitudes

[48] A une exception près qui est l'amplitude du terme en cosinus du gyro X sur la trajectoire B (figure 4.31) : une analyse des raisons de ce phénomène a montré que la cause provient de 4 des 50 simulations de Monte Carlo, lesquelles sont particulièrement défavorables car elles simulent un cheminement aléatoire de cette variable partant d'une amplitude très forte et tendant à accroître cette valeur.

d'harmoniques (figures 4.26 et 4.31) ne décroissent[49] pas aux mêmes instants. En effet, les phases d'observabilité des différentes amplitudes sont dictées par la trajectoire du porteur et notamment l'évolution des angles électriques $\boldsymbol{\theta}_e(t)$, disponibles sur les figures 4.34 et 4.35. En regardant ces deux figures, on peut constater que les angles électriques présentent des signatures différentes suivant l'axe :

- les angles mesurés par le gyroscope X présentent de nombreux pics qui traduisent des prises de roulis du porteur, dans le but de négocier un virage (le porteur se penche sur sa droite ou sa gauche pour virer et revient en position initiale - cf. figure 4.36). Si l'on fait exception de ces pics, les angles électriques mesurés par les gyroscopes X varient peu, ce qui a pour conséquence de rendre plus difficile la décorrélation entre les amplitudes des sinus et cosinus relatives à ce senseur. Cela se constate sur les figures 4.26 et 4.31, où la diminution des écarts-types est relativement faible.
  En outre, on peut constater sur ces deux figures que les plus grandes phases d'observabilité (aux alentours des 50ème et 95ème minutes pour la trajectoire A et de la 60ème minute pour la trajectoire B) interviennent lorsque le porteur effectue un tonneau (variations de roulis de 360 degrés soit environ 200 degrés électriques) ou demi-tonneau (amorce d'un piqué de l'avion).
- les angles mesurés par le gyroscope Y décroissent par paliers mais ne croissent pas, ce qui est tout à fait logique. En effet, la figure 4.36 montre que lorsque le porteur négocie un virage vers la droite ou la gauche, ce gyroscope mesure une rotation s'effectuant toujours dans le sens trigonométrique. Comme les variations des angles électriques mesurés par ce senseur sont assez régulières et substantielles, les degrés d'observabilité des amplitudes d'harmoniques relatives à ce gyroscope sont assez bons. On peut d'ailleurs remarquer sur les figures 4.26 et 4.31 que les écarts-types associés diminuent nettement et de manière relativement régulière.
- les angles mesurés par le gyroscope Z évoluent de manière non monotone, ce qui s'explique par le fait que ce senseur mesure des rotations s'effectuant dans le sens horaire ou trigonométrique selon que le porteur tourne vers la droite ou vers la gauche (cf. figure 4.36). Cette non monotonie explique la relative inobservabilité des amplitudes d'harmonique relatives à ce gyroscope, comme l'attestent les faibles décroissances des écarts-types sur les figures 4.26 et 4.31.

Enfin, on notera que les écarts-types relatifs aux résidus de dérive (figures 4.27 et 4.32) ne décroissent pas particulièrement : ceci est lié à la modélisation adoptée (utilisant la variance d'Allan), laquelle fait intervenir des bruits long terme (processus très fortement auto-corrélés dont la moyenne évolue de manière très lente) dont le degré d'observabilité est quasi-nul.

4.7.2 Cas d'une hybridation coupée

Nous allons nous servir des résultats de la section précédente afin de définir les *scenarii* de perte d'hybridation. Afin d'avoir des configurations relativement défavorables, nous allons simuler la perte et le retour de mesures lors des phases d'observabilité. Par conséquent, les coupures créées ont lieu sur les intervalles de temps suivants :

- entre les 60ème et 100ème minutes pour la trajectoire A,
- entre les 60ème et 100ème minutes pour la trajectoire B, puis une seconde coupure entre les 110ème et 150ème minutes. Cette seconde perte de mesures est simulée afin de valider le bon comportement de notre solution lors du retour de l'hybridation.

[49] Une décroissance d'écart-type à un instant donné indique qu'un apport d'information intervient à ce même moment : on dit alors qu'il y a une *phase d'observabilité* pour la variable considérée.

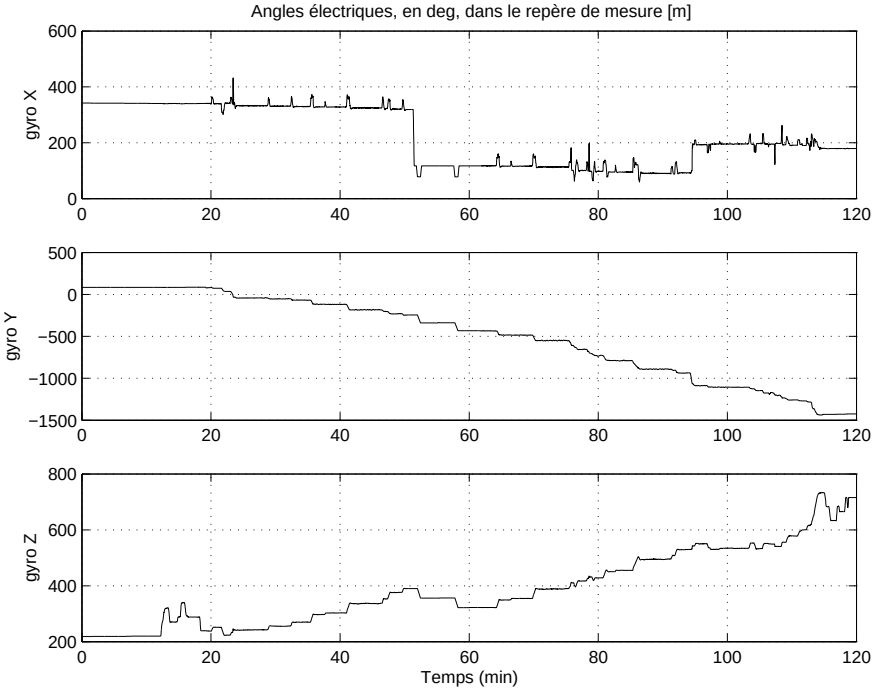


FIG. 4.34 – Angles électriques sur la trajectoire A, correspondant à une simulation de Monte Carlo particulière

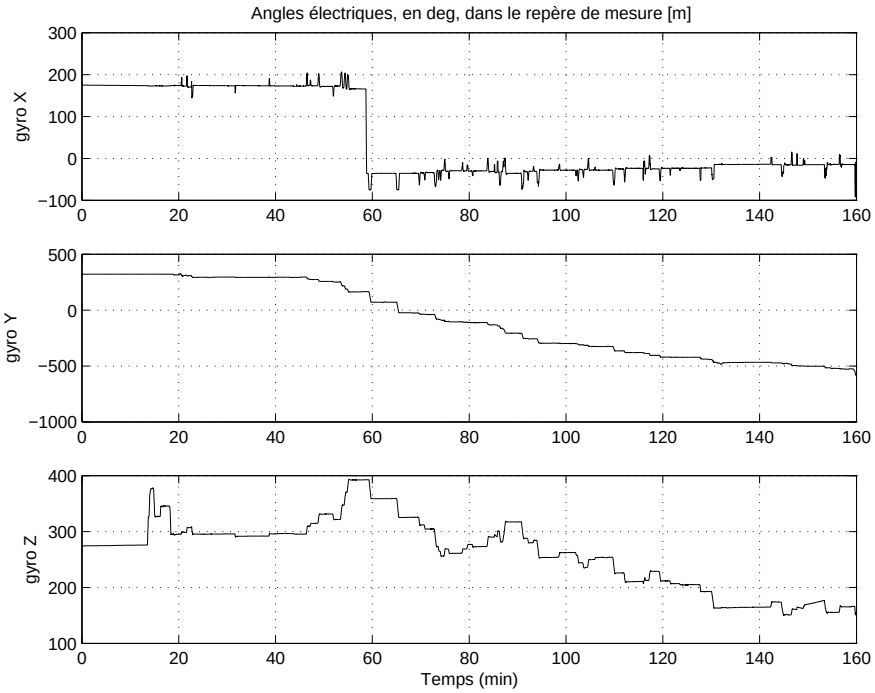


FIG. 4.35 – Angles électriques sur la trajectoire B, correspondant à une simulation de Monte Carlo particulière

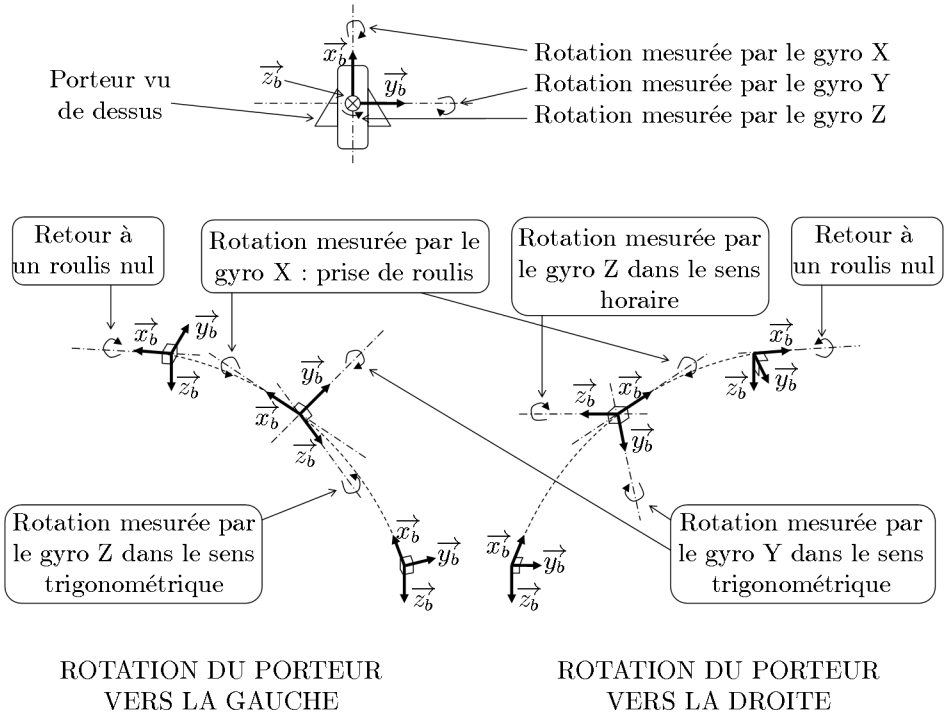


FIG. 4.36 – Rotations mesurées par les gyroscopes lors de rotations du porteur

En outre, les mesures de position verticale sont conservées même lors des coupures d'hybridation simulées, dans le but d'éviter la divergence de la vitesse zénithale et de l'altitude (nous rappelons que la voie verticale du modèle d'erreurs de navigation présente un comportement instable). Cet artifice a pour vocation de reproduire les situations rencontrées en pratique, où les observations GPS sur les 3 axes sont bien évidemment toutes perdues mais où la présence d'un baro-altimètre permet de conserver des mesures de l'altitude. C'est pour cette raison que l'écart-type du bruit GPS sur la voie verticale est augmenté dans le modèle utilisé (cf. section 4.6.3), afin de limiter l'apport d'information à la conservation d'une altitude. Les résultats obtenus sont sont disponibles sur les figures 4.37 à 4.42 pour la trajectoire A et sur les figures 4.43 à 4.48 pour la trajectoire B.

Analyse des résultats obtenus :

On peut constater que la solution proposée n'est en aucun cas prise en défaut : les courbes rouges sont toujours au dessus des vertes, y compris lors d'une seconde perte d'hybridation successive, ce qui traduit le fait que le filtre de navigation a bien géré le retour des informations. En effet, du fait que les covariances sont très grandes au moment du retour des observations, le gain de Kalman est alors important ce qui a pour conséquence de donner beaucoup d'importance aux mesures fraîchement réapparues, ce pourrait engendrer une certaine instabilité. En outre, on peut constater que tous les écarts-types croissent lors des coupures d'hybridation, ce qui confirme bien l'absence d'information en provenance du dispositif externe de mesures.

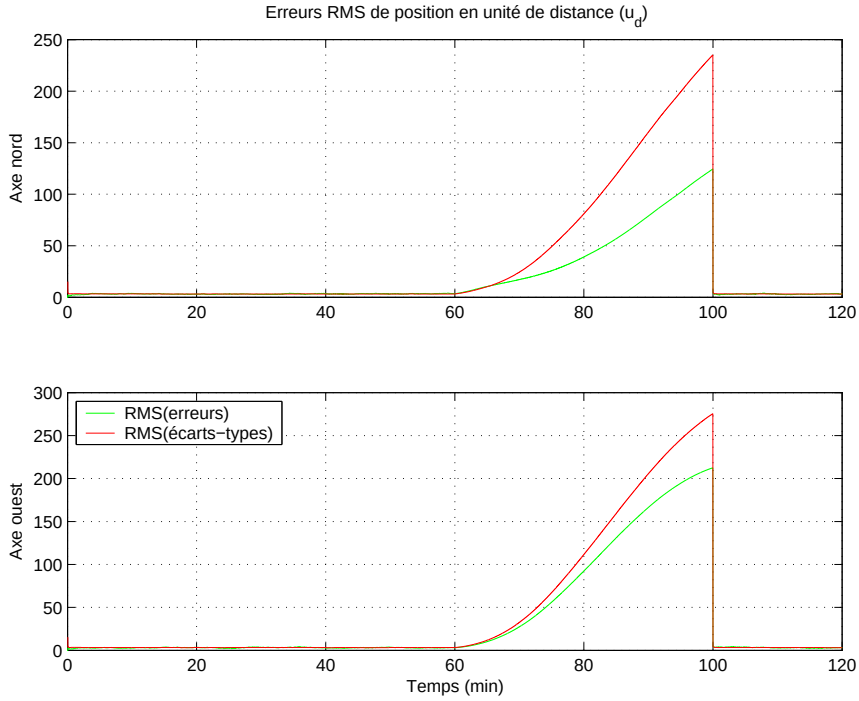


FIG. 4.37 – Erreur de position et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute

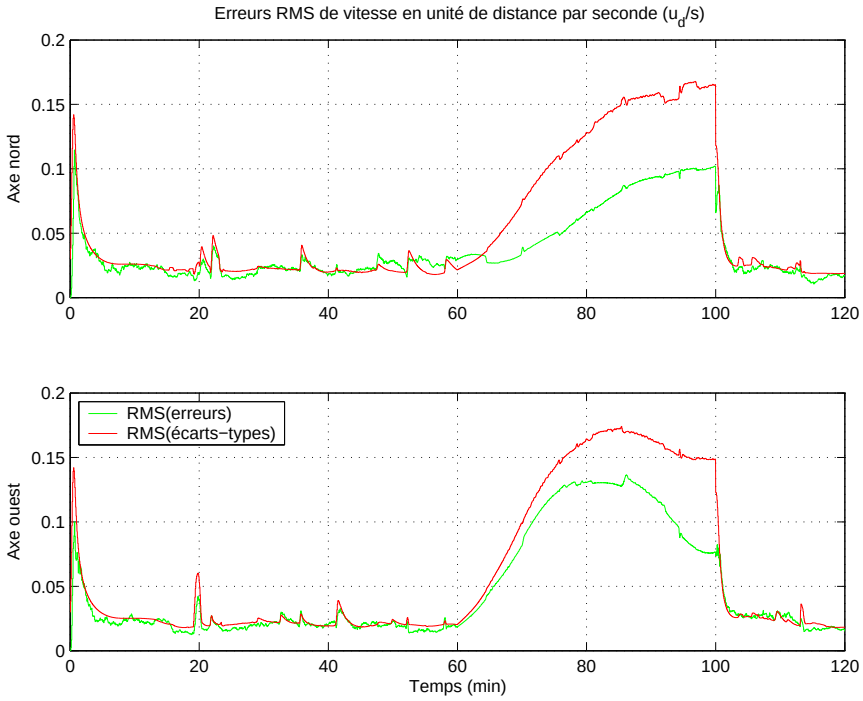


FIG. 4.38 – Erreur de vitesse et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute

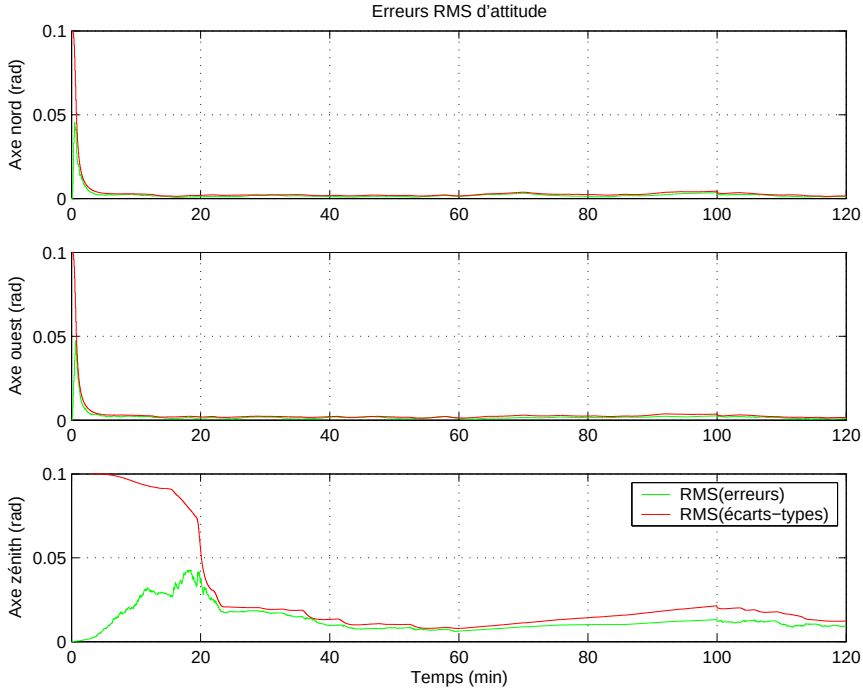


FIG. 4.39 – Erreur d'attitude (micro-rotateur $\mathbf{\Phi}_g$) et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute

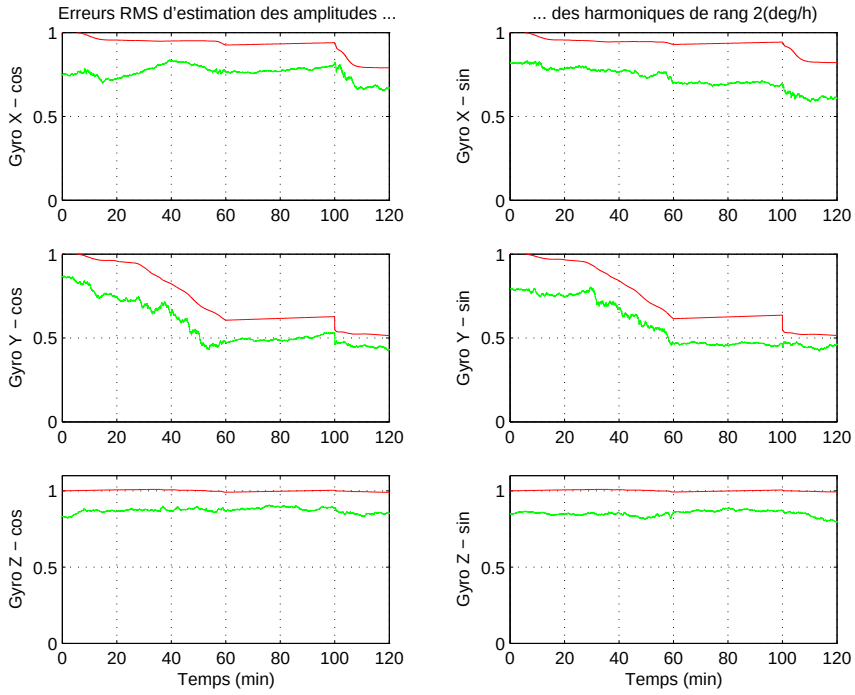


FIG. 4.40 – Erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2 et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute

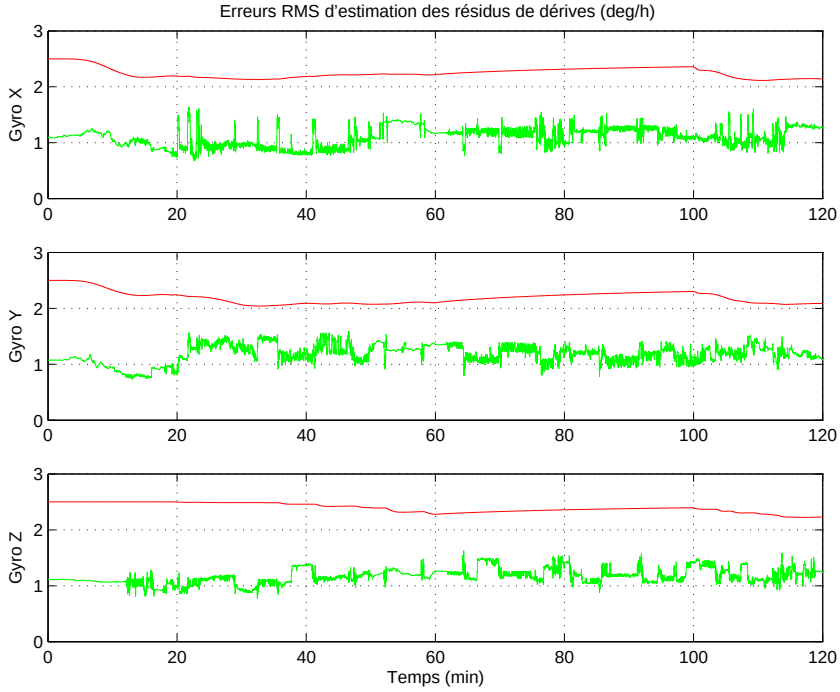


FIG. 4.41 – Erreur de reconstruction de dérive et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute

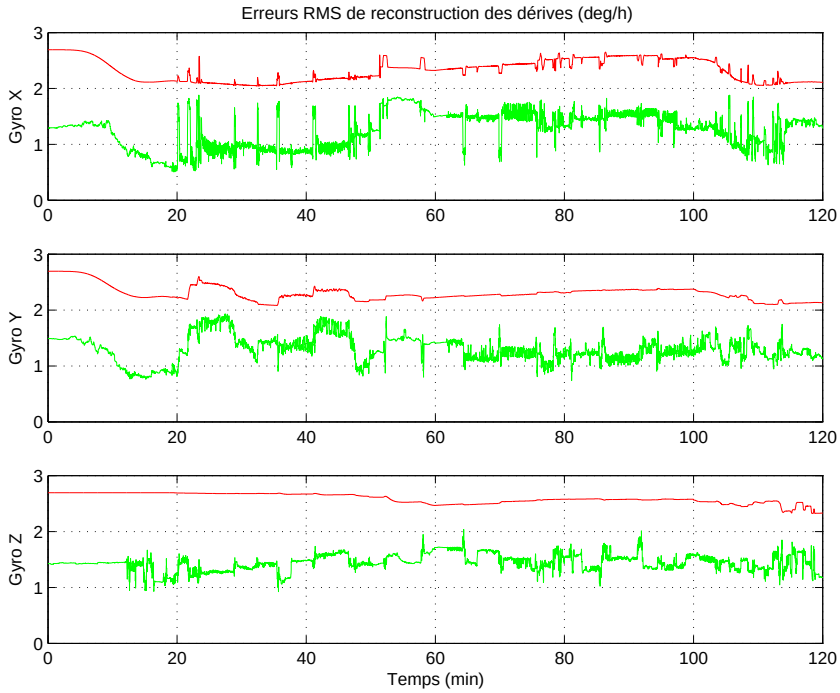


FIG. 4.42 – Erreur de reconstruction de la dérive globale et écarts-types correspondants sur la trajectoire A, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute

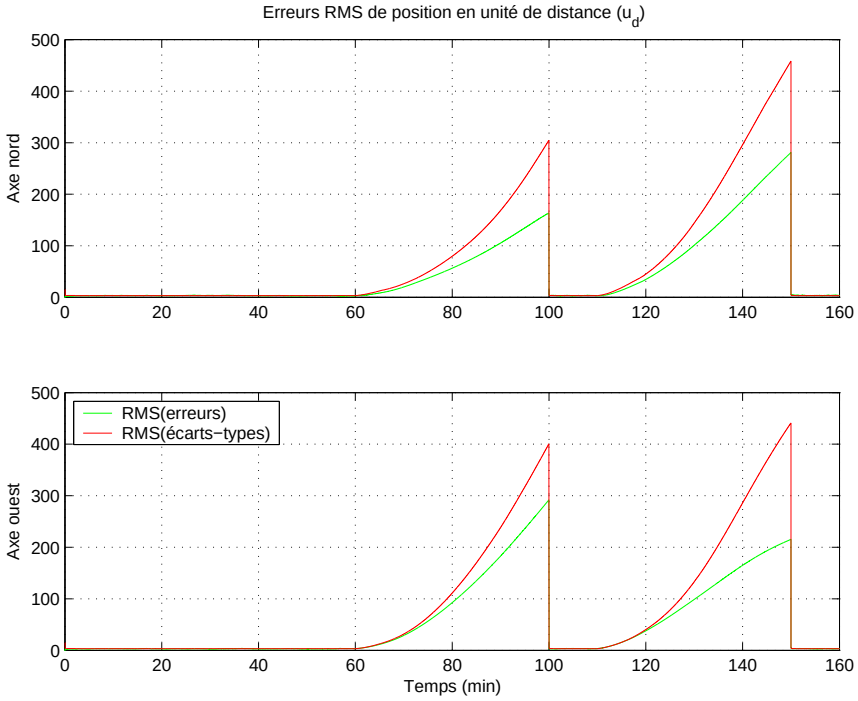


FIG. 4.43 – Erreur de position et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute

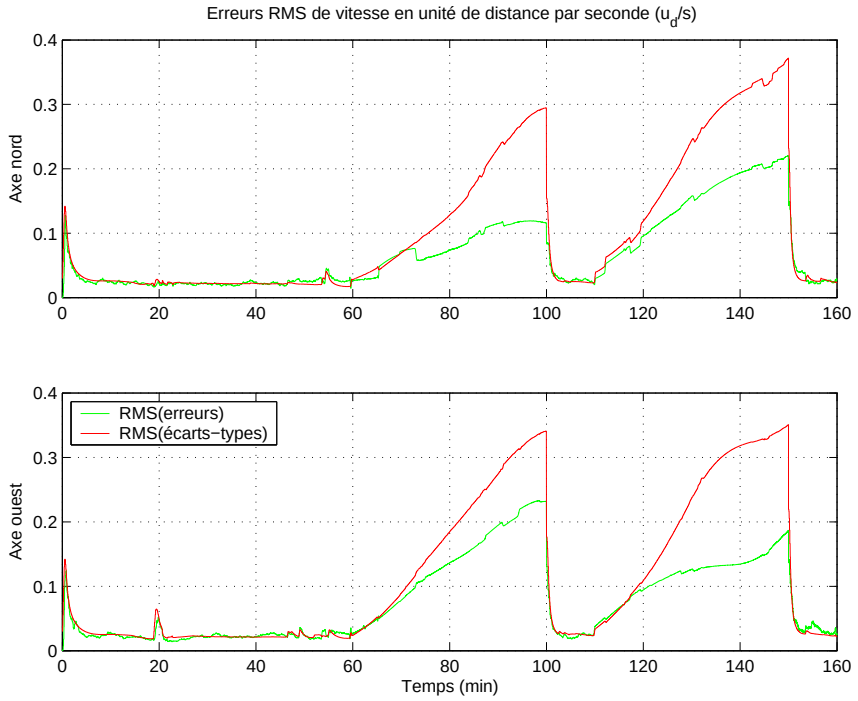


FIG. 4.44 – Erreur de vitesse et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute

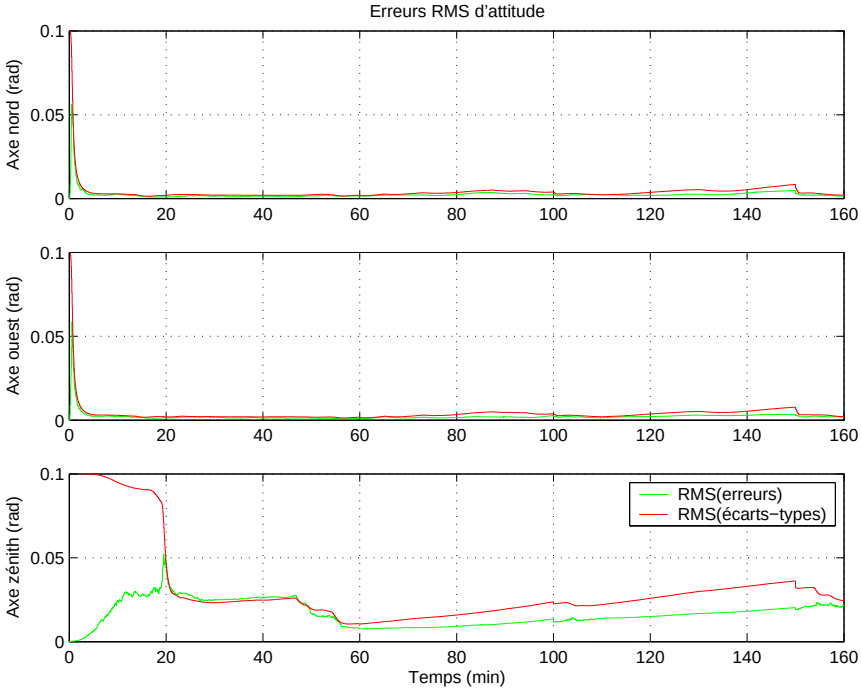


FIG. 4.45 – Erreur d'attitude (micro-rotateur $\mathbf{\Phi}_g$) et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute

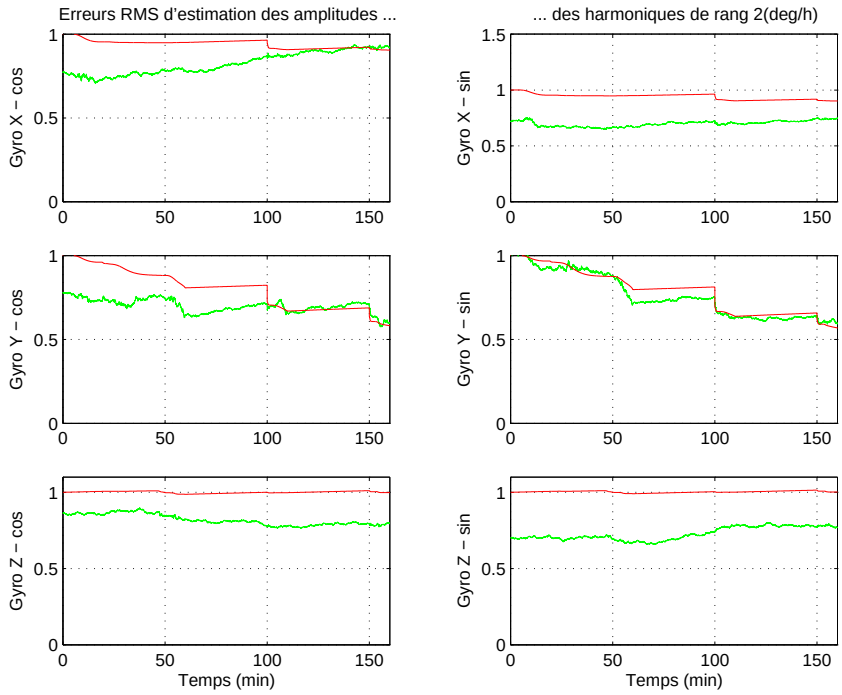


FIG. 4.46 – Erreur d'estimation des amplitudes de l'harmonique de rang 2 et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute

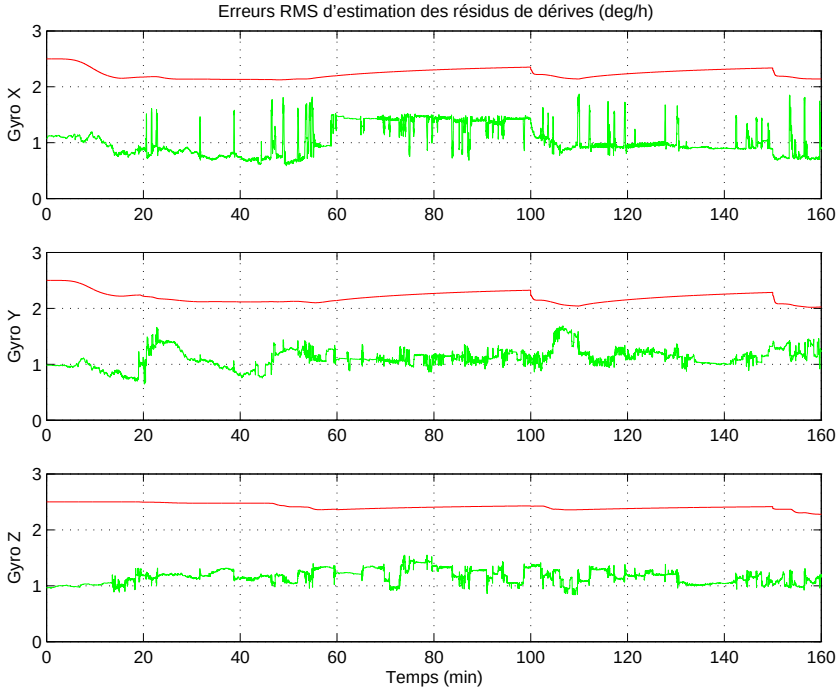


FIG. 4.47 – Erreur de reconstruction de dérive et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute

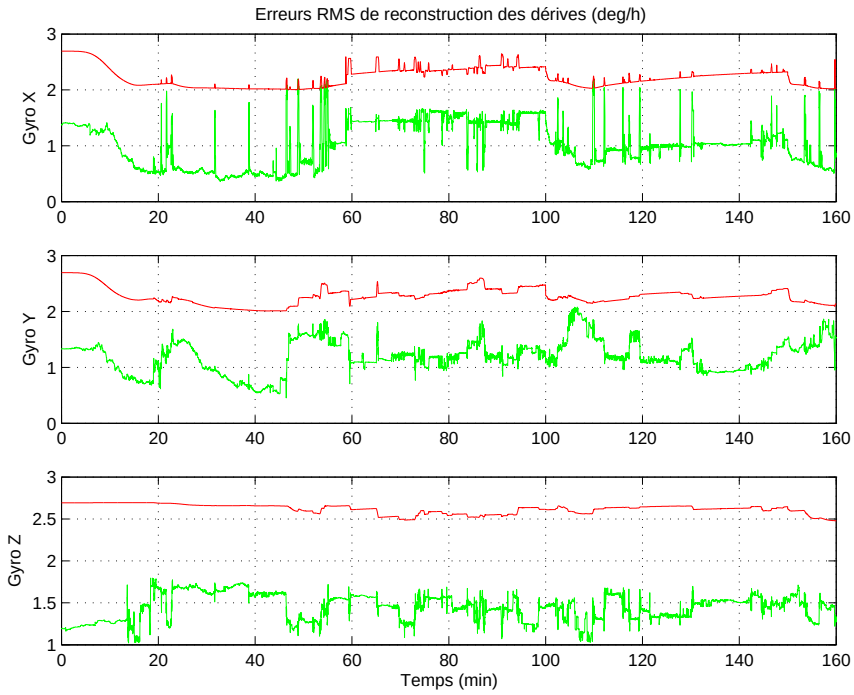


FIG. 4.48 – Erreur de reconstruction de la dérive globale et écarts-types correspondants sur la trajectoire B, avec hybridation coupée entre la 60ème et la 100ème minute puis entre la 110ème et la 150ème minute

4.7.3 Comparaison avec d'autres configurations

Afin de juger des performances de notre approche, nous allons comparer les résultats obtenus avec ceux issus d'autres configurations, lesquelles sont :

1. une dérive gyroscopique uniquement modélisée par l'harmonique de rang 2 et dont le résidu est décrit par un seul processus markovien, de période d'auto-corrélation 10min et d'écart-type 2,5deg/h (ce qui correspond à l'écart-type global des 4 processus markovien du modèle que l'on a adopté),
2. la même configuration que ci-dessus mais avec un écart-type de 1,25deg/h pour le bruit markovien modélisant le résidu,
3. une dérive dont le modèle est uniquement décrit par des harmoniques de rang 0 à N^{masq} et réglé en adéquation avec le "monde vrai". Le résidu de dérive constitué par les harmoniques de rang supérieur à N^{masq} et modélisé dans le "monde vrai" sous forme de tabulation n'est pas pris en compte, compte-tenu de l'impossibilité de décrire le comportement ce module sous une forme exploitable par un filtre de Kalman ;
4. une navigation en inertie pure parfaitement initialisée au moment de la perte d'hybridation,
5. la même configuration que ci-dessus mais avec un cap initialisé à la valeur calculée juste avant la perte d'hybridation et non la valeur vraie.[50]

Les résultats issus de ces 5 configurations sont illustrés sur les figures 4.49 à 4.54 pour la trajectoire A et les figures 4.55 à 4.60 pour la trajectoire B. Pour des raisons de clarté de l'exposé, seules les erreurs de position horizontale sont étudiées, cette grandeur étant la plus significative.

Ces différentes courbes donnent un aperçu des performances de notre solution en terme d'erreur d'estimation et de robustesse. Afin de juger de manière plus précise, les grandeurs atteintes juste avant le retour d'hybridation sont consignées dans les tableaux 4.1 à 4.3, ces valeurs nous semblant particulièrement significatives.

		notre solution	config. n°1	config. n°2	config. n°3	config. n°4	config. n°5
Position nord	RMS erreur	125 u_d	119 u_d	111 u_d	106 u_d	158 u_d	161 u_d
	écart-type	235 u_d	299 u_d	162 u_d	91 u_d		
Position ouest	RMS erreur	212 u_d	209 u_d	203 u_d	194 u_d	163 u_d	164 u_d
	écart-type	275 u_d	345 u_d	215 u_d	160 u_d		

Tab. 4.1 – Erreurs RMS de position et écarts-types correspondants à la 100ème minute de la trajectoire A

Nous pouvons constater que par rapport l'approche de modélisation simpliste que constitue la configuration n°2, notre solution donne en terme de performances (RMS des erreurs de position) des résultats équivalents. En outre, elle présente de meilleures propriétés de robustesse, les marges entre les RMS des erreurs de position et de leur écart-type respectif étant un peu plus larges (on peut constater que lors de la coupure d'hybridation simulée sur la trajectoire A, la position ouest estimée à partir de la configuration n°2 est à la limite de la non robustesse). En ce qui concerne la configuration n°1, notre solution est nettement moins pessimiste et présente de surcroît des

[50] L'intérêt de cette configuration par rapport à la précédente est qu'elle est moins sévère. En effet, l'erreur de cap, qui est la troisième composante du micro-rotateur $\mathbf{\Psi}_w$, c'est-à-dire la neuvième composante du vecteur d'état, présente généralement un degré d'observabilité relativement faible. Le fait d'initialiser le cap à la valeur calculée juste avant la perte d'hybridation et non la valeur vraie constitue donc une configuration moins parfaite par rapport à laquelle notre solution souffrira moins la comparaison.

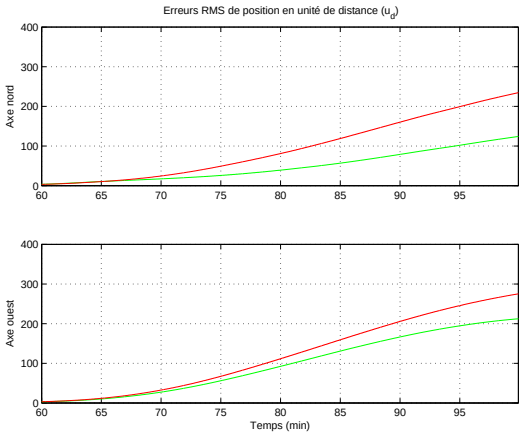


FIG. 4.49 – Notre solution

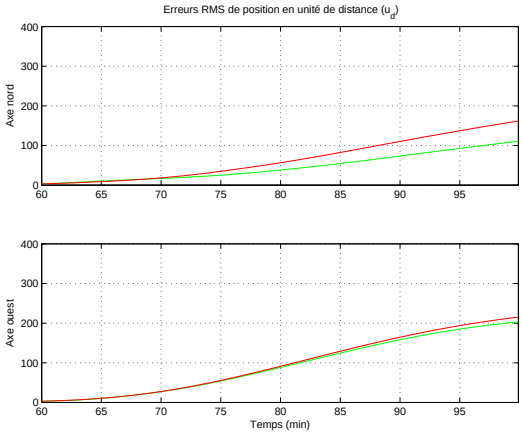


FIG. 4.50 – Configuration n°2

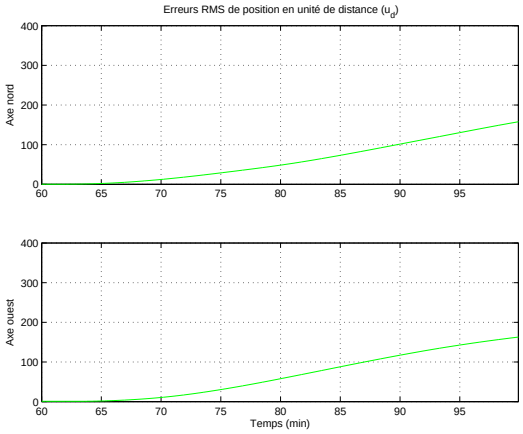


FIG. 4.51 – Configuration n°4

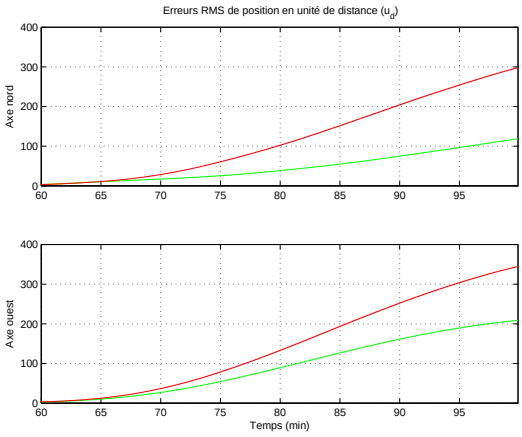


FIG. 4.52 – Configuration n°1

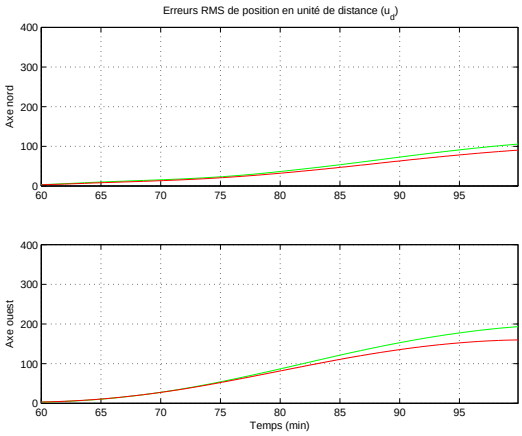


FIG. 4.53 – Configuration n°3

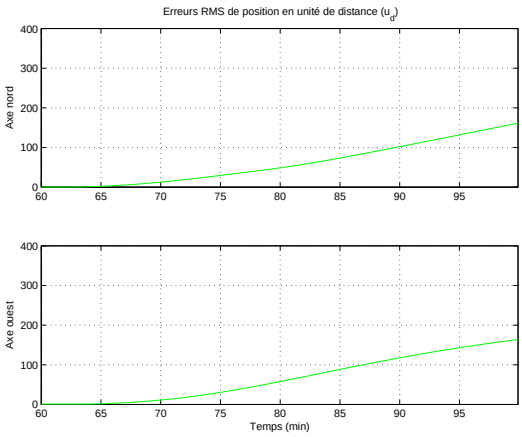


FIG. 4.54 – Configuration n°5

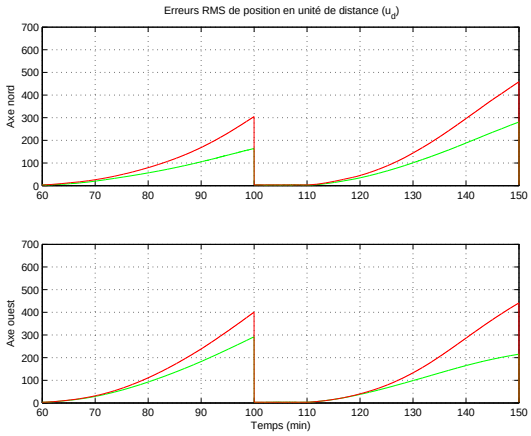


FIG. 4.55 – Notre solution

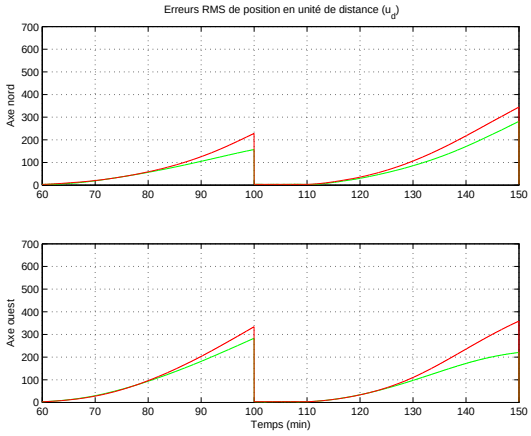


FIG. 4.56 – Configuration n°2

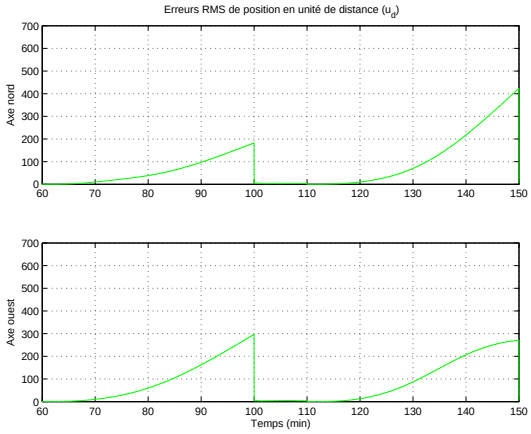


FIG. 4.57 – Configuration n°4

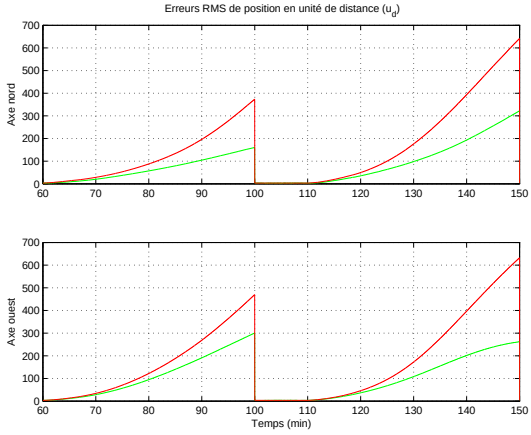


FIG. 4.58 – Configuration n°1

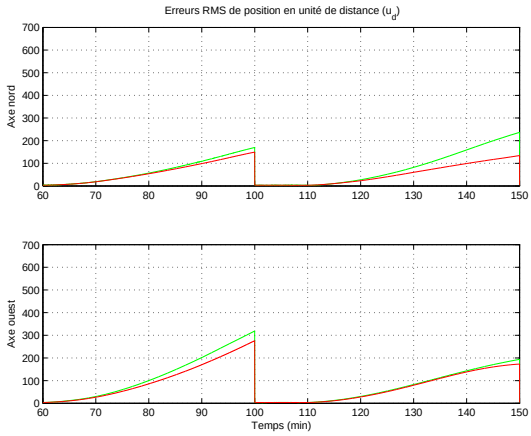


FIG. 4.59 – Configuration n°3

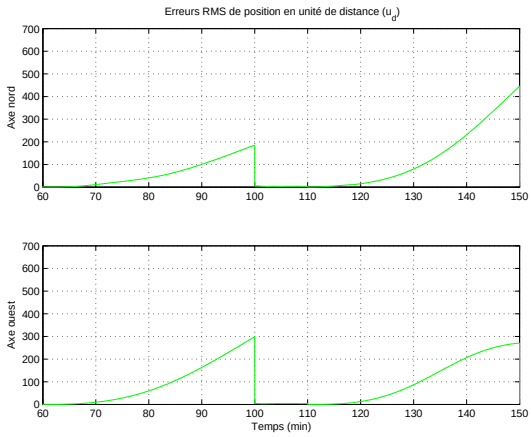


FIG. 4.60 – Configuration n°5

		notre solution	config. n°1	config. n°2	config. n°3	config. n°4	config. n°5
Position nord	RMS erreur	164 u_d	161 u_d	157 u_d	170 u_d	182 u_d	185 u_d
	écart-type	305 u_d	373 u_d	228 u_d	149 u_d		
Position ouest	RMS erreur	292 u_d	322 u_d	283 u_d	319 u_d	297 u_d	299 u_d
	écart-type	340 u_d	469 u_d	334 u_d	276 u_d		

Tab. 4.2 – Erreurs RMS de position et écarts-types correspondants à la 100ème minute de la trajectoire B

		notre solution	config. n°1	config. n°2	config. n°3	config. n°4	config. n°5
Position nord	RMS erreur	281 u_d	323 u_d	282 u_d	237 u_d	423 u_d	446 u_d
	écart-type	458 u_d	641 u_d	314 u_d	134 u_d		
Position ouest	RMS erreur	215 u_d	263 u_d	221 u_d	194 u_d	270 u_d	271 u_d
	écart-type	441 u_d	632 u_d	359 u_d	173 u_d		

Tab. 4.3 – Erreurs RMS de position et écarts-types correspondants à la 150ème minute de la trajectoire B

performances équivalentes voire même meilleures, notamment sur la position ouest et lors de la seconde coupure d'hybridation pour la trajectoire B.

Considérons maintenant la configuration n°3, correspondant à une dérive GRH dont toutes les harmoniques de rang inférieur ou égal à N^{masq} ont été modélisées de manière cohérente avec le "monde vrai", mais pas le résidu. Cette solution n'est de toute évidence pas robuste, le RMS des erreurs de position étant supérieur au RMS de leur écart-type respectif. Ce résultat est toutefois logique du fait que le résidu n'a pas été pris en compte dans ce modèle. Si cette configuration n'est bien évidement pas envisageable comme alternative à notre solution en raison de sa non-robustesse, elle présente un autre intérêt : le RMS des écarts-types représente en termes statistiques un minorant de la meilleure performance théorique envisageable, autrement dit un équivalent de la borne de Cramer-Rao (il s'agit d'un minorant car elle est obtenue à partir d'un modèle ne considérant pas le résidu). Ainsi, en comparant le RMS des erreurs de position de notre solution au RMS des écarts-types de la configuration n°3, nous aurons une idée sur la performance de notre solution. En utilisant les résultats consignés dans les tableaux 4.1 à 4.3, nous constatons alors que notre solution présente un comportement convenable, à savoir une dégradation de 6% (292u_d contre 276u_d, trajectoire B, position ouest, première coupure d'hybridation) à 37% (125u_d contre 91u_d, trajectoire A, position nord) par rapport à un minorant de la performance théorique optimal (ce qui veut dire que la dégradation de performance est en réalité plus faible que cela). Il semble toutefois y avoir une exception à ces bons résultats, en ce qui concerne la position nord sur la trajectoire B, lors de la seconde coupure d'hybridation (281u_d contre 134u_d, ce qui représente une dégradation de 110%). La raison de ce phénomène provient de la non adéquation du modèle correspondant à la configuration n°3 avec celui du "monde vrai", à cause de la non prise en compte du résidu : une fois la première coupure d'hybridation terminée, les nouvelles informations sont réparties de manière inappropriée par le filtre de Kalman vers les différentes amplitudes d'harmonique (autrement dit, l'inadéquation de modèle entraîne un mauvais calcul du gain de Kalman), provoquant par la même une diminution de certains coefficients de la matrice de covariance. La diminution de ces termes se traduit par une covariance propagée trop faible lors de la seconde coupure d'hybridation, c'est-à-dire un RMS des écarts-types de position trop petit. Nous pouvons d'ailleurs constater sur le tableau 4.3 que, concernant la configuration n°3,

le ratio entre les RMS de l'erreur sur la position nord et de son écart-type est assez important (237/134 = 1,76).

Enfin, nous pouvons constater que par rapport à une navigation de type inertie pure (configurations n°4 et n°5), notre solution se comporte légèrement moins bien sur la trajectoire A (diminution de l'erreur sur la position nord mais augmentation sur la position ouest, cf. tableau 4.1) mais apporte une amélioration significative sur la trajectoire B, notamment lors de la seconde perte d'hybridation (cf. tableau 4.3). Ce résultat confirme l'intérêt de notre méthode, ce genre de comparaison représentant traditionnellement "l'épreuve de vérité" pour un filtre de navigation. A noter que les résultats relatifs aux configurations n°4 et n°5 sont assez proches l'un de l'autre, ce qui s'explique par le fait que l'erreur de cap est correctement estimée par le filtre de navigation (cf. figures 4.39 et 4.45).

4.7.4 Utilisation du filtrage de Kalman sous contraintes

Le bon comportement de notre solution ayant été vérifié sur les expériences réalisées, nous avons tenté d'améliorer encore ses performances en exploitant, au travers de techniques de filtrage de Kalman sous contraintes, le fait que le résidu de dérive gyroscopique est borné. Les méthodes et types de contraintes envisagés ont été présentés dans la section 4.5.4. Après avoir initialement envisagé des contraintes sur la norme euclidienne des résidus[51], nous avons finalement opté pour des contraintes sur la valeur absolue, ceci étant plus réaliste car cela oblige le résidu à rester borné sans pour autant que chacun des états ne soit confiné entre ces mêmes bornes. La méthode de prise en compte des contraintes est donc l'approche par projection sous contraintes inégalité linéaires. Cette méthode a été testée pour différentes valeurs de borne. Les résultats (erreur RMS de position juste avant le retour d'hybridation) sont consignées dans les tableaux 4.4 à 4.6, la borne infinie représentant un filtre de Kalman non contraint.

Borne (deg/h)	0	0,25	0,5	0,625	0,75	1	$+\infty$
RMS erreur position nord	123 u_d	125 u_d	124 u_d	123 u_d	123 u_d	124 u_d	125 u_d
RMS erreur position ouest	224 u_d	218 u_d	215 u_d	215 u_d	215 u_d	214 u_d	212 u_d
RMS erreur position horizontale	256 u_d	251 u_d	248 u_d	248 u_d	248 u_d	247 u_d	246 u_d

Tab. 4.4 – Erreurs RMS de position à la 100ème minute de la trajectoire A en fonction de la borne imposée au résidu estimé

Borne (deg/h)	0	0,25	0,5	0,625	0,75	1	$+\infty$
RMS erreur position nord	158 u_d	153 u_d	153 u_d	155 u_d	156 u_d	158 u_d	164 u_d
RMS erreur position ouest	289 u_d	291 u_d	290 u_d	290 u_d	290 u_d	291 u_d	292 u_d
RMS erreur position horizontale	329 u_d	329 u_d	328 u_d	329 u_d	329 u_d	331 u_d	335 u_d

Tab. 4.5 – Erreurs RMS de position à la 100ème minute de la trajectoire B en fonction de la borne imposée au résidu estimé

Nous pouvons constater que l'utilisation de techniques de filtrage sous contraintes n'apporte rien en ce qui concerne la trajectoire A et diminue très légèrement l'erreur de position globale sur la trajectoire B, notamment lors de la seconde coupure d'hybridation (336u_d contre 353u_d,

[51] C'est pour cela que les techniques d'estimation sous contraintes non linéaires ont été développées mais finalement été laissées de côté en ce qui concerne cette application.

Borne (deg/h)	0	0,25	0,5	0,625	0,75	1	$+\infty$
RMS erreur position nord	246 u_d	243 u_d	250 u_d	254 u_d	258 u_d	265 u_d	281 u_d
RMS erreur position ouest	242 u_d	233 u_d	225 u_d	222 u_d	219 u_d	217 u_d	215 u_d
RMS erreur position horizontale	345 u_d	337 u_d	336 u_d	337 u_d	338 u_d	343 u_d	353 u_d

TAB. 4.6 – Erreurs RMS de position à la 150ème minute de la trajectoire B en fonction de la borne imposée au résidu estimé

soit une amélioration d'environ 5% pour une borne de 0,5 deg/h). En outre, on peut constater que cette amélioration ne porte que sur la position nord, la position ouest se trouvant quant-à-elle dégradée. Ainsi, concernant cette application, l'emploi de l'approche par projection pour contraindre les estimées du filtre de navigation est possible, mais, compte-tenu de son faible apport, ne se justifie pas.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de filtrage robuste pour les systèmes de navigation inertielle utilisant des GRH (Gyroscopes Résonnants Hémisphériques) et hybridés en position à partir de mesures GPS a été développée. Cette méthode se base sur la variance d'Allan et plus particulièrement le concept de variance d'Allan plate. Le principe de fonctionnement d'un GRH a tout d'abord été présenté. Cela a permis de mettre en évidence les origines des erreurs inhérentes au GRH et de les mettre en équation, sous forme d'une décomposition en série de Fourier spatiale (il s'agit d'un modèle de connaissance). Le modèle résultant, qui ne tient compte pour des questions de complexité que de l'harmonique de rang 2, présente alors un résidu qu'il est nécessaire de traiter d'une manière ou d'une autre. Sur le modèle complet des erreurs de navigation, ce résidu se traduit par une entrée inconnue. Dans cette optique, certaines méthodes de filtrage robuste ont été envisagées et testées mais, pour diverses raisons, ne nous ont pas donné satisfaction. Nous avons alors opté pour une autre approche, consistant à décrire ce résidu par un cumul de processus auto-corrélés à l'ordre 1, chaque processus ayant une période d'auto-corrélation différente. Le nombre de processus auto-corrélés, leurs écart-type et période d'auto-corrélation ont été déterminés de sorte que le résidu présente une variance d'Allan plate (c'est-à-dire approximativement constante) sur une durée maximale de mission donnée. Une telle modélisation du résidu constitue en quelque sorte une description "pire cas" car elle suggère que son amplitude peut aussi bien varier lentement que rapidement. Le filtre de Kalman utilisant le modèle complet d'erreurs de navigation ainsi élaboré a été testé suivant différents aspects sur deux trajectoires d'avion, selon certains scenarii de pertes de mesures GPS. Les résultats obtenus ont montré un comportement sain et robuste de notre solution ainsi que de meilleurs performances qu'une navigation inertielle pure. Enfin, en sachant grâce à des considérations d'ordre physique que les résidus de dérive sont bornés, nous avons exploité cette connaissance au travers de techniques de filtrage de Kalman sous contraintes. Les résultats obtenus ont montré une légère diminution des erreurs d'estimation par rapport au filtrage de Kalman classique. Parmi les suites à donner à ce travail, nous pouvons mentionner l'essai de cette solution sur d'autres scenarii de pertes d'hybridations et d'autres trajectoires, notamment une de durée supérieure à celles considérées dans ce travail (dans cette thèse, il ne nous a pas été possible d'avoir à disposition une trajectoire de longue durée).

Conclusion générale

Les travaux exposés dans ce mémoire de thèse portent sur la problématique d'estimation en présence d'incertitudes de modèle et de pertes de capteurs. Dans le premier chapitre, une présentation de multiples techniques d'estimation d'état dans un cadre stochastique a été effectuée. Les principes des approches linéaires optimales (vis-à-vis d'un critère de performances donné) puis non linéaires analytiques et numériques ont été en premier lieu étudiés. La prise en compte de contraintes sur les variables d'état dans le problème d'estimation a ensuite été évoquée, une telle démarche constituant un apport supplémentaire d'information. Différentes approches visant à accroître la robustesse des estimateurs présentés vis-à-vis de méconnaissances ont alors été examinées, ces méconnaissances portant sur la structure du modèle utilisé, la valeur de certains de ses paramètres, les variables constituant l'entrée du système ou les caractéristiques du bruit d'état.

Le deuxième chapitre a fait l'objet de l'une de nos deux principales contributions, à savoir la synthèse d'un dispositif d'estimation d'état pour systèmes non linéaires, c'est à dire d'un ensemble constitué d'un estimateur d'état associé à un réseau de capteurs. Ce travail se décompose en trois parties, la première consistant à régler certains estimateurs non linéaires selon une méthodologie développée par nos soins. La deuxième phase est la genèse à partir de la variance expérimentale et du grammien d'observabilité d'un critère évaluant la dégradation de la qualité d'estimation provoquée la perte d'un capteur. La troisième et dernière étape constitue la synthèse à proprement parler du dispositif d'estimation d'état à partir d'un algorithme que nous avons développé. L'application de cet algorithme aboutit en premier lieu à la sélection parmi un éventail initial d'estimateurs convenablement réglés de celui étant le plus en adéquation avec le problème considéré. Ensuite, le critère élaboré lors de la deuxième phase est exploité afin de déterminer un ensemble de capteurs à rendre matériellement redondant. L'adjonction de ces capteurs redondants au dispositif d'instrumentation initial constitue le réseau de capteurs qui, associé au reconstructeur d'état sélectionné, forme le dispositif d'estimation d'état résultant. Deux exemples particuliers, l'un étant le système (chaotique) de Lorenz, l'autre une extension d'un modèle complexe issu du monde de la finance, ont illustré l'attrait de la méthode proposée.

Le chapitre 3 de ce mémoire constituait un rappel sur la théorie de la navigation nécessaire à l'appréhension du chapitre 4. La mise en équation de la navigation par inertie à partir de la modélisation de la terre selon le système WGS84 et des équations de la mécanique newtonienne à tout d'abord été présentée. Les relations obtenues ont ensuite été discrétisées selon une procédure adéquate afin d'obtenir une solution récursive de navigation reposant sur les données issues d'une unité de mesures inertielles. Les erreurs d'un système de navigation par inertie ont alors été étudiées puis modélisées dans le but d'hybrider la navigation inertielle avec des informations en provenance d'un dispositif externe de mesures tel que le GPS. Cette hybridation s'effectue en utilisant un estimateur d'état adéquat appelé filtre de navigation.

Le quatrième et dernier chapitre représentait la seconde de nos contributions. Il concerne les systèmes de navigation inertielle hybridés avec des mesures de position provenant d'un récepteur GPS, ces mesures pouvant à tout moment être perdues. Les gyroscopes utilisés dans l'unité de

mesures inertielles, à savoir des GRH (Gyroscopes Résonnants Hémisphériques), sont très performants, mais présentent une dérive difficile à décrire avec un modèle simple et exploitable par un calculateur. Dès lors, le modèle complet d'erreurs de navigation utilisé par le filtre de navigation présente nécessairement des incertitudes sur son entrée, qu'il est nécessaire d'appréhender par une approche d'estimation d'état robuste. Après avoir étudié un certain nombre d'estimateurs robustes (ceux présentés dans le premier chapitre), nous avons finalement opté pour une approche différente, consistant à modéliser les dérives gyroscopiques sous forme d'une décomposition en série de Fourier spatiale (il s'agit d'un modèle de connaissance), où seule l'harmonique de rang 2, prépondérante sur les autres, a été considérée. Le résidu de dérive, à savoir la composante autre que celle correspondant à l'harmonique de rang 2, a été décrit par un cumul de processus auto-corrélés à l'ordre 1, chaque processus ayant une période d'auto-corrélation différente. Le nombre de processus auto-corrélés, leurs écart-type et période d'auto-corrélation ont été déterminés de sorte que le résidu présente une variance d'Allan plate (c'est-à-dire approximativement constante) sur une durée maximale de mission donnée. Une telle modélisation du résidu constitue en quelque sorte une description "pire cas" car elle suggère que son amplitude peut aussi bien varier lentement que rapidement. Le filtre de Kalman utilisant le modèle complet d'erreurs de navigation ainsi élaboré a été testé suivant différents aspects sur deux trajectoires d'avion, selon certains scenarii de pertes de mesures GPS. Les résultats obtenus ont montré un comportement sain et robuste de notre solution. Enfin, en sachant grâce à des considérations d'ordre physique que les résidus de dérive sont bornés, nous avons exploité cette connaissance au travers de techniques de filtrage de Kalman sous contraintes. Les résultats obtenus ont montré une légère diminution des erreurs d'estimation par rapport au filtrage de Kalman classique.

Les deux aspects abordés dans ce mémoire de thèse et exposés dans les chapitres 2 et 4 portent sur une thématique commune qui est la perte de capteurs. Les travaux de ces deux parties se rejoignent dans le cas d'une navigation avec hybridations multiples. Du fait que l'approche développée dans le dernier chapitre consiste à compenser les méconnaissances à partir d'un modèle exploitable par un filtre de Kalman, elle s'adapte sans problème au cadre expérimental considéré dans le chapitre 2. En outre, si les dispositifs externes de mesure sont multiples (GPS, odomètres, radars, détecteurs de proximité inductifs, capacitifs, photoélectriques, etc.) et que la fusion des différentes données s'effectue selon un couplage de type serré, alors la représentation d'état résultante est de type non-linéaire. Les travaux du deuxième chapitre permettent ainsi de déterminer les filtres non linéaires envisageables pour un tel problème et d'évaluer l'impact sur la qualité d'estimation de chaque élément du dispositif externe de mesures.

Enfin, ce travail présente de nombreuses perspectives, parmi lesquelles :

- l'affinement des hypothèses de travail et des modèles associés, comme par exemple celle d'une terre ellipsoïdale et non sphérique, la présence de biais accélérométriques, etc.
- l'essai dans un avenir proche de la solution proposée sur d'autres trajectoires et d'autres scenarii de pertes d'hybridation, puis, à plus long terme, son expérimentation dans des conditions réelles,
- la mise au point d'une technique de "bornage de covariance", qui consisterait à contraindre les écarts-types associés aux résidus de dérive (modélisés par des sommes de processus auto-corrélés à l'ordre 1) de sorte qu'ils n'excèdent pas une certaine valeur, puisque l'on sait grâce à des considérations d'ordre physique que ces écarts-types sont bornés. Cela permettrait de réduire le relatif pessimisme (matrice de covariance du filtre de navigation présentant des coefficients diagonaux trop grands) de notre solution[52] ;

[52] Dans cette thèse, une approche basée sur la prise en compte de mesures fictives a été expérimentée mais abandonnée car elle détériorait considérablement la robustesse du filtre de navigation.

– l'investigation d'autres techniques de filtrage robuste qui n'ont pas été considérées ici faute de temps. Nous pouvons par exemple mentionner les approches multi-modèles, où chacun des modèles envisagés correspondrait à un résidu de dérive décrit par un seul processus auto-corrélé à l'ordre 1 présentant une période d'auto-corrélation constante lui étant propre.

A

Acronymes, abréviations et notations

A.1 Acronymes

2OEKF	:	2nd Order Extended Kalman Filter (filtre de Kalman étendu à l'ordre 2)
CDKF	:	Central Difference Kalman Filter (filtre de Kalman à différence centrale)
EKF	:	Extended Kalman Filter (filtre de Kalman étendu)
EnKF	:	Ensemble Kalman Filter (filtre de Kalman d'ensemble)
FDI	:	Fault Detection and Isolation (détection et isolation de défaut)
GPS	:	Global Positioning System
GRH	:	Gyroscope Résonnant Hémisphérique
IEKF	:	Iterated Extended Kalman Filter (filtre de Kalman étendu itéré)
INS	:	Inertial Navigation System (système de navigation inertielle)
IP	:	Inertie Pure
PF	:	Particle Filter (filtre particulaire)
PIKF	:	Proportional-Integral Kalman Filter (filtre de Kalman proportionnel-integral)
RIE	:	Recursive Input Estimation (estimation d'entrée récursive)
RMS	:	Root Mean Square (racine de la moyenne des carrés)
SPKF	:	Sigma-Point Kalman Filter (filtre de Kalman utilisant des sigma (σ) points)
UKF	:	Unscented Kalman Filter (filtre de Kalman sans saveur)
UMI	:	Unité de Mesures Inertielles
VA	:	Variance d'Allan
WGS84	:	World Geodetic System 84 (système géodésique international, daté de 1984)

A.2 Abréviations

ann.	:	annexe
chap.	:	chapitre
config.	:	configuration
gyro(s)	:	gyromètre(s) ou gyroscope(s)
p.	:	page
pp.	:	pages

A.3 Notations

Notations générales :

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}$: corps des entiers, des réels, des matrices de dimension $m \times n$ à coefficients réels
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^*$: corps des réels positifs ou nuls, corps des réels privé de 0 (idem pour $\mathbb{N}^*$)
x : scalaire
X : variable aléatoire dont la réalisation est x
$\boldsymbol{x}$: vecteur déterministe, ou réalisation d'un vecteur aléatoire
$\boldsymbol{X}$: vecteur aléatoire ou matrice
$\{\boldsymbol{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\boldsymbol{X}_0; \boldsymbol{X}_1; \boldsymbol{X}_2; \ldots\}$. Idem pour $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
$\boldsymbol{X}_{m\to n} = \{\boldsymbol{X}_k\}_{m\leq k\leq n}$. Idem pour $\{\boldsymbol{x}_k\}_{m\leq k\leq n}$
X_i : $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\boldsymbol{X}$. Idem pour x_i
$\boldsymbol{X}^T$: vecteur ou matrice transposé(e)
$\boldsymbol{X}^{-1}$: inverse de la matrice carrée $\boldsymbol{X}$
$\sqrt{\boldsymbol{X}}$: racine carré de la matrice carrée $\boldsymbol{X}$
$\det(\boldsymbol{X})$: déterminant de la matrice carrée $\boldsymbol{X}$
$\text{trace}(\boldsymbol{X})$: trace de la matrice carrée $\boldsymbol{X}$
$[\boldsymbol{X}]^i$: $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\boldsymbol{X}$
$[\boldsymbol{X}]_i$: $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\boldsymbol{X}$
$[\boldsymbol{X}]^i_j$: terme à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{0}_{m\times n}$: matrice nulle de dimension $m \times n$
$\boldsymbol{I}_n$: matrice identité de dimension n
$\boldsymbol{X} = \text{diag}(\ldots)$: $\boldsymbol{X}$ est une matrice diagonale remplie dans l'ordre avec les termes indiqués
$\boldsymbol{X} > \boldsymbol{0}_{m\times n}$ ($\boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{0}_{m\times n}$) : la matrice $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est définie positive (semi-définie positive)
$\lambda_{\max}(\boldsymbol{X})$, $\lambda_{\min}(\boldsymbol{X})$: plus grande et plus petite valeur propre de la matrice carrée $\boldsymbol{X}$
$\lfloor X \rfloor$: fonction qui à la variable réelle X associe sa partie entière
$\mathbb{P}(\mathcal{X})$: probabilité de l'événement $\mathcal{X}$,
$\mathbb{P}(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$: probabilité de l'événement $\mathcal{X}$ sachant que l'événement $\mathcal{Y}$ est réalisé
$\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$: espérance du vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$
$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})$: espérance du vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ sachant que la réalisation de $\boldsymbol{Y}$ est $\boldsymbol{y}$
$\text{var}(X)$: variance de la variable aléatoire X
$p(\boldsymbol{x})$: densité de probabilité de $\boldsymbol{x}$
$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$: densité de probabilité de $\boldsymbol{x}$ sachant que la réalisation de $\boldsymbol{Y}$ est $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{x}_0 \sim p(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{x}_0$ est généré selon la densité $p(\boldsymbol{x})$
$\mathcal{N}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{P})$ loi normale de moyenne $\boldsymbol{m}$ et de matrice de variance-covariance $\boldsymbol{P}$
$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}}$, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$
■ : fin d'une définition, d'une propriété, d'un exemple, etc.
j : nombre de module 1 et d'argument $\pi/2$ (lorsque le cadre considéré est celui des complexes)

q : puissance d'un bruit blanc
$[X]$: unité de la variable X
$\boldsymbol{X}_k$: variable $\boldsymbol{X}$ à l'instant k (la période d'échantillonnage étant implicite)
q^{-1} : opérateur de retard unitaire : $q^{-1}\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{X}_{k-1}$
δ : impulsion de Dirac centrée en 0 : $\delta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}_\bullet$ si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_\bullet$ et $\delta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_\bullet$ sinon
exp : fonction exponentielle
ln : fonction logarithme népérien (logarithme de base 2)
log : fonction logarithme décimal (logarithme de base 10)
arctg : fonction arc-tangente classique (2 quadrants), définie de $\mathbb{R}$ dans $[-\pi/2\ ;\ +\pi/2]$
arctg4 : fonction arc-tangente 4 quadrants, définie de $\mathbb{R}$ dans $[0\ ;\ 2\pi]$
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$: intégrale multiple de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ sur l'espace où $\boldsymbol{x}$ prend ses valeurs, à savoir $\mathbb{R}^n$
$\dot{\boldsymbol{X}} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}$

$$[X_{ij}]_{\substack{i\,=\,1\,\downarrow\,n\\ j\,=\,1\,\rightarrow\,m}} = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\left[\left.\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\boldsymbol{X}}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}\right] = \left[\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial X_j}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}\right]_{\substack{i\,=\,1\,\downarrow\,m\\ j\,=\,1\,\rightarrow\,n}} \text{ où } \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{X}) \\ \vdots \\ \varphi_m(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \text{ et } \varphi_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, i = 1, \dots m$$

$$\left[\left.\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\boldsymbol{X}\partial\boldsymbol{X}^T}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}\right] = \left[\left.\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial X_j\partial X_k}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}\right]_{\substack{j\,=\,1\,\rightarrow\,n\\ k\,=\,1\,\downarrow\,n}}$$

Partie estimation d'état :

k : temps discret
$\boldsymbol{X}_k$: vecteur d'état à l'instant k
$\boldsymbol{Y}_k$: vecteur de mesure ou d'observation à l'instant k
$\boldsymbol{W}_k$: bruit d'état ou de dynamique à l'instant k
$\boldsymbol{V}_k$: bruit de mesure à l'instant k
$\boldsymbol{u}_k$: vecteur déterministe de commande à l'instant k
$\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|n}$: estimée de $\boldsymbol{X}_k$ obtenue à partir des mesures $\boldsymbol{Y}_{1\rightarrow n}$
$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|n}$: réalisation de $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|n}$, à savoir la valeur numérique donnée par l'estimateur à l'instant n
$\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k|n} = \boldsymbol{X}_k - \widehat{\boldsymbol{X}}_{k|n}$: erreur d'estimation de $\boldsymbol{X}_k$ par $\widehat{\boldsymbol{X}}_{k|n}$
$\boldsymbol{\Sigma}^{xz}_{k|n} = \mathbb{E}\left(\left(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k|\boldsymbol{Y}_{1\rightarrow n} = \boldsymbol{y}_{1\rightarrow n})\right)\left(\boldsymbol{Z}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_k|\boldsymbol{Y}_{1\rightarrow n} = \boldsymbol{y}_{1\rightarrow n})\right)^T \middle| \boldsymbol{Y}_{1\rightarrow n} = \boldsymbol{y}_{1\rightarrow n}\right)$
$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{M}_{k|k}$ pour n'importe quelle grandeur $\boldsymbol{M}$ calculée par un estimateur
$\boldsymbol{x}_k^{(i)}$: point déterministe dans l'espace d'état, pouvant être une particule.
$\mu_k^{(i)}$: poids associé au point $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$
N : nombre de particules
σ : sigma points des SPKF (uniquement dans les chap. 1 et 2)
σ : écart-type des processus markoviens à l'ordre un (uniquement dans le chap. 4)

Partie navigation inertielle :

$[a]$: repère a (quelconque), également appelé *trièdre a* ou *base a*

O_a : Origine de $[a]$
$\overrightarrow{x_a}$, $\overrightarrow{y_a}$, $\overrightarrow{z_a}$: vecteurs de $[a]$ de norme 1, formant dans cet ordre une base orthonormée directe $[a] = (O_a, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$
$\overrightarrow{X}(t)$: vecteur X (quelconque) dans l'espace de dimension 3 ($\mathbb{R}^3$) à l'instant t
$\left(N, \overrightarrow{X}\right)$: droite passant par le point N (quelconque) et dont la direction est celle de $\overrightarrow{X}$
$\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]}$: variations du vecteur $\overrightarrow{X}$ par rapport au repère $[a]$
$\boldsymbol{X}_a = \left[\overrightarrow{X}\right]_a = [X_{a,x} \quad X_{a,y} \quad X_{a,z}]^T$: coordonnées de $\overrightarrow{X}$ dans $[a]$
$\boldsymbol{T}_{ab}$: matrice de passage de $[b]$ vers $[a]$: $\boldsymbol{T}_{ab} = \left[[\overrightarrow{x_b}]_{[a]} \quad [\overrightarrow{y_b}]_{[a]} \quad [\overrightarrow{z_b}]_{[a]}\right]$
$\overrightarrow{\Theta}^{a/b}$: angle vectoriel définissant l'orientation de $[a]$ par rapport à $[b]$
$\overrightarrow{\Omega}^{a/b}$: vecteur de vitesse de rotation de $[a]$ par rapport à $[b]$
$\overrightarrow{\Omega}$: vecteur de rotation terrestre : $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}^{t/i} = \Omega\overrightarrow{z_t}$ avec : $\Omega = 7,292\ 115.10^{-5}$ rad/s
$\overrightarrow{\omega}$: vitesse de rotation du repère de mesure $[m]$ par rapport à l'espace inertiel $[i]$: $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\Omega}^{m/i}$
$\overrightarrow{\rho}$: vitesse de rotation de la plate-forme $[w]$ par rapport à la terre $[t]$: $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\Omega}^{w/t}$
$\overrightarrow{r}$: vecteur position, allant du centre de la terre vers le cœur de la centrale : $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{O_t O_m}$
L, G, Z : latitude, longitude (géographique) et altitude de O_m par rapport au géoïde WGS84
$\overrightarrow{\gamma}^a(N)$: vecteur d'accélération d'un point N quelconque par rapport à $[a]$
$\overrightarrow{V}^a(N)$: vecteur de vitesse de N par rapport à $[a]$. Par défaut, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^t(O_m)$
$\overrightarrow{g}$: vecteur gravité
$\overrightarrow{g_p}$: vecteur pesanteur
$\overrightarrow{f}$: vecteur forces spécifiques
R : rayon terrestre, dans l'hypothèse d'une terre ronde : $R = 6378137$ m
ψ, θ, φ : cap, tangage, roulis (angles d'Euler)
$\delta\overrightarrow{r}$: vecteur d'erreur entre la position vraie et celle calculée par le système inertiel
δL, δG, δZ : erreur de position exprimée sous forme d'erreurs de latitude, longitude et altitude
$\delta\overrightarrow{V}$: vecteur d'erreur de vitesse par rapport à la terre
$\overrightarrow{\Psi}$: micro-rotateur Ψ
$\overrightarrow{\Phi}$: micro-rotateur Φ
$\overrightarrow{\varepsilon_a}$, $\overrightarrow{\varepsilon_g}$: vecteurs d'erreur accélérométriques et gyroscopique
$\boldsymbol{\mathcal{B}}_m$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_m$: biais accélérométrique et dérive gyroscopique exprimées dans le repère $[m]$
$\{\boldsymbol{\upsilon}_m\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{\boldsymbol{\nu}_m\}_{t\in\mathbb{R}}$: bruits blancs accélérométrique et gyroscopique dans $[m]$
$\boldsymbol{\mathcal{K}}_a$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}_g$: facteurs d'échelles respectifs des accéléromètres et gyroscopes
f_n, T_n : fréquence de fonctionnement et période associée de l'intégration de navigation
f_h, T_h : fréquence de fonctionnement et période associée de l'hybridation
n, k : temps discret associés aux fréquences respectives f_n et f_h
$\Delta\boldsymbol{V}_n^{\mathrm{acc}}$: incréments accélérométriques fournis par l'UMI à l'instant n
$\Delta\boldsymbol{\Theta}_n^{\mathrm{gyro}}$: incréments gyroscopiques fournis par l'UMI à l'instant n
α_B : coefficient de Bryan
α : angle de mécanisation
m : commande de la plate-forme en horizontal
$\boldsymbol{\mathcal{C}}(L, Z)$ matrice de commande de la plate-forme horizontale
$\wedge$: produit vectoriel
$\boldsymbol{\mathcal{A}}$: matrice antisymétrique associée au produit vectoriel à gauche
$\boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p, Z)$: matrice de couplage de la chaîne de Schüler

B

Calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire passée à travers une fonction non linéaire

Soient $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ deux vecteurs aléatoires mutuellement corrélés, liés entre eux par la relation $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})$ où $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est une application non linéaire. Connaissant la moyenne $\overline{\boldsymbol{x}}$ et la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$ de $\boldsymbol{X}$, le but recherché est de calculer la moyenne $\overline{\boldsymbol{y}}$ et la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ de $\boldsymbol{Y}$, ainsi que l'inter-covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$. Cette annexe présente différentes méthodes de résolution de ce problème :

- développements de Taylor,
- interpolation de Stirling,
- transformation sans saveur,
- simulation du type Monte Carlo.

Quelques notions, telles que la racine carrée d'une matrice, le découplage statistique et le développement de Taylor multi-variables sont préalablement définies.

B.1 Définitions préliminaires

Racine carrée d'une matrice, décomposition de Cholesky [Born 90, ann. F] : On appelle racine carrée d'une matrice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ toute matrice carrée $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T$. $\boldsymbol{S}$ et alors notée : $\boldsymbol{S} = \sqrt{\boldsymbol{M}}$. Lorsque $\boldsymbol{M}$ est symétrique, il existe un algorithme simple permettant de calculer une racine carrée $\boldsymbol{S}$ de $\boldsymbol{M}$, qui est la décomposition de Cholesky. $\boldsymbol{S}$ est alors triangulaire inférieure. La décomposition de Cholesky s'avère intéressante lorsqu'il est souhaité calculer la racine carrée d'une matrice d'auto-covariance (mais pas d'une inter-covariance, puisqu'en général, une telle matrice n'est pas symétrique), ce qui est notamment exigé par l'interpolation de Stirling et la transformation sans saveur.

Découplage stochastique [Norg 00a, p. 7] : Le découplage statistique d'un vecteur aléatoire

$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$ est la transformation linéaire suivante :

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{S}_{xx})^{-1}\,\boldsymbol{X}, \tag{B.1}$$

où $\boldsymbol{S}_{xx} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{xx}}$ est obtenue via une décomposition de Cholesky. Une telle transformation a pour conséquence de décorréler statistiquement toutes les composantes du vecteur $\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{zz} = \mathbb{E}\left((\boldsymbol{Z} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Z}))\,(\boldsymbol{Z} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Z}))^T\right) = \boldsymbol{I}_n, \tag{B.2}$$

Développement de Taylor multi-variable, jacobien et hessien [Norg 00a] : Soit la fonction non linéaire $\boldsymbol{\varphi}$ définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{X} & \mapsto & \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}). \end{array} \tag{B.3}$$

En notant Y_i (respectivement X_i) la $i^{\text{ème}}$ composante de la variable aléatoire $\boldsymbol{Y}$ (respectivement X), on réécrit (B.3) sous forme d'un système de m fonctions scalaires $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_1 & = & \varphi_1(\boldsymbol{X}) \\ & \vdots & \\ Y_m & = & \varphi_m(\boldsymbol{X}) \end{array} \right. . \tag{B.4}$$

On pose également :

$$\delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{ccc} \delta X_1 & \ldots & \delta X_n \end{array}\right]^T, \tag{B.5}$$

où $\boldsymbol{x}$ est une réalisation quelconque de $\boldsymbol{X}$. Un développement de Taylor de φ_i $(1 \leq i \leq m)$ en $\boldsymbol{x}$ donne le résultat suivant (l'expression est ici volontairement tronquée à l'ordre 3, mais sa forme permet de trivialement étendre ce résultat à des ordres supérieurs) :

$$\begin{array}{rcllll} Y_i & = & \varphi_i(\boldsymbol{x}) & + & \dfrac{1}{1!}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\delta X_j)\left[\left.\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial X_j}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}\right] \\ & & & + & \dfrac{1}{2!}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\delta X_j)(\delta X_k)\left[\left.\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial X_j\partial X_k}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}\right] \\ & & & + & \dfrac{1}{3!}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\delta X_j)(\delta X_k)(\delta X_l)\left[\left.\dfrac{\partial^3\varphi_i}{\partial X_j\partial X_k\partial X_l}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}\right] + \text{reste}(3). \end{array} \tag{B.6}$$

Dans le cas d'un développement tronqué à l'ordre 2, d'autres formulations de (B.6), mais vectorielles cette fois ci, sont possibles :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{Y} & = & \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\;\delta\boldsymbol{X} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\Delta}_i\;\delta\boldsymbol{X}^T\;\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x})\;\delta\boldsymbol{X} \\ & = & \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\;\delta\boldsymbol{X} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\Delta}_i\;\text{trace}\left(\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x})\;\delta\boldsymbol{X}\;\delta\boldsymbol{X}^T\right), \end{array} \tag{B.7}$$

où $\boldsymbol{\Delta}_i \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles excepté la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1, et le jacobien $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ et les hessiens $\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x})$ $(1 \leq i \leq m)$ de $\boldsymbol{\varphi}$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) &= \left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{X}} \right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}} \right] = \left[\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} \right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}} \right]_{\substack{i\,=\,1 \downarrow m \\ j\,=\,1 \rightarrow n}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial X_n} \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x}) &= \left[\left. \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \boldsymbol{X} \partial \boldsymbol{X}^T} \right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}} \right] = \left[\left. \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial X_j \partial X_k} \right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}} \right]_{\substack{j\,=\,1 \rightarrow n \\ k\,=\,1 \downarrow n}}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

B.2 Utilisation de développements de Taylor

Considérons un développement de Taylor à l'ordre 2 de $\boldsymbol{\varphi}$ autour de la moyenne $\overline{\boldsymbol{x}}$ de $\boldsymbol{X}$, ce qui autorise l'emploi de la relation (B.7). Calculons tout d'abord la moyenne $\overline{\boldsymbol{y}}$ de $\boldsymbol{Y}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{y}} &= \mathbb{E}\left(\boldsymbol{\varphi}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) + \boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\ \delta\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Delta}_i \ \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{H}_i\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\ \delta\boldsymbol{X}\ \delta\boldsymbol{X}^T \right) \right) \\
&= \boldsymbol{\varphi}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) + \boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) \mathbb{E}\left(\delta\boldsymbol{X}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Delta}_i \ \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{H}_i\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\ \mathbb{E}\left(\delta\boldsymbol{X}\ \delta\boldsymbol{X}^T\right) \right).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Or, comme par définition : $\delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{x}}$, alors $\mathbb{E}\left(\delta\boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{0}_{n\times 1}$ et $\mathbb{E}\left(\delta\boldsymbol{X}\ \delta\boldsymbol{X}^T\right) = \boldsymbol{\Sigma}_{xx}$. (B.9) se simplifie alors comme suit :

$$\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{\varphi}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Delta}_i \ \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{H}_i\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \right). \tag{B.10}$$

Afin d'obtenir une expression de la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ de $\boldsymbol{Y}$ et de l'inter-covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$ entre $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, calculons $\delta\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y} - \overline{\boldsymbol{y}}$:

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{\varphi}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) + \boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\ \delta\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Delta}_i \ \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{H}_i\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\ \delta\boldsymbol{X}\ \delta\boldsymbol{X}^T \right) \\
&\qquad - \left(\boldsymbol{\varphi}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Delta}_i \ \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{H}_i\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \right) \right) \\
&= \boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\ \delta\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Delta}_i \left\{ \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{H}_i\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) \delta\boldsymbol{X}\ \delta\boldsymbol{X}^T \right) - \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{H}_i\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \right) \right\} \\
&= \boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\ \delta\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Delta}_i \ \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{H}_i\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) \left\{ \delta\boldsymbol{X}\ \delta\boldsymbol{X}^T - \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \right\} \right).
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Comme par définition, $\boldsymbol{\Sigma}_{xx} = \mathbb{E}\left(\delta\boldsymbol{X}\ \delta\boldsymbol{X}^T\right)$, alors on suppose que $\delta\boldsymbol{X}\ \delta\boldsymbol{X}^T - \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \approx \boldsymbol{0}_{n\times n}$, de sorte que : $\delta\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\ \delta\boldsymbol{X}$. Il vient alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{yy} &= \boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right) \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \left(\boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\right)^T, \\
\boldsymbol{\Sigma}_{xy} &= \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \left(\boldsymbol{J}\left(\overline{\boldsymbol{x}}\right)\right)^T.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

En appliquant les résultats (B.10) et (B.12) aux équations d'état et de mesure d'un modèle d'état non linéaire, on aboutit facilement relations du filtre de Kalman étendu à l'ordre 2

- A l'instant $k = 0$:, initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$.
  1. Initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$.
  2. Pour $i = 1, \ldots, n_x$, former les vecteurs $\boldsymbol{\Delta}_i$ comme suit :

$$\boldsymbol{\Delta}_i = [\mathbf{0}_{1\times(i-1)} \;\; 1 \;\; \mathbf{0}_{1\times(n_x-i)}]^T.$$

- Aux instants $k \geq 1$:
  1. Calculer les jacobiens pour l'étape de prédiction :

$$\boldsymbol{F}_{k-1} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{X}_{k-1}} \bigg|_{\substack{\boldsymbol{X}_{k-1} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{W}_{k-1} = \mathbf{0}_{n_w \times 1}}} \right], \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{W}_{k-1}} \bigg|_{\substack{\boldsymbol{X}_{k-1} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{W}_{k-1} = \mathbf{0}_{n_w \times 1}}} \right].$$

  2. Pour $i = 1, \ldots, n_x$, calculer les hessiens pour l'étape de prédiction :

$$\boldsymbol{A}_{i,k-1} = \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}_{i,k-1}}{\partial \boldsymbol{X}_{k-1} \partial \boldsymbol{X}_{k-1}^T} \bigg|_{\substack{\boldsymbol{X}_{k-1} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{W}_{k-1} = \mathbf{0}_{n_w \times 1}}} \right].$$

  3. Réaliser l'étape de prédiction :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \mathbf{0}_{n_w \times 1}\right) + \sum_{i=1}^{n_x} \boldsymbol{\Delta}_i \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{A}_{i,k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} &= \boldsymbol{F}_{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} \boldsymbol{F}_{k-1}^T + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{ww} \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^T. \end{aligned}$$

  4. Calculer le jacobien pour l'étape de correction :

$$\boldsymbol{H}_k = \left[\frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{\partial \boldsymbol{X}_k} \bigg|_{\boldsymbol{X}_k = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}} \right].$$

  5. Pour $i = 1, \ldots, n_x$, calculer les hessiens pour l'étape de correction :

$$\boldsymbol{C}_{i,k} = \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{h}_{i,k}}{\partial \boldsymbol{X}_k \partial \boldsymbol{X}_k^T} \bigg|_{\boldsymbol{X}_k = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}} \right].$$

  6. Réaliser l'étape de correction :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{h}_k\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right) + \sum_{i=1}^{n_x} \boldsymbol{\Delta}_i \mathrm{trace}\left(\boldsymbol{C}_{i,k} \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}\right), \\ \boldsymbol{K}_k &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} \boldsymbol{H}_k^T \left(\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} \boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}\right)^{-1}, \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}. \end{aligned}$$

Algorithme 20: Le filtre de Kalman étendu à l'ordre 2 (2OEKF)

(2OEKF), synthétisé par l'algorithme 20. A noter que si l'on néglige les termes liés aux développements à l'ordre 2, ce qui revient à rendre nuls les $\boldsymbol{A}_{i,k-1}$ et $\boldsymbol{C}_{i,k}$, alors on retrouve l'algorithme de l'EKF.

Le filtre de Kalman étendu à l'ordre 2 a été initialement été développé par Andrew Jazwinski [Jazw 66], [Jazw 70] avant que Rolf Henriksen lui apporte une légère correction dans [Henr 82],

pour obtenir l'algorithme tel que présenté. Il est important de souligner que si d'un point de vue conceptuel, la prise en compte de développements d'ordre supérieur à 1 semble bénéfique, ce n'est en réalité pas forcément le cas, notamment lorsque la prise en compte des hessiens introduit des instabilités [Kush 67].

B.3 Utilisation de l'interpolation de Stirling

L'interpolation de Stirling à l'ordre 2 est équivalente à un développement de Taylor au même ordre. Pour une fonction $\varphi : X \mapsto Y$ mono-variable à valeurs dans $\mathbb{R}$, cela donne :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right|_{X=\overline{x}} &= \frac{\varphi(\overline{x}+h)-\varphi(\overline{x}-h)}{2h}, \\ \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right|_{X=\overline{x}} &= \frac{\varphi(\overline{x}+h)+\varphi(\overline{x}-h)-\varphi(\overline{x})}{h^2}, \end{aligned} \tag{B.13}$$

où $h > 1$ est une largeur de fenêtre, à déterminer. L'idée suggérée par Nørgaard *et al.* [Norg 00b], [Norg 00a] est de remplacer le développement de Taylor à l'ordre 2 évoqué dans la section précédente par les formules d'interpolation de Stirling, l'avantage d'une telle approche étant d'éviter le calcul des divers jacobiens et hessiens. Toutefois, l'interpolation de Stirling n'est exploitable que pour des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'extension au cas d'une fonction $\boldsymbol{\varphi}$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{X} &\mapsto \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{X}) \\ \vdots \\ \varphi_m(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.14}$$

s'effectue en procédant à un découplage stochastique de $\boldsymbol{X}$, de sorte que chaque composante δZ_i, $1 \leq i \leq n$ de :

$$\delta \boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{S}_{xx})^{-1} (\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{x}}) \text{ où : } \boldsymbol{S}_{xx} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{xx}} \tag{B.15}$$

soit centrée, d'écart-type unitaire et indépendante de δZ_j pour $j \neq i$. Ces considérations permettent d'aboutir après un certain nombre de calculs (voir par exemple [Norg 00b] ou [Van 04a, chap. 3] pour les détails) aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{y}} &= \frac{h^2-n}{h^2}\,\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}) + \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}+h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_i)+\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}-h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_i)\right\}, \\ \boldsymbol{P}_{yy} &= \frac{1}{4h^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}+h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_i)-\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}-h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_i)\right\}\{\ldots\}^T \\ &\quad + \frac{h^2-1}{4h^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}+h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_i)+\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}-h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_i)-2\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}})\right\}\{\ldots\}^T, \\ \boldsymbol{P}_{xy} &= \frac{1}{2h}\boldsymbol{S}_{xx}\begin{bmatrix} \{\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}+h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_1)-\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}+h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_1)\}^T \\ \vdots \\ \{\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}+h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_n)-\boldsymbol{\varphi}(\overline{\boldsymbol{x}}+h\,[\boldsymbol{S}_{xx}]_n)\}^T \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{B.16}$$

où $\{\ldots\}^T$ est un raccourci représentant la transposée de l'expression entre accolades immédiatement précédente : $\{\boldsymbol{A}\}\{\ldots\}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Le résultat (B.16) conduit directement à l'algorithme du CDKF (algorithme 21).

- A l'instant $k = 0$:
  1. Initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ et $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$ et le paramètre h.
  2. Effectuer les calculs préliminaires suivants :

$$\begin{array}{rcl} n_a &=& n_x + n_w, \\ \sigma_x &=& 2n_x + 1, \\ \sigma_a &=& 2n_a + 1, \\ \mu_{c1} &=& 1/(4h^2), \\ \mu_{c2} &=& (h^2-1)/(4h^2)\ , \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mu_{ma}^{(i)} &=& \left\{ \begin{array}{lll} (h^2-n_a)/(h^2) & \texttt{si} & i=1 \\ 1/(2h^2) & \texttt{si} & 2 \le i \le \sigma_a \end{array} \right. , \\ \mu_{mx}^{(i)} &=& \left\{ \begin{array}{lll} (h^2-n_x)/(h^2) & \texttt{si} & i=1 \\ 1/(2h^2) & \texttt{si} & 2 \le i \le \sigma_x \end{array} \right. . \end{array}$$

- Aux instants $k \geq 1$:
  1. Réaliser l'étape de prédiction :
     (a) Former le vecteur d'état augmenté :

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k-1} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{0}_{n_w \times 1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{aa} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} & \boldsymbol{0}_{n_x \times n_w} \\ \boldsymbol{0}_{n_w \times n_x} & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{ww} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_{k-1}^{aa} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{aa}}.$$

     (b) Placer les σ_a points dans l'espace d'état :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1}^{(i)} = \left\{ \begin{array}{ll} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k-1} & \texttt{si } i=1 \\ \widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k-1} + h\left[\boldsymbol{S}_{k-1}^{aa}\right]_{i-1} & \texttt{si } 2 \le i \le n_a+1 \\ \widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k-1} - h\left[\boldsymbol{S}_{k-1}^{aa}\right]_{i-n_a-1} & \texttt{si } n_a+2 \le i \le \sigma_a \end{array} \right. .$$

     (c) Passer les σ_a points par la fonction d'état $\boldsymbol{f}_k$. Pour $i = 1, \ldots, \sigma_a$:

$$\left[\left(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}\right)^T \quad \left(\boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\right)^T \right]^T = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1}^{(i)}, \qquad \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} = \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\right).$$

     (d) Calculer l'état et la covariance *a priori* :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{\sigma_a} \mu_{ma}^{(i)} \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} &=& \displaystyle\sum_{i=2}^{n_a+1} \mu_{c1}\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} - \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i+n_a)}\right)\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} - \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i+n_a)}\right)^T + \\ && \mu_{c2}\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} + \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i+n_a)} - 2\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} + \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i+n_a)} - 2\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(1)}\right)^T. \end{array}$$

  2. Réaliser l'étape de correction :
     (a) Placer les σ_a points dans l'espace d'état :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k|k-1}^{(i)} = \left\{ \begin{array}{ll} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} & \texttt{si } i=1 \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + h\left[\boldsymbol{S}_{k|k-1}^{xx}\right]_{i-1} & \texttt{si } 2 \le i \le n_x+1 \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} - h\left[\boldsymbol{S}_{k|k-1}^{xx}\right]_{i-n_x-1} & \texttt{si } n_x+2 \le i \le \sigma_x \end{array} \right. \quad \text{avec : } \boldsymbol{S}_{k|k-1}^{xx} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx}}.$$

     (b) Passer les σ_x points par la fonction de mesure $\boldsymbol{h}_k$. Pour $i = 1, \ldots, \sigma_x$:

$$\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} = \boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k|k-1}^{(i)}\right).$$

     (c) Calculer la mesure prédite et la covariance de l'innovation :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{\sigma_x} \mu_{mx}^{(i)} \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} &=& \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv} + \displaystyle\sum_{i=2}^{n_x+1} \mu_{c1}\left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} - \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i+n_x)}\right)\left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} - \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i+n_x)}\right)^T + \\ && \mu_{c2}\left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} + \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i+n_x)} - 2\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} + \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i+n_x)} - 2\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(1)}\right)^T. \end{array}$$

     (d) Calculer l'inter-covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy}$:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{k|k-1} &=& \left[\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(2)} - \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(n_x+2)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(n_x+1)} - \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(\sigma_x)}\right], \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy} &=& \sqrt{\mu_{c1}}\boldsymbol{S}_{k|k-1}^{xx}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{k|k-1}^T. \end{array}$$

     (e) Calculer l'état et la covariance *a posteriori* :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}_k &=& \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}\right)^{-1}, \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_k &=& \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &=& \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}\boldsymbol{K}_k^T. \end{array}$$

Algorithme 21: Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)

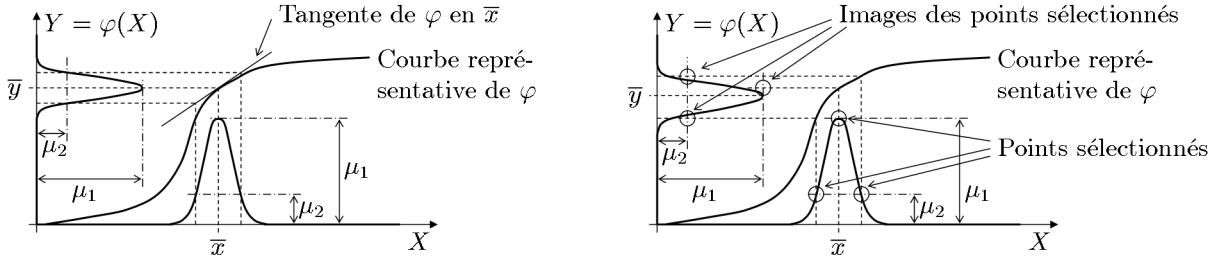
En ce qui concerne l'ajustement de la largeur de fenêtre h, ce paramètre doit être choisi de sorte à minimiser l'influence des moments d'ordre supérieur à 2 des δZ_i sur le calcul de $\overline{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$. Typiquement, h doit être réglé de manière à neutraliser l'impact du moment d'ordre 3 de δZ_i. Toutefois, dans le cas où δZ_i est gaussien, ses moments d'ordre pair sont nuls. On va alors chercher à annuler l'effet du moment d'ordre 4, lequel vaut par définition 3. Ainsi, dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est gaussien, le réglage optimal de h est [Norg 00a] : $h^2 = 3$, soit : $h = \sqrt{3}$.

B.4 Utilisation de la transformation sans saveur (unscented)

L'emploi de développement de Taylor ou de l'interpolation de Stirling consiste à effectuer une approximation d'une fonction non linéaire $\boldsymbol{\varphi}$ définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{X} & \mapsto & \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}). \end{array} \tag{B.17}$$

Le principe de la transformation sans saveur (unscented en anglais), introduite par Julier et Uhlmann, est tout autre. Il se base sur le constat suivant [Juli 94] [Juli 97] [Juli 00] : *Il est plus simple d'approximer une densité de probabilité de type gaussienne qu'une fonction non-linéaire quelconque.* Concrètement, cela consiste à sélectionner judicieusement quelques échantillons de la densité de probabilité de $\boldsymbol{X}$ à approximer, de sorte que l'ensemble de ces points présente des moments d'ordre 1, 2, voire supérieurs, identiques à ceux de la densité continue originale. Autrement dit, les informations principales transportées par la densité de probabilité de $\boldsymbol{X}$ sont encodées par l'ensemble des points sélectionnés. Chacun de ces points est alors passé par la fonction $\boldsymbol{\varphi}$, les points résultants servant à calculer $\overline{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$. Ce concept est illustré sur la figure B.1 (extraite de [Orde 05]) dans le cas simple d'une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.



Principe de la linéarisation à l'ordre 1 (EKF) — Principe de la transformation sans saveur (UKF)

FIG. B.1 – Principe de la transformation sans saveur pour une fonction mono-variable, comparée à la linéarisation à l'ordre 1

Réalisons un découplage stochastique du vecteur $\boldsymbol{X}$ centré :

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{S}_{xx})^{-1} (\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{x}}) \quad \text{où : } \boldsymbol{S}_{xx} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{xx}}. \tag{B.18}$$

Chacune des composantes Z_i $(1 \leq i \leq n)$ de $\boldsymbol{Z}$ présente alors une moyenne nulle et une variance (ou écart-type) unitaire. On va sélectionner trois points de $\mathbb{R}$ et leur associer un poids, de sorte que la moyenne m et la variance V de cet ensemble de trois points valent respectivement 0 et 1. La répartition de ces points est illustrée sur la figure B.2. On peut alors aisément en déduire que :

$$\begin{array}{rcl} m & = & \mu_1 0 + \mu_2 h - \mu_2 h \ = \ 0, \\ V & = & \mu_1 (0-m)^2 + \mu_2 (h-m)^2 + \mu_2 (-h-m)^2 \ = \ 2\mu_2 h^2. \end{array} \tag{B.19}$$

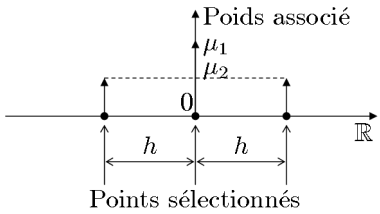


FIG. B.2 – Répartition des points pour la transformation sans saveur

La condition $V = 1$ conduit donc à la définition suivante pour h :

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}}. \tag{B.20}$$

En outre, on introduit le paramètre κ de sorte que $\mu_2 = 2\kappa\mu_1$. Comme il y a un point de poids μ_1 et $2n$ points de poids μ_2 (2 points pour chacune des n composantes de $\boldsymbol{Z}$) et que la somme des poids vaut 1, alors :

$$\mu_1 = \frac{\kappa}{n+\kappa}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{2(n+\kappa)}. \tag{B.21}$$

La relation (B.20) devient ainsi :

$$h = \sqrt{n+\kappa}. \tag{B.22}$$

Pour obtenir le placement des points dans $\mathbb{R}^n$, il suffit alors d'effectuer la transformation inverse du découplage stochastique (B.18). Les points ainsi obtenus, au nombre de $\sigma = 2n+1$, sont ensuite passés à travers la fonction non-linéaire $\boldsymbol{\varphi}$. Les σ points résultants, dont les poids sont inchangés, permettent ainsi de déterminer la moyenne et la covariance de $\boldsymbol{Y}$, ainsi que la covariance croisée entre $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$. Cela est résumé par l'algorithme 22.

Concernant le paramètre κ, sa valeur est généralement choisie de manière à ce que les σ points présentent non seulement des moments d'ordre 1 et 2 égaux à ceux de $\boldsymbol{X}$, mais également des moments d'ordre 3 et 4 identiques. Compte tenu du placement symétrique des σ points autour de $\overline{\boldsymbol{x}}$, il est évident que ces derniers présentent des moments d'ordre impair nuls, et donc un moment d'ordre 3 nul. Autrement dit, la transformation sans saveur ne permet d'encoder que les informations de densités de probabilité symétriques, gaussiennes par exemple. Dans ce dernier cas de figure, le moment d'ordre 4 des Z_i vaut 3 et par conséquent, en se référant à la figure B.2 et aux égalités (B.20) et (B.22), il vient le réglage suivant :

$$2\mu_2 h^4 = h^2 = n + \kappa = 3. \tag{B.23}$$

L'inconvénient de ce paramétrage est que pour des vecteurs de dimension $n > 3$, alors $\kappa < 0$ et par conséquent, $\mu^{(1)} < 0$, ce qui peut conduire à des covariances $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ non définies positives. Pour éviter ce problème, on pourrait se cantonner à poser $\kappa = 0$, bien que ce réglage ne soit pas optimal. Malheureusement, un autre problème se pose puisque pour de grandes valeurs de n, les σ points se trouvent relativement éloignés les uns des autres, ce qui engendre des phénomènes de non localité. Pour pallier cet inconvénient, Julier et Uhlmann ont développés la transformation sans saveur mise à l'échelle (scaled unscented transformation, [Juli 02a]). Cela consiste à introduire un second paramètre $0 < \alpha \leq 1$ tel que (B.22) se trouve modifié comme suit :

$$h = \alpha\sqrt{n+\kappa}. \tag{B.24}$$

1. `Placer les` σ `points` $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}$ `dans l'espace d'état :`

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)} = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{x}} & \texttt{si } i = 1 \\ \overline{\boldsymbol{x}} + h\left[\boldsymbol{S}_{xx}\right]_{i-1} & \texttt{si } 2 \leq i \leq n+1 \\ \overline{\boldsymbol{x}} - h\left[\boldsymbol{S}_{xx}\right]_{i-1} & \texttt{si } n+2 \leq i \leq \sigma \end{cases} \quad \text{où : } \begin{cases} h = \sqrt{(n+\kappa)} \\ \boldsymbol{S}_{xx} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{xx}} \end{cases}.$$

2. `Calculer les poids` $\mu^{(i)}$ `associés aux` σ `points` $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}$ `:`

$$\mu^{(i)} = \begin{cases} \kappa/(\kappa+n) & \texttt{si} \quad i = 1 \\ 0,5/(\kappa+n) & \texttt{si} \quad 2 \leq i \leq \sigma \end{cases}.$$

3. `Passer les` σ `points par la fonction non-linéaire` $\boldsymbol{\varphi}$`. Pour` $i = 1, \ldots, \sigma$ `:`

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}\right).$$

4. `Calculer la moyenne et la covariance de` $\boldsymbol{Y}$ `et l'inter-covariance entre` $\boldsymbol{X}$ `et` $\boldsymbol{Y}$ `:`

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{y}} &= \sum_{i=1}^{\sigma} \mu^{(i)} \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)}, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{yy} &= \sum_{i=1}^{\sigma} \mu^{(i)} \left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)\left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{xy} &= \sum_{i=1}^{\sigma} \mu^{(i)} \left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)^T. \end{aligned}$$

Algorithme 22: La transformation sans saveur (unscented transform) originale

Certains auteurs introduisent alors le paramètre λ dont le but est d'être l'équivalent de κ pour la transformation mise à l'échelle :

$$h = \sqrt{n + \lambda}. \tag{B.25}$$

Les définitions (B.24) et (B.25) conduisent alors aisément à l'expression suivante pour λ :

$$\lambda = h^2 - n = \alpha^2(n + \kappa) - n. \tag{B.26}$$

Les poids μ_1 et μ_2 évoqués précédemment se trouvent quant-à-eux modifiés comme suit :

$$\mu_1 = \frac{\lambda}{n + \lambda}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{2(n + \lambda)}. \tag{B.27}$$

En outre, Julier et Uhlmann ont modifié l'expression de μ_1 pour le calcul des covariances, dans le but de minimiser les moments d'ordre 3 et 4 de $\boldsymbol{Y}$:

$$\mu_1^{\text{cov}} = \mu_1 + 1 - \alpha^2 + \beta, \tag{B.28}$$

où la valeur optimale du paramètre β est $\beta = 2$ dans le cas où $\boldsymbol{Y}$ est gaussien. La transformation sans saveur mise à l'échelle est synthétisée par l'algorithme 23. Elle permet d'aboutir directement à l'algorithme 24 de l'UKF.

B.5 Utilisation de simulation de Monte Carlo

Un moyen simple pour évaluer les grandeurs caractéristiques d'une variable aléatoire passée au travers d'une fonction non linéaire est d'effectuer de la simulation de Monte Carlo. Typiquement,

1. `Placer les` σ `points` $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}$ `dans l'espace d'état, de manière identique à la transformation sans saveur originale (algorithme 22), avec :`
$$h = \sqrt{n+\lambda} \quad \texttt{et :} \quad \lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n.$$

2. `Calculer les poids` $\mu_m^{(i)}$ `et` $\mu_c^{(i)}$ `associés aux` σ `points` $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}$ `:`
$$\mu_m^{(i)} = \begin{cases} \lambda/(\lambda+n) & \texttt{si} \quad i=1 \\ 0,5/(\lambda+n) & \texttt{si} \quad 2 \leq i \leq \sigma \end{cases}, \quad \mu_c^{(i)} = \begin{cases} \mu_m^{(i)} + 1 - \alpha^2 + \beta & \texttt{si} \quad i=1 \\ \mu_m^{(i)} & \texttt{si} \quad 2 \leq i \leq \sigma \end{cases}.$$

3. `Passer les` σ `points par la fonction non-linéaire` $\boldsymbol{\varphi}$`, de manière identique à la transformation sans saveur originale (algorithme 22).`

4. `Calculer la moyenne et la covariance de` $\boldsymbol{Y}$ `et l'inter-covariance entre` $\boldsymbol{X}$ `et` $\boldsymbol{Y}$ `:`
$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{y}} &= \sum_{i=1}^{\sigma} \mu_m^{(i)} \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)}, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{yy} &= \sum_{i=1}^{\sigma} \mu_c^{(i)} \left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)\left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{xy} &= \sum_{i=1}^{\sigma} \mu_c^{(i)} \left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)^T. \end{aligned}$$

Algorithme 23: La transformation sans saveur mise à l'échelle (scaled unscented transform)

en sachant que $\boldsymbol{X}$ suit une loi normale de moyenne $\overline{\boldsymbol{x}}$ et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$, alors cela consiste à :

1. générer N réalisations $\boldsymbol{x}^{(i)}$ de $\boldsymbol{X}$ en les tirant selon $\mathcal{N}(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{xx})$. Ces N tirages sont appelés *particules*, par analogie avec le filtrage particulaire.
2. calculer les N images $\boldsymbol{y}^{(i)}$ des particules $\boldsymbol{x}^{(i)}$ par la fonction $\boldsymbol{\varphi}$:
$$\boldsymbol{y}^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}\right). \tag{B.29}$$
3. Calculer la moyenne $\overline{\boldsymbol{y}}$ de $\boldsymbol{Y}$ à partir de l'ensemble des points $\left\{\boldsymbol{y}^{(i)}\right\}_{1\leq i\leq N}$. Cette moyenne est qualifiée de *moyenne d'ensemble* :
$$\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{y}^{(i)}. \tag{B.30}$$
4. Calculer la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$ et l'inter-covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$ à partir des ensembles des points $\left\{\boldsymbol{x}^{(i)}\right\}_{1\leq i\leq N}$ et $\left\{\boldsymbol{y}^{(i)}\right\}_{1\leq i\leq N}$:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{yy} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{y}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)\left(\boldsymbol{y}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{x}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{y}^{(i)} - \overline{\boldsymbol{y}}\right)^T. \end{aligned} \tag{B.31}$$

Ces résultats permettent d'aboutir directement à l'algorithme de l'EnKF, illustré sur la figure 25. A noter que le calcul de la covariance d'ensemble est analogue à celui de la covariance empirique introduite dans le chapitre 2, ce qui est somme toute logique puisque ces deux grandeurs

- A l'instant $k = 0$:
  1. Initialiser avec $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$, $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$ et les paramètres α, β et κ.
  2. Effectuer les calculs préliminaires suivants :

$$\begin{array}{rcl} n_a & = & n_x + n_w, \\ \sigma_a & = & 2n_a + 1, \\ h & = & \alpha\sqrt{n_a + \kappa}, \\ \lambda & = & h^2 - n_a, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mu_m^{(i)} & = & \left\{ \begin{array}{ll} \lambda/(\lambda + n_a) & \texttt{si} \quad i = 1 \\ 0,5/(\lambda + n_a) & \texttt{si} \quad 2 \leq i \leq \sigma_a \end{array} \right. , \\ \mu_c^{(i)} & = & \left\{ \begin{array}{ll} \mu_m^{(i)} + 1 - \alpha^2 + \beta & \texttt{si} \quad i = 1 \\ \mu_m^{(i)} & \texttt{si} \quad 2 \leq i \leq \sigma_a \end{array} \right. . \end{array}$$

- Aux instants $k \geq 1$:
  1. Réaliser l'étape de prédiction :
     (a) Former le vecteur d'état augmenté :

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k-1} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{0}_{n_w \times 1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{aa} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} & \boldsymbol{0}_{n_x \times n_w} \\ \boldsymbol{0}_{n_w \times n_x} & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{ww} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_{k-1}^{aa} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{aa}}.$$

     (b) Placer les σ_a points dans l'espace d'état :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1}^{(i)} = \left\{ \begin{array}{ll} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k-1} & \texttt{si } i = 1 \\ \widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k-1} + h\left[\boldsymbol{S}_{k-1}^{aa}\right]_{i-1} & \texttt{si } 2 \leq i \leq n_a + 1 \\ \widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k-1} - h\left[\boldsymbol{S}_{k-1}^{aa}\right]_{i-n_a-1} & \texttt{si } n_a + 2 \leq i \leq \sigma_a \end{array} \right. .$$

     (c) Passer les σ_a points par la fonction d'état $\boldsymbol{f}_k$. Pour $i = 1, \ldots, \sigma_a$:

$$\left[\left(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}\right)^T \quad \left(\boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\right)^T \right]^T = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1}^{(i)},$$
$$\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} = \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\right).$$

     (d) Calculer l'état et la covariance *a priori* :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\sigma_a} \mu_m^{(i)} \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\sigma_a} \mu_c^{(i)} \left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right)\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right)^T. \end{array}$$

  2. Réaliser l'étape de correction :
     (a) Passer les σ_x points par la fonction de mesure $\boldsymbol{h}_k$. Pour $i = 1, \ldots, \sigma_a$:

$$\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} = \boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)}\right).$$

     (b) Calculer la mesure prédite et la covariance de l'innovation :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\sigma_a} \mu_m^{(i)} \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\sigma_a} \mu_c^{(i)} \left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right)\left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right)^T + \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}. \end{array}$$

     (c) Calculer l'inter-covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy}$:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy} = \sum_{i=1}^{\sigma_a} \mu_c^{(i)} \left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right)^T.$$

     (d) Calculer l'état et la covariance *a posteriori* :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{K}_k & = & \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}\right)^{-1}, \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_k & = & \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} & = & \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} \boldsymbol{K}_k^T. \end{array}$$

Algorithme 24: Le filtre de Kalman sans saveur (UKF)

sont issues d'un ensemble de simulations. L'introduction du concept de simulation de Monte Carlo dans le problème de filtrage de Kalman non linéaire a été introduit par Geir Evensen dans [Even 94] d'être affiné dans [Burg 98] puis synthétisé dans [Even 03].

- `A l'instant` $k = 0$`, initialiser avec` $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ `et` $\boldsymbol{\Sigma}_0^{xx}$.
- `Aux instants` $k \geq 1$:
  1. `Réaliser l'étape de prédiction :`
     (a) `Générer` N `particules` $\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}$ `selon` $\mathcal{N}\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}\right)$.
     (b) `Générer` N `particules` $\boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}$ `selon` $\mathcal{N}\left(\mathbf{0}_{n_w \times 1}, \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{ww}\right)$.
     (c) `Pour` $i = 1, \ldots, N$`, déplacer les particules dans l'espace d'état :`
     $$\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} = \boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)}\right).$$
     (d) `Calculer l'état et la covariance` *`a priori`* :
     $$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right)\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right)^T. \end{aligned}$$
  2. `Réaliser l'étape de correction :`
     (a) `Calculer la mesure prédite et la covariance de l'innovation :`
     $$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} &= \boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)}\right), \\ \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right)\left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right)^T + \boldsymbol{\Sigma}_k^{vv}. \end{aligned}$$
     (b) `Calculer l'inter-covariance` $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy}$:
     $$\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right)\left(\boldsymbol{y}_{k|k-1}^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right)^T.$$
     (c) `Calculer l'état et la covariance` *`a posteriori`* :
     $$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_k &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy}\right)^{-1}, \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_k &= \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{xx} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{yy} \boldsymbol{K}_k^T. \end{aligned}$$

Algorithme 25: Le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF)

C

Éléments de probabilités

Remarque : Cette annexe regroupe certains éléments nécessaires à la théorie de l'estimation stochastique, notamment le filtrage particulaire. Pour plus de détails, voir [Ande 79, ann. A] ou [Simo 06c, chap. 3] ainsi que les références y figurant.

C.1 Théorème de Bayes

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux événements d'un univers Ω. Le théorème de Bayes permet d'évaluer la probabilité (notée $\mathbb{P}$) de la réalisation de l'événement $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$), le tout en sachant que $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{A}$) est déjà réalisé, cette probabilité étant notée $\mathbb{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ (respectivement $\mathbb{P}(\mathcal{B}|\mathcal{A})$). Il s'exprime comme suit :

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}\bigcap\mathcal{B}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}(\mathcal{B}|\mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{A}), \tag{C.1}$$

où $\bigcap$ représente l'intersection (équivalent du "et" logique en langage ensembliste).

Soit V une variable aléatoire (application de l'ensemble des réalisations de Ω dans $\mathbb{R}$). Sa fonction de répartition P_V est définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} P_V : & \mathbb{R} & \rightarrow & [0\ ;\ 1] \\ & v & \mapsto & P_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v). \end{array} \tag{C.2}$$

Si P_V est continue, alors sa densité de probabilité p_V est définie par :

$$p_V(v) = \left.\frac{\mathrm{d}P_V}{\mathrm{d}V}\right|_{V=v}, \tag{C.3}$$

avec la propriété : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p_V(v)\mathrm{d}v = 1$. Pour deux variables aléatoires A et B de réalisations respectives a et b, le théorème de Bayes (C.1) s'adapte alors facilement aux densités de probabilité :

$$p_{AB}(a,b) = p_{A|B}(a|b)p_B(b) = p_{B|A}(b|a)p_A(a). \tag{C.4}$$

Remarque : Afin d'alléger les notations, on écriera désormais p au lieu de $p_\bullet$ (par exemple, $p(a|b)$ au lieu de $p_{A|B}(a|b)$), sachant que généralement, les variables aléatoires permettent à elles seules de distinguer les différentes densités de probabilité entre elles.

C.2 Équations des moindres carrés récursifs [Rhod 71]

Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}_k$ deux vecteurs aléatoires gaussiens mutuellement corrélés, définis par les moyennes et covariances conditionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1} &= \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1}=\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right),\\
\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1} &= \mathbb{E}\left(\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1}=\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right),\\
\boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1} &= \left(\left(\boldsymbol{X}-\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)\left(\boldsymbol{X}-\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)^T\middle|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1}=\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right),\\
\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1} &= \left(\left(\boldsymbol{Y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)\left(\boldsymbol{Y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)^T\middle|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1}=\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right),\\
\boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1} &= \left(\left(\boldsymbol{X}-\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)\left(\boldsymbol{Y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)^T\middle|\boldsymbol{Y}_{1\to k-1}=\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right) = \left(\boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1}\right)^T.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

On forme le vecteur conjoint $\boldsymbol{Z}_k = \left[\boldsymbol{X}^T \;\; \boldsymbol{Y}_k^T\right]^T$, lequel est lui aussi gaussien de moyenne $\overline{\boldsymbol{z}}_{k-1}$ et covariance $\boldsymbol{\Sigma}^{zz}_{k-1}$, avec :

$$\overline{\boldsymbol{z}}_{k-1} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \overline{\boldsymbol{y}}_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma}^{zz}_{k-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{C.6}$$

Soit à calculer la densité de probabilité suivante : $p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$. Par le théorème de Bayes, il vient :

$$p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right) = p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right) = \frac{p\left(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right)}{p\left(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right)}. \tag{C.7}$$

En utilisant les propriétés de gaussianité de $\boldsymbol{Y}_k$ et $\boldsymbol{Z}_k$ afin d'exprimer analytiquement $p\left(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right)$ et $p\left(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\right)$, cette expression devient :

$$p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right) = \frac{\dfrac{\exp\left(-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\end{bmatrix}\right)}{\sqrt{(2\pi)^{n_x+n_y}\det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\end{bmatrix}\right)}}}{\dfrac{\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{n_y}\det\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)}}}. \tag{C.8}$$

Soit l'identité suivante, facilement vérifiable :

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n_x} & -\boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)^{-1} \\ \boldsymbol{0}_{n_y\times n_x} & \boldsymbol{I}_{n_y}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n_x} & -\boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)^{-1} \\ \boldsymbol{0}_{n_y\times n_x} & \boldsymbol{I}_{n_y}\end{bmatrix}^T\\
&\qquad = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1} & \boldsymbol{0}_{n_x\times n_y} \\ \boldsymbol{0}_{n_y\times n_x} & \boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Tout d'abord, en utilisant les propriétés d'inverse de matrices [Rote 95, chap. 1], cette expression peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n_x} & \boldsymbol{0}_{n_x\times n_y} \\ -\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1} & \boldsymbol{I}_{n_y}\end{bmatrix}^T\\
&\times \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{xx}_{k-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{yx}_{k-1}\right)^{-1} & \boldsymbol{0}_{n_y\times n_x} \\ \boldsymbol{0}_{n_x\times n_y} & \left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)^{-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n_x} & -\boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{k-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{k-1}\right)^{-1} \\ \boldsymbol{0}_{n_y\times n_x} & \boldsymbol{I}_{n_y}\end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{C.10}$$

ce qui conduit à réécrire (après développement des calculs) l'exponentielle figurant au numérateur de (C.9) comme suit :

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}\\ \boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}\\ \boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\end{bmatrix}\right)\\
&\qquad=\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_k)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}\right)^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_k)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)\right\}\\
&\qquad=\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_k)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}\right)^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_k)\right\}\\
&\qquad\qquad\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}\right)\right\},
\end{aligned}\tag{C.11}$$

avec :

$$\boldsymbol{\mu}_k=\overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}(\boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}).\tag{C.12}$$

En insérant ces résultats dans (C.8), il vient après simplifications :

$$p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_k)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}\right)^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_k)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{n_x}\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\end{bmatrix}\right)\left(\det\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)\right)^{-1}}}.\tag{C.13}$$

Par ailleurs, à l'aide des propriétés relatives aux déterminants [Rote 95, chap. 2], (C.9) permet d'écrire :

$$\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\end{bmatrix}\right)=\det\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}\right)\det\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right),\tag{C.14}$$

ce qui conduit finalement à l'expression suivante pour $p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$:

$$p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_k)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}\right)^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_k)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{n_x}\det\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}\right)}}.\tag{C.15}$$

On voit alors clairement que $p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$ décrit effectivement une densité de probabilité gaussienne dont la moyenne $\overline{\boldsymbol{x}}_k$ et la covariance $\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx}$ valent :

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{x}}_k &= \overline{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}(\boldsymbol{y}_k-\overline{\boldsymbol{y}}_{k-1}),\\
\boldsymbol{\Sigma}_k^{xx} &= \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{xy}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yy}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{yx}.
\end{aligned}\tag{C.16}$$

En remarquant que $\widehat{\boldsymbol{x}}=\overline{\boldsymbol{x}}$, les équations de (C.16) constituent les équations des moindres carrés récursifs recherchées.

C.3 Principe d'orthogonalité [Rhod 71]

Le principe d'orthogonalité découle de manière quasi-directe du résultat (C.16). Il suffit simplement de remarquer la démonstration de ce dernier reste valide si les définitions (C.5) :

– ne sont plus conditionnées sur $\boldsymbol{Y}_{1\to k-1}$,
– substituent $\boldsymbol{Y}_{1\to k}$ à $\boldsymbol{Y}_k$.

cela introduit bien évidemment une modification du sens des grandeurs considérées. (C.16) s'en trouve changé comme suit :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{1\to k}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{1\to k}\right)^{-1}(\boldsymbol{y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})), \tag{C.17}$$

ou encore, sous forme de variable aléatoire :

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_k = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{1\to k}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{1\to k}\right)^{-1}(\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})), \tag{C.18}$$

où :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{1\to k} &= \mathbb{E}\left(\{\boldsymbol{X} - \mathbb{E}(\boldsymbol{X})\}\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})\}^T\right),\\ \boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{1\to k} &= \mathbb{E}\left(\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})\}\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})\}^T\right).\end{aligned} \tag{C.19}$$

Calculons maintenant : $\mathbb{E}\left(\left\{\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}_k\right\}\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})\}^T\right)$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\left\{\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}_k\right\}\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})\}^T\right)\\ &\quad= \mathbb{E}\left(\left\{\boldsymbol{X} - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{1\to k}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{1\to k}\right)^{-1}(\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k}))\right\}\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})\}^T\right)\\ &\quad= \mathbb{E}\left(\{\boldsymbol{X} - \mathbb{E}(\boldsymbol{X})\}\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})\}^T\right)\\ &\qquad\qquad -\boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{1\to k}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{1\to k}\right)^{-1}\mathbb{E}\left(\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k}))\}\{\boldsymbol{Y}_{1\to k} - \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}_{1\to k})\}^T\right)\\ &\quad= \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{1\to k} - \boldsymbol{\Sigma}^{xy}_{1\to k}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{1\to k}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{yy}_{1\to k}\\ &\quad= \boldsymbol{0}_{n_x\times n_x}.\end{aligned} \tag{C.20}$$

Ce résultat montre que l'erreur d'estimation de $\boldsymbol{X}$ par $\widehat{\boldsymbol{X}}_k$ est bien orthogonale à l'ensemble des mesures $\boldsymbol{Y}_{1\to k}$, ce constitue bien le résultat recherché.

C.4 Équations du filtrage bayésien optimal [Van 04a]

Soit à calculer de manière récursive $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k})$. Pour cela, les densités à disposition sont :
– le noyau de transition $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ qui est issu de l'équation de dynamique de l'état à estimer :

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_w}} \delta\left(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{w}_{k-1}\right)\right) p(\boldsymbol{w}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{w}_{k-1}, \tag{C.21}$$

– la vraisemblance $p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)$, obtenue à partir de l'équation de mesure :

$$p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k) = \int_{\mathbb{R}^{n_y}} \delta\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right) - \boldsymbol{v}_k\right) p(\boldsymbol{v}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k. \tag{C.22}$$

Grâce au théorème de Bayes, $p(\boldsymbol{x}_k|y_{1\to k})$ peut s'écrire comme suit :

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_{1\to k}|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_{1\to k})}. \tag{C.23}$$

Sachant que $\boldsymbol{y}_{1\to k} = \{\boldsymbol{y}_{1\to k-1}\ ;\ \boldsymbol{y}_k\}$, il vient :

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{y}_{1\to k-1}|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{y}_{1\to k-1})}, \tag{C.24}$$

soit :

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}, \boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{y}_{1\to k-1}|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})p(\boldsymbol{y}_{1\to k-1})}. \tag{C.25}$$

En développant l'expression de $p(\boldsymbol{y}_{1\to k-1}|\boldsymbol{x}_k)$ par le théorème de Bayes, et en utilisant l'hypothèse d'indépendance mutuelle des mesures, il vient :

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})p(\boldsymbol{y}_{1\to k-1})p(\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})p(\boldsymbol{y}_{1\to k-1})p(\boldsymbol{x}_k)}, \tag{C.26}$$

ce qui se simplifie comme suit :

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})}{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})}. \tag{C.27}$$

Afin de calculer le dénominateur $p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})$ de cette fraction, considérons la densité de probabilité conjointe conditionnelle suivante : $p(\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})$. Le calcul de cette dernière s'effectue comme suit :

$$p(\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}) = p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_{1\to k-1})p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}). \tag{C.28}$$

L'hypothèse d'indépendance mutuelle des mesures permet de simplifier cette expression comme suit :

$$p(\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}) = p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}). \tag{C.29}$$

En intégrant par rapport à $\boldsymbol{x}_k$, il vient finalement :

$$p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{0\to k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k, \tag{C.30}$$

ce qui, inséré dans (C.27), conduit à :

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k}. \tag{C.31}$$

A noter que si le nombre de valeurs pouvant être prises par $\boldsymbol{x}_k$ est fini, alors l'intégrale figurant au dénominateur de (C.31) est à remplacer par une somme discrète.

A partir de là, deux cas de figure sont à distinguer :

- le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ est statique, c'est-à-dire que $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_k$ $\forall(j,k) \in \mathbb{N}^2$. Dans ce cas, en remplaçant l'intégrale par une somme discrète, (C.31) n'est autre que la formule de mise à jour des poids associés à des modes dans les approches multi-modèles.
- le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}_k$ est dynamique, auquel cas il est nécessaire d'exprimer $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})$ en fonction de $p(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})$ et de $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$. Pour ce faire, considérons la densité conjointe des états aux instants k et $k-1$, conditionnellement à $\boldsymbol{y}_{1\to k-1}$:

  $$p(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}) = p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{y}_{1\to k-1})p(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}). \tag{C.32}$$

  Du fait que l'état physique du processus est indépendant des relevés de mesures effectués, cette expression se simplifie comme suit :

  $$p(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}) = p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})p(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}), \tag{C.33}$$

  ce qui, intégré par rapport à $\boldsymbol{x}_{k-1}$, donne vient finalement :

  $$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1\to k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})p(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}. \tag{C.34}$$

  Les relations (C.31) et (C.34) constituent les équations du filtrage bayésien optimal.

C.5 Loi des grands nombres, théorème de la limite centrale

La loi des grands nombres est la formalisation d'une évidence. Elle stipule que si l'on réalise un tirage aléatoire, plus on augmente le nombre d'échantillons, plus la caractéristique du tirage se rapproche de la caractéristique réelle. Par exemple, si un sondage est effectué sur la population française, plus le panel de gens interrogé est grand, plus l'opinion dégagée par l'enquête reflète l'opinion nationale. Deux énoncés (très proches) sont distingués : la loi faible des grands nombres et la loi forte des grands nombres.

Loi faible des grands nombres, ou théorème de Khintchine : Soit $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ une suite de N variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (c'est-à-dire distribuées selon la même loi), et donc d'espérance identique ($\mathbb{E}(A_1) = \ldots = \mathbb{E}(A_N)$). Pour tout réel ε positif, la probabilité que la moyenne arithmétique $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n$ s'éloigne de l'espérance commune $\mathbb{E}(A_n)$ de plus de ε tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

Loi forte des grands nombres : Soit $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ une suite de N variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Alors la moyenne arithmétique $m_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n$ converge presque sûrement vers $m = \mathbb{E}(A_n)$.

m_N converge presque sûrement vers m si et seulement si $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to+\infty}(\sup(|m - m_N| > \varepsilon))\right) = 0. \tag{C.35}$$

Convergence en loi : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de fonctions de répartition P_n, et soit A une variable aléatoire de fonction de répartition P. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers A si et seulement si P_n converge vers P.

Théorème de la limite centrale ou de Moivre-Laplace : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de mêmes moyenne m et écart-type σ. La variable aléatoire $A = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i - n.m}{\sigma}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire $\aleph(0,1)$.

Par conséquent, le théorème de la limite centrale prouve que la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i$ converge vers une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma/\sqrt{n}$.

C.6 Algorithme d'échantillonnage d'importance séquentiel [Douc 97]

Méthode de Monte Carlo : Soit φ_k une fonction de $\mathbb{R}^{(k+1)n_x}$ dans $\mathbb{R}$. On défini l'opérateur $\mathcal{E}$ calculant l'espérance de $\varphi_k(\boldsymbol{x}_{0\to k})$ conditionnellement aux mesures $\boldsymbol{y}_{1\to k}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\varphi_k, p) &= \mathbb{E}(\varphi_k(\boldsymbol{X}_{0\to k})|\boldsymbol{Y}_{1\to k} = \boldsymbol{y}_{1\to k}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{(k+1)n_x}} \varphi_k(\boldsymbol{x}_{0\to k}) p(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0\to k}.\end{aligned} \tag{C.36}$$

Supposons que l'on soit capable de simuler N échantillons aléatoires $\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, N)$, appelés particules, selon $p(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})$. On introduit alors l'opérateur $\overline{\mathcal{E}}$, réalisant la moyenne arithmétique de ces vecteurs :

$$\overline{\mathcal{E}}(\varphi_k, p) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi_k\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}\right). \tag{C.37}$$

Grâce à la loi forte des grands nombres, on montre que $\overline{\mathcal{E}}$ converge presque sûrement vers $\mathcal{E}$:

$$\overline{\mathcal{E}}(\varphi_k, p) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}(\varphi_k, p). \tag{C.38}$$

Le théorème de la limite centrale prouve alors que l'erreur faite en approximant $\mathcal{E}$ par $\overline{\mathcal{E}}$ tend vers la loi normale centré d'écart-type $\sigma/\sqrt{N}$, où :

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}^{(k+1)n_x}} \{\varphi_k(\boldsymbol{x}_{0\to k}) - \mathcal{E}(\varphi_k, p)\}^2 \, p(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0\to k}. \tag{C.39}$$

Cette substitution d'une somme à un calcul intégral est communément appelée méthode d'intégration de Monte Carlo. Le principe est identique à celui permettant d'obtenir l'algorithme des filtres particulaires via l'approche bayésienne. Toutefois, la densité $p(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})$ n'est pas toujours bien connue. Le principe de l'échantillonnage d'importance consiste alors à contourner ce problème en substituant à cette densité une autre densité connue $q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})$ appelée densité d'importance (d'où la terminologie de la méthode).

Échantillonnage d'importance :

L'échantillonnage d'importance se base sur une idée simple, à savoir que si $p(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k}) > 0$ implique $q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k}) > 0$, et que q est une densité de probabilité que l'on sait simuler (et suivant laquelle on peut donc générer des particules), on peut écrire :

$$\mathcal{E}(\varphi_k, p) = \int_{\mathbb{R}^{(k+1)n_x}} \varphi_k(\boldsymbol{x}_{0\to k}) \frac{p(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})}{q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})} q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0\to k}, \tag{C.40}$$

ou encore :

$$\mathcal{E}(\varphi_k, p) = \mathcal{E}(\alpha_k \varphi_k, q), \tag{C.41}$$

avec :

$$\alpha_k = \frac{p(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})}{q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})}. \tag{C.42}$$

En développant via le théorème de Bayes l'expression de α_k, il vient :

$$\alpha_k = \frac{p(\boldsymbol{y}_{1\to k}|\boldsymbol{x}_{0\to k}) p(\boldsymbol{x}_{0\to k})}{p(\boldsymbol{y}_{1\to k}) q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})}. \tag{C.43}$$

Cependant, ce calcul de $\mathcal{E}(\varphi_k, p)$ n'est toujours pas réalisable, car il nécessite la connaissance de la constante de normalisation $p(\boldsymbol{y}_{1\to k})$. En introduisant la fonction Λ_k définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Lambda_k : \mathbb{R}^{(k+1)n_x} &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{z} &\mapsto \Lambda_k(\boldsymbol{z}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_{1\to k}|\boldsymbol{z}) p(\boldsymbol{z})}{q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}_{1\to k})}, \end{aligned} \tag{C.44}$$

α_k se réécrit sous la forme suivante :

$$\alpha_k = \frac{\Lambda_k(\boldsymbol{x}_{0\to k})}{p(\boldsymbol{y}_{1\to k})}. \tag{C.45}$$

et par la linéarité de l'espérance, l'introduction de α_k dans (C.41) donne alors :

$$\mathcal{E}(\varphi_k, p) = \frac{\mathcal{E}(\Lambda_k(\boldsymbol{x}_{0\to k}) \varphi_k, q)}{p(\boldsymbol{y}_{1\to k})}. \tag{C.46}$$

En remarquant que $p(\boldsymbol{y}_{1\to k})$ peut être calculé comme ceci :

$$p(\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \int_{\mathbb{R}^{(k+1)n_x}} p(\boldsymbol{y}_{1\to k}|\boldsymbol{x}_{0\to k})p(\boldsymbol{x}_{0\to k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0\to k} \tag{C.47}$$

et en constatant que cette relation reste inchangée sous cette forme :

$$p(\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \int_{\mathbb{R}^{(k+1)n_x}} \frac{p(\boldsymbol{y}_{1\to k}|\boldsymbol{x}_{0\to k})p(\boldsymbol{x}_{0\to k})}{q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})} q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0\to k}, \tag{C.48}$$

l'introduction de l'opérateur $\mathcal{E}$ et de la fonction Λ_k permet d'écrire :

$$p(\boldsymbol{y}_{1\to k}) = \mathcal{E}(\Lambda_k, q), \tag{C.49}$$

ce qui, mis dans (C.46), fournit la relation suivante :

$$\mathcal{E}(\varphi_k, p) = \frac{\mathcal{E}(\Lambda_k(\boldsymbol{x}_{0\to k})\varphi_k, q)}{\mathcal{E}(\Lambda_k, q)}. \tag{C.50}$$

En simulant N échantillons aléatoires $\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, N)$ selon $q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k})$ et en se basant sur l'approximation (C.37) de Monte Carlo, (C.50) conduit à écrire :

$$\overline{\mathcal{E}}(\varphi_k, p) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \widetilde{\mu}_k^{(i)} \varphi_k\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\mu}_k^{(j)}}, \tag{C.51}$$

où les termes $\widetilde{\mu}_k^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, N)$ correspondent à des poids non normalisés, calculés comme ceci :

$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \Lambda_k\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}\right) = \frac{p\left(\boldsymbol{y}_{1\to k}\middle|\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}\middle|\boldsymbol{y}_{1\to k}\right)}. \tag{C.52}$$

Par ailleurs, en remarquant que (C.51) reste inchangé sous la forme suivante :

$$\overline{\mathcal{E}}(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\widetilde{\mu}_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\mu}_k^{(j)}}\right) \varphi_k\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}\right), \tag{C.53}$$

on voit clairement apparaître les poids normalisés $\mu_k^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, N)$, dont les expressions sont :

$$\mu_k^{(i)} = \frac{\widetilde{\mu}_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\mu}_k^{(j)}}. \tag{C.54}$$

La relation (C.52) s'écrit alors comme ceci :

$$\overline{\mathcal{E}}(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{N} \mu_k^{(i)} \varphi_k\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}\right). \tag{C.55}$$

Échantillonnage d'importance séquentiel :

La dernière étape à réaliser pour obtenir un algorithme implémentable en temps réel consiste à rendre récursif ces calculs. Une condition suffisante est que la densité d'importance de la trajectoire du système conditionnellement aux mesures puisse se factoriser sous la forme suivante :

$$q(\boldsymbol{x}_{0\to k}|\boldsymbol{y}_{1\to k}) = q(\boldsymbol{x}_{0\to k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{0\to k-1}, \boldsymbol{y}_{1\to k}). \tag{C.56}$$

Dans ce cas, la génération des particules $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ ne se fait pas suivant tout le passé du système, mais seulement selon $q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{0\to k-1}, \boldsymbol{y}_{1\to k})$, la densité $q(\boldsymbol{x}_{0\to k-1}|\boldsymbol{y}_{1\to k-1})$ représentant alors une constante de normalisation connue. Calculons alors les poids non normalisés $\widetilde{\mu}_k^{(i)}$ à l'instant k en fonction de ceux à l'instant immédiatement précédent. L'expression (C.52) peut s'écrire comme ceci :

$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \frac{p\left(\boldsymbol{y}_{1\to k-1}, \boldsymbol{y}_k \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)} \middle| \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)}, \tag{C.57}$$

ce qui, en utilisant le théorème de Bayes, conduit à écrire :

$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \frac{p\left(\boldsymbol{y}_{1\to k-1} \middle| \boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{y}_k \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)} \middle| \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)}. \tag{C.58}$$

En sachant que les mesures $\boldsymbol{y}_k$ sont mutuellement indépendantes mais conditionnées par $\boldsymbol{x}_k$, et grâce à l'hypothèse de markoviannité du processus, cette expression se simplifie comme ceci :

$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \frac{p\left(\boldsymbol{y}_{1\to k-1} \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{y}_k \middle| \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)} \middle| \boldsymbol{y}_{0\to k}\right)}. \tag{C.59}$$

Enfin, en appliquant la condition (C.56), il vient :

$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \frac{p\left(\boldsymbol{y}_{1\to k-1} \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{y}_k \middle| \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)} \middle| \boldsymbol{y}_{0\to k-1}\right) q\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)}, \tag{C.60}$$

soit :

$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \widetilde{\mu}_{k-1}^{(i)} \frac{p\left(\boldsymbol{y}_k \middle| \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)}. \tag{C.61}$$

En rappelant que la normalisation des poids (C.54) consiste à multiplier ces derniers par une constante (identique pour toutes les particules), on montre facilement que les valeurs des poids normalisés $\mu_k^{(i)}$ demeurent inchangées si l'on remplace $\widetilde{\mu}_{k-1}^{(i)}$ par $\mu_{k-1}^{(i)}$ dans (C.61). En effet, en réalisant cette substitution, les poids $\widetilde{\mu}_k^{(i)}$ sont alors calculés à une constante près, laquelle disparaît lors de la normalisation de $\widetilde{\mu}_k^{(i)}$. (C.61) devient alors :

$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \mu_{k-1}^{(i)} \frac{p\left(\boldsymbol{y}_k \middle| \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)}. \tag{C.62}$$

- `A l'instant` $k = 0$ `(`$\boldsymbol{x}_0$ `et` $p(\boldsymbol{x}_0)$ `sont connus) :`

  1. `Générer` N `particules` $\boldsymbol{x}_0^{(i)}$ $(1 \leq i \leq N)$ `selon` $q(\boldsymbol{x}_0)$.
  2. `Pour` $i = 1, \ldots, N$`, poser :`

$$\mu_0^{(i)} = \frac{p\left(\boldsymbol{x}_0^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_0^{(i)}\right)}.$$

- `Aux instants` $k \geq 1$ `:`

  1. `Générer` N `particules` $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$ $(1 \leq i \leq N)$ `selon` $q\left(\boldsymbol{x}_k \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$.
  2. `Pour` $i = 1, \ldots, N$`, compléter les trajectoires des particules :`

$$\boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)} = \left\{\boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}\ ,\ \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right\}.$$

  3. `Pour` $i = 1, \ldots, N$`, mettre à jour les poids :`

$$\widetilde{\mu}_k^{(i)} = \mu_{k-1}^{(i)} \frac{p\left(\boldsymbol{y}_k \middle| \boldsymbol{x}_k^{(i)}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)}.$$

  4. `Pour` $i = 1, \ldots, N$`, normaliser les poids :`

$$\mu_k^{(i)} = \frac{\widetilde{\mu}_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\mu}_k^{(j)}}.$$

Algorithme 26: L'échantillonnage d'importance séquentiel pour le filtrage de trajectoire

Les équations (C.54) et (C.62) constituent l'échantillonnage d'importance séquentiel, synthétisé par l'algorithme 26. On rappelle que le noyau de transition $p\left(\boldsymbol{x}_k \middle| \boldsymbol{x}_{k-1}\right)$ et la vraisemblance $p\left(\boldsymbol{y}_k \middle| \boldsymbol{x}_k\right)$ sont respectivement obtenus à partir de l'équation d'état et l'équation de mesure, et que la densité d'importance $q\left(\boldsymbol{x}_k \middle| \boldsymbol{x}_{0\to k-1}^{(i)}, \boldsymbol{y}_{1\to k}\right)$ est connue.

A noter que cet algorithme est conçu pour le filtrage de trajectoire, qui consiste à estimer à l'instant k la trajectoire complète de l'état $\boldsymbol{X}_{0\to k}$ à partir des mesures $\boldsymbol{Y}_{1\to k}$. On a alors :

- $\widehat{\boldsymbol{x}}_{0\to k} = \sum_{i=1}^{N} \mu_k^{(i)} \boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}$ si l'estimation se fait au sens des moindres carrés,
- $\widehat{\boldsymbol{x}}_{0\to k} = \boldsymbol{x}_{0\to k}^{(i)}$ tel que : $\mu_k^{(i)} > \mu_k^{(j)}\ \forall j \in \{1; \ldots; N\},\ j \neq i$ si l'estimation se fait au sens du maximum *a posteriori*.

Pour effectuer un simple filtrage d'état, il suffit de remplacer $\boldsymbol{x}_{0\to k}$ par $\boldsymbol{x}_k$. Cela conduit à l'algorithme du filtre particulaire recherché.

D

Éléments de mécanique pour la navigation

D.1 Matrice de passage d'une base à une autre

Soient $[a] = (O_a, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ et $[r] = (O_r, \overrightarrow{x_r}, \overrightarrow{y_r}, \overrightarrow{z_r})$ deux bases quelconques de l'espace. La matrice de passage $\boldsymbol{T}_{ar}$ de $[r]$ vers $[a]$ est définie à partir des coordonnées dans $[a]$ des vecteurs définissant $[r]$:

$$\boldsymbol{T}_{ar} \left[\begin{array}{ccc} [\overrightarrow{x_r}]_{[a]} & [\overrightarrow{y_r}]_{[a]} & [\overrightarrow{z_r}]_{[a]} \end{array} \right]. \tag{D.1}$$

Il vient a alors, pour n'importe quel vecteur $\overrightarrow{X}$:

$$\left[\overrightarrow{X}\right]_{[a]} = \boldsymbol{T}_{ar} \left[\overrightarrow{X}\right]_{[r]}. \tag{D.2}$$

De même, en introduisant une nouvelle base $[s]$ quelconque de l'espace :

$$\boldsymbol{T}_{as} = \boldsymbol{T}_{ar}\boldsymbol{T}_{rs}. \tag{D.3}$$

Les repères $[a]$ et $[r]$ étant des bases de l'espace, la matrice $\boldsymbol{T}_{ar}$ est de rang plein (c'est-à-dire 3). La matrice de passage $\boldsymbol{T}_{ra}$ est alors définie comme étant l'inverse de $\boldsymbol{T}_{ar}$:

$$\boldsymbol{T}_{ra} = \boldsymbol{T}_{ar}^{-1}. \tag{D.4}$$

De surcroît, si $[a]$ et $[r]$ sont orthonormés directs, alors $\boldsymbol{T}_{ra}$ est une matrice *orthogonale*, c'est-à-dire que :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{T}_{ra} & = & \boldsymbol{T}_{ar}^{-1} \;=\; \boldsymbol{T}_{ar}^{T}, \\ \det(\boldsymbol{T}_{ar}) & = & 1 \;\text{ si } [a] \text{ et } [r] \text{ sont directs}, \\ \| [\boldsymbol{T}_{ar}]_i \| & = & 1 \;\text{ pour } 1 \leq i \leq 3, \\ \| [\boldsymbol{T}_{ar}]^i \| & = & 1 \;\text{ pour } 1 \leq i \leq 3. \end{array} \tag{D.5}$$

D.2 Loi générale de dérivation d'un vecteur par rapport à un repère relatif

Soit $\overrightarrow{X}$ un vecteur quelconque et $[a]$, $[r]$ deux repères respectivement qualifiés d'*absolu* et de *relatif*. Alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t}\right|_{[r]} + \overrightarrow{\Omega}^{r/a} \wedge \overrightarrow{X}. \tag{D.6}$$

D.3 Vitesse et accélération

Définition :

Soit $[a]$ un repère quelconque dans lequel le point O est fixe, et M un point quelconque. La vitesse $\overrightarrow{V}^a(M)$ et l'accélération $\overrightarrow{\gamma}^a(M)$ de M par rapport à $[a]$ sont respectivement les variations à l'ordre 1 et 2 du vecteur $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ relativement à $[a]$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}^a(M) &= \overset{a}{\overrightarrow{r}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]}, \\ \overrightarrow{\gamma}^a(M) &= \overset{aa}{\overrightarrow{r}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{[a]} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^a(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]}. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Loi de composition des vitesses et accélérations :

Nous cherchons à exprimer la vitesse $\overrightarrow{V}^t(M)$ et l'accélération $\overrightarrow{\gamma}^t(N)$ d'un point M quelconque par rapport à la terre en fonction de la vitesse $\overrightarrow{V}^i(M)$ et de l'accélération $\overrightarrow{\gamma}^i(M)$ de ce même point par rapport à l'espace inertiel. On rappelle que $[t]$ tourne par rapport à $[i]$ à la vitesse constante $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}^{t/i}$ et que ces deux repères ont la même origine ($O_t = O_i$). Par définition :

$$\overrightarrow{V}^i(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]}, \tag{D.8}$$

où l'on a posé dans un but simplificateur : $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. Par application de la loi (D.6), il vient directement :

$$\overrightarrow{V}^i(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[t]} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{r}, \tag{D.9}$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{V}^i(M) = \overrightarrow{V}^t(M) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{r}. \tag{D.10}$$

Cette relation constitue la loi de composition des vitesses recherchée. L'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma}^i(M)$ est quant-à-elle définie par :

$$\overrightarrow{\gamma}^i(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^i(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]}, \tag{D.11}$$

ce qui, en tenant compte du résultat (D.10) et en rappelant que $\overrightarrow{\Omega}$ est fixe dans $[i]$, conduit à écrire :

$$\overrightarrow{\gamma}^i(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^t(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[i]}}_{=\overrightarrow{V}^i(M)}. \tag{D.12}$$

En utilisant la loi (D.6) et la loi de composition des vitesses (D.10), cette équation devient :

$$\overrightarrow{\gamma}^i(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}^t(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{[t]} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}^t(M) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{V}^t(M) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{r}\right), \tag{D.13}$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{\gamma}^i(M) = \overrightarrow{\gamma}^t(M) + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}^t(M) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{r}\right). \tag{D.14}$$

Le résultat (D.14) constitue la loi de composition des accélérations, dans laquelle :
- le terme $2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}^t(M)$ représente l'accélération de Coriolis,
- le terme $\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{r}\right)$ est l'accélération d'entraînement (de $[t]$ par rapport à $[i]$).

D.4 Projection de grandeurs vectorielles dans une base

Établir les composantes d'un vecteur dans une base donnée est chose aisée. En revanche, il est un peu plus compliqué d'exprimer les composantes de la dérivée d'un vecteur ou d'un produit vectoriel. Nous donnons ici les résultats de ces opérations.

Projection de la dérivée d'un vecteur :

Soient un vecteur $\overrightarrow{X}$ et deux repères $[a]$ et $[b]$ quelconques tels que $[b]$ soit rigidement lié à $[a]$. Alors :

$$\left[\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t}\right|_{[b]}\right]_{[a]} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_a}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{X}}_a, \tag{D.15}$$

où $\boldsymbol{X}_a$ sont les composantes de $\overrightarrow{X}$ dans $[a]$. A noter que l'on peut tout à fait avoir $[b] = [a]$.

Projection d'un produit vectoriel. Définition de la matrice antisymétrique $\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs quelconques et un repère $[a]$. Alors :

$$\left[\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}\right]_{[a]} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_a)\,\boldsymbol{Y}_a, \tag{D.16}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est une matrice antisymétrique de dimension 3×3, associée au produit vectoriel à gauche et définie comme suit :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -z & +y \\ +z & 0 & -x \\ -y & +x & 0 \end{bmatrix}. \tag{D.17}$$

D.5 Loi générale de dynamique d'une matrice de passage

Considérons la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{ar}$ entre deux bases orthonormées $[a]$ et $[r]$ quelconques. Le but recherché est de trouver une équation différentielle matricielle régissant l'évolution de $\boldsymbol{T}_{ar}$ en fonction de la rotation de $[r]$ par rapport à $[a]$. Considérons tout d'abord un vecteur $\overrightarrow{X}$ quelconque mais non nul. Grâce à la loi (D.6), il vient :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t}\right|_{[r]} + \overrightarrow{\Omega}^{r/a} \wedge \overrightarrow{X}. \tag{D.18}$$

Le vecteur $\overrightarrow{X}$ étant quelconque, posons $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x_r}$. (D.18) donne alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[r]} + \overrightarrow{\Omega}^{r/a} \wedge \overrightarrow{x_r} = \overrightarrow{\Omega}^{r/a} \wedge \overrightarrow{x_r} \tag{D.19}$$

car $\overrightarrow{x_r}$ est par définition fixe dans $[r]$. Projetons ce résultat dans $[a]$:

$$\left[\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]}\right]_{[a]} = \frac{\mathrm{d}\left([\overrightarrow{x_r}]_{[a]}\right)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_a^{r/a}\right)[\overrightarrow{x_r}]_{[a]}. \tag{D.20}$$

En procédant de même pour $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{y_r}$ et $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{z_r}$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\left([\overrightarrow{y_r}]_{[a]}\right)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_a^{r/a}\right)[\overrightarrow{y_r}]_{[a]}, \qquad \frac{\mathrm{d}\left([\overrightarrow{z_r}]_{[a]}\right)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_a^{r/a}\right)[\overrightarrow{z_r}]_{[a]}. \tag{D.21}$$

Or, par définition :

$$\boldsymbol{T}_{ar} = \left[\begin{array}{ccc} [\overrightarrow{x_r}]_{[a]} & [\overrightarrow{y_r}]_{[a]} & [\overrightarrow{z_r}]_{[a]} \end{array}\right]. \tag{D.22}$$

Le regroupement des relations (D.20) et (D.21) conduit donc au résultat suivant :

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{ar} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_a^{r/a}\right)\boldsymbol{T}_{ar} = -\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_a^{a/r}\right)\boldsymbol{T}_{ar}, \tag{D.23}$$

également exprimable après quelques manipulations[53] sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{ar} = \boldsymbol{T}_{ar}\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_r^{r/a}\right) = -\boldsymbol{T}_{ar}\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{\Omega}_r^{a/r}\right). \tag{D.24}$$

D.6 Micro-rotateur [Isra 99]

Définition d'un micro-rotateur :

Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur quelconque et $\overrightarrow{V'}$ la rotation de $\overrightarrow{V}$ d'un angle $\overrightarrow{\beta}$ (cf. figure D.1). On introduit un repère orthonormé $[r] = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ tel que :

- les composantes de $\overrightarrow{V}$ ne soient que sur les axes $(O, \overrightarrow{x})$ et $(O, \overrightarrow{z})$,
- $(O, \overrightarrow{z})$ soit l'axe de la rotation, de sorte que $\overrightarrow{\beta} = \beta\overrightarrow{z}$.

[53] Ces manipulations consistent à transposer l'égalité matricielle précédente et à intervertir les noms $[a]$ et $[r]$ (ce qui ne limite pas la portée théorique du résultat puisque ces repères sont quelconques).

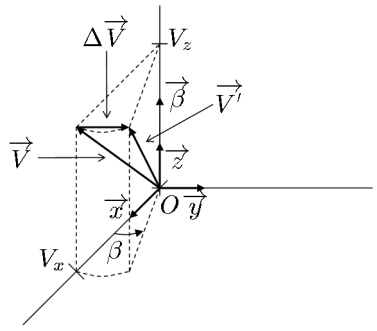


FIG. D.1 – Micro-rotateur β

Ainsi :

$$\left[\overrightarrow{V}\right]_{[r]} = \begin{bmatrix} V_x \\ 0 \\ V_z \end{bmatrix}, \quad \left[\overrightarrow{V'}\right]_{[r]} = \begin{bmatrix} V_x\cos(\beta) \\ V_x\sin(\beta) \\ V_z \end{bmatrix}. \tag{D.25}$$

On introduit alors le vecteur $\Delta\overrightarrow{V}$ représentant la différence entre les deux vecteurs $\overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{V}$. Ses composantes dans $[r]$ sont alors :

$$\left[\Delta\overrightarrow{V}\right]_{[r]} = \begin{bmatrix} V_x(\cos(\beta)-1) \\ V_x\sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{D.26}$$

En supposant $\beta << 1$, (D.26) se simplifie en :

$$\left[\Delta\overrightarrow{V}\right]_{[r]} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ V_x\beta \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Delta\overrightarrow{V} = \beta\overrightarrow{y}. \tag{D.27}$$

Il est alors facile de montrer que :

$$\Delta\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\beta} \wedge \overrightarrow{V}. \tag{D.28}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\beta}$ est appelé *micro-rotateur*. Il permet notamment de déterminer (au premier ordre) l'erreur vectorielle $\Delta\overrightarrow{V}$ commise en projetant $\overrightarrow{V}$ non pas dans $[r]$ mais dans un repère $[r']$ issu de la rotation de $[r]$ d'angle $-\overrightarrow{\beta}$.

Composition de micro-rotations :

Soit un vecteur $\overrightarrow{V}$ quelconque auquel on fait subir deux micro-rotations consécutives $\overrightarrow{\beta}$ et $\overrightarrow{\eta}$. Nous recherchons une expression de l'écart $\Delta\overrightarrow{V}$ entre $\overrightarrow{V}$ et le vecteur $\overrightarrow{V'}$ obtenu après les deux micro-rotations de $\overrightarrow{V}$. Par application successive de (D.28) pour les micro-rotations $\overrightarrow{\beta}$ puis $\overrightarrow{\eta}$, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V'} &= \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\beta} \wedge \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\eta} \wedge \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\beta} \wedge \overrightarrow{V}\right) \\ &= \overrightarrow{V} + \underbrace{\overrightarrow{V} \wedge \left(\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\eta}\right) + \overrightarrow{\eta} \wedge \left(\overrightarrow{\beta} \wedge \overrightarrow{V}\right)}_{= \Delta\overrightarrow{V}}. \end{aligned} \tag{D.29}$$

Les rotations $\overrightarrow{\beta}$ et $\overrightarrow{\eta}$ étant faibles, alors :

$$\left\| \overrightarrow{\eta} \wedge \left(\overrightarrow{\beta} \wedge \overrightarrow{V} \right) \right\| << \left\| \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\eta} \right\| \left\| \overrightarrow{V} \right\|. \tag{D.30}$$

Ainsi, $\Delta \overrightarrow{V}$ peut être approximé par :

$$\Delta \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \wedge \left(\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\eta} \right), \tag{D.31}$$

ce qui revient à dire que la composition de deux micro-rotations est la somme vectorielle des deux micro-rotateurs.

Détermination des coefficients d'une matrice de passage à partir d'un micro-rotateur :

Soient deux repères orthonormés $[a]$ et $[r]$ tels que chacun des vecteurs $\overrightarrow{x_r}$, $\overrightarrow{y_r}$ et $\overrightarrow{z_r}$ du second trièdre soient respectivement issus d'une micro-rotation d'angle $\overrightarrow{\beta}$ des vecteurs $\overrightarrow{x_a}$, $\overrightarrow{y_a}$ et $\overrightarrow{z_a}$ du premier trièdre. $[r]$ est alors une micro-rotation de $[a]$ d'angle $\overrightarrow{\beta}$. Le but recherché est de déterminer la matrice de passage $\boldsymbol{T}_{ar}$ à partir des composantes de $\overrightarrow{\beta}$ exprimées soient dans $[a]$, soit dans $[r]$. Pour ce faire, prenons un vecteur $\overrightarrow{V}$ quelconque et faisons lui subir la micro-rotation $\overrightarrow{\beta}$. Le vecteur $\overrightarrow{W}$ ainsi obtenu est :

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\beta} \wedge \overrightarrow{V}. \tag{D.32}$$

En projetant ce résultat dans $[a]$, cela donne :

$$\boldsymbol{W}_a = \boldsymbol{V}_a + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a)\, \boldsymbol{V}_a = (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a))\, \boldsymbol{V}_a. \tag{D.33}$$

En posant successivement $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{x_a}$, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{y_a}$ et $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{z_a}$, cela aboutit respectivement à $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{x_r}$, $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{y_r}$ et $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{z_r}$. L'emploi de la relation (D.33) conduit alors au résultats suivants :

$$\begin{array}{rclcl} [\overrightarrow{x_r}]_{[a]} & = & (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a))\, [\overrightarrow{x_a}]_{[a]} & = & (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a))\, [1 \;\; 0 \;\; 0]^T, \\ [\overrightarrow{y_r}]_{[a]} & = & (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a))\, [\overrightarrow{y_a}]_{[a]} & = & (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a))\, [0 \;\; 1 \;\; 0]^T, \\ [\overrightarrow{z_r}]_{[a]} & = & (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a))\, [\overrightarrow{z_a}]_{[a]} & = & (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a))\, [0 \;\; 0 \;\; 1]^T. \end{array} \tag{D.34}$$

Comme par définition :

$$\boldsymbol{T}_{ar} = \left[\; [\overrightarrow{x_r}]_{[a]} \quad [\overrightarrow{y_r}]_{[a]} \quad [\overrightarrow{z_r}]_{[a]} \; \right], \tag{D.35}$$

on trouve finalement le résultat suivant :

$$\boldsymbol{T}_{ar} = \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a). \tag{D.36}$$

Calculons maintenant les coordonnées de $\overrightarrow{\beta}$ dans $[r]$:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\beta}_r & = & \boldsymbol{T}_{ra} \boldsymbol{\beta}_a \\ & = & (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a))^T\, \boldsymbol{\beta}_a \\ & = & \boldsymbol{\beta}_a - \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_a)\, \boldsymbol{\beta}_a}_{= \boldsymbol{0}_{3\times 1}}. \end{array} \tag{D.37}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{\beta}$ exprimées dans $[a]$ et dans $[r]$ sont donc identiques. Le résultat (D.36) s'en trouve généralisé comme suit :

$$\boldsymbol{T}_{ar} = \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\beta}_\bullet), \quad \text{avec : } \boldsymbol{\beta}_\bullet = \boldsymbol{\beta}_a \text{ ou } \boldsymbol{\beta}_\bullet = \boldsymbol{\beta}_r. \tag{D.38}$$

D.7 Matrice de couplage de Schüler [Isra 07]

Considérons un point M subissant la pesanteur $\overrightarrow{g_p}$. Le vecteur allant du centre O_t de la terre au point M est noté $\overrightarrow{r}$. En supposant la terre sphérique, du fait que $\overrightarrow{g_p}$ est par définition normal à la surface de la terre, alors $\overrightarrow{g_p}$ et $\overrightarrow{r}$ sont de même direction et de sens opposé (cf. figure D.2). Cela autorise à écrire :

$$\overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}\right) = -\frac{\|\overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}\right)\|}{\|\overrightarrow{r}\|}\overrightarrow{r}. \tag{D.39}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\overrightarrow{g_p} &= \overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right) - \overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}\right) \\ &= -\frac{\|\overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right)\|}{\|\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}\|}\left(\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right) + \frac{\|\overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}\right)\|}{\|\overrightarrow{r}\|}\overrightarrow{r}. \end{aligned} \tag{D.40}$$

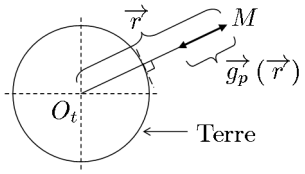


Fig. D.2 – Colinéarité des vecteurs de position et de pesanteur

Cas d'un déplacement horizontal :

Supposons que le point M subisse un léger déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ horizontal (cf. figure D.3). Cela implique que l'altitude n'a pas changée et que par conséquent : $\|\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}\| = \|\overrightarrow{r}\|$. En outre, on suppose le déplacement suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que $\|\overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right)\| \approx \|\overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}\right)\|$. La relation (D.40) devient alors :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{g_p} = -\frac{\|\overrightarrow{g_p}\left(\overrightarrow{r}\right)\|}{\|\overrightarrow{r}\|}\mathrm{d}\overrightarrow{r}. \tag{D.41}$$

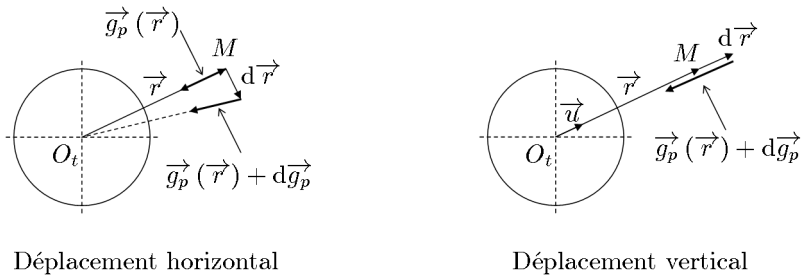


Fig. D.3 – Variation de pesanteur causée par un déplacement du point M

Cas d'un déplacement vertical :

Supposons que le point M subisse un léger déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ vertical, vers la terre ou le zénith (cf. figure D.3). Les vecteurs $\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{r}$ sont alors colinéaires et par conséquent :

$$\frac{\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}+\mathrm{d}\overrightarrow{r}\|} = \frac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|} = \overrightarrow{u} \quad \text{avec : } \|\overrightarrow{u}\| = 1. \tag{D.42}$$

La prise en compte de ce résultat modifie (D.40) comme suit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{g_p} = \{g_p\,(r\,\overrightarrow{u}) - g_p\,((r+\mathrm{d}r)\overrightarrow{u})\}\,\overrightarrow{u} = -\mathrm{d}g_p\,(r\,\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{u}. \tag{D.43}$$

où : $g_p\,(r\,\overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{g_p}\,(\overrightarrow{r})\|$ et $r = \|\overrightarrow{r}\|$. Comme la pesanteur est un champ newtonien, alors :

$$g_p\,(r\,\overrightarrow{u}) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 g_p\,(r_0\,\overrightarrow{u})\,. \tag{D.44}$$

En différenciant cette relation par rapport à r, il vient :

$$\mathrm{d}g_p\,(r\,\overrightarrow{u}) = -2\frac{r_0^2}{r^3}g_p\,(r_0\,\overrightarrow{u})\,\mathrm{d}r = -\frac{2}{r}g_p\,(r\,\overrightarrow{u})\,\mathrm{d}r, \tag{D.45}$$

ce qui, inséré dans (D.43), conduit à écrire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{g_p} = +\frac{2}{r}g_p\,(r\,\overrightarrow{u})\,\mathrm{d}r\,\overrightarrow{u}, \tag{D.46}$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{g_p} = +\frac{2}{r}g_p\,(\overrightarrow{r})\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}. \tag{D.47}$$

Considérons maintenant une base orthonormée directe $[a]$ telle que :

- $\overrightarrow{x_a}$ et $\overrightarrow{y_a}$ soient dans le plan horizontal au point M,
- $\overrightarrow{z_a}$ soit orienté vers le zénith.

Les résultats (D.41) et (D.47) permettent alors d'exprimer facilement les composantes dans $[a]$ du tenseur d'ordre 2 : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{g_p}\,(\overrightarrow{r})}{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}$. En effet :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{g_p}\,(\overrightarrow{r})}{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}\right]_{[a]} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_{pa}\,(\overrightarrow{r})}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_a} = \frac{\|\overrightarrow{g_p}\,(\overrightarrow{r})\|}{\|\overrightarrow{r}\|}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +2 \end{bmatrix}. \tag{D.48}$$

E

Extraction d'angles à partir d'une matrice de passage

E.1 Extraction de la latitude, la longitude et l'angle de mécanisation à partir de $\boldsymbol{T}_{wt}$

Par commodité, rappelons l'expression de la matrice de passage de $[t]$ vers $[w]$ (équation (3.10)) :

$$\boldsymbol{T}_{wt} = \left[\begin{array}{c:c:c} -\sin(L)\ \cos(G)\ \cos(\alpha) & -\sin(L)\ \sin(G)\ \cos(\alpha) & \cos(L)\ \cos(\alpha) \\ +\sin(G)\ \sin(\alpha) & -\cos(G)\ \sin(\alpha) & \\ \hdashline \sin(L)\ \cos(G)\ \sin(\alpha) & \sin(L)\ \sin(G)\ \sin(\alpha) & -\cos(L)\ \sin(\alpha) \\ +\sin(G)\ \cos(\alpha) & -\cos(G)\ \cos(\alpha) & \\ \hdashline \cos(L)\ \cos(G) & \cos(L)\ \sin(G) & \sin(L) \end{array}\right], \tag{E.1}$$

que l'on réécrit sous la forme synthétique suivante :

$$\boldsymbol{T}_{wt} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}. \tag{E.2}$$

On voit bien que $\boldsymbol{T}_{wt}$ dépend de trois angles qui sont la latitude L, la longitude G et l'angle de mécanisation α. Lorsque $-\pi/2 < L < +\pi/2$ ($\Leftrightarrow -1 < \tau_{33} < 1$), alors $\cos(L) \neq 0$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{32}}{\tau_{31}} &= \mathrm{tg}(G), \\ \frac{-\tau_{23}}{\tau_{13}} &= \mathrm{tg}(\alpha). \end{aligned} \tag{E.3}$$

On obtient alors directement les grandeurs désirées :

$$\begin{aligned} L &= \arcsin(\tau_{33}), \\ G &= \mathrm{arctg4}\left(\frac{\tau_{32}}{\tau_{31}}\right), \\ \alpha &= \mathrm{arctg4}\left(\frac{-\tau_{23}}{\tau_{13}}\right), \end{aligned} \tag{E.4}$$

où arctg4 représente la fonction arc-tangente 4 quadrants, définie comme suit :

$$\theta = \text{arctg4}\left(\frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = a \\ \sin(\theta) = b \end{array} \right. , \theta \in [-\pi; \pi[\,. \tag{E.5}$$

Dans le cas particulier où $L = \pm\, \pi/2$, l'expression de $\boldsymbol{T}_{wt}$ se simplifie comme suit :

$$\begin{array}{lcl} L = -\dfrac{\pi}{2} & : & \boldsymbol{T}_{wt} = \begin{bmatrix} \cos(G-\alpha) & \sin(G-\alpha) & 0 \\ \sin(G-\alpha) & -\cos(G-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ L = +\dfrac{\pi}{2} & : & \boldsymbol{T}_{wt} = \begin{bmatrix} -\cos(G+\alpha) & -\sin(G+\alpha) & 0 \\ \sin(G+\alpha) & -\cos(G+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{array} \tag{E.6}$$

On est alors incapable de distinguer la longitude G de l'angle de mécanisation α. Comme cette situation correspond à un porteur se situant au niveau du pôle nord ou sud, la longitude n'a alors aucun sens. On pose $G = 0$, ce qui permet d'obtenir trivialement α :

– si $L = -\pi/2$ ($\Leftrightarrow \tau_{33} = -1$) :

$$\alpha = \text{arctg4}\left(\frac{-\tau_{21}}{\tau_{11}}\right), \tag{E.7}$$

– si $L = +\pi/2$ ($\Leftrightarrow \tau_{33} = +1$) :

$$\alpha = \text{arctg4}\left(\frac{\tau_{21}}{-\tau_{11}}\right). \tag{E.8}$$

E.2 Extraction de l'attitude (cap, roulis, tangage) à partir de $\boldsymbol{T}_{g'b}$

Par commodité, rappelons l'expression de la matrice de passage de $[g']$ vers $[b]$ (équation (3.7)) :

$$\boldsymbol{T}_{g'b} = \left[\begin{array}{c:c:c} \cos(\psi)\ \cos(\theta) & -\sin(\psi)\ \cos(\varphi) & \sin(\psi)\ \sin(\varphi) \\ & +\cos(\psi)\ \sin(\theta)\ \sin(\varphi) & +\cos(\psi)\ \sin(\theta)\ \cos(\varphi) \\ \hdashline \sin(\psi)\ \cos(\theta) & \cos(\psi)\ \cos(\varphi) & -\cos(\psi)\ \sin(\varphi) \\ & +\sin(\psi)\ \sin(\theta)\ \sin(\varphi) & +\sin(\psi)\ \sin(\theta)\ \cos(\varphi) \\ \hdashline -\sin(\theta) & \cos(\theta)\ \sin(\varphi) & \cos(\theta)\ \cos(\varphi) \end{array}\right], \tag{E.9}$$

que l'on réécrit sous la forme synthétique suivante :

$$\boldsymbol{T}_{wt} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \tag{E.10}$$

On voit bien que $\boldsymbol{T}_{g'b}$ dépend de trois angles qui sont le cap ψ, le roulis φ et le tangage θ. Lorsque $-\pi/2 < \theta < +\pi/2$ ($\Leftrightarrow -1 < T_{31} < 1$), alors $\cos(\theta) \neq 0$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{array}{l} \dfrac{T_{21}}{T_{11}} = \text{tg}(\psi), \\ \dfrac{T_{32}}{T_{33}} = \text{tg}(\varphi). \end{array} \tag{E.11}$$

On obtient alors directement les grandeurs désirées :

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{arctg4}\left(\frac{T_{21}}{T_{11}}\right), \\ \theta &= -\arcsin(T_{31}), \\ \varphi &= \operatorname{arctg4}\left(\frac{T_{32}}{T_{33}}\right). \end{aligned} \tag{E.12}$$

Dans le cas particulier où $\theta = \pm\,\pi/2$, l'expression de $\boldsymbol{T}_{g'b}$ se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} \theta = -\frac{\pi}{2} \quad &: \quad \boldsymbol{T}_{g'b} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\psi+\varphi) & -\cos(\psi+\varphi) \\ 0 & \cos(\psi+\varphi) & -\sin(\psi+\varphi) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \theta = +\frac{\pi}{2} \quad &: \quad \boldsymbol{T}_{g'b} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\psi-\varphi) & \cos(\psi-\varphi) \\ 0 & \cos(\psi-\varphi) & \sin(\psi-\varphi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{E.13}$$

On est alors incapable de distinguer le cap ψ du roulis φ. Dans cette situation particulière, appelée *passage de boucle*, on suppose que le roulis est nul, mais cette hypothèse n'est pas nécessairement vérifiée. Toutefois, il est utile de préciser que cette supposition n'influence en rien l'entretien de $\boldsymbol{T}_{g'b}$, ce qui permettra de retrouver les vraies valeurs de l'attitude une fois le passage de boucle terminé. Ainsi :

– si $\theta = -\pi/2$ ($\Leftrightarrow T_{31} = +1$) :

$$\psi = \operatorname{arctg4}\left(\frac{-T_{23}}{-T_{13}}\right), \tag{E.14}$$

– si $\theta = +\pi/2$ ($\Leftrightarrow T_{31} = -1$) :

$$\psi = \operatorname{arctg4}\left(\frac{T_{23}}{T_{13}}\right). \tag{E.15}$$

F

Evolution de l'erreur de position en fonction de différentes sources d'erreur

Soit un porteur fixe à la surface de la terre. Nous allons étudier l'évolution des erreurs de navigation de ce véhicule en fonction de diverses sources d'erreurs. Pour ce faire, nous considérons le modèle vectoriel d'erreurs de navigation en Ψ pour lequel les dérivées sont exprimées dans le trièdre géographique local $[g]$. Ce modèle s'obtient en regroupant les relations (3.75), (3.76) et (3.79) en posant $[w] = [g]$:

$$\begin{aligned}
\delta \overset{g}{\overrightarrow{r}} &= -\overrightarrow{\Omega}^{g/t} \wedge \delta \overrightarrow{r} + \delta \overrightarrow{V}, \\
\delta \overset{g}{\overrightarrow{V}} &= \left(\frac{\partial \overrightarrow{g_p}}{\partial \overrightarrow{r}} \right) \delta \overrightarrow{r} - \left(\overrightarrow{\Omega}^{g/t} + 2\overrightarrow{\Omega} \right) \wedge \delta \overrightarrow{V} + \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{\Psi} + \overrightarrow{\varepsilon_a}, \\
\overset{g}{\overrightarrow{\Psi}} &= -\left(\overrightarrow{\Omega}^{g/t} + \overrightarrow{\Omega} \right) \wedge \overrightarrow{\Psi} - \overrightarrow{\varepsilon_g}.
\end{aligned} \tag{F.1}$$

En outre, le porteur étant fixe par rapport à la terre, alors $\overrightarrow{\Omega}^{g/t} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{g_p}$. En projetant les relations (F.1) dans $[g]$ et en tenant compte de ces simplifications, il vient :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\boldsymbol{r}}_g \\ \delta \dot{\boldsymbol{V}}_g \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p) & -2\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\Omega}_g) & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{g}_{p,g}) \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\Omega}_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{r}_g \\ \delta \boldsymbol{V}_g \\ \boldsymbol{\Psi}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{a,g} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_{r,g} \end{bmatrix}, \tag{F.2}$$

où :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}(g_p) = \frac{g_p}{R} \mathrm{diag}(-1, -1, +2). \tag{F.3}$$

En notant L la latitude (constante) du porteur, le développement de la relation (F.2) donne :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{r}_x \\ \delta\dot{r}_y \\ \delta\dot{r}_z \\ \hdashline \delta\dot{V}_x \\ \delta\dot{V}_y \\ \delta\dot{V}_z \\ \hdashline \dot{\Psi}_x \\ \dot{\Psi}_y \\ \dot{\Psi}_z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -g_p/R & 0 & 0 & 0 & -2\Omega\sin(L) & 0 & 0 & -g_p & 0 \\ 0 & -g_p/R & 0 & 2\Omega\sin(L) & 0 & -2\Omega\cos(L) & g_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2g_p/R & 0 & 2\Omega\cos(L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega\sin(L) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega\sin(L) & 0 & -\Omega\cos(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega\cos(L) & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \delta r_x \\ \delta r_y \\ \delta r_z \\ \hdashline \delta V_x \\ \delta V_y \\ \delta V_z \\ \hdashline \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline \varepsilon_{a,x} \\ \varepsilon_{a,y} \\ \varepsilon_{a,z} \\ \hdashline -\varepsilon_{g,x} \\ -\varepsilon_{g,y} \\ -\varepsilon_{g,z} \end{bmatrix}. \tag{F.4}$$

Ce modèle étant linéaire, le principe de superposition s'applique, à savoir que l'effet d'un ensemble d'erreurs équivaut à la somme des effets des erreurs considérées séparément. Ainsi, il est possible d'étudier de manière distincte l'effet sur la position de chaque source d'erreur, ce que nous ferons par la suite. Nous effectuerons tout d'abord une analyse court/moyen terme, laquelle consiste à supposer la terre fixe (c'est-à-dire $\Omega = 0$ dans le modèle (F.4)), avant de réaliser une étude sur du long terme.

Analyse à court/moyen terme (environ 1 heure) :

Le fait de supposer la terre fixe permet de découpler les équations différentielles régissant l'erreur de position sur chacun des trois axes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\dot{r}_x \\ \delta\dot{V}_x \\ \dot{\Psi}_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -g_p/R & 0 & -g_p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_x \\ \delta V_x \\ \Psi_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{a,x} \\ -\varepsilon_{g,y} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta\dot{r}_y \\ \delta\dot{V}_y \\ \dot{\Psi}_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -g_p/R & 0 & g_p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_y \\ \delta V_y \\ \Psi_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{a,y} \\ -\varepsilon_{g,x} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta\dot{r}_z \\ \delta\dot{V}_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2g_p/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_z \\ \delta V_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{a,z} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{F.5}$$

L'analyse des effets de chaque source d'erreur s'en trouve simplifiée. On constate notamment que l'erreur d'alignement en cap $\Psi_z(0)$ et la dérive gyroscopique verticale $\varepsilon_{g,z}$ n'impactent pas la position. Concernant les autres sources d'erreur, les équations de (F.5) conduisent directement aux résultats suivants [Isra 99] :

– Effet d'une erreur de position initiale horizontale seule ($\delta r_x(0) \neq 0$, $\delta r_y(0) \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \delta r_x(t) &= \delta r_x(0)\cos(\omega_s t) \approx \delta r_x(0) \quad \text{si } t \text{ faible}, \\ \delta r_y(t) &= \delta r_y(0)\cos(\omega_s t) \approx \delta r_y(0) \quad \text{si } t \text{ faible}, \end{aligned} \tag{F.6}$$

où $\omega_s = \sqrt{g_p/R}$ est la *pulsation de Schüler*, correspondant à des oscillations d'une période T_s valant :

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi\sqrt{R}}{\sqrt{g_p}} \approx 84,4\text{mn}. \tag{F.7}$$

Ces oscillations, appelées *oscillations de Schüler*, sont induites par la matrice de couplage de Schüler. Si cette dernière était nulle (ce qui reviendrait à poser $R \to +\infty$, c'est-à-dire supposer la terre plate), alors l'erreur de position horizontale resterait constante car $\omega_s = 0$. On constate alors que les résultats obtenus en supposant la terre plate et en considérant la terre ronde mais pour t faible sont équivalents, ce qui revient à dire que l'hypothèse de terre plate (ou d'absence de couplage de Schüler) n'est en réalité valable que pour t faible.

– Effet d'une erreur de position initiale verticale seule ($\delta r_z(0) \neq 0$) :

$$\delta r_z(t) = \delta r_z(0)\ \mathrm{ch}(\sqrt{2}\omega_s t) \approx \delta r_z(0) \quad \text{si } t \text{ faible.} \tag{F.8}$$

– Effet d'une erreur de vitesse initiale horizontale seule ($\delta V_x(0) \neq 0$, $\delta V_y(0) \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \delta r_x(t) &= \frac{\delta V_x(0)}{\omega_s}\sin(\omega_s t) \approx \delta V_x(0)t \quad \text{si } t \text{ faible,} \\ \delta r_y(t) &= \frac{\delta V_y(0)}{\omega_s}\sin(\omega_s t) \approx \delta V_y(0)t \quad \text{si } t \text{ faible.} \end{aligned} \tag{F.9}$$

– Effet d'une erreur de vitesse initiale verticale seule ($\delta V_z(0) \neq 0$) :

$$\delta r_z(t) = \frac{\delta V_z(0)}{\sqrt{2}\omega_s}\ \mathrm{sh}(\sqrt{2}\omega_s t) \approx \delta V_z(0)t \quad \text{si } t \text{ faible.} \tag{F.10}$$

– Effet d'un biais accélérométrique constant horizontal seul ($\varepsilon_{a,x} \neq 0$, $\varepsilon_{a,y} \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \delta r_x(t) &= \frac{\varepsilon_{a,x}}{\omega_s^2}\left(1-\cos(\omega_s t)\right) \approx \frac{1}{2}\varepsilon_{a,x}t^2 \quad \text{si } t \text{ faible,} \\ \delta r_y(t) &= \frac{\varepsilon_{a,y}}{\omega_s^2}\left(1-\cos(\omega_s t)\right) \approx \frac{1}{2}\varepsilon_{a,y}t^2 \quad \text{si } t \text{ faible.} \end{aligned} \tag{F.11}$$

– Effet d'un biais accélérométrique constant vertical seul ($\varepsilon_{a,z} \neq 0$) :

$$\delta r_z(t) = \frac{\varepsilon_{a,z}}{2\omega_s^2}\left(-1+\mathrm{ch}(\sqrt{2}\omega_s t)\right) \approx \frac{1}{2}\varepsilon_{a,z}t^2 \quad \text{si } t \text{ faible.} \tag{F.12}$$

– Effet d'une erreur d'alignement horizontal seule ($\Psi_x(0) \neq 0$, $\Psi_y(0) \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \delta r_x(t) &= -\frac{g_p\Psi_y(0)}{\omega_s^2}\left(1-\cos(\omega_s t)\right) \approx -\frac{1}{2}g_p\Psi_y(0)t^2 \quad \text{si } t \text{ faible,} \\ \delta r_y(t) &= +\frac{g_p\Psi_x(0)}{\omega_s^2}\left(1-\cos(\omega_s t)\right) \approx +\frac{1}{2}g_p\Psi_x(0)t^2 \quad \text{si } t \text{ faible.} \end{aligned} \tag{F.13}$$

– Effet d'une dérive gyroscopique constante horizontale seule ($\varepsilon_{g,x}(0) \neq 0$, $\varepsilon_{g,y}(0) \neq 0$) :

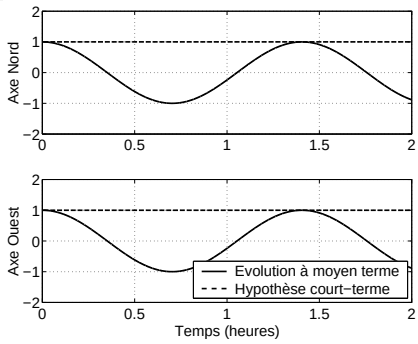
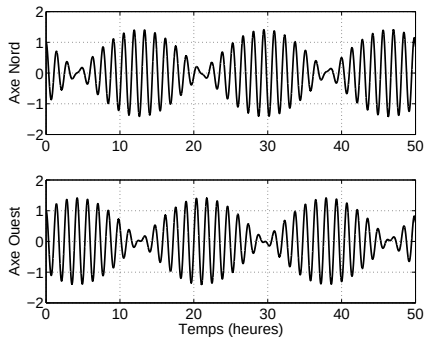
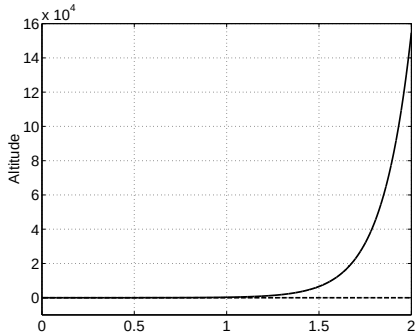
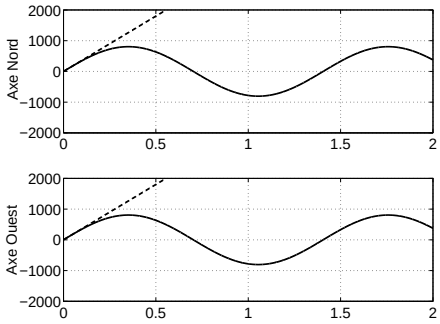
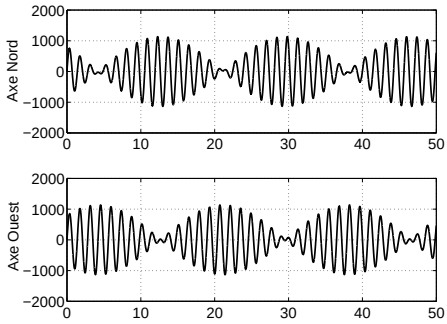
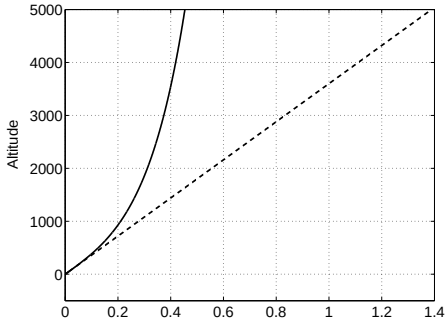
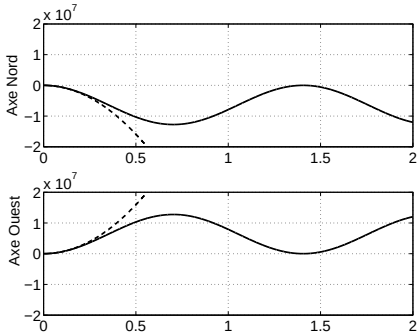
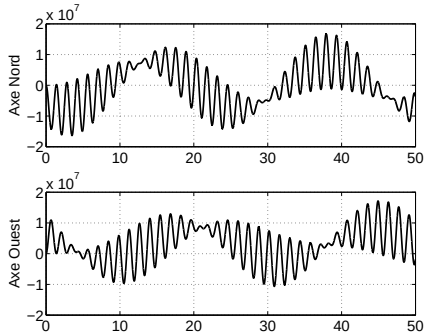
$$\begin{aligned} \delta r_x(t) &= +R\ \varepsilon_{g,y}\left(t-\frac{\sin(\omega_s t)}{\omega_s}\right) \approx +\frac{1}{6}g_p\varepsilon_{g,y}t^3 \quad \text{si } t \text{ faible,} \\ \delta r_y(t) &= -R\ \varepsilon_{g,x}\left(t-\frac{\sin(\omega_s t)}{\omega_s}\right) \approx -\frac{1}{6}g_p\varepsilon_{g,x}t^3 \quad \text{si } t \text{ faible.} \end{aligned} \tag{F.14}$$

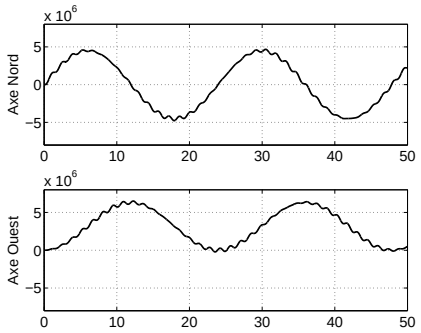
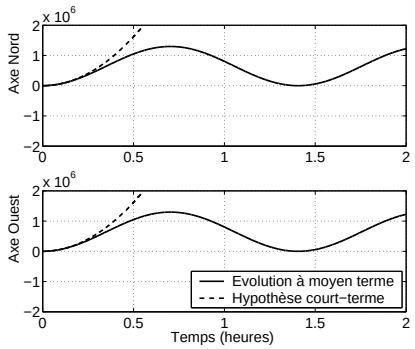
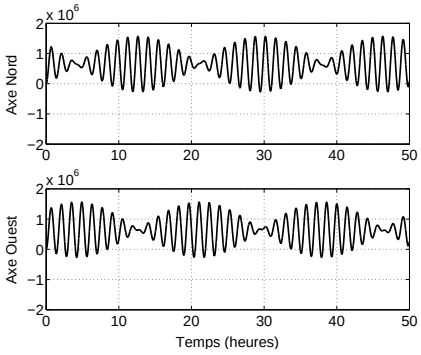
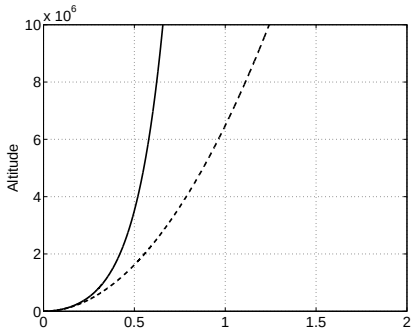
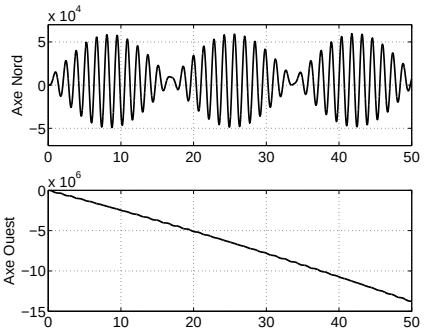
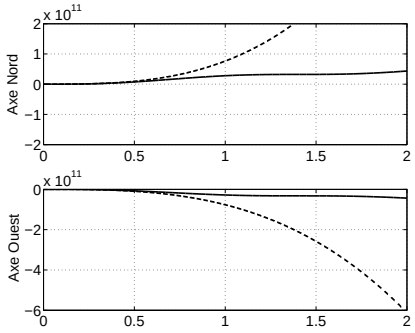
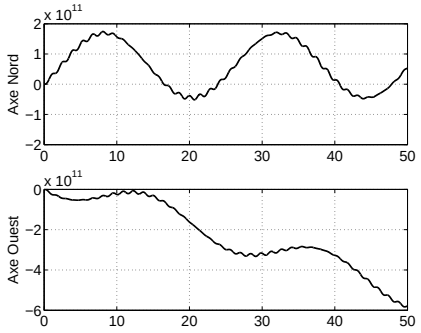
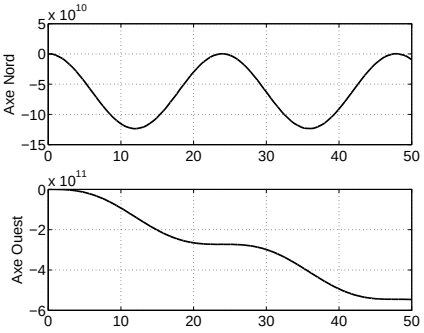
Les conclusions que l'on peut en tirer sont que :

- le couplage de Schüler permet d'éviter la divergence de l'erreur de position horizontale, puisque par exemple, une erreur de vitesse initiale engendre un comportement oscillatoire de l'erreur de position tandis que sans couplage, cette l'erreur de position croîtrait linéairement.
- le couplage de Schüler engendre une divergence de l'erreur d'altitude, puisque cette grandeur évolue selon un cosinus ou sinus hyperbolique du temps, c'est-à-dire de manière exponentielle.
- un biais accélérométrique horizontal et une erreur d'alignement horizontal sont indissociables car ils produisent le même effet sur l'erreur de position (évolution quadratique à court-terme et sinusoïdale à moyen terme). Cela peut causer quelques soucis si l'on tente d'estimer les erreurs de navigation à partir d'une mesure de l'erreur de position et de l'emploi du modèle (F.5).
- de même, une dérive gyroscopique horizontale et une erreur d'alignement en cap sont inobservables car ils n'ont aucun effet sur l'erreur de position.

A noter que l'étude réalisée ci-dessus reste également valable pour un véhicule mobile par rapport à la terre mais accélérant peu, de sorte que l'on puisse supposer que $\overrightarrow{f} \approx -\overrightarrow{g_p}$ et $\overrightarrow{\rho} \approx \overrightarrow{0}$. Pour une analyse à long terme, la situation est nettement plus compliquée car le fait que $\Omega \neq 0$ induit un couplage entre les erreurs suivant les différents axes. La solution la plus simple est alors de simuler la modèle (F.4), en veillant à perpétuellement recaler l'erreur d'altitude $\delta r_z(t)$ à 0 afin que cette grandeur ne diverge pas et n'affecte par conséquent pas les erreurs horizontales. Les résultats obtenus sont regroupés dans un tableau réparti sur les deux pages suivantes. Nous pouvons constater que :

- les oscillations de Schüler relatives à l'erreur de position horizontale générée par une erreur initiale de position horizontale, de vitesse horizontale, d'alignement horizontal ou un biais accélérométrique horizontal sont modulées par des oscillations de plus grande période. Ces dernières, induites par la rotation de la terre sur elle-même, sont appelées *oscillations 24 heures*. On notera toutefois que sur les courbes présentées, la période T de ces oscillations est en réalité d'environ $T = 34$ h. Ceci est du au fait que $T = 24/\sin(L)$ et que la latitude choisie est de $L = 45$ deg.
- L'erreur d'alignement en cap et la dérive gyroscopique verticale produisent, grâce à la rotation terrestre, un effet sur l'erreur de position. Cela se traduit pas des oscillations de période 24 h.
- L'erreur de position nord est toujours bornée, ce qui n'est pas le cas de l'erreur de position ouest (notamment lorsqu'elle est provoquée par une dérive gyroscopique). Ce phénomène s'explique [Isra 99] par le fait que le vecteur de dérive gyroscopique $\overrightarrow{\varepsilon_g}$ (par exemple) présente une composante suivant l'axe de la terre $(O_t, \overrightarrow{z_t})$ et une autre dans le plan équatorial. Cette dernière a, sur le long terme, une moyenne nulle grâce à la rotation de la terre sur elle-même (ce qui produit les oscillation 24 heures). Ce n'est pas le cas de la composante dans l'axe terrestre qui, si sa valeur croît au cours du temps (c'est notamment le cas lorsqu'elle est provoquée par une dérive gyroscopique) engendre une dérive de la position vers l'est.

	court/moyen terme	long terme
Erreur de position initiale horizontale : $\delta r_x(0) = 1$ m, $\delta r_y(0) = 1$ m.		
Erreur de position initiale verticale : $\delta r_z(0) = 1$ m.		Divergence de l'altitude. Faible influence sur l'erreur de position horizontale.
Erreur de vitesse initiale horizontale : $\delta V_x(0) = 1$ m/s, $\delta V_y(0) = 1$ m/s.		
Erreur de vitesse initiale verticale : $\delta V_z(0) = 1$ m/s.		Divergence de l'altitude. Faible influence sur l'erreur de position horizontale.
Erreur d'alignement horizontal : $\Psi_x(0) = 1$ rad, $\Psi_y(0) = 1$ rad.		

	court/moyen terme	long terme
Erreur d'alignement du cap : $\Psi_z(0) = 1$ rad.	Aucun effet.	
Biais accélérométrique horizontal : $\varepsilon_{a,x}(0) = 1$ m/s^2, $\varepsilon_{a,y}(0) = 1$ m/s^2.		
Biais accélérométrique vertical : $\varepsilon_{a,z}(0) = 1$ m/s^2.		
Dérive gyroscopique horizontale : $\varepsilon_{g,x}(0) = 1$ rad/s, $\varepsilon_{g,y}(0) = 1$ rad/s.		
Dérive gyroscopique verticale : $\varepsilon_{g,z}(0) = 1$ rad/s.	Aucun effet.	

G

Quelques types de bruits

G.1 Bruit blanc

Un bruit blanc $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un signal de densité spectrale de puissance q constante, ce qui revient à dire que la puissance transportée par un tel signal est équitablement répartie sur les hautes et basses fréquences. En supposant que $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ soit stationnaire jusqu'à l'ordre 2 (c'est-à-dire que les moments d'ordre 1 et 2 de $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont constants), le théorème de Wiener-Khintchine atteste que la fonction d'auto-corrélation $\mathcal{R}_{ww}(\tau)$ de $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est la transformée de Fourier inverse de sa densité spectrale de puissance $\mathcal{S}_{ww}(f)$:

$$\mathcal{R}_{ww}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_{ww}(f) \exp\left(+2\pi j f \tau\right) \mathrm{d}f, \tag{G.1}$$

où :

$$\mathcal{R}_{ww}(\tau) = \mathbb{E}\left(W(t)W(t-\tau)\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{G.2}$$

Du fait que $\mathcal{S}_{ww}(f) = q$ est constante, il vient :

$$\mathcal{R}_{ww}(\tau) = q\delta(0). \tag{G.3}$$

Par conséquent, dans le domaine temporel, un bruit blanc s'interprète comme un signal dont la valeur à l'instant t est complètement décorrélée de celle à un instant $t+\tau$ quelconque ($\tau \in \mathbb{R}^*$). Il s'agit en fait d'un processus purement aléatoire, illustré sur la figure G.1. q est généralement appelé *puissance du bruit blanc* [Isra 05]. Du fait que, par définition :

$$\sigma_w^2 = \mathbb{E}\left(W^2(t)\right) = \mathcal{R}_{ww}(0), \tag{G.4}$$

on identifie facilement : $q = \sigma_w^2$. Par ailleurs, en pratique, le bruit blanc parfait n'existe pas puisqu'il est physiquement inconcevable qu'un signal transporte de la puissance à des fréquences infinies. En outre, le bruit blanc n'est également appréhensible qu'en temps discret du fait qu'un signal physique ne peut varier infiniment rapidement. Par conséquent, il ne prend un sens que si l'on considère sa moyenne entre deux instants distants de Δt [Isra 95] :

$$W(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} U(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{G.5}$$

où $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est le bruit blanc "théorique" à l'origine du bruit blanc "physique" $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. On montre ainsi que, en notant $[U]$ l'unité de $[U]$ et $[t]$ l'unité du temps, il vient (cf. section suivante pour une démonstration) :

$$[U] = [W]\sqrt{[t]}. \tag{G.6}$$

Considérons par exemple un bruit blanc physique entachant une mesure d'angle ($[W] = \text{deg}$) réalisée de manière échantillonnée. Le bruit blanc théorique s'exprimera en $\text{deg}\sqrt{\text{h}}$ ou $\text{deg}/\sqrt{\text{Hz}}$.

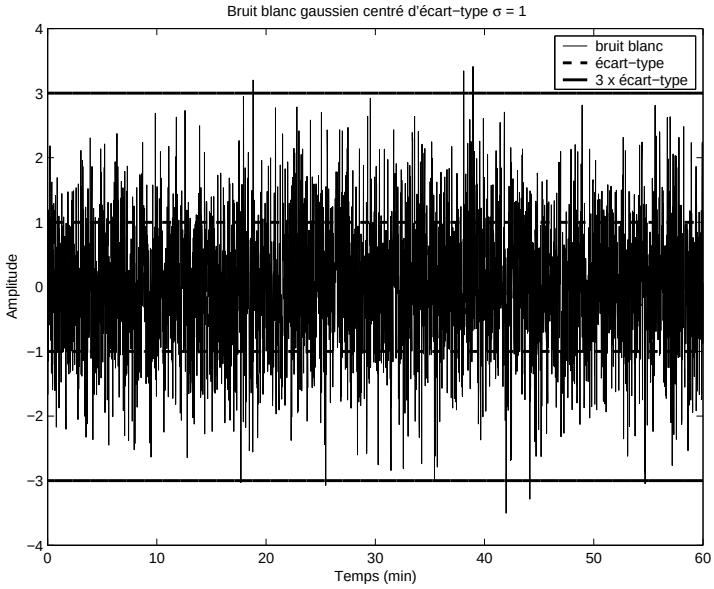


Fig. G.1 – Exemple de bruit blanc

G.2 Cheminement aléatoire

Soit $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un bruit blanc stationnaire centré et d'écart-type σ_u. Un cheminement aléatoire $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ généré par $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est par définition :

$$W(t) = W(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{G.7}$$

$\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est vulgairement appelé *marche au hasard* ou *random walk* (dénomination anglo-saxone). Les propriétés d'un cheminement aléatoire sont les suivantes :

– c'est un processus centré :

$$\mathbb{E}\left(W(t)\right) = \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{t} U(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(U(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \int_{t_0}^{t} 0\mathrm{d}\tau = 0, \tag{G.8}$$

– son écart-type σ_w croît suivant une racine carrée du temps :

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2(t) &= \mathbb{E}\left(\{W(t)-\mathbb{E}\left(W(t)\right)\}\{W(t)-\mathbb{E}\left(W(t)\right)\}^T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(W(t)W^T(t)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(W(t_0)+\int_{t_0}^{t}U(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\left(W(t_0)+\int_{t_0}^{t}U(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(W(t_0)W^T(t_0)\right)+\mathbb{E}\left(\left(\int_{t_0}^{t}U(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{t_0}^{t}U(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^T\right) \\
&= \sigma_w^2(t_0)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}\left(U(\tau)U^T(\theta)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau \qquad \text{(G.9)} \\
&= \sigma_w^2(t_0)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\sigma_u^2\delta(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau \\
&= \sigma_w^2(t_0)+\sigma_u^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\delta(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau \\
&= \sigma_w^2(t_0)+\sigma_u^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau \\
&= \sigma_w^2(t_0)+\sigma_u^2(t-t_0).
\end{aligned}$$

Par conséquent, un cheminement aléatoire est un processus non stationnaire, illustré sur la figure G.2. En outre, si l'on pose $t_0 = t - \Delta t$ où Δt est une période d'échantillonnage, il vient :

$$\begin{aligned}
W(t) &= W(t_0)+V(t), \\
V(t) &= \int_{t-\Delta t}^{t}U(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad \text{(G.10)} \\
\sigma_w^2(t) &= \sigma_w^2(t-\Delta t)+\sigma_u^2\Delta t.
\end{aligned}$$

Cela permet d'exprimer une marche au hasard en temps discret. $\{V(k\Delta t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une séquence blanche (car $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est blanc et les intégrales calculées sur des intervalles de temps adjacents) discrète d'écart-type $\sigma_u\sqrt{\Delta t}$. Par conséquent :

$$[U] = [W]/\sqrt{[\mathrm{t}]}. \qquad \text{(G.11)}$$

Si par exemple, $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un cheminement aléatoire sur un angle ($[W] = \mathrm{deg}$), l'unité du bruit blanc $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ générant cette marche au hasard sera des $\mathrm{deg}/\sqrt{\mathrm{h}}$.

G.3 Processus markovien à l'ordre 1

Un bruit markovien à l'ordre 1 $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus stationnaire centré et gaussien, d'écart-type σ_w, régit par l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}W(t)+U(t), \qquad \text{(G.12)}$$

où τ est le temps d'auto-corrélation de $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $U(t)\sim\mathcal{N}(0,\sigma_u^2)$ le bruit blanc excitateur de $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Le lien entre σ_w et σ_u est obtenu à l'aide de l'équation de Lyapunov [Alaz 00] :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_w^2}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\sigma_w^2-\sigma_w^2\frac{1}{\tau}+\sigma_u^2, \qquad \text{(G.13)}$$

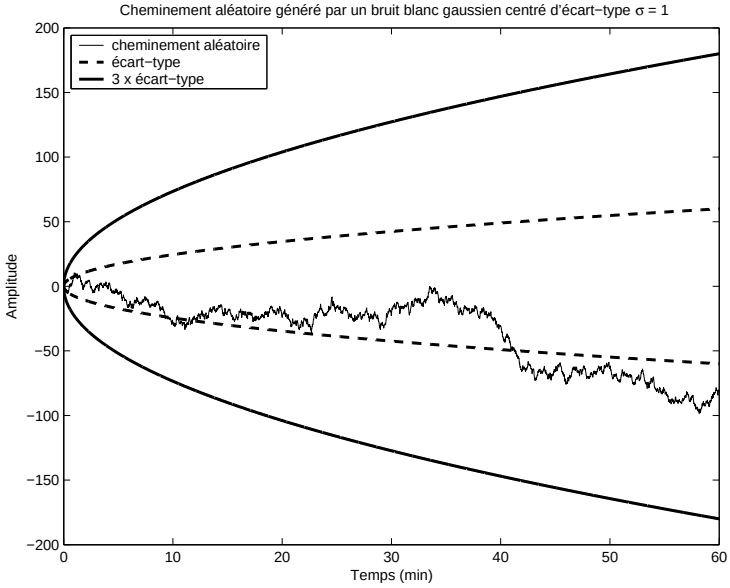


FIG. G.2 – Exemple de cheminement aléatoire

soit, grâce à l'hypothèse de stationnarité :

$$\sigma_w^2 = \frac{\sigma_u^2 \tau}{2} = \frac{q\tau}{2}, \tag{G.14}$$

q étant la puissance du bruit blanc excitateur.

Nous allons maintenant chercher à résoudre l'équation différentielle (G.12), dans le but d'obtenir une expression à temps discret pour $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Il vient directement :

$$W(t) = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) W(t-\Delta t) + \underbrace{\int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) U(\theta)\mathrm{d}\theta}_{=V(t)}. \tag{G.15}$$

Du fait que $U(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_u^2\right)$, alors $V(t)$ suit également une loi normale centrée[54] et d'écart-type constant σ_v. Calculons σ_v :

[54]Pour s'en convaincre, il suffit de considérer qu'une intégrale est une somme continue, et que la somme de 2 gaussiennes donne également une gaussienne.

$$\begin{aligned}
\sigma_v^2 &= \mathbb{E}\left(V(t)V^T(t)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) U(\theta)\mathrm{d}\theta \int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\alpha}{\tau}\right) U(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) \int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\alpha}{\tau}\right) U(\theta)U(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) \int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\alpha}{\tau}\right) \mathbb{E}\left(U(\theta)U(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta \\
&= \sigma_u^2 \int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) \underbrace{\int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-\frac{t-\alpha}{\tau}\right) \delta(\theta-\alpha)\mathrm{d}\alpha}_{=\exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right)} \mathrm{d}\theta \\
&= \sigma_u^2 \int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(-2\frac{t-\theta}{\tau}\right) \mathrm{d}\theta.
\end{aligned} \tag{G.16}$$

Posons $\alpha = \theta - t$. Alors $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\theta$ et :

$$\begin{aligned}
\sigma_v^2 &= \sigma_u^2 \int_{t-\Delta t}^{t} \exp\left(\frac{2\alpha}{\tau}\right) \mathrm{d}\alpha \\
\sigma_v^2 &= \frac{2}{\tau}\sigma_u^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{2\Delta t}{\tau}\right)\right),
\end{aligned} \tag{G.17}$$

ce qui donne, à l'aide de (G.14) :

$$\sigma_v = \sigma_w \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2\Delta t}{\tau}\right)}. \tag{G.18}$$

Ainsi, pour résumer :

$$\begin{cases} W(t) = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) W(t-\Delta t) + V(t) \\ V(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_w \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2\Delta t}{\tau}\right)}\right) \end{cases}. \tag{G.19}$$

Les équations de (G.19) permettent d'interpréter le comportement de $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ en fonction de la période d'auto-corrélation τ :

- si $\tau \to 0$, alors $W(t) \approx V(t)$: le processus markovien se comporte comme un bruit blanc,
- si $\tau \to +\infty$, alors $W(t) \approx W(t-\Delta t)+V(t)$ avec $\sigma_v \approx 0$, c'est-à-dire que $W(t) \approx W(t-\Delta t)$: le processus markovien se comporte comme un biais constant.

D'une manière générale, τ détermine la *stabilité temporelle* de $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Cela se vérifie en calculant la fonction d'auto-corrélation de $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ww}(\alpha) &= \mathbb{E}\left(W(t)W(t-\alpha)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\exp\left(-\frac{\alpha}{\tau}\right) W(t-\alpha) + \int_{t-\alpha}^{t} \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) U(\theta)\mathrm{d}\theta\right) W(t-\alpha)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha}{\tau}\right) \mathbb{E}\left(W(t-\alpha)W(t-\alpha)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha}{\tau}\right) \sigma_w^2,
\end{aligned} \tag{G.20}$$

car $W(t)$ est indépendant de $U(\theta)$ pour $\theta > t$. Ainsi, on constate que pour une valeur donnée de α, plus τ est élevé, plus la ressemblance entre $W(t)$ et $W(t-\alpha)$ est importante (cf. figure G.3). Par ailleurs, du fait que la fonction d'auto-corrélation d'un processus markovien à l'ordre 1 soit de la forme exponentielle, ces derniers sont parfois appelés *bruits exponentiels*.

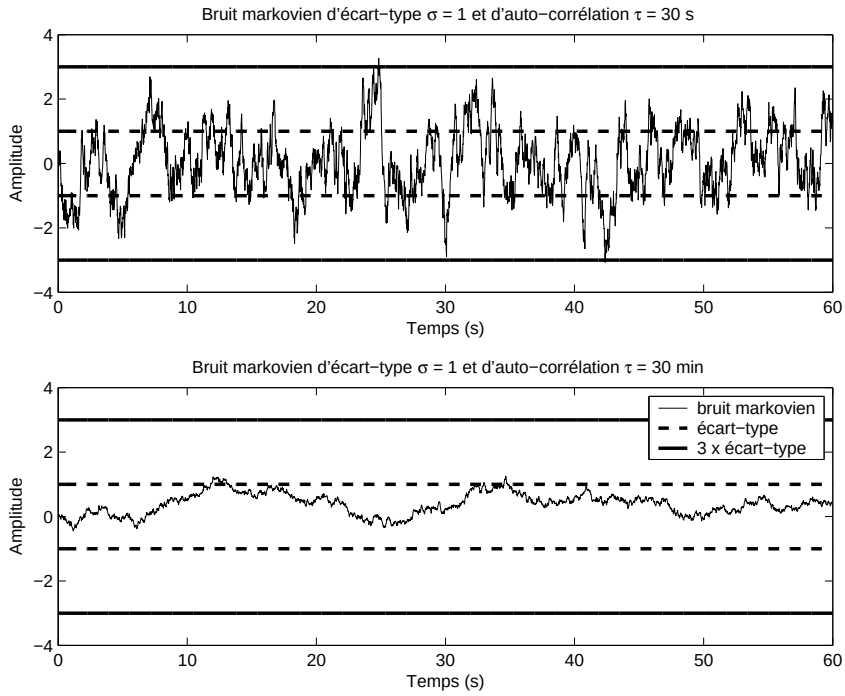


FIG. G.3 – Exemple de processus markoviens à l'ordre 1 faiblement et fortement auto-corrélés

H

La variance d'Allan

Du nom de son inventeur David W. Allan [Alla 66], la variance d'Allan a été initialement conçue dans le but de caractériser dans le domaine temporel les variations de fréquence et de phase d'oscillateurs de précision tels que ceux d'une horloge atomique. Le concept de stabilité fréquentielle a ensuite été défini de manière plus précise dans [Barn 71], avant d'être employé dans d'autres domaines tels que la caractérisation de signaux issus de senseurs inertiels par exemple [Peti 96].

H.1 Définition de la variance d'Allan [Isra 95]

Soit $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un signal aléatoire à temps continu. Le but recherché est de caractériser la stabilité temporelle de ce signal, c'est-à-dire sa vitesse de variation. Une première idée pourrait être de quantifier le niveau de variation de X entre deux instants séparés de $\theta \in \mathbb{R}^*$. Une façon de faire est de calculer l'indicateur suivant :

$$V(\theta) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left((X(t+\theta) - X(t))^2\right). \tag{H.1}$$

Malheureusement, cette caractérisation n'est en pratique pas satisfaisante. En effet, $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ peut être considéré comme une somme de plusieurs processus aléatoires auto-corrélés, chacun de ces signaux variant plus ou moins rapidement dans le temps. Pour de faibles laps de temps θ, il est clair que ce sont les composantes court-terme[55] de $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ qui vont affecter $V(\theta)$, ce qui est effectivement le but recherché. Par contre, pour des intervalles de temps θ élevés, les composantes long-terme vont prendre de l'importance, mais l'influence des perturbations court-terme demeurera. Ceci est d'autant plus dommageable lorsque l'amplitude des bruits court-terme est importante devant celles des processus long-terme.

Afin de pallier cet inconvénient, la variance d'Allan reprend ce concept mais avec une formulation un peu plus élaborée. Elle consiste à remplacer dans (H.1) la grandeur instantanée $X(t)$ par la moyenne $\overline{X}(t)$ de X sur l'intervalle $\left[t - \frac{\theta}{2}\ ;\ t + \frac{\theta}{2}\right]$ (figure H.1). La définition de la variance

[55] On appelle bruit *court-terme* un signal dont les variations sont rapides, le cas extrême étant le bruit blanc. A l'opposé, un bruit *long terme* est un signal dont les variations sont lentes, le cas extrême étant un biais déterministe.

d'Allan est alors :

$$V(\theta) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\left(\overline{X}(t+\theta) - \overline{X}(t)\right)^2\right), \tag{H.2}$$

où $\overline{X}(t)$ représente la moyenne de X sur l'intervalle $\left[t - \frac{\theta}{2}\ ;\ t + \frac{\theta}{2}\right]$.

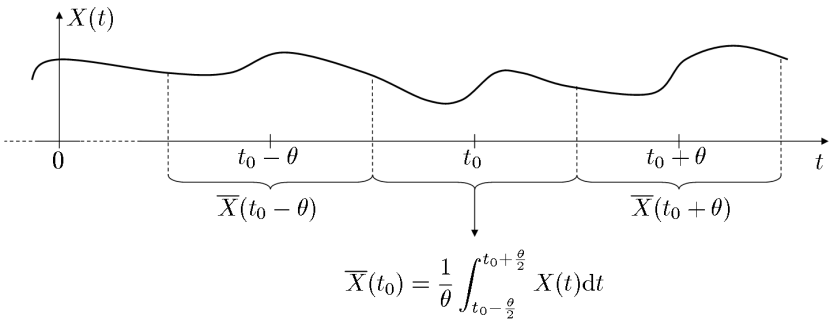


Fig. H.1 – Principe du calcul de la variance d'Allan

En analysant la relation (H.2), on constate que :

- si θ est faible, alors les bruits long-terme n'influencent pas le calcul de $V(\theta)$ puisqu'ils varient peu sur l'intervalle $\left[t - \frac{\theta}{2}\ ;\ t + \frac{3\theta}{2}\right]$: $V(\theta)$ caractérise alors les processus court-terme,
- si θ est grand, alors les réalisations des bruits court-terme ont tendance à se moyenner sur les intervalles de longueur θ et par conséquent, ils n'influent plus sur le calcul de $V(\theta)$. A l'opposé, les processus long-terme varient de telle sorte que leurs moyennes sur ces mêmes intervalles soient non nulles mais toutefois différentes entre deux intervalles contigus : $V(\theta)$ caractérise alors les processus long-terme.

La définition de la variance d'Allan (H.2) correspond donc à l'objectif recherché. On défini également l'écart-type d'Allan comme étant la racine carrée de la variance d'Allan.

H.2 Variance d'Allan de quelques types de bruits

Les résultats sont ici présentés sans démonstration. Le lecteur intéressé pourra trouver dans [Barn 71] les éléments nécessaires à une étude plus approfondie.

Variance d'Allan d'un bruit blanc :

Pour un bruit blanc d'écart-type σ, ou de puissance $q = \sigma^2$ (figure H.2) :

$$V(\theta) = \frac{q}{\theta}. \tag{H.3}$$

Variance d'Allan d'un cheminement aléatoire :

Pour un cheminement aléatoire généré par un bruit blanc d'écart-type σ, ou de puissance $q = \sigma^2$ (figure H.3) :

$$V(\theta) = \frac{q\theta}{3}. \tag{H.4}$$

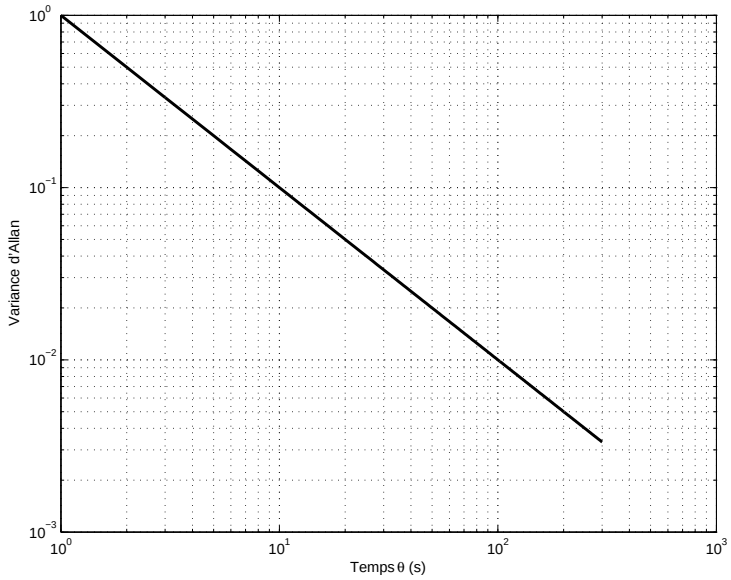


FIG. H.2 – Variance d'Allan d'un bruit blanc en échelle logarithmique, avec $\sigma = 1$

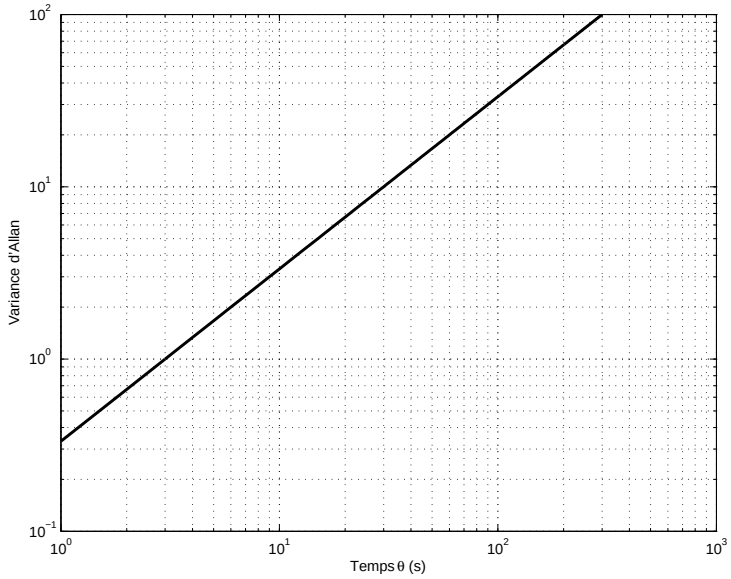


FIG. H.3 – Variance d'Allan d'un cheminement aléatoire en échelle logarithmique, avec $\sigma = 1$

Variance d'Allan d'un bruit markovien à l'ordre 1 :

Pour un processus markovien à l'ordre 1 d'écart-type σ et de période d'autocorrélation τ (figure H.4) :

$$\begin{aligned} V(\theta) &= 2\sigma^2 \frac{\tau}{\theta}\left(1 - \frac{\tau}{2\theta}\left\{3 - 4\exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right) + \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau}\right)\right\}\right) \\ &= \frac{2\sigma^2}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\left\{3 - 4\exp\left(-\alpha\right) + \exp\left(-2\alpha\right)\right\}\right), \end{aligned} \tag{H.5}$$

où $\alpha = \theta/\tau$ représente un temps réduit.

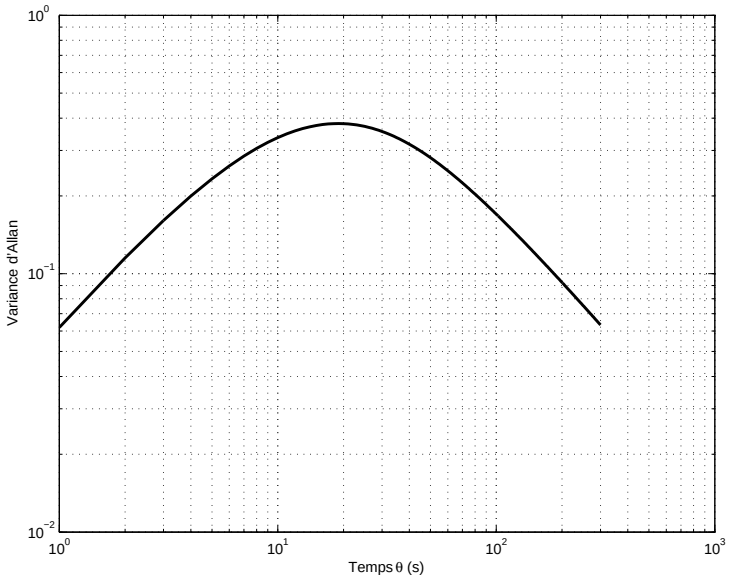


FIG. H.4 – Variance d'Allan d'un processus markovien à l'ordre 1 en échelle logarithmique, avec $\sigma = 1$ et $\tau = 10$s

Quelques remarques à propos de la variance d'Allan d'un processus markovien à l'ordre 1 :
- la courbe représentative d'un tel processus présente un maximum pour $\alpha \approx 1,89$, soit $\theta \approx 1,89\tau$,
- ce maximum vaut $0.38\sigma^2$,
- par conséquent, augmenter τ revient à décaler la courbe de la figure H.4 vers la droite,
- de même, augmenter σ revient à décaler la courbe de la figure H.4 vers le haut,
- réciproquement, agir sur σ (respectivement τ) n'engendre qu'un déplacement horizontal (respectivement vertical),
- pour $\theta << \tau$, le processus markovien se comporte comme un cheminement aléatoire. $V(\theta)$ est alors faible car la ressemblance entre $X(t)$ et $X(t+\theta)$ pour un signal X à un instant t quelconque est grande.
- pour $\theta >> \tau$, le processus markovien se comporte comme un bruit blanc. $V(\theta)$ est alors faible car les réalisations de ce processus dans le temps ont tendance à se moyenner.

Tous ces points sont illustrés sur la figure H.5.

Variance d'Allan d'un bruit de flicker :

Un *bruit de flicker* est l'autre dénomination de *bruit rose*[56] Un tel signal présente une variance d'Allan constante (indépendante de θ), parfois qualifiée de *variance d'Allan plate.* D'un point de vue temporel, une variance d'Allan plate indique que le signal en question peut aussi bien varier lentement que rapidement, c'est-à-dire que son comportement peut aussi bien être proche

[56]Un bruit rose est un bruit dont la densité spectrale est inversement proportionnelle à la fréquence. Le terme "rose" est ici employé par opposition au bruit "blanc", dont la densité spectrale de puissance est identique quel que soit la fréquence. En faisant l'analogie avec le spectre de la lumière, une amplitude identique pour toutes les fréquences correspond à un mélange homogène de toutes les couleurs et donc une résultante blanche, d'où est tiré le nom de "bruit blanc". *A contrario*, une densité spectrale de puissance inversement proportionnelle à la fréquence donne beaucoup de rouge pour peu de bleu, ce qui résulte en une couleur rose (d'où le nom de "bruit rose").

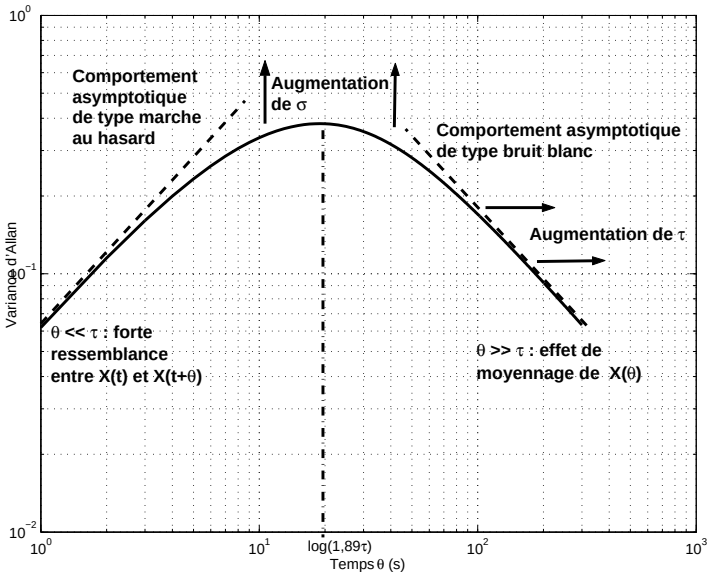


FIG. H.5 – Caractéristiques de la variance d'Allan d'un processus markovien à l'ordre 1

de celui d'un bruit blanc que celui d'un biais. D'une manière générale, on ne connaît pas de modèle temporel exact gérant l'évolution d'un signal de variance d'Allan plate. S'il est souhaité construire un tel modèle, il est alors nécessaire d'effectuer des approximations.

I

Modèle de poursuite de cible

Soit un véhicule modélisé par un point M et se déplaçant dans l'espace, et O un point fixe par rapport à la terre. Notons $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur de position du véhicule et $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{\gamma}$ la vitesse et l'accélération respectives du véhicule relativement à la terre. Par définition :

$$\overrightarrow{V}(t) = \overset{a}{\overrightarrow{r}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]}, \qquad \overrightarrow{\gamma}(t) = \overset{aa}{\overrightarrow{r}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{[a]}, \tag{I.1}$$

où $[a] = (O, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ est un repère orthonormé direct fixe par rapport à la terre. En projetant ces relations vectorielles dans le trièdre $[a]$, il vient :

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a(t) = \boldsymbol{V}_a(t), \qquad \dot{\boldsymbol{V}}_a(t) = \boldsymbol{\gamma}_a(t). \tag{I.2}$$

Si le déplacement de M est suffisamment faible, de sorte que la surface de la terre puisse être considérée plane, $[a]$ peut alors être choisi de manière à ce que $\overrightarrow{x_a}$ et $\overrightarrow{y_a}$ soient parallèles à la surface terrestre et $\overrightarrow{z_a}$ soit normal à la terre.

Le comportement du véhicule est considéré "hostile", c'est-à-dire que son accélération est inconnue et variable. Le but recherché est de reconstruire la trajectoire du point M dans l'espace, ce qui revient à dire que l'on souhaite calculer à chaque instant la position du véhicule, décrite par la grandeur $\boldsymbol{r}_a$. Pour ce faire, un dispositif adéquat (GPS, système de radars, etc.) permet de mesurer de manière bruitée et échantillonnée dans le temps la position du porteur. Autrement dit :

$$\boldsymbol{y}_a(t) = \boldsymbol{r}_a(t) + \boldsymbol{v}_a(t), \tag{I.3}$$

où $\boldsymbol{y}_a(t)$ est l'observation effectuée à l'instant t et $\boldsymbol{v}_a(t)$ le bruit (additif) entachant cette mesure. Une difficulté supplémentaire intervient en considérant que le dispositif de mesures ne permet pas d'observer en permanence la position du véhicule. La tâche considérée se révèle ardue, compte tenu du fait que l'accélération est inconnue. Il s'avère alors nécessaire de modéliser de manière dynamique $\boldsymbol{\gamma}_a$, en considérant par exemple cette grandeur comme étant un processus auto-corrélé à l'ordre 1 :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_a(t) = \boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{\gamma}_a(t), \boldsymbol{\eta}_a(t), t), \tag{I.4}$$

où $\boldsymbol{f}_a$ est une fonction à déterminer et $\{\boldsymbol{\eta}_a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un bruit blanc. Par exemple, Singer a proposé dans [Sing 70] que $\boldsymbol{\gamma}_a$ soit décrite par un processus markovien à l'ordre 1 (cf. ann. G), ce qui, généralisé à un problème en 3 dimensions, donne :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_a(t) = -\boldsymbol{T}_a\boldsymbol{\gamma}_a(t) + \boldsymbol{\eta}_a(t), \tag{I.5}$$

où $\boldsymbol{T}_a = \mathrm{diag}\,(1/\tau_x, 1/\tau_y, 1/\tau_z)$ est la matrice contenant les différents temps d'auto-corrélations $\tau_\bullet$, ces paramètres étant à régler. En particulier, nous poserons $\boldsymbol{T}_a = \mathbf{0}_{3\times3}$ pour modéliser l'accélération par un bruit blanc (ce qui suggère que cette grandeur peut varier infiniment rapidement, l'amplitude des variations étant déterminée par l'écart-type de $\{\boldsymbol{\eta}_a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$) et $\boldsymbol{T}_a = \boldsymbol{I}_3$ pour la décrire par un cheminement aléatoire. A noter que cette modélisation est simpliste, notamment parce qu'elle suggère que les accélérations suivant chaque axe sont décorrélées, ce qui n'est généralement pas le cas en pratique. Les relations (I.2), (I.3) et (I.5) conduisent au modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_a \\ \dot{\boldsymbol{V}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{T}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_a \\ \boldsymbol{V}_a \\ \boldsymbol{\gamma}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \\ \boldsymbol{w}_a \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_a^T & \boldsymbol{V}_a^T & \boldsymbol{\gamma}_a^T \end{bmatrix}^T + \boldsymbol{v}_a \end{cases}. \tag{I.6}$$

En outre, pour des raisons d'ordre physique, l'accélération est généralement bornée. On peut par exemple considérer une borne B_h pour la norme de l'accélération horizontale et une borne supérieure B_s et une inférieure B_i pour l'accélération verticale, ce qui donne, si $\overrightarrow{z_a}$ est normal à la surface terrestre et si $\boldsymbol{\gamma}_a = [\gamma_{a,x} \;\; \gamma_{a,y} \;\; \gamma_{a,z}]^T$:

$$\begin{gathered} \sqrt{\gamma_{a,x}^2 + \gamma_{a,y}^2} \leq B_h, \\ B_i \leq \gamma_{a,z} \leq B_s, \end{gathered} \tag{I.7}$$

Le problème considéré s'apparente alors à celui rencontré dans l'application de navigation étudiée dans cette thèse, en ce sens où un modèle stochastique d'une grandeur d'entrée (l'accélération en l'occurrence, le résidu de dérive gyroscopique pour l'application de navigation) a dû être développé et que les variables d'état associées à ce modèle sont sujettes à des contraintes. L'essai (dans un premier temps) des diverses techniques d'estimation sous contraintes sur cette application de poursuite de cible s'est révélé nettement plus simple, et de surcroît non sujet au problème de confidentialité des données.

A noter enfin que pour être implémenté dans un filtre de Kalman fonctionnant en temps discret, le modèle (I.6) doit être discrétisé. Dans cette optique, la technique d'Euler est envisageable. Il existe toutefois une solution exacte au problème, détaillée dans [Sing 70].

Bibliographie

[Abuh 05] I. Abuhadrous. *Système embarqué temps réel de localisation et de modélisation 3D par fusion multi-capteurs.* Thèse de doctorat, École des mines de Paris, 2005.

[Akes 07] B. M. Åkesson, J. B. Jørgensen, N. K. Poulsen & S. B. Jørgensen. "A tool for Kalman filter tuning". *17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering (ESCAPE17)*, Bucharest, Romania, 2007.

[Alaz 00] D. Alazard. "Introduction au filtre de Kalman". 2000. Notes de cours SUPAERO.

[Alla 66] D. Allan. "Statistics of atomic frequency standard". *Proceedings of the IEEE*, Vol. 54, No. 2, 1966.

[Ande 79] B. D. O. Anderson & J. B. Moore. *Optimal filtering.* Prentice Hall inc., 1979.

[Arul 02] S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon & T. Clapp. "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking". *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, No. 2, pp. 174–188, 2002.

[Atha 67] M. Athans & E. Tse. "A direct derivation of the optimal linear filter using the maximum principle". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 12, No. 6, pp. 690–698, 1967.

[Aven 07] L. D. Avendaño-Valencia, L. E. Avendaño, J. M. Ferrero & G. Castellanos-Dominguez. "Improvement of an extended Kalman filter power line interference suppressor for ECG signals". *Computers in cardiology*, Vol. 34, No. 6, pp. 553–556, 2007.

[Azou 97] S. Azou. *Réalisation équilibrée de systèmes par orthogonalisation de fonctions d'entrée. Grammiens et approximation.* Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale, 1997.

[Bana 92] R. Banavar. *A game theoretic approach to linear dynamic estimation.* Thèse de doctorat, University of Texas, Austin, 1992.

[Bar 01] Y. Bar-Shalom, X. Li & T. Kirubarajan. *Estimation with applications to tracking and navigation.* John Wiley & sons inc., 2001.

[Barn 71] J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler, D. J. Healey, D. B. Leeson, T. E. Mac Gunical, J. A. Mullen, W. L. Smith, R. L. Sydnor, R. F. C. Vessot & G. M. R. Winkler. "Characterization of frequency stability". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 20, No. 2, 1971.

[Bas 99] O. Y. Baş, B. Shafai & S. P. Linder. "Design of optimal gains for the proportional integral Kalman filter with application to single particle tracking". *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4567–4571, Phoenix, Ar., U.S.A., 1999.

[Beal 89] S. Beale & B. Shafai. "Robust control system design via a proportional integral observer". *International Journal of Control*, Vol. 50, No. 1, pp. 97–111, 1989.

[Ben 01] R. Ben Abdennour, P. Borne, M. Ksouri & F. M'Sahli. *Identification et commande numérique des procédés industriels.* Technip, 2001.

[Bhat 78] S. P. Bhattacharyya. "Observer design for linear systems with unknown inputs". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 23, No. 3, pp. 483–484, 1978.

[Bier 76] G. Bierman. "Measurement updating using the UD factorization". *Automatica*, Vol. 12, No. 4, pp. 375–382, 1976.

[Bier 77] G. Bierman & C. Thornton. "Numerical comparison of Kalman filter algorithms : Orbit determination case study". *Automatica*, Vol. 13, No. 1, pp. 23–35, 1977.

[Blom 88] H. A. P. Blom & Y. Bar-Shalom. "The Iteracting Multiple Model algorithm for systems with Markovian switching coefficients". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 8, pp. 780–783, 1988.

[Bogl 87] P. L. Bogler. "Tracking a maneuvering target using input estimation". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 23, No. 3, pp. 298–310, 1987.

[Bonn 03] O. Bonnet Torres. "Filtrage de Kalman appliqué à la navigation inertielle". 2003. Notes de l'ONERA.

[Born 90] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella & I. Zambettakis. *Commande et optimisation des processus.* Technip, 1990.

[Born 92] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella & I. Zambettakis. *Modélisation et identification des processus. Tome 2*, Technip, 1992.

[Bort 70] J. E. Bortz. "A new concept in strapdown inertial navigation". Technical report TR R-329, NASA, Washington, 1970.

[Bort 71] J. E. Bortz. "A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 7, No. 1, pp. 61–66, 1971.

[Bout 06] O. Boutin. "La navigation". 2006. Document interne de SAGEM Défense Sécurité.

[Bros 04] J. M. Brossier & P. O. Amblard. "Filtrage particulaire appliqué aux télécommunications". *Journées d'études SEE*, Paris, France, 2004.

[Bros 99] J. P. Brossard. "Dynamique générale : forme vectorielle". *Techniques de l'ingénieur*, 1999. Traité Sciences Fondamentales.

[Brya 90] G. H. Bryan. "On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell". *Cambridge Philosophy Society of Mathematics and Physic Science*, Vol. 7, pp. 101–107, 1890.

[Burg 98] G. Burgers, P. Van Leeuwen & G. Evensen. "Analysis scheme in the Ensemble Kalman Filter". *Monthly Weather Revue*, Vol. 126, pp. 1719–1724, 1998.

[Buya 07] S. Buyamin & J. W. Finch. "Tuning extended Kalman filter for induction motor drives using simulated annealing". *Modelling, Identification and Control Conference*, Innsbruck, Austria, 2007.

[Cai 95] Z. Cai, F. Le Gland & H. Zhang. "An adaptive local grid refinement method for nonlinear filtering". Rapport technique n°2679, INRIA, Rennes, 1995.

[Carp 97] J. Carpenter, P. Clifford & P. Fearnhead. "Efficient implementation of particle filters for nonlinear systems". 4th interim report, DRA contract WSS/U1172, department of statistics, University of Oxford, 1997.

[Chan 79] Y. T. Chan, A. G. C. Hu & J. B. Plant. “A Kalman filter based tracking scheme with input estimation”. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 15, No. 2, pp. 237–244, 1979.

[Cher 03] E. Cherrier, M. Boutayeb & J. Ragot. “Évaluation des bornes de l’état d’un système incertain. Approche par intervalles”. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, Vol. 37, No. 9, pp. 1181–1192, 2003. Numéro spécial : *Application des outils de calcul ensembliste*. Eds. : P. Poignet, N. Ramdani.

[Chou 03] D. Choukroun. *Novel methods for attitude determination using vector observations*. Thèse de doctorat, Israël Institute of Technology, 2003.

[Cris 99a] D. Crisan, P. Del Moral & T. Lyons. “Discrete filtering using branching and interacting particle systems”. *Markov Process and Related Fields*, Vol. 5, No. 3, pp. 293–318, 1999.

[Cris 99b] D. Crisan & M. Grunwald. “Large deviation comparison of branching algorithms versus resampling algorithms : Application to discrete time stochastic filtering”. Technical report 9, statistical laboratory, University of Cambridge, 1999.

[Dahi 05] K. Dahia. *Nouvelles méthodes en filtrage particulaire. Application au recalage de navigation inertielle par mesures altimétriques*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2005.

[Daro 94] M. Darouach, M. Zasadzinski & S. J. Xu. “Full-order observer for linear systems with unknown inputs”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 3, pp. 606–609, 1994.

[De G 97] J. De Geeter, H. Van Brussel, J. De Schutter & M. Décréton. “A smoothly constrained Kalman filter”. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, No. 10, pp. 1171–1177, 1997.

[Del 98] P. Del Moral. “A uniforme convergence theorem for the numerical solving of the nonlinear filtering problem”. *Journal of Applied Probability*, Vol. 35, No. 4, pp. 873–884, 1998.

[Dewa 03] P. Dewallef & O. Léonard. “On-line measurement validation and performance monitoring using robust Kalman filtering techniques”. *5th European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, pp. 176–183, Prague, Czech Republic, 2003.

[Douc 00] A. Doucet, N. De Freitas, K. Murphy & S. Russel. “Rao-Blackwellised particle filtering for dynamic Bayesian networks”. *16th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 176–183, San Francisco, Ca., U.S.A., 2000.

[Douc 05] R. Douc, O. Cappé & E. Moulines. “Comparison of resampling schemes for particle filtering”. *4th international symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, pp. 64–69, Zagreb, Croatia, 2005.

[Douc 97] A. Doucet. *Algorithmes Monte Carlo pour l’esimation bayésienne de modèles markoviens cachés. Application au traitement de signaux de rayonnements*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud - Orsay, 1997.

[Even 03] G. Evensen. “The Ensemble Kalman Filter : Theoretical formulation and practical implementation”. *Ocean dynamics*, Vol. 53, No. 5, pp. 343–367, 2003.

[Even 04] G. Evensen. “Sampling strategies and square root analysis schemes for the EnKF”. *Ocean dynamics*, Vol. 54, No. 6, pp. 539–560, 2004.

[Even 94] G. Evensen. "Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics". *Journal of Geophysical Research*, Vol. 99, No. 5, pp. 10143–10162, 1994.

[Fish 81] M. L. Fisher. "The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problem". *Management science*, Vol. 23, No. 1, pp. 1–17, 1981.

[Flet 81] R. Fletcher. *Practical methods for optimization.* Vol. 2 : constrained optimization, John Wiley & sons inc., 1981.

[Fouc 51] L. Foucault. "Démonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule". *Compte-rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, Vol. 32, pp. 135–138, 1851.

[Frei 99] C. W. Frei, F. J. Kraus & M. Blanke. "Recoverability viewed as a system property". *European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.

[Gelb 74] A. Gelb. *Applied optimal estimation.* MIT Press, 1974.

[Geor 95] D. Georges. "The use of observability and controllability Gramians or functions for optimal sensor and actuator location in finite-dimensional systems". *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3319–3324, New Orleans, La., U.S.A., 1995.

[Good 05a] G. C. Goodwin, J. A. De Doná, M. M. Seron & X. W. Zhuo. "Lagrangian duality between constrained estimation and control". *Automatica*, Vol. 41, No. 6, pp. 935–944, 2005.

[Good 05b] G. C. Goodwin, M. M. Seron & J. A. De Doná. *Constrained control and estimation.* Springer-Verlag, 2005.

[Good 84] G. C. Goodwin & K. S. Sin. *Adaptive filtering, prediction and control.* Prentice Hall inc., 1984.

[Gord 93] N. Gordon, D. Salmond & A. Smith. "Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation". *IEE proceedings F*, Vol. 140, No. 2, pp. 107–113, 1993.

[Gord 97] N. Gordon. "A hybrid bootstrap filter for target tracking in clutter". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 33, No. 1, pp. 353–358, 1997.

[Grew 01a] M. S. Grewal, L. R. Weill & A. P. Andrews. *Global Positioning Systems, inertial navigation and integration.* John Wiley & sons inc., 2001.

[Grew 01b] M. Grewal & A. Andrews. *Kalman filtering. Theory and practice using MATLAB.* John Wiley & sons inc., 2001.

[Gued 97] J. Y. Guédon. "GPS et inertie : la solution optimale pour une navigation performante et sécurisée". *La revue des Centraliens*, Vol. 448, No. août-septembre, 1997.

[Gupt 07] N. Gupta & R. Hauser. "Kalman filtering with equality and inequality state constraints". Technical report of computing laboratory, numerical analysis group, University of Oxford, 2007.

[Hayw 98] S. Hayward. "Constrained Kalman filter for least squares estimation of time-varying beamforming weights". Eds. : J. Mac Whirter & I. Proudler, *Mathematics in Signal Processing*, pp. 113–125, Oxford University press, 1998.

[Henr 82] R. Henriksen. "The truncated second-order nonlinear filter revisited". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 27, No. 1, pp. 247–251, 1982.

[Hobl 00] G. Hoblos, M. Staroswiecki & A. Aïtouche. "Fault tolerance with respect to actuator failures in LTI systems". *IFAC Safeprocess*, pp. 804–809, Budapest, Hungary, 2000.

[Hobl 01] G. Hoblos. *Contribution à l'analyse de la tolérance aux fautes des systèmes d'instrumentation.* Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, 2001.

[Hoci 06] A. Hocine. *Estimation d'état et diagnostic de systèmes à commutation par filtrage multi-modèles.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2006.

[Hou 94] M. Hou & P. C. Müller. "Disturbance decoupled observer design : A unified viewpoint". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1338–1341, 1994.

[Hou 98a] M. Hou & R. J. Patton. "Input observability and input reconstruction". *Automatica*, Vol. 34, No. 6, pp. 789–794, 1998.

[Hou 98b] M. Hou & R. J. Patton. "Optimal filtering for systems with unknown inputs". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 3, pp. 445–449, 1998.

[Hu 03] C. Hu, W. Chen, Y. Chen & D. Liu. "Adaptive Kalman filtering for vehicle navigation". *Journal of Global Positioning Systems*, Vol. 2, No. 1, pp. 42–47, 2003.

[Isid 95] A. Isidori. *Nonlinear control systems.* Springer-Verlag, 3rd Ed., 1995.

[Isra 05] J. P. Israël. "Filtres de navigation". 2005. Document interne du LRBA.

[Isra 07] J. P. Israël. "Erreurs d'une centrale inertielle". 2007. Document interne du LRBA.

[Isra 95] J. P. Israël. "La variance d'Allan". 1995. Document interne du LRBA.

[Isra 99] J. P. Israël. "Dynamique d'évolution des erreurs inertielles". 1999. Notes de cours ENSIETA.

[Ito 00] K. Ito & K. Xiong. "Gaussian filters for nonlinear filtering problems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 5, pp. 910–927, 2000.

[Jaul 01] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit & E. Walter. *Applied interval analysis.* Springer-Verlag, 2001.

[Jazw 66] A. H. Jazwinski. "Filtering for nonlinear dynamical systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 11, No. 5, pp. 765–766, 1966.

[Jazw 70] A. H. Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory.* Academic press, 1970.

[Jean 95] F. Jean. "Estimation d'état robuste : Application à la détection de défauts". Rapport de recherche, CRAN-HEI, septembre 1995.

[Jilk 02] V. Jilkov & X. Rong Li. "On the generalised input estimation". *International Journal of Information and Security*, Vol. 9, pp. 107–113, 2002.

[Juli 00] S. J. Julier, J. K. Uhlmann & H. F. Durrant-Whyte. "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, pp. 477–482, 2000.

[Juli 02a] S. J. Julier. "The scaled unscented transformation". *American Control Conference*, pp. 4555–4559, Anchorage, Ak., U.S.A., 2002.

[Juli 02b] S. J. Julier & J. K. Uhlmann. "Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations". *American Control Conference*, pp. 887–892, Anchorage, Ak., U.S.A., 2002.

[Juli 03] S. Julier. "The spherical simplex unscented transform". *American Control Conference*, pp. 2430–2434, Denver, Col., U.S.A., 2003.

[Juli 04] S. J. Julier & J. K. Uhlmann. "Unscented filtering and nonlinear estimation". *Proceedings of the IEEE*, Vol. 92, No. 3, pp. 401–422, 2004.

[Juli 94] S. J. Julier & J. K. Uhlmann. "A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions". Technical report of robotics research group, department of engineering science, University of Oxford, 1994.

[Juli 97] S. J. Julier & J. K. Uhlmann. "A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems". *11th international symposium on aerospace/defence sensing, simulation and controls*, Orlando, Fl., U.S.A., 1997.

[Kail 68] T. Kailath. "An innovation approch to least-squares estimation. Part I : Linear filtering in additive white noise". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 13, No. 6, pp. 646–655, 1968.

[Kalm 60] R. E. Kalman. "A new approach to linear filtering and prediction problems". *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, Series D*, Vol. 82, pp. 35–45, 1960.

[Kalm 61] R. E. Kalman & R. S. Bucy. "New results in linear filtering and prediction theory". *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, Series D*, Vol. 83, pp. 95–108, 1961.

[Kech 97] M. Keche, I. Harrison, M. S. Woolfson & A. Ouamri. "Adaptive update time target tracking using recursive input estimation". *Radar 97*, pp. 620–623, Edinburgh, U.K., 1997.

[Kita 87] G. Kitagawa. "Non-Gaussian state space modeling of nonstationarity time-series". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, No. 400, pp. 1032–1063, 1987.

[Kita 96] G. Kitagawa. "Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space model". *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 5, No. 1, pp. 1–25, 1996.

[Ko 07] S. Ko & R. R. Bitmead. "State estimation for linear systems with state equality constraints". *Automatica*, Vol. 43, No. 8, pp. 1363–1368, 2007.

[Kolm 41] A. Kolmogorov. "Interpolation and extrapolation of stationary random sequences". *Bulletin de l'académie des sciences de l'URSS, Série mathématique*, Vol. 5, pp. 3–14, 1941.

[Kong 94] A. Kong, J. Liu & W. H. Wong. "Sequential imputation method and Bayesian missing data problems". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 89, No. 425, pp. 278–288, 1994.

[Kosa 04a] S. Kosanam. *Kalman filtering for uncertain noise covariances.* Master's thesis, Cleveland state university, 2004.

[Kosa 04b] S. Kosanam & D. Simon. "Kalman filtering with uncertain noise covariances". *Intelligent Systems and Control*, pp. 375–379, Honolulu, Hawaii, U.S.A., 2004.

[Kush 67] H. J. Kushner. "Approximations to optimal nonlinear filters". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 12, No. 5, pp. 546–556, 1967.

[Kwak 72] H. Kwakernaak & R. Sivan. *Linear optimal control systems.* John Wiley & sons inc., 1972.

[Kwon 03] S. J. Kwon & W. K. Chung. "Combined synthesis of state estimator and perturbation observer". *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 125, No. 1, pp. 19–26, 2003.

[Lain 71] D. G. Lainiotis. “Optimal adaptive estimation : Structure and parameter adaptation”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, No. 2, pp. 160–170, 1971.

[Land 93] I. D. Landau. *Identification et commande des systèmes.* Hermès, 1993.

[LaVi 03] J. J. LaViola. “A comparison of unscented and extended Kalman filtering for estimating quaternion motion”. *American Control Conference*, pp. 2435–2440, Denver, Col., U.S.A., 2003.

[Le G 03] F. Le Gland. “Filtrage particulaire”. *19ème colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, pp. 1–8, Paris, France, 2003.

[Le G 98] F. Le Gland, C. Musso & N. Oudjane. “An analysis of regularized interacting particle methods for nonlnear filtering”. *IEEE European Workshop on Computer-Intensive Methods in Control and Data Processing*, pp. 167–174, Prague, Czech Republic, 1998.

[Lee 99] H. Lee & M. J. Tark. “Generalized input estimation technique for tracking maneuvering targets”. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 35, No. 4, pp. 1388–1402, 1999.

[Lege 99] P. Léger. “Gyroscopes mécaniques vibrants”. *Techniques de l’ingénieur*, 1999. Traité Mesures et Contrôle.

[Lemo 03] M. Lemoine & F. Pelgrin. “Introduction aux modèles espace-état et au filtre de Kalman”. *Revue de l’OFCE*, Vol. 86, pp. 203–229, 2003.

[Lian 04] Y. Liang, D. X. An, D. H. Zhou & Q. Pan. “A finite-horizon adaptive Kalman filter for linear systems with unknown disturbances”. *Signal Processing*, Vol. 84, No. 11, pp. 2175–2194, 2004.

[Liu 02] C. S. Liu & H. Peng. “Inverse-dynamics based state and disturbance observers for linear time-invariant systems”. *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, Vol. 124, No. 3, pp. 375–381, 2002.

[Liu 95] J. Liu & R. Chen. “Blind deconvolution via sequential imputation”. *Journal of the American Statiscal Association*, Vol. 90, No. 430, pp. 567–576, 1995.

[Loeb 04] D. Lœbis, R. Sutton, J. Chudley & W. Naeem. “Adaptive tuning of a Kalman filter via fuzzy logic for an intelligent AUV navigation system”. *Control Engineering Practice*, Vol. 12, No. 12, pp. 1531–1539, 2004.

[Lore 63] E. N. Lorenz. “Deterministic non-periodic flow”. *Journal of the Atmospheric Science*, Vol. 20, No. 2, pp. 130–141, 1963.

[Luen 66] D. G. Luenberger. “Observers for multi-variables systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 11, No. 2, pp. 190–197, 1966.

[Luen 71] D. G. Luenberger. “An introduction to observers”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 593–603, 1971.

[Magi 65] D. T. Magill. “Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 10, No. 4, pp. 434–439, 1965.

[Maqu 97] D. Maquin, M. Luong & J. Ragot. “Fault detection and isolation and sensor network design”. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, Vol. 31, No. 2, pp. 393–406, 1997.

[Marx 03] B. Marx. *Contribution à la commande et au diagnostic des systèmes algébro-différentiels linéaires.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003.

[Matt 92] A. Matthews & F. J. Rybak. "Comparison of hemispherical resonator gyro and optical gyros". *IEEE Aerospace and Electronics Systems Magazine*, Vol. 7, No. 5, pp. 40–46, 1992.

[Mazo 98] E. Mazor, A. Averbuch, Y. Bar-Shalom & J. Dayan. "Interacting Multiple Model methods in multitarget-multisensor tracking : Survey". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 34, No. 1, pp. 103–123, 1998.

[Mazz 03] E. H. Mazzour & D. Hodouin. "Une aide algorithmique à l'optimisation du placement des capteurs dans un procédé". *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, Vol. 37, No. 10, pp. 1251–1276, 2003.

[Mehr 70] R. Mehra. "On the identification of variances and adaptive Kalman filtering". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 15, No. 2, pp. 175–184, 1970.

[Mehr 72] R. Mehra. "Approaches to adaptive filtering". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 17, No. 5, pp. 693–698, 1972.

[Mham 01] A. Mhamdi & W. Marquardt. "A regularization approach to state estimation using observers". *American Control Conference*, pp. 4228–4233, Arlington, Vi., U.S.A., 2001.

[Mham 02] A. Mhamdi & W. Marquardt. "On ill-posedness and regularization of state estimation problems". 2002. Submitted to Automatica.

[Moor 81] B. C. Moore. "Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability and model reduction". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, No. 1, pp. 17–32, 1981.

[Mora 05] H. Moradkhani, S. Sorooshian, H. V. Gupta & P. R. Houser. "Dual state-parameter estimation of hydrological model using Ensemble Kalman Filter". *Advances in Water Resources*, Vol. 28, No. 2, pp. 135–147, 2005.

[Moyl 77] P. J. Moylan. "Stable inversion of linear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, No. 1, pp. 74–78, 1977.

[Mula 00] W. M. Mularie. "Department of defense world geodetic system 1984". Technical report DMATR83502WGS84, 3rd edition, National Imagery and Mapping Agency, 2000.

[Mull 72] P. C. Müller & H. I. Weber. "Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems". *Automatica*, Vol. 8, No. 3, pp. 237–246, 1972.

[Muss 98] C. Musso & N. Oudjane. "Regularisation schemes for branching particle systems as a numerical solving method of the nonlinear filtering problem". *Irish Signals and Systems Conference*, Dublin, Irland, 1998.

[Nagp 91] K. M. Nagpal & P. P. Khargonekar. "Filtering and smoothing in an H_∞ setting". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 2, pp. 152–166, 1991.

[Naji 88] M. Najim. *Modélisation et identification en traitement du signal.* Masson, 1988.

[Norg 00a] M. Nørgaard, N. K. Poulsen & O. Ravn. "Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems". Technical report IMM-REP-1998-15, department of mathematical modelling, Technical University of Denmark, 2000.

[Norg 00b] M. Nørgaard, N. Poulsen & O. Ravn. "New developments in state estimation for nonlinear systems". *Automatica*, Vol. 36, No. 11, pp. 1627–1638, 2000.

[Orde 05] F. Orderud. "Comparison of Kalman filter estimation approaches for state space models with nonlinear measurements". *Scandinavian Conference on Simulation and Modelling*, Trondheim, Norway, 2005.

[Oudj 00] N. Oudjane. *Stabilité et approximations particulaires en filtrage non linéaire. Application au pistage.* Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2000.

[Peti 96] F. Petit, D. Baudois & J. P. Israël. "Evaluation de la composante blanche de signaux accélérométriques et gyrométriques par la méthode de la variance d'Allan". *Traitement du signal*, Vol. 13, No. 1, pp. 71–84, 1996.

[Pham 01] A. D. T. Pham. "Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems". *Monthly Weather Review*, Vol. 129, No. 5, pp. 217–244, 2001.

[Pitt 99] M. Pitt & N. Shephard. "Filtering via simulation. Auxiliary particle filters". *Journal of the American Statiscal Association*, Vol. 94, No. 446, pp. 590–599, 1999.

[Porr 88] J. Porrill. "Optimal combination and constraints for geometrical sensor data". *International Journal of Robotics Research*, Vol. 7, No. 6, pp. 66–77, 1988.

[Powe 02] T. D. Powell. "Automated tuning of an extended Kalman filter using the downhill simplex algorithm". *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 5, pp. 901–908, 2002.

[Radi 99a] J. C. Radix. "Accéléromètres inertiels". *Techniques de l'ingénieur*, 1999. Traité Mesures et Contrôle.

[Radi 99b] J. C. Radix. "Gyromètres optiques". *Techniques de l'ingénieur*, 1999. Traité Mesures et Contrôle.

[Radi 99c] J. C. Radix. "Gyroscopes et gyromètres mécaniques avec élément rotatif". *Techniques de l'ingénieur*, 1999. Traité Mesures et Contrôle.

[Radi 99d] J. C. Radix. "Quaternions. Application aux rotations dans l'espace". *Techniques de l'ingénieur*, 1999. Traité Sciences Fondamentales.

[Rago 01] J. Ragot & D. Maquin. "Génération d'indicateurs de défauts à base d'observateurs". Ed. : B. Dubuisson, *Automatique et statistiques pour le diagnostic*, pp. 69–101, chap. 3, Hermès, 2001.

[Rago 96] J. Ragot, M. Luong & D. Maquin. "Observability of systems involving flows circulation". *International Journal of Mineral Processing*, Vol. 47, No. 1, pp. 125–140, 1996.

[Rao 03] C. V. Rao, J. B. Rawlings & D. Q. Mayne. "Constrained state estimation for nonlinear discret-time systems : Stability and moving horizon approximations". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 2, pp. 246–258, 2003.

[Rhod 71] I. B. Rhodes. "A tutorial introduction to estimation and filtering". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 688–706, 1971.

[Rote 95] F. Rotella & P. Borne. *Théorie et pratique du calcul matriciel.* Technip, 1995.

[Rubi 87] D. Rubin. "Using the SIR algorithm to simulate posterior distributions". *3rd Valencia international meeting*, pp. 385–402, Valencia, Spain, 1987.

[Schm 66] S. Schmidt. "Application of state space methods to navigation problems". Ed. : C. Leondes, *Advances in control systems*, pp. 293–340, Academic press, 1966.

[Serv 81] L. D. Servi & Y. C. Ho. "Recursive estimation in the presence of uniformly distributed measurement noise". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, No. 2, pp. 563–565, 1981.

[Shen 97] X. Shen & L. Deng. "Game theory approach to discrete H_∞ filter design". *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, No. 4, pp. 1092–1095, 1997.

[Shim 98] N. Shimada, Y. Shrai, Y. Kuno & J. Miura. "Hand gesture estimation and model refinement using monocular camera. Ambiguity limitation by inequality constraints". *3rd IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition*, pp. 268–273, Nara, Japan, 1998.

[Silv 69] L. M. Silverman. "Inversion of multivariable linear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 14, No. 3, pp. 270–276, 1969.

[Simo 02] D. Simon & T. Chia. "Kalman filtering with state equality constraints". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 38, No. 1, pp. 128–136, 2002.

[Simo 06a] D. Simon. "A game theory approach to constrained minimax state estimation". *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 54, No. 2, pp. 405–412, 2006.

[Simo 06b] D. Simon. "H_∞ filtering with inequality constraints for aircraft turbofan health estimation". *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3291–3296, San Diego, Ca., U.S.A., 2006.

[Simo 06c] D. Simon. *Optimal state estimation. Kalman, H_∞ and nonlinear approaches.* John Wiley & sons inc., 2006.

[Simo 06d] D. Simon & D. L. Simon. "Kalman filtering with inequality constraints for turbofan engine health estimation". *IEE proceedings on Control Theory and Applications*, Vol. 153, No. 3, pp. 371–378, 2006.

[Simo 96] D. Simon & H. El Sherief. "Hybrid Kalman/minimax filtering in phase-locked loops". *Control Engineering Practice*, Vol. 4, No. 5, pp. 615–623, 1996.

[Sims 69] F. L. Sims & D. G. Lainiotis. "Recursive algorithm for the calculation of the adaptive Kalman filter weighting coefficients". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 14, No. 2, pp. 215–218, 1969.

[Sing 70] R. A. Singer. "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 6, No. 4, pp. 473–483, 1970.

[Sirc 06] V. Sircoulomb, G. Hoblos, H. Chafouk & J. Ragot. "Analysis and comparison of nonlinear filtering methods". *4th Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, Nancy, France, 2006.

[Sirc 07a] V. Sircoulomb, G. Hoblos, H. Chafouk & J. Ragot. "Analyse et synthèse de redondance de capteurs en vue d'améliorer l'estimation d'état d'un système". *4ème Colloque Interdisciplinaire en Instrumentation*, pp. 141–148, Nancy, France, 2007.

[Sirc 07b] V. Sircoulomb, G. Hoblos, H. Chafouk & J. Ragot. "Evaluation of estimation quality with respect to sensors losses". *7ème congrès international pluridisciplinaire Qualita*, Tanger, Maroc, 2007.

[Sirc 07c] V. Sircoulomb, G. Hoblos, H. Chafouk & J. Ragot. "Sensor network design for improving estimation quality". 2007. Submitted to International Journal of Modelling and Simulation.

[Sirc 08a] V. Sircoulomb, G. Hoblos, H. Chafouk & J. Ragot. "A new recursive formulation for fast estimation of time varying unknown input. Application for estimating a particle acceleration". 2008. Submitted to International Journal of Innovative Computing, Information and Control.

[Sirc 08b] V. Sircoulomb, G. Hoblos, H. Chafouk & J. Ragot. “Analyse et comparaison de techniques d’estimation d’état sous contraintes inégalité non linéaires”. *Conférence Internationale Francophone d’Automatique*, Bucarest, Roumanie, 2008.

[Sirc 08c] V. Sircoulomb, G. Hoblos, H. Chafouk & J. Ragot. “Évaluation de la qualité d’estimation en fonction de la perte de capteurs”. Eds. : D. Lefebvre, H. Chafouk, A. El Hami & M. Bennouna, *Diagnostic des systèmes complexes*, pp. 9–26, Graphics Assala, 2008.

[Sirc 08d] V. Sircoulomb, G. Hoblos, H. Chafouk & J. Ragot. “State estimation under nonlinear state inequality constraints. A tracking application”. *IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France, 2008.

[Smit 92] A. Smith & A. Gelfand. “Bayesian statistics without tears : A sampling-resampling perspective”. *Journal of American Statistics*, Vol. 46, No. 2, pp. 84–88, 1992.

[Sore 70] H. W. Sorenson. “Least-squares estimation : From Gauss to Kalman”. *IEEE Spectrum*, Vol. 7, No. 7, pp. 63–68, 1970.

[Star 02] M. Staroswiecki. “On reconfigurability with respect to sensor failures”. *IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.

[Star 99] M. Staroswiecki, G. Hoblos & A. Aïtouche. “Faut tolerance analysis of sensor systems”. *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3581–3586, Phoenix, Ariz., U.S.A., 1999.

[Swer 58] P. Swerling. “A proposed stagewise differential correction procedure for satellite tracking and prediction”. Technical report P-1292, RAND corporation, Santa Monica, Ca., U.S.A., 1958.

[Swer 59] P. Swerling. “A proposed stagewise differential correction procedure for satellite tracking and prediction”. *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 6, No. 1, pp. 46–59, 1959.

[Szig 02] F. Szigeti, J. Bokor & A. Edelmayer. “Input reconstruction by means of system inversion. Application to fault detection and isolation”. *IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.

[Teix 07] B. O. S. Teixeira, J. Chandrasekar, L. A. B. Tôrres & D. S. Bernstein. “State estimation for equality-constrained linear systems”. *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6220–6225, New Orleans, La, U.S.A., 2007.

[Theo 96] Y. Theodor & U. Shaked. “Robust discrete-time minimum-variance filtering”. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 44, No. 2, pp. 181–189, 1996.

[Valc 99] M. E. Valcher. “State observers for discrete-time linear systems with unknown inputs”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 2, pp. 397–401, 1999.

[Van 00a] R. Van der Merwe, N. de Freitas, A. Doucet & E. Wan. “The unscented particle filter”. Eds. : T. K. Leen, T. G. Dietterich & V. Tresp, *Advances in Neural Information Processing Systems*, MIT Press, 2000.

[Van 00b] R. Van der Merwe, N. De Freitas, A. Doucet & E. Wan. “The unscented particle filter”. Technical report CUED/F-INFENG/TR380, signal processing group, department of engineering, University of Cambridge, 2000.

[Van 01] M. Van de Wal & B. De Jager. “A review of methods for input/output selection”. *Automatica*, Vol. 37, No. 4, pp. 487–510, 2001.

[Van 04a] R. Van der Merwe. *Sigma-Point Kalman Filters for probabilistic inference in dynamic state-space models.* Thèse de doctorat, Faculty of the OGI school of Science & Engineering, 2004.

[Van 04b] R. Van der Merwe & E. Wan. "Sigma-Point Kalman Filters for integrated navigation". *60th annual meeting of the Institute Of Navigation (ION)*, Dayton, Oh., U.S.A., 2004.

[Van 04c] R. Van der Merwe & E. Wan. "Sigma-Point Kalman Filters for nonlinear estimation and sensor fusion. Applications to integrated navigation". *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Providence, R.I., U.S.A., 2004.

[Wan 01a] E. Wan & A. Nelson. "Dual EKF methods". Ed. : T. Haykins, *Kalman filtering and neural network*, pp. 123–174, chap. 5, John Wiley & sons inc., 2001.

[Wan 01b] E. Wan & R. Van der Merwe. "The unscented Kalman filter". Ed. : T. Haykins, *Kalman filtering and neural network*, pp. 221–280, chap. 7, John Wiley & sons inc., 2001.

[Wan 97] E. Wan & A. Nelson. "Dual Kalman filtering methods for nonlinear prediction, estimation and smoothing". *Advances in neural information processing systems*, Cambridge, U.K., 1997.

[Wang 93] T. Wang & P. Varshney. "A tracking algorithm for maneuvering targets". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 29, No. 3, pp. 910–924, 1993.

[Wen 92] W. Wen & H. Durrant-Whyte. "Model-based multi-sensor data fusion". *IEEE Conference on Robotics and Automation*, pp. 1720–1726, Nice, France, 1992.

[Wien 49] N. Wiener. *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series.* MIT Press, 1949.

[Wu 00] N. E. Wu, K. Zhou & G. Salomon. "On reconfigurability". *IFAC Safeprocess*, pp. 846–851, Budapest, Hungary, 2000.

[Xie 04] L. Xie, L. Lu, D. Zhang & H. Zhang. "Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems". *Automatica*, Vol. 40, No. 5, pp. 873–880, 2004.

[Xie 94] L. Xie, Y. C. Soh & C. E. De Souza. "Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1310–1314, 1994.

[Yaes 91] I. Yaesh & U. Shaked. "A transfert function approach to the problems of discrete-time systems : H_∞-optimal linear control and filtering". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 11, pp. 1264–1271, 1991.

[Yaes 92] I. Yaesh & U. Shaked. "Game theory approach to state estimation of linear discrete-time processes and its relation to H_∞ optimal estimation". *International Journal of Control*, Vol. 55, No. 6, pp. 1443–1452, 1992.

[Yan 04] Y. Yan. "Sensor placement and diagnosability analysis at design stage". *6th European Conference on Artificial Intelligence*, Valencia, Spain, 2004.

[Zari 75] V. Zaritskii, V. Svetnik & E. Schimelevich. "Monte Carlo technique in problems of optimal data processing". *Automation and Remote Control*, Vol. 12, No. 2, pp. 95–103, 1975.

[Zhou 96] K. Zhou, J. C. Doyle & K. Glover. *Robust and optimal control.* Prentice Hall inc., 1996.

"L'homme sage est celui qui connaît ses limites."

- L'inspecteur Harry Callahan (Clint Eastwood) dans "Magnum Force" (1973)

Résumé : La résolution d'un problème d'estimation de l'état d'un système nécessite de disposer d'un modèle régissant l'évolution des variables d'état et de mesurer de manière directe ou indirecte l'ensemble ou une partie de ces variables d'état. Les travaux exposés dans ce mémoire de thèse portent sur la problématique d'estimation en présence de méconnaissances de modèle et de pertes de capteurs. La première partie de ce travail constitue la synthèse d'un dispositif d'estimation d'état pour systèmes non linéaires. Cela consiste à sélectionner un estimateur d'état et convenablement le régler, puis à concevoir algorithmiquement, à partir d'un critère introduit pour la circonstance, une redondance matérielle visant à compenser la perte de certains capteurs. La seconde partie de ce travail porte sur la conception, à l'aide de la variance d'Allan, d'un sous-modèle permettant de compenser les incertitudes d'un modèle d'état, ce sous-modèle étant utilisable par un filtre de Kalman. Ce travail a été exploité pour tenir compte de dérives gyroscopiques dans le cadre d'une navigation inertielle hybridée avec des mesures GPS par un filtre de Kalman contraint. Les résultats obtenus, issus d'expériences sur deux trajectoires d'avion, ont montré un comportement sain et robuste de l'approche proposée.

Mots-clés : Estimation d'état, filtrage de Kalman, robustesse, méconnaissances de modèle, perte de capteurs, navigation inertielle, gyroscopes résonnants hémisphériques, variance d'Allan, filtrage sous contraintes.

Abstract: To solve the problem of estimating the state of a system, it is necessary to have at one's disposal a model governing the dynamic of the state variables and to measure directly or indirectly all or a part of these variables. The work presented in this thesis deals with the estimation issue in the presence of model uncertainties and sensor losses. The first part of this work represents the synthesis of a state estimation device for nonlinear systems. It consists in selecting a state estimator and properly tuning it. Then, thanks to a criterion introduced for the occasion, it consists in algorithmically designing a hardware redundancy aiming at compensating for some sensor losses. The second part of this work deals with the conception of a sub-model compensating for some model uncertainties. This sub-model, designed by using the Allan variance, is usable by a Kalman filter. This work has been used to take into account some gyroscopical drifts in a GPS-INS integrated navigation based on a constrained Kalman filter. The results obtained, coming from experiments on two plane trajectories, showed a safe and robust behaviour of the proposed method.

Keywords: State estimation, Kalman filtering, robustness, model uncertainties, sensor losses, inertial navigation, hemispherical resonator gyros, Allan variance, constrained filtering.