



**HAL**  
open science

# Contrôle des phénomènes d'interaction fluide-structure, application à la stabilité aéroélastique

Marwan Moubachir

► **To cite this version:**

Marwan Moubachir. Contrôle des phénomènes d'interaction fluide-structure, application à la stabilité aéroélastique. Optimisation et contrôle [math.OC]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002. Français. NNT: . tel-00350505

**HAL Id: tel-00350505**

**<https://theses.hal.science/tel-00350505>**

Submitted on 7 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

présentée à

**L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

Spécialité

**MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE**

par

**Marwan MOUBACHIR**

Titre

## **Contrôle des phénomènes d'interaction fluide-structure, application à la stabilité aéroélastique**

Soutenue publiquement le Vendredi 15 Novembre 2002

Jury

Président	Serge	PIPERNO
Rapporteurs	Michel Roland	DELFOUR GLOWINSKI
Examineurs	Michel Roger Jean-Paul	FRÉMOND OHAYON ZOLÉSIO
Directeur	Frédéric	BOURQUIN



## Remerciements

Je souhaiterais, en premier lieu, remercier Frédéric BOURQUIN de m'avoir accueilli au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, en Juillet 1998, après m'avoir orienté vers l'analyse mathématique des modèles de la Physique et de la Mécanique grâce au DEA d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie. Son esprit d'innovation, son ouverture scientifique, ses conseils éclairés, son souci de lier théorie et pratique, sa bienveillance à mon égard ont été des éléments fondamentaux dans l'élaboration de ce travail de recherche.

Je remercie très chaleureusement Jean-Paul ZOLÉSIO qui en décembre 2000 a accepté spontanément ma proposition de collaboration sur la thématique du « contrôle des ponts dans le vent ». Son enthousiasme, la profondeur de ses réflexions, sa tenacité et son soutien inconditionnel dans les moments clefs ont fait de cette collaboration une belle aventure humaine et une grande source de réjouissances.

Je tiens à remercier Serge PIPERNO pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance, mais aussi pour son soutien tout au long de mon travail de thèse en facilitant mes déplacements à Sophia-Antipolis, en m'apportant son expertise sur le code NSI3FS et les méthodes numériques en aéroélasticité et finalement pour sa bonne humeur et son amicale confiance.

Je suis très honoré du fait que Michel DELFOUR et Roland GLOWINSKI soient rapporteurs de cette thèse. Je leur exprime ma sincère gratitude pour leur disponibilité, leurs remarques, leurs encouragements et leur bienveillance.

Michel FRÉMOND et Roger OHAYON m'ont fait la gentillesse et l'honneur de participer à mon jury de soutenance, qu'ils en soient vivement remerciés.

La collaboration débutée en Janvier 2000 avec Miguel FERNÁNDEZ, doctorant à l'INRIA Rocquencourt entre 1998 et décembre 2001, a été pour moi le point de départ des principaux résultats établis dans cette thèse. Nos heures passées dans la petite salle de réunion du projet MACS à manipuler des expressions mathématiques complexes, nos débats animés sur le sens de la stabilité aéroélastique et notre véritable interaction scientifique ont été réellement une source d'inspiration et de motivation pour moi. Miguel m'a fait bénéficier durant cette période de son expertise, son enthousiasme quasi-légitime et de sa sincère amitié.

J'adresse aussi mes remerciements à Gilles FOURESTEY, doctorant au CERMICS entre 1998 et décembre 2002. Les nombreux séjours de recherche à Sophia-Antipolis débutés en décembre 2000 ont été l'occasion d'interagir avec Gilles sur des questions numériques pointues. Sa disponibilité, sa grande maîtrise de l'implémentation numérique et sa bonne humeur m'ont permis de m'engager dans l'application effective des idées théoriques développées dans ma thèse.

Je remercie Raja DZIRI pour sa gentillesse et son expertise lors de notre collaboration avec Jean-Paul ZOLÉSIO.

Je n'oublie pas toutes les personnes que j'ai pu côtoyer lors de mes années de recherche au LCPC, en commençant par le personnel et les doctorants du LMSGC qui ont rendu mes trois années de présence très agréables tant du point de vue scientifique que celui des relations humaines. L'accueil que m'a réservé le personnel du service M.I, de mon arrivée en septembre 2001 jusqu'à ma soutenance, m'a été d'une aide précieuse. Je tiens à remercier le personnel du projet MACS, CAIMAN, OPALE et du service de documentation à l'INRIA, pour leur gentillesse et leur disponibilité lors de mes nombreuses visites. Je n'oublie pas non plus les doctorants et les chercheurs rencontrés lors de conférences en France ou à l'étranger qui ont volontairement ou inconsciemment influencé mon travail.

Je réserve une mention très spéciale pour ma famille et mes amis qui par leur soutien et leur présence à mes côtés m'ont énormément apporté durant ces années de thèse et lors de la soutenance.

Je finirai en rappelant que tout ceci n'aurait aucun sens sans la présence à mes côtés de Valérie et de sa famille. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma plus profonde gratitude.

*« Le peu que je sache, je veux néanmoins le faire connaître afin qu'un autre, meilleur que je ne suis, découvre la vérité et que l'oeuvre qu'il poursuit sanctionne mon erreur. Je m'en réjouirai pour avoir été, malgré tout, cause que cette vérité se fasse jour. »*

*Albert Dürer.*



*A Valérie et la petite Olivia*





# Table des matières

---

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
---------------------	----------

---

---

1	Etat de l'art et tendances actuelles . . . . .	4
1.1	Aéroélasticité pour le génie civil . . . . .	4
1.2	Utilisation de la simulation numérique . . . . .	5
1.3	Tendances actuelles: vers la simulation complète . . . . .	7
2	Modélisation d'un problème fluide-structure . . . . .	9
2.1	Le fluide . . . . .	9
2.2	La structure . . . . .	9
2.3	Le couplage . . . . .	11
2.4	Analyse du problème couplé . . . . .	11
3	Phénomènes aéroélastiques et concepts classiques de stabilité . . . . .	12
3.1	Phénomènes aéroélastiques . . . . .	12
3.2	Exemple d'analyse de stabilité pour le flottement . . . . .	13
4	Vers une nouvelle démarche d'analyse de stabilité . . . . .	15
4.1	Problème spectral et stabilité linéaire . . . . .	17
4.2	Critère de stabilité conditionnelle et pessimisation . . . . .	18
4.3	Suivi de trajectoires instables et problèmes de contrôle associés	21
5	Démarche et résumé des travaux effectués . . . . .	22
5.1	Démarches transverse et verticale . . . . .	22
5.2	Une hiérarchie de modèles . . . . .	23
5.3	Plan de la thèse . . . . .	24

---

---

## I Analyse de stabilité de systèmes d'évolution

---

---

### 1

#### Critère de stabilité conditionnelle

1.1	Un exemple simple d'instabilité . . . . .	32
1.1.1	Résonance élastique . . . . .	32
1.1.2	Recherche d'instabilité par critère global . . . . .	33
1.1.3	Approximation numérique dans le cas unidimensionnel . . . . .	36
1.2	Système d'évolution abstrait . . . . .	39
1.3	Critère global de stabilité . . . . .	42
1.3.1	Maximisation de l'observation . . . . .	42
1.3.2	Minimisation conditionnelle . . . . .	44
1.4	Cas d'un système d'évolution linéaire . . . . .	45
1.5	Conclusion . . . . .	47

### 2

#### Suivi d'instabilités et contrôle sur les trajectoires

2.1	Cas général . . . . .	50
2.1.1	Critère de suivi exact et approché sur les trajectoires . . . . .	50
2.1.2	Critère intégral de suivi de trajectoires . . . . .	51
2.2	Cadre des opérateurs d'évolution linéaire . . . . .	52
2.2.1	Suivi approché de trajectoires . . . . .	52
2.2.2	Suivi exact de trajectoires . . . . .	56
2.2.3	Cas mal-posé du problème de suivi exact . . . . .	60
2.3	Algorithmes de suivi de trajectoire: Cas linéaire . . . . .	62
2.3.1	Régularisation du type Tykhonov . . . . .	62
2.3.2	Régularisation par relaxation . . . . .	64
2.4	Suivi de trajectoires pour un système parabolique linéaire . . . . .	67
2.4.1	Position du problème . . . . .	67
2.4.2	Cadre mathématique . . . . .	68
2.4.3	Illustration numérique . . . . .	75

---

2.5	Suivi de trajectoires pour l'équation de Burgers . . . . .	95
2.5.1	Position du problème . . . . .	95
2.5.2	Existence et conditions d'optimalité . . . . .	96
2.5.3	Approximation numérique du problème de contrôle . . . . .	104
2.5.4	Méthode d'obtention de l'adjoint discret . . . . .	107

<b>3</b>
----------

<b>Contrôle et suivi de trajectoires pour le système de Navier-Stokes</b>
---

3.1	Introduction . . . . .	117
3.2	Mathematical setting . . . . .	117
3.2.1	Continuous cost function gradient . . . . .	118
3.2.2	Gradient based optimization strategy . . . . .	119
3.3	The Lagrange-Galerkin Scheme for the Navier-Stokes equations . . . . .	122
3.3.1	Time discretisation . . . . .	122
3.3.2	Spatial approximation . . . . .	124
3.3.3	Spatial approximation of the characteristic curve . . . . .	126
3.3.4	Quadrature rules . . . . .	127
3.3.5	Extension to the case of a moving domain . . . . .	128
3.4	Discrete linearization and discrete cost function gradient . . . . .	130
3.4.1	Linearized discrete system . . . . .	131
3.4.2	Linearized adaptative backtracking . . . . .	133
3.4.3	Implementation using barycentric coordinates . . . . .	136
3.4.4	Discrete linearized system . . . . .	142
3.5	Implementation . . . . .	143
3.5.1	Nonlinear and linearized Navier-Stokes solvers . . . . .	144
3.5.2	Optimization routines . . . . .	144
3.5.3	Parallel direct mode strategy . . . . .	145
3.6	Discrete gradient computation . . . . .	146
3.6.1	Case of Poiseuille flow . . . . .	146
3.6.2	The driven cavity . . . . .	152
3.7	Drag reduction around a rotating cylinder . . . . .	163
3.7.1	Control problem setting . . . . .	163
3.7.2	Case of a single harmonic angular velocity . . . . .	164
3.7.3	Case of several harmonics . . . . .	168

3.8	Identification of far-field boundary conditions from fluid loads on bluff bodies . . . . .	172
3.8.1	Problem settings . . . . .	172
3.8.2	The rectangular cylinder . . . . .	173
3.8.3	Harmonic perturbation of the inflow velocity . . . . .	173
3.8.4	Synthetic load . . . . .	174
3.8.5	Arbitrary harmonic loads . . . . .	176
3.9	Identification of far-field boundary conditions from fluid loads on moving bluff bodies . . . . .	179
3.9.1	Problem settings . . . . .	179
3.9.2	Mesh movement algorithm . . . . .	179
3.9.3	Discrete gradient consistency . . . . .	181
3.9.4	Harmonic perturbation of the inflow velocity . . . . .	183
3.10	Conclusion . . . . .	186

---



---

## II Cas des systèmes en domaine mobile

---



---

<b>4</b>
----------

<b>Contrôle dynamique de forme des équations de Navier-Stokes: approche eulérienne</b>
--

4.1	Introduction . . . . .	195
4.2	Problem statement . . . . .	195
4.3	Elements of non-cylindrical shape and tangential calculus . . . . .	199
4.3.1	Non-cylindrical speed method . . . . .	199
4.3.2	Elements of tangential calculus . . . . .	203
4.4	State derivative strategy . . . . .	206
4.4.1	Weak formulation and solvability . . . . .	206
4.4.2	Weak implicit function theorem and the Piola material derivative	207
4.4.3	Shape derivative . . . . .	215

---

4.4.4	Extractor Identity . . . . .	217
4.4.5	Adjoint system and cost function shape derivative . . . . .	220
4.5	Min-Max and function space parametrization . . . . .	222
4.5.1	Saddle point formulation of the fluid state system . . . . .	222
4.5.2	Function space parametrization . . . . .	226
4.5.3	Differentiability of the saddle point problem . . . . .	228
4.6	Min-Max and function space embedding . . . . .	236
4.6.1	Saddle point formulation of the fluid state system . . . . .	236
4.6.2	Lagrange functional and non-cylindrical shape derivative . . . . .	238
4.7	Conclusion . . . . .	241

**5**

**Contrôle dynamique des équations de Navier-Stokes : approche lagrangienne**

5.1	Introduction . . . . .	245
5.2	Evolution sets . . . . .	245
5.2.1	Space-time tubes . . . . .	245
5.2.2	Parametrization . . . . .	246
5.3	Shape sensitivity analysis using identity perturbations . . . . .	248
5.3.1	Mathematical setting . . . . .	248
5.3.2	Elements of shape calculus . . . . .	249
5.3.3	Unconstraint non-cylindrical shape optimization . . . . .	253
5.3.4	Shape optimization under state constraints . . . . .	255
5.3.5	Relation between the eulerian and the lagrangian non-cylindrical shape derivative . . . . .	257
5.4	Questions related to Navier-Stokes equations in moving domain . . . . .	259
5.4.1	Mathematical justification of transpiration boundary conditions . . . . .	259
5.4.2	Optimal control of the Navier-Stokes system by moving the do- main . . . . .	261
5.4.3	Comparison with the eulerian derivative version . . . . .	263

---

---

### III Cas des systèmes couplés Euler-Lagrange

---

---

**6**

**Contrôle optimal de systèmes en interaction fluide-structure: cas du solide rigide**

6.1	Introduction . . . . .	271
6.2	Mathematical settings . . . . .	271
6.3	Well-posedness of the coupled system . . . . .	275
6.4	Inverse problem settings . . . . .	276
6.4.1	Analysis strategy . . . . .	276
6.4.2	Free divergence and non-homogeneous Dirichlet boundary condition constraints . . . . .	277
6.4.3	Solid reduced order and solid weak state operator . . . . .	278
6.4.4	Fluid state operator . . . . .	279
6.4.5	Coupled system operator . . . . .	280
6.4.6	Min-Max problem . . . . .	280
6.5	KKT Optimality Conditions . . . . .	281
6.5.1	Derivatives with respect to state variables . . . . .	282
6.5.2	Solid adjoint system . . . . .	282
6.6	Conclusion . . . . .	295

**7**

**Analyse de sensibilité pour un système couplé fluide-structure tridimensionnel**

7.1	Introduction . . . . .	298
7.2	Le problème mécanique . . . . .	298
7.2.1	Formulation ALE forte du système couplé . . . . .	301
7.3	Analyse de sensibilité . . . . .	301
7.4	Démonstrations du résultat principal . . . . .	303
7.4.1	Formulation faible . . . . .	303
7.4.2	Problème de référence transporté . . . . .	304

---

7.4.3	Méthode de linéarisation . . . . .	308
7.4.4	Calcul des dérivées de l'état . . . . .	312
7.5	Conclusion . . . . .	313
7.6	Annexe . . . . .	314
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>317</b>

---



**Bibliographie**

**323**

# Table des figures

1	Le pont de Tacoma en torsion . . . . .	5
2	Le pont de Normandie . . . . .	6
3	Le Viaduc de Millau et ses sept pylônes de 342 mètres de hauteur . . . . .	7
4	Le pont de Tatara au Japon . . . . .	8
5	Le projet de pont suspendu Stretto di Messina et le pont suspendu Akashi- kaikyo . . . . .	8
6	Obstacle non-profilé au sein d'un écoulement atmosphérique . . . . .	9
7	Solide rigide élastiquement supporté . . . . .	10
8	Analyse de stabilité semi-empirique . . . . .	15
9	Analyse globale de stabilité . . . . .	16
10	Couplage et sous-systèmes fluide-structure . . . . .	22
11	Sous-système fluide . . . . .	23
12	Sous-système solide . . . . .	23
1.1	Instabilité linéaire et Sollicitation minimale . . . . .	39
1.2	Comportement asymptotique dans $L^2(0, +\infty)$ . . . . .	40
1.3	Convergence locale vers la sollicitation résonante dans $L^2_{loc}(0, +\infty)$ . . . . .	40
2.1	Consistance du gradient discret - pas adjoint $dt_a = dt$ . . . . .	81
2.2	Consistance du gradient discret - $dt_a = dt/2$ $dt_a = dt/4$ . . . . .	81
2.3	Consistance du gradient discret - $dt_a = dt - nh_a = nh$ $nh_a = nh/2$ . . . . .	82
2.4	Gradient de la fonctionnelle en fonction du temps - $dt_a = dt$ . . . . .	82
2.5	Gradient de la fonctionnelle en fonction du temps - $dt_a = dt/2$ , $dt_a = dt/4$ . . . . .	83
2.6	Solution de l'équation de la chaleur et solution de l'équation adjointe . . . . .	83
2.7	Conditionnement du système . . . . .	85
2.8	Effet régularisant sur chapeau - contrôle Dirichlet / contrôle Neumann . . . . .	86
2.9	Effet régularisant sur marche - contrôle Dirichlet / contrôle Neumann - Fourier en $x = 1$ . . . . .	86
2.10	Identification cible atteignable par Gradient conjugué régularisé appliquée à l'équation normale . . . . .	87
2.11	Comportement du résidu selon le paramètre $\alpha$ pour une trajectoire attei- gnable - GCRN . . . . .	88
2.12	Comportement de la norme du contrôle selon le paramètre $\alpha$ - GCRN - cible atteignable . . . . .	88

2.13	Comportement de la norme du contrôle selon le résidu - GCRN - cible atteignable . . . . .	89
2.14	Comportement du résidu selon le paramètre $\delta$ pour une trajectoire atteignable - BFT . . . . .	89
2.15	Comportement du paramètre de régularisation $\alpha$ selon le paramètre $\delta$ pour une trajectoire atteignable - BFT . . . . .	90
2.16	Comportement des itérations de CGRD et de point fixe selon le paramètre $\delta$ pour une trajectoire atteignable - BFT . . . . .	90
2.17	Identification cible arbitraire par Gradient conjugué régularisé appliquée à l'équation normale . . . . .	91
2.18	Comportement du résidu selon le paramètre $\alpha$ pour une trajectoire arbitraire - GCRN . . . . .	92
2.19	Comportement de la norme du contrôle selon le paramètre $\alpha$ - GCRN - cible arbitraire . . . . .	92
2.20	Comportement de la norme du contrôle selon le résidu - GCRN - cible arbitraire . . . . .	93
2.21	Comportement du résidu selon le paramètre $\delta$ pour une trajectoire arbitraire - BFT . . . . .	93
2.22	Comportement du paramètre de régularisation $\alpha$ selon le paramètre $\delta$ pour une trajectoire arbitraire - BFT . . . . .	94
2.23	Comportement des itérations de CGRD et de point fixe selon le paramètre $\delta$ pour une trajectoire arbitraire - BFT . . . . .	94
2.24	Cible atteignable sinusoïdale . . . . .	112
2.25	Cible linéaire . . . . .	112
2.26	Cible chapeau . . . . .	113
2.27	Cible sinusoïdale . . . . .	113
2.28	Cible sinusoïdale . . . . .	114
2.29	Cible marche . . . . .	114
3.1	2D projection along a given vector . . . . .	134
3.2	Projection on the edge of a triangle . . . . .	135
3.3	3D projection . . . . .	135
3.4	Projection on the edge of a tetrahedron . . . . .	136
3.5	Optimization tool structure . . . . .	145
3.6	Parallel strategy for the gradient computation . . . . .	146
3.7	Poiseuille Flow domain . . . . .	148
3.8	First order convergence of the finite difference gradient for the Poiseuille Flow . . . . .	148
3.9	Optimization process for the Poiseuille flow. . . . .	150
3.10	Tracking cost function decrease for the Poiseuille flow. . . . .	150
3.11	First and second order subcycling backtrackings scheme gradient checking with the theoretical slope for the Poiseuille flow . . . . .	151
3.12	First order Lagrange-Galerkin scheme applied to the driven cavity flow - Gradient consistency checking with NSI3 . . . . .	153

---

3.13	First order and second order Lagrange-Galerkin scheme applied to the driven cavity flow - Gradient checking . . . . .	154
3.14	$l_2$ norm of the driven cavity at steady state . . . . .	155
3.15	$l_2$ norm of the linearized driven cavity at steady state . . . . .	155
3.16	Splitting parameter efficiency for the second order LG scheme with $\Delta t = 0.2158$	
3.17	Splitting parameter efficiency for the second order LG scheme with $\Delta t = 0.05159$	
3.18	Computational mesh around the cylinder . . . . .	165
3.19	3D contour plot of the cost function $j(\rho, S_e)$ . . . . .	166
3.20	2D contour plot of the cost function $j(\rho, S_e)$ . . . . .	167
3.21	Drag evolution for different control parameters . . . . .	167
3.22	Lift evolution for different control parameters . . . . .	168
3.23	Vortex shedding in the uncontrolled case . . . . .	168
3.24	Vortex shedding in the optimal controlled case . . . . .	168
3.25	Optimization parameters evolution . . . . .	169
3.26	Optimal Drag time evolution - 3 harmonics case . . . . .	170
3.27	Mean drag evolution- 3 harmonics case . . . . .	170
3.28	Cost function gradient decrease - 3 harmonics case . . . . .	171
3.29	Lift and drag for the R4 rectangular cylinder . . . . .	173
3.30	Pressure profile for the R4 rectangular cylinder . . . . .	174
3.31	Control parameters during optimization steps . . . . .	175
3.32	Drag history - initial guess and final control . . . . .	175
3.33	Gradient decrease during optimization steps . . . . .	176
3.34	Lift history - initial guess and final control . . . . .	176
3.35	Control parameters during optimization steps . . . . .	177
3.36	Cost function decrease during optimization steps . . . . .	178
3.37	Gradient decrease during optimization steps . . . . .	178
3.38	Mesh vertices position at $t = 0s$ (left) and $t = 16s$ (right) . . . . .	181
3.39	First and second order Lagrange-Galerkin scheme applied to the moving R4 profile - Gradient test . . . . .	183
3.40	Amplitude control parameter during the optimization steps . . . . .	184
3.41	Frequency control parameter during the optimization steps . . . . .	184
3.42	Cost function behaviour during the optimization steps . . . . .	185
3.43	Gradient of the cost function behaviour during the optimization steps . . . . .	185
6.1	Arbitrary Euler-Lagrange map . . . . .	272
7.1	Géométrie du problème . . . . .	299
7.2	Description des ensembles . . . . .	305
7.3	Graphe des applications . . . . .	308



# Introduction



L'amélioration des matériaux et des techniques de construction dans le génie civil fait que des ouvrages d'art de plus en plus légers et élancés sont aujourd'hui à l'étude. Cependant, de nombreux problèmes subsistent au niveau de la conception de ces superstructures. L'un des problèmes majeurs concerne la prise en compte et la prédiction des effets des sollicitations climatiques comme celles du vent ou de la pluie. En effet, pour ce type d'ouvrage, ces éléments conditionnent le dimensionnement statique et dynamique. Le concepteur d'ouvrage de génie civil a besoin d'outils d'analyse lui permettant de prédire le comportement d'une structure vis-à-vis des conditions de vent sur le site prévu pour la construction. Cette prédiction permet de garantir non seulement la sûreté de l'ouvrage vis-à-vis d'éventuelles instabilités, mais aussi de rendre le niveau de fatigue et d'endommagement de l'ouvrage, compatible avec les contraintes de durée de vie de la super-structure. L'élaboration d'outils d'analyse de stabilité aéroélastique a débuté dans les années 50 aux Etats-Unis avec les travaux sur la modélisation des effets du vent sur les ponts, de l'ingénieur Robert H. Scanlan (1914 – 2001). Dans ces premiers modèles simplifiés, inspirés des recherches aéronautiques sur le flottement des ailes d'avion, le fluide n'est pas modélisé dans son ensemble mais pris en compte par un équivalent dynamique qui s'exprime en fonction des déplacements de la structure.

Cette approche permet de simplifier la modélisation de la dynamique du système et de retenir un nombre limité de paramètres. L'identification de ces paramètres est réalisée classiquement par l'intermédiaire d'essais sur des maquettes en soufflerie en faisant l'hypothèse majeure que ces coefficients sont indépendants du nombre de Reynolds et de l'amplitude maximale des oscillations de la structure.

De façon simpliste, l'étude de stabilité consiste alors à étudier le signe de l'amortissement aérodynamique ajouté selon la valeur de paramètres caractéristiques de l'écoulement, comme le nombre de Reynolds, et de paramètres caractéristiques de la dynamique de la structure, comme ses premières fréquences propres. La quantité exploitable pour le concepteur est alors une vitesse critique de vent moyen au delà de laquelle la sûreté de l'ouvrage n'est plus garantie.

Le recours aux essais expérimentaux en soufflerie climatique<sup>1</sup> constitue l'un des points faibles de cette approche du fait du coût élevé de ces essais et de leurs fortes contraintes de délais.

Ainsi, le maître d'ouvrage est conduit à réduire le nombre des essais expérimentaux et à les intégrer dans un processus de validation des solutions de conception. Un progrès dans ce domaine serait que ces essais intègrent les phases d'optimisation des solutions possibles, ce qui est impossible du fait de leurs coûts.

Cependant depuis une dizaine d'années, un certain nombre d'outils numériques ont été développés dans le but de simuler dans sa totalité le couplage entre le fluide et la structure. Il est alors possible de s'intéresser à la fois au comportement de la structure et à celui du fluide. Ces nouveaux outils permettent de considérer le problème de l'analyse de la stabilité d'une structure dans un écoulement fluide sous un angle nouveau.<sup>2</sup>

Mes travaux de recherche engagés en Octobre 1998 au sein du Laboratoire Central des

---

1. Centre Scientifique des Techniques du Bâtiment -CSTB, Office Nationale d'Etudes et Recherche Aérospatiales - ONERA, Institut Aéro-Technique - IAT ...

2. On utilise alors les équations de Navier-Stokes incompressibles pour le fluide et les équations de l'élasticité linéaire pour la structure.



Ponts et Chaussées<sup>3</sup> sous la direction de Frédéric Bourquin s'inscrivent dans ce mouvement d'intégration de la simulation numérique des phénomènes couplés fluide-structure<sup>4</sup> dans le processus de conception industriel et plus particulièrement, le dimensionnement des ponts de grande envergure.

La motivation de mon travail est l'élaboration d'un outil d'analyse de la stabilité d'une structure rigide, bidimensionnelle, élastiquement supportée, au sein d'un écoulement fluide incompressible utilisant la simulation numérique. L'originalité de ce travail réside dans le fait que le problème de stabilité a été posé sur le modèle fluide-structure complet et qu'il s'agit d'un concept de stabilité non-infinésimale.

Dans cette partie introductive, nous allons présenter la problématique de l'analyse de stabilité aéroélastique en s'intéressant aux derniers progrès réalisés dans ce domaine ainsi qu'aux différentes démarches envisagées pour effectuer un saut technologique. Puis, nous introduirons l'approche qui sera développée dans la suite du document. Nous nous efforcerons notamment de faire le lien entre les résultats théoriques obtenus et leurs éventuelles applications aux problèmes de la stabilité aéroélastique. Nous élargirons la portée de notre travail en montrant comment les problèmes élémentaires intervenant dans l'analyse de stabilité aéroélastique peuvent être utilisés pour des problèmes de contrôle et d'optimisation des systèmes en interaction fluide-structure.

# 1 Etat de l'art et tendances actuelles

## 1.1 Aéroélasticité pour le génie civil

Jusqu'au début des années 1940, les sollicitations climatiques comme celles du vent ont toujours été prises en compte dans la conception des ponts suspendus ou à haubans comme un équivalent statique induisant une certaine flèche et un certain niveau de contrainte dans le tablier. Ainsi, le maître d'ouvrage pouvait considérer un niveau maximal de vent pour le site de construction et concevoir son ouvrage en conséquence. Les effets du vent ne participaient au dimensionnement du tablier qu'à travers des événements exceptionnels comme les tempêtes ou les ouragans, où les vitesses de vent atteignaient des niveaux produisant une sollicitation importante<sup>5</sup>.

Cette méthode a été totalement remise en question à partir de l'effondrement spectaculaire (Fig. 1) du Pont de Tacoma<sup>6</sup>, le 7 novembre 1940. Lors de cet accident, des phénomènes oscillatoires de grande amplitude se développèrent pour des vitesses de vent bien inférieures aux vitesses limites de dimensionnement. Même si l'origine exacte de cette catastrophe est encore l'objet de controverses [13], il n'en demeure pas moins que cet événement motiva les premières recherches en aérodynamique pour le génie civil.

C'est donc à cette époque que le vent fut considéré comme une sollicitation à part entière dont on devait caractériser la contribution dynamique. Les ingénieurs ont compris

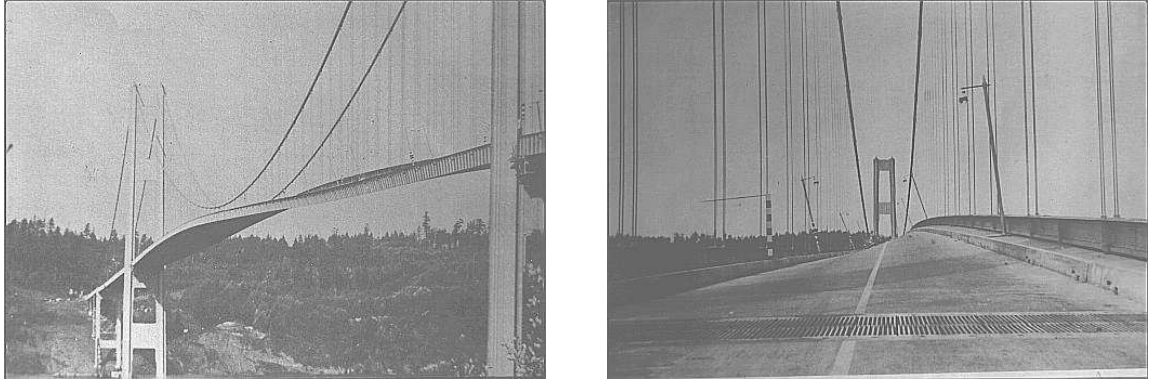
---

3. LCPC

4. Computational Fluid-Structure Dynamics - CFS - en anglais.

5. Etat Limite Ultime.

6. Tacoma Narrow Bridge, aux Etats Unis.

FIG. 1 – *Le pont de Tacoma en torsion*

à la suite de la chute de « Galloping Gertie<sup>7</sup> », que lorsqu'une structure vibre au sein d'un écoulement fluide, des mécanismes subtiles d'adaptation de l'écoulement vis à vis des mouvements de l'obstacle, génèrent des efforts<sup>8</sup> non négligeables.

Ces efforts aéroélastiques participent alors à la dynamique du système couplé et peuvent ainsi modifier les caractéristiques d'amortissement, de raideur et de masse de la structure. Il s'en suit un comportement vibratoire très sensible aux conditions d'écoulement du fluide ambiant.

Historiquement, les ingénieurs du génie civil se sont inspirés de la théorie de l'aéroélasticité des corps profilés rencontrés en aéronautique [151], pour définir des modèles simplifiés caractérisant la dynamique de corps non-profilés intervenant dans la conception des ouvrages d'art [40], [14].

Ces modèles d'efforts aéroélastiques font apparaître des coefficients instationnaires, qu'il est indispensable d'identifier à partir d'essais expérimentaux en soufflerie sur maquettes rigides. A l'heure actuelle, ce sont ces mêmes modèles qui alimentent les règles de dimensionnement des ouvrages d'art de grande portée, en France et à l'étranger<sup>9</sup>. Pour les projets exceptionnels, la démarche de dimensionnement doit être complétée par des essais coûteux sur des modèles aéroélastiques complets nécessitant le respect des paramètres de similitudes<sup>10</sup>(Pont de Normandie, Stade de France . . .)

## 1.2 Utilisation de la simulation numérique

Les progrès réalisés ces vingt dernières années dans le domaine de la simulation numérique des écoulements fluides<sup>11</sup> ont permis la conception de projets industriels où des solutions inadéquates ont pu être éliminées très tôt dans le processus de conception. Ceci

7. C'est le nom qu'on donna au pont de Tacoma, à cause des mouvements oscillatoires de grande amplitude qui se développèrent le long du tablier. Ce phénomène porte le nom de galop, en anglais, galloping.

8. Chargements aéroélastiques.

9. Eurocode 1.

10. Comme les nombres de Reynolds, Froude, Stokes...

11. Computational Fluid Dynamics (CFD), en anglais.



FIG. 2 – *Le pont de Normandie*

est particulièrement marquant dans le domaine de l'aéronautique, où les logiciels de CAO et de CFD constituent souvent un seul et même outil.

Dans le domaine du génie civil, l'utilisation de logiciels de calcul pour la mécanique des fluides est plus récente. La première application de cet outil fut la détermination des coefficients aérodynamiques stationnaires sur profil fixe<sup>12</sup>[142].

Cependant, les modèles de type Scanlan s'appuient sur une modélisation des efforts aéroélastiques lorsque le profil est en mouvement. Afin de conduire une étude de stabilité<sup>13</sup>, il est important d'identifier les paramètres<sup>14</sup> mis en jeu dans le modèle standard de Scanlan [40].

L'émergence de la simulation des phénomènes couplés fluide-structure permet depuis quelques années d'identifier numériquement les dérivées de flottement [99], [149], [4]. Ces méthodes constituent un outil efficace dans le prédimensionnement des tabliers de ponts, lors d'avant-projets de construction<sup>15</sup>.

Cependant, la CFSD n'est pas encore une discipline communément utilisée dans les bureaux d'études de génie civil. Cet outil est réservé à quelques laboratoires de recherche et grands bureaux d'étude<sup>16</sup>.

Ainsi la question du rôle que jouera la simulation numérique dans la conception des super-

---

12. Pour des nombres de Reynolds peu élevés, les simulations sont conduites en écoulement laminaire, sans modèles de turbulence. Pour des nombres de Reynolds réalistes, de l'ordre de  $10^5$ , l'utilisation de modèles de turbulence simples comme les modèles K- $\epsilon$ , ASM est envisageable. De plus, la simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation - LES) a démontré sa capacité à prédire de façon quantitative, les coefficients aérodynamiques usuels.

13. Au sens des notions utilisées aujourd'hui dans la communauté de l'ingénierie aéroélastique pour le génie civil (Wind Engineering).

14. Flutter Derivatives, en anglais.

15. Nous pouvons citer ici, le rôle de coordination joué par le LCPC lors de l'avant projet du viaduc de Millau sur l'A75 pour l'Arrondissement Interdépartemental des Ouvrages d'Art. Un certain nombre d'essais numériques ont été conduits par l'ONERA et EDF, parallèlement aux essais expérimentaux, afin d'éliminer certaines géométries de tabliers instables.

16. CSTB, COWI, IAT ...

structures de Demain demeure d'actualité.

### 1.3 Tendances actuelles : vers la simulation complète

Depuis quelques années, les besoins d'espace et la nécessité de déplacements rapides ont poussé les aménageurs du territoire à construire des ponts de plus en plus élancés afin de traverser de plus longues distances. Des contraintes économiques<sup>17</sup>, environnementales<sup>18</sup> et techniques<sup>19</sup> obligent les concepteurs à utiliser des tabliers de ponts de plus en plus légers, à utiliser moins de câbles et de pylônes. L'exemple récent du viaduc de Millau qui sera mis en service d'ici fin 2004 illustre les fortes interactions qui existent entre ces multiples contraintes.

Ainsi avec l'augmentation de leur portée [153] et de leur flexibilité [118], les ponts sont et

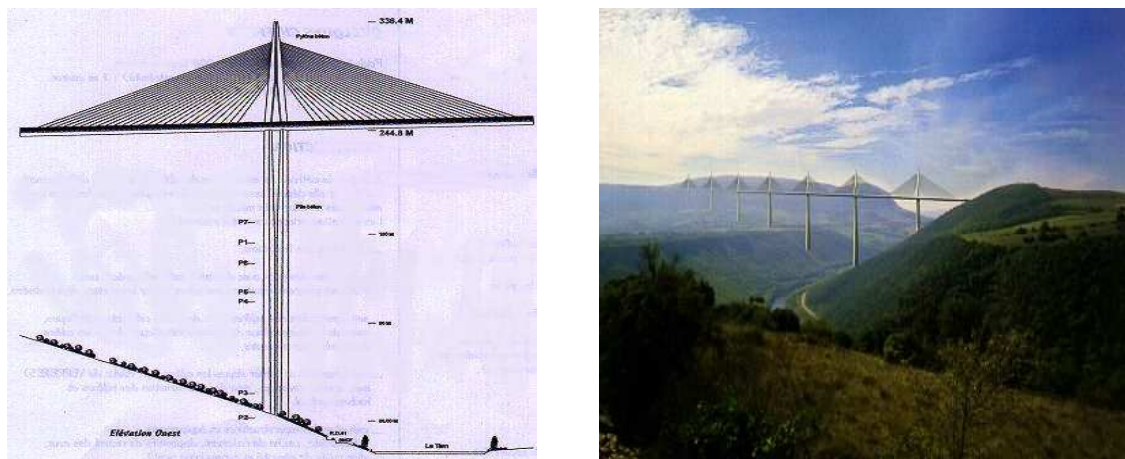


FIG. 3 – *Le Viaduc de Millau et ses sept pylônes de 342 mètres de hauteur*

seront de plus en plus sensibles aux sollicitations aéroélastiques<sup>20</sup>. Les portées actuelles pour les ponts à haubans se situent autour de 1000 mètres : Pont de Normandie avec 856 mètres de travée centrale et le pont de Tatara au Japon d'une portée de 890 mètres.

Des ponts de plus grande envergure<sup>21</sup>, pourront-ils facilement bénéficier de tests en soufflerie utilisant des maquettes aéroélastiques complètes respectant les contraintes de similitudes ? Etant donné, que la fréquence de torsion d'un tablier de pont diminue avec l'augmentation de la portée, un certain nombre d'instabilités aéroélastiques devraient se produire dans la plage des vitesses de vent utilisées pour le dimensionnement de la

17. Economie sur les matériaux.

18. La multiplication de pylônes peut défigurer un paysage côtier ou fluvial.

19. Traverser des vallées profondes, des cours d'eau ou des bras de mer . . .

20. Le type d'instabilités en jeu pour les super-structures est sujet à controverses. La théorie selon laquelle les tabliers profilés ne sont pas sensibles aux instabilités aéroélastiques ni aux échappements tourbillonnaires, mais plutôt à la réponse au vent turbulent s'oppose à celle qui suggère que ces phénomènes sont liés pour les structures de grande envergure

21. Le projet de pont suspendu Stretto di Messina avec une travée centrale de 3300 mètres, le pont suspendu Akashi-kaikyo de 3910 mètres de longueur muni d'une travée centrale de 1990 mètres



FIG. 4 – *Le pont de Tataro au Japon*

structure [118].

Enfin, la réponse au vent turbulent devrait augmenter avec la croissance des portées des ponts à haubans [75]. Cette réponse a lieu pour des vitesses de vent compatibles avec les niveaux de service de l'ouvrage. De ce fait, la fatigue des futures super-structures devrait augmenter<sup>22</sup> et réduire leur durée de vie.

L'ensemble de ces éléments, nous conduit à considérer la simulation numérique, comme un complément indispensable aux essais en soufflerie. Ce sentiment est partagé par un grand nombre d'organismes comme le SETRA<sup>23</sup> et d'entreprises du génie civil [118].



FIG. 5 – *Le projet de pont suspendu Stretto di Messina et le pont suspendu Akashi-kaikyo*

---

22. La destruction du Pont de Point Pleasant en 1967 aux Etats-Unis qui a causé la mort de 46 personnes, a été diagnostiquée comme étant causée par une fatigue des structures métalliques en relation avec les sollicitations conjuguées du vent et du trafic routier.

23. Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes - Ministère de l'Equipement

## 2 Modélisation d'un problème fluide-structure

Nous allons décrire dans cette partie, ce que nous entendons par système couplé fluide-structure. Cette étape est primordiale car elle détermine la nature des équations entrant dans l'analyse de stabilité aéroélastique.

### 2.1 Le fluide

Nous considérons que les écoulements atmosphériques peuvent être décrits par l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien dans un domaine borné  $\Omega$ . Cet écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes instationnaires munies de conditions aux limites de type Dirichlet sur la frontière amont  $\Gamma_{am}$  et de type sortie libre sur la frontière aval  $\Gamma_{av}$ . Ainsi la vitesse  $u$  et la pression  $p$  du fluide sont régies par le système suivant,

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega^f(t) \\ \operatorname{div} u = 0, & \Omega^f(t) \\ u = u_\infty, & \Gamma_{am} \\ u \cdot n = 0, & \Gamma_{lat} \\ \sigma(u, p) \cdot n = 0, & \Gamma_{av} \end{cases} \quad (1)$$

De nombreux travaux sont dédiés à l'étude de cette équation tant d'un point théorique que pratique. Cependant il ne s'agit pas d'un problème fermé et de nombreuses questions comme celle de l'existence d'une solution unique en dimension 3 restent sans réponses.

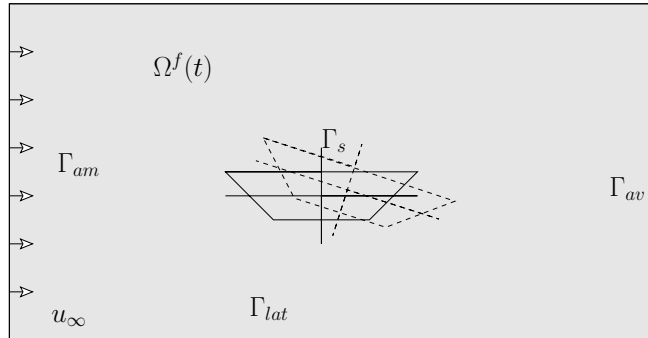


FIG. 6 – *Obstacle non-profilé au sein d'un écoulement atmosphérique*

### 2.2 La structure

Dans le contexte du génie civil, les structures sont souvent décrites comme des assemblages de plaques ou de coques. Une analyse dynamique de ces éléments permet d'exhiber une base modale, que nous tronquons pour décrire de façon simplifiée la dynamique du système. Cette simplification peut aller jusqu'à considérer la structure comme rigide et élastiquement supportée. Nous travaillons alors avec une section de tablier bidimensionnelle.

Le mouvement est donc défini à partir de trois degrés de liberté : deux translations  $s \in \mathbb{R}^2$  et une rotation  $\theta$  autour du centre de gravité, plus précisément,

$$x^s(x_0, t) = s(t) + Q(\theta(t))x_0, \quad \forall x_0 \in \Omega_0^s, \quad (2)$$

avec  $Q(\theta)$  la matrice de rotation

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Remarque 0.1** *Sans perte de généralité, on a supposé ici que l'origine du système de coordonnées est placé au centre de gravité de la structure au repos.*

On supposera que le corps rigide est supporté élastiquement par un système de ressorts. Ainsi, les équations régissant l'évolution de  $s$  et  $\theta$  sont données par :

$$M \begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} s \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s \\ f_\theta \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Ici,  $M$  et  $K$  représentent les opérateurs d'inertie et de rigidité du système,  $f_s \in \mathbb{R}^2$  la

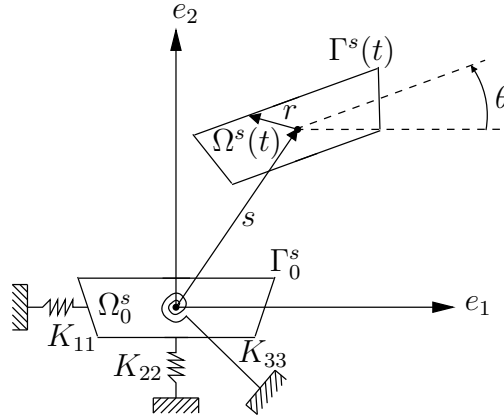


FIG. 7 – *Solide rigide élastiquement supporté*

résultante des forces appliquées sur le corps rigide et  $f_\theta$  le moment associé, autour du centre de gravité du corps. Plus précisément (voir [133]), on a

$$f_s = \int_{\Gamma^s(t)} f_{\Gamma^s} d\Gamma, \quad f_\theta = Q_0 : \int_{\Gamma^s(t)} f_{\Gamma^s} \otimes r d\Gamma,$$

et où  $f_{\Gamma^s} \in \mathbb{R}^2$  désigne la densité linéique de force appliqué sur la frontière du corps,  $r$  le vecteur de position placé au centre de gravité, et  $Q_0$  dénote la matrice de rotation

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 0.2** *Parfois on rajoute à Eq. 3 un terme d'amortissement généralisé,  $C\dot{s}$  ou  $C \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ , pour tenir compte de la dissipation d'énergie observée expérimentalement. En général, cet amortissement est faible. Dans la suite, nous le négligerons systématiquement.*

### 2.3 Le couplage

Si l'on réunit les équations du fluide et celles de la structure, on obtient un problème couplé en géométrie variable pour la variable globale  $(u, p, x^s)$ . La géométrie est variable car l'interface fluide-structure évolue dans le temps. Afin de compléter le système couplé, on adjoint des conditions de compatibilité cinématique au niveau de l'IFS

$$u(x, t) = \dot{x}^s, x \in \Gamma^s(t) \quad (4)$$

La continuité cinétique des efforts a déjà été incluse sous forme intégrale dans l'équation de la dynamique Eq. 3.

En résumé, le système couplé fluide-structure est régi par le problème suivant,

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = \mathbf{f}, & \Omega^f(t) \\ \operatorname{div} u = 0, & \Omega^f(t) \\ u = u_\infty, & \Gamma_{am} \\ u \cdot n = 0, & \Gamma_{lat} \\ \sigma(u, p) \cdot n = 0, & \Gamma_{av} \\ u = \dot{x}^s, & \Gamma^s(t) \end{cases} \quad (5)$$

$$M \begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} s \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma^s(t)} \sigma(u, p) \cdot n \, d\Gamma \\ Q_0 : \int_{\Gamma^s(t)} \sigma(u, p) \cdot n \otimes r \, d\Gamma \end{pmatrix}. \quad (6)$$

### 2.4 Analyse du problème couplé

De nombreux travaux sur les méthodes numériques dédiées à la simulation d'interactions fluide-structure ont été réalisés depuis une vingtaine d'années. La plus grande difficulté rencontrée par les ingénieurs était la résolution de système d'EDP en géométrie déformable. Une grande avancée dans ce domaine fut l'élaboration de méthodes de maillage dynamique et l'écriture de nouvelles formulations (comme la formulation ALE) permettant l'utilisation de méthodes d'approximation classiques de type éléments ou volumes finis [91], [127], [130]. On pourra consulter [134], [136] pour un rappel exhaustif de ces méthodes.

De même un effort particulier a été mené sur l'élaboration de schémas de couplage ayant de bonnes propriétés numériques afin de coupler le fluide et la structure et de résoudre le problème couplé de façon itérative [76], [134], [102]. L'intérêt de ces travaux est de permettre le couplage de codes fluides et de codes structures qui n'étaient pas au départ conçus pour traiter des problèmes couplés.

D'un point de vue théorique, les avancées dans ce domaine sont plus récentes, on pourra consulter [73], [48], [39], [30]. Ces résultats concernent le couplage d'un fluide et d'une ou de plusieurs structures rigides en dimension 2 ou 3 d'espace.



## 3 Phénomènes aéroélastiques et concepts classiques de stabilité

L'objet de cette partie est de présenter rapidement les différents phénomènes aéroélastiques pouvant se développer lorsqu'une structure non-profilé oscille librement au sein d'un écoulement fluide.

### 3.1 Phénomènes aéroélastiques

L'aéroélasticité est la discipline qui concerne l'analyse des phénomènes mettant en jeu l'interaction significative des forces aérodynamiques créées par un fluide en écoulement et les mouvements d'une structure au sein de cet écoulement. Une classification de ces efforts aéroélastiques a été effectuée depuis les années 50. Nous regroupons ici les principales :

- Excitation par échappements tourbillonnaires :

A proximité des zones de décollement autour d'un obstacle non-profilé, des efforts de frottement importants se développent pour créer des tourbillons appelés tourbillons de Bernard-Karman. Ces tourbillons, pour certaines valeurs du nombre de Reynolds, se décrochent périodiquement à l'aval du profil du tablier. La fréquence de décrochage  $f_d$  de ces tourbillons est proportionnelle à la vitesse du vent. De plus l'intensité de cet échappement tourbillonnaire dépend de plusieurs paramètres dont le plus important est le nombre de Strouhal<sup>24</sup>. Pour une vitesse critique  $V_{cr} = \frac{f_0 \cdot B}{S_t}$  où  $f_0$  est la fréquence du mode propre fondamental de la structure, il y a accrochage de la fréquence des tourbillons sur celle de la structure. L'intensité de l'échappement croît de façon nonlinéaire avec l'amplitude du mouvement vers un cycle limite. On peut parler dans ce cas de résonance entre le fluide et la structure.

Ce phénomène provoque d'importants efforts sur la structure qui accélèrent la fatigue des matériaux et plus spécialement des câbles pour les ponts à haubans. Il est aussi source d'un certain inconfort pour les usagers.

- Galop :

L'incidence apparente variable du vent, induite par le mouvement vibratoire du tablier, peut engendrer des forces de portance ou des mouvements de tangages qui agissent dans le sens des oscillations du tablier. En fait, les perturbations créées par les mouvements du tablier se propagent dans les régions décollées de l'écoulement créant ainsi des noyaux de pression qui se déplacent avec le vent sur la largeur de la section. Le rapport entre la fréquence d'oscillation et la vitesse de déplacement de ces noyaux peut être tel que les pressions viennent agir dans le même sens que le mouvement vibratoire, ce qui conduit à une amplification des oscillations pouvant provoquer la ruine de l'ouvrage.

---

24. Le nombre de Strouhal

$$S_t = \frac{n_v D}{u_\infty} \quad (7)$$

est un nombre sans dimension défini pour un profil donné d'épaisseur  $D$  et de longueur  $B$  placé dans un écoulement fluide de vitesse moyenne  $u_\infty$ , en fonction de la fréquence  $n_v$  du cycle d'échappements tourbillonnaires.

- Torsion divergente :

L'écoulement fluide crée sur l'obstacle un moment de torsion qui croît avec la vitesse du vent incident. L'augmentation de l'angle d'attaque du fluide résultant s'accompagne alors de celui du moment de torsion. Il existe une vitesse critique pour laquelle la structure ne peut plus compenser les moments de torsion induits par le fluide incident, une condition instable se crée alors, conduisant à un mouvement de torsion croissant jusqu'à la ruine de la structure. Dans la plupart des cas en génie civil, le phénomène de torsion instable a lieu pour des vitesses de vent bien supérieures à celles considérées pour le dimensionnement des ouvrages.

- Flottement :

Il résulte d'un couplage aéroélastique entre plusieurs modes de vibration de la structure (par exemple torsion et flexion). Pour que ce couplage ait lieu, il faut que les fréquences propres de l'ouvrage soient proches. Dans ces conditions, il est possible que les efforts aéroélastiques arrivent à faire coïncider ces fréquences et que l'amortissement de l'un de ces modes devienne négatif. On peut voir le flottement comme un phénomène d'oscillations auto-entretenues du tablier de pont qui tire son énergie du vent. Ces oscillations peuvent être de plusieurs types : torsion, flexion, ou un couplage flexion-torsion.

- Ballotement :

Les phénomènes décrits précédemment ne prennent pas en compte le caractère instationnaire de la vitesse du fluide en amont de l'obstacle. Dans la plupart des modèles semi-empiriques employés en génie civil, l'hypothèse de linéarité des efforts aérodynamiques est faite. En vertu de ce principe, les efforts aérodynamiques sont considérés comme une superposition des forces auto-entretenues générant les phénomènes aéroélastiques décrits plus haut et des efforts de ballotement créés par le fluide turbulent incident. Des modèles quasi-statiques d'efforts de ballotement ont été élaborés et font intervenir les composantes instationnaires du vent incident modélisé par des séries harmoniques. Ces efforts harmoniques génèrent ainsi un mouvement harmonique de la structure qui à son tour crée des efforts aéroélastiques auto-entretenus. Il a été montré expérimentalement que les instabilités aéroélastiques générées par les efforts auto-entretenus sont réduites par la présence d'un vent incident turbulent dans le cas de tabliers de pont [144].

Ainsi la modélisation actuelle des phénomènes aéroélastiques est fondée sur l'hypothèse de linéarité des efforts fluides vis-à-vis des mouvements de la structure et sur le principe de superposition des efforts auto-entretenus et des efforts liés à la turbulence du vent incident. Afin d'illustrer le type d'analyse de stabilité qui résulte de cette modélisation, nous présentons dans le prochain paragraphe, l'analyse qui est conduite dans le cas du flottement.

### 3.2 Exemple d'analyse de stabilité pour le flottement

Les premières études du flottement d'une structure en mouvement dans un écoulement fluide ont été réalisées dans les années 1930 dans le domaine de l'aéronautique par Wagner puis Theodorsen. Dans les années 1940, Küssner et Sears étudièrent les effets de

la turbulence dans le cadre de la modélisation de Theodorsen. Dans le cas des avions, le phénomène de flottement peut être contrôlé en utilisant une structure profilée. Pour les tabliers de ponts, qui présentent une géométrie de section non profilée, la théorie des ailes d'avion ne s'applique pas. Cependant à l'initiative de Bleich(1948) puis de Scanlan (1971), des modèles dérivés de cette théorie furent élaborés.

Nous nous restreignons au cas d'un mouvement de la structure verticale  $s = d e_2$ ,

$$\begin{cases} m \ddot{d} + k d = - \left( \int_{\Gamma^s(t)} \sigma(u,p) \cdot n \right) \cdot e_2 \\ [d, \dot{d}] = [d_0, d_1] \end{cases} \quad (8)$$

Nous posons  $F_f = - \left( \int_{\Gamma^s(t)} \sigma(u,p) \cdot n \right) \cdot e_2$ .

Dans le cadre de mouvements de faible amplitude autour d'une position d'équilibre pour laquelle l'angle d'incidence du vent moyen sur la structure reste faible et pour une zone de fréquence réduite<sup>25</sup> telle que le mouvement de la structure n'entraîne pas de résonance fluide ( $F_R < \frac{S_t B}{D}$ ), le modèle de Scanlan consiste à considérer que les efforts fluides sont une fonction linéaire des déplacements de la structure,

$$F_f = 2 \left[ \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 B \left[ \omega_R H_1^*(\omega_R) \frac{\dot{d}}{u_\infty} + \omega_R^2 H_4^*(\omega_R) \frac{d}{B} \right] \right] \quad (10)$$

où  $H_1^*$  et  $H_4^*$  sont appelés les dérivées de flottement et peuvent être obtenues de façon expérimentale ou numérique et sont fonctions de la fréquence réduite.

**Remarque 0.3** Dans notre modèle, la pulsation de la structure est donnée par

$$\omega_s = \left( \frac{k}{m} \right)^{1/2}$$

On constate expérimentalement que le coefficient  $H_1^*(\omega_R)$  peut changer de signe pour certaines valeurs de  $\omega_R$ . Ceci a pour effet de créer un amortissement négatif et conduit à une croissance des amplitudes d'oscillation du tablier de pont. Un critère simple de stabilité s'écrit alors

$$H_1^*(\omega_R) < 0 \quad (11)$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires à la justification du modèle précédent,

- Linéarité du chargement fluide vis-à-vis des mouvements de la structure.

---

<sup>25</sup>. La fréquence réduite :

$$F_R = \frac{n_s B}{u_\infty} \quad (9)$$

qui est un nombre sans dimension défini comme le rapport entre le temps de passage d'une particule fluide le long de la structure et la période de vibration  $T_s = \frac{1}{n_s}$  de la structure. On lui associe une vitesse réduite  $\omega_R = 2\pi F_R = \frac{\omega_s B}{u_\infty}$  où  $\omega_s$  désigne la pulsation de la structure.

- Indépendance des coefficients aéroélastiques vis-à-vis du nombre de Reynolds et de l'amplitude des oscillations de la structure.
- Stationnarité de l'écoulement moyen  $u_\infty$ .

Même si les coefficients aéroélastiques peuvent être identifiés à l'aide de la simulation numérique, l'analyse de stabilité qui en découle ne bénéficie pas de l'énorme potentiel numérique disponible. Le schéma présenté en Fig. 8 illustre la philosophie globale des méthodes actuelles. L'objet de ce document est de présenter une autre voie qui cumulerait l'avantage de s'appuyer sur la simulation numérique et de s'affranchir des hypothèses de travail contraignantes intervenant dans les méthodes classiques.

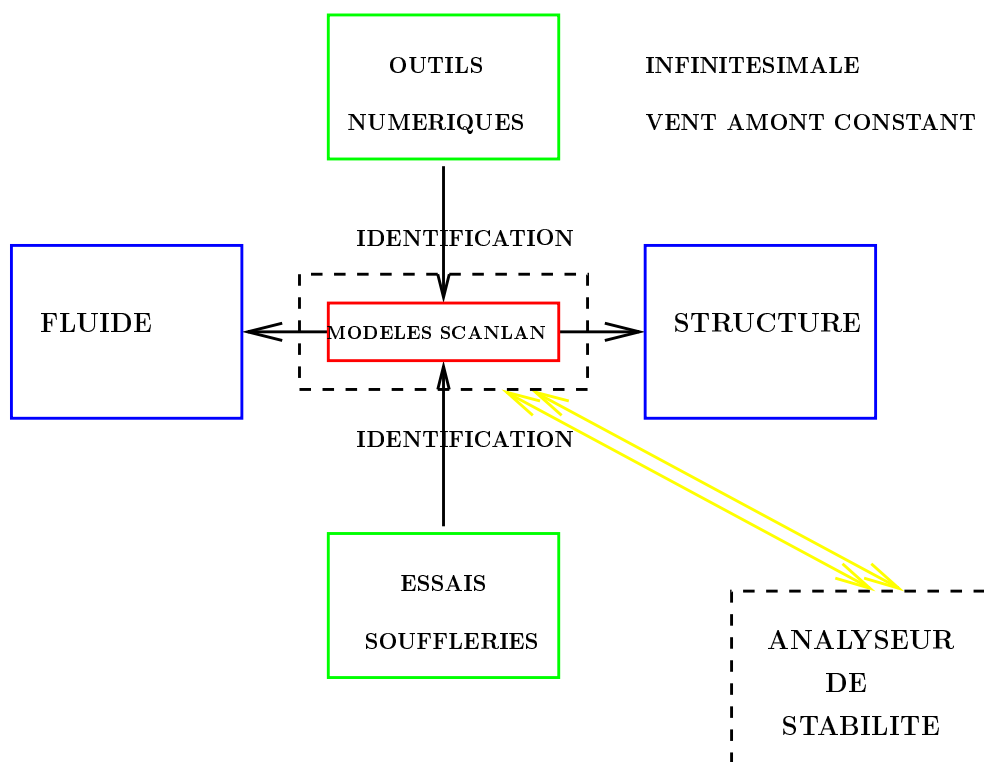


FIG. 8 – Analyse de stabilité semi-empirique

## 4 Vers une nouvelle démarche d'analyse de stabilité

Comme nous l'avons déjà mentionné, bientôt la simulation numérique intégrera de plus en plus les phases de conception des ouvrages d'art du génie civil. Cependant, il semble qu'à l'heure actuelle, l'outil de simulation vient appuyer les essais expérimentaux de façon passive, au sens où l'on essaie de reproduire numériquement ce qui se produit dans la soufflerie. La simulation numérique peut apporter une plus-value beaucoup plus importante, notamment pour l'analyse de stabilité d'une structure au sein d'un écoulement fluide.

En effet, s'il est désormais possible de simuler, de façon précise, une section de tablier

en mouvement au sein d'un écoulement incompressible, les chercheurs et les ingénieurs continuent de conduire une analyse de stabilité utilisant un modèle semi-empirique issu de cette simulation complète. Il serait intéressant, étant donné les outils de simulation à notre disposition, de traiter le problème de la stabilité du système complet fluide-structure sans passer par un modèle semi-empirique des chargements fluides. Le schéma présenté en Fig. 9 permet d'illustrer cette globalisation de l'analyse. Cependant même si d'un point de vue conceptuel, une telle démarche semble naturelle, la définition de critères de stabilité pour le système complet n'en demeure pas moins difficile.

Dans cette partie nous introduisons trois méthodes possibles pour l'analyse de stabilité

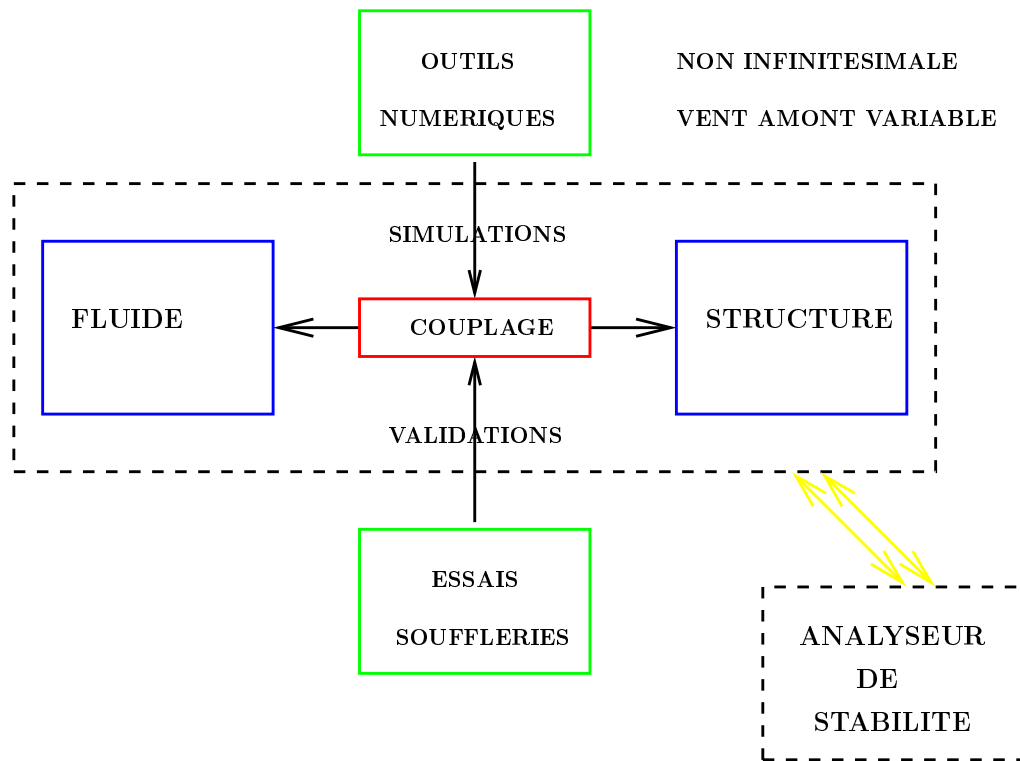


FIG. 9 – Analyse globale de stabilité

du système fluide-structure complet :

- Une approche fondée sur la définition d'un problème aux valeurs propres faisant intervenir le linéarisé par rapport à une trajectoire stationnaire du modèle complet [104]. Cette approche est directement liée au concept de stabilité linéaire au sens de Lyapounov. Cette méthode a été étudiée et mise en oeuvre par Miguel Fernández au sein du projet MACS à l'INRIA [51]. Nous en présentons rapidement les différentes caractéristiques et limites. Cette méthode ne sera pas celle envisagée dans cette thèse.
- Une approche globale fondée sur le respect d'un critère de seuil sur une quantité caractéristique de la structure comme par exemple, son énergie mécanique. Il s'agit alors de rechercher les vitesses de vent incident de norme minimale qui produisent une réponse de la structure ne satisfaisant pas ce seuil de stabilité.

- Une approche plus arbitraire qui consiste à rechercher les vitesses de vent en amont susceptibles de produire une réponse de la structure correspondant à une énergie proche de celle d'une structure connue pour être instable. Il s'agit d'un problème de suivi d'instabilités.

## 4.1 Problème spectral et stabilité linéaire

La méthode que nous présentons succinctement dans ce paragraphe, est dédiée à l'analyse de stabilité aéroélastique pour la classe des instabilités du type flottement [104], [137], [51]. Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, le flottement est un phénomène auto-entretenu qui n'est pas lié à la turbulence du vent incident sur l'obstacle. Ainsi, on considère que la vitesse de vent amont est stationnaire. Lorsqu'on augmente continuellement cette vitesse l'amortissement global de la structure tend à s'annuler. Au point d'annulation appelé frontière de flottement, toute perturbation dans l'écoulement sera amplifiée par le système couplé et il en résultera une croissance importante des oscillations de la structure.

D'après la description précédente, il semble possible d'appréhender le flottement par une analyse de stabilité linéaire à l'exemple de l'analyse de stabilité conduite pour l'hydrodynamique [140], [148]. En utilisant le *principe de linéarisation* [69], il est possible de réduire l'analyse de stabilité linéaire au sens de Lyapounov, à l'étude du signe de la partie réelle des valeurs propres associées à un problème spectral lié au système linéarisé autour d'une solution du système couplé stationnaire. Ainsi la procédure à suivre dans le cas d'un solide rigide élastiquement supporté avec un mouvement de la structure verticale  $s = d e_2$  au sein d'un écoulement fluide Navier-Stokes, est la suivante :

1. Choisir une vitesse de vent  $u_\infty$  stationnaire et calculer  $(u^0, p^0, d^0)$ , la solution stationnaire du problème suivant,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_0 \cdot \nabla) u_0 - \nu \Delta u_0 + \nabla p_0 = 0, & \Omega^f \\ \operatorname{div} u_0 = 0, & \Omega^f \\ u_0 = u_\infty, & \Gamma_{am} \\ u_0 \cdot n = 0, & \Gamma_{lat} \\ \sigma(u, p) \cdot n = 0, & \Gamma_{av} \\ u_0 = 0, & \Gamma^s \\ k d_0 = - \left( \int_{\Gamma^s} \sigma(u, p) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_2 & \end{array} \right. \quad (12)$$

2. Résoudre le problème spectral associé aux perturbations harmoniques infinitésimales du système couplé autour de la configuration stationnaire  $(u^0, p^0, d^0)$ . La structure de ce problème spectral est liée aux choix de la méthode de linéarisation. Dans le cas de la linéarisation intrinsèque [52, 53], le problème spectral à résoudre est le

suisant : Trouver  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et  $(z, q, s) \neq (0, 0, 0)$  à valeurs complexes tels que,

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_0 \cdot \nabla)z + (z \cdot \nabla)u_0 - \nu \Delta z + \nabla q = \lambda z, \\ \operatorname{div} z = 0, \\ z = 0, \\ z \cdot n = 0, \\ \sigma(z, q) \cdot n = 0, \\ z = -\lambda s e_2 - \nabla u_0 \cdot s e_2, \\ \lambda^2 m s + \left[ k + \left( \int_{\Gamma^s} (\nabla \sigma(z, q) \cdot e_2) \cdot n \right) \right] s = - \left( \int_{\Gamma^s} \sigma(z, q) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \Omega^f \\ \Omega^f \\ \Gamma_{am} \\ \Gamma_{lat} \\ \Gamma_{av} \\ \Gamma^s \end{array} \quad (13)$$

3. Il s'agit ensuite de déterminer la valeur propre  $\lambda_1$  de plus petite partie réelle. Puis on réalise le test suivant :

- Si  $\Re(\lambda_1) \geq 0$ , le système est linéairement stable, on revient à l'étape 1 en incrémentant  $u_\infty \leftarrow u_\infty + \Delta u_\infty$ .
- Si  $\Re(\lambda_1) < 0$ , le système est linéairement instable et la vitesse critique de flottement est déterminée  $u_\infty^c \leftarrow u_\infty$ .

Une telle démarche a été implémentée et comparée à des résultats expérimentaux dans [53]. Elle s'est avérée globalement satisfaisante. Cependant quelques difficultés subsistent,

- Le lien théorique entre la stabilité linéaire au sens de Lyapounov et le phénomène de flottement n'a pas été établi théoriquement. Cependant, la comparaison essais-calculs tend à prouver que ce lien existe.
- Cette méthode est dédiée à l'étude de flottement et ne peut-être appliquée à l'étude d'autres instabilités comme l'excitation par échappement tourbillonnaire.

Dans la suite, nous introduisons deux approches qui ont pour but de traiter le problème de la stabilité de façon plus générale en s'affranchissant à la fois des hypothèses des petites perturbations, de la stationnarité du vent incident et pouvant a-priori détecter différents types d'instabilités aéroélastiques.

## 4.2 Critère de stabilité conditionnelle et pessimisation

L'évolution des oscillations de la structure au sein de l'écoulement atmosphérique est le point central de l'analyse de stabilité aéroélastique. Comment garantir que le niveau de ces oscillations sera compatible avec les contraintes d'intégrité et de sécurité de l'ouvrage dans un site d'exposition au vent donné, c'est-à-dire avec un profil de vent donné  $u_\infty$  en amont de l'obstacle? Il s'agit de déterminer un seuil critique de vent  $u_c$ , au delà duquel la structure peut être le siège d'instabilités incompatibles avec les contraintes de sécurité de l'ouvrage. L'incompatibilité de ces instabilités doit être caractérisée à l'aide d'un critère quantifiable afin de pouvoir mener une étude paramétrique selon la vitesse de vent  $u_\infty$ . Il existe évidemment de multiples choix de critères pour quantifier ces instabilités, nous en proposons deux à titre d'exemple. Ils sont fondés sur l'énergie mécanique instantanée de la structure dans le cas rigide à un degré de liberté,

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ m |\dot{d}(t)|^2 + k |d(t)|^2 \right] \quad (14)$$

- De façon asymptotique, on pourra considérer qu'une structure est instable pour une vitesse de vent  $u_\infty$  définie sur  $(0, +\infty)$ , si la limite de l'énergie diverge,

$$C_1(u_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = +\infty \quad (15)$$

- Si l'on se restreint à un domaine temporel borné  $(0, T)$ , nous pourrions considérer que la structure est instable vis-à-vis d'un seuil critique  $S_c > 0$  pour une vitesse de vent  $u_\infty$  définie sur  $(0, T)$ , si l'inégalité suivante est satisfaite,

$$C_2(u_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \geq S_c \quad (16)$$

**Remarque 0.4** Dans le cas d'une structure élastique linéaire avec une loi de comportement de Hooke, on pourra envisager des critères différents comme l'énergie maximale de contraintes dans la structure,

$$C(u_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \|E_\sigma\|_{L^\infty(0, T)}$$

$$\text{avec } E_\sigma = \frac{1}{2} \left[ \lambda \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega^s)}^2 + 2\mu \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega^s)}^2 \right].$$

Une fois donné ce critère, il s'agit de déterminer la classe des vitesses de vent  $u_\infty$  qui le réalise. On aura alors identifié la classe des vents néfastes pour la structure et l'on parlera de pessimisation des effets du vent.

Un moyen de détermination de cette classe est de se donner un paramètre  $\lambda \geq 0$  et de rechercher les vitesses de vent qui maximisent le critère  $C(u_\infty)$  dans la boule de rayon  $\lambda$ . Il s'agit alors de résoudre le problème de maximisation suivant,

$$I(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\substack{u_\infty \in \mathcal{U}_c, \\ \|u_\infty\|_{\mathcal{U}_c} \leq \lambda}} C(u_\infty) \quad (17)$$

Si l'on peut résoudre ce problème, on s'intéresse alors à la fonction valeur  $I(\lambda)$  et l'on recherche le paramètre  $\lambda_c$  minimum qui permet à  $I(\lambda)$  de satisfaire l'un des critères d'instabilité définis précédemment. Pour le second exemple, il s'agit de résoudre le problème de minimisation,

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ & \lambda \geq 0, \\ & I(\lambda) \geq S_c \end{aligned} \quad (18)$$

De façon évidente, la fonction valeur est continue,  $I(0) = 0$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = +\infty$ , ainsi d'après le théorème des fonctions intermédiaires, le problème (18) admet au moins une solution  $\lambda_0$  qui réalise  $I(\lambda_0) = S_c$ . Il s'agit alors de résoudre l'équation non-linéaire

$$I(\lambda) - S_c = 0 \quad (19)$$



qui peut admettre de multiples solutions, puis de sélectionner la plus petite. On pourra utiliser une méthode de dichotomie couplée à une méthode locale de Newton fondée sur le calcul de la dérivée de la fonction valeur  $I'(\lambda)$ .

Supposons que le problème (17) admette une unique solution  $\bar{u}_\infty(\lambda)$ , alors

$$I'(\lambda) = C'(\bar{u}_\infty(\lambda)) \cdot \bar{u}'_\infty(\lambda) \quad (20)$$

où  $C'(\bar{u}_\infty(\lambda)) \cdot \bar{u}'_\infty(\lambda)$  désigne la dérivée du critère par rapport à  $u_\infty$ , au point solution  $\bar{u}_\infty(\lambda)$ , que l'on évalue dans la direction  $\bar{u}'_\infty(\lambda)$  qui est la dérivée par rapport à  $\lambda$  de la solution du problème (17)  $\bar{u}_\infty(\lambda)$ .

**Remarque 0.5** *Nous verrons dans la suite qu'il n'est pas nécessaire d'avoir unicité de  $\bar{u}_\infty(\lambda)$ , ni sa dérivabilité par rapport à  $\lambda$ . L'utilisation de technique de dérivation de problème paramétrique et l'utilisation d'adjoint permet de fournir directement l'expression de  $I'(\lambda)$ .*

Revenons au problème (17) et intéressons-nous à la façon de caractériser ses solutions. Formellement, nous pouvons tenter de fournir les conditions d'optimalité du premier ordre associées à ce problème. Réécrivons le sous forme d'un problème de minimisation afin de rentrer dans le cadre standard des problèmes d'optimisation,

$$-I(\lambda) = \min_{\substack{u_\infty \in \mathcal{U}_c, \\ \frac{1}{2} [\lambda^2 - \|u_\infty\|_{\mathcal{U}_c}^2] \geq 0}} -C(u_\infty) \quad (21)$$

Soit  $\bar{u}_\infty(\lambda)$  une solution locale du problème (17) alors il existe  $\bar{\mu}$  tel que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker suivantes soient vérifiées,

$$\begin{cases} -\langle C'(\bar{u}_\infty), \delta u_\infty \rangle - \bar{\mu} \langle \bar{u}_\infty, \delta u_\infty \rangle = 0, & \forall \delta u_\infty \in \mathcal{U}_c \\ \|\bar{u}_\infty\|_{\mathcal{U}_c} \leq \lambda, \\ \bar{\mu} \geq 0, \\ \bar{\mu} (\lambda - \|\bar{u}_\infty\|_{\mathcal{U}_c}) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

**Remarque 0.6** *Ici on passe sous silence le difficile problème de qualification des contraintes [17].*

Le système (22) fait intervenir de nouveau la dérivée du critère  $C$  par rapport à  $u_\infty$ . Il s'agit en fait d'évaluer la dérivée du système fluide-structure par rapport aux conditions aux limites  $u_\infty$  sur la frontière amont  $\Gamma_{am}$ .

En effet, reprenons le critère

$$C_2(u_\infty) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left[ m |\dot{d}(u_\infty)|^2(t) + k |d(u_\infty)|^2(t) \right] dt \quad (23)$$

et notons  $h(\delta u_\infty) = \frac{Dd}{Du_\infty}(u_\infty) \cdot \delta u_\infty$  la dérivée du déplacement structure  $d(u_\infty)$  solution du problème couplé fluide-structure (5) par rapport à  $u_\infty$  dans la direction  $\delta u_\infty$ , alors on a

$$\langle C'_2(u_\infty), \delta u_\infty \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ m \dot{d}(u_\infty) \dot{h}(\delta u_\infty) + k d(u_\infty) h(\delta u_\infty) \right] dt \quad (24)$$

L'un des objets principaux de cette thèse sera de montrer comment calculer la dérivée  $h(\delta u_\infty)$  ainsi que sa variable adjointe associée.

### 4.3 Suivi de trajectoires instables et problèmes de contrôle associés

Dans la méthode précédente, deux problèmes interviennent : tout d'abord la recherche d'un maximum de l'énergie de la structure au sein de l'écoulement fluide, puis la recherche des données au bord amont de norme minimale pouvant conduire l'énergie maximale de la structure à dépasser un certain seuil critique. Un moyen de contourner cette difficulté est de se donner un maximum pour l'énergie de la structure et de rechercher les données de norme minimale pouvant conduire à cette énergie.

Il s'agit d'un problème inverse : étant donné un scénario néfaste pour la structure décrit par l'évolution de son énergie, nous recherchons la vitesse de vent sur  $\Gamma_{am}$  de norme minimale produisant une énergie proche de celle du scénario instable.

D'un point de vue mathématique, on se donne une fonction  $E_i(t)$  susceptible de décrire l'évolution de l'énergie d'une structure instable, c'est-à-dire dont les oscillations s'amplifient avec le temps et un niveau de tolérance  $\delta \geq 0$ , il s'agit alors de résoudre le problème de minimisation suivant,

$$\begin{aligned} \min_{\substack{u_\infty \in \mathcal{U}_c, \\ C(u_\infty) \leq \delta}} \frac{1}{2} \|u_\infty\|_{\mathcal{U}_c}^2 \end{aligned} \quad (25)$$

avec par exemple,

$$C(u_\infty) = C_3(u_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T |E(u_\infty)(t) - E_i(t)|^2 dt \quad (26)$$

Cette approche a pour avantage d'utiliser un seul problème d'optimisation contrairement à l'approche par stabilité conditionnelle qui faisait intervenir un problème de minimisation couplé à un problème de maximisation. Cependant, nous introduisons ici un élément arbitraire qui est l'énergie du système instable  $E_i$ . Bien que cette quantité puisse être déterminée par l'intermédiaire d'expériences en soufflerie, il est nécessaire pour être exhaustif de balayer l'ensemble des scénarios instables qui est a-priori une inconnue du problème. Ainsi on fera l'hypothèse dans la suite que le comportement global du système, lorsqu'il est instable, est unique et connu du concepteur.

Si l'on désire seulement capter le comportement instable global, on pourra résoudre le problème plus simple,

$$\min_{u_\infty \in \mathcal{U}_c} j(u_\infty) \quad (27)$$

avec

$$j(u_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} C(u_\infty) + \frac{\alpha}{2} \|u_\infty\|_{\mathcal{U}_c}^2 \quad (28)$$

où le terme  $\frac{\alpha}{2} \|u_\infty\|_{\mathcal{U}_c}^2$  est un terme de régularisation qui permet de rendre le problème de minimisation plus convexe avec  $\alpha \geq 0$  à choisir intelligemment<sup>26</sup>. Un moyen constructif de résoudre le problème (27) est de mettre en oeuvre un algorithme d'optimisation

<sup>26</sup>. Ceci fait l'objet de nombreuses recherches dans le domaine de l'optimisation.

fondé sur le calcul du gradient de la fonction objectif  $j(u_\infty)$  par rapport à la variable de dimensionnement  $u_\infty$ . De façon formelle la dérivée directionnelle de  $j(u_\infty)$  peut s'écrire,

$$\langle j'(u_\infty), \delta u_\infty \rangle = \langle C'(u_\infty), \delta u_\infty \rangle + \alpha \langle u_\infty, \delta u_\infty \rangle \quad (29)$$

En utilisant, le critère  $C_3(u_\infty)$ , on obtient

$$\langle j'(u_\infty), \delta u_\infty \rangle = \int_0^T (E(u_\infty)(t) - E_i(t)) \langle E'(u_\infty), \delta u_\infty \rangle + \alpha \langle u_\infty, \delta u_\infty \rangle \quad (30)$$

avec  $\langle E'(u_\infty), \delta u_\infty \rangle = \left[ m \dot{d}(u_\infty) \dot{h}(\delta u_\infty) + k d(u_\infty) h(\delta u_\infty) \right]$ .

De nouveau, nous avons besoin de savoir comment calculer la dérivée directionnelle  $h(\delta u_\infty)$  associée à la solution du problème couplé (5).

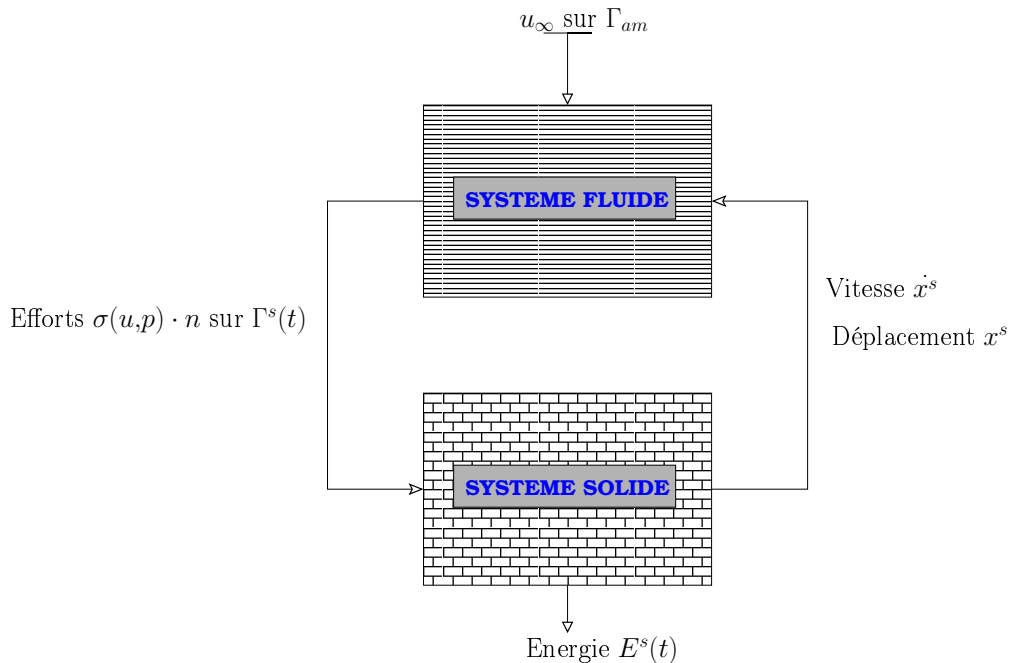


FIG. 10 – Couplage et sous-systèmes fluide-structure

## 5 Démarche et résumé des travaux effectués

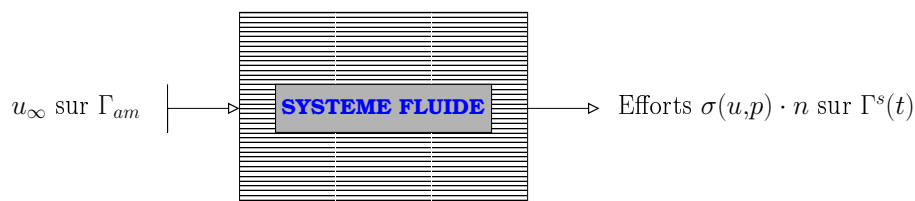
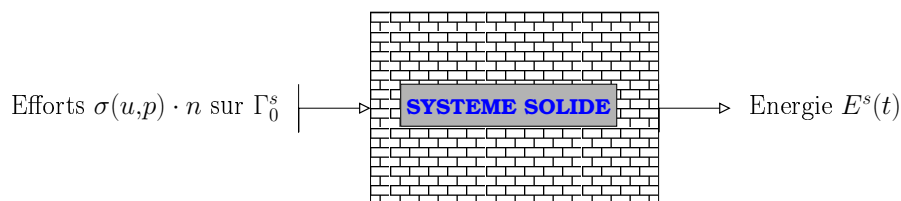
### 5.1 Démarches transverse et verticale

La démarche que nous avons adoptée lors de notre recherche est double :

- La première, à caractère méthodologique, consiste à s'intéresser aux problèmes génériques qui sous-tendent l'analyse de stabilité aéroélastique afin de conférer à nos résultats un caractère plus général que la seule recherche en ingénierie aérodynamique pour le génie civil.

– La deuxième consiste à se concentrer sur le système complexe fluide-structure de départ et de le considérer comme le couplage de sous-systèmes fluide et solide, de structure interne plus simple. Il en découle alors une hiérarchie de modèles de complexité croissante qui viendront alimenter et illustrer la démarche méthodologique. Ainsi à l’instar de l’introduction précédente, deux notions importantes se dégagent de l’analyse de stabilité aéroélastique telle que nous l’avons introduite :

- La notion de problème d’optimisation (minimisation ou maximisation) avec ou sans contraintes : Il s’agit de pouvoir définir des algorithmes fondés sur le calcul du gradient des fonctionnelles intervenant dans la définition des critères de stabilité. La recherche dans ce domaine est très féconde. Cependant, il sera important de faire surgir de ces travaux les principaux outils dont nous avons besoin. Nous concentrerons nos efforts sur les problèmes d’optimisation faisant intervenir la solution de problèmes aux dérivées partielles. Cette étude occupera la première partie de cette thèse.
- La notion de dérivée directionnelle de la solution d’un système couplé d’équations aux dérivées partielles par rapport à une variable de contrôle frontière : notamment pour ce qui est du système couplé fluide-structure (5), la difficulté majeure provient du fait que le système fluide est défini dans un domaine mobile dont les mouvements sont une inconnue du problème. Le traitement de cette question occupera les deux dernières parties et fera intervenir des problèmes d’optimisation de forme pour les systèmes fluides.

FIG. 11 – *Sous-système fluide*FIG. 12 – *Sous-système solide*

## 5.2 Une hiérarchie de modèles

Reprenons le système couplé d’origine. A l’image du schéma présenté en Fig. 10, le système fluide-solide est évidemment intrinséquement sous-structuré en un système fluide

et système solide couplés à l'aide de conditions aux limites mixtes sur la frontière mobile  $\Gamma^s(t)$ .

Regardé comme un système entrée-sortie, nous avons à faire à deux systèmes en boucle de rétroaction avec une entrée sur le système fluide  $u_\infty$  agissant sur la frontière amont  $\Gamma_{am}$  et une sortie sur le système solide  $E^s$  qui représente l'énergie mécanique du solide. Le système solide est influencé par le fluide par l'intermédiaire des efforts à l'interface mobile  $\Gamma^s(t)$  et le fluide est influencé par le solide par l'intermédiaire du déplacement  $x^s$  et de la vitesse  $\dot{x}^s$  de la frontière mobile  $\Gamma^s(t)$ .

Afin d'étudier le système entrée  $u_\infty$  - sortie  $E^s$ , il semble judicieux d'étudier séparément les deux sous-systèmes :

- Sous-système fluide : entrée  $u_\infty$  - sortie  $\sigma(u,p) \cdot n$  (Fig. 11)
- Sous-système solide : entrée  $\sigma(u,p) \cdot n$  - sortie  $E^s$  (Fig. 12)

C'est ainsi que nous avons envisagé les différentes étapes préliminaires au traitement du problème complet fluide-structure. Il s'agit alors pour chaque sous-système, d'étudier divers problèmes d'optimisation qui entreront de façon ultime dans un algorithme d'analyse de stabilité d'une structure élastique au sein d'un écoulement fluide.

### 5.3 Plan de la thèse

#### I. **Première Partie** - *Problèmes de stabilité et de contrôle pour des systèmes d'évolution en domaine cylindrique*

Il s'agit d'étudier des systèmes fluide ou structure découplés, du point de vue de propriétés de stabilité, contrôlabilité et identifiabilité.

##### I.1 *Critère de stabilité conditionnelle*

Nous reprenons les concepts introduits dans l'introduction et les replaçons dans un cadre général où les systèmes d'évolution sont représentés par des opérateurs abstraits définis dans des espaces de Hilbert. Une analyse détaillée de ce concept de stabilité ne peut être conduite dans le cas général, c'est pourquoi nous nous restreignons au cas d'opérateurs linéaires continus compacts. Les solutions du problème de stabilité conditionnelle sont alors caractérisées comme solution d'un problème aux valeurs propres symétriques. Nous illustrons ces résultats dans le cas d'un système d'évolution hyperbolique du second-ordre qui intervient de façon récurrente en dynamique des structures. Nous implémentons un algorithme de stabilité conditionnelle dans le cas simple de l'équation des ondes uni-dimensionnelle. Nous retrouvons des propriétés déjà établies par des méthodes classiques dédiées à ces systèmes hyperboliques.

##### I.2 *Suivi d'instabilités et contrôle sur les trajectoires*

L'introduction d'une information a-priori sur le type d'instabilités pouvant se développer dans un système d'évolution, permet de repenser le problème de la stabilité comme la recherche des paramètres de dimensionnement de norme minimale permettant de suivre une instabilité type. Cette notion est introduite dans le cadre général d'un opérateur d'évolution défini dans un espace de Hilbert. Le traitement du cas linéaire permet de faire le lien entre les méthodes de contrôle des EDP et les problèmes inverses d'identification. Nous établissons

notamment l'équivalence entre la méthode HUM introduite par J-L. Lions et la notion de meilleure approximation au sens des moindres carrés. C'est alors l'occasion d'introduire des algorithmes d'optimisation pour les problèmes de suivi exact et approché de trajectoires. Des propriétés de contrôlabilité sont établies pour le cas particulier de systèmes paraboliques linéaires du second ordre. Une étude numérique des algorithmes de suivi de trajectoires est alors menée sur le cas simple de l'équation de la chaleur en dimension 1, puis dans le cas non-linéaire de l'équation de Burgers avec viscosité.

### I.3 *Contrôle et suivi de trajectoires pour les équations de Navier-Stokes*

Dans ce travail réalisé en collaboration avec Gilles Fourestey<sup>27</sup>, nous abordons l'approximation numérique de problèmes de contrôle optimal pour les équations de Navier-Stokes en vue d'une future application à la stabilité aéroélastique du système couplé fluide-structure. L'originalité de ce travail réside dans le choix de la discrétisation des équations de Navier-Stokes basée sur la méthode des caractéristiques couplée avec une discrétisation spatiale de type éléments finis et la linéarisation de ce système discret vis-à-vis de condition aux limites en vitesse. Nous adoptons dans ce travail une approche directe fondée sur le calcul en parallèle de l'écoulement non-linéaire et de l'écoulement linéarisé. Nous traitons deux problèmes de contrôle liés respectivement à la réduction de traînée autour d'un cylindre en rotation par contrôle de sa vitesse, puis à l'identification de vitesses de vent amont à partir de la connaissance des efforts fluides sur un obstacle non-profilé fixe ou en mouvement rigide forcé.

## II. **Deuxième partie** *Optimisation de forme de systèmes fluides en domaine mobile*

Nous nous plaçons dans le cas où le système fluide est contrôlé par le mouvement de la frontière mobile  $\Gamma_s(t)$  et l'objectif est lié à la dynamique du fluide. Nous abordons successivement les deux thèmes suivants :

### II.1 *Contrôle dynamique de forme des équations de Navier-Stokes en domaine mobile : une approche eulérienne*

Dans ce travail élaboré en collaboration avec Raja Dziri<sup>28</sup> et Jean-Paul Zolésio<sup>29</sup>, nous nous intéressons au problème du contrôle des équations de Navier-Stokes par la forme de la frontière mobile. Ici le contrôle est donné par la vitesse  $V$  de la frontière mobile  $\Gamma^s(t)$  et la fonctionnelle à minimiser fait intervenir la vitesse et la pression du fluide dans le domaine mobile. Ce problème est abordé en utilisant des extensions récentes de la méthode de la vitesse en optimisation de forme classique au cas où le domaine possède sa propre dynamique. Nous utilisons trois méthodes différentes afin d'établir la structure du gradient de la fonctionnelle coût par rapport la vitesse  $V$  :

1. une méthode fondée sur la différentiabilité de l'état fluide  $(u,p)$  par rapport à  $V$ , utilisant le théorème des fonctions implicites sous sa forme faible.
2. une méthode fondée sur l'application du principe de Min-Max avec une paramétrisation des espaces d'état et de multiplicateurs.

---

27. INRIA-CAIMAN/ENPC-CERMICS

28. LAMSIN, University of Tunis

29. INRIA-OPALE/CNRS

3. une méthode fondée sur l'application du principe de Min-Max avec une inclusion des espaces d'état et de multiplicateurs dans un espace indépendant des variations du domaine mobile.

#### II.1 *Contrôle dynamique de forme des équations de Navier-Stokes en domaine mobile : une approche lagrangienne*

Dans ce travail réalisé en collaboration avec Jean-Paul Zolésio, nous établissons un résultat similaire au résultat du chapitre précédent en utilisant une approche lagrangienne. La variable de contrôle est ici le déplacement  $\theta$  de la frontière mobile  $\Gamma^s(t)$ . L'utilisation du calcul de forme classique par perturbation de l'identité est étendue au cas des domaines spatio-temporels non-cylindriques. En utilisant la dérivée de l'état par rapport à  $\theta$ , on établit la structure du gradient de la fonctionnelle coût par rapport à  $\theta$ . Un lien formel est établi qui permet de relier la dérivée directionnelle lagrangienne avec la dérivée directionnelle eulérienne.

### III. **Troisième partie** - *Optimisation de forme de systèmes couplés fluide-structure*

Dans cette partie, nous revenons au problème original complet fluide-structure et nous nous intéressons aux problèmes de contrôle optimal associés.

#### III.1 *Contrôle optimal de systèmes couplés fluide-structure : cas du solide rigide*

Ce chapitre co-écrit avec Jean-Paul Zolésio a pour objet l'étude d'un problème de contrôle optimal pour un système mécanique constitué d'un solide rigide élastiquement supporté, dont le comportement est régi par une équation différentielle ordinaire, au sein d'un fluide newtonien en écoulement incompressible, dont l'évolution est régie par les équations de Navier-Stokes. Nous établissons la structure du gradient d'une fonctionnelle de coût à minimiser grâce à l'introduction d'un nouveau problème adjoint. La structure de cet adjoint est reliée à l'utilisation d'un champ transverse ALE intervenant dans le contexte de la minimisation de fonctionnelles eulériennes non-cylindriques introduit au Chapitre II.1.

#### III.2 *Analyse de sensibilité pour un système couplé fluide-structure tridimensionnel*

Ce chapitre écrit en collaboration avec Miguel Fernández<sup>30</sup> a pour objet l'analyse de sensibilité pour un système mécanique constitué d'un solide élastique, dont le comportement est régi par les lois de l'élasticité non-linéaire, au sein d'un fluide newtonien en écoulement incompressible, dont l'évolution est régie par les équations de Navier-Stokes. On étudie les variations du système vis-à-vis d'une donnée de Dirichlet frontière associée à la vitesse du fluide. On recherche le système satisfait par la dérivée de l'état par rapport à cette donnée.

# Première partie

## Analyse de stabilité de systèmes d'évolution





Dans cette première partie, nous étudions les propriétés de stabilité, contrôlabilité et identifiabilité de systèmes fluides ou structures non-couplés. Cette partie s'organise en trois chapitres :

### I.1 *Critère de stabilité conditionnelle*

Nous reprenons les concepts introduits dans l'introduction et les replaçons dans un cadre général où les systèmes d'évolution sont représentés par des opérateurs abstraits définis dans des espaces de Hilbert. Une analyse détaillée du concept de stabilité conditionnelle ne peut être conduite dans le cas général, c'est pourquoi nous nous restreignons au cas d'opérateurs linéaires continus compacts. Les solutions du problème de stabilité conditionnelle sont alors caractérisées comme solution d'un problème symétrique aux valeurs propres. Nous illustrons ces résultats dans le cas d'un système d'évolution hyperbolique du second-ordre qui intervient de façon récurrente en dynamique des structures. Nous implémentons un algorithme de stabilité conditionnelle dans le cas simple de l'équation des ondes uni-dimensionnelle. Nous retrouvons des propriétés déjà établies par des méthodes classiques dédiées à ces systèmes hyperboliques.

### I.2 *Suivi d'instabilités et contrôle sur les trajectoires*

L'introduction d'une information a-priori sur le type d'instabilités pouvant se développer dans un système d'évolution, permet de repenser le problème de la stabilité comme la recherche des paramètres de dimensionnement de norme minimale permettant de suivre une instabilité type. Cette notion est introduite dans le cadre général d'un opérateur d'évolution défini dans un espace de Hilbert. Le traitement du cas linéaire permet de faire le lien entre les méthodes de contrôle des EDP et les problèmes inverses d'identification. Nous établissons notamment l'équivalence entre la méthode HUM introduite par J-L. Lions et la notion de meilleure approximation au sens des moindres carrés. C'est alors l'occasion d'introduire des algorithmes d'optimisation pour les problèmes de suivi exact et approché de trajectoires. Des propriétés de contrôlabilité sont établies pour le cas particulier de systèmes paraboliques linéaires du second ordre. Une étude numérique des algorithmes de suivi de trajectoires est alors menée sur le cas simple de l'équation de la chaleur en dimension 1, puis dans le cas non-linéaire de l'équation de Burgers avec viscosité.

### I.3 *Contrôle et suivi de trajectoires pour les équations de Navier-Stokes*

Dans ce travail réalisé en collaboration avec Gilles Fourestey<sup>31</sup> et paru sous forme de rapport de recherche de l'INRIA [62], nous abordons l'approximation numérique de problèmes de contrôle optimal pour les équations de Navier-Stokes en vue d'une future application à la stabilité aéroélastique du système couplé fluide-structure. L'originalité de ce travail réside dans le choix de la discrétisation des équations de Navier-Stokes basée sur la méthode des caractéristiques couplée avec une discrétisation spatiale de type éléments finis et la linéarisation de ce système discret vis-à-vis de condition aux limites en vitesse. Nous adoptons dans ce travail une approche directe fondée sur le calcul en parallèle de l'écoulement non-linéaire et de l'écoulement linéarisé. Nous traitons deux problèmes de contrôle liés respectivement à la réduction de traînée autour d'un cylindre en rotation par contrôle de sa vitesse, puis

---

31. INRIA-CAIMAN/ENPC-CERMICS

à l'identification de vitesses de vent amont à partir de la connaissance des efforts fluides sur un obstacle non-profilé fixe ou en mouvement rigide forcé.

# Chapitre 1

## Critère de stabilité conditionnelle

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Un exemple simple d'instabilité . . . . .</b>	<b>32</b>
1.1.1	Résonance élastique . . . . .	32
1.1.2	Recherche d'instabilité par critère global . . . . .	33
1.1.3	Approximation numérique dans le cas unidimensionnel . . .	36
<b>1.2</b>	<b>Système d'évolution abstrait . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>1.3</b>	<b>Critère global de stabilité . . . . .</b>	<b>42</b>
1.3.1	Maximisation de l'observation . . . . .	42
1.3.2	Minimisation conditionnelle . . . . .	44
<b>1.4</b>	<b>Cas d'un système d'évolution linéaire . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>47</b>

---

Dans ce chapitre, nous introduisons une notion de stabilité conditionnelle pour un système d'évolution abstrait et différentes méthodes permettant de déterminer les paramètres critiques conduisant au seuil de stabilité.

## 1.1 Un exemple simple d'instabilité

### 1.1.1 Résonance élastique

Nous considérons un solide élastique occupant un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  de frontière  $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega$ . Nous supposons pour la simplicité de l'exposé que la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Nous nous plaçons dans l'hypothèse où la dynamique du solide est régie par l'équation des ondes. Le solide est soumis à des sollicitations en force, i.e avec des conditions aux limites de type Neumann sur  $\Gamma$ . Ainsi  $y$  est solution du système suivant,

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \Delta y = 0, & Q^T \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, T) \\ \partial_n y = u, & \Sigma^T \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \times (0, T) \\ [y, \partial_t y] |_{t=0} = [y_0, y_1], & \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

**Proposition 1.1** *Pour  $u \in L^2(\Sigma^T)$ , il existe une unique solution au problème (1.1) avec,*

$$y \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^{1/2}(\Omega)), \quad \partial_t y \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^{-1/2}(\Omega)) \quad (1.2)$$

**Preuve :** Il s'agit d'un cas particulier issu du lemme 1.1 dans [100].

□

Le fait que le domaine  $\Omega$  soit borné et régulier, nous permet d'introduire le spectre discret de l'opérateur ( $A = -\Delta, D(A) = \{\phi \in H^2(\Omega), \partial_n \phi|_{\Gamma} = 0\}$ ).

**Définition 1.1** *On note  $(\lambda_i, \phi_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{R}^+ \times D(A)$  les valeurs et fonctions propres associées à l'opérateur  $A$ , i.e*

$$\begin{cases} -\Delta \phi_i = \lambda_i \phi_i, & \Omega \\ \partial_n \phi_i = 0, & \Gamma \end{cases} \quad (1.3)$$

avec  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots < +\infty$ .

On note dans la suite  $\omega_i^2 = \lambda_i$ , d'après le principe de Duhamel [34], il est facile d'établir la représentation suivante,

**Proposition 1.2** *La solution  $y$  du problème (1.1) possède la représentation suivante,*

$$y(u) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \sin(\omega_j(t-s))(u(s), \phi_j)_{L^2(\Gamma)} ds \quad (1.4)$$

Cette représentation permet de révéler simplement, le phénomène classique de la résonance mécanique.

**Proposition 1.3** *Considérons une classe particulière de sollicitations frontières harmoniques  $\{u_r\}_{r \geq 1}$  telles,*

$$(u_r(s), \phi_i)_{L^2(\Gamma)} = U_i \sin(\omega_r s), \quad \forall i \geq 1 \quad (1.5)$$

avec  $\sum_{j \geq 1} U_j^2 < +\infty$ . Alors la solution  $y(u_r)$  associée possède un comportement asymptotique explosif pour  $t \rightarrow +\infty$  (voir [34] p.141),

$$y(u_r)(x,t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{2\omega_r} \cos(\omega_r t) \phi_r(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (1.6)$$

**Remarque 1.1** La divergence la plus forte est obtenue pour la sollicitation oscillant sur la première pulsation propre du système  $\omega_1$ .

**Remarque 1.2** Une question que l'on peut se poser et qui reste ouverte à notre connaissance est la suivante : si pour une sollicitation  $u \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma))$ , on observe

$$\|y(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \sim +\infty \quad (1.7)$$

cela implique-t-il que

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^M u_r(x) \sin(\omega_r t) + g(x,t) \quad (1.8)$$

avec  $1 \leq M \leq +\infty$ ,  $\sum_{r=1}^M |u_r(x)|^2 \leq C_1$  et  $\|y(g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \leq C_2$  ?

L'objet du paragraphe suivant, sera de retrouver pour quel type de sollicitation le système des ondes est instable en utilisant un concept général applicable à une classe beaucoup plus large de systèmes, notamment le système couplé fluide-structure (5).

### 1.1.2 Recherche d'instabilité par critère global

La caractérisation précédente des instabilités du système, nous permet d'établir la propriété suivante,

**Proposition 1.4** On considère des sollicitations  $u \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma))$ , alors seulement deux comportements asymptotiques sont possibles,

– Instable linéairement :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T^3} \|y(u)\|_{L^2(0,T; L^2(\Omega))}^2 = C, \quad C > 0 \quad (1.9)$$

– Stable :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T^3} \|y(u)\|_{L^2(0,T; L^2(\Omega))}^2 = 0 \quad (1.10)$$

**Preuve :** Il suffit d'intégrer dans  $L^2(0,T; L^2(\Omega))$  l'expression dans Eq. (1.4) et d'utiliser Eq. (1.6).

□

Notre but est maintenant de rechercher les sollicitations de norme minimale qui produisent une réponse à comportement asymptotique instable. Cependant le caractère asymptotique

du critère de stabilité ne facilite pas l'éventuel traitement théorique et numérique d'une telle recherche. On se contente alors de se donner un horizon temporel  $T$  grand et de considérer que le système est instable si

$$\frac{1}{T^3} \|y(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = C > 0 \quad (1.11)$$

La linéarité du système, nous permet de renormaliser le problème et de poser  $C = 1$ . On cherche alors à résoudre le problème d'optimisation suivant,

$$\begin{cases} \min & \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}^2 \\ u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma)), & \\ \frac{1}{T^3} \|y(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 - 1 = 0 & \end{cases} \quad (1.12)$$

**Proposition 1.5** *Le problème de minimisation (1.12) admet au moins une solution  $\bar{u} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ .*

**Preuve :** On utilise une démarche classique de l'analyse fonctionnelle dans un espace de Hilbert.

- La fonctionnelle  $j(u) \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}^2$  est trivialement coercive et semi-continue inférieurement (s.c.i).
- Etant donné que  $j(u) \geq 0$ ,  $\forall u \in \mathcal{U}$ , avec  $\mathcal{U} = L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ , il existe  $\eta \geq 0$  tel que,

$$\eta = \inf_{C(u)-1=0} j(u)$$

On considère alors une suite minimisante  $(u_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{U}$  telle que  $\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} j(u_n)$ .

On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est bornée dans  $\mathcal{U}$ . On extrait alors une sous-suite notée de nouveau  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui converge faiblement vers un élément  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  ([19] Theo. III.27, pp. 50).

- D'après le théorème Prop. (1.1), l'application

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow Y \\ u &\longmapsto y(u) \end{aligned}$$

est continue avec  $Y = L^2(0,T;H^{1/2}(\Omega))$ . On en déduit que la suite  $\|y(u_n)\|_{n \geq 0}$  est bornée dans  $Y$ . On utilise alors les propriétés d'injection compacte de Rellich-Kondrakov ([3] pp. 144 and pp. 217) de  $H^{1/2}(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , on en déduit que  $y(u_n)$  converge vers  $y(\bar{u})$  pour la topologie forte dans  $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ . On en conclut que  $C(u_n) = \frac{1}{T^3} \|y(u_n)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T^3} \|y(\bar{u})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = C(\bar{u})$ .

□

**Proposition 1.6** *Les solutions du problème de minimisation (1.12) sont solutions du système d'optimalité suivant : On recherche la plus grande valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et un vecteur propre associé  $u \in \mathcal{U}$  solution du problème suivant,*

$$p(u) = \lambda T^3 u, \quad \text{dans } \mathcal{U} \quad (1.13)$$

où  $p(u)$  est solution du problème adjoint rétrograde suivant,

$$\begin{cases} \partial_{tt}p - \Delta p = y(u), & Q^T \\ \partial_n p = 0, & \Sigma^T \\ [\partial_t p, p](t = T) = [0, 0], & \Omega \end{cases} \quad (1.14)$$

et  $y(u)$  est solution de l'équation des ondes Eq. (1.1).

**Preuve :** On utilise les équations d'optimalité classiques associées au problème (1.12) : on recherche  $(\mu, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{U}$  tels que,

$$\begin{cases} \frac{1}{T^3} \|y(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 - 1 = 0, \\ (u, \delta u)_{\mathcal{U}} - \frac{\mu}{T^3} (y(u), y'(u) \cdot \delta u)_Y = 0, \quad \forall \delta u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (1.15)$$

avec  $z(\delta u) \stackrel{\text{def}}{=} y'(u) \cdot \delta u$  solution de l'équation des ondes,

$$\begin{cases} \partial_{tt}z - \Delta z = 0, & Q^T \\ \partial_n z = \delta u, & \Sigma^T \\ [z, \partial_t z](t = 0) = [0, 0], & \Omega \end{cases} \quad (1.16)$$

On introduit classiquement la variable  $p(x,t)$  associée à  $z(x,t)$  solution du système adjoint Eq. (1.14). Par utilisation de la formule de Green spatiale et temporelle, on déduit l'identité suivante,

$$\begin{aligned} & \int_{Q^T} [\partial_{tt}z(\delta u) - \Delta z(\delta u)] p(u) = \\ & \int_{Q^T} [\partial_{tt}p(u) - \Delta p(u)] z(\delta u) + \int_{\Sigma^T} [\partial_n p(u) z(\delta u) - \partial_n z(\delta u) p(u)] \\ & + \int_{\Omega} [\partial_t z(T) p(T) - \partial_t z(0) p(0) - z(T) \partial_t p(T) + z(0) \partial_t p(0)] \end{aligned}$$

alors,

$$\int_{Q^T} y(u) z(\delta u) = \int_{\Sigma^T} \delta u p(u) \quad (1.17)$$

Grâce à cette dernière identité, l'équation d'optimalité s'écrit,

$$u - \frac{\mu}{T^3} p(u) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{U} \quad (1.18)$$



On pose alors  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  et on recherche la plus grande valeur propre du problème Eq. (1.13).  
□

**Remarque 1.3** *Les solutions de ce problème aux valeurs propres existe puisqu'il s'agit d'un problème auto-adjoint compact. Nous détaillerons ce point dans le cadre général d'un opérateur d'évolution compact dans la deuxième partie de ce chapitre.*

Afin de vérifier que la solution du problème précédent permet détecter une instabilité linéaire en temps de l'équation des ondes pour une sollicitation particulière, nous implémentons numériquement ce problème en une dimension d'espace.

### 1.1.3 Approximation numérique dans le cas unidimensionnel

Dans ce paragraphe, nous présentons l'approximation numérique du problème de minimisation (1.12) dans le cas d'une corde encastrée-libre de longueur unité.

On note  $y(x,t)$  le déplacement transversale de la poutre, il vérifie l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \partial_{xx}y = 0, & (0,1) \times (0,T) \\ y(x=0,t) = 0, & (0,T) \\ \partial_x y(x=1,t) = u(t), & (0,T) \\ [\partial_t y, y] = [0,0] & (0,1) \end{cases} \quad (1.19)$$

Considérons une partition homogène  $I_i = ]x_i, x_{i+1}[$ ,  $1 \leq i \leq ne - 1$  de l'ouvert  $(0,1)$  de pas  $h$ , ainsi qu'une partition homogène  $K_j = ]t_j, t_{j+1}[$ ,  $1 \leq j \leq nt - 1$  de l'ouvert  $(0,T)$  de pas  $dt$ . On associe à ces partitions les espaces d'approximation suivants :

$$V_h^1 = \{v \in C^0(0,1); v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1, 1 \leq i \leq ne - 1; v(0) = 0, \}$$

$$V_{dt}^1 = \{v \in C^0(0,T); v|_{K_j} \in \mathbb{P}_1, 1 \leq j \leq nt - 1; v(0) = 0, \}$$

On désigne par  $(\varphi_i)_{i \geq 0}$  les fonctions de base de  $V_h^1$  et par  $(\psi_j)_{j \geq 0}$  les fonctions de base de  $V_{dt}^1$ . Soit  $v \in \mathcal{D}([0,1])$ , par une intégration par partie classique, on obtient :

$$\int_0^1 \partial_{tt}y v + \int_0^1 \partial_x y \partial_x v + v(0) \partial_x y(0) - v(1) \partial_x y(1) = 0$$

On impose  $v(0) = 0$ , d'où la formulation :

$$\int_0^1 \partial_{tt}y v + \int_0^1 \partial_x y \partial_x v = u(t) \cdot v(1), \quad \forall v \in H_{\Gamma,0}^1 \quad (1.20)$$

Posons  $y^h(x,t) = \sum_{i=1}^{ne} y_i(t) \varphi_i(x)$ , la projection de la solution  $y(x,t)$  sur l'espace d'approximation  $V_h^1$ . Ainsi

$$\sum_{i=1}^{ne} \ddot{y}_i(t) \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{i=1}^{ne} y_i(t) \int_0^1 \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j dx = u(t) \delta_{ne,j}, \quad 1 \leq j \leq ne$$



En adoptant des notations analogues aux cas de  $Y$ , le système adjoint semi-dicrétisé en espace s'écrit,

$$M_e \cdot \ddot{\tilde{P}} + K_e \cdot \tilde{P} = M_e \cdot \tilde{Y} \quad (1.24)$$

Le problème de minimisation (1.12) se réduit à rechercher la plus petite valeur propre du problème suivant :

$$\lambda u(\cdot) - \frac{1}{T^3} p(u)(1,\cdot) = 0, \quad \text{dans } L^2(0,T) \quad (1.25)$$

En introduisant la matrice de masse temporelle,

$$M_t = \frac{dt}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

le vecteur ligne  $(B_1)_i = \delta_{ne-1,i}$ , la matrice espace-temps  $(\mathbf{P})_{i,j} = p_j(t_i)$  et le vecteur colonne  $(\mathbf{U})_i = u(t_i)$ , le problème aux valeurs totalement discret s'écrit,

$$\frac{1}{T^3} M_t \cdot B_1 \cdot \mathbf{P}(\mathbf{U}) = \lambda M_t \cdot \mathbf{U} \quad (1.26)$$

Afin de déterminer la plus petite valeur propre de ce problème, on utilise un algorithme itératif du type puissance inverse :

**Algorithme 1.1**

1. Faire  $k = 0$ , choisir  $\mathbf{U}^0 \in \mathcal{U}_{dt}$  et une tolérance  $\varepsilon > 0$ ,
2. Calculer la solution  $Y$  de Eq. (1.21),
3. Calculer la solution  $\tilde{P}$  de Eq. (1.24),
4. Calculer

$$\mathbf{V} = \frac{1}{T^3} B_1 \cdot \mathbf{P}(\mathbf{U}^k)$$

puis

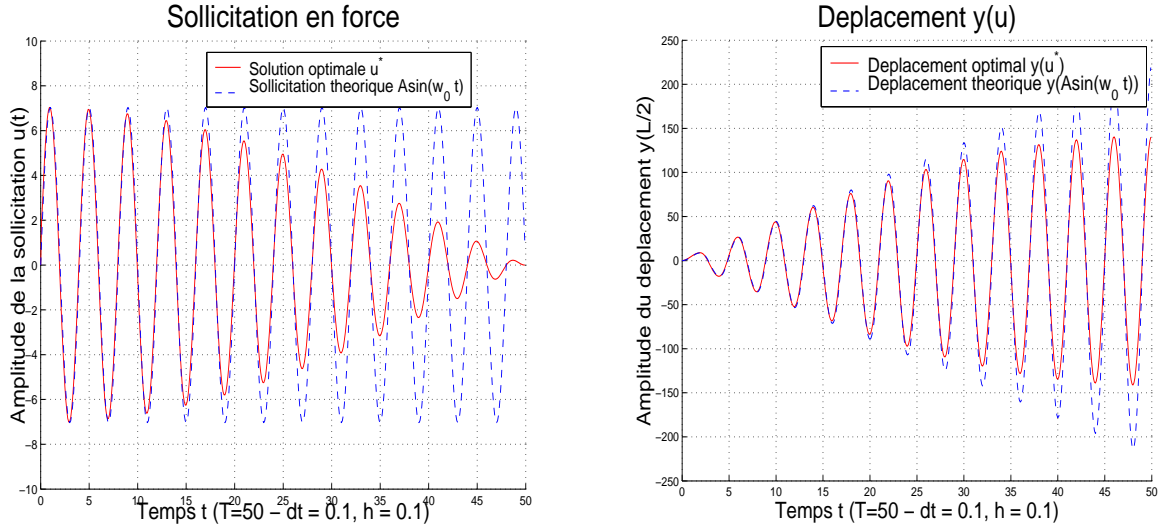
$$\mathbf{U}^{k+1} = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|_{\mathcal{U}_{dt}}}$$

5. Test de convergence : si

$$\frac{\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{\mathcal{U}_{dt}}}{\|\mathbf{U}^k\|_{\mathcal{U}_{dt}}} \leq \varepsilon$$

$$\bar{\mathbf{U}} \leftarrow \mathbf{U}^{k+1}$$

6. Sinon  $k \leftarrow k + 1$  et revenir à l'étape 2.

FIG. 1.1 – *Instabilité linéaire et Sollicitation minimale*

**Remarque 1.4** Ici on a choisit le produit scalaire issu de la base canonique de  $L^2(0,T)$ , c'est-à-dire  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{U}_{dt}} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{M}_t \cdot \mathbf{U}$ .

Les tests numériques ont été réalisés avec les paramètres de discrétisation  $dt = 0.1$  et  $h = 0.1$ . L'algorithme (1.1) a été démarré avec  $u(t) = 1$ ,  $t \in (0,T)$  et la convergence a été atteinte dans tous les tests après 3 itérations avec une tolérance  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ . Si la méthode capte effectivement le fait que la sollicitation de norme minimale provoquant une instabilité linéaire oscille sur la première fréquence propre du système (Fig. 1.1.3), elle génère une sollicitation optimale dont l'amplitude décroît avec le temps. Ceci peut s'expliquer par le fait que les sollicitations sont recherchées dans  $L^2(0,T)$ . Si l'on fait tendre  $T \rightarrow +\infty$ , on se trouve dans  $L^2(0, +\infty)$  (Fig. 1.1.3). Or la sollicitation théorique  $A \sin(\omega_0 t)$  générant l'instabilité la plus forte pour le système appartient non pas à  $L^2(0, +\infty)$  mais à  $L^\infty(0, +\infty)$ . On constate quoiqu'il en soit d'après la Fig. 1.1.3 que localement la sollicitation optimale converge vers la sollicitation théorique.

## 1.2 Système d'évolution abstrait

L'exemple précédent a montré comment la résolution d'un problème d'optimisation faisant intervenir un critère lié à un comportement instable du système permet d'identifier le paramètre caractéristique correspondant de norme minimale. Cette idée peut être appliquée à une classe très générale de systèmes d'évolution.

Un système d'évolution sera représenté par une variable d'état  $y \in Y(0,T)$  où  $Y(0,T)$  désigne un espace de Hilbert dépendant de l'intervalle de temps  $(0,T)$  dans lequel nous étudions le système (On notera cet espace  $Y$ ). L'évolution de la variable d'état du système est régie par une équation d'évolution abstraite,

$$e(y,u) = 0, \text{ dans } V^* \quad (1.27)$$

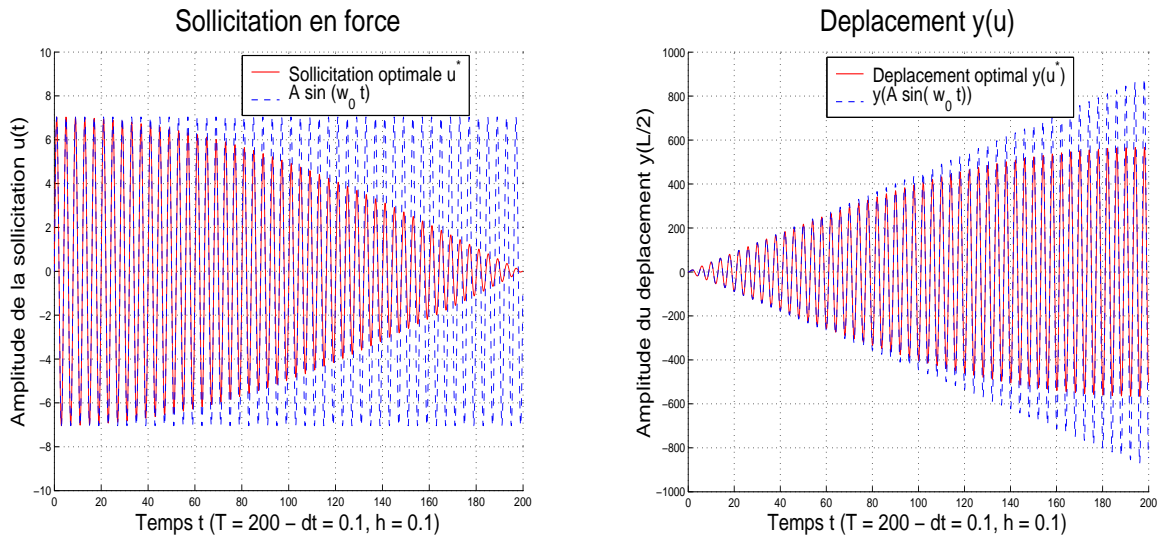


FIG. 1.2 – Comportement asymptotique dans  $L^2(0, +\infty)$

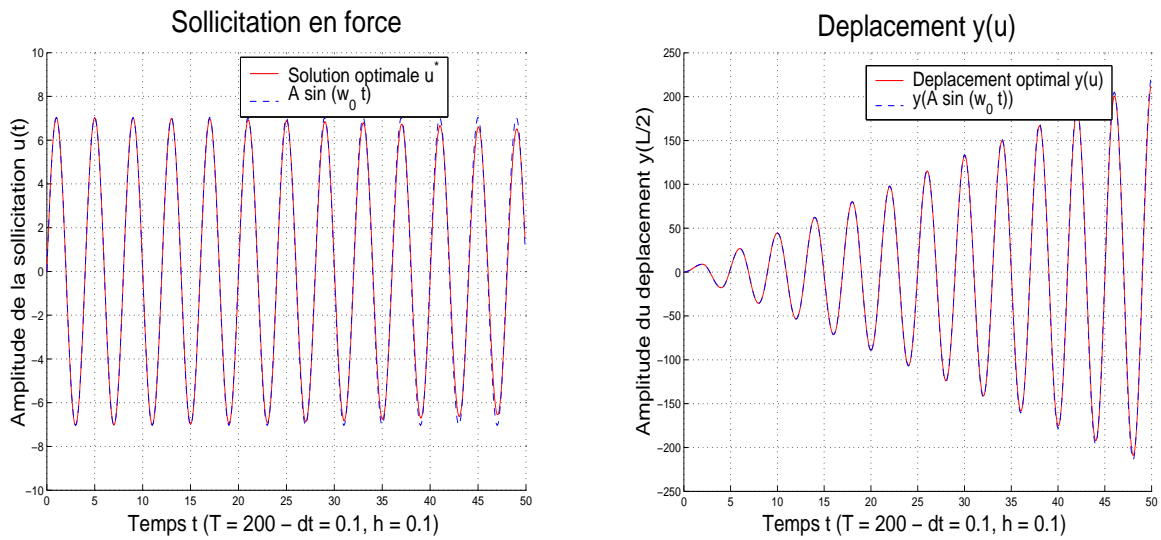


FIG. 1.3 – Convergence locale vers la sollicitation résonante dans  $L^2_{loc}(0, +\infty)$

où  $u \in U$  désigne un paramètre important du système<sup>32</sup> et  $V^*$  l'espace dual topologique de l'espace de Hilbert  $V$ .

On supposera de plus que le théorème des fonctions implicites s'applique au système d'évolution abstrait, c'est-à-dire que pour tout  $u \in U$ , il existe au moins un élément  $y(u) \in Y$  telle que  $e(y(u), u) = 0$  dans  $V^*$ . Afin d'illustrer cette définition abstraite, nous fournissons un exemple d'opérateur d'évolution standard en mécanique des fluides :

**Exemple 1.1** *Considérons un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Nous introduisons le système de Navier-Stokes avec un opérateur de contrôle borné,*

$$\begin{aligned} \partial_t y + (\nabla y) \cdot y - \nu \Delta y + \nabla p &= B u, & Q^T &\stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} y &= 0, & Q^T & \\ y &= 0, & \Sigma^T &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \times (0, T) \\ y(t=0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

On définit alors les espaces standards dans l'analyse du système de Stokes :

$$\begin{aligned} H &= \{v \in (L^2(\Omega))^d, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v \cdot n = 0\} \\ W &= \{v \in (H_0^1(\Omega))^d, \quad \operatorname{div} v = 0\} \end{aligned}$$

On considère un espace de contrôle Hilbertien quelconque  $U$  et un opérateur de contrôle borné  $B \in \mathcal{L}(U, L^2(0, T; W^*))$ .

L'espace d'état est donné par

$$Y = \left\{ y \in L^2(0, T; W), \quad \frac{d}{dt} y \in L^2(0, T; W^*) \right\}$$

et on choisit l'espace des fonctions tests,

$$V = L^2(0, T; W) \times H$$

Dans ces conditions, l'opérateur d'état est donné par la définition suivante,

$$\begin{aligned} e : Y \times U &\longrightarrow V^* \\ (y, u) &\longmapsto (e_1(y, u), e_2(y, u)) \end{aligned}$$

où  $e_1$  et  $e_2$  sont définis par l'intermédiaire de leurs actions sur les fonctions tests  $(w, h) \in V$ ,

$$\langle e_1(y, u), w \rangle = \langle \partial_t y, w \rangle + \langle (\nabla y) \cdot y, w \rangle + \nu (\nabla y, \nabla w)_{L^2(Q^T)} - \langle B u, w \rangle, \quad \forall w \in L^2(0, T; W) \quad (1.29)$$

$$\langle e_2(y, u), h \rangle = (y_{t=0} - y_0, h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall h \in H \quad (1.30)$$

Ce système d'évolution nonlinéaire vérifie le théorème des fonctions implicites et l'on peut établir le résultat suivant :

**Théorème 1.1** ([106],[150],[87]) *Pour  $y_0 \in H$  et quelque soit  $u \in \times U$ , l'équation*

$$e(y, u) = 0, \quad \text{dans } V^* \quad (1.31)$$

*admet une unique solution faible  $y(u) \in W$  continue par rapport à  $u \in U$ .*

<sup>32</sup>. Conditions aux limites, perturbations distribués, coefficients ...

## 1.3 Critère global de stabilité

Intéressons nous à l'évolution d'une partie de l'état  $y(u)$  pour  $u \in U$ . Ceci peut être réalisé de façon abstraite en considérant un opérateur d'observation continu  $C : Y \rightarrow Z$  où  $Z$  désigne un espace de Hilbert.

**Définition 1.2** *Etant donné un seuil critique de stabilité  $S_c \in \mathbb{R}^+$ , le système mécanique sera dit instable pour le paramètre  $u \in U$  sur l'intervalle de temps  $(0, T)$  si*

$$I(u) \stackrel{\text{def}}{=} \|C(y(u))\|_Z^2 \geq S_c \quad (1.32)$$

où  $y(u)$  est solution de l'équation (1.27) associée à  $u \in U$ .

**Remarque 1.5** *Nous donnons à cette définition le nom de stabilité conditionnelle dans le sens où le système est considéré comme stable s'il vérifie une condition de borne sur une partie de son état.*

Il existe alors plusieurs moyens de poser le problème de l'analyse de stabilité. Nous en proposons deux utilisant respectivement :

- la maximisation de l'observation,
- la minimisation conditionnelle.

### 1.3.1 Maximisation de l'observation

Etant donné un seuil  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , il s'agit de rechercher les contrôles situés dans la boule de rayon  $\lambda$ , maximisant l'observation. C'est-à-dire, que l'on recherche  $u_\lambda$  solution du problème de maximisation suivant,

$$I(u_\lambda) = \begin{cases} \max & I(u) \\ u \in U, \\ \|u\|_U^2 \leq \lambda \end{cases} \quad (1.33)$$

avec  $I(u) = \|C(y(u))\|_Z^2$ .

La question de la stabilité consiste donc à déterminer le contrôle maximisant de norme minimale produisant une observation au dessus du seuil  $S_c$ , c'est-à-dire un contrôle critique  $u_{\lambda^c} \in U$  avec  $\lambda^c$  solution du problème de minimisation suivant,

$$\lambda^c = \begin{cases} \min & \lambda \\ \lambda \in \mathbb{R}^+, \\ I(u_\lambda) \geq S_c \end{cases} \quad (1.34)$$

Supposons que le problème de maximisation (1.33) admette une unique solution  $u_\lambda \in U$  continue par rapport à  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . De plus on suppose que  $I(u_\lambda)$  est continue par rapport à  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $I(u_0) = S_0 < S_c$  ainsi que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(u_\lambda) = +\infty$ .

**Proposition 1.7** *Sous les hypothèses précédentes, le problème (1.34) admet une unique solution  $\lambda^c$  telle que  $I(u_{\lambda^c}) = S_c$ .*

**Preuve :** Le fait que  $I(u_0) = S_0 < S_c$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(u_\lambda) = +\infty$  conjugué avec la continuité de  $I(u_\lambda)$  nous permet de conclure qu'il existe au moins une solution à l'équation  $I(u_\lambda) = S_c$ . Ainsi le problème (1.34) admet au moins une solution  $\lambda^c$ . Supposons que  $I(u_{\lambda^c}) > S_c$ , comme  $I(u_\lambda)$  est continue et que  $I(u_0) = S_0 < S_c$ , il existe  $\lambda_1 < \lambda^c$  telle que  $I(u_{\lambda_1}) = S_c$ . Ainsi l'optimalité de  $\lambda^c$  est contredite.

□

Il s'agit alors de rechercher les solutions de l'équation  $I(u_\lambda) = S_c$  sur  $\mathbb{R}^+$  et de sélectionner la plus petite. Afin de déterminer une solution du problème de maximisation (1.33), on pourra s'appuyer sur des algorithmes de type Lagrangien augmenté [12], [116] et leurs versions SQP associées [93], [94]. Ces méthodes sont fondées sur le calcul du gradient de la fonctionnelle lagrangienne associée à Eq. (1.33). La quantité importante à calculer est alors le gradient  $\nabla I(u)$ . Formellement, on peut écrire

$$(\nabla I(u), \delta u)_U = 2(C(y(u)), C_y(y(u)) \cdot y'(u; \delta u))_Z$$

avec  $y'(u; \delta u)$  la dérivée directionnelle de  $y(u)$  dans la direction  $\delta u \in U$ . En utilisant l'équation d'état (1.27), on déduit l'identité,

$$e_y(y(u), u) \cdot y'(u; \delta u) + e_u(y(u), u) \cdot \delta u = 0$$

où  $e_y(\cdot, u) \in \mathcal{L}(Y, V^*)$  et  $e_u(y, \cdot) \in \mathcal{L}(U, V^*)$  désigne respectivement la dérivée partielle de l'opérateur  $e$  par rapport à  $y \in Y$  et à  $u \in U$ . Ainsi,  $y'(u; \delta u)$  est solution de l'équation linéarisée,

$$e_y(y(u), u) \cdot z + e_u(y(u), u) \cdot \delta u = 0, \quad \text{dans } V^* \tag{1.35}$$

On introduit alors la solution  $\varphi(u)$  du problème adjoint,

$$e_y^* \cdot \varphi = -2C_y^* \cdot C(y(u)), \quad \text{dans } V^* \tag{1.36}$$

On en déduit alors que le gradient de  $I$  est donné par l'expression,

$$\nabla I(u) = e_u^* \cdot \varphi \tag{1.37}$$

**Exemple 1.2** En reprenant l'exemple (1.1), nous pouvons expliciter l'opérateur linéarisé et l'opérateur adjoint nécessaires au calcul du gradient de la fonctionnelle  $J(y, u)$ .

**Proposition 1.8 ([1])** L'opérateur de Navier-Stokes  $e = (e^1, e^2) : X = Y \times U \rightarrow V^*$  est dérivable et l'action de ces dérivées partielles est donnée par les identités suivantes,

$$\langle e_y^1 \cdot z, w \rangle = \langle \partial_t z, w \rangle + \langle (\nabla y) \cdot z, w \rangle + \langle (\nabla z) \cdot y, w \rangle + \nu (\nabla z, \nabla w)_{L^2(Q^T)}, \quad \forall w \in L^2(0, T; W)$$

$$\langle e_u^1 \cdot \delta u, w \rangle = -\langle B \delta u, w \rangle \quad \forall w \in L^2(0, T; W)$$

$$\langle e_y^2 \cdot z, h \rangle = (z(t=0), h)_H, \quad \forall h \in H$$

$$\langle e_u^2 \cdot \delta u, h \rangle = 0, \quad \forall h \in H$$

$$\tag{1.38}$$



**Proposition 1.9 ([1],[87])** *Considérons les éléments  $y \in Y$  et  $\delta u \in U$  alors l'équation linéarisée,*

$$\langle e_y \cdot z, (w, h) \rangle + \langle e_u \cdot \delta u, (w, h) \rangle = 0, \quad \forall (w, h) \in V \quad (1.39)$$

*admet une unique solution  $z \in Y$  qui est la solution faible du système suivant,*

$$\begin{cases} \partial_t z + (\nabla y) \cdot z + (\nabla z) \cdot y - \nu \Delta z + \nabla q = B \delta u, & Q^T \\ \operatorname{div}(z) = 0, & Q^T \\ z(t=0) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (1.40)$$

**Proposition 1.10 ([87])** *Etant donné  $y \in Y$  et un opérateur  $C : Y \rightarrow Z$  telle que  $f = 2C_y^* \cdot C(y) \in Y^*$ , alors l'équation adjointe,*

$$\langle e_y^* \cdot \varphi, (w, h) \rangle + \langle f, (w, h) \rangle = 0, \quad \forall (w, h) \in V \quad (1.41)$$

*admet une unique solution  $\varphi = (\varphi, \varphi_0) \in V$ . Si de plus,  $f \in L^q(0, T; V^*) \cap Y^*$  pour  $1 \leq q \leq +\infty$ , alors  $\varphi$  est la solution variationnelle du système suivant,*

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi + (\nabla y)^T \cdot \varphi - (\nabla \varphi) \cdot y - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = f, & Q^T \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q^T \\ \varphi(t=T) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (1.42)$$

et  $\varphi_0 = \varphi(t=0)$ .

### 1.3.2 Minimisation conditionnelle

Au lieu de passer par la maximisation de l'observation, il est possible de rechercher directement le contrôle critique  $u_c \in U$  de norme minimale. Il s'agit de trouver  $u_c \in U$  solution du problème de minimisation sous contraintes suivant,

$$\begin{cases} \min & \|u\|_U^2 \\ u \in U, \\ I(u) \geq S_c \end{cases} \quad (1.43)$$

avec  $I(u) = \|C(y(u))\|_Z^2$ .

On suppose que l'application,

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow Z \\ u &\longmapsto C(y(u)) \end{aligned}$$

est continue, compacte et coercive. De plus, on suppose que  $I(u=0) = S_0 < S_c$  dans ce cas la proposition suivante est vérifiée,

**Proposition 1.11** *Sous les hypothèses précédentes, le problème (1.43) admet au moins une solution  $u_c \in U$ .*

**Preuve :** On applique la même démarche que la preuve de la Prop. (1.5).

□

Afin de résoudre le problème (1.43), on pourra appliquer comme pour le problème (1.33), des algorithmes du type SQP-Lagrangien augmenté.

La proposition suivante donne le lien qui existe entre le problème (1.33) et le problème (1.43).

**Proposition 1.12** *Etant données une solution  $u_c$  du problème (1.43) et une solution  $\lambda^c$  du problème (1.34) alors l'identité suivante est vérifiée,*

$$\|u_c\|^2 = \lambda^c \quad (1.44)$$

**Preuve :** On réécrit le problème (1.43) sous la forme suivante,

$$\begin{cases} \min & \lambda \\ (\lambda, u) \in & \mathbb{R}^+ \times U, \\ \|u\|_{\mathcal{U}(0,T;U)}^2 & \leq \lambda \\ I(u) & \geq S_c \end{cases} \quad (1.45)$$

on note  $(\lambda^c, u_c) \in \mathbb{R}^+ \times U$  un couple solution du problème (1.45).

- Supposons que  $\lambda^c \leq \lambda_c$ . Comme la solution  $u_{\lambda^c} \in U$  du problème (1.33) associée à  $\lambda^c$  est telle que  $\|u_{\lambda^c}\|^2 \leq \lambda^c \leq \lambda_c$  et  $I(u_{\lambda^c}) \geq S_c$ . Ainsi  $\lambda^c$  est un élément admissible du problème (1.45) inférieure à  $\lambda_c$ , ce qui contredit l'optimalité de  $\lambda_c$ .
- Supposons que  $\lambda_c \leq \lambda^c$ , alors la solution  $u_{\lambda_c} \in U$  du problème (1.33) associée à  $\lambda_c$  est telle que  $I(u_{\lambda_c}) \leq S_c$ , car dans le cas contraire cela contredirait l'hypothèse d'optimalité de  $\lambda^c$ . Or  $\lambda_c$  est telle que  $I(u_c) \geq S_c$  avec  $\|u_c\|^2 \leq \lambda_c$ . En utilisant les hypothèses de maximalité de  $u_{\lambda_c}$ , nous avons  $I(u_c) \leq I(u_{\lambda_c})$ . On en conclut que  $I(u_c) \leq S_c$ , d'où une contradiction.

Finalement on a bien  $\lambda^c = \lambda_c$

□

## 1.4 Cas d'un système d'évolution linéaire

Intéressons-nous au cas particulier où le système d'évolution est linéaire continu, ainsi que l'opérateur d'observation,

$$\begin{aligned} e(y, u) &= y - Au, \quad A \in \mathcal{L}(U; Y), \\ C(y) &= Cy, \quad C \in \mathcal{L}(Y; Z). \end{aligned}$$

Le problème de stabilité conditionnelle (1.43) s'écrit alors dans ce cas,

$$\begin{cases} \min & \|u\|_U^2 \\ u \in & U, \\ \|Lu\|_Z^2 & \geq S_c \end{cases} \quad (1.46)$$

où  $L = C \cdot A \in \mathcal{L}(U; Z)$  désigne l'opérateur linéaire continu composé.

**Remarque 1.6** *Etant donnée une solution  $u_c$  du problème (1.46), par linéarité, l'élément  $S_c^{-1/2}u_c$  est solution du problème (1.46) avec  $S_c = 1$ .*

D'après la remarque précédente, nous pouvons considérer de façon générique le problème suivant,

$$\begin{cases} \min & \|u\|_U^2 \\ u \in U, \\ \|Lu\|_Z^2 \geq 1 \end{cases} \quad (1.47)$$

Nous étudions le problème général suivant :

Etant donnés  $X, Y$  des espaces de Hilberts réels et  $L : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire compact tel que  $L^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ , il s'agit de résoudre le problème de minimisation suivant,

$$\begin{cases} \min & \|x\|_X^2 \\ x \in X, \\ \|Lx\|_Y^2 \geq 1 \end{cases} \quad (1.48)$$

**Proposition 1.13** *Le problème (1.48) admet au moins une solution  $x^* \in X$ .*

**Preuve :** L'ensemble  $X_{ad} = \{x \in X, \|Lx\|_Y^2 \geq 1\}$  est un ensemble ouvert concave non-vidé. Ainsi les résultats standards pour les problèmes d'optimisation convexe ne s'appliquent pas. Cependant, nous pouvons montrer que si une solution existe alors elle se situe sur la frontière  $\partial X_{ad} = \{x \in X, \|Lx\|_Y^2 = 1\}$ . En effet, supposons qu'une solution  $x_1 \in X$  du problème existe et que  $\|Lx_1\|_Y^2 > 1$ , alors il est aisé de vérifier que l'élément  $x_2 = \|Lx_1\|_Y^{-1} \cdot x_1$  est tel que  $\|Lx_2\|_Y^2 = 1$  et  $\|x_2\|_X^2 < \|x_1\|_X^2$ . Ce qui contredit l'optimalité de  $x_1$ . On se ramène ainsi à étudier le problème,

$$\begin{cases} \min & \|x\|_X^2 \\ x \in X, \\ \|Lx\|_Y^2 = 1 \end{cases} \quad (1.49)$$

En utilisant le fait que la norme  $\|\cdot\|_X^2$  est convexe et s.c.i et que  $L$  transforme une suite faiblement convergente dans  $X$  en une suite fortement convergente dans  $Y$ . Il est possible de conclure que le problème (1.49) admet au moins une solution  $x^* \in X$  avec  $\|Lx^*\|_Y^2 = 1$ .  $\square$

**Proposition 1.14** *Le problème (1.49) est équivalent, à une renormalisation près, au problème de maximisation suivant :*

$$\begin{cases} \max & \|Lx\|_Y^2 \\ x \in X, \\ \|x\|_X^2 = 1 \end{cases} \quad (1.50)$$

**Preuve :** Etant donnée une solution  $x_{min} \in X$  du problème (1.49), on définit  $x_{max} = \|x_{min}\|_X^{-1} x_{min}$ , ainsi  $\|x_{max}\|_X^2 = 1$  et  $\|Lx_{max}\|_Y^2 = \|x_{min}\|_X^{-2}$ . Supposons que  $x_{max}$  ne soit pas solution de (1.50) alors il existe  $x_1$  de norme unité tel que  $\|Lx_1\|_Y^2 \geq \|Lx_{max}\|_Y^2 = \|x_{min}\|_X^{-2}$ . Posons  $x_2 = \|Lx_1\|_Y^{-1} x_1$  alors  $\|Lx_2\|_Y^2 = 1$  et  $\|x_2\|_X^2 = \|Lx_1\|_Y^{-2} \leq \|x_{min}\|_X^2$  ce qui contredit l'optimalité de  $x_1$ . La réciproque se déduit de la même façon.  $\square$

**Proposition 1.15** *Les solutions du problème (1.50) sont solutions du problème aux valeurs propres suivant : Rechercher la plus grande valeur  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^+$  et les vecteurs propres*

associés  $\bar{u} \in U$  du problème spectral compact auto-adjoint suivant,

$$L^* L x = \mu x, \text{ dans } X \tag{1.51}$$

**Preuve :** On applique la proposition VI.9 dans [19] avec l'opérateur compact auto-adjoint  $T = L^* L \in \mathcal{L}(X)$ .

□

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit un concept de stabilité non-linéaire fondé sur l'utilisation d'un critère de seuil associé à une quantité caractéristique du système d'évolution. La recherche des paramètres critiques de stabilité fait intervenir la résolution d'un problème d'optimisation non-convexe sous-contraintes d'état. Nous avons fourni, dans le cas général, quelques éléments permettant l'élaboration d'un algorithme d'optimisation en dimension infinie. Dans le cas linéaire, nous avons montré comment ce problème d'optimisation se réduit à un problème symétrique aux valeurs propres lié à la maximisation du critère d'évaluation du système. Des tests numériques, dans le cas de l'équation des ondes unidimensionnelle, ont montré que la résolution de ce problème aux valeurs propres pouvait fournir des informations sur les paramètres critiques de résonance. Enfin le comportement asymptotique du problème de stabilité, lorsque l'horizon temporel tend vers l'infini, reste à identifier dans le cas linéaire et non-linéaire.



# Chapitre 2

## Suivi d'instabilités et contrôle sur les trajectoires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Cas général . . . . .</b>	<b>50</b>
2.1.1	Critère de suivi exact et approché sur les trajectoires . . . . .	50
2.1.2	Critère intégral de suivi de trajectoires . . . . .	51
<b>2.2</b>	<b>Cadre des opérateurs d'évolution linéaire . . . . .</b>	<b>52</b>
2.2.1	Suivi approché de trajectoires . . . . .	52
2.2.2	Suivi exact de trajectoires . . . . .	56
2.2.3	Cas mal-posé du problème de suivi exact . . . . .	60
<b>2.3</b>	<b>Algorithmes de suivi de trajectoire: Cas linéaire . . . . .</b>	<b>62</b>
2.3.1	Régularisation du type Tykhonov . . . . .	62
2.3.2	Régularisation par relaxation . . . . .	64
<b>2.4</b>	<b>Suivi de trajectoires pour un système parabolique linéaire</b>	<b>67</b>
2.4.1	Position du problème . . . . .	67
2.4.2	Cadre mathématique . . . . .	68
2.4.3	Illustration numérique . . . . .	75
<b>2.5</b>	<b>Suivi de trajectoires pour l'équation de Burgers . . . . .</b>	<b>95</b>
2.5.1	Position du problème . . . . .	95
2.5.2	Existence et conditions d'optimalité . . . . .	96
2.5.3	Approximation numérique du problème de contrôle . . . . .	104
2.5.4	Méthode d'obtention de l'adjoint discret . . . . .	107

---

La définition du caractère instable d'un système introduit précédemment est fondée sur une condition de borne d'une quantité globale sur l'état dans l'intervalle de temps  $(0, T)$ . Dans ce chapitre, nous introduisons une notion plus locale mais cependant plus arbitraire de la stabilité. En effet, nous dirons que le système est instable s'il suit une trajectoire considérée comme instable. L'analyse de stabilité consistera alors à déterminer le paramètre critique de norme minimale permettant de suivre cette trajectoire instable de façon exacte ou approchée.

## 2.1 Cas général

Dans le domaine de l'ingénierie et notamment celui du génie civil, l'étude de stabilité d'une structure au sein ou non d'un écoulement fluide passe par une étape de caractérisation de ces instabilités au moyen d'essais expérimentaux. Ainsi, il est souvent possible d'obtenir une information sur le type d'instabilités pouvant se développer dans le système. Cette constatation phénoménologique nous pousse à élaborer deux types d'hypothèses de travail pour conduire notre analyse de stabilité.

### 2.1.1 Critère de suivi exact et approché sur les trajectoires

**Hypothèse 2.1** *Les trajectoires instables du système d'évolution (1.27) vérifient la relation d'observabilité suivante,*

$$C(y_i) = z_i \text{ dans } Z \quad (2.1)$$

où  $z_i$  est une donnée du problème et correspond à la signature des instabilités pouvant se développer dans le système.

**Remarque 2.1** *Nous reprenons les notations et définitions du chapitre précédent.*

Il s'agit maintenant de trouver le paramètre de contrôle de norme minimale permettant de réaliser la condition d'observabilité instable (2.1), c'est-à-dire que l'on cherche un couple  $(y_c, u_c) \in Y \times U$  solution du problème de minimisation suivant,

$$\|u_c\|_U^2 = \min_{\left\{ \begin{array}{l} (y, u) \in Y \times U, \\ e(y, u) = 0, \text{ dans } V^*, \\ C(y) = z_i, \text{ dans } Z \end{array} \right.} \|u\|_U^2 \quad (2.2)$$

Le problème (2.2) met en jeu la minimisation d'une fonctionnelle convexe dans un ensemble de contraintes qui n'est pas a priori convexe et éventuellement vide. Une manière classique de relaxer un tel système est d'autoriser une marge d'erreur au niveau de la satisfaction de la contrainte d'observabilité de l'instabilité (2.1). Il s'agit alors de résoudre le problème de minimisation suivant,

$$\min_{\left\{ \begin{array}{l} (y, u) \in Y \times U, \\ e(y, u) = 0, \text{ dans } V^*, \\ \|C(y) - z_i\|_Z^2 \leq \delta \end{array} \right.} \|u\|_U^2 \quad (2.3)$$

avec  $\delta \ll 1$ .

Dans les applications, nous utiliserons souvent une version pénalisée du problème de minimisation (2.2),

$$\begin{cases} \min & \|C(y) - z_i\|_Z^2 + \alpha \|u\|_U^2 \\ (y,u) \in Y \times U, \\ e(y,u) = 0, \text{ dans } V^* \end{cases} \quad (2.4)$$

avec  $\alpha \ll 1$ , ainsi que sa version sans contraintes utilisant le théorème des fonctions implicites,

$$\min_{u \in U} \|C(y(u)) - z_i\|_Z^2 + \alpha \|u\|_U^2 \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Critère intégral de suivi de trajectoires

Dans le cas où l'espace d'observation est de la forme  $\mathcal{Z}(0,T;Z)$ , avec  $(\mathcal{Z},Z)$  deux espaces de Hilbert, on peut définir la notion suivante,

**Hypothèse 2.2** *Les trajectoires instables du système d'évolution (1.27) vérifient la relation d'observabilité globale suivante,*

$$\|C(y_i)\|_Z^2 = w_i, \text{ dans } \mathcal{Z}(0,T) \quad (2.6)$$

où  $w_i \in \mathcal{Z}(0,T)$  est une donnée du problème et correspond à la signature des instabilités pouvant se développer dans le système.

On peut alors définir l'ensemble des problèmes de minimisation associés à ce critère,

– Suivi intégral exact :

$$\begin{cases} \min & \|u\|_U^2 \\ (y,u) \in Y \times U, \\ e(y,u) = 0, \text{ dans } V^*, \\ \|C(y)\|_Z^2 = w_i, \text{ dans } \mathcal{Z}(0,T) \end{cases} \quad (2.7)$$

– Suivi intégral approché :

$$\begin{cases} \min & \|u\|_U^2 \\ (y,u) \in Y \times U, \\ e(y,u) = 0, \text{ dans } V^*, \\ \left| \|C(y)\|_Z^2 - w_i \right|_{\mathcal{Z}(0,T)}^2 \leq \delta \end{cases} \quad (2.8)$$

– Suivi intégral pénalisé :

$$\begin{cases} \min & \left| \|C(y)\|_Z^2 - w_i \right|_{\mathcal{Z}(0,T)}^2 + \alpha \|u\|_U^2 \\ (y,u) \in Y \times U, \\ e(y,u) = 0, \text{ dans } V^* \end{cases} \quad (2.9)$$



## 2.2 Cadre des opérateurs d'évolution linéaire

Dans ce paragraphe, nous mettons l'accent sur l'étude du cas linéaire, c'est-à-dire que nous faisons les hypothèses suivantes,

$$\begin{aligned} e(y,u) &= y - Au, \quad A \in \mathcal{L}(U; Y), \\ C(y) &= Cy, \quad C \in \mathcal{L}(Y; Z) \end{aligned}$$

Pour étudier les concepts définis précédemment, nous nous plaçons dans le cadre général suivant :

Etant donnés  $X, Y$  des espaces de Hilberts réels et  $L : X \rightarrow Y^*$  un opérateur linéaire et une cible  $z_d \in Y^*$ , il s'agit de résoudre les problèmes de contrôle suivants,

– Suivi exact de trajectoires :

$$\begin{cases} \min & \|x\|_X^2 \\ x \in X, \\ Lx = z_d, \text{ dans } Y^* \end{cases} \quad (2.10)$$

– Suivi approché de trajectoires :

$$\begin{cases} \min & \|x\|_X^2 \\ x \in X, \\ \|Lx - z_d\|_{Y^*}^2 \leq \delta \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.2.1 Suivi approché de trajectoires

Etant donné  $L : \mathcal{D}(L) \subset X \rightarrow Y^*$  un opérateur linéaire, non-borné, fermé, continu, à domaine dense, nous cherchons à résoudre le problème de minimisation suivant,

$$\begin{cases} \min & \|x\|_X^2 \\ x \in X, \\ \|Lx - z_d\|_{Y^*} \leq \delta \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $z_d \in Y^*$  et  $\delta > 0$ .

Une première étape dans l'étude de ce problème est d'étudier l'ensemble réalisable,

$$X_\delta = \{x \in X, \|Lx - z_d\|_{Y^*} \leq \delta\} \quad (2.13)$$

On introduit alors la notion de propriété de suivi approché de trajectoires,

**Définition 2.1** *L'opérateur  $L$  vérifie la propriété de suivi approché si et seulement si quelque soit  $z_d \in Y^*$  et pour tout  $\delta > 0$ , l'ensemble  $X_\delta$  est non-vide.*

La satisfaction de cette propriété est liée à une notion de densité,

**Proposition 2.1** *Quelque soit  $z_d \in Y^*$ , l'ensemble  $X_\delta \neq \emptyset$  pour tout  $\delta > 0$  si et seulement si  $Y^* \subset \overline{\mathcal{R}_L(X)}$  où  $\mathcal{R}_L(X)$  désigne l'image par  $L$  de l'espace de Hilbert  $X$ .*

**Preuve :** On se sert tout simplement de la définition de l'adhérence de l'image d'un opérateur.

□

**Remarque 2.2** En utilisant le fait que  $\mathcal{N}_Y(L^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}_L(X)}$  où  $\mathcal{N}_Y(L^*)$  désigne le noyau dans  $Y$  de l'opérateur adjoint  $L^*$  ([19], Th. II.18), la propriété de suivi approché de trajectoires est équivalente à l'injectivité de l'opérateur adjoint  $L^*$ , c'est-à-dire  $\mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$ .

**Remarque 2.3** L'opérateur adjoint  $L^* : Y \rightarrow X^*$  existe grâce au fait que l'opérateur  $L$  est défini de façon dense ([19], pp. 27).

**Lemme 2.1**  $X_\delta$  est un sous-ensemble convexe, fermé de  $X$ .

**Preuve :**

– convexité :

On considère  $\theta \in [0,1]$  et  $x_1, x_2 \in X_\delta$ . Par linéarité,

$$L(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) = \theta Lx_1 + (1 - \theta)Lx_2$$

d'où

$$\begin{aligned} \|L(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) - z_d\|_{Y^*}^2 &\leq \theta^2 \|Lx_1 - z_d\|_{Y^*}^2 + (1 - \theta)^2 \|Lx_2 - z_d\|_{Y^*}^2 \\ &\leq \theta^2 \delta^2 + (1 - \theta)^2 \delta^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $\|L(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) - z_d\|_{Y^*} \leq \delta$ , c'est-à-dire

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in X_\delta$$

– Fermeture :

$$X_\delta = L^{-1}([z_d - \delta, z_d + \delta])$$

Ainsi  $X_\delta$  est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

**Proposition 2.2** Etant donnée une cible  $z_d \in Y^*$ , sous l'hypothèse que  $\mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$ , le problème (2.12) admet une unique solution  $x_\delta \in X$ ,  $\forall \delta > 0$ .

**Preuve :** La solution  $x_\delta \in X$  du problème (2.12) si elle existe correspond à la projection orthogonale dans  $X$  du vecteur 0 sur  $X_\delta$ , c'est-à-dire  $x_\delta = P_{X_\delta}^\perp(0)$ . L'ensemble  $X_\delta$  est convexe fermé et d'après l'hypothèse de suivi approché, c'est un ensemble non-vide. On en applique alors le théorème fondamental de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert ([19], Th. V.2).

□

La forme du problème (2.12) se prête à une analyse plus fine fondée sur les principes de dualité de l'analyse convexe. Ainsi, nous utilisons un argument de dualité du type Legendre-Fenchel proposé par J.L Lions pour les problèmes de contrôle d'équations aux

dérivées partielles [109].

Introduisons la fonction caractéristique de l'ensemble  $B$ ,

$$I_B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x \in B \\ +\infty, & x \notin B \end{cases}$$

Il s'agit de résoudre le problème de minimisation sans contraintes,

$$\inf_{x \in X} \frac{1}{2} \|x\|_X^2 + I_{[0,+\delta]}(\|Lx - z_d\|_{Y^*}) \quad (2.14)$$

que l'on peut écrire sous la forme générale,

$$\inf_{x \in X} J(x) \quad (2.15)$$

avec  $J(x) = F(x) + G(Lx)$ ,  $F(x) = \frac{1}{2} \|x\|_X^2$  et  $G(z) = I_{[0,+\delta]}(\|z - z_d\|_{Y^*})$ . Il est alors possible d'utiliser le cadre du théorème de dualité de Fenchel-Rockafellar.

**Définition 2.2** *Etant donnée une fonctionnelle  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  continue, nous définissons la transformée de Legendre-Fenchel  $F^*$  associée à  $F$  grâce à,*

$$F^*(w) = \sup_{x \in X} (\langle x, w \rangle_{X, X^*} - F(x)) \quad (2.16)$$

**Théorème 2.1 ([45])** *Etant donnés  $X$  un espace de Banach et  $Y$  un espace vectoriel topologique séparé, soient deux fonctionnelles réelles convexes  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G : Y^* \rightarrow \mathbb{R}$  et un opérateur linéaire continu  $L \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ . Considérons le problème de minimisation suivant,*

$$\inf_{x \in X} (F(x) + G(Lx)) \quad (2.17)$$

*Supposons qu'il existe un élément  $x_0 \in X$  tel que  $F(x_0) < +\infty$ ,  $G(Lx_0) < +\infty$  et que  $G(\cdot)$  soit continue au point  $Lx_0 \in Y^*$ . Alors si l'infimum du problème (2.17) est fini, l'identité suivante est satisfaite,*

$$\inf_{x \in X} (F(x) + G(Lx)) = \sup_{y \in Y} (-F^*(L^*y) - G^*(-y)) \quad (2.18)$$

*et le supremum est atteint en au moins un point  $\hat{y} \in Y$ . De plus, si l'infimum est atteint en un point  $\hat{x} \in X$ , alors les conditions d'optimalités suivantes sont vérifiées,*

$$F_p(\hat{x}, \hat{y}) = F(\hat{x}) + F^*(L^*\hat{y}) - \langle L^*\hat{y}, \hat{x} \rangle = 0 \quad (2.19)$$

$$G_p(\hat{x}, \hat{y}) = G(L\hat{x}) + G^*(-\hat{y}) - \langle \hat{y}, L\hat{x} \rangle = 0 \quad (2.20)$$

Nous appliquons ce théorème au cas du suivi approché de trajectoires, et nous établissons le résultat suivant :

**Proposition 2.3** *Etant donnée une trajectoire  $z_d \in Y^*$ , en supposant que la propriété de suivi approché est satisfaite pour l'opérateur linéaire  $L : \mathcal{D}(L) \subset X \rightarrow Y^*$  alors le problème (2.12) admet une unique solution  $x_\delta \in X$ ,  $\forall \delta > 0$ . De plus, le problème suivant*

$$\min_{y \in Y} J_\delta(y) = \frac{1}{2} \|L^*y\|_{X^*}^2 + \delta \|y\|_Y - \langle z_d, y \rangle_{Y^*, Y} \quad (2.21)$$

*admet une unique solution  $y_\delta \in Y$ . Ces deux solutions sont reliées par l'identité suivante,*

$$x_\delta = \mathfrak{S}_X(L^*y_\delta) \quad (2.22)$$

*et on a,*

$$\|Lx_\delta - z_d\|_{Y^*} = \min\{\delta, \|z_d\|_{Y^*}\} \quad (2.23)$$

**Remarque 2.4**  $\mathfrak{S}_X$  désigne l'isomorphisme isométrique canonique de Riesz entre  $X^*$  et  $X$ .

**Preuve :** L'application du théorème (2.1), nécessite le calcul des transformées de Legendre-Fenchel associées à  $F(x) = \frac{1}{2} \|x\|_X^2$  et  $G(z) = I_{[-\delta, +\delta]}(\|z - z_d\|_{Y^*})$ . De façon évidente, il vient,

$$F^*(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{X^*}^2 \quad (2.24)$$

$$G^*(y) = \delta \|y\|_Y + \langle z_d, y \rangle_{Y^*, Y} \quad (2.25)$$

En utilisant le théorème (2.1), nous établissons que le problème (2.21) admet au moins une solution  $y_\delta \in Y$ .

La condition d'optimalité (2.19) s'écrit dans notre cas,

$$F_p(x_\delta, y_\delta) = \frac{1}{2} \|x_\delta\|_X^2 + \frac{1}{2} \|L^*y_\delta\|_{X^*}^2 - \langle x_\delta, L^*y_\delta \rangle_{X, X^*} = 0 \quad (2.26)$$

En utilisant l'inégalité de Young, il est possible d'établir que  $F_p(x, y) \geq 0$  et que l'égalité a lieu si tous les membres de  $F_p(x, y)$  sont égaux, c'est-à-dire

$$\|x_\delta\|_X^2 = \|L^*y_\delta\|_{X^*}^2 = \langle x_\delta, L^*y_\delta \rangle_{X, X^*} \quad (2.27)$$

Nous en déduisons aisément la relation (2.22).

En utilisant cette dernière identité, la propriété de suivi approché, c'est-à-dire,

$$\mathcal{N}_{Y^*}(L^*) = 0$$

et le fait que  $x_\delta$  est unique, nous en déduisons l'unicité de  $y_\delta \in Y$ .

La relation d'optimalité (2.20) s'écrit alors,

$$G_p(x_\delta, y_\delta) = \delta \|y_\delta\|_Y - \langle z_d, y_\delta \rangle_{Y^*, Y} + \langle Lx_\delta, y_\delta \rangle_{Y^*, Y} = 0 \quad (2.28)$$

On en déduit que

$$\delta \|y_\delta\|_Y = -\langle Lx_\delta - z_d, y_\delta \rangle_{Y^*, Y} \leq \|Lx_\delta - z_d\|_{Y^*} \|y_\delta\|_Y \quad (2.29)$$

Or  $\|Lx_\delta - z_d\|_{Y^*} \leq \delta$ , ainsi pour  $y_\delta \neq 0$ , on en déduit que

$$\|Lx_\delta - z_d\|_{Y^*} = \delta$$

Dans le cas où  $y_\delta = 0$ , alors  $x_\delta = 0$  grâce à la relation (2.22) et dans ce cas  $\|z_d\|_{Y^*} \leq \delta$ . Réciproquement, si  $\|z_d\|_{Y^*} \leq \delta$  alors  $x_\delta = 0$  est l'unique solution du problème (2.67). On en déduit alors la relation (2.23).  $\square$

Ainsi, par utilisation d'un argument de dualité, nous avons transformé un problème de minimisation convexe sous contraintes en un problème de minimisation non-convexe sans contraintes.

**Proposition 2.4** *La fonctionnelle  $J_\delta(y)$  est différentiable sur  $Y \setminus \{0\}$  et la condition d'optimalité du problème (2.21) est donnée par la relation pour  $y_\delta \neq 0$ ,*

$$\mathfrak{S}_Y L \mathfrak{S}_X L^* y_\delta + \frac{\delta}{\|y_\delta\|_Y} y_\delta = \mathfrak{S}_Y z_d \quad (2.30)$$

ou de façon variationnelle,

$$(L^* y_\delta, L^* y)_{X^*} + \frac{\delta}{\|y_\delta\|_Y} (y_\delta, y)_Y = \langle z_d, y \rangle_{Y^*, Y}, \quad \forall y \in Y \quad (2.31)$$

**Preuve :** Dérivons  $J_\delta(y)$  par rapport à  $y$ . Il vient pour  $y \neq 0$ ,

$$\langle \nabla J_\delta(y), \delta y \rangle_{Y^*, Y} = (L^* y, L^* \delta y)_{X^*} + \frac{\delta}{\|y\|_Y} (y, \delta y)_Y - \langle z_d, \delta y \rangle_{Y^*, Y}$$

On utilise alors

$$\begin{aligned} (L^* y, L^* \delta y)_{X^*} &= \langle \mathfrak{S}_X L^* y, L^* \delta y \rangle_{X, X^*} \\ &= \langle L \mathfrak{S}_X L^* y, \delta y \rangle_{Y^*, Y} \\ &= \langle \mathfrak{S}_Y L \mathfrak{S}_X L^*, \delta y \rangle_Y \end{aligned}$$

$\square$

## 2.2.2 Suivi exact de trajectoires

Etant donné  $L : \mathcal{D}(L) \subset X \rightarrow Y^*$  un opérateur linéaire non-borné continu, fermé, à domaine dense, nous cherchons à résoudre le problème de minimisation suivant,

$$\begin{cases} \min & \|x\|_X^2 \\ x \in X, \\ Lx = z_d, \text{ dans } Y^* \end{cases} \quad (2.32)$$

### 2.2.2.1 Cas standard

Une première étape dans l'étude de ce problème est d'étudier l'ensemble réalisable,

$$X_{ad} = \{x \in X, Lx = z_d \text{ dans } Y^*\} \quad (2.33)$$

**Définition 2.3** *L'opérateur  $L$  possède la propriété de suivi exact si et seulement si l'ensemble  $X_{ad}$  est non-vide, quelque soit la trajectoire cible  $z_d \in Y^*$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\mathcal{R}_L(X) = Y^*$ .*

**Remarque 2.5** *La condition de surjectivité  $\mathcal{R}_L(X) = Y^*$  est équivalente à  $\mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$  et  $\mathcal{R}_{L^*}(Y)$  fermé dans  $X^*$  ([19], Th. II.18-19).*

**Proposition 2.5** *Etant donné une trajectoire  $z_d \in Y$  et un opérateur  $L : \mathcal{D}(L) \subset X \rightarrow Y^*$  linéaire non-borné, continu, fermé, à domaine dense tel que  $\mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$  et  $\mathcal{R}_{L^*}(Y)$  fermé dans  $X^*$ , alors le problème (2.32) admet une unique solution  $\hat{x} \in X$ .*

**Preuve :** La fermeture de  $\mathcal{R}_{L^*}(Y)$  dans  $X^*$  est équivalente à celle de  $\mathcal{R}_L(X)$  dans  $Y^*$  ([19], Th. II.18). On en conclut que l'ensemble  $X_{ad}$  est un convexe, fermé, non-vide. En utilisant le théorème de projection orthogonale ([19], Th. V.2), on en déduit l'existence et l'unicité de  $\hat{x} = P_{X_{ad}}^\perp(0)$ .

□

Dans le contexte des problèmes de contrôle pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles, J-L. Lions a développé une méthode systématique (Unicité Hilbertienne [108]) permettant de résoudre le problème de la contrôlabilité exacte en définissant un isomorphisme entre deux espaces de Hilbert abstraits construits à partir des opérateurs et espaces de contrôle du problème. Dans le cadre du problème (2.32), il est possible d'adopter d'une démarche similaire.

**Définition 2.4** *Nous définissons l'opérateur  $\Lambda$ , appelé opérateur HUM,*

$$\begin{aligned} \Lambda : Y &\rightarrow Y^* \\ y &\mapsto L\mathfrak{S}_X L^* y \end{aligned} \quad (2.34)$$

**Proposition 2.6** *En supposant que  $\mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$ , alors la forme*

$$y \mapsto \langle \Lambda y, y \rangle_{Y^*, Y} \quad (2.35)$$

*définit une norme  $\|\cdot\|_\Lambda$  sur  $Y$ .*

**Preuve :** La positivité provient de l'identité suivante,

$$\begin{aligned} \|y\|_\Lambda &= \langle \Lambda y, y \rangle_{Y^*, Y} \\ &= \langle \mathfrak{S}_X L^* y, L^* y \rangle_{X, X^*} \\ &= \langle L^* y, L^* y \rangle_{X^*} \\ &= \|L^* y\|_{X^*}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

La définition de la semi-norme provient du fait que  $\|y\|_\Lambda = \|L^* y\|_{X^*}^2 = 0$  implique  $L^* y = 0$ . En supposant que le noyau de  $L^*$  est réduit au singleton  $\{0\}$ , on en déduit que  $y = 0$ .

□

On définit alors par densité l'espace de Hilbert abstrait  $F = \overline{Y}^{\|\cdot\|_\Lambda}$ . En utilisant la continuité de  $\Lambda$  sur  $Y$ , il est possible d'étendre  $\Lambda : F \rightarrow F^*$ . Par construction  $\Lambda \in \text{Isom}(F, F^*)$ , ce qui permet d'établir la proposition suivante,

**Proposition 2.7** *Sous l'hypothèse de la Prop. (2.6), l'équation*

$$\Lambda y = z_d \tag{2.36}$$

*admet une unique solution  $\hat{y} \in F$  si et seulement si  $z_d \in F^*$ .*

La question qui se pose désormais est de savoir sous quelles conditions le suivi exact des trajectoires est possible dans  $Y^*$ ?

**Proposition 2.8** *S'il existe une constante  $C_I > 0$  telle que,*

$$\|y\|_Y \leq C_I \|L^*y\|_{X^*} \tag{2.37}$$

*alors la propriété de suivi exact est vérifiée dans  $Y^*$  et  $\Lambda$  peut être inversé de façon continue.*

**Remarque 2.6** *L'inégalité (2.37) porte souvent le nom d'inégalité inverse (ou d'observabilité) dans le sens où elle fournit la continuité de l'inverse de l'opérateur  $\Lambda$ .*

**Preuve :** Par construction  $Y \subset F$ . Soit un élément  $f \in F$ , cela signifie que  $\|f\|_\Lambda < +\infty$ . Or par définition  $\|f\|_\Lambda = \|L^*f\|_{X^*}$ . Si l'on suppose que l'inégalité inverse est vérifiée, on a alors  $\|f\|_Y \leq C_I \|L^*f\|_{X^*} < +\infty$ , ce qui signifie que  $f \in Y$ , d'où l'équivalence  $F = Y$ .

□

**Remarque 2.7** *Dans le cas où  $\mathcal{R}_{L^*}(Y)$  n'est pas fermé dans  $X^*$ , l'opérateur HUM ne peut pas être inversé de façon continue. Le problème de suivi de trajectoire est mal posé au sens de Hadamard. Il est alors nécessaire de régulariser le problème de suivi de trajectoire afin de récupérer la stabilité de l'inverse.*

**Proposition 2.9** *Dans l'hypothèse où la propriété de contrôlabilité exacte a lieu, la solution du problème (2.32) est donnée par*

$$\hat{x} = \mathfrak{S}_X L^*(\Lambda^{-1}z_d) \tag{2.38}$$

### 2.2.2.2 Changements de norme

Sous la condition de posséder des informations supplémentaires sur la régularité du problème adjoint, il peut s'avérer intéressant de modifier l'espace de base  $Y$  fournissant l'espace abstrait  $F$ . Une remarque analogue a été formulée dans J-L. Lions ([108], pp. 122) pour la méthode H.U.M standard, dans le cas où la trace Dirichlet de l'équation des ondes ne peut-être définie dans  $L^2(0, T; \Gamma)$  mais dans un espace de Sobolev de régularité plus faible du type  $H^{\alpha, \beta}(\Sigma)$ . Pour bénéficier d'une observation dans  $L^2(0, T; \Gamma)$ , on augmente alors la régularité du contrôle. Ainsi on fait l'hypothèse de régularité suivante,

**Hypothèse 2.3** *Il existe un espace de Hilbert  $X_\mu^* \subset X^*$  tel que pour  $y \in Y$ ,*

$$L^*y \in X_\mu^* \tag{2.39}$$

Sous cette condition, il est possible de définir un nouvel opérateur de contrôlabilité,

**Définition 2.5** Nous définissons l'opérateur,

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu : Y &\rightarrow Y^* \\ y &\mapsto L\mathfrak{S}_{X_\mu}L^* \end{aligned} \quad (2.40)$$

et l'espace de Hilbert abstrait  $F_\mu = \overline{Y}^{\|\cdot\|_{\Lambda_\mu}}$ .

**Proposition 2.10** L'équation,

$$\Lambda y = z_d \quad (2.41)$$

admet une solution  $\hat{y} \in F_\mu$  si et seulement si  $z_d \in F_\mu^*$ . Dans ce cas, une solution du problème  $Lx = z_d$  est donnée par

$$\hat{x} = \mathfrak{S}_{X_\mu}L^*\hat{y} \quad (2.42)$$

**Remarque 2.8**

$$y \in F_\mu \Leftrightarrow L^*y \in X_\mu^*$$

Jusqu'ici, nous avons choisi l'espace des contrôles comme étant fixé (  $X$  ou  $X_\mu$  ) et nous avons tenté de définir et d'identifier un espace cible abstrait (  $F^*$  ou  $F_\mu^*$  ). Il existe un point de vue dual qui permet de fixer l'espace des cibles et de chercher à construire un espace de contrôle où le problème de reconstruction exacte a un sens.

**Hypothèse 2.4** Il existe un espace de Hilbert  $Y_\mu^* \subset Y^*$  tel que pour  $x \in X$ ,

$$Lx \in Y_\mu^* \quad (2.43)$$

Sous cette condition, il est possible de définir un nouvel opérateur de contrôlabilité,

**Définition 2.6** Nous définissons l'opérateur,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\mu : X &\rightarrow X^* \\ x &\mapsto L^*\mathfrak{S}_{Y_\mu}L \end{aligned} \quad (2.44)$$

et l'espace de Hilbert abstrait  $G_\mu = \overline{X}^{\|\cdot\|_{\tilde{\Lambda}_\mu}}$ .

**Proposition 2.11** L'équation,

$$\tilde{\Lambda}x = L^*\mathfrak{S}_{Y_\mu}z_d \quad (2.45)$$

admet une unique solution  $\hat{x} \in G_\mu$  si et seulement si  $L^*\mathfrak{S}_{Y_\mu}z_d \in G_\mu^*$ .

**Remarque 2.9**

$$x \in G_\mu \Leftrightarrow Lx \in Y_\mu^*$$

Ainsi le choix d'utiliser les opérateurs  $\Lambda_\mu$  ou  $\tilde{\Lambda}_\mu$  est fait selon les informations que l'on possède a-priori sur le système et sur les contraintes imposées au contrôle et à l'observation.



### 2.2.3 Cas mal-posé du problème de suivi exact

Plaçons nous dans la situation où la propriété de suivi approché de trajectoires est vérifiée mais que celle de suivi exact ne l'est pas, c'est-à-dire

- $\mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$ ,
- $R_L(X) \neq Y^*$ ,
- $\mathcal{N}_X(L) \neq \{0\}$ .

Dans ce cadre, il est tout de même possible de définir une solution approchée de l'équation

$$Lx = z_d \quad (2.46)$$

par l'intermédiaire de la notion de solution aux moindres carrés,

**Définition 2.7** *L'élément  $x_{ls} \in X$  tel que*

$$\|Lx_{ls} - z_d\|_{Y^*}^2 = \inf_{x \in X} \|Lx - z_d\|_{Y^*}^2 \quad (2.47)$$

*est appelé solution aux moindres carrés de l'équation (2.46). L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés est noté  $X_{ls}$ .*

Parmi les solutions aux moindres carrés, il est possible de définir celle de norme minimale,

**Définition 2.8** *Un élément  $x^* \in X$  telle que,*

$$\|x^*\|_X^2 = \inf_{x \in X_{ls}} \|x\|_X^2 \quad (2.48)$$

*est appelée solution minimale au sens des moindres carrés de l'équation (2.46).*

Avant de donner des résultats d'existence pour les solutions aux moindres carrés, nous introduisons la notion d'inverse généralisé (inverse de Moore-Penrose) qui se révélera être l'opérateur qui à une cible donnée associe la solution minimale au sens des moindres carrés,

**Définition 2.9** *Considérons la restriction de l'opérateur  $L$  à l'orthogonale du noyau de  $L$  dans  $X$ ,*

$$\tilde{L} = L|_{\mathcal{N}_X(L)^\perp} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_X(L)^\perp, \mathcal{R}_L(X)) \quad (2.49)$$

*L'inverse généralisé  $L^\dagger$  est défini comme l'unique extension linéaire de l'opérateur  $\tilde{L}^{-1}$  au domaine  $\mathcal{D}(L^\dagger) = \mathcal{R}_L(X) + \mathcal{R}_L(X)^\perp$  avec  $\mathcal{N}_X(L^\dagger) = \mathcal{R}_L(X)^\perp$ .*

**Proposition 2.12 ([47])** *L'inverse généralisé  $L^\dagger$  possède un graphe fermé, de plus  $L^\dagger$  est continu si et seulement si  $\mathcal{R}_L(X)$  est fermé dans  $Y^*$ .*

L'inverse généralisé est intimement lié à la notion de meilleure approximation aux moindres carrés.

**Proposition 2.13 ([47])** *Pour  $z_d \in \mathcal{D}(L^\dagger)$ , l'équation (2.46) possède une unique meilleure approximation donnée par,*

$$x^* = L^\dagger z_d \quad (2.50)$$

*L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés est donné par,*

$$X_{ls} = x^* + \mathcal{N}_X(L) \quad (2.51)$$

Un moyen de caractériser les solutions aux moindres carrés est de résoudre l'équation normale associée,

**Proposition 2.14 ([74])** *Pour  $z_d \in \mathcal{D}(L^\dagger)$ , le système (2.47) est équivalent à résoudre l'équation normale,*

$$(L^* \mathfrak{S}_Y L) x = L^* \mathfrak{S}_Y z_d, \quad \text{dans } X^* \quad (2.52)$$

**Remarque 2.10** *Il est possible d'établir l'identité suivante,*

$$L^\dagger = (L^* \mathfrak{S}_Y L)^\dagger L^*$$

**Remarque 2.11** *Dans le cas où  $\mathcal{R}_L(X)$  n'est pas fermé, nous constatons que l'opérateur  $L^\dagger$  n'est pas continu. Ceci signifie que le problème de reconstruction exacte est mal posé au sens de Hadamard. Il sera donc indispensable d'utiliser des outils de régularisation afin d'obtenir de façon stable une approximation des solutions aux moindres carrés.*

Dans [95], l'auteur démontre l'équivalence de l'opérateur HUM inverse et l'opérateur de Moore-Penrose dans le cas particulier du problème de la chaleur rétrograde. En utilisant la même démarche, il est possible d'établir le résultat suivant,

**Proposition 2.15** *Supposons  $\mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$  alors l'équivalence suivante est vérifiée*

$$\exists y \in F / \Lambda y = z_d \text{ dans } F^* \iff z_d \in \mathcal{R}_L(X) \quad (2.53)$$

*et la solution  $\hat{x} = L^* y$  de l'équation (2.46) est équivalente à la solution  $x^*$  fournie par l'inverse généralisé.*

**Preuve :** On identifie l'espace de Hilbert  $X$  avec son dual  $X^*$  de sorte que  $\mathfrak{S}_X \equiv I$ . On rappelle que l'espace  $F$  est défini comme fermeture de l'espace de Hilbert  $Y$  pour la norme,

$$\begin{aligned} \langle \Lambda y, y \rangle_{Y^*, Y} &= \langle L L^* y, y \rangle_{Y^*, Y} \\ &= \|L^* y\|_X^2 \leq C \|y\|_Y^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse que  $\mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$ , on en déduit que  $F^* \subset Y^*$ . Ainsi

$$\begin{aligned} z_d \in F^* &\iff z_d \in \mathcal{R}_{(L L^*)^{1/2}}(X) \\ &\iff z_d \in \mathcal{R}_L(X) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que  $\mathcal{R}_{(L L^*)^{1/2}}(X) = \mathcal{R}_L(X)$  ([47], Prop. 2.18). On en conclut que la solution  $x = L^* y$  fournie par la méthode H.U.M est l'extension linéaire de l'opérateur,

$$L^*(L L^*)^{-1} z_d \quad (2.54)$$

à l'élément  $z_d \in \mathcal{R}_L(X)$ , qui correspond exactement à l'inverse de Moore-Penrose  $L^\dagger z_d$  si  $\mathcal{R}_L^\perp(X) = \mathcal{N}_Y(L^*) = \{0\}$ .

□

Cette proposition permet de relier deux domaines de recherche très développés, à savoir la théorie du contrôle et la théorie des problèmes inverses. Il est possible notamment d'appliquer les résultats de convergence des méthodes de régularisation [47], à la résolution des problèmes de contrôle approché des équations aux dérivées partielles. Ce point pourra faire l'objet de recherches futures.

## 2.3 Algorithmes de suivi de trajectoire : Cas linéaire

Dans ce paragraphe, nous allons décrire un certain nombre d'algorithmes permettant de construire une approximation convergente de la solution aux problèmes (2.12) et (2.32). Nous nous placerons dans le cas défavorable mais néanmoins récurrent où seule la propriété de suivi approché des trajectoires est satisfaite pour l'opérateur linéaire  $L : \mathcal{D}(L) \subset X \rightarrow Y^*$ . Ainsi la difficulté majeure est de définir des méthodes de régularisation performantes garantissant stabilité et précision des solutions approchées.

Nous nous intéressons ici à deux classes particulières de régularisation :

1. la régularisation du type Tykhonov et ses variantes liée à la résolution du problème (2.32),
2. la régularisation par relaxation directement liée à la résolution du problème (2.12).

### 2.3.1 Régularisation du type Tykhonov

La résolution de problèmes d'optimisation sans contraintes est naturellement plus aisée que celle avec contraintes. Ainsi un moyen de simplifier la résolution du problème (2.32) et d'y apporter la coercivité nécessaire, consiste à pénaliser la contrainte sur l'état et de résoudre le problème suivant,

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|Lx - z_d\|_{Y^*}^2 + \frac{\alpha}{2} \|x\|_X^2 \quad (2.55)$$

avec  $\alpha > 0$ .

**Proposition 2.16** *Le problème (2.55) admet une unique solution  $x_\alpha$  qui est entièrement déterminée en tant que solution de l'équation normale régularisée,*

$$(\mathfrak{S}_X L^* \mathfrak{S}_Y L + \alpha I) x = \mathfrak{S}_X L^* \mathfrak{S}_Y z_d \quad (2.56)$$

Cette méthode simple permet de construire une suite d'approximation  $(x_\alpha)_{\alpha \geq 0}$  stable. Cependant il n'est pas possible de contrôler le résidu  $r(\alpha) = \|Lx_\alpha - z_d\|_{Y^*}^2$ . Ce défaut apparent peut-être éventuellement corrigé en mettant en oeuvre une stratégie de choix d'un paramètre de régularisation optimal permettant de garantir un certain niveau pour le résidu  $r(\alpha)$ .

Le principe de Morozov amorti [119] consiste à rechercher pour un niveau  $\delta \geq 0$  donné, le paramètre réalisant l'identité,

$$G(\alpha) = r(\alpha) + \alpha^\gamma \|x_\alpha\|_X^2 - \delta^2 = 0 \quad (2.57)$$

où  $x_\alpha$  est solution du problème régularisé (2.55) et  $\gamma \in [1, +\infty]$ . On note  $J(\alpha) = \frac{1}{2}r(\alpha) + \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha\|_X^2$ .

**Lemme 2.2 ([97])** *Pour  $\mathfrak{S}_Y z_d \notin N_Y(L^*)$  et  $J(0) < \frac{1}{2}\delta^2 \leq J(1)$ , il existe une unique solution  $\alpha_\delta \in ]0,1]$  à l'équation (2.57).*

Il est alors possible de décrire un algorithme de type Newton permettant de construire une suite convergente vers  $\alpha_\delta$ . Avant de décrire un tel algorithme, nous donnons quelques résultats concernant la différentiabilité de  $J$  et de  $x_\alpha$  par rapport à  $\alpha$ ,

**Lemme 2.3**  $\forall \alpha > 0$ , la solution  $x(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} x_\alpha$  de l'équation (2.56) est indéfiniment différentiable et ses dérivées successives  $(x^k(\alpha))_{k \geq 0} \in X$  sont caractérisées de façon unique

comme les solutions des équations suivantes,

$$(Lx, Lw)_{Y^*} + \alpha(x, w)_X = -k(x^{k-1}(\alpha), w)_X, \quad \forall w \in X \quad (2.58)$$

ou de façon forte

$$(\mathfrak{S}_X L^* \mathfrak{S}_Y L + \alpha I)v = -kx^{k-1}(\alpha) \quad (2.59)$$

**Lemme 2.4**  $J(\alpha)$  est deux fois continûment dérivable et

$$J'(\alpha) = \frac{1}{2} \|x(\alpha)\|_X^2 \quad (2.60)$$

$$J''(\alpha) = (x(\alpha), x'(\alpha))_X \quad (2.61)$$

**Preuve :**

$$J'(\alpha) = (Lx(\alpha) - z_d, Lx^1(\alpha))_{Y^*} + \alpha(x(\alpha), x^1(\alpha))_X + \frac{1}{2} \|x(\alpha)\|_X^2 \quad (2.62)$$

Or  $x(\alpha)$  est solution de l'équation normale régularisée (2.56) que l'on teste contre  $x^1(\alpha)$ , on obtient

$$(Lx(\alpha), Lx^1(\alpha))_{Y^*} + \alpha(x(\alpha), x^1(\alpha))_X - (z_d, Lx^1(\alpha))_{Y^*} = 0$$

D'où

$$J'(\alpha) = \frac{1}{2} \|x(\alpha)\|_X^2$$

Le calcul de la dérivée seconde est alors triviale.

□

**Algorithme 2.1 (Newton-Morozov)**

1. Choisir  $\alpha_0 \geq 0$  et  $\gamma \in [1, +\infty]$ , on pose  $k = 0$ ,

2. Effectuer jusqu'à convergence,

a) Résoudre les équations :

$$(\mathfrak{S}_X L^* \mathfrak{S}_Y L + \alpha_k I)x_k = \mathfrak{S}_X L^* \mathfrak{S}_Y z_d \quad (2.63)$$

$$(\mathfrak{S}_X L^* \mathfrak{S}_Y L + \alpha_k I)x'_k = -x_k \quad (2.64)$$

b) Calculer :

$$G(\alpha_k) = \|Lx_k - z_d\|_{Y^*}^2 + \alpha_k^\gamma \|x_k\|_X^2 - \delta^2 \quad (2.65)$$

$$G'(\alpha_k) = \frac{1}{2} \gamma \alpha_k^{\gamma-1} \|x_k\|_X^2 + (\alpha_k^\gamma - \alpha)(x_k, x'_k)_X \quad (2.66)$$

c) Mise à jour :  $\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{G(\alpha_k)}{G'(\alpha_k)}$ ,

d) Mise à jour :  $k \leftarrow k + 1$ .

Le choix du paramètre de régularisation de départ est très important car la convergence sera plus ou moins rapide selon qu'il se trouve ou non dans un voisinage de  $\alpha_\delta$ . Dans [97] et [156], on peut trouver un modèle paramétrique de  $G(\alpha)$  permettant pendant les premières itérations de déterminer très rapidement une approximation de la solution. Une version quasi-newtonienne a été introduite dans [97] qui permet de s'affranchir du calcul de  $x^1(\alpha)$  et qui possède des propriétés de convergence superlinéaire, contrairement à la version newtonienne qui converge quadratiquement dans un voisinage de la solution  $\alpha_\delta$ .

### 2.3.2 Régularisation par relaxation

La seconde classe de méthodes est fondée sur la résolution du problème de minimisation,

$$\begin{cases} \min_{x \in X} & \frac{1}{2} \|x\|_X^2 \\ \|Lx - z_d\|_{Y^*} \leq \delta \end{cases} \quad (2.67)$$

Nous parlons ici de relaxation dans le sens où l'égalité  $Lx = z_d$  est remplacée par l'inégalité  $\|Lx - z_d\|_{Y^*} \leq \delta$ . Nous proposons deux méthodes permettant de résoudre un tel problème :

1. Méthode de dualité :

Nous reprenons le problème (2.67) et nous appliquons le schéma de dualité établi dans la section précédente. Il s'agit alors de résoudre le problème de minimisation non-quadratique suivant,

$$\min_{y \in Y} J_\delta(y) = \frac{1}{2} \|L^*y\|_{X^*}^2 + \delta \|y\|_Y - \langle z_d, y \rangle_{Y^*, Y} \quad (2.68)$$

qui admet une unique solution  $y_\delta \in Y$ . Ces deux solutions sont reliées par l'identité suivante,

$$x_\delta = \mathfrak{S}_X(L^*y_\delta) \quad (2.69)$$

De plus,

$$\|Lx_\delta - z_d\|_{Y^*} = \min\{\delta, \|z_d\|_{Y^*}\} \quad (2.70)$$

Afin de décrire un algorithme de type Quasi-Newton permettant de construire une suite minimisante du problème (2.68), nous rappelons la forme du gradient de  $J_\delta(y)$ ,

**Lemme 2.5** *La fonctionnelle  $J_\delta(y)$  est différentiable sur  $Y \setminus \{0\}$  et son gradient est donné pour  $y_\delta \neq 0$ ,*

$$\nabla J_\delta(y) = \mathfrak{S}_Y L \mathfrak{S}_X L^* y + \frac{\delta}{\|y\|_Y} y - \mathfrak{S}_Y z_d \quad (2.71)$$

**Algorithme 2.2 (Fenchel-BFGS)**

(a) Choisir  $y_0 \in Y$  avec  $\|y_0\|_Y \neq 0$  et  $M_0 \in \mathcal{L}(Y, Y)$ , on pose  $k = 0$ ,

(b) Effectuer jusqu'à convergence,

a) Calculer le gradient :

$$g_k = \nabla J_\delta(y_k) = \mathfrak{S}_Y L \mathfrak{S}_X L^* y_k + \frac{\delta}{\|y_k\|_Y} y_k - \mathfrak{S}_Y z_d \quad (2.72)$$

b) Calculer la direction de descente grâce à l'équation,

$$M_k \cdot d_k = -g_k \quad (2.73)$$

- c) *Mise à jour* :  $y_{k+1} = y_k + \rho_k \cdot d_k$  avec  $\rho_k \geq 0$  obtenu par recherche linéaire de type Wolfe. On pose  $s_k = y_{k+1} - y_k$  et  $t_k = g_{k+1} - g_k$ .
- d) *Mise à jour de la métrique variable* :

$$M_{k+1} = M_k + \frac{t_k \otimes t_k}{(t_k, t_k)_Y} - \frac{M_k \cdot s_k \otimes M_k \cdot s_k}{(M_k \cdot s_k, s_k)_Y} \quad (2.74)$$

- e)  $k \leftarrow k + 1$ .

## 2. Méthode hybride (Tykhonov-Fenchel) :

Nous avons présenté jusqu'à maintenant deux types de régularisation :

- Régularisation à la Tikhonov ( $T_\alpha$ ) :

$$\min_{x \in X} \frac{\alpha}{2} \|x\|_X^2 + \frac{1}{2} \|Lx - z_d\|_{Y^*}^2 = - \min_{y \in Y} \frac{1}{2} \|L^*y\|_{X^*}^2 + \frac{\alpha}{2} \|y\|_Y^2 - \langle z_d, y \rangle_{Y^*, Y} \quad (2.75)$$

- Régularisation à la Fenchel ( $F_\delta$ ) :

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|x\|_X^2 + I_{[0, +\delta]}(\|Lx - z_d\|_{Y^*}) = - \min_{z \in Y^*} \frac{1}{2} \|L^*z\|_{X^*}^2 + \delta \|z\|_{Y^*} - \langle z_d, z \rangle_{Y^*, Y} \quad (2.76)$$

Ces deux méthodes peuvent être mises en relation dans le cas particulier de paramètres de régularisation  $(\alpha, \delta) > 0$  comme l'indique le théorème suivant établi dans [128] dans le cadre plus général d'espaces topologiques,

**Proposition 2.17 ([128])** *Etant donnés  $\delta, \alpha > 0$  et une trajectoire cible  $z_d \in Y^*$  telle que  $\|z_d\|_{Y^*} > \delta$ , un opérateur  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ , supposons qu'il existe  $x_0 \in X$  tel que  $\|Lx_0 - z_d\|_{Y^*} < \delta$ , alors les assertions suivantes sont vérifiées,*

- i) *Dans le cas où les solutions  $(x_\alpha, y_\alpha)$  de  $(T_\alpha)$  et  $(x_\delta, y_\delta)$  de  $(F_\delta)$  sont identiques (on les note  $(x^*, y^*) \in X \times Y$ ) alors l'identité suivante est nécessairement satisfaite,*

$$\delta = \alpha \|y^*\|_Y \quad (2.77)$$

- ii) *Le couple solution  $(x_\alpha, z_\alpha)$  de  $(T_\alpha)$ , avec  $\alpha > 0$ , est aussi solution de  $(T_\delta)$  pour le paramètre particulier,*

$$\delta = \alpha \|y_\alpha\|_Y \quad (2.78)$$

- iii) *Le couple solution  $(x_\delta, y_\delta)$  de  $(F_\delta)$ , avec  $\delta > 0$ , est aussi solution de  $(T_\alpha)$  pour le paramètre particulier,*

$$\alpha = \delta \|y_\delta\|_Y^{-1} \quad (2.79)$$

Ces identités suggèrent une méthode qui permettrait comme pour l'algorithme à la Newton-Morozov (Alg. (2.1)) de conjuguer la simplicité de l'approche de type Tykhonov avec le contrôle du résidu inhérent aux méthodes de type contrôle approché comme l'algorithme à la Fenchel-BFGS (Alg. (2.2)).

En fait, il s'agirait de résoudre l'équation de dualité,

$$m(\alpha) = \alpha^2 \|y_\alpha\|^2 - \delta^2 = 0 \quad (2.80)$$

avec  $y_\alpha$  solution du problème de minimization de Tykhonov dual,

$$-\min_{y \in Y} \frac{1}{2} \|L^* y\|_{X^*}^2 + \frac{\alpha}{2} \|y\|_Y^2 - \langle z_d, y \rangle_{Y^*, Y} \quad (2.81)$$

qui est équivalente à résoudre l'équation normale duale,

$$(\mathfrak{S}_Y L \mathfrak{S}_X L^* + \alpha \text{I}) y = \mathfrak{S}_Y z_d \quad (2.82)$$

Cette idée n'est pas nouvelle [10], [11]. Une première approche consiste à élaborer un algorithme de type point fixe pour résoudre Eq. (2.80),

**Algorithme 2.3 (Banach-Fenchel-Tykhonov)**

- (a) Choisir  $\alpha_0 \geq 0$  poser  $k = 0$ ,
- (b) Effectuer jusqu'à convergence,
  - a) Résoudre l'équation:

$$(\mathfrak{S}_Y L \mathfrak{S}_X L^* + \alpha_k \text{I}) y^k = \mathfrak{S}_Y z_d \quad (2.83)$$

- b) Calculer :

$$\alpha_{k+1} = \frac{\delta}{\|y^k\|_Y} \quad (2.84)$$

- c) Mise à jour :  $k \leftarrow k + 1$ .

Il est possible de montrer qu'un tel algorithme converge,

**Théorème 2.2 ([37])** Soit  $y_\delta \in Y$  l'unique solution du problème de minimisation de Fenchel (2.68), alors l'algorithme (2.3) génère une suite  $(\alpha_k \|y^k\|_Y, y^k)_{k \geq 0}$  convergent vers  $(\delta, y_\delta)$ .

L'algorithme possède les propriétés standards des algorithmes de type point fixe, c'est-à-dire peut s'avérer lent à converger. C'est pourquoi, dans l'esprit de l'algorithme de Newton-Morozov, nous proposons de résoudre l'équation de dualité (2.80) en utilisant une méthode de Newton.

**Algorithme 2.4 (Newton-Fenchel-Tykhonov)**

- (a) Choisir  $\alpha_0 \geq 0$  et poser  $k = 0$ ,
- (b) Effectuer jusqu'à convergence,
  - a) Résoudre les équations :

$$(\mathfrak{S}_Y L \mathfrak{S}_X L^* + \alpha_k \text{I}) y^k = \mathfrak{S}_Y z_d \quad (2.85)$$

$$(\mathfrak{S}_Y L \mathfrak{S}_X L^* + \alpha_k \text{I}) y_1^k = -y^k \quad (2.86)$$

b) Calculer :

$$m(\alpha_k) = \alpha_k^2 \|y^k\|_Y^2 - \delta^2 \quad (2.87)$$

$$m'(\alpha_k) = 2\alpha_k \|y^k\|_Y^2 + 2\alpha_k (y_1^k, y^k)_Y \quad (2.88)$$

c) Mise à jour :  $\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{m(\alpha_k)}{m'(\alpha_k)}$ ,

d) Mise à jour :  $k \leftarrow k + 1$ .

## 2.4 Suivi de trajectoires pour un système parabolique linéaire

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons élaboré quelques moyens constructifs de déterminer un contrôle solution du problème de suivi approché de trajectoires pour un système d'évolution abstrait dans le cas où l'on suppose que la propriété de suivi approché est satisfaite. Dans ce paragraphe, nous montrons que la propriété de suivi approché est vérifiée pour un système parabolique du second ordre.

### 2.4.1 Position du problème

Dans cette partie, on démontre un résultat général de suivi approché de trajectoires pour un système parabolique du second ordre à coefficients dépendant du temps et de l'espace.

On considère un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_c \cup \Gamma_I$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que les composantes de  $\Gamma$  sont disjointes, i.e  $\Gamma_c \cap \Gamma_I = \emptyset$ . On introduit un opérateur elliptique du second ordre,

$$A(t)y = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij}(x,t) \partial_j y) + a_0(x,t)y \quad (2.89)$$

Nous supposons que les coefficients sont réels et

$$\begin{aligned} a_{ij}(x,t) &\in \mathcal{C}^1(Q^T), \\ a_0(x,t) &\in \mathcal{C}^1(Q^T), \quad a_0 > 0 \end{aligned}$$

avec  $Q^T \equiv \Omega \times (0, T)$ . Il est essentiel de supposer que la propriété d'ellipticité est satisfaite, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha(x,t) > 0$  tel que,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \cdot \xi_j \geq \alpha(x,t) \|\xi\|^2, \quad \forall (\xi, x, t) \in \mathbb{R}^d \times Q^T \quad (2.90)$$

La normale unitaire extérieure à  $\Gamma$  est notée  $n$  et

$$\partial_{n_A} y = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \partial_j y n_j \quad (2.91)$$



désigne la dérivée conormale de  $y$  par rapport à l'opérateur  $A$ . Munie de ces hypothèses, il est possible de donner un sens au problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \partial_t y + A(t)y = 0, & Q^T \\ \partial_{n_A} y = g, & \Sigma_c^T \equiv \Gamma_c \times (0, T) \\ \partial_{n_A} y = 0, & \Sigma_I^T \equiv \Gamma_I \times (0, T) \\ y(t=0) = y_0, & \Omega \end{cases} \quad (2.92)$$

Le problème central de ce paragraphe est de donner une réponse à la question suivante,

« Etant donnée une trajectoire  $z_d$  définie sur  $\Sigma_I^T$  et un petit paramètre  $\delta > 0$ , est-il possible de déterminer un contrôle  $g \in L^2(\Sigma_c^T)$  tel que la solution  $y(g)$  du problème (2.92) vérifie la propriété de contrôlabilité approchée,

$$\|y(g) - z_d\|_{L^2(\Sigma_I^T)} \leq \delta \quad (2.93)$$

? »

Nous allons démontrer le résultat suivant,

**Résultat :**

La propriété de contrôlabilité approchée sur les trajectoires est vérifiée pour toutes cibles  $z_d \in L^2(\Sigma_I^T)$ .

## 2.4.2 Cadre mathématique

On introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega) \quad (2.94)$$

et

$$W(0, T) = \{y \in L^2(0, T; V), \quad \partial_t y \in L^2(0, T; V^*)\} \quad (2.95)$$

où  $V^*$  représente le dual topologique de  $V$ . Le résultat d'existence et d'unicité suivant est une conséquence d'un résultat général dû à Lions - Magenes [34],

**Proposition 2.18** *Etant donné  $g \in L^2(\Sigma_c^T)$  et  $y_0 \in H$ , le problème (2.92) admet une unique solution  $y \in W(0, T)$  continue par rapport aux données,*

$$\|y\|_{W(0, T)} \leq C (\|g\|_{L^2(\Sigma_c^T)} + \|y_0\|_H) \quad (2.96)$$

Ce résultat est la conséquence d'un théorème démontré dans [110], que nous rappelons ici,

**Théorème 2.3** *Soient  $V$  et  $H$ , 2 espaces de Hilbert satisfaisant la propriété d'inclusion suivante,*

$$V \hookrightarrow H \equiv H^* \hookrightarrow V^* \quad (2.97)$$

avec injection dense et continue.

Considérons la famille d'opérateurs continus,

$$A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*), \quad 0 \leq t \leq T, \text{ avec } T \geq 0 \quad (2.98)$$

vérifiant les propriétés suivantes,

1.

$$t \mapsto \langle A(t)\varphi, \psi \rangle_{V^*, V} \text{ est mesurable sur } (0, T), \quad \forall (\varphi, \psi) \in V \quad (2.99)$$

2.  $\forall t \in [0, T], \exists C > 0$  tel que,

$$|\langle A(t)\varphi, \psi \rangle_{V^*, V}| \leq C \|\varphi\|_V \|\psi\|_V \quad (2.100)$$

3.  $\forall t \in [0, T], \exists \alpha > 0, \exists \lambda \in \mathbb{R}$  tels que,

$$\langle A(t)\varphi, \psi \rangle_{V^*, V} + \lambda \|\varphi\|_V^2 \geq \alpha \|\varphi\|_V^2, \quad \forall \varphi \in V \quad (2.101)$$

Etant donnés les éléments  $(f, y_0) \in L^2(0, T; V^*) \times H$ , il existe une unique solution

$$y \in W(0, T)$$

du problème d'évolution variationnel suivant,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y + A(t)y = f, & t \in (0, T), \\ y(t=0) = y_0, \end{cases} \quad (2.102)$$

et l'application

$$\begin{aligned} \Theta : W(0, T) &\longrightarrow L^2(0, T; V^*) \times H \\ \varphi &\longmapsto \left( \frac{d}{dt}\varphi + A(t)\varphi, \varphi(t=0) \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

**Lemme 2.6** Chaque élément de  $W(0, T)$  peut être identifié à une unique fonction dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; H)$  et l'injection  $W(0, T) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, T]; H)$  est continue.

**Preuve :** Revenons à la démonstration de la (Proposition 2.18).

Introduisons la forme bilinéaire associée à l'opérateur  $A(t)$ ,

$$a(t; \varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \partial_i \varphi \partial_j \psi + \int_{\Omega} a_0(x, t) \varphi \psi \quad (2.103)$$

Par utilisation de la formule de Green, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(t) \cdot y(t) \varphi &= a(t; y(t), \varphi) - \int_{\Gamma} \partial_{n_A} y \cdot \varphi \\ &= a(t; y(t), \varphi) - \int_{\Gamma_c} g \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in V \end{aligned}$$

Ainsi, une solution faible du problème (2.92) satisfait l'équation variationnelle différentielle suivante,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \partial_t y \cdot \varphi + a(t; y(t), \varphi) = \int_{\Gamma_c} g(t) \cdot \varphi, & \forall \varphi \in V \\ y(t=0) = y_0, & \text{dans } H \end{cases} \quad (2.104)$$

Il est alors possible de définir l'opérateur de contrôle

$$B : U \longrightarrow V^*$$

dont l'action est définie par l'identité suivante,

$$\langle Bg, \varphi \rangle_{V^*, V} = \int_{\Gamma_c} g \cdot \varphi|_{\Gamma_c}, \quad \forall (g, \varphi) \in U \times V \quad (2.105)$$

avec  $U = L^2(\Gamma_c)$ .

En utilisant le fait que l'opérateur de trace,

$$\begin{aligned} \gamma_0^\Gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ \varphi &\longmapsto \varphi|_\Gamma \end{aligned}$$

est continu, linéaire, surjectif et l'injection continue de  $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ , nous en déduisons que  $B \in \mathcal{L}(U; V^*)$ . Ainsi,  $y$  est solution du système différentiel variationnel suivant,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t) + A(t) \cdot y(t) = B \cdot g, & t \in (0, T) \\ y(t=0) = y_0, \end{cases} \quad (2.106)$$

En utilisant le fait que  $B \cdot g \in L^2(0, T; V^*)$  et les propriétés de la famille d'opérateur  $A(t)$ ,  $t \in (0, T)$ , il est possible de déduire l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux données de la solution  $y \in W(0, T)$  à partir de Th. (2.3).

□

#### 2.4.2.1 Résultat de contrôlabilité sur les trajectoires

Introduisons l'ensemble des cibles atteignables,

$$R_{\Sigma_I^T} = \{ \gamma_0^{\Gamma_I}(y(g)), \quad \forall g \in L^2(\Sigma_c^T) \} \quad (2.107)$$

Ainsi la propriété de contrôle approché est équivalente à l'injection,

$$L^2(\Sigma_I^T) \subset \overline{R_{\Sigma_I^T}}$$

Nous établissons le résultat suivant,

**Proposition 2.19** *La propriété de contrôlabilité approchée sur les trajectoires est vérifiée pour toutes cibles  $z_d \in L^2(\Sigma_I^T)$ .*

**Preuve :** Par translation, il est possible de se ramener au cas linéaire  $y_0 = 0$ . Par utilisation du théorème du graphe fermé, la propriété de densité des états atteignables dans  $L^2(\Sigma_I^T)$  est équivalente à la nullité de son orthogonale, c'est-à-dire,

$$R_{\Sigma_I^T}^\perp = \{0\}, \text{ dans } L^2(\Sigma_I^T) \quad (2.108)$$

Etant donné un élément  $\eta \in R_{\Sigma_I^T}^\perp$ , il satisfait par définition,

$$(y(g), \eta)_{L^2(\Sigma_I^T)} = \int_{\Sigma_I^T} y(g) \cdot \eta = 0, \quad \forall g \in L^2(\Sigma_c^T)$$

Une technique classique permettant d'identifier les éléments de l'orthogonal consiste à introduire la solution du problème adjoint suivant,

$$\begin{cases} -\partial_t p + A(t)^* p = 0, & Q^T \\ \partial_{n_{A^*}} p = 0, & \Sigma_c^T \equiv \Gamma_c \times (0, T) \\ \partial_{n_{A^*}} p = \eta, & \Sigma_I^T \equiv \Gamma_I \times (0, T) \\ p(t = T) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (2.109)$$

**Remarque 2.12** L'opérateur adjoint  $A^*(t) \in \mathcal{L}(V^*, V)$  est défini à partir de l'identité suivante,

$$\langle A(t)^* \varphi, \psi \rangle_{V^*, V} = \langle A(t) \psi, \varphi \rangle_{V^*, V}, \quad \forall (\varphi, \psi) \in V^* \times V \quad (2.110)$$

Ainsi,

$$A^*(t) \varphi = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a_{i,j}(x,t) \partial_i \varphi) + a_0(x,t) \varphi$$

et la dérivée conormale est donnée par l'expression,

$$\partial_{n_{A^*}} \varphi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \partial_i \varphi(x,t) n_j(x), \text{ sur } \Sigma^T$$

**Lemme 2.7** Pour  $\eta \in L^2(\Sigma_I^T)$ , le problème adjoint (2.109) admet une unique solution  $p \in W(0, T)$ . De plus  $p \in C^0([0, T]; H)$  et l'estimation de continuité suivante est vérifiée,

$$\|p\|_{W(0, T)} \leq C \|\eta\|_{L^2(\Sigma_I^T)} \quad (2.111)$$

**Preuve :** En utilisant Prop. (2.3), il est clair que l'application

$$\begin{aligned} \Theta^a : W(0, T) &\longrightarrow L^2(0, T; V^*) \times H \\ \psi &\longmapsto \left( -\frac{d}{dt} \psi + A^*(t) \psi, \psi(t=0) \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

□

L'identité suivante va être déterminante dans la caractérisation de l'orthogonal de l'ensemble atteignable,

**Lemme 2.8**

$$\int_{\Sigma_I^T} \eta \cdot y(g) = \int_{\Sigma_c^T} g \cdot p(\eta), \quad \forall \eta \in L^2(\Sigma_I^T) \quad (2.112)$$

**Preuve :** En utilisant la formule de Green, il est évident d'établir,

$$\begin{aligned} \int_{Q^T} [\partial_t y(t) + A(t)y(t)] \cdot p(\eta)(t) &= \int_{\Sigma_c^T} g \cdot p(\eta) \\ \int_{Q^T} [-\partial_t p + A^*(t)p(t)] \cdot y(t) + \int_{\Sigma_I^T} \partial_{n_{A^*}} p(\eta)(t) \cdot y(t) &= \int_{\Sigma_c^T} g \cdot p(\eta) \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le système adjoint Eq. (2.109).

□

Ainsi, en choisissant  $\eta \in R_{\Sigma_I^T}^\perp$  et en utilisant l'identité (2.112), il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_c^T} g \cdot p(\eta) = \int_{\Sigma_I^T} \eta \cdot y(g) = 0, \forall g \in L^2(\Sigma_c^T) \\ \implies p(\eta) = 0, \text{ sur } \Sigma_c^T \end{aligned}$$

Afin de conclure, on aura besoin du résultat de continuation unique suivant,

**Lemme 2.9** *Considérons un élément  $\varphi \in W(0,T)$  vérifiant le système de Cauchy suivant,*

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi + A(t)^* \varphi = 0, & Q^T \\ \partial_{n_{A^*}} p = 0, & \Sigma_c^T \\ p = 0, & \Sigma_c^T \\ p(t = T) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (2.113)$$

alors  $\varphi \equiv 0$  dans  $Q^T$ .

**Remarque 2.13** *Les conditions aux limites du système précédent sont uniquement sur la frontière  $\Gamma_c$ , ce qui en fait un problème de Cauchy en temps et en espace.*

Supposons que ce lemme soit démontré, alors le problème adjoint  $p(\eta)$  vérifie exactement les hypothèses du (Lemme 2.9), ce qui implique que

$$p(\eta) \equiv 0, \text{ dans } Q^T$$

On en déduit que  $\eta \equiv 0$ . Ainsi la preuve du résultat de contrôlabilité approchée est établie puisque  $R_{\Sigma_I^T}^\perp = \{0\}$ .

□

Donnons maintenant une démonstration du Lemme (2.9). Elle repose sur un résultat de continuation unique établi dans [141] que nous rappelons ici,

**Théorème 2.4** *Soient  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  un domaine et  $Q = \Omega \times (-T,T)$  pour  $0 < T < +\infty$ . On considère l'opérateur  $A(t)$  défini par (2.121) à coefficients  $\mathcal{C}^1(Q)$  et un élément  $\varphi \in L^2(-T,T; H_{loc}^2(\Omega))$  solution de l'équation,*

$$\partial_t \varphi + A^*(t)\varphi = 0, \text{ dans } Q \quad (2.114)$$

Si  $\varphi = 0$  sur un ouvert  $O \subset Q$ , alors

$$\varphi \equiv 0, \text{ dans } O_h$$

où  $O_h$  désigne la composante horizontale de  $O$ .

**Remarque 2.14** La démonstration de ce résultat est fondée sur l'obtention d'une inégalité fondamentale de Carleman pour le système de la chaleur.

**Remarque 2.15** La composante horizontale  $O_h$  associée à un ouvert  $O$  dans  $Q$  est défini comme l'union de tous les hyperplans ouverts définis par l'équation  $t = C$  avec  $C \in \mathbb{R}$  contenant un point de  $O$ .

Reprenons la solution  $\varphi$  du système adjoint (2.113), on pose  $\phi(t) = \varphi(T - t)$ , ainsi  $\phi$  est solution du système suivant,

$$\begin{cases} \partial_t \phi + A(t)^* \phi = 0, & Q^T \\ \partial_{n_{A^*}} \phi = 0, & \Sigma_c^T \\ \phi = 0, & \Sigma_c^T \\ \phi(t = 0) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (2.115)$$

Considérons un ouvert connexe  $I \subset \Gamma_c$  tel que

$$\bar{I} \subset \Gamma_c$$

et une boule ouverte  $B \in \mathbb{R}^d$  telle que

$$B \cap \Gamma_c = I$$

On pose alors  $\Omega_B \stackrel{\text{def}}{=} B \setminus \Omega$  et  $\tilde{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \cup \Omega_B$ . On définit alors une fonction  $\tilde{\phi}$  définie sur  $\tilde{\Omega} \times (-T, T)$  par,

$$\tilde{\phi} = \begin{cases} \phi & \Omega \times (0, T) \\ 0 & \Omega_B \times (0, T) \\ 0 & \tilde{\Omega} \times (-T, 0] \end{cases} \quad (2.116)$$

Quel système vérifie la nouvelle fonction  $\tilde{\phi}$ ?

On considère une fonction  $v \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\Omega} \times (0, T))$ , on a alors,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \cdot [\partial_t v - A(t) \cdot v] \\ &= \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}} [-\partial_t \tilde{\phi} - A^*(t) \cdot \tilde{\phi}] \cdot v + [\partial_{n_{A^*}} \tilde{\phi} \cdot v]_{\Sigma_c^T} - [\tilde{\phi} \cdot \partial_{n_A} v]_{\Sigma_c^T} \end{aligned}$$

où  $[w]_{\Sigma_c^T}$  représente le saut à la frontière  $\Sigma_c^T$ , c'est-à-dire en notant  $\Gamma_c^+$  la partie de la frontière  $\Gamma_c$  située du côté de  $\Omega_B$  et  $\Gamma_c^-$  du côté de  $\Omega$ , la quantité  $[w]_{\Sigma_c^T} = \int_{\Gamma_c} w|_{\Gamma_c^+} - w|_{\Gamma_c^-}$ .

Or, on possède les relations suivantes,

$$\begin{aligned} v \cdot \partial_{n_{A^*}} \tilde{\phi} &= 0 \text{ sur } \Gamma_c^+, & \text{puisque } \tilde{\phi} &= 0 \text{ dans } \Omega_B \\ v \cdot \partial_{n_{A^*}} \tilde{\phi} &= 0 \text{ sur } \Gamma_c^-, & \text{puisque } \tilde{\phi} &= 0 \text{ sur } \Gamma_c \\ \tilde{\phi} \cdot \partial_{n_A} v &= 0 \text{ sur } \Gamma_c^+, & \text{puisque } \tilde{\phi} &= 0 \text{ dans } \Omega_B \\ \tilde{\phi} \cdot \partial_{n_A} v &= 0 \text{ sur } \Gamma_c^-, & \text{puisque } \tilde{\phi} &= 0 \text{ sur } \Gamma_c \end{aligned}$$

De plus en utilisant que  $\phi$  vérifie le système adjoint, on en déduit que

$$\int_0^T \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\phi} \cdot [\partial_t v - A(t) \cdot v] = 0, \quad \forall v \in C^\infty(\tilde{\Omega} \times (0, T)) \quad (2.117)$$

c'est-à-dire  $\partial_t \tilde{\phi} + A^*(t) \cdot \tilde{\phi} = 0$  dans  $\tilde{\Omega} \times (0, T)$  et en utilisant un résultat de régularité elliptique, on a  $\tilde{\phi} \in H^1((-T, T); H^2(\tilde{\Omega}))$ . Nous nous trouvons ainsi dans les conditions d'application de Th. (2.4).

Nous posons,

$$\begin{aligned} Q &= \tilde{\Omega} \times (-T, T) \\ O &= \text{int}(\Omega_B) \times (-T, T) \end{aligned}$$

On en déduit que la composante horizontale associée à  $O$  est donnée par

$$O_h \equiv \tilde{\Omega} \times (-T, T) = Q$$

Du fait que  $\tilde{\phi} = 0$  dans  $O$ , on en déduit que

$$\tilde{\phi} \equiv 0, \quad \text{dans } O_h = Q \quad (2.118)$$

dont on déduit en utilisant la définition de  $\tilde{\phi}$  que

$$\phi \equiv 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.119)$$

ce qui donne en inversant le sens du temps,  $\varphi \equiv 0$ , dans  $\Omega \times (0, T)$ .  $\square$

**Remarque 2.16** *Les résultats obtenus pour le système linéaire parabolique du second ordre avec conditions aux limites de Neumann, peuvent être étendus au cas de conditions aux limites mixtes Dirichlet - Neumann. Dans ce cas, on considère le système suivant,*

$$\begin{cases} \partial_t y + A(t)y = 0, & Q^T \\ y = g, & \Sigma_c^T \equiv \Gamma_c \times (0, T) \\ \partial_{n_A} y = 0, & \Sigma_I^T \equiv \Gamma_I \times (0, T) \\ y(t=0) = y_0, & \Omega \end{cases} \quad (2.120)$$

avec

$$A(t)y = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij}(x,t) \partial_j y) + a_0(x,t)y \quad (2.121)$$

Nous supposons que les coefficients sont réels et

$$\begin{aligned} a_{ij}(x,t) &\in W^{1,\infty}(Q^T), \\ a_0(x,t) &\in L^\infty(Q^T), \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned}$$

Afin de donner un sens au problème (2.123), il est nécessaire d'introduire le concept de solution très faible, définie en utilisant les techniques de transpositions hilbertienne [110],

**Définition 2.10** On pose  $H = L^2(\Omega)$  et  $V = \{\phi \in H^1(\Omega), \gamma_o^{\Gamma_c} = 0\}$ . Un élément  $(y, y^T) \in L^2(0, T; H) \times V^*$  est appelé solution faible du système (2.123) si et seulement si l'identité suivante est vérifiée,

$$\int_{\Omega} y \cdot h + \langle y^T, \theta^T \rangle_{V^*, V} = \int_{\Sigma_c^T} g \cdot \partial_{n_{A^*}} \theta + \int_{\Omega} y_0 \cdot \theta(t=0), \quad \forall (h, \theta^T) \in L^2(0, T; H) \times V \quad (2.122)$$

avec  $\theta$  solution du système adjoint,

$$\begin{cases} -\partial_t \theta + A^*(t) \cdot \theta = h, & \Omega \times (0, T) \\ \theta = 0, & \Sigma_c^T \\ \partial_{n_{A^*}} \theta = 0, & \Sigma_I^T \\ \theta(t=T) = \theta^T, & \Omega \end{cases} \quad (2.123)$$

**Proposition 2.20** Etant donnés  $(g, f, y_0) \in L^2(\Sigma_c^T) \times L^2(0, T; V^*) \times V^*$ , il existe un unique couple de solutions très faibles  $(y, y^T) \in L^2(0, T; H) \times V^*$  au sens de la définition (2.10). De plus  $y \in C^0([0, T], V^*)$  et  $y(t=T) = y^T$  dans  $V^*$ .

### 2.4.3 Illustration numérique

On se restreint désormais au cas de l'équation de la chaleur à coefficients constants,

$$\begin{cases} \partial_t y - \kappa \Delta y = f, & \Omega \times (0, T) \\ \kappa \partial_\nu y = q, & \Gamma_c \times (0, T) \\ \kappa \partial_\nu y = 0, & \Gamma_I \times (0, T) \\ y(t=0) = y_0, & \Omega \end{cases} \quad (2.124)$$

#### 2.4.3.1 Discrétisation et adjointisation

Dans ce paragraphe, nous proposons une stratégie de discrétisation du problème de suivi de trajectoires pour le système de la chaleur (2.124). Nous utilisons une méthode d'éléments finis en espace et de différences finies en temps. Le résultat important de ce paragraphe est l'étude de la discrétisation du problème adjoint (2.109) et la consistance de l'identité adjointe.

Nous considérons dans un premier temps une semi-discrétisation temporelle de l'expression variationnelle du problème (2.124). On considère une partition uniforme  $(t_k = (k-1)/dt)_{1 \leq k \leq nt+1}$  de l'ensemble  $(0, T)$  avec  $dt = T/nt$ . On note dans la suite,

$$q^k(s) = q(t_k, s), \quad s \in \Gamma_c \quad (2.125)$$

$$y^k(x) = y(t_k, x), \quad x \in \Omega \quad (2.126)$$

On pose  $V = H^1(\Omega)$ ,  $H = L^2(\Omega)$  et on cherche  $y^1 \in H$  et  $(y^k)_{1 \leq k \leq nt} \in (V)^{nt}$  solution du système,

$$\begin{cases} (y^1, w)_H = (y_0, w)_H, & \forall w \in H, \\ \left( \frac{y^{k+1} - y^k}{dt}, v \right)_H + a(y^{k+\theta}, v) = L(q^{k+\theta}, v), & \forall v \in V, \quad 1 \leq k \leq nt \end{cases} \quad (2.127)$$



avec

$$a(y,v) = \kappa(\nabla y, \nabla v)_H, \quad \forall (y,v) \in V \quad (2.128)$$

$$L(q,v) = (q,v)_{L^2(\Gamma_c)}, \quad \forall (q,v) \in L^2(\Gamma_c) \times V \quad (2.129)$$

et  $y^{k+\theta} = \theta y^{k+1} + (1-\theta)y^k$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ .

On introduit alors un espace d'approximation spatiale  $V_h$ , vérifiant les propriétés standard d'approximation pour l'espace de Sobolev  $H^s(\Omega)$  [71].

On prend par exemple une partition de simplexes  $(\mathcal{T}_h)_{h \geq 0}$  du domaine  $\Omega$ , que l'on suppose polygonal pour simplifier le problème. On choisit alors,

$$V_h^\ell = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}), \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_\ell, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad \ell \geq 1 \quad (2.130)$$

**Remarque 2.17** *Il s'agit alors d'une approximation conforme, puisque*

$$V_h^\ell \subset H^1(\Omega), \quad \forall \ell \geq 1$$

On introduit l'opérateur d'interpolation,

$$\pi_h^\ell(v) = \sum_{i=1}^{n_h} v(a_i) \phi_i \quad (2.131)$$

où  $(a_i)_{1 \leq i \leq n_h}$  désigne les noeuds de la partition  $\mathcal{T}_h$  sur  $\overline{\Omega}$  et  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_h}$  les fonctions de bases associées.

**Lemme 2.10** *En supposant que la partition  $(\mathcal{T}_h)_{h \geq 0}$  est régulière, on possède alors l'erreur d'interpolation suivante pour  $\ell \geq 1$ ,*

$$\|v - \pi_h^\ell(v)\|_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{k-s} \|v\|_{H^k(\Omega)}, \quad \forall v \in H^k(\Omega), \quad 0 \leq s \leq k \quad (2.132)$$

avec  $0 \leq k \leq \ell + 1$ .

**Remarque 2.18** *On parle de partition régulière s'il existe  $\sigma \geq 1$  tel que*

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \quad h > 0 \quad (2.133)$$

avec  $h_K = \text{Diam}(K)$  et  $\rho_K = \{\text{Diam}(S), S \text{ boule contenue dans } K\}$ .

On recherche ainsi  $(y_h^k)_{1 \leq k \leq n_t+1}$  solution du système discret,

$$\begin{cases} (y_h^1, v_h)_H = (\pi_h(y_0), v_h)_H, & \forall v_h \in V_h, \\ \left( \frac{y_h^{k+1} - y_h^k}{dt}, v_h \right)_H + a(y_h^{k+\theta}, v_h) = L(\pi_h(q^{k+\theta}), v_h), & \forall v_h \in V_h, \quad 1 \leq k \leq n_t \end{cases} \quad (2.134)$$

**Remarque 2.19** *En utilisant les propriétés d'approximation de l'espace  $V_h$ , on peut établir l'estimation suivante,*

$$\|v - \pi_h^\ell(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^{k-\frac{1}{2}} \|v\|_{H^k(\Omega)}, \quad \forall v \in H^k(\Omega), \quad 0 \leq k \leq \ell + 1 \quad (2.135)$$

Le point clef dans l'élaboration d'algorithme inverse pour les systèmes d'évolution linéaire est le respect au niveau discret de l'identité,

$$(q, \phi(e))_{L^2(\Sigma_c^T)} = (\psi(q), e)_{L^2(\Sigma_I^T)}, \quad \forall (q, e) \in L^2(\Sigma_c^T) \times L^2(\Sigma_I^T) \quad (2.136)$$

**Remarque 2.20** On peut interpréter cette dernière identité comme l'utilisation de l'état adjoint dans le calcul du gradient de la fonctionnelle,

$$j(q) = \frac{1}{2} \|\psi(q) - y_d\|_{L^2(\Sigma_I^T)}^2 \quad (2.137)$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} (\nabla j(q), \delta q)_{L^2(\Sigma_c^T)} &= (\psi(q) - y_d, \psi(\delta q))_{L^2(\Sigma_I^T)}^2 \\ &= (\phi(\psi(q) - y_d), \delta q)_{L^2(\Sigma_c^T)}^2 \end{aligned}$$

Si la version discrète de cette égalité n'est pas satisfaite par les discrétisations de l'état  $y$  et de son adjoint  $\phi$ , les algorithmes mis en oeuvre ne seront pas consistants. L'objet du prochain paragraphe est d'analyser cette difficulté.

On rappelle que pour un élément  $e \in L^2(\Sigma_I^T)$ , nous avons défini la solution  $\phi(e)$  du problème adjoint suivant,

$$\begin{cases} (\phi(t=T), v)_H = 0, & \forall v \in V \\ (-\partial_t \phi, v)_H + a(v, \phi) = L^a(e, v), & \forall v \in V \end{cases} \quad (2.138)$$

avec

$$a(v, \phi) = \kappa(\nabla v, \nabla \phi)_H, \quad \forall (v, \phi) \in V \quad (2.139)$$

$$L^a(e, v) = (e, v)_{L^2(\Sigma_I^T)}, \quad \forall (e, v) \in V \times L^2(\Sigma_I^T) \quad (2.140)$$

Nous allons distinguer deux manières d'élaborer une discrétisation du problème adjoint. Une première consiste à utiliser un schéma d'approximation pour le problème adjoint continu proche de celui de l'état primal. On a ainsi une certaine latitude dans le choix des paramètres de discrétisation, cependant on ne pourra pas obligatoirement satisfaire l'identité adjointe au niveau discret.

Une deuxième approche consiste, à partir de la discrétisation du problème primal et du choix des produits scalaires discrets, à définir un adjoint discret satisfaisant l'identité adjointe discrète,

$$(q_h^{dt}, \phi_h^{dt}(e_h^{dt}))_{L^2(\Sigma_c^T)} = (\psi_h^{dt}(q_h^{dt}), e_h^{dt})_{L^2(\Sigma_I^T)} \quad (2.141)$$

Pour  $q_h^{dt} \in L_{dt}^2(0, T; \gamma_{\Gamma_c}^0(V_h))$  et  $e_h^{dt} \in L_{dt}^2(0, T; \gamma_{\Gamma_I}^0(V_h))$ .

On introduit l'espace d'approximation  $V_{h_a}$  avec  $h_a \geq 0$ , par exemple,

$$X_{h_a}^{\ell_a} \stackrel{\text{def}}{=} \{v_{h_a} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v_{h_a} \in \mathbb{P}_{\ell_a}, \forall K \in \mathcal{T}_{h_a}\}, \quad \ell_a \geq 1 \quad (2.142)$$

On considère une partition uniforme  $(t_k^a = (k-1)/dt_a)_{1 \leq k \leq na_t+1}$  de l'ensemble  $(0, T)$  avec  $dt_a = T/na_t$ . On note dans la suite,

$$e_{h_a}^k(s) = \pi_{h_a}(e(s, t_k)), \quad s \in \Gamma_I \quad (2.143)$$

$$\phi_{h_a}^k(x) = \pi_{h_a}(\phi(x, t_k)), \quad x \in \Omega \quad (2.144)$$

On pose  $\tilde{\phi}(t,x) = \phi(T-t,x)$ ,  $\tilde{e}(t,s) = e(T-t,s)$  et l'on cherche  $(\tilde{\phi}_{h_a}^k)_{1 \leq k \leq na_t+1}$  solution du système,

$$\begin{cases} \phi_{h_a}^1 = 0, \\ \left( \frac{\phi_{h_a}^{k+1} - \tilde{\phi}_{h_a}^k}{dt_a}, v_h \right)_H + a(\tilde{\phi}_{h_a}^{k+\theta}, v_h) = L^a(\pi_{h_a}(\tilde{e}^{k+\theta}), v_h), \quad \forall v_h \in V_{h_a}, \quad 1 \leq k \leq na_t \end{cases} \quad (2.145)$$

Considérons alors la fonctionnelle,

$$j(q) = \frac{1}{2} \|\psi(q) - y_d\|_{L^2(\Sigma_T^c)}^2 \quad (2.146)$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} (\nabla j(q), \delta q)_{L^2(\Sigma_T^c)}^2 &= (\psi(q) - y_d, \psi(\delta q))_{L^2(\Sigma_T^c)}^2 \\ &= (\phi(\psi(q) - y_d), \delta q)_{L^2(\Sigma_T^c)}^2 \end{aligned}$$

Dans le cas discret, on considère la fonctionnelle discrète,

$$j_h^{dt}(q) = \frac{1}{2} \|\psi_h^{dt}(q_h^{dt}) - \pi_h^{dt}(y_d)\|_{L^2(\Sigma_T^c)}^2 \quad (2.147)$$

et le gradient,

$$g_{h,h_a}^{dt,dt_a} = \pi_h^{dt} [\phi_{h_a}^{dt_a}(\pi_{h_a}^{dt_a}(\psi_h^{dt}(q_h^{dt}) - \pi_h^{dt}(y_d)))] \quad (2.148)$$

Dans le cas général, le gradient discret de  $j_h^{dt}(q)$  est différent de la discrétisation du gradient continu de  $j(q)$ , c'est-à-dire

$$\nabla j_h^{dt}(q_h^{dt}) \neq g_{h,h_a}^{dt,dt_a} \quad (2.149)$$

Afin de respecter, l'identité adjointe discrète, on définit une variable adjointe discrète à partir de la discrétisation du problème primal et de la fonctionnelle à minimiser (il s'agit en fait du choix du produit scalaire). On considère la fonctionnelle précédente, c'est-à-dire

$$j_h^{dt}(q) = \frac{1}{2} \|\psi_h^{dt}(q_h^{dt}) - \pi_h^{dt}(y_d)\|_{L^2(\Sigma_T^c)}^2 \quad (2.150)$$

On introduit la matrice  $M_h^{\Gamma_I}$  du produit scalaire sur  $L^2(\Gamma_I)$  et on note  $(\psi_j^k)_{1 \leq j \leq n_h} = (\psi_h^k(q_h^{dt})(a_j))_{1 \leq j \leq n_h}$  avec  $a_j$  noeud de  $\mathcal{T}_h \cap \Gamma_I$ . On a alors,

$$j_h^{dt}(q) = \frac{1}{2} \sum_{k,i=2}^{nt+1} m_{i-1,k-1}^{dt} ((\psi - \pi_h(y_d))^k)^\perp \cdot M_h^{\Gamma_I} \cdot (\psi_h - \pi_h(y_d))^i \quad (2.151)$$

avec  $m_{i,k}^{dt}$  les coefficients de la matrice  $M^{dt}$  du produit scalaire dans  $L^2(0,T)$  pour des fonctions de bases continues linéaires par morceaux.

On dérive alors rapport au vecteur  $q_h^{dt}$  dans la direction  $\delta q_h^{dt}$ ,

$$(\nabla j_h^{dt}(q_h^{dt}), (\delta q)_h^{dt})_{L^2(\Sigma_T^c)} = \sum_{i,k=2}^{nt+1} m_{i-1,k-1}^{dt} (\psi_h(\delta q)^k)^\perp \cdot M_h^{\Gamma_I} \cdot (\psi_h(q_h^{dt}) - \pi_h(y_d))^i \quad (2.152)$$

En introduisant la matrice  $M_h^{\Gamma_c}$  du produit scalaire discret dans  $L^2(\Gamma_c)$ , on peut écrire,

$$(\nabla j_h^{dt}(q), \delta q)_{L^2(\Sigma_c^T)} = \sum_{j,l=1}^{nt+1} m_{j,l}^{dt} ((\delta q)_h^j)^\perp \cdot M_h^{\Gamma_c} \cdot (\nabla j_h^{dt})^l \quad (2.153)$$

Pour construire l'adjoint discret, nous allons utiliser la technique des sommations par parties, qui est l'équivalent discret de l'intégration par parties continue. Cette sommation se fera sur la variable temporelle, dans la mesure où l'on recherche pour l'instant une formulation variationnelle en espace de l'adjoint.

On rappelle que  $z_h^k = (\psi_h^k(\delta q))_{1 \leq k \leq n_t+1}$  est solution du système,

$$\begin{cases} z_h^1 = 0, \\ \left( \frac{z_h^{k+1} - z_h^k}{dt}, v_h \right)_H + a(z_h^{k+\theta}, v_h) = L((\delta q)_h^{k+\theta}, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad 1 \leq k \leq n_t \end{cases} \quad (2.154)$$

avec  $(\delta q)_h^k \in \gamma_{\Gamma_c}^0(V_h) \stackrel{\text{def}}{=} Q_h^{\Gamma_c}$ .

On introduit la variable  $(\phi_h^k)_{2 \leq k \leq n_t+2}$ , on pose  $v_h = \phi_h^{k+1}$  et on somme sur  $1 \leq k \leq n_t$ ,

$$\sum_{k=1}^{n_t} \left( \frac{z_h^{k+1} - z_h^k}{dt}, \phi_h^{k+1} \right)_H + a(z_h^{k+\theta}, \phi_h^{k+1}) = L((\delta q)_h^{k+\theta}, \phi_h^{k+1}) \quad (2.155)$$

En utilisant les sommations par parties, on obtient les identités suivantes,

**Lemme 2.11**

$$\sum_{k=1}^{n_t} \left( \frac{z_h^{k+1} - z_h^k}{dt}, \phi_h^{k+1} \right)_H = \sum_{k=2}^{n_t+1} \left( z_h^k, \frac{\phi_h^k - \phi_h^{k+1}}{dt} \right)_H + \left( z_h^{n_t+1}, \frac{\phi_h^{n_t+2}}{dt} \right)_H \quad (2.156)$$

$$\sum_{k=1}^{n_t} a(z_h^{k+\theta}, \phi_h^{k+1}) = \sum_{k=2}^{n_t+1} a(z_h^k, \phi_h^{k+1-\theta}) - a(z_h^{n_t+1}, (1-\theta)\phi_h^{n_t+2}) \quad (2.157)$$

$$\sum_{k=1}^{n_t} L((\delta q)_h^{k+\theta}, \phi_h^{k+1}) = L((\delta q)_h^1, (1-\theta)\phi_h^2) + \sum_{k=2}^{n_t} L((\delta q)_h^k, \phi_h^{k+1-\theta}) + L((\delta q)_h^{n_t+1}, \theta\phi_h^{n_t+2}) \quad (2.158)$$

On choisit alors  $(\phi_h^k)_{2 \leq k \leq n_t+2}$  tel que,

$$\begin{cases} \left( \frac{\phi_h^{n_t+2}}{dt}, v_h \right)_H - a(v_h, (1-\theta)\phi_h^{n_t+2}) = 0, & \forall v_h \in V_h \\ \left( \frac{\phi_h^k - \phi_h^{k+1}}{dt}, v_h \right)_H + a(v_h, \phi_h^{k+1-\theta}) = \sum_{i=2}^{n_t+1} m_{i-1, k-1}^{dt} M_h^{\Gamma_I} \cdot (\psi_h(q_h^{dt}) - \pi_h(y_d))^i, & \forall v_h \in V_h \\ n_t + 1 \geq k \geq 2 \end{cases} \quad (2.159)$$

L'introduction de ce système adjoint discret, permet de satisfaire l'identité adjointe discrète et de construire un gradient consistant avec la discrétisation de la fonctionnelle  $j$  et la discrétisation du problème primal.

**Remarque 2.21** *Dans le cas d'un système primal nonlinéaire la démarche reste identique à ceci près que l'on travaille alors avec le système discret linéarisé autour d'un point de fonctionnement de l'espace de contrôle  $q \in Q_h^{dt}$ .*

Le gradient discret est finalement fourni par l'identité suivante,

$$\begin{aligned} (\nabla j_h^{dt}(q), \delta q)_{L^2(\Sigma_c^T)} &= \sum_{j,l=1}^{nt+1} m_{j,l}^{dt} ((\delta q)_h^j)^\perp \cdot M_h^{\Gamma_c} \cdot (\nabla j_h^{dt})^l \\ &= ((\delta q)_h^1)^\perp \cdot M_h^{\Gamma_c} \cdot (1 - \theta) \phi^2 + \sum_{k=2}^{nt} ((\delta q)_h^k)^\perp \cdot M_h^{\Gamma_c} \cdot (\phi_h^{k+1-\theta}) \\ &\quad + ((\delta q)_h^{nt+1})^\perp \cdot M_h^{\Gamma_c} \cdot (\theta \phi_h^{nt+2}) \end{aligned}$$

Afin de simplifier l'écriture de cette dernière identité, nous réindexons l'état adjoint  $(\phi_h^k)_{1 \leq k \leq nt+1}$  et nous introduisons les matrices suivantes,

$$M_t = \frac{dt}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} (1 - \theta) & 0 & & & \\ \theta & 1 - \theta & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \theta & 1 - \theta & 0 \\ & & & & 0 & \theta \end{bmatrix}$$

Il s'agit alors de résoudre l'équation,

$$M_t \cdot \mathbb{M}_h^{\Gamma_c} \cdot \nabla j_h^{dt}(q) = \Theta \cdot \mathbb{M}_h^{\Gamma_c} \cdot \phi_h \quad (2.160)$$

où  $\mathbb{M}_h^{\Gamma_c} = M_h^{\Gamma_c} \cdot \mathbb{I}_{n_h \times (nt+1)}$ .

Nous mettons en oeuvre numériquement les discrétisations décrites dans le paragraphe précédent en 1D.

Nous évaluons le gradient de la fonctionnelle aux moindres carrés en utilisant le gradient discrétisé  $G_{dc}$  et le gradient discret  $G_d$ . On effectue une étude paramétrique suivant le pas d'espace  $h$ , le pas de temps  $dt$ , le pas de temps adjoint  $dt_a$ . Ces résultats sont comparés au calcul du gradient utilisant le linéarisé dans toutes les directions de l'espace de contrôle  $G_{dis}$ .

Dans le cas  $dt_a = dt$  (Fig. (2.1)), l'adjoint discret correspond effectivement au gradient

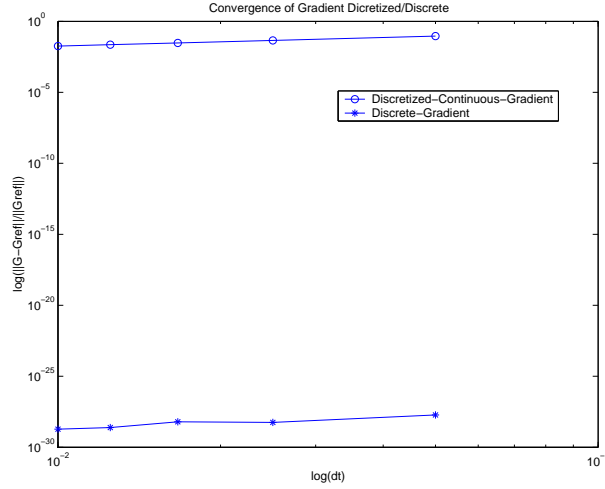


FIG. 2.1 – Consistance du gradient discret - pas adjoint  $dt_a = dt$

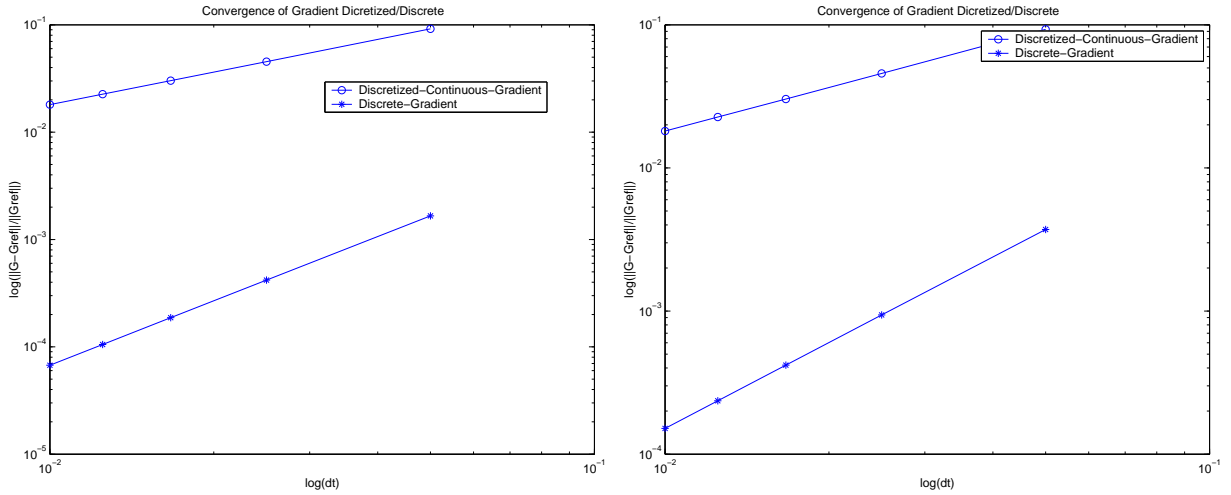


FIG. 2.2 – Consistance du gradient discret -  $dt_a = dt/2$   $dt_a = dt/4$

de la fonctionnelle discrète  $j_h^{dt}$  à  $10^{-30}$  près (précision machine). Dans le cas, où l'on raffine la discrétisation temporelle du problème adjoint, on perd la consistance numérique, cependant, le gradient discret conserve son avantage sur le gradient discrétisé (Fig. (2.2)). Ceci reste vrai, lorsqu'on opère un raffinement spatial de l'approximation du problème adjoint (Fig. (2.3)). On représente dans le cas  $nh = 50$  et  $n_t = 20$ , les différents gradients en fonction du temps, pour  $dt_a = dt$  (Fig. (2.4)),  $dt_a = dt/2$ ,  $dt_a = dt/4$  (Fig. (2.5)). On constate que le gradient continu discrétisé est inconsistant pour les premiers instants puis il redevient consistant. Cela s'explique par le fait que le choix du schéma numérique en temps pour le problème primal impose le choix de discrétisation du schéma adjoint afin que l'indentité de dualité soit satisfaite au niveau discret. On constate ici, que le choix du schéma de discrétisation de l'adjoint continu, ne permet pas de satisfaire cette identité et produit donc un gradient différent de celui du problème discret. Dans Fig. (2.6), on représente la solution de l'équation de la chaleur associée au contrôle de Neumann unité

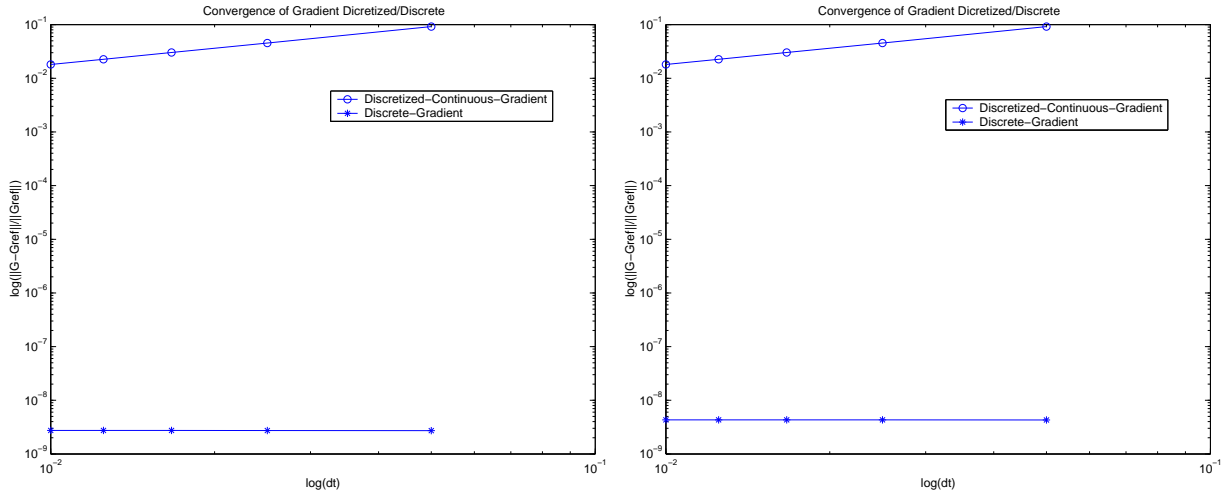


FIG. 2.3 – Consistance du gradient discret -  $dt_a = dt - nh_a = nh$   $nh_a = nh/2$

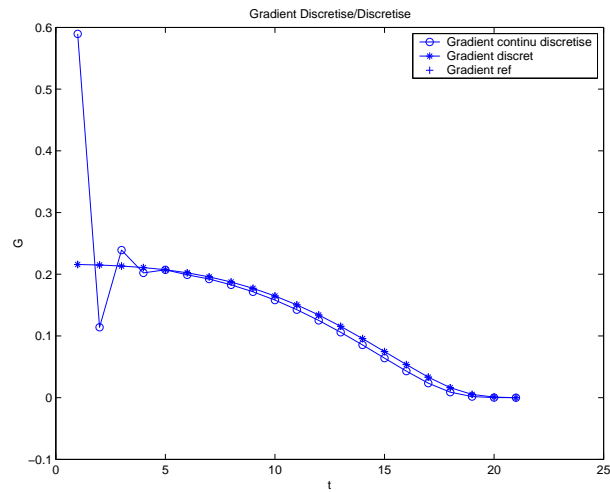


FIG. 2.4 – Gradient de la fonctionnelle en fonction du temps -  $dt_a = dt$

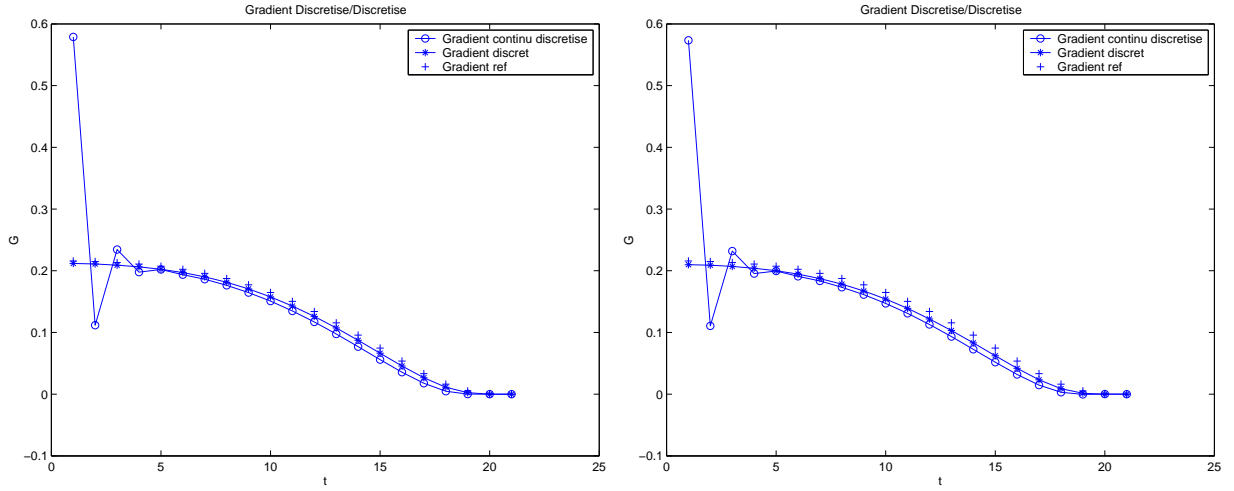


FIG. 2.5 – Gradient de la fonctionnelle en fonction du temps -  $dt_a = dt/2$ ,  $dt_a = dt/4$

et l'état adjoint associé.

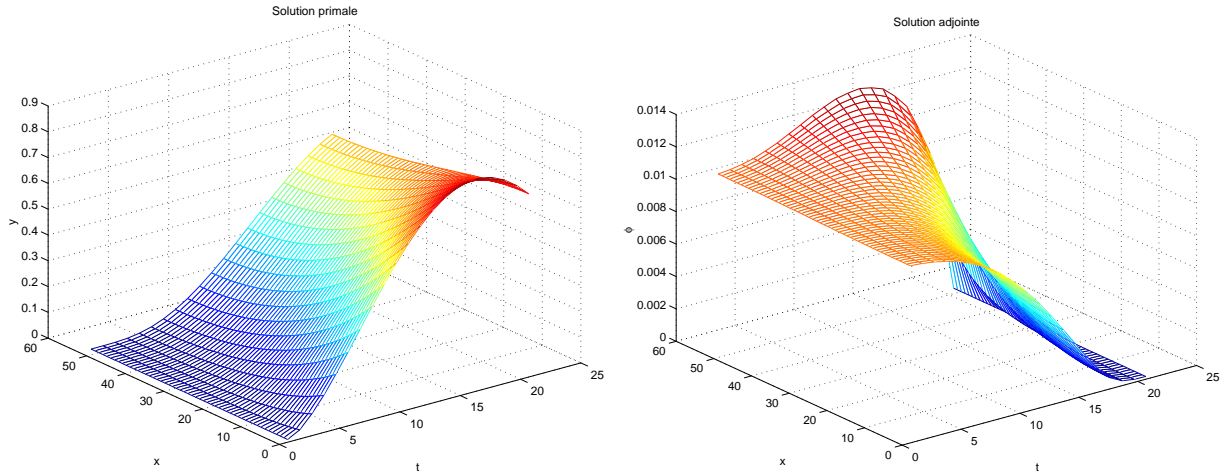


FIG. 2.6 – Solution de l'équation de la chaleur et solution de l'équation adjointe

### 2.4.3.2 Effet de diffusion, conditionnement et optimisation

Afin d'illustrer la propriété de contrôlabilité approchée sur les trajectoires des systèmes paraboliques linéaires, nous traitons le cas de l'équation de la chaleur unidimensionnelle. Nous mettons en oeuvre certains des algorithmes décrits dans la troisième partie de ce chapitre. Nous en rappelons succinctement le principe.

$$\begin{cases} \partial_t y - \nu \Delta y = 0, & (0,1), \\ \nu \partial_x y(0,t) = u(t), & (0,T), \\ \nu \partial_x y(1,t) = 0, & (0,T), \\ y(t=0) = y_0, & (0,1) \end{cases} \quad (2.161)$$



On introduit les opérateurs suivants,

- L'opérateur d'observation,

$$\begin{aligned} L : L^2(0,T), & \longrightarrow L^2(0,T) \\ u & \longmapsto y(u)(x = \ell, \cdot) \end{aligned}$$

avec  $y$  solution de l'équation de la chaleur (2.161) ,

- L'opérateur d'observation adjoint,

$$\begin{aligned} L^* : L^2(0,T) & \longrightarrow L^2(0,T) \\ z & \longmapsto \Psi(z)(x = 0, \cdot) \end{aligned}$$

avec  $\Psi$  solution du problème adjoint :

$$\begin{cases} -\partial_t \Psi - \nu \Delta \Psi = 0, & (0,1) \\ \nu \partial_x \Psi(x = 0, t) = 0, & (0,T) \\ \nu \partial_x \Psi(x = 1, t) = z(t), & (0,T) \\ \Psi(t = T) = 0, & (0,1) \end{cases} \quad (2.162)$$

Nous mettons en oeuvre les algorithmes suivants :

1. Problème inverse régularisé,

- Approche primale, Résoudre

$$\min_{u \in L^2(0,T)} J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \|L u - y_d\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(0,T)}^2$$

$\implies$  on résout  $(L^* L + \alpha I)u_\alpha = L^* y_d$ , en utilisant un algorithme de type Gradient Conjugué (CGRN).

- Approche duale ( Dualité de Fenchel-Rockafellar ) : Résoudre

$$\min_{z \in L^2(0,T)} \frac{1}{2} \langle L L^* z, z \rangle - (y_d, z)_{L^2(0,T)} + \frac{\alpha}{2} \|z\|_{L^2(0,T)}^2$$

$\implies$  On résout  $(L L^* + \alpha I)z_\alpha = y_d$ , en utilisant un algorithme de Gradient Conjugué (CGRD).

Le contrôle solution est donné par  $u_\alpha = L^* z_\alpha$ .

2. Problème inverse sous contraintes,

- Approche primale :  
Résoudre

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0,T)}^2$$

avec  $\mathcal{U} = \{u \in L^2(0,T), \|L u - y_d\|_{L^2(0,T)} \leq \delta\}$ .

$\implies$  On utilise des algorithmes de type SQP (directement implémenté dans l'Optimization Toolbox de Matlab).

- Approche duale (dualité de Fenchel-Rockafellar) :  
Résoudre

$$\min_{z \in L^2(0,T)} \frac{1}{2} \langle L L^* z, z \rangle - (y_d, z)_{L^2(0,T)} + \delta \|z\|_{L^2(0,T)}$$

⇒ On résout  $L L^* z_\delta + \delta \frac{z_\delta}{\|z_\delta\|} = y_d$  en utilisant un algorithme de type Gradient Conjugué (FCG) et quasi-newtonien de type BFGS (FBFGS).  
Alors le contrôle est donné par  $u_\delta = L^* z_\delta$ .

3. Approche hybride :

- Principe de Morozov :  
On résout l'équation en  $\alpha$ ,

$$\|L u(\alpha) - y_d\|^2 = \delta^2$$

par un algorithme de Newton (NM) avec  $(L^* L + \alpha I)u_\alpha = L^* y_d$

- Banach/Newton-Fenchel-Tykhonov : On résout l'équation en  $\alpha$ ,

$$\alpha^2 \|z(\alpha)\|^2 - \delta^2 = 0$$

par un algorithme de point fixe (BFT) puis un algorithme de Newton (NFT),  
avec  $L L^* z_\delta + \delta \frac{z_\delta}{\|z_\delta\|} = y_d$ .

Le fait que l'opérateur d'observation soit compact, fait que le problème inverse est mal-posé. Le caractère mal-posé du problème peut être constaté numériquement en calculant le conditionnement de la matrice de l'opérateur d'observation discrétisé (Fig. 2.7). Ce nombre croît avec la diminution du pas de temps  $dt$ . Une deuxième illustration du caract-

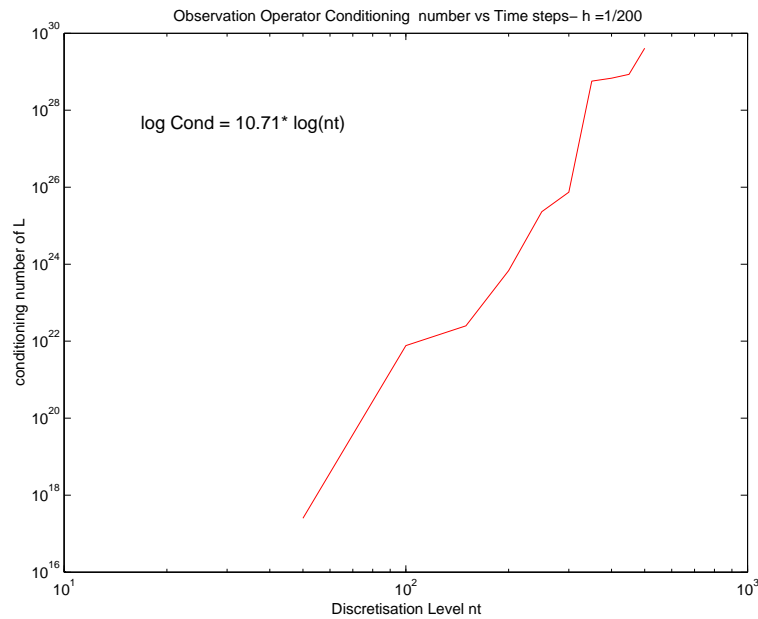


FIG. 2.7 – Conditionnement du système

tère mal-posé du problème de suivi de trajectoires est l'effet régularisant de l'opérateur de la chaleur (Fig 2.8-2.9). Si l'on considère une cible non-régulière en temps, on aura a-priori du mal à construire un contrôle permettant de suivre exactement cette cible.

On aborde dans un premier temps, le cas des cibles atteignables issues de l'observa-

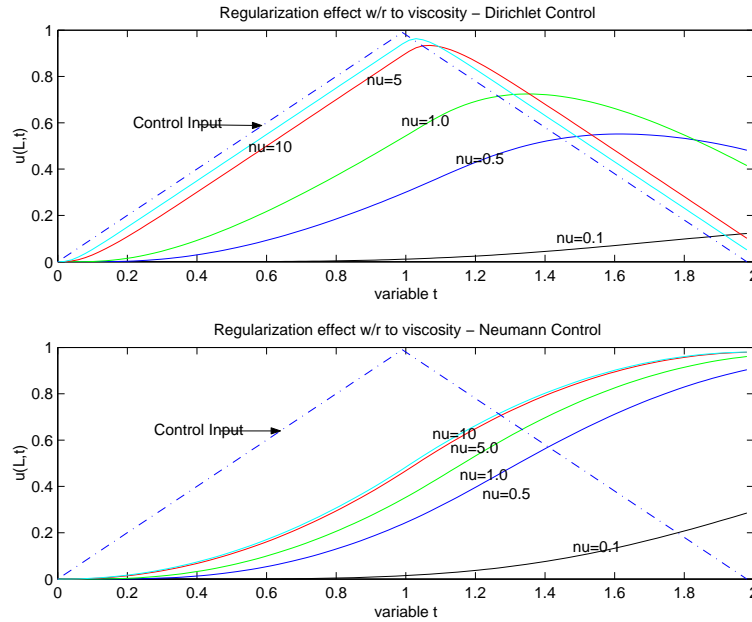


FIG. 2.8 – Effet régularisant sur chapeau - contrôle Dirichlet / contrôle Neumann

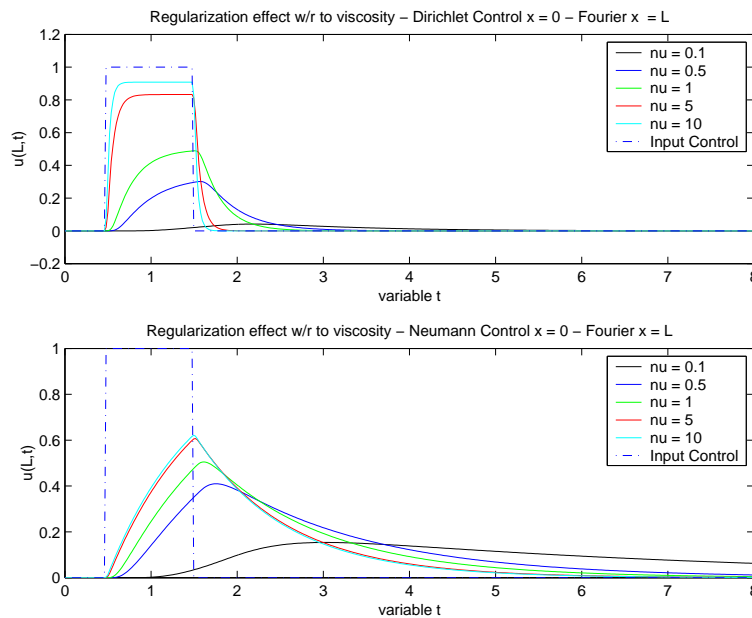


FIG. 2.9 – Effet régularisant sur marche - contrôle Dirichlet / contrôle Neumann - Fourier en  $x = 1$

tion d'un contrôle donné. On utilise dans un premier temps, l'algorithme CGRN avec un

paramètre de régularisation  $\alpha \in [10^{-10}, 10^{-1}]$ . Le contrôle et l'observation obtenus pour  $\alpha = 10^{-1}$  et  $\alpha = 10^{-6}$  sont représentés sur Fig. 2.10. La diminution du paramètre  $\alpha$  permet d'atteindre un résidu limite de  $10^{-6}$  (Fig. 2.11). Ce seuil est atteint à partir d'un paramètre critique  $\alpha_c = 10^{-5}$ . Le résidu entre le contrôle obtenu par l'algorithme CGRN et le contrôle original atteint un seuil autour de  $10^{-2}$ , obtenu à partir de  $\alpha_c$  (Fig 2.12-2.13).

Nous avons ensuite appliqué l'algorithme BFT avec la même cible atteignable. On

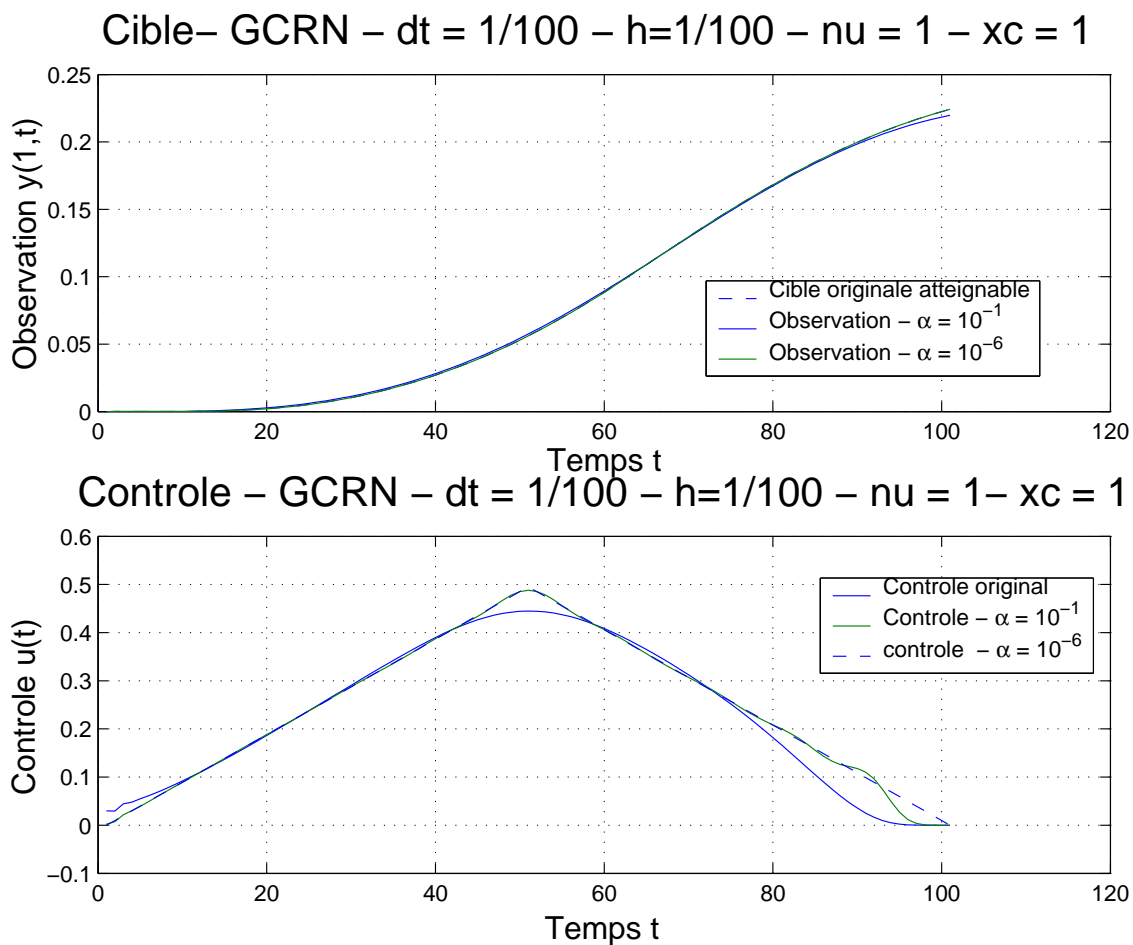


FIG. 2.10 – Identification cible atteignable par Gradient conjugué régularisé appliquée à l'équation normale

constate que le résidu cible atteint un seuil de  $5 \cdot 10^{-5}$  à partir d'un paramètre critique  $\delta_c = 10^{-4}$  (Fig. 2.15). Le paramètre de régularisation correspondant vaut  $10^{-5}$  ce qui est en accord avec les résultats obtenus avec l'algorithme CGRN. On a représenté sur Fig. 2.16 le nombre d'itérations de la boucle extérieure de point fixe, ainsi que celui des itérations de la boucle intérieure de CGRD.

L'ensemble des tests précédents est répété dans le cas où la cible est arbitraire. On a choisi ici une cible possédant une singularité au niveau de sa dérivée temporelle en un point  $t = T/2$ . De ce fait, cette cible bien qu'élément de  $L^2(0,T)$  ne sera sûrement pas atteignable du fait du caractère régularisant évoqué auparavant. On constate que le résidu

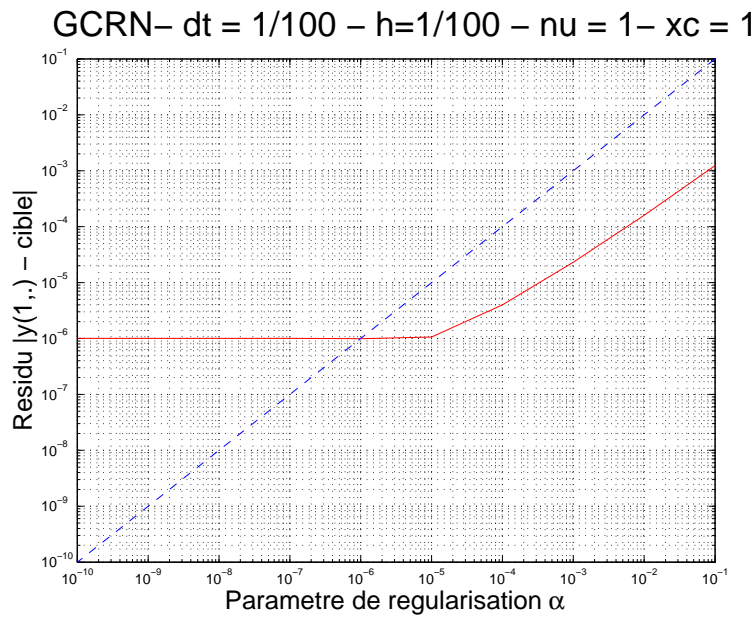


FIG. 2.11 – Comportement du résidu selon le paramètre  $\alpha$  pour une trajectoire atteignable - GCRN

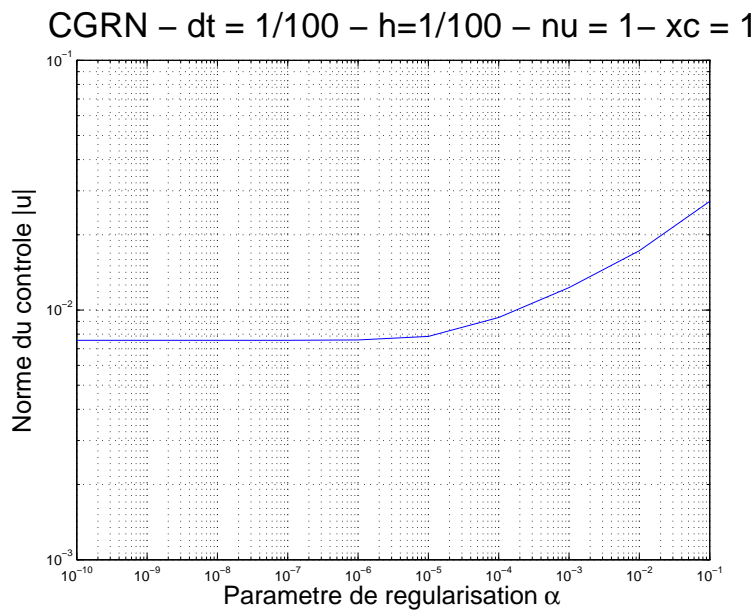


FIG. 2.12 – Comportement de la norme du contrôle selon le paramètre  $\alpha$ - GCRN - cible atteignable

atteint un seuil à un niveau aux alentours de  $5 \cdot 10^{-3}$  (Fig. 2.17-2.18). De plus, la norme du contrôle augmente avec la diminution du paramètre de régularisation  $\alpha$  (Fig. 2.19-2.20), ce qui provient du fait que le problème est mal-posé. L'utilisation de l'algorithme hybride BFT n'y change rien (Fig. 2.21-2.22-2.23) et l'on se retrouve avec les mêmes limites pour le résidu cible.

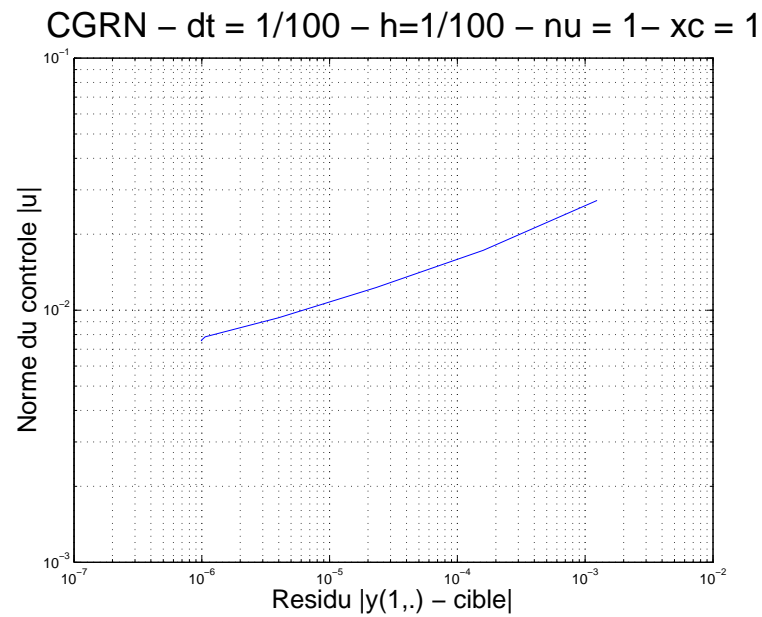


FIG. 2.13 – Comportement de la norme du contrôle selon le résidu - GCRN - cible atteignable

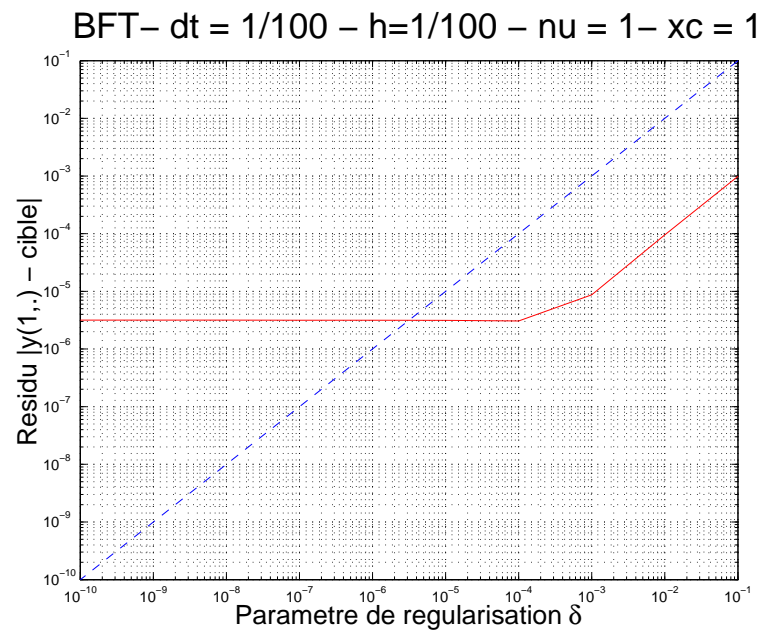


FIG. 2.14 – Comportement du résidu selon le paramètre  $\delta$  pour une trajectoire atteignable - BFT

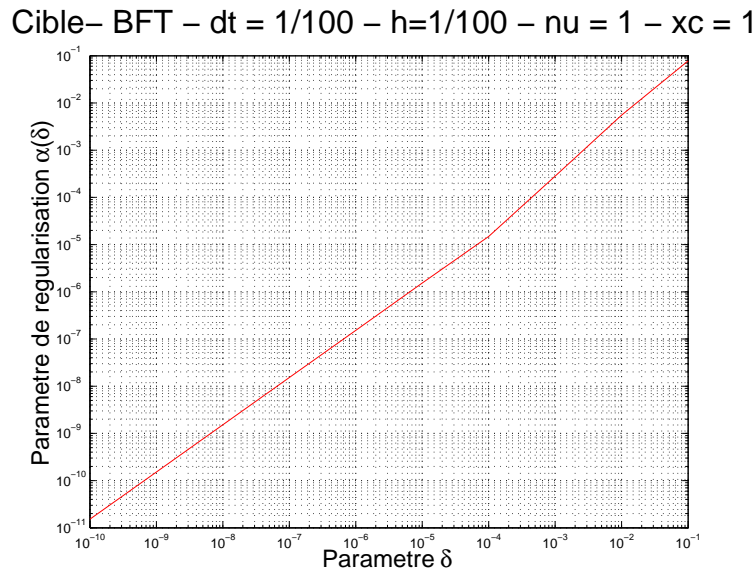


FIG. 2.15 – Comportement du paramètre de régularisation  $\alpha$  selon le paramètre  $\delta$  pour une trajectoire atteignable - BFT

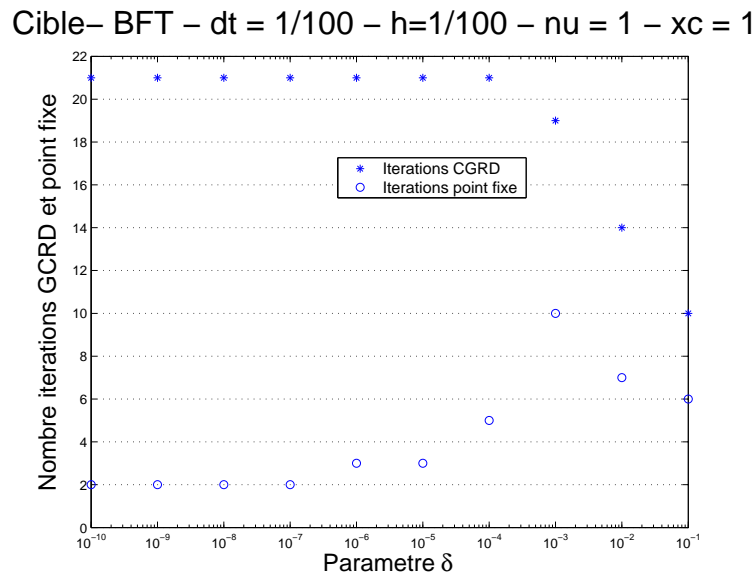


FIG. 2.16 – Comportement des itérations de CGRD et de point fixe selon le paramètre  $\delta$  pour une trajectoire atteignable - BFT

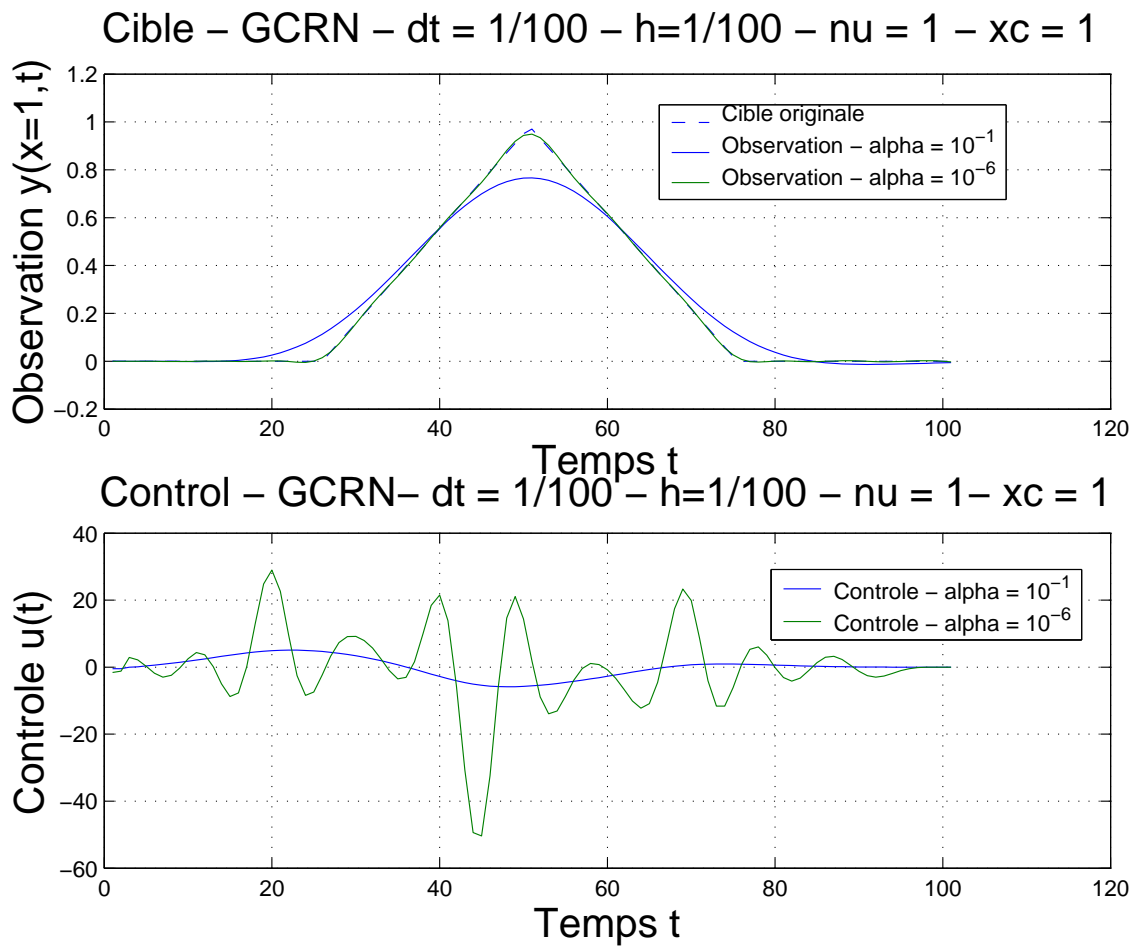


FIG. 2.17 – Identification cible arbitraire par Gradient conjugué régularisé appliquée à l'équation normale



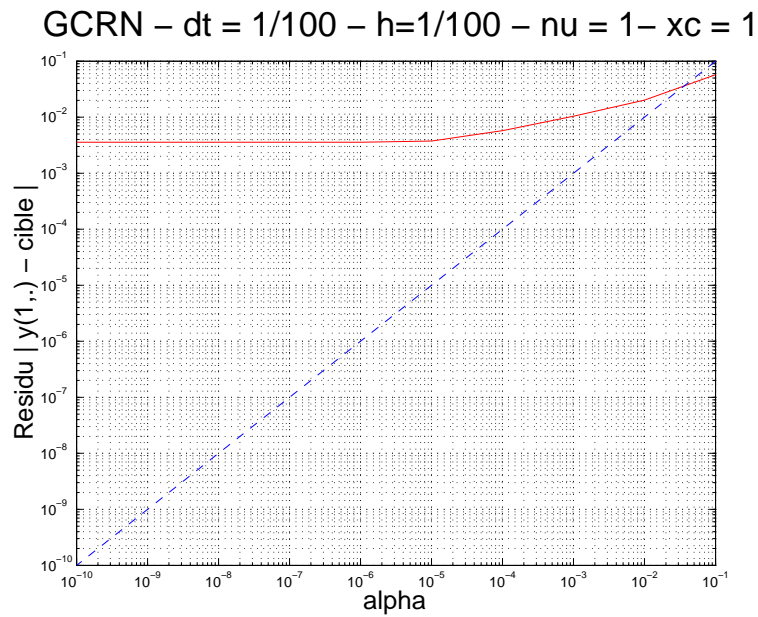


FIG. 2.18 – Comportement du résidu selon le paramètre  $\alpha$  pour une trajectoire arbitraire - GCRN

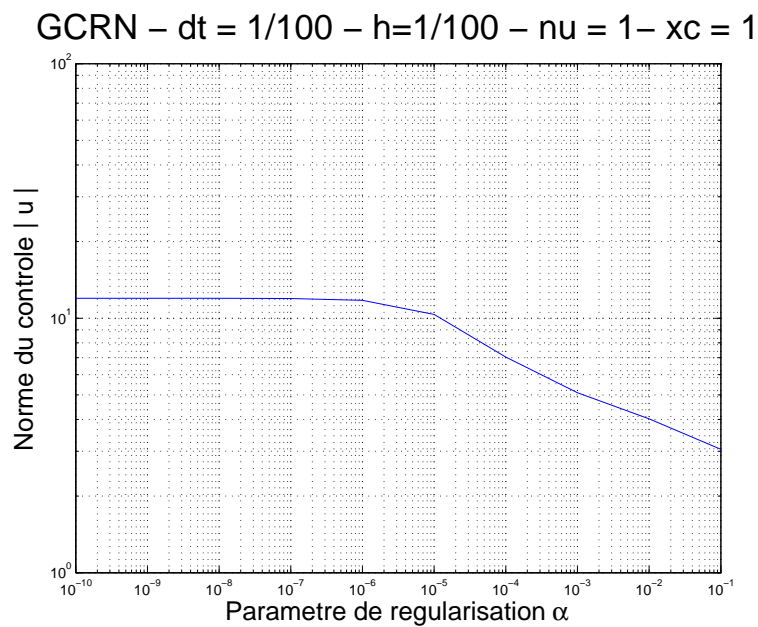


FIG. 2.19 – Comportement de la norme du contrôle selon le paramètre  $\alpha$ - GCRN - cible arbitraire

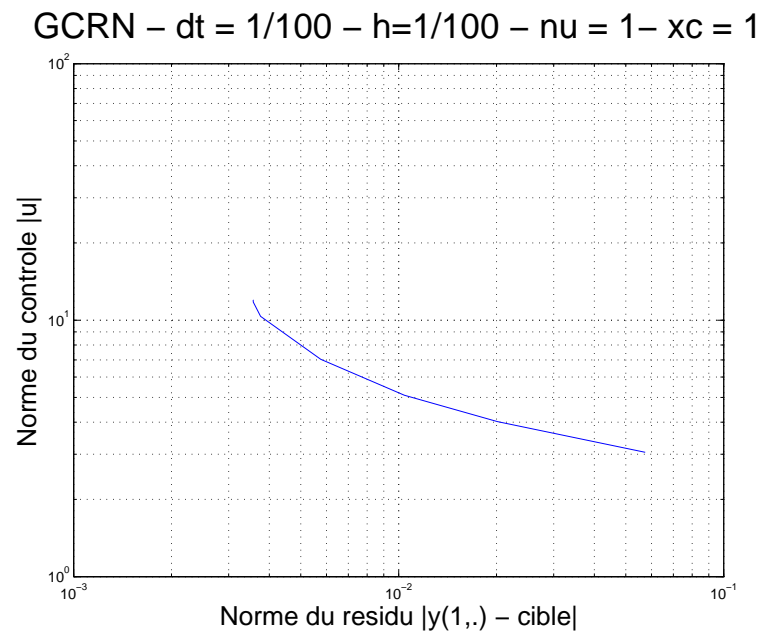


FIG. 2.20 – Comportement de la norme du contrôle selon le résidu - GCRN - cible arbitraire

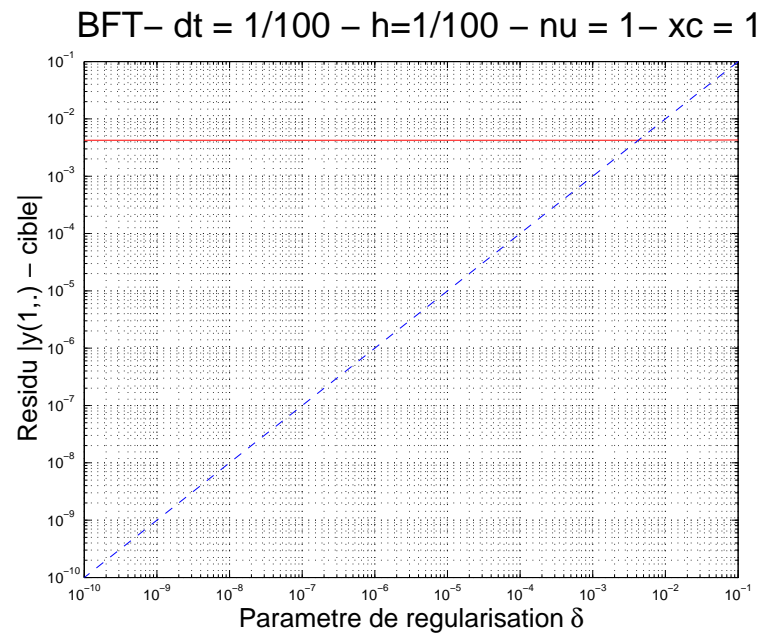


FIG. 2.21 – Comportement du résidu selon le paramètre  $\delta$  pour une trajectoire arbitraire - BFT

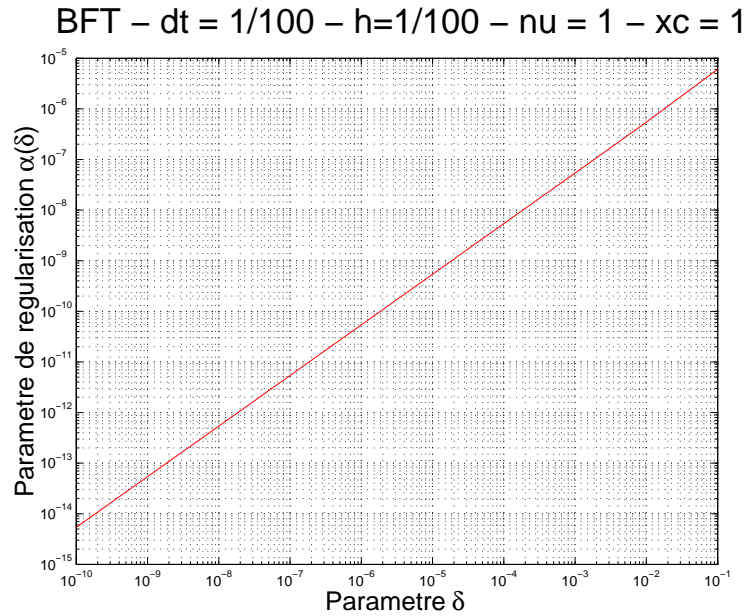


FIG. 2.22 – Comportement du paramètre de régularisation  $\alpha$  selon le paramètre  $\delta$  pour une trajectoire arbitraire - BFT

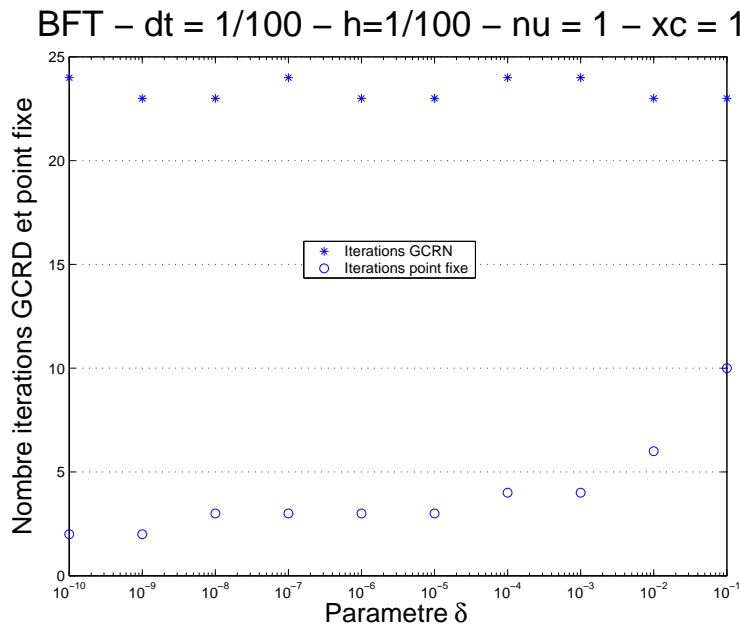


FIG. 2.23 – Comportement des itérations de CGRD et de point fixe selon le paramètre  $\delta$  pour une trajectoire arbitraire - BFT

## 2.5 Suivi de trajectoires pour l'équation de Burgers

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au problème de suivi de trajectoires pour un système non-linéaire. L'équation de Burgers avec viscosité est une forme simplifiée des équations de Navier-Stokes en une dimension d'espace. L'intérêt de cette équation provient de la présence du terme de convection non-linéaire qui interagit de façon complexe avec le terme de diffusion. Ainsi, l'étude de problèmes de contrôle associés à cette équation est une première étape nécessaire avant le traitement du cas des équations de Navier-Stokes. La littérature abordant le contrôle de l'équation de Burgers est abondante, nous pouvons citer par exemple les thèmes suivants,

1. Stabilisation et contrôle en boucle de rétroaction : [112], [25],[96], [115].
2. Contrôle optimal : [103], [10], [154], [8].

### 2.5.1 Position du problème

Considérons un domaine  $\omega = [0,1]$  et un intervalle de temps  $I = [0,T]$ . On note  $u(x,t)$  le variable eulérienne solution de l'équation de Burgers unidimensionnelle :

$$\partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_{xx} u = f \quad (2.163)$$

où  $\nu$  est la viscosité du système que l'on munit d'une condition initiale

$$u(x,t=0) = u_0(x), x \in \omega \quad (2.164)$$

et de conditions aux limites de Fourier,

$$\begin{cases} a_0 u(0,t) - b_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = (a_0 + c_0) q_0(t), & t \in I \\ a_1 u(1,t) + b_1 \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = (a_1 + c_1) q_1(t), & t \in I \end{cases} \quad (2.165)$$

**Remarque 2.22** *Le choix de conditions aux limites de type Fourier est conditionné par la partie contrôle du problème.*

En résumé,

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_{xx} u = f, & \omega \\ a_0 u(0,t) - b_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = (a_0 + c_0) q_0(t), & t \in (0,T) \\ a_1 u(1,t) + b_1 \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = (a_1 + c_1) q_1(t), & t \in (0,T) \\ u(.,t=0) = u_0, & \omega \end{cases} \quad (2.166)$$

Considérons un réel  $0 < \ell \leq 1$  et une cible  $u_d \in L^2(0,T)$ , nous cherchons à résoudre le problème de suivi approché,

$$\begin{aligned} \min_{q_0 \in L^2(0,T)} \quad & \|q_0\|_{L^2(0,T)}^2 \\ & \|u(q_0)(\ell,.) - y_d\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \delta \end{aligned} \quad (2.167)$$

où  $u(q_0)$  est une solution faible de Eq. (2.166) associée à la donnée au bord en  $x = 0$ ,  $q_0 \in L^2(0, T)$ . Afin de relaxer le problème, on traitera la version Tykhonov du problème (2.167), c'est-à-dire que l'on souhaite résoudre,

$$\min_{q_0 \in L^2(0, T)} \frac{1}{2} \|u(\ell, \cdot) - u_d\|_{L^2(0, T)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|q_0\|_{L^2(0, T)}^2 \quad (2.168)$$

## 2.5.2 Existence et conditions d'optimalité

Le problème de contrôle optimal (2.168) rentre dans le cadre des problèmes d'optimisation en dimension infinie et plus particulièrement dans le cas d'espace de Hilbert.

### 2.5.2.1 Optimisation Hilbertienne

Soient  $\mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$  trois espaces de Hilbert réels et  $\mathcal{U}^*, \mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*$  leurs espaces duaux associés. Soient les applications

$$\begin{aligned} J : \mathcal{U} \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ e : \mathcal{U} \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{Y}^* \end{aligned}$$

Dans la suite on notera  $X = \mathcal{U} \times \mathcal{X}$  et  $Z = X \times \mathcal{Y}$ . Nous nous intéressons au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } (\bar{q}, \bar{u}) \in X \text{ tel que} \\ J(\bar{q}, \bar{u}) \leq J(q, u), \forall (q, u) \in X \text{ avec } e(q, u) = 0 \end{cases}$$

Nous formulerons ce problème d'optimisation sous la forme standard

$$\min_{e(q, u) = 0} J(q, u) \quad (2.169)$$

Nous noterons par  $f'$  la dérivée de Fréchet de l'application  $f$  par rapport à la variable  $x = (q, u)$ . Pour établir une condition d'optimalité du premier ordre associé au problème (Q) nous faisons les deux hypothèses suivantes :

– Hypothèse 1 :

Le problème (Q) admet une solution locale  $(\bar{q}, \bar{u}) \in X$ . De plus  $J$  et  $e$  sont continûment Fréchet-différentiables au voisinage de  $(\bar{q}, \bar{u})$ .

– Hypothèse 2 :

La dérivé de Fréchet  $e'(\bar{q}, \bar{u})$  définit un épimorphisme de  $X$  dans  $\mathcal{Y}$ .

Définissons alors le Lagrangien associé au problème (2.169)

$$\mathcal{L} : \begin{array}{l} Z \\ (q, u, \lambda) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \mathcal{L}(q, u, \lambda) = J(q, u) + \mathcal{Y}^* \langle e(q, u), \lambda \rangle_{\mathcal{Y}} \end{array} \quad (2.170)$$

**Theorem 2.1 ([84])** *Sous les hypothèses 1 et 2, il existe  $\bar{\lambda} \in \mathcal{Y}$ , appelé multiplicateur de Lagrange, vérifiant la condition suivante*

$$\begin{cases} \mathcal{L}'(\bar{q}, \bar{u}, \bar{\lambda}) = J'(\bar{q}, \bar{u}) + (e')^*(\bar{q}, \bar{u})\bar{\lambda} = 0, \\ e(\bar{q}, \bar{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.171)$$

Où  $(e')^*(x)$  désigne l'opérateur adjoint associé à  $e'(x)$ .

### 2.5.2.2 Application au problème de contrôle optimal

Avant d'établir un résultat d'existence pour le problème de contrôle optimal (2.168), nous rappelons le résultat d'existence d'une solution unique faible de Eq. (2.166).

On introduit les espaces fonctionnels  $H = L^2(0,1)$ ,  $V = H^1(0,1)$  e

$$W(0,T;V) = \{\varphi / \varphi \in L^2(0,T;V), \partial_t \varphi \in L^2(0,T;V^*)\} \quad (2.172)$$

**Proposition 2.21 ([154])** *Pour  $q_0, q_1 \in L^2(0,T)$ ,  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(0,T;V^*)$ , il existe un instant  $T$  fonction de  $q_0, q_1, u_0, f, \nu$  et une unique solution faible  $u \in W(0,T;V)$  de Eq.(2.166).*

Nous introduisons les notations suivantes,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= L^2(0,T), & \mathcal{X} &= W(0,T;V) \\ \mathcal{Y} &= L^2(0,T;V) \times H, & \mathcal{Y}^* &= L^2(0,T;V^*) \times H \\ X &= \mathcal{U} \times \mathcal{X}, & Z &= X \times \mathcal{Y} \\ \mathcal{Z} &= L^2(0,T;V), \end{aligned}$$

Dans la suite, on notera  $((\cdot, \cdot))$  le produit scalaire usuel dans  $L^2(0,T;H)$  et  $\gamma_k$  l'opérateur trace  $u \in V \mapsto u(x=k) \in L^2(0,T)$ . Nous introduisons l'opérateur

$$e = (e_1, e_2) : \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}^*$$

défini par

$$\begin{aligned} \langle e_1(q_0, u), \varphi \rangle_{\mathcal{Z}} &= \langle \partial_t u, \varphi \rangle_{\mathcal{X}} + ((u \partial_x u - f, \varphi)) \\ &+ \nu((\partial_x u, \partial_x \varphi)) + \nu\left(\frac{a_k}{b_k} \gamma_k u - \frac{a_k + c_k}{b_k} q_k, \gamma_k \varphi\right)_u, \quad \forall \varphi \in \mathcal{Z} \\ e_2(q_0, u) &= u(t=0, \cdot) - u_0 \end{aligned} \quad (2.173)$$

Nous rappelons que la fonctionnelle coût s'écrit

$$J(q_0, u) = \frac{\alpha}{2} \|q_0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{2} \|\gamma_\ell u - u_d\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (2.174)$$

Ainsi nous pouvons formuler le problème de contrôle de la même façon que le problème (2.169),

$$\min_{e(q_0, u)=0} J(q_0, u) = 0 \quad (2.175)$$

On associe au problème (2.175) le Lagrangien

$$\mathcal{L}(q_0, u, \lambda, \mu) = J(q_0, u) + \langle e_1(q_0, u), \lambda \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle e_2(q_0, u), \mu \rangle_H \quad (2.176)$$

**Proposition 2.22** *Soient  $u_0 \in H$ ,  $q_L \in L^2(0,T)$  et  $f \in L^2(0,T;H)$ , alors le problème (2.175) admet au moins une solution  $(\bar{q}_0, \bar{u}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}$ .*

**Preuve :** Nous utilisons un théorème classique sur la minimisation fonctionnelle dans un Hilbert ([45], [19]).

1.  $J$  est coercive sur  $X$  et semi-continue inférieurement :

Soit  $(q_0, u) \in X$  tel que  $e(q_0, u) = 0$ , il est clair que  $\|(q_0, u)\|_X \rightarrow +\infty$  implique  $\|q_0\|_{\mathcal{U}} \rightarrow \infty$ . Or

$$J(q_0, u) \geq \frac{1}{2} \|q_0\|_{\mathcal{U}}$$

Ainsi

$$J(q_0, u) \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \|(q_0, u)\|_X \rightarrow +\infty$$

La semi-continuité inférieure découle de celle des normes dans  $X$  et  $\mathcal{U}$ .

2. Convergence d'une suite minimisante :

Comme  $J(q_0, u) \geq 0, \forall (q_0, u) \in X$ , il existe  $\bar{J} \geq 0$

$$\bar{J} = \min_{e(q_0, u)=0} J(q_0, u)$$

Considérons une suite minimisante  $(q_0^n, u^n) \in X$ , i.e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(q_0^n, u^n) = \bar{J}$$

La propriété de coercivité de  $J$  implique que la suite  $(q_0^n, u^n)_{n \geq 0}$  est bornée dans  $X$ . Comme  $X$  est un Hilbert, nous pouvons extraire une sous-suite  $(q_0^n, u^n)_{n \geq 0}$  faiblement convergente dans  $X$ , telle que

$$\begin{aligned} q_0^n &\rightharpoonup \bar{q}_0, & \mathcal{U} \\ u^n &\rightharpoonup \bar{u}, & \mathcal{X} \end{aligned}$$

Il est classique de démontrer qu'alors le point limite  $(\bar{q}_0, \bar{u})$  satisfait la contrainte  $e(\bar{q}_0, \bar{u})$ .

**Remarque 2.23** La difficulté provient du terme non-linéaire  $((u^n \partial_x u^n, \varphi))_{\Omega}$ . On montre ( voir Lions [107] ) que  $u^n \in H^\gamma(0, T; V)$  avec  $0 < \gamma \leq \frac{1}{4}$ . Par un résultat d'injection compact  $H^\gamma(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; V)$ , nous pouvons passer à la limite dans le terme non linéaire. La contrainte  $e_2$  est satisfaite en utilisant le fait que  $u^n \in \mathcal{C}(0, T; H)$ .

3. Ainsi  $(q_0^n, u^n) \rightharpoonup (\bar{q}_0, \bar{u})$  et

$$\bar{J} = \liminf_{n \rightarrow \infty} J(q_0^n, u^n) \geq J(\bar{q}_0, \bar{u})$$

Par définition  $\bar{J} \leq J(\bar{q}_0, \bar{u})$ . Nous pouvons en conclure que  $(\bar{q}_0, \bar{u})$  est solution du problème (2.175) .

□

### 2.5.2.3 Condition d'optimalité du premier ordre

Dans la section précédente, nous avons établi l'existence d'un minimum local  $(\bar{q}_0, \bar{u})$ . Nous allons maintenant nous intéresser à l'obtention de conditions d'optimalité du premier ordre. La fonctionnelle  $J$  et l'opérateur  $e$  sont continûment Fréchet-différentiable [1]. Soit  $(q_0, u) \in X$ , l'action de la dérivée de Fréchet  $J'$  au point  $(q_0, u)$  sur un élément  $(p_0, v) \in X$  s'écrit

$$\langle J'(q_0, u), (p_0, v) \rangle_X = \alpha(q_0, p_0)_U + (\gamma_\ell u - u_d, \gamma_\ell v)_U$$

De même l'action de la dérivée de Fréchet  $e'$  au point  $(q_0, u)$  sur un élément  $(p_0, v) \in X$  testée contre un élément  $\varphi \in \mathcal{Y}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \langle e'_1(q_0, u) \cdot (p_0, v), \varphi \rangle &= \langle \partial_t v, \varphi \rangle_X + ((v \partial_x u, \varphi)) + ((u \partial_x v, \varphi)) \\ &\quad + \nu((\partial_x v, \partial_x \varphi)) + \nu\left(\frac{a_k}{b_k} \gamma_k v - \frac{a_0 + c_0}{b_0} p_0, \gamma_k \varphi\right)_U \end{aligned}$$

$$e'_2(q_0, u) \cdot (p_0, v) = v(t = 0, \cdot)$$

L'obtention de ces expressions nous permet de vérifier les conditions de l'Hypothèse 2.

**Theorem 2.2** *Supposons que la solution  $(\bar{q}_0, \bar{u})$  du problème (2.175) est telle que  $\bar{u} \in L^\infty(0, T; V)$  alors l'opérateur  $e'(\bar{q}_0, \bar{u})$  est surjectif sur  $\mathcal{Y}$ .*

Dans ces conditions, la règle des multiplicateurs de Lagrange implique l'existence de  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathcal{Y}$  tel que  $(\bar{q}_0, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  vérifie les conditions d'optimalité du premier ordre associées au problème (2.175), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\bar{q}_0, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= 0, \\ e(\bar{q}_0, \bar{u}) &= 0 \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \langle \partial_u \mathcal{L}(\bar{q}_0, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}), \varphi \rangle_Z &= \langle \partial_u J(\bar{q}_0, \bar{u}), \varphi \rangle_Z + \langle \partial_u e_1(\bar{q}_0, \bar{u}) \cdot (\varphi), \bar{\lambda} \rangle_Z \\ &\quad + (\partial_u e_2(\bar{q}_0, \bar{u}) \cdot (\varphi), \bar{\mu})_H \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma_\ell \bar{u} - u_d, \gamma_\ell \varphi)_U + \langle \partial_t \varphi, \bar{\lambda} \rangle_X + ((\varphi \partial_x \bar{u}, \bar{\lambda})) + ((\bar{u} \partial_x \varphi, \bar{\lambda})) \\ &\quad + \nu((\partial_x \varphi, \partial_x \bar{\lambda})) + \nu\left(\frac{a_k}{b_k} \gamma_k \varphi, \gamma_k \bar{\lambda}\right)_U + (\varphi(t = 0, \cdot), \bar{\mu}) \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{Z}$ . Il est facile de démontrer que

$$\langle \partial \varphi, \bar{\lambda} \rangle_X + (\bar{\mu}, \varphi(t = 0)) = -\langle \partial \bar{\lambda}, \varphi \rangle_X + (\bar{\lambda}(t = T), \varphi(t = T)) + (\bar{\mu} - \bar{\lambda}(t = 0), \varphi(t = 0))$$

$\forall \varphi \in \mathcal{Z}$ . On en déduit alors que

$$\bar{\lambda}(t = T) = 0, \quad \bar{\mu} = \bar{\lambda}(t = 0), \quad \text{dans } H \tag{2.177}$$



On utilise alors

$$\langle \partial_{q_0} \mathcal{L}(\bar{q}_0, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}), \psi \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle \partial_u J(\bar{q}_0, \bar{u}), \psi \rangle + \langle \partial_{q_0} e_1(\bar{q}_0, \bar{u}) \cdot (\psi), \bar{\lambda} \rangle = 0$$

Ainsi

$$\left(-\nu \frac{a_0 + c_0}{b_0} \gamma_0 \bar{\lambda} + \alpha \bar{q}_0, \psi\right)_{\mathcal{U}} = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U} \quad (2.178)$$

Nous définissons les formes bilinéaire et trilinéaire

$$a(u, v) = ((\partial_x u, \partial_x v)), \quad \forall u, v \in \mathcal{Z}$$

$$c(u, v, w) = ((u \partial_x v, w)), \quad u, v, w \in \mathcal{Z}$$

Ainsi la solution  $(\bar{q}_0, \bar{u})$  du problème de contrôle optimal vérifie le système d'optimalité suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\bar{u}(t=0), v) = (u_0, v), & \forall v \in H \\ \langle \partial_t \bar{u}, z \rangle_{\mathcal{X}} + \nu a(\bar{u}, z) + c(\bar{u}, \bar{u}, z) + \nu \frac{a_k}{b_k} (\gamma_k \bar{u}, \gamma_k z)_{\mathcal{U}} = \\ ((f, z)) + \nu \frac{a_0 + c_0}{b_0} (\gamma_0 \bar{q}_0, \gamma_0 z)_{\mathcal{U}} + \nu \frac{a_1 + c_1}{b_1} (\gamma_1 q_1, \gamma_1 z)_{\mathcal{U}}, & \forall z \in \mathcal{Z} \\ (\bar{\lambda}(t=T), v) = 0, & \forall v \in H \\ -\langle \partial_t \bar{\lambda}, \varphi \rangle_{\mathcal{X}} + \nu a(\bar{\lambda}, \varphi) + \nu \frac{a_k}{b_k} (\gamma_k \bar{\lambda}, \gamma_k \varphi)_{\mathcal{U}} \\ + c(\bar{\lambda}, \bar{u}, \varphi) + c(\bar{\lambda}, \varphi, \bar{u}) + (\gamma_l \bar{u} - u_d, \gamma_l \varphi)_{\mathcal{U}} = 0, & \forall \varphi \in \mathcal{Z} \\ (\alpha \bar{q}_0 - \nu \frac{a_0 + c_0}{b_0} \gamma_0 \bar{\lambda}, r)_{\mathcal{U}} = 0, & \forall r \in \mathcal{U} \end{array} \right. \quad (2.179)$$

#### 2.5.2.4 Algorithme de gradient conjugué non-linéaire

Dans cette partie, on se propose de décrire un algorithme de gradient appliqué au problème de contrôle (2.168). Par soucis de simplification, nous traitons le cas où  $\ell = 1$  dans l'expression de la fonctionnelle coût. Dans ce cas particulier, nous pouvons établir que l'état adjoint est solution d'une équation aux dérivées partielles rétrograde en temps. Nous avons démontré dans les sections précédentes que la recherche du contrôle optimal associé au problème (P) est équivalent au calcul du gradient de la fonctionnelle  $J$  par l'intermédiaire d'une variable auxiliaire appelé état adjoint.

Ainsi étant donné un contrôle  $q_0 \in L^2(0, T)$ , nous pouvons calculer en ce point le gradient de  $J$  grâce à la formule

$$\langle \partial_{q_0} J(q_0), r \rangle = ((\alpha q_0 + \nu \frac{a_0 + c_0}{b_0} \mu, r))_{\Gamma_0 \times (0, T)}, \quad \forall r \in L^2(0, T) \quad (2.180)$$

où  $\mu$  est lié à  $q_0$  par l'intermédiaire du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} ((u, \partial_t z)) - ((u_0, z_0)) - \nu a(u, z) - c(u, u, z) - \nu \frac{a_k}{b_k} ((u, z))_{\Gamma_k \times (0, T)} + L(q_0, z) = 0, \quad \forall z \in \mathcal{V} \\ -((w, \partial_t \mu)) - \nu a(w, \mu) - c(u, w, \bar{\mu}) - c(w, u, \mu) - \nu \frac{a_k}{b_k} ((\mu, w))_{\Gamma_k \times (0, T)} \\ +((u - u_d, w))_{\Gamma_1 \times (0, T)} = 0, \end{array} \right. \quad \forall w \in \mathcal{V} \quad (2.181)$$

La première équation représente l'équation de Burgers sous forme variationnelle, la seconde peut être interprétée dans ce cas comme l'équation linéarisée de Burgers sous forme variationnelle. En effet, par simple intégration par parties nous avons la formule suivante

$$c(u, w, \mu) + c(w, u, \mu) = -c(w, \mu, u) + ((u\mu, w))_{\Gamma_1 \times (0, T)} - ((u\mu, w))_{\Gamma_0 \times (0, T)}, \\ \forall (u, \mu, w) \in L^2(0, T; V)$$

Ainsi nous pouvons écrire en intégrant par parties en temps

$$((\partial_t \mu, w)) - ((\mu_0, w_0)) - \nu a(w, \mu) + c(u, \mu, w) - (((\nu \frac{a_1}{b_1} + u)\mu, w))_{\Gamma_1 \times (0, T)} \\ + (((-\nu \frac{a_0}{b_0} + u)\mu, w))_{\Gamma_0 \times (0, T)} + ((u - u_d, w))_{\Gamma_1 \times (0, T)} = 0, \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Ainsi l'état adjoint  $\mu$  est solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mu + u \partial_x \mu + \nu \partial_{xx} \mu = 0, & \Omega \times (0, T) \\ \mu(\nu \frac{a_0}{b_0} - u) - \nu \partial_x \mu = 0, & \Gamma_0 \times (0, T) \\ \mu(u + \nu \frac{a_1}{b_1}) + \nu \partial_x \mu = (u - u_d), & \Gamma_1 \times (0, T) \\ \mu(t = T) = 0, & \Omega \end{array} \right. \quad (2.182)$$

où  $u$  est solution du système de Burgers direct

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_{xx} u = 0, & \Omega \times (0, T) \\ a_0 u - b_0 \partial_x u = q_0, & \Gamma_0 \times (0, T) \\ a_1 u + b_1 \partial_x u = q_1, & \Gamma_1 \times (0, T) \\ u(t = 0) = u_0, & \Omega \end{array} \right. \quad (2.183)$$

La résolution conjointe du système de Burgers direct et du système adjoint rétrograde permet le calcul du gradient de la fonctionnelle coût grâce à la formule (2.180).

### 2.5.2.5 L'algorithme de gradient

Les méthodes itératives de gradient sont particulièrement intéressantes du point de vue numérique compte tenu du fait qu'elles ne réclament qu'une information au premier ordre de la fonctionnelle à minimiser. Le problème de contrôle 2.168 peut se mettre sous la forme abstraite

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H, \\ j(u) \leq j(v), \quad \forall v \in H \end{array} \right. \quad (2.184)$$

où  $H$  désigne un espace de Hilbert et  $j : H \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable. Ici, nous introduisons l'algorithme de gradient conjugué [10], [11] appliqué au problème (3.9)

– Etape 0

$$u^0 \in H$$

$$\begin{cases} g^0 \in H, \\ (g^0, v) = \langle j'(u^0), v \rangle, \quad \forall v \in H \end{cases}$$

On pose

$$w^0 = g^0$$

– Etape  $n + 1$  Pour  $n \geq 0$ , on suppose connus  $u^n, g^n, w^n$  et on calcule  $u^{n+1}, g^{n+1}, w^{n+1}$ .  
On cherche  $\rho_n$  tel que

$$(RL) \begin{cases} \rho_n \in \mathbb{R}, \\ j(u^n - \rho_n w^n) \leq j(u^n - \rho w^n), \quad \forall \rho \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On pose

$$u^{n+1} = u^n - \rho_n w^n,$$

On résout

$$\begin{cases} g^{n+1} \in H, \\ (g^{n+1}, v) = \langle j'(u^{n+1}), v \rangle, \quad \forall v \in H \end{cases}$$

Si  $\frac{\|g^{n+1}\|}{\|g^0\|} \leq \epsilon$  la solution est donnée par

$$u = u^{n+1}$$

Sinon on calcule une de ces deux quantités

1.

$$\gamma_n = \frac{\|g^{n+1}\|^2}{\|g^n\|^2}, \text{ Fletcher-Reeves}$$

2.

$$\gamma_n = \frac{(g^{n+1}, g^{n+1} - g^n)}{\|g^n\|^2}, \text{ Polack-Ribière}$$

Puis on pose

$$w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n w^n$$

On pose alors  $n = n + 1$  et on revient à l'étape  $n + 1$ .

Nous allons appliquer cet algorithme au cas particulier du contrôle frontière du système de Burgers. On se donne un contrôle initial quelconque

$$q_0^0 \in L^2(0,T) \neq 0$$

– Etape 0 On résout le système de Burgers direct

$$\begin{cases} \partial_t u^0 + u^0 \partial_x u^0 - \nu \partial_{xx} u^0 = 0, & \Omega \times (0,T) \\ a_0 u^0 - b_0 \partial_x u^0 = q_0, & \Gamma_0 \times (0,T) \\ a_1 u^0 + b_1 \partial_x u^0 = q_1, & \Gamma_1 \times (0,T) \\ u^0(t=0) = u_0, & \Omega \end{cases} \quad (2.185)$$

On résout le problème adjoint

$$\begin{cases} \partial_t \mu^0 + u \partial_x \mu^0 + \nu \partial_{xx} \mu^0 = 0, & \Omega \times (0,T) \\ \mu^0 (\nu \frac{a_0}{b_0} - u) - \nu \partial_x \mu^0 = 0, & \Gamma_0 \times (0,T) \\ \mu^0 (u + \nu \frac{a_1}{b_1}) + \nu \partial_x \mu^0 = (u - u_d), & \Gamma_1 \times (0,T) \\ \mu^0(t=T) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (2.186)$$

On résout alors le problème suivant

$$\begin{cases} g^0 \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_0)), \\ \langle g^0, r \rangle = ((\alpha q_0^0 + \nu \frac{a_0 + c_0}{b_0} \mu^0, r))_{\Gamma_0 \times (0,T)}, \quad \forall r \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_0)) \end{cases}$$

On pose alors  $w^0 = g^0$

– Etape  $n + 1$  On résout le problème d'optimisation unidimensionnelle

$$\begin{cases} \rho_n \in \mathbb{R}, \\ J(q_0^n - \rho_n w^n) \leq J(q_0^n - \rho w^n), J(q_0^n - \rho_n w^n) \quad \forall \rho \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On pose alors  $q_0^{n+1} = q_0^n - \rho_n w^n$  et on resout

$$\begin{cases} \partial_t u^{n+1} + u^{n+1} \partial_x u^{n+1} - \nu \partial_{xx} u^{n+1} = 0, & \Omega \times (0,T) \\ a_0 u^{n+1} - b_0 \partial_x u^{n+1} = q_0, & \Gamma_0 \times (0,T) \\ a_1 u^{n+1} + b_1 \partial_x u^{n+1} = q_1, & \Gamma_1 \times (0,T) \\ u^{n+1}(t=0) = u_0, & \Omega \end{cases} \quad (2.187)$$

On résout le problème adjoint

$$\begin{cases} \partial_t \mu^{n+1} + u^{n+1} \partial_x \mu^{n+1} + \nu \partial_{xx} \mu^{n+1} = 0, & \Omega \times (0,T) \\ \mu^{n+1} (\nu \frac{a_0}{b_0} - u^{n+1}) - \nu \partial_x \mu^{n+1} = 0, & \Gamma_0 \times (0,T) \\ \mu^{n+1} (u^{n+1} + \nu \frac{a_1}{b_1}) + \nu \partial_x \mu^{n+1} = (u^{n+1} - u_d), & \Gamma_1 \times (0,T) \\ \mu^{n+1}(t=T) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (2.188)$$

On résout alors

$$\begin{cases} g^{n+1} \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_0)), \\ \langle g^{n+1}, r \rangle = ((\alpha q_0^{n+1} + \nu \frac{a_0 + c_0}{b_0} \mu^{n+1}, r))_{\Gamma_0 \times (0,T)}, \quad \forall r \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_0)) \end{cases}$$

– Test de convergence Si

$$\frac{\|g^{n+1}\|}{\|g^0\|} \leq \epsilon$$

alors la solution du problème d'optimisation est  $q_0 = q_0^{n+1}$ .  
Sinon on calcule une des deux quantités suivantes

1.

$$\gamma_n = \frac{\|g^{n+1}\|^2}{\|g^n\|^2}, \text{ Fletcher-Reeves}$$

2.

$$\gamma_n = \frac{(g^{n+1}, g^{n+1} - g^n)}{\|g^n\|^2}, \text{ Polack-Ribière}$$

Puis on pose

$$w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n w^n$$

On pose alors  $n = n + 1$  et on revient à l'étape  $n + 1$ .

### 2.5.3 Approximation numérique du problème de contrôle

Dans cette partie, nous introduisons une discrétisation particulière de l'équation d'état (2.166) et du problème de contrôle (2.168).

#### 2.5.3.1 Approximation de l'équation d'état

Nous rappelons la formulation variationnelle du problème de Burgers

$$\begin{cases} (\partial_t u, v) + (u \partial_x u, v) + \nu (\partial_x u, \partial_x v) + \nu \frac{a_l}{b_l} (u, v)_{\Gamma_l} = L(v), & \forall v \in V \\ L(v) = \nu \left( \frac{a_l + c_l}{b_l} \right) (q_l(t), v)_{\Gamma_l}, & l \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (2.189)$$

#### 2.5.3.2 Semi-discrétisation temporelle

On utilise des schémas de type différences finis pour la discrétisation temporelle [46]. On se donne  $u_0$  et  $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Nous cherchons alors  $(u^n)_{n \geq 1}$  tel que

$$\begin{cases} \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{dt} \right) + (u^* \partial_x) u^{n+\theta} - \nu \partial_{xx} u^{n+\theta} = 0 \\ R_{b_0}(u^{n+\theta}) = (a_0 + c_0) q_0^{n+\theta} \\ R_{b_1}(u^{n+\theta}) = (a_1 + c_1) q_1^{n+\theta} \end{cases} \quad (2.190)$$

avec  $u^{n+\theta} = \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n$ . Selon le choix du paramètre  $\theta$  et de la vitesse de convection  $u^*$ , nous obtenons différents schémas que l'on peut classer en deux familles

1. Schémas non-linéaires

– Euler rétrograde

$$\theta = 1, \quad u^* = u^{n+1}, \quad O(dt)$$

– Crank-Nicolson

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad u^* = u^{n+\frac{1}{2}}, \quad O(dt^2)$$

Ces schémas réclament la résolution à chaque itération d'un système non-linéaire. Ils sont recommandés dans le cas où l'on recherche une précision temporelle élevée.

2. Schémas linéaires

– Euler directe

$$\theta = 1, \quad u^* = u^n, \quad O(dt)$$

– Crank-Nicolson linéarisé

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad u^* = u^n, \quad O(dt)$$

– Simo-Armero

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad u^* = \frac{1}{2}(3u^n - u^{n-1}), \quad O(dt^2)$$

Ces schémas sont inconditionnellement stables.

### 2.5.3.3 Formulation variationnelle semi-discrète pour un $\theta$ -schéma

Nous considérons une fonction test  $v \in V$ .

Alors étant donné  $u_0$  nous cherchons  $(u^n)_{n \geq 1}$  tel que

$$\begin{cases} \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{dt}, v \right) + (u^* \partial_x u^{n+\theta}, v) + \nu (\partial_x u^{n+\theta}, \partial_x v) + \nu \frac{a_1}{b_1} (u^{n+\theta}, v)_{\Gamma_1} = L(v), \quad \forall v \in V \\ L(v) = \nu \left( \frac{a_l + c_l}{b_l} \right) (q_l^{n+\theta}(t), v)_{\Gamma_l}, \\ u^{n+\theta} = \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n \end{cases} \quad (2.191)$$

En supposant connus à l'étape  $n+1$ ,  $u^n$  et  $u^*$  connus, nous recherchons  $u^{n+1}$  tel que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{dt} (u^{n+1}, v) + \theta \left[ (u^* \partial_x u^{n+1}, v) + \nu (\partial_x u^{n+1}, \partial_x v) + \nu \frac{a_1}{b_1} (u^{n+1}, v)_{\Gamma_1} + \nu \frac{a_0}{b_0} (u^{n+1}, v)_{\Gamma_0} \right] \\ &= \frac{1}{dt} (u^n, v) + (\theta - 1) \left[ (u^* \partial_x u^n, v) + \nu (\partial_x u^n, \partial_x v) + \nu \frac{a_1}{b_1} (u^n, v)_{\Gamma_1} + \nu \frac{a_0}{b_0} (u^n, v)_{\Gamma_0} \right] \\ & \quad + \nu \left( \frac{a_1 + c_1}{b_1} \right) (q_1^{n+\theta}, v)_{\Gamma_1} + \nu \left( \frac{a_0 + c_0}{b_0} \right) (q_0^{n+\theta}, v)_{\Gamma_0}, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

**Remarque 2.24** *L'utilisation du schéma de Simo-Armero réclame une étape d'initialisation pour le calcul de  $u^1$ . Cette étape peut être réalisée par l'utilisation d'un schéma d'Euler direct avec un pas de temps  $dt_1$  très petit pour éviter de dégrader l'ordre du schéma.*

### 2.5.3.4 Schéma totalement discret

Nous rappelons que l'espace des fonctions tests est  $V = H^1(0,L)$ . Nous considérons une partition  $(K_n)_{1 \leq n \leq N+1}$  du segment  $[0,L]$  en  $N+1$  segments de taille constante  $h = \frac{L}{N+1}$ . Nous considérons une approximation conforme de  $V$  donné par l'espace des fonctions continues, affines par morceaux sur  $[0,L]$ .

$$V_h = \{v \in C^0([0,L]) / v|_{K_i} \in \mathbb{P}_1, 1 \leq i \leq N+1\}$$

Nous désignons par  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N+2}$  la base canonique de  $V_h$  et par  $u_h$  l'approximation dans  $V_h$  de la solution faible de Burgers  $u$ .

**Remarque 2.25** Dans le cas unidimensionnel, la frontière  $\Gamma_k$  se réduit à un point. Ainsi elle est approchée de façon exacte ce qui n'est pas toujours le cas en dimension supérieure.

Nous recherchons alors  $(u_h^k)_{0 \leq k \leq n+1}$  tel que

$$(u_h^0, \varphi_i) = (u_0, \varphi_i), 1 \leq i \leq N+2$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{dt}(u_h^{k+1}, \varphi_i) + \theta[(u_h^* \partial_x u_h^{k+1}, \varphi_i) + \nu(\partial_x u_h^{k+1}, \partial_x \varphi_i) + \nu \frac{a_1}{b_1}(u_h^{k+1}, \varphi_i)_{\Gamma_1} + \nu \frac{a_0}{b_0}(u_h^{k+1}, \varphi_i)_{\Gamma_0}] \\ &= \frac{1}{dt}(u_h^k, \varphi_i) + (\theta - 1)[(u_h^* \partial_x u_h^k, \varphi_i) + \nu(\partial_x u_h^k, \partial_x \varphi_i) + \nu \frac{a_1}{b_1}(u_h^k, \varphi_i)_{\Gamma_1} + \nu \frac{a_0}{b_0}(u_h^k, \varphi_i)_{\Gamma_0}] \\ & \quad + \nu \left(\frac{a_1 + c_1}{b_1}\right)(q_1^{k+\theta}, \varphi_i)_{\Gamma_1} + \nu \left(\frac{a_0 + c_0}{b_0}\right)(q_0^{k+\theta}, \varphi_i)_{\Gamma_0}, 1 \leq i \leq N+2 \end{aligned}$$

Pour obtenir une expression algébrique de ce système nous décomposons  $u_h^k$  sur la base canonique  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N+2}$

$$u_h^{k+1} = \sum_{j=1}^{N+2} u_{h,j}^{k+1} \varphi_j, \text{ avec } u_{h,j}^{k+1} = u_h^{k+1}((j-1)h)$$

Nous notons  $\beta_j^{k+1} = u_{h,j}^{k+1}$ . De même

$$u_h^* = \sum_{j=1}^{N+2} \beta_j^* \varphi_j$$

Ainsi nous introduisons les matrices suivantes :

- la matrice de masse  $M$  avec  $(M)_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)$ .
- la matrice de raideur  $K$  avec  $(K)_{i,j} = (\partial_x \varphi_i, \partial_x \varphi_j)$ .
- la matrice de convection  $L^*$  avec  $(L^*)_{i,j} = \sum_{k=1}^{N+2} (\varphi_k \partial_x \varphi_i, \varphi_j) \beta_k^*$ .
- le vecteur  $\beta^k = (\beta_j^k)_{1 \leq j \leq N+2}$ .
- le vecteur  $q^k = \begin{pmatrix} q_0^k \\ q_L^k \end{pmatrix}$ .

Sous forme matricielle nous cherchons  $\beta^{k+1}$  tel que

$$\left(\frac{1}{dt}M + \theta L^* + \nu\theta(K + B)\right) \beta^{k+1} = \left(\frac{1}{dt}M + (\theta - 1)L^* + \nu(\theta - 1)(K + B)\right) \beta^k + \nu G(\theta q^{k+1} + (1 - \theta)q^k)$$

Un calcul standard permet de calculer explicitement les différentes matrices mises en jeu.

$$M = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{a_0+c_0}{b_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{a_L+c_L}{b_L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{b_0} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{a_L}{b_L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_{1,1}^* &= -2\beta_1^* - \beta_2^*, & L_{N+2,N+2}^* &= \beta_{N+1}^* + 2\beta_{N+2}^* \\ L_{k,k}^* &= \beta_{k-1}^* - \beta_{k+1}^*, & k &\neq 1, N+2 \\ L_{k,k+1}^* &= 2\beta_k^* + \beta_{k+1}^*, & L_{k+1,k}^* &= -\beta_k^* - 2\beta_{k+1}^* \end{aligned}$$

#### 2.5.4 Méthode d'obtention de l'adjoint discret

La résolution de problèmes inverses ou de contrôle optimal requiert comme nous l'avons abordé précédemment le calcul du gradient d'une fonctionnelle coût. Nous avons adopté la méthode de l'adjoint pour calculer ce gradient comme l'a introduit J-L. Lions dans [105]. Il existe d'autres techniques comme le calcul en mode linéaire tangent qui consiste à calculer la solution de l'état direct et du linéarisé pour toutes les directions de l'espace de contrôle. Cependant, lorsque cet espace devient important, cette méthode perd de son efficacité compte tenu du nombre important de résolutions d'état à effectuer. Ainsi, la méthode par calcul de l'adjoint est bien adaptée à notre problème de contrôle optimal où la variable de contrôle décrit l'espace  $L^2(0,T)$ . L'utilisation de méthodes itératives pour la minimisation de la fonctionnelle coût impose un calcul récursif et précis de son gradient. Ainsi la façon de calculer numériquement ce gradient est une étape importante dans la résolution du problème de contrôle optimal. Notamment la différence qu'il peut exister entre la formule du gradient construite à partir de la discrétisation de l'état adjoint issu du problème continu et celle construite à partir d'un état adjoint issu du problème discrétisé constitue le point clef de cette étape. La littérature sur ce sujet nous permet d'établir le bilan suivant

1. Le choix de l'adjoint discret ou de l'adjoint discrétisé influence de façon importante la convergence des méthodes de gradient (surtout lors de l'étape de recherche linéaire unidimensionnelle).



2. L'utilisation de l'adjoint discret est souvent le meilleur choix.
3. L'obtention de cet adjoint discret se révèle être difficile. Le recours à des techniques de différentiation automatique est courant.

Dans cette partie, nous nous proposons de présenter une technique similaire à celle employée par Berggren [8] pour le calcul de l'adjoint discret. Son originalité réside dans l'utilisation des propriétés algébriques matricielles du système totalement discrétisé, ce qui la rend plus facile d'utilisation pour des schémas en temps plus évolués que le schéma d'Euler linéaire.

### 2.5.4.1 Le problème de contrôle discrétisé

Nous nous intéressons au cas général du système de Burgers avec conditions aux limites de Fourier en utilisant les schémas de discrétisation introduits dans la section 2.5.3.2. Nous recherchons  $\beta^k = (\beta_j^k)_{1 \leq j \leq N+2}$  tel que

$$\left( \frac{1}{dt}M + \theta L^* + \nu\theta(K + B) \right) \beta^{k+1} = \left( \frac{1}{dt}M + (\theta - 1)L^* + \nu(\theta - 1)(K + B) \right) \beta^k + \nu G(\theta q^{k+1} + (1 - \theta)q^k)$$

Nous proposons d'écrire ces  $(n + 1)$  systèmes sous la forme d'un seul système spatio-temporelle. Nous définissons les nouvelles inconnues du problème

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^{n+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^{n+1} \end{bmatrix}$$

avec  $q^k = (q_i^k)_{1 \leq i \leq N+2}$ . On définit la matrice frontière

$$G = \begin{bmatrix} \frac{a_0+c_0}{b_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{a_1+c_1}{b_1} \end{bmatrix}$$

On pose,

$$M_k^\theta = \left( \frac{1}{dt}M + \theta L_k^* + \nu\theta(K + B) \right)$$

ainsi que,

$$\mathbf{M}_h^{\text{dt}} = \begin{bmatrix} M & \square & \dots & \dots & \square \\ M_2^{1-\theta} & M_2^\theta & \square & \dots & \square \\ \square & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \square \\ & & \square & M_{n+1}^{1-\theta} & M_{n+1}^\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_h^{dt} = \begin{bmatrix} \square & \square & \cdots & \cdots & \square \\ (1-\theta)\nu G & \theta\nu G & \square & \cdots & \square \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \square \\ & & & \square & (1-\theta)\nu G & \theta\nu G \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{n+1} \end{bmatrix}$$

Ainsi on peut réécrire les  $(n+1)$  systèmes sous la forme suivante,

$$\mathbf{M}_h^{dt} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{f} + \mathbf{B}_h^{dt} \cdot \mathbf{q} \quad (2.192)$$

$\mathbf{M}_h^{dt}$  et  $\mathbf{B}_h^{dt}$  sont éléments de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{(N+2) \times (n+1)}; \mathbb{R}^{(N+2) \times (n+1)})$ . Nous définissons la fonction coût discrète

$$J_h^{dt} = \frac{\alpha}{2} (E_1 \cdot \mathbf{q})^T \cdot M_t \cdot (E_1 \cdot \mathbf{q}) + \frac{1}{2} (E_l \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}_d)^T \cdot M_t \cdot (E_l \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}_d) \quad (2.193)$$

avec  $(E_k)_{i,j} = \delta_{(i-1)(n+1)+k,j}$  pour  $1 \leq i \leq n+1$  et  $1 \leq j \leq (n+1)(N+2)$ . et

$$M_t = \frac{dt}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Remarque 2.26** *Il faut bien noter que la matrice  $M_h^{dt}$  peut dépendre de la variable  $\alpha$  par l'intermédiaire des matrices de convection  $L_k^*$ . Si tel est le cas, nous avons alors affaire à un système non-linéaire en  $\alpha$ .*

Nous recherchons l'expression du gradient de  $J_h^{dt}$ . Considérons une variation infinitésimale autour du point  $\bar{q}$ .

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \delta \mathbf{q}$$

La variable de contrôle est  $(q_1^k)_{1 \leq k \leq n+1}$ . Pour indiquer que la variation  $\delta q$  se fait selon cette direction, on introduit la matrice frontière

$$\begin{cases} (E_1^F)_{(N+2)(i-1)+1, (N+2)(i-1)+1} = 1, & 1 \leq i \leq n+1 \\ (E_1^F)_{i,j} = 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On pose alors  $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + E_1^F \cdot \delta\mathbf{q}$ . On note  $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\bar{\mathbf{q}})$  solution du système

$$\mathbf{M}_h^{\text{dt}} \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{f} + \mathbf{B}_h^{\text{dt}} \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (2.194)$$

On note  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\bar{\mathbf{q}} + E_1^F \cdot \delta\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{U}} + \delta\mathbf{U}$  et  $\partial\mathbf{M}_h^{\text{dt}}(\bar{\mathbf{U}})\delta\mathbf{U}$  le linéarisé de  $\mathbf{M}_h^{\text{dt}}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}$ . Ainsi la variable  $\delta\mathbf{U}$  est solution du système linéaire suivant

$$\partial\mathbf{M}_h^{\text{dt}}(\bar{\mathbf{U}}) \cdot \delta\mathbf{U} = \mathbf{B}_h^{\text{dt}} \cdot E_1^F \cdot \delta\mathbf{q} \quad (2.195)$$

Par le même raisonnement formel, on peut écrire

$$g = \partial J_h^{\text{dt}}(\bar{\mathbf{q}})\delta\mathbf{q} = \alpha (E_1 \bar{\mathbf{q}})^T \cdot M_t \cdot (E_1 \delta\mathbf{q}) + (E_l \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{U}_d)^T \cdot M_t \cdot (E_l \delta\mathbf{U}) \quad (2.196)$$

Nous introduisons une variable auxiliaire  $\mathbf{p}$  de même structure que  $\alpha$ . Opérons le produit scalaire euclidien de l'équation (2.195) avec  $\mathbf{P}$

$$(\mathbf{P})^T (\partial\mathbf{M}_h^{\text{dt}}) \cdot \delta\mathbf{U} = (\mathbf{p})^T \cdot (\mathbf{B}_h^{\text{dt}} \cdot E_1^F) \cdot \delta\mathbf{q} \quad (2.197)$$

Transposons cette expression

$$(\delta\mathbf{U})^T \cdot (\partial\mathbf{M}_h^{\text{dt}})^T \cdot \mathbf{P} = (\delta\mathbf{q})^T \cdot (\mathbf{B}_h^{\text{dt}} \cdot E_1^F)^T \cdot \mathbf{P} \quad (2.198)$$

Par transposition nous avons,

$$g = (E_1 \cdot \bar{\mathbf{q}})^T \cdot M_t \cdot (E_1 \cdot \delta\mathbf{q}) + (E_l \delta\alpha)^T \cdot M_t \cdot (E_l \cdot \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{U}_d) \quad (2.199)$$

Nous choisissons alors  $\mathbf{P}$  telle que

$$(\partial\mathbf{M}_h^{\text{dt}})^T \cdot \mathbf{p} = E_l^T \cdot M_t \cdot (E_l \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{U}_d) \quad (2.200)$$

On en déduit l'expression de la dérivée,

$$g = \alpha (E_1 \cdot \bar{\mathbf{q}})^T \cdot M_t \cdot (E_1 \delta\mathbf{q}) + {}^t(\delta q)^t (B_h^{\text{dt}} E_1^F) p$$

c'est-à-dire pour le gradient,

$$\nabla J_h^{\text{dt}} = \left[ E_1^T \cdot M_t \cdot E_1 \bar{\mathbf{q}} + (B_h^{\text{dt}} E_1^F)^T \cdot \mathbf{P} \right] \quad (2.201)$$

La question qui se pose maintenant est de savoir si à partir du système adjoint (2.200), nous pouvons obtenir un algorithme de calcul de l'état adjoint  $p$  séquentiel en temps, ne réclamant pas la construction d'une matrice spatio-temporelle. Etablissons dans un premier temps la forme des nouvelles matrices spatio-temporelles adjointes,

$$\mathbf{M}_h^{\text{dt}T} = \begin{bmatrix} M & {}^tM_2^{1-\theta} & \square & \cdots & \square \\ \square & {}^tM_2^\theta & {}^tM_3^{1-\theta} & \square & \square \\ \square & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & {}^tM_{n+1}^{1-\theta} \\ & & & \square & {}^tM_{n+1}^\theta \end{bmatrix} \quad (2.202)$$

$$\mathbf{B}_h^{dtT} = \begin{bmatrix} \square & (1-\theta)\nu G & \cdots & \cdots & \square \\ \square & \theta\nu G & (1-\theta)\nu G & \square & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & (1-\theta)\nu G \\ & & & \square & \theta\nu G \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

Nous pouvons dans ces conditions dériver le système que satisfait le problème adjoint discret

$$\begin{cases} Mp^1 + (M_2^{1-\theta})^T p^2 = 2(\bar{\beta}^1 - u_d^1)_l, \\ (M_k^\theta)^T \cdot p^k + (M_{k+1}^{1-\theta})^T \cdot p^{k+1} = (\bar{\beta}^{k-1} - u_d^{k-1})_l + 4(\bar{\beta}^k - u_d^k)_l + (\bar{\beta}^{k+1} - u_d^{k+1})_l, \\ 1 \leq k \leq n, \\ (M_{n+1}^\theta)^T \cdot p^{n+1} = (\bar{\beta}^n - u_d^n)_l + 2(\bar{\beta}^{n+1} - u_d^{n+1})_l, \end{cases} \quad (2.204)$$

Le calcul du gradient se fait grâce à la formule suivante

$$\nabla J(q) = \alpha E_1^T \cdot M_t \cdot E_1 \mathbf{q} + (B_h^{dt} E_1^F)^T \cdot \mathbf{P} \quad (2.205)$$

#### 2.5.4.2 Applications numériques

Nous avons implémenté l'algorithme de gradient conjugué discret défini auparavant afin d'étudier les propriétés de suivi de trajectoires de l'équation de Burgers Eq. (2.166). Nous avons utilisé deux types de cibles :

- Cible atteignable obtenue par simulation de la réponse à un contrôle donné,
- Cible arbitraire dans  $L^2(0, T)$ .

Les figures qui suivent présentent les résultats obtenus pour ces deux types de cibles.

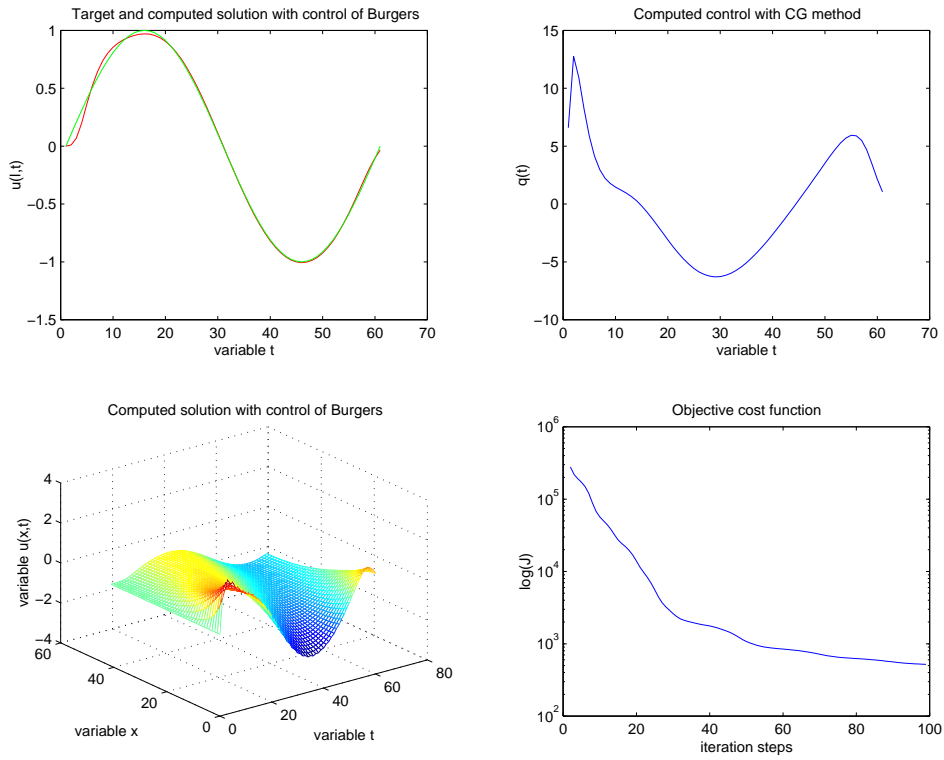


FIG. 2.24 – Cible atteignable sinusoïdale

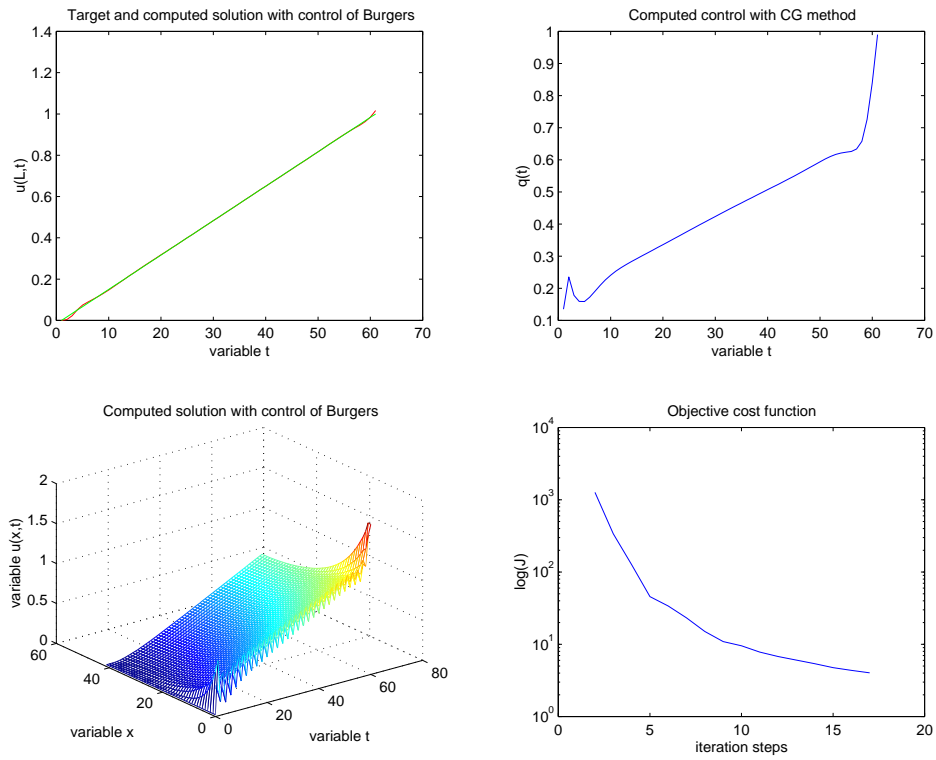


FIG. 2.25 – Cible linéaire

2.5. *Suivi de trajectoires pour l'équation de Burgers*

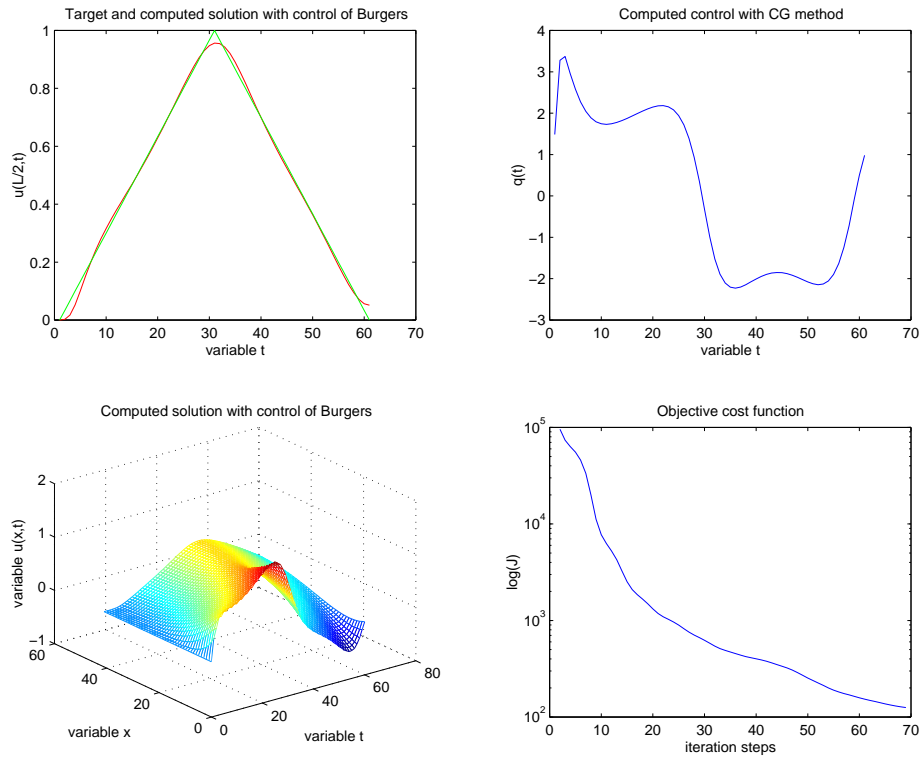


FIG. 2.26 – *Cible chapeau*

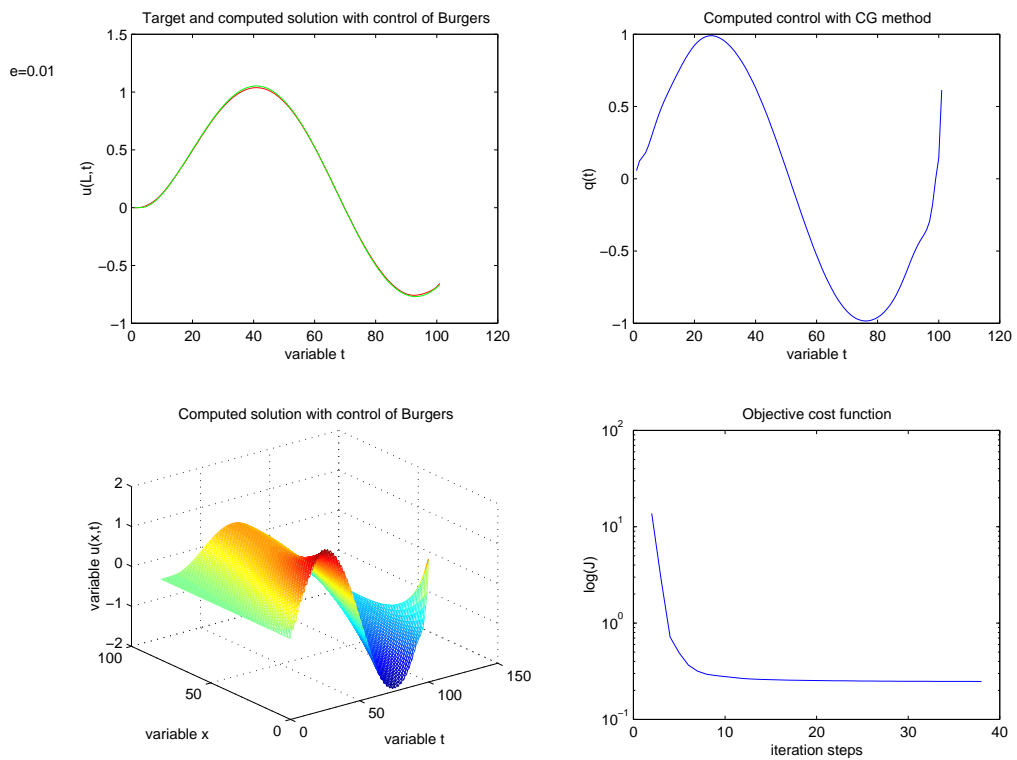


FIG. 2.27 – *Cible sinusoïdale*

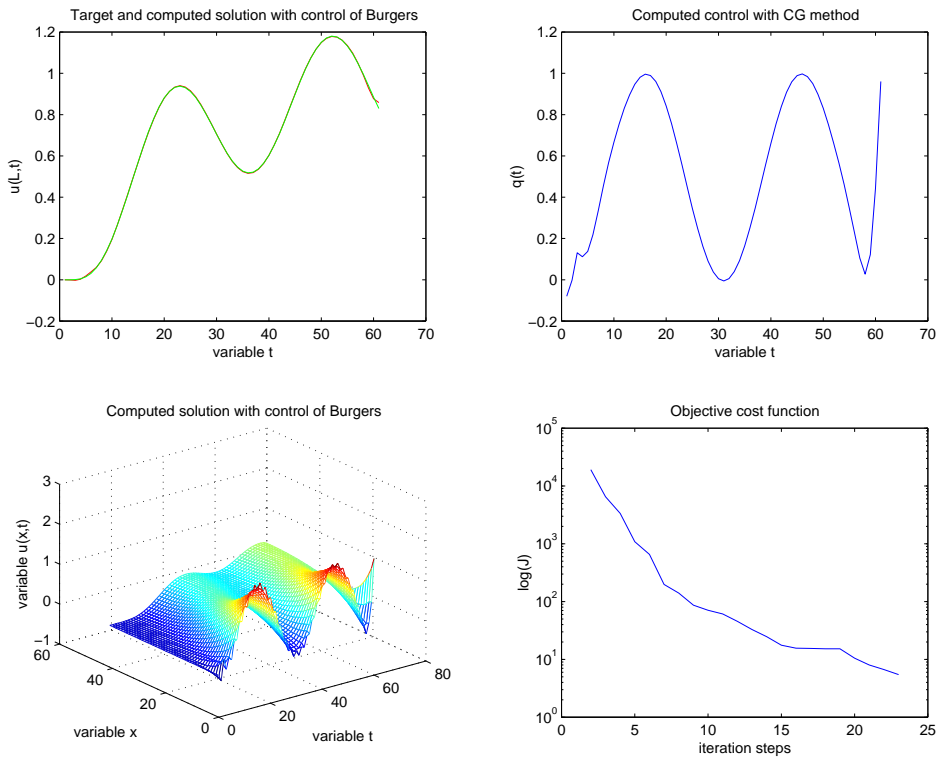


FIG. 2.28 – *Cible sinusoidale*

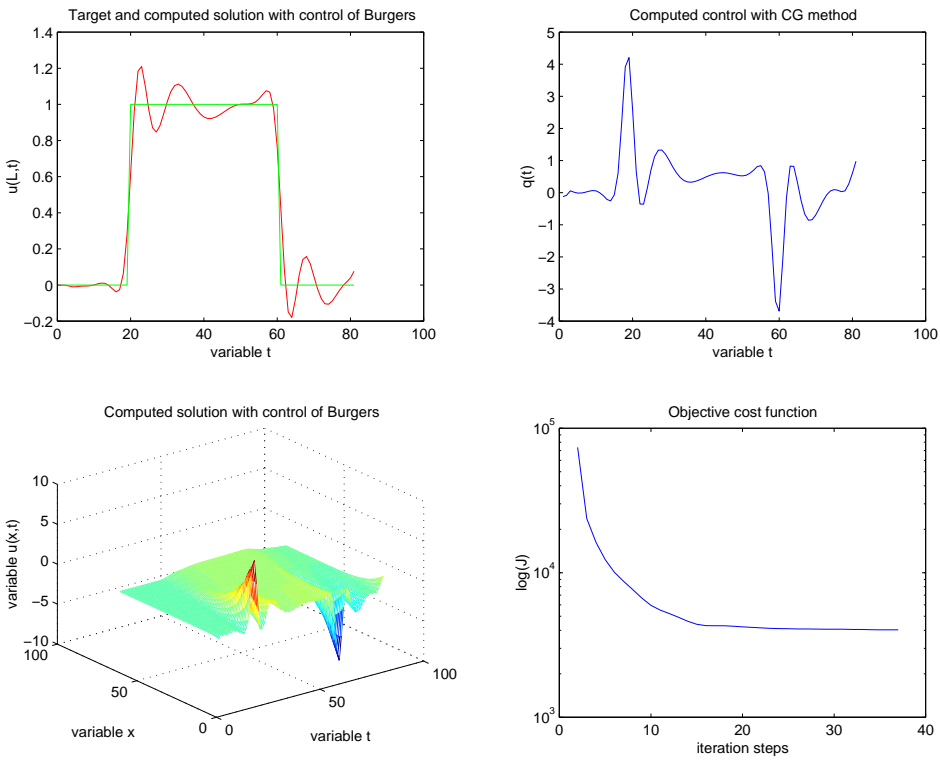


FIG. 2.29 – *Cible marche*

# Chapitre 3

## Contrôle et suivi de trajectoires pour le système de Navier-Stokes

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>117</b>
<b>3.2</b>	<b>Mathematical setting</b>	<b>117</b>
3.2.1	Continuous cost function gradient	118
3.2.2	Gradient based optimization strategy	119
<b>3.3</b>	<b>The Lagrange-Galerkin Scheme for the Navier-Stokes equations</b>	<b>122</b>
3.3.1	Time discretisation	122
3.3.2	Spatial approximation	124
3.3.3	Spatial approximation of the characteristic curve	126
3.3.4	Quadrature rules	127
3.3.5	Extension to the case of a moving domain	128
<b>3.4</b>	<b>Discrete linearization and discrete cost function gradient</b>	<b>130</b>
3.4.1	Linearized discrete system	131
3.4.2	Linearized adaptative backtracking	133
3.4.3	Implementation using barycentric coordinates	136
3.4.4	Discrete linearized system	142
<b>3.5</b>	<b>Implementation</b>	<b>143</b>
3.5.1	Nonlinear and linearized Navier-Stokes solvers	144
3.5.2	Optimization routines	144
3.5.3	Parallel direct mode strategy	145
<b>3.6</b>	<b>Discrete gradient computation</b>	<b>146</b>
3.6.1	Case of Poiseuille flow	146
3.6.2	The driven cavity	152
<b>3.7</b>	<b>Drag reduction around a rotating cylinder</b>	<b>163</b>
3.7.1	Control problem setting	163
3.7.2	Case of a single harmonic angular velocity	164
3.7.3	Case of several harmonics	168



<b>3.8</b>	<b>Identification of far-field boundary conditions from fluid loads on bluff bodies</b>	<b>172</b>
3.8.1	Problem settings	172
3.8.2	The rectangular cylinder	173
3.8.3	Harmonic perturbation of the inflow velocity	173
3.8.4	Synthetic load	174
3.8.5	Arbitrary harmonic loads	176
<b>3.9</b>	<b>Identification of far-field boundary conditions from fluid loads on moving bluff bodies</b>	<b>179</b>
3.9.1	Problem settings	179
3.9.2	Mesh movement algorithm	179
3.9.3	Discrete gradient consistency	181
3.9.4	Harmonic perturbation of the inflow velocity	183
<b>3.10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>186</b>

---

Dans ce chapitre co-écrit avec Gilles Fourestey et paru sous forme d'un rapport de recherche INRIA [62], nous nous intéressons à un problème de contrôle optimal pour un système fluide en écoulement incompressible décrit par les équations de Navier-Stokes. Ce système d'EDP est discrétisé en utilisant une méthode d'éléments finis de bas degré couplée à une méthode de Lagrange-Galerkin pour le traitement de l'opérateur de convection non-linéaire. Nous décrivons un schéma linéarisé totalement discret afin de calculer de façon consistante le gradient d'une fonctionnelle de coût liée à la physique du problème. Nous traitons, alors, deux applications de contrôle en nous appuyant sur des algorithmes d'optimisation fondés sur le calcul du gradient :

1. Réduction de la trainée autour d'un solide cylindrique en rotation,
2. un problème d'identification de conditions aux limites en amont à partir de la connaissance des efforts fluides sur un profil rectangulaire, en configuration fixe ou mobile.

### 3.1 Introduction

In the last two decades, the number of studies concerning optimal control problems for fluid mechanics has quickly increased. On the theoretical point of view, significant advances have been realized in the derivation of optimality systems [1, 66] or in the controllability properties investigation [31, 92, 57]. With the increasing power of computing capabilities, numbers of numerical studies have been conducted [113, 9, 79, 81, 88]. Most of these works involve finite difference schemes for the time discretization of the Navier-Stokes system. In this article, we propose to discretize the nonlinear-advection operator involved in the Navier-Stokes system using the characteristic method introduced by [7]. This method is based on the computation of characteristic paths in order to approximate the material time derivative. The use of this algorithm [27] introduces some technical difficulties addressed in this paper. Once the discrete linearized system is established, its solution enters the computation of cost function gradients involved in the optimization loop which minimizes a given objective. Two different applications are addressed :

- One concerning the drag reduction around a rotating circular cylindrical body using its angular velocity. This problem has been already treated by several authors [81, 88]. Our goal is mainly to validate our approach by analysing its ability of dealing with non-trivial control problem benchmarks.
- We also deal with an identification problem that may enter an aeroelastic stability tool described in the introduction of this thesis. It consists in trying to identify far-field boundary conditions from the knowledge of fluid loads time history on a given bluff body in fixed or prescribed moving configuration. The final application should be the aeroelastic stability analysis of civil engineering super-structures [133, 4, 51].

### 3.2 Mathematical setting

Let us consider a fluid inside a fixed domain  $\Omega$  with boundary  $\partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_s \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$ . It is described by its velocity and its pressure  $(u, p)$  solution of the following Navier-Stokes system,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + \nabla u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \Omega \\ u = g, & \Gamma_c \\ u = 0, & \Gamma_s \\ \sigma(u, p) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u = u_\infty, & \Gamma_{in} \\ u(t = 0) = u_0, & \Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

where  $\nu$  stands for the kinematic viscosity and  $u_\infty$  is the farfield velocity. The quantity

$$\sigma(u, p) = -pI + \nu(\nabla u + \nabla^T u)$$

stands for the fluid stress tensor inside  $\Omega$ , with  $(\nabla u)_{ij} = \partial_j u_i = u_{i,j}$ .

The aim of this paper is to control the behaviour of the fluid through the control  $g$  on

$\Gamma_c$ , by minimizing a given cost function  $J$  depending on the control  $g$  and on the state solution  $(u(g), p(g))$ . This cost function may represent a given objective related to specific characteristic features of the fluid flow (e.g the drag on a given surface, the vorticity level, the distance to a given target). Hence we are interested in solving the following problem,

$$\min_{g \in \mathcal{U}_{ad}} J(u(g), p(g)) \quad (3.2)$$

where  $(u(g), p(g))$  satisfies the Navier-Stokes system (3.1) associated to the control  $g \in \mathcal{U}_{ad}$ . In the applications, we shall deal with particular cost functions of the following type,

- The cost to overcome the drag on the solid interface or to track a given fluid load target,

$$J(u, p) = \int_0^T \left| \left( \int_{\Gamma_s} \sigma(u, p) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 - F_d(t) \right|^2 dt \quad (3.3)$$

- The mean square value to a given target,

$$J(u, p) = \int_0^T \int_{\Gamma_{out}} (u - u_d)^2 \, d\Omega \, dt \quad (3.4)$$

Dirichlet boundary control for the Navier-Stokes system has been addressed on the theoretical level in [66, 80] in the 2D case. This is a non trivial problem, especially concerning the regularity of the boundary control [65]. We shall not address such an issue in this paper, since we will use regular classes of controls in the applications. Our main interest here, is to describe how the continuous gradient of the cost function  $J$  can be obtained using the solution of a linearized fluid system. In a second step, we shall describe a continuous optimization algorithm based on the continuous gradient  $\nabla J$ .

### 3.2.1 Continuous cost function gradient

Let us consider the control variable  $g$  as the element of an Hilbert space  $\mathcal{U}_c$ . Basic continuous feasible algorithms for minimizing the functional  $j(g) \stackrel{\text{def}}{=} J(u(g), p(g))$  are based on the evaluation of the functional gradient against arbitrary direction inside  $\mathcal{U}_c$ . Through the paper, we shall use the following result,

**Theorem 3.1** *The functional  $j(g)$  is Gâteaux differentiable with respect to  $g \in \mathcal{U}_c$  in every direction  $\delta g \in \mathcal{U}_c$  and its derivative is given by the following expression,*

$$\langle j'(g), \delta g \rangle_{\mathcal{U}_c} = \langle \partial_{(u,p)} J(u(g), p(g)), (z(\delta g), q(\delta g)) \rangle, \quad \forall \delta g \in \mathcal{U}_c \quad (3.5)$$

where  $(z(\delta g), q(\delta g)) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{D}{Dg}(u, p) \right) (g) \cdot \delta g$  stands for the linearized state which is solution of the linearized Navier-Stokes system,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t z + \nabla u(g) \cdot z + \nabla z \cdot u(g) - \nu \Delta z + \nabla q = 0, & \Omega \\ \text{div}(z) = 0, & \Omega \\ z = \delta g, & \Gamma_c \\ z = 0, & \Gamma_s \\ \sigma(z, q) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ z = 0, & \Gamma_{in} \\ z(t = 0) = 0, & \Omega \end{array} \right. \quad (3.6)$$

The linearized system is a forward in time linear advection-diffusion-reaction problem. It needs the knowledge of the original fluid flow  $u(g)$  which is specific to non-linear control problems. If we want to identify the functional gradient, we need to evaluate the linearized flow for every direction  $\delta g \in \mathcal{U}_c$ . Concerning the discretization issue, this can lead very quickly to expensive computations. For this reason, people usually use an adjoint continuous formulation in order to use a control space of arbitrary size, as described in the following theorem,

**Theorem 3.2** *The functional  $j(g) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_{out}} (u(g) - u_d)^2 d\Omega dt$  is Fréchet differentiable with respect to  $g \in \mathcal{U}_c$  and its gradient is given by the following expression,*

$$\nabla j(g) = -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n|_{\Gamma_c \times (0, T)} \quad (3.7)$$

where  $(\varphi, \pi)$  stands for the adjoint state which is solution of the adjoint Navier-Stokes system,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \nabla \varphi \cdot u(g) + \nabla^T u(g) \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = 0, & \Omega \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & \Omega \\ \varphi = 0, & \Gamma_c \\ \varphi = 0, & \Gamma_s \\ \sigma(\varphi, \pi) \cdot n = u(g) - u_d, & \Gamma_{out} \\ \varphi = 0, & \Gamma_{in} \\ \varphi(t = T) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

The adjoint problem is a backward linear advection-diffusion-reaction system. As for the linearized system, it needs the knowledge of the primal state  $u(g)$  in order to be solved. Contrary to the linearized state which can be advanced in time with the solution  $u(g)$  of the state problem, the adjoint system has a final time condition, which means that it has to be solved once the Navier-Stokes system has been solved. Several authors have been using this formulation in order to solve complex fluid flow control problems [81, 147, 24]. In this paper, we will not use such an approach and prefer a direct approach involving the linearized system.

### 3.2.2 Gradient based optimization strategy

At this stage, several optimization strategies can be considered, we have chosen to investigate the use of two iterative optimization procedures that may need only the computation of the cost function gradient at each minimization step. The first one is referred as the conjugate gradient algorithm in the context of nonlinear - nonconvex optimization problems and is usually seen as a first order optimization algorithm. The second one is referred as the BFGS method and belongs to the second order quasi-Newton optimization algorithms class. We shall describe both strategies in the next section in an abstract setting.

### 3.2.2.1 Conjugate gradient method

Let us consider the following abstract minimization problem,

$$\begin{cases} u \in H, \\ j(u) \leq j(v), \quad \forall v \in H \end{cases} \quad (3.9)$$

where  $H$  stands for an Hilbert space and  $j : H \rightarrow \mathbb{R}$  is a differentiable functional on  $H$ . The Conjugate Gradient algorithm applied to problem (3.9) can be described in the following manner,

– Step 0

Choose  $u^0 \in H$

$$\begin{cases} \text{Solve for } g^0 \in H, & \text{such that} \\ (g^0, v)_H =_{H^*} \langle j'(u^0), v \rangle_H, & \forall v \in H \end{cases}$$

We set

$$w^0 = g^0$$

– Step  $n + 1$

For  $n \geq 0$ , we assume that  $(u^n, g^n, w^n)$  is at our disposal, and we seek for  $(u^{n+1}, g^{n+1}, w^{n+1})$  thanks to the following steps :

1. Line search : Compute  $\rho_n$  such that,

$$(LS) \begin{cases} \text{Solve for } \rho_n \in \mathbb{R}, & \text{such that} \\ j(u^n - \rho_n w^n) \leq j(u^n - \rho w^n), & \forall \rho \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We set

$$u^{n+1} = u^n - \rho_n w^n,$$

2. Gradient computation :

$$\begin{cases} \text{Solve for } g^{n+1} \in H, & \text{such that} \\ (g^{n+1}, v)_H =_{H^*} \langle j'(u^{n+1}), v \rangle_H, & \forall v \in H \end{cases}$$

3. Convergence test :

If  $\frac{\|g^{n+1}\|}{\|g^0\|} \leq \epsilon$ , the solution is given by

$$u = u^{n+1}$$

unless, we compute one of the following quantities,

a)

$$\gamma_n = \frac{\|g^{n+1}\|^2}{\|g^n\|^2}, \text{ Fletcher-Reeves}$$

b)

$$\gamma_n = \frac{(g^{n+1}, g^{n+1} - g^n)}{\|g^n\|^2}, \text{ Polack-Ribière}$$

Then, we set

$$w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n w^n$$

4. Iteration loop: we set  $n := n + 1$ , we come back to step  $n + 1$ .

The investigation of the convergence of the Conjugate gradient algorithm was performed on the infinite dimensional level for quadratic convex functionals. We refer to [82] for a review of such results. These results cannot be applied in our case, since we deal with a non-convex, non-linear functional. Still, on the numerical point of view the CG method has shown great convergence features in many applications, and particularly for optimal control of fluid models [72, 83].

### 3.2.2.2 Quasi-Newton algorithms

For very large optimization problems involving very flat functionals, it has been shown that the CG method can converge very slowly. In order to circumvent this issue, it happens to be useful to use quasi-Newton methods that may show second order convergence properties near the optimum. One possible choice is the use of the BFGS method as described by Liu-Nocedal in [111]. This method is based on the approximation of the cost function Hessian inverse using a rank one perturbation of identity deduced from the gradient knowledge. This method was successfully applied to optimal control of Navier-Stokes equations in [9],[81].

We consider the abstract minimization problem (4.3). For  $(u, v) \in H \times H$ , we consider the element  $u \otimes v \in \mathcal{L}(H)$  defined as follows,

$$(u \otimes v)(w) = \langle w, v \rangle_H u, \quad \forall w \in H$$

Hence the BFGS algorithm reads as follows,

– Step 0: Choose  $u^0 \in H, H^0 \in \mathcal{L}(H)$

$$\begin{cases} \text{Solve for } g^0 \in H, & \text{such that} \\ (g^0, v)_H =_{H^*} \langle j'(u^0), v \rangle_H, & \forall v \in H \end{cases}$$

– Step  $n + 1$

For  $n \geq 0$ , we assume that  $(u^n, g^n, H^n)$  is at our disposal, and we seek for  $(u^{n+1}, g^{n+1}, H^{n+1})$  thanks to the following steps:

We set  $d^n = -H^n \cdot g^n$ ,

1. Line search: Compute  $\rho_n$  such that,

$$(LS) \begin{cases} \text{Solve for } \rho_n \in \mathbb{R}, & \text{such that} \\ j(u^n + \rho_n d^n) \leq j(u^n + \rho d^n), & \forall \rho \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We set

$$u^{n+1} = u^n + \rho_n w^n,$$

2. Gradient computation :

$$\begin{cases} \text{Solve for } g^{n+1} \in H, & \text{such that} \\ (g^{n+1}, v)_H =_{H^*} \langle j'(u^{n+1}), v \rangle_H, & \forall v \in H \end{cases}$$

3. Convergence test : If  $\frac{\|g^{n+1}\|}{\|g^0\|} \leq \epsilon$ , the solution is given by

$$u = u^{n+1}$$

unless perform step 4.

4. Hessian update :

We set

$$s^n = u^{n+1} - u^n$$

and

$$y^n = g^{n+1} - g^n$$

Then we compute

$$H^{n+1} = H^n + \frac{d^n \otimes d^n}{\langle d^n, s^n \rangle_H} - \frac{H^n \cdot s^n \otimes H^n \cdot s^n}{\langle H^n \cdot s^n, s^n \rangle_H}$$

5. Iteration loop : we set  $n := n + 1$ , we come back to step  $n + 1$ .

### 3.3 The Lagrange-Galerkin Scheme for the Navier-Stokes equations

In this paragraph, we shall describe our strategy for the finite dimensional approximation of the solution of the Navier-Stokes system, based on a Lagrange-Galerkin scheme.

#### 3.3.1 Time discretisation

##### 3.3.1.1 Introduction

The Lagrange-Galerkin scheme was first introduced by Benqué [7] and is made of the combination of the characteristics method with a standard finite-element formulation. The main idea of this method lies in the fact that the operator  $\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$  may be turned into a total derivative  $\frac{d}{dt}$  using a Lagrangian formulation. However, this Lagrangian formulation is only valid along the characteristics curves of the particule. This curves are described by the following equations :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \chi(\tau; t, x) = u(\tau, \chi(\tau; t, x)), \tau \in [0, t] \\ \chi(\tau = t; t, x) = x \end{cases} \quad x \in \Omega \quad (3.10)$$

or equivalently :

$$\chi(\tau; t, x) = x + \int_0^\tau u(\tau, \chi(\tau; t, x)) d\tau \quad (3.11)$$

Hence, the characteristics method consists in performing the following steps :

1. Define an approximation scheme for the Cauchy problem (3.10). Solving this system leads to an approximation of the characteristic curves.
2. Define a time approximation scheme for the total derivative operator using the approximate characteristic curves.
3. Solve the resulting generalized Stokes system.

**Remark 3.1** *The non-linear part of the Navier-Stokes system is hidden in the Cauchy problem (3.10), and the generalized Stokes system is linear.*

### 3.3.1.2 Time semi-discrete first order characteristics scheme

We set

$$\begin{aligned} (u^n, p^n, g^n)(x) &= (u, p, g)(x, t_n), & x \in \bar{\Omega} \\ t_n &= t_0 + n\Delta t, & t_0 = 0, t_N = T \end{aligned}$$

We consider the characteristic curve associated to the flow field  $u$  as the solution of the Cauchy problem (3.10). Hence, using the chain rule, we get the following expression for the time derivative of the flow field  $u$  along a characteristic curve ,

$$\frac{d}{d\tau} u(\tau, \chi(\tau; t, x))|_\tau = \partial_\tau u(\tau, \chi(\tau; t, x))|_\tau + \nabla u(\tau, \chi(\tau; t, x)) \cdot u(\tau, \chi(\tau; t, x))$$

For  $t = t_{n+1}, t_n \leq \tau \leq t_{n+1}$ , we define the first-order approximation of the total time derivative ( Backward Euler scheme),

$$\frac{d}{d\tau} u(\tau, \chi(\tau; t, x))|_{\tau=t_{n+1}} = \frac{u(t_{n+1}, x) - u(t_n, \chi(t_n; t_{n+1}, x))}{\Delta t}$$

The characteristic foot  $\chi(t_n; t_{n+1}, x)$  is computed from (3.11) using the following linear discrete interpolation :

$$\chi(t_n; t_{n+1}, x) = x - \Delta t u^n(x) \quad (3.12)$$

Setting  $\chi^n(x) = \chi(t_n; t_{n+1}, x)$ , we finally obtain the time semi-discrete first order Navier-Stokes system (see [61] for the full proof ) :

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} u^{n+1} - \nu \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} u^n \circ \chi^n, & \Omega \\ \operatorname{div}(u^{n+1}) = 0, & \Omega \\ u^{n+1} = g^{n+1}, & \Gamma_{cyl} \\ \sigma(u^{n+1}, p^{n+1}) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u^{n+1} = u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \end{cases} \quad (3.13)$$



with  $u^{t=0} = u_0$ . One of the greatest advantage of this formulation is that large time steps may be used in conjunction with the Lagrange-Galerkin method. Unlike its Eulerian counterpart, the Lagrangian formulation is not restricted, at least theoretically, by any CFL. However, working with large time steps may induce large numerical dissipation. An increase of the order of the time discretization scheme can eventually reduce this overdissipation.

### 3.3.1.3 Time semi-discrete second order characteristics scheme

The second order Lagrange-Galerkin method was introduced by Boukir et al [18] and is an extension of the first order scheme. As before, let us define the total derivative :

$$\frac{d}{d\tau}u(\tau, \chi(\tau; t, x))|_{\tau=t_{n+1}} = \frac{3u(t_{n+1}, x) - 4u(t_n, \chi(t_n; t_{n+1}, x)) + u(t_{n-1}, \chi(t_{n-1}; t_{n+1}, x))}{2\Delta t}$$

Now we need to compute two sets of characteristics paths :

$$\begin{cases} \chi_1^n = \chi(t_n; t_{n+1}, x) & = x - \Delta t(2u^n - u^{n-1})(x) \\ \chi_2^n = \chi(t_{n-1}; t_{n+1}, x) & = x - 2\Delta t(2u^n - u^{n-1})(x) \end{cases}$$

Then, we get the time semi-discrete second order Navier-Stokes system [18] [61],

$$\begin{cases} \frac{3}{2\Delta t}u^{n+1} - \nu\Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[ 2u^n \circ \chi_1^n - \frac{1}{2}u^{n-1} \circ \chi_2^n \right], & \Omega \\ \operatorname{div}(u^{n+1}) = 0, & \Omega \\ u^{n+1} = g^{n+1}, & \Gamma_{cyl} \\ \sigma(u^{n+1}, p^{n+1}) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u^{n+1} = u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \end{cases} \quad (3.14)$$

We may note that the general form of the second order scheme is similar to the one used for the first order scheme. Apart from the coefficient of the mass matrix and the two sets of characteristics path needed to perform the computation of the right hand side for the second order, both Lagrange Galerkin formulations may be solved using the same procedure. Nevertheless, the right hand side computation for the second order is much more cpu time consuming than the first order because instead of tracking the particle using one velocity field over a time period of  $\Delta t$ , the second order will require another tracking over a time period of  $2\Delta t$ . This may substantially slow down the characteristics path construction procedure.

In case the tracking process is performed with poor numerical accuracy, some numerical error may impair the whole flow computation. This issue will be discussed in the next section.

## 3.3.2 Spatial approximation

### 3.3.2.1 Introduction

Here we describe several points that must be handled carefully in order to compute a reasonable numerical approximation of the Navier-Stokes system.

When the viscosity constant  $\epsilon$  is small, the Navier-Stokes equations are strongly non-linear. This implies a severe restriction over the time step, but the use of the characteristics method may overcome this difficulty, as long as the characteristics path is computed correctly. Then, the incompressible constraint confers the Navier-Stokes equations with a strong saddle point character. This implies the velocity and the pressure functional spaces to be chosen with care. In order to correctly cope with this difficulty, the LBB condition [68] [71] must be satisfied. If  $X_h$  and  $M_h$  are the discretized spaces for the velocity and the pressure respectively, then, for all  $v \in X_h$  and  $p \in M_h$ :

$$\inf_{p \in M_h \setminus Q_h} \sup_{v \in X_h} \frac{|(\nabla \cdot v, p)|}{\|v\|_{X_h} \|p\|_{M_h}} \geq \gamma > 0 \quad (3.15)$$

with  $Q_h = \{q \in M_h \mid (q, \nabla \cdot v) = 0 \quad \forall v \in X_h\}$  and  $\gamma$  is a constant independent of  $h$ . A set of spaces satisfying this condition may be found in [135] and [68]. Among them, we shall use the popular P1-bubble/P1 subspace, which is the smallest subspace satisfying the LBB condition.

### 3.3.2.2 The P1-bubble/P1 space

Let us suppose that  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  is a polyhedral set, and let us consider a  $d$ -simplex partition  $\mathcal{T}_h$  of  $\Omega$ . We suppose that  $(\mathcal{T}_h)_{h \geq 0}$  satisfies standard hypothesis in order to define a finite element family [71].

We set,

$$P_h^1 = \{\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi|_K \in \mathbb{P}^1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

For  $k \in \mathcal{T}_h$ , we consider  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq d+1}$ , the barycentric coordinates with respect to the  $d$ -simplex  $K$ . We introduce the bubble function

$$b^K = \prod_{i=1}^{d+1} \lambda_i$$

and we set

$$P_K^b = \text{vect}\{b^K\}$$

We define an approximation space pair based on the above space,

$$X^h = \left\{ v \in (C^0(\overline{\Omega}))^d, v|_K \in (\mathbb{P}^1 \oplus \mathbb{P}^b(K))^d, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (3.16)$$

$$M_h = P_h^1 \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad (3.17)$$

#### Remark 3.2

- The nodes of elements of  $M_h$  are defined as the vertex of the simplex,
- the nodes of elements of  $X_h$  are defined as vertex and isobarycentre of the simplex,

–  $(X_h, M_h)$  satisfies the LBB condition [71] [68] [61].

We introduce the following functional spaces,

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^d, v = 0 \text{ on } \Gamma_{in} \cup \Gamma_s, v \cdot n = 0, \Gamma_{lat}\}$$

$$Q = L^2(\Omega)$$

We set  $V_h = X_h^3 \cap V$  and  $Q_h = M_h \cap Q$ , and we look for  $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h^3 \times Q_h$  solution of the following system :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h) - (p_h^{n+1}, \text{div } v_h) = \frac{1}{\Delta t}(u_h^n \circ \chi_h^n, v_h), & \forall v_h \in V_h \\ (\text{div } u_h^{n+1}, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h \\ u_h^{n+1} = \Pi_h g^{n+1}, & \Gamma_{cyl} \\ \sigma(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u_h^{n+1} = \Pi_h u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

for the first order scheme and

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{3}{2\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h) - (p_h^{n+1}, \text{div } v_h) \\ = \frac{2}{\Delta t}(u_h^n \circ \chi_{1,h}^n, v_h) - \frac{1}{2\Delta t}(u_h^{n-1} \circ \chi_{2,h}^n, v_h) & \forall v_h \in V_h \\ (\text{div } u_h^{n+1}, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h \\ u_h^{n+1} = \Pi_h g^{n+1}, & \Gamma_{cyl} \\ \sigma(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u_h^{n+1} = \Pi_h u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

where  $\chi_h^n$  stands for an approximation of the characteristic foot coming from point  $x \in \Omega$ . Existence and uniqueness results of the solution of problem (3.18) and (3.19) are well known, whereas regularity results are insured by the LBB condition. The details of this approximation will be specified in the next section.

### 3.3.3 Spatial approximation of the characteristic curve

As stated before, severe restrictions on the CFL may be relaxed using the Lagrange-Galerkin scheme. However, when large time steps are used, computing the characteristics path efficiently becomes crucial. We shall now describe three backtracking schemes,

a) Simple backtracking :

This is the simplest algorithm for characteristics path approximation. The feet of the characteristics are computed using the following formulae, obtained directly from the characteristic path definition :

$$\chi_h^n(x) = x - \Delta t \cdot u_h^n(x), \quad x \in \Omega$$

Here, the characteristic path is considered to be a straight line from the starting point  $x$  to its foot  $\chi_h^n(x)$ . This algorithm, though very simple provided we have a

good particule tracking algorithm, performs badly when the time step is relatively large. In fact, when tracking the particles in a finite element mesh, one should not jump too many cells at once in order to ensure consistency. Hence, this algorithm should be used only when small time steps are used.

b) Subcycling backtracking :

Depending on the discrete velocity field  $u_h^n(\cdot)$ , the last approximation may be more or less accurate, specially if the characteristic foot  $\chi_h^n$  is far from its origin point  $x$ . Hence it may be convenient to perform a refinement of such an approximation : The characteristic foot  $\chi^n(\cdot)$  is approximated by the extreme point of a polygonal curve of time length  $\Delta t$  with vertex  $(\chi_0^n = x, \dots, \chi_m^n = \chi^n(x))$  such that,

$$\chi_{i+1}^n = \chi_i^n - \Delta t_i \cdot u^n(\chi_i^n) \text{ with } \sum_{i=1}^m \Delta t_i = \Delta t$$

The major drawback of the last scheme is that it requires, on the discrete level, to have an efficient element searching tool for the velocity field interpolation at each substep points  $\chi_i^n$ . This may be even more CPU time consuming if we use 3D unstructured meshes. Whatsmore, the subdivision parameter is not mesh-dependent and may be easily oversized without necessarily increasing the accuracy level of  $\chi^n(\cdot)$ .

c) Adaptative backtracking :

As stated previously, it may be useful to overcome the use of an element searching tool while using unstructured meshes. This may be done by using the following scheme as in [135] :

The characteristic foot  $\chi^n(\cdot)$  is approximated by the extreme point of a polygonal curve of time length  $\Delta t$  with vertex  $(\chi_0^n = x, \dots, \chi_m^n = \chi^n(x))$  where  $x \in K_h^0$  such that,

1.  $\chi_{i+1}^n = \chi_i^n - \Delta t_i \cdot u^n(\chi_i^n)$ ,
2.  $\Delta t_i$  is such that  $\chi_i^n, i \in [1, m-1]$  belongs to the edge of the simplex of  $K_h^i$  and  $\sum_{i=1}^m \Delta t_i = \Delta t$ .

It follows that, in each element, the characteristic path is approximated by a straight line until the edge is reached. A complete description of these algorithm may be found in [61].

**Remark 3.3**

1. As we may see in the sequel, the intermediate points  $\chi_{i+1}^n$  can be viewed as the projection along the vector  $u^n(\chi_i^n)$  on the edge of the simplex  $K_h^i$ .
2. It may be emphasized that the time partition depends on the geometry of the mesh and the velocity field  $u_h^n(\cdot)$ .
3. Because of adaptativity, the number of sub-time steps is not exactly controlled.

### 3.3.4 Quadrature rules

Computing the right hand side of the Lagrange-Galerkin system exactly is extremely expensive. Therefore, we shall use a Gauss quadrature formula. Introducing the family of

Gauss points  $(\alpha_i, \zeta_i)_{i \in I}$ , we have

$$(u_h^n \circ \chi_h^n, v_h)_K = \sum_{i \in I} \alpha_i u_h^n(\chi_h^n(\zeta_i)) \cdot v_h(\zeta_i)$$

We can see that the characteristic path will be computed from each Gauss point. It follows that increasing the number of Gauss points in order to reach higher accuracy will result in an increase of the number of characteristic paths. This makes the characteristic feet location procedure even more expensive, especially when large time steps are used.

**Remark 3.4** *Because the characteristics foot  $\chi_h^n$  does not necessarily belong to the degree of freedom family of the discrete space  $X_h$ , the unconditional stability of the exact Lagrange-Galerkin scheme is lost. It has been proven that using a non-exact integration rule for the Lagrange-Galerkin method leads to a conditionnaly stable scheme, with non-linear CFL-like conditions (see [120] and [60] for more details). However, these instabilities may be reduced, though not entirely removed, by using a large number of Gauss points.*

### 3.3.5 Extension to the case of a moving domain

We may now change the problem configuration. Indeed we consider that the fluid domain is no more fixed, but can move with prescribed evolution. We note by  $\Omega_t^f$  the moving domain at time  $t > 0$ . We endow the system with a sticking boundary condition at the fluid-solid interface,

$$u(x, t) = \dot{x}^s, \quad (x, t) \in \Gamma_t^s \times (0, T) \quad (3.20)$$

We may only deal in the sequel with rigid body displacement fields, i.e

$$x^s(x_0, t) = d(t) + Q(t)(x_0 - x_G), \quad \text{on } \Gamma_0^s \quad (3.21)$$

where,

$$Q(t) = Q_0 \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

stands for the rotation operator and  $x_G$  the center of mass of the solid. The couple  $(u, p)$  satisfies the Navier-Stokes equations in moving domain,

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega_t^f \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \Omega_t^f \\ u = \dot{x}^s, & \Gamma_t^s \\ \sigma(u, p) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u = u_\infty, & \Gamma_{in} \\ u(t = 0) = u_0, & \Omega \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.3.5.1 ALE formulation

The previous formulation is not convenient in view of its approximation. Indeed, the temporal derivation part  $\partial_t|_{x \in \Omega_t^f}$  is computed while fixing the spatial variable  $x$  in a time-dependent domain  $\Omega_t^f$ . Then, in the neighbourhood of the moving boundary  $\Gamma_t^s$ , it may be difficult to define an approximation of such a derivative.

A solution consists in introducing a map that will transform the term  $\partial_t|_{x \in \Omega_t^f}$  into a temporal derivative term at time  $t \geq 0$ , keeping the space variable fixed in a domain which does not depend on the time variable  $t$ .

In order to work with a Lagrangian description of the solid dynamic, we choose an invariant moving boundary map along  $\Gamma_t^s$ . Hence, we introduce the following mapping family, for  $0 \leq \tau < 0$ ,

$$\mathcal{A}_t^\tau : \begin{array}{ll} \bar{\Omega}^f(\tau) & \longrightarrow \bar{\Omega}^f(t) \\ \xi & \longmapsto x = \mathcal{A}_t^\tau(\xi) \end{array}$$

such that

$$\mathcal{A}_t^\tau(\xi) \in \Gamma_t^s, \quad \forall \xi \in \Gamma_0^s$$

We set  $x^f = \mathcal{A}_t(\xi)$  for  $\xi \in \Omega^f(\tau)$  and  $x^s \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_t(\xi)$  for  $\xi \in \Gamma^s(\tau)$ . Then the ALE map can be described as follow,

$$\begin{aligned} x^f(\xi, t) &= \text{Ext}(x^s)(\xi, t), \quad \forall \xi \in \Omega^f(\tau), \\ x^s(\xi, t) &= d(t) + Q(t)\xi, \quad \forall \xi \in \Gamma^s(\tau). \end{aligned}$$

Here, Ext represents any extension operator from  $\Gamma^s(\tau)$  to  $\Omega^f(\tau)$  preserving  $\Gamma_\infty^f$ .

$w^\tau(x, t) = \left. \frac{\partial \mathcal{A}_t^\tau(\xi)}{\partial t} \right|_{\xi \in \Omega^f(\tau)}$  with  $x = \mathcal{A}_t^\tau(\xi)$ , stands for the ALE velocity.

In the sequel, we will not distinguish between a function defined in  $\Omega^f(\tau)$  or  $\Omega^f(t)$ , keeping in mind that they are connected through the ALE map  $(\mathcal{A}_t^\tau)_{0 < \tau < t}$ . Using the Chain Rule, we may state the following identity,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{x \in \Omega^f(\tau)} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{x \in \Omega^f(t)} + \nabla u(x, t) \cdot w^\tau(x, t), \text{ for } x = \mathcal{A}_t^\tau(\xi), \forall \xi \in \Omega^f(\tau) \quad (3.23)$$

It allows us to obtain the strong ALE formulation of the fluid-structure coupled system,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\xi \in \Omega^f(\tau)} + \nabla u \cdot (u - w^\tau) - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega_t^f \\ \text{div}(u) = 0, & \Omega_t^f \\ u = \dot{x}^s, & \Gamma_t^s \\ \sigma(u, p) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u = u_\infty, & \Gamma_{in} \\ u(t = 0) = u_0, & \Omega \end{array} \right. \quad (3.24)$$

### 3.3.5.2 Discretization

The ALE formulation of the Navier-Stokes system in moving domain has a similar structure compared to the fixed domain case. The only difference is the convection velocity field which is shifted by the ALE velocity field. Hence the Lagrange Galerkin scheme can be applied and the characteristic curves are backtracked thanks to the field  $u^n - w^n$ . This leads to the following semi-discrete systems,

– First-order characteristic scheme :

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} u^{n+1} - \nu \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} u^n \circ \chi_{u-w}^n, & \Omega^{n+1} \\ \operatorname{div}(u^{n+1}) = 0, & \Omega \\ u^{n+1} = w^{n+1}, & \Gamma_{n+1}^s \\ \sigma(u^{n+1}, p^{n+1}) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u^{n+1} = u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \end{cases} \quad (3.25)$$

where  $\chi_{u-w}^n(x) = \chi(t_n; t_{n+1}, x)$  stands for a characteristic foot obtained through the characteristic path  $\chi(t_n; t_{n+1}, x)$  which is computed from (3.11) using the following formulae ( linear discrete interpolation ) :

$$\chi(t_n; t_{n+1}, x) = x - \Delta t (u^n - w^n)(x)$$

– Second-order characteristic scheme :

$$\begin{cases} \frac{3}{2\Delta t} u^{n+1} - \nu \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[ 2u^n \circ \chi_{u-w,1}^n - \frac{1}{2} u^{n-1} \circ \chi_{u-w,2}^n \right], & \Omega^{n+1} \\ \operatorname{div}(u^{n+1}) = 0, & \Omega \\ u^{n+1} = w^{n+1}, & \Gamma_{n+1}^s \\ \sigma(u^{n+1}, p^{n+1}) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u^{n+1} = u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \end{cases} \quad (3.26)$$

with the following set of characteristic feet,

$$\begin{cases} \chi_{u-w,1}^n = \chi(t_n; t_{n+1}, x) & = x - \Delta t (2(u^n - w^n) - (u^{n-1} - w^{n-1}))(x) \\ \chi_{u-w,2}^n = \chi(t_{n-1}; t_{n+1}, x) & = x - 2\Delta t (2(u^n - w^n) - (u^{n-1} - w^{n-1}))(x) \end{cases}$$

## 3.4 Discrete linearization and discrete cost function gradient

In order to perform our optimal control strategy, we need to compute the gradient of the cost function with respect to boundary velocity field. This may be done by using the derivative  $(z, q)$  of the state variable  $(u, p)$  with respect to  $g \in \mathcal{U}_{ad}$ . Concerning the numerical approximation of the optimization procedure, there exists mainly two strategies for computing the cost function gradient :

1. Define an approximation of the continuous linearized problem.
2. Define a linearization of the discretized state problem.

On the limit case  $(h, \Delta t) \rightarrow 0$ , both systems will converge to the continuous linearized system. Nevertheless, since we shall perform an optimization descent algorithm, both systems may furnish different descent directions, inducing different convergence properties. In the sequel, we may describe such an alternative. We will only deal with first-order characteristic linearized schemes, since the second-order case derives easily from the first-order case as shown before.

### 3.4.1 Linearized discrete system

The procedure which consists in,

1. discretizing the state problem,
2. then linearizing the discrete problem.

will produce what we call the linearized discrete problem (LDP). Let us describe this procedure for the Navier-Stokes problem. We set  $(u_h^i(g), p_h^i(g))_{0 \leq i \leq N_t}$  the solution of the full-discrete Navier-Stokes system associated with the control variable  $g$ .

We would like to evaluate the following quantities,

$$(z_h^i(\delta g), q_h^i(\delta g)) = \left( \frac{Du_h^i(g)}{Dg} \cdot \delta g, \frac{Dq_h^i(g)}{Dg} \cdot \delta g \right)$$

For that purpose, the only difficulty is to differentiate the following term, involved in the right hand side of the generalized Stokes system,

$$\left( \frac{D(u_h^n \circ \chi_h^n(g))}{Dg} \right) \cdot \delta g = \frac{D(u_h^n)}{Dg}(\chi_h^n(g)) \cdot \delta g + \nabla u_h^n(\chi_h^n(g)) \cdot \frac{D(\chi_h^n(g))}{Du} \cdot \left( \frac{D(u_h^n)}{Dg} \right) \cdot \delta g \quad (3.27)$$

We recall that  $z_h^n = \frac{D(u_h^n)}{Dg} \cdot \delta g$ , then we get

$$\left( \frac{D(u_h^n \circ \chi_h^n(g))}{Dg} \right) \cdot \delta g = z_h^n(\delta g) \circ \chi_h^n(g) + \nabla u_h^n(\chi_h^n(g)) \cdot \left( \frac{D(\chi_h^n(g))}{Du} \right) \cdot z_h^n(\delta g) \quad (3.28)$$

This term involves the derivative of the characteristic foot with respect to the convection velocity field in the direction of the linearized velocity field. Hence depending on the characteristics backtracking procedure, we may get different derivative expressions. This issue will be investigated in the sequel.

#### 3.4.1.1 Linearized simple backtracking

In this simple case, we recall that the characteristic foot  $\chi(z)$  is approximated by a line,

$$\chi(z) = x - \Delta t \cdot z(x)$$

It follows easily that,

$$\frac{D\chi}{Dz} \cdot \delta z = -\Delta t \cdot \delta z(x)$$



Then we get

$$\left( \frac{D(u_h^n \circ \chi_h^n(g))}{Dg} \right) \cdot \delta g = z_h^n(\delta g) \circ \chi_h^n(g) - \Delta t \cdot \nabla u_h^n(\chi_h^n(g)) \cdot z_h^n(\delta g) \quad (3.29)$$

We finally need to solve the following linearized problem,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (z_h^{n+1}, v_h) + \nu (\nabla z_h^{n+1}, \nabla v_h) - (q_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \\ \frac{1}{\Delta t} [(z_h^n(\delta g) \circ \chi_h^{u,n}(g), v_h) - \Delta t \cdot (\nabla u_h^n(\chi_h^{u,n}(g)) \cdot z_h^n(\delta g), v_h)], \quad \forall v_h \in V_h \\ (\operatorname{div} z_h^{n+1}, \ell_h) = 0, \quad \forall \ell_h \in Q_h \\ z_h^{n+1} = \Pi_h(\delta g^{n+1}), \quad \Gamma^s \\ z_h^{n+1} = 0, \quad \Gamma_{in} \\ (z_h^0, v_h) = (\Pi_h(\delta u_0), v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (3.30)$$

**Remark 3.5** *The linearized system involves the term  $\nabla u_h^n(\chi_h^{u,n}(g))$ , i.e the gradient of the velocity field  $u_h^n$  evaluated at the characteristic foot  $\chi_h^{u,n}(g)$ . Depending on the choice of approximation spaces, this term may be more or less well captured.*

**Remark 3.6** *Both non-linear and linearized system can be performed advancing in time :*

- We first compute the characteristic feet,
- we then evaluate the different r.h.s involved in the generalized Stokes systems,
- finally, we solve the linear systems.

### 3.4.1.2 Linearized subcycling backtracking

We recall that the foot of a characteristic curve  $\chi(z)$  associated to vector field  $z$  is given by,  $\chi_m$  where

$$\begin{aligned} \chi_{i+1} &= \chi_i - \Delta t_i \cdot z(\chi_i), \quad \sum_{i=1}^m \Delta t_i = \Delta t \\ \chi_0 &= x, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (3.31)$$

Hence, the derivative of the characteristic foot is given by the formula  $\delta \chi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D\chi(z)}{Dz} \cdot \delta z = \frac{D\chi_m(z)}{Dz} \cdot \delta z$ , with

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \chi_{i+1} = \delta \chi_i - \Delta t_i \cdot \delta z(\chi_i) - \Delta t_i \cdot (\nabla z(\chi_i) \cdot \delta \chi_i), \\ \delta \chi_1 = -\Delta t_0 \cdot \delta z(x), \end{array} \right. \quad x \in \Omega \quad (3.32)$$

Then we get,

$$\left( \frac{D(u_h^n \circ \chi_h^n(g))}{Dg} \right) \cdot \delta g = z_h^n(\delta g) \circ \chi_h^n(g) + \nabla u_h^n(\chi_h^n(g)) \cdot \delta \chi_{m,h}^n \quad (3.33)$$

where

$$\begin{cases} \delta \chi_{i+1,h}^n = \delta \chi_{i,h}^n - \Delta t_i \cdot z_h^n(\chi_{i,h}^n) - \Delta t_i \nabla u_h^n(\chi_{i,h}^n) \cdot \delta \chi_{i,h}^n, \\ \delta \chi_{1,h}^n = -\Delta t_0 \cdot z_h^n(x), \end{cases} \quad x \in \Omega \quad (3.34)$$

We finally need to solve the following linearized problem,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (z_h^{n+1}, v_h) + \nu (\nabla z_h^{n+1}, \nabla v_h) - (q_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \\ \frac{1}{\Delta t} [(z_h^n(\delta g) \circ \chi_h^{u,n}(g), v_h) + (\nabla u_h^n(\chi_h^{u,n}(g)) \cdot \delta \chi_{h,h}^n, v_h)], \quad \forall v_h \in V_h \\ (\operatorname{div} z_h^{n+1}, \ell_h) = 0, \quad \forall \ell_h \in Q_h \\ z_h^{n+1} = \Pi_h(\delta g^{n+1}), \quad \Gamma^s \\ z_h^{n+1} = 0, \quad \Gamma_{in} \\ (z_h^0, v_h) = (\Pi_h(\delta u_0), v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (3.35)$$

**Remark 3.7** Here we choose to approximate the velocity using Lagrangian  $\mathbb{P}_1$  finite elements. Then on each simplex, the gradient  $\nabla u_h$  is constant, that means that the gradient of  $u_h$  is discontinuous at each simplex interfaces. We may get troubles if one of the points  $\chi_{i,h}$  is located on faces of a given tetraedron  $K_h$ . This may almost never occur, but we need to pay attention on these singularities that may produce numerical artefacts on the solution of the linearized discrete system.

If we choose a higher-order finite element method, these singularities may disappear.

**Remark 3.8** In order to avoid large vector field storage, the computation of the linearized characteristic direction  $\delta \chi_h^n$  can be performed in the routine which build the non-linear characteristic curves. In this case, the intermediate points  $\chi_{i,h}^n$  do not need to be stored.

### 3.4.2 Linearized adaptative backtracking

In the case, of the adaptative algorithm, the foot is still given by,  $\chi_m$ , with

$$\begin{cases} \chi_{i+1} = \chi_i(z) - \Delta t_i(z) \cdot z(\chi_i), \\ \chi_0 = x, \end{cases} \quad x \in \Omega \quad (3.36)$$

The major difference is that  $m$  and  $\{\Delta t_i\}_{1 \leq i \leq m}$  depends on the transport field  $z$ , which might add some extra computations and differentiability questions.

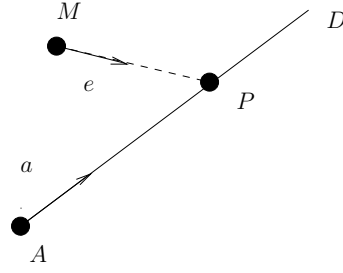


FIG. 3.1 – 2D projection along a given vector

### 3.4.2.1 2D case

For the sake of simplicity, we first explain how we might perform the derivation of the adaptative characteristic scheme with respect to the vector field  $z(\cdot)$  on a 2D case.

Let us consider, a line  $D(A,a)$  in  $\mathbb{R}^2$  defined by a point  $A(x_1^A, x_2^A)$  and a vector  $a(a_1, a_2)$  where the coordinates are given in the orthonormal euclidian frame  $(O, i, j)$ . Considering a point  $M(x_1^M, x_2^M)$  in  $\mathbb{R}^2$ , we look for the projection point  $P$  of point  $M$  on  $D$  along a vector  $e \in \mathbb{R}^2$ , which can be identified as  $P = P_{\mathbb{R}^2}((A,a),e; M)$  ( see Fig. 3.1 ).

**Lemma 3.1** *Assuming that vector  $e$  is not colinear to  $a$ , then the projection point  $P$  is determined by the following expression,*

$$OP = OM + \left( \frac{MA \wedge a}{e \wedge a} \right) \cdot e \quad (3.37)$$

**Lemma 3.2** *Assuming that vector  $e$  is not colinear to  $a$ , the derivative of the projection point  $P = P_{\mathbb{R}^2}((A,a),e; M)$  considered as a function of the projective direction  $e$  is continuous and is given by the following expression,*

$$\frac{d(OP)}{de} = \left( \frac{MA \wedge a}{(e \wedge a)^2} \right) \cdot [(e \wedge a) I + e \cdot (a^\perp)^*] \quad (3.38)$$

with  $a^* = (a_1, a_2)$  and  $(a^\perp)^* = (-a_2, a_1)$ .

**Proof :** It can be easily obtained using the cartesian coordinates,

$$\begin{aligned} \frac{d}{de_i} \left( \frac{e_j}{e_1 a_2 - e_2 a_1} \right) &= \frac{(e_1 a_2 - e_2 a_1) \delta_{i,j} + (-1)^i e_j a_{i+1}}{(e_1 a_2 - e_2 a_1)^2} \\ &= \frac{1}{(e \wedge a)^2} [(e \wedge a) I + e \cdot (a^\perp)^*] \end{aligned}$$

□

Let us return to the case of the projection of a point on the edge of a triangle along a given direction. We consider a triangle defined by 3 points  $(A_1, A_2, A_3)$ .

**Lemma 3.3** *Let  $\chi$  stands for the projection of the point  $M \in \mathbb{R}^2$  on the edge of the triangle  $(A_1, A_2, A_3)$  along the vector  $e \in \mathbb{R}^2$ . Then,  $\chi(e)$  is differentiable with respect to  $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{e_{A_1}, e_{A_2}, e_{A_3}\}$ , where  $e_{A_i}$  is such that*

$$\chi(e_{A_i}) = A_i$$

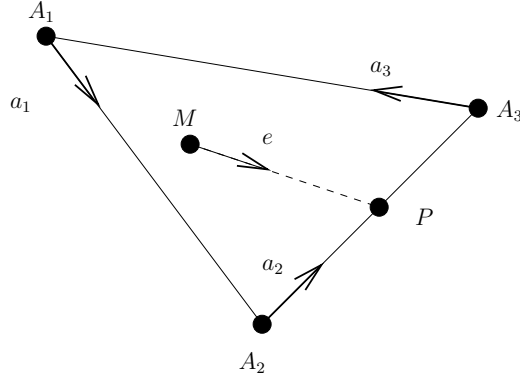


FIG. 3.2 – Projection on the edge of a triangle

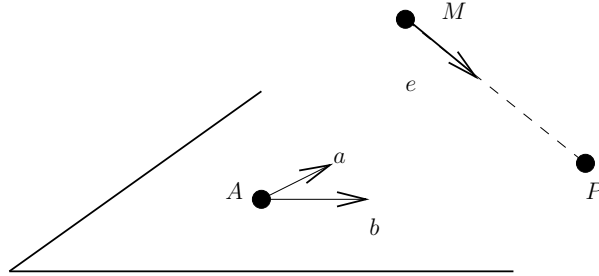


FIG. 3.3 – 3D projection

**Proof :** We may only check whether,  $\chi(\cdot)$  is differentiable at point  $e_{A_i}$  for  $i \in [1,3]$ . We consider  $e_{A_i^+}$  and  $e_{A_i^-}$ , such that

- $\chi(e_{A_i^+}) = A_i^+$  and  $\chi(e_{A_i^+}) \in ]A_i, A_{i+1}[$
- $\chi(e_{A_i^-}) = A_i^-$  and  $\chi(e_{A_i^-}) \in ]A_{i-1}, A_i[$

Using  $\chi(e_{A_i^+}) = \chi(e_{A_i^-})$ , we get

$$\left( \frac{MA_i \wedge a_i}{e \wedge a_i} \right) = \left( \frac{MA_{i+1} \wedge a_{i+1}}{e \wedge a_{i+1}} \right) = \rho$$

Thus we get that the jump of derivatives at point  $e_{A_i}$  is given by the following expression,

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{de}(e_{A_i^-}) - \frac{d\chi}{de}(e_{A_i^+}) &= \rho \cdot \left[ \frac{e_{A_i} \cdot (a_i^\perp)^*}{e_{A_i} \wedge a_i} - \frac{e_{A_i} \cdot (a_{i+1}^\perp)^*}{e_{A_i} \wedge a_{i+1}} \right] \\ &\neq 0, \text{ for } a_i \neq a_{i+1} \end{aligned}$$

This last identity points out the lack of continuity of the derivative  $\frac{d\chi}{de}$  for directions pointing towards the vertices of the triangle.  $\square$

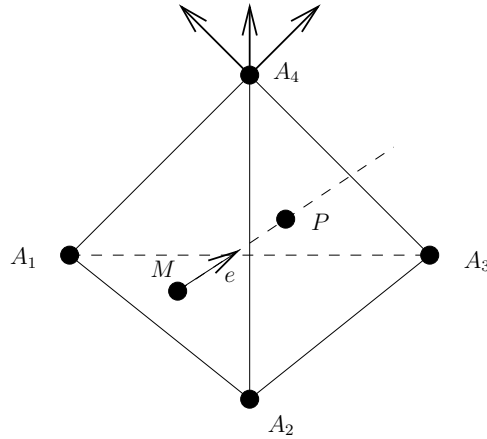


FIG. 3.4 – Projection on the edge of a tetrahedron

### 3.4.2.2 3D case

The previous analysis can be easily extended to the 3D case. We may omit the proof of the following results, since it may be established using the same techniques used in the 2D case.

**Lemma 3.4** *We consider a plan  $D(A,a,b)$  defined by a point  $A \in \mathbb{R}^3$  and two non-colinear vectors  $(a,b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  ( i.e  $a \wedge b \neq 0$  ). The projection point  $P$  of a point  $M \in \mathbb{R}^3$  on the plan  $(A,a,b)$  along direction given by the vector  $e \in \mathbb{R}^3$  exists as long as  $e$  is not parallel to the plan  $D$  ( i.e  $(e \wedge a) \cdot b \neq 0$  ) and is given by the following expression,*

$$OP = OM + \left( \frac{(MA \wedge a) \cdot b}{(e \wedge a) \cdot b} \right) \cdot e \quad (3.39)$$

**Lemma 3.5** *The point  $P$  as a function of the vector  $e \in \mathbb{R}^3$  is differentiable and its derivative is given by the following identity,*

$$\frac{d(OP)}{de} = \left( \frac{(MA \wedge a) \cdot b}{((e \wedge a) \cdot b)^2} \right) \cdot [((e \wedge a) \cdot b) \cdot I - e \cdot [a \wedge b]^*] \quad (3.40)$$

We consider a tetraedron  $K \in \mathbb{R}^3$  defined by the points  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$ . For a point  $M \in \mathbb{R}^3$  inside  $K$ , the point  $P$  stands for the projection of  $M$  on  $\partial K$  along the direction given by the vector  $e \in \mathbb{R}^3$ . The following result is an easy consequence of the previous analysis,

**Theorem 3.3** *The point  $P$  as a function of  $e \in \mathbb{R}^3$  is differentiable on the set  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{I}$  where the set  $\mathbb{I}$  is such that for  $e \in \mathbb{I}$ , then*

$$P(e) \in \text{edge of } \partial K$$

### 3.4.3 Implementation using barycentric coordinates

In this section, we will describe how the projection step involved in the adaptive backtracking characteristic scheme has been implemented using barycentric coordinates.

This will be the basis for deriving an implementable linearized discrete scheme for the Navier-Stokes system.

### 3.4.3.1 Projection using barycentric coordinates

Let us go back to the problem of projecting a point inside a tetraedron on its boundary along a given direction. This problem is usually referred in the Computer Graphics literature as the Ray Tracing problem. It has been proven, that an elegant and efficient way of solving this problem is the use of barycentric coordinates.

**Definition 3.1** Let us consider a tetraedron  $K \in \mathbb{R}^3$  defined by the points  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$ . For a point  $M \in \mathbb{R}^3$  inside  $K$ , the barycentric coordinates  $\{bx_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  of  $M$  are defined as the solution of the following system,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^4 bx_j \cdot c(.,j) = x(.) \\ \sum_{j=1}^4 bx_j = 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

where  $\{c(i,j)\}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4}$  stands for the cartesian coordinates of the vertex  $A_j$  of the tetraedron  $K$ .  $\{x(i)\}_{1 \leq i \leq 3}$  stands for the cartesian coordinates of  $M$ .

**Lemma 3.6** If the tetraedron  $K$  is not degenerated, then the barycentric coordinates of  $M$  are uniquely determined and  $0 \leq bx_j \leq 1$ ,  $1 \leq j \leq 4$ . Furthermore,  $\exists i/bx_i = 0 \iff M \in \partial K$ .

**Remark 3.9** Using matrix notation, we can solve the following problem

$$\begin{bmatrix} c(1,1) & c(1,2) & c(1,3) & c(1,4) \\ c(2,1) & c(2,2) & c(2,3) & c(2,4) \\ c(3,1) & c(3,2) & c(3,3) & c(3,4) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} bx_1 \\ bx_2 \\ bx_3 \\ bx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Inside NSI3, this system is solved using the substitution,

$$bx_4 = 1 - bx_1 - bx_2 - bx_3$$

setting,

$$C = \begin{bmatrix} c(1,1) - c(1,4) & c(1,2) - c(1,4) & c(1,3) - c(1,4) \\ c(2,1) - c(2,4) & c(2,2) - c(2,4) & c(2,3) - c(2,4) \\ c(3,1) - c(3,4) & c(3,2) - c(3,4) & c(3,3) - c(3,4) \end{bmatrix}$$

and

$$bx = \begin{bmatrix} bx_1 \\ bx_2 \\ bx_3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} x_1 - c(1,4) \\ x_2 - c(2,4) \\ x_3 - c(3,4) \end{bmatrix}$$

we may solve,

$$C \cdot bx = d \quad (3.42)$$

In the sequel, we may also need to express vectors in barycentric form thanks to the following definition,

**Definition 3.2** Let us consider a tetraedron  $K \in \mathbb{R}^3$  defined by the points  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$ . For a vector  $a \in \mathbb{R}^3$ , the barycentric coordinates  $\{ba_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  are defined as the solution of the following system,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^4 ba_j \cdot c(.,j) = a(.) \\ \sum_{j=1}^4 ba_j = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

where  $\{c(i,j)\}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4}$  stands for the cartesian coordinates of the vertex  $A_j$  of the tetraedron  $K$ .  $\{a(i)\}_{1 \leq i \leq 3}$  stands for the cartesian coordinates of  $a$ .

**Remark 3.10** Inside NSI3, the barycentric coordinates of a vector are found by substitution,

$$ba_4 = -ba_1 - ba_2 - ba_3$$

setting,

$$ba = \begin{bmatrix} ba_1 \\ ba_2 \\ ba_3 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

we may solve,

$$C \cdot ba = a$$

The matrix  $C$  enters the definition of the affine transform between reference and actual tetrahedra inside the finite element framework. Hence its inverse  $C^{-1}$  is usually stored for all the mesh avoiding by the way, local computation.

Let us come back to the purpose of this section, i.e the computation using barycentric coordinates of the projection of a point  $M$  inside a tetrahedron  $K$  on its faces along a given direction vector  $e$ . This problem can be expressed as follow,

**Problème 3.1** Given a point  $M$  inside a simplex  $K$  of barycentric coordinates  $bx$  and a vector  $e$  with barycentric coordinates  $be$ , find  $\rho \in \mathbb{R}^+$  such that

$$\prod_{j=1}^4 b_j(x - \rho e) = 0 \quad (3.44)$$

$$b_j(x - \rho \cdot e) \geq 0, 1 \leq j \leq 4 \quad (3.45)$$

**Lemma 3.7** *With the nondegeneracy assumptions on  $K$ , the following identity holds true*

$$b(x - \rho e) = bx - \rho \cdot be \quad (3.46)$$

**Lemma 3.8** *There exists a unique step  $\rho^* \in \mathbb{R}^+$  and at least one index  $m \in [1,4]$  such that*

$$\rho^* = \left( \frac{(bx)_m}{(be)_m} \right),$$

$$b_j(x - \rho^* \cdot e) \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 4$$

**Remark 3.11**

*Inside the code NSI3, this step is performed by trial and error, by changing the index  $m$  and checking the above conditions until it works, i.e*

1. Set  $m = 1$  and choose a tolerance parameter  $\varepsilon > 0$ ,
2. Compute  $\rho^m = \left( \frac{(bx)_m}{(be)_m} \right)$ ,
3. if  $b_j(x - \rho^m \cdot e) < -\varepsilon$  for  $j \neq m$ , go to step 5.,
4. else set  $\chi = x - \rho^m \cdot e$  and STOP.
5. Set  $m \leftarrow m + 1$  and go back to step 2.

### 3.4.3.2 Derivative of the projection using barycentric coordinates

Let us go back to the original problem of computing the derivative with respect to the convective velocity field of the characteristic foot associated to the adaptative backtracking scheme. For this purpose, we need to differentiate the previous projection formula with respect to the vector  $e \in \mathbb{R}^3$ .

**Lemma 3.9** *Let  $\chi$  stands for the cartesian coordinates of the projection of point  $M$  on  $\partial K$ . The coordinate  $\chi$  is differentiable for  $e \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{I}$  and,*

$$\left( \frac{d(b\chi)}{de} \right) \cdot \delta e = -\rho^*(e) \cdot b(\delta e) + \left( \rho^*(e) \cdot \frac{(b(\delta e))_m}{(be)_m} \right) \cdot be \quad (3.47)$$

where  $\mathbb{I}$  is such that for  $e \in \mathbb{I}$

$$\chi(e) \in \text{edge of } \partial K$$

**Proof :** Using the identity  $b\chi = bx - \rho^* \cdot be$ , we get

$$\left( \frac{d(b\chi)}{de} \right) \cdot \delta e = - \left( \frac{d\rho^*(e)}{de} \cdot b(\delta e) \right) \cdot be - \rho^* \cdot b(\delta e) \quad (3.48)$$

Using  $\rho^* = \left( \frac{(bx)_m}{(be)_m} \right)$ , we deduce that

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\rho^*(e)}{de} \cdot b \right) \cdot \delta e &= - \frac{bx_m \cdot (b(\delta e))_m}{(be)_m^2} \\ &= -\rho^*(e) \cdot \left( \frac{(b(\delta e))_m}{(be)_m} \right) \end{aligned}$$



from which we deduce the derivative identity.  $\square$  A straightforward consequence is the following result,

**Lemma 3.10**

$$\frac{d\chi}{de} \cdot \delta e = -\rho^*(e) \cdot \left[ \delta e - \left( \frac{(b(\delta e))_m}{(be)_m} \right) \cdot e \right] \quad (3.49)$$

Then, once the projection on the edge of  $K$  has been done, we can compute the linearized characteristic foot in the direction  $\delta e$ , for the knowledge of the barycentric coordinates of the initial point, the projection step  $\rho^*(e)$  and the barycentric coordinates of the perturbation direction  $\delta e$ . In fact, only the barycentric coordinates of index  $m$  play a role, where  $m$  is the index solution of the algorithm described in remark 3.11.

### 3.4.3.3 linearization of the discrete scheme inside NSI3

The previous steps allows us to linearize the full discrete approximation of the Navier-Stokes system used inside the computational research code NSI3. This scheme has the special feature of using an adaptative backtracking characteristic algorithm.

– **Navier-Stokes full discrete scheme :**

we look for  $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h^3 \times Q_h$  solution of the following system,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \frac{1}{\Delta t}(u_h^n \circ \chi_h^{u,n}, v_h), & \forall v_h \in V_h \\ (\operatorname{div} u_h^{n+1}, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h \\ u_h^{n+1} = \Pi_h g^{n+1}, & \Gamma^s \\ u_h^{n+1} = \Pi_h u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \end{array} \right. \quad (3.50)$$

where  $\chi_h^{u,n} = \chi_{m,h}^{u,n}$  stands for an approximation of the characteristic foot coming from point  $x \in \Omega$  computed using the following scheme,

– **Adaptative backtracking scheme :**

$$\begin{aligned} \chi_{i+1,h}^{u,n} &= \chi_{i,h}^{u,n} - \rho_i \cdot u_h^n(\chi_{i,h}^{u,n}), \\ \chi_{0,h}^{u,n} &= x, \end{aligned} \quad x \in K_h \quad (3.51)$$

with

$$\rho_i = \left( \frac{(b\chi_{i,h}^{u,n})_{m_i}}{(bu_h^n(\chi_{i,h}^{u,n}))_{m_i}} \right), \text{ in the frame } K_h^i \quad (3.52)$$

Then, it is possible to establish the structure of the (LDP) problem,

- **Linearized discrete problem** We look for  $(z_h^n, q_h^n)$  solution of the following linear system,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (z_h^{n+1}, v_h) + \nu (\nabla z_h^{n+1}, \nabla v_h) - (q_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \\ \frac{1}{\Delta t} \left[ (z_h^n(\delta g) \circ \chi_h^{u,n}(g), v_h) + \left( \nabla u_h^n(\chi_h^n(g)) \cdot \left( \frac{D\chi_h^{u,n}(z)}{Dz} \cdot z_h^n(\delta g) \right), v_h \right) \right], \\ \forall v_h \in V_h \\ \\ (\operatorname{div} z_h^{n+1}, \ell_h) = 0, \\ \forall \ell_h \in Q_h \\ \\ z_h^{n+1} = \Pi_h(\delta g^{n+1}), \quad \Gamma^s \\ \\ z_h^{n+1} = 0, \quad \Gamma_{in} \\ \\ (z_h^0, v_h) = (\Pi_h(\delta u_0), v_h), \\ \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (3.53)$$

with the following characteristic derivative scheme,

- **Linearized adaptative backtracking scheme**

$$\frac{D\chi_h^{u,n}}{Du_h^n}(\chi_h^{u,n}) \cdot z_h^n = (\delta\chi_{m,h}^{u,n}) \cdot z_h^n \quad (3.54)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta\chi_{i+1,h}^{u,n}) \cdot z_h^n = (\delta\chi_{i,h}^{u,n}) \cdot z_h^n - [(\delta\rho_i) \cdot z_h^n] \cdot u_h^n(\chi_{i,h}^{u,n}) \\ \quad - \rho_i \cdot [\nabla u_h^n \circ \chi_{i,h}^{u,n}] \cdot (\delta\chi_{i,h}^{u,n}) \cdot z_h^n - \rho_i \cdot z_h^n(\chi_{i,h}^{u,n}), \\ \\ \delta\chi_{1,h}^{u,n} = - [(\delta\rho_0) \cdot z_h^n] \cdot u_h^n(x) - \rho_0 \cdot z_h^n(x), \quad x \in K_h \end{array} \right. \quad (3.55)$$

with

$$\rho_i = \left( \frac{(b\chi_{i,h}^{u,n})_{m_i}}{(bu_h^n(\chi_{i,h}^{u,n}))_{m_i}} \right), \text{ in the frame } K_h^i \quad (3.56)$$

and

$$(\delta\rho_i) \cdot z_h^n = -\rho_i \left( \frac{(bz_h^n(\chi_{i,h}^{u,n}))_{m_i}}{(bu_h^n(\chi_{i,h}^{u,n}))_{m_i}} \right), \text{ in the frame } K_h^i \quad (3.57)$$

**Remark 3.12** *This algorithm is only valid if we assume that the projected points on each simplex do not cross the edge of  $\partial K$ . This is a strong hypothesis, but the probability for this to occur is weak.*

**Remark 3.13** A much stronger obstruction for the last algorithm to perform well inside NSI3 is that we only have a  $\mathbb{P}^1$  approximation for the velocity, this means that the gradient  $\nabla u_h$  is discontinuous on each side of the simplex  $K \in \mathcal{T}_h$ . This causes the adaptative backtracking scheme to be non-differentiable inside NSI3. If we choose a higher-order finite element approximation, this will not be the case, even if problems at the edge of the vertex can still remain. We will show in the sequel the kind of numerical problems that arises with such an implementation inside NSI3.

### 3.4.4 Discrete linearized system

As described previously, we may be interested in a different procedure which consists in,

1. linearizing the state problem,
2. then discretizing the linearized problem.

This leads to the discrete linearized problem (DLP). Let us describe this procedure for the Navier-Stokes problem.

We have already establish the structure of the continous linearized problem with respect to Dirichlet boundary conditions. We set,

$$(z(\delta g), q(\delta g)) = \left( \frac{D(u,p)}{Dg} \right) \cdot (\delta g)$$

stand for the state derivatives with respect to the parameter  $g$  in the perturbation direction  $\delta g$ . The directional derivatives are solution of the following linear evolution system,

$$\begin{cases} \partial_t z + \nabla u \cdot z + \nabla z \cdot u - \nu \Delta z + \nabla q = 0, & \Omega \\ \operatorname{div} z = 0, & \Omega \\ z = 0, & \Gamma^s \times (0, T) \\ \sigma(z, q) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ z = \delta g, & \Gamma_{in} \\ z(t = 0) = 0, & \Omega \end{cases} \quad (3.58)$$

The main issue is the choice of the time discretization for the above system.

Let us introduce as previously the solution  $\chi^u$  of the following Cauchy problem,

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \chi^u(\tau; t, x) = u(\tau, \chi^u(\tau; t, x)), & \tau \in (0, t) \\ \chi^u(\tau = t; t, x) = x \end{cases} \quad (3.59)$$

Using the chain rule, it can be easily stated that the following identity holds true,

$$\frac{d}{dt} (z \circ \chi^u) = \partial_t z + \nabla z \cdot u \quad (3.60)$$

Hence the linearized system can be viewed as a combinaison of,

1. a Stokes operator,

$$\begin{cases} -\nu \Delta z + \nabla q = 0, \\ \operatorname{div} z = 0 \end{cases}$$

2. a linear advection operator,

$$\frac{d}{dt}(z \circ \chi^u)$$

3. and a reaction operator,

$$\nabla u \cdot z$$

The last operator is the key problem in the derivation of efficient approximation scheme for the linearized Navier-Stokes system, since depending on the sign and the size of  $\nabla u$ , this term may add a non-positive dissipation contribution resulting in an unstable numerical scheme.

For the time being, as reported in [28], there is no efficient strategies in order to stabilize the reaction term  $\nabla u \cdot z$ . For that reason, we suggest to use an explicit development of this term in the discretization. Then using a first-order characteristic scheme coupled with the same finite element strategy used for the state problem, we obtain the following full discrete problem,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Delta t}(z_h^{n+1}, v_h) + \nu(\nabla z_h^{n+1}, \nabla v_h) - (q_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \frac{1}{\Delta t}(z_h^n \circ \chi_h^{u,n}, v_h) & \\ -(\nabla u_h^n \cdot z_h^n, v_h), & \forall v_h \in V_h \\ (\operatorname{div} z_h^{n+1}, \ell_h) = 0, & \forall \ell_h \in Q_h \\ z_h^{n+1} = \Pi_h(\delta g^{n+1}), & \Gamma^s \\ z_h^{n+1} = 0, & \Gamma_{in} \\ (z_h^0, v_h) = 0, & \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (3.61)$$

**Remark 3.14**

1. Such a scheme may be used, as long as the mesh is enough refined in the region where the gradient of  $u_h^n$  is large. These regions may correspond to the existence of boundary layers near the walls.
2. In the last system, we do not need to compute the characteristic feet  $\chi_h^{u,n}$ , since it may be furnished by early state computation steps.
3. The above scheme has the advantage to be easily implementable. Nevertheless, the cost functional gradient approximation computed with such a linearized state may not be consistent with the cost functional approximation. This causes the optimization procedure to possibly fail.

## 3.5 Implementation

In this section, we describe some details about the implementation of the whole optimization structure, including the Navier-Stokes solvers, the optimization routines and the parallel direct mode strategy for the gradient computation.

### 3.5.1 Nonlinear and linearized Navier-Stokes solvers

#### 3.5.1.1 NSI3

The NSI3 solver is a 3D sequential Incompressible Navier-Stokes equations solver used at INRIA. It is a Fortran 77 code. Its main features are listed below :

- mixed finite element P1-bubble/P1 for the spatial discretisation.
- Semi-lagrangian (Lagrange-Galerkin method) implicit time discretisation
- ALE capable for fluid/structure interaction.

This code is based upon solving at each time step a generalized Stokes problem with a preconditioned Conjugate-Gradient algorithm for the Schur complement system. Setting  $A_h$  to be the matrix associated to the operator  $\frac{D}{Dt} - \nu \Delta$ , and  $B_h$  the matrix associated to the operator  $\nabla$ , the system to be solved may be written as a linear system of the following form :

$$\begin{cases} A_h U_h + B_h P_h = F_h \\ B_h^T U_h = 0 \end{cases}$$

where  $U_h$  and  $P_h$  are the discrete velocity and pression unknowns. The Uzawa method is based upon writing this system only with the pressure unknown  $P_h$ . If we set :

$$U_h = A_h^{-1}[F_h - B_h P_h]$$

the modified system may be written in the following form :

$$M_h P_p = B_h^T A_h^{-1} F_h$$

The matrix  $M_h = B_h^T A_h^{-1} B_h$  is called the Schur complement and is symmetric positive definite and well conditioned and thus may be used as a preconditioner. The linear system is then solved using a SSOR-preconditioned CG method. For more informations, see [131] and [133].

#### 3.5.1.2 LGNSI2FS

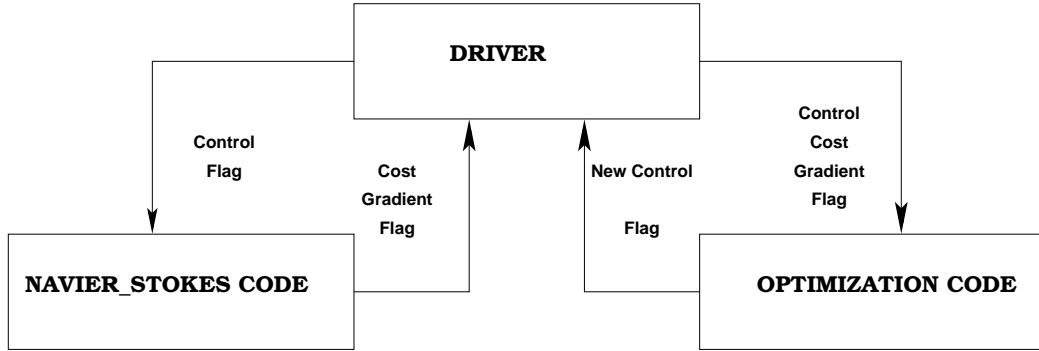
LGNSI2FS is a 2D Lagrange-Galerkin code we developed during our PhD. It includes the main features of NSI3 such as P1-Bubble/P1 mixed formulation, Lagrange-Galerkin method with adaptative backtracking methods and also fluid-structure algorithms. However the subcycling backtracking method is also implemented and the linear system is solved using a standard GMRES method based upon the Sparsekit library developed by Y. Saad<sup>33</sup> with an ILUT preconditioner. The ILUT preconditionner is an Incomplete LU factorisation with a dropping strategy. This means that, when assembling the ILU matrix used as a preconditioner, elements under a given drop tolerance are ignored. The complete description of this preconditioning algorithm may be found in [138].

### 3.5.2 Optimization routines

As described in section 3.2, we use gradient based methods in order to solve the minimization problem (4.3). There exists a huge amount of research studies concerning the

---

<sup>33</sup>. <http://www.cs.umn.edu/research/arpa/SPARSKIT/sparskit.html>

FIG. 3.5 – *Optimization tool structure*

development of efficient optimization algorithms and routines [126, 16]. The major effort is to build optimization tools that can be used by any one without deep knowledge of the underlying optimization algorithms. These tools are very practical, since the parameter of the routines have been tuned to reach optimal efficiency, e.g globalization issue using line search is one of the hardest part to tune.

For these reasons, we chose to work with two optimization routines that have been benchmarked by the optimization community for academic and practical applications. We have used the following routines:

- The CGPLUS<sup>34</sup> routine based on the conjugate gradient method described in [70] with a very efficient line search procedure.
- The L-BFGS-B<sup>35</sup> routine which is based on a bound constraint quasi-Newton method with BFGS update rule described in [20, 158].

As described in Fig. 3.5, we only need to furnish the current control, the value of the cost function and its associated gradient for the optimization routines to perform. Hence we can easily change either the fluid solvers or the optimization solvers. As a consequence, we have at our disposal an evolutive tool that can be easily updated in the future.

### 3.5.3 Parallel direct mode strategy

As stated before, we chose to compute the cost-function gradient using the linearized state computation using the linearized discrete Navier-Stokes system described in section 3.4. This means that the number of linearized systems to solve is equal to the cardinal of the control space. This drawback is balanced by the fact that the linearized system can be advanced forward in time with the nonlinear state computation (see Remark 3.8).

We took advantage of this situation by adopting a parallel computation of the linearized state  $(z_h, q_h)$ . It means that we need to spawn  $N_c$  linearized state computations corresponding to the  $N_c$  directions of the control state space. For each spawned task, we compute sequentially the non-linear state and the linearized state for every time step (see Fig. 3.6). This avoids local storage of the characteristic feet and local vertices involved

34. <http://www-neos.mcs.anl.gov/neos/solvers/UCO:CGPLUS/>

35. <http://www-neos.mcs.anl.gov/neos/solvers/BCO:L-BFGS-B/>

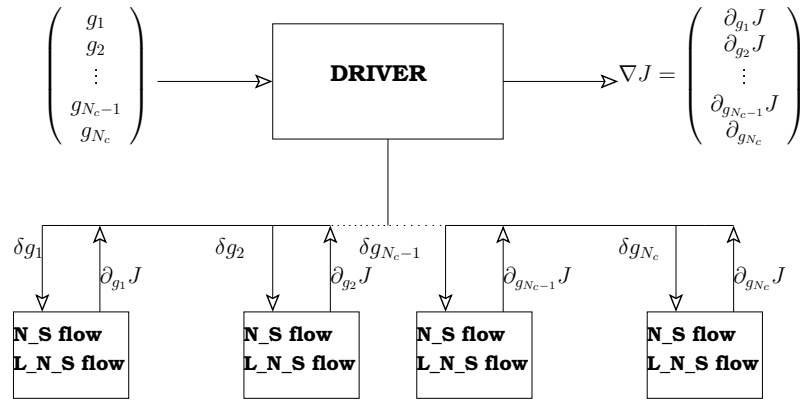


FIG. 3.6 – Parallel strategy for the gradient computation

in the characteristic backtracking procedure. This strategy is restricted by the number of processor at our disposal and is considered as a first step towards efficient strategy for the control of fluid systems. However, assuming we have  $N_c$  processors, the complexity of this approach is almost equal to the complexity of a non-linear and linearized flow joint computation.

## 3.6 Discrete gradient computation

In this section, we shall analyse the accuracy and consistency of the discrete gradient in some simple fluid flow configurations, namely the Poiseuille and the driven cavity flow. For both cases, we compare our discrete gradient to the differential quotient approximation of the gradient.

### 3.6.1 Case of Poiseuille flow

Let us first consider an open rectangular fluid domain, where we impose parabolic inflow boundary conditions, i.e  $(u,p)$  is solution of the following Navier-Stokes system,

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \Omega \\ u(\rho, x, t) = 4\rho(t)x(h-x)/h^2, & \Gamma_{in} \\ \sigma(u, p) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u(t=0) = 4\rho(0)x(1-x)/h^2, & \Omega \end{cases} \quad (3.62)$$

First let us assume, that  $\rho \in \mathbb{R}$  is constant. The solution of the above system is given by :

$$u(x, t) = 4\rho x(h-x)/h^2$$

We shall need in the sequel to compute the derivative of the state variable  $(u(\rho), p(\rho))$  with respect to  $\rho$ , it is given by the couple  $(z, q)$  solution of the following linearized Navier-

Stokes system,

$$\begin{cases} \partial_t z + \nabla u \cdot z + \nabla z \cdot u - \nu \Delta z + \nabla q = 0, & \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(z) = 0, & \Omega \times (0, T) \\ \sigma(z, q) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \times (0, T) \\ z = 4\delta\rho x(h-x)/h^2, & \Gamma_{in} \times (0, T) \\ z(t=0) = 4\delta\rho x(h-x)/h^2, & \Omega \end{cases} \quad (3.63)$$

Like the non-linear equation (3.62), an exact solution of (3.63) is available:

$$z(x, t) = 4\delta\rho x(h-x)/h^2$$

### 3.6.1.1 Flow tracking control problem

We would like to minimize the following optimization problem,

$$J(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_{out}} |u(\rho) - u_d|^2 \, d\Gamma dt \quad (3.64)$$

where  $u_d$  is a known velocity field. We can choose, for instance,  $u_d = 4\rho_d x(h-x)/h^2$  for a simple tracking optimization. Then, because of the extremely simple shape of the solution, it is possible to compute exactly  $J(\rho)$ :

$$\begin{aligned} J(\rho) &= \frac{8T}{h^4} (\rho - \rho_d)^2 \int_0^h (x(h-x))^2 \, dx \\ &= \frac{4T}{15} h (\rho - \rho_d)^2 \end{aligned}$$

In order to apply the conjugate gradient algorithm described in the previous section, we need to compute the derivative of  $J(\rho)$  with respect to  $\rho$ ,

$$(\nabla J(\rho), \delta\rho) = \int_0^T \int_{\Gamma_{out}} (u(\rho) - u_d) z(\delta\rho) \, d\Gamma dt$$

where  $(z(\delta\rho), q(\delta\rho))$  are solutions of the linearized Navier-Stokes system (3.63), whose solution is given by:

$$z(x, t) = 4\delta\rho x(h-x)/h^2$$

and we have,

$$(\nabla J(\rho), \delta\rho) = \frac{8T}{15} h (\rho - \rho_d) \cdot \delta\rho$$

We may compare, such an expression with the one computed using the linearized flow  $(z, q)$  and the one obtained by using finite difference, i.e

$$DJ(\rho, \delta\rho) = \frac{J(\rho + \delta\rho) - J(\rho)}{\delta\rho}$$

Since  $J$  is twice differentiable with respect to  $\rho$  and  $\nabla^2 J(\rho) = \frac{8T}{15} h$ , we may expect that,

$$DJ(\rho, \delta\rho) - \nabla J(\rho) = \frac{4T}{15} h \delta\rho \quad (3.65)$$

Using this equation, we can now check accuracy and consistency of the discrete cost function gradient.



### 3.6.1.2 Derivative checking: the intersection algorithm case

**Test setup** We first use the NSI3 code to compute the Poiseuille flow and its associated linearized flow. The 2D computational domain is represented in Fig. 3.7. The final computation domain is an elevation of this 2D domain with an elevation parameter of 0.1 in depth. The discretisation was performed using  $\Delta x = 1/40$ ,  $\Delta y = 1/40$  and  $\Delta z = 0.1$ . The overall scheme was integrated over a period of 10 seconds.

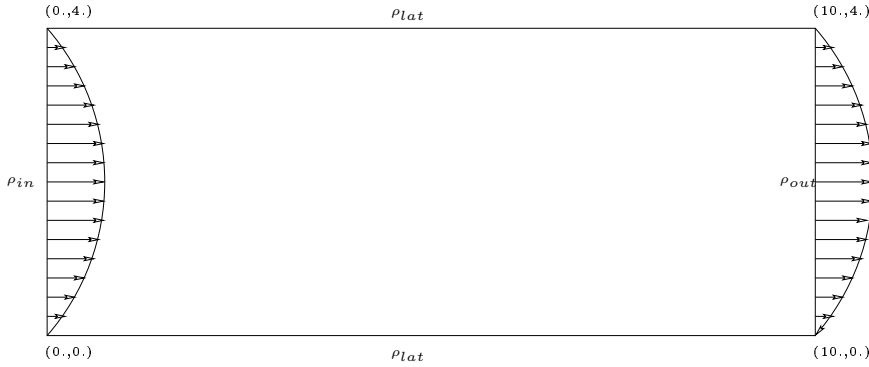


FIG. 3.7 – Poiseuille Flow domain

**Test results** We set here  $\rho_d = 0$ ,  $\rho = 1$ , and we compare the discrete gradient obtained by the linearized state computation with the finite difference gradient for different perturbation steps. Results are given by Fig. 3.8. Up to  $\delta\rho = 10^{-6}$ , the linearized gradient

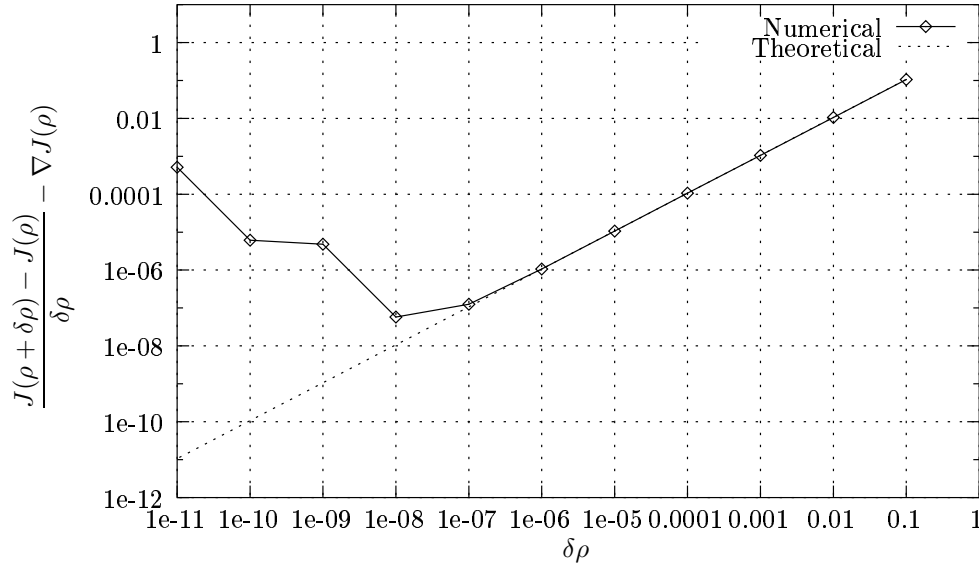


FIG. 3.8 – First order convergence of the finite difference gradient for the Poiseuille Flow

is consistent with the finite difference gradient. It shows that we are indeed solving the exact linearization of the discrete Navier-Stokes system, which guarantees a consistent

First Order LG NSI3 code		
Time Step	Cost	Lin. Cost
0.10	10.6595	21.1319
0.05	10.6595	21.1319

TAB. 3.1 – Cost and cost function for the first Lagrange-Galerkin method using the NSI3 code

approximation of the cost function gradient. Furthermore, we recover the linear decrease of the consistency error  $DJ(\rho, \delta\rho)$  with respect to  $\delta\rho$  up to  $\delta\rho = 10^{-6}$  with the correct slope  $\frac{4T}{15}h$ .

Below the perturbation level  $\delta\rho = 10^{-6}$ , finite precision computations produce larger gradient finite difference approximations. These quantities are no more relevant for the approximation of the cost function gradient. Table 3.1 represents the cost function and its gradient for two time steps using the NSI3 code with first order LG using adaptative backtracking :

- The time steps seems irrelevant as far as the costs functions are concerned. This is not surprising since the Poiseuille flow is a stationary flow, but this proves that the characteristics path as well as the linearized state are well computed. In fact, the cost function and its gradient are constant up to  $1e-13$ , which is almost the machine precision in double precision.
- The second remark is that the cost function and its gradient are very well approximated by our code. More precisely, we have :

$$\frac{\nabla J_h^{dt} - \nabla J_{theo}}{\nabla J_{theo}} = 6.0 \times 10^{-5}$$

This means that we may use the linearized gradient as an approximation of the cost function gradient inside an optimization procedure.

### 3.6.1.3 Simple control test case

Now, we try to track a given parabolic profile at the outflow boundary, i.e with  $u_d = 16\rho_d x(h-x)/h^2$  with  $\rho_d = 5$ . This can be done by minimizing the tracking functional introduced previously. We use the conjugate gradient method with the starting point  $\rho^0 = 2$  and an input flow  $u = 16\rho x(h-x)/h^2$ . Convergence was reached after 10 iterations as shown in Fig. 3.9 and Fig. 3.10. We found the optimization process very robust with respect to the starting point value. This means that the functional is strongly convex and has a unique optimum.

### 3.6.1.4 derivative checking: case of the subcycling backtracking procedure

We shall perform similar tests using our 2D test code with first and second order characteristics coupled with the subcycling backtracking algorithm. Table 3.2 and fig. 3.11 gives the result given by the 2D code. As for the NSI3 code, the finite difference gradient

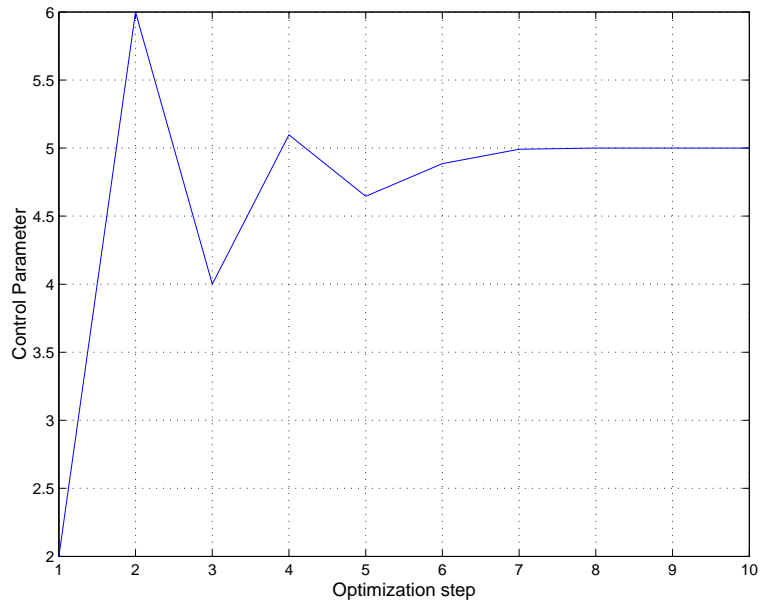


FIG. 3.9 – Optimization process for the Poiseuille flow.

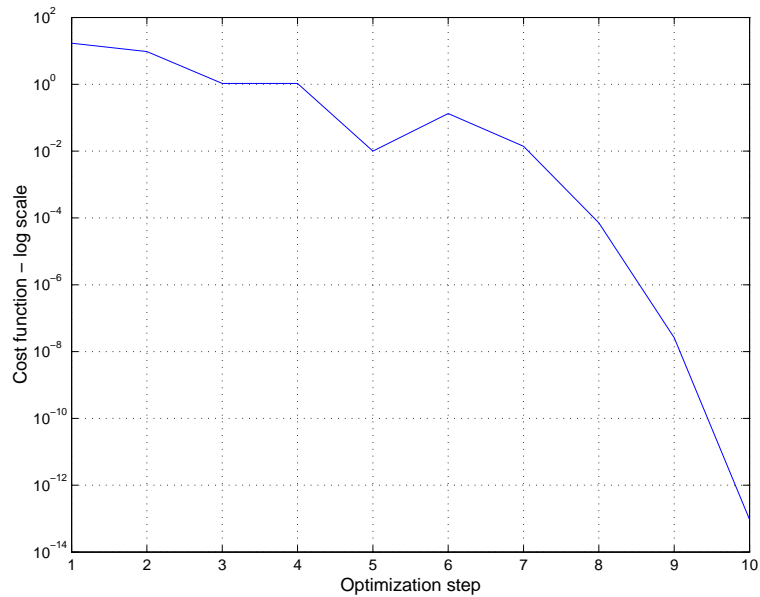


FIG. 3.10 – Tracking cost function decrease for the Poiseuille flow.

subcycling backtracking algorithm		
Order	Cost	Lin. Cost
1	10.6522950	21.3045918
2	10.6522943	21.3045887

Exact cost functions	
Cost	Lin. Cost
10.6666666	21.3333333

TAB. 3.2 – Cost function and its gradient for the first and second order Lagrange-Galerkin methods

behaves as expected, matching the theoretical slope accurately, but this time numerical errors appear for  $\delta\rho < 10^{-5}$ .

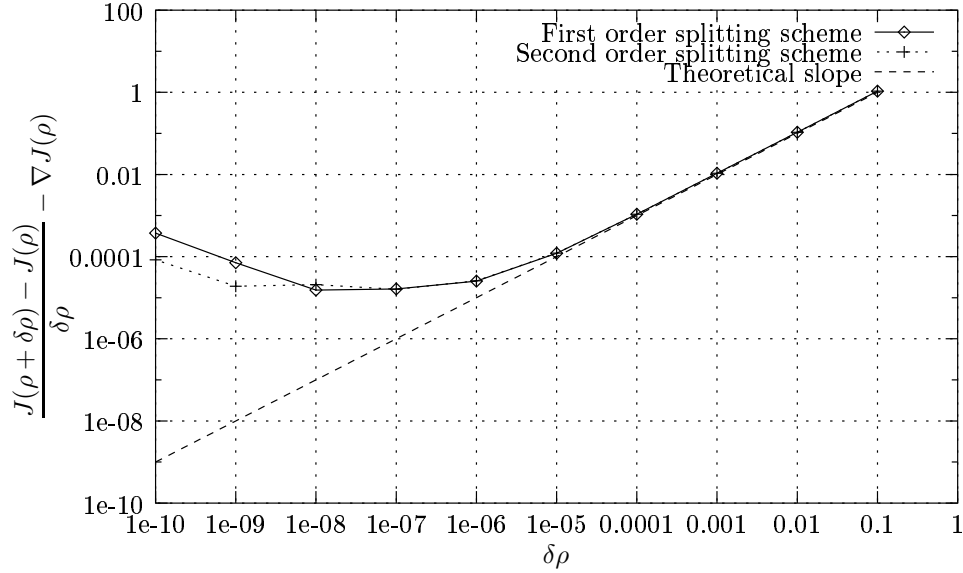


FIG. 3.11 – First and second order subcycling backtrackings scheme gradient checking with the theoretical slope for the Poiseuille flow

### 3.6.2 The driven cavity

#### 3.6.2.1 Definition of the problem

Let  $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,0.1]$  be the computational domain and  $\Omega_h$  an associated triangulation. We are interested in solving the following problem,

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega \times (0,T) \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \Omega \times (0,T) \\ u(.,t) = \rho(t)x(1-x), & \Gamma_1 \times (0,T) \\ u(.,t) = 0. & \Gamma_2 \times (0,T) \end{cases} \quad (3.66)$$

with  $\Gamma_1 = (x,y = 1,z)$ ,  $\Gamma_2 = \partial\Omega - \Gamma_1$ . In order to accelerated convergence,  $(u_0, p_0) = (u(t=0), p(t=0))$  are initialized with the solution of the corresponding Stokes flow :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_0 + \nabla p_0 = 0, & \Omega \times (0,T) \\ \operatorname{div}(u_0) = 0, & \Omega \times (0,T) \\ u(.,t=0) = \rho x(1-x), & \Gamma_1 \times (0,T) \\ u(.,t=0) = 0, & \Gamma_1 \times (0,T) \end{cases} \quad (3.67)$$

This time, the cost function will be defined as follow :

$$J(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u(\rho)|^2 d\Omega dt \quad (3.68)$$

which is the integral of the kinetic energy over  $[0,T]$ . The derivative of  $J(\rho)$  follows :

$$(\nabla J(\rho), \delta\rho) = \int_0^T \int_{\Omega} u(\rho) z(\delta\rho) d\Omega dt \quad (3.69)$$

#### 3.6.2.2 Non-differentiability illustration for the adaptative backtracking scheme

In this paragraph, we perform the gradient consistency test for the cavity flow with the code NSI3. As a matter of fact, this test shed some light on the non-differentiability of the characteristic method while using an adaptative backtracking scheme coupled with low order finite elements. Indeed as shown in Fig. 3.12, for the time steps  $dt \in [0.01, 0.1]$ , the quantity

$$D_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\nabla J_h^{dt} - D J_h^{dt})}{D J_h^{dt}}$$

does not converge to 0 as the finite difference step  $\delta\rho$  goes to 0. Actually, it has a non zero asymptotic limit that decrease while decreasing the time step. For large time steps, the characteristic paths intersect increasing numbers of tetrahedra edges. Since we need to evaluate the discontinuous gradient of the reference flow  $u_h^n$  at each of the intersection points, this creates numerical errors that grow with time and with the number of characteristic paths. Decreasing the time step has the effect of reducing the number of intersection with tetrahedra edges, resulting in lower asymptotic limit of the gradient residual  $D_g$ . However for a time step  $dt = 0.01$ , this asymptotic limit is of order  $10^{-4}$  which is

still unsatisfactory to validate the discrete gradient. Hence, we have shown that the NSI3 linearized code has poor numerical properties and it was predicted by the theory. In the sequel, we shall use our 2D research code and avoid the use of the adaptative backtracking scheme.

### 3.6.2.3 Discrete gradient consistency using the subcycling backtracking algorithm

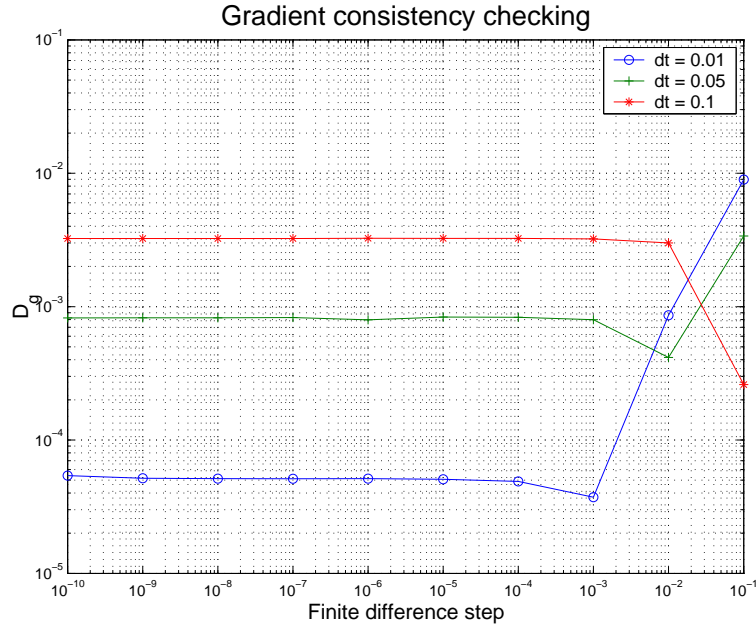


FIG. 3.12 – First order Lagrange-Galerkin scheme applied to the driven cavity flow - Gradient consistency checking with NSI3

**Numerical settings** Let now  $\Omega_h$  be a regular triangulation of  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  with  $\Delta x = \Delta y = 1/40$ . The right hand side was computed using a 7 points Gauss quadrature. We choose to compute the solution of (3.66) over a period of 20s, thus reaching steady state. The characteristics path is computed using the subcycling backtracking algorithm, with a splitting parameter  $l_{split} = 10$ .

**Remark 3.15** The splitting parameter  $l_{split}$  was chosen a priori. Problems regarding the choice of this parameter will be discussed later.

**Derivative consistency** The procedure for checking the derivative consistency is basically the same as the one used for the Poiseuille flow. Here, we chose to compute the linearized gradient with  $\Delta t = 0.05$  over 400 iterations. Fig. 3.13 gives the first order convergence of the finite element gradient for both first order and second order scheme. We can see that both first and second order schemes globally perform the same way. However, for  $\delta\rho \geq 10^{-5}$ , the first order finite difference derivative gives a better approximation

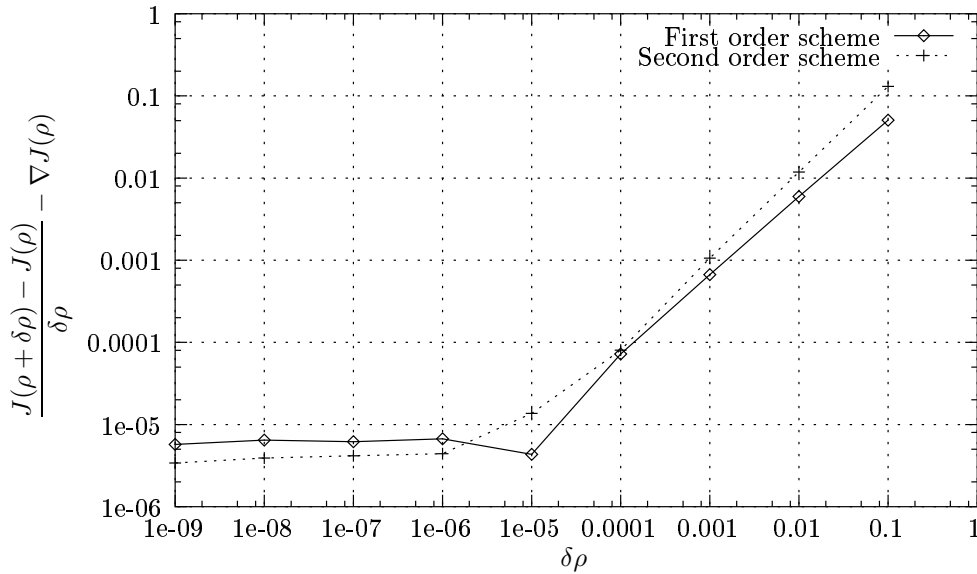


FIG. 3.13 – First order and second order Lagrange-Galerkin scheme applied to the driven cavity flow - Gradient checking

Cost	Cost Grad.	Tot. Calc. Time	Char. Calc. Time
1.018	2.155	30421	7701

TAB. 3.3 – Reference solution : first order LG scheme  $\Delta t = 0.001$

of the derivative than its second order counterpart. Then, for  $\delta\rho \leq 10^{-5}$ , both schemes give constant result with a better approximation for the second order scheme. Computing the relative errors between the finite difference gradient and the linearized state gradient we get

$$\frac{\nabla J_h^{dt} - D J_h^{dt}}{D J_h^{dt}} = 1.16 \times 10^{-5}$$

for the first order and

$$\frac{\nabla J_h^{dt} - D J_h^{dt}}{D J_h^{dt}} = 2.1 \times 10^{-6}$$

for the second order, from which we may conclude that the discrete gradient is fairly well computed. Table 3.4 gives the cost function value and its gradient value for both order with  $\rho = 1$ , and the overall and characteristics path time computation. The second order scheme produces a better approximation of the gradient compared to the first order scheme. This may be explained by the relatively large time step used for both schemes:  $\delta\rho$ , when small enough, fails to influence the topology of the fluid because of the numerical dissipation induced by the choice of large time steps. But, whereas this is not a surprise for the first order scheme, the second order scheme should be less diffusive. We suggest three reasons that could explain this fact :

- The numerical errors do not allow to reach a good agreement with the discretized gradient for  $\delta\rho$  less than  $10^{-6}$ . This was already observed for the Poiseuille flow.

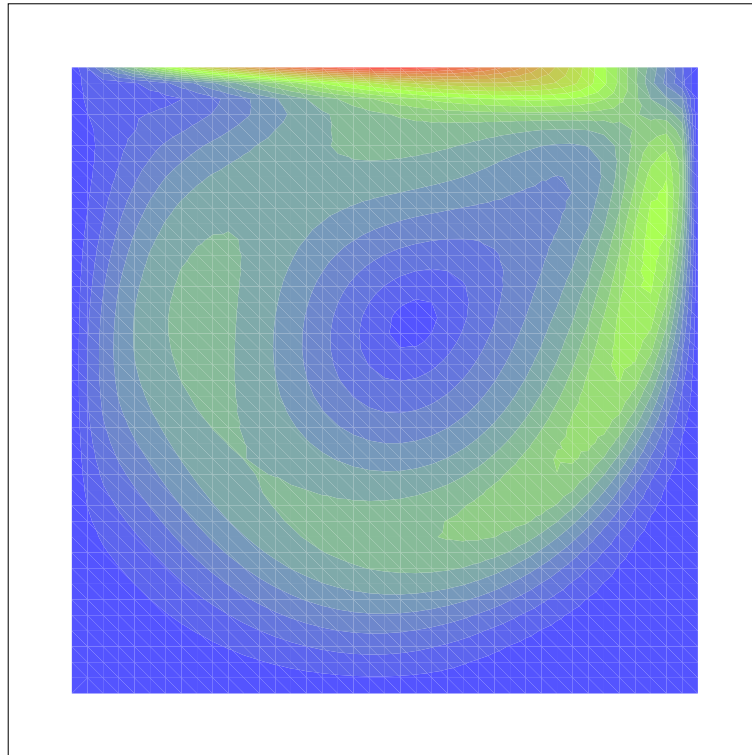


FIG. 3.14 –  $l_2$  norm of the driven cavity at steady state

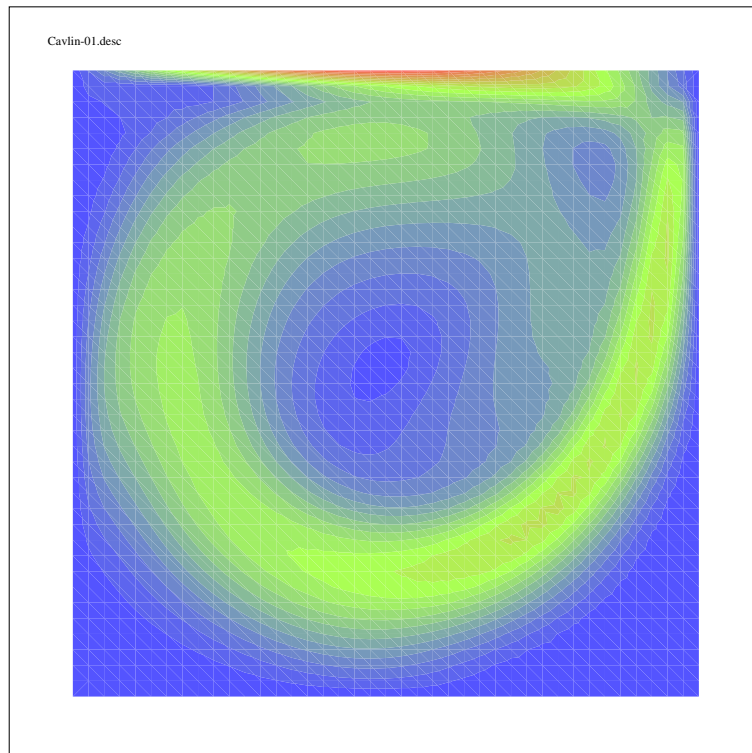


FIG. 3.15 –  $l_2$  norm of the linearized driven cavity at steady state



Order	Cost	Cost grad.	Tot. Calc. Time	Char. Calc. Time
1	0.859	1.604	959	351
2	1.013	2.168	1508	765

TAB. 3.4 – First and second order LG schemes comparison with  $\rho = 1$  and  $\Delta t = 0.05$

First Order LG		
Time Step	Cost	Cost grad.
0.2	0.648	1.028
0.1	0.766	1.313
0.05	0.859	1.604
0.01	1.026	2.091
Second Order LG		
Time Step	Cost	Cost grad.
0.2	1.011	2.010
0.1	1.043	2.204
0.05	1.013	2.168
0.01	1.152	2.601

TAB. 3.5 – Cost function and cost function gradient for the first and second order Lagrange-Galerkin method

Thus, the second order scheme cannot achieve full performance.

- The derivative consistency was performed according to both first order and second order derivative cost function. This means that the first order (resp. second order) finite difference derivative is compared to the linearized derivative computed with the first order (resp. second order) scheme.
- For this test, the characteristic path computation was performed using the sub-cycling backtracking strategy. Unlike the adaptative backtracking, this algorithm requires that we provide a splitting parameter to our code. Unfortunately, the optimal parameter cannot be computed a priori and it may be easily under or overestimated.

We shall now develop the two last points.

**First and second order comparison** The table 3.5 gives the cost and cost function gradient for both first and second order LG schemes with several time steps. If we consider the first order LG scheme with  $\Delta t = 0.001$  (Tab. 3.3) as our reference solution, several facts may be outlined :

- The first order Lagrange-Galerkin scheme seems to converge towards a limit as the time steps tends toward zero and therefore seems consistent in time.
- The second order Lagrange-Galerkin with  $\Delta t = 0.2$  cost function and cost function gradient are already a very good approximation since it almost matches the reference first order LG scheme values.

- As  $\Delta t$  tends toward zero, the second order LG scheme behaves erratically.

The first explanation concerning the last point is that for the second order scheme, in some time steps range, the characteristic feet reach the edges of some mesh elements, as the number of substeps is doubled compared to the first order scheme. However, this is unlikely, since the cost function is also subjected to an irregular behavior. The second explanation is based upon the conditional stability of the LG scheme. As stated before, when inexact integration of the right hand side is used, the Lagrange-Galerkin scheme suffers from unconditional instabilities for some specific CFL numbers range (see [120] for instance). As a result, for this range of CFL numbers, oscillations may appear and produce numerical pollution inside the computation of the cost function and its gradient. Finally, it is commonly admitted that the LG scheme is not efficient when using small time steps (see [18]) since numerical errors appear when the characteristics path is too short. This may explain the large values of the cost functions obtained for the second order LG scheme with  $\Delta t = 0.01$ . Since we are using the subcycling backtracking method in order to compute the characteristics path, the latter issue is crucial. The lack of a priori rule concerning the value of the splitting parameter leads us to perform a parameter sensitivity analysis in the next paragraph.

#### 3.6.2.4 Influence of the splitting parameter

**Problem statement** As stated before, the algorithm used to compute both the steady state flow and the linearized flow was the subcycling backtracking method. This method, however more accurate than the initial method for large time steps, requires a splitting parameter which cannot be deduced a priori and may be easily under or over-estimated. If the splitting parameter is under-estimated, the characteristics path tracking procedure can produce a large number of cells jump at once, increasing by the way the diffusivity of the scheme.

On the other hand, over-estimating this parameter will drastically increase the characteristics time computation as well as numerical errors, since a characteristic speed needs to be interpolated at every sub step of the scheme. Whatsmore, large splitting parameters may also increase the probability to reach a mesh element boundary, thus ruining derivability since we are using a  $\mathbb{P}_1$  finite element method.

**Splitting parameter efficiency** In order to illustrate the difficulties described above, we decide to check the gradient consistency using various splitting parameters. Fig. 3.16 and Tab. 3.7 give the gradient consistency graph and the computation time for the second order Lagrange-Galerkin method with  $\Delta t = 0.2$  using various splitting parameters.

From Tab. 3.6 and Fig. 3.16, we can see that setting  $l_{\text{split}} = 5$  gives the worst results, specially for  $10^{-6} \leq \delta\rho \leq 10^{-3}$ . On the contrary,  $l_{\text{split}} = 20$  and  $l_{\text{split}} = 30$  furnish similar values, slightly less accurate than the reference splitting parameter  $l_{\text{split}} = 10$  for small  $\delta\rho$  but show a significantly better behavior for  $\delta\rho > 10^{-4}$ .

Finally, our reference splitting parameter is clearly inaccurate for  $\delta\rho > 10^{-3}$  but performs better below this value. Another side effect of increasing the splitting parameter is that it will automatically increase the computation time. If we look at Tab. 3.7, we clearly see

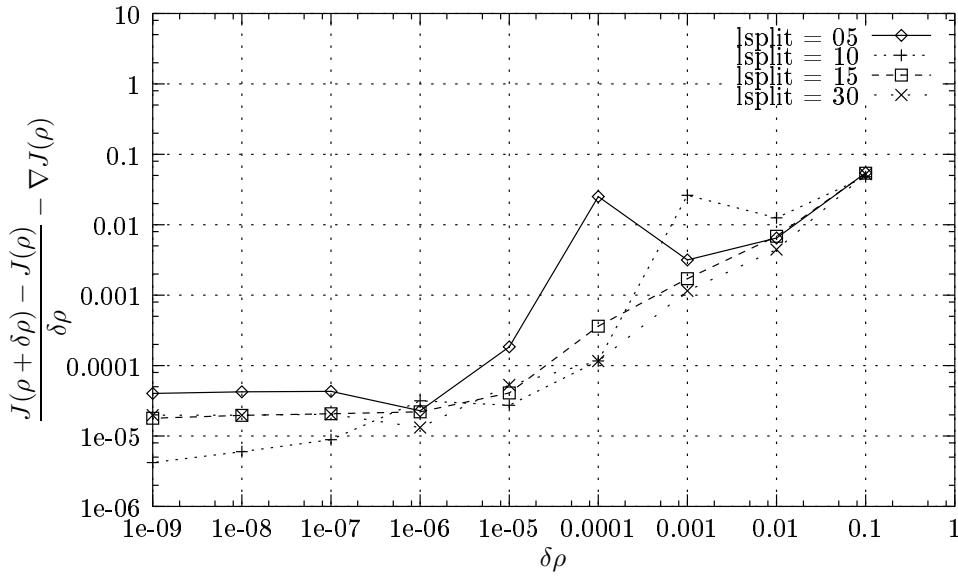


FIG. 3.16 – Splitting parameter efficiency for the second order LG scheme with  $\Delta t = 0.2$

Second Order LG		
$l_{\text{split}}$	Cost	Cost grad.
5	1.012	2.017
10	1.011	2.010
20	1.010	2.003
30	1.010	2.003

TAB. 3.6 – Cost function and its gradient for the second order Lagrange-Galerkin method with various splitting parameters

Second Order LG				
$l_{\text{split}}$	Tot. Time	Char. Time	%	Res. Time
5	200	89	44	90
10	300	156	52	91
20	360	246	68	89
30	459	347	75	90

TAB. 3.7 – Computation time for the second order LG scheme with various splitting parameters ( $\Delta t = 0.2$ )

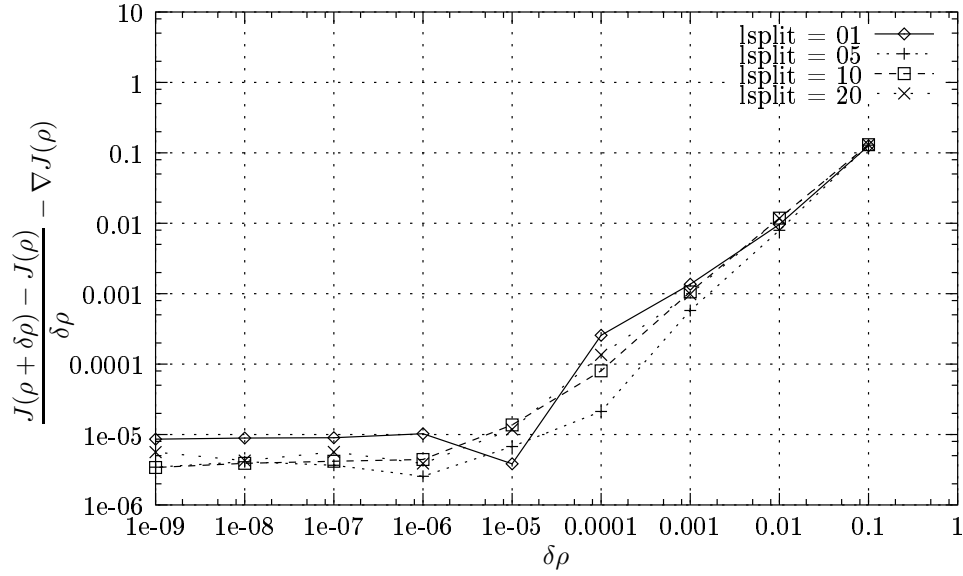


FIG. 3.17 – Splitting parameter efficiency for the second order LG scheme with  $\Delta t = 0.05$

Second Order LG		
$l_{\text{split}}$	Cost	Cost grad.
01	1.015	2.192
05	1.013	2.171
10	1.013	2.168
20	1.014	2.169

TAB. 3.8 – Cost function and its gradient for the second order Lagrange-Galerkin method with various splitting parameters ( $\Delta t = 0.05$ )

Second Order LG		
$l_{\text{split}}$	Cost	Cost grad.
10	1.152	2.601
01	1.153	2.603

TAB. 3.9 – Cost function and its gradient for the second order Lagrange-Galerkin scheme with  $\Delta t = 0.01$

the influence of a large splitting parameter over the overall computation time: while the resolution time remains the same, for  $l_{\text{split}} > 20$  the characteristics path computation represents up to 75% of the total computation time, making the whole computation more than twice as expensive as  $l_{\text{split}} = 5$  case. Hence, large spitting parameters should not be considered, at least for this time step. In Fig. 3.17, we ran the same test with a time step set to 0.05 and with various splitting parameter values. The cost function values are given in Tab. 3.8. As before, we can see that there seems to be an optimal value for  $l_{\text{split}}$ . But this time, as the time step is smaller, this optimal parameter seems to be close to 10: the costs values are almost identical for  $l_{\text{split}} = 10$  and  $l_{\text{split}} = 20$ . Another obvious remark is that the case with no splitting does not produce good approximations since the cost function values are obviously too large for this range of time steps.

**Conclusion** As a partial conclusion, we shall point out the following remarks,

- The subcycling backtracking method behaves well for the computation of the linearized state for the driven cavity. This is a good point since this flow features some non-linear aspects that the Poiseuille flow configuration does not take into account.
- The subcycling backtracking method requires an optimal splitting parameter. Unfortunately this parameter can not be determined a priori.
- the second order LG scheme is significantly a better approximation than the first order scheme for large time steps.

### 3.6.2.5 Second order LG scheme and integration rule

**Motivations** In Tab. 3.5, we saw that, for  $\Delta t = 0.01$ , the second order Lagrange-Galerkin scheme produces abnormal cost functions and gradients. But for all these tests, as we stated before, the computation was performed with a constant splitting parameter of 10. Of course, as we just stated in the latter paragraph, such a splitting parameter for such a small time step is likely to introduce numerical instabilities. Hence, we decided to perform the same test but with a splitting parameter  $l_{\text{Split}} = 1$ . the result is displayed in Tab. 3.9. There is no difference between the two tests, the cost function and its gradient being equal up to  $10^{-3}$ . Since obviously the problem is not the splitting parameter, the quadrature rule should be the cause, as stated in the paragraph 3.6.2.3.

**Integration rule influence** The basic idea of the characteristics method is to turn the non-linear term  $\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$  operator expressed in Eulerian coordinates into a Lagran-

First Order LG		
Gauss points	Cost	Cost grad.
07 pts	1.039	2.135
12 pts	1.004	2.005
Second Order LG		
Gauss points	Cost	Cost grad
07 pts	1.153	2.603
12 pts	1.062	2.133

TAB. 3.10 – Cost and cost function gradient for the second order Lagrange-Galerkin scheme with  $\Delta t = 0.01$  for both 7 and 12 points quadrature

first Order LG			
Gauss points	Tot. time	Char. time	%
07 pts	2959	1455	32
12 pts	5236	2610	50
Second Order LG			
Gauss points	Tot. time	Char. time	%
07 pts	5251	2847	54
12 pts	7477	5094	68

TAB. 3.11 – Computation time for the first and second order Lagrange-Galerkin scheme with  $\Delta t = 0.01$  for both 7 and 12 points quadrature

gian particular derivative  $\frac{d}{dt}$ . But this is possible only along the characteristics curves, defined by (3.10). Subsequently, when integrating the LG scheme over the time step  $\Delta t$ , one must provide the foot of the characteristics in order to integrate the right hand side. Unfortunately, this foot does not belong, in general, to the discrete space and therefore must be interpolated. This whole procedure results in an inexact integration of the right hand side by a quadrature integration rule, and the unconditional stability is lost. Even worse, ranges of time steps appear where the scheme is unstable, especially when the time step is small. But as stated in [120] and [60], increasing the number of integration points reduces these instabilities. So far, the integration rule we used was a 7-point Gauss rule. Let us now consider the same test, but with a 12-point Gauss rule. Tab. 3.10 gives the cost function and its gradient for  $\Delta t = 0.01$ . The splitting parameter was set to  $l_{split} = 1$ .

Clearly, the use of a more accurate integration quadrature reduces the instabilities of the second order Lagrange-Galerkin in conjunction with small time steps. However, the counterpart is an increase of the computation time as displayed in Tab. 3.11: the characteristics computation time is almost doubled for both first and second order algorithm.

Nevertheless, when a 12 Gauss point integration is used, the cost values seem to be more within the range of each LG scheme order. We can therefore conclude that the more Gauss point you use, the better the approximation is. This may not be entirely true since rising

the number of integration points also increases the number of characteristics paths to be computed, hence rising the odds to reach the edge of an element where the NS equations are not derivable for  $\mathbb{P}_1$  finite element class.

**Conclusion** For that reason, we may conclude as follow :

- The second order LG scheme is very unstable when small time steps are used.
- Making the second order scheme stable requires that we use more Gauss point for the right hand side integration, making the overall algorithm very expensive.
- The first order LG scheme is less unstable than the second order scheme for small time steps.
- For small time steps, both first order and second order schemes when stabilized perform almost the same way.

## 3.7 Drag reduction around a rotating cylinder

In this section, we shall apply our optimal control strategy in order to reduce the drag induced by a fluid flow around a rotating cylinder. The control parameter is the angular velocity of the cylinder that will be considered either constant or time-dependent. This problem has been investigated previously by many authors, on the experimental and numerical point of view, we refer to [81] and [88] for a complete review on this subject. Our goal is not to improve earlier results, but try to validate our optimization strategy based on the Lagrange-Galerkin scheme for the Navier-Stokes system and a quasi-Newtonian method for the optimization procedure.

### 3.7.1 Control problem setting

We consider an incompressible Navier-Stokes flow around a circular cylinder of radius  $a = 0.5$  (see Fig. 3.18). The fluid is assumed to be a viscous incompressible newtonian fluid. Its evolution is described by its velocity  $u$  and its pressure  $p$ . The couple  $(u, p)$  satisfies the classical Navier-Stokes equations written in non-conservative form :

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \Omega \times (0, T) \\ u = g, & \Gamma_{cyl} \times (0, T) \\ \sigma(u, p) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \times (0, T) \\ u = u_\infty, & \Gamma_{in} \times (0, T) \\ u(t = 0) = u_0, & \Omega \end{cases} \quad (3.70)$$

where  $\nu$  stands for the kinematic viscosity and  $u_\infty$  is the farfield velocity field. The quantity  $\sigma(u, p) = -pI + \nu(\nabla u + \nabla^T u)$  stands for the fluid stress tensor inside  $\Omega$ , with  $(\nabla u)_{ij} = \partial_j u_i = u_{i,j}$ .

We assume the velocity  $g$  to be tangent to the cylinder, we define the tangent vector to the cylinder,

$$\begin{cases} \tau_1(x, y) = -y, \\ \tau_2(x, y) = x, \end{cases} \quad (3.71)$$

and we set  $g = \omega(t) \tau$  with  $\omega(t)$  stands for the amplitude of the angular velocity of the cylinder.

Hence the parameter of control is here  $\omega(\cdot) \in \mathcal{U}_c$ , where  $\mathcal{U}_c$  will be described later on.

We define the Reynolds number as follows,

$$Re = \frac{2a|u_\infty|}{\mu} \quad (3.72)$$

We set  $|u_\infty| = 1$  and  $\mu = \frac{1}{200}$ . Hence we are working with a Reynolds number  $Re = 200$ . The Strouhal number  $S_a$  is defined by

$$S_a = \frac{2af}{|u_\infty|} \quad (3.73)$$



where  $f$  stands for the frequency of the vortex shedding.

We would like to solve the following minimization problem :

$$\min_{\omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(u(\omega), p(\omega)) \quad (3.74)$$

where  $(u, p)$  satisfies the Navier-Stokes system and the cost function  $J(u, p)$  measures the mean square of the drag around the cylinder, i.e

$$J(u, p) = \int_0^T \left| \left( \int_{\Gamma_{Cyl}} \sigma(u, p) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 \right|^2 dt \quad (3.75)$$

In the sequel, we will choose different admissible control spaces  $\mathcal{U}_c$  of finite dimension.

### 3.7.2 Case of a single harmonic angular velocity

#### 3.7.2.1 Continuous optimal control

We set  $\omega(t) = \rho \cdot \sin(2\pi S_e t)$ . The quantities  $(\rho, S_e)$  stand for the forcing amplitude and frequency parameters. This means that we set,

$$\begin{cases} g_1(x, y, t) &= -\rho \cdot \sin(2\pi S_e t) y \\ g_2(x, y, t) &= \rho \cdot \sin(2\pi S_e t) x \end{cases} \quad (3.76)$$

We are interested in solving the following minimization problem,

$$\min_{(\rho, S_e) \in \mathbb{R}^2} j(\rho, S_e) \quad (3.77)$$

where

$$j(\rho, S_e) = J(u(\rho, S_e), p(\rho, S_e)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \left| \left( \int_{\Gamma_{Cyl}} \sigma(u(\rho, S_e), p(\rho, S_e)) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 \right|^2 dt \quad (3.78)$$

In order, to perform an optimization procedure as described in section (1), we need to compute the gradient of the cost function  $j(\rho, S_e)$  with respect to the design variables  $(\rho, S_e)$ . This gives,

$$\begin{aligned} &< \nabla j(\rho, S_e), (\delta\rho, \delta S_e) > \\ &= 2 \cdot \int_0^T \left[ \left( \int_{\Gamma_{Cyl}} \sigma((u, p)(\rho, S_e)) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 \right] \cdot \left[ \left( \int_{\Gamma_{Cyl}} \sigma((z, q)(\delta\rho, \delta S_e)) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 \right] \end{aligned}$$

where  $(z, q)(\delta\rho, \delta S_e) = \frac{Du}{D(\rho, S_e)}(\rho, S_e) \cdot (\delta\rho, \delta S_e)$  stands for the state derivative with respect to the parameters  $(\rho, S_e)$  in the perturbation direction  $(\delta\rho, \delta S_e)$  and is solution of the

following linearized system,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t z + \nabla u \cdot z + \nabla z \cdot u - \nu \Delta z + \nabla q = 0, & \Omega \\ \operatorname{div}(z) = 0, & \Omega \\ z = \begin{cases} \delta \rho \sin(2\pi S_c t) \tau \\ 2\pi \rho \delta S_e \cos(2\pi S_c t) \tau \end{cases}, & \Gamma_{cyl} \\ \sigma(z, q) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ z = 0, & \Gamma_{in} \\ z(t = 0) = 0, & \Omega \end{array} \right. \quad (3.79)$$

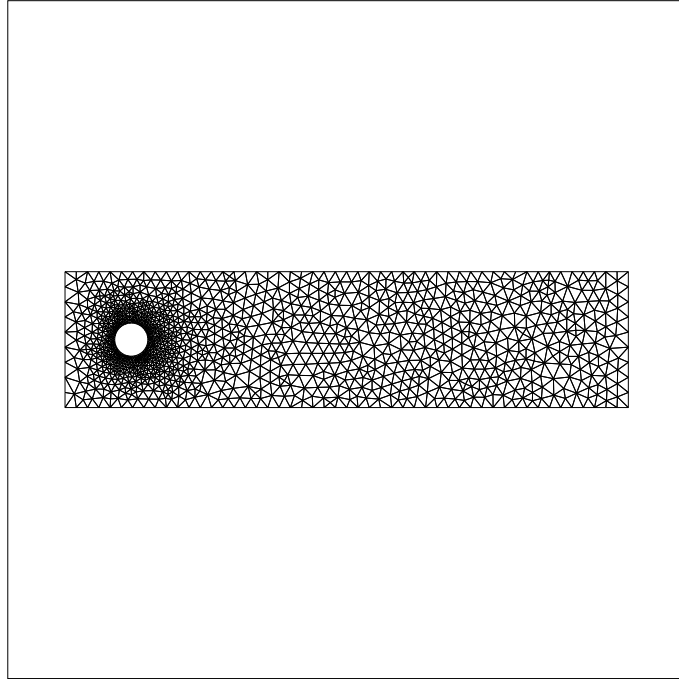


FIG. 3.18 – *Computational mesh around the cylinder*

### 3.7.2.2 Numerical experiments

At that point, we apply the numerical strategy described in section (3.4) with the parameters, in the following table

Time	Space
Characteristic of order 2	$(\mathbb{P}^1 \oplus \mathbb{P}^b(K))^2 \times \mathbb{P}^1$
$dt = 5 \cdot 10^{-2}$	$\text{meas}(K_h) \in [10^{-3}, 10^{-1}]$
7 Gauss points	1363 vertices 2560 triangles

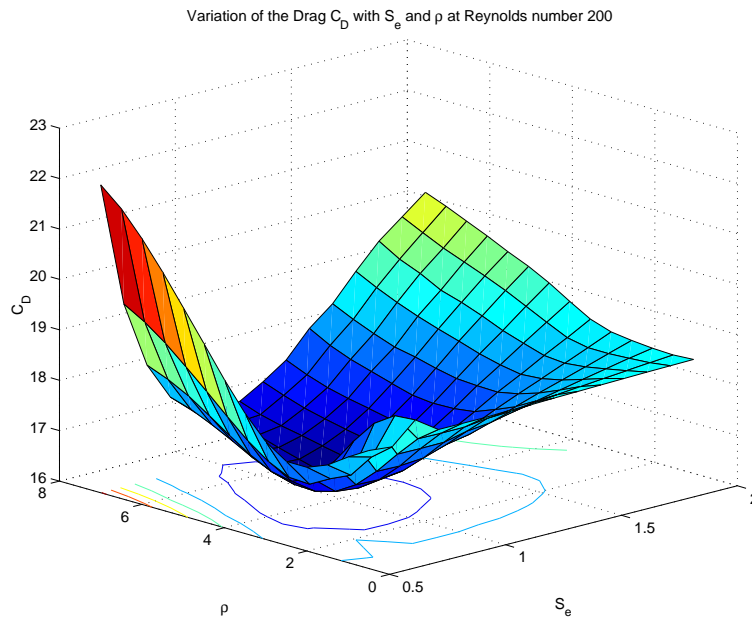


FIG. 3.19 – 3D contour plot of the cost function  $j(\rho, S_e)$

We have first performed a direct parameter analysis, in order to characterize the shape of the cost function and track some local optimum. The Fig. 3.19 and Fig. 3.20 show the contour plot of the cost function. It may be emphasized that the functional is apparently convex and coercive, since its shape is almost close to a parabola. This means, that the optimization procedure should fast converge to the optimum point, which seems to be unique, at least in the range of our direct sensitivity analysis.

We found by this simple approach a minimum value at point  $(\rho = 4, S_e = 0.9)$ . We call this point the direct optimal value. We have plotted in Fig. 3.21 and Fig. 3.22, the drag and the lift evolution for three different sets of parameters: the uncontrolled case parameters, the case of arbitrary parameters and the one for the direct optimal parameters.

We can see that our control affects efficiently the drag history, with a rapid decrease of the instantaneous drag value. On the contrary, the lift coefficient is much less perturbed by the rotation of the cylinder. Only its frequency is affected by the forcing rotation. This can be explained by the fact that the mean flow is horizontal and the rotation of the cylinder does not really perturb the transverse flow.

Near the direct optimal parameters, we started an optimization procedure using the quasi-Newton BFGS algorithm described in section 3.4. We found an optimal value at point

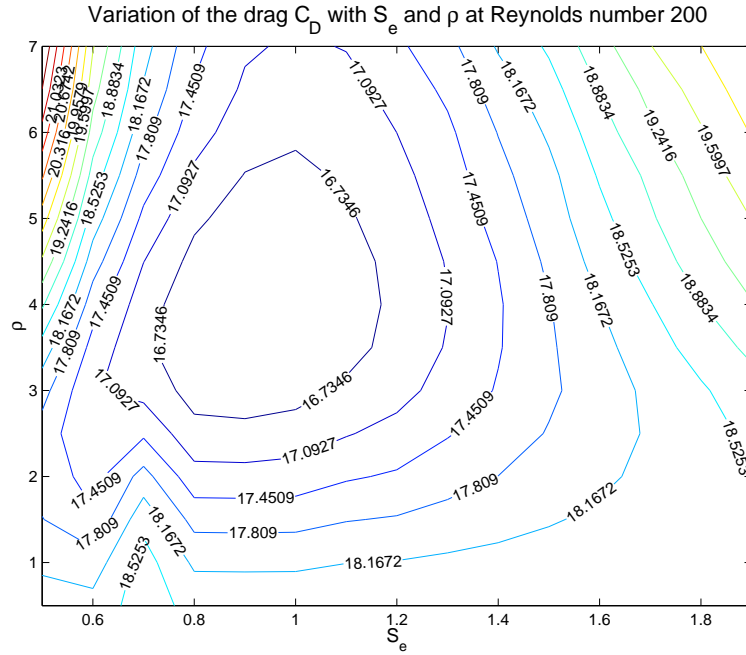


FIG. 3.20 – 2D contour plot of the cost function  $j(\rho, S_e)$

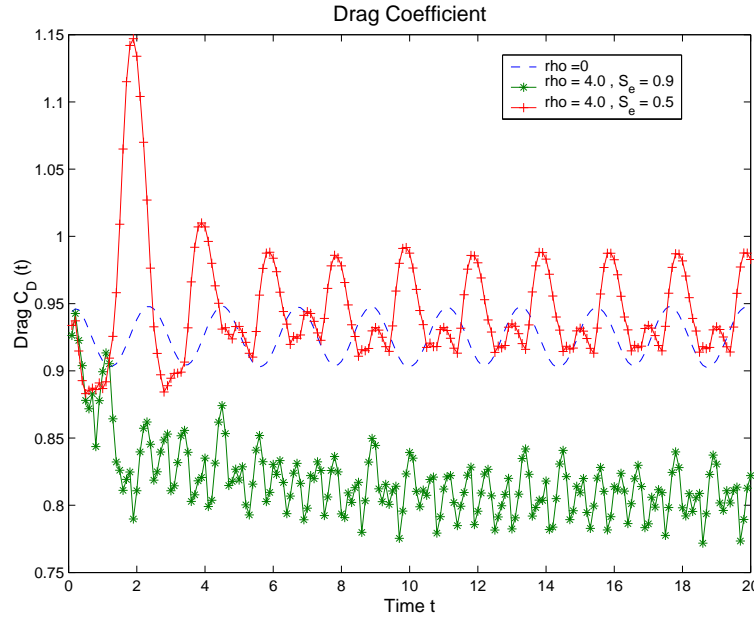


FIG. 3.21 – Drag evolution for different control parameters

( $\rho = 3.986, S_e = 0.942$ ) after 15 iterations with a small decrease of 0.15% compared to the direct optimal value. The overall drag reduction compared to the uncontrolled case represents 11.5% of the uncontrolled mean drag.

We have represented the flow topology for the uncontrolled case and the optimal controlled case at a given time  $t = 10$  in Fig. 3.23 and Fig. 3.24. We see that the control effect is

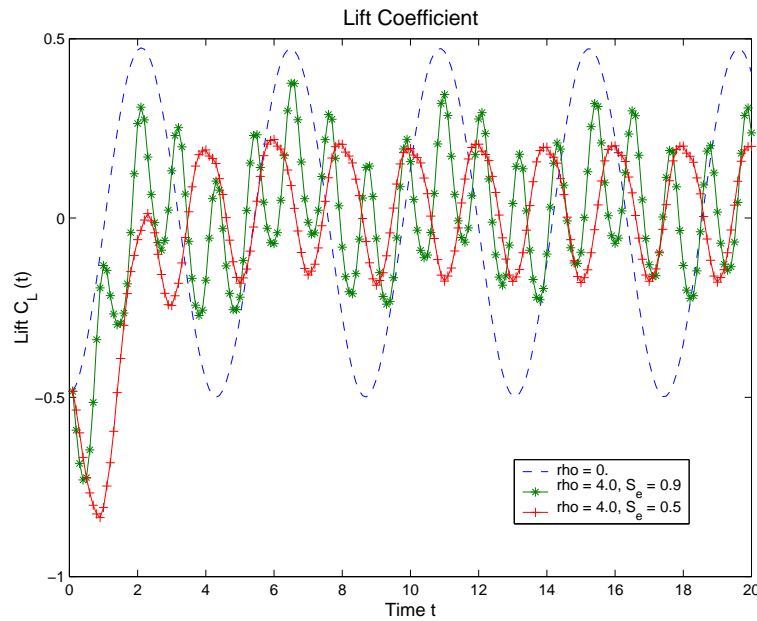


FIG. 3.22 – Lift evolution for different control parameters

to suppress or at least weaken the vortex shedding phenomenon. This should have been predicted, since the mean source of friction forces is due to the vortex shedding alley as reported by many experiments [81].

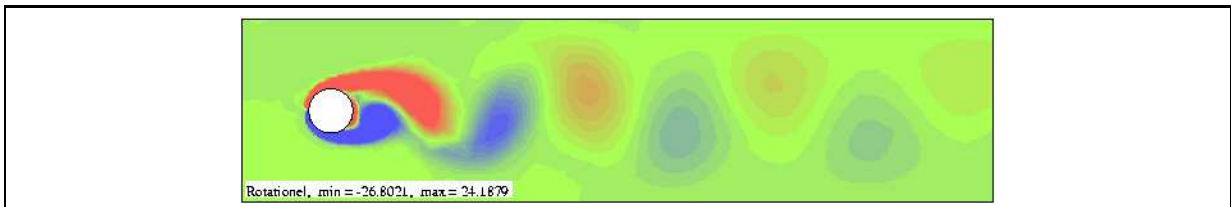


FIG. 3.23 – Vortex shedding in the uncontrolled case

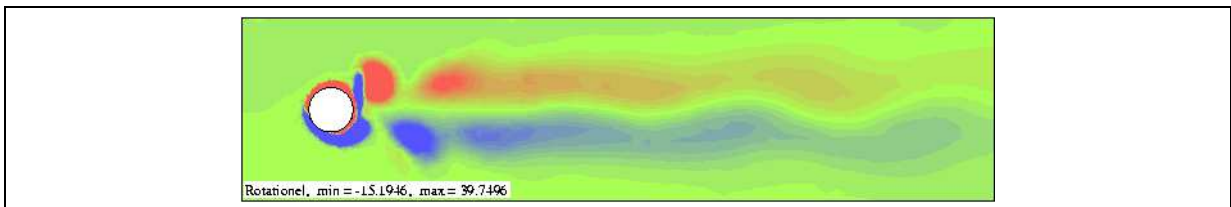


FIG. 3.24 – Vortex shedding in the optimal controlled case

### 3.7.3 Case of several harmonics

In order to enrich the control parameter space, we chose to deal with a control which is variable as an harmonic series based on the forcing Strouhal number  $S_{opt} = 0.942$  found

in the previous section, i.e

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^N \rho_k \cdot \sin(2k\pi S_{opt}t)$$

as reported in [81]. Hence, the control parameters are the family  $\{(\rho_k)\}_{1 \leq k \leq N}$ . We perform the optimization procedure for  $N = 3$ . We found that the effect of higher harmonics is negligible as shown in Fig. 3.25. But still our algorithm performs well and found an optimal value for the three parameters. The computations ran on three computers with the same clock speed, leading to an equivalent cpu time compared to the case with only two parameters. We finally, recall the mean drag value for the different optimization procedures,

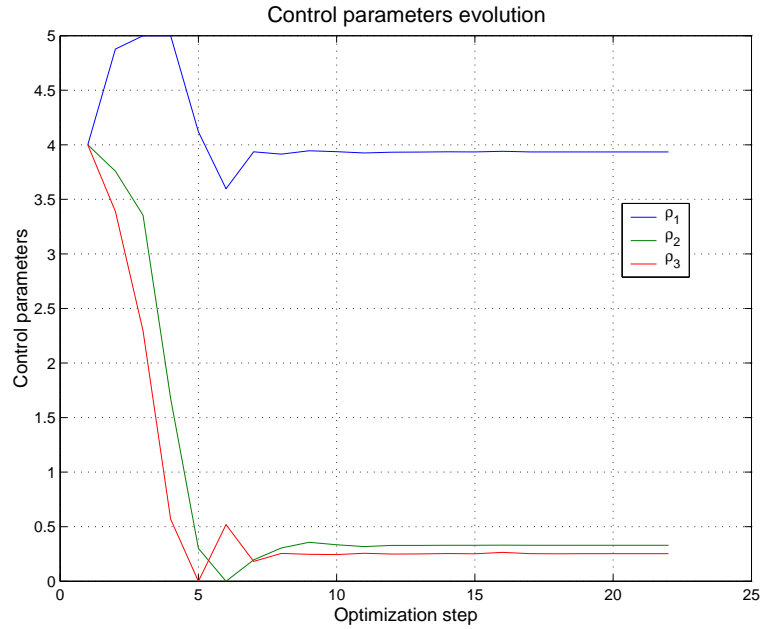


FIG. 3.25 – Optimization parameters evolution

Case of study	Mean Drag $C_D$
uncontrolled	0.92576
direct optimal control	0.8188215
single harmonic optimal control	0.8186945
3 harmonics optimal control	0.817156

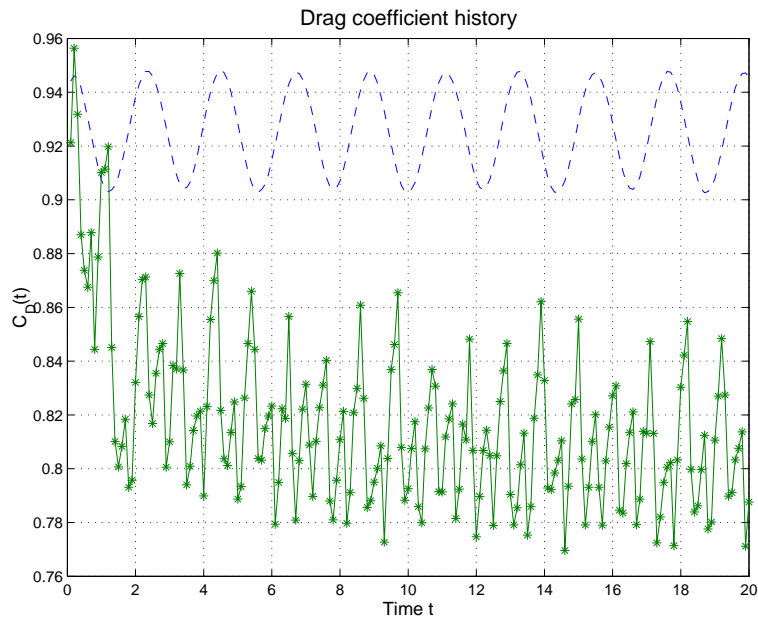


FIG. 3.26 – Optimal Drag time evolution - 3 harmonics case

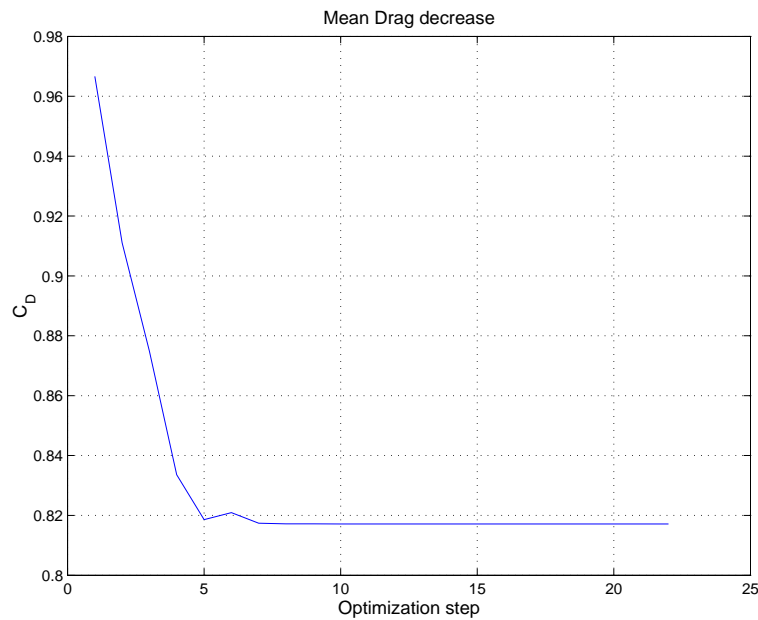


FIG. 3.27 – Mean drag evolution- 3 harmonics case

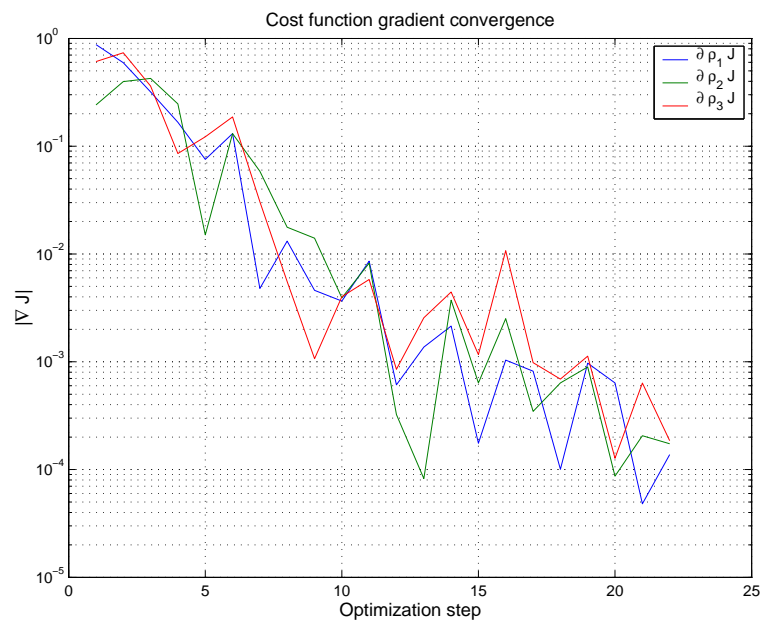


FIG. 3.28 – Cost function gradient decrease - 3 harmonics case



## 3.8 Identification of far-field boundary conditions from fluid loads on bluff bodies

In this section, we are interested in an identification problem arising in the aeroelastic stability analysis of elastic structures inside a fluid flow. The goal is to identify inflow velocity fields from the knowledge of fluid loads time history on a fixed solid that may represent the 2d-section of a bridge deck [133, 4].

The extension of this work to fluid-structure interaction context may be appropriate to identify the inflow velocity field inducing unstable structural displacements. This work is a first basic attempt towards the full coupled case and that needs several improvements in order to reach efficiency.

### 3.8.1 Problem settings

We consider an incompressible Navier-Stokes flow around a rectangular bluff body  $\Omega^s \in \mathbb{R}^2$ . The couple  $(u,p)$  satisfies the classical Navier-Stokes equations,

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega \times (0,T) \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \Omega \times (0,T) \\ u = 0, & \Gamma_s \times (0,T) \\ \sigma(u,p) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \times (0,T) \\ u = u_\infty, & \Gamma_{in} \times (0,T) \\ u(t=0) = u_0, & \Omega \end{cases} \quad (3.80)$$

This model is appropriate in order to analyse aerodynamic characteristics of structures inside atmospheric fluid flows. The solution of such a system has been computed using the discretization described in section 3.3.

Our main concern is to identify the inflow boundary velocity  $u_\infty$  on  $\Gamma_{in}$  which produces a fluid load on  $\Gamma^s$  arbitrary close to a given load target  $F_d(t)$  on the time interval  $(0,T)$ . This can be solved by using the following minimization problem,

$$\min_{u_\infty \in \mathcal{U}_{ad}} J(u(u_\infty), p(u_\infty)) \quad (3.81)$$

where  $(u,p)$  satisfies the Navier-Stokes system. Here, we only consider the fluid load corresponding to the mean flow direction, i.e the drag. Then, the cost function  $J(u,p)$  measures the mean square of the difference between the current drag and the target drag time history,

$$J(u,p) = \int_0^T \left| \left( \int_{\Gamma^s} \sigma(u,p) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 - F_d(t) \right|^2 dt \quad (3.82)$$

Using exactly the same framework as for optimal control of rotating cylinder drag, it is possible to derive the gradient of the cost function  $j(u_\infty)$  with respect to the inflow velocity in the perturbation direction  $\delta u_\infty$ .

### 3.8.2 The rectangular cylinder

Because of its profiled shape, the cylinder used for our tests in the previous section is of little interest as far as fluid-structure interaction is concerned. Its curved shape was barely a challenge for the Lagrange-Galerkin method. We shall this time consider the rectangular cylinder. This test is popular in wind-engineering because, though geometrically very simple, the right angles it provides are very representative of the object shapes commonly studied such as bridges or towers for instance. The rectangular cylinder we will consider consists of a rectangle with chord to thickness ratio  $c/d = 4$ , where  $c$  is the chord and  $d$  the length. Fig. 3.29 and Fig. 3.30 give the lift, drag and the pressure profile at  $t = 500$  seconds for the second order Lagrange-Galerkin scheme with  $Re = 1000$  computed with the code LGNSI2FS. Like the cylinder, we can see that after a transient phase the perturbation of

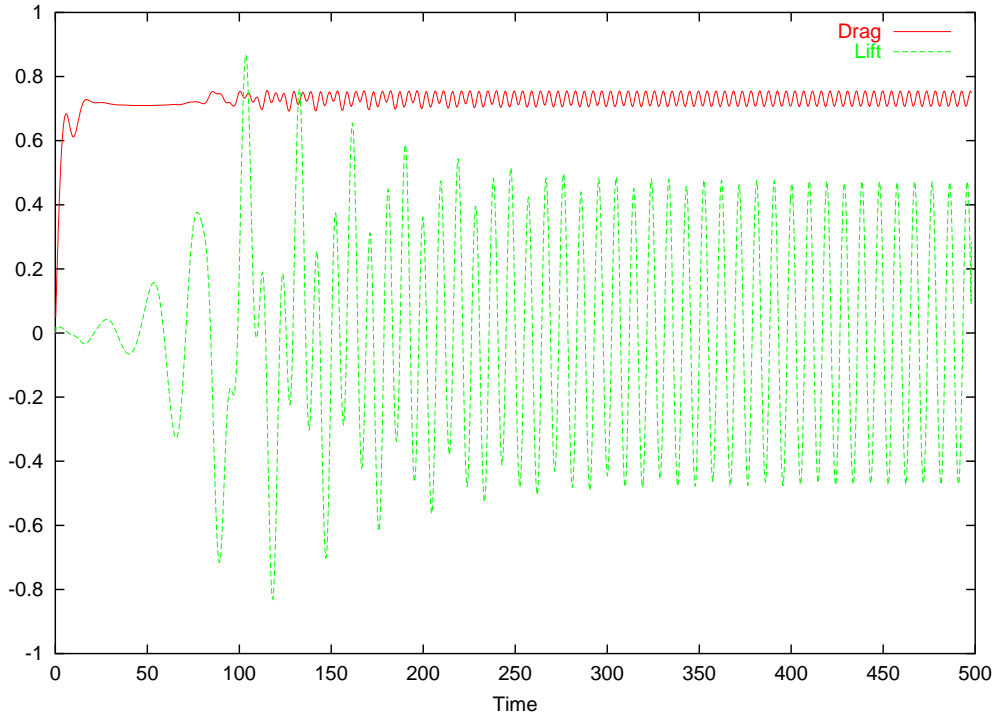


FIG. 3.29 – Lift and drag for the  $R4$  rectangular cylinder

the flow becomes periodic. Again, the lift oscillation frequency  $f_l$  is half the drag oscillation frequency  $f_d$  and the corresponding Strouhal number here is  $S = f_l d / u_\infty = 0.105$ .

### 3.8.3 Harmonic perturbation of the inflow velocity

As in the previous section, since we do not use an adjoint formulation, we have to restrict drastically the class of admissible controls. Since we have in mind the case where the solid is moving using a single second-order differential equation of spring-mass type, we use an harmonic perturbation around a steady state for the inflow velocity,

$$u_\infty(\rho, S_e, \phi) = 1 + \rho \sin(2\pi S_e t + \phi) \quad (3.83)$$

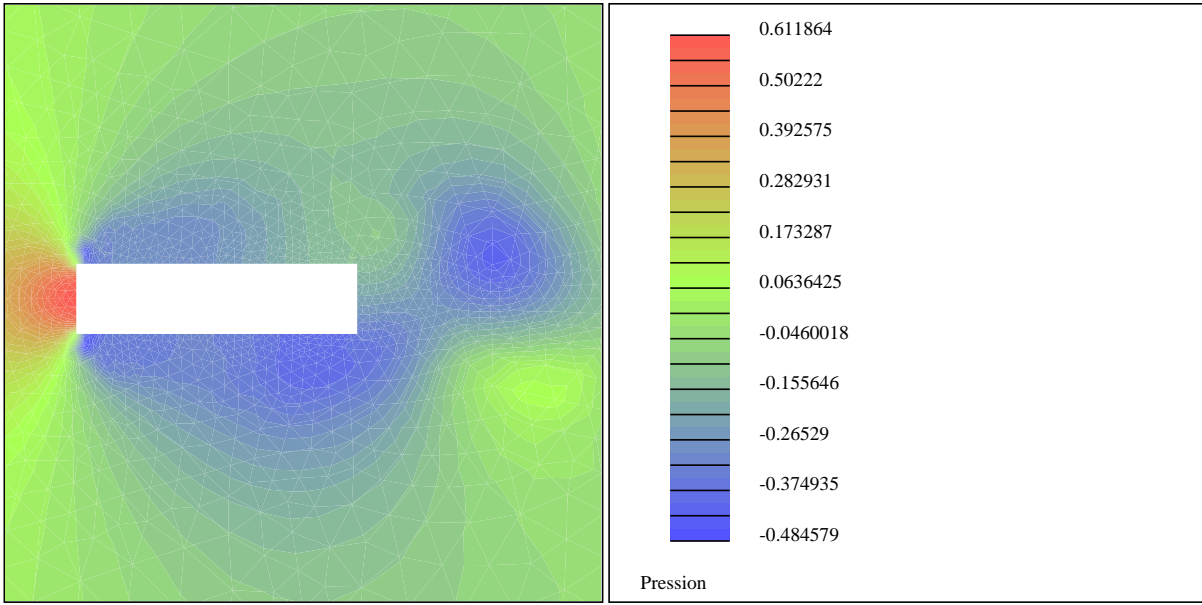


FIG. 3.30 – Pressure profile for the R4 rectangular cylinder

This means that we must use a control space of dimension 3. Of course this kind of controls restricts the kind of load time history that may be reached. But since the basic flow while using steady inflow velocity produces harmonic fluid loads on  $\Gamma^s$ , this choice is admissible. We will first use a synthetic load  $F_d$  produced by a set of input control parameters and try to recover this set using an optimization procedure based on a Quasi-Newton gradient based method. In a second time, we will define an harmonic arbitrary load and track this load using optimal control parameters.

### 3.8.4 Synthetic load

In this paragraph, we shall use a reachable target, i.e that has been obtained by selecting a set of control parameters and by computing the result drag time history  $F_d(t)$  on the R4 profile. The target has been obtained using the inflow velocity  $u_\infty^d = 1 + \rho^d \sin(2\pi S_e^d t)$  with  $(\rho^d, S_e^d) = (0.3, 0.3)$ .

We have displayed in Fig. 3.31, the control parameters during the optimization procedure, with an inflow velocity  $u_\infty = 1 + \rho \sin(2\pi S_e t)$ . The initial guess was set to  $(\rho^0, S_e^0) = (0.5, 0.5)$ . Convergence was reached after 12 iterations. We recover the awaited control parameter without any regularization process, which is a characteristic of the reachable target class. We did not deal with the question of the stability of this inverse problem, since our goal was to validate the computation of the cost function gradient.

We have used an harmonic inflow velocity in the direction of the drag, and we recover in Fig. 3.32 the frequency of the inflow inside the drag time history. This means that the frequency of the inflow strongly controls the frequency of the resulting drag. On the contrary, the frequency of the lift does not depend on the frequency of the inflow as shown in Fig. 3.34. This is due to the fact that the inflow velocity is horizontal and that the

3.8. Identification of far-field boundary conditions from fluid loads on bluff bodies

transverse fluid flow is not perturbed by the time variation of the mean horizontal flow. This is why we did not try to track the lift time history.

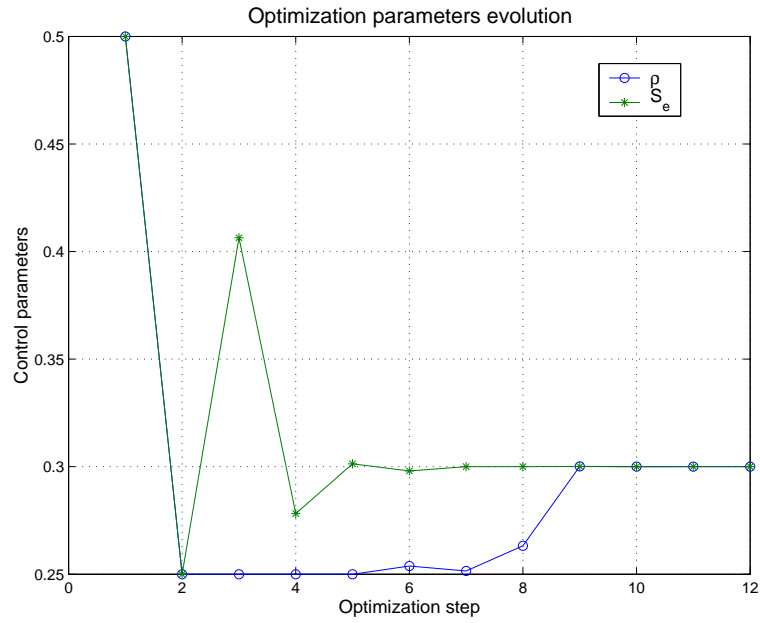


FIG. 3.31 – Control parameters during optimization steps

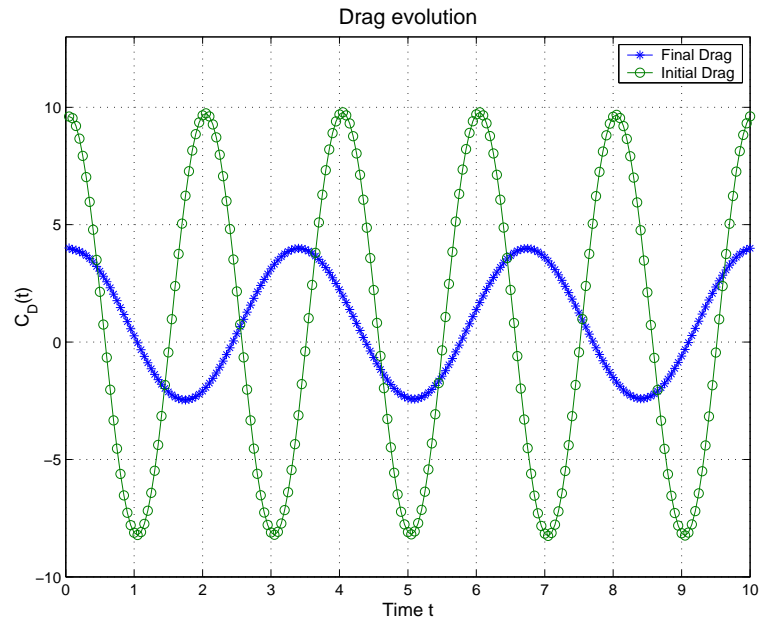


FIG. 3.32 – Drag history - initial guess and final control

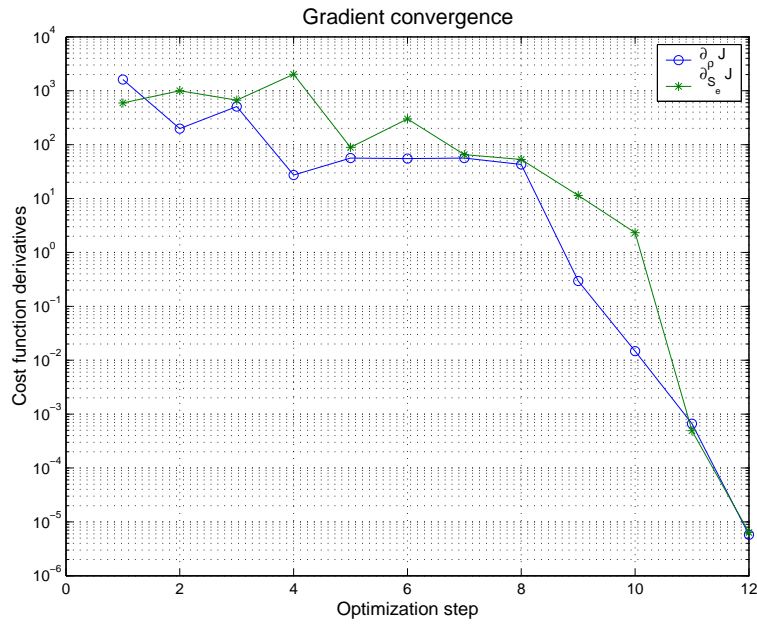


FIG. 3.33 – Gradient decrease during optimization steps

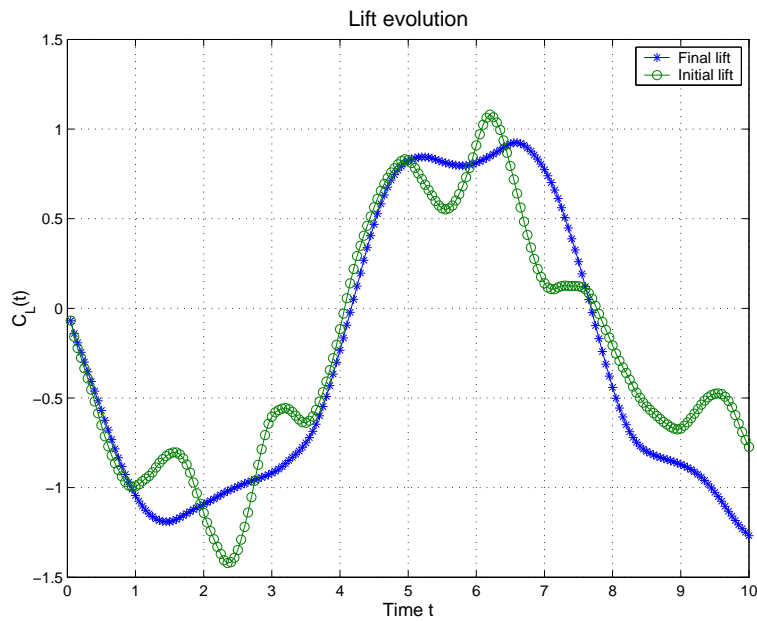


FIG. 3.34 – Lift history - initial guess and final control

### 3.8.5 Arbitrary harmonic loads

The next step is to track an arbitrary fluid load. We mean here that this load does not result from fluid flow computations. Nevertheless, we cannot choose a completely arbitrary load, since the class of the inflow velocity strongly pilots the kind of load to be produced by the numerical simulations. For this reason, we choose an harmonic load

oscillating at the fundamental frequency  $f^d$ ,

$$F_d(t) = A^d \sin(2\pi f^d t) \quad (3.84)$$

with  $(A^d, f^d) = (0.2, 0.5)$ . We work with a inflow control integrating phase control,

$$u_\infty = 1 + \rho \sin(2\pi S_e t + \phi) \quad (3.85)$$

Initial time condition for the fluid is set with a developed flow obtained at time  $t = 20s$  with an inflow velocity  $u_\infty = 1$ . The optimization process was performed with the initial guess  $(\rho^0, S_e^0, \phi) = (0.5, 0.4, 0)$ . In Fig. 3.35, we have displayed the control parameters during the optimization process. Convergence was reached after 31 iterations of the L-BFGS-B algorithm on 3 different processors. The tracking functional was highly reduced as shown in Fig. (3.36). The different partial derivatives during the optimization are displayed in Fig. 3.37. Compared to the case of a synthetic load, the convergence was slower and the reduction factor was weaker. This is due to the fact that the coercivity of the functional is not ensured in this case, leading to poor conditioning property of the linear systems involved in the computation of the descent directions. Nevertheless, convergence was reached, what might indicate that our linearized algorithm behaves well even in non trivial situations.

Furthermore, these numerical experiments may shed some light about the identifiability question for the Navier-Stokes system. Indeed, it has been possible to identify the Dirichlet boundary condition on  $\Gamma_\infty^f$  from the knowledge of the mean of the normal stress tensor on  $\Gamma^s$ . This means that the approximate identification property is certainly true, even if it has not been proven yet.

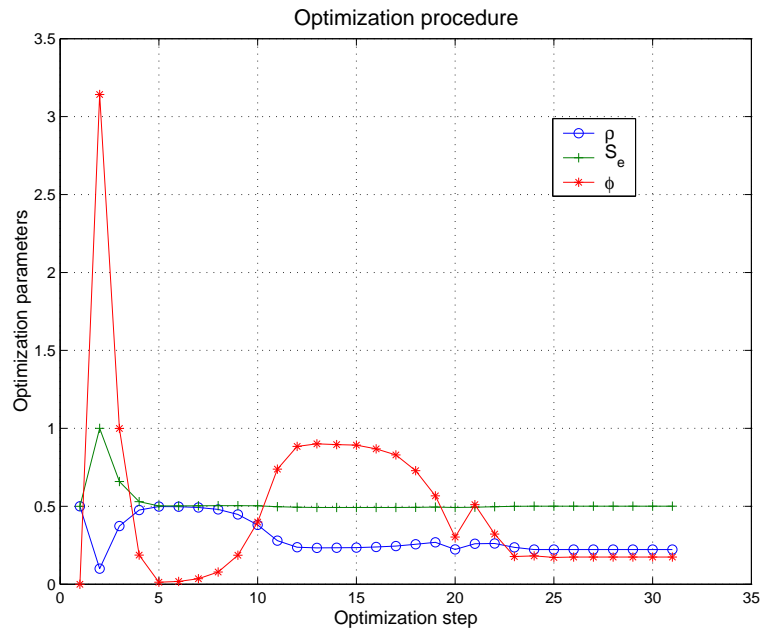


FIG. 3.35 – Control parameters during optimization steps

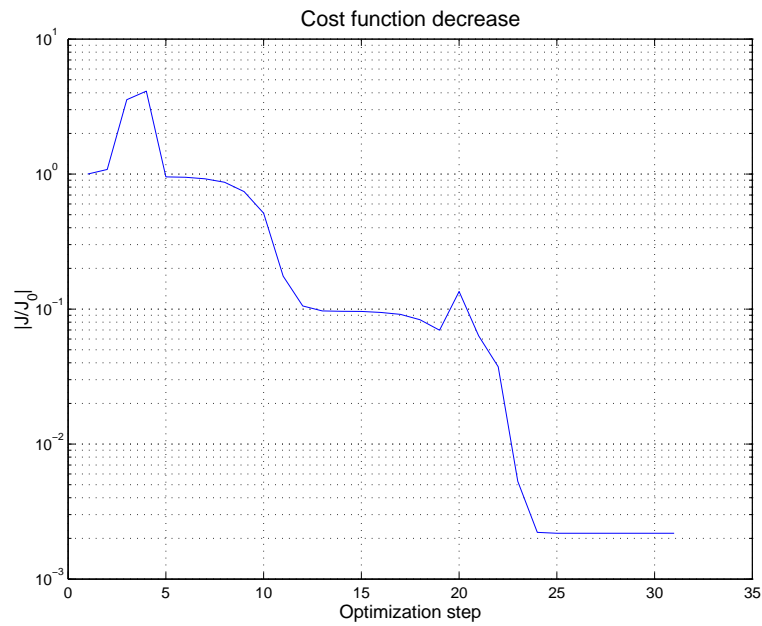


FIG. 3.36 – Cost function decrease during optimization steps

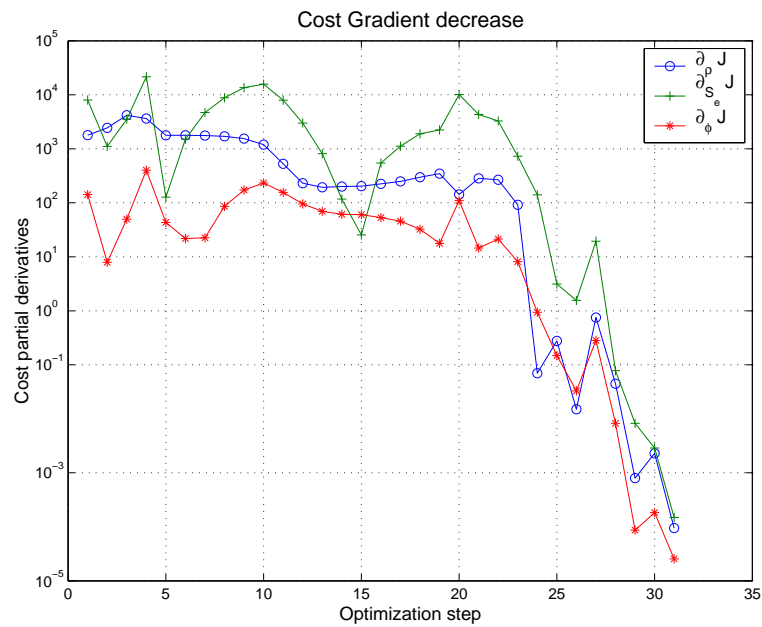


FIG. 3.37 – Gradient decrease during optimization steps

## 3.9 Identification of far-field boundary conditions from fluid loads on moving bluff bodies

In this section, we may extend the setting of the previous section to moving domain configuration. The goal remains the identification of fluid velocities on the far-field boundary  $\Gamma_\infty^f$  thanks to the knowledge of fluid loads on a moving profile inside the fluid flow.

### 3.9.1 Problem settings

We consider an incompressible Navier-Stokes flow around a moving rectangular bluff body  $\Omega^s \in \mathbb{R}^2$ . The couple  $(u,p)$  satisfies the ALE Navier-Stokes system ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} |_{\xi \in \Omega^f(\tau)} + \nabla u \cdot (u - w^\tau) - \nu \Delta u + \nabla p, & \Omega_t^f \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \Omega_t^f \\ u = \dot{x}^s, & \Gamma_t^s \\ \sigma(u,p) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u = u_\infty, & \Gamma_{in} \\ u(t=0) = u_0, & \Omega \end{array} \right. \quad (3.86)$$

The motion of the solid is rigid and prescribed as follows,

$$x^s = \begin{bmatrix} \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (x,y) \in \Gamma_0^s$$

As before, we would like to identify the inflow boundary velocity  $u_\infty$  on  $\Gamma_{in}$  which produces a fluid load on  $\Gamma_t^s$  arbitrary close to a given load target  $F_d(t)$  on the time interval  $(0,T)$ . Hence we need to solve the following minimization problem,

$$\min_{u_\infty \in \mathcal{U}_{ad}} J(u(u_\infty), p(u_\infty)) \quad (3.87)$$

where  $(u(u_\infty), p(u_\infty))$  satisfies the Navier-Stokes system and the cost function  $J(u,p)$  measures the mean square of the drag difference,

$$J(u,p) = \int_0^T \left| \left( \int_{\Gamma_t^s} \sigma(u,p) \cdot n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 - F_d(t) \right|^2 dt \quad (3.88)$$

### 3.9.2 Mesh movement algorithm

In the previous section, our computation domain  $\Omega_h^s$  was fixed. Since we would like to control the fluid load history with fluid/structure interaction, we should be able to move the computation domain with respect to the fluid/structure interface [132]. Therefore, the reference domain  $\Omega^s$  will evolve in time, following the structural displacement. The computational domain  $\Omega_h^s$  will have to be updated in order to stick to  $\Omega(t)$ . Here, we assume we know the position of the fluid mesh  $\Omega^s$  at  $t = t^1$  and the position of the



fluid/structure interface  $\Gamma(t)$  at  $t = t^2$ . We will restrict ourselves to the case of a forced sinusoidal oscillation for the structure. The displacement angle  $\theta(t)$  is given by the following formula :

$$\theta(t) = \theta_m \sin(\omega_m t) \quad (3.89)$$

The general algorithm used to update the fluid mesh is then the following :

- the far-field points  $\Gamma_\infty^h$  are fixed and therefore not updated.
- $\Gamma^s(t^2)$  needs to be computed. This will be done by using (3.89). For exemple, this can be done by simply applying this formulae to the original  $\Gamma^s(t = 0)$ , or computing the rotation between  $t^1$  and  $t^2$  using  $\Gamma^h(t^1)$ .
- The mesh points inside  $\Omega^s \setminus \Gamma$  are updated using the following method : Each edge  $ij$  of the triangulation,  $i$  and  $j$  being the corresponding vertices, is given a stiffness coefficient  $\kappa_{ij}$ . This coefficient is, for instance, the inverse of their length, i.e :

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}$$

The goal is now to compute the displacement  $\delta_i$  for all vertices  $i$  of the mesh  $\Omega^s$  between  $t^1$  and  $t^2$ . The algorithm we used is a Jacobi based iterative method. Given a prediction  $\delta_i^p$  of the displacement, Jacobi iterations are performed, namely :

$$\delta_i^{n+1} = \frac{\sum_{j \in N(i)} \kappa_{ij} \delta_j^n}{\sum_{j \in N(i)} \kappa_{ij}} \quad (3.90)$$

for  $i \in \Omega^s \setminus (\Gamma_h \cup \Gamma_\infty)$ , and where  $N(i)$  are neighbour vertices of  $i$ . This iterative procedure is initialised by the following set of data :

$$\begin{cases} \delta_i^0 = 0, & \forall i \in \Gamma_\infty \\ \delta_i^0 = x_i(t^2) - x_i(t^1), & \forall i \in \Gamma_h \\ \delta_i^0 = \delta_i^p, & \forall i \in \Omega_s \end{cases}$$

After  $N$  iterations, when the residual between two successive iterations is under a given tolerance parameter, we get the displacement needed to update the mesh :

$$x_i(t^2) = x_i(t^1) + \delta_i^N, \quad \forall i \in \Omega^s - \Gamma.$$

Fig. (3.38) give the mesh vertices position for  $t = 0s$  and  $t = 16s$  using this procedure, with  $\theta_m = 1$  deg. and  $\omega_m = \frac{2\pi}{5}$ .

**Remark 3.16** *The convergence of the Jacobi iterative method is assured because the matrix associated to (3.90) is diagonal dominant.*

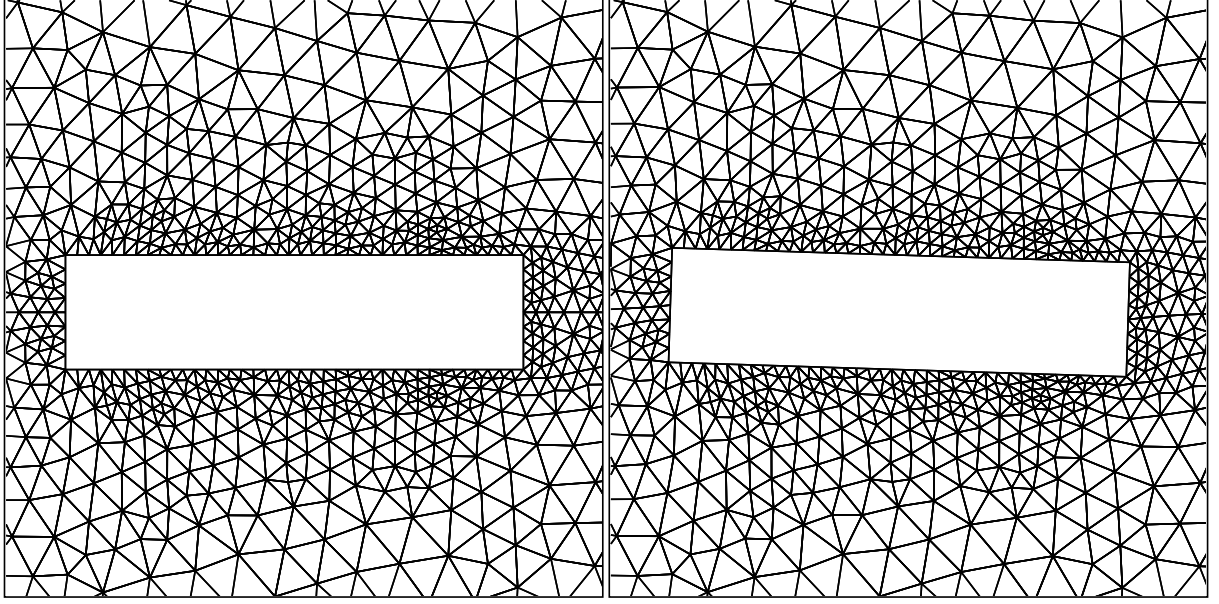


FIG. 3.38 – Mesh vertices position at  $t = 0s$  (left) and  $t = 16s$  (right)

### 3.9.3 Discrete gradient consistency

For the time being, we have been analysing optimal control problems in fixed domains. Here the domain is moving with a given displacement of the solid boundary  $\Gamma_t^s$ . Since this situation is new, we have been checking the consistency of the discrete gradient computed by the LGNI2FS code.

First let us describe the linearized system using the subcycling backtracking procedure. We recall that the Navier-Stokes system is discretized as follows, we look for  $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h^3 \times Q^h$  solution of the following system,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \frac{1}{\Delta t}(u_h^n \circ \chi_h^{u-w, n}, v_h), & \forall v_h \in V_h^{n+1} \\ (\operatorname{div} u_h^{n+1}, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h^{n+1} \\ u_h^{n+1} = (\dot{x}^s)_h^{n+1}, & \Gamma_s^{n+1} \\ \sigma(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ u_h^{n+1} = \Pi_h u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \end{array} \right. \quad (3.91)$$

where  $\chi_h^{u-w,n} = \chi_{m,h}^{u-w,n}$  stands for an approximation of the characteristic foot coming from point  $x \in \Omega$  computed using the subcycling backtracking scheme,

$$\begin{cases} \chi_{i+1,h}^{u-w,n} = \chi_{i,h}^{u-w,n} - \Delta t_i \cdot (u_h^n - w_h^n)(\chi_{i,h}^{u-w,n}), & \sum_{i=1}^m \Delta t_i = \Delta t \\ \chi_{0,h}^{u-w,n} = x, & x \in K_h \end{cases} \quad (3.92)$$

We shall need the expression of the linearized system satisfied by the couple  $(z, q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D}{Du_\infty}(u, p) \cdot \delta u_\infty$ . This can be done as in section 3.4. The major point, here, is that the ALE velocity  $w$  does not depend on the control variable  $u_\infty$ . Hence we look for  $(z_h^{n+1}, q_h^{n+1}) \in X_h^3 \times Q_h$  solution of the following system,

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(z_h^{n+1}, v_h) + \nu (\nabla z_h^{n+1}, \nabla v_h) - (q_h^{n+1}, \text{div } v_h) = \\ \frac{1}{\Delta t} [(z_h^n(\delta g) \circ \chi_h^{u-w,n}(g), v_h) + (\nabla u_h^n(\chi_h^{u-w,n}(g)) \cdot \delta \chi_h^n, v_h)] & \forall v_h \in V_h^{n+1} \\ (\text{div } z_h^{n+1}, \ell_h) = 0, & \forall \ell_h \in Q_h^{n+1} \\ z_h^{n+1} = 0, & \Gamma_s^{n+1} \\ \sigma(z_h^{n+1}, q_h^{n+1}) \cdot n = 0, & \Gamma_{out} \\ z_h^{n+1} = \Pi_h \delta u_\infty^{n+1}, & \Gamma_{in} \\ (z_h^0, v_h) = 0, & \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3.93)$$

with

$$\begin{cases} \delta \chi_{i+1,h}^n = \delta \chi_{i,h}^n - \Delta t_i \cdot z_h^n(\chi_{i,h}^{u-w,n}) - \Delta t_i \nabla(u_h^n - w_h^n)(\chi_{i,h}^{u-w,n}) \cdot \delta \chi_{i,h}^n, \\ \delta \chi_{1,h}^n = -\Delta t_0 \cdot z_h^n(x), \end{cases} \quad x \in \Omega \quad (3.94)$$

The derivation of the linearized system for the second order scheme follows the same arguments and has not been displayed for the sake of shortness.

These systems have been implemented in the code LGNSI2FS and used to compute the gradient of the cost function in equation (3.88). The quantity,

$$D_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\nabla J_h^d - D J_h^{dt})}{D J_h^{dt}}$$

has been displayed in Fig. 3.39 for the first and second order characteristic schemes. The results are satisfactory and can be compared with the results obtained for the driven cavity in Fig. 3.13.

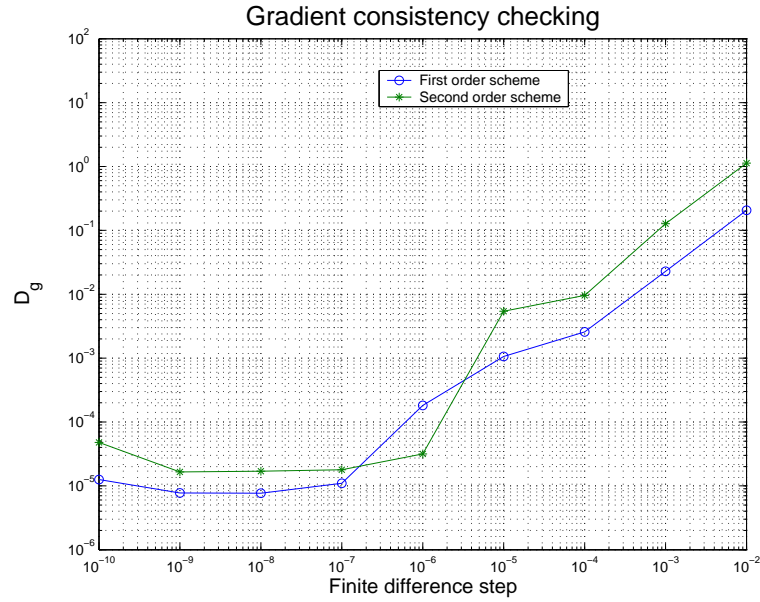


FIG. 3.39 – First and second order Lagrange-Galerkin scheme applied to the moving  $R4$  profile - Gradient test

### 3.9.4 Harmonic perturbation of the inflow velocity

As in the previous section, we use an harmonic perturbation around a steady state for the inflow velocity,

$$u_{\infty}(\rho, S_e, \phi) = 1 + \rho \sin(2\pi S_e t) \quad (3.95)$$

This means that we use a control space of dimension 2. We only deal with a synthetic load  $F_d$  produced by a set of input control parameters and try to recover this set using an optimization procedure based on a Quasi-Newton gradient based method. The moving configuration is set with  $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(2\pi t/T_s)$  where  $\alpha_0 = 2\pi/180$  and  $T_s = 5$ . The synthetic load is produced with  $(\rho, S_e) = (0.1, 0.1)$ .

The optimization was performed using the L-BFGS-B with an initial guess in the neighbourhood of the optimal value  $(\rho^0, S_e^0) = (0.15, 0.15)$ . The convergence was reached after 62 iterations. The control parameters during the optimization are displayed in Fig. 3.40 and Fig. 3.41. We found this optimization problem harder than the others because the convergence only succeeded for initial guess near the target control parameters. This can be explained by the fact that this problem is stiff, since as shown in Fig. 3.43 the value of partial derivative  $\partial_{S_e} J$  at iteration 24 is greater than  $10^3$  while the corresponding control parameters are in a close neighbourhood of the optimal values.

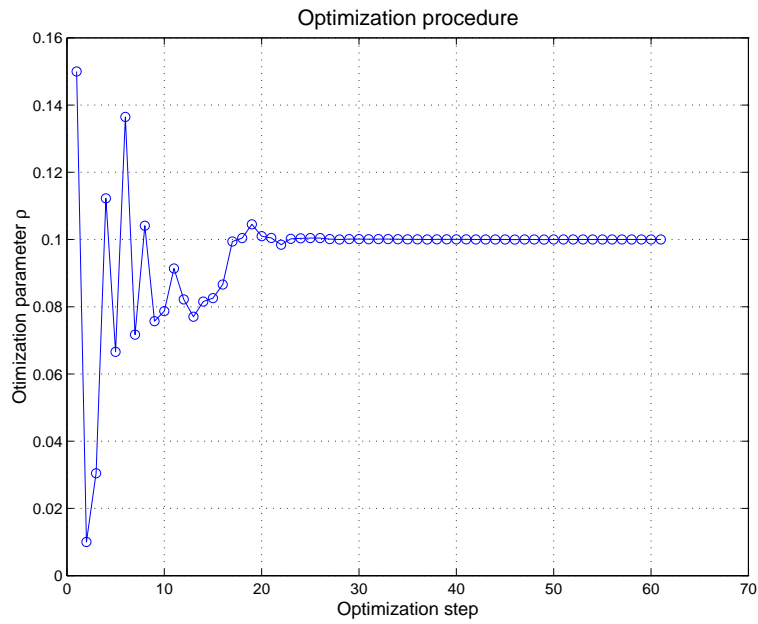


FIG. 3.40 – Amplitude control parameter during the optimization steps

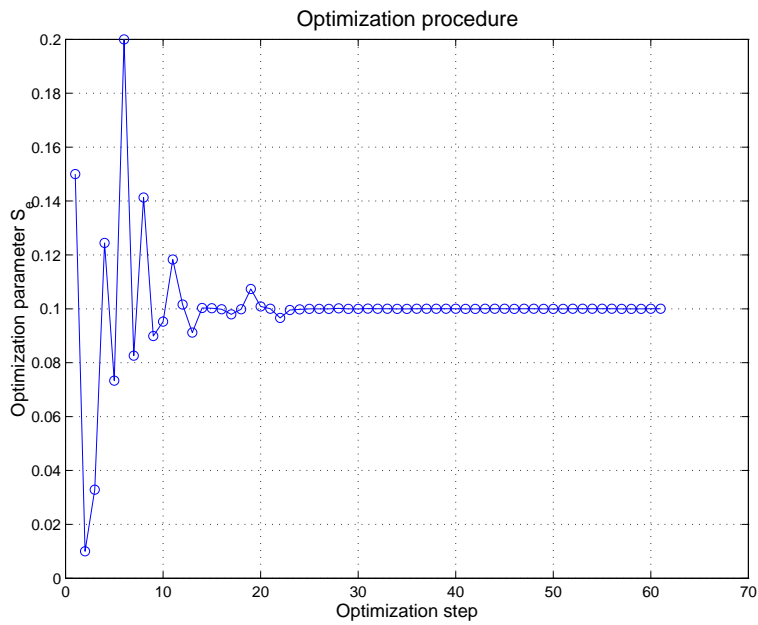


FIG. 3.41 – Frequency control parameter during the optimization steps

3.9. Identification of far-field boundary conditions from fluid loads on moving bluff bodies

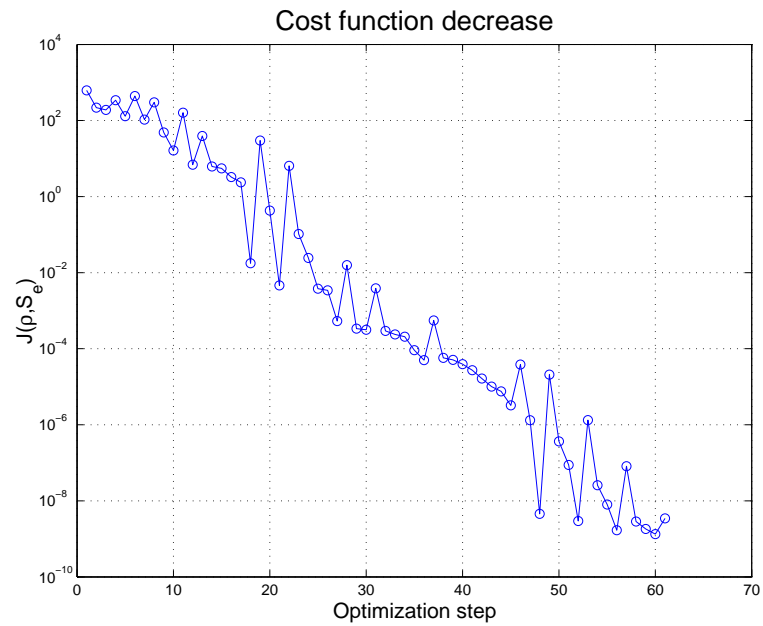


FIG. 3.42 – Cost function behaviour during the optimization steps

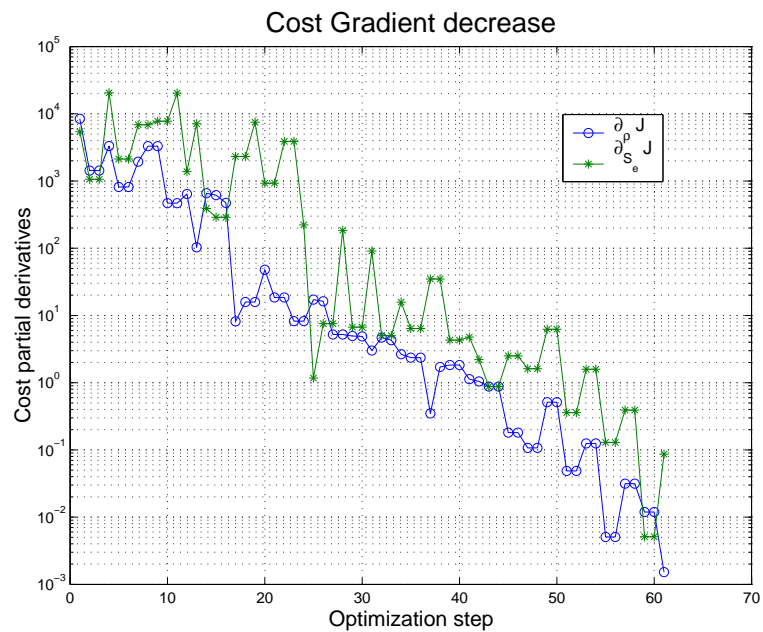


FIG. 3.43 – Gradient of the cost function behaviour during the optimization steps

## 3.10 Conclusion

In this report, we have been investigating optimal control problems for some fluid systems described by the Navier-Stokes equations in fixed and moving domains. The originality of this work is twofold :

- We have introduced a discrete linearized schemes associated to first and second order Lagrange-Galerkin discrete scheme for the Navier-Stokes system. The properties of this linearized scheme highly depend on the type of backtracking procedure used to compute the characteristic paths involved in the Lagrange-Galerkin method. We have shown that using an adaptative backtracking procedure including a projection on simplex sides along velocities leads to a non-differentiable system. This result has been numerically illustrated using the code NSI3 which is based on the adaptative backtracking procedure. Furthermore, we have shown that using a subcycling back-trackings procedure leads to differentiable problems and this has been numerically proven on simple test problems using the code LGNSI2FS.
- The computation of cost function partial derivatives has been performed using a parallel architecture taking advantage on the forward in time structure of the linearized discrete system.

The ability of our code to compute cost function gradients enabled us to deal with two optimal control problems. The numerical experiments that we performed led to the following conclusions :

- Reducing the drag around a moving circular cylinder has been feasible with the code LGNSI2FS. We have recovered early results based on different time discretization and using an adjoint based formulation. The drag minimization came with a reduction of the vortex shedding without including this objective in the cost function. The optimization worked well without any regularization, what was expected with a low Reynolds number.
- We have been also dealing with an original problem consisting in the identification of inflow boundary conditions from the knowledge of fluid loads time history on a fixed or moving embedded solid. We have shown that the exact identifiability property holds at least numerically in the case of reachable targets for the fixed and the moving configurations. For arbitrary targets, a kind of approximate identifiability property has been exhibited for the fixed configuration.

However these results have been obtained for a very small class of control parameters. This choice has been motivated by two main reasons : first for the drag minimization problem, it was proven in different works that the harmonic decomposition of boundary controls is a very good choice even with only one harmonic. Secondly, the use of a direct approach based on linearized solution computation induces an increasing number of system to solve. Even if these systems are solved in parallel, we are restricted by the number of processors that can be used at the same time.

Again we may emphasize the fact that our aim was to validate the use of Lagrange-Galerkin algorithms while considering optimal control problems. This has been done using the direct mode approach. We are already working on the adjoint based formulations [63] which may represent a deep improvement of this work as far as efficiency is concerned.

Future works may concentrate on optimal control problems for the full coupled problems using the fluid-structure linearized system whose structure has been established in [55]. We will also deal with the adjoint formulation by using the results obtained in [122].





## Deuxième partie

### Cas des systèmes en domaine mobile



Nous avons jusqu'à maintenant essayé d'appliquer les concepts développés dans le premier chapitre à des systèmes d'évolution ne faisant pas intervenir de couplage. Cependant, le but de notre travail est d'établir des méthodes capables de donner des informations précises sur les instabilités pouvant se développer lorsqu'une structure se trouve au sein d'un écoulement fluide.

L'originalité du couplage fluide-structure provient du fait que le domaine dans lequel le problème est posé dépend,

- de la variable temps ( problème non-cylindrique ),
- des inconnues du problème ( frontière libre ).

Afin de bien distinguer ces deux difficultés, nous allons dans un premier temps analyser des problèmes inverses pour des systèmes faisant intervenir un domaine spatio-temporel non-cylindrique. Dans la troisième partie, nous analyserons ces mêmes questions pour des systèmes couplés faisant intervenir une frontière mobile comme inconnue du problème.

Cette deuxième partie s'organise en deux chapitres :

#### II.1 *Contrôle dynamique de forme des équations de Navier-Stokes en domaine mobile : une approche eulérienne*

Dans ce travail élaboré en collaboration avec Raja Dziri<sup>36</sup> et Jean-Paul Zolésio<sup>37</sup>, ayant fait l'objet d'un rapport de recherche INRIA [42], nous nous intéressons au problème du contrôle des équations de Navier-Stokes par la forme de la frontière mobile. Ici le contrôle est donné par la vitesse  $V$  de la frontière mobile  $\Gamma^s(t)$  et la fonctionnelle à minimiser fait intervenir la vitesse et la pression du fluide dans le domaine mobile. Ce problème est abordé en utilisant des extensions récentes de la méthode de la vitesse en optimisation de forme classique au cas où le domaine possède sa propre dynamique. Nous utilisons trois méthodes différentes afin d'établir la structure du gradient de la fonctionnelle coût par rapport la vitesse  $V$  :

1. une méthode fondée sur la différentiabilité de l'état fluide  $(u,p)$  par rapport à  $V$ , utilisant le théorème des fonctions implicites sous sa forme faible.
2. une méthode fondée sur l'application du principe de Min-Max avec une paramétrisation des espaces d'état et de multiplicateurs.
3. une méthode fondée sur l'application du principe de Min-Max avec une inclusion des espaces d'état et de multiplicateurs dans un espace indépendant des variations du domaine mobile.

#### II.1 *Contrôle dynamique de forme des équations de Navier-Stokes en domaine mobile : une approche lagrangienne*

Dans ce travail réalisé en collaboration avec Jean-Paul Zolésio, nous établissons un résultat similaire au résultat du chapitre précédent en utilisant une approche lagrangienne. La variable de contrôle est ici le déplacement  $\theta$  de la frontière mobile  $\Gamma^s(t)$ . L'utilisation du calcul de forme classique par perturbation de l'identité est étendue au cas des domaines spatio-temporels non-cylindriques. En utilisant la dérivée de l'état par rapport à  $\theta$ , on établit la structure du gradient de la fonctionnelle coût par rapport à  $\theta$ . Un lien formel permettant de relier la dérivée directionnelle lagrangienne avec la dérivée directionnelle eulérienne est établi.

---

36. LAMSIN, University of Tunis

37. INRIA-OPALE/CNRS



# Chapitre 4

## Contrôle dynamique de forme des équations de Navier-Stokes : approche eulérienne

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>195</b>
<b>4.2</b>	<b>Problem statement</b>	<b>195</b>
<b>4.3</b>	<b>Elements of non-cylindrical shape and tangential calculus</b>	<b>199</b>
4.3.1	Non-cylindrical speed method	199
4.3.2	Elements of tangential calculus	203
<b>4.4</b>	<b>State derivative strategy</b>	<b>206</b>
4.4.1	Weak formulation and solvability	206
4.4.2	Weak implicit function theorem and the Piola material derivative	207
4.4.3	Shape derivative	215
4.4.4	Extractor Identity	217
4.4.5	Adjoint system and cost function shape derivative	220
<b>4.5</b>	<b>Min-Max and function space parametrization</b>	<b>222</b>
4.5.1	Saddle point formulation of the fluid state system	222
4.5.2	Function space parametrization	226
4.5.3	Differentiability of the saddle point problem	228
<b>4.6</b>	<b>Min-Max and function space embedding</b>	<b>236</b>
4.6.1	Saddle point formulation of the fluid state system	236
4.6.2	Lagrange functional and non-cylindrical shape derivative	238
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>241</b>

---

Dans ce chapitre co-écrit avec Raja Dziri et Jean-Paul Zolésio, paru sous forme de rapport de recherche INRIA [42], nous présentons de récents progrès dans l'analyse des problèmes d'optimisation de forme dans le cas où le domaine spatial est mobile. L'accent est mis sur le cas des fluides visqueux newtoniens en écoulement incompressible modélisés par le système de Navier-Stokes en domaine mobile. Nous proposons trois approches afin de résoudre un problème de contrôle optimal sur la forme qui utilisent :

1. la différentiabilité de l'état par rapport à la forme et un passage à l'adjoint,
2. le principe du Min-Max avec une paramétrisation de l'espace d'état et des multiplicateurs,
3. le principe du Min-Max avec une inclusion de domaine des espaces d'états et de multiplicateurs.

## 4.1 Introduction

This article deals with the analysis of an inverse dynamical shape problem involving a fluid inside a moving domain. This type of inverse problem happens frequently in the design and the control of many industrial devices such as aircraft wings, cable-stayed bridges, automobile shapes, satellite reservoir tanks and more generally of systems involving fluid-solid interactions.

The control variable is the shape of the moving domain, and the objective is to minimize a given cost functional that may be chosen by the designer.

On the theoretical level, early works concerning optimal control problems for general parabolic equations written in non-cylindrical domains have been considered in [33], [22], [23], [155], [2]. In [152], [160], [161], the stabilization of structures using the variation of the domain has been addressed. The basic principle is to define a map sending the non-cylindrical domain into a cylindrical one. This process leads to the mathematical analysis of non-autonomous PDE's systems.

Recently, a new methodology to obtain eulerian derivative for non-cylindrical functionals has been introduced in [163], [162], [43]. This methodology was applied in [44] to perform dynamical shape control of the non-cylindrical Navier-Stokes equations where the evolution of the domain is the control variable. Hence the classical optimal shape optimization theory has been extended to deal with systems set in non-cylindrical domains.

The aim of this article is to review several results on the dynamical shape control of the Navier-Stokes system and suggest an alternative treatment using the Min-Max principle [35]. Despite its lack of rigorous mathematical justification in case where the Lagrangian functional is not convex, we shall show how this principle allows, at least formally, to bypass the tedious obtention of the state differentiability with respect to the shape of the moving domain.

## 4.2 Problem statement

Let us consider a moving domain  $\Omega_t \in \mathbb{R}^d$ . We introduce a diffeomorphic map sending a fix reference domain  $\Omega_0$  into the physical configuration  $\Omega_t$  at time  $t \geq 0$ .

Without loss of generality, we choose the reference configuration to be the physical configuration at initial time ( $t = 0$ ).

Hence we define a map  $T_t \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega_0})$  such that

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_t &= T_t(\overline{\Omega_0}), \\ \overline{\Gamma}_t &= T_t(\overline{\Gamma_0})\end{aligned}$$

We set  $\Sigma \equiv \bigcup_{0 < t < T} (\{t\} \times \Gamma_t)$ ,  $Q \equiv \bigcup_{0 < t < T} (\{t\} \times \Omega_t)$ . The map  $T_t$  can be actually defined as the flow of a particular vector field, as described in the following lemma:

**Theorem 4.1 ([159])**

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_t &= T_t(V)(\overline{\Omega_0}), \\ \overline{\Gamma}_t &= T_t(V)(\overline{\Gamma_0})\end{aligned}$$



where  $T_t(V)$  is solution of the following dynamical system :

$$\begin{aligned} T_t(V) : \Omega_0 &\longrightarrow \\ x_0 &\longmapsto x(t, x_0) \equiv T_t(V)(x_0) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= V(\tau, x(\tau)), \quad \tau \in [0, T] \\ x(\tau = 0) &= x_0, \quad \text{in } \Omega_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

The fluid inside  $\Omega_t$  is assumed to be a viscous incompressible newtonian fluid. Its evolution is described by its velocity  $u$  and its pressure  $p$ . The couple  $(u, p)$  satisfies the classical Navier-Stokes equations written in non-conservative form,

$$\begin{cases} \partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & Q(V) \\ \operatorname{div}(u) = 0, & Q(V) \\ u = V, & \Sigma(V) \\ u(t = 0) = u_0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

where  $\nu$  stands for the kinematic viscosity.

The quantity  $\sigma(u, p) = -pI + \nu(Du + {}^*Du)$  stands for the fluid stress tensor inside  $\Omega_t$ , with  $(Du)_{i,j} = \partial_j u_i = u_{i,j}$ .

We are interested in solving the following minimization problem :

$$\min_{V \in \mathcal{U}} j(V) \quad (4.3)$$

where  $j(V) = J_V(u(V), p(V))$  with  $(u(V), p(V))$  is a weak solution of problem (4.2) and  $J_V(u, p)$  is a real functional of the following form :

$$J_V(u, p) = \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{B}u\|_{Q(V)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{K}V\|_{\Sigma(V)}^2 \quad (4.4)$$

where  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$  is a general linear differential operator satisfying the following identity,

$$\langle \mathcal{B}u, v \rangle + \langle u, \mathcal{B}^*v \rangle = \langle \mathcal{B}_\Sigma u, v \rangle_{L^2(\Sigma)} \quad (4.5)$$

where  $\mathcal{H} = \{v \in L^2(0, T; (H_0^1(\operatorname{div}, \Omega_t(V))))^d\}$  and  $\mathcal{K} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, L^2(\Sigma(V)))$  is a general linear differential operator satisfying the following identity,

$$\langle \mathcal{K}u, v \rangle_{L^2(\Sigma)} + \langle u, \mathcal{K}^*v \rangle_{L^2(\Sigma)} = \langle \mathcal{K}_\Sigma u, v \rangle_{L^2(\Sigma)} \quad (4.6)$$

The main difficulty in dealing with such a minimization problem is related to the fact that integrals over the domain  $\Omega_t(V)$  depend on the control variable  $V$ . This point will be solved by using the Arbitrary Lagrange-Euler (ALE) map  $T_t(V)$  introduced previously. The purpose of this article is to prove using several methods the following result,

**Main Result :** For  $V \in \mathcal{U}$  and  $\Omega_0$  of class  $\mathcal{C}^2$ , the functional  $j(V)$  possesses a gradient  $\nabla j(V)$  which is supported on the moving boundary  $\Gamma_t(V)$  and can be represented by the following expression,

$$\nabla j(V) = -\lambda n - \sigma(\varphi, \pi) \cdot n + \alpha \mathcal{B}_\Sigma \mathcal{B} u + \gamma [-\mathcal{K}^* \mathcal{K} V + \mathcal{K}_\Sigma \mathcal{K} V] \quad (4.7)$$

where  $(\varphi, \pi)$  stands for the adjoint fluid state solution of the following system,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \mathbf{D} \varphi \cdot u + {}^* \mathbf{D} u \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = -\alpha \mathcal{B}^* \mathcal{B} u, & Q(V) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q(V) \\ \varphi = 0, & \Sigma(V) \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T \end{cases} \quad (4.8)$$

and  $\lambda$  is the adjoint transverse boundary field, solution of the tangential dynamical system,

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda - \nabla_\Gamma \lambda \cdot V - (\operatorname{div} V) \lambda = f, & (0, T) \\ \lambda(T) = 0, & \Gamma_T(V) \end{cases} \quad (4.9)$$

with

$$f = [-(\sigma(\varphi, \pi) \cdot n) + \alpha \mathcal{B}_\Sigma \mathcal{B} u] \cdot (\mathbf{D} V \cdot n - \mathbf{D} u \cdot n) + \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma H |\mathcal{K} V|^2] \quad (4.10)$$

**Example 4.1** We set,

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Sigma) &= (\mathbf{I}, -\mathbf{I}, 0) \\ (\mathcal{K}, \mathcal{K}^*, \mathcal{K}_\Sigma) &= (\mathbf{I}, -\mathbf{I}, 0) \end{aligned}$$

This means, that we consider the cost functional,

$$J_V(u, p) = \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(Q(V))}^2 + \frac{\gamma}{2} \|V\|_{L^2(\Sigma(V))}^2 \quad (4.11)$$

then its gradient is given by,

$$\nabla j(V) = -\lambda n - \sigma(\varphi, \pi) \cdot n + \gamma V \quad (4.12)$$

where  $(\varphi, \pi)$  stands for the adjoint fluid state solution of the following system,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \mathbf{D} \varphi \cdot u + {}^* \mathbf{D} u \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = \alpha u, & Q(V) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q(V) \\ \varphi = 0, & \Sigma(V) \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T \end{cases} \quad (4.13)$$

and  $\lambda$  is the adjoint transverse boundary field, solution of the tangential dynamical system,

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda - \nabla_\Gamma \lambda \cdot V - (\operatorname{div} V) \lambda = f, & (0, T) \\ \lambda(T) = 0, & \Gamma_T(V) \end{cases} \quad (4.14)$$

with

$$f = -\nu (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \cdot (\mathbf{D} V \cdot n - \mathbf{D} u \cdot n) + \frac{1}{2} (\alpha + \gamma H) |V|^2 \quad (4.15)$$

**Example 4.2** We set,

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Sigma) &= (\text{curl}, \text{curl}, \wedge n) \\ (\mathcal{K}, \mathcal{K}^*, \mathcal{K}_\Sigma) &= (\text{I}, -\text{I}, 0) \end{aligned}$$

$$J_V(u, p) = \frac{\alpha}{2} \|\text{curl } u\|_{L^2(Q(V))}^2 + \frac{\gamma}{2} \|V\|_{L^2(\Sigma(V))}^2 \quad (4.16)$$

then its gradient is given by,

$$\nabla j(V) = -\lambda n - \sigma(\varphi, \pi) \cdot n + \alpha (\text{curl } u) \wedge n + \gamma V \quad (4.17)$$

where  $(\varphi, \pi)$  stands for the adjoint fluid state solution of the following system,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \text{D} \varphi \cdot u + {}^* \text{D} u \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = -\alpha \Delta u, & Q(V) \\ \text{div}(\varphi) = 0, & Q(V) \\ \varphi = 0, & \Sigma(V) \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T \end{cases} \quad (4.18)$$

and  $\lambda$  is the adjoint transverse boundary field, solution of the tangential dynamical system,

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda - \nabla_\Gamma \lambda \cdot V - (\text{div } V) \lambda = f, & (0, T) \\ \lambda(T) = 0, & \Gamma_T(V) \end{cases} \quad (4.19)$$

with

$$f = [-\nu \text{D} \varphi \cdot n + \alpha (\text{curl } u) \wedge n] \cdot (\text{D} V \cdot n - \text{D} u \cdot n) + \frac{1}{2} [\alpha |\text{curl } u|^2 + \gamma H |V|^2] \quad (4.20)$$

In the next section, we introduce several concepts closely related to shape optimization tools for moving domain problems. We also recall elements of tangential calculus that will be used through this article. Then we treat sequentially the following points,

1. In section (4.4), we choose to prove the differentiability of the fluid state  $(u, p)$  with respect to the design variable  $V$ . The directional shape derivative  $(u', p')(V) \cdot W$  is then used to compute the directional derivative  $j'(V) \cdot W$  of the cost functional  $j(V)$ . Using the adjoint state  $(\varphi, \pi)(V)$  associated to  $(u', p')(V)$  and the adjoint field  $\Lambda$  associated to the transverse field  $Z_t$  introduced in section (4.3), we are able to furnish an expression of the gradient  $\nabla j(V)$  which is a distribution supported by the moving boundary  $\Gamma_t(V)$ .
2. In section (4.5), we choose to bypass the obtention of the state shape derivative  $(u', p')(V) \cdot W$ , by using a Min-Max formulation of problem (4.3). The state and multiplier spaces are chosen in order to be independent on the perturbation parameter used in the obtention of the derivative of the lagrangian functional with respect to  $V$ . This leads to the direct obtention of the fluid state and transverse field adjoints and consequently to the gradient  $\nabla j(V)$ .

3. In section (4.6), we again use a Min-Max strategy coupled with a state and multiplier functional space embedding. This means that the state and multiplier variables live in the hold-all domain  $D$ . Hence the derivative of the lagrangian functional with respect to  $V$  only involves terms coming from the flux variation trough the moving boundary  $\Gamma_t(V)$ . This again leads to the direct obtention of the fluid state and transverse field adjoints and consequently to the gradient  $\nabla j(V)$ .

## 4.3 Elements of non-cylindrical shape and tangential calculus

This section introduce several concepts that will be intensively used through this report. It concerns the differential calculus of integrals defined on moving domains or boundaries with respect to their support and basic tools for intrinsic tangential calculus using the oriented distance function and tangential operators.

### 4.3.1 Non-cylindrical speed method

In this paragraph, we are interested in differentiability properties of integrals defined in moving configuration,

$$J_1(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(\Omega_t) d\Omega$$

$$J_2(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t} g(\Gamma_t) d\Gamma$$

The behaviour  $J_1$  and  $J_2$  while perturbing their moving support highly depends on the regularity in space and time of the domains. In this work, we choose to work with domains  $\Omega_t$  that are images of a fixed domain  $\Omega_0$  trough an ALE map  $T_t(V)$  as introduced in the first section. Hence, the design parameter is no more the support  $\Omega_t$  but rather the velocity field  $V \in \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^0([0,T]; (W^{k,\infty}(D))^d)$  that builds the support. This technique has the advantage to transform shape calculus into classical differential calculus on a vector space [163],[44]. For an other choice based on the non-cylindrical identity perturbation, the reader is referred to [15]. Before stating the main result of this section, we recall the notion of transverse field.

#### 4.3.1.1 Transverse applications

**Definition 4.1** *The transverse map  $\mathcal{T}_\rho^t$  associated to two vector fields  $(V,W) \in \mathcal{U}$  is defined as follows,*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\rho^t : \overline{\Omega_t} &\longrightarrow \overline{\Omega_t^\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\Omega_t(V + \rho W)} \\ x &\longmapsto T_t(V + \rho W) \circ T_t(V)^{-1} \end{aligned}$$

**Remark 4.1** *The transverse map allows us to perform perturbations analysis on functions defined on the unperturbed domain  $\Omega_t(V)$ .*

The following result states that the transverse map  $\mathcal{T}_\rho^t$  has itself the structure of a dynamical flow with respect to the perturbation variable  $\rho$ ,

**Theorem 4.2 ([162])** *The Transverse map  $\mathcal{T}_\rho^t$  is the flow of a transverse field  $\mathcal{Z}_\rho^t$  defined as follow :*

$$\mathcal{Z}_\rho^t \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}^t(\rho, \cdot) = \left( \frac{\partial \mathcal{T}_\rho^t}{\partial \rho} \right) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \quad (4.21)$$

*i.e is the solution of the following dynamical system :*

$$\begin{aligned} T_t^\rho(\mathcal{Z}_\rho^t) : \overline{\Omega}_t &\longrightarrow \overline{\Omega}_t^\rho \\ x &\longmapsto x(\rho, x) \equiv T_t^\rho(\mathcal{Z}_\rho^t)(x) \end{aligned}$$

*with*

$$\begin{aligned} \frac{dx(\rho)}{d\rho} &= \mathcal{Z}^t(\rho, x(\rho)), \quad \rho \geq 0 \\ x(\rho = 0) &= x, \quad \text{in } \Omega_t(V) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Since, we will mainly consider derivatives of perturbed functions at point  $\rho = 0$ , we set  $Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{\rho=0}^t$ . A fundamental result lies in the fact that  $Z_t$  can be obtained as the solution of linear time dynamical system depending on the vector fields  $(V, W) \in \mathcal{U}$ ,

**Theorem 4.3 ([44])** *The vector field  $Z_t$  is the unique solution of the following Cauchy problem,*

$$\begin{cases} \partial_t Z_t + [Z_t, V] = W, & D \times (0, T) \\ Z_{t=0} = 0, & D \end{cases} \quad (4.23)$$

*where  $[Z_t, V] \stackrel{\text{def}}{=} DZ_t \cdot V - DV \cdot Z_t$  stands for the Lie bracket of the pair  $(Z_t, V)$ .*

#### 4.3.1.2 Shape derivative of non-cylindrical functionals

The main theorem of this section uses the notion of non-cylindrical material derivative that we recall here,

**Definition 4.2** *A function  $f(V) \in H(\Omega_t(V))$  admits a non-cylindrical material derivative  $\dot{f}(V; W)$  at point  $V \in \mathcal{U}$  in the direction  $W \in \mathcal{U}$  if the following composed function,*

$$\begin{aligned} f^\rho : [0, \rho_0] &\longrightarrow H(\Omega_t(V)) \\ \rho &\longmapsto f(V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t \end{aligned}$$

*is differentiable at point  $\rho = 0$ , a.e  $(t, x) \in Q(V)$  and  $\dot{f}(V) \cdot W = \dot{f}(V; W) = \left. \frac{d}{d\rho} f^\rho \right|_{\rho=0}$ .*

With the above definition, we can state the differentiability properties of non-cylindrical integrals with respect to their moving support,

**Theorem 4.4 ([44])** *For a bounded measurable domain  $\Omega_0$  with boundary  $\Gamma_0$ , let us assume that for any direction  $W \in U$  the following hypothesis holds,*

*i)  $f(V)$  admits a non-cylindrical material derivative  $\dot{f}(V) \cdot W$  then  $J_1(\cdot)$  is Gâteaux differentiable at point  $V \in \mathcal{U}$  and its derivative is given by the following expression,*

$$J'_1(V) \cdot W = \int_{\Omega_t(V)} [\dot{f}(V) \cdot W + f(V) \operatorname{div} Z_t] d\Omega \quad (4.24)$$

*Furthermore, if*

*ii)  $f(V)$  admits a non-cylindrical shape derivative given by the following expression,*

$$f'(V) \cdot W = \dot{f}(V) \cdot W - \nabla f(V) \cdot Z_t \quad (4.25)$$

*then*

$$J'_1(V) \cdot W = \int_{\Omega_t(V)} [f'(V) \cdot W + \operatorname{div}(f(V) Z_t)] d\Omega \quad (4.26)$$

*Furthermore, if  $\Omega_0$  is an open domain with a Lipschitzian boundary  $\Gamma_0$ , then*

$$J'_1(V) \cdot W = \int_{\Omega_t(V)} f'(V) \cdot W d\Omega + \int_{\Gamma_t(V)} f(V) \langle Z_t, n \rangle d\Gamma \quad (4.27)$$

**Remark 4.2** *The last identity will be of great interest while trying to prove a gradient structure result for general non-cylindrical functionals.*

It is also possible to establish a similar result for integrals over moving boundaries. For that purpose, we need to define the non-cylindrical tangential material derivative,

**Definition 4.3** *A function  $g(V) \in H(\Gamma_t(V))$  admits a non-cylindrical material derivative  $\dot{g}(V; W)$  at point  $V \in \mathcal{U}$  in the direction  $W \in \mathcal{U}$  if the following composed function,*

$$\begin{aligned} g^\rho : [0, \rho_0] &\rightarrow H(\Gamma_t(V)) \\ \rho &\mapsto g(V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t \end{aligned}$$

*is differentiable at point  $\rho = 0$ , a.e  $(t, x) \in \Sigma(V)$  and  $\dot{g}(V; W) = \left. \frac{d}{d\rho} g^\rho \right|_{\rho=0}$ .*

This concept is involved in the differentiability property of boundary integrals,

**Theorem 4.5** *For a bounded measurable domain  $\Omega_0$  with boundary  $\Gamma_0$ , let us assume that for any direction  $W \in U$  the following hypothesis holds,*

*i)  $g(V)$  admits a non-cylindrical material derivative  $\dot{g}(V) \cdot W$  then  $J_2(\cdot)$  is Gâteaux differentiable at point  $V \in \mathcal{U}$  and its derivative is given by the following expression,*

$$J'_2(V) \cdot W = \int_{\Gamma_t(V)} [\dot{g}(V) \cdot W + g(V) \operatorname{div}_\Gamma Z_t] d\Gamma \quad (4.28)$$

Furthermore, if

ii)  $g(V)$  admits a non-cylindrical shape derivative given by the following expression,

$$g'(V) \cdot W = \dot{g}(V) \cdot W - \nabla_{\Gamma} g(V) \cdot Z_t \quad (4.29)$$

then

$$J'_2(V) \cdot W = \int_{\Gamma_t(V)} [g'(V) \cdot W + H g(V) \langle Z_t, n \rangle] d\Gamma \quad (4.30)$$

where  $H$  stands for the additive curvature (Def. (4.4)). Furthermore, if  $g(V) = \tilde{g}(V)|_{\Gamma_t(V)}$  with  $\tilde{g} \in H(\Omega_t(V))$ , then

$$J'_2(V) \cdot W = \int_{\Gamma_t(V)} [g'(V) \cdot W + (\nabla \tilde{g}(V) \cdot n + H g(V)) \langle Z_t, n \rangle] d\Gamma \quad (4.31)$$

### 4.3.1.3 Adjoint transverse field

It is possible to define the solution of the adjoint transverse system,

**Theorem 4.6 ([43])** For  $F \in L^2(0, T; (H^1(D))^d)$ , there exists a unique field

$$\Lambda \in C^0([0, T]; (L^2(D))^d)$$

solution of the backward dynamical system,

$$\begin{cases} -\partial_t \Lambda - D \Lambda \cdot V - {}^* D V \cdot \Lambda - (\operatorname{div} V) \Lambda = F, & (0, T) \\ \Lambda(T) = 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

**Remark 4.3** The field  $\Lambda$  is the dual variable associated to the transverse field  $Z_t$  and is solution of the adjoint problem associated to the transverse dynamical system.

In this article, we shall deal with a specific right-hand side  $F$  of the form  $F(t) = {}^* \gamma_{\Gamma_t(V)}(f(t)n)$ . Then the adjoint field  $\Lambda$  is supported on the moving boundary  $\Gamma_t(V)$  and has the following structure,

**Theorem 4.7 ([44])** For  $F(t) = {}^* \gamma_{\Gamma_t(V)}(f(t)n)$ , with  $f \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_t(V)))$ , the unique solution  $\Lambda$  of problem is given by the following identity,

$$\Lambda = (\lambda \circ p) \nabla \chi_{\Omega_t(V)} \in C^0([0, T]; (H^1(\Gamma_t))^d) \quad (4.33)$$

where  $\lambda \in C^0([0, T]; H^1(\Gamma_t))$  is the unique solution of the following boundary dynamical system,

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda - \nabla_{\Gamma} \lambda \cdot V - (\operatorname{div} V) \lambda = f, & (0, T) \\ \lambda(T) = 0, & \Gamma_t(V) \end{cases} \quad (4.34)$$

$p$  is the canonical projection on  $\Gamma_t(V)$  and  $\chi_{\Omega_t(V)}$  is the characteristic function of  $\Omega_t(V)$  inside  $D$ .

#### 4.3.1.4 Gradient of non-cylindrical functionals

In the next sections, we will often deal with boundary integrals of the following forms,

$$K = \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} E(V) \langle Z_t, n \rangle$$

with  $E(V) \in L^2(0, T; \Gamma_t(V))$ . The following result allows us to eliminate the auxiliary variable  $Z_t$  inside the functional  $K$ ,

**Theorem 4.8 ([44])** *For any  $E(V) \in L^2(0, T; \Gamma_t(V))$  and  $(V, W) \in \mathcal{U}$ , the following identity holds,*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} E(V) \langle Z_t, n \rangle = - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} \lambda \langle W, n \rangle \quad (4.35)$$

where  $\lambda \in C^0([0, T]; H^1(\Gamma_t))$  is the unique solution of problem (4.34) with  $f = E$ .

### 4.3.2 Elements of tangential calculus

In this paragraph, we review basic elements of differential calculus on a  $C^k$ -submanifold with  $k \geq 2$  of codimension one in  $\mathbb{R}^d$ . The following approach avoids the use of local bases and coordinates by using the intrinsic tangential derivative.

#### 4.3.2.1 Oriented distance function

Let  $\Omega$  be an open domain of class  $C^k$  in  $\mathbb{R}^d$  with compact boundary  $\Gamma$ . We define the oriented distance function to be as follows,

$$b_\Omega(x) = \begin{cases} d_\Gamma(x), & x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega} \\ -d_\Gamma(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

where  $d_\Gamma(x) = \min_{y \in \Gamma} |y - x|$ .

**Proposition 4.1 ([36])** *Let  $\Omega$  be an open domain of class  $C^k$  for  $k \geq 2$  in  $\mathbb{R}^d$  with compact boundary  $\Gamma$ . There exists a neighbourhood  $U(\Gamma)$  of  $\Gamma$ , such that  $b \in C^k(U(\Gamma))$ . Furthermore, we have the following properties,*

- i)  $\nabla b|_\Gamma = n$ , where  $n$  stands for the unit exterior normal on  $\Gamma$ ,
- ii)  $D^2 b : T_{p(x)}\Gamma \rightarrow T_{p(x)}\Gamma$  coincides with the second fundamental form on  $\Gamma$ , where

$$\begin{aligned} p : U(\Gamma) &\rightarrow \Gamma \\ x &\mapsto x - b(x) \cdot \nabla b(x) \end{aligned}$$

*stands for the projection mapping and  $T_{p(x)}\Gamma$  stands for the tangent plane.*

- iii)  $(0, \beta_1, \dots, \beta_{d-1})$  are the eigenvalues of  $D^2 b$  associated to the eigenfunctions

$$(n, \mu_1, \dots, \mu_{d-1})$$

where  $(\beta_i, \mu_i)_{1 \leq i \leq d-1}$  are the mean curvatures and principal direction of curvatures of  $\Gamma$ .



**Proposition 4.2 ([36])** For  $\Gamma$  of class  $\mathcal{C}^2$ , the projection mapping  $p$  is differentiable and its derivative has the following properties,

$$\begin{aligned} {}^*Dp &= Dp = I - \nabla b \cdot {}^*\nabla b - b D^2 b \\ Dp \cdot \tau &= \tau, \quad \text{on } \Gamma, \\ Dp \cdot n &= 0, \quad \text{on } \Gamma \end{aligned} \tag{4.36}$$

**Definition 4.4 ([36])** For  $\Gamma$  of class  $\mathcal{C}^2$ , the additive curvature  $H$  of  $\Gamma$  is defined as the trace of the second order fundamental form :

$$H = \text{Tr } D^2 b = \Delta b = (d - 1)\bar{H}, \quad \text{on } \Gamma \tag{4.37}$$

and  $\bar{H}$  stands for the mean curvature of  $\Gamma$ .

### 4.3.2.2 Intrinsic tangential calculus

Using arbitrary smooth extension of functions defined on  $\Gamma$  to  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ , is the most classical way of defining tangential operators. Hence the differential calculus on manifolds can be reduced to classical differential calculus in  $\mathbb{R}^d$ . In this section we recall, standard formulas for differential tangential operators using arbitrary extensions. We also emphasize the particular case where the extension is of the canonical type  $(f \circ p)$ . This is the basis of a simple differential calculus in the neighbourhood of  $\Gamma$ .

**Definition 4.5** For  $\Gamma$  of class  $\mathcal{C}^2$ , given any extension  $F \in \mathcal{C}^1(U(\Gamma))$  of  $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ , the tangential gradient of  $f$  is defined as,

$$\nabla_{\Gamma} f \stackrel{\text{def}}{=} \nabla F|_{\Gamma} - (\partial_n F) n \tag{4.38}$$

where  $\partial_n F = \nabla F \cdot n$ .

**Proposition 4.3 ([36])** Assume that  $\Gamma$  of class  $\mathcal{C}^2$  is compact and  $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ , then

i)

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma} f &= (P \nabla F)|_{\Gamma} \\ n \cdot \nabla_{\Gamma} f &= \nabla b \cdot \nabla_{\Gamma} f = 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

where  $P \stackrel{\text{def}}{=} I - \nabla b \cdot {}^*\nabla b$  is the orthogonal projection operator onto the tangent plane  $T_{p(x)}\Gamma$ .

ii)

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ p) &= [I - b D^2 b] \nabla_{\Gamma} f \circ p \\ \nabla(f \circ p)|_{\Gamma} &= \nabla_{\Gamma} f \end{aligned} \tag{4.40}$$

Hence  $(f \circ p)$  plays the role of a canonical extension in the neighborhood  $U(\Gamma)$  and its gradient is tangent to the level sets of  $b$ . Consequently, we can define in an intrinsic way the tangential gradient,

**Definition 4.6** For  $\Gamma$  of class  $\mathcal{C}^2$  and  $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ , the tangential gradient of  $f$  is defined as,

$$\nabla_{\Gamma} f = \nabla(f \circ p)|_{\Gamma} \tag{4.41}$$

In the sequel, we shall use the above definition for the tangential gradient whenever the function under derivation is intrinsically defined on  $\Gamma$ . We now define the other classical tangential operators,

**Definition 4.7** For  $\Gamma$  of class  $\mathcal{C}^2$ ,

i) for  $v \in (\mathcal{C}^1(\Gamma))^d$ , and  $\tilde{v} \in (\mathcal{C}^1(U(\Gamma)))^d$  an arbitrary extension, the tangential jacobian is defined as follows,

$$\begin{aligned} D_\Gamma v &\stackrel{\text{def}}{=} D\tilde{v}|_\Gamma - (D\tilde{v} \cdot n)^* n \\ &= D\tilde{v}|_\Gamma - D\tilde{v} \cdot (n \otimes n) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} D(v \circ p) &= D_\Gamma v \circ p [I - b D^2 b] \\ D_\Gamma v &= D(v \circ p)|_\Gamma \end{aligned} \quad (4.43)$$

ii) for  $v \in (\mathcal{C}^1(\Gamma))^d$ , and  $\tilde{v} \in (\mathcal{C}^1(U(\Gamma)))^d$  an arbitrary extension, the tangential divergence is defined as follows,

$$\text{div}_\Gamma v \stackrel{\text{def}}{=} \text{div} \tilde{v}|_\Gamma - (D\tilde{v} \cdot n) \cdot n \quad (4.44)$$

Furthermore,

$$\text{div}_\Gamma v = \text{div}(v \circ p)|_\Gamma = \text{Tr}(D_\Gamma v) \quad (4.45)$$

iii) for  $f \in \mathcal{C}^2(\Gamma)$ , and  $F \in \mathcal{C}^2(U(\Gamma))$  an arbitrary extension, the tangential Laplace-Beltrami operator is defined as follows,

$$\Delta_\Gamma f = \Delta F|_\Gamma - H \partial_n F - \partial_n^2 F \quad (4.46)$$

with  $\partial_n^2 F = (D^2 F \cdot n) \cdot n$ . Furthermore,

$$\Delta_\Gamma f = \text{div}_\Gamma(\nabla_\Gamma f) = \Delta(f \circ p)|_\Gamma \quad (4.47)$$

In some cases, it may be interesting to use a splitting of the function  $v$  onto a normal and a tangential component,

**Definition 4.8** For  $v \in (\mathcal{C}^1(\Gamma))^d$ , we define the tangential component  $v_\Gamma \in (\mathcal{C}^1(\Gamma))^d$  and the normal component  $v_n \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$  such that,

$$v = v_\Gamma + v_n n \quad (4.48)$$

Using this definition, we obtain the following identities,

**Proposition 4.4** For  $v \in (\mathcal{C}^1(\Gamma))^d$ , we have

$$D_\Gamma v = D_\Gamma v_\Gamma + v_n \cdot D^2 b + n \cdot {}^* \nabla_\Gamma v_n \quad (4.49)$$

$$\nabla_\Gamma v_n = {}^* D_\Gamma v n + D^2 b v_\Gamma \quad (4.50)$$

$$\text{div}_\Gamma v = \text{div}_\Gamma v_\Gamma + H v_n \quad (4.51)$$

### 4.3.2.3 Tangential Stokes formula

In order to perform integration by parts on  $\Gamma$ , we will use the following tangential Stokes identity,

**Proposition 4.5** *Let  $\Gamma$  be a  $C^2$ -submanifold in  $\mathbb{R}^d$ , for  $E \in H^1(\Gamma; \mathbb{R}^d)$  and  $\psi \in H^1(\Gamma; \mathbb{R})$  the following identity holds*

$$\int_{\Gamma} \langle E, \nabla_{\Gamma} \psi \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_{\Gamma} (\operatorname{div}_{\Gamma} E) \psi = \int_{\Gamma} H \psi \langle E, n \rangle_{\mathbb{R}^d} \quad (4.52)$$

## 4.4 State derivative strategy

In this section, we shall prove the main theorem using an approach based on the differentiability of the solution of the Navier-Stokes system (Eq. (4.2)) with respect to the velocity field  $V$ . First we introduce a weak formulation for Eq. (4.2) and recall associated classical solvability results. Then, using the weak implicit function theorem, we will prove the existence of a weak material derivative. Finally, introducing adjoint equations associated to the linearized fluid and transverse systems, we will be able to express the gradient of the functional  $j(V)$ . For the sake of simplicity, we shall only prove the main theorem in the case of example (4.1) and with free divergence control velocity fields.

### 4.4.1 Weak formulation and solvability

In order to take into account the non-homogeneous Dirichlet boundary condition on  $\Gamma_t(V)$ , we use the following change of variable  $\tilde{u} = u - V$ , where  $\tilde{u}$  satisfies the following homogeneous Dirichlet Navier-Stokes system,

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + D \tilde{u} \cdot \tilde{u} + D \tilde{u} \cdot V + D V \cdot \tilde{u} - \nu \Delta \tilde{u} + \nabla p = F(V), & Q(V) \\ \operatorname{div}(\tilde{u}) = 0, & Q(V) \\ \tilde{u} = 0, & \Sigma(V) \\ \tilde{u}(0) = u_0 - V(0), & \Omega_0 \end{cases} \quad (4.53)$$

with  $F(V) = -\partial_t V - D V \cdot V + \nu \Delta V$ .

We consider the following classical functional spaces [106], [150],

$$\begin{aligned} H(D) &= \{v \in (L^2(D))^d, \operatorname{div} v = 0, \text{ in } D, \quad v \cdot n = 0 \text{ on } \partial D\} \\ H_0^1(\operatorname{div}, D) &= \{v \in (H_0^1(D))^d, \operatorname{div} v = 0, \text{ in } D\} \\ \mathcal{H} &= \{v \in L^2(0, T; (H_0^1(\operatorname{div}, \Omega_t(V))))^d\} \\ V &= \{v \in \mathcal{H}, \quad \partial_t v \in L^2(0, T; (H_0^1(\Omega_t(V))))^d\} \end{aligned}$$

In the sequel, we shall use the notation  $u$  instead of  $\tilde{u}$ , keeping in mind that the original variable is obtained by translation.

**Definition 4.9** *The function  $u \in V$  is called a weak solution of problem (4.53), if it satisfies the following identity,*

$$\langle e_V(u), v \rangle = \langle [e_V^1(u), e_V^2(u)], v \rangle = [0, 0], \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (4.54)$$

with

$$\langle e_V^1(u), v \rangle = \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [(\partial_t u + D u \cdot u + D u \cdot V + D V \cdot u) \cdot v + \nu D u \cdot \cdot D v - F(V) \cdot v] \quad (4.55)$$

$$\langle e_V^2(u), v \rangle = \int_{\Omega_0} (u(0) - \tilde{u}_0) \cdot v(0) \quad (4.56)$$

We set,

$$\mathcal{U} = \{V \in H^1(0, T; (H^m(D))^d), \quad \operatorname{div} V = 0 \text{ in } D, \quad V \cdot n = 0 \text{ on } \partial D\}$$

with  $m > 5/2$ .

**Theorem 4.9 ([43])** *We assume the domain  $\Omega_0$  to be of class  $\mathcal{C}^1$ . For  $V \in \mathcal{U}$  and  $u_0 \in H(D)$  such that  $u_0|_{\Omega_0} \in H(\Omega_0)$ ,*

1. *it exists at least a weak solution of problem (4.53) with  $u \in \mathcal{H} \cup L^\infty(0, T; H)$ ,*
2. *if  $u_0 \in (H^2(D))^d \cup H_0^1(\operatorname{div}, D)$  and  $\nu$  is large or  $u_0$  is a small data, then the uniqueness of a weak solution is guaranteed, and we have  $\partial_t u \in \mathcal{H} \cup L^\infty(0, T; H(\Omega_t))$ ,*
3. *if  $\Omega$  is of class  $\mathcal{C}^2$ ,  $u \in L^\infty(0, T; (H^2(\Omega_t))^d \cup H_0^1(\operatorname{div}, \Omega_t))$ .*

#### 4.4.2 Weak implicit function theorem and the Piola material derivative

We are interested in solving the following minimization problem :

$$\min_{V \in \mathcal{U}} j(V) \quad (4.57)$$

with

$$j(V) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} |u(V)|^2 + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} |V|^2 \quad (4.58)$$

**Theorem 4.10 ([44])** *Problem (4.57) admits at least one solution  $V^* \in \mathcal{U}$ .*

In order to derive first-order optimality conditions for problem (4.57), we need to analyse the derivability of the state  $u(V)$  with respect to  $V \in \mathcal{U}$ . There exist at least two methods in order to establish such a differentiability result :

- Limit analysis of the differential quotient,

$$\dot{u}(V; W) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} (u(V + \rho W) \circ T_t(V + \rho W) - u(V) \circ T_t(V))$$

- Application of the weak implicit function theorem and deduction of the local differentiability of the solution  $u(V)$  associated to the implicit equation  $e(u, v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}$ .

We recall here how the second method can be applied to our problem, following the result obtained in [44].

In order to work with divergence free functions, we need to introduce the Piola transform that preserves the free divergence condition.

**Lemma 4.1** ([15]) *The Piola transform,*

$$\begin{aligned} Pt : H_0^1(\operatorname{div}, \Omega_t(V)) &\longrightarrow H_0^1(\operatorname{div}, \Omega_t^\rho) \\ v &\mapsto (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \end{aligned}$$

*is an isomorphism.*

We consider the solution  $u_\rho = u(V + \rho W)$  defined on  $\Omega_t^\rho$  of the implicit equation,

$$\langle e_{(V+\rho W)}(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}^\rho$$

and we introduce  $\hat{u}_\rho = (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot (u_\rho \circ \mathcal{T}_\rho^t)$  defined on  $\Omega_t(V)$ .

**Lemma 4.2** *The element  $u_\rho$  is solution of the equation :*

$$\langle e_{(V+\rho W)}(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}^\rho$$

*if and only if  $\hat{u}_\rho$  is solution of the following equation,*

$$\langle e^\rho(\hat{u}_\rho), \hat{v} \rangle = 0, \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{H}$$

*with*

$$\langle e_1^\rho(v), w \rangle =$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [(\partial_t(\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot v)) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) - (\operatorname{D}(\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot (\partial_t \mathcal{T}_\rho^t)) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot w)$$

$$(\operatorname{D}(\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot v) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) + (\operatorname{D}(\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot ((V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t)) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot w)$$

$$+(\operatorname{D}((V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot v) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot w)$$

$$+\nu(\operatorname{D}(\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (\operatorname{D}(\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t)^{-1})$$

$$-(F(V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot (\operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot w)]$$

$$\langle e_2^\rho(v), w \rangle = \int_\Omega (v(0) - \hat{u}_0) \cdot w$$

*with*

$$F(V) = -\partial_t V - \operatorname{D} V \cdot V + \nu \Delta V$$

*and*

$$\partial_t \mathcal{T}_\rho^t = (V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t - \operatorname{D} \mathcal{T}_\rho^t \cdot V$$

**Proof :** We consider the solution  $u_\rho$  of the perturbed state equation  $e_{(V+\rho W)} = 0$ , with

$$\begin{aligned} \langle e_{(V+\rho W)}(u), v \rangle = \int_0^T \int_{\Omega_t^\rho} [(\partial_t u + D u \cdot u + D u \cdot (V + \rho W) + D(V + \rho W) \cdot u) \cdot v \\ + \nu D u \cdot \cdot D v - F(V + \rho W) \cdot v] \end{aligned}$$

with  $v \in \mathcal{H}^\rho$ .

We introduce the variables  $(\hat{u}, \hat{v})$  defined in  $\Omega_t(V)$  such that,

$$[u, v] = [(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}, (D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{v}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}]$$

We replace this new representation inside the state equation and we use a back transport in  $\Omega_t(V)$ , this leads to the following identity,

$$\begin{aligned} \langle e_1^\rho(\hat{u}), \hat{v} \rangle = \int_{Q(V)} [(\partial_t((D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) + D((D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \\ + D((D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (V + \rho W) + D(V + \rho W) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{v}) \\ + \nu D((D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t \cdot \cdot (D((D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{v}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1})) \circ \mathcal{T}_\rho^t \\ - F(V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{v})] \end{aligned}$$

**Lemma 4.3**

$$D((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t = (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \quad (4.59)$$

$$\partial_t((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t = -(D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot \partial_t \mathcal{T}_\rho^t \quad (4.60)$$

$$\partial_t((D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t = \partial_t(D \mathcal{T}_\rho^t \circ \hat{u}) - D(D \mathcal{T}_\rho^t \circ \hat{u}) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot \partial_t \mathcal{T}_\rho^t \quad (4.61)$$

**Proof :** Using the identity,

$$(\mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \circ \mathcal{T}_\rho^t = I$$

we get

$$\begin{aligned} D((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \circ \mathcal{T}_\rho^t) &= I \\ D((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t \cdot D \mathcal{T}_\rho^t &= I \end{aligned}$$

by differentiation with respect to time t, we also get,

$$\begin{aligned} \partial_t((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \circ \mathcal{T}_\rho^t) &= 0 \\ \partial_t((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t + D((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t \cdot \partial_t \mathcal{T}_\rho^t &= 0 \\ \partial_t((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t + (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot \partial_t \mathcal{T}_\rho^t &= 0 \end{aligned}$$

Using the chain rule, we deduce

$$\begin{aligned}
 [\partial_t((D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1})] \circ \mathcal{T}_\rho^t &= [\partial_t(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \\
 &\quad + D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot \partial_t((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1})] \circ \mathcal{T}_\rho^t \\
 &= \partial_t(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) + D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \cdot \partial_t((\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t \\
 &= \partial_t(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) - D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u}) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot \partial_t \mathcal{T}_\rho^t
 \end{aligned}$$

□

In order to get the correct state operator, we need also the following identities,

**Lemma 4.4**

$$D(\phi \circ (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \circ \mathcal{T}_\rho^t = D(\phi) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \quad (4.62)$$

$$D(V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t) = D((V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t) \quad (4.63)$$

We shall apply the first identity with  $\phi = (D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \hat{u})$ . Finally, using all the identities proven above, we deduce the expression of  $e_\rho^1(\hat{u}, \hat{v})$ . Now, we simply need to prove the following lemma in order to conclude the proof,

**Lemma 4.5**

$$\partial_t \mathcal{T}_\rho^t = (V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t - D \mathcal{T}_\rho^t \cdot V \quad (4.64)$$

**Proof :** We use the definition of the Transverse map,

$$\begin{aligned}
 \partial_t(\mathcal{T}_\rho^t) &= \partial_t(T_t(V + \rho W) \circ T_t(V)^{-1}) \\
 &= \partial_t(T_t(V + \rho W)) \circ T_t(V)^{-1} + D(T_t(V + \rho W)) \circ T_t(V)^{-1} \cdot \partial_t(T_t(V)^{-1}) \\
 &= ((V + \rho W) \circ T_t(V + \rho W)) \circ T_t(V)^{-1} \\
 &\quad - D(T_t(V + \rho W)) \circ T_t(V)^{-1} \cdot (D T_t^{-1}(V)) \cdot \partial_t(T_t(V)) \circ T_t^{-1}(V) \\
 &= (V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t - D(T_t(V + \rho W) \circ T_t(V)^{-1}) \cdot \partial_t(T_t(V)) \circ T_t^{-1}(V) \\
 &= (V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t - D(\mathcal{T}_\rho^t) \cdot V
 \end{aligned}$$

□

□

We now consider the application,

$$\begin{aligned}
 [0, \rho_0] \times V &\rightarrow \mathcal{H}^* \times H_0^1(\text{div}, \Omega_0) \\
 (\rho, v) &\mapsto e^\rho(v)
 \end{aligned} \quad (4.65)$$

and

$$\begin{aligned}
 [0, \rho_0] &\rightarrow \mathcal{H} \\
 \rho &\mapsto \hat{u}_\rho = (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot (u_\rho \circ \mathcal{T}_\rho^t)
 \end{aligned} \quad (4.66)$$

where  $\hat{u}_\rho \in V$  is solution of the state equation,

$$\langle e^\rho(v), w \rangle = 0, \quad \forall w \in \mathcal{H} \quad (4.67)$$

**Lemma 4.6 ([145])** For any  $F \in H^s(D)$ , with  $s \geq 1$ ,

$$\frac{1}{\rho}(F \circ \mathcal{T}_\rho - F) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \nabla F \cdot Z_t \quad (4.68)$$

strongly in  $H^{s-1}(D)$ . In the case  $s < 1$ , the convergence only holds weakly in  $H^{s-1}(D)$ .

In order to prove the differentiability of  $\hat{u}_\rho$  with respect to  $\rho$  in a neighbourhood of  $\rho = 0$ , we cannot use the classical implicit function theorem, since it requires strong differentiability results in  $H^{-1}$  for our application. Then we shall use the weak implicit function theorem, recalled below,

**Theorem 4.11 ([159])** Let  $X, Y^*$  be two Banach spaces,  $I$  an open bounded set in  $\mathbb{R}$ , and consider the following mapping,

$$\begin{aligned} e : I \times X &\rightarrow Y^* \\ (\rho, x) &\mapsto e(\rho, x) \end{aligned}$$

Let us assume the following hypothesis,

- a)  $\rho \mapsto \langle e(\rho, x), y \rangle$  is continuously differentiable for any  $y \in Y$  and  $(\rho, x) \mapsto \langle \partial_\rho e(\rho, x), y \rangle$  is continuous.
- b) It exists  $u \in X$  such that,

$$\begin{aligned} u &\in C^{0,1}(I; X) \\ e(\rho, u(\rho)) &= 0, \quad \forall \rho \in I \end{aligned}$$

- c)  $x \mapsto e(\rho, x)$  is differentiable and  $(\rho, x) \mapsto \partial_x e(\rho, x)$  is continuous.
- d) It exists  $\rho_0 \in I$  such that  $\partial_x e(\rho, x)|_{(\rho_0, x(\rho_0))} \in \text{ISOM}(X, Y^*)$ .

then the mapping

$$\begin{aligned} u(\cdot) : I &\rightarrow X \\ \rho &\mapsto u(\rho) \end{aligned}$$

is differentiable at point  $\rho = \rho_0$  for the weak topology in  $X$  and its weak derivative  $\dot{u}(\rho)$  is solution of the following linearized equation,

$$\langle \partial_x e(\rho_0, u(\rho_0)) \cdot \dot{u}(\rho_0), y \rangle + \langle \partial_\rho e(\rho_0, u(\rho_0)), y \rangle = 0, \quad \forall y \in Y \quad (4.69)$$



In order to apply the above theorem to Eq. (4.67), we need to state the following properties,

**Lemma 4.7** *The mapping,*

$$\begin{aligned} [0, \rho_0] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \rho &\mapsto \langle e^\rho(v), w \rangle \end{aligned} \quad (4.70)$$

is  $\mathcal{C}^1$  for any  $(v, w) \in V \times \mathcal{H}$  and its derivative is given by the following expression,

$$\begin{aligned} \langle \partial_\rho e_1^\rho(v), w \rangle = & \\ & \int_{Q(V)} [(\partial_t(D(\mathcal{Z}_\rho^t \cdot \mathcal{T}_\rho^t) \cdot v)) + (D(D(\mathcal{Z}_\rho^t \cdot \mathcal{T}_\rho^t) \cdot v) \cdot V + (D(D(\mathcal{Z}_\rho^t \cdot \mathcal{T}_\rho^t) \cdot v) \cdot v) \\ & + D[(D(V + \rho W) \cdot \mathcal{Z}_\rho^t) \circ \mathcal{T}_\rho^t + W \circ \mathcal{T}_\rho^t] \cdot v - \partial_\rho(F(V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t)] \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) \\ & + [(\partial_t(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v)) + (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot V + (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot v) \\ & + (D((V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot v) - (F(V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t)] \cdot (D(\mathcal{Z}_\rho^t \cdot \mathcal{T}_\rho^t) \cdot w) \\ & + \nu(D(D(\mathcal{Z}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot v) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \\ & - \nu(D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot D(\mathcal{Z}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \\ & + \nu(D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (D(D(\mathcal{Z}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot w) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \\ & - \nu(D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot D(\mathcal{Z}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \end{aligned}$$

**Proof :** We first simplify the expression of the weak state operator, using that

$$\partial_t \mathcal{T}_\rho^t = (V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t - D \mathcal{T}_\rho^t \cdot V$$

and we get,

$$\begin{aligned} \langle e_1^\rho(v), w \rangle = & \\ & \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [(\partial_t(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v)) + (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot V + (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot v) \\ & + (D((V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot v) - (F(V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t)] \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) \\ & + \nu(D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \end{aligned}$$

We use the expression of the weak state operator and the following identities,

$$\partial_\rho \mathcal{T}_\rho^t = \mathcal{Z}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t$$

$$\partial_\rho(\mathbb{D} \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} = -(\mathbb{D} \mathcal{T}_\rho^t)^{-1} \cdot \mathbb{D}(\mathcal{Z}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot (\mathbb{D} \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}$$

□

**Lemma 4.8** *The mapping,*

$$\begin{aligned} [0, \rho_0] \times V &\rightarrow \mathcal{H}^* \\ (\rho, v) &\mapsto \partial_\rho e^\rho(v) \end{aligned} \quad (4.71)$$

*is weakly continuous*

**Proof :** We can prove that for  $(V, W) \in V$ , the associated flow  $\mathcal{T}_\rho^t \in \mathcal{C}^1([0, \rho_0[; \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^3))$ , and the weak continuity follows easily.

□

In order to apply the implicit function derivative identity, we need to express the derivative  $\partial_\rho e^\rho(v)$  at point  $\rho = 0$ ,

**Lemma 4.9**

$$\langle \partial_\rho e_1^\rho|_{\rho=0}(v), w \rangle =$$

$$\begin{aligned} &\int_{Q(V)} [\partial_t(\mathbb{D} Z_t \cdot v) + \mathbb{D}(\mathbb{D} Z_t \cdot v) \cdot V + \mathbb{D}(\mathbb{D} Z_t \cdot v) \cdot v + \mathbb{D}[\mathbb{D} V \cdot Z_t + W] \cdot v] \cdot w \\ &+ [\partial_t v + \mathbb{D} v \cdot V + \mathbb{D} v \cdot v + \mathbb{D} V \cdot v] \cdot (\mathbb{D} Z_t \cdot w) + \nu \mathbb{D}(\mathbb{D} Z_t \cdot v) \cdot \mathbb{D} w \\ &- \nu(\mathbb{D} v \cdot \mathbb{D} Z_t) \cdot \mathbb{D} w + \nu \mathbb{D} v \cdot \mathbb{D}(\mathbb{D} Z_t \cdot w) - \nu \mathbb{D} v \cdot (\mathbb{D} w \cdot \mathbb{D} Z_t) \\ &+ [\partial_t W + \mathbb{D} W \cdot V + \mathbb{D} V \cdot W - \nu \Delta W] \cdot w + (\mathbb{D}[\partial_t V + \mathbb{D} V \cdot V - \nu \Delta V] \cdot Z_t) \cdot w \\ &+ [\partial_t V + \mathbb{D} V \cdot V - \nu \Delta V] \cdot (\mathbb{D} Z_t \cdot w) \end{aligned}$$

**Proof :** We set  $\rho = 0$  in the expression of  $\langle \partial_\rho e^\rho(v), w \rangle$  and we use the following identities,

$$\mathcal{T}_{\rho=0}^t = \mathbb{I}$$

$$\mathcal{Z}_\rho^t|_{\rho=0} \stackrel{\text{def}}{=} Z_t$$

□

**Lemma 4.10** *The mapping,*

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathcal{H}^* \\ v &\mapsto e^\rho(v) \end{aligned} \quad (4.72)$$

is differentiable for any  $\rho \in [0, \rho_0]$  and its derivative is given by the following expression,

$$\begin{aligned} \langle \partial_v e_1^\rho(v) \cdot \delta v, w \rangle = & \\ & \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [(\partial_t(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \delta v)) + D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \delta v) \cdot V + D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \delta v) \cdot v + D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot v) \cdot \delta v \\ & + (D((V + \rho W) \circ \mathcal{T}_\rho^t) \cdot \delta v)] + \nu(D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot \delta v) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \cdot (D(D \mathcal{T}_\rho^t \cdot w) \cdot (D \mathcal{T}_\rho^t)^{-1}) \end{aligned}$$

and the mapping,

$$\begin{aligned} [0, \rho_0] \times V &\rightarrow \mathcal{L}(V; \mathcal{H}^*) \\ (\rho, v) &\mapsto \partial_v e^\rho(v) \end{aligned} \quad (4.73)$$

is continuous.

**Lemma 4.11** *The mapping,*

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathcal{F} \\ \delta v &\mapsto \partial_v e^{\rho=0}(v) \cdot \delta v \end{aligned} \quad (4.74)$$

is an isomorphism and its expression is furnished by the following identity,

$$\begin{aligned} \langle \partial_v e_1^{\rho=0}(v) \cdot \delta v, w \rangle = & \\ & \int_{Q(V)} [(\partial_t \delta v) \cdot w + (D \delta v \cdot v) \cdot w + (D v \cdot \delta v) \cdot w + (D \delta v \cdot V) \cdot w \\ & + (D V \cdot \delta v) \cdot w + \nu D \delta v \cdot \cdot D w] \end{aligned}$$

**Proof :** This result follows from the uniqueness result for the Navier-Stokes system under regularity and smallness assumptions (see Th. (4.9) and [150]). Indeed, for  $u_1$  and  $u_2$  solutions of the Navier-Stokes equations, it is proven that the element  $y = u_1 - u_2$  satisfying the following identity,

$$\begin{aligned} \int_{Q(V)} [(\partial_t y) \cdot w + (D y \cdot u_1) \cdot w + (D u_2 \cdot y) \cdot w + (D y \cdot V) \cdot w + (D V \cdot y) \cdot w \\ + \nu D y \cdot \cdot D w] = 0, \quad \forall w \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

exists and is identically equal to the null function. Similar a-priori estimates holds for  $\delta v$  and the unique solvability of the linearized system is established.

□

**Lemma 4.12** *The solution  $\hat{u}_\rho \in V$  of the implicit equation,*

$$\langle e^\rho(v), w \rangle = 0, \quad \forall w \in \mathcal{H} \quad (4.75)$$

is Lipschitz with respect to  $\rho$ .

**Proof :** We need the identity satisfied by  $\hat{u}_{\rho_1} - \hat{u}_{\rho_2}$  and we shall follow the same steps described in [41] (pp. 31).

□

Hence the hypothesis of Th. (4.11) are satisfied by the Eq. (4.67) and we can state the following differentiability result,

**Theorem 4.12** *The Piola material derivative  $\dot{u}^P = \partial_\rho(\hat{u}_\rho)|_{\rho=0}$  exists and is characterized by the linear tangent equation,*

$$\langle \partial_v e^{\rho=0}(v)|_{v=\hat{u}} \cdot \dot{u}^P, w \rangle + \langle \partial_\rho e^\rho(\hat{u})|_{\rho=0}, w \rangle = 0, \quad \forall w \in \mathcal{H} \quad (4.76)$$

which possesses the following structure,

$$\begin{aligned} \int_{Q(V)} [(\partial_t \dot{u}^P) \cdot w + (D \dot{u}^P \cdot u) \cdot w + (D u \cdot \dot{u}^P) \cdot w + (D \dot{u}^P \cdot V) \cdot w \\ + (D V \cdot \dot{u}^P) \cdot w + \nu D \dot{u}^P \cdot \cdot D w] = \langle L(u, Z_t, V, W), w \rangle \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \langle L(u, Z_t, V, W), w \rangle = & \\ & - \int_{Q(V)} [\partial_t (D Z_t \cdot u) + D (D Z_t \cdot u) \cdot V + D (D Z_t \cdot u) \cdot u + D [D V \cdot Z_t + W] \cdot u] \cdot w \\ & - [\partial_t u + D u \cdot V + D u \cdot u + D V \cdot u] \cdot (D Z_t \cdot w) - \nu D (D Z_t \cdot u) \cdot \cdot D w \\ & + \nu (D u \cdot D Z_t) \cdot \cdot D w - \nu D u \cdot \cdot D (D Z_t \cdot w) + \nu D u \cdot \cdot (D w \cdot D Z_t) \\ & + [-\partial_t W - D W \cdot V - D V \cdot W + \nu \Delta W] \cdot w - (D [\partial_t V + D V \cdot V - \nu \Delta V] \cdot Z_t) \cdot w \\ & - [\partial_t V + D V \cdot V - \nu \Delta V] \cdot (D Z_t \cdot w) \end{aligned}$$

### 4.4.3 Shape derivative

In the last section, we have proven that the solution  $u(V)$  of the moving Navier-Stokes system is differentiable with respect to the velocity  $V$ . We have also characterized the linearized system satisfied by the Piola material derivative  $\dot{u}^P(V) \cdot W$ . In this paragraph, we will identify the shape derivative  $u'(V) \cdot W$  under some regularity assumptions.

Let us consider the weak solution  $\tilde{u}$  of Eq. (4.53), i.e

$$\langle e_V(\tilde{u}), v \rangle = \langle [e_V^1(u), e_V^2(u)], v \rangle = [0, 0], \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (4.77)$$

with

$$\langle e_V^1(\tilde{u}), v \rangle = \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [(\partial_t \tilde{u} + D \tilde{u} \cdot \tilde{u} + D \tilde{u} \cdot V + D V \cdot \tilde{u}) \cdot v + 2\nu \varepsilon(\tilde{u}) \cdot \cdot \varepsilon(v) - F(V) \cdot v] \quad (4.78)$$

$$\langle e_V^2(\tilde{u}), v \rangle = \int_{\Omega_0} (\tilde{u}(0) - u_0) \cdot v(0) \quad (4.79)$$

where  $\varepsilon(v) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}v + {}^* \mathbf{D}v)$  stands for the symmetrical deviation tensor. This definition is motivated by the following lemma,

**Lemma 4.13**

$$-\nu \int_{\Omega_t} \Delta u \cdot v = 2\nu \int_{\Omega_t} \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) - 2\nu \int_{\Gamma_t} \langle \varepsilon(u) \cdot n, v \rangle, \quad \forall v \in H^1(\text{div}, \Omega_t) \quad (4.80)$$

**Theorem 4.13** For  $\Omega_0$  of class  $\mathcal{C}^2$ , the shape derivative  $\tilde{u}' = \dot{\tilde{u}} - \mathbf{D}\tilde{u} \cdot Z_t$  exists and is characterized as the solution of the following linearized system,

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}' + \mathbf{D}\tilde{u}' \cdot \tilde{u} + \mathbf{D}\tilde{u} \cdot \tilde{u}' + \mathbf{D}\tilde{u}' \cdot V + \mathbf{D}V \cdot \tilde{u}' - \nu \Delta \tilde{u}' + \nabla p' = L(V, W), & Q \\ \text{div}(\tilde{u}') = 0, & Q \\ \tilde{u}' = -(\mathbf{D}\tilde{u} \cdot n) \langle Z_t, n \rangle, & \Sigma \\ \tilde{u}'(0) = 0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (4.81)$$

with

$$L(V, W) = -\partial_t W - \mathbf{D}W \cdot V - \mathbf{D}V \cdot W + \nu \Delta W - \mathbf{D}\tilde{u} \cdot W - \mathbf{D}W \cdot \tilde{u} \quad (4.82)$$

**Proof :** In order to state such a result, we use Th. (4.4) and we get,

$$\frac{d}{dV} \left( \int_{\Omega_t(V)} G(V) dx \right) \cdot W = \int_{\Omega_t(V)} G'(V) \cdot W dx + \int_{\Gamma_t(V)} G \langle Z_t, n \rangle \quad (4.83)$$

where  $G'(V) \cdot W$  stands for non-cylindrical shape derivative of  $G$  and  $Z_t$  is the transverse vector field solution of the Transverse Equation (Eq. (4.23)) with

$$G = [(\partial_t \tilde{u} + \mathbf{D}\tilde{u} \cdot \tilde{u} + \mathbf{D}\tilde{u} \cdot V + \mathbf{D}V \cdot \tilde{u}) \cdot v + \nu \varepsilon(\tilde{u}) \cdot \varepsilon(v) - F(V) \cdot v]$$

We assume that  $v$  has a compact support, then  $G|_{\Gamma_t(V)} = 0$ .

**Lemma 4.14**

$$\begin{aligned} G'(V) \cdot W &= [(\partial_t \tilde{u}' + \mathbf{D}\tilde{u}' \cdot \tilde{u} + \mathbf{D}\tilde{u} \cdot \tilde{u}' + \mathbf{D}\tilde{u}' \cdot V + \mathbf{D}\tilde{u} \cdot W \\ &\quad + \mathbf{D}W \cdot \tilde{u} + \mathbf{D}V \cdot \tilde{u}') \cdot v + \nu \varepsilon(\tilde{u}') \cdot \varepsilon(v) - F'(V) \cdot W \cdot v] \end{aligned}$$

with

$$F'(V) \cdot W = -\partial_t W - \mathbf{D}W \cdot V - \mathbf{D}V \cdot W + \nu \Delta W$$

Finally we obtain,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV} \langle e_1(\tilde{u}) \cdot W, \cdot v \rangle &= \int_{Q(V)} [(\partial_t \tilde{u}' + \mathbf{D}\tilde{u}' \cdot \tilde{u} + \mathbf{D}\tilde{u} \cdot \tilde{u}' + \mathbf{D}\tilde{u}' \cdot V + \mathbf{D}\tilde{u} \cdot W \\ &\quad + \mathbf{D}W \cdot \tilde{u} + \mathbf{D}V \cdot \tilde{u}') \cdot v + \nu \varepsilon(\tilde{u}') \cdot \varepsilon(v) - F'(V) \cdot W \cdot v] \end{aligned}$$

for any  $v \in \mathcal{H}$  with compact support.

Using integration by parts for the term  $\int_{Q(V)} \nu \varepsilon(\tilde{u}') \cdot \cdot \varepsilon(v)$ , we recover the correct strong formulation of the linearized equation (Eq. (4.81)) satisfied by the shape derivative  $u'(V) \cdot W$ .

The boundary condition comes from the fact that the shape derivative of the condition  $\tilde{u} = 0$ , on  $\Gamma_t(V)$  is given by

$$\tilde{u}' = -D u \cdot Z_t, \text{ on } \Gamma_t(V)$$

Since  $u = 0$  on  $\Gamma_t(V)$ , we have  $D u|_{\Gamma_t} = D u \cdot (n \otimes n)$  which gives

$$\tilde{u}' = -(D u \cdot n) \langle Z_t, n \rangle, \text{ on } \Gamma_t(V)$$

□

The shape derivative  $u'(V) \cdot W$  of the solution  $u$  of the original non-homogeneous Dirichlet boundary problem (Eq. (4.2)) is given by the expression

$$u'(V) \cdot W = \tilde{u}'(V) \cdot W + W \tag{4.84}$$

**Corollary 4.1** *The shape derivative  $u'(V) \cdot W$  of the solution  $u$  of Eq. (4.2) exists and satisfies the following linearized problem,*

$$\begin{cases} \partial_t u' + D u' \cdot u + D u \cdot u' - \nu \Delta u' + \nabla p' = 0, & Q \\ \operatorname{div}(u') = 0, & Q \\ u' = W + (D V \cdot n - D u \cdot n) \langle Z_t, n \rangle, & \Sigma \\ u'(0) = 0, & \Omega_0 \end{cases} \tag{4.85}$$

**Proof :** We simply set in Eq. (4.81),  $\tilde{u}' = u' - W$  and  $\tilde{u} = u - V$ .

□

**Remark 4.4** *If we choose  $V = (V \circ p)$  the canonical extension of  $V$  in Eq. (4.85), then we get the simpler boundary condition,*

$$u' = W - (D u \cdot n) \langle Z_t, n \rangle, \quad \text{on } \Gamma_t(V) \tag{4.86}$$

#### 4.4.4 Extractor Identity

In the last section, we have established the structure of the system satisfied by the non-cylindrical shape derivative  $u'(V) \cdot W$  of the solution  $u(V)$  of the Navier-Stokes problem in the moving domain  $\Omega_t(V)$ . This linearized system has been obtained independently of the system satisfied by the non-cylindrical material derivative  $\hat{u}^P(V) \cdot W$ . However, there exists an explicit relation between the original shape  $u'$  and the Piola material derivative  $\hat{u}^P(V) \cdot W$  of the shift state  $\tilde{u} = u - V$ .

**Lemma 4.15** *Let  $u(V)$  stands for the weak solution of the non-homogeneous Navier-Stokes equations (Eq. (4.2)) in moving domain,  $u'(V) \cdot W$  stands for its shape derivative*

and  $\dot{\tilde{u}}^P(V) \cdot W$  stands for the Piola material derivative of the shift flow  $\tilde{u} = u(V) - V$  in the direction  $W$ . Then the following identity holds,

$$\dot{\tilde{u}}^P(V) \cdot W = \tilde{u}'(V) \cdot W + [\tilde{u}(V), Z_t] \quad (4.87)$$

$$= u'(V) \cdot W + [u(V), Z_t] - [V, Z_t] - W \quad (4.88)$$

where  $[X, Y] = D X \cdot Y - D Y \cdot X$ .

This relation can be fruitful in order to obtain an identity concerning the solution  $\tilde{u}(V)$  inside  $\Omega_t(V)$ .

**Proposition 4.6** *We consider  $\Omega_0$  of class  $\mathcal{C}^2$ , for all  $(V, W) \in \mathcal{U}$ ,  $\tilde{u}$  solution of the homogeneous Navier-Stokes equations (Eq. (4.53)) and  $Z_t$  solution of Eq. (4.23), the following identity holds,*

$$\begin{aligned} & \int_{Q(V)} [\partial_t(D \tilde{u} \cdot Z_t) + D(D \tilde{u} \cdot Z_t) \cdot \tilde{u} + D \tilde{u} \cdot (D \tilde{u} \cdot Z_t) + D(D \tilde{u} \cdot Z_t) \cdot V \\ & + D V \cdot (D \tilde{u} \cdot Z_t)] \cdot w - \int_{Q(V)} [D \tilde{u} \cdot (D Z_t \cdot \tilde{u}) + D V \cdot (D Z_t \cdot \tilde{u}) - D(D V \cdot Z_t) \cdot \tilde{u}] \cdot w \\ & + [\partial_t \tilde{u} + D \tilde{u} \cdot V + D \tilde{u} \cdot \tilde{u} + D V \cdot \tilde{u}] \cdot (D Z_t \cdot w) - D \tilde{u} \cdot W \cdot w \\ & + \nu D(D \tilde{u} \cdot Z_t) \cdot \cdot D w - \nu(D \tilde{u} \cdot D Z_t) \cdot \cdot D w + \nu D \tilde{u} \cdot \cdot D(D Z_t \cdot w) - \nu D \tilde{u} \cdot \cdot (D w \cdot D Z_t) \\ & + (D[\partial_t V + D V \cdot V - \nu \Delta V] \cdot Z_t) \cdot w + [\partial_t V + D V \cdot V - \nu \Delta V] \cdot (D Z_t \cdot w) = 0, \quad \forall w \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

**Proof :** We recall that the shape derivative  $\tilde{u}'$  satisfies the following identity,

$$\int_{Q(V)} [\partial_t \tilde{u}' + D \tilde{u}' \cdot \tilde{u} + D \tilde{u} \cdot \tilde{u}' + D \tilde{u}' \cdot V + D V \cdot \tilde{u}'] \cdot w + \nu D \tilde{u}' \cdot \cdot D w = \langle \ell_1, w \rangle$$

with

$$\langle \ell_1, w \rangle = \int_{Q(V)} [-\partial_t W - D W \cdot V - D V \cdot W + \nu \Delta W - D \tilde{u} \cdot W - D W \cdot \tilde{u}] \cdot w$$

Then we set  $\tilde{u}'(V) = \dot{\tilde{u}}^P - [\tilde{u}, Z_t] = \dot{\tilde{u}}^P - D \tilde{u} \cdot Z_t + D Z_t \cdot \tilde{u}$ . This leads to the following identity,

$$\begin{aligned} & \int_{Q(V)} [(\partial_t \dot{\tilde{u}}^P) \cdot w + (D \dot{\tilde{u}}^P \cdot u) \cdot w + (D u \cdot \dot{\tilde{u}}^P) \cdot w + (D \dot{\tilde{u}}^P \cdot V) \cdot w \\ & + (D V \cdot \dot{\tilde{u}}^P) \cdot w + \nu D \dot{\tilde{u}}^P \cdot \cdot D w] = \langle \ell_2, w \rangle \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
 \langle \ell_2, w \rangle = & \int_{Q(V)} [\partial_t(D\tilde{u} \cdot Z_t) + D(D\tilde{u} \cdot Z_t) \cdot \tilde{u} + D\tilde{u} \cdot (D\tilde{u} \cdot Z_t) + D(D\tilde{u} \cdot Z_t) \cdot V \\
 & + DV \cdot (D\tilde{u} \cdot Z_t)] \cdot w - \int_{Q(V)} [\partial_t(DZ_t \cdot \tilde{u}) + D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot \tilde{u} + D\tilde{u} \cdot (DZ_t \cdot \tilde{u}) \\
 & + D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot V + DV \cdot (DZ_t \cdot \tilde{u})] \cdot w + \int_{Q(V)} [\nu D(D\tilde{u} \cdot Z_t) \cdot \cdot Dw - \nu D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot \cdot Dw] \\
 & + \int_{Q(V)} [-\partial_t W - DW \cdot V - DV \cdot W + \nu \Delta W - D\tilde{u} \cdot W - DW \cdot \tilde{u}] \cdot w
 \end{aligned}$$

Using Theorem (4.12), we deduce that,

$$\langle \ell_2, w \rangle = \langle L, w \rangle, \quad \forall w \in \mathcal{H} \tag{4.89}$$

with,

$$\begin{aligned}
 \langle L, w \rangle = & - \int_{Q(V)} [\partial_t(DZ_t \cdot \tilde{u}) + D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot \tilde{u} + D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot V + D(DV \cdot Z_t) \cdot \tilde{u} + DW \cdot \tilde{u}] \cdot w \\
 & - [\partial_t \tilde{u} + D\tilde{u} \cdot V + D\tilde{u} \cdot \tilde{u} + DV \cdot \tilde{u}] \cdot (DZ_t \cdot w) - \nu D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot \cdot Dw \\
 & + \nu (D\tilde{u} \cdot DZ_t) \cdot \cdot Dw - \nu D\tilde{u} \cdot \cdot D(DZ_t \cdot w) + \nu D\tilde{u} \cdot \cdot (Dw \cdot DZ_t) \\
 & + [-\partial_t W - DW \cdot V - DV \cdot W + \nu \Delta W] \cdot w - (D[\partial_t V + DV \cdot V - \nu \Delta V] \cdot Z_t) \cdot w \\
 & - [\partial_t V + DV \cdot V - \nu \Delta V] \cdot (DZ_t \cdot w)
 \end{aligned}$$

The sequence

$$\begin{aligned}
 & [-\partial_t(DZ_t \cdot \tilde{u}) - D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot \tilde{u} - D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot V - DW \cdot \tilde{u}] \cdot w - \nu D(DZ_t \cdot \tilde{u}) \cdot \cdot Dw \\
 & + [-\partial_t W - DW \cdot V - DV \cdot W + \nu \Delta W] \cdot w
 \end{aligned}$$



cancel and it remains the following terms,

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q(V)} [\partial_t(D\tilde{u} \cdot Z_t) + D(D\tilde{u} \cdot Z_t) \cdot \tilde{u} + D\tilde{u} \cdot (D\tilde{u} \cdot Z_t) + D(D\tilde{u} \cdot Z_t) \cdot V \\
 & + DV \cdot (D\tilde{u} \cdot Z_t)] \cdot w - \int_{Q(V)} [D\tilde{u} \cdot (DZ_t \cdot \tilde{u}) + DV \cdot (DZ_t \cdot \tilde{u}) - D(DV \cdot Z_t) \cdot \tilde{u}] \cdot w \\
 & + [\partial_t\tilde{u} + D\tilde{u} \cdot V + D\tilde{u} \cdot \tilde{u} + DV \cdot \tilde{u}] \cdot (DZ_t \cdot w) - D\tilde{u} \cdot W \cdot w \\
 & + \nu D(D\tilde{u} \cdot Z_t) \cdot D w - \nu(D\tilde{u} \cdot DZ_t) \cdot D w + \nu D\tilde{u} \cdot D(DZ_t \cdot w) - \nu D\tilde{u} \cdot (Dw \cdot DZ_t) \\
 & + (D[\partial_t V + DV \cdot V - \nu\Delta V] \cdot Z_t) \cdot w + [\partial_t V + DV \cdot V - \nu\Delta V] \cdot (DZ_t \cdot w) = 0
 \end{aligned}$$

□

**Remark 4.5** If we set  $\tilde{u} = u - V$ , we can obtain an identity only involving  $(u, Z_t, V, W)$ .

#### 4.4.5 Adjoint system and cost function shape derivative

We are now coming back to the original problem of computing the gradient of the cost function  $j(V)$ . Let us first state a differentiability property,

**Proposition 4.7** For  $\Omega_0$  of class  $C^2$ , the functional  $j(V)$  is Gâteaux differentiable at point  $V \in \mathcal{U}$  and its directional derivative has the following expression,

$$\begin{aligned}
 \langle j'(V), W \rangle = \int_{Q(V)} \alpha u(V) \cdot u'(V) \cdot W + \int_{\Sigma(V)} \left[ \gamma V \cdot W + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2 \langle Z_t, n \rangle \right], \\
 \forall W \in \mathcal{U}
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

where  $u'(V) \cdot W$  is solution of the shape derivative system (Eq. (4.85)).

**Proof :** We recall that,

$$j(V) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} |u(V)|^2 + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} |V|^2 \tag{4.91}$$

The differentiability property is an easy consequence of the differentiability of  $J_V(u)$  with respect to  $(u, V)$  and the shape differentiability of  $u(V)$  with respect to  $V$ . The expression of the directional derivative is a direct consequence of Th. (4.4) and Th. (4.5).

□

Using the fluid adjoint state and the adjoint transverse field, it is possible to identify the gradient distribution associated to the functional  $j(V)$ ,

**Theorem 4.14** For  $V \in \mathcal{U}$  and  $\Omega_0$  of class  $C^2$ , the functional  $j(V)$  possesses a gradient  $\nabla j(V)$  which is supported on the moving boundary  $\Gamma_t(V)$  and can be represented by the

following expression,

$$\nabla j(V) = -\lambda n - \sigma(\varphi, \pi) \cdot n + \gamma V \quad (4.92)$$

where  $(\varphi, \pi)$  stands for the adjoint fluid state solution of the following system,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \mathbf{D} \varphi \cdot u + {}^* \mathbf{D} u \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = \alpha u, & Q(V) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q(V) \\ \varphi = 0, & \Sigma(V) \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T \end{cases} \quad (4.93)$$

and  $\lambda$  is the adjoint transverse boundary field, solution of the tangential dynamical system,

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda - \nabla_\Gamma \lambda \cdot V = f, & (0, T) \\ \lambda(T) = 0, & \Gamma_T(V) \end{cases} \quad (4.94)$$

with  $f = -(\sigma(\varphi, \pi) \cdot n) \cdot (\mathbf{D} V \cdot n - \mathbf{D} u \cdot n) + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2$ .

**Proof :** We need the following identity,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [\partial_t u' + \mathbf{D} u' \cdot u + \mathbf{D} u \cdot u' - \nu \Delta u' + \nabla p'] v - \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} q \operatorname{div} u' \\ &= \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [-\partial_t v - \mathbf{D} v \cdot u + {}^* \mathbf{D} u \cdot v - \nu \Delta v + \nabla q] u' - \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} p' \operatorname{div} v \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [p' n \cdot v - \nu v \cdot \partial_n u' + \nu u' \cdot \partial_n v - u' \cdot q n] \end{aligned} \quad (4.95)$$

We define  $(\varphi, \pi)$ , to be the solution of the adjoint system (Eq. (4.93)), and we set  $(v, q) = (\varphi, \pi)$  in Eq. (4.95), we get

$$\int_0^T \int_{\Omega_t(V)} \alpha u \cdot u' = - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} \langle \sigma(\varphi, \pi) \cdot n, u' \rangle \quad (4.96)$$

We use the boundary condition on  $\Gamma_t(V)$  for the linearized state  $u'$ , i.e

$$u' = W + (\mathbf{D} V \cdot n - \mathbf{D} u \cdot n) \langle Z_t, n \rangle, \quad \text{on } \Gamma_t(V) \quad (4.97)$$

Thus,

$$\begin{aligned} \langle j'(V), W \rangle &= \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} \left[ -(\sigma(\varphi, \pi) \cdot n) \cdot (\mathbf{D} V \cdot n - \mathbf{D} u \cdot n) + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2 \right] \langle Z_t, n \rangle \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [-\sigma(\varphi, \pi) \cdot n + \gamma V] \cdot W \end{aligned}$$

Then we use Th. (4.8) with  $E = -(\sigma(\varphi, \pi) \cdot n) \cdot (\mathbf{D} V \cdot n - \mathbf{D} u \cdot n) + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2$ , and we get the correct result.

□

**Remark 4.6** Actually, we have  $\pi(\mathbf{D}(V - u) \cdot n) \cdot n = \pi \operatorname{div} V|_{\Gamma_t}$  using the formula,

$$(\mathbf{D}(V - u) \cdot n) \cdot n = \operatorname{div}(V - u)|_{\Gamma_t} - \operatorname{div}_\Gamma(V - u)$$

and the fact that  $V - u = 0$  on  $\Gamma_t$ . Furthermore, we have considered free divergence field  $V$ , then this term is null and we get that

$$f = -\nu(\mathrm{D}\varphi \cdot n) \cdot (\mathrm{D}V \cdot n - \mathrm{D}u \cdot n) + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2$$

## 4.5 Min-Max and function space parametrization

In the previous section, we have been using the differentiability of the fluid state with respect to the eulerian velocity  $V$  as a sufficient condition in order to derive first-order optimality conditions, involving the adjoint of the linearized state. Actually, the tedious obtention of the state differentiability is not necessary in many cases, and even if the state is not differentiable, it can happen that first-order optimality conditions still hold. This is a consequence of a fundamental result in optimal control theory, the so-called Maximum Principle.

Avoiding the differentiation of the state equations with respect to the design variable  $V$ , is of great interest for shape optimization problems, especially if we deal with a moving domain system.

In this section, we are concerned with the function space parametrization, which consists in transporting the different quantities defined in the perturbed moving domain back into the reference moving domain that does not depend on the perturbation parameter. Thus, differential calculus can be performed since the functions involved are defined in a fix domain with respect to the perturbations.

In the first part, we define the saddle point formulation of the fluid state equations and the Lagrangian functional associated to the cost functional. Then, we perform a sensitivity analysis of the Lagrangian thanks to the transverse field and the fundamental Min-Max principle. This allows us to derive the expression of the cost function gradient involving the fluid and transverse field adjoints.

### 4.5.1 Saddle point formulation of the fluid state system

In the next paragraphs, we shall describe how to build an appropriate Lagrangian functional that can take into account all the constraints imposed by the mechanical problem, such as the divergence free condition or the non-homogeneous Dirichlet boundary conditions.

#### 4.5.1.1 Null divergence condition

The divergence free condition coming from the fact that the fluid has an homogeneous density and evolves as an incompressible flow is difficult to impose on the mathematical and numerical point of view. We suggest at least 3 possible choices to handle this condition in our Min-Max formulation,

1. It can be taken into account in the state and multipliers spaces. In this case, the divergence free condition must be invariant with respect to the use of transport map during the derivation of optimality condition for the Lagrangian functional.

This reduces the choice of appropriate maps and indeed the ALE map  $T_t$  does not satisfy this invariance condition.

It is well known that the Piola transform does preserve the divergence quantity. Indeed we have, the following property :

**Lemma 4.16 ([15])** *The Piola transform*

$$\begin{aligned} P_t : H_0^1(\text{div}, \Omega_0) &\longrightarrow H_0^1(\text{div}, \Omega_t) \\ \varphi &\longmapsto ((J_t)^{-1} D T_t \cdot \varphi) \circ T_t^{-1} \end{aligned} \quad (4.98)$$

*is an isomorphism.*

This new transform introduces additional mathematical and computational efforts, but it seems to be the best approach in order to get rigorous mathematical justifications of the Lagrangian framework in the context of non-cylindrical and free boundary problems.

2. One way to avoid the use of this transform is the penalization of the divergence free condition inside the Navier-Stokes system. Let  $\varepsilon > 0$  be a small parameter, we may consider the new penalized system :

$$\begin{cases} \partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\text{div } u) = 0, & Q \\ u = V, & \Sigma \\ u(t = 0) = u_0, & \Omega_0 \times \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (4.99)$$

with  $\sigma^\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \text{div}(u) \mathbf{I} + \nu(D u + {}^* D u)$ .

We may work with such a modified system, derive the optimality conditions of the penalized Lagrangian functional and finally perform an asymptotic analysis on the adjoint and primal system. For the time being, it is not clear if such a procedure may actually work, since even for non-moving Navier-Stokes problem, the convergence of the penalized adjoint is not established.

3. A third choice is to include the divergence free condition directly into the Lagrangian functional thanks to a multiplier that may play the role of the adjoint variable associated to the primal pressure variable. This leads in a certain sense to a saddle point formulation or mixed formulation of the Navier-Stokes system. It is well known that the well-posedness of such formulations is only established for the Stokes system, and that the Navier-Stokes suffers from a lack of convexity while taken into account in the Lagrangian functional. But still, it seems to be the easiest way, at least on the mathematical computation point of view, to deal with divergence free condition in a sensitivity analysis of the moving system. In the sequel, we adopt such a strategy, keeping in mind, its lack of rigorous mathematical justification.

#### 4.5.1.2 Non-homogeneous boundary conditions

The Navier-Stokes system (Eq. (4.2)) involves an essential non-homogeneous Dirichlet boundary condition,

$$u = V, \quad \text{on } \Gamma_t(V) \quad (4.100)$$

Again, there exists different methods to take into account this boundary condition in a Min-Max formulation,

1. We can use a lifting of the boundary conditions inside the fluid domain and define a change of variable inside the coupled system, as done in Section (4.4). It has the drawback to put additional terms inside the Lagrangian functionals and to impose more regularity on the boundary conditions.
2. We can use a very weak formulation of the state equation, consisting in totally transposing the laplacian operator,

$$\int_{\Omega_t} -\nu \Delta u \cdot \phi = \int_{\Omega_t} -\nu \Delta \phi \cdot u + \int_{\Gamma_t} \nu [u \cdot \partial_n \phi - \phi \cdot \partial_n u] d\Gamma \quad (4.101)$$

Then we shall substitute inside this identity the desirable boundary conditions. We recover the boundary constraints in performing an integration by parts in the optimality conditions corresponding to the sensitivity with respect to the multipliers. This procedure has been already used in [145] to perform shape optimization problems for elliptic equations using Min-Max principles.

**Remark 4.7** *This method has been popularized in [110] as a systematic way to study non-homogeneous linear partial differential equations. These formulations are usually called very weak formulations or transposed formulations. We shall notice that these methods are still valid in the non-linear case to obtain regularity or existence results. We refer to [5] for a recent applications to the Navier-Stokes system.*

### 4.5.1.3 Fluid state operator

In this section we shall summarize the different options that we have chosen for the Lagrangian framework and define the variational state operator constraint. In the sequel, we will need to define precise state and multiplier spaces in order to endow our problem with a Lagrangian functional framework.

Following the existence result stated previously, we introduce the fluid state spaces :

$$X(\Omega_t) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in H^2(0,T; (H^2(\Omega_t))^d \cap (H^1(\Omega_t))^d)\}$$

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in H^1(0,T; (H^1(D))^d)\}$$

we also need test function spaces that will be useful to define Lagrange multipliers :

$$Y(\Omega_t) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in L^2(0,T; (H^2(\Omega_t))^2 \cap (H_0^1(\Omega_t))^d)\}$$

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in H^1(0,T; (H^1(D))^2)\}$$

We define the fluid weak state operator,

$$e_V : X \times Z \longrightarrow (Y \times Q)^*$$

whose action is defined by :

$$\begin{aligned} \langle e_V(u,p), (v,q) \rangle &= \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [-u \cdot \partial_t v + (D u \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div} v] \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} V \cdot (\sigma(v,q) \cdot n) + \int_{\Omega_T} u(T) \cdot v(T) - \int_{\Omega_0} u_0 \cdot v(t=0) \end{aligned}$$

$\forall (v,q) \in Y \times Q$

#### 4.5.1.4 Min-Max problem

In this section, we introduce the lagrangian functional associated with Eq. (4.2) and Eq. (4.3) :

$$\mathcal{L}_V(u,p; v,q) \stackrel{\text{def}}{=} J_V(u,p) - \langle e_V(u,p), (v,q) \rangle \quad (4.102)$$

with

$$J_V(u,p) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} |u|^2 + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} |V|^2 \quad (4.103)$$

Using this functional, the optimal control problem (Eq. (4.3)) can be put in the following form :

$$\min_{V \in \mathcal{U}} \min_{(u,p) \in X(\Omega_t(V)) \times Z} \max_{(v,q) \in Y(\Omega_t(V)) \times Q} \mathcal{L}_V(u,p; v,q) \quad (4.104)$$

By using the Min-Max framework, we avoid the computation of the state derivative with respect to  $V$ . First-order optimality conditions will furnish the gradient of the original cost functional using the solution of an adjoint problem.

Let us first study the saddle point problem,

$$\min_{(u,p) \in X \times Z} \max_{(v,q) \in Y \times Q} \mathcal{L}_V(u,p; v,q) \quad (4.105)$$

#### 4.5.1.5 Optimality Conditions

In this section, we are interested in establishing the first order optimality condition for problem ((4.105)), better known as Karusch-Kuhn-Tucker optimality conditions. This step is crucial, because it leads to the formulation of the adjoint problem satisfied by the Lagrange multipliers  $(\varphi(V), \pi(V))$ . The KKT system will have the following structure :

$$\begin{aligned} \partial_{(v,q)} \mathcal{L}_V(u,p; v,q) \cdot (\delta v, \delta q) &= 0, \\ \forall (\delta v, \delta q) \in Y \times Q &\rightarrow \text{State Equations} \\ \partial_{(u,p)} \mathcal{L}_V(u,p; v,q) \cdot (\delta u, \delta p) &= 0, \\ \forall (\delta u, \delta p) \in X \times Z &\rightarrow \text{Adjoint Equations} \end{aligned}$$

**Lemma 4.17** For  $V \in \mathcal{U}$ ,  $(p, v, q) \in Z \times Y \times Q$ ,  $\mathcal{L}_V(u, p; v, q)$  is differentiable with respect to  $u \in X$  and we have

$$\begin{aligned} \langle \partial_u \mathcal{L}_V(u, p; v, q), \delta u \rangle = & \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [\alpha u \cdot \delta u + \delta u \cdot \partial_t v - [D \delta u \cdot u + D u \cdot \delta u] \cdot v + \nu \delta u \cdot \Delta v - \delta u \cdot \nabla q] \\ & + \int_{\Omega_T} \delta u(T) \cdot v(T), \quad \forall \delta u \in X \end{aligned}$$

In order to obtain a strong formulation of the fluid adjoint problem, we perform some integration by parts:

**Lemma 4.18**

$$\int_{Q(V)} (D \delta u \cdot u) \cdot v = - \int_{Q(V)} [D v \cdot u + \operatorname{div}(u) \cdot v] \cdot \delta u + \int_{\Sigma(V)} (\delta u \cdot v)(u \cdot n)$$

It leads to the following identity:

$$\begin{aligned} \langle \partial_u \mathcal{L}_V(u, p; \varphi, \pi), \delta u \rangle = & - \int_{Q(V)} [-\partial_t \varphi + (*Du) \cdot \varphi - (D\varphi) \cdot u - \operatorname{div}(u) \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi - \alpha u] \cdot \delta u \\ & - \nu \int_{\Sigma(V)} (\partial_n \delta u) \cdot \varphi - \int_{\Omega_T} \varphi(T) \cdot \delta u(T) \end{aligned}$$

**Lemma 4.19** For  $V \in \mathcal{U}$ ,  $(u, v, q) \in X \times Y \times Q$ ,  $\mathcal{L}_V(u, p; v, q)$  is differentiable with respect to  $p \in Z$  and we have

$$\langle \partial_p \mathcal{L}_V(u, p; \varphi, \pi), \delta p \rangle = \int_0^T \int_{\Omega_t} (\delta p) \operatorname{div} \varphi, \quad \forall \delta p \in Z \quad (4.106)$$

This leads to the following fluid adjoint strong formulation,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - D \varphi \cdot u + (*Du) \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla q = \alpha u, & Q(V) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q(V) \\ \varphi = 0, & \Sigma(V) \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T \end{cases} \quad (4.107)$$

**Remark 4.8** Existence and regularity results for the linearized Navier-Stokes adjoint problem can be found in [1, 86] for the 2D case. These results can be easily adapted for the moving domain case. There is a lack of results for the 3D case.

## 4.5.2 Function space parametrization

To compute the first-order derivative of  $j(V)$ , we perturb the moving domain  $\Omega_t(V)$  by a velocity field  $W$  which generates the family of transformation  $T_t^\rho \stackrel{\text{def}}{=} T_t(V + \rho W)$ , with  $\rho \geq 0$  and the family of domains and their boundaries,

$$\begin{aligned} \Omega_t^\rho & \stackrel{\text{def}}{=} T_t(V + \rho W)(\Omega_0) \\ \Gamma_t^\rho & \stackrel{\text{def}}{=} T_t(V + \rho W)(\Gamma_0) \end{aligned}$$

We set,

$$g(\rho) = j(V + \rho W) = \min_{(u,p) \in X(\Omega_t^\rho) \times Z} \max_{(v,q) \in Y(\Omega_t^\rho) \times Q} \mathcal{L}_{(V+\rho W)}(u,p; v,q) \quad (4.108)$$

The objective of this section is to compute the following derivative :

$$\lim_{\rho \searrow 0} \frac{1}{\rho} (g(\rho) - g(0)) \quad (4.109)$$

We need a theorem that would give the derivative of a Min-Max function with respect to a real parameter  $\rho \geq 0$ . In our case, it is not trivial since the state and multiplier spaces  $X(\Omega_t^\rho) \times Y(\Omega_t^\rho)$  depend on the perturbation parameter  $\rho$ . This point can be solved using particular parametrization of the functional spaces. To this aim, we use the transverse map introduced in Section (4.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\rho^t : \overline{\Omega}_t &\longrightarrow \overline{\Omega}_t^\rho \\ x &\mapsto T_t(V + \rho W) \circ T_t(V)^{-1} \end{aligned}$$

and we define the following parametrization,

$$X(\Omega_t^\rho) = \{u \circ (T_t^\rho)^{-1}, \quad u \in X(\Omega_t(V))\} \quad (4.110)$$

$$Y(\Omega_t^\rho) = \{v \circ (T_t^\rho)^{-1}, \quad u \in Y(\Omega_t(V))\} \quad (4.111)$$

This parametrization does not affect the value of the saddle point functional  $g(\rho)$ , but changes the parametrization of the Lagrangian functional,

$$g(\rho) = j(V + \rho W) = \min_{(u,p) \in X(\Omega_t) \times Z} \max_{(v,q) \in Y(\Omega_t) \times Q} \mathcal{L}_{(V+\rho W)}(u \circ R_\rho^t, p; v \circ R_\rho^t, q) \quad (4.112)$$

with  $R_\rho^t \stackrel{\text{def}}{=} (T_t^\rho)^{-1}$ .

We set,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V,W}^\rho(u,p; v,q) &= J_{V+\rho W}(u \circ R_\rho^t, p) \\ &- \int_0^T \int_{\Omega_t^\rho} [-u \circ R_\rho^t \cdot \partial_t(v \circ R_\rho^t) + (D u \circ R_\rho^t \cdot u \circ R_\rho^t) \cdot v \circ R_\rho^t - \nu u \circ R_\rho^t \cdot \Delta(v \circ R_\rho^t) \\ &\quad + u \circ R_\rho^t \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(v \circ R_\rho^t)] - \int_0^T \int_{\Gamma_t^\rho} (V + \rho W) \cdot (\sigma(v \circ R_\rho^t, q) \cdot n^\rho) \\ &\quad - \int_{\Omega_T} u(T) \cdot v(T) + \int_{\Omega_0} u_0 \cdot v(t=0) \\ &\quad \forall (v,q) \in Y(\Omega_t(V)) \times Q \end{aligned}$$

where  $n^\rho$  stands for unit exterior normal of the perturbed boundary  $\Gamma_t^\rho$ .



### 4.5.3 Differentiability of the saddle point problem

In this section, we first state a general theorem concerning the differentiability of a Min-Max problem with respect to a scalar parameter. Then we apply it to our case of study. Finally, using a fundamental identity, we are able to express the gradient  $\nabla j(V)$  as stated in the main theorem of this article.

#### 4.5.3.1 General theorem

We consider a functional,

$$G : [0, \rho_0] \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.113)$$

with  $\rho_0 \geq 0$  and two topological spaces  $(X, Y)$ . For each  $\rho \in I \stackrel{\text{def}}{=} [0, \rho_0]$ , we define

$$g(\rho) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(\rho, x, y) \quad (4.114)$$

and the sets,

$$X(\rho) = \left\{ x^\rho \in X, \sup_{y \in Y} G(\rho, x^\rho, y) = g(\rho) \right\} \quad (4.115)$$

$$Y(\rho, x) = \left\{ y^\rho \in Y, G(\rho, x, y^\rho) = \sup_{y \in Y} G(\rho, x, y) \right\} \quad (4.116)$$

In a similar way, we define dual functions and sets,

$$h(\rho) = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(\rho, x, y) \quad (4.117)$$

and the sets,

$$Y(\rho) = \left\{ y^\rho \in Y, \inf_{x \in X} G(\rho, x, y^\rho) = h(\rho) \right\} \quad (4.118)$$

$$X(\rho, y) = \left\{ x^\rho \in X, G(\rho, x^\rho, y) = \inf_{x \in X} G(\rho, x, y) \right\} \quad (4.119)$$

Finally we define the sets of saddle points,

$$S(\rho) = \{(x, y) \in X \times Y, g(\rho) = G(\rho, x, y) = h(\rho)\} \quad (4.120)$$

**Theorem 4.15 ([32])** *Assume that the following hypothesis hold,*

(H1) *The set  $S(\rho) \neq \emptyset, \rho \in I$ .*

(H2) *The partial derivative  $\partial_\rho G(\rho, x, y)$  exists in  $I$  for all*

$$(x, y) \in \left[ \bigcup_{\rho \in I} X(\rho) \times Y(0) \right] \cup \left[ X(0) \times \bigcup_{\rho \in I} Y(\rho) \right]$$

(H3) There exists a topology  $\mathcal{T}_X$  on  $X$  such that, for any sequence  $(\rho_n)_{n \geq 0} \in I$  with  $\lim_{n \nearrow \infty} \rho_n = 0$ , there exists  $x^0 \in X(0)$  and a subsequence  $\rho_{n_k}$  and for each  $k \geq 1$ , there exists  $x_{n_k} \in X(\rho_{n_k})$  such that,

- i)  $\lim_{n \nearrow \infty} x_{n_k} = x^0$  for the  $\mathcal{T}_X$  topology,
- ii)

$$\liminf_{(\rho,k) \searrow \nearrow (0,\infty)} \partial_\rho G(\rho, x_{n_k}, y) \geq \partial_\rho G(0, x^0, y)$$

$$\forall y \in Y(0).$$

(H4) There exists a topology  $\mathcal{T}_Y$  on  $Y$  such that, for any sequence  $(\rho_n)_{n \geq 0} \in I$  with  $\lim_{n \nearrow \infty} \rho_n = 0$ , there exists  $y^0 \in Y(0)$  and a subsequence  $\rho_{n_k}$  and for each  $k \geq 1$ , there exists  $y_{n_k} \in Y(\rho_{n_k})$  such that,

- i)  $\lim_{n \nearrow \infty} y_{n_k} = y^0$  for the  $\mathcal{T}_Y$  topology,
- ii)

$$\liminf_{(\rho,k) \searrow \nearrow (0,\infty)} \partial_\rho G(\rho, x, y_{n_k}) \leq \partial_\rho G(0, x, y^0)$$

$$\forall x \in X(0).$$

Then there exists  $(x^0, y^0) \in X(0) \times Y(0)$  such that

$$\begin{aligned} dg(0) &= \lim_{\rho \searrow 0} \frac{g(\rho) - g(0)}{\rho} = \inf_{x \in X(0)} \sup_{y \in Y(0)} \partial_\rho G(0, x, y) = \partial_\rho G(0, x^0, y^0) \\ &= \sup_{y \in Y(0)} \inf_{x \in X(0)} \partial_\rho G(0, x, y) \end{aligned} \quad (4.121)$$

This means that  $(x^0, y^0) \in X(0) \times Y(0)$  is a saddle point of  $\partial_\rho G(0, x, y)$ .

### 4.5.3.2 Derivative of the perturbed Lagrangian

Following Th. (4.15), we need to differentiate the perturbed Lagrangian functional  $\mathcal{L}(\rho)$ . We shall successively differentiate the distributed and the boundary integrals involved in the perturbed Lagrangian:

- a) Distributed terms:

We set,

$$\begin{aligned} G(\rho, \cdot) &= [-u \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot \partial_t(v \circ \mathcal{R}_\rho^t) + D(u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot (u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot v \circ \mathcal{R}_\rho^t \\ &\quad - \nu(u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \Delta(v \circ \mathcal{R}_\rho^t) + (u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(v \circ \mathcal{R}_\rho^t)] \end{aligned}$$

with  $\mathcal{R}_\rho^t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}$ .

We shall need the following lemmas in order to derivate  $G(\rho, \cdot)$  with respect to  $\rho$ ,

**Lemma 4.20**

$$\left( \frac{dT_\rho^t}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=0} = Z_t$$

$$\left( \frac{d\mathcal{R}_\rho^t}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=0} = -Z_t$$

**Lemma 4.21**

$$\left( \frac{d(u \circ \mathcal{R}_\rho^t)}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=0} = -D u \cdot Z_t$$

**Proof:**

Using the chain rule we get

$$\begin{aligned} \left( \frac{D(u \circ \mathcal{R}_\rho^t)}{D\rho} \right) \Big|_{\rho=0} &= (D u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \left( \frac{D \mathcal{R}_\rho^t}{D\rho} \right) \Big|_{\rho=0} \\ &= - (D u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \mathcal{Z}^t(\rho, \cdot) \Big|_{\rho=0} \\ &= -D u \cdot Z_t \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.22** *Then, we have the following result*

$$\begin{aligned} \partial_\rho G(\rho, \cdot) \Big|_{\rho=0} &= [(D u \cdot Z_t) \cdot \partial_t v + u \cdot (\partial_t(D v \cdot Z_t)) \\ &\quad - [(D(D u \cdot Z_t)) \cdot u + D u \cdot (D u \cdot Z_t)] \cdot v - (D u \cdot u) \cdot (D v \cdot Z_t) \\ &\quad + \nu(D u \cdot Z_t) \cdot \Delta v + \nu u \cdot (\Delta(D v \cdot Z_t)) + p \operatorname{div}(D v \cdot Z_t) - (D u \cdot Z_t) \cdot \nabla q] \end{aligned}$$

**Proof:**

It comes easily using definition of  $G(\rho, \cdot)$  and Lem. (4.20)-(4.21).

□

Then we have an expression of the derivative of distributed terms coming from the Lagrangian with respect to  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Omega_t^\rho} G(\rho, x) dx \right) \Big|_{\rho=0} &= \int_{\Omega_t} [(D u \cdot Z_t) \cdot \partial_t v + u \cdot (\partial_t(D v \cdot Z_t)) \\ &\quad - [(D(D u \cdot Z_t)) \cdot u + D u \cdot (D u \cdot Z_t)] \cdot v - (D u \cdot u) \cdot (D v \cdot Z_t) \\ &\quad + \nu(D u \cdot Z_t) \cdot \Delta v + \nu u \cdot (\Delta(D v \cdot Z_t)) + p \operatorname{div}(D v \cdot Z_t) - (D u \cdot Z_t) \cdot \nabla q] \\ &\quad + \int_{\Gamma_t} [-u \cdot \partial_t v + (D u \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(v)] \langle Z_t, n \rangle \end{aligned}$$

b) Boundary terms:

We must now take into account the terms coming from the moving boundary  $\Gamma_t^\rho$ . Then we set,

$$\begin{aligned}\phi(\rho, \cdot) &= (V + \rho W) \cdot [-q I + \nu D(v \circ \mathcal{R}_\rho^t)] \cdot n^\rho \\ &= E(\rho) \cdot n^\rho\end{aligned}\quad (4.122)$$

Since  $\phi(\rho, \cdot)$  is defined on the boundary  $\Gamma_t^\rho$ , we need some extra identities corresponding to boundary shape derivatives of terms involved in  $\phi(\rho, \cdot)$ .

**Lemma 4.23 ([38])**

$$\partial_\rho n^\rho|_{\rho=0} = n'_\Gamma = -\nabla_\Gamma(Z_t \cdot n)$$

**Lemma 4.24**

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^\rho} \langle E(\rho), n^\rho \rangle d\Gamma \right) \Big|_{\rho=0} &= \int_{\Gamma_t} \langle E'|_{\Gamma_t}, n \rangle + (\operatorname{div} E) \langle Z_t, n \rangle \\ &= \int_{\Gamma_t} \langle E'_{\Gamma_t}, n \rangle + (\operatorname{div}_\Gamma E) \langle Z_t, n \rangle\end{aligned}\quad (4.123)$$

**Proof :** First, we use that,

$$\int_{\Gamma_t^\rho} \langle E(\rho), n^\rho \rangle = \int_{\Omega_t^\rho} \operatorname{div} E(\rho)$$

then we derive this quantity using Th. (4.4),

$$\frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Omega_t^\rho} \operatorname{div} E(\rho) \right) \Big|_{\rho=0} = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} E' + \int_{\Gamma_t} (\operatorname{div} E) \langle Z_t, n \rangle$$

We conclude using  $\int_{\Omega_t} \operatorname{div} E' = \int_{\Gamma_t} \langle E', n \rangle$ . For the second identity, using the Th. (4.5), we have

$$\frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^\rho} \langle E(\rho), (n \circ \mathcal{R}_\rho^t) \rangle d\Gamma \right) \Big|_{\rho=0} = \int_{\Gamma_t} \langle E'_{\Gamma_t}, n \rangle + \langle E, n'_\Gamma \rangle + H \langle E, n \rangle \langle Z_t, n \rangle$$

using Lem. (4.23), we get

$$\frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^\rho} \langle E(\rho), (n \circ \mathcal{R}_\rho^t) \rangle d\Gamma \right) \Big|_{\rho=0} = \int_{\Gamma_t} \langle E'_{\Gamma_t}, n \rangle - \langle E, \nabla_\Gamma(Z_t \cdot n) \rangle + H \langle E, n \rangle \langle Z_t, n \rangle$$

then using the tangential Stokes identity from Lem. (4.5), we obtain the correct result.

□

Hence, we only need to compute the quantity  $E'_\Gamma$ . To this end, we need the following identities,

**Lemma 4.25**

$$(v \circ \mathcal{R}_\rho^t)' \Big|_{\rho=0} = -D_\Gamma v \cdot Z_t$$

**Proof:** Since  $(v \circ \mathcal{R}_\rho^t)' \Big|_{\rho=0} = \partial_\rho (v \circ \mathcal{R}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t) \Big|_{\rho=0} = \partial_\rho v \Big|_{\rho=0} = 0$ .  
□

**Lemma 4.26**

$$(D(v \circ \mathcal{R}_\rho^t))' \Big|_{\rho=0} = -Dv \cdot DZ_t - (D_\Gamma(Dv)) \cdot Z_t$$

**Proof:** By definition we have,

$$\begin{aligned} (D(v \circ \mathcal{R}_\rho^t))' \Big|_{\rho=0} &= (D(v \circ \mathcal{R}_\rho^t))' \Big|_{\rho=0} - D_\Gamma(D(v \circ \mathcal{R}_\rho^t)) \cdot \mathcal{Z}_\rho^t \Big|_{\rho=0} \\ &= \partial_\rho (D(v \circ \mathcal{R}_\rho^t) \circ \mathcal{T}_\rho^t) \Big|_{\rho=0} - (D_\Gamma(Dv)) \cdot Z_t \\ &= \partial_\rho [(Dv) \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot D\mathcal{R}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t] \Big|_{\rho=0} - (D_\Gamma(Dv)) \cdot Z_t \\ &= \partial_\rho [(Dv) \cdot D\mathcal{R}_\rho^t \circ \mathcal{T}_\rho^t] \Big|_{\rho=0} - (D_\Gamma(Dv)) \cdot Z_t \\ &= -Dv \cdot DZ_t + [Dv \cdot D(D\mathcal{R}_\rho^t) \cdot \partial_\rho(\mathcal{T}_\rho^t)] \Big|_{\rho=0} - (D_\Gamma(Dv)) \cdot Z_t \\ &= -Dv \cdot DZ_t - (D_\Gamma(Dv)) \cdot Z_t \end{aligned}$$

Using these results, we can state the following:

**Lemma 4.27**

$$E'_\Gamma = W \cdot [-qI + \nu Dv] + \nu V \cdot [-Dv \cdot DZ_t - D_\Gamma(Dv) \cdot Z_t] \quad (4.124)$$

This means that we have,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^\rho} \phi(\rho, x) d\Gamma \right) \Big|_{\rho=0} &= \int_{\Gamma_t(V)} W \cdot [-qn + \nu Dv \cdot n] \\ &+ \nu V \cdot [-(Dv \cdot DZ_t) \cdot n - (D_\Gamma(Dv) \cdot Z_t) \cdot n] + \text{div}_\Gamma(V \cdot [-qI + \nu Dv]) \langle Z_t, n \rangle \end{aligned}$$

We have also,

**Lemma 4.28**

$$E'_\Gamma = W \cdot [-qI + \nu Dv] - \nu V \cdot [D(Dv) \cdot Z_t] \quad (4.125)$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^\rho} \phi(\rho, x) d\Gamma \right) \Big|_{\rho=0} &= \int_{\Gamma_t(V)} W \cdot [-qn + \nu Dv \cdot n] \\ &- \nu V \cdot [D(Dv) \cdot Z_t \cdot n] + \text{div}(V \cdot [-qI + \nu^* Dv]) \langle Z_t, n \rangle \end{aligned}$$

**Remark 4.9** We recall that,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} V \cdot (Dv \cdot n) &= \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(*Dv \cdot V) \\ &= \int_{\Omega_t} Dv \cdot \cdot DV + V \cdot \Delta v \end{aligned} \quad (4.126)$$

We shall use this expression in the sequel. We recall that the perturbed lagrangian has the following form,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V,W}^\rho &= J_{V,W}^\rho - \int_0^T \int_{\Omega_t^\rho} G(\rho) - \int_0^T \int_{\Gamma_t^\rho} \phi(\rho) \\ &\quad - \int_{\Omega_T} u(T) \cdot v(T) + \int_{\Omega_0} u_0 \cdot v(t=0) \end{aligned} \quad \forall (v,q) \in Y(\Omega_t) \times Q$$

Hence its derivative with respect to  $\rho$  at point  $\rho = 0$  has the following expression,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} (\mathcal{L}_{V,W}^\rho) \right|_{\rho=0} &= \left. \frac{d}{d\rho} (J_{V,W}^\rho) \right|_{\rho=0} - \int_0^T \left. \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Omega_t^\rho} G(\rho) \right) \right|_{\rho=0} - \int_0^T \left. \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^\rho} \phi(\rho) \right) \right|_{\rho=0} \\ &\quad \forall (v,q) \in Y(\Omega_t) \times Q \end{aligned}$$

Furthermore we have,

**Lemma 4.29**

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} (J_{V,W}^\rho) \right|_{\rho=0} &= -\alpha \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} u \cdot (Du \cdot Z_t) + \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} \gamma V \cdot W \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} \left[ \frac{\alpha}{2} |u|^2 + \frac{\gamma}{2} H|V|^2 \right] \langle Z_t, n \rangle \end{aligned}$$

Using the last identities concerning the derivative of the distributed and the boundary terms with respect to  $\rho$ , we shall get the following expression,

$$\left. \frac{d}{d\rho} (\mathcal{L}_{V,W}^\rho) \right|_{\rho=0} = -A_{Z_t} - B_{Z_t} - C_W \quad (4.127)$$

with

$$\begin{aligned} A_{Z_t} &= \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [\alpha u \cdot (Du \cdot Z_t) + (Du \cdot Z_t) \cdot \partial_t v - [(Du \cdot Z_t) \cdot u \\ &\quad + Du \cdot (Du \cdot Z_t)] \cdot v + \nu (Du \cdot Z_t) \cdot \Delta v - (Du \cdot Z_t) \cdot \nabla q] \\ + \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} &[u \cdot (\partial_t (Dv \cdot Z_t)) - (Du \cdot u) \cdot (Dv \cdot Z_t) + \nu u \cdot (\Delta (Dv \cdot Z_t)) + p \operatorname{div}(Dv \cdot Z_t)] \end{aligned}$$

$$B_{Z_t} = \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [-u \cdot \partial_t v + (Du \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(v)] (Z_t \cdot n) \\ - \nu V \cdot [(D(Dv) \cdot Z_t) \cdot n] + \operatorname{div}(V \cdot [-qI + \nu Dv]) \langle Z_t, n \rangle - \left[ \frac{\alpha}{2} |u|^2 + \frac{\gamma}{2} H|V|^2 \right] \langle Z_t, n \rangle$$

$$C_W = \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [W \cdot [-qn + \nu Dv \cdot n] - \gamma V \cdot W]$$

### 4.5.3.3 The shape derivative kernel identity

We shall now, assume that  $(u, p, v, q) = (u, p, \varphi, \pi)$  is a saddle point of the Lagrangian functional  $\mathcal{L}_V$ . This will help us to simplify several terms involved in the derivative of  $\mathcal{L}_V$  with respect to  $V$ .

Indeed, we would like to express the distributed term  $A_{Z_t}$  as a boundary quantity defined on the moving boundary  $\Gamma_t$ .

**Theorem 4.16** *For  $(u, p, \varphi, \pi)$  saddle points of the Lagrangian functional (Eq. (4.102)), the following identity holds,*

$$\int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [\alpha u \cdot (Du \cdot Z_t) + (Du \cdot Z_t) \cdot \partial_t v - [(D(Du \cdot Z_t)) \cdot u \\ + Du \cdot (Du \cdot Z_t)] \cdot v + \nu (Du \cdot Z_t) \cdot \Delta v - (Du \cdot Z_t) \cdot \nabla q] \\ + \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [u \cdot (\partial_t (Dv \cdot Z_t)) - (Du \cdot u) \cdot (Dv \cdot Z_t) + \nu u \cdot (\Delta (Dv \cdot Z_t)) + p \operatorname{div}(Dv \cdot Z_t)] \\ - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [\nu V \cdot (D(D\varphi \cdot Z_t) \cdot n) - (D\varphi \cdot Z_t) \cdot (-pn + \nu (Du \cdot n))] = 0, \quad \forall W \in \mathcal{U}$$

**Proof :** We shall use extremal conditions associated to variations with respect to  $(u, v)$  in the Lagrangian functional where we add a boundary integral since we consider test functions  $v$  that do not vanish on the boundary  $\Gamma_t(V)$ , i.e

$$\mathcal{L}_V^2(u, p; v, q) = J_V(u, p) - \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [-u \cdot \partial_t v + (Du \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div} v] \\ - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} V \cdot (\sigma(v, q) \cdot n) + \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} v \cdot (\sigma(u, p) \cdot n) - \int_{\Omega_T} u(T) \cdot v(T) + \int_{\Omega_0} u_0 \cdot v(t=0) \\ \forall (v, q) \in Y \times Q$$

This leads to the following perturbation identity,

$$\begin{aligned} \partial_{(u,v)} \mathcal{L}_V^2 \cdot (\delta u, \delta v) &= - \int_{Q(V)} [-\alpha u \cdot \delta u - \delta u \cdot \partial_t v - u \cdot \partial_t \delta v + D(\delta u \cdot u) \cdot v + D(u \cdot \delta u) \cdot v \\ &+ D(u \cdot u) \cdot \delta v - \nu(\delta u \cdot \Delta v) - \nu(u \cdot \Delta \delta v) + \delta u \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(\delta v)] - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} \nu V \cdot (D \delta v \cdot n) \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [\nu v \cdot (D \delta u \cdot n) + \delta v \cdot (-p n + \nu(D u \cdot n))] - \int_{\Omega_T} [\delta u(T)v(T) + u(T)\delta v(T)] \\ &\quad \forall (\delta u, \delta v) \in X(\Omega_t) \times Y(\Omega_t) \end{aligned}$$

We choose specific perturbation directions, i.e

$$\delta u = D u \cdot Z_t \quad \delta v = D v \cdot Z_t$$

with  $\delta u(T) = \delta v(T) = \delta u(0) = \delta v(0) = 0$ , where  $(u, v)$  are saddle points of the lagrangian, i.e solutions of respectively the primal and adjoint fluid problem. We recognize immediately the distributed and boundary terms involved in the shape derivative kernel identity.  $\square$

#### 4.5.3.4 Cost functional gradient

Now, we set  $(u, v) = (u, \varphi)$  and we use the fact that  $u = V$ , on  $\Gamma_t$  and  $\varphi = 0$ , on  $\Gamma_t$  to simplify the remaining terms.

$$A_{Z_t} = \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [\nu V \cdot (D(D \varphi \cdot Z_t) \cdot n) - \nu(D \varphi \cdot Z_t) \cdot (D u \cdot n)] \quad (4.128)$$

**Remark 4.10** *We have used, that  $(D \varphi \cdot Z_t) \cdot (p n) = (D \varphi \cdot (n \otimes n) \cdot Z_t) \cdot (p n) = p((D \varphi \cdot n) \cdot n) \cdot \langle Z_t, n \rangle = (p \operatorname{div} \varphi) \langle Z_t, n \rangle = 0$ .*

$$\begin{aligned} B_{Z_t} &= \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [-\nu V \cdot \Delta \varphi + V \cdot \nabla \pi] \langle Z_t, n \rangle - \frac{1}{2} [\alpha + \gamma H] |V|^2 \langle Z_t, n \rangle \\ &\quad - \nu V \cdot [(D(D \varphi) \cdot Z_t) \cdot n] + [-\pi \operatorname{div} V - V \cdot \nabla \pi + \nu D \varphi \cdot \cdot D V + \nu V \cdot \Delta \varphi] \langle Z_t, n \rangle \end{aligned}$$

$$C_W = \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [W \cdot [-\pi n + \nu D \varphi \cdot n] - \gamma V \cdot W]$$

We need to establish the following identity,

**Lemma 4.30**

$$\int_{\Gamma_t} (D \varphi \cdot Z_t) \cdot (D u \cdot n) = \int_{\Gamma_t} (D \varphi \cdot n) \cdot (D u \cdot n) \langle Z_t, n \rangle \quad (4.129)$$



Then

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{d\rho} (\mathcal{L}_{V,W}^\rho) \Big|_{\rho=0} &= \int_{\Sigma(V)} \nu V \cdot (D(D\varphi \cdot Z_t) \cdot n) + [-\nu(D\varphi \cdot n) \cdot (Du \cdot n) - \nu V \cdot \Delta\varphi \\
 &\quad + V \cdot \nabla\pi] \langle Z_t, n \rangle + [-\pi \operatorname{div} V - V \cdot \nabla\pi + \nu D\varphi \cdot \cdot DV + \nu V \cdot \Delta\varphi] \langle Z_t, n \rangle \\
 &\quad - \nu V \cdot [(D(D\varphi) \cdot Z_t) \cdot n] - \frac{1}{2} [\alpha + \gamma H] |V|^2 \langle Z_t, n \rangle + [W \cdot [-\pi n + \nu D\varphi \cdot n] - \gamma V \cdot W]
 \end{aligned}$$

This allows us to derive the expression of the cost function directional derivative,

**Proposition 4.8**

$$\begin{aligned}
 dg(0) &= \int_{\Sigma(V)} \left[ -\nu(D\varphi \cdot n) \cdot (DV \cdot n - Du \cdot n) + \pi \operatorname{div} V + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2 \right] \langle Z_t, n \rangle \\
 &\quad + \int_{\Sigma(V)} [-\sigma(\varphi, q) \cdot n + \gamma V] \cdot W
 \end{aligned} \tag{4.130}$$

Then we use Th. (4.8) with,

$$E = -\nu(D\varphi \cdot n) \cdot (DV \cdot n - Du \cdot n) + \pi \operatorname{div} V + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2$$

and we get the correct result.

## 4.6 Min-Max and function space embedding

In the previous section, we have used a function space parametrization in order to get the gradient of a given functional related to the solution of the Navier-Stokes system in moving domain, with respect to the speed of the moving domain. In this section, we use a different method based on function space embedding particularly suited for non-homogeneous Dirichlet boundary problems. It means that the state and multiplier variables are defined in a hold-all domain  $D$  that contains the moving domain  $\Omega_t(V)$  for  $t \in (0, T)$  and  $\forall V \in \mathcal{U}$ .

### 4.6.1 Saddle point formulation of the fluid state system

We recall that we are dealing with the Navier-Stokes in a moving domain  $\Omega_t(V)$  which is driven by an eulerian velocity field  $V \in \mathcal{U}$ ,

$$\begin{cases} \partial_t u + Du \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & Q(V) \\ \operatorname{div}(u) = 0, & Q(V) \\ u = V, & \Sigma(V) \\ u(t=0) = u_0, & \Omega_0 \end{cases} \tag{4.131}$$

and

$$\mathcal{U} = \{V \in H^1(0,T; (H^m(D))^d), \quad \operatorname{div} V = 0 \text{ in } D, \quad V \cdot n = 0 \text{ on } \partial D\} \quad (4.132)$$

with  $m > 5/2$ .

We introduce a Lagrange multiplier  $\mu$  and a functional,

$$E_V(u,p; v,q,\mu) = \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [\partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p] \cdot v - \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} q \operatorname{div} u - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} (u - V) \cdot \mu$$

for  $(u,p) \in X \times P$ ,  $(v,q) \in Y \times Q$  and  $\mu \in M$  with

$$X \stackrel{\text{def}}{=} Y \stackrel{\text{def}}{=} H^1(0,T; H^2(D))$$

$$P \stackrel{\text{def}}{=} Q \stackrel{\text{def}}{=} H^1(0,T; H^1(D))$$

$$M = H^1(0,T; H^{3/2}(\Gamma_t))$$

We are interested in the following Min-Max problem,

$$\min_{(u,p) \in X \times P} \max_{(v,q,\mu) \in Y \times Q \times M} E_V(u,p; v,q,\mu) \quad (4.133)$$

The solution  $(y,p,\varphi,\pi,\lambda)$  of this problem is characterized by the following optimality system,

– The primal state  $(y,p)$  is solution of the Navier-Stokes system,

$$\begin{cases} \partial_t y + D y \cdot y - \nu \Delta y + \nabla p = 0, & Q(V) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & Q(V) \\ y = V, & \Sigma(V) \\ y(t=0) = y_0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (4.134)$$

– The dual state  $(\varphi,\pi)$  is solution of the fluid adjoint system,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - D \varphi \cdot u + (*Du) \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = 0, & Q(V) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q(V) \\ \varphi = 0, & \Sigma(V) \\ \varphi(t=T) = 0, & \Omega_T \end{cases} \quad (4.135)$$

– The multiplier satisfies the following identity,

$$\mu = -q n + \nu(D \varphi \cdot n), \quad \text{on } \Gamma_t(V) \quad (4.136)$$

Then we can choose the above particular representation of the boundary Lagrange multiplier  $\mu$ . This yields to the following functional,

$$E_V(u,p;v,q) = \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [\partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p] \cdot v - \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} q \operatorname{div} u - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} (u - V) \cdot \sigma(v,q) \cdot n$$

for  $(u,p) \in X \times P$ ,  $(v,q) \in Y \times Q$ , with

$$\sigma(v,q) \cdot n = -q n + \nu(D \varphi \cdot n), \quad \text{on } \Gamma_t(V)$$

The following identities hold true,

**Lemma 4.31**

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t(V)} (u - V) \cdot (D v \cdot n) &= \int_{\Omega_t(V)} \operatorname{div} [{}^* D v \cdot (u - V)] \\ &= \int_{\Omega_t(V)} [D(u - V) \cdot \cdot D v + (u - V) \cdot \Delta v] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t(V)} (u - V) \cdot q n &= \int_{\Omega_t(V)} \operatorname{div} [q(u - V)] \\ &= \int_{\Omega_t(V)} [(u - V) \cdot \nabla q + q \operatorname{div}(u - V)] \end{aligned}$$

Using this identity, we may get the final expression of our saddle functional,

$$\begin{aligned} E_V(u,p;v,q) &= \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [\partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p] \cdot v - \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} q \operatorname{div} u \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [(u - V) \cdot \nabla q + q \operatorname{div}(u - V) - \nu D(u - V) \cdot \cdot D v - \nu(u - V) \cdot \Delta v] \end{aligned}$$

for  $(u,p) \in X \times P$ ,  $(v,q) \in Y \times Q$ .

**Remark 4.11** *The above expression of the Lagrange functional has the advantage to include only distributed terms. This will be useful for its differentiation with respect to  $V$ .*

## 4.6.2 Lagrange functional and non-cylindrical shape derivative

We are interested in the following minimization problem,

$$\min_{V \in \mathcal{U}} j(V) \tag{4.137}$$

where  $j(V) = J_V(u(V), p(V))$  with  $(u(V), p(V))$  is a weak solution of problem (4.2) and  $J_V(u, p)$  is a real functional of the following form :

$$J_V(u, p) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} |u|^2 + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} |V|^2 \quad (4.138)$$

We may solve this problem by the studying the equivalent Min-Max problem,

$$\min_{V \in \mathcal{U}} \min_{(u, p) \in X \times P} \max_{(v, q) \in Y \times Q} \mathcal{L}_V(u, p; v, q) \quad (4.139)$$

with

$$\mathcal{L}_V(u, p; v, q) = J_V(u, p) - E_V(u, p; v, q) \quad (4.140)$$

Our main concern is the differentiation of the above functional with respect to  $V \in \mathcal{U}$ . As in the previous section we perturb the tubes using a vector field  $W \in \mathcal{U}$  with an increment parameter  $\rho \geq 0$ . Since the functions are embedded in the hold-all domain  $D$ , the perturbed Lagrangian has the following form,

$$\mathcal{L}^\rho(u, p; v, q) = J_{V+\rho W}(u, p) - E_{V+\rho W}(u, p; v, q) \quad (4.141)$$

The set of saddle points,

$$S(\rho) = X(\rho) \times P \times Y(\rho) \times Q \in X \times P \times Y \times Q$$

is not a singleton since,

$$X(\rho) = \{u \in X, u|_{\Omega_t^\rho} = y(\rho)\}$$

$$Y(\rho) = \{v \in Y, v|_{\Omega_t^\rho} = \varphi(\rho)\}$$

We make the conjecture that we can bypass the min-max, and state

$$\left. \frac{d}{d\rho} j(V + \rho W) \right|_{\rho=0} = \min_{(u, p) \in X \times P} \max_{(v, q) \in Y \times Q} \left. \frac{d}{d\rho} \mathcal{L}^\rho(u, p; v, q) \right|_{\rho=0} \quad (4.142)$$

Using non-cylindrical shape derivative framework, we can state

**Lemma 4.32**

$$\begin{aligned} \partial_V \mathcal{L}_V(u, p; v, q) \cdot W &= - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [(\partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p) \cdot v - q \operatorname{div} u \\ &\quad + (u - V) \cdot \nabla q + q \operatorname{div}(u - V) - \nu D(u - V) \cdot D v - \nu(u - V) \cdot \Delta v - \frac{\alpha}{2} |u|^2 \\ &\quad - H \frac{\gamma}{2} |V|^2] \langle Z_t, n \rangle - \int_0^T \int_{\Omega_t(V)} [-W \cdot \nabla q - q \operatorname{div} W + \nu D W \cdot D v + \nu W \cdot \Delta v] \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} \gamma V \cdot W \end{aligned}$$

Then we set  $(u,p) = (y,p)$  and  $(v,q) = (\varphi,\pi)$  with

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \mathbf{D} \varphi \cdot u + {}^* \mathbf{D} u \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = \alpha u, & Q(V) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q(V) \\ \varphi = 0, & \Sigma(V) \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T \end{cases} \quad (4.143)$$

and we use that

$$(y,\varphi) = (V,0) \text{ on } \Gamma_t(V)$$

and

$$\int_{\Omega_t(V)} [-W \cdot \nabla q - q \operatorname{div} W + \nu \mathbf{D} W \cdot \cdot \mathbf{D} v + \nu W \cdot \Delta v] = \int_{\Gamma_t(V)} W \cdot \sigma(v,q) \cdot n$$

Then,

$$\begin{aligned} \partial_V j(V) \cdot W = & - \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [(-\pi \operatorname{div} y + \pi \operatorname{div}(y - V) - \nu \mathbf{D}(y - V) \cdot \cdot \mathbf{D} \varphi \\ & - \frac{1}{2}(\alpha + H\gamma)|V|^2) \langle Z_t, n \rangle + (\sigma(\varphi,\pi) \cdot n - \gamma V) \cdot W] \end{aligned}$$

Using regularity assumptions on  $y$  and the free divergence condition on  $y$ , we may state that  $\operatorname{div} y|_{\Gamma_t} = 0$ .

**Lemma 4.33**

$$\mathbf{D} y \cdot \cdot \mathbf{D} \varphi|_{\Gamma_t(V)} = (\mathbf{D} y \cdot n) \cdot (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \quad (4.144)$$

**Proof :** Using that  $\varphi = 0$  on  $\Gamma_t(V)$ , yields to

$$\mathbf{D} \varphi|_{\Gamma_t} = \mathbf{D} \varphi \cdot (n \otimes n)|_{\Gamma_t}$$

then, we get

$$\begin{aligned} \mathbf{D} y \cdot \cdot \mathbf{D} \varphi &= \mathbf{D} y \cdot \cdot (\mathbf{D} \varphi \cdot (n \otimes n)) \\ &= (\mathbf{D} y \cdot n) \cdot (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \end{aligned}$$

□

Consequently we get,

$$\begin{aligned} \langle j'(V), W \rangle = & \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [-\nu (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \cdot (\mathbf{D} V \cdot n - \mathbf{D} u \cdot n) + \pi \operatorname{div} V \\ & + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2] \langle Z_t, n \rangle + \int_0^T \int_{\Gamma_t(V)} [-\sigma(\varphi,q) \cdot n + \gamma V] \cdot W \end{aligned} \quad (4.145)$$

We then use theorem (4.8) with

$$E = -\nu (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \cdot (\mathbf{D} V \cdot n - \mathbf{D} u \cdot n) + \pi \operatorname{div} V + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma H)|V|^2$$

and we get the correct result.

□

## 4.7 Conclusion

In this article, we have been dealing with a particular shape optimization problem involving the Navier-Stokes equations. Its originality lies in the fact that the domain containing the fluid is moving. We have introduced an open loop control problem based on the velocity of the moving domain with the goal of reaching a given objective related to the behaviour of the fluid. Our main concern was to show how the gradient of the cost functional involved in the optimal control problem can be obtained by using non-cylindrical shape optimization concepts. In addition to the classical method based on the state derivative with respect to shape motions, we have introduced two different methods based on the Min-Max principle. Even if for the time being these methods lack from a rigorous mathematical framework, they allow more flexible computations which can be very useful for practical purpose. On the numerical point of view, an implementation of the open loop control is under study in the 2D case [64]. We believe that the concepts introduced in this article, will prove large efficiency for coupled problems involving a moving boundary, as it will be shown in [122], [123].



# Chapitre 5

## Contrôle dynamique des équations de Navier-Stokes : approche lagrangienne

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>245</b>
<b>5.2</b>	<b>Evolution sets</b>	<b>245</b>
5.2.1	Space-time tubes	245
5.2.2	Parametrization	246
<b>5.3</b>	<b>Shape sensitivity analysis using identity perturbations</b>	<b>248</b>
5.3.1	Mathematical setting	248
5.3.2	Elements of shape calculus	249
5.3.3	Unconstraint non-cylindrical shape optimization	253
5.3.4	Shape optimization under state constraints	255
5.3.5	Relation between the eulerian and the lagrangian non-cylindrical shape derivative	257
<b>5.4</b>	<b>Questions related to Navier-Stokes equations in moving domain</b>	<b>259</b>
5.4.1	Mathematical justification of transpiration boundary conditions	259
5.4.2	Optimal control of the Navier-Stokes system by moving the domain	261
5.4.3	Comparison with the eulerian derivative version	263

---



Dans ce chapitre co-écrit avec Jean-Paul Zolésio, nous nous intéressons à des problèmes de dérivation de forme dans des domaines mobiles. L'analyse est conduite en utilisant directement les applications lagrangiennes qui génèrent le domaine non-cylindrique. Nous établissons un cadre de travail suffisamment général pour nous permettre de traiter le problème de la minimisation d'une fonctionnelle sous contrainte d'état où l'état est la solution du système de Navier-Stokes en domaine mobile. Nous établissons un résultat d'équivalence entre la dérivée eulérienne et la dérivée lagrangienne dans le cas général, ce qui nous permet de retrouver les résultats sur le contrôle dynamique de forme obtenu dans le chapitre 4 par utilisation d'une méthode eulérienne.

## 5.1 Introduction

Nowadays, the analysis of optimal control problems for fluid systems has reached a certain maturity. Both theoretical [1], [58], [146], [50], [67], [86] and numerical studies [90], [89], [77], [79], [80], [85], [29] have been performed and numerous industrial applications benefit from these efforts. However, there is a lack of results concerning the case where the fluid domain is moving under a given law, solution of an optimal control problem. Recently, a method that allows the derivation of gradient based algorithm for minimizing functionals that depends on the shape of their moving support has been introduced in [44]. This method is based on the concept of velocity field lying in a linear space that can build a non-cylindrical domain thanks to its associated lagrangian flow. It has been applied to different control problems such as the one involving the solution of the Navier-Stokes system in a moving domain [43], [42], which has numerous applications for aircraft, automobile or MEMS design and control.

In this article, we state similar results with a method based directly on the Lagrangian flows which do not define a linear space, but has the advantage to first avoid the introduction of transverse fields and could proof appropriate to deal with fluid-solid interaction problems [123].

The paper is organised as follow,

1. In section 2, we introduce moving domains as space-time evolution sets and we define the eulerian and the lagrangian parametrization of these sets.
2. In section 3, we introduce the general framework of non-cylindrical lagrangian shape derivative and we state the structure of the gradient for general functionals under or without state constraints. We also establish an equivalence result between eulerian and lagrangian derivatives.
3. In section 4, we apply the general framework to mechanical systems involving a fluid in a moving domain. The fluid is described by the Navier-Stokes equations. We deal with the state derivative with respect to the lagrangian flow and an optimal control with a general cost function. We finally recover results obtained in [42] using eulerian derivative concepts.

## 5.2 Evolution sets

### 5.2.1 Space-time tubes

Let us consider a Lipschitz bounded domain  $M \subset \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ .

$$\nu = (\nu_t, \nu_x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \quad (5.1)$$

stands for the unitary exterior normal to  $M$  defined almost everywhere on the boundary  $\partial M$ . Whenever the normal component  $\nu_x(x, t) \neq 0$ , we define

$$\nu = (1 + \nu_x^2)^{-1/2} (-\nu_t, \nu_x) \quad (5.2)$$

with

$$n_t(x) = \|\nu_x(x,t)\|^{-1} \cdot \nu_x(x,t), \quad (5.3)$$

$$v_\nu(x,t) = -\|\nu_x(x,t)\|^{-1} \cdot \nu_t(x,t) \quad (5.4)$$

where  $n_t \in \mathbb{R}^d$  stands for the spatial unitary exterior normal, and  $v_\nu \in \mathbb{R}$  stands for the spatial normal velocity.

**Definition 5.1 ([15])** *Let us consider a non-empty subset  $Q \subset \mathbb{R}^{d+1}$ , it is called an evolution set on the time interval  $[0,T]$ , if there exists a bounded open subset  $M \subset \mathbb{R}^{d+1}$  of  $C^1$  class such that,*

i)

$$Q = M \cap ((0,T) \times \mathbb{R}^d) \quad (5.5)$$

ii)

$$\nu_x(x,t) \neq 0, \quad \forall (t,x) \in \partial M \cap ((0,T) \times \mathbb{R}^d) \quad (5.6)$$

We set

$$\Sigma = \overline{\partial Q \cap ((0,T) \times \mathbb{R}^d)} \quad (5.7)$$

$\mathcal{E}^T$  stands for the space of evolution sets on the time period  $[0,T]$ .

Hence, an evolution set can be considered as the union of space-time space products,

**Definition 5.2** *For an evolution set  $Q \in \mathcal{E}^T$ , we define the family  $\{\Omega_t\}_{0 \leq t \leq T} \in \mathbb{R}^d$  such that*

$$\{t\} \times \Omega_t = Q \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \quad (5.8)$$

$$\Gamma_t = \partial \Omega_t \quad (5.9)$$

**Lemma 5.1 ([15])** *The sets  $\Omega_0$  and  $\Omega_T$  are non-void and their closure are the Kuratowski limit of  $\Omega_t$  as  $t \rightarrow \{0,T\}$ .*

## 5.2.2 Parametrization

A central question when dealing with moving domains lies in their parametrization. Depending on the expected regularity of its dynamic, an evolution set can be considered as the element of the metric space formed by the sets in  $\mathbb{R}^{d+1}$  [6], as the image of a fix domain by a diffeomorphic mapping [36] or as the image of a fixed domain through the flow associated to a given vector field [36]. In this section, we shall only deal with the last two choices.

– Diffeomorphic horizontal transformations:

Let us consider  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$  with boundary  $\Gamma_0$  and a time interval  $(0,T)$ , then it is

possible to describe each evolution set thanks to diffeomorphisms defined on  $[0, T] \times \overline{\Omega_0}$ ,

**Proposition 5.1 ([15])** *For every evolution set  $Q = \bigcup_{0 < t < T} \{t\} \times \Omega_t$ , there exists a diffeomorphism  $\hat{\theta}_t$  of class  $C^1$  such that the following applications*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow Q \\ (t, \Omega_0) &\mapsto (t, \Omega_t = \hat{\theta}_t(\Omega_0)) \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \Sigma \\ (t, \Gamma_0) &\mapsto (t, \Gamma_t = \hat{\theta}_t(\Gamma_0)) \end{aligned} \tag{5.11}$$

are  $C^1$ -diffeomorphisms.

**Remark 5.1** *In fact, the mapping  $\hat{\theta}_t$  is build from the knowledge of its trace on the boundary  $\Gamma_0$ . Indeed, it can be proven that there exists  $\hat{\theta}_t^s$  a  $C^1$ -diffeomorphism such that  $\overline{\Gamma}_t = \hat{\theta}_t^s(\overline{\Gamma_0})$  and this application can be arbitrary extended inside  $\Omega_0$ . Hence, we have*

$$\begin{cases} \hat{\theta}_t(x) = \hat{\theta}_t^s(x), & x \in \Gamma_0 \\ \hat{\theta}_t(x) = \text{Ext}(\hat{\theta}_t^s)(x), & x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{5.12}$$

where  $\text{Ext} : \Gamma_0 \rightarrow \Omega_0$  stands for an arbitrary extension operator of class  $C^1$ .

**Remark 5.2** *We will often make use of the notation  $\hat{\theta}$  for the horizontal transformation  $(t, \hat{\theta})$  and  $\hat{\theta}^{-1}$  for  $(t, \hat{\theta}^{-1})$ .*

– Flow of vector fields :

Let us define the following transformation space,

$$\Theta = \{\theta \in C^1(\mathbb{R}^d \times [0, T]), \overline{\Omega}_t = \theta(\overline{\Omega_0}), t \in [0, T]\} \tag{5.13}$$

For topological and structural reasons, it can be interesting to introduce the following vector field,

$$V = (\partial_t \hat{\theta}_t) \circ \hat{\theta}_t^{-1} \tag{5.14}$$

We consider the open subset  $D \subset \mathbb{R}^d$  and the space of vector fields,

$$\mathcal{V} = \{V \in C^0([0, T]; C^1(D; \mathbb{R}^d)), \langle V, \nu_D \rangle = 0, \text{sur } \partial D\} \tag{5.15}$$

Then, it is possible to define the mapping  $\hat{\theta}(V)$  associated to the vector field  $V \in \mathcal{V}$  as the unique solution in  $C^1([0, T]; C^1(D; \mathbb{R}^d))$  of the following flow problem,

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\theta}(x, t) = V(\hat{\theta}(x, t), t), & (x, t) \in D \times (0, T) \\ \hat{\theta}(x, t = 0) = x, & x \in D \end{cases} \tag{5.16}$$

**Remark 5.3** *The previous system can be written in the following manner,*

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}(t) = V(t) \circ \hat{\theta}(t), & t \in (0, T) \\ \hat{\theta}|_{t=0} = I, \end{cases} \tag{5.17}$$

**Proposition 5.2 ([15])** For every evolution set  $Q = \bigcup_{0 < t < T} \{t\} \times \Omega_t$  with  $Q \subset (0, T) \times D$ , there exists a generator vector field  $V \in \mathcal{V}$  such that,

$$\overline{\Omega}_t = \hat{\theta}_t(\overline{\Omega}_0), \forall t \in [0, T]$$

**Remark 5.4** In the case of flow field parameterization, the following identity holds,

$$v_\nu = V \cdot n_t \quad (5.18)$$

It can be proven that the flow dynamic is only prescribed by the last quantity in the sense that if we choose two vector fields  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$  such that,

$$V_1 \cdot n_t = V_2 \cdot n_t$$

then  $\hat{\theta}_t(V_1)(\overline{\Omega}_0) = \hat{\theta}_t(V_2)(\overline{\Omega}_0)$ .

## 5.3 Shape sensitivity analysis using identity perturbations

In this section, we would like to perform a sensitivity analysis with respect to the shape of integrals defined on evolution sets  $Q \in \mathcal{E}^T$  with  $\overline{Q} \subset D \times (0, T)$ . This analysis will be performed using the Lagrangian horizontal mapping  $(t, \hat{\theta})$ .

### 5.3.1 Mathematical setting

Generally speaking, we would like to solve the following problem,

$$\min_{Q \in \mathcal{A}} J(Q) \quad (5.19)$$

with

$$\mathcal{A} \equiv \{Q \in \mathcal{E}^T, \quad Q \subset D\} \quad (5.20)$$

and

$$\begin{aligned} J: \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Q &\longmapsto J(Q) \end{aligned} \quad (5.21)$$

In order to work with standard differential calculus, we define the functional  $j = J \circ \theta_t$  such that,

$$\begin{aligned} j: \Theta_{ad} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \hat{\theta} &\longmapsto j(\hat{\theta}) = J(Q_{\hat{\theta}}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

with  $Q_{\hat{\theta}} = \bigcup_{0 < t < T} (\{t\} \times \Omega_t) = (t, \hat{\theta})(Q_0)$ .

Then, derivatives in the sense of Gâteaux or Fréchet could make sense for  $j(\hat{\theta})$ .

### 5.3.2 Elements of shape calculus

Using extension of classical elements of cylindrical shape calculus using the perturbation of identity ([124], [114],[145]), it is possible to define derivation concepts of functions defined in  $Q_{\hat{\theta}}$  or  $\Sigma_{\hat{\theta}}$  with respect to  $\hat{\theta}$ .

#### 5.3.2.1 Derivation of moving domain integrals

In this paragraph, we are interested in the differentiability properties of integrals defined on the non-cylindrical set  $Q_{\hat{\theta}}$ ,

$$J_1(Q_{\hat{\theta}}) = \int_{Q_{\hat{\theta}}} f(Q_{\hat{\theta}}) dQ_{\hat{\theta}} \quad (5.23)$$

We are trying to characterize the variations of  $J_1(Q_{\hat{\theta}})$  with respect to  $\hat{\theta}$ . We shall state a differentiability result that uses the notion of non-cylindrical material derivative,

**Definition 5.3** A function  $f(\hat{\theta}) \in H(Q_{\hat{\theta}})$  admits a non-cylindrical material derivative  $\dot{f}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta$  defined over  $Q_{\hat{\theta}}$  at point  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$  in the direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$ , if the following composed function,

$$\begin{aligned} f^\rho : [0, \rho_0[ &\rightarrow H(Q_{\hat{\theta}}) \\ \rho &\mapsto f((I + \rho\delta\theta) \circ \hat{\theta}) \circ (I + \rho\delta\theta) \end{aligned}$$

is differentiable at point  $\rho = 0$ , a.e.  $(x, t) \in Q_{\hat{\theta}}$  and  $\dot{f}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \left. \frac{d}{d\rho} f^\rho \right|_{\rho=0}$ .

Under regularity conditions, it is possible to define a different derivative that will be useful in the context of eulerian state equations.

**Definition 5.4** A function  $f(\hat{\theta}) \in H(D)$  admits a non-cylindrical shape derivative  $f'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta$  defined over  $Q_{\hat{\theta}}$  at point  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$  in the direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$ , if the following composed function,

$$\begin{aligned} f_\rho : [0, \rho_0[ &\rightarrow H(D) \\ \rho &\mapsto f((I + \rho\delta\theta) \circ \hat{\theta}) \end{aligned}$$

is differentiable at point  $\rho = 0$ , a.e.  $(x, t) \in Q_{\hat{\theta}}$  and  $f'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \left. \frac{d}{d\rho} f_\rho \right|_{\rho=0}$ .

**Remark 5.5** It can be proven that the following identity holds,

$$\dot{f}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = f'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta + \nabla f(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta \quad (5.24)$$

We can now state the differentiability properties of non-cylindrical integrals with respect to their moving supports,

**Theorem 5.1** For a bounded measurable domain  $\Omega_0$  with boundary  $\Gamma_0$ , let us assume that for any direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$  the following hypothesis holds,

i)  $f(\hat{\theta})$  admits a non-cylindrical material derivative  $\dot{f}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta$  then  $J_1(\cdot)$  is Gâteaux differentiable at point  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$  and its derivative is given by the following expression,

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} J_1(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \int_{Q_{\hat{\theta}}} \left[ \dot{f}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta + f(\hat{\theta}) \operatorname{div} \delta\theta \right] dQ_{\hat{\theta}} \quad (5.25)$$

Futhermore, if

ii)  $f(\hat{\theta})$  admits a non-cylindrical shape derivative  $f'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta \in H(Q_{\hat{\theta}})$ , then

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} J_1(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \int_{Q_{\hat{\theta}}} \left[ f'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta + \operatorname{div}(f(\hat{\theta}) \delta\theta) \right] dQ_{\hat{\theta}} \quad (5.26)$$

Furthermore, if  $Q_0$  is an open domain with a Lipschitzian boundary  $\Sigma_0$ , then

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} J_1(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \int_{Q_{\hat{\theta}}} f'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta dQ_{\hat{\theta}} + \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} f(\hat{\theta}) \langle \delta\theta, \nu \rangle d\Sigma_{\hat{\theta}} \quad (5.27)$$

**Remark 5.6** Since, we deal with horizontal transformations of the type  $(t, \hat{\theta})$ , it means that perturbations are of the type  $(0, \delta\hat{\theta})$ , then

$$\langle \delta\theta, \nu \rangle = (1 + v_\nu^2)^{-1/2} (\langle 0, -v_\nu \rangle + \langle \delta\theta, n_t \rangle)$$

using that  $d\Sigma_{\hat{\theta}} = (1 + v_\nu^2)^{1/2} dt d\Gamma_{\hat{\theta}}$ , we get

$$\int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} f(\hat{\theta}) \langle \delta\theta, \nu \rangle d\Sigma_{\hat{\theta}} = \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} f(\hat{\theta}) \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle d\Gamma_{\hat{\theta}} dt \quad (5.28)$$

### 5.3.2.2 Derivation of moving boundary integrals

It is also possible to establish a similar result for integrals over moving boundaries,

$$J_2(\Sigma_{\hat{\theta}}) = \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} g(\Sigma_{\hat{\theta}}) d\Sigma_{\hat{\theta}} \quad (5.29)$$

For that purpose, we need to define the non-cylindrical tangential material derivative,

**Definition 5.5** A function  $g(\hat{\theta}) \in H(\Sigma_{\hat{\theta}})$  admits a non-cylindrical material derivative  $\dot{g}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta$  at point  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$  in the direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$  if the following composed function,

$$\begin{aligned} g^\rho : [0, \rho_0] &\rightarrow H(\Sigma_{\hat{\theta}}) \\ \rho &\mapsto g((I + \rho\delta\theta) \circ \hat{\theta}) \circ (I + \rho\delta\theta) \end{aligned}$$

is differentiable at point  $\rho = 0$ , a.e.  $(t, x) \in \Sigma_{\hat{\theta}}$  and  $\dot{g}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \left. \frac{d}{d\rho} g^\rho \right|_{\rho=0}$ .

Under regularity conditions, it is possible to define a different derivative that will be useful in the context of eulerian state equations.

**Definition 5.6** A function  $g(\hat{\theta}) \in H(\Sigma_{\hat{\theta}})$  admits a non-cylindrical shape derivative  $g'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta$  defined over  $\Sigma_{\hat{\theta}}$  at point  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$  in the direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \theta \in \Theta$ , if the following composed function,

$$\begin{aligned} g_\rho : [0, \rho_0[ &\rightarrow H(D) \\ \rho &\mapsto g((I + \rho\delta\hat{\theta}) \circ \theta) \circ p \end{aligned}$$

is differentiable at point  $\rho = 0$ , a.e.  $(x, t) \in Q_{\hat{\theta}}$  and  $g'(\hat{\theta}) \cdot \delta = \left. \frac{d}{d\rho} g_\rho \right|_{\rho=0}$ . Here  $p$  stands for the projection mapping on  $\Gamma_{\hat{\theta}}$  ([36]).

**Remark 5.7** It can be proven that the following identity holds,

$$\dot{g}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = g'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta + \nabla_{\Gamma} g(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta \quad (5.30)$$

These concepts are involved in the differentiability property of boundary integrals,

**Theorem 5.2** For a bounded measurable domain  $\Omega_0$  with boundary  $\Gamma_0$ , let us assume that for any direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$  the following hypothesis holds,

i)  $g(\hat{\theta})$  admits a non-cylindrical material derivative  $\dot{g}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta$  then  $J_2(\cdot)$  is Gâteaux differentiable at point  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$  and its derivative is given by the following expression,

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} J_2(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ \dot{g}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta + g(\hat{\theta}) \operatorname{div}_{\Gamma} \delta\theta \right] d\Sigma_{\hat{\theta}} \quad (5.31)$$

and if,

ii)  $g(\hat{\theta})$  admits a non-cylindrical shape derivative,  $g'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta$ , then

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} J_2(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ g'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta + H g(\hat{\theta}) \langle \delta\theta, \nu \rangle \right] d\Sigma_{\hat{\theta}} \quad (5.32)$$

Furthermore, if  $g(\hat{\theta}) = \tilde{g}(\hat{\theta})|_{\Sigma_{\hat{\theta}}}$  with  $\tilde{g} \in H(Q_{\hat{\theta}})$ , then

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} J_2(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ \tilde{g}'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta + (\nabla_{\Gamma} \tilde{g}(V) \cdot n_{\hat{\theta}} + H g(\hat{\theta})) \langle \delta\theta, \nu \rangle \right] d\Sigma_{\hat{\theta}} \quad (5.33)$$

**Remark 5.8** Using the fact that the transformations  $\hat{\theta}$  on  $Q_{\hat{\theta}}$  are horizontal, i.e of the type  $(t, \hat{\theta})$  on  $(0, T) \times \Omega_0$ , we get

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} J_2(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \left[ g'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta (1 + v_{\nu}^2)^{1/2} + H g(\hat{\theta}) \langle \delta\theta, n_t \rangle \right] dt d\Gamma_{\hat{\theta}} \quad (5.34)$$

### 5.3.2.3 An adjoint identity

In the remaining part of this article, we will try to obtain the structure of several functionals with respect to the Lagrangian mapping  $\hat{\theta}$ . To this end, we will need to use the following fundamental integration by parts formula,

**Theorem 5.3** For any  $E \in L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})$  and  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$ , the following identity holds,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} E \partial_t (\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} = \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} [-\partial_t E - (\operatorname{div}_{\Gamma} V_{\hat{\theta}}) E - D E \cdot V_{\hat{\theta}}] \cdot \delta\theta \quad (5.35)$$

with  $V_{\hat{\theta}} = (\partial_t \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1}$ .

**Proof :** We first need to prove the following lemma,

**Lemma 5.2**

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \partial_t f \cdot g &= \left[ \int_{\Gamma_{\hat{\theta}(\tau)}} f \cdot g \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} [f \cdot \partial_t g + H(f \cdot g) (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) \\ &\quad + \nabla(f \cdot g) \cdot n_{\hat{\theta}} (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}})] \end{aligned} \quad (5.36)$$



**Proof :** Using classical integral derivatives formulas, we get,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \partial_t \left( \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} f \cdot g \right) &= \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \left[ (f \cdot g)'_{\Gamma_{\hat{\theta}}} + H(f \cdot g) (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) \right] \\
 &= \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \left[ \partial_t(f \cdot g)|_{\Gamma_{\hat{\theta}}} + \nabla(f \cdot g) \cdot n_{\hat{\theta}} + H(f \cdot g) (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) \right] \\
 &= \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \left[ \partial_t f \cdot g + f \cdot \partial_t g + \nabla(f \cdot g) \cdot n_{\hat{\theta}} + H(f \cdot g) (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) \right]
 \end{aligned}$$

□

In order to use this lemma, we need to modify the expression of  $E \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1}$ . For that purpose, we use the following identities,

**Lemma 5.3**

$$(\partial_t h) \circ \hat{\theta}^{-1} = \partial_t(h \circ \hat{\theta}^{-1}) - (D h) \circ \hat{\theta}^{-1} \partial_t(\hat{\theta}^{-1}) \quad (5.37)$$

$$\partial_t(\hat{\theta}^{-1}) = -D(\hat{\theta}^{-1}) \cdot V_{\hat{\theta}} \quad (5.38)$$

$$(\partial_t h) \circ \hat{\theta}^{-1} = \partial_t(h \circ \hat{\theta}^{-1}) + D(h \circ \hat{\theta}^{-1}) \cdot V_{\hat{\theta}} \quad (5.39)$$

We apply the last identity with  $h = \delta\theta \circ \hat{\theta}$  and we obtain

$$\partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} = \partial_t \delta\theta + D \delta\theta \cdot V_{\hat{\theta}} \quad (5.40)$$

This allows us to state the following,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} E \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} = \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} E \cdot (\partial_t \delta\theta) + \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} E \cdot (D \delta\theta \cdot V_{\hat{\theta}}) \quad (5.41)$$

Using lemma (5.2) with  $f = \delta\theta$  and  $g = E$ , we obtain

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} E \cdot (\partial_t \delta\theta) = \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \left[ -\delta\theta \cdot \partial_t E - \nabla(E \cdot \delta\theta) \cdot n_{\hat{\theta}} (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) - H(E \cdot \delta\theta) (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) \right] \quad (5.42)$$

For the second right hand side we need to establish the following lemma,

**Lemma 5.4**

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} E \cdot (D \delta\theta \cdot V_{\hat{\theta}}) &= \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \left[ -\delta\theta \cdot (D E \cdot V_{\hat{\theta}}) - (\operatorname{div}_{\Gamma} V_{\hat{\theta}}) \delta\theta \cdot E \right. \\
 &\quad \left. + \nabla(E \cdot \delta\theta) \cdot n_{\hat{\theta}} (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) + H(E \cdot \delta\theta) (V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) \right]
 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Combining these two identities, we obtain the expected result.

□

### 5.3.3 Unconstraint non-cylindrical shape optimization

We would like to minimize over  $\theta \in \Theta_{ad}$  the following functional,

$$j(\hat{\theta}) = \int_{Q_{\hat{\theta}}} F(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) dx dt + \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) d\Sigma_{\hat{\theta}} \quad (5.44)$$

with  $Q_{\hat{\theta}} = \bigcup_{0 < t < T} (\{t\} \times \hat{\theta}(\Omega_0))$  and  $y(\hat{\theta}) \in H(Q_{\hat{\theta}})$ . Using the shape derivative calculus tools introduced in the previous section, it is possible to obtain the derivative with respect to  $\hat{\theta}$  of the functional  $j(\hat{\theta})$ ,

**Proposition 5.3** *Let us assume that for  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$  and for any direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$ ,*

1.  $y(\hat{\theta})$  admits a material derivative  $\dot{y}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta \in H(Q_{\hat{\theta}})$ ,
2. the partial derivative  $y'(\hat{\theta})\delta\theta = \dot{y}(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta - \nabla y(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta$  exists in  $H(Q_{\hat{\theta}})$ ,
3.  $\tau \mapsto j((I + \tau\delta\theta) \circ \hat{\theta})$  is differentiable at  $\tau = 0$ ,

then  $j(\cdot)$  is differentiable at point  $\hat{\theta}$  and there exists a distribution  $G(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; D'(\mathbb{R}^d))$  with support inside  $\overline{Q_{\hat{\theta}}}$  such that,

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} j(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \int_0^T \langle G(\hat{\theta}), \delta\theta \rangle_{D', D} dt \quad (5.45)$$

Furthermore  $G(\hat{\theta})$  admits the two following representation,

– using material derivative,

$$\begin{aligned} \langle G(\hat{\theta}), \delta\theta \rangle &= \int_{Q_{\hat{\theta}}} \left[ \dot{F}(\hat{\theta}, y(\hat{\theta}))\delta\theta + \nabla_y F(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \dot{y}(\hat{\theta})\delta\theta + F(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \text{div} \delta\theta \right] dQ_{\hat{\theta}} \\ &+ \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ \dot{S}(\hat{\theta}, y(\hat{\theta}))\delta\theta + \nabla_y S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \dot{y}(\hat{\theta})\delta\theta + S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \text{div}_{\Gamma} \delta\theta \right] d\Sigma_{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (5.46)$$

– using shape partial derivative,

$$\begin{aligned} \langle G(\hat{\theta}), \delta\hat{\theta} \rangle &= \int_{Q_{\hat{\theta}}} \left[ F'(\hat{\theta}, y(\hat{\theta}))\delta\theta + \nabla_y F(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot y'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta \right] dQ_{\hat{\theta}} \\ &+ \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ S'(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \delta\theta + \nabla_y S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot y'(\hat{\theta})\delta\theta \right] d\Sigma_{\hat{\theta}} \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \left[ F(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) + \partial_n S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) + \nabla_y S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta}))\partial_n y(\hat{\theta}) \right. \\ &\left. + HS(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \right] \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle dt d\Gamma_{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (5.47)$$

**Preuve :** We perform the same steps as in [145] and we use the non-cylindrical calculus introduced previously.

□

From now, let us assume that the partial shape derivative  $y'(\hat{\theta})\delta\theta$  is the unique solution of the following linear tangent problem,

$$\langle Ay'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta, \phi \rangle = L(\delta\theta, \phi), \quad \forall \phi \in H(Q_{\hat{\theta}}) \quad (5.48)$$

with  $A \in \mathcal{L}(H(Q_{\hat{\theta}}), H(Q_{\hat{\theta}})^*)$  and  $L(\delta\theta, \cdot) \in H(Q_{\hat{\theta}})^*$ . We define the element  $p(\hat{\theta}) \in H(Q_{\hat{\theta}})^*$  as the solution of the following adjoint problem,

$$\langle A^*p, \psi \rangle = \int_{Q_{\hat{\theta}}} [\nabla_y F(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \psi] dQ_{\hat{\theta}} + \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} [\nabla_y S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \psi] d\Sigma_{\hat{\theta}}, \quad \forall \psi \in H(Q_{\hat{\theta}}) \quad (5.49)$$

We then use the following identity

$$\langle A^*p(\hat{\theta}), y'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta \rangle = \langle Ay'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta, p(\hat{\theta}) \rangle = L(\delta\theta, p(\hat{\theta})) \quad (5.50)$$

This allows us to conclude that the derivative of  $j(\hat{\theta})$  with respect to  $\hat{\theta}$  has the following structure,

$$\begin{aligned} j'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta &= L(\delta, p(\hat{\theta})) + \int_{Q_{\hat{\theta}}} F'(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \delta\theta dQ_{\hat{\theta}} + \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} F(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle dt d\Gamma_{\hat{\theta}} \\ &+ \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ S'(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \delta\theta + \left[ \partial_n S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) + \nabla_y S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \partial_n y(\hat{\theta}) + HS(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \right] \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle \right] dt d\Gamma_{\hat{\theta}} \end{aligned}$$

**Remark 5.9** *Particular case :*

We assume the following hypothesis :

1.  $L(\delta\theta, p(\hat{\theta})) = \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \ell(p(\hat{\theta})) \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle dt d\Gamma_{\hat{\theta}},$
2.  $\int_{Q_{\hat{\theta}}} F'(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \delta\theta dQ_{\hat{\theta}} = 0,$
3.  $\int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} S'(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \cdot \delta\theta d\Sigma_{\hat{\theta}} = \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} s(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle dt d\Gamma_{\hat{\theta}}.$

In this case the gradient of  $j(\hat{\theta})$  is only supported on  $\Gamma_{\hat{\theta}}$  with a density  $g_{\hat{\theta}}$  such that the following identity holds,

$$\begin{aligned} j'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta &= \int_0^T \langle g(\hat{\theta}), \delta\theta \cdot n_{\hat{\theta}} \rangle \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_{\hat{\theta}}} \left[ \ell(p(\hat{\theta})) + s(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) + \partial_n S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \right. \\ &\quad \left. + \nabla_y S(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \partial_n y(\hat{\theta}) + HS(\hat{\theta}, y(\hat{\theta})) \right] \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle dt d\Gamma_{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

### 5.3.4 Shape optimization under state constraints

In the previous section, we have established for a general functional, the structure of its gradient with respect to the moving domain. This general functional involved distributed and boundary terms and a state function  $y(\hat{\theta}) \in H(Q_{\hat{\theta}})$  that depends on the moving domain  $Q_{\hat{\theta}}$  and its parametrization  $\hat{\theta}$ . This gradient will be involved in the first-order optimality conditions of the minimization problem for  $j(\hat{\theta})$ .

In this paragraph, we are interested by optimization problems involving state constraints. The design variables are the Lagrange mapping and a state variable  $(\hat{\theta}, y) \in \hat{\Theta}_{ad} \times H(D)$  related by an abstract state variable

$$e(\hat{\theta}, y) = 0, \quad \text{in } H(D)^* \quad (5.52)$$

This setting allows to avoid the derivation of the state variable  $y(\theta)$  solution of the implicit equation (5.52) with respect to the mapping  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$ .

Hence we would like to solve the following minimization problem,

$$\begin{cases} \min & j(\hat{\theta}, y) \\ (\hat{\theta}, y) \in \hat{\Theta}_{ad} \times H(D), \\ e(\hat{\theta}, y) = 0, \text{ in } H(D)^* \end{cases} \quad (5.53)$$

with

$$j(\hat{\theta}, y) = \int_{Q_{\hat{\theta}}} F(\hat{\theta}, y) dQ_{\hat{\theta}} + \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} S(\hat{\theta}, y) d\Sigma_{\hat{\theta}} \quad (5.54)$$

and

$$\langle e(\hat{\theta}, y), \phi \rangle = \int_{Q_{\hat{\theta}}} E_{\Omega}(\hat{\theta}, y, \phi) dQ_{\hat{\theta}} + \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} E_{\Gamma}(\hat{\theta}, y, \phi) d\Sigma_{\hat{\theta}}, \quad \forall \phi \in H(D) \quad (5.55)$$

where we suppose that the applications  $(\dots, \phi) \longrightarrow \begin{matrix} E_{\Omega}(\dots, \phi) \\ E_{\Gamma}(\dots, \phi) \end{matrix}$  are linear continuous on  $H(D)$ .

In order to derive the first-order optimality conditions for problem (5.53), we introduce the Lagrangian functional,

$$\mathcal{L}(\hat{\theta}, y; \phi) = j(\hat{\theta}, y) - \langle e(\hat{\theta}, y), \phi \rangle_{H(D)^*, H(D)} \quad (5.56)$$

Consequently, solving problem (5.53) is equivalent to find the saddle point  $(\bar{\hat{\theta}}, \bar{y}, \bar{\phi}) \in \Theta_{ad} \times H(Q_{\bar{\hat{\theta}}}) \times H(Q_{\bar{\hat{\theta}}})^*$  of the following Min-Max problem,

$$\min_{(\hat{\theta}, y) \in \Theta_{ad} \times H(D)} \max_{\phi \in H(D)^*} \mathcal{L}(\hat{\theta}, y; \phi) \quad (5.57)$$

**Proposition 5.4** *Let us assume the following points,*

1. *Problem (5.53) admits a local solution  $(\bar{\hat{\theta}}, \bar{y})$  and the functional  $j(\hat{\theta}, y)$  is Fréchet differentiable in a neighborhood of point  $(\bar{\hat{\theta}}, \bar{y}) \in \Theta_{ad} \times H(Q_{\bar{\hat{\theta}}})$ .*

2. The local solution  $(\bar{\theta}, \bar{y})$  is a regular point, i.e that the linear tangent application  $e'((\bar{\theta}, \bar{y}))$  is surjective.

Then there exists a Lagrange multiplier  $\bar{\phi} \in H(Q_{\bar{\theta}})^*$ , such that the following first-order optimality conditions hold,

$$e(\bar{\theta}, \bar{y}) = 0, \quad (5.58)$$

$$\mathcal{L}'_{(\hat{\theta}, y)}(\bar{\theta}, \bar{y}; \bar{\phi}) = 0 \quad (5.59)$$

We shall now derive the explicit form of the optimality conditions for problem (5.57). Using differentiability results of  $j(\dots)$ , the following identity comes easily,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}'_y(\hat{\theta}, y; \phi), \delta y \rangle &= \int_{Q_{\hat{\theta}}} \left[ \nabla_y F(\hat{\theta}, y) \cdot \delta y + \nabla_y E_{\Omega}(\hat{\theta}, y, \phi) \cdot \delta y \right] dQ_{\hat{\theta}} + \\ &\int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ \nabla_y S(\hat{\theta}, y) \cdot \delta y + \nabla_y E_{\Gamma}(\hat{\theta}, y, \phi) \cdot \delta y \right] d\Sigma_{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (5.60)$$

and

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}'_{\hat{\theta}}, \delta \hat{\theta} \rangle &= \int_{Q_{\hat{\theta}}} \left[ F'(\hat{\theta}, y) \cdot \delta \theta + E'_{\Omega}(\hat{\theta}, y, \phi) \cdot \delta \theta \right] dQ_{\hat{\theta}} + \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ S'(\hat{\theta}, y) \cdot \delta \theta + E'_{\Gamma}(\hat{\theta}, y, \phi) \cdot \delta \theta \right] d\Sigma_{\hat{\theta}} \\ &+ \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ F(\hat{\theta}, y) + E_{\Omega}(y, \hat{\theta}; \phi) + (HI + \partial_n) \cdot (S(\hat{\theta}, y) + E_{\Gamma}(\hat{\theta}, y, \phi)) \right] \cdot \langle \delta \theta, n_{\hat{\theta}} \rangle d\Sigma_{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

At a regular point  $(\bar{\theta}, \bar{y})$ , there exists a Lagrange multiplier  $\bar{\phi}$  solution of the following linear tangent adjoint equation,

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\bar{\theta}}} \left[ \nabla_y F(\bar{\theta}, \bar{y}) \cdot \psi + \nabla_y E_{\Omega}(\bar{\theta}, \bar{y}, \bar{\phi}) \cdot \psi \right] dQ_{\bar{\theta}} + \int_{\Sigma_{\bar{\theta}}} \left[ \nabla_y S(\bar{\theta}, \bar{y}) \cdot \psi \right. \\ \left. + \nabla_y E_{\Gamma}(\bar{\theta}, \bar{y}, \bar{\phi}) \cdot \psi \right] d\Sigma_{\bar{\theta}} = 0, \forall \psi \in H(D) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Then the optimality condition reduces to,

$$\begin{aligned} j'(\bar{\theta}; \delta \hat{\theta}) &= \int_{Q_{\bar{\theta}}} \left[ F'(\bar{\theta}, \bar{y}) \cdot \delta \theta + E'_{\Omega}(\bar{\theta}, \bar{y}, \bar{\phi}) \cdot \delta \theta \right] dQ_{\bar{\theta}} + \int_{\Sigma_{\bar{\theta}}} \left[ S'(\bar{\theta}, \bar{y}) \cdot \delta \theta + E'_{\Gamma}(\bar{\theta}, \bar{y}, \bar{\phi}) \cdot \delta \theta \right] d\Sigma_{\bar{\theta}} \\ &+ \int_{\Sigma_{\bar{\theta}}} \left[ F(\bar{\theta}, \bar{y}) + E_{\Omega}(\bar{\theta}, \bar{y}; \bar{\phi}) + (HI + \partial_n) \cdot (S(\bar{\theta}, \bar{y}) + E_{\Gamma}(\bar{\theta}, \bar{y}, \bar{\phi})) \right] \cdot \langle \delta \theta, n_{\bar{\theta}} \rangle d\Sigma_{\bar{\theta}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.63)$$

**Remark 5.10** Let us add the following hypothesis,

$$1. \int_{Q_{\hat{\theta}}} \left[ F'(\hat{\theta}, y) \cdot \delta \theta + E'_{\Omega}(\hat{\theta}, y, \phi) \cdot \delta \theta \right] dQ_{\hat{\theta}} = 0,$$

$$2. \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ S'(\hat{\theta}, y) \cdot \delta\theta + E'_\Gamma(\hat{\theta}, y, \phi) \cdot \delta\theta \right] d\Sigma_{\hat{\theta}} = \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ s(\hat{\theta}, y) + e_\Gamma(\hat{\theta}, y, \phi) \right] \cdot \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle d\Sigma_{\hat{\theta}}.$$

In this case, the gradient is only supported on  $\Sigma_{\hat{\theta}}$ , and its representation has the following form,

$$\begin{aligned} j'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta &= \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} \left[ s(\hat{\theta}, \bar{y}) + e_\Gamma(\hat{\theta}, \bar{y}, \bar{\phi}) + F(\hat{\theta}, \bar{y}) + E_\Omega(\hat{\theta}, \bar{y}, \bar{\phi}) \right. \\ &\quad \left. + (H I + \partial_n) \cdot (S(\hat{\theta}, \bar{y}) + E_\Gamma(\hat{\theta}, \bar{y}, \bar{\phi})) \right] \langle \delta\theta, n_{\hat{\theta}} \rangle d\Sigma_{\hat{\theta}} = 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

### 5.3.5 Relation between the eulerian and the lagrangian non-cylindrical shape derivative

We shall now ask a fundamental question concerning the link between the derivative using perturbations of the identity and Eulerian derivative introduced in [44].

Let us consider a functional  $J$ ,

$$\begin{aligned} J: \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Q &\longmapsto J(Q) \end{aligned} \quad (5.65)$$

with

$$\mathcal{A} \equiv \{Q \in \mathcal{E}^T, \quad Q \subset D\} \quad (5.66)$$

Let us assume that this functional can be parametrized by either the Lagrangian mapping parametrizing the tubes in  $\mathcal{A}$  with  $j_\ell = J \circ \hat{\theta}$  such that,

$$\begin{aligned} j_\ell: \Theta_{ad} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \hat{\theta} &\longmapsto j_\ell(\hat{\theta}) = J(Q_{\hat{\theta}}) \end{aligned} \quad (5.67)$$

or the velocity field  $V \in V$  building the tubes in  $\mathcal{A}$  with  $j_V = J \circ T_t(V)$  such that,

$$\begin{aligned} j_e: V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ V &\longmapsto j_e(V) = J(Q(V)) \end{aligned} \quad (5.68)$$

The following result holds true,

**Theorem 5.4** *The differentiability of the functional  $j_\ell$  at point  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$  in the direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$ , is equivalent to the differentiability of  $j_e$  with respect to  $V \in V_{ad}$  in the direction  $W \in V$ . Furthermore the respective functional derivative are related by the following relation,*

$$\langle j'_\ell(\hat{\theta}), \delta\theta \rangle = \langle j'_e(V_{\hat{\theta}}), W_{\hat{\theta}} \rangle, \quad \delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} \in \Theta \quad (5.69)$$

with  $V_{\hat{\theta}} = \partial_t \hat{\theta} \circ \hat{\theta}^{-1}$ ,  $W_{\hat{\theta}} = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - D V_{\hat{\theta}} \cdot \delta\theta$  and the transverse field involved in the eulerian derivative is given by  $Z_t = \delta\theta$ .

**Proof :** As shown here, in the lagrangian mapping case, we deal with a first-order perturbation of the identity inside  $\Omega_{\hat{\theta}}$ .

$$\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \xrightarrow{\hat{\theta}} & \Omega_{\hat{\theta}} \\ \hat{\theta} + \rho\hat{\theta} & \downarrow \swarrow & \text{I} + \rho\delta\theta \\ & & \Omega_{\hat{\theta} + \rho\delta\hat{\theta}} \end{array}$$

The structure of the perturbation rules is similar in the case of an eulerian description using velocity fields,

$$\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \xrightarrow{T_t(V)} & \Omega(V) \\ T_t(V + \rho W) & \downarrow \swarrow & \mathcal{T}_\rho^t \stackrel{\text{def}}{=} T_t(V + \rho W) \circ T_t(V)^{-1} \\ & & \Omega(V + \rho W) \end{array}$$

As proved in [44], the transverse map  $\mathcal{T}_\rho^t$  is the flow of a transverse velocity field  $Z_\rho^t$ . This velocity field is written  $Z_t$  for  $\rho = 0$  and it satisfies the following Cauchy problem,

$$\begin{cases} \partial_t Z_t + D Z_t \cdot V - D V \cdot Z_t = W, & (0, T) \\ Z_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (5.70)$$

Using chain rule it is possible to deduce the following identity,

$$j'_e(V) \cdot W = \frac{d}{dV} j_\ell(T_t(V)) \cdot W = \frac{d}{d\hat{\theta}} j_\ell(T_t(V)) \cdot \left( \frac{d}{dV} T_t(V) \cdot W \right) \quad (5.71)$$

As recalled above, the derivative of the mapping  $T_t(V)$  with respect to  $V$  is,

$$\frac{d}{dV} T_t(V) \cdot W = Z_t \circ T_t(V) \quad (5.72)$$

We then set  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta} = Z_t \circ T_t(V)$ , which means that  $\delta\theta = Z_t$ . For a given lagrangian map  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$ , there exists  $V_{\hat{\theta}} = \partial_t \hat{\theta} \circ \hat{\theta}^{-1} \in V$  such that  $\hat{\theta} = T_t(V_{\hat{\theta}})$ . Hence if we perturbed the Lagrangian map in the direction  $\delta\hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\theta \circ \hat{\theta}$ , we generate a velocity field perturbation  $W_{\hat{\theta}}$  given by the following expression,

$$W_{\hat{\theta}} = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - D V_{\hat{\theta}} \circ \delta\theta \quad (5.73)$$

Indeed, using the chain rule, we have

$$\begin{aligned} \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} &= \partial_t \delta\theta + D \delta\theta \cdot \partial_t \hat{\theta} \circ \hat{\theta}^{-1} \\ &= \partial_t \delta\theta + D \delta\theta \cdot V_{\hat{\theta}} \end{aligned}$$

As stated before, we can identify the transverse velocity field  $Z_t$  with  $\delta\theta$ , using the transverse equation we define  $W_{\hat{\theta}}$  such that,

$$\partial_t \delta\theta + D \delta\theta \cdot V_{\hat{\theta}} = W_{\hat{\theta}} + D V_{\hat{\theta}} \cdot \delta\theta \quad (5.74)$$

from which we deduce that,

$$W_{\hat{\theta}} = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - D V_{\hat{\theta}} \cdot \delta\theta \quad (5.75)$$

□

## 5.4 Questions related to Navier-Stokes equations in moving domain

In this section, we shall apply the previous non-cylindrical shape derivative concepts, in order to solve two questions related to the Navier-Stokes equations in a moving domain :

1. We will first obtain a differentiability result concerning the sensitivity of the solution of Navier-Stokes equations in a moving domain with respect to the Lagrangian mapping  $\hat{\theta} \in \Theta_{ad}$ . This result allows us to justify in a rigorous manner, transpiration boundary conditions [49] in fixed domain as a first order approximation of the Navier-Stokes system in moving domain. This approximation is valid around a fixed domain configuration, i.e around  $\hat{\theta} = I$ .
2. Then, we deal with an optimal control problem for the Navier-Stokes system where the control is the displacement of the moving domain  $\hat{\theta}$ . Using results obtained in the first section, we derive the structure of the gradient for a general cost functional. We recover early results obtained using Eulerian field derivative methods.

### 5.4.1 Mathematical justification of transpiration boundary conditions

We consider a viscous incompressible newtonian fluid inside a moving domain  $\Omega_{\hat{\theta}}$ . Its evolution is described by its velocity  $u$  and its pressure  $p$ . The couple  $(u,p)$  satisfies the classical Navier-Stokes equations written in non-conservative form,

$$\begin{cases} \partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & Q_{\hat{\theta}} \\ \operatorname{div}(u) = 0, & Q_{\hat{\theta}} \\ u = V_{\hat{\theta}}, & \Sigma_{\hat{\theta}} \\ u(t=0) = u_0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (5.76)$$

A kinematic continuity boundary condition is satisfied on  $\Gamma_{\hat{\theta}}$ , this means that the fluid velocity is equal to the velocity of the moving boundary  $V_{\hat{\theta}} = \partial_t \hat{\theta} \circ \hat{\theta}^{-1}$  on  $\Gamma_{\hat{\theta}}$ . The main result of this paragraph is the following,

**Theorem 5.5** *Let us assume that,*

- *The mapping  $\hat{\theta} \in \Theta$  is such that  $V_{\hat{\theta}} = \partial_t \hat{\theta} \circ \hat{\theta}^{-1} \in H^1(0,T; H_0^m(D))$  with  $m \geq 5/2$ ,*



then the solution  $(u_{\hat{\theta}}, p_{\hat{\theta}})$  of the Navier-Stokes system (5.76) admits a material shape derivative in  $L^2(0, T; H^2(\Omega_{\hat{\theta}})) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega_{\hat{\theta}}))$ . Furthermore,  $(u_{\hat{\theta}}, p_{\hat{\theta}})$  admits a partial shape derivative  $(u'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta, p'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta)$  solution of the following linear tangent system,

$$\begin{cases} \partial_t u' + \text{D} u' \cdot u + \text{D} u \cdot u' - \nu \Delta u' + \nabla p' = 0, & Q_{\hat{\theta}} \\ \text{div}(u') = 0, & Q_{\hat{\theta}} \\ u' = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - \text{D} u \cdot \delta\theta, & \Sigma_{\hat{\theta}} \\ u'(0) = 0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (5.77)$$

**Proof :** We follow the proof used in [44],[42]. The only difference is that , we do not need to use the transerve field  $Z_t$ . We refer to [15] for the details in case of homogeneous Dirichlet boundary conditions.

We shall detail the obtention of the linearized boundary conditions. We perturbed the Lagrangian mapping with the increment  $\rho\delta\hat{\theta}$  and we get the following perturbed boundary conditions written on the fixed boundary  $\Gamma_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} u(\hat{\theta} + \rho\delta\hat{\theta}) \circ (\hat{\theta} + \rho\delta\hat{\theta}) \Big|_{\rho=0} &= \frac{d}{d\rho} (\partial_t(\hat{\theta} + \rho\delta\hat{\theta})) \Big|_{\rho=0}, \quad \text{on } \Gamma_0 \\ \frac{d}{d\rho} u(\hat{\theta} + \rho\delta\hat{\theta}) \Big|_{\rho=0} \circ \hat{\theta} + (\text{D} u(\hat{\theta})) \circ \hat{\theta} \cdot \delta\hat{\theta} &= \partial_t \delta\hat{\theta} \\ (u'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta) \circ \hat{\theta} + [\text{D} u(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta] \circ \hat{\theta} &= \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \end{aligned}$$

then we get

$$u'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - \text{D} u(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta, \quad \text{on } \Gamma_{\hat{\theta}} \quad (5.78)$$

□

Applying this theorem in the particular case, where the reference flow is considered in a fixed domain, i.e with  $\hat{\theta} = \text{I}$  leads to the derivation of transpiration boundary condition for linearized system,

**Corollary 5.1** *Considering a reference flow  $(u^0, p^0)$  defined in a fixed domain  $\Omega_0 \times (0, T)$ , i.e satisfying the following Navier-Stokes system,*

$$\begin{cases} \partial_t u^0 + \text{D} u^0 \cdot u^0 - \nu \Delta u^0 + \nabla p^0 = 0, & \Omega_0 \times (0, T) \\ \text{div}(u^0) = 0, & \Omega_0 \times (0, T) \\ u^0 = 0, & \Gamma_0 \times (0, T) \\ u^0(t=0) = u_0^0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (5.79)$$

The first order variation  $(\delta u, \delta p) = (\text{D} u^0 \cdot \delta\theta, \text{D} p^0 \cdot \delta\theta) + (u', p')$  around this flow of the solution  $(u^0, p^0)$  of problem (5.79) exists and  $(u', p')$  satisfies the following linear tangent system written in the reference fixed domain,

$$\begin{cases} \partial_t u' + \text{D} u' \cdot u^0 + \text{D} u^0 \cdot u' - \nu \Delta u' + \nabla p' = 0, & \Omega_0 \times (0, T) \\ \text{div}(u') = 0, & \Omega_0 \times (0, T) \\ u' = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - (\text{D} u^0 \cdot n) \langle \delta\theta, n \rangle, & \Gamma_0 \times (0, T) \\ u'(0) = 0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (5.80)$$

**Proof :** This a direct consequence of theorem (5.5). We only need to check the boundary conditions. In the general case, we have

$$u'(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - D u(\hat{\theta}) \cdot \delta\theta, \quad \text{on } \Gamma_{\hat{\theta}} \quad (5.81)$$

We set  $\hat{\theta} = I$  and we get,

$$u' = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - D u^0 \cdot \delta\theta, \quad \Gamma_0 \times (0, T)$$

We then use,

$$D u^0 \cdot \delta\theta = (D_{\Gamma} u^0 + D u^0 n \otimes n) \cdot \delta\theta$$

But  $u^0 = 0$  on  $\Gamma_0$ , then  $D_{\Gamma} u^0 = 0$  on  $\Gamma_0$ , from which we deduce,

$$u' = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - (D u^0 \cdot n) \langle \delta\theta, n \rangle, \quad \Gamma_0 \times (0, T)$$

□

## 5.4.2 Optimal control of the Navier-Stokes system by moving the domain

In this paragraph, we shall deal with an optimal control for the Navier-Stokes system, where the control is the displacement of the domain boundary  $\Gamma_{\hat{\theta}}$ . We choose to minimize a general cost functional based on  $(\hat{\theta}, u_{\hat{\theta}}, p_{\hat{\theta}})$ . We are interested in solving the following minimization problem :

$$\min_{\hat{\theta} \in \mathcal{U}} j(\hat{\theta}) \quad (5.82)$$

where  $j(\hat{\theta}) = J_{\hat{\theta}}(u(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$  with  $(u(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$  is a weak solution of problem (5.76) and  $J_{\hat{\theta}}(u, p)$  is a real functional of the following form :

$$J_{\hat{\theta}}(u, p) = \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{B} u\|_{L^2(Q_{\hat{\theta}})}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}\|_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})}^2 \quad (5.83)$$

where is  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, L^2(Q_{\hat{\theta}}))$  is a general linear differential operator satisfying the following identity,

$$\langle \mathcal{B} u, v \rangle_{L^2(Q_{\hat{\theta}})} + \langle u, \mathcal{B}^* v \rangle_{L^2(Q_{\hat{\theta}})} = \langle \mathcal{B}_{\Sigma} u, v \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \quad (5.84)$$

and  $\mathcal{K} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, L^2(\Sigma_{\hat{\theta}}))$  is a general linear differential operator satisfying the following identity,

$$\langle \mathcal{K} u, v \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} + \langle u, \mathcal{K}^* v \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} = \langle \mathcal{K}_{\Sigma} u, v \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \quad (5.85)$$

The main difficulty in dealing with such a minimization problem is related to the fact that integrals over the domain  $\Omega_{\hat{\theta}}$  depend on the control variable  $\hat{\theta}$ .

**Theorem 5.6** For  $V_{\hat{\theta}} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_t \hat{\theta} \circ \hat{\theta}^{-1} \in \mathcal{U}$  and  $\Omega_0$  of class  $\mathcal{C}^2$ , the fonctionnal  $j(\hat{\theta})$  possesses a gradient  $\nabla j(\hat{\theta})$  which is supported on the moving boundary  $\Gamma_{\hat{\theta}}$  and can be represented by the following expression,

$$\begin{aligned} \nabla j(\hat{\theta}) = & -\partial_t E_{\hat{\theta}} - (\operatorname{div}_{\Gamma} V_{\hat{\theta}}) E_{\hat{\theta}} - D E_{\hat{\theta}} \cdot V_{\hat{\theta}} \\ & - (-\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u) \cdot D u - \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}} \cdot D_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \\ & + \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2] n_{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (5.86)$$

where  $(\varphi, \pi)$  stands for the adjoint fluid state solution of the following system,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - D \varphi \cdot u + {}^* D u \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi = -\alpha \mathcal{B}^* \mathcal{B} u, & Q_{\hat{\theta}} \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q_{\hat{\theta}} \\ \varphi = 0, & \Sigma_{\hat{\theta}} \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T \end{cases} \quad (5.87)$$

and

$$E_{\hat{\theta}} = -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \gamma [-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}] V_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} V_{\hat{\theta}} \quad (5.88)$$

**Proof :** Using chaine rule, we obtain the differentiability of  $j(\hat{\theta})$  in the perturbation direction  $\delta \hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \delta \theta \circ \hat{\theta} \in \Theta$ . Using theorems (5.1) and (5.2), we can state,

$$\begin{aligned} \langle j'(\hat{\theta}), \delta \theta \rangle = & \alpha \langle \mathcal{B} u, \mathcal{B} u' \rangle_{L^2(Q_{\hat{\theta}})} + \gamma \langle \mathcal{K} V_{\hat{\theta}}, \mathcal{K}(\partial_t(\delta \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - D_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \cdot \delta \theta) \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \\ & + \langle \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2] n_{\hat{\theta}}, \delta \theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \end{aligned}$$

Using the adjoint operators, we perform an integration by parts,

$$\begin{aligned} \langle j'(\hat{\theta}), \delta \theta \rangle = & -\alpha \langle \mathcal{B}^* \mathcal{B} u, u' \rangle_{L^2(Q_{\hat{\theta}})} + \gamma \langle (-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, \partial_t(\delta \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - D_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \cdot \delta \theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \\ & + \langle \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u, u' \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} + \langle \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2] n_{\hat{\theta}}, \delta \theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \end{aligned}$$

We now define the fluid adjoint state  $(\varphi, \pi)$  solution of the adjoint problem (4.93), we deduce the following identity,

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{\hat{\theta}}} [\partial_t u' + D u' \cdot u + D u \cdot u' - \nu \Delta u' + \nabla p'] \varphi - \int_{Q_{\hat{\theta}}} \pi \operatorname{div} u' \\ = & \int_{Q_{\hat{\theta}}} [-\partial_t \varphi - D \varphi \cdot u + {}^* D u \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi] u' - \int_{Q_{\hat{\theta}}} p' \operatorname{div} \varphi \\ & + \int_{\Sigma_{\hat{\theta}}} [p' n \cdot \varphi - \nu \varphi \cdot \partial_n u' + \nu u' \cdot \partial_n \varphi - u' \cdot \pi n] \end{aligned} \quad (5.89)$$

Hence we get,

$$-\alpha \langle \mathcal{B}^* \mathcal{B} u, u' \rangle_{L^2(Q_{\hat{\theta}})} = -\langle \sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}}, u' \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \quad (5.90)$$

Using the linearized system (4.85) satisfied by  $u'$ , we deduce that

$$u' = \partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} - \mathbf{D} u \cdot \delta\theta, \quad \text{on } \Sigma_{\hat{\theta}}$$

then,

$$\begin{aligned} \langle j'(\hat{\theta}), \delta\theta \rangle &= \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u + \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, \partial_t(\delta\hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \\ &\quad - \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u, \mathbf{D} u \cdot \delta\theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \\ &\quad - \langle \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, \mathbf{D}_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \cdot \delta\theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} + \langle \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2] n_{\hat{\theta}}, \delta\theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \end{aligned}$$

We now set  $E_{\hat{\theta}} = -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u + \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}$  and we use theorem (5.3) and we obtain,

$$\begin{aligned} \langle j'(\hat{\theta}), \delta\theta \rangle &= \langle [-\partial_t E_{\hat{\theta}} - (\operatorname{div}_{\Gamma} V_{\hat{\theta}}) E_{\hat{\theta}} - \mathbf{D} E_{\hat{\theta}} \cdot V_{\hat{\theta}}] \\ &\quad - (-\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u) \cdot \mathbf{D} u - \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}} \cdot \mathbf{D}_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2] n_{\hat{\theta}}, \delta\theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \end{aligned}$$

From which, we deduce the expression of the gradient  $\nabla j(\hat{\theta})$ .

□

### 5.4.3 Comparison with the eulerian derivative version

Using theorem (5.4), we can reciprocally deduce the expression of one of the directional derivatives from another. Let us apply this equivalence on the optimal control treated previously.

We have established the structure of the Lagrangian derivative of the functional  $j(\hat{\theta})$ ,

$$\begin{aligned} \langle j'(\hat{\theta}), \delta\theta \rangle &= \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u + \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, \partial_t(\delta\hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \\ &\quad - \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u, \mathbf{D} u \cdot \delta\theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \\ &\quad - \langle \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, \mathbf{D}_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \cdot \delta\theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} + \langle \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2] n_{\hat{\theta}}, \delta\theta \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \end{aligned}$$

Let us set  $\hat{\theta} = T_t(V_{\hat{\theta}})$ ,  $\delta\theta = Z_t$  and  $\partial_t(\delta\theta \circ \hat{\theta}) \circ \hat{\theta}^{-1} = W_{\hat{\theta}} + \mathbf{D} V_{\hat{\theta}} \cdot \delta Z_t$ , we get

$$\begin{aligned} \langle j'(T_t(V_{\hat{\theta}})), Z_t \rangle &= \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u + \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, W_{\hat{\theta}} + \mathbf{D} V_{\hat{\theta}} \cdot Z_t \rangle_{L^2(\Sigma(V_{\hat{\theta}}))} \\ &\quad - \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u, \mathbf{D} u \cdot Z_t \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \\ &\quad - \langle \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, \mathbf{D}_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \cdot Z_t \rangle_{L^2(\Sigma(V_{\hat{\theta}}))} \\ &\quad + \langle \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2], \langle Z_t, n_{\hat{\theta}} \rangle \rangle_{L^2(\Sigma(V_{\hat{\theta}}))} \end{aligned}$$

We recall that

$$\begin{aligned} D V_{\hat{\theta}} \cdot Z_t &= D_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \cdot Z_t + (D V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}}) \langle Z_t, n_{\hat{\theta}} \rangle \\ D u \cdot Z_t &= D_{\Gamma} u \cdot Z_t + (D u \cdot n_{\hat{\theta}}) \langle Z_t, n_{\hat{\theta}} \rangle \end{aligned}$$

Using  $u = V_{\hat{\theta}}$ , on  $\Gamma_{\hat{\theta}}$  we deduce that  $D u \cdot Z_t = D_{\Gamma} V_{\hat{\theta}} \cdot Z_t + (D u \cdot n_{\hat{\theta}}) \langle Z_t, n_{\hat{\theta}} \rangle$ , then we deduce

$$\begin{aligned} \langle j'(T_t(V_{\hat{\theta}})), Z_t \rangle &= \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u + \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, W_{\hat{\theta}} \rangle_{L^2(\Sigma(V_{\hat{\theta}}))} \\ &\quad \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u, D(V_{\hat{\theta}} - u) \cdot n_{\hat{\theta}} \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \\ &\quad + \langle \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, D V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}} \rangle_{L^2(\Sigma(V_{\hat{\theta}}))} \\ &\quad + \langle \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2], \langle Z_t, n_{\hat{\theta}} \rangle \rangle_{L^2(\Sigma(V_{\hat{\theta}}))} \end{aligned}$$

We choose a canonical extension  $V_{\hat{\theta}} \circ p$ , this means that  $D V_{\hat{\theta}} \cdot n_{\hat{\theta}} = 0$ , on  $\Gamma_{\hat{\theta}}$ , then

$$\begin{aligned} \langle j'_e(V_{\hat{\theta}}), W_{\hat{\theta}} \rangle &= \langle j'(T_t(V_{\hat{\theta}})), Z_t \rangle = \langle -\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u \\ &\quad + \gamma(-\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K}) V_{\hat{\theta}}, W_{\hat{\theta}} \rangle_{L^2(\Sigma(V_{\hat{\theta}}))} + \langle [\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} - \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u] \cdot D u \cdot n_{\hat{\theta}} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2], \langle Z_t, n_{\hat{\theta}} \rangle \rangle_{L^2(\Sigma_{\hat{\theta}})} \end{aligned}$$

This is exactly the expression obtained in [42], using Eulerian methods. Let us define, the adjoint transverse boundary field  $\lambda_{\hat{\theta}}$ , solution of the following tangential dynamical system,

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda_{\hat{\theta}} - \nabla_{\Gamma} \lambda_{\hat{\theta}} \cdot V_{\hat{\theta}} - \operatorname{div}(V_{\hat{\theta}}) \lambda_{\hat{\theta}} = f, & (0, T) \\ \lambda_{\hat{\theta}}(T) = 0, & \Gamma_T(V) \end{cases} \quad (5.91)$$

with

$$f = [\sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} - \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u] \cdot D u \cdot n_{\hat{\theta}} + \frac{1}{2} [\alpha |\mathcal{B} u|^2 + \gamma |\mathcal{K} V_{\hat{\theta}}|^2] \quad (5.92)$$

then

$$\nabla j_e(V_{\hat{\theta}}) = -\lambda_{\hat{\theta}} n_{\hat{\theta}} - \sigma(\varphi, \pi) \cdot n_{\hat{\theta}} + \alpha \mathcal{B}_{\Sigma} \mathcal{B} u + \gamma [-\mathcal{K}^* \mathcal{K} V_{\hat{\theta}} + \mathcal{K}_{\Sigma} \mathcal{K} V_{\hat{\theta}}] \quad (5.93)$$

where  $(\varphi, \pi)$  stands for the adjoint fluid state.

Troisième partie  
Cas des systèmes couplés  
Euler-Lagrange



Dans cette dernière partie, nous nous intéressons au problème de suivi d'instabilités pour le système complet fluide-structure. Les résultats établis dans la deuxième partie sont à la base de la dérivation par rapport à la vitesse du fluide en amont de la structure, des fonctionnelles de suivi de trajectoires, dans le cas où l'évolution de la frontière solide mobile est régie par une équation différentielle ou aux dérivées partielles. Cette partie s'organise en deux chapitres :

### III.1 *Contrôle optimal de systèmes couplés fluide-structure : cas du solide rigide*

Ce chapitre co-écrit avec Jean-Paul Zolésio, paru sous forme d'un rapport de recherche INRIA [122], a pour objet l'étude d'un problème de contrôle optimal pour un système mécanique constitué d'un solide rigide élastiquement supporté, dont le comportement est régi par une équation différentielle ordinaire, au sein d'un fluide newtonien en écoulement incompressible, dont l'évolution est régie par les équations de Navier-Stokes. Nous établissons la structure du gradient d'une fonctionnelle de coût à minimiser grâce à l'introduction d'un nouveau problème adjoint. La structure de cet adjoint est reliée à l'utilisation d'un champ transverse ALE intervenant dans le contexte de la minimisation de fonctionnelles eulériennes non-cylindriques introduit au Chapitre II.1.

### III.2 *Analyse de sensibilité pour un système couplé fluide-structure tridimensionnel*

Ce chapitre écrit en collaboration avec Miguel Fernández, paru sous forme d'article dans [55], a pour objet l'analyse de sensibilité pour un système mécanique constitué d'un solide élastique, dont le comportement est régi par les lois de l'élasticité non-linéaire, au sein d'un fluide newtonien en écoulement incompressible, dont l'évolution est régie par les équations de Navier-Stokes. On étudie les variations du système vis-à-vis d'une donnée de Dirichlet frontière associée à la vitesse du fluide. On recherche le système satisfait par la dérivée de l'état par rapport à cette donnée.





# Chapitre 6

## Contrôle optimal de systèmes en interaction fluide-structure : cas du solide rigide

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>271</b>
<b>6.2</b>	<b>Mathematical settings</b>	<b>271</b>
<b>6.3</b>	<b>Well-posedness of the coupled system</b>	<b>275</b>
<b>6.4</b>	<b>Inverse problem settings</b>	<b>276</b>
6.4.1	Analysis strategy	276
6.4.2	Free divergence and non-homogeneous Dirichlet boundary condition constraints	277
6.4.3	Solid reduced order and solid weak state operator	278
6.4.4	Fluid state operator	279
6.4.5	Coupled system operator	280
6.4.6	Min-Max problem	280
<b>6.5</b>	<b>KKT Optimality Conditions</b>	<b>281</b>
6.5.1	Derivatives with respect to state variables	282
6.5.2	Solid adjoint system	282
<b>6.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>295</b>

---

Ce chapitre co-écrit avec Jean-Paul Zolésio, paru sous forme d'un rapport de recherche INRIA [122], a pour objet l'étude d'un problème de contrôle optimal pour un système mécanique constitué d'un solide rigide élastiquement supporté, dont le comportement est régi par une équation différentielle ordinaire, au sein d'un fluide newtonien en écoulement incompressible, dont l'évolution est régie par les équations de Navier-Stokes. Nous établissons la structure du gradient d'une fonctionnelle de coût à minimiser grâce à l'introduction d'un nouveau problème adjoint. La structure de cet adjoint est reliée à l'utilisation d'un champ transverse ALE intervenant dans le contexte de la minimisation de fonctionnelles eulériennes non-cylindriques.

## 6.1 Introduction

This report deals with the analysis of an inverse boundary problem arising in the study of bridge deck aeroelastic stability. The aeroelastic system consists of an elastically supported rigid solid moving inside an incompressible fluid flow in 2-D.

As described in part I., the stability analysis is performed by solving an instability tracking problem, which eventually leads to the determination of critical wind speeds of minimal energy that may produce unstable structural motions. Our work is focused on the mathematical justification of optimality conditions associated to the minimization problem involved in the instability tracking method.

The aeroelastic system we are dealing with, is described by a non-cylindrical system of partial differential equations, where the evolution of the moving boundary is unknown. In case, where the evolution of boundaries is prescribed, inverse problems have been first considered by Da Prato *et al* [33] for a general parabolic equations written in non-cylindrical domains. The works of Wang [155] and Acquistapace *et al* [2] are closely related to the first one. The basic principle is to define a map sending the non-cylindrical domain into a cylindrical one. This process leads to the mathematical analysis of non-autonomous PDE's systems.

Recently a new methodology to obtain eulerian derivative for non-cylindrical functionals was introduced in [44]. This methodology was applied in [43],[42] to perform dynamical shape control in non-cylindrical Navier-Stokes equations where the evolution of the domain is the control variable.

For the aeroelastic coupled problem, there is a lack of results for the control case. The present report is an attempt to fill this gap. It is organized in four parts :

- In section 2, we introduce the notations and the mechanical system we shall deal with and we state the main result of this report, namely the structure of a cost functional gradient with respect to inflow boundary conditions perturbations. The proof is given in the remaining part of the paper.
- In section 3, we recall early results concerning the well-posedness of the coupled fluid-structure system.
- In section 4, we introduce the minimization problem and its associated Lagrangian functional.
- In section 5, we perform derivation of the Lagrangian with respect to state variables. This allows us to obtain the structure of the adjoint variables involved in the cost functional gradient.

## 6.2 Mathematical settings

We consider a two dimensionnal flexible structure in rigid motion. For the sake of simplicity, we only consider one degree of freedom for the structural motion : the vertical displacement  $d(t)e_2$  where  $e_2$  is the element of cartesian basis  $(e_1, e_2, e_3)$  in  $\mathbb{R}^3$ .

The structure is surrounded by a viscous fluid in the plane  $(e_1, e_2)$ . We consider a control volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  containing the solid for every time  $t \geq 0$ . Hence, the analysis of the coupled problem is set in  $\Omega \times (0, T)$  where  $T > 0$  is an arbitrary time.

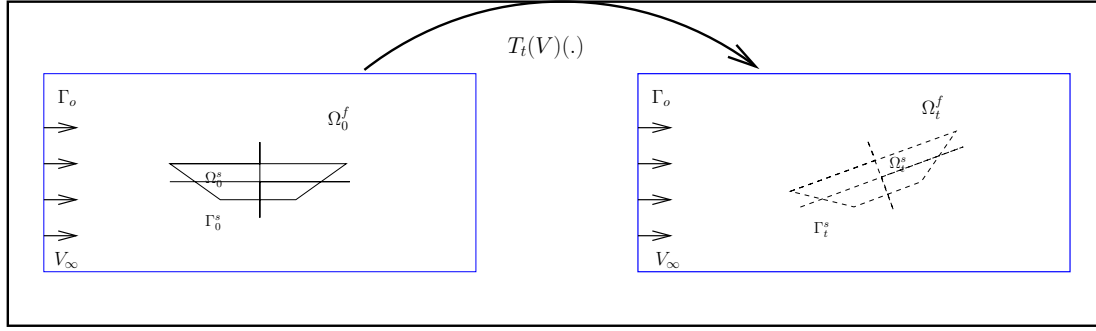


FIG. 6.1 – Arbitrary Euler-Lagrange map

In order to deal with such coupled system, we introduce a diffeomorphic map sending a fix reference domain  $\Omega_0$  into the physical configuration  $\Omega$  at time  $t \geq 0$ .

Without loss of generality, we choose the reference configuration to be the physical configuration at initial time  $\Omega(t = 0)$ .

Hence, we define a map  $T_t \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega_0})$  such that

$$\begin{aligned}\overline{\Omega_t^f} &= T_t(\overline{\Omega_0^f}), \\ \overline{\Omega_t^s} &= T_t(\overline{\Omega_0^s})\end{aligned}$$

Since we only consider one degree of freedom motion, we write

$$\overline{\Omega_t^s} = \overline{\Omega_0^s} + d(t)e_2$$

We set  $\Sigma^s \equiv \bigcup_{0 < t < T} (\{t\} \times \Gamma_t^s)$ ,  $Q^f \equiv \bigcup_{0 < t < T} (\{t\} \times \Omega_t^f)$  and  $\Sigma_\infty^f \equiv \Gamma_\infty^f \times (0, T)$

The map  $T_t$  can be actually defined as the flow of a particular vector field, as described in the following lemma :

**Lemma 6.1 ([159])** *Assuming that  $d(\cdot)$  is smooth enough, there exists a vector field  $V$  that builds  $Q$ , i.e*

$$\begin{aligned}\overline{\Omega_t^f} &= T_t(V)(\overline{\Omega_0^f}), \\ \overline{\Omega_t^s} &= T_t(V)(\overline{\Omega_0^s})\end{aligned}$$

where  $T_t(V)$  is solution of the following dynamical system :

$$\begin{aligned}T_t(V) : \Omega_0 &\longrightarrow \Omega \\ x_0 &\longmapsto x(t, x_0) \equiv T_t(V)(x_0)\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= V(\tau, x(\tau)), \quad \tau \in [0, T] \\ x(\tau = 0) &= x_0, \quad \text{in } \Omega_0\end{aligned} \tag{6.1}$$

In our simple case, we can give an example of an appropriate flow vector field :

$$\begin{cases} V(x,t) = \dot{d}(t)e_2, & x \in \overline{\Omega_t^s} \\ V(x,t) = \text{Ext}(\dot{d}(t)e_2), & x \in \Omega_t^f \\ V(x,t) \cdot n = 0, & x \in \Gamma_\infty^f \end{cases} \quad (6.2)$$

where  $\text{Ext}$  is an arbitrary extension operator from  $\Gamma_0^s$  into  $\Omega_0^f$ . The map  $T_t$  is usually referred as the Arbitrary Euler-Lagrange map.

The solid is described by the evolution of its displacement and its velocity and the couple  $(d, \dot{d})$  is solution of the following ordinary second order differential equation :

$$\begin{cases} m \ddot{d} + k d = F_f, \\ [d, \dot{d}](t=0) = [d_0, d_1] \end{cases} \quad (6.3)$$

where  $(m, k)$  stand for the structural mass and stiffness.  $F_f$  is the projection of the fluid loads on  $\Gamma_t^s$  along the direction of motion  $e_2$ .

The fluid is assumed to be a viscous incompressible newtonian fluid. Its evolution is described by its velocity  $u$  and its pressure  $p$ . The couple  $(u, p)$  satisfies the classical Navier-Stokes equations written in non-conservative form :

$$\begin{cases} \partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & Q^f(V) \\ \text{div}(u) = 0, & Q^f(V) \\ u = u_\infty, & \Sigma_\infty^f \\ u(t=0) = u_0, & \Omega_0^f \end{cases} \quad (6.4)$$

where  $\nu$  stands for the kinematic viscosity and  $u_\infty$  is the farfield velocity field.

Hence, the projected fluid loads  $F_f$  have the following expression :

$$F_f = - \left( \int_{\Gamma_t^s} \sigma(u, p) \cdot n \right) \cdot e_2 \quad (6.5)$$

where  $\sigma(u, p) = -pI + \nu(Du + {}^*Du)$  stands for the fluid stress tensor inside  $\Omega_t^f$ , with  $(Du)_{ij} = \partial_j u_i = u_{i,j}$ .

We complete the whole system with kinematic continuity conditions at the fluid-structure interface  $\Gamma_t^s$  :

$$u = V = \dot{d} e_2, \text{ sur } \Sigma^s(V) \quad (6.6)$$

To summarize, we get the following coupled system :

$$\begin{cases} \partial_t u + D u \cdot u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & Q^f(V) \\ \text{div}(u) = 0, & Q^f(V) \\ u = u_\infty, & \Sigma_\infty^f \\ u = \dot{d} e_2, & \Sigma^s(V) \\ m \ddot{d} + k d = - \left( \int_{\Gamma_t^s} \sigma(u, p) \cdot n \right) \cdot e_2, & (0, T) \\ [u, d, \dot{d}](t=0) = [u_0, d_0, d_1], & \Omega_0^f \times \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (6.7)$$

**Main Result :** For  $u_\infty \in \mathcal{U}_c$  the following minimization problem,

$$\min_{u_\infty \in \mathcal{U}_c} j(u_\infty) \quad (6.8)$$

where  $j(u_\infty) = J_{u_\infty}([u, p, d, \dot{d}](u_\infty))$  with  $[u, p, d, \dot{d}](u_\infty)$  is a weak solution of problem (6.7) and  $J_{u_\infty}$  is a real functional of the following form :

$$J_{u_\infty}([u, p, d, \dot{d}]) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T [|d - d_g^1|^2 + |\dot{d} - d_g^2|^2] + \frac{\gamma}{2} \|u_\infty\|_{\mathcal{U}_c}^2 \quad (6.9)$$

admits at least a solution  $u_\infty^*$  which satisfies the following necessary first-order optimality conditions,

$$\nabla j(u_\infty^*) = (\sigma(\varphi_{u_\infty^*}, \pi_{u_\infty^*}) \cdot n)|_{\Sigma_\infty^f} + \gamma u_\infty^* = 0 \quad (6.10)$$

with  $(\varphi, \pi, b_1, b_2)$  are solutions of the following adjoint system,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - D \varphi \cdot u + (*Du) \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla q = 0, & Q^f(V) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q^f(V) \\ \varphi = b_2 e_2, & \Sigma^s(V) \\ \varphi = 0, & \Sigma_\infty^f \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T^f \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\begin{cases} -\dot{b}_1 + k b_2 = \alpha(d - d_g^1), & (0, T) \\ b_1(T) = 0, \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda - \nabla_\Gamma \lambda \cdot V = f, & \Sigma^s(\dot{d} e_2) \\ \lambda(T) = 0, & \Gamma_T(\dot{d} e_2) \end{cases} \quad (6.13)$$

with  $f = [-\dot{d} \dot{b}_2 + \nu (D \varphi \cdot n) \cdot (D u \cdot n) - |\dot{d}|^2 (D \varphi \cdot e_2) \cdot e_2]$  and

$$\int_{\Gamma_t^s(V)} \lambda n = [-b_1 - m \dot{b}_2 - \alpha(d - d_g^2)] e_2 + \int_{\Gamma_t^s(V)} \sigma(\phi, \pi) \cdot n \quad (6.14)$$

**Remark 6.1** We can eliminate the auxiliary adjoint variables  $(\lambda, b_1)$ , in order to get a system only involving the adjoint variables  $(\varphi, \pi, b_2)$ . We then replace equations (6.2), (6.13), (6.14) by the following second order ODE,

$$\begin{cases} m \ddot{b}_2 + k b_2 = \alpha(d - d_g^1) - \alpha(\dot{d} - d_g^2) + \partial_t \left( \int_{\Gamma_t^s(V)} \sigma(\phi, \pi) \cdot n \right) \cdot e_2 \\ + \int_{\Gamma_t^s(V)} [|\dot{d}|^2 (D \varphi \cdot e_2) \cdot e_2 - \nu (D \varphi \cdot n) \cdot (D u \cdot n)] \cdot n & (0, T) \\ [b_2, \dot{b}_2](T) = [0, 0], \end{cases} \quad (6.15)$$

### 6.3 Well-posedness of the coupled system

We are interested in recalling global existence results for weak solutions to the initial boundary value problem (6.7). One should expect some restrictions on the existence time for the solutions since depending on the data, the solid may vanish outside the control volume  $\Omega$ .

This problem was recently investigated by several authors [139], [30], [39], [59], [78], [143]. We refer to [73] and [78] for a complete review. In our case, we only have one degree of freedom for the solid motion and we are dealing with two dimensional Navier-Stokes equations. Nevertheless, we deal with non-homogeneous Dirichlet boundary conditions at the farfield fluid boundary.

**Theorem 6.1** *Assume the following hypothesis :*

- i)  $\Omega_0^s, \Omega_0$  are of class  $C^2$ ,
- ii)  $a = \text{dist}(\Gamma_\infty^f, \Omega_0^s) > 0$ ,
- iii)

$$\begin{aligned} u_0 &\in (L^2(\Omega_0^f))^2 & u_\infty &\in (H^m(\Sigma_\infty^f))^2 & m > \frac{3}{4} \\ \text{div}(u_0) &= 0, & & \text{dans } \Omega_0^f & \\ u_0 &= d_1 e_2, & & \text{sur } \Gamma_0^s & \end{aligned} \tag{6.16}$$

then there exists a positive real time  $T_0 = T_0(u_0, a, \Omega_0^s, \Omega_0)$  such that for any  $T \in (0, T_0)$ , there exists at least one weak solution to the initial-boundary value problem (6.7), with

$$\begin{aligned} d &\in W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R}) \cap C^0([0, T]; \mathbb{R}) \\ (u, \dot{d}) &\in L^2(0, T; \mathcal{V}_{d(\cdot)}) \cap L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{d(\cdot)}) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{d(t)} \equiv \{ (v, \ell) \in (L^2(\Omega_0))^2 \times \mathbb{R}, \quad \text{div}(v) = 0, \\ v \cdot n = 0, \quad \text{on } \Gamma_\infty^f, \quad v|_{\Omega_t^s} = \ell \cdot e_2, \text{supp}(v) \subset \Omega_t^f \} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{d(t)} \equiv \{ (v, \ell) \in (H^1(\Omega_0))^2 \times \mathbb{R}, \quad \text{div}(v) = 0, \\ v = 0, \quad \text{on } \Gamma_\infty^f, \quad v|_{\Omega_t^s} = \ell \cdot e_2, \text{supp}(v) \subset \Omega_t^f \} \end{aligned}$$

and satisfies the following identity :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left[ \int_{\Omega_t^f} u \cdot \partial_t v + m \dot{d} \ell - k d \ell \right] \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_t^f} [(D u \cdot u) \cdot v + \nu D u \cdot \cdot D v] = m d_1 \ell(0) + \int_{\Omega_0^f} u_0 \cdot v(0) \\ \forall (v, \ell) & \in C^1([0, T]; \mathcal{V}_{d(\cdot)}) \text{ with } v(T) = \dot{\ell}(T) = 0 \end{aligned} \tag{6.17}$$



**Remark 6.2** Using results from Fursikov et al [67], we can relax the regularity assumption for  $u_\infty$  and ask:

iii)

$$\begin{aligned} u_\infty \cdot \tau &\in L^2(0,T; (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty^f))^2) \cap H^{\frac{1}{4}}(0,T; (L^2(\Gamma_\infty^f))^2) \\ u_\infty \cdot n &\in L^2(0,T; (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty^f))^2) \cap H^{\frac{3}{4}}(0,T; (H^{-1}(\Gamma_\infty^f))^2) \end{aligned}$$

## 6.4 Inverse problem settings

As mentioned previously, we would like to perform a mathematical analysis of the Instability Tracking method described in the introduction of this thesis. More precisely, we analyse the minimization problem involved in this method. In the sequel, we will highly use the framework introduced by Zolésio and its collaborators concerning shape optimization tools [36], [145], [42], [43], [44].

We are interested in solving the following minimization problem :

$$\min_{u_\infty \in \mathcal{U}_c} j(u_\infty) \quad (6.18)$$

where  $j(u_\infty) = J_{u_\infty}([u,p,d,\dot{d}])(u_\infty)$  with  $[u,p,d,\dot{d}](u_\infty)$  is a weak solution of problem (6.7) and  $J_{u_\infty}$  is a real functional of the following form :

$$J_{u_\infty}([u,p,d,\dot{d}]) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T [ |d - d_g^1|^2 + |\dot{d} - \dot{d}_g^2|^2 ] + \frac{\gamma}{2} \|u_\infty\|_{\mathcal{U}_c}^2 \quad (6.19)$$

The main difficulty in dealing with such a minimization problem is related to the dependence of integrals on the unknown domain  $\Omega_t^f$  which depends also on the control variable  $u_\infty$ . This point will be solved by using the ALE map  $T_t$  introduced previously.

### 6.4.1 Analysis strategy

We shall focus our efforts on the derivation of first-order optimality conditions for problem (6.18). This involves the computation of the gradient with respect to the inflow condition  $u_\infty$  of the cost function  $J_{u_\infty}$ .

There exists several methods to handle such a question,

- Following [43], it is possible to handle the derivative  $\frac{D}{Du_\infty}(u,p,d) \cdot \delta u_\infty$  using a back transport map into a fix domain and use the weak implicit function theorem to justify and obtain the linearized system. Once the full linear tangent system is defined, it is possible to define an adjoint system which solution may be involved in the computation of the objective function gradient.
- An other possible choice is to try to pass through the obtention of a linear tangent system and directly get the adjoint system. This may be realized using a Min-Max formulation of the minimization problem (6.18) taking into account the coupled system constraint through Lagrange multipliers.

In this report, we shall use the latter choice coupled with the introduction a transverse map in order to handle the sensitivity analysis of the Lagrangian functional with respect to variation of the fluid domain.

### 6.4.2 Free divergence and non-homogeneous Dirichlet boundary condition constraints

We shall now describe the way to take into account inside the Lagrangian functional, several constraints associated to the coupled system.

The divergence free condition coming from the fact that the fluid has an homogeneous density and evolves as an incompressible flow is difficult to impose on the mathematical and numerical point of view. We choose to include the divergence free condition directly into the Lagrangian functional thanks to a multiplier that may play the role of the adjoint variable associated to the primal pressure variable. This leads in a certain sense to a saddle point formulation or mixed formulation of the Navier-Stokes subsystem. We shall use the following identity,

$$-\int_{\Omega_t^f} q \operatorname{div} u = \int_{\Omega_t^f} u \cdot \nabla q - \int_{\Gamma_\infty^f} u \cdot (q n) - \int_{\Gamma_t^s} u \cdot (q n) \quad (6.20)$$

The coupled system (6.7) involves two essential non-homogeneous Dirichlet boundary conditions,

$$u = u_\infty, \quad \Sigma_\infty^f \quad (6.21)$$

$$u = \dot{d} e_2, \quad \Sigma_0^s \quad (6.22)$$

We use a very weak formulation of the state equation, consisting in totally transposing the laplacian operator,

$$\int_{\Omega_t^f} -\nu \Delta u \cdot \phi = \int_{\Omega_t^f} -\nu \Delta \phi \cdot u + \int_{\Gamma_\infty^f \cup \Gamma_t^s} \nu [u \cdot \partial_n \phi - \phi \cdot \partial_n u] d\Gamma \quad (6.23)$$

We shall substitute inside this identity the desirable boundary conditions and we will recover the boundary constraints in performing an integration by parts inside the optimality conditions corresponding to the sensitivity with respect to the multipliers. This procedure has been already use in [145] and [35] to perform shape optimization problems for elliptic equations using Min-Max principles.

We shall also choose to transpose the time operator inside the weak formulation. This has to be performed very carefully, since we are dealing with a moving domain,

$$\int_0^T \int_{\Omega_t^f} \partial_t u \cdot v = - \int_0^T \int_{\Omega_t^f} u \cdot \partial_t v - \int_0^T \int_{\partial \Omega_t^f} (u \cdot v) \langle V, n \rangle \quad (6.24)$$

$$+ \int_{\Omega_T^f} u(T) \cdot v(T) - \int_{\Omega_0^f} u(0) \cdot v(0) \quad (6.25)$$

**Remark 6.3** *This kind of techniques has been popularized in [110] as a systematic way to study non-homogeneous linear partial differential equations. These formulations are usually called very weak formulations or transposition formulations. We shall notice that these methods are still valid in the non-linear case to obtain regularity or existence results. We refer to [5] for a recent applications on the Navier-Stokes system.*

### 6.4.3 Solid reduced order and solid weak state operator

For the sake of simplicity, we reduce the order of the solid governing equation by defining the global solid variable,

$$\tilde{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \dot{d} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

leading to the first order ordinary differential equation,

$$M \dot{\tilde{d}} + K \tilde{d} = F \quad (6.27)$$

with

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ F_f \end{pmatrix}$$

In the case of the coupled fluid-solid system, the loads depend on the fluid state variable,

$$F_f(u,p) = - \left( \int_{\Gamma_i^s} \sigma(u,p) \cdot n \right) \cdot e_2$$

We introduce the state and multiplier spaces in order to define a proper solid weak state operator,

$$X_1^s = \{d_1 \in \mathcal{C}^1([0,T])\} \quad (6.28)$$

$$X_2^s = \{d_2 \in \mathcal{C}^1([0,T])\} \quad (6.29)$$

$$Y_1^s = \{b_1 \in \mathcal{C}^1([0,T])\} \quad (6.30)$$

$$Y_2^s = \{b_2 \in \mathcal{C}^1([0,T])\} \quad (6.31)$$

and the load space,

$$L = \{F \in \mathcal{C}^1([0,T])\}$$

This allows us to define a solid state operator,

$$e^s : X_1^s \times X_2^s \times L \longrightarrow (Y_1^s \times Y_2^s)^*$$

whose action is defined by the following identity,

$$\begin{aligned} \langle e^s(d_1, d_2, F), (b_1, b_2) \rangle &= \int_0^T \left[ -d_1 \dot{b}_1 - d_2 b_1 \right] - d_1^0 b_1(0) + d_1(T) b_1(T) \\ &+ \int_0^T \left[ -m d_2 \dot{b}_2 + k d_1 b_2 \right] - m d_2^0 b_2(0) + m d_2(T) b_2(T) - \int_0^T F b_2 \end{aligned}$$

### 6.4.4 Fluid state operator

In this section, we summarize the different options that we have chosen for the Lagrangian framework and define the variational state operator constraint.

In order to deal with rigid displacement vector fields, we introduce the following spaces: Rigid displacement spaces:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \phi \in (H^1(\Omega_0))^2; \quad \nabla \phi = 0, \quad \text{in } \Omega_0^s \} \\ \mathcal{H}_0^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \phi \in (H^1(\Omega_0))^2; \quad \nabla \phi = 0, \quad \text{in } \Omega_0^s, \quad \phi = 0, \quad \text{on } \Gamma_\infty^f \}\end{aligned}$$

**Lemma 6.2** For  $\varphi \in \mathcal{H}^1$ , assuming that  $\Omega_0^s$  is connected, there exists  $C \in \mathbb{R}^2$  such that

$$\varphi|_{\Omega_0^s} = C$$

In the sequel, we will need to define precise state and multiplier spaces in order to endow our problem with a Lagrangian functional framework.

Following the existence result stated previously, we introduce the fluid state space:

$$X^f \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in H^2(0, T; (H^2(\Omega_t^f))^2 \cap \mathcal{H}^1) \right\}$$

$$Z^f \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ p \in H^1(0, T; (H^1(D))^2) \right\}$$

We also need test function spaces that will be useful to define Lagrange multipliers:

$$Y^f \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in L^2(0, T; (H^2(\Omega_t^f))^2 \cap \mathcal{H}_0^1) \right\}$$

$$V^f \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ q \in H^1(0, T; (H^1(D))^2) \right\}$$

$$W_s^f \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (v, b_2) \in Y^f \times Y_2^s, v|_{\Gamma_t^s} = b_2 \cdot e_2 \right\}$$

We define the fluid weak state operator,

$$e_{u_\infty}^f : X^f \times Z^f \times U^s \longrightarrow (Y^f \times V^f)^*$$

whose action is defined by:

$$\begin{aligned}\langle e_{u_\infty}^f(u, p, u^s), (v, q) \rangle &= \int_0^T \int_{\Omega_t^f} [-u \cdot \partial_t v + (D u \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div} v] \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} u_\infty \cdot (\sigma(v, q) \cdot n) + \int_0^T \int_{\Gamma_t^s} [u^s \cdot (\sigma(v, q) \cdot n) - (u \cdot v) \langle u^s, n \rangle] \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma_t^s} v \cdot (\sigma(u, p) \cdot n) + \int_{\Omega_T} u(T) \cdot v(T) - \int_{\Omega_0} u_0 \cdot v(t=0)\end{aligned}$$

$$\forall (v, q) \in Y^f \times V^f$$

### 6.4.5 Coupled system operator

Our mechanical system consist of a solid part and a fluid part. These subsystems have been represented thanks to a solid and a fluid state operator. It is now possible to couple these two operators in order to build an ad-hoc coupled system operator.

The major point here, is to notice that the fluid load  $F_f$  appears in the fluid state operator and then can be coupled with the solid part thanks to the input load  $F$  of the solid operator. To achieve this coupling, we need to decide whether or not the fluid and the solid multipliers match at the fluid-solid interface. If not, we have to work with the fluid constraint tensor at the fluid-solid boundary, what may be not convenient due to regularity requirement. Hence, we choose to work with continuous test functions on  $\Gamma_t^s$ . This means that we shall choose the fluid and second solid multiplier spaces to be the space  $W_s^f$ . We define the coupled system weak state operator as follows,

$$e_{u_\infty} : Y^f \times Z^f \times X_1^s \times X_2^s \longrightarrow (W_s^f \times V^f \times Y_1^s)^*$$

whose action is defined by the following identity,

$$\begin{aligned} \langle e_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2), (v, q, b_1, b_2) \rangle &= \langle e^s(d_1, d_2, F_f), (b_1, b_2) \rangle + \langle e_{u_\infty}^f(u, p, d_2, e_2), (v, q, d_1 \cdot e_2) \rangle \\ &= \int_0^T \int_{\Omega_t^f} [-u \cdot \partial_t v + (D u \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div} v] \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} u_\infty \cdot (\sigma(v, q) \cdot n) + \int_0^T \int_{\Gamma_t^s} [(d_2 e_2) \cdot (\sigma(v, q) \cdot n) - (u \cdot v) \langle d_2 e_2, n \rangle] \\ &\quad + \int_0^T [-d_1 \dot{b}_1 - d_2 b_1] + \int_0^T [-m d_2 \dot{b}_2 + k d_1 b_2] \\ &+ \int_{\Omega_T} u(T) \cdot v(T) - \int_{\Omega_0} u_0 \cdot v(t=0) - d_1^0 b_1(0) + d_1(T) b_1(T) - m d_2^0 b_2(0) + m d_2(T) b_2(T) \\ &\quad \forall (v, b_2, q, b_1) \in W_s^f \times V^f \times Y_1^s \end{aligned}$$

### 6.4.6 Min-Max problem

In this section, we introduce the lagrangian functional associated with problem (6.7) and problem (6.18) :

$$\mathcal{L}_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2; v, q, b_1, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} J_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2) - \langle e_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2), (v, q, b_1, b_2) \rangle \quad (6.32)$$

with

$$J_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2) = \frac{\alpha}{2} \left[ \int_0^T |d_1 - d_g^1|^2 + |d_2 - d_g^2|^2 \right] + \frac{\gamma}{2} \|u_\infty\|_{\mathcal{U}_c}^2$$

Using this functional, the optimal control problem (6.18) can be put in the following form :

$$\min_{u_\infty \in \mathcal{U}_c} \min_{(u, p, d_1, d_2) \in X^f \times Z^f \times X_1^s \times X_2^s} \max_{(v, b_2, q, b_1) \in W_s^f \times V^f \times Y_1^s} \mathcal{L}_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2; v, q, b_1, b_2) \quad (6.33)$$

By using the Min-Max framework, we avoid the computation of the state derivative with respect to  $u_\infty$ . First-order optimality conditions will furnish the gradient of the original cost function using the solution of an adjoint problem.

We would like to apply min-max differentiability results to problem (6.33). The main issue is to prove that the min-max subproblem

$$\min_{(u,p,d_1,d_2) \in X^f \times Z^f \times X_1^s \times X_2^s} \max_{(v,b_2,q,b_1) \in W_s^f \times V^f \times Y_1^s} \mathcal{L}_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2; v,q,b_1,b_2) \quad (6.34)$$

admits at least one saddle point for  $u_\infty \in \mathcal{U}_c$ .

#### 6.4.6.1 Reduced Gradient

We assume that the conditions to apply the Min-Max principle [32] are fulfilled so we can bypass the derivation with respect to the control variable  $u_\infty$  through the min-max subproblem (6.34). It leads to the following result :

**Theorem 6.2** *For  $u_\infty \in \mathcal{U}_c$ , and  $(u_{u_\infty}, p_{u_\infty}, \tilde{d}_{u_\infty}, \varphi_{u_\infty}, \pi_{u_\infty}, \tilde{b}_{u_\infty})$  the unique saddle point of problem (6.34), the gradient of the cost function  $j$  at point  $u_\infty \in \mathcal{U}_c$  is given by the following expression :*

$$\nabla j(u_\infty) = (\sigma(\varphi_{u_\infty}, \pi_{u_\infty}) \cdot n)|_{\Sigma_\infty^f} + \gamma u_\infty \quad (6.35)$$

**Proof:** Using theorem (3) from [35], we bypass the derivation with respect to  $u_\infty$  inside the min-max subproblem (6.34) :

$$\begin{aligned} \langle j'(u_\infty), \delta u_\infty \rangle &= \left\langle \frac{D}{Du_\infty} \mathcal{L}_{u_\infty}(u_{u_\infty}, p_{u_\infty}, d_{u_\infty}^1, d_{u_\infty}^2; \phi_{u_\infty}, \pi_{u_\infty}, b_{u_\infty}^1, b_{u_\infty}^2), \delta u_\infty \right\rangle \\ &= \min_{(u,p,d_1,d_2) \in X^f \times Z^f \times X_1^s \times X_2^s} \max_{(v,b_2,q,b_1) \in W_s^f \times V^f \times Y_1^s} \left\langle \frac{D}{Du_\infty} \mathcal{L}_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2; v,q,b_1,b_2), \delta u_\infty \right\rangle \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} (\nu \partial_n \phi_{u_\infty} - \pi_{u_\infty} n) \cdot \delta u_\infty + \gamma \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} u_\infty \cdot \delta u_\infty \end{aligned}$$

□

## 6.5 KKT Optimality Conditions

In this section, we are interested in establishing the first order optimality condition for problem (6.34), better known as Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions. This step is crucial, because it leads to the formulation of the adjoint problem satisfied by the Lagrange multipliers  $(\varphi_{u_\infty}, \pi_{u_\infty}, b_{u_\infty}^1, b_{u_\infty}^2)$ . We recall the expression of the Lagrangian,

$$\mathcal{L}_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2; v,q,b_1,b_2) \stackrel{\text{def}}{=} J_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2) - \langle e_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2), (v,q,b_1,b_2) \rangle \quad (6.36)$$

The KKT system will have the following structure :

$$\begin{aligned} \partial_{(v,q,b_1,b_2)} \mathcal{L}_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2; v,q,b_1,b_2) \cdot (\delta v, \delta q, \delta b_1, \delta b_2) &= 0, \\ \forall (\delta v, \delta b_2, \delta q, \delta b_1) \in W_s^f \times V^f \times Y_1^s &\rightarrow \text{State Equations} \\ \partial_{(u,p,d_1,d_2)} \mathcal{L}_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2; v,q,b_1,b_2) \cdot (\delta u, \delta p, \delta d_1, \delta d_2) &= 0, \\ \forall (\delta u, \delta p, \delta d_1, \delta d_2) \in X^f \times Z^f \times X_1^s \times X_2^s &\rightarrow \text{Adjoint Equations} \end{aligned}$$

## 6.5.1 Derivatives with respect to state variables

### 6.5.1.1 Fluid adjoint system

**Lemma 6.3** For  $u_\infty \in \mathcal{U}_c$ ,  $(p, b_1, b_2, v, b_2, q, b_1) \in Z^f \times X_1^s \times X_2^s \times W_s^f \times V^f \times Y_1^s$ ,  $\mathcal{L}_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2; v, q, b_1, b_2)$  is differentiable with respect to  $u \in Y^f$  and we have

$$\begin{aligned} \langle \partial_u \mathcal{L}_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2; v, q, b_1, b_2), \delta u \rangle = & \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_t^f} [-\delta u \cdot \partial_t v + [D \delta u \cdot u + D u \cdot \delta u] \cdot v - \nu \delta u \cdot \Delta v + \delta u \cdot \nabla q] \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_t^s} (\delta u \cdot v) \langle d_2 e_2, n \rangle - \int_{\Omega_T} \delta u(T) \cdot v(T) \quad \forall \delta u \in X^f \end{aligned}$$

In order to obtain a strong formulation of the fluid adjoint problem, we perform some integration by parts:

**Lemma 6.4**

$$\int_{\Omega_t^f} (D \delta u \cdot u) \cdot v = - \int_{\Omega_t^f} [D v \cdot u + \operatorname{div}(u) v] \cdot \delta u + \int_{\Gamma_\infty^f \cup \Gamma_t^s} (\delta u \cdot v) \langle u, n \rangle$$

It leads to the following identity :

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\hat{u}} \mathcal{L}_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2; \varphi, \pi, b_1, b_2), \delta u \rangle = & \\ & - \int_{Q^f} [-\partial_t \varphi + (*Du) \cdot \varphi - (D\varphi) \cdot u - \operatorname{div}(u) \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla \pi] \cdot \delta u - \int_{\Omega_T^f} \varphi(T) \cdot \delta u(T) \end{aligned}$$

**Lemma 6.5** For  $u_\infty \in \mathcal{U}_c$ ,  $(u, b_1, b_2, v, b_2, q, b_1) \in X^f \times X_1^s \times X_2^s \times W_s^f \times V^f \times Y_1^s$ ,  $\mathcal{L}_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2; v, q, b_1, b_2)$  is differentiable with respect to  $p \in Z^f$  and we have

$$\langle \partial_p \mathcal{L}_{u_\infty}(\hat{u}, p, d_1, d_2; \varphi, q, b_1, b_2), \delta p \rangle = \int_0^T \int_{\Omega_t^f} \delta p \operatorname{div} \varphi, \quad \forall \delta p \in Z^f$$

This leads to the following fluid adjoint strong formulation,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - D \varphi \cdot u + (*Du) \cdot \varphi - \nu \Delta \varphi + \nabla q = 0, & Q^f \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & Q^f \\ \varphi = b_2 \cdot e_2, & \Sigma^s \\ \varphi = 0, & \Sigma_\infty^f \\ \varphi(T) = 0, & \Omega_T^f \end{cases} \quad (6.37)$$

### 6.5.2 Solid adjoint system

We recall that the ALE map is built as the flow a vector field  $V$  that matches the solid velocity at the fluid-solid interface and is arbitrary inside the fluid domain, i.e using the reduced order model,

$$\begin{cases} V(x, t) = d_2 \cdot e_2, & x \in \overline{\Omega_t^s} \\ V(x, t) = \operatorname{Ext}(d_2 \cdot e_2), & x \in \Omega_t^f \\ V(x, t) \cdot n = 0, & x \in \Gamma_\infty^f \end{cases} \quad (6.38)$$

Hence, the ALE map depends on  $d_2$  through  $V$ . Furthermore, the derivative with respect to  $d_1$  may be simpler since it does not involve derivative with respect to the geometry. Then, we have the following result,

**Lemma 6.6** For  $u_\infty \in \mathcal{U}_c$  and  $(u,p,d_1,d_2,v,b_2,q,b_1) \in X^f \times Z^f \times X_1^s \times X_2^s \times W_s^f \times V^f \times Y_1^s$ , the Lagrangian  $\mathcal{L}_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2;v,q,b_1,b_2)$  is differentiable with respect to  $d_1 \in X_1^s$  and we have

$$\langle \partial_{d_1} \mathcal{L}_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2; \varphi, \pi, b_1, b_2), \delta d_1 \rangle = \int_0^T \left[ \alpha (d_1 - d_g^1) \delta d_1 - k \delta d_1 b_2 + \delta d_1 \dot{b}_1 \right] - \delta d_1(T) b_1(T)$$

From which we deduce the following adjoint ODE,

$$\begin{cases} -\dot{b}_1 + k b_2 = \alpha(d_1 - d_g^1), & (0,T) \\ b_1(T) = 0, \end{cases} \quad (6.39)$$

The derivative of the Lagrangian with respect to the solid velocity variable  $d_2$  involves shape derivatives of domain integrals.

This point has been investigated previously by Zolésio in [163], [162] and in [44], [42]. Then we need to introduce the concept of Transverse Field associated to a perturbation of the solid velocity.

We introduce a perturbation flow  $W$  associated to the perturbation  $\delta d_2 e_2$ . For example,

$$W = \text{Ext}(\delta d_2 \cdot e_2)$$

This flow generates new fluid and solid domains through the ALE map,  $T_t(V + \rho W)$ , with  $\rho \geq 0$ . We set

$$\begin{aligned} \Omega_t^{f,\rho} &\stackrel{\text{def}}{=} T_t(V + \rho W)(\Omega_0^f) \\ \Omega_t^{s,\rho} &\stackrel{\text{def}}{=} T_t(V + \rho W)(\Omega_0^s) \end{aligned}$$

For the sake of simplicity, we set

$$T_t^\rho \stackrel{\text{def}}{=} T_t(V + \rho W)$$

The objective of this paragraph is to compute the following derivative :

$$\left( \frac{d}{d\rho} \mathcal{L}(\hat{u}, p, d_1, d_2 + \rho \delta d_2; \hat{v}, q, b_1, b_2) \right) \Big|_{\rho=0}$$

### 6.5.2.1 Transverse map and vector field

Since we would like to differentiate the Lagrangian functional with respect to  $\rho$  at point  $\rho = 0$ , it is convenient to work with function already defined in  $\Omega_t^{f,\rho=0} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_t^f$  as we



proceed to the limit  $\rho \rightarrow 0$ .

To this end, we introduce a new map as in [163]:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\rho^t \stackrel{\text{def}}{=} T_t^\rho \circ T_t^{-1} : \Omega_t^f &\longrightarrow \Omega_t^{f,\rho} \\ \Omega_t^s &\longrightarrow \Omega_t^{s,\rho} \end{aligned} \quad (6.40)$$

This map is actually the flow of a vector field following for  $\rho \in (0, \rho_0)$ ,

**Theorem 6.3** *The Transverse map  $T_t^\rho$  is the flow of a transverse field  $\mathcal{Z}_\rho^t$  defined as follow :*

$$\mathcal{Z}_\rho^t \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}^t(\rho, \cdot) = \left( \frac{\partial T_\rho^t}{\partial \rho} \right) \circ (T_\rho^t)^{-1} \quad (6.41)$$

i.e is the solution of the following dynamical system :

$$\begin{aligned} T_t^\rho(\mathcal{Z}_\rho^t) : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ x &\longmapsto x(\rho, x) \equiv T_t^\rho(\mathcal{Z}_\rho^t)(x) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \frac{dx(\rho)}{d\rho} &= (\rho, x(\rho)), \quad \rho \geq 0 \\ x(\rho = 0) &= x, \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (6.42)$$

Since, we only consider derivatives at point  $\rho = 0$ , we set  $Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{\rho=0}^t$ . We recall a result from [43] which might be useful for the sequel,

**Theorem 6.4** *The mapping,*

$$\begin{aligned} [0, \rho_0] &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0, T]; W^{k-1, \infty}(\Omega)) \\ \rho &\longmapsto T_t(V + \rho W) \end{aligned}$$

is continuously differentiable and

$$\begin{aligned} S^t(\rho, \cdot) \stackrel{\text{def}}{=}} \partial_\rho [T_t(V + \rho W)] &= \int_0^t [D(V + \rho W) \circ T_\tau(V + \rho W) \cdot S^\tau(\rho, \cdot) \\ &\quad + W \circ T_\tau(V + \rho W) d\tau] \end{aligned} \quad (6.43)$$

**Corollary 6.1**  $S_t(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} S^t(\rho = 0, \cdot)$  is the unique solution of the following Cauchy problem,

$$\begin{cases} \partial_t S_t - (D V \circ T_t) \cdot S_t = W \circ T_t, & \Omega_0 \times (0, T) \\ S_{t=0} = 0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (6.44)$$

A fundamental result furnish the dynamical system satisfied by the vector field  $Z_t$  related to the vector fields  $(V, W)$ ,

**Theorem 6.5 ([44])** *The vector field  $Z_t$  is the unique solution of the following Cauchy problem,*

$$\begin{cases} \partial_t Z_t + [Z_t, V] = W, & \Omega_0 \times (0, T) \\ Z_{t=0} = 0, & \Omega_0 \end{cases} \quad (6.45)$$

where  $[Z_t, V] \stackrel{\text{def}}{=} DZ_t \cdot V - DV \cdot Z_t$  stands for the Lie bracket of the pair  $(Z_t, V)$ .

### 6.5.2.2 Shape derivatives

In the sequel, we will need general results concerning shape derivatives of integral over domains or boundaries. We will use the framework developed in Sokolowski-Zolésio [145].

#### Lemma 6.7

$$\left. \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Omega_t^{f,\rho}} G(\rho) d\Omega \right) \right|_{\rho=0} = \int_{\Omega_t^f} \partial_\rho G(\rho) d\Omega + \int_{\Gamma_t^s} G(\rho=0) \langle Z_t, n \rangle d\Gamma \quad (6.46)$$

#### Lemma 6.8

$$\left. \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^{s,\rho}} \phi(\rho) d\Gamma \right) \right|_{\rho=0} = \int_{\Gamma_t^s} \left[ \phi'_\Gamma + H\phi \langle Z_t, n \rangle \right] d\Gamma \quad (6.47)$$

where  $\phi'_\Gamma$  stands for the tangential shape derivative of  $\phi(\rho, \cdot) \in L^1(\Gamma_t^s)$

We recall classical definitions of shape derivative functions :

**Definition 6.1** For  $\phi(\rho, x) \in C^0((0, \rho_0; C^1(\Gamma_t^{s,\rho}))$ , the material derivative is given by the following expression :

$$\dot{\phi} = \left. \frac{d}{d\rho} (\phi(\rho, \cdot) \circ \mathcal{T}_\rho^t) \right|_{\rho=0}$$

then the tangential shape derivative of  $\phi$  is given by the following expression,

$$\phi'_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\phi} - \nabla_\Gamma \phi \cdot Z_t$$

**Remark 6.4** If  $\phi$  is the trace of a vector field  $\tilde{\phi}$  defined over  $\Omega$ , then we have,

$$\phi'_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\phi}'|_{\Gamma_t^s} + \partial_n \tilde{\phi} \langle Z_t, n \rangle$$

with  $\tilde{\phi}'|_{\Gamma_t^s} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{d\rho} (\tilde{\phi}(\rho, \cdot)) \right|_{\rho=0} \Big|_{\Gamma_t^s}$ .

following this remark, we have,

#### Lemma 6.9

$$\left. \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^{s,\rho}} \tilde{\phi}(\rho, x) da \right) \right|_{\rho=0} = \int_{\Gamma_t^s} \left[ \tilde{\phi}' + [H\tilde{\phi} + \partial_n \tilde{\phi}] \langle Z_t, n \rangle \right] d\Gamma \quad (6.48)$$

### 6.5.2.3 Derivation of the perturbed Lagrangian

Thanks to the introduction of the transverse map, it is now possible to work with functions  $(u, v)$  that are defined on  $\Omega_t^f$ . This leads to the following perturbed Lagrangian :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{u_\infty}^\rho &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(u, p, d_1, d_2 + \rho \delta d_2; v, q, b_1, b_2) \\
 &= J_{u_\infty}(u, p, d_1, d_2 + \rho \delta d_2) - \left[ \int_0^T \int_{\Omega_t^{f,\rho}} [-(u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \partial_t(v \circ \mathcal{R}_\rho^t) + (D u \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot v \circ \mathcal{R}_\rho^t \right. \\
 &\quad \left. - \nu u \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot \Delta v \circ \mathcal{R}_\rho^t + u \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot \nabla q - p \operatorname{div} v \circ \mathcal{R}_\rho^t] + \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} u_\infty \cdot (\sigma(v, q) \cdot n) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T \int_{\Gamma_t^{s,\rho}} [(d_2 + \rho \delta d_2) e_2] \cdot (\sigma(v \circ \mathcal{R}_\rho^t, q) \cdot n^\rho) - u \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot v \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot ((d_2 + \rho \delta d_2) e_2) \cdot n^\rho \right] \\
 &\quad + \int_0^T [-d_1 \dot{b}_1 - (d_2 + \rho \delta d_2) b_1] + \int_0^T [-m (d_2 + \rho \delta d_2) \dot{b}_2 + k d_1 b_2] \\
 &\quad + \int_{\Omega_T} u(T) \cdot v(T) - \int_{\Omega_0} u_0 \cdot v(t=0) - d_1^0 b_1(0) + d_1(T) b_1(T) - m d_2^0 b_2(0) \\
 &\quad + m (d_2 + \rho \delta d_2)(T) b_2(T)] \quad \forall (v, b_2, q, b_1) \in W_s^f \times V^f \times Y_1^s
 \end{aligned}$$

with  $\mathcal{R}_\rho^t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}$ . We apply the previous results to the perturbed Lagrangian functional  $\mathcal{L}$ .

a) Distributed terms :

We set,

$$\begin{aligned}
 G(\rho, \cdot) &= [-u \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot \partial_t(v \circ \mathcal{R}_\rho^t) + D(u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot (u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot v \circ \mathcal{R}_\rho^t \\
 &\quad - \nu(u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \Delta(v \circ \mathcal{R}_\rho^t) + (u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(v \circ \mathcal{R}_\rho^t)]
 \end{aligned}$$

with  $\mathcal{R}_\rho^t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{T}_\rho^t)^{-1}$ .

We need the following lemmas in order to derivate  $G(\rho, \cdot)$  with respect to  $\rho$ ,

**Lemma 6.10**

$$\left( \frac{d\mathcal{T}_\rho^t}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=0} = Z_t$$

$$\left( \frac{d\mathcal{R}_\rho^t}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=0} = -Z_t$$

**Lemma 6.11**

$$\left( \frac{d(u \circ \mathcal{R}_\rho^t)}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=0} = -D u \cdot Z_t$$

**Proof:**

Using the chain rule we get

$$\begin{aligned} \left. \left( \frac{d}{d\rho} (u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \right) \right|_{\rho=0} &= (D u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \left. \left( \frac{D \mathcal{R}_\rho^t}{D \rho} \right) \right|_{\rho=0} \\ &= - (D u \circ \mathcal{R}_\rho^t) \cdot \mathcal{Z}^t(\rho, \cdot) \Big|_{\rho=0} \\ &= - D u \cdot Z_t \end{aligned}$$

□

**Lemma 6.12** *Then, we have the following result*

$$\begin{aligned} \partial_\rho G(\rho, \cdot) \Big|_{\rho=0} &= [(D u \cdot Z_t) \cdot \partial_t v + u \cdot (\partial_t (D v \cdot Z_t)) \\ &\quad - [(D(D u \cdot Z_t)) \cdot u + D u \cdot (D u \cdot Z_t)] \cdot v - (D u \cdot u) \cdot (D v \cdot Z_t) \\ &\quad + \nu (D u \cdot Z_t) \cdot \Delta v + \nu u \cdot (\Delta (D v \cdot Z_t)) + p \operatorname{div}(D v \cdot Z_t) - (D u \cdot Z_t) \cdot \nabla q] \end{aligned}$$

**Proof:**

It comes easily using definition of  $G(\rho, \cdot)$  and lemma (6.10)-(6.11).

□

Then we have an expression of the derivative of distributed terms coming from the Lagrangian with respect to  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Omega_t^{f,\rho}} G(\rho) d\Omega \right) \right|_{\rho=0} &= \int_{\Omega_t^f} [(D u \cdot Z_t) \cdot \partial_t v + u \cdot (\partial_t (D v \cdot Z_t)) \\ &\quad - [(D(D u \cdot Z_t)) \cdot u + D u \cdot (D u \cdot Z_t)] \cdot v - (D u \cdot u) \cdot (D v \cdot Z_t) \\ &\quad + \nu (D u \cdot Z_t) \cdot \Delta v + \nu u \cdot (\Delta (D v \cdot Z_t)) + p \operatorname{div}(D v \cdot Z_t) - (D u \cdot Z_t) \cdot \nabla q] \\ &\quad + \int_{\Gamma_t} [-u \cdot \partial_t v + (D u \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(v)] \langle Z_t, n \rangle \end{aligned}$$

b) Boundary terms:

We must now take into account the terms coming from the moving boundary  $\Gamma_t^{s,\rho}$ .

Then we set,

$$\phi(\rho, \cdot) = [(d_2 + \rho \delta d_2) e_2] \cdot (\sigma(v \circ \mathcal{R}_{\rho,q}^t) - u \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot v \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot ((d_2 + \rho \delta d_2) e_2)) \cdot n^\rho$$

We set  $V = d_2 e_2$  and  $W = \delta d_2 e_2$ , then

$$\phi(\rho, \cdot) = (V + \rho W) \cdot [\sigma(v \circ \mathcal{R}_{\rho,q}^t) - u \circ \mathcal{R}_\rho^t \cdot v \circ \mathcal{R}_\rho^t] \cdot n^\rho$$

Since  $\phi(\rho, \cdot)$  is defined on the boundary  $\Gamma_t^{s,\rho}$ , we need some extra identities corresponding to boundary shape derivatives of terms involved in  $\phi(\rho, \cdot)$ .

**Lemma 6.13 ([38])**

$$\partial_\rho n^\rho \Big|_{\rho=0} = n'_\Gamma = -\nabla_\Gamma(Z_t \cdot n)$$

**Lemma 6.14**

$$\frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^{s,\rho}} \langle E(\rho), n^\rho \rangle d\Gamma \right) \Big|_{\rho=0} = \int_{\Gamma_t^s} \langle E'|_{\Gamma_t}, n \rangle + (\operatorname{div} E) \langle Z_t, n \rangle$$

**Proof :** First, we use that,

$$\int_{\Gamma_t^{s,\rho}} \langle E(\rho), n^\rho \rangle = \int_{\Omega_t^{f,\rho}} \operatorname{div} E(\rho)$$

then we derive this quantity using lemma (6.7),

$$\frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Omega_t^{f,\rho}} \operatorname{div} E(\rho) \right) \Big|_{\rho=0} = \int_{\Omega_t^f} \operatorname{div} E' + \int_{\Gamma_t^s} (\operatorname{div} E) \langle Z_t, n \rangle$$

We conclude using  $\int_{\Omega_t^f} \operatorname{div} E' = \int_{\Gamma_t^s} \langle E', n \rangle$ .

□

Then we use,

**Lemma 6.15**

$$E'|_{\Gamma_t} = W \cdot [-qI + \nu Dv - u \cdot v] + V \cdot [-\nu D(Dv \cdot Z_t) + (Du \cdot Z_t) \cdot v + u \cdot (Dv \cdot Z_t)] \quad (6.49)$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^{s,\rho}} \phi(\rho) d\Gamma \right) \Big|_{\rho=0} &= \int_{\Gamma_t^s(V)} W \cdot [-qI + \nu Dv - u \cdot v] \cdot n \\ &+ \int_{\Gamma_t^s(V)} V \cdot [-\nu D(Dv \cdot Z_t) + (Du \cdot Z_t) \cdot v + u \cdot (Dv \cdot Z_t)] \cdot n \\ &+ \int_{\Gamma_t^s(V)} \operatorname{div}(V \cdot [-qI + \nu^* Dv - u \cdot v]) \langle Z_t, n \rangle \end{aligned}$$

**Remark 6.5** We recall that,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} V \cdot (Dv \cdot n) &= \int_{\Omega_t^f} \operatorname{div}(*Dv \cdot V) \\ &= \int_{\Omega_t^f} Dv \cdot \cdot DV + V \cdot \Delta v \end{aligned} \quad (6.50)$$

We use this expression in the sequel. We recall that the perturbed lagrangian has the following form,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V,W}^\rho &= J_{V,W}^\rho - \int_0^T \int_{\Omega_t^{f,\rho}} G(\rho) - \int_0^T \int_{\Gamma_t^{s,\rho}} \phi(\rho) \\ &\quad - \int_{\Omega_T} u(T) \cdot v(T) + \int_{\Omega_0} u_0 \cdot v(t=0) \\ &\quad \forall (v,q) \in Y(\Omega_t^f) \times V^f \end{aligned}$$

Hence, its derivative with respect to  $\rho$  at point  $\rho = 0$  has the following expression,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} (\mathcal{L}_{V,W}^\rho) \right|_{\rho=0} &= \left. \frac{d}{d\rho} (J_{V,W}^\rho) \right|_{\rho=0} - \int_0^T \left. \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Omega_t^{f,\rho}} G(\rho) \right) \right|_{\rho=0} - \int_0^T \left. \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\Gamma_t^{s,\rho}} \phi(\rho) \right) \right|_{\rho=0} \\ &\quad \forall (v,q) \in Y(\Omega_t^f) \times V^f \end{aligned}$$

Furthermore we have,

**Lemma 6.16**

$$\left. \frac{d}{d\rho} (J_{V,W}^\rho) \right|_{\rho=0} = \int_0^T \alpha(d_2 - d_g^2) e_2 \cdot W \quad (6.51)$$

Using the last identities concerning the derivative of the distributed and the boundary terms with respect to  $\rho$ , we get the following expression,

$$\left. \frac{d}{d\rho} (\mathcal{L}_{V,W}^\rho) \right|_{\rho=0} = -A_{Z_t} - B_{Z_t} - C_W \quad (6.52)$$

with

$$\begin{aligned} A_{Z_t} &= \int_0^T \int_{\Omega_t^f(V)} [(D u \cdot Z_t) \cdot \partial_t v - [(D(D u \cdot Z_t)) \cdot u \\ &\quad + D u \cdot (D u \cdot Z_t)] \cdot v + \nu(D u \cdot Z_t) \cdot \Delta v - (D u \cdot Z_t) \cdot \nabla q] \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega_t^f(V)} [u \cdot (\partial_t(D v \cdot Z_t)) - (D u \cdot u) \cdot (D v \cdot Z_t) + \nu u \cdot (\Delta(D v \cdot Z_t)) + p \operatorname{div}(D v \cdot Z_t)] \\ B_{Z_t} &= \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} [-u \cdot \partial_t v + (D u \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(v)] (Z_t \cdot n) \\ &\quad + V \cdot [-\nu D(D v \cdot Z_t) + (D u \cdot Z_t) \cdot v + u \cdot (D v \cdot Z_t)] \cdot n \\ &\quad + \operatorname{div}(V \cdot [-q I + \nu^* D v - u \cdot v]) \langle Z_t, n \rangle \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} \nu u_\infty \cdot D(D v \cdot Z_t) \cdot n \end{aligned}$$

$$C_W = \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} W \cdot \left[ -b_1 e_2 - m \dot{b}_2 e_2 + \sigma(v, q) \cdot n - (u \cdot v) n - \alpha(d_2 - d_g^2) e_2 \right]$$

#### 6.5.2.4 The shape derivative kernel identity

We shall now, assume that  $(u, p, \varphi, \pi)$  is a saddle point of the Lagrangian functional  $\mathcal{L}$ . This will help us to simplify several terms involved in the derivative of  $\mathcal{L}$  with respect to  $V$ .

Indeed, we would like to express the distributed term  $A_{Z_t}$  as a boundary quantity defined on the fluid moving boundary  $\Gamma_t^s$  and the fixed boundary  $\Gamma_\infty^f$ .

**Theorem 6.6** *For  $(u, p, \varphi, \pi)$  saddle points of the Lagrangian functional (6.32), the following identity holds,*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_t^f(V)} [(\mathbb{D} u \cdot Z_t) \cdot \partial_t \varphi - [(\mathbb{D}(\mathbb{D} u \cdot Z_t)) \cdot u \\ & \quad + \mathbb{D} u \cdot (\mathbb{D} u \cdot Z_t)] \cdot \varphi + \nu(\mathbb{D} u \cdot Z_t) \cdot \Delta \varphi - (\mathbb{D} u \cdot Z_t) \cdot \nabla \pi] \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_t^f(V)} [u \cdot (\partial_t(\mathbb{D} \varphi \cdot Z_t)) - (\mathbb{D} u \cdot u) \cdot (\mathbb{D} \varphi \cdot Z_t) + \nu u \cdot (\Delta(\mathbb{D} \varphi \cdot Z_t)) + p \operatorname{div}(\mathbb{D} \varphi \cdot Z_t)] \\ & \quad - \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} V \cdot [\nu \mathbb{D}(\mathbb{D} \varphi \cdot Z_t) - (\mathbb{D} u \cdot Z_t) \cdot \varphi - u \cdot (\mathbb{D} \varphi \cdot Z_t)] \cdot n \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} [\nu(\varphi - b_2 e_2) \cdot (\mathbb{D}(\mathbb{D} u \cdot Z_t) \cdot n) + (\mathbb{D} \varphi \cdot Z_t) \cdot (-p n + \nu(\mathbb{D} u \cdot n))] \\ & \quad - \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} \nu u_\infty \cdot (\mathbb{D}(\mathbb{D} \varphi \cdot Z_t) \cdot n) = 0, \quad \forall W \stackrel{\text{def}}{=} \delta d_2 e_2 \end{aligned}$$

**Proof :** We use extremal conditions associated to variations with respect to  $(u, v)$  in the Lagrangian functional where we have added a boundary since we consider test functions  $v$  that do not vanish on  $\Gamma_\infty^f$  and do not match the solid test functions at the fluid-solid

interface  $\Gamma_t^s(V)$  , i.e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^2(u,p,d_1,d_2; v,q,b_1,b_2) &= J_{u_\infty}(u,p,d_1,d_2) \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\Omega_t^f(V)} [-u \cdot \partial_t v + (D u \cdot u) \cdot v - \nu u \cdot \Delta v + u \cdot \nabla q - p \operatorname{div} v] \\
 &- \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} u_\infty \cdot \sigma(v,q) \cdot n - \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} V \cdot [\sigma(v,q) \cdot n - (u \cdot v) n] + \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} (v - b_2 e_2) \cdot (\sigma(u,p) \cdot n) \\
 &\quad - \int_0^T [-d_1 \dot{b}_1 - d_2 \dot{b}_1] - \int_0^T [-m d_2 \dot{b}_2 + k d_1 \dot{b}_2] \\
 &- \int_{\Omega_T} u(T)v(T) + \int_{\Omega_0} u_0 v(t=0) + d_1^0 b_1(0) - d_1(T)b_1(T) + m d_2^0 b_2(0) - m d_2(T)b_2(T) \\
 &\quad \forall (v,q,b_1,b_2) \in Y^f \times V^f \times Y_1^s \times Y_2^s
 \end{aligned}$$

This leads to the following perturbation identity,

$$\begin{aligned}
 \partial_{(u,v)} \mathcal{L}^2 \cdot (\delta u, \delta v) &= - \int_0^T \int_{\Omega_t^f} [-\delta u \cdot \partial_t v - u \cdot \partial_t \delta v + D(\delta u \cdot u) \cdot v + D(u \cdot \delta u) \cdot v \\
 &+ D(u \cdot u) \cdot \delta v - \nu(\delta u \cdot \Delta v) - \nu(u \cdot \Delta \delta v) + \delta u \cdot \nabla q - p \operatorname{div}(\delta v)] - \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} \nu u_\infty \cdot (D \delta v \cdot n) \\
 &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} [\nu(v - b_2 e_2) \cdot (D \delta u \cdot n) + \delta v \cdot (-p n + \nu(D u \cdot n))] \\
 &- \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} V \cdot [\nu D(\delta v) - \delta u \cdot v - u \cdot \delta v] \cdot n - \int_{\Omega_T} [\delta u(T)v(T) + u(T)\delta v(T)] \\
 &\quad \forall (\delta u, \delta v) \in X(\Omega_t^f) \times Y(\Omega_t^f)
 \end{aligned}$$

We choose specific perturbation directions, i.e

$$\delta u = D u \cdot Z_t \quad \delta v = D v \cdot Z_t$$

with  $\delta u(T) = \delta v(T) = \delta u(0) = \delta v(0) = 0$ , where  $(u,v)$  are saddle points of the lagrangian, i.e solutions of respectively the primal and adjoint fluid problem. We recognize immediately the distributed and boundary terms involved in the shape derivative kernel identity.  $\square$



### 6.5.2.5 Solid and ALE adjoint problem

Using the shape derivative kernel identity, we simplify the Lagrangian derivative at the saddle point  $(u, p, d_1, d_2, \varphi, b_1, b_2)$ . We set  $(u, v) = (u, \varphi)$  and we get,

$$\begin{aligned} A_{Z_t} = & \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} V \cdot [\nu D(D\varphi \cdot Z_t) - (Du \cdot Z_t) \cdot \varphi - u \cdot (D\varphi \cdot Z_t)] \cdot n \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} [\nu(\varphi - b_2 e_2) \cdot (D(Du \cdot Z_t) \cdot n) + (D\varphi \cdot Z_t) \cdot (-pn + \nu(Du \cdot n))] \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} \nu u_\infty \cdot (D(D\varphi \cdot Z_t) \cdot n) \end{aligned}$$

We use that  $\varphi = b_2 e_2$ , on  $\Gamma_t^s(V)$  and the following identities,

$$(D\varphi \cdot Z_t) \cdot (pn) = (p \operatorname{div} \varphi) \langle Z_t, n \rangle \quad (6.53)$$

$$(D\varphi \cdot Z_t) \cdot (Du \cdot n) = (D\varphi \cdot n) \cdot (Du \cdot n) \langle Z_t, n \rangle \quad (6.54)$$

then,

$$\begin{aligned} A_{Z_t} = & \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} V \cdot [\nu D(D\varphi \cdot Z_t) - (Du \cdot Z_t) \cdot \varphi - u \cdot (D\varphi \cdot Z_t)] \cdot n \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} [-p \operatorname{div} \varphi + \nu(D\varphi \cdot n) \cdot (Du \cdot n)] \langle Z_t, n \rangle \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} \nu u_\infty \cdot (D(D\varphi \cdot Z_t) \cdot n) \end{aligned}$$

Using the following identity,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V \cdot [-\pi I + \nu^* D\varphi - u \cdot \varphi]) = & -\pi \operatorname{div} V - V \cdot \nabla \pi + \nu D\varphi \cdot \cdot DV \\ & + \nu V \Delta \varphi - (\operatorname{div} V) u \cdot \varphi - V \cdot \nabla(u \cdot \varphi) \quad (6.55) \end{aligned}$$

we get,

$$\begin{aligned} B_{Z_t} = & \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} [-u \cdot \partial_t \varphi + (Du \cdot u) \cdot \varphi - \nu u \cdot \Delta \varphi + u \cdot \nabla \pi - p \operatorname{div}(\varphi)] \langle Z_t, n \rangle \\ & + V \cdot [-\nu D(D\varphi \cdot Z_t) + (Du \cdot Z_t) \cdot \varphi + u \cdot (D\varphi \cdot Z_t)] \cdot n \\ & [-\pi \operatorname{div} V - V \cdot \nabla \pi + \nu D\varphi \cdot \cdot DV + \nu V \Delta \varphi \\ & - (\operatorname{div} V) u \cdot \varphi - V \cdot \nabla(u \cdot \varphi)] \langle Z_t, n \rangle \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_\infty^f} \nu u_\infty \cdot D(D\varphi \cdot Z_t) \cdot n \end{aligned}$$

then we get,

$$A_{Z_t} + B_{Z_t} = \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} [\nu (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \cdot (\mathbf{D}(V - u) \cdot n) - u \cdot \partial_t \varphi + (Du \cdot u) \cdot \varphi - \pi \operatorname{div} V - (\operatorname{div} V) u \cdot \varphi - V \cdot \nabla(u \cdot \varphi)] \langle Z_t, n \rangle$$

We use the following identity,

$$V \cdot \nabla(u \cdot \varphi) = \varphi \cdot \mathbf{D} u \cdot V + V \cdot \mathbf{D} \varphi \cdot u$$

and the boundary conditions,  $u = d_2 e_2$  on  $\Gamma_t^s$ ,  $\varphi = b_2 e_2$  on  $\Gamma_t^s$ . This leads to,

$$A_{Z_t} + B_{Z_t} = \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} \left[ \nu (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \cdot (\mathbf{D}(V - u) \cdot n) - d_2 \dot{b}_2 - \pi \operatorname{div} V - (\operatorname{div} V) u \cdot \varphi - d_2 e_2 \cdot \mathbf{D} \varphi \cdot d_2 e_2 \right] \langle Z_t, n \rangle$$

We choose the velocity field  $V = \operatorname{Ext}(d_2 e_2) \circ p$ , then

$$(\mathbf{D} V \cdot n) \cdot n|_{\Gamma_t^s} = 0$$

and

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V|_{\Gamma_t^s} &= \operatorname{div}_\Gamma V + (\mathbf{D} V \cdot n) \cdot n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finally, we have

$$A_{Z_t} + B_{Z_t} = \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} \left[ -d_2 \dot{b}_2 + \nu (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \cdot (\mathbf{D} u \cdot n) - |d_2|^2 (\mathbf{D} \varphi \cdot e_2) \cdot e_2 \right] \langle Z_t, n \rangle$$

and

$$C_W = \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} W \cdot \left[ -b_1 e_2 - m \dot{b}_2 e_2 + \sigma(\phi, \pi) \cdot n - \alpha(d_2 - d_g^2) e_2 \right] \quad (6.56)$$

where we have used that,

$$\int_{\Gamma_t^s(V)} d_2 e_2 \cdot b_2 e_2 \cdot n = 0$$

We introduce the adjoint field  $\lambda$  solution of the following system,

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda - \nabla_\Gamma \lambda \cdot V - \lambda \operatorname{div}_\Gamma V = f, & (0, T) \\ \lambda(T) = 0, & \Gamma_T(V) \end{cases} \quad (6.57)$$

with

$$f = \left[ -d_2 \dot{b}_2 + \nu (\mathbf{D} \varphi \cdot n) \cdot (\mathbf{D} u \cdot n) - |d_2|^2 (\mathbf{D} \varphi \cdot e_2) \cdot e_2 \right] \quad (6.58)$$

**Remark 6.6** In our case  $\operatorname{div}_\Gamma V = 0$

We recall the following property,

**Lemma 6.17** ([44],[42]) *For any  $E(V) \in L^2(\Sigma^s(V))$  and  $(V,W) \in \mathcal{U}$ , the following identity holds,*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} E(V) \langle Z_t, n \rangle = - \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} \lambda \langle W, n \rangle \quad (6.59)$$

where  $\lambda \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^1(\Gamma_t^s))$  is the unique solution of problem (6.57) with  $f = E$ .

Then we have,

$$\begin{aligned} A_{Z_t} + B_{Z_t} &= \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} f \langle Z_t, n \rangle \\ &= - \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} \langle \lambda n, W \rangle \end{aligned}$$

However, using the optimality condition for the Lagrangian functional, we obtain

$$-(A_{Z_t} + B_{Z_t}) = C_W$$

this leads to,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} \lambda n \cdot W &= \int_0^T \int_{\Gamma_t^s(V)} \left[ -b_1 e_2 - m \dot{b}_2 e_2 + \sigma(\phi, \pi) \cdot n - \alpha(d_2 - d_g^2) e_2 \right] \cdot W, \\ &\quad \forall W \stackrel{\text{def}}{=} \delta d_2 e_2 \end{aligned} \quad (6.60)$$

From which we deduce the following identity,

$$\int_{\Gamma_t^s(V)} \lambda n = \left[ -b_1 - m \dot{b}_2 - \alpha(d_2 - d_g^2) \right] e_2 + \int_{\Gamma_t^s(V)} \sigma(\phi, \pi) \cdot n \quad (6.61)$$

We now use the following lemma,

**Lemma 6.18**

$$\partial_t \left( \int_{\Gamma_t^s(V)} \lambda n \right) = \int_{\Gamma_t^s(V)} [\partial_t \lambda + \nabla_{\Gamma} \lambda \cdot V] n \quad (6.62)$$

We get,

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \left[ -b_1 - m \dot{b}_2 - \alpha(d_2 - d_g^2) \right] e_2 + \int_{\Gamma_t^s(V)} \sigma(\phi, \pi) \cdot n \right) &= \\ &= \int_{\Gamma_t^s(V)} \left[ -d_2 \dot{b}_2 + \nu (\text{D} \varphi \cdot n) \cdot (\text{D} u \cdot n) - |d_2|^2 (\text{D} \varphi \cdot e_2) \cdot e_2 \right] n \end{aligned}$$

This can be written as,

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 + m \ddot{b}_2 = & -\alpha(\dot{d}_2 - \dot{d}_g^2) + \partial_t \left( \int_{\Gamma_t^s(V)} \sigma(\phi, \pi) \cdot n \right) \cdot e_2 + \\ & \int_{\Gamma_t^s(V)} [|d_2|^2 (D \varphi \cdot e_2) \cdot e_2 - \nu (D \varphi \cdot n) \cdot (D u \cdot n)] \cdot n \end{aligned}$$

and we recall the other solid adjoint equation,

$$\begin{cases} -\dot{b}_1 + k b_2 = \alpha(d - d_g^1), & (0, T) \\ b_1(T) = 0, \end{cases} \quad (6.63)$$

Let us inject  $\dot{b}_1$  inside the first one,

$$\begin{aligned} m \ddot{b}_2 + k b_2 = & \alpha(d - d_g^1) - \alpha(\dot{d}_2 - \dot{d}_g^2) + \partial_t \left( \int_{\Gamma_t^s(V)} \sigma(\phi, \pi) \cdot n \right) \cdot e_2 + \\ & \int_{\Gamma_t^s(V)} [|d_2|^2 (D \varphi \cdot e_2) \cdot e_2 - \nu (D \varphi \cdot n) \cdot (D u \cdot n)] \cdot n \end{aligned}$$

This concludes the proof of the main result.

□

## 6.6 Conclusion

In this report, we have investigated sensitivity analysis for a simple 2-D coupled fluid-structure system. This analysis was performed using a Lagrangian functional and non-cylindrical shape derivative tools to handle perturbation with respect to the velocity of the solid. This led to the derivation of first-order optimality conditions for an optimal control problem related to a tracking functional. This optimality system can be numerically approximated and included inside a gradient based optimization procedure. This point is under investigation following the strategy adopted for Navier-Stokes optimal control problems as in [62].

The methodology used in this report can be generalized to more complex fluid-structure interaction problems. We can either change the fluid model and handle compressibility as in [29], or change the solid equations and use a real 3D non-linear elastic model [123] or a shell model [21].



# Chapitre 7

## Analyse de sensibilité pour un système couplé fluide-structure tridimensionnel

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>298</b>
<b>7.2</b>	<b>Le problème mécanique</b>	<b>298</b>
7.2.1	Formulation ALE forte du système couplé	301
<b>7.3</b>	<b>Analyse de sensibilité</b>	<b>301</b>
<b>7.4</b>	<b>Démonstrations du résultat principal</b>	<b>303</b>
7.4.1	Formulation faible	303
7.4.2	Problème de référence transporté	304
7.4.3	Méthode de linéarisation	308
7.4.4	Calcul des dérivées de l'état	312
<b>7.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>313</b>
<b>7.6</b>	<b>Annexe</b>	<b>314</b>

---

## 7.1 Introduction

L'analyse de sensibilité constitue depuis bien longtemps un outil de choix dans le processus de conception de systèmes industriels complexes. Il s'agit de caractériser la réponse d'un système mécanique vis à vis de perturbations des paramètres qui régissent son évolution. Cette caractérisation est réalisée en perturbant le modèle mathématique sous-jacent issu de la physique du phénomène.

Cette analyse est à l'heure actuelle très développée pour les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles en domaine cylindrique. Des problèmes complexes faisant intervenir des équations non-linéaires modélisant le comportement d'un fluide, comme les équations de Navier-Stokes, ont été étudiées du point de vue numérique et théorique, voir [1, 67, 90, 113] et les références citées.

En ce qui concerne les problèmes couplés posés en domaine non-cylindrique, la situation est différente et peu de travaux ont été conduits jusqu'à maintenant [117, 125, 129, 157]. Cependant, l'augmentation des capacités de calcul et les progrès de l'analyse numérique permettent aujourd'hui d'étudier et de simuler des phénomènes couplés intervenant dans l'aéroélasticité, la biomécanique ou le génie civil [30, 39, 59, 73, 134].

Notre travail constitue une étude préliminaire du contrôle et de la conception automatique de systèmes faisant intervenir un couplage fluide-structure. Plus précisément, nous établissons la structure des dérivées, par rapport aux données frontières, d'un système couplé comportant un fluide, modélisé par les équations de Navier-Stokes, et une structure élastique en grands déplacements.

Dans la première partie, nous introduisons le problème mécanique traité et sa formulation mathématique. Nous utilisons notamment un formalisme arbitrairement lagrangien-eulerien (ALE) pour le fluide, particulièrement adapté au traitement des problèmes à frontière mobile. Nous présentons, dans une deuxième partie, le résultat principal de cet article concernant le calcul des dérivées de l'état du système couplé vis à vis de conditions de Dirichlet à la frontière du domaine fluide. La troisième partie est consacrée à la démonstration de ce résultat. Il fait intervenir une définition particulière des perturbations déjà introduite dans [49]. En ce sens, notre approche constitue une généralisation au cas instationnaire des résultats obtenus dans [49], même si la motivation de notre travail est différente.

Ce chapitre, écrit en collaboration avec Miguel Fernández, a fait l'objet de deux articles [54], [55].

## 7.2 Le problème mécanique

Dans cette partie, nous introduisons un problème modèle d'interaction fluide-structure. Nous considérons un solide occupant à l'instant  $t \geq 0$  un domaine  $\Omega^s(t) \subset \mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma^s(t)$ . Ce solide baigne dans un fluide s'étendant dans tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Nous introduisons un volume de contrôle  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  contenant le solide pour tout instant  $t \in (0, T)$ . La frontière de  $\Omega$  est notée  $\partial\Omega$ . Ainsi l'analyse de l'évolution du fluide se restreindra au volume  $\Omega^f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega - \overline{\Omega^s}(t)$ . On notera dans la suite  $\Gamma^f \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega$  et la frontière du domaine fluide est

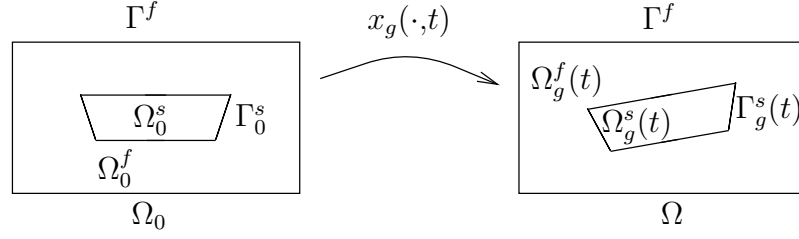


FIG. 7.1 – Géométrie du problème

donnée par

$$\partial\Omega^f(t) = \Gamma^f \cup \Gamma^s(t).$$

Le fluide est supposé newtonien, homogène, en écoulement incompressible, son état est décrit par sa vitesse et pression. Le solide est supposé élastique en grands déplacements, son état est décrit par sa vitesse et son tenseur de contraintes. L'évolution de ces inconnues est régie par les lois de conservation de la mécanique des milieux continus.

En formulation eulerienne, l'état du fluide satisfait les équations de Navier-Stokes incompressibles dans  $\Omega^f(t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_x + \operatorname{div}[u \otimes u - \sigma(u,p)] &= 0, & \text{dans } \Omega^f(t), \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f(t), \end{aligned} \quad (7.1)$$

où le couple  $(u,p)$  représente respectivement la vitesse et la pression du fluide. De plus, le tenseur de contraintes est donné par :

$$\sigma(u,p) = -p\mathbf{I} + \nu(\nabla u + \nabla u^T).$$

**Remarque 7.1** Dans la suite la notation  $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_a$  représente l'opérateur de dérivation temporelle lorsque la variable  $a$  est fixée.

Si le domaine fluide  $\Omega^f(t)$  était une donnée du problème, rien ne s'opposerait, au moins au niveau continu, à la description eulerienne écrite précédemment. Cependant, dans le cas de l'interaction fluide-structure les variations du domaine  $\Omega^f(t)$  sont directement liées à la déformation de la structure par l'intermédiaire de  $\Gamma^s(t)$ , car  $\Omega^f(t) = \Omega - \overline{\Omega^s(t)}$ . Cette remarque fondamentale nous conduit à paramétrer l'évolution de  $\Omega^f(t)$  par l'intermédiaire d'une application définie dans un domaine de référence fixe au cours du temps, ce qui est classiquement réalisé pour la description du domaine solide  $\Omega^s(t)$  par le moyen de la formulation lagrangienne [101], que nous utiliserons dans la suite.

Étant donnée une configuration matérielle solide de référence  $\Omega_0^s \subset \Omega$  de frontière  $\Gamma_0^s$ , nous choisissons la configuration de référence fluide  $\Omega_0^f \stackrel{\text{def}}{=} \Omega - \overline{\Omega_0^s}$ . Le paramétrage du domaine  $\Omega^f(t)$  et  $\Omega^s(t)$ , c'est-à-dire, du volume de contrôle  $\Omega = \Omega^f(t) \cup \overline{\Omega^s(t)}$ , est réalisé par la donnée d'une application régulière et injective :

$$\begin{aligned} x : \overline{\Omega} \times (0,T) &\longrightarrow \overline{\Omega} \\ (x_0, t) &\longrightarrow x = x(x_0, t). \end{aligned}$$



On note  $x^f \stackrel{\text{def}}{=} x|_{\Omega^f}$  et  $x^s \stackrel{\text{def}}{=} x|_{\Omega^s}$ , de telle façon que [102] :

- pour  $x_0 \in \Omega_0^s$ ,  $x^s(x_0, t)$  correspond à la position d'un point matériel  $x_0$  à l'instant  $t \geq 0$ . Il s'agit alors du flot lagrangien classique en mécanique du solide ;
- l'application  $x^f$  est définie à partir du mouvement de l'interface matérielle  $\Gamma_0^s$  donné par  $x^s|_{\Gamma_0^s}$ , comme toute « extension » au domaine  $\overline{\Omega}_0^f$  de ce mouvement soumise à la contrainte d'invariance de la frontière  $\Gamma_0^f \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^f = \partial\Omega$ .

En résumé, l'application est donnée par

$$\begin{aligned} x(x_0, t) &= \text{Ext}(x^s|_{\Gamma_0^s})(x_0, t), \quad \forall x_0 \in \overline{\Omega}_0^f, \\ x(x_0, t) &= x^s(x_0, t), \quad \forall x_0 \in \overline{\Omega}_0^s. \end{aligned}$$

Ici, Ext désigne un opérateur d'extension de  $\Gamma_0^s$  sur  $\overline{\Omega}_0^f$  tel que  $\text{Ext}(x^s|_{\Gamma_0^s})|_{\Gamma_0^f} = I_{\Gamma_0^f}$ .

**Remarque 7.2** On a considéré ici, sans perte de généralité, que le domaine fluide est déformé seulement à partir du mouvement de l'interface fluide-structure  $\Gamma_0^s$ , car  $\Gamma_0^f = \Gamma^f$  reste fixe au cours du temps. Ceci implique que le domaine de calcul  $\Omega$  reste aussi fixe en temps, cependant on notera  $\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_0^f \cup \overline{\Omega}_0^s$  le domaine de référence, pour le distinguer de la configuration actuelle toujours notée  $\Omega = \Omega^f(t) \cup \overline{\Omega}^s(t)$ .

**Remarque 7.3** La définition de l'opérateur d'extension, Ext, est arbitraire à l'intérieur de  $\Omega_0^f$ . Il ne s'agit pas d'une inconnue du problème.

L'introduction de cette carte, nous permet de mettre en évidence les dépendances des équations fluides vis à vis du mouvement du domaine  $\Omega^f(t)$ . En effet, en transportant les équations fluide dans le domaine de référence  $\Omega_0^f$ , nous obtenons les équations de Navier-Stokes incompressibles en formulation ALE [102] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J u}{\partial t} \Big|_{x_0} + \text{div}_0 \{ J [u \otimes (u - w) - \sigma(u, p)] F^{-T} \} &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\ \text{div}(J u F^{-T}) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Où les quantités  $F$ ,  $J$ ,  $w$  sont définies par :

$$\begin{aligned} F &\stackrel{\text{def}}{=} \nabla_0 x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial x_0}, \\ J &\stackrel{\text{def}}{=} \det(F) > 0, \\ w &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0}. \end{aligned}$$

**Remarque 7.4** D'après la définition de la carte  $x$ ,  $w|_{\Omega_0^s}$  représente la vitesse du solide, alors que  $w|_{\Omega_0^f}$  représente la vitesse du volume de contrôle fluide, qui est différente, en général, de la vitesse du fluide dans  $\Omega^f(t)$ .

### 7.2.1 Formulation ALE forte du système couplé

L'évolution du solide est donnée par le mouvement  $x^s$  et son champ de contraintes  $S$  (deuxième tenseur de Piola-Kirchoff) relié à  $x^s$  par une loi de comportement adéquate. Par conséquent, le couple  $(x^s, S)$  satisfait les équations de l'élastodynamique non-linéaire [26]:

$$\ddot{x}^s - \operatorname{div}_0(FS) = f, \quad \text{dans } \Omega_0^s. \quad (7.3)$$

Le couplage entre les équations du solide et celles du fluide est opéré par des conditions aux limites standards sur l'interface fixe  $\Gamma_0^s$ , à savoir, la continuité cinématique des vitesses et cinétique des efforts [102, 49]:

$$\begin{aligned} u &= \dot{x}^s, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\ FS n_0 &= J\sigma(u, p)F^{-T}n_0, & \text{sur } \Gamma_0^s, \end{aligned} \quad (7.4)$$

où  $n_0$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Omega_0^f$ . De plus, les équations fluides sont munies d'une condition de Dirichlet en vitesse sur la frontière  $\Gamma_0^f$ ,

$$u = g, \quad \text{sur } \Gamma_0^f.$$

En résumé, le système couplé en formulation ALE écrit en configuration de référence est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ju}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \{ J [u \otimes (u - w) - \sigma(u, p)] F^{-T} \} &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\ \operatorname{div} (JuF^{-T}) &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\ u &= g, & \text{sur } \Gamma_0^f, \\ u &= \dot{x}^s, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\ FS n_0 &= J\sigma(u, p)F^{-T}n_0, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\ \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0(FS) &= f, & \text{dans } \Omega_0^s, \\ (u, x^s, \dot{x}^s) \Big|_{t=0} &= (u_0, x^{s,0}, \dot{x}^{s,1}), & \text{dans } \Omega_0^f \times (\Omega_0^s)^2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Ici,  $f$  représente la force volumique appliquée à la structure,  $u_0$  la vitesse initiale du fluide et  $x^{s,0}$ ,  $\dot{x}^{s,1}$  le déplacement et la vitesse de la structure à l'instant initial.

## 7.3 Analyse de sensibilité

Le problème que nous proposons de traiter est l'analyse de sensibilité du système couplé fluide-structure vis-à-vis de perturbations de la donnée  $g$  à la frontière  $\Gamma_0^f$ . Cette analyse est réalisée en recherchant la dérivée de l'état du système par rapport à cette donnée. Un moyen de l'obtenir est de rechercher quel système linéaire d'équations elle satisfait.

**Résultat principal:** Étant donnée une solution  $(u_g, p_g, x_g^s)$  du système couplé associé à une donnée frontière  $g$ , la dérivée par rapport à  $g$  dans une direction de perturbation  $\delta g$

est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{Du_g}{Dg} &= \delta u + \nabla u_g \delta x^f, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dp_g}{Dg} &= \delta p + \nabla p_g \delta x^f, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dx_g^s}{Dg} &= \delta x^s, \quad \text{dans } \Omega_0^s,\end{aligned}\tag{7.6}$$

où

$$\delta x^f = \text{Ext}'(x_g^s|_{\Gamma_0^s})\delta x^s|_{\Gamma_0^s}$$

et  $(\delta u, \delta p, \delta x^s)$  satisfait le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta u}{\partial t}|_{x_g} - \text{div}(u_g \otimes \delta u + \delta u \otimes u_g - \delta \sigma) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \text{div } \delta u &= 0, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \delta u &= \delta g \quad \text{sur } \Gamma_0^f, \\ \delta u &= \delta \dot{x}^s - \nabla u_g \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_g^s(t) \\ \delta \ddot{x}^s - \text{div}_0 [F_g \delta S + \nabla_0 \delta x^s S_g] &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^s, \\ [F_g \delta S + \nabla_0 \delta x^s S_g] n_0 &= J_g \|F_g^{-T} n_0\| [\sigma_g \eta(\delta x^s) + \nabla \sigma_g \delta x^s n_g \\ &\quad + \delta \sigma n_g], \quad \text{sur } \Gamma_0^s.\end{aligned}\tag{7.7}$$

avec

$$\begin{aligned}\eta(\delta x^s) &= -(\text{I div } \delta x^s - \nabla \delta x^{sT}) n_g, \\ n_g &= \frac{F_g^{-T} n_0}{\|F_g^{-T} n_0\|}, \\ \delta \sigma &= -\delta p \text{I} + \nu(\nabla \delta u + \nabla \delta u^T), \\ \delta S &= S'(x_g^s) \delta x^s.\end{aligned}$$

**Remarque 7.5** *Le système linéaire vérifié par  $(\delta u, \delta p, \delta x^s)$  est posé dans un domaine dont les variations sont connues et données par l'état  $(u_g, p_g, x_g^s)$  associé à la donnée frontière  $g$ . Ainsi l'obtention de la dérivée de l'état ne réclame que l'introduction de la carte  $x_g$  associé à l'état au point de dérivation.*

**Remarque 7.6** *Le système linéaire est constitué de deux sous-systèmes, l'un posé sur  $\Omega_g^f(t)$ , l'autre sur  $\Omega_0^s$ , couplés par l'intermédiaire de deux conditions non-standards à l'interface  $\Gamma_g^f(t)$ .*

**Remarque 7.7** *La propriété fondamentale du résultat principal de cet article réside dans l'élimination de l'inconnue  $\delta x^f$  dans les équations fluides satisfaites par  $\delta u$ . Ainsi dans le cadre d'une approche numérique, cette propriété simplifiera les calculs de façon déterminante en permettant une procédure de découplage à l'interface fluide-structure.*

## 7.4 Démonstrations du résultat principal

### 7.4.1 Formulation faible

Le but de cette partie n'est pas d'introduire un cadre fonctionnel optimal, mais plutôt de définir des espaces où les calculs que nous allons mener ont un sens.

On considère des fonctions tests solides et fluides  $(\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3$ . De façon générale  $D_0(\Omega)$  désigne l'ensemble des fonctions deux fois continûment dérivables à support compact dans  $\Omega$ . En multipliant les équations en formulation ALE par ces fonctions tests et après prise en compte des conditions aux limites, on obtient la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [\phi(u_g, \sigma_g) - u_g \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g + \int_{\Omega_0^s} \ddot{x}_g^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 \\ + \int_{\Omega_0^s} F_g S_g : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Gamma_0^s} J_g \sigma_g F_g^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_0 = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}^s_0, \\ \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3, \end{aligned} \quad (7.8)$$

où

$$\begin{aligned} \phi(u_g, \sigma_g) &= u_g \otimes u_g + \sigma_g, \\ F_g &= \nabla_0 x_g, \\ x_g^f &= \text{Ext}(x_g^s|_{\Gamma_0^s}), \\ w_g &= \dot{x}_g^f. \end{aligned}$$

Les conditions de Dirichlet sont traitées de façon forte :

$$\begin{aligned} u_g &= g, \quad \text{sur } \Gamma_0^f, \\ u_g &= x_g^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \end{aligned} \quad (7.9)$$

**Remarque 7.8** *Le choix de fonctions tests fluide et structure a priori discontinues à l'interface fluide-structure est motivé par la volonté de faire apparaître de façon naturelle les efforts à l'interface pour l'état de référence. Ainsi ces derniers apparaîtront naturellement dans la formulation du problème linéarisé.*

La difficulté dans le calcul des dérivées (7.6) réside dans la définition d'un problème linéaire satisfait par les fluctuations  $(\delta u, \delta p, \delta x)$ .

L'introduction d'une perturbation  $\delta g : \Gamma_0^f \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times (0, T)$  de la vitesse au bord, génère un nouvel état du système  $(u_{g+\delta g}, p_{g+\delta g}, x_{g+\delta g})$ , défini dans  $\Omega = \Omega_{g+\delta g}^f(t) \cup \overline{\Omega}_{g+\delta g}^s(t)$ . Ce nouvel état satisfait un problème analogue à (7.8), c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_{g+\delta g} u_{g+\delta g}}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_{g+\delta g}^f(t)} [\phi(u_{g+\delta g}, \sigma_{g+\delta g}) - u_{g+\delta g} \otimes w_{g+\delta g}] : \nabla \hat{v}^f \, dx_{g+\delta g} \\ + \int_{\Omega_0^s} \ddot{x}_{g+\delta g}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} F_{g+\delta g} S_{g+\delta g} : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Gamma_0^s} J_{g+\delta g} \sigma_{g+\delta g} F_{g+\delta g}^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_0 \\ = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}^s_0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3. \end{aligned} \quad (7.10)$$

avec

$$\begin{aligned} u_{g+\delta g} &= g + \delta g, & \text{sur } \Gamma_0^f, \\ u_{g+\delta g} &= \dot{x}_{g+\delta g}^s, & \text{sur } \Gamma_0^s. \end{aligned} \quad (7.11)$$

On s'intéresse à la linéarisation du problème perturbé autour de l'état de référence  $(u_g, p_g, x_g)$ . L'hypothèse fondamentale dans ce processus de linéarisation correspond à admettre que l'état du système est différentiable par rapport à la donnée au bord extérieur, ce qui revient à supposer que les fluctuations  $(\delta u, \delta p, \delta x)$  sont du même ordre que  $\delta g$  (dans une certaine norme).

Il s'agit de déterminer les variations  $(\delta u, \delta p, \delta x)$ , que nous allons définir dans  $\Omega$  la configuration autour de laquelle le problème est perturbé. Ainsi les fluctuations sont définies de la manière suivante : pour  $t > 0$ , on considère  $x \in \Omega$  et  $x_0 \in \Omega_0$  tel que  $x = x_g(x_0, t)$ . On définit alors

$$\delta x(x, t) = x_{g+\delta g}(x_0, t) - x_g(x_0, t),$$

et pour l'état fluide (ici,  $x \in \Omega_g^f(t)$  et  $x_0 \in \Omega_0^f$ )

$$\begin{aligned} \delta u(x, t) &= u_{g+\delta g}(x + \delta x(x, t), t) - u_g(x, t) - \nabla u_g(x, t) \delta x(x, t), \\ \delta p(x, t) &= p_{g+\delta g}(x + \delta x(x, t), t) - p_g(x, t) - \nabla p_g(x, t) \delta x(x, t). \end{aligned}$$

De manière plus compacte

$$\begin{aligned} x_{g+\delta g} &= x_g + \delta x, & \text{dans } \Omega_0, \\ u_{g+\delta g}(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x) &= u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u, & \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ p_{g+\delta g}(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x) &= p_g + \nabla p_g \delta x + \delta p, & \text{dans } \Omega_g^f(t). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Les fluctuations sont évaluées à partir des variations de l'état en un point physique donné, en prenant  $u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u$  comme approximation à l'ordre 1 de  $u_g(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x)$ . Il s'agit alors d'effectuer un transport à l'intérieur du problème de référence (7.8). Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

## 7.4.2 Problème de référence transporté

**Lemme 7.1** *Soit  $\mathcal{V}_0$  un domaine borné fixe et  $x : \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une carte injective, de classe  $\mathcal{C}^2(\mathcal{V}_0)^3$ , on note  $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} x(\mathcal{V}_0)$ . Soit*

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*une application  $\mathcal{C}^1$ , et  $h \in L^2(\mathcal{V}_0)^3$ . Pour chaque déplacement  $\delta x \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{V}})^3$  et chaque élément  $(u, \sigma, w) \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{V}})^{3 \times 9 \times 3}$  satisfaisant*

$$\int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \, dx_0 - \int_{\mathcal{V}} \Phi(u, \sigma, w) : \nabla \hat{q} \, dx = 0, \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{C}_0^2(\mathcal{V})^3, \quad (7.13)$$

alors  $(u, \sigma, w)$  vérifie le problème convectif transporté suivant

$$\int_{\mathcal{V}_0} h \cdot (\nabla \hat{q} \delta x) dx_0 + \int_{\mathcal{V}} [\Phi(u, \sigma, w)(I \operatorname{div} \delta x - \nabla \delta x^T) + D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x)] : \nabla \hat{q} dx = 0, \quad \forall \hat{q} \in C_0^2(\mathcal{V})^3. \quad (7.14)$$

Où

$$D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x) + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(u, \sigma, w)(\nabla \sigma \delta x) + \frac{\partial \Phi}{\partial w}(u, \sigma, w)(\nabla w \delta x).$$

**Démonstration :** Nous reprenons le formalisme introduit dans [49]. Soit  $\hat{q} \in C_0^2(\mathcal{V})^3$  une fonction test fixée, notons  $K \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{supp}(\hat{q}) \subset \mathcal{V}$ . Pour  $\varepsilon > 0$  on définit  $x^\varepsilon = I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x$ . On peut construire, par continuité de l'application  $x^\varepsilon$ , un ensemble compact  $K_0 \subset \mathcal{V}$  et un réel  $\varepsilon_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $x^\varepsilon$  est injective et

$$Q^\varepsilon = (x^\varepsilon)^{-1}(K) \subset K_0, \quad x^\varepsilon(K_0) \subset \mathcal{V}.$$

D'après (7.13) et par changement de variable on a que

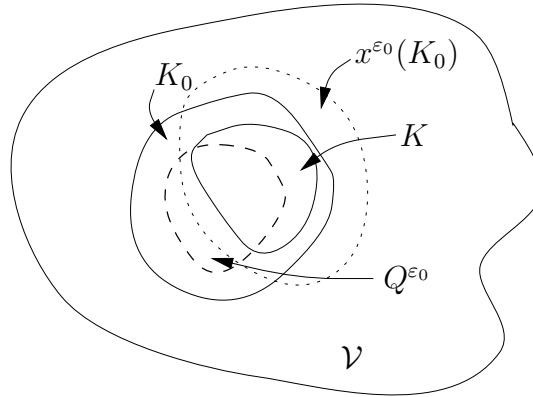


FIG. 7.2 – Description des ensembles

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} dx_0 - \int_K \Phi(u, \sigma, w) : \nabla \hat{q} dx \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} dx_0 - \int_{x^\varepsilon(Q^\varepsilon)} \Phi(u, \sigma, w) : \nabla_\varepsilon \hat{q} dx^\varepsilon \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} dx_0 - \int_{Q^\varepsilon} \Phi(u(x^\varepsilon), \sigma(x^\varepsilon), w(x^\varepsilon)) : (\nabla_\varepsilon \hat{q})(x^\varepsilon) \det \nabla x^\varepsilon dx \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} dx_0 - \int_{K_0} \Phi(u(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x), \sigma(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x), w(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x)) \nabla(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x)^{-T} : \\ &\quad \nabla \hat{q}(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x) \det \nabla(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x) dx. \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient du fait que  $\hat{q}(I_{\mathcal{V}} + \epsilon \delta x)$  s'annule en dehors de  $Q^\epsilon \subset K_0$ . Par développement de Taylor à l'ordre 1 en  $\epsilon$  on obtient l'identité suivante

$$0 = \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \, dx_0 - \int_{K_0} \Phi(u, \sigma, w) : \nabla \hat{q} \, dx - \epsilon \left[ \int_{K_0} \Phi(u, \sigma, w) (\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) \right. \\ \left. + D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u, \sigma, w) (\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) : \nabla \hat{q} \, dx \right] - \epsilon \int_{K_0} \Phi(u, \sigma, w) \nabla (\nabla \hat{q} \delta x) \, dx \\ + o(\epsilon).$$

Dans l'égalité précédente les deux premiers termes sont nuls d'après (7.13), et le dernier terme se réduit à

$$\int_{\mathcal{V}_0} h \cdot (\nabla \hat{q} \delta x) \, dx,$$

en utilisant  $\nabla \hat{q} \delta x$  comme fonction test dans (7.13). Il en résulte que pour  $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$0 = \epsilon \left[ \int_{K_0} \Phi(u, \sigma, w) (\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) \right. \\ \left. + D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u, \sigma, w) (\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) : \nabla \hat{q} \, dx - \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot (\nabla \hat{q} \delta x) \, dx \right] + o(\epsilon).$$

Alors si on divise par  $\epsilon$  et on fait tendre  $\epsilon$  vers 0 on obtient (7.14). ■

Nous aurons besoin, dans la suite, du corollaire suivant :

**Corollary 7.1** *Sous les hypothèses du lemme 7.1 il résulte que*

$$\int_{\mathcal{V}_0} h \cdot (\nabla \hat{q} \delta x) \, dx_0 + \int_{\mathcal{V}} [\Phi(u, \sigma, w) (\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) \\ + D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u, \sigma, w) (\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x)] : \nabla \hat{q} \, dx = \int_{\partial \mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \delta x \cdot (F^{-T} n_0)_0 \\ + \int_{\partial \mathcal{V}} [D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u, \sigma, w) (\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) n - \Phi(u, \sigma, w) \eta(\delta x)] \cdot \hat{q}, \\ \forall \hat{q} \in C^2(\overline{\mathcal{V}})^3. \quad (7.15)$$

Où  $\eta(\delta x) = -(\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) n$  représente le terme linéaire de variation du vecteur  $n$  normal à  $\partial \mathcal{V}$ .

**Démonstration :** En transportant dans  $\mathcal{V}$  le premier terme de (7.14), on obtient

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{1}{J} h \otimes \delta x + \Phi(u, \sigma, w) (\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) \right. \\ \left. + D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u, \sigma, w) (\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) \right] : \nabla \hat{q} \, dx = 0, \quad \forall \hat{q} \in C_0^2(\mathcal{V})^3.$$

Alors si on note

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{J} h \otimes \delta x + \Phi(u, \sigma, w) (\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) + D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u, \sigma, w) (\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x),$$

on déduit que

$$\operatorname{div} G = 0, \quad \text{dans } \mathcal{V},$$

ce qui permet d'obtenir (7.15). ■

**Remarque 7.9** *Le terme de variation de la normale  $\eta(\delta x)$  ne dépend que de la trace de  $\delta x$  sur  $\partial\mathcal{V}$ .*

Nous appliquons alors les résultats précédents au cas particulier du problème de référence (7.8).

On considère  $\hat{v}^s = 0$  et  $\hat{v}^f \in D_0(\Omega_g^f(t))^3$  dans (7.8), nous obtenons alors le sous-problème fluide de référence suivant :

$$\int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [\phi(u_g, \sigma_g) - u_g \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g = 0, \quad \forall \hat{v}^f \in D_0(\Omega_g^f(t))^3. \quad (7.16)$$

Ainsi formulé, il est facile d'appliquer les résultats du corollaire 7.1 avec

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \Omega_0^f, \\ x &= x_g^f, \\ \mathcal{V} &= \Omega_g^f(t), \\ h &= (J_g u_g)', \\ \Phi(u, \sigma, w) &= \phi(u, \sigma) - u \otimes w. \end{aligned}$$

Ainsi toute solution de (7.16), vérifie le problème convectif suivant :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \otimes \delta x F_g^{-T} : \nabla_0 \hat{v}^f \, dx_0 + \int_{\Omega_g^f(t)} u_g \otimes (\nabla w_g \delta x) : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\ & + \int_{\Omega_g^f(t)} u_g \otimes w_g (\operatorname{I} \operatorname{div} \delta x - \nabla \delta x^T) : \nabla \hat{v}^f \, dx_g + \int_{\Omega_g^f(t)} (\nabla u_g \delta x) \otimes w_g : \nabla \hat{v}^f \, dx \\ & - \int_{\Omega_g^f(t)} \phi(u_g, \sigma_g) (\operatorname{I} \operatorname{div} \delta x - \nabla \delta x^T) : \nabla \hat{v}^f \, dx_g - \int_{\Omega_g^f(t)} D_{(u, \sigma)} \phi(u_g, \sigma_g) (\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x) \\ & = - \int_{\Gamma_0^s} \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \delta x \cdot (F_g^{-T} n_0)_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [\phi(u_g, \sigma_g) - u_g \otimes w_g] \eta(\delta x) \cdot \hat{v}^f_g \\ & \quad - \int_{\Gamma_g^s(t)} D_{(u, \sigma)} \phi(u_g, \sigma_g) (\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x) n_g \cdot \hat{v}^f_g \\ & \quad + \int_{\Gamma_g^s(t)} (\nabla u_g \delta x \otimes w_g + u_g \otimes \nabla w_g \delta x) n_g \cdot \hat{v}^f_g, \quad \forall \hat{v}^f \in D_0(\Omega)^3. \quad (7.17) \end{aligned}$$

**Remarque 7.10** *L'intérêt de cette expression réside dans le fait qu'elle fournit une manière de transformer des intégrales de volume, avec dépendance en  $\delta x$  à l'intérieur du domaine  $\Omega_g^f(t)$ , en une intégrale de surface dont la dépendance en  $\delta x$  se réduit à sa trace surfacique.*



### 7.4.3 Méthode de linéarisation

Le processus de linéarisation [49] est effectué en trois étapes :

1. écriture en configuration de référence  $\Omega_g^f(t)$ , des termes convectifs du problème perturbé,
2. développement de Taylor au premier ordre dans le problème perturbé, en utilisant la définition (7.12),
3. élimination des termes d'ordre zéro, par soustraction du problème de référence (7.8),
4. simplification des termes d'ordre un, par soustraction du problème convectif transporté (7.17).

**Etape 1 :**

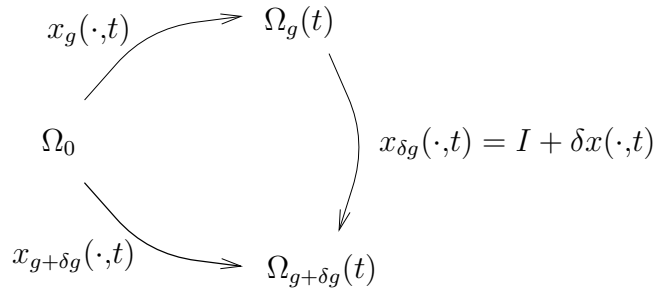


FIG. 7.3 – Graphe des applications

On pose  $F_{\delta g} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla x_{\delta g} = I + \nabla \delta x$  et  $J_{\delta g} \stackrel{\text{def}}{=} \det F_{\delta g}$ . Ainsi, après transport des termes convectifs, le problème (7.10) devient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_{g+\delta g} u_{g+\delta g}}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} J_{\delta g} [\phi(u_{g+\delta g}, \sigma_{g+\delta g}) - u_{g+\delta g} \otimes w_{g+\delta g}] F_{\delta g}^{-T} : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\
 & + \int_{\Omega_0^s} \ddot{x}_{g+\delta g}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} F_{g+\delta g} S_{g+\delta g} : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Gamma_0^s} J_{g+\delta g} \sigma_{g+\delta g} F_{g+\delta g}^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_0 \\
 & = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}^s_0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3. \quad (7.18)
 \end{aligned}$$

**Etape 2 :**

À partir de la définition des fluctuations (7.12) on peut obtenir, à l'ordre 1, les identités classiques suivantes (voir Annexe)

$$\begin{aligned}
 J_{g+\delta g} &= J_g(1 + \text{div } \delta x), \quad \text{dans } \Omega_0, \\
 F_{g+\delta g}^{-T} &= (I - \nabla \delta x^T) F_g^{-T}, \quad \text{dans } \Omega_0, \\
 \sigma_{g+\delta g} &= \sigma_g + \nabla \sigma_g \delta x + \delta \sigma, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\
 w_{g+\delta g} &= w_g + \delta w,
 \end{aligned}$$

avec  $\delta w$  et  $\delta \sigma$  définis par

$$\begin{aligned}\delta w &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \delta x}{\partial t} \Big|_{x_0}, \quad \text{dans } \Omega. \\ \delta \sigma &\stackrel{\text{def}}{=} -\delta p \mathbf{I} + \nu(\nabla \delta u + \nabla \delta u^T), \quad \text{dans } \Omega_g^f(t).\end{aligned}$$

On commence par linéariser les termes avec dérivées temporelles. Ainsi on a à l'ordre 1 que

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{g+\delta g} u_{g+\delta g}}{\partial t} \Big|_{x_0} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} [J_g(1 + \operatorname{div} \delta x)(u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} \{J_g [(1 + \operatorname{div} \delta x)u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u]\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} [J_g u_g + J_g \operatorname{div}(u_g \otimes \delta x) + J_g \delta u] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} [J_g u_g + \operatorname{div}_0(J_g u_g \otimes \delta x F_g^{-T}) + J_g \delta u].\end{aligned}$$

D'autre part, comme  $F_g^{-T} = -\nabla w_g^T F_g^{-T}$  et intégrant par parties il résulte que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0^f} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} [\operatorname{div}_0(J_g u_g \otimes \delta x F_g^{-T})] \cdot \hat{v}^f \, dx_0 &= \int_{\Omega_0^f} \operatorname{div}_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} (J_g u_g \otimes \delta x F_g^{-T}) \right] \cdot \hat{v}^f \, dx_0 \\ &= \int_{\Omega_0^f} \operatorname{div}_0 \left[ \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \otimes \delta x F_g^{-T} + J_g u_g \otimes \delta w F_g^{-T} + J_g u_g \otimes \delta x F_g^{-T} \right] \cdot \hat{v}^f \, dx_0 \\ &= - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \otimes \delta x F_g^{-T} : \nabla_0 \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\ &\quad + \int_{\Gamma_0^s} \left[ \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \otimes \delta x F_g^{-T} n_0 \right] \cdot \hat{v}^f_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] n_g \cdot \hat{v}^f_g.\end{aligned}$$

Par conséquent on a, à l'ordre 1,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_{g+\delta g} u_{g+\delta g}}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 &= \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g(u_g + \delta u)}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 \\ &\quad - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \otimes \delta x F_g^{-T} : \nabla_0 \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\ &\quad + \int_{\Gamma_0^s} \left[ \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \otimes \delta x F_g^{-T} n_0 \right] \cdot \hat{v}^f_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] n_g \cdot \hat{v}^f_g.\end{aligned}$$

Pour les termes convectifs, il nous reste, à l'ordre 1,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_g^f(t)} J_{\delta g} u_{g+\delta g} \otimes w_{g+\delta g} F_{\delta g}^{-T} : \nabla \hat{v}^f dx_g &= \int_{\Omega_g^f(t)} (u_g \otimes w_g + \delta u \otimes w_g) : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 + \int_{\Omega_g^f(t)} [(\nabla u_g \delta x) \otimes w_g + u_g \otimes \delta w + u_g \otimes w_g (\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T)] : \nabla \hat{v}^f dx_g, \\
 &\quad - \int_{\Omega_g^f(t)} J_{\delta g} \phi(u_{g+\delta g}, \sigma_{g+\delta g}) F_{\delta g}^{-T} : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 &= - \int_{\Omega_g^f(t)} [\phi(u_g, \sigma_g) + D_{(u, \sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma)] : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 - \int_{\Omega_g^f(t)} [\phi(u_g, \sigma_g)(\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) + D_{(u, \sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x)] : \nabla \hat{v}^f dx_g.
 \end{aligned}$$

Finalement pour le terme de bord on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_0^s} J_{g+\delta g} \sigma_{g+\delta g} F_{g+\delta g}^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_0 &= \int_{\Gamma_0^s} J_g (\sigma_g + \delta \sigma) F_g^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_0 \\
 + \int_{\Gamma_0^s} J_g [\sigma_g (\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) + \nabla \sigma_g \delta x] F_g^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_0.
 \end{aligned}$$

### Etape 3 :

Après soustraction du problème de référence on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D_{u, \sigma} \phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_g - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \otimes \delta x F_g^{-T} : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 \\
 - \int_{\Omega_g^f(t)} [\Phi(u_g, \sigma_g, w_g)(\text{I div } \delta x - \nabla \delta x^T) \\
 + D_{(u, \sigma, w)} \Phi(u_g, \sigma_g, w_g)(\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x, \nabla w_g \delta x)] : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 + \int_{\Gamma_0^s} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \otimes \delta x F_g^{-T} n_g \cdot \hat{v}^f_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] n_g \cdot \hat{v}^f_g \\
 + \int_{\Omega_0^s} \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s dx_0 = 0, \\
 \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3.
 \end{aligned}$$

**Etape 4 :**

Si on soustrait le problème convectif (7.17) de cette dernière expression on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D_{(u,\sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\
 & \quad + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_g \\
 & \quad + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w n_g + (\nabla u_g \delta x) \otimes w_g n_g \\
 & \quad + (\phi(u_g, \sigma_g) - u_g \otimes w_g) \eta(\delta x) - D_{(u,\sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x) n_g] \cdot \hat{v}^f_g \\
 & \quad + \int_{\Omega_0^s} \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 = 0, \\
 & \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3.
 \end{aligned}$$

À partir de (7.12), (7.9) et (7.11), les conditions aux limites pour  $\delta u$  sont données par

$$\begin{aligned}
 \delta u &= \delta g, \quad \text{sur } \Gamma_0^f, \\
 \delta u &= \delta w - \nabla u_g \delta x, \quad \text{sur } \Gamma_g^s(t).
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

**Remarque 7.11** À la différence de [49], la condition de transpiration (7.19) est écrite sur une interface mobile, du fait que le problème de référence est instationnaire.

De plus en utilisant le fait que sur  $\Gamma_g^s(t)$ , nous avons l'identité cinématique  $w_g = u_g$ , les intégrales de surface se simplifient alors et nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D_{(u,\sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\
 & \quad + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g) \cdot \hat{v}^s_g + \int_{\Gamma_g^s(t)} \delta \sigma n_g \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}^f)_g \\
 & \quad + \int_{\Omega_0^s} \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 = 0, \\
 & \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3.
 \end{aligned}$$

plus précisément

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D_{(u,\sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\
 & \quad + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot \hat{v}^s_g \\
 & \quad + \int_{\Gamma_g^s(t)} [D_{(u,\sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \delta u \otimes w_g] n_g \cdot \hat{v}^f_g \\
 & \quad + \int_{\Omega_0^s} \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 = 0, \\
 & \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3.
 \end{aligned}$$

Maintenant on transporte dans  $\Omega_g^f(t)$  la dérivée temporelle sur le fluide, de sorte que  $(\delta u, \delta p, \delta x)$  satisfait le problème linéaire variationnel suivant

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_g^f(t)} \frac{\partial \delta u}{\partial t} \Big|_{x_g} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D_{(u,\sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma)] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\ & + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot \hat{v}^s_g + \int_{\Gamma_g^s(t)} [D_{(u,\sigma)} \phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma)] n_g \cdot \hat{v}^f_g \\ & + \int_{\Omega_0^s} \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 = 0, \\ & \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in D_0(\Omega_0)^3 \times D_0(\Omega)^3. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Ce qui termine la détermination du système linéarisé caractérisant les variations du problème de référence (7.8) vis à vis de perturbations de la condition aux limites de Dirichlet au bord du domaine fluide.

Afin de réaliser le lien avec la formulation forte du problème couplé de référence, il est intéressant d'opérer dans (7.20) les intégrations par parties nécessaires à l'obtention d'une formulation forte du système linéarisé.

Cette formulation consiste en deux sous-problèmes satisfaites d'une part par  $(\delta u, \delta p)$  dans  $\Omega_g^f(t)$  et d'autre part par  $\delta x^s$  dans  $\Omega_0^s$ . Ces deux systèmes sont couplés par l'intermédiaire de conditions aux limites non-standards à l'interface  $\Gamma_g^s(t)$  :

– Sous-problème fluide :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u}{\partial t} \Big|_{x_g} - \operatorname{div} (\delta u \otimes u_g + u_g \otimes \delta u - \delta \sigma) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \operatorname{div} \delta u &= 0, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \delta u &= \dot{\delta x} - \nabla u_g \delta x, \quad \text{sur } \Gamma_g^s(t), \\ \delta u &= \delta g, \quad \text{sur } \Gamma_g^f(t), \end{aligned}$$

avec  $\delta \sigma = -\delta p \mathbf{I} + \nu(\nabla \delta u + \nabla \delta u^T)$ .

– Sous-problème solide :

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0 [F_g \delta S + \nabla_0 \delta x^s S_g] &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^s, \\ [F_g \delta S + \nabla_0 \delta x^s S_g] n_0 &= J_g \|F_g^{-T} n_0\| [\sigma_g \eta(\delta x^s) + \nabla \sigma_g \delta x^s n_g + \delta \sigma n_g], \end{aligned}$$

#### 7.4.4 Calcul des dérivées de l'état

Les fluctuations autour de l'état  $(u_g, p_g, x_g)$  étaient données selon (7.12) par

$$\begin{aligned} x_{g+\delta g} &= x_g + \delta x, \quad \text{dans } \Omega_0, \\ u_{g+\delta g}(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x) &= u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ p_{g+\delta g}(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x) &= p_g + \nabla p_g \delta x + \delta p, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t). \end{aligned}$$

Les termes d'ordre un correspondent alors à la dérivée de l'état au point  $(u_g, p_g, x_g)$  dans la direction de perturbation  $\delta g$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\frac{Du_g}{Dg} &= \delta u + \nabla u_g \delta x^f, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dp_g}{Dg} &= \delta p + \nabla p_g \delta x^f, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dx_g}{Dg} &= \delta x, \quad \text{dans } \Omega_0.\end{aligned}$$

La solution du problème linéaire (7.20) fournit directement  $(\delta u, \delta p, \delta x^s)$ , et  $\delta x^f$  se déduit de  $\delta x^s$  par l'intermédiaire de l'expression suivante :

$$\delta x^f = \frac{Dx_g^f}{Dg} \delta g = \frac{D \text{Ext}(x_g^s)}{Dg} \delta g = \text{Ext}'(x_g^s) \left( \frac{Dx_g^s}{Dg} \delta g \right) = \text{Ext}'(x_g^s) \delta x^s.$$

Finalement l'expression finale de la dérivée de l'état est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{Du_g}{Dg} &= \delta u + \nabla u_g \text{Ext}'(x_g^s) \delta x^s, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dp_g}{Dg} &= \delta p + \nabla p_g \text{Ext}'(x_g^s) \delta x^s, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dx_g^s}{Dg} &= \delta x^s, \quad \text{dans } \Omega_0.\end{aligned}$$

avec  $(\delta u, \delta p, \delta x^s)$  solution du problème linéaire (7.20).

**Remarque 7.12** Si l'opérateur d'extension  $\text{Ext}$  est linéaire, alors l'expression de la dérivée de l'état fluide est réduite à :

$$\begin{aligned}\frac{Du_g}{Dg} &= \delta u + \nabla u_g \text{Ext}(\delta x^s), \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dp_g}{Dg} &= \delta p + \nabla p_g \text{Ext}(\delta x^s), \quad \text{dans } \Omega_g^f(t).\end{aligned}$$

## 7.5 Conclusion

Dans cet article nous avons établi une méthode de calcul théorique de la dérivée de l'état d'un système couplé fluide-structure, par rapport à une donnée frontière en vitesse. Elle s'obtient à partir de la solution de deux problèmes linéaires fluide et structure couplés à l'interface mobile par des conditions aux limites non-standards de transpiration. Ce résultat semble être adapté à l'étude plus complexe du contrôle optimal de systèmes en interaction fluide-structure, notamment lorsque le mouvement de l'interface doit être effectivement pris en compte. Ceci constitue la prochaine étape de nos travaux.

## 7.6 Annexe

Dans cette annexe on explicite les identités au premier ordre, employées dans la méthode de linéarisation.

On rappelle d'abord deux résultats classiques du calcul différentiel matriciel. On renvoie le lecteur à [26] pour les démonstrations.

**Proposition 7.1** *L'application  $\det : A \longrightarrow \det A$ , définie dans l'ensemble de matrices inversibles est différentiable. De plus on a*

$$\frac{D \det}{DA}(A)(U) = \det A \operatorname{Tr}(UA^{-1}), \quad \forall U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

**Proposition 7.2** *L'application  $A \longrightarrow A^{-1}$ , définie dans l'ensemble de matrices inversibles est différentiable. De plus on a*

$$\frac{DA^{-1}}{DA}(U) = -A^{-1}UA^{-1}, \quad \forall U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

On reprend maintenant les notations des parties précédentes et on considère les deux applications régulières et injectives

$$\begin{aligned} x_g &: \Omega_0 \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ x_{g+\delta g} &: \Omega_0 \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

voir la figure 7.4.3. En fait,  $x_{g+\delta g}$  est obtenue en perturbant  $x_g$ , et la perturbation est donnée par

$$\delta x = x_{g+\delta g} - x_g.$$

**Proposition 7.3** *Au premier ordre en  $\delta x$ , on a les identités suivantes :*

$$J_{g+\delta g} = J_g(1 + \operatorname{div} \delta x), \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (7.21)$$

$$F_{g+\delta g}^{-1} = F_g^{-1}(I + \nabla \delta x), \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (7.22)$$

$$\sigma_{g+\delta g} = \sigma_g + \nabla \sigma_g \delta x + \delta \sigma, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t). \quad (7.23)$$

**Démonstration :** Pour obtenir (7.21) on réalise un développement de Taylor en utilisant la proposition 7.1. De sorte que

$$\begin{aligned} J_{g+\delta g} &= \det F_{g+\delta g} \\ &= \det(F_g + \nabla_0 \delta x) \\ &= \det F_g + \det F_g \operatorname{Tr}(\nabla_0 \delta x F_g^{-1}) \\ &= J_g(1 + \operatorname{Tr}(\nabla \delta x)) \\ &= J_g(1 + \operatorname{div} \delta x). \end{aligned}$$

On obtient (7.22) à partir de la proposition 7.2. Ainsi

$$\begin{aligned} F_{g+\delta g}^{-1} &= (F_g + \nabla_0 \delta x)^{-1} \\ &= F_g^{-1} - F_g^{-1} \nabla_0 \delta x F_g^{-1} \\ &= F_g^{-1}(I - \nabla_0 \delta x F_g^{-1}) \\ &= F_g^{-1}(I + \nabla \delta x). \end{aligned}$$

Pour obtenir (7.23) il suffit de faire un développement de Taylor en  $\delta x$  à partir des définitions des perturbations (7.12). Plus précisément,

$$\begin{aligned}
\sigma_{g+\delta g} &= -p_{g+\delta g} \mathbf{I} + \nu (\nabla u_{g+\delta g} F_{\delta g}^{-1} + F_{\delta g}^{-T} \nabla u_{g+\delta g}^T) \\
&= -(p_g + \nabla p_g \cdot \delta x + \delta p) \mathbf{I} + \nu [\nabla(u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u)(\mathbf{I} - \nabla \delta x) \\
&\quad + (\mathbf{I} - \nabla \delta x^T) \nabla(u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u)^T] \\
&= -\nabla p_g \cdot \delta x \mathbf{I} + \nu [\nabla(\nabla u_g \delta x) - \nabla u_g \nabla \delta x + \nabla(\nabla u_g \delta x)^T - \nabla \delta x^T \nabla u_g^T] \\
&\quad + \sigma_g + \delta \sigma \\
&= \sigma_g - \nabla p_g \cdot \delta x \mathbf{I} + \nu [\nabla(\nabla u_g) \delta x + \nabla(\nabla u_g^T) \delta x] + \delta \sigma \\
&= \sigma_g + \nabla \sigma_g \delta x + \delta \sigma,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■





# Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous avons tenté de définir et d'analyser de nouveaux concepts afin de caractériser la stabilité aéroélastique d'une structure au sein d'un écoulement fluide atmosphérique. L'élaboration de ces concepts a nécessité d'aborder deux domaines majeurs de l'analyse mathématique, à savoir, les problèmes d'optimisation différentiable et ceux de l'analyse de forme pour les équations aux dérivées partielles :

## 1. Stabilité par minimisation de critères mécaniques :

### – *Concepts de stabilité :*

Nous avons défini deux concepts de stabilité d'un système d'évolution : l'un portant sur le respect de conditions de seuil sur une quantité globale liée à l'évolution de la structure au sein de l'écoulement fluide, l'autre portant sur l'écart entre l'évolution de quantités caractéristiques de la structure, comme son énergie mécanique, par rapport à celle d'une structure effectivement instable. Ces deux concepts permettent a priori de considérer différents type d'instabilités, ainsi que leurs couplages.

### – *Algorithmes de recherche d'instabilités :*

La recherche des paramètres critiques de stabilité s'est faite en résolvant un problème de minimisation faisant intervenir le critère de stabilité et l'état du système pour un paramètre courant. Dans le cas particulier des systèmes d'évolution linéaire, nous avons mené une étude systématique des propriétés de suivi exact et approché de trajectoires, d'un point de vue théorique et algorithmique. Nous avons établi le lien qu'il existe entre la méthode d'unicité hilbertienne et l'inverse de Moore-Penrose pour les problèmes inverses mal posés au sens de Hadamard. L'étude théorique fondée sur les principes de dualité de type Legendre-Fenchel a débouché sur l'élaboration d'algorithmes fondés des régularisations à la Tykhonov et à la Fenchel. Leur mise en oeuvre s'est faite sur le problème simple de l'équation de la chaleur unidimensionnelle. Cette étude numérique est venue confirmer les résultats de propriété de suivi approché pour les systèmes paraboliques linéaires du second ordre que nous avons établis au préalable.

### – *Applications aux systèmes fluides :*

Dans le cas de systèmes d'évolution non-linéaires modélisant un fluide, nous avons mené, dans un premier temps, une étude numérique du suivi de trajectoires pour l'équation de Burgers avec viscosité. Nous avons montré que l'utilisation d'un algorithme de gradient conjugué non-linéaire permet de prescrire la vitesse à une extrémité du domaine fluide unidimensionnel par l'intermédiaire

de la vitesse à l'autre bout du domaine. Dans un second temps, certaines propriétés de contrôlabilité du système de Navier-Stokes incompressible en dimension 2 ont été analysées d'un point de vue numérique. L'originalité de cette étude réside dans l'utilisation d'un schéma de type Lagrange-Galerkin d'ordre élevé. La linéarisation de ce schéma par rapport aux paramètres de contrôle a nécessité une attention particulière. Nous avons montré que, dans le cas de l'utilisation d'un algorithme de suivi adaptatif des courbes caractéristiques du flot, le schéma de Lagrange-Galerkin n'est pas différentiable. L'utilisation d'algorithmes de remontée des caractéristiques plus simples a permis le traitement de deux problèmes de contrôle optimal. L'un portait sur la minimisation de la traînée autour d'un cylindre en rotation, l'autre concernait l'identification de la vitesse fluide en amont d'un obstacle non-profilé fixe ou en mouvement, à partir de la connaissance des efforts fluides sur le solide. Ces tests numériques sont venus confirmer la viabilité de notre schéma linéarisé des caractéristiques et celle des propriétés de suivi de trajectoires des équations de Navier-Stokes pour des espaces de contrôle de dimension finie.

2. Calcul du gradient des fonctions critères dans le cas du système couplé fluide-structure :

Le deuxième temps fort de cette thèse a été l'établissement de conditions d'optimalité du premier ordre pour des problèmes de contrôle optimal associés successivement aux équations de Navier-Stokes en domaine mobile, puis au système couplé fluide-structure.

– *Contrôle d'un fluide par l'intermédiaire de l'évolution du domaine :*

Une étape préliminaire au traitement du problème de contrôle optimal associé au système fluide-structure complet a consisté à étudier le cas des équations de Navier-Stokes contrôlées par l'évolution du domaine fluide. Ce problème d'optimisation de forme non-standard a nécessité l'introduction de concepts, les plus récents, liés à l'analyse de dérivation eulérienne de fonctionnelles non-cylindriques. Nous avons établi la structure du gradient d'une fonctionnelle de coût générale liée à l'état du fluide par rapport à la vitesse du domaine mobile en utilisant trois méthodes différentes : l'une fondée sur la dérivabilité des solutions du système de Navier-Stokes par rapport à la vitesse du domaine et deux autres utilisant une formulation de type Min-Max avec obtention direct du système adjoint. Cette première étude a été réalisée en utilisant la dérivation par rapport à un champ de vitesse eulérien. Une seconde approche possible a consisté à dériver la fonctionnelle de coût par rapport au déplacement du domaine mobile. Nous avons étendu l'analyse de forme classique par perturbation de l'identité au cas d'un domaine mobile. Grâce à ce nouvel outil, nous avons conduit une étude similaire du contrôle des équations de Navier-Stokes en domaine mobile. Le lien théorique entre la dérivation lagrangienne et eulérienne a été établi et appliqué aux équations de Navier-Stokes.

– *Contrôle optimal en interaction fluide-structure :*

Fort des nouveaux outils de dérivation introduits dans la deuxième partie, nous avons traité deux problèmes de contrôle optimal pour les systèmes en interac-

---

tion fluide-structure. Le premier fait intervenir une structure rigide élastiquement supportée au sein d'un écoulement fluide régi par les équations de Navier-Stokes. Le problème de contrôle consiste à déterminer la vitesse du fluide en amont de la structure minimisant une fonctionnelle de coût liée à l'énergie du solide en mouvement. On utilise de façon fondamentale les résultats de dérivation des équations de Navier-Stokes par rapport à la vitesse du domaine mobile. Le point clef de la méthode étant l'introduction d'une fonctionnelle lagrangienne ad-hoc et l'application des techniques de dérivation de problèmes du type Min-Max.

Le second problème a consisté à considérer un modèle de structure beaucoup plus général décrit par les équations dynamiques de l'élasticité non-linéaire. Dans ce cadre plus compliqué, nous avons établi la structure du système fluide-structure linéarisé en utilisant une méthode de perturbation de l'identité non-cylindrique. L'intérêt fondamental de ce résultat est la localisation, pour le système linéarisé, du couplage fluide-structure au niveau de l'interface mobile. Ainsi le système non-linéaire et le système linéarisé peuvent être simulés en utilisant une procédure de partitionnement au niveau de l'interface fluide-structure.

Le travail que nous avons tenté de décrire dans cette thèse est évidemment une première étape vers la définition d'un outil automatique de dimensionnement d'une structure au sein d'un écoulement fluide, vis-à-vis des sollicitations aérodynamiques et aéroélastiques. Les améliorations et perfectionnements de ce travail sont multiples, mais il ouvre un certain nombre de perspectives, non seulement pour l'analyse de stabilité aéroélastique, mais aussi plus généralement pour le contrôle et l'optimisation de systèmes faisant intervenir une composante mobile :

- Critère de stabilité et suivi de trajectoires :

L'analyse du critère de stabilité conditionnelle doit être poursuivie de façon plus approfondie. Dans le cas linéaire, il serait intéressant de caractériser la limite asymptotique des solutions du problème de minimisation lorsque l'horizon  $T$  tend vers  $+\infty$ . Le traitement théorique du cas nonlinéaire semble pour l'instant hors d'atteinte. Cependant dans le cadre de l'interaction entre un solide rigide élastiquement supporté et un fluide incompressible, il est possible de construire un algorithme de résolution fondé sur le calcul du gradient de la fonctionnelle critère. Ainsi un traitement numérique du problème de stabilité conditionnelle est envisageable à terme. Dans ce cas, il sera important de comparer les résultats obtenus avec ceux issus de la méthode spectrale décrite dans l'introduction [52], [53].

Le problème de suivi d'instabilités semble, lui, plus accessible. Dans le cas linéaire, nous avons réussi à caractériser les conditions nécessaires et suffisantes de suivi exact et approché de trajectoires. La vérification de ces conditions a été effectuée sur un système parabolique pour lequel, seule la propriété de suivi approché est vraie. Le lien théorique établi entre l'inverse généralisé et l'inverse obtenu par la méthode H.U.M ouvre de nombreuses perspectives quant à l'élaboration et à l'étude des propriétés de convergence d'algorithmes de résolution inverse. Dans ce cadre, la régularisation de ces problèmes est l'une des difficultés majeures.

Le suivi de trajectoires dans le cas hyperbolique est en cours d'analyse [121] sur l'exemple simple de l'équation des ondes. La difficulté majeure de ce système est la propagation à vitesse finie des singularités. Le problème de suivi de trajectoires doit être alors repensé en introduisant la notion de retard.

Le contrôle en boucle de rétroaction pour le suivi de trajectoires est aussi à l'étude, il permettrait de prendre en compte par exemple, le caractère distribué des systèmes de transmission des efforts et mouvements dans le domaine de la robotique.

Le suivi de trajectoires pour les équations de Navier-Stokes a bénéficié, dans cette thèse, d'un traitement numérique utilisant le linéarisé discret issu d'un schéma de type Lagrange-Galerkin. Il s'agit d'une première tentative et le traitement par méthodes adjointes est en cours d'étude [63]. On pourra envisager à chaque étape de l'optimisation, soit une résolution du flot non-linéaire puis du flot adjoint, soit une résolution du flot linéarisé puis du flot adjoint. Cette alternative correspond à un choix d'algorithme d'optimisation de type Newton ou du type SQP-réduit [87]. La tendance actuelle favorise plutôt un traitement global par résolution du système d'optimalité contrôle-linéarisé-adjoint, comme décrit dans le projet Terascale<sup>38</sup>.

- Dérivation lagrangienne et eulérienne de fonctionnelles non-cylindriques :

Dans cette thèse, nous avons abordé le problème du contrôle dynamique des équations de Navier-Stokes par le mouvement du domaine fluide. Ce travail a consisté à utiliser les techniques de dérivation eulérienne de fonctionnelles non-cylindriques, introduites dans [43], [163], [162], [44]. La justification mathématique de l'utilisation des formulations Min-Max n'a pas été établie, cependant il semble que ce soit un problème théorique difficile du fait de la non-convexité du terme non-linéaire intervenant dans les équations de Navier-Stokes. L'affaiblissement des conditions de régularité du champ de vitesse  $V$  semble accessible en utilisant les travaux récents sur les équations de Navier-Stokes avec conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes [65], [5].

Le traitement numérique du problème du contrôle dynamique des équations de Navier-Stokes est en cours de réalisation [64]. Ces travaux se font sur la base du code Lagrange-Galerkin décrit dans le chapitre I.3. Nous espérons rapidement des résultats utilisant le linéarisé discret ALE. Le passage à l'adjoint se fera sur la base du schéma adjoint des caractéristiques en cours de développement [63].

- Contrôle des systèmes couplés fluide-structure :

L'analyse conduite dans la troisième partie ouvre de nouvelles perspectives vers le contrôle de systèmes complexes faisant intervenir un couplage fluide-structure. Jusqu'à aujourd'hui, aucun résultat concernant la linéarisation d'un système couplé fluide-structure instationnaire n'avait été établi, à notre connaissance. La possibilité de calculer le gradient d'une fonctionnelle de coût en utilisant le problème linéarisé constitue une première étape vers le traitement numérique des problèmes d'optimisation issus des concepts de stabilité conditionnelle et de suivi d'instabilités. L'implémentation de ces outils au sein du code LGNSI2FS réclamera un travail non-négligeable si l'on veut utiliser le linéarisé fluide-structure discret.

L'obtention d'une formulation adjointe pour le cas du couplage d'une structure élas-

---

38. <http://www.math.odu.edu/~keyes/scidac/intro.html>

---

tique et d'un fluide incompressible utilisant les outils de dérivation lagrangienne de fonctionnelles non-cylindriques est toute proche [123]. Le traitement de problèmes réalistes faisant intervenir des actionneurs modélisés par des éléments de coques [21] ouvrira la voie à la servo-aéroélasticité pour les avions et les tabliers de ponts. On pourra s'intéresser à l'extension des résultats obtenus dans le cadre d'un fluide incompressible, au cas compressible modélisé par les équations d'Euler ou de Navier-Stokes compressibles [29]. L'analyse de problèmes inverses en bio-mécanique profitera, nous l'espérons, des résultats obtenus dans cette thèse. A titre d'exemple, on peut envisager leurs applications aux méthodes non-invasives permettant d'évaluer les déformations d'une artère provoquées par l'écoulement sanguin [98].

D'un point de vue numérique, les résultats du dernier chapitre ouvre de nouvelles voies, à la fois pour le problème de contrôle du système couplé, mais aussi pour la simulation du problème direct. En effet, la structure du linéarisé est particulièrement adaptée à son inclusion dans une boucle de calcul du type Newton pour le couplage du modèle fluide et du modèle structure [56].



# Bibliographie

- [1] F. Abergel and R. Temam. On Some Control Problems in Fluid Mechanics. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1 :303–325, 1990.
- [2] P. Acquistapace, F. Flandoli, and B. Terreni. Initial boundary value problems and optimal control for nonautonomous parabolic systems. *SIAM J. Control Optimization* , 29(1) :89–118, 1991.
- [3] R.A Adams. *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics, a Series of Monographs and Textbooks. Vol. 65. Academic Press, Inc - Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XVIII, 1975.
- [4] X. Amandolèse. *Contribution à l'étude des chargements fluides sur des obstacles non profilés fixes ou mobiles : application aux tabliers de pont*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [5] H. Amann. Nonhomogeneous Navier-Stokes equations in spaces of low regularity. *Quaderni di matematica*, IX(In print), 2002.
- [6] J-P. Aubin. *Mutational and morphological analysis*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Tools for shape evolution and morphogenesis.
- [7] J-P. Benqué, B. Ibler, A. Keramsi, and G. Labadir. A finite element method for the Navier-Stokes equations. *Proceedings of the third international conference on finite elements in flow problems*, 1980.
- [8] M. Berggren. Control and Simulation of Advection-Diffusion Systems. Master's thesis, Mechanical Engineering, University of Houston, 1992.
- [9] M. Berggren. Numerical Solution of a Flow-control Problem : Vorticity Reduction by Dynamic Boundary Action. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 19(3) :829–860, 1998.
- [10] M. Berggren, R. Glowinski, and J-L. Lions. A Computational Approach to Controllability Issues for Flow-Related Models (I) : Pointwise Control of the Viscous Burgers Equation. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 7 :237–252, 1996.
- [11] M. Berggren, R. Glowinski, and J-L. Lions. A Computational Approach to Controllability Issues for Flow-Related Models (II) : Control of Two-Dimensional, Linear Advection-Diffusion and Stokes Models. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 6 :253–274, 1996.
- [12] D.P Bertsekas. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. Computer Science and Applied Mathematics. New York - London etc. : Academic Press. A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XIII, 1982.



- [13] K.Y Billah and R.H Scalan. Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *Am. J. Phys*, 2(59):118–124, 1991.
- [14] R.L Bisplinghoff and H. Ashley. *Principles of aeroelasticity*. John Wiley and Sons Inc., new-York, USA, 1962.
- [15] S. Boisgérault. *Optimisation de forme : systèmes nonlinéaires et mécanique des fluides*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris - Informatique Temps réel, Robotique, Automatique, 2000.
- [16] F.J Bonnans, J-C. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. Sagastizábal. *Numerical optimization - Theoretical and practice aspects*. Mathématiques & Applications- Springer. xii , 1997.
- [17] J.F Bonnans and A. Shapiro. *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer series in operation research, Springer-Verlag, 2000.
- [18] K. Boukir, Y. Maday, B. Métiviet, and E. Razafindrakoto. A high order characteristics / finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 25, pp. 1421-1454, 1997.
- [19] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, collection mathématiques appliquées pour la maîtrise edition, 1983.
- [20] R.H Byrd, P. Lu, J. Nocedal, and C. Zhu. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(5):1190–1208, 1995.
- [21] J. Cagnol, M. Moubachir, and J-P. Zolésio. Optimal control of coupled fluid-shell systems. *to appear*, 2003.
- [22] P. Cannarsa, G. Da Prato, and J-P. Zolésio. Evolution equations in non-cylindrical domains. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 83:73–77, 1989.
- [23] P. Cannarsa, G. Da Prato, and J-P. Zolésio. The damped wave equation in a moving domain. *J. Differ. Equations*, 85(1):1–16, 1990.
- [24] M. Chevalier. *Adjoint based Control and Optimization of aerodynamic flows*. PhD thesis, Royal Institute of Technology - Department of Mechanics, 2002.
- [25] H. Choi, R. Temam, P. Moin, and J. Kim. Feedback control for unsteady flow and its application to the stochastic Burgers equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 253:509–543, 1993.
- [26] P.G Ciarlet. *Mathematical Elasticity: Volume I,II*. North-Holland - Studies in Mathematics and its Applications , 1997.
- [27] M. Clerc, P. Le Tallec, and M. Mallet. Optimal Control for the Parabolized Navier-Stokes System. Technical report, INRIA, RR-2653, 1995.
- [28] R. Codina. On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 188(1-3):61–82, 2000.
- [29] S.S Collis, K. Ghayour, M. Heinkenschloss, M. Ulbrich, and S. Ulbrich. Numerical solution of optimal control problems governed by the compressible Navier-Stokes equations. *Optimal Control of Complex Structures ; K.-H. Hoffmann and I. Lasiecka, G. Leugering, J. Sprekels, F. Tröltzsch (eds.), Birkhäuser Verlag, International Series of Numerical Mathematics*, 139:43–55, 2001.

- 
- [30] C. Conca, J.A. San Martín, and M. Tucsnak. Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid. *Commun. Partial Differ. Equations*, 25(5-6):1019–1042, 2000.
- [31] J-M. Coron. On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, 1:35–75, 1996.
- [32] R. Correa and A. Seeger. Directional derivative of a minimax function. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 9:13–22, 1985.
- [33] G. Da Prato and J-P. Zolésio. An optimal control problem for a parabolic equation in non-cylindrical domains. *Syst. Control Lett.*, 11(1):73–77, 1988.
- [34] R. Dautray and Lions J-L. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Springer - Volume 5, 1990.
- [35] M.C. Delfour and J-P. Zolésio. Further developments in the application of min-max differentiability to shape sensitivity analysis. *Control of partial differential equations, Lect. Notes Control Inf. Sci.*, 114:108–119, 1989.
- [36] M.C. Delfour and J-P. Zolésio. *Shapes and Geometries - Analysis, Differential Calculus and Optimization*. Advances in Design and Control - SIAM, 2001.
- [37] P. Demeestère. A remark on the relation between the Tykhonov regularization and constraint relaxation for an optimal control problem. *Appl. Math. Lett.*, 11(5):85–89, 1998.
- [38] F.R. Desaint and J-P. Zolésio. Manifold derivative in the Laplace-Beltrami equation. *J. Funct. Anal.*, 151(1):234–269, 1997.
- [39] B. Desjardins and M.J Esteban. Existence of solutions for a Model of Fluid-Rigid Structure Interaction. *Arch. for Rat. Mech. Anal.*, 146, 1999.
- [40] Earl H.(ed.) Dowell, E.F Crawley, H.C Curtiss, D.A Peters, R.H Scanlan, and F. Sisto. *A modern course in aeroelasticity. 3rd, rev. and enlarg. ed.* Dowell, E.H (Ed.), Kluwer, USA, 1995.
- [41] R. Dziri. *Problèmes de frontière libre en fluides visqueux*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris - Informatique Temps réel, Robotique, Automatique, 1995.
- [42] R. Dziri, M. Moubachir, and J-P. Zolésio. Navier-Stokes dynamical shape control : from state derivative to Min-Max principle. Technical report, INRIA, RR-4610, 2002.
- [43] R. Dziri and J-P. Zolésio. Dynamical shape control in non-cylindrical Navier-Stokes equations. *J. Convex Anal.*, 6(2):293–318, 1999.
- [44] R. Dziri and J-P. Zolésio. Eulerian derivative for non-cylindrical functionals. *Cagnol, John et al., Shape optimization and optimal design. Lect. Notes Pure Appl. Math*, 216:87–107, 2001.
- [45] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod-Gauthier-Villars, 1974.
- [46] H.C Elman, D.J Silvester, and A.J Wathen. Iterative Methods for Problems in Computational Fluid Dynamics. Technical report, Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group. Report 96/19, 1996.

- [47] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of inverse problems*. Kluwer Academic Publishers, mathematics and its applications (dordrecht) edition, 1996.
- [48] D. Errate, M.J Esteban, and Y. Maday. Couplage Fluide-Structure. Un modèle simplifié en dimension 1 . *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série I*, 318:275–281, 1994.
- [49] T. Fanion, M.A. Fernández, and P. Le Tallec. Deriving adequate formulations for fluid-structure interactions problems: from ALE to transpiration. *Rév. Européenne Élém. Finis*, 9(6-7) :681–708, 2000.
- [50] H.O Fattorini and S.S Sritharan. Optimal Control Problems with State Constraints in Fluid Mechanics and Combustion. *Applied Mathematics and Optimization*, 38:159–192, 1998.
- [51] M.A Fernández. *Simplified models in fluid-structure interaction problems*. PhD thesis, University of Paris Dauphine, 2001.
- [52] M.A Fernández and P. Le Tallec. Linear stability analysis in fluid-structure interaction with transpiration. Part I: formulation and mathematical analysis. *soumis à Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2002.
- [53] M.A Fernández and P. Le Tallec. Linear stability analysis in fluid-structure interaction with transpiration. Part II: numerical analysis and applications . *soumis à Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2002.
- [54] M.A. Fernández and M. Moubachir. Étude de sensibilité d'un système mécanique en interaction fluide-structure. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 333:487–492, 2001.
- [55] M.A. Fernández and M. Moubachir. Sensitivity analysis for an incompressible aeroelastic system. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12(8) :1109–1130, 2002.
- [56] M.A Fernández and M. Moubachir. An exact Block-Newton algorithm for the solution of implicit time discretized coupled systems involved in fluid-structure interaction problems. *submitted to the Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics , June 17-20, 2003*.
- [57] E. Fernández-Cara. On the approximate and null controllability of the Navier-Stokes equations. *SIAM Rev.*, 41(2) :269–277, 1999.
- [58] E. Fernandez-Cara and M. Gonzalez-Burgos. A result concerning controllability for the Navier-Stokes equations. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 33(4) :1061–1070, 1995.
- [59] F. Flori and P. Orenca. Analysis of a nonlinear fluid-structure interaction problem in velocity-displacement formulation. *Nonlinear Analysis*, 35 :561–587, 1999.
- [60] G. Fourestey. Stabilité des méthodes de Lagrange-Galerkin du premier et du second ordre. Technical report, INRIA, RR-4505, 2002.
- [61] G. Fourestey. Une méthode des caractéristiques d'ordre deux sur maillages mobiles pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Technical report, INRIA, RR-4448, 2002.
- [62] G. Fourestey and M. Moubachir. Optimal control of Navier-Stokes equations using Lagrange-Galerkin methods. Technical report, INRIA, RR-4609, 2002.
- [63] G. Fourestey and M. Moubachir. A discrete adjoint formulation for the Navier-Stokes equations using Lagrange-Galerkin methods. *to appear*, 2003.

- 
- [64] G. Fourestey and M. Moubachir. Optimal dynamical shape control of Navier-Stokes equations using Lagrange-Galerkin methods. *to appear*, 2003.
- [65] A. Fursikov, M. Gunzburger, and L. Hou. Trace theorems for three-dimensional, time-dependent solenoidal vector fields and their applications. *Trans. Am. Math. Soc.*, 354(3):1079–1116, 2002.
- [66] A.V Fursikov. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications.* Translations of Mathematical Monographs. 187. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society, 2000.
- [67] A.V. Fursikov, M.D. Gunzburger, and L.S. Hou. Boundary value problems and optimal boundary control for the Navier-Stokes system: The two-dimensional case. *SIAM J. Control Optimization*, 36(3):852–894, 1998.
- [68] R.H. Gallagher, G. Carey, J.T. Oden, and O.C. Zienkiewicz. *Finite Elements in Fluids Volume 6.* John Wiley - Sons, 1985.
- [69] A. Georgescu. *Hydrodynamic stability theory. Transl. from the Romanian, rev. and updated, ed. by David Sattinger.* Mechanics: Analysis, 9. Dordrecht/Boston/Lancaster: Martinus Nijhoff Publishers, a member of the Kluwer Academic Publishers Group, 1985.
- [70] J-C. Gilbert and J. Nocedal. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization. *SIAM J. Optim.*, 2(1):21–42, 1992.
- [71] V. Girault and P.A Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.* Springer-Verlag, Springer Series in Computational Mathematics edition, 1986.
- [72] R. Glowinski. Finite element methods for the numerical simulation of incompressible viscous flow. Introduction to the control of the Navier-Stokes equations. In Lect. Appl. Math., editor, *Vortex dynamics and vortex methods, Proc. 21st AMS-SIAM Semin., Seattle/WA (USA)*, volume 28, pages 219–301, 1991.
- [73] C. Grandmont and Y. Maday. Fluid-structure interaction: A theoretical point of view. *Rev. Européenne Élé. Finis*, 9(6-7):633–653, 2001.
- [74] C.W. Groetsch. *Generalized inverses of linear operators. Representation and approximation.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 37. New York - Basel: Marcel Dekker, Inc. VIII, 1977.
- [75] M Gu, Y.L Xu, L.Z Chen, and H.F Xiang. Fatigue life estimation of steel girder of Yangpu cable-stayed Bridge due to buffeting. *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.*, 80:383–400, 1999.
- [76] V. Guimet. *Analyse numérique et simulation de problèmes d'interaction fluide-structure en régime incompressible.* PhD thesis, Université Paris VI, 1998.
- [77] M.D Gunzburger, L. Hou, and T.P Svobodny. Analysis and Finite Element Approximation of Optimal Control Problems for the Stationary Navier-Stokes Equations with Distributed and Neumann Controls. *Mathematics of Computation*, 57(195):123–151, 1991.
- [78] M.D Gunzburger, L. Hou, and T.P Svobodny. Boundary velocity control of incompressible flow with application to viscous drag reduction. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 30(1):167–181, 1992.

- [79] M.D Gunzburger and S. Manservigi. The velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with bounded distributed controls. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 37(6):19131–1945, 1999.
- [80] M.D. Gunzburger and S. Manservigi. The velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with boundary control. *SIAM J. Control Optimization*, 39(2):594–634, 2000.
- [81] J.-W. He, R. Glowinski, R. Metcalfe, A. Nordlander, and J. Periaux. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder. I: Oscillatory cylinder rotation. *J. Comput. Phys.*, 163(1):83–117, 2000.
- [82] J.W He and R. Glowinski. Neumann Control of Unstable Parabolic Systems: Numerical Approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 96(1):1–55, 1998.
- [83] J.W. He, R. Glowinski, R. Metcalfe, and J. Periaux. A numerical approach to the control and stabilization of advection-diffusion systems: Application to viscous drag reduction. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 11(1-2):131–156, 1998.
- [84] M.R Hestenes. *Optimization theory. The finite dimensional case*. Pure and Applied Mathematics. New York et. : John Wiley&Sons, a Wiley- Interscience Publication. XIII, 1975.
- [85] S. Hiernaux and J.-A Essers. Aerodynamic optimization using Navier-Stokes equations and Optimal Control Theory. *AIAA Paper*, 99-3297, 1999.
- [86] M. Hinze. *Optimal and instantaneous control of the instationary Navier-Stokes equations - Habilitation thesis*. PhD thesis, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Berlin, 2000.
- [87] M. Hinze and K. Kunisch. Second order methods for optimal control of time-dependent fluid flow. *SIAM J. Control Optimization*, 40(3):925–946, 2001.
- [88] C. Homescu, I.M Navon, and Z. Li. Suppression of vortex shedding for flow around a circular cylinder using optimal control. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, 38(1):43–69, 2002.
- [89] L.S Hou and Y. Yan. Dynamics and Approximation of Velocity Tracking Problem for the Navier-Stokes Flows with Piecewise Distributed Controls. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 35(6):1847–1885, 1997.
- [90] L.S. Hou and Y. Yan. Dynamics for controlled Navier-Stokes systems with distributed controls. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 35(2):654–677, 1997.
- [91] T.J Hughes, W.K Liu, and T.K Zimmermann. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29:329–349, 1981.
- [92] O.Y Imanuvilov. Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, 6:39–72, 2001.
- [93] K. Ito and K. Kunisch. The augmented Lagrangian method for equality and inequality constraints in Hilbert spaces. *Mathematical Programming*, 46:341–360, 1990.
- [94] K. Ito and K. Kunisch. Augmented Lagrangian-SQP methods for nonlinear optimal control problems of tracking type. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 34(3):874–891, 1996.

- 
- [95] S. Kindermann. Convergence of the Hilbert uniqueness method via Tikhonov regularization. *J. Optimization Theory Appl.*, 103(3) :657–673, 1999.
- [96] M. Krstic. On global stabilization of Burgers' equation by boundary control. *Systems and Control Letters*, 37 :123–141, 1999.
- [97] K. Kunisch and J. Zou. Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems. *Inverse Probl.*, 14(5) :1247–1264, 1998.
- [98] P.-Y. Lagrée. An inverse technique to deduce the elasticity of large artery. *European Physical Journal, Applied Physics*, 9:153–163, 2000.
- [99] A. Larsen. Computer simulation of wind-structure interaction in bridge aerodynamics. *Structural Engineering International*, 2:105–111, 1998.
- [100] I. Lasiecka and R. Triggiani. Sharp regularity theory for second order hyperbolic equations of Neumann type. *Annali di Matematica pura ed applicata*, IV(CLVII) :285–367, 1990.
- [101] P. Le Tallec. Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity. In *Handbook of numerical analysis, Vol. III*, pages 465–622. North-Holland, Amsterdam, 1994.
- [102] P. Le Tallec and J. Mouro. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(24-25) :3039–3067, 2001.
- [103] J.M Lellouche, J.L Devenon, and I. Dekeyser. Boundary Control of Burgers'Equation : A Numerical Approach. *Computers Math. Applic.*, 28(5) :33–44, 1994.
- [104] M. Lesoinne, M. Sarkis, H. Hetmaniuk, and C. Farhat. A linearized method for the frequency analysis of three-dimensional fluid/structure interaction problems in all flow regimes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25) :3121–3146, 2001.
- [105] J-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris- Gauthier-Villars, etudes mathématiques edition, 1968.
- [106] J-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Etudes mathématiques. Paris : Dunod ; Paris : Gauthier-Villars., 1969.
- [107] J-L. Lions. *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Springer-Verlag, 1971.
- [108] J-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*. Masson, Paris, 1988.
- [109] J-L. Lions. Remarks on approximate controllability. *J. Anal. Math.*, 59:103–116, 1992.
- [110] J-L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I, Vol. II*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 182. Springer-Verlag., 1972.
- [111] D.C Liu and J. Nocedal. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Math. Program., Ser. B*, 45(3) :503–528, 1989.
- [112] V. Hung Ly, K.D Mease, and E.S Titi. Distributed and boundary control of the viscous Burgers'equation. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 18(1-2) :143–188, 1997.

- [113] A. Maruoka, M. Marin, and M. Kawahara. Optimal control in Navier-Stokes equations. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 9:313–322, 1998.
- [114] M. Masmoudi. *Outils pour la conception optimale de formes*. PhD thesis, Université de Nice - Doctorat ès Sciences Mathématiques, 1987.
- [115] K.L Massa. Control of Burgers' equation with mixed boundary conditions. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute , 1998.
- [116] M. Minoux. *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*. Collection technique et scientifique des télécommunications - Dunod, 1983.
- [117] B. Mohammadi. Contrôle d'instationnarités en couplage fluide-structure. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. II, Fasc. b, Mec. Phys. Astron.*, 327(1) :115–118, 1999.
- [118] S. Montens. Structural control for Civil Engineering structures: general concepts and perspectives. *Proceedings of the Second European Conference on Structural Control, Marne-la-Vallee*, To appear, 2001.
- [119] V.A. Morozov. *Regularization methods for ill-posed problems. Transl. from the Russian*. Boca Raton, FL : CRC Press. vi, 1993.
- [120] K.W. Morton, A. Priestley, and E. Suli. Stability of the Lagrange-Galerkin Method with non-exact integration. *RAIRO Modél Math. Anal. Numér. (1988) 22*, 625-653, 1988.
- [121] M. Moubachir and M. Yamamoto. Boundary tracking controllability properties for the wave equation. *under preparation*, 2002.
- [122] M. Moubachir and J-P. Zolésio. Optimal control of fluid-structure interaction systems: the case of a rigid body. Technical report, INRIA, RR-4611, 2002.
- [123] M. Moubachir and J-P. Zolésio. Optimal control of fluid-structure interaction systems under large deformations. Technical report, to appear, 2002.
- [124] F. Murat and J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Technical report, Université Paris VI - 76 015, 1976.
- [125] C.M. Murea and Y. Maday. Existence of an optimal control for a nonlinear fluid-cable interaction problem. Technical report, CEMRACS, C.I.R.M, Luminy, France, 1996.
- [126] J. Nocedal and S.J Wright. *Numerical optimization*. Springer Series in Operations Research, 1999.
- [127] T. Nomura and T.J Hughes. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and rigid body. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95 :115–138, 1992.
- [128] A. Osses and J.-P. Puel. On the controllability of the Laplace equation observed on an interior curve. *Rev. Mat. Complut.*, 11(2) :403–441, 1998.
- [129] A. Osses and J-P. Puel. Approximate Controllability for a linear model of fluid-structure interaction. *ESAIM : Optimisation and Calculus of Variations*, 4 :497–513, 1999.
- [130] B. Palmerio. A two-dimensional FEM adaptive moving-node method for steady Euler Flow Simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71 :315–340, 1988.

- 
- [131] C. Pares Madronal. *Etude mathématique et approximation numérique de quelques problèmes aux limites de la mécanique des fluides*. PhD thesis, Université Paris VI, 1992.
- [132] S. Piperno. *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [133] S. Piperno. Numerical simulation of aeroelastic instabilities of elementary bridge decks. Technical report, INRIA, RR-3549, 1998.
- [134] S. Piperno and C. Farhat. Design of efficient partitioned procedures for the transient solution of aeroelastic problems. *Rev. Eur. Élé. Finis*, 9(6-7):655–680, 2001.
- [135] O. Pironneau. *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Masson, 1988.
- [136] S. Potapov. *Un algorithme ALE de dynamique rapide basé sur une approche mixte Éléments Finis- Volumes Finis*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 1997.
- [137] J.Y Renou. *Une méthode eulérienne pour le calcul de forces fluide-élastiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1998.
- [138] Y. Saad. *Iterative Methods for sparse Linear Systems*. <http://www-users.cs.umn.edu/saad/books.html>, 2000.
- [139] J.A. San Martín, V. Starovoitov, and M. Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 161(2):113–147, 2002.
- [140] D.H Sattinger. The mathematical problem of hydrodynamic stability. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 19(9):797–817, 1970.
- [141] J-C. Saut and B. Scheurer. Unique continuation for some evolution equations. *J. Differ. Equations*, 66:118–139, 1987.
- [142] R.P Selvam, M.J Tarini, and A Larsen. Computer modelling of flow around bridges using LES and FEM. *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.*, 77-78:643–651, 1998.
- [143] D. Serre. Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence. (Free falling body in a viscous incompressible fluid. Existence). *Japan J. Appl. Math.*, 4:99–110, 1987.
- [144] E. Simiu and R.H Scanlan. *Wind effects on structures*. John Wiley & Sons, 1986.
- [145] J. Sokolowski and J-P. Zolésio. *Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis.*, volume 16. Springer Series in Computational Mathematics., 1992.
- [146] S.S Sritharan. Dynamic Programming of the Navier-Stokes Equations. *International Series of Numerical Mathematics*, 100:303–315, 1991.
- [147] S.S. Sritharan, editor. *Optimal control of viscous flow*. Philadelphia, PA: SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics. xii, 1998.
- [148] B. Straughan. *The Energy method, Stability and nonlinear Convection*. Springer Verlag, 1994.
- [149] T. Tamura. Reliability on CFD estimation for wind-structure interaction problems. *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.*, 81:117–143, 1999.
- [150] R. Temam. *Navier-Stokes Equations*. North-Holland, Studies in Mathematics and its Applications edition, 1984.
- [151] T. Theodorsen. *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. NACA Technical Report 496, 1934.



- [152] C. Truchi. *Stabilisation par variation du domaine*. PhD thesis, Université de Nice - Spécialité Mathématiques, 1987.
- [153] M. Virlogeux. Recent evolution of cable-stayed bridges. *Engineering Structures*, 21:737–755, 1999.
- [154] S. Volkwein. *Mesh-independence of an Augmented Lagrangian-SQP method in Hilbert spaces and Control problems for the Burgers equation*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 1997.
- [155] P.K.C Wang. Stabilization and control of distributed systems with time-dependent spatial domains. *J. Optimization Theory Appl.*, 65(2):331–362, 1990.
- [156] Y. Wang and T. Xiao. Fast realization algorithms for determining regularization parameters in linear inverse problems. *Inverse Probl.*, 17(2):281–291, 2001.
- [157] K.E Willcox. *Reduced-Order aerodynamic models for aeroelastic control of turbo-machines*. PhD thesis, MIT, Department of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- [158] C. Zhu, R.H Byrd, P. Lu, and J. Nocedal. Algorithm 778: L-BFGS-B Fortran subroutines for large-scale bound-constrained optimization. *ACM Trans. Math. Softw.*, 23(4):550–560, 1997.
- [159] J-P. Zolésio. *Identification de domaines par déformations*. PhD thesis, Université de Nice - Doctorat d’Etat en Mathématiques, 1979.
- [160] J-P. Zolésio. Shape stabilization of flexible structure. *Lect. Notes Control Inf. Sci.*, 75:446–460, 1985.
- [161] J-P. Zolésio. Galerkin approximation for wave equation in moving domain. *Lect. Notes Control Inf. Sci.*, 147:191–225, 1990.
- [162] J-P. Zolésio. Shape analysis and weak flow. *Lect. Notes Math.*, 1740:157–341, 2000.
- [163] J-P. Zolésio. Weak set evolution and variational applications. *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, 216:415–439, 2001.

## Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème de la stabilité aéroélastique d'une structure au sein d'un écoulement fluide incompressible. La motivation de ce travail est le dimensionnement au vent des ouvrages d'art du génie civil, par l'analyse et la simulation numérique de l'interaction vent-structure. Notre approche consiste à chercher la vitesse de vent minimale permettant, soit de maximiser les effets du vent sur la structure, soit de contraindre la structure à suivre une évolution instable donnée. Après une analyse générale de ces concepts, nous montrons, numériquement, qu'il est possible de contrôler, par une donnée frontière, les trajectoires de l'écoulement d'un fluide incompressible autour d'un profil fixe. Dans une deuxième partie, nous obtenons les systèmes linéarisé et adjoint lorsque le contrôle s'exerce à travers le mouvement du domaine fluide, grâce à de nouveaux outils de dérivation de forme. Finalement dans une troisième partie, nous obtenons le système adjoint associé au problème de suivi d'instabilités pour une structure rigide élastiquement supportée au sein d'un écoulement fluide incompressible, en utilisant une formulation Min-Max. Dans le cas plus complexe d'une structure élastique en grands déplacements, nous obtenons la structure du problème linéarisé, par utilisation de la dérivation intrinsèque liée aux perturbations de l'identité.

**Mots-clés:** stabilité aéroélastique, équations de Navier-Stokes, optimisation, contrôle optimal, méthodes inverses, optimisation de forme, champ transverse, perturbations de l'identité, non-cylindrique, Min-Max, schémas de Lagrange-Galerkin

## Abstract

This thesis deals with the aeroelastic stability analysis of a vibrating structure inside an incompressible fluid flow. The aim of this work is to build a theoretical and numerical design tool for civil engineering structures under wind loads. Our approach consists in looking for the minimal wind velocity that may either maximize the wind effects on the structure or enforce the structure to follow a given unstable behaviour. After general considerations, we show, numerically, how to control, from the boundary, the trajectories of a flow around a fix body. Then, we obtain the linearized and ajoint systems when the control variable is the fluid domain evolution, thanks to new shape optimization tools. Finally, using a Min-Max formulation, we get the adjoint system associated to the instability tracking problem for an elastically supported rigid solid inside an incompressible fluid flow. In case of a general elastic solid under large displacements, we state the structure of the linearized system, using intrinsic derivative tools based on identity perturbations.

**Keywords:** aeroelastic stability, Navier-Stokes equations, optimization, optimal control, inverse methods, shape optimization, transverse field, identity perturbations, non-cylindrical, Lagrange-Galerkin scheme

