



HAL
open science

Stratégies de Modélisation de Structures en Béton Soumises à des Chargements Sévères

Panagiotis Kotronis

► **To cite this version:**

Panagiotis Kotronis. Stratégies de Modélisation de Structures en Béton Soumises à des Chargements Sévères. Matériaux. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. tel-00350461

HAL Id: tel-00350461

<https://theses.hal.science/tel-00350461>

Submitted on 6 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Mémoire

pour obtenir le

DIPLOME D'HABILITATION A DIRIGER DES
RECHERCHES

Spécialité : "Modélisation et Expérimentation en Mécanique des Solides"

préparé au laboratoire SOLS, SOLIDES, STRUCTURES - RISQUES (3S-R)
dans le cadre de *l'Ecole Doctorale "Mécanique et Energétique"*

présenté et soutenu publiquement
par

Panagiotis KOTRONIS

le 20 novembre 2008

**Stratégies de Modélisation de Structures en Béton
Soumises à des Chargements Sévères**

JURY

M. M. GERADIN	Head of Unit ELSA IPSC	Président
M. R. CHARLIER	Professeur à l'Université de Liège	Rapporteur
M. F. FILIPPOU	Professeur à UC Berkeley	Rapporteur
M. G. PIJAUDIER-CABOT	Professeur à l'UPPA	Rapporteur
M. D. COMBESCURE	Ingénieur Chercheur CEA Saclay	Examineur
M. J. MAZARS	Professeur à l'INP Grenoble	Examineur

Remerciements

Cette Habilitation à Diriger des Recherches (HDR) a été réalisée dans l’environnement stimulant du laboratoire Sols, Solides, Structures-Risques (3S-R). Ce laboratoire regroupe à Grenoble toutes les forces universitaires sur la géomécanique, le génie civil et les risques associés ainsi que la mécanique et les couplages multiphysiques dans les milieux solides complexes. C’est une unité mixte de recherche (UMR 5521) entre le CNRS, l’Université Joseph Fourier et le groupe Grenoble INP.

Je tiens à remercier particulièrement Jacky Mazars, directeur de 3S-R, pour ces 12 années de collaboration scientifique fructueuse (depuis ma thèse de doctorat au Laboratoire de Mécanique et de Technologie de l’Ecole Normale Supérieure de Cachan jusqu’à aujourd’hui). Outre ses qualités scientifiques mondialement reconnues qui ont beaucoup contribué à ma formation de chercheur, je le remercie pour sa sensibilité et son humanisme. Il est pour moi beaucoup plus qu’un simple collègue et collaborateur...

Michel Gérardin m’a fait l’honneur de présider le jury. Robert Charlier, Filip Filippou et Gilles Pijaudier-Cabot y ont participé en qualité de rapporteurs. Pour cela je les remercie. J’aimerais également remercier Didier Combescure qui a accepté de participer comme examinateur.

Je tiens aussi à saluer tous les membres de l’équipe “Risques et Vulnérabilité” (RV) du laboratoire 3S-R et plus particulièrement les doctorants que j’ai eu la chance d’encadrer. Il s’agit de:

- Huy Nguyen qui a participé à la campagne expérimentale ECOLEADER et qui a effectué les calculs présentés au chapitre 2 (thèse de doctorat soutenue en juin 2006, Nguyen [2006]).
- Stéphane Grange qui est à l’origine du développement et de l’implémentation numérique du macro-élément d’Interaction Sol Structure (ISS) de chapitre 3 (thèse de doctorat soutenue en juin 2008, [Grange, 2008]).
- Cédric Desprez qui travaille actuellement sur la modélisation des éléments structuraux en béton armé renforcés avec des fibres de carbone à l’aide d’éléments poutres multifibres (cette étude n’est pas présentée dans ce mémoire).
- Cédric Giry dont le sujet de thèse concerne la modélisation de la localisation des déformations dans le béton (cette étude n’est pas présentée dans ce mémoire).

Un grand merci aussi à mes étudiants de master et plus particulièrement:

- Robert Cybulski qui a participé au développement d’un nouveau élément poutre multifibre de cinématique Timoshenko présenté au chapitre 2, [Cybulski, 2008].

- Cédric Giry qui a effectué les calculs relatifs au benchmark SMART présentés au chapitre 2, [Giry, 2008].
- Błażej Kapała qui a modélisé avec le macro-élément de chapitre 3 une structure métallique et un pont comportant des amortisseurs. Les deux structures ont été testées sur table sismique (étude non présentée ici, [Kapała, 2008]).
- Luca Botrugno qui a simulé l’influence de l’ISS sur un viaduc en béton armé. L’ouvrage a été testé selon la méthode pseudodynamique au Laboratoire ELSA au JRC Ispra (étude non présentée ici, [Botrugno, 2008]).
- Ying Ma qui a reproduit à l’aide d’éléments poutres multi-couches (2D) le comportement de l’hôtel de ville de Grenoble soumis à un tremblement de terre (étude non présentée ici, [Ma, 2004]).
- Vahid Abbasi qui a simulé à l’aide d’éléments poutres multi-couches (2D) le comportement d’une structure en béton armé à quatre étages testée selon la méthode pseudodynamique au Laboratoire ELSA au JRC Ispra (étude non présentée ici, [Abbasi, 2003]).

Je voudrais enfin exprimer ma gratitude aux membres de l’équipe “Géomatériaux, Déformation et Rupture” (GDR) du laboratoire 3S-R qui poursuivent depuis plusieurs années des travaux expérimentaux, théoriques, et numériques sur la modélisation des processus de déformation dans les sols et les roches. Leur aide amicale et leurs compétences scientifiques ont été plus que nécessaires pour le développement de nouveau élément poutre Timoshenko présenté au chapitre 2 et les travaux sur les milieux enrichis à microstructure de chapitre 4.

Je conclurais par ma famille. Sans son soutien permanent ce serait impossible pour moi d’en arriver là...

Trois stratégies de modélisation de structures sont proposées dans ce document. La première consiste à l'utilisation des éléments poutres multifibres de cinématique Timoshenko et des lois de comportement basées sur la mécanique de l'endommagement pour le béton et la plasticité pour les aciers. Après une présentation succincte de plusieurs éléments poutres multifibres existants dans la littérature, un nouvel élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieure est proposé. La deuxième stratégie concerne la prise en compte de l'Interaction du Sol avec la Structure (ISS) et le développement d'un élément d'interface 3D modélisant une fondation rigide superficielle reposant sur un massif de sol. Basé sur le concept des macro-éléments, ce nouvel outil est formulé en variables globales (forces et déplacements) et selon la théorie de plasticité, permettant ainsi de diminuer le temps de calcul. Enfin, la troisième stratégie traite de problème de la localisation des déformations et de l'objectivité des résultats des calculs dans un milieu enrichi (milieu avec microstructure). L'évolution de la zone de localisation est étudiée avec des modèles second gradient locaux pour différents types de lois simples basées sur la théorie de plasticité ou de l'endommagement. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux et/ou des exemples numériques prouvent la performance des stratégies de modélisation proposées.

Abstract

Three modelling strategies for structures are proposed in this document. The first deals with the use of multifiber Timoshenko beam elements and constitutive laws based on damage mechanics for concrete and plasticity for steel. After a short review of different multifiber beam elements existing in the literature, a new Timoshenko element with higher order interpolation functions is proposed. The second strategy concerns Soil-Structure Interaction (SSI) and a 3D non linear interface element, based on the macro-element concept, able to compute SSI for a shallow rigid foundation. The particularity of the macro-element lies in the fact that the movement of the foundation is entirely described by a system of generalised variables (forces and displacements) and the plasticity theory, helping thus to reduce computational time. The third strategy is about localisation of deformations and objectivity of the numerical results using a higher order medium (with microstructure). The evolution of the width of the shear zone is studied using local second gradient models and simple constitutive relations based on plasticity or damage. Comparisons with experimental results and/or numerical examples show the performance of the proposed modelling strategies.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	ix
Table des figures	xiv
Liste des tableaux	xv
Chapitre 1 Introduction	1
Chapitre 2 Élément poutre multifibre	3
2.1 Introduction	3
2.2 Poutre multifibre Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur	3
2.2.1 Fonctions d'interpolation	5
2.2.2 Matrices de rigidité	6
2.2.3 Matrices de masse	8
2.2.4 Efforts internes	9
2.2.5 Implémentation numérique	9
2.3 Poutre multifibre Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1	10
2.3.1 Fonctions d'interpolation	10
2.3.2 Matrices de rigidité	11
2.3.3 Matrices de masse	11
2.3.4 Efforts internes	12

2.4	Poutre Navier-Bernoulli	12
2.4.1	Fonctions d'interpolation	12
2.4.2	Matrices de rigidité	12
2.4.3	Matrices de masse	14
2.4.4	Efforts internes	14
2.5	Exemples d'application	14
2.5.1	La maquette NEES	15
2.5.1.1	Maillage	16
2.5.1.2	Comparaison modèle-expérience	16
2.5.2	La maquette SMART	18
2.5.2.1	Maillage	19
2.5.2.2	Analyses modale et dynamique	19
2.5.3	La maquette ECOLEADER	20
2.5.3.1	Maillage	22
2.5.3.2	Comparaison modèle-expérience	22
2.6	Étude comparative des éléments poutres	24
2.7	Un nouvel élément Timoshenko avec des degrés de liberté élémentaires	28
2.8	Conclusions	30
Chapitre 3 Macro-élément d'Interaction Sol Structure		33
3.1	Introduction	33
3.2	Présentation des variables cinématiques et d'efforts	33
3.3	Modèle de plasticité	36
3.3.1	Comportement élastique	36
3.3.2	Comportement plastique	37
3.3.2.1	Critère de rupture	38
3.3.2.2	Surface de charge	38
3.3.2.3	Lois d'écrouissages cinématiques	39
3.3.2.4	Loi d'écrouissage isotrope	41
3.3.2.5	Évolution de la variable d'écrouissage liée au poids propre	42
3.3.2.6	Loi de tangence	43
3.3.2.7	Loi d'écoulement	43
3.3.2.8	Représentation graphique	44
3.4	Exemple d'application - La maquette NEES	44
3.4.1	Typologie de sols utilisés pour les simulations	44
3.4.2	Résultats numériques	45
3.5	Conclusions	50

Chapitre 4	Modèles de second gradient locaux	53
4.1	Introduction	53
4.2	Évolution de la zone de localisation pour un problème de cisaillement . .	54
4.2.1	Équation d'équilibre et conditions limites	54
4.2.2	Lois constitutives	56
4.2.3	Solutions analytiques	57
4.2.3.1	Évolution de la zone de localisation pour la loi quasi-fragile	58
4.2.3.2	Évolution de la zone de localisation pour la loi ductile	59
4.2.3.3	Évolution de la zone de localisation dans un milieu classique	59
4.2.4	Solutions particulières	59
4.2.5	Investigations numériques	60
4.2.5.1	Loi quasi-fragile	60
4.2.5.2	Loi ductile	61
4.3	Modélisation de la localisation dans le béton	63
4.3.1	Lois constitutives	64
4.3.2	Investigations numériques	66
4.4	Est-ce possible de contrôler a priori l'évolution de la zone de localisation? 69	
4.4.1	Problématique	69
4.4.2	Lois constitutives	69
4.4.3	Investigations numériques	72
4.5	Conclusions	75
Chapitre 5	Conclusions et perspectives	77
	Bibliographie	79

Table des figures

2.1	Principes d'une modélisation avec des poutres multifibres.	4
2.2	Poutre 3D à deux noeuds.	4
2.3	Implémentation numérique d'une poutre multifibre Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur.	10
2.4	Maquette NEES - (a) Vue Nord Ouest et (b) Données géométriques de la section.	15
2.5	Maquette NEES - (a) Maillage et répartition des masses, (b) Répartition des fibres dans la section.	16
2.6	Maquette NEES - Moments et efforts tranchants maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues).	17
2.7	Maquette NEES - Déplacements latéraux et accélérations maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues).	17
2.8	Maquette NEES - Etat de l'endommagement dans le béton dû à la traction aux niveaux 0 and 1 (EQ1).	17
2.9	Maquette SMART - (a) Photo (b) Maillage avec des poutres multifibres (avec et sans les sections des poutres visibles).	18
2.10	Maquette SMART - Géométrie.	19
2.11	Maquette SMART - Les trois premiers modes de la maquette.	20
2.12	Maquette SMART - Points A,B,C,D: déplacements X en fonction de temps (0.05g).	20
2.13	Maquette SMART - Points A,B,C,D: déplacements Y en fonction de temps (0.05g).	21
2.14	Maquette ECOLEADER - Description de la structure (dimensions en m).	21
2.15	Maquette ECOLEADER - Discrétisation spatiale avec des poutres multifibres Navier-Bernoulli.	22
2.16	Maquette ECOLEADER - Mur X gauche, déplacement relatif en tête selon X (test T6, 0.85g en X et 0.5g en Y).	23
2.17	Maquette ECOLEADER - Déformation d'acier à $t_1=131.7s$ (test T6).	23
2.18	Maquette ECOLEADER - Mur X gauche, interaction M-N à la base du niveau 1 et comparaison avec les courbes d'interaction ELU (test T6).	24
2.19	Poutre console sollicitée par une charge transversale.	25
2.20	1 élément Navier-Bernoulli - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$	26

2.21	10 éléments Navier-Bernoulli - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$	26
2.22	1 élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$. . .	26
2.23	10 éléments Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$. . .	27
2.24	1 élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$	27
2.25	10 éléments Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$	27
2.26	1 élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 en prenant en compte les termes linéaires pour le calcul des déformations généralisées - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$. . .	28
2.27	10 éléments Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 en prenant en compte les termes linéaires pour le calcul des déformations généralisées - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$. . .	28
2.28	Élément de référence.	29
3.1	Décomposition en champ proche et champ lointain pour la définition de la frontière du macro-élément d'ISS.	34
3.2	Comparaisons des critères de rupture proposés par divers auteurs ayant simulé le comportement de fondations de géométries différentes ramenés dans l'espace des efforts adimensionnés. Fondations filantes pour Nova et Pecker, circulaire pour Houlsby.	34
3.3	Présentation des variables globales: (a) efforts et (b) déplacements sur la fondation rectangulaire.	34
3.4	Simulations EF- relations entre M^\diamond et θ^\diamond , indépendantes de V^\diamond	39
3.5	Relations entre les variables d'écrouissages cinématiques et isotrope dans les plans ($M^\diamond - H^\diamond$).	41
3.6	Évolution de la variable d'écrouissage liée au poids propre.	42
3.7	Loi d'écoulement associée (a) dans un plan ($H^\diamond - V^\diamond$) la projection de la normale à la surface de charge sur l'axe V^\diamond peut être négative et (b) dans un plan ($H^\diamond - M^\diamond$).	43
3.8	Evolution de la surface de charge à l'intérieur du critère de rupture (cas 2D).	45
3.9	NEES - ISS: (a) Moment fléchissant maximum, (b) Efforts tranchants, (c) Déplacements latéraux, (d) Déplacements latéraux relatifs et (e) accélérations des planchers pour 5 sols différents et comparaison avec la structure initiale (encastrée) pour la séquence EQ4.	47
3.10	NEES - ISS: (a) Moment à la base en fonction du temps (b) Déplacement latéral au sommet en fonction du temps pour la structure encastree et pour la structure simulant l'ISS (sol 1, EQ4).	47
3.11	NEES - ISS: déformée modale statique des moments (a), moments modaux en fonction du temps (b), reconstruction des moments à la base de la structure simulant l'ISS et en considérant seulement le mode 2 (c) ou les modes 2 et 3 (d) (sol 1).	49
3.12	NEES - ISS: déformée modale statique des déplacements (a), déplacements modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des déplacements latéraux au sommet de la structure simulant l'ISS (sol 1).	49

3.13	NEES - ISS: déformée modale statique des moments (a), moments modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des moments à la base de la structure simulant l'ISS (sol 3).	50
3.14	NEES - ISS: déformée modale statique des déplacements (a), déplacements modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des déplacements latéraux au sommet de la structure simulant l'ISS (sol 3).	50
3.15	NEES-ISS: état d'endommagement du béton en traction pour la structure reposant sur le sol 3 de la base du rez-de-chaussée à la base de l'étage 5 (EQ4).	51
4.1	Géométrie du problème de cisaillement considéré.	54
4.2	Conditions limites.	55
4.3	Loi constitutive pour le matériau quasi-fragile.	56
4.4	Loi constitutive pour le matériau ductile.	57
4.5	Évolution de l'indicateur λ de la longueur de la zone de localisation en fonction de G^{tg} , ($B = 0.8N$).	59
4.6	Réponse globale pour le matériau quasi-fragile (deux solutions).	60
4.7	Matériau quasi-fragile, première solution: Distribution des déformations dans les éléments à chaque pas (après le tirage aléatoire).	61
4.8	Matériau quasi-fragile, deuxième solution: Distribution des déformations dans les éléments à chaque pas.	61
4.9	Réponse globale pour le matériau ductile (deux solutions).	62
4.10	Matériau ductile, première solution: Distribution des déformations dans les éléments à chaque pas (après le tirage aléatoire).	62
4.11	Matériau ductile, deuxième solution: Distribution des déformations dans les éléments à chaque pas (après le tirage aléatoire).	63
4.12	Évolution de l'indicateur λ de la longueur de la zone de localisation. La solution analytique est la longueur de la solution harmonique et correspond à la limite supérieure de cette longueur.	63
4.13	Evolution de D_t et de D_c en fonction de la déformation équivalente.	65
4.14	Réponse uniaxial du modèle Mazars en traction (gauche) et en compression (droite), ($G^{el} = E$).	66
4.15	Barre rectangulaire en béton soumise à un déplacement de traction oedométrique.	66
4.16	Barre en béton - Modèles constitutifs: (a) premier gradient, (b) second gradient.	67
4.17	Barre en béton - Courbes force déplacement pour les deux maillages.	68
4.18	Barre en béton - Zones de localisation (distribution de la variable d'endommagement D) juste après le pic ($\epsilon_{D0} = 1.2E - 04$): (a) maillage avec 14 éléments, (b) maillage avec 50 éléments.	68
4.19	Barre en béton - Zones de localisation (distribution de la variable d'endommagement D) à la fin du chargement ($\epsilon_{D0} = 2.9E - 04$): a) maillage avec 14 éléments, (b) maillage avec 50 éléments.	68
4.20	Influence de δ sur la loi premier gradient ($\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$).	70
4.21	Milieu avec des rapports constants: (a) contraintes, (b) pente B en fonction des déformations.	72
4.22	Réponse globale pour le milieu avec des rapports constants (deux solutions).	73
4.23	Milieu avec des rapports constants, solution localisée: Distribution de la variable d'endommagement dans les éléments à chaque pas.	73
4.24	Milieu avec des rapports constants, solution localisée: Indicateur de l'état de chargement (après le tirage aléatoire).	74
4.25	Réponse globale pour le milieu avec $\xi = 1.5$ (deux solutions).	74

4.26 Milieu avec $\xi = 1.5$, solution localisée: Distribution de la variable d'endommagement dans les éléments à chaque pas.	75
4.27 Milieu avec $\xi = 1.5$, solution localisée: Indicateur de l'état de chargement (après le tirage aléatoire).	75

Liste des tableaux

3.1 NEES - ISS: caractéristiques des sols utilisés. 46

CHAPITRE 1

Introduction

La réponse des ouvrages résulte d'une forte interaction entre les effets "matériaux" (non-linéarités locales), les effets "structures" (géométrie, répartition des masses, liaisons) et les effets de l'environnement (interaction support-structure). Deux approches sont souvent utilisées pour prendre en compte ces phénomènes:

- L'approche "simplifiée" constitue une approche intermédiaire où le champ de déplacements est décrit par les déplacements et les rotations d'un élément poutre, d'un élément plaque ou d'une coque, tandis que toute information concernant le comportement des matériaux est traitée au niveau local. Il s'agit dans la plupart de cas d'utiliser des éléments poutres avec les hypothèses cinématiques habituelles (Navier-Bernoulli ou Timoshenko). L'intégration du modèle rhéologique est réalisée en général par une intégration numérique classique sur la hauteur si le problème est plan ou dans les deux directions de la section si le problème est tridimensionnel. Ce dernier type d'élément - dites souvent "multifibre" - est efficace pour une analyse non-linéaire complexe d'éléments de structures composites e.g. en béton armé. Dans ce cas la présence des cadres n'est pas spécifiquement introduite, mais leurs effets sont en général pris en compte par la possibilité d'introduire dans la loi de comportement du béton un éventuel effet de confinement.
- L'approche "complète" consiste à conjuguer une modélisation géométrique (maillages 2D ou 3D), un modèle rhéologique (formulation de la loi de comportement en 2D ou en 3D) et un modèle de chargement. Elle permet d'aborder des problèmes complexes tels que la modélisation des zones de localisation des déformations, l'ouverture et l'espacement des fissures, la réponse d'un ouvrage jusqu'à la ruine. Cette approche est très délicate à mettre en oeuvre, demande beaucoup d'expérience de la part de l'ingénieur et ne permet pas d'envisager son utilisation systématique dans le cadre de dimensionnement d'un ouvrage.

Ce mémoire se divise en trois parties, les deux premiers se situant dans le cadre des stratégies “simplifiées” de modélisation de structures et la dernière dans l’optique d’une approche “complète”. Plus spécifiquement:

Dans le chapitre 2 nous introduisons les formulations de plusieurs éléments poutres multifibres de cinématique Navier-Bernoulli ou Timoshenko existants dans la littérature. Ces éléments sont validés avec des résultats expérimentaux de structures en béton armé testées sur table sismique. Le chapitre se termine avec la confrontation de ces éléments à l’aide d’exemples simples et la proposition d’un nouvel élément de cinématique Timoshenko avec des fonctions d’interpolation d’ordre supérieure et des degrés de liberté élémentaires.

Le chapitre 3 présente le développement théorique d’un élément d’interface 3D modélisant une fondation superficielle rigide reposant sur un massif de sol semi-infini. Cet élément permet de prendre en compte l’Interaction Sol Structure (ISS) en considérant la plasticité du sol. Basé sur l’idée de macro-élément, il est développé en variables globales (forces et déplacements) permettant ainsi de réduire significativement le temps des calculs. Le chapitre se termine avec un exemple de l’influence de l’ISS sur une structure en béton armé.

Le chapitre 4 est quant à lui consacré au problème de la localisation des déformations et de l’objectivité des résultats des calculs dans un milieu enrichi (milieu avec microstructure). L’évolution de la zone de localisation est étudiée avec des modèles de second gradient locaux pour différents types de lois constitutives simples basées sur la théorie de plasticité ou de l’endommagement. Des exemples numériques permettent de vérifier les idées avancées dans cette partie.

Enfin, le chapitre 5 de ce mémoire regroupe les principales conclusions ainsi que les perspectives envisagées pour un travail futur.

2.1 Introduction

Une poutre multifibre est un élément fini basé sur la théorie des poutres dont chaque section est divisée en fibres. A chaque fibre nous pouvons associer une loi de comportement locale en contraintes - déformations et donc un matériau (figure 2.1). Ce type de description possède les avantages d'hypothèses simplificatrices associées à une cinématique de type poutre Navier-Bernoulli [Owen et Hinton, 1980], [Laborderie, 1991], [Spacone *et al.*, 1996a], [Spacone *et al.*, 1996b], [Ghavamian et Mazars, 1998], [Ghavamian *et al.*, 2002] ou Timoschenko [Guedes *et al.*, 1994], [Dubé, 1997], [Petrangeli *et al.*, 1999], [Kotronis, 2000], [Kotronis *et al.*, 2004], [Kotronis et Mazars, 2005], [Mazars *et al.*, 2006] tout en offrant une solution robuste et rapide pour une analyse non linéaire de structures composites (par exemple en béton armé).

Nous présentons dans la suite de ce chapitre trois formulations d'éléments finis poutres multifibres existant dans la littérature (les deux premières de cinématique Timoshenko et la dernière de cinématique Navier-Bernoulli), ainsi que des exemples d'application sur des structures en béton armé soumises à des chargements sismiques. Après une étude numérique sur la performance de ces éléments nous terminons le chapitre par la proposition d'un nouvel élément fini de cinématique Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur et des degrés de liberté élémentaires.

2.2 Poutre multifibre Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur

Prenons une poutre 3D à 2 noeuds, de longueur L , orientée selon la direction x (figure 2.2). S est la section de la poutre discrétisée en fibres de coordonnées y et z . L'hypothèse des sections

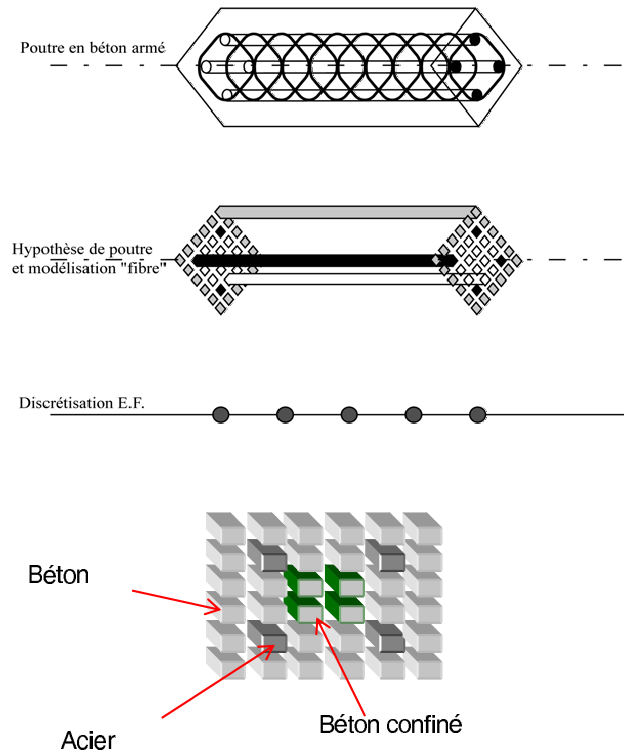


FIG. 2.1 – Principes d'une modélisation avec des poutres multifibres.

planes (théorie Timoshenko) permet d'exprimer les déplacements $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ d'un point quelconque de la poutre en fonction des déplacements $u_s(x)$, $v_s(x)$, $z_s(x)$ d'un point situé sur l'axe de référence x et des déplacements dus aux rotations $\theta_{sx}(x)$, $\theta_{sy}(x)$, $\theta_{sz}(x)$ de la section S . Nous présentons ci-dessous une généralisation où l'axe de référence choisi pour la poutre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique.

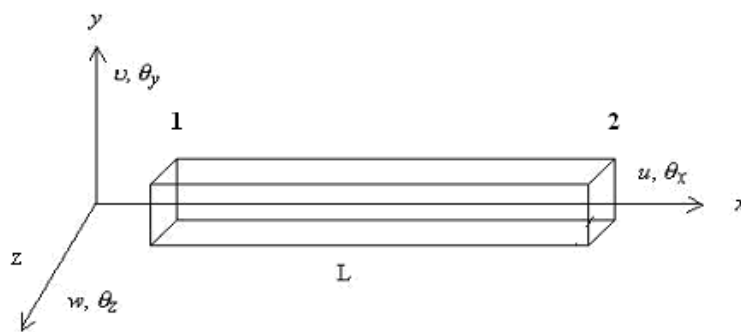


FIG. 2.2 – Poutre 3D à deux noeuds.

Chaque noeud (1 et 2) a six degrés de liberté, trois translations et trois rotations, stockés dans un vecteur de déplacement de dimension 12 structuré de la manière suivante (avec T le symbole de la transposée):

$$\underline{\mathbf{U}}^T = \{ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2} \} \quad (2.1)$$

2.2.1 Fonctions d'interpolation

Nous considérons le champ de déplacements continus en tout point de la ligne moyenne x en fonction du champ de déplacements discrétisés aux deux noeuds:

$$\underline{\mathbf{U}}^s = \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{U}} \quad (2.2)$$

avec:

$$\underline{\mathbf{U}}^{sT} = \{ u_s(x) \quad v_s(x) \quad w_s(x) \quad \theta_{sx}(x) \quad \theta_{sy}(x) \quad \theta_{sz}(x) \} \quad (2.3)$$

Le choix des fonctions d'interpolation $\underline{\mathbf{N}}$ conditionne la performance numérique de l'élément. Le phénomène du "locking" (blocage) apparaît pour des éléments ayant des contraintes cinématiques, quand les fonctions d'interpolation ne sont pas aptes à reproduire la solution analytique (e.g. pour des éléments finis poutres Timoshenko ce blocage entre la flexion et le cisaillement prend la forme d'une rigidité "parasite" quand l'élément est élancé). Une abondance de remèdes numériques existe dans la littérature [Crisfield, 1991a], [Crisfield, 1991b], [Caille-rie, 2008]. Afin d'affranchir ce problème, la formulation présentée ci-dessous opte pour une interpolation polynomiale de degré supérieur pour les déplacements transversaux (cubique) et les rotations (quadratique) qui ne sont pas indépendants. Ce type d'approche conduit à des éléments finis à plus de deux noeuds (deux noeuds aux extrémités + des noeuds intérieurs) [Ibrahimbegovic et Frey, 1992], ou à des éléments finis à deux noeuds dont les fonctions d'interpolation dépendent des propriétés des matériaux [de Ville de Goyet, 1989], [Friedman et Kosmatka, 1993], [Kotronis, 2000], [Kotronis *et al.*, 2004], [Kotronis et Mazars, 2005], [Mazars *et al.*, 2006]. Dans cette dernière approche les fonctions d'interpolation prennent la forme suivante [Friedman et Kosmatka, 1993] pour un élément de $[0, L]$:

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3^* & 0 & -N_4^* & 0 & 0 & 0 & N_5^* & 0 & -N_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & N_8^* & 0 & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2 = \frac{x}{L}$$

$$N_3 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) + 1 + \phi \right\}$$

$$N_4 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(2 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_5 = \frac{-1}{1+\phi} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_6 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
N_7 &= \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\
N_8 &= \frac{1}{1+\phi} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (4+\phi)\left(\frac{x}{L}\right) + (1+\phi) \right\} \\
N_9 &= \frac{-6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\
N_{10} &= \frac{1}{1+\phi} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (2-\phi)\left(\frac{x}{L}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$N_i^* = N_i(\phi^*)$, avec ϕ and ϕ^* les rapports entre la rigidité de flexion et la rigidité de cisaillement dans les axes y et z définis ci-dessous (E le module de Young et G le module de cisaillement):

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{12}{L^2} \frac{\int_S E y^2 dS}{\int_S G dS} \\
\phi^* &= \frac{12}{L^2} \frac{\int_S E z^2 dS}{\int_S G dS}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.2 Matrices de rigidité

La relation entre les forces $\underline{\mathbf{F}}$ et les déformations " généralisées " $\underline{\mathbf{D}}$ dans la section prend la forme suivante [Guedes *et al.*, 1994]:

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{K}}^s \underline{\mathbf{D}} \tag{2.7}$$

$$\underline{\mathbf{F}}^T = \{ N \quad T_y \quad T_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z \} \tag{2.8}$$

avec N le symbole pour l'effort normal, T l'effort tranchant et M le moment. Si pour chaque α , α' définie la dérivée par rapport à x nous obtenons:

$$\underline{\mathbf{D}} = \{ u'_s(x) \quad v'_s(x) - \theta_{sz}(x) \quad w'_s(x) + \theta_{sy}(x) \quad \theta'_{sx}(x) \quad \theta'_{sy}(x) \quad \theta'_{sz}(x) \} \tag{2.9}$$

La matrice de rigidité de la section devient finalement:

$$\underline{\mathbf{K}}^s = \begin{bmatrix} K_{s11} & 0 & 0 & 0 & K_{s15} & K_{s16} \\ & K_{s22} & 0 & K_{s24} & 0 & 0 \\ & & K_{s33} & K_{s34} & 0 & 0 \\ & & & K_{s44} & 0 & 0 \\ & & & & K_{s55} & K_{s56} \\ & & & & & K_{s66} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$K_{s11} = \int_S E dS; \quad K_{s15} = \int_S E z dS$$

$$\begin{aligned}
 K_{s16} &= - \int_S E y dS; & K_{s22} &= k_y \int_S G dS \\
 K_{s24} &= -k_y \int_S G z dS; & K_{s33} &= k_z \int_S G dS \\
 K_{s34} &= k_z \int_S G y dS; & K_{s44} &= \int_S G (k_z y^2 + k_y z^2) dS \\
 K_{s55} &= \int_S E z^2 dS; & K_{s56} &= - \int_S E y z dS \\
 & & K_{s66} &= \int_S E y^2 dS
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Les variables k_y et k_z sont les coefficients de correction de cisaillement de la section définies dans [Cowper, 1966]. Les déformations généralisées sont calculées par:

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{U}} \tag{2.12}$$

avec $\underline{\mathbf{B}}$:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc}
 N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & N'_3 - N_7 & 0 & 0 & 0 & N'_4 - N_8 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & 0 & 0 & N'_6 - N_{10} \\
 0 & 0 & N'_3 - N_7 & 0 & -N'_4 + N_8 & 0 & 0 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & -N'_6 + N_{10} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -N'_7 & 0 & N'_8 & 0 & 0 & 0 & -N'_9 & 0 & N'_{10} & 0 \\
 0 & N'_7 & 0 & 0 & 0 & N'_8 & 0 & N'_9 & 0 & 0 & 0 & N'_{10}
 \end{array} \right] \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 N'_1 &= -\frac{1}{L} \\
 N'_2 &= \frac{1}{L} \\
 N'_3 &= \frac{1}{1+\phi} \left\{ 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right) - \phi\left(\frac{1}{L}\right) \right\} \\
 N'_4 &= \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(3\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(2 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right)^2 + \left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right) \right\} \\
 N'_5 &= \frac{-1}{1+\phi} \left\{ 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right) - \phi\left(\frac{1}{L}\right) \right\} \\
 N'_6 &= \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(3\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{\phi}{2}\left(\frac{1}{L}\right) \right\} \\
 N'_7 &= \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(2\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{1}{L}\right) \right\} \\
 N'_8 &= \frac{1}{1+\phi} \left\{ 6\left(\frac{x}{L}\right) - (4+\phi)\left(\frac{1}{L}\right) \right\} \\
 N'_9 &= \frac{-6}{(1+\phi)L} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{1}{L}\right) \right\} \\
 N'_{10} &= \frac{1}{1+\phi} \left\{ 6\left(\frac{x}{L}\right) - (2-\phi)\left(\frac{1}{L}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

La matrice de rigidité d'élément est finalement donnée par:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{elem} = \int_0^L \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}}^s \underline{\underline{\mathbf{B}}} dx \quad (2.15)$$

2.2.3 Matrices de masse

La matrice de masse de la section de l'élément Timoshenko prend la forme suivante [Guedes *et al.*, 1994]:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^s = \begin{bmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & 0 & M_{s15} & M_{s16} \\ & M_{s22} & 0 & M_{s24} & 0 & 0 \\ & & M_{s33} & M_{s34} & 0 & 0 \\ & & & M_{s44} & 0 & 0 \\ & & & & M_{s55} & M_{s56} \\ & & & & & M_{s66} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} M_{s11} &= \int_S \rho dS; & M_{s15} &= \int_S \rho z dS \\ M_{s16} &= - \int_S \rho y dS; & M_{s22} &= k_y \int_S \rho dS \\ M_{s24} &= -k_y \int_S \rho z dS; & M_{s33} &= k_z \int_S \rho dS \\ M_{s34} &= k_z \int_S \rho y dS; & M_{s44} &= \int_S \rho (k_z y^2 + k_y z^2) dS \\ M_{s55} &= \int_S \rho z^2 dS; & M_{s56} &= - \int_S \rho y z dS \\ & & M_{s66} &= \int_S \rho y^2 dS \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec ρ la masse volumique qui peut varier en fonction de y et z . La matrice de masse de l'élément est finalement donnée par:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{elem} = \int_0^L \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}^s \underline{\underline{\mathbf{N}}} dx \quad (2.18)$$

Remarque: Cette expression de la matrice de masse est rarement présentée dans la littérature. Dans la plupart des codes éléments finis elle est remplacée par la matrice de masse de type Navier-Bernoulli (ainsi les termes de correction de cisaillement intervient uniquement dans la matrice de raideur, équation 2.39). Pour le cas d'une poutre courte avec $L/r \approx 12$, ($r = \sqrt{\frac{I}{S}}$ le rayon de giration de la section, I le moment d'inertie), de section circulaire pleine S , l'utilisation de la matrice de masse de type Navier-Bernoulli conduit à une erreur relative de l'ordre de 30% dès le quatrième mode, alors que l'erreur est quasi nulle pour la matrice de masse de l'équation (2.18), [Corn, 1998]. Pour des problèmes en génie parasismique, la matrice de masse d'un élément Navier-Bernoulli est néanmoins le plus souvent utilisé.

2.2.4 Efforts internes

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante:

$$\underline{\mathbf{F}}^{int} = \int_0^L \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{F}} dx \quad (2.19)$$

avec $\underline{\mathbf{F}}$ le vecteur des forces de la section issu de l'intégration numérique des contraintes dans les fibres.

Remarques :

- Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration de Gauss le long de la poutre afin d'intégrer correctement les intégrales précédentes. Par exemple, la matrice de rigidité est calculée suivant l'équation:

$$\underline{\mathbf{K}}^{elem} = j \sum_{i=1}^2 w_i [\underline{\mathbf{B}}(x_i)]^T \underline{\mathbf{K}}^s [\underline{\mathbf{B}}(x_i)] \quad (2.20)$$

x_i est la position du point de Gauss i dans un élément de référence, w_i est le poids du point de Gauss et j est le jacobien.

- Pour des sections homogènes de comportement linéaire la matrice de rigidité de l'élément ainsi calculée est la même que la matrice de rigidité exacte d'un élément Timoshenko [Przemieniecki, 1968]. Un seul élément fini est donc suffisant pour calculer les déplacements exacts d'une poutre soumise à des chargements statiques (voir aussi section 2.6). Pour des sections composites, la qualité des résultats dépend de la précision de calculs des propriétés élastiques de la section (une homogénéisation est nécessaire).
- L'élément est exempt de verrouillage. Lorsque l'élanement devient grand $\phi \rightarrow 0$ et $\phi^* \rightarrow 0$ et donc la matrice de rigidité tend vers celle d'un élément Navier-Bernoulli.
- Nous avons introduit cet élément dans plusieurs codes éléments finis (FEAP, [Taylor, 1996] et FEDEASLab, [Filippou et M. Constandines, 2004]) avec une matrice de masse de type Navier-Bernoulli (voir [Kotronis, 2000], [Kotronis *et al.*, 2004], [Kotronis et Mazars, 2005], [Mazars *et al.*, 2006]).

2.2.5 Implémentation numérique

Dans le cadre d'une modélisation de type multifibre, il y a deux "niveaux" d'intégration. Il y a la modélisation dite "longitudinale" qui est représentée par une poutre (de support géométrique linéique avec deux points de Gauss sur la longueur) et une modélisation plane de la section (perpendiculaire au support géométrique, discrétisée avec des fibres qui jouent le rôle des points d'intégration dans la section). Nous présentons ci-dessous les grandes lignes de l'implémentation numérique de l'élément (figure 2.3). Uniquement les calculs au niveau de l'élément sont présentés, tout ce qui concerne l'algorithmique globale (incrément, itérations, assemblages, vérification d'équilibre...) est indépendant et ne concerne pas directement la présentation faite ici.

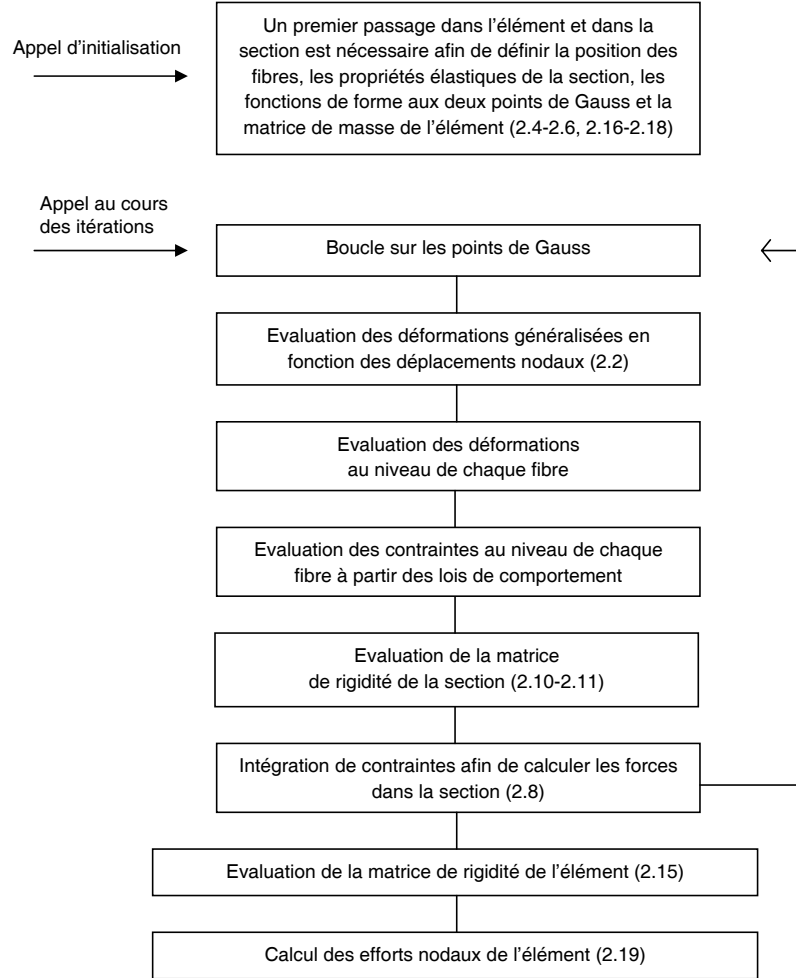


FIG. 2.3 – Implémentation numérique d'une poutre multifibre Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur.

2.3 Poutre multifibre Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1

2.3.1 Fonctions d'interpolation

Pour un élément poutre de $[0,L]$ la matrice des fonctions d'interpolation $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ est cette fois-ci de la forme:

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.3.2 Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section $\underline{\mathbf{K}}^s$ est donnée par les équations (2.10) et (2.11). La déformation généralisée est calculée comme avant selon l'équation (2.12) avec cette fois-ci:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & N_1' & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & N_2' \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} N_1' &= -\frac{1}{L} \\ N_2' &= \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (2.24)$$

La matrice de rigidité d'élément est finalement donnée selon l'équation (2.15).

Remarques :

- Conformément aux fonctions d'interpolation de cet élément (equation (2.21)), la matrice $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ devrait être égale à:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & -\frac{L-x}{L} & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{L} \\ 0 & 0 & N_1' & 0 & \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & N_2' \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Afin d'affranchir le problème de blocage par cisaillement, les déformations généralisées de cisaillement ont été simplifiées en éliminant les termes linéaires [Donea et Lamain, 1987], [Pegon, 1994].

- Cet élément est introduit dans le code Cast3M, [Cea, 2008], [Pegon, 1994], [Guedes *et al.*, 1994].

2.3.3 Matrices de masse

La matrice de masse de la section et de l'élément en question dans le code Cast3M sont celles de la formulation Navier-Bernoulli (voir équations (2.37), (2.38), (2.39), [Pegon, 1994],

[Guedes *et al.*, 1994]).

2.3.4 Efforts internes

Les efforts internes sont toujours donnés par l'équation (2.19).

2.4 Poutre Navier-Bernoulli

Suivant la même approche, un élément poutre multifibre de cinématique Navier-Bernoulli (les sections restent planes et perpendiculaires à l'axe x de la poutre) est présenté brièvement ci-dessous.

2.4.1 Fonctions d'interpolation

Pour un élément de $[0, L]$ la matrice des fonctions d'interpolation $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ est de la forme:

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N'_3 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & 0 & -N'_5 & 0 & N'_6 & 0 \\ 0 & N'_3 & 0 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & N'_5 & 0 & 0 & 0 & N'_6 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L}; & N'_1 &= -\frac{1}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L}; & N'_2 &= \frac{1}{L} \\ N_3 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; & N'_3 &= -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \\ N_4 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; & N'_4 &= 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \\ N_5 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; & N'_5 &= \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \\ N_6 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; & N'_6 &= -\frac{x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.4.2 Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section devient:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^s \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (2.28)$$

$$\underline{\mathbf{F}}^T = \{ N \quad M_y \quad M_z \quad M_x \} \quad (2.29)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \{ u'_s(x) \quad \theta'_{sy}(x) \quad \theta'_{sz}(x) \quad \theta'_{sx}(x) \} \quad (2.30)$$

$$\underline{\mathbf{K}}^s = \begin{bmatrix} K_{s11} & K_{s12} & K_{s13} & 0 \\ & K_{s22} & K_{s23} & 0 \\ & & K_{s33} & 0 \\ & & & K_{s44} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} K_{s11} &= \int_S E dS; & K_{s12} &= \int_S E z dS \\ K_{s13} &= \int_S E y dS; & K_{s22} &= \int_S E z^2 dS \\ K_{s23} &= \int_S E y z dS; & K_{s33} &= \int_S E y^2 dS \\ & & K_{s44} &= G J_x \end{aligned} \quad (2.32)$$

Les déformations généralisées sont cette-fois calculées par:

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{U}} \quad (2.33)$$

avec:

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N''_3 & 0 & N''_4 & 0 & 0 & 0 & -N''_5 & 0 & N''_6 & 0 \\ 0 & N''_3 & 0 & 0 & 0 & N''_4 & 0 & N''_5 & 0 & 0 & 0 & N''_6 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} N''_3 &= -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; & N''_4 &= -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ N''_5 &= \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; & N''_6 &= -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

La matrice de rigidité d'élément est finalement donnée par:

$$\underline{\mathbf{K}}^{elem} = \int_0^L \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{K}}^s \underline{\mathbf{B}} dx \quad (2.36)$$

2.4.3 Matrices de masse

La matrice de masse de la section de l'élément Navier-Bernoulli prend la forme suivante:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^s = \begin{bmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & M_{s12} & M_{s13} & 0 \\ & M_{s11} & 0 & 0 & 0 & -M_{s12} \\ & & M_{s11} & 0 & 0 & -M_{s13} \\ & & & M_{s22} & M_{s23} & 0 \\ & & & & M_{s33} & 0 \\ & & & & & M_{s22} + M_{s33} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} M_{s11} &= \int_S \rho dS; & M_{s12} &= \int_S \rho z dS \\ M_{s13} &= - \int_S \rho y dS; & M_{s22} &= \int_S \rho z^2 dS \\ M_{s23} &= \int_S \rho y z dS; & M_{s33} &= \int_S \rho y^2 dS \end{aligned} \quad (2.38)$$

La matrice de masse de l'élément est finalement donnée par:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{elem} = \int_0^L \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}^s \underline{\underline{\mathbf{N}}} dx \quad (2.39)$$

2.4.4 Efforts internes

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait, comme pour les éléments précédents, avec l'intégrale suivante:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{int} = \int_0^L \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} dx \quad (2.40)$$

avec $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres, voir équation (2.29).

Remarques :

- Le terme J_x dans l'équation (2.32) est la constante de torsion donnée par l'utilisateur.
- Cet élément est introduit dans le code ASTER [Edf, 2008], [Ghavamian *et al.*, 2002].

2.5 Exemples d'application

Dans la suite de ce chapitre nous présentons brièvement la modélisation du comportement non linéaire de plusieurs structures en béton armé avec les trois éléments poutres multifibres

exposés précédemment. Il s'agit des maquettes NEES, SMART et ECOLEADER testées sur des tables vibrantes. Pour chaque cas nous choisissons de montrer seulement quelques résultats (différents pour chaque maquette), avec comme objectif de démontrer la performance de ces éléments mais aussi d'illustrer leur utilité pour un bureau d'étude.

2.5.1 La maquette NEES

La maquette NEES est une structure de 7 étages à échelle 1 d'une hauteur d'environ 20m en béton armé (figure 2.4) soumise à des séismes d'intensités croissantes et uniquement dans une direction [NEES7story, 2006]. Ces expériences ont été réalisées sur la table sismique de haute performance (masse embarquable 400 tonnes) située proche de l'université de Californie à San Diego. La structure est composée de deux murs principaux perpendiculaires en béton armé: le mur d'âme (web wall) et le mur de semelle (flange wall) liés par les planchers. Le chargement est appliqué seulement dans la direction Y (parallèlement au mur d'âme). Quatre séismes d'amplitude croissante ont été appliqués à la structure (EQ1, EQ2, EQ3, EQ4).

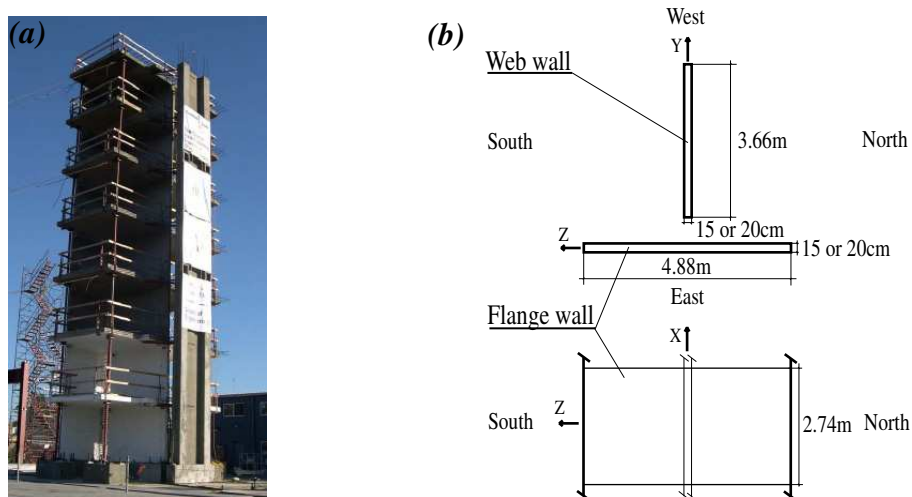


FIG. 2.4 – Maquette NEES - (a) Vue Nord Ouest et (b) Données géométriques de la section.

La modélisation a été effectuée avec des éléments multifibres Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur [Kotronis, 2000], [Kotronis *et al.*, 2004], [Kotronis et Mazars, 2005], [Mazars *et al.*, 2006] et avec le code FEDEASLab [Filippou et M. Constandines, 2004]. Les lois de comportement des matériaux sont basées sur la mécanique de l'endommagement pour le béton [Laborderie, 1991] et la plasticité pour les aciers (une version modifiée du modèle classique de [Menegoto et Pinto, 1973] avec un écrouissage isotrope) [Filippou et Popov, 1983]. L'élément poutre multifibre Timoshenko et la loi d'endommagement ont été introduits dans le code par 3S-R. Nous présentons ci-dessous succinctement le maillage ainsi que les résultats du modèle numérique comparés aux résultats expérimentaux. Les résultats présentés dans cette section ont été effectués **en aveugle**, c'est-à-dire qu'aucun résultat expérimental n'était connu et qui aurait pu servir à une quelconque calibration des modèles [Grange *et al.*, 2006b], [Grange *et al.*, 2007b], [Grange, 2008].

2.5.1.1 Maillage

La figure 2.5 (a) donne une représentation du maillage éléments finis. Le mur d'âme et le mur de semelle sont décomposés en 19 éléments poutres multifibres Timoshenko (4 éléments pour le niveau 1 et 2, 3 éléments pour le niveau 3 et 2 éléments pour les niveaux 5, 6 et 7). La liaison entre les 2 murs est modélisée par des éléments barres. Les éléments multifibres composants le mur d'âme sont décomposés en 20 fibres de béton et ceux du mur de semelle en 8 fibres de béton (figure 2.5 (a) (b)). Le nombre et la position des fibres représentant les aciers longitudinaux sont les mêmes que ceux données par les plans du concours (voir le détail des sections dans les règles du concours [NEES7story, 2006]).

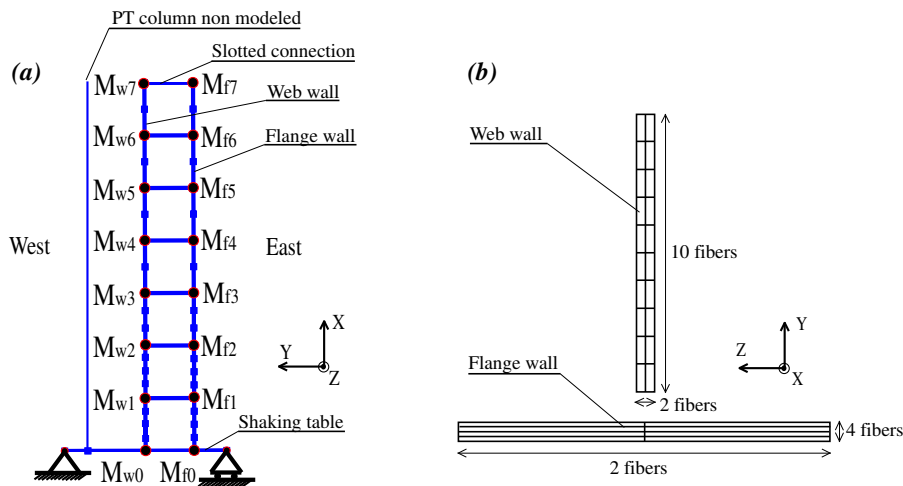


FIG. 2.5 – Maquette NEES - (a) Maillage et répartition des masses, (b) Répartition des fibres dans la section.

Des masses concentrées sont considérées à chaque étage (figure 2.5 (a)) prenant en compte les masses du plancher correspondant, ainsi que les demi-hauteurs de murs en dessous et au dessus de l'étage considéré.

La table sismique est modélisée par 4 éléments Navier-Bernoulli linéaires. La rigidité de flexion de ces poutres est calée sur la rigidité en rotation expérimentale donnée dans les règles du concours. Pour les calculs présentés ci-dessous l'amortissement Rayleigh est ajusté à 2% sur les premier et quatrième modes. Le confinement n'est pas pris en compte et la liaison acier-béton est considérée parfaite. Tous les paramètres utilisés pour les matériaux sont regroupés dans [Grange, 2008].

2.5.1.2 Comparaison modèle-expérience

Les résultats numériques en aveugle sont généralement proches des résultats expérimentaux. Les moments ainsi que les efforts tranchants sont en général sous-estimés pour EQ1 et EQ2 alors qu'ils sont surestimés pour EQ4 (figure 2.6). Les déplacements latéraux sont proches de l'expérience pour EQ1, EQ2, et EQ3 et légèrement sous-estimés pour EQ4 (figure 2.7). Cette différence semble provenir du fait que les 4 accélérographes ont été lancés indépendamment ce qui génère un peu moins d'endommagement qu'en réalité.

L'endommagement dans le béton dû à la traction, issu de la loi d'endommagement, est reparti

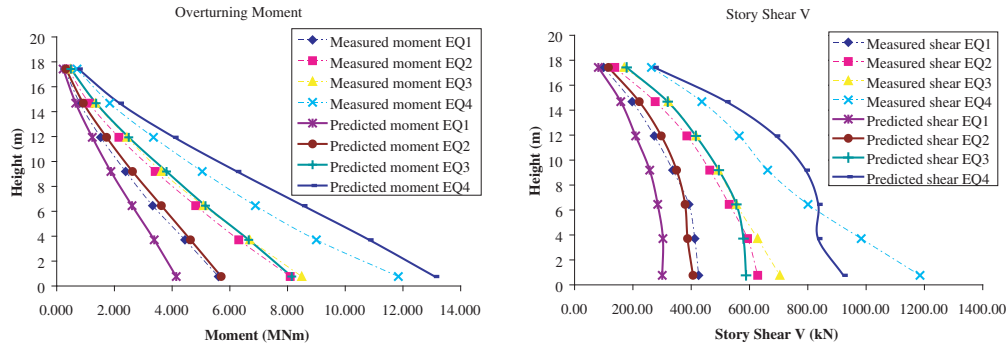


FIG. 2.6 – Maquette NEES - Moments et efforts tranchants maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues).

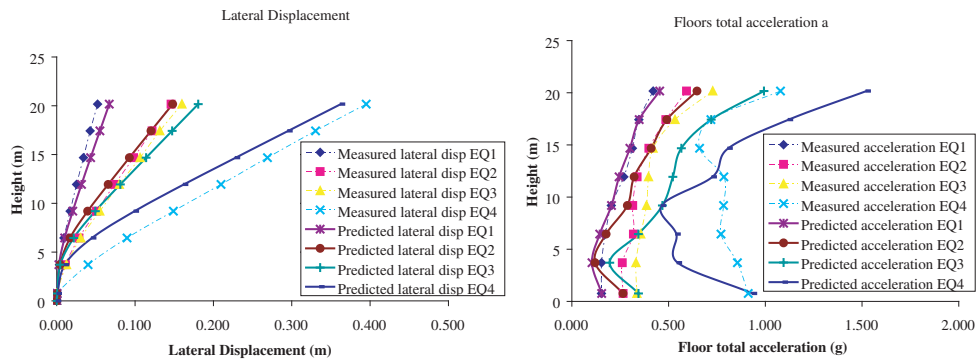


FIG. 2.7 – Maquette NEES - Déplacements latéraux et accélérations maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues).

sur les 2 premiers étages (figure 2.8). Cela a aussi été vérifié expérimentalement.

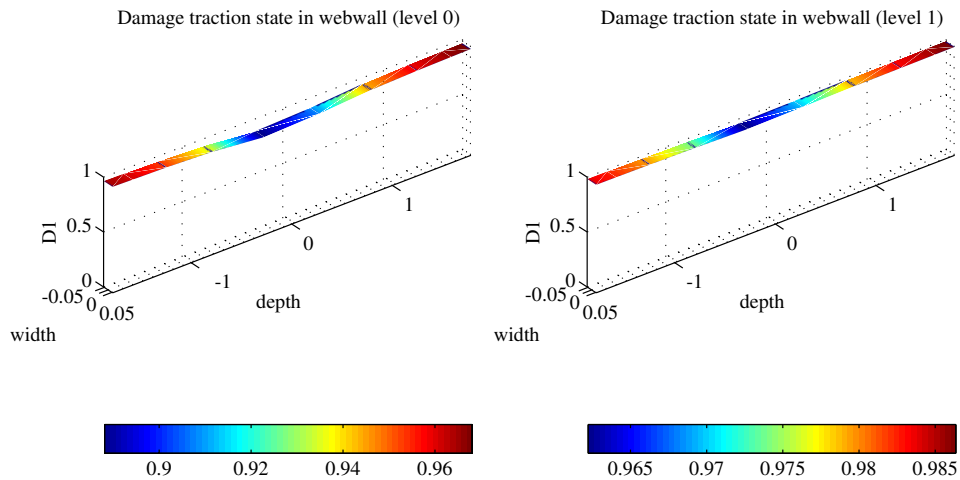


FIG. 2.8 – Maquette NEES - Etat de l'endommagement dans le béton dû à la traction aux niveaux 0 and 1 (EQ1).

Remarques :

- Pour une loi constitutive basée sur la mécanique de l'endommagement, la variable d'endommagement D varie entre 0 (section non endommagée) et 1.0 (section complètement endommagée). En filtrant ces valeurs entre 0.95 et 1.0 nous obtenons une image de la distribution des fissures apparentes dans la structure.
- Une modélisation avec des éléments poutres multifibres permet à l'ingénieur d'avoir accès non seulement au comportement global de la structure mais aussi à prédire la position des zones critiques à travers des variables locales (e.g. la variable D).

2.5.2 La maquette SMART

La maquette de projet *SMART* – 2008 (Seismic design and best-estimate Methods Assessment for Reinforced concrete buildings subjected to Torsion and non-linear effects) est une structure de 3 étages à échelle 1/4 représentative d'un bâtiment nucléaire, voir figures 2.9 (a) et 2.10. Fin de l'été 2008 elle sera testée sur la table sismique AZALEE du CEA à Saclay avec comme objectif de mettre en évidence des comportements non linéaires liés à des phénomènes 3D (torsion). Le chargement sera appliqué dans les deux directions horizontales (treize séismes d'amplitude croissante).

Comme c'était le cas pour la structure NEES (voir paragraph 2.5.1), un nouveau benchmark international est organisé autour de la maquette SMART. Les résultats expérimentaux ne sont pas donnés aux différents participants et quelconque calibration des modèles est impossible.

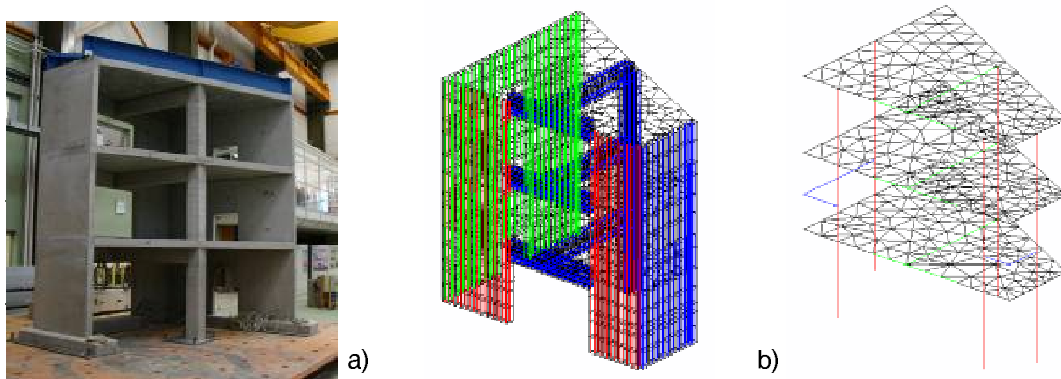


FIG. 2.9 – Maquette SMART - (a) Photo (b) Maillage avec des poutres multifibres (avec et sans les sections des poutres visibles).

Nous avons effectué la modélisation en aveugle avec des éléments multifibres Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 [Pegon, 1994], [Guedes *et al.*, 1994] et avec le code Cast3M [Cea, 2008]. Les lois de comportement des matériaux sont basées sur la mécanique de l'endommagement pour le béton [Laborderie, 1991] et sur la plasticité pour les aciers [Menegoto et Pinto, 1973]. Nous présentons ci-dessous succinctement le maillage ainsi que les résultats du modèle numérique (analyses modale et dynamique) [Giry, 2008], [Kotronis *et al.*, 2008b].

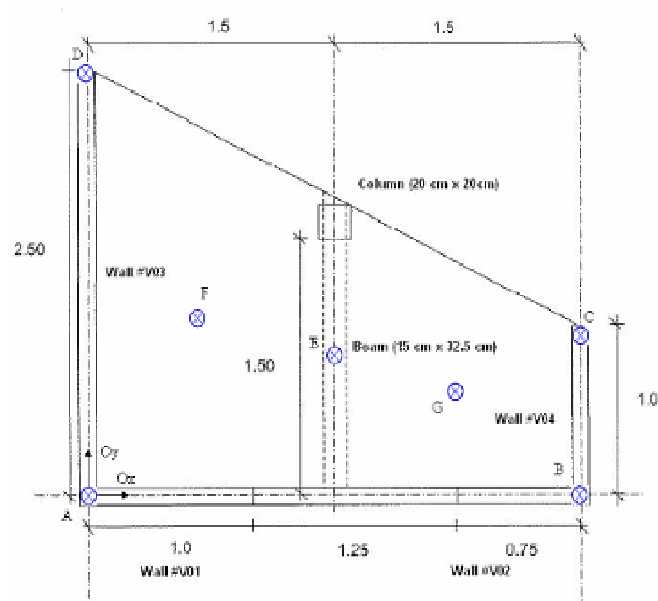


FIG. 2.10 – Maquette SMART - Géométrie.

2.5.2.1 Maillage

Le modèle numérique utilisé est un maillage avec 5 poutres multifibres Timoshenko pour les murs et les poteaux ainsi que 6 poutres multifibres pour les poutres et les linteaux (figure 2.9 (b)). Des liens rigides sont introduits au niveau des planchers pour reproduire la jonction entre les linteaux et les murs. Des liens horizontaux sont ajoutés pour pouvoir simuler le comportement en torsion [Beyer *et al.*, 2008]. Les planchers sont modélisés par des éléments coques élastiques.

Des masses distribuées sont considérées à chaque étage. La maquette est supposée encastree sur la table sismique. Pour les calculs dynamiques présentés ci-dessous un amortissement Rayleigh de 2% est utilisé. Le confinement n'est pas pris en compte et la liaison acier-béton est considérée parfaite. Tous les paramètres utilisés pour les matériaux sont regroupés dans [Giry, 2008].

2.5.2.2 Analyses modale et dynamique

La figure 2.11 représente les trois premiers modes de la maquette SMART issus de l'analyse modale.

Les figures 2.12, 2.13 représentent les déplacements en fonction de temps de quatre points de la structure (A,B,C,D) demandés par le benchmark pour un niveau de sollicitation de 0.05g (voir aussi figure 2.10 pour la position des points).

Ces résultats numériques seront comparés avec les données expérimentales une fois les essais sur table sismique réalisés.

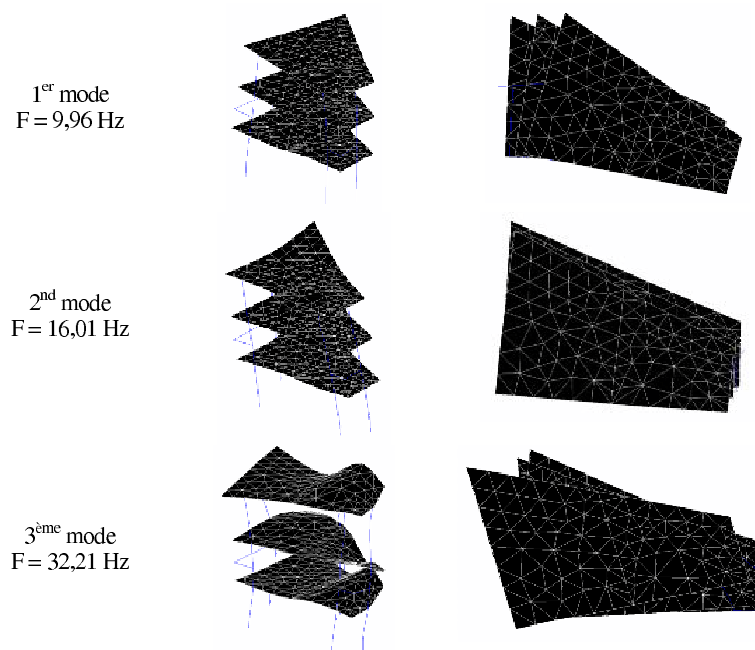


FIG. 2.11 – Maquette SMART - Les trois premiers modes de la maquette.

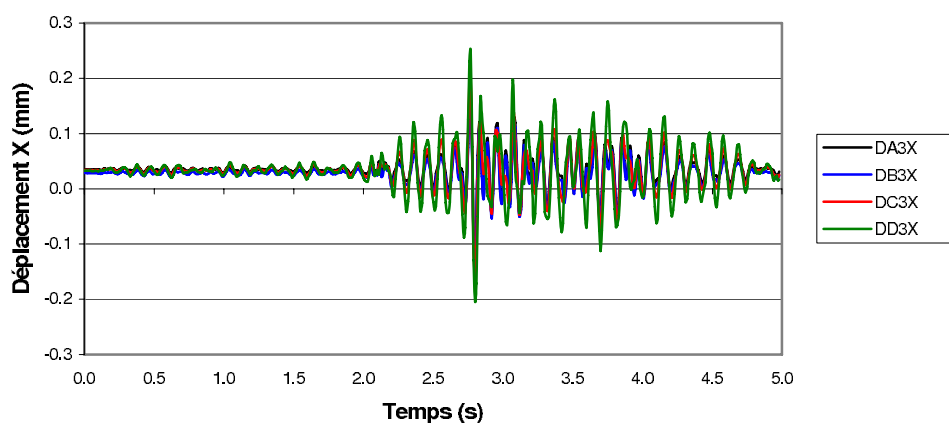


FIG. 2.12 – Maquette SMART - Points A,B,C,D: déplacements X en fonction de temps (0.05g).

2.5.3 La maquette ECOLEADER

Le programme ECOLEADER concerne des essais de murs faiblement armés testés sur la table sismique du LNEC (National Laboratory for Civil Engineering) à Lisbonne [Mazars *et al.*, 2005], [Nguyen, 2006], [Bisch et Coin, 2007], [Ile *et al.*, 2008]. Il s'agit d'une étude comparée du comportement de deux maquettes à murs banchés porteurs et à coffrage identique comportant un mur à file d'ouvertures. La première maquette a été conçue par l'Université de Ljubljana en Slovénie, selon les usages en Europe centrale. Le dimensionnement de la deuxième maquette a été faite par des experts du génie parasismique suivant le concept français de murs structuraux faiblement armés. La modélisation que nous présentons brièvement ci-dessous concerne cette deuxième maquette et elle a été effectuée dans le cadre de la thèse de Nguyen [2006].

La maquette testée est à l'échelle 1/3 et possède une masse de 31600 kg. Elle est composée

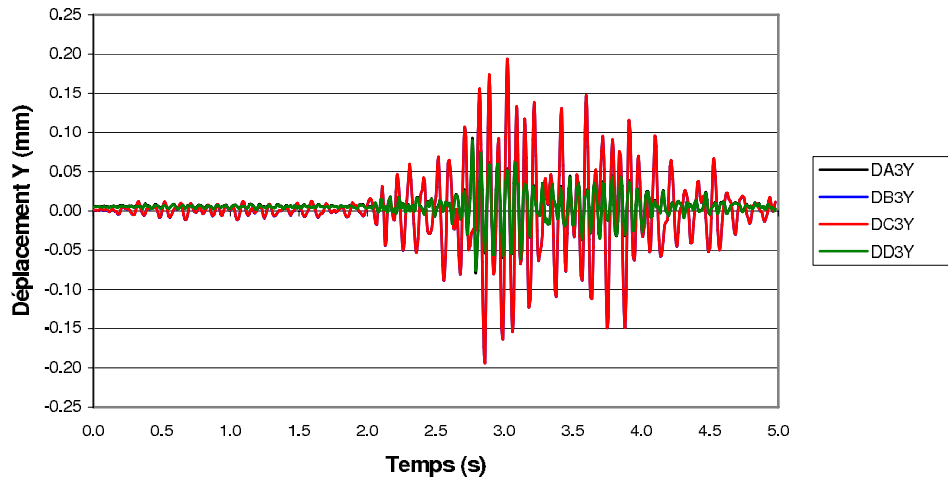


FIG. 2.13 – Maquette SMART - Points A,B,C,D: déplacements Y en fonction de temps (0.05g).

de deux murs porteurs liés par six planchers et une longrine inférieure ancrée sur la table sismique afin de reproduire une liaison de type encastrement. De plus, elle est contreventée dans le sens perpendiculaire aux murs par un mur intérieur avec ouvertures. Les murs ont chacun une hauteur de 4,5 m (plus 0,6 m la longrine), une longueur de 1,60 m et une épaisseur de 6 cm. La longrine inférieure a une longueur de 2 m, une hauteur de 0,6 m et une épaisseur de 20 cm. Les principales caractéristiques de la maquette sont données à la figure 2.14. Des masses additionnelles ont été ajoutées à la partie supérieure et inférieure de chaque plancher, sauf celui du niveau 1. Les niveaux 1 et 2 sont davantage armés que les niveaux supérieurs. Une série d'accélérogrammes (T0 à T6) a été appliquée à la maquette suivant la direction X et la direction Y. Des signaux naturels de type séisme proche (séisme Tolmezzo, Italie) ont été utilisés. Pour plus de détails voir dans [Nguyen, 2006].

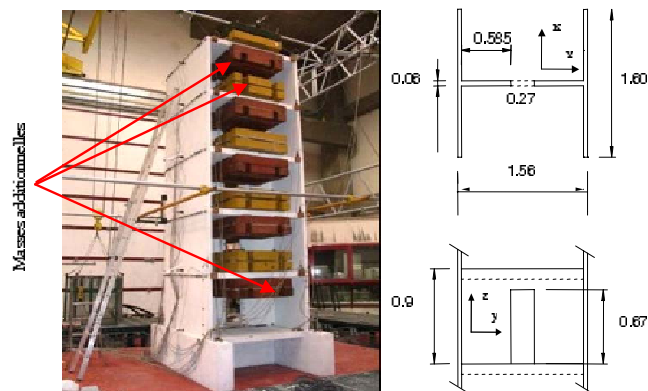


FIG. 2.14 – Maquette ECOLEADER - Description de la structure (dimensions en m).

La modélisation a été effectuée avec des éléments multifibres Navier-Bernoulli [Ghavamian *et al.*, 2002] et le code ASTER [Edf, 2008]. Les lois de comportement des matériaux sont basées sur la mécanique de l'endommagement pour le béton [Laborderie, 1991] et la plasticité pour les aciers [Menegoto et Pinto, 1973]. Nous présentons ci-dessous succinctement le maillage ainsi que les résultats du modèle numérique comparés aux résultats expérimentaux.

2.5.3.1 Maillage

Des éléments poutres de cinématique Navier-Bernoulli sont utilisés pour la discrétisation spatiale de la structure. La maquette est considérée comme un portique multi-étage dont des poutres horizontales (section en T) représentent les planchers et des poutres verticales (également en T) les murs. Au total le modèle possède 80 éléments poutres avec 2 points de Gauss par élément. Chaque section comporte 36 fibres (figure 2.15). Les masses additionnelles sont distribuées au niveau de chaque plancher.

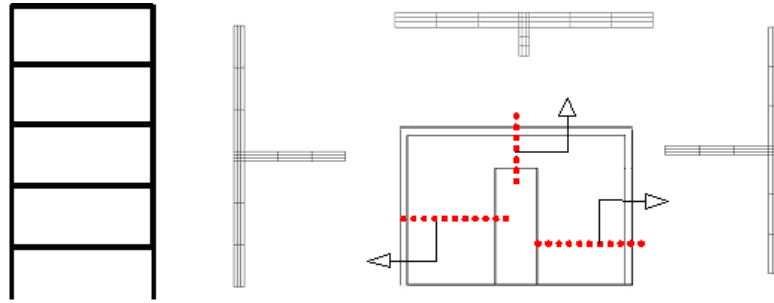


FIG. 2.15 – *Maquette ECOLEADER - Discrétisation spatiale avec des poutres multifibres Navier-Bernoulli.*

Pour reproduire la flexibilité de la table sismique, sept ressorts linéaires (cinq ressorts verticaux et deux horizontaux) sont utilisés. Les valeurs de ces ressorts ont été calibrées afin de reproduire les fréquences et modes propres de la structure. La table elle-même est modélisée par des poutres horizontales (infiniment raides dans leurs plans). Pour les calculs présentés ci-dessous un amortissement Rayleigh de 1% sur les deux premières modes est utilisé. Le confinement n'est pas pris en compte et la liaison acier-béton est considérée parfaite. Tous les paramètres utilisés pour les matériaux sont regroupés dans [Nguyen, 2006].

2.5.3.2 Comparaison modèle-expérience

La figure 2.16 montre les résultats numériques (“modèle multifibre”) et expérimentaux des déplacements relatifs en tête de la maquette dans la direction horizontale X pour le dernier test T6 (le séisme le plus fort, 0.85g en X et 0.5g en Y). De cette comparaison nous pouvons noter une bonne prédiction du comportement dans la direction X. Les valeurs maximales et les cycles de réponses sont correctement reproduits. Nous présentons aussi les résultats d’une modélisation plus détaillée avec des éléments coques multicouches (“modèle raffiné”) [Ile *et al.*, 2008]. La modélisation multifibre donne des résultats tout à fait comparables mais avec un gain de temps considérable.

En plus de la variable d’endommagement (voir section 2.5.1.2), une autre façon de voir la dégradation de la structure est de présenter les déformations des aciers. Dans la figure 2.17, la déformation dans un acier situé sur la fibre extrême est tracée en fonction de la hauteur de la maquette à l’instant $t_1 = 131.7s$. La déformation maximale positive atteint une valeur importante ($>2\%$), valeur qui dépasse largement la valeur expérimentale correspondant à la ruine des aciers mesurée lors d’essais préliminaires (environ 1.6%). Ceci est conforme avec les résultats expérimentaux. En effet, à la fin de test T6 plusieurs barres d’aciers à la base de la maquette se sont cassées.

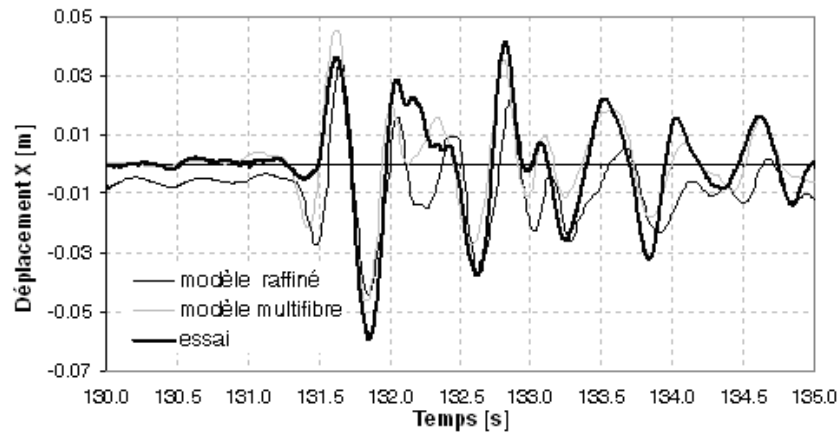


FIG. 2.16 – Maquette ECOLADER - Mur X gauche, déplacement relatif en tête selon X (test T6, 0.85g en X et 0.5g en Y).

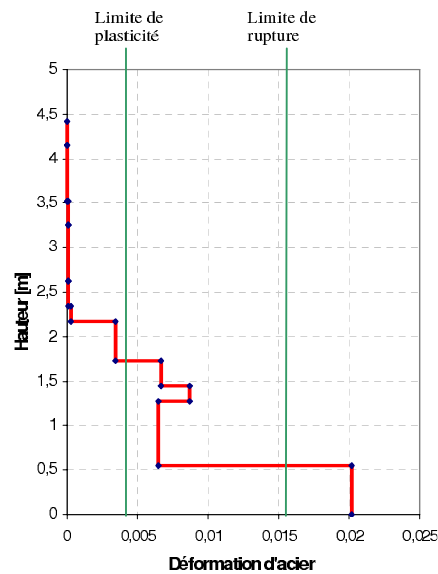


FIG. 2.17 – Maquette ECOLADER - Déformation d'acier à $t_1=131.7s$ (test T6).

Dans la figure 2.18 l'ensemble des valeurs numériques moment-effort normal (M, N) est présenté en comparaison avec les courbes d'interaction ELU. Nous constatons que pour le test T6, le modèle numérique prévoit la rupture de la section due aux importantes déformations de compression qui conduisent à l'écrasement du béton et au flambement des aciers. Ce comportement fut aussi constaté lors des essais : à la fin de T6 le béton aux extrémités des murs en X s'est fortement dégradé (éclatements locaux).

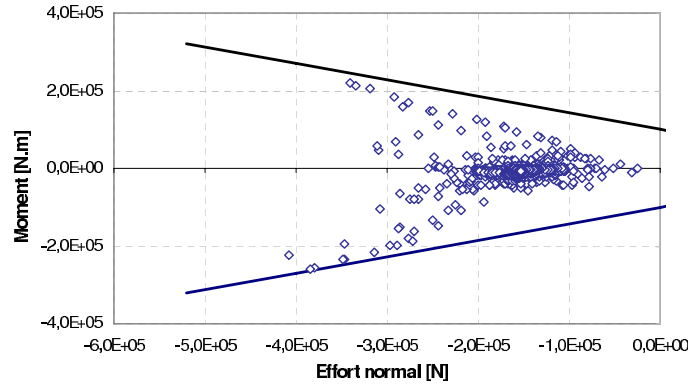


FIG. 2.18 – *Maquette ECOLEADER - Mur X gauche, interaction M-N à la base du niveau 1 et comparaison avec les courbes d'interaction ELU (test T6).*

2.6 Étude comparative des éléments poutres

Nous venons de voir que les trois éléments multifibres présentés dans les sections 2.2, 2.3 et 2.4 sont capables de reproduire quantitativement le comportement global et qualitativement le comportement local des structures élancées en béton armé. Dans cette section nous présentons une étude comparative de ces trois éléments afin d'étudier plus en détail leur performance. Pour cela, prenons le cas d'une poutre console sollicitée à son extrémité libre par une charge transversale P (figure 2.19). La poutre est considéré homogène de comportement élastique avec E le module de Young, G le module de cisaillement, I le moment d'inertie I , A^* la section réduite et L la longueur.

En intégrant les relations d'équilibre et en exprimant les conditions d'appuis à l'encastrement nous pouvons calculer le déplacement vertical de la poutre. Selon la théorie de Timoshenko, la solution analytique est donnée par [Massonnet et Cescotto, 1980]:

$$v(x) = \frac{P}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - x^2L \right) - \frac{Px}{GA^*} \quad (2.41)$$

Selon la théorie Navier-Bernoulli, la solution analytique est la suivante [Massonnet et Cescotto, 1980]:

$$v(x) = \frac{P}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - x^2L \right) \quad (2.42)$$

Le terme Px/GA^* traduit la déformation due à l'effort tranchant ($2\epsilon_{xy} = P/GA^*$). Il n'apparaît pas dans la formulation Navier-Bernoulli puisque dans ce cas la déformation de cisaillement est considérée nulle.

Nous avons introduit les trois éléments multifibres dans le code FEDEASLab [Filippou et M. Constandines, 2004]. Les figures ci-dessous (2.20 à 2.25) présentent les solutions exactes (analytiques) selon les théories de Navier-Bernoulli et Timoshenko et les résultats numériques des éléments finis en question et ceci en faisant varier le nombre d'éléments (1 ou 10) et la



FIG. 2.19 – Poutre console sollicitée par une charge transversale.

longueur de la poutre ($L = 1$ ou $L = 100$). Les autres variables sont prises constantes et égales à $E = 1Pa$, $G = 1Pa$, $I = 1m^4$, $A^* = 1m^2$ et $P = 1N$. Nous constatons les choses suivantes:

- Les solutions analytiques des théories Navier-Bernoulli et Timoshenko sont identiques pour le cas de la poutre élancée ($L = 100$). L'existence des déformations de cisaillement fait que les solutions analytiques diffèrent pour la poutre courte ($L = 1$), (figures 2.20 à 2.25).
- Indépendamment du nombre d'éléments utilisé, l'élément Navier-Bernoulli n'arrive pas à reproduire l'influence des déformations de cisaillement dans le cas de la poutre courte (figures 2.20 à 2.21 à gauche).
- Un seul élément Navier-Bernoulli est suffisant pour trouver la flèche analytique (déplacement maxi) de la poutre longue ($L = 100$) (figure 2.20 à droite).
- En augmentant le nombre d'éléments Navier-Bernoulli nous arrivons à reproduire (et visualiser) correctement la déformée de la poutre longue (figure 2.21 à droite).
- Un seul élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur est suffisant pour trouver la flèche analytique (déplacement maxi) des poutres courte et longue (figure 2.22).
- En augmentant le nombre d'éléments Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur nous arrivons à reproduire correctement la déformée des poutres courte et longue (figure 2.23).
- Un seul élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 n'est pas capable à reproduire la flèche analytique (déplacement maxi) des poutres courte et longue (figure 2.24).
- En augmentant le nombre d'éléments Timoshenko des fonctions d'interpolation d'ordre 1 nous arrivons à reproduire (et visualiser) correctement la déformée des poutres courte et longue (figure 2.25).
- Juste pour des raisons d'illustration, nous présentons dans les figures 2.26 et 2.27 les résultats numériques d'un élément qui n'est pas exempt de phénomène du blocage par cisaillement. Il s'agit d'un élément poutre Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 mais en prenant en compte les termes linéaires pour le calcul de la matrice $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ (voir équation (2.25)). Nous remarquons que même en augmentant le nombre d'éléments, la flèche est largement sous estimée pour le cas de la poutre élancée (apparition de rigidité "parasite").

Conclusions-Remarques: D'après les résultats présentés dans cette section c'est maintenant clair que l'utilisation des éléments finis poutres Navier-Bernoulli est correcte quand les poutres sont élancées (rapport longueur de la poutre sur la dimension la plus grande de la section environ ≥ 1). Les éléments Timoshenko peuvent être utilisés dans tous les cas

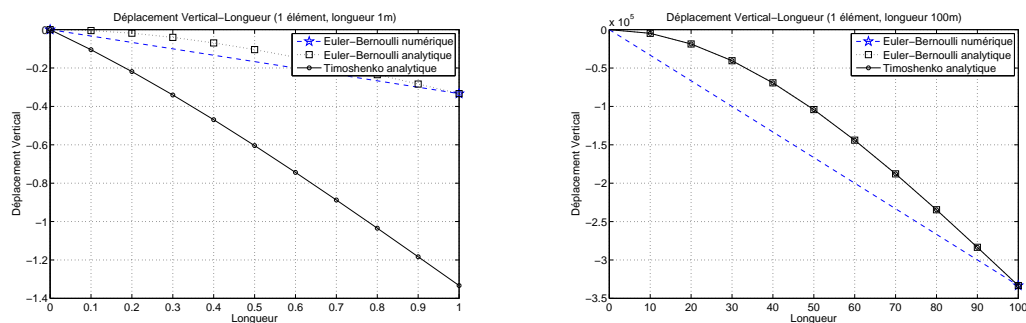


FIG. 2.20 – 1 élément Navier-Bernoulli - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$.

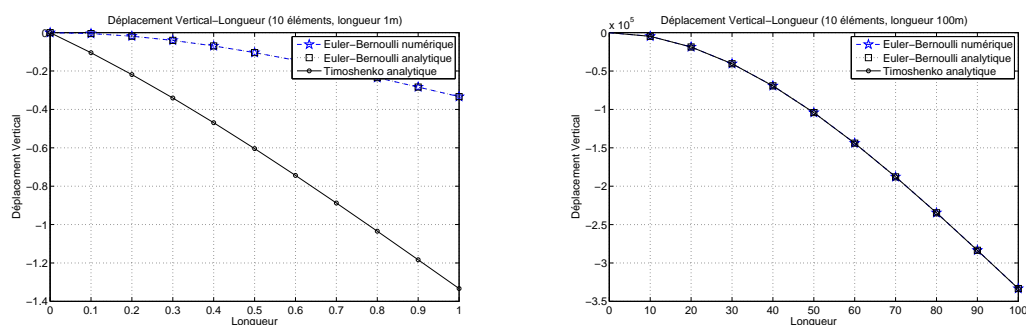


FIG. 2.21 – 10 éléments Navier-Bernoulli - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$.

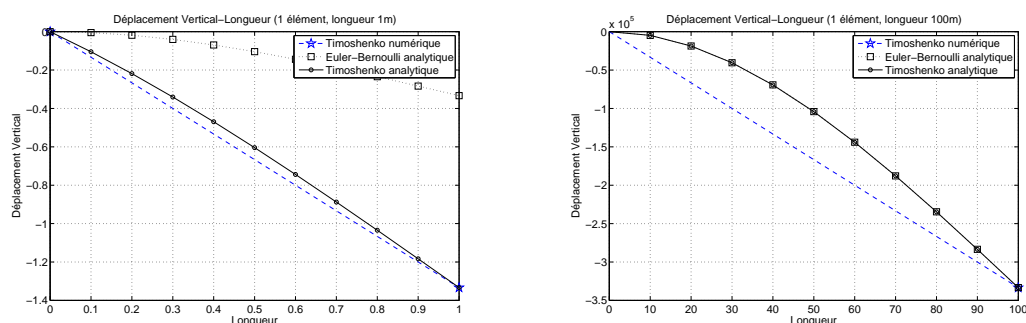


FIG. 2.22 – 1 élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$.

si une attention particulière est prêtée au problème du blocage par cisaillement. L'utilisation des éléments Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 nécessite un plus grand nombre d'éléments afin d'avoir le bon comportement élastique pour le cas d'une poutre console homogène sollicitée à son extrémité libre par une charge transversale. Par contre, un seul élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur est capable de reproduire la solution analytique.

Néanmoins, ce dernier élément a un inconvénient majeur. Ses fonctions d'interpolation dépendent des propriétés élastiques de la poutre. Cela nous oblige à procéder à des homogénéisations quant la section de la poutre n'est pas homogène (e.g. la modélisation d'une poutre

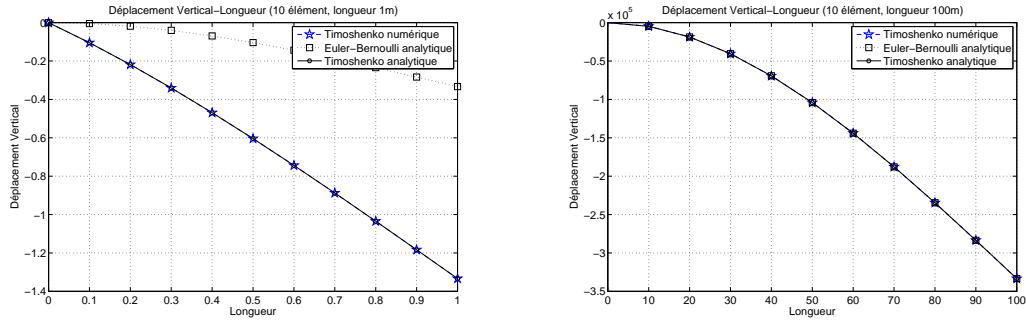


FIG. 2.23 – 10 éléments Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$.

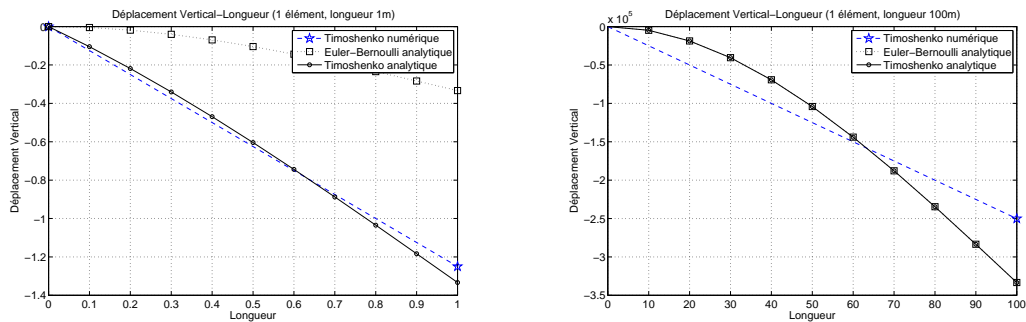


FIG. 2.24 – 1 élément Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$.

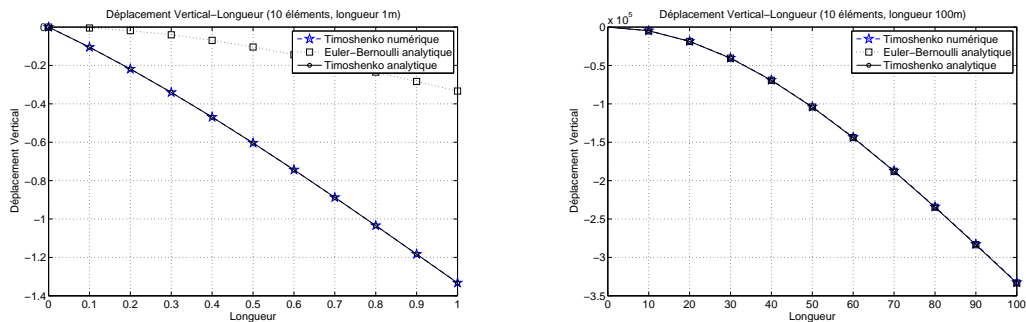


FIG. 2.25 – 10 éléments Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$.

en béton armé). Le paragraphe ci-dessous traite ce problème en proposant un nouvel élément de performance comparable mais avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur qui ne dépendent pas des propriétés élastiques.

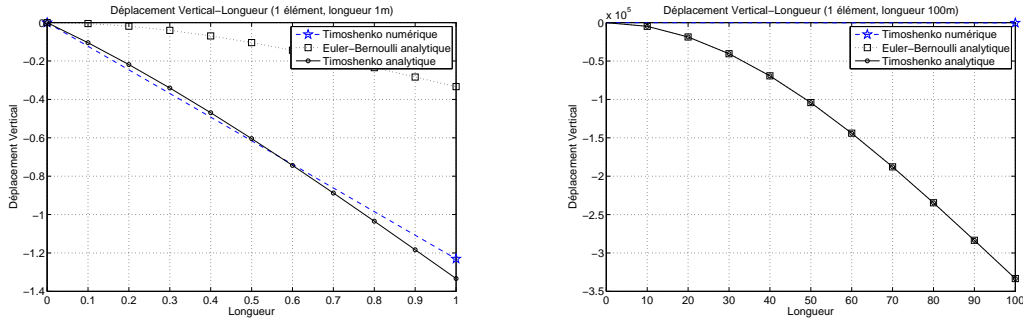


FIG. 2.26 – 1 élément Timoshenko avec des fonctions d’interpolation d’ordre 1 en prenant en compte les termes linéaires pour le calcul des déformations généralisées - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$.

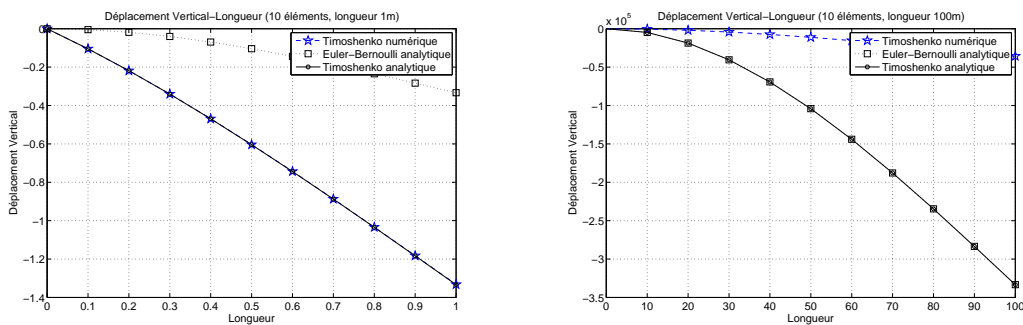


FIG. 2.27 – 10 éléments Timoshenko avec des fonctions d’interpolation d’ordre 1 en prenant en compte les termes linéaires pour le calcul des déformations généralisées - Étude comparative pour (figure gauche) $L = 1$ et (figure droite) $L = 100$.

2.7 Un nouvel élément Timoshenko avec des degrés de liberté élémentaires

Nous présentons dans cette section un nouvel élément Timoshenko avec deux noeuds et des degrés de liberté élémentaires, c’est à dire propres à l’élément. La formulation présentée opte toujours pour une interpolation polynomiale de degré supérieur pour les déplacements transversaux (cubique) et les rotations (quadratique). Néanmoins ce nouvel élément, contrairement à l’élément de la section 2.2, a des fonctions d’interpolation indépendantes des propriétés matérielles. Pour des raisons de simplicité, l’élément est présenté ici en 2D et seulement avec les termes correspondant à la flexion (la discrétisation des degrés de liberté axiaux reste linéaire). Pour plus de détails sur cet élément le lecteur pourra se référer à [Caillerie, 2008], [Cybulski, 2008] et [Caillerie *et al.*, 2009].

L’idée principale derrière le développement de cet élément est le choix astucieux des fonctions d’interpolation de telle façon à former des bases des polynômes de degré 3 pour les déplacements transversaux (4 polynômes indépendants, $H_R^1, H_R^2, Q_R^1, Q_R^2$) et de degré 2 pour les rotations (3 polynômes indépendants, L_R^1, L_R^2, M_R^3). Nous sommes donc obligés d’augmenter le nombre de degrés de liberté en ajoutant des degrés de liberté internes, propres à l’élément. Grâce à ce choix nous sommes capable, par condensation statique, de reproduire les fonctions d’interpolation spécifiques à l’élément de la section 2.2, (voir [Cybulski, 2008] et [Caillerie *et al.*, 2009]).

Nous utilisons ci-dessous une formulation paramétrique où l'élément de référence est le segment $[-1,1]$, figure 2.28. Chaque noeud a deux degrés de liberté, une translation v et une rotation θ . L'élément a en plus trois degrés de libertés élémentaires Δv_1^{el} , $\Delta \theta^{el}$ et Δv_2^{el} . Tous ces degrés de libertés sont stockés dans un vecteur de dimension 7 structuré de la manière suivante:

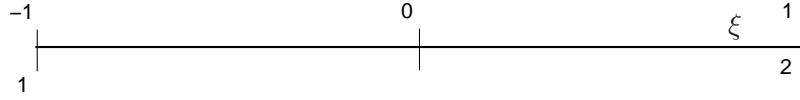


FIG. 2.28 – Élément de référence.

$$\underline{\mathbf{U}}^T = \{ v_1 \quad \theta_1 \quad \Delta v_{el}^1 \quad \Delta \theta_{el} \quad \Delta v_{el}^2 \quad v_2 \quad \theta_2 \} \quad (2.43)$$

Nous considérons le champ de déplacements continus en tout point de la ligne moyenne ξ en fonction du champ discrétisé:

$$\underline{\mathbf{U}}^s = \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{U}} \quad (2.44)$$

avec:

$$\underline{\mathbf{U}}^{sT} = \{ v_s(\xi) \quad \theta_s(\xi) \} \quad (2.45)$$

et

$$v_s(\xi) = H_R^1 v_1 + H_R^2 v_2 + Q_R^1 \Delta v_{el}^1 + Q_R^2 \Delta v_{el}^2 \quad (2.46)$$

$$\theta_s(\xi) = L_R^{\prime 1} \theta_1 + L_R^{\prime 2} \theta_1 + M_R^3 \Delta \theta_{el} \quad (2.47)$$

ou en forme matricielle:

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} H_R^1 & 0 & Q_R^1 & 0 & Q_R^2 & H_R^2 & 0 \\ 0 & L_R^{\prime 1} & 0 & M_R^3 & 0 & 0 & L_R^{\prime 2} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} H_R^1(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \\ H_R^2(\xi) &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} L_R^{\prime 1}(\xi) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+3\xi) \\ L_R^{\prime 2}(\xi) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-3\xi) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
Q_R^1(\xi) &= (1 - \xi)(1 + \xi)(a\xi + \frac{b}{2}) = (1 - \xi^2)(a\xi + \frac{b}{2}) \\
Q_R^2(\xi) &= (1 - \xi)(1 + \xi)(c\xi + \frac{d}{2}) = (1 - \xi^2)(c\xi + \frac{d}{2})
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$M_R^3(\xi) = 1 - \xi^2 \tag{2.52}$$

Remarques :

- Les constantes a, b, c, d de l'équation (2.51) prennent des valeurs telles que les fonctions Q_R^1 et Q_R^2 restent indépendantes (e.g. $a = 1, b = 2, c = -1, d = 2$).
- Les fonctions H_R^1, H_R^2, Q_R^1 et Q_R^2 forment une base des polynômes de degré 3.
- Les fonctions L_R^1, L_R^2 et M_R^3 forment une base des polynômes de degré 2.
- Les degrés de liberté élémentaires $\Delta v_1^{el}, \Delta \theta^{el}$ et Δv_2^{el} peuvent être trouvés en fonction des v_1, θ_1, v_2 et θ_2 par condensation statique.
- Prenons le cas d'une poutre console homogène de comportement élastique sollicitée à son extrémité libre par une charge transversale. Après condensation statique nous pouvons montrer analytiquement que les fonctions d'interpolations de ce nouvel élément sont les mêmes avec les fonctions de forme de l'élément présenté dans la section 2.2 [Cybulski, 2008]. Un seul élément alors est suffisant pour trouver la flèche analytique d'une poutre console d'élanement quelconque, homogène et de comportement élastique, sollicitée à son extrémité libre par une charge transversale.
- Cet élément est plus générale que l'élément de la section 2.2 et conforme à la formulation habituelle de la méthode des éléments finis, puisque ses fonctions de forme ne dépendent pas des caractéristiques des matériaux.
- L'implémentation de cet élément comme une poutre multifibre suit en général les mêmes pas que l'implémentation des éléments poutres multifibres présentés au début de ce chapitre (figure 2.3).

2.8 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté plusieurs formulations d'éléments poutres multifibres de cinématique Navier-Bernoulli ou Timoshneko et leur utilisation pour reproduire le comportement non linéaire de structures en béton armé testées sur table sismique. Après une comparaison des différents éléments poutres sur des cas simples, nous avons enfin proposé un nouvel élément Timoshenko avec des degrés de liberté élémentaires et des fonctions de formes indépendantes des caractéristiques matérielles.

Une stratégie de modélisation basée sur des éléments poutres multifibres et des lois de comportement issues de la mécanique de l'endommagement et de la plasticité est capable de reproduire avec une très bonne approximation la réponse globale de structures en béton armé en termes de déplacements et de forces. De plus, grâce aux couplages prises en compte automatiquement par les éléments multifibres (e.g. moment M , effort normal N) nous avons aussi accès aux courbes d'interaction ($M - N$). Ces courbes, qui sont primordiales pour le dimensionnement, ne sont pas accessibles avec les outils classiques de l'ingénierie.

La modélisation avec des poutres multifibres permet enfin d'avoir qualitativement de bonnes indications sur la distribution de l'endommagement et de la plasticité, à prédire la position des zones critiques ainsi que la rupture due à la traction ou à la compression (plastification et flambement des armatures, écaillage du béton) et à réduire significativement le temps de calcul. Du fait de sa relative souplesse d'utilisation, ce type d'outil est intéressant pour des études paramétriques. Il apparaît ainsi maintenant possible de l'utiliser pour étudier de plus larges configurations de structures, chose qui est difficile et coûteuse d'un point de vue expérimental.

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de proposer un élément d'interface $3D$ pour modéliser le comportement d'une fondation superficielle reposant sur un massif de sol semi-infini soumis à des chargements sévères [Grange *et al.*, 2006a], [Grange *et al.*, 2007a], [Grange *et al.*, 2008a], [Grange *et al.*, 2007b], [Grange, 2008], [Grange *et al.*, 2008b]. Pour cela nous allons utiliser le concept de macro-élément utilisé initialement en géotechnique par [Nova et Montrasio, 1991], concept qui consiste à condenser les non-linéarités (matérielles ou/et géométriques) dans un domaine de dimension fini nommé "champ proche". Cette hypothèse permet de travailler en variables globales (forces et déplacements) définies au centre de la fondation. Le problème peut donc être traité de manière simplifiée, puisqu'il suffit de lier le torseur des déplacements qui s'applique au centre de la fondation en fonction du torseur des actions en ce même point. Le "champ lointain" est quant à lui considéré linéaire (figure 3.1). Après la présentation de ce nouvel outil numérique, le chapitre se termine avec la modélisation de l'Interaction Sol Structure (ISS) sur la structure NEES, structure déjà présentée dans le chapitre 2.

3.2 Présentation des variables cinématiques et d'efforts

Initialement, les critères de rupture des fondations étaient développés pour des géométries données (fondation filante [Nova et Montrasio, 1991], [Pecker, 1997], [Crémer, 2001] et fondations circulaires [Martin, 1994], [Gottardi *et al.*, 1999]). Néanmoins, la comparaison dans l'espace des variables adimensionnées (figure 3.2) montre que dans cet espace les critères sont assez proches quelles que soient les géométries considérées. Dans la suite de ce chapitre, afin de simplifier les équations et de pouvoir facilement étendre le macro-élément à différentes configurations géométriques, une notation adimensionnelle est donc utilisée [Grange, 2008].

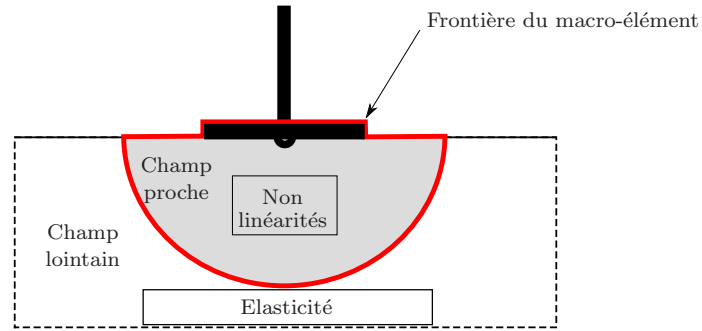


FIG. 3.1 – Décomposition en champ proche et champ lointain pour la définition de la frontière du macro-élément d'ISS.

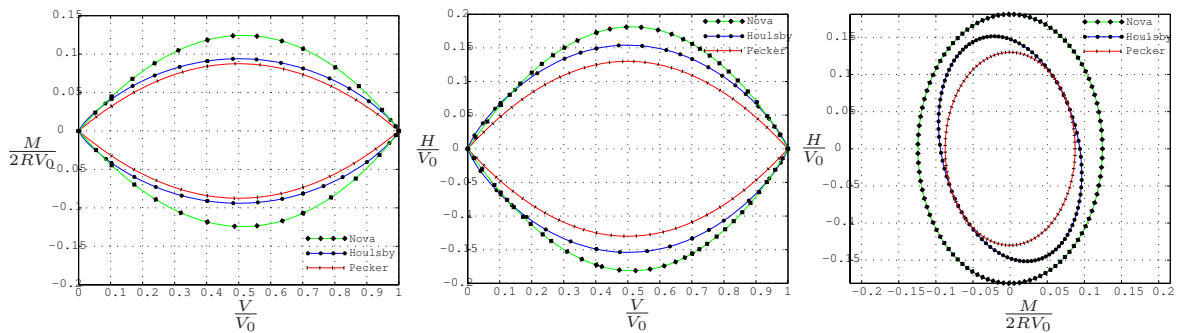


FIG. 3.2 – Comparaisons des critères de rupture proposés par divers auteurs ayant simulé le comportement de fondations de géométries différentes ramenés dans l'espace des efforts adimensionnés. Fondations filantes pour Nova et Pecker, circulaire pour Houlsby.

La méthode de normalisation des variables cinématiques et d'efforts pour une fondation de géométrie rectangulaire est explicitée ci-après (l'extension de cette normalisation pour des géométries circulaire et filante est présentée dans [Grange, 2008]). Les efforts sont composés d'une force verticale V , des efforts horizontaux H_x , H_y et de moments M_x , M_y . Les variables cinématiques associées à ces efforts sont: le déplacement vertical u_z , les déplacements horizontaux u_x , u_y et les rotations θ_x , θ_y . Le moment de torsion M_z n'est pas pris en compte par le modèle (figure 3.3).

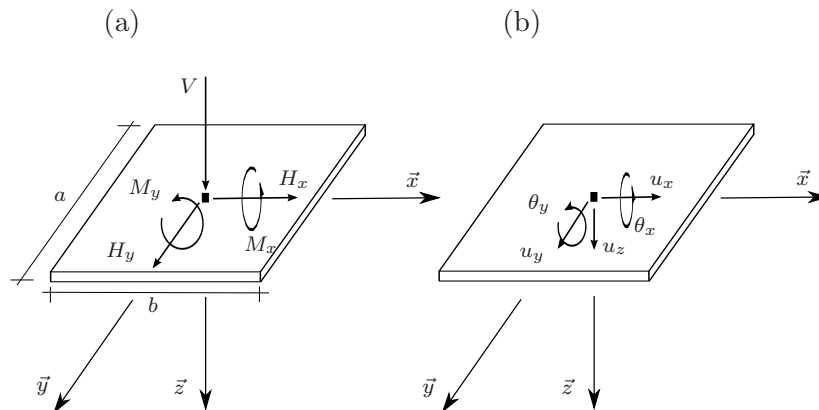


FIG. 3.3 – Présentation des variables globales: (a) efforts et (b) déplacements sur la fondation rectangulaire.

Dans ce chapitre les variables adimensionnées (“réduites”), qu’elles soient cinématiques ou d’efforts, sont notées avec un exposant \diamond . Pour une semelle rectangulaire de dimensions $a \times b$ les forces réduites deviennent:

- (i) Forces horizontales réduites: $H_x^\diamond, H_y^\diamond$
- (ii) Force verticale réduite: V^\diamond
- (iii) Moments réduits: $M_x^\diamond, M_y^\diamond$

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} V^\diamond \\ H_x^\diamond \\ M_y^\diamond \\ H_y^\diamond \\ M_x^\diamond \end{Bmatrix} = \frac{1}{abq_{max}} \begin{Bmatrix} V \\ H_x \\ \frac{M_y}{b} \\ H_y \\ \frac{M_x}{a} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Dans ces expressions q_{max} représente la contrainte ultime que peut supporter le sol sous la fondation pour un chargement purement vertical. q_{max} est donnée par la relation suivante (expression pour une fondation rectangulaire avec a la plus grande longueur, [Philipponat et Hubert, 2003]):

$$q_{max} = \frac{1}{2} \left(1 - 0.2 \frac{b}{a} \right) \gamma b N_\gamma + q_0 N_q + \left(1 + 0.2 \frac{b}{a} \right) c N_c \quad (3.2)$$

où q_0 représente la contrainte verticale effective amenée par le sol à la base de la fondation (dans le cas où cette dernière ne serait pas à la surface du massif de sol mais reposerait à une certaine profondeur), γ est le poids volumique du sol, N_γ est le terme de surface, N_q le terme dépendant de la profondeur de la fondation, et N_c le terme de cohésion. Les relations permettant de calculer N_γ , N_q and N_c sont données dans [Caquot et Kérisel, 1966]. Ces termes ne dépendent seulement que de la cohésion c et de l’angle de frottement ϕ du sol.

De manière similaire les déplacements du centre de la fondation sont les suivants:

- (i) Déplacements horizontaux réduits: $u_x^\diamond, u_y^\diamond$
- (ii) Déplacement vertical réduit: u_z^\diamond
- (iii) Rotations réduites: $\theta_x^\diamond, \theta_y^\diamond$

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_z^\diamond \\ u_x^\diamond \\ \theta_y^\diamond \\ u_y^\diamond \\ \theta_x^\diamond \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \begin{Bmatrix} u_z \\ u_x \\ b\theta_y \\ u_y \\ a\theta_x \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Remarquons que grâce à ce choix de normalisation, les variables $\underline{\mathbf{F}}$ et $\underline{\mathbf{u}}$ sont conjuguées. Plus spécifiquement, le travail des efforts réduits dans le problème normalisé est donné par:

$$W_{reduit} = {}^t \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{q_{max}(ab)^2} (Vu_z + H_x u_x + M_y \theta_y + H_y u_y + M_x \theta_x) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{q_{max}(ab)^2} W_{reel} \quad (3.4)$$

Autrement dit, le travail réel se déduit facilement du travail réduit en le multipliant par la quantité constante: $\frac{q_{max}(ab)^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ce choix est très important car il permet d'exprimer le travail des efforts extérieurs appliqué à la fondation grâce à ces variables comme cela est mentionné dans [Nova et Montrasio, 1991].

3.3 Modèle de plasticité

Le modèle de plasticité introduit dans le macro-élément est issu des lois classiques de la thermodynamique des processus irréversibles [Lemaitre et Chaboche, 1988], [Lemaitre et Chaboche, 1990]. La surface de charge ainsi que son évolution sont inspirées du travail de [Crémer, 2001], [Crémer *et al.*, 2001], [Crémer *et al.*, 2002] et sont écrits dans l'espace des efforts globaux réduits V^\diamond , H_x^\diamond , M_x^\diamond , H_y^\diamond , M_y^\diamond . Le critère de rupture est basé les travaux de [Salençon et Pecker, 1995a], [Salençon et Pecker, 1995b], [Pecker, 1997].

Les points nécessaires à l'étude du modèle de plasticité sont:

- (i) Le comportement élastique.
- (ii) Le comportement plastique (critère de rupture, surface de charge, variables d'écoulements cinématiques et isotrope, loi de tangence, loi d'écoulement).

Ces points sont développés brièvement ci-dessous [Grange, 2008].

3.3.1 Comportement élastique

La loi de comportement est écrite à tout instant de la manière suivante:

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}} \underline{\mathbf{u}}^{\text{el}} \quad (3.5)$$

où les vecteurs force et déplacement sont les vecteurs adimensionnés définis précédemment (équations (3.1) et (3.3)) et $\underline{\mathbf{u}}^{\text{el}}$ le vecteur des déplacements élastiques. La matrice de rigidité élastique $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}}$ est défini comme:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}} = \begin{bmatrix} K_{zz}^{\diamond el} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{h_x h_x}^{\diamond el} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta_y \theta_y}^{\diamond el} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{h_y h_y}^{\diamond el} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta_x \theta_x}^{\diamond el} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

avec pour une semelle rectangulaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{zz}^{el} = \frac{K_{zz}^{el}}{q_{max} \sqrt{a^2 + b^2}} \\ K_{h_x h_x}^{el} = K_{h_y h_y}^{el} = \frac{K_{h_h}^{el}}{q_{max} \sqrt{a^2 + b^2}} \\ K_{\theta_y \theta_y}^{el} = \frac{K_{\theta_y \theta_y}^{el}}{q_{max} b^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \\ K_{\theta_x \theta_x}^{el} = \frac{K_{\theta_x \theta_x}^{el}}{q_{max} a^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Les différents termes de cette matrice élastique sont obtenues en utilisant la partie réelle des impédances statiques définies dans [Gazetas, 1991]. Pour une fondation rectangulaire nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{h_x h_x} = \frac{G_0}{1-\nu} \beta_{h_x h_x} \sqrt{ab} \\ K_{zz} = \frac{G_0}{1-\nu} \beta_{zz} \sqrt{ab} \\ K_{\theta_y \theta_y} = \frac{G_0}{1-\nu} \beta_{\theta_y \theta_y} b^2 \sqrt{ab} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

où $\beta_{h_x h_x}$, β_{zz} , et $\beta_{\theta_y \theta_y}$ sont des coefficients dépendants du rapport des dimensions a/b de la fondation donnés dans [Philipponat et Hubert, 2003].

L'équation (3.8) est fonction des propriétés géométriques de la fondation (longueurs a et b), des propriétés élastiques du sol (module de cisaillement G_0 , coefficient de Poisson ν) et du profil de la couche de sol (H étant la profondeur par rapport au sol à laquelle on trouve une couche de sol ayant de très bonnes caractéristiques de type "bed-rock").

En accord avec le macro-élément présenté par [Crémer, 2001] les termes hors-diagonaux de la matrice de rigidité élastique sont négligés pour les fondations superficielles (voir aussi [Pecker, 1984]).

3.3.2 Comportement plastique

Dans cette section, seules les non-linéarités matérielles sont prises en compte (plasticité du sol). Cette hypothèse nous permet donc d'écrire le déplacement total du centre de la fondation de la manière suivante:

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^{elpl} = \underline{\mathbf{u}}^{el} + \underline{\mathbf{u}}^{pl} \quad (3.9)$$

avec $\underline{\mathbf{u}}^{pl}$ le vecteur de déplacement plastique.

Le comportement de la fondation est ici décrit selon la théorie de plasticité classique. Nous allons maintenant en définir les principaux points.

Remarque: Il est important de rappeler que d'autres non-linéarités peuvent intervenir dans la formulation du macro-élément e.g. non linéarités géométriques comme le décollement, voir [Grange, 2008].

3.3.2.1 Critère de rupture

Le critère de rupture proposé ci-dessous est inspiré du travail de [Salençon et Pecker, 1995a], [Salençon et Pecker, 1995b] et [Pecker, 1997]. L'adaptation de ce critère pour des sollicitations 3D est relativement simple en considérant une fondation circulaire, c'est à dire celle rendant le problème axisymétrique. En effet dans ce cas, les efforts horizontaux d'une part et les moments d'autre part peuvent être traités de manière similaire dans les deux directions \vec{x} et \vec{y} . En d'autres termes les interactions entre les deux efforts horizontaux ou les deux moments peuvent être décrites par des cercles (les dénominateurs pour les efforts horizontaux, ainsi que pour les moments sont les mêmes dans l'équation (3.10)). Il en résulte que l'adaptation du critère pour des chargements dans les directions \vec{x} et \vec{y} et pour une fondation circulaire consiste simplement à ajouter deux termes au critère utilisé dans [Crémer, 2001], l'un relatif à l'effort horizontal H_x^\diamond et l'autre relatif au moment M_y^\diamond afin d'obtenir la surface de dimension 5 suivante (équation (3.10)):

$$f_\infty \equiv \left(\frac{H_x^\diamond}{aV^{\diamond c}(1-V^\diamond)^d} \right)^2 + \left(\frac{M_y^\diamond}{bV^{\diamond e}(1-V^\diamond)^f} \right)^2 + \left(\frac{H_y^\diamond}{aV^{\diamond c}(1-V^\diamond)^d} \right)^2 + \left(\frac{M_x^\diamond}{bV^{\diamond e}(1-V^\diamond)^f} \right)^2 - 1 = 0 \quad (3.10)$$

Avec les coefficients:

- (i) a, b définissant la taille de la surface dans le plan ($H^\diamond - M^\diamond$).
- (ii) c, d et e, f définissant la forme parabolique de la surface dans les plans ($V^\diamond - H^\diamond$) et ($V^\diamond - M^\diamond$) respectivement.

La valeur de ces paramètres peut être calée par différents résultats expérimentaux. [Crémer, 2001] donne des valeurs pour différents types de sols.

Nous faisons, de plus, l'hypothèse que l'adimensionnement des variables vu plus haut permet de conserver cette adaptation de la surface pour les fondations rectangulaires. En effet la normalisation des variables permet d'obtenir des variables indépendantes des dimensions de la fondation et donc comparables entre elles, comme dans le cas de la fondation circulaire (figure 3.2).

3.3.2.2 Surface de charge

En partant de l'expression donnée dans [Crémer, 2001], l'expression analytique en 5D de la surface de charge f_c prend la forme suivante:

$$f_c(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathcal{L}}, \rho, \gamma) \equiv \left(\frac{H_x^\diamond}{\rho a V^{\diamond c} (\gamma - V^\diamond)^d} - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{M_y^\diamond}{\rho b V^{\diamond e} (\gamma - V^\diamond)^f} - \frac{\beta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{H_y^\diamond}{\rho a V^{\diamond c} (\gamma - V^\diamond)^d} - \frac{\delta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{M_x^\diamond}{\rho b V^{\diamond e} (\gamma - V^\diamond)^f} - \frac{\eta}{\rho} \right)^2 - 1 = 0 \quad (3.11)$$

où $\underline{\tau} = (\alpha, \beta, \delta, \eta)$ est un vecteur contenant les variables d'écroissements cinématiques, ρ est la variable d'écroissage isotrope, \mathbf{F} le vecteur regroupant les différents efforts courants (équation (3.1)). Les relations pilotant l'évolution des variables d'écroissements sont données dans les paragraphes suivants.

3.3.2.3 Lois d'écroissements cinématiques

Les variables d'écroissements cinématiques α , β , δ , et η permettent de définir le centre des ellipses dans les hyper-plans $(H_x^\diamond, M_y^\diamond, H_y^\diamond, M_x^\diamond)$. L'évolution de ces variables a été obtenue en étudiant le comportement issu de simulations expérimentales et numériques d'une fondation soumise à des chargements statiques monotones. Plus particulièrement, [Gottardi *et al.*, 1999] fournit des relations obtenues lors de campagnes expérimentales pour des fondations circulaires et pour différents types de sols. [Crémer, 2001] utilise des courbes similaires obtenues quant à elles grâce à des simulations numériques avec le logiciel "Dynaflow". Ces simulations permettent de montrer que les différentes lois efforts-déplacements peuvent être approchées par des relations faisant intervenir la fonction exponentielle et sont indépendantes de l'effort vertical réduit V^\diamond . Ceci implique que les variables d'écroissage peuvent être pilotées par des équations différentielles du 1^{er} ordre. Bien sûr il s'agit d'une approximation mais elle est justifiée quant au niveau de précision que nous voulons obtenir.

Par exemple, les relations liant M_y^\diamond et $\theta_y^\diamond = \theta_y^{\diamond elpl}$ peuvent être approchées de la manière suivante (figure 3.4):

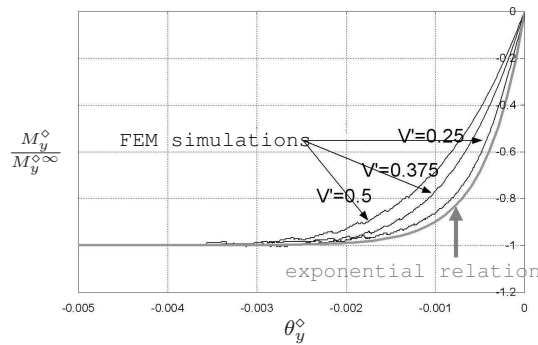


FIG. 3.4 – Simulations EF- relations entre M^\diamond et θ^\diamond , indépendantes de V^\diamond .

$$M_y^\diamond = M_y^{\diamond\infty} \left(1 - \exp \left(\frac{-K_{\theta\theta}^{\diamond el}}{M_y^{\diamond\infty}} \theta_y^\diamond \right) \right) \quad (3.12)$$

où $M_y^{\diamond\infty}$ représente la limite de la courbe M_y^\diamond quand θ_y^\diamond tend vers l'infini. L'équation différentielle du 1^{er} ordre correspondante est la suivante:

$$\dot{M}_y^\diamond = K_{\theta\theta}^{\diamond el} \left(1 - \frac{M_y^\diamond}{M_y^{\diamond\infty}} \right) \dot{\theta}_y^\diamond \quad (3.13)$$

Selon l'équation (3.9) et en considérant qu'à chaque instant on a $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{el} \mathbf{u}^{el}$, il apparaît possible de lier aisément l'incrément de force avec l'incrément de déplacement plastique (équation (3.14)):

$$\dot{M}_y^\diamond = K_{\theta\theta}^{\diamond el} \left(\frac{M_y^{\diamond\infty}}{M_y^\diamond} - 1 \right) \dot{\theta}_y^{\diamond pl} \quad (3.14)$$

Par ailleurs, comme M_y^\diamond possède la même dimension que le terme $(\beta + \rho) bV^{\diamond e} (\gamma - V^\diamond)^f = 2\beta bV^{\diamond e} (\gamma - V^\diamond)^f$ (en effet, dans l'équation (3.11), pour un chargement radial - lorsque les efforts et moments sont couplés par une relation linéaire - et monotone on a $\beta + \rho = 2\beta$, voir paragraphe 3.3.2.4), l'évolution de la variable d'écroissage cinématique β est pilotée par l'équation suivante:

$$\dot{\beta} = \frac{1}{2bV^{\diamond e} (\gamma - V^\diamond)^f} K_{\theta\theta}^{\diamond el} \left(\frac{M_y^{\star\infty}}{\beta} - 1 \right) \dot{\theta}_y^{\diamond pl} \quad (3.15)$$

où $M_y^{\star\infty}$ est la limite de la courbe $\beta \left(\theta_y^{\diamond pl} \right)$ quand $\theta_y^{\diamond pl}$ tend vers l'infini.

L'évolution des autres variables d'écroissages cinématiques est donnée par le même type d'équations différentielles.

Pour le cas d'une fondation superficielle soumise à un chargement cyclique, le comportement plastique peut être supposé indépendant dans les deux sens d'un chargement de direction donné. Deux familles de variables d'écroissages cinématiques doivent donc être utilisées pour modéliser au mieux cette non-dépendance. Ainsi 8 relations et variables d'écroissages cinématiques sont nécessaires pour simuler les 8 sens de sollicitations $\dot{H}_x^\diamond > 0$, $\dot{H}_x^\diamond < 0$, $\dot{M}_y^\diamond > 0$, $\dot{M}_y^\diamond < 0$, $\dot{H}_y^\diamond > 0$, $\dot{H}_y^\diamond < 0$, $\dot{M}_x^\diamond > 0$, et $\dot{M}_x^\diamond < 0$. Par exemple, pour un chargement radial, chaque variable d'écroissage cinématique obéit aux relations suivantes (pour des raisons de simplicité, seul le cas de β est présenté ici):

$$\begin{cases} \dot{\beta}^\oplus = \frac{1}{2bV^{\diamond e} (\gamma - V^\diamond)^f} K_{\theta\theta}^{\diamond el} \left(\frac{M_y^{\star\infty}}{\beta^\oplus} - 1 \right) \dot{\theta}_y^{\diamond pl} \\ \dot{\beta}^\ominus = \frac{1}{2bV^{\diamond e} (\gamma - V^\diamond)^f} K_{\theta\theta}^{\diamond el} \left(-\frac{M_y^{\star\infty}}{\beta^\ominus} - 1 \right) \dot{\theta}_y^{\diamond pl} \end{cases} \quad (3.16)$$

La première équation du système (3.16) est activée quand $\dot{\theta}_y^{\diamond pl} \geq 0$ (elle correspond aux chargements de signe positif, c'est pourquoi elle est affectée de l'exposant \oplus), la seconde équation est activée lorsque $\dot{\theta}_y^{\diamond pl} \leq 0$ (affectée de l'exposant \ominus). Finalement à chaque pas, β est calculé de la manière suivante:

$$\beta = \beta^\oplus + \beta^\ominus \quad (3.17)$$

Pour un chargement non radial (i.e. lorsque les efforts et moments ne sont plus couplés par une relation linéaire), l'évolution des variables d'écroissage cinématique est plus compliquée. En effet, dans certains cas β_{lim} peut décroître alors que $\dot{M}_y^\diamond \geq 0$ (β_{lim} est la valeur vers laquelle tendrait β si le chargement à cet instant restait monotone et dans la direction considérée). En d'autres termes, même si M_y^\diamond croît et que $\dot{\theta}_y^{\diamond pl} \geq 0$, β^\ominus peut être activé. C'est la raison pour laquelle pour un chargement non radial l'évolution des variables d'écroissage cinématique est pilotée par des relations de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\beta}^{\oplus} = \frac{1}{2bV^{\circ e}(\gamma - V^{\circ})^f} K_{\theta\theta}^{\circ el} \left(\frac{M_y^{\star\infty}}{\beta^{\oplus}} - 1 \right) \left| \dot{\theta}_y^{\circ pl} \right| \\ \dot{\beta}^{\ominus} = \frac{-1}{2bV^{\circ e}(\gamma - V^{\circ})^f} K_{\theta\theta}^{\circ el} \left(-\frac{M_y^{\star\infty}}{\beta^{\ominus}} - 1 \right) \left| \dot{\theta}_y^{\circ pl} \right| \end{cases} \quad (3.18)$$

La valeur de $M_y^{\star\infty}$ est évaluée de la manière suivante:

$$\begin{cases} M_y^{\star\infty} = \beta_{lim} - \beta^{\ominus} & si \quad \dot{\beta} > 0 \\ M_y^{\star\infty} = -(\beta_{lim} - \beta^{\oplus}) & si \quad \dot{\beta} < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

La limite $M_y^{\star\infty}$ est toujours positive, inférieure ou égale à 1.

La première équation du système (3.18) est activée lorsque $\dot{\beta} \geq 0$ alors que la seconde équation est activée lorsque $\dot{\beta} < 0$.

3.3.2.4 Loi d'érouissage isotrope

Pour bien simuler le fait que l'état de plastification du sol sous la partie de semelle décollée doit rester inchangé et qu'en cas de changement de sens de sollicitation la courbe effort-déplacement doit de nouveau entrer dans le domaine plastique pour le même effort et avec la même pente (figure 3.5), une relation entre la variable d'érouissage isotrope et les variables d'érouissages cinématiques est nécessaire comme celle décrite dans [Crémer, 2001]. L'évolution de ces surfaces de charges obéissant à cette propriété est représentée par la figure 3.5.

Cette évolution est traduite par la relation mathématique suivante:

$$\dot{\rho} = \left| \frac{d\|\underline{\tau}\|}{dt} \right| = \left| \frac{\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta} + \delta\dot{\delta} + \eta\dot{\eta}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \eta^2}} \right| \quad (3.20)$$

avec $\|\underline{\tau}\|$ la norme du vecteur $\underline{\tau}$ et $\frac{d}{dt}$ le symbole de la dérivée par rapport au temps.

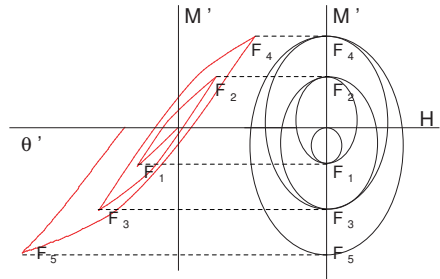


FIG. 3.5 – Relations entre les variables d'érouissages cinématiques et isotrope dans les plans ($M^{\circ} - H^{\circ}$).

3.3.2.5 Évolution de la variable d'écroissance liée au poids propre

L'évolution de la variable d'écroissance γ dépend fortement de l'évolution de l'effort vertical V^\diamond . En effet, durant la phase d'initialisation pour laquelle la fondation n'est soumise qu'au poids propre de la structure nous avons $\gamma = V^\diamond$. Durant cette première phase, l'évolution de γ est donc pilotée par une relation empirique donnée par [Nova et Montrasio, 1991] pour un chargement monotone liant l'effort vertical avec le déplacement vertical. Elle est donnée par l'équation (3.21) et est représentée par la figure 3.6.

$$\gamma = 1 - \exp\left(-K_{zz}^{\diamond el}(u_z^\diamond)\right) \quad (3.21)$$

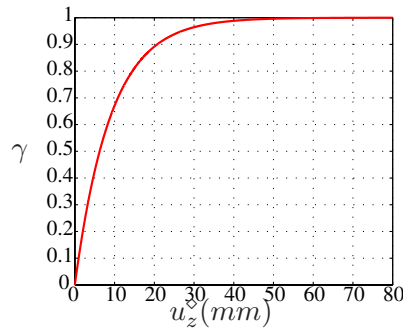


FIG. 3.6 – Évolution de la variable d'écroissance liée au poids propre.

L'équation (3.21) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du 1^{er} ordre:

$$\dot{\gamma} = K_{zz}^{\diamond el} (1 - \gamma) \dot{u}_z^\diamond \quad (3.22)$$

ou encore en fonction du déplacement vertical plastique:

$$\dot{\gamma} = K_{zz}^{\diamond el} \frac{1 - \gamma}{\gamma} \dot{u}_z^{\diamond pl} \quad (3.23)$$

Pour les phases de chargement quelconque (plus seulement vertical), les autres déplacements plastiques (déplacements horizontaux et rotations plastiques) peuvent aussi accroître la taille de la surface de charge dans la direction de V^\diamond . En conséquence, l'évolution de γ dépend aussi de ces derniers selon l'expression suivante:

$$\dot{\gamma} = \left(a_1 K_{zz}^{\diamond el} \dot{u}_z^{\diamond pl} + a_2 K_{h_x h_x}^{\diamond el} \left| \dot{u}_x^{\diamond pl} \right| + a_3 K_{\theta_y \theta_y}^{\diamond el} \left| \dot{\theta}_y^{\diamond pl} \right| + a_4 K_{h_y h_y}^{\diamond el} \left| \dot{u}_y^{\diamond pl} \right| + a_5 K_{\theta_x \theta_x}^{\diamond el} \left| \dot{\theta}_x^{\diamond pl} \right| \right) \frac{1 - \gamma}{\gamma} \quad (3.24)$$

Où a_1 , a_2 , a_3 , a_4 et a_5 sont des paramètres permettant d'ajuster l'influence de chaque composante du vecteur de déplacements plastiques. Par défaut ces paramètres sont tous égaux à l'unité.

3.3.2.6 Loi de tangence

Comme dans [Prevost, 1978], une loi de tangence est utilisée afin de s'assurer de la bonne évolution de la surface de charge au moment de la rupture. En effet, à cet instant, le point de charge courant qui appartient à la surface de charge doit venir en contact avec le critère de rupture et de manière à ce que ce soit l'unique point d'intersection entre les deux surfaces. Ceci implique qu'il y ait une tangence parfaite entre la surface de charge et le critère de rupture. En d'autres termes, toute interpénétration du critère de rupture par la surface de charge doit être empêchée.

La loi de tangence a aussi une autre fonction. Grâce à cette loi, dans le cas des chargements non radiaux, le point de charge final de rupture peut être évalué ce qui permet ensuite de déterminer les limites des variables d'érouissages cinématiques vues plus haut.

3.3.2.7 Loi d'écoulement

La loi d'écoulement nous permet de donner la direction dans l'espace des déplacements réduits dans laquelle vont se développer les déplacements plastiques.

Dans l'espace à 4 dimensions défini par l'hyperplan $(H_x^\diamond, M_y^\diamond, H_y^\diamond, M_x^\diamond)$, il est légitime que la plasticité se développe selon la normale à la surface de charge \underline{n}_f . En effet, si la projection de cette normale selon un axe donné (par exemple H_x^\diamond) est positive, alors la projection du vecteur vitesse plastique sera aussi positive (figure 3.7 (b)). Dans cet hyperplan, la surface de charge f_c est suffisante pour décrire la direction du vecteur vitesse plastique et donc la loi d'écoulement est dans cet hyperplan associée.

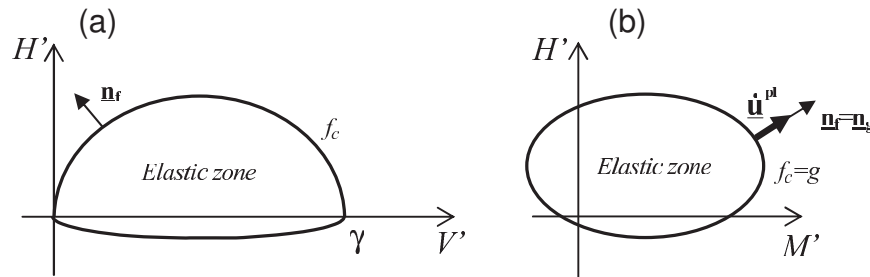


FIG. 3.7 – Loi d'écoulement associée (a) dans un plan $(H^\diamond - V^\diamond)$ la projection de la normale à la surface de charge sur l'axe V^\diamond peut être négative et (b) dans un plan $(H^\diamond - M^\diamond)$.

Cependant, dans les 4 autres plans, où l'effort vertical intervient (i.e. $(H_x^\diamond, V^\diamond)$, $(M_y^\diamond, V^\diamond)$, $(H_y^\diamond, V^\diamond)$, $(M_x^\diamond, V^\diamond)$), la surface de charge ne peut pas être utilisée pour décrire correctement la direction du vecteur vitesse plastique. En effet, il existe des cas où la projection de la normale à la surface est négative alors que la projection du vecteur vitesse plastique \dot{u}_z^{pl} doit toujours être positive ou égale à zéro (figure 3.7 (a)) C'est la raison pour laquelle la loi d'écoulement g n'est pas associée dans ces 4 plans. L'expression de g_c est donnée par la relation (3.25), [Grange, 2008].

$$\begin{aligned}
g_c(\mathbf{F}, \mathcal{I}, \rho, \gamma, V_c^\diamond) \equiv & \left(\frac{H_x^\diamond}{\rho \frac{aV_c^{\diamond c}}{(\kappa\gamma + V_c^\diamond)^d} (\gamma - V_c^\diamond)^d (\kappa\gamma + V_c^\diamond)^d} - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 \\
& + \left(\frac{M_y^\diamond}{\rho \frac{bV_c^{\diamond e}}{(\xi\gamma + V_c^\diamond)^f} (\gamma - V_c^\diamond)^f (\xi\gamma + V_c^\diamond)^f} - \frac{\beta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{H_y^\diamond}{\rho \frac{aV_c^{\diamond c}}{(\kappa\gamma + V_c^\diamond)^d} (\gamma - V_c^\diamond)^d (\kappa\gamma + V_c^\diamond)^d} - \frac{\delta}{\rho} \right)^2 \\
& + \left(\frac{M_x^\diamond}{\rho \frac{bV_c^{\diamond e}}{(\xi\gamma + V_c^\diamond)^f} (\gamma - V_c^\diamond)^f (\xi\gamma + V_c^\diamond)^f} - \frac{\eta}{\rho} \right)^2 - 1 = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Dans cette expression V_c^\diamond représente l'effort vertical courant. κ et ξ sont 2 paramètres permettant de modifier la forme de la loi d'écoulement afin d'obtenir une tangente horizontale pour un effort vertical donné V_c^\diamond qui peuvent être choisis par l'utilisateur.

3.3.2.8 Représentation graphique

Pour un cas 2D, l'interaction entre H et M est représentée par la figure 3.8, Crémer [2001] et Grange [2008]. L'interaction entre H et V est une courbe passant par l'origine du repère 0 et définie pour $V \geq 0$. Pendant la phase d'initialisation, le poids propre de la structure est appliqué, la surface de charge est réduite à un segment de droite le long de l'axe V_c^\diamond , allant de l'origine du repère 0 jusqu'au point de coordonnée γ .

3.4 Exemple d'application - La maquette NEES

Dans cette partie nous allons étudier l'influence de l'ISS sur la structure NEES. La discrétisation de la structure est exactement la même que celle décrite dans la section 2.5.1. La seule différence réside dans la prise en compte d'un sol sous-jacent et l'utilisation du macro-élément d'interaction sol-structure.

Plus spécifiquement, la table sismique de la figure 2.5 est remplacée par un élément poutre horizontal infiniment rigide qui relie les deux poutres multifibres censées représenter le mur d'âme et le mur de semelle. Nous supposons que la structure possède une fondation superficielle rectangulaire rigide reposant sur un massif de sol semi-infini. Les dimensions de la fondation sont de $L_y = 4.5m$ dans la direction du séisme (c'est à dire suivant la longueur du "web wall") et $L_x = 2.8m$ dans la direction transversale. Le macro-élément est placé au centre de la fondation qui est situé sous le centre de gravité de la structure (à peu près $2m$ du bord du "web wall"). La structure est soumise à la séquence de sollicitation EQ4 (la plus forte).

3.4.1 Typologie de sols utilisés pour les simulations

Différents types de sols sont utilisés pour les simulations. Leurs caractéristiques sont définies dans le tableau 3.1. Tous les sols considérés ici ont une masse volumique $\rho = 1900kg.m^{-3}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

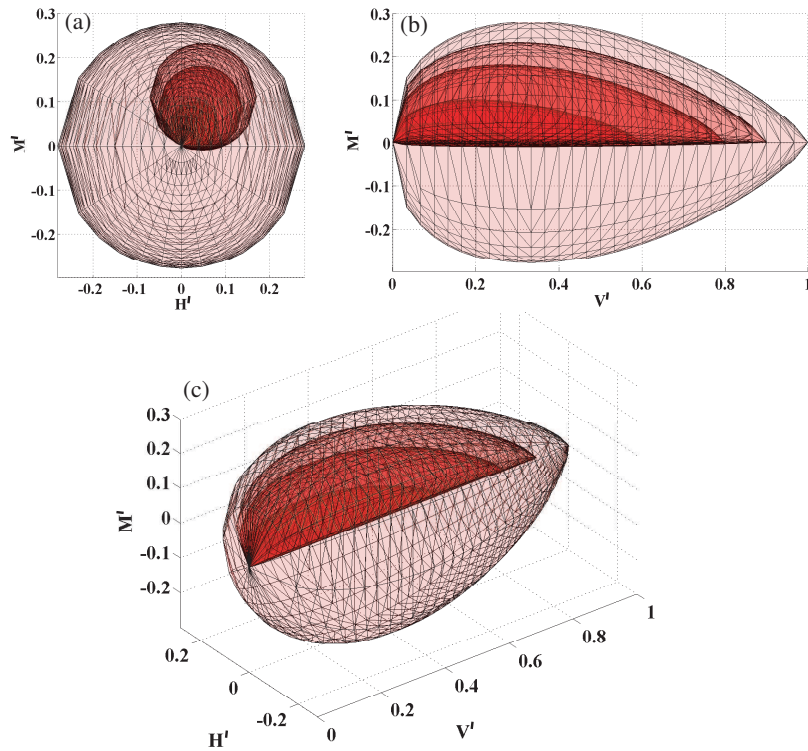


FIG. 3.8 – Evolution de la surface de charge à l'intérieur du critère de rupture (cas 2D).

La classification utilisée dans le tableau 3.1 provient de [Davidovici, 1999] et de [EC8, 2005]. Le critère permettant de classer les sols est la vitesse des ondes de cisaillement dans le sol (allant de la classe A pour un rocher à la classe S2 caractérisant des dépôts de sols liquéfiables d'argiles sensibles). Les rigidités élastiques sont calculées grâce aux formules d'impédances dynamiques [Philipponat et Hubert, 2003].

3.4.2 Résultats numériques

Les figures 3.9 montrent les moments, efforts tranchants, déplacements latéraux, déplacements inter-étages et les accélérations maximum rencontrés durant toute la séquence et suivant la hauteur de la structure. Les efforts internes présentés ici (moments fléchissants et efforts tranchants) sont donnés uniquement pour le “web wall” et diffèrent donc de ceux présentés à la section 2.5.1 pour la structure encastree (ils étaient alors donnés pour la structure entière - somme des moments du “webwall” et “flangewall”).

L'influence de l'interaction sol-structure devient claire en comparant ces réponses avec les résultats numériques de la structure encastree sur la table sismique (structure nommée “initiale”, dans les figures 3.9). Les comportements sont très similaires entre la structure encastree et la structure reposant sur le sol n°5 (classe A: rocher de très bonne résistance) en termes d'efforts et de déplacements. Pour les autres cas, l'ISS semble bien “isoler” la structure en termes d'efforts internes. En observant les figures 3.9 nous pouvons voir que les moments fléchissants et les efforts tranchants sont considérablement réduits d'autant plus que nous

TAB. 3.1 – NEES - ISS: caractéristiques des sols utilisés.

N° du sol	cisaillement module G_0 vitesse V_s	cohésion c et angle de frottement ϕ	Rigidité et amortissement [Gazetas, 1991]	contrainte ultime de compression q_{max}
Sol 1 (classe S1)	$V_s = 70m/s$ $G_0 = 9.31MPa$	$c_u = 35kPa$ $\phi_u = 0$	$K_{\theta\theta} = 295.19MNm/rad$ $K_{zz} = 101.22MN/m$ $K_{hh} = 82.35MN/m$ $C_{\theta\theta} = 7.49MNms/rad$ $C_{zz} = 2.57MN s/m$ $C_{hh} = 2.09MN s/m$	$q_{max} = 0.20MPa$
Sol 2 (classe D)	$V_s = 100m/s$ $G_0 = 19MPa$	$c_u = 70kPa$ $\phi_u = 0$	$K_{\theta\theta} = 601.5MNm/rad$ $K_{zz} = 206.18MN/m$ $K_{hh} = 167.8MN/m$ $C_{\theta\theta} = 10.70MNms/rad$ $C_{zz} = 3.67MN s/m$ $C_{hh} = 2.98MN s/m$	$q_{max} = 0.40MPa$
Sol 3 (classe C)	$V_s = 180m/s$ $G_0 = 61.5MPa$	$c_u = 250kPa$ $\phi_u = 0$	$K_{\theta\theta} = 1951.4MNm/rad$ $K_{zz} = 668.9MN/m$ $K_{hh} = 544.4MN/m$ $C_{\theta\theta} = 19.50MNms/rad$ $C_{zz} = 6.60MN s/m$ $C_{hh} = 5.40MN s/m$	$q_{max} = 1.43MPa$
Sol 4 (classe B)	$V_s = 360m/s$ $G_0 = 246.2MPa$	$c = 115kPa$ $\phi = 30$	$K_{\theta\theta} = 7805.1MNm/rad$ $K_{zz} = 2675.6MN/m$ $K_{hh} = 2177.7MN/m$ $C_{\theta\theta} = 38.24MNms/rad$ $C_{zz} = 13.20MN s/m$ $C_{hh} = 10.67MN s/m$	$q_{max} = 4.013MPa$
Sol 5 (classe A)	$V_s > 800m/s$		$K_{\theta\theta} = 18302MNm/rad$ $K_{zz} = infinity$ $K_{hh} = infinity$ $C_{\theta\theta} = 0MNms/rad$ $C_{zz} = 0MN s/m$ $C_{hh} = 0MN s/m$	$q_{max} = infinity$

considérons un sol de mauvaises caractéristiques.

Concernant les déplacements, les conclusions sont plus nuancées. Nous pourrions nous attendre à ce que plus le sol ait des caractéristiques mauvaises, plus les déplacements maximum sont grands. En réalité, les figures 3.9 montrent que les déplacements latéraux au sommet de la structure sont d'une part plus faibles pour le sol 1 que pour le sol 2 et 3 et d'autre part plus faibles pour le sol 4 que pour la structure initiale encastree. Comme nous le montrons ci-dessous l'ISS peut conduire à un changement de facteur de participation des différents modes dans le comportement de la structure et ainsi rendre difficile de prévoir à l'avance laquelle des structures aura le plus grand déplacement en tête au cours du chargement.

La figure 3.10 compare l'histoire des moments et des déplacements entre la structure encastree et celle reposant sur le sol 1. Les déplacements en prenant en compte l'ISS sont 1.35 fois plus grands alors que les moments sont 5.6 fois plus petits.

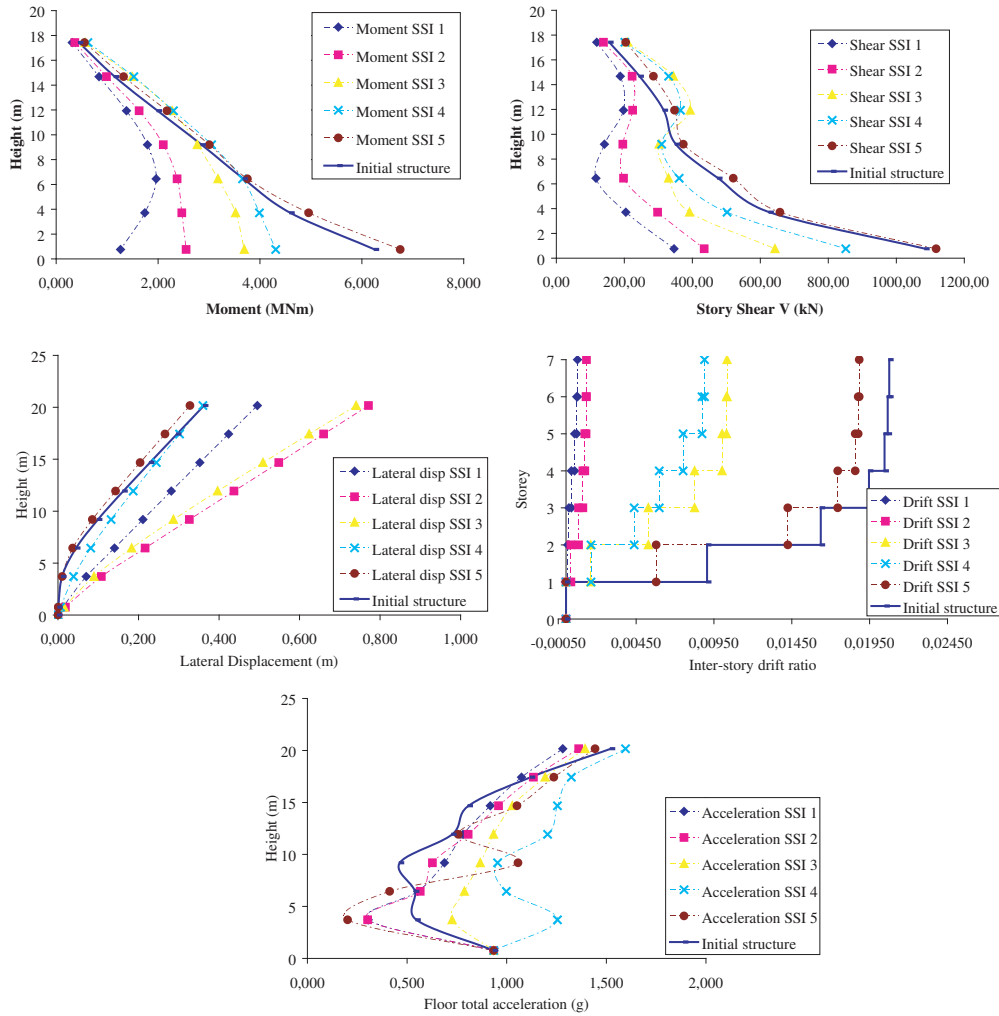


FIG. 3.9 – NEES - ISS: (a) Moment fléchissant maximum, (b) Efforts tranchants, (c) Déplacements latéraux, (d) Déplacements latéraux relatifs et (e) accélérations des planchers pour 5 sols différents et comparaison avec la structure initiale (encastrée) pour la séquence EQ4.

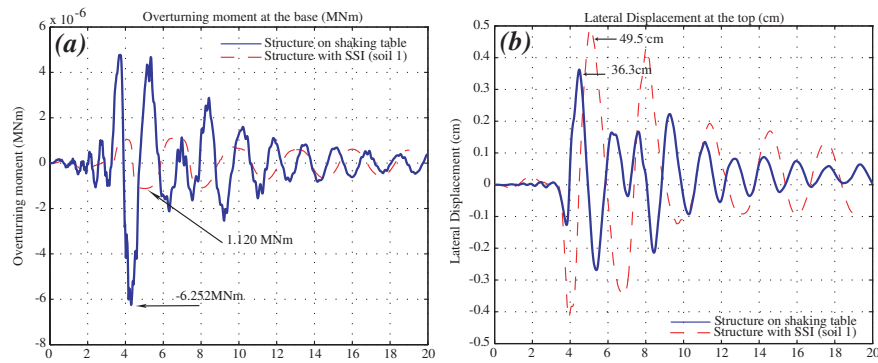


FIG. 3.10 – NEES - ISS: (a) Moment à la base en fonction du temps (b) Déplacement latéral au sommet en fonction du temps pour la structure encastrée et pour la structure simulant l'ISS (sol 1, EQ4).

Il est alors évident que le type de sol modifie considérablement le comportement global mais

aussi local de la structure. Plus particulièrement:

- Sur les figures 3.9 nous pouvons observer que le comportement local de la structure peut changer en fonction des caractéristiques du sol: pour le sol 1, les prédictions numériques annoncent un moment maximum proche du 2ème étage et non pas à la base de la structure comme pour la structure encastree et les autres types de sols.
- Le mode 2 a une grande influence sur le comportement de la structure reposant sur le sol 1, particulièrement pour les efforts internes. Ceci peut être identifié en procédant à une décomposition modale des moments selon la méthode Karhunen-Loève [Gutiérrez et Zaldivar, 2000]. La figure 3.11 (a) et (b) montre, pour le sol 1, la participation du mode 2 pour les moments modaux (projection du moment sur la base modale). Cette influence sur les efforts internes peut encore être vérifiée par la reconstruction de la courbe de moment en fonction du temps en considérant seulement le mode 1 (figure 3.11 (c)) et en considérant à la fois les modes 1 et 2 (figure 3.11 (d)). Les modes 1 et 2 suffisent à reproduire la courbe complète des moments.
- Le mode 2 a une influence bien moindre concernant les déplacements de la structure reposant sur le sol 1. En appliquant la méthode Karhunen-Loève aux courbes de déplacements en fonction du temps, nous pouvons montrer que seul le mode 1 est prépondérant (figure 3.12). D'ailleurs, la déformée maximale de la structure sur le sol 1 de la figure 3.9(c) correspond bien à la forme d'un mode 1.
- Concernant la structure reposant sur les sols 2, 3 et 4, la même analyse sur les moments montre que cette fois-ci, seul le mode 1 joue un rôle prépondérant dans son comportement (la figure 3.13 montre la décomposition des moments pour le sol 3). L'influence du mode 2 est visible mais très faible. Par ailleurs, l'influence du mode 2 se retrouve sur la courbe du moment maximum de la figure 3.9(a) où une légère inflexion de la courbe est présente.
- La décomposition des déplacements pour les sols 2, 3 et 4 (figure 3.14) révèle une importante et quasi exclusive participation du mode 1.
- L'analyse du sol 5 montre que pour les moments ou les déplacements, c'est exclusivement le mode 1 qui régie le comportement de la structure (l'analyse n'est pas représentée ici). Les courbes de moments et déplacements maximum pour ces deux sols (figures 3.9 (a) et (c)) révèlent des déformées proche d'un mode 1.

La figure 3.9(d) montre les déplacements latéraux relatifs maximaux. Il est remarquable que cette quantité est quasi-constante pour les sols 1 et 2. Ceci est typique d'une structure restant élastique durant toute la séquence. En effet, ce ratio constant traduit que la déformée de la structure a une forme de droite. Toutes les non-linéarités se retrouvent donc concentrées à la base de la structure, c'est à dire dans le sol au niveau du macro-élément. Cette remarque peut se vérifier aisément à la vue des cartes d'endommagements de différentes sections de la structure (l'endommagement est en effet trouvé égal à 0 pour toutes les sections de la structure).

La figure 3.15 montre l'évolution de l'endommagement dans la hauteur de la structure (pour les 4 premiers niveaux) pour le sol 3. Nous pouvons vérifier que l'endommagement est présent principalement du rez-de-chaussée à la base de l'étage 4 et non pas localisé à la base du rez de chaussée et de l'étage 1, comme c'est le cas pour la structure sur le sol 5 ou la structure encastree.

En résumé, l'endommagement dans la structure pour les sols 4 et 5 est trouvé plus grand

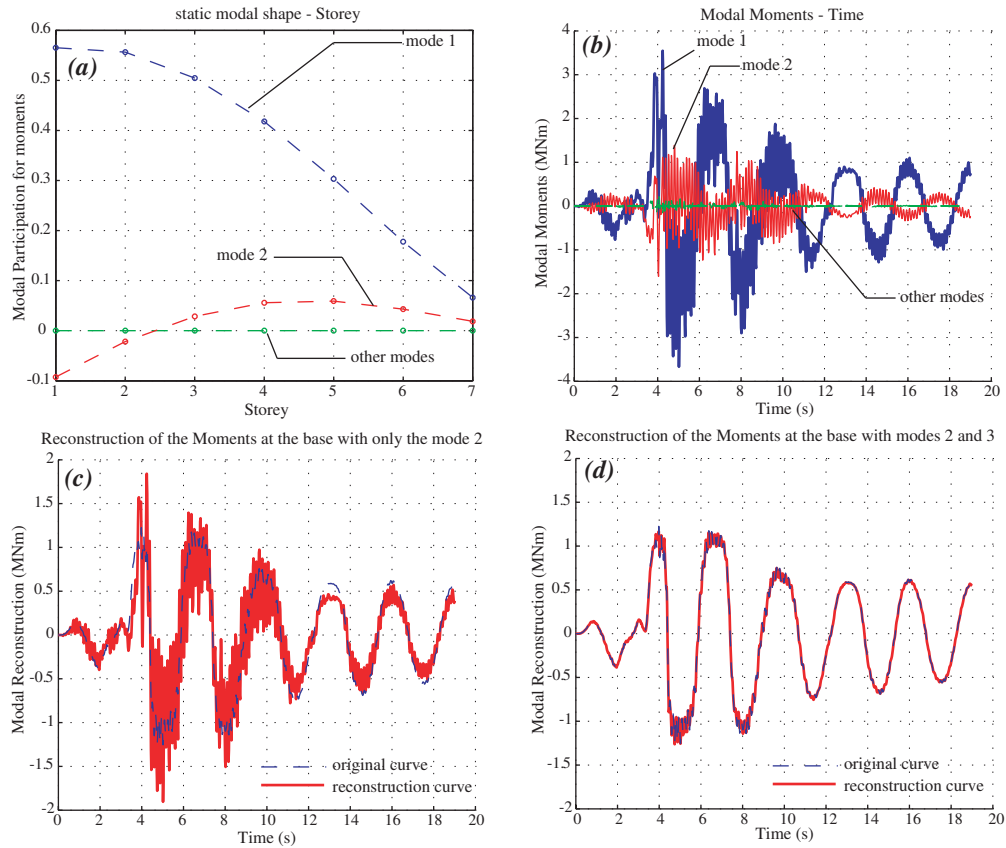


FIG. 3.11 – NEES - ISS: déformée modale statique des moments (a), moments modaux en fonction du temps (b), reconstruction des moments à la base de la structure simulant l'ISS et en considérant seulement le mode 2 (c) ou les modes 2 et 3 (d) (sol 1).

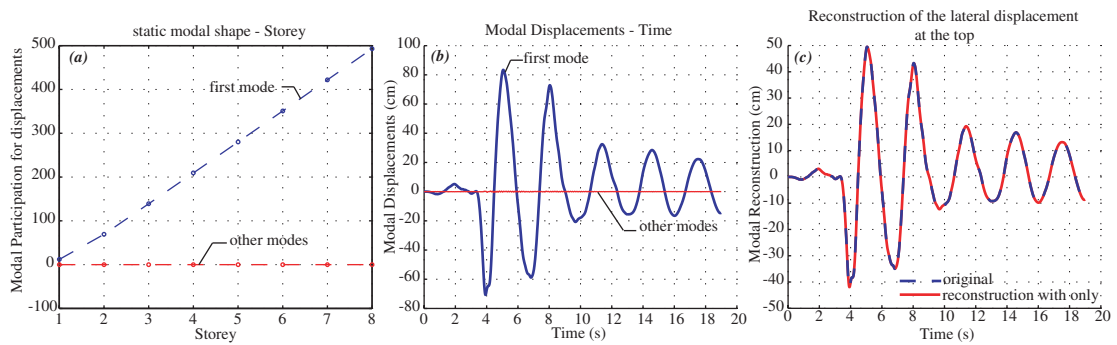


FIG. 3.12 – NEES - ISS: déformée modale statique des déplacements (a), déplacements modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des déplacements latéraux au sommet de la structure simulant l'ISS (sol 1).

que pour le sol 3 qui est lui même bien entendu plus grand que pour les sols 1 et 2. Ceci confirme le fait que plus les caractéristiques du sol sont faibles, plus la structure est préservée des endommagements et des efforts internes importants. En contrepartie, les non-linéarités se retrouvent concentrées au niveau de la fondation et dans le sol, ce qui peut générer des déplacements résiduels importants.

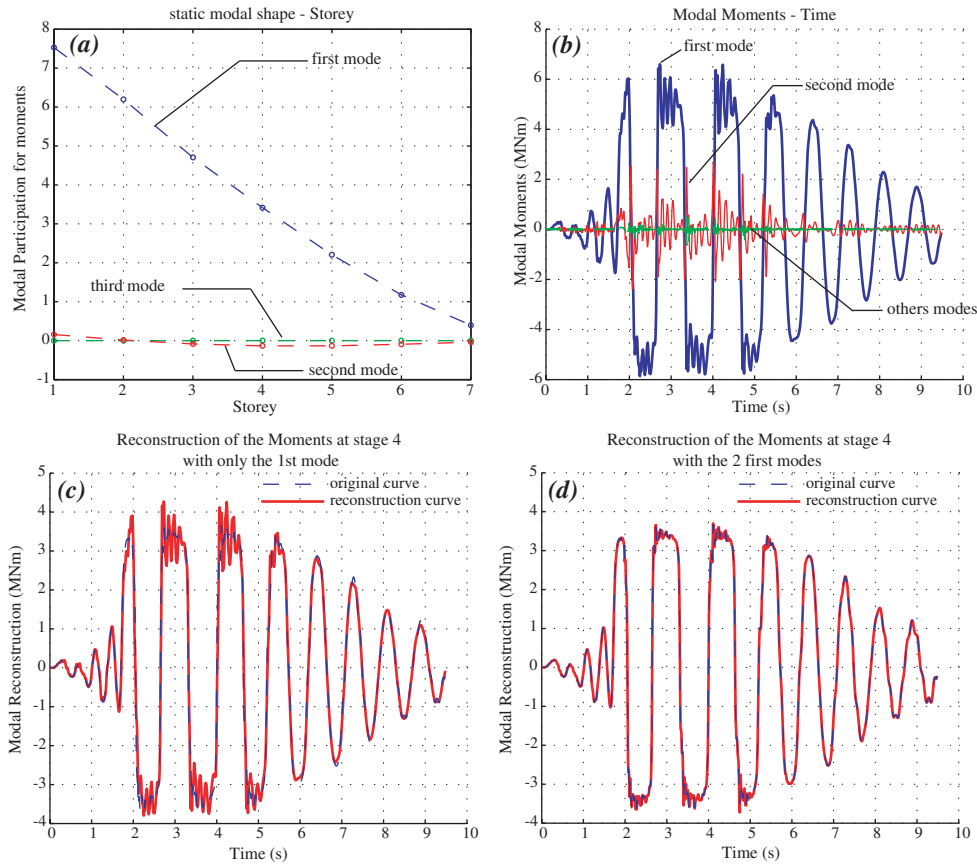


FIG. 3.13 – NEES - ISS: déformée modale statique des moments (a), moments modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des moments à la base de la structure simulant l'ISS (sol 3).

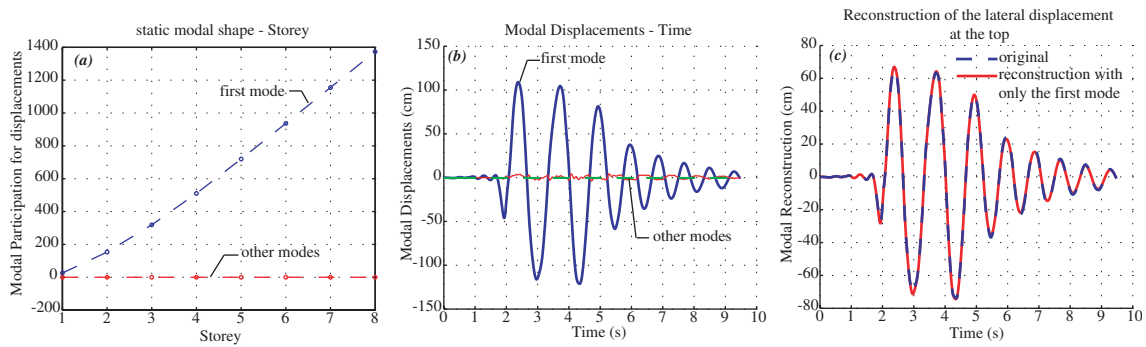


FIG. 3.14 – NEES - ISS: déformée modale statique des déplacements (a), déplacements modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des déplacements latéraux au sommet de la structure simulant l'ISS (sol 3).

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, un nouveau macro-élément d'ISS 3D est proposé. Après la description de la méthode d'adimensionnement des variables, nous montrons comment le macro-élément prend en compte les non linéarités matérielles, autrement dit le mécanisme de plasticité du sol sous

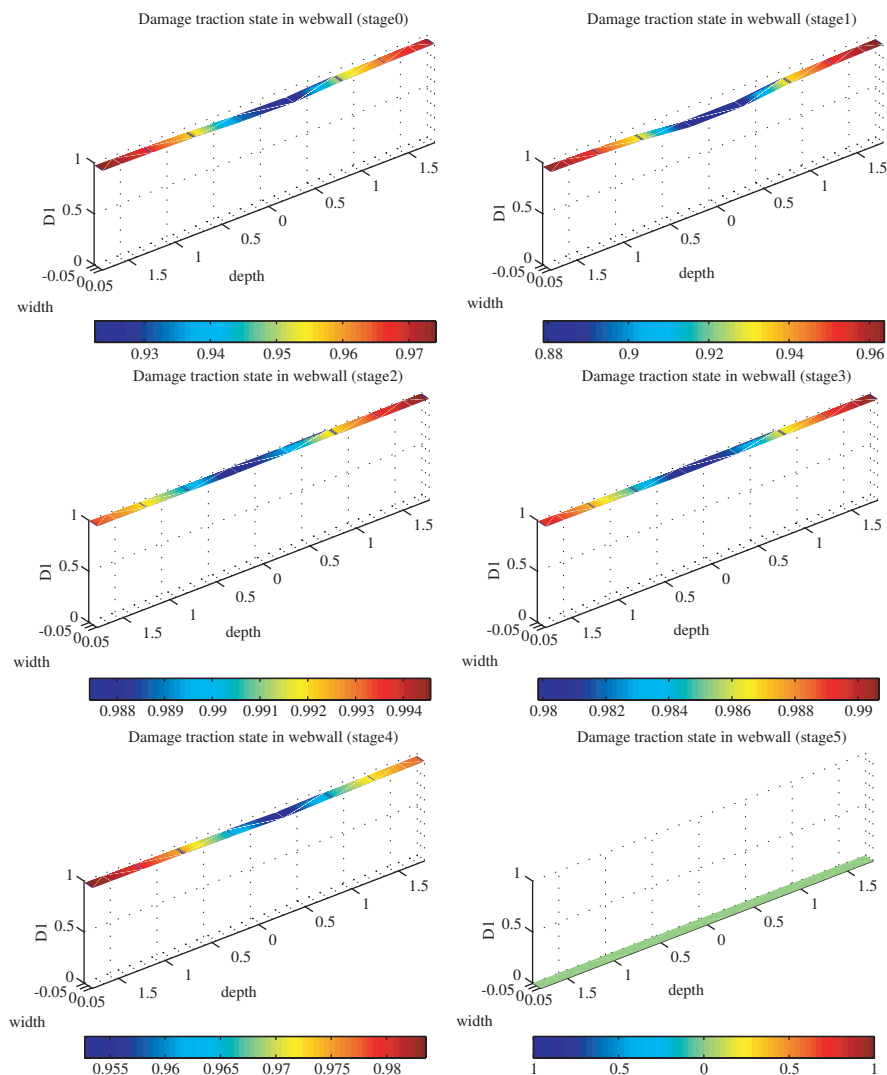


FIG. 3.15 – *NEES-ISS*: état d'endommagement du béton en traction pour la structure reposant sur le sol 3 de la base du rez-de-chaussée à la base de l'étage 5 (EQ_4).

la fondation.

Le macro-élément est introduit à la base de la structure *NEES* pour simuler son comportement et voir l'influence de l'interaction sol-structure. Cinq sols différents sont considérés. L'*ISS* isole de manière significative la structure du point de vue des efforts internes et des endommagements. Cette interaction avec le sol introduit également un comportement local différent selon le type de sol en changeant la position des lieux où l'endommagement est maximum (rotules plastiques) et en augmentant l'influence des modes supérieurs. Une diminution des propriétés mécaniques du sol n'entraîne pas nécessairement une augmentation des déplacements maximum.

Une extension de cet élément d'interface pour différents types de géométries de fondations, capable de reproduire en plus des non-linearités géométriques (décollement) sous chargements statiques ou dynamiques est proposée dans [Grange, 2008].

4.1 Introduction

Depuis les travaux de [Rice, 1976], il est bien connu que la localisation de la déformation dans une bande de cisaillement est un problème de bifurcation qui correspond à une perte d'unicité de problème formulé en vitesses. De plus, il est aussi admis que cette situation ne peut être proprement modélisée avec des lois de comportement classiques, pour la bonne raison que de tels modèles conduisent à une rupture sans dissipation d'énergie [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987]. Cela implique des dépendances pathologiques de maillage qui ne sont pas acceptables. Plusieurs solutions existent dans la littérature comme:

- Des modèles non locaux, dans lesquels une longueur interne est explicitement introduite [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987].
- Des modèles incorporant des gradients et des longueurs internes. Ces longueurs sont introduites implicitement à travers des ratios des lois constitutives. Nous pouvons distinguer ces derniers modèles en deux catégories:
 1. Ceux qui utilisent des gradients de variables internes (la déformation plastique [de Borst et Mühlhaus, 1992], [Vardoulakis et Sulem, 1995] ou l'endommagement [Fremond et Nedjar, 1996]) conduisant ainsi à des lois constitutives non locales.
 2. Ceux qui sont basés sur la théorie des milieux avec microstructure [Mindlin, 1964], [Mindlin, 1965], [Germain, 1973a], [Germain, 1973b].

Dans la suite de ce chapitre nous utilisons un cas particulier des modèles avec microstructure, les modèles de second gradient locaux développés depuis quelques années au laboratoire 3S-R ([Chambon *et al.*, 1996], [El-Hassan Assoum, 1997], [Chambon *et al.*, 1998], [Matsushima *et al.*, 2000], [Chambon *et al.*, 2001a], [Chambon *et al.*, 2001b], [Tamagnini *et al.*, 2001], [Moulet, 2003], [Chambon et Moulet, 2004], [Chambon *et al.*, 2004], [Al Holo, 2005], [Collin

et al., 2006], [Bésuelle *et al.*, 2006], [Kotronis *et al.*, 2008a]). Nous nous intéressons plus particulièrement à l'évolution de la zone de localisation pour un problème de cisaillement (section 4.2) et nous présentons une application pour un spécimen en béton (section 4.3). Le chapitre termine avec la proposition d'une nouvelle loi qui permet à l'utilisateur de contrôler à priori l'évolution de la zone de localisation tout en garantissant des solutions objectives (section 4.4). Tous ces développements sont pour des comportements unidimensionnels 1D.

4.2 Évolution de la zone de localisation pour un problème de cisaillement

4.2.1 Équation d'équilibre et conditions limites

Considérons une couche infinie d'épaisseur L d'un matériau déformable [Al Holo, 2005], [Kotronis *et al.*, 2008a]. Cette couche est comprise entre deux matériaux infiniment rigides (figure 4.1). Le milieu est considéré dans un plan (x_1, x_2) , l'axe x_1 étant vertical et l'axe x_2 horizontal. Pour des raisons de simplicité, nous considérons que le problème est gouverné par le déplacement relatif de la partie supérieure par rapport à la partie inférieure. Ce déplacement est supposé seulement selon l'axe x_2 . De plus, le matériau déformable est considéré incompressible (pas de variation de volume). Toutes les quantités ne dépendent donc que de $x_1 \in (0, L)$ et t . Par exemple, le déplacement d'un point de la couche a seulement une composante selon l'axe x_2 nommé $u_2(x_1, t)$, u_2 étant une fonction de x_1 et de t . L'hypothèse des petites déformations et retenue et les forces de volumes sont négligées. La seule composante de contraintes premier gradient est σ_{12} nommée τ . La composante de déformation est $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Dans la suite nous utilisons $\gamma = 2\varepsilon_{12}$ comme variable cinématique.

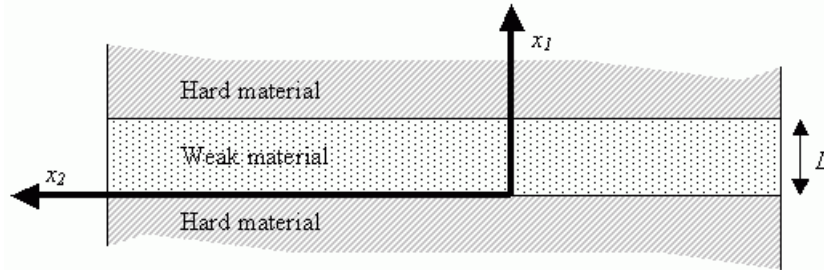


FIG. 4.1 – Géométrie du problème de cisaillement considéré.

D'après [Chambon *et al.*, 1996], [El-Hassan Assoum, 1997], [Chambon *et al.*, 1998], l'équation d'équilibre pour ce milieu à microstructure prend la forme suivante (avec M les doubles contraintes, pour chaque α , α' définie la dérivée par rapport à x_1):

$$\tau'(x_1, t) - M''(x_1, t) = 0 \quad (4.1)$$

En intégrant l'équation précédente nous obtenons:

$$\tau(x_1, t) - M'(x_1, t) = K(t) \quad (4.2)$$

avec K indépendant de x_1 et conditions limites

$$\tau(0,t) - M'(0,t) = -\nu_0(t) \quad \tau(L,t) - M'(L,t) = \nu_L(t) \quad (4.3)$$

$$M(0,t) = -\mu_0(t) \quad M(L,t) = \mu_L(t) \quad (4.4)$$

avec ν les formes externes classiques associées aux termes premier gradient et μ les doubles forces externes associées aux termes second gradient appliquées aux parties supérieure et inférieure de la couche.

L'équation d'équilibre formulée en vitesse devient:

$$\dot{\tau}(x_1,t) - \dot{M}'(x_1,t) = \dot{K}(t) \quad (4.5)$$

Si T est la force tangentielle par unité de surface à la partie supérieure de la couche alors

$$T(t) = \tau(L,t) - M'(L,t) = K(t) \quad (4.6)$$

ou en vitesses

$$\dot{T}(t) = \dot{\tau}(L,t) - \dot{M}'(L,t) = \dot{K}(t) \quad (4.7)$$

Le déplacement relatif de la partie supérieure est

$$V(t) = u_2(L,t) \quad (4.8)$$

et la vitesse relative correspondante prend la forme suivante

$$\dot{V}(t) = \dot{u}_2(L,t) \quad (4.9)$$

La figure 4.2 illustre la définition des T et V .

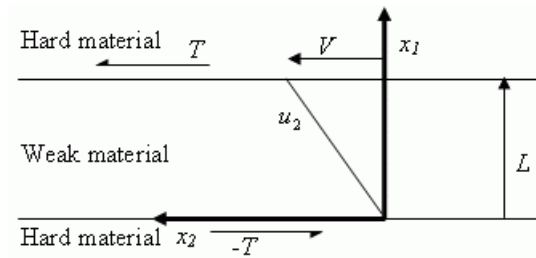


FIG. 4.2 – Conditions limites.

L'état initial de la couche déformable est supposée homogène avec $T(t) = 0$ et $V(t) = 0$ pour $t = 0$. L'historique des conditions limites est donnée comme une fonction de $V(t)$ ou de $T(t)$ ou d'une combinaison des deux valeurs. Afin d'éviter des mouvements de corps rigide, tout mouvement à l'interface entre la partie inférieure et la couche est interdit ($u_2(0,t) = 0, \forall t$).

4.2.2 Lois constitutives

Concernant le comportement du milieu, la partie première gradient (fonction des contraintes τ et des déformations u_2') est de la forme:

$$\dot{\tau}(x_1,t) = f(\dot{u}_2'(x_1,t)) = f(\dot{\gamma}(x_1,t)) \quad (4.10)$$

La partie second gradient (fonction des doubles contraintes M et des gradients des déformations u_2'') est de la forme:

$$\dot{M}(x_1,t) = g(\dot{u}_2''(x_1,t)) = g(\dot{\gamma}'(x_1,t)) \quad (4.11)$$

Pour la suite de cette section, deux lois différentes pour la partie premier gradient seront étudiées. Une loi élasto-plastique quasi-fragile et une loi élasto-plastique ductile:

- Pour la loi quasi-fragile, le matériau subi un comportement élastique jusqu'au seuil qui correspond à une déformation γ_{lim} . La pente de la partie élastique est notée G^{el} (> 0). Ensuite, si la déformation devient supérieure à γ_{lim} , nous obtenons une chute de la contrainte alors que γ continue à augmenter. Cette relation est supposé linéaire, la pente tangente négative de cette partie étant $G^{tg} = cst$ (< 0). Conformément aux modèles plastiques, au cas d'une diminution de déformations γ le module est égal au module initial G^{el} . Pour ce modèle nous obtenons alors que le rapport G^{tg}/G^{el} reste constant. Les trois paramètres de la loi sont finalement: G^{el} , G^{tg} et γ_{lim} (figure 4.3).

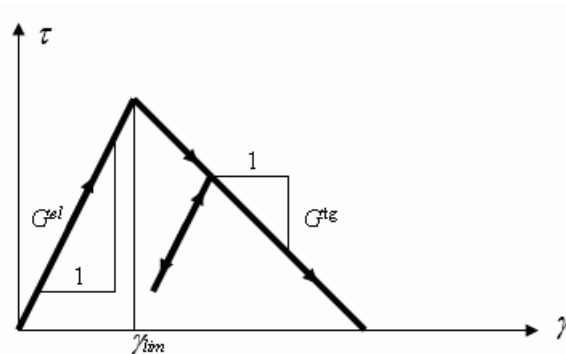


FIG. 4.3 – Loi constitutive pour le matériau quasi-fragile.

Si nous ne considérons pas le cas de matériau complètement détruit ($\tau = 0$ pour des valeurs de $\gamma > 0$), la valeur actuelle de la déformation γ_{yield} est égale à la valeur maximale de la déformation atteinte le long de l'historique de chargement. Formulée en vitesses, cette loi devient donc:

$$\begin{aligned}
& \gamma(x_1, t) < \gamma_{yield} \\
& \text{or} \\
& \gamma(x_1, t) = \gamma_{yield} \\
& \text{and } \dot{\gamma}(x_1, t) < 0 \text{ (déchargement élastique)}
\end{aligned}
\Rightarrow \dot{\tau}(x_1, t) = G^{el} \dot{\gamma}(x_1, t) \quad (4.12)$$

et

$$\begin{aligned}
& \gamma(x_1, t) = \gamma_{yield} \\
& \text{et } \dot{\gamma}(x_1, t) > 0 \text{ (chargement plastique)} \Rightarrow \dot{\tau}(x_1, t) = G^{tg} \dot{\gamma}(x_1, t)
\end{aligned} \quad (4.13)$$

- Pour la loi ductile, le matériau subi un comportement élastique jusqu’au seuil qui correspond à une déformation γ_{lim1} . La pente de la partie élastique est encore notée G^{el} (> 0). Ensuite, si la déformation devient supérieure à γ_{lim1} , la pente de la loi varie de G^{el} (au point γ_{lim1}) à $G^{tg,fin}$ (< 0 , au point γ_{lim2}) selon une équation parabolique de type $G = 3b\gamma^2 + 2c\gamma + d$. Après ce dernier point la pente négative reste constante. Au cas d’une diminution de déformations γ le module est toujours égale au module initial G^{el} , mais le rapport G^{tg}/G^{el} ne reste pas cette fois-ci constant entre les points γ_{lim1} et γ_{lim2} . Les sept paramètres de la loi sont donc : G^{el} , $G^{tg,fin}$, γ_{lim1} , γ_{lim2} , b , c et d (figure 4.4). De façon similaire avec les équations (4.12) et (4.13), nous pouvons formuler la loi ductile en vitesses.

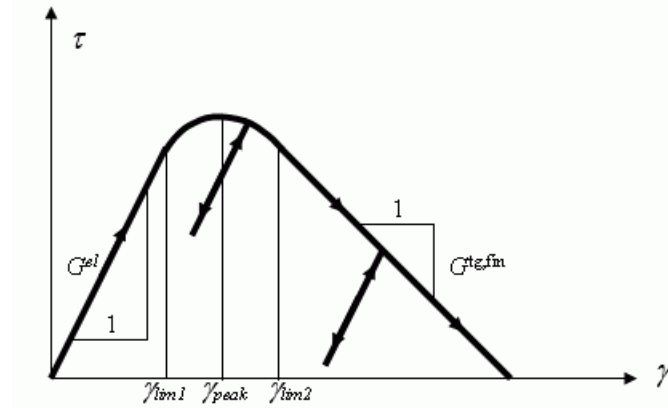


FIG. 4.4 – Loi constitutive pour le matériau ductile.

La loi second gradient est quant à elle choisie comme une loi élastique avec une pente B (> 0) constante (équation 4.14). Cette pente a les dimensions d’une force.

$$\dot{M}(x_1, t) = B \dot{\gamma}' \quad (4.14)$$

4.2.3 Solutions analytiques

Après substitution de $\dot{\tau}$ et \dot{M} donnés par les équations (4.10) et (4.14) dans l’équation (4.5), nous obtenons une équation différentielle qui doit être satisfaite par une fonction $u_2(x_1, t)$. Ce problème en vitesses peut être résolu analytiquement quand l’état actuel de la couche est considéré homogène. Si la loi quasi-fragile est utilisée pour les termes premier gradient, la loi élastique pour la partie second gradient et l’hypothèse des petites déformations est

maintenue, la solution analytique est aussi valable pour le problème aux conditions limites initiales (grâce à la linéarité des équations).

Les auteurs [Chambon *et al.*, 1996], [El-Hassan Assoum, 1997], [Chambon *et al.*, 1998] ont ainsi construit des solutions analytiques globales pour ce dernier problème en assemblant des tronçons “mous” et “durs” et en écrivant la continuité du déplacement u_2 , de la déformation γ et des deux forces internes $\tau - M'$ et M aux extrémités des différents tronçons. Plus spécifiquement:

- Un tronçon de la couche est considéré “mou” si cette partie de la couche charge.
- Un tronçon de la couche est considéré “dur” si cette partie de la couche décharge.

Les solutions analytiques prennent la forme suivante:

- Pour $\gamma > \gamma_{lim}$ (tronçon “mou”)

$$u_2(x_1, t) = ax_1 + C + \alpha \cos(\eta x_1) + \beta \sin(\eta x_1) \quad (4.15)$$

$$-\eta^2 = \frac{-G^{tg}}{B} > 0 \quad (4.16)$$

- Pour $\gamma < \gamma_{lim}$ (tronçon “dur”)

$$u_2(x_1, t) = ax_1 + C + \alpha \cosh(\omega x_1) + \beta \sinh(\omega x_1) \quad (4.17)$$

$$\omega^2 = \frac{G^{el}}{B} > 0 \quad (4.18)$$

a , C , α and β sont constants pour une partie donnée de la couche seulement, c’est à dire pour une solution “dure” donnée ou pour une solution “molle” donnée.

Remarquons que la partie “molle” contient des cosinus, ce qui implique l’intervention implicite d’une longueur interne à travers des ratios des lois constitutives (voir section 4.1).

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{-B}{G^{tg}}} \quad (4.19)$$

Cette longueur constitue une indication de la longueur de la zone de localisation l_{loc} et pas sa valeur exacte. Ceci est dû au fait qu’elle correspond seulement à la partie “molle”. La solution réelle étant un motif de solutions “molles” et “dures”, la longueur de la zone localisée l_{loc} est supérieure à cette longueur. Ceci sera aussi vérifié numériquement à la section 4.2.5, figure 4.12.

4.2.3.1 Évolution de la zone de localisation pour la loi quasi-fragile

La pente G^{tg} est constante pour la loi quasi-fragile (voir figure 4.3). De l’équation (4.19) il découle alors que la longueur de la zone de localisation ne varie pas pendant l’histoire de chargement.

4.2.3.2 Évolution de la zone de localisation pour la loi ductile

Nous pouvons résoudre analytiquement le problème en vitesses pour le matériau ductile si l'état actuel de milieu est considéré homogène. Selon la loi constitutive de la figure 4.4, le module élasto-plastique varie entre 0 et $G^{tg,fin}$ après le point culminant et donc la zone de localisation ne reste pas dans ce cas constante. Plus spécifiquement:

Dans la figure 4.5 nous présentons la longueur interne λ en fonction de G^{tg} selon l'équation (4.19). Quand G^{tg} est pratiquement zéro, cet indicateur de longueur de la zone localisée devient important. Quand G^{tg} diminue, λ diminue, voir aussi [Bésuelle et Chambon, 2006], [Kotronis *et al.*, 2008a]. Les calculs présentés au paragraphe 4.2.5 vont confirmer cette conclusion.

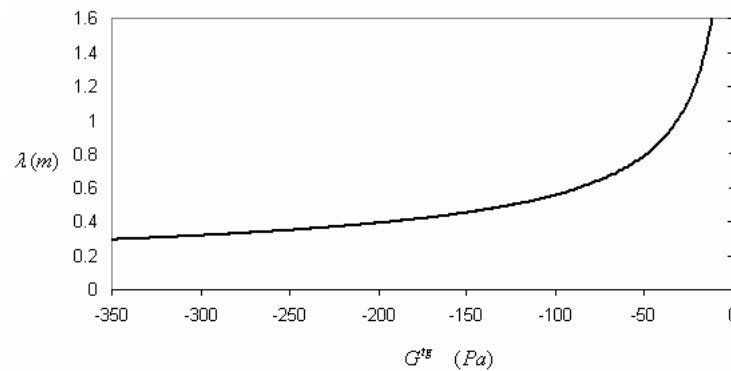


FIG. 4.5 – Évolution de l'indicateur λ de la longueur de la zone de localisation en fonction de G^{tg} , ($B = 0.8N$).

4.2.3.3 Évolution de la zone de localisation dans un milieu classique

La même analyse peut être effectuée pour les lois quasi-fragile et ductile considérées dans un milieu classique. Nous montrons dans ce cas qu'il y a une infinité de solutions et que la longueur de la zone de localisation ne peut que rester constante ou diminuer [Kotronis *et al.*, 2008a].

4.2.4 Solutions particulières

Pour les conditions limites suivantes

$$u_2(0,t) = 0, u_2(L,t) = u, M(0,t) = M(L,t) = 0 \quad (4.20)$$

les auteurs [Chambon *et al.*, 1996], [El-Hassan Assoum, 1997], [Chambon *et al.*, 1998] ont montré que l'équation qui donne la longueur l_{loc} de la zone localisée est de la forme générale suivante:

$$\tanh(\omega(L - l_{loc})) = -\sqrt{\frac{G^{el}}{-G^{tg}}} \tan(\eta l_{loc}) \quad (4.21)$$

4.2.5 Investigations numériques

Pour les calculs numériques présentés ci-dessous les forces additionnelles externes μ associées aux termes second gradient de l'équation (4.4) sont supposées égales à zéro (le fait de ne pas les considérer égales à zéro génère une couche limite qui n'influence pas nos conclusions sur l'évolution de la zone de localisation). Le chargement est appliqué à la partie supérieure de la couche. De plus, une adaptation de la méthode classique de longueur d'arc [Clarke et Hancock, 1990], [Crisfield, 1991a] pour un milieu second gradient est adoptée comme algorithme de résolution [Al Holo, 2005], [Kotronis *et al.*, 2008a]. Le code utilisé est un code 1D développé au laboratoire 3S-R.

4.2.5.1 Loi quasi-fragile

Dans ce paragraphe la loi quasi-fragile est utilisée pour les termes premier gradient (figure 4.3) est une loi élastique linéaire pour la partie second gradient (équation (4.14)). Les paramètres suivants sont adoptés: $G^{el} = 150Pa$, $G^{tg} = -200Pa$, $\gamma_{lim} = 0.01$ et $B = 0.8N$.

Deux différentes solutions convergées sont présentés [Kotronis *et al.*, 2008a] (depuis les travaux de [Chambon *et al.*, 1996], [Chambon *et al.*, 1998] il est connu que les modèles second gradient locaux admettent plusieurs solutions objectives). Une correspondant à une solution “molle-dure” et une correspondant à une solution “dure-molle-dure-molle-dure-molle” (figure 4.6). La première solution est trouvée en utilisant un algorithme de tirage aléatoire [Chambon *et al.*, 2001c], [Chambon et Moullet, 2004] au pas où $\gamma \approx 0.01$. La deuxième solution est trouvée “naturellement”, sans tirage aléatoire. La réponse globale (figure 4.6) et la distribution des déformations dans les éléments à chaque pas (figures 4.7 et 4.8) diffèrent pour les deux solutions.

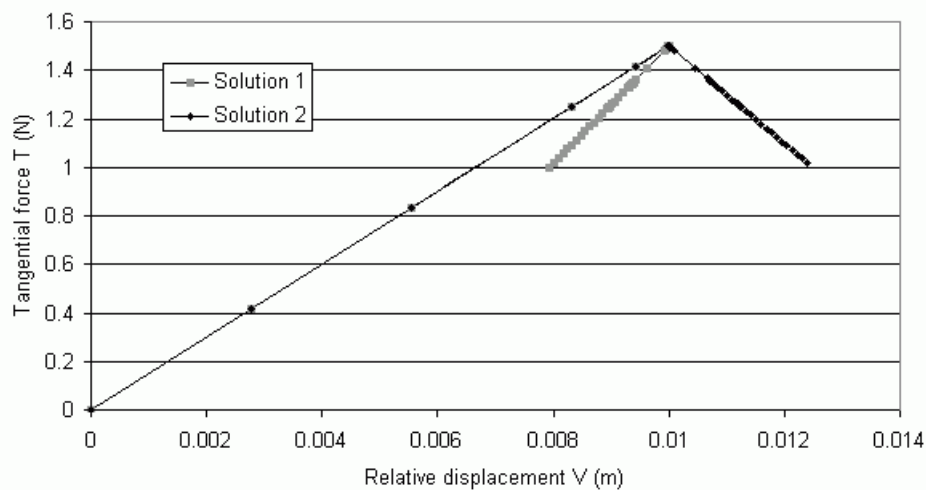


FIG. 4.6 – Réponse globale pour le matériau quasi-fragile (deux solutions).

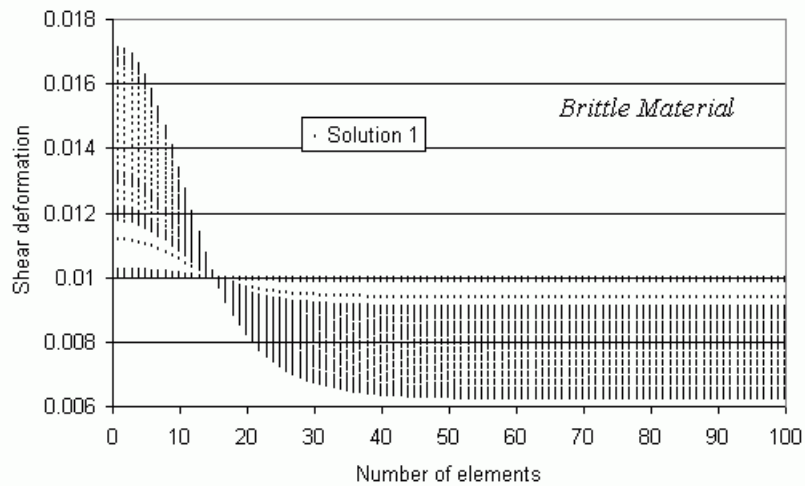


FIG. 4.7 – Matériau quasi-fragile, première solution: Distribution des déformations dans les éléments à chaque pas (après le tirage aléatoire).

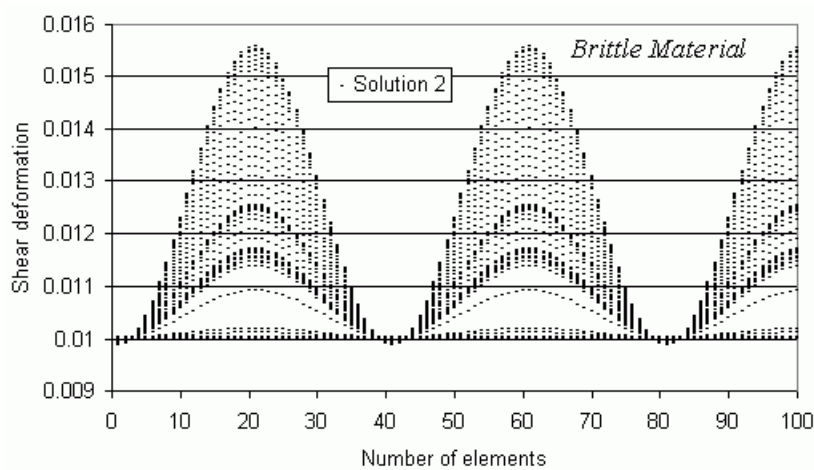


FIG. 4.8 – Matériau quasi-fragile, deuxième solution: Distribution des déformations dans les éléments à chaque pas.

Conformément aux conclusions de la partie 4.2.3.1, l'indicateur λ de la longueur de la zone de localisation reste constant pendant le chargement et ceci pour les deux solutions (voir figure 4.12). Cette zone est composée des points d'intégration qui chargent ($\dot{\gamma}(x_1, t) > 0$).

4.2.5.2 Loi ductile

Dans ce paragraphe la loi ductile est utilisée pour les termes premier gradient (figure 4.4) est une loi élastique linéaire pour la partie second gradient (équation 4.14). Les paramètres suivants sont adoptés: $G^{el} = 150Pa$, $G^{tg,fin} = -300Pa$, $\gamma_{lim1} = 0.008$, $\gamma_{lim2} = 0.011$, $b = -1.66667E + 07$, $c = 400000$, $d = -3050$ et $B = 0.8N$. γ_{peak} est trouvé approximativement égal à 0.009732.

Deux différentes solutions convergées sont trouvées en utilisant l'algorithme de tirage aléatoire

[Chambon *et al.*, 2001c], [Chambon et Moullet, 2004]. Une correspondant à une solution “dure-molle-dure” et une correspondant à une solution “molle-dure”. La réponse globale (figure 4.9) et la distribution des déformations dans les éléments à chaque pas (figures 4.10 et 4.11) diffèrent pour les deux solutions [Kotronis *et al.*, 2008a].

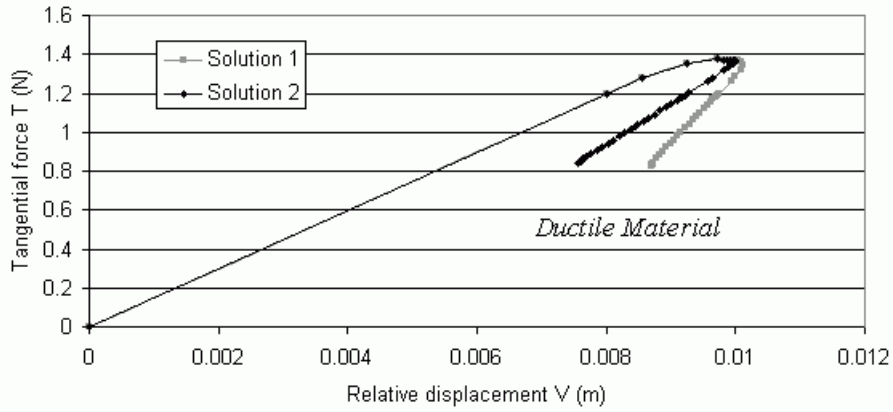


FIG. 4.9 – Réponse globale pour le matériau ductile (deux solutions).

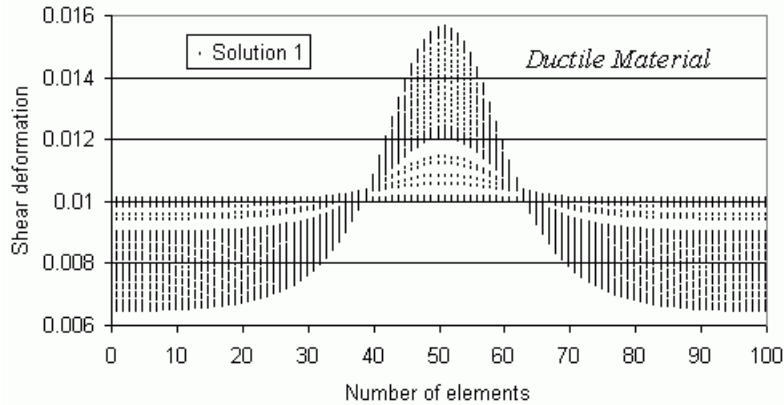


FIG. 4.10 – Matériau ductile, première solution: Distribution des déformations dans les éléments à chaque pas (après le tirage aléatoire).

Conformément aux conclusions de la partie 4.2.3.2, cette fois-ci l'indicateur de la longueur de la zone de localisation (trouvée en considérant les points d'intégration qui chargent) diminue pendant que le module évolue de G^{el} à $G^{tg,fin}$. Ensuite, il reste constant (figure 4.12).

Remarques:

1. La solution analytique de l'équation (4.19) est valable pour le matériau quasi-fragile. La comparaison avec les résultats concernant l'évolution de la zone de localisation pour un matériau ductile (figure 4.12) est seulement qualitative.
2. Afin de montrer l'évolution de l'indicateur de la longueur de la zone de localisation pour le matériau ductile (figure 4.12), G^{tg} est le module des points d'intégration avec la valeur maximale de déformation γ . Pour le matériau quasi-fragile, tous les points d'intégration ont le même module G^{tg} .
3. Dans les figures 4.7 et 4.11 nous voyons seulement la moitié de la zone localisée. La longueur de la zone est en réalité deux fois plus grande et elle est reproduite dans une

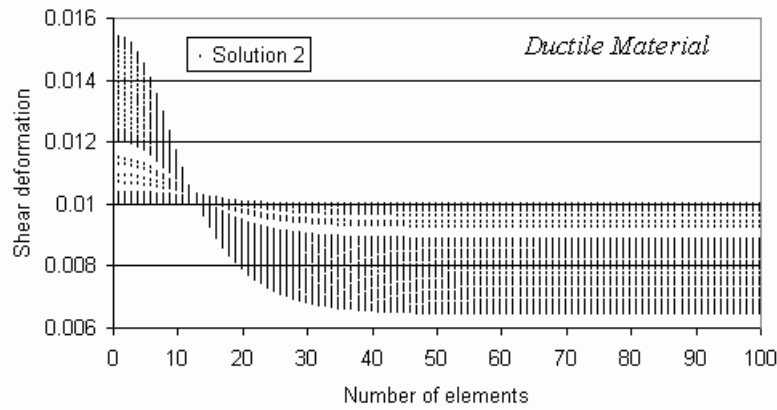


FIG. 4.11 – *Matériau ductile, deuxième solution: Distribution des déformations dans les éléments à chaque pas (après le tirage aléatoire).*

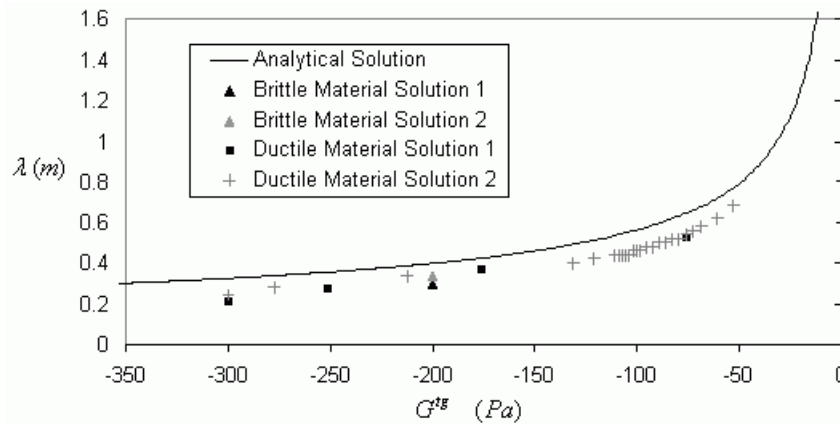


FIG. 4.12 – *Évolution de l'indicateur λ de la longueur de la zone de localisation. La solution analytique est la longueur de la solution harmonique et correspond à la limite supérieure de cette longueur.*

couche d'épaisseur $2L$. Ceci est pris en compte dans la figure 4.12 en multipliant λ par 2.

4. Les lois quasi-fragile et ductile peuvent tous les deux être formulées selon la théorie de plasticité [Kotronis *et al.*, 2008a] ou de l'endommagement. Les conclusions concernant l'évolution de la zone de localisation restent donc valables pour ces deux grandes familles de modèles. Pour illustrer ce propos, la section 4.3 propose la modélisation de la localisation dans un spécimen en béton à travers une loi classique d'endommagement, déjà présente dans plusieurs codes éléments finis utilisés en bureau d'études ou en recherche.

4.3 Modélisation de la localisation dans le béton

Nous étudions dans cette section l'évolution de la zone de localisation dans un spécimen en béton. Nous nous situons toujours dans le cadre générale des modèles de second gradient

locaux avec l'utilisation d'une loi d'endommagement pour la partie premier gradient et une loi élastique linéaire pour la partie second gradient.

4.3.1 Lois constitutives

Un des premiers modèles 3D constitutifs pour le béton est celui publié par Mazars au début des années 80, [Mazars, 1984], [Mazars, 1986]. Développé dans le cadre de la mécanique de l'endommagement [Lemaitre, 1992], ce modèle utilise un critère en déformation basé sur la notion de la déformation équivalente afin de reproduire la différence de comportement du béton en traction et en compression. Il ne prend pas en compte l'irréversibilité des déformations, l'anisotropie et l'effet unilatéral et par conséquent il est adapté seulement pour des chargements monotones.

L'évolution de l'endommagement est considérée isotrope et par conséquent la variable d'endommagement D du modèle est un scalaire. Il varie de façon continue entre 0 (état vierge) et 1 (matériau complètement endommagé). Sa progression est guidée par la déformation équivalente définie comme (ϵ_i étant les déformations principales):

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \epsilon_i \rangle_+^2} \quad (4.22)$$

$$\langle \epsilon_i \rangle_+ = \epsilon_i \text{ si } \epsilon_i \geq 0 \text{ et } \langle \epsilon_i \rangle_+ = 0 \text{ si } \epsilon_i < 0 \quad (4.23)$$

Cette évolution est en accord avec les résultats expérimentaux [Terrien, 1980], [Chen, 1982], [Berthaud, 1988] qui montrent que ce sont les déformations d'extension du béton qui sont principalement à l'origine de l'endommagement (ce choix rend évidemment le modèle incapable de reproduire le comportement de béton dans le cas de tri-compression, cas où toutes les déformations sont négatives...) Afin de traiter des chargements multiaxiaux, la variable d'endommagement D est considérée comme étant la combinaison d'un endommagement dû à la traction D_t et d'un endommagement dû à la compression D_c selon l'équation ci-dessous.

$$D = \alpha_t^\beta D_t + \alpha_c^\beta D_c \quad (4.24)$$

Le paramètre β permet d'ajuster le comportement du modèle en cisaillement conformément aux résultats expérimentaux. Il est habituellement pris égal à 1.06. L'évolution de D_t et de D_c est de la forme (figure 4.13):

$$D_t = 1 - \frac{\epsilon_{D0}(1 - A_t)}{\epsilon_{eq}} - A_t \exp[-B_t(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{D0})] \quad (4.25)$$

$$D_c = 1 - \frac{\epsilon_{D0}(1 - A_c)}{\epsilon_{eq}} - A_c \exp[-B_c(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{D0})] \quad (4.26)$$

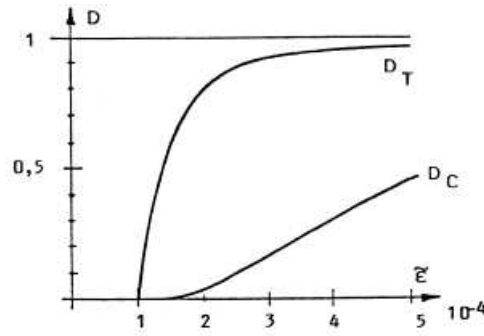


FIG. 4.13 – Evolution de D_t et de D_c en fonction de la déformation équivalente.

Les coefficients A_t , B_t , A_c , B_c sont identifiés à partir des essais en compression et en traction sur des éprouvettes cylindriques. Le seuil d'endommagement initial est identifié à l'aide de la contrainte limite en traction f_t et du module d'élasticité G^{el} ($\epsilon_{D0} \approx f_t/G^{el}$). Il est habituellement pris égal à 1.10^{-4} .

La détermination des α_t et α_c de l'équation (4.24) est effectuée en distinguant les déformations ϵ_{ti} et ϵ_{ci} dues aux contraintes principales positives et négatives respectivement comme suit:

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\epsilon_{ti} (\epsilon_{ti} + \epsilon_{ci})}{\bar{\epsilon}^2} \quad (4.27)$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\epsilon_{ci} (\epsilon_{ti} + \epsilon_{ci})}{\bar{\epsilon}^2} \quad (4.28)$$

$H_i = 1$ si $\epsilon_i = \epsilon_{ci} + \epsilon_{ti} \geq 0$, sinon $H_i = 0$. A partir des équations (4.27) et (4.28) nous pouvons vérifier que pour un chargement uniaxial de traction $\alpha_t = 1$, $\alpha_c = 0$, $D = D_t$ et vice versa pour la compression. La loi constitutive du modèle devient finalement:

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - D)\mathbf{\Lambda} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.29)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}$ les tenseurs deuxième ordre des contraintes et des déformations et $\mathbf{\Lambda}$ le tenseur quatrième ordre du module élastique. La réponse 1D de modèle à un chargement de traction ou de compression est présentée à la figure 4.14. Conformément à la théorie de l'endommagement, au cas d'une décharge le module est égal au module secant et pas au module élastique comme pour les modèles basés sur la théorie de la plasticité de la section 4.2.

Dans la section 4.3 la loi Mazars est utilisée pour les termes premier gradient et une loi élastique linéaire pour la partie second gradient. A cause de la variation de la pente radoucissante de la loi Mazars (figure 4.14), il est impossible de trouver des solutions analytiques pour le problème global.

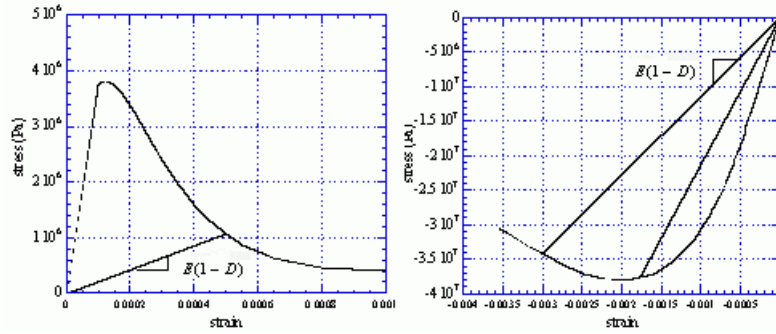


FIG. 4.14 – Réponse uniaxial du modèle Mazars en traction (gauche) et en compression (droite), ($G^{el} = E$).

4.3.2 Investigations numériques

Nous étudions ci-dessous le régime post-pic d'une barre rectangulaire en béton soumise à un déplacement de traction oedométrique (déformation uniquement dans une direction), [Kotronis *et al.*, 2005], [Kotronis *et al.*, 2007]. L'hypothèse de grandes déformations est adoptée et la longueur de la zone de localisation calculée numériquement sera comparée avec la valeur théorique proposée dans [Chambon *et al.*, 1996], [El-Hassan Assoum, 1997], [Chambon *et al.*, 1998], équation (4.21). Le code utilisé est Lagamine, développé à l'Université de Liège, avec l'élément fini 2D spécialement développé pour les modèles locaux de second gradient [Bésuelle, 2003]. Afin d'éviter des effets 2D le déplacement vertical des parties inférieure et supérieure de la barre est fixé ($u_2 = 0$, figure 4.15). La section de la barre est prise égale à $0.1 \times 1 m^2$ et sa longueur $1m$.

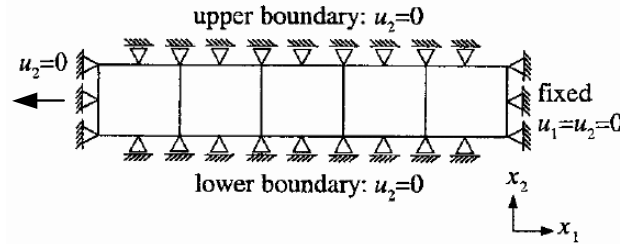


FIG. 4.15 – Barre rectangulaire en béton soumise à un déplacement de traction oedométrique.

La relation adoptée reliant les termes premier gradient est le modèle Mazars avec les paramètres suivants: $G^{el} = 30.10^{+9} Pa$, $\epsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $A_t = 0.5$, $B_t = 2.10^{+4}$, coefficient de poisson 0.2, paramètres qui donnent un module juste après le pic égal à $G^{tg} \approx -16.7 10^{+9} Pa$. Ce module ensuite diminue et après augmente avec l'évolution de chargement en s'approchant de zéro (nous attendons donc à la fin de chargement une augmentation de la zone de localisation, voir figure 4.12). Le seul paramètre nécessaire à la relation second gradient est la valeur de la pente B (figure 4.16). Elle est donnée plus bas.

Pour ce problème 1D le module sécant est égal à:

$$G^{sec} = (1 - D)G^{el} \quad (4.30)$$

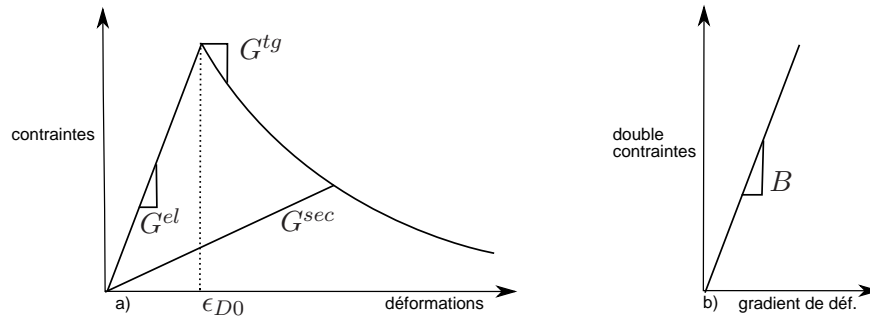


FIG. 4.16 – Barre en béton - Modèles constitutifs: (a) premier gradient, (b) second gradient.

Le modèle local second gradient introduit implicitement deux longueurs internes, la première (égale à $\sqrt{B/G^{sec}}$) correspondant au régime de décharge de la partie premier gradient et la deuxième (égale à $\sqrt{B/(-G^{tg})}$) correspondant à la partie adoucissante (voir aussi les équations (4.16) et (4.18)). Afin de définir la valeur de B nous pouvons utiliser les critères proposés dans [Chambon *et al.*, 1996] et [Chambon *et al.*, 1998] - valables dans le cadre des petites déformations et pour une loi bilinéaire - qui garantissent l'existence des solutions analytiques et aident à éviter des phénomènes de snap-back à la solution de l'équation différentielle correspondante. En supposant qu'une solution en deux parties est possible (composée d'une partie "dure" sans localisation des déformations et d'une partie "molle" avec localisation) et $B = 0.37 \cdot 10^{+9} N$, nous trouvons que pour une loi bi-linéaire avec $G^{el} = 30 \cdot 10^{+9} Pa$ et $G^{tg} = -16.7 \cdot 10^{+9} Pa$ juste après le pic, la longueur de la partie localisée l_{loc} est approximativement égale à $0.37m$ (équation (4.21)). Pour le cas d'une solution en trois parties ("dure" - "molle" - "dure") la longueur de la zone localisée est trouvée approximativement égale à $0.78m$.

Dès que le pic est atteint, l'unicité de la solution est perdue. Afin de trouver quelques solutions possibles nous appliquons l'algorithme de recherche de non unicité [Chambon *et al.*, 2001d], [Chambon et Moullet, 2004] juste après le pic (à $\epsilon_{D0} = 1.2 \cdot 10^{-4}$). A chaque pas, la procédure itérative de Newton Raphson est effectuée en utilisant une matrice de rigidité tangente consistante. Cette matrice est trouvée numériquement et elle est valable pour le modèle complet incluant la partie premier et second gradient [Matsushima *et al.*, 2000].

Deux maillages différents sont présentés ci-dessous, le premier avec 14 et le deuxième avec 50 éléments. La figure 4.17 représente la courbe globale force déplacement pour les deux maillages. La figure 4.18 représente la distribution de la variable d'endommagement D dans la barre juste après le pic ($\epsilon_{D0} = 1.2 \cdot 10^{-4}$) et la figure 4.19 à la fin du chargement ($\epsilon_{D0} = 2.9 \cdot 10^{-4}$).

Les deux maillages reproduisent la solution homogène lorsque l'algorithme de recherche de non unicité n'est pas utilisé. Si nous procédons à une initialisation aléatoire des vitesses juste après le pic, les courbes de comportement global diffèrent (figure 4.17). Cette différence trouve son explication en inspectant les motifs de localisation correspondants. Le maillage avec 14 éléments converge vers une solution à deux zones ("dure" - "molle"), dont la longueur de la zone localisée correspond approximativement à la longueur calculée analytiquement. Le maillage avec 50 éléments converge vers une solution à trois zones ("dure" - "molle" - "dure") avec toujours la longueur de la zone "molle" approximativement égale à la longueur de la zone localisée calculée analytiquement (figure 4.18). La valeur maximale de la variable d'endommagement est aussi différente (0.587 pour le maillage à 14 éléments et 0.347 pour le

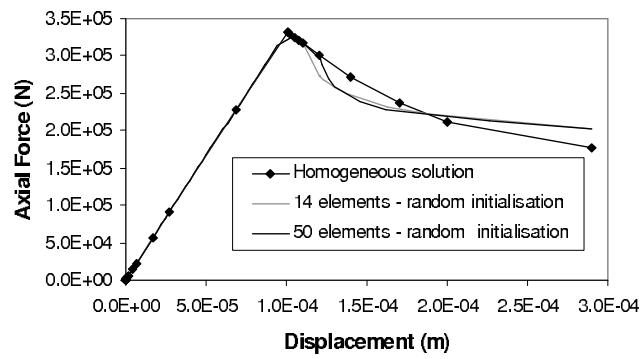


FIG. 4.17 – Barre en béton - Courbes force déplacement pour les deux maillages.

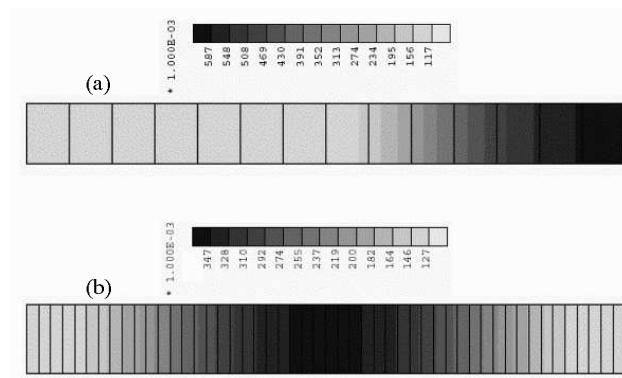


FIG. 4.18 – Barre en béton - Zones de localisation (distribution de la variable d'endommagement D) juste après le pic ($\epsilon_{D0} = 1.2E - 04$): (a) maillage avec 14 éléments, (b) maillage avec 50 éléments.

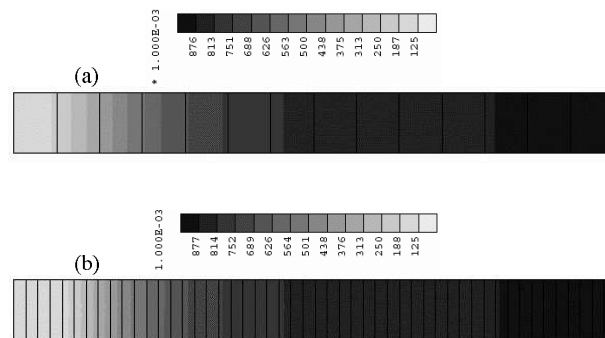


FIG. 4.19 – Barre en béton - Zones de localisation (distribution de la variable d'endommagement D) à la fin du chargement ($\epsilon_{D0} = 2.9E - 04$): a) maillage avec 14 éléments, (b) maillage avec 50 éléments.

maillage à 50 éléments).

Quelques pas après et conformément aux conclusions de la section 4.2.3.2, la longueur de la zone de localisation diminue (quand G^{tg} diminue), ensuite augmente (quand G^{tg} augmente). Plus loin dans le calcul, le maillage à 50 éléments bascule à la solution présentant deux zones distinctes (figure 4.19). Il rejoint ainsi le motif du maillage avec 14 éléments. Ceci est aussi vérifié après inspection de la valeur maximale de la variable D qui à la fin de chargement

atteint pour les deux maillages le même niveau (approximativement 0.876) et aussi la courbe globale de la figure 4.17. Ce phénomène de basculement de la solution est aussi observé avec des modèles de plasticité [Bésuelle *et al.*, 2006]. Au dernier pas la zone de localisation est étendue et couvre pratiquement tout le spécimen.

4.4 Est-ce possible de contrôler a priori l'évolution de la zone de localisation?

4.4.1 Problématique

Conformément aux résultats des sections 4.2 et 4.3, la longueur de la zone localisée augmente avec l'augmentation de la pente du régime radoucissant. Cette augmentation devient sans limites quand le module radoucissant s'approche de zéro et par conséquent la zone de localisation s'étend sur tout le domaine. Ce comportement est en contradiction avec le motif de rupture expérimentalement observé, rupture le plus souvent localisée dans une zone ayant une longueur finie (par exemple pour une barre en béton soumise à une force de traction).

Est-ce possible de construire un milieu second gradient pour des matériaux ayant un comportement post-pic radoucissant dans lequel la longueur de la zone de localisation reste constante ou diminue avec l'évolution de chargement? Cette question est traitée ci-dessous.

4.4.2 Lois constitutives

Le milieu à microstructure 1D proposé est basé sur les idées suivantes:

1. Les lois constitutives des parties premier (équation (4.10)) et second gradient (équation (4.11)) sont maintenant couplées à travers un paramètre d'endommagement D (une idée similaire pourrait évidemment être poursuivie avec des modèles formulés selon la théorie de plasticité).
2. Afin de pouvoir contrôler l'évolution de la zone de localisation, nous allons formuler des lois constitutives de façon à garder constants les trois rapports de la solution analytique (équations 4.16, 4.18, 4.21). Pour ce milieu à microstructure ces rapports deviennent:

$$\omega = \sqrt{\frac{G^{sec}}{B}} \quad (4.31)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{-G^{tg}}{B}} \quad (4.32)$$

$$\frac{G^{sec}}{G^{tg}} \quad (4.33)$$

La loi constitutive de la partie premier gradient (fonction des contraintes de Cauchy σ , des déformations ϵ et de la variable d'endommagement D) est de la forme:

$$\sigma = f(\epsilon, D) \quad (4.34)$$

La loi constitutive de la partie second gradient (fonction des doubles contraintes M , des gradients de déformations et de la variable d'endommagement D) est de la forme:

$$M = g(\epsilon', D) \quad (4.35)$$

Nous choisissons de prendre le rapport des modules tangent et sécant de la loi premier gradient constant.

$$\frac{G^{tg}}{G^{sec}} = cst = -\delta, \text{ avec } \delta > 0 \quad (4.36)$$

En considérant que $G^{tg} = d\sigma/d\epsilon$ et $G^{sec} = \sigma/\epsilon$ nous obtenons:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = -\delta \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (4.37)$$

La résolution de cette équation différentielle nous définit la forme de la loi premier gradient:

$$\sigma = \frac{\kappa}{\epsilon^\delta}, \text{ avec } \kappa = cst \quad (4.38)$$

Les modules de la loi premier gradient deviennent donc:

$$G^{sec} = \frac{\kappa}{\epsilon^{\delta+1}} > 0 \quad (4.39)$$

$$G^{tg} = -\delta \frac{\kappa}{\epsilon^{\delta+1}} < 0 \quad (4.40)$$

La constante δ définit la vitesse de la pente de la partie radoucissante (figure 4.20).

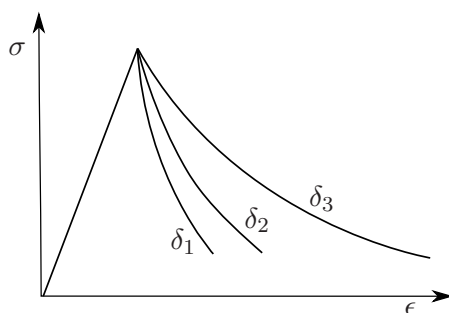


FIG. 4.20 – Influence de δ sur la loi premier gradient ($\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$).

Nous allons maintenant essayer d'exprimer les modules de l'équation (4.33) en fonction d'un paramètre d'endommagement D . Si $(\sigma_{D0}, \epsilon_{D0})$ est le pic de la loi premier gradient (figure 4.21 a)) nous obtenons:

$$\sigma_{D0} = \frac{\kappa}{\epsilon_{D0}^\delta} \quad (4.41)$$

$$G^{el} = \frac{\sigma_{D0}}{\epsilon_{D0}} \quad (4.42)$$

A partir des équations (4.41) et (4.42) nous avons:

$$\kappa = G^{el} \epsilon_{D0}^{\delta+1} \quad (4.43)$$

Pour ce problème 1D le module sécant est égal à:

$$G^{sec} = (1 - D)G^{el} \quad (4.44)$$

En utilisant les équations (4.39), (4.43), et (4.44) nous obtenons finalement la définition de la variable d'endommagement D :

– Pour des déformations $\epsilon < \epsilon_{D0}$

$$D = 0 \quad (4.45)$$

– Pour des déformations $\epsilon \geq \epsilon_{D0}$

$$D = 1 - \frac{\epsilon_{D0}^{\delta+1}}{\epsilon^{\delta+1}} \quad (4.46)$$

Comme c'est d'habitude le cas pour les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement, la valeur de la variable D est toujours égale à la valeur maximale atteinte le long de l'histoire de chargement. Nous vérifions aisément que quand $\epsilon = \epsilon_{D0}$, $D = 0$ et quand $\epsilon \rightarrow \infty$, $D \rightarrow 1$. Les pentes de l'équation (4.33), exprimées cette-fois ci en fonction de l'endommagement, deviennent:

$$\omega = \sqrt{\frac{G^{el}(1 - D)}{B}} \quad (4.47)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta G^{el}(1 - D)}{B}} \quad (4.48)$$

$$\frac{G^{tg}}{G^{sec}} = -\delta \quad (4.49)$$

Finalement, afin de garder tous ces rapports constants nous choisissons la formule suivante pour la pente B :

– Pour des déformations $\epsilon < \epsilon_{D0}$

$$B = B^{el} \quad (4.50)$$

– Pour des déformations $\epsilon \geq \epsilon_{D0}$

$$B = \frac{B^{el} \epsilon_0^{\delta+1}}{\epsilon^{\delta+1}} = B^{el}(1 - D) \quad (4.51)$$

avec B^{el} la valeur initiale de la pente des termes second gradient. Nous vérifions aisément que quand $\epsilon = \epsilon_{D0}$, $B = B^{el}$ et quand $\epsilon \rightarrow \infty$, $B \rightarrow 0$. La figure 4.21 présente l'évolution des contraintes et de B en fonction des déformations ϵ pour ce milieu.

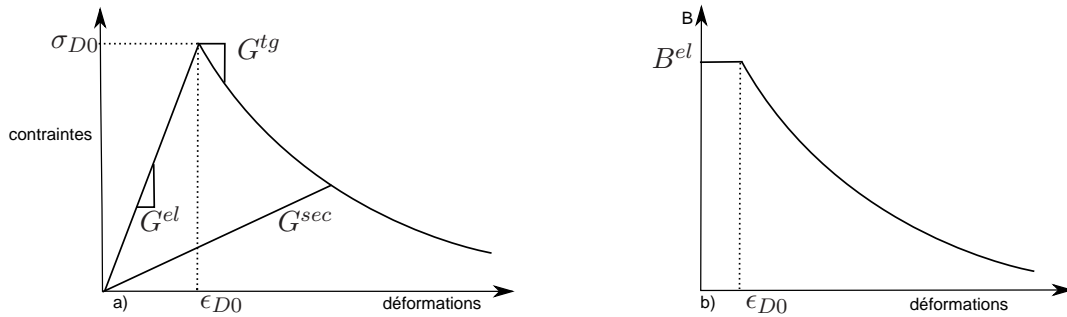


FIG. 4.21 – Milieu avec des rapports constants: (a) contraintes, (b) pente B en fonction des déformations.

4.4.3 Investigations numériques

Nous étudions ci-dessous le régime post-pic d'une barre soumise à un déplacement de traction. Le code 1D développé au laboratoire 3S-R est utilisé pour ce calcul et l'hypothèse de petites déformations et retenue. Le milieu à microstructure est celui présenté à la section 4.4.2 avec des rapports constants et des paramètres numériques suivants: $G^{el} = 30.10^{+9}Pa$, $\epsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $\delta = 0.5$ et $B_{el} = 1.2.10^{+8}$.

Le modèle reproduit la solution homogène lorsque l'algorithme de recherche de non unicité n'est pas utilisé. Si nous procédons à une initialisation aléatoire des vitesses [Chambon *et al.*, 2001d], [Chambon et Moullet, 2004] quelques pas après le pic (plus précisément au pas 15), nous retrouvons une solution localisée (figure 4.22).

La valeur de la variable d'endommagement D dans les éléments et ceci à chaque pas est présentée à la figure 4.23 pour la solution localisée. Nous remarquons que la longueur de cette zone ne varie pas, elle reste pratiquement constante tout le long de chargement. Ceci est aussi clairement identifié à la figure 4.24 où apparaît l'indicateur de l'état de chargement des points de gauss dans les éléments. Cet indicateur prend les valeurs suivantes:

- 0: chargement élastique.
- 1: déchargement élastique.

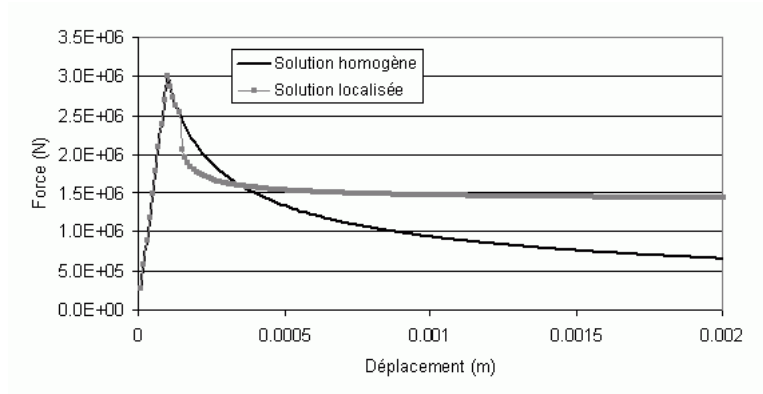


FIG. 4.22 – Réponse globale pour le milieu avec des rapports constants (deux solutions).

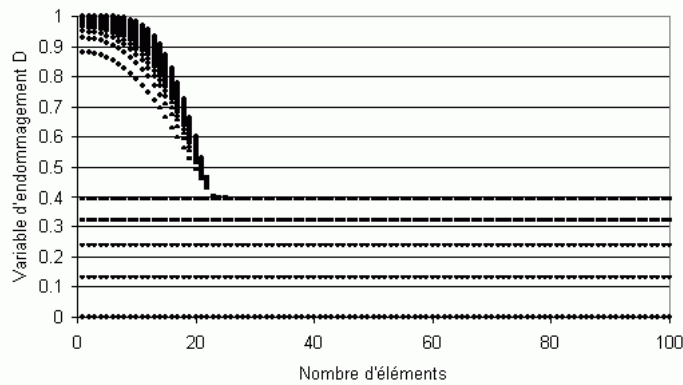


FIG. 4.23 – Milieu avec des rapports constants, solution localisée: Distribution de la variable d'endommagement dans les éléments à chaque pas.

– 2: chargement anélastique (avec évolution de l'endommagement).

Afin de pouvoir contrôler a priori l'augmentation ou la diminution de la zone de localisation il suffit de remplacer l'équation (4.51) par:

$$B = B^{el}(1 - D)^\xi \quad (4.52)$$

Pour des valeurs de $\xi > 1$ la zone de localisation va diminuer, alors que pour des valeurs de $\xi < 1$ la zone va augmenter. Le calcul suivant avec $G^{el} = 30.10^{+9} Pa$, $\epsilon_{D0} = 1.10^{-4}$, $\delta = 0.5$, $B_{el} = 1.2.10^{+8}$ (les mêmes valeurs qu'avant) et $\xi = 1.5$ illustre le propos (figures 4.25, 4.26, 4.27).

Remarques:

1. Les résultats de ce nouveau milieu (avec des rapports constants ou avec des valeurs de $\xi \neq 1$) restent évidemment objectifs (indépendants de la discrétisation spatiale).
2. La solution numérique de la figure 4.25 est valable tant que la longueur de la zone de localisation n'est pas concentrée à un seul élément. Sinon, une discrétisation plus fine s'avère nécessaire.

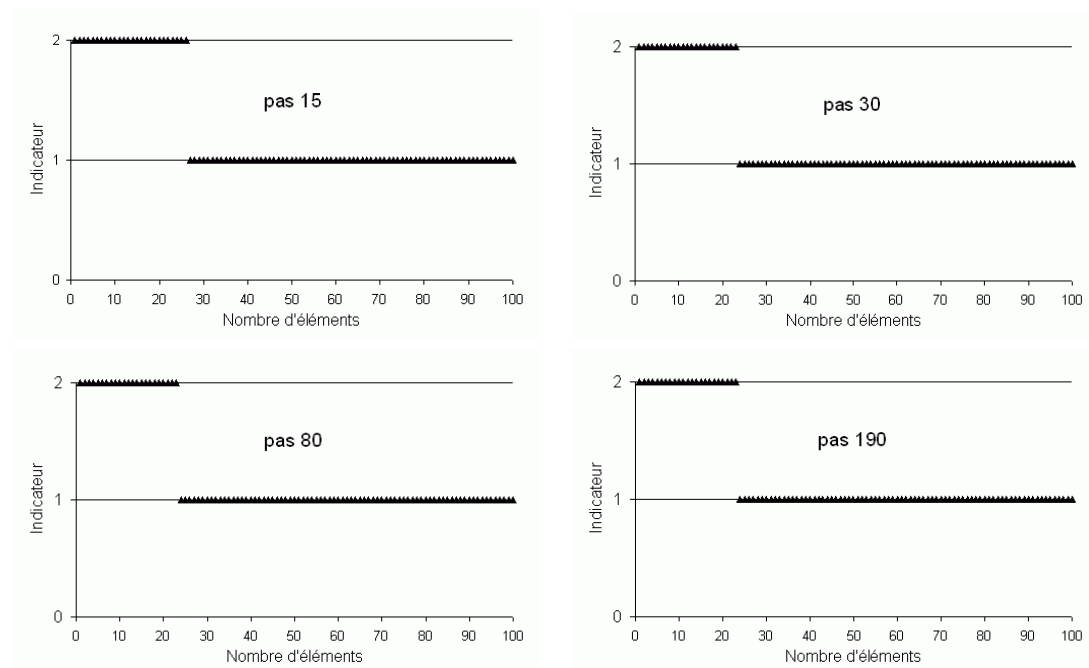


FIG. 4.24 – Milieu avec des rapports constants, solution localisée: Indicateur de l'état de chargement (après le tirage aléatoire).

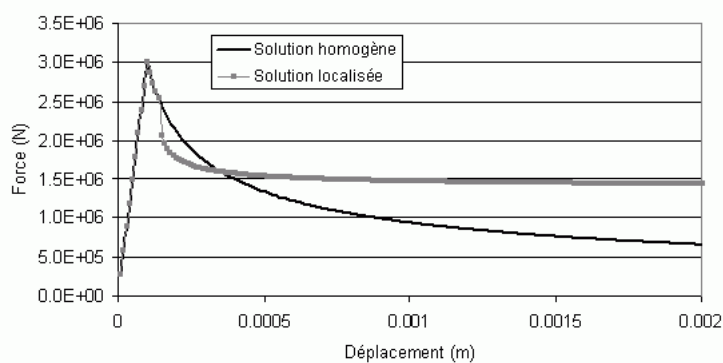


FIG. 4.25 – Réponse globale pour le milieu avec $\xi = 1.5$ (deux solutions).

3. Les solutions localisées des figures 4.17, 4.22 et 4.25 dépassent à partir un certain pas la solution homogène. Ce comportement est évidemment irréaliste et peut conduire à des phénomènes du blocage de contraintes (les contraintes résiduelles ne peuvent pas s'anuler même lorsque les déformations appliquées deviennent grandes [Rolshoven, 2003]). Ce phénomène est dû à l'apport des termes second gradient qui sont en compétition avec les termes premier gradient. La solution semble être le traitement du passage continu-discontinu et le développement des fissures avec l'introduction d'un élément d'interface au sein de milieu enrichi ou l'introduction d'une loi d'endommagement pour la partie second gradient indépendante de celle de la partie premier gradient. Des travaux sont en cours vers ces deux directions.

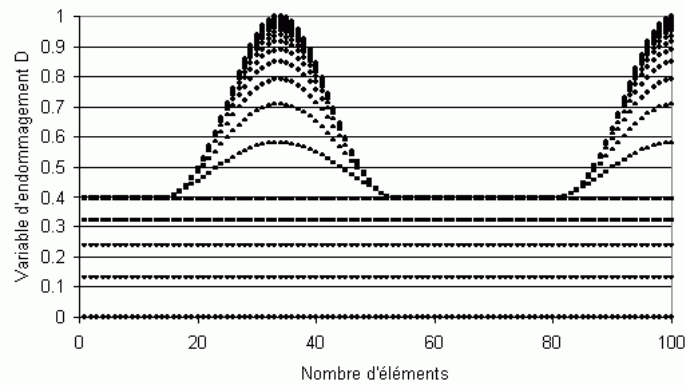


FIG. 4.26 – Milieu avec $\xi = 1.5$, solution localisée: Distribution de la variable d'endommagement dans les éléments à chaque pas.

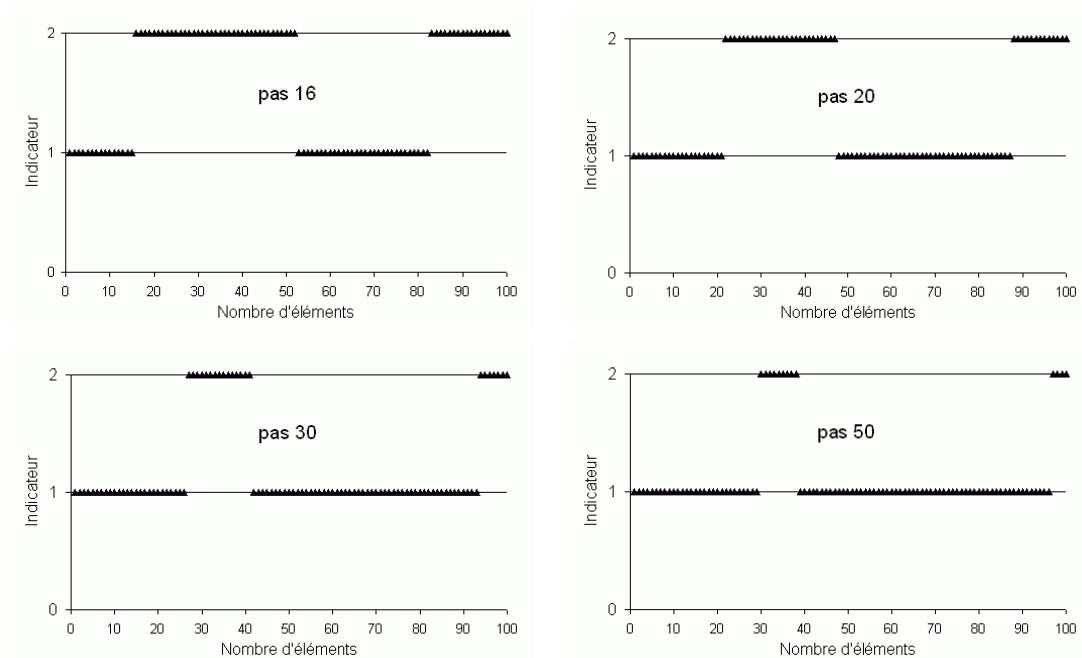


FIG. 4.27 – Milieu avec $\xi = 1.5$, solution localisée: Indicateur de l'état de chargement (après le tirage aléatoire).

4.5 Conclusions

Les résultats précédents montrent que l'utilisation des modèles locaux de second gradient avec des lois basées sur la plasticité ou la mécanique de l'endommagement pour la partie premier gradient et une loi élastique linéaire pour la partie second gradient conduit à des solutions présentant des longueurs internes, indépendantes de la discrétisation spatiale. Maillages avec différents nombres d'éléments conduisent à la même solution tant au niveau global que local. Cependant, cette approche n'assure pas l'unicité de la solution. Une multitude de solutions peut faire son apparition, solutions qui sont susceptibles d'évoluer ou même de disparaître pendant le calcul. Le principal apport des modèles locaux second gradient se trouve dans le fait que toutes ces solutions sont probables et réalistes, contrairement aux solutions parasites

obtenues en utilisant un milieu non enrichi. Des exemples numériques sur une barre de béton en traction illustrent ces conclusions.

Ce chapitre contient aussi des informations intéressantes sur l'évolution de la longueur de la zone de localisation pour les lois quasi-fragile et ductile. Dans un milieu classique et ceci pour les deux lois, il y a une infinité de solutions et la longueur de la zone de localisation ne peut que rester constante ou diminuer. Pour un modèle local de second gradient et pour la loi quasi-fragile la longueur de la zone de localisation ne varie pas pendant l'histoire de chargement. Enfin, dans ce même milieu enrichi et pour la loi ductile la longueur change (diminue ou augmente) avec l'évolution de la raideur du régime radoucissant.

L'augmentation de la zone de localisation devient sans limites quand le module radoucissant s'approche de zéro. Ce comportement est en contradiction avec le motif classique de rupture (e.g. pour une barre de béton en traction), le plus souvent localisé dans une zone ayant une longueur finie. Afin de régler ce problème une piste serait de coupler les lois constitutives des termes premier et second gradient. Un tel couplage est proposé pour un problème 1D à travers la variable d'endommagement D . En contrôlant l'évolution des rapports de la solution analytique l'utilisateur peut connaître a priori l'évolution de la zone de localisation.

Conclusions et perspectives

Ce mémoire propose trois différentes stratégies de modélisation de structures soumises à des chargements sévères. Plus spécifiquement:

Le chapitre 2 contient plusieurs formulations d'éléments poutres multifibres de cinématique Navier-Bernoulli ou Timoshenko existantes dans la littérature. Couplés avec des lois d'endommagement pour le béton et de plasticité pour les armatures tous ces éléments ont été capables de reproduire quantitativement le comportement global et qualitativement le comportement local de structures élancées en béton armé testées sur table sismique. Après une comparaison approfondie de ces différents éléments sur des cas simples, nous proposons un nouvel élément Timoshenko avec des degrés de liberté élémentaires et des fonctions de formes indépendantes des caractéristiques matérielles.

Le chapitre 3 présente le développement théorique d'un macro-élément 3D pour des problèmes d'Interaction Sol Structure (ISS). Développé en variables globales (forces et déplacements) il permet ainsi de réduire significativement le temps de calcul. L'élément prend en compte la plasticité du sol et peut être combiné avec des poutres multifibres pour la modélisation de la partie supérieure de la structure. L'influence de l'ISS sur le comportement d'une structure de 7 étages en béton armé est ainsi étudiée. Le domaine d'application de l'élément peut être étendu en considérant d'autres sources de non-linéarités (e.g. des non-linéarités géométriques comme le décollement de la fondation). Le couplage de ces non-linéarités est aisé suivant la théorie des multi-mécanismes [Grange, 2008].

Le chapitre 4 est quant à lui consacré à l'évolution de la zone de localisation dans le cadre des modèles second gradient locaux. Contrairement à un milieu classique, les résultats numériques dans ces milieux enrichis sont objectifs (pas de dépendance pathologique au maillage) mais admettent plusieurs solutions. En utilisant des lois constitutives simples, basées sur la théorie de plasticité ou de l'endommagement pour la partie premier gradient et l'élasticité linéaire pour la partie second gradient, nous montrons que la zone de localisation évolue. Afin de pouvoir faire contrôler l'évolution de cette zone il semble nécessaire d'abandonner l'hypothèse

d'élasticité linéaire pour les termes second gradient. Un premier modèle d'endommagement étendu aux termes second gradient est ainsi proposé, permettant à l'utilisateur de contrôler a priori l'évolution de la partie localisée.

Nos travaux futurs concernent:

- Pour les éléments multifibres, l'implémentation des méthodes pour la prise en compte des phénomènes de gauchissement des sections [Casaux, 2003], [Mazars *et al.*, 2004] et du couplage parasite entre l'effort normal et la flexion [Casaux, 2003].
- L'élément d'interface 3D sera étendu pour la simulation du comportement non linéaire des joints (poutres-poteaux), des fondations profondes et des amortisseurs sismiques [Grange, 2008], [Kapała, 2008].
- Dans le cadre des milieux enrichis nous allons introduire une loi d'endommagement pour la partie second gradient indépendante de celle de la partie premier gradient. Nous allons en plus essayer de modéliser la rupture et la création des fissures en traitant le passage continu-discontinu. Il s'agira donc d'écrire de manière consistante l'apparition d'une fissure dans le milieu et l'introduction d'un élément d'interface au sein de ce dernier.

Les partenariats et les projets envisagés sont: le projet national CEOS, ANR MEFISTO...

Bibliographie

- ABBASI, V. (2003). Modèle simplifié d'un bâtiment à 4 étages à ossature en béton armé soumis à un chargement sismique. Rapport Master Recherche MCGM, Laboratoire Sols, Solides, Structures-Risques, UJF/INP/CNRS.
- AL HOLO, S. (2005). *Étude numérique de la localisation à l'aide de modèles de second gradient: Perte d'unicité et évolution de la taille de la zone localisée*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- BERTHAUD, Y. (1988). *Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, France.
- BÉSUELLE, P. (2003). Implémentation d'un nouveau type d'élément fini dans le code Lagamine pour une classe de lois à longueur interne. *Internal report, FNRS, Belgique*, pages 1–17.
- BÉSUELLE, P. et CHAMBON, R. (2006). Modelling the post-localization regime with local second gradient models: Non uniqueness of solutions and non persistent shear bands (in print). In W., W. et H.-S., Y., éditeurs: *Proc. Int. Workshop on Modern Trends in Geomechanics*, Vienna, june 2005. Springer. FORPRO 2005/16 A.
- BÉSUELLE, P., CHAMBON, R. et COLLIN, F. (2006). Switching mode of deformation in post-localization solutions with a quasi brittle material. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1(7):1115–1134.
- BEYER, K., DAZIO, A. et PRIESTLEY, M. (2008). Inelastic wide-column models for u-shaped reinforced concrete walls. *Journal of Earthquake Engineering*, 12(1):1–33.
- BISCH, P. et COIN, A. (2007). Seismic behaviour of slightly reinforced concrete walls: Experiments and theoretical conclusions. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 5(1):45–65.
- BOTRUGNO, L. (2008). Analisi della risposta sismica di un ponte in cemento armato. Projet de fin d'études, Università degli Studi di Perugia.
- CAILLERIE, D. (2008). Étude de la convergence et du verrouillage des schémas éléments finis. poutre de navier bernoulli et timoshenko. Communication privée, Laboratoire Sols, Solides, Structures-Risques, UJF/INP/CNRS.
- CAILLERIE, D., KOTRONIS, P. et CYBULSKI, R. (2009). An improved timoshenko beam finite element with internal degrees of freedom. *Computers and Structures*. en préparation.
- CAQUOT, A. et KÉRISEL, J. (1966). *Traité de mécanique des sols*. Gautiers-Villars, France.

- CASAU, G. (2003). *Modélisation tridimensionnelle du comportement sismique d'ouvrages en béton armé - Développement de méthodes simplifiées*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- CEA (2008). Cast3m, site web. <http://www-cast3m.cea.fr>.
- CHAMBON, R., CAILLERIE, D. et EL HASSAN, N. (1996). Étude de la localisation unidimensionnelle à l'aide d'un modèle de second gradient. *C.R.A.S-Série II b*, (323):231–238.
- CHAMBON, R., CAILLERIE, D. et EL HASSAN, N. (1998). One-dimensional localization studied with a second grade model. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17(47):637–656.
- CHAMBON, R., CAILLERIE, D. et MATSUSHIMA, T. (2001a). Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies. *International Journal of Solids and Structures*, 38:8503–8527.
- CHAMBON, R., CAILLERIE, D. et TAMAGNINI, C. (2001b). A finite deformation second gradient theory of plasticity. *C.R.A.S-Série II b*, 329:797–802.
- CHAMBON, R., CAILLERIE, D. et TAMAGNINI, C. (2004). A strain gradient plasticity theory for finite strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:2797–2826.
- CHAMBON, R., CROCHEPEYRE, S. et CHARLIER, R. (2001c). An algorithm and a method to search bifurcation points in non-linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:315–332.
- CHAMBON, R., CROCHEPEYRE, S. et CHARLIER, R. (2001d). An algorithm and a method to search bifurcation points in non-linear problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 51:315–332.
- CHAMBON, R. et MOULLET, J. (2004). Uniqueness studies in boundary value problems involving some second gradient models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:2771–2796.
- CHEN, W. (1982). *Plasticity in reinforced concrete*. New York: McGraw-Hill Bookstore, 456p.
- CLARKE, M. et HANCOCK, G. (1990). A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1365–1991.
- COLLIN, F., CHAMBON, R. et CHARLIER, R. (2006). A finite element method for poro mechanical modelling of geotechnical problems using local second gradient models. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 65(11):1749–1772.
- CORN, S. (1998). *Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement dynamique de poutre*. Thèse de doctorat, UFR des sciences et techniques de l'université Franche-Comté.
- COWPER, G. (1966). The shear coefficient in timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 33:335–340.
- CRISFIELD, M. (1991a). *Nonlinear Finite Element analysis of solids and structures, Vol I: Essentials*. John Wiley, Chichester.
- CRISFIELD, M. (1991b). *Nonlinear Finite Element analysis of solids and structures, Vol II: Advanced Topics*. John Wiley, Chichester.
- CRÉMER, C. (2001). *Modélisation du comportement non linéaire des fondations superficielles sous séismes*. Thèse de doctorat, LMT ENS Cachan, France.
- CRÉMER, C., PECKER, A. et DAVENNE, L. (2001). Cyclic macro-element for soil-structure interaction: material and geometrical non-linearities. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25(13):1257–1284.
- CRÉMER, C., PECKER, A. et DAVENNE, L. (2002). Modelling of nonlinear dynamic behaviour of a shallow strip foundation with macro-element. *Journal of Earthquake Engineering*, 6(2):175–211.
- CYBULSKI, R. (2008). Numerical issues on beam finite elements. Report Master Recherche MEMS-GGCR, Laboratoire Sols, Solides, Structures-Risques, UJF/INP/CNRS.
- DAVIDOVICI, V. (1999). *La construction en zone sismique*. Le Moniteur, France.

- de BORST, R. et MÜHLHAUS, H. (1992). Gradient dependant plasticity: formulation and algorithmic aspects. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 35:521–539.
- de Ville de GOYET, V. (1989). *L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- DONEA, J. et LAMAIN, L. (1987). A modified representation of transverse shear in quadrilateral c° plate elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 63:183–207.
- DUBÉ, J. (1997). Modélisation multicouche des voiles en béton armé. *Revue Française de Génie Civil*, 1(2):285–307.
- EC8 (2005). Nf p 06 030-1, nf en 1998-1, eurocode 8: Calcul des structures pour leur résistance aux séismes. Partie 1: Règles générales, actions sismiques et règles pour les bâtiments, Septembre.
- EDF (2008). Code aster, site web. <http://www.code-aster.org>.
- EL-HASSAN ASSOUM, N. (1997). *Modélisation théorique et numérique de la localisation de la déformation dans les géomatériaux*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- FILIPPOU, F. et M. CONSTANDINES, M. (2004). *FedeasLab Getting Started Guide And Simulations Examples*. Department of civil and Environmental Engineering UC Berkeley.
- FILIPPOU, F. et POPOV, E. (1983). Effects of bond deterioration on hysteretic behavior of reinforced concrete joints. Rapport technique Technical report EERC-83/19, Earthquake Engr. Res. Ctr. Univerity of California, Berkeley.
- FREMOND, M. et NEDJAR, B. (1996). Damage gradient of damage and principle of virtual work. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8):1083–1103.
- FRIEDMAN, Z. et KOSMATKA, Z. (1993). An improved two-node timoshenko beam finite element. *Computers and structures*, 47(3):473–481.
- GAZETAS, G. (1991). *Foundation Engineering Handbook, Chapter 15*. Fang H-Y (ed.), van Nostrand Reinhold: New York.
- GERMAIN, P. (1973a). The method of virtual power in continuum mechanics part 2: microstructure. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 25(3):556–575.
- GERMAIN, P. (1973b). La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus: Première partie: théorie du second gradient. *Journal de mécanique*, 12(2):235–274.
- GHAVAMIAN, S., DAVENNE, L. et GATUINGT, F. (2002). Elément de poutre multifibre (droite). fascicule r3.08. Rapport technique, Document Code Aster.
- GHAVAMIAN, S. et MAZARS, J. (1998). Stratégie de calculs simplifiés pour l'analyse du comportement des structures en ba : le code eficos. *Revue Française de Génie Civil*, 2(1):61–90.
- GIRY, C. (2008). Simplified modeling strategy for the numerical analysis of a structure submitted to seismic loadings. benchmark - project smart2008, seismic design and best-estimate methods assessment for reinforced concrete buildings subjected to torsion and non-linear effects. Rapport technique, Laboratoire Sols, Solides, Structures-Risques, UJF/INP/CNRS.
- GOTTARDI, G., HOULSBY, G. et BUTTERFIELD, R. (1999). Plastic response of circular footings under general planar loading. *Géotechnique*, 49(4):453–469.
- GRANGE, S. (2008). *Modélisation simplifiée 3D de l'interaction sol-structure: application au génie parasismique*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble - Grenoble Universités.

- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2006a). Advancement of simplified modelling strategies for 3d phenomena and/or boundaries conditions for base-isolated buildings or specific soil-structure interactions. Rapport technique. <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00102513>.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2006b). Seven-story building-slice earthquake blind prediction contest: a simplified modeling using multifiber timoshenko beams. *In Workshop and Seminar on Analytical Modeling of Reinforced Concrete Walls for Earthquake Resistance, San Diego, USA-California, December 15-16*.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2007a). 3d macro element for soil structure interaction. *In 4th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, Thessaloniki, Greece, cd paper 1308, June 25-28*.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2007b). Extensive validation of the ssi macro element using experimental and numerical results. Rapport technique. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00138210>.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2008a). A macro-element for a circular foundation to simulate 3d soil-structure interaction. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(10):1205–1227.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2008b). A macro-element for a shallow foundation to simulate soil-structure interaction considering uplift. *C. R. Mécanique*, 336(11-12):856–862.
- GUEDES, J., PÉGON, P. et PINTO, A. (1994). A fibre timoshenko beam element in castem 2000. special publication nr. i.94.31. Rapport technique, J.R.C., I-21020, Ispra, Italy.
- GUTIÉRREZ, E. et ZALDIVAR, Z. (2000). The application of karhunen-loève, or principal component analysis method, to study the non-linear seismic response of structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 29:1261–1286.
- IBRAHIMBEGOVIC, A. et FREY, F. (1992). Finite element analysis of linear and non linear deformations of elastic initially curved beams. Rapport technique, LSC internal report 92/02, January, Dep. of Civil Eng. Swiss Federal Institute of Technology, LSC, DGC,EPFL, Lausanne.
- ILE, N., NGUYEN, X., KOTRONIS, P., MAZARS, J. et REYNOUARD, J. (2008). Shaking table tests of lightly rc walls: Numerical simulations. *Journal of Earthquake Engineering*. In press.
- KAPALA, B. (2008). Influence of base isolator devices on the behaviour of buildings submitted to seismic loading. Report Master Recherche MEMS-GGCR, Laboratoire Sols, Solides, Structures-Risques, UJF/INP/CNRS.
- KOTRONIS, P. (2000). *Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00074469/fr>.
- KOTRONIS, P., AL HOLO, S., BÉSUELLE, P. et CHAMBON, R. (2008a). Shear softening and localization: Modelling the evolution of the width of the shear zone. *Acta Geotechnica*, 3(2):85–97.
- KOTRONIS, P., CHAMBON, R., MAZARS, J. et COLLIN, F. (2005). Local second gradient models and damage mechanics: Application to concrete. *In Proc. 11th International Conference on Fracture, ICF-11, cd paper no 5712*, Turin, Italy, March 20-25.
- KOTRONIS, P., COLLIN, F., BÉSUELLE, P., CHAMBON, R. et MAZARS, J. (2007). Local second gradient models and damage mechanics: 1d post-localisation studies in concrete specimens. *In EXADAKTYLOS, G. et VARDOULAKIS, I., éditeurs: Proc. 7th Int. Workshop on Bifurcation, Instabilities Degradation in Geomechanics*, Chania, Greece, june 13-16 2005. Springer.
- KOTRONIS, P., DAVENNE, L. et MAZARS, J. (2004). Poutre 3d multifibre timoshenko pour

- la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères. *Revue Française de Génie Civil*, 8(2/3):329–343.
- KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2005). Simplified modelling strategies to simulate the dynamic behaviour of r/c walls. *Journal of Earthquake Engineering*, 9(2):285–306.
- KOTRONIS, P., MAZARS, J., GRANGE, S. et GIRY, S. (2008b). Simplified modeling strategies for non linear dynamic calculations of rc structural walls including soil-structure interaction. In *Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures, IASS-IACM 2008: "Spanning Nano to Mega" 28-31 May 2008, Cornell University, Ithaca, NY, USA, (eds.) John F. Abel and J. Robert Cooke*.
- LABORDERIE, C. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: modélisation et application à l'analyse des structures en béton*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- LEMAITRE, J. (1992). *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag.
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J. (1988). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Bordas, Paris, France.
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J. (1990). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.
- MA, Y. (2004). Modélisation et analyse sous séisme d'une structure existante en béton armé. Rapport Master Recherche MCGM, Laboratoire Sols, Solides, Structures-Risques, UJF/INP/CNRS.
- MARTIN, C. (1994). Physical and numerical modelling of offshore foundations under combined loads. DPhil Thesis, University of Oxford.
- MASSONNET, C. et CESCOTTO, S. (1980). *Mécanique des Matériaux*. Edition Science et Lettres, Liège.
- MATSUSHIMA, T., CHAMBON, R. et CAILLERIE, D. (2000). Second gradient models as a particular case of microstructured models, a large strain finite element analysis. *C.R.A.S-Série II b*, 328:179–186.
- MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, France.
- MAZARS, J. (1986). A description of micro and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5/6):729–737.
- MAZARS, J., KOTRONIS, P., RAGUENEAU, F. et CASAUX, G. (2006). Using multifiber beams to account for shear and torsion. applications to concrete structural elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7264–7281.
- MAZARS, J., NGUYEN, X., KOTRONIS, P., ILE, N. et REYNOUARD, J. (2005). Etude sur le fonctionnement sismique de structures à murs à cellules contreventées. Rapport technique, RNVO. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00121989>.
- MAZARS, J., RAGUENEAU, F., CASAUX, G., COLOMBO, A. et KOTRONIS, P. (2004). Numerical modelling for earthquake engineering: the case of lightly rc structural walls. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7/8):857–874.
- MENEGOTO, M. et PINTO, P. (1973). Method of analysis of cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending. In *IABSE Symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on by well-defined repeated loads, final report, Lisbon*, page 328.
- MINDLIN, R. (1964). Microstructure in linear elasticity. *Arch Rational Mechanics Anal*, 16:51–78.
- MINDLIN, R. (1965). Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1:417–438.

- MOULLET, J. (2003). *Étude numérique de la bifurcation et de la localisation à l'aide de modèles de second gradient*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- NEES7STORY (2006). Nees/ucsd seven-story building-slice earthquake blind prediction contest. Rapport technique, UCSD. <http://nees.ucsd.edu/7Story.html>.
- NGUYEN, X. (2006). *Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles porteurs: expérimentation et modélisation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble - Grenoble Universités. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00087712>.
- NOVA, R. et MONTRASIO, L. (1991). Settlements of shallow foundations on sand. *Géotechnique*, 41(2):243–256.
- OWEN, D. et HINTON, E. (1980). *Finite elements in plasticity: Theory and practice*. Pineridge Press Ltd, Swansea, England.
- PECKER, A. (1984). *Dynamique des sols*. Presse, ENPC, Paris, France.
- PECKER, A. (1997). *Seismic behavior of ground and geotechnical structures*, chapitre Analytical formulae for the seismic bearing capacity of shallow strip foundations, pages 261–268. (eds) Seco e Pinto, Balkema, Rotterdam.
- PEGON, P. (1994). A timoshenko simple beam element in castem 2000. Rapport technique, J.R.C., I-21020, Ispra, Italy. special publication Nr. I.94.04.
- PETRANGELI, M., PINTO, P. et CIAMPI, V. (1999). Fiber element for cyclic bending and shear of rc structures. i: Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(9):994–1001.
- PHILIPPONAT, G. et HUBERT, B. (2003). *Fondations et ouvrages en terre*. Eyrolles, Paris, France.
- PIJAUDIER-CABOT, G. et BAŽANT, Z. (1987). Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113:1512–1533.
- PREVOST, J. (1978). Anisotropic undrained stress strain behaviour of clays. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, GT8:1075–1090.
- PRZEMIENIECKI, J. (1968). *Theory of matrix structural analysis*. McGraw-Hill.
- RICE, J. (1976). *Theoretical and Applied Mechanics*, chapitre The localization of plastic deformation, pages 207–220. (ed.) W.T. Koiter, North-Holland Publishing Company.
- ROLSHOVEN, S. (2003). *Nonlocal plasticity models for localised fracture*. Thèse de doctorat, No 2887, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.
- SALEŃON, J. et PECKER, A. (1995a). Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. part i: purely cohesive soil. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 14(3):349–375.
- SALEŃON, J. et PECKER, A. (1995b). Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. part ii: purely cohesive soil without tensile strength. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 14(3):377–396.
- SPACONE, E., FILIPPOU, F. et TAUCER, F. (1996a). Fiber beam-column model for nonlinear analysis of r/c frames. i: Formulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(7):711–725.
- SPACONE, E., FILIPPOU, F. et TAUCER, F. (1996b). Fiber beam-column model for nonlinear analysis of r/c frames. ii: Applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(7):727–742.
- TAMAGNINI, C., CHAMBON, R. et CAILLERIE, D. (2001). A second gradient elastoplastic cohesive-frictionnal model for geomaterials. *C.R.A.S-Série II b*, 329:735–739.
- TAYLOR, R. (1996). *FEAP: A finite element analysis program, version 5.01 manual*. University of California, Berkeley.
- TERRIEN, M. (1980). Émission acoustique et comportement mécanique post critique d'un béton sollicité en traction. *Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées*, 106:65–72.

VARDOULAKIS, I. et SULEM, J. (1995). *Bifurcation analysis in Geomechanics*. Blackie Academic and Professional.

